GIOVANNI DA SILVA DE QUEIROZ

SOBRE A DUALIDADE ENTRE INTUICIONISMO E PARACONSISTÊNCIA

GIOVANNI DA SILVA DE QUEIROZ

SOBRE A DUALIDADE ENTRE INTUICIONISMO E PARACONSISTÊNCIA

GIOVANNI DA SILVA DE QUEIROZ

SOBRE A DUALIDADE ENTRE INTUICIONISMO E PARACONSISTÊNCIA

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas, sob orientação da Profa. Dra. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano.

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 29/04/1998.

Banca:

Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano - orientadora

Prof. Dr. Elias Humberto Alves

Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa

Prof. Dr. Jairo José da Silva

Prof. Dr. Paulo A. S. Veloso

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli - suplente

Prof. Dr. José Carlos Cifuentes - suplente

Prof. Dr. Décio Krause – suplente

Abril/1998

Seria impossível este trabalho se não tivesse contado com o carinho, o apoio, a cumplicidade, a hospitalidade, o partilhar cotidiano, as discussões de Elias Humberto Alves; sua família foi também a minha nesses anos de Unicamp; a Elias, a Maria Inês, a Humberto, a Renato e Elaine, meus mais profundos agradecimentos.

Ao Prof. Dr. Antonio Mário A. Sette

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Uma teoria formal *T*, em cuja linguagem aparece um símbolo para a negação, é *inconsistente* se existe uma fórmula tal que ela e sua negação são ambas deriváveis na teoria; uma teoria é *trivial* se toda fórmula na linguagem de *T* é derivável em *T*. Uma lógica é *paraconsistente* se pode ser usada como lógica subjacente a teorias inconsistentes, mas não triviais.

A lógica paraconsistente surge no início da década de 60, com os trabalhos de N. C. A. da Costa; a idéia de uma lógica paraconsistente pode ser creditada também a S. Jaškowski, por trabalhos publicados em 1948 e 1949, mas cuja importância só veio a ser reconhecida posteriormente, inclusive devido aos trabalhos de N. C. A. da Costa e de seus colaboradores. A questão colocada por tais lógicos é a seguinte: como construir sistemas que sirvam como lógica subjacente a teorias que admitam contradições sem serem triviais.

Um dos princípios da lógica clássica, a chamada lei de não-contradição, constitui uma barreira à construção de tais sistemas; o problema é, então, o de contornar ou o de excluir da lógica em consideração uma lei clássica, conhecida como Lei de Duns Scotus, que se pode enunciar de forma bastante simples: de duas premissas contraditórias, pode-se inferir validamente qualquer conclusão. Portanto, na lógica clássica, teorias inconsistentes são, de imediato, triviais.

Entretanto, contradições ocorrem em diversas situações e é interessante dispor de um instrumental adequado para o seu tratamento.

Enquanto a lógica paraconsistente "insurge-se" contra o princípio de não-contradição, a lógica intuicionista rejeita um outro princípio da lógica clássica, o princípio do terceiro excluído. Sistemas intuicionistas visam capturar as idéias e as considerações de natureza filosófica de L.E.J.Brouwer. A motivação central dessas considerações é a de construtibilidade e de prova. Um objeto matemático existe se pudermos exibi-lo mediante uma construção que se dá na intuição - na mente - e somente *a posteriori* pode ser formalizada mediante uma linguagem - ou seja, um objeto matemático existe quando se pode exibir uma prova da existência do objeto. Se a linguagem, se um sistema lógico é capaz de efetivamente capturar esse processo mental de construção, ou como o captura, é uma questão difícil de ser resolvida e assaz controversa (ver, por exemplo, [TvD88:cap.16]). O sistema axiomático proposto por A.Heyting em 1930 ou o sistema *LJ* de G.Gentzen (ou o sistema G_1 de Kleene) constituem formulações canônicas da lógica intuicionista (ver [Kle52]).

A lógica paraconsistente, por seu turno, tem uma motivação de ordem pragmática: a construção de sistemas lógicos nos quais se possa analisar contradições ou inconsistências, sem que se chegue a trivialização do sistema. No desenvolvimento de tais sistemas, vários textos apontaram a existência de uma certa dualidade entre a lógica paraconsistente e a lógica intuicionista, seja pela sua forma [LdC84], [LdC86], [PRN89], [Urb96], seja pela semântica envolvida [Syl90], [SeC95], seja pelos esquemas que são válidos num e noutro sistema [AlQ91]. Esta dualidade será pesquisada e efetivamente mostrada neste trabalho, utilizando as álgebras brouwerianas, estudadas por J.C.C.McKinsey e A.Tarski ao final da década de 1940 [McT46], mediante uma função "tradução".

Da lógica intuicionista pode-se dizer que já está bem assentada. Tem uma contraparte semântica algébrica, caracterizada pelas álgebras conhecidas como álgebras de Heyting, uma semântica topológica, conectada aos abertos de um espaço topológico, e a semântica de Kripke, entre outras.

Recentemente, no desenvolvimento da teoria das categorias, o conceito de *topos elementar* veio lançar novo enfoque à lógica intuicionista:

> O conceito unifica, de maneira simples e elegante, um número importante, mas aparentemente diverso, de noções da geometria algébrica, teoria dos conjuntos e lógica intuicionista, estabelecendo um novo vínculo entre a matemática clássica e a matemática

construtiva. [Bel82:293]

Com efeito, pode-se mostrar que a lógica interna de um *topos* arbitrário não é a lógica clássica, mas a lógica intuicionista. Todo esse desenvolvimento mostrou-se profícuo, não apenas para a compreensão da lógica intuicionista, mas no desenvolvimento de técnicas matematicamente interessantes. Uma interpretação dos conectivos intuicionistas - conhecida como interpretação BHK - permite conectar a lógica intuicionista a processos computacionais, de modo que explorar a dualidade entre intuicionismo e paraconsistência aponta àqueles que trabalham com lógica paraconsistente uma série de técnicas e métodos já disponíveis, assim como proporciona uma nova visão da lógica paraconsistente.

A noção de dualidade é freqüente em vários domínios da lógica e da matemática. Nós apresentaremos duas noções de dualidade bastante conhecidas e usadas na literatura. Indicaremos de que modo a estamos tomando, após mostrarmos como o tema da dualidade foi apontado na literatura da lógica paraconsistente. Em nossa formulação, está implícito um conceito de tradução entre lógicas, que também discutimos.

A primeira destas noções de dualidade aparece em [McT46:159-161] na forma de apêndice.

Outra abordagem acerca da noção de dualidade advém da teoria das categorias e está exposta de modo rigoroso em [Hat68:273-275].

Ainda sobre a noção de dualidade, vale o registro de um comentário que se encontra em [Kle52]. Na apresentação do sistema G_1, Kleene refere-se às regras para $\wedge$ e $\vee$ como duais uma da outra, e às regras da negação $\neg$, como autoduais. Encontra-se ainda, com freqüência na literatura, a menção de que a definição de filtro é dual à definição de ideal.

Isto posto, examinamos no presente trabalho algumas relações entre intuicionismo e paraconsistência, de modo especial a dualidade entre ambos, apontada em vários textos. O aparato que nos propicia o exame desta dualidade advém de uma classe de álgebras conhecida na literatura como álgebras brouwerianas. Tais álgebras são duais das álgebras de Heyting, conhecidas como contraparte semântica da lógica intuicionista. As álgebras de Brouwer permitem que se construam algumas lógicas que satisfazem os requisitos de uma lógica paraconsistente.

Se uma tal dualidade existe, os métodos e as técnicas já disponíveis para a lógica intuicionista, bem como para a lógica paraconsistente, podem ser utilizados por aqueles que trabalham com tais sistemas e se dispõe, assim, de um aparato comum para a compreensão destas duas classes de sistemas.

Neste trabalho, mostramos apenas alguns aspectos envolvidos nesta questão: que algumas possibilidades são frutíferas, que algumas direções podem ser seguidas e que há limitações que impedem uma afirmação cabal da dualidade, entre intuicionismo e paraconsistência, declarada em vários textos.

No Capítulo I, apresentamos alguns trabalhos de Karl Popper relacionados a um "cálculo intuicionista dual" e mostramos que as ferramentas utilizadas pelo filósofo poderiam ter servido para a construção de lógicas paraconsistentes.

O Capítulo II mostra que, no desenvolvimento da lógica paraconsistente, há uma constante menção de uma certa dualidade com a lógica intuicionista e que esta questão merece ser aprofundada. Neste capítulo, apresentaremos duas noções correntes acerca da dualidade e, partindo do conceito de traduções entre lógicas, apresentamos nossa definição de dualidade entre lógicas.

O Capítulo III introduz e desenvolve os principais resultados das álgebras brouwerianas. Mostramos a dualidade destas com as álgebras de Heyting, mediante uma função bijetiva - aí também apresentamos uma lógica conectada com as álgebras de Brouwer, que chamamos H^d. Além disso, mostramos que esta lógica é paraconsistente, tem uma semântica algébrica e uma semântica de Kripke bastante natural, também dual à semântica de Kripke para a lógica intuicionista. Ao final, introduzimos um cálculo de predicados com igualdade, com base em H^d e, com a semântica de Kripke apropriada, demonstramos um teorema de completude.

O Capítulo IV desenvolve outras direções da lógica dual apresentada no capítulo anterior. Estudamos filtros e ideais numa álgebra de Brouwer e apresentamos uma lógica conectada aos filtros de uma álgebra de Brouwer.

O Capítulo V traz como teorema principal o resultado de que a coleção dos sub-objetos de um objeto particular em determinados *topoi* elementares pode ser vista também como uma álgebra de Brouwer, o que generaliza o resultado do Capítulo III. Também mostramos que a negação definida numa álgebra de Brouwer não pode ser “capturada” pelo objeto valor de verdade; se tal ocorre, a lógica interna do *topos* vem a ser a lógica booleana (portanto, clássica).

O último capítulo retoma uma série de questões levantadas nos capítulos anteriores e avança na discussão da dualidade preconizada entre intuicionismo e paraconsistência.

Este trabalho me foi proposto pelo Prof. Dr. Antônio Mário A. Sette em meados de 1994, por ocasião do I WOLLIC, realizado em Recife-PE, juntamente com outros temas. Enquanto fazia as disciplinas necessárias à minha formação, eu e meu orientador fomos delimitando este tema, que tomou forma de projeto no primeiro semestre de 1996, em seminários regulares, dos quais também tomou parte o Prof. Dr. Elias H. Alves, a quem devo muito das discussões aqui desenvolvidas; o acidente que sofreu o Prof. Sette impede-o, ainda, de verificar o quanto consegui realizar do programa que me propôs. Espero, entretanto, tê-lo, em parte, conseguido.

Em agosto de 1997 tive oportunidade de discutir alguns aspectos do Capítulo V com o Prof. Dr. Gonzalo E. Reyes, da Universidade de Montreal, na ocasião professor visitante da Unicamp (CLE/IFCH). A leitura (e o estudo) de vários de seus trabalhos me enriqueceu muito e me fez compreender algumas das construções que tentava empreender e as razões pelas quais algumas delas eram impossíveis. Pude verificar, também, as relações entre o trabalho que estava desenvolvendo e alguns de seus resultados. Alguns de seus trabalhos referem-se a lógicas relacionadas a operadores brouwerianos ([ReZ96] e [MaR95]). Uma leitura atenta de tais trabalhos, entretanto, mostra que os autores estão interessados em construir lógicas modais numa base (proposicional e de predicados) intuicionista e, assim, seguem outra direção, muito diversa da aqui exposta. Os sistemas trabalhados pelo Prof.Dr. Gonzalo E.Reyes são extensões da lógica intuicionista, e alguns deles podem ser olhados como lógicas intermediárias. Os sistemas que propomos não são extensões da lógica intuicionista, nem lógicas intermediárias, nem lógicas modais.

Minha orientadora atual, Profa. Dra. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano, num momento delicado, assumiu a tarefa de fazer do material que possuía, uma tese de doutorado e me pôs em contato com textos, pessoas, discussões e idéias que modificaram minha forma de ver o que fazia.

CAPÍTULO I

Popper e uma questão

A primeira menção explícita de que, em um "cálculo intuicionista dual", proposições contraditórias não implicariam qualquer conclusão deve ser creditada a Popper. Este capítulo examina esta asserção.

Parece óbvio que não se poderia incluir Karl Popper entre aqueles que defenderiam a idéia de uma lógica paraconsistente. Com efeito, uma leitura (mesmo superficial) de "Que é a dialética?", publicado pela primeira vez em *Mind*, **49** (1940) e incluído, com adendo e acréscimos em "*Conjecturas e Refutações"* (1963), revela que o filósofo advoga contra uma pretensão dos preconizadores da lógica dialética - em particular Hegel - qual seja: em sendo as contradições frutíferas, como se observa no desenvolvimento das ciências, dever-se-ia abandonar a lei da não-contradição, e assim também a lógica clássica, e postular uma outra lógica que aceitasse contradições. É necessário precisar que Popper admite que as contradições sejam férteis e produzam o progresso científico, num certo sentido; a aceitação de contradições leva à modificação de teorias contraditórias e, assim, ao progresso intelectual; apontar contradições é o que faz a crítica - "motor principal de qualquer desenvolvimento intelectual. Sem contradições, e sem crítica, não haveria motivos racionais para alterar nossas teorias - em conseqüência, deixaria de haver progresso intelectual" [Pop72:316].

Isso não implica, em absoluto, continua Popper, que se deva abandonar as leis da lógica clássica, mesmo porque a aceitação de contradições implica que qualquer outra afirmativa deva ser aceita como conseqüência, como se sabe dos esquemas válidos da lógica clássica (lei de Duns Scotus) e, assim, a própria crítica - e, portanto, o progresso intelectual - chegaria ao fim.

Após mostrar como o esquema da lógica clássica acima mencionado (Duns Scotus) pode ser validado - de forma bastante intuitiva, Popper afirma:

> Pode-se levantar a questão de saber se essa situação ocorre em qualquer sistema lógico ou se podemos construir uma lógica em que afirmativas contraditórias não impliquem uma conclusão qualquer. Examinei esse assunto para concluir que é possível elaborar uma tal lógica - a qual, contudo, seria muito fraca. Poucas das regras ordinárias de inferência permaneceriam em pé, desaparecendo até mesmo o *modus ponens*, segundo o qual, de uma proposição do tipo "se p, então q", juntamente com p, podemos inferir q. Na minha opinião, um sistema como esse não teria nenhuma utilidade para derivar inferências, embora pudesse apresentar algum interesse para aqueles que se interessam especialmente pela construção de sistemas formais (grifo nosso) [Pop72:321].

Numa nota a este trecho, ainda acrescenta que o sistema aludido é o "cálculo intuicionista dual", que foi objeto de trabalhos por ele publicados em 1948, propondo ainda uma interpretação modal do mesmo.

Os trabalhos a que se refere Popper foram apresentados num encontro em novembro de 1947 e publicados na revista *Proceedings of the Royal Dutch Academy*, **51**(1948), com o título "*On the Theory of Deduction. Part I and II*". Segundo o autor, são frutos de pesquisas realizadas nos dez anos anteriores([1]) - isto cobre, portanto, o período de 1937 a 1947, data da apresentação dos trabalhos. Vamos nos deter, apenas, ao trabalho citado, referindo-nos aos demais quando necessários à compreensão daquele.

O artigo trata da inferência dedutiva ou formal, ou seja, da derivabilidade.

$D(a_1,...,a_n)$ é um predicado da metalinguagem cujo significado é o seguinte: a_1 é derivável de "$a_2,...,a_n$"; com a_i ($1 \leq i \leq$ n) uma sentença, ou

[1] Conforme diz Popper, o texto de 1948 está baseado nos seguintes trabalhos : "*New Foundations for Logic"* (*Mind*, vol.56, **1947**, n.223, p.193-235); "*Logic without Assumptions*" (*Aristot. Soc. Proceedings*, **1947**, p.251-292); "*Functional Logic without Axioms or Primitive Rules of Inference*" (*Kon. Ned.*

proposição, ou uma função proposicional.

A expressão $D(a_1)$ indica que a_1 é *demonstrável*, também denotada por $\vdash a_1$; se se utiliza de quantificadores sobre variáveis proposicionais (observe-se que não sobre indivíduos), pode-se estabelecer que:

$$\vdash a_1 \text{ se, e somente se, } \forall b\ D(a_1,b).$$

Isto é, uma proposição a_1 é demonstrável se é derivável de qualquer outra sentença.

O conceito de proposição refutável também é introduzido. Uma proposição a_1 *é refutável*, em símbolos $\angle a_1$,se, e somente se, dela deriva-se qualquer outra proposição *b.* Em símbolos:

$$\angle a_1 \text{ se, e somente se, } \forall b\ D(b,a_1).$$

Utilizando-se de dois postulados, que Popper chama de Base 1 e Base 2([2]), pode-se mostrar todas as inferências básicas do cálculo proposicional e da quantificação de primeira ordem, constituindo tais bases um sistema completo para tais cálculos.

Os conceitos de demonstrabilidade e refutabilidade podem ser generalizados (ou, como ele chama, relativizados); pode-se ler a expressão $a_1,...,a_n \vdash b_1,...,b_m$ como: "as sentenças $b_1,...,b_m$ são deriváveis a partir das premissas $a_1,...,a_n$" e, intuitivamente, pode-se pensar as premissas como uma conjunção de *n* sentenças e as sentenças $b_1,...,b_m$ como estando numa disjunção de *m* sentenças.

O objetivo desta generalização é óbvio, mostrar a dualidade entre $\vdash$ e $\angle$. Como diz o próprio Popper:

> O conceito (...) pode ser chamado "demonstrabilidade relativa" (ou "refutabilidade relativa") e $a_1, ...,a_n \vdash b_1, ...,b_m$ pode ser lido: 'as

Akademie van Watenschappen, Proceedings of the Section of Sciences, vol.50, **1947**, p.1214-1224).

[2] Os postulados Base 1 e Base 2 não são relevantes para o que se segue. Não os apresentamos aqui.

> sentenças $b_1,...,b_m$ são complementares em relação à demonstrabilidade (ou auto-complementariedade) de todas as sentenças $a_1, ...,a_n$'. Pois é claro (...) que qualquer dos a_i que está na frente de $\vdash$ pode ser omitido, se demonstrável (ou auto-complementar), sem afetar a força da expressão total. Isto mostra que, para n=0, a demonstrabilidade relativa degenera em complementariedade (ou demonstrabilidade) como definido (...).
>
> Uma consideração similar mostra que todo b_i que está após $\vdash$ pode ser omitido, se for refutável ou autocontraditório. Se todos os b_i são omitidos, obtemos, para m=0, uma expressão que é equivalente a D3.2([3]). Isto é, obtemos:
>
> $a_1,...,a_n \vdash$ se, e somente se, $\angle\, a_1,...,a_n$. [Pop48:181]

Popper observa que:

$$a_1, ...,a_n \vdash b_1, ...,b_m$$

se, e somente se,

$$\forall c((b_1/c \wedge ...\wedge b_m/c) \supset a_1, ..., a_n/c),$$

isto é, $b_1, ...,b_m$ é derivável de $a_1, ...,a_n$ se, e somente se, qualquer proposição derivável de $b_1, ...,b_m$ também o é de $a_1, ...,a_n$. Por isso, se $b_1, ...,b_m$ é refutável, então $a_1, ...,a_n$ também é refutável. Popper acrescenta:

> Assim, $a_1,...,a_n \vdash b_1,...,b_m$ pode ser lido de modo alternativo: 'as sentenças $a_1,...,a_n$ são contraditórias, em relação à refutabilidade (ou auto-contradição) de todas as sentenças $b_1,,...,b_m$'. [Pop48:181]

Ainda com relação à dualidade, Popper caracteriza os conectivos $\wedge$ e $\vee$:

$a\wedge b \vdash c$ se, e somente se, $a,b \vdash c$

e

$a \vdash b\vee c$ se, e somente se, $a \vdash b,c$

e introduz um novo "funtor" (conectivo), chamado de *anticondicional* e denotado por $a\not\subset b$, em analogia a (e como dual de) $a\supset b$:

$$a\vdash b\supset c \text{ se, e somente se, } a,b\vdash c$$

e

$$a\not\subset b\vdash c \text{ se, e somente se, } a\vdash b,c.$$

Destas duas caracterizações é possível relacionar os conectivos $\wedge$ e $\vee$ àqueles da implicação e do “anticondicional”:

$$a\vdash b\supset c \text{ se, e somente se, } a\wedge b\vdash c \text{ se, e somente se, } a,b\vdash c$$

$$a\not\subset b\vdash c \text{ se, e somente se, } a\vdash b\vee c \text{ se, e somente se, } a\vdash b,c.$$

Devemos registrar que a caracterização do funtor $\not\subset$ coincide com a definição do operador — numa álgebra com elemento unitário T estudada por McKinsey e Tarski [McT46]; tais álgebras estão relacionadas aos conjuntos fechados de um espaço topológico, sendo denominadas de *álgebras brouwerianas* e se revelam duais às álgebras de Heyting. No Capítulo III estudamos as álgebras brouwerianas e as relacionamos a lógicas paraconsistentes.

A negação é objeto de estudo da Parte II do texto popperiano. Ali, distinguem-se seis negações, com definições e caracterizações próprias a cada uma delas. Vejamos tais negações.

- (Int) Se *a* é uma proposição, a *negação intuicionista* de *a* é denotada por a^i e definida por:

$$a\vdash b^i \text{ se, e somente se, } a,b\vdash;$$

- (Dual) a^m denota a negação dual de a^i, chamada de *negação mínima* e é definida por:

[3] D3.2 é $\angle a_1,\ldots,a_n$ se, e somente se, $\forall b(b, a_1,\ldots,a_n)$.

$a^m \vdash b$ se, e somente se, $\vdash a,b$;

- (Cls) a^k denota a *negação clássica* de a, que é definida por:

$a,b \vdash$ e também $\vdash a,b$;

- (Min) a^j denota a *negação minimal* de a (tal como caracterizada na lógica minimal de Johannson); sua definição é:

Se $a,b \vdash c^j$ então $a,c \vdash b^j$;

- (Esq) a^l denota a *negação à esquerda* de a e tem a seguinte definição:

Se $a,b^l \vdash c$ então $a,c^l \vdash b$;

- (Neu) a^n denota a *negação neutra* de a e é definida por:.

Se $a,b \vdash c$ então $a,c^n \vdash b^n$.

É interessante notar a dualidade entre (Int) e (Dual) e o fato de que ambas constituem a negação clássica (Cls); a negação intuicionista de a, tal como caracterizada, é aquela sentença que, junto com a, leva à trivialização - Popper a chama de "a mais fraca daquelas sentenças que é forte o bastante para contradizer a"; por (Dual), temos que a negação mínima de a é aquela sentença que é complementar de a - nas palavras de Popper, "é a mais forte das sentenças que são fracas o bastante para ser complemento de a"; a negação clássica de a é, então, a sentença que é, ao mesmo tempo, contraditória e complementar a a e, também, pode ser caracterizada por:

(Cls) Se $a,b^k \vdash c^k$ então $a,c \vdash b$,

isto é, $(\neg b \supset \neg c) \supset (c \supset b)$ na notação usual, esquema que pode ser usado como axioma de negação em qualquer axiomática padrão da lógica clássica.

Verificamos, ainda, que as demais negações podem ser melhor caracterizadas através dos seguintes axiomas usuais (que também saem das definições dadas acima):

(Min) $(b \supset \neg c) \supset (c \supset \neg b)$;

(Esq) $(\neg b \supset c) \supset (\neg c \supset b)$;

(Neu) $(b \supset c) \supset (\neg c \supset \neg b)$.

Agora fixemos nossa atenção em a^i e a^m. Na presença dos conectivos $\supset$ e $\not\subset$, Popper mostra as seguintes equivalências (dado que $\vdash a \supset a$ e $a \not\subset a \vdash$):

a^i se, e somente se, $a \supset (a \not\subset a)$,

que é a definição canônica da negação intuicionista, $a^i := a \supset \bot$;

a^m se, e somente se, $(a \supset a) \not\subset a$,

definição que se encontra nos trabalhos de McKinsey e Tarski [McT46] para a negação "brouweriana" $a^m := T — a$. Popper mostra que os seguintes teoremas são válidos acerca da negação intuicionista a^i:

- $(a \supset a^i) \supset a^i$
- $(a^i \supset a) \supset a^{ii}$
- $a \supset a^{ii}$
- $(a \supset b^i) \supset (b \supset a^i)$

ou em notação contemporânea,

- $(a \supset \neg a) \supset \neg a$

- $(\neg a \supset a) \supset \neg \neg a$
- $a \supset \neg \neg a$
- $(a \supset \neg b) \supset (b \supset \neg a)$.

Este último, como ele mesmo chama a atenção, caracteriza a negação minimal de Johannson.

Os seguintes teoremas, não válidos na lógica intuicionista, são demonstráveis:

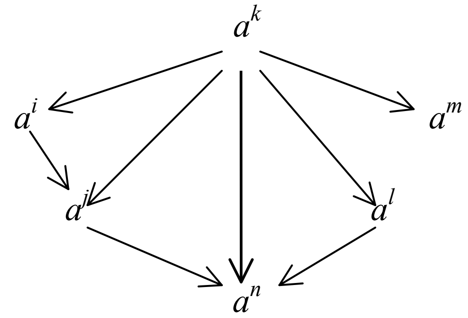
- $a \vee a^m$
- $(a^m \supset a) \supset a$
- $a^{mm} \supset a$
- $(a^m \supset b) \supset (b^m \supset a)$

ou seja,

- $a \vee \neg a$
- $(\neg a \supset a) \supset a$
- $\neg \neg a \supset a$
- $(\neg a \supset b) \supset (\neg b \supset a)$

e aqui também este último caracteriza (Esq).

Popper apresenta o seguinte quadro, que permite estabelecer as relações entre as negações (as flechas indicam como se pode extrair uma negação a partir de uma outra):



Vê-se, claramente, que a negação clássica é a mais “forte” das negações, pois permite que as demais sejam derivadas.

