UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Física Gleb Wataghin
Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

BIANCA BAZANI

CONHECIMENTO DE ALUNOS DO QUARTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NO TEMA DE FRAÇÃO: UM FOCO NA PARTE-TODO CONTÍNUO E DISCRETO

KNOWLEDGE OF STUDENTS OF THE FOURTH GRADE OF ELEMENTARY SCHOOL IN THE FRACTION THEME: A FOCUS ON THE CONTINUOUS AND DISCRETE PART

CAMPINAS
2019

BIANCA BAZANI

CONHECIMENTO DE ALUNOS DO QUARTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NO TEMA DE FRAÇÃO: UM FOCO NA PARTE-TODO CONTÍNUO E DISCRETO

KNOWLEDGE OF STUDENTS OF THE FOURTH GRADE OF ELEMENTARY SCHOOL IN THE FRACTION THEME: A FOCUS ON THE CONTINUOUS AND DISCRETE PART

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PECIM), sediado no Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Ensino de Ciências e Matemática, na área de concentração de Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Miguel da Silva Ribeiro
Coorientadora: Profª. Drª. Alessandra Rodrigues de Almeida

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DA ALUNA BIANCA BAZANI E ORIENTADA PELO PROFESSOR DOUTOR CARLOS MIGUEL DA SILVA RIBEIRO.

CAMPINAS

2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

B347c	Bazani, Bianca, 1989- Conhecimento dos alunos do quarto ano do ensino fundamental no tópico de fração : um foco na parte-todo contínuo e discreto / Bianca Bazani. – Campinas, SP : [s.n.], 2019. Orientador: Carlos Miguel da Silva Ribeiro. Coorientador: Alessandra Rodrigues de Almeida. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin. 1. Educação. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Frações. 4. Ensino fundamental. I. Ribeiro, Carlos Miguel da Silva, 1978-. II. Almeida, Alessandra Rodrigues de, 1974-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Fourth grade students' knowledge on fractions : a focus on the part whole continuous and discrete
Palavras-chave em inglês:
Education
Mathematics - Study and teaching
Fractions
Elementary school
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática
Titulação: Mestra em Ensino de Ciências e Matemática
Banca examinadora:
Alessandra Rodrigues de Almeida [Coorientador]
Marlova Estela Caldatto
Vanessa Moreira Crecci
Data de defesa: 28-08-2019
Programa de Pós-Graduação: Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0003-1429-3564
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/3169727619397781

FOLHA DE APROVAÇÃO

COMISSÃO EXAMINADORA

Profª. Drª. Alessandra Rodrigues de Almeida
Presidente da Comissão Examinadora

Profª. Drª. Marlova Estela Caldatto

Profª. Drª. Vanessa Moreira Crecci

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Agradecimentos

Ao Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual de Campinas que me permitiu realizar este trabalho;
Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática pelas discussões, conversas, apoio e pela troca de conhecimento, em especial à Profa. Dra. Silvia Figueroa;
Ao Prof. Dr. Carlos Miguel da Silva Ribeiro, por ter me proporcionado vivenciar a vida acadêmica mesmo em tempos difíceis;
À Profa. Dra. Alessandra Rodrigues de Almeida, por ter me motivado a não desistir e ter me apoiado mesmo antes de nos conhecermos, uma pessoa admirável em todos os quesitos, ela foi o meu incentivo;
À Profa. Dra. Vanessa Crecci, por ter me escutado e me abraçado em momento de desespero no começo do meu percurso, quando tudo era tão confuso, aquele abraço foi a chave para continuar seguindo em frente;
À Profa. Dra. Marlova Caldatto, por ter aceitado fazer parte da banca, assim realizando excelentes considerações e contribuições ao trabalho;
Ao Secretário do PECIM, Fabrício, sempre tão solícito e paciente em me auxiliar em diversas situações;
Aos meus alunos, que participaram sempre motivados deste trabalho;
À minha amiga Mariana, um dos maiores presentes que o PECIM me proporcionou, uma pessoa extremamente parceira e companheira que pretendo levar comigo para sempre;
Aos meus pais, pelo incentivo, conselhos e por me fazer sentir tão segura quando tudo parecia sem chão e indefinido, a palavra e o carinho deles compõem a força que carrego nos meus dias;
Aos meus irmãos, Thiago e Gustavo, pelas inúmeras maneiras que me motivaram e deram o apoio para eu permanecer firme em busca do meu objetivo final, incansáveis companheiros;
Aos meus amigos, Thalita e Luís Theodoro pelas risadas, por escutarem meus desabafos, me distraindo sempre com muito carinho;
Ao meu parceiro da caminhada da vida, Ferdinando, por ter sido o meu alicerce, a minha base, por acreditar em mim, mais do que eu. Por conversar comigo de questões matemáticas e ser tão paciente. Por entender os meus anseios e medos. Por conseguir transmitir sua paz e seu amor em meus dias de crise.

RESUMO

Esta pesquisa versa sobre conhecimentos relacionados ao conceito de Fração, de modo particular, teve por objetivo reconhecer e analisar os conhecimentos que alunos do 4º ano do Ensino Fundamental apresentaram sobre esse conceito. Este estudo insere-se no contexto de um colégio particular da região de Campinas, sendo a mestranda também professora da turma em tela na pesquisa. O ensino de frações constitui-se como um dos temas matemáticos cuja construção pode ser considerada complexa em termos dos processos de ensino e aprendizagem, pois sua compreensão envolve uma variedade de aspectos que se configuram como obstáculos ao seu pleno domínio. Assim, neste trabalho, se reconhece a importância da identificação do conhecimento prévio do aluno acerca do assunto que será abordado em sala de aula, sendo que essa prática auxilia os professores a traçarem um caminho educativo que favoreça a aprendizagem da maior parte de seus alunos. O processo de desenvolvimento do trabalho acontece anteriormente ao momento em que o conteúdo sobre frações é introduzido aos alunos do quarto ano do Ensino Fundamental I. Esta pesquisa é de cunho qualitativo e interpretativo, sendo que os dados analisados são provenientes das respostas produzidas por vinte alunos do quarto ano do ensino fundamental e das gravações dos áudios captados no decorrer da implementação das tarefas em sala de aula. Foram implementadas três tarefas sobre frações com sentido parte-todo, duas com relação entre a parte de um todo contínuo e outra entre a parte de um todo discreto. Assim, com base nos elementos trazidos nas tarefas dos alunos, foi realizada uma análise das respostas, de onde foram produzidos agrupamentos delas de acordo com o significado da concepção trazida por cada aluno, e também com a transcrição de conversas realizadas em aula. Este trabalho busca contribuir com elementos para responder a seguinte questão de pesquisa: *que conhecimentos revelam os alunos do 4º ano sobre frações como parte-todo em contextos contínuo e discreto antes do conceito ser formalizado em aula*? A intenção deste estudo foi analisar e discutir o conhecimento que os alunos possuíam antes da formalização em aula sobre o tema fração, especificamente com o sentido parte-todo. Os resultados indicam que a maioria dos alunos possuem uma noção de frações pautada no sentido parte-todo em casos que são utilizados mais nas experiências diárias, os demais casos que englobam esse tema demonstram um grande distanciamento de percepções que envolvem as frações, principalmente da divisão equitativa de uma unidade.

Palavras-chave: Educação; Ensino de Frações; Ensino Fundamental; Fração.

ABSTRACT

This research expatiates on the teaching of the concept of Fraction, aimed to recognize and analyze the comprehension that the students of the 4th grade of Elementary School present about the subject. This study takes place in a private school in Campinas, where the researcher is also a class teacher. The work recognizes the importance of identifying the student's prior knowledge about the subject that will be addressed in the classroom, and this practice helps teachers to chart a path that can reach a large part of their students. The process of development of the work occurs before the moment when content on fractions is introduced to the fourth grade of Elementary School. In this master's research, the methodology was based on the responses of twenty students of the fourth grade in relation to three tasks which were applied on fractions with part-whole sense: two related to the part of a continuous whole and another between the part of a discrete whole. Thus, based on the elements brought in the students' tasks, an analysis of the groups of answers was carried out, which were divided according to the meaning of each conception brought by the student, and also with the transcription of conversations carried out in class. This paper seeks to contribute with elements to answer the following research question: *what knowledge do 4th grade students show about fractions as part-whole in continuous and discrete contexts before the concept is formalized in class?* The intention of this study was to analyze and discuss the knowledge that the students possessed before the formalization in class on the fraction theme, specifically with the part-whole sense. The analyzed results of this research indicates that most part of the students carry a notion of fractions ruled in the sense part-whole in cases that are used more in the daily experiences, the other cases that encompass this theme demonstrate, through analysis, a great distance of perceptions that involve the fractions, mainly of the equitable division of a unit.

Key words: Education; Elementary School; Fraction; Fraction Teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

De acordo com Nunes e Bryant (1997) as frações se constituem em um tema matemático de complexa aquisição cognitiva pelos estudantes, especialmente dos que se encontram nas etapas inicias de escolarização. Isso leva muitos investigadores a se dedicarem ao desenvolvimento de estudos centrados no ensino e na aprendizagem do tema. Como Campos et al. (2014) afirmam que, diante da complexidade que permeia o ensino e a aprendizagem de frações, é construído um desafio relevante para estudantes e também para os professores no Brasil, desde o momento em que ocorre a inserção formal das frações no 4º ano do Ensino Fundamental até o final da Educação Básica. Ressaltam que "as frações são essenciais para o progresso do aluno na aprendizagem de matemática, sendo, portanto, necessário que a escola encontre meios para promover a compreensão desse objeto matemático" (CAMPOS et al., 2014, p. 3).

Na minha formação em Pedagogia, na Universidade Estadual de Campinas, a discussão sobre a didática e os métodos de ensino sempre foram presentes. As indagações das diferentes formas de ensinar, como eram (ou seriam) aplicadas as tarefas e se realmente eram eficientes, permeavam os trabalhos e as aulas. No entanto, em minha formação inicial para a docência, acredito não ter recebido um suporte necessário para o ensino das frações, sendo que me preparava sozinha ou com auxílio de colegas de trabalho para a abordagem que seria feita em aula. Os conhecimentos abordados em minha formação matemática eram, de modo geral, tratados de maneira mais superficial, deixando como propostas aspectos e caminhos que poderiam ser tomados por nós, futuros professores, em sala de aula, gerando um pensamento reflexivo de como abordaríamos com os alunos alguns temas. Mesmo com a intenção de deixar aberta essa discussão, isso gerava certo receio e despreparo no que se refere aos aspectos metodológicos e prática pedagógica para início da docência, o que poderia perpetuar durante a vida profissional.

Um processo reflexivo me acompanhou durante todos os anos seguintes e foi pautado pela seguinte busca: De reconhecimento da relação que há entre todo o amplo campo que envolve o ensino e a aprendizagem da matemática e como esses aspectos podem contribuir para a prática de sala aula.

Na prática docente, estou envolvida com a área de Matemática nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. E nela, comecei a perceber situações que me colocavam em estado de investigação para reconhecer e entender o motivo do surgimento de alguns obstáculos enfrentados no decorrer do ensino das frações em sala de aula. Essas observações começaram a ser evidenciadas especialmente a partir da introdução de algum assunto novo, ao tentar encontrar meios que me levassem a ter maior proximidade com o aluno para fazê-lo adquirir certo conhecimento a partir de vivências e experiências, essas situações me permitiram refletir sobre a minha atuação e questionar o que/como poderia fazer para aprimorá-la.

Em documentos oficiais, encontramos fragmentos que discutem a importância da formação inicial do professor para a sua inserção em sala de aula. Como por exemplo, nos Parâmetros Curriculares Nacionais, ao enfatizar que,

> Além de uma formação inicial consistente, é preciso considerar um investimento educativo contínuo e sistemático para que o professor se desenvolva como profissional de educação. O conteúdo e a metodologia para essa formação precisam ser revistos para que haja possibilidade de melhoria do ensino. A formação não pode ser tratada como um acúmulo de cursos e técnicas, mas sim como um processo reflexivo e crítico sobre a prática educativa. Investir no desenvolvimento profissional dos professores é também intervir em suas reais condições de trabalho (BRASIL, 1998, p. 25).

Como professora, deparei-me com muitos questionamentos sobre a eficiência do processo de aprendizagem das frações, componente essencial de ensino do currículo do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, de acordo com os Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). A introdução do ensino de frações, via material didático e exigências da Base, inicia-se nos primeiros anos do Ensino Fundamental e vai se desenvolvendo nos anos seguintes.

No ensino de Matemática para o Ensino Fundamental, é discutida a necessidade de o aluno identificar os conhecimentos matemáticos como meios de compreender e atuar no mundo, reconhecendo também que a Matemática, independentemente de suas aplicações práticas, favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito investigativo e da capacidade de produzir argumentos convincentes.

Para o ensino de matemática, não é interessante que o professor se limite a buscar o acúmulo de memorizações de técnicas e operações pré-estabelecidas, como um único caminho entendido como "correto" para resolução de problemas, mas oferecer oportunidades para que os conteúdos matemáticos sejam aprendidos com sentido, e com a significação dos métodos aprendidos, possibilitando um maior desenvolvimento da abstração.

O Objetivo desta pesquisa é discutir e compreender a conhecimento que os alunos do 4º ano possuem acerca do tópico de frações com relação parte-todo, a partir da resolução e discussão de três tarefas aplicadas em sala de aula, antes da discussão mais formal sobre o tema.

Nesse sentido, estabelecer como ponto de partida para a incorporação de um novo tema matemático para alunos o conhecimento que eles já possuem pode ajudar a guiar os passos que vão ser assumidos para o ensino desse assunto. Com base nessas considerações, este estudo direciona-se a responder à seguinte questão de pesquisa: *que conhecimentos revelam os alunos do 4º ano sobre frações como parte-todo em contextos contínuo e discreto antes do conceito ser formalizado em aula*?

Para discutir essa questão, o foco centrou-se no significado parte-todo da fração e, em particular, na relação entre a parte e um todo contínuo e entre a parte de um todo discreto.

Pelos motivos apresentados, estabeleceram-se como subquestões:

(i) Quais as percepções reveladas por alunos do 4º ano sobre frações com relação a parte de um todo contínuo e discreto?

(ii) Quais as percepções sobre frações de metade e um terço que os alunos do 4º ano do Ensino Fundamental estabelecem através do conhecimento prévio que possuem?

(iii) Os alunos do 4º ano possuem noção de todo quando resolvem tarefas envolvendo um todo contínuo e um todo discreto?

Dessa forma, o foco do Capítulo 1 deste trabalho é trazer elementos que figuram nos documentos oficiais nacionais e versam sobre o tópico frações e relacioná-los com publicações de autores que possuem pesquisas e definições fundamentadas na teoria. Em seguida, o capítulo dois apresenta o contexto e o método utilizado na coleta e análise de dados das tarefas aplicadas em uma turma do quarto ano, para, no capítulo três, fazer a análise do conteúdo registrado nas produções feitas pelos alunos.

CAPÍTULO 1 - AS FRAÇÕES NOS ANOS INICIAIS

Neste capítulo, para fundamentar as análises que realizaremos das produções dos alunos, discutimos aspectos relativos ao ensino e aprendizagem das frações presentes nas publicações que orientaram a organização dos documentos oficiais nacionais para o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, bem como o que se aborda sobre o tópico frações na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998). Também trazemos considerações de autores que investigam o ensino e a aprendizagem desse tópico nas etapas iniciais de escolarização.

O lugar das frações nos documentos oficiais – Base Nacional Comum Curricular e Parâmetros Curriculares Nacionais

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018) é o documento que estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. As orientações da BNCC são indicadas para todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil.

Nesta pesquisa, discutimos aspectos relacionados aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's, pelo fato de esse documento ter sido o orientador de currículos ao longo de 20 anos (1998 – 2018). Nele são encontradas as diretrizes elaboradas pelo Governo Federal com o objetivo principal de orientar os educadores por meio da normatização de alguns fatores fundamentais concernentes a cada disciplina.

Na área de Matemática da Base Nacional Comum Curricular, são apresentadas cinco unidades temáticas que têm como finalidade orientar as habilidades que serão desenvolvidas no decorrer do Ensino Fundamental. Serão discutidos aspectos relacionados a cada unidade temática, porém o foco será na Unidade Temática Números, especificamente no que se refere à introdução de frações, mais precisamente, no 4º ano.

A primeira unidade é baseada no pensamento numérico, nomeada como a área Números. Nesse campo, a significação e o desenvolvimento de noções de Matemática são fundamentais, como: ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem.

> A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades (BRASIL, 2018, p. 224).

No 4º ano do Ensino Fundamental, espera-se que os alunos desenvolvam estratégias para elaboração de soluções de determinados problemas, abordando números naturais e números racionais, priorizando aquelas cuja representação decimal seja finita (BRASIL, 2018, p. 224). A proposta é que, nestas estratégias, sejam trabalhados registros, operações, cálculo mental e algoritmos, e que, nas soluções encontradas, reflitam sobre a coerência dos resultados.

Espera-se que os alunos resolvam problemas com números naturais e racionais, relacionando-os com as operações fundamentais e as estratégias diversas. Ainda nesta unidade, são aspectos fundamentais, o ensino e domínio de porcentagem, comparação e ordenação números com pontos na reta numérica, conceitos básicos de economia e finanças, levando em consideração a noção para a educação financeira. Esses aspectos focam elementos do conjunto dos números racionais, e se associam diretamente ao tópico frações.

Ressalta-se, na parte de habilidades, que os alunos devem ser capazes de reconhecer as frações mais usuais no início do ensino: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$ como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.

Já na unidade temática Álgebra, a finalidade é o desenvolvimento do denominado Pensamento Algébrico. Como afirmado no documento, é imprescindível que o trabalho com Álgebra esteja presente desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental para que as ideias e conceitos a ela associados sejam ampliados e aprofundados nos Anos Finais. Para que ocorra o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, espera-se que os alunos compreendam as "regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos" (BRASIL, 2018, p. 225). O Ensino de Álgebra pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa, sendo que o uso das frações é recorrente em diversos momentos.

A unidade temática Geometria envolve "um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento [...]" (BRASIL, 2018, p. 228), considerando sobretudo as transformações geométricas, ressaltando as simetrias. Cabe salientar que os conteúdos relacionados à razão, semelhança e proporcionalidade de figuras geométricas requerem conhecimentos relativamente às frações.

A unidade temática Grandezas e Medidas envolve o estudo das medidas e suas relações, sendo considerado um tópico que propõe uma inter-relação entre a Matemática e outras áreas, como “Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.)” (BRASIL, 2018, p. 229). Importante salientar que este tema contribui para um maior conhecimento das outras unidades já apresentadas. Esta unidade temática envolve ainda o estudo dos múltiplos e submúltiplos de unidades de medida e também requer conhecimento sobre frações, pois ao determinar um comprimento, o aluno poderá expressar os resultados em metros ou em suas frações como (meio metro) e ainda em décimos de metro ou metros e centésimos de metro.

A unidade temática Probabilidade e Estatística que propõe, segundo a BNCC, uma abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações.

> [...] problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos (BRASIL, 2018, p. 230).

Cabe salientar que a probabilidade associada a ideia de que parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória, sendo possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. Tais resultados podem ser representados na perspectiva de uma razão entre os resultados ou casos favoráveis e o total de casos igualmente possíveis. Esta perspectiva está associada ao sentido de fração como razão, em situações de relação entre duas partes de um todo (PINTO; RIBEIRO, 2013).

Para a unidade temática Números, a BNCC propõe um ensino gradual de frações, começando com conceitos básicos no 2º ano, abordando o tema nos anos seguintes com conteúdos novos sendo inseridos em cada etapa até o 8º ano.

Durante os anos iniciais do Ensino Fundamental, o foco é na construção do significado, do vocabulário, das representações e dos conceitos fundamentais de fração, sendo que não é previsto o trabalho com operações matemáticas e algoritmos envolvendo frações. Vamos analisar ano a ano as habilidades propostas pela BNCC para o ensino de fração nos anos iniciais do ensino fundamental.

No 2º ano, a habilidade é da BNCC é “(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais” (BRASIL, 2018, p. 283). Ou seja, a ideia de fração fica nos problemas de repartir um todo, contínuo ou discreto, em partes menores (metade ou terça parte).

No 3º ano, temos a habilidade "(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes." (BRASIL, 2018, p. 287), em que notamos uma ampliação dos elementos trabalhados no 2º ano, relacionando agora à ideia de quociente.

Já no 4º ano "(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso." (BRASIL, 2018, p. 291), observa-se o uso da notação ou representação numérica usual para frações, que podem ser relacionadas às ideias de quociente trabalhadas no 3º ano ou ainda em situações de parte de um todo.

Por fim, no 5º ano, há três habilidades que se referem ao ensino de frações

> (EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
> (EF05MA04) Identificar frações equivalentes.
> (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica. (BRASIL, 2018, p. 295)

A partir do exposto, observa-se que, no 5º ano, fica explícito o uso dos recursos aprendidos de 2º a 4º anos para criar algumas generalizações. Também se observa a indicação de frações maiores que um, sendo possível incluir números mistos e frações impróprias, além da localização de números fracionários como pontos numa reta real. Cabe ressaltar que tais conceitos são de difícil compreensão por alunos e professores (MENEGAZZI, 2013).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's (BRASIL, 1998), são abordados alguns desafios, como a dificuldade dos alunos em reconhecer que as escritas fracionárias podem indicar as infinitas representações um mesmo número. Por exemplo: $\frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{6}{6}$ e assim por diante, pois até este determinado momento de sua vida escolar, o aluno teve contato com somente uma maneira de escrever o número um, que é igual a "1", já que os estudantes estavam utilizando com muita frequência, tanto na vida escolar como fora dela, apenas a escrita dos números naturais. Isto é reforçado por Campos (2012).

