

TESE DE MESTRADO

"PERDAS HISTERÉTICAS EM SUPERCONDUTORES TIPO II"

ALUNA: MARIA JOSÉ RAMOS

ORIENTADOR: PROF. DR. DALTRO GARCIA PINATTI

INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - UNICAMP

CAMPINAS, JULHO DE 1991

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida pela aluna Maria José Ramos e aprovada pela Comissão Julgadora Campineira em 24 de julho de 1991.
Daltro Garcia Pinatti

UNICAMP

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. Daltro Garcia Pinatti pela orientação do trabalho de tese.
- Ao Eng. Carlos Yujiro Shigue pela valiosa ajuda na parte experimental e computacional.
- Ao Centro de Materiais Refratários (FTI), na pessoa do seu superintendente, M.Sc. Carlos Alberto Baldan, pela cessão dos equipamentos e instalações para a execução deste trabalho.
- Aos amigos Victo e Inácio pela colaboração durante a realização dos experimentos.
- Ao meu marido Hugo pelo constante apoio e incentivo.

DEDICO ESTE TRABALHO A MEUS QUERIDOS
PAIS, BENJAMIM E HILDA

ÍNDICE

	Pág.
INTRODUÇÃO	01
REFERÊNCIAS	05
CAPÍTULO 1- SUPERCONDUTORES TIPO II: PERDAS HISTERÉTICAS	08
1.1- Supercondutores Tipo II no Estado Misto	08
1.2- Irreversibilidade Magnética	09
1.3- Modelo de Estado Crítico de Bean.....	09
1.4- Movimento de Fluxo	11
1.5- Perda Histerética	12
Figuras	24
Referências	28
CAPÍTULO 2- ARRANJO EXPERIMENTAL	29
Figuras	34
Referências	36
CAPÍTULO 3- RESULTADOS	37
3.1- Carregamento do Magneto	37
3.2- Simulação dos Efeitos de Chaveamento e Ruído sobre o Sistema	37
3.3- Obtenção das Curvas de Magnetização	39
3.4- Calibração do Sistema	39
3.5- Cálculo das Perdas Histeréticas	41
3.6- Resultados para Velocidade de Carregamento do Magneto de 0.83 A/s (500A/10min)	42
3.7- Resultados para Velocidade de Carregamento do Magneto de 1.67 A/s (500A/5min)	48
Tabela (3-6-1)	54
Tabela (3-7-1)	55
3.8- Discussão e Conclusão	56
Tabela (3-8-1)	59
Gráficos	60
Referências	116
APÊNDICES	117

INTRODUÇÃO

Um supercondutor ideal tipo I é perfeitamente diamagnético abaixo de sua temperatura crítica T_c e campo crítico H_c . A este estado onde ocorre completa exclusão de linhas de fluxo magnético do interior do condutor é dado o nome de Estado Meissner [1].

Historicamente, o termo "histerese" ou efeito irreversível foi primeiramente usado nos anos 30 quando foi encontrado que em certa classe de supercondutores, chamados supercondutores tipo II, o efeito Meissner não ocorre em toda faixa de campo antes da transição para o estado normal. Nos materiais supercondutores tipo II, em sua maioria ligas e compostos intermetálicos, o Estado Meissner ocorre somente abaixo do campo crítico inferior H_{c1} . Em um amplo intervalo de campos magnéticos delimitado pelo campo crítico inferior H_{c1} e campo crítico superior H_{c2} estabelece-se o Estado Misto [2], quando fluxo magnético penetra gradualmente sob a forma de linhas de fluxo quantizado, chamadas vórtices ou fluxóides e, ao reverter o campo, uma parcela do fluxo permanece aprisionado no espécime.

O primeiro grande passo para uma aplicação DC da supercondutividade deu-se em 1961 quando Kunzler et. al. [3] verificaram que Nb_3Sn poderia carregar uma densidade de corrente de 10^5 amp/cm² em um campo de 88 kOe. De lá para cá o entendimento do mecanismo de aprisionamento de fluxo causado pelos defeitos do material [4] e a solução de problemas metalúrgicos envolvidos na fabricação de fios supercondutores [5] levou ao desenvolvimento de materiais com temperaturas críticas, densidades de corrente e campos críticos mais altos. Todavia, o maior obstáculo remanescente à aplicação industrial de supercondutores hoje em dia é a perda que ocorre em presença de um campo magnético alternado.

Já no começo dos anos 60 começaram os estudos da viabilidade de aplicações AC da supercondutividade tipo II [6] mas, somente nos anos 80 isto passou a ser viável com a fabricação de fios supercondutores com características específicas para uso AC [7].

Por razões de estabilidade térmica, elétrica e mecânica [8], fios supercondutores constituem-se em compósitos, ou seja, em filamentos supercondutores embutidos em uma matriz de metal normal, geralmente cobre. O diâmetro dos filamentos tipicamente

está no intervalo de 1 a $100\mu\text{m}$.

Quando sujeitos a campos magnéticos alternados ou transientes fios supercondutores exibem perdas, as quais podem ser classificadas em perdas por histerese, perdas por correntes parasitas e perdas por acoplamento.

A) A perda histerética, intrínseca aos supercondutores tipo II, é causada pela movimentação de fluxo magnético através do espécime supercondutor. Tal movimentação de fluxo induz um campo elétrico no espécime supercondutor e consequente dissipação de energia.

Para barrar o movimento de vórtices tanto quanto possível e, consequentemente, minimizar as perdas histeréticas, é preciso fabricar fios supercondutores multifilamentares muito finos, com diâmetro de filamento supercondutor inferior a $1\mu\text{m}$ [9]. A perda histerética é a maior componente de perda até 1kH_z .

B) As perdas por correntes parasitas ocorrem devido ao aquecimento joule proveniente das correntes induzidas na matriz normal devido ao campo magnético variável, ou pelo auto-campo de uma corrente de transporte variável.

A fim de minimizar as perdas na matriz, fios supercondutores para aplicações AC são produzidos com uma matriz mais resistiva, usualmente CuNi (com até 30 % em Ni) e são submetidos a um passo de torção [10]. Em regime de alta frequência (acima de 1kHz) perdas por correntes parasitas podem levar ao efeito de pele no condutor.

C) As perdas por acoplamento ocorrem quando o espaçamento entre os filamentos supercondutores torna-se inferior a um valor crítico característico do material da matriz abaixo do qual, por efeito de proximidade, ocorre um acoplamento entre os filamentos supercondutores, perdendo-se assim o efeito da multifilaridade do condutor que passa a comportar-se como um único filamento [11].

Progresso nas técnicas de manufatura para fios multifilamentares na última década levou a Alstom Atlantique (França) a produzir fios ultra-finos para aplicações AC com 956340

filamentos e diâmetro de filamento 131 nm [12].

Os fios supercondutores de baixas perdas AC podem ser utilizados em geradores, transformadores, linhas de transmissão, magnetos pulsados, etc [13].

Dependendo da aplicação, o termo perdas AC pode ter diferentes significados: em termos de linhas de transmissão, o termo pode significar as perdas geradas por um campo de pequena amplitude, digamos 0.1 T, variando a uma frequência de 50 ou 60 Hz; para um magneto pulsado, o termo pode significar as perdas na bobina quando o campo é aumentado, por exemplo, de 0 a 5T, em uma fração de segundo.

Os dois principais métodos de medição de perdas AC em supercondutores são: calorimétrico e magnético. O mais direto, porém de mais difícil execução, é o calorimétrico [14], no qual uma bobina supercondutora é exposta à campos transientes e o calor dissipado é medido pela quantidade de hélio evaporado.

O método magnético [15] é o mais utilizado, e consiste em medir-se a variação da magnetização da amostra em função do campo variável. A área delimitada pelo laço de histerese da curva de magnetização versus campo DC para um ciclo completo de carregamento entre $+\mu_0 H$ e $-\mu_0 H$ ou de baixa frequência AC, é uma medida direta da perda de histerese. Além disso, o método permite medidas de densidade de corrente crítica à baixos campos [16] e também detecta a incidência de salto de fluxo (deslocamento catastrófico de vórtices) no espécime supercondutor [17].

Para prever as perdas AC em fios multifilamentares, modelos baseados no conceito de Estado Crítico de Bean [18] para as perdas histeréticas no supercondutor tipo II têm tido considerável sucesso para filamentos com diâmetro acima de $4\mu\text{m}$ [19], [20]. Merecem destaque as teorias de W. J. Carr Jr. [Apêndice I] e J. R. Clem [Apêndice II].

J. R. Clem, tratando somente das perdas histeréticas no supercondutor tipo II, analisa com mais profundidade a influência do mecanismo de aprisionamento de fluxo sobre as perdas AC.

W. J. Carr Jr., analisando o condutor supercondutor multifilamentar com características específicas para uso AC, trata das perdas histeréticas e das perdas por correntes parasitas do

condutor.

O Modelo de Bean de Estado Crítico pressupõe um perfil de campo linear no interior do espécime supercondutor oriundo da ação dos centros de aprisionamento do corpo do material sobre os vórtices, desprezando-se os efeitos de superfície. Para fios supercondutores com filamentos ultra-finos os efeitos de superfície tornam-se não negligenciáveis e o modelo de Bean de Estado Crítico não é mais válido [21].

O presente trabalho trata da montagem de um sistema de medidas de magnetização quase DC para obtenção de laços de histerese de fios supercondutores. São obtidos laços de histerese de fios supercondutores multifilamentares de NbTi. A área do laço de histerese que é uma medida direta da perda histerética é comparada com o resultado teórico obtido por Carr [22], baseado no conceito de Estado Crítico de Bean.

REFERÊNCIAS

[1]- MEISSNER, W. ; OCHSENFELD, R. Naturwiss. 21: 787, 1933. apud: TINKHAM, M. Introduction to Superconductivity, New York, Krieger Publishing Company, 1980. p.2.

[2]- ABRIKOSOV, A.A. On the magnetic properties of superconductors of the second group. Sov. Phys. JETPS: 1174-1182, 1957 (Transl. of Zh. Eksp. Teor. Fiz. 32:1442-1452, 1957). apud: COLLINGS, E. W. Applied Superconductivity, New York, Plenum Press, 1986. v.1, p.473.

[3]- KUNZLER, J.E.; BUEHLER, E.; HSU, F.S.L. ; WERNICK, J.H. Phys. Rev. Letters, 6:89, 1961. apud: SAINT JAMES, D.; THOMAS, E.J.; SARMA, G. Type II Superconductivity, Oxford, Pergamon Press, 1969. p.274.

[4]- DEW-HUGHES, D. The role of grain boundaries in determining J_c in high-field high-current superconductors. Philosophical Magazine B, 55(4):459-479, 1987.

[5]- MEINGAST, C.; LEE, P.J. ; LARBALESTIER, D. C. Quantitative description of a high J_c Nb-Ti superconductor during its final optimization strain: microstructure, T_c , H_{c2} and resistivity. J. Appl. Phys., 66(12):5962-5970, 1989.

[6]- WILKINSON, K.J.R. Proc. I.E.E., 110:2271, 1963. apud: SAINT JAMES, D.; THOMAS, E.J.; SARMA, G. Type II Superconductivity, Oxford, Pergamon Press, 1969. p.283.

[7]- HLÁŠNIK, I. Progress and problems in superconducting composites for ac applications. In: Internacional Symposium of Flux Pinning and Electromagnetic Properties in Superconductors, Fukuoka-Japan, 11-14 nov. 1985.

[8]- COLLINGS, E.W. Applied Superconductivity, New York, Plenum Press, 1986. v.2, p.211.

[9]- ROOVERS, A.J.M.; FORNERED, P.P.E.; HEIDA, W. ; VAN DE KLUNDERT, L.J.M. AC losses in ultra-fine filament NbTi superconductors. I.E.E.E. Transactions on Magnetics, 23(2):1736-1739, 1987.

[10]- COLLINGS, E.W. Applied Superconductivity, New York, Plenum Press, 1986, v.2, p.226.

[11]- CAVE, J.R. ; FÉVRIER, A. Calculation of ac losses in ultra-fine filamentary NbTi wires. I.E.E.E. Transactions on Magnetics, 23(2):1732-1735, 1987.

[12]- CAVE, J.R. Electromagnetics properties of ultra fine filamentary superconductors. Cryogenics, 29(3A):304-311, 1989.

[13]- IRIE, F. Properties of superconductors connected with their applications. In: International Symposium on Flux Pinning and Electromagnetic Properties in Superconductors, Fukuoka-Japan, 11-14 nov. 1985.

[14]- WILSON, M.N. Superconducting Magnets, New York, Oxford University Press, 1983. p.251.

[15]- National Bureau of Standards. Center for Electronics and Engineering. Transient Losses in Superconductors: final report. Ed. R.B. Goldfarb. Boulder, Colorado, 1986, NBSIR 86-3053.

[16]- ULLMAIER, H. Irreversible Properties of Type II Superconductors. Berlim, Springer-Verlag, 1975. p.122.

[17]- TAKAHATA, K.; NISHIJIMA, S. ; OKADA T. AC loss and instability in superconducting cables. In: Internacional Symposium on Flux Pinning and Electromagnetic Properties in Superconductors, Fukuoka-Japan, 11-14 nov. 1985.

[18]- BEAN, C.P. Magnetization of high-field superconductors, Rev. Mod. Phys., 36:31-39, 1964.

[19]- GOLDFARB, R.B. ; CLARK, A.F. Hysteretic losses in Nb-Ti superconductors. J. Appl. Phys., 57(1):3809-3811, 1985.

[20]- GOLDFARB, R.B. ; CLARK, A.F. Magnetic hysteresis and complex susceptibility as measures of ac losses in a multifilamentary NbTi superconductor. I.E.E.E. Transactions on Magnetics, 21(2):332-335, 1985.

[21]- TAKACS, S. ; CAMPBELL, A.M. Hysteresis losses in superconductors with very fine filaments. Supercond. Sci. Technol. 1:53-56, 1988.

[22]- CARR JR, W.J. AC Loss and Macroscopic Theory of Superconductors , New York, Gordon and Breach, 1983, p.70.

SUPERCONDUTORES TIPO II: PERDAS HISTERÉTICAS

1-1) SUPERCONDUTORES TIPO II NO ESTADO MISTO

Supercondutores tipo I e tipo II são experimentalmente distinguíveis pelas suas respostas a um campo magnético aplicado H_a .

Durante o aumento de um campo aplicado até um valor crítico H_c , um supercondutor tipo I permanece idealmente diamagnético. O campo aplicado é excluído do interior da amostra pelas supercorrentes que circulam dentro de uma fina camada de superfície, a qual tipicamente tem uma espessura de 500 Å. Isto é conhecido como efeito Meissner. Um maior aumento de campo acima de H_c resulta em transição imediata para o estado normal.

Em um supercondutor tipo II (categoria a qual pertence a maioria dos materiais supercondutores), o diamagnetismo perfeito ocorre até que o campo aplicado atinja o valor H_{c1} , o campo crítico inferior. A partir desse valor de campo estabelece-se o estado misto, quando fluxo magnético começa a penetrar no material sob a forma de vórtices ou fluxóides [1] paralelos ao campo aplicado.

Cada vórtice ou fluxóide é associado com um único quantum de fluxo [2] representado pelo símbolo ϕ_0 , de valor:

$$\phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2.07 \times 10^{-7} \text{ (G cm}^2\text{)}$$

O vórtice tem um núcleo normal de raio ξ , chamado comprimento de coerência, onde a densidade de elétrons supercondutores n_s vai a zero como mostrado na figura (1-1-c). As linhas de campo magnético não são confinadas ao núcleo normal, o campo é máximo no centro e se estende a uma distância λ do centro, figura (1-1-b). A distância λ é chamada de profundidade de penetração. Correntes circulares j envolvem as linhas de fluxo e blindam o campo para $r \geq \lambda$, figura (1-1-a).

A medida que o campo aplicado aumenta, os vórtices começam a interagir entre si formando um arranjo que tende a ser triangular,

ao qual se dá o nome de rede de vórtices ou rede de Abrikosov [1].

Os vórtices penetram no espécime supercondutor até que o campo aplicado atinja o valor H_{c2} , campo crítico superior, quando se dá a transição para o estado normal.

A corrente de vórtice produz uma magnetização M em qualquer ponto do material em analogia parcial com correntes moleculares que produzem a magnetização em materiais ordinários.

No estado misto, a densidade de fluxo B do supercondutor consiste do campo magnético aplicado H mais a magnetização M das correntes de corpo e de superfície no supercondutor.

$$B = \mu_0 (H + M)$$

A figura (1-2) ilustra esquematicamente o comportamento da magnetização M em função do campo aplicado para um supercondutor tipo II.

1-2) IRREVERSIBILIDADE MAGNÉTICA

Os defeitos presentes no espécime supercondutor, tais como contornos de grão, discordâncias, etc, impedem o livre movimento dos vórtices, aprisionando-os, fazendo com que a rede de vórtices se amolde à densidade de defeitos.

A medida que o campo externo aumenta, vórtices penetram no supercondutor sobrepujando as forças de aprisionamento. À medida que ele decresce, o fluxo magnético deixa o interior do supercondutor pelo mesmo mecanismo de corrente de fluxo, porém, uma parcela do fluxo permanece retido no espécime supercondutor pela ação dos centros de aprisionamento. Portanto, a curva de magnetização do supercondutor tipo II reflete a influência dos defeitos do material sobre os vórtices, apresentando histerese ou irreversibilidade.

1-3) MODELO DE ESTADO CRÍTICO DE BEAN

Supondo-se que o campo magnético seja aumentado até um determinado valor e aí mantido estacionário, temos que os vórtices

penetrarão no material até o ponto em que sejam impedidos em seu movimento pela presença dos centros de aprisionamento. Estabelece-se então um gradiente de fluxo que caracteriza o estado crítico supercondutor: qualquer mudança subsequente de campo, em qualquer direção, levará ao rompimento desse equilíbrio com conseqüente movimentação da rede de vórtices.

Quando uma corrente de transporte flue através de um espécime supercondutor no estado misto, temos que a força de Lorentz por unidade de volume F_L que atua sobre a rede de vórtices é dada por:

$$\vec{F}_L = \vec{J} \times \vec{B}$$

onde \vec{J} é a densidade de corrente e \vec{B} é a densidade de fluxo.

Estabelecido o estado crítico, dizemos que essa força é exatamente contrabalançada pela força de aprisionamento sobre a rede de vórtices exercida pelos defeitos do material. Dá-se o nome de densidade de corrente crítica ao valor da densidade de corrente que consegue romper esse equilíbrio, fazendo com que a rede de vórtices se movimente sob a ação da força de Lorentz. Portanto, a um gradiente de fluxo crítico corresponde uma densidade de corrente crítica J_c .

Os vários modelos de estado crítico existentes [3] são descrições macroscópicas das propriedades eletromagnéticas de supercondutores baseadas em informações ou suposições referentes ao mecanismo de irreversibilidade magnética e de como J_c varia em função do campo aplicado.

O precursor de todos os modelos de Estado Crítico é o Modelo de Bean [4], o qual surgiu no início dos anos 60 e que contém as características físicas macroscópicas essenciais contidas em todos os outros modelos que vieram depois dele. Por causa disso e de sua simplicidade, o Modelo de Bean é amplamente utilizado.

De acordo com Bean [5], no estado crítico os vórtices estão distribuídos através do espécime supercondutor de tal forma que, para um campo magnético aplicado \vec{H} , o perfil de campo no espécime é tal que:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c$$

onde $J_c = \text{constante}$

Na figura (1-3) temos o perfil de campo de um espécime supercondutor de geometria cilíndrica sujeito a um campo magnético axial H_a , segundo o modelo de Bean.

O Modelo de Bean não faz alusão ao mecanismo microscópico de aprisionamento de fluxo ou ao que determina J_c .

De fato, temos que a densidade de corrente crítica diminui com o acréscimo de campo aplicado e varia com a temperatura ou, rigorosamente falando: $J_c = f(T, B)$. Em [6] temos uma lista de funções $J_c(B)$ a partir do enfoque de vários autores ao mecanismo microscópico de aprisionamento de fluxo.

1-4) MOVIMENTO DE FLUXO

Considerando-se um espécime supercondutor no estado crítico, temos que por um processo termicamente ativado [7] ocorre um movimento de fluxo muito suave ao qual dá-se o nome de arraste de fluxo.

Caso o aprisionamento seja desprezível, o movimento de vórtices caracterizado como corrente de fluxo pode ser estabelecido. Enquanto arraste de fluxo tem sido tratado como o movimento de grupos de vórtices (desde uns poucos até 10^3 vórtices), os quais interagem entre si e com os centros de aprisionamento, a corrente de fluxo é concebida como o movimento livre de vórtices, não sujeitos à forças de aprisionamento. A rede de vórtices move-se através do espécime supercondutor dirigida por um gradiente de fluxo ou força de Lorentz.

Se o aprisionamento é forte, a aplicação de uma força de Lorentz ou gradiente de densidade de fluxo ainda mais fortes pode resultar no deslocamento catastrófico da rede de fluxo, o que é chamado de salto de fluxo.

Em materiais reais o que de fato ocorre é uma transição entre estados de arraste de fluxo e corrente de fluxo.

Na figura (1-4) temos de forma esquematizada a relação entre as três propriedades dinâmicas do estado misto: arraste de fluxo, corrente de fluxo e salto de fluxo.

O movimento de vórtices gera um campo elétrico no

supercondutor com conseqüente dissipação de energia. Quando esta dissipação de energia excede um certo limite a ponto de provocar um salto de fluxo (movimento catastrófico de vórtices) temos a transição para o estado normal.

A figura (1-5) mostra esquematicamente a característica campo elétrico versus corrente para um espécime supercondutor no estado misto cuja rede de vórtices é: (a)- fracamente aprisionada e (b)- fortemente aprisionada.

Na figura (1-5-a), para $J > J_c$ a transição para o estado normal dá-se de forma gradual, havendo uma corrente de fluxo através do espécime que provoca o aparecimento de uma resistividade de corrente de fluxo no espécime antes que se dê a transição para o estado normal. Na figura (1-5-b) a transição para o estado normal dá-se de forma abrupta, quando ocorre um movimento catastrófico de vórtices (salto de fluxo).

A resistividade de corrente de fluxo é comparável à resistividade residual do estado normal de supercondutores tipo II a qual é da ordem de $5 \times 10^{-5} \Omega \text{ cm}$ [8].

A resistividade de arraste de fluxo é dificilmente mensurável.

1-5) PERDA HISTERÉTICA

Estabelecido o estado crítico no espécime supercondutor, qualquer mudança subsequente do campo externo, em qualquer direção, levará a um desequilíbrio entre as forças de aprisionamento e de arraste que atuam sobre a rede de vórtices. O movimento de vórtices gera um campo elétrico no supercondutor, com conseqüente dissipação de energia.

Segue abaixo o cálculo da potência dissipada em um espécime supercondutor cilíndrico, quando sujeito a um campo magnético axial variável no tempo, como calculado por Carr [9].

Considere as equações de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1-1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (1-2)$$

Tomando-se o produto escalar da equação (1-1) com \vec{H} , temos:

$$(\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (1-3)$$

Tomando-se o produto escalar da equação (1-2) com \vec{E} , temos:

$$(\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (1-4)$$

Subtraindo-se da equação (1-4) a equação (1-3), temos:

$$\vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} \quad (1-5)$$

Mas $\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} \equiv - \text{div} (\vec{E} \times \vec{H})$, então:

$$\vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (1-6)$$

Fazendo-se a substituição $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ em (1-6), temos:

$$\vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}) = - \text{div} (\vec{E} \times \vec{H})$$

$$\vec{J} \cdot \vec{E} + \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = - \text{div} (\vec{E} \times \vec{H})$$

$$\text{Mas } \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t}$$

$$\vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial H^2}{\partial t} + \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = - \text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (1-7)$$

Integrado sobre todo o espaço, o lado direito da equação acima desaparece e então:

$$\int_{\text{esp}} \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV + \int_{\text{esp}} \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \, dV + \int_{\text{esp}} \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial H^2}{\partial t} \, dV = 0$$

Considerando-se o espécime supercondutor e o circuito externo a ele que produz a variação de campo, temos que os primeiros dois termos da equação acima não são nulos somente no volume V do supercondutor e no circuito externo à V . Se o circuito externo é constituído de materiais simples que obedecem a lei de Ohm e não havendo magnetização, segue que:

$$\int_{V_{\text{ext}}} \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV + \int_V (\vec{J} \cdot \vec{E} + \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}) \, dV + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{esp}} H^2 \, dV = 0$$

$V \equiv$ volume do supercondutor

$V_{\text{ext}} \equiv$ volume do circuito externo à V

$$- \int_{V_{\text{ext}}} \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV = \int_V (\vec{J} \cdot \vec{E} + \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}) \, dV + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{esp}} H^2 \, dV$$

O lado esquerdo da expressão acima representa a potência fornecida ao sistema (supercondutor) pelo circuito externo, portanto:

$$P = \int_V (\vec{J} \cdot \vec{E} + \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}) \, dV + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{esp}} H^2 \, dV$$

Para um processo cíclico a potência por ciclo é:

$$\oint P \, dt = \oint dt \left[\int_V (\vec{J} \cdot \vec{E} + \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}) \, dV \right] \quad (1-8)$$

o que representa a potência dissipada no supercondutor.

Podemos escrever a potência por ciclo dissipada no supercondutor em termos do vetor de Poynting [10], integrando-se ambos os lados de (1-7) sobre o volume do supercondutor, como segue:

$$\int_V \left(\vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial H^2}{\partial t} + \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right) dV = - \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

onde S é a superfície envolvendo V.

Para um ciclo completo, temos:

$$\oint dt \int_V \left(\vec{J} \cdot \vec{E} + \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right) dV = - \oint dt \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \quad (1-9)$$

De (1-8) e (1-9) temos que:

$$\oint P dt = - \oint dt \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \quad (1-10)$$

$\vec{E} \times \vec{H} \equiv$ vetor de Poynting [4]

Considere um espécime supercondutor cilíndrico submetido a um campo aplicado longitudinal da forma:

$$\vec{H}_a = H_a(t) \hat{a}_z \quad (1-11)$$

onde a amplitude de pico de $H_a(t)$ é H_0 .

Na figura (1-6) temos representado as secções transversal e longitudinal do supercondutor, supondo-se o perfil de campo obedecendo ao Modelo de Bean do Estado Crítico.

Na figura (1-6), R_0 é o raio do condutor e para $0 < R < R_2$ não existe penetração do campo. R_1 representa uma fronteira móvel.

Para um campo aplicado dado por (1-11), o campo elétrico e densidade de corrente induzidos estão na direcção θ .

As equações de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Reduzem-se à:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_{\theta}) = -\mu_0 \dot{H}_z \quad (1-12)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = J_{\theta} \quad (1-13)$$

onde H_z e E_{θ} são funções de r e t .

Para calcular a potência dissipada no supercondutor pela equação (1-10) precisamos encontrar os valores de \vec{E} e \vec{H} na superfície do espécime supercondutor.

Integrando-se a equação (1-13) de r até R_0 , temos:

$$\int_r^{R_0} -\frac{\partial H_z}{\partial r} dr = \int_r^{R_0} J_{\theta} dr$$

$$-H_z(R_0) + H_z(r) = J_{\theta}(R_0 - r)$$

Da fig.(1-6) temos que para $R_1 < r < R_0$, $J_{\theta} = -J_c$.

Da condição de contorno $H_z(R_0) = H_a$ na equação acima e

substituindo-se J_{θ} por $-J_c$, temos:

$$-H_a + H_z(r) = -J_c(R_0 - r)$$

$$H_z(r) = H_a - J_c(R_0 - r) \quad (1-14)$$

Para o outro semi-ciclo, $-J_c$ é substituído por $+J_c$ e em ambos os casos: $\dot{H}_z = \dot{H}_a$.

Integrando-se a equação (1-12) de r até R_1 , temos:

$$\int_{R_1}^r \frac{\partial}{\partial r} (rE_{\theta}) dr = - \int_{R_1}^r \mu_0 r \dot{H}_z dr$$

Já que $\dot{H}_z = \dot{H}_a$, temos:

$$\int_{R_1}^r \frac{\partial}{\partial r} (rE_\theta) dr = \int_{R_1}^r -\mu_0 \dot{H}_\alpha r dr$$

$$rE_\theta \Big|_{R_1}^r = -\mu_0 \dot{H}_\alpha \frac{r^2}{2} \Big|_{R_1}^r$$

$$rE_\theta(r) - R_1 E_\theta(R_1) = -\frac{1}{2} \mu_0 \dot{H}_\alpha (r^2 - R_1^2)$$

Da condição de contorno $E_\theta(R_1) = 0$ na equação acima, temos:

$$rE_\theta(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 \dot{H}_\alpha (r^2 - R_1^2)$$

$$E_\theta(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 \dot{H}_\alpha \frac{1}{r} (r^2 - R_1^2) \quad (1-15)$$

Na superfície do fio, das equações (1-14) e (1-15), temos:

$$-\frac{1}{V} \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = -\frac{S}{V} H_\alpha E_\theta(R_0) \quad (1-16)$$

Para um fio de secção transversal πR_0^2 e comprimento L, temos:

$$\frac{S}{V} = \frac{2}{R_0}$$

Substituindo-se o resultado acima na equação (1-16), temos:

$$-\frac{1}{V} \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = -\frac{2}{R_0} H_\alpha E_\theta(R_0) \quad (1-17)$$

Da equação (1-15) em (1-17), temos:

$$-\frac{1}{V} \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 H_\alpha \dot{H}_\alpha R_0^{-2} (R_0^2 - R_1^2) \quad (1-18)$$

De (1-10) e (1-18), temos:

$$\oint \frac{P}{V} dt = \oint \mu_0 H_\alpha \dot{H}_\alpha R_0^{-2} (R_0^2 - R_1^2) dt \quad (1-19)$$

CÁLCULO DE $(R_0^2 - R_1^2)$

Integrando-se a equação (1-13) de r até R_1 , e substituindo-se J_θ por J_c , temos:

$$\int_r^{R_1} - \frac{\partial H_z}{\partial r} dr = \int_r^{R_1} J_c dr$$

$$- H_z(R_1) + H_z(r) = J_c(R_1 - r) \quad (1-20)$$

Da equação (1-14) para $r = R_1$, temos:

$$H_z(R_1) = H_\alpha - J_c(R_0 - R_1) \quad (1-21)$$

De (1-21) em (1-20), temos:

$$- H_\alpha + J_c(R_0 - R_1) + H_z(r) = J_c(R_1 - r)$$

$$H_z(r) = H_\alpha + J_c(2R_1 - r - R_0) \quad (1-22)$$

A equação (1-22) é válida para $R_2 < r < R_1$, pois ela é deduzida a partir da integração da equação (1-13) de r até R_1 .

Dentro da fronteira que se move (a medida que H_α oscila), ou seja, para $r < R_1$, temos que o campo magnético é constante no

tempo. Então, derivando-se a equação (1-22) com respeito ao tempo, temos:

$$0 = \dot{H}_\alpha + J_c(2\dot{R}_1)$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} = - \frac{1}{2J_c} \frac{\partial H_\alpha}{\partial t}$$

$$\int \frac{\partial R_1}{\partial t} dt = \int - \frac{1}{2J_c} \frac{\partial H_\alpha}{\partial t} dt$$

$$\int dR_1 = \int -\frac{1}{2J_c} dH_a$$

$$R_1 \Big|_{R_1}^{R_0} = -\frac{1}{2J_c} H_a \Big|_{H_a}^{-H_0}$$

$$R_1 - R_0 = -\frac{1}{2J_c} (H_a + H_0) \quad (1-23)$$

Então:

$$R_1 + R_0 = 2R_0 - \frac{1}{2J_c} (H_a + H_0) \quad (1-24)$$

Para o outro semi-ciclo, temos:

$$R_1 - R_0 = +\frac{1}{2J_c} (H_a - H_0) \quad (1-25)$$

Então:

$$R_1 + R_0 = 2R_0 + \frac{1}{2J_c} (H_a - H_0) \quad (1-26)$$

DE VOLTA À EQUAÇÃO (1-19)

Reescrevendo-se a equação (1-19), temos:

$$\oint \frac{P}{V} dt = \int_0^{T/2} \mu_0 H_a \dot{H}_a R_0^{-2} (R_0^2 - R_1^2) dt + \int_{T/2}^T \mu_0 H_a \dot{H}_a R_0^{-2} (R_0^2 - R_1^2) dt \quad (1-27)$$

Seja:

$$I_1 \equiv \int_0^{T/2} \mu_0 H_a \dot{H}_a R_0^{-2} (R_0^2 - R_1^2) dt \quad (1-28)$$

$$I_2 \equiv \int_{T/2}^T \mu_0 H_a \dot{H}_a R_0^{-2} (R_0^2 - R_1^2) dt \quad (1-29)$$

De (1-23) e (1-24) em (1-28), temos:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{T/2} \mu_0 R_0^{-2} H_a \dot{H}_a \left[-\frac{1}{2J_c} (H_a + H_0) \right] \left[2R_0 - \frac{1}{2J_c} (H_a + H_0) \right] dt \\
 I_1 &= -\frac{\mu_0}{R_0 J_c} \int_0^{T/2} H_a^2 \dot{H}_a dt - \frac{\mu_0 H_0}{R_0 J_c} \int_0^{T/2} H_a \dot{H}_a dt + \frac{\mu_0}{4R_0^2 J_c^2} \int_0^{T/2} H_a^3 \dot{H}_a dt + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 H_0}{R_0^2 J_c^2} \int_0^{T/2} H_a^2 \dot{H}_a dt + \frac{\mu_0 H_0^2}{4R_0^2 J_c^2} \int_0^{T/2} H_a \dot{H}_a dt \quad (1-30)
 \end{aligned}$$

Temos que:

$$\int_0^{T/2} H_a \dot{H}_a dt = \int_{H_0}^{-H_0} H_a dH_a = 0$$

$$\int_0^{T/2} H_a^3 \dot{H}_a dt = \int_{H_0}^{-H_0} H_a^3 dH_a = 0$$

$$\int_0^{T/2} H_a^2 \dot{H}_a dt = \int_{H_0}^{-H_0} H_a^2 dH_a = -\frac{2}{3} H_0^3$$

Substituindo-se os resultados acima em (1-30), temos:

$$I_1 = \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{R_0 J_c} H_0^3 - \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{R_0^2 J_c^2} H_0^4 \quad (1-31)$$

De (1-25) e (1-26) em (1-29), temos:

$$I_2 = \int_{T/2}^T R_0^{-2} \mu_0 H_a \dot{H}_a \left[\frac{1}{2J_c} (H_a - H_0) \right] \left[2R_0 + \frac{1}{2J_c} (H_a - H_0) \right] dt$$

$$I_2 = \frac{\mu_0}{R_0 J_c} \int_{T/2}^T H_a^2 \dot{H}_a dt - \frac{\mu_0 H_0}{R_0 J_c} \int_{T/2}^T H_a \dot{H}_a dt +$$

$$+ \frac{\mu_0}{4R_0^2 J_c^2} \int_{T/2}^T H_a \dot{H}_a (H_a^2 - 2H_a H_0 + H_0^2) dt$$

Resolvendo-se I_2 analogamente à I_1 temos:

$$I_2 = \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{R_0 J_c} H_0^3 - \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{R_0^2 J_c^2} H_0^4 \quad (1-32)$$

De (1-32), (1-31), (1-29) e (1-28) em (1-27), temos:

$$\oint \frac{P}{V} dt = \frac{4}{3} \frac{\mu_0}{R_0 J_c} H_0^3 - \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{R_0^2 J_c^2} H_0^4 \quad (1-33)$$

A equação (1-33) é válida para $H_0 < J_c R_0$.

Da equação (1-13) temos que $H_0 = J_c R_0$ é a amplitude de campo necessária para empurrar os vórtices até o centro do espécime, o que corresponde na fig.(1-6) a termos $R_2 = 0$.

Para $H_0 = J_c R_0$, de (1-33) temos que:

$$\oint \frac{P}{V} dt = \frac{2}{3} \mu_0 J_c^2 R_0^2 \quad (1-34)$$

PERDA HISTERÉTICA PARA $H_0 = H_M > J_c R_0$

Neste caso, temos que $\oint \frac{P}{V} dt$, a energia perdida por unidade de volume do supercondutor, por ciclo, é dada por:

$$\oint \frac{P}{V} dt = Q_1 + Q_2 \quad (1-35)$$

$Q_1 \equiv$ perda relativa à penetração de campo até o centro do espécime.

$Q_2 \equiv$ perda relativa ao "excesso" de campo, ou seja, quando o campo

aplicado H varia de $H = J_c R_o$ até $H = H_m$.

CÁLCULO DE Q_1

Para $H_o = J_c R_o$ de (1-34) temos que:

$$Q_1 = \frac{2}{3} \mu_o J_c^2 R_o^2 \quad (1-36)$$

CÁLCULO DE Q_2

Temos que a potência perdida por unidade de volume do fio, em coordenadas cilíndricas, é dada por:

$$\frac{P}{V} = \frac{1}{\pi R_o^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R_o} \vec{E} \cdot \vec{J} r dr \quad (1-37)$$

Da equação (1-15), mas agora com $R_1 = 0$, temos:

$$|E_\theta| = \frac{1}{2} \mu_o \dot{H}_a r \quad (1-38)$$

Para $J = J_c$, de (1-37) e (1-38), temos:

$$\frac{P}{V} = \frac{2\pi J_c}{\pi R_o^2} \int_0^{R_o} \frac{1}{2} \mu_o \dot{H}_a r^2 dr$$

$$\frac{P}{V} = \frac{1}{3} \mu_o \dot{H}_a R_o J_c$$

$$\int_{t_{H=J_c R_o}}^{t_{H=H_o}} \frac{P}{V} dt = \frac{1}{3} \mu_o R_o J_c \int_{J_c R_o}^{H_o} dH_a$$

$$\int_{t_{H=J_c R_o}}^{t_{H=H_o}} \frac{P}{V} dt = \frac{1}{3} \mu_o R_o J_c H_o - \frac{1}{3} \mu_o R_o^2 J_c^2 \quad (1-39)$$

Considerando-se o período completo, temos:

$$Q_2 = 4 \int_{H=J_c R_o}^{H=H_o} \frac{P}{V} dt \quad (1-40)$$

De (1-39) e (1-40), temos:

$$Q_2 = \frac{4}{3} \mu_o R_o J_c H_o - \frac{4}{3} \mu_o R_o^2 J_c^2 \quad (1-41)$$

De (1-36) e (1-41) em (1-35) temos que a energia perdida por unidade de volume do supercondutor, por ciclo, quando $H_o > J_c R_o$, é dada por:

$$\oint \frac{P}{V} dt = \frac{4}{3} \mu_o R_o J_c H_o - \frac{2}{3} \mu_o R_o^2 J_c^2$$

Seja $H_p \equiv R_o J_c$. Então:

$$\oint \frac{P}{V} dt = \frac{4}{3} \mu_o H_o H_p \left[1 - \frac{1}{2} \frac{H_p}{H_o} \right] \quad (1-42)$$

De acordo com (1-42) diminuindo-se o diâmetro do supercondutor (diminuindo-se H_p) temos diminuição da perda histerética.

Para o supercondutor tipo II, dado o comportamento histerético da curva de magnetização versus campo aplicado, temos que a energia perdida por unidade de volume, por ciclo, pode ser obtida a partir da área do laço de histerese, a saber:

$$\oint \frac{P}{V} dt = \mu_o \oint M dH \quad (1-43)$$

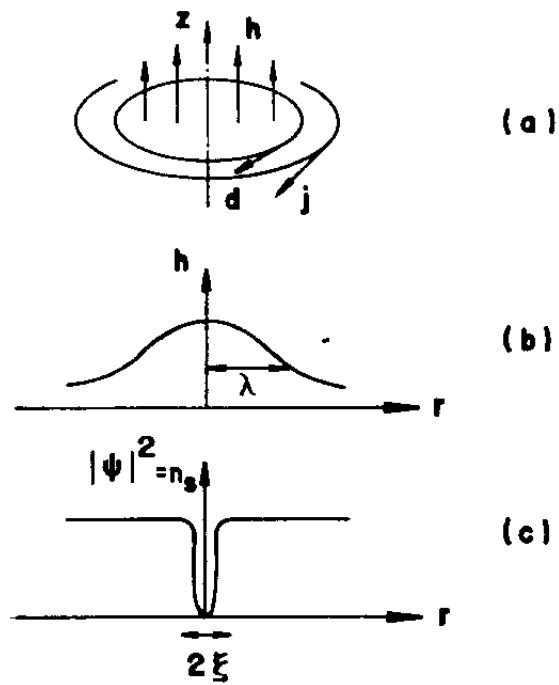


FIG. (1.1) - ESTRUTURA DE UMA LINHA DE VÓRTICE EM SUPERCONDUTOR TIPO II .

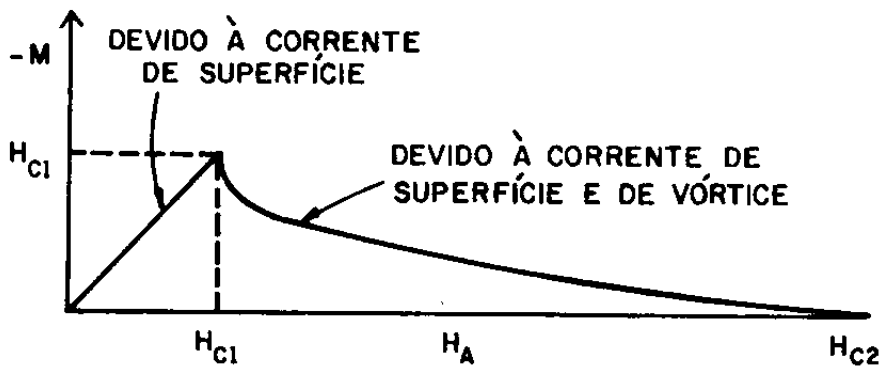


FIG.(1-2) - MAGNETIZAÇÃO VERSUS CAMPO APLICADO H, PARA SUPERCONDUTOR TIPO II .

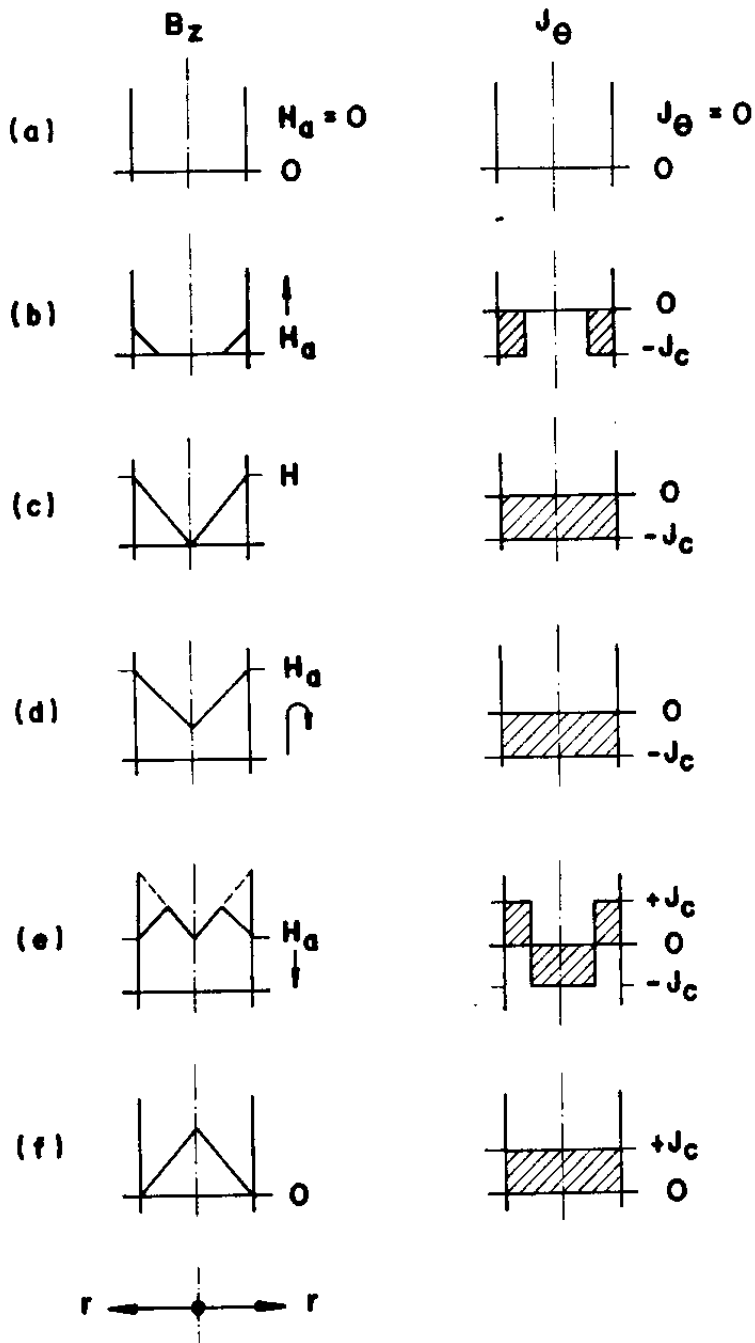


FIG.(1-3) - PERFIL DE CAMPO DE UM CILINDRO INFINITO, SEGUNDO MODELO DE BEAN.

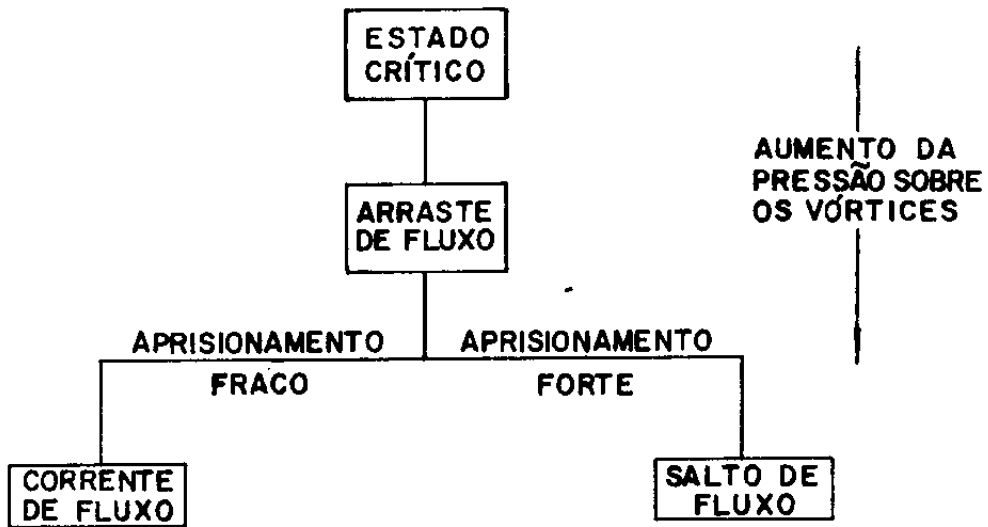


FIG. (1-4): RELAÇÃO ENTRE AS TRÊS PROPRIEDADES DINÂMICAS DO ESTADO MISTO: ARRASTE DE FLUXO, CORRENTE DE FLUXO E SALTO DE FLUXO.

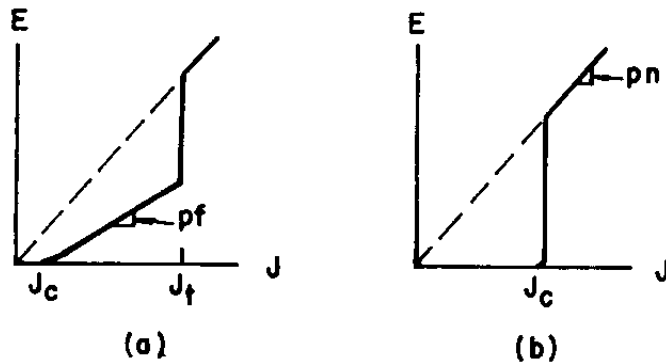
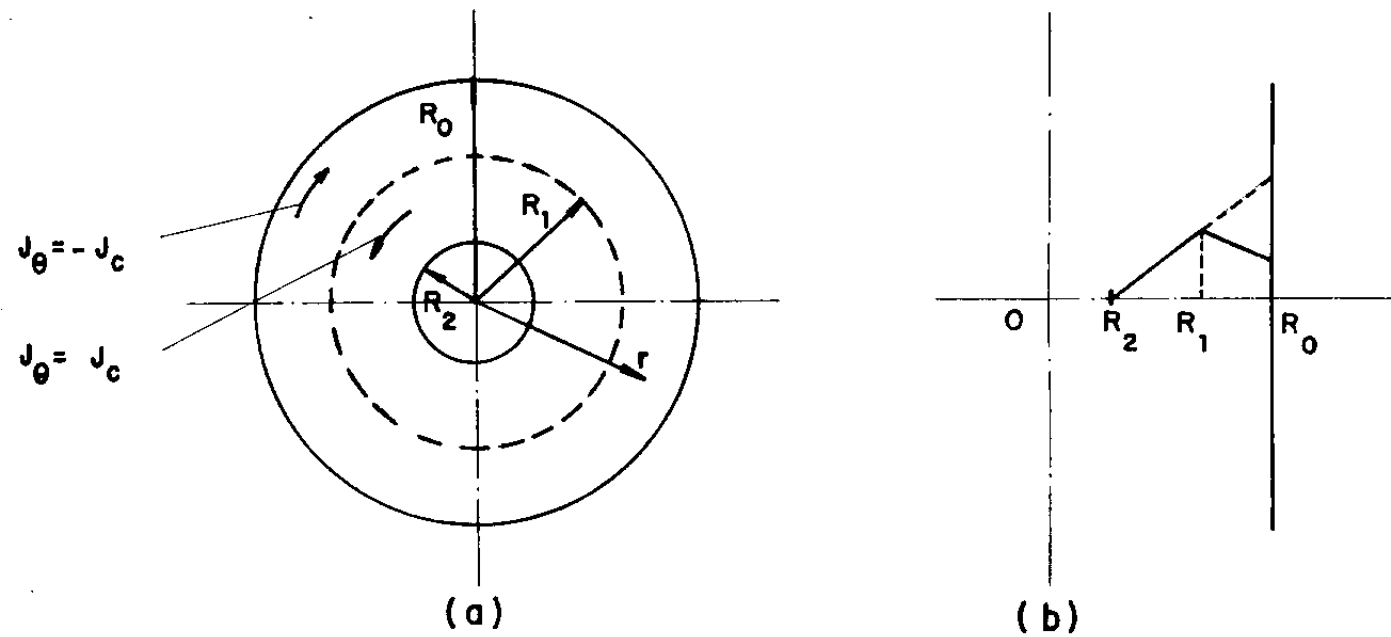


FIG. (1-5): CARACTERÍSTICA CAMPO ELÉTRICO VERSUS DENSIDADE DE CORRENTE PARA SUPERCONDUTOR TIPO II.

- a) REDE DE VÓRTICES FRACAMENTE APRISIONADA.
- b) REDE DE VÓRTICES FORTEMENTE APRISIONADA.



**FIG. (1-6): a) SECCÃO TRANSVERSAL DO FIO SUPERCONDUTOR.
 b) SECCÃO LONGITUDINAL DO FIO SUPERCONDUTOR.**

REFERÊNCIAS

[1]- ABRIKOSOV, A.A. On the magnetic properties of superconductors of the second group. Sov. Phys. JETP 5: 1174-1182, 1957 (Transl. of Zh. Eksp. Teor. Fiz. 32:1442-1452, 1957). apud: COLLINGS, E.W. Applied Superconductivity, New York, Plenum Press, 1986. v.1, p.473.

[2]- COLLINGS, E.W. Applied Superconductivity, New York, Plenum Press, 1986. v.1, p.504.

[3]- INHABER, H. Models of magnetic hysteresis in type II superconductors. Cryogenics, 13:261-271, 1973. apud: COLLINGS, E.W. Applied Superconductivity, New York, Plenum Press, 1986. v.1, p. 570.

[4]- BEAN, C. P. Magnetization of hard superconductors. Phys. Rev. Lett. 8:250-253, 1962.

[5]- COLLINGS, E. W. Applied Superconductivity, New York, Plenum Press, 1986. v.1, p.571.

[6]- COLLINGS, E.W. Applied Superconductivity, New York, Plenum Press, 1986. v.1, p.576.

[7]- ANDERSON, P. W. Theory of flux creep in hard superconductors. Phys. Rev. Lett. 9:309-311, 1962. apud: COLLINGS, E. W. Applied Superconductivity, New York, Plenum Press, 1986. v.1, p.626.

[8]- COLLINGS, E. W. Applied Superconductivity, New York, Plenum Press, 1986. v.1, p.629.

[9]- CARR JR, W.J. AC Loss and Macroscopic Theory of Superconductors. New York, Gordon and Breach, 1983. p.70.

[10]- JACKSON, J.D. Classical Electrodynamics. New York, Wiley, 1962. p.197.

CAPÍTULO 2

ARRANJO EXPERIMENTAL

O sistema de medidas de magnetização consiste de um magneto supercondutor de NbTi atuando como bobina primária de excitação de campo e um par de bobinas de cobre (bobina de captura e bobina de compensação) atuando como bobina secundária. O esquema do sistema de medidas está na fig.2-1.

O magneto supercondutor de NbTi [1], o qual pode gerar um campo de até 5T tem um diâmetro útil de 68.6 mm e homogeneidade melhor do que 0.5% numa região de 30mm de diâmetro.

O magneto supercondutor é alimentado por uma fonte de corrente unipolar de 500A, Tectrol, com programação interna. Fazendo-se a inversão de corrente através de uma chave faca é possível fazer com que o campo varie através de um ciclo completo.

A corrente que alimenta o magneto e, conseqüentemente, o campo produzido por ele, pode ser monitorado através da leitura da tensão no "shunt" colocado no cabo de corrente entre a fonte e o magneto. A especificação do "shunt" é de 300A/200mV.

No centro da região de homogeneidade do magneto, em um suporte construído em celeron, fig.2-2, foram colocadas lado a lado duas bobinas de cobre aproximadamente idênticas, de comprimento 13.9mm, diâmetro útil de 5mm, com cerca de 33000 espiras e separadas por uma distância de 10 mm. A distância centro a centro das duas bobinas é de 23 mm, portanto dentro da região de homogeneidade melhor que 0.5%. Estas bobinas foram retiradas de dois relés tipo RU 101-110, marca Schrack.

O magneto supercondutor e as bobinas de cobre, imersos em hélio líquido, operam em um criostato NW-250 ISO, cuja câmara de hélio tem 260 mm de diâmetro.

As bobinas de cobre são ligadas em oposição de modo que o sinal proveniente das duas bobinas em conjunto seja nulo, quando submetidas a um mesmo campo variável. Como as bobinas não são idênticas, as duas bobinas são ligadas a um potenciômetro (Helipot), de 10 k Ω , fig.2-1, de modo a ser feita a compensação resistiva das duas bobinas. Não foi feita a compensação indutiva das bobinas de cobre pelo fato de que o campo gerado pelo magneto

supercondutor varia de uma maneira quase DC.

A leitura do sinal proveniente das bobinas é feita por um nanovoltímetro Keithley 181, enquanto a leitura do sinal do "shunt" é feita por um multímetro Keithley 196.

O multímetro e o nanovoltímetro são acoplados a um microcomputador padrão AT-386 via interface GPIB. Por meio de um "software" de aquisição de dados [1], os dados são armazenados para posterior processamento.

Antes de serem feitas as medidas propriamente ditas é feita a compensação das bobinas para anular a contribuição do campo externo à tensão induzida na bobina de captura. Fazendo-se variar o campo, acerta-se a posição do potenciômetro de modo a obter-se sinal nulo proveniente das bobinas quando em ausência de amostra.

Após compensação das bobinas, coloca-se a amostra em uma delas escolhida para ser a bobina de captura (a de maior número de espiras) e dá-se início ao processo de medida.

O campo magnético aplicado longitudinalmente à amostra é varrido sobre um ciclo completo e é feita a aquisição de dados do multímetro e nanovoltímetro no microcomputador.

A tensão V induzida na bobina de captura é dada por:

$$V = - N \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{S.I}) \quad (2-1)$$

$N \equiv$ número de espiras

$\phi \equiv$ fluxo magnético através da área da bobina

Temos que:

$$B = \frac{\phi}{A} \quad (2-2)$$

$A \equiv$ área da bobina

De (2-1) e (2-2), temos que:

$$V = - NA \frac{dB}{dt} \quad (2-3)$$

Temos que $B = \mu_0 (H + M)$. Anulando-se a contribuição do campo externo, via compensação das bobinas, temos:

$$B = \mu_0 M \quad (2-4)$$

De (2-4) em (2-3), temos:

$$V = - NA\mu_0 \frac{dM}{dt} \quad (2-5)$$

Ou seja, a tensão induzida na bobina de captura é proporcional à susceptibilidade magnética da amostra. Integrando-se este sinal obtemos a magnetização da amostra, a menos de uma constante.

Integrando-se a equação (2-5) com relação à B, temos:

$$\int V dB = - NA\mu_0 \int \frac{dM}{dt} dB$$

Sendo a relação campo/corrente para o centro do magneto de 315.51×10^{-4} T/A [1], temos:

$$B = 315.51 \times 10^{-4} I \quad (\text{S.I}) \quad (2-7)$$

onde I \equiv corrente

Seja $v_c \equiv$ velocidade de carregamento do magneto em A/s (2-8)

De (2-7) e (2-8), temos:

$$dB = 315.51 \times 10^{-4} v_c dt \quad (2-9)$$

$$\text{Seja } C \equiv 315.51 \times 10^{-4} v_c \quad (2-10)$$

De (2-9) e (2-10), temos:

$$dB = C dt \quad (2-11)$$

De (2-11) em (2-6), temos:

$$C \int V dt = - CNA\mu_0 \int \frac{dM}{dt} dt$$

$$C \int V dt = - CNA\mu_0 M \quad (2-12)$$

A integração da equação (2-5) é feita numericamente utilizando-se da regra dos trapézios [2].

A calibração do sistema é feita a partir da obtenção da curva de magnetização versus campo para o níquel, cujo valor de magnetização de saturação é encontrada na literatura [3].

Foram obtidas curvas de magnetização dos seguintes fios supercondutores:

- a) diâmetro do fio: 1.118mm
número de filamentos: 102
Cu/NbTi: 6.6
diâmetro do filamento: 40 μ m
fabricante: Alsthom Atlantique (França)

- b) diâmetro do fio: 1.12mm
número de filamentos: 66
Cu/NbTi: 1.6
diâmetro do filamento: 90 μ m
fabricante: Alsthom Atlantique (França)

- c) diâmetro do fio: 0.12mm
número de filamentos: 14496
Cu/CuNi/NbTi: 0.83/1.16/1
passo de torção: 0.8mm
diâmetro do filamento: 0.6 μ m
fabricante: Alsthom Atlantique (França)

- d) monofilamento de Nb46.3%Ti, decapado, obtido por trefilação
diâmetro do monofilamento: 2.7mm
fabricante: FTI (CEMAR)

As amostras constituem-se em feixes formados por vários segmentos de fios supercondutores multifilamentares, de comprimento maior que o da bobina de captura. No caso do níquel e do monofilamento de NbTi a

amostra constituiu-se em uma amostra cilíndrica.

Procurou-se preencher a área da bobina ao máximo possível, de acordo com a quantidade de fio disponível, de modo a obter-se maior sensibilidade da bobina de captura, como segue (sendo $df \cong$ diâmetro do filamento supercondutor):

a) fio supercondutor multifilamentar, $df = 40\mu\text{m}$.

número de segmentos: 11

volume de material supercondutor: 19.60mm^3 .

b) fio supercondutor multifilamentar, $df = 90\mu\text{m}$.

número de segmentos: 10

volume de material supercondutor: 58.36mm^3 .

c) fio supercondutor multifilamentar, $df = 0.6\mu\text{m}$.

número de segmentos: 176

volume de material supercondutor: 10.03mm^3 .

d) monofilamento de Nb46.3%Ti, diâmetro 2.7mm

número de segmentos: 1

volume de material supercondutor: 79.59mm^3

Para a calibração do sistema utilizou-se de uma amostra de níquel: diâmetro 2.8mm e volume 85.59mm^3 .

No cálculo dos volumes acima tomou-se como comprimento dos segmentos o comprimento da bobina de captura, 13.9mm.

Para cada amostra supercondutora e para o níquel foram obtidos laços de histerese com duas velocidades nominais de carregamento do magneto, de acordo com programação interna da fonte: 0.83 A/s e 1.67 A/s, o que dá valores de $\frac{dB}{dt}$ de 0.03 T/s e 0.05 T/s, respectivamente.

Primeiramente foi obtida a curva de susceptibilidade magnética para a amostra virgem à velocidade de 0.83 A/s e em seguida à velocidade de 1.67 A/s, com exceção do monofilamento para o qual foi obtida a curva de susceptibilidade versus campo a uma velocidade nominal da fonte de 0.33 A/s, o que corresponde a um $\frac{dB}{dt}$ de 0.01 T/s, antes que as curvas à 0.03 T/s e 0.05 T/s fossem tomadas.

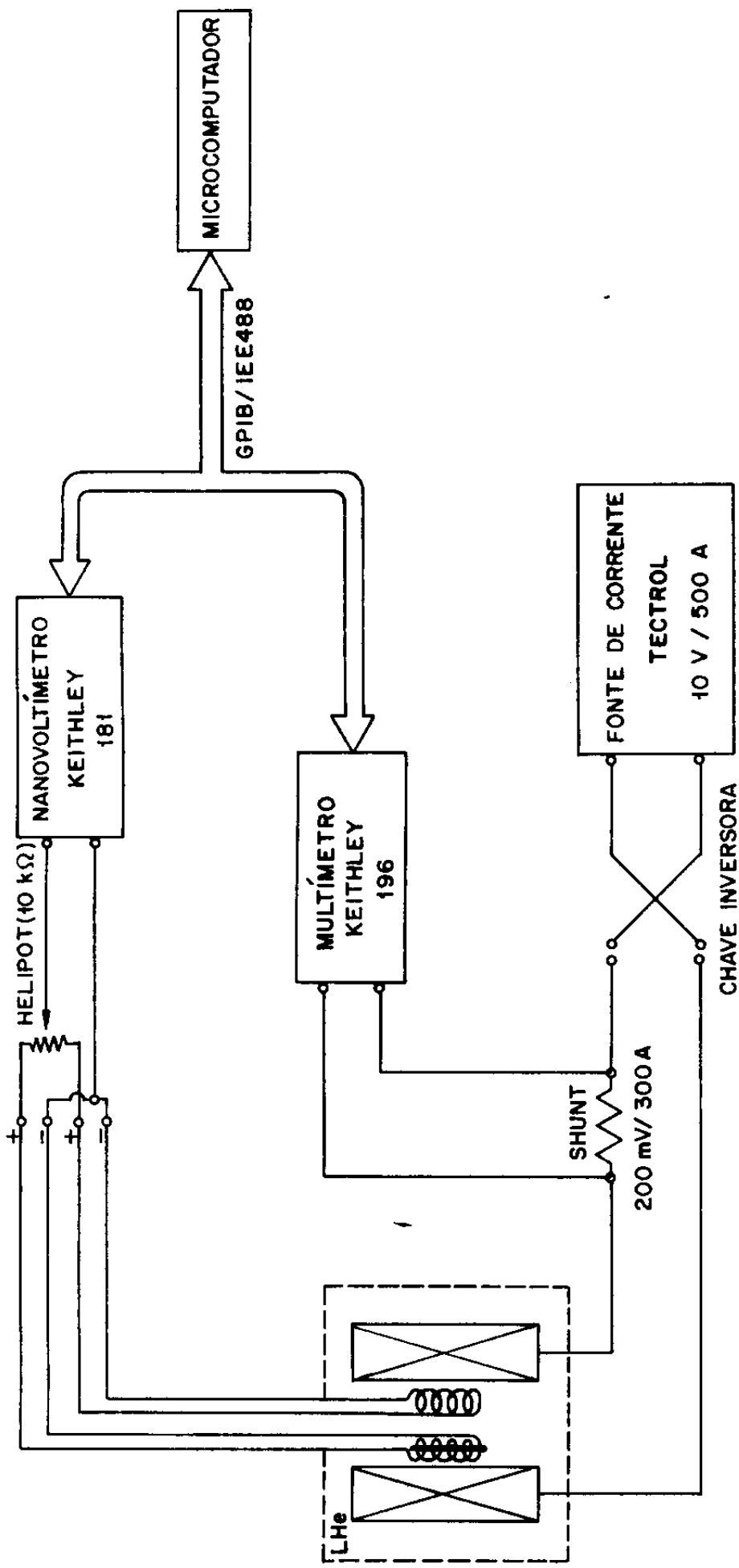


FIG.(2-1) - DIAGRAMA DE BLOCOS DO APARATO EXPERIMENTAL.