Com relação ao conectivo $\not\subset$ e à negação dual (Dual) a^m Popper, ainda, apresenta a regra dual à regra de inferência *modus ponens*:

$a \vdash a \not\subset b, b$

e dá uma interpretação modal para este sistema. Popper propõe que cada proposição q seja lida como “q é possível”; de "*p* é possível" e de "*não-p* é possível" não se deriva a possibilidade de uma proposição arbitrária *q*.

Popper não se deu conta da fecundidade do sistema e o tomou como “extremamente pobre e sem utilidade”. No Capítulo III nós desenvolveremos uma lógica paraconsistente cuja negação é a^m.

A negação a^m e o conectivo $\not\subset$ constituem-se, assim, em ferramentas chaves para a compreensão da dualidade preconizada entre o intuicionismo e a paraconsistência([4]). Popper, em que pese sua aversão à lógica dialética, deve ser incluído entre aqueles que vislumbraram a possibilidade da lógica paraconsistente, que ele pensava como “lógica intuicionista dual”.

[4] Numa noutra direção, juntando à lógica intuicionista a negação a^m e o conectivo $\not\subset$, Cecylia Rauszer veio a desenvolver uma extensão desta lógica - intitulada H-B lógica. Ver comentário sobre tal trabalho no capítulo seguinte.

CAPÍTULO II

Sobre o conceito de dualidade

Este capítulo trata da noção de dualidade e propõe uma definição para o conceito de dualidade entre sistemas lógicos.

Na Seção 1, mostramos como o conceito de dualidade esteve presente em vários textos e artigos, indicando, assim, um certo caminho a ser explorado.

Na Seção 2, apresentamos duas noções , presentes na literatura, sobre o conceito de dualidade e o conceito de tradução entre lógicas, tal como se encontra em trabalhos recentes que trazem os primeiros resultados de uma teoria geral de traduções entre lógicas. De posse desses resultados, indicamos como entendemos o conceito de dualidade entre lógicas, que motivará as discussões dos capítulos subseqüentes.

2.1. Sobre o tema da dualidade entre intuicionismo e paraconsistência

2.1.1. Os primórdios: os cálculos C_n e os conceitos de paraconsistência e paracompletude

O surgimento da lógica paraconsistente mostrou que é possível construir uma lógica na qual proposições contraditórias não impliquem qualquer conclusão; em verdade, o desenvolvimento da lógica paraconsistente mostra que várias lógicas podem assim ser construídas e que estas não são tão fracas como preconizava Popper. Não nos interessa aqui fazer um histórico deste desenvolvimento - para tanto, indicamos os excelentes trabalhos [Arr80], [PRN89], [DOt90] - mas verificar como o tema da dualidade de uma tal lógica com o intuicionismo foi esboçado, discutido e retomado neste desenvolvimento. O termo "lógicas paraconsistentes" é, inclusive, tardio; foi proposto pelo filósofo peruano Francisco Miró Quesada durante o III Simpósio Latino Americano de Lógica Matemática, realizado na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), São Paulo, em 1976. Qualquer história da lógica paraconsistente concorda que o lógico brasileiro Newton C.A. da Costa é o pioneiro na construção de tais sistemas; em seu trabalho "Sistemas Formais Inconsistentes", apresentado em 1963, ele propõe vários sistemas - em verdade, uma hierarquia deles - que podem servir de base a sistemas dedutivos inconsistentes satisfazendo as seguintes propriedades [Arr80]:

I. Nestes sistemas não é válido, em geral, o esquema $\neg (A \wedge \neg A)$;

II. De duas proposições contraditórias, não se pode deduzir, em geral, qualquer proposição;

III. Nestes cálculos, são válidos o máximo de esquemas e de regras da lógica clássica que não interfiram com as primeiras condições. (Chamaremos a este terceiro critério de "critério de adequação" nas discussões posteriores).

Como esta hierarquia será utilizada em todo este trabalho, embora conhecida, nós a expomos aqui.

A linguagem dos cálculos C_n, $1 \leq n \leq \omega$ contém letras proposicionais e os conectivos clássicos $\neg, \wedge, \vee, \supset$; A^o abrevia a fórmula $\neg (A \wedge \neg A)$; A^n é a abreviação da fórmula $A^{oo...o}$, isto é, da fórmula A seguida n vezes pelo símbolo ^{o}; $A^{(n)}$ é a abreviação da fórmula $A^o \wedge A^1 \wedge ... \wedge A^n$.

Os postulados dos cálculos C_n , $1 \leq n < \omega$, são os seguintes:

1) $A \supset (B \supset A)$

2) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

3) $(A \wedge B) \supset A$

4) $(A \wedge B) \supset B$

5) $A \supset (B \supset (A \wedge B))$

6) $A \supset (A \vee B)$

7) $B \supset (A \vee B)$

8) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$

9) $A, A \supset B / B$

10) $A \vee \neg A$

11) $\neg \neg A \supset A$

12) $B^{(n)} \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$

13) $A^{(n)} \wedge B^{(n)} \supset (A \supset B)^{(n)} \wedge (A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)}$.

Os postulados de C_ω são 1-11.

Como usualmente,

$A \leftrightarrow B =_{def} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Os postulados 1-9, que constituem a base da lógica positiva de Hilbert-Bernays, nós os chamaremos PL. A lógica clássica, que se obtém adicionando aos axiomas dos cálculos C_n , $1 \leq n < \omega$, o esquema $\neg (A \wedge \neg A)$, denotada por C_0 por N.C.A. da Costa, nós denotaremos por CL. A lógica intuicionista, tal qual formalizada por Heyting, será denotada por IL.

Os principais resultados acerca dos sistemas C_n podem ser encontrados em [Alv76].

A semântica e a algebrização dos cálculos C_n permaneceram como problemas em aberto até 1976; uma semântica bivalente foi estabelecida em 1977 [dCA77] e, somente após vários trabalhos relativos ao desenvolvimento destes cálculos, percebemos o interesse sobre o estudo de uma possível dualidade entre paraconsistência e intuicionismo.

Em trabalho publicado em 1984, com o título de "*Paraconsistency, paracompleteness and valuations*", A.Loparic e N.C.A. da Costa definem:

> Uma lógica é paraconsistente se pode ser a lógica subjacente de teorias [não-triviais([5])] que contenham teoremas contraditórios que são ambos verdadeiros. Tais teorias nós chamamos paraconsistentes. [LdC84:120]

Note-se, de passagem, que a definição acima é semântica, apela ao valor de verdade dos teoremas. Similarmente, define-se então o termo paracompletude:

> Um sistema lógico é paracompleto se pode funcionar como lógica subjacente de teorias nas quais existem fórmulas fechadas tais que essas fórmulas e suas negações sejam simultaneamente falsas. Nós chamamos tais teorias paracompletas. [LdC84:121]

Em seguida, como conseqüência, afirmam que teorias paraconsistentes não satisfazem o princípio da não-contradição, qual seja: de duas proposições contraditórias, uma das quais é a negação da outra, uma delas deve ser falsa; por seu turno, teorias paracompletas não satisfazem o princípio do terceiro excluído, formulado como segue: de duas proposições contraditórias, uma delas deve ser verdadeira.

O conceito de paracompletude, proposto em [LdC84], não nos parece adequado. Mesmo para a lógica clássica, pode-se exibir um modelo tal que, uma fórmula e sua negação são simultaneamente falsas.

Mas, a bem da verdade, o conceito vem sendo aplicado àquelas lógicas que não satisfazem o princípio do terceiro excluído e assim tem sido tomado pela tradição (ver, por exemplo, o prefácio de N.C.A. da Costa a [Gra90]). Uma grande classe de lógicas é paracompleta, entre elas a lógica intuicionista. Neste sentido, adotaremos o termo *paracompletude* para indicar as

[5] Observação por nós acrescida ao texto original.

lógicas que não satisfazem o terceiro excluído.

Noutro trabalho publicado em 1986, "*Paraconsistency, paracompleteness and induction*", A. Loparic e N. C. A. da Costa [LdC86] em continuidade ao trabalho anterior, apresentam três lógicas proposicionais β_0, β_1 e β_2.

Os postulados e regras de β_0 são os seguintes:

1) $A \supset (B \supset A)$

2) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

3) $A, (A \supset B) / B$

4) $((A \supset B) \supset A) \supset A$

5) $(A \wedge B) \supset A$

6) $(A \wedge B) \supset B$

7) $A \supset (B \supset (A \wedge B))$

8) $A \supset (A \vee B)$

9) $B \supset (A \vee B)$

10) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$

11) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$.

No Postulado 11, há a restrição seguinte: A e B devem ser moleculares.

Sem a restrição do Postulado 11, β_0 é um sistema da lógica clássica.

A semântica para tal sistema é definida como segue:

Considere-se a função v: FOR $\longrightarrow \{0, 1\}$, com FOR o conjunto das fórmulas de β_0, tal que:

1. $v(A \supset B) = 1$ se, e somente se, $v(A) = 0$ ou $v(B) = 1$

2. $v(A \wedge B) = 1$ se, e somente se, $v(A) = v(B) = 1$

3. v (A $\vee$ B) = 1 se, e somente se, v (A) = 1 ou v (B) = 1

4. v ($\neg$ A) = 1 se, e somente se, v (A) = 0, quando A é molecular.

Mediante esta semântica, é provada a correção e completude deste cálculo.

Mas, note bem: existem valorações v de β_0 tais que v(A) = v ($\neg$ A) = 1 e valorações v' tais que v'(A) = v'($\neg$ A) = 0, com A proposição atômica; na terminologia indicada em [LdC84], β_0 pertence à classe dos cálculos paraconsistentes e também paracompletos.

A lógica proposicional β_1 tem os mesmos postulados que β_0, com a diferença que, no esquema de Axioma 11, A <u>não</u> pode ser atômico, enquanto B o pode. Neste novo sistema, os esquemas

$\neg$ (A $\wedge \neg$ A)

e

A $\supset$ ($\neg$ A $\supset$ B)

são esquemas válidos, porém só o eram em β_0 se B fosse molecular [LdC86:75].

A semântica para o cálculo β_1 tem a seguinte modificação:

4'. v (A) = 1 se, e somente se, v ($\neg$ A) = 0, para toda fórmula A.

Como conseqüência tem-se que, para uma variável proposicional qualquer p, p $\vee \neg$ p não é válido em β_1 e mais: em β_1 existem valorações v para as quais v (p) = v ($\neg$ p) = 0, mas em β_1 nenhuma valoração v' satisfaz v'(p) = v'($\neg$ p) = 1; logo, β_1 é uma lógica paracompleta mas não paraconsistente.

O terceiro sistema, β_2 , tem os mesmos postulados que β_1, com uma única diferença na restrição ao Postulado 11: B não pode ser atômico mas A o pode; com isso, os esquemas

$A \vee \neg A$

e

$\neg (A \wedge \neg A) \supset (A \supset (\neg A \supset B))$

são demonstráveis em β_2 - só o eram em β_1 se A fosse uma fórmula molecular.

A modificação semântica é dada por:

4''. $v(A) = 0$ implica $v(\neg A) = 1$.

Como conseqüência, tem-se que em β_2 o princípio de não-contradição $\neg(p \wedge \neg p)$ não é válido e, assim, β_2 é paraconsistente e não paracompleto.

Quatro notas são importantes de serem evidenciadas:

a) β_2 é equivalente ao sistema P^1 de [Set73];

b) β_2 contém o cálculo C_1 de [dCo93];

c) β_0 , β_1 e β_2 são cálculos polivalentes finitos; β_0 é um cálculo quadrivalente e β_1 e β_2 são trivalentes;

d) E.H.Alves mostrou recentemente [Alv96] que o sistema β_1 é equivalente ao sistema I^1 de [SeC95].

2.1.2. O "rótulo" explícito da dualidade entre a lógica paraconsistente e a lógica intuicionista: R.Sylvan

Em um livro imenso, que cobre desde a história da lógica paraconsistente, passando por sistemas até aplicações e significado filosófico - "*Paraconsistent logic: essays on the inconsistent*" [PRN89], editado por G.Priest, R.Routley e J.Norman e com a colaboração de diversos lógicos, encontramos uma menção explícita da dualidade entre paraconsistência e intuicionismo, ainda que numa nota ao texto "*Systems of paraconsistent logic*" de G.Priest e R.Routley, quando se apresenta o cálculo C_ω de da Costa:

> Assim, vemos que C_ω é, essencialmente, a lógica positiva intuicionista mais o operador 'de negação' - realmente um operador de formar subcontrárias - $\neg$. Como é bem conhecido, nem 7 $[A \vee \neg A]$ nem 8 $[\neg\neg A \supset A]$ são intuicionisticamente válidos, embora seus 'opostos' $\neg(A \wedge \neg A)$ e $A \supset \neg\neg A$ o sejam.
>
> Isso mostra uma simetria determinada entre a negação de C_ω e a da lógica intuicionista [*nota a seguir*] que se adapta bem com a discussão de C_ω (...). Pois a negação intuicionista, plausivelmente, se parece com um operador de formar contrárias (no lugar de um operador de formar contradições): $A \wedge \neg A$ é logicamente falso e $A \vee \neg A$ não é logicamente verdadeiro e a conexão entre a lógica modal e a lógica intuicionista sugere que a negação intuicionista de A deve ser entendida algo como '$\neg\Box A$ é provável' ou 'A nunca será verdadeira'; ambas são as contrárias de A (pelo menos como normalmente se entende). O 'oposto' de um operador de formar contrárias é um operador de formar subcontrárias. E isto é o que afirmamos ser a negação de C_ω. [PRN89:176]

> A nota no texto acima diz, *in verbis*:
>
> *Giving some warrant to the label 'anti-intuitionistic' sometimes applied to logics like the C systems* [PRN89:183, n.54],

embora não diga onde tais "rótulos" podem ser encontrados.

A análise dos cálculos da hierarquia C_n prossegue, argumentando os autores que a exigência de da Costa de que os cálculos devam conter a maior parte dos esquemas e regras da lógica clássica, que não interfiram com os requisitos que fazem sua lógica paraconsistente (critério de adequação), compromete-o com um operador de implicação muito forte, o que é um erro, não somente porque operadores fortes de implicação são irrelevantes, mas porque o levam a um tratamento inadequado da negação; isto implica em os cálculos C_n

rejeitarem a lei da contraposição minimal $[(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)]$. Concluem eles que nem a implicação material, nem a implicação intuicionista, nem a implicação discursiva (advinda dos estudos dos sistemas de Jaškowski), nem a implicação estrita são adequadas para a paraconsistência, advogando em causa da implicação relevante.

O trabalho de R.Sylvan, "*Variations on da Costa C systems and dual-intuitionistic logics: I. Analyses of* C_ω *and* CC_ω" [Syl90] é o primeiro que, explicitamente, fala dos cálculos C_n como anti-intuicionistas, especialmente tomando C_ω e CC_ω como intuicionistas duais. Seu texto inicia - após um elogio a N.C.A. da Costa como fundador, promotor e "*chief early innovator*" da lógica paraconsistente, afirmando que o sistema C_n tem sérios obstáculos, filosóficos e técnicos, e sua contribuição será indicar maneiras de resolver tais deficiências. Entre as falhas, aponta: os cálculos C_n não satisfazem as condições propostas por da Costa - o critério de adequação; não contêm um conectivo primitivo próprio da negação; não têm uma formulação algébrica e semântica elegantes, principalmente porque falham em garantir intersubstituibilidade dos equivalentes, conforme mostrado por C.Mortensen [Mor80]. Afirma ainda que, em alguns casos, tais falhas podem ser contornadas, especialmente para o caso de C_ω e que

> *...there are powerful reasons for weakening the positive bases - Hilbert's positive logic (positive intuitionism) - <u>on which the dual-intuitionistic C system are based</u>*. [Syl90:48, grifo nosso]

Aqui está a primeira menção explícita de que os cálculos C_n são duais do intuicionismo.

Mais adiante, após falar da construção de C_ω, diz explicitamente:

C_ω é, em determinado aspecto, o dual da lógica sentencial in-

> tuicionista *I* (de Heyting). Ambos estendem a lógica positiva *H* (isto é, $C_\omega \backslash \{A \vee \neg A, \neg\neg A \supset A\}$), mas enquanto o intuicionismo rejeita o terceiro excluído e afirma a não-contradição $\neg (A \wedge \neg A)$, o sistema C_ω e os sistemas C_n de da Costa geralmente afirmam o terceiro excluído e rejeitam a não-contradição (este último como requisito de adequação), e enquanto o intuicionismo afirma $A \supset \neg\neg A$ e rejeita DDN $[\neg\neg A \supset A]$, o sistema C_n faz o contrário. [Syl90:49]

Em nota, acrescenta que há profundas razões para a adoção de DDN, dada a lei da negação da negação da dialética; acrescenta ainda que a dualidade e possibilidade de lógicas intuicionistas duais conectadas à dialética foram inicialmente apontadas por Popper, que “entretanto não desenvolveu nenhuma lógica desse tipo e erroneamente concluiu que apenas lógicas extraordinariamente fracas deste tipo eram possíveis” [Syl90:49,n.3].

Já mostramos a importância de Popper com respeito à lógica paraconsistente e, embora tenhamos que concordar com R.Sylvan quanto à referência a Popper, mostraremos que é possível uma lógica absolutamente dual ao intuicionismo que justifica as intuições de Popper, ainda que esta não seja extraordinariamente fraca e tenha contraparte semântica e algébrica “elegantes”.

A dualidade, prossegue R.Sylvan, aparece ainda na semântica: o intuicionismo focaliza situações incompletas mas não inconsistentes, e os sistemas C_n situações inconsistentes mas não incompletas, e se pergunta se não seria adequada uma teoria lógica que se adequasse às situações inconsistentes e incompletas. Já falamos que o sistema β_0 de A.Loparic e N.C.A. da Costa, já referido, satisfaz ambas as exigências.

A construção de C_1, o primeiro cálculo paraconsistente na hierarquia C_n, $1 \leq n \leq \omega$, obedece a uma regra, segundo R.Sylvan: a de que existem fórmulas que devam ter tratamento paraconsistente e as que têm comportamento clássico, ou seja, obedecem à lei de não-contradição; assim, a partir de C_ω, pode-se obter C_1, pelo simples acréscimo de:

$B^0 \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$

e

$A^0 \wedge B^0 \supset (A \supset B)^0 \wedge (A \wedge B)^0 \wedge (A \vee B)^0.$

Mas C_1 exibe algumas “anomalias”, como por exemplo derivar a lei de Peirce $((A \supset B) \supset A) \supset A$, intuicionisticamente inválida (e “injustificável”, segundo o autor) - o que nos leva a perguntar, *en passant*: mas não era esse o objetivo do critério de adequação de N.C.A. da Costa? Porque clama contra tal “anomalia” R.Sylvan após dizer que tal objetivo não era alcançado?

O trabalho de R.Sylvan centra-se então em apontar direções para o melhoramento de C_ω e para a interpretação dos sistemas intuicionistas duais. O principal acréscimo a C_ω é um princípio de intersubstituibilidade de equivalentes (SE):

(SE) $A \supset B, B \supset A \,/\, D(A) \supset D(B)$,

no qual D(A) é alguma fórmula contendo A e D(B) vem de D(A) por substituição de uma (zero ou mais) ocorrência de A por B.

Antes de continuarmos a exposição do texto de R.Sylvan, uma pequena digressão.

Seja D(A//B) o resultado de se trocar algumas ou todas (ou nenhuma) ocorrências de A em D por B. Nós dizemos que uma lógica *L* é *extensional* se é fechada sob a regra de extensionalidade, isto é,

(RE) $A \leftrightarrow B \,/\, D \leftrightarrow D(A//B)$.

Se *L* é uma lógica positiva, isto é, seus conectivos estão entre $\{\wedge, \vee, \supset\}$, então *L* tem RE.

R.Sylvan acrescenta então a C_n

(RC) $A \supset B / \neg B \supset \neg A$

e chama os sistemas resultantes de CC_n , isto é,

$CC_n = C_n + \text{RC}$, para $1 \leq n \leq \omega$.

Como resultado demonstram-se os teoremas seguintes:

Teorema 2.1

Embora $CC_\omega \neq CL$, $CC_n = CL$, *para* $1 \leq n < \omega$.

Teorema 2.2

$\neg (A \wedge \neg A)$ *é demonstrável em* CC_ω.

Isso bloqueia "rotas" de variação dos cálculos C_n : a simples adição do teorema correspondente à regra faz qualquer dos cálculos CC_n, $(1 \leq n \leq \omega)$, inclusive CC_ω, colapsar em CL, pois permite que se derive

$$A \supset B, A \supset \neg B \vdash_{CC_\omega} \neg A ,$$

que é a forma da redução ao absurdo, tendo-se assim o sistema de Kleene para a lógica clássica [Kle52].

R.Sylvan reconhece que há três caminhos para prosseguir: abandonar a lei do terceiro excluído, abandonar a exigência de adequação, ou abandonar RC e

> *therewith the duality of inconsistency and incompleteness.* [Syl90:53]

No seu modo de ver, a exigência de adequação pode ser removida, dado que a investigação da inconsistência não requer que se remova a não-contradição e assim inicia-se a investigação semântica dos cálculos CC_n (diga-se, de passagem, de CC_ω).

A dualidade da paraconsistência com o intuicionismo sugere a análise semântica. Enquanto a negação intuicionista pode ser olhada em termos da impossibilidade modal $\neg \Diamond$, a negação paraconsistente pode ser olhada como não necessidade, isto é, $\neg \Box$ ou, equivalentemente, $\Diamond \neg$. Tal analogia sugere que se defina a valoração da negação paraconsistente como:

$$I(\neg A, a) = 1 \text{ se, e somente se, para algum } b \in K, Sab \text{ e } v(A, b) = 0,$$

com S uma relação binária num conjunto de mundos **K** satisfazendo determinadas condições.

Um CC_n-*modelo* M é uma estrutura $\langle T, K, \leq, S\rangle$, na qual $T \in K$ e $\leq$ e S são relações binárias sobre K, tais que $\leq$ é uma relação de ordem reflexiva e transitiva (opcionalmente antissimétrica) e S satisfaz a condição seguinte:

(si) Se $a \leq c$ e Sab, então Scb.

Uma *valoração v em M* é uma função das variáveis proposicionais e mundos no conjunto $\{0, 1\}$ tal que:

(vi) Se $a \leq b$ e $v(p_i, a) = 1$, então $v(p_i, b) = 1$, para todo $a, b \in K$ e toda variável proposicional p_i $(i \in J)$.

Uma *interpretação* é definida por:

- $I(p_i, a) = v(p_i, a)$;
- $I(A \wedge B, a) = 1$ se, e somente se, $I(A, a) = I(B, a) = 1$;
- $I(A \vee B, a) = 1$ se, e somente se, $I(A, a) = 1$ ou $I(B, a) = 1$;
- $I(A \supset B, a) = 1$ se, e somente se, $\forall b \in K$ tal que $a \leq b$, $I(A, b) = 1$ implica

que I(B, *b*) = 1;

- I(¬ A, *a*) = 1 se, e somente se, $\exists b \in$ K tal que S*ab* e I(A, *b*) = 0.

Tal semântica propicia os seguintes resultados:

Lema 2.3 (da Hereditariedade)

Para todo a, b $\in$ K e toda fórmula A, se a $\leq$ b e I(A, a)=1 então I(A, b)=1.

Teorema 2.4 (da Correção)

Se A é teorema de CC_n ,então A é CC_n-válida.

E mediante modelos canônicos, com definições e lemas apropriados adaptados das provas padrões, pode-se mostrar:

Teorema 2.5 (da Completude)

Se A é CC_n -válida, então A é teorema de CC_n.

Tal semântica geral propicia, nas palavras de Sylvan, "*an unexpectedly elegant semantics*" para CC_ω.

Novas semânticas são apresentadas para C_ω, baseadas na semântica acima, e uma delas particularmente merece ser explanada.

Um C_ω-*modelo desenvolvido* é uma estrutura $\langle$T, K, N, $\leq$, S$\rangle$, com T $\in$ N $\subseteq$ K, $\leq$ uma relação reflexiva e transitiva sobre K (uma pré-ordem) tal que:

a) Se $b \in$ N e $a \leq b$, então $a \in$ N

e

b) Se $b \in$ K\N e $a \leq b$, então $a \in$ K\N

e S uma relação reflexiva e antissimétrica satisfazendo a

si) Se $a \leq c$ e Sab, então Scb.

Assim, esta estrutura estende a estrutura CC_ω, por acessibilidade de mundos adicionais, pela relação S. Valorações e interpretações são as mesmas que para CC_ω, exceto para as regras $\wedge$ e $\vee$, quando $a \notin$ N, isto é, $a \in$ K\N ; neste caso, elas devem ser dualizadas:

I(A $\wedge$ B, a) = 1 se, e somente se, I(A, a) = 1 ou I(B, a) = 1

e

I(A $\vee$ B, a) = 1 se, e somente se, I(A, a) = I(B, a) = 1.

Com isso, se demonstra:

Teorema 2.6

C_ω é correto e completo relativamente a tal semântica.

Finalizando o artigo, R.Sylvan se pergunta se é possível - tal como ocorre em C_1, que permite a distinção entre fórmulas que se comportam classicamente, isto é, obedecem ao princípio de não-contradição, e aquelas que não obedecem a este princípio - fazer tal distinção em CC_ω sem colapsar na lógica clássica. E pergunta, ainda, qual a forma adequada de SE para o sistema

C_n, com n $\neq \omega$? A primeira questão foi investigada por I.Urbas, com resultados negativos; para a segunda, basta observar que a seguinte regra falha:

(EC) $A \supset B, B \supset A / \neg B \supset \neg A$.

Chamemos aos sistemas resultantes de C_n com a regra (EC) de sistemas EC_n, para $1 \leq n \leq \omega$. Para tais sistemas, segundo Sylvan, existe o seguinte resultado:

Lema 2.7 (de Slanley)
Não existem modelos finitos para EC_1 que validam os teoremas, sejam fechados sob regras de inferência e que sejam diferentes dos modelos da lógica clássica.