> A escrita de inteiros também faz parte da vida quotidiana, pois há números nas casas, nas salas de aula, nas moedas e nas notas, nos ônibus etc. Essa familiaridade com a representação oral e escrita dos inteiros contrasta com a quase ausência completa da representação fracionária em nossa cultura (CAMPOS et al., 2012, p. 364).

As orientações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) visavam o entendimento dos significados e sentidos das frações, ressaltado em situações-problema envolvendo parte-todo:

> A relação parte-todo se apresenta, portanto, quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes. (BRASIL, 1998, p. 68)

Quociente:

> Outro significado das frações é o de quociente; baseia-se na divisão de um natural por outro (a : b = a / b; b $\neq$ 0). Para o aluno, ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir um chocolate em 3 partes e comer 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 chocolates para 3 pessoas. No entanto, nos dois casos, o resultado é representado pela mesma notação: 2/3 (BRASIL, 1998, p. 68).

E razão:

> A fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com informações do tipo "2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes" (BRASIL, 1998, p. 68).

Estes e outros sentidos das frações serão conceituados e discutidos na próxima seção.

O entendimento desses sentidos faz com que seja possível aprender com mais facilidade a ideia de fração como operador, na qual o aluno terá mais facilidade de entender o que significa, por exemplo, calcular $\frac{2}{3}$ de uma certa quantia.

> A essas três interpretações, bastante interessantes de serem exploradas neste ciclo, acrescenta-se mais uma, que será trabalhada nos ciclos posteriores. Trata-se do significado da fração como operador, ou seja, quando ela desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Essa ideia está presente, por exemplo, num problema do tipo "que número devo multiplicar por 3 para obter 2" (BRASIL, 1998, p. 68).

Os PCN's seguem com a proposta de que ocorra a identificação das frações no contexto diário da criança, comparação e ordenação, operações envolvendo números naturais e racionais, mesmo reconhecendo que o contato com representações fracionárias é bem menos frequente na vida cotidiana do aluno, limitando o uso dessas representações a metades, terços, quartos e muito mais utilizado através da oralidade do que pela escrita.

O ensino e a aprendizagem das frações nos Anos Iniciais da Educação Básica

Levando em consideração o que Bertoni (2009) cita em seu estudo, a introdução aos números fracionários às crianças é intensa. A intensidade se refere ao fato de que, normalmente, no quarto ano, em poucos dias, é exigido que os estudantes já tentem compreender o que são: numerador, denominador, um terço, um quarto, um quinto, frações equivalentes, símbolos relacionados a esses termos, entre outras exigências para um ensino conteudista sobre frações. Segundo Streefland (1991), algumas das falhas na percepção do conceito de fração estão relacionadas à complexidade do próprio conceito, e também na aprendizagem tradicional e formal das frações, em sua maioria, de forma mecanicista. Concordando com Onuchic e Allevato (2008), que afirmam que o "ensino dos números racionais está formando estudantes com concepções demasiadamente simplistas de números e operações sobre números, e estratégias excessivamente mecânicas para resolver problemas" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 81).

A preocupação da apresentação dos números fracionários aos alunos juntamente com muitas regras pode causar certas incompreensões e até mesmo desmotivação à aprendizagem. A forma mecânica como esse conteúdo pode ser inserido no início do processo educacional, em muitas situações, é levado ao longo da vida escolar, fazendo com que muitas outras concepções e percepções relacionadas às frações se tornem ofuscadas pelo fato de o aluno não compreender a razão de realizar determinados processos ou necessitar cumprir algumas regras que parecem não ter significado.

Quando chega o momento de os alunos estudarem sobre os números racionais, diversos desafios são encontrados. Na introdução de números racionais proposta pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), como já abordado, é mencionada a importância de construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social. De acordo com Nunes e Bryant (1997), quando os alunos se remetem às suas vivências do dia-a-dia para solucionar alguns problemas, envolvendo representações simbólicas, eles são naturalmente levados a estabelecer, na maioria das vezes, as conexões adequadas e também podem desenvolver resoluções de problemas com um nível de dificuldade um pouco maior.

Outro ponto importante a ser comentado no que se refere ao ensino e aprendizagem das razões é a relação da ordem de grandeza. Por exemplo, quando se compara $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, e identifica-se $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, considerando um mesmo todo (uma mesma referência) não é natural para o aluno pensar nessa desigualdade, uma vez que $3 < 4$. Cabe salientar, no entanto, que a omissão do tamanho da referência, tão comum de ocorrer em salas de aula, e também nos livros didáticos, impossibilita a percepção efetiva das ideias base subjacentes a um entendimento pleno de fração, pois, sem a referência a qual unidade deve ser relacionada, não se pode identificar se $\frac{1}{3}$ é realmente maior que $\frac{1}{4}$, pois $\frac{1}{3}$ de uma fita de um metro é menor que $\frac{1}{4}$ de uma fita de 2 metros (ALMEIDA; RIBEIRO, 2019).

Mais adiante, nas operações envolvendo frações, a multiplicação passará a trazer um resultado novo, que é a possibilidade do produto ser um número menor que um dos fatores que estão sendo multiplicados. Pensando na ideia de que o produto entre dois números naturais maiores do que 1 sempre será maior que qualquer um dos fatores, a multiplicação de 6 por $\frac{1}{3}$ pode trazer uma nova visão da multiplicação, em que o resultado 2 é menor do que 6.

Bertoni (2009) resume que o desenvolvimento das frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental deve centrar-se nas ideias associadas ao número fracionário e na leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso frequente, pois não há como dissociar essas competências da resolução informal de situações-problema, por meio de operações intuitivas com esses números.

De acordo com Van de Walle (2009), o simbolismo da fração representa uma convenção bastante complexa que é geralmente enganosa para as crianças, pois não é tão simples entender que os números que aparecem na parte superior ou na parte inferior trazem de significado.

> O modo como escrevemos as frações com um número na parte superior e outro na parte inferior de uma barra é uma convenção – um acordo arbitrário de como representar frações. (A propósito, sempre escreva frações com uma barra horizontal, e não inclinada. Escreva $\frac{3}{4}$ e não 3/4.) Como uma convenção, cai na categoria de coisas que você simplesmente informa aos alunos. Porém, uma boa ideia é tornar a convenção muito clara por meio da demonstração que eles lhe dirão o que os números da parte superior e da inferior significam (WALLE, 2009, p. 328).

Muitas vezes, sem que os alunos efetivamente compreendam quais significados estão sendo trabalhados, pode ocorrer uma mecanização de processos que fazem com que um entendimento mais profundo do tópico frações seja deixado de lado. Algumas características importantes não são trabalhadas, quando professores não têm a ciência do sentido que se está querendo passar ao se trabalhar determinado exercício. Como é descrito por Pinto e Ribeiro (2013), a responsabilidade que o professor possui ao buscar conhecer mais sobre o conteúdo que será abordado por ele em sala de aula é grande, pois esse conhecimento deve lhe permitir que consiga preparar e implementar tarefas para explorar e aumentar a eficácia do aprendizado, conseguindo compreender o que o aluno trouxe para dentro da aula.

Devido ao pouco contato dos alunos com os números fracionários, eles buscam o conhecimento que possuem sobre os números naturais e o estendem para as frações. Dessa forma, tendem a tratar a fração como se fossem dois números naturais, um em cima do outro, e não como um número distinto e único, (STREEFLAND, 1991).

Como exemplifica Bertoni (2008), ao questionar um aluno sobre o significado das frações, são comuns respostas como: "é pedaço, é aquele negócio de dividir figuras, é cortar tiras." (BERTONI, 2008, p. 211). Continuando com os questionamentos, para a pergunta: "Fração é número?" as dúvidas são inúmeras para construir uma resposta com significado para o aluno, e a resposta mais comum é "são dois números" (BERTONI, 2008).

Campos et al. (2012) também discutem sobre o contato que as crianças possuem em seu dia-a-dia com a representação fracionária. Estabelecer representações com os números naturais é de fato mais significativo para os alunos, pois em nossa cultura, a grande quantidade da sua representação oral e escrita contrasta com a quase ausência da representação fracionária. São utilizados usualmente sinônimos das palavras que correspondem a metade, no entanto palavras como um terço, um quarto, dois quartos, um quinto ou outras frações são usadas raramente.

> Quando usamos um sistema decimal de medida, a palavra meio é usada com frequência: meia hora, meio quilo, meio litro, meio metro, um metro e meio são expressões comuns. Mas, em geral, outras frações dessas unidades são convertidas na linguagem comum em unidades menores: por exemplo, não se diz habitualmente um quarto de quilo, mas 250 gramas, ou um quarto de metro, mas 25 centímetros, ou meio Real, mas cinquenta centavos. A escrita de frações ordinárias também não é usual em nossa cultura e a nomeação de frações com denominadores acima de 10 certamente é rara fora da sala de aula: doze avos, vinte avos etc. são expressões que poucos terão escutado fora da sala de aula (CAMPOS et al., 2012, p. 364).

Nunes e Bryant (1997) afirmam que uma forma bastante usual de ensinar frações é apresentar para os alunos todos divididos em partes, sendo que são diferenciados, na maioria das vezes, pintando as partes. A partir disso, os alunos são informados que o número total de partes é o denominador e o total de partes pintadas é o numerador, porém, segundo os autores, essa introdução, juntamente com alguma instrução superficial, faz com que as crianças transpareçam a impressão de que sabem muito sobre frações, mas essa impressão pode ser falsa.

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e, ainda assim, não o têm. Elas usam os termos fracionais certos, elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais, mas diversos aspectos cruciais ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba (NUNES; BRYANT, 1997, p 191).

Relacionando com Bertoni (2009), é válido que nos indaguemos sobre o aprendizado das frações e o seu processo no ensino-aprendizagem, se o conceito de número fracionário é formado ou se fica limitado e reduzido a um "manejo de figuras, sua designação e representação" (BERTONI, 2009, p. 21).

Para discutir os diversos significados das frações, utilizarei, como referência, o estudo realizado por Monteiro e Pinto (2005). Para evitar um manejo superficial no ensino de frações, é fundamental que os professores tenham em mente seus diversos significados. Não que isso precise ser evidenciado aos alunos num primeiro momento, mas, durante o trabalho com esse assunto, há a possibilidade de surgirem dúvidas que podem ser diminuídas se o professor souber de maneira clara qual significado da fração está sendo abordado. Os significados são:

1) A relação entre a parte de um todo contínuo. Como exemplo, podemos pensar numa figura em que um terço deve ser pintado. A fração $\frac{1}{3}$ associa o numerador "1" com a parte que deve ser pintada, e denominador "3" com as três partes que formam o todo, tomando este como unidade.

2) A relação entre a parte de um todo discreto. Por exemplo, uma coleção de figurinhas em que um terço é de determinado personagem. O todo seria representado pela coleção e a parte pelas figurinhas de determinado personagem.

3) A fração como quociente de dois números inteiros. Esta ideia é muito utilizada na divisão em partes iguais. Por exemplo, podemos pensar em duas pizzas para serem divididas igualmente entre cinco pessoas. A fração $\frac{2}{5}$, além de representar a relação entre o número de pizzas e pessoas, representa também a quantidade de pizza que cada um comeu.

4) A fração como razão de duas grandezas de mesma natureza. Por exemplo, numa festa, a razão entre o número de homens e mulheres é $\frac{3}{4}$, (lê-se 3 para 4). Tanto homens quanto mulheres se referem à mesma natureza, que são as pessoas ali presentes.

5) A fração como razão de duas grandezas de naturezas distintas. O exemplo aqui pode ser uma torneira que esvazia um tanque. A razão entre o volume do tanque e o tempo necessário para esvaziá-lo cria uma nova grandeza chamada de vazão da torneira.

6) A fração como operador multiplicativo. Por exemplo, podemos pensar numa situação em que temos uma sala com trinta alunos e $\frac{4}{5}$ desses alunos já entregaram um determinado trabalho. Sendo $\frac{4}{5}$ de 30 igual a 24, concluímos que 24 alunos já fizeram a entrega.

7) A fração como medida, ao se comparar uma grandeza com outra tomada como unidade. Por exemplo, ao considerarmos um centímetro como a centésima parte do metro, estamos trabalhando com a fração $\frac{1}{100}$ do metro.

Na sequência, abordamos como o tópico frações tem sido trabalhado envolvendo relação parte de um todo, tanto em contextos contínuos quanto discretos.

Segundo Silva e Almouloud (2008), o sentido mais trabalhado nas escolas atualmente, quando se é incorporado o ensino das frações em sala de aula, é a concepção parte-todo. A priorização deste sentido baseia-se em figuras planas, representando grandezas contínuas "tais como segmentos, polígonos e círculos, sendo, por isso, natural o uso dessas figuras para a compreensão das regras operatórias com números fracionários" (SILVA e ALMOULOUD, 2008, p 59).

Esses autores ainda colocam que quando é necessário o trabalho com partes maiores que um inteiro, outros sentidos das frações, como o quociente, se mostram como uma bom caminho para o ensino, porém ainda assim acreditam que, em ambos os casos, partes de um inteiros ou maiores que um inteiro, ainda podem mobilizar a concepção parte-todo. Para esse significado, convencionou-se que o inteiro deveria ser dividido em partes iguais, contendo a mesma área, para que assim pudesse ser contabilizada, "no entanto, sabemos que qualquer que seja a parte considerada de uma figura pode-se associar a ela, mesmo que aproximadamente, um número fracionário, independente de ela estar totalmente dividida em partes congruentes." (SILVA e ALMOULOUD, 2008, p 58).

As situações de parte-todo, que são frequentemente usadas no ensino de fração, resumem-se, muitas vezes, a dividir uma área em partes iguais, a nomear a fração como o número de partes pintadas sobre o número total de partes e a analisar a equivalência e a ordem da fração por meio da percepção, (CAMPOS; MAGINA, 2001). Também exemplificado por Campos et al. (2014)

> Na situação parte-todo, uma unidade (como uma pizza, uma barra de chocolate, ou uma figura geométrica) é dividida em partes iguais. A unidade passa a ser concebida como o todo ao qual a fração se refere. O denominador da fração representa o número de partes em que o todo foi dividido. O numerador da fração representa o número de partes às quais a quantidade se refere: por exemplo, em um retângulo que foi dividido em quatro partes iguais, três das quais foram pintadas, a fração $\frac{3}{4}$ representa a parte pintada (CAMPOS et al., 2014, p. 106).

Para Van de Walle (2009), no sentido parte-todo, as partes fracionárias possuem nomes especiais que se referem a quantas partes daquele tamanho são necessárias para construir um todo, por exemplo, terços demandam três partes para formar um inteiro. O autor destaca, como um aspecto importante, a relação entre a quantidade de partes e seu "tamanho", pois quanto maior a quantidade partes fracionárias forem usadas para formar o inteiro, menores elas serão, como no caso de nonos que são menores que quintos e que são menores que terços.

No estudo feito por Campos et al. (2012), foi inserida uma questão que fazia referência ao sentido parte-todo, sendo que os inteiros eram diferentes e a referência era de metade, nesse caso, as crianças não tiveram dúvidas em entender que metade de um todo maior que o outro são diferentes.

Em outra pesquisa realizada por Campos et al. (2014), na qual foi observado como dificuldades de muito alunos na faixa etária dos anos iniciais do Ensino Fundamental:

> [...] executavam a dupla contagem sem preocupar-se com o tamanho das partes quando um retângulo estava dividido em retângulos menores e triângulos que correspondiam à metade dos retângulos menores, muitos alunos contavam as partes sem considerar a relação entre elas. Similarmente, muitos alunos pintam adequadamente $\frac{2}{3}$ de uma figura dividida em 3 partes, mas não conseguem pintar $\frac{2}{3}$ de figuras divididas em 6 e 9 partes, revelando, assim, que as imagens que formaram das frações interferem com sua compreensão da equivalência (CAMPOS et al., 2014, p. 108).

De acordo com Vasconcelos et al. (2017), um número significativo de abordagens de ensino introduz frações usando situações parciais. É exposto que o significado do denominador e do numerador estão presentes nessas situações. O denominador de uma fração indica o número de partes iguais em que um todo foi dividido e o numerador indica as partes consideradas. Por exemplo, a fração $\frac{2}{3}$ de um bolo é entendida como um bolo que é dividido em três partes iguais e duas dessas partes são levadas em consideração, como também já foi exposto. Em seu estudo, Vasconcelos et al. (2017) utilizaram dados comparativos para identificar, entre crianças brasileiras e portuguesas, dificuldades para aprender matemática, comparando as semelhanças e diferenças entre esses dois públicos. Um questionário foi aplicado para verificar a percepção da relação inversa entre quantidades menores que a unidade. As crianças tinham entre nove e dez anos e cursavam o quarto ano do Ensino Fundamental, e não receberam nenhuma explicação sobre frações. Os resultados indicaram que uma das dificuldades das crianças permeava o entendimento em estabelecer uma relação entre o numerador e o denominador na situação da parte-todo. Uma possível explicação apresentada pelos autores é a experiência adquirida com os números inteiros, em que até uma fração imprópria exige um raciocínio mais complexo para identificar dentro desse sentido (parte-todo) um numerador maior que o denominador.

Outro resultado constatado pelos autores foi que, nos dos dois grupos de crianças - portuguesas e brasileiras - foi com relação ao desempenho sobre a percepção da equivalência de frações, o que demonstrou a dificuldade em compreender a relação inversa entre o numerador e o denominador, citando que "essa relação é baseada no raciocínio proporcional inverso, considerando que dobrar as partes significa que cada parte será metade do tamanho do todo." (VASCONCELOS et al., 2017, p. 265, tradução nossa).

Visando também a importância do conhecimento do professor para o ensino deste pleno dos significados da fração, segue um trecho do estudo de Pinto e Ribeiro (2013)

> De modo a que todos estes significados e interpretações das frações possam ser explorados com os alunos, é fundamental que os professores sejam, também eles, conhecedores dos diferentes aspectos do conteúdo que pretendem abordar, das suas possíveis formas de representação e de formas de o explorar e abordar em contexto [...] (PINTO; RIBEIRO, 2013, p. 4).

As considerações de Pinto e Ribeiro (2013) evidenciam que os problemas de aprendizagem das frações, de seus sentidos e seus usos podem estar associados a incompreensões dos próprios professores sobre o tema.

A unidade no ensino de frações

Nas discussões sobre a importância da construção de tarefas que envolvam o conceito de frações, também é de extrema relevância discutir sobre a unidade. De acordo com Monteiro e Pinto (2005), a unidade desempenha um papel fundamental para a compreensão das frações, pois uma fração tem sempre consigo uma unidade de referência.

> A fração como relação entre a parte e o todo, aparece também nas situações didáticas de medida e nas situações de partilha equitativa visto que em ambos os casos se compara, depois do refinamento da unidade de medida e da situação de partilhar, uma parte fracionada com um todo. Aliás, a relação da parte com o todo é uma relação inerente aos números fracionários e que é fundamental ser realçada, seja qual for a situação didática, pois o "todo" traduz a unidade fracionada (MONTEIRO; PINTO, 2005, p.92).

Almeida e Ribeiro (2019, no prelo) também discutem a importância da unidade (ou todo). Os autores afirmam que a noção da unidade sempre esteve presente no ensino de Matemática desde as primeiras experiências de contagem da criança, porém, ressaltam "a construção de unidades compostas a partir de outras é um processo complexo, mas essencial que seja enfatizado no ensino das frações e dos decimais" (ALMEIDA; RIBEIRO, 2019, no prelo).

Monteiro e Pinto (2005) afirmam que desde o 3º ano as crianças resolvem problemas de divisão, em que o dividendo aparece como parte de um conjunto discreto, exemplificando: cita a repartição de dez bolachas igualmente entre cinco crianças, em que resulta em duas bolachas para cada. Assim, Almeida e Ribeiro (2019, no prelo) ressaltam que o trabalho realizado com as crianças com situações que impliquem na possibilidade de dividir objetos em quantidade não inteiras deverá ser iniciada já na Educação Infantil, levando em consideração e respeitando todas as estratégias que elas encontrarão para encontrar uma solução e sem a formalização de conceito, pois isto acontecerá naturalmente no Ensino Fundamental.

Percebe-se que o processo inverso, que segue para outra perspectiva na maioria dos casos, não é trabalhado com tanta ênfase, ou seja, constituir o inteiro a partir do que temos como parte dele.

> Os estudos mencionados demonstram que o um é uma unidade de referência relevante em muitas atividades com frações (na reta numérica, em tarefas de partição, em equivalências de frações e como âncora na adição de frações). De modo semelhante, a noção de metade também tem sido considerada um referencial importante para a compreensão de frações (CRUZ; SPINILLO, 2014, p. 170).

Para Almeida e Ribeiro (2019, no prelo), é essencialmente importante, quando se trabalha com frações, utilizar-se da "reconstrução da unidade", que se associa diretamente ao desenvolvimento da ideia central da importância da referência que se considera. Evidenciam também que muitos livros didáticos omitem o tamanho da referência, sendo um caso que impossibilita e dificulta a compreensão efetiva "as ideias base subjacentes a um entendimento pleno de fração [...] a possibilidade de reconstruir a unidade, em tarefas que envolvem composição e decomposição, é fundamental para a compreensão de número racional" (ALMEIDA; RIBEIRO, 2019, no prelo).

