UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

Valter Aparecido Silva Junior

Simetrias de Lie e Leis de Conservação para Sistemas de Equações Diferenciais Parciais sem Lagrangiana Modelando Fenômenos Hidrodinâmicos

CAMPINAS
2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Física "Gleb Wataghin"

VALTER APARECIDO SILVA JUNIOR

SIMETRIAS DE LIE E LEIS DE CONSERVAÇÃO PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS SEM LAGRANGIANA MODELANDO FENÔMENOS HIDRODINÂMICOS

Tese apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Ciências na área de Física Aplicada.

Orientador: Yuri Dimitrov Bozhkov

Coorientador: Marcos Cesar de Oliveira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO VALTER APARECIDO SILVA JUNIOR E ORIENTADA PELO PROF. DR. YURI DIMITROV BOZHKOV.

CAMPINAS
2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

	Silva Junior, Valter Aparecido, 1989-
Si38s	Simetrias de Lie e leis de conservação para sistemas de equações diferenciais parciais sem Lagrangiana modelando fenômenos hidrodinâmicos / Valter Aparecido Silva Junior. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.
	Orientador: Yuri Dimitrov Bozhkov.
	Coorientador: Marcos Cesar de Oliveira.
	Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.
	1. Equações diferenciais parciais. 2. Lie, Simetrias de. 3. Leis de conservação (Matemática). 4. Auto-adjunticidade não-linear. 5. Ibragimov, Teorema de. I. Bozhkov, Yuri Dimitrov, 1962-. II. Oliveira, Marcos Cesar de, 1969-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Lie point symmetries and conservation laws for systems of partial differential equations without Lagrangian modeling hydrodynamic phenomena
Palavras-chave em inglês:
Differential equations, Partial
Lie symmetries
Conservation laws (Mathematics)
Nonlinear self-adjointness
Ibragimov theorem
Área de concentração: Física Aplicada
Titulação: Doutor em Ciências
Banca examinadora:
Yuri Dimitrov Bozhkov [Orientador]
José Antonio Roversi
Edmundo Capelas de Oliveira
Stylianos Dimas
Norberto Anibal Maidana
Data de defesa: 29-03-2019
Programa de Pós-Graduação: Física

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-4919-9183
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/5026501036378192

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **VALTER APARECIDO SILVA JUNIOR – RA 072554** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 29 / 03 / 2019.

COMISSÃO JULGADORA:

- Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov – Orientador – IMECC/UNICAMP
- Prof. Dr. José Antonio Roversi – DEQ/IFGW/UNICAMP
- Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira – IMECC/UNICAMPUFRJ
- Prof. Dr. Stylianos Dimas – ITA
- Prof. Dr. Norberto Anibal Maidana – UFABC

OBS.: Informo que as assinaturas dos respectivos professores membros da banca constam na ata de defesa já juntada no processo vida acadêmica do aluno.

CAMPINAS
2019

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nivel Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001.

Resumo

Nesta tese, determinamos as simetrias de Lie de alguns sistemas de equações diferenciais parciais (EDPs) sem Lagrangiana provenientes da hidrodinâmica. Por não possuírem estrutura variacional, depois de ter estabelecido sua auto-adjunticidade não-linear, construímos então leis de conservação via o recente teorema de Ibragimov.

Palavras-chave: Sistemas de EDPs sem Lagrangiana, simetrias de Lie, leis de conservação, auto-adjunticidade não-linear, teorema de Ibragimov.

Abstract

In this thesis, we determine the Lie point symmetries of some systems of partial differential equations (PDEs) without Lagrangian coming from hydrodynamics. Since they do not have a variational structure, after having established their nonlinear self-adjointness, we then construct conservation laws via the recent Ibragimov's theorem.

Keywords: Systems of PDEs without Lagrangian, Lie point symmetries, conservation laws, nonlinear self-adjointness, Ibragimov's theorem.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Inspirado pela teoria de Galois (1811-1832) sobre equações algébricas, Sophus Lie (1842-1899) introduziu, nas últimas décadas do século XIX, a noção de grupos de simetrias com o intuito de unificar as várias técnicas de se obter as soluções de uma equação diferencial. Lidando sobretudo com equações diferenciais ordinárias (EDOs), ele percebeu que a maioria dos métodos de integração até então desenvolvidos não eram senão casos particulares de um único procedimento baseado nas propriedades de invariância das equações. Suas ideias, que são facilmente estendidas a equações diferenciais parciais (EDPs) e, de maneira ainda mais geral, a sistemas tanto de EDOs como EDPs, culminaram com o surgimento de uma nova vertente na matemática: a grupo-análise. Em [1,2], mostramos como utilizar a teoria de Lie para obter soluções exatas de EDOs de primeira e segunda ordens, respectivamente.

Segundo Bluman et al. [3], uma simetria é uma transformação que leva qualquer solução de um sistema em outra solução do mesmo sistema, deixando-o, portanto, invariante. Lie, em seus trabalhos, considerou de início somente transformações pontuais e uniparamétricas. Identificadas por seus geradores infinitesimais, as assim conhecidas simetrias de Lie, que compreendem as translações, as rotações e as dilatações como exemplos elementares, constituem uma poderosa ferramenta para o obtenção de leis de conservação.

O interesse sobre leis de conservação remonta, segundo Khamitova [4], ao século XVIII com as buscas de Daniel Bernoulli (1700-1782) e Leonhard Euler (1707-1783) por constantes do movimento em sistemas mecânicos[1]. Grandezas físicas que se mantêm inalteradas em cada ponto da trajetória de um corpo, tais constantes são, em essência, vínculos que restringem os graus de liberdade do movimento. Desempenham, por isso, um papel de destaque na análise da integrabilidade de um dado problema, bem como das características básicas de suas soluções (por vezes, antes até de as próprias soluções serem calculadas!). Além do mais, leis de conservação podem ser empregadas de forma direta no cálculo de soluções exatas particulares [5]. Essas soluções são úteis notadamente em situações para as quais a solução-geral não está disponível. Para diversas aplicações de quantidades conservadas no estudo de equações diferenciais, sugerimos [6–10].

Encontrar leis de conservação não-triviais é, por regra, uma tarefa complicada. Contudo, para sistemas oriundos de um princípio variacional, Emmy Noether (1882-1935), em seu celebrado artigo de 1918, demonstrou uma conexão fundamental entre as simetrias de uma integral de ação, que são também simetrias de Lie das correspondentes equações de Euler-Lagrange,

[1] Em carta datada de 1774, Bernoulli propõe a Euler a conservação do momento angular no problema de dois corpos [11] e sua equivalência com a segunda lei de Kepler.

e quantidades conservadas. É possível, pois, relacionar conservação de momento angular à invariância por rotações. Na prática, o teorema de Noether consiste em um algoritmo para a construção, a partir da teoria de Lie, de leis de conservação.

Como é sabido, um sistema de equações diferenciais possui estrutura variacional se, e somente se, a derivada de Fréchet das funções diferenciais associadas coincidir com o seu operador adjunto [12, Theorem 5.68]. Fora do formalismo lagrangiano, o método concebido por Noether não é aplicável. A fim de superar essa limitação, algumas generalizações têm sido propostas. Dentre elas, o novo teorema de conservação (NTC) de Nail Ibragimov [13], um resultado bastante abrangente envolvendo o conceito de auto-adjunticidade não-linear (que amplia para equações não necessariamente lineares a definição canônica de equações adjuntas), cujos detalhes abordamos no Capítulo 2.

A ênfase da presente tese está no emprego do NTC em sistemas de EDPs que descrevem fenômenos hidrodinâmicos. Os modelos escolhidos não possuem Lagrangiana. Nossos resultados principais constam nos trabalhos [14–17], três dos quais, a saber [14–16], já aceitos ou publicados. O trabalho [15] é exposto ao longo do Capítulo 2 nos exemplos que ilustram os conceitos apresentados. Os demais são reproduzidos, em ordem de submissão e com pequenas adaptações, nos Capítulos 3, 4 e 5. No Capítulo 6, trazemos as considerações finais.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, discutimos de forma concisa os aspectos mais relevantes do método de Ibragimov sobre leis de conservação. Nossa abordagem está centrada nos operadores. As próximas seções, longe de exaustivas, contêm os elementos estritamente necessários para a compreensão dos Capítulos 3, 4 e 5.

2.1 Notação

Sejam $x = (x^1, \dots, x^n)$ as variáveis independentes. Consideramos, para começar, as seguintes variáveis dependentes

$$u = (u^1, \dots, u^m)$$

e denotamos por

$$u_{(r)} = \{u^\alpha_{i_1 \dots i_r}\}, \quad u^\alpha_{i_1 \dots i_r} = D_{i_1} \dots D_{i_r} u^\alpha, \quad r \geq 1 \tag{2.1}$$

suas derivadas parciais. Em (2.1), D_i é o operador de diferenciação total com respeito a x^i, isto é,[1]

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u^\alpha_i \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u^\alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_j} + \cdots.$$

Na grupo-análise, todas as variáveis x, u, $u_{(1)}$, $\dots$ são tratadas como funcionalmente independentes.

Outro operador importante, o de Euler-Lagrange (também conhecido como derivada variacional),

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1 \dots i_s}},$$

satisfaz à relação

$$\frac{\delta}{\delta w} + D_i \frac{\delta}{\delta w_i} = \frac{\partial}{\partial w}, \quad w \in u_{(r)}, \quad r \geq 0, \tag{2.2}$$

onde $u_{(0)} \equiv u$. De fato, basta observar que

$$D_i \left[\frac{\partial}{\partial w_i} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial w_{i i_1 \dots i_s}} \right] = - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial w_{i_1 \dots i_s}}.$$

[1] Adotamos, neste texto, a convenção de soma de Einstein. Sobre índices repetidos de cada operador, existe um somatório implícito. Para os índices latinos, o somatório se estende de 1 até n. Para os gregos, de 1 até m.

Conforme [5], denotamos por $\mathcal{A}$ o espaço, fechado sob D_i, de todas as funções localmente analíticas

$$F(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(r)})$$

de qualquer ordem finita ($r < \infty$), as assim denominadas funções diferenciais.

2.2 Identidade de Noether

Introduzimos aqui o operador de Lie-Backlund,

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} (D_{i_1} \ldots D_{i_s} W^\alpha + \xi^i u^\alpha_{ii_1 \ldots i_s}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1 \ldots i_s}}, \tag{2.3}$$

onde ξ^i, $\eta^\alpha \in \mathcal{A}$ são funções diferenciais arbitrárias e

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^i u^\alpha_i$$

as funções características de Lie. Escrito usualmente de forma abreviada,

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

na qual os demais termos da prolongação estão subentendidos, a ele associamos o operador de Noether $N = (N^1, \ldots, N^n)$, com

$$N^i = \xi^i + W^\alpha \frac{\delta}{\delta u^\alpha_i} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \ldots D_{i_s} W^\alpha \frac{\delta}{\delta u^\alpha_{ii_1 \ldots i_s}}. \tag{2.4}$$

Demonstramos agora a identidade de Noether, uma relação crucial conectando os operadores $\delta/\delta u^\alpha$, X e N. Através dela, o NTC de Ibragimov é obtido como simples corolário (Seção 2.5). Nossa demonstração é direta. Outra demonstração, por indução finita, é fornecida em [18].

Proposição 2.1 (Identidade de Noether)**.** *Os operadores de Euler-Lagrange, Lie-Backlund e Noether estão conectados pela identidade*

$$(X + D_i \xi^i) F = W^\alpha \frac{\delta F}{\delta u^\alpha} + D_i (N^i F), \quad \forall F \in \mathcal{A}.$$

Demonstração. De (2.3), é fácil ver que

$$X = \xi^i D_i + W^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \ldots D_{i_s} W^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1 \ldots i_s}}.$$

Portanto,

$$(X + D_i \xi^i) F = D_i (\xi^i F) + \left(W^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \ldots D_{i_s} W^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1 \ldots i_s}} \right) F. \tag{2.5}$$

Em contrapartida, como

$$D_i W^\alpha \frac{\delta}{\delta u^\alpha_i} + \sum_{s=1}^{\infty} D_i D_{i_1} \ldots D_{i_s} W^\alpha \frac{\delta}{\delta u^\alpha_{ii_1 \ldots i_s}} = \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \ldots D_{i_s} W^\alpha \frac{\delta}{\delta u^\alpha_{i_1 \ldots i_s}},$$

de (2.4) decorre que

$$\begin{aligned} W^\alpha \frac{\delta F}{\delta u^\alpha} + D_i(N^i F) = D_i(\xi^i F) + W^\alpha \left(\frac{\delta}{\delta u^\alpha} + D_i \frac{\delta}{\delta u_i^\alpha} \right) F + \\ + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \dots D_{i_s} W^\alpha \left(\frac{\delta}{\delta u^\alpha_{i_1 \dots is}} + D_i \frac{\delta}{\delta u^\alpha_{ii_1 \dots is}} \right) F. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Comparando (2.5) e (2.6), da relação (2.2), obtemos

$$(X + D_i \xi^i) F = W^\alpha \frac{\delta F}{\delta u^\alpha} + D_i(N^i F), \quad \forall F \in \mathcal{A}.$$

□

2.3 Simetrias de Lie

Embora não seja a forma mais natural e intuitiva de fazê-lo, para os nossos objetivos, é suficiente definir simetrias de Lie por meio de seus geradores infinitesimais. Exposições mais minuciosas sobre o tema, incluindo interpretações geométricas, podem ser encontradas nas referências [3, 12, 19–23].

Definição 2.2. Um operador de Lie-Backlund X, de componentes $\xi^i = \xi^i(x, u)$ e $\eta^\alpha = \eta^\alpha(x, u)$, gera as simetrias de Lie de um sistema de equações diferenciais

$$F_\alpha(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(r)}) = 0, \quad F_\alpha \in \mathcal{A}, \quad \alpha = 1, \dots, m$$

se as condições de invariância

$$X F_\alpha = \lambda_\alpha^\beta F_\beta, \quad \alpha = 1, \dots, m$$

forem satisfeitas para algum conjunto de coeficientes $\lambda_\alpha^\beta \in \mathcal{A}$ a ser determinado.

A definição anterior é puramente algébrica. É a partir das condições de invariância que as simetrias de Lie são calculadas. No exemplo a seguir, mostramos que esse cálculo passa obrigatoriamente por resolver um sistema de EDPs lineares (as equações determinantes) para as componentes do gerador infinitesimal.