Os resultados alcançados por R.Sylvan, variando o sistema C_ω, parecem-nos os únicos possíveis nesta direção. Os resultados sobre CC_ω serão retomados no Capítulo VI.

2.1.3. A construção "dual" de C_1

Num trabalho de 1991, "*The construction of the calculi C_n of da Costa*", E.H.Alves e G.Queiroz [AlQ91] mostraram como se pode exibir uma construção de C_1 que é "dual" à construção da lógica intuicionista, rebatendo assim críticas, como as de R.Sylvan, acerca das falhas técnicas e filosóficas e da construção artificial de C_1. Partindo das condições de Tarski para sistemas dedutivos em geral [Tar30] e enfraquecendo a condição imposta à negação clássica, os autores mostram como se pode construir os cálculos MCL - lógica da contraposição minimal, MJL - lógica minimal de Johánsson, IL - lógica intuicionista e CL - lógica clássica, a partir da lógica positiva de Hilbert-Bernays

- PL, apresentando o seguinte quadro:

PL	
	$(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$
MCL	
	$(A \supset \neg A) \supset \neg A$
MJL	
	$A \supset (\neg A \supset B)$
IL	
	$\neg\neg A \supset A$
	CL

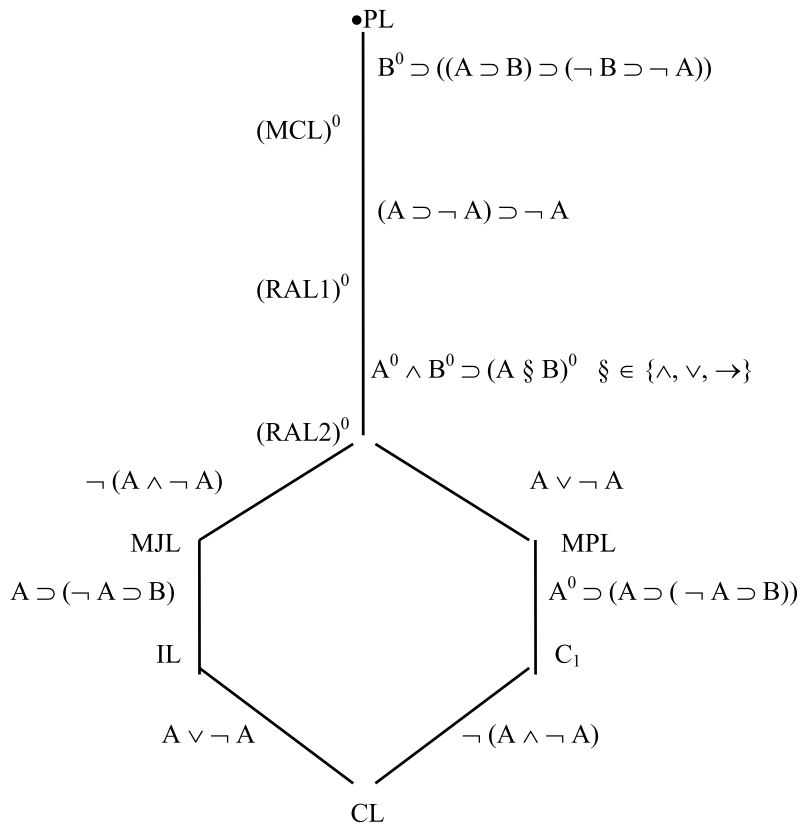
Seja Con(Γ) o conjunto das conseqüências de Γ. Por modificações apropriadas de uma condição geral da negação paraconsistente:

$$(P\neg)\ Con(\{\Gamma, \neg A\}) = FOR \text{ se, e somente se, } A \wedge A^0 \in Con(\Gamma),$$

pode-se construir os cálculos:

$(MCL)^0$ - lógica da contraposição minimal paraconsistente,
$(RAL1)^0$ - lógica da redução ao absurdo minimal paraconsistente,
$(RAL2)^0$ - lógica da redução ao absurdo minimal paraconsistente com expansão do "bom comportamento".

Após este ponto, há que ser tomada uma decisão: ou se escolhe como princípio básico o da não-contradição, isto é, se "aposta" na consistência e então se constroem os cálculos intuicionistas (Johánsson e Heyting); ou se escolhe como princípio básico o terceiro excluído, "apostando-se" na completude e, assim, tem-se os cálculos paraconsistentes minimal e C_1. Isso nos dá o seguinte quadro:



Várias propriedades dos cálculos são apresentadas:

$\vdash_{(RAL1)^0} B^0 \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$

$\vdash_{MPL} A^0 \supset (A \supset (\neg A \supset \neg B))$

$\nvdash_{MPL} A^0 \supset (A \supset (\neg A \supset B))$

$\nvdash_{MPL} A \wedge \neg A \wedge A^0 \supset B$

$\nvdash_{MPL} \neg\neg A \supset A$

$\nvdash_{MPL} ((A \supset B) \supset A) \supset A.$

Além dos subcálculos de C_1 apresentados nesse trabalho, o que é interessante é a afirmação da dualidade na construção de C_1 e da lógica intuicionista.

2.1.4. A "dualidade" entre I^1 e P^1

Esta dualidade foi explorada em artigo recente de A.M.Sette e W.A.Carnielli [SeC95]. Este trabalho parte de P^1 [Set73], um dos sistemas mais simples de lógica paraconsistente, no sentido de que, se lhe acrescentarmos qualquer tautologia clássica (que não é teorema de P^1), se obtém CL. Tal maximalidade de P^1 fá-lo o mais próximo da lógica clássica (não se afirma que seja o único); outra característica é que P^1 tolera inconsistências apenas no nível atômico; se A e $\neg$ A são teoremas de qualquer teoria que tenha P^1 como lógica subjacente então tais fórmulas devem ser atômicas.

Segundo os autores, a idéia básica na formação de P^1 foi adicionar um novo valor de verdade T* aos valores booleanos clássicos T, F, como se se introduzisse uma perturbação na verdade clássica: T e T* diferem apenas com respeito à negação e coincidem nos demais casos; parece, então, natural se pensar em introduzir uma perturbação "dual" na falsidade clássica e assim se constrói I^1.

Os autores definem, então, um cálculo como *fracamente intuicionista* se existe uma fórmula do tipo $A \vee \neg A$ que não é válida.

É mostrado que I^1 é fracamente intuicionista e goza, além disso, da seguinte propriedade: a lei do terceiro excluído é falsa, apenas, para fórmulas atômicas e, também, I^1 é maximal com respeito a CL.

Um cálculo, por outro lado, é *fracamente paraconsistente* se existe uma fórmula do tipo $\neg (A \wedge \neg A)$ que é não válida e, assim, pode-se ver as lógicas fracamente paraconsistentes e fracamente intuicionistas como duais. A dualidade entre I^1 e P^1 revela-se, também, pela maximalidade em relação a CL.

I^1 pode ser caracterizado pela seguinte matriz:

$$M = \langle \{T, F^*, F\}, \{T\}, \neg, \supset \rangle, \text{ com}$$

$\supset$	T	F*	F
T	T	F	F
F*	T	T	T
F	T	T	T

$\neg$	T	F*	F
	F	F	T

e, relativamente a esta semântica, é mostrado que é correto e completo.

É apresentada uma algebrização de I^1, baseada numa algebrização de P^1 publicada anteriormente [LMS90], e sugerida uma hierarquia de cálculos P^n e I^n. Os autores então afirmam:

> As deduções paraconsistentes e intuicionistas, de fato, comportam-se como opostos paradigmáticos, mas de maneira dual, talvez o modo mais intuitivo de vê-las sendo o fato de que as deduções paraconsistentes sejam extremamente liberais e as deduções intuicionistas extremamente conservadoras. [SeC95:201]

E ao final concluem:

> A dualidade (neste caso entre os conceitos intuitivamente opostos de dedução paraconsistente e dedução intuicionista) parece desempenhar um papel forte; parece promissor definir precisamente tal conceito em generalidade e explorar suas conseqüências. [SeC95:202]

2.1.5. As lógicas intuicionistas duais de I.Urbas e a extensão de C.Rauszer

Ainda nesta direção encontra-se o trabalho de I.Urbas [Urb96] intitulado "*Dual-intuitionistic logics*", no qual é apresentado um cálculo de seqüentes - LDJ - que é dual ao cálculo de seqüentes LJ (o cálculo apresentado por Gentzen para a lógica intuicionista [Gen69]), no seguinte sentido: enquanto em LJ a fórmula que aparece no conseqüente é singular, a fórmula que aparece em LDJ é singular no antecedente e, enquanto LJ refuta as mesmas fórmulas que a lógica clássica LK, LDJ tem os mesmos teoremas que a lógica clássica mas não refuta as mesmas fórmulas, em particular, não rejeita todas as contradições e é, portanto, paraconsistente. Várias extensões e fragmentos, tanto de LJ quanto de LDJ, são apresentados, sendo estabelecidas suas relações. Vejamos como.

O seguinte fato é demonstrável acerca de LJ (ver [Kle52:444]):

Teorema 2.8

Se o seqüente $\Gamma \Rightarrow B_1, ..., B_m$ *é demonstrável em LJ, então* $m = 0$ *ou* $m = 1$.

J.Czermark, em [Cze77], apresenta um cálculo de seqüentes, por ele intitulado "*dual-intuitionistic calculus DJ*", para o qual se pode demonstrar o seguinte:

Teorema 2.9

Se o seqüente $B_1, ..., B_m \Rightarrow \Gamma$ *é derivável em DJ, então* $m = 0$ *ou* $m = 1$.

Também prova, acerca de DJ:

Teorema 2.10

Toda fórmula classicamente válida sem quantificador existencial ou implicação é derivável em DJ.

O teorema acima vale se tomarmos uma axiomática para a lógica clássica de primeira ordem com o conectivo de implicação $A \supset B$ pensado como $\neg A \vee B$. O que I.Urbas faz, em seu artigo, é generalizar este resultado, pois LDJ tem regras apropriadas para "$\supset$" e "$\exists$"; para tanto, utilizando uma terminologia que se encontra em [Cur76], o autor divide as regras para a implicação em:

Regra Ketoniana

$$\frac{A \Rightarrow \Delta, B}{\Rightarrow \Delta, A \supset B}$$

Regras não-Ketonianas

$$\frac{A \Rightarrow \Delta}{\Rightarrow \Delta, A \supset B}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \supset B}$$

($\Gamma = \emptyset$ ou $\Gamma = \{B\}$, para algum B).

Noutras palavras, uma regra "ketoniana" apresenta, de forma explícita, os constituintes do conectivo introduzido, enquanto numa regra não-ketoniana isso não ocorre. O autor comenta que as regras da lógica clássica podem ser formuladas usando ambas as formas, indiferentemente, para as regras de $\wedge$-introdução no antecedente de um seqüente, ou para a introdução dos conectivos $\supset$ e $\vee$, no conseqüente de um seqüente. Mas esta diferença torna-se crucial quando se exige que a singularidade seja considerada. Por exemplo, a regra ketoniana para a $\vee$-introdução no conseqüente é

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \quad ,$$

mas não foi esta a forma utilizada por Gentzen [Gen69], e sim a forma não-ketoniana

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \quad ,$$

que é a que possibilita a restrição da singularidade no conseqüente, como exigido para LJ.

Quando se trata da $\supset$-introdução, o poder dedutivo dos sistemas varia de acordo com as regras empregadas; em LJ - formulado com as regras ketonianas - as regras não-ketonianas podem ser derivadas, mas não ocorre o contrário, isto é, não se deriva a regra ketoniana se LJ for formulado com as regras não-ketonianas; de modo dual, a regra ketoniana pode ser derivada em LDJ, mas as regras não-ketonianas não podem ser derivadas, se LDJ for formulado com a regra ketoniana. LDJ é apresentado, então, com as regras não-ketonianas para a $\supset$-introdução no conseqüente. O resultado de I.Urbas é a formulação dual do teorema de Glivenko ([Gli29] - $\Rightarrow \neg A$ é derivável em LJ se, e somente se, $\Rightarrow \neg$ A é derivável em LK):

Teorema 2.11

LDJ tem os mesmos teoremas sentenciais que LK.

Para fórmulas envolvendo quantificadores, I.Urbas apresenta extensões de LDJ e LJ, acrescentando o conectivo "—", obtém os sistemas LDJ[—] e LJ[—] e, através de uma função * (de [Cze77]), mostra:

Teorema 2.12

*A função * é um isomorfismo tal que, S é um seqüente derivável em LDJ[—] se, e somente se, S* é derivável em LJ[—]. Além disso, * é uma involução, isto é, S** = S.*

A função * permite relacionar vários cálculos. Usando o símbolo "⊃/" para indicar fragmentos que não envolvam o conectivo "⊃" tem-se o seguinte quadro, no qual linhas cheias indicam extensões próprias, linhas quebradas definições extensionais (A ⊃ B é definido como ¬A ∨ B e A — B é definido como A ∧ ¬B), linhas horizontais de * indicam os sistemas duais, de acordo com a função * :

LDJ[—] ******** LJ[—]

LDJ[—, ⊃/] ******** LJ[—]   LDJ[—] ******** LJ[—,⊃/]

LDJ[⊃/]******** LJ[⊃/]

Segue-se que a lógica dual de LJ, de acordo com a função ***,** é LDJ[—, ⊃/], isto é, LDJ mais o conectivo "—" e sem o conectivo "⊃".

A seguir o autor mostra um teorema de eliminação do corte para LJ[—], do qual se seguem um teorema de eliminação do corte e a decidibilidade para LDJ[—], e esquemas deriváveis e não deriváveis em LDJ (e em LDJ[—]). Entre as fórmulas não deriváveis, encontra-se a fórmula ¬∃x(Fx ∧ ¬Fx), válida em LK, e assim, o teorema dual de Glivenko pode ser estendido para fórmulas que envolvam o quantificador universal, mas não para aquelas que envolvam o quantificador existencial.

Após análise do conectivo “$\supset$” em LDJ, I.Urbas argumenta que, embora o conjunto dos teoremas deste sistema seja fechado sob *modus ponens*, teorias baseadas neste, em geral, não o são.

Buscando interpretar o conectivo “—”, adicionado a LDJ, o autor sugere que a fórmula “A — B” seja lida como “A exclui B”, que entende mais natural pois, enquanto A implica B quando o conteúdo lógico de A pode ser incluído no de B, dualmente, A exclui B quando o conteúdo de A não pode ser incluído no de B.

Embora o autor afirme:

> *there can be no standard axiomatics for our dual-intuicionistic systems, in (strong) sense that A | B is a derivable rule in the axiomatics if and only if A $\Rightarrow$ B is derivable in the sequent system* [Urb96:450],

é possível, entretanto, uma formulação axiomática de LJ[—].

Não é mencionado pelo autor, mas C.Rauszer, estudando álgebras brouwerianas, desenvolveu uma extensão da lógica intuicionista a elas relacionadas, para a qual apresenta uma axiomática, que vem a ser uma axiomática para LJ[—].

Estamos falando dos trabalhos [Rau74] e [Rau80]. C.Rauszer chama de *álgebra semi-booleana* à estrutura $\Im = \langle A, \cup, \cap, \to, \text{—}, \urcorner, \ulcorner \rangle$ na qual:

1. $\langle A, \cup, \cap, \to, \urcorner \rangle$ é uma álgebra *pseudo-booleana* (uma álgebra de Heyting)

e

2. $\langle A, \cup, \cap, \text{—}, \ulcorner \rangle$ é uma *álgebra brouweriana*.

A partir do estudo de tais álgebras, a autora apresenta uma semântica para um cálculo proposicional e de predicados, que chama de *H-B lógica*, cujos axiomas são (no caso proposicional):

1) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$

2) $A \supset (A \vee B)$

3) $B \supset (A \vee B)$

4) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$

5) $(A \wedge B) \supset A$

6) $(A \wedge B) \supset B$

7) $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \wedge B))$

8) $((A \wedge B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$

9) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \wedge B) \supset C))$

10) $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$

11) $A \supset (B \vee (A \text{—} B))$

12) $(A \text{—} B) \supset \ulcorner (A \supset B)$

13) $((A \text{—} B) \text{—} C) \supset (A \text{—} (B \vee C))$

14) $\neg (A \text{—} B) \supset (A \supset B)$

15) $(A \supset (B \text{—} B)) \supset \neg A$

16) $\neg A \supset (A \supset (B \text{—} B))$

17) $((B \supset B) \text{—} A) \supset \ulcorner A$

18) $\ulcorner A \supset ((B \supset B) \text{—} A)$,

com as regras *modus ponens*

e

(r) $A \,/\, \neg \ulcorner A$.

A álgebra quociente das fórmulas da linguagem de H-B pela relação de congruência usual ($A \approx B$ se, e somente se, $A \supset B$ e $B \supset A$ são teoremas de H-B), $< Fla(\text{H-B})/\approx, \cup, \cap, \rightarrow, —, ⅂, ┌ >$, é uma álgebra semi-booleana e um teorema de completude é demonstrado. O cálculo de predicados H-B resulta da adição, aos axiomas proposicionais, dos axiomas usuais do cálculo de predicados intuicionista e das regras deste cálculo. C.Rauszer desenvolve uma semântica de Kripke para o cálculo de predicados H-B, demonstra alguns resultados de teoria dos modelos e mostra que os modelos de Kripke apresentados (sem as condições que caracterizam as operações — e ┌) são do mesmo tipo que os modelos para uma determinada lógica intermediária - a lógica DI (atualmente conhecida como CD-lógica, ver [TvD86]).

A lógica DI é obtida adicionando-se aos axiomas da lógica intuicionista o esquema

$$\forall x(A(x) \vee B) \supset (\forall x\, A(x) \vee B),$$

no qual x não ocorre livre em B que, como é sabido, não vale no cálculo de predicados intuicionista. Sua adição exige que se trabalhe com modelos de Kripke com domínios constantes.

Apenas para registro, em [MaR95], está desenvolvida a teoria dos modelos, em teoria das categorias, para o cálculo de predicados H-B.

2.2. Traduções entre lógicas e o conceito de dualidade

De tudo o que foi exposto, vê-se que é abundante, na literatura , o tema da dualidade com a lógica intuicionista, em alguns casos sendo explicitamente mencionada a lógica paraconsistente, embora nenhum estudo sistemático tenha sido realizado. Partindo dos trabalhos que A.Tarski e J.C.C.McKinsey realizaram no final dos anos quarenta, ao estudar álgebras duais às álgebras de Heyting, por eles chamadas de álgebras brouwerianas([6]), nossa motivação foi retomar tais álgebras, verificar a quais lógicas estão elas relacionadas e, dualizando a lógica intuicionista e sua semântica (algébrica e modelos de Kripke), buscar caracterizar aquela relação. Mas precisamos definir, claramente, o que entendemos por dualidade. É o que faremos a seguir.

Apresentaremos, agora, o conceito de dualidade tal como se encontra em [McT46]. Em seguida, o conceito de dualidade advindo da teoria das categorias e, após discutirmos, brevemente, o conceito de tradução entre lógicas proposto por da Silva, D'Ottaviano e Sette [dSD97 e DSdS97], apresentamos nosso conceito de dualidade entre lógicas.

O conceito de dualidade de J.C.C.McKinsey e A.Tarski aplica-se a álgebras.

Tome-se a classe $\Im$ de álgebras similares.

Seja $\Delta = \langle D, \theta_1, ..., \theta_n \rangle$ uma álgebra desta classe e tome-se $\langle k_1, ..., k_n \rangle$ uma permutação não-idêntica dos primeiros **n** inteiros positivos. A classe $\Im$ é *fracamente dual* sob a permutação $\langle k_1, ..., k_n \rangle$ se, e somente se, sempre que $\Delta = \langle D, \theta_1, ..., \theta_n \rangle \in \Im$ então $\Delta^d = \langle D, \theta_{k1},..., \theta_{kn} \rangle \in \Im$. Neste caso, diz-se que Δ e Δ^d são álgebras *duais*. Na prática, acrescentam os autores, $\langle k_1, ..., k_n \rangle$ é uma involução: $i = k_{ki}$, para todo $i = 1,...,n$; pode-se então chamar os operadores θ_i e θ_{ki} de *duais* e, se $i = k_i$, então θ_i é dito ser um operador *autodual*.

Um exemplo desta classe de álgebras é a classe dos reticulados *RET*. Cada álgebra em *RET* é da forma $\langle L, \cap , \cup \rangle$, e *RET* é fracamente dual sob $\langle 2, 1 \rangle$.

Uma classe $\Im$ de álgebras é *fortemente dual* sob uma permutação $\langle k_1, ..., k_n \rangle$ se toda álgebra $\Delta = \langle D, \theta_1, ..., \theta_n \rangle$ em $\Im$ é isomorfa a $\Delta^d = \langle D,$

[6] Para a razão do nome, ver o artigo de J.C.C.MacKinsey e A. Tarski [McT46].

$\theta_{k1}, ..., \theta_{kn}$ >. Δ e Δ^d são ditas serem *fortemente duais*.

Um exemplo dessa classe é a classe das álgebras booleanas B = < B, $\cup$, $\cap$ >, seja nesta forma - a permutação é então <2, 1> , ou na forma B = < B, $\cup$, $\cap$, $\neg$ > - neste caso, a permutação é <2,1,3>. Em ambos os casos, a função f(x) = $\neg$x define um isomorfismo entre B e B^d .

Nota-se, claramente, que se uma classe de álgebras é fortemente dual sob uma dada permutação, então é fracamente dual, não valendo a proposição contrária (o exemplo é, novamente, a classe dos reticulados).

Em [Hat68] encontra-se a noção de dualidade tal como usual em teoria das categorias. Nesse livro, a apresentação da teoria das categorias é feita numa linguagem de primeira ordem; o sistema **C** é uma teoria de primeira ordem com igualdade, cujos símbolos não lógicos são uma letra de predicado ternária K, em que K(x, y, z) significa intuitivamente "z é a composição de x com y", e dois símbolos funcionais unários D e C, com D(x) significando, intuitivamente, "domínio de x" e C(x), "codomínio de x". Seis axiomas definem a teoria **C**.

Para precisar a noção de dualidade, o autor supõe que se tenha um modelo ***M*** da linguagem de primeira ordem **C** e supõe que se construa, a partir de ***M***, um outro modelo $\boldsymbol{M^{op}}$, do seguinte modo: o domínio de $\boldsymbol{M^{op}}$ é o domínio de ***M***; para cada tripla <x, y, z> de elementos de $\boldsymbol{M^{op}}$, K^M(x, y, z) vale se, e somente se, K#(y, x, z) vale em ***M*** (K^M e K# são as interpretações de K em $\boldsymbol{M^{op}}$ e em ***M***, respectivamente); para cada par <x, y> de elementos de $\boldsymbol{M^{op}}$, D'(x) = y se, e somente se, C#(x) = y e C'(x) = y se, e somente se, D#(x) = y , na qual D', C', D# e C# representam as interpretações de D e C em $\boldsymbol{M^{op}}$ e ***M***, respectivamente. Verifica-se, assim, que $\boldsymbol{M^{op}}$ é um modelo de **C** se, e somente se, ***M*** é um modelo de **C.** $\boldsymbol{M^{op}}$ é chamada a *categoria dual* de ***M***.

Tais noções de dualidade motivam a definição que propomos adiante. Antes, porém, faz-se necessário precisar o conceito de traduções entre lógicas.

Traduções entre lógicas têm sido objeto de trabalhos recentes, que recuperam a história do conceito, apresentam definições adequadas e gerais para o conceito de tradução, unificando vários conceitos já propostos, e avançam em direção a um tratamento categórico do conceito de tradução (entre lógicas); ver, para tanto, [DSdS97], [dSDS97], [dOF97] e [Fei97]. Os primeiros resultados de uma teoria geral de traduções podem ser encontrados nos trabalhos mencionados.

Uma *lógica* L, conforme os autores, é um par $L = <$ F, Con $>$, no qual F é um conjunto qualquer e Con, um operador de conseqüência em F. Para o que nos interessa, F é um conjunto de fórmulas de uma linguagem formal e Con, um operador de conseqüência estrutural e finitário sobre L (ver [Fei97] para as definições).

Dadas duas lógicas L_1 e L_2, uma *tradução* de L_1 em L_2 é uma aplicação $T : F_1 \longrightarrow F_2$, $L_1 = < F_1, Con_1 >$ e $L_2 = < F_2, Con_2 >$, tal que, para $\Gamma \subseteq F_1$,

se $A \in Con_1(\Gamma)$, então $T(A) \in Con_2(T(\Gamma))$.

Uma tradução é *conservativa* se vale a implicação contrária, isto é,

$A \in Con_1(\Gamma)$ se, e somente se, $T(A) \in Con_2(T(\Gamma))$.

Uma tradução é *esquemática* se é definida por esquemas, isto é, se existem esquemas de fórmulas de L_2, um que define o valor de T para fórmulas atômicas de L_1 e um para cada símbolo lógico θ de L_1, T sendo definida indutivamente para fórmulas que têm como símbolo principal o conectivo θ.

Quando L_1 e L_2 têm o mesmo conjunto de variáveis, se $T(p) = p$, dizemos que a tradução T é *literal relativamente a variáveis*.

Uma tradução esquemática T é *literal relativamente a um conectivo* θ de L_1, se

$T(\theta(\alpha_1, ..., \alpha_k)) = \theta(T(\alpha_1), ..., T(\alpha_k))$.

A seguir, propomos uma definição para o conceito de dualidade entre lógicas, que nos parece mais geral que as encontradas na literatura.

Definição 2.13

Dadas duas lógicas L_1 = < F_1, Con_1> e L_2 = < F_1, Con_2>, com o mesmo conjunto de variáveis, dizemos que L_2 é *dual* de L_1 se existe uma tradução T: $F_1 \longrightarrow F_2$, tal que T é conservativa, esquemática, literal relativamente às variáveis e tal que a função T seja bijetora.

H.Feitosa [Fei97] apresenta um estudo cuidadoso desses conceitos com a introdução de vários exemplos elucidativos.