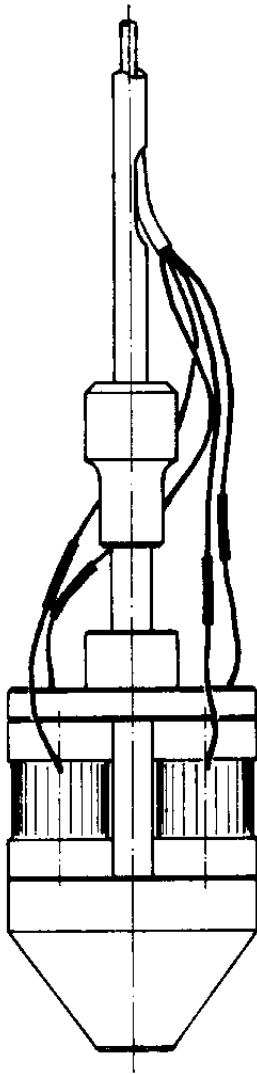


FIG. (2.2) - SUPORTE DE AMOSTRA .

REFERÊNCIAS

- [1]- SHIGUE, C. Y.; RAMOS, M. J. Sistema Automatizado para Medidas de Magnetização em Baixas Temperaturas. Nota Técnica EMTM 91/02, FTI- CEMAR, Lorena, 1991.
- [2]- GERALD, C. F. Applied Numerical Analysis. San Luis Obispo, Addison-Wesley Publishing Company, 1970, p. 60.
- [3]- KITTEL, C. Introduction to Solid State Physics. New York, John Wiley & Sons, 1971, p.536

RESULTADOS

3-1)- Carregamento do magneto

O campo máximo atingido pelo magneto supercondutor foi de aproximadamente 2 T, ao qual corresponde uma corrente de alimentação do magneto de 60 A que é o máximo valor de corrente que a chave faca pode suportar.

O magneto supercondutor foi energizado de modo a gerar um campo de 0 a 2 T, a seguir foi descarregado até 0 T. Após uma inversão de corrente repetiu-se o procedimento acima e, após nova inversão, elevou-se o campo até 2 T e a seguir o magneto foi descarregado até 0 T.

Embora tenha sido dito que o magneto foi descarregado até 0 T isto é apenas uma aproximação, pelo fato de que a fonte de corrente que o alimenta não zera completamente.

O acionamento da chave faca foi manual e procurou-se fazê-lo no menor tempo possível. Ainda assim, a todo chaveamento corresponde um arco voltaico e o nanovoltímetro que lê o sinal da susceptibilidade registra um valor muito alto quando isso ocorre.

A fonte utilizada não é estável e pode introduzir ruídos nas medidas. No gráfico 1 temos a curva de carregamento e descarregamento da fonte sobre um ciclo completo, utilizando a chave inversora para mudar a polaridade da fonte. A velocidade nominal da fonte é de 500 A/10 min, o que corresponde à 0.83 A/s.

3-2) Simulação dos efeitos de chaveamento e ruído sobre o sistema

Para prever os efeitos do chaveamento e de ruídos sobre as medidas foi feita uma simulação partindo-se de uma curva de histerese para o NbTi encontrada na literatura, em unidades arbitrárias.

Esta curva de histerese foi diferenciada e aos pontos de susceptibilidade foram adicionados ou subtraídos valores

constantes simulando ruídos e então estes pontos foram integrados dando uma nova curva.

O efeito do chaveamento foi simulado introduzindo-se, imediatamente à mudança de sinal do campo, um valor de ordem de grandeza maior que o maior valor da susceptibilidade.

No gráfico 2 temos a curva de histerese para o NbTi a partir da qual foi feita a simulação e, nos gráficos 3, 4, 5, 6 e 7 temos os resultados da simulação. O máximo valor da susceptibilidade original é 40, em unidades arbitrárias (u.a.).

Seguem abaixo as modificações que geraram cada gráfico:

-gráfico 3: susceptibilidade + 2 (u.a.)

-gráfico 4:

carregamento do campo: susceptibilidade + 1 (u.a.)

descarregamento do campo: susceptibilidade - 1 (u.a.)

-gráfico 5:

ponto seguinte ao primeiro chaveamento: suscep. = 100 (u.a.)

ponto seguinte ao segundo chaveamento: suscep. = - 100 (u.a.)

-gráfico 6: suscep. + 10 (u.a.) para todos os pontos, com exceção do último descarregamento: suscep. + 8 (u.a.).

-gráfico 7:

carregamento de campo: suscep. + 10 (u.a.)

descarregamento de campo: suscep. + 8 (u.a.)

Os gráficos de - magnetização (u.a.) versus campo (T) obtidos a partir da simulação são similares aos obtidos nas nossas experiências.

Tendo em vista os resultados da simulação, foi feita uma tentativa de eliminação dos efeitos de chaveamento e ruídos sobre as medidas. Foram eliminados os pontos de pico após o chaveamento e a seguir a adição e ou subtração de valores constantes aos dados da susceptibilidade. O critério que norteou essas modificações foi

a busca da simetria e eliminação da inclinação dos laços de histerese.

3-3) Obtenção das curvas de magnetização

Sendo a especificação do "shunt" de 300A/200mV e a relação campo/corrente para o centro do magneto de 315.51×10^{-4} T/A, fazendo-se a seguinte operação com a tensão lida sobre o "shunt", conseguimos o valor do campo magnético produzido no centro do magneto em tesla:

$$\text{campo (T)} = 315.51 \times 10^{-4} \left(\frac{V_{\text{shunt}} \times 300}{0.2} \right) \quad (3-3-1)$$

Convertendo-se o eixo X para campo (T) e fazendo-se a integração numérica do eixo Y com respeito ao eixo X através da regra dos trapézios [1], obtém-se a curva de - magnetização (u.a.) versus campo (T) para cada amostra.

3-4) Calibração do sistema

Para cada uma das amostras, após integração dos dados de - susceptibilidade em relação ao campo(T), no eixo Y temos representada a grandeza - $CNA\mu_0 M_s$, cuja unidade é VT, vide equações (2-6) e (2-7).

Analisando-se a curva de histerese do níquel, podemos identificar o valor em VT relacionado com a magnetização de saturação do níquel.

$$\text{Seja } Y \text{ (VT)} \equiv CNA\mu_0 2M_s \quad (3-4-1)$$

onde M_s é a magnetização de saturação do níquel.

Da literatura [2] temos que a magnetização de saturação do níquel M_s é 510G à OK.

Lembrando-se que gauss = $\frac{10^3}{4\pi}$ A/m, de (3-4-1) temos:

$$Y \text{ (VT)} = \text{CNA}\mu_0 \times 2 \times 510 \times \frac{10^3}{4\pi}$$

Portanto:

$$\text{CNA}\mu_0 = \frac{Y}{2 \times 510 \times \frac{10^3}{4\pi}} \quad (3-4-2)$$

O fator $\text{CNA}\mu_0$ é o fator de calibração do sistema.

Para cada amostra, após divisão do eixo Y pelo volume da amostra e, a seguir, pelo fator de calibração (3-4-2) obtém-se a curva de - magnetização (A/m) versus campo (T).

A energia perdida por ciclo por unidade de volume de material supercondutor foi obtida diretamente a partir da área dos laços de histerese, equação (1-43) e também calculada a partir da equação (1-42).

Para cada uma das amostras foi obtida a energia dissipada também para os laços de histerese obtidos na tentativa de eliminação de ruídos do sistema. -

I) Energia dissipada obtida a partir da área do laço de histerese

A área do laço de histerese foi medida com um planímetro Koizumi (com ajuste de zero), sendo que para a medição foram levados em conta o primeiro e segundo semi-ciclos do laço.

De acordo com (1-43), temos que a energia perdida por unidade de volume por ciclo, é dada por:

$$\oint \frac{P}{V} dt = \mu_0 \oint M dH$$

$$\oint M dH \equiv \text{área do laço de histerese}$$

Com a área do laço de histerese dada em $(A/m)^2$, temos que a energia perdida por ciclo por volume é dada em J/m^3 .

II) Energia dissipada obtida a partir da fórmula (1-42).

De acordo com (1-42), temos que a energia perdida por unidade de volume por ciclo é dada por:

$$\oint \frac{P}{V} dt = \left[\frac{4\mu_0 H_0 H_p}{3} \right] \left(1 - \frac{H_p}{2H_0} \right)$$

O campo necessário para total penetração H_p pode ser estimado a partir do laço de histerese. A medida que o campo varia, os filamentos oscilam de um estado de total penetração em uma direção

até um estado de total penetração na direção oposta. Então, na extremidade do laço, em $H = H_o$, H_p é aproximadamente a metade do campo necessário para inverter o sinal da magnetização.

Com H_o e H_p obtidos em A/m, temos que a energia perdida é dada em J/m^3 .

3-6)- Resultados para velocidade de carregamento do magneto de
0.83 A/s (500A/10 min)

NÍQUEL

- GRÁFICO 8: - susceptibilidade magnética(u.a.) X campo (u.a.)

- GRÁFICO 9: - magnetização (u.a.) X campo(T).

Notar a assimetria da curva de histerese em relação ao eixo X.

- GRÁFICO 10: - magnetização (u.a.) X campo (T), após eliminação do efeito de chaveamento. Notar que, nesse caso, a curva de histerese do níquel é simétrica em relação ao eixo X como deveria ser.

- GRÁFICO 11: - magnetização (u.a.) X campo (T).

Curva obtida pela divisão do eixo Y do gráfico 10 pelo volume da amostra de níquel.

De (3-4-1) e da curva 11, temos:

$$Y = 32763.16 VT \quad (3-6-1)$$

De (3-4-2) e (3-6-1) temos que o fator de calibração do sistema é:

$$CNAH_o = 0.40 \quad (3-6-2)$$

MONOFILAMENTO
DIÂMETRO: 2.7 mm

- GRÁFICO 12: - susceptibilidade magnética (u.a.) X campo (u.a.)
- GRÁFICO 13: - magnetização (u.a.) X campo(T)
- GRÁFICO 14: - magnetização (u.a.) X campo(T), após eliminação do efeito de chaveamento.
- GRÁFICO 15: - magnetização (A/m) X campo(T).

Da curva 15 foram obtidos:

- área do laço de histerese: $35.8 \text{ cm}^2 \Rightarrow 2.2 \times 10^{10} \text{ (A/m)}^2$
- $2 H_p = 0.41 \text{ T} \Rightarrow H_p = 167112.7 \text{ A/m}$
- $H_o = 1.94 \text{ T} \Rightarrow H_o = 1543802.9 \text{ A/m}$
- GRÁFICO 16: - magnetização (u.a.) X campo (T)

A curva 16 foi obtida após as seguintes modificações dos dados de susceptibilidade:

- a) De $H = 0$ até $H = H_o$: suscep. - 15×10^{-5}
- b) De $H = H_o$ até $H = 0$: suscep. - 10^{-4}
- c) De $H = 0$ até $H = -H_o$: suscep. + 15×10^{-5}
- d) De $H = -H_o$ até $H = 0$: suscep. - 2×10^{-5}
- e) De $H = 0$ até $H = H_o$: suscep. - 2×10^{-5}
- f) De $H = H_o$ até $H = 0$: suscep. - 6×10^{-5}

* GRÁFICO 17: - magnetização (A/m) X campo (T), obtida a partir da curva 16.

Da curva 17 foram obtidos:

- área do laço de histerese: $90.3 \text{ cm}^2 \Rightarrow 4.1 \times 10^{10} \text{ (A/m)}^2$

- $2 H_p = 0.44 \text{ T} \Rightarrow H_p = 175070.4 \text{ A/m}$

- $H_o = 1.94 \text{ T} \Rightarrow H_o = 1543802.9 \text{ A/m}$

Os gráficos 18 e 19 ilustram o efeito de uma pequena modificação nos valores que figuram nos itens (a) a (b) descritos anteriormente.

FIO SUPERCONDUTOR MULTIFILAMENTAR

$$\underline{DF = 90 \mu\text{m}}$$

- GRÁFICO 20: - susceptibilidade magnética (u.a.) X campo (u.a.)

- GRÁFICO 21: - magnetização (u.a.) X campo (T)

- GRÁFICO 22: - magnetização (u.a.) X campo (T), eliminado o efeito de chaveamento.

- GRÁFICO 23: - magnetização (A/m) X campo (T), obtida a partir da curva 22.

Da curva 23 foram obtidos:

- área do laço de histerese: $70.9 \text{ cm}^2 \Rightarrow 3.2 \times 10^{10} \text{ (A/m)}^2$

- $2 H_p = 0.32 \text{ T} \Rightarrow H_p = 127324.0 \text{ A/m}$

- $H_o = 1.93 \text{ T} \Rightarrow H_o = 1535845.2 \text{ A/m}$

Neste caso não houve tentativa de eliminação de efeitos de ruído do sistema pelo fato de que eles não são evidentes.

FIO SUPERCONDUTOR MULTIFILAMENTAR

$$\underline{DF = 40 \mu m}$$

- GRÁFICO 24: - susceptibilidade magnética (u.a.) X campo (u.a.)

- GRÁFICO 25: - magnetização (u.a.) X campo (T).

Notar como é nítido o efeito de chaveamento provocando a separação dos semi-ciclos do laço de histerese.

- GRÁFICO 26: - magnetização (u.a.) X campo (T), eliminado o efeito de chaveamento.

- GRÁFICO 27: - magnetização (A/m) X campo (T), obtida a partir da curva 26.

Da curva 27 foram obtidos:

- área do laço de histerese: $11.9 \text{ cm}^2 \Rightarrow 1.1 \times 10^{10} \text{ (A/m)}^2$

- $2H_p = 0.12 \text{ T} \Rightarrow H_p = 47746.5 \text{ A/m}$

- $H_o = 1.94 \text{ T} \Rightarrow H_o = 1543802.9 \text{ A/m}$

- GRÁFICO 28: - magnetização (u.a.) X campo (T)

A curva 28 foi obtida após as seguintes modificações:

a) De $H = 0$ até $H = H_o$: suscep. $- 6 \times 10^{-5}$

b) De $H = H_o$ até $H = 0$: suscep. $+ 3 \times 10^{-5}$

c) De $H = 0$ até $H = -H_o$: suscep. $+ 6 \times 10^{-5}$

d) De $H = -H_o$ até $H = 0$: suscep. $- 4.5 \times 10^{-5}$

e) De $H = 0$ até $H = H_o$: suscep. $- 6 \times 10^{-5}$

f) De $H = H_o$ até $H = 0$: suscep. $+ 3 \times 10^{-5}$

* GRÁFICO 29: - magnetização (A/m) X campo (T), obtida a partir da curva 28.

Da curva 29 foram obtidos:

- área do laço de histerese: $64.8 \text{ cm}^2 \Rightarrow 2.0 \times 10^{10} \text{ (A/m)}^2$

- $2H_p = 0.16 \text{ T} \Rightarrow H_p = 63662.0 \text{ A/m}$

- $H_o = 1.96 \text{ T} \Rightarrow H_o = 1559718.4 \text{ A/m}$

FIO SUPERCONDUTOR MULTIFILAMENTAR

$$\underline{DF = 0.6 \mu\text{m}}$$

- GRÁFICO 30: - susceptibilidade magnética (u.a.) X campo (u.a.)

- GRÁFICO 31: - magnetização (u.a.) X campo (T)

- GRÁFICO 32: - magnetização (u.a.) X campo (T), eliminado o efeito de chaveamento.

Notar o paralelismo das linhas referentes ao primeiro e terceiro semi-ciclos do laço.

Como o laço 32 não resultou em um laço de histerese fechado, não é possível a obtenção da área do laço de histerese a partir dele. Também não é possível a identificação de $2H_p$.

- GRÁFICO 33: - magnetização (u.a.) X campo (T)

A curva 33 foi obtida após a seguinte modificação dos dados da susceptibilidade:

$$\text{De } H = -H_o \text{ até } H = 0: \text{ suscep. } - 12 \times 10^{-6}$$

Notar que, com a modificação acima o laço de histerese resulta fechado.

* GRÁFICO 34: - magnetização (A/m) X campo (T), obtida a partir da curva 33.

Da curva 34 temos:

- área do laço de histerese: $10.2 \text{ cm}^2 \rightarrow 1.3 \times 10^{10} \text{ (A/m)}^2$

- não sendo possível identificar $2H_p$, neste caso H_p é calculado a partir de dados da literatura [3], como é mostrado a seguir:

CÁLCULO DE H_p

De (1-42) temos que $H_p = rJ_c$, onde r = raio do filamento e J_c a densidade de corrente crítica.

De [3] temos que para o fio de 14496 filamentos com diâmetro de filamento $0.6 \mu\text{m}$ a corrente crítica a 2T é de 12.7 A (definida pelo critério de $1\mu\text{V}$ a 4.2 K).

Com o dado acima, levando-se em conta somente a área supercondutora do fio, calculamos:

$$J_c = 3.1 \times 10^9 \text{ A/m}^2 \quad (3-6-3)$$

Sendo $r = 0.3 \mu\text{m}$, de (3-6-3) e (1-42), temos:

$$H_p = 930 \text{ A/m} \quad (3-6-4)$$

- $H_o = 2T \rightarrow H_o = 1591549.4 \text{ A/m}$

A partir dos dados H_o , H_p e área do laço de histerese foi calculada a energia perdida por unidade de volume por ciclo, para cada amostra. Os resultados estão na tabela (3-6-1).

3-7)- Resultados para velocidade de carregamento do magneto

1.67 A/s (500 A/ 5 min)

Analogamente ao item (3-6) foi adotado o critério de medir-se a área do laço de histerese para o primeiro e segundo semi-ciclos do laço. Neste caso a área do laço não foi obtida para os gráficos não modificados porque neles o primeiro e segundo semi-ciclos não formam um laço fechado, dificultando a medição da área, vide gráficos 40, 45 e 50.

NÍQUEL

- GRÁFICO 35: - susceptibilidade magnética (u.a.) X campo (u.a.)

- GRÁFICO 36: - magnetização (u.a.) X campo (T)

- GRÁFICO 37: - magnetização (u.a.) X campo (T)

Curva obtida pela divisão do eixo Y do gráfico 36 pelo volume da amostra de níquel.

De (3-4-1) e da curva 37 temos que:

$$Y = 14144.74 VT \quad (3-7-1)$$

De (3-4-2) e (3-7-1) temos:

$$CNA\mu_o = 0.17 \quad (3-7-2)$$

MONOFILAMENTO

DIÂMETRO: 2.7 mm

- GRÁFICO 38: - susceptibilidade (u.a.) X campo (u.a.)

- GRÁFICO 39: - magnetização (u.a.) X campo (T)

- GRÁFICO 40: - magnetização (u.a.) X campo (T), após eliminação do efeito de chaveamento.

Da curva 40 foram obtidos:

$$- 2H_p = 0.47 \text{ T} \Rightarrow H_p = 190985.9 \text{ A/m}$$

$$- H_o = 2.2 \text{ T} \Rightarrow H_o = 1710915.6 \text{ A/m}$$

- GRÁFICO 41: - magnetização (u.a.) X campo (T)

A curva 41 foi obtida após as seguintes modificações dos dados da susceptibilidade:

a) De $H = 0$ até $H = H_o$: suscep. - 20×10^{-5}

b) De $H = H_o$ até $H = 0$: suscep. - 10^{-4}

c) De $H = 0$ até $H = -H_o$: suscep. + 30×10^{-5}

d) De $H = -H_o$ até $H = 0$: suscep. + 0

e) De $H = 0$ até $H = H_o$: suscep. - 7×10^{-5}

f) De $H = H_o$ até $H = 0$: suscep. - 7×10^{-5}

* GRÁFICO 42: - magnetização (A/m) X campo (T), obtida a partir da curva 41.

Da curva 42 foram obtidos:

- área do laço de histerese: $77.3 \text{ cm}^2 \Rightarrow 2.4 \times 10^{11} \text{ (A/m)}^2$

obs: neste caso, excepcionalmente, a área do laço de histerese é a área compreendida pelo segundo e terceiro semi-ciclos do laço, porque o primeiro e segundo semi-ciclos não formam um laço fechado, mesmo para o gráfico modificado.

$$- 2H_p = 0.47 \text{ T} \Rightarrow 190985.9 \text{ A/m}$$

$$- H_o = 2.2 \text{ T} \Rightarrow H_o = 1710915.6 \text{ A/m}$$

FIO SUPERCONDUTOR MULTIFILAMENTAR

$$\underline{DF = 90 \mu m}$$

- GRÁFICO 43: - susceptibilidade magnética (u.a.) X campo (T)
- GRÁFICO 44: - magnetização (u.a.) X campo (T)
- GRÁFICO 45: - magnetização (u.a.) X campo (T), eliminado o efeito de chaveamento.

Da curva 45 foram obtidos:

$$- 2H_p = 0.44 \text{ T} \Rightarrow H_p = 175070.4 \text{ A/m}$$

$$- H_o = 2\text{T} \Rightarrow H_o = 1591549.4 \text{ A/m}$$

- GRÁFICO 46: - magnetização (u.a.) X campo (T)

A curva 46 foi obtida após as seguintes modificações dos dados da susceptibilidade:

a) De $H = 0$ até $H = H_o$: suscep. $- 10^{-4}$

b) De $H = H_o$ até $H = 0$: suscep. $- 10^{-4}$

c) De $H = 0$ até $H = -H_o$: suscep. $+ 6 \times 10^{-5}$

d) De $H = -H_o$ até $H = 0$: suscep. $+ 6 \times 10^{-5}$

e) De $H = 0$ até $H = H_o$: suscep. $- 5 \times 10^{-5}$

f) De $H = H_o$ até $H = 0$: suscep. -5×10^{-5}

- * GRÁFICO 47: - magnetização (A/m) X campo (T), obtida a partir da curva 46.

Da curva 47 foram obtidos:

$$- \text{área do laço de histerese: } 123.1 \text{ cm}^2 \Rightarrow 1.9 \times 10^{11} \text{ (A/m)}^2$$

$$- 2H_p = 0.43 \text{ T} \Rightarrow H_p = 175070.4 \text{ A/m}$$

$$- H_o = 2\text{T} \Rightarrow H_o = 1591549.4 \text{ A/m}$$

FIO SUPERCONDUTOR MULTIFILAMENTAR

$$DF = 40 \mu\text{m}$$

- GRÁFICO 48: - susceptibilidade magnética (u.a.) X campo (u.a.)

- GRÁFICO 49: - magnetização (u.a.) X campo (T)

- GRÁFICO 50: - magnetização (u.a.) X campo (T), eliminado o efeito de chaveamento.

Da curva 50 foram obtidos:

$$- 2H_p = 0.2 \text{ T} \Rightarrow H_p = 63662.0 \text{ A/m}$$

$$- H_o = 2\text{T} \Rightarrow H_o = 1591549.4 \text{ A/m}$$

- GRÁFICO 51: - magnetização (u.a.) X campo (T)

A curva 51 foi obtida após as seguintes modificações dos dados da susceptibilidade:

a) De $H = 0$ até $H = H_o$: suscep. $- 14 \times 10^{-5}$

b) De $H = H_o$ até $H = 0$: suscep. $+ 7 \times 10^{-5}$

c) De $H = 0$ até $H = -H_o$: suscep. $+ 12 \times 10^{-5}$

d) De $H = -H_o$ até $H = 0$: suscep. $- 8.5 \times 10^{-5}$

e) De $H = 0$ até $H = H_o$: suscep. $- 11.5 \times 10^{-5}$

f) De $H = H_o$ até $H = 0$: suscep. $+ 7 \times 10^{-5}$

* GRÁFICO 52: - magnetização (A/m) X campo (T), obtida a partir da curva 51.

Da curva 52 foram obtidos:

- área do laço de histerese: $104.6 \text{ cm}^2 \Rightarrow 9.6 \times 10^{10} \text{ (A/m)}^2$

- $2H_p = 0.2 \text{ T} \Rightarrow H_p = 75598.6 \text{ A/m}$

- $H_o = 2\text{T} \Rightarrow H_o = 1591549.4 \text{ A/m}$

FIO SUPERCONDUTOR MULTIFILAMENTAR

$$\underline{DF = 0.6 \mu\text{m}}$$

- GRÁFICO 53: - susceptibilidade magnética (u.a.) X campo (u.a.)

- GRÁFICO 54: - magnetização (u.a.) X campo (T)

- GRÁFICO 55: - magnetização (u.a.) X campo (T), eliminado o efeito de chaveamento.

Neste caso não há necessidade de eliminação de efeito de ruído já que a simples remoção do efeito de chaveamento levou a um laço de histerese fechado.

- GRÁFICO 56: - magnetização (A/m) X campo (T), obtida a partir da curva 55.

Da curva 56 foram obtidos:

- área do laço de histerese: $12.5 \text{ cm}^2 \Rightarrow 1.5 \times 10^{11} \text{ (A/m)}^2$

- não é possível identificar $2H_p$ do gráfico 56, neste caso H_p foi calculado a partir de dados da literatura [3,4] como segue:

CÁLCULO DE H_p

Neste caso $H_o = 2.1 \text{ T}$. Em [4] temos a curva de J_c (10^3 A/mm^2) versus campo(T) para este condutor, com B (campo aplicado) variando de 0 até 2T. Por extrapolação da curva temos que os

valores de J_c para 2.0 T e 2.1 T não variam substancialmente. De (1-42) temos que $H_p = rJ_c$ e então, de (3-6-3) e (3-6-4) temos que H_p é aproximadamente 930 A/m.

A partir dos dados H_o , H_p e área do laço de histerese foi calculada a energia perdida por unidade de volume por ciclo, para cada amostra. Os resultados estão na tabela (3-7-1).

		$\mu_0 \oint M dH$ J/m ³	$\left[\frac{4\mu_0 H_0 H_p}{3} \right] \left(1 - \frac{H_p}{2H_0} \right)$ J/m ³
monof 2.7mm	*	5.2 X 10 ⁴	4.3 X 10 ⁵
		2.7 X 10 ⁴	4.1 X 10 ⁵
90 μm		4.1 X 10 ⁴	3.2 X 10 ⁵
40μm	*	2.5 X 10 ⁴	1.6 X 10 ⁵
		1.4 X 10 ⁴	1.2 X 10 ⁵
0.6 μm *		1.6 X 10 ⁴	2.5 X 10 ³

TABELA (3-6-1)- Energia perdida por unidade de volume para velocidade de carregamento do magneto de 0.83 A/s (500 A/10 min). Os resultados assinalados com asterisco referem-se aos gráficos modificados, assinalados com asterisco no texto.

		$\mu_0 \oint M \cdot dH$ J/m ³	$\left(\frac{4\mu_0 H_0 H_P}{3} \right) \left(1 - \frac{H_P}{2H_0} \right)$ J/m ³
monof 2.7mm	*	3.0×10^5	5.2×10^5
			5.2×10^5
90μm	*	2.4×10^5	4.4×10^5
			4.4×10^5
40μm	*	1.2×10^5	2.0×10^5
			1.7×10^5
0.6 μm		1.9×10^5	2.5×10^5

TABELA (3-7-1)- Energia perdida por unidade de volume para velocidade de carregamento do magneto de 1.67 A/s (500A/5min). Os resultados assinalados com asterisco referem-se aos gráficos modificados, assinalados com asterisco no texto.

Com relação à tabela (3-6-1) temos que os resultados (com asterisco) analisados globalmente confirmam a expectativa de que diminuindo-se o diâmetro do filamento diminui-se a dissipação de energia.

A similaridade dos resultados obtidos a partir da fórmula de Carr, equação (1-42), é um bom indicio da legitimidade das modificações introduzidas para eliminação de efeitos de ruído.

Quanto à ordem de grandeza dos resultados, temos que aquela obtida a partir da fórmula de Carr (10^5 J/m^3) para os fios com diâmetro de filamento de $40 \mu\text{m}$ e $90 \mu\text{m}$ confere com a obtida por Goldfarb e Clark [5] analisando laços de histerese quase DC para fios supercondutores multifilamentares de NbTi, matriz cobre, com raio de filamento da ordem de $10^1 \mu\text{m}$, obtidos com um magnetômetro de amostra vibrante para o campo variando de -2T a 2T . Os resultados obtidos por Goldfarb e Clark [5] estão na tabela (3-8-1).

Merece atenção o resultado obtido para o fio supercondutor de raio de filamento $19.9 \mu\text{m}$ da referência supra-citada. Para este fio, a energia perdida por unidade de volume é de $1.41 \times 10^5 \text{ J/m}^3$ obtida a partir da área do laço e de $1.60 \times 10^5 \text{ J/m}^3$ obtida a partir da fórmula de Carr. Notar que, para a amostra de diâmetro de filamento $40 \mu\text{m}$ (raio de filamento = $20 \mu\text{m}$) obtivemos a partir da fórmula de Carr os resultados: $1.6 \times 10^5 \text{ J/m}^3$ e $1.2 \times 10^5 \text{ J/m}^3$, a partir dos gráficos modificado e original, respectivamente. Vide tabela (3-6-1).

É interessante comparar o resultado obtido para o fio de diâmetro de filamento $0.6 \mu\text{m}$ com o obtido por Shimizu e Ito [6] para o fio supercondutor de NbTi com diâmetro de filamento $0.42 \mu\text{m}$ e matriz CuNi. Para uma variação de campo de 0.04 T/s e campo máximo aplicado 1.05 T , a energia perdida por unidade de volume para este fio foi de $1.5 \times 10^3 \text{ J/m}^3$. Ainda que para condições ligeiramente diferentes, variação de campo de 0.03 T/s e campo máximo aplicado de 2T , o resultado obtido para o fio de diâmetro de filamento $0.6 \mu\text{m}$ foi também da ordem de 10^3 J/m^3 , que mostra

que este resultado está dentro do previsto para filamentos ultra-finos.

A inclinação do laço de histerese para o fio de diâmetro $0.42 \mu\text{m}$ [6] coincide com aquela do laço de histerese obtido para o fio de diâmetro de filamento $0.6 \mu\text{m}$. O que estes dois fios tem em comum, além da similaridade do diâmetro de filamento é a matriz CuNi. De [4] temos que o fio produzido pela Alsthom ($0.6 \mu\text{m}$) tem uma matriz Cu30%Ni. Segundo Polák e Majoros [7], o forte comportamento paramagnético da liga Cu30%Ni é o fator responsável por essa inclinação.

Quanto ao resultado obtido a partir da fórmula de Carr para o fio de diâmetro de filamento $0.6 \mu\text{m}$, ainda que seja coerente quando comparado aos outros resultados (menor diâmetro de filamento \rightarrow menor perda) temos que Matsushita [8] conclui que para filamentos com diâmetro inferior a $1 \mu\text{m}$ a perda histerética não pode ser calculada a partir de fórmulas baseadas no conceito de Estado Crítico de Bean, como é o caso da fórmula de Carr. Isto porque para diâmetro de filamento menor que $1 \mu\text{m}$ efeitos de superfície que não são considerados por Bean começam a tornar-se não negligenciáveis e então, nestes casos, a perda pode ser obtida somente a partir da área do laço.

A partir da tabela (3-7-1), com exceção do resultado para o fio com diâmetro de filamento $0.6 \mu\text{m}$, novamente temos diminuição da perda histerética com a diminuição do diâmetro de filamento. Existe concordância dos resultados para os gráficos modificados e não modificados obtidos a partir da fórmula de Carr. Para a velocidade de carregamento do magneto de 1.67 A/s houve concordância da ordem de grandeza para a perda histerética obtida a partir da área do laço e a obtida pela fórmula de Carr, porém é preciso lembrar que não foi feita a compensação indutiva das bobinas sensoras e o efeito disso certamente foi pronunciado quando dobrou-se a velocidade de carregamento do magneto, o resultado obtido para o fio com diâmetro de filamento $0.6 \mu\text{m}$, contrariando a tendência dos resultados anteriores pode ser consequência disso.

Um fator que prejudicou mais intensamente a medida da susceptibilidade da amostra de $0.6 \mu\text{m}$, ironicamente a de menor sinal, foi a pequena quantidade de fio disponível que impediu que toda a área útil da bobina de captura fosse preenchida. Para as outras amostras e para o níquel foi possível um maior preenchimento da área útil da bobina, ainda que não por completo.

Um ponto interessante a ser observado é a ocorrência de salto de fluxo [9] que pode ser notada a partir da curva de magnetização do monofilamento, para campo aplicado aproximando-se de -2 T . Este salto de fluxo tem as mesmas características para ambas velocidades de carregamento do magneto, como pode ser observado nos gráficos 13 e 39. Que o salto de fluxo tenha ocorrido para o monofilamento e não para as outras amostras não é um fato inusitado, devido ao próprio diâmetro do monofilamento que permite um maior grau de liberdade para os vórtices se movimentarem através do espécime, o intrigante é que esse comportamento só tenha ocorrido para o segundo semi-ciclo do laço. Certamente o ponto de partida para o entendimento desse comportamento é o estudo da Teoria de Aprisionamento Coletivo [10], que analisa em profundidade a interação entre a rede de vórtices e os centros de aprisionamento do material.

Conclui-se que com o sistema de medidas de magnetização descrito é possível obter-se laços de histerese quase DC e portanto caracterizar fios supercondutores quanto à perdas histeréticas, necessitando-se melhorar a sensibilidade do sistema principalmente para diâmetros de filamento da ordem de $1 \mu\text{m}$ ou menos. Mesmo trabalhando-se com a velocidade mais baixa de carregamento do magneto, 0.83 A/s , poderia-se pensar na compensação indutiva das bobinas sensoras e na troca da chave faca por uma chave magnética para inversão da corrente.

$\phi/2$	$\mu_0 \oint M dH$ (J/m ³)	$\left(\frac{4\mu_0 H_0 H_p}{3} \right) \left(1 - \frac{H_p}{2H_0} \right)$ (J/m ³)
12.2 μm	1.14×10^5	1.20×10^5
13.0 μm	1.16×10^5	1.20×10^5
4.3 μm	5.0×10^4	5.0×10^4
15.0 μm	1.52×10^5	1.30×10^5
16.4 μm	1.58×10^5	1.70×10^5
19.9 μm	1.41×10^5	1.60×10^5
19.5 μm	1.77×10^5	1.70×10^5
19.3 μm	2.24×10^5	2.10×10^5

TABELA (3-8-1) - Resultados obtidos por Goldfarb e Clark [5] analisando laços de histerese quase DC obtidos com magnetômetro de amostra vibrante para campo máximo aplicado de 2.0 T.

$\phi \equiv$ diâmetro do filamento

GRÁFICO 1

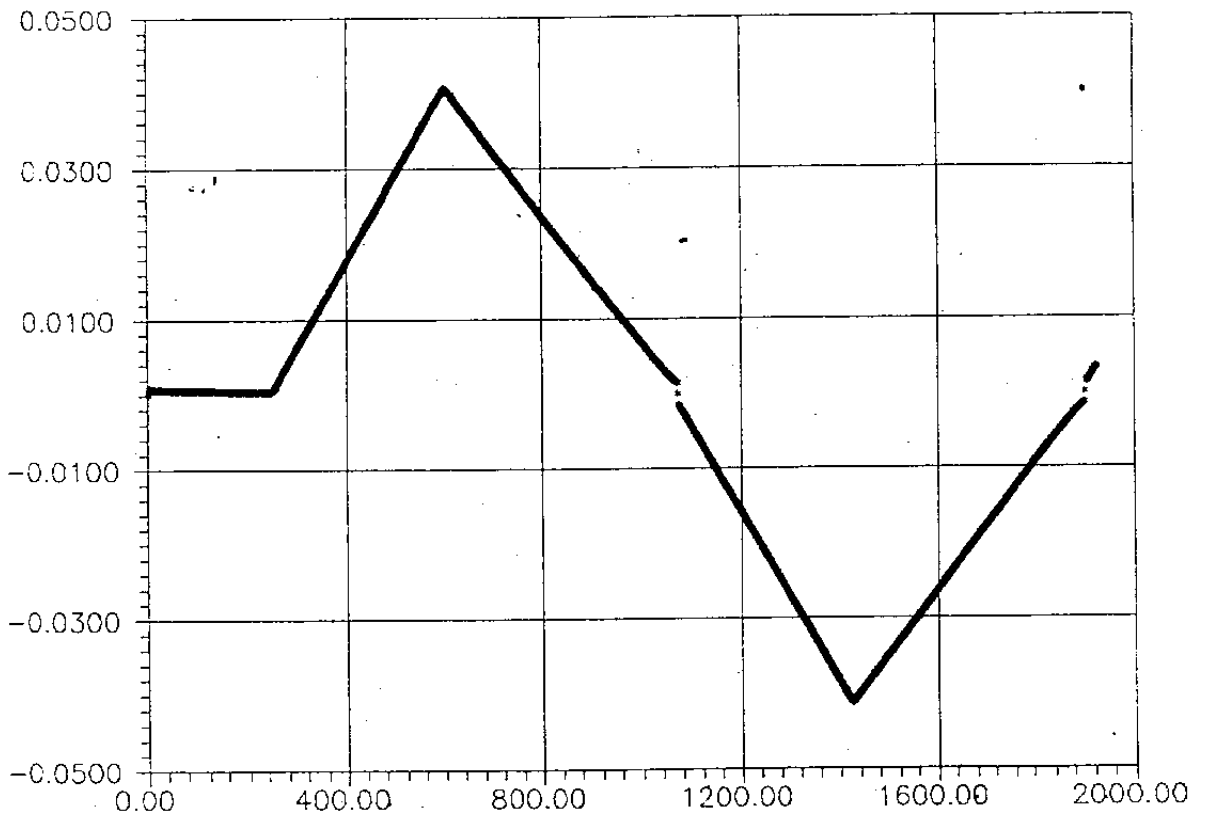


GRÁFICO 1

Corrente (u.a.) versus tempo (u.a.) para a fonte de corrente Tectrol 10V/500A, a inversão de corrente é feita pela chave faca

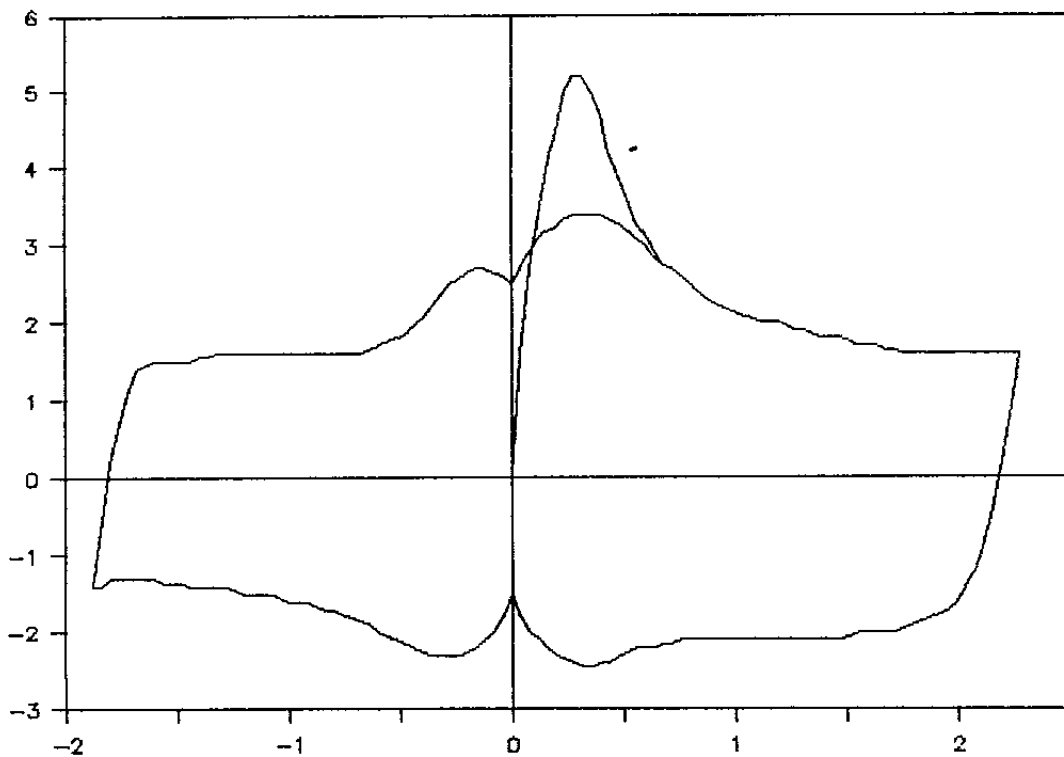


GRÁFICO 2

Curva típica de-magnetização (u.a.) versus campo (u.a.)
para o NbTi; a partir desta curva foram obtidos os
resultados da simulação

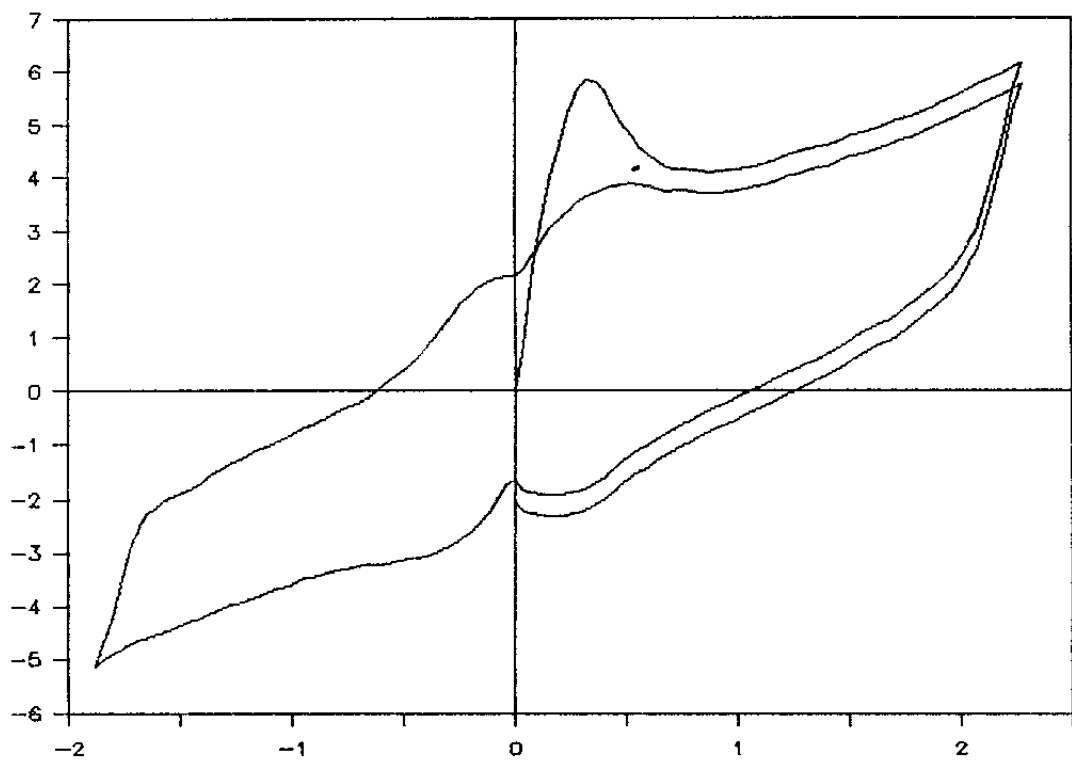


GRÁFICO 3

-Magnetização (u.a.) versus campo (u.a.) para o NbTi
obtida por simulação: susceptibilidade +2 (u.a.)

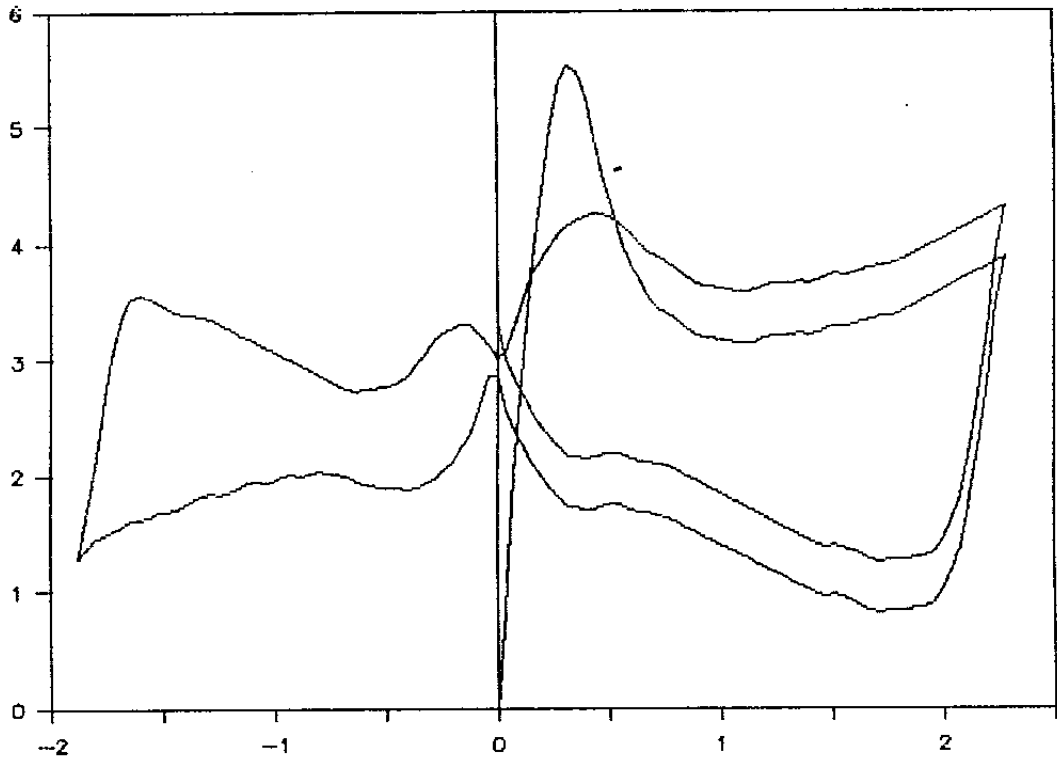


GRÁFICO 4

-Magnetização (u.a.) versus campo (u.a.) para o NbTi
obtida por simulação

aumento do campo: susceptibilidade +1 (u.a.)

diminuição do campo: susceptibilidade -1 (u.a.)

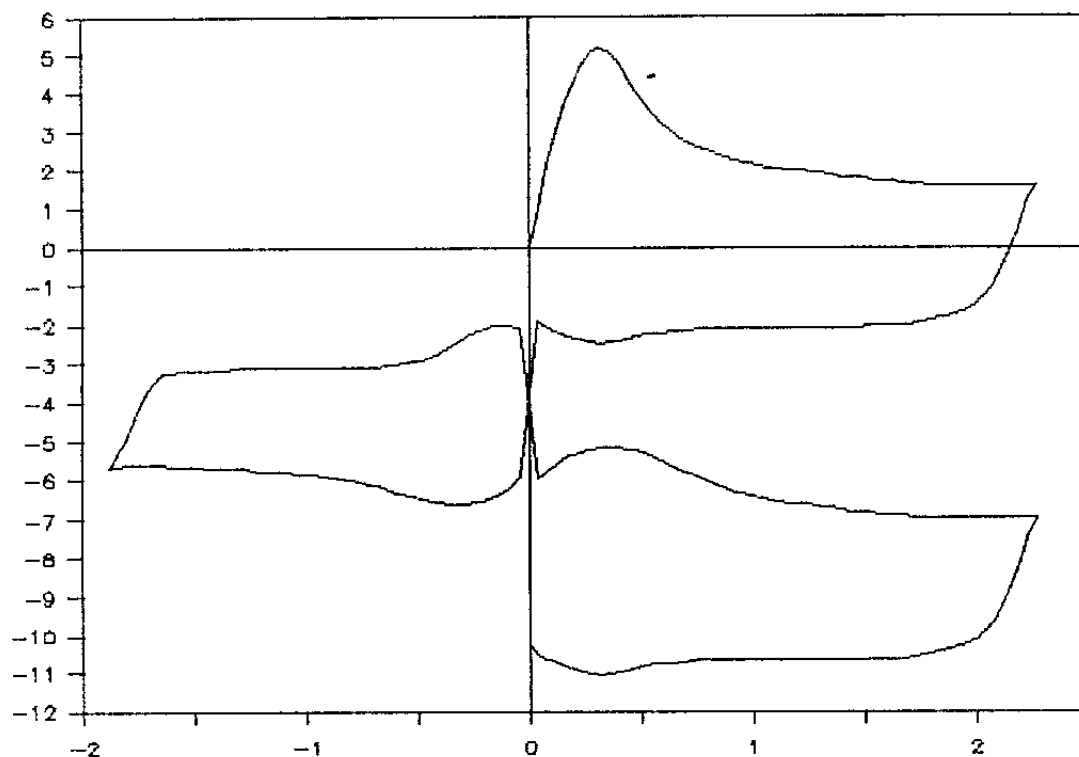


GRÁFICO 5

-Magnetização (u.a.) versus campo (u.a.) para o NbTi
obtida por simulação:

susceptibilidade = 100, para o ponto seguinte ao primeiro chaveamento

susceptibilidade = -100, para o ponto seguinte ao segundo chaveamento

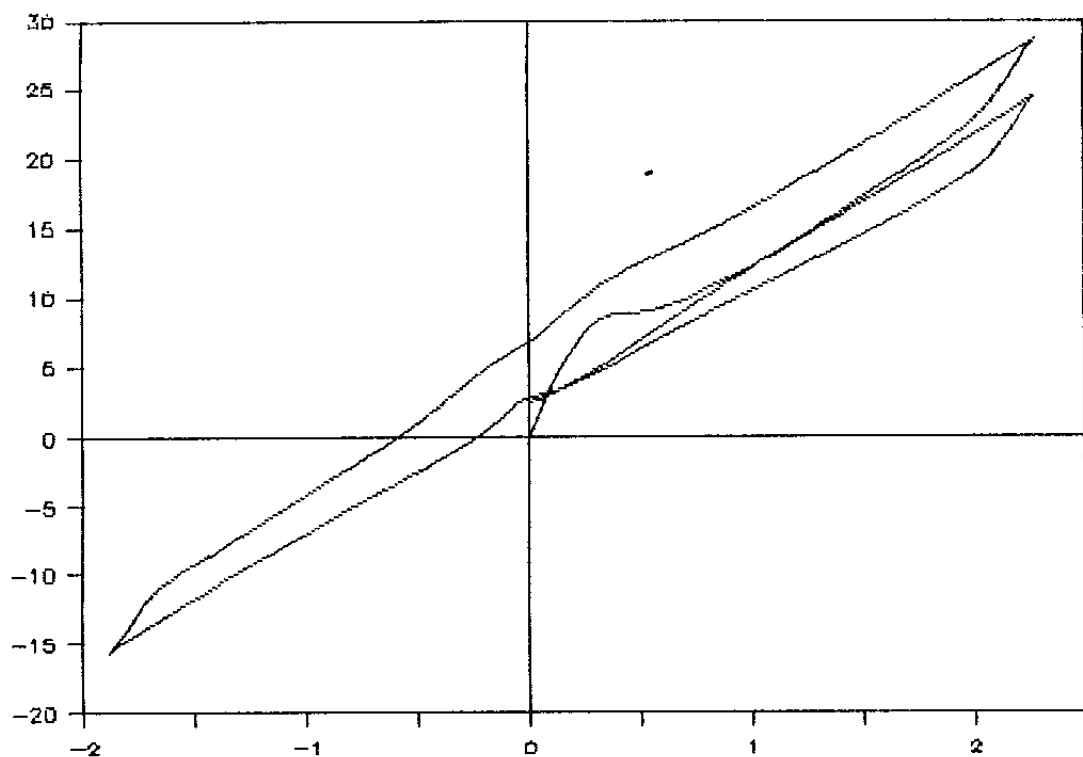


GRÁFICO 6

-Magnetização (u.a.) versus campo (u.a.) para o NbTi obtida por simulação: susceptibilidade + 10 para todos os pontos, com exceção do último descarregamento, para o qual temos susceptibilidade +8

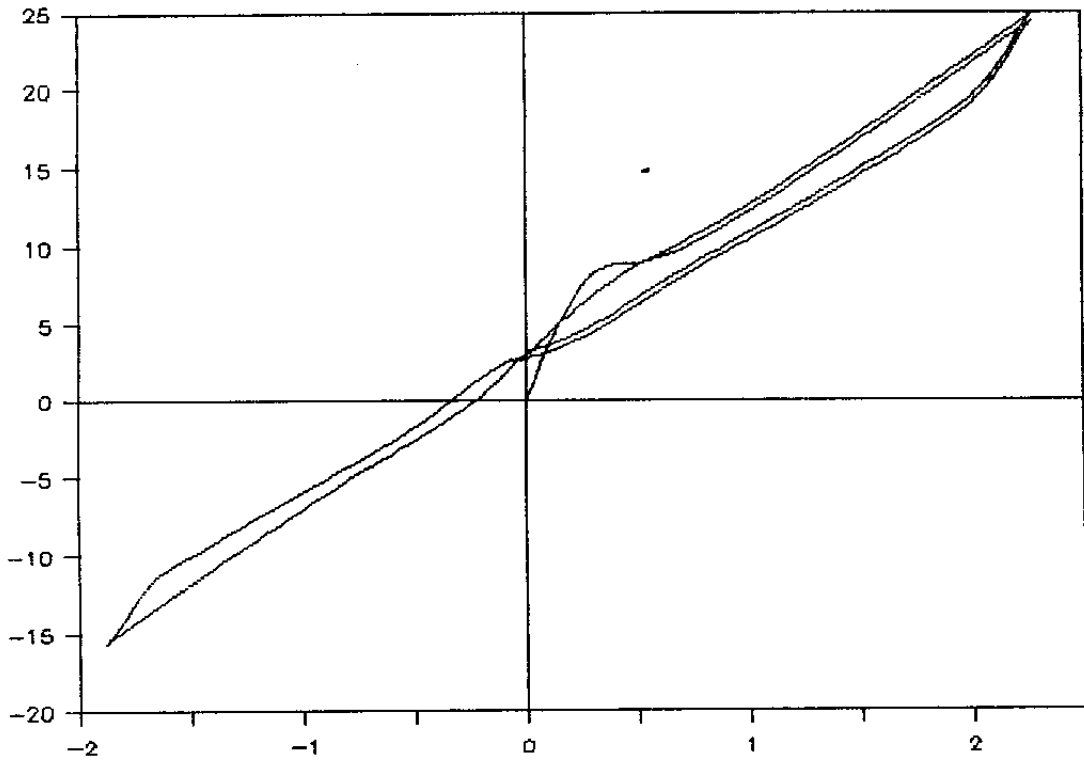


GRÁFICO 7

-Magnetização (u.a.) versus campo (u.a.) para o NbTi
obtida por simulação:

susceptibilidade +10: aumento do campo
susceptibilidade +8: diminuição do campo

níquel; vel. carreg. = 0.83 A/s

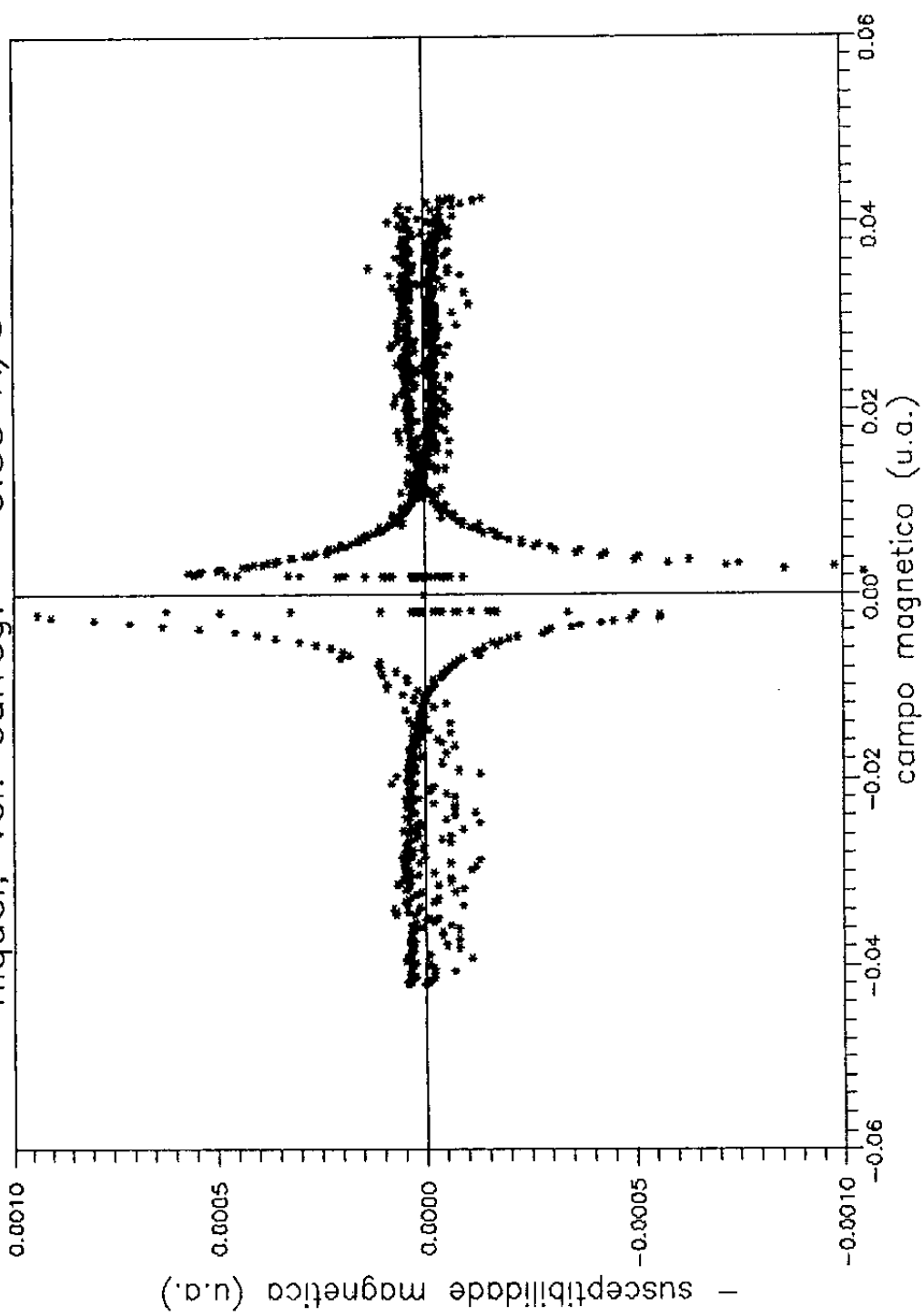


GRÁFICO 8

-Susceptibilidade (u.a.) versus campo (u.a.) para o níquel

*
*

níquel; vel. carreg. = 0.83 A/s

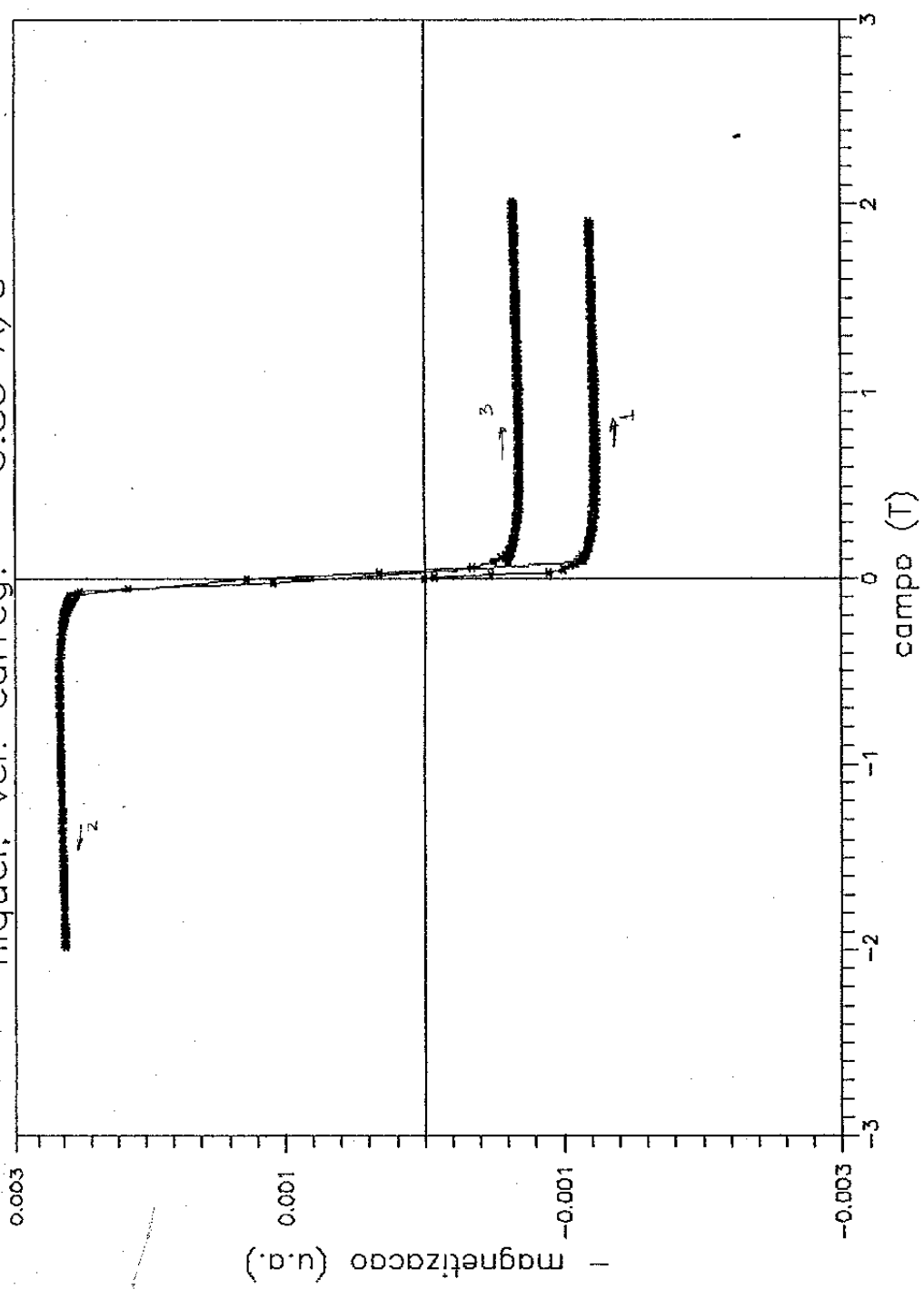


GRÁFICO 9

— Magnetização (u.a.) versus campo (T) para o níquel

níquel; vel. carreg. = 0.83 A/s

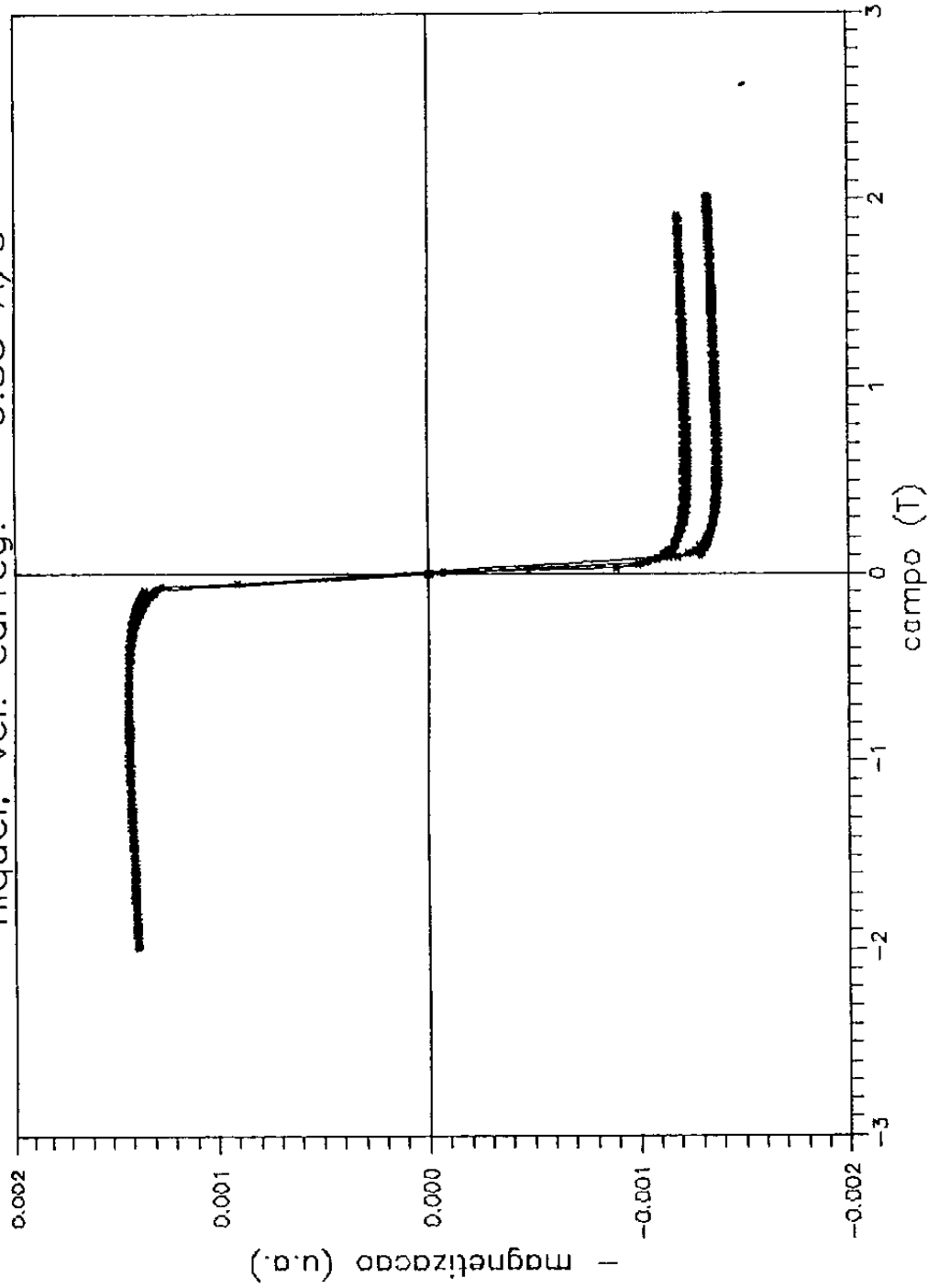


GRÁFICO 10

- Magnetização (u.a.) versus campo (T) para o níquel com efeito de chaveamento removido