Exemplo 2.3. Em [15], propusemos o sistema

$$F_1 \equiv u_t + a(uv + \epsilon u_{xx})_x + b(uw + \epsilon u_{yy})_y = 0, \tag{2.7a}$$
$$F_2 \equiv u_x + \kappa v_y = 0, \;\; F_3 \equiv u_y + \sigma w_x = 0, \tag{2.7b}$$

onde $u = u(t, x, y)$, $v = v(t, x, y)$ e $w = w(t, x, y)$, com o propósito de estudá-lo do ponto de vista da grupo-análise. Em (2.7), as constantes $a, b, \epsilon, \kappa, \sigma \in \mathbb{R}^*$ são arbitrárias. Em particular, quando $\kappa = \sigma = -1$, reduzimos (2.7) à equação de Kadomtsev-Petviashvili do tipo B (ou sistema BKP)

$$u_t = 6(uv)_x + u_{xxx} + 6(uw)_x + u_{yyy}, \tag{2.8a}$$
$$u_x = v_y, \;\; u_y = w_x, \tag{2.8b}$$

se $a = b = -6$ e $\epsilon = 1/6$, e à equação de Nizhnik-Novikov-Veselov (ou sistema NNV)

$$u_t = 3(uv)_x + u_{xxx} + 3(uw)_x + u_{yyy}, \tag{2.9a}$$
$$u_x = v_y,\ u_y = w_x, \tag{2.9b}$$

se $a = b = -3$ e $\epsilon = 1/3$, ambas uma generalização simétrica, a $(2+1)$ dimensões, da equação de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0.$$

De grande interesse físico, especialmente na hidrodinâmica por descrever a interação de ondas não-lineares (nesse contexto, u, v e w representam perfis de ondas), os modelos (2.8) e (2.9), que são também conhecidos por serem completamente integráveis, têm sido investigados por vários autores sob diferentes abordagens. Para mais detalhes, veja [24,25] e suas referências.

Tomando $(x^1, x^2, x^3) = (t, x, y)$ e $(u^1, u^2, u^3) = (u, v, w)$, pela Definição 2.2, dado

$$X = \mathcal{T}(t,x,\,y,u,v,w)\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{X}(t,x,y,u,v,w)\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{Y}(t,x,y,u,v,w)\frac{\partial}{\partial y} + \\ + \mathcal{U}(t,x,y,u,v,w)\frac{\partial}{\partial u} + \mathcal{V}(t,x,y,u,v,w)\frac{\partial}{\partial v} + \mathcal{W}(t,x,u,v,w)\frac{\partial}{\partial w}$$

um operador de Lie-Backlund, impomos que

$$XF_1 = \lambda_1^1 F_1 + \lambda_1^2 F_2 + \lambda_1^3 F_3, \tag{2.10a}$$
$$XF_2 = \lambda_2^1 F_1 + \lambda_2^2 F_2 + \lambda_2^3 F_3, \tag{2.10b}$$
$$XF_3 = \lambda_3^1 F_1 + \lambda_3^2 F_2 + \lambda_3^3 F_3. \tag{2.10c}$$

As condições de invariância (2.10) devem ser satisfeitas em todas as variáveis u_t, v_t, w_t, u_x, v_x, w_x, etc. Sabendo que

$$\begin{aligned} XF_1 = (D_tW^u + \mathcal{T}u_{tt} + \mathcal{X}u_{tx} + \mathcal{Y}u_{ty}) + au(D_xW^v + \mathcal{T}v_{tx} + \mathcal{X}v_{xx} + \mathcal{Y}v_{xy}) + \\ + a[(\mathcal{V}u_x + \mathcal{U}v_x) + v(D_xW^u + \mathcal{T}u_{tx} + \mathcal{X}u_{xx} + \mathcal{Y}u_{xy})] + \\ + a\epsilon(D_x^3W^u + \mathcal{T}u_{txxx} + \mathcal{X}u_{xxxx} + \mathcal{Y}u_{xxxy}) + b(\mathcal{W}u_y + \mathcal{U}w_y) + \\ + b[u(D_yW^w + \mathcal{T}w_{ty} + \mathcal{X}w_{xy} + \mathcal{Y}w_{yy}) + w(D_yW^u + \mathcal{T}u_{ty} + \mathcal{X}u_{xy} + \mathcal{Y}u_{yy})] + \\ + b\epsilon(D_y^3W^u + \mathcal{T}u_{tyyy} + \mathcal{X}u_{xyyy} + \mathcal{Y}u_{yyyy}), \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$XF_2 = (D_xW^u + \mathcal{T}u_{tx} + \mathcal{X}u_{xx} + \mathcal{Y}u_{xy}) + \kappa(D_yW^v + \mathcal{T}v_{ty} + \mathcal{X}v_{xy} + \mathcal{Y}v_{yy}) \tag{2.12}$$

e

$$XF_3 = (D_yW^u + \mathcal{T}u_{ty} + \mathcal{X}u_{xy} + \mathcal{Y}u_{yy}) + \sigma(D_xW^w + \mathcal{T}w_{tx} + \mathcal{X}w_{xx} + \mathcal{Y}w_{xy}), \tag{2.13}$$

onde

$$W^u = \mathcal{U} - \mathcal{T}u_t - \mathcal{X}u_x - \mathcal{Y}u_y, \tag{2.14a}$$
$$W^v = \mathcal{V} - \mathcal{T}v_t - \mathcal{X}v_x - \mathcal{Y}v_y, \tag{2.14b}$$
$$W^w = \mathcal{W} - \mathcal{T}w_t - \mathcal{X}w_x - \mathcal{Y}w_y, \tag{2.14c}$$

da substituição de (2.11), (2.12) e (2.13) em (2.10), obtemos

$$\mathbf{u_{txx}}, \mathbf{u_{tyy}} : \mathcal{T}_x = \mathcal{T}_y = \mathcal{T}_u = \mathcal{T}_v = \mathcal{T}_w = 0; \tag{2.15a}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{u_{xxx}}, \mathbf{u_{yyy}} : \mathcal{X}_u = \mathcal{X}_v = \mathcal{X}_w = 0,\ \mathcal{Y}_u = 0,\\ \lambda_1^1 = \mathcal{U}_u - 3X_x = \mathcal{U}_u - 3\mathcal{Y}_y,\ \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = 0;\end{gathered} \tag{2.15b}$$

$$\mathbf{u_{xxy}}, \mathbf{u_{xyy}} : \mathcal{X}_y = \mathcal{Y}_x = 0; \tag{2.15c}$$

$$\mathbf{v_{xxx}}, \mathbf{w_{xxx}} : \mathcal{Y}_v = \mathcal{Y}_w = 0,\ \mathcal{U}_v = \mathcal{U}_w = 0; \tag{2.15d}$$

$$\mathbf{u_{xx}}, \mathbf{u_{yy}} : \mathcal{U}_{uu} = \mathcal{U}_{xu} - \mathcal{X}_{xx} = \mathcal{U}_{yu} - \mathcal{Y}_{yy} = 0; \tag{2.15e}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{u_t}, \mathbf{u_x}, \mathbf{u_y} : a(\mathcal{V} + 2v\mathcal{X}_x) = \mathcal{X}_t,\ b(\mathcal{W} + 2w\mathcal{Y}_y) = \mathcal{Y}_t,\\ \mathcal{V}_u = \mathcal{W}_u = 0,\\ \lambda_1^1 = \mathcal{U}_u - \mathcal{T}_t,\ \lambda_2^2 = \mathcal{U}_u - \mathcal{X}_x,\ \lambda_3^3 = \mathcal{U}_u - \mathcal{Y}_y;\end{gathered} \tag{2.15f}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{v_x}, \mathbf{v_y} : \mathcal{U} + (\mathcal{V}_v - \mathcal{U}_u + 2\mathcal{X}_x)u = 0,\ \mathcal{W}_v = 0,\\ \lambda_1^2 = \lambda_3^2 = 0,\ \lambda_2^2 = \mathcal{V}_v - \mathcal{Y}_y;\end{gathered} \tag{2.15g}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{w_x}, \mathbf{w_y} : \mathcal{U} + (\mathcal{W}_w - \mathcal{U}_u + 2\mathcal{Y}_y)u = 0,\ \mathcal{V}_w = 0,\\ \lambda_1^3 = \lambda_2^3 = 0,\ \lambda_3^3 = \mathcal{W}_w - \mathcal{X}_x;\end{gathered} \tag{2.15h}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{1} : \mathcal{U}_t + a(v\mathcal{U}_x + u\mathcal{V}_x + \epsilon\mathcal{U}_{xxx}) + b(w\mathcal{U}_y + u\mathcal{W}_y + \epsilon\mathcal{U}_{yyy}) = 0,\\ \mathcal{U}_x + \kappa\mathcal{V}_y = \mathcal{U}_y + \sigma\mathcal{W}_x = 0.\end{gathered} \tag{2.15i}$$

Após algumas simplificações, as equações determinantes (2.15) podem ser escritas como

$$\mathcal{T}_x = \mathcal{T}_y = \mathcal{T}_u = \mathcal{T}_v = \mathcal{T}_w = 0, \tag{2.16a}$$
$$\mathcal{X}_y = \mathcal{X}_u = \mathcal{X}_v = \mathcal{X}_w = 0, \tag{2.16b}$$
$$\mathcal{Y}_x = \mathcal{Y}_u = \mathcal{Y}_v = \mathcal{Y}_w = 0, \tag{2.16c}$$
$$\mathcal{X}_x - \mathcal{Y}_y = \mathcal{U}_u - \mathcal{V}_v = \mathcal{U}_u - \mathcal{W}_w = 0, \tag{2.16d}$$
$$\mathcal{U} + (\mathcal{T}_t - \mathcal{X}_x)u = 0, \tag{2.16e}$$
$$a(\mathcal{V} + 2v\mathcal{X}_x) - \mathcal{X}_t = b(\mathcal{W} + 2w\mathcal{Y}_y) - \mathcal{Y}_t = 0. \tag{2.16f}$$

A solução de (2.16), um sistema de EDPs lineares, é facilmente obtida. De fato,

$$\mathcal{T} = 3A(t), \quad \mathcal{X} = A'(t)x + B(t), \quad \mathcal{Y} = A'(t)y + D(t), \quad \mathcal{U} = -2A'(t)u, \tag{2.17a}$$
$$\mathcal{V} = -2A'(t)v + \frac{1}{a}[A''(t)x + B'(t)], \quad \mathcal{W} = -2A'(t)w + \frac{1}{b}[A''(t)y + D'(t)]. \tag{2.17b}$$

Concluímos, portanto, a partir de (2.17), que os geradores infinitesimais admitidos pelo sistema BKP-NNV são dados por

$$X_A = 3A(t)\frac{\partial}{\partial t} + A'(t)\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - 2\left(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} + w\frac{\partial}{\partial w}\right)\right] + A''(t)\left(\frac{x}{a}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{y}{b}\frac{\partial}{\partial w}\right),$$
$$X_B = B(t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a}B'(t)\frac{\partial}{\partial v}, \quad X_C = C(t)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{b}C'(t)\frac{\partial}{\partial w}.$$

Uma vez que estamos em posição de calculá-las metodicamente, no restante do capítulo mostramos como utilizar simetrias de Lie para construir leis de conservação.

2.4 Leis de Conservação

Em se tratando de equações diferenciais, leis de conservação, que são uma formulação matemática de princípios físicos bastante familiares, configuram frequentemente como peça chave na análise da integrabilidade de um sistema e das propriedades básicas de suas soluções [26]. Não apenas isso. Muitas técnicas de integração pressupõem a existência de quantidades conservadas. Leis de conservação são, nesse sentido, o primeiro passo na ressolução de diversos problemas [20]. Doravante, seguimos de perto as referências [5, 13, 27–30].

Definição 2.4. Uma lei de conservação para um sistema de equações diferenciais

$$F_\alpha(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(r)}) = 0, \quad F_\alpha \in \mathcal{A}, \quad \alpha = 1, \ldots, m \tag{2.18}$$

é uma expressão na forma de divergência total, D_iC^i, para algum vetor

$$C = (C^1, \ldots, C^n), \quad C^i \in \mathcal{A},$$

dito conservado, que se anula sobre todas as soluções de (2.18). Ou seja,

$$[D_iC^i]_{(2.18)} = 0.$$

Se uma das variáveis independentes for o tempo (suponhamos que $x^1 = t$), então a quantidade C^1, que passamos a denotar por C^t, é chamada de densidade do vetor conservado. Fisicamente, uma lei de conservação expressa que a taxa de mudança de C^t no interior de um certo domínio limitado $\mathcal{D}$ é igual ao fluxo das demais componentes C^2, …, C^n pela superfície de $\mathcal{D}$ (equação de continuidade). Para sistemas mecânicos, nos quais t é a única variável independente, uma lei de conservação é dada simplesmente por D_tC^t e C^t é, em verdade, uma constante do movimento.

Exemplo 2.5. Retornemos ao Exemplo 2.3.

i) Segue imediatamente da Definição 2.4 que cada uma das equações em (2.7) são, por si mesmas, leis de conservação para o sistema (2.7). Os respectivos vetores conservados são dados por

$$C_1^t = u, \ C_1^x = a(uv + \epsilon u_{xx}), \ C_1^y = b(uw + \epsilon u_{yy});$$
$$C_2^t = 0, \ C_2^x = u, \ C_2^y = \kappa v;$$
$$C_3^t = 0, \ C_3^x = \sigma w, \ C_3^y = u.$$

ii) Consideremos agora o vetor

$$C^t = 0,\ C^x = xu - \sigma yw,\ C^y = -(yu - \kappa xv). \tag{2.19}$$

Como

$$D_tC^t = 0, \quad D_xC^x = (u + xu_x) - \sigma yw_x, \quad D_yC^y = -(u + yu_y) + \kappa xv_y,$$

temos que

$$D_tC^t + D_xC^x + D_yC^y = x\underbrace{(u_x + \kappa v_y)}_{=F_2} - y\underbrace{(u_y + \sigma w_x)}_{=F_3}.$$

Logo, (2.19) é um vetor conservado para o sistema (2.7).

Encontrar leis de conservação não-triviais[2] é, por regra, uma tarefa complicada. O teorema de Noether, apesar de útil, não é válido para sistemas sem Lagrangiana. Dentre as generalizações disponíveis na literatura, é no NTC de Ibragimov que estamos interessados.

2.5 Método de Ibragimov

Sejam $\bar{u} = (\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m)$ as novas variáveis dependentes (as variáveis adjuntas ou não-locais) e

$$\bar{u}_{(r)} = \{\bar{u}^\alpha_{i_1\ldots i_r}\}, \quad \bar{u}^\alpha_{i_1\ldots i_r} = D_{i_1}\ldots D_{i_r}\bar{u}^\alpha, \quad r \geq 1$$

suas derivadas parciais. Nesta seção,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u^\alpha_i\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \bar{u}^\alpha_i\frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha} + u^\alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_j} + \bar{u}^\alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha_j} + \cdots.$$

Definição 2.6. As equações adjuntas de um sistema de equações diferenciais

$$F_\alpha(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(r)}) = 0, \quad F_\alpha \in \mathcal{A}, \quad \alpha = 1, \ldots, m \tag{2.20}$$

são dadas por

$$F^*_\alpha(x, u, \bar{u}, u_{(1)}, \bar{u}_{(1)}, \ldots, u_{(r)}, \bar{u}_{(r)}) \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{2.21}$$

onde

$$\mathcal{L} = \bar{u}^\beta F_\beta \tag{2.22}$$

é a Lagrangiana formal.