Podemos pensar lógicas como pares S = <*Fla(L),* R_j>,$1 \leq j \leq m$, nos quais *Fla(L)* é o conjunto de fórmulas bem formadas de uma linguagem *L* e R_j um conjunto de regras, isto é, para cada **j**, $R_j \subseteq \mathcal{P}(Fla(L)) \times \mathcal{P}(Fla(L))$.

Como é sabido, o conjunto das fórmulas bem formadas de uma lógica é a álgebra livre gerada pelas fórmulas atômicas através dos operadores θ_1, ...,θ_n. Nós podemos pensar uma lógica S, então, como uma estrutura S = < $\{p_i\}_{i\in I}$;θ_1, ...,θ_n.; R_1, ...,R_m>, na qual $\{p_i\}_{i\in I}$ é o conjunto das fórmulas atômicas, θ_i os operadores e R_j as regras aplicáveis.

Nós então dizemos que uma lógica S *é dual de uma lógica S^d com respeito a* θ_1, ...,θ_k ($1\leq k\leq n$) se, e somente se, existe uma aplicação da linguagem de S na linguagem de S^d , uma permutação não-idêntica <k_1,...,k_{n+m}> dos **n+m** primeiros inteiros positivos e para toda regra R_j de S que envolva quaisquer dos operadores θ_1, ...,θ_k existe um isomorfismo que preserva a relação. Assim, pode acontecer da permutação ser idêntica relativamente aos operadores e ser não-idêntica com respeito às regras de um determinado operador como, por exemplo, na permutação não-idêntica entre uma regra de introdução à esquerda de um operador θ_l e a regra de introdução à direita do mesmo operador; mesmo nesses casos, dizemos que S é dual de S^d.

Uma lógica S é *dual de* S^d se, e somente se, S é dual com respeito a todo operador θ_i.

No capítulo seguinte estudamos álgebras de Brouwer e apresentamos uma lógica dual da lógica intuicionista de Heyting. O conceito de lógica dual com respeito a um operador será retomado n o Capítulo VI.

CAPÍTULO III

Sobre a lógica dual do intuicionismo

Neste capítulo, que consta de cinco seções, estudamos as álgebras brouwerianas e as relacionamos a lógicas paraconsistentes.

A primeira seção é dedicada ao estudo das álgebras de Brouwer, introduzidas em [McT46]. O Teorema 3.11 mostra que estas são duais às álgebras de Heyting; o Teorema 3.20 estabelece um teorema de representação para tais álgebras.

Na Seção 2 duas lógicas G_1^d e H^d (equivalentes entre si), que estão relacionadas às álgebras brouwerianas, são apresentadas; também aí se mostra que tais lógicas são duais às formulações canônicas da lógica intuicionista, G_1 - o sistema proposto por Gentzen, e H - o cálculo de Heyting.

A Seção 3 trata da algebrização do sistema H^d, através de uma relação de congruência e se apresenta um teorema de completude.

Na Seção 4 é desenvolvida uma semântica ao estilo de Kripke para H^d e teoremas relacionados são demonstrados, inclusive o de completude.

Na última seção, introduzimos e estudamos um cálculo de predicados na base proposicional H^d.

3.1. Álgebras de Brouwer

Para que se veja a dualidade entre álgebras de Brouwer e álgebras de Heyting, apresentamos os resultados necessários relativos a álgebras de Heyting e, de modo encadeado, apresentamos as álgebras brouwerianas.

Definição 3.1

Uma *álgebra de Heyting* (HA) é uma estrutura $<A, \cap, \cup, \rightarrow, \perp>$ tal que:

1) $< A, \cap, \cup >$ é um reticulado com elemento zero $\perp$;

2) A é fechado sob $\rightarrow$;

3) Para todo a, b, c $\in$ A, $a \cap b \leq c$ se, e somente se, $a \leq b \rightarrow c$.

Definição 3.2

Se $< A, \cap, \cup, \rightarrow, \perp >$ é uma álgebra de Heyting e $a \in A$, definimos

$\neg a =_{def} a \rightarrow \perp$.

O elemento $\neg a$ é chamado o *pseudocomplemento* de a .

Teorema 3.3

Sejam HA = $< A, \cap, \cup, \rightarrow, \perp >$ uma álgebra de Heyting e a, b, c elementos quaisquer de A. Então:

i) *HA tem elemento unidade T, determinado pela fórmula* $T = \perp \rightarrow \perp$;

ii) *HA é um reticulado distributivo;*

iii) $a \cap (a \rightarrow b) \leq b$;

iv) $b \leq a \rightarrow b$;

v) $a \rightarrow (b \rightarrow c) = a \cap b \rightarrow c = b \rightarrow (a \rightarrow c)$;

vi) $a \rightarrow (b \rightarrow c) \leq (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$;

vii) $a \rightarrow b \cap c = (a \rightarrow b) \cap (a \rightarrow c)$;

viii) $a = T \rightarrow a$ *e* $a \rightarrow T = T$;

ix) $a \leq b$ *se, e somente se,* $a \rightarrow b = T$;

x) $b \leq a \to a \cap b;$

xi) $a \leq \neg\neg a;$

xii) $\neg \perp = T$ e $\neg T = \perp;$

xiii) $\neg\neg\neg a = \neg a;$

xiv) $a \cap \neg a = \perp$. ■

Definição 3.4

Uma *álgebra de Brouwer* (BrA) é uma estrutura $< A, \cap, \cup, —, T >$ tal que:

1) $< A, \cap, \cup >$ é um reticulado com elemento unitário T;

2) A é fechado sob — ;

3) Para todo a, b, c $\in$ A , $a — b \leq c$ se, e somente se, $a \leq b \cup c$.

Definição 3.5

Se $< A, \cap, \cup, —, T >$ é uma álgebra de Brouwer e $a \in A$ definimos

$\neg a =_{def} T — a$.

O elemento $\neg a$ é chamado o *complemento brouweriano* de a.

Teorema 3.6

Sejam BrA = $< A, \cap, \cup, —, T >$ uma álgebra de Brouwer e a, b, c elementos quaisquer de A. Então:

i) *BrA tem um elemento zero $\perp$, determinado pela fórmula $\perp = T — T$;*

ii) *BrA é um reticulado distributivo;*

iii) $a \leq b \cup (a — b);$

iv) $a — b \leq a;$

v) $a — (b \cup c) = (a — b) — c = (a — c) — b;$

vi) $(c — a) — (b — a) \leq (c — b) — a;$

vii) $(a — c) \cup (b — c) = (a \cup b) — c$;

viii) $a = a — \perp$ e $\perp — a = \perp$;

ix) $a \leq b$ *se, e somente se,* $a — b = \perp$;

x) $(a \cup b) — a \leq b$;

xi) $\neg \neg a \leq a$;

xii) $\neg \perp = T$ e $\neg T = \perp$;

xiii) $\neg \neg \neg a = \neg a$;

xiv) $a \cup \neg a = T$.

<u>Demonstração</u>

(i), (iii), (iv), (viii), (x) e (xii) são conseqüências imediatas da Definição 3.4.

Para (ii), (ix), (xi), (xiii) e (xiv) ver [McT46:125, Teorema 1.3].

Para (v) note-se que, por (iii), $a \leq (b \cup c) \cup (a — (b \cup c))$; então, pela definição 3.4.iii, $a — b \leq c \cup (a — (b \cup c))$ e, assim, $(a — b) — c \leq a — (b \cup c)$. Do mesmo modo, $(a — c) — b \leq a — (b \cup c)$. Para a recíproca, por (iii), $a — b \leq c \cup ((a — b) — c)$ e $a — c \leq b \cup ((a — c) — b)$ e, portanto, por definição, $a \leq b \cup c \cup ((a — b) — c)$ e $a \leq b \cup c \cup ((a — c) — b)$.

Concluímos, então, que $a — (b \cup c) = (a — c) — b = (a — b) — c$.

Para provar (vi), note-se que, por (iii), $c — b \leq a \cup ((c — b) — a)$ e, portanto,

$c \leq b \cup a \cup ((c — b) — a)$; mas $b \leq a \cup (a — b)$; o que implica que $c \leq a \cup a \cup (b — a) \cup ((c — b) — a)$; dado que $a \cup a = a$, nós temos $c — a \leq (b — a) \cup ((c$

$\text{—}\, b) \text{—} a)$. Logo, $(c \text{—} a) \text{—} (b \text{—} a) \leq (c \text{—} b) \text{—} a$.

Para provar (vii), note-se que $a \leq a \cup b$ e $a \cup b \leq c \cup ((a \cup b) \text{—} c)$ e, assim, $a \leq c \cup ((a \cup b) \text{—} c)$; do mesmo modo, $b \leq c \cup ((a \cup b) \text{—} c)$ e, portanto, $a \text{—} c \leq (a \cup b) \text{—} c$; também, por definição, $b \text{—} c \leq (a \cup b) \text{—} c$; nós concluímos, por propriedades dos reticulados, $(a \text{—} c) \cup (b \text{—} c) \leq (a \cup b) \text{—} c$; para a recíproca, observe-se que se $a \leq b$ então $c \text{—} b \leq c \text{—} a$ e, também, $a \text{—} (b \cap c) = (a \text{—} b) \cup (a \text{—} c)$ (ver [McT46:125, Teorema 1.3]). Uma vez que $a \leq a \cup b$ e também $b \leq a \cup b$, nós temos $(a \cup b) \text{—} c \leq a \text{—} c$ e $(a \cup b) \text{—} c \leq b \text{—} c$. Portanto, $(a \cup b) \text{—} c \leq (a \text{—} c) \cup (b \text{—} c)$ e, assim, (vii). ■

Observação: Tal como definido, pelo teorema anterior, $a \text{—} b$ é o dual de $b \rightarrow a$.

Os dois teoremas seguintes estabelecem condições necessárias e suficientes para que se tenham álgebras de Heyting e álgebras de Brouwer.

Teorema 3.7

$< A, \cap, \cup, \rightarrow, \perp >$ é uma álgebra de Heyting se, e somente se,

1) *$< A, \cap, \cup >$ é um reticulado com elemento zero $\perp$;*
2) *A é fechado sob $\rightarrow$;*
3) *a) $a \cap (a \rightarrow b) \leq b$*

   b) $a \leq b \rightarrow (a \cap b)$

   c) $a \rightarrow (b \cap c) \leq a \rightarrow b$ ■

Teorema 3.8

$< A, \cap, \cup, \text{—}, T >$ é uma álgebra de Brouwer se, e somente se,

1) *$< A, \cap, \cup >$ é um reticulado com elemento unitário T;*
2) *A é fechado sob — ;*

3) *a)* $a \leq b \cup (a — b)$

b) $(a \cup b) — b \leq a$

c) $a — c \leq (a \cup b) — c$.

Demonstração

As condições são obviamente necessárias.

Se as condições são satisfeitas e $a — b \leq c$, então $b \cup (a — b) \leq b \cup c$ e, assim, por (3.a) , $a \leq b \cup c$; por outro lado, se $a \leq b \cup c$ então, por propriedades dos reticulados, $a \cup (b \cup c) = b \cup c$ (definição de $\leq$); por (3.c), $a — b \leq (a \cup b \cup c) — b$; mas $(a \cup b \cup c) — b = (b \cup c) — b$ e, por (3.b), $(b \cup c) — b \leq c$ e assim $a — b \leq c$; combinando os dois resultados, $a — b \leq c$ se, e somente se, $a \leq b \cup c$, o que satisfaz a condição 3 da Definição 3.4; logo, as condições são suficientes. ■

O seguinte teorema caracteriza álgebras de Brouwer através de um conjunto simples de axiomas.

Teorema 3.9

Uma estrutura $<A, \cap, \cup, —, T>$ *é uma álgebra de Brouwer se, e somente se, satisfaz os seguintes axiomas:*

(BrA_1) $a \cup b = b \cup a$

$a \cap b = b \cap a$

(BrA_2) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$

$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$

(BrA_3) $(a \cap b) \cup b = b$

$(a \cup b) \cap a = a$

(BrA_4) $b \cup (a — b) = a \cup b$

(BrA_5) $a \cup (a — b) = a$

(BrA_6) $(a \cup b) — c = (a — c) \cup (b — c)$

(BrA_7) $a — (b \cap c) = (a — b) \cup (a — c)$ ■

Para desenvolvimentos futuros, é conveniente o seguinte teorema.

Teorema 3.10

Em qualquer álgebra de Brouwer vale:

i) Se $a \leq b$, *então* $a — c \leq b — c$, $c — b \leq c — a$ *e* $\neg b \leq \neg a$;

ii) $\neg (a \cup b) \leq \neg a \cap \neg b$;

iii) $\neg a \cup \neg b \leq \neg (a \cap b)$;

iv) $a — b \leq a \cap \neg b$;

v) $\neg a — \neg b \leq b — a$.

<u>Demonstração</u>

Para (i), note-se que, pelo Teorema 3.6.iii, $b \leq c \cup (b — c)$ e, se $a \leq b$ então, $a \leq c \cup (b — c)$; assim, por definição, $a — c \leq b — c$. Para a segunda parte, se $a \leq b$ então $a \cap b = a$ e, assim, $c — (a \cap b) = c — a$; mas, pelo Axioma (BrA_7) do Teorema 3.9, $c — (a \cap b) = (c — a) \cup (c — b)$; assim, $(c — a) \cup (c — b) = (c — a)$ e, portanto, $c — b \leq c — a$; a terceira parte segue-se desta última, tomando $c := T$; assim, $T — b \leq T — a$ e, pela Definição 3.5, $\neg b \leq \neg a$.

Para provar (ii), note-se que $a \leq a \cup b$ e $b \leq a \cup b$; por (i), $T — (a \cup b) \leq T — a$ e $T — (a \cup b) \leq T — b$; por propriedades dos reticulados, $T — (a \cup b) \leq (T — a) \cap (T — b)$ e, por definição, $\neg (a \cup b) \leq \neg a \cap \neg b$.

Para provar (iii), basta tomar o Axioma (BrA_7) do Teorema 3.9; $T — (a \cap b) = (T — a) \cup (T — b)$, isto é, por definição, $\neg (a \cap b) = \neg a \cup \neg b$.

Para provar (iv), note-se que $a — b \leq a$ (Teorema 3.6.iv) e que $a \leq T$. Assim, por (i), $a — b \leq T — b$, logo, por propriedades dos reticulados, $a — b \leq a \cap (T — b)$, isto é, $a — b \leq a \cap \neg b$.

Para provar (v), note-se que, pelo Teorema 3.6.iii, $c \leq b \cup (c — b)$ e também $b \leq a \cup (b — a)$; combinando os dois, temos $c \leq a \cup (b — a) \cup (c — b)$ e, por definição, $c — a \leq (c — b) \cup (b — a)$ e, novamente, $(c — a) — (c — b) \leq b — a$. Tomando-se então $c = T$, temos o resultado e, assim, $\neg a — \neg b \leq b — a$. ■

Observação: Pelo Teorema 3.10.iii, $\neg a \cup \neg b = \neg (a \cap b)$ e, tomando-se $b = \neg a$ tem-se, pelo Teorema 3.6.xiv, $\neg (a \cap \neg a) = \neg a \cup \neg\neg a = T$.

O teorema seguinte permite estabelecer a dualidade entre álgebras de Heyting e álgebras de Brouwer.

Teorema 3.11

Sejam L e L^d as álgebras livremente geradas por $\{a_i\}_{i \in I}$ através dos operadores $< \cap_H, \cup_H, \rightarrow, \perp >$ e $< \cap_B, \cup_B, —, T >$, respectivamente, e nesta ordem. L é uma álgebra de Heyting se e somente L^d é uma álgebra de Brouwer, isto é, a noção de reticulado de Heyting (ou pseudobooleano, como às vezes é chamado) é dual à noção de reticulado brouweriano.

Demonstração:

Considere-se a seguinte função $\tau : H \longrightarrow H^d$ tal que:

$$\tau(a_i) = a_i\text{, para todo } a_i \in A$$

$$\tau(a \to b) = \tau(b) — \tau(a)$$

$$\tau(a \cap_H b) = \tau(a) \cup_B \tau(b)$$

$$\tau(a \cup_H b) = \tau(a) \cap_B \tau(b)$$

$$\tau(T) = \perp$$

$$\tau(\perp) = T$$

É suficiente mostrar o seguinte: se $a \leq b$ em H, então $b \leq a$ em H^d. De fato, se $a \leq b$, $\tau(a \cap_H b) = \tau(a)$, logo $\tau(a) \cup_B \tau(b) = \tau(a)$ e, assim, $(a \cup_B b) = a$ em H^d, isto é, $b \leq a$ em H^d. ■

Observação

<u>NÃO</u> valem numa álgebra de Heyting os seguintes esquemas:

(1) $a \cup (a \to b) = T$

e, tomando-se $b = \perp$, não vale $a \cup \neg a = T$;

(2) $(a \to b) \to a \leq a$.

Pela dualidade, tem-se que

<u>NÃO</u> valem numa álgebra de Brouwer, em geral, os seguintes esquemas:

(1') $b \cap (a — b) = \perp$

e, tomando-se a:= T, não vale $b \cap \neg b = \perp$;

(2') $b \leq b — (a — b)$.

Definição 3.12

Seja K um conjunto parcialmente ordenado por $\leq$. Uma *operação de fecho* em K é uma função $* : K \longrightarrow K$ tal que, para todo elemento a de K:

(f1) $a \leq a^*$

(f2) $(a^*)^* \leq a^*$

(f3) $a \leq b$ implica $a^* \leq b^*$.

Um elemento <u>a</u> de K é *fechado* se, e somente se, $a^* \leq a$; segue-se também da definição (f1) que <u>a</u> é fechado se, e somente se, $a = a^*$.

Definição 3.13

Um conjunto K é uma *álgebra de fecho* com relação a $\cap, \cup, \neg$ e * quando:

i) K é uma álgebra de Boole com respeito a $\cap, \cup, \neg$;

ii) se $a \in K$, então $a^* \varepsilon K$;

iii) se $a \in K$, então $a \leq a^*$;

iv) se $a \in K$,então $(a^*)^* = a^*$;

v) se $a, b \in K$, então $(a \cup b)^* = a^* \cup b^*$;

vi) $\perp^* = \perp$.

Nós indicaremos tal álgebra por $\Gamma = < K, \cap, \cup, \neg, * >$.

Teorema 3.14

Em qualquer álgebra de fecho $\Gamma = < K, \cap, \cup, \neg, * >$

i) $T^* = T$;

ii) Se $a \leq b$ *então* $a^* \leq b^*$;

iii) A união de qualquer número finito de elementos fechados é fechada;

iv) A interseção de qualquer número de elementos fechados é fechada. ■

Definição 3.15

Seja $\Gamma = < K, \cap , \cup , \neg , * >$ uma álgebra de fecho e façamos:

i) $a — b = (a \cap \neg b)^*$ e $\neg a = T — a$;

ii) K^* a classe de todos os elementos fechados de K.

A estrutura $\Gamma^* = < K^*, \cap , \cup , — , T >$, na qual as operações $\cap$, $\cup$, — são definidas para elementos de K^*, é chamada *a álgebra dos elementos fechados sobre* Γ.

Se Γ é uma álgebra de fecho sobre um espaço topológico S, então Γ^* é chamada a *álgebra dos conjuntos fechados de S*.

Teorema 3.16

Se $\Gamma = < K, \cap , \cup , \neg , * >$ *é uma álgebra de fecho então* $\Gamma^* = < K^*, \cap , \cup, —, T >$ *é uma álgebra de Brouwer.*

Demonstração

É suficiente mostrar que a condição 3 da Definição 3.4 é satisfeita.

Suponhamos que, para $a, b, c \in K^*$, $a — b \leq c$; uma vez que $a — b = (a \cap \neg b)^*$, e $a \cap \neg b \leq (a \cap \neg b)^*$ nós temos que $a \cap \neg b \leq c$ e, portanto (pelas operações válidas numa álgebra booleana), $a \leq b \cup c$.

Reciprocamente, se $a \leq b \cup c$ então $a \cap \neg b \leq c$ e, então, $(a \cap \neg b)^* \leq c^*$ e, como c é fechado, temos que $a — b \leq c$. ■

Teorema 3.17

Se BrA = < A, $\cap$ *,* $\cup$*, —, T > é uma álgebra de Brouwer, então existe uma álgebra de fecho* Γ *= < K, + , • ,* $\neg$ *, * > tal que:*

i) BrA = Γ**;*

ii) Todo elemento a $\in$ *K pode ser representado na forma*

$$a = (b_1 \bullet \neg b_2) + ...+ (b_{2n-1} \bullet \neg b_{2n}),$$

com $b_1,..., b_{2n}$ *elementos de A.*

Demonstração

Como < A, $\cap$, $\cup$ > é um reticulado distributivo, existe uma álgebra booleana < B , + , • , $\neg$ > que satisfaz as seguintes condições:

(1) A é uma subclasse de B;

(2) a + b = a $\cap$ b e a • b = a $\cup$ b, para todo par a, b de elementos de A;

Seja K o conjunto dos elementos a de B que podem ser representados na forma $a = (b_1 \bullet \neg b_2) + ...+ (b_{2n-1} \bullet \neg b_{2n})$, com $b_1,..., b_{2n}$ elementos de A; < K, +, •, $\neg$> é, novamente, uma álgebra booleana, A é uma subclasse de K e as condições (2) e (ii) estão satisfeitas.

Como conseqüência do Teorema 3.6.iii:

3) a + $\neg$ b $\leq$ a — b, para a, b elementos de A.

Vê-se, ainda, que:

4) a + $\neg$ b $\leq$ c implica que a — b $\leq$ c, para quaisquer a, b, c $\in$ A pois, se a primeira fórmula vale, então a $\leq$ b + c = b $\cup$ c e, assim, pela Definição 4.3 , a segunda vale.

Portanto, concluímos que, se $a_1,..., a_{2m}, b_1,..., b_{2n}$ são elementos de A tais que

5) $(a_1 \bullet \neg\, a_2) + ...+ (a_{2m-1} \bullet \neg\, a_{2m}) = (b_1 \bullet \neg\, b_2) + ...+ (b_{2n-1} \bullet \neg\, b_{2n})$

então

6) $(a_1 \text{—} a_2) + ...+ (a_{2m-1} \text{—} a_{2m}) = (b_1 \text{—} b_2) + ...+ (b_{2n-1} \text{—} b_{2n})$

pois, se (5) vale, então, por (3), nós temos, para um arbitrário $i \leq m$

$(a_{2i--1} \bullet \neg\, a_{2i}) \leq (b_1 \text{—} \neg\, b_2) + ...+ (b_{2n-1} \text{—} \neg\, b_{2n})$

e, portanto, por (4),

$(a_{2i--1} \text{—} \neg\, a_{2i}) \leq (b_1 \text{—} \neg\, b_2) + ...+ (b_{2n-1} \text{—} \neg\, b_{2n})$

e, uma vez que isto vale para todo $i \leq m,$ concluímos

$(a_1 \text{—} a_2) + ...+ (a_{2m-1} \text{—} a_{2m}) \leq (b_1 \text{—} b_2) + ...+ (b_{2n-1} \text{—} b_{2n})$.

De modo análogo, deriva-se a inclusão contrária e, assim, a equação (6).

Para qualquer elemento $a \in K$ da forma

$a = (b_1 \bullet \neg\, b_2) + ...+ (b_{2n-1} \bullet \neg\, b_{2n})$,

com $b_1,..., b_{2n}$ elementos de A, definimos

$a^* = (b_1 \text{—} \neg\, b_2) + ...+ (b_{2n-1} \text{—} \neg\, b_{2n})$.

Do que foi provado acima vemos que a^* está unicamente determinada; assim, $< K, + , \bullet , \neg , * >$ é uma álgebra de fecho e o conjunto dos elementos fechados de K coincide com A. Além disso, segue-se da definição de fecho que, para todo $a, b \in A$, $(a \text{—} b) = (a \bullet \neg\, b)^*$

e assim, pela Definição 3.15, conclui-se que a condição (i) do enunciado do teorema está satisfeita, o que conclui a prova. ■

Em [McT46], J.C.C.McKinsey e A.Tarski observam que, como conseqüência dos teoremas acima, tem-se um método para a verificação de equações em álgebras de Brouwer. Uma equação envolvendo $\cap$, $\cup$, — e variáveis a_1, a_2,...,a_n é verdadeira em toda álgebra de Brouwer (BrA) se, e somente se, a equação resultante da substituição de (a — b) por $(a \cap \neg b)^*$ é verdadeira para todos os elementos fechados a_1, a_2,...,a_n em toda álgebra de fecho.

Em [McT44] encontram-se os seguintes teoremas, que enunciamos sem prova.

Teorema 3.18

Se S é um espaço topológico, então a família F de todos os subconjuntos de S é uma álgebra de fecho com respeito às operações de união, interseção e complementação conjuntistas e à operação topológica de fecho. O mesmo é verdadeiro relativamente a qualquer corpo de subconjuntos de S que é fechado sob a operação de fecho. [McT44:147] ■

Teorema 3.19

Toda álgebra de fecho é isomorfa à subálgebra de fecho sobre um espaço topológico. [McT44:150] ■

E estes dois teoremas, juntamente com os Teoremas 3.16 e 3.17 permitem enunciar, como conseqüência, um teorema de representação para álgebras de Brouwer.

Teorema 3.20

A álgebra dos conjuntos fechados de um espaço topológico, e toda subálgebra desta álgebra, são álgebras de Brouwer. Reciprocamente, toda álgebra de Brouwer é isomorfa a uma subálgebra de uma álgebra dos conjuntos fechados de um espaço topológico. ■

Foi mostrado (Teorema 3.11) que as álgebras de Heyting são duais às álgebras de Brouwer e é conhecido o fato de que álgebras de Heyting constituem-se em semânticas adequadas para a lógica intuicionista. A questão que surge é: que lógica está relacionada com as álgebras brouwerianas?

