

UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE
CAMPINAS

mestrado

INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

UNICAMP

2003

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física Gleb Wataghin

Ressonância Paramétrica em Modelos de Estrelas de
Nêutrons

*Este exemplar corresponde à redação
final da tese de mestrado defendida
pelo aluno Sérgio Dias Campos e
aprovada pela comissão julgadora
Campinas, 05/04/2004*

Sérgio Dias Campos

Maia

Orientador: Prof. Dr. Adolfo Maia Júnior

Co-Orientadora: Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato

Dissertação Apresentada no Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Campinas
Fevereiro de 2003

UNIDADE	IFGW
Nº CHAMADA	
Tm	
C157r	
V	EX
TOMBO BC/	59316
PROC.	16- 117-04
C	☐ D ☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	28/07/04
Nº CPD	

IF/462

CM00198534-3

BIBID 318499

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

Tm
C157r

Campos, Sérgio Dias

Ressonância paramétrica em modelos de estrelas de nêutrons / Sérgio Dias Campos. -- Campinas, SP : [s.n.], 2003.

Orientadores: Adolfo Maia Júnior e Carola Dobrigkeit Chinellato.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1
2
3
4
5

**1. Astrofísica. 2. Píons. 3. Objetos compactos.
I. Maia Júnior, Adolfo. II. Chinellato, Carola Dobrigkeit.
III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física
"Gleb Wataghin". IV. Título.**

(vsv/ifgw)



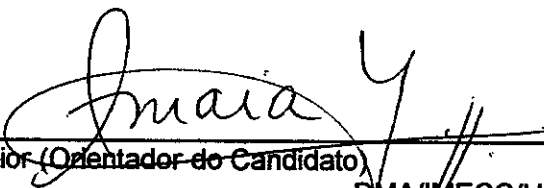
Pós

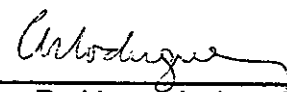
Instituto
de Física
Gleb Wataghin

C.P. 6165
CEP: 13083-970
Tel. (19) 788-5305
e-mail: secpos@ifi.unicamp.br

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE SÉRGIO DIAS CAMPOS – RA 963239 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 28 / 02 / 2003.

COMISSÃO JULGADORA:


Prof. Dr. Adolfo Maia Junior (Orientador do Candidato)
DMA/IMECC/UNICAMP


Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Junior – IMECC/UNICAMP


Prof. Dr. Marcio José Menon – DRCC/IFGW/UNICAMP

À meus pais, minha querida esposa Ana e minha filhinha Helena.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao Prof. Adolfo Maia Júnior que me agüentou durante estes dois longos anos de sofrimento e dor em que trabalhamos juntos. Seu detalhismo e minúcia ao ler meus escritos impediram-me, muitas vezes, de dizer bobagens absurdas. Aprendi muita física, também! Espero continuar aprendendo...

Agradeço a Profa. Carola Dobrigkeit Chinellato por sua valiosíssima co-orientação e pelo carinho e preocupação demonstrados. Fico muito grato por suas sugestões e puxadas de orelha, todas sempre muito bem dadas. Sem sua ajuda este trabalho sem dúvida alguma não teria sido feito.

Não poderia deixar de agradecer ao Prof. Waldyr Rodrigues por suas valiosas sugestões tanto sobre a matemática quanto sobre a física contidas nesta dissertação. Também gostei muito de ouvir suas estórias e histórias sobre certas particularidades dos físicos e da Física.

Evito agradecer, em particular, a alguns de meus amigos para não cometer a injustiça de esquecer de alguém. Todos de alguma forma ajudaram-me a completar esta dissertação, seja simplesmente não me importunando ou seja dando dicas muito bem-vindas sobre Latex e outras 'cositas mas'. Aqueles que realmente me interessam sabem quem são. Obrigado a todos.

Agradeço a minha mui amada esposa Ana pela paciência e pelas ranzinzices que aturou nestes quase infinitos dois anos. Fico muito feliz ela por ter evitado que discutíssemos este trabalho em casa, fazendo com que eu retorna-se ao mundo real de vez em quando. SMAC!

Como não poderia deixar de ser, agradeço a todos os que me convidaram para churrascos, festas e saideiras, pois foi nestes lugares que pude resolver alguns dos problemas fundamentais deste trabalho. Valiosas idéias e curiosas soluções para certos problemas foram encontrados ai, na beira do balcão de bar ou ao lado de uma bela e cheia choppeira. Ic!

Agradeço ao pessoal do café, pois nas horas mais críticas me ajudaram a manter o nível de sangue baixo na corrente cafeínica. Trabalhar sem tomar o cafezinho diário é realmente impossível.

Agradeço a CPG deste Instituto pelo suporte financeiro que muitas vezes utilizei e que com certeza espero continuar utilizando em meu doutorado. Agradeço, também, pelas eventuais quebradas de galhos.

Finalmente, agradeço ao CNPq pela bolsa concedida durante o período de meu mestrado.

Resumo

O fenômeno de Ressonância Paramétrica é atualmente o modelo mais aceito para explicar a enorme produção de matéria no Universo pós-inflacionário. Neste trabalho mostramos que este fenômeno também pode aparecer em modelos de estrelas de nêutrons sendo a peça chave para um mecanismo de produção de fótons em seu interior.

O Capítulo 1 é uma introdução geral às estrelas de nêutrons. Descrevemos, resumidamente, o comportamento da matéria no interior deste objeto, mostramos como obter uma Equação de Estado Politrópica, e também indicamos como um condensado de píons pode alterar a Equação de Estado. A existência deste tipo de condensado é fundamental para nosso trabalho.

O Capítulo 2 introduz o fenômeno de Ressonância Paramétrica tal como ele é utilizado em Cosmologia, isto é, como um mecanismo para produção de matéria. Este capítulo mostra, de modo breve, a matemática que está por traz deste fenômeno.

O Capítulo 3 traz a descrição do modelo de García-Bellido e Kusenko que descreve o fenômeno de Ressonância Paramétrica no modelo de colisão entre duas estrelas de nêutrons. O objetivo destes pesquisadores era o de aplicar este mecanismo de produção exponencial de matéria para explicar os jatos de raios gama que são detectados na alta atmosfera terrestre como um subproduto da colisão entre duas estrelas de nêutrons.

Após estes capítulos introdutórios apresentamos no Capítulo 4 o nosso modelo para produção de matéria em uma estrela de nêutrons isolada. Utilizamos em nosso modelo um condensado de píons acoplado ao campo eletromagnético da estrela de nêutrons. A solução para o condensado de píons aparece na equação de movimento para o campo eletromagnético como um potencial periódico. Neste caso, a equação de movimento para o campo eletromagnético é classificada como uma Equação de Lamé. Este tipo de equação possui soluções estáveis e instáveis no espaço de parâmetros. As soluções instáveis (bandas de ressonância) descrevem uma produção exponencial de fótons.

No Capítulo 5 fazemos uma análise do número de partículas e da densidade de energia produzidas na primeira banda de ressonância através do mecanismo de Ressonância Paramétrica. Desconsiderando o efeito de absorção de fótons pela matéria circundante teremos uma produção exponencial de partículas. No entanto, efeitos de absorção precisam ainda ser analisados já que os fótons produzidos podem alterar a evolução térmica da estrela e modificar sua Equação de Estado.

Três apêndices complementam nosso trabalho. O primeiro (Apêndice A) traz algumas considerações fundamentais sobre as Equações de Hill. O segundo (Apêndice B) traz algumas deduções de fórmulas utilizadas para obtenção do Expoente de Floquet. O terceiro trata do Universo Inflacionário de Guth.

Encerramos este trabalho com as Considerações Finais, onde fazemos uma análise mais crítica desta dissertação de mestrado.

Abstract

The Parametric Resonance phenomenon is nowadays the most accepted model to explain the huge production of matter in the pos-inflationary Universe. In this work we show that this phenomenon can also appears in models of neutron stars describing the production of photons in its interior.

The Chapter 1 is a general introduction to the neutron stars. We describe, the behavior of the matter in the interior of this object, we get a Politropic Equation of State and we show as a pion condensate can change the Equation of State. The existence of this condensed is fundamental for our work.

The Chapter 2 introduces the phenomenon of Parametric Resonance as it is used in Cosmology, that is, as a mechanism for matter production. This chapter shows, also shortly, the mathematics needed to study this phenomenon.

The Chapter 3 is the description of the model of García-Bellido and Kusenko describing the Parametric Resonance phenomenon in the collision among two neutron stars. These authors applied this mechanism of exponential production of matter to explain the jets of gamma-rays detected in high atmosphere, as a result from the collision among two neutron stars.

After these introductory chapters we show in Chapter 4 our model for matter production in a single neutron star. We used in our model a pion condensate coupled to the electromagnetic field of the neutron star. The solution for the pion condensate appears in the equation of motion for the electromagnetic field as a periodic potential. In this case, the equation of motion for the electromagnetic field is classified as a Lamé's Equation. This equation type presents stable and unstable solutions in the space of parameters. The unstable solutions (resonance bands) describe an exponential photon production.

In the Chapter 5 we make an analysis of the particle number and energy density produced in the first resonance band through Parametric Resonance mechanism. Neglecting effects of photon absorption by the surrounding matter we get an exponential production of particles. Nevertheless, absorption effects need to be analyzed more carefully since the photons produced can change the thermal evolution of the star as well modify its Equation of State.

Three appendixes complement our work. The first (Appendix A) presents some considerations about the Hill's Equation. The second (Appendix B) shows some derivations of formulas used to obtain the Floquet's Exponent. The third shows the Guth's Inflationary Universe.

We finish this work with Final Remarks, where we offer a deeper analysis of our work.

Introdução Geral

O presente trabalho tem como objetivo tentar fornecer um modelo para a produção de partículas em estrelas de nêutrons utilizando para isto um mecanismo empregado primeira e majoritariamente em Cosmologia Inflacionária [13, 14, 20], denominado Ressonância Paramétrica (RP) [12, 11]. Dentro do contexto da Cosmologia Inflacionária este mecanismo é bastante efetivo, pois permite “popular” rapidamente o Universo pós-inflacionário com partículas escalares.

Neste trabalho, a aplicação deste fenômeno em estrelas de nêutrons tem como objetivos básicos:

- 1) estudar a produção de partículas via RP numa escala mais baixa de energia que aquela encontrada em Cosmologia Inflacionária;
- 2) sugerir possíveis modificações na equação de estado da estrela e daí na sua estrutura e evolução;

A plausibilidade deste fenômeno pode contribuir para uma melhor compreensão dos mecanismos evolucionários de uma estrela de nêutrons como, por exemplo, seu resfriamento.

O uso do fenômeno de Ressonância Paramétrica como um mecanismo para produção exponencial de partículas na fase pós-inflacionária do Universo é relativamente recente (pouco mais de 10 anos). Assim, para introduzirmos nosso trabalho empregamos três capítulos com o único objetivo de fornecer uma boa bagagem de informações para que o fenômeno pudesse ser entendido a contento.

No Capítulo 1 fornecemos uma visão geral, embora resumida, de como é encontrada a Equação de Estado para uma estrela da Sequência Principal e como construir a mesma equação para uma estrela de nêutrons. A seguir, descrevemos brevemente o conteúdo material de uma estrela de nêutrons, modelando o interior deste tipo de estrela com apenas três camadas: Crosta, Matéria Nuclear e *Core*. Mostramos como o comportamento de uma equação de estado com e sem um condensado de píons interfere na estrutura deste objeto compacto. Este capítulo tem como objetivo principal mostrar que o condensado de píons pode existir no interior de uma estrela de nêutrons e além disto pode modificar sua evolução podendo levar ao surgimento de novos fenômenos.

No Capítulo 2 tratamos do fenômeno de Ressonância Paramétrica tal como ele é visto em Cosmologia Inflacionária, isto é, como um mecanismo para produção exponencial de partículas num dado intervalo de tempo. O objetivo deste capítulo será o de introduzir o ferramental matemático necessário para a utilização e entendimento deste fenômeno. Neste sentido, os Apêndice A e B são um complemento deste capítulo tratando da Equação de Hill e do Expoente de Floquet, respectivamente.

No Capítulo 3 mostramos a primeira aplicação do fenômeno de Ressonância Paramétrica em estrelas de nêutrons, que deve-se a García-Bellido e Kusenko [21].

Após estes três capítulos introdutórios apresentamos, no Capítulo 4, nosso modelo. Utilizando como base a interação entre um condensado de píons negativamente carregado e

o campo eletromagnético¹ da estrela de nêutrons, aplicamos o fenômeno de Ressonância Paramétrica, obtendo uma produção exponencial de fótons no interior deste objeto. A existência conjunta do condensado de píons e do campo eletromagnético da estrela está garantida nos trabalhos de Harrington e Shepard [41, 43]. Assim, uma vez tendo sido satisfeitas as condições impostas por Harrington e Shepard, podemos dizer que o fenômeno de Ressonância Paramétrica ocorre de forma quase que natural. Este fato é fundamental pois não é necessário fazermos hipóteses adicionais para que o fenômeno ocorra.

No Capítulo 5 mostramos, finalmente, os resultados obtidos para o número de fótons produzidos e densidade de energia produzida via RP. Vemos claramente a efetividade do funcionamento deste mecanismo proposto. Infelizmente, não levamos em conta os efeitos de absorção dos fótons produzidos pela matéria circundante e, portanto, não tratamos nesta dissertação de eventuais modificações que possam ocorrer na equação de estado deste objeto. O efeito de *back reaction*, em trabalhos futuros, deve ser levado em conta de modo a tornar este mecanismo mais real.

Salientamos, por fim, que nesta dissertação fizemos apenas um estudo qualitativo do fenômeno. Porém, o mecanismo mostrou-se bastante robusto mesmo para grandes variações dos parâmetros envolvidos, garantindo que este método de produção de partículas pode ocorrer nesta escala de energia.

¹Isto inclui o próprio campo magnético da estrela bem como contribuições de outros constituintes deste objeto.

Conteúdo

1	Estrelas de Nêutrons	1
1.1	Introdução	1
1.2	Modelo Estelar Politrópico	2
1.3	Equação de Estado para uma Estrela de Nêutrons	7
1.3.1	Equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	8
1.4	O Interior de uma Estrela de Nêutrons	10
1.4.1	Crosta	11
1.4.2	Matéria Nuclear	12
1.4.3	<i>Core</i>	13
1.5	Estrela de Nêutrons com Condensado de Píons	14
2	Ressonância Paramétrica no Universo Inflacionário	17
2.1	Introdução	17
2.2	Universo Inflacionário	18
2.2.1	Modelo Padrão	18
2.2.2	Modelo Inflacionário	20
2.2.3	Ressonância Paramétrica em Cosmologia	22
3	Modelo de García-Bellido e Kusenko	29
3.1	Introdução	29
3.2	O Modelo de García-Bellido e Kusenko	29
4	Ressonância Paramétrica no Modelo σ	35
4.1	Introdução	35
4.2	Condensado de Píons	36
4.3	O Modelo σ de Harrington e Shepard	38
4.4	Lagrangiana de Harrington e Shepard	40
4.5	Equação do Movimento do Condensado π^-	43
4.6	Caso Homogêneo ($ \Psi_n ^2 = 0$)	45
4.6.1	Solução com $ \Psi_n ^2 = 0$ no Caso 1 ($-2M^2$)	53
4.6.2	Solução com $ \Psi_n ^2 = 0$ no Caso 2 ($+2M^2$)	59
4.7	Caso Não-Homogêneo ($ \Psi_n ^2 \neq 0$)	61
4.8	Equação de Movimento para A^μ	63

5	Produção de Partículas	81
5.1	Introdução	81
5.2	Análise das Soluções e Bandas de Ressonância	82
5.2.1	Ressonância Paramétrica no Caso Homogêneo ($ \Psi_n ^2 = 0$)	82
6	Considerações Finais	91
A		93
A.1	Equação de Hill	93
B		95
B.1	Expoente de Floquet	95
B.1.1	Método Geral	95
B.1.2	Método de Bogolyubov	96
B.1.3	Método de Hill	98
C		101
C.1	O Princípio Cosmológico	101
C.2	O Modelo <i>Hot Big Bang</i>	102
C.3	Problema do Universo Plano	106
C.4	Problema do Horizonte de Partículas	107
	Bibliografia	111

Lista de Figuras

1.1	Representação esquemática do potencial $\Phi(r)$ para uma estrela com simetria esférica. O vetor $\vec{g}$ aponta para o centro da estrela. Uma figura semelhante a esta pode ser encontrada na referência [5].	4
1.2	A figura acima mostra o corte seccional de uma estrela de nêutrons. Estão representadas as camadas nas quais estaria disposto o material estelar que compõe o interior deste objeto. As camadas não estão em escala.	11
1.3	Equilíbrio entre n , p , hipérons, píons e leptons no interior estelar. Figura obtida da referência [9].	15
1.4	Massa de uma estrela de nêutrons como função da densidade central computada para quatro equações de estado. Observe que uma estrela apenas de nêutrons superestima a massa deste objeto. Figura obtida da referência [9].	15
2.1	Representação pictórica do potencial de um campo escalar para o modelo de inflação caótica.	21
2.2	Representação pictórica da carta de estabilidade/instabilidade para a Equação de Hill. As áreas hachuradas representam bandas de ressonância.	24
3.1	Potencial de Ginzburg-Landau. O potencial tem unidade de MeV^4	30
3.2	Amortecimento do campo $\phi(t)$ ao longo do tempo.	32
3.3	Evolução do expoente de Floquet para vários valores de k	33
3.4	As flutuações na densidade de energia diminuem com o tempo, mostrando que existe um limite de fótons que podem ser produzidos com determinado momento k	34
4.1	Estados ligados do modelo σ como uma função do campo externo e do potencial químico do pión. Para este caso específico, $m_\pi^2 \simeq 2.8 \times 10^{17} G$ [41]	39
4.2	Evolução temporal de π_1 . Para o Caso 1 a) com $M = 140MeV$ b) com $M = 420MeV$ e para o Caso 2 c) com $M = 140MeV$ e d) com $M = 420MeV$. Em todos os caso tomamos $\lambda = 7.7$	47
4.3	Evolução temporal de π_2 . Para o Caso 1 a) com $M = 140MeV$ b) com $M = 420MeV$ e para o Caso 2 c) com $M = 140MeV$ e d) com $M = 420MeV$. Em todos os caso tomamos $\lambda = 7.7$	47
4.4	Espaço de fase para π_1 no Caso 1 : a) $M = 140MeV$ e b) $M = 420MeV$. Espaço de fase para π_2 no Caso 1 : c) $M = 140MeV$ e d) $M = 420MeV$. Em todos os caso $\lambda = 7.7$	48

4.5	Espaço de fase para π_1 no Caso 2 : a) $M = 140MeV$ e b) $M = 420MeV$. Espaço de fase para π_2 no Caso 2 : c) $M = 140MeV$ e d) $M = 420MeV$. Em todos os caso $\lambda = 7.7$	48
4.6	Evolução temporal do campo auxiliar π_1 baseada na equação (4.23): Caso 1 a) $M = 140MeV$ e b) $M = 420MeV$; Caso 2 c) $M = 140MeV$ e d) $M = 420MeV$. Em todos os casos $\lambda = 7.7$	49
4.7	Representação pictórica da equação (4.27): a) <i>Caso hard spring</i> e b) <i>Caso soft spring</i>	51
4.8	Gráficos da equação (4.41). Para o Caso 1 : a) com $M = 140MeV$ e $p = 0.001$, b) com $M = 140MeV$ e $p = 1$ e c) com $M = 140MeV$ e $p = 1000$. Para o Caso 2 : d) com $M = 420MeV$ e $p = 0.001$, e) com $M = 420MeV$ e $p = 1$ e f) com $M = 420MeV$ e $p = 1000$. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	56
4.9	Gráficos da equação (4.46). Para o Caso 1 : a) com $M = 140MeV$ e $p = -0.001$, b) com $M = 140MeV$ e $p = -0.1$ e c) com $M = 140MeV$ e $p = -0.49$. Para o Caso 2 : d) com $M = 420MeV$ e $p = -0.001$, e) com $M = 420MeV$ e $p = -0.1$ e f) com $M = 420MeV$ e $p = -0.49$. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	58
4.10	Gráficos da equação (4.50). Para o Caso 1 : a) com $M = 140MeV$ e $p = -0.001$, b) com $M = 140MeV$ e $p = -0.1$ e c) com $M = 140MeV$ e $p = -0.49$. Para o Caso 2 : d) com $M = 420MeV$ e $p = -0.001$, e) com $M = 420MeV$ e $p = -0.1$ e f) com $M = 420MeV$ e $p = -0.49$. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	60
4.11	Gráficos da solução numérica do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 140MeV$ no Caso 1 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	65
4.12	Gráficos da solução numérica do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 10000$ e $M = 140MeV$ no Caso 1 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo.	66
4.13	Gráfico do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 420MeV$ no Caso 1 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	67
4.14	Gráfico do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 10000$ e $M = 420MeV$ no Caso 1 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	68
4.15	Gráfico do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 140MeV$ no Caso 2 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	69

4.16	Gráfico do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 10000$ e $M = 140MeV$ no Caso 2 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	70
4.17	Gráfico do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 420MeV$ no Caso 2 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	71
4.18	Gráfico do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 10000$ e $M = 420MeV$ no Caso 2 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	72
4.19	Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 140MeV$ no caso Caso 1 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	73
4.20	Gráfico do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 10000$ e $M = 140MeV$ no Caso 1 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	74
4.21	Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 420MeV$ no Caso 1 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	75
4.22	Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 10000$ e $M = 420MeV$ no Caso 1 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	76
4.23	Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 140MeV$ no Caso 2 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	77
4.24	Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 10000$ e $M = 140MeV$ no Caso 2 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	78
4.25	Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 420MeV$ no Caso 2 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	79

4.26	Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 10000$ e $M = 420MeV$ no Caso 2 : a) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> positivo; em b) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> negativo; em c) temos <i>sen</i> positivo e <i>cos</i> negativo e em d) temos <i>sen</i> negativo e <i>cos</i> positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$	80
5.1	Expoente de Floquet em função de k obtido para vários valores de $\Delta(0)$: (a) $\Delta(0) = -1000$, (b) $\Delta(0) = -100$, (c) $\Delta(0) = -1$ e (d) $\Delta(0) = -0.001$. Este determinante controla a amplitude de oscilação de μ_k e seus possíveis valores reais ou imaginários.	85
5.2	Densidade de partículas obtida através da expressão (5.9) com μ_k tomado a partir de (5.11). Tomamos $\Delta(0) = -1$ e $k_c = 20MeV$	86
5.3	Densidade de energia produzida pelos fótons, em unidades de MeV^4 : (a) Temos três gráficos para a densidade com $M = 140MeV$ e $p = 0.001$, $p = 1$ e $p = 1000$. Não há diferenças visíveis. (b) Temos três gráficos para a densidade com $M = 420MeV$ e $p = 0.001$, $p = 1$ e $p = 1000$. Não há diferenças visíveis. Tomamos $\Delta(0) = -1$ e $k_c = 20MeV$	87
5.4	Densidade de energia produzida pelos fótons, em unidades de MeV^4 : (a) Temos três gráficos para a densidade com $M = 140MeV$ e $p = 0.001$, $p = 1$ e $p = 1000$. Não há diferenças visíveis. (b) Temos três gráficos para a densidade com $M = 420MeV$ e $p = 0.001$, $p = 1$ e $p = 1000$. Não há diferenças visíveis. Tomamos $\Delta(0) = -1$ e $k_c = 20MeV$	88
5.5	Densidade de energia produzida pelos fótons, em unidades de MeV^4 : (a) Temos três gráficos para a densidade com $M = 140MeV$ e $p = 0.001$, $p = 1$ e $p = 1000$. Não há diferenças visíveis. (b) Temos três gráficos para a densidade com $M = 420MeV$ e $p = 0.001$, $p = 1$ e $p = 1000$. Não há diferenças visíveis. Tomamos $\Delta(0) = -1$ e $k_c = 20MeV$	89
C.1	Modelos de Universo dependentes do parâmetro de curvatura k : $k = -1$ (aberto), $k = 1$ (fechado) e $k = 0$ (plano).	104
C.2	Potencial sugerido por Guth para seu modelo inflacionário.	108

Capítulo 1

Estrelas de Nêutrons

1.1 Introdução

O estudo detalhado da estrutura e evolução estelar leva, em geral, a um sistema complexo de equações diferenciais acopladas. No entanto, numa primeira aproximação, é possível descrever razoavelmente sua evolução utilizando-se apenas duas características internas da estrutura estelar: sua densidade de matéria ρ e sua pressão interna p . Usualmente, costuma-se utilizar uma relação simples que une estas duas variáveis de forma a tornar integrável o sistema de equações diferenciais do modelo sem que se perca, por outro lado, as outras informações relevantes sobre a física do interior estelar. Para isto adota-se a inclusão de uma relação de dependência $\rho = \rho(p)$ (ou $p = p(\rho)$), usualmente denominada *Equação de Estado*, onde $\rho(p)$ é uma função simples de p . Um caso bastante usado na literatura é uma relação de potência do tipo $p = K\rho^\gamma$, onde K e γ são constantes reais. Este tipo especial de relação é chamada de *Equação de Estado Politrópica* e o fluido associado, simplesmente *politrópo*. A dedução da equação de estado, a partir de primeiros princípios (física estatística, atômica ou nuclear) é bastante intrincada e depende fortemente do conhecimento da microfísica do fluido. No que segue vamos considerar somente estrelas com fluidos politróticos.

Com base neste tipo de equação é possível mostrar que certos tipos de estrelas atingem, em seus estágios finais, a forma de uma supernova. Quando a pressão de radiação é mais forte que a atração gravitacional a estrela literalmente explode, emitindo uma colossal quantidade de matéria e energia para o espaço exterior. Este tipo de estrela é caracterizado observacionalmente pelo seu raio imenso (milhares de raios solares), intensa atividade de nucleossíntese de elementos pesados (carbono, ferro, etc) e intensa produção de neutrinos durante o colapso

do que restou da estrela (estágio final).

Em 1934, Baade e Zwicky [1] previram que um possível estágio final para uma estrela em fase de supernova pudesse ser o de um objeto constituído basicamente de nêutrons num regime de matéria superdensa. Em outras palavras, este estágio poderia ser atingido após a explosão que liberaria grande quantidade de matéria e energia, mas que deixaria o núcleo da estrela num estado de altíssima densidade. O objeto resultante da explosão da supernova, ou seja, o que restou dela, foi denominado de *Estrela de Nêutrons*.

Alguns anos depois, Oppenheimer e Volkoff [2], utilizando-se de um trabalho de Tolman [3], puderam, efetivamente, calcular a equação de estado para um objeto deste tipo.¹ Mas somente em 1968 [4] é que um pulsar, descoberto em 1967, foi interpretado corretamente, ao que parece, como sendo uma estrela de nêutrons girando rapidamente sobre seu eixo. As dificuldades de detecção se devem basicamente as reduzidas dimensões deste objeto, que tem raio típico de poucos quilômetros ($\sim 5 - 15 \text{ Km}$), porém com densidade da ordem da densidade nuclear ($\rho_0 \sim 2.8 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$). A massa deste tipo de objeto pode variar entre 1 e 3 massas solares ($M_\odot$).

Neste capítulo introduzimos o chamado *Modelo Estelar Politrópico*, e obtemos a equação de estado para uma estrela de nêutrons, isto é, a já conhecida equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). No regime de densidade nuclear e supranuclear, partículas elementares e ressonâncias têm um papel importante na dedução da equação de estado. Neste trabalho consideraremos especialmente a contribuição do campo de píons e por este motivo, mostramos as idéias centrais de um modelo de equação de estado para uma estrela que tenha entre seus constituintes um condensado de píons. Nos capítulos subseqüentes procuramos esclarecer a necessidade do condensado de píons neste modelo estelar.

1.2 Modelo Estelar Politrópico

Primeiramente, começaremos considerando uma estrela com simetria esférica, gasosa, sem rotação e sem campos magnéticos intensos. Com exceção da falta de rotação, estas aproximações são perfeitamente válidas para estrelas que estão na chamada *Seqüência Principal*.²

Sabe-se que a aceleração gravitacional g numa estrela depende somente de duas quantidades: do raio da estrela e da sua massa. Na Teoria Newtoniana da Gravitação g é escrito

¹Curiosamente, o trabalho de Oppenheimer e Volkoff e o trabalho de Tolman saíram num mesmo volume da *Physical Review*.

²Estrelas da Seqüência Principal são aquelas que apresentam, ao longo do tempo, variações em suas propriedades semelhantes a de uma estrela conhecida como, por exemplo o Sol. Têm tipicamente massa entre 0.1 e 60 $M_\odot$ [7].

como:

$$g = \frac{Gm}{r^2}, \quad (1.1)$$

onde $G = 6,673 \times 10^{-8} \text{ din.cm}^2/\text{g}^2$ é a constante gravitacional universal e $m = m(r)$ é a massa contida na esfera de raio r . Neste trabalho consideramos apenas estrelas cuja evolução é lenta. Isto é, podemos considerar que por um longo período de tempo elas estão num estado estacionário. Este é o caso de estrelas que se encontram, como mencionado acima, na Seqüência Principal. Vamos também considerar esta hipótese para estrelas de nêutrons. Uma consequência disto é que a massa m contida na esfera de raio r é função apenas de r , isto é, $m = m(r)$.

Usualmente, o campo gravitacional no interior de uma estrela deste tipo pode ser descrito pelo potencial gravitacional Φ que é solução da equação de Poisson [5]:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho,$$

onde ρ é a densidade de matéria dentro da estrela e ∇^2 é o operador Laplaciano. A estrela que consideramos aqui tem simetria esférica, o que nos permite escrever a equação acima como

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho. \quad (1.2)$$

Por simplicidade, nesta equação a densidade depende somente de r , isto é $\rho = \rho(r)$ e portanto, também $\Phi = \Phi(r)$. O vetor aceleração gravitacional aponta para o centro da estrela e em coordenadas esféricas pode ser escrito como $\vec{g} = (-g, 0, 0)$. Claramente temos a relação vetorial [5]

$$-\nabla \Phi = \vec{g},$$

que para simetria esférica se reduz a

$$\frac{d\Phi}{dr} = g. \quad (1.3)$$

Por simples comparação entre as equações (1.1) e (1.3) obtemos

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm}{r^2}, \quad (1.4)$$

que relaciona o potencial gravitacional Φ à aceleração gravitacional. A equação (1.4) pode ser facilmente integrada

$$\Phi \equiv \Phi(r) = \int_0^r \frac{Gm}{r'^2} dr' + C, \quad (1.5)$$

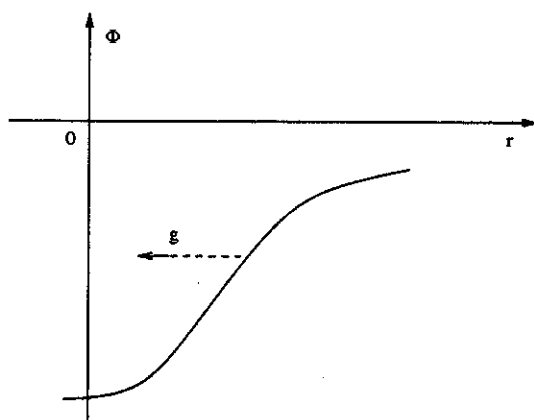


Figura 1.1: Representação esquemática do potencial $\Phi(r)$ para uma estrela com simetria esférica. O vetor $\vec{g}$ aponta para o centro da estrela. Uma figura semelhante a esta pode ser encontrada na referência [5].

onde C é uma constante de integração. O potencial gravitacional se anula quando $r \rightarrow \infty$, o que implica, na equação acima, $C = 0$. A Figura 1.1 mostra esquematicamente a função $\Phi(r)$.

Como mencionado acima, as estrelas da Sequência Principal passam por longas fases sem que nenhuma mudança significativa possa ser observada. Isto equivale a dizer que um elemento de matéria em seu interior não sofre nenhum tipo de aceleração, ou seja, o somatório das forças que atuam neste elemento acaba sendo nulo. Este equilíbrio mecânico é conhecido como *Equilíbrio Hidrostático*.

No Equilíbrio Hidrostático as únicas forças que atuam na estrela são a pressão de radiação, do interior para o exterior da estrela, e a força gravitacional, para o interior da estrela. Numa casca esférica de espessura dr , a massa é dada simplesmente por ρdr e a força peso será $-g\rho dr$, onde o sinal negativo significa que esta força é atrativa. A diferença entre as pressões p_s e p_i , que são as pressões nas partes superior e parte inferior da casca, respectivamente, é dada por

$$p_i - p_s = -\frac{dp}{dr}dr. \quad (1.6)$$

A soma de todas as forças que agem sobre esta casca esférica deve ser nula, ou seja,

$$\frac{dp}{dr} + \rho g = 0,$$

e, portanto,

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho. \quad (1.7)$$

Esta é a primeira equação para o Equilíbrio Hidrostático que descreve a estrutura estelar [5]. O raio da estrela é tomado neste caso como sendo uma variável independente do sistema. A equação (1.7) foi deduzida pelo chamado método de Euler, que consiste em tomar como única variável livre do sistema o raio r [7].

Utilizando o método de Lagrange, que consiste em tomar a massa como um parâmetro livre [7], obtemos a segunda equação para o Equilíbrio Hidrostático. Notemos que a quantidade de matéria numa casca esférica é dada por

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr.$$

Usando a Regra da Cadeia encontramos

$$\frac{d}{dm} = \frac{d}{dr} \times \frac{dr}{dm}. \quad (1.8)$$

A expressão (1.8) aplicada a um elemento de massa m resulta

$$\frac{dm}{dm} = \frac{dm}{dr} \times \frac{dr}{dm} = 4\pi r^2 \rho \frac{dr}{dm} \rightarrow \frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}. \quad (1.9)$$

Retornando este resultado à equação (1.8) obtemos

$$\frac{d}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{d}{dr}.$$

A simples aplicação de (1.8) na equação (1.7) resulta em

$$\frac{dp}{dr} = \frac{dp}{dm} \times \frac{dm}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho \rightarrow \frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}. \quad (1.10)$$

As equações (1.9) e (1.10) são as equações básicas de nosso problema e podem ser escritas na forma de um sistema, a saber

$$\begin{cases} \frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \\ \frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \end{cases}$$

No sistema acima temos 3 variáveis para duas equações: r , p e ρ , todas consideradas dependentes de m . Assim, para resolvermos este problema é necessário introduzir uma nova equação que tem o papel de condição de integrabilidade do sistema. Vamos tomar como *ansatz* a equação de estado politrópica

$$p = K \rho^\gamma = K \rho^{(1+\frac{1}{n})}, \quad (1.11)$$

onde K é a chamada *constante politrópica* e γ é o *expoente politrópico*. Equivalentemente, n é o *índice politrópico* definido por

$$n = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

Diferenciando (1.11) com respeito a r resulta

$$\frac{dp}{dr} = \gamma K \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr}.$$

Utilizando (1.4) e (1.7) obtemos para o potencial Φ a partir da expressão acima

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\gamma K \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr}. \quad (1.12)$$

Para $\gamma \neq 1$ podemos integrar a equação acima obtendo

$$\rho = \left[\left(-\frac{\Phi}{(n+1)K} \right) + D \right]^n,$$

onde usamos a definição acima de índice politrópico. Escolhemos $D = 0$ para que na superfície da estrela tenhamos $\Phi = 0$, pois a densidade é nula nesta região. Ficamos então com

$$\rho = \left(-\frac{\Phi}{(n+1)K} \right)^n. \quad (1.13)$$

No interior da estrela $\Phi < 0$, pois $\rho > 0$ [5].