O nome "Lagrangiana formal" é justificado pela proposição:

[2]Uma lei de conservação D_iC^i é trivial quando $D_iC^i \equiv 0$. Um exemplo é fornecido pelo vetor de componentes $C^t = w_x - v_y$, $C^x = u_y - w_t$ e $C^y = v_t - u_x$. De fato, todo vetor obtido a partir de um "rotacional", isto é,

$$C^i = D_jQ^{ij}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

com $Q^{ij} = -Q^{ji}$, onde $Q^{ij} \in \mathcal{A}$, resulta numa lei de conservação trivial. Leis desse tipo não contêm nenhuma informação sobre a natureza intrínseca de nenhum sistema.

Proposição 2.7. Qualquer sistema, tomado simultaneamente com suas equações adjuntas, possui Lagrangiana. Com efeito, o sistema ampliado (2.20)-(2.21) corresponde às equações de Euler-Lagrange da Lagrangiana formal (2.22).

Demonstração. A demonstração é imediata. De fato, basta observar que as derivadas variacionais de $\mathcal{L}$ com respeito às variáveis u e v são dadas respectivamente por

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^\alpha} \equiv F_\alpha^*, \quad \alpha = 1, \ldots, m$$

e

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{u}^\alpha} = \frac{\delta(\bar{u}^\beta F_\beta)}{\delta \bar{u}^\alpha} = \delta_\alpha^\beta F_\beta = F_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, m.$$

□

O conceito de auto-adjunticidade não-linear elaborado por Ibragimov é apresentado a seguir.

Definição 2.8. O sistema (2.20) é não-linearmente auto-adjunto se existirem substituições

$$\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m), \quad \varphi^\alpha \in \mathcal{A}, \quad \alpha = 1, \ldots, m$$

do tipo

$$\varphi = \varphi(x, u) \neq 0 \tag{2.23}$$

tais que

$$F_\alpha^*|_{\bar{u}=\varphi} = \lambda_\alpha^\beta F_\beta, \quad \alpha = 1, \ldots, m. \tag{2.24}$$

Novamente $\lambda_\alpha^\beta \in \mathcal{A}$ é um conjunto de coeficientes a ser determinado. Se $\varphi = \varphi(u)$, dizemos que (2.20) é quase auto-adjunto. Se $\varphi = u$, dizemos que (2.20) é estritamente auto-adjunto.

Das condições (2.24), podemos ver que $\varphi(x, u)$ é uma solução não-trivial das equações adjuntas sempre que u for solução do sistema original. Logo, em (2.23), estão todas as substituições que tornam (2.20) e (2.21) sistemas equivalentes.

Exemplo 2.9. Ainda no Exemplo 2.3, fazendo $(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, a Lagrangiana formal do sistema (2.7) é

$$\begin{gathered} \mathcal{L} = \bar{u}F_1 + \bar{v}F_2 + \bar{w}F_3 \\ \Rightarrow \mathcal{L} = \bar{u}[u_t + a(uv + \epsilon u_{xx})_x + b(uw + \epsilon u_{yy})_y] + \bar{v}(u_x + \kappa v_y) + \bar{w}(u_y + \sigma w_x). \end{gathered}$$

Obtidas as equações adjuntas

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} &= \left(\frac{\partial}{\partial u} - D_t \frac{\partial}{\partial u_t} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x} - D_y \frac{\partial}{\partial u_y} + D_t^2 \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + D_t D_x \frac{\partial}{\partial u_{tx}} + D_t D_y \frac{\partial}{\partial u_{ty}} + \cdots \right) \mathcal{L} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - D_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - D_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} - D_x^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} - D_y^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yyy}} \\ &= \bar{u}(av_x + bw_y) - D_t \bar{u} - D_x(a\bar{u}v + \bar{v}) - D_y(b\bar{u}w + \bar{w}) - \epsilon(aD_x^3 \bar{u} + bD_y^3 \bar{u}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_1^* \equiv \bar{u}_t + av\bar{u}_x + bw\bar{u}_y + (\bar{v} + a\epsilon\bar{u}_{xx})_x + (\bar{w} + b\epsilon\bar{u}_{yy})_y = 0,$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta v} = \left(\frac{\partial}{\partial v} - D_t\frac{\partial}{\partial v_t} - D_x\frac{\partial}{\partial v_x} - D_y\frac{\partial}{\partial v_y} + D_t^2\frac{\partial}{\partial v_{tt}} + D_tD_x\frac{\partial}{\partial v_{tx}} + D_tD_y\frac{\partial}{\partial v_{ty}} + \cdots\right)\mathcal{L}$$
$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} - D_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_x} - D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_y}$$
$$= a[\bar{u}u_x - D_x(u\bar{u})] - \kappa D_y\bar{v}$$

$$\Rightarrow F_2^* \equiv au\bar{u}_x + \kappa\bar{v}_y = 0,$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta w} = \left(\frac{\partial}{\partial w} - D_t\frac{\partial}{\partial w_t} - D_x\frac{\partial}{\partial w_x} - D_y\frac{\partial}{\partial w_y} + D_t^2\frac{\partial}{\partial w_{tt}} + D_tD_x\frac{\partial}{\partial w_{tx}} + D_tD_y\frac{\partial}{\partial w_{ty}} + \cdots\right)\mathcal{L}$$
$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w} - D_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w_x} - D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w_y}$$
$$= b[\bar{u}u_y - D_y(u\bar{u})] - \sigma D_x\bar{w}$$

$$\Rightarrow F_3^* \equiv bu\bar{u}_y + \sigma\bar{w}_x = 0,$$

exigimos que

$$F_1^*|_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=(\varphi,\rho,\psi)} = \lambda_1^1F_1 + \lambda_1^2F_2 + \lambda_1^3F_3, \tag{2.25a}$$
$$F_2^*|_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=(\varphi,\rho,\psi)} = \lambda_2^1F_1 + \lambda_2^2F_2 + \lambda_2^3F_3, \tag{2.25b}$$
$$F_3^*|_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=(\varphi,\rho,\psi)} = \lambda_3^1F_1 + \lambda_3^2F_2 + \lambda_3^3F_3, \tag{2.25c}$$

onde

$$\varphi = \varphi(t,x,y,u,v,w), \;\; \rho = \rho(t,x,y,u,v,w), \;\; \psi = \psi(t,x,y,u,v,w). \tag{2.26}$$

Como

$$F_1^*|_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=(\varphi,\rho,\psi)} = D_t\varphi + avD_x\varphi + bwD_y\varphi + D_x(\rho + a\epsilon D_x^2\varphi) + D_y(\psi + b\epsilon D_y^2\varphi),$$
$$F_2^*|_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=(\varphi,\rho,\psi)} = auD_x\varphi + \kappa D_y\rho,$$
$$F_3^*|_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=(\varphi,\rho,\psi)} = buD_y\varphi + \sigma D_x\psi,$$

com

$$D_t\varphi = \varphi_t + \varphi_uu_t + \varphi_vv_t + \varphi_ww_t, \;\; D_x\varphi = \varphi_x + \varphi_uu_x + \varphi_vv_x + \varphi_ww_x,$$
$$D_y\varphi = \varphi_y + \varphi_uu_y + \varphi_vv_y + \varphi_ww_y, \ldots$$
$$D_x\rho = \rho_x + \rho_uu_x + \rho_vv_x + \rho_ww_x, \;\; D_y\rho = \rho_y + \rho_uu_y + \rho_vv_y + \rho_ww_y,$$
$$D_x\psi = \psi_x + \psi_uu_x + \psi_vv_x + \psi_ww_x, \;\; D_y\psi = \psi_y + \psi_uu_y + \psi_vv_y + \psi_ww_y,$$

equacionando os coeficientes de $u_t, v_t, w_t, u_x, v_x, w_x, \dots$ em (2.25), obtemos

$$\mathbf{u_{xxx}}, \mathbf{u_{yyy}} : \lambda_1^1 = \varphi_u,\ \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = 0; \tag{2.27a}$$

$$\mathbf{v_{xxx}}, \mathbf{v_{yyy}} : \varphi_v = 0; \tag{2.27b}$$

$$\mathbf{w_{xxx}}, \mathbf{w_{yyy}} : \varphi_w = 0; \tag{2.27c}$$

$$\mathbf{u_{xx}}, \mathbf{u_{yy}} : \varphi_{xu} = \varphi_{yu} = \varphi_{uu} = 0; \tag{2.27d}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{u_t}, \mathbf{u_x}, \mathbf{u_y} : \lambda_1^2 = \rho_u,\ \lambda_2^2 = au\varphi_u,\ \lambda_3^2 = \sigma\psi_u,\\ \lambda_1^3 = \psi_u,\ \lambda_2^3 = \kappa\rho_u,\ \lambda_3^3 = bu\varphi_u;\end{gathered} \tag{2.27e}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{v_t}, \mathbf{v_x}, \mathbf{v_y} : \rho_v = au\varphi_u,\ \psi_v = 0,\\ \lambda_1^2 = \lambda_3^2 = 0,\ \lambda_2^2 = \rho_v;\end{gathered} \tag{2.27f}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{w_t}, \mathbf{w_x}, \mathbf{w_y} : \psi_w = bu\varphi_u,\ \rho_w = 0,\\ \lambda_1^3 = \lambda_2^3 = 0,\ \lambda_3^3 = \psi_w;\end{gathered} \tag{2.27g}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{1} : \varphi_t + av\varphi_x + bw\varphi_y + (\rho_x + a\epsilon\varphi_{xxx}) + (\psi_y + b\epsilon\varphi_{yyy}) = 0,\\ au\varphi_x + \kappa\rho_y = bu\varphi_y + \sigma\psi_x = 0.\end{gathered} \tag{2.27h}$$

As equações (2.27), após pequenas manipulações, podem ser reduzidas a

$$\begin{gathered}\varphi_x = \varphi_y = \varphi_u = \varphi_v = \varphi_w = 0,\\ \rho_y = \rho_u = \rho_v = \rho_w = 0,\\ \psi_x = \psi_u = \psi_v = \psi_w = 0,\\ \varphi_t + \rho_x + \psi_y = 0,\end{gathered}$$

um sistema de EDPs cuja solução é imediata. Dele decorre que o sistema BKP-NNV é não-linearmente auto-adjunto com substituições (2.26) dadas por

$$\varphi = f(t), \quad \rho = g(t)x + h(t), \quad \psi = -[f'(t) + g(t)]y + i(t).$$

Proposição 2.10 (NTC de Ibragimov)**.** Se o sistema (2.20) admite simetrias de Lie geradas por

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad \xi^i = \xi^i(x,u), \quad \eta^\alpha = \eta^\alpha(x,u), \tag{2.28}$$

então o vetor

$$C = (C^1, \dots, C^n), \quad C^i = N^i\mathcal{L}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.29}$$

onde $N = (N^1, \dots, N^n)$ é o operador de Noether associado a (2.28), fornece uma lei de conservação para o sistema ampliado (2.20)-(2.21).

Demonstração. Por hipótese,

$$XF_\alpha = \lambda_\alpha^\beta F_\beta, \quad \lambda_\alpha^\beta \in \mathcal{A}, \quad \alpha = 1, \ldots, m. \tag{2.30}$$

Dessa maneira, partindo de (2.30), construímos um operador de Lie-Backlund auxiliar dado por

$$X_* = X + \eta_*^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha}, \quad \eta_*^\alpha = -(\bar{u}^\beta \lambda_\beta^\alpha + \bar{u}^\alpha D_i \xi^i).$$

Pela identidade de Noether, sabemos que

$$(X_* + D_i\xi^i)\mathcal{L} = \left(W^\alpha \frac{\delta}{\delta u^\alpha} + W_*^\alpha \frac{\delta}{\delta \bar{u}^\alpha}\right)\mathcal{L} + D_i(N_*^i \mathcal{L}). \tag{2.31}$$

Em (2.31), temos

$$N_*^i = N^i + \left(W_*^\alpha \frac{\delta}{\delta \bar{u}_i^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \ldots D_{i_s} W_*^\alpha \frac{\delta}{\delta \bar{u}_{ii_1\ldots i_s}^\alpha}\right), \quad i = 1, \ldots, n,$$

com

$$W_*^\alpha = \eta_*^\alpha - \xi^i \bar{u}_i^\alpha.$$

Porém, como

$$\begin{aligned} X_*\mathcal{L} = X_*(\bar{u}^\beta F_\beta) = (X_*\bar{u}^\beta)F_\beta + \bar{u}^\beta(XF_\beta) = \eta_*^\alpha \delta_\alpha^\beta F_\beta + \bar{u}^\beta \lambda_\beta^\alpha F_\alpha = \\ = (\eta_*^\alpha + \bar{u}^\beta \lambda_\beta^\alpha)F_\alpha = -\bar{u}^\alpha(D_i\xi^i)F_\alpha = -(D_i\xi^i)\mathcal{L} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ (X_* + D_i\xi^i)\mathcal{L} = 0, \tag{2.32}$$

$$\left(W^\alpha \frac{\delta}{\delta u^\alpha} + W_*^\alpha \frac{\delta}{\delta \bar{u}^\alpha}\right)\mathcal{L} = W^\alpha F_\alpha^* + W_*^\alpha F_\alpha \tag{2.33}$$

e

$$N_*^i \mathcal{L} = N^i \mathcal{L}, \tag{2.34}$$

da substituição de (2.32), (2.33) e (2.34) em (2.31), obtemos

$$D_i(N^i\mathcal{L}) = -(W^\alpha F_\alpha^* + W_*^\alpha F_\alpha),$$

donde concluímos que

$$[D_i(N^i\mathcal{L})]_{(2.20)-(2.21)} = 0.$$

□

Assim como no teorema de Noether, a demostração acima leva em conta a estrutura variacional do sistema ampliado e, por isso, o NTC de Ibragimov fornece, num primeiro momento, leis de conservação não-locais (que dependem não apenas das variáveis u do sistema original mas também das variáveis $\bar{u}$ das equações adjuntas). Essa dificuldade pode ser superada para sistemas não-linearmente auto-adjuntos. De fato, se o sistema (2.20) possuir essa propriedade adicional, as variáveis não-locais dos vetores conservados podem ser eliminadas através das substituições $\varphi(x,u)$ estabelecidas na Definição 2.8. Explicitamente, as componentes dadas em (2.29) podem ser escritas como

$$C^i = N^i\mathcal{L} = \xi^i\mathcal{L} + W^\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i^\alpha} - D_j\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\alpha}\right) + D_jD_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right) - \ldots\right] +$$
$$+ D_jW^\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\alpha} - D_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right) + \ldots\right] + D_jD_kW^\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} - \ldots\right] + \ldots, \quad \mathcal{L} = \varphi^\alpha F_\alpha, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{2.35}$$

Observação 2.11. Em (2.35), podemos omitir o termo $\xi^i\mathcal{L}$ sempre que for conveniente já que $\mathcal{L}$ se anula sobre todas as soluções do sistema original.