níquel: vel. carreg. = 0.83 A/s

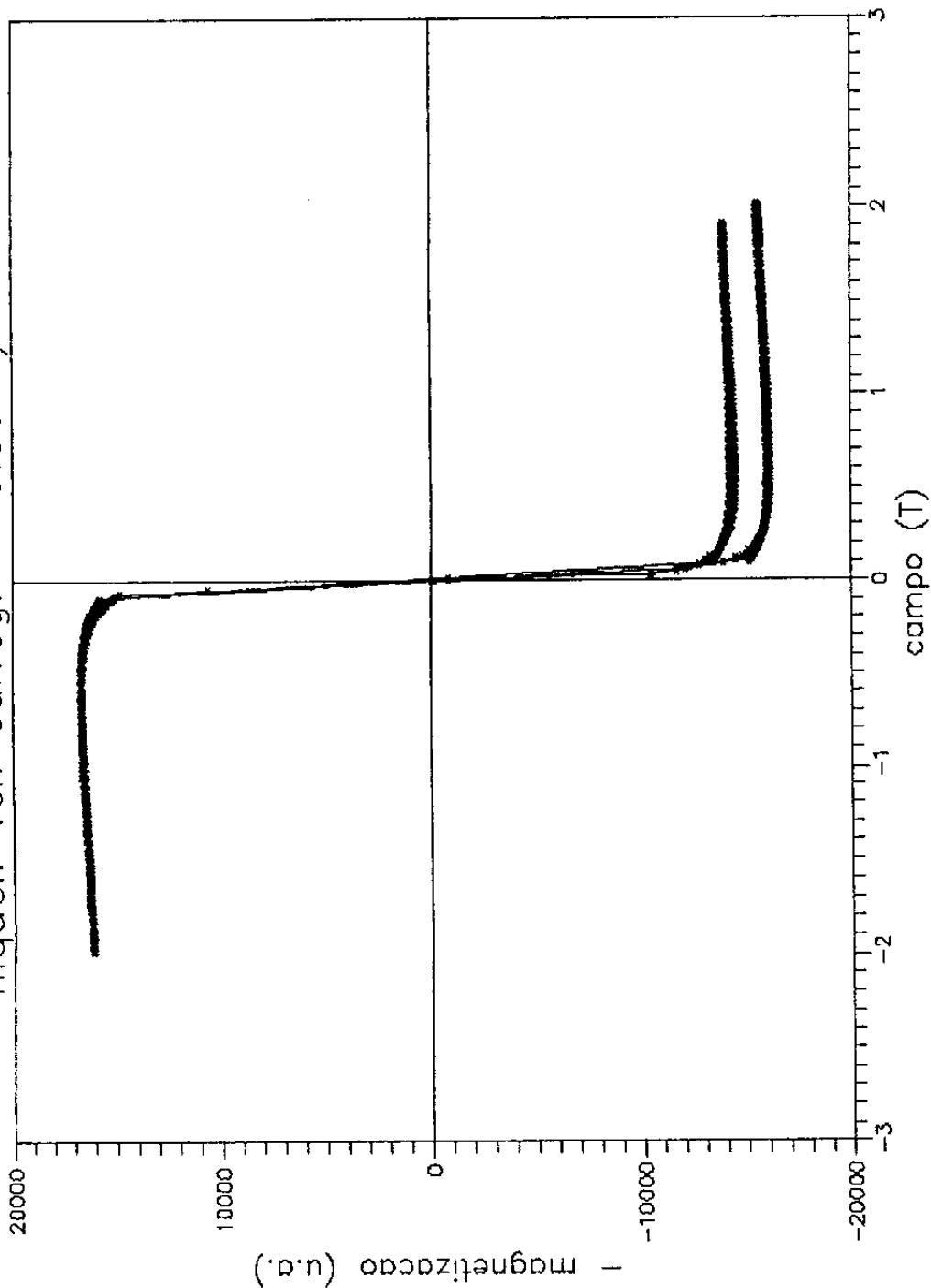


GRÁFICO 11

Curva de-magnetização (u.a.) versus campo (T) para o níquel,
a partir da qual se fez a calibração do sistema

monof.; d = 2.7mm; vel. carreg. = 0.83 A/s

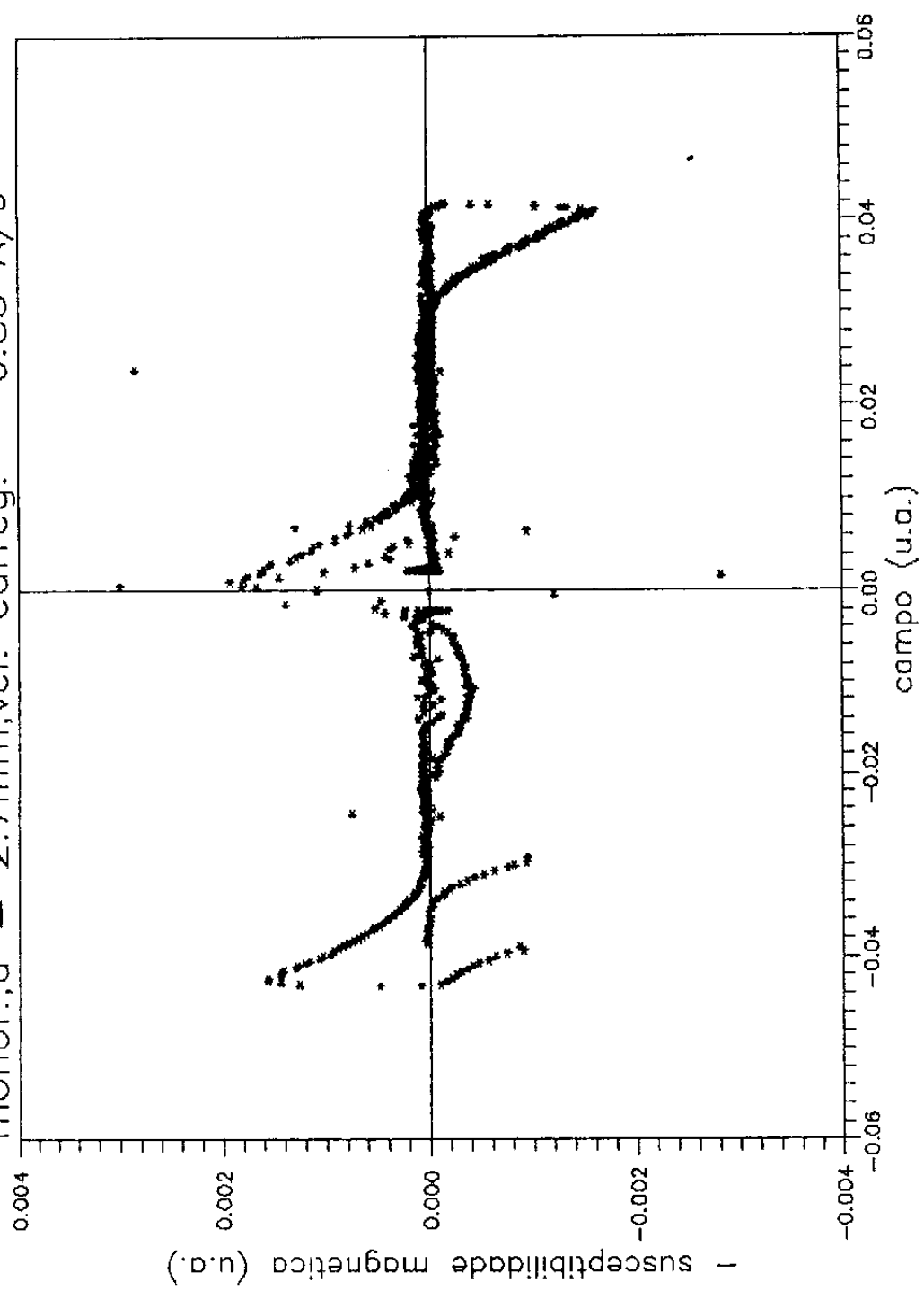


GRÁFICO 12

- Susceptibilidade (u.a.) versus campo (u.a.) para o monofilamento

monof.; d = 2.7mm; vel. carreg. = 0.83 A/s

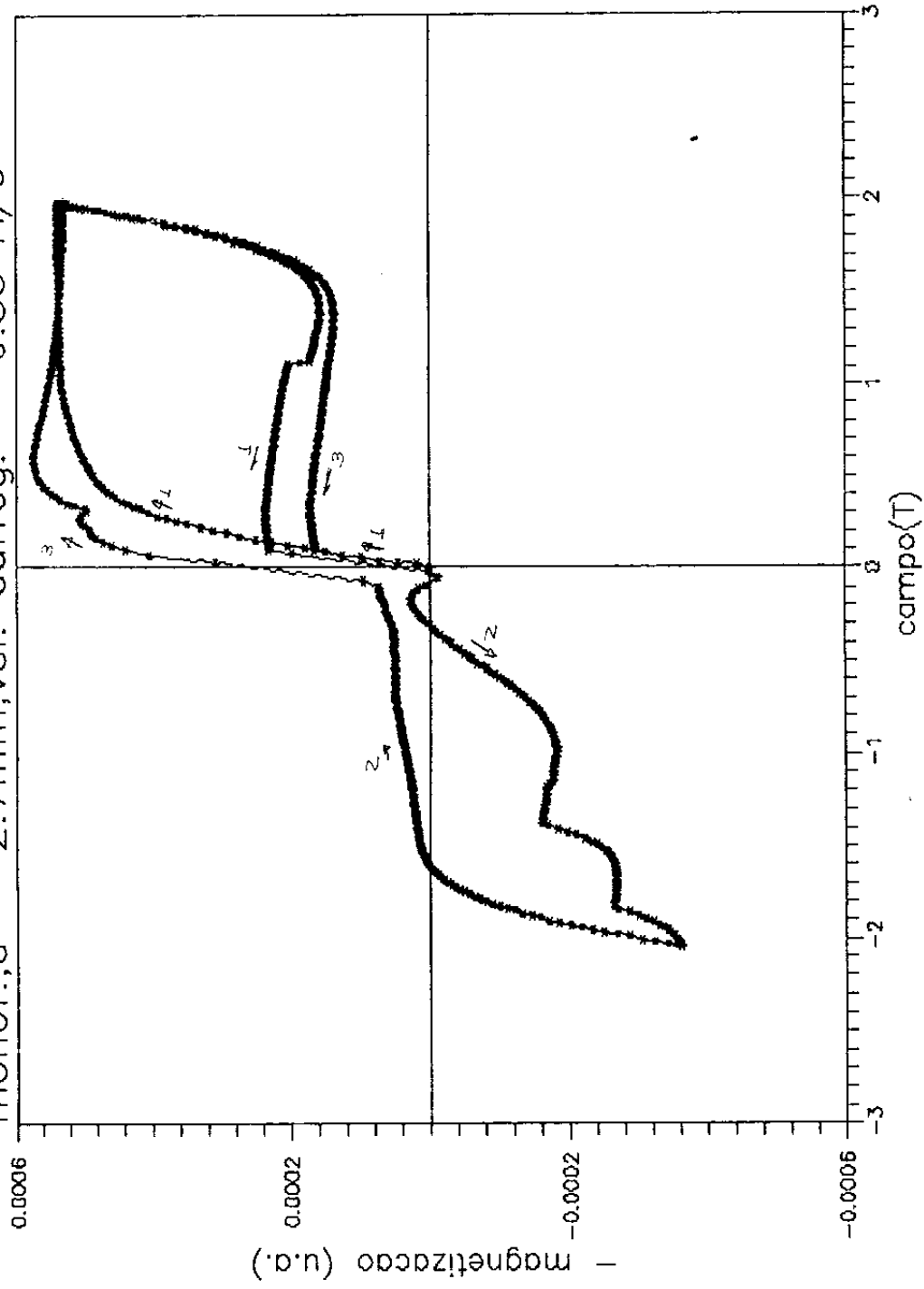


GRÁFICO 13

-Magnetização (u.a.) versus campo (T) para o monofilamento

monof.; d = 2.7mm; vel. carreg. = 0.83 A/s

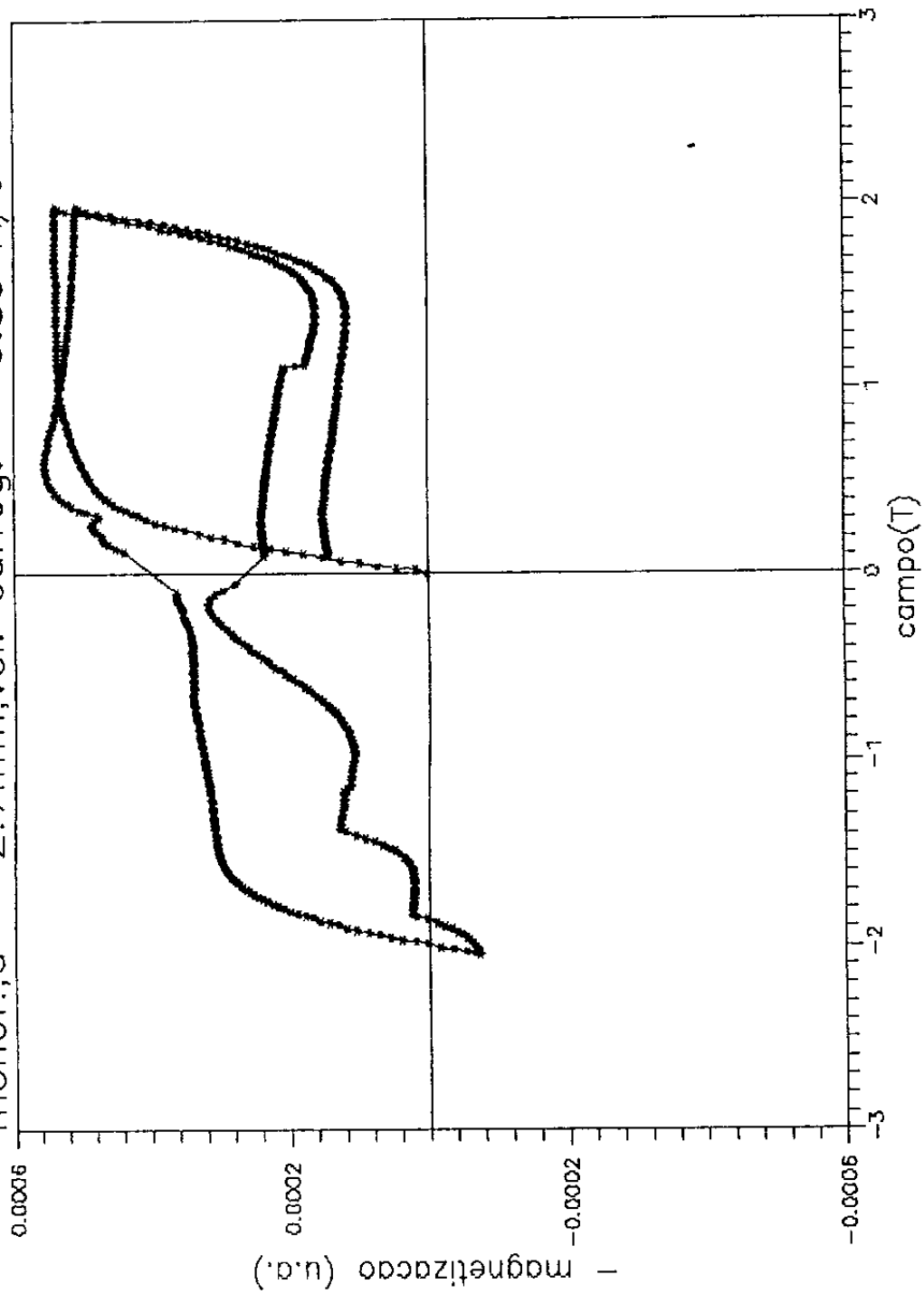


GRÁFICO 14

~ Magnetização (u.a.) versus campo (T) para o monofilamento com efeito de chaveamento removido

monof.; d = 2.7mm; vel. carreg. = 0.83 A/s

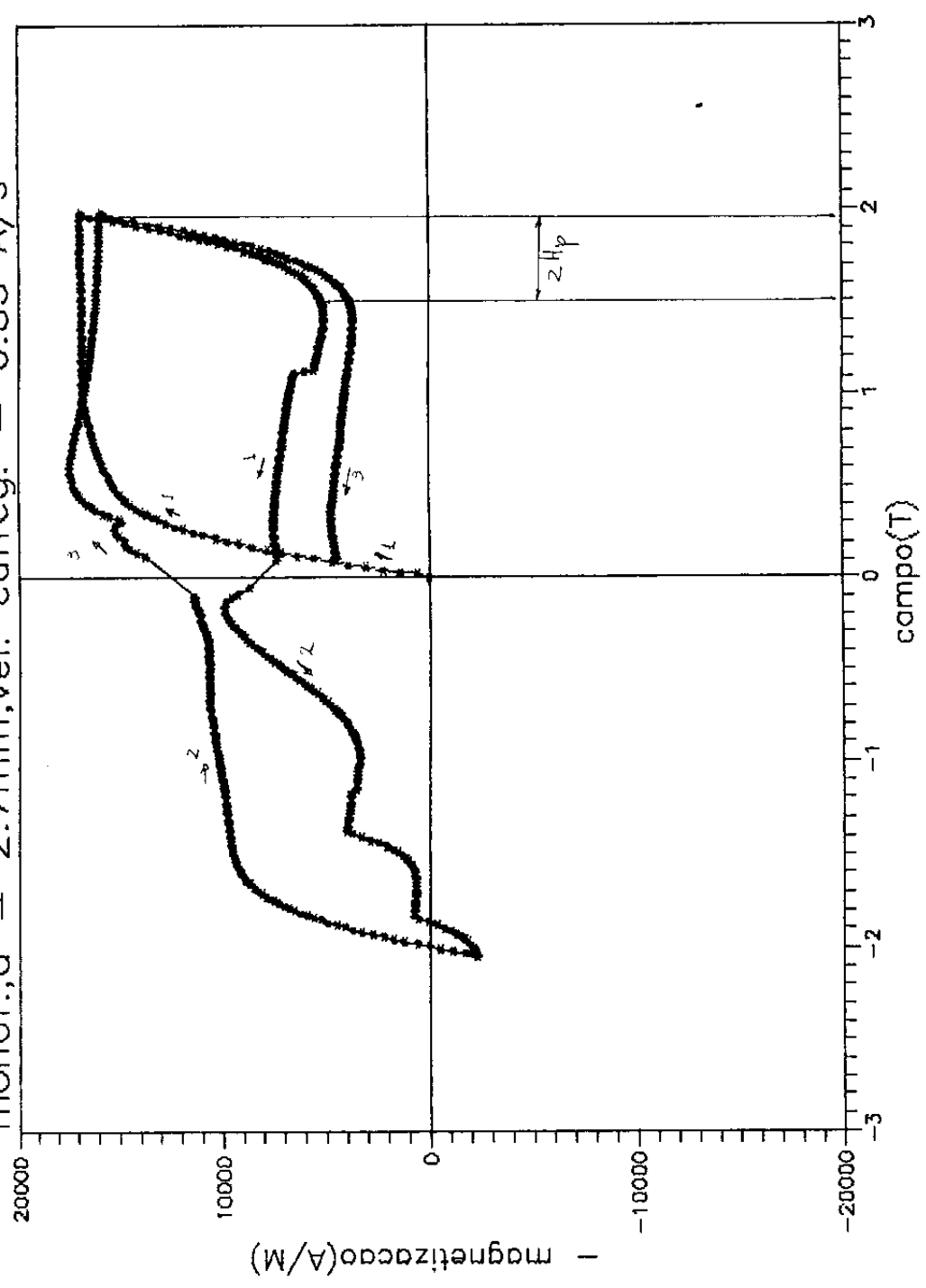


GRÁFICO 15

- Magnetização (A/m) versus campo (T) para o monofilamento com efeito de chaveamento removido

monof.;d = 2.7mm;vel. carreg. = 0.83 A/s

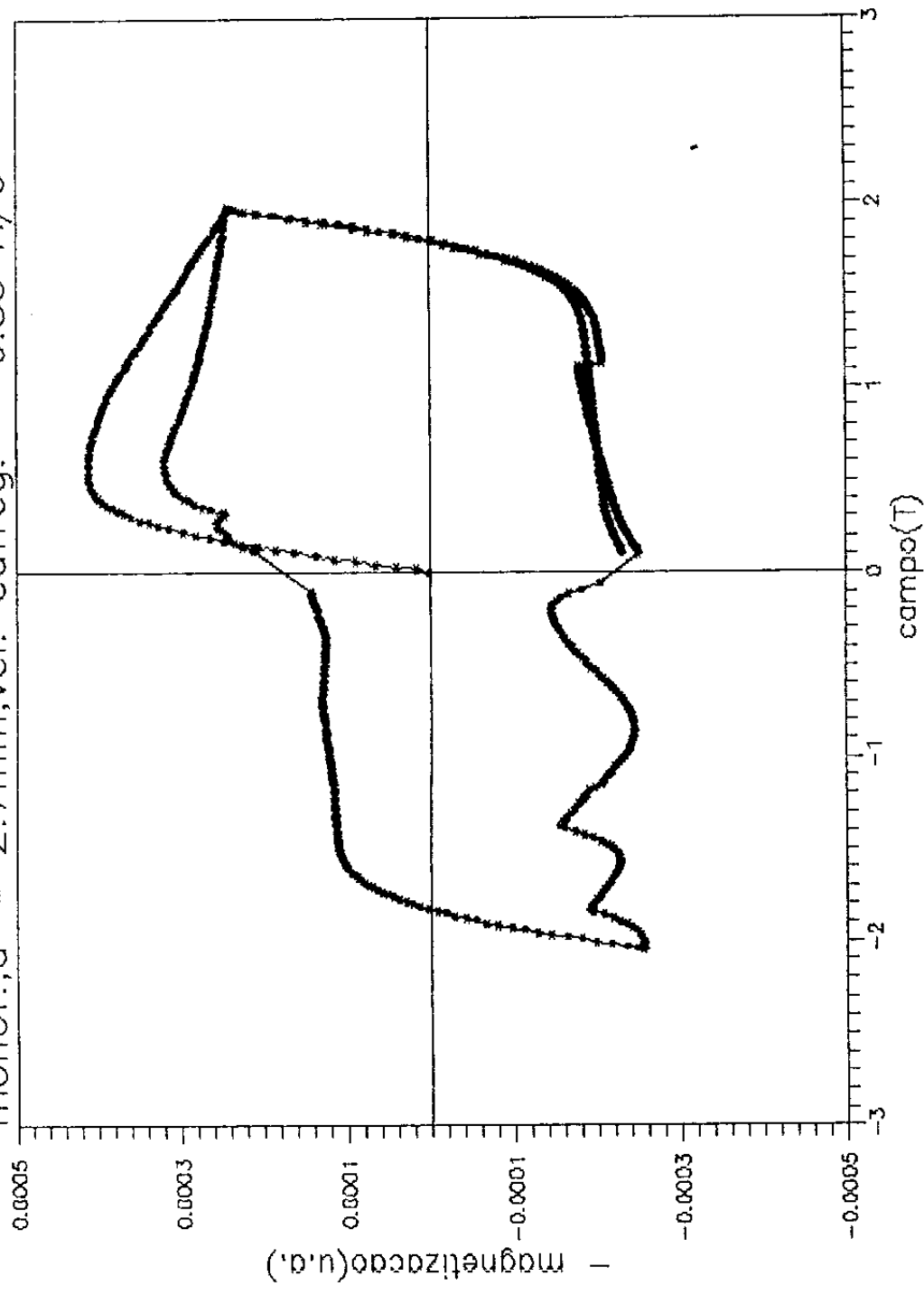


GRÁFICO 16

-Magnetização (u.a.) versus campo (T) para o monofilamento modificado

monof.; d = 2.7mm; vel. carreg. = 0.83 A/s

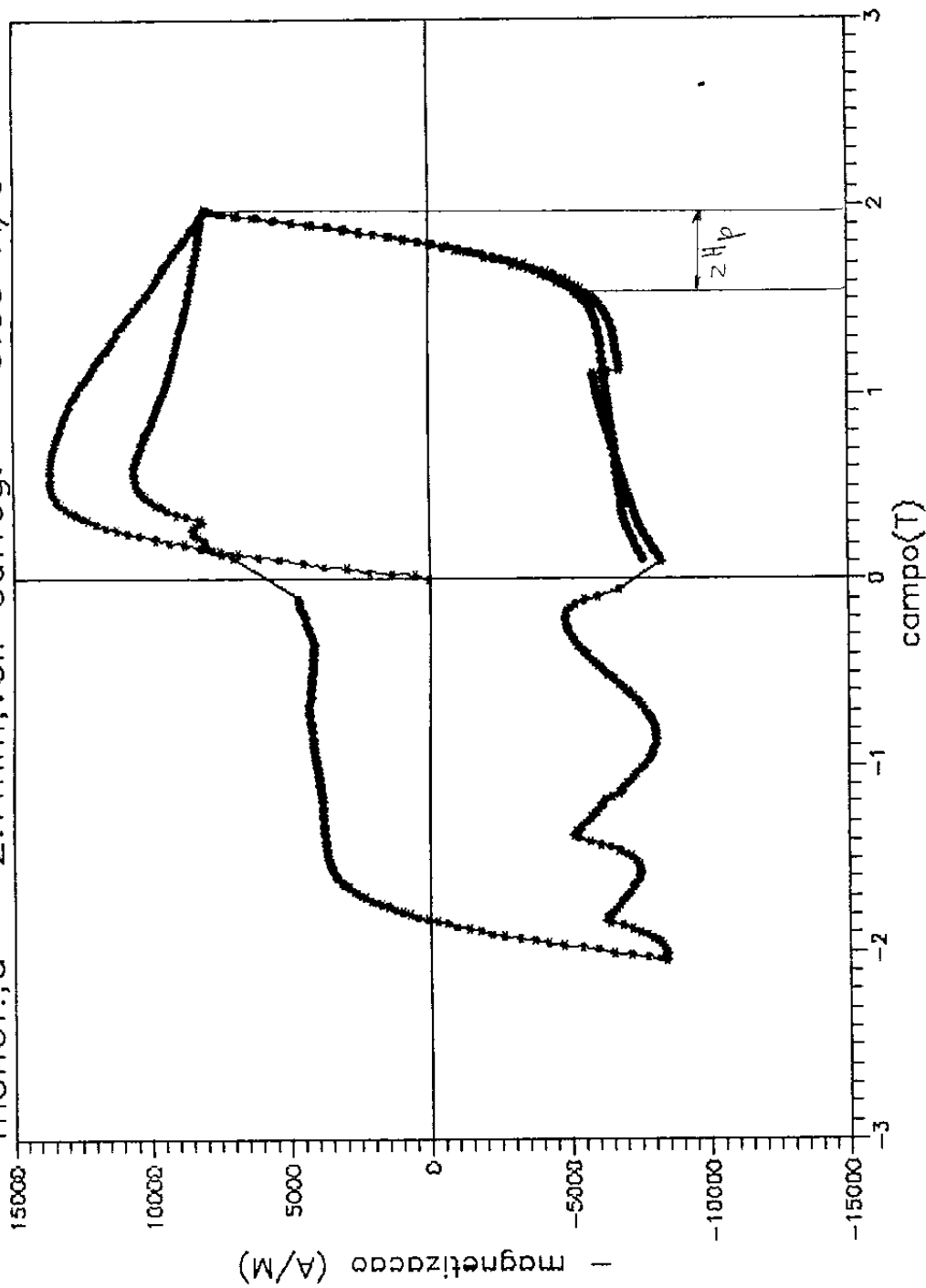


GRÁFICO 17

-Magnetização (A/m) versus campo (T) para o monofilamento modificado

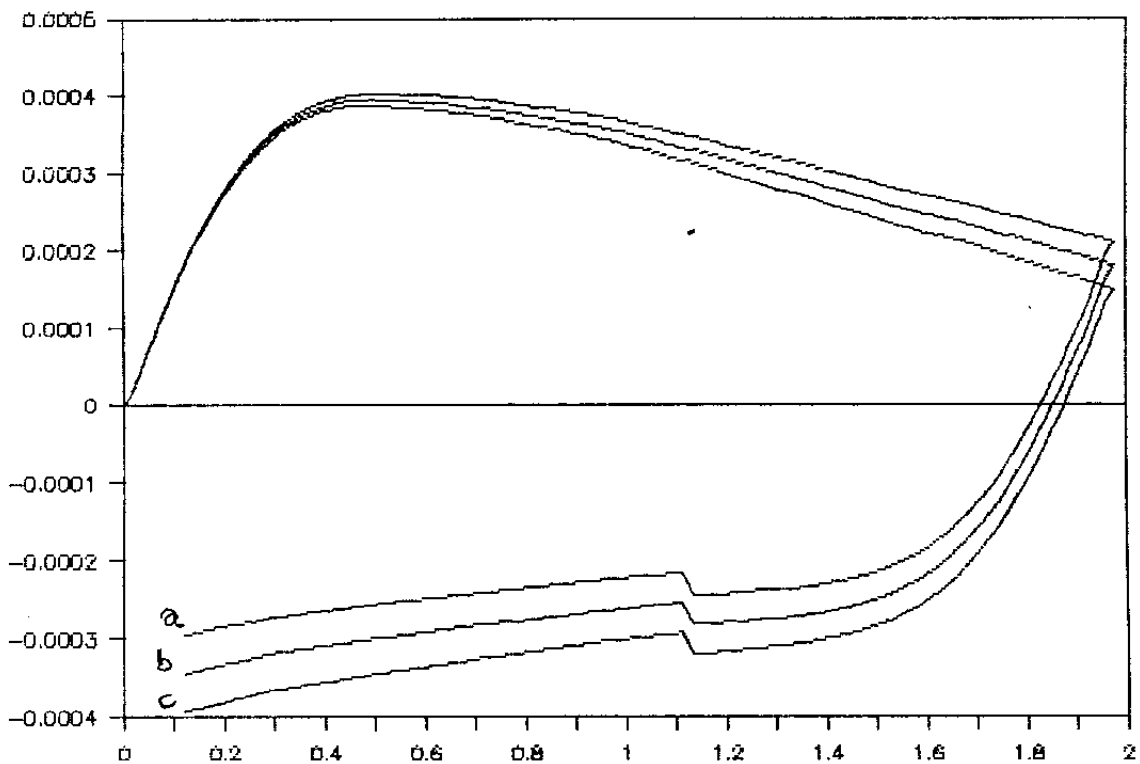


GRÁFICO 18

-Magnetização (u.a) versus campo (T) para o monofilamento,
 velocidade carregamento = 0,83 A/s: 1º semi-ciclo

curva a: ídem à curva 17

curvas b e c: resultantes a partir de acréscimos de 10% e 20%
 respectivamente, aos valores adicionados aos dados de
 susceptibilidade que geraram a curva 17.

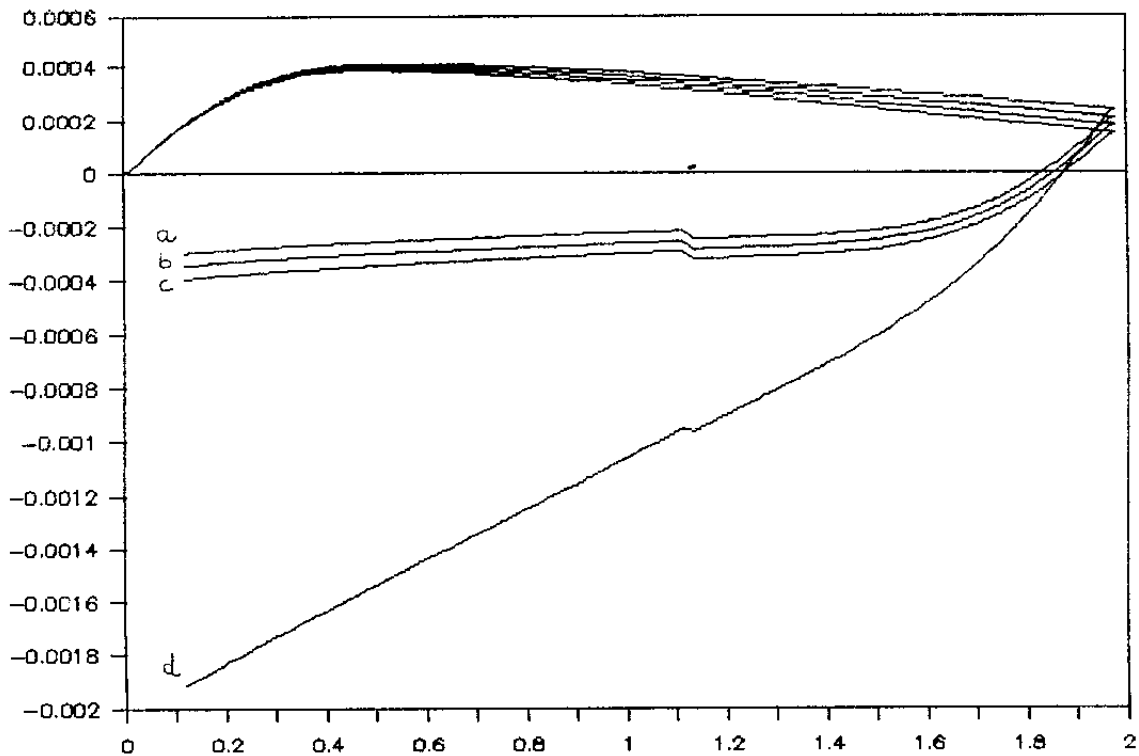


GRÁFICO 19

-Magnetização (u.a.) versus campo (T) para o monofilamento,
 velocidade carregamento = 0,83 A/s: 1º semi-ciclo.

curva a: ídem à curva 17.

curvas b, c e d: resultantes a partir dos acréscimos de 10% , 20%
 e 30% respectivamente, aos valores adicionados aos dados
 susceptibilidade que geraram a curva 17.

df = 90 μm ; vel. carreg. = 0.83 A/s

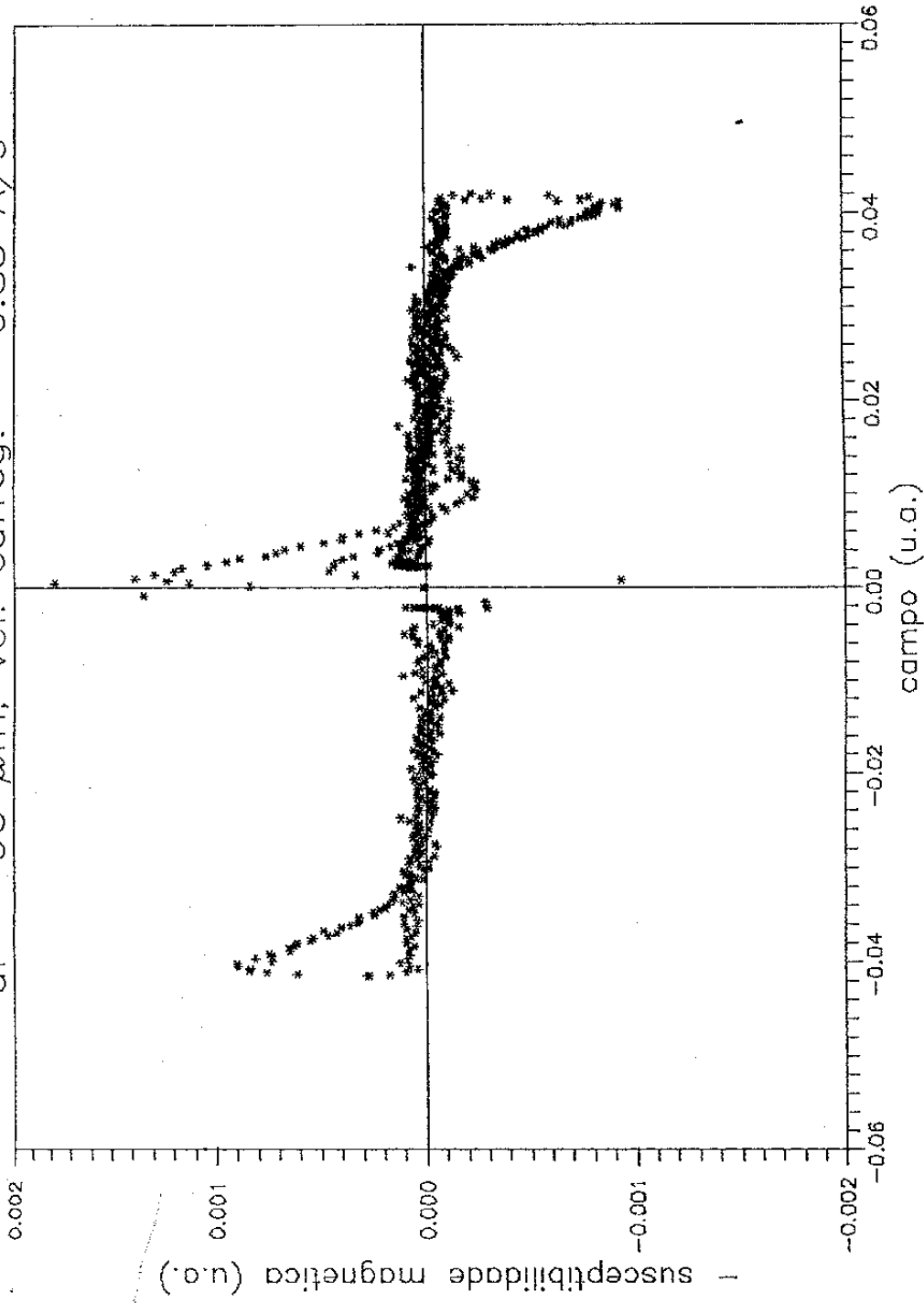


GRÁFICO 20

-Susceptibilidade (u.a.) versus campo (u.a.) para $df = 90 \mu\text{m}$

df = 90 μm ; vel. carreg. = 0.83 A/s

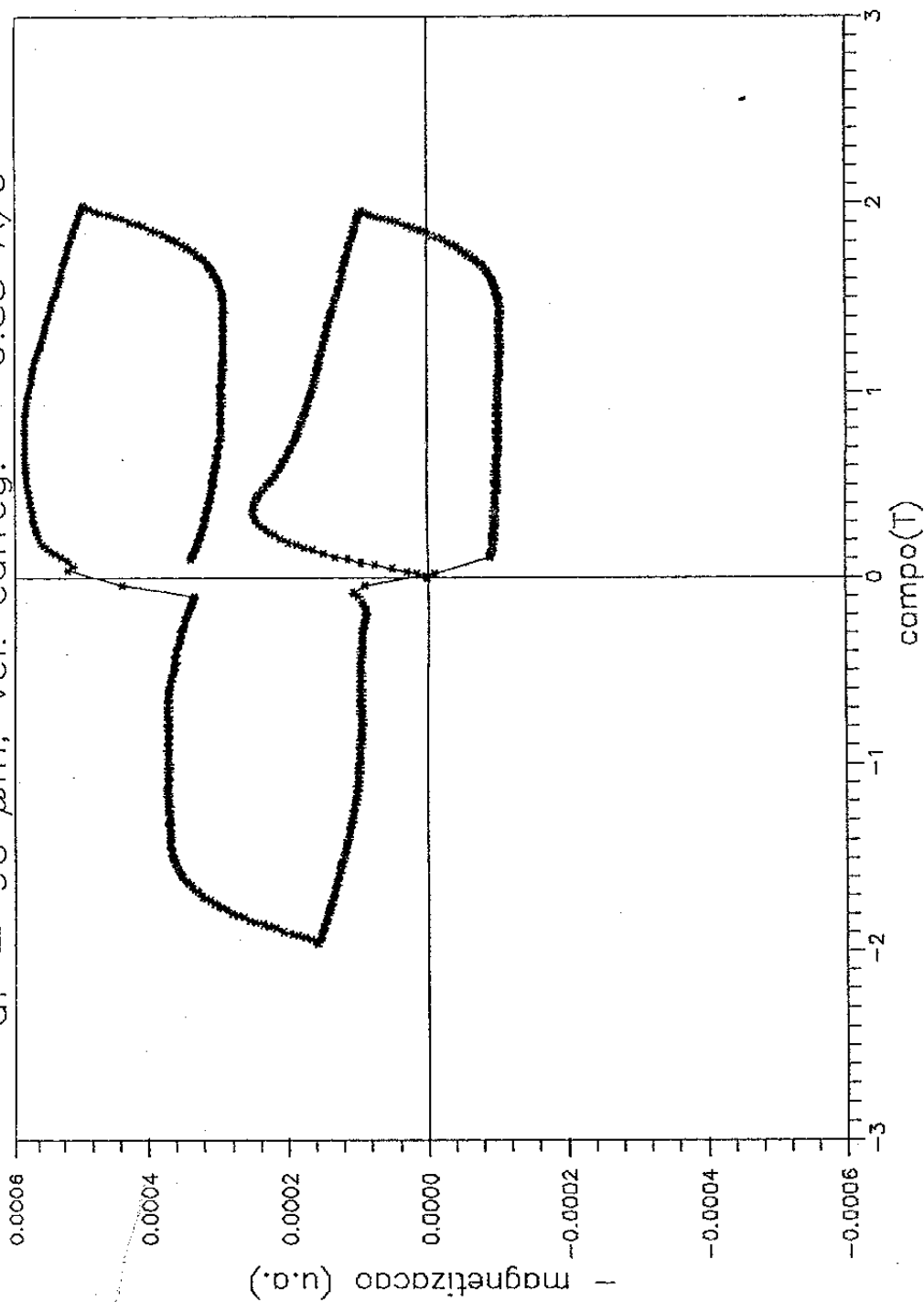


GRÁFICO 21

-Magnetização (u.a.) versus campo (T) para df = 90 μm

df = 90 μm : vel. carreg. = 0.83 A/s

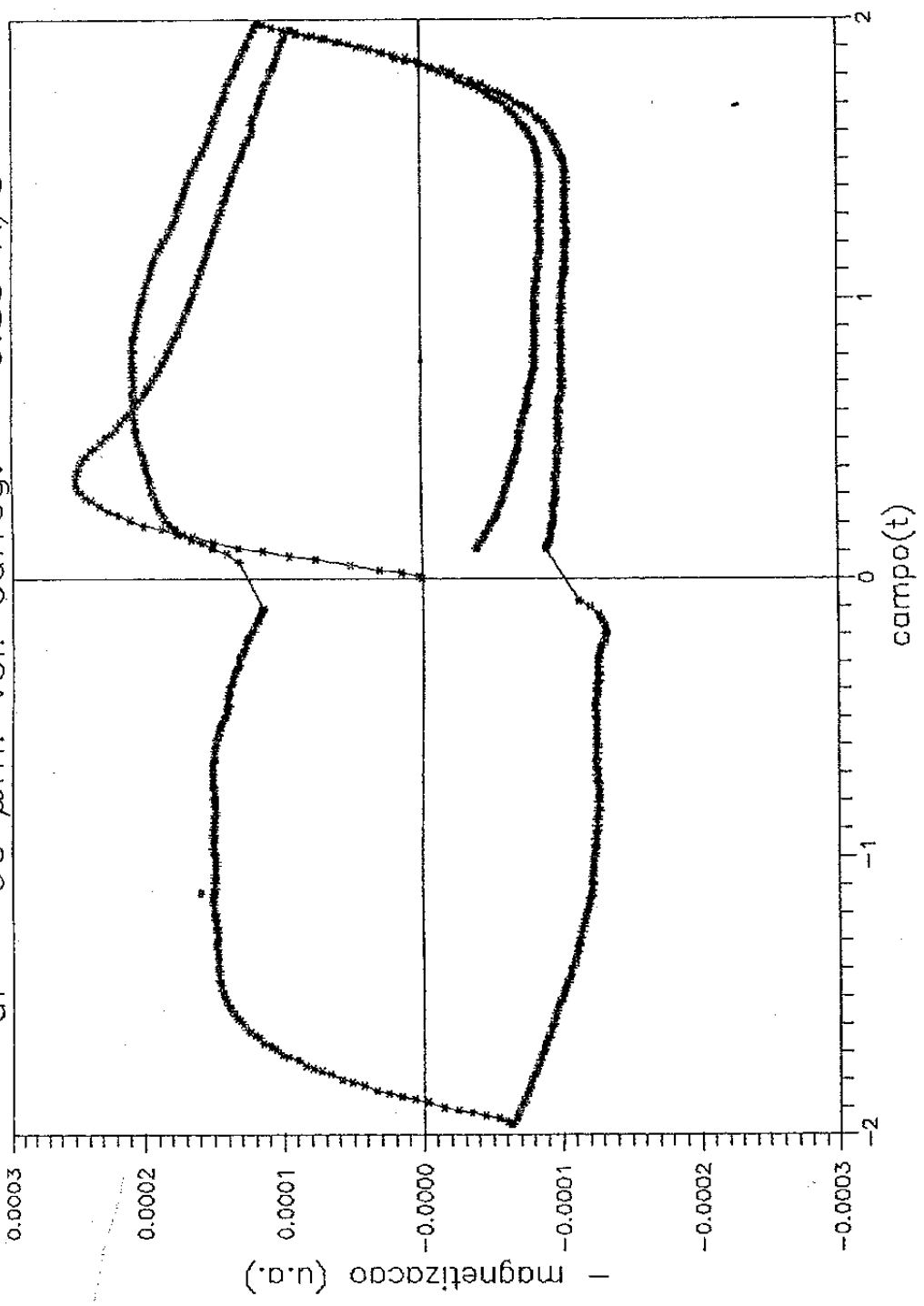


GRÁFICO 22

→ Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 90\mu\text{m}$
com efeito de chaveamento removido

df = 90 μm ; vel. carreg. = 0.83 A/s

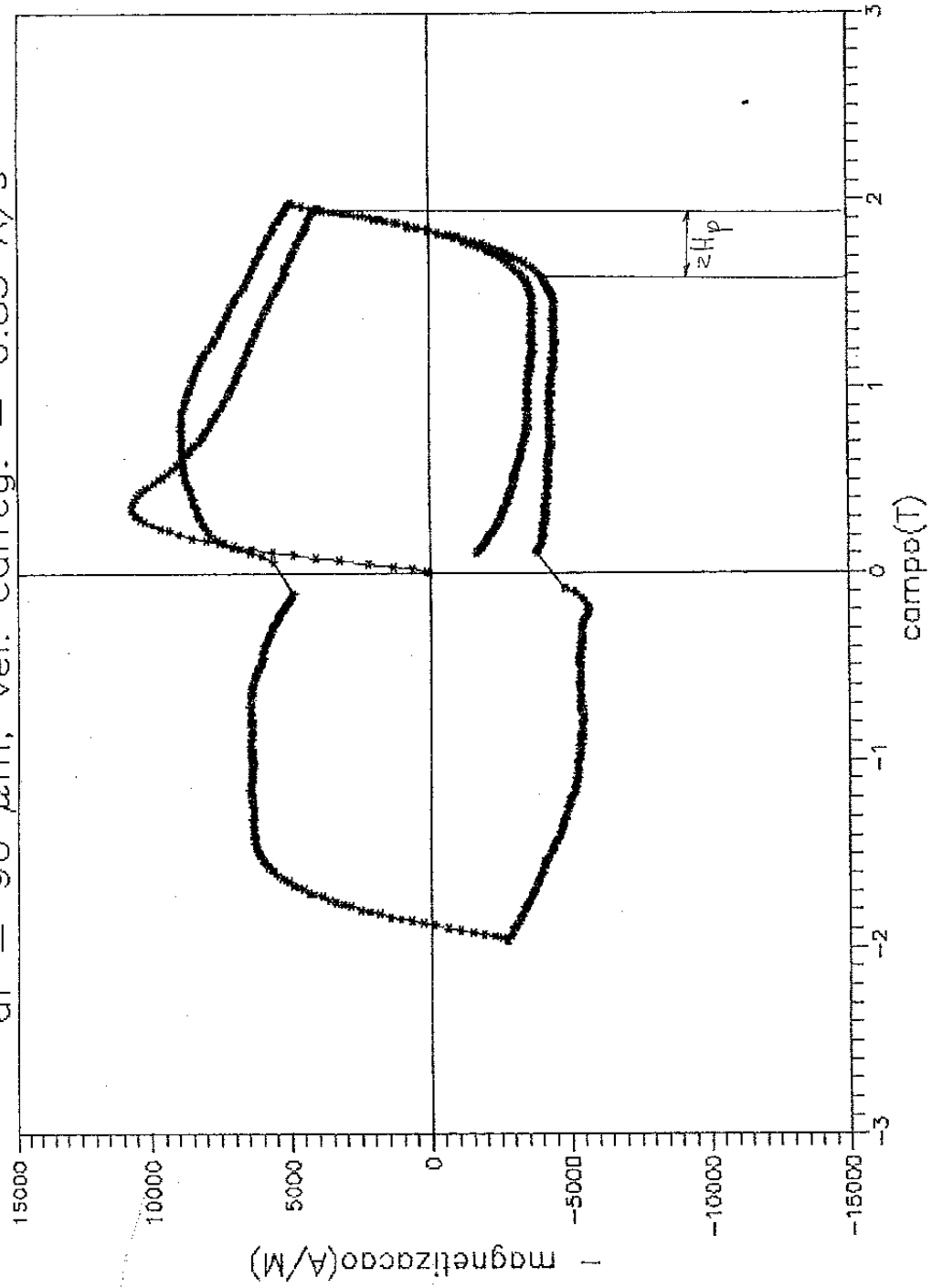


GRÁFICO 23

-Magnetização (A/m) versus campo (T) para $df = 90 \mu\text{m}$ com efeito de chaveamento removido

df = 40 μm ; vel. carreg. = 0.83 A/s

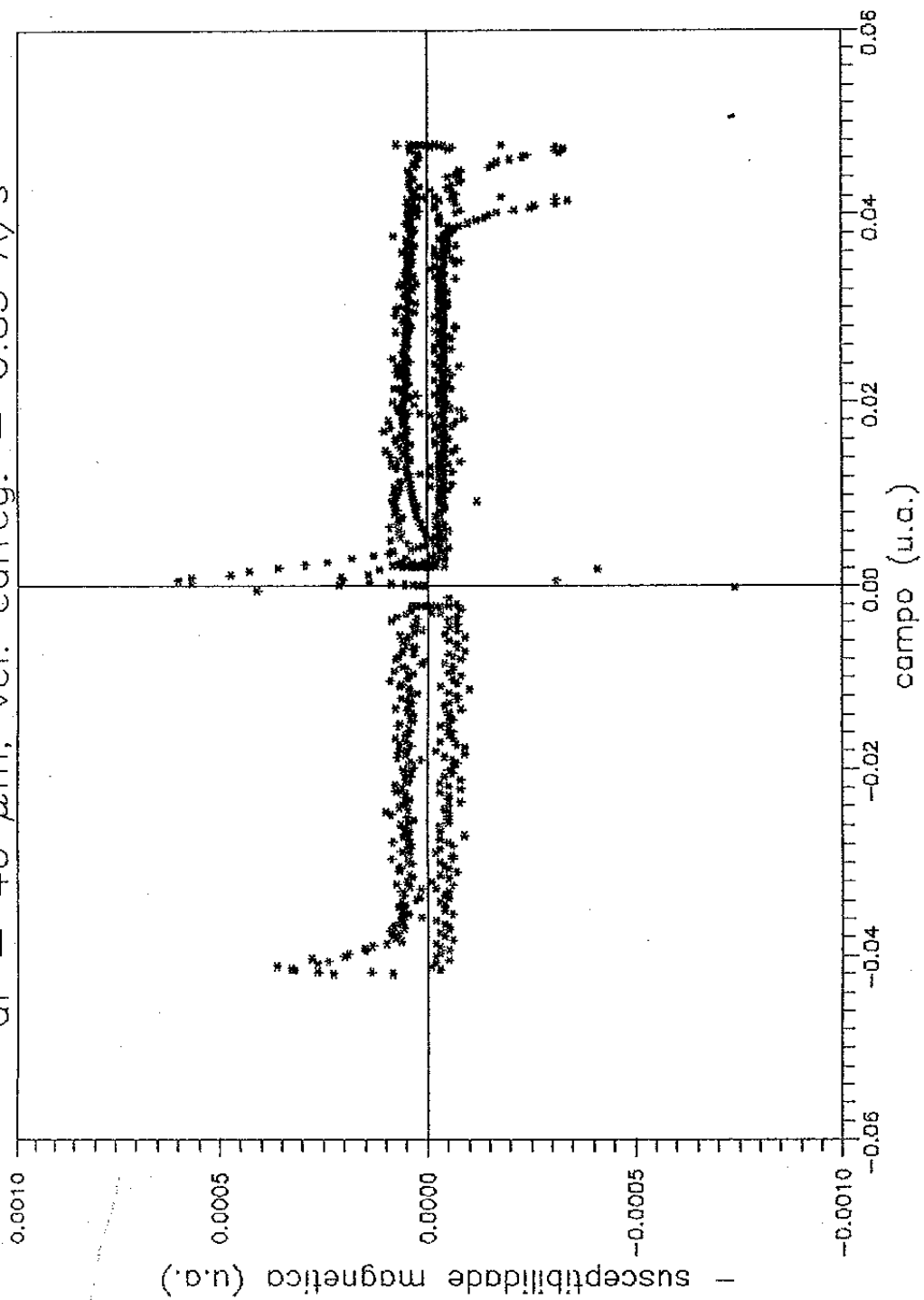


GRÁFICO 24

--Susceptibilidade (u.a.) versus campo (u.a.) para $df = 40 \mu\text{m}$

df = 40 μm ; vel. corrig. = 0.83 A/s

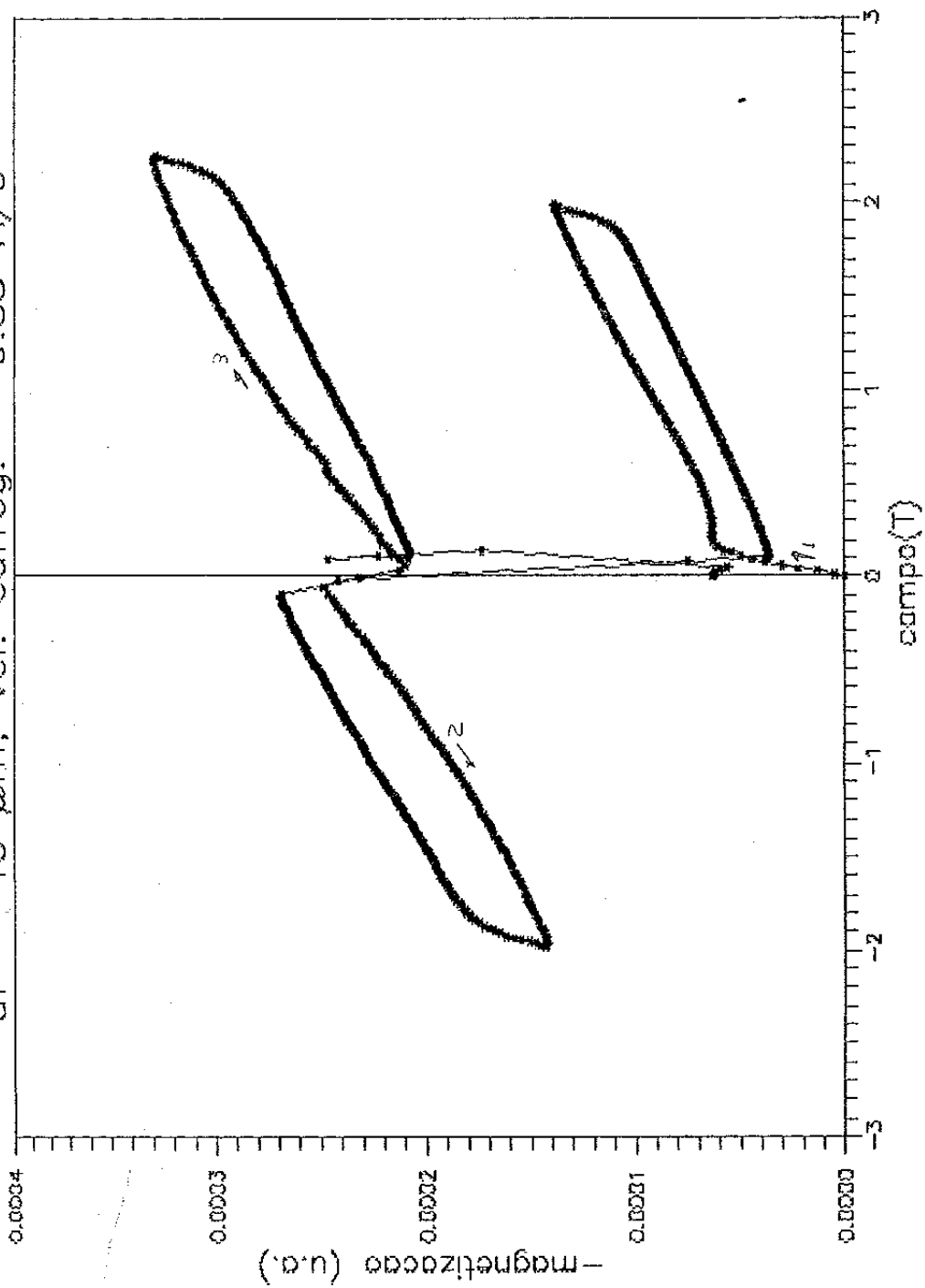


GRÁFICO 25

-Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 40 \mu\text{m}$

df = 40 μm ; vel. carreg. = 0.83 A/s

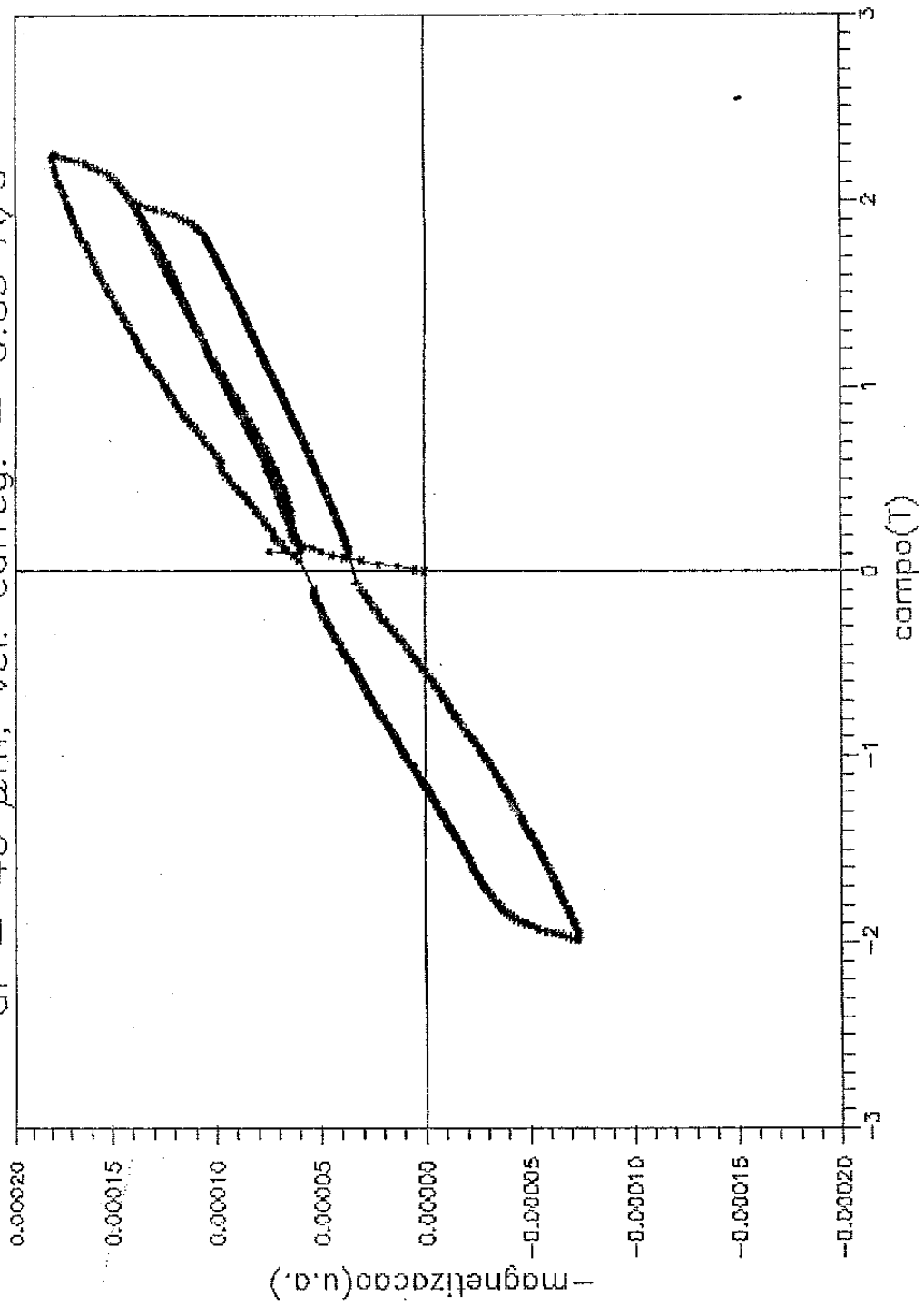


GRÁFICO 26

--Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 40 \mu\text{m}$ com efeito de chaveamento removido

df = 40 μ m; vel. carreg. = 0.83 A/s

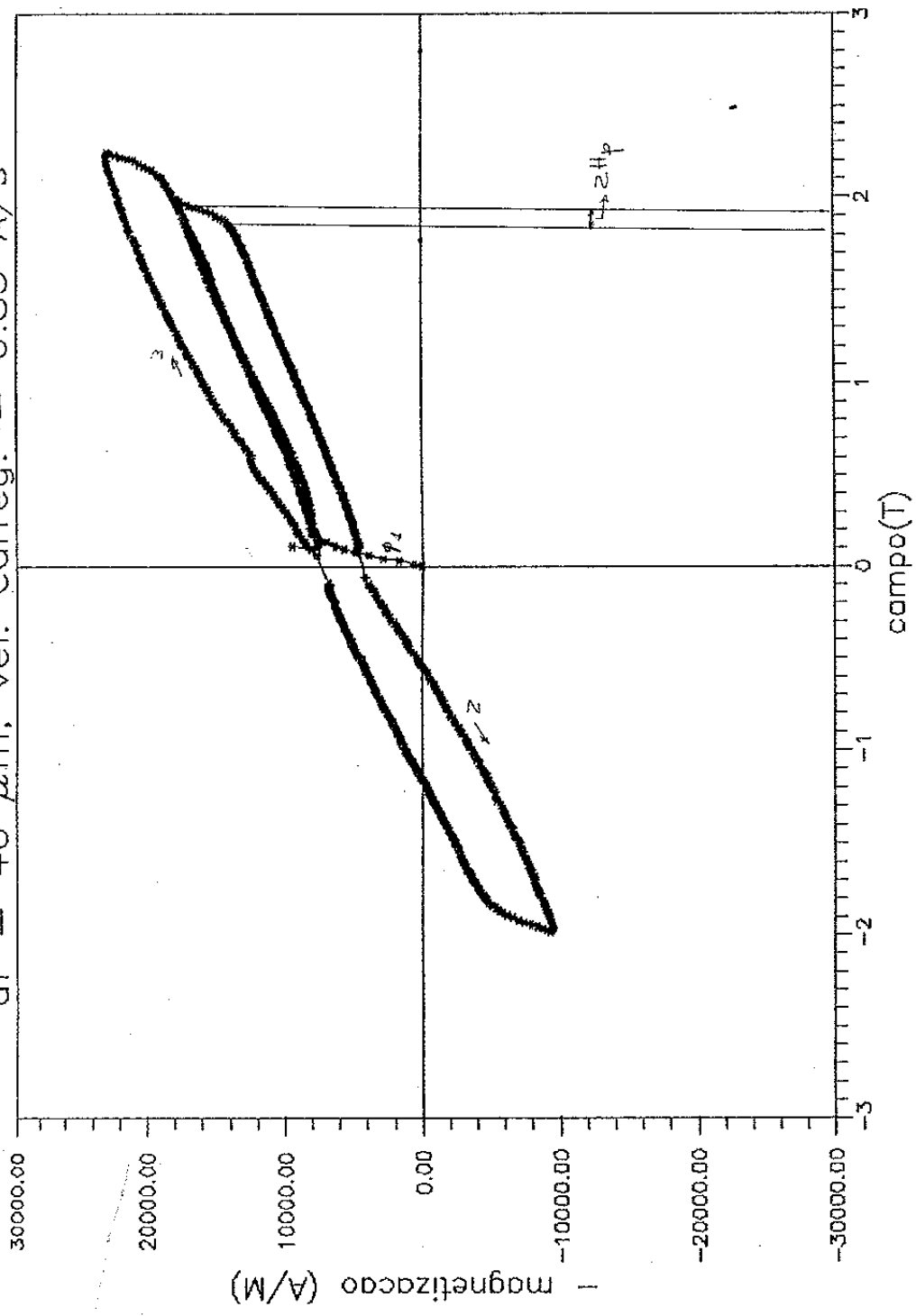


GRÁFICO 27

-Magnetização (A/m) versus campo (T) para $df = 40 \mu\text{m}$ com efeito de chaveamento removido