De (1.2) e (1.13) obtemos a equação

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \left(-\frac{\Phi}{(n+1)K} \right)^n. \quad (1.14)$$

Por meio das substituições de variáveis [5]

$$z = Ar,$$

onde

$$A^2 = \frac{4\pi}{[(n+1)K]^n} (-\Phi)^{(n-1)} = \frac{4\pi}{(n+1)K} \rho_c^{\frac{n-1}{n}},$$

$$w = \frac{\Phi}{\Phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/n},$$

onde $\rho_c = \left(-\frac{\Phi_c}{(n+1)K} \right)^n$ é a densidade no centro da estrela, podemos escrever a equação (1.14) como

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{w} \frac{dw}{dz} + w^n = \frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dw}{dz} \right) + w^n = 0, \quad (1.15)$$

que é conhecida como Equação de Lane-Emden [5]. Interessa-nos encontrar soluções para a equação (1.15) que sejam finitas na origem do sistema. Sem perda de generalidade, podemos impor

$$\frac{dw(0)}{dz} = 0,$$

$$w(0) = 1.$$

A primeira condição acima nos diz que a variação da razão entre as densidades $\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)$ no centro da estrela ($r = 0$) é apenas de segunda ordem; a segunda condição nos diz que no centro teremos $\rho = \rho_c$. A solução de (1.15) com as condições iniciais acima é então [5]

$$\rho(r) = \rho_c w^n, \quad (1.16)$$

onde ρ_c foi definido na página anterior.

A partir da equação de estado (1.11) obtemos para a pressão p a seguinte expressão

$$p(r) = p_c w^{n+1}, \quad (1.17)$$

onde $p_c = K\rho_c^\gamma$. Para $\gamma = 5/3$ temos para a matéria estelar o caso não relativístico; para $\gamma = 4/3$ temos o caso relativístico [5].

O modelo construído até agora é bastante geral, mas indicado apenas para estrelas da Sequência Principal, o que infelizmente não é o caso das estrelas de nêutrons. Por serem extremamente densas elas necessitam de um tratamento relativístico por gerarem uma forte curvatura na região do espaço onde se encontram alterando a equação de estado do seu conteúdo material.

Na próxima seção abordaremos com maiores detalhes a construção de uma equação de estado para este tipo de objeto.

1.3 Equação de Estado para uma Estrela de Nêutrons

Em 1939, Oppenheimer e Volkoff [2], utilizando as equações de Einstein para a Gravitação, conseguiram deduzir uma equação de estado para uma estrela de nêutrons, tratada então como um gás de Fermi ideal. A equação por eles encontrada passou a ser chamada de Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). O nome de Tolman foi incorporado a esta equação pois seu artigo (veja referência [3]) foi de grande importância para que Oppenheimer e Volkoff atingissem seus resultados.

A idéia central ao se procurar uma equação de estado para uma estrela de nêutrons é a de fazer uma transição contínua entre a métrica exterior ao objeto que, para uma estrela simetricamente esférica, é a conhecida métrica de Schwarzschild, e a métrica interior, que depende dos constituintes da estrela. Portanto a métrica exterior é bem definida, enquanto que a métrica interior, por outro lado, admite inúmeras possibilidades, pois depende do modelo do material estelar adotado ser menos ou mais realístico.

Faremos, aqui, uma breve introdução às equações de TOV passando depois a um modelo mais realístico que leva em conta, entre os constituintes do interior estelar, um condensado de píons.

1.3.1 Equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

O elemento de linha mais geral com simetria esférica é dado por [6]

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

O campo gravitacional de uma estrela com simetria esférica é muito bem descrito na Teoria da Relatividade Geral pela famosa solução de Schwarzschild

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2Gm}{r}\right] dt^2 - \left[1 - \frac{2Gm}{r}\right]^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (1.18)$$

onde G é a constante gravitacional universal e m é a massa do corpo considerado. Mostra-se que a singularidade no ponto $r = 2Gm$ é removível, enquanto que a singularidade em $r = 0$ é essencial. Esta é a chamada Solução Exterior de Schwarzschild para as Equações de Campo de Einstein $R_{\mu\nu} = 0$. É imediata a identificação

$$e^{\nu(r)} = \left[1 - \frac{2Gm}{r}\right], \quad (1.19)$$

$$e^{\lambda(r)} = \left[1 - \frac{2Gm}{r}\right]^{-1}. \quad (1.20)$$

Precisamos, agora, encontrar a métrica ou solução interior e “colá-la” (usando as chamadas *condições de colagem*) à métrica exterior. As Equações de Campo de Einstein para este caso são

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu},$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o Tensor Energia-Momento associado a matéria estelar. Utilizando-se novamente a simetria esférica estas equações reduzem-se ao sistema [2]

$$8\pi p = e^{-\lambda(r)} \left(\frac{\nu'(r)}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}, \quad (1.21)$$

$$8\pi\rho = e^{-\lambda(r)} \left(\frac{\lambda'(r)}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (1.22)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(p+\rho)}{2} \nu'(r). \quad (1.23)$$

Aqui o tensor energia-momento, $T^{\mu\nu}$, tem como elementos não-nulos apenas os termos da diagonal principal, que são

$$T^0_0 = \rho, \quad T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -p.$$

As linhas nas variáveis das equações (1.21), (1.22) e (1.23) referem-se a diferenciação em relação à variável r . A equação (1.23) pode ser integrada em r se considerarmos $\rho = \rho(p)$. Assim,

$$\nu(r) = \nu(r') - \int_0^{p(r)} \frac{2dp}{p + \rho(p)}.$$

onde r' é o raio da estrela no qual temos evidentemente a condição de fronteira $p(r') = 0$. Daí,

$$e^{\nu(r)} = e^{\nu(r')} e^{-\int_0^{p(r)} \frac{2dp}{p + \rho(p)}}.$$

Do ponto de vista físico é intuitivo que a transição do interior para o exterior da estrela deve ser contínua o que implica, por (1.19), que devemos ter

$$e^{\nu(r')} = \left(1 - \frac{2Gm}{r'} \right).$$

Introduzimos agora a mudança de variável

$$u(r) = \frac{1}{2}r (1 - e^{-\lambda(r)}).$$

Derivando a função acima com respeito à r obtemos

$$\frac{du}{dr} = \frac{r^2}{2} \left[e^{-\lambda(r)} \left(\frac{\lambda'(r)}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \right].$$

Ou seja,

$$\frac{du}{dr} = 4\pi\rho(p)r^2, \quad (1.24)$$

que, após um pouco de álgebra, é exatamente a derivada da equação (1.22) com respeito à r [2].

Também diferenciando a equação (1.21) com respeito a r obtemos

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(p + \rho(p))}{r(r - 2u)}[4\pi pr^3 - u]. \quad (1.25)$$

Observe que as equações (1.24) e (1.25) formam um sistema nas variáveis u e p . Lembremos que a transição entre interior e exterior deve ser contínua. Assim, tomando os valores iniciais $u = u_0$ e $p = p_0$ em $r = 0$, as duas equações podem ser simultaneamente integradas até $r = r'$, onde obviamente devemos ter $p(r') = 0$. Tomando o valor de $u = U$ em $r = r'$ e utilizando o valor já obtido da métrica exterior para $e^{\lambda(r)}$ dado por (1.20), escrevemos

$$u(r')U = \frac{1}{2}r' \left(1 - e^{-\lambda(r')}\right) = \frac{1}{2}r' \left[1 - \left(1 - \frac{2Gm}{r'}\right)\right] = Gm.$$

Assim, as equações (1.24) e (1.25), com as condições de fronteira acima, formam um sistema que determina por completo a distribuição de matéria na estrela de nêutrons. Estas são portanto as equações de estado para esta estrela.

A equação (1.25) pode ser convenientemente escrita como

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{m}\right) \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1}, \quad (1.26)$$

que é a conhecida Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para o equilíbrio hidrostático de uma estrela de nêutrons. Escrita na forma acima pode-se ver facilmente que no limite de campos fracos e baixas velocidades, a equação acima reduz-se à sua forma clássica (1.7)

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho.$$

As equações (1.24) e (1.26) formam um sistema de duas equações diferenciais acopladas com três incógnitas. Daí uma equação de estado (condição de integrabilidade) é necessária para determinar a densidade ρ e a pressão p . Oppenheimer e Volkoff utilizaram a equação de estado para um gás ideal de Fermi para obter uma expressão para a densidade e pressão no interior da estrela e assim poderem estudar o comportamento da matéria em seu interior.

Na próxima seção faremos um estudo resumido do interior de uma estrela de nêutrons, procurando compreender um pouco melhor sua constituição.

1.4 O Interior de uma Estrela de Nêutrons

Após o colapso e explosão de uma supernova, o mais provável é que o objeto compacto restante seja uma estrela de nêutrons. Em outras palavras, estes objetos extremamente

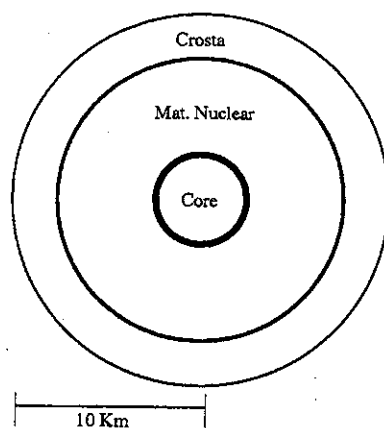


Figura 1.2: A figura acima mostra o corte seccional de uma estrela de nêutrons. Estão representadas as camadas nas quais estaria disposto o material estelar que compõe o interior deste objeto. As camadas não estão em escala.

densos são produzidos nos núcleos das estrelas massivas que sofrem colapso gravitacional e explodem, então, como supernovas. Em Astrofísica, as estrelas de nêutrons são exemplos dos chamados *Objetos Compactos*³ em razão de suas altíssimas densidades e tamanhos bastante reduzidos (da ordem de algumas dezenas de quilômetros).

Desde a descoberta dos pulsares nos anos de 1960, mais de 600 objetos identificados como pulsares foram observados e algo em torno de 200 estrelas de nêutrons foram identificadas em sistemas binários os quais são fontes intensas de raios X.

Estes objetos compactos são extremamente importantes para o entendimento da física em regimes extremos de densidade, pressão e campos eletromagnéticos. A matéria não tem um comportamento usual quando submetida a tais regimes extremos. A Figura 1.2 mostra uma representação pictórica do interior de uma estrela de nêutrons com 10 Km de raio. Embora bastante simples, esta figura é uma razoável aproximação do que se espera que ocorra no interior estelar. Observando a Figura 1.2, pode-se perceber uma nítida divisão em camadas do interior estelar, como uma "cebola". Baseados nesta divisão faremos uma descrição dos principais constituintes da matéria constitutiva de uma estrela de nêutrons. Para maiores detalhes, veja a referência [8]

1.4.1 Crosta

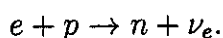
As temperaturas no interior de uma estrela de nêutrons são relativamente baixas, na escala de energia de excitação nuclear ($\sim MeV$). Além disto, os processos nucleares por vezes ocorrem

³Também Buracos Negros e Anãs Brancas pertencem a esta categoria.

de modo bastante rápido se comparados com o período de resfriamento deste objeto.

A densidade ρ cresce a medida que penetramos no interior da estrela. A atmosfera, que pode ser comprimida pela atração gravitacional a menos de 1 cm, é seguida pela crosta que tem profundidade típica de 1 Km. Esta crosta é composta basicamente de elétrons degenerados com alguma quantidade de ^{56}Fe , o último elemento produzido na queima termonuclear pela estrela que deu origem a supernova.

A medida em que penetramos na crosta, a energia de Fermi aumenta e quando a densidade $\rho \sim 8 \times 10^6 \text{ g/cm}^3$ os elétrons que estão no topo do mar de Fermi começam a ser capturados pelos núcleos, convertendo prótons em nêutrons via reação



Devido a sua fraca interação com a matéria o neutrino produzido escapa da estrela de nêutrons carregando energia e resfriando-a. Esta reação de captura ocorre ainda no início da formação da estrela de nêutrons. Outros processos ocorrerem posteriormente no interior estelar, produzindo mais neutrinos e acelerando ainda mais o resfriamento da estrela.

Com o aumento do número de nêutrons no núcleo, a matéria passa a ser organizada por camadas compostas por elementos cada vez mais pesados. A primeira camada contém ^{56}Fe , ^{62}Ni e ^{64}Ni . Quando os nêutrons atingem o número de 50, ocorre a chamada blindagem do núcleo e temos, então, a formação da segunda camada: ^{84}Se , ^{86}Ge , ^{80}Zn , ^{78}Ni e ^{76}Fe . A terceira camada começa com 82 nêutrons: ^{124}Mo , ^{122}Zr , ^{120}Sr e ^{118}Kr [8]⁴. Em cada uma destas camadas a densidade é sempre crescente e quando atinge $\rho_{\text{drip}} \sim 4.3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ (densidade de encharcamento de nêutrons) a matéria estelar passa a ter o comportamento de um fluido superdenso. A partir da densidade ρ_{drip} , a matéria passa a ser composta cada vez mais por nêutrons. Em contrapartida ao mar de elétrons, teremos agora um mar de nêutrons.

Ao ser atingida a densidade de $\rho_0/2$ (veja Introdução), a matéria passa a ser composta basicamente por nêutrons e uma pequena quantidade de prótons, elétrons e múons. A neutralidade de carga no interior estelar impõe que o número de prótons seja igual a soma do número de elétrons e múons. Esta região superfluida já está nos domínios da matéria nuclear.

1.4.2 Matéria Nuclear

O entendimento da matéria nuclear nesta região é bastante complicado. Não há mais elementos compostos, apenas núcleons, mésons, hipérons, káons, elétrons e alguns tipos de ressonâncias, como a Δ , por exemplo.

⁴Os números 50 e 82, bem como o 2, 8, 20, 28 e 126, são os chamados “números mágicos” e estão relacionados ao modelo nuclear de camadas e ao modelo *spin*-órbita [10].

Devido a esta quantidade de novos constituintes, o cálculo de uma equação de estado é bastante complicado e os processos numéricos tornam-se imprescindíveis. Para que as equações de estado sejam as mais próximas o possível da realidade utilizam-se os resultados experimentais dos espalhamentos nn e pn a baixas energias ($\sim 300\text{MeV}$) para se obter um melhor entendimento de suas interações e daí um modelo que descreva o interior estelar de modo satisfatório.

Temos nesta região, além de uma enorme quantidade de constituintes, o problema da superfluidez dos nêutrons e dos prótons. Os prótons além de poderem estar num estado de superfluido podem, também, estar num estado de supercondutor do Tipo II (altas temperaturas). A relação entre esse supercondutor e os altos campos eletromagnéticos presentes no interior estelar ainda permanece em aberto. Já os nêutrons em estado superfluido poderiam ser comprovados pelos chamados *pulsar glitches*: os vórtices de nêutron superfluido permanecem fixos no meio estelar e estão dispostos paralelamente ao eixo de rotação da estrela; acredita-se que mudanças bruscas nas posições destes vórtices poderiam fazer com que houvesse transferência de momento angular da região superfluida para a crosta, já que estas regiões teriam diferentes velocidades angulares. Esta transferência de momento angular abrupta ocasionaria os *pulsar glitches*.

As componentes mesônicas presentes nesta região podem ser macroscopicamente excitadas, atingindo o estado de condensados. Não se sabe ainda até que ponto estes condensados poderiam afetar a evolução da estrela de nêutrons. No Capítulo 4 faremos um estudo mais detalhado da condensação piônica. Aprofundando um pouco mais no interior da estrela chegamos núcleo, também chamado de *core*.

1.4.3 Core

Esta região é pouquíssimo conhecida e pode ter densidades acima da densidade nuclear ($5 - 10\rho_0$) [8]; temos aqui a presença de nêutrons livres e prótons.

O limiar entre a matéria nuclear ordinária e quarks livres pode ser atravessado, de modo brusco, acima de uma certa densidade limite, ρ_q . Assim, acima desta “densidade de corte”, teríamos o que se denomina na literatura como uma *estrela de quarks*. Este tipo de objeto poderia ser o último estágio antes do colapso gravitacional completo, ou seja, do surgimento de um buraco negro a partir de uma estrela de nêutrons.

1.5 Estrela de Nêutrons com Condensado de Píons

Daremos, aqui, uma pequena introdução a um modelo de equação de estado para uma estrela de nêutrons que tenha entre seus constituintes um condensado de píons. A existência de um condensado deste tipo no interior estelar pode acelerar o resfriamento da estrela [8] e, assim sendo, é de grande importância sabermos se esta matéria pode ou não existir neste tipo de objeto compacto.

Uma possível densidade Lagrangiana descrevendo a matéria no núcleo de uma estrela de nêutrons é dada por [9]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_B \bar{\psi}_B (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_B + g_{\sigma B} \sigma - g_{\omega B} \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\rho B} \gamma_\mu \tau_3 \rho^\mu) \psi_B + \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + \\ & - \frac{1}{4} \rho_{\mu\nu} \cdot \rho^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu \cdot \rho^\mu - \frac{1}{3} b m_n (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4, \end{aligned} \quad (1.27)$$

onde o índice B soma sobre todas as contribuições bariônicas carregadas no *core* (núcleo), ou seja, $B = N, \Sigma^\pm, \Lambda, \Xi^{0,-}, \Delta^-$, etc. Esta Lagrangiana descreve a conhecida teoria $\sigma - \omega - \rho$ [9], onde σ é um campo escalar, ω é um campo vetorial e ρ é campo isoescalar. Este modelo fornece uma boa aproximação para a descrição da matéria nuclear até o limite da transição dos quarks, ou seja, da densidade de transição ρ_{tran} .

A simples aplicação das equações de Euler-Lagrange, substituindo os campos mesônicos por seus valores médios e as correntes nucleônicas pelos valores gerados por estes campos médios, permite-nos obter da Lagrangiana acima a chamada Aproximação de Campo Médio. Esta aproximação não é relativística e portanto não poderia, a princípio, ser utilizada na equação de TOV. Assim, é necessário que se utilize a Aproximação Relativística de Hartree (ARH)⁵ [9], de tal modo que tenhamos, de fato, uma pressão que descreva uma estrela com matéria relativística. No caso em questão, a ARH nada mais é que a soma da pressão obtida por meio da Aproximação de Campo Médio e das contribuições do vácuo para os núcleons e para os mésons σ . A pressão assim obtida pode ser substituída na equação (1.25) fornecendo a relação entre densidade e pressão procurada.

Note que a Lagrangiana pode ser muito mais complexa do que a mostrada em (1.27). O inconveniente imediato está evidentemente na dificuldade de se trabalhar com grandes

⁵Pode-se utilizar outros tipos de aproximação, evidentemente.

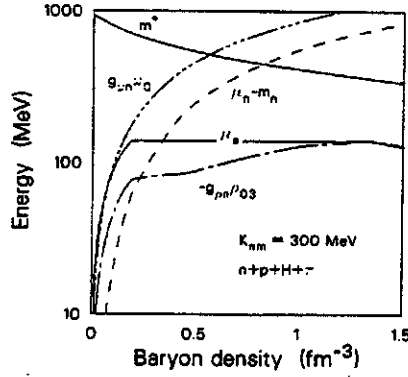


Figura 1.3: Equilíbrio entre n , p , hipérons, píons e leptons no interior estelar. Figura obtida da referência [9].

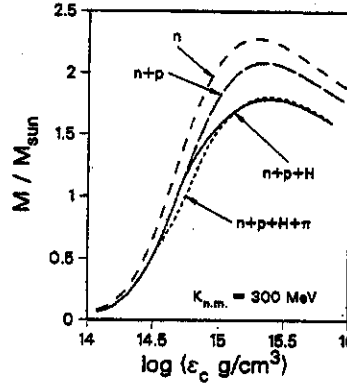


Figura 1.4: Massa de uma estrela de nêutrons como função da densidade central computada para quatro equações de estado. Observe que uma estrela apenas de nêutrons superestima a massa deste objeto. Figura obtida da referência [9].

quantidades de partículas interagentes. O tratamento matemático exato fica muito intrincado e o entendimento físico pode ficar bastante comprometido.

Os píons, como veremos com maiores detalhes no Capítulo 4, podem se condensar se tiverem sua massa efetiva⁶ no meio menor do que o potencial químico do elétron. Este fato causa uma súbita queda no potencial químico do elétron, como pode ser visto na Figura 1.3. Na Figura 1.4 vemos que a massa máxima da estrela também sofre uma ligeira queda, mostrando que os píons contribuem para uma razão menor entre $M/M_{\odot}$.

Concluimos, então, que os píons contribuem efetivamente para a evolução de uma estrela e

⁶Podemos definir a massa efetiva, para partículas de momento p_i , como $m_{ef}^2 = (\sum p_i)^2$. O subíndice i corresponde ao tipo de partícula que estamos lidando.

que portanto não podem ser menosprezados quando se procura descrever uma estrela através de uma equação de estado do tipo TOV.

Capítulo 2

Ressonância Paramétrica no Universo Inflacionário

2.1 Introdução

Neste capítulo estudamos o fenômeno de Ressonância Paramétrica no contexto do Modelo Cosmológico Inflacionário do Universo e seu papel como um mecanismo viável para a produção de matéria.

Embora o Universo “hoje”, em grande escala, pareça estar em expansão, esta claramente não é uma expansão exponencial. Dado que o Universo contém matéria e energia, é forçoso que o período de inflação cesse e numa fase seguinte é necessário um mecanismo que permita a criação de matéria.

Em 1990, Traschen e Brandenberger [13] e, independentemente, Dolgov e Kirilova [14], propuseram um modelo de produção de matéria baseado no fenômeno de Ressonância Paramétrica, numa tentativa de explicar a produção exponencial de matéria na fase de reaquecimento do Universo [15]. As equações diferenciais obtidas nestes modelos são conhecidas na literatura matemática como Equações de Mathieu [16, 17, 18, 19], por sua vez, pertencentes ao conjunto das chamadas Equações de Hill (veja Apêndice A). Este tipo de equação apresenta soluções exponencialmente crescentes (instáveis) em certas regiões de seu espaço de parâmetros denominados de bandas de ressonância (ou de instabilidade), e que se interpreta fisicamente como uma produção exponencial de matéria.

Em 1994, Kofman, Linde e Starobinsky [20] obtiveram em seu modelo de produção de partículas, as chamadas Equações de Lamé [16, 17, 18, 19], também pertencentes ao conjunto

das Equações de Hill, e que apresentavam também soluções instáveis e, portanto, fisicamente, produção exponencial de matéria dentro de suas faixas de ressonância. Neste mesmo artigo os autores mostram que a fase de produção de partículas pode ser dividida em duas subfases: a primeira, denominada pré-reaquecimento (*preheating*), na qual há efetivamente produção exponencial de partículas (na qual mecanismos de *back reaction* que podem ser desprezados) e a segunda, denominada reaquecimento (*reheating*), na qual os mecanismos de *back reaction* são levados em conta, além da termalização de toda a matéria produzida.

No que segue deste Capítulo faremos uma introdução da aplicação do fenômeno de Ressonância Paramétrica como o mecanismo básico para produção de matéria no Universo Inflacionário, pois tanto o modelo de García-Bellido e Kusenko (GB-K) [21] quanto o nosso, fazem uso deste mecanismo. Vamos nos restringir nesta dissertação aos mecanismos presentes no *preheating*, cujo modelo análogo será desenvolvido nos Capítulos 3 e 4 para modelos estelares. Estudamos o modelo de GB-K no Capítulo 3, e introduzimos nosso modelo no Capítulo 4.

2.2 Universo Inflacionário

2.2.1 Modelo Padrão

No Modelo Cosmológico Padrão, a evolução do Universo é descrita pelas Equações de Campo de Einstein¹

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}.$$

Dados observacionais nos levam a crer que o Universo, em grande escala, é homogêneo e isotrópico, isto é, nenhum ponto ou direção é privilegiado [24, 26].

Pode-se provar que métricas espacialmente isotrópicas e homogêneas podem ser descritas, sem perda de generalidade, pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (2.1)$$

onde (t, r, θ, φ) são as coordenadas do sistema e $a(t)$ é o chamado fator de escala cósmico [24]. O tempo t é o tempo próprio medido por um observador movendo-se conjuntamente (co-movendo) com a estrutura espacial do sistema, isto é, (r, θ, φ) é constante para o observador.

A princípio, o parâmetro k pode assumir qualquer valor real, porém é possível fazer uma transformação tal que apenas três valores para k sejam permitidos: -1, 0 e 1. Esta parametrização de k descreve possíveis curvaturas da parte espacial da métrica e, conseqüentemente,

¹Aqui consideramos apenas os modelos de Universo sem a constante cosmológica, isto é, $\Lambda = 0$.

os modelos de Universo acabam sendo definidos por estas curvaturas. Assim, quando $k = -1$ o espaço é dito de curvatura negativa e o Universo é aberto²; se $k = 0$ o espaço é infinito e tem curvatura nula e o Universo é dito plano; e se $k = 1$ o espaço é finito e tem curvatura positiva e o Universo é dito fechado.

As equações de Einstein independentes para a métrica FRW reduzem-se a

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p)a(t), \quad (2.2)$$

$$H^2 + \frac{k^2}{a^2(t)} = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 + \frac{k^2}{a^2(t)} = \frac{8\pi}{3}G\rho, \quad (2.3)$$

onde ρ e p são a densidade de energia e a pressão da matéria (ou radiação) presentes no Universo, respectivamente, e H é o fator de Hubble. A constante $G = M_p^{-2}$, onde $M_p = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}$ é a massa de Planck. As equações acima são denominadas Equações de Friedmann.

Das equações de Friedmann é possível derivar a lei de conservação de energia que pode ser escrita na forma

$$\dot{\rho}a^3(t) + 3(\rho + p)a^2(t)\dot{a}(t) = 0. \quad (2.4)$$

A equação acima pode ser facilmente obtida derivando-se a equação (2.3) com respeito ao tempo t e substituindo o resultado na equação (2.2). Para integrar completamente (2.4) é necessário claramente uma equação de estado $p = p(\rho)$.

Por simplicidade, assumiremos que esta equação de estado pode ser expressa pela relação simples:

$$p = \alpha\rho, \quad (2.5)$$

onde α é um parâmetro real que não depende do tempo. Substituindo (2.5) na equação (2.4) obtemos

$$\dot{\rho}a^3(t) + 3\rho(1 + \alpha)a^2(t)\dot{a}(t) = 0, \quad (2.6)$$

cujas solução é dada por

$$\rho = k[a(t)]^{-3(1+\alpha)}. \quad (2.7)$$

onde k é uma constante de integração. Os casos mais interessantes descritos pela equação (2.5) são:

²Esta afirmação é verdadeira apenas para espaços ditos simplesmente conexos. Entretanto, existem espaços tridimensionais, localmente homogêneos, com curvatura negativa constante e que não são simplesmente conexos. São os chamados espaços de Thurston [25].

(a) gás não-interagente: $p = \frac{1}{3}\rho$ (e.g. fótons)

$$\rho = ka^{-4}(t)$$

(b) matéria não relativística fria: $p = 0$

$$\rho = ka^{-3}(t)$$

(c) estado de vácuo: $p = -\rho$

$$\rho = \text{constante}$$

Para o caso (a) dizemos que temos um Universo dominado pela radiação; para (b), dominado pela matéria e (c), dominado pelo vácuo [26]. É comumente aceito que o nosso Universo real passou por várias fases do tipo acima mencionadas [24]

No caso em que a contribuição da curvatura k é pequena em comparação com $\frac{8\pi}{3}G\rho$, a equação (2.3) reduz-se a

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 \simeq \frac{8\pi}{3}G\rho \simeq \frac{8\pi}{3}Ga^{-3(1+\alpha)}(t), \quad (2.8)$$

cuja solução é aproximadamente

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3(1+\alpha)}}. \quad (2.9)$$

2.2.2 Modelo Inflacionário

O primeiro modelo cosmológico incluindo a fase de inflação é devido a Guth [23]. Não vamos estudar aqui o modelo de Guth porque ele já foi substituído por modelos mais realistas, no entanto, apresentamos no Apêndice C uma visão geral do Princípio Cosmológico e de alguns dos problemas inerentes ao Modelo Padrão³. No que se segue vamos apresentar um resumo do modelo atualmente mais aceito, o Modelo Caótico, no qual o mecanismo de Ressonância Paramétrica tem um papel fundamental para criação de matéria após a fase inflacionária.

Nos modelos inflacionários atualmente aceitos, um campo escalar clássico, denominado *inflaton*, é dominante no período inflacionário e é o responsável pelo crescimento exponencial do fator de escala $a(t)$. Algumas hipóteses simplificadoras devem ser feitas para que este campo escalar possa dar lugar a um período inflacionário. Estas hipóteses são [24]:

³Seguimos aqui a sugestão do Prof. Dr. Márcio J. Menon para inclusão deste Apêndice.

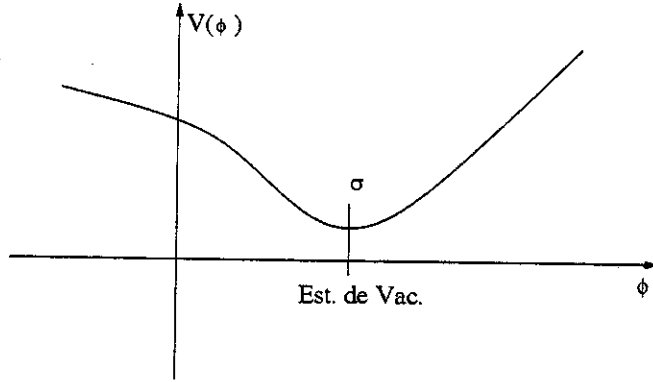


Figura 2.1: Representação pictórica do potencial de um campo escalar para o modelo de inflação caótica.

i) A métrica FRW é a métrica que descreve o Universo cuja taxa de expansão é dada pela equação (2.3). Esta aproximação pode ser tomada como sendo muito boa se considerarmos que rapidamente após a inflação a métrica novamente aproxima-se da de FRW;

ii) O campo escalar, que chamaremos de $\phi = \phi(t)$, tem valor inicial $\phi \neq \sigma$, onde σ é o seu ponto de mínimo global. Este ponto de mínimo, corresponde ao estado de vácuo do potencial $V(\phi)$, isto é, $V'(\sigma) = 0$ ($V''(\sigma) > 0$): o valor de $V(\sigma)$ é denominada Energia de Ponto Zero (*Zero Point Energy*);

iii) As correções quânticas deste campo escalar podem ser tratadas como pequenas perturbações de um campo clássico.

A Figura 2.1 mostra o potencial deste campo escalar. Este campo é descrito por uma equação de movimento clássico que é dada por [24, 22]

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.10)$$

onde $V'(\phi) = \frac{dV}{d\phi}$. Em uma analogia mecânica, esta equação descreve o movimento de descida de uma bola por uma rampa inclinada com atrito dado pelo termo $3H\dot{\phi}$ (termo de amortecimento). Este campo evolui até o seu ponto de mínimo. Durante esta descida dá-se o aumento exponencial do fator de escala $a(t)$.

Um ponto importante na análise deste campo escalar é saber quão rápido ele irá atingir seu ponto de mínimo σ . Para entendermos o porquê disto, suponhamos que na fase de inflação o tempo para que ϕ atinja σ seja da ordem de $100H^{-1}$ [24]⁴. É possível mostrar que o fator

⁴Tipicamente H^{-1} , denominado Tempo de Hubble, é o período de tempo necessário para que o Universo dobre seu tamanho (raio).

de escala é aumentado exponencialmente da forma [24]

$$a(100H^{-1}) \sim e^{100},$$

o qual mostra um aumento incrível no fator de escala.

Utilizando o valor de $M \simeq 10^{14} GeV$ obtemos um tempo de expansão na escala H^{-1} como sendo de $10^{-34} seg$ enquanto que o tempo para que ϕ atinja σ é da ordem de $10^{-32} seg$ [24]. Embora os tempos sejam incrivelmente pequenos, o tempo de “descida” do campo escalar ϕ até seu ponto de mínimo dura 100 vezes mais do que o período de expansão do fator de escala.

Na próxima Subseção descrevemos o mecanismo de Ressonância Paramétrica com detalhes, mostrando também como se dá sua utilização nesta fase de expansão.

2.2.3 Ressonância Paramétrica em Cosmologia

Equação de Mathieu

A equação de Mathieu é um caso particular da equação de Hill. Para nossos propósitos ela pode ser escrita como [11]

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega_0 + \epsilon)t] f(t) = 0, \quad (2.11)$$

onde ω_0 é a uma frequência de oscilação inicial do sistema e ϵ é um parâmetro arbitrário, mas pequeno. Esta forma de escrever é mais adequada para se fazer uma análise perturbativa das soluções.

Seguindo Landau [11], seja a função periódica (ver também Apêndice A)

$$p(t) = \cos(2\omega_0 + \epsilon)t.$$

Como *ansatz* procuramos soluções para a equação (2.11) que possam ser escritas como

$$f_0(t) = g_1(t) \cos\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t + g_2(t) \sin\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t, \quad (2.12)$$

onde $g_1(t)$ e $g_2(t)$ são funções que variam lentamente com o tempo (muito mais lentamente que as funções seno e cosseno acima). Este tipo de imposição limita bastante nossas soluções, porém fornece uma boa aproximação para as primeiras bandas de ressonância que são as mais importantes para o fenômeno de Ressonância Paramétrica.

Assim, substituindo a expressão (2.12) na equação (2.11) obtemos

$$-\left(2\dot{g}_1(t) + g_2(t)\epsilon + \frac{h\omega_0}{2}g_2(t)\right)\omega_0 \sin\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t +$$

$$+ \left(2\dot{g}_2(t) - g_1(t)\epsilon + \frac{h\omega_0}{2}g_1(t) \right) \omega_0 \cos \left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2} \right) t = 0, \quad (2.13)$$

que é bastante simples de ser obtida se desconsiderarmos todos os termos de segunda ordem em ϵ ($\epsilon \ll 1$). Além disto, $\ddot{g}_1(t) \sim \ddot{g}_2(t) \sim 0$, por causa de sua lenta variação temporal.

A equação (2.13) só será verdadeira se os coeficientes das funções trigonométricas forem simultaneamente nulos. Segue daí o sistema

$$\begin{cases} \dot{g}_1(t) + \frac{1}{2} \left(\epsilon + \frac{h\omega_0}{2} \right) g_2(t) = 0 \\ \dot{g}_2(t) + \frac{1}{2} \left(\epsilon - \frac{h\omega_0}{2} \right) g_1(t) = 0. \end{cases}$$

Devemos procurar agora uma solução que seja coerente com o Teorema de Floquet (ver Apêndice A), isto é, que seja proporcional a $e^{\mu t}$, onde μ é o chamado *Expoente de Floquet* ou *Expoente Característico*. Supomos, então, que $g_1(t) \simeq e^{-\mu t}$ e $g_2(t) \simeq e^{\mu t}$, obtendo, portanto, o sistema abaixo

$$\begin{cases} \mu g_1(t) + \frac{1}{2} \left(\epsilon + \frac{h\omega_0}{2} \right) g_2(t) = 0 \\ \mu g_2(t) + \frac{1}{2} \left(\epsilon - \frac{h\omega_0}{2} \right) g_1(t) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Observe que para termos a Ressonância Paramétrica, isto é, crescimento exponencial do número de partículas, devemos ter $\mu > 0$. Para que o sistema acima tenha solução não-trivial, seu determinante deve ser nulo o que implica que

$$\mu^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \epsilon^2 \right]. \quad (2.15)$$

Assim, a Ressonância Paramétrica ocorrerá somente se ϵ estiver contido no intervalo

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \epsilon < \frac{h\omega_0}{2}, \quad (2.16)$$

com frequência de oscilação em torno de $2\omega_0$. A Ressonância Paramétrica também se verifica para frequências próximas de $\frac{n\omega_0}{2}$, onde n é um número inteiro qualquer [11]. Entretanto, a largura dos intervalos de ressonância diminui rapidamente com o aumento de n , ou seja, este fenômeno é mais efetivo nas primeiras bandas de ressonância. Na Figura 2.2 estão dispostas as regiões de instabilidade. Uma figura semelhante a esta pode ser encontrada na Referência [17].

Observe que encontramos acima uma associação direta entre os parâmetros do sistema e o expoente de Floquet responsável pelas bandas de ressonância na equação de Mathieu. Há ainda outros modos de se encontrar este expoente para este tipo de equação [15].

Na Subseção seguinte introduziremos o modelo geral de aplicação destas equações em Cosmologia.