CAPÍTULO 2 - CONTEXTO E MÉTODO

O contexto

Neste capítulo, será apresentado o contexto que foram realizadas as tarefas desta pesquisa e também como foram coletados e analisados os dados.

Estou como professora do Ensino Fundamental de uma escola da rede particular de ensino, na região de Campinas, há cinco anos. Trabalho com turmas de quartos e quintos anos e, para desenvolver esta pesquisa, foquei na minha turma de quarto ano do período matutino que é composta por dezoito crianças.

A decisão de fazer este trabalho em uma turma em que estou como professora vem da proximidade que há na relação que tenho com os alunos e na flexibilidade em abordar sobre esse assunto antes da sua formalização por meio das aulas.

O material utilizado pela escola é apostilado, construído a partir dos eixos da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). É exigido que a apostila seja trabalhada integralmente, mas há abertura para que os professores possam realizar atividades e tarefas que ultrapassem o proposto no material.

O momento de aplicação das tarefas que compõem as informações a serem analisadas nesta pesquisa, ocorreu no segundo trimestre de 2018, período próximo das férias de meio de ano. Naquela ocasião ainda não havíamos formalizado o tópico "frações" no decorrer dos conteúdos e tarefas da apostila, desse modo os alunos da turma ainda não tinham sido expostos formalmente ao conteúdo desse tópico na escola. O primeiro contato que os 18 alunos tiveram foi durante as aplicações das tarefas e nas conversas que eram desenvolvidas para propiciar um debate coletivo com a intenção de promover a aprendizagem sobre o tema.

De acordo com o currículo da escola e do material apostilado utilizado, o estudo das frações se inicia no quarto ano, mais precisamente no mês de agosto. Assim, do primeiro ao terceiro ano do Ensino Fundamental, não é esperado e nem proposto que sejam trabalhados conceitos associados à fração.

Ao todo, foram implementadas, individualmente e em sala de aula, três tarefas. A duração de cada aplicação foi de aproximadamente 50 minutos, a discussão e socialização das respostas dos alunos também duraram cerca de 50 minutos. Esse tempo foi definido de acordo com a disponibilidade da grade curricular das disciplinas no colégio.

A disposição da sala pode ser classificada como "tradicional", já que as carteiras são organizadas enfileiradas de frente para a lousa.

Foram coletadas informações através de gravações de áudio e vídeo usando uma câmera GoPro que ficou em cima do armário de fundo da sala e também das produções dos alunos a cada uma das tarefas. As perguntas e discussões feitas pelos alunos durante as aulas também foram audiogravadas.

Em uma aula de 50 minutos, foi aplicada a tarefa "Vamos circular". A tarefa permaneceu com os alunos cerca de trinta minutos, cada um fazendo individualmente sem a minha interrupção ou influência nas repostas. Eles estavam cientes de que poderiam colocar o que sabiam partindo do conhecimento que tinham sobre frações. Após me entregarem, começamos a socialização das respostas, depois conversarmos sobre cada imagem, passei um vídeo (será explicado sobre ele) produzido por mim que comentava as respostas que esperadas para cada letra da tarefa.

Uma semana após a primeira tarefa, apliquei as duas tarefas seguintes na mesma aula: "Vamos explorar" e "Vamos construir" sendo que nestas, o número de alunos participantes caiu, pois faltaram dois alunos. O processo de aplicação da tarefa seguiu o mesmo que o da anterior, entreguei as folhas para cada um e dediquei cerca de vinte minutos e cinco para cada, nestas tarefas eles fizeram com um pouco mais de facilidade e rapidez. Após recolhê-las, comecei o debate, primeiro da tarefa "Vamos explorar" e depois da "Vamos construir". Não passei vídeo explicativo destas tarefas, toda ela foi resolvida na lousa, com a projeção em telão e o auxílio dos alunos que em alguns momentos vinham até a frente para demonstrar como haviam resolvido a questão.

Para a elaboração das análises foi realizada a transcrição dos vídeos e das audiogravações. Também foram recolhidas as produções dos alunos e as respostas foram transcritas para facilitar a leitura. Assim as análises foram efetuadas com base nas produções escritas a partir das tarefas, que foram resolvidas individualmente e, dos questionamentos coletivos e discussões dos alunos registrados durante as aulas a partir das transcrições dos videos.

As três tarefas foram pensadas no contexto do Grupo CIEspMat[1], as quais fazem parte das tarefas formativas. Pela natureza dessas tarefas formativas, elas contemplam, entre outros elementos, um conjunto de perguntas para os alunos e, essas são a base das tarefas que foram utilizadas na dissertação, sendo que sofreram alterações para serem aplicadas no quarto ano.

[1] Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor de e que Ensina Matemática

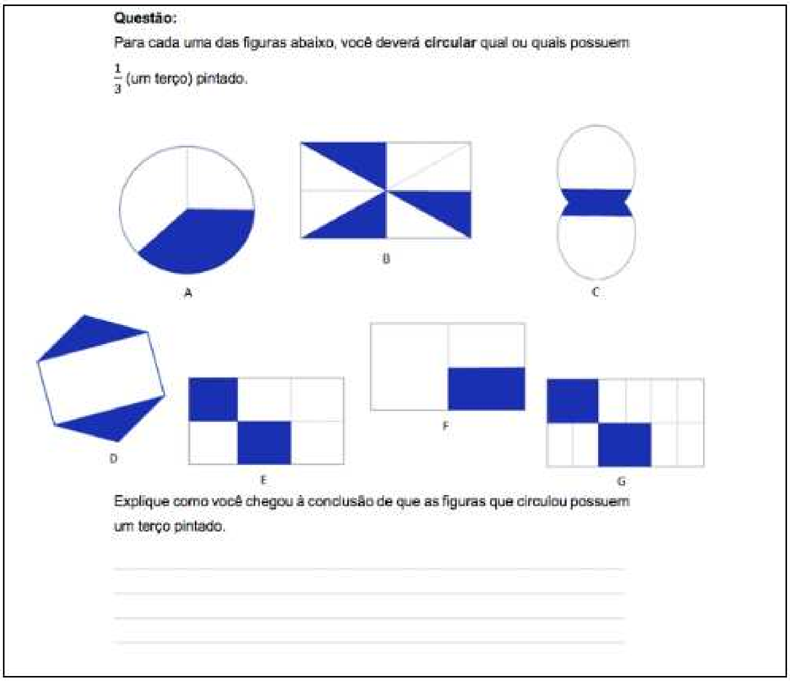
Como as tarefas foram implementadas

Primeira tarefa aplicada: “Vamos circular”

Nas imagens escolhidas para a primeira questão da Tarefa “Vamos circular” (Figura 1), foi necessário estabelecer algumas suposições para que pudéssemos trabalhar com ela e com os significados das frações para esta etapa, com o sentido parte-todo. Neste caso, foi explicado aos alunos que algumas formas possuíam simetria, ou seja, possuíam uma relação de paridade em respeito a altura, largura e comprimento das partes que são necessárias para compor um todo, também medidas iguais originadas das divisões de suas áreas.

A tarefa foi aplicada integralmente, assim que o aluno terminava uma questão, já estava informado que precisava continuar a completar as demais, tudo feito individualmente e sem minha interferência em relação as suas conclusões. Esta tarefa era constituída por três questões que seguem descritas abaixo juntamente com o objetivo de cada uma.

Figura 1: Primeira questão da Tarefa “Vamos circular”



Fonte: arquivo da pesquisadora

Para resolver esta tarefa, o aluno necessitava reconhecer previamente a identificação do todo dividido em partes iguais, a realizar as divisões e ter ideia da conservação da área, já que se trata de quantidade contínua.

No caso da imagem D, no momento da aplicação, ressaltei que era um hexágono regular (polígono com seis lados de mesma medida e seis ângulos internos também de mesma amplitude). Nas formas E e G, foi dito que as partes divididas estavam com áreas iguais (equivalentes), pois se as imagens estivessem com repartições que não possuíam o mesmo tamanho, não poderíamos considerar contendo um terço.

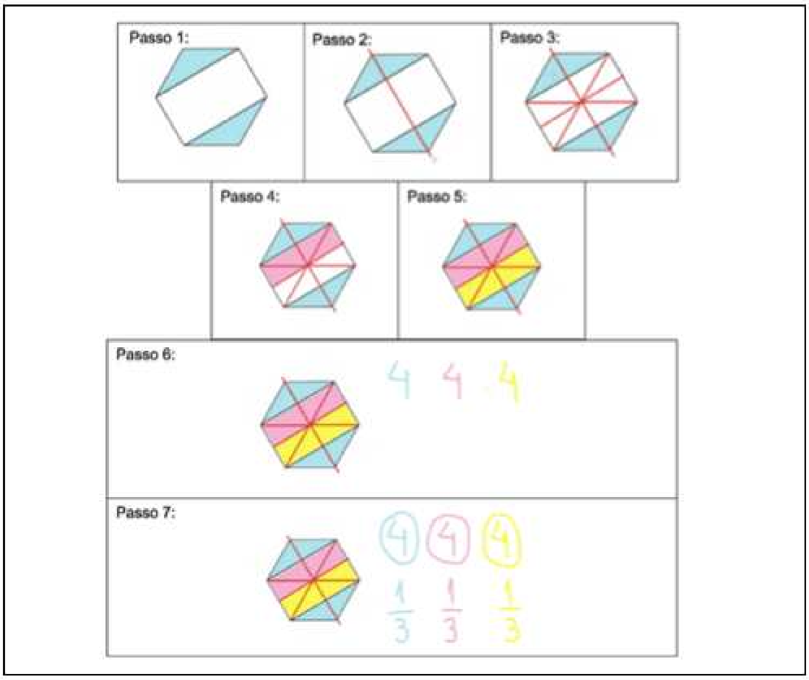
Após a resolução da primeira tarefa, conversamos sobre as resoluções apresentadas, as compreensões dos alunos sobre cada figura e na sequência discutimos as respostas esperadas em cada questão.

Como na sala há a possibilidade de projeção de imagens e vídeos, em determinados momentos de minha explicação, utilizei o computador e coloquei um vídeo explicativo para abordar possíveis respostas ou ilustrar produções dos alunos associadas à primeira parte da tarefa.

O vídeo tinha a duração de aproximadamente cinco minutos e composto pelas seguintes etapas mostradas na figura 2. Conforme o vídeo, que foi produzido por mim e continha minha fala de cada passo abordado, foi passando, eu comentava sobre o motivo das respostas esperadas serem aquelas que foram corrigidas junto com eles.

Segue a imagem das etapas do vídeo produzido:

Figura 2: Imagem do vídeo mostrado em aula utilizado na Tarefa “Vamos circular”



Fonte: arquivo da pesquisadora

Do primeiro ao quinto passo, faço a repartição da figura em áreas de mesmo tamanho. No sexto passo, mostro que consigo formar três grupos contendo quatro triângulos que juntos possuem a mesma área. No último passo, faço a relação com a fração e a representação de cada parte do hexágono regular.

Figura 3: Segunda questão da Tarefa "Vamos Circular"

Para as que você considera que não tenham $\frac{1}{3}$ pintado, **indique** qual é a quantidade da figura que está pintada.

Na figura A ______

Na figura B ______

Na figura C ______

Na figura D ______

Na figura E ______

Na figura F ______

Na figura G ______

Fonte: arquivo da pesquisadora

Nesta questão, os alunos necessitariam reconhecer quando a figura não está explicitamente dividida em partes com áreas de mesmo tamanho e não possuía $\frac{1}{3}$ delas pintada.

Neste caso, das imagens que os alunos não consideravam ter um terço pintado na questão anterior (Figura 1), por meio de uma análise da relação parte-todo, deveriam representar a fração indicada na figura de acordo como achassem relevante.

Figura 4: Terceira questão da Tarefa "Vamos Circular"

Abaixo **escreva** a explicação e descrição de como você pensou para chegar à conclusão para cada uma das figuras que considere não ter um terço pintado.

______

______

______

______

Fonte: arquivo da pesquisadora

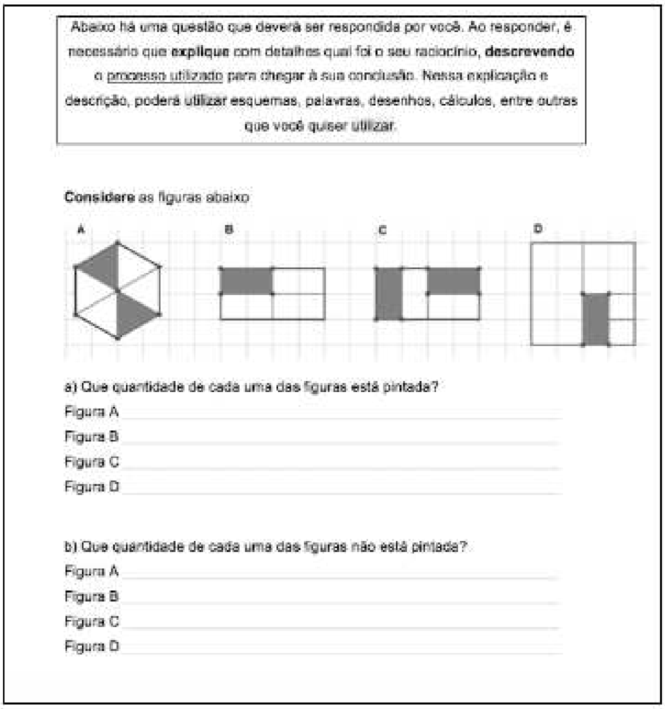
Para finalizar, os alunos chegariam a um momento de refletir e registrar como raciocinaram para concluir que as imagens não possuíam um terço pintado. Nesta questão, a intenção era observar e analisar se existe um conceito pré-definido de frações, mais especificamente de um terço.

Para cada resposta em comum, na organização da análise de dados, foi feita uma categorização, deixando isoladas as respostas que destoavam de todas as outras, ou seja, quando não houvesse raciocínio semelhante a alguma outra resposta dado por outro aluno.

Segunda tarefa aplicada: "Vamos explorar"

A segunda tarefa tinha por objetivo discutir e desenvolver o conhecimento dos alunos com relação às frações, também no sentido parte-todo, de algumas imagens que já foram definidas e inseridas na tarefa. A novidade desta é que, no item b, os alunos deveriam também registrar qual era a parte que não estava pintada, sendo a questão aberta para colocarem, por meio de uma fração ou de um outro tipo de representação, ou ainda associado alguma estratégia pessoal ou conceito que poderiam conhecer.

Figura 5: Tarefa "Vamos explorar"



Abaixo há uma questão que deverá ser respondida por você. Ao responder, é necessário que **explique** com detalhes qual foi o seu raciocínio, **descrevendo** o processo utilizado para chegar à sua conclusão. Nessa explicação e descrição, poderá utilizar esquemas, palavras, desenhos, cálculos, entre outras que você quiser utilizar.

Considere as figuras abaixo

A B C D

a) Que quantidade de cada uma das figuras está pintada?

Figura A ______

Figura B ______

Figura C ______

Figura D ______

b) Que quantidade de cada uma das figuras não está pintada?

Figura A ______

Figura B ______

Figura C ______

Figura D ______

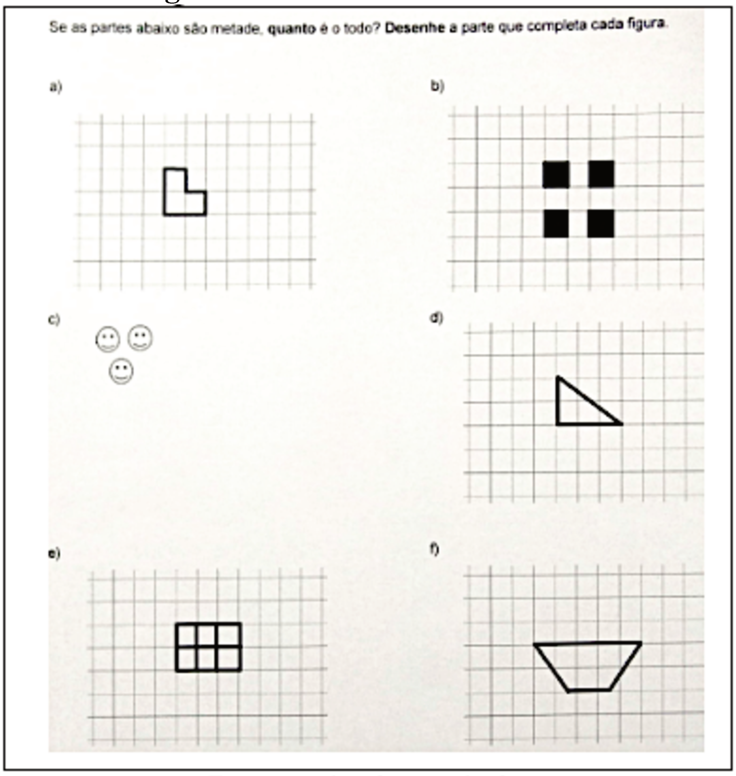
Fonte: arquivo da pesquisadora

Nesta tarefa, o esperado da resposta era que aluno que fosse reconhecido e demonstrado o seu conhecimento em relação à divisão em partes iguais da imagem e como poderia ser trabalhado também frações equivalentes em determinadas representações, especificamente nas imagens B, C e D. Na imagem A, era esperado o registro de dois sextos pintados e quatro sextos da imagem não pintados; na C, $\frac{2}{8}$ da imagem pintados e $\frac{6}{8}$ da imagem não pintados; a C continha $\frac{4}{8}$ da imagem pintados e $\frac{4}{8}$ não pintados; a forma D, era composta por uma dificuldade maior em reconhecer e escrever qual é o conhecimento que possui ao mostrar a quantidade pintada e não pintada, pois como pode ser visto, ela possui "cortes" com destaque em algumas partes e em outras, não. Esperávamos que os alunos escrevessem $\frac{2}{16}$ da imagem pintados e $\frac{14}{16}$ da imagem não pintados. Para todas as imagens, poderiam também ser registradas frações equivalentes.

Terceira tarefa aplicada: "Vamos construir"

A terceira tarefa que foi aplicada aos alunos relacionava-se com a reconstrução de figuras, considerando uma de suas partes a partir de indicações, as imagens envolviam a associação entre a parte de um todo contínuo ou discreto. Nesta tarefa, as imagens estavam com metade registrada e os alunos deveriam registrar a outra metade.

Figura 6: Tarefa "Vamos construir"



Fonte: arquivo da pesquisadora

Trabalhar com a reconstrução da unidade foi determinante para sabermos como os alunos conseguiriam estabelecer relações com o todo a partir de metade dele. Identificar o conhecimento prévio deles ao elaborarem as suas respostas a partir das vivências e dos saberes adquiridos tanto dentro como fora do ambiente escolar.

As respostas esperadas para esta tarefa eram especificamente da reconstrução do todo, levando em consideração a sua metade que já estava na tarefa.

CAPÍTULO 3 - ANÁLISE E DISCUSSÃO

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos a partir da análise das produções dos alunos, sendo que inicialmente foi verificado as respostas dos alunos que identificaram a fração correspondente em cada uma das tarefas ("Vamos circular", "Vamos explorar" e "Vamos construir") e estabelecendo uma relação entre o número de alunos que não as identificaram. Em seguida, apresentamos uma análise que discute as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das questões propostas em cada tarefa.

Conhecimento dos alunos quanto a identificação de um terço da figura pintado da Tarefa "Vamos circular"

Abaixo segue uma tabela com o percentual de acertos e erros em relação a primeira questão da tarefa "Vamos circular". Assim, obtivemos:

Figura 7: Percentual de acertos e erros da primeira questão da Tarefa "Vamos Circular"

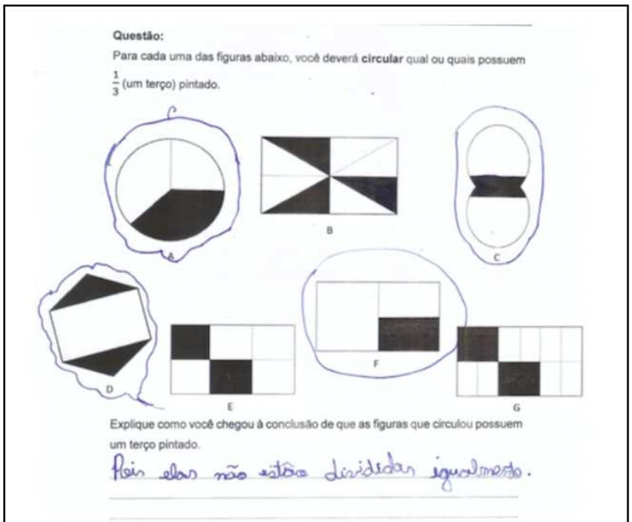
Itens da tarefa "Vamos Circular"	A	B	C	D	E	F	G
Número de alunos que assinalaram o item	13	6	9	4	3	13	2
Número de alunos que não assinalaram o item	5	12	9	14	15	5	16
% de acerto	28%	67%	50%	22%	17%	28%	11%

Alunos que não identificaram a fração correspondente da questão
Alunos que identificaram a fração correspondente da questão

Fonte: arquivo da pesquisadora

Na imagem D, somente quatro alunos assinalaram como a figura representando um terço pintado. Na E, foram três; e, na G, ocorreu o número mais baixo, dois alunos. Cabe ressaltar que essas representações não são usuais, desse modo é necessário observar que os alunos necessitam mobilizar raciocínios complexos, ultrapassando a percepção inicial da imagem. De cada item apresentado acima, foi selecionada uma produção para evidenciar o que foi escrito. Na figura 8, é possível observar que o aluno, em sua justificativa, reconhece e registra que as partes das imagens A, C, D e F não estão divididas em partes iguais, neste caso, considerando áreas das formas geométricas do mesmo tamanho, porém ele também as escolhe como contendo um terço pintado.