Exemplo 2.12. As componentes do vetor conservado $C = (C^t, C^x, C^y)$ associado a X, um gerador infinitesimal admitido pelo sistema (2.7), são, de acordo com (2.35),

$$C^t = W^u\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}$$

$$\Rightarrow C^t = \varphi W^u, \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned} C^x &= \left(W^u\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} + W^v\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_x} + W^w\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w_x}\right) + (W^uD_x^2 - D_xW^uD_x + D_x^2W^u)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}, \\ &= [(av\varphi + \rho)W^u + au\varphi W^v + \sigma\psi W^w] + a\epsilon(W^uD_x^2 - D_xW^uD_x + D_x^2W^u)\varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C^x = [a\varphi(v + \epsilon D_x^2) + \rho]W^u + au\varphi W^v + \sigma\psi W^w \tag{2.37}$$

e

$$\begin{aligned} C^y &= \left(W^u\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_y} + W^v\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_y} + W^w\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w_y}\right) + (W^uD_y^2 - D_yW^uD_y + D_y^2W^u)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yyy}} \\ &= [(bw\varphi + \psi)W^u + \kappa\rho W^v + bu\varphi W^w] + b\epsilon(W^uD_y^2 - D_yW^uD_y + D_y^2W^u)\varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C^y = [b\varphi(w + \epsilon D_y^2) + \psi]W^u + \kappa\rho W^v + bu\varphi W^w, \tag{2.38}$$

com W^u, W^v e W^w como em (2.14). Determinadas as simetrias de Lie do sistema BKP-NNV, levando em conta o Exemplo 2.9, as correspondentes leis de conservação podem ser construídas.

i) Dado

$$X_A = 3A(t)\frac{\partial}{\partial t} + A'(t)\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - 2\left(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} + w\frac{\partial}{\partial w}\right)\right] + A''(t)\left(\frac{x}{a}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{y}{b}\frac{\partial}{\partial w}\right),$$

temos que

$$W^u = -2A'(t)u - 3A(t)u_t - A'(t)xu_x - A'(t)yu_y, \tag{2.39a}$$
$$W^v = \left[\frac{x}{a}A''(t) - 2A'(t)v\right] - 3A(t)v_t - A'(t)xv_x - A'(t)yv_y, \tag{2.39b}$$
$$W^w = \left[\frac{y}{b}A''(t) - 2A'(t)w\right] - 3A(t)w_t - A'(t)xw_x - A'(t)yw_y. \tag{2.39c}$$

Substituindo (2.39) em (2.36), (2.37) e (2.38):

i.a) para

$$\varphi = f(t),\ \rho = 0,\ \psi = -f'(t)y,$$

obtemos

$$C^t = 3A(t)f'(t)u,$$
$$C^x = 3aA(t)f'(t)(uv + \epsilon u_{xx}) - 3\sigma[A(t)f'(t)]'yw,$$
$$C^y = 3bA(t)f'(t)(uw + \epsilon u_{yy}) - 3[A(t)f'(t)]'yu,$$

ou equivalentemente,

$$C^t = f(t)u,$$
$$C^x = af(t)(uv + \epsilon u_{xx}) - \sigma f'(t)yw,$$
$$C^y = bf(t)(uw + \epsilon u_{yy}) - f'(t)yu,$$

onde $3A(t)f'(t) \equiv f(t)$;

i.b) para

$$\varphi = 0,\ \rho = g(t)x,\ \psi = -g(t)y,$$

obtemos

$$C^t = 0,$$
$$C^x = 3[A(t)g(t)]'(xu - \sigma yw),$$
$$C^y = -3[A(t)g(t)]'(yu - \kappa xv),$$

ou equivalentemente,

$$C^t = 0,$$
$$C^x = g(t)(xu - \sigma yw),$$
$$C^y = -g(t)(yu - \kappa xv),$$

onde $3[A(t)g(t)]' \equiv g(t)$;

i.c) para

$$\varphi = 0,\ \rho = h(t),\ \psi = 0,$$

obtemos

$$C^t = 0,$$
$$C^x = [2A'(t)h(t) + 3A(t)h'(t)]u,$$
$$C^y = \kappa[2A'(t)h(t) + 3A(t)h'(t)]v,$$

ou equivalentemente,

$$C^t = 0,\ C^x = h(t)u,\ C^y = \kappa h(t)v,$$

onde $[2A'(t)h(t) + 3A(t)h'(t)] \equiv h(t)$;

i.d) para

$$\varphi = 0,\ \rho = 0,\ \psi = i(t),$$

obtemos

$$C^t = 0,$$
$$C^x = \sigma[2A'(t)i(t) + 3A(t)i'(t)]w,$$
$$C^y = [2A'(t)i(t) + 3A(t)i'(t)]u,$$

ou equivalentemente,

$$C^t = 0,\ C^x = \sigma i(t)w,\ C^y = i(t)u,$$

onde $[2A'(t)i(t) + 3A(t)i'(t)] \equiv i(t)$.

ii) Dado

$$X_B = B(t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a}B'(t)\frac{\partial}{\partial v},$$

temos que

$$W^u = -B(t)u_x, \quad W^v = \frac{1}{a}B'(t) - B(t)v_x, \quad W^w = -B(t)w_x. \tag{2.40}$$

Substituindo (2.40) em (2.36), (2.37) e (2.38):

ii.a) para

$$\varphi = 0,\ \rho = g(t)x,\ \psi = -g(t)y,$$

obtemos

$$C^t = 0,\ C^x = B(t)g(t)u,\ C^y = \kappa B(t)g(t)v,$$

ou equivalentemente,

$$C^t = 0,\ C^x = g(t)u,\ C^y = \kappa g(t)v,$$

onde $B(t)g(t) \equiv g(t)$;

ii.b) nos demais casos,

$$C^t = C^x = C^y = 0.$$

iii) Dado

$$X_C = C(t)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{b}C'(t)\frac{\partial}{\partial w},$$

temos que

$$W^u = -C(t)u_y, \quad W^v = -C(t)v_y, \quad W^w = \frac{1}{b}C'(t) - C(t)w_y. \tag{2.41}$$

Substituindo (2.41) em (2.36), (2.37) e (2.38):

iii.a) para

$$\varphi = f(t),\ \rho = g(t)x,\ \psi = -[f'(t) + g(t)]y,$$

obtemos

$$C^t = 0,\ C^x = \sigma C(t)[f'(t) + g(t)]w,\ C^y = C(t)[f'(t) + g(t)]u,$$

ou equivalentemente,

$$C^t = 0,\ C^x = \sigma f(t)w,\ C^y = f(t)u,$$

onde $C(t)[f'(t) + g(t)] \equiv f(t)$;

iii.b) nos demais casos,

$$C^t = C^x = C^y = 0.$$

Resumidamente, as leis de conservação não-triviais encontradas nesse exemplo estão sumarizadas na Tabela 2.1. Duas delas (terceira e quarta linhas da tabela) são óbvias e podem ser obtidas diretamente do sistema (2.7) por simples integração, sem auxílio do NTC de Ibragimov.

<table>
<tr><th>Gerador</th><th>C^t</th><th>C^x</th><th>C^y</th></tr>
<tr><td rowspan="2">X_A</td><td>$f(t)u$</td><td>$af(t)(uv+\epsilon u_{xx})+$
$-\sigma f'(t)yw$</td><td>$bf(t)(uw+\epsilon u_{yy})+$
$-f'(t)yu$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$f(t)(xu-\sigma yw)$</td><td>$-f(t)(yu-\kappa xv)$</td></tr>
<tr><td>X_A, X_B</td><td>0</td><td>$f(t)u$</td><td>$\kappa f(t)v$</td></tr>
<tr><td>X_A, X_C</td><td>0</td><td>$\sigma f(t)w$</td><td>$f(t)u$</td></tr>
</table>

Tabela 2.1: Vetores conservados para o sistema BKP-NNV.

Apresentado o método de Ibragimov sobre leis de conservação, os próximos capítulos contêm os demais resultados originais desta tese. É sobre eles que passamos a discorrer. Enfatizamos aqui que, conforme critério demonstrado em [12, Theorem 5.68], todos os modelos com os quais trabalhamos não possuem Lagrangiana (veja Apêndice A). O capítulo seguinte é dedicado ao sistema de Hunter-Saxton generalizado.

Capítulo 3

O Sistema de Hunter-Saxton Generalizado

Nosso propósito aqui é investigar, do ponto de vista da grupo-análise, o sistema de Hunter-Saxton generalizado, composto pelas EDPs

$$F_1 \equiv u_{txx} + \sigma u u_{xxx} + \kappa u_x u_{xx} - v v_x + \epsilon u_x = 0, \tag{3.1a}$$

$$F_2 \equiv v_t + (uv)_x = 0, \tag{3.1b}$$

onde σ, κ, $\epsilon \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Aparecendo em diferentes contextos, o sistema (3.1) pode ser considerado, quando $\sigma = 2\kappa$, como o limite assintótico, em altas frequências,

$$(t, x) \mapsto (\xi t, \xi x), \quad \xi \to 0,$$

do também generalizado sistema de Camassa-Holm [31]

$$u_t - u_{txx} - \sigma(u u_{xxx} + 2u_x u_{xx}) + v v_x + (3u - \epsilon)u_x = 0, \tag{3.2a}$$

$$v_t + (uv)_x = 0. \tag{3.2b}$$

Este último é derivado pela aplicação do método de R. Ivanov para a obtenção de modelos hidrodinâmicos com vorticidade constante [32]. A motivação para estudar (3.1) e (3.2) está na possibilidade de capturar fenômenos não-lineares, tais como *wave-breaking*, que não podem ser descritos por outros modelos.

Em (3.1), as variáveis t e x adquirem o significado físico usual: tempo transcorrido e distância percorrida, respectivamente. A quantidade $u = u(t, x)$ está relacionada à velocidade horizontal do fluido enquanto $v = v(t, x)$, a densidade escalar, à elevação da superfície livre do fluido a partir de seu nível de equilíbrio. Se $(\sigma, \kappa, \epsilon) = (1, 2, 0)$, o sistema (3.1) se reduz ao sistema de Hunter-Saxton, uma extensão a duas componentes da equação de mesmo nome,

$$u_{txx} + 2u_x u_{xx} + u u_{xxx} = 0,$$

que governa a propagação de ondas não-lineares em cristais líquidos nemáticos. Não entramos em mais detalhes sobre a importância dos modelos mencionados. Para vários resultados relacionados a equação de Hunter-Saxton e suas generalizações, direcionamos o leitor interessado a [31] e suas referências.

Conforme critério fornecido em [12, Theorem 5.68], o sistema de Hunter-Saxton generalizado não possui Lagrangiana (veja Apêndice A). Portanto, este capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção 3.1, obtemos as simetrias de Lie do sistema (3.1); na Seção 3.2, estabelecemos sua auto-adjunticidade não-linear; na Seção 3.3, construímos, para cada simetria de Lie encontrada, as correspondentes leis de conservação via o NTC de Ibragimov. Naquilo que se segue, a menos de menção contrária, todas as constantes c_i's são arbitrárias e todas as funções suaves.

3.1 Simetrias de Lie

Pela Definição 2.2, um operador de Lie-Backlund

$$X=\mathcal{T}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{X}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial x}+\mathcal{U}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial u}+\mathcal{V}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial v}$$

gera as simetrias de Lie do sistema (3.1) se as condições de invariância

$$XF_1=MF_1+NF_2,\ XF_2=PF_1+QF_2 \tag{3.3}$$

forem satisfeitas (em todas as variáveis u_t, v_t, u_x, v_x, etc) para algum conjunto de coeficientes M, N, P, Q a ser determinado. Sabendo que

$$\begin{aligned}XF_1=&(D_tD_x^2W^u+\mathcal{T}u_{ttxx}+\mathcal{X}u_{txxx})+\sigma[\mathcal{U}u_{xxx}+u(D_x^3W^u+\mathcal{T}u_{txxx}+\mathcal{X}u_{xxxx})]+\\&+\kappa[(D_xW^u+\mathcal{T}u_{tx}+\mathcal{X}u_{xx})u_{xx}+(D_x^2W^u+\mathcal{T}u_{txx}+\mathcal{X}u_{xxx})u_x]+\\&-[\mathcal{V}v_x+v(D_xW^v+\mathcal{T}v_{tx}+\mathcal{X}v_{xx})]+\epsilon(D_xW^u+\mathcal{T}u_{tx}+\mathcal{X}u_{xx})\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}XF_2=&(D_tW^v+\mathcal{T}v_{tt}+\mathcal{X}v_{tx})+[\mathcal{V}u_x+v(D_xW^u+\mathcal{T}u_{tx}+\mathcal{X}u_{xx})]+\\&+[\mathcal{U}v_x+u(D_xW^v+\mathcal{T}v_{tx}+\mathcal{X}v_{xx})],\end{aligned}$$

onde

$$W^u=\mathcal{U}-\mathcal{T}u_t-\mathcal{X}u_x,\ W^v=\mathcal{V}-\mathcal{T}v_t-\mathcal{X}v_x,$$

de (3.3) as equações determinantes podem ser escritas como

$$\mathcal{T}_x=\mathcal{T}_u=\mathcal{T}_v=\mathcal{X}_u=\mathcal{X}_v=0, \tag{3.4a}$$

$$\epsilon(\mathcal{T}_t+\mathcal{X}_x)=(\sigma-1)\mathcal{X}_t=(\kappa-2)\mathcal{T}_{tt}=0, \tag{3.4b}$$

$$\mathcal{T}_{tt}-\mathcal{X}_{tx}=\mathcal{X}_{xx}=0, \tag{3.4c}$$

$$\mathcal{U}+(\mathcal{T}_t-\mathcal{X}_x)u=\mathcal{X}_t,\ \mathcal{V}+\mathcal{T}_tv=0. \tag{3.4d}$$

A solução de (3.4), um sistema de EDPs lineares, é facilmente obtida. De fato,

$$\mathcal{T}=A(t),\ \mathcal{X}=[A'(t)+c_1]x+B(t), \tag{3.5a}$$

$$\mathcal{U}=c_1u+A''(t)x+B'(t),\ \mathcal{V}=-A'(t)v \tag{3.5b}$$

com

$$\epsilon[2A'(t)+c_1]=(\sigma-1)B'(t)=0, \tag{3.6a}$$

$$(\sigma-1)A''(t)=(\kappa-2)A''(t)=0. \tag{3.6b}$$

O resultado a seguir decorre imediatamente de (3.5) e (3.6).

Proposição 3.1. **i)** Seja $\epsilon = 0$ e $\sigma = 1$.

i.a) Se $\kappa = 2$, as simetrias de Lie do sistema (3.1) são geradas por

$$X_A = A(t)\frac{\partial}{\partial t} + A'(t)\left(x\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial v}\right) + A''(t)x\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_B = B(t)\frac{\partial}{\partial x} + B'(t)\frac{\partial}{\partial u},\ X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

i.b) Caso contrário, se $\kappa \neq 2$, por X_B, X_1,

$$X_2 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial v},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

ii) Seja $\epsilon \neq 0$.

ii.a) Se $\sigma = 1$, as simetrias de Lie do sistema (3.1) são geradas por X_B, X_3 e

$$X_4 = t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}.$$

ii.b) Caso contrário, se $\sigma \neq 1$, por X_3, X_4 e

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

(iii) Finalmente, se $\epsilon = 0$ e $\sigma \neq 1$, as simetrias de Lie do sistema (3.1) são geradas por X_1, X_2, X_3 e X_5.