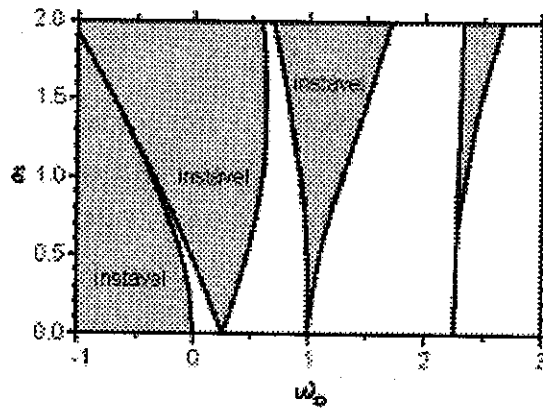


Figura 2.2: Representação pictórica da carta de estabilidade/instabilidade para a Equação de Hill. As áreas hachuradas representam bandas de ressonância.

Equação de Mathieu aplicada à Cosmologia

A aplicação deste tipo de equação à Cosmologia se dá no contexto inflacionário, mais precisamente na fase de reaquecimento do Universo. É postulado nesta fase de reaquecimento que o ínfaton decai em partículas escalares as quais posteriormente, por sua vez, decaem em bárions [13, 20, 27]

Este campo obedece as regras já impostas na Subseção 2.2.2. Usualmente considera-se para o ínfaton a densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \phi_i \phi^i - V(\phi),$$

onde o potencial $V(\phi)$ inclui auto-interações e o termo de massa deste campo.

Aqui não vamos considerar a contribuição da curvatura do Universo, a qual pode ser desprezada numa primeira aproximação.

No contexto da métrica FRW a equação de movimento do campo ϕ para a Lagrangiana acima é dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.17)$$

onde $V'(\phi)$ indica derivação funcional com respeito a ϕ .

Para um valor inicial do campo ínfaton muito grande ($\phi > M_p$), o termo de fricção $3H\dot{\phi}$ domina $\ddot{\phi}$, ou seja, podemos desprezar $\ddot{\phi}$. Este cenário corresponde ao estágio inflacionário [15]. Com o descréscimo do campo ϕ , o termo $3H\dot{\phi}$ fica cada vez menor, cessando a inflação quando $\phi \lesssim \frac{M_p}{2}$.

Após um curto estágio de descida até o mínimo do potencial $V(\phi)$, o campo inflaton oscila muito rapidamente com amplitude $\phi \sim 0.1 M_p$ [15] em torno do ponto de mínimo. Por causa do acoplamento do inflaton ϕ com campos de matéria, sua energia é transferida para estes últimos, apresentando estes um crescimento exponencial de suas amplitudes. Uma vez que o número de partículas produzidas é proporcional à amplitude dos campos de matéria, aqui coletivamente denotados por χ , obtemos uma produção enorme de partículas do tipo χ . Este é o mecanismo de Ressonância Paramétrica para produção de matéria no Universo Inflacionário, cujo detalhamento matemático faremos a seguir. No que se segue, por simplicidade, vamos considerar apenas um campo de matéria χ .

Tomemos a Lagrangiana de interação χ como

$$\mathcal{L}(\phi, \chi) = \frac{1}{2} g^2 \phi^2 \chi^2, \quad (2.18)$$

onde g é a constante de acoplamento. A Lagrangiana do campo χ é dada por

$$\mathcal{L}(\chi) = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \chi^\mu \partial^\mu \chi^\mu - m_\chi^2 \chi^2 - \frac{1}{2} g^2 \phi^2 \chi^2 \right). \quad (2.19)$$

A equação de Euler-Lagrange para o campo χ se escreve como:

$$\ddot{\chi}_k + 3H\dot{\chi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2(t)} + m_\chi^2 + g^2 \phi^2 \right) \chi_k = 0. \quad (2.20)$$

Na equação acima já foi tomada a Transformada de Fourier da solução $\chi(\vec{r}) = \chi(\vec{r}, t)$, isto é, $\chi_k(t) = \mathcal{F}[\chi(\vec{r}, t)]$, de modo que no cenário do reaquecimento do Universo $\chi_k(t)$ é interpretado como a amplitude dos campos de matéria χ com partículas com momento $k = |\vec{k}|$ (ou modo $|\vec{k}|$).

Por outro lado a solução aproximada para a equação de movimento do inflaton com o potencial dado por $V(\phi) = \frac{1}{2} m_\phi \phi^2$ (potencial do Modelo Caótico) é dada por

$$\phi(t) \sim \phi_0 \sin(m_\phi t),$$

onde ϕ_0 é o ponto de mínimo deste potencial. Substituindo esta solução na equação (2.20) ficamos com

$$\ddot{\chi}_k + 3H\dot{\chi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2(t)} + m_\chi^2 + g^2 \phi_0^2 \sin^2(m_\phi t) \right) \chi_k = 0.$$

Numa primeira aproximação, a expansão do Universo pode ser desprezada e, sem perda de generalidade, podemos tomar $a(t) = \text{constante} = 1$. Assim, a equação acima se escreve

$$\ddot{\chi}_k + (k^2 + g^2 \phi_0^2 \sin^2(m_\phi t)) \chi_k = 0. \quad (2.21)$$

A equação (2.21) é facilmente reduzida a uma equação de Mathieu [15]. O espaço (2-dimensional) dos parâmetros (k, g) da equação de Mathieu (como também mais genericamente o da equação de Hill) apresenta regiões no espaço destes parâmetros onde a solução cresce exponencialmente (bandas de ressonância ou instabilidade) e outras com soluções limitadas e periódicas (bandas de estabilidade). O Teorema de Floquet nos garante que nas bandas de ressonância a solução comporta-se como:

$$\chi_k \propto e^{\mu_k t}, \quad (2.22)$$

onde μ_k é denominado expoente de Floquet ou expoente característico. Através da transformação de Bogolyubov pode-se mostrar que o número de partículas é dado por [14]

$$n_k \propto e^{2\mu_k t}. \quad (2.23)$$

No caso do campo χ ser bosônico, como no caso de partículas escalares (*spin zero*), teremos de fato uma produção exponencial de partículas. Por outro lado, se o campo χ é fermiônico, então essa produção não poderá ser exponencial em virtude do Princípio de Exclusão de Pauli [14].

Equações de Lamé

A equação de Lamé, num certo sentido, é bem menos conhecida e estudada que a equação de Mathieu. Suas soluções são bem mais difíceis de serem encontradas que as de Mathieu, muito embora as duas descrevam basicamente, do ponto de vista da mecânica, o mesmo fenômeno: um pêndulo oscilante com frequência variável.

Este tipo de equação, que também surge naturalmente quando se separa a equação de Laplace em coordenadas elipsoidais [18], se escreve

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) + (A + Bsn^2 t)f(t) = 0, \quad (2.24)$$

onde A e B são constantes reais e $sn(t)$ é o chamado seno elíptico de Jacobi, que é uma função limitada e duplamente periódica. Assim, a equação acima pertence a classe das equações de Hill e, portanto, apresenta regiões de estabilidade e instabilidade no seu espaço de parâmetros (A, B) .

É conveniente escrever a equação (2.24) como

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) + [h + n(n+1)m^2 sn^2 t]f(t) = 0, \quad (2.25)$$

onde h é uma constante real, n é um número natural e $0 \leq m \leq 1$ é o módulo do seno elíptico.

A equação (2.25) é denominada a forma Jacobiana da equação de Lamé. Além desta forma, há quatro outras que podem descrever esta equação: a forma de Weierstrass, a trigonométrica e duas formas algébricas [18]. Cada uma destas formas possui vantagens e desvantagens no estudo das propriedades deste tipo de equação.

As soluções analíticas para este tipo de equação só existem para os casos onde $n(n+1)$ é um número inteiro. Para estes casos é possível obter uma expressão fechada para o expoente de Floquet [28]. De modo geral, é bastante raro obtermos soluções analíticas para a equação (2.25) e, por conseguinte, o expoente de Floquet pode ser apenas estimado.

Equações de Lamé Aplicadas à Cosmologia

A primeira aplicação da equação de Lamé em Cosmologia Inflacionária, se deu no estudo da fase de pré-reaquecimento do Universo. Na Referência [20] os autores utilizaram um campo escalar clássico ϕ com potencial efetivo dado por

$$V(\phi) = \pm \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4. \quad (2.26)$$

Neste potencial, o termo $-\frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2$ leva à quebra espontânea de simetria dentro do modelo inflaton. A Lagrangiana de interação é a mesma que (2.18) e apenas para relembrar a reescrevemos

$$\mathcal{L}(\phi, \chi) = -\frac{1}{2} g^2 \phi^2 \chi^2.$$

onde a constante de acoplamento g é tomada como sendo pequena.

A equação de movimento para o campo ϕ é então

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} \pm m^2\phi - \lambda\phi^3 = 0.$$

Após o período de inflação, quando o campo ϕ decresce abaixo da massa de Planck, M_p , o termo $3H\dot{\phi}$ torna-se desprezível possibilitando escrever

$$\ddot{\phi} \pm m^2\phi - \lambda\phi^3 = 0. \quad (2.27)$$

A equação acima é solúvel exatamente por meio de funções elípticas de Jacobi [27]. Desprezado o termo de massa, uma solução possível é $\phi(t) \propto sn(t)$. Procedendo da mesma forma que no caso da equação de Mathieu a equação de movimento de $\chi(t)$ se escreve como:

$$\ddot{\chi}_k(t) + [k^2 + g^2 \phi_0 sn^2(m_\phi t)] \chi_k(t) = 0, \quad (2.28)$$

que é uma equação de Lamé e que portanto possui soluções estáveis e instáveis dentro do espaço de fase de seus parâmetros.

Veremos no Capítulo 4 que o potencial (2.26) pode levar a soluções extremamente complexas, tanto do ponto de vista físico quanto matemático, tanto para o campo ϕ quanto para o campo χ . Nas Referências [13, 15, 20, 27, 28] podem ser encontrados maiores detalhes sobre as equações de Mathieu e Lamé aplicadas à Cosmologia Inflacionária.

Capítulo 3

Modelo de García-Bellido e Kusenko

3.1 Introdução

Em um artigo recente [21], García-Bellido e Kusenko (GB-K) foram os primeiros a fazer uso do fenômeno de Ressonância Paramétrica (fora do contexto da Cosmologia Inflacionária) para a produção de partículas em objetos compactos.

O modelo dá uma explicação para os chamados jatos de raios gama detectados na alta atmosfera como consequência do fenômeno de Ressonância Paramétrica num modelo de colisão entre duas estrelas de nêutrons. Por outro lado, este tipo de evento é raro e talvez as esporádicas colisões não sejam suficientes para dar conta do número de jatos de raios gama detectados.

Neste Capítulo fazemos uma breve exposição do modelo de GB-K, isto é, do mecanismo de produção de partículas em objetos compactos resultantes da colisão de duas estrelas de nêutrons.

3.2 O Modelo de García-Bellido e Kusenko

A idéia básica do modelo GB-K reside na possível existência de um estado de condensado de prótons superfluido no interior de uma estrela de nêutrons [21]. Como já vimos no Capítulo 1, os prótons podem assumir um estado superfluido na região de Matéria Nuclear, pois podem formar pares de Cooper, os quais obedecem a estatística de Bose-Einstein. Como são carregados, podem formar um supercondutor (do Tipo II), do mesmo modo como é feito com elétrons na teoria convencional de supercondutores.

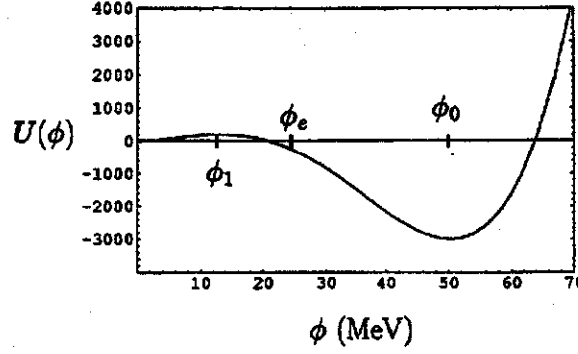


Figura 3.1: Potencial de Ginzburg-Landau. O potencial tem unidade de MeV^4 .

Para obter a densidade crítica acima da qual a matéria nuclear torna-se supercondutora, os autores observam que na colisão entre duas estrelas de nêutrons surgem ondas de choque acústicas que modificam a densidade da matéria nuclear por onde passam. Os autores, a partir deste ponto, assumem que estas flutuações na densidade irão gerar um *gap* de energia como o mostrado na Figura 3.1. Este *gap* causado pela passagem repetitiva das ondas de choque produzirá repetidas fases supercondutoras no condensado de prótons com período de repetição da ordem da escala acústica de tempo

$$\tau_a \sim 10^{-7} - 10^{-3} \text{ seg}$$

O tempo de relaxação do condensado de prótons é da ordem de $MeV^{-1} \sim 10^{-20} \text{ seg} \ll \tau_a$, daí o sistema rapidamente atinge o mínimo do potencial a cada passagem da onda de choque [21].

Na presença do campo magnético da estrela de nêutrons, a transição da fase supercondutora é de primeira ordem e ocorre em dois estágios: no primeiro, uma fase de bolha supercondutora surge e se expande; no segundo, o condensado de prótons oscila em torno do ponto de mínimo do potencial.

Para descrever o condensado de prótons após a fase de transição, ou seja, quando este se encontra num estágio supercondutor, é usada a teoria da supercondutividade de Ginzburg-Landau (GL). Segundo GB-K [21] a equação para o campo ϕ (ou parâmetro de ordem) pode ser escrita como

$$\ddot{\phi} + \frac{8\epsilon_F}{3c} \dot{\phi} - \frac{2\epsilon_F}{3cm_*} \nabla^2 \phi + U'(\phi) = 0 \quad (3.1)$$

onde $\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_*}$ é a *Energia de Fermi* para o condensado de prótons de massa m_* e $c = \frac{28\zeta(3)}{3\pi^3} \frac{\epsilon_F}{T_c}$

é a constante que caracteriza o condensado¹. A linha indica derivação com relação a ϕ .

O coeficiente de $\dot{\phi}$ tem magnitude de alguns MeV e é comparável à frequência de oscilação ω do condensado no ponto de mínimo (ϕ_0) do potencial. Assim sendo, este termo não poderá ser ignorado.

O potencial $U(\phi)$ é da forma

$$U(\phi) = -a\phi^2 + \frac{b}{2}\phi^4, \quad (3.2)$$

e de acordo com [63], $a = \alpha(T - T_c)$ (com $\alpha > 0$) é função apenas da temperatura ($T < T_c$) e b é um parâmetro positivo dependente apenas da densidade do condensado de prótons. De acordo com [29], a Figura 3.1 representa este potencial. Porém, segundo [21] $a < 0$ e portanto a representação correta deste potencial é a de um potencial quártico que contém um único ponto de mínimo.

Admitindo-se homogeneidade espacial para o parâmetro de ordem ϕ , podemos escrever a equação (3.1) mais simplesmente como

$$\ddot{\phi}(t) + \frac{8\epsilon_F}{3c}\dot{\phi}(t) + U'(\phi(t)) = 0. \quad (3.3)$$

Segundo [29] esta equação tem solução aproximada $\phi(t) \sim \sin(\omega t)$. A partir do ponto de mínimo ϕ_0 constrói-se a solução

$$\phi(t) = \phi_0 + \Phi \sin \omega t,$$

onde $\phi_0 \sim 50 MeV$ e $\omega \simeq 4.7 MeV$. Esta solução está incorreta pois não leva em conta o termo de amortecimento dado por $\dot{\phi}$. Em [21] introduz-se um termo de correção e passa-se a escrever

$$\phi(t) = \phi_0(1 + \Phi e^{-\frac{\epsilon_F t}{2}} \sin \omega t), \quad (3.4)$$

onde o termo $e^{-\frac{\epsilon_F t}{2}}$ seria o responsável pelo amortecimento que diminuiria a efetividade das oscilações do parâmetro de ordem ϕ no ponto de mínimo do potencial. A Figura 3.2 representa a evolução do campo ϕ . Após algumas oscilações o parâmetro é amortecido, mostrando que o condensado rapidamente atinge seu ponto de mínimo. Além disto, o termo Φ é redefinido como

$$\Phi = \frac{\phi_e}{\phi_0},$$

onde $\phi_e \sim 25 MeV$.

¹ $\zeta(3) \sim 1.2$ é a função zeta de Riemann calculada no ponto 3 e T_c é temperatura crítica para o condensado $\sim 0.5 MeV$.

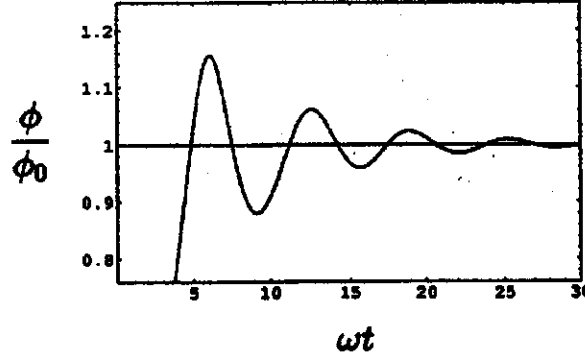


Figura 3.2: Amortecimento do campo $\phi(t)$ ao longo do tempo.

O condensado de prótons irá constituir um par de Cooper com carga $2e$. Dentro do *gauge* unitário, no qual ϕ é real, o acoplamento entre ϕ e o campo eletromagnético A_μ será dado por [21]

$$\mathcal{L} = (2e)^2 \phi^2 A_\mu A^\mu. \quad (3.5)$$

Na referência [21] utilizando o *gauge* unitário os autores buscam soluções do tipo

$$A_\mu(x) = \chi(x) e_\mu,$$

onde e_μ é um vetor de polarização e $\chi(x)$ é uma função que pode ser expandida em modos de Fourier. A equação de Euler-Lagrange para o campo eletromagnético se escreve como:

$$\ddot{\chi}_k(t) + [k^2 + 2(2e)^2 \phi^2] \chi_k(t) = 0.$$

onde o subíndice k indica que χ_k é a componente de Fourier com momento $k = |\vec{k}|$.

Substituindo a solução (3.4) na equação acima obtemos

$$\ddot{\chi}_k(t) + [k^2 + 2(2e)^2 \phi_0^2 (1 + \Phi e^{-\frac{\omega t}{2}} \sin \omega t)^2] \chi_k(t) = 0. \quad (3.6)$$

Fazendo a substituição de variáveis $z = \frac{\omega t}{2}$ podemos escrever a equação (3.6) como

$$\begin{aligned} \ddot{\chi}_k(z) + \left[\frac{4k^2}{\omega^2} + \frac{8(2e)^2 \phi_0^2}{\omega^2} \right] \chi_k(z) + \\ + \left[\frac{16(2e)^2 \phi_0^2 \Phi e^{-\epsilon z} \sin 2z}{\omega^2} + \frac{8(2e)^2 \phi_0^2 \Phi^2 e^{-2\epsilon z} \sin^2 \omega z}{\omega^2} \right] \chi_k(z) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

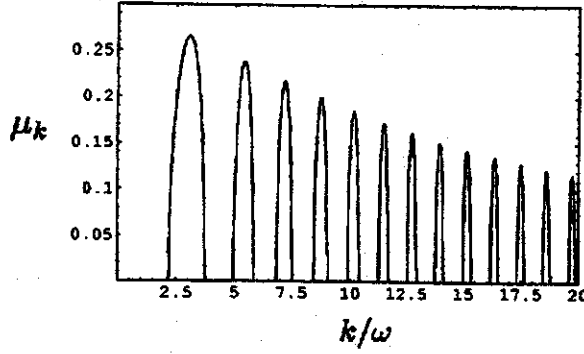


Figura 3.3: Evolução do expoente de Floquet para vários valores de k .

A forma geral da equação de Mathieu (para um modo k fixo) é do tipo

$$\ddot{\chi}_k(z) + [A_k + q(z)]\chi_k(z) = 0.$$

A equação (3.7) pode ser transformada numa equação de Mathieu com coeficientes [21]

$$A_k = \frac{4k^2}{\omega^2} + 4q_0 = 4 \left[\frac{4(2e)^2 \phi_0^2}{\omega^2} \right]$$

$$q(z) = 4q_0 \Phi e^{-\epsilon z} = 4 \left[\frac{4(2e)^2 \phi_0^2}{\omega^2} \right] \Phi e^{-\epsilon z}.$$

O termo

$$\frac{8(2e)^2 \phi_0^2 \Phi^2 e^{-2\epsilon z} \sin^2 \omega z}{\omega^2},$$

pode ser desprezado para um intervalo de tempo suficientemente grande. A equação resultante pode então ser escrita como

$$\ddot{\chi}_k(z) + \left[\frac{4k^2}{\omega^2} + 4q_0 + 4q_0 \Phi e^{-\epsilon z} \sin(\omega z) \right] \chi_k(z) = 0. \quad (3.8)$$

Segundo [21] a expressão acima é análoga a uma equação do tipo Mathieu (isto porque o fator de amortecimento $e^{-\epsilon z}$ induz um decaimento na solução de (3.8)), os autores encontram o expoente de Floquet (μ_k), associado a cada modo k , determinando assim as bandas de instabilidade. A Figura 3.3 nos mostra a dependência deste expoente com relação à razão de k/ω para $\epsilon = 0.31\omega$ fixo.

O número aproximado de partículas com momento k é dado por [21]

$$n_k \simeq \frac{1}{2} e^{\mu_k \omega t}. \quad (3.9)$$

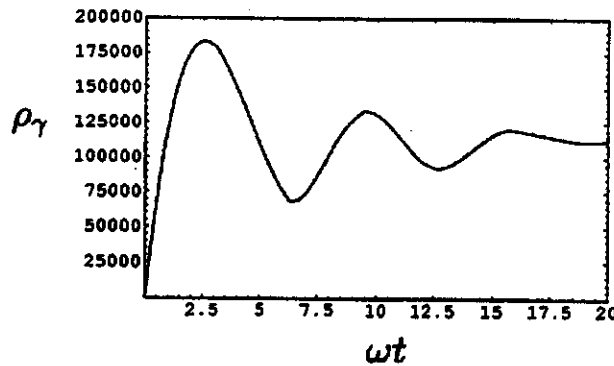


Figura 3.4: As flutuações na densidade de energia diminuem com o tempo, mostrando que existe um limite de fótons que podem ser produzidos com determinado momento k .

Segundo [21] a *back reaction* dos fótons produzidos se torna efetiva após algumas oscilações do condensado de prótons quando

$$\langle\langle\chi^2\rangle\rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_c} dk k^2 \frac{n_k(t)}{\omega_k} \simeq \frac{\omega^2}{8e^2}, \quad (3.10)$$

onde $\omega_k = k^2 + 8e^2\phi^2(t)$ é a frequência de cada modo k , e a integração se estende até o limite do corte físico para os modos k , que é dado por k_c .

A densidade de energia produzida pelos fótons durante seu estágio ressonante é dado por

$$\rho_\gamma(t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_c} dk k^2 \omega_k n_k(t). \quad (3.11)$$

A Figura 3.4 mostra a densidade de energia em função de ωt . Observa-se claramente que após algumas oscilações a produção de fótons decai assintoticamente para um valor fixo.

É interessante notar que o livre caminho médio dos fótons no interior de uma estrela de nêutrons é de 10^{-9} cm e, além disto, o efeito Compton tende a equalizar a temperatura entre fótons e elétrons. Com isto, os fótons tendem a se difundir no interior estelar. Os autores garantem, no entanto, que a colisão entre duas estrelas de nêutrons é um evento que ocorre de modo suficientemente rápido para que possa permitir a saída de fótons.

Dada a raridade da colisão de duas estrelas de nêutrons, o modelo de GB-K é bastante difícil de ser comprovado experimentalmente. Este é um dos motivos que nos levaram a procurar pelo fenômeno de Ressonância Paramétrica em estrelas de nêutrons isoladas nas quais também a escala de energia envolvida é bem menor que nos *gamma ray bursts*. No Capítulo 4 a seguir introduzimos o nosso modelo de produção de partículas via mecanismo de Ressonância Paramétrica em estrelas de nêutrons.

Capítulo 4

Ressonância Paramétrica no Modelo σ

4.1 Introdução

O modelo de densidade Lagrangiana proposto neste trabalho é o mesmo utilizado por Harrington e Shepard [43], que, por sua vez, fizeram uso dos trabalhos originais de Schwinger [47], Gell-Mann e Lévy [48] e Weinberg [40]. Esta densidade Lagrangiana nada mais é que o modelo σ para campos de píons, já bastante estudado nos últimos 50 anos. Como introdução a este modelo podem ser consultadas as referências [44, 47, 48].

Embora seja bastante simplificado para uma descrição realista dos estados da matéria nuclear, este modelo pode fornecer uma primeira abordagem para a verificação da existência do fenômeno de Ressonância Paramétrica em objetos compactos, mais especificamente, em estrelas de nêutrons. Tal fenômeno, até o momento, com a exceção da Referência [21], sempre esteve restrito ao estudo da produção exponencial de matéria pelo campo ínflaton na chamada fase de reaquecimento/pré-reaquecimento do Universo [27, 20]. A possível verificação deste mecanismo de produção de matéria em estados cuja energia é muito menor do que aquela encontrada na fase de reaquecimento/pré-reaquecimento poderia fornecer um ingrediente a mais no estudo da perda de matéria (ou energia) em estrelas compactas (*loss mass argument*) levando, conseqüentemente, a alterações na estrutura e evolução estelar.

Para este nosso modelo é essencial a existência de um condensado de píons *carregados* no interior estelar. A existência deste tipo de condensado já foi alvo de vários artigos [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36], e alguma controvérsia já surgiu quanto a possível existência de um condensado de píons *neutros* no interior de uma estrela de nêutrons [36, 51, 38]. Mais recentemente [37, 39, 60], já admite-se a existência individual não só do condensado de píons

carregados e de píons *neutros* como também a coexistência de ambos.

Assim, antes de introduzirmos o modelo σ de Harrington e Shepard [41, 43], faremos uma pequena introdução aos possíveis modelos de condensados de píons existentes em estrelas de nêutrons. Posto isto, poderemos introduzir nosso modelo de produção de partículas em estrelas de nêutrons via fenômeno de Ressonância Paramétrica.

4.2 Condensado de Píons

Definimos o campo de píons como sendo um méson isovetorial com três estados de carga (π^+, π^-, π^0) [44]. Os estados de carga π^+ e π^- podem ser representados por um campo escalar complexo e o estado π^0 por um campo escalar real. É conveniente representarmos os estados de carga π^+ e π^- por um campo complexo dado por uma combinação das componentes reais da representação hermitiana de $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)^1$. Esta combinação é dada por

$$\pi^\pm = \frac{\pi_1 \pm i\pi_2}{\sqrt{2}}, \quad (4.1)$$

restando ao campo π^0 a representação

$$\pi^0 = \pi_3. \quad (4.2)$$

A relação (4.1) representa um operador de criação de um π^- (ou destruição de um π^+). Forças nucleares não distinguem os diferentes tipos de píons e deste modo, devido às massas quase idênticas, elas são ditas invariantes sob transformações de rotação no espaço de isospin. Obviamente em se tratando de um campo eletromagnético essa propriedade não é mais válida, pois há diferença nos acoplamentos entre os píons *carregados* positivamente e negativamente com este campo. O campo eletromagnético claramente não se acopla com o pión *nêutro*. Este fato sugere que talvez a pequena diferença nas massas do píons *carregados* e do *nêutro* se deva exatamente a esses acoplamentos diferenciados com o campo eletromagnético [42].

A plausibilidade de uma fase de condensado de píons *carregados* no interior de uma estrela de nêutrons, com densidade acima da densidade nuclear ($\rho > \rho_{nuc}$) e em equilíbrio com uma pequena quantidade de prótons e elétrons, já foi bastante estudada [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 41, 43, 50]. As primeiras menções sobre esta possibilidade foram feitas por Bahcall e Wolf [56] e Migdal [50]. O leitor interessado neste tema poderá consultar estas referências e as contidas nelas.

¹Esta representação é possível pelo fato dos diferentes tipos de píons terem massas aproximadamente iguais.

Nas condições acima, para que ocorra o equilíbrio termodinâmico, é necessária a existência de um grande mar de Fermi de nêutrons² e conseqüentemente de um grande potencial químico

$$\mu_i = \frac{\partial E}{\partial \rho_i},$$

onde o subíndice i diz respeito ao tipo de matéria considerada (*e.g.*, nêutrons (n), prótons (p), píons (π), etc).

Caso tenhamos satisfeita a condição [58]:

$$\mu_n - \mu_p = \mu_e > \mu_\pi,$$

é possível que tenhamos a reação

$$n \rightarrow p + \pi^-,$$

onde μ_n , μ_p , μ_e e μ_π são os potenciais químicos do nêutron, do próton, do elétron e dos píons, respectivamente. Dadas as diferenças entre as quantidades de nêutrons, prótons e elétrons dentro de uma estrela de nêutrons, é necessário que se faça distinção entre o potencial químico destes elementos [34].

Caso a condição acima seja satisfeita, a diferença entre a energia inicial (E_{in}) e final (E_{fi}) do sistema é dada, aproximadamente, pela diferença entre os potenciais químicos do nêutron e do próton e da massa efetiva dos píons (m_π^{ef})

$$\Delta E = E_{in} - E_{fi} \simeq \mu_n - \mu_p - m_\pi^{ef}.$$

Se assumirmos $m_\pi^{ef} \sim m_\pi$, a expressão acima nos diz que a energia do sistema pode ser reduzida se $\Delta E > 0$ [34]. Se esta transição ocorrer, os píons ocuparão macroscopicamente um único modo com o nível de energia mais baixo (*ground state*). Esta fase é conhecida como estado de condensado.

Sawyer e Yao [51] mostraram que o número de partículas π^+ presentes no interior da estrela de nêutrons é muito menor do que o número de partículas π^- . Disto conclui-se que o potencial químico μ_{π^+} é menor do que o potencial μ_{π^-} . Para o nosso estudo é indiferente com qual condensado carregado estamos lidando, pois nos interessão, isto sim, as relações destes condensados, que genericamente chamaremos de *carregados*, com o campo eletromagnético da estrela de nêutrons.

O condensado de píons *nêutros* é freqüentemente estudado como uma onda estacionária [37, 38, 57]. Para que tal condensado tenha condições de existir é necessário que tenhamos a

²De acordo com o Capítulo 1, estamos na região da Matéria Nuclear.

reação

$$n \rightarrow n + \pi^0,$$

que ocorrerá se a massa efetiva de π^0 no meio considerado for nula [58]. Análises teóricas recentes sugerem a existência deste tipo de condensado em estrelas de nêutrons [59].

Para o nosso caso, o condensado de π^0 não modificará a interação entre o campo eletromagnético e o condensado *carregado*, pois não há interação entre o condensado de π^0 e o campo eletromagnético. Seguimos, aqui, o mesmo raciocínio que Migdal *et al* [57].

Por uma questão de simplicidade centraremos nossa discussão no condensado de π^- e em suas interações com o campo eletromagnético. As equações de movimento do condensado de π^- podem, por meio da igualdade (4.1), ser escritas para as suas componentes hermitianas.

Para maiores detalhes sobre a formação de condensados de píons em matéria nuclear superdensa podem ser consultadas as referências [57, 58].

Com base na existência do condensado de π^- , introduziremos o modelo de Harrington e Shepard, utilizado para o estudo das relações entre este condensado e o campo eletromagnético da estrela de nêutrons, com o intuito de fornecer uma base física para nosso trabalho.

4.3 O Modelo σ de Harrington e Shepard

Harrington e Shepard introduziram no modelo σ a presença de um campo eletromagnético interagindo com os píons *carregados* do interior estelar, através do acoplamento mínimo [41],

$$\partial^\mu \pi^- \rightarrow (\partial^\mu - ieA^\mu) \pi^-.$$

O campo eletromagnético interagente foi introduzido com o intuito de estudar o comportamento das propriedades supercondutoras deste tipo de condensado no interior de uma estrela de nêutrons. Este estudo se justifica pelo fato de que os campos eletromagnéticos no interior deste tipo de estrela, dependendo do modelo politrópico de equação de estado utilizado, podem ser da ordem (ou até maiores) de 10^{16}G [45, 46] ou 10^{19}G [57]. Campos eletromagnéticos desta ordem podem modificar o comportamento usual da matéria nuclear.

A partir da introdução de um multiplicador de Lagrange μ para a densidade de π^- , altera-se o modelo σ , já modificado anteriormente pela substituição minimal, para que este passe a levar em conta a densidade não nula do campo de píons.

Com a introdução deste multiplicador, o modelo σ de Harrington e Shepard passa a ser analisado sob dois pontos de vista: caso $\mu > m_\pi$ e caso $\mu < m_\pi$, onde m_π , como já foi visto, é

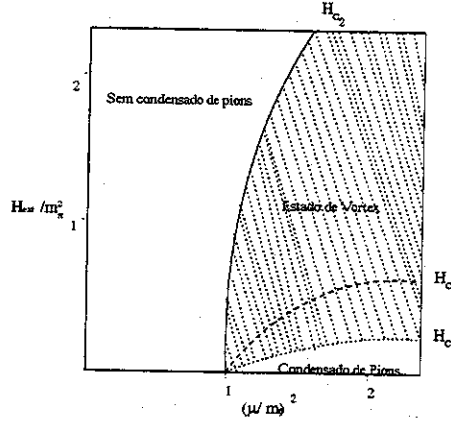


Figura 4.1: Estados ligados do modelo σ como uma função do campo externo e do potencial químico do pión. Para este caso específico, $m_\pi^2 \simeq 2.8 \times 10^{17} G$ [41]

a massa do π^+ (ou π^-). A partir destes casos considera-se o comportamento das propriedades supercondutoras do condensado com relação ao nível de penetração do fluxo eletromagnético no interior da estrela de nêutrons.

Mostra-se que para o caso $\mu < m_\pi$ haverá completa penetração do fluxo eletromagnético no interior estelar levando a uma completa destruição tanto das propriedades supercondutoras como do próprio condensado de píons [41, 43].

Já para $\mu > m_\pi$ há duas possibilidades: ou há completa penetração do fluxo ou não há penetração alguma do fluxo. A primeira possibilidade é chamada de “fase normal” e a segunda de “fase supercondutora”. É claro que na fase supercondutora, devido ao efeito Meissner, no interior do supercondutor teremos $\langle \vec{A} \rangle = 0$, onde $\vec{A}$ é o potencial vetor.

A partir da consideração de que $\mu > m_\pi$, mostra-se que existe um certo valor crítico (H_c) para o campo eletromagnético de tal modo que para $H < H_c$ o caso supercondutor é mais provável de existir e que para $H > H_c$ o caso normal é o mais provável.

Neste modelo há ainda dois valores críticos para o campo eletromagnético: acima de H_{c2} ($\sim 10^{19} G$ [57]) não temos a presença de condensado de píons que é completamente destruído pelo intenso campo; abaixo de H_{c1} temos a presença de condensado de píons com propriedades supercondutoras. Está claro que $H_{c1} < H_c < H_{c2}$. O estado para o qual temos $\mu > m_\pi$ e $H_{c1} < H_c < H_{c2}$ é chamado de vórtex. Nesta fase, ocorre a transição do estado supercondutor do condensado de píons para uma fase não supercondutora e depois disto, para um estado sem a presença do condensado. Esta transição ocorre à medida em que aumenta a penetração do fluxo eletromagnético no interior da estrela de nêutrons. A Figura 4.1 mostra os estados considerados até aqui.

Para $H \sim H_c$ é permitida a existência de uma fase supercondutora do condensado de píons *carregados* [57]. Num trabalho posterior [43], Harrington e Shepard introduziram na Lagrangiana de interação os núcleons presentes no interior da estrela [41]. A análise para este outro trabalho continua a mesma, com a diferença de que agora os núcleons retardam a possível destruição do condensado de píons *carregados* e de suas propriedades supercondutoras.

Neste trabalho, não estamos particularmente interessados no estudo das propriedades supercondutoras do condensado de píons, mas sim na eventual produção de fótons via fenômeno de Ressonância Paramétrica decorrentes da existência deste condensado. Interessa-nos, então, a região de vórtex, mais precisamente a região onde $H_{c1} \leq H_c \leq H_{c2}$, pois nela teremos a presença do campo eletromagnético e do condensado de píons, conjuntamente. Esta coexistência dos dois campos é fundamental para o modelo de Ressonância Paramétrica. Além disto, utilizaremos a Lagrangiana proposta em [43] por ser a mais completa, isto é, por levar em consideração os núcleons presentes no interior estelar.