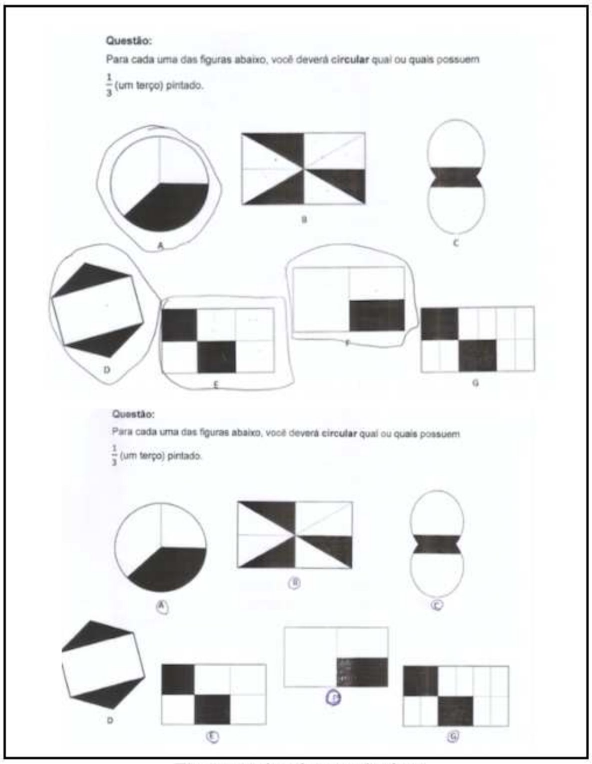
Figura 8: Conhecimento do aluno da divisão igual das áreas das imagens



"Pois elas não estão divididas igualmente"

Fonte: arquivo da pesquisadora

Figura 9: Percepção de imagens com equivalência das frações



Fonte: arquivo da pesquisadora

Podemos perceber que, na Figura 9, havia uma fração equivalente de um terço pintada – as imagens E e G. Esse reconhecimento pelos alunos que assinalaram essas como corretas, notando uma equivalência de fração, neste caso $\frac{2}{6}$ e $\frac{4}{12}$, mesmo ainda sem saber formalmente como denominar matematicamente as partes pintadas, poderá dar suporte na etapa de aprendizado dos números fracionários.

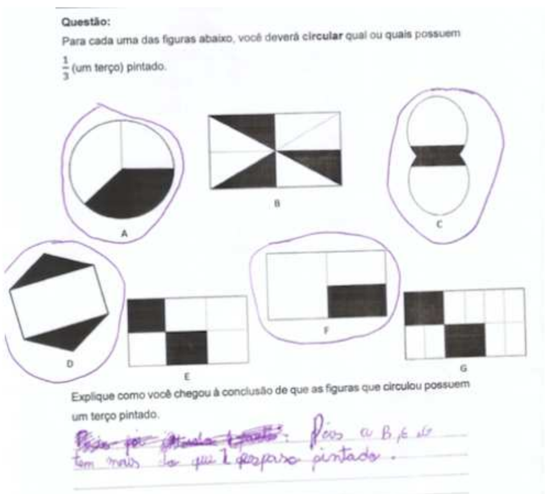
Encontramos um maior índice de acertos na imagem B, 12 acertos e 6 erros. Em contraposição, esses alunos intuitivamente não selecionaram os itens D, E e G, ressaltando novamente, sem apresentar os termos corretos matematicamente, mas possivelmente por meio da percepção visual, observaram que essas representações não estavam relacionadas com uma fração equivalente de $\frac{1}{3}$. Nas imagens A e F, em que havia um inteiro dividido em três partes sem possuir área de mesma medida, houve o mesmo número de respostas corretas e incorretas.

Van de Walle (2009) propõe uma tarefa para ser trabalhada com partes menores que o inteiro, envolvendo repartição de áreas de mesmo tamanho, ou seja, uso dos números fracionários. Neste caso, as frações são baseadas em partes de uma área ou região e o autor afirma que “esse é um bom lugar para começar e é quase essencial ao realizar tarefas de compartilhar.” (WALLE, 2009, p. 324). Diante disso, as partilhas realizadas nos desenhos foram escolhidas devido ao que se pode produzir e reconhecer, de maneira intuitiva, o que os alunos conhecem sobre frações.

Ao analisar as produções dos alunos, observa-se que as respostas se assemelham às figuras que estão divididas em três partes, não levando em consideração se estão em partes iguais ou não; e, entre essas três partes, há uma delas pintada. Abaixo foram selecionadas produções dos alunos para exemplificar um grupo de respostas semelhantes.

Nas produções que seguem, percebe-se, somente na abaixo que o aluno selecionou a letra D, a qual contém um terço pintando (um hexágono regular). Porém, a justificativa dada, não se sustenta em uma argumentação matematicamente válida e associada a essa regularidade e as relações e implicações com as partes serem equivalentes.

Figura 10: Exemplo de resposta onde é identificado áreas pintadas diferentes



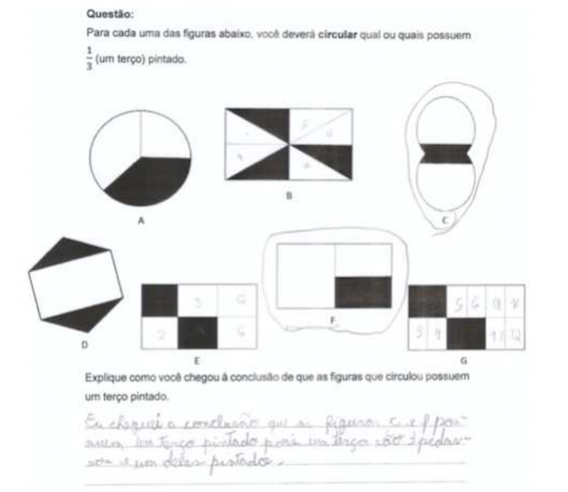
"Pois a B, E e G tem mais do que 1 espaso (sic) pintado"

Fonte: arquivo da pesquisadora

Nesta produção, relacionando a imagem D, que está dentro da tarefa, com a justificativa, poderíamos concluir que a parte que foi pensada como pintada seria a que está em branco, e a parte que já teria como cor seria a preta, ficando coerente com a explicação escrita pelo aluno. Nas demais, nota-se que não há um reconhecimento de que o inteiro deve estar dividido em partes iguais para podermos afirmar que temos um terço pintado.

A produção a seguir, apresenta um exemplo onde o aluno assinalou como correta a imagem C, porém a explicação é ainda fundamentada em inteiros que possuem três partes divididas e somente uma delas pintada. Esta escolha pela imagem C foi assinalada por nove crianças.

Figura 11: Exemplo de resposta da divisão das imagens da tarefa



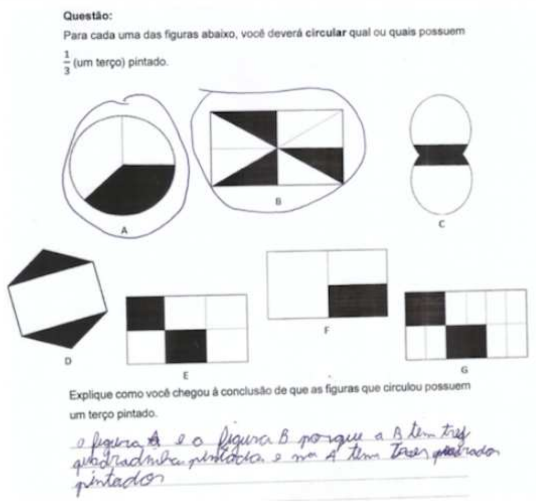
"Eu cheguei a conclusão que as figuras c e f possuem um terço pintado pois um terço são 3 pedassos (sic) e um deles pintado."

Fonte: arquivo da pesquisadora

Outras duas produções, das nove, são registradas as seguintes conclusões feitas pelos alunos: "*Pois tem um pintado e três partes cortadas*" e *"Porque cada uma ~~(tem) (a) (metade~~) (sic) está pintada um terço como três ~~(esta)~~ (sic) espaço não é exatamente assim."*

Identifica-se, na produção abaixo, que a interpretação de fração feita pelo aluno dá significado ao "três", que contém na fração um terço, de um número natural.

Figura 12: Demonstração da utilização de números naturais na tarefa



"a figura A e a figura B porque a B
tem trez (sic) quadradinhos pintados
e na A tem três (sic) quadrados pintados"

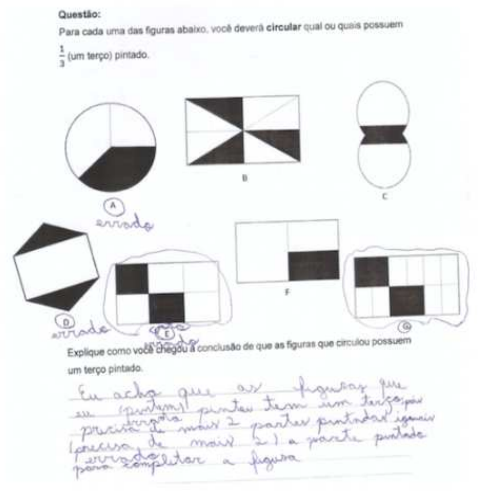
Fonte: arquivo da pesquisadora

Em sua justificativa, ele ressalta duas vezes que circulou as figuras A e B, pois continham "três quadrados/quadradinhos pintados". Nota-se a necessidade de revisão do conceito de quadrado, pois diz que ambas as figuras estão divididas em "três quadrados pintados". Como colocado por Van de Walle (2009), as crianças precisam entender o significado de contar partes fracionárias para que mobilizem esse conhecimento aprendido e consigam mobilizar um raciocínio a que tipo de contagem estão realizando, próximo à maneira como contariam maçãs ou quaisquer outros objetos. Se o aluno souber o tipo de parte que está contando, pode dizer quando obterá um, dois e assim por diante. "Aqueles que compreendem as partes fracionárias não devem precisar organizar pedaços de torta em uma circunferência para saber que quatro quartos formam um todo" (WALLE, 2009, p. 327).

Os registros das respostas transcritos abaixo, são de produções que selecionaram a forma E, que continha uma fração equivalente de $\frac{1}{3}$, neste caso $\frac{2}{6}$. Nas descrições feitas por esses alunos, percebe-se que estabeleceram uma relação com fração equivalente, isso foi observado a partir do registro de suas respostas que seguem transcritas: *"(...) eu tenho 6 quadradinhos e tenho que pintar um terço vou pintar 2 deles"*; *"(...) pois um terço é ímpar, um exemplo: eu tenho 6 quadradinhos e tenho que pintar um terço, vou pintar 2 deles*" e o último registro que exemplifica esse conjunto de respostas que notam fração equivalente, é o seguinte: *"Cheguei a conclusão vendo o inteiro e juntando as partes pintadas na D e na E, já na A, vi o inteiro e soube que era um quarto".*

Ainda tratando do raciocínio abordado acima, segue uma produção em que o aluno descreve também o seu conhecimento referente à equivalência da fração.

Figura 13: Exemplo de produção com fração equivalente



"Eu acho que as figuras que eu (pintems) (sic) pintei tem um terço, pois precisa de mais 2 partes pintadas iguais (precisa de mais 2) a parte pintada para completar a figura".

Fonte: arquivo da pesquisadora

Na produção apresentada acima, o aluno assinalou a imagem G, contendo a fração $\frac{4}{12}$, equivalente a $\frac{1}{3}$. Recorde-se que a intenção de incluir essas imagens desta maneira foi de trabalhar como a percepção de frações equivalentes para algumas crianças, sem ainda ter trabalhado formalmente frações, pode ocorrer por meio intuitivo devido a experiências prévias ou contexto de seu dia-a-dia.

Nesse sentido, para Vasconcelos et al. (2017), a equivalência de frações menores que a unidade envolve a compreensão da relação proporcional inversa, o que implica que, para dobrar o número de partes, cada parte deve ter metade de seu tamanho original para garantir que os tamanhos sejam equivalentes. Assim, para entender a equivalência de frações, é necessário estabelecer relações compensatórias entre a área e o número de partes iguais em que a unidade foi dividida.

De acordo com as respostas dos alunos a esta questão, e as considerações de Vasconcelos et al. (2017), o raciocínio segue a seguinte linha: se há quatro quadrados e tenho que pintar um meio, pintarei 2 quadrados; se há nove quadrados e preciso pintar um terço, pintarei 3 quadrados, ou seja, foi encontrado um número que compense a área da figura com o número de partes em que ela foi dividida. Assim, percebe-se uma relação com a equivalência de fração, de acordo com o raciocínio exposto pelo aluno e as relações de equivalência discutidos por Monteiro e Pinto (2005), quando citam uma situação em que são servidas três pizzas para serem divididas igualmente entre quatro meninas e seis pizzas para serem repartidas igualmente entre oito meninos. Por meio do uso de esquemas e tabelas é natural que os alunos percebam que comeram a mesma quantidade e as frações equivalente surjam assim, muito naturalmente.

Discussões em sala relativamente à primeira parte da Tarefa "Vamos Circular"

Após os alunos terem resolvido totalmente a tarefa e antes de ser passado o vídeo que foi mostrado e explicado na metodologia deste trabalho, a partir das transcrições dos vídeos gravados nas aulas de aplicação das tarefas, apresentamos alguns trechos do momento de socialização e discussão realizada com a turma no coletivo.

A discussão da primeira questão da tarefa (figura 1) foi aberta com a pergunta:

***Professora**: Quais vocês acham que possuem um terço pintado?*

***Professora**: Se vocês acham que há uma parte de três pintadas, quando formos pensar em fração, quando temos um terço, nós temos o nosso inteiro, o todo, neste caso uma figura, dividida por quanto?*

***Turma:** Por três*

***Professora:** Se eu falo que tem um terço pintado, eu estou falando que tem uma parte de três pintada. Só que essa parte de três e essas três partes do meu inteiro elas podem estar com tamanhos diferentes?*

Neste momento, alguns alunos respondem que não é possível. Volto à imagem e mostro que a forma A não está dividida em três partes com áreas iguais, chegando à conclusão de que ela não possui um terço pintada. A explicação continua com a fala de um aluno, que percebe que na representação desta forma, ele não conseguiu identificar que a linha que divide a figura está em uma posição que não a divide em três partes iguais.

Em seguida fomos para a letra B da tarefa "Vamos circular", a pergunta foi:

***Professora**: Quem acha que não possui um terço pintado?*

***Aluno1:** Eu acho que não tem um terço pintado, porque se tivesse um terço só teria uma parte das três pintadas e ali tem três pintadas*

***Professora**: Três partes de quantas pintadas?*

***Aluno 1:** De oito*

***Professora**: Então eu tenho três partes pintadas de oito, sendo três oitavos.*

Neste momento escrevo na lousa $\frac{3}{8}$ para que seja visualizada como a fração é representada numericamente, não discutimos termos como numerador e denominador, mas já citando de maneira breve como é lida essa fração “três oitavos”. É importante salientar explicar como o termo foi abordado com os alunos, porque o tema frações ainda não havia sido inserido “formalmente” nas aulas, considerando as práticas de usuais de sala de aula, e como afirma Van de Walle (2009), durante as discussões essenciais de assuntos relacionados às frações, é um momento propício a introduzir o vocabulário das partes fracionários. Este momento deve ser bastante casual e não sendo necessário, no momento de introdução ao tema, insistir em qualquer simbolismo da fração. Os alunos terão tempo suficiente para que isso ocorra em momentos específicos. O autor enfatiza que as crianças devem estar cientes das partes, da igualdade entre partes e do número de partes que compõem o todo, pois com o tempo estarão familiarizados com o uso dessas novas aprendizagens.

Seguimos com as discussões com o foco na letra C:

***Professora**: Tem ou não tem um terço pintado?*

***Aluno2:** Eu acho que tem, porque tem um traço dentro das duas bolas e tem um pouco da bola pintado.*

***Professora**: “Um pouco da bola”, é o mesmo tamanho da figura se eu dividir em três partes?*

***Turma:** Não*

***Professora**: Por que que eu não posso falar que possuo um terço?*

***Turma**: Porque precisa ter as três partes do mesmo tamanho.*

No diálogo para chegar na conclusão se a letra D tem ou não tem um terço pintado, iniciamos a conversa com a pergunta de quem acha que possui um terço pintado. A maioria da turma responde que não possui um terço pintado, somente um aluno (Aluno 2) que responde que há:

***Aluno2:** Porque se juntarmos as duas partes que estão pintados, vai dar metade da figura.*

O aluno que chega nessa conclusão é o mesmo que afirma que na letra C não havia um terço pintado.

***Professora**: Muito bom (...) e se olharmos sem entender que podemos fazer essa comparação com a parte que não está pintada. Conseguiríamos afirmar que possui um terço pintado?*

***Turma:** Não*

***Professora**: Por que não?*

***Aluno 2:** Porque só de olhar assim rápido, não. Porque você vê que tem duas partes pintadas que são menores que a parte que não está pintada.*

O comentário do aluno 2 evidencia que para compreender o conceito de fração é necessário ultrapassar a percepção visual imediata, é necessário estabelecer a relação entre o tamanho das partes. Cabe ressaltar que o ensino de frações focado exclusivamente em representações usuais pode levar os alunos a desenvolverem seus raciocínios sobre fração fundamentados principalmente na percepção, em detrimento das relações lógico-matemáticas nelas envolvidas (CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006).

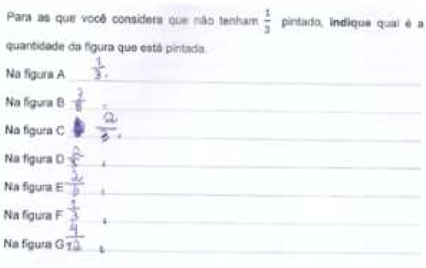
Dando sequência na discussão da Tarefa "Vamos Circular", o vídeo elaborado (figura 2) foi passado para poder explicar aos alunos se surgisse uma resposta como foi dada pelo aluno acima.

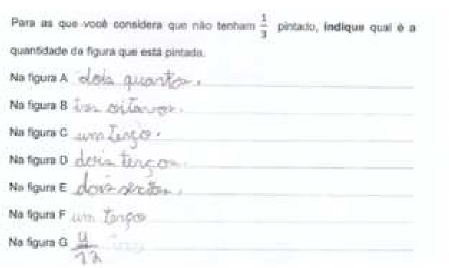
No momento de visualização do vídeo, o objetivo foi ressaltar a divisão que foi feita, supondo que a imagem D fosse um hexágono regular, e esclarecer o porquê seria possível afirmar que há um terço pintado, de forma a ampliar as compreensões dos alunos, considerando as discussões já realizadas. Em cada parte do vídeo, segui explicando de acordo com o que foi proposto por um dos alunos, tentando ao máximo ilustrar o raciocínio.

Neste momento, o foco da análise muda para a segunda questão da Tarefa "Vamos Circular". A partir da leitura da produção dos alunos, organizei considerando três aspectos e características, primeiro o conjunto de alunos que possuem conhecimento de escrever com número fracionário, segundo os alunos que possuem alguma ideia de como representar um número fracionário, porém ainda não estabelecem relações com o significado da fração no sentido parte-todo e, por último, o
emprego dos números naturais para a indicação de qual quantidade a figura estava pintada. As respostas dos alunos que serão exibidas a seguir exemplificam as produções que permeiam conclusões semelhantes.

Foi selecionada uma produção por representar os alunos que seguiram uma linha de raciocínio semelhante: todos os alunos que produziram essas respostas escreveram suas conclusões com número fracionário. No denominador, a quantidade de partes em que as imagens foram divididas, exceto para as letras A, C, e F, que, nessas produções, há conflito de respostas. Nas demais, os alunos permanecem com registros iguais.

Figura 14: Produções com registro por meio de frações


Para as que você considera que não tenham $\frac{1}{3}$ pintado, **indique** qual é a quantidade da figura que está pintada.
Na figura A $\frac{1}{3}$.
Na figura B $\frac{3}{8}$.
Na figura C $\frac{2}{3}$.
Na figura D $\frac{2}{3}$.
Na figura E $\frac{2}{6}$.
Na figura F $\frac{1}{3}$.
Na figura G $\frac{4}{12}$.