df = 40 μm ; vel. carreg. = 0.83 A/s

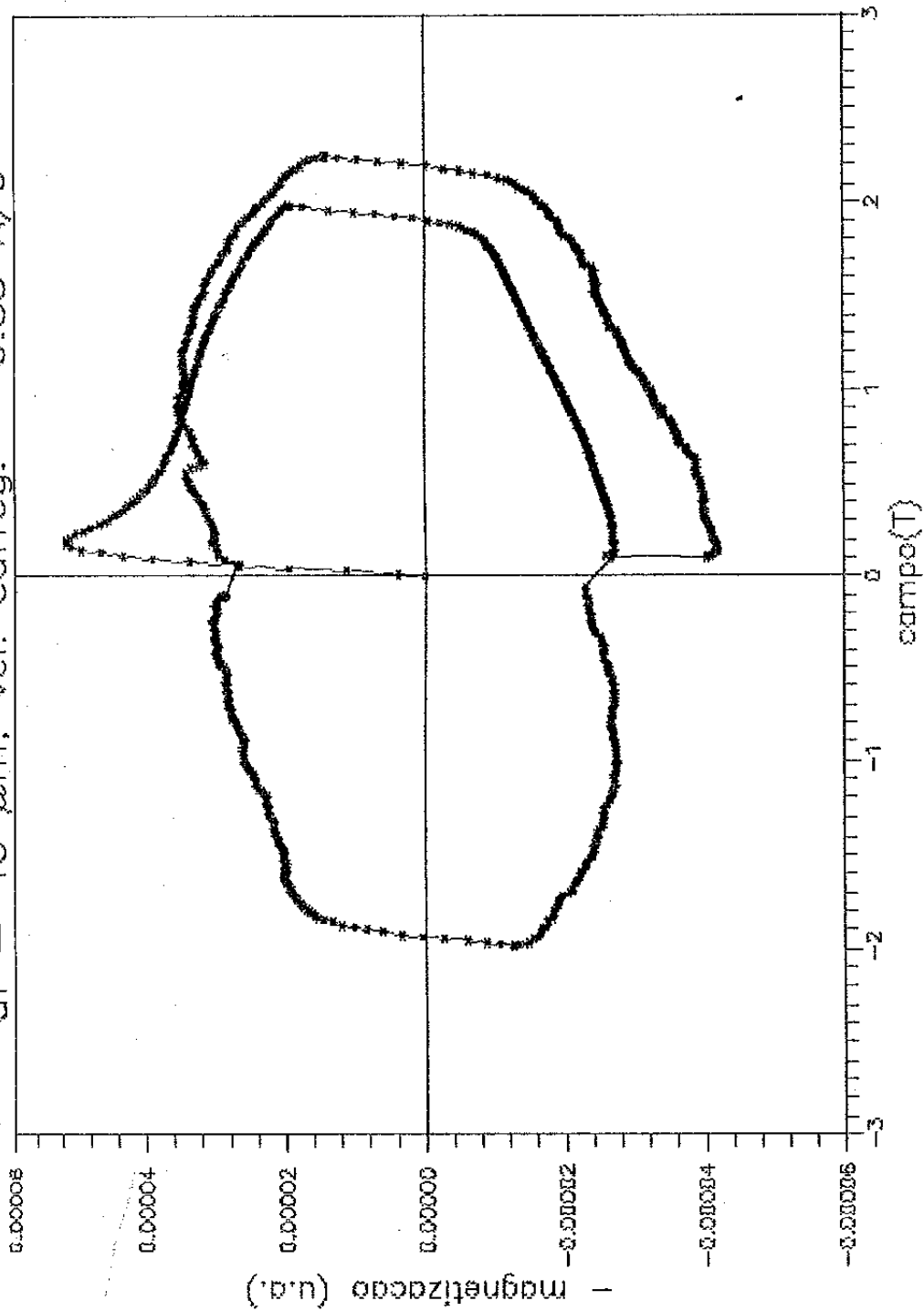


GRÁFICO 28

-Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 40\mu\text{m}$; modificado

df = 40 μm ; vel. carreg. = 0.83 A/s

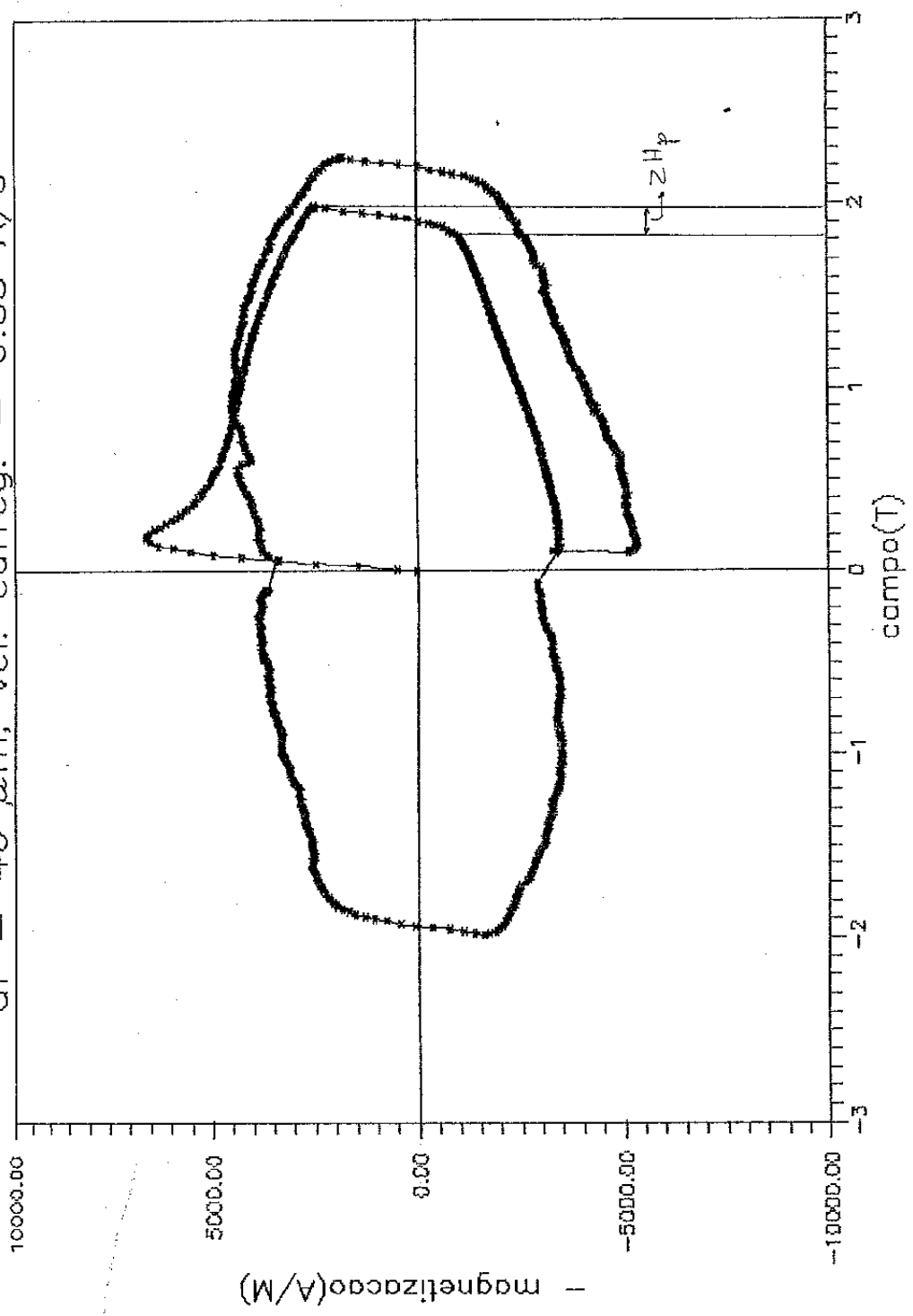


GRÁFICO 29

- Magnetização (A/m) versus campo (T) para $df = 40 \mu\text{m}$; modificado

df = 0.6 μ m; vel. carreg. = 0.83 A/s

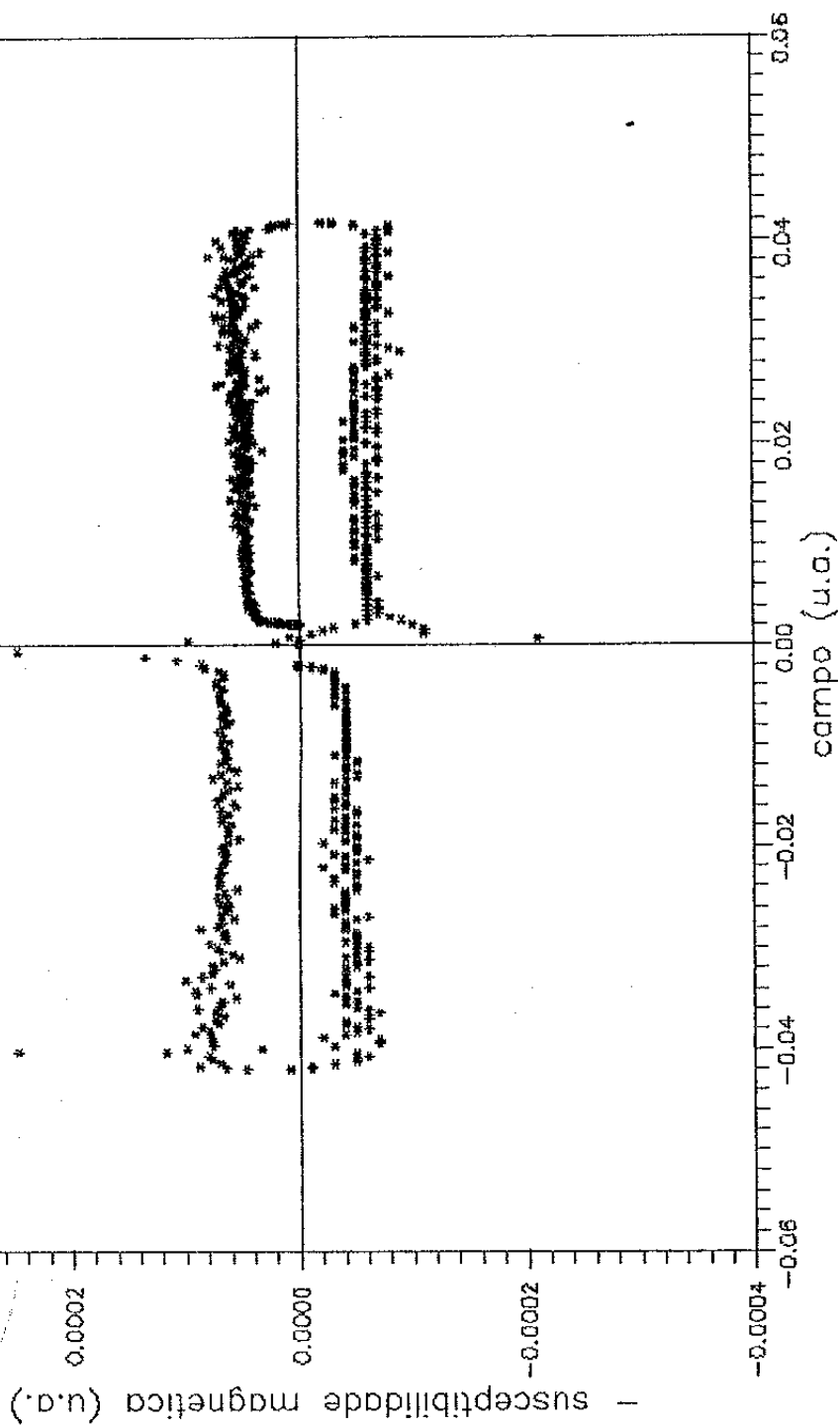


GRÁFICO 30

-Susceptibilidade (u.a.) versus campo (u.a.) para $df = 0,6 \mu\text{m}$

df = 0,6 μ m; vel. carreg. = 0,83 A/s

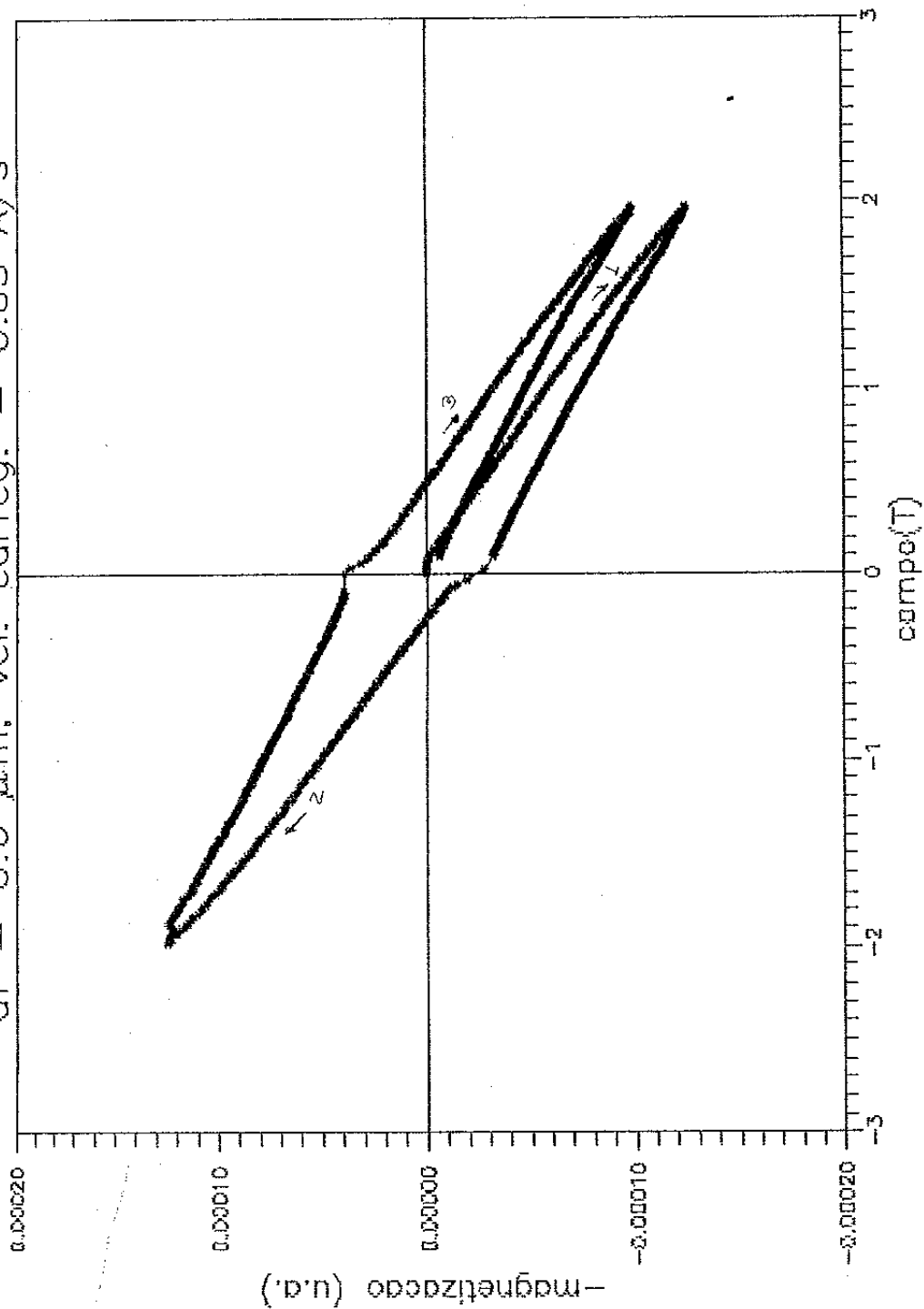


GRÁFICO 31

--Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 0,6 \mu$ m

df = 0.6 μm ; vel. carreg. = 0.83 A/s

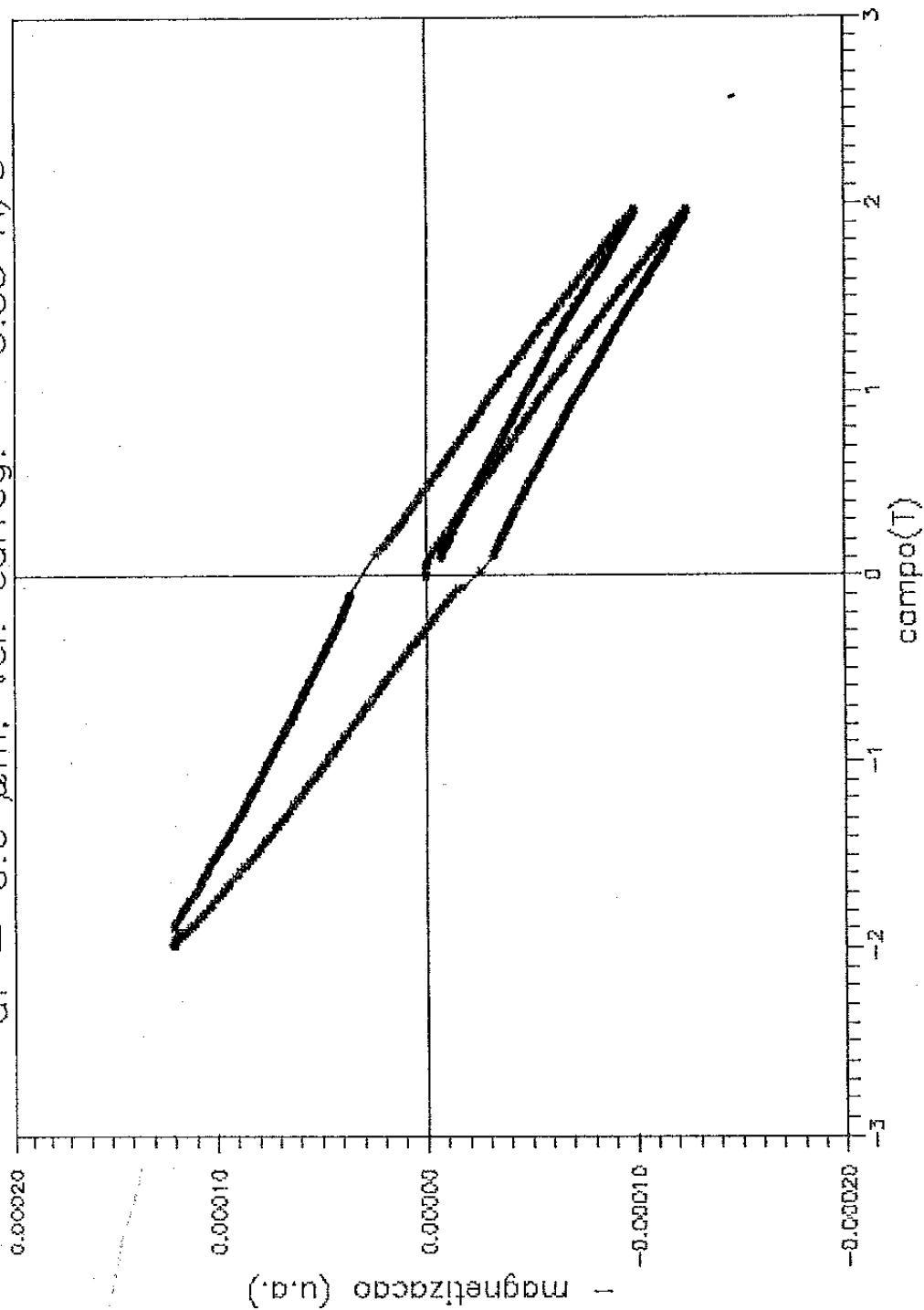


GRÁFICO 32

—Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 0,6 \mu\text{m}$ com efeito de chaveamento removido

df = 0.6 μm; vel. carreg. = 0.83 A/s

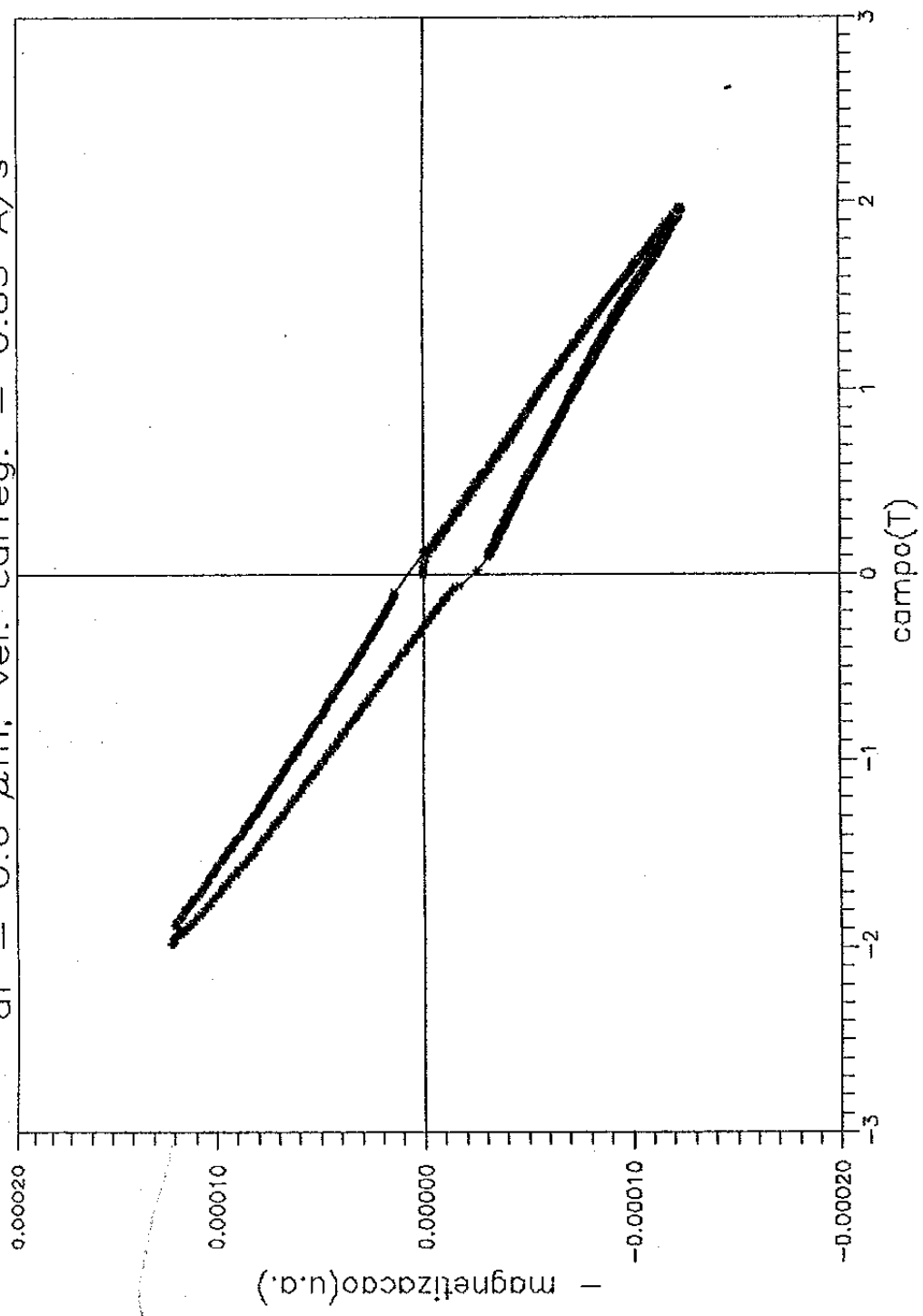


GRÁFICO 33

-Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 0,6 \mu\text{m}$; modificado

df = 0.6 μm; vel. carreg. = 0.83 A/s

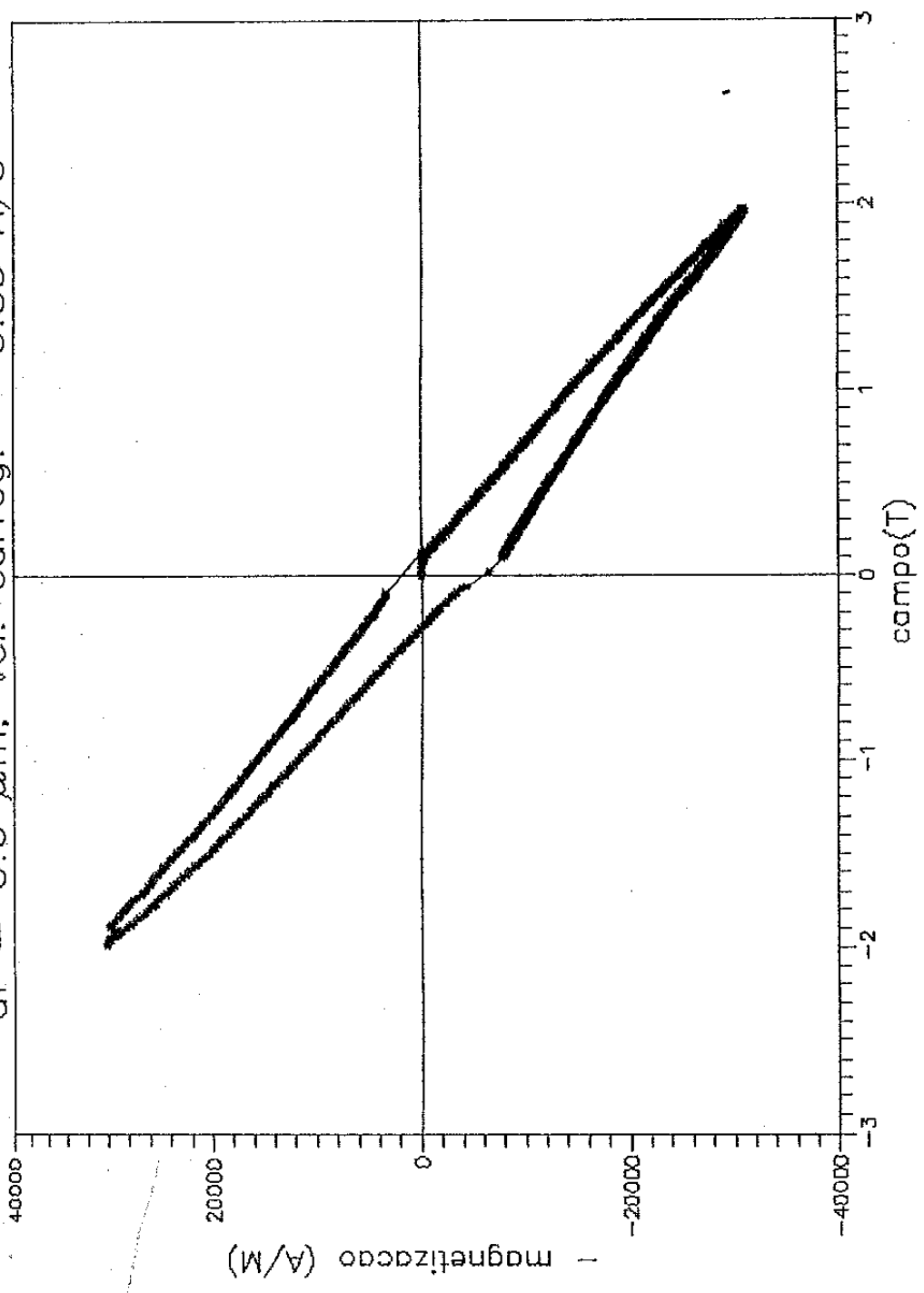


GRÁFICO 34

-Magnetização (u.a.) versus campo (T) para df = 0,6 μm; modificado

níquel; vel. carreg. = 1.67 A/s

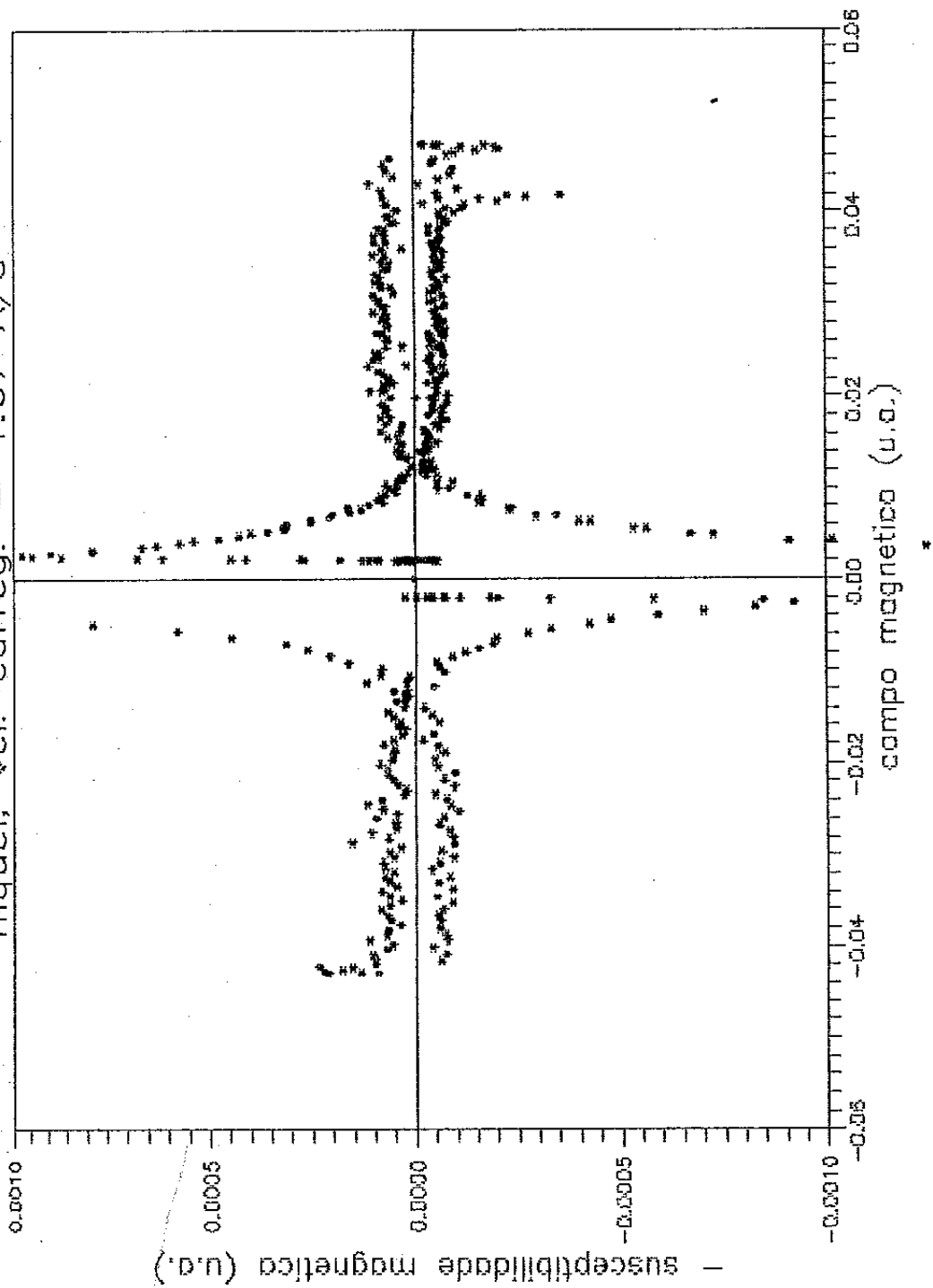


GRÁFICO 35

-Susceptibilidade (u.a.) versus campo (u.a.) para o níquel

níquel; vel. carreg. = 1.67 A/s

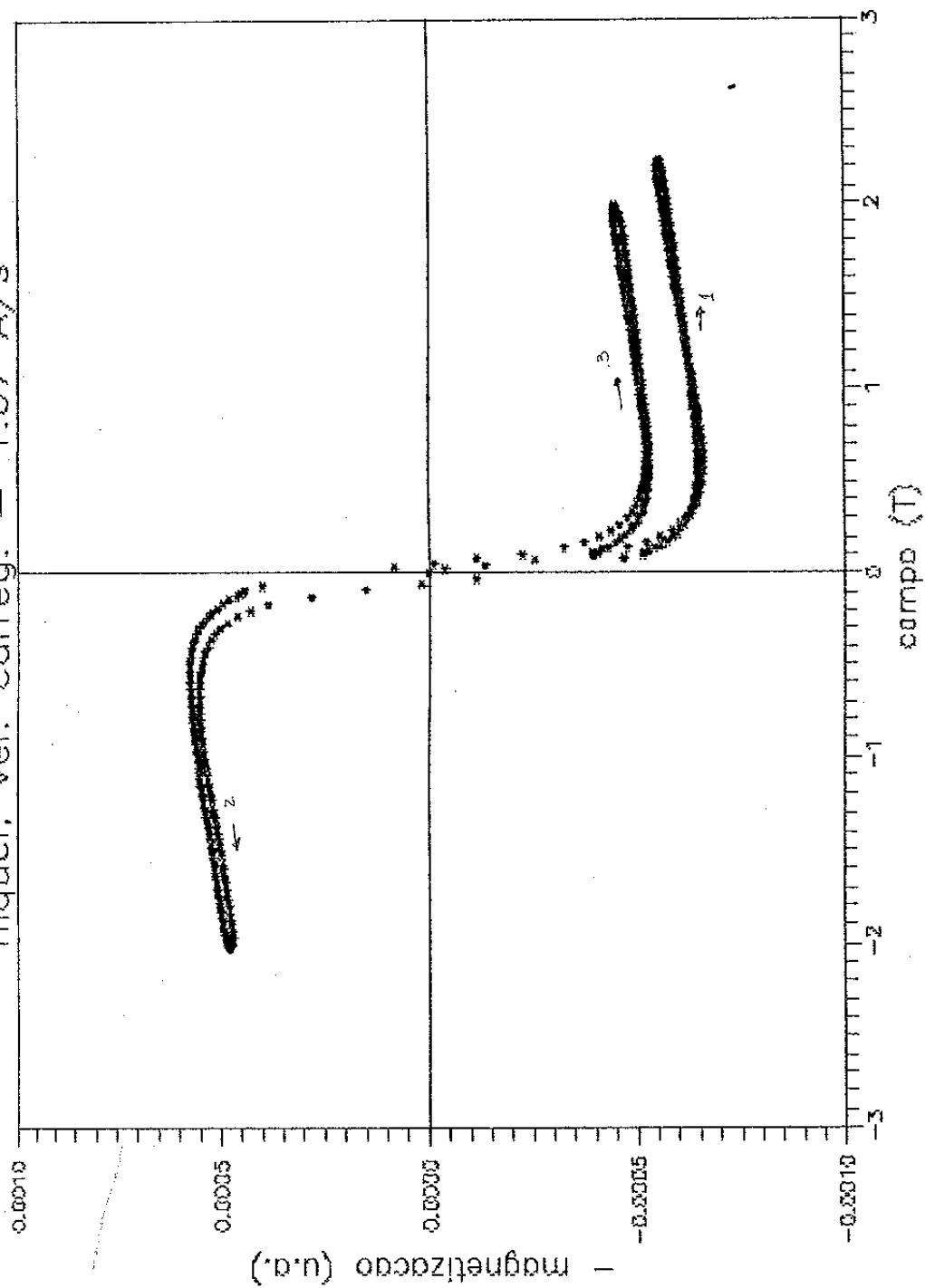


GRÁFICO 36

- Magnetização (u.a.) versus campo (T) para o níquel

níquel; vel. carreg. = 1.67 A/s

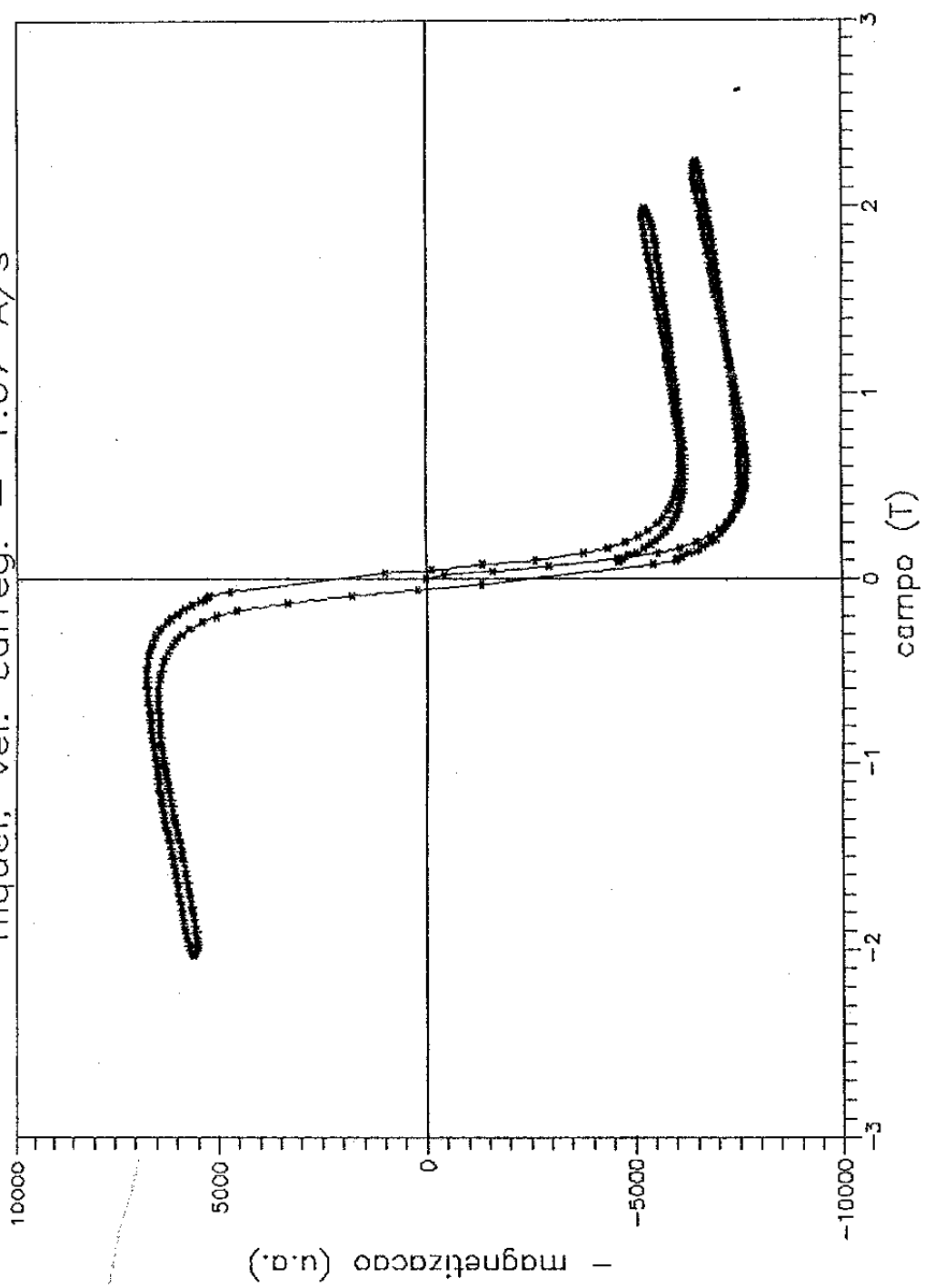


GRÁFICO 37

--Curva de magnetização (u.a.) versus campo (T) para o níquel a partir da qual foi feita a calibração do sistema

monof.: d = 2.7 mm; vel. carreg. = 1.67 A/s

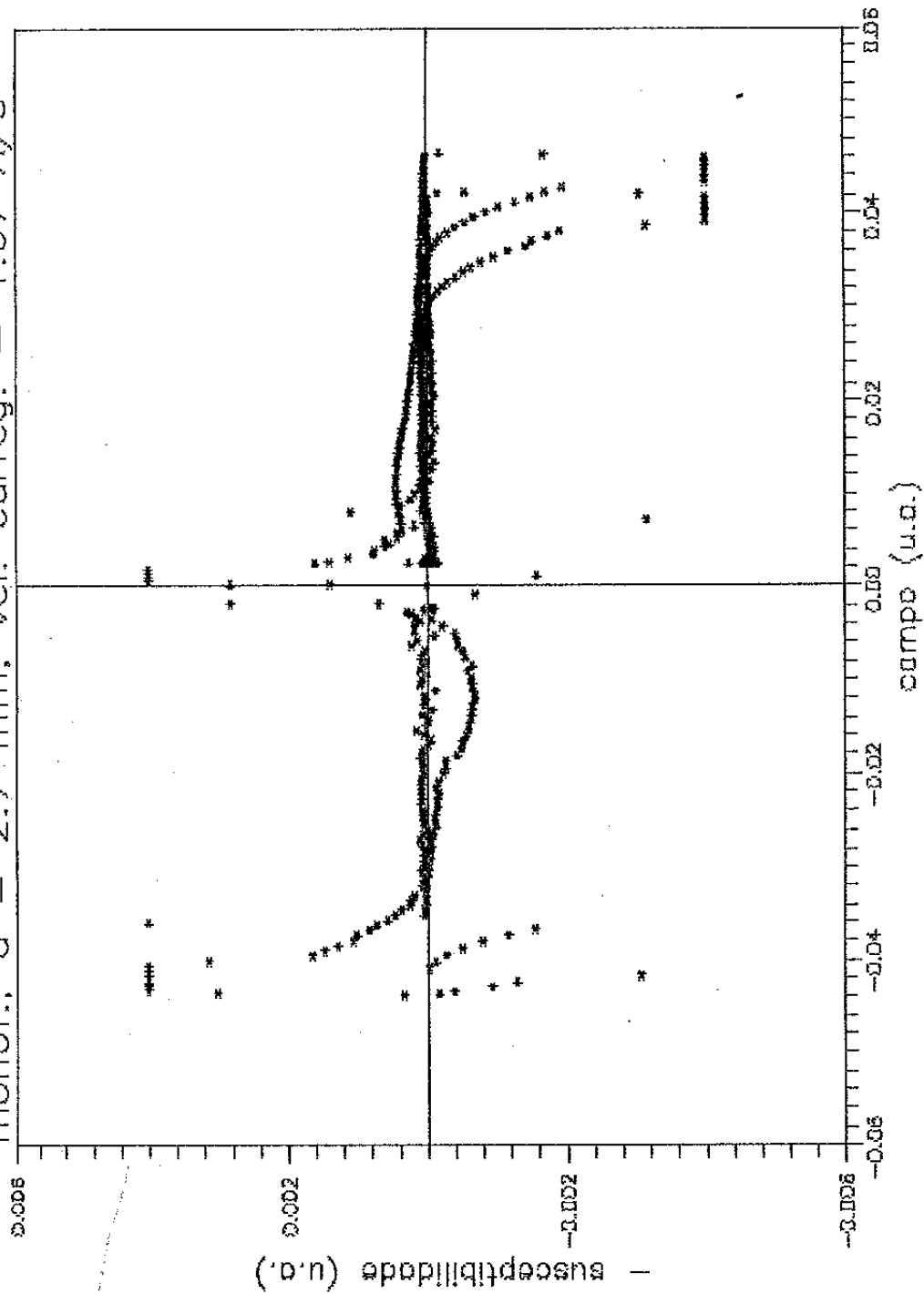


GRÁFICO 38

- Susceptibilidade (u.a.) versus campo (u.a.) para o monofilamento

monof.: d = 2.7 mm; vel. carreg. = 1.67 A/s

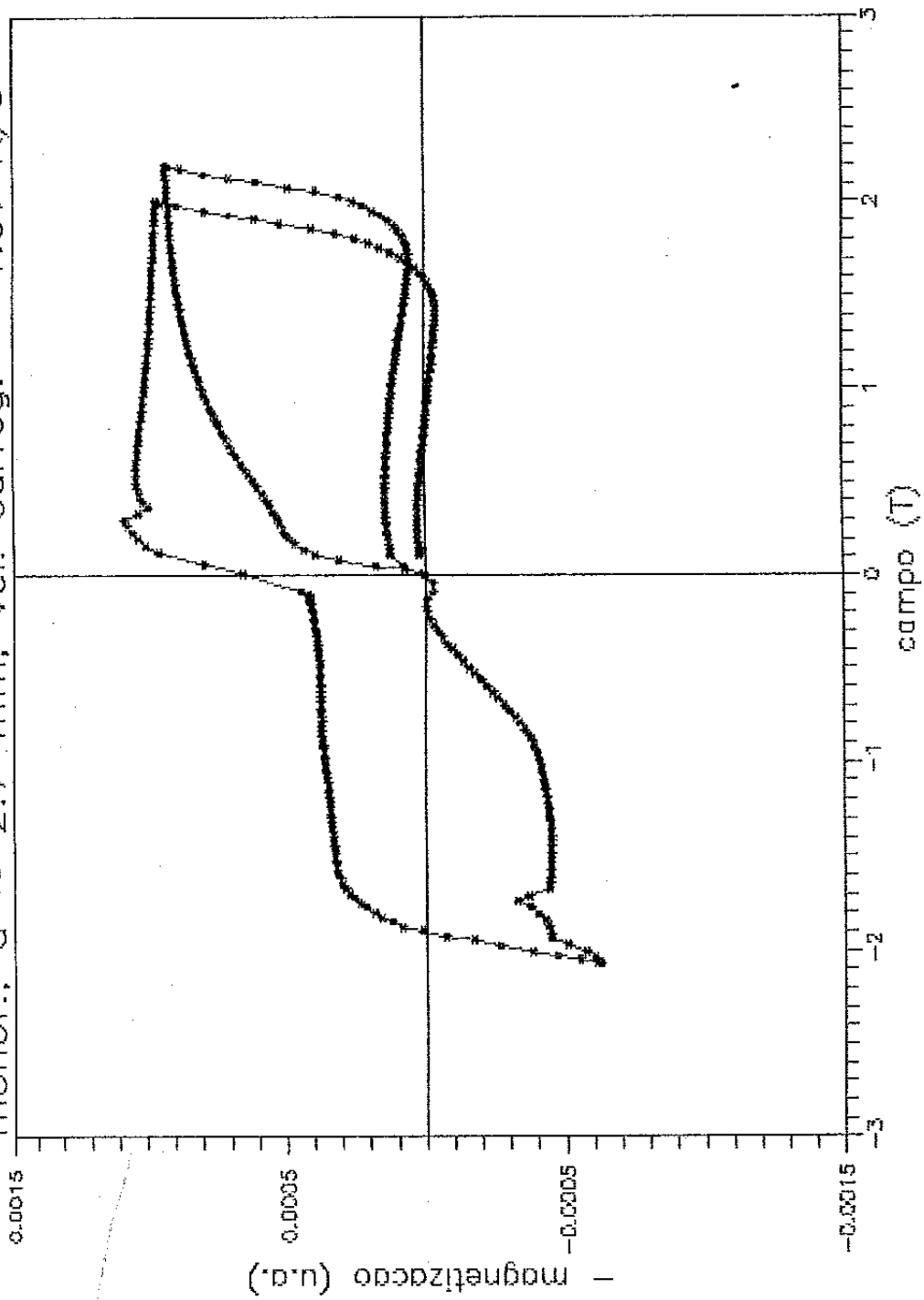


GRÁFICO 39

-Magnetização (u.a.) versus campo (T) para o monofilamento

monof.; d = 2.7 mm; vel. carreg. = 1.67 A/s

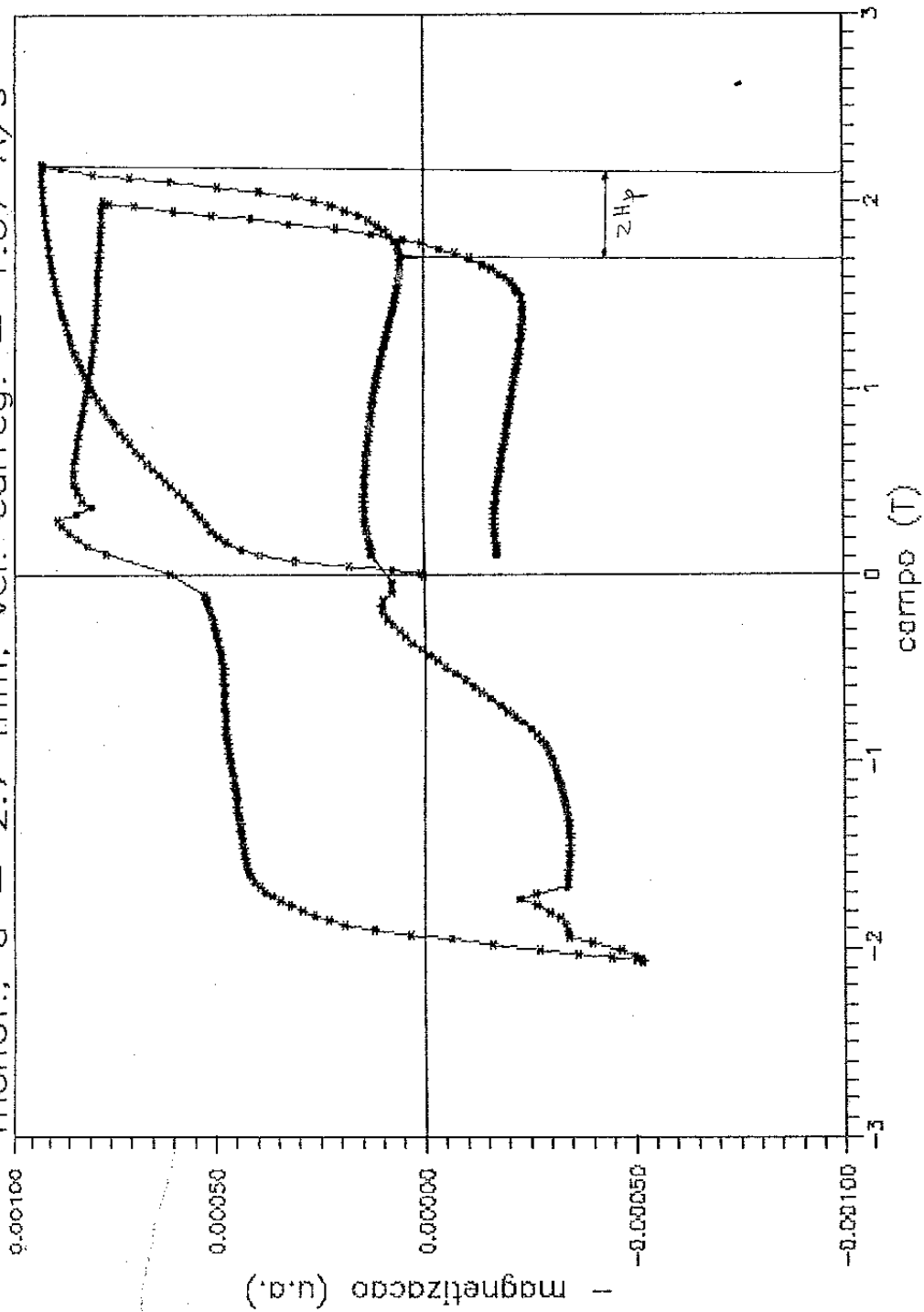


GRÁFICO 40

--Magnetização (u.a.) versus campo (T) para o monofilamento
com efeito de chaveamento removido

monof.; d = 2.7mm; vel. carreg. = 1.67 A/s

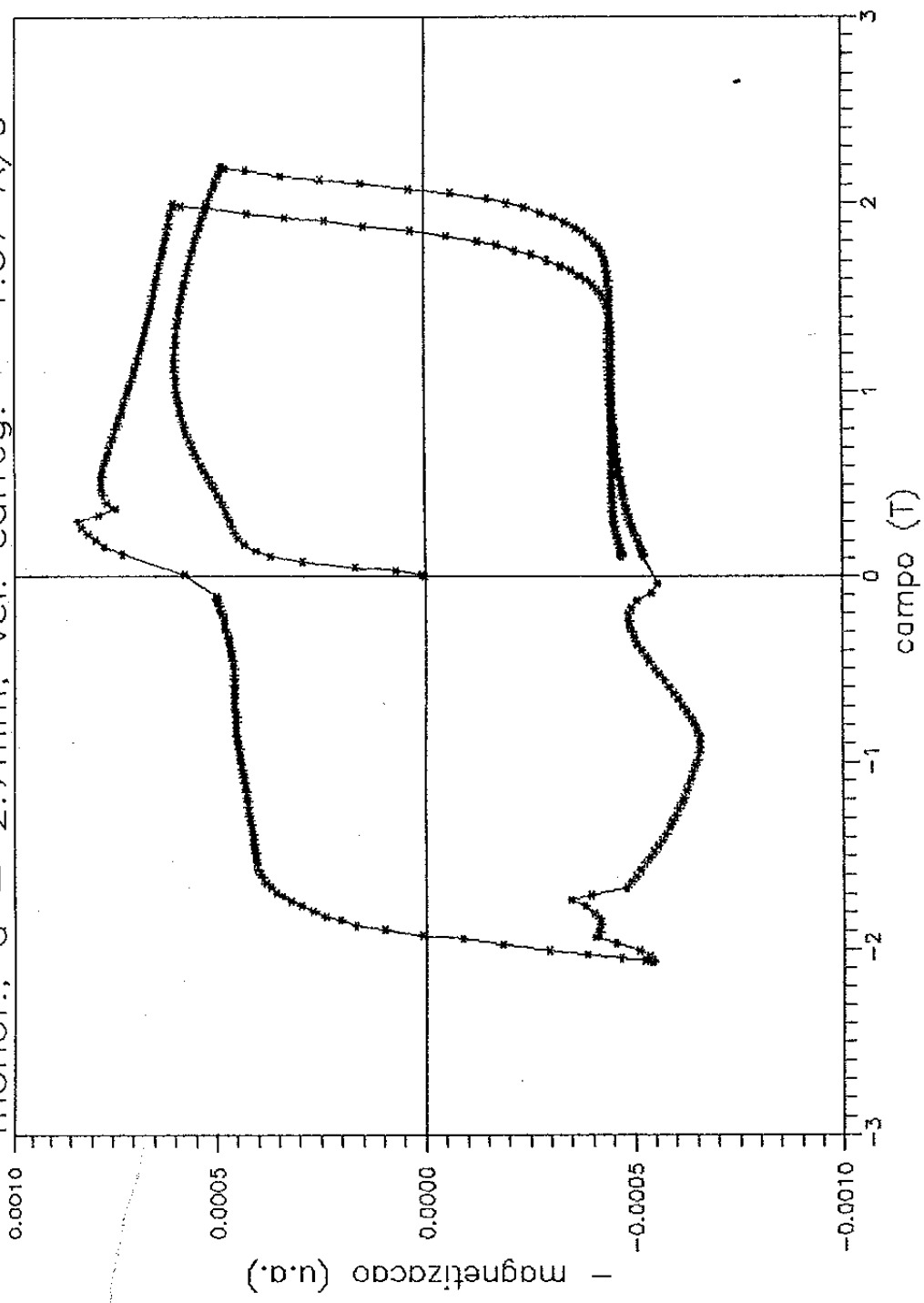


GRÁFICO 41

- Magnetização (u.a.) versus campo (T) para o monofilamento;
modificado

monof.; $d = 2.7\text{mm}$; vel. carreg. = 1.67 A/s

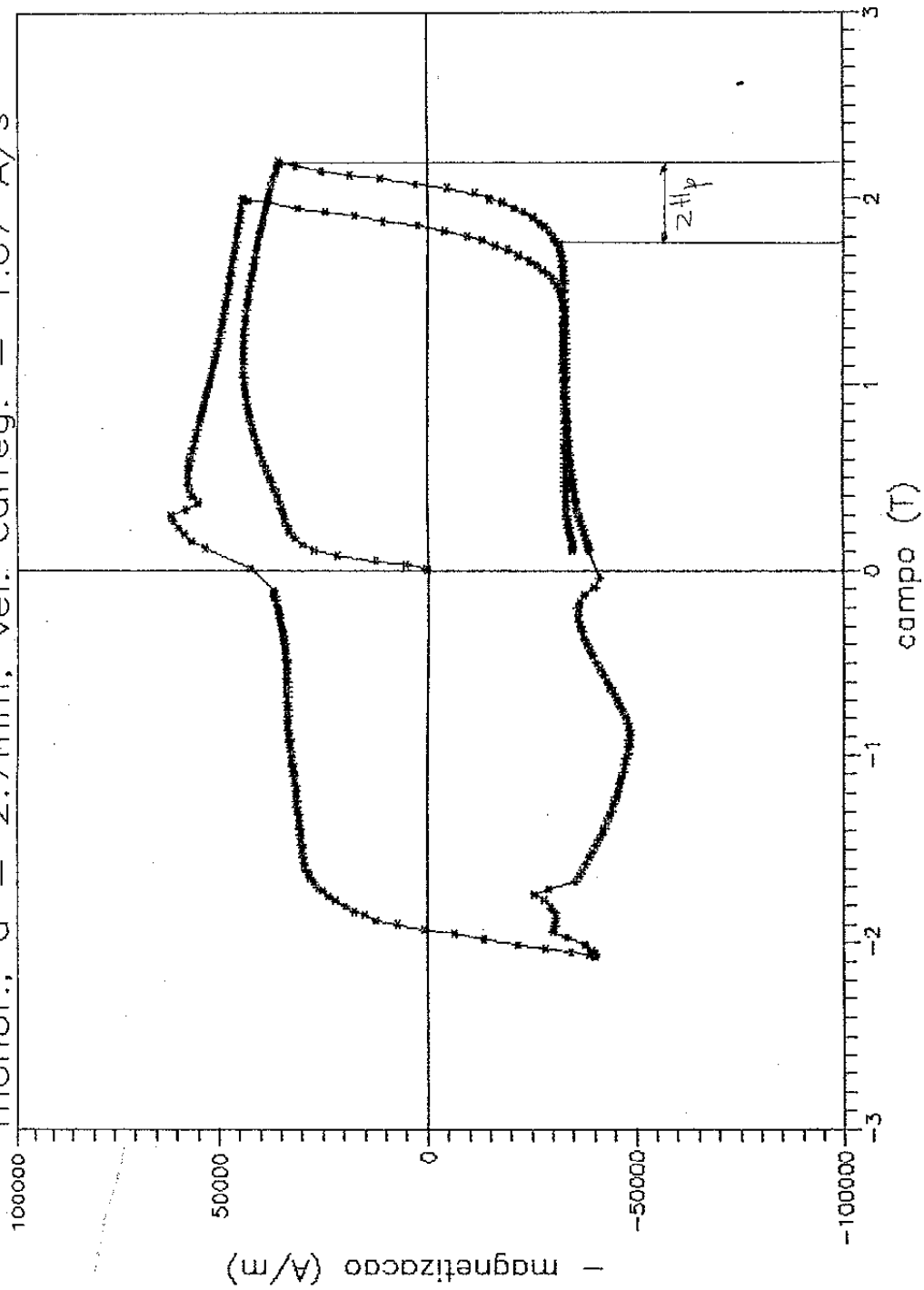


GRÁFICO 42

-Magnetização (A/m) versus campo (T) para o monofilamento;
modificado

df = 90 μm ; vel.carreg. = 1.67 A/s

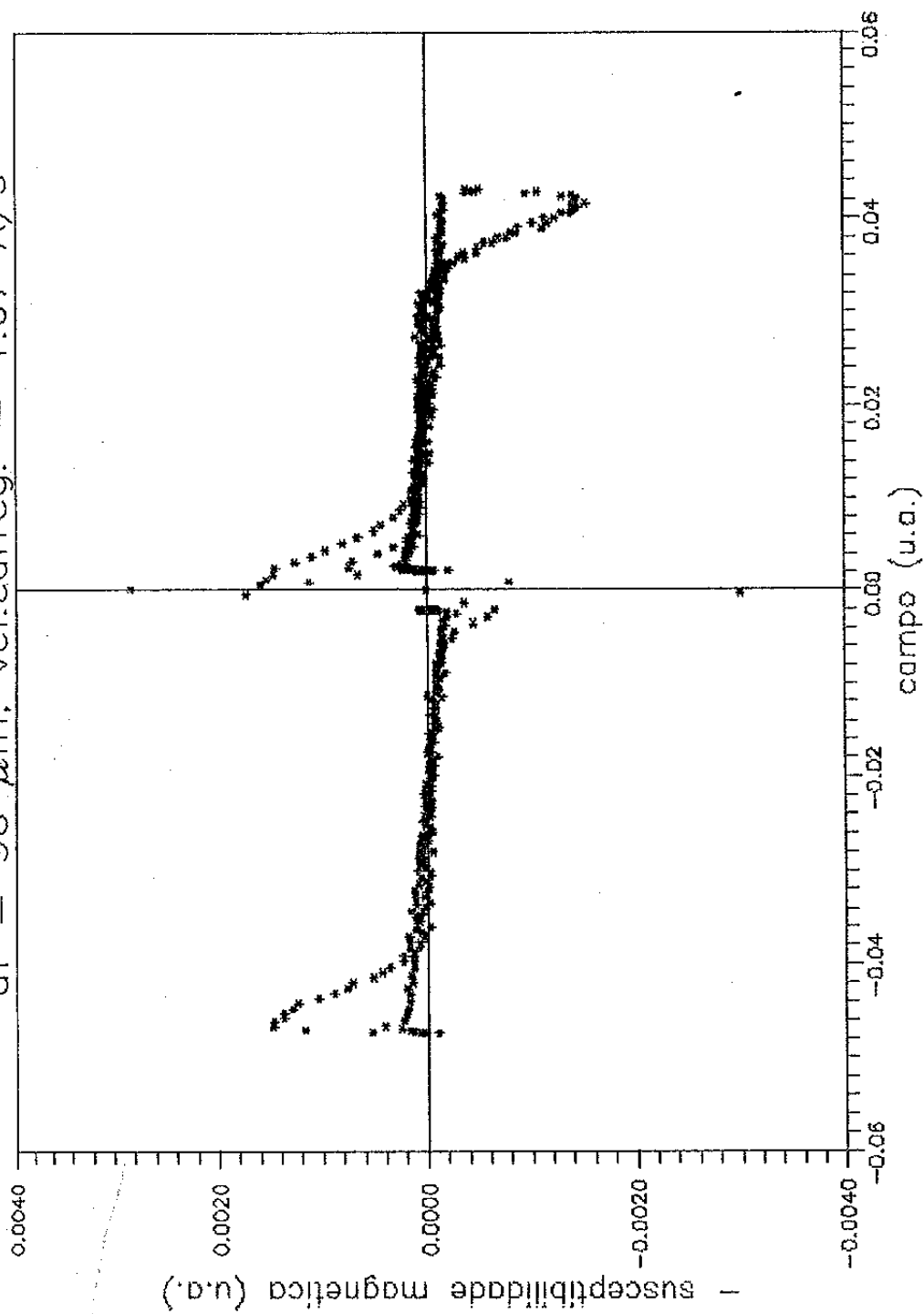


GRÁFICO 43

- Susceptibilidade (u.a.) versus campo (u.a.) para $df = 90 \mu\text{m}$

df = 90 μm ; vel. carreg. = 1.67 A/s

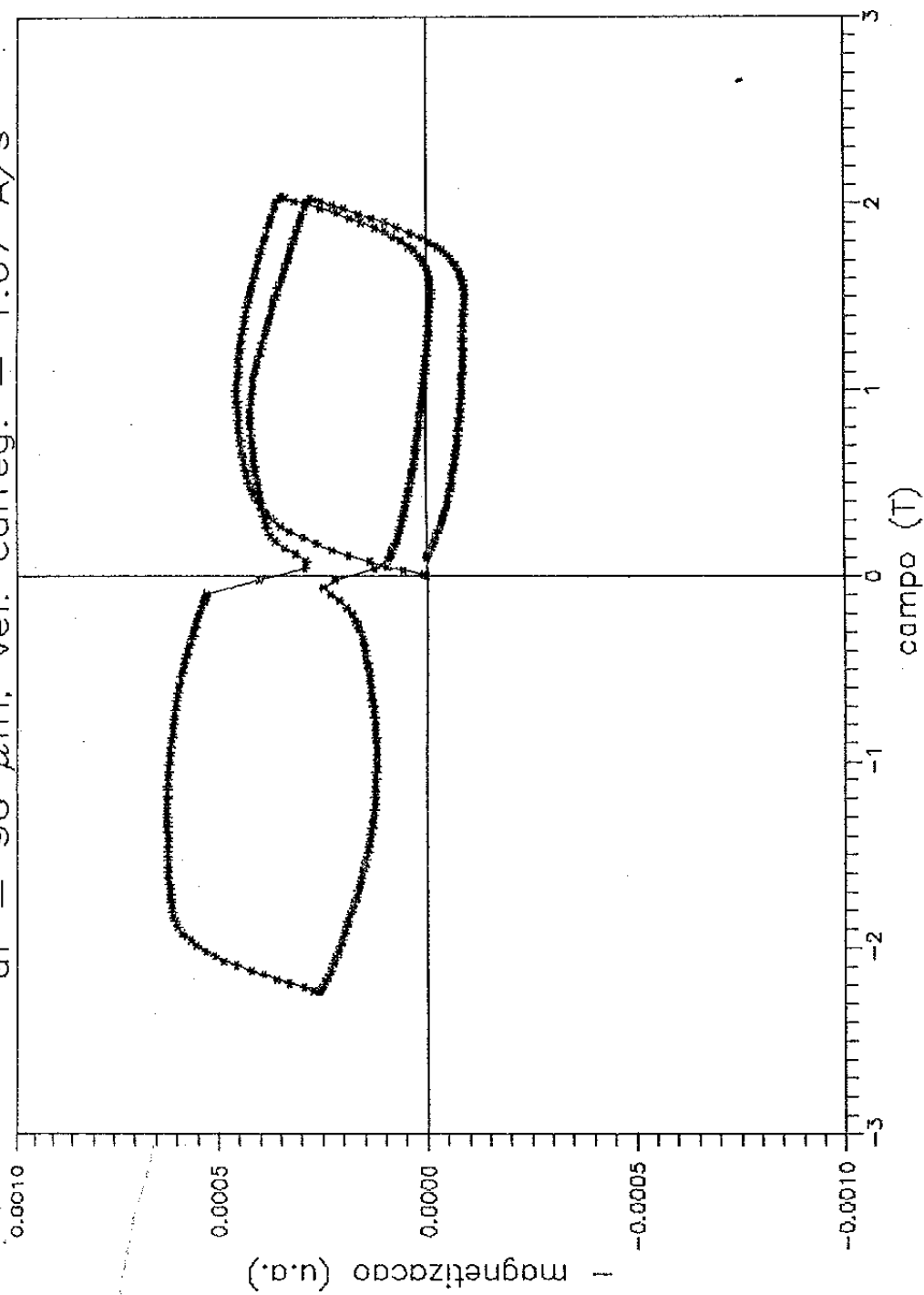


GRÁFICO 44

— Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 90 \mu\text{m}$

df = 90 μm ; vel. carreg. = 1.67 A/s

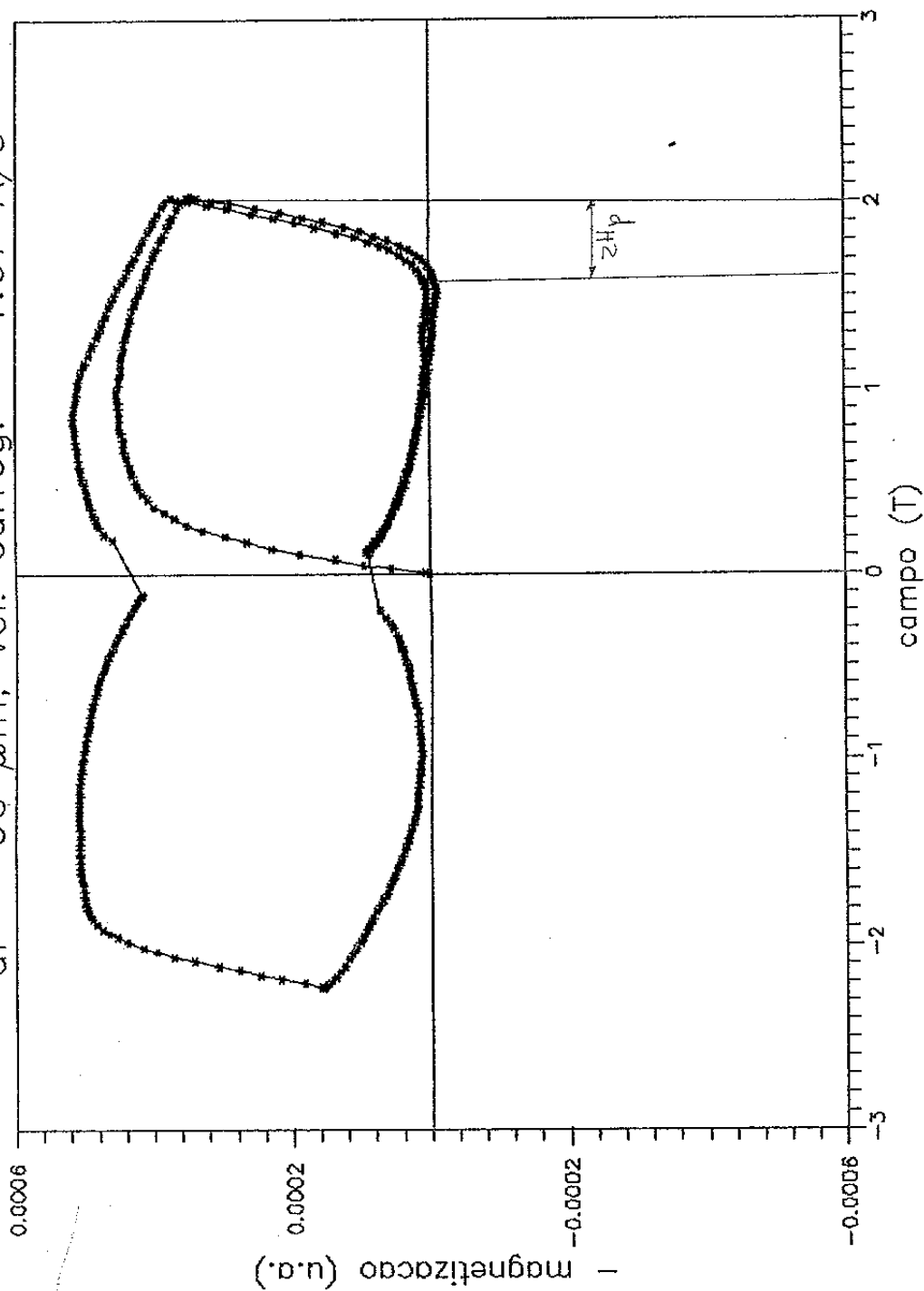


GRÁFICO 45

--Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 90 \mu\text{m}$ com efeito de chaveamento removido