4.4 Lagrangiana de Harrington e Shepard

Como vimos no Capítulo 2, o fenômeno de Ressonância Paramétrica é bastante utilizado em Cosmologia para o estudo da produção exponencial de matéria a partir do campo inflaton [27, 20, 61, 14, 13]. Sua aplicação em Astrofísica, em particular em estrelas de nêutrons, é fato recente [21]. Os autores de [21] utilizaram uma colisão de estrelas de nêutrons para obter um estado de condensado de prótons com propriedades supercondutoras. Tanto quanto sabemos, nosso modelo, apresentado a seguir, é a primeira aplicação deste fenômeno para estrelas compactas isoladas.

Com base no que foi feito até agora, utilizaremos o modelo σ de Harrington e Shepard [41, 43] para estudarmos a produção de partículas via Ressonância Paramétrica. Em Harrington e Shepard, além dos píons e núcleons, inclui-se um méson escalar σ com spin isotópico zero [48]. Este méson sofre interações fortes e se desintegra rapidamente em píons e, assim como π^0 , ele é *nêutro* e portanto não interagente com o campo eletromagnético.

A densidade Lagrangiana total é dada por [43]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_{\pi^-\pi^+} + \mathcal{L}_{\pi^0} + \mathcal{L}_\Psi - \mathcal{L}_{int}, \quad (4.3)$$

onde

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2(A^\mu)^2, \quad (4.4)$$

é a contribuição do campo eletromagnético e $\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ é a constante de acoplamento eletromagnético³. O tensor anti-simétrico $F_{\mu\nu}$ tem a definição usual

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Além disto,

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}m_0^2 \sigma^2 - \frac{\lambda^2}{4} \sigma^4 + c_1 \sigma, \quad (4.5)$$

é a contribuição do méson σ . O comportamento físico deste méson depende muito da equação de estado que se utiliza para descrever o comportamento da matéria no interior estelar e, portanto, não temos de fato um “méson σ ”, mas sim possíveis candidatos (*e.g.* méson ϕ , ρ , etc.).

O termo $c_1 \sigma$, presente em (4.5), é o responsável pela quebra espontânea de simetria na densidade Lagrangiana (4.5). A quebra espontânea de simetria ocorre quando a ação de um sistema dinâmico é invariante sob alguma transformação de simetria mas o estado fundamental (*ground state*) deste sistema deixa de ser representado por um singlete do grupo de simetria [52].

A contribuição do campo de píons *carregados* é dada por

$$\mathcal{L}_{\pi^-\pi^+} = \partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ + \frac{1}{2}m_0^2 (2\pi^- \pi^+) - \frac{\lambda^2}{4} (2\pi^- \pi^+)^2, \quad (4.6)$$

e

$$\mathcal{L}_{\pi^0} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^0)^2 + \frac{1}{2}m_0^2 \pi^{02} - \frac{\lambda^2}{4} \pi^{04}, \quad (4.7)$$

é a contribuição do campo de píons *nêutros*.

A contribuição dos núcleons é dada por

$$\mathcal{L}_\Psi = \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu] \Psi. \quad (4.8)$$

Usamos aqui a representação de isodubleto

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix},$$

onde $\Psi_n = \Psi_n(\vec{r}, t)$ e $\Psi_p = \Psi_p(\vec{r}, t)$ são as funções de onda para os campos de nêutrons e prótons, respectivamente.

³Também chamada de constante de estrutura fina.

A densidade Lagrangiana de interação é definida por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} = & -ie(\pi^+\partial^\mu\pi^- - \pi^-\partial^\mu\pi^+)A^\mu + \\ & -\bar{\Psi}[e\gamma^\mu A^\mu \frac{1}{2}(1 + \tau_3) - g(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma^5)]\Psi + \\ & + \frac{\lambda^2}{4}[\sigma^2\pi^{02} + \sigma^2(2\pi^-\pi^+) + \pi^{02}(2\pi^-\pi^+)],\end{aligned}\quad (4.9)$$

e fornece o termo de interação do campo eletromagnético com as partículas do sistema e também a interação dos campos escalares e vetoriais entre si. A interação entre os núcleons e os píons se dá por meio do acoplamento de Yukawa e a interação com o méson σ se dá por meio do acoplamento escalar. Por definição [44],

$$g = \frac{m}{f_\pi},$$

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} = \sqrt{2}(\pi^-\tau_+ + \pi^+\tau_-) + \pi^0\tau_3,$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde m é a massa do núcleon, o vetor $\vec{\tau}$ é definido pelas matrizes de Pauli $\vec{\tau} = (\tau_+, \tau_-, \tau_3)$ e $f_\pi \simeq 93 \text{ MeV}$ é a constante de decaimento do pión.

Os parâmetros m_0^2 , λ^2 e c_1 , na aproximação de árvore (*tree approximation*), estão relacionados com a massa observada do pión, m_π , com a massa do méson σ , m_σ e com f_π por [35]

$$\begin{cases} 2m_0^2 = m_\sigma^2 - 3m_\pi^2, \\ 2f_\pi^2\lambda^2 = m_\sigma^2 - m_\pi^2, \\ c_1 = f_\pi m_\pi^2. \end{cases} \quad (4.10)$$

Os parâmetros são assim definidos levando-se em conta a quebra de simetria para o méson σ . Se a quebra de simetria ocorresse na densidade Lagrangiana para o campo de píons, diferentes constantes seriam definidas [35].

Usualmente a massa do méson σ é tomada como sendo maior do que 1 GeV [41, 43, 48]. Neste trabalho tomaremos m_σ como sendo de 1020 MeV e com isto obtemos $m_0 \simeq 700 \text{ MeV}$ e $\lambda \simeq 7.7$. O valor dado para a massa do méson σ é arbitrário, pois não temos como saber qual é de fato o méson que está interagindo na Lagrangina proposta. No interior de uma estrela de nêutrons há vários “candidatos” a serem “o méson σ ”, como pode ser visto no Capítulo 1. Na Referência [47] o méson σ é introduzido sem que se saiba de fato quais seriam

suas características básicas, como massa por exemplo. Sabe-se apenas que ela deve ser maior do que 1GeV . Assim, optamos por tomar este valor para a massa apenas para termos uma proximidade com alguma partícula de massa conhecida. A primeira partícula mesônica com massa maior do que 1GeV é o méson ϕ , que tem massa de 1019MeV . Na próxima seção deduzimos a equação do movimento para o condensado de π^- .

4.5 Equação do Movimento do Condensado π^-

Tomando as equações de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu z)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0, \quad (4.11)$$

(onde z é um campo escalar ou vetorial qualquer), para a Lagrangiana Total (4.3), a equação do movimento para o condensado π^- se escreve

$$\square \pi^- + \left[-ie - e(A^\mu)^2 - m_0^2 + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2 + \frac{\lambda^2}{2}\pi^{02} \right] \pi^- + \lambda^2 \pi^+ (\pi^-)^2 + ig\sqrt{2}\bar{\Psi}[\tau_- \gamma_5]\Psi = 0, \quad (4.12)$$

onde $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ é o D'Alembertiano usual.

Aqui não levaremos em conta os efeitos do campo eletromagnético sobre o condensado de píons *carregados*. Assim, vamos trabalhar em um regime onde não há *back reaction* de A^μ sobre os termos do condensado. Iremos, desta forma, estudar apenas os efeitos do condensado sobre o campo eletromagnético. Para isto vamos restringir nosso estudo a uma região da estrela onde o campo A^μ não é suficientemente forte para destruir o condensado de π^- ou para modificar significativamente sua estrutura, ou seja, estamos na região de vórtice segundo Harrington e Shepard [41, 43]. Isto nos possibilita desconsiderar os dois primeiros termos entre os colchetes na equação (4.12), a qual reduz-se a

$$\square \pi^- + \left[-m_0^2 + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2 + \frac{\lambda^2}{2}\pi^{02} \right] \pi^- + \lambda^2 \pi^+ (\pi^-)^2 - ig\sqrt{2}\Psi_n^2 = 0. \quad (4.13)$$

O fato de desconsiderarmos os efeitos do campo eletromagnético sobre o condensado *carregado* nos permite dizer que estamos numa região no interior estelar onde $H_{c1} \leq H_c \leq H_{c2}$, pois este é o intervalo de coexistência de A^μ e do condensado. Vamos supor ainda, por simplicidade, que nesta região da estrela o condensado se apresenta homogênea e isotropicamente distribuído. Assim, o condensado de π^- passará a ser analisado apenas sob o ponto de vista de seu comportamento temporal. Desta forma, a equação (4.13) reduz-se a

$$\frac{d^2}{dt^2} \pi^- + \left[-m_0^2 + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2 + \frac{\lambda^2}{2}\pi^{02} \right] \pi^- + \lambda^2 \pi^+ (\pi^-)^2 - ig\sqrt{2}|\Psi_n|^2 = 0, \quad (4.14)$$

onde agora π^+ e π^- são dependentes unicamente do tempo t .

Como já vimos, o campo π^0 , num estado de condensado, pode ser descrito como uma onda estacionária [37, 38, 57]. Isto, aliado ao fato de que ele não interage com o campo eletromagnético, nos permite analisá-lo somente como um termo perturbativo para a massa do condensado de π^- presente na equação (4.14).

Para determinar a função que corresponde ao estado de menor energia deste méson (estado de vácuo) pode-se utilizar o método variacional, isto é, especificar várias funções teste e escolher aquela que melhor descreve este estado. Da referência [57], obtemos

$$\langle \pi^0 \rangle \simeq \langle \pi^0 \rangle_{vac} \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r}),$$

onde o coeficiente $\langle \pi^0 \rangle_{vac}$ pode ser obtido pela minimização do potencial efetivo do campo π^0 e $\vec{k}$ é o tri-momento associado a este campo. Assumiremos que o valor esperado médio deste campo no estado de vácuo é $\langle \pi^0 \rangle_{vac} = 0$.

Este resultado restringe o campo π^0 a um estado de não condensação. Este fato, numa primeira aproximação, não interferirá nas relações do condensado de π^- com o campo eletromagnético. Mesmo que tomássemos $\langle \pi^0 \rangle_{vac} \neq 0$, o máximo que faríamos seria agregar um termo de massa adicional ao condensado de π^- .

Assim, levando-se em conta o que foi mencionado acima, a equação (4.14) escreve-se

$$\frac{d^2}{dt^2} \pi^- + \left[\frac{\lambda^2}{2} \sigma^2 - m_0^2 \right] \pi^- + \lambda^2 \pi^+ (\pi^-)^2 - ig\sqrt{2} |\Psi_n|^2 = 0. \quad (4.15)$$

Quando introduzimos a quebra de simetria na densidade Lagrangiana (4.3) através do termo $c_1 \sigma$, presente na densidade Lagrangiana para o méson σ , modificamos o estado de vácuo do sistema, forçando o surgimento de um novo vácuo. Neste caso, ocorrerá naturalmente a condensação do méson σ devido às altas pressões e densidades presentes no interior estelar. Com base neste fato, teremos $\langle \sigma \rangle_{vac} \neq 0$ e de acordo com as referências [34, 35]

$$\langle \sigma \rangle_{vac} \simeq (\cos \theta) f_\pi.$$

O parâmetro θ é o chamado ângulo chiral. Se ele é tal que $\cos \theta = 0$, isto implicaria em não condensação para o méson σ . Para qualquer valor de θ onde $\cos \theta \neq 0$, há condensação do méson σ . A partir deste valor para σ no vácuo pode-se escrever, sem perda de generalidade

$$\langle \sigma \rangle \simeq b \langle \sigma \rangle_{vac} \simeq b (\cos \theta) f_\pi = a f_\pi, \quad (4.16)$$

onde $a = b \cos \theta > 0$ é um parâmetro real.

Adotamos esta aproximação pois não estamos levando em conta as eventuais interações entre o condensado de π^- e o méson σ , mas sim, em que este méson contribua apenas como

um termo de massa para aquele condensado. Poderíamos também encontrar a equação de movimento para o condensado σ , porém há uma grande quantidade de candidatos para “o méson σ ” dentro de uma estrela de nêutrons. Os eventuais tipos de mésons encontrados no interior deste tipo de estrela estão fortemente atrelados ao tipo de equação de estado que se utiliza para descrever este objeto compacto. Na referência [9] podem ser encontradas algumas equações de estado e seus respectivos constituintes básicos. Está fora do escopo deste trabalho tentar encontrar qual é o melhor candidato para este méson σ e suas possíveis interações com a matéria ordinária.

Assim, substituindo este valor médio (4.16) para o méson σ na equação (4.15) obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2}\pi^- + \left[\frac{\lambda^2 a^2 f_\pi^2}{2} - m_0^2 \right] \pi^- + \lambda^2 \pi^+ (\pi^-)^2 - ig\sqrt{2}|\Psi_n|^2 = 0. \quad (4.17)$$

O parâmetro livre a nos permite analisar a equação acima em dois casos distintos:

$$1. \frac{\lambda^2 a^2 f_\pi^2}{2} - m_0^2 > 0 \quad \text{e} \quad 2. \frac{\lambda^2 a^2 f_\pi^2}{2} - m_0^2 < 0$$

Por simplicidade de notação escreveremos daqui para a frente

$$\frac{\lambda^2 a^2 f_\pi^2}{2} - m_0 = \pm 2M^2,$$

onde o sinal negativo indica o **Caso 1** ($-2M^2$) e o sinal positivo o **Caso 2** ($+2M^2$). Incluindo ambos os sinais, a equação (4.17) escreve-se então como:

$$\frac{d^2}{dt^2}\pi^- \pm 2M^2\pi^- + \lambda^2\pi^+(\pi^-)^2 - ig\sqrt{2}|\Psi_n|^2 = 0. \quad (4.18)$$

Analisaremos a equação acima sob dois pontos de vista distintos: quando $|\Psi_n|^2 = 0$ (Caso Homogêneo) e quando $|\Psi_n|^2 \neq 0$ (Caso Não-Homogêneo). Faremos isto nas duas próximas seções.

4.6 Caso Homogêneo ($|\Psi_n|^2 = 0$)

No Caso Homogêneo estamos desconsiderando os efeitos que os núcleons podem exercer sobre o condensado de píons *carregados*. A equação (4.18) reduz-se então a

$$\frac{d^2}{dt^2}\pi^- \pm 2M^2\pi^- + \lambda^2\pi^+(\pi^-)^2 = 0. \quad (4.19)$$

A equação acima, em casos especiais, pode ser resolvida por meio de Funções Elípticas de Weierstrass [64]. O tipo de solução, quando existe, não tem uma interpretação física simples e por este motivo optamos por não resolver esta equação por este método.

Para resolvermos (4.19) utilizaremos a relação (4.1), isto é, transformaremos uma equação complexa em um sistema de equações reais que, esperamos, seja mais simples de ser resolvido e analisado. Assim, utilizando a representação (4.1) obtemos

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} \pi_1 \pm 2M^2 \pi_1 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_1^3 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_2^2 \pi_1 \right] - i \left[\frac{d^2}{dt^2} \pi_2 \pm 2M^2 \pi_2 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_2^3 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_1^2 \pi_2 \right] = 0.$$

Daí obtemos imediatamente o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \pi_1 \pm 2M^2 \pi_1 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_1^3 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_2^2 \pi_1 = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} \pi_2 \pm 2M^2 \pi_2 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_2^3 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_1^2 \pi_2 = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

O sistema acima é composto de duas equações diferenciais homogêneas de segunda ordem, não-lineares acopladas. Uma solução geral é difícil de ser encontrada e ainda suas soluções podem depender fortemente das condições iniciais dadas. A simetria do sistema, porém, nos sugere que π_1 e π_2 têm o mesmo tipo de comportamento no que diz respeito à frequência de oscilação, amplitude e período descritos por suas soluções, caso elas sejam periódicas. Para ter uma compreensão melhor do conjunto-solução começamos por analisar o sistema (4.20) numericamente por meio de seu sistema equivalente de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \pi_1 = \zeta(t) \\ \frac{d}{dt} \zeta(t) = \pm 2M^2 \pi_1 - \frac{\lambda^2}{2} \pi_1^3 - \frac{\lambda^2}{2} \pi_2^2 \pi_1 \\ \frac{d}{dt} \pi_2 = \varphi(t) \\ \frac{d}{dt} \varphi(t) = \pm 2M^2 \pi_2 - \frac{\lambda^2}{2} \pi_2^3 - \frac{\lambda^2}{2} \pi_1^2 \pi_2, \end{cases} \quad (4.21)$$

onde $\zeta(t)$ e $\varphi(t)$ são funções contínuas com pelos menos a primeira derivada contínua. As Figura 4.2 e 4.3 nos mostram a evolução temporal dos campos π_1 e π_2 para o **Caso 1** e **Caso 2**. Como era de se esperar, devido à simetria do sistema acima, ambos têm mesma frequência e mesma amplitude. Observe que a evolução temporal para ambos os casos é bastante semelhante e, o que é mais importante para nós, ambas as evoluções podem ser descritas por funções periódicas. Doravante utilizaremos a convenção de que tanto π_1 quanto π_2 têm unidade de MeV e que $t \rightarrow t/T$, onde T é o período de oscilação do condensado.

A Figura 4.4 nos mostra o comportamento de π_1 e π_2 nos espaços de fase $(\pi_1, \frac{d\pi_1}{dt})$ e $(\pi_2, \frac{d\pi_2}{dt})$, respectivamente, para o **Caso 1**; a Figura 4.5 mostra o comportamento de π_1 e π_2 no espaço de fase $(\pi_1, \frac{d\pi_1}{dt})$ e $(\pi_2, \frac{d\pi_2}{dt})$, respectivamente, para o **Caso 2**. Através destas figuras nota-se que o comportamento periódico se assemelha ao de funções do tipo elíptico e não ao de uma função trigonométrica simples. Era de se esperar que isto ocorresse, pois as possíveis soluções de (4.19) são do tipo de funções elípticas.

A semelhança entre os gráficos de π_1 e π_2 nos sugere naturalmente o *ansatz*

$$\pi_1 = \pi_2. \quad (4.22)$$

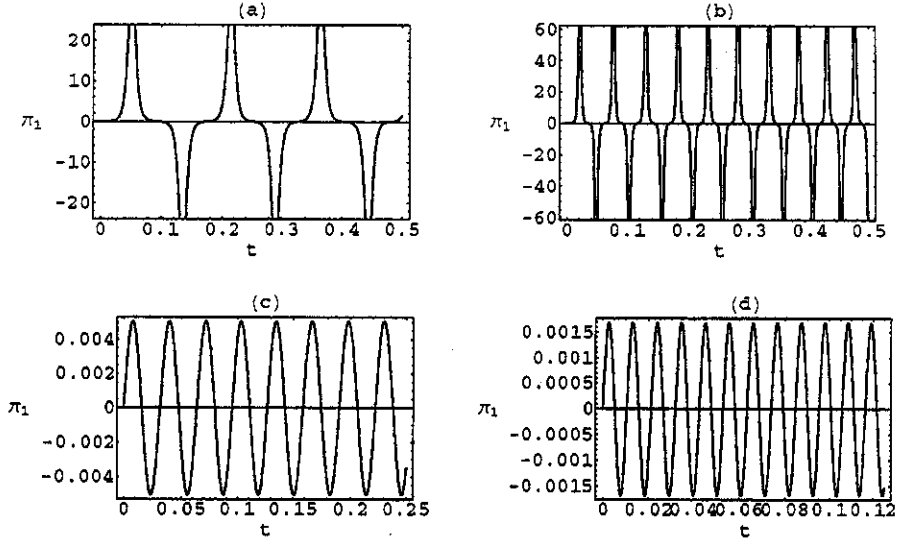


Figura 4.2: Evolução temporal de π_1 . Para o **Caso 1** a) com $M = 140 \text{ MeV}$ b) com $M = 420 \text{ MeV}$ e para o **Caso 2** c) com $M = 140 \text{ MeV}$ e d) com $M = 420 \text{ MeV}$. Em todos os caso tomamos $\lambda = 7.7$.

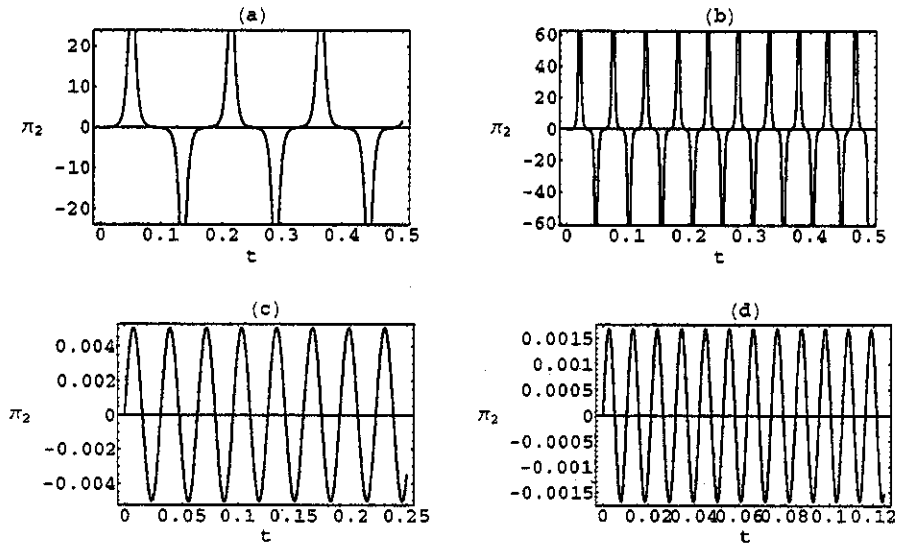


Figura 4.3: Evolução temporal de π_2 . Para o **Caso 1** a) com $M = 140 \text{ MeV}$ b) com $M = 420 \text{ MeV}$ e para o **Caso 2** c) com $M = 140 \text{ MeV}$ e d) com $M = 420 \text{ MeV}$. Em todos os caso tomamos $\lambda = 7.7$.

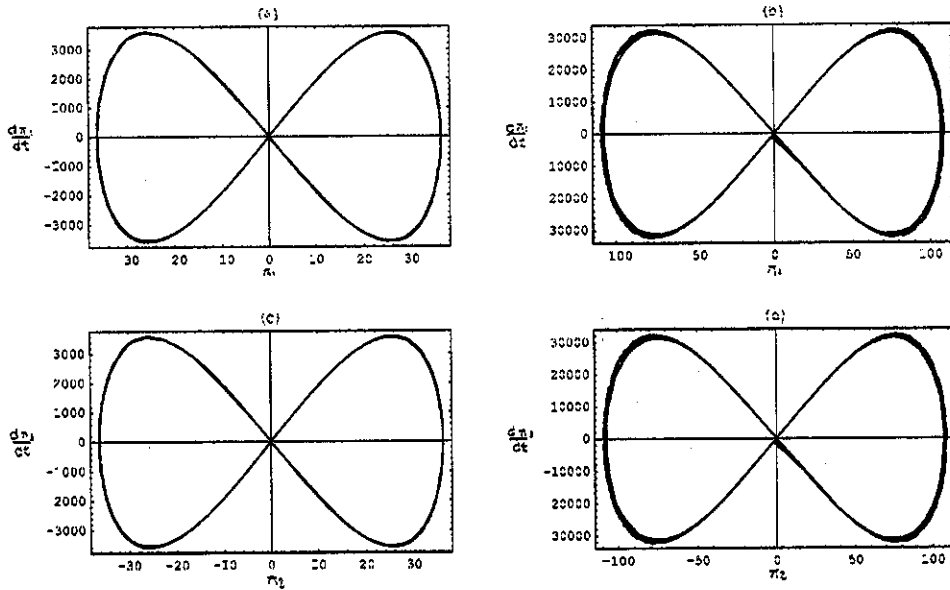


Figura 4.4: Espaço de fase para π_1 no **Caso 1**: a) $M = 140 \text{ MeV}$ e b) $M = 420 \text{ MeV}$. Espaço de fase para π_2 no **Caso 1**: c) $M = 140 \text{ MeV}$ e d) $M = 420 \text{ MeV}$. Em todos os caso $\lambda = 7.7$.

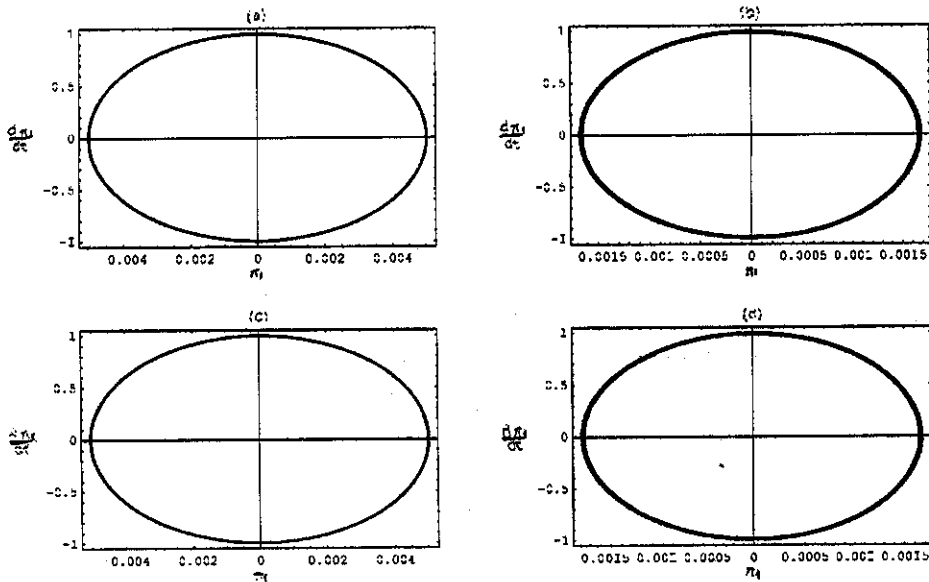


Figura 4.5: Espaço de fase para π_1 no **Caso 2**: a) $M = 140 \text{ MeV}$ e b) $M = 420 \text{ MeV}$. Espaço de fase para π_2 no **Caso 2**: c) $M = 140 \text{ MeV}$ e d) $M = 420 \text{ MeV}$. Em todos os caso $\lambda = 7.7$.

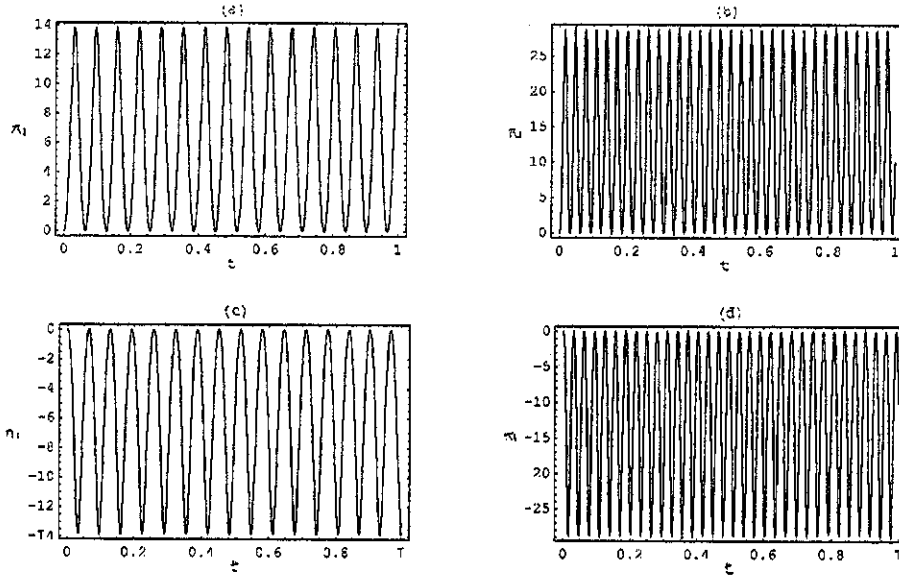


Figura 4.6: Evolução temporal do campo auxiliar π_1 baseada na equação (4.23): **Caso 1** a) $M = 140 \text{ MeV}$ e b) $M = 420 \text{ MeV}$; **Caso 2** c) $M = 140 \text{ MeV}$ e d) $M = 420 \text{ MeV}$. Em todos os casos $\lambda = 7.7$.

Este *ansatz* se encaixa perfeitamente dentro da simetria do problema, isto é, ao fato de termos um sistema simétrico (sistemas ((4.20) ou (4.21))). Com esta escolha o sistema (4.20) reduz-se a apenas uma equação, como é fácil de verificar. Assim, escrevemos para π_1 , por exemplo,

$$\frac{d^2}{dt^2}\pi_1 \pm 2M^2\pi_1 + \lambda^2\pi_1^3 = 0. \quad (4.23)$$

Na Figura 4.6 apresentamos o comportamento temporal de π_1 . Observe que o comportamento temporal em ambos os casos é bastante semelhante.

A expressão acima é conhecida como equação de Duffing [53]. As soluções para este tipo de equação são dadas por meio de funções elípticas de Jacobi [18]. Apesar das aproximações feitas, continuamos ainda com soluções que apresentam o mesmo tipo de comportamento elíptico o que apenas reforça o fato de que essas aproximações são consistentes. Existe uma relação que nos permite representar soluções dadas por funções elípticas de Weierstrass por meio de funções elípticas de Jacobi [54]. A seguir faremos uma pequena análise da equação de Duffing e de suas soluções.

Resolução da Equação de Duffing

A equação de Duffing apresenta forma geral

$$\frac{d^2}{dt^2}\psi + k\frac{d\psi}{dt} + a\psi + b\psi^3 = fH(xt), \quad (4.24)$$

onde $\psi=\psi(t)$ é um campo escalar massivo qualquer, k , a , b , f e x são constantes reais e $H(xt)$ é uma função trigonométrica do tipo seno ou cosseno. G. Duffing, em 1918, realizou extenso estudo sobre esta equação aplicada a vibrações forçadas [53].

Por simples comparação entre (4.23) e (4.24) vemos que $k = f = 0$ e assim, o caso particular da equação (4.24) que estamos interessados é escrita como

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + a\psi + b\psi^3 = 0. \quad (4.25)$$

Esta equação é normalmente analisada sob o ponto de vista do parâmetro b que é considerado como sendo pequeno e representando um ligeiro desvio na linearidade do problema [53]. Há dois casos a serem considerados e que têm relação com o sinal de b : se $b > 0$ teremos o chamado caso *hard spring*; se $b < 0$, teremos o caso *soft spring*.

Para obtermos os gráficos associados a esses possíveis valores do parâmetro b devemos resolver (4.25) do seguinte modo: definimos uma nova variável dependente $\eta=\eta(t)$ tal que a equação (4.25) acima seja equivalente ao sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = \eta \\ \frac{d\eta}{dt} = -b\psi^3 - a\psi. \end{cases}$$

A direção de campo dado por este sistema no plano coordenado (η, ψ) é dada por

$$\frac{d\eta}{dt} \frac{dt}{d\psi} = \frac{d\eta}{d\psi} = \frac{-b\psi^3 - a\psi}{\eta}. \quad (4.26)$$

Uma simples separação de variáveis na equação (4.26) fornece

$$\eta d\eta = (-b\psi^3 - a\psi)d\psi.$$

Integrando a equação acima obtemos

$$\eta^2 + \frac{b\psi^4}{2} + a\psi^2 = 2d, \quad (4.27)$$

onde d é uma constante de integração.

Para $a > 0$, $b > 0$ (*hard spring*) só temos solução real se $d \geq 0$. No plano (η, ψ) a Figura 4.7a representa esta situação. As soluções representam trajetórias fechadas tendo

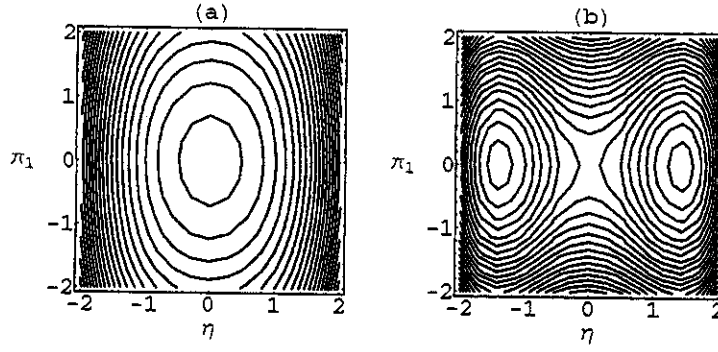


Figura 4.7: Representação pictórica da equação (4.27): a) Caso *hard spring* e b) Caso *soft spring*.

como origem o centro do sistema de coordenadas. Dito de outra forma: as soluções são periódicas. Para cada trajetória, o valor de d representa um nível de energia [53].

Para $a > 0$, $b < 0$ (*soft spring*) é possível termos soluções reais se $d < 0$. Esta situação está representada na Figura 4.7b. Observe que próximo aos pontos singulares temos soluções periódicas.

Para este caso, *soft spring*, teremos três pontos singulares representadas pelos pontos

$$(0, 0), \quad \left(\left(-\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{2}}, 0 \right) \quad e \quad \left(- \left(-\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{2}}, 0 \right).$$

Observe que temos um ponto de sela em $(0, 0)$.

Com base no que foi dito acima, é possível resolvermos (4.23) do mesmo modo que foi resolvida a equação (4.25). Porém, notemos que $\frac{\lambda^2}{2}$ pode não ser pequeno, de tal forma que nossa equação pode ser “fortemente” não-linear, diferentemente da equação de Duffing, onde este termo é pequeno, representando um desvio da linearidade do problema.

Aplicando o método de resolução já visto, teremos para a equação (4.23)

$$\zeta^2 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_1^4 \pm 2M^2 \pi_1^2 = 2c, \quad (4.28)$$

onde, c é uma constante de integração com unidade de massa à quarta potência e $\zeta = \zeta(t) = \frac{d\pi_1}{dt}$, isto é, está definido do mesmo modo que η .

Os mínimos da equação (4.28) são de dois tipos:

Para a equação $\zeta^2 + \frac{\lambda^2}{2}\pi_1^4 + 2M^2\pi_1^2 = 2c$ temos apenas um ponto de mínimo real dado por $\pi_1 = 0$ e $\zeta = 0$, isto é, $(0, 0)$. Não temos pontos de instabilidade para esta equação.

Para a equação $\zeta^2 + \frac{\lambda^2}{2}\pi_1^4 - 2M^2\pi_1^2 = 2c$ temos dois pontos de mínimo dados pelos pares ordenados (π, ζ)

$$\left(\frac{\sqrt{2}M}{\lambda}, 0\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{2}M}{\lambda}, 0\right)$$

Voltando para a equação (4.28), podemos escrever para ζ

$$\zeta = \pm \sqrt{-\frac{\lambda^2}{2}\pi_1^4 \pm 2M^2\pi_1^2 + 2c}. \quad (4.29)$$

Por conveniência de notação escreveremos

$$\frac{\lambda^2}{2} = \Lambda,$$

e daí

$$\frac{d\pi_1}{dt} = \pm \sqrt{-\Lambda\pi_1^4 \pm 2M^2\pi_1^2 + 2c}.$$

Tomemos, sem perda de generalidade, o sinal positivo do segundo membro da igualdade acima e utilizando uma simples separação de variáveis podemos escrever

$$\frac{d\pi_1}{\sqrt{-\Lambda\pi_1^4 \pm 2M^2\pi_1^2 + 2c}} = dt. \quad (4.30)$$

Introduzindo na equação (4.30) a substituição de variáveis dada por [49]

$$z = \frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{2}M}\pi_1, \quad (4.31)$$

obtemos (note que esta variável é adimensional)

$$\frac{dz}{\sqrt{-z^4 \pm z^2 + \frac{p}{2}}} = \sqrt{2}M dt. \quad (4.32)$$

onde $\frac{p}{2} = \frac{\Lambda c}{4M^4}$.

As soluções reais de (4.32) só existirão se

$$-z^4 \pm z^2 + \frac{p}{2} > 0. \quad (4.33)$$

Temos então duas desigualdades distintas

$$-z^4 + z^2 + \frac{p}{2} > 0 \quad \text{e} \quad -z^4 - z^2 + \frac{p}{2} > 0.$$

Para a equação $-z^4 + z^2 + \frac{p}{2} = 0$ teremos as seguintes raízes ($-2M^2$)

$$z = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2p}}.$$

Para a equação $-z^4 - z^2 + \frac{p}{2} = 0$ teremos as seguintes raízes ($+2M^2$)

$$z = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2p}}.$$

As raízes encontradas acima, tanto para $-2M^2$ quanto para $+2M^2$, nos fornecem os possíveis intervalos onde teremos z real. Abaixo, separamos estas raízes em dois casos distintos, dependentes do sinal do termo $2M^2$, e encontramos as soluções associadas a estes intervalos (contemplando ainda os casos $|\Psi_n|^2 = 0$ e $|\Psi_n|^2 \neq 0$) da equação (4.18) à qual (4.33) é um equivalente via o *ansatz* (4.22).