Para as que você considera que não tenham $\frac{1}{3}$ pintado, **indique** qual é a quantidade da figura que está pintada.
Na figura A dois quartos.
Na figura B três oitavos.
Na figura C um terço.
Na figura D dois terços.
Na figura E dois sextos.
Na figura F um terço
Na figura G $\frac{4}{12}$

A: $\frac{1}{3}$	*A: dois quartos*
B: $\frac{3}{8}$	*B: três oitavos*
C: $\frac{2}{3}$	*C: um terço*
D: $\frac{2}{3}$	*D: dois terços*
E: $\frac{2}{6}$	*E: dois sextos*
F: $\frac{1}{3}$	*F: um terço*
G: $\frac{4}{12}$	*G:* $\frac{4}{12}$

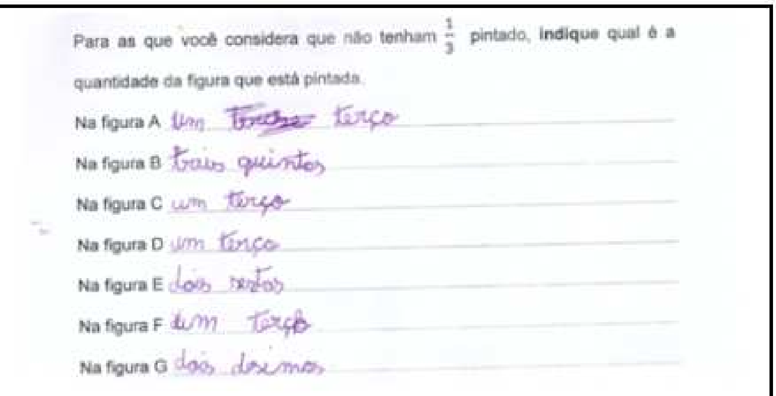
Fonte: arquivo da pesquisadora

Para melhor visualização e entendimento, é sugerido que se observe a "Figura 1 – Primeira questão da Tarefa "Vamos Circular". A parte que ressalto ao analisar esse tipo de resposta refere-se ao conhecimento dos alunos ao registrar todas as suas respostas em fração reconhecendo que, para explicar o motivo de não terem colocado como um terço pintado as demais figuras, eles, de uma forma intuitiva, estabelecerem relação com partes menores do inteiro e recorreram ao uso da fração, relembrando que esses estudantes ainda não estudaram o conteúdo de frações em aula.

Por meio desses registros, podemos notar quanto é importante propor tarefas distintas das utilizadas comumente em livros didáticos e apostilas e realizar discussões a partir das produções dos alunos de maneira efetiva para que, a partir da relação entre a tarefa e as experiências prévias e intuitivas dos alunos, não se percam com o tempo. Ressaltando Campos et al. (2014, p. 105) "as frações (ou números racionais na sua representação fracionária) são essenciais para o progresso do aluno na aprendizagem de matemática, sendo, portanto necessário que a escola encontre meios para promover a compreensão desse objeto matemático."

Na figura 15, nota-se que o aluno escreveu todas as frações por extenso.

Figura 15: Exemplos do conhecimento prévio acerca do numerador e denominador de uma fração


Para as que você considera que não tenham $\frac{1}{3}$ pintado, **indique** qual é a quantidade da figura que está pintada.

Na figura A um terço
Na figura B treis quintos
Na figura C um terço
Na figura D um terço
Na figura E dois sestos
Na figura F um terço
Na figura G dois desimos

"um terço; treis (sic) quintos; um terço; um terço; dois sestos (sic); um terço; dois desimos (sic)"

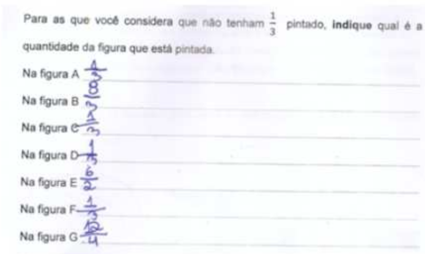
Fonte: arquivo da pesquisadora

O que podemos observar no registro acima é que, ao contar as partes das imagens, ele contou o total de partes pintadas e colocou como numerador; e o total de partes da imagem, como denominador, independente se estavam em partes iguais ou não. Porém, nas imagens B e G, ocorreu algo diferente. Ao contar a quantidade de partes em que a imagem B estava dividida, colocou como denominador as partes que não estavam pintadas; e, como numerador, as partes pintadas: o que era para ser $\frac{3}{8}$ passou a ser $\frac{3}{5}$. Na imagem G, houve uma junção das partes pintadas, contando somente uma parte na figura que seria uma fração equivalente a um terço.

Assim as partes que estavam divididas e pintadas lado a lado foram contadas como uma só: onde seria $\frac{4}{12}$, passou a ser $\frac{4}{10}$. Este tipo de resposta está associado a uma das questões discutidas por Campos et al. (2014), quando evidenciam que ao trabalharmos com figuras geométricas e frações, mesmo com pesquisas com olhar otimista pelo assunto, têm-se também questões de como podem ter crianças que se deixam "facilmente seduzir pela percepção, e julgam, por exemplo, que as metades de dois retângulos do mesmo tamanho não são equivalentes se sua aparência perceptual for muito diferente, porque elas resultam de cortes feitos de modo diverso (um retângulo cortado na diagonal e o outro dividido com um corte paralelo à base produzem metades de aparência bastante distinta" (CAMPOS et al., 2014, p. 107).

A figura 16 exemplifica os alunos que possuem alguma ideia de como representar um número fracionário, porém ainda não estabelecem relações com o significado da fração no sentido parte-todo. Possivelmente um entendimento mais significativo será revelado a partir de outras tarefas e discussões, de forma que percebam as relações entre os sentidos e significados das frações. Campos et al. (2012) explicam que o numerador e o denominador não podem ser analisados representando quantidades isoladamente, como com os inteiros, o seu significado depende da relação que há entre os dois. Monteiro e Pinto (2005, 2007) também fazem referência ao sentido do numerador e do denominador em situações de parte-todo, em um contexto de comparação entre as partes e um todo, neste caso o numerador assume o significado de partes destacadas e o denominador o número de partes em que a unidade está dividida.

Figura 16: Exemplos do conhecimento prévio acerca do sentido invertido do numerador e denominador de uma fração


Para as que você considera que não tenham $\frac{1}{3}$ pintado, **indique** qual é a quantidade da figura que está pintada.

Na figura A

Na figura B

Na figura C

Na figura D

Na figura E

Na figura F

Na figura G

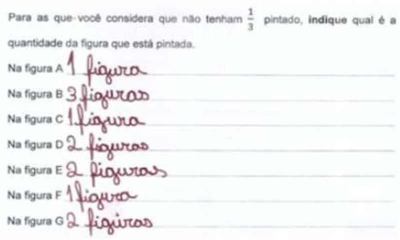
$A{:}\ \frac{1}{3}\ ;\ B{:}\ \frac{8}{3}\ ;\ C{:}\ \frac{1}{3}\ ;\ D{:}\ \frac{1}{3}\ ;\ E{:}\ \frac{6}{2}\ ;\ F{:}\ \frac{1}{3}\ ;\ G{:}\ \frac{12}{4}$

Fonte: arquivo da pesquisadora

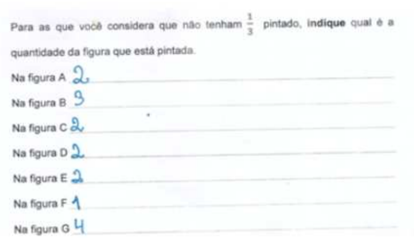
Na seguinte produção, nota-se o emprego dos números naturais para a indicação de qual quantidade da imagem estava pintada. Mesmo sendo uma representação de um número menor que a unidade, foi registrada somente a parte que estava pintada.

Há duas observações para serem feitas nessa produção. A primeira é sobre o contato discrepante que as crianças possuem com números naturais em relação às frações. Elas são expostas aos naturais desde muito novas e poucas vezes presenciam falas ou escritas com números fracionários, sendo que o mais utilizado em nossa sociedade é a fração para representar metade. Campos et al. (2012) afirmam que, desde muito cedo, as crianças são expostas aos números naturais, por exemplo, as contagens relacionadas com a ordenação desses números estão presentes nas histórias infantis com informações numéricas que são importantes para a compreensão do enredo, como em contos infantis.

Figura 17: Registro por meio dos números naturais



Para as que você considera que não tenham $\frac{1}{3}$ pintado, **indique** qual é a quantidade da figura que está pintada.
Na figura A 1 figura
Na figura B 3 figuras
Na figura C 1 figura
Na figura D 2 figuras
Na figura E 2 figuras
Na figura F 1 figura
Na figura G 2 figuras



Para as que você considera que não tenham $\frac{1}{3}$ pintado, **indique** qual é a quantidade da figura que está pintada.
Na figura A 2
Na figura B 3
Na figura C 2
Na figura D 2
Na figura E 2
Na figura F 1
Na figura G 4

A: 1 figura	*A: 2*
B: 3 figuras	*B: 3*
C: 1 figura	*C: 2*
D: 2 figuras	*D: 2*
E: 2 figuras	*E: 2*
F: 1 figura	*F: 1*
G: 2 figuras	*G: 4*

Fonte: arquivo da pesquisadora

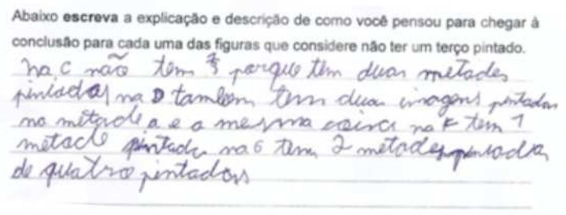
A segunda observação que precisa ser levada em consideração, ao analisar a questão: "para as que você considera que não tenham $\frac{1}{3}$ pintado, **indique** qual é a quantidade da figura que está pintada", ao não indicar como deveriam ser registradas as respostas, abrem-se inúmeras possibilidades para o registro das conclusões, como esses que foram feitos no grupo acima, que até mesmo foi registrado como está escrito na questão, respondendo "*1 figura; 2 figuras; 3 figuras [...]*". No sentido desta tarefa, pode-se considerar que esta abertura não foi totalmente positiva, pois pode ter desviado a atenção do aluno para o registro de uma fração, o que era esperado como resposta.

Conhecimento dos alunos ao justificar a fração encontrada na primeira parte da Tarefa "Vamos circular"

A terceira questão da Tarefa "Vamos Circular" solicitava para que os alunos justificassem o porquê das figuras não assinaladas na primeira questão desta tarefa (ver Figura 2 – Primeira questão da Tarefa "Vamos Circular") não terem um terço pintado da área.

A produção abaixo ilustra o conjunto de respostas que relacionam a fração das partes das formas sendo metade, sendo que nenhuma das imagens foi dividida ao meio.

Figura 18: Relação com metade


Abaixo **escreva** a explicação e descrição de como você pensou para chegar à conclusão para cada uma das figuras que considere não ter um terço pintado.

na C não tem $\frac{1}{3}$ porque tem duas metades pintadas na D também tem duas imagens pintadas na metade a e a mesma coisa na F tem 1 metade pintada na G tem 2 metades pintadas de quatro pintados

"Na C não tem $\frac{1}{3}$ porque tem duas metades pintadas na

D também tem duas imagens

pintadas na metade a e a mesma coisa na

F tem 1 metade pintada na G tem

2 metades pintadas de quatro pintadas."

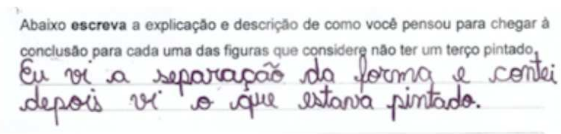
Fonte: arquivo da pesquisadora

Em outras produções encontra-se o mesmo sentido no registro, por exemplo: *"Eu pensei que as figuras tem que estar pintado uma parte da metade."* ou "*Eu cheguei a essa conclusão porque as figuras que circulei elas estão divididas pela metade."*

No início do estudo de frações, muitas ideias remeterão à metade, pois os conceitos ainda não estão bem estabelecidos. Como também é abordado pelas autoras Campos et al. (2014), as palavras meio, meia e metade são usadas com mais naturalidade pelas crianças, pois o contato com esses termos, tanto na fala quanto na prática é mais usual do que outras frações e suas representações. Até mesmo quando utilizamos unidade de medida, o uso é frequente da palavra meio: meio metro, meio litro, meio quilo, meio centímetro, meia hora entre outras utilizações. Desse modo, é possível depreender que quando observam o inteiro divido em partes, os alunos ainda compreendem "partes" como "metades".

A produção abaixo exemplifica este grupo de alunos que contaram as partes que estavam pintadas e concluíram suas justificativas a partir dessa visualização.

Figura 19: Elaboração da fração contado partes do inteiro


Abaixo **escreva** a explicação e descrição de como você pensou para chegar à conclusão para cada uma das figuras que considere não ter um terço pintado.
Eu vi a separação da forma e contei depois vi o que estava pintado.

"Eu vi a separação da forma e contei depois vi o que estava pintado"

Fonte: arquivo da pesquisadora

A partir dos seguintes registros transcritos de duas produções: *"Contanto quanto está pintado e quantas partes cortadas"*; *"Primeiro contei quantos espaços tinham pintados e depois contei tudo"*, indicam que os alunos utilizam de determinados procedimentos para identificar e justificar suas compreensões sobre frações que estão associados ao sentido de parte-todo. Como abordado por Almeida e Ribeiro (2019, no prelo), uma das primeiras ideias (quando não a única) trabalhadas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental sobre as frações é, considerá-la como uma forma de escrever a relação entre uma parte e um todo ou um determinado número de partes, quando considerando o todo dividido em um número de partes maior que as que se consideram – fração entendida como parte-todo.

Na sequência são apresentadas mais transcrições de produções que revelam as compreensões no mesmo sentido já discutido: *"Eu pensei que um terço é (sic) três quadrados e um pintado etão (sic) eu olhava a figura e via se tinha um quadrado pintado e se não tivesse não teria chance de ser um terço"* e *"Pois um terço tem que ter 3 quadrados e um dos quadrados tem que tá (sic) pintado e a figura B; D e G não estão assim mas a figura A; C e F estão.*"

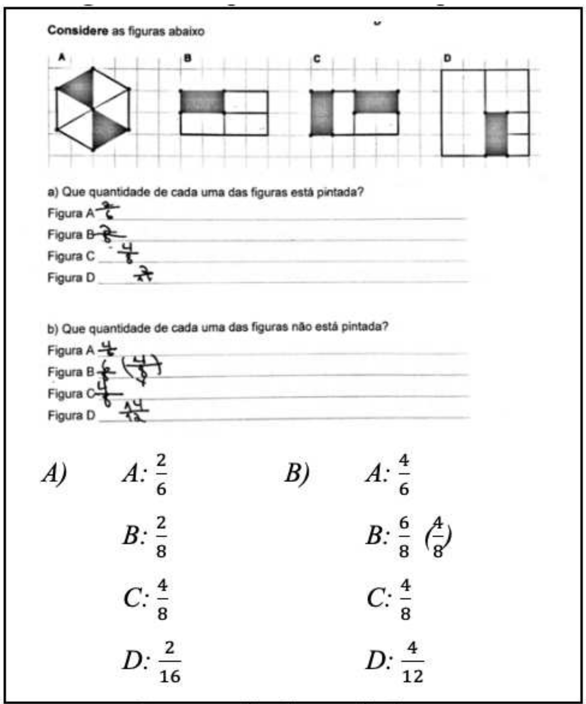
Conhecimento e percepções dos alunos quanto a identificação da fração da área da figura da Tarefa "Vamos explorar"

Após verificar todas as respostas, uma tabela foi elaborada, em que constavam todas as respostas dos alunos e também a porcentagem de respostas que estavam de acordo com o que era esperado, ou seja, corretas. Todos os registros são discutidos e, também, as soluções coerentes com cada questão.

Ressaltando que as principais perguntas para esta tarefa são as seguintes: "**Que quantidade de cada uma das figuras está pintada?" –** questão 1 e **"Que quantidade de cada uma das figuras não está pintada?"** – questão 2**.**

Ao analisar as produções dos alunos para a alínea a) observamos que 40% das respostas dos alunos registaram corretamente a fração $\frac{2}{6}$ e para primeira questão, no entanto para a segunda, este percentual cai para 13,3%. Na sequência apresentamos uma produção de respostas de acordo com o que era esperado relativamente à alínea a.

Figura 20: Respostas dentro do esperado

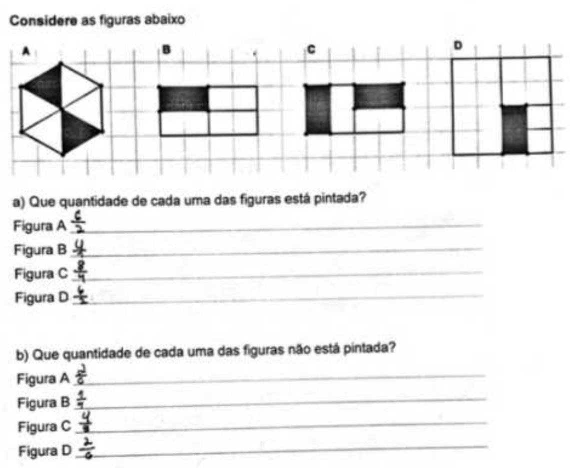


Fonte: arquivo da pesquisadora

Tomando como exemplo a figura acima, a mesma porcentagem de alunos registrou corretamente a parte pintada da imagem B, 40% e, a parte não pintada, a taxa foi de 0% de acertos. Na letra C, a porcentagem para é de 33,3% para a primeira questão e para a segunda, 20%.

Na letra D, 13,3% concluíram a parte pintada com a fração $\frac{2}{16}$ e, novamente, nenhum aluno registrou de maneira correta a quantidade de partes não pintadas. Nesta produção o aluno registra corretamente a parte pintada, porém para a parte que não está pintada, registra $\frac{14}{12}$, trocando o denominador "16" pelo "12". É possível interpretar esta resolução como o aluno ter contado os quadradinhos que estão fora do quadrado que possui as duas partes pintadas. Os demais alunos (60%) que responderam diferente do que era esperado, utilizaram diferentes maneiras de registrarem suas respostas. Dois alunos concluíram que a parte pintada da letra A representava $\frac{6}{2}$. Neste registro pode-se perceber que eles escreveram utilizando o recurso fração, porém não reconhecem o significado do numerador e do denominador, invertendo a maneira como deveria ser registrado, esta representação continua sendo utilizada de forma invertida também nas letras seguintes, B, C e D, como pode-se observar abaixo:

Figura 21: Inversão de denominador e numerador



A) $A: \frac{6}{2}$ $B: \frac{4}{1}$ $C: \frac{8}{4}$ $D: \frac{6}{2}$

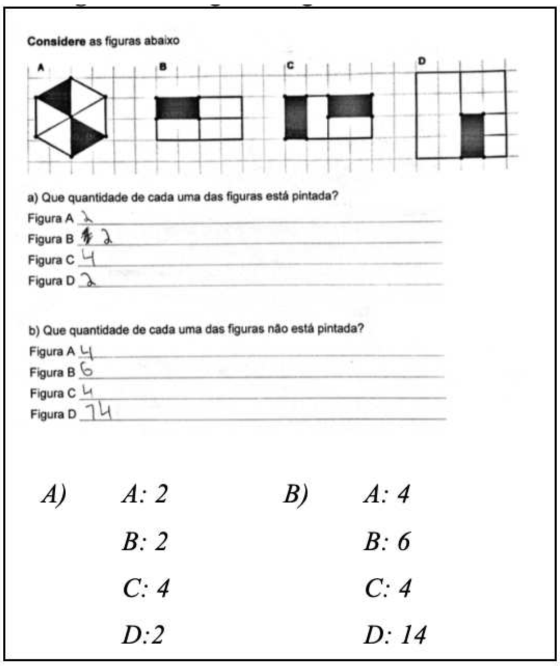
B) $A: \frac{2}{8}$ $B: \frac{1}{1}$ $C: \frac{4}{8}$ $D: \frac{2}{6}$

Fonte: arquivo da pesquisadora

Associando este tipo de resposta aos resultados da pesquisa com professores, conduzida por Pinto e Ribeiro (2013), na qual os autores observaram que 64% dos respondentes apresentaram esse mesmo tipo de resposta, mesmo estando em nível diferente de formação. Para aos autores, provavelmente, os professores não perceberam ou desconhecem o fato de que quando o numerador é maior que o denominador, a fração representa uma quantidade maior que a unidade. Neste estudo, como os alunos estão mostrando os seus conhecimentos prévios em relação à fração, ainda há a necessidade de maior explicação sobre os significados desses termos. Nesse sentido, os autores afirmam que introduzir algoritmos sem desenvolver a conexão entre números racionais e a realidade dos alunos pode dificultar a aprendizagem. Assim para que o oposto aconteça, quando o aluno compreende o conceito de número racional, ele pode desenvolver estratégias para a solução de problemas, sendo que essas estratégias são a flexibilidade de cálculos para resolução de problemas no seu futuro percurso escolar.

Outro tipo de resposta apresentada em sete produções envolveu escrever literalmente o que foi solicitado na tarefa

Figura 22: Registro seguindo o enunciado



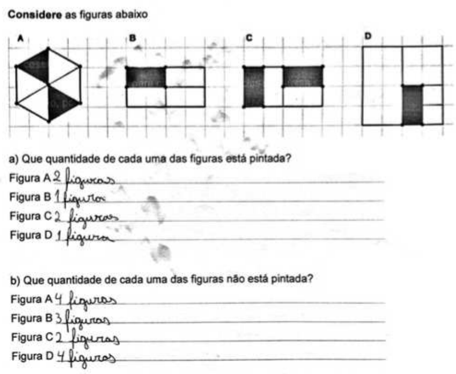
Fonte: arquivo da pesquisadora

Pode-se observar que, neste tipo de resposta, o aluno não se remeteu ao uso de frações, mas utilizou o número natural para determinar as partes pintadas da figura. Fato que já foi apresentado pelos alunos em outras produções das tarefas anteriores (ver figuras 12 e 17), em que na resposta foi utilizada também os números naturais para se referir a parte fracionada da figura.

Respostas desse tipo estão associadas às compreensões de Nunes (2003) e Streefland (1997) ao discutirem que as dificuldades dos alunos com relação a aprendizagem dos números fracionários decorrem do fato de a criança aplicar o conhecimento que possuem sobre os números inteiros às frações.