df = 90 μ m; vel. carreg. = 1.67 A/s

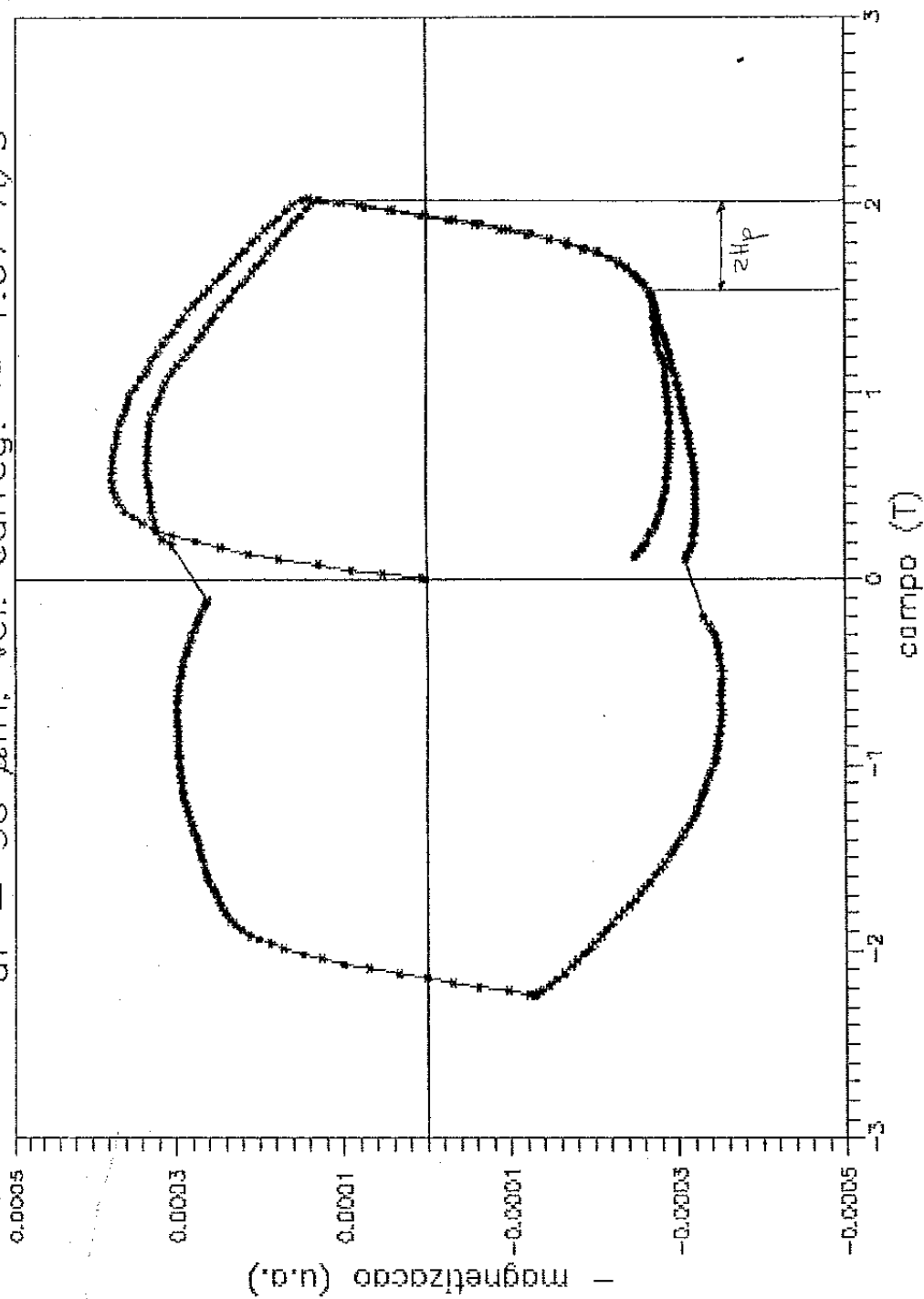


GRÁFICO 46

--Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 90 \mu\text{m}$; modificado

df = 90 μ m; vel. carreg. = 1.67 A/s

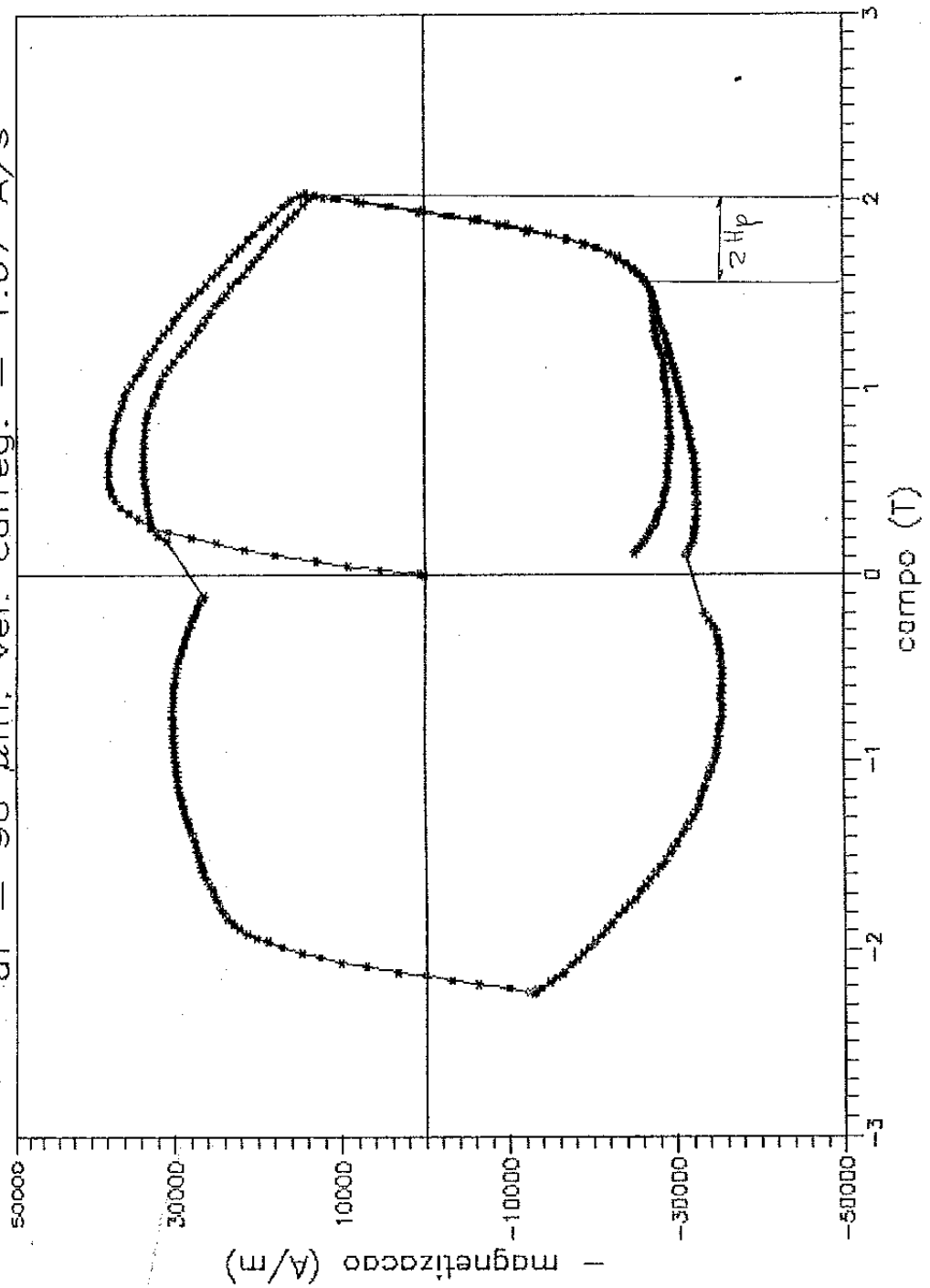


GRÁFICO 47

- Magnetização (A/m) versus campo (T) para df = 90 μ m; modificado

df = 40 μm ; vel. carreg. = 1.67 A/s

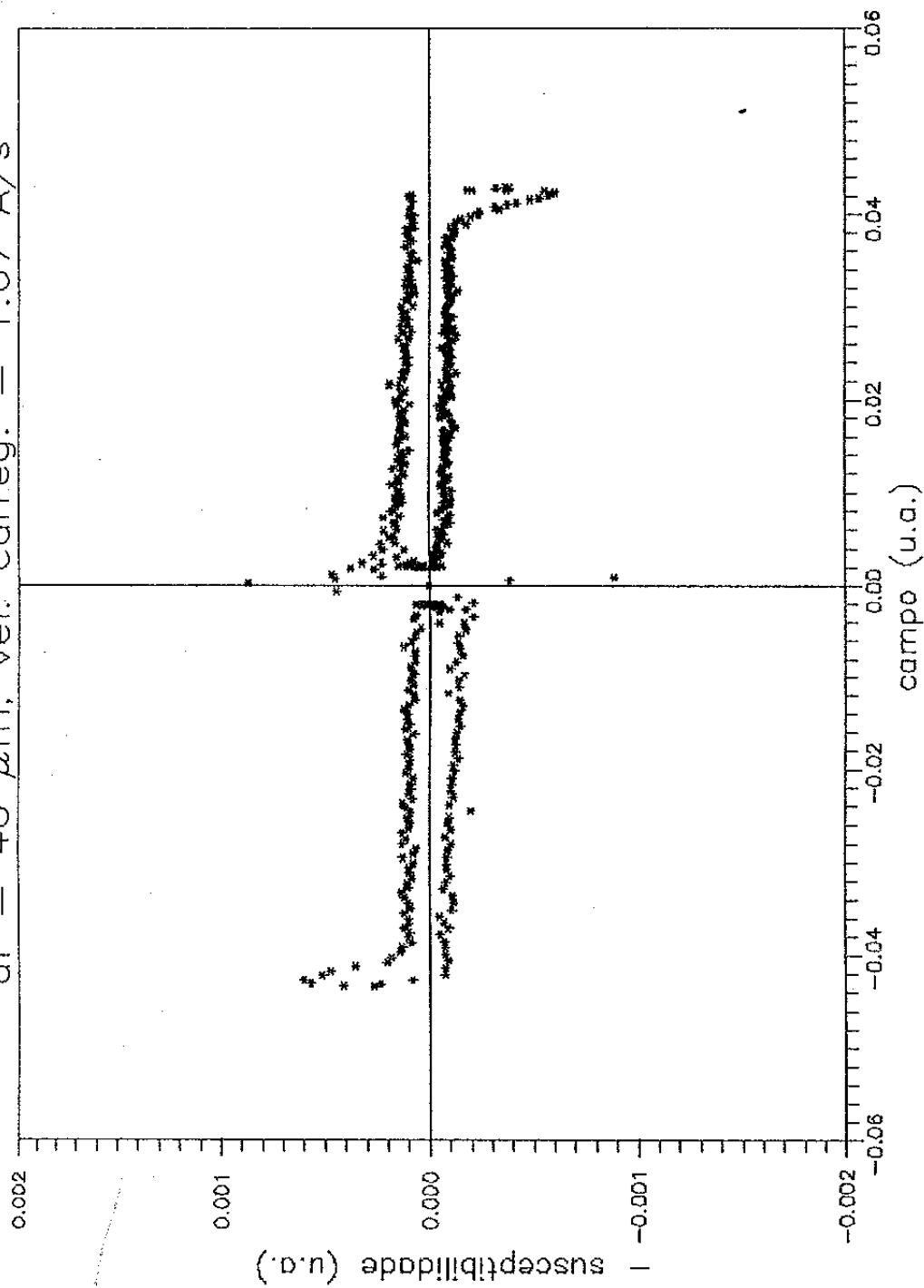


GRÁFICO 48

-Susceptibilidade (u.a.) versus campo (u.a.) para $df = 40 \mu\text{m}$

df = 40 μm ; vel. carreg. = 1.67 A/s

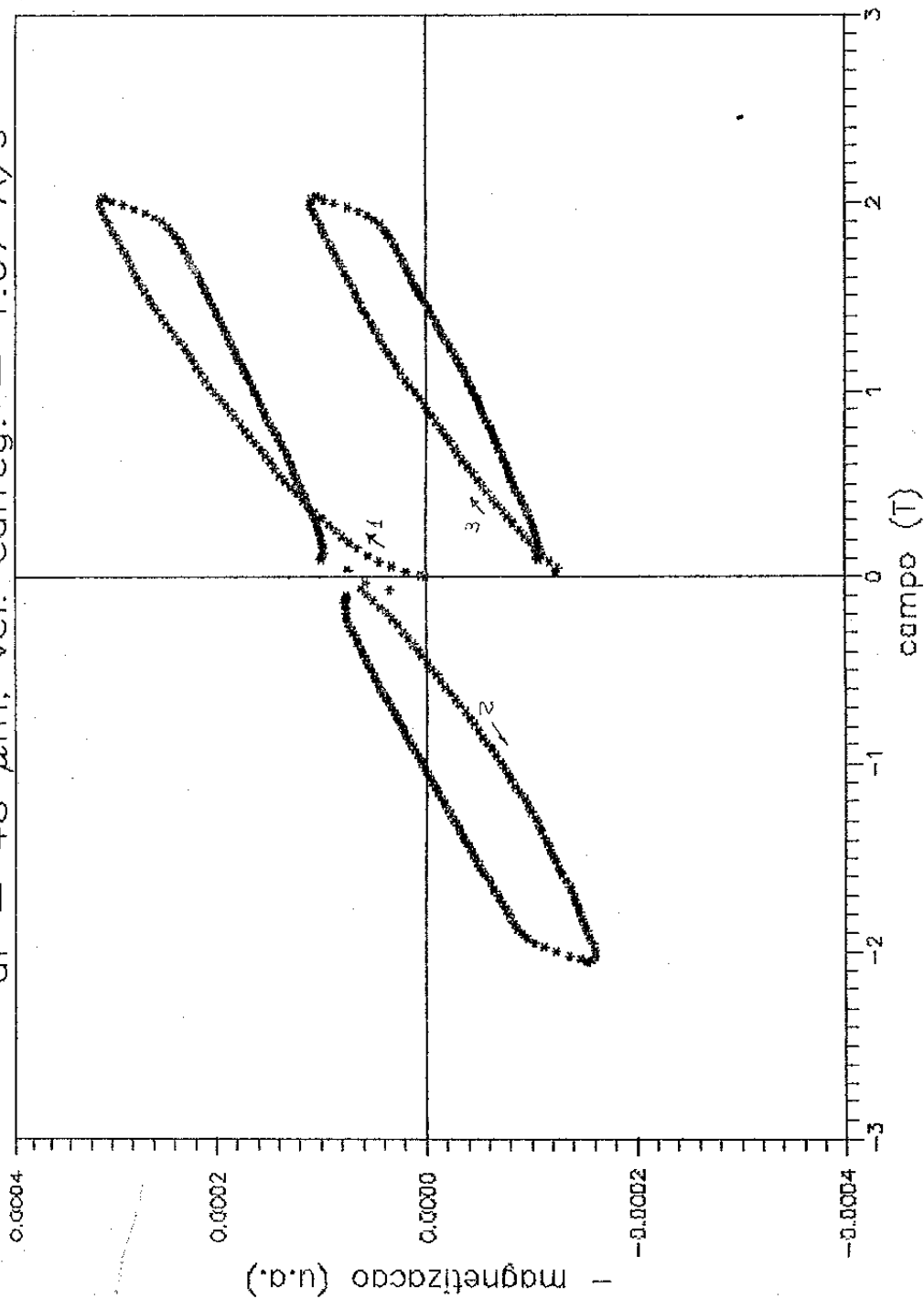


GRÁFICO 49

-Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 40 \mu\text{m}$

df = 40 μ m; vel. carreg. = 1.67 A/s

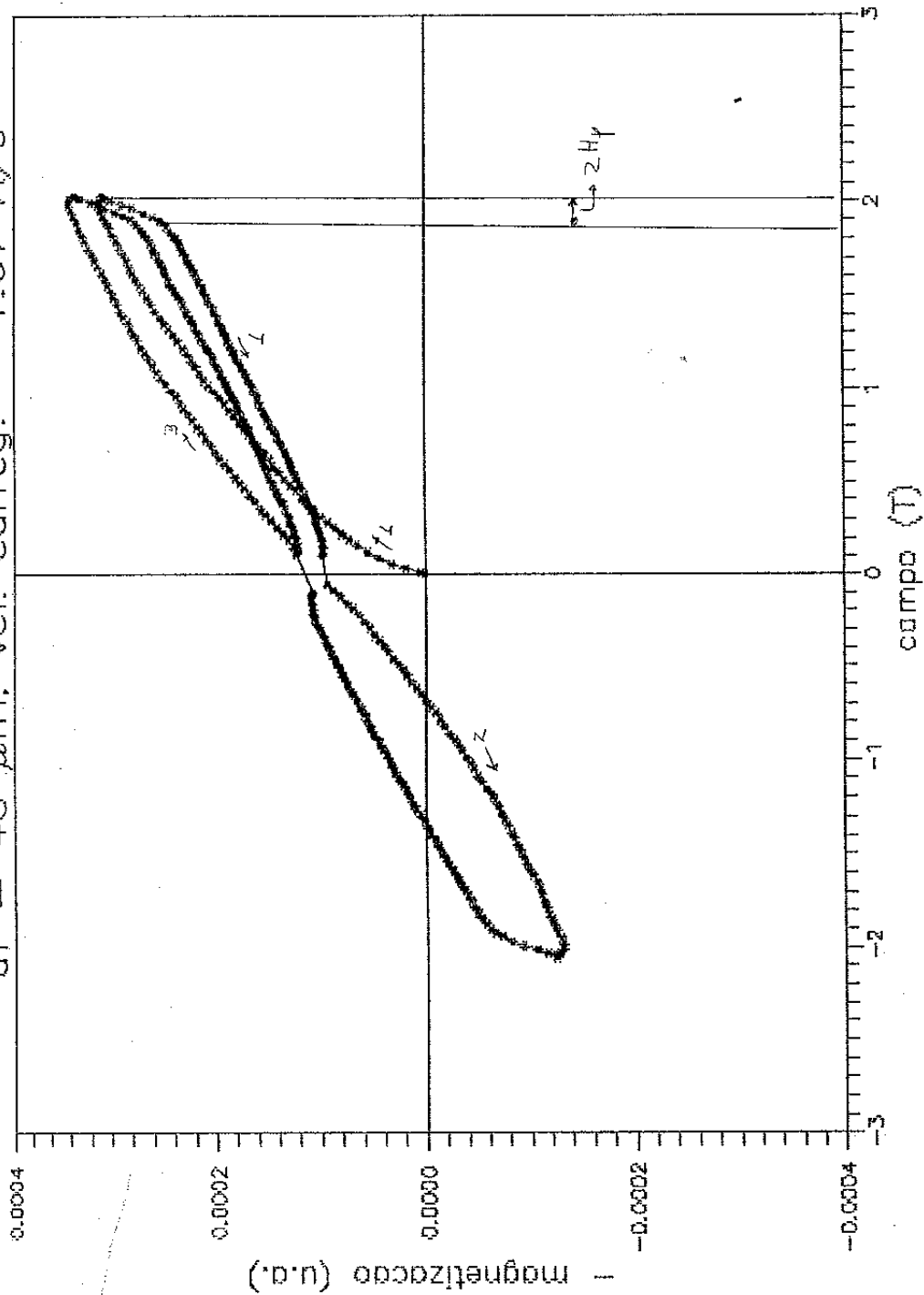


GRÁFICO 50

-Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 40 \mu$ m com efeito de chaveamento removido

df = 40 μ m; vel. carreg. = 1.67 A/s

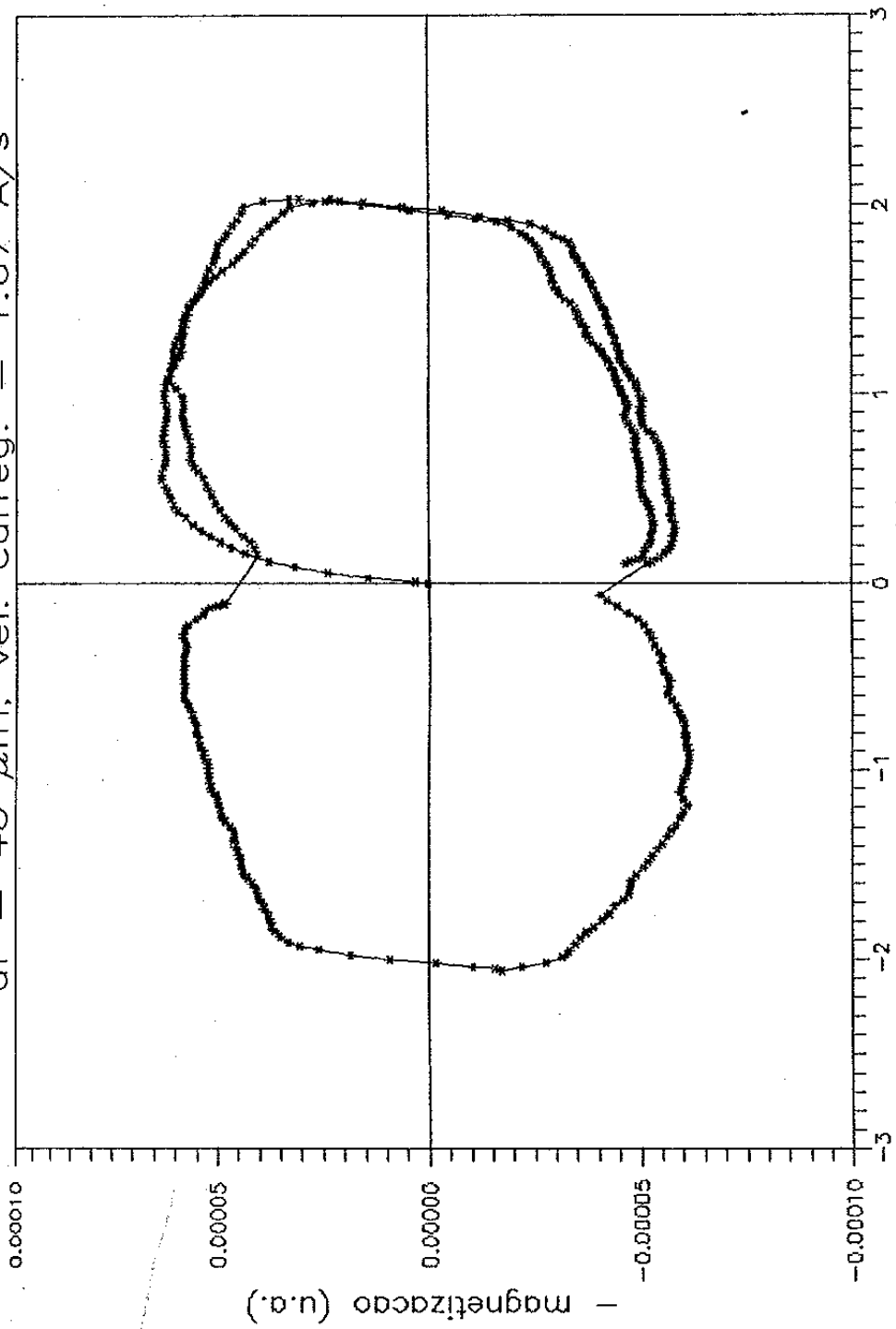


GRÁFICO 51

- Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 40 \mu\text{m}$, modificado

df = 40 μm ; vel. carreg. = 1.67 A/s

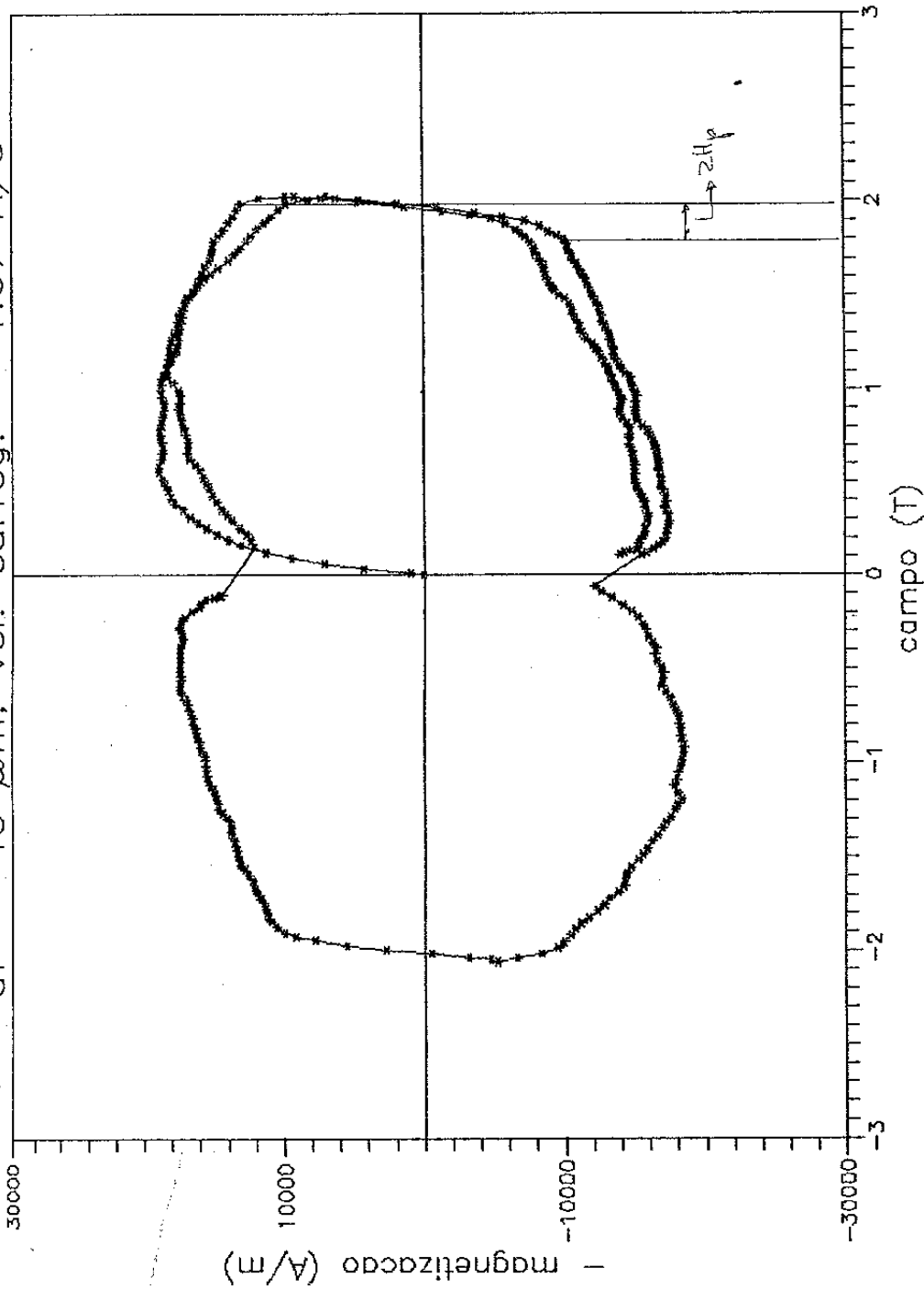


GRÁFICO 52

--Magnetização (A/m) versus campo (T) para $df = 40 \mu\text{m}$; modificado

df = 0.6 μm ; vel. carreg. = 1.67 A/s

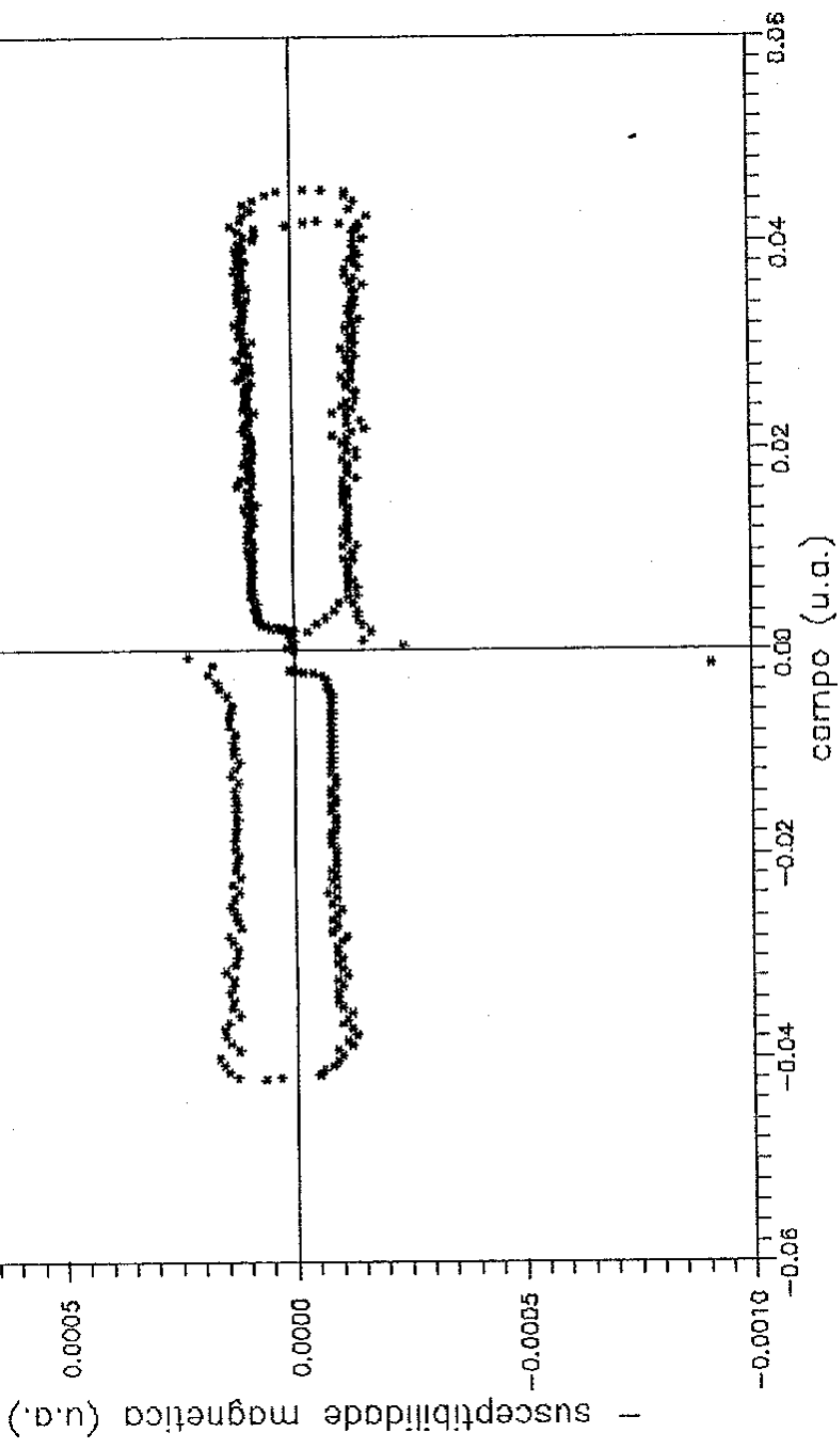


GRÁFICO 53

-Susceptibilidade (u.a.) versus campo (u.a.) para $df = 0,6 \mu\text{m}$

df = 0,6 μm ; vel. carreg. = 1,67 A/s

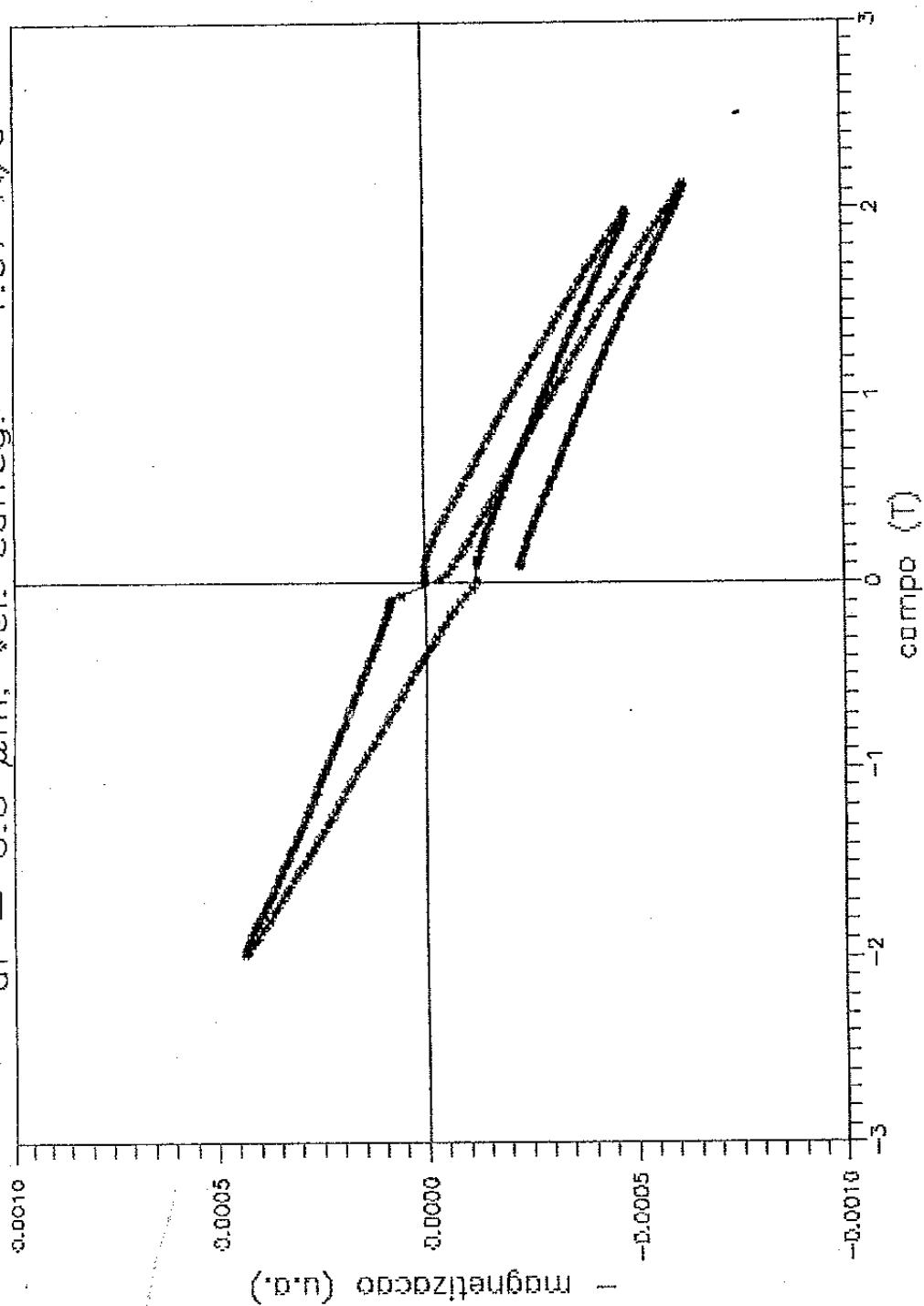
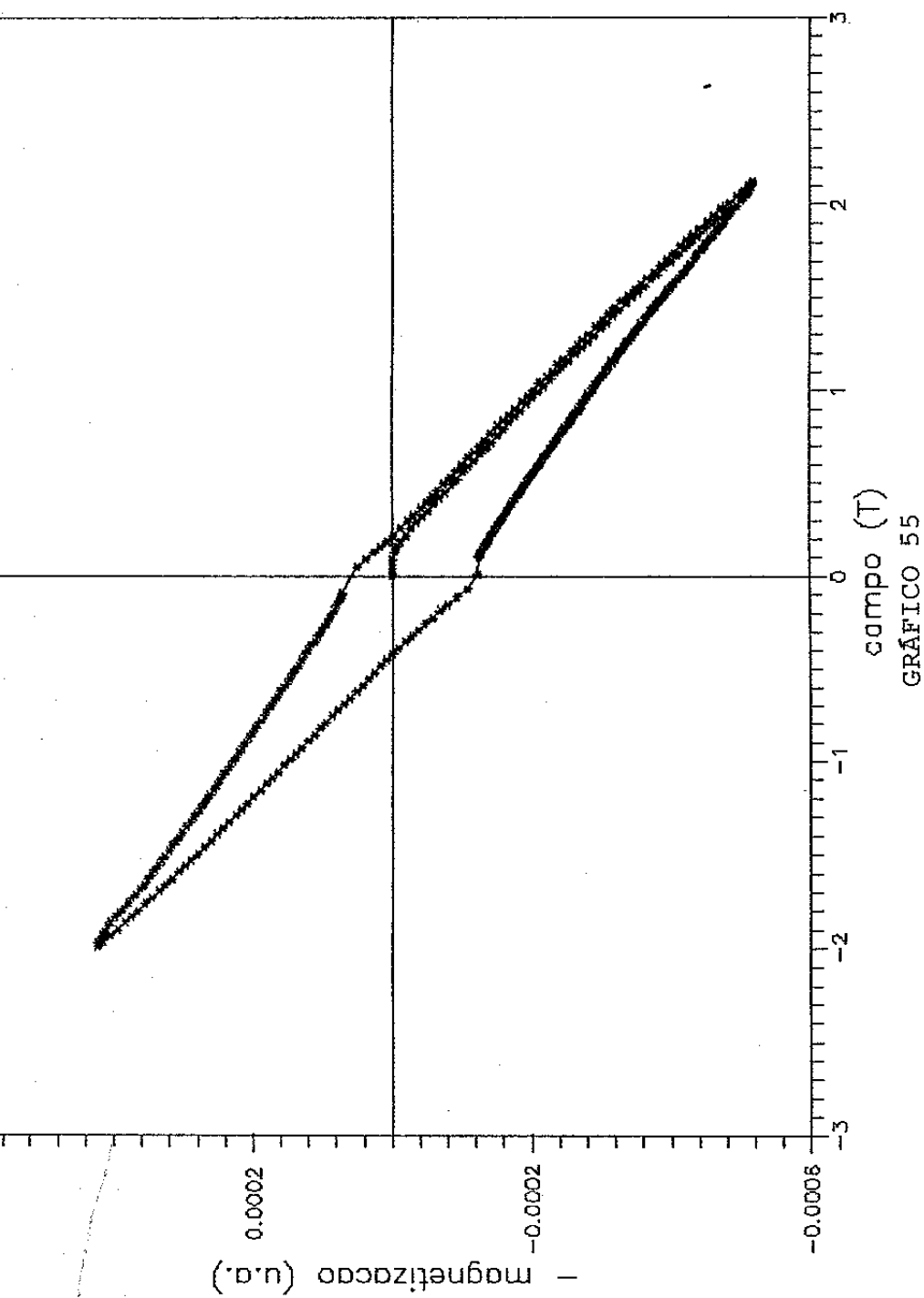


GRÁFICO 54

— Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 0,6 \mu\text{m}$



— Magnetização (u.a.) versus campo (T) para $df = 0,6 \mu\text{m}$ com efeito de chaveamento removido

df = 0,6 μ m; vel. carreg. = 1,67 A/s

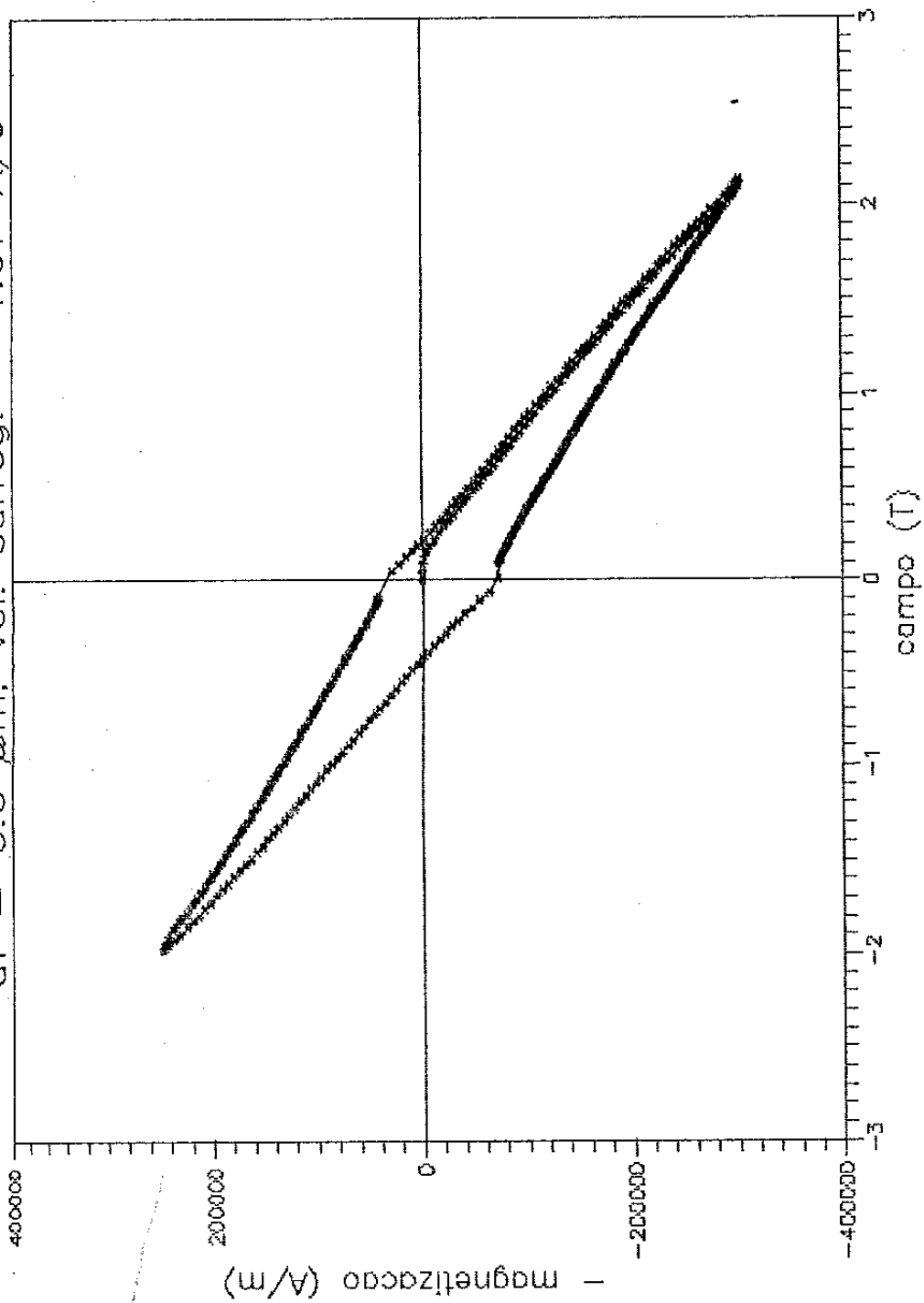


GRÁFICO 56

--Magnetização (A/m) versus campo (T) para $df = 0,6 \mu\text{m}$

REFERÊNCIAS

- [1]- GERALD, C. F. Applied Numerical Analysis, San Luis Obispo, Addison-Wesley Publishing Company, 1970, p.60
- [2]- KITTEL, C. Introduction to Solid State Physics, New York, 1971, p.536
- [3]- Catálogo da Alsthom Atlantique: Low A.C. Loss NbTi Superconductors. Belfort, França, outubro de 1987.
- [4]- DUBOTS, P.; FEVRIER, A.; KY, H. G. Specific properties of NbTi ultra-fines filament wires. In: Internacional Symposium on Flux Pinning and Electromagnetic Properties in Superconductors, Fukuoka-Japan, 11-14 nov. 1985.
- [5]- GOLDFARB, R. B.; CLARK, A. F. J. Appl. Phys. 57(1):3809, 1985
- [6]- SHIMIZU, E.; ITO, D. Development of 50 kVA Superconducting coil with NbTi ultra-fine multifilamentary superconductor II. AC losses. Cryogenic Engineering 23(4):199-204
- [7]- POLÁK, M; MAJOROS, M. Influence of Cu-Ni matrix on a.c. losses and voltage-current characteristics of fine filament NbTi superconductors. Cryogenics, 27:545-550,1987.
- [8]- MATSUSHITA, T. Electromagnetic phenomena and hysteresis losses in superconductors. Cryogenics vol. 30:314-323. 1990.
- [9]- TAKAHATA, K.; NISHIJIMA, S.; OKADA T. AC loss and instability in superconducting cables. In: Internacional Symposium on Flux Pinning and Electromagnetic Properties in Superconductors, Fukuoka-Japan, 11-14 nov. 1985.
- [10]- BRANDT, E. H. Theory of Collective Pinning. In: Internacional Symposium on Flux Pinning and Electromagnetic Properties in Superconductors, Fukuoka-Japan, 11-14 nov. 1985.

APÊNDICES

ÍNDICE

Pág.

APÊNDICE I- TEORIA DE W. J. CARR JR. PARA PERDAS AC EM CONDUTORES SUPERCONDUTORES MULTIFILAMENTARES	01
I.1- Perdas AC devido à Correntes Parasitas: Regime de Baixas Frequências	01
I.2- Comportamento da Corrente Parasita na Superfície do Condutor	07
I.3- Perdas devido à Correntes Parasitas: Frequências Intermediárias	11
I.4- Perdas Histeréticas	21
I.5- Cálculo de σ_{\perp}	39
Figuras	44
Referências	47
APÊNDICE II- PERDAS AC EM SUPERCONDUTORES TIPO II: TEORIA DE J. R. CLEM	48
II.1- Introdução	48
II.2- Metais Normais: Perdas AC	49
II.3- Supercondutores Tipo II: Perdas AC quando Atenuação Viscosa e não Aprisionamento de Fluxo domina Movimento de Vórtices	58
II.4- Perdas Histeréticas em Supercondutores Tipo II.....	66
Figuras	106
Referências	112

I- TEORIA DE W. J. CARR JR. PARA PERDAS AC EM CONDUTORES SUPERCONDUTORES MULTIFILAMENTARES

Por razões de estabilidade térmica, elétrica e mecânica [1], os fios ou cabos supercondutores são compósitos normais-supercondutores. Por compósito entenda-se filamentos supercondutores embutidos em uma matriz de metal normal. Um condutor supercondutor tipicamente contém filamentos supercondutores com diâmetros da ordem de 1 a 100 μm , embutidos em uma matriz de metal normal.

Como consequência de campos eletromagnéticos alternados, além das perdas histeréticas nos filamentos supercondutores, correntes induzidas na matriz metálica do condutor levam a um tipo adicional de perda: perdas devido à correntes parasitas. Por causa disso, muita atenção tem sido dada à fabricação de compósitos que minimizem as perdas AC na matriz.

Aplicar um passo de torção ao fio, por exemplo, é muito eficaz em reduzir as perdas matriciais de um fio em um campo magnético transversal.

Carr trata o condutor supercondutor multifilamentar como um contínuo anisotrópico [2], com propriedades em um ponto dadas pela média sobre um pequeno volume na vizinhança desse ponto, o elemento de volume sendo grande o suficiente para conter muitos filamentos. Consequentemente, a teoria de Carr para perdas AC é melhor sucedida para um condutor com um grande número de filamentos finos.

I-1- PERDAS AC DEVIDO À CORRENTES PARASITAS REGIME DE BAIXAS FREQUÊNCIAS

Segundo o Modelo da Condutividade Anisotrópica de Carr [3], na direção ao longo dos filamentos a condutividade é denotada por σ_{\parallel} e, transversal aos filamentos, uma condutividade σ_{\perp} é assumida.

$\sigma_{\parallel} \gg \sigma_{\perp}$, para uma densidade de corrente j_{\parallel} tal que $j_{\parallel} \ll j_s$, onde j_s é a densidade de corrente de saturação de magnitude λj_c , onde λ é a fração do material supercondutor no fio e j_c é a densidade de corrente crítica.

Dado o campo magnético aplicado transversalmente ao condutor,

para calcular a perda devido às correntes induzidas na matriz é preciso resolver a equação de Maxwell (em emu).

$$\nabla \times \vec{E} = - \dot{\vec{B}} \quad (I-1-1)$$

Seja o campo magnético aplicado dado por:

$$\vec{B} = B \hat{a}_x \quad (I-1-2)$$

sendo \hat{a}_x , \hat{a}_y e \hat{a}_z coordenadas retangulares do condutor, vide figura (I-1-1).

Seja a solução de (I-1-1) dada por:

$$\vec{E} = \vec{E}' - \nabla\phi \quad (I-1-3)$$

Tal que:

$$\nabla \times \vec{E}' = - \dot{\vec{B}}$$

$$\nabla \cdot \vec{E}' = 0 \quad (I-1-4)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla^2\phi$$

Esta solução é conveniente para o caso onde $\dot{\vec{B}}$ é conhecido, resultante a partir de fontes externas; $\nabla\phi$ será determinado a partir das condições de contorno.

Assumindo-se que o campo magnético aplicado penetra totalmente o condutor, temos:

$$\vec{B} = \vec{H}_A \quad (I-1-5)$$

De (I-1-3), (I-1-4) e (I-1-5):

$$\vec{E} = - \dot{H}_A y \hat{a}_z - \nabla\phi \quad (I-1-6)$$

A condutividade $\sigma_{||}$, paralela aos filamentos, é infinitamente maior que σ_{\perp} , a condutividade transversal aos filamentos, e então

o campo elétrico médio paralelo aos filamentos aproxima-se de zero, assumindo-se que a corrente é insaturada.

Então, sendo $\hat{a}_{||}$ um vetor unitário paralelo ao filamento supercondutor, temos que deve ser obedecida a condição:

$$\vec{E} \cdot \hat{a}_{||} = 0 \quad (I-1-7)$$

Então, de (I-1-4), (I-1-6) e (I-1-7) podemos determinar $\nabla\phi$. Antes, porém, é preciso determinar o vetor $\hat{a}_{||}$.

Devido ao passo de torção dos filamentos, no interior do condutor (considerado por Carr como um contínuo anisotrópico), a simetria do contínuo é helical.

Para determinar \hat{a}_1 , \hat{a}_2 e \hat{a}_3 que são vetores unitários relativos ao eixo do filamento, considere a figura (I-1-2) onde está esquematizado o caminho de um filamento no condutor.

Em termos de coordenadas cilíndricas r , θ e z do condutor, se $d\vec{s}$ é um elemento de distância ao longo do filamento supercondutor, temos:

$$d\vec{s} = dz \hat{a}_z + r d\theta \hat{a}_\theta$$

$$d\vec{s} = dz \left(\hat{a}_z + r \frac{d\theta}{dz} \hat{a}_\theta \right) \quad (I-1-8)$$

Mas $\frac{d\theta}{dz} = \frac{2\pi}{L}$, pois quando θ varia de 2π , z varia de L , o comprimento do passo de torção, então:

$$d\vec{s} = dz \left(\hat{a}_z + \frac{2\pi r}{L} \hat{a}_\theta \right) \quad (I-1-9)$$

O vetor unitário paralelo ao filamento $\hat{a}_{||} \equiv \hat{a}_1$ é dado por $\frac{d\vec{s}}{ds}$. Então, de (I-1-9) temos:

$$\hat{a}_{||} \equiv \hat{a}_1 = \frac{\hat{a}_z + (2\pi r/L) \hat{a}_\theta}{[1 + (2\pi r/L)^2]^{1/2}} \quad (I-1-10)$$

Da figura (I-1-2) temos que $\hat{a}_2 \equiv \hat{a}_r$ e o terceiro vetor ortogonal \hat{a}_3 é obtido a partir do produto vetorial de \hat{a}_1 e \hat{a}_2 . Então:

$$\hat{a}_1 \equiv \hat{a}_n = \frac{\hat{a}_z + (2\pi r/L) \hat{a}_\theta}{[1 + (2\pi r/L)^2]^{1/2}} \quad (I-1-11)$$

$$\hat{a}_z = \hat{a}_r \quad (I-1-12)$$

$$\hat{a}_3 = \frac{\hat{a}_\theta - (2\pi r/L) \hat{a}_z}{[1 + (2\pi r/L)^2]^{1/2}} \quad (I-1-13)$$

Voltemos à determinação de $\nabla\phi$, equação (I-1-3) e, conseqüentemente, à determinação de \vec{E} , equação (I-1-6).

$$\text{Seja } \nabla\phi = (\nabla\phi)_x \hat{a}_x + (\nabla\phi)_y \hat{a}_y + (\nabla\phi)_z \hat{a}_z.$$

Tomando-se o rotacional de \vec{E} , \vec{E} sendo dado pela equação (I-1-6), temos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \left[-\mu_0 \dot{H}_A - \frac{\partial}{\partial y} (\nabla\phi)_z + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla\phi)_y \right] \hat{a}_x + \\ &+ \left[-\frac{\partial}{\partial z} (\nabla\phi)_x + \frac{\partial}{\partial x} (\nabla\phi)_z \right] \hat{a}_y + \\ &+ \left[-\frac{\partial}{\partial x} (\nabla\phi)_y + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla\phi)_x \right] \hat{a}_z \end{aligned} \quad (I-1-14)$$

De (I-1-4), (I-1-5) e (I-1-14), temos:

$$\begin{aligned} -\dot{H}_A &= \left[-\mu_0 \dot{H}_A - \frac{\partial}{\partial y} (\nabla\phi)_z + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla\phi)_y \right] \hat{a}_x + \\ &+ \left[-\frac{\partial}{\partial z} (\nabla\phi)_x + \frac{\partial}{\partial x} (\nabla\phi)_z \right] \hat{a}_y + \\ &+ \left[-\frac{\partial}{\partial x} (\nabla\phi)_y + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla\phi)_x \right] \hat{a}_z \end{aligned} \quad (I-1-15)$$

Substituindo-se $\hat{a}_\theta = -\sin\theta \hat{a}_x + \cos\theta \hat{a}_y$ em (I-1-11), temos:

$$\hat{a}_n = \frac{1}{[1 + (2\pi r/L)^2]^{1/2}} \left[-\frac{2\pi r}{L} \sin\theta \hat{a}_x + \frac{2\pi r}{L} \cos\theta \hat{a}_y + \hat{a}_z \right] \quad (I-1-16)$$

Reescrevendo-se a equação (I-1-6), temos:

$$\vec{E} = [- (\nabla\phi)_x] \hat{a}_x + [- (\nabla\phi)_y] \hat{a}_y + [- \dot{H}_A y - (\nabla\phi)_z] \hat{a}_z \quad (\text{I-1-17})$$

De (I-1-7), (I-1-16) e (I-1-17), temos:

$$\frac{1}{[1 + (2\pi r/L)^2]^{1/2}} \left[\frac{2\pi r}{L} \text{sen } \theta (\nabla\phi)_x - \frac{2\pi r}{L} \text{cos } \theta (\nabla\phi)_y + \right. \\ \left. - \dot{H}_A y - (\nabla\phi)_z \right] = 0 \quad (\text{I-1-18})$$

Vemos que fazendo $(\nabla\phi)_y = (\nabla\phi)_z = 0$ e $(\nabla\phi)_x = \text{constante}$, conseguimos satisfazer a equação (I-1-15) e então obtemos de (I-1-18) o valor de $(\nabla\phi)_x$.

Então, de (I-1-18), temos:

$$\frac{2\pi r}{L} \text{sen } \theta (\nabla\phi)_x = \dot{H}_A y$$

Substituindo-se $r \text{sen } \theta = y$ na expressão acima, temos:

$$(\nabla\phi)_x = \frac{L}{2\pi} \dot{H}_A \quad (\text{I-1-19})$$

Já que assumimos $(\nabla\phi)_y = (\nabla\phi)_z = 0$, de (I-1-19) em (I-1-6) temos:

$$\vec{E} = - \dot{H}_A y \hat{a}_z - \frac{L}{2\pi} \mu_0 \dot{H}_A \hat{a}_x$$

$$\vec{E} = - \dot{H}_A (y \hat{a}_z + \frac{L}{2\pi} \hat{a}_x) \quad (\text{I-1-20})$$

Sendo j_{\perp} a densidade de corrente parasita perpendicular ao eixo do filamento, já que $\vec{E} \cdot \hat{a}_{\parallel} = 0$, temos:

$$\vec{j}_{\perp} = \sigma_{\perp} \vec{E} \quad (\text{I-1-21})$$

De (I-1-20) e (I-1-21) temos que a corrente parasita perpendicular ao eixo do filamento tem uma componente ao longo do eixo do condutor e uma componente paralela à direção do campo

magnético aplicado.

A perda devido às correntes parasitas, por unidade de volume do condutor é dada por:

$$\frac{P}{V} = \frac{1}{V} \int \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{j}}_{\perp} dV \quad (I-1-22)$$

$V \equiv$ volume do condutor

Para um condutor de comprimento l e raio R_0 , de (I-1-20) e (I-1-21) em (I-1-22), temos:

$$\frac{P}{V} = \frac{1}{\pi R_0^2} \int \sigma_{\perp} \left[\dot{H}_A^2 y^2 + \dot{H}_A^2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \right] dV$$

Em coordenadas cilíndricas, temos:

$$y = r \sin \theta$$

$$dV = r dr d\theta dz$$

$$\frac{P}{V} = \frac{1}{\pi R_0^2} \int_r \int_{\theta} \int_z \sigma_{\perp} \left[\dot{H}_A^2 r^2 \sin^2 \theta + \dot{H}_A^2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \right] r dr d\theta dz$$

$$\frac{P}{V} = \frac{\sigma_{\perp} \dot{H}_A^2}{\pi R_0^2} \left[\int_{\theta} \int_r r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta + \int_{\theta} \int_r \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 r dr d\theta \right]$$

$$\frac{P}{V} = \frac{\sigma_{\perp} \dot{H}_A^2}{\pi R_0^2} \left[\frac{R_0^4}{4} \int_{\theta} \sin^2 \theta d\theta + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 2\pi \frac{R_0^2}{2} \right]$$

$$\frac{P}{V} = \sigma_{\perp} \dot{H}_A^2 \left[\frac{R_0^2}{4} + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \right] \quad (I-1-23)$$

Seja $H_A = H_0 \sin \omega t$.

$$\dot{H}_A = \omega H_0 \cos \omega t \quad (I-1-24)$$

De (I-1-24) em (I-1-23) temos que a potência média por unidade de volume do condutor é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_{\perp} \omega^2 H_0^2 \left[\frac{R_0^2}{4} + \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \right] \cos^2 \omega t \, dt \\ \bar{P} &= \omega^2 \frac{H_0^2 \sigma_{\perp}}{2} \left[\left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 + \frac{R_0^2}{4} \right] \end{aligned} \quad (I-1-25)$$

De (I-1-24) temos que, para uma dada frequência, a perda devido às correntes induzidas pode ser minimizada diminuindo-se o passo de torção tanto quanto possível e utilizando-se uma matriz resistiva. Por exemplo, utiliza-se comumente cobre-níquel ao invés de cobre. Por outro lado, uma matriz resistiva compromete a estabilidade do condutor, pelo fato de não apresentar uma boa condutividade térmica como o cobre.

I-2- COMPORTAMENTO DA CORRENTE PARASITA NA SUPERFÍCIE DO CONDUTOR

As correntes parasitas tendem a fluir para a superfície do condutor e já que os filamentos supercondutores próximos à superfície oferecem um caminho de baixa resistância, as correntes parasitas tendem a penetrar nesses filamentos.

A solução dada por (I-1-21) para \vec{j}_{\perp} não é válida para a superfície do condutor, já que para sua obtenção não se levou em conta o fato de que a componente de \vec{j}_{\perp} perpendicular à superfície do condutor deve ser nula em $R = R_0$.