4.6.1 Solução com $|\Psi_n|^2 = 0$ no Caso 1 ($-2M^2$)

As raízes para z neste caso são

$$z = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2p}}. \quad (4.34)$$

A variável z está parametrizada pela constante real p . Os valores possíveis deste parâmetro para que tenhamos z real podem ser expressos por meio de 3 intervalos, a saber:

$$1) \ p < -\frac{1}{2}; \quad 2) \ p > 0; \quad 3) \ -\frac{1}{2} \leq p \leq 0.$$

É nestes intervalos que encontramos as soluções para z real.

$$1) \ p < -\frac{1}{2}$$

Para o intervalo acima teremos $-z^4 + z^2 + \frac{p}{2} < 0$, $\forall z \in \mathcal{R}$.

$$2) \ p > 0$$

Para o intervalo acima teremos $-z^4 + z^2 + \frac{p}{2} > 0$ se for satisfeita a desigualdade abaixo

$$-\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2p}} < z < \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2p}}.$$

Restringiremo-nos, sem perda de generalidade, a $z > 0$, ou seja, ao intervalo

$$0 < z < \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2p}}. \quad (4.35)$$

$$3) \ -\frac{1}{2} \leq p \leq 0$$

Para este último caso teremos $-z^4 + z^2 + \frac{p}{2} > 0$ se

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2p}} < z < \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+2p}},$$

ou

$$-\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+2p}} < z < -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2p}}.$$

Da mesma forma, como foi feito no item 2) acima, restringiremo-nos ao intervalo

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2p}} < z < \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+2p}}. \quad (4.36)$$

Com base nos intervalos (4.35) e (4.36) para z poderemos resolver a equação (4.32). Começaremos integrando esta equação definindo, por simplicidade, $t_0 = 0$. Assim,

$$\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{-z'^4 + z'^2 + \frac{p}{2}}} = \sqrt{2}M \int_{t_0=0}^t dt',$$

de onde obtemos

$$\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{-z'^4 + z'^2 + \frac{p}{2}}} = \sqrt{2}Mt. \quad (4.37)$$

A integral presente no primeiro membro da equação (4.37) é conhecida como integral elíptica de Legendre do primeiro tipo. Ela pode ser resolvida em termos das funções elípticas de Jacobi [18, 54, 55], o que está de acordo com tudo o que foi feito até agora. Resolveremos esta integral e, por conseqüência, a própria equação (4.37).

Separando esta resolução em casos dependentes do parâmetro p teremos:

Solução para o Caso 1) $p < -\frac{1}{2}$

Não há solução real para z neste intervalo e, por conseguinte, π_1 não seria real também.

Solução para o Caso 2) $p > 0$

Conforme já foi visto acima, restringimo-nos ao intervalo onde z é real, ou seja,

$$0 < z < \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+2p}}.$$

Definindo as raízes de (4.34) como

$$r^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+2p} \quad e \quad s^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+2p},$$

e utilizando [54, 55] poderemos resolver a integral presente na equação (4.37), no intervalo acima, se tivermos satisfeita a desigualdade $s^2 \geq z > 0$. Assim,

$$\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{-z'^4 + z'^2 + \frac{p}{2}}} = \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{(z'^2 + r^2)(s^2 - z'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2}} K[\gamma, q^2], \quad (4.38)$$

onde o termo $K[\gamma, q^2]$ é a integral elíptica do primeiro tipo dada por

$$\int_0^{\gamma'} \frac{d\gamma}{\sqrt{(1 - q^2)(1 - \text{sen}^2 \gamma)}}.$$

Além disso

$$\gamma = \arcsen \left(\frac{z}{s} \sqrt{\frac{r^2 + s^2}{r^2 + z^2}} \right) \quad \text{e} \quad q^2 = \frac{s^2}{r^2 + s^2}.$$

Com estas substituições convenientes, a equação (4.36) pode ser escrita como

$$\frac{1}{(1 + 2p)^{\frac{1}{4}}} K \left[\arcsen \left(\frac{z \sqrt{[4(1 + 2p)]^{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{z^2(1 + \sqrt{1 + 2p}) + p}} \right), \frac{1 + \sqrt{1 + 2p}}{2\sqrt{1 + 2p}} \right] = \sqrt{2}Mt. \quad (4.39)$$

Ou seja,

$$\frac{z \sqrt{[4(1 + 2p)]^{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{z^2(1 + \sqrt{1 + 2p}) + p}} = \text{sn} \left[[4(1 + 2p)]^{\frac{1}{4}} Mt, \frac{1 + \sqrt{1 + 2p}}{2\sqrt{1 + 2p}} \right]. \quad (4.40)$$

Na equação (4.40) o símbolo sn denota o seno elíptico de Jacobi, uma função duplamente periódica [54, 55]. Isolando z na equação acima e utilizando a transformação (4.31) encontramos para π_1 a seguinte equação de movimento

$$\frac{\sqrt{\Lambda}}{M} \pi_1 = \frac{\sqrt{2p} \text{sn}}{\sqrt{\sqrt{1 + 2p}(2 + \text{sn}^2) - \text{sn}^2}}, \quad (4.41)$$

onde fizemos, por simplicidade de notação, $\text{sn} = \text{sn} \left[[4(1 + 2p)]^{\frac{1}{4}} Mt, \frac{1 + \sqrt{1 + 2p}}{2\sqrt{1 + 2p}} \right]$. Para esta equação de movimento temos os seguintes gráficos apresentados na Figura 4.8. Relembremos que ao encontrarmos π_1 , encontramos automaticamente π_2 e, portanto, π^- .

Solução para o Caso 3) $-\frac{1}{2} \leq p \leq 0$

Restringimo-nos, agora, ao intervalo onde z é real, isto é

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2p}} < z < \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2p}}.$$

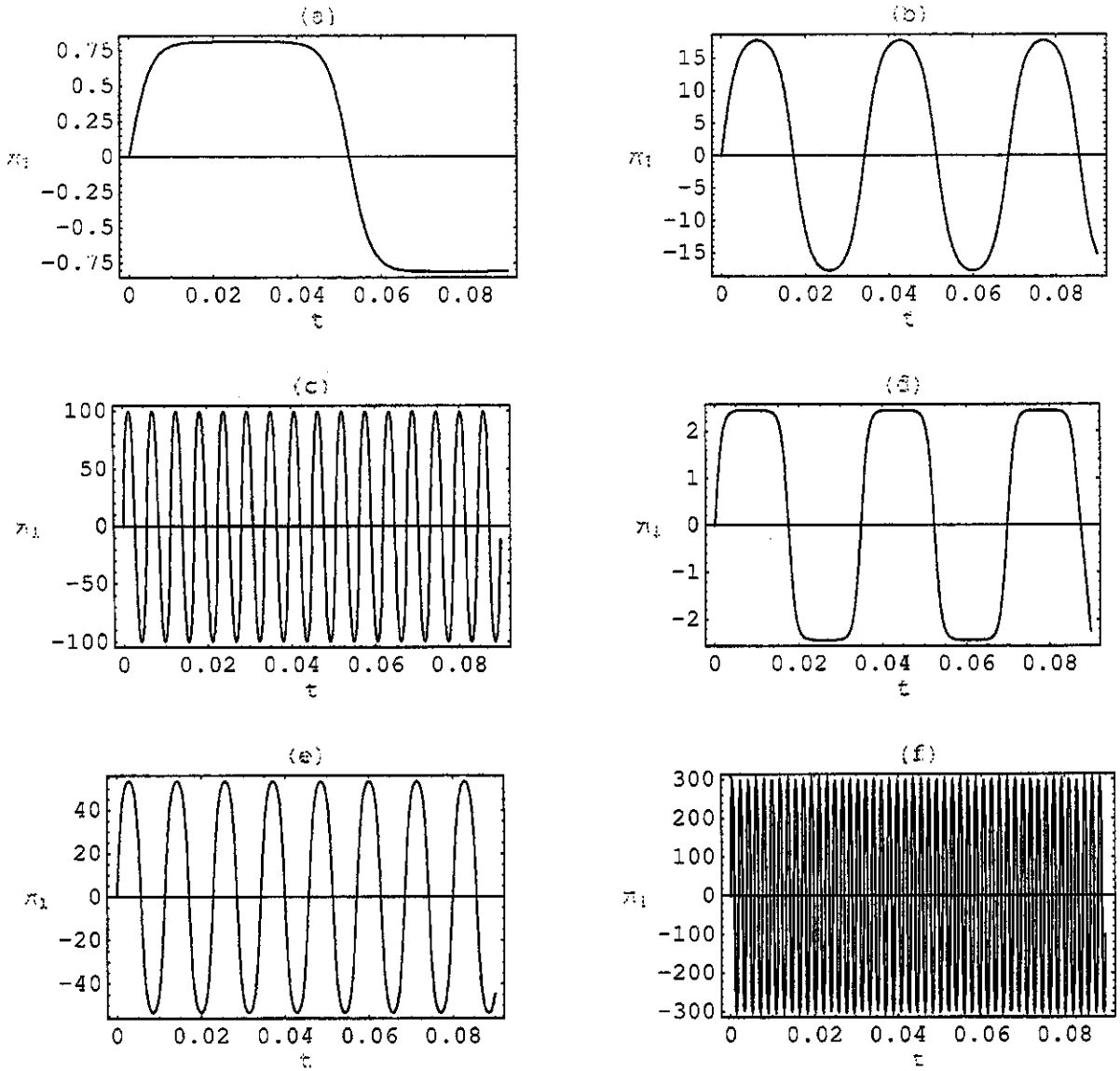


Figura 4.8: Gráficos da equação (4.41). Para o **Caso 1**: a) com $M = 140 \text{ MeV}$ e $p = 0.001$, b) com $M = 140 \text{ MeV}$ e $p = 1$ e c) com $M = 140 \text{ MeV}$ e $p = 1000$. Para o **Caso 2**: d) com $M = 420 \text{ MeV}$ e $p = 0.001$, e) com $M = 420 \text{ MeV}$ e $p = 1$ e f) com $M = 420 \text{ MeV}$ e $p = 1000$. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

Se definirmos as raízes de (4.34) como

$$r^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+2p} \quad e \quad s^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2p}, \quad (4.42)$$

teremos, segundo [54, 55] duas soluções possíveis dadas a seguir, uma incluindo o ponto r (fronteira superior) e outra incluindo s (fronteira inferior).

$$i. \quad (r \geq z > s > 0)$$

Para o intervalo $r \geq z > s > 0$ e utilizando [54, 55] podemos escrever a integral presente na equação (4.37) como

$$\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{-z'^4 + z'^2 + \frac{p}{2}}} = \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{(r^2 - z'^2)(z'^2 + s^2)}} = \frac{1}{r} K[\xi, q^2], \quad (4.43)$$

onde K está definido como antes e

$$\xi = \arcsen \left(\frac{r}{z} \sqrt{\frac{z^2 - s^2}{r^2 - s^2}} \right) \quad e \quad q^2 = \frac{r^2 - s^2}{r^2}.$$

Com as substituições convenientes

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1+2p}}} \times \\ & \times K \left[\arcsen \left(\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1+2p}}}{2z} \sqrt{\frac{2z^2 - 1 + \sqrt{1+2p}}{\sqrt{1+2p}}} \right), \frac{2\sqrt{1+2p}}{1 + \sqrt{1+2p}} \right] = \sqrt{2}Mt. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ou seja,

$$\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1+2p}}}{2z} \sqrt{\frac{2z^2 - 1 + \sqrt{1+2p}}{\sqrt{1+2p}}} = sn \left[\sqrt{1 + \sqrt{1+2p}}Mt, \frac{2\sqrt{1+2p}}{1 + \sqrt{1+2p}} \right]. \quad (4.45)$$

Isolando z e utilizando novamente a transformação dada em (4.31), encontramos a seguinte equação de movimento para π_1

$$\frac{\sqrt{\Lambda}}{M} \pi_1 = \frac{\sqrt{-2p}}{\sqrt{1 + \sqrt{1+2p}(1 - 2sn^2)}}, \quad (4.46)$$

onde $sn = sn \left[\sqrt{1 + \sqrt{1+2p}}Mt, \frac{2\sqrt{1+2p}}{1 + \sqrt{1+2p}} \right]$. Para esta solução teremos os gráficos presentes na Figura 4.9 dada a seguir.

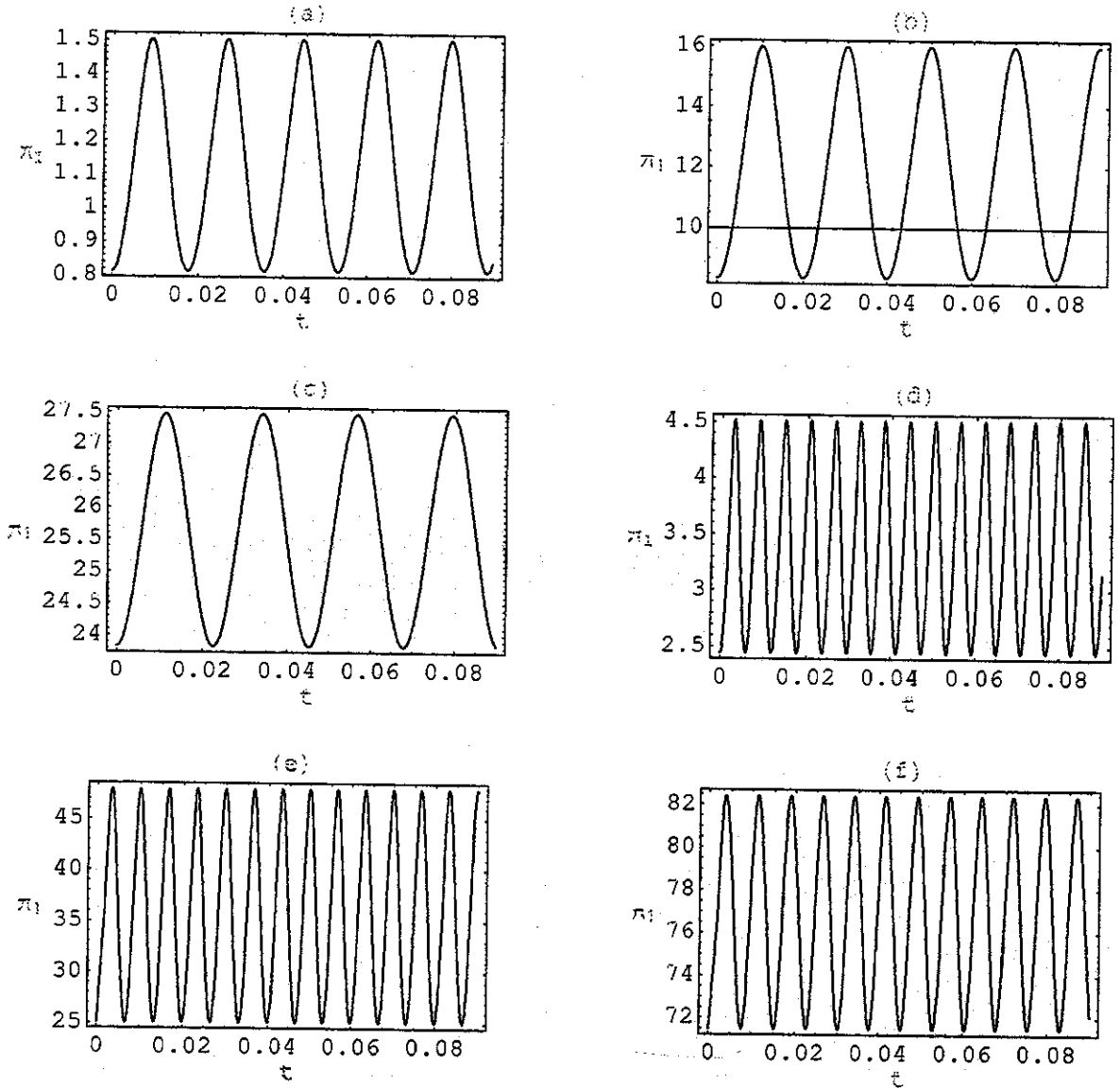


Figura 4.9: Gráficos da equação (4.46). Para o **Caso 1**: a) com $M = 140 \text{ MeV}$ e $p = -0.001$, b) com $M = 140 \text{ MeV}$ e $p = -0.1$ e c) com $M = 140 \text{ MeV}$ e $p = -0.49$. Para o **Caso 2**: d) com $M = 420 \text{ MeV}$ e $p = -0.001$, e) com $M = 420 \text{ MeV}$ e $p = -0.1$ e f) com $M = 420 \text{ MeV}$ e $p = -0.49$. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

ii. ($r > z \geq s > 0$)

Para o intervalo $r > z \geq s > 0$ e novamente utilizando [54, 55] poderemos escrever a integral presente na equação (4.37) como

$$\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{-z'^4 + z'^2 + \frac{p}{2}}} = \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{(r^2 - z'^2)(z'^2 - s^2)}} = \frac{1}{r} K[\zeta, q^2], \quad (4.47)$$

onde agora

$$\zeta = \arcsen \left(\sqrt{\frac{r^2 - z^2}{r^2 - s^2}} \right) \quad e \quad q^2 = \frac{r^2 - s^2}{r^2}.$$

Com as substituições convenientes podemos escrever (4.47) como

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 2p}}} \times \\ \times K \left[\arcsen \left(\sqrt{\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 2p}} - 2z^2}{2\sqrt{1 + 2p}}} \right), \frac{2\sqrt{1 + 2p}}{1 + \sqrt{1 + 2p}} \right] = \sqrt{2}Mt. \quad (4.48)$$

Ou seja,

$$\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 2p} - 2z^2}{2\sqrt{1 + 2p}}} = \operatorname{sn} \left[\sqrt{1 + \sqrt{1 + 2p}}Mt, \frac{2\sqrt{1 + 2p}}{1 + \sqrt{1 + 2p}} \right]. \quad (4.49)$$

Isolando z e utilizando a transformação (4.31) encontramos finalmente para π_1

$$\frac{\sqrt{\Lambda}}{M} \pi_1 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2p}(1 - 2\operatorname{sn}^2)}, \quad (4.50)$$

onde, como na solução (4.46), temos $\operatorname{sn} = \operatorname{sn} \left[\sqrt{1 + \sqrt{1 + 2p}}Mt, \frac{2\sqrt{1 + 2p}}{1 + \sqrt{1 + 2p}} \right]$. Os gráficos contidos na Figura 4.10 mostram a evolução do campo π_1 dado por esta equação.

4.6.2 Solução com $|\Psi_n|^2 = 0$ no Caso 2 ($+2M^2$)

Para este caso, as raízes são

$$z = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2p}}.$$

A única solução válida é a mesma dada para o intervalo $p > 0$ no **Caso 1**. Ou seja,

$$\frac{\sqrt{\Lambda}}{M} \pi_1 = \frac{\sqrt{2p}\operatorname{sn}}{\sqrt{\sqrt{1 + 2p}(2 + \operatorname{sn}^2) - \operatorname{sn}^2}}, \quad (4.51)$$

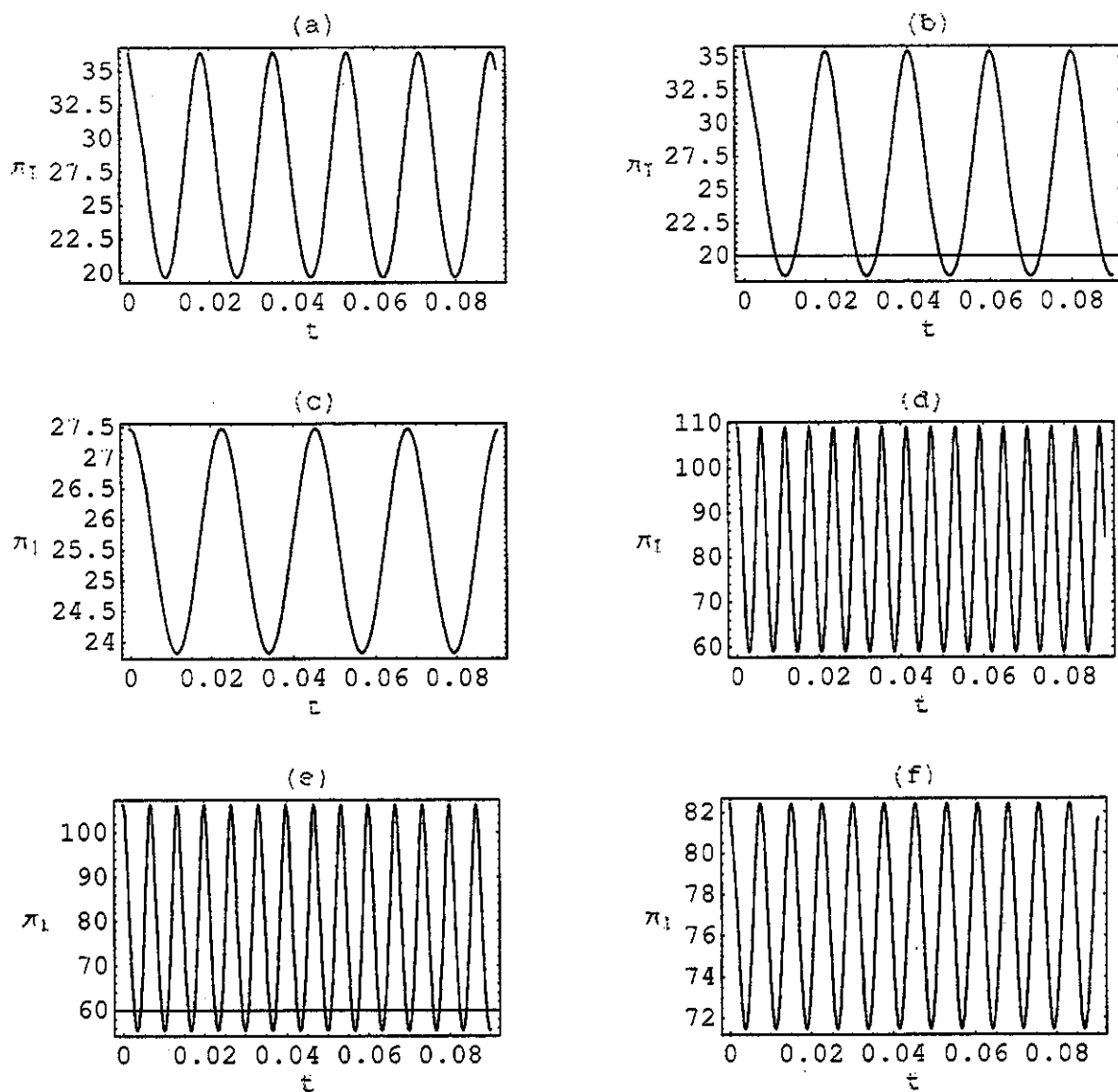


Figura 4.10: Gráficos da equação (4.50). Para o **Caso 1**: a) com $M = 140\text{MeV}$ e $p = -0.001$, b) com $M = 140\text{MeV}$ e $p = -0.1$ e c) com $M = 140\text{MeV}$ e $p = -0.49$. Para o **Caso 2**: d) com $M = 420\text{MeV}$ e $p = -0.001$, e) com $M = 420\text{MeV}$ e $p = -0.1$ e f) com $M = 420\text{MeV}$ e $p = -0.49$. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

onde fizemos, por simplicidade de notação, $sn = sn \left[[4(1+2p)]^{\frac{1}{4}} Mt, \frac{1+\sqrt{1+2p}}{2\sqrt{1+2p}} \right]$. Esta é a mesma solução que (4.41)

Esta solução é válida sempre, já que as trajetórias centradas na origem são de fato órbitas concêntricas (vide Figura 4.7a). Conseqüentemente, a evolução temporal de π_1 pode ser observada nos gráficos da Figura 4.8.

4.7 Caso Não-Homogêneo ($|\Psi_n|^2 \neq 0$)

O fato de assumirmos que $\langle |\Psi_n|^2 \rangle_{vac} \neq 0$ nos diz que $|\Psi_n|^2$ representa de fato a função de onda para um condensado de nêutrons.

A formação deste condensado se dá do modo usual: os nêutrons se comprimem num par de Cooper com momentos e spins opostos passando a comportar-se estatisticamente como um bóson, e daí não obedecendo ao princípio de exclusão de Pauli. É claro que quanto mais forte a força de interação, maiores serão as temperaturas em que a condensação poderá ocorrer. De fato, não é um problema trivial descobrir qual será o valor da temperatura de transição, T_c , abaixo da qual ocorrerá a condensação.

O interessante disto tudo é que, neste estado de condensado, os nêutrons podem ser descritos por uma mesma função de onda estacionária [62] do tipo

$$\Psi_n(\vec{r}) = \langle \Psi_n \rangle_{vac} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)], \quad (4.52)$$

onde $\langle |\Psi_n|^2 \rangle_{vac}$ é o valor $|\Psi_n|^2(\vec{r})$ no estado de vácuo. Estamos supondo, então, que $|\Psi_n|^2(\vec{r})$ tem amplitude de onda numericamente igual ao seu valor no estado de vácuo. Na equação acima, $\vec{k}$ é seu tri-momento e ω sua frequência de oscilação.

É natural supor que o condensado de nêutrons esteja homogeneamente distribuído no interior estelar com muito mais razão do que o condensado de píons. Os nêutrons são o constituinte básico desta estrela. O papel do condensado de nêutrons nesta etapa seria o de um substrato (um meio) no qual ocorreria a evolução temporal do condensado de píons. Desta forma, supomos ainda, por simplicidade (em primeira aproximação) que ele é estático ao longo do tempo escrevendo a expressão (4.41) de forma mais simples como

$$|\Psi_n|^2(\vec{r}) = \langle |\Psi_n|^2 \rangle_{vac} \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r}].$$

Supomos, também, que ele seja localmente isotropico, isto é, em cada ponto da região considerada não há direções preferenciais para a distribuição de matéria do condensado. Esta aproximação é perfeitamente válida para a região da Matéria Nuclear (ver Capítulo 1), na qual estamos trabalhando. Assim, estamos assumindo que a quantidade $\rho = \vec{k} \cdot \vec{r}$ possa

ser considerada como aproximadamente constante na região considerada, tornando possível escrever

$$|\Psi_n(r)|^2 = \langle |\Psi_n|^2 \rangle_{vac} \exp[i\rho]. \quad (4.53)$$

A amplitude de $|\Psi_n|^2$, que está sendo controlada por $\langle |\Psi_n|^2 \rangle_{vac}$, é o conhecido parâmetro de ordem de Ginzburg-Landau [63] cujo potencial pode ser descrito por

$$V(\psi) = \alpha \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right) \psi^2 + \frac{\beta}{2} \psi^4,$$

onde, por simplicidade de notação, fizemos $\psi = \langle |\Psi_n|^2 \rangle_{vac}$. A expressão acima é válida para $\alpha > 0$ e $T < T_c$, ou seja, para o estado de condensação. Além disto, $\beta > 0$ depende apenas da densidade dos nêutrons no meio estelar. Notemos que para que a expressão acima seja dimensionalmente consistente a constante α deve ter unidade de MeV^3 e β , unidade de MeV . É fácil mostrar que os mínimos deste potencial são dados por

$$\psi_{min} = \pm \left[\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \right]^{1/2}.$$

Podemos associar o valor (positivo, sem perda de generalidade) ao estado de vácuo deste condensado

$$\langle |\Psi_n|^2 \rangle_{vac} = \left[\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \right]^{1/2}. \quad (4.54)$$

Assim, substituindo (4.54) na equação (4.53), escrevemos finalmente para a função de onda para o condensado de nêutrons homogênea e isotropicamente distribuído no interior estelar como

$$|\Psi_n|^2(\vec{r}) = \left[\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \right] \exp[i2\rho]. \quad (4.55)$$

Substituindo este valor na equação (4.20) obtemos

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \pi_1 \pm 2M^2 \pi_1 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_1^3 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_2^2 \pi_1 = -\Delta \sin(2\rho) \\ \frac{d^2}{dt^2} \pi_2 \pm 2M^2 \pi_2 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_2^3 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_1^2 \pi_2 = -\Delta \cos(2\rho), \end{cases} \quad (4.56)$$

onde por simplicidade de notação fizemos $\Delta = g \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \sqrt{2} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)$. As soluções numéricas deste sistema não-linear de segunda ordem e não-homogêneo são mostradas nas Figuras 4.11 até 4.18 para π_1 e nas Figuras 4.19 até 4.26 para π_2 . Assumimos valores diversos para Δ (10^{-4} , -1 , 1 e 10^4) e para cada um destes valores variamos os sinais de *seno* e *coseno*,

ou seja, de ρ . Como estamos realizando um estudo apenas qualitativo do fenômeno de Ressonância Paramétrica, tomamos $2\rho = (\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{5\pi}{5}, \frac{7\pi}{5})$ de tal forma a garantirmos *seno* e *coseno* positivos ($\frac{\pi}{5}$), *seno* positivo e *coseno* negativo ($\frac{3\pi}{5}$), *seno* negativo e *coseno* positivo ($\frac{5\pi}{5}$) e, finalmente, *seno* e *coseno* negativos ($\frac{7\pi}{5}$).

Uma análise rápida dos gráficos de (4.11) a (4.26) indicam claramente que na presença de fonte externa (nêutrons no nosso caso) não somente não destrói o caráter periódico das “soluções piônicas” como também aumenta a frequência de oscilações da solução piônica, podendo, no entanto, alterar substancialmente a amplitude das soluções.

4.8 Equação de Movimento para A^μ

Tomando como base a densidade Lagrangiana Total (4.3) e utilizando as equações de Euler-Lagrange dadas em (4.11), podemos calcular a equação de movimento para o campo eletromagnético A^μ , a saber

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + ie(\pi^+ \partial^\mu \pi^- - \pi^- \partial^\mu \pi^+) + 2e^2(\pi^- \pi^+) A^\mu - |\Psi_n|^2 = 0. \quad (4.57)$$

Observe que agora o termo $2e^2(\pi^- \pi^+)$ é de vital importância nesta equação, pois queremos saber que efeitos produz o condensado de píons *carregados*, cuja equação de movimento já foi encontrada na seção anterior, sobre o campo A^μ . Numa estrela de nêutrons, a contribuição de prótons para o condensado de nêutrons pode ser desconsiderada, de maneira que a contribuição dos núcleons na equação (4.57) pode ser descartada.

Tomando então $|\Psi_n|^2 = 0$, podemos escrever a equação (4.57) como

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + ie(\pi^+ \partial^\mu \pi^- - \pi^- \partial^\mu \pi^+) + 2e^2(\pi^- \pi^+) A^\mu = 0 \quad (4.58)$$

Esperamos encontrar uma solução para A^μ em torno do ponto de mínimo do condensado. Já vimos que a equação de movimento para π^- (ou π^+) tem infinitos mínimos e por isso esperamos que a produção de partículas devido a Ressonância Paramétrica seja realmente efetiva, pela teoria de Floquet (vide Apêndice B).

Além disto, observemos que o termo de fonte $ie(\pi^+ \partial^\mu \pi^- - \pi^- \partial^\mu \pi^+)$ desta equação é nulo devido ao *ansatz* $\pi_2 = \pi_1$. Com isto, escrevemos simplesmente

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + 2e^2(\pi^- \pi^+) A^\mu = 0. \quad (4.59)$$

Introduzindo a modificação

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \zeta(\vec{r}, t), \quad (4.60)$$

na equação (4.59) e impondo a condição do *gauge* de Lorentz [42]

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \square \zeta(\vec{r}, t) = 0, \quad (4.61)$$

onde $\zeta(\vec{r}, t)$ é uma função arbitrária de $\vec{r}$ e do tempo t , podemos escrever

$$\square A'^\mu + 2e^2(\pi^-\pi^+)A'^\mu = 0. \quad (4.62)$$

Seguindo GB-K [21], vamos procurar soluções de (4.62) da forma

$$A'^\mu(\vec{r}, t) = \chi(\vec{r}, t) e^\mu,$$

onde $\chi(\vec{r}, t)$ é uma função diferenciável e e^μ é um vetor constante. Esta condição, embora restritiva, é suficiente para nos levar a resultados não-triviais, pelo menos qualitativamente. Assim, escrevemos (4.62) como

$$e^\mu [\square \chi(\vec{r}, t) + 2e^2(\pi^-\pi^+)\chi(\vec{r}, t)] = 0. \quad (4.63)$$

Utilizando as suposições iniciais de que os campos π^+ e π^- são homogêneos e isotrópicos na região da Matéria Nuclear no interior da estrela de nêutrons, e aplicando a Transformada de Fourier para o espaço de fase k , a equação (4.63) se resume a

$$\frac{d^2}{dt^2} \chi_k(t) + [k^2 + 2e^2(\pi^-\pi^+)] \chi_k(t) = 0. \quad (4.64)$$

Esta equação, com as aproximações tomadas acima, descreve o movimento do campo eletromagnético no interior da estrela de nêutrons interagindo com o condensado de píons carregados.

Sabendo que

$$\pi^-\pi^+ = \frac{1}{2}(\pi_1^2 + \pi_2^2),$$

podemos reescrever (4.64) da forma

$$\frac{d^2}{dt^2} \chi_k(t) + [k^2 + e^2(\pi_1^2 + \pi_2^2)] \chi_k(t) = 0. \quad (4.65)$$

Utilizando as soluções já encontrados para π_1 e π_2 na Seção 4.6 deste Capítulo, podemos encontrar as soluções numéricas ou analíticas (quando houver) para a equação (4.65). O número de partículas (fótons) produzidas é estimado (qualitativamente) usando um método devido a Bogolyubov [13, 14]. Mostramos isto no Capítulo 5, a seguir.

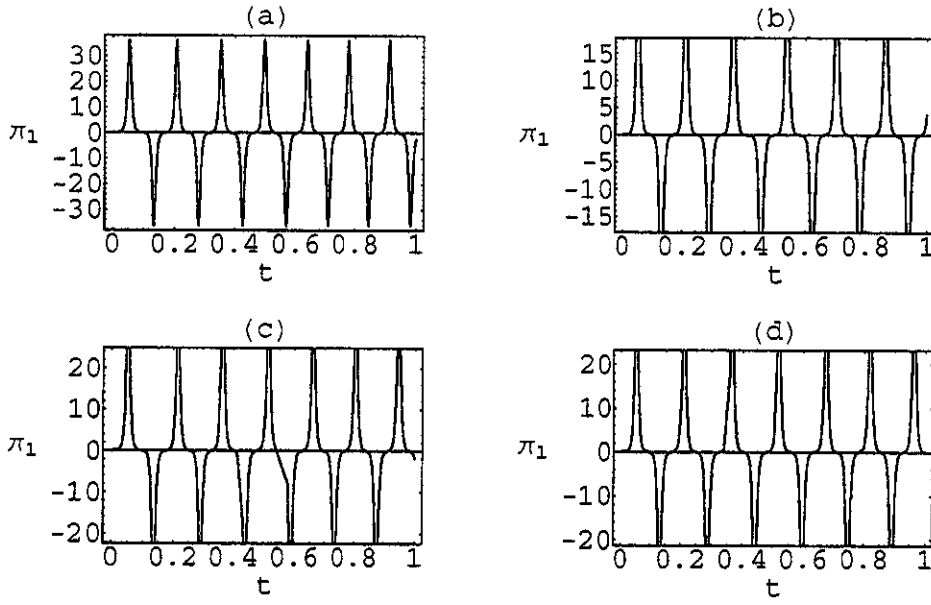


Figura 4.11: Gráficos da solução numérica do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 140 \text{ MeV}$ no **Caso 1**: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

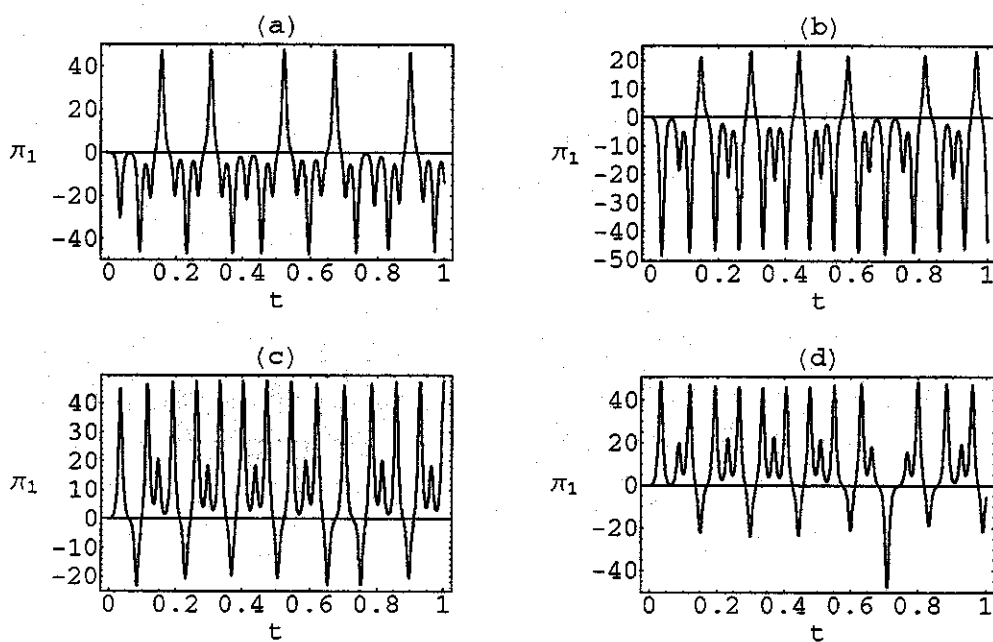


Figura 4.12: Gráficos da solução numérica do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 10000$ e $M = 140\text{MeV}$ no Caso 1: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo.