Uma vez que, numa álgebra brouweriana, a contradição não é o falso, pode-se pensar que tal lógica é uma lógica paraconsistente. Numa álgebra de Brouwer tem-se que

$$a \cap \neg a \leq b$$

não é válido para um b arbitrário, bastando para tanto tomar $b = \perp$.

É conveniente examinarmos o seguinte exemplo.

No espaço topológico $\mathbf{R^2}$, tome-se um ponto **p** fixado.

$$\{p\}^* = \{p\}$$

$$\neg \{p\} = R^2 \setminus \{p\}$$

$$(\neg \{p\})^* = (R^2 \setminus \{p\})^* = R^2$$

Assim

$$\{p\}^* \cap (\neg \{p\})^* = \{p\} \cap R^2 = \{p\} \neq \varnothing$$

Mas

$$(\neg (\{p\}^* \cap (\neg \{p\})^*))^* = (\neg \{p\})^* = R^2$$

Este resultado parece contradizer o fato de que numa álgebra de Brouwer $a \cap \neg a \leq \bot$ não se verifica sempre, para todo elemento a. O que ocorreu é que embora

$$\{p\}^* \cap (\neg \{p\})^* \neq \emptyset$$

tem-se que

$$\neg(\neg \{p\})^* = \neg R^2 = \emptyset$$

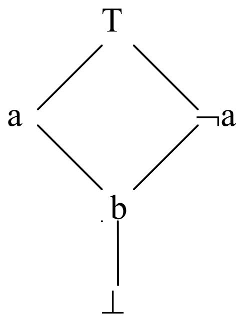
e assim

$$(\neg \{p\})^* \cap \neg(\neg \{p\})^* = \emptyset$$

A questão, ante o exemplo acima, é a de saber se, sempre, numa álgebra de Brouwer é válido o esquema

$$\neg a \cap \neg\neg a = \bot.$$

No exemplo abaixo,



vê-se que

$$\neg\neg a = T — (\neg a) = \inf \{c: T \leq \neg a \cup c\} = a$$

e, portanto,

$\neg\neg\, a \cap \neg\, a = \neg\, a \cap a = b \neq \perp.$

Logo, o esquema $\neg\neg\, a \cap \neg\, a = \perp$ não é válido em geral, em toda álgebra de Brouwer.

Definição 3.21

Uma álgebra de Brouwer é chamada *clássica* se os esquemas

1’) $a \cap (b — a) = \perp$

2’) $b \leq b — (a — b)$

são válidos.

Teorema 3.22

Os esquemas (1’) e (2’) são equivalentes.

Demonstração

(2’) implica (1’)

1. $b \leq b — (a — b)$	hipótese
2. $a \cap b \leq (a \cap b) — (a — (a \cap b))$	substituição em 1
3. $a \cap b \leq a — (a — b)$	pois $a \cap b \leq a$, b
4. $(a — b) \cap b \leq (a — b) — ((a — b) — b)$	substituição em 3
5. $(a — b) \cap b \leq (a — b) — (a — b)$	

pois $(a — b) — b = a — (b \cup b) = a — b$, conforme Teorema 3.6.v

6. $(a — b) \cap b \leq \perp.$

(1') implica (2')

1. $a \leq b \cup (a — b)$	Teorema 3.6.iii
2. $a \cap a \leq a \cap (b \cup (a — b))$	
3. $a \leq (a \cap b) \cup (a — b)$	leis distributivas
4. $b \leq (b \cap (a — b)) \cup (b — (a — b))$	substituição em 3
5. $b \leq \perp \cup (b — (a — b))$	hipótese de (1')
6. $b \leq b — (a — b)$. ■	

Observação:

a) Do esquema (2') acima, tira-se como conseqüência

$$a \cap b \leq a — (a — b)$$

e, se se toma $a = T$ e $b = a$, tem-se que

$$T \cap a \leq T — (T — a),$$

isto é, $a \leq \neg\neg a$.

Assim, num reticulado brouweriano clássico, vale o esquema

$$a = \neg\neg a.$$

b) Uma álgebra booleana torna-se uma álgebra brouweriana clássica se definirmos:

$a — b = a \cap \neg b.$

Teorema 3.23

Seja BrA = < A , ∪ , ∩ , — , T > uma álgebra de Brouwer. BrA é uma álgebra booleana sob ∪ , ∩, ¬ se, e somente se, para todo <u>*a*</u> *em A*

$$a \cap \neg a = \bot.$$

<u>Demonstração</u>: Ver [McT46:129, Teorema 1.12]. ■

Reunindo os resultados acima:

1) Numa álgebra de Brouwer tem-se que

$a \cup \neg a = T$

$\neg (a \cap \neg a) = T$

$a \cap \neg a \neq \bot$

são esquemas válidos;

2) O esquema $\neg a \cap \neg\neg a = \bot$ não vale, em geral, em qualquer álgebra de Brouwer;

3) Se a álgebra brouweriana é clássica e se definirmos $a — b = a \cap \neg b$, tem-se uma álgebra booleana e reciprocamente.

Por várias razões, é interessante considerar filtros e ideais numa álgebra de Brouwer. Isso será feito posteriormente, no Capítulo IV, e serão mostradas as teorias geradas relacionadas a filtros e ideais.

No que se segue vamos considerar os sistemas G_I^d e H^d, que "capturam" a lógica relacionada às álgebras de Brouwer.

3.2. Lógicas relacionadas às álgebras de Brouwer

A linguagem do cálculo proposicional intuicionista contém o conjunto das variáveis proposicionais $\{p_i\}_{i \in I}$ e os conectivos $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ e será denotada por LH; o conjunto das fórmulas do cálculo proposicional intuicionista, denotado por *Fla(IL),* é a álgebra livremente gerada por $\{p_i\}_{i \in I}$, através dos conectivos $\supset$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$. A linguagem do cálculo proposicional brouweriano contém o conjunto das variáveis proposicionais e os conectivos $\not\subset$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ e será denotada por IL^d; o conjunto das fórmulas do cálculo proposicional brouweriano, denotado por *Fla(IL^d),* é a álgebra livremente gerada por $\{p_i\}_{i \in I}$, através dos conectivos $\not\subset$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$.

Quando não houver necessidade de especificar a linguagem, denotaremos o conjunto das fórmulas por *Fla(L).*

No Capítulo II definimos lógica, em geral, como um par <F, Con>. Neste capitulo, um *sistema formal S* é entendido como uma terna < *Fla(L),* ***A***, ***R***>, com $\boldsymbol{A} \neq \emptyset$ e $\boldsymbol{A} \subseteq$ Fla(L) e $\boldsymbol{R} \neq \emptyset$, um conjunto de regras de inferência.

Dado um sistema formal S, define-se da maneira usual quando uma fórmula A é conseqüência de um conjunto de fórmulas Γ (isto é, $\Gamma \vdash_S A$). Será indicado por $\Gamma \not\vdash_S A$ o fato de que A não é conseqüência de Γ no sistema S.

Definição 3.24

Um sistema formal S é *paracompleto*([7]) se, e somente se, existe um conjunto Δ, numa linguagem proposicional tal que

$\Delta \mid\!\!-\!\!/_S\ A \vee \neg A$.

Definição 3.25

Um sistema formal S é *paraconsistente (lato sensu)* se, e somente se, existe um conjunto Δ, numa linguagem proposicional tal que

$A \wedge \neg A \mid\!\!-\!\!/_S\ \Delta$.

Um seqüente é uma expressão $\Gamma \Rightarrow \Delta$ na qual Γ e Δ são seqüências finitas de fórmulas (possivelmente vazias) e, intuitivamente, podemos pensar como se o antecedente (Γ) fosse uma conjunção de fórmulas e o conseqüente (Δ) uma disjunção de fórmulas. Ao se dualizar o cálculo de seqüentes, no sentido expresso abaixo, mantemos esta mesma maneira intuitiva de olhar um seqüente, porém, com a conjunção se comportando como disjunção e vice-versa e indicaremos o seqüente por $\Gamma \Rightarrow^d \Delta$.

Consideraremos a seguir o sistema intuicionista G_1 , dado por Gentzen e introduziremos o sistema G_1^d que, como veremos, poderemos considerar como dual do sistema G_1.

Para as notações de seqüentes, ver por exemplo [Kle52].A expressão $\mid\!-_G S$ indica que o seqüente S é demonstrável em G. Vamos explicitar o sistema G_1, uma vez que queremos compará-lo ao sistema G_1^d. A linguagem de G_1 é LH e a linguagem de G_1^d , IL^d.

[7]O Prof. Dr. Antonio M. Sette sugeriu o termo "intuicionista (*lato sensu*)" para aquilo que estamos chamando de sistema paracompleto; preferimos usar o termo corrente na literatura.

3.2.1. O cálculo de seqüentes G_1

Esquema de axiomas

$$C \Rightarrow C$$

Regras lógicas para os conectivos

$\supset$ $$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \vartheta, B}{\Gamma \Rightarrow \vartheta, A \supset B} \qquad \frac{\Delta \Rightarrow \Lambda, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \vartheta}{A \supset B, \Delta, \Gamma \Rightarrow \Lambda, \vartheta}$$

$\wedge$ $$\frac{\Gamma \Rightarrow \vartheta, A \quad \Gamma \Rightarrow \vartheta, B}{\Gamma \Rightarrow \vartheta, A \wedge B} \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \vartheta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \vartheta} \qquad \frac{B, \Gamma \Rightarrow \vartheta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \vartheta}$$

$\vee$ $$\frac{\Gamma \Rightarrow \vartheta, A}{\Gamma \Rightarrow \vartheta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \vartheta, B}{\Gamma \Rightarrow \vartheta, A \vee B} \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \vartheta \quad B, \Gamma \Rightarrow \vartheta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \vartheta}$$

$\neg$ $$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \vartheta, \neg A} \ (\vartheta \text{ vazio}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \vartheta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \vartheta}$$

Regras estruturais

Enfraquecimento $$\frac{\Gamma \Rightarrow \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \vartheta, C} \ (\vartheta \text{ vazio}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \vartheta}{C, \Gamma \Rightarrow \vartheta}$$

Contração $$\frac{\Gamma \Rightarrow \vartheta, C, C}{\Gamma \Rightarrow \vartheta, C} \qquad \frac{C, C, \Gamma \Rightarrow \vartheta}{C, \Gamma \Rightarrow \vartheta}$$

Permutação $$\frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, C, D, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, D, C, \vartheta} \qquad \frac{\Delta, D, C, \Gamma \Rightarrow \vartheta}{\Delta, C, D, \Gamma \Rightarrow \vartheta}$$

Corte $$\frac{\Delta \Rightarrow \Lambda, C \qquad C, \Gamma \Rightarrow \vartheta}{\Delta, \Gamma \Rightarrow \Lambda, \vartheta}$$

3.2.2. O cálculo de sequentes G_1^d

Esquema de axiomas

$$C \Rightarrow^d C$$

Regras lógicas para os conectivos

$\not\subset$ $$\frac{\vartheta, B \Rightarrow^d A, \Gamma}{\vartheta, B \not\subset A \Rightarrow^d \Gamma} \qquad \frac{\Lambda, A \Rightarrow^d \Delta \qquad \vartheta \Rightarrow^d B, \Gamma}{\Lambda, \vartheta \Rightarrow^d B \not\subset A, \Delta, \Gamma}$$

$\vee$ $$\frac{\vartheta, A \Rightarrow^d \Gamma \qquad \vartheta, B \Rightarrow^d \Gamma}{\vartheta, A \vee B \Rightarrow^d \Gamma} \qquad \frac{\vartheta \Rightarrow^d A, \Gamma}{\vartheta \Rightarrow^d A \vee B, \Gamma} \qquad \frac{\vartheta \Rightarrow^d B, \Gamma}{\vartheta \Rightarrow^d A \vee B, \Gamma}$$

$\wedge$ $$\frac{\vartheta, A \Rightarrow^d \Gamma}{\vartheta, A \wedge B \Rightarrow^d \Gamma} \qquad \frac{\vartheta, B \Rightarrow^d \Gamma}{\vartheta, A \wedge B \Rightarrow^d \Gamma} \qquad \frac{\vartheta \Rightarrow^d A, \Gamma \qquad \vartheta \Rightarrow^d B, \Gamma}{\vartheta \Rightarrow^d A \wedge B, \Gamma}$$

$\neg$ $$\frac{\vartheta \Rightarrow^d A, \Gamma}{\vartheta, \neg A \Rightarrow^d \Gamma} \ (\vartheta \text{ vazio}) \qquad \frac{\vartheta, A \Rightarrow^d \Gamma}{\vartheta \Rightarrow^d \neg A, \Gamma}$$

Regras estruturais

Enfraquecimento $$\frac{\vartheta \Rightarrow^d \Gamma}{\vartheta, C \Rightarrow^d \Gamma} \ (\vartheta \text{ vazio}) \qquad \frac{\vartheta \Rightarrow^d \Gamma}{\vartheta \Rightarrow^d C, \Gamma}$$

Contração $$\frac{\vartheta, C, C \Rightarrow^d \Gamma}{} \qquad \frac{\vartheta \Rightarrow^d C, C, \Gamma}{}$$

$$\vartheta, C \Rightarrow^{d} \Gamma \qquad\qquad \vartheta \Rightarrow^{d} C, \Gamma$$

Permutação $\dfrac{\Lambda, C, D, \vartheta \Rightarrow^{d} \Gamma}{\Lambda, D, C, \vartheta \Rightarrow^{d} \Gamma}$ $\qquad$ $\dfrac{\vartheta \Rightarrow^{d} \Delta, D, C, \Gamma}{\vartheta \Rightarrow^{d} \Delta, C, D, \Gamma}$

Corte $\dfrac{\Lambda, C \Rightarrow^{d} \vartheta \qquad \Delta \Rightarrow^{d} C, \Gamma}{\Lambda, \Delta \Rightarrow^{d} \vartheta, \Gamma}$

Com a finalidade de demonstrarmos a dualidade entre G_1 e G_1^d consideremos a função $\tau : Fla(IL) \longrightarrow Fla(IL^d)$ tal que:

$\tau(p_i) = p_i$ para todo $i \in I$

$\tau(A \supset B) = \tau(B) \not\subset \tau(A)$

$\tau(A \wedge B) = \tau(A) \vee \tau(B)$

$\tau(A \vee B) = \tau(A) \wedge \tau(B)$

$\tau(\neg A) = \neg\, \tau(A)$,

e a estendamos para os seqüentes do seguinte modo

$\tau(\Gamma \Rightarrow \vartheta) = \tau(\vartheta) \Rightarrow^{d} \tau(\Gamma)$.

Observe-se que, se $\Gamma = \{B_1, ..., B_m\}$ então $\tau(\Gamma) = \{\tau(B_1), ..., \tau(B_m)\}$.

Teorema 3.26

O sistema G_1^d é dual do sistema G_1, ou seja $\vdash_{G1} \Gamma \Rightarrow \vartheta$ se, e somente se, $\vdash_{G_1^d} \tau(\vartheta) \Rightarrow^{d} \tau(\Gamma)$.

Demonstração

Por indução no comprimento da derivação (ou prova) de um seqüente θ. A afirmação vale para o axioma uma vez que $C \Rightarrow C$ se, e somente se, $\tau(C) \Rightarrow^{d} \tau(C)$, isto é, $C \Rightarrow^{d} C$. Vale também para todas as regras lógicas e regras estruturais e, portanto, o teorema pode ser estabelecido. ■

É sabido que A é um teorema intuicionista se, e somente se, o seqüente $\Rightarrow A$ é demonstrável em G_1. Pelo teorema acima, por dualidade, temos que $\vdash_{G1} \Rightarrow A$ se, e somente se, $\vdash_{G_I^d} \tau(A) \Rightarrow^{d}$.

Neste sentido, dizemos que $B = \tau(A)$ é teorema em G_I^d se, e somente se $\vdash_{G_I^d} \tau(A) \Rightarrow^{d}$.

Corolário 3.27

$\Rightarrow A$ se, e somente se, $\tau(A) \Rightarrow^{d}$.

Demonstração

O resultado é imediato. Pelo fato de τ ser bijetiva, segue-se que A é um teorema em G_I^d se, e somente se, $\Rightarrow \tau^{-1}(A)$ em G_1. ■

Corolário 3.28

G_I^d é uma lógica paraconsistente (lato sensu) e não é uma lógica paracompleta.

Demonstração

Sabe-se que $A \not\Rightarrow B \vee \neg B$ em G_1 (o símbolo $\not\Rightarrow$ indica "não ocorre") e portanto $\tau(B) \wedge \neg \tau(B) \not\Rightarrow B$ em G_1^d ; assim, as contradições não trivializam G_1^d e portanto, G_1^d é uma lógica paraconsistente (*lato sensu*); por outro lado, tem-se que:

$\underline{A \Rightarrow^d A}$	Axioma de G_1^d
$\underline{\Rightarrow^d \neg A, A}$	$\neg$ - $\Rightarrow^d$
$\underline{\Rightarrow^d A \vee \neg A, A}$	$\vee$ - $\Rightarrow^d$
$\underline{\Rightarrow^d A, A \vee \neg A}$	Permutação
$\underline{\Rightarrow^d A \vee \neg A, A \vee \neg A}$	$\vee$ - $\Rightarrow^d$
$\underline{\Rightarrow^d A \vee \neg A}$	Contração
$B \Rightarrow^d A \vee \neg A$	Enfraquecimento,

o que mostra que G_1^d não é um sistema paracompleto. ■

Teorema 3.29

Em G_1^d são demonstráveis os seguintes esquemas:

1. $(A \not\subset B) \not\subset A$*

2. $((C \not\subset A) \not\subset ((C \not\subset B) \not\subset A)) \not\subset (B \not\subset A)$*

3.$((A \vee B) \not\subset B) \not\subset A$*

4.$A \not\subset (A \vee B)$*

5.$B \not\subset (A \vee B)$*

6.$((C \not\subset (A \wedge B)) \not\subset (C \not\subset B)) \not\subset (C \not\subset A)$*

7.$(A \wedge B) \not\subset A$*

8.$(A \wedge B) \not\subset B$*

9.* $(\neg B \not\subset (\neg A \not\subset B)) \not\subset (A \not\subset B)$

10.* $(B \not\subset A) \not\subset \neg A$

11.* $A,\ B \not\subset A\ /\ B$

12. $A \not\subset A$

13. $B \not\subset (A \vee \neg A)$ ■

3.2.3. O sistema H^d

Se considerarmos a formulação H de Heyting da lógica intuicionista no estilo hilbertiano, com axiomas e regras de inferência, pode-se mostrar o seguinte:

Teorema 3.30

$\vdash_H A$ *se, e somente se,* $\vdash_{G1} \Rightarrow A$ ■

Vejamos agora uma formulação dual de H, que chamaremos de H^d : os *axiomas* de H^d são os esquemas 1* a 10* do Teorema 3.29. Estes esquemas serão tomados como axiomas de H^d no restante do trabalho; a regra de inferência de H^d é o esquema 11* , ou seja , A, B $\not\subset$ A / B, que será chamada *regra de destacamento* e abreviada por RD. Pode-se então mostrar:

Teorema 3.31

$\vdash_{H^d} A$ *se, e somente se,* $\vdash_{G_1^d} A \Rightarrow^d$ ■

3.3. Algebrização e completude de H^d

Consideremos então $Fla(IL^d) = < \{p_i\}_{i \varepsilon I}, \wedge, \vee, \not\subset, \neg >$, a álgebra das fórmulas da linguagem de H^d que, pelo Teorema 3.31, é a mesma álgebra das fórmulas da linguagem de G_1^d .

Consideremos a relação $A \approx B$ se, e somente se,

$|-_{H^d} (A \not\subset B) \vee (B \not\subset A)$.

Demonstra-se, facilmente, que $\approx$ é uma relação de equivalência na álgebra $Fla(IL^d)$. A álgebra quociente $Fla(IL^d)/\approx$ será denotada por $\Re(H^d)$.

Dada $A \in Fla(IL^d)$ denota-se por $[A] = \{ B \in Fla(IL^d)$ tal que $A \approx B\}$ a classe de equivalência de A módulo $\approx$ e, ainda, $[A] \leq [B]$ se, e somente se, $|-_{H^d}$ $A \not\subset B$.

Define-se então:

$[A] \cup [B] := [A \vee B]$

$[A] \cap [B] := [A \wedge B]$

$[A] — [B] := [A \not\subset B]$

$\neg [A] := [\neg A]$.

Teorema 3.32

A álgebra $\Re(H^d)$ com as operações acima definidas é uma álgebra de Brouwer.

Demonstração

a) Verifiquemos que $\Re(H^d)$ é um reticulado, isto é, dados $[A], [B] \in \Re(H^d)$, existem [A] $\cup$ [B] e [A] $\cap$ [B] pertencentes a $\Re(H^d)$ e que satisfazem as propriedades dos reticulados.

a.i) Sejam [A], [B] elementos de $\Re(H^d)$. Pela ordem definida para $\Re(H^d)$ e os Axiomas 4* e 5* (Teorema 3.29), temos que $[A] \leq [A \vee B]$ e $[B] \leq [A \vee B]$, respectivamente; pela definição, $[A] \leq [A] \cup [B]$ e $[B] \leq [A] \cup [B]$.

Devemos mostrar que [A] $\cup$ [B] é o supremo (sup) de [A] e [B]; tomemos [C] $\in$ $\Re(H^d)$ e tal que $[A] \leq [C]$ e $[B] \leq [C]$. Temos então que

$\vdash_{H^d}$ $A \not\subset C$ e $\vdash_{H^d}$ $B \not\subset C$.

Mas, é teorema de H^d, $(((A \vee B) \not\subset C) \not\subset (B \not\subset C)) \not\subset (A \not\subset C)$ e, por duas aplicações de RD, segue que $\vdash_{H^d}$ $(A \vee B) \not\subset C$, isto é, $[A \vee B] \leq [C]$ e, assim, [A] $\cup$ [B] é o sup de [A] e [B].

a.ii) Usando os Axiomas 7*, 8* e 9* vê-se que $[A] \cap [B] \leq [A]$, $[A] \cap [B] \leq [B]$ e que [A] $\cap$ [B] é o ínfimo de [A] e [B].

b) Vejamos que $\Re(H^d)$ tem elemento unidade T, determinado por $[A \vee \neg A] = [A] \cup \neg [A]$.

Vimos que é teorema de H^d o esquema $B \not\subset (A \vee \neg A)$; assim, $[B] \leq [A \vee \neg A]$, para todo [B] em $\Re(H^d)$; portanto,

$[A] \cup [\neg A] = [A] \cup \neg [A] = T$.

c) Vejamos que $\Re(H^d)$ é fechado sob —, isto é , se [A], [B] $\in$ $\Re(H^d)$ então [A] — [B] e [B] — [A] estão em $\Re(H^d)$.

São teoremas de H^d $(B \not\subset A) \not\subset B$ e $(A \not\subset B) \not\subset A$ e, assim, sai a condição por RD.

d) Suponhamos $[A \not\subset B] \leq [C]$. Queremos mostrar que $[A] \leq [B] \cup [C]$.

Vejamos a seguinte demonstração em H^d

1. $(A \not\subset B) \not\subset C$ Hipótese

2. $(((A \not\subset B) \not\subset C) \not\subset (B \vee C)) \not\subset ((A \not\subset B) \not\subset C)$ Axioma 1*

3. $((A \not\subset B) \not\subset C) \not\subset (B \vee C)$ 1,2/RD

4. $C \not\subset (B \vee C)$ Axioma 5*

5. $((A \not\subset (B \vee C)) \not\subset (((A \not\subset B) \not\subset C) \not\subset (B \vee C))) \not\subset (C \not\subset (B \vee C))$ Axioma 2*

6. $A \not\subset (B \vee C)$. de 3, 4 e RD

Assim $[A] \leq [B \vee C]$, isto é, $[A] \leq [B] \cup [C]$.

Reciprocamente, assumamos $[A] \leq [B] \cup [C]$, isto é, $|\!-_{H^d} A \not\subset (B \vee C)$. Queremos mostrar $|\!-_{H^d} (A \not\subset B) \not\subset C$, isto é, $[A \not\subset B] \leq [C]$, ou seja, $[A] — [B] \leq [C]$.

Basta notarmos que em H^d vale o seguinte: se $A \,|\!-_{H^d} B$ então $|\!-_{H^d} B \not\subset A$.
Assim, considere-se a seguinte prova:

1. B Hipótese
2. C Hipótese
3. $((B \vee C) \not\subset B) \not\subset C$ Axioma 3*
4. $B \vee C$ 1,2,3 por RD
5. $A \not\subset (B \vee C)$ Hipótese
6. A 4,5 por RD
7. $(A \not\subset B) \not\subset C$ 1,2 e 6 pelo fato acima

Logo, estão satisfeitas as condições da Definição 3.4 e, portanto, $\Re(H^d)$ é uma álgebra de Brouwer. ■

Teorema 3.33

Dada uma fórmula $A \in Fla(IL^d)$, A é teorema de H^d se, e somente se, $[A] = \perp$ em $\Re(H^d)$.

Demonstração

Seja A teorema de H^d. Como $\Re(H^d)$ é uma álgebra de Brouwer, podemos definir o elemento $\perp$. Considere-se a seguinte demonstração:

1. A	Hipótese
2. $(A \not\subset (A \not\subset A)) \not\subset A$	Axioma 1*
3. $A \not\subset (A \not\subset A)$	1,2 por RD

Assim, $[A] \leq [A \not\subset A]$, $[A] \leq [A] — [A]$ e, portanto, $[A] \leq \perp$. Mas, para todo $[A] \in \Re(H^d)$, $\perp \leq [A]$ e, então, $[A] = \perp$.

Por outro lado, se $[A] = \perp$, então $[A] \leq [A \not\subset A]$, isto é, $|\!-_{H^d} A \not\subset (A \not\subset A)$. Como $(A \not\subset A)$ é teorema de H^d, segue-se por RD que $|\!-_{H^d} A$. ■

Definição 3.34

Seja BrA uma álgebra de Brouwer.