A seguir é apresentada outra produção em que se pode notar a mesmo linha de raciocínio em relação a contagem feita pelos números naturais.

Figura 23: Utilização dos números naturais para registrar partes menores que o inteiro



A) *A: 2 figuras*
B: 1 figuras
C: 2 figuras
D:1 figura

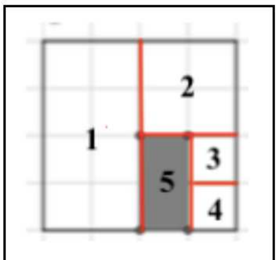
B) *A: 4 figuras*
B: 3 figuras
C: 2 figuras
D: 4 figuras

Fonte: arquivo da pesquisadora

Um registro que ocorreu de forma bastante interessante foi na conclusão que os alunos tiveram para a letra D em ambas perguntas norteadoras na tarefa. Nas demais, eles colocaram com bastante clareza as partes pintadas e as não pintadas, representando-as por meio de frações ou de outra forma, mas a contagem do número de quadrados que possuíam a mesma área, foi em sua maioria, a que realmente estavam divididas as imagens. Por exemplo, a A estava dividida em seis partes, ou os alunos escreviam por meio de fração a parte pintada e não pintada, ou por meio dos números naturais, porém fazendo a contagem da quantidade exata de partes divididas. Isso segue para a maioria dos registros da B e da C.

Cinco alunos registraram as respostas da letra D como uma parte pintada e quatro partes não pintadas, não necessariamente registrando da maneira como exemplifiquei aqui, mas podendo aparecer como na figura 23. Uma interpretação feita para esta resposta pode ser observada a seguir com a ilustração abaixo:

Figura 24: Ilustração da letra D dividindo-a em cinco partes de áreas diferentes

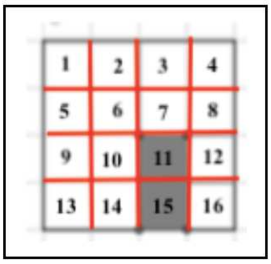


Fonte: arquivo da pesquisadora

Neste caso, podemos inferir que não houve a conservação de área, ou seja, o aluno simplesmente utilizou a divisão feita com os traços da imagem e como se todas as áreas tivessem a mesma medida.

Ainda referente a letra D, na qual ocorreu uma maior variedade de respostas fora do que era esperado, quatro alunos indicaram que a figura continha catorze partes pintadas, seguindo a mesma linha de raciocínio para catorze pintadas, quatro alunos escreveram como havendo duas partes não pintadas (observar figura 20). Para esclarecer o que foi inferido a partir destas respostas, segue uma ilustração feita a partir do conhecimento dos alunos que foi mostrada nessas produções:

Figura 25: Ilustração da letra D dividindo-a em partes de áreas iguais



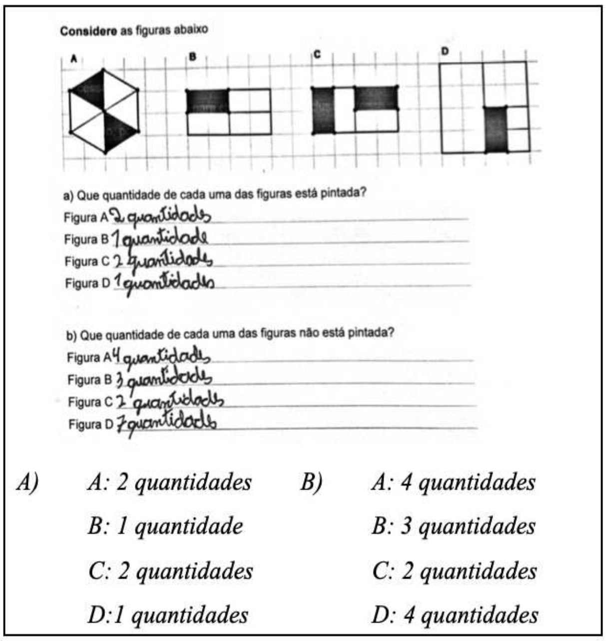
Fonte: arquivo da pesquisadora

Pode-se notar que há no total dezesseis quadradinhos, sendo que dois realmente estão pintados e catorze não estão. Fato importante, é que para neste registro, houve a divisão igual da área de cada quadradinho.

Cabe evidenciar que a questão solicitava que o aluno indicasse a quantidade de partes pintadas e não pintadas, não houve indicação de que a resposta deveria ser registrada em fração, por este motivo, ocorreram diversas resoluções fora do que se era esperado do tópico frações.

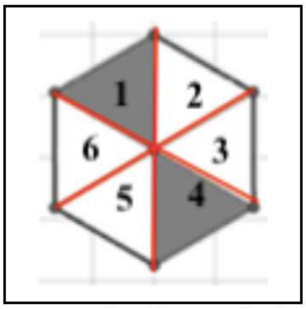
A seguir é apresentado um exemplo de produção que representa todas as respostas dos alunos que seguiram a mesma linha de raciocínio e, em seguida, a quantidade de respostas para cada imagem da tarefa.

Figura 26: Registro utilizando a medida como “quantidades”



Fonte: arquivo da pesquisadora

Figura 27: Ilustração da letra A dividindo-a em seis partes iguais

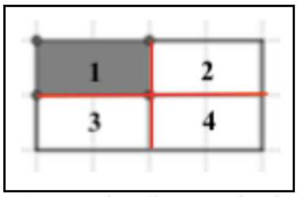


Fonte: arquivo da pesquisadora

Sete alunos responderam que haviam duas partes pintadas e quatro não pintadas. Destes sete, quatro escreveram com o algarismo 2, dois escreveram “*duas frações*” e um registrou como “*2 quantidades*” (observar figura 25).

Quanto à segunda imagem, onze alunos responderam que havia quatro partes não pintadas, registrando de diferentes maneiras, como *“4 figuras”, “quatro frações”, “quatro partes”* ou *“quatro quantidades”*. Alguns registros podem ser visualizados nas produções já apresentadas.

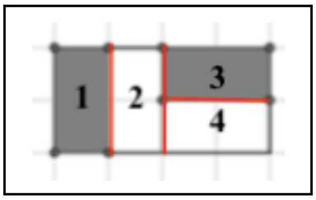
Figura 28: Ilustração da letra B dividindo-a em quatro partes iguais



Fonte: arquivo da pesquisadora

Para a imagem C, seis alunos registraram que continha uma parte pintada e nove responderam que haviam três partes não pintadas, também ocorrendo variações de registros, como *"3 quantidades*" (observar figura 26) *"três frasoes (sic)"* e "*três figuras*" (figura 23).

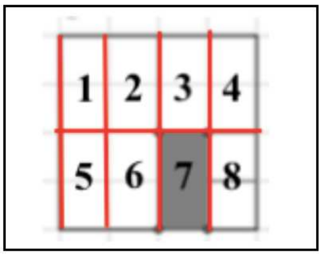
Figura 29: Ilustração da letra C dividindo-a em quatro partes iguais



Fonte: arquivo da pesquisadora

Nesta figura, três alunos colocaram que a imagem continha duas partes pintadas, registrando como *"2 figuras", "duas frações" ou "2 quantidades*". Seis concluíram que duas partes não estavam pintadas, as respostas continham também as mesmas palavras se referindo as áreas.

Figura 30: Ilustração da letra D dividindo-a em oito partes iguais



Fonte: arquivo da pesquisadora

Por último, na letra D, três alunos escreveram que havia uma parte pintada e dois alunos indicaram que sete partes não estavam pintadas.

Com o que foi exposto acima, nota-se que as perguntas e a maneira como foram escritas tiveram grande efeito para cada aluno escrever a sua percepção. Levando a interpretação que tais respostas estão associadas ao tipo de questão proposta.

Discussões em sala da Tarefa "Vamos explorar"

Ao terminar e recolher a atividade, comecei a discussão com a primeira pergunta:

Professora: *O que a gente sabe sobre o que discutimos sobre frações, podemos* *concluir algo sobre a letra A desta atividade?*

Aluno 1: *Sim, que ela tem duas partes pintadas de seis.*

Professora: *Poderia então falar de quantas partes não estão pintadas?*

Alunos: *Sim!*

Aluno 2: *Quatro sextos.*

Neste momento, escuto a resposta do Aluno 2 e começo a trabalhar e a entrar mais em detalhes a partir da sua resposta.

Professora: *Mas por que eu posso falar em fração desta imagem?*

Aluno 3: *Porque a figura tem três partes mais três partes, igual a seis partes.*

Professora: *Então ela está dividida em seis partes iguais. Eu poderia falar em fração se ela não estivesse dividida em partes iguais?*

Alunos: *Não.*

Aluno 4: *Não, porque as partes precisam ser de mesmo tamanho.*

Notamos nesta discussão que eles já começam a ter um pouco de visualização em relação ao sentido parte-todo. Como é colocado por Pinto e Ribeiro (2013) o desenvolvimento da aprendizagem relativa a importância da concepção da unidade, é essencial uma discussão com os alunos sobre a importância da unidade, de modo que fique bem claro para eles que para considerar uma determinada fração temos sempre de considerar o todo que essa fração tem como referência. As discussões feitas levavam a essa percepção que poderia ser adquirida por meio das tarefas realizadas e da socialização das respostas.

Professora: *Na letra B, quanto que está pintada e quanto não está pintada?*

Aluno 1: *Um quarto e três quartos.*

Professora: *Por quê?*

Aluno 1: *Porque a imagem está dividida em quatro partes iguais e uma delas está pintada e três não estão.*

Aluno 2: *Eu coloquei que dois oitavos estão pintados.*

Professora: *Bacana! Se você colocou que dois oitavos estão pintados quanto você colocou que não estão pintados?*

A percepção do aluno 2, leva para começarmos a abordar sobre frações equivalente, com pode-se perceber pela discussão acima, foi introduzido a equivalência de frações muito naturalmente, sendo que não havia citado em nenhum momento a divisão da imagem em partes menores do que já estavam.

Professora: *Aluno 2, você sabe o que acabou de fazer falando assim do jeito que você me falou?*

A fala passa para outro aluno.

Aluno 1: *Ele dividiu em partes menores cada retângulo, mas deixando do mesmo tamanho cada parte.*

Para poder me auxiliar, já relaciono esta fala do aluno com frações equivalentes demonstrando na lousa para todos os alunos o que aconteceu quando ele citou as duas frações equivalentes. Passo para a letra C, perguntando se eles já conseguem falar outras frações, um responde da seguinte maneira

Aluno 3: *Seis por quatro*

Professora: *Por quê?*

Aluno 3: *Porque se você dividir no meio vai dar oito pedaços.*

Professora: *Então pode ser seis por quatro?*

Aluno 3*: Não, vai dar diferente. Parece que vai ser metade da figura.*

Professora: *Metade da figura, por quê?*

Aluno 3*: Porque vão ter quatro partes pintadas e quatro não pintadas e a figura está dividida em oito partes.*

Professora: *Então pensando já desta maneira, vamos para a letra D. Dá para fazer uma fração com as partes pintadas?*

Alguns respondem que sim e outros que não.

Professora: *Por que não dá?*

Aluno 3*: Porque as partes não estão divididas igualmente. Mas até dá, porque quando você olha assim rápido não dá. Mas aí você pode cortar em partes menores.*

Para demonstrar, peço ao aluno que respondeu que vá até a lousa e demonstre o que pensou, com isto conclui dezesseis quadradinhos e que dois estão pintados e quatorze não estão pintados.

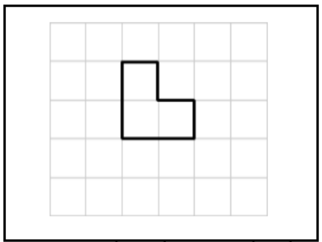
Com esta discussão, percebemos o quanto os alunos começam demonstrando os seus conhecimentos e os relacionam com as experiências que estávamos tendo durante as tarefas. Algumas percepções começaram a surgir naturalmente sem ao menos eu citar e pedir para ser feito, como as frações equivalentes. Termino a discussão pedindo para que eles achem mais frações equivalentes da última imagem e a conclusão é satisfatória quando apresentam outras frações, como um oitavo se referindo a dois dezesseis avos e sete oitavos se referindo a quatorze dezesseis avos.

Conhecimento e percepções dos alunos diante da identificação da outra metade na Tarefa "Vamos construir"

Esta tarefa envolveu a reconstrução de figuras, considerando uma de suas partes, a metade. A proposta era que os alunos construíssem a outra metade. A seguir apresentamos as porcentagens das respostas considerando as que efetivamente construíram a outra metade e as que não o fizeram.

Considerando a questão "**Se as partes abaixo são metade, quanto é o todo? Desenhe a parte que completa cada figura.",** apresentamos os resultados destacando cada uma das representações e produções dos alunos ao resolverem a tarefa.

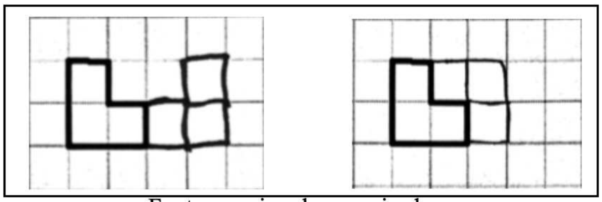
Figura 31: Letra A da Tarefa "Vamos construir"



Fonte: arquivo da pesquisadora

Nesta imagem, era feita a referência entre a parte de um todo contínuo. A quantidade de alunos que responderam de acordo com o esperado foi de 75%. A maioria conseguiu estabelecer uma relação com a imagem e sua área para poder replicar a outra metade com a quantidade exata da área da que já estava desenhada. Há duas produções que exemplificam as respostas mais registradas deste grupo:

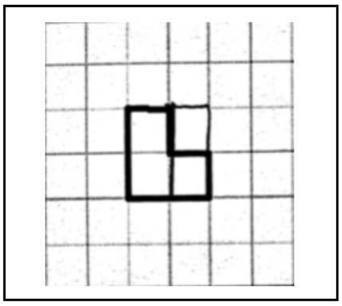
Figura 32: Exemplos de conclusões da maioria dos alunos na letra A da Tarefa "Vamos construir"



Fonte: arquivo da pesquisadora

Os erros mais comuns, tanto nessa quanto nas demais imagens que ainda serão apresentadas, decorrem da observação de que os alunos parecem querer "completa-la" e torná-la "mais regular" na percepção de um desenho completo, ou seja, formas usualmente vistas até esse momento da aprendizagem, como segue na produção abaixo:

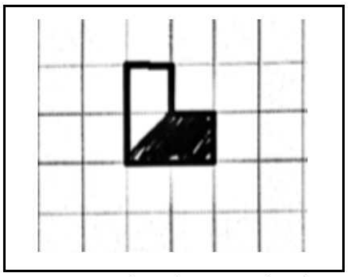
Figura 33: Tentativa de completar a imagem da letra A



Fonte: arquivo da pesquisadora

Nesta produção, pode-se perceber que o aluno “completou-a” com um quadradinho a mais, tornando-a um quadrilátero, por este motivo, entende-se que não foi compreendido a proposta da questão em fazer a outra metade do todo. Também foi registrado outra resposta que a possível interpretação possa ter sido feita a partir da palavra “metade” que se encontrava na questão.

Figura 34: Divisão da imagem pela metade

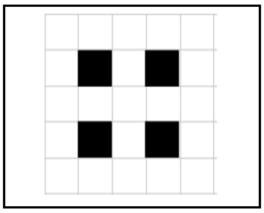


Fonte: arquivo da pesquisadora

Percebe-se que o aluno pintou metade da imagem e não desenhou a outra metade como foi solicitado. A familiarização do aluno com a palavra metade no meio escolar vem sendo trabalhada desde do segundo ano do Ensino Fundamental, sendo que A *Base Nacional Comum Curricular* (BRASIL, 2018) indica que o estudo deste tópico se inicie a partir deste ano e que se perpetue nos anos seguintes, tornando a abordagem mais aprofundada. Desta forma, encontrar a metade de uma forma ou objeto é mais comum para o aluno do que desenhar a outra metade do inteiro que já está estabelecido.

Na imagem B, a leitura e o raciocínio são voltados para a parte de um todo discreto, em que o aluno precisava estabelecer a outra metade observando a quantidade de quadradinhos de mesma área.

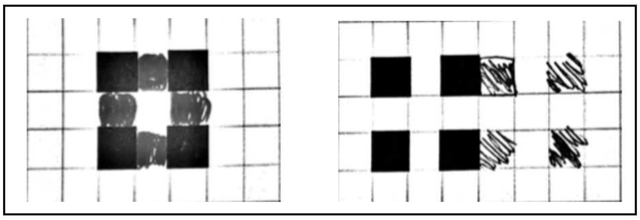
Figura 35: Letra B da Tarefa “Vamos construir”



Fonte: arquivo da pesquisadora

Desta figura, as respostas dentro do esperado foram de 81%. As produções apresentadas pelos alunos, foram as seguintes:

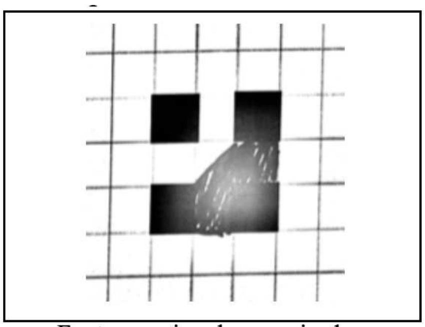
Figura 36: Exemplos de conclusões da maioria dos alunos na letra B da Tarefa “Vamos construir”



Fonte: arquivo da pesquisadora

O que se esperava como resposta para essa letra composta por quatro quadradinhos de mesma área, era que fossem desenhados outros quatro quadradinhos de mesma área. Nas produções, nota-se que os alunos desenharam de maneiras distintas a outra metade, porém a linha de raciocínio está de acordo com o que se espera para encontrar a outra metade do desenho. Os demais alunos fizeram apenas disposições diferentes, apresentando conclusões equivalentes. Já os alunos que não desenharam a outra metade, apresentaram respostas como a exibida abaixo, onde novamente procuram encontrar metade da imagem e não desenhar a outra metade

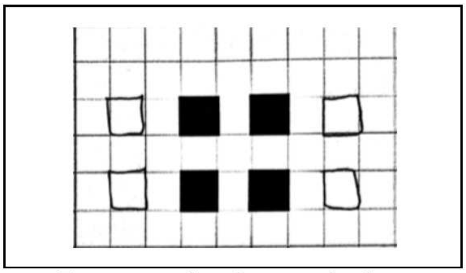
Figura 37: Exemplo de respostas sem encontrar a outra metade da imagem



Fonte: arquivo da pesquisadora

Outra resposta recorrente e que há discussão para esta imagem, será representada pela seguinte produção:

Figura 38: Registro de um aluno ao encontrar a outra metade da imagem presente na letra B



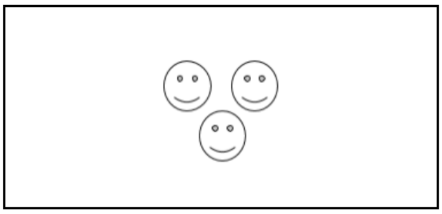
Fonte: arquivo da pesquisadora

Neste caso, o aluno desenha quatro quadradinhos e não os pinta, sendo que podemos considerar o que foi discutido por Almeida e Ribeiro (2019, no prelo) quando se inicia o trabalho sobre frações nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

> [...] Esta compreensão do número racional como uma fração com sentido parte-todo está fortemente associada à ideia de medida de grandezas contínuas (mas não exclusivamente), que não podem ser contadas, mas comparadas com um elemento de referência (unidade de medida) previamente estabelecido, que se considera a unidade de comparação (ALMEIDA; RIBEIRO, 2019, p.5).

A próxima imagem segue o que foi proposto na letra anterior.

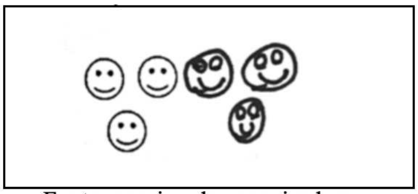
Figura 39: Letra C da Tarefa "Vamos construir"



Fonte: arquivo da pesquisadora

Das respostas, 69% responderam de acordo com o que era esperado. Na letra C, os três rostos representavam metade de uma imagem, assim, a outra metade deveria conter outros três rostos, independente das posições entre eles, mas tendo o mesmo tamanho e feição. Abaixo há um exemplo de produção com resposta dentro do que era esperado:

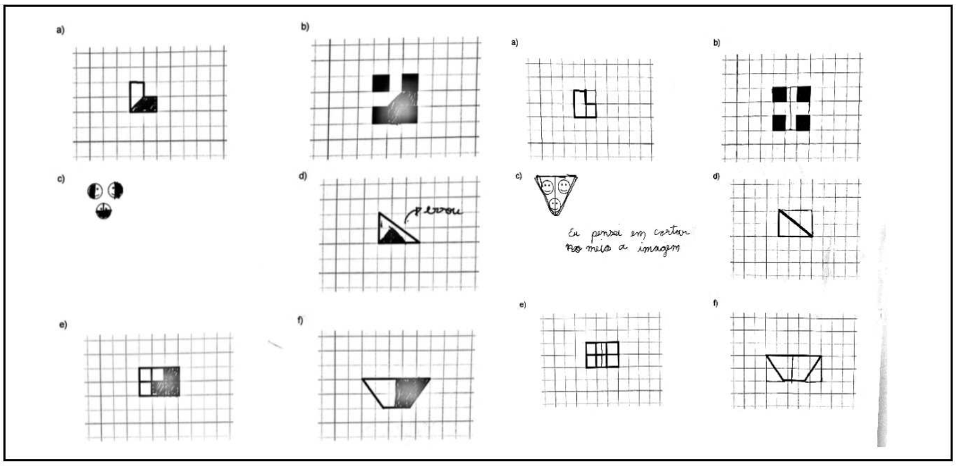
Figura 40: Produção identificando a outra metade



Fonte: arquivo da pesquisadora

Foi notado que, a utilização do pensamento apresentado nas figuras 34 e 37, aparece novamente nesta letra C, deixando evidente que foram os mesmos alunos que fizeram o registro de metade de todas as imagens que estavam na Tarefa "Vamos construir".