No entanto, pode-se prever o comportamento da corrente parasita na superfície a partir da solução para \vec{j}_{\perp} no interior do condutor.

Seja a densidade de corrente parasita para todo o condutor, inclusive sua superfície, ser escrita na aproximação (vide figura (I-2-1)):

$$\vec{j} = \vec{j}_{\perp} \eta(-n) + \delta(n) \vec{j} \quad (I-2-1)$$

onde:

$\vec{j}_{\perp} \equiv$ solução para \vec{j} no interior do condutor, equação (I-1-21).

$\vec{J} \equiv$ densidade de corrente de superfície (solução para \vec{j} na superfície do condutor).

$\delta(n) \equiv$ função Delta de Dirac.

$n \equiv$ distância normal a partir da superfície do fio.

Segundo (I-2-1), no interior do condutor a solução para \vec{j} é \vec{j}_{\perp} , já que $\delta(n) = 0$ para $n \neq 0$. Para $n = 0$, $\eta(-n) = 0$ e então $\vec{j} = \vec{J}$, a densidade de corrente de superfície que queremos determinar.

Já que o divergente de \vec{j} deve desaparecer e de (I-1-15) temos que \vec{j}_{\perp} não tem divergente, então:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{j} &= 0 & (I-2-2) \\ \nabla \cdot \vec{j}_{\perp} &= 0\end{aligned}$$

$\nabla \delta(n)$ é um vetor perpendicular à superfície do condutor e então perpendicular à \vec{J} , a densidade de corrente de superfície, então devemos ter:

$$\vec{J} \cdot \nabla \delta(n) = 0 \quad (I-2-3)$$

Tomando-se o gradiente de ambos os lados de (I-2-1), temos:

$$0 = \vec{j}_{\perp} \cdot \nabla \eta(-n) + \vec{J} \cdot \nabla \delta(n) \quad (I-2-4)$$

Tomando-se o divergente de ambos os lados de (I-2-1), temos:

$$\nabla \cdot \vec{j} = \eta(-n) \nabla \cdot \vec{j}_{\perp} + \delta(n) \nabla \cdot \vec{J} \quad (I-2-5)$$

Somando-se as equações (I-2-4) e (I-2-5) e levando-se em conta (I-2-2) e (I-2-3), temos:

$$\vec{j}_{\perp} \cdot \nabla \eta(-n) + \delta(n) \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (I-2-6)$$

Mas $\nabla \eta(-n) = \hat{n} \delta(n)$, onde \hat{n} é um vetor unitário normal à

superfície, então:

$$-\delta(n) \vec{j}_{\perp} \cdot \hat{n} + \delta(n) \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = \vec{j}_{\perp} \cdot \hat{n} \quad (I-2-7)$$

Em coordenadas cilíndricas, temos:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r J_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial J_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \quad (I-2-8)$$

Como \vec{J} é densidade de corrente de superfície e derivadas ao longo do eixo do condutor desaparecem, de (I-2-7) e (I-2-8), temos:

$$\frac{1}{R_o} \frac{\partial J_{\theta}}{\partial \theta} = j_{\perp R} (R_o) \quad (I-2-9)$$

onde $j_{\perp R}$ é a componente radial de \vec{j}_{\perp} .

$$\text{Temos que } \hat{n} = \cos \theta \hat{a}_x + \sin \theta \hat{a}_y \quad (I-2-10)$$

De (I-1-21), (I-1-20) e (I-2-10), temos:

$$\vec{j}_{\perp R} = \vec{j}_{\perp} \cdot \hat{n} = -\sigma_{\perp} \dot{H}_A \left(\frac{L}{2\pi} \right) \cos \theta \quad (I-2-11)$$

De (I-2-9) e (I-2-11), temos:

$$\frac{1}{R_o} \frac{\partial J_{\theta}}{\partial \theta} = -\sigma_{\perp} \dot{H}_A \left(\frac{L}{2\pi} \right) \cos \theta$$

$$J_{\theta} = - \left(\frac{L}{2\pi} \right) R_o \sigma_{\perp} \sin \theta \dot{H}_A \quad (I-2-12)$$

Como é esperado que a corrente de superfície seguirá o caminho de baixa resistência dos filamentos, temos:

$$\vec{J} = J \hat{a}_{\parallel} \quad (I-2-13)$$

onde \hat{a}_z é o vetor unitário paralelo ao filamento supercondutor, dado por (I-1-11).

De (I-1-11) e (I-2-13), para a superfície do condutor, temos:

$$\vec{j} = J \frac{\hat{a}_z + (2\pi R_o/L) \hat{a}_\theta}{[1 + (2\pi R_o/L)^2]^{1/2}} \quad (I-2-14)$$

De (I-2-14) temos:

$$j_\theta = \frac{J (2\pi R_o/L)}{[1 + (2\pi R_o/L)^2]^{1/2}} \quad (I-2-15)$$

De (I-2-12) e (I-2-15), temos:

$$\frac{J (2\pi R_o/L)}{[1 + (2\pi R_o/L)^2]^{1/2}} = - \left(\frac{L}{2\pi}\right) R_o \sigma_\perp \dot{H}_A \sin \theta \quad (I-2-16)$$

De (I-2-16), temos:

$$J = - (L/2\pi)^2 \sigma_\perp \dot{H}_A [1 + (2\pi R_o/L)^2]^{1/2} \sin \theta \quad (I-2-17)$$

Admitindo-se que os filamentos carregando a corrente de superfície estejam saturados, temos que a espessura w da camada que engloba esses filamentos, ilustrada na figura (I-2-2) é dada por:

$$w = \frac{J}{\lambda J_c} \quad (I-2-18)$$

Admitindo-se a validade de (I-2-1), w_o deve ser uma pequena fração de R_o , onde w_o é o máximo valor de w em $\theta = \pi/2$.

Desconsiderando-se a possibilidade de blindagem, consideramos que o campo produzido pela corrente parasita de superfície é bem pequeno comparado ao campo magnético aplicado.

Aumentando-se a frequência do campo aplicado aumenta-se a corrente parasita na matriz que flui para a superfície do condutor. Se essa corrente é grande o suficiente para saturar a primeira camada de filamentos próxima à superfície, o caminho de retorno para a corrente parasita então penetra em direção ao interior do condutor.

Para o cálculo das perdas no regime de frequências intermediárias será assumido que:

1) O campo magnético gerado pelas correntes parasitas não é necessariamente pequeno comparado com o campo aplicado. Portanto, para o interior do condutor, não podemos resolver a equação de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = - \dot{\vec{B}} \quad (I-3-1)$$

supondo \vec{B} o campo aplicado, como na seção (I-1).

Para obtermos \vec{E} devemos, nesse caso, considerar também a equação de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = 4\pi \vec{j} \quad (I-3-2)$$

Para $\vec{B} \equiv \vec{H}$:

$$\nabla \times \vec{B} = 4\pi \vec{j} \quad (I-3-3)$$

E, então, de (I-3-1) e (I-3-3), temos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = - 4\pi \dot{\vec{j}} \quad (I-3-4)$$

2) A espessura da camada saturada do condutor é suficientemente fina de tal modo que, no interior do condutor:

$$\vec{E}_{\parallel} = 0 \quad (I-3-5)$$

De (I-3-5), temos:

$$\vec{j} = \sigma_{\perp} \vec{E} \quad (I-3-6)$$

onde σ_{\perp} é a condutividade na direção perpendicular aos filamentos supercondutores.

De (I-3-4) e (I-3-6), temos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -4\pi\sigma_{\perp} \vec{E} \quad (I-3-7)$$

Em coordenadas cilíndricas, seja:

$$\vec{E} = E_z \hat{a}_z + E_r \hat{a}_r + E_{\theta} \hat{a}_{\theta}, \text{ onde:} \quad (I-3-8)$$

$$E_z = E_{z0}(r) \exp i(\theta \pm \omega t) \quad (I-3-9)$$

$$E_r = E_{r0}(r) \exp i(\theta \pm \omega t) \quad (I-3-10)$$

$$E_{\theta} = E_{\theta0}(r) \exp i(\theta \pm \omega t) \quad (I-3-11)$$

De (I-3-8) a (I-3-11) e das condições de contorno, podemos resolver a equação (I-3-7) para \vec{E} no interior do condutor.

Então, já que $\vec{E}_{||} = 0$, temos que, $\vec{E} = \vec{E}_{\perp}$ e então a dissipação de energia devido às correntes parasitas é dada por:

$$P = \frac{j_{\perp}^2}{\sigma_{\perp}} \quad (I-3-12)$$

onde:

$$\vec{j}_{\perp} = \sigma_{\perp} \vec{E} \quad (I-3-13)$$

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (I-3-7)

Em coordenadas cilíndricas, temos:

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_{\theta}}{\partial z} \right) \hat{a}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \hat{a}_{\theta} +$$

$$+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \hat{a}_z$$

Derivadas com respeito a z são nulas, então:

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right) \hat{a}_r + \left(- \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \hat{a}_{\theta} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \hat{a}_z \quad (I-3-14)$$

Seja:

$$C_1 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \quad (I-3-15)$$

$$C_2 \equiv - \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (I-3-16)$$

$$C_3 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \quad (I-3-17)$$

Então:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial C_3}{\partial \theta} \right) \hat{a}_r + \left(- \frac{\partial C_3}{\partial r} \right) \hat{a}_{\theta} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rC_2) - \frac{1}{r} \frac{\partial C_1}{\partial \theta} \right] \hat{a}_z \quad (I-3-18)$$

De (I-3-15), (I-3-16) e (I-3-17) em (I-3-18), temos:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \exp i(\theta \pm \omega t) & \left[\left(\frac{i}{r} \frac{\partial E_{\theta}}{\partial r} + \frac{i}{r^2} E_{\theta 0} + \frac{1}{r^2} E_{r0} \right) \hat{a}_r + \right. \\ & + \left(- \frac{\partial^2 E_{\theta 0}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_{\theta 0}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} E_{\theta 0} + \frac{i}{r} \frac{\partial E_{r0}}{\partial r} - \frac{i}{r^2} E_{r0} \right) \hat{a}_{\theta} + \\ & \left. + \left(- \frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} E_{z0} \right) \hat{a}_z \right] \end{aligned} \quad (I-3-19)$$

onde E_{r0} , $E_{\theta 0}$ e E_{z0} são dados por (I-3-9), (I-3-10) e (I-3-11).

De (I-3-8), temos:

$$\vec{E} = \pm i\omega \exp i(\theta \pm \omega t) [E_{z0} \hat{a}_z + E_{r0} \hat{a}_r + E_{\theta 0} \hat{a}_{\theta}] \quad (I-3-20)$$

De (I-3-7) e (I-3-20), temos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \mp i4\pi\omega_{\perp} \exp i(\theta \pm \omega t) [E_{z0} \hat{a}_z + E_{r0} \hat{a}_r + E_{\theta0} \hat{a}_{\theta}] \quad (I-3-21)$$

$$\text{Seja } \gamma^2 = \pm i4\pi\omega_{\perp} \quad (I-3-22)$$

De (I-3-22) em (I-3-21), temos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \gamma^2 \exp i(\theta \pm \omega t) [E_{z0} \hat{a}_z + E_{r0} \hat{a}_r + E_{\theta0} \hat{a}_{\theta}] \quad (I-3-23)$$

Por comparação de (I-3-19) e (I-3-23), temos:

$$\frac{i}{r} \frac{\partial E_{\theta0}}{\partial r} + \frac{i}{r^2} E_{\theta0} + \frac{1}{r^2} E_{r0} = \gamma^2 E_{r0} \quad (I-3-24)$$

$$-\frac{\partial^2 E_{\theta0}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_{\theta0}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} E_{\theta0} + \frac{i}{r} \frac{\partial E_{r0}}{\partial r} - \frac{i}{r^2} E_{r0} = \gamma^2 E_{\theta0} \quad (I-3-25)$$

$$-\frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} E_{z0} = \gamma^2 E_{z0} \quad (I-3-26)$$

De (I-1-10) e (I-3-8), a condição $\vec{E}_{||} = 0$ leva à:

$$E_{z0} + \left(\frac{2\pi r}{L}\right) E_{\theta0} = 0$$

$$E_{\theta0} = -\left(\frac{L}{2\pi r}\right) E_{z0} \quad (I-3-27)$$

De (I-3-27), temos:

$$\frac{\partial E_{\theta0}}{\partial r} = -\left(\frac{L}{2\pi}\right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} E_{z0} \right] \quad (I-3-28)$$

De (I-3-28), temos:

$$\frac{\partial^2 E_{\theta 0}}{\partial r^2} = - \left(\frac{L}{2\pi} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} + \frac{2}{r^3} E_{z0} \right] \quad (I-3-29)$$

De (I-3-27) e (I-3-28) em (I-3-24), temos:

$$- \frac{iL}{2\pi r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} E_{z0} \right) - \frac{iL}{2\pi r^3} E_{z0} + \left(\frac{1}{r^2} - \gamma^2 \right) E_{r0} = 0$$

$$E_{r0} = \frac{iL}{2\pi(1 - r^2 \gamma^2)} \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} \quad (I-3-30)$$

De (I-3-30), temos:

$$\frac{\partial E_{r0}}{\partial r} = \frac{iL}{2\pi} \left[(1 - r^2 \gamma^2)^{-1} \frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial r^2} - \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} (1 - r^2 \gamma^2)^{-2} (-2r\gamma^2) \right] \quad (I-3-31)$$

De (I-3-27) a (I-3-31) em (I-3-25), temos:

$$\left[- \frac{r\gamma^2}{1 - r^2 \gamma^2} \right] \frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial r^2} + \left[- \frac{1}{r^2} + \frac{2r\gamma^2}{(1 - r^2 \gamma^2)^2} + \frac{1}{r^2(1 - r^2 \gamma^2)} \right] \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} + \left[\frac{\gamma^2}{r} \right] E_{z0} = 0 \quad (I-3-32)$$

Reescrevendo-se a equação acima, temos:

$$\frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial r^2} + \frac{f(r)}{r} \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} + \left(\gamma^2 - \frac{1}{r^2} \right) E_{z0} = 0 \quad (I-3-33)$$

onde:

$$f(r) = \left[1 - \left(\frac{L\gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{(1 + \gamma^2 r^2)}{(1 - \gamma^2 r^2)^2} \right] \left[1 - \left(\frac{L\gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{(1 - \gamma^2 r^2)} \right]^{-1} \quad (I-3-34)$$

Para $|\gamma|r \ll 1$, $f(r)$ é uma constante e, a menos de uma

constante multiplicativa, a solução de (I-3-33) é:

$$E_{z0} = r \quad (I-3-35)$$

Então, de (I-3-27) e (I-3-35) temos:

$$E_{\theta 0} = -\frac{L}{2\pi} \quad (I-3-36)$$

De (I-3-30) e (I-3-35) temos:

$$E_{r0} = i \frac{L}{2\pi} \quad (I-3-37)$$

Então, de (I-3-35), (I-3-36) e (I-3-37) em (I-3-8) temos uma solução para \vec{E} no interior do condutor. Mas a solução geral para \vec{E} é dada pela combinação linear das soluções para $\pm w$ e seus complexos conjugados.

Seja a combinação linear para o campo elétrico nessa aproximação ser:

$$\vec{E} = K \left[r \sin \theta \hat{a}_z + \left(\frac{L}{2\pi}\right) \cos \theta \hat{a}_r - \left(\frac{L}{2\pi}\right) \sin \theta \hat{a}_\theta \right] \cos(wt - \phi) \quad (I-3-38)$$

onde K e ϕ são constantes a determinar

De (I-3-12) em (I-3-38), temos:

$$P = \sigma_{\perp} K^2 \left[r^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \sin^2 \theta \right] \cos^2(wt - \phi)$$

$$\frac{P}{V} = \sigma_{\perp} K^2 \cos^2(wt - \phi) \frac{1}{1\pi R_o^2} \left[\int_V [r^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2] dV \right]$$

onde $V = 1\pi R_o^2$ é o volume do condutor.

Temos que $\int_V r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta dz = \frac{1\pi R_o^4}{4}$, então:

$$\frac{P}{V} = \sigma_{\perp} K^2 \cos^2(\omega t - \phi) \left[\frac{R_0^2}{4} + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \right]$$

$$\bar{P} = \sigma_{\perp} K^2 \left[\frac{R_0^2}{4} + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \right] \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \phi) dt$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \sigma_{\perp} K^2 \left[\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 + \frac{R_0^2}{4} \right] \quad (I-3-39)$$

DETERMINAÇÃO DE K e ϕ

De (I-3-8), (I-3-27) e (I-3-30) temos que o campo elétrico no interior do condutor é dado por:

$$\vec{E} = \exp i(\theta \pm \omega t) \left\{ E_{z0} \hat{a}_z + \left[\frac{i(L/2\pi)}{1 - \gamma^2 r^2} \right] \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} \hat{a}_r + \right. \\ \left. - \left(\frac{L}{2\pi}\right) \frac{1}{r} E_{z0} \hat{a}_{\theta} \right\} \quad (I-3-40)$$

Da equação de Maxwell $\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$, para $\vec{H} \equiv \dot{\vec{B}}$, podemos calcular \vec{H} para o interior do condutor.

Em coordenadas cilíndricas, temos:

$$(\nabla \times \vec{E})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_{\theta}}{\partial z} \quad (I-3-41)$$

$$(\nabla \times \vec{E})_{\theta} = \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (I-3-42)$$

$$(\nabla \times \vec{E})_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_{\theta}) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \quad (I-3-43)$$

$$\text{Seja } \vec{H} = \exp i(\theta \pm \omega t) \left[H_{r0} \hat{a}_r + H_{\theta0} \hat{a}_{\theta} + H_{z0} \hat{a}_z \right] \quad (I-3-44)$$

$$\dot{H}_r = \pm i\omega H_{r0} \exp i(\theta \pm \omega t) \quad (I-3-45)$$

$$\dot{H}_{\theta} = \pm i\omega H_{\theta0} \exp i(\theta \pm \omega t) \quad (I-3-46)$$

$$\dot{H}_z = \pm iw H_{z0} \exp i(\theta \pm wt) \quad (I-3-47)$$

De (I-3-40), (I-3-41) e (I-3-45) temos:

$$H_{r0} = \pm \frac{E_{z0}}{wr} \quad (I-3-48)$$

De (I-3-40), (I-3-42) e (I-3-46) temos:

$$H_{\theta 0} = \pm \frac{i}{w} \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} \quad (I-3-49)$$

De (I-3-40), (I-3-43) e (I-3-47) temos:

$$H_{z0} = \pm \frac{iL}{2\pi w} \frac{\gamma^2 r}{(1 - \gamma^2 r^2)} \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} \quad (I-3-50)$$

Supondo-se o campo externamente aplicado da forma:

$$\vec{H}_A = H_0 \text{ sen} wt \hat{a}_x \quad (I-3-51)$$

De (I-3-44), (I-3-51), (I-3-38) e das condições de contorno usuais sobre \vec{H} [3] para $r = R_0$, temos:

$$K = - \frac{H_0 w}{[1 + (L/2\pi\delta)^4]^{1/2}} \quad (I-3-52)$$

$$\tan \phi = \left(\frac{L}{2\pi\delta}\right)^2 \quad (I-3-53)$$

$$\text{onde } \delta^{-2} = 2\pi w \sigma_{\perp} \quad (I-3-54)$$

$\delta \equiv$ comprimento de penetração

\vec{H} NO INTERIOR DO CONDUTOR

De (I-3-50), assumindo $\gamma^2 r^2 \ll 1$, temos:

$$H_{z0} = \pm \frac{iL}{2\pi W} \gamma^2 r \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} \quad (I-3-55)$$

De (I-3-38) temos:

$$E_z = Kr \sin\theta \cos(\omega t - \phi) \quad (I-3-56)$$

De (I-3-22), (I-3-56) em (I-3-55), temos:

$$H_z = 2L\sigma_{\perp} r K \sin\theta \cos(\omega t - \phi) \quad (I-3-57)$$

De (I-3-52) e (I-3-54) em (I-3-57) temos:

$$H_z = \frac{H_0}{[1 + (L/2\pi\delta)^4]^{1/2}} \left[-\frac{Lr}{\pi\delta^2} \sin\theta \cos(\omega t - \phi) \right]$$

Obtendo-se as outras componentes de \vec{H} de forma similar à H_z , temos:

$$\vec{H} = \frac{H_0}{[1 + (L/2\pi\delta)^4]^{1/2}} \left[\sin(\omega t - \phi) \hat{a}_x - \frac{Lr}{\pi\delta^2} \sin\theta \cos(\omega t - \phi) \hat{a}_z \right] \quad (I-3-58)$$

Temos que (I-3-58) foi obtida sob a suposição de que não ocorre efeito de pele no condutor.

Para $L/2\pi\delta \ll 1$, (I-3-58) se reduz à (I-3-51), o que significa que o campo no interior do condutor se reduz ao campo aplicado (a blindagem devido às correntes parasitas é negligenciável) e então nos remetemos ao caso estudado na seção (I-1).

Em vista disso, temos que a frequência na qual efeitos de blindagem começam a aparecer é dada pela condição:

$$\frac{L}{2\pi\delta} = 1 \quad (I-3-59)$$

Vejamos como fica a equação (I-3-39) para a perda devido às correntes parasitas, no limite onde:

$$\frac{L}{2\pi\delta} \gg 1 \quad (I-3-60)$$

o que significa uma blindagem considerável, porém não nos esquecendo de que (I-3-39) foi obtida sob a suposição de que não ocorre efeito de pele no condutor, ou seja:

$$|\gamma| R_o \ll 1 \quad (I-3-61)$$

De (I-3-52) em (I-3-39), temos:

$$\frac{\bar{P}}{V} = \frac{\sigma_{\perp} H_o^2 w^2}{2 [1 + (L/2\pi\delta)^4]} \left[\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 + \frac{R_o^2}{4} \right]$$

Para $L/2\pi\delta \gg 1$, temos:

$$\frac{\bar{P}}{V} = \frac{\sigma_{\perp} H_o^2 w^2}{2(L/2\pi\delta)^4} \left[\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 + \frac{R_o^2}{4} \right]$$

Reescrevendo a equação acima temos:

$$\frac{\bar{P}}{V} = \frac{\sigma_{\perp} H_o^2 w^2}{2} \left[\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{2\pi\delta}{L}\right)^4 + \left(\frac{2 \cdot 2^{1/2} \pi R_o}{L}\right) \left(\frac{R_o \pi^3 2^{1/2} \delta^4}{L^3}\right) \right] \quad (I-3-62)$$

De (I-3-54) em (I-3-22), temos que:

$$\gamma^2 = \pm i \frac{2}{\delta^2}$$

$$|\gamma| = \frac{2^{1/2}}{\delta} \quad (I-3-63)$$

De (I-3-61) e (I-3-63), temos:

$$\frac{2^{1/2}}{\delta} R_o \ll 1 \quad (I-3-64)$$

De (I-3-60) e (I-3-64), temos:

$$\frac{2^{1/2}}{\delta} R_o \ll \frac{L}{2\pi\delta}$$

$$2 \frac{2^{1/2} \pi R_0}{L} \ll 1 \quad (I-3-65)$$

De (I-3-65) e (I-3-62), embora considerando $L/2\pi\delta \gg 1$, podemos considerar o segundo termo do lado direito de (I-3-62) desprezível em relação ao primeiro e então temos:

$$\frac{\bar{P}}{V} = \frac{\sigma_{\perp} H_0^2 w^2}{2} \frac{(2\pi)^2 \delta^4}{L^2} \quad (I-3-66)$$

De (I-3-22) e (I-3-63), temos:

$$\delta^4 = \frac{1}{4\pi^2 w^2 \sigma_{\perp}^2} \quad (I-3-67)$$

De (I-3-67) em (I-3-66), temos:

$$\frac{\bar{P}}{V} = \frac{H_0^2}{2\sigma_{\perp} L^2} \quad (I-3-68)$$

De (I-3-68) temos que a potência média dissipada por unidade de volume do condutor devido às correntes parasitas é independente da frequência no regime de blindagem (porém não ocorrendo efeito de pele) do campo aplicado.

I-4) PERDAS HISTERÉTICAS

Seguindo o Modelo do Contínuo Anisotrópico de Carr, o condutor pode ser dividido em duas regiões: uma camada externa saturada e uma camada interna insaturada.

A região saturada é iniciada na superfície do fio devido às correntes parasitas que tendem a fluir para a sua superfície e sua espessura tende a aumentar com o aumento da frequência e do campo aplicado.

Ambas as regiões tem perdas de histerese, mas de uma magnitude diferente.

Na região insaturada, histerese em cada filamento resulta a

partir das correntes locais tendendo a blindar o filamento. Essas correntes geradas no supercondutor pelo campo oscilante, produzem a força de Lorentz que causa uma "compressão" periódica na estrutura de vórtices. Como uma consequência disso, temos uma geração de calor próximo aos centros de aprisionamento que se opõem ao movimento de vórtices.

Quanto à região saturada para a qual $E_{||} \neq 0$ devido à movimentação dos vórtices causada pelas correntes parasitas que para aí fluem, à medida que essa região torna-se mais espessa, a perda histerética pode tornar-se relativamente grande.

CÁLCULO DA PERDA HISTERÉTICA

O cálculo da perda histerética, por ser intrínseca ao supercondutor, requer conhecimento dos campos locais dentro dos filamentos.

Será assumido que o campo para completa penetração do filamento é negligenciável de tal forma que, de acordo com o Modelo de Estado Crítico de Bean [4], a densidade de corrente em qualquer ponto no filamento é $\pm j_c$, a densidade de corrente crítica.

Se \vec{e} denota o campo elétrico local devido ao campo aplicado oscilante, temos que a potência instantânea por unidade de volume em um ponto no filamento é dada por $\vec{j} \cdot \vec{e} = j_c e$.

Seja r' , θ' e z' as coordenadas cilíndricas do filamento e x' , y' e z' as coordenadas retangulares do mesmo.

Seja:

H_x \equiv campo transversal ao filamento

H_z \equiv campo longitudinal ao filamento

$$\vec{H}_x = H_x \hat{x}'$$

$$\vec{H}_z = H_z \hat{z}'$$

Passando-se para coordenadas cilíndricas, temos:

$$\vec{H}_x = H_x (\cos\theta' \hat{r}' - \sin\theta' \hat{\theta}')$$

$$\vec{H} = H_x \cos\theta' \hat{r}' - H_x \sin\theta' \hat{\theta}' + H_z \hat{z}' \quad (I-4-1)$$

Para obtermos \vec{E} é preciso resolver a equação de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{H}} \quad (I-4-2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} e_z \hat{r}' + \frac{\partial}{\partial r} (r' e_{\theta}') \hat{z}' + r' \frac{\partial}{\partial z} e_r \hat{\theta}' + \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \theta} e_r \hat{z}' - \frac{\partial}{\partial z} (r e_{\theta}') \hat{r}' - r' \frac{\partial}{\partial r} e_z \hat{\theta}' \right]$$

Assumindo-se que as derivadas com respeito a z' são nulas e que os filamentos são muito finos tal que a componente na direção \hat{r}' de \vec{E} possa ser negligenciada, temos:

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} e_z \hat{r}' - \frac{\partial}{\partial r} e_z \hat{\theta}' + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r' e_{\theta}') \hat{z}' \quad (I-4-3)$$

De (I-4-1) e (I-4-3) em (I-4-2), temos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} e_z = -\dot{H}_x \cos\theta' \quad (I-4-4)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} e_z = \dot{H}_x \sin\theta' \quad (I-4-5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r' e_{\theta}') = -\dot{H}_z \quad (I-4-6)$$

De (I-4-4) temos:

$$e_z = -\dot{H}_x r' \sin\theta' \quad (I-4-7)$$

De (I-4-6) temos:

$$\frac{\partial e_{\theta}'}{\partial r'} + \frac{1}{r'} e_{\theta}' = -\dot{H}_z \quad (I-4-8)$$

Uma solução de (I-4-8) é:

$$e_{\theta'} = - \dot{H}_z' \frac{r'}{2} \quad (I-4-9)$$

Sendo $E_{||}$ o campo elétrico produzido pelas correntes parasitas caso elas venham a saturar os filamentos próximos à superfície (caso as correntes parasitas passando através dos filamentos ultrapassem a densidade de corrente crítica, ocorre movimentação dos vórtices e então surge um campo elétrico ao longo do filamento) temos que:

$$e_z' = - \dot{H}_x' r' \text{sen}\theta' + E_{||}$$

Portanto, temos:

$$e_r' = 0 \quad (I-4-10)$$

$$e_{\theta'} = - \dot{H}_z' \frac{r'}{2} \quad (I-4-11)$$

$$e_z' = E_{||} - \dot{H}_x' r' \text{sen}\theta' \quad (I-4-12)$$

A potência histerética instantânea por unidade de volume em um ponto no filamento é:

$$\vec{j} \cdot \vec{e} = j_c e$$

De (I-4-10), (I-4-11), (I-4-12) e (I-4-13), temos:

$$j_c e = j_c (e_{\theta'}^2 + e_z'^2)^{1/2} \quad (I-4-14)$$

No interior do fio, para $|j_{||}| < \lambda j_c$ a magnitude de $E_{||}$ é pequena e pode ser feita igual a zero no cálculo das perdas histeréticas.

No interior do fio temos que $E_{||} = 0$ (as correntes parasitas tendem a fluir para a superfície do fio e saturam os filamentos próximos à superfície).

De (I-4-10), (I-4-11) e (I-4-12) em (I-4-14), temos que a potência instantânea por unidade de volume em um ponto no filamento é:

$$j_c e = j_c r' \left[\frac{1}{4} \dot{H}_z^2 + \dot{H}_x^2 \text{sen}^2 \theta' \right]^{1/2}$$

Denotando-se H_z por $H_{||}$ (campo paralelo ao filamento) e H_x por H_{\perp} (campo perpendicular ao filamento), temos:

$$j_c e = j_c r' \left[\frac{1}{4} \dot{H}_{||}^2 + \dot{H}_{\perp}^2 \text{sen}^2 \theta' \right]^{1/2} \quad (\text{I-4-15})$$

A média de (I-4-15) sobre a área $A = \pi r_0^2$ do filamento é:

$$\frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} j_c e r' dr' d\theta' = \frac{j_c}{\pi r_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} r' \left[\frac{1}{4} \dot{H}_{||}^2 + \dot{H}_{\perp}^2 \text{sen}^2 \theta' \right] r' dr' d\theta'$$

$$\text{Seja } \frac{1}{A} \int_A j_c e dA \equiv \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} j_c e r' dr' d\theta' \quad (\text{I-4-16})$$

$$\frac{1}{A} \int_A j_c e dA = \frac{4}{3} \frac{j_c r_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{4} \dot{H}_{||}^2 + \dot{H}_{\perp}^2 \text{sen}^2 \theta' \right]^{1/2} d\theta' \quad (\text{I-4-17})$$

Temos que [5] :

$$\int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{4} \dot{H}_{\parallel}^2 + \dot{H}_{\perp}^2 \sin^2 \theta' \right]^{1/2} d\theta' = \left[\frac{1}{4} \dot{H}_{\parallel}^2 + \dot{H}_{\perp}^2 \right]^{1/2} E(k) \quad (I-4-18)$$

onde $E(k) \equiv$ integral elíptica, com $k^2 = \dot{H}_{\perp}^2 \left[\frac{1}{4} \dot{H}_{\parallel}^2 + \dot{H}_{\perp}^2 \right]^{-1}$

De (I-4-18) em (I-4-17), temos:

$$\frac{1}{A} \int_A j_c e \, dA = \frac{4}{3} \frac{j_c r_0}{\pi} \left[\frac{1}{4} \dot{H}_{\parallel}^2 + \dot{H}_{\perp}^2 \right]^{1/2} E(k)$$

Em termos do diâmetro do filamento $d = 2r_0$ temos:

$$\frac{1}{A} \int_A j_c e \, dA = \frac{2j_c d}{3\pi} \left[\frac{1}{4} \dot{H}_{\parallel}^2 + \dot{H}_{\perp}^2 \right]^{1/2} E(k) \quad (I-4-19)$$

Até agora, falou-se em potência dissipada a nível de filamento; em termos do compósito (filamentos supercondutores embutidos em uma matriz de metal normal), a equação (I-4-19) deve ser multiplicada por λ , a fração de material supercondutor no compósito, então:

$$\lambda \left[\frac{1}{A} \int_A j_c e \, dA \right] = \frac{2\lambda j_c d}{3\pi} \left[\frac{1}{4} \dot{H}_{\parallel}^2 + \dot{H}_{\perp}^2 \right]^{1/2} E(k)$$

Considerando-se a média temporal da expressão acima, temos:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\lambda}{A} \int_A j_c e \, dA \right] dt = \frac{2\lambda d}{3\pi T} \int_0^T j_c \left[\frac{1}{4} \dot{H}_{\parallel}^2 + \dot{H}_{\perp}^2 \right]^{1/2} E(k) dt \quad (I-4-20)$$

A equação acima significa potência dissipada média temporal

por unidade de volume em qualquer ponto na região para a qual $E_{||} = 0$.

Seja P_h a potência dissipada média temporal e espacial por unidade de volume, temos:

$$P_h = \left\langle \frac{1}{T} \int_0^T \lambda \left[\frac{1}{A} \int_A j_c e \, dA \right] dt \right\rangle \quad (I-4-21)$$

onde $\langle \rangle$ denota média espacial sobre o condutor de raio R_0

De (I-4-21) e (I-4-20), temos:

$$P_h = \frac{2\lambda}{3\pi T} \left\langle d \int_0^T j_c \left[\frac{1}{4} \dot{H}_{||}^2 + \dot{H}_{\perp}^2 \right]^{1/2} E(k) dt \right\rangle \quad (I-4-22)$$

$$\text{Seja } H_{||} = H_{||p} \text{ senwt e } H_{\perp} = H_{\perp p} \text{ senwt} \quad (I-4-23)$$

onde $H_{||p}$ e $H_{\perp p}$ são as amplitudes de $H_{||}$ e H_{\perp} respectivamente

De (I-4-23) e (I-4-22), temos [5]:

$$P_h = \frac{4w\lambda}{3\pi^2} \left\langle j_c d \left[\frac{1}{4} H_{||p}^2 + H_{\perp p}^2 \right]^{1/2} E(k_0) \right\rangle \quad (I-4-24)$$

$$\text{onde } k_0^2 = H_{\perp p}^2 \left[\frac{1}{4} H_{||p}^2 + H_{\perp p}^2 \right]^{-1}$$

Seja \hat{a}_x , \hat{a}_y e \hat{a}_z coordenadas retangulares do condutor e \hat{a}_r , \hat{a}_θ e \hat{a}_z coordenadas cilíndricas também do condutor multifilamentar, para um campo aplicado transversal ao eixo do condutor na direção \hat{a}_x , de valor de pico H_0 , temos:

$$H_{||p} = H_0 \hat{a}_x \cdot \hat{a}_{||} \quad (I-4-25)$$

onde \hat{a}_z é o vetor unitário paralelo ao filamento supercondutor, dado por (I-1-10).

Sendo $\hat{a}_x = \cos\theta \hat{a}_r - \sin\theta \hat{a}_\theta$, de (I-1-10) e (I-4-25) temos:

$$H_{\parallel p} = - \frac{H_o \sin\theta}{[1 + (L/2\pi r)^2]^{1/2}} \left(\frac{2\pi r}{L} \right) \quad (I-4-26)$$

Encontrado o valor para $H_{\parallel p}$, temos:

$$H_{\perp} = (H_o^2 - H_{\parallel p}^2)^{1/2} \quad (I-4-27)$$

Para frequências suficientemente baixas, a região saturada é fina o suficiente de modo que a região para a qual $E_{\parallel} = 0$ cobre praticamente todo o compósito.

Então, executando-se a média espacial de (I-4-24), temos:

$$P_h = \frac{1}{\pi R_o^2} \left(\frac{4\omega\lambda}{3\pi^2} \right) \int_0^{R_o} \int_0^{2\pi} j_c d \left[\frac{1}{4} H_{\parallel p}^2 + H_{\perp p}^2 \right]^{1/2} E(k_o) r dr d\theta \quad (I-4-28)$$

onde:

$E(k_o) \equiv$ integral elíptica [5]

$$k_o^2 = H_{\perp p}^2 \left(\frac{1}{4} H_{\parallel p}^2 + H_{\perp p}^2 \right)^{-1}$$

Se $\frac{2\pi R_o}{L} \ll 1$, como é geralmente o caso, de (I-4-26) e (I-4-27) aproximadamente temos que:

$$H_{\parallel p} = 0 \quad (I-4-29)$$

$$H_{\perp p} = H_o \quad (I-4-30)$$

De (I-4-29) e (I-4-30) em (I-4-28), temos:

$$P_h = \frac{4\omega\lambda j_c d H_o}{3\pi^2} \quad (I-4-31)$$

PERDA HISTERÉTICA NA REGIÃO SATURADA

Na região saturada temos que $E_{||} \neq 0$, portanto temos que calcular $E_{||}$ para obtermos a perda histerética nessa região.

Considere a figura (I-4-1a) que representa esquematicamente a secção longitudinal do fio supercondutor multifilamentar, onde a parte hachurada representa a região saturada. Também são representados alguns filamentos supercondutores.

Considere o caminho fechado esquematizado em (I-4-1a), o qual é mostrado de forma ampliada em (I-4-1b), para maior clareza. O caminho fechado encontra-se totalmente contido na região saturada.

A linha 1 está na interface entre as regiões saturada e insaturada, a uma distância radial r_1 do centro do condutor e é curta o suficiente para ser paralela ao filamento supercondutor.

A linha 3, também paralela ao filamento supercondutor, está na região saturada, a uma distância r do centro do condutor.

As linhas 2 e 4 estão na direção radial.

Considere a seguinte equação de Maxwell em forma integral,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \dot{\vec{H}} \cdot d\vec{A} \quad (\text{I-4-32})$$

aplicada ao caminho fechado acima.

Temos que :

$$d\vec{A} = ds \hat{a}_{||} \times dr \hat{a}_r \quad (\text{I-4-33})$$

onde ds é um elemento de distância ao longo do filamento.

De (I-1-9) temos que:

$$ds = \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{1/2} dz \quad (\text{I-4-34})$$

De (I-4-34) e (I-4-33), temos:

$$d\vec{A} = \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{1/2} dz \hat{a}_{||} \times dr \hat{a}_r \quad (\text{I-4-35})$$

De (I-1-10) e (I-4-35) temos:

$$d\vec{A} = dz dr \left(\hat{a}_\theta - \frac{2\pi r}{L} \hat{a}_z \right) \quad (I-4-36)$$

$$\vec{H} \cdot d\vec{A} = dz dr \left[\dot{H}_\theta - \left(\frac{2\pi r}{L} \right) \dot{H}_z \right] \quad (I-4-37)$$

A linha 1 está na interface entre a região saturada e insaturada e desde que ela é paralela ao filamento supercondutor, temos:

$$\vec{E} \cdot \vec{l}_1 = 0, \text{ pois aí } \vec{E}_n = 0 \quad (I-4-38)$$

A linha 3 está na região saturada, para a qual $\vec{E}_n \neq 0$, então de (I-4-34), temos:

$$\vec{E} \cdot \vec{l}_3 = E_n \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{1/2} dz \quad (I-4-39)$$

Denotando-se por $(E_r)_2$ e $(E_r)_4$ os valores do campo elétrico ao longo dos caminhos radiais 2 e 4, de (I-4-37), (I-4-38) e (I-4-39) em (I-4-32), temos:

$$\begin{aligned} & - E_n \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{1/2} dz + \int_{r_1}^r [(E_r)_2 - (E_r)_4] dr = \\ & = - \int_{r_1}^r \int_z \left[\dot{H}_\theta - \left(\frac{2\pi r}{L} \right) \dot{H}_z \right] dz dr \end{aligned} \quad (I-4-40)$$

Temos que:

$$(E_r)_2 - (E_r)_4 = \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{1/2} dz \hat{a}_n \cdot \nabla E_r \quad (I-4-41)$$

A equação (I-4-41) expressa o fato de que $[(E_r)_2 - (E_r)_4]$ é dado pela projeção do vetor ∇E_r (que dá a variação de E_r no fio) sobre o elemento de distância $d\vec{s}$, paralelo aos filamentos, o qual

separa a linha 2 da linha 4. O módulo de $d\vec{s}$ é dado por (I-4-34).

$$\nabla E_r = \frac{\partial E_r}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{\partial E_r}{\partial z} \hat{a}_z \quad (\text{I-4-42})$$

Desprezando-se a derivada com respeito a z , de (I-1-10) e (I-4-42) temos:

$$\hat{a}_n \cdot \nabla E_r = \frac{2\pi}{L} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (\text{I-4-43})$$

De (I-4-41) e (I-4-43), temos:

$$(E_r)_2 - (E_r)_4 = \frac{2\pi}{L} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} dz \quad (\text{I-4-44})$$

De (I-4-44) e (I-4-40), temos:

$$- E_n \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{2\pi}{L} \int_{r_1}^r \frac{\partial E_r}{\partial \theta} dr = - \int_{r_1}^r \left(\dot{H}_\theta - \frac{2\pi r}{L} \dot{H}_z \right) dr \quad (\text{I-4-45})$$

Da equação de Maxwell $4\pi \vec{j} = \nabla \times \vec{H}$, temos que:

$$4\pi j_r = \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta}$$

Mas de (I-3-6) segue que $j_r = \sigma_\perp E_r$, então:

$$4\pi \sigma_\perp E_r = \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi \sigma_\perp r} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} \quad (\text{I-4-46})$$

De (I-4-46) em (I-4-45), temos:

$$E_{\parallel}(r) = \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{-1/2} \int_{r_1}^r \left[\dot{H}_{\theta} + \frac{2\pi r}{L} \left(\frac{1}{4\pi\sigma_{\perp} r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} - \dot{H}_z \right) \right] dr \quad (I-4-47)$$

No caso de campo aplicado transversal ao condutor, podemos simplificar a resolução de (I-4-47) reescrevendo o integrando tal que:

$$E_{\parallel}(r) = \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{-1/2} \int_{r_1}^r \dot{H}_{\theta} \left(\frac{r - r_1}{R_0 - r_1} \right) dr \quad (I-4-48)$$

Vemos que, para um campo aplicado transversal ao condutor, para $r = R_0$, $H_z = 0$. Então, de (I-4-47) temos:

$$E_{\parallel}(R_0) = \left[1 + \left(\frac{2\pi R_0}{L} \right)^2 \right]^{-1/2} \int_{r_1}^{R_0} \dot{H}_{\theta} dr \quad (I-4-49)$$

Temos que (I-4-49) é a mesma expressão obtida de (I-4-48) para $r = R_0$ e que para $r = r_1$ o integrando de (I-4-48) desaparece, satisfazendo a condição de que para $r < r_1$, $E_{\parallel} = 0$.

Esta aproximação é razoável pois satisfaz as mesmas condições de contorno de (I-4-47) e então espera-se que para qualquer r na região saturada, (I-4-48) dê o valor de E_{\parallel} com uma margem de erro aceitável.

No caso de uma região saturada no condutor, assumindo-se que a espessura dessa região seja pequena comparada com o diâmetro do mesmo, temos que não existem variações significantes dos campos locais e a perda histerética instantânea para essa região é dada por $\lambda j_c |E_{\parallel}|$.

A) Cálculo de $\lambda j_c |E_{\parallel}|$ para altas frequências

Consideremos um campo aplicado ao condutor da forma:

$$\dot{H}_A = H_0 \text{sen} \omega t \hat{a}_x \quad (\text{I-4-50})$$

No limite de altas frequências temos uma blindagem considerável do condutor causada pelas correntes parasitas que fluem para a superfície do condutor de tal forma que, em coordenadas cilíndricas r e θ do condutor, a componente θ do campo magnético fora do cilindro [6] seja:

$$H_\theta = - H_A \left[1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right] \text{sen } \theta \quad (\text{I-4-51})$$

Portanto, para $r = R_0$ temos:

$$H_\theta = - 2H_A \text{sen} \theta \quad (\text{I-4-52})$$

Como estamos calculando a perda histerética na região saturada e estamos considerando que a espessura dessa região seja muito pequena como exposto anteriormente, podemos considerar que nessa região H_θ seja dado por (I-4-52), muito embora não estejamos considerando que ocorra efeito de pele.

De (I-4-50) e (I-4-52) temos:

$$\dot{H}_\theta = - 2\omega H_0 \text{cos} \omega t \text{sen} \theta \quad (\text{I-4-53})$$

De (I-4-53) em (I-4-48), temos:

$$E_{ii}(r) = - \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{-1/2} H_0 \omega \text{sen} \theta \text{cos} \omega t \frac{(r - r_1)^2}{R_0 - r_1} \quad (\text{I-4-54})$$

Portanto, de (I-4-54) a perda histerética instantânea para a região saturada é dada por:

$$\lambda_{j_c} |E_{||}| = \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{-1/2} \lambda_{j_c} w H_0 \sin\theta \cos\omega t \frac{(r - r_1)^2}{R_0 - r_1} \quad (I-4-55)$$

Para o limite de altas frequências, porém não ocorrendo efeito de pele, de (I-3-65) podemos considerar que:

$$\frac{2\pi R_0}{L} \ll 1 \quad (I-4-56)$$

Como a espessura da região saturada está sendo considerada muito pequena em relação ao raio do condutor, de (I-4-56) em (I-4-55) podemos aproximar $\lambda_{j_c} |E_{||}|$ por:

$$\lambda_{j_z} |E_{||}| = \lambda_{j_c} w H_0 \sin\theta \cos\omega t \frac{(r - r_1)^2}{R_0 - r_1} \quad (I-4-57)$$

Temos que $(R_0 - r_1)$ é a espessura w da região saturada, a qual é uma função de θ e t , de valor de pico w_0 .

De (I-2-18) temos:

$$w_0 = \frac{J_{||\text{maxima}}}{\lambda_{j_c}} \quad (I-4-58)$$

onde $J_{||}$ é a densidade de corrente parasita na região saturada.

De [7], temos que $(R_0 - r_1)$ é dado por:

$$R_0 - r_1 = \frac{1}{2} w_0 \left[1 + \frac{\cos\omega t}{|\cos\omega t|} \sin\omega t \right] |\sin\theta| \quad (I-4-59)$$

Antes de voltarmos à (I-4-57), precisamos calcular $J_{||\text{maxima}}$.

De (I-2-9) temos:

$$\frac{1}{R_0} \frac{\partial J_{\theta}}{\partial \theta} = j_{\perp R} (R_0) \quad (I-4-60)$$

onde:

$\vec{J} \equiv$ densidade de corrente parasita na superfície

(solução para \vec{J} na superfície do condutor)

$\vec{J}_{\perp} \equiv$ solução para \vec{J} no interior do condutor dada por (I-1-21).

\vec{J} é a densidade de corrente parasita

$j_{\perp R} \equiv$ componente radial de \vec{J}_{\perp}

Temos que $\vec{J}_{\perp} = \sigma_{\perp} \vec{E}_{\perp}$. De (I-3-38) temos:

$$j_{\perp R} = \sigma_{\perp} K \frac{L}{2\pi} \cos\theta \cos(\omega t - \phi) \quad (\text{I-4-61})$$

onde K é dado por (I-3-52) e ϕ é dado por (I-3-53)

De (I-4-61) em (I-4-60), temos:

$$J_{\theta} = \frac{1}{2\pi} K \sigma_{\perp} L R_o \sin\theta \cos(\omega t - \phi) \quad (\text{I-4-62})$$

Assumindo-se que \vec{J} flua somente ao longo do caminho de alta condutividade paralelo aos filamentos, temos que:

$$\vec{J} = J \hat{a}_{\parallel} \quad (\text{I-4-63})$$

onde \hat{a}_{\parallel} é dado por (I-1-11).

Então, de (I-1-11) e (I-4-63) temos:

$$J_{\theta} = J \frac{(2\pi R_o/L)}{[1 + (2\pi R_o/L)^2]^{1/2}} \quad (\text{I-4-64})$$

$$J_z = J \frac{1}{[1 + (2\pi R_o/L)^2]^{1/2}} \quad (\text{I-4-65})$$

De (I-4-64) e (I-4-65) temos:

$$J_z = \left(\frac{L}{2\pi R_o}\right) J_{\theta} \quad (\text{I-4-66})$$

De (I-4-62) e (I-4-66), temos:

$$\vec{J} = \frac{1}{2\pi} K \sigma_{\perp} L R_o \sin\theta \cos(\omega t - \phi) \left[\hat{a}_{\theta} + \frac{L}{2\pi R_o} \hat{a}_z \right] \quad (\text{I-4-67})$$

De (I-4-67) temos:

$$|J| = \frac{1}{2\pi} |K| \sigma_{\perp} L R_o \sin\theta \cos(\omega t - \phi) \left[1 + \left(\frac{L}{2\pi R_o} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{I-4-68})$$

De (I-3-52) em (I-4-68) temos que $|J_{\text{maxima}}|$ é dada por:

$$|J|_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\perp} L R_o}{2\pi} \frac{H_o \omega}{[1 + (L/2\pi\delta)^4]^{1/2}} \left[1 + \left(\frac{L}{2\pi R_o} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{I-4-69})$$

Reescrevendo (I-4-69) temos:

$$|J|_{\text{max}} = \frac{1}{2\pi} H_o \omega \sigma_{\perp} L R_o \frac{(L/2\pi R_o) [1 + (2\pi R_o/L)^2]^{1/2}}{(L/2\pi\delta)^2 [1 + (2\pi\delta/L)^4]^{1/2}} \quad (\text{I-4-70})$$

Como estamos considerando o limite para o qual valem as condições dadas por (I-3-65) e (I-4-56), aplicando essas condições em (I-4-70), temos:

$$|J|_{\text{max}} = H_o \omega \sigma_{\perp} \delta^2 \quad (\text{I-4-71})$$

De (I-3-54) em (I-4-71), temos:

$$J_{\text{max}} = \frac{H_o}{2\pi} \quad (\text{I-4-72})$$

De (I-4-72) em (I-4-58) temos:

$$\omega_o = \frac{H_o}{2\pi \lambda j_c} \quad (\text{I-4-73})$$

De (I-4-73) em (I-4-59), temos:

$$R_o - r_1 = \frac{H_o}{4\pi\lambda j_c} \left[1 + \frac{\cos wt}{|\cos wt|} \operatorname{sen} wt \right] |\operatorname{sen} \theta| \quad (\text{I-4-74})$$

De (I-4-74) em (I-4-57), fazendo-se a média temporal e espacial da equação resultante, temos que a potência histerética média por unidade de volume do condutor para a região saturada é dada por:

$$P_h = \frac{w_o}{R_o} \frac{8wH_o^2}{27\pi^3} \quad (\text{I-4-75})$$

com w_o dado por (I-4-73).

B) Cálculo de $\lambda j_c |E_{||}|$ para frequências baixas

No limite de baixas frequências, onde não temos blindagem considerável do condutor pelas correntes parasitas, para um campo aplicado dado por (I-4-50), na região saturada temos:

$$H_\theta = - H_o \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} wt \quad (\text{I-4-76})$$

$$\dot{H}_\theta = - H_o w \operatorname{sen} \theta \cos wt \quad (\text{I-4-77})$$

De (I-4-77) em (I-4-48) temos:

$$E_{||} = - \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{-1/2} \int_{r_1}^r H_o w \operatorname{sen} \theta \cos wt \left(\frac{r - r_1}{R_o - r_1} \right) dr \quad (\text{I-4-78})$$

De (I-4-78) temos:

$$E_{||} = - \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{-1/2} w H_o \operatorname{sen} \theta \cos wt \frac{(r - r_1)^2}{R_o - r_1} \quad (\text{I-4-79})$$

De (I-2-17), temos:

$$J_{\parallel} = - \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \sigma_{\perp} \dot{H}_{\perp} \left[1 + \left(\frac{2\pi R_o}{L} \right)^2 \right]^{1/2} \sin\theta \quad (I-4-80)$$

De (I-4-50) em (I-4-80) temos:

$$|J_{\parallel}|_{\max} = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \sigma_{\perp} \omega H_o \left[1 + \left(\frac{2\pi R_o}{L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (I-4-81)$$

De (I-3-54) em (I-4-81) temos:

$$|J_{\parallel}|_{\max} = \frac{1}{2\pi\delta^2} H_o \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{2\pi R_o}{L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (I-4-82)$$

De (I-4-82) em (I-4-58) temos:

$$\omega_o = \frac{H_o}{2\pi\lambda j_c} \left(\frac{L}{2\pi\delta} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{2\pi R_o}{L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (I-4-83)$$

Já que a perda histerética instantânea é dada por $\lambda j_c |E_{\parallel}|$, de (I-4-83) e (I-4-59) em (I-4-79), fazendo-se a média temporal e espacial de (I-4-79), temos que a potência média por unidade de volume do condutor, no limite de baixas frequências é dada por:

$$P_h = \frac{\omega_o}{R_o} \frac{8\omega H_o^2}{27\pi^3} \left(\frac{L}{2\pi\delta} \right)^2 \quad (I-4-84)$$

onde ω_o é dado por (I-4-83).

I-5) CÁLCULO DE σ_{\perp}

Carr, tratando o supercondutor multifilamentar como um contínuo anisotrópico, considera que vetores de campo eletromagnético macroscópicos que satisfazem as equações de Maxwell, são definidos em termos de médias sobre campos microscópicos. Todavia, as fontes para o campo, isto é, densidades de corrente e de carga, magnetização e polarização, diferem em alguns aspectos a partir daquelas para matéria ordinária.

Tratando o condutor como um contínuo anisotrópico, na direção ao longo dos filamentos a condutividade é denotada por σ_{\parallel} e, transversal aos filamentos uma condutividade σ_{\perp} é assumida.

Considere a secção transversal de uma rede de filamentos embebida em uma matriz metálica como mostra a figura (I-5-1). Ao redor de qualquer filamento podemos desenhar uma "célula unitária", tal que a soma de todas as células unitárias preencha o espaço do condutor. Para simplificação, a secção transversal da célula unitária é um círculo, de modo que o volume da célula unitária ΔV é a área do círculo multiplicada por um comprimento unitário ao longo do eixo do filamento.

Na figura (I-5-1) considere uma densidade de corrente \vec{j} e campo elétrico \vec{E} perpendicular ao eixo do filamento e considere uma distribuição de carga de superfície no filamento central decorrente de uma possível descontinuidade em condutividade.

Em qualquer ponto da célula unitária, o campo elétrico total é a soma do campo devido à distribuição de carga de superfície do filamento central e do campo local. Entenda-se por campo elétrico local o campo devido à H somado ao campo devido à distribuições de carga fora da célula unitária central.

$$\vec{E}_{\text{célula unitária}} = \vec{E}_{\text{local}} + \vec{E}_{\text{distribuição de carga na superfície do filamento central}}$$

(I-5-1)

O campo elétrico macroscópico \vec{E} é dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{e} \, dV \quad (I-5-2)$$

Assumindo-se que o filamento supercondutor não esteja saturado, temos que $e = 0$ no filamento e então:

$$\vec{E} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V - \Delta V_{fil}} \vec{e} \, dV \quad (I-5-3)$$

onde $\Delta V_{fil} \equiv$ volume do filamento

Assumindo-se que \vec{e}_{local} seja constante sobre a célula unitária e que a integral sobre o volume do segundo termo do lado direito de (I-5-1) seja nula por causa das condições de simetria da distribuição de carga, de (I-5-1) em (I-5-3) temos que o campo elétrico para qualquer ponto da célula unitária (com exceção do filamento central) é dada por:

$$\vec{E} = (1 - \lambda) \vec{E}_{loc} \quad (I-5-4)$$

onde $\lambda = \frac{\Delta V_{fil}}{\Delta V} =$ fração de material supercondutor no condutor

Já que a densidade de corrente radial e campo elétrico devem desaparecer na interface matriz-filamento, temos que aí o campo elétrico local deve ser cancelado pelo campo elétrico de polarização da distribuição de carga de superfície.

$$\vec{E}_{local} = \vec{E}_{polarização} \quad (I-5-5)$$

Se \vec{p} é o momento de dipolo de carga de superfície, ele produz uma polarização média \vec{P} na célula unitária dada por:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{\Delta V} \quad (I-5-6)$$

mas, relativamente ao volume do filamento ΔV_{fil} , é equivalente a uma polarização \vec{P}_{fil} no filamento dada por:

$$\vec{P}_{fil} = \frac{\vec{p}}{\Delta V_{fil}} \quad (I-5-7)$$

De (I-5-6) e (I-5-7):

$$\vec{P}_{fil} = \frac{1}{\lambda} \vec{p} \quad (I-5-8)$$

Levando-se em conta o fator 2π de desmagnetização de um cilindro, de (I-5-8) temos que o campo elétrico produzido pela distribuição de carga de superfície na interface matriz-filamento é dada por (em esu):

$$\vec{E}_{polarização} = 2\pi \frac{\vec{p}}{\lambda} \quad (I-5-9)$$

De (I-5-4), (I-5-5) e (I-5-9), temos que:

$$\vec{E} = 2\pi \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \vec{p} \quad (I-5-10)$$

Temos que:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{p} \quad (I-5-11)$$

onde $\vec{D} \equiv$ vetor deslocamento elétrico

De (I-5-10) em (I-5-11), temos:

$$\vec{D} = \frac{(1 + \lambda)}{(1 - \lambda)} \vec{E} \quad (I-5-12)$$

Considere a seguinte identidade vetorial [8], onde \vec{c} é um vetor constante arbitrário:

$$\vec{c} \cdot \vec{e} \equiv \text{div} (\vec{e} \vec{c} \cdot \vec{r}) - \vec{c} \cdot \vec{r} \text{ div} \vec{e} \quad (I-5-13)$$

Temos que $\text{div} \vec{e} = 4\pi\rho_{mic}$, onde ρ = densidade de carga.

Então:

$$\vec{C} \cdot \vec{e} \equiv \text{div} (\vec{e} \vec{C} \cdot \vec{r}) - \vec{C} \cdot \vec{r} \quad (4\pi\rho) \quad (\text{I-5-14})$$

Fazendo-se a média espacial da expressão acima sobre o volume da célula unitária, temos:

$$\vec{C} \cdot \langle \vec{e} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta S} (\vec{C} \cdot \vec{r}) \vec{e} \cdot d\vec{S} - 4\pi \vec{C} \cdot \langle \vec{r} \rho \rangle \quad (\text{I-5-15})$$

onde S é a superfície da célula unitária

Mas $\langle \vec{e} \rangle = \vec{E}$ e $\langle \vec{r} \rho \rangle = \vec{P}$ e já que \vec{C} é um vetor arbitrário, de (I-5-15) temos:

$$\vec{E} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta S} \vec{r} \vec{e} \cdot d\vec{S} - 4\pi \vec{P} \quad (\text{I-5-16})$$

Escrevendo-se a identidade (I-5-13) para \vec{J} ao invés de \vec{e} , já que $\text{div} \vec{J} = 0$, temos:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta S} \vec{r} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

onde \vec{J} é a densidade de corrente macroscópica dada por $\langle \vec{j} \rangle$

Já que \vec{J} foi assumido como sendo transversal ao eixo do filamento, temos que $\vec{J} \cdot d\vec{S}$ desaparece exceto sobre a superfície cilíndrica que envolve a célula unitária, onde $\vec{J} = \sigma_m \vec{e}$, por causa que esta superfície está na matriz; σ_m é a condutividade da matriz metálica.

Portanto, de (I-5-19) temos:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta S} \sigma_m \vec{r} \vec{e} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I-5-18})$$

De (I-5-18) em (I-5-16), temos:

$$\vec{E} + 4\pi\vec{P} = \frac{\vec{J}}{\sigma_m} \quad (\text{I-5-19})$$

De (I-5-11) e (I-5-19), temos:

$$\vec{D} = \frac{\vec{J}}{\sigma_m} \quad (\text{I-5-20})$$

De (I-5-12) e (I-5-20), temos:

$$\vec{J} = \sigma_m \left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right) \vec{E} \quad (\text{I-5-21})$$

De (I-5-21) temos que a condutividade na direção transversal ao filamento supercondutor é dada por:

$$\sigma_{\perp} = \sigma_m \left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right) \quad (\text{I-5-22})$$

onde $\sigma_m \equiv$ condutividade da matriz
 $\lambda \equiv$ fração de material supercondutor no compósito

Foi assumido neste cálculo que a condutividade do compósito é uniforme exceto na interface matriz - filamento. Quando este não é o caso, outra expressão para σ_{\perp} [B] tem sido calculada.

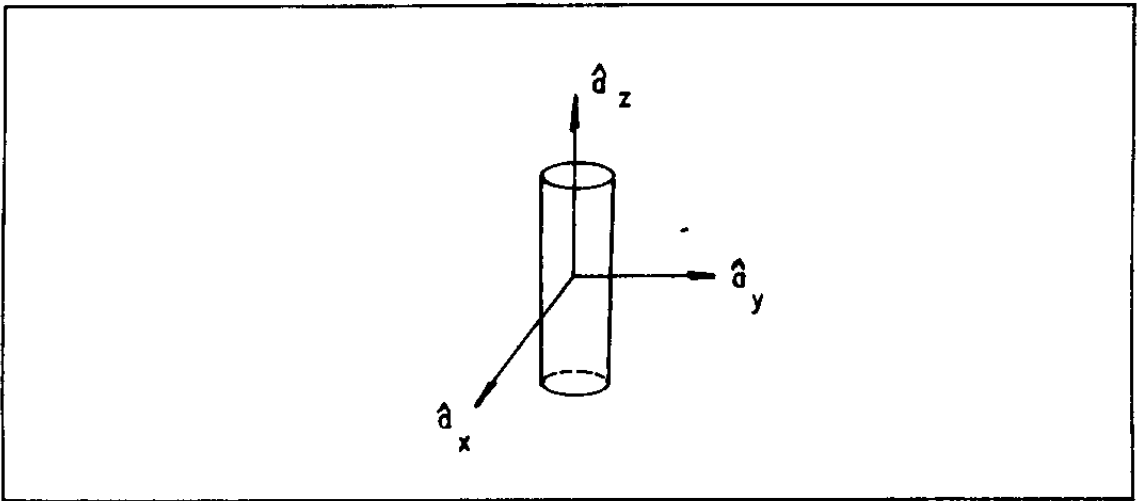


FIG.(I-1-1) - COORDENADAS RETANGULARES DO CONDUTOR

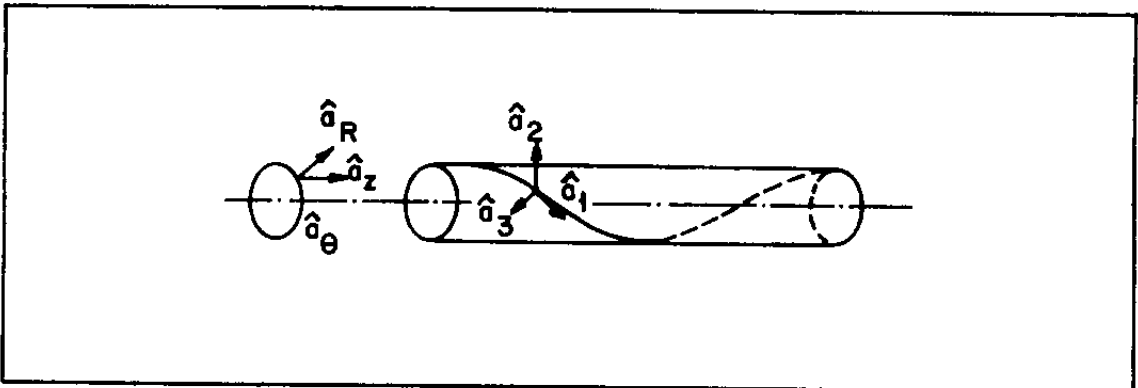


FIG.(I-1-2) - VETORES UNITÁRIOS a_1 , a_2 E a_3 PARA FILAMENTO SUPERCONDUTOR E VETORES UNITÁRIOS a_R , a_z E a_θ PARA CONDUTOR CILÍNDRICO.

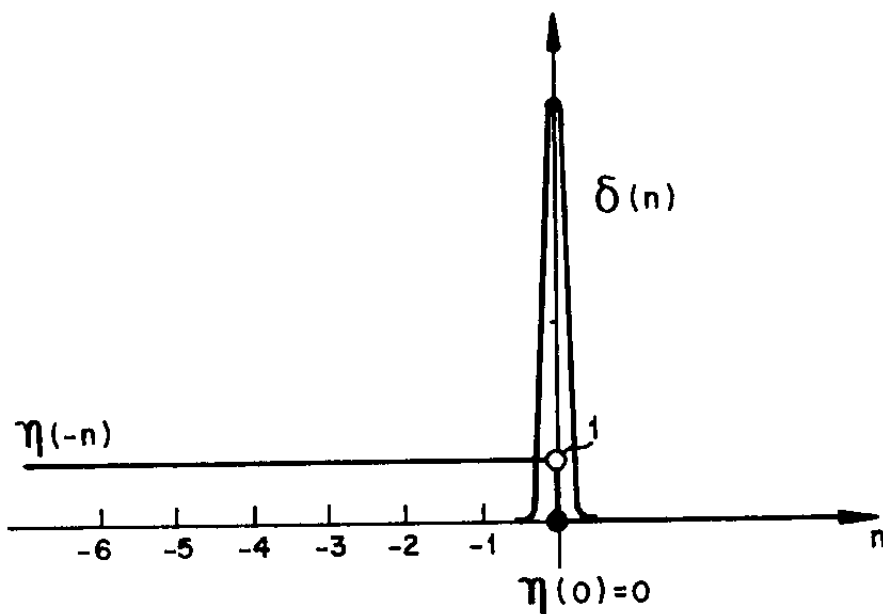


FIG. (I-2-1) - FUNÇÕES $\delta(n)$ E $\eta(-n)$; n É A DISTÂNCIA NORMAL A PARTIR DA SUPERFÍCIE DO CONDUTOR.