3.2 Auto-adjunticidade Não-linear

A Lagrangiana formal do sistema (3.1) é

$$\mathcal{L} = \bar{u}F_1 + \bar{v}F_2$$
$$\Rightarrow \mathcal{L} = \bar{u}(u_{txx} + \sigma u u_{xxx} + \kappa u_x u_{xx} - v v_x + \epsilon u_x) + \bar{v}[v_t + (uv)_x].$$

Aqui $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são as novas variáveis dependentes. Obtidas as equações adjuntas

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} &= \left(\frac{\partial}{\partial u} - D_t\frac{\partial}{\partial u_t} - D_x\frac{\partial}{\partial u_x} + D_t^2\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + D_tD_x\frac{\partial}{\partial u_{tx}} + D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}} - \cdots\right)\mathcal{L}\\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} - D_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} + D_x^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - D_tD_x^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{txx}} - D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}\\ &= (\sigma\bar{u}u_{xxx} + \bar{v}v_x) - D_x(\kappa\bar{u}u_{xx} + \bar{v}v + \epsilon\bar{u}) + \kappa D_x^2(\bar{u}u_x) - D_tD_x^2\bar{u} - \sigma D_x^3(\bar{u}u)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_1^* \equiv \bar{u}_{txx} + \sigma u\bar{u}_{xxx} + (3\sigma - \kappa)(u_x\bar{u}_x)_x + v\bar{v}_x + \epsilon\bar{u}_x = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta v} &= \left(\frac{\partial}{\partial v} - D_t\frac{\partial}{\partial v_t} - D_x\frac{\partial}{\partial v_x} + D_t^2\frac{\partial}{\partial v_{tt}} + D_tD_x\frac{\partial}{\partial v_{tx}} + D_x^2\frac{\partial}{\partial v_{xx}} - \cdots\right)\mathcal{L}\\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} - D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t} - D_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_x}\\ &= (\bar{v}u_x - \bar{u}v_x) - D_t\bar{v} - D_x(\bar{v}u - \bar{u}v)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_2^* \equiv \bar{v}_t - v\bar{u}_x + u\bar{v}_x = 0,$$

onde $\delta/\delta u$ e $\delta/\delta v$ são operadores de Euler-Lagrange, impomos que

$$F_1^*|_{(\bar{u},\bar{v})=(\varphi,\psi)} = MF_1 + NF_2, \quad F_2^*|_{(\bar{u},\bar{v})=(\varphi,\psi)} = PF_1 + QF_2. \tag{3.7}$$

Novamente M, N, P e Q é um conjunto de coeficientes a ser determinado e

$$\varphi = \varphi(t,x,u,v), \ \psi = \psi(t,x,u,v) \tag{3.8}$$

duas funções tais que pelo menos uma não é identicamente nula. Como

$$F_1^*|_{(\bar{u},\bar{v})=(\varphi,\psi)} = D_tD_x^2\varphi + \sigma uD_x^3\varphi + (3\sigma-\kappa)D_x(u_xD_x\varphi) + vD_x\psi + \epsilon D_x\varphi$$

e

$$F_2^*|_{(\bar{u},\bar{v})=(\varphi,\psi)} = D_t\psi + uD_x\psi - vD_x\varphi,$$

de (3.7) é possível obter $M=\varphi_u$, $N=P=0$, $Q=\psi_v$ e

$$\varphi_v = \psi_x = \psi_u = 0, \tag{3.9a}$$
$$\varphi_x + \varphi_{tu} = \varphi_u + \psi_v = 0, \tag{3.9b}$$
$$\psi_t - \varphi_x v = 0, \tag{3.9c}$$
$$\epsilon\varphi_x = (\sigma-1)\varphi_x = (\kappa-2\sigma)\varphi_u = 0. \tag{3.9d}$$

O sistema (3.9) pode ser prontamente resolvido. Logo,

$$\varphi = f(t)u - f'(t)x + g(t), \quad \psi = c_1 - f(t)v,$$

com

$$(\kappa-2\sigma)f(t) = (\sigma-1)f'(t) = \epsilon f'(t) = 0.$$

Combinando os valores que as constantes em (3.1) admitem, chegamos à conclusão:

Proposição 3.2. O sistema (3.1) é não-linearmente auto-adjunto. Ele é quase auto-adjunto se, e somente se, $\kappa = 2\sigma$. As substituições (3.8) são como seguem.

i) Seja $\kappa = 2\sigma$.

i.a) Se $\epsilon = 0$ e $\sigma = 1$, temos

$$\varphi = f(t)u - f'(t)x + g(t), \quad \psi = c_1 - f(t)v.$$

i.b) Caso contrário, se $\epsilon \neq 0$ ou $\sigma \neq 1$,

$$\varphi = c_2u + g(t), \quad \psi = c_1 - c_2v.$$

ii) Seja $\kappa \neq 2\sigma$. Então, temos

$$\varphi = g(t), \quad \psi = c_1.$$

3.3 Leis de Conservação

Conforme Ibragimov [5, 13, 28–30], seja

$$X = \mathcal{T}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{X}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{U}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \mathcal{V}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial v}$$

um gerador infinitesimal de simetrias de Lie do sistema (3.1). As componentes do vetor conservado $C = (C^t, C^x)$ associado a X são dadas por

$$C^t = (W^u D_x^2 - D_x W^u D_x + D_x^2 W^u)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{txx}} + W^v \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t}$$

e

$$\begin{aligned} C^x = {} & W^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - (W^u D_x - D_x W^u)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} + (W^u D_t D_x - D_t W^u D_x + D_t D_x W^u)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xtx}} + \\ & + (W^u D_t D_x - D_x W^u D_t + D_t D_x W^u)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxt}} + (W^u D_x^2 - D_x W^u D_x + D_x^2 W^u)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} + W^v \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$C^t = W^v \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t} - 3 D_x W^u D_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{txx}} \tag{3.10}$$

e

$$\begin{aligned} C^x = {} & W^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} + W^v \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} - (W^u D_x - D_x W^u)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} + \\ & + 3(W^u D_t D_x + D_t D_x W^u)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{txx}} + (W^u D_x^2 - D_x W^u D_x + D_x^2 W^u)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Construímos as leis de conservação para cada gerador contido na Proposição 3.1. Para tanto, inicialmente utilizamos as substituições

$$\begin{cases} \bar{u} = c_1 u + c_2, \\ \bar{v} = c_3 - c_1 v, \end{cases} \tag{3.12}$$

com $c_1 = 0$ quando $\kappa \neq 2\sigma$.

Observamos que em todos os casos, as simetrias X_3 (translações em t) e X_5 (translações em x) determinam vetores nulos e, portanto, leis de conservação triviais. De fato, não raramente, as simetrias do sistema (3.1) nos levam, após algum trabalho tedioso, a leis de conservação triviais ou a leis de conservação óbvias associadas aos vetores

$$C^t = 0, \; C^x = A(t)[u_{tx} + \sigma u u_{xx} + (\kappa - \sigma)u_x^2/2 - v^2/2 + \epsilon u] \tag{3.13}$$

e

$$C^t = v, \; C^x = uv. \tag{3.14}$$

Na verdade, (3.13) e (3.14) são obtidos diretamente do sistema (3.1), cujas equações são elas próprias leis de conservação.

A situação realmente interessante corresponde a $\kappa = 2\sigma$ e está explicitada no resultado a seguir. De (3.12), é suficiente considerar as substituições

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = -v,$$

que reduzem (3.10) e (3.11) a

$$C^t = -(vW^v + u_x D_x W^u)$$

e

$$C^x = [(u_{tx} + 2\sigma u u_{xx} - v^2 + \epsilon u) + u(D_t + \sigma u D_x)D_x]W^u - 2uvW^v.$$

Proposição 3.3. Seja $\kappa = 2\sigma$.

(i) O gerador X_A fornece o vetor de componentes

$$C^t = -\frac{A'(t)}{2}(v^2 + u_x^2)$$

e

$$C^x = A'(t)u(u_{tx} + uu_{xx} - v^2) + A''(t)[u_t + uu_x - x(u_{tx} + uu_{xx} + u_x^2/2 - v^2/2)]$$

para o caso $\epsilon = 0$ e $\sigma = 1$.

(ii) Os geradores X_1, X_2 e X_4 fornecem o vetor de componentes

$$C^t = -\frac{1}{2}(v^2 + u_x^2)$$

e

$$C^x = u(u_{tx} + \sigma u u_{xx} - v^2 + \epsilon u/2)$$

para os casos $\epsilon \neq 0$ ou $\sigma \neq 1$.

O próximo capítulo é dedicado a uma classe de sistemas BBM-KdV.

Capítulo 4

Uma Classe de Sistemas BBM-KdV

Motivados pelos trabalhos [33, 34], introduzimos aqui a classe de sistemas

$$F_1 \equiv u_t + (a+b)vu_x + (au+c)v_x + \epsilon u_{txx} + \kappa v_{xxx} = 0, \tag{4.1a}$$

$$F_2 \equiv v_t + (bu+c)u_x + (a+b)vv_x + \lambda u_{xxx} + \sigma v_{txx} = 0, \tag{4.1b}$$

doravante simplesmente referida como sistema BBM-KdV, uma generalização a duas componentes[1] das clássicas equações [35]

$$\text{BBM (Benjamin-Bona-Mahony):} \quad u_t + (u+1)u_x - u_{txx} = 0 \tag{4.2}$$

e

$$\text{KdV (Korteweg-de Vries):} \quad u_t + (u+1)u_x + u_{xxx} = 0, \tag{4.3}$$

com o objetivo de estudá-lo do ponto de vista da grupo-análise.

Em (4.1), as constantes são tais que $(a+b)c \neq 0$ e $\{\epsilon, \kappa, \lambda, \sigma\} \neq \{0\}$. Se $a = c = 1$ e $b = 0$, obtemos de (4.1) os já amplamente investigados sistemas de Boussinesq ($\epsilon = \kappa = \lambda = 0$, $\sigma = -1/3$), Kaup ($\epsilon = \lambda = \sigma = 0$, $\kappa = 1/3$) e Bona-Smith ($\epsilon = \sigma = \lambda/2 - 1/6$, $\kappa = 0$, $\lambda < 0$), todos eles aproximações de primeira ordem das equações de Euler para a hidrodinâmica. Úteis em situações onde efeitos dissipativos não são significativos, esses modelos fornecem uma boa descrição para o movimento bidimensional de ondas longas de pequena amplitude sobre a superfície de um fluido ideal. Nesse contexto, a variável independente x representa a distância percorrida ao longo de um canal de profundidade fixada e t o tempo. As quantidades $u(t, x)$ e $v(t, x)$ estão relacionadas ao desvio da superfície de seu nível de equilíbrio e à velocidade horizontal do fluido, respectivamente. Para mais informações, veja [33, 34] e suas referências. Resultados relevantes, incluindo soluções exatas, podem ser encontradas em [36–38].

Conforme critério fornecido em [12, Theorem 5.68], o sistema (4.1) não possui Lagrangiana (veja Apêndice A). Portanto, este capítulo está assim estruturado: primeiramente determinamos as simetrias de Lie (Seção 4.1) do sistema BBM-KdV e estabelecemos sua auto-adjunticidade não-linear (Seção 4.2); construímos então leis de conservação via o NTC de Ibragimov (Seção 4.3). Naquilo que se segue, a menos de menção contrária, todas as constantes c_i's são arbitrárias e todas as funções suaves.

[1] Se $u = v$, o sistema (4.1) é reduzido às equações $u_t + [(2a+b)u + c]u_x + \epsilon u_{txx} + \kappa u_{xxx} = 0$ e $u_t + [(a + 2b)u + c]u_x + \sigma u_{txx} + \lambda u_{xxx} = 0$. Ambas contêm (4.2) e (4.3) como casos especiais.

4.1 Simetrias de Lie

Pela Definição 2.2, um operador de Lie-Backlund

$$X = \mathcal{T}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{X}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{U}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \mathcal{V}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial v}$$

gera as simetrias de Lie do sistema (4.1) se as condições de invariância

$$XF_1 = MF_1 + NF_2,\ XF_2 = PF_1 + QF_2 \tag{4.4}$$

forem satisfeitas (em todas as variáveis u_t, v_t, u_x, v_x, etc) para algum conjunto de coeficientes M, N, P, Q a ser determinado. Sabendo que

$$\begin{gathered} XF_1 = (D_tW^u + \mathcal{T}u_{tt} + \mathcal{X}u_{tx}) + (a+b)[\mathcal{V}u_x + v(D_xW^u + \mathcal{T}u_{tx} + \mathcal{X}u_{xx})] + a\mathcal{U}v_x + \\ + (au+c)(D_xW^v + \mathcal{T}v_{tx} + \mathcal{X}v_{xx}) + \epsilon(D_tD_x^2W^u + \mathcal{T}u_{ttxx} + \mathcal{X}u_{txxx}) + \\ + \kappa(D_x^3W^v + \mathcal{T}v_{txxx} + \mathcal{X}v_{xxxx}) \end{gathered}$$

e

$$\begin{gathered} XF_2 = (D_tW^v + \mathcal{T}v_{tt} + \mathcal{X}v_{tx}) + b\mathcal{U}u_x + (bu+c)(D_xW^u + \mathcal{T}u_{tx} + \mathcal{X}u_{xx}) + \\ + (a+b)[\mathcal{V}v_x + v(D_xW^v + \mathcal{T}v_{tx} + \mathcal{X}v_{xx})] + \lambda(D_x^3W^u + \mathcal{T}u_{txxx} + \mathcal{X}u_{xxxx}) + \\ + \sigma(D_tD_x^2W^v + \mathcal{T}v_{ttxx} + \mathcal{X}v_{txxx}), \end{gathered}$$

onde

$$W^u = \mathcal{U} - \mathcal{T}u_t - \mathcal{X}u_x,\ W^v = \mathcal{V} - \mathcal{T}v_t - \mathcal{X}v_x,$$

de (4.4) as equações determinantes podem ser escritas como

$$\mathcal{T}_x = \mathcal{T}_u = \mathcal{T}_v = \mathcal{X}_u = \mathcal{X}_v = 0, \tag{4.5a}$$
$$\epsilon\mathcal{X}_t = \epsilon\mathcal{X}_x = \sigma\mathcal{X}_t = \sigma\mathcal{X}_x = 0, \tag{4.5b}$$
$$\mathcal{U}_t = \mathcal{U}_x = \mathcal{U}_v = \mathcal{V}_t = \mathcal{V}_x = a\mathcal{U} - (au+c)\mathcal{U}_u = 0, \tag{4.5c}$$
$$b\mathcal{U} + (bu+c)[\mathcal{U}_u + 2(\mathcal{T}_t - \mathcal{X}_x)] = 0, \tag{4.5d}$$
$$\kappa(\mathcal{U}_u + 2\mathcal{X}_x) = \lambda[\mathcal{U}_u + 2(\mathcal{T}_t - 2\mathcal{X}_x)] = 0, \tag{4.5e}$$
$$(a+b)[\mathcal{V} + (\mathcal{T}_t - \mathcal{X}_x)v] - \mathcal{X}_t = 0. \tag{4.5f}$$

A solução de (4.5), um sistema de EDPs lineares, é facilmente obtida. De fato,

$$\mathcal{T} = (a+b)c_1t + c_2,\ \mathcal{X} = (a+b)(c_3x + c_4t) + c_5, \tag{4.6a}$$
$$\mathcal{U} = 2(c_3 - c_1)(au+c),\ \mathcal{V} = (a+b)(c_3 - c_1)v + c_4 \tag{4.6b}$$

com

$$b(a-b)(c_1 - c_3) = 0,\ \epsilon c_3 = \epsilon c_4 = \kappa[ac_1 - (2a+b)c_3] = 0, \tag{4.7a}$$
$$\lambda[bc_1 - (a+2b)c_3] = \sigma c_3 = \sigma c_4 = 0. \tag{4.7b}$$

O resultado a seguir decorre imediatamente de (4.6) e (4.7).