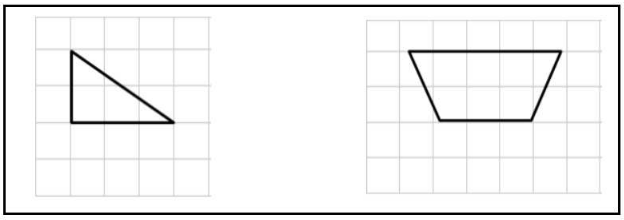
Figura 41: Exemplos de produções dividindo a imagem ao meio



Fonte: arquivo da pesquisadora

As letras D e F da Tarefa "Vamos construir", são apresentadas conjuntamente, pois se assemelham em relação a sua construção. Podem ser comparadas também com a letra A, porém as duas abaixo possuem ângulos diferentes de 90º e a A possuía somente ângulo retos, por este motivo, optou-se por analisá-las separadamente.

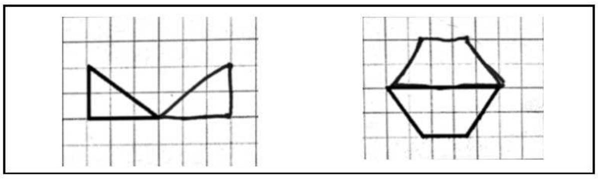
Figura 42: Letras C e D da Tarefa "Vamos construir"



Fonte: arquivo da pesquisadora

Para a letra D, houve um acerto de 75% das respostas e para a imagem F, 63%. Apresentamos as produções de dois alunos, as quais consideramos adequadas ou corretas.

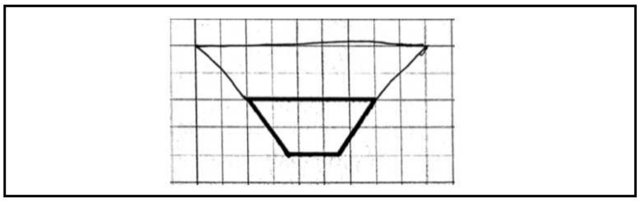
Figura 43: Exemplos de respostas dos alunos nas letras C e D dentro do que era esperado da Tarefa "Vamos construir"



Fonte: arquivo da pesquisadora

Nestas duas produções, os alunos demonstraram o seu conhecimento diante da tarefa ao mostrar como representaram a outra metade da imagem, um deles optou por "espelhar" em um dos lados e outro em outro lado, mas ambas estão dentro do que era esperado. Outra resposta que foi registrada, está representada a seguir:

Figura 44: Tentativa de "completar" a imagem

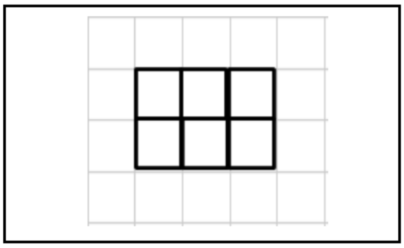


Fonte: arquivo da pesquisadora

Ao analisar este registro, ressalto o que já foi apresentado em produções anteriores desta tarefa, é possível depreender que, o aluno poderia entender de que a unidade está sem uma parte e não que a imagem está pela metade, sendo assim, não representando a outra metade exatamente semelhante em área. Como os autores Almeida e Ribeiro (2019, no prelo) destacam que para "recompor a unidade, é necessário identificar quantas partes de determinada quantidade (contínua ou discreta) são necessárias para obter a quantidade total que forma a unidade [...]" (ALMEIDA; RIBEIRO, 2019, no prelo), desta maneira a figura volta a ter a sua quantidade, discreta ou contínua, completa.

A última figura que será colocada nesta etapa do trabalho é a da imagem E. Muito semelhante ao que foi levantado na letra A desta tarefa.

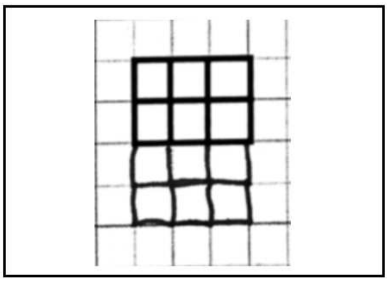
Figura 45: Letra E da Tarefa "Vamos construir"



Fonte: arquivo da pesquisadora

O percentual de alunos que resolveu a questão corretamente foi de 63%.

Figura 46: Exemplo de resposta dos alunos da letra E dentro do que era esperado da Tarefa "Vamos construir"



Fonte: arquivo da pesquisadora

Destes alunos que responderam dentro do que era esperado, todos indicaram mais seis quadradinhos, sendo que a disposição deles poderia ser alterada, mas não a quantidade e nem a área. O percentual que não correspondeu ao que era buscado na tarefa, foi apresentado na figura 39, onde os alunos encontraram a metade e não desenharam a outra metade.

Analisando no geral todas as respostas desta tarefa, pode-se ser levantado que o conhecimento do aluno em relação ao encontrar a metade de uma imagem é mais habitual do que o pensamento de apresentar uma imagem e colocá-la como metade, estimulando pensar no inteiro de diversas formas, porém dentro do que seria correto representa-lo. A dificuldade em realizar esta tarefa foi menor do que as anteriores, acredita-se que isto vem do fato que dia-a-dia do aluno e, também, em toda a sua vivência escolar o contato com esse questões que envolvam metade ocorreu com uma maior frequência do que frações, refletindo assim ao demonstrar o seu conhecimento na realização das tarefas deste trabalho.

Discussões em sala da Tarefa “Vamos construir”

As discussões continuam sendo extremamente ricas em compartilhar todas as percepções que os alunos tiveram ao fazer as tarefas. Nesta, conversamos sobre a Tarefa “Vamos construir”.

Terminando de fazer a discussão da tarefa “Vamos explorar”, começamos a socializar as conclusões da última tarefa feita pelos alunos. Inicio a conversa desenhando na lousa a primeira imagem da tarefa e perguntando da seguinte maneira:

Professora: *Isto era metade do inteiro, como era inteiro?*

Um aluno vem até a lousa e demonstra dividindo em três quadradinhos de mesma área a metade que estava desenhada e, em seguida, ele desenha os outros três quadradinhos que estavam faltando. Prossigo para a letra B e eles continuam a acrescentar que desenharam a outra metade com a mesma quantidade e forma do que já estava pintado. Na discussão não é exposto por eles os erros encontrados nas produções quando foi dividido o que já era metade ao meio, notando isso na letra C e D, mostro as possibilidades de fazer a outra metade, mas também apresento uma imagem que estaria errada e pergunto para eles se estava correto ou não. Desenho seis quadradinhos e pinto metade.

Professora: *Pessoal, esta representação está correta com o que foi pedido na tarefa?*

Aluno 1: *Não, pois eu pintei metade e a não estava pedindo isso.*

Professora: *O que estava pedindo então?*

Aluno 1: *Estava pedindo para desenhar a outra metade e não para pintar a metade da figura.*

Professora: *Então eu terei que desenhar mais quantos quadradinhos de mesmo tamanho do que já tinha?*

Aluno 1: *Mais seis.*

Para Pinto e Ribeiro (2013) é essencial uma discussão com os alunos sobre a importância da unidade, pois assim ficará bem claro para eles que para definirmos determinada fração, neste caso a outra metade para forma o inteiro, há sempre a necessidade de estar ciente e levar em consideração o todo a que essa fração faz referência. Por este motivo, trouxe essa questão no momento da socialização, para que os alunos que tiveram dificuldade de encontrar a outra metade pudessem observar o que era para ser feito e reconhecessem a maneira correta de relacionar com o todo a fração da unidade demonstrada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa contou com a análise das respostas das produções realizadas pelos alunos do quarto ano do Ensino Fundamental de uma escola particular da cidade de Campinas. Para atingir o objetivo de discutir e compreender a percepção que esses possuíam acerca do tópico frações com relação parte-todo, a partir da resolução e discussão de três tarefas que foram aplicadas em sala de aula antes da discussão mais formal sobre o tema.

A partir disso, ter como ponto de partida para a incorporação de um novo tópico matemático para alunos - o conhecimento que eles já possuíam – permitindo assim ajudar a guiar os passos que seriam assumidos para o ensino desse tema. Com base nessas considerações, o estudo tinha intenção de responder a seguinte questão de pesquisa: *que conhecimentos revelam alunos do 4º ano sobre frações como parte-todo em contextos contínuo e discreto antes do conceito ser formalizado em aula*?

O conhecimento reconhecido nesta pesquisa, encontra-se pautado nas vivências cotidianos fora e dentro da escola. O aluno mostra o quanto traz consigo um leque de experimentações e que usá-las é relevante e contribui para novos aprendizados em sala de aula. Observei que os registros realizados em fração feitos pelos alunos, foram a partir da minha escrita em determinados momentos das tarefas, utilizando assim, linguagem matemática. As percepções dos alunos também foram pautadas na simetria, conhecimento que eles traziam a partir das vivências escolares.

Como visto também nos PCN's (BRASIL, 1998), afirmam que é importante considerar o conhecimento prévio dos alunos, reconhecer o potencial matemático que ele pode resolver os problemas buscando relações entre o que ele já conhece e o que encontra dentro da escola, pois quando são tratados de forma isolada não se tornam uma ferramenta eficaz para a aprendizagem de novas ideias. Van de Walle (2009) também afirma que quando novas informações se conectam ao conhecimento já existente e compreensões são estabelecidas, o ensino alcança o seu objetivo.

As questões abordadas neste estudo e o modo que foram aplicadas em sala de aula, diferem do que normalmente é observado nos livros didáticos e apostilas e do que tem sido a minha prática docente, como citado por Almeida e Ribeiro (2019, no prelo), a formação (inicial e contínua), é essencial para que os professores que ensinam matemática, de forma a contribuir para a melhoria da prática pedagógica, o que consequentemente, afetará as aprendizagens dos alunos nesta área.

A maneira que foi percorrida a pesquisa com as tarefas sendo aplicadas antes do ensino formal do tópico - neste caso, as frações - proporcionou uma visão mais ampla do que os alunos traziam de suas experiências prévias e de seus saberes em relação ao que seria ensinado. Assim trazê-lo como principal atuante, permitindo que as atividades propostas fossem diferentes de apenas construir situações de aplicações deste conceito, pois contava com o conhecimento que o educando trazia.

Nas análises, constatou-se que os alunos elaboraram as suas conclusões – tanto nas situações nas quais as frações foram abordadas em contexto de quantidades discretas, quanto em quantidades contínuas, envolvendo a unidade como referência da metade – pautadas nas suas próprias experiências, pois foi facilitado para eles que assim o fizessem, sem juízo de valores no momento da elaboração de suas respostas. Somente nos momentos de discussão foi colocado como o que era esperado e o que não era esperado das respostas.

A questão que mais se obteve índice de acertos, foi a da "construção da outra metade da figura", mesmo que na maioria das vivências escolares os alunos sejam colocados para tornarem uma unidade em duas partes iguais. Este resultado pode ser consequência das vivências dos alunos desde do início da vida escolar, como já foi discutido no momento da análise desta tarefa. Gostaria de ressaltar, sobre a diferença que ocorreu quando foi analisado em relação a primeira e a segunda tarefa e a taxa de acerto em uma questão da segunda tarefa chegou a zero. Deste modo, pode-se perceber o quanto os alunos trazem consigo do que já vivenciaram e como é um campo extremamente rico que precisa ser levado em consideração dentro do ensino em sala de aula.

Este processo levou os alunos a refletirem sobre as suas respostas e a argumentarem quando estavam definindo relações ao conceito da fração, utilizando uma linguagem mais natural, constituindo legitimamente um pensamento questionador em seu processo de aprendizagem. Esta foi uma das principais contribuições para minha formação e atuação como docente. Esclarecer como é de suma importância levar em consideração os aspectos sociais e históricos do aluno. O trabalho não cita a continuidade no aprendizado formal da fração, mas como professora desta e de outras turmas, foi possível desenvolver uma visão esclarecedora de como foi benéfico fazer esse trabalho prévio com os estudantes.

O principal desafio dentro deste trabalho, que resultou frutos extremamente palpáveis, foi de como eu iria abordar um tema em uma sala de aula com o sistema apostilado e formal, o qual os meus alunos supostamente nunca tinham escutado falar dentro da escola, nesta suposição eu a uso pela questão mais formal do ensino das frações. Este desafio foi superado quando notei que todos eles embarcaram comigo para realizar a tarefa e como foi gratificante vê-los estabelecer relações de algo que não tinham repertório acadêmico, mas que as vivências do dia-a-dia traziam lembranças que poderiam ser resgatadas para elaborar suas conclusões.

Um aspecto relevante em relação às questões realizadas nas tarefas "Vamos circular" e "Vamos explorar" é o fato que alunos puderam abranger as suas respostas além do que era esperado em suas conclusões devido ao que foi pedido. Sendo assim, a análise baseou-se no que levou o aluno a dar aquele tipo de resposta a partir das palavras utilizadas na tarefa, mesmo que tenha proporcionado diferentes formas dos alunos pensarem a partir do que foi solicitado, pode também ter distanciado as respostas do tema que estava sendo trabalhado. Por este motivo, pode ter permitido a ampliação das compreensões das respostas dos alunos sobre frações, mas se houver a necessidade de não limitar para pesquisas futuras, sugiro uma retomada na composição do enunciado.

Como sugestão de expansão desta pesquisa, considero relevante o desenvolvimento de um trabalho que analise e reúna os resultados e discussões posteriores a maneira como foi apresentada neste trabalho, ou seja, verificar quais foram as principais consequências, tanto positivas quanto negativas, de se trabalhar previamente o tema como frações levando em consideração somente os conhecimentos prévios dos alunos. A partir desta pesquisa, podem ser levantados dados de processos metodológicos que abordem processos semelhantes para futuras aplicações deste conteúdo em sala de aula. Também ressalto a importância de formar um material que seja útil para os professores da Educação Básica que esteja dentro dos benefícios que a utilização de um processo que proporcione uma aprendizagem mais efetiva de um tema muitas vezes visto como difícil e impossível de se trabalhar de outras maneiras que não seja dentro do que é citado pelo livro didático ou apostila.

Não apontarei soluções para que seja trabalhado de uma única forma, mas reflexões de como um passo a mais pode ser dado na aprendizagem e percepção do conteúdo de frações quando se utiliza pesquisas como esta, que buscam proporcionar outros olhares para o ensino do mesmo. Essas reflexões podem ser enquadradas dentro de um curso de formação de professores para que os resultados buscados sejam cada vez melhores e mais efetivos e as possibilidades aumentem de acordo com a realidade de cada professor ou professora, levando em consideração a formação que ele ou ela teve.

É de grande valia ressaltar o uso de pesquisas realizadas no âmbito da educação em cursos de formação de professores, para que esses trabalhos cheguem ao seu real objetivo, auxiliar na aprendizagem dos estudantes. O papel dessa pesquisa é na promoção de reflexões, conscientização e até renovação nos recursos disponíveis aos docentes. Proporcionando olhares fora do costume, pois os indivíduos que estão no papel de alunos possuem uma diversidade de experiências e diferentes contextos sociais, mas o objetivo do professor não se altera e nem a responsabilidade atribuída a ele, um trabalho complexo que muitas vezes a preocupação que é colocada em cima de sua função pode se transformar em passar o seu conhecimento somente utilizando a memorização de cálculos, formas e padrões pré-estabelecidos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, C. M. Conhecimento Especializado do Professor no âmbito das Frações: uma discussão sobre a importância da unidade**.** GEPEMAI: Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática no/dos Anos Iniciais. Campinas, 2019. No prelo.

BERTONI, N.E. Frações e Números Racionais –concepções, fundamentos lógicos e obstáculos à aprendizagem. Curso 1: SBEM-DF, Universidade de Brasília, 1º semestre 2006. Curso 2: SBEM-DF, Faculdade Jesus Maria José (FAJESU), 2º. Semestre 2006.

BERTONI, N.E. A construção do número fracionário. In: Boletim de Educação Matemática, ano 21, n.31. Rio Claro: UNESP. 2006.

BEZERRA, F., MAGINA, S. e SPINILLO, A. (2001). How promote children understanding of fractions? An exploratory study**,** PME, V.2 p. 89-96.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais. Secretaria de Educação Fundamental, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 29 de junho de 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Terceira versão. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec. gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf. Acesso em: 05 de julho de 2017.

CAMPOS, T. M. M. et al. A Representação de Quantidades Menores do que uma Unidade. Revista Acta Scientiae, Ulbra, v. 14, n. 3, p.363-372, dez. 2012. Bimestral. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/viewFile/388/314>. Acesso em: 12 maio 2018.

CAMPOS, T. M. M. et al. Uso de Situações Quociente no Ensino de Frações. JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática. v.7, n.3, p. 102 – 128. Nov. 2014. Disponível em: <http://pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/72>. Acesso em: 2 de agosto de 2018.

CAMPOS, T. M.; MAGINA, S.; NUNES, T. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. Revista Educação Matemática Pesquisa, PUC - São Paulo, v. 8, n. 1, p.125-136, maio 2006. Quadrimestral. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/search/search?simpleQuery=o+professor+polivalente&searchField=query. Acesso em: 10 de agosto de 2018.

CAMPOS, T. M.; RODRIGUES, W. R. A idéia de unidade na construção do conceito do número racional. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 2, n. 1, p. 68-93, 2007.

CARDOSO, P.; MAMEDE, E. O ensino de frações no 1.º ciclo — Um estudo de caso. Revista de Estudios e Investigación En Psicología y Educación, [s.l.], n. 06, p.422-426, 17 dez. 2017. Universidade da Coruna.

CARAÇA, B. J., Conceitos fundamentais da Matemática – Tipografia Matemática, Lisboa, 1952.

CRUZ, M. S. S; SPINILLO, A. G. Adição de frações por estimativa a partir do referencial de metade e de inteiro. *Estudos de Psicologia*, Campinas, v. 19, n. 4, p. 241-249, 2014.

FERNADES, D. R. G.; MARTINS, F. M. L. Reflexão acerca do ensino do algoritmo da divisão inteira: proposta didática. Educação e formação, 2015. Disponível em: http://www.exedrajournal.com/wp-content/uploads/2015/04/n9-C5.pdf. Acesso em: 29 de julho de 2017.

FERREIRA, N.; PINTO, H.; RIBEIRO, C. M. Conhecimento matemático de futuros professores para ensinar números racionais: a necessidade de delinear formas de melhorar a formação. In M.A. Cohen (org.) Supervisão Liderança e Cultura de Escola (pp. 415 – 425). Mangualde: Edições Pedagogo. (ISBN: 978-989-8655-35-6)

MAGINA, S.; BEZERRA, F. B.; SPINILLO, A. Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração: uma experiência de Ensino. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, Brasília, v. 90, n. 225, p. 489-510, 2009.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 21, n. 31, 2008.

MAMEDE, E. P. B. C.; DORNELES, B. V. Children's Informal Knowledge of Fractions: a comparison between Portuguese and Brazilian children. In: EME 2008 – ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION 3TD MEETING, 2009, Braga. Alexandra Gomes (Ed.) *Proceedings...* Braga: AEME, 2009. v.1, p.261-268.

MENEGAZZI, M. O estudo de frações: uma experiência no curso de pedagogia The study of fraction: an experience in pedagogy course. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 248-265, jul. 2013. ISSN 1981-1322. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p248/25145>. Acesso em: 09 ago. 2019. doi:https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p248.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. A aprendizagem dos números racionais. Quadrante, 14(1), 89-107. 2005.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. Desenvolvendo o Sentido do Número Racional. Lisboa: APM, 2007.

NUNES, T. Criança pode aprender frações. E gosta! In E. P. Grossi (Org.), Por que ainda há quem não aprende? A teoria. Rio de Janeiro: Vozes, p. 119 – 148, 2003.

STREEFLAND, L. Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

STREEFLAND, L. Charming fractions being charmed? In T. Nunes & P. Bryant (Orgs.), Learning and teaching mathematics: An international perspective. Hove: Psychology Press, p. 347 – 371, 1997.

NUNES, T.; BRYANT, P. Crianças fazendo matemática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, F. G. Constituição da docência em um grupo de estudantes de física: um estudo de caso junto ao PIBID. 2017. 104 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Instituto de Física, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017.

ONUCHIC, L. R.; BOTTA, L. As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. Bolema: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 79-102, 2008.

PINTO, H.; RIBEIRO, C. M. Diferentes significados das frações – conhecimento mobilizado por futuros professores dos primeiros anos. In R. Cadima, H. Pinto, H. Menino, I. S. Simões (Org.) proceedings of the International Conference of Research, Practices and Contexts in Education, (pp. 209-217) 2013. Leiria: ESECS. 2013. (ISBN: 978-989-97836-4-5).

PINTO, H.; RIBEIRO, C., M. Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. Da investigação às práticas, III (I). 77 – 96, 2013.

POLICASTRO, M.; ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M.; Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida e comprimento e sua estimativa. *Revista Plural*, Cascavel, p. 123-154, 2017.