1. Toda aplicação $\underline{v}$ do conjunto das variáveis proposicionais $\{p_i\}_{i \in I}$ aos elementos de BrA é chamada uma *valoração*. Para toda fórmula $A \in$ *Fla(IL^d)* pode-se estender de forma única uma valoração $\underline{v}$;
2. Se BrA = $\Re(H^d)$, a valoração $\underline{v}$ tal que $\underline{v}(A) = [A]$ é denominada a *valoração canônica* da linguagem de H^d e é denotada por $\underline{v}_c$, ou seja, $\underline{v}_c(A) = [A]$;
3. Uma valoração $\underline{v}$ é *modelo* de um conjunto Γ de fórmulas se, e somente se, $\underline{v}(A) = \perp$ para toda $A \in \Gamma$;
4. Uma fórmula $A \in$ *Fla(IL^d)* é dita ser *válida* se, e somente se, para toda valoração $\underline{v}$, $\underline{v}(A) = \perp$.

Teorema 3.35 (da Correção)

Se $A \in Fla(IL^d)$ é demonstrável em H^d, então A é válida.

Demonstração

Seja BrA = $<A, \cup, \cap, —, T>$ uma álgebra de Brouwer. Devemos mostrar que todo axioma de H^d é válido e que RD preserva a validade.

i) Todo axioma é válido.

A título de exemplo, vamos mostrar apenas para o axioma 9*.

Seja $\underline{v}(A) := a$ e $\underline{v}(B) := b$, com a, b elementos de BrA.

$\underline{v}((\neg B \not\subset (\neg A \not\subset B)) \not\subset (A \not\subset B)) = (\neg b — (\neg a — b)) — (a — b))$.

Temos que:

1. $\neg b \leq \neg b$	Propriedade dos reticulados
2. $\neg b \leq T — b$	Definição de $\neg$
3. $\neg b \leq (\neg a \cup a) — b$	Pois $\neg a \cup a = T$
4. $\neg b \leq (\neg a — b) \cup (a — b)$	Teorema 3.6.vii
5. $\neg b — (\neg a — b) \leq (a — b)$	Por definição
6. $\neg b — (\neg a — b) \leq (a — b) \cup \perp$	Propriedade dos reticulados
7. $\neg b — (\neg a — b) — (a — b) \leq \perp$.	

ii)Vejamos que RD preserva validade.

Suponhamos $\underline{v}(A) = \perp$ e $\underline{v}(B \not\subset A) = \perp$. Como $\underline{v}(B \not\subset A) := b — a = \perp$ se, e somente se, $b \leq a$ (Teorema 3.6.ix) e como $a \leq \perp$, segue-se que $b \leq \perp$, isto é, $\underline{v}(B) = \perp$. ■

Teorema 3.36 (da Completude)

Se $A \in Fla(IL^d)$ é válida, então A é demonstrável em H^d.

Demonstração

Suponhamos que A não é demonstrável em H^d e tome-se a álgebra $\Re(H^d)$ e a valoração canônica $\underline{v}_c$. Nesta valoração $\underline{v}_c(A) \neq \perp$ (conforme Teorema 3.33) e, assim, A não é válida. ■

Corolário 3.37

Se $A \in Fla(IL^d)$ é teorema de H^d, então A é identicamente nula (= $\perp$) em toda álgebra dos conjuntos fechados de um espaço topológico.

Demonstração: Conseqüência do teorema precedente e do Teorema 3.20 ■

3.4. Semântica de Kripke para H^d

Uma semântica de Kripke para a lógica dual que estamos apresentando é, então, o dual dos modelos de Kripke para a lógica intuicionista.

Definição 3.38

Um modelo de Kripke para IL^d é uma terna $< \Sigma, \leq, V >$ na qual:

i) $< \Sigma, \leq >$ é um sistema parcialmente ordenado;

ii) $V: IL^d \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma)$

de maneira que $V(p_i)$, *i* fixado, cumpre a seguinte condição: dados p e q pertencentes a Σ, se $p \in V(p_i)$ e $q \leq p$, então $q \in V(p_i)$.

Definição 3.39

Sejam $\mathbf{K} = < \Sigma, \leq, V >$ um modelo de Kripke para IL^d e $A \in Fla(IL^d)$. Define-se a noção de *forçamento local*, $\mathbf{K} \Vdash_p A$ (lê-se "K força A no ponto - ou nó - p"), da seguinte maneira:

1) $\mathbf{K} \Vdash_p p_i$ se, e somente se, $p \in V(p_i)$;

2) $\mathbf{K} \Vdash_p A \vee B$ se, e somente se, $\mathbf{K} \Vdash_p A$ e $\mathbf{K} \Vdash_p B$;

3) $\mathbf{K} \Vdash_p A \wedge B$ se, e somente se, $\mathbf{K} \Vdash_p A$ ou $\mathbf{K} \Vdash_p B$;

4) $\mathbf{K} \Vdash_p \neg A$ se, e somente se, para todo $q \in \Sigma$, $q \leq p$ tem-se que $\mathbf{K} \nVdash_q A$ (K não força A no ponto q);

5) $\mathbf{K} \Vdash_p A \not\subset B$ se, e somente se, para todo $q \in \Sigma$, $q \leq p$, se $\mathbf{K} \Vdash_q B$ então $\mathbf{K} \Vdash_q A$

Elencamos, a seguir, algumas propriedades dos modelos de Kripke descritos para H^d.

Teorema 3.40 (Ancestralidade)

Se $\mathbf{K} \Vdash_p A$ e $q \in \Sigma$, $q \leq p$, então $\mathbf{K} \Vdash_q A$.

Demonstração

Por indução sobre a complexidade da fórmula A.

i) Se A é atômica, então $A := p_i$ para algum i; $\mathbf{K} \Vdash_p p_i$ se, e somente se, $p \in V(p_i)$ e, como $q \leq p$, pelo item 2 da Definição 3.38, $q \in V(p_i)$, isto é

$\mathbf{K} \Vdash_q p_i$.

ii)Suponhamos então que o teorema valha para fórmulas com comprimento menor que n.

ii.1) A é da forma $B \vee C$

Por hipótese de indução, se **K** $||\!-_p$ B e $q \leq p$ então **K** $||\!-_q$ B e, também, se **K** $||\!-_p$ C e $q \leq p$ então, **K** $||\!-_q$ C. Pelo item 3 da Definição 3.39, tem-se que, se **K** $||\!-_p$ $B \vee C$ e $q \leq p$, então **K** $||\!-_q$ $B \vee C$.

ii.2) A é da forma $B \wedge C$: o raciocínio é análogo ao anterior.

ii.3) A é da forma $B \not\subset C$

Por hipótese de indução se **K** $||\!-_p$ B e $q \leq p$, então **K** $||\!-_q$ B e, também, se

K $||\!-_p$ C e $q \leq p$ então **K** $||\!-_q$ C. Também por hipótese do teorema, para todo $r \in \Sigma$ e $r \leq q$, tem-se que **K** $||\!-_r$ B e **K** $||\!-_r$ C, o que nos leva a concluir

K $||\!-_p$ $B \not\subset C$.

ii.4) A é da forma $\neg$ B

Tomemos a forma negativa da hipótese da indução: se **K** $||\!-\!/_p$ B e $q \leq p$ então existe **K** $||\!-\!/_q$ B, mas isto ocorre se, e somente se, **K** $||\!-_q$ $\neg$ B.■

Teorema 3.41 (Restrição de Modelos)

*Seja **K**$\lceil$(p] a restrição de um modelo **K** tomando-se os nós anteriores a p. Para $p \leq q$, **K** $||\!-_p$ A se, e somente se, **K**$\lceil$(q] $||\!-_p$ A.*

<u>Demonstração</u>

Por indução sobre a complexidade da fórmula A.

i) Se A é atômica, então A:= p_i para algum i. Sejam $p \leq q$ e **K** $||\!-_p$ p_i, o que ocorre se, e somente se, $p \in V(p_i)$. Tal fato não se altera se tomarmos **K**$\lceil$(q], ou seja, $p \in V(p_i)$ continua sendo válido e isto se, e somente se, **K**$\lceil$(q] $||\!-_p$ p_i .

ii) Suponhamos que a proposição valha para fórmulas cuja complexidade é menor que n. Note que **K**⌈(q] = < Σ⌈(q], ≤ , V∩(q] > não altera o forçamento de **K** = < Σ, ≤ , V > no nó p, dado que p ≤ q ; assim, segue-se o teorema por indução. ■

Observação:

a) Essa propriedade "diz" que se pode alterar o futuro sem alterar o forçamento em p.

b) Se se toma q = p pode-se trabalhar apenas com modelos com um último elemento.

Teorema 3.42

K *$||\!-_p \neg\neg A$ se, e somente se, $\forall q \in \Sigma$, $q \leq p$ $\exists r \in \Sigma$, $r \leq q$ tal que* ***K*** *$||\!-_r A$.*

Demonstração

K $||\!-_p \neg\neg$ A se, e somente se, $\forall$q $\in$ Σ , q ≤ p tem-se que **K** $||\!-_q\!/\neg$ A se, e somente se, $\exists$r $\in$ Σ, r ≤ q tal que **K** $||\!-_r$ A. ■

Definição 3.43

Uma fórmula A $\in$ *Fla(IL^d)* é *forçada no modelo **K*** se, e somente se, para todo p $\in$ Σ ,**K** $||\!-_p$ A ; uma fórmula A $\in$ *Fla(IL^d)* é *válida* se, e somente se, é forçada em todo modelo **K**.

Teorema 3.44 (da Correção)

*Se $|\!-_{H^d}$ A então para todo modelo de Kripke **K** = < Σ , ≤ , V > e todo nó p $\in$ Σ,* *tem-se que* $\mathbf{K} \Vdash_p A$.

Demonstração

Devemos mostrar que os axiomas de H^d são válidos e que RD preserva validade.

Sejam $\mathbf{K} = < \Sigma , \leq , V >$ e o nó $p \in \Sigma$.

Vamos verificar alguns axiomas apenas.

a) Para o Axioma 3*, provemos que $|\mathbf{K} \Vdash_p ((A \vee B) \not\subset B) \not\subset A$

Suponhamos $q \in \Sigma$, $q \leq p$ e $\mathbf{K} \Vdash_q A$. Temos que provar que

$\mathbf{K} \Vdash_q (A \vee B) \not\subset B$, isto é, para $r \in \Sigma$, $r \leq q$, se $\mathbf{K} \Vdash_r B$ então $\mathbf{K} \Vdash_r A \vee B$.

Nas condições das hipóteses, como $r \leq q \leq p$, temos que

$\mathbf{K} \Vdash_r A$ e $\mathbf{K} \Vdash_r B$, logo $\mathbf{K} \Vdash_r A \vee B$

b) Para o Axioma 10*, provemos que $\mathbf{K} \Vdash_p (B \not\subset A) \not\subset \neg A$

Suponhamos $q \in \Sigma$, $q \leq p$ e $\mathbf{K} \Vdash_p \neg A$. Temos que provar que

$\mathbf{K} \Vdash_q (B \not\subset A)$, isto é , para todo $r \in \Sigma$, $r \leq q$, se $\mathbf{K} \Vdash_r A$ então $\mathbf{K} \Vdash_r B$. Mas $\mathbf{K} \Vdash_p \neg A$ se, e somente se, para todo $s \in \Sigma$, $s \leq p$, $\mathbf{K} \Vdash_s /A$. Para $s = r \leq q$, vacuamente, se $\mathbf{K} \Vdash_r A$ então $\mathbf{K} \Vdash_r B$, ou seja, $\mathbf{K} \Vdash_q B \not\subset A$.

c) RD preserva a validade

Suponhamos $\mathbf{K} \Vdash_p A$ e $\mathbf{K} \Vdash_p B \not\subset A$. Temos que provar que $\mathbf{K} \Vdash_p B$.

$\mathbf{K} \Vdash_p B \not\subset A$ se, e somente se, para todo q, $q \leq p$, se $\mathbf{K} \Vdash_p A$ então $\mathbf{K} \Vdash_p B$; tomando-se $q = p$, pela hipótese de que $\mathbf{K} \Vdash_p A$, segue-se que $\mathbf{K} \Vdash_p B$.■

Com vistas ao teorema da completude, é necessário fazer algumas considerações; em face da dualidade mostrada nos Teoremas 3.26 e 3.31, dizemos que Γ $|\!-_{H}$d A se, e somente se, o seqüente A $\Rightarrow^{d}$ Γ for demonstrável em G_{I}^{d} - isto nos leva a entender o conjunto Γ como uma disjunção finita das fórmulas que estão em Γ.

Na seqüência do capítulo, é assim que será entendida a expressão "T $|\!-_{H}$d A"; nós omitiremos o subscrito H^{d} doravante e a expressão T|-/ A indica, como é óbvio, que o seqüente A $\Rightarrow^{d}$ T não é demonstrável em G_{I}^{d}.

Definição 3.45

a) Uma *teoria T* é um conjunto de fórmulas na linguagem de H^{d}, isto é, T $\subseteq$ *Fla(IL^{d})* que é fechado sob derivabilidade.

b) Uma teoria T é *regular* se, e somente se, todo teorema de H^{d} for demonstrável em T.

c) Uma teoria T é *não trivial* se, e somente se, existe uma fórmula B, B $\in$ *Fla(IL^{d})* e T|-/ B.

d) Uma teoria T é *prima* se, e somente se, para todo C $\in$ *Fla(IL^{d})* da forma A $\wedge$ B, se C $\in$ T então ou A $\in$ T ou B $\in$ T, mas não ambos.

e) Uma teoria T é *maximal* se, e somente se, para todo A $\in$ *Fla(IL^{d}),* A $\in$ T ou $\neg$ A $\in$ T.

Observação:

1. A $\in$ T se, e somente se, T |- A.

2. Se A $\vee \neg$ A $\in$ T então, se T for regular, T é trivial.

Basta ver que B $\not\subset$ (A $\vee \neg$ A) é teorema de H^{d}.

3. Se A $\in$ T e $\neg$ A $\in$ T, como entendemos as fórmulas de T estando numa disjunção, então A $\vee \neg$ A $\in$ T e, se T for regular, T é trivial.

4. Se $A \wedge \neg A \in T$, T regular, então T é não trivial.

Assim garante o Corolário 3.28.

5. H^d é finitamente trivializável pela fórmula $A \vee \neg A$.

Lema 3.46

Sejam $\Gamma \subseteq Fla(IL^d)$ e $A \in Fla(IL^d)$, tais que Γ |-/ A e Γ regular. Então existe uma teoria T, $\Gamma \subseteq T$ regular, não trivial, prima e maximal, tal que T |-/ A.

Demonstração

Lista-se todas as fórmulas construídas na linguagem de H^d: $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$; constroi-se a seqüência de conjuntos de fórmulas $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \ldots$ obedecendo às seguintes condições:

i) $\Delta_0 = \Gamma$

ii) $\Delta_n = \Delta_{n-1}$ se $\Delta_{n-1} \cup \{B_n\} \vdash A$

$\Delta_{n-1} \cup \{B_n\}$, caso contrário;

iii) Se B_n é da forma $C \wedge D$ e foi acrescentado no n-ésimo passo, acrescente-se uma das fórmulas, C ou D, mas não ambas.

Seja $T = \cup \Delta_n$

Por construção, vê-se que T é regular, não trivial, prima e maximal. ■

Lema 3.47

Seja agora $\Sigma^* = \{ T \subseteq Fla(IL^d)$ tais que T é regular, não trivial, prima e maximal$\}$;

Define-se $T_1 \leq T_2$ se, e somente se, $T_1 \subseteq T_2$. Seja então $\boldsymbol{K}^* = < \Sigma^*, \subseteq, V^* >$ *com V^* definido por*

$V^* (p_i) =\{ T \in \Sigma^*$ tal que $T|\text{-}\ p_i\}$.

Em tais condições, $\boldsymbol{K}^*\ ||\text{-}_T\ A$ se, e somente se, $T|\text{-}A$.

Demonstração

Por indução sobre a complexidade das fórmulas.

a) A é atômica, isto é A : = p_i, para algum i.

$\mathbf{K}^*\ ||\text{-}_T\ p_i$ se, e somente se, $T \in V^* (p_i)$ se, e somente se, $T|\text{-}\ p_i$

Assumamos a hipótese da indução e vejamos os casos.

1) A é da forma $\neg$ B

$\mathbf{K}^*\ ||\text{-}_T \neg B$ se, e somente se, para todo $T_0 \in \Sigma^*$, $T_0 \subseteq T$, $\mathbf{K}^*\ ||\text{-}_{T0}$ /B; por hipótese da indução, $T_0|\text{-}/\ B$ e, como T_0 é maximal, $T_0|\text{-}\neg B$; dado que $T_0 \subseteq T$, $T|\text{-} \neg B$.

2) A é da forma $B \vee C$

$\mathbf{K}^*\ ||\text{-}_T\ B \vee C$ se, e somente se, $\mathbf{K}^*\ ||\text{-}_T\ B$ e $\mathbf{K}^*\ ||\text{-}_T\ C$. Por hipótese de indução, T|-B e T|-C. Aplicando-se o Axioma 3*, T |- $B \vee C$; portanto, pelos Axiomas 4* e 5*, T |- B e T |- C.

3) A é da forma $B \wedge C$

$\mathbf{K}^*\ ||\text{-}_T\ B \wedge C$ se, e somente se, $\mathbf{K}^*\ ||\text{-}_T\ B$ ou $K^*\ ||\text{-}_T\ C$. Por hipótese de indução, T|-B ou T|-C e em qualquer caso, T |= $B \wedge C$ (Axiomas 7* e 8*). Por outro lado, se T |- $B \wedge C$, como T é prima, então T|- B ou T|- C.

4) A é da forma $B \not\subset C$

K* $||\!-_T$ B $\not\subset$ C se, e somente se, para todo $T_0 \in \Sigma^*$, $T_0 \subseteq T$, se **K*** $||\!-_{T_0}$ C então **K*** $||\!-_{T_0}$ B. Por hipótese da indução se T_0 |- C então T_0 |- B. Supondo as hipóteses, como $T_0 \subseteq T$, temos que T |-B e, assim, usando o axioma 1*,

T |- B $\not\subset$ C. Assumamos agora que, para todo $T_0 \in \Sigma^*, T_0 \subseteq T$, T_0 |- B $\not\subset$ C; mas, por hipótese da indução, T_0 |-B e T_0 |-C; logo se **K*** $||\!-_{T_0}$ C então

K* $||\!-_{T_0}$ B e, assim, **K*** $||\!-_T$ B $\not\subset$ C. ■

Teorema 3.48 (Existência de Modelos)

Se $\Gamma \subseteq Fla(IL^d)$ e $A \in Fla(IL^d)$ são tais que Γ |-/ A e Γ é regular, então existe um modelo de Kripke ***K*** *= < Σ, $\leq$,V > e um nó $p \in \Sigma$ tal que*

K *$||\!-_p$ B, para todo $B \in \Gamma$, e* ***K*** *$||\!-_p$ /A.*

Demonstração

Pelo Lema 3.46, existe T $\subseteq$ *$Fla(IL^d)$* $\Gamma \subseteq$ T regular, não trivial, prima e maximal, tal que T |-/ A. Construamos **K*** = < Σ^* , $\subseteq$, V* > com T $\in$ **K***. Assim, se B $\in \Gamma$ então B $\in$ T e, portanto, T |- B; pelo Lema 3.47, temos que, para todo B $\in \Gamma$, **K** $||\!-_T$ B e, também, **K** $||\!-_T$ /A. ■

Corolário 3.49 (Teorema da Completude)

Se Γ ||- A, então Γ|-A.

Demonstração

Suponhamos que Γ|-/ A. Então existe um modelo **K** = < Σ , $\leq$, V >, p $\in \Sigma$, tal que **K** $||\!-_p$ B, para todo B $\in \Gamma$, e **K** $||\!-_p$ /A (Teorema 3.48). Isto é, Γ ||-/A.■

3.5. O Cálculo de Predicados dual

Consideremos, agora, o cálculo de predicados dual ao cálculo de predicados intuicionista, que será denotado por $G_I^d Q$, ou ainda por $H^d Q$, quando apresentado no estilo hilbertiano.

A linguagem de $G_I^d Q$, denotada $L(G_I^d Q)$ - que é a linguagem de $H^d Q$, $L(H^d Q)$ - além dos conectivos $\not\subset$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ e parênteses, como símbolos auxiliares, consta de:

1. Um conjunto não vazio, infinito, mas enumerável, de variáveis individuais $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; nós usaremos x, y, z, ... como metavariáveis;

2. Um conjunto finito, possivelmente vazio, de constantes individuais $c_1, c_2, \ldots, c_n$; nós usaremos a, b, c, d, ... para denotar constantes individuais;

3. Um conjunto não vazio, possivelmente infinito, mas enumerável, de símbolos de predicado P^n_i ($n \in \mathbf{N}$, $i \in I$), com n indicando a aridade do símbolo de predicado; usaremos P, Q, R, com ou sem índices, na metalinguagem;

4. Um símbolo de predicado binário = ;

5. Um conjunto enumerável, possivelmente vazio, de símbolos de função f^n_i ($n \in \mathbf{N}$, $i \in I$), com n indicando a aridade do símbolo de função e usaremos f, g, h na metalinguagem;

6. Quantificadores $\forall$ (universal) e $\exists$ (existencial).

As definições de termo, fórmula, variável livre e variável ligada são as usuais; um termo será denotado por t, com ou sem índices.

O sistema $G_1^d Q$ é o sistema G_1^d, já apresentado, acrescido das seguintes regras:

$$\forall \quad \frac{A, \Delta \Rightarrow^d \Gamma}{\forall x\, A^a_x, \Delta \Rightarrow^d \Gamma} \qquad\qquad \frac{\Delta \Rightarrow^d A^x_t, \Gamma}{\Delta \Rightarrow^d \forall x\, A, \Gamma}$$

$$\exists \quad \frac{\Delta, A^x_t \Rightarrow^d \Gamma}{\Delta, \exists x\, A \Rightarrow^d \Gamma} \qquad\qquad \frac{\Delta \Rightarrow^d A, \Gamma}{\Delta \Rightarrow^d \exists x\, A^a_x, \Gamma}$$

O símbolo A^t_x indica o resultado de substituição de todas as ocorrências de x em A por t.

Teorema 3.50

São demonstráveis em $G_1^d Q$ os seguintes esquemas:

1#. $A(t) \not\subset \forall x\, A(x)$

2#. $(\forall x\, B(x) \not\subset A) \not\subset \forall x\, (B(x) \not\subset A)$

3#. $\exists x\, B(x) \not\subset B(t)$

4#. $(A \not\subset \exists x\, B(x)) \not\subset \forall x\, (A \not\subset B(x))$

5#. $\forall x\, A(x) \mid\!- A(t)$,

com as restrições seguintes: t está livre para x em B(x) nos esquemas 1#, 3# e 5# e x não está livre em A nos esquemas 2# e 4#.

Demonstração

1#	$\underline{A(t) \Rightarrow^d A(t)}$	Axioma
	$\underline{A(t) \Rightarrow^d \forall x\, A(x)}$	$\Rightarrow^d - \forall$
	$A(t) \not\subset \forall x\, A(x) \Rightarrow^d$	$\not\subset - \Rightarrow^d$

2# $\underline{A \Rightarrow^{d} A \qquad B(x) \Rightarrow^{d} B(x)}$ Axioma

$\underline{B(x) \Rightarrow^{d} B(x) \not\subset A, A}$ Corte

$\underline{\forall x\, B(x) \Rightarrow^{d} B(x) \not\subset A, A}$ $\forall$ - $\Rightarrow^{d}$

$\underline{\forall x\, B(x) \Rightarrow^{d} \forall x\, (B(x) \not\subset A), A}$ $\Rightarrow^{d}$ - $\forall$

$\underline{\forall x\, B(x) \Rightarrow^{d} A, \forall x\, (B(x) \not\subset A)}$ Permutação

$\underline{\forall x\, B(x) \not\subset A \Rightarrow^{d} \forall x\, (B(x) \not\subset A)}$ $\not\subset$ - $\Rightarrow^{d}$

$(\forall x\, B(x) \not\subset A) \not\subset \forall x\, (B(x) \not\subset A) \Rightarrow^{d}$ $\not\subset$ - $\Rightarrow^{d}$

3# $\underline{B(t) \Rightarrow^{d} B(t)}$ Axioma

$\underline{\exists x\, B(x) \Rightarrow^{d} B(t)}$ $\exists$ - $\Rightarrow^{d}$

$\exists x\, B(x) \not\subset B(t) \Rightarrow^{d}$ $\not\subset$ - $\Rightarrow^{d}$

4#

$\underline{B(x) \Rightarrow^{d} B(x) \qquad A \Rightarrow^{d} A}$ Axioma

$\underline{A \Rightarrow^{d} A \not\subset B(x), B(x)}$ Corte

$\underline{A \Rightarrow^{d} \forall x\, (A \not\subset B(x)), B(x)}$ $\Rightarrow^{d}$ - $\forall$

$\underline{A \Rightarrow^{d} \forall x\, (A \not\subset B(x)), \exists x\, B(x)}$ $\Rightarrow^{d}$ - $\exists$

$\underline{A \Rightarrow^{d} \exists x\, B(x), \forall x\, (A \not\subset B(x))}$ Permutação

$\underline{A \not\subset \exists x\, B(x) \Rightarrow^{d} \forall x\, (A \not\subset B(x))}$ $\not\subset$ - $\Rightarrow^{d}$

$(A \not\subset \exists x\, B(x)) \not\subset \forall x\, (A \not\subset B(x)) \Rightarrow^{d}$ $\not\subset$ - $\Rightarrow^{d}$

5#.

$\underline{[\forall x A(x)] \Rightarrow^{d} \qquad A(t) \Rightarrow^{d} A(t)}$ Axioma

$\underline{[\forall x A(x)] \Rightarrow^{d} \qquad A(t) \Rightarrow^{d} \forall x\, A(x)}$ $\Rightarrow^{d}$ -$\forall$

$A(t) \Rightarrow^{d}$ Corte

Como usual em cálculo de seqüentes, a notação [A] indica que a fórmula A é demonstrável, isto é, tem uma prova em $G_{I}^{d}Q$.