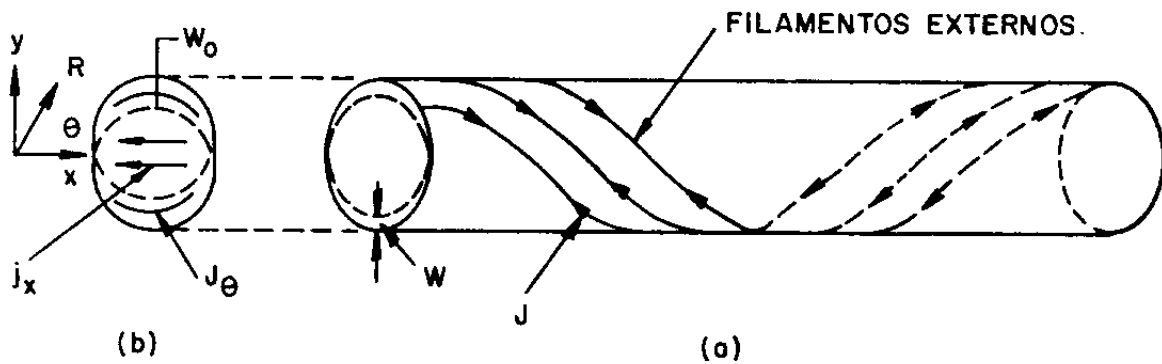


FIG. (I-2-2) - a) ESPESSURA W DA CAMADA DE FILAMENTOS SUPERFICIAIS SATURADOS PELA CORRENTE PARASITA;
b) VISTA DA SECÇÃO TRANVERSAL DO CONDUTOR, W_0 É O MÁXIMO VALOR DE W .

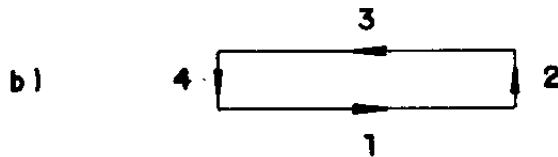
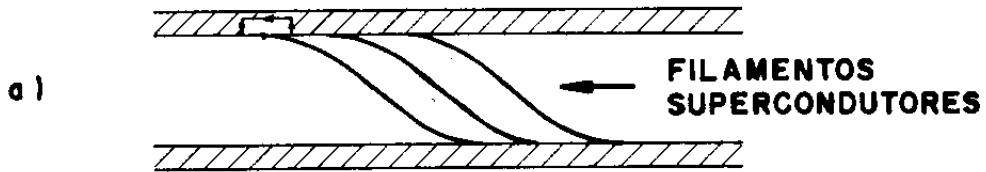


FIGURA (I-4-1) - a) SECÇÃO LONGITUDINAL DO FIO SUPERCONDUTOR MULTIFILAMENTAR, A PARTE HACHURADA REPRESENTA A REGIÃO SATURADA; b) CAMINHO FECHADO NA REGIÃO SATURADA, A LINHA 1 ESTA NA INTERFACE ENTRE AS REGIÕES SATURADA E INSATURADA.

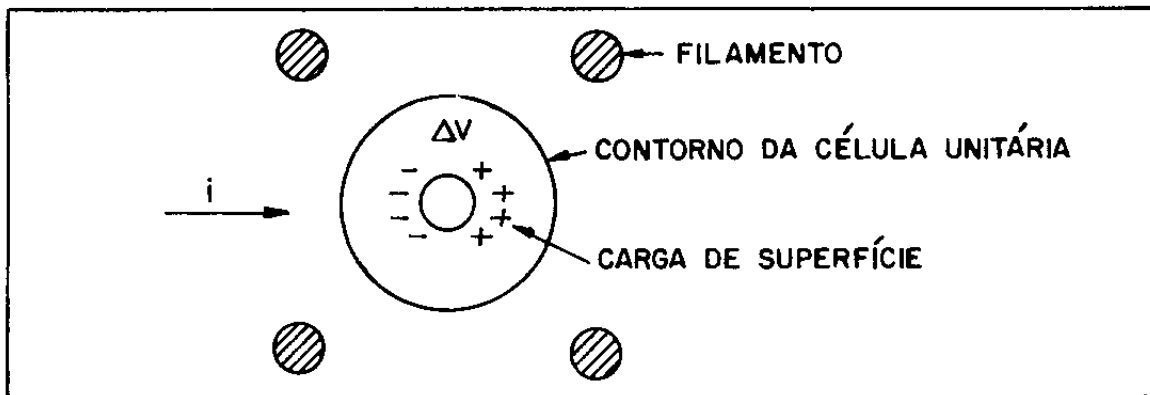


FIG. (I-5-1) - SECÇÃO TRANVERSAL DE UMA REDE DE FILAMENTOS EMBEBIDA EM UMA MATRIZ METÁLICA.

I - REFERÊNCIAS

- [1] E.W. Collings, "Applied Superconductivity" (Plenum Press, 1986), v.1, p. 211:
- [2] W.J. Carr, Jr., Phys. Rev. B 11, 1547 (1975).
- [3] W.J. Carr, Jr., J. Appl. Phys. 45, 929 (1974).
- [4] E.W. Collings, "Applied Superconductivity" (Plenum Press, 1986), v. 1, p. 571.
- [5] W.J. Carr, Jr., J. Appl. Phys. 45, 935 (1974).
- [6] W.J. Carr, Jr., "AC Loss and Macroscopic Theory of Superconductors" (Gordon and Breach, New York, 1983), p. 12.
- [7] W.J. Carr, Jr., "AC Loss and Macroscopic Theory of Superconductors" (Gordon and Breach, New York, 1983), p. 62.
- [8] W.J. Carr, Jr., J. Appl. Phys. 46, 4043 (1975).

II- PERDAS AC EM SUPERCONDUTORES TIPO II TEORIA DE JOHN R.CLEM

II-1- INTRODUÇÃO

A irreversibilidade magnética em supercondutores do tipo II é um resultado de aprisionamento de fluxo. À medida que o campo externo é aumentado fluxo magnético penetra no supercondutor, sobrepujando as forças de aprisionamento; à medida que ele é decrescido, fluxo magnético deixa o interior do supercondutor pelo mesmo mecanismo de corrente de fluxo. Quando o campo aplicado para de aumentar ou decrescer o estado crítico é atingido quando a força magnética sobre a rede de vórtices, devido ao gradiente de densidade de fluxo, é exatamente contrabalançada pela força de aprisionamento de corpo (a máxima força capaz de resistir a maior ingresso ou evasão de fluxo).

Qualquer mudança subsequente do campo externo, em qualquer direção, levará a um desequilíbrio entre essas forças, acarretando o movimento de vórtices e conseqüente dissipação de energia.

Segundo Clem [1], podemos dividir as perdas surgindo a partir do movimento de fluxo durante um ciclo AC em quatro categorias:

- a) Perdas por Aprisionamento de Corpo: surgem a partir do movimento irreversível de vórtices devido aos centros de aprisionamento no corpo do material.
- b) Perdas de superfície: ocorre quando fluxo (na forma de vórtices) passa através da região perto da superfície, onde correntes de superfície mantêm uma barreira de superfície, ΔH .
- c) Perdas por Aniquilação: ocorrem quando vórtices de polaridade oposta se aniquilam, dissipando energia.
- d) Perdas Viscosas: dissipação que ocorre na ausência de aprisionamento de corpo.

Quanto ao movimento de fluxo, podemos dividi-lo em três classes:

- a) Arraste de fluxo;
- b) Corrente de fluxo;
- c) Salto de fluxo;

Arraste de fluxo tem sido tratado como o movimento de grupos de vórtices, os quais interagem entre si e com os centros de

aprisionamento.

Enquanto arraste de fluxo especificamente envolve interação entre vórtices e centros de aprisionamento, corrente de fluxo é concebido como o movimento livre de vórtices, não sujeitos à forças de aprisionamento. A rede de vórtices move-se através do material dirigida por um gradiente de densidade de fluxo ou força viscosa do meio.

Se o aprisionamento é forte, a aplicação de uma força de Lorentz ainda mais forte pode resultar no deslocamento catastrófico da rede de vórtices. Esse é o chamado salto de fluxo.

Em materiais reais, o que de fato ocorre é uma transição entre estados de arraste de fluxo e corrente de fluxo.

Antes de tratarmos de perdas AC para um supercondutor tipo II é necessário analisar o processo de perdas AC para um metal normal pois, em muitos aspectos, o comportamento de um supercondutor ideal tipo II é similar aquele de um metal normal e Clem vale-se muito dessa similaridade.

II-2)-METAIS NORMAIS : PERDAS AC

a) Definição de Permeabilidade Complexa $\tilde{\mu} = \mu' + i\mu''$

Considere um espécime cilíndrico metálico envolvido por uma espira.

Seja B_a a indução magnética aplicada dada por:

$$B_a = B_o + b_o \cos\omega t \quad (\text{II-2-1})$$

A voltagem induzida na espira é dada por:

$$V = - \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{S.I})$$

onde $\phi \equiv$ fluxo magnético através da espira.

Sendo $a \equiv$ raio da espira, temos:

$$\phi = \pi a^2 \bar{B}$$

Na ausência do espécime: $\bar{B} = B_a$

$$\text{Então : } \phi = \pi a^2 (B_o + b_o \cos\omega t)$$

$$V = \pi a^2 b_0 \omega \operatorname{sen} \omega t$$

$$V = V_0 \operatorname{sen} \omega t, \text{ onde } V_0 = \pi a^2 b_0 \omega \quad (\text{II-2-2})$$

Na presença do espécime : $\bar{B} = \bar{b}$

Expandindo-se \bar{b} em uma série de Fourier, temos:

$$\bar{b} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n' \operatorname{cos} n \omega t + \mu_n'' \operatorname{sen} n \omega t) b_0 \quad (\text{II-2-3})$$

Os coeficientes da série de Fourier são dados por:

$$\mu_n' = \frac{\omega}{\pi b_0} \int_0^{\tau} \bar{b} \operatorname{cos} n \omega t \, dt \quad (\text{II-2-4})$$

$$\mu_n'' = \frac{\omega}{\pi b_0} \int_0^{\tau} \bar{b} \operatorname{sen} n \omega t \, dt \quad (\text{II-2-5})$$

Mas $V = -\pi a^2 \frac{d\bar{b}}{dt}$, então:

$$V = -\pi a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-n \omega \mu_n' \operatorname{sen} n \omega t + n \omega \mu_n'' \operatorname{cos} n \omega t) b_0$$

Em (II-2-2), definimos $V_0 = \pi a^2 b_0 \omega$. Então :

$$V = V_0 \sum_{n=1}^{\infty} n (\mu_n' \operatorname{sen} n \omega t - \mu_n'' \operatorname{cos} n \omega t) \quad (\text{II-2-6})$$

Através de detecção lock-in podemos medir somente V_1 , a componente de V que varia com frequência angular ω :

$$V_1 = V_0 (\mu_1' \operatorname{sen} \omega t - \mu_1'' \operatorname{cos} \omega t) \quad (\text{II-2-7})$$

Aqui, definimos a permeabilidade complexa $\tilde{\mu}$ como:

$$\tilde{\mu} = \mu_1' + i\mu_1'' = \mu' + i\mu'' \quad (\text{II-2-8})$$

Em termos de $\tilde{\mu}$ podemos reescrever V_1 como:

$$V_1 = V_0 \operatorname{Re}(i\tilde{\mu}e^{-i\omega t}) \quad (\text{II-2-9})$$

No vácuo: $\mu' = 1$ e $\mu'' = 0$, então $V_1 = V_0 \operatorname{sen}\omega t$.

Para um metal normal com permeabilidade magnética estática μ , à baixas frequências: $\mu' \simeq \mu$ e $\mu'' \simeq 0$, tal que $V_1 \simeq \mu V_0 \operatorname{sen}\omega t$.

Para um supercondutor no estado Meissner: $\mu' = \mu'' = 0$, então $V_1 = 0$.

Sendo A_H a área do laço de histerese (a área limitada pela trajetória de \bar{B} versus B_a), temos que a energia perdida por unidade de volume por ciclo é dada por :

$$W_v = \frac{A_H}{\mu_0} \quad (\text{II-2-10})$$

$\mu_0 \equiv$ permeabilidade do espaço livre.

$$A_H = \oint B_a \, d\bar{B} = \int_0^T B_a \frac{d\bar{B}}{dt} dt \quad (\text{II-2-11})$$

$$\frac{d\bar{B}}{dt} = \frac{db}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\omega\mu_n' \operatorname{sen}n\omega t + n\omega\mu_n'' \operatorname{cos}n\omega t)b_0 \quad (\text{II-2-12})$$

De (II-2-12) e (II-2-1) em (II-2-11), temos:

$$A_H = \pi b_0^2 \mu'' \quad (\text{II-2-13})$$

De (II-2-10) e (II-2-13) temos que a energia perdida por unidade de volume por ciclo é dada por:

$$W_v = \frac{\pi b_o^2 \mu''}{\mu_o} \quad (\text{II-2-14})$$

b) Cálculo de μ''

Para metais normais, as equações básicas para o cálculo de perdas AC são :

$$\vec{J} = \sigma_n \vec{E} = \frac{1}{\rho_n} \vec{E} \quad (\text{II-2-15})$$

$\rho_n \equiv$ resistividade de metal normal

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II-2-16})$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{dentro do metal})$$

$$\vec{B} = \mu \mu_o \vec{H} \quad (\text{II-2-17})$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II-2-18})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II-2-19})$$

Combinando-se as equações acima, temos a seguinte equação de difusão para a densidade de fluxo magnético no metal:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = D_n \nabla^2 \vec{B} \quad (\text{II-2-20})$$

$D_n \equiv$ difusividade magnética no estado normal

$$D_n = \frac{\rho_n}{\mu \mu_o}$$

Para uma densidade de fluxo magnético aplicado dada por:

$$\vec{B}_a = \text{Re}(\vec{B}_{av} e^{-i\omega t})$$

Temos, dentro do espécime:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{B}_v(\vec{r})e^{-i\omega t}] \quad (\text{II-2-21})$$

De (II-2-21) e (II-2-20) temos que $\vec{B}_v(\vec{r})$ deve satisfazer:

$$-i\omega\vec{B}_v(\vec{r}) = D_n \nabla^2 \vec{B}_v(\vec{r}) \quad (\text{II-2-22})$$

A título de simplificação, seja o espécime ocupando o espaço $x > 0$, então a solução de (II-2-22) fica:

$$B_v(x) = B_v(0)e^{ikx} \quad (\text{II-2-23})$$

$$\text{onde } K = \frac{(1+i)}{\delta_n} \quad (\text{II-2-24})$$

$\delta_n \equiv$ profundidade de penetração no estado normal

$$\delta_n = \left[\frac{2\rho_n}{\mu\mu_0\omega} \right]^{1/2} \quad (\text{II-2-25})$$

Define-se tempo de difusão de fluxo magnético no estado normal τ_n como o tempo característico requerido para mudanças de fluxo magnético se difundirem até a metade da dimensão característica do espécime (metal normal).

Já que D_n é dada em m^2/s (S.I) e sendo $2L$ a dimensão característica do espécime, por argumentos dimensionais temos que:

$$D_n \approx \frac{L^2}{\tau_n}$$

Para um cilindro de raio a , à frequências intermediárias, temos que:

$$\omega\tau_n = 1 \quad (\text{II-2-26})$$

$$\delta_n = a \quad (\text{II-2-27})$$

Como $D_n = \frac{\rho_n}{\mu\mu_0}$, de (II-2-25), temos:

$$\delta_n = \left(\frac{2D_n}{w} \right)^{1/2} \quad (\text{II-2-28})$$

De (II-2-26) e (II-2-27) em (II-2-28), temos:

$$\tau_n = \frac{a^2}{2D_n} \quad (\text{II-2-29})$$

Considere agora um cilindro normal de raio a em um campo magnético paralelo dado por:

$$B_a = B_o + \text{Re}(b_o e^{-i\omega t}) \quad (\text{II-2-30})$$

Dentro do cilindro, sendo ρ a coordenada radial, temos:

$$B(\rho, t) = \mu B_o + \text{Re}[b_{1v}(\rho) e^{-i\omega t}] \quad (\text{II-2-31})$$

Mas $b_{1v}(\rho)$ deve satisfazer (II-2-22) bem como as condições de contorno pertinentes à geometria cilíndrica.

A solução é:

$$b_{1v}(\rho) = \frac{\mu b_o J_o(k\rho)}{J_o(ka)} \quad (\text{II-2-32})$$

$J_o \equiv$ função de Bessel de ordem zero

$$K = \frac{1 + i}{\delta_n} \quad (\text{II-2-33})$$

$\delta_n \equiv$ profundidade de penetração no estado normal

Fazendo-se a média de (II-2-31) sobre a secção transversal do cilindro, temos:

$$\bar{B}(t) = \mu B_o + \text{Re}(\bar{b}_{1v} e^{-i\omega t}) \quad (\text{II-2-34})$$

$$\text{onde } \bar{b}_{1v} = \frac{2\mu b_o J_1(ka)}{(ka)J_o(ka)} \quad (\text{II-2-35})$$

$$\bar{B}(t) = \mu B_0 + \operatorname{Re} \left[\frac{2\mu b_0 J_1(ka)}{(ka) J_0(ka)} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{II-2-36})$$

Utilizando-nos do conceito de permeabilidade complexa, de (II-2-30) e (II-2-31) podemos escrever:

$$\bar{B}(t) = \mu B_0 + \operatorname{Re}[\tilde{\mu} b_0 e^{-i\omega t}] \quad (\text{II-2-37})$$

Então, por comparação de (II-2-36) e (II-2-37), temos:

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu 2J_1(ka)}{(ka) J_0(ka)} \quad (\text{II-2-38})$$

$$\tilde{\mu} = \mu' + i\mu'' = \frac{\mu 2J_1(ka)}{(ka) J_0(ka)} \quad (\text{II-2-39})$$

Temos que: $J_\nu(xe^{3\pi i/4}) = \operatorname{ber}_\nu(x) + i\operatorname{bei}_\nu(x)$ [2]. (II-2-40)

$\operatorname{ber}_\nu(x)$, $\operatorname{bei}_\nu(x) \equiv$ Funções Kelvin

ν é real

x é real e positivo

$$\operatorname{ber}_\nu(x) = M_\nu(x) \cos\theta_\nu(x)$$

$$\operatorname{bei}_\nu(x) = M_\nu(x) \operatorname{sen}\theta_\nu(x)$$

$$M_\nu(x) = [\operatorname{ber}_\nu^2(x) + \operatorname{bei}_\nu^2(x)]^{1/2}$$

$$\theta_\nu(x) = \operatorname{arc} \tan \frac{\operatorname{bei}_\nu(x)}{\operatorname{ber}_\nu(x)}$$

Seja $ka = xe^{3\pi i/4}$, x real e positivo (II-2-41)

Então, de (II-2-40) temos:

$$J_1(ka) = \operatorname{ber}_1(x) + i \operatorname{bei}_1(x)$$

$$J_1(ka) = M_1(x) \cos\theta_1(x) + i M_1(x) \operatorname{sen}\theta_1(x) \quad (\text{II-2-42})$$

$$J_0(ka) = \operatorname{ber}_0(x) + i \operatorname{bei}_0(x)$$

$$J_0(ka) = M_0(x) \cos\theta_0(x) + i M_0(x) \operatorname{sen}\theta_0(x) \quad (\text{II-2-43})$$

De (II-2-42) e (II-2-43) em (II-2-39), temos:

$$\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = \frac{2}{ka} \left[\frac{M_1(x) \cos \theta_1(x) + i M_1(x) \operatorname{sen} \theta_1(x)}{M_0(x) \cos \theta_0(x) + i M_0(x) \operatorname{sen} \theta_0(x)} \right] \quad (\text{II-2-44})$$

$$\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = \frac{2}{ka} \frac{M_1(x)}{M_0(x)} \left\{ \cos [\theta_0(x) - \theta_1(x)] - i \operatorname{sen} [\theta_0(x) - \theta_1(x)] \right\}$$

Multiplicando-se e dividindo-se o lado direito da equação acima por $\exp(-3\pi i/4)$, temos:

$$\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = \frac{2}{ka} \frac{e^{-3\pi i/4}}{e^{-3\pi i/4}} \frac{M_1(x)}{M_0(x)} \left\{ \cos [\theta_0(x) - \theta_1(x)] - i \operatorname{sen} [\theta_0(x) - \theta_1(x)] \right\} \quad (\text{II-2-45})$$

De (II-2-41) em (II-2-45), temos:

$$\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = \frac{2}{x} \frac{M_1}{M_0} \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) [\cos (\theta_0 - \theta_1) - i \operatorname{sen} (\theta_0 - \theta_1)] \quad (\text{II-2-46})$$

Mas $\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = \frac{\mu'}{\mu} + i \frac{\mu''}{\mu}$. De (II-2-46), temos:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{2}{x} \frac{M_1(x)}{M_0(x)} \cos \left[\theta_0(x) - \theta_1(x) + \frac{3\pi}{4} \right] \quad (\text{II-2-47})$$

$$\frac{\mu''}{\mu} = \frac{2}{x} \frac{M_1(x)}{M_0(x)} \operatorname{sen} \left[\theta_0(x) - \theta_1(x) + \frac{3\pi}{4} \right] \quad (\text{II-2-48})$$

Ou:

$$\frac{\mu'}{\mu} = f_1(x) \quad (\text{II-2-49})$$

$$\frac{\mu''}{\mu} = f_2(x) \quad (\text{II-2-50})$$

Sendo:

$$f_1(x) \equiv f_0(x) \cos \beta(x) \quad (\text{II-2-51})$$

$$f_2(x) \equiv f_0(x) \operatorname{sen} \beta(x) \quad (\text{II-2-52})$$

Onde:

$$f_0(x) = \frac{2M_1(x)}{xM_0(x)} \quad (\text{II-2-53})$$

$$\beta(x) = \theta_0(x) - \theta_1(x) + \frac{3\pi}{4} \quad (\text{II-2-54})$$

e $x = |k|a$, pois x deve ser real e positivo.

De (II-2-33), temos que:

$$x = \frac{2^{1/2} a}{\delta_n} \quad (\text{II-2-55})$$

onde δ_n é dado por (II-2-25).

Da equação (II-2-37), temos:

$$\bar{b}_1(t) = \text{Re}(\mu \tilde{b}_0 e^{-i\omega t}) \quad (\text{II-2-56})$$

De (II-2-49) e (II-2-50) em (II-2-56), temos:

$$\bar{b}_1(t) = \mu b_0 f_0(x) \cos(\omega t - \beta) \quad (\text{II-2-57})$$

Da figura (II-2-1), do gráfico de $\bar{b}_1(t)$ x $b_0 = b_0 \cos \omega t$, temos que a área do laço de histerese, que tem a forma de uma elipse, é dada por:

$$A_H = \pi b_0^2 \mu f_2 \quad (\text{II-2-58})$$

De (II-2-13), temos que $\mu'' = \frac{A_H}{\pi b_0^2}$.

Substituindo-se (II-2-58) na equação acima, temos que $\mu'' = \mu f_2$, resultado idêntico à equação (II-2-50), como deveria ser.

II-3) SUPERCONDUTORES TIPO II : PERDAS AC QUANDO ATENUAÇÃO VISCOSA E NÃO APRISIONAMENTO DE FLUXO DOMINA MOVIMENTO DE VÓRTICES.

Como consequência de um campo magnético AC aplicado a um supercondutor tipo II, temos a dissipação de energia a partir do movimento de linhas de fluxo magnético ou vórtices.

Esta resposta AC é dependente da combinação das influências do aprisionamento (de corpo e de superfície) dos vórtices, bem como do efeito de arraste viscoso dos mesmos.

Quando as forças viscosas sobre um arranjo de vórtices são geradas por um campo AC de frequência ω , na ausência de aprisionamento a velocidade v dos vórtices é proporcional à ω e, por consequência, a dissipação de energia total por ciclo é dependente da frequência.

De outra forma, sempre que o movimento de fluxo é dominado pelas forças de aprisionamento durante sua trajetória através do espécime, o vórtice se move com uma velocidade altamente irregular e, em particular, se move muito rapidamente e irreversivelmente na vizinhança dos centros de aprisionamento. De acordo com a Teoria de Aprisionamento Dinâmico [3], o vórtice então dissipa uma quantidade fixa de energia cada vez que ele passa através de um centro de aprisionamento. A energia total dissipada por ciclo em tal caso pode ser mostrada como sendo independente da frequência.

Voltando-se ao caso do supercondutor tipo II ideal, livre de centros de aprisionamento, temos que a perda devido ao movimento viscoso dos vórtices no espécime é análoga à perda devido à correntes parasitas nos metais normais, de tal forma que, nesse caso, as perdas AC no supercondutor podem ser chamadas de "perdas por corrente de fluxo" ou "perdas viscosas" ou ainda, "perdas por correntes parasitas".

Para um metal normal as perdas AC decorrem a partir do campo elétrico induzido no metal devido à variação do campo magnético aplicado. Para um supercondutor tipo II, o campo magnético AC aplicado leva ao movimento dos vórtices, movimento este que, por um mecanismo de indução, gera um campo elétrico no supercondutor.

Clem, baseado nessa analogia, calcula as perdas AC para um supercondutor ideal tipo II usando o mesmo tratamento teórico desenvolvido para tratar de perdas AC para metais normais, seção

I.

Porém, para supercondutores tipo II as relações lineares entre \vec{E} e \vec{J} , equação (II-2-15) e, entre \vec{B} e \vec{H} , equação (II-2-17) não são válidas.

Para supercondutores tipo II, temos :

$$a) \vec{B} = B(H)\vec{H} \quad (II-3-1)$$

onde $B(H)$ é como ilustrado na figura (II-3-1).

b) Para um metal normal, dada a linearidade entre \vec{B} e \vec{H} define-se a permeabilidade estática do estado normal μ , tal que:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

Para o supercondutor tipo II, dada a relação não linear entre \vec{B} e \vec{H} , como ilustrada em (a), define-se a permeabilidade diferencial do estado misto μ_0' tal que:

$$\mu_0' = \left[\frac{1}{\mu_0} \frac{dB(H)}{dH} \right]_{H=H_0} \quad (II-3-2)$$

c) Para um metal normal:

$$\vec{E} = \rho_n\vec{J}$$

$\rho_n \equiv$ resistividade normal

Para um supercondutor tipo II, temos:

$$\vec{E} = \rho_f(B)\vec{J}$$

$\rho_f(B) \equiv$ resistividade de corrente de fluxo

RESISTIVIDADE DE CORRENTE DE FLUXO

Considere o material supercondutor conforme mostra a figura (II-3-2), sujeito a um campo magnético externo, na direção z . O espécime está no estado misto e os vórtices estão distribuídos uniformemente.

Temos que $B = n\phi_0$, onde n é a densidade das linhas de vórtices e ϕ_0 é o quantum de fluxo.

Se uma corrente de transporte é aplicada na direção x , temos

que as forças regulando o movimento de fluxo satisfazem a seguinte equação:

$$F_L - F_p = F_v \quad (II-3-3)$$

onde:

$$\begin{aligned} F_L &\equiv \text{força de Lorentz} \\ F_p &\equiv \text{força de aprisionamento} \\ F_v &\equiv \text{força viscosa} \end{aligned}$$

Além de descrever a dinâmica da estrutura de fluxo sob a influência de uma corrente de transporte, a equação (II-3-3) também regula o movimento de fluxo que se dá sob a ação de um campo magnético dependente do tempo aplicado na direção z, para corrente de transporte zero na direção x. Nesse caso, as correntes de blindagem geradas no supercondutor pelo campo oscilante produzem a força de Lorentz que causa uma "compressão" periódica na estrutura de vórtices.

Como consequência disso, temos uma geração de calor próximo aos centros de aprisionamento que se opõem ao movimento dos vórtices (perdas histeréticas).

À medida que a força de Lorentz excede a força de aprisionamento, o movimento de compressão da rede de vórtices muda para um movimento viscoso e temos então as perdas viscosas.

Para uma densidade de corrente \vec{J} , temos que a força de Lorentz atuando sobre a rede de vórtices é:

$$\vec{F}_L = \vec{J} \times \vec{B} \quad (II-3-4)$$

De (II-3-4) em (II-3-3), em termos vetoriais, temos:

$$\vec{J} \times \vec{B} = - (\vec{F}_v + \vec{F}_p) \quad (II-3-5)$$

Fazendo-se o produto escalar de ambos os lados da expressão acima por \vec{v}_L , a velocidade do arranjo de vórtices, temos:

$$(\vec{J} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_L = - (\vec{F}_v + \vec{F}_p) \cdot \vec{v}_L$$

Utilizando-se a identidade vetorial :

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A}$$

Temos:

$$(\vec{B} \times \vec{v}_L) \cdot \vec{J} = - (F_v + F_p) \cdot \vec{v}_L \quad (\text{II-3-6})$$

Sendo \vec{E} o campo elétrico induzido devido ao movimento dos vórtices, temos que a densidade de potência total perdida será dada por $\vec{E} \cdot \vec{J}$. Já que o lado direito da equação (II-3-6) dá a densidade de potência total perdida, segue que:

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}_L \quad (\text{II-3-7})$$

Temos que $F_v = \eta v_L$, onde η = coeficiente de viscosidade do meio supercondutor, então a equação (II-3-3), fica:

$$F_L - F_p = \frac{B}{\phi_0} \eta v_L \quad (\text{II-3-8})$$

De (II-3-4) em (II-3-8), temos:

$$JB - F_p = \frac{B}{\phi_0} \eta v_L$$

$$v_L = \frac{\phi_0}{B\eta} (JB - F_p) \quad (\text{II-3-9})$$

Define-se resistividade de corrente de fluxo como:

$$\rho_f = \frac{dE}{dJ} \quad (\text{II-3-10})$$

$$\frac{dE}{dJ} = \frac{dE}{dv_L} \frac{dv_L}{dJ} \quad (\text{II-3-11})$$

Da equação (II-3-7), temos:

$$\frac{dE}{dv_L} = B \quad (\text{II-3-12})$$

Da equação (II-3-9), temos:

$$\frac{dv_L}{dJ} = \frac{\phi_0}{\eta} \quad (\text{II-3-13})$$

De (II-3-11), (II-3-12) e (II-3-13) em (II-3-10), temos:

$$\rho_f = \frac{\phi_0 B}{\eta} \quad (\text{II-3-14})$$

A resistividade de corrente de fluxo é menor do que, mas comparável à resistividade residual do estado normal, a qual em ligas supercondutoras tipo II é da ordem de $5 \cdot 10^{-5} \Omega \text{ cm}$.

d) Além dos pontos discutidos nos itens (a), (b) e (c) anteriores, existe outro aspecto na teoria de Clem muito importante. A dependência não analítica entre \vec{B} e \vec{H} no supercondutor torna as equações eletrodinâmicas (equações (II-2-15) a (II-2-19)) não lineares, tais que soluções analíticas não mais podem ser obtidas, a menos que a amplitude de \vec{H} não varie muito.

Então, se $H_a(t) = H_0 + h_0 \cos \omega t$, com $h_0 \ll H_0$, quando existe movimento de vórtices a resposta do supercondutor ao campo magnético AC pode ser obtida analiticamente a partir das equações eletrodinâmicas, equações (II-2-15) a (II-2-19), introduzindo-se as mudanças discutidas nos itens (a), (b) e (c).

e) Na seção 2, quando da solução das equações eletrodinâmicas para o metal normal, foram introduzidas as seguintes grandezas (equações (II-2-20) a (II-2-29)).

$D_n \equiv$ difusividade magnética no estado normal

$\delta_n \equiv$ profundidade de penetração no estado normal

$\tau_n \equiv$ tempo de difusão de fluxo no estado normal

Segundo o formalismo de Clem, para o estado misto do supercondutor tipo II ideal as grandezas correspondentes são definidas da mesma forma, com as substituições:

$$\rho_n \Rightarrow \rho_f$$

$$\mu \Rightarrow \mu'_0$$

Então, temos:

$D_f \equiv$ difusividade magnética de corrente de fluxo

$$D_f = \frac{\rho_f}{\mu'_0 \mu_0} \quad (\text{II-3-15})$$

$\delta_f \equiv$ profundidade de penetração de corrente de fluxo

$$\delta_f = \left[\frac{2 \rho_f}{\mu'_0 \mu_0 \omega} \right]^{1/2} \quad (\text{II-3-16})$$

$\tau_f \equiv$ tempo de difusão de fluxo devido à corrente de fluxo

$$\tau_f = \frac{a^2}{2D_f} \quad (\text{II-3-17})$$

A equação acima é válida para frequências intermediárias.

Como ρ_f é dependente de \vec{B} e este por sua vez é dependente de \vec{H} , como mostrado no item (a), equação (II-3-1), temos que D_f , δ_f e τ_f são dependentes de \vec{H} , como mostrado na figura (II-3-3).

Com referência à figura (II-3-3), temos que:

1) Para $H < H_{c1}$, intervalo de campo para o qual ocorre efeito Meissner, tanto D_f , δ_f e τ_f são nulos, já que não ocorre penetração de fluxo no supercondutor.

2) D_f e δ_f começam a crescer a partir de H_{c1} , quando os vórtices começam a penetrar no supercondutor.

τ_f começa variando de ∞ em $H = H_{c1}$ e continua diminuindo até que $H = H_{c2}$, ou seja, a medida que o supercondutor aproxima-se do estado normal, o tempo necessário para que mudanças de fluxo magnético sejam sentidas no corpo do supercondutor diminui cada vez mais.

3) Para $H > H_{c2}$, o supercondutor está no estado normal e então:

$$\delta_f = \delta_n$$

$$D_f = D_n$$

$$\tau_f = \tau_n$$

Seja o campo magnético aplicado ao supercondutor dado por:

$$H_a = H_o + H_o \cos \omega t, \text{ com } h_o \ll H_o \quad (\text{II-3-18})$$

Dentro do supercondutor a densidade de fluxo é dada por:

$$B(\rho, t) = B_{eq}(H_o) + b_1(\rho, t), \text{ com } |b_1| \ll B_{eq}(H_o) \quad (\text{II-3-19})$$

Então, $b_1(\rho, t)$ obedece as mesmas equações como no estado normal (secção 2), exceto pelas modificações discutidas nos itens (a), (b), (c), (d) e (e).

Fazendo-se a média de (II-3-19) sobre a secção transversal do cilindro supercondutor, temos:

$$\bar{B}(t) = B_{eq}(H_o) + \bar{b}_1(t) \quad (\text{II-3-20})$$

Analogamente à equação (II-2-37) podemos escrever:

$$\bar{B}(t) = B_{eq}(H_o) + \text{Re}(\tilde{\mu} b_o e^{-i\omega t}) \quad (\text{II-3-21})$$

onde $\tilde{\mu} = \mu' + i\mu''$ é a permeabilidade magnética complexa.

$$\frac{\mu'}{\mu_o} = f_1(x) = f_o(x) \cos \beta(x) \quad (\text{II-3-22})$$

$$\frac{\mu''}{\mu_o} = f_2(x) = f_o(x) \text{sen} \beta(x) \quad (\text{II-3-23})$$

Onde f_o , f_1 , f_2 e β são as mesmas funções que aparecem nas equações (II-2-51) a (II-2-54), só que aqui temos:

$$x = \frac{a}{\delta_f} 2^{1/2} \quad (\text{II-3-24})$$

onde δ_f é dado por (II-3-16).

Assim como a perda por ciclo por unidade de volume de um cilindro normal pode ser calculada a partir das equações (II-2-14) e (II-2-50), a perda por ciclo por unidade de volume de um

cilindro supercondutor tipo II ideal pode ser calculada a partir das equações (II-2-14) e (II-3-23), com x dado pela equação (II-3-24).

Da equação (II-2-14), temos:

$$W_v = \frac{\pi b_o^2 \mu''}{\mu_o}$$

onde $A_H = \pi b_o^2 \mu''$ é a área do laço de histerese.

De (II-3-23) e (II-3-24) na expressão acima, temos:

$$W_v = \frac{\pi b_o^2}{\mu_o} \mu_o' f_z \left[\frac{a}{\delta_f} \right]^{1/2} \quad (\text{II-3-25})$$

De (II-3-16) temos que:

$$\delta_f = \left[\frac{2 \rho_f}{\mu_o' \mu_o w} \right]^{1/2}$$

Como μ_o' e ρ_f dependem de \vec{B} e este por sua vez depende de \vec{H} , temos que W_v depende não somente da frequência mas também do campo aplicado DC H_o .

Para calcular μ'' para um determinado $H = H_o$ é preciso ter os valores de:

$$\rho_f = \frac{\phi_o B}{\eta} \text{ e } \mu_o' = \left[\frac{1}{\mu_o} \frac{dB}{dH} \right]_{H = H_o}$$

Para isso, Clem vale-se das seguintes aproximações:

1) As equações (II-3-8) a (II-3-14) não fornecem informação sobre o mecanismo de atenuação do movimento de vórtices, ou seja, ele é levado em conta através do parâmetro η , mas não do que determina η .

Bardeen, Stephen, Van Vijfeijken e Niessen [4], considerando apenas perdas devido ao aquecimento joule de elétrons normais, chegaram à seguinte expressão para ρ_f , considerando-se pequenos campos e baixas temperaturas:

$$\rho_f = \left[\frac{B(h_o)}{B_{c2}} \right] \rho_n \quad (\text{II-3-26})$$

Para H próximo à H_{c2} e T próximo à T_c , outras expressões para ρ_f tem sido calculadas.

Clem utiliza em seus cálculos a equação (II-3-26) para ρ_f .

2) Para chegar a uma expressão para μ'_o , Clem considera que a curva B versus H para um supercondutor tipo II, ilustrada na figura (II-3-1), pode ser descrita pela equação:

$$B_{eq}(H_o) = B_{c2} \left[\frac{(H_o^2 - H_{c1}^2)}{(H_{c2}^2 - H_{c1}^2)} \right]^{1/2} \quad (\text{II-3-27})$$

Dai, então:

$$\frac{dB(H_o)}{dH_o} = \frac{B_{c2} H_o}{[(H_o^2 - H_{c1}^2)(H_{c2}^2 - H_{c1}^2)]^{1/2}} \quad (\text{II-3-28})$$

De (II-3-2) e (II-3-28), temos:

$$\mu'_o = \frac{1}{\mu_o} \frac{B_{c2} H_o}{[(H_o^2 - H_{c1}^2)(H_{c2}^2 - H_{c1}^2)]^{1/2}} \quad (\text{II-3-29})$$

Os experimentos da referência [5] confirmam que em supercondutores tipo II aproximadamente ideais, μ'' bem como μ' podem ser calculados segundo o procedimento teórico de Clem, descrito nesta seção.

II-4)- PERDAS HISTERÉTICAS EM SUPERCONDUTORES TIPO II

As equações básicas necessárias para o cálculo das perdas histeréticas são:

a)

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II-4-1})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II-4-2})$$

b) Relação Constitutiva entre \vec{B} e \vec{H} para supercondutores tipo II:

$$\vec{B} = B_{eq}(H) \hat{H} \quad (\text{II-4-3})$$

$$\text{ou} \quad \vec{H} = H_{eq}(B) \hat{B}$$

c) Equação que caracteriza o estado crítico, segundo Modelo de Bean:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c \quad (\text{II-4-4})$$

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}_L \quad (\text{II-4-5})$$

onde \vec{E} é o campo elétrico gerado pelo movimento de vórtices e \vec{v} é a velocidade da rede de vórtices. A respeito de (II-4-5) vide seção II-2.

$$e) \quad E = \rho_f (J - J_c) \quad J > J_c \quad (\text{II-4-6})$$

$$E = 0 \quad - J_c < J < J_c \quad (\text{II-4-7})$$

$$E = \rho_f (J + J_c) \quad J < -J_c \quad (\text{II-4-8})$$

As forças regulando o movimento de vórtices satisfazem a equação:

$$F_L - F_p = F_v$$

onde:

$$\begin{aligned} F_L &\equiv \text{força de Lorentz} \\ F_p &\equiv \text{força de aprisionamento} \\ F_v &\equiv \text{força viscosa} \end{aligned}$$

Sendo v_L a velocidade da rede de vórtices, temos:

$$F_v = n\eta v_L$$

onde

η = coeficiente de viscosidade

$$n = \frac{B}{\phi_0} = \text{número de vórtices}$$

Então:

$$n\eta v_L = F_L - F_P$$

$$v_L = \frac{1}{\eta n} (F_L - F_P)$$

De (II-4-5) temos que $E = Bv_L$ (supondo-se \vec{B} perpendicular à \vec{v}_L). Então:

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\eta n} (F_L - F_P)$$

Mas $F_L = JB$ e $F_P = J_c B$ (supondo-se \vec{J} perpendicular à \vec{B}), então:

$$\frac{E}{B} = \frac{B}{\eta n} (J - J_c)$$

$$E = \frac{B^2}{\eta n} (J - J_c)$$

Mas $n = \frac{B}{\phi_0}$, então:

$$E = \frac{B\phi_0}{\eta} (J - J_c)$$

Como $\rho_f = \frac{dE}{dJ}$, temos que :

$$\rho_f = \frac{B\phi_0}{\eta} \tag{II-4-9}$$

Então, $E = \rho_f (J - J_c)$.

A equação acima foi obtida supondo-se $J > J_c$.

Para $J < -J_c$, a magnitude do campo elétrico gerado \vec{E} é a mesma, mudando apenas seu sentido.

Assim é que, para $J < -J_c$, podemos escrever:

$$E = \rho_f (J + J_c)$$

Consideremos agora a resposta de um cilindro supercondutor a um campo aplicado da forma:

$$H_{za}(t) = H_0 + h_0 \cos \omega t \quad (\text{II-4-10})$$

A resposta do supercondutor será:

$$H_z(\rho, t) = H_0 + H_{z1}(\rho, t) \quad (\text{II-4-11})$$

$$B_z(\rho, t) = B_{eq}(H_0 + H_{z1}) \quad (\text{II-4-12})$$

$$B_z(\rho, t) = B_{eq}(H_0) + H_{z1} \frac{dB_{eq}(H_0)}{dH_0}$$

$$B_z(\rho, t) = B_0 + \mu_0 \mu'_0 H_{z1}(\rho, t) \quad (\text{II-4-13})$$

onde:

$$B_0 \equiv B_{eq}(H_0)$$

$$\mu'_0 \equiv \left[\frac{1}{\mu_0} \frac{dB(H)}{dH} \right]_{H=H_0} \quad (\text{II-4-14})$$

$\mu'_0 \equiv$ permeabilidade diferencial do estado misto

Sendo $b_1(\rho, t) = \mu_0 \mu'_0 H_{z1}$ (II-4-15), temos:

$$\bar{b}_1(t) = \frac{2\pi}{\pi a^2} \int_0^a d\rho \rho b_1(\rho, t) \quad (\text{II-4-16})$$

$$\bar{b}_1(t) = \frac{2}{a^2} \int_0^a d\rho \rho \mu_0 \mu'_0 H_{z1} \quad (\text{II-4-17})$$

$a \equiv$ raio do cilindro

Também podemos escrever:

$$\bar{b}_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu'_n \cos n\omega t + \mu''_n \sin n\omega t) b_0 \quad (\text{II-4-18})$$

Estamos interessados nas quantidades μ'_n e μ''_n (principalmente μ''_n que está diretamente ligada às perdas histeréticas) que são dadas por:

$$\mu'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau} \frac{\bar{b}_1(t)}{b_0} \cos n\omega t \, \omega dt \quad (\text{II-4-19})$$

$$\mu''_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau} \frac{\bar{b}_1(t)}{b_0} \sin n\omega t \, \omega dt \quad (\text{II-4-20})$$

De (II-4-17) em (II-4-19) e (II-4-20), temos:

$$\mu'_n = \frac{2\mu'_0 \omega}{\pi a^2 h_0} \int_0^{\tau} dt \int_0^a d\rho \, \rho H_{z1}(\rho, t) \cos n\omega t \quad (\text{II-4-21})$$

$$\mu''_n = \frac{2\mu'_0 \omega}{\pi a^2 h_0} \int_0^{\tau} dt \int_0^a d\rho \, \rho H_{z1}(\rho, t) \sin n\omega t \quad (\text{II-4-22})$$

CÁLCULO DE $H_{z1}(\rho, t)$

Em relação à resposta do supercondutor a um campo magnético oscilante aplicado na direção z , temos que as quantidades vetoriais obedecem:

$$\vec{B} = B_{z1}(\rho, t) \hat{z} \quad (\text{II-4-23})$$

$$\vec{H} = H_{z1}(\rho, t) \hat{z} \quad (\text{II-4-24})$$

$$\vec{J} = J_{\phi_1}(\rho, t) \hat{\phi} \quad (\text{II-4-25})$$

$$\vec{E} = E_{\phi_1} \hat{\phi} \quad (\text{II-4-26})$$

Em coordenadas cilíndricas para um vetor \vec{A} temos:

$$\nabla \times \vec{A} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{z}$$

Então, de (II-4-1), (II-4-2), (II-4-24), (II-4-25) e (II-4-26), temos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{\phi_1}) + \frac{\partial B_{z1}}{\partial t} = 0 \quad (\text{II-4-27})$$

$$-\frac{\partial H_{z1}}{\partial \rho} = J_{\phi_1} \quad (\text{II-4-28})$$

Para $J_{\phi_1} = J_{c1}$, de (II-4-6) em (II-4-27) e $B_{z1} = \mu_0 \mu'_0 H_{z1}$, temos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \rho_{f0} (J_{\phi_1} - J_{c0}) \right] + \mu_0 \mu'_0 \frac{\partial H_{z1}}{\partial t} = 0 \quad (\text{II-4-29})$$

Para $J_{\phi_1} = -J_{c0}$, de (II-4-8) em (II-4-27) e $B_{z1} = \mu_0 \mu'_0 H_{z1}$, temos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \rho_{f0} (J_{\phi_1} + J_{c1}) \right] + \mu_0 \mu'_0 \frac{\partial H_{z1}}{\partial t} = 0 \quad (\text{II-4-30})$$

Voltando à equação (II-4-29) para $J_{\phi_1} = J_{c0}$, temos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho J_{\phi_1}) + \frac{\mu_0 \mu'_0}{\rho_{f0}} \frac{\partial H_{z1}}{\partial t} = \frac{J_{c0}}{\rho}$$

Da equação (II-4-28), temos que: $J_{\phi_1} = -\frac{\partial H_{z1}}{\partial \rho}$, então:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_{z1}}{\partial \rho} \right) - \frac{\mu_0 \mu'_0}{\rho_{f0}} \frac{\partial H_{z1}}{\partial t} = - \frac{J_{c0}}{\rho} \quad (\text{II-4-31})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho J_{\phi 1}) + \frac{\mu_0 \mu'_0}{\rho_{f0}} \frac{\partial H_{z1}}{\partial t} = - \frac{J_{c0}}{\rho}$$

Da equação (II-4-28) temos que $J_{\phi 1} = - \frac{\partial H_{z1}}{\partial t}$, então:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_{z1}}{\partial \rho} \right) - \frac{\mu_0 \mu'_0}{\rho_{f0}} \frac{\partial H_{z1}}{\partial t} = \frac{J_{c0}}{\rho} \quad (\text{II-4-32})$$

Trataremos agora somente com o regime de baixas frequências, de modo que o termo $\frac{\partial H_{z1}}{\partial t}$ nas equações (II-4-31) e (II-4-32) é negligenciável.

Para $J_{\phi 1} > J_{c0}$, da equação (II-4-31) temos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_{z1}}{\partial \rho} \right) = - \frac{J_{c0}}{\rho}$$

$$\frac{\partial H_{z1}}{\partial \rho} = - J_{c0} \quad (\text{II-4-33})$$

Para $J_{\phi 1} < - J_{c0}$, da equação (II-4-32) temos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_{z1}}{\partial \rho} \right) = \frac{J_{c0}}{\rho}$$

$$\frac{\partial H_{z1}}{\partial \rho} = J_{c0} \quad (\text{II-4-34})$$

Das equações (II-4-33) e (II-4-34) temos que:

$$\left| \frac{\partial H_{z1}}{\partial \rho} \right| = |J_{c0}| \quad (\text{II-4-35})$$

Consideremos agora o perfil de campo magnético no interior de um cilindro supercondutor de raio a , durante um ciclo de campo magnético aplicado da forma:

$$h(t) = h_0 \cos \omega t$$

$$A) h_0 < H_b^*$$

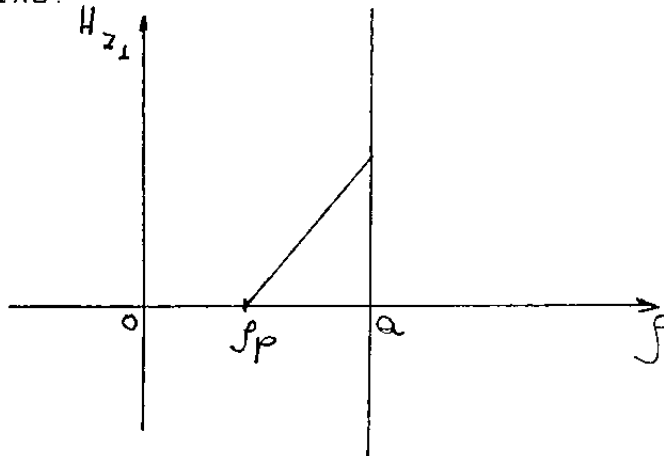
$H_b^* \equiv$ campo necessário para estabelecer o perfil de estado crítico até o centro do espécime.

Para um cilindro de raio a , da equação (II-4-35) temos:

$$H_b^* = a J_{c0} \quad (\text{II-4-36})$$

Consideremos que o campo varie de h_0 até $-h_0$ e aí então novamente até h_0 .

No instante $t = 0$ seja o perfil de campo magnético como ilustrado abaixo:



Da equação (II-4-35) temos que $\left| \frac{\partial H_{z1}}{\partial \rho} \right| = J_{c0}$.

O perfil de campo esquematizado acima pode ser descrito pela equação:

$$H_{z1} = J_{c0} (\rho - \rho_p) \quad (\text{II-4-37})$$

Na superfície cilíndrica temos:

$$H_{z1} = h_0$$

$$\rho = a$$

Então:

$$h_o = J_{co} (a - \rho_p)$$

$$\rho_p = -\frac{h_o}{J_{co}} + a \quad (\text{II-4-38})$$

De (II-4-38) em (II-4-37), temos:

$$H_{z1} = h_o + J_{co} (\rho - a) \quad (\text{II-4-39})$$

$$\text{Seja } L_p \equiv a - \rho_p \quad (\text{II-4-40})$$

Para $\rho = \rho_p$ temos $H_{z1} = 0$. Então, de (II-4-39) temos:

$$0 = h_o + J_{co} (\rho_p - a)$$

De (II-4-40) na expressão acima:

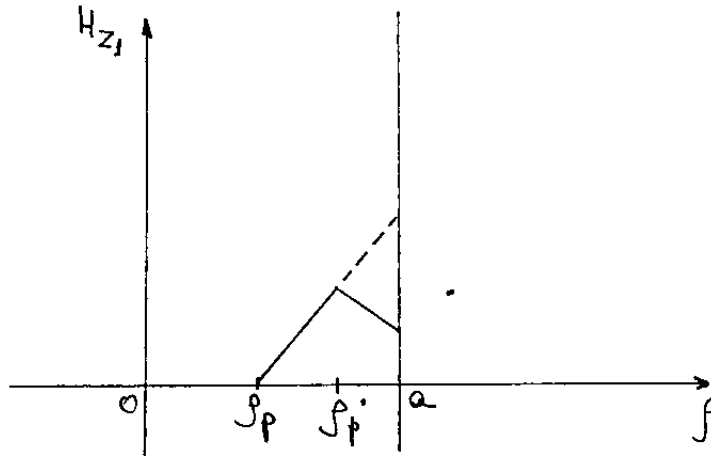
$$L_p = \frac{h_o}{J_{co}} \quad (\text{II-4-41})$$

De (II-4-41) em (II-4-39), temos

$$H_{z1} = h_o + \frac{h_o}{L_p} (\rho - a)$$

$$H_{z1} = h_o \left[1 + \frac{(\rho - a)}{L_p} \right] \quad (\text{II-4-42})$$

Após $t = 0$, para $h(t)$ decrescendo, temos:



$$\text{Seja } L_p \equiv a - \rho_p \quad (\text{II-4-43})$$

Para $\rho_p < \rho < \rho_p'$, da equação (II-4-39) temos:

$$H_{z1} = h_0 + J_{c0}(\rho - a)$$

Para $\rho_p' < \rho < a$, da equação (II-4-35) temos:

$$H_{z1} = J_{c0}(-\rho + C) \quad (\text{II-4-44})$$

onde $C \equiv$ constante a determinar

Na superfície cilíndrica temos:

$$H_{z1} = h(t)$$

$$\rho = a$$

Então:

$$h(t) = J_{c0}(-a + C)$$

$$C = a + \frac{h(t)}{J_{c0}} \quad (\text{II-4-45})$$

De (II-4-45) em (II-4-44):

$$H_{z1} = J_{co} \left(-\rho + a + \frac{h(t)}{J_{co}} \right)$$

$$H_{z1} = h + J_{co} (a - \rho) \quad (\text{II-4-46})$$

De (II-4-41) em (II-4-46), temos:

$$H_{z1} = h(t) + \frac{h_o}{L_p} (a - \rho) \quad (\text{II-4-47})$$

Para haver continuidade de campo no ponto ρ_p , de (II-4-39) e (II-4-46) devemos ter:

$$h_o + J_{co} (\rho_p - a) = h(t) + J_{co} (a - \rho_p)$$

$$2J_{co} (a - \rho_p) = h_o - h(t)$$

De (II-4-41) na equação acima:

$$2 \frac{h_o}{L_p} (a - \rho_p) = h_o - h(t)$$

De (II-4-43) na equação acima:

$$2 \frac{h_o}{L_p} L_p = h_o - h(t)$$

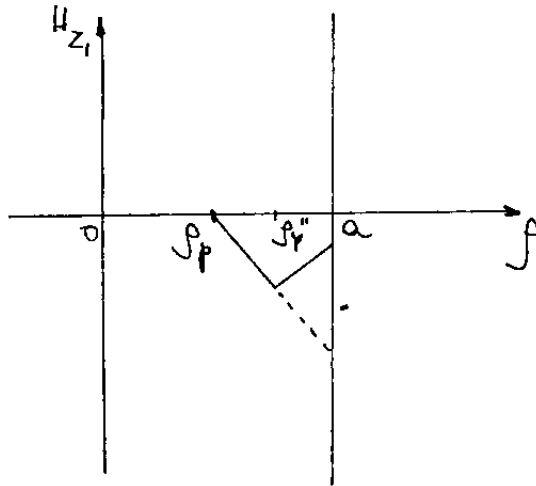
$$L_p = L_p \left[\frac{h_o - h(t)}{2h_o} \right] \quad (\text{II-4-48})$$

Para $t = T/2$, $h(t) = -h_o$ e:

$$L_p = L_p \left[\frac{h_o - (-h_o)}{2h_o} \right]$$

$$L_p = L_p \quad (\text{II-4-49})$$

Para $t > T/2$, para $h(t)$ aumentando novamente:



Seja $L_{\rho''} = a - \rho_{\rho''}$ (II-4-50)

Para ρ_p ($\rho < \rho_{\rho''}$) da equação (II-4-35) temos:

$$H_{z1} = J_{c0} (-\rho + C) \tag{II-4-51}$$

onde $C =$ constante a determinar

Na superfície temos:

$$H_{z1} = -h_0$$

$$\rho = a$$

Então:

$$-h_0 = J_{c0} (-a + C)$$

$$C = a - \frac{h_0}{J_{c0}} \tag{II-4-52}$$

De (II-4-52) em (II-4-51):

$$H_{z1} = -h_0 + J_{c0} (a - \rho) \tag{II-4-53}$$

De (II-4-41) em (II-4-53), temos:

$$H_{z1} = -h_o \left[1 - \frac{(a - \rho)}{L_p} \right] \quad (\text{II-4-54})$$

Para $\rho_{p''}$ ($\rho < a$), de (II-4-35) temos:

$$H_{z1} = J_{co}(\rho + C) \quad (\text{II-4-55})$$

onde C = constante a determinar

Na superfície temos:

$$H_{z1} = h(t)$$

$$\rho = a$$

Então:

$$h(t) = J_{co}(a + C)$$

$$C = \frac{h}{J_{co}} - a \quad (\text{II-4-56})$$

De (II-4-56) em (II-4-55), temos:

$$H_{z1} = h(t) + J_{co}(\rho - a) \quad (\text{II-4-57})$$

De (II-4-41) em (II-4-57), temos:

$$H_{z1} = h(t) + \frac{h_o}{L_p}(\rho - a) \quad (\text{II-4-58})$$

Para haver continuidade de campo no ponto $\rho_{p''}$, de (II-4-53) e (II-4-57) devemos ter:

$$-h_o - J_{co}(\rho_{p''} - a) = h + J_{co}(\rho_{p''} - a)$$

De (II-4-41) e (II-4-50) na equação acima, temos:

$$h(t) + h_0 = 2 \frac{h_0}{L_p} L_{p''}$$

$$L_{p''} = \frac{L_p}{2h_0} [h(t) + h_0] \quad (\text{II-4-59})$$

Para $t = T$, $h(t) = h_0$. Então, da expressão acima, temos:

$$L_{p''} = L_p \quad (\text{II-4-60})$$

Resumindo o que foi visto no item (A), para $h_0 < H_b^*$, temos:

$$\text{Para } h_0 \left[1 - \frac{2(a - \rho_{p'})}{L_p} \right] \leq h(t) \leq h_0 :$$

$$H_{z1}(\rho, t) = h_0 \left[1 - \frac{(a - \rho)}{L_p} \right]$$

$$\text{Para } -h_0 \leq h(t) \leq h_0 \left[1 - \frac{2(a - \rho_{p'})}{L_p} \right] :$$

$$H_{z1}(\rho, t) = h(t) + \frac{h_0}{L_p} (a - \rho)$$

$$\text{Para } -h_0 \leq h(t) \leq -h_0 \left[1 - \frac{2(a - \rho_{p''})}{L_p} \right] :$$

$$H_{z1}(\rho, t) = -h_0 \left[1 - \frac{(a - \rho)}{L_p} \right]$$

$$\text{Para } -h_0 \left[1 - \frac{2(a - \rho_{p''})}{L_p} \right] \leq h(t) \leq h_0 :$$

$$H_{z1}(\rho, t) = h(t) + \frac{h_0}{L_p} (\rho - a)$$

Condição para continuidade de $H_{z1}(\rho, t)$:

$$\text{ponto } \rho_{p'} \Rightarrow h(t) = h_0 \left[1 - \frac{2(a - \rho_{p'})}{L_p} \right]$$

$$\text{ponto } \rho_{p''} \Rightarrow h(t) = -h_0 \left[1 - \frac{2(a - \rho_{p''})}{L_p} \right]$$

Uma vez encontradas expressões para $H_{z1}(\rho, t)$, voltemos à (II-4-17) para o cálculo de $\bar{b}_1(t)$.

Inicialmente, vamos calcular $\bar{b}_1(t)$ para h decrescendo.

De (II-4-39) e (II-4-46) em (II-4-17), temos:

$$\bar{b}_1(t) = \frac{2\mu_0\mu'_0}{a^2} \left\{ \int_{\rho_p}^{\rho_{p'}} d\rho \rho [h_0 + J_{co}(\rho - a)] + \int_{\rho_{p'}}^a d\rho \rho [h(t) - J_{co}(\rho - a)] \right\} \quad (\text{II-4-61})$$

$$\bar{b}_1(t) = \frac{2\mu_0\mu'_0}{a^2} \left\{ (h_0 - aJ_{co}) \int_{\rho_p}^{\rho_{p'}} \rho d\rho + J_{co} \int_{\rho_p}^{\rho_{p'}} \rho^2 d\rho + (h + aJ_{co}) \int_{\rho_{p'}}^a \rho d\rho - J_{co} \int_{\rho_{p'}}^a \rho^2 d\rho \right\}$$

$$\bar{b}_1 = \frac{2\mu_0\mu'_0}{a^2} \left\{ \frac{1}{2} (h_0 - aJ_{co}) (\rho_{p'}^2 - \rho_p^2) + \frac{1}{3} J_{co} (\rho_{p'}^3 - \rho_p^3) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (h + aJ_{co}) (a^2 - \rho_{p'}^2) - \frac{1}{3} J_{co} (a^3 - \rho_{p'}^3) \right\}$$

(II-4-62)

De (II-4-40), (II-4-41) e (II-4-43) em (II-4-62), temos:

$$\begin{aligned} \bar{b}_1(t) = & \frac{2\mu_o\mu'_o h_o}{L_p a^2} \left[\frac{1}{2} (L_p - a)(-2aL_p + L_p^2 + 2aL_p - L_p^2) + \right. \\ & + \frac{1}{3} (-3a^2L_p + 3aL_p^2 - L_p^3 + 3a^2L_p - 3aL_p^2 + L_p^3 + \\ & \left. - \frac{1}{6} \left(\frac{h}{h_o} L_p + a \right) (2aL_p - L_p^2) (3a^2L_p - 3aL_p^2 + L_p^3) \right] \end{aligned} \quad (\text{II-4-63})$$

$$\text{Seja } s \equiv \frac{L_p'}{L_p} \quad (\text{II-4-64})$$

$$L_p' = sL_p \quad (\text{II-4-65})$$

De (II-4-48) e (II-4-64), temos:

$$s = \frac{h_o - h}{2h_o}$$

$$h = h_o(1 - 2s) \quad (\text{II-4-66})$$

De (II-4-65) e (II-4-66) em (II-4-63), temos:

$$\bar{b}_1(t) = \mu_o\mu'_o h_o \left[\left(\frac{L_p}{a} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{L_p}{a} \right)^2 - 2 \left(\frac{L_p}{a} \right) s^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{L_p}{a} \right)^2 s^3 \right] \quad (\text{II-4-67})$$

onde $s = \frac{h_o - h(t)}{2h_o}$, quando $h(t)$ está decrescendo.

Para $t = T/2$, $h(t) = -h_o$.

Então, de (II-4-66) temos que $s = 1$.

Para $t = T/2$ em (II-4-67), temos:

$$\bar{b}_1(T/2) = \mu_o\mu'_o h_o \left[- \left(\frac{L_p}{a} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{L_p}{a} \right)^2 \right] \quad (\text{II-4-68})$$

Para $t = 0$, de (II-4-39) em (II-4-17), temos:

$$\bar{b}_1(0) = \frac{2\mu_0\mu'_0}{a^2} \int_{\rho_p}^a d\rho \rho [h_0 + J_{co}(\rho - a)]$$

$$\bar{b}_1(0) = \frac{2\mu_0\mu'_0}{a^2} [(h_0 - aJ_{co}) \int_{\rho_p}^a \rho d\rho + J_{co} \int_{\rho_p}^a \rho^2 d\rho]$$

$$\bar{b}_1(0) = \frac{2\mu_0\mu'_0}{a^2} \left[\frac{1}{2} (h_0 - aJ_{co})(a^2 - \rho_p^2) + \frac{1}{3} J_{co}(a^3 - \rho_p^3) \right] \quad (\text{II-4-69})$$

De (II-4-41) e (II-4-40) em (II-4-69), temos:

$$\bar{b}_1(0) = \frac{2\mu_0\mu'_0 h_0}{L_p a^2} \left\{ \frac{1}{2}(L_p - a) \left[a^2 - (a - L_p)^2 \right] + \frac{1}{3} \left[a^3 - (a - L_p)^3 \right] \right\}$$

$$\bar{b}_1(0) = \mu_0\mu'_0 h_0 \left[\left(\frac{L_p}{a} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{L_p}{a} \right)^2 \right] \quad (\text{II-4-70})$$

Por comparação de (II-4-68) e (II-4-70) temos que:

$$\bar{b}_1(T/2) = -\bar{b}_1(0) \quad (\text{II-4-71})$$

De (II-4-71) conclui-se que, por simetria, devemos ter:

$$\bar{b}_1(t)_{h \text{ crescente}} = -\bar{b}_1(t)_{h \text{ decrescente}} \quad (\text{II-4-72})$$

Então, de (II-4-67) e (II-4-72) temos que, para $h(t)$ crescente:

$$\bar{b}_1(t) = \mu_0\mu'_0 h_0 \left[- \left(\frac{L_p}{a} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{L_p}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{L_p}{a} \right) s^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{L_p}{a} \right)^2 s^3 \right] \quad (\text{II-4-73})$$

Porém, em vista de (II-4-64), por questão de simetria, em

(II-4-73) devemos ter $s = \frac{L}{L_p}''$.