PROENÇA, M. C.; O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de pedagogia. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 29, n. 52, p.729-755 , 2015.

SANTOS, A., O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2005.

SANTOS, L. Avaliação das aprendizagens em Matemática. *Quadrante, 12* (1), p.1-5. 2003. Disponível em: http://area.fc.ul.pt/pt/artigos%20publicados%20nacionais/quadrante2003.pdf. Acesso em: 05 de julho de 2017.

SAUL, A. M. A. Avaliação do Rendimento Escolar, p. 61-68. São Paulo, Fundação para o Desenvolvimento da Educação, 1994. Analítica de Livro. Disponível em: http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_22_p061-068_c.pdf. Acesso em: 01 de julho de 2017.

SILVA, M. J. F. S.; AG ALMOULOUD, S.. As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo Boletim de Educação Matemática, vol. 21, n. 31, 2008, p. 55-78. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil.

SOARES, D. C. Análise da abordagem da Educação Ambiental nos livros de Biologia - PNLD 2018. 2019. 128 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2019.

SOUZA, A. P. G; OLIVEIRA, R. M. M. A. Leitura, escrita e matemática: a apropriação de conhecimentos e a receptividade de alunos da 4a série do ensino fundamental. Zetetiké, Campinas, v. 18, n. 33, p.173-210, jan. 2010. Disponível em:<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/download/8646697/13599>. Acesso em: 10 jul. 2018.

VASCONCELOS, I, C. P.; MAMEDE, E. P. B. C.; DORNELES, B. V. The comprehension of numerical relationships in the learning of fractions: a comparative study with Brazilian and Portuguese children. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, [s.l.], v. 98, n. 249, p.251-269, 21 ago. 2017. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anisio Teixeira. http://dx.doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.98i249.3043.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais In: Didática das Matemáticas (Org.) Jean Brun. Recife: Horizontes Pedagógicos, 2005.

WALLE, J. A. V. Matemática no ensino fundamental: Formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. Tradução de Paulo Henrique Colonese.

APÊNDICE A

COMITÊ DE ÉTICA - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Os sentidos das frações para alunos de quartos anos do Ensino Fundamental I
Bianca Bazani
Número do CAAE: 95132618.4.0000.8142

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

O estudo das frações tem início nos anos iniciais do Ensino Fundamental e se configura como uma das grandes dificuldades de aprendizagem para os alunos nessa etapa escolar. Desse modo, esta pesquisa busca investigar os tipos de tarefas e práticas docentes que podem favorecer a aprendizagem dos alunos neste assunto.

O objetivo desta pesquisa é investigar, através da análise de quatro tarefas realizadas pelos alunos do quarto ano do Ensino Fundamental I, a aquisição dos significados e sentidos das frações.

Benefícios:

A intenção da pesquisa é auxilar o aluno a entender sobre os significados e os sentidos das frações em sua fase inicial de aplicação formal em sala de aula. Com essa pesquisa, os alunos poderão ter um olhar mais significativo aos sentidos e usos das frações.

Acompanhamento e assistência:

Você tem o direito à assistência integral e gratuita devido a danos diretos e indiretos, imediatos e tardios, pelo tempo que for necessário. Os participantes terão acompanhamento durante todo o processo da pesquisa, esclarecendo dúvidas e solicitações que forem necessárias caso ocorra o encerramento da pesquisa. Se houver necessidade de acompanhamento individual caso ocorra a identificação de alguma dificuldade de aprendizagem. Caso o responsável do participante queira descontinuar a análise dos dados o participante da pesquisa pode ser retirado do estudo.

Procedimentos:

Os procedimentos da pesquisa envolvem:

- Produção de videogravações e audiogravações das aulas da professora/pesquisadora
- Produção de videogravações e audiogravações dos momentos em que os alunos da professora/pesquisadora realizam a tarefa
- Recolhimento das tarefas e registros escritos produzidos pelos participantes, que serão utilizados exclusivamente para fins deste estudo.
- O participante tem a liberdade de desistir da colaboração nesta pesquisa no momento em que desejar, sem necessidade de qualquer explicação, o que não me trará prejuízos de qualquer ordem;

Rubrica do pesquisador:_______________ Rubrica do participante:_______________

- ∀ A participação e envolvimento são voluntários, não significando qualquer vínculo ou remuneração pelas informações;
- ∀ A participação ou não na pesquisa não trará implicações para as aulas regulares na escola ou qualquer outra atividade escolar.
- ∀ Ficam garantidos pelo pesquisador quaisquer esclarecimentos antes e durante o desenvolvimento da pesquisa sobre seu andamento, assim como sobre sua participação na mesma;
- ∀ As vídeo-gravações e entrevistas serão transcritas e armazenadas, em arquivos digitais, mas somente terão acesso às mesmas, o pesquisador e seus orientadores de mestrado. Ao final da pesquisa, todo material será mantido em arquivo, por 5 anos e eliminado após esse prazo.
- ∀ O projeto em questão foi analisado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da UNICAMP, que poderá ser contatado para eventuais reclamações e/ou denúncias referentes aos aspectos éticos da pesquisa.
- ∀ Este termo de consentimento possui quatro páginas, sendo que todas serão rubricadas pelo pesquisador, pelo responsável e pelo participante da pesquisa.
- ∀ Este termo de consentimento, assinado em duas vias, uma das quais ficará em meu poder, contém os meio para contato com a pesquisadora e o Comitê de Ética da UNICAMP.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores
Orientador da Pesquisa: Miguel Ribeiro
Av. Bertrand Russell, 801 Cidade Universitária "Zeferino Vaz"; CEP 13083-865- Campinas – SP;
telefone: (19) 3521-5695; e-mail: formar@unicamp.br

Pesquisadora: Bianca Bazani
Av. Bertrand Russell, 801 Cidade Universitária "Zeferino Vaz"; CEP 13083-865- Campinas – SP;
telefone: (19) 99954-5047; e-mail: bazani.bianca@gmail.com

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais (CEP-CHS) da UNICAMP das 08h30 às 11h30 e das 13h00 as 17h00 na Rua Bertrand Russell, 801, Bloco C, 2º piso, sala 05, CEP 13083-865, Campinas – SP; telefone (19) 3521-8936 ou (19) 3521-7187; email: cep-chs@reitoria.unicamp.b

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).

O papel do CEP é avaliar e acompanhar os aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos. A Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), tem por objetivo desenvolver a regulamentação sobre proteção dos seres humanos envolvidos nas pesquisas. Desempenha um papel coordenador da rede de Comitês de Ética em Pesquisa (CEPs) das instituições, além de assumir a função de órgão consultor na área de ética em pesquisas

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar

Rubrica do pesquisador:_______________ Rubrica do participante:_______________

e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

( ) Autorizo a realização de vídeo-gravações.
( ) Não autorizo a realização de vídeo-gravações.

Nome do (a) participante: ____

Contato telefônico: ____

e-mail (opcional): ____

____ Data: ____/_____/______.
(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

____ Data: ____/_____/______.
(Assinatura do pesquisador)

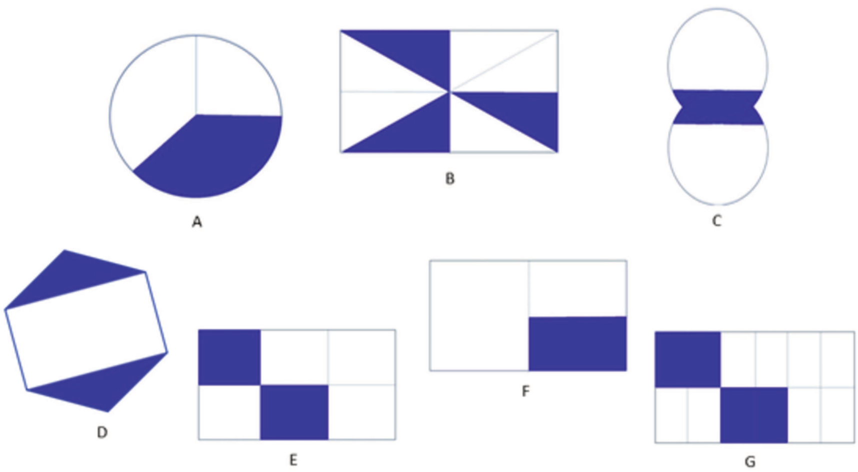
Rubrica do pesquisador:_____________ Rubrica do participante:_____________

APÊNDICE B

PRIMEIRA TAREFA APLICADA

Questão:

Para cada uma das figuras abaixo, você deverá **circular** qual ou quais possuem $\frac{1}{3}$ (um terço) pintado.



Explique como você chegou à conclusão de que as figuras que circulou possuem um terço pintado.

____

____

____

____

Para as que você considera que não tenham $\frac{1}{3}$ pintado, **indique** qual é a quantidade da figura que está pintada.

Na figura A ____

Na figura B ____

Na figura C ____

Na figura D ____

Na figura E ____

Na figura F ____

Na figura G ____

Abaixo **escreva** a explicação e descrição de como você pensou para chegar à conclusão para cada uma das figuras que considere não ter um terço pintado.

____

____

____

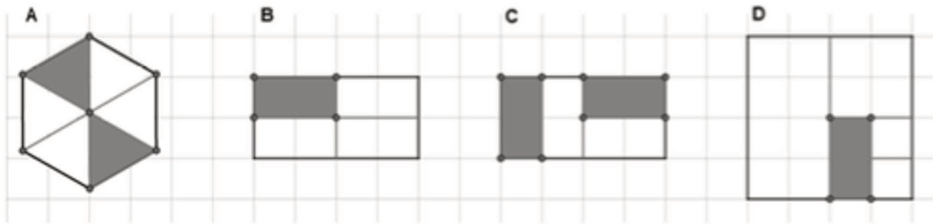
____

APÊNDICE C

SEGUNDA TAREFA APLICADA

Abaixo há uma questão que deverá ser respondida por você. Ao responder, é necessário que **explique** com detalhes qual foi o seu raciocínio, **descrevendo** o processo utilizado para chegar à sua conclusão. Nessa explicação e descrição, poderá utilizar esquemas, palavras, desenhos, cálculos, entre outras que você quiser utilizar.

Considere as figuras abaixo



a) Que quantidade de cada uma das figuras está pintada?

Figura A ____________________

Figura B ____________________

Figura C ____________________

Figura D ____________________

b) Que quantidade de cada uma das figuras não está pintada?

Figura A ____________________

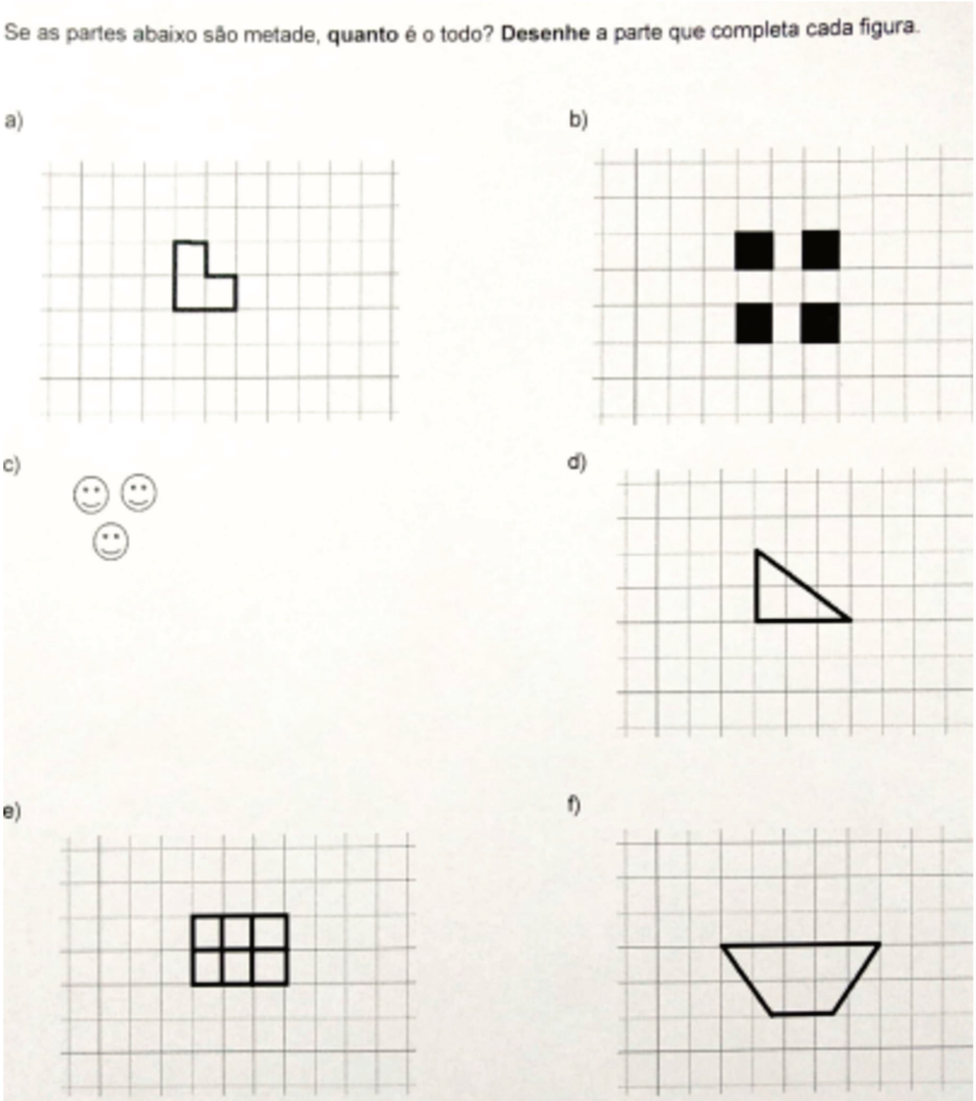
Figura B ____________________

Figura C ____________________

Figura D ____________________

APÊNDICE D

TERCEIRA TAREFA APLICADA


Se as partes abaixo são metade, **quanto** é o todo? **Desenhe** a parte que completa cada figura.

a)

b)

c)

d)

e)

f)

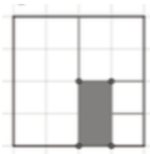
APÊNDICE E

RESPOSTA DOS ALUNOS DA PRIMEIRA TAREFA

Alunos	A	B	C	D	E	F	G
A1	x		x			x	
A2		x				x	
A3	x	x					
A4	x					x	
A5	x	x	x		x	x	x
A6	x		x			x	
A7	x		x			x	
A8	x		x	x		x	
A9	x		x			x	
A10	x		x	x		x	
A11			x			x	
A12	x			x	x	x	
A13	x	x					
A14							x
A15		x				x	
A16			x				
A17	x	x				x	
A18	x			x	x		
Assinalaram	**13**	**6**	**9**	**4**	**3**	**13**	**2**
Não assinalaram	**5**	**12**	**9**	**14**	**15**	**5**	**16**
% de acerto	28%	67%	50%	22%	17%	28%	11%
		Alunos que não identificaram a fração correspondente da questão					
		Alunos que identificaram a fração correspondente da questão					

APÊNDICE F

RESPOSTAS E PERCENTUAL DAS RESPOSTAS ESPERADAS DOS ALUNOS NA PRIMEIRA QUESTÃO DA TAREFA

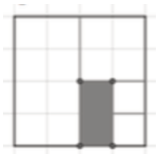
Pergunta: Que quantidade de cada uma das figuras está pintada?			
Figura	Resposta dos alunos	Quantidade de alunos por resposta	Porcentagem de alunos que registraram a resposta esperada
A 	**2**	**4**	40,0%
	$\frac{2}{6}$	**6**	
	$\frac{6}{2}$	**2**	
	Duas frações	**1**	
	2 quantidades	**1**	
	2 frações	**1**	
B 	**1**	**4**	40,0%
	$\frac{1}{4}$	**4**	
	4	**2**	
	Uma fração	**1**	
	1 quantidade	**1**	
	$\frac{2}{8}$	**2**	
	2	**1**	
C 	$\frac{2}{4}$	**2**	33,3%
	4	**3**	
	$\frac{8}{4}$	**3**	
	2 figuras	**1**	
	Duas frações	**1**	
	2 quantidades	**1**	
	$\frac{4}{8}$	**3**	
	2	**1**	
D 	**2**	**4**	13,3%
	$\frac{4}{2}$	**1**	
	$\frac{6}{2}$	**2**	
	Uma fração	**1**	
	1 quantidade	**1**	

	$\frac{2}{16}$	**3**	
	1	**1**	
	$\frac{1}{5}$	**1**	
	$\frac{2}{6}$	**1**	

APÊNDICE G

RESPOSTAS E PERCENTUAL DAS RESPOSTAS ESPERADAS DOS ALUNOS NA SEGUNDA QUESTÃO DA TAREFA

Pergunta: Que quantidade de cada uma das figuras NÃO está pintada?			
Figura	Resposta dos alunos	Quantidade de alunos por resposta	Porcentagem de alunos que registraram a resposta esperada
A 	**4**	**6**	13,3%
	$\frac{2}{6}$	**2**	
	$\frac{4}{6}$	**2**	
	4 figuras	**1**	
	Quatro frações	**1**	
	4 partes	**1**	
	4 figuras	**1**	
	4 quantidades	**1**	
B 	**3**	**6**	0,0%
	$\frac{1}{4}$	**2**	
	6	**2**	
	Três frações	**1**	
	3 quantidades	**1**	
	$\frac{4}{8}$	**1**	
	$\frac{4}{3}$	**1**	
	3 figuras	**1**	
C 	**2**	**3**	20,0%
	4	**5**	
	$\frac{4}{8}$	**2**	
	$\frac{4}{6}$	**1**	
	2 figuras	**1**	
	$\frac{2}{4}$	**1**	
	Duas frações	**1**	
	2 quantidades	**1**	

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="9">D
</td><td>4</td><td>3</td><td rowspan="9">0,0%</td></tr>
<tr><td>14</td><td>4</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\frac{2}{6}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4 figuras</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\frac{14}{12}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\frac{5}{4}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Quatro frações</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7 quantidades</td><td>1</td></tr>
</table>

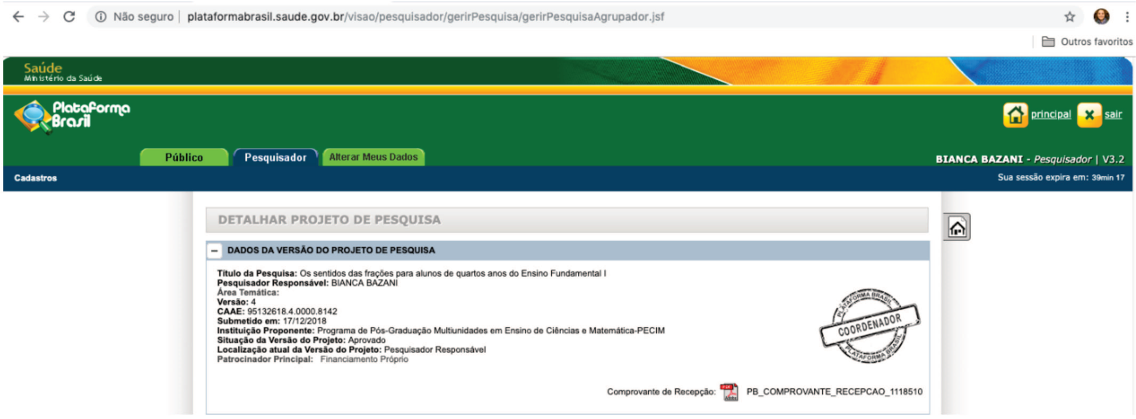
APÊNDICE H

RESPOSTAS E PERCENTUAL DAS RESPOSTAS ESPERADAS DOS ALUNOS NA TAREFA “VAMOS CONSTRUIR”

Alunos	A	B	C	D	E	F
A1		x		x		x
A2				x		
A3	x	x	x	x	x	x
A4	x	x	x	x		
A5	x	x	x	x	x	x
A6	x	x	x		x	x
A7	x	x	x	x	x	x
A8	x	x	x		x	
A9	x	x	x	x		
A10	x	x	x	x	x	x
A11		x	x		x	
A12	x	x	x	x	x	x
A13	x			x		x
A14	x	x	x	x	x	x
A15	x	x		x	x	x
A16						
Acertos	12	13	11	12	10	10
%	75%	81%	69%	75%	63%	63%

ANEXO

APROVAÇÃO DO COMITÊ DE ÉTICA – CEP UNICAMP



Não seguro | plataformabrasil.saude.gov.br/visao/pesquisador/gerirPesquisa/gerirPesquisaAgrupador.jsf

Outros favoritos

Saúde
Ministério da Saúde

Plataforma Brasil

principal sair

Público Pesquisador Alterar Meus Dados

BIANCA BAZANI - *Pesquisador* | V3.2

Cadastros

Sua sessão expira em: 39min 17

DETALHAR PROJETO DE PESQUISA

DADOS DA VERSÃO DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Os sentidos das frações para alunos de quartos anos do Ensino Fundamental I
Pesquisador Responsável: BIANCA BAZANI
Área Temática:
Versão: 4
CAAE: 95132618.4.0000.8142
Submetido em: 17/12/2018
Instituição Proponente: Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática-PECIM
Situação da Versão do Projeto: Aprovado
Localização atual da Versão do Projeto: Pesquisador Responsável
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

PLATAFORMA BRASIL COORDENADOR PLATAFORMA BRASIL

Comprovante de Recepção: PB_COMPROVANTE_RECEPCAO_1118510