O sistema H^dQ é composto pelos esquemas proposicionais (Teorema 3.29) e mais os esquemas 1# a 4# do teorema precedente, que serão considerados como esquemas de axiomas de H^dQ, com as regras RD e Especificação (5# do teorema acima).

Consideremos então, sem perda de generalidade, como símbolos não lógicos da linguagem $L(H^dQ)$ os elementos do conjunto $\{P^1, R^2, f^1, g^2, c\}$; seja agora $Est(\tau)$ o conjunto de todas as estruturas do tipo de $L(H^dQ)$. Um *modelo de Kripke* para $L(H^dQ)$ é uma quadra

$$\mathbf{K} = \langle \Sigma, \leq, \Re, \Im \rangle$$

na qual:

1. $\langle \Sigma, \leq \rangle$ é um sistema parcialmente ordenado;

2. $\Re$ é uma função

$$\Re: \Sigma \longrightarrow Est(\tau)$$

$$p \longmapsto \Re_p$$

na qual $\Re(p) = \langle A_p, P^{\Re(p)}, R^{\Re(p)}, f^{\Re(p)}, g^{\Re(p)}, c^{\Re(p)} \rangle$, com $A_p \neq \varnothing$ e

$$P^{\Re(p)} \subseteq A_p$$

$$R^{\Re(p)} \subseteq A_p \times A_p$$

$$f^{\Re(p)} : A_p \longrightarrow A_p$$

$$g^{\Re(p)} : A_p \times A_p \longrightarrow A_p$$

$$c^{\Re(p)} \in A_p;$$

3. Para todo $p, q \in \Sigma$, $q \leq p$, $\Im$ associa $\Im_{qp} : \Re_p \longrightarrow \Re_q$

e a família $\Im_{qp}$ satisfaz as três condições seguintes:

a) $\Im_{qp}$ é um homomorfismo de $\Re_q$ em $\Re_p$, isto é,

se $c \in P^{\Re(p)}$ então $\Im_{qp}(c) \in P^{\Re(q)}$

se $(b, c) \in R^{\Re(p)}$ então $\Im_{qp}(b, c) \in R^{\Re(q)}$

b) $\Im_{rp} = \Im_{rq} \circ \Im_{qp}$

c) $\Im_{pp} = I_{Ap}$ (a identidade de A_p).

Definição 3.51

Seja **K** = $< \Sigma, \leq , \Re , \Im >$ um modelo de Kripke para $L(H^dQ)$ e sejam $p \in \Sigma$, $(c_1, ..., c_n) \in \Re_p$ (isto é $(c_1, ..., c_n) \in A_p$) e $B(x_1, ..., x_n)$ pertencente a $Fla(H^dQ)$. Definimos indutivamente a relação de forçamento local

K $||\!-_p B(x_1, ..., x_n)$ do seguinte modo:

1) **K** $||\!-_p P[c]$ se, e somente se, $c \in P^{\Re(p)}$ (isto é, se, e somente se, $\Re_p \models P[c]$, na qual $\models$ indica a relação de validade da lógica clássica);

2) **K** $||\!-_p R[c,d]$ se, e somente se, $(c,d) \in R^{\Re(p)}$ (isto é se, e somente se, $\Re_p \models R[c,d]$);

3) **K** $||\!-_p x = y\ [b,c]$ se, e somente se, $b = c$ em $\Re_p$ (isto é, se, e somente se, $\Re_p \models x = y\ [b,c]$);

4) **K** $||\!-_p A \vee B\ [c_1, ..., c_n]$ se, e somente se,

K $||\!-_p A\ [c_1, ..., c_n]$ e **K** $||\!-_p B\ [c_1,..., c_n]$;

5) **K** $||\!-_p A \wedge B\ [c_1, ..., c_n]$ se, e somente se,

K $||\!-_p A\ [c_1, ..., c_n]$ ou **K** $||\!-_p B\ [c_1, ..., c_n]$;

6)**K** $||\!-_p \neg B\ [c_1, ..., c_n]$ se, e somente se, para todo $q \in \Sigma$, $q \leq p$ tem-se que

$\mathbf{K} \Vdash\!\!\!/_q B [\Im_{qp}(c_1), ..., \Im_{qp}(c_n)]$;

7) $\mathbf{K} \Vdash_p (A \not\subset B) [c_1, ..., c_n]$ se, e somente se, para todo $q \in \Sigma$, $q \leq p$

se $\mathbf{K} \Vdash_q B [\Im_{qp}(c_1), ..., \Im_{qp}(c_n)]$ então $\mathbf{K} \Vdash_q A [\Im_{qp}(c_1), ..., \Im_{qp}(c_n)]$;

8) $\mathbf{K} \Vdash_p \exists y B(y, x_1, ..., x_n) [c_1, ..., c_n]$ se, e somente se, existe $b \in \Re_p$ tal que

$\mathbf{K} \Vdash_p B(y, x_1, ..., x_n) [b, c_1, ..., c_n]$

9) $\mathbf{K} \Vdash_p \forall y B(y, x_1, ..., x_n) [c_1, ..., c_n]$ se, e somente se, para $q \leq p$ e para todo $b \in \Re_q$ $\mathbf{K} \Vdash_q B(y, x_1, ..., x_n) [b, \Im_{qp}(c_1), ..., \Im_{qp}(c_n)]$.

Completamos a definição, supondo que as variáveis que ocorrem nos termos t_1 e t_2 estão na lista $x_1, ..., x_n$:

$\mathbf{K} \Vdash_p P(t_1) [c_1, ..., c_n]$ se, e somente se, $t_1^{\Re(p)}[c_1, ..., c_n] \in P^{\Re(p)}$;

$\mathbf{K} \Vdash_p R(t_1,t_2) [c_1, ..., c_n]$ se, e somente se,

$(t_1^{\Re(p)}[c_1, ..., c_n], t_2^{\Re(p)}[c_1, ..., c_n]) \in R^{\Re(p)}$;

$\mathbf{K} \Vdash_p t_1 = t_2 [c_1, ..., c_n]$ se, e somente se,

$t_1^{\Re(p)}[c_1, ..., c_n] = t_2^{\Re(p)}[c_1, ..., c_n]$.

Teorema 3.52

As seguintes propriedades dos modelos de Kripke para H^dQ são demonstráveis.

A. $\boldsymbol{K} \Vdash_p B [c_1, ..., c_n]$ e $q \leq p$ implica $\boldsymbol{K} \Vdash_q B [\Im_{qp}(c_1), ..., \Im_{qp}(c_n)]$;

B. $\boldsymbol{K} \Vdash_p B [c_1, ..., c_n]$ se, e somente se, $\boldsymbol{K}\lceil (p] \Vdash_p B [c_1, ..., c_n]$;

C. $\boldsymbol{K} \Vdash_p \neg\neg B [c_1, ..., c_n]$ se, e somente se, para todo $q \leq p$, existe $r \leq q$ tal que

$\boldsymbol{K} \,||\!-_r B\, [\Im_{rp}(c_1), ..., \Im_{rp}(c_n)];$

D. Se m é elemento minimal em Σ, *então* $\boldsymbol{K} \,||\!-_m B\, [c_1, ..., c_n]$ *se, e somente se,* $\Re_m \models B\, [c_1, ..., c_n]$. ■

Definição 3.53

Uma fórmula $B(x_1, ..., x_n) \in Fla(H^dQ)$ é *forçada no modelo* ***K*** se, e somente se, para todo $p \in \Sigma$, $\mathbf{K} \,||\!-_p B(x_1, ..., x_n)\, [c_1, ..., c_n]$; uma fórmula $B(x_1, ..., x_n) \in Fla(H^dQ)$ é *válida* se, e somente se, é forçada em todo modelo **K**.

Teorema 3.54 (da Validade)

Se $|\!-_{H^dQ} B(x_1, ..., x_n)$ *então, para todo modelo* ***K***, *todo* $p \in \Sigma$ *e toda* $(c_1, ..., c_n) \in \Re_p$, $\boldsymbol{K} \,||\!-_p B(x_1, ..., x_n)\, [c_1, ..., c_n]$

Demonstração

Devemos mostrar que os axiomas de H^dQ são válidos e que as regras preservam validade. Para os conectivos proposicionais e a regra RD a prova é adaptação da prova do Teorema 3.44. Vamos verificar alguns dos demais axiomas:

a) Para o Axioma 3#

Suponhamos as restrições do axioma e que as variáveis que ocorrem em t estão na lista $x_1, ..., x_n$.

$\mathbf{K} \,||\!-_p \exists y B(y) \not\subset B(t)[c_1, ..., c_n]$ se, e somente se, para todo $q \in \Sigma$, $q \leq p$, se $\mathbf{K} \,||\!-_q B(t)[\Im_{qp}(c_1), ...,\Im_{qp}(c_n)]$ então $\mathbf{K} \,||\!-_q \exists y B(y)\, [\Im_{qp}(c_1), ...,\Im_{qp}(c_n)]$; nas condições da hipótese, existe $b = t \in \Re_p$ tal que $\mathbf{K} \,||\!-_q B\,(t)\, [\Im_{qp}(c_1), ...,\Im_{qp}(c_n)]$, logo $\mathbf{K} \,||\!-_q \exists y B[\Im_{qp}(c_1), ...,\Im_{qp}(c_n)]$

b) Para o Axioma 4#

$\mathbf{K} \Vdash_p (A \not\subset \exists x B(x)) \not\subset \forall x(A \not\subset B(x))\ [c_1, ..., c_n]$ se, e somente se, para todo $q \in \Sigma$, $q \leq p$, se $\mathbf{K} \Vdash_q \forall x(A \not\subset B(x))[\Im_{qp}(c_1), ...,\Im_{qp}(c_n)]$, então

$\mathbf{K} \Vdash_q A \not\subset \exists x B(x)\ [\Im_{qp}(c_1), ...,\Im_{qp}(c_n)]$.

Pela hipótese, para todo $r \in \Sigma$, $r \leq q$, e todo $b \in \Re_r$, $\mathbf{K} \Vdash_r A \not\subset B\ (x)\ [\Im_{rq}(c_1), ...,\Im_{rq}(c_n)]$; isto é, se, e somente se, para todo $s \leq r$, se $\mathbf{K} \Vdash_s B(x)\ [\Im_{sr}(c_1), ...,\Im_{sr}(c_n)]$, então $\mathbf{K} \Vdash_q A$; supondo $s = r$, temos $\mathbf{K} \Vdash_r B\ (x)\ [\Im_{rq}(c_1), ...,\Im_{rq}(c_n)]$ e, assim,

$\mathbf{K} \Vdash_r \exists x B(x)\ [\Im_{rq}(c_1), ...,\Im_{rq}(c_n)]$, pois ocorre para todo $b \in \Re_r$ e $\mathbf{K} \Vdash_r A$, logo, $\mathbf{K} \Vdash_q A \not\subset \exists x B(x)\ [\Im_{qp}(c_1), ...,\Im_{qp}(c_n)]$.

c) Para a Regra de Especificação

Suponhamos que $\mathbf{K} \Vdash_p \forall x A(x)\ [c_1, ..., c_n]$; isto ocorre se, e somente se, para todo $q \in \Sigma$, $q \leq p$, se $\mathbf{K} \Vdash_q A(x)[\Im_{qp}(c_1), ...,\Im_{qp}(c_n)]$. Tomemos $q = p$; assim $\mathbf{K} \Vdash_p A(x)\ [(c_1), ...,(c_n)]$, que é o que queríamos mostrar. ■

Lema 3.55

Sejam $\Gamma \subseteq Fla(H^dQ)$ *e* $A \in Fla(H^dQ)$. *Seja* C_1 *uma coleção enumerável de constantes e* $C_1 \cap L(H^dQ) = \emptyset$. *Se* $\Gamma \not\vdash A$ *e* Γ *regular, então existe uma teoria* $\Gamma' \subseteq Fla(L(H^dQ) \cup C_1)$ *tal que* $\Gamma \subseteq \Gamma'$ *e* $\Gamma' \not\vdash A$ *e, além disso:*

i) Γ' *é regular, prima e não trivial com respeito a* $Fla(L(H^dQ) \cup C_1)$;

ii) Γ' *é existencialmente fechada com respeito a* $L(H^dQ) \cup C_1)$, *isto é, se* $\Gamma' \vdash \exists x\, A(x)$, $\exists x\, A(x)$ *pertence a* $Fla(L(H^dQ) \cup C_1)$ *então existe* $c \in C_1$ *tal que* $\Gamma' \vdash A(c)$.

<u>Demonstração</u>

Sejam C_1, C_2, C_3,... conjuntos enumeráveis de constantes, todos disjuntos, isto é, $C_i \cap C_j = \varnothing$, se $i \neq j$, e $|C| < \omega$. Seja $L_0(H^dQ) = L(H^dQ)$.

$L_1(H^dQ) = L_0(H^dQ) \cup C_1$

$L_2(H^dQ) = L_0(H^dQ) \cup C_1 \cup C_2$

.
.
.
$L_n(H^dQ) = L_{n-1}(H^dQ) \cup C_1 \cup C_2 \cup ... \cup Cn$.

Tomemos a cadeia $L_0(H^dQ) \subseteq L_1(H^dQ) \subseteq L_2(H^dQ) \subseteq ...$

$L_{n+1} \setminus L_n = C_{n+1}$.

Com isso,

$\text{Fla}(L_0) \subseteq \text{Fla}(L_1) \subseteq ...$

e prossegue-se como no Teorema 3.46. ■

Seja agora $\Sigma^* = \{\Gamma / \Gamma \subseteq Fla(L_n)$ para algum n, Γ é prima com respeito a $Fla(L_n)$ e Γ é existencialmente fechada com respeito a $Fla(L_n)$ e a C_n $\}$.

Define-se $\Gamma_0 \leq \Gamma_1$ se, e somente se, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1$

Dado $\Gamma \in \Sigma$, então $\Gamma \subseteq Fla(L_n)$; tomemos $\Re_\Gamma = <(c'_i/\approx), (R^{\Re}_i), (f^{\Re}_i)>$, com $c \approx c'$ se, e somente se $\Gamma \mid\!- c = c'$.

Lema 3.56 (Existência de Modelos)

Seja $\boldsymbol{K}^* = <\Sigma^*, \subseteq, \Re_\Gamma, \Im_{\Gamma\Gamma'}>$, $\Gamma \in \Sigma^*$. *Então, para cada* $\Gamma \in \Sigma^*$ *com* $\Gamma \subseteq Fla(L_n)$, *e para cada* $A(x_1, ..., x_n) \in Fla(L_n)$, $\boldsymbol{K}^* \mid\mid\!-_\Gamma A\,(c_1/\approx, ..., c_n/\approx)$ *se, e somente se,* $\Gamma \mid\!- A\,(x_1, ..., x_n)$.

Demonstração : Similar à prova do Teorema 3.48. ■

Corolário 3.59 (Teorema da Completude)

Se Γ $||$- *A, isto é, se para todo* $B \in \Gamma$*, para todo modelo de Kripke* $\boldsymbol{K} = < \Sigma, \leq, \mathfrak{R}, \mathfrak{I} >$ *e todo nó* $p \in \Sigma$ *tem-se que se* $\boldsymbol{K}\ ||\!-_p B$*, então* $\boldsymbol{K}\ ||\!-_p A$*, tem-se que* $\Gamma \mid\!-_{HdQ} A$. ■

CAPÍTULO IV

Ainda sobre a lógica dual

Neste capítulo, consideramos ideais e filtros numa álgebra de Brouwer, com o objetivo de mostrar que resultados padrões relativos a estas estruturas podem ser generalizados para esta classe de álgebras.

Apresentamos a seguir uma lógica conectada aos filtros de uma álgebra de Brouwer.

O interessante desta lógica, que chamamos FB, é que tem um conectivo "$\supset$" que permite comparar uma lógica brouweriana, paraconsistente, às demais lógicas paraconsistentes conhecidas.

FB é um fragmento da lógica relevante **R** e, assim, também faz uma ligação entre lógicas relevantes e lógicas paraconsistentes.

4.1. Ideais numa BrA

Definição 4.1

Seja BrA = $< A, \cap, \cup , —, T >$ uma álgebra de Brouwer. Um conjunto não vazio J de elementos de uma álgebra de Brouwer, $J \subseteq A$, é um *ideal* de A se, e somente se, :

i) $a \in J$ e $b \in J$ implica $a \cup b \in J$

ii) $a \in J$ e $b \leq a$ implica $b \in J$.

Teorema 4.2

Um conjunto não vazio J, $J \subseteq A$, é um ideal de uma BrA se, para todo $a \in A$, $a \in$

J implica que $\neg \neg a \in J$.

Demonstração

Por Teorema 3.6.iii, 3.6.ix e pelo fato de que $\perp \in$ J. ■

Definição 4.3

Dada BrA = < A, $\cap$, $\cup$, — , T >, todo ideal de A, diferente de A, é um *ideal próprio.*

Teorema 4.4

Dada a BrA = < A, $\cap$, $\cup$, — , T >, se $C \subseteq A$, então o conjunto $G(C) = \bigcap \{ J : C \subseteq J\}$ no qual J um ideal de A também é um ideal de A.

Demonstração

Existe pelo menos um ideal de A que contém C, a saber, o conjunto A. Suponhamos a, b $\in$ G(C) e c $\in$ A. Se J é qualquer ideal que contém C, então a $\in$ J e b $\in$ J, logo a $\cup$ b $\in$ J; mas a — c $\leq$ a em qualquer BrA e, assim, segue-se que a — c $\in$ J. Logo, a $\cup$ b e a — c $\in$ G(C) e este é um ideal. ■

Observação: G(C) é dito *ideal gerado por C.*

Teorema 4.5

Se J é um ideal de uma BrA = < A, $\cap$, $\cup$, — , T > e se $b \in A$, o ideal $G(J \bigcup \{b\})$, gerado por J unido com b, consiste de todos os elementos da forma $(c \cap b) \cup a$, com $c \in A$ e $a \in J$.

Demonstração

Seja D o conjunto de todos os elementos $(c \cap b) \cup a$, com $c \in A$ e $a \in J$; dado que $b = (T \cap b) \cup \perp$, segue-se que $b \in D$ e também, se $m \in J$ então $m = (\perp \cap b) \cup m \in D$; logo, $J \bigcup \{b\} \subseteq D$.

Além disso $((c_1 \cap b) \cup a_1) \cup ((c_2 \cap b) \cup a_2) = ((c_1 \cup c_2) \cap b) \cup (a_1 \cup a_2) \in D$ e, se $a \in J$, então $d \cap ((c \cap b) \cup a) = ((d \cap c) \cap b) \cup (d \cap a) \in D$.

Assim D é um ideal.

Finalmente, se H é um ideal que contém $J \bigcup \{b\}$ e se $a \in J$, então $(c \cap b) \cup a \in H$. Assim, $D \subseteq H$. ■

Corolário 4.6

Se J é um ideal de uma BrA e $b \in A \setminus J$, então o ideal $G(J \bigcup \{b\})$ gerado por J unido com b é um ideal próprio se, e somente se, $a \cup b \neq T$, para todo $a \in J$, isto é, se, e somente se, para todo $a \in J$, $\neg b \leq a$.

Demonstração

Provemos a versão negada: $G(J \bigcup \{b\})$ não é um ideal próprio se, e somente se, $a \cup b = T$ para algum $a \in J$. Note-se, inicialmente, que $T \leq b \cup a$ se, e somente se, $T \mathbin{—} b \leq a$ se, e somente se, $\neg b \leq a$.

($\Rightarrow$) Se $G(J \bigcup \{b\})$ não é um ideal próprio, então $T \in G(J \bigcup \{b\})$ e, para algum $a \in J$, ocorre que $\neg b \leq a$; além disso, $\neg b \cup b \leq a \cup b$ e, portanto, $T \leq a \cup b$, isto é, $a \cup b = T$.

($\Leftarrow$) Se para todo $a \in J$, $a \cup b = T$, então $G(J \bigcup \{b\})$ não é um ideal próprio. ■

Definição 4.7

Um ideal J_M de uma BrA é *maximal* se, e somente se, J é um ideal próprio e não existe nenhum ideal próprio de BrA tal que $J_M \subset J$.

Teorema 4.8

Seja J_M um ideal próprio de uma BrA = $< A , \cap, \cup, T , — >$. J_M é maximal se, e somente se, para todo $b \in A$, ou $b \in J_M$ ou $\neg\, b \in J_M$.

Demonstração

($\Rightarrow$) Suponhamos que J_M é maximal e $b \notin J_M$. Devemos mostrar que $\neg\, b \in J_M$. Se $I = G(J_M \cup \{b\})$, então I é um ideal de BrA e $J_M \subset I$; pela maximalidade de J_M, $I = A$; pelo teorema anterior, $\neg\, b \leq a$ para algum $a \in J_M$ e, como J_M é um ideal, $\neg\, b \in J_M$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $b \in J_M$ ou que $\neg\, b \in J_M$, para todo $b \in A$. Suponhamos $J_M \subset I$, com I um ideal. Devemos provar que I = A. Seja $b \in I \setminus J_M$. Como $b \notin J$, $\neg\, b \in J_M$; logo, $\neg\, b \in I$ e assim $\neg b \cup b \in I$. Portanto, I = A. ■

Definição 4.9

Um ideal J de uma BrA = $< A , \cap, \cup, T , — >$ é *primo* se, e somente se, para todo $a, b \in A$, se $a \notin J$ e $b \notin J$ então $a \cap b \notin J$.

Teorema 4.10

Se J é um ideal próprio e maximal de uma BrA, então J é primo.

Demonstração

Suponhamos J maximal com $a \notin J$ e $b \notin J$. Pelo Teorema 4.8, $\neg a \in J$ e $\neg b \in J$ e, assim, $\neg a \cup \neg b \in J$; mas, pelo Teorema 3.10.iii, $\neg a \cup \neg b = \neg (a \cap b)$ e, assim, $\neg (a \cap b) \in J$. Como J é maximal, $a \cap b \notin J$. ■

4.1.1. Teorias em H^d

Seja $T \subseteq Fla(IL^d)$ uma teoria em H^d. Denotaremos por I_Δ o conjunto dos elementos [A] de $\Re(H^d)$ tais que A é demonstrável em T. Assim, $[A] \in I_\Delta$ se, e somente se, T |- A.

Dado um ideal J numa BrA denotaremos por $BrA/_J$ o conjunto das classes de equivalência módulo J.

Teorema 4.11

a) I_Δ *é um ideal na álgebra de Brouwer* $\Re(H^d)$. *A teoria T é não trivial se, e somente se,* I_Δ *é um ideal próprio.*

b) A álgebra $\Re(H^d)$ *de uma teoria T em* H^d *é isomorfa à álgebra quociente* $\Re(H^d)/_{I\Delta.}$

c) T é maximal se, e somente se, I_Δ *é um ideal maximal em* $\Re(H^d)$.

d) T é prima se, e somente se, I_Δ *em* $\Re(H^d)$ *é primo.*

e) Se T é maximal então T é prima. ■

4.2. Filtros numa BrA

Resultados interessantes do ponto de vista da lógica e teorias são obtidos se considerarmos os filtros numa álgebra de Brouwer.

Definição 4.12

Seja BrA = < A, $\cap$, $\cup$, T, — > uma álgebra de Brouwer.

1) Um conjunto não vazio F de elementos de uma BrA, F $\subseteq$ A é um *filtro* numa BrA se, e somente se, para a, b $\in$ A:

i) a $\in$ F e b $\in$ F implica a $\cap$ b $\in$ F;

ii) a $\in$ F e a $\leq$ b implica b $\in$ F.

2) Todo filtro diferente de A é um *filtro próprio*.

3) Um filtro F_M é *maximal* se, e somente se, F_M é um filtro próprio e não existe nenhum filtro próprio F tal que $F_M \subset F$.

4) Um filtro F é *primo* se, e somente se, para todo a, b $\in$ A, se a $\cup$ b $\in$ F então a $\in$ F ou b $\in$ F.

Teorema 4.13

Seja BrA = < A, $\cap$, $\cup$, T, — > uma álgebra de Brouwer

a) A interseção de filtros de uma BrA é um filtro.

b) Seja S $\subseteq$ A; o filtro gerado por S, denotado por [S), é dado por:

[S) = { b $\in$ A : para alguns $a_1,..., a_n \in S$, $a_1 \cap ... \cap a_n \leq b$}.

c) O menor filtro numa BrA contendo a $\in$ A, denotado por [a), e chamado o filtro principal gerado por a, é tal que

[a) = { b $\in$ A : a $\leq$ b}.

d) Um filtro F_M é maximal se, e somente se, para todo a $\in$ A, ou a $\in F_M$ ou $\neg$ a $\in F_M$.

e) Todo filtro próprio e maximal é primo. ■

Teorema 4.14

F é um filtro próprio numa BrA se, e somente se, para todo a $\in$ F, $\neg\neg$ a $\notin$ F.

Demonstração

Provemos a versão negada: F não é filtro próprio se, e somente se, para algum $a \in F, \neg \neg a \in F$

($\Rightarrow$)Se F não é filtro próprio, então $\perp \in F$, isto é, $\neg (a \vee \neg a) \in F$ e, assim, $T — (a \vee \neg a) = (T — \neg a) — a \in F$, isto é, $\neg \neg a — a \in F$. Como $\neg \neg a — a \leq \neg \neg a$ (Teorema 3.6.iv), segue-se que $\neg \neg a \in F$, para algum a em F.

($\Leftarrow$) Suponhamos $\neg \neg a \in F$. Assim $T — \neg a \in F$. Mas, $T — \neg a \leq a$ se, e somente se, $(T — \neg a) — a = T$ e, como $T \in F$, $(T — \neg a) — a \in F$, isto é, $T — (a \vee \neg a) \in F$, ou seja, $\neg (a \vee \neg a) = \perp \in F$. ■

A questão que se apresenta, agora, é a seguinte: quais as teorias que estão relacionadas aos filtros de uma álgebra de Brouwer?