Proposição 4.1. As simetrias de Lie do sistema BBM-KdV estão organizadas na Tabela 4.1, onde

$$X_1 = (a+b)\left(t\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial v}\right) - 2(au+c)\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_3 = (a+b)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial v}\right) + 2(au+c)\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_4 = (a+b)t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v},\ X_5 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

	$b=0$	$a=b$	$b(a-b)\neq 0$
$\{\epsilon,\sigma\}=\{0\}$	X_1 $(\kappa=0)$ $2X_1+X_3$ $(\lambda=0)$ $X_2,\ X_4,\ X_5$	$3X_1+X_3$ $X_2,\ X_4,\ X_5$	$X_2,\ X_4,\ X_5$
$\{\epsilon,\sigma\}\neq\{0\}$	X_1 $(\kappa=0)$, $X_2,\ X_5$	X_1 $(\kappa=\lambda=0)$ $X_2,\ X_5$	$X_2,\ X_5$

Tabela 4.1: Geradores infinitesimais admitidos pelo sistema BBM-KdV.

4.2 Auto-adjunticidade Não-linear

Para começar, sejam $\bar{u}$ e $\bar{v}$ as novas variáveis dependentes. A Lagrangiana formal do sistema (4.1) é

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{u}F_1 + \bar{v}F_2\\ \Rightarrow \mathcal{L} &= \bar{u}[u_t + (a+b)vu_x + (au+c)v_x + \epsilon u_{txx} + \kappa v_{xxx}] +\\ &+ \bar{v}[v_t + (bu+c)u_x + (a+b)vv_x + \lambda u_{xxx} + \sigma v_{txx}].\end{aligned}$$

Obtidas as equações adjuntas

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} &= \left(\frac{\partial}{\partial u} - D_t\frac{\partial}{\partial u_t} - D_x\frac{\partial}{\partial u_x} + D_t^2\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + D_tD_x\frac{\partial}{\partial u_{tx}} + D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}} - \cdots\right)\mathcal{L}\\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} - D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} - D_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} - D_tD_x^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{txx}} - D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}\\ &= (a\bar{u}v_x + b\bar{v}u_x) - D_t\bar{u} - D_x[(a+b)\bar{u}v + (bu+c)\bar{v}] - \epsilon D_tD_x^2\bar{u} - \lambda D_x^3\bar{v}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_1^* \equiv \bar{u}_t + (a+b)v\bar{u}_x + (bu+c)\bar{v}_x + b\bar{u}v_x + \epsilon\bar{u}_{txx} + \lambda\bar{v}_{xxx} = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta v} &= \left(\frac{\partial}{\partial v} - D_t\frac{\partial}{\partial v_t} - D_x\frac{\partial}{\partial v_x} + D_t^2\frac{\partial}{\partial v_{tt}} + D_tD_x\frac{\partial}{\partial v_{tx}} + D_x^2\frac{\partial}{\partial v_{xx}} - \cdots\right)\mathcal{L}\\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} - D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t} - D_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_x} - D_tD_x^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{txx}} - D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{xxx}}\\ &= (a+b)(\bar{u}u_x + \bar{v}v_x) - D_t\bar{v} - D_x[(au+c)\bar{u} + (a+b)\bar{v}v] - \sigma D_tD_x^2\bar{v} - \kappa D_x^3\bar{u}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_2^* \equiv \bar{v}_t + (au+c)\bar{u}_x + (a+b)v\bar{v}_x - b\bar{u}u_x + \kappa\bar{u}_{xxx} + \sigma\bar{v}_{txx} = 0,$$

onde $\delta/\delta u$ and $\delta/\delta v$ são operadores de Euler-Lagrange, impomos que

$$F_1^*|_{(\bar{u},\bar{v})=(\varphi,\psi)}= MF_1 + NF_2,\ F_2^*|_{(\bar{u},\bar{v})=(\varphi,\psi)}= PF_1 + QF_2. \tag{4.8}$$

Aqui M, N, P e Q é novamente um conjunto de coeficientes a ser determinado e

$$\varphi = \varphi(t, x, u, v), \quad \psi = \psi(t, x, u, v) \tag{4.9}$$

duas funções tais que pelo menos uma não é identicamente nula. Como

$$F_1^*|_{(\bar{u},\bar{v})=(\varphi,\psi)}= D_t\varphi + (a + b)vD_x\varphi + (bu + c)D_x\psi + b\varphi v_x + \epsilon D_tD_x^2\varphi + \lambda D_x^3\psi$$

e

$$F_2^*|_{(\bar{u},\bar{v})=(\varphi,\psi)}= D_t\psi + (au + c)D_x\varphi + (a + b)vD_x\psi - b\varphi u_x + \kappa D_x^3\varphi + \sigma D_tD_x^2\psi,$$

de (4.8) é possível obter $M = \varphi_u$, $N = \varphi_v$, $P = \psi_u$, $Q = \psi_v$ e

$$\varphi_t + (a + b)v\varphi_x = \epsilon\varphi_x = 0, \tag{4.10a}$$
$$\psi_t + (au + c)\varphi_x = \psi_x = 0, \tag{4.10b}$$
$$b\varphi = (au + c)\varphi_u - (bu + c)\psi_v, \tag{4.10c}$$
$$\varphi_v - \psi_u = (\epsilon - \sigma)\varphi_v = \kappa\varphi_u - \lambda\psi_v = 0, \tag{4.10d}$$
$$\epsilon\varphi_{uu} = \varphi_{uv} = \varphi_{vv} = 0. \tag{4.10e}$$

O sistema (4.10) pode ser prontamente resolvido. Logo,

$$\varphi = (c_1t + c_2)av + f(u) - c_1x,$$
$$\psi = c_3v + (c_1t + c_2)au + c_1ct + c_4$$

com

$$bc_1 = bc_2 = \epsilon c_1 = \sigma c_1 = (\epsilon - \sigma)c_2 = 0,$$
$$\epsilon f''(u) = \kappa f'(u) - \lambda c_3 = 0,$$
$$bf(u) = (au + c)f'(u) - (bu + c)c_3.$$

Combinando os valores que as constantes em (4.1) admitem, chegamos à conclusão:

Proposição 4.2. O sistema BBM-KdV é não-linearmente auto-adjunto. As substituições (4.9) são como seguem.

i) Se $b = 0$, temos

$$\varphi = (c_1t + c_2)av + c_3c\ln(au + c) - c_1x + c_4,$$
$$\psi = c_3av + (c_1t + c_2)(au + c) + c_5,$$

onde

$$\begin{cases} c_1 = 0,\ \text{para } \{\epsilon, \sigma\} \neq \{0\}, \\ c_2 = 0,\ \text{para } \epsilon \neq \sigma, \\ c_3 = 0,\ \text{para } \{\epsilon, \kappa, \lambda\} \neq \{0\}. \end{cases}$$

ii) Se $a = b$, temos

$$\varphi = (au + c)[c_1\ln(au + c) + c_2],$$
$$\psi = c_1av + c_3,$$

onde

$$\begin{cases} c_1 = 0, \text{ para } \{\epsilon, \kappa, \lambda\} \neq \{0\}, \\ c_2 = 0, \text{ para } \kappa \neq 0. \end{cases}$$

iii) Seja $b(a-b) \neq 0$.

iii.a) Se $a = 0$, temos

$$\varphi = c_1 e^{bu/c} - c_2(bu + 2c),$$
$$\psi = c_2 bv + c_3,$$

onde

$$\begin{cases} c_1 = 0, \text{ para } \{\epsilon, \kappa\} \neq \{0\}, \\ c_2 = 0, \text{ para } \kappa \neq -\lambda. \end{cases}$$

iii.b) Caso contrário, se $a \neq 0$,

$$\varphi = c_1(au + c)^{b/a} + c_2[b^2 u + (2b - a)c],$$
$$\psi = c_2(a - b)bv + c_3,$$

onde

$$\begin{cases} c_1 = 0, \text{ para } \{\epsilon, \kappa\} \neq \{0\}, \\ c_2 = 0, \text{ para } \lambda a \neq (\kappa + \lambda)b. \end{cases}$$

Note que, na verdade, o sistema (4.1) é quase auto-adjunto. Em particular, ele é estritamente auto-adjunto em somente duas circunstâncias: $a = 2b$ e $\kappa = \lambda$; ou $b = 0$ e $\epsilon = \sigma$.

4.3 Leis de Conservação

Tendo em vista a Proposição 4.2, as componentes do vetor conservado $C = (C^t, C^x)$ associado a X, uma simetria de Lie do sistema (4.1), são, de acordo com o NTC de Ibragimov, dadas por

$$C^t = (\varphi - \epsilon D_x \varphi D_x)W^u + (\psi - \sigma D_x \psi D_x)W^v$$

e

$$\begin{aligned} C^x = {} & [(a+b)v\varphi + (bu+c)\psi + \epsilon(\varphi D_t D_x + D_t D_x \varphi) + \lambda(\psi D_x^2 - D_x \psi D_x + D_x^2 \psi)]W^u + \\ & + [(au+c)\varphi + (a+b)v\psi + \sigma(\psi D_t D_x + D_t D_x \psi) + \kappa(\varphi D_x^2 - D_x \varphi D_x + D_x^2 \varphi)]W^v. \end{aligned}$$

Encontramos as leis de conservação correspondentes a cada gerador da Tabela 4.1. Na maioria dos casos, entretanto, somos levados a vetores triviais ($C^t = C^x = 0$) ou aos vetores

$$C^t = u + \epsilon u_{xx}, \quad C^x = (au + c)v + \kappa v_{xx}$$

e

$$C^t = 2(v + \sigma v_{xx}), \quad C^x = (a+b)v^2 + (bu + 2c)u + 2\lambda u_{xx},$$

que podem ser obtidos da primeira (quando $b = 0$) e da segunda equação do sistema BBM-KdV por simples integração (leis de conservação óbvias). Os casos realmente interessantes listamos a seguir.

Proposição 4.3. **i)** *Seja $b = 0$.*

i.a) De X_1, $2X_1 + X_3$ e X_2, obtemos

$$C^t = 2(uv - \epsilon u_x v_x),$$
$$C^x = cu^2 + (2au + c)v^2 - (\lambda u_x^2 + \kappa v_x^2) + 2[u(\lambda u_x + \epsilon v_t)_x + v(\epsilon u_t + \kappa v_x)_x]$$

quando $\epsilon = \sigma$.

i.b) Para $\epsilon = \kappa = 0$, X_1 também fornece

$$C^t = \frac{1}{a}(au + c)\ln(au + c) + \frac{a}{2c}(v^2 - \sigma v_x^2),$$
$$C^x = (au + c)[\ln(au + c) + 1]v + \frac{av}{c}\left(\frac{av^2}{3} + \sigma v_{tx}\right)$$

quando $\lambda = 0$ e

$$C^t = 2[t(au + c)v - xu],$$
$$C^x = t[c(au + 2c)u - a\lambda u_x^2] + 2(au + c)[(atv - x)v + \lambda t u_{xx}]$$

quando $\sigma = 0$.

ii) Seja $a = b$.

ii.a) De X_1 e $3X_1 + X_3$, obtemos

$$C^t = (au + 2c)u - a\epsilon u_x^2,$$
$$C^x = 2(au + c)[(au + c)v + \epsilon u_{tx}]$$

quando $\kappa = 0$.

ii.b) X_1 também fornece

$$C^t = \frac{1}{a}(au + c)^2\ln(au + c) + a(v^2 - \sigma v_x^2),$$
$$C^x = (au + c)^2[2\ln(au + c) + 1]v + 2av\left(\frac{2av^2}{3} + \sigma v_{tx}\right)$$

quando $\epsilon = \kappa = \lambda = 0$.

O próximo capítulo é dedicado a um sistema tipo Gardner.

Capítulo 5

Um Sistema tipo Gardner

As bem conhecidas equações KdV, mKdV e de Gardner [39–41], dadas respectivamente por

$$u_t + auu_x + cu_{xxx} = 0, \quad u_t + bu^2u_x + cu_{xxx} = 0$$

e

$$u_t + (au + bu^2)u_x + cu_{xxx} = 0,$$

são casos especiais de

$$u_t + (au^p + bu^{2p})u_x + cu_{xxx} = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{Z}, \tag{5.1}$$

uma recorrente equação evolutiva não-linear que, na hidrodinâmica, modela ondas de origem gravitacional no interior de oceanos de densidade estratificada [42]. De grande importância por também descrever uma variedade de fenômenos ondulatórios em plasma, em física do estado sólido e em mecânica quântica, sua integrabilidade tem sido investigada por vários autores sob diferentes abordagens. Soluções explícitas (incluindo sólitons) e uma discussão detalhada de suas propriedades (como estabilidade) podem ser encontradas em [43–45] e suas referências.