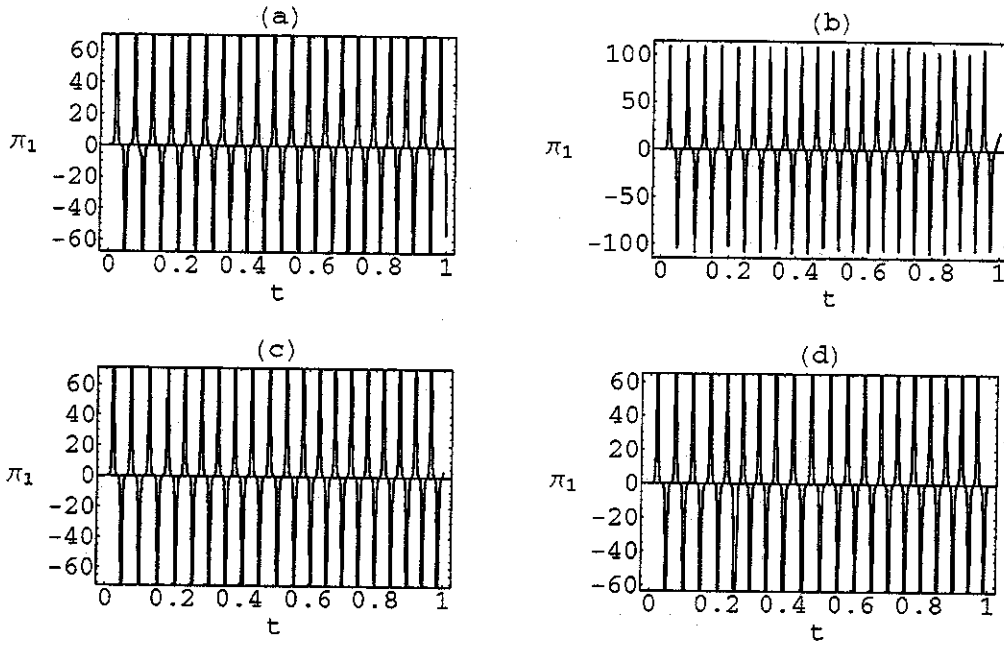


Figura 4.13: Gráfico do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 420 \text{ MeV}$ no **Caso 1**: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

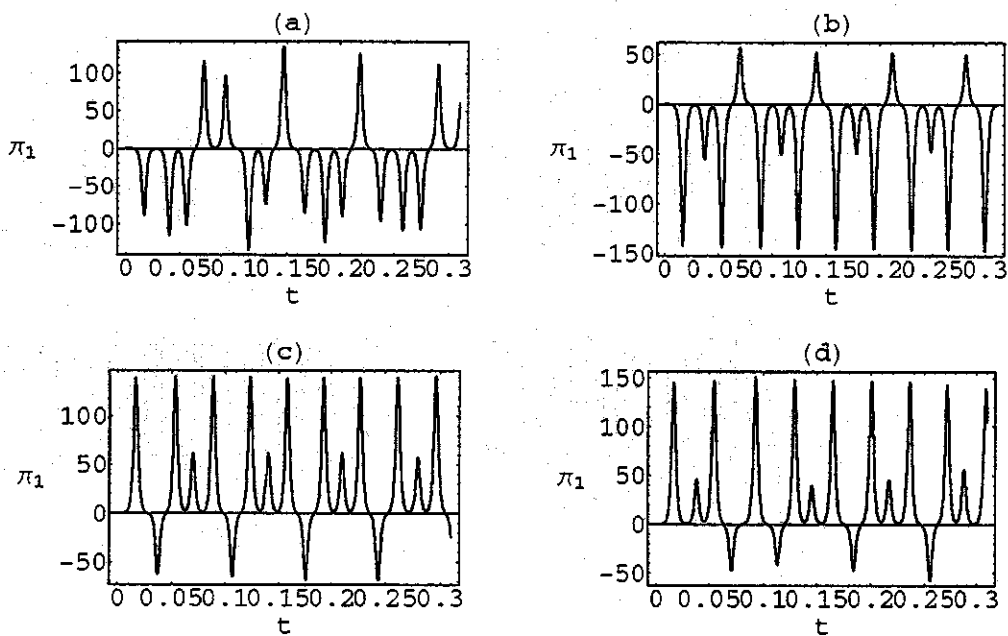


Figura 4.14: Gráfico do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 10000$ e $M = 420 \text{ MeV}$ no Caso 1: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

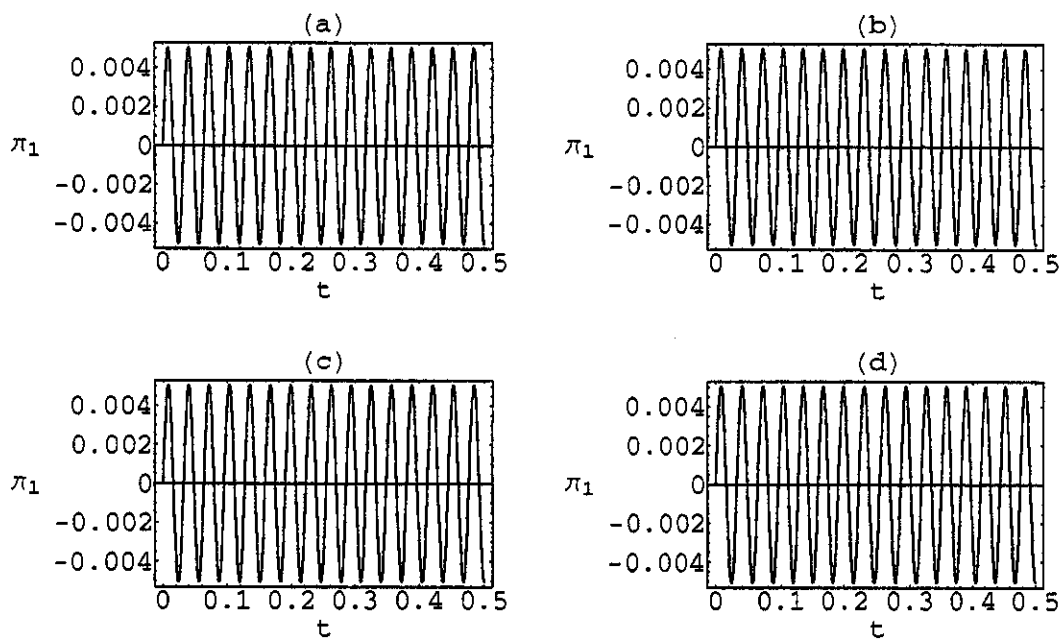


Figura 4.15: Gráfico do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 140 \text{ MeV}$ no Caso 2: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

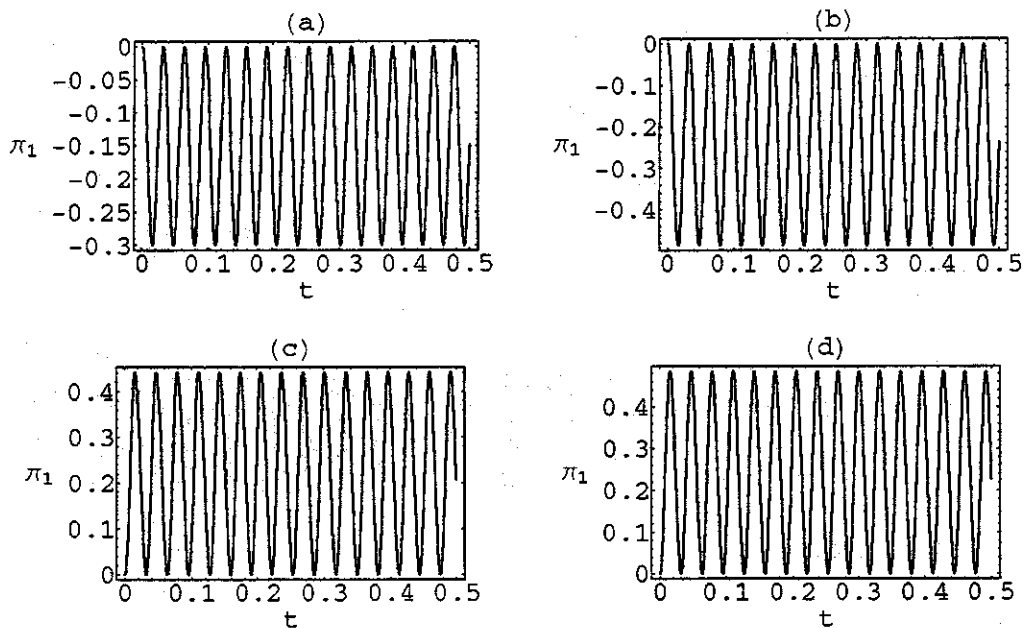


Figura 4.16: Gráfico do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 10000$ e $M = 140 MeV$ no Caso 2: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

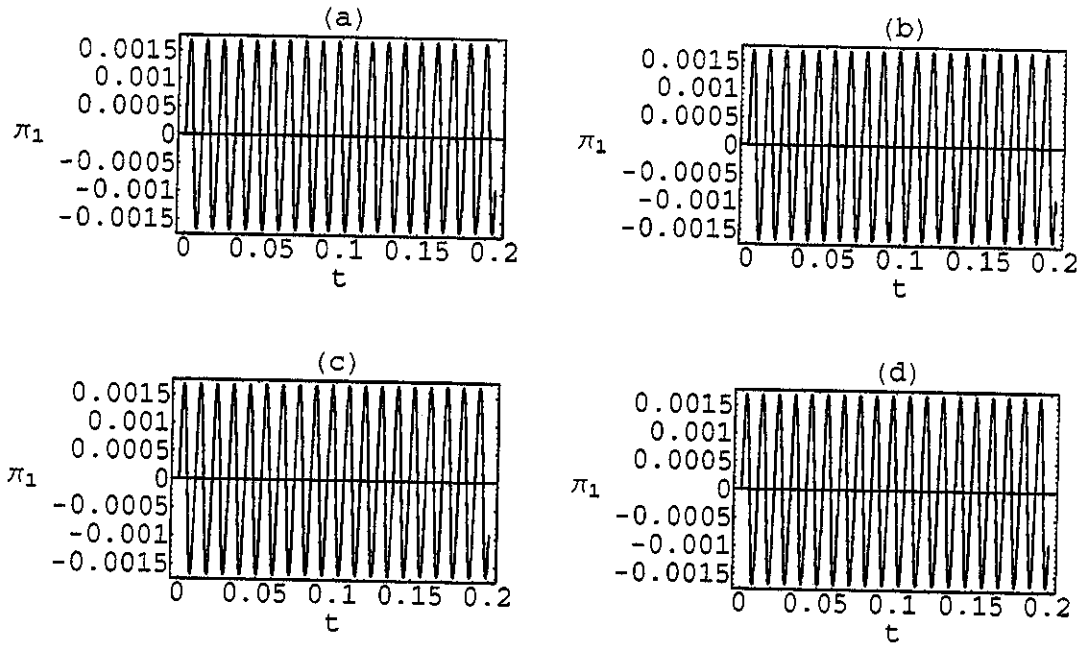


Figura 4.17: Gráfico do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 420 \text{ MeV}$ no **Caso 2**: a) temos $\sin$ positivo e $\cos$ positivo; em b) temos $\sin$ negativo e $\cos$ negativo; em c) temos $\sin$ positivo e $\cos$ negativo e em d) temos $\sin$ negativo e $\cos$ positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

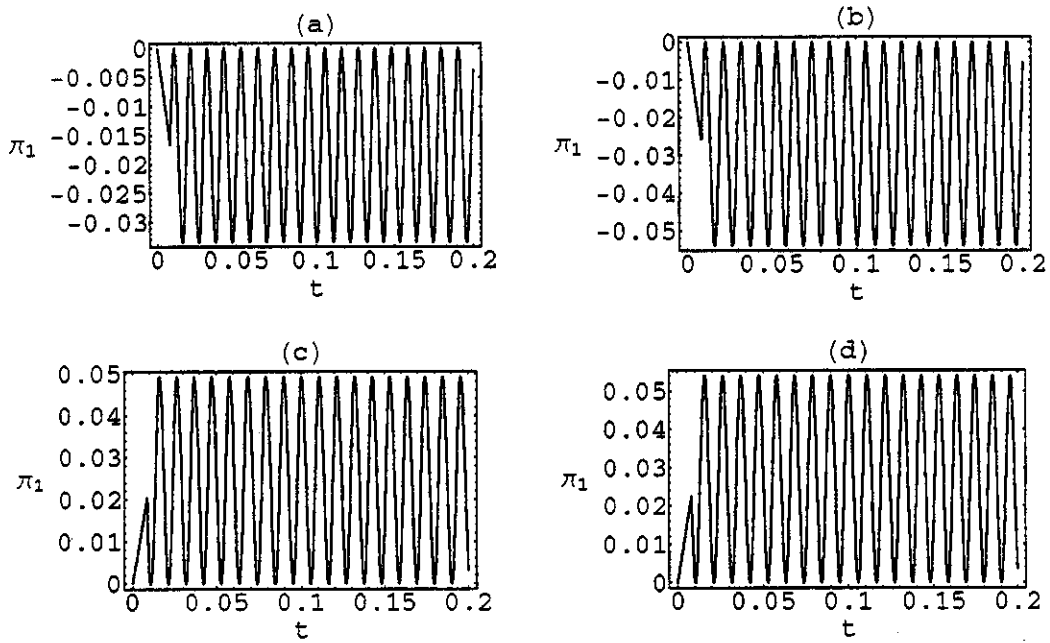


Figura 4.18: Gráfico do sistema (4.56) para π_1 com $\Delta = 10000$ e $M = 420 \text{ MeV}$ no **Caso 2**: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

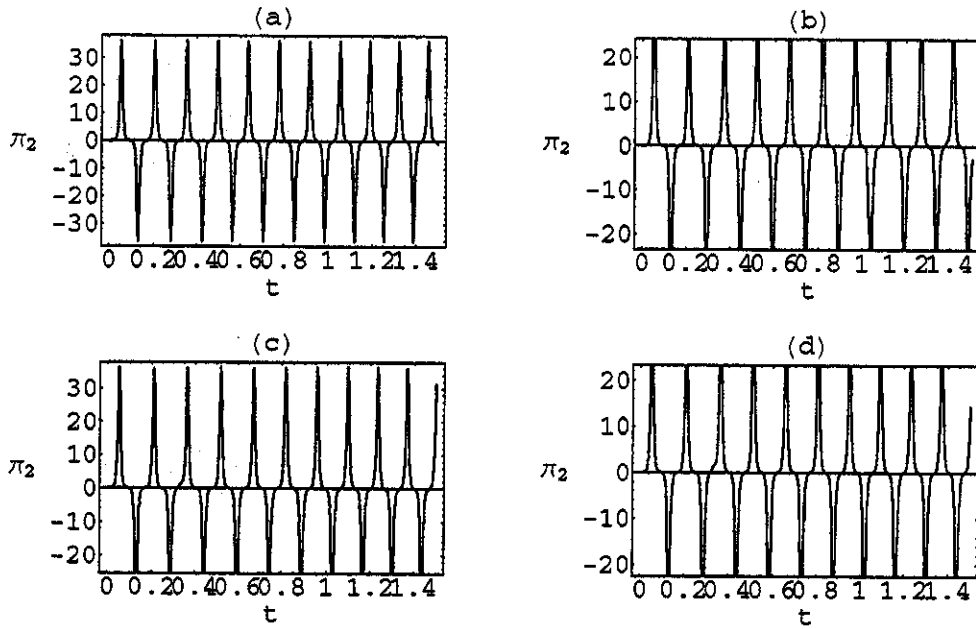


Figura 4.19: Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 140\text{MeV}$ no caso **Caso 1**: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

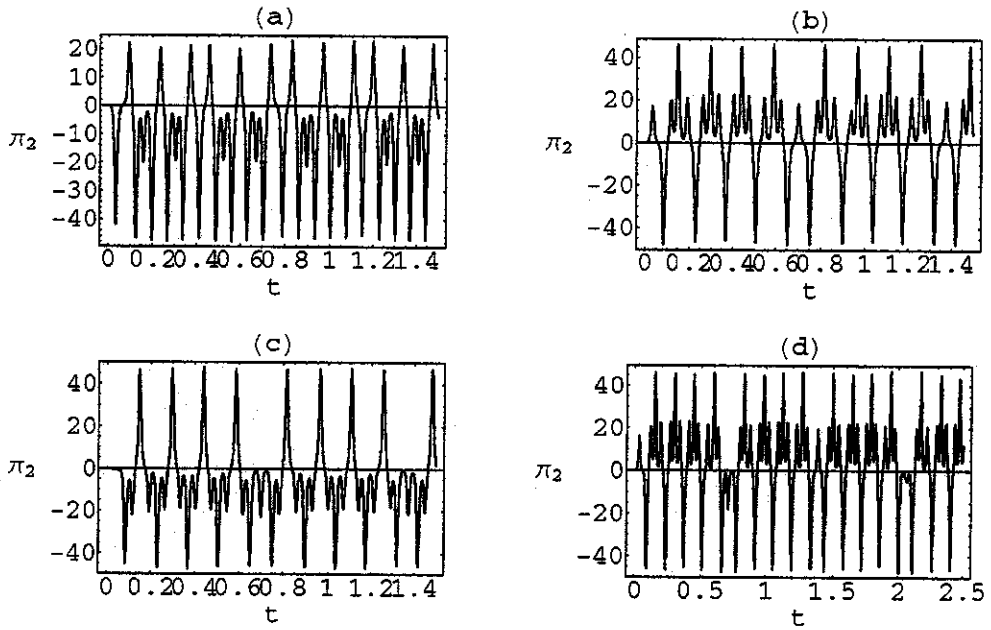


Figura 4.20: Gráfico do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 10000$ e $M = 140 \text{ MeV}$ no Caso 1: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

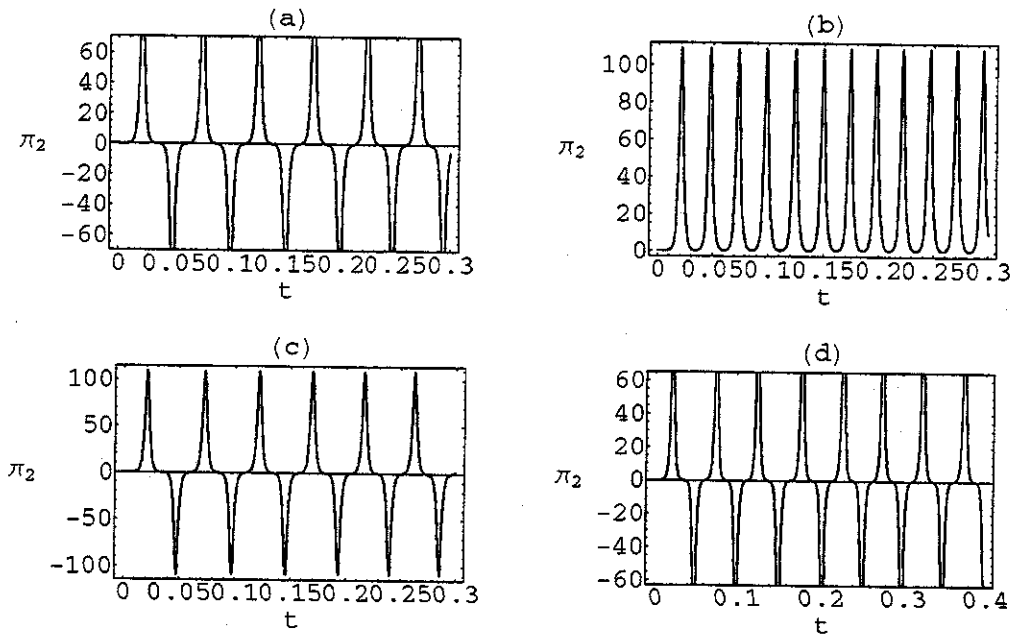


Figura 4.21: Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 420MeV$ no **Caso 1**: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

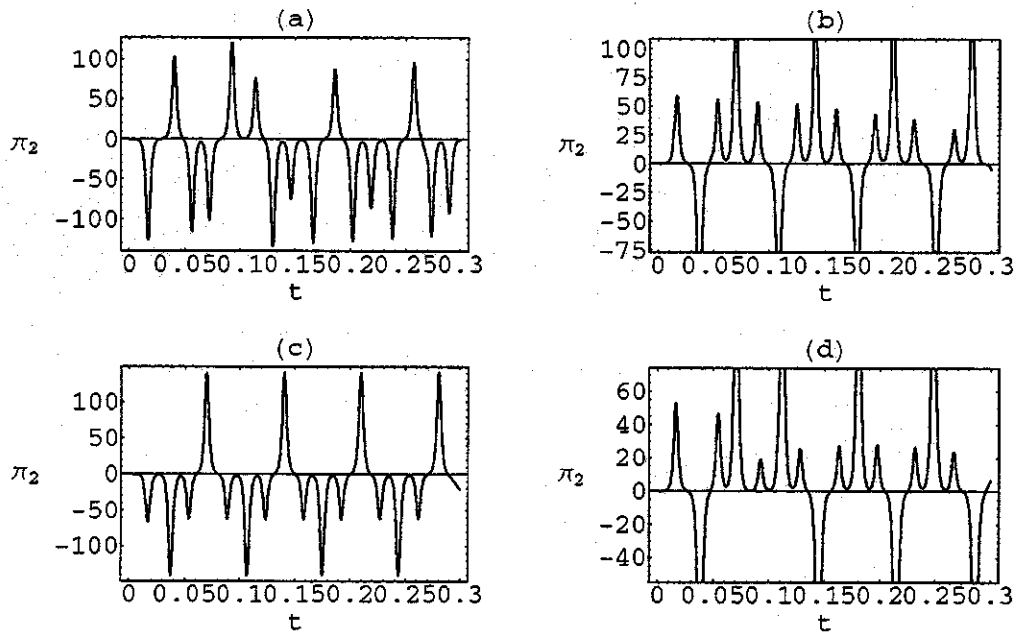


Figura 4.22: Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 10000$ e $M = 420\text{MeV}$ no **Caso 1**: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

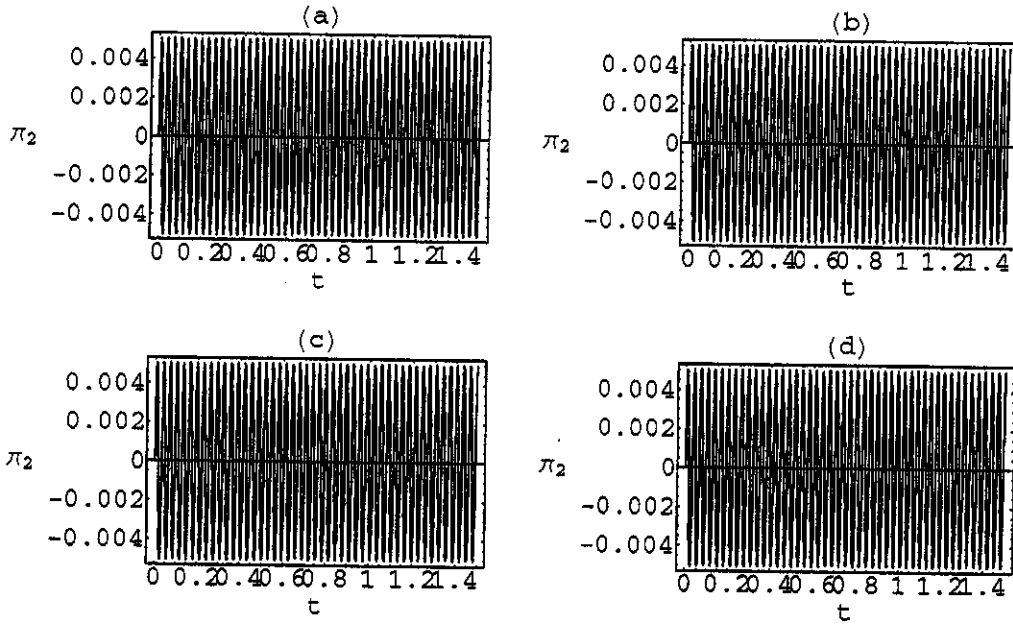


Figura 4.23: Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 140\text{MeV}$ no Caso 2: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

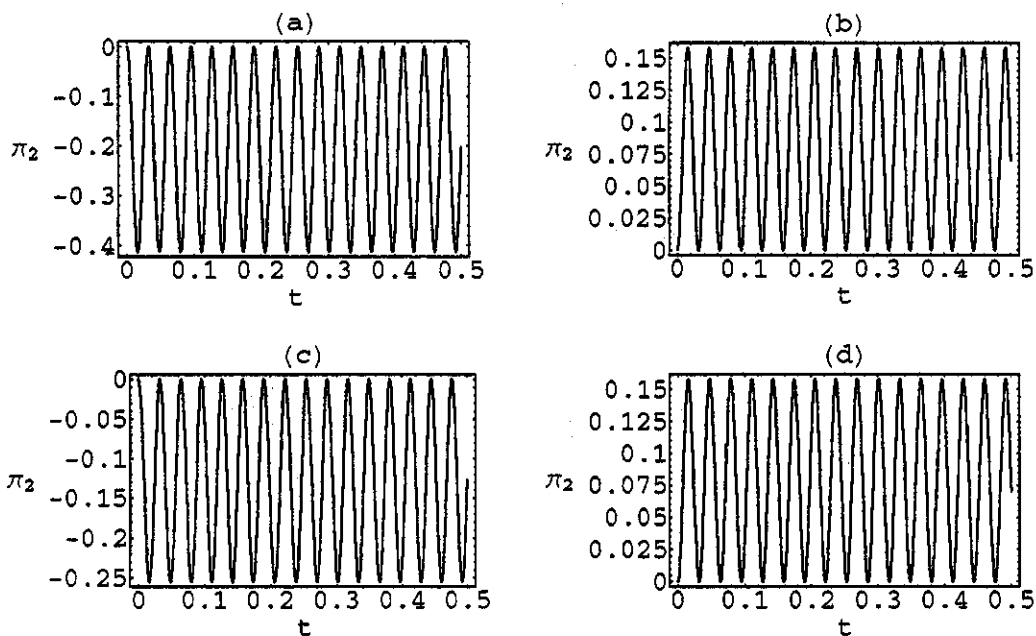


Figura 4.24: Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 10000$ e $M = 140\text{MeV}$ no Caso 2: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

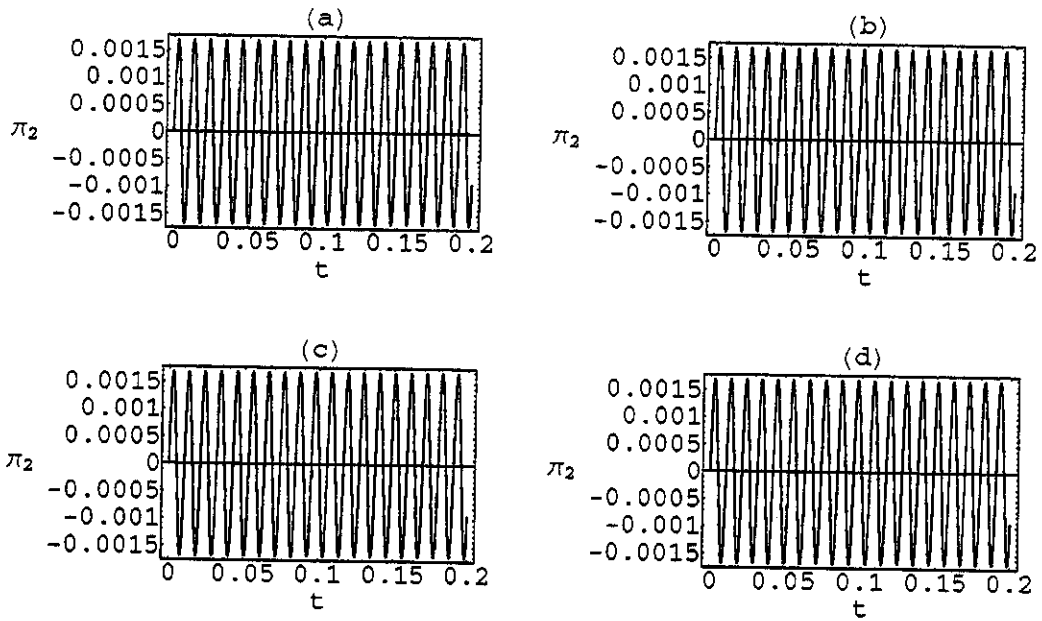


Figura 4.25: Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 0.0001$ e $M = 420 \text{ MeV}$ no **Caso 2**: a) temos $\sin$ positivo e $\cos$ positivo; em b) temos $\sin$ negativo e $\cos$ negativo; em c) temos $\sin$ positivo e $\cos$ negativo e em d) temos $\sin$ negativo e $\cos$ positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

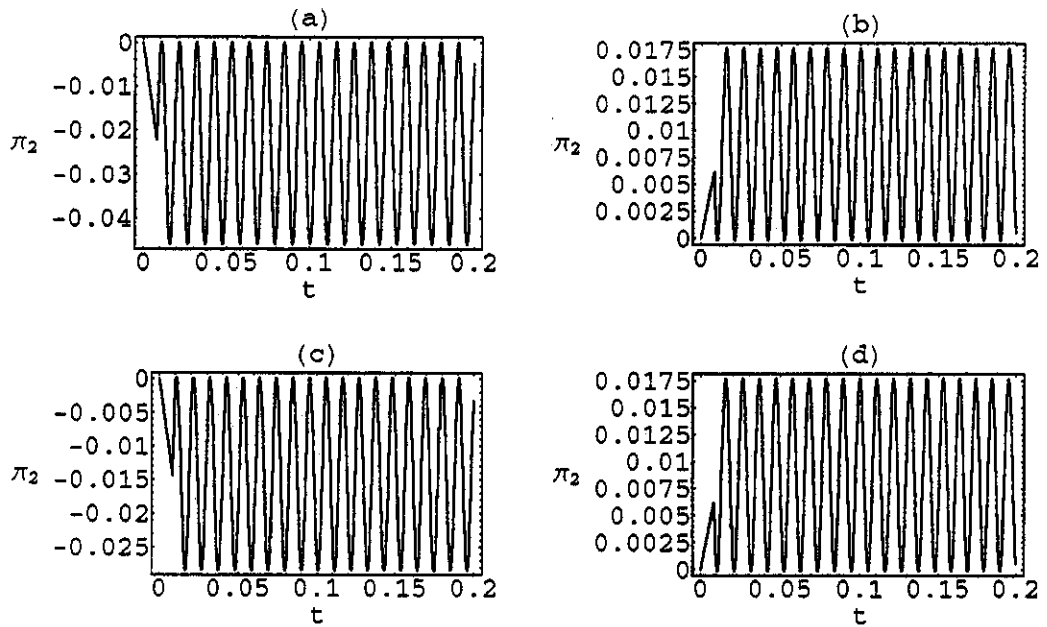


Figura 4.26: Gráficos do sistema (4.56) para π_2 com $\Delta = 10000$ e $M = 420MeV$ no **Caso 2**: a) temos *sen* positivo e *cos* positivo; em b) temos *sen* negativo e *cos* negativo; em c) temos *sen* positivo e *cos* negativo e em d) temos *sen* negativo e *cos* positivo. Para todos os casos, $\lambda = 7.7$.

Capítulo 5

Produção de Partículas

5.1 Introdução

Neste Capítulo analisamos as soluções para a equação (4.65) onde o potencial periódico é dado pelas soluções para o condensado de píons *carregados*. Com a utilização destas soluções, as equações de movimento para o campo eletromagnético são classificadas como equações de Hill e, mais especificamente em nosso caso, como equações do tipo Lamé.

Com esta classificação é possível encontrar as soluções (exatas ou numéricas) para as equações de movimento do campo A^μ . Estas soluções podem ser estáveis ou instáveis dentro do espaço de fase dos parâmetros (ω_0, ϵ) (veja Apêndice A para um resumo da teoria).

A estabilidade ou instabilidade das soluções é dada basicamente pelos valores que pode assumir o expoente de Floquet. Assim, é fundamental que se encontre uma expressão (exata ou aproximada) que seja capaz de fornecê-los, pois a produção exponencial de fótons via fenômeno de Ressonância Paramétrica se manifesta nas soluções instáveis desta equação de movimento e, portanto, depende dos valores do expoente de Floquet.

Para a obtenção do expoente de Floquet, utilizaremos as referências [17, 61], objetivando comparar os valores obtidos por diferentes técnicas, caso seja possível, é claro. No Apêndice B encontram-se as deduções das expressões utilizadas para este expoente neste Capítulo.

A partir do expoente de Floquet poderemos estimar a taxa de produção de fótons no interior da estrela. Para isto é necessário que utilizemos uma transformação de Bogolyubov [14] para que possamos obter uma expressão para esta taxa de produção de partículas. Toda a nossa análise sobre a produção de fótons se restringirá a primeira banda de ressonância, o que equivale dizer que estaremos fazendo uma aproximação de primeira ordem.

5.2 Análise das Soluções e Bandas de Ressonância

Através das soluções encontradas para π_1 e π_2 no Capítulo 4 tentaremos obter soluções para a equação (4.65) que apresentem o fenômeno da Ressonância Paramétrica. Matematicamente isto significa crescimento exponencial de amplitude.

Temos três soluções analíticas distintas para a equação de movimento do condensado de píons *carregados* (equações (4.41), (4.46) e (4.50)) e, portanto, teremos três equações distintas de movimento para o campo eletromagnético no interior da estrela de nêutrons. Para cada uma destas equações obteremos a densidade de partículas produzidas e a densidade de energia produzida por estas partículas.

5.2.1 Ressonância Paramétrica no Caso Homogêneo ($|\Psi_n|^2 = 0$)

Pelo teorema de Floquet (veja Apêndice A), as soluções da equação (4.65), para a primeira banda de ressonância, podem ser aproximadas por

$$\chi_k(t) \propto e^{\mu_k t}, \quad (5.1)$$

onde μ_k é o expoente de Floquet. Note que se ele for imaginário puro não teremos soluções instáveis, isto é, exponencialmente crescentes ou decrescentes no tempo.