Então, de (II-4-59) temos que, em (II-4-73), $s = \frac{h(t) + h_o}{2h_o}$.

Resumindo, os resultados para $\bar{b}_1(t)$ para $h_o < H_b^*$ são:

$$* \quad \bar{b}_1(t) = \bar{b}_1(0) - \mu_o \mu_o' h_o \left[2 \left(\frac{L}{a} \right) s^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{L}{a} \right)^2 s^3 \right]$$

$$\text{onde } s = \frac{h_o - h(t)}{2h_o}, \quad h \text{ decrescente}$$

$$* \quad \bar{b}_1(t) = -\bar{b}_1(0) + \mu_o \mu_o' h_o \left[2 \left(\frac{L}{a} \right) s^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{L}{a} \right)^2 s^3 \right]$$

$$\text{onde } s = \frac{h_o + h(t)}{2h_o}, \quad h \text{ crescente}$$

Tanto para h crescente como para decrescente, $\bar{b}_1(0)$ é dado por (II-4-70).

Agora que já temos uma expressão para $\bar{b}(t)$, podemos voltar às equações (II-2-4) e (II-2-5), para $n = 1$, e calcular μ' e μ'' .

Cálculo de μ'

Da equação (II-2-4) para $n = 1$, temos:

$$\mu' = \frac{w}{\pi} \int_0^{T/2} \frac{\bar{b}_1(t)}{\mu_o h_o} \cos wt \, dt \quad (\text{II-4-74})$$

De 0 até $T/2$ $\bar{b}_1(t)$ é dado por (II-4-67) e, de $T/2$ até T $\bar{b}_1(t)$ é dado por (II-4-73).

Então, de (II-4-67) e (II-4-73) em (II-4-74), temos:

$$\mu' = \int_0^{T/2} \frac{\omega \mu'_0}{\pi} \left\{ \frac{L_p}{a} - \frac{1}{3} \left(\frac{L_p}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{L_p}{a}\right)s^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{L_p}{a}\right)^2 s^3 \right\} \cos \omega t \, dt +$$

$$+ \int_{T/2}^T \frac{\omega \mu'_0}{\pi} \left\{ -\frac{L_p}{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{L_p}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{L_p}{a}\right)s^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{L_p}{a}\right)^2 s^3 \right\} \cos \omega t \, dt$$

(II-4-75)

para $0 < t < T/2$, $s = \frac{h_0 - h(t)}{2h_0}$ (II-4-76)

para $T/2 < t < T$, $s = \frac{h(t) + h_0}{2h_0}$ (II-4-77)

Seja $\omega t = \theta$ (II-4-78)

De (II-4-78), temos:

$$\cos \omega t \, \omega dt = \cos \theta \, d\theta$$

$$t = 0 \Rightarrow \theta = 0 \quad \text{(II-4-79)}$$

$$t = T/2 \Rightarrow \theta = \pi$$

$$t = T \Rightarrow \theta = 2\pi$$

De (II-4-78) em (II-4-75) temos:

$$\mu' = \frac{\mu'_0}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{L_p}{a} - \frac{1}{3} \left(\frac{L_p}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{L_p}{a}\right)s^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{L_p}{a}\right)^2 s^3 \right] \cos \theta \, d\theta +$$

$$+ \frac{\mu'_0}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left[-\frac{L_p}{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{L_p}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{L_p}{a}\right)s^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{L_p}{a}\right)^2 s^3 \right] \cos \theta \, d\theta$$

(II-4-80)

De (II-4-76) e (II-4-79) temos que:

$$* \quad \text{para } 0 < \theta < \pi \Rightarrow s = \frac{h_0 - h(t)}{2h_0}$$

sendo $h(t) = h_0 \cos \omega t$, para $\omega t = \theta$, temos:

$$s = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \quad (II-4-81)$$

De (II-4-77) e (II-4-79) temos que:

$$* \quad \text{para } \pi < \theta < 2\pi \Rightarrow s = \frac{h(t) + h_0}{2h_0}$$

sendo $h(t) = h_0 \cos \omega t$, para $\omega t = \theta$, temos:

$$s = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \quad (II-4-82)$$

$$\text{Seja } L \equiv \frac{L}{a}^p \quad (II-4-83)$$

De (II-4-81), (II-4-82) e (II-4-83) em (II-4-80), temos:

$$\begin{aligned} \mu' = & \frac{\mu'_0}{\pi} \int_0^{\pi} \left[L - \frac{L^2}{3} - \frac{1}{2} L (1 - \cos \theta)^2 + \frac{1}{12} L^2 (1 - \cos \theta)^3 \right] \cos \theta \, d\theta + \\ & + \frac{\mu'_0}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left[- \left(L - \frac{L^2}{3} \right) + \frac{1}{2} L (1 + \cos \theta')^2 - \frac{1}{12} L^2 (1 + \cos \theta')^3 \right] \cos \theta' \, d\theta' \end{aligned} \quad (II-4-84)$$

Para a segunda integral do lado direito de (II-4-84), seja:

$$\theta' = \theta + \pi \quad (II-4-85)$$

$$\theta' = \pi \Rightarrow \theta = 0$$

$$\theta' = 2\pi \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\cos \theta' = \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

$$\sin \theta' = \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

De (II-4-85) em (II-4-84), temos:

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{\mu'_0}{\pi} \int_0^{\pi} \left[L - \frac{1}{3} L^2 - \frac{1}{2} L(1 - \cos\theta)^2 + \frac{1}{12} L^2(1 - \cos\theta)^3 \right] \cos\theta \, d\theta + \\ &- \frac{\mu'_0}{\pi} \int_0^{\pi} \left[-L + \frac{1}{3} L^2 + \frac{1}{2} L(1 - \cos\theta)^2 - \frac{1}{12} L^2(1 - \cos\theta)^3 \right] \cos\theta \, d\theta \\ \mu' &= \frac{\mu'_0}{\pi} \left[(2L - \frac{1}{2} L^2) \int_0^{\pi} \cos^2\theta \, d\theta - \frac{L^2}{6} \int_0^{\pi} \cos^4\theta \, d\theta \right] \\ \mu' &= \mu'_0 L \left(1 - \frac{5}{16} \right) \end{aligned} \quad \text{(II-4-86)}$$

onde L é dado por (II-4-83).

CÁLCULO DE μ''

Da equação (II-2-5) para $n = 1$, temos:

$$\mu'' = \frac{w}{\pi} \int_0^T \frac{\bar{b}_1(t)}{\mu_0 h_0} \operatorname{sen} wt \, dt \quad \text{(II-4-87)}$$

De 0 até $T/2$, $\bar{b}_1(t)$ é dado por (II-4-67) e, de $T/2$ até T , $\bar{b}_1(t)$ é dado por (II-4-73).

Então, de (II-4-67), (II-4-73) e (II-4-83) em (II-4-87), temos:

$$\begin{aligned} \mu'' &= \frac{\mu'_0}{\pi} \int_0^{T/2} (L - \frac{1}{3} L^2 - 2Ls^2 + \frac{2}{3} L^2 s^3) \operatorname{sen} wt \, w dt + \\ &+ \int_{T/2}^T (-L + \frac{1}{3} L^2 + 2Ls^2 - \frac{2}{3} L^2 s^3) \operatorname{sen} wt \, w dt \end{aligned} \quad \text{(II-4-88)}$$

De (II-4-76) a (II-4-79) em (II-4-88), temos:

$$\begin{aligned} \mu'' = & \frac{\mu'_0 \pi}{\pi} \int_0^{\pi} \left(L - \frac{1}{3} L^2 - 2Ls^2 + \frac{2}{3} L^2 s^3 \right) \text{sen} \theta \, d\theta + \\ & + \frac{\mu'_0 \pi}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left(-L + \frac{1}{3} L^2 + 2Ls^2 - \frac{2}{3} L^2 s^3 \right) \text{sen} \theta \, d\theta \end{aligned}$$

(II-4-89)

De (II-4-81) e (II-4-82) em (II-4-89), temos:

$$\begin{aligned} \mu'' = & \frac{\mu'_0}{\pi} \int_0^{\pi} \left[L - \frac{1}{3} L^2 - \frac{1}{2} L(1 - \cos \theta)^2 + \frac{L^2}{12} (1 - \cos \theta)^3 \right] \text{sen} \theta \, d\theta + \\ & + \frac{\mu'_0}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left[-L + \frac{1}{3} L^2 + \frac{1}{2} L(1 + \cos \theta')^2 - \frac{L^2}{12} (1 + \cos \theta')^3 \right] \text{sen} \theta' \, d\theta' \end{aligned}$$

(II-4-90)

Para a segunda integral do lado direito de (II-4-90), seja $\theta' = \theta + \pi$. Então, de (II-4-85) em (II-4-90), temos:

$$\begin{aligned} \mu'' = & \frac{\mu'_0}{\pi} \int_0^{\pi} \left[L - \frac{L^2}{3} - \frac{L}{2} (1 - \cos \theta)^2 + \frac{L^2}{12} (1 - \cos \theta)^3 \right] \text{sen} \theta \, d\theta + \\ & - \frac{\mu'_0}{\pi} \int_0^{\pi} \left[-L + \frac{L^2}{3} + \frac{L}{2} (1 - \cos \theta)^2 - \frac{L^2}{12} (1 - \cos \theta)^3 \right] \text{sen} \theta \, d\theta \\ & \mu'' = \frac{\mu'_0}{\pi} \int_0^{\pi} \left(L - \frac{1}{2} L^2 \right) \text{sen}^3 \theta \, d\theta \end{aligned}$$

$$\mu'' = \frac{4}{3\pi} \mu'_0 L \left(1 - \frac{1}{2} L \right) \quad (\text{II-4-91})$$

onde, de (II-4-41) e (II-4-83), L é dado por:

$$L = \frac{h_o}{aJ_{co}}$$

(II-4-92)

Finalmente temos que a perda histerética por unidade de volume por ciclo, para $h_o < H_b^*$, de (II-2-14) é dada por:

$$W_v = \frac{\pi b_o^2 \mu''}{\mu_o}$$

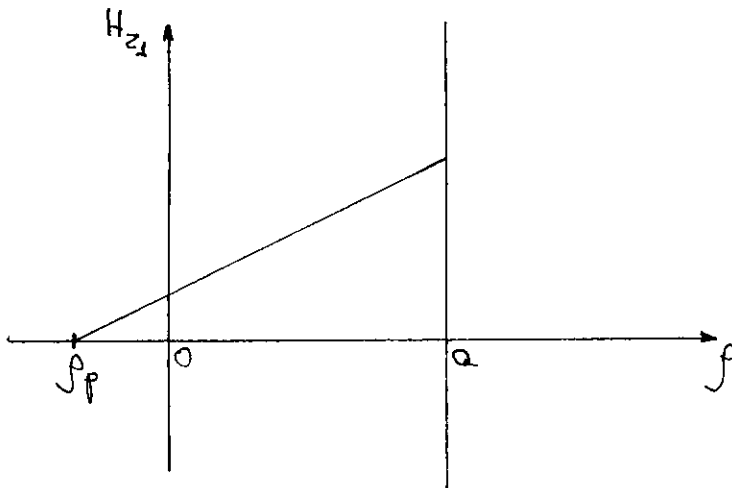
(II-4-93)

onde μ'' é dado pela equação (II-4-91).

B) $h_o > H_b^*$

Consideremos que o campo varie de h_o até $-h_o$ e aí então novamente até h_o .

No instante $t = 0$, seja o perfil de campo como ilustrado abaixo:



De (II-4-37) temos que o perfil de campo no instante $t = 0$ para $0 < \rho < a$ é dado por:

$$H_{z1} = h_o + J_{co} (\rho - a)$$

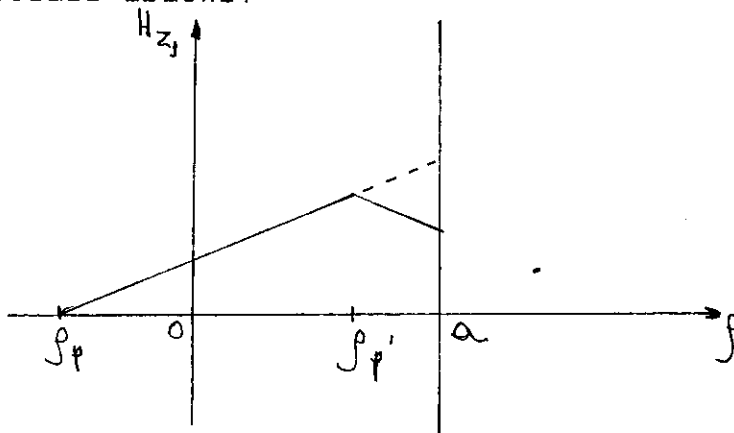
(II-4-94)

De (II-4-41) temos que:

$$L_p = \frac{h_o}{J_{co}}$$

(II-4-95)

Após $t = 0$, para $h(t)$ decrescente, o perfil de campo é como esquematizado abaixo:



Para $0 < \rho < \rho_p$, de (II-4-37) temos que H_{z1} é dado por:

$$H_{z1} = h_0 + J_{co} (\rho - a) \quad (\text{II-4-96})$$

Para $\rho_p < \rho < a$, de (II-4-46) temos que H_{z1} é dado por:

$$H_{z1} = h(t) - J_{co} (\rho - a) \quad (\text{II-4-97})$$

Para haver continuidade de campo no ponto $\rho_p = \rho_p$, de (II-4-96) e (II-4-97) devemos ter:

$$h_0 + J_{co} (\rho_p - a) = h(t) - J_{co} (\rho_p - a)$$

$$h_0 - h(t) = 2J_{co} (a - \rho_p) \quad (\text{II-4-98})$$

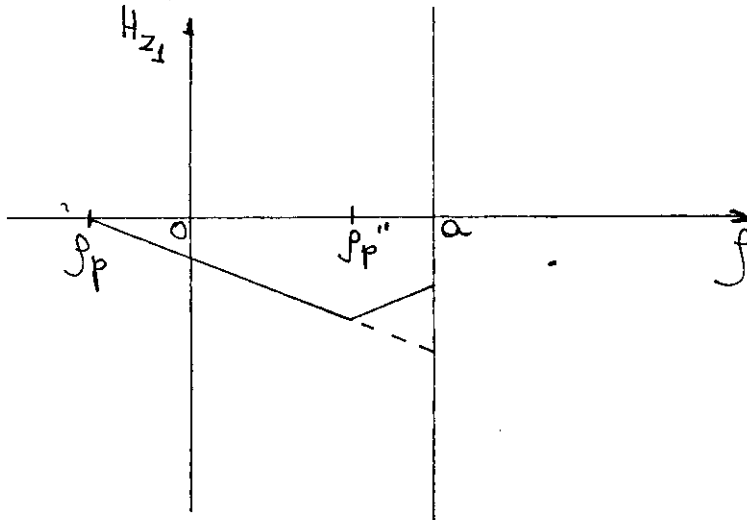
De (II-4-95) em (II-4-98), temos:

$$h(t) = h_0 \left[1 - \frac{2(a - \rho_p)}{L_p} \right] \quad (\text{II-4-99})$$

De (II-4-43) em (II-4-98), temos:

$$L_p = \frac{1}{2J_{co}} [h_0 - h(t)] \quad (\text{II-4-100})$$

Para $t > T/2$, para $h(t)$ aumentando novamente, o perfil de campo é como esquematizado abaixo:



Para $0 < \rho < \rho_{p''}$, de (II-4-53) temos que H_{z1} é dado por:

$$H_{z1} = -h_0 - J_{c0}(\rho - a) \quad (\text{II-4-101})$$

Para $\rho_{p''} < \rho < a$, de (II-4-57), H_{z1} é dado por:

$$H_{z1} = h(t) + J_{c0}(\rho - a) \quad (\text{II-4-102})$$

Para haver continuidade de campo no ponto $\rho = \rho_{p''}$, de (II-4-101) e (II-4-102) devemos ter:

$$-h_0 + J_{c0}(a - \rho_{p''}) = h(t) + J_{c0}(\rho_{p''} - a)$$

$$h(t) + h_0 = 2J_{c0}(a - \rho_{p''}) \quad (\text{II-4-103})$$

De (II-4-95) em (II-4-103), temos:

$$h(t) = -h_0 \left[1 - \frac{2(a - \rho_{p''})}{L_p} \right] \quad (\text{II-4-104})$$

De (II-4-50) em (II-4-103), temos:

$$L_{p''} = \frac{1}{2J_{c0}} [h(t) + h_0] \quad (\text{II-4-105})$$

Resumindo, para $h_0 > H_b^*$, das equações (II-4-94), (II-4-97), (II-4-99), (II-4-101), (II-4-102) e (II-4-104), temos:

$$* \quad H_{z1}(\rho, t) = h_0 + J_{c0}(\rho - a)$$

$$\text{para } h_0 \left[1 - \frac{2(a - \rho_{p'})}{L_p} \right] \leq h(t) \leq h_0$$

$$* \quad H_{z1}(\rho, t) = h(t) - J_{c0}(\rho - a)$$

$$\text{para } -h_0 \leq h(t) \leq h_0 \left[1 - \frac{2(a - \rho_{p'})}{L_p} \right]$$

$$* \quad H_{z1}(\rho, t) = -h_0 - J_{c0}(\rho - a)$$

$$\text{para } -h_0 \leq h(t) \leq -h_0 \left[1 - \frac{2(a - \rho_{p''})}{L_p} \right]$$

$$* \quad H_{z1}(\rho, t) = h(t) + J_{c0}(\rho - a)$$

$$\text{para } -h_0 \left[1 - \frac{2(a - \rho_{p''})}{L_p} \right] \leq h(t) \leq h_0$$

Com as equações para $H_{z1}(\rho, t)$ podemos calcular $\bar{b}_1(t)$ pela equação (II-4-17) e então calcular μ' e μ'' a partir de (II-2-4) e (II-2-5) para $n = 1$.

CÁLCULO DE μ'

Da equação (II-2-4) para $n = 1$, temos:

$$\mu' = \frac{w}{\pi \mu_0 h_0} \int_0^T \bar{b}_1(t) \cos \omega t \, dt \quad (\text{II-4-106})$$

$$\mu' = \frac{w}{\pi \mu_0 h_0} \left[\int_0^{T/2} \bar{b}_1(t) \cos \omega t \, dt + \int_{T/2}^T \bar{b}_1(t') \cos \omega t' \, dt' \right] \quad (\text{II-4-107})$$

Para a segunda integral do lado direito de (II-4-107), seja:

$$t' = t + T/2 \quad (\text{II-4-108})$$

Então, de (II-4-108) segue que:

$$\bar{B}(t') = -\bar{B}(t) \quad (\text{II-4-109})$$

$$\cos \omega t' = -\cos \omega t \quad (\text{II-4-110})$$

$$\sin \omega t' = -\sin \omega t \quad (\text{II-4-111})$$

$$t' = T/2 \Rightarrow t = 0 \quad (\text{II-4-112})$$

$$t' = T \Rightarrow t = T/2 \quad (\text{II-4-113})$$

De (II-4-109) a (II-4-113) em (II-4-107), temos:

$$\mu' = \frac{w}{\pi \mu_0 h_0} \left[\int_0^{T/2} \bar{B}_1(t) \cos \omega t \, dt + \int_0^{T/2} -\bar{B}_1(t) (-\cos \omega t) \, dt \right]$$

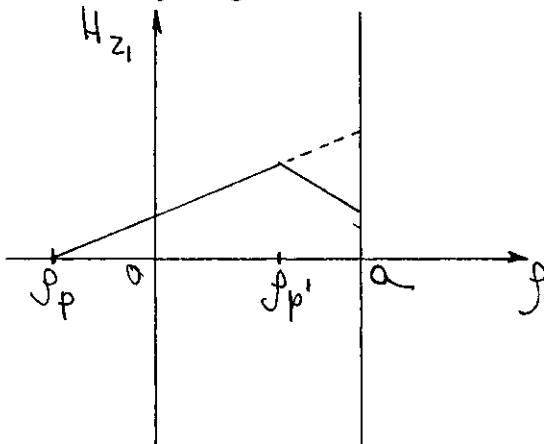
$$\mu' = \frac{2w}{\pi \mu_0 h_0} \int_0^{T/2} \bar{B}_1(t) \cos \omega t \, dt$$

$$(\text{II-4-114})$$

De (II-4-114) temos que para o cálculo de μ' precisamos somente da equação para $\bar{B}_1(t)$ válida para $0 < t < T/2$.

Para $0 < t < T/2$ ocorre o seguinte para o perfil de campo magnético no supercondutor:

a) para $0 < t < t_0$, t_0 a determinar, $L_p < a$.



Então, de (II-4-94) e (II-4-97), temos:

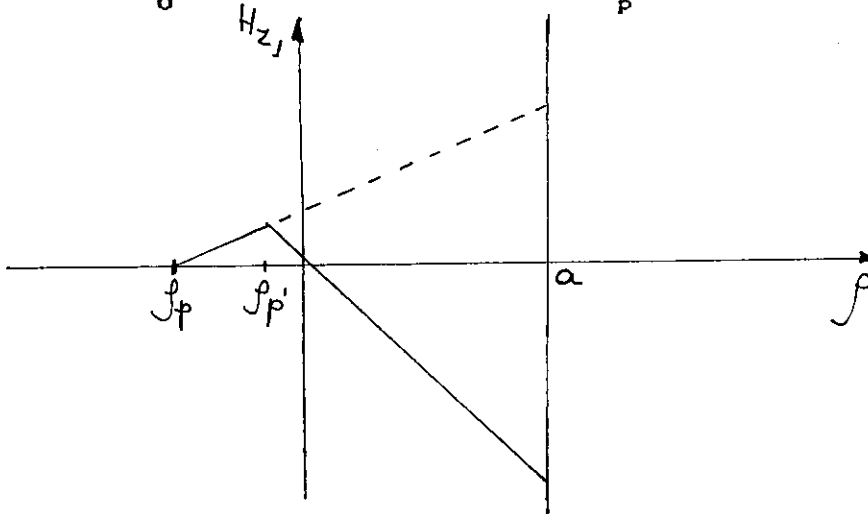
$$H_{z1}(\rho, t) = h_0 + J_{co}(\rho - a) \text{ para } 0 < \rho < \rho_p \quad (\text{II-4-115})$$

$$H_{z1}(\rho, t) = h(t) - J_{co}(\rho - a) \text{ para } \rho_p < \rho < a \quad (\text{II-4-116})$$

De (II-4-115) e (II-4-116) em (II-4-17), temos:

$$\bar{b}_1(t) = \frac{2\mu_0\mu'_0}{a^2} \left[\int_0^{\rho_p} d\rho \rho [h_0 + J_{co}(\rho - a)] + \int_{\rho_p}^a d\rho \rho [h(t) - J_{co}(\rho - a)] \right] \quad (\text{II-4-117})$$

b) para $t_0 < t < T/2$, temos que $L_p > a$.



Da equação (II-4-97), temos:

$$H_{z1}(\rho, t) = h(t) - J_{co}(\rho - a) \text{ para } 0 < \rho < a \quad (\text{II-4-118})$$

De (II-4-118) em (II-4-17), temos:

$$\bar{b}_1(t) = \frac{2\mu_0\mu'_0}{a^2} \int_0^a d\rho \rho [h(t) - J_{co}(\rho - a)] \quad (\text{II-4-119})$$

De (II-4-65) temos que:

$$\frac{L_p}{a} = \frac{L_p}{a} s \quad (\text{II-4-120})$$

com s dado por (II-4-76).

De (II-4-83) em (II-4-120), temos:

$$\frac{L_p}{a} = Ls \quad (\text{II-4-121})$$

$$\text{Para } L_p \leq a \Rightarrow Ls \leq 1 \quad (\text{II-4-122})$$

$$\text{Seja } \alpha \equiv \frac{1}{L} \quad (\text{II-4-123})$$

De (II-4-121) e (II-4-123), temos que:

$$Ls \leq 1 \Rightarrow s \leq \alpha \quad (\text{II-4-124})$$

Para $L_p = a$, de (II-4-121) temos que $Ls = 1$.

De (II-4-124), se $Ls = 1$, temos que $s = \alpha$. Portanto:

$$L_p = a \Rightarrow s = \alpha \text{ ou } s = \frac{1}{L} \quad (\text{II-4-125})$$

Sendo $wt = \theta$, para $0 < \theta < \pi$, de (II-4-81) temos:

$$s = \frac{1}{2} (1 - \cos\theta) \quad (\text{II-4-126})$$

Sendo θ_0 o valor de θ para o qual $L_p = a$, de (II-4-125) e (II-4-126) temos:

$$\frac{1}{2} (1 - \cos\theta_0) = \alpha$$

$$\theta_0 = \cos^{-1}(1 - 2\alpha) \quad (\text{II-4-127})$$

Então, para $0 < \theta < \theta_0$ vale a equação (II-4-117) para $\bar{b}_1(t)$ e para $\theta_0 < \theta < \pi$ vale a equação (II-4-119) para $\bar{b}_1(t)$, θ_0 sendo dado por (II-4-127).

$$0 < \theta < \theta_0$$

De (II-4-117), temos:

$$\begin{aligned} \bar{b}_1(t) = 2\mu_0\mu'_0h_0 \left\{ \int_0^{\rho_p'} \left[\frac{\rho}{a^2} + \frac{J_{co}\rho^2}{a^2h_0} - \frac{J_{co}\rho}{ah_0} \right] d\rho + \right. \\ \left. + \int_{\rho_p'}^a \left[\frac{h(t)\rho}{h_0a^2} - \frac{J_{co}\rho^2}{a^2h_0} + \frac{J_{co}\rho}{ah_0} \right] d\rho \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-4-128})$$

De (II-4-66) em (II-4-128), temos:

$$\begin{aligned} \bar{b}_1(t) = 2\mu_0\mu'_0h_0 \left\{ \int_0^{\rho_p'} \left[\frac{\rho}{a^2} + \frac{J_{co}}{h_0} \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 - \frac{J_{co}\rho}{h_0a} \right] d\rho + \right. \\ \left. + \int_{\rho_p'}^a \left[\frac{h_0(1-2s)\rho}{h_0a^2} - \frac{J_{co}}{h_0} \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 + \frac{J_{co}\rho}{h_0a} \right] d\rho \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-4-129})$$

De (II-4-83) e (II-4-123) temos que:

$$\alpha = \frac{a}{L_p} \quad (\text{II-4-130})$$

De (II-4-95) e (II-4-130) temos que:

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{J_{co}}{h_0} \quad (\text{II-4-131})$$

$$\text{Seja } u = \frac{\rho}{a} \quad (\text{II-4-132})$$

$$\rho = 0 \Rightarrow u = 0$$

(II-4-133)

$$\rho = \rho_p \Rightarrow u = u'$$

(II-4-134)

$$\rho = a \Rightarrow u = 1$$

(II-4-135)

De (II-4-131) e (II-4-132) em (II-4-130), temos:

$$\bar{b}_1(t) = 2\mu_0 \mu'_0 h_0 \left\{ \int_0^{u'} a \left[\frac{u}{a} + \frac{\alpha}{a} u^2 - \frac{\alpha}{a} u \right] du + \int_{u'}^1 a \left[\frac{(1-2s)}{a} u - \frac{\alpha}{a} u^2 + \frac{\alpha}{a} u \right] du \right\}$$

$$\bar{b}_1(t) = 2\mu_0 \mu'_0 h_0 \left[(1-\alpha) \int_0^{u'} u du + \alpha \int_0^{u'} u^2 du + (1-2s+\alpha) \int_{u'}^1 u du + -\alpha \int_{u'}^1 u^2 du \right]$$

$$\bar{b}_1(t) = 2\mu_0 \mu'_0 h_0 \left[\frac{1}{2} (1-\alpha) u'^2 + \frac{1}{3} \alpha u'^3 + \frac{1}{2} (1-2s+\alpha) (1-u'^2) + -\frac{\alpha}{3} (1-u'^3) \right]$$

(II-4-136)

De (II-4-43) temos que $\rho_p = a - L_p$.

De (II-4-132) e (II-4-134) temos que $\rho_p = au'$. Então:

$$u' = 1 - \frac{L_p}{a} \quad (II-4-137)$$

De (II-4-121) em (II-4-137), temos:

$$u' = 1 - Ls \quad (II-4-138)$$

De (II-4-123) e (II-4-138) em (II-4-136), temos:

$$\bar{b}_1(t) = \mu_0 \mu'_0 h_0 \frac{1}{L} \left(L - \frac{1}{3} - 2L^2 s^2 + \frac{2}{3} L^3 s^3 \right) \quad (\text{II-4-139})$$

$$\theta_0 < \theta < \pi$$

Agora segue o cálculo de $\bar{b}_1(t)$ para $\theta_0 < \theta < \pi$.

De (II-4-132) em (II-4-119), temos:

$$\bar{b}_1(t) = 2\mu_0 \mu'_0 \int_0^1 u \left[h(t) - J_{co} a (u - 1) \right] du \quad (\text{II-4-140})$$

De (II-4-131) temos que $J_{co} a = \alpha h_0$.

De (II-4-123) temos que $\alpha = \frac{1}{L}$. Portanto:

$$J_{co} a = \frac{h_0}{L} \quad (\text{II-4-141})$$

De (II-4-76) e (II-4-141) em (II-4-140), temos:

$$\bar{b}_1(t) = 2\mu_0 \mu'_0 \int_0^1 u \left[h_0 (1 - 2s) - \frac{h_0}{L} (u - 1) \right] du$$

$$\bar{b}_1(t) = 2\mu_0 \mu'_0 h_0 \left[\left(1 + \frac{1}{L} - 2s \right) \int_0^1 u du - \frac{1}{L} \int_0^1 u^2 du \right]$$

$$\bar{b}_1(t) = \mu_0 \mu'_0 h_0 \left(1 - 2s + \frac{1}{3} L \right) \quad (\text{II-4-142})$$

Resumindo, temos:

* de $t = 0$ a $t = T/2$, para $\frac{L}{a} < 1$, de (II-4-139) temos que

$\bar{b}_1(t)$ é dado por:

$$\bar{b}_1(t) = \mu_0 \mu'_0 h_0 \frac{1}{L} \left[L - \frac{1}{3} - 2L^2 s^2 + \frac{2}{3} L^3 s^3 \right]$$

* de $t = 0$ a $t = T/2$, para $\frac{L p'}{a} > 1$, de (II-4-142) temos que $\bar{b}_1(t)$ é dado por:

$$\bar{b}_1(t) = \mu_0 \mu'_0 h_0 \left[1 - 2s + \frac{1}{3} L \right]$$

No limite $\frac{L p'}{a} = 1$, de (II-4-121) temos que $s = \frac{1}{L}$.

Substituindo-se $s = 1/L$ tanto em (II-4-139) como em (II-4-142) encontramos para $\bar{b}_1(t)$ o valor:

$$\bar{b}_1(t) = \mu_0 \mu'_0 h_0 \left(1 - \frac{5}{3L} \right)$$

Portanto, no limite $L p' / a = 1$ temos que (II-4-139) e (II-4-142) são idênticas, como deveria ser, por questão de continuidade.

De (II-4-139) e (II-4-142) em (II-4-114) com $\omega t = \theta$, temos:

$$\mu' = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{\theta_0}^{\theta_0} \mu'_0 \frac{1}{L} \left(L - \frac{1}{3} - 2L^2 s^2 + \frac{2}{3} L^3 s^3 \right) \cos \theta \, d\theta + \int_{\theta_0}^{\pi} \mu'_0 \left(1 - 2s + \frac{1}{3L} \right) \cos \theta \, d\theta \right\}$$

(II-4-143)

onde θ_0 é dado por (II-4-127).

De (II-4-126) em (II-4-143), temos:

$$\mu' = \frac{\pi}{2} \left\{ \int_0^{\theta_0} \mu'_0 \frac{1}{L} \left[L - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} L^2 (1 - \cos\theta)^2 + \frac{1}{12} L^3 (1 - \cos\theta)^3 \right] \cos\theta \, d\theta + \right. \\ \left. + \int_{\theta_0}^{\pi} \mu'_0 \left[1 - (1 - \cos\theta) + \frac{1}{3L} \right] \cos\theta \, d\theta \right\}$$

(II-4-144)

Temos que:

$$\int_0^{\theta_0} \cos\theta \, d\theta = \text{sen}\theta_0 \quad (\text{II-4-145})$$

$$\int_0^{\theta_0} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\theta_0}{2} + \frac{\text{sen}2\theta_0}{4} \quad (\text{II-4-146})$$

$$\int_0^{\theta_0} \cos^3\theta \, d\theta = \text{sen}\theta_0 - \frac{1}{3} \text{sen}^3\theta_0 \quad (\text{II-4-147})$$

$$\int_0^{\theta_0} \cos^4\theta \, d\theta = \frac{3}{8} \theta_0 + \frac{1}{4} \text{sen}2\theta_0 + \frac{1}{32} \text{sen}4\theta_0 \quad (\text{II-4-148})$$

$$\int_{\theta_0}^{\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{4} \text{sen}2\theta_0 \quad (\text{II-4-149})$$

$$\int_{\theta_0}^{\pi} \cos\theta \, d\theta = -\text{sen}\theta_0 \quad (\text{II-4-150})$$

De (II-4-145) a (II-4-150) em (II-4-144), temos:

$$\begin{aligned} \mu' = \frac{2\mu'_0}{\pi} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3L} - \frac{L}{2} + \frac{L^2}{12} \right) \text{sen}\theta_0 + L \left(1 - \frac{1}{4} L \right) \left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\text{sen}2\theta_0}{4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3L} \left(-\text{sen}\theta_0 \right) + L \left(-\frac{1}{2} + \frac{L}{4} \right) \left(\text{sen}\theta_0 - \frac{1}{3} \text{sen}^3\theta_0 \right) + \right. \\ \left. - \frac{L^2}{12} \left(\frac{3}{8} \theta_0 + \frac{1}{4} \text{sen}\theta_0 + \frac{1}{32} \text{sen}4\theta_0 \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{4} \text{sen}2\theta_0 \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-4-151})$$

Temos que $\text{sen}3A \equiv 3 \text{sen}A - 4 \text{sen}^3A$.

Portanto:

$$\frac{1}{3} \text{sen}^3\theta_0 = \frac{1}{4} \text{sen}\theta_0 - \frac{1}{12} \text{sen}3\theta_0 \quad (\text{II-4-152})$$

De (II-4-152) em (II-4-151), temos:

$$\begin{aligned} \mu' = \frac{2\mu'_0}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{L}{2} - \frac{5}{32} L^2 \right) \theta_0 - \frac{L^2}{384} \text{sen}4\theta_0 + \right. \\ \left. + \left(-\frac{2}{3L} + 1 - \frac{7}{8} L + \frac{13}{48} L^2 \right) \text{sen}\theta_0 + \left(-\frac{L}{24} + \frac{L^2}{48} \right) \text{sen}3\theta_0 + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{4} + \frac{L}{4} - \frac{L^2}{12} \right) \text{sen}2\theta_0 \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-4-153})$$

De (II-4-127), sendo $\alpha \equiv \frac{1}{L}$, temos que:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2} (1 - \cos\theta_0) \quad (\text{II-4-154})$$

$$\text{Mas } \cos\theta_0 \equiv \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2}$$

$$\cos\theta_0 = 1 - 2\text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2}$$

$$1 - \cos\theta_0 = 2 \text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} \quad (\text{II-4-155})$$

De (II-4-155) em (II-4-154), temos:

$$\frac{1}{L} = \text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2}$$

$$\theta_0 = 2 \text{sen}^{-1}(L^{-1/2}) \quad (\text{II-4-156})$$

onde $L = \frac{L_p}{a}$, com L_p dado por (II-4-95).

CÁLCULO DE μ''

Da equação (II-2-5) para $n = 1$, temos:

$$\mu'' = \frac{w}{\pi \mu_0 h_0} \int_0^T \bar{b}_1(t) \text{sen} \omega t \, dt \quad (\text{II-4-157})$$

$$\mu'' = \frac{w}{\pi \mu_0 h_0} \left[\int_0^{T/2} \bar{b}_1(t) \text{sen} \omega t \, dt + \int_{T/2}^T \bar{b}_1(t') \text{sen} \omega t' \, dt' \right] \quad (\text{II-4-158})$$

De (II-4-108) a (II-4-113) em (II-4-158), temos:

$$\mu'' = \frac{2w}{\pi \mu_0 h_0} \int_0^{T/2} \bar{b}_1(t) \text{sen} \omega t \, dt \quad (\text{II-4-159})$$

De (II-4-139) e (II-4-142) em (II-4-159) com $\omega t = \theta$, temos:

$$\mu'' = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\theta_0} \frac{\mu_0'}{L} \left[L - \frac{1}{3} - 2L^2 s^2 + \frac{2}{3} L^3 s^3 \right] \text{sen} \theta \, d\theta + \right.$$

$$+ \int_{\theta_0}^{\pi} \mu'_0 \left(1 - 2s + \frac{1}{3L} \right) \operatorname{sen} \theta \, d\theta \left. \vphantom{\int_{\theta_0}^{\pi}} \right\}$$

(II-4-160)

onde θ_0 é dado por (II-4-127).

De (II-4-126) em (II-4-159), temos:

$$\begin{aligned} \mu'' = \frac{\rho}{\pi} \left\{ \int_0^{\theta_0} \frac{\mu'_0}{L} \left[L - \frac{1}{3} - \frac{L^2}{2} (1 - \cos \theta)^2 + \frac{L^3}{12} (1 - \cos \theta)^3 \right] \operatorname{sen} \theta \, d\theta + \right. \\ \left. + \int_{\theta_0}^{\pi} \mu'_0 \left[1 - (1 - \cos \theta) + \frac{1}{3L} \right] \operatorname{sen} \theta \, d\theta \right\} \end{aligned}$$

(II-4-161)

De (II-4-127), sendo $\alpha \equiv \frac{1}{L}$, temos:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta_0)$$

$$\cos \theta_0 = 1 - \frac{2}{L} \quad (\text{II-4-162})$$

A equação (II-4-162) será usada nos resultados das equações (II-4-163) a (II-4-168) a seguir:

Temos que:

$$\int_0^{\theta_0} \operatorname{sen} \theta \, d\theta = -\cos \theta_0 + 1 = \frac{2}{L} \quad (\text{II-4-163})$$

$$\int_0^{\theta_0} \cos \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta = \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \theta_0) = \frac{2}{L} \left(1 - \frac{1}{L} \right) \quad (\text{II-4-164})$$

$$\int_0^{\theta_0} \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta = \frac{1}{3} (1 - \cos^3 \theta_0) = \frac{2}{L} \left(1 - \frac{2}{L} + \frac{4}{3} \frac{1}{L^2} \right) \quad (\text{II-4-165})$$

$$\int_0^{\theta_0} \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta = \frac{1}{4} (1 - \cos^4 \theta_0) = \frac{2}{L} \left(1 - \frac{3}{L} + \frac{4}{L^2} - \frac{2}{L^3} \right) \quad (\text{II-4-166})$$

$$\int_{\theta_0}^{\pi} \cos \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \theta_0 = -\frac{2}{L} \left(1 - \frac{1}{L} \right) \quad (\text{II-4-167})$$

$$\int_{\theta_0}^{\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\theta = 1 + \cos \theta_0 = 2 \left(1 - \frac{1}{L} \right) \quad (\text{II-4-168})$$

De (II-4-163) a (II-4-168) em (II-4-161), temos:

$$\mu'' = \frac{4\mu'_0}{3\pi} \frac{1}{L} \left(1 - \frac{1}{2L} \right) \quad (\text{II-4-169})$$

onde $L = \frac{L_p}{a}$, L_p sendo dado por (II-4-95).

Resumindo os resultados para as componentes real e complexa da permeabilidade magnética complexa, respectivamente μ' e μ'' , temos:

* para $h_0 < H_b^*$:

$$\frac{\mu'}{\mu'_0} = L \left(1 - \frac{5}{16} L \right)$$

$$\frac{\mu''}{\mu'_0} = \frac{4}{3\pi} L \left(1 - \frac{1}{2} L \right)$$

* para $h_0 > H_b^*$:

$$\begin{aligned} \frac{\mu'}{\mu'_0} = 1 + \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{L}{2} - \frac{5}{32} L^2 \right) \theta_0 + \left(-\frac{1}{384} L^2 \right) \operatorname{sen} 4\theta_0 + \right. \\ \left. + \left(-\frac{2}{3L} + 1 - \frac{7}{8} L + \frac{13}{48} L^2 \right) \operatorname{sen} \theta_0 + \left(-\frac{1}{24} L + \frac{1}{48} L^2 \right) \operatorname{sen} 3\theta_0 + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} L - \frac{1}{12} L^2 \right) \operatorname{sen} 2\theta_0 \right] \end{aligned}$$

onde $\theta_0(L) = 2 \operatorname{sen}^{-1}(L^{-1/2})$

$$\frac{\mu''}{\mu_0} = \frac{4}{3\pi L} \left(1 - \frac{1}{2L} \right)$$

$$L = \frac{h_0}{aJ_{c0}} \quad (\text{II-4-170})$$

Seja $g_1(L) \equiv \frac{\mu'}{\mu_0}$ e $g_2(L) \equiv \frac{\mu''}{\mu_0}$.

A função $g_2(L)$ versus L está na figura (II-4-1).

A energia perdida por ciclo por unidade de volume é dada por:

$$W_v = \frac{\pi b_0^2 \mu''}{\mu_0}$$

$$W_v = \frac{\pi b_0^2}{\mu_0} \mu_0' g_2(L) \quad (\text{II-4-171})$$

Da figura (II-4-1), temos que $g_2(L)$ é máxima para $L = 1$.

Então, de (II-4-170) temos que $g_2(L)$ é máxima para:

$$\frac{h_0}{aJ_{c0}} = 1 \quad (\text{II-4-172})$$

De (II-3-29) temos que:

$$\mu_0' = \frac{1}{\mu_0} \frac{B_{c2} H_0}{(H_0^2 - H_{c1}^2)(H_{c2}^2 - H_{c1}^2)} \quad (\text{II-4-173})$$

Clem considera que a dependência de μ_0' sobre H_0 é "suave", exceto perto de $H_0 = H_{c1}$. Portanto, W_v é máxima quando $g_2(L)$ é máxima e isto ocorre quando (II-4-172) é satisfeita.

Para J_c , Clem se utiliza do modelo de $J_c(B)$ seguido por Kim [6]:

$$J_c(B) = \frac{J_{c0} (1 - B/B_{c2})}{1 + 3B/2B_{c2}} \quad (\text{II-4-174})$$

Para ilustrar o comportamento esperado de μ' e μ'' sobre H_0 , Clem calcula os valores de μ' e μ'' utilizando-se de (II-4-173) e (II-4-174). Nas figuras (II-4-2) e (II-4-3), $L_0 = h_0 / J_0(\alpha)a$.

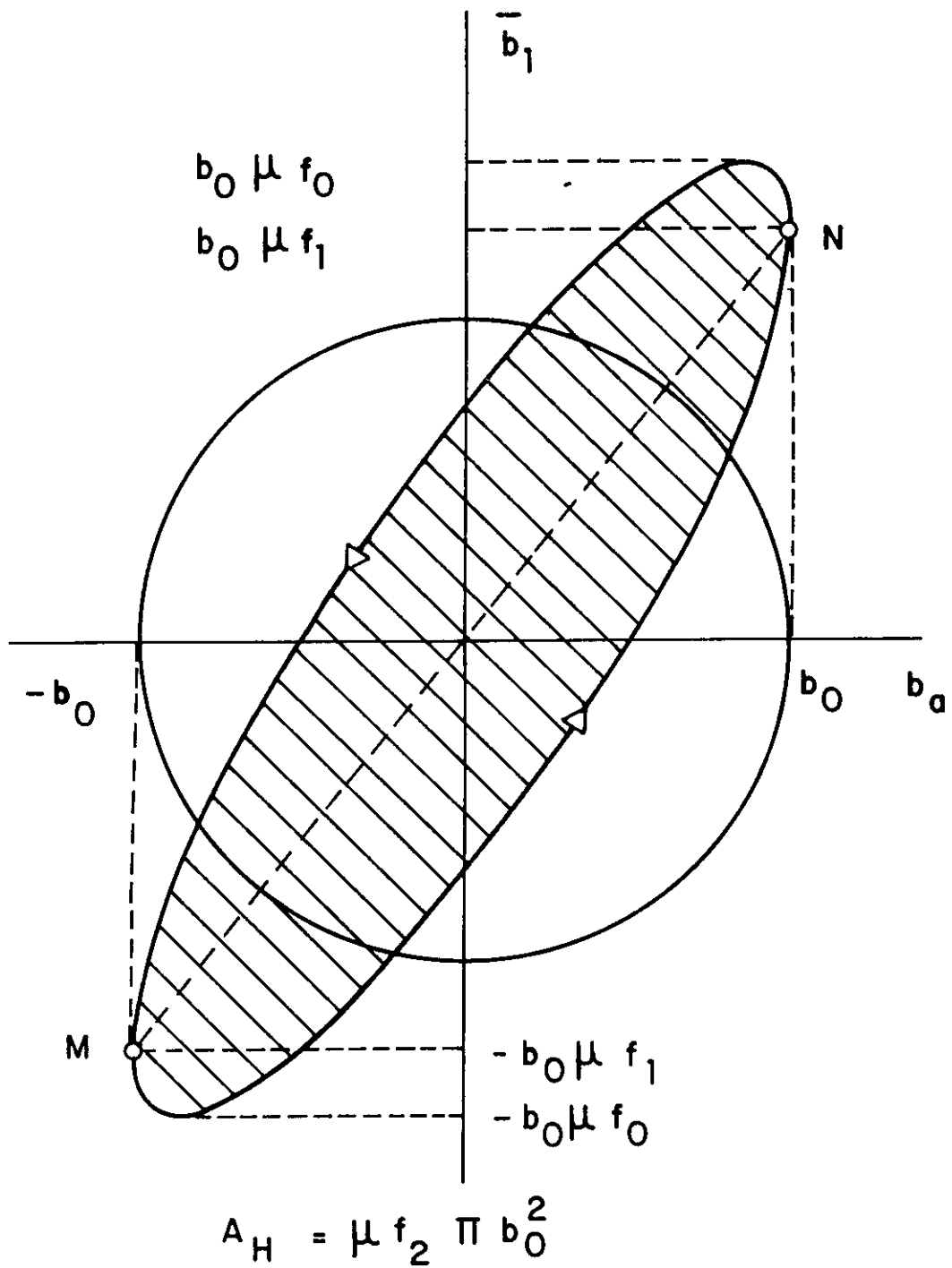


FIG. (II-2-1) - $\bar{b}_1(t)$ VERSUS $b_0 \cos \omega t$

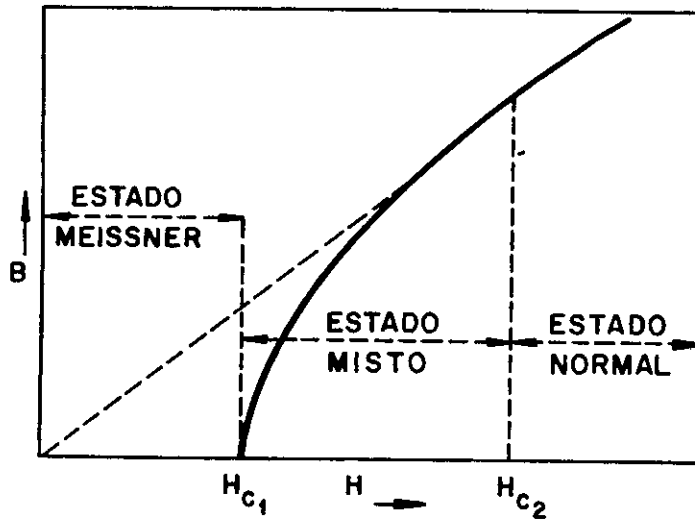


FIG. (II-3-1) - B VERSUS H PARA SUPERCONDUTOR TIPO II.

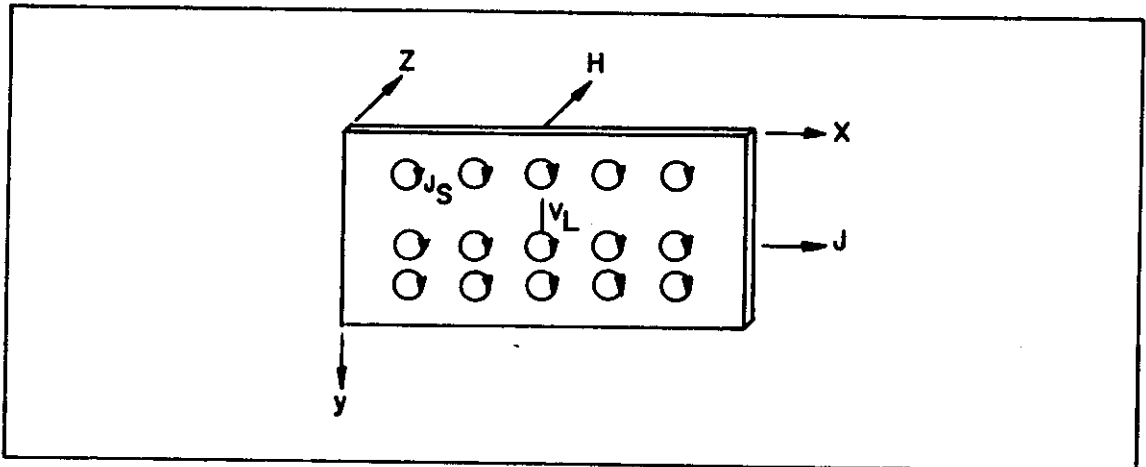


FIG. (II-3-2) - MATERIAL SUPERCONDUTOR SUJEITO A UM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO NA DIREÇÃO Z E DENSIDADE DE CORRENTE DE TRANSPORTE NA DIREÇÃO X.

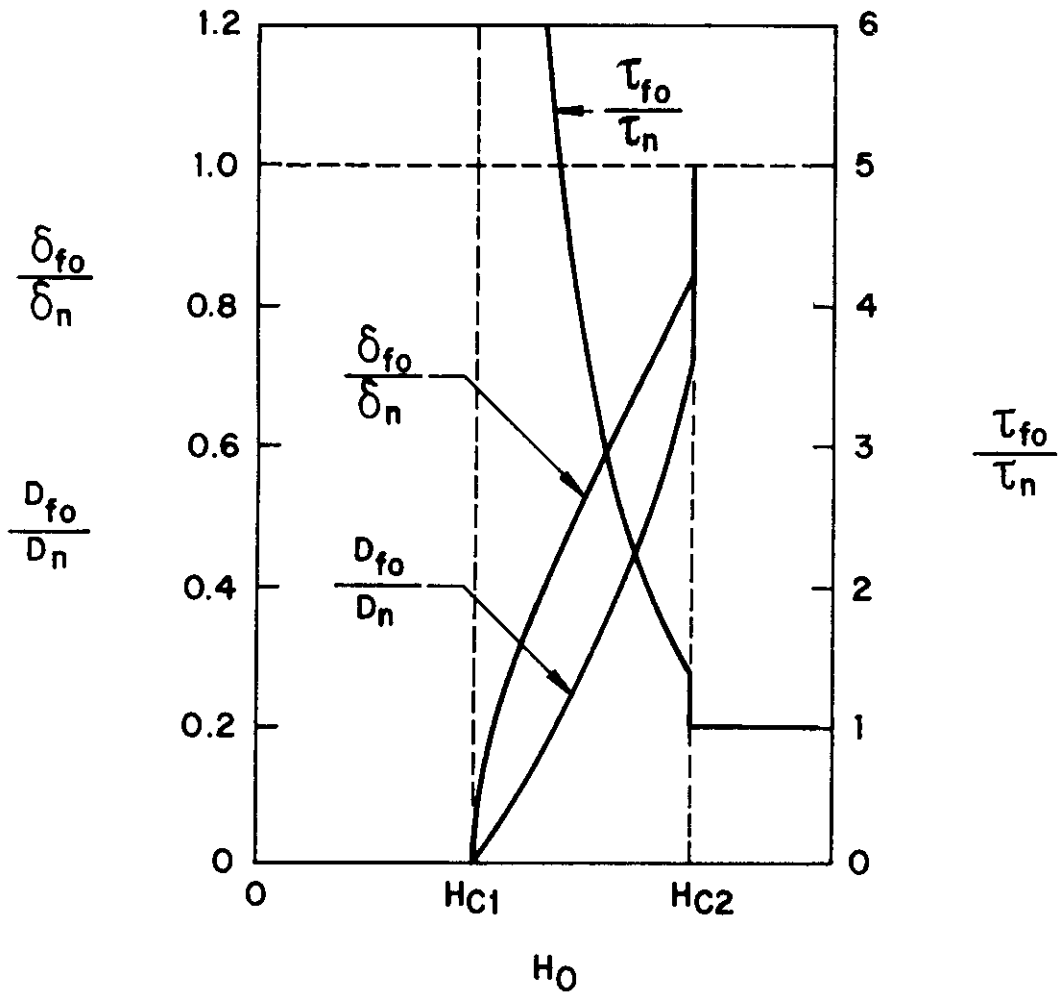


FIG. (II-3-3) - D_f , δ_f E τ_f VERSUS H .

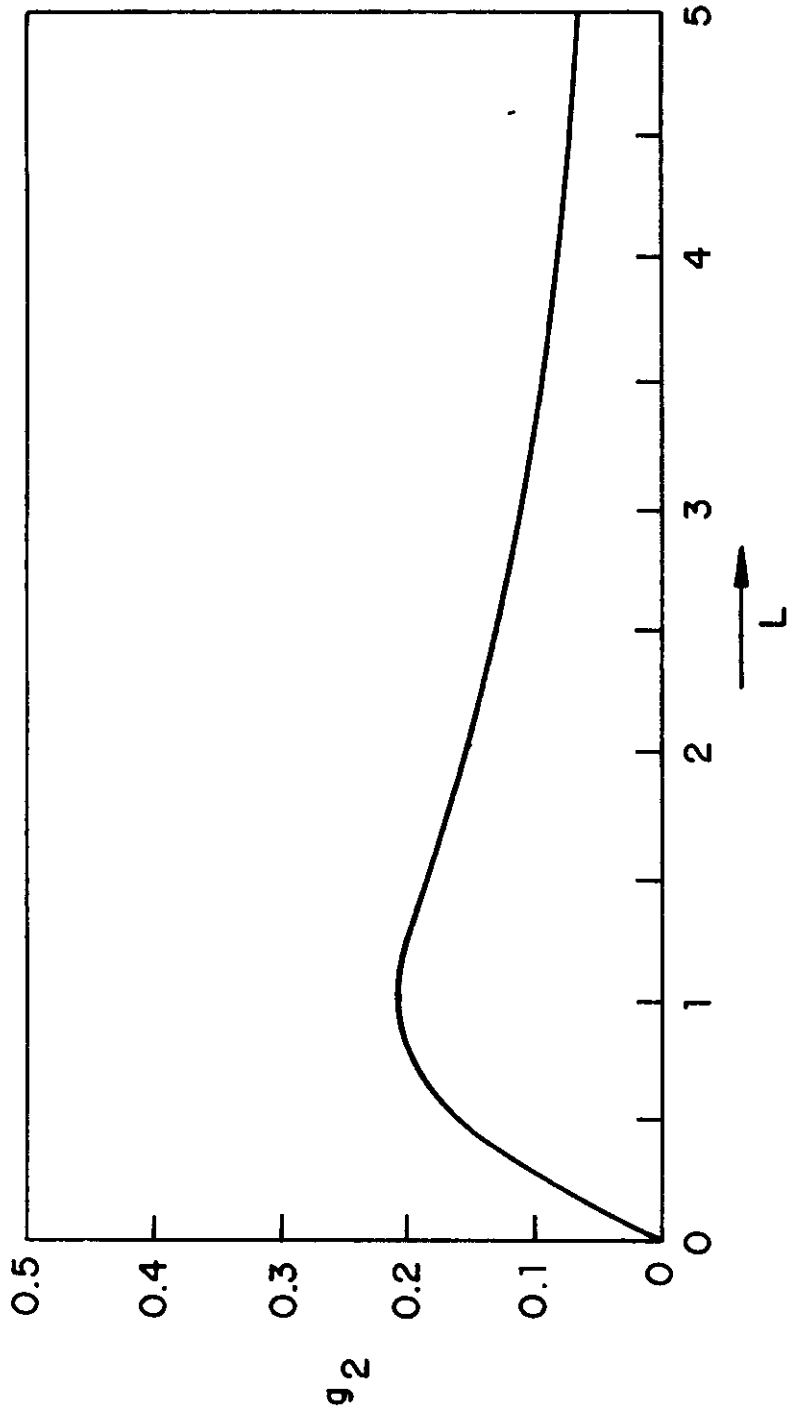


FIG. (II - 4 - 1) - $g_2 (L)$ VERSUS L

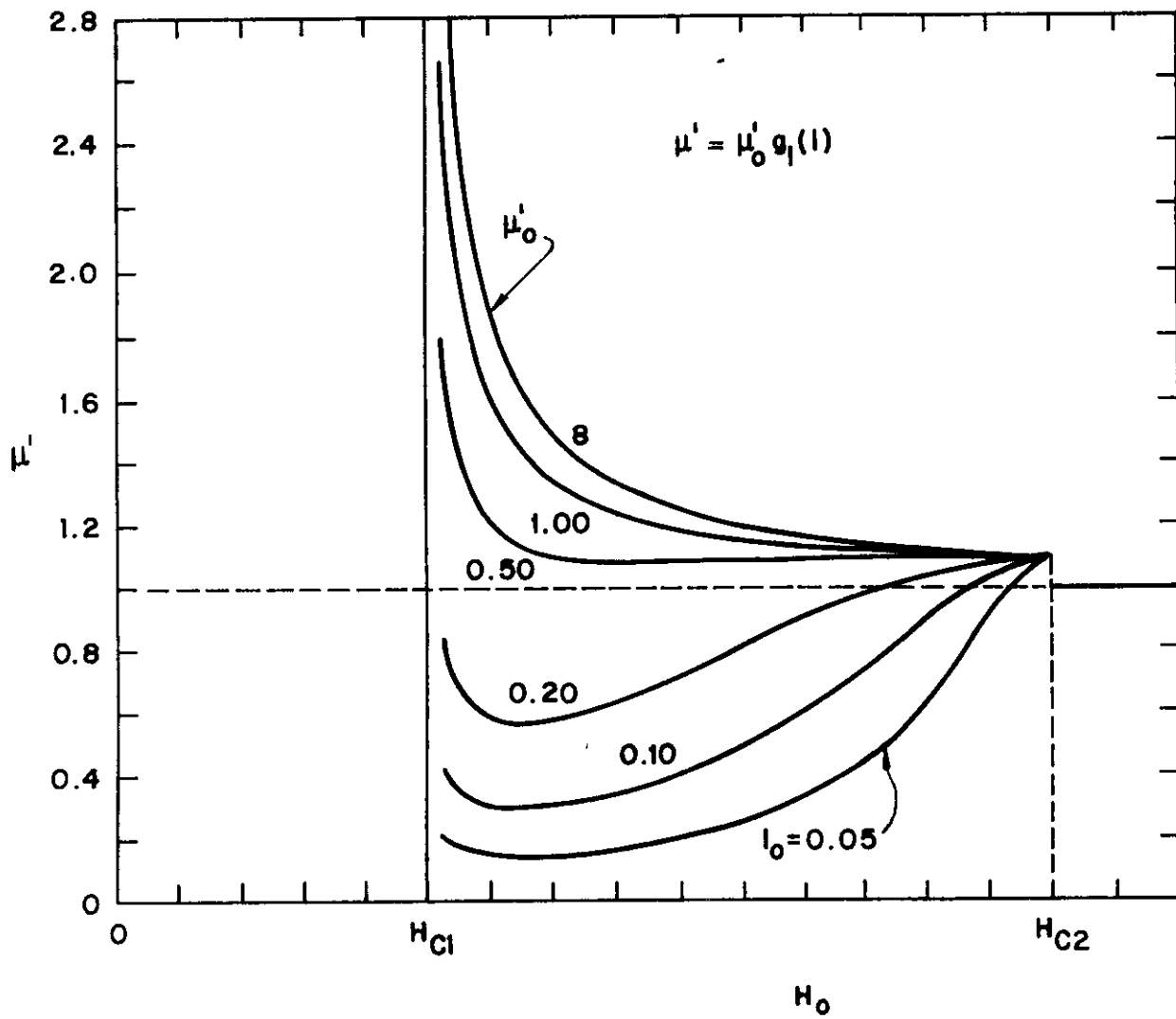


FIG. (II - 4 - 2) - μ' VERSUS H

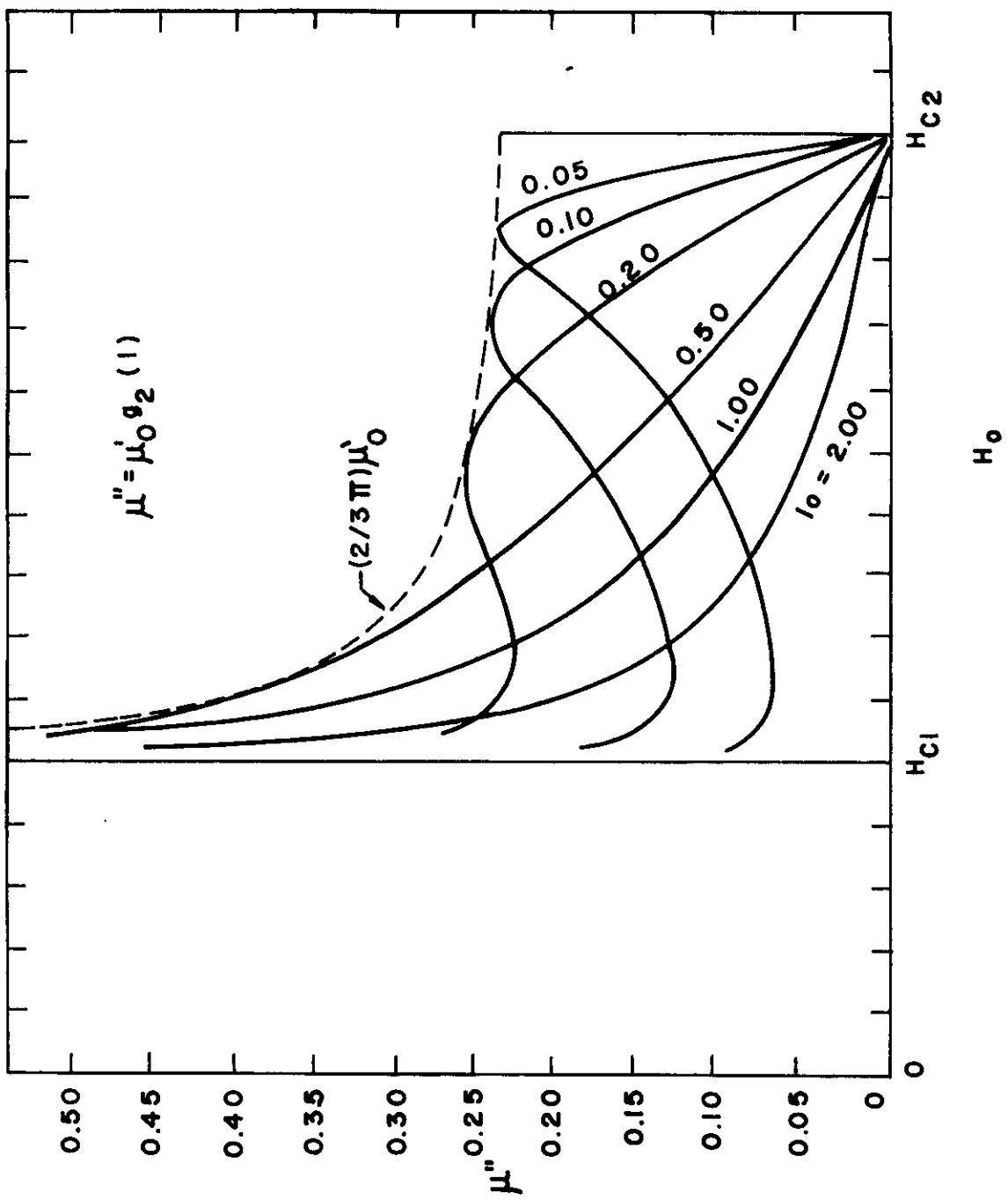


FIG. (II - 4 - 3) - μ'' VERSUS H_0

II - REFERÊNCIAS

- [1] J.R. Clem, "AC Loss in Type-II Superconductors", Ames Lab. Tech. Report. IS-M 280, 1979.
- [2] Handbook of Mathematical Functions, Ed. by M. Abramovitz and I.A. Stegun, U.S. Natl. Bur. Stand. Appl. Math. Series No. 55 (U.S. GPO, Washington, D.C., 1967), p. 382.
- [3] K. Yamafuji and F. Irie, Phys.Lett. A 25, 387(1967).
- [4] H. Ullmaier, "Irreversible Properties of Type II Superconductors" (Springer-Verlag, 1975), p. 105.
- [5] J.R. Clem, H.R. Kerchner, and S.T. Sekula, Phys. Rev. B 14, 1893 (1976).
- [6] Y.B. Kim, C.F. Hempstead, and A.R. Strnad, Phys. Rev. 129:528 (1963).