As situações cobertas pelas equações acima tendem a ser idealizadas. Isto ocorre, entre outras razões, porque tais modelos são derivados sem considerar os eventuais efeitos que uma onda exerce sobre outra. Entretanto, desde os trabalhos pioneiros de Hirota e Satsuma [46, 47], onde eles apresentam um sistema para estudar a interação de duas ondas longas com relações de dispersão distintas, um número cada vez maior de equações KdV acopladas têm sido introduzidas na literatura com um espectro substancialmente maior e mais realístico de aplicações. Veja por exemplo [23, 48, 49]. Em particular, partindo dos mobelos [50, 51]

$$\begin{aligned} u_t + a[(u^2 + v^2)u]_x + u_{xxx} = 0, \\ v_t + a[(u^2 + v^2)v]_x + v_{xxx} = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_t + (u^p v^{p+1})_x + u_{xxx} = 0, \\ v_t + (u^{p+1} v^p)_x + v_{xxx} = 0, \end{aligned}$$

propomos neste capítulo a nova classe de sistemas sem Lagrangiana (veja Apêndice A)

$$F_1 \equiv u_t + a[(u^p + v^p)u]_x + b[(uv)^p v]_x + cu_{xxx} = 0, \tag{5.2a}$$
$$F_2 \equiv v_t + a[(u^p + v^p)v]_x + b[(uv)^p u]_x + cv_{xxx} = 0, \tag{5.2b}$$

uma generalização a duas componentes[1] da equação (5.1), com o objetivo de determinar as simetrias de Lie (Seção 5.1). Estabelecida sua auto-adjunticidade não-linear (Seção 5.2), construímos então leis de conservação via o NTC de Ibragimov (Seção 5.3). Naquilo que se segue, admitimos que $\{ac, bc\} \neq \{0\}$ e $p \geq 1$. Ademais, a menos de menção contrária, todas as constantes c_i's são arbitrárias e todas as funções suaves.

5.1 Simetrias de Lie

Para começar, denotamos

$$
\begin{aligned}
f(u,v) &\equiv a(u^p + v^p)u + b(uv)^p v,\\
g(u,v) &\equiv a(u^p + v^p)v + b(uv)^p u.
\end{aligned}
$$

Pela Definição 2.2, um operador de Lie-Backlund

$$X = \mathcal{T}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{X}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{U}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \mathcal{V}(t,x,u,v)\frac{\partial}{\partial v}$$

gera as simetrias de Lie do sistema (5.2) se as condições de invariância

$$
\begin{aligned}
&(D_t W^u + \mathcal{T} u_{tt} + \mathcal{X} u_{tx}) + f_u(D_x W^u + \mathcal{T} u_{tx} + \mathcal{X} u_{xx}) + f_v(D_x W^v + \mathcal{T} v_{tx} + \mathcal{X} v_{xx}) + \\
&+ f_{uu}\mathcal{U} u_x + f_{uv}(\mathcal{V} u_x + \mathcal{U} v_x) + f_{vv}\mathcal{V} v_x + c(D_x^3 W^u + \mathcal{T} u_{txxx} + \mathcal{X} u_{xxxx}) = MF_1 + NF_2
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&(D_t W^v + \mathcal{T} v_{tt} + \mathcal{X} v_{tx}) + g_u(D_x W^u + \mathcal{T} u_{tx} + \mathcal{X} u_{xx}) + g_v(D_x W^v + \mathcal{T} v_{tx} + \mathcal{X} v_{xx}) + \\
&+ g_{uu}\mathcal{U} u_x + g_{uv}(\mathcal{V} u_x + \mathcal{U} v_x) + g_{vv}\mathcal{V} v_x + c(D_x^3 W^v + \mathcal{T} v_{txxx} + \mathcal{X} v_{xxxx}) = PF_1 + QF_2,
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

onde

$$W^u = \mathcal{U} - \mathcal{T} u_t - \mathcal{X} u_x, \quad W^v = \mathcal{V} - \mathcal{T} v_t - \mathcal{X} v_x,$$

forem satisfeitas (em todas as variáveis u_t, v_t, u_x, v_x, etc) para algum conjunto de coeficientes M, N, P e Q a ser determinado. De (5.3) e (5.4), as equações determinantes podem ser escritas como

$$\mathcal{T}_x = \mathcal{T}_u = \mathcal{T}_v = \mathcal{T}_t - 3\mathcal{X}_x = 0, \tag{5.5a}$$
$$\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_u = \mathcal{X}_v = 0, \tag{5.5b}$$
$$\mathcal{U}_t = \mathcal{U}_x = \mathcal{U}_{uv} = \mathcal{U} - (\mathcal{U}_u u + \mathcal{U}_v v) = 0, \tag{5.5c}$$
$$\mathcal{V}_t = \mathcal{V}_x = \mathcal{V}_{uv} = \mathcal{V} - (\mathcal{V}_u u + \mathcal{V}_v v) = 0, \tag{5.5d}$$
$$a[2\mathcal{X}_x + p\mathcal{U}_u + (2-p)\mathcal{V}_u] = 0, \tag{5.5e}$$
$$b(\mathcal{X}_x + p\mathcal{U}_u) = b\mathcal{U}_v = b\mathcal{V}_u = 0, \tag{5.5f}$$
$$(1-p)(\mathcal{U}_v + \mathcal{V}_u) = (1-p)(2-p)\mathcal{U}_v = 0, \tag{5.5g}$$
$$\mathcal{U}_u - \mathcal{V}_v = (2-p)(\mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u). \tag{5.5h}$$

A solução de (5.5), um sistema de EDPs lineares, é facilmente obtida. De fato,

$$\mathcal{T} = 3c_1 t + c_2, \ \mathcal{X} = c_1 x + c_3, \tag{5.6a}$$
$$\mathcal{U} = c_4 v + [c_6 + (2-p)c_4]u, \ \mathcal{V} = [c_6 + (2-p)c_5]v + c_5 u \tag{5.6b}$$

[1]Se $u = v$, o sistema (5.2) é reduzido à equação (5.1).

com

$$a(2c_1 + c_4 + c_5 + pc_6) = 0, \tag{5.7a}$$
$$bc_4 = bc_5 = b(c_1 + pc_6) = 0, \tag{5.7b}$$
$$(1-p)(2-p)c_4 = (1-p)(c_4 + c_5) = 0. \tag{5.7c}$$

O resultado a seguir decorre imediatamente de (5.6) e (5.7).

Proposição 5.1. As simetrias de Lie do sistema (5.2) estão organizadas na Tabela 5.1, onde

$$X_1 = 3t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{p}\left(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\right),$$
$$Y_1 = 3t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{p}\left(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\right),\ X_2 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_4 = v\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right),\ Y_4 = v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v},\ X_5 = u\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right).$$

$a = 0$	$b = 0$	$ab \neq 0$
X_1, X_2 X_3	Y_1, X_2, X_3, X_4 $(p = 1)$ Y_4 $(p = 2)$, X_5 $(p = 1)$	X_2, X_3

Tabela 5.1: Geradores infinitesimais admitidos pelo sistema (5.2).

5.2 Auto-adjunticidade Não-linear

Para o sistema (5.2), a Lagrangiana formal é

$$\mathcal{L} = \bar{u}F_1 + \bar{v}F_2$$
$$\Rightarrow \mathcal{L} = \bar{u}(u_t + f_u u_x + f_v v_x + cu_{xxx}) + \bar{v}(v_t + g_u u_x + g_v v_x + cv_{xxx}).$$

Aqui $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são as novas variáveis dependentes. Obtidas as equações adjuntas

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} &= \left(\frac{\partial}{\partial u} - D_t\frac{\partial}{\partial u_t} - D_x\frac{\partial}{\partial u_x} + D_t^2\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + D_tD_x\frac{\partial}{\partial u_{tx}} + D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}} - \cdots\right)\mathcal{L}\\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} - D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} - D_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} - D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}\\ &= (f_{uu}u_x + f_{uv}v_x)\bar{u} + (g_{uu}u_x + g_{uv}v_x)\bar{v} - D_t\bar{u} - D_x(f_u\bar{u} + g_u\bar{v}) - cD_x^3\bar{u}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_1^* \equiv \bar{u}_t + f_u\bar{u}_x + g_u\bar{v}_x + c\bar{u}_{xxx} = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta v} &= \left(\frac{\partial}{\partial v} - D_t\frac{\partial}{\partial v_t} - D_x\frac{\partial}{\partial v_x} + D_t^2\frac{\partial}{\partial v_{tt}} + D_tD_x\frac{\partial}{\partial v_{tx}} + D_x^2\frac{\partial}{\partial v_{xx}} - \cdots\right)\mathcal{L}\\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} - D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t} - D_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_x} - D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_{xxx}}\\ &= (f_{uv}u_x + f_{vv}v_x)\bar{u} + (g_{uv}u_x + g_{vv}v_x)\bar{v} - D_t\bar{v} - D_x(f_v\bar{u} + g_v\bar{v}) - cD_x^3\bar{v}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_2^* \equiv \bar{v}_t + f_v\bar{u}_x + g_v\bar{v}_x + c\bar{v}_{xxx} = 0,$$

onde $\delta/\delta u$ e $\delta/\delta v$ são operadores de Euler-Lagrange, impomos que

$$F_1^*|_{(\bar{u},\bar{v})=(\varphi,\psi)} = MF_1 + NF_2, \quad F_2^*|_{(\bar{u},\bar{v})=(\varphi,\psi)} = PF_1 + QF_2. \tag{5.8}$$

Novamente M, N, P e Q é um conjunto de coeficientes a ser determinado e

$$\varphi = \varphi(t, x, u, v), \quad \psi = \psi(t, x, u, v) \tag{5.9}$$

duas funções tais que pelo menos uma não é identicamente nula.

Como

$$F_1^*|_{(\bar{u},\bar{v})=(\varphi,\psi)} = D_t\varphi + f_uD_x\varphi + g_uD_x\psi + cD_x^3\varphi$$

e

$$F_2^*|_{(\bar{u},\bar{v})=(\varphi,\psi)} = D_t\psi + f_vD_x\varphi + g_vD_x\psi + cD_x^3\psi,$$

de (5.8) é possível obter $M = \varphi_u$, $N = \varphi_v$, $P = \psi_u$, $Q = \psi_v$ e

$$\varphi_t - \psi_t = \varphi_x - \psi_x = \varphi_u - \psi_v = \varphi_v - \psi_u = 0, \tag{5.10a}$$
$$\varphi_t + 2a(u+v)\varphi_x = b\varphi_x = (p-1)\varphi_x = 0, \tag{5.10b}$$
$$a(p-2)(\varphi_u - \varphi_v) = b\varphi_v = (p-1)\varphi_v = 0, \tag{5.10c}$$
$$\varphi_{xx} = \varphi_{xu} = \varphi_{xv} = \varphi_{uu} = \varphi_{uv} = \varphi_{vv} = 0. \tag{5.10d}$$

O sistema (5.10) pode ser prontamente resolvido. Logo

$$\varphi = (2ac_1t + c_2)v + (2ac_1t + c_3)u - c_1x + c_4,$$
$$\psi = (2ac_1t + c_3)v + (2ac_1t + c_2)u - c_1x + c_5$$

com

$$(p-1)c_1 = bc_1 = (p-1)c_2 = bc_2 = 0,$$
$$a(p-2)(c_2 - c_3) = 0.$$

Combinando os valores que as constantes em (5.2) admitem, chegamos à conclusão:

Proposição 5.2. O sistema (5.2) é não-linearmente auto-adjunto. As substituições (5.9) são como seguem.

i) Se $a = 0$ ou $p = 2$, temos

$$\varphi = c_3u + c_4, \quad \psi = c_3v + c_5;$$

ii) se $b = 0$ e $p = 1$, temos

$$\varphi = (2ac_1t + c_2)(v + u) - c_1x + c_4, \quad \psi = (2ac_1t + c_2)(v + u) - c_1x + c_5;$$

iii) nos demais casos,

$$\varphi = c_4, \quad \psi = c_5.$$

Note que, na verdade, o sistema (5.2) é quase auto-adjunto. Em particular, ele é estritamente auto-adjunto se, e somente se, $a = 0$ ou $p = 2$. Ainda mais, qualquer sistema da forma

$$\begin{aligned} u_t + r_x(u,v) + cu_{xxx} &= 0, \\ v_t + s_x(u,v) + cv_{xxx} &= 0 \end{aligned}$$

é estritamente auto-adjunto sempre que $r_v = s_u$.

5.3 Leis de Conservação

De acordo com o NTC de Ibragimov [13], as componentes do vetor conservado $C = (C^t, C^x)$ associado a X, uma simetria de Lie do sistema (5.2), são dadas por

$$C^t = \varphi W^u + \psi W^v \tag{5.11}$$

e

$$\begin{aligned} C^x = {} & \varphi(f_u W^u + f_v W^v) + c(\varphi D_x^2 - D_x \varphi D_x + D_x^2 \varphi) W^u + \\ & + \psi(g_u W^u + g_v W^v) + c(\psi D_x^2 - D_x \psi D_x + D_x^2 \psi) W^v. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Tendo em vista a Proposição 5.2, o próximo resultado leva em conta todos os geradores da Tabela 5.1. Na maioria dos casos, entretanto, as expressões (5.11) e (5.12) nos conduzem a leis de conservação triviais ou aos vetores

$$C^t = u, \quad C^x = f(u,v) + cu_{xx}$$

e

$$C^t = v, \quad C^x = g(u,v) + cv_{xx}$$

que podem ser prontamente obtidos do sistema (5.2) por integração direta. A seguir, apresentamos apenas os casos não-óbvios.

Proposição 5.3. **i)** Seja $a = 0$. Para

$$\varphi = u, \quad \psi = v,$$

X_1 fornece

$$\begin{aligned} C^t &= (p+1)(u^2+v^2), \\ C^x &= 2b(2p+1)(uv)^{p+1} + c(p+1)[(u^2+v^2)_{xx} - 3(u_x^2+v_x^2)]. \end{aligned}$$

ii) Seja $b = 0$.

ii.a) Tomando

$$\varphi = \psi = u + v$$

para Y_1 e

$$\varphi = \psi = 2at(u+v) - x$$

para X_2, obtemos

$$\begin{aligned} C^t &= 3(u+v)^2, \\ C^x &= 4a(u+v)^3 + 3c\{[(u+v)^2]_{xx} - 3(u_x+v_x)^2\} \end{aligned}$$

quando $p = 1$.

ii.b) Além do mais, para

$$\varphi = u, \quad \psi = v,$$

Y_1 também fornece

$$C^t = 2(u^2 + v^2),$$
$$C^x = 3a(u^2 + v^2)^2 + 2c[(u^2 + v^2)_{xx} - 3(u_x^2 + v_x^2)]$$

quando $p = 2$.

Capítulo 6

Considerações Finais

Nesta tese, determinamos com sucesso as simetrias de Lie de alguns sistemas de EDPs provenientes da hidrodinâmica. Em comum entre eles, o fato de não possuírem Lagrangiana. Sem estrutura variacional (condição sem a qual o teorema de Noether se torna inviável), estabelecemos, para cada sistema, sua auto-adjunticidade não-linear, para então construirmos leis de conservação (não-triviais) via o NTC de Ibragimov. Nossos resultados contidos no trabalho [15] foram expostos ao longo do Capítulo 2, onde procuramos ilustrar com exemplos próprios cada conceito apresentado. Os trabalhos [14, 16, 17], também de nossa autoria, foram reproduzidos, em ordem de submissão e com pequemas adaptações, nos Capítulos 3, 4 e 5.