A transformação de Bogolyubov dependente do tempo pode ser escrita para os operadores de criação e destruição de fótons como [14]

$$a_k(t) = \alpha_k(t)a_k(t_0) + \beta_k(t)a_{-k}^\dagger(t_0),$$

$$a_k^\dagger(t) = \alpha_k^*(t)a_k^\dagger(t_0) + \beta_k^*(t)a_{-k}(t_0),$$

onde t_0 é um tempo inicial fixo. No sistema acima deve ser obedecida a relação de unitariedade para bósons (a transformação torna-se canônica)

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1.$$

O operador número de partículas é dado por

$$N = \int_0^{k_c} d^3 k' a_k'^\dagger a_k'.$$

onde $k_c = 20 \text{ MeV}$ é o *cut off* físico. Adotamos este valor para o *cut off* baseados no modelo GB-K, pois no trabalho destes autores é utilizado um $k_c = 50 \text{ MeV}$. Supomos, então, sem perda de generalidade, que para os píons um k_c menor que o destes autores devesse ser

utilizado, já que a massa dos píons é bem menor que a dos prótons. Pode-se mostrar que o número de partículas criadas é dado por [21]

$$n_k(t) = \frac{1}{V} \langle 0 | N | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_c} d^3 k' |\beta'_k(t)|^2, \quad (5.2)$$

onde V é o volume considerado e $N |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle$. É possível mostrar que n_k pode ser expresso em função da amplitude χ_k como [20]

$$n_k = \omega_k \left(\frac{|\dot{\chi}_k|^2}{\omega_k} + |\chi_k|^2 \right) - \frac{1}{2},$$

onde ω_k é a frequência do modo χ_k .

Pode-se mostrar que o coeficiente de Bogolyubov pode ser aproximado, para a primeira banda de ressonância por [20]

$$\beta_k(t) \propto e^{\mu_k t}. \quad (5.3)$$

Substituindo (5.3) na equação (5.2) obtemos

$$n_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_c} d^3 k' e^{2\mu'_k t}. \quad (5.4)$$

Nos cálculos acima, nós não levamos em conta efeitos de absorção de fótons pela matéria circundante, por isso, ao longo do tempo, deveremos ter um número crescente (exponencial) de partículas sendo produzidas. Um estudo da absorção destes fótons produzidos seria bastante interessante, pois é muito provável que eles provoquem um reaquecimento da matéria estelar, levando a modificações na equação de estado para a matéria nuclear desta estrela. Observe que este é o processo de produção de partículas fora do equilíbrio. A termalização dos fótons produzidos se dá com sua posterior interação com o meio estelar.

A densidade de energia produzida por estes fótons é dada por [21]

$$\rho_k(t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_c} dk' k'^2 \omega'_k(t) \beta'_k(t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_c} dk' k'^2 \omega'_k(t) e^{\mu'_k t}. \quad (5.5)$$

Note que o parâmetro μ_k é fundamental nas expressões (5.4) e (5.5) e desta forma, quanto maior for a precisão na obtenção deste fator tanto melhor serão os valores obtidos por estas expressões no que tange à produção de partículas e densidade de energia na primeira banda de ressonância. Como já foi dito na introdução a este Capítulo, utilizaremos repetidas vezes as referências [17, 61] numa tentativa de comparar as técnicas de obtenção deste expoente.

De posse das equações (5.4) e (5.5) podemos obter a densidade de partículas e a densidade de energia para cada uma das equações de movimento que serão obtidas para o campo eletromagnético. Fazemos isto a seguir.

Estudo da Produção de Fótons via Equação (4.41)

As componentes hermitianas π_1 e π_2 para a solução (4.41) da equação de movimento para o condensado de píons *carregados* são:

$$\frac{\pi_1}{M} = \frac{\sqrt{2psn}}{\sqrt{\Lambda[\sqrt{1+2p}(2+sn^2) - sn^2]}},$$

$$\frac{\pi_2}{M} = \frac{\sqrt{2psn}}{\sqrt{\Lambda[\sqrt{1+2p}(2+sn^2) - sn^2]}},$$

onde $sn = sn \left[[4(1+2p)]^{1/4} Mt, \frac{1+\sqrt{1+2p}}{2\sqrt{1+2p}} \right]$.

Conseqüentemente teremos

$$\pi_1^2 + \pi_2^2 = \frac{2pM^2sn^2}{\lambda^2[\sqrt{1+2p}(2+sn^2) - sn^2]}, \quad (5.6)$$

Utilizando (5.6) na equação (4.65) obtemos a seguinte equação de movimento para o campo $\chi_k(t)$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\chi_k(t) + \left\{ k^2 + e^2 \left[\frac{2pM^2sn^2}{\lambda^2[\sqrt{1+2p}(2+sn^2) - sn^2]} \right] \right\} \chi_k(t) = 0. \quad (5.7)$$

A expressão acima pode ser classificada como uma equação de Lamé. O espaço de parâmetros não pode ser descrito por meio de uma expressão simples o que dificulta bastante a visualização das bandas de ressonância. Isto restringe também os meios pelos quais podemos obter μ_k : não poderemos utilizar, por exemplo, o método apresentado por [61].

As oscilações χ_k na equação (5.7) têm frequência variável dada por

$$\omega_k^2 = \omega_k^2(t) = k^2 + e^2 \left[\frac{2pM^2sn^2}{\lambda^2[\sqrt{1+2p}(2+sn^2) - sn^2]} \right]. \quad (5.8)$$

A equação (5.7) descreve, em uma analogia mecânica, basicamente um oscilador e o termo ω_k^2 pode ser interpretado como sendo uma massa variável no tempo.

Utilizando a aproximação (5.1) e (5.3) e a frequência variável dada por (5.8) escrevemos a densidade de fótons produzidos no modo k como

$$n_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_c} d^3k' e^{2\mu_{k'}t}, \quad (5.9)$$

e a densidade de energia dada por (5.5)

$$\rho_k(t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_c} dk' k'^2 \left(k'^2 + e^2 \left[\frac{2pM^2sn^2}{\lambda^2[\sqrt{1+2p}(2+sn^2) - sn^2]} \right] \right) e^{\mu_{k'}t}. \quad (5.10)$$

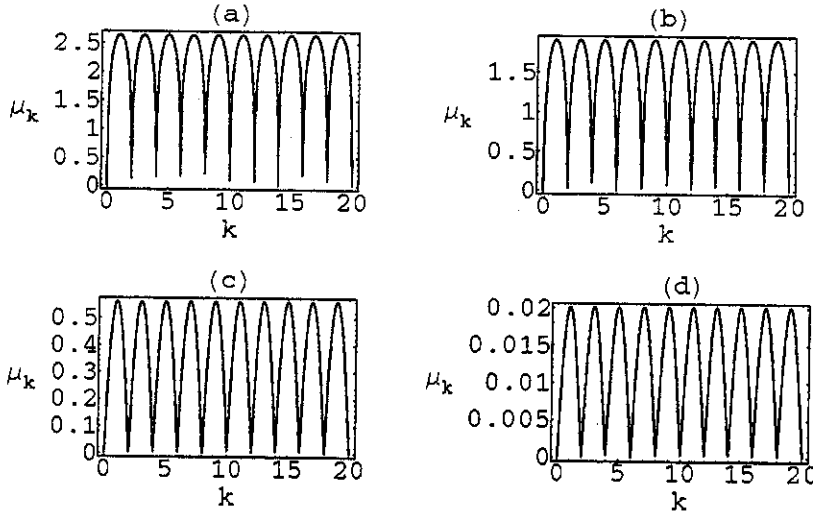


Figura 5.1: Expoente de Floquet em função de k obtido para vários valores de $\Delta(0)$: (a) $\Delta(0) = -1000$, (b) $\Delta(0) = -100$, (c) $\Delta(0) = -1$ e (d) $\Delta(0) = -0.001$. Este determinante controla a amplitude de oscilação de μ_k e seus possíveis valores reais ou imaginários.

O expoente μ_k será dado pela expressão [17]

$$\mu_k = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccosh} \left[1 - \Delta(0) \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right]. \quad (5.11)$$

O fator $\Delta(0)$ é o determinante infinito que surge quando se toma a solução formal da equação de Hill. Em geral, este determinante é extremamente difícil de ser calculado, por isso optamos por variar $\Delta(0)$ num intervalo razoável de valores para os nossos objetivos. A Figura 5.1 mostra o comportamento de μ_k , em função de k , para alguns valores deste determinante. O expoente μ_k é real apenas para valores negativos de $\Delta(0)$, além disto, quanto maior for o valor negativo atribuído a $\Delta(0)$ menor serão as amplitudes de oscilação de μ_k . Assim, este fator controla a amplitude de oscilação do expoente de Floquet e também se este assumirá valores reais ou imaginários. É bastante provável que os parâmetros λ , M e p entrem no cálculo de $\Delta(0)$. Entretanto, obter o valor mais adequado possível para este determinante baseado nestes parâmetros está além do escopo deste trabalho.

A Figura 5.2 nos mostra o gráfico do número de partículas produzidas em função de k para vários valores de μ_k obtidos a partir da expressão (5.11). Adotamos, sem perda de generalidade, $\Delta(0) = -1$ e desta forma obtemos apenas os valores reais para o expoente de Floquet.

Para a densidade de energia temos a Figura 5.3. Não consideramos efeitos de absorção

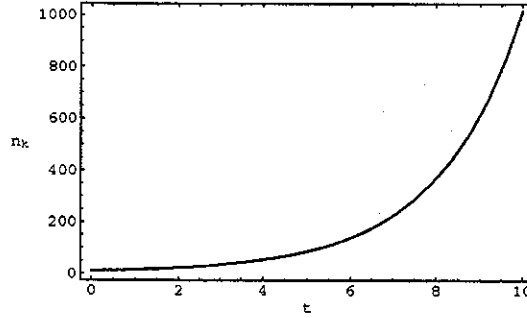


Figura 5.2: Densidade de partículas obtida através da expressão (5.9) com μ_k tomado a partir de (5.11). Tomamos $\Delta(0) = -1$ e $k_c = 20 \text{ MeV}$.

dos fótons produzidos de maneira que não temos nenhum amortecimento na produção de energia. Efeitos de absorção somados a um provável momento de *cut off*, k_c , devem fazer com que a densidade de energia tenha um comportamento semelhante àquele mostrado na Figura 3.4 do Capítulo 3.

Vale ressaltar que tudo o que foi feito para o estudo da equação (4.65) no caso em que temos como potencial periódico a equação de movimento (4.41) é válido também, obviamente, para o caso em que temos o potencial periódico dado pela equação (4.51).

Estudo da Produção de Fótons via Equação (4.46)

As componentes hermitianas π_1 e π_2 para a solução (4.46) da equação de movimento para o condensado de píons *carregados* são:

$$\frac{\pi_1}{M} = \frac{\sqrt{-2p}}{\sqrt{\Lambda} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2p}(1 - 2sn^2)}},$$

$$\frac{\pi_2}{M} = \frac{\sqrt{-2p}}{\sqrt{\Lambda} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2p}(1 - 2sn^2)}},$$

onde $sn = sn \left[\sqrt{1 + \sqrt{1 + 2p}} Mt, \frac{2\sqrt{1+2p}}{1+\sqrt{1+2p}} \right]$. Conseqüentemente

$$\pi_1^2 + \pi_2^2 = -\frac{8M^2p}{\lambda^2[1 + \sqrt{1 + 2p}(1 - 2sn^2)]}. \quad (5.12)$$

Utilizando (5.12) podemos reescrever a equação (4.65) como

$$\frac{d^2}{dt^2} \chi_k(t) + \left\{ k^2 - \left[\frac{8e^2 M^2 p}{\lambda^2[1 + \sqrt{1 + 2p}(1 - 2sn^2)]} \right] \right\} \chi_k(t) = 0. \quad (5.13)$$

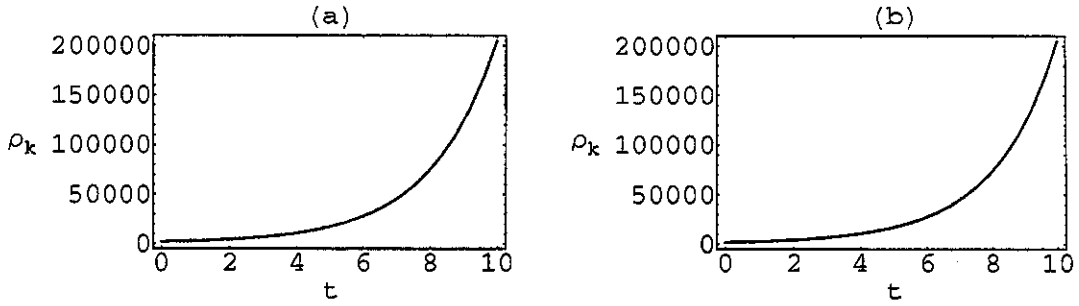


Figura 5.3: Densidade de energia produzida pelos fótons, em unidades de MeV^4 : (a) Temos três gráficos para a densidade com $M = 140 MeV$ e $p = 0.001$, $p = 1$ e $p = 1000$. Não há diferenças visíveis. (b) Temos três gráficos para a densidade com $M = 420 MeV$ e $p = 0.001$, $p = 1$ e $p = 1000$. Não há diferenças visíveis. Tomamos $\Delta(0) = -1$ e $k_c = 20 MeV$.

A frequência de oscilação da equação acima é dada pelo termo

$$\omega_k^2 = \omega_k^2(t) = k^2 - \left[\frac{8e^2 M^2 p}{\lambda^2 [1 + \sqrt{1 + 2p(1 - 2sn^2)}]} \right]. \quad (5.14)$$

Novamente, não podemos obter os parâmetros (ω_0, ϵ) e assim ficamos restritos a utilização de μ_k dado pela expressão (5.11). Para o estudo da primeira banda de ressonância, o coeficiente de Bogolyubov é o mesmo que aquele dado pela expressão (5.3) e, portanto, a densidade de partículas produzidas é dada novamente pela expressão (5.9). A Figura 5.2 nos mostra que o crescimento nesta primeira banda é exponencial, como já foi dito anteriormente.

A densidade de energia produzida por este crescimento exponencial de fótons é dada pela expressão

$$\rho_k(t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_c} dk' k'^2 \left(k'^2 - \left[\frac{8e^2 M^2 p}{\lambda^2 [1 + \sqrt{1 + 2p(1 - 2sn^2)}]} \right] \right) e^{\mu_{k'} t}. \quad (5.15)$$

A Figura 5.4 nos mostra o comportamento da densidade de energia em função de tempo. Novamente obtivemos uma densidade de energia exponencialmente crescente com o tempo. Claramente este comportamento só pode ser válido por breves períodos de tempo após o qual os mecanismos de *back reaction* levam a um amortecimento na produção de partículas. O comportamento de ρ_k na Figura 5.4 é equivalente ao período de pré-reaquecimento na teoria do reaquecimento do Universo via Ressonância Paramétrica.

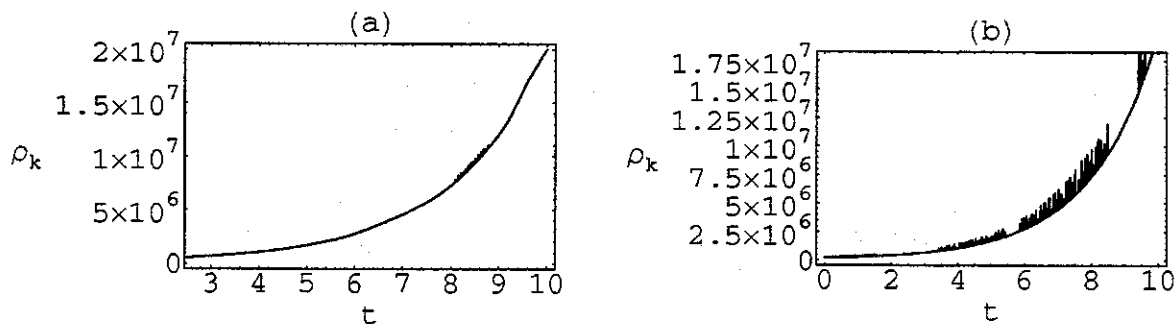


Figura 5.4: Densidade de energia produzida pelos fótons, em unidades de MeV^4 : (a) Temos três gráficos para a densidade com $M = 140 MeV$ e $p = 0.001$, $p = 1$ e $p = 1000$. Não há diferenças visíveis. (b) Temos três gráficos para a densidade com $M = 420 MeV$ e $p = 0.001$, $p = 1$ e $p = 1000$. Não há diferenças visíveis. Tomamos $\Delta(0) = -1$ e $k_c = 20 MeV$.

Estudo da Produção de Fótons via Equação (4.50)

As componentes hermitianas π_1 e π_2 para a solução (4.50) da equação de movimento para o condensado de píons *carregados* são:

$$\frac{\pi_1}{M} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 2p}(1 - 2sn^2)}}{\sqrt{\Lambda}},$$

$$\frac{\pi_2}{M} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 2p}(1 - 2sn^2)}}{\sqrt{\Lambda}},$$

onde, como na solução (4.46), temos $sn = sn \left[\sqrt{1 + \sqrt{1 + 2p}}Mt, \frac{2\sqrt{1+2p}}{1+\sqrt{1+2p}} \right]$. Consequentemente,

$$\pi_1^2 + \pi_2^2 = \frac{4[1 + \sqrt{1 + 2p}(1 - 2sn^2)]}{\lambda^2}. \quad (5.16)$$

Utilizando (5.16) escrevemos a equação (4.65) da seguinte forma:

$$\frac{d^2}{dt^2} \chi_k(t) + \left\{ k^2 + \frac{4M^2 e^2 [1 + \sqrt{1 + 2p}(1 - 2sn^2)]}{\lambda^2} \right\} \chi_k(t) = 0. \quad (5.17)$$

A frequência variável é dada pelo termo

$$\omega_k^2 = \omega_k^2(t) = k^2 + \frac{4M^2 e^2 [1 + \sqrt{1 + 2p}(1 - 2sn^2)]}{\lambda^2}. \quad (5.18)$$

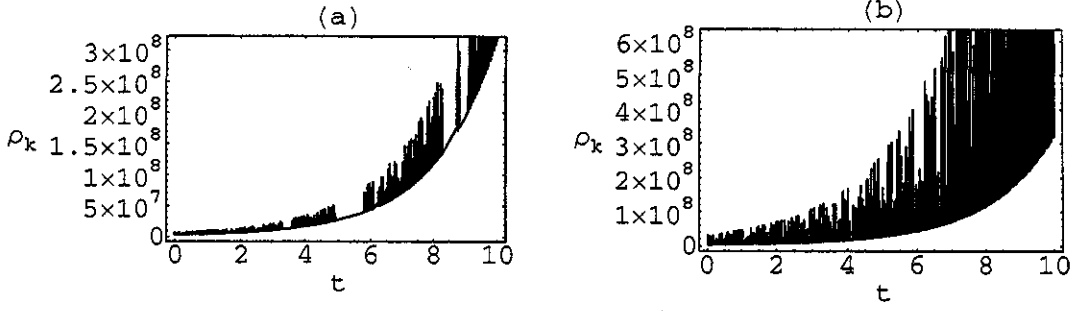


Figura 5.5: Densidade de energia produzida pelos fótons, em unidades de MeV^4 : (a) Temos três gráficos para a densidade com $M = 140 MeV$ e $p = 0.001$, $p = 1$ e $p = 1000$. Não há diferenças visíveis. (b) Temos três gráficos para a densidade com $M = 420 MeV$ e $p = 0.001$, $p = 1$ e $p = 1000$. Não há diferenças visíveis. Tomamos $\Delta(0) = -1$ e $k_c = 20 MeV$.

A Figura 5.5 mostra a densidade de energia obtida para esta frequência variável com μ_k tomado da expressão (5.11). Nota-se um comportamento exponencial, porém fortemente influenciado pelo termo oscilatório dado por (5.18).

Na equação (5.18) podemos obter o espaço de fase dos parâmetros (ω_0, ϵ) . Isto nos permite utilizar uma outra expressão para o expoente μ_k dada por [61]

$$\mu_k = \pm \frac{\epsilon}{s\omega} \sqrt{|g_s| - \Delta^2}, \quad (5.19)$$

No Apêndice B encontra-se a dedução da expressão acima. Para o nosso caso, os parâmetros do espaço são

$$\epsilon = -\frac{8M^2e^2\sqrt{1+2p}}{\lambda^2},$$

$$\omega_0 = \frac{k^2\lambda^2 + 4M^2e^2(1 + \sqrt{1+2p})}{\lambda^2}. \quad (5.20)$$

onde $s = \frac{2a}{b}$ com a e b números inteiros. Além disto,

$$\Delta = \frac{1}{\epsilon} \left[\omega_0^2 - \left(\frac{a}{b} \omega \right)^2 \right],$$

onde ω é a frequência de oscilação da função sn na equação (5.18). Para que μ_k seja real basta que tenhamos $|g_s| > \Delta^2$. Devido ao grande número de parâmetros livres associados à expressão (5.19) não iremos construir os gráficos para o número de partículas produzidas

e nem para a densidade de energia produzida. Porém, mesmo não possuindo os gráficos, podemos deduzir que, dado um tempo suficiente, o número de partículas produzido será exponencialmente crescente na primeira banda e, do mesmo modo, a exponencial dominará o termo oscilatório na integral da equação (5.5), ocasionando uma densidade de energia exponencialmente crescente.

Para que pudéssemos obter expressões mais precisas para o número de partículas produzido e para a densidade de energia seria necessário que tivéssemos uma expressão bastante melhor para o expoente de Floquet do que aquelas utilizadas neste Capítulo. Do ponto de vista matemático, encontrar uma expressão para μ_k , dentro do contexto das equações de Lamé, é um problema extremamente complexo e que não tem, até onde sabemos, uma solução geral. Efeitos de absorção dos fótons pela matéria no interior da estrela de nêutrons também forneceriam resultados mais realistas para os gráficos para número de partículas e densidade de energia produzidas.

Capítulo 6

Considerações Finais

O estudo da física de objetos compactos é algo recente e dados observacionais são ainda bastante difíceis de serem obtidos. Em geral as informações destes sistemas elas são sempre indiretas, isto é, refletem um fenômeno ocorrido no interior da estrela, por causas normalmente desconhecidas (*e.g* jatos de pulsares). Há ainda muito por fazer nesta área!

Sabemos muito pouco sobre o comportamento da matéria nuclear em condições extremas de densidade e pressão como as que podem ser encontradas no interior de uma estrela de nêutrons. Colisões relativísticas entre partículas podem ser usadas para o estudo deste comportamento, inclusive Teoria de Campos, mas em geral o número de variáveis para um modelo realístico é muito grande bem como várias incertezas dos valores de constantes de acoplamento em regime de matéria superdensa. Assim, modelos de mecanismos de produção de energia no interior destes objetos precisam ser criados, de modo a satisfazer os dados observacionais.

Neste sentido, o fenômeno de Ressonância Paramétrica pode ser uma explicação bastante razoável para os fótons e/ou raios gama produzidos no interior de estrelas de nêutrons. Estes fótons produzidos podem, num primeiro momento, aquecer anormalmente a estrela provocando modificações em sua equação de estado. Os fótons produzidos que não fossem reabsorvidos pela matéria circundante poderiam escapar da estrela, por exemplo, na forma de jatos de partículas.

A eliminação destes fótons pode levar a uma contração do raio da estrela, ocasionando um aumento na densidade e temperatura. Este mecanismo é o chamado *loss energy argument* [65]. Quando a densidade no interior da estrela de nêutrons pode atingir levar a matéria a um estado de transição, ocasionando o surgimento da chamada *estrela de quarks*. Eventualmente,

podemos ter o colapso da estrela dando origem a um *buraco negro*.

Os Capítulos 4 e 5 nos sugerem que o fenômeno de Ressonância Paramétrica e, conseqüentemente, produção de partículas no meio estelar é um mecanismo viável e razoavelmente robusto frente a variações dos parâmetros envolvidos. Em resumo, tomando-se o modelo de Harrington e Shepard para condensados em estrelas de nêutrons, o fenômeno de Ressonância Paramétrica para o campo eletromagnético é uma conseqüência matemática imediata. É preciso também admitir-se que a transformação de Bogolyubov é válida neste regime.

Por fim, visto que postulamos que o condensado de píons está num regime de vórtice, isto é, de coexistência com o campo eletromagnético da estrela, este deverá, por argumento de conservação de energia, diminuir sua intensidade, visto que sua energia é transferida rapidamente para a produção de fótons. Ainda em termos de conjectura, se admitirmos, por fim, um acoplamento do campo eletromagnético da estrela com sua rotação, a produção de fótons, em última instância, poderá afetar a rotação da estrela, ocasionando um freamento da mesma.

Apêndice A

A.1 Equação de Hill

Há uma certa classe de equações diferenciais ordinárias, lineares e homogêneas que são utilizadas no estudo de sistemas oscilantes que apresentam a seguinte forma

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) + [\omega_0 + \epsilon p(t)]f(t) = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde ω_0 e ϵ são parâmetros reais e a função real¹ $p(t)$ é limitada e periódica, isto é, $p(t) = p(t+T)$, onde T é o período desta função. Equações com estas características são chamadas de Equações de Hill.

As soluções da equação (A.1) são garantidas pelo teorema de Floquet [16]:

Teorema de Floquet: *Seja $P(t)$ uma função real (ou complexa) contínua por partes definida para todos os valores de t e com período mínimo T tal que*

$$P(t) = P(t+T).$$

Então a equação diferencial (A.1) possui duas soluções continuamente diferenciáveis $f_1(t)$ e $f_2(t)$, e a equação característica é

$$\rho^2 + [f_1(T) + f_2'(T)]\rho + 1 = 0, \quad (\text{A.2})$$

com autovalores $\rho_1 = e^{\mu T}$ e $\rho_2 = e^{-\mu T}$. Se ρ_1 e ρ_2 forem distintos, então (A.1) possui duas soluções linearmente independentes

$$f_1(t) \simeq e^{\mu t} p_1(t),$$

$$f_2(t) \simeq e^{-\mu t} p_2(t),$$

onde $p_1(t)$ e $p_2(t)$ são funções periódicas de período T .

O teorema de Floquet não é de difícil demonstração e a mesma pode ser encontrada na referência [16].

O comportamento assintótico das soluções da equação de Hill está controlado pelo expoente de Floquet (ou característico) μ . Para valores reais de μ as soluções são exponencialmente crescentes

¹No caso mais geral esta função pode ser complexa.

($\mu > 0$) ou decrescentes ($\mu < 0$). Para valores imaginários de μ temos soluções limitadas e periódicas. Para valores reais de μ , as soluções são ditas instáveis e para valores imaginários, estáveis.

O expoente de Floquet está relacionado aos parâmetros da equação (A.1), ω_0 e ϵ , e por este motivo as soluções são ditas instáveis ou estáveis **dentro do espaço de fase destes parâmetros**. Dito de outra forma: é possível atribuímos valores reais para ω_0 e ϵ de tal forma a termos soluções instáveis ou estáveis para (A.1). A Figura 2.2 no Capítulo 2 nos fornece uma representação pictórica do espaço de fase dos parâmetros ω_0 e ϵ . As regiões de instabilidades também são comumente chamadas de banda de ressonância.

O exemplo mais simples da ocorrência deste fenômeno é o de um pêndulo cujo ponto de suspensão realiza um movimento periódico dado na direção vertical [11].

Dentro da classe das equações de Hill, há dois tipos de equações que têm ligação direta com o fenômeno da produção de partículas via fenômeno de RP: as equações de Mathieu e as equações de Lamé [16].

A equação de Mathieu é aquela em que a função $p(t)$ é uma função trigonométrica do tipo *seno* ou *cosseno*. Este tipo de equação apresenta infinitas bandas de instabilidade no espaço de parâmetros ω_0 e ϵ [16]. Para este tipo de equação não é difícil obter uma expressão fechada para o expoente de Floquet (veja o Capítulo 2).

A equação de Lamé apresenta a função $p(t)$ como sendo uma função elíptica de Jacobi do tipo $sn = sn[t, k]$ (seno elíptico) ou $cn = cn[t, k]$ (cosseno elíptico), onde k é o chamado modulo da função elíptica, $0 \leq k \leq 1$. Estas funções têm um comportamento muito semelhante ao das funções trigonométricas seno e cosseno, respectivamente. A função sn é definida por meio da série [54]

$$sn[u, k] = \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{n-1/2}}{1 - g^{2n-1}} \operatorname{sen}(2n-1) \frac{u\pi}{2K},$$

e a função cn por meio da série [54]

$$cn[u, k] = \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{n-1/2}}{1 + g^{2n-1}} \cos(2n-1) \frac{u\pi}{2K},$$

onde $g = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ e K é a integral elíptica do primeiro tipo definida por

$$K(u, k) = \int_0^u \frac{du'}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u'}},$$

e além disto, $k^2 = 1 - k'^2$ e $K' = K'(k')$.

Estas funções elípticas têm duplo período: um real e outro imaginário. A equação de Lamé só apresenta soluções analíticas nos casos em que puder ser escrita como (com sn ou cn)

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) + \{\omega_0 + n(n+1)k^2 sn[t, k]\} f(t) = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde n é um número inteiro. As soluções para $n = 1, 2, 3$ estão tabeladas em [18]. O número de bandas de instabilidade no espaço de parâmetros é sempre finito e igual a $n+1$, se $n > 0$, ou a $-n-1$, se $n < 0$.

Apêndice B

B.1 Expoente de Floquet

Começaremos introduzindo o método geral para o cálculo do expoente de Floquet. Veremos que não é um método muito interessante para efeito de cálculo, seja numérico ou exato.

B.1.1 Método Geral

Para nossos propósitos, escreveremos a equação de Hill na seguinte forma

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) + [\omega_0^2 + \epsilon P(\omega t)]f(t) = 0, \quad (\text{B.1})$$

onde ω_0^2 e ϵ são parâmetros do sistema e $p(\omega t) = p(\omega t + \omega T)$ é uma função contínua (por partes), têm duas soluções distintas e linearmente independentes, $f_1(t)$ e $f_2(t)$, se estas satisfizerem as condições normalizadas

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 1, & f_1'(0) &= 0 \\ f_2(0) &= 0, & f_2'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Ao satisfazerem estas condições, estas soluções passarão a constituir uma base $\{f_1(t), f_2(t)\}$ dentro do espaço de soluções para (B.1). Assim, toda solução de (B.1) pode ser escrita como combinação linear destas soluções

$$\begin{cases} f_1(t+T) = af_1(t) + bf_2(t) \\ f_2(t+T) = cf_1(t) + df_2(t), \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

onde a , b , c e d são coeficientes não-nulos que podem ser facilmente encontrados se utilizarmos as condições normalizadas, possibilitando escrever

$$\begin{cases} f_1(t+T) = f_1(T)f_1(t) + f_1'(T)f_2(t) \\ f_2(t+T) = f_2(T)f_1(t) + f_2'(T)f_2(t). \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Suponhamos que temos uma terceira solução $g \neq 0$ tal que

$$g(t+T) = \rho g(t), \quad (\text{B.4})$$

para algum $\rho \neq 0$. Mas $g(t)$ pode ser escrito na base $\{f_1(t), f_2(t)\}$ como

$$g(t) = mf_1(t) + nf_2(t),$$

onde m e n são coeficientes não-nulos. Utilizando (B.3), (B.4) e as condições normalizadas encontramos

$$\begin{cases} g(0) = m, & g'(0) = n \\ g(T) = \rho g(0) = \rho m \\ g'(T) = \rho g'(0) = \rho n \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

A partir de (B.5) encontramos o sistema

$$\begin{cases} [f_1(T) - \rho]m + n f_2(T) = 0 \\ m f_1'(T) + [f_2'(T) - \rho]n = 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Se quisermos soluções para m e n tal que ambos sejam não-nulos devemos ter

$$\rho^2 - [f_1(T) + f_2'(T)]\rho + f_2'(T)f_1(T) - f_1'(T)f_2(T) = 0. \quad (\text{B.7})$$

A equação acima é conhecida como equação característica de (B.1). Sem perda de generalidade, podemos assumir que o Wronskiano $f_2'(T)f_1(T) - f_1'(T)f_2(T) = 1$ e portanto

$$\rho^2 - [f_1(T) + f_2'(T)]\rho + 1 = 0. \quad (\text{B.8})$$

Mas segundo o teorema de Floquet, a equação (B.1) tem solução da forma

$$f_n(t) = e^{\mu t} p_n(t)$$

onde $p_n(t)$ é contínua (por partes). Mas por (B.4) devemos ter $\rho = e^{\mu T}$ e portanto

$$\mu = \frac{1}{T} \ln \left\{ \frac{[f_1(T) + f_2'(T)] \pm \sqrt{[f_1(T) + f_2'(T)]^2 - 4}}{2} \right\}. \quad (\text{B.9})$$

É simples verificar que a expressão acima é real somente se $2 < [f_1(T) + f_2'(T)]^2$ ou $[f_1(T) + f_2'(T)]^2 < -2$. Uma vez satisfeita esta condição, a equação (B.9) fornece todos os valores de μ para o cálculo das regiões de instabilidade. Esta expressão possui dois inconvenientes: primeiro, devemos ter duas soluções linearmente independentes, o que nem sempre é possível, como por exemplo, para a equação de Lamé; segundo, devemos conhecer o período de oscilação da função $f(t)$, tarefa nada trivial.

A dedução do expoente de Floquet por este método geral serve apenas como uma "confirmação" de sua existência, mas para fins de cálculo não é interessante.

A seguir, daremos o método de Bogolyubov, bastante mais simples de ser utilizado e que não requer, *a priori*, o conhecimento de soluções da equação de Lamé.

B.1.2 Método de Bogolyubov

O método de Bogolyubov é eficiente se considerarmos ω_0^2 e ω como sendo constantes e ϵ como sendo um parâmetro pequeno. Assim, consideremos a equação (B.1). Tentaremos encontrar uma solução que seja eficiente na primeira banda de ressonância de frequência ω_0 . Para tanto, utilizaremos teoria de perturbação no parâmetro ϵ , desconsiderando contribuições de ordem 2 ($\mathcal{O}(\epsilon^2)$). Começamos por escrever $P(\omega t)$ na sua forma mais geral

$$P(\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{in\omega t}, \quad (\text{B.10})$$

onde, para que $P(\omega t)$ seja real devemos ter $g_n^* = g_{-n}$. Assumimos que $g_0 = 0$, por simplicidade. Introduzimos as fases [61]

$$g_n = |g_n|e^{i\alpha_n}, \quad (\text{B.11})$$

e o valor Δ por

$$\omega_0^2 = \left(\frac{p}{q}\omega\right)^2 + \epsilon\Delta, \quad (\text{B.12})$$

onde p e q são números inteiros da fração irredutível. Substituindo (B.12) em (B.1) obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) + \left(\frac{p}{q}\omega\right)^2 f(t) = -\epsilon[p(\omega t) + \Delta]f(t). \quad (\text{B.13})$$

O método de Bogolyubov empregado aqui consiste em procurar soluções para a equação (B.13) na forma de expansão em série sobre ϵ

$$f(t) = a \cos \psi + \sum_{s=1}^{\infty} \epsilon^s u^{(s)} \left(a, \theta, \frac{\omega}{q}t\right), \quad (\text{B.14})$$

onde $u^{(s)}$ são funções periódicas no segundo e terceiro argumentos, a é a amplitude e θ é a fase desta função. Além disto,

$$\psi = \frac{p}{q}\omega t + \theta.$$

Dentro do método de Bogolyubov, a e θ não são constantes, mas sim funções do tempo t . Somente aproximações de primeira ordem são consideradas, o que equivale dizer que esta aproximação é interessante apenas para o estudo do fenômeno de Ressonância Paramétrica na primeira banda de instabilidade. Com isto, a função $u^{(s)}$ pode ser escrita como [61]

$$u^{(1)} \left(a, \theta, \frac{p}{q}t\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(a, \theta) e^{\frac{in\omega t}{q}}, \quad (\text{B.15})$$

onde os coeficientes de $u_n(a, \theta)$ são periódicos em t .