Originalmente, Ibragimov introduziu o conceito de auto-adjunticidade estrita. Em trabalhos posteriores, essa noção foi sendo gradativamente generalizada para ampliar as possibilidades de cálculo do NTC. Passando pela quase auto-adjunticidade, a auto-adjunticidade não-linear engloba as definições anteriores e permite a aplicação do método de Ibragimov a um número maior de sistemas de EDPs. Obviamente, o conceito de auto-adjunticidade não-linear pode ser ele próprio generalizado. De fato, podemos considerar substituições φ que dependam não apenas das variáveis x e u, como ainda das derivadas de u até uma certa ordem finita r. Ou seja,

$$\varphi = \varphi(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(r)}).$$

Em trabalhos futuros, pretendemos explorar tal possibilidade.

Como continuidade natural desta tese, pretendemos explorar também o uso de leis de conservação para a obtenção de soluções exatas. Umas dessas técnicas está descrita em [5].

Referências Bibliográficas

[1] VA Silva Junior. *Soluções exatas de EDO's de primeira ordem via simetrias de Lie*. ForSci R Cient IFMG, v 4, p 1-10, (2016).

[2] VA Silva Junior. *Soluções do problema de Liouville-Gelfand via grupos de Lie*. Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, IMECC/UNICAMP, (2015).

[3] GW Bluman, AF Cheviakov, SC Anco. *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*. Springer, New York, (2010).

[4] RS Khamitova. *Symmetries and conservation laws*. Tese de Doutorado em Filosofia, Vaxjo University, (2009).

[5] NH Ibragimov. *Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws*. Arch Alga, v 7/8, p 1-90, (2011).

[6] R Camassa, DD Holm. *An integrable shallow water equation with peaked solitons*. Phys Rev Lett, v 71, p 1661–1664, (1993).

[7] A Constantin, J Escher. *Global existence and blow-up for a shallow water equation*. Ann Scuola Norm Sup Pisa Cl Sci, v 26, p 303–328, (1998).

[8] HR Dullin, GA Gottwald, DD Holm. *On asymptotically equivalent shallow water wave equations*. Phys D, v 190, p 1–14, (2004).

[9] AA Himonas, C Holliman. *The Cauchy problem for the Novikov equation*. Nonlinearity, v 25, p 449–479, (2012).

[10] Z Qiao. *A new integrable equation with cuspons and W/M-shape-peaks solitons*. J Math Phys, v 47, paper 112701-9, (2006).

[11] KAA Silva. *Auto-adjunticidade não-linear e leis de conservação para equações evolutivas sobre superfícies regulares*. Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, IMECC/UNICAMP, (2013).

[12] PJ Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, (1986).

[13] NH Ibragimov. *A new conservation theorem*. J Math Anal Appl, v 333, p 311-328, (2007).

[14] Y Bozhkov, VA Silva Junior. *Group analysis of the generalized Hunter-Saxton system*. J Discontin Nonlinearity Complex, v 6, p 165-171, (2017).

[15] VA Silva Junior. *Conservation laws for a BKP-NNV type system.* CNMAC, IMECC-UNICAMP, (2018). Proc Series SBMAC, (2019). No prelo.

[16] VA Silva Junior. *Lie point symmetries and conservation laws for a class of BBM-KdV systems.* Commun Nonlinear Sci Numer Simul, v 69, p 73-77, (2019).

[17] VA Silva Junior. *Lie point symmetries and conservation laws for a Gardner type system.* Submetido para publicação: Trends Appl Comput Math.

[18] Y Bozhkov, E Mitidieri. *The Noether approach to Pokhozhaev's identities.* Mediterr J Math, v 4, p 383-405, (2007).

[19] GW Bluman, SC Anco. *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations.* Springer, New York, (2002).

[20] GW Bluman, S Kumei. *Symmetries and Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, (1989).

[21] PE Hydon. *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide.* Cambridge University Press, Cambridge, (2000).

[22] LV Ovsyannikov. *Group Analysis of Differential Equations.* Academic Press, New York, (1982).

[23] H Stephani. *Differential Equations: Their Solution Using Symmetries.* Cambridge University Press, Cambridge, (1989).

[24] AH Bhrawy, MA Abdelkawy, S Kumar, A Biswas. *Solitons and other solutions to Kadomtsev-Petviashvili equation of B-type.* Rom J Phys, v 58, p 729-748, (2013).

[25] H Heng-Chun, L Sen-Yue, L Qing-Ping. *Darboux transformation and variable separation approach: the Nizhnik-Novikov-Veselov equation.* Chin Phys Lett, v 20, p 1413-1415, (2013).

[26] PJ Olver. *Conservation laws and null divergences.* Math Proc Camb Phil Soc, v 94, p 529-540, (1983).

[27] ML Gandarias. *Weak self-adjoint differential equations.* J Phys A Math Theor, v 44, p 262001, (2011).

[28] NH Ibragimov. *Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians.* J Math Anal Appl, v 318, p 742-757, (2006).

[29] NH Ibragimov. *Quasi-self-adjoint differential equations.* Arch Alga, v 4, p 55-60, (2007).

[30] NH Ibragimov. *Nonlinear self-adjointness and conservation laws.* J Phys A Math Theor, v 44, p 432002, (2011).

[31] B Moon. *Solitary wave solutions of the generalized two-component Hunter-Saxton system.* Nonlinear Anal, v 89, p 242-249, (2013).

[32] R Ivanov. *Two-component integrable systems modelling shallow water waves: the constant vorticity case.* Wave Motion, v 46, p 389-396, (2009).

[33] JL Bona, M Chen, JC Saut. *Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media. I: derivation and linear theory.* J Nonlinear Sci, v 12, p 283-318, (2002).

[34] JL Bona, M Chen, JC Saut. *Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media. II: the nonlinear theory.* Nonlinearity, v 17, p 925-952, (2004).

[35] TB Benjamin, JL Bona, JJ Mahony. *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems.* Phil Trans R Soc Lond A, v 272, p 47-78, (1972).

[36] DC Antonopoulos, VA Dougalis, DE Mitsotakis. *Numerical solution of Boussinesq systems of the Bona-Smith family.* Appl Numer Math, v 60, p 314-336, (2010).

[37] M Chen. *Exact solutions of various Boussinesq systems.* Appl Math Lett, v 11, p 45-49, (1998).

[38] VA Dougalis, A Duran, MA Lopez-Marcos, DE Mitsotakis. *A numerical study of the stability of solitary waves of the Bona-Smith family of Boussinesq systems.* J Nonlinear Sci, v 17, p 569-607, (2007).

[39] Z Fu, S Liu, S Liu. *New kinds of solutions to Gardner equation.* Chaos Solitons Fractals, v 20, p 301-309, (2004).

[40] L Lin, S Zhu, Y Xu, Y Shi. *Exact solutions of Gardner equations through tanh-coth method.* Appl Math, v 7, p 2374-2381, (2016).

[41] MNB Mohamad. *Exact solutions to the combined KdV and mKdV equation.* Math Methods Appl Sci, v 15, p 73-78, (1992).

[42] A Biswas, S Konar. *Soliton perturbation theory for the compound KdV equation.* Int J Theor Phys, v 46, p 237-243, (2007).

[43] S Hamdi, B Morse, B Halphen, W Schiesser. *Analytical solutions of long nonlinear internal waves: part I.* Nat Hazards, v 57, p 597-607, (2011).

[44] T Minying, W Ruiqi, J Zhujun. *Solitary waves and their bifurcations of KdV like equation with higher order nonlinearity.* Sci China Ser A Math, v 45, p 1255-1267, (2002).

[45] WG Zhang, HW Li, XS Bu, LY Bian. *Orbital stability of solitary waves of compound KdV-type equation.* Acta Math Appl Sin, v 31, p 1033-1042, (2015).

[46] R Hirota, J Satsuma. *Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation.* Phys Lett A, v 85, p 407-408, (1981).

[47] J Satsuma, R Hirota. *A coupled KdV equation is one case of the four-reduction of the KP hierarchy.* J Phys Soc Jpn, v 51, p 3390-3397, (1982).

[48] H Triki, Z Jovanoski, A Biswas. *Dynamics of two-layered shallow water waves with coupled KdV equations*. Rom Rep Phys, v 66, p 251-261, (2014).

[49] JD Wright, A Scheel. *Solitary waves and their linear stability in weakly coupled KdV equations*. Z Angew Math Phys, v 58, p 535-570, (2007).

[50] E Alarcon, J Angulo, JF Montenegro. *Stability and instability of solitary waves for a nonlinear dispersive system*. Nonlinear Anal Theory Methods Appl, v 36, p 1015-1035, (1999).

[51] H Triki, MS Ismail. *Solitary wave solutions for a coupled pair of mKdV equations*. Appl Math Comput, v 217, p 1540-1548, (2010).

Apêndice A

Derivadas de Fréchet

Seja

$$F = (F_1, \dots, F_m), \quad F_\alpha \in \mathcal{A}, \tag{A.1}$$

um m-upla de funções diferenciais. A derivada de Fréchet de F, e sua derivada adjunta, são dadas pelos operadores D_F e D_F^* definidos por

$$(D_F)_{\alpha\beta} = \frac{\partial F_\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_i^\beta} D_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_{ij}^\beta} D_i D_j + \cdots$$

e

$$(D_F^*)_{\beta\alpha} = \frac{\partial F_\alpha}{\partial u^\beta} - \left[D_i \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_i^\beta} \right) + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_i^\beta} D_i \right] + \left[D_i D_j \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_{ij}^\beta} \right) + 2 D_i \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_{ij}^\beta} \right) D_j + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_{ij}^\beta} D_i D_j \right] - \cdots,$$

onde $\alpha, \beta = 1, \dots, m$. Conforme critério fornecido em [12, Theorem 5.68], um sistema de equações diferenciais

$$F_\alpha(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(r)}) = 0, \quad F_\alpha \in \mathcal{A}, \quad \alpha = 1, \dots, m$$

possui Lagrangiana se, e somente se, sua derivada de Fréchet D_F for auto-adjunta: $D_F = D_F^*$.

A.1 O Sistema do Capítulo 3

No Capítulo 3, trabalhamos com o sistema

$$F_1 \equiv u_{txx} + \sigma u u_{xxx} + \kappa u_x u_{xx} - v v_x + \epsilon u_x = 0, \tag{A.2a}$$

$$F_2 \equiv v_t + (uv)_x = 0, \tag{A.2b}$$

onde $u = u(t, x)$ e $v = v(t, x)$. Tomando $(u, v) = (u^1, v^1)$, como

$$(D_F)_{11} = D_t D_x^2 + \sigma(u D_x^3 + u_{xxx}) + \kappa(u_x D_x + u_{xx}) D_x + \epsilon D_x, \tag{A.3a}$$

$$(D_F)_{12} = -(v D_x + v_x), \tag{A.3b}$$

$$(D_F)_{21} = v D_x + v_x, \tag{A.3c}$$

$$(D_F)_{22} = D_t + u D_x + u_x \tag{A.3d}$$

e

$$(D_F^*)_{11} = -D_tD_x^2 - \sigma[uD_x^2 + 3(u_xD_x + u_{xx})]D_x + \kappa(u_xD_x + u_{xx})D_x - \epsilon D_x, \tag{A.4a}$$
$$(D_F^*)_{12} = -vD_x, \tag{A.4b}$$
$$(D_F^*)_{21} = vD_x, \tag{A.4c}$$
$$(D_F^*)_{22} = -(D_t + uD_x), \tag{A.4d}$$

de (A.3) e (A.4), segue que $D_F \neq D_F^*$. Portanto, o sistema (A.2) não possui Lagrangiana.

A.2 O Sistema do Capítulo 4

No Capítulo 4, trabalhamos com o sistema

$$F_1 \equiv u_t + (a+b)vu_x + (au+c)v_x + \epsilon u_{txx} + \kappa v_{xxx} = 0, \tag{A.5a}$$
$$F_2 \equiv v_t + (bu+c)u_x + (a+b)vv_x + \lambda u_{xxx} + \sigma v_{txx} = 0, \tag{A.5b}$$

onde $u = u(t,x)$ e $v = v(t,x)$. Tomando $(u,v) = (u^1, v^1)$, como

$$(D_F)_{11} = (1 + \epsilon D_x^2)D_t + (a+b)vD_x + av_x, \tag{A.6a}$$
$$(D_F)_{12} = [(au+c) + \kappa D_x^2]D_x + (a+b)u_x, \tag{A.6b}$$
$$(D_F)_{21} = [(bu+c) + \lambda D_x^2]D_x + bu_x, \tag{A.6c}$$
$$(D_F)_{22} = (1 + \sigma D_x^2)D_t + (a+b)vD_x + (a+b)v_x \tag{A.6d}$$

e

$$(D_F^*)_{11} = -[(1 + \epsilon D_x^2)D_t + (a+b)vD_x + bv_x], \tag{A.7a}$$
$$(D_F^*)_{12} = -[(bu+c) + \lambda D_x^2]D_x, \tag{A.7b}$$
$$(D_F^*)_{21} = -[(au+c) + \kappa D_x^2]D_x + bu_x, \tag{A.7c}$$
$$(D_F^*)_{22} = -[(1 + \sigma D_x^2)D_t + (a+b)vD_x], \tag{A.7d}$$

de (A.6) e (A.7), segue que $D_F \neq D_F^*$. Portanto, o sistema (A.5) não possui Lagrangiana.

A.3 O Sistema do Capítulo 5

No Capítulo 5, trabalhamos com o sistema

$$F_1 \equiv u_t + a[(u^p + v^p)u]_x + b[(uv)^p v]_x + cu_{xxx} = 0, \tag{A.8a}$$
$$F_2 \equiv v_t + a[(u^p + v^p)v]_x + b[(uv)^p u]_x + cv_{xxx} = 0, \tag{A.8b}$$

onde $u = u(t,x)$ e $v = v(t,x)$. Tomando $(u,v) = (u^1, v^1)$ e

$$f(u,v) \equiv a(u^p + v^p)u + b(uv)^p v,$$
$$g(u,v) \equiv a(u^p + v^p)v + b(uv)^p u,$$

como

$$(D_F)_{11} = D_t + (f_u + cD_x^2)D_x + f_{uu}u_x + f_{uv}v_x, \tag{A.9a}$$
$$(D_F)_{12} = f_v D_x + f_{uv}u_x + f_{vv}v_x, \tag{A.9b}$$
$$(D_F)_{21} = g_u D_x + g_{uu}u_x + g_{uv}v_x, \tag{A.9c}$$
$$(D_F)_{22} = D_t + (g_v + cD_x^2)D_x + g_{uv}u_x + g_{vv}v_x \tag{A.9d}$$

e

$$(D_F^*)_{11} = -[D_t + (f_u + cD_x^2)D_x], \tag{A.10a}$$
$$(D_F^*)_{12} = -g_u D_x, \tag{A.10b}$$
$$(D_F^*)_{21} = -f_v D_x, \tag{A.10c}$$
$$(D_F^*)_{22} = -[D_t + (g_v + cD_x^2)D_x], \tag{A.10d}$$

de (A.9) e (A.10), segue que $D_F \neq D_F^*$. Portanto, o sistema (A.8) não possui Lagrangiana.