Claramente, no caso em que $\epsilon = 0$ deveremos ter $\dot{a} = 0$ e $\dot{\theta} = 0$, o que equivale dizer a e θ constantes. Quando $\epsilon \neq 0$ o método de Bogolyubov consiste em expandir $\dot{a}$ e $\dot{\theta}$ como funções de a e θ e potências de ϵ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \epsilon A(a, \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{\theta} &= \epsilon B(a, \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Substituindo (B.14) em (B.13) e utilizando (B.16) obtemos para $u^{(1)}$

$$u^{(1)} + \left(\frac{p}{q}\omega\right)^2 u^{(1)} = -(g + \Delta)a \cos \psi + 2\left(\frac{p}{q}\right)\omega A \sin \psi + 2\left(\frac{p}{q}\right)\omega B a \cos \psi. \quad (\text{B.17})$$

É possível mostrar que as funções $A(a, \theta)$ e $B(a, \theta)$ podem ser escritas como [61]

$$\begin{cases} A(a, \theta) = \frac{a|g_s|}{s\omega} \sin(2\theta - \alpha_s) \\ B(a, \theta) = \frac{1}{s\omega} [\Delta + |g_s| \cos(2\theta - \alpha_s)] \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

onde a fase α está definida em (B.11) para s inteiro. Por meio da mudança de variáveis

$$x = a \cos \left(\theta - \frac{\alpha_s}{2} \right),$$

$$y = a \sin \left(\theta - \frac{\alpha_s}{2} \right),$$

o sistema (B.18) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\epsilon}{s\omega} (|g_s| - \Delta)y + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \dot{y} = \frac{\epsilon}{s\omega} (|g_s| + \Delta)x + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Este sistema tem solução [61]

$$\mu_{\pm} = \pm \frac{\epsilon}{s\omega} \sqrt{|g_s|^2 - \Delta^2}. \quad (\text{B.20})$$

A expressão acima é exatamente o expoente de Floquet procurado. Obviamente, este expoente assume valores reais somente se $|g_s|^2 > \Delta^2$.

Relembremos que no Capítulo 2 temos a dedução da expressão para o expoente de Floquet para o caso específico de uma Equação de Mathieu. Infelizmente, para a Equação de Lamé a dedução de uma expressão fechada para o expoente de Floquet não é tão simples [28].

B.1.3 Método de Hill

Seguiremos nesta subseção a Referência [17] que traz um método bastante geral para o cálculo do expoente de Floquet.

Tomando a equação de Hill descrita por (B.1) e utilizando o teorema de Floquet (Apêndice A), escrevemos sua solução formal como sendo dada por

$$f(t) = e^{\mu t} \sum_{-\infty}^{\infty} c_{2r} e^{2ir\omega t}, \quad (\text{B.21})$$

onde $\sum_{-\infty}^{\infty} c_{2r} e^{2ir\omega t}$ é a forma mais geral de expressarmos $P(\omega t)$ como uma função limitada e periódica.

Substituindo (B.21) em (B.1) obtemos

$$\left\{ \mu^2 + 2\mu \frac{d}{dt} + \frac{d^2}{dt^2} + [\omega_0 + \epsilon P(\omega t)] \right\} \sum = 0, \quad (\text{B.22})$$

onde, por simplicidade de notação, escrevemos $\sum = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{2r} e^{2ir\omega t}$. A equação (B.22) estabelece uma relação recursiva entre todos os c_{2r} [17]. Rearranjando os termos da equação (B.22) obtemos

$$-\epsilon c_{2r} + \{(2r - i\mu)^2 - \omega_0\} c_{2r} - \epsilon c_{2r+2} = 0, \quad (\text{B.23})$$

onde $r = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Dividindo cada equação por $(2r - i\mu)^2 - \omega_0$, podemos eliminar o termo c_{2r} de cada equação, obtendo um determinante infinito com todos os elementos da diagonal principal iguais a unidade e

determinante convergente¹ Denotando por $\Delta(i\mu)$ este determinante, a equação para determinação de μ é dada por $\Delta(i\mu) = 0$. Explicitamente,

$$\Delta(i\mu) = \begin{vmatrix} \dots & & & & \\ \gamma_{-2} & 1 & \gamma_2 & & \\ & \gamma_0 & 1 & \gamma_0 & \\ & & \gamma_2 & 1 & \gamma_2 \\ & & & & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{B.24})$$

onde $\gamma_{2r} = \frac{-\epsilon}{(2r-i\mu)^2 - \omega_0}$.

Espantosamente, a equação (B.24) pode ser reduzida a [17]

$$\cosh(\mu\pi) = 1 - \Delta(0) \sin^2 \left(\frac{\pi\sqrt{\omega_0}}{2} \right). \quad (\text{B.25})$$

O fator $\Delta(0)$ não é simples de ser obtido e está relacionado com a aplicação do teorema de Liouville para a resolução de (B.24), quando $\mu = 0$ [17]. É provável que este $\Delta(0)$ apresente alguma relação com o parâmetro ϵ , porém não temos uma relação explícita para este fator. Uma análise mais detalhada do comportamento de $\Delta(0)$ pode ser encontrada na referência [17].

¹Um determinante infinito é convergente se o produto dos elementos da diagonal principal e a soma dos elementos fora desta diagonal são absolutamente convergentes [17].

Apêndice C

C.1 O Princípio Cosmológico

Em 1912, foi descoberto que as linhas espectrais de objetos luminosos no céu apresentavam um desvio para o vermelho, ou seja, a linha emitida com comprimento de onda λ_0 , característico de uma transição atômica, era observada com um comprimento de onda $\lambda > \lambda_0$. O deslocamento ocasionado por esta diferença, $\Delta\lambda$, depende de λ_0 , porém a razão

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}, \quad (\text{C.1})$$

é constante para todas as linhas do espectro. Esta constante z é conhecida como *red shift*.

Uma explicação para o *red shift* pode ser dada via efeito Doppler, isto é, a fonte está em movimento relativo com relação ao observador. O comprimento de onda aumenta se o objeto luminoso está se afastando do observador com velocidade v e assim, o *red shift* pode ser expresso pela relação

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{(1 + \frac{v}{c})}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} - 1.$$

Para $v \ll c$, podemos escrever a relação acima como

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}.$$

Em 1929, Hubble [72] observando algumas galáxias foi capaz de determinar uma correlação entre a distância d_l das galáxias à Terra e o *red shift* como sendo

$$z = \frac{H}{c} d_l, \quad (\text{C.2})$$

onde o parâmetro H é conhecido atualmente como “constante” de Hubble e tem valores atuais entre 40 e 100 $\text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ [26]. A precisão de H depende de uma determinação precisa da distância d_l .

É imediato que para $v \ll c$

$$v = H d_l, \quad (\text{C.3})$$

o que indica claramente que a velocidade de afastamento dos objetos luminosos é proporcional à distância d_l que nos separa deles.

Devido à grande variação da constante de Hubble é conveniente defini-la como [24]

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)},$$

onde $a(t)$ é o chamado fator de escala do Universo¹. Grosseiramente falando, este seria o raio de Universo. Mais adiante, quando expusermos a métrica de Friedmann-Robertson-Walker ficará mais claro o que é $a(t)$.

A observação do *red shift* das galáxias corrobora com a idéia de um Universo em expansão, desde que utilizemos a explicação deste fenômeno via efeito Doppler. A isotropia do mesmo pode ser constatada por meio das seguintes considerações [26] (obtidas observacionalmente):

- a) a distribuição de galáxias e radiogaláxias;
- b) a radiação de fundo em microondas prevista por Gamow² e detectada por Penzias e Wilson [73] e cujo espectro corresponde à radiação de um corpo negro com temperatura $T = 2.73K$;
- c) a radiação de fundo em raio X , entre 2 e 18 KeV , correspondendo, provavelmente, à radiação integrada dos Objetos Quasi-Estelares (QSO's).

Através de dados observacionais sabe-se que o Universo não tem distribuição homogênea de matéria até distâncias de 100 Mpc [26].

Em escala cósmica, pode-se adotar sem nenhum inconveniente a homogeneidade e isotropia do Universo. Este é o Princípio Cosmológico.

Este princípio é essencial para os modelos que tentam descrever o Universo levando-se em conta a sua homogeneidade e isotropia, em grande escala.

Na seção seguinte veremos o Modelo *Hot Big Bang*, que é o mais aceito atualmente para descrever a origem do Universo.

C.2 O Modelo *Hot Big Bang*

A métrica para um espaço homogêneo e isotrópico, ou seja, em acordo com o Princípio Cosmológico, é dada pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) que se escreve

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (C.4)$$

onde (t, r, θ, φ) são coordenadas do sistema no qual a métrica está inserida e $a(t)$ é o chamado fator de escala cósmica [24]. O tempo t é o tempo próprio medido por um observador movendo-se conjuntamente (co-movendo) com a estrutura espacial do sistema, isto é, (r, θ, φ) é constante para o observador.

O parâmetro k pode, a princípio, assumir qualquer valor real. No entanto, costuma-se adotar uma escala na qual ele assume apenas três valores: +1, 0 e -1.

Pode-se mostrar que as propriedades de curvatura de um espaço isotrópico ficam inteiramente determinadas por esta constante k [70].

Com base nos três valores possíveis de k podemos dividir a curvatura do espaço em três tipos e classificar o espaço a partir destas curvaturas. Assim,

¹O ponto indica derivada com respeito ao tempo próprio τ

²Gamow possui alguns trabalhos a esse respeito com valores diversos para a radiação de fundo. Para uma introdução à história da radiação de fundo ver Referência [71].

1) $k = +1$

Espaço de curvatura positiva. (fechado)

2) $k = 0$

Espaço de curvatura plana. (plano)

3) $k = -1$

Espaço de curvatura negativa. (aberto)

Para analisar esses casos é mais simples recorrer a uma analogia geométrica, considerando um espaço isotrópico tridimensional de uma hipersuperfície mergulhada num espaço quadridimensional também isotrópico.

Para $k = +1$, a hipersuperfície é na realidade uma hiperesfera. A equação de uma hiperesfera de raio $a(t)$ é

$$a^2(t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \quad (\text{C.5})$$

cujo elemento de linha é dado por

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2, \quad (\text{C.6})$$

O parâmetro k pode ser definido como [70]

$$k = \frac{1}{a^2(t)}. \quad (\text{C.7})$$

Geometricamente, a expressão (C.7) mede o quanto uma curva se afasta de um plano tangente a esta curva num dado ponto. Neste sentido, $a(t)$ é o raio de curvatura do espaço. Este Universo é dito fechado pois a área da hiperesfera com um dado centro é de $4\pi r^2$, ou seja, é finita. O volume deste espaço será finito, daí o fato de poder ser chamado de fechado [70].

Para $k = -1$, a hipersuperfície é agora uma pseudo-hiperesfera com raio imaginário. Note que para $k = -1$ devemos ter $a(t)$ complexo e portanto podemos redefinir (C.7) como

$$k = -\frac{1}{a^2(t)}. \quad (\text{C.8})$$

A área desta pseudo-hiperesfera será $4\pi^2 r^2 \sinh \varphi$, onde $\cos \varphi = \frac{t}{a(t)}$. A área cresce indefinidamente quando nos afastamos da origem do sistema de coordenadas (φ crescendo). Obviamente o volume desta hiperesfera será infinito, daí o fato deste Universo poder ser chamado de fechado [70].

Para $k = 0$, a hipersuperfície se reduz a um plano com métrica

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (\text{C.9})$$

A parte espacial desta métrica descreve um espaço Euclidiano tridimensional. Se $a(t)$ for constante ao longo do tempo ou variar muito lentamente, esta métrica descreverá um espaço de Minkowsky no grupo $O(1, 3)$. A Figura C.1 tenta descrever estes possíveis Universos.

Na dinâmica do Universo descrito pela métrica FRW está implícita a dependência temporal do fator de escala $a(t)$. A evolução temporal deste fator é governada pelas equações de Einstein ³ [24] (daqui para frente $a = a(t)$)

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p)a, \quad (\text{C.10})$$

³ $G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}$, tomando $\Lambda = 0$.

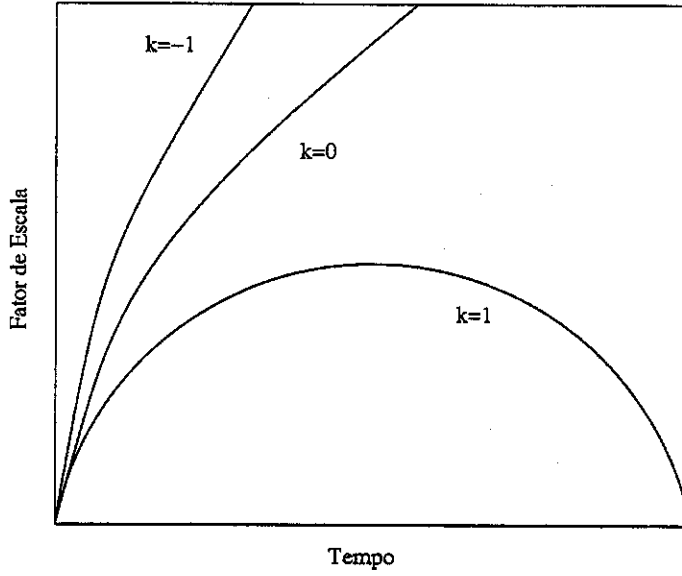


Figura C.1: Modelos de Universo dependentes do parâmetro de curvatura k : $k = -1$ (aberto), $k = 1$ (fechado) e $k = 0$ (plano).

$$H^2 + \frac{k^2}{a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho, \quad (\text{C.11})$$

onde ρ e p são a densidade de energia e a pressão da matéria presentes no Universo, respectivamente. A constante $G = M_p^{-2}$ onde $M_p = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}$ é a massa de Planck.

As equações acima são as equações de Friedmann obtidas a partir das equações de Einstein para um Universo homogêneo e isotrópico. Estas equações podem descrever o comportamento da matéria e da radiação. Delas é possível derivar uma lei de conservação de energia que pode ser escrita na forma

$$\dot{\rho}a^3 + 3(\rho + p)a^2\dot{a} = 0. \quad (\text{C.12})$$

Esta equação pode ser facilmente obtida derivando-se a equação (C.11) com respeito ao tempo t e substituindo o resultado na equação (C.10). A partir da equação (C.12) é possível deduzir uma equação de estado que poderá descrever a evolução temporal do Universo apenas com base em ρ e p ⁴

Por simplicidade, assumiremos que esta equação de estado pode ser expressa pela relação simples:

$$p = \alpha\rho, \quad (\text{C.13})$$

onde α não depende do tempo. Substituindo este resultado na equação (C.12) obtemos

$$\dot{\rho}a^3 + 3\rho(1 + \alpha)a^2\dot{a} = 0, \quad (\text{C.14})$$

cuja solução é dada por

$$\rho = a^{-3(1+\alpha)}. \quad (\text{C.15})$$

Este resultado reduz a equação (C.14) a uma equação de estado politrópica, onde $-3(1 + \alpha)$ é o índice politrópico. Os casos mais interessantes descritos pela equação (C.15) são:

⁴Observe que $\rho = \rho(t)$ e $p = p(t)$.

a) gás não-interagente: $p = \frac{1}{3}\rho$

$$\rho \sim a^{-4}$$

b) matéria não relativística fria: $p = 0$

$$\rho \sim a^{-3}$$

c) estado de vácuo: $p = -\rho$

$$\rho \sim 1 = \text{constante}$$

Para (a) dizemos que temos um estado dominado pela radiação; para (b), temos um estado dominado pela matéria e para (c), temos um estado dominado pelo vácuo [26].

Utilizando a equação (C.11) é possível deduzir uma expressão aproximada que descreva o comportamento temporal do fator de escala a para os casos onde este é muito pequeno. Com efeito, quando a é muito pequeno, o termo $\frac{8\pi}{3}G\rho$ se torna muito maior do que $\frac{k^2}{a^2}$ e assim podemos escrever

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \simeq \frac{8\pi}{3}G\rho \simeq \frac{8\pi}{3}Ga^{-3(1+\alpha)}. \quad (\text{C.16})$$

Podemos deduzir, aproximadamente, a seguinte relação entre a e t :

$$a \sim t^{\frac{2}{3(1+\alpha)}}. \quad (\text{C.17})$$

Esta expressão é fundamental para entendermos a singularidade presente no modelo de Universo de Friedmann, pois para $t \rightarrow 0$, o fator de escala também tende a zero ($a \rightarrow 0$). Para o estado dominado pela matéria, caso b, temos $\rho \rightarrow \infty$. Pode-se mostrar que o tensor de curvatura presente nas equações de Einstein tende ao infinito [24], ou seja, a densidade será infinita num único ponto. Temos em $t = 0$ a presença de uma singularidade cosmológica.

Se considerarmos que toda a matéria e radiação do Universo está, em algum momento t , confinado em um único ponto, podemos supor uma expansão deste ponto a partir de uma “explosão” inicial chamada de *Big Bang*.

Este Universo em expansão é descrito pelo Modelo *Hot Big Bang* que é muito bem aceito pela comunidade científica em geral, por alguns bons motivos: prevê a lei de expansão de Hubble, a radiação cósmica de fundo e a abundância dos elementos químicos. Mas ele falha ao tentar explicar o momento da singularidade.

Em tempos anteriores a um segundo após o início da expansão este modelo já apresenta alguns problemas: no contexto das Teorias de Grande Unificação (GUT's) da física de partículas, temos uma superprodução de monopólos nos momentos iniciais da criação; o problema do Universo Plano, que está diretamente ligado à razão entre a densidade atual do Universo e a densidade crítica num período primordial; e, por fim, o problema do horizonte de partículas, que mostra contradições entre o Universo observável e o que seria de fato possível de observação.

Dentre todos os problemas acima abordaremos apenas os dois últimos por apresentarem uma ligação direta com a proposta do Universo Inflacionário de Guth.

C.3 Problema do Universo Plano

Seja Ω a razão entre a densidade de energia atual do Universo e sua densidade de energia crítica

$$\Omega = \frac{\rho(t)}{\rho_c},$$

onde esta densidade crítica para um Universo plano é definida como

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

O valor atual desta densidade crítica é de aproximadamente $2 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3}$, onde h é o “parâmetro de ajuste” da constante de Hubble ($0.4 \lesssim h \lesssim 1$) [24].

Atualmente Ω está restrito ao intervalo [24]

$$0.1 \lesssim \Omega \lesssim 1.$$

Para este intervalo ao qual Ω está restrito podemos deduzir a partir da equação (2.3) uma relação entre o fator de escala e esta razão. Com efeito, a equação (2.3) pode ser escrita como

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = (\rho - \rho_c) \frac{8\pi G}{3} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1 \right) H^2. \quad (\text{C.18})$$

As soluções da equação acima são

$$a(t) = \frac{1}{H} \left(\frac{\rho_c}{\rho - \rho_c} \right)^{1/2},$$

e

$$a(t) = \frac{1}{H} \left(\frac{\rho_c}{\rho_c - \rho} \right)^{1/2},$$

onde a primeira solução é para $\rho > \rho_c$ e a segunda é para $\rho < \rho_c$.

Utilizando estas soluções podemos escrever

$$[\dot{a}(t)]^2 = \left| \frac{\rho}{\rho_c} - 1 \right| = |\Omega - 1|. \quad (\text{C.19})$$

Para um gás ultra relativístico temos a aproximação

$$[\dot{a}(t)]^{-2} \sim t, \quad (\text{C.20})$$

e por simples comparação entre as equações (C.19) e (C.20) temos

$$\left| \frac{\rho}{\rho_c} - 1 \right| \sim t. \quad (\text{C.21})$$

Pode-se mostrar que $|\Omega - 1|$ para o intervalo de Ω atual está limitado superiormente por [24]

$$|\Omega - 1| \lesssim 10^{-59} \left(\frac{M_p}{t} \right)^2, \quad (\text{C.22})$$

onde M_p é a massa de Planck. Se tivermos $t \sim M_p$ então

$$|\Omega - 1| \lesssim 10^{-59}.$$

O resultado representado pela equação acima mostra claramente que se tivéssemos uma densidade no tempo de Planck de, por exemplo, $10^{-55} \rho_c$ menor que ρ_c , então a densidade de energia nos dias atuais seria desprezível e portanto não teríamos nenhuma forma de vida no Universo. Por outro lado, se no tempo de Planck tivéssemos uma densidade $10^{-55} \rho_c$ tão grande quanto ρ_c , o Universo fatalmente teria colapsado há muito tempo atrás [24].

Esta estranha peculiaridade do nosso Universo é conhecida como o problema do Universo Plano, devido exatamente ao estreitíssimo valor em que oscila Ω . Sua explicação é possível apenas se utilizarmos o Modelo Inflacionário.

C.4 Problema do Horizonte de Partículas

Assumindo o Modelo *Hot Big Bang* como sendo o Modelo Padrão e que a expansão a partir da singularidade se deu de modo uniforme, podemos então tentar imaginar qual seria a distância percorrida por um feixe de fótons a partir do tempo $t = 0$ (singularidade) até o tempo t_0 (atual).

Consideremos, por simplicidade, que não houve nem espalhamento e nem absorção destes fótons. Devido a homogeneidade da expansão, temos um Universo esférico de raio r . A “casca” desta esfera é o chamado horizonte de partículas.

Tomando o caso em que $k = 0$ podemos escrever a equação (2.1) como

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (C.23)$$

Um feixe de fótons somente ao longo do raio r da esfera implica $d\theta = d\varphi = 0$ e portanto

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dr^2. \quad (C.24)$$

A propagação de um feixe de fótons é governada pela condição $ds = 0$ e assim

$$dt^2 = a(t)^2 dr^2. \quad (C.25)$$

Consideremos que o feixe de fótons se propaga em direção ao observador localizado na origem do sistema de coordenadas. Dessa forma podemos escrever

$$dt = -a(t) dr. \quad (C.26)$$

Separando as variáveis da equação (C.26) e integrando-a obtemos

$$r - r_0 = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$$

Admitindo que $r_0 = 0$ na singularidade escrevemos simplesmente

$$r - r_0 = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (C.27)$$

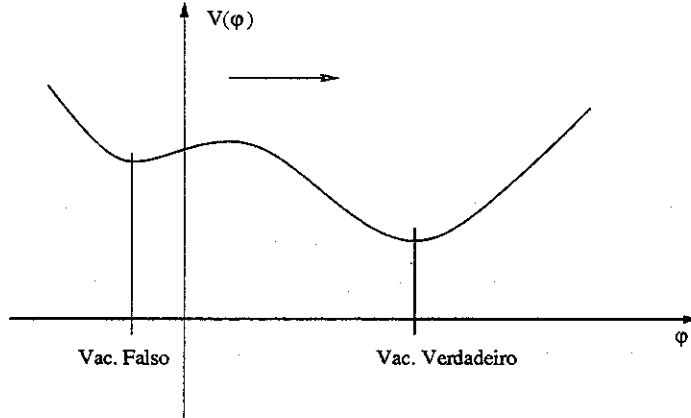


Figura C.2: Potencial sugerido por Guth para seu modelo inflacionário.

Para um Universo plano $a(t) \sim t^{2/3}$ e portanto

$$r \sim t^{1/3}. \quad (\text{C.28})$$

Este resultado é extremamente importante pois indica que o raio do Universo é muito menor do se supunha⁵. Com uma raio tão pequeno seria possível “vermos” o limite do Universo com o instrumentos disponíveis atualmente. Porém, sabemos que isto de fato não ocorre.

Este é o conhecido problema do horizonte de partículas do Universo. A Cosmologia padrão não apresenta solução para este problema. Somente dentro do Modelo Inflacionário é que teremos uma solução para este problema.

Em 1981, Guth [66] procurou resolver alguns problemas que surgiram ao longo do tempo dentro do modelo cosmológico padrão, a saber: o problema do horizonte de partículas e o problema do Universo plano. O Apêndice B traz alguns detalhes a mais sobre estes problemas. Para isto, ele propõe um modelo onde a expansão nos primórdios do Universo ocorre de um modo extremamente rápido num curtíssimo espaço de tempo, daí esta fase do Universo é denominada inflação. Durante o período de inflação o fator de escala do modelo cosmológico padrão sofreu um aumento incrível (talvez maior que 10^{50} vezes).

O que Guth faz, então, é tentar descrever um modelo que possa se encaixar nesta expansão tentando com isto solucionar os problemas presentes no modelo cosmológico padrão.

Para que o modelo inflacionário de Guth possa de fato ocorrer, requer-se um campo de Higgs com potencial efetivo $V(\varphi)$ similar ao mostrado na Figura C.2, onde foi graficada apenas uma componente deste campo. Na temperatura zero, o mínimo global do potencial efetivo é chamado de estado de vácuo verdadeiro, com $\varphi = \varphi_v$. O valor de $V(\varphi_v)$ representa a densidade de energia deste estado de vácuo, e está relacionado à constante cosmológica Λ por [22]

$$\Lambda = 8\pi G V(\varphi_v). \quad (\text{C.29})$$

Para Guth, o fato de não termos detectado esta constante cosmológica indicaria que seu valor no Universo primordial seria desprezível. Isto, por sua, vez faria com que a densidade de energia do

⁵Para ver isto basta substituir t pelo seu valor usualmente aceito $\sim 10^{10}$ anos.

estado de vácuo verdadeiro fosse muito menor do que as outras densidades de energia eventualmente presentes naquele cenário. Por este motivo ele assume que pode-se escrever

$$V(\varphi_v) = 0.$$

Porém, é a energia deste estado de vácuo que permitirá o estado de inflação [24]. Ela é da ordem de $(10^{14} \text{GeV})^4$ para a grande unificação de escala. Segundo a equação (C.29), deveríamos ter também uma constante cosmológica de valor considerável, porém, como se sabe, até hoje não foi encontrado nenhum indício desta constante. Este fato por si só não invalida esta teoria inflacionária, sendo apenas um ponto sobre o qual ela não é esclarecedora.

No modelo de Guth, observando ainda a Figura C.2, temos um segundo ponto de mínimo (local) chamado de estado de vácuo falso. Segundo este modelo inflacionário a temperatura zero do potencial efetivo no ponto de mínimo verdadeiro requer a existência deste ponto [22]. O valor esperado deste estado de vácuo falso seria

$$\langle \varphi \rangle = \varphi_f,$$

e sua densidade de energia seria ρ_f .

Assume-se que existe uma temperatura crítica T_c acima da qual a temperatura efetiva do potencial tem um valor próximo ao valor para o vácuo falso. Esta temperatura crítica permite a chamada transição de fase de primeira ordem. Utilizando a GUT SU(5), Guth obtém, para uma estreita faixa de parâmetros, um potencial efetivo que possui precisamente estas características [67]. A temperatura crítica neste caso seria da ordem de 10^{14}GeV . Ou seja, a energia mínima necessária para darmos início ao processo inflacionário seria desta ordem.

Este fato é extremamente importante, pois caso este tipo de teoria inflacionária se prove correta um dia, ele nos diz então que as condições da origem do Universo são irrelevantes para o seu desenvolvimento, importando apenas o momento em que a inflação tem início.

Guth admite que este estado de vácuo falso nunca foi observado, mas que no entanto suas propriedades independem da teoria de partículas que se está empregando [22]. Mostra-se que a densidade de energia deste estado de falso vácuo é constante e tem valor típico de quarta potência da massa característica da teoria de partículas que se está usando. Este valor típico seria

$$\rho_f \sim (10^{14} \text{GeV})^4 \sim 10^{73} \text{gcm}^{-3}. \quad (\text{C.30})$$

Assim, aceitando que o campo de Higgs possui um potencial com estas características, tudo o que precisamos para dar início ao processo inflacionário é que tenhamos uma temperatura $T > T_c$, em pelo menos um ponto do Universo no Modelo Padrão. Neste eventual ponto, uma rápida expansão levaria ao resfriamento desta região trazendo-a de volta à temperatura T_c antes que um eventual colapso gravitacional tivesse o efeito de reverter esta expansão. Após a inflação, esta região do espaço teria agora as dimensões do horizonte de partículas do Universo naquele instante.

O problema que surge espontaneamente é o de que podemos ter várias regiões com $T > T_c$ de modo que a expansão exponencial do fator de escala poderia levar a colisões entre essas “bolhas” de densidade de energia. Estas bolhas têm em suas paredes uma enorme quantidade de energia cinética devido exatamente à velocidade da expansão a que está sujeita (da ordem de c). As colisões levariam a um novo processo de aquecimento (*reheating*), ocasionando uma nova expansão inflacionária. Este processo é infinito [68]. Mesmo que eventualmente este processo pudesse ter um fim, o Universo

gerado a partir dele seria claramente não homogêneo e anisotrópico, o que está em desacordo com os dados observacionais obtidos para grandes escalas.

Este é o principal problema do modelo inflacionário de Guth. Usualmente refere-se a este modelo como sendo o “modelo antigo de inflação”, em contraste com os modelos [68] e [69] chamados de “novos modelos inflacionários”.

Bibliografia

- [1] Baade, W. e Zwicky, F.: Phys. Rev. 45, 138 (1934).
- [2] Oppenheimer, J. R. e Volkoff, G. M.: Phys. Rev. 55, 334 (1939).
- [3] Tolman, R. C.: Phys. Rev. 55, 364 (1939).
- [4] Gold, T.: Nature 218, 731 (1968).
- [5] Kippenhahn, R. e Weigert, A.: *Stellar Structure and Evolution*. Springer-Verlag (1994).
- [6] Nightingale, J. D.: *A Short Course in General Relativity*. Segunda Edição. Springer-Verlag, N. Y. (1995).
- [7] Maciel, Walter J.: *Introdução à Estrutura e Evolução Estelar*. Editora da Universidade de São Paulo. São Paulo. (1999).
- [8] Baym, G.: Nucl. Phys. A590, 233 (1995).
- [9] Glendenning, N. K.: Nucl. Phys. A493, 521 (1989).
- [10] Menezes, Débora Peres: *Introdução à Física Nuclear e de Partículas Elementares*. Editora da UFSC, Florianópolis (2002).
- [11] Landau, L. D. e Lifshitz, E. M.: *Mecânica*. Editora Mir (1978).
- [12] Arnold, V.: *Les Methodes Mathématiques de la Mécanique Classique*. Editora Mir.
- [13] Traschen, J. H. e Brandenberger, R. H.: Phys. Rev. D42, 2491 (1990).
- [14] Dolgov, A. D. e Kirilova, D. P.: Sov. J. Nucl. Phys. 51, 172 (1990).
- [15] Kofman, L. A.: astro-ph/9655155 (1996).
- [16] Magnus, W. e Winkler, S.: *Hill's Equation, Vol. 20*. Interscience Publ.. (1960).
- [17] Arscott, F. M.: *Periodic Differential Equations*. The Macmillan Co.. (1964).
- [18] Chang, Z. X. e Guo, D. R.: *Special Functions*. World Scientific Publ. Co. Pte. Ltd.. (1989).
- [19] Erdélyi, A.: *Higher Transcendental Functions, Vol 3*. McGraw-Hill, Book Comp., Inc.. (1955).
- [20] Kofman, L., A., Linde e A., Starobinsky, A. A.: Phys. Rev. D56, 3258 (1997).
- [21] Garcia-Bellido, J. e Kusenko, A.: Phys. Rev. D59, 123001 (1999).
- [22] Hawking, S. e Israel, (organizadores): *Three Hundred Years of Gravitation*. Vários autores. Cambridge (1989).

- [23] Guth, A. H.: Phys. Rev. D23, 347 (1981).hys. Rev. Lett. 73, 3195 (1994).
- [24] Linde, A.: *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, in Contemporary Concepts in Physics, Vol. 5. Harwood Acad. (1990).
- [25] W. P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, Vol. 1. Ed. Levi, Princeton Un. Press, (1997).
- [26] Maciel, W. J. (editor): *Astronomia e Astrofísica: Curso de Extensão Universitária*. IAG/USP (1991).
- [27] Greene, P. B, Kofman, L. A., Linde, A. e Starobinsky, A. A.: Phys. Rev. D56, 6175 (1997).
- [28] Kaiser, D. I.; Phys. Rev. D57, 701 (1998).
- [29] Kusenko, A.: arXiv:astro-ph/9804134 (1998).
- [30] Scalpino, D. J.: Phys. Rev. Lett. 29, 386 (1972).
- [31] Sawyer, R. F.: Phys. Rev. Lett. 29, 382 (1972).
- [32] Scalpino, D. J. e Sawyer, R. F.: Phys. Rev. D7, 953 (1973).
- [33] Baym, G.: Phys. Rev. Lett. 30, 1340 (1973).
- [34] Campbell, D. K., Dashen, R. F. e Manassah, J. T., Phys. Rev. D12, 979 (1975).
- [35] Campbell, D. K., Dashen, R. F. e Manassah, J. T., Phys. Rev. D12, 1010 (1975).
- [36] Migdal, A. B.: Phys. Rev. Lett. 31, 257 (1973).
- [37] Takatsuka, T.: *Condensed Matter Theories, Vol. 3*. Plenum Press, NY.
- [38] Sawyer, R. F.: Phys. Rev. Lett. 31, 1556 (1973).
- [39] Takatsuka, T., Tamyia, K., Tatsumi, T. e Tamagaki, R.: Prog. Theor. Phys., 59, 1933 (1978).
- [40] Weinberg, S.: Phys. Rev. Lett. 18, 188 (1967).
- [41] Harrington, B. J. e Shepard, H. K.: Phys. Rev. D16, 3437 (1977).
- [42] De Wit, B. e Smith, D.: *Field Theory in Particle Physics, Vol. 1*. North Holland Physics Publ. (1986).
- [43] Harrington, B. J. e Shepard, H. K.: Phys. Rev. D19, 1713 (1979).
- [44] Walecka, J. D.: *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*. Oxford Univ. Press, NY (1995).
- [45] Ruderman, M.: J. Phys. C3, 152 (1969).
- [46] Ruderman, M.: Ann. Rev. Astron. Astrophys. 10, 427 (1972).
- [47] Schwinger, J.: Ann. Phys. 2, 407 (1957).
- [48] Gell-Mann, M. e Lévy, M.: Nuovo Cimento, Vol XVI número 4, 705 (1960).
- [49] Carrillo, J. A. E.: *Estados Ligados de Campos Clássicos Interagentes em Domínios Finitos em Dimensão (1+1)*. Tese de Doutorado. IFGW/UNICAMP (1999).
- [50] Migdal, A. B.: Sov. Phys. JETP 34, 1184 (1972).

- [51] Sawyer, R. F. e Yao, A. C.: Phys. Rev. **D7**, 1579 (1973).
- [52] Miransky, V. A.: *Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories*. World Scientific Publ. Co. (1993).
- [53] Struble, R. A.: *NonLinear Differential Equations*. McGraw-Hill Book Comp. (1962).
- [54] Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M.: *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, Inc. (1980).
- [55] Abramowitz, M. e Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publ., Inc..
- [56] Bahcall, J. N. e Wolf, R. A.: Phys. Rev. Lett. **14**, 343 (1965).
- [57] Migdal, A. B., Saperstein, E. E., Troitsky, M. A. e Voskresensky, D. N., Phys. Rep. **192**, 179-437 (1990).
- [58] Heiselberg, H. e Hjorth-Jensen, M.: Phys. Rep. **328**, 237-327 (2000).
- [59] Akmal, A. e Pandharipande, V. R.: Phys. Rev. **C56**, 2261 (1997).
- [60] Tatsumi, T.: Prog. Theor. Phys. Supp. **91**, 299 (1987).
- [61] Shtanov, Y., Traschen, J. H. e Brandenberger, R. H.: Phys. Rev. **D51**, 5438 (1995).
- [62] Goodstein, D. L.: *States of Matter*. Prentice Hall, Inc. (1975).
- [63] Landau, L. D. e Lifshitz, E. M.: *Statistical Physics*. Pergamon Press.
- [64] Ince, E. L.: *Ordinary Differential Equations*. Dover (1956).
- [65] Raffelt, Georg G.: *Stars as Particle-Physics Laboratories*. Particles and Fields: Eighth Mexican School. Editado por J. C. D'Olivo *et al.* (1999).
- [66] Guth, A. H.: Phys. Rev. **D23**, 347 (1981).
- [67] Guth, A. H. e Weinberg, E. J.: Phys. Rev. **D23**, 876 (1981).
- [68] Linde, A.: Phys. Lett. **B108**, 389 (1982).
- [69] Abbott, L. F., Farhi, E. e Wise, M. B.: Phys. Lett. **B117**, 29 (1982).
- [70] Landau, L. e Lifshitz, E.: *Teoria do Campo*. Hemus Livraria e Editora.
- [71] Assis, A. K. T. e Neves, M. C. D.: Apeiron Vol.2, 79 (1995).
- [72] Hubble, E.: Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
- [73] Penzias, A. A. e Wilson, R. W.: Ap. J. **142**, 429 (1965).