Aos ideais estão conectadas teorias cuja lógica é H^d . Esta lógica, ainda que deveras interessante como se verá nos capítulos seguintes - quando da discussão de categorias, não é subcálculo da lógica clássica e parece-nos muito difícil, no momento, relacioná-la às lógicas paraconsistentes conhecidas.

Entretanto, a lógica relacionada aos filtros de uma BrA contém teoremas clássicos - tais como $A \vee \neg A$ e $\neg (A \wedge \neg A)$, já ressaltados anteriormente - e é interessante explicitá-la.

4.3. O Sistema Lógico FB

Consideremos a linguagem proposicional LH, tal como definida na

Seção 2 do Capítulo 3. Nesta linguagem construamos o sistema lógico FB, cujos axiomas são,

(FB_1) $A \supset A$

(FB_2) $(A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B))$

(FB_3) $A \supset (B \supset (A \supset B))$

(FB_4) $(A \wedge B) \supset A$

(FB_5) $(A \wedge B) \supset B$

(FB_6) $((A \supset B) \wedge (A \supset C)) \supset (A \supset B \wedge C)$

(FB_7) $A \supset (A \vee B)$

(FB_8) $B \supset (A \vee B)$

(FB_9) $((A \supset C) \wedge (B \supset C)) \supset (A \vee B \supset C)$

(FB_{10}) $(A \wedge (B \vee C)) \supset ((A \wedge B) \vee C)$

(FB_{11}) $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$

(FB_{12}) $\neg \neg A \supset A$

(FB_{13}) $A \vee \neg A$,

com as seguintes regras de inferência

$A, A \supset B / B$ (*modus ponens*)

$A, B / A \wedge B$ (conjunção).

Teorema 4.15

Em FB são demonstráveis os seguintes esquemas e regras:

a) $\neg \neg \neg A \supset \neg A$

b) $\neg A \supset \neg \neg \neg A$

c) $\neg (A \wedge \neg A)$

d) $\neg (A \wedge B) \supset \neg A \vee \neg B$

e) $\neg A \vee \neg B \supset \neg (A \wedge B)$

f) $\neg (A \vee B) \supset \neg A \wedge \neg B$

g) $A \supset B, B \supset C \mid\!- A \supset C$

h) $A \supset B, A \supset \neg B \mid\!- \neg A$

i) $\neg A \supset A \mid\!- A$

j) $\neg A \supset B \mid\!- \neg B \supset A$

k) Se $\mid\!- A \supset B$ *então* $A \supset C \mid\!- B \supset C$ ■

Teorema 4.16

Em FB ***não*** *são demonstráveis os seguintes esquemas e regras:*

a) $A \supset (B \supset A)$

b) $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$

c) $B \supset (A \vee \neg A)$

d) $A \supset (\neg A \supset B)$

e) $\neg A \supset (A \supset B)$

f) $A \supset (\neg A \supset \neg B)$

g) $\neg A \supset (A \supset \neg B)$

h) $A \wedge \neg A \supset B$

i) $A \wedge \neg A \supset \neg B$

j) $A \supset \neg \neg A$

k) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$

l) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

m) $(A \supset B) \vee (B \supset A)$

n) $A \wedge \neg A \mid\!- B$

o) $A \supset (B \supset C) \mid\!- B \supset (A \supset B)$

<u>Demonstração</u>

Basta tomar a seguinte matriz $M = \langle \{0, 1, 2\}, \{1\}, \supset, \wedge, \vee, \neg \rangle$, com os conectivos definidos pelas seguintes tábuas:

$\supset$	A \ B	0	1	2
	0	1	1	1
	1	0	1	0
	2	2	1	1

$\wedge$	A \ B	0	1	2
	0	0	0	0
	1	0	1	1
	2	0	1	2

$\vee$	A \ B	0	1	2
	0	0	1	1
	1	1	1	1
	2	1	1	1

A	$\neg$ A
0	2
1	2
2	0

■

Observação:

1. Não vale, em FB, o Teorema da Dedução, seja na forma clássica, seja na forma relevante (*e.g*. [Dun86:135]).

2. FB é uma lógica paraconsistente (*lato sensu*) e não é uma lógica paracompleta.

4.4. Algebrização e completude de FB

Consideremos, então, *Fla(FB)* = $< \{p_i\}_{i \varepsilon I}, \wedge, \vee, \supset, \neg >$ a álgebra das fórmulas da linguagem de FB. Consideremos a relação A ˜ B se, e somente se, $|\!-_{FB}$ $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$. Demonstra-se, facilmente, que ˜ é uma relação de equivalência na álgebra *Fla(FB).* A álgebra quociente *Fla(IL^d)/˜* será denotada por $\Re$(FB).

Dada A $\in$ *Fla(FB),* denota-se por

[A] = {B $\in$ *Fla(FB)* tal que A ˜ B}

a classe de equivalência de A, módulo ˜, e define-se [A] = [B] se, e somente se, $|\!-_{FB}$ $A \supset B$.

Define-se então

$[A] \cup [B] := [A \vee B]$

$[A] \cap [B] := [A \wedge B]$

$[A] — [B] := \neg [A \supset B]$

$\neg [A] := [\neg A]$.

Teorema 4.17

A álgebra $\Re(FB)$, com as operações acima definidas, é um filtro numa álgebra de Brouwer.

Demonstração

Os axiomas FB_4 - FB_9 garantem que $\Re(FB)$ é um reticulado; o axioma FB_{13} mostra que $\Re(FB)$ tem elemento unidade T determinado por $[A \vee \neg A] := [A] \cup \neg [A]$, logo $\Re(FB)$ é um reticulado com elemento unitário T; as regras de inferência garantem ainda que $\Re(FB)$ é um filtro; o axioma FB_3 mostra que se $[A], [B] \in \Re(FB)$ então $[A] — [B]$ e $[B] — [A]$ estão em $\Re(FB)$; devemos, então, mostrar que $[A] — [B] \leq [C]$ se, e somente se, $[A] \leq [B] \cup [C]$. ■

Teorema 4.18

Dada uma fórmula $A \in Fla(FB)$, A é teorema de FB se, e somente se, $[A] = T$ em $\Re(FB)$.

Demonstração

Seja A teorema de FB. Considere a seguinte demonstração:

1. A	Hipótese
2. $(A \vee \neg A) \supset (A \supset ((A \vee \neg A) \supset A))$	Axioma FB_3

3. $(A \vee \neg A)$ Axioma FB_{13}

4. $(A \supset ((A \vee \neg A) \supset A))$ 2,3 /MP

5. $(A \vee \neg A) \supset A$ 1,4/MP.

Assim, $[A \vee \neg A] \leq [A]$, e, por definição, $[A] \cup \neg [A] \leq T$, isto é, $T \leq [A]$ e então $[A] = T$.

Por outro lado, se $[A] = T$, então $[A] \cup \neg [A] \leq [A]$,

isto é, $|-_{FB} A \vee \neg A \supset A$ e, como $(A \vee \neg A)$ é axioma de FB, segue-se , por MP, que $|-_{FB}$ A. ■

Definição 4.19

1. Seja BrA uma álgebra de Brouwer. Toda aplicação $\underline{v}$, do conjunto das variáveis proposicionais $\{p_i\}_{i \in I}$ aos elementos de um filtro primo de uma BrA é chamada uma *valoração*. Pode-se estender, de forma única, uma valoração $\underline{v}$, para toda fórmula $A \in$ *Fla(FB)*.

2. Se BrA = $\Re$(FB), então $\underline{v}$ é denominada a *valoração canônica* da linguagem de FB e assim $\underline{v}_c(A) = [A]$;

3. Uma valoração $\underline{v}$ é *modelo* de um conjunto Γ de fórmulas se, e somente se, $\underline{v}(A) = T$, para toda $A \in \Gamma$;

4. Uma fórmula $A \in$ *Fla(FB)* é dita ser *válida* se, e somente se, para toda valoração $\underline{v}$, $\underline{v}(A) = T$.

Teorema 4.20 (da Correção)

Se $A \in$ Fla(FB) é demonstrável em FB, então A é válida.

Demonstração

Devemos mostrar que todo axioma de FB é válido e que as regras de inferência preservam validade.

i) Todo axioma é válido.

Para os axiomas FB_1, FB_4, FB_5, FB_7, FB_8, FB_{12}, FB_{13} a prova é imediata.

Vamos mostrar para alguns dos demais.

i.1) Para o Axioma FB_2; seja $\underline{v}(A):= a$ e $\underline{v}(B):= b$, $\underline{v}(C):= c$, com a, b, c elementos de um filtro primo de uma BrA.

$\underline{v}((A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B))) =$

$\neg (\neg (a — b) — \neg (\neg (c — a) — \neg (c — b)))$

Note-se que, pelo Teorema 3.10.i

$\neg (c — a) — \neg (c — b) \leq (c — b) — (c — a)$

e, pelo Teorema 3.10.v, $(c — b) — (c — a) \leq a — b$.

Assim, $\neg (c — a) — \neg (c — b) \leq a — b$

logo,

$\neg (a — b) \leq \neg (\neg (c — a) — \neg (c — b))$

e, portanto, $\neg (a — b) — \neg (\neg (c — a) — \neg (c — b)) \leq \perp$.

i.2) Para o Axioma FB_9, sejam $\underline{v}(A):= a$ e $\underline{v}(B):= b$, $\underline{v}(C):= c$, com a, b, c elementos de um filtro primo de uma BrA.

$v(((A \supset C) \wedge (B \supset C)) \supset (A \vee B \supset C)):=$

$\neg (\neg (a — c) \cap \neg (b — c) — \neg ((a \cup b) — c))$.

Note-se que, pelo Teorema 3.6.vii,

$(a — c) \cup (b — c) = (a \cup b) — c$, e

$\neg ((a — c) \cup (b — c)) = \neg ((a \cup b) — c)$.

Pelo Teorema 3.10.ii, $\neg (a — c) \cap \neg (b — c) = \neg ((a \cup b) — c)$,

e, assim,

$\neg (a — c) \cap \neg (b — c) — \neg ((a \cup b) — c) \leq \perp$.

ii)Vejamos que as regras preservam validade.

Suponhamos $\underline{v}(A) = T$ e $\underline{v}(A \supset B) = T$. Mas $\underline{v}(A \supset B) := T$ se, e somente se, $\neg (a — b) = T$ se, e somente se, $\neg (T — b) = T$ se, e somente se, $\neg\neg b = T$. Como $\neg\neg b \leq b$, segue-se que $T \leq b$ e, portanto, $\underline{v}(B) = T$

Para a conjunção a prova é imediata . ■

Teorema 4.21(da Completude)

Se $A \in Fla(FB)$ é válida, então A é demonstrável em FB.

Demonstração

Suponhamos que A não é demonstrável em FB. Tome-se a álgebra $\Re(FB)$ e a valoração canônica v_c tal que $v_c(A) \neq T$ (conforme Teorema 4.18). Logo, A não é válida. ■

Observação: FB é um fragmento da lógica relevante **R** de Anderson e Belnap (ver [Dun86]).

CAPÍTULO V

Categorias, *topos* e dualidade

Sabe-se que, para qualquer *topos* elementar ξ, o objeto Ω (classificador de subobjetos) tem a estrutura de uma álgebra de Heyting. É de se supor que, por dualidade, podemos associar a cada *topos*, um *topos* dual no qual Ω tem, também, a estrutura de uma álgebra de Brouwer. Isto, entretanto, não é verdade; nós mostraremos que, para certos *topoi*, a álgebra dos subobjetos é uma álgebra de Brouwer, bem como é uma álgebra de Heyting - como se sabe - e que não se pode definir uma negação "brouweriana", distinta da negação booleana.

Antes, entretanto, fixam-se alguns conceitos e resultados básicos de Teoria das Categorias e *topos.*

Definição 5.1

1. Uma *categoria* ***C*** consiste de uma coleção de *objetos*, Ob(***C***), e uma coleção de *morfismos*, Hom(***C***); a cada morfismo f associa-se um *domínio*, dom(f) $\in$ Ob(***C***) e um *codomínio*, codom(f) $\in$ Ob(***C***).
2. Um morfismo f com A:= dom(f) e B:= codom(f) é representado por

   f: A ——> B.

3. O *conjunto de morfismos* com domínio A e codomínio B será representado por Hom_C (A,B).

A composição de morfismos satisfaz a associatividade e, para cada A $\in$ Ob(***C***), existe um morfismo *identidade,* $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_C$ (A,A).

Os conceitos de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo são os usuais, em teoria das categorias. O fato de que f é um monomorfismo será indicado por f: $A \rightarrowtail B$; de que f é epimorfismo, por f: $A \twoheadrightarrow B$.

Um *objeto terminal* numa categoria ***C*** será indicado por **1**; um *objeto inicial* por $\varnothing$.

Um <u>produto</u> $A \times B$ de dois objetos de uma categoria ***C*** é um objeto com morfismos $p_A: A \times B \longrightarrow A$, $p_B: A \times B \longrightarrow B$ tal que para cada par de morfismos f: $C \longrightarrow A$ e g: $C \longrightarrow B$ existe um único morfismo h, representado por <f,g>, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl] \arrow[d, "h"] \arrow[dr] & \\ A & A \times B \arrow[l] \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Uma <u>soma</u> (ou <u>co-produto</u>) $A + B$ de dois objetos de uma categoria ***C*** é um objeto com dois morfismos $i_A: A \longrightarrow A + B$ e $i_B: B \longrightarrow A + B$ tal que para cada par de morfismos, f: $A \longrightarrow C$ e g: $B \longrightarrow C$ existe um único morfismo h, denotado por [f,g], tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & A + B \arrow[d, "h"] & B \arrow[l] \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Tomamos como usuais, também, os conceitos de *pullbacks* e *pushouts*.

Definição 5.2

Sejam ***C*** uma categoria e A, B, C $\in$ Ob(***C***). Uma *exponencial* A^B em ***C*** é um objeto tal que existe um morfismo fixado (chamado *avaliação*, denotado *av*), *av*: $A^B \times B \longrightarrow A$ e, para cada morfismo f: $C \times B \longrightarrow A$, existe um único f^: $C \longrightarrow A^B$ tal que

$$av \circ (f\text{^} \times id_B) = f$$

isto é, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} A^B \times B \arrow[r] & A \\ C \times B \arrow[u, "f\text{^}\times id_B"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Observação:

Para f:$C \longrightarrow A$ e g: $D \longrightarrow B$, f×g: $C \times D \longrightarrow A \times B$ é o único morfismo que faz o diagrama abaixo comutar, isto é, f o $p_C = p_A$ o (f×g) e g o $p_D = p_B$ o (f×g)

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"] & C \times D \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "f\times g"] & D \arrow[d, "g"] \\ A & A \times B \arrow[l] \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Construamos, agora, uma definição dual da exponencial. Dualidade está pensada, aqui, no sentido de [Hat68], conforme já exposto.

Definição 5.3 (para determinados *topoi*)

Sejam ***C*** uma categoria e A, B, C $\in$ Ob(***C***). Uma *exponencial dual* B^A em ***C*** é um objeto tal que existe um morfismo fixado (chamado *avaliação dual*, denotado *avd*), *avd*: $B \longrightarrow B^A + A$ e, para cada morfismo f: $B \longrightarrow C + A$ existe um único f^: $B^A \longrightarrow C$ tal que $(f\hat{}+id_A)$ o *avd* = f, isto é , comuta o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "avd"] \arrow[dr] & B^A + A \arrow[d, "f\hat{}+id_A"] \\ & C + A \end{tikzcd}$$

Definição 5.4

Se ***C*** é uma categoria com objeto terminal **1**, então um *classificador de subobjetos* para ***C*** é um objeto Ω $\in$ Ob(***C***), junto com um morfismo true(T):**1** ——> Ω , que satisfaz o seguinte axioma:

> ***<u>Axioma Ω</u>****: Para cada monomorfismo f: A* $\rightarrowtail$ *D existe um único morfismo* χ_f*: D* $\longrightarrow$ Ω *tal que o diagrama abaixo é um pullback:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] & D \arrow[d, "\chi_f"] \\ \mathbf{1} \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

χ_f é chamado *morfismo característico* do monomorfismo f; um monomorfismo f: A $\rightarrowtail$ D com codomínio D é chamado de *subobjeto de D.*

Seja $P_D = \{f \;/\; f$ é subobjeto de $D\}$ a coleção dos subobjetos de D; sejam $f: A \rightarrowtail D$ e $g : E \rightarrowtail D$ subobjetos de D. Definimos $f \leq g$ se, e somente se, existe um monomorfismo $h: A \rightarrowtail E$ tal que comuta o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "h"'] & D \arrow[d, "g"] \\ & E \end{tikzcd}$$

A relação "$\leq$" tem as seguintes propriedades: é reflexiva, transitiva e antis-simétrica.

Definimos $f \approx g$ se, e somente se, $f \leq g$ e $g \leq f$.

Teorema 5.5

$\approx$ é uma relação de equivalência. ■

Definamos

$P_D/\approx\; = \{ [f] : f \in P_D \}$, com $[f] = \{ g \;:\; f \approx g \}$.

Definamos

$[f] \subseteq [g]$ se, e somente se, $f \leq g$ em P_D .

Teorema 5.6

$\subseteq$ é uma ordem parcial. ■

Seja Sub(D) = $P_D/\approxeq$.

Teorema 5.7

*Numa categoria **C**, que admite pullbacks e classificador de subobjetos, seja Sub(D) tal como definimos acima. Então, para qualquer D ∈ Ob(**C**), Sub(D) é isomorfo a $Hom_C(D,\Omega)$, isto é, Sub(D) ≈ $Hom_C(D,\Omega)$.* ■

Corolário 5.8

Sub(D) ≈ Ω^D ■

Definição 5.9

Um *topos elementar* é uma categoria ***C*** que admite objeto terminal **1**, *pullbacks*, exponenciação e classificador de subobjetos.

Doravante, as categorias a que nos referiremos serão *topoi*.

Consideremos agora a estrutura <Sub(D), ⊆>. É sabido que <Sub(D), ⊆> é um conjunto parcialmente ordenado; em verdade <Sub(D), ⊆> é um reticulado e pode-se mostrar que este reticulado tem a estrutura de uma álgebra de Heyting. Mas, interessam-nos outras construções algébricas induzidas em <Sub(D), ⊆>.

Sejam f: A $\rightarrowtail$ D e g: B $\rightarrowtail$ D monomorfismos, isto é, subobjetos de D. Vamos definir o *supremo* f ∪ g (em verdade, o supremo [f ∪ g] mas, por abuso de linguagem, vamos identificar a classe [f] com seu representante f), como a imagem de [f,g]: A+B $\longrightarrow$ D formada através da fatoração épico-mônica

$$\begin{tikzcd} A + B \arrow[rr] \arrow[dr] & & D \\ & {[f,g](A+B)} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

e assim, $f \cup g$: $[f,g](A+B) \longrightarrow D$ e vamos chamar $[f,g](A+B)$ de $A \cup B$. O *ínfimo* $f \cap g$ é dado pelo *pullback*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & B \arrow[d, "f \cap g"] \\ A \arrow[r, tail] & D \end{tikzcd}$$

e vamos definir o domínio de $f \cap g$ como $A \cap B$.

Teorema 5.10 (para determinados *topoi*)

< Sub(D), $\subseteq$ > é uma álgebra de Brouwer, com sup e inf tal como acima definidos.

Demonstração

Devemos provar que:

1. $[f \cap g] =$ *inf* $\{[f], [g]\}$;

2. $[f \cup g] =$ *sup* $\{[f], [g]\}$;

3. < Sub(D), $\subseteq$ > tem elemento unitário T;

4. Sub(D) é fechado sob a operação — ;

5. $[f — g] \leq [h]$ se, e somente se, $[f] \leq [g \cup h]$.

Notemos inicialmente que $[id_D]$ e $[\varnothing_D]$ são máximo e mínimo, respectivamente, de $<Sub(D), \subseteq>$, com id_D: $D \longrightarrow D$ e $\varnothing_D$: $\varnothing \longrightarrow D$.

Com efeito, basta verificar que os seguintes diagramas comutam, para f: $A \longrightarrow D$ qualquer:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, tail] \arrow[dr, "f"'] & & D \\ & D \arrow[ur, "id_D"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varnothing \arrow[rr, tail] \arrow[dr, "\varnothing_D"'] & & D \\ & D \arrow[ur, "id_D"'] & \end{tikzcd}$$

O primeiro diagrama afirma que $f \leq id_D$, pois há o monomorfismo f: $A \rightarrowtail D$ que o faz comutar; logo, $[f] \leq [id_D]$. Pelo segundo diagrama, vemos que $\varnothing_D \leq f$; por ser $\varnothing$ objeto inicial e $\varnothing_D$ única, $[\varnothing_D] \leq [f]$ e, assim, solucionamos o item 3 das questões a serem provadas. Vejamos as demais.

1. Devemos provar que, para $f{:}A \rightarrowtail D$ e $g{:}B \rightarrowtail D$, $[f \cap g] \leq [f]$; $[f \cap g] \leq [g]$ e que, para qualquer $k{:}C \rightarrowtail D$ tal que $[k] \leq [f]$ e $[k] \leq [g]$, $[k] \leq [f \cap g]$.

a) Consideremos o seguinte *pullback*

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, "f \cap g"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, tail, "f'"'] & D \end{tikzcd}$$

Observa-se que f' e g' são monomorfismos; assim, o triângulo inferior permite afirmar que $f \cap g \leq f$ e o triângulo superior que $f \cap g \leq g$.

b) Suponhamos $k \leq f$ e $k \leq g$. Isto significa que existem monomorfismos ℓ_1 e ℓ_2 tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, tail, "k"] \arrow[dr, "\lambda_1"'] & & D \\ & A \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, tail, "k"] \arrow[dr, "\lambda_2"'] & & D \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

comutam, isto é, f o ℓ_1 = k = g o ℓ_2. Assim, o diagrama exterior abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, dashed, no head] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, "\lambda_1"'] & & \\ & A \cap B \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f \cap g"] & B \arrow[d] \\ & A \arrow[r, tail] & D \end{tikzcd}$$

e, como o diagrama interior é *pullback*, existe ℓ’: C ⟶ A ∩ B que faz comutar o diagrama, isto é, f’ o ℓ’= ℓ_1 e g’ o ℓ’ = ℓ_2 ; como g o ℓ_2 = k = (f ∩ g) o ℓ’, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr] \arrow[dr, "\lambda_1"'] & & D \\ & A \cap B\,. \arrow[ur, "f \cap g"'] & \end{tikzcd}$$

Se ℓ’ é monomorfismo, k ≤ f ∩ g; mas, este é o caso pois, se ℓ’o m = ℓ’o n, então (f ∩ g) o ℓ’o m = (f ∩ g) o ℓ’o n e, assim, f o ℓ_1 o m = f o ℓ_1 o n; mas, f o ℓ_1 é monomorfismo, pois f e ℓ_1 o são e, assim, canceláveis à esquerda. Logo, m = n e concluímos, então, que k ≤ f ∩ g.

2. Agora, devemos provar que, para $f:A \rightarrowtail D$ e $g:B \rightarrowtail D$, $[f]\leq[f\cup g]$, $[g]\leq[f\cup g]$ e que, para qualquer $k:C \rightarrowtail D$ tal que $[f]\leq[k]$ e $[g]\leq[k]$, então $[f\cup g]\leq[k]$.

a) Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \cup B \arrow[dr, "f\cup g"] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[u, "g'"] \arrow[r, tail, "g"'] & D
\end{tikzcd}$$

Notemos, inicialmente, que os morfismos f’ e g’ efetivamente existem, isto é, que o diagrama é comutativo, pois $A \cup B$ é $f(A) + f(B)$. O triângulo superior informa-nos que $(f \cup g) \circ f' = f$; se f’ for monomorfismo, $f \leq f \cup g$. Sejam então $m,n : P \longrightarrow A$ tais que $f' o\ m = f' o\ n$; então, $(f \cup g)\ o\ f' o\ m = (f \cup g)\ o\ f' o\ n$; como $(f \cup g)\ o\ f' = f$, temos $f\ o\ m = f\ o\ n$; dado que f é monomorfismo, $m = n$, logo, $f \leq f \cup g$. A mesma análise, aplicada ao triângulo inferior, permite afirmar que $g \leq f \cup g$.

b) Suponhamos $k \leq f$ e $k \leq g$; isto significa que existem monomorfismos p e q tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, tail, "k"] & & D \\
& A \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, tail, "k"] & & D \\
& B \arrow[ul, "q"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

comutam, isto é, $k\ o\ p = f$ e $k\ o\ q = g$.

Consideremos então o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \cup B \arrow[dr, dashed, "m"] & B \arrow[l] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[u, "f'"] \arrow[r, tail] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[r, tail] \arrow[d, "k"] & D \arrow[d] \\
& D \arrow[r, tail] & \mathbf{1}.
\end{tikzcd}$$

Que existe o morfismo m: $A \cup B \longrightarrow C$ é fato, pois o diagrama inferior é o *pullback* de k e **1** ; além disso, $(f \cup g) \circ f' = f$ e $(f \cup g) \circ g' = g$. Assim, temos $(f \cup g) = k \circ m$. Prova-se, facilmente, que m é um monomorfismo e tem-se, portanto, que $f \cup g \leq k$.

4. Devemos agora mostrar que, se [f] e [g] são elementos de Sub(D), então [f — g] também o é; para tanto, basta definir

[f — g]:= *inf* {[k] / [f] $\leq$ [g $\cup$ k]}.

5. Sejam f: $A \rightarrowtail D$, g: $B \rightarrowtail D$ e h: $C \rightarrowtail D$.

($\Leftarrow$) Suponhamos [f] $\leq$ [g $\cup$ h], isto é, existe um monomorfismo m: $A \rightarrowtail B \cup C$ tal que $(g \cup h) \circ m = f$; queremos mostrar que, para q: (A — B) $\rightarrowtail$ C, e f — g: A — B $\rightarrowtail$ D, h $\circ$ q = (f — g).

Do fato de que há uma exponencial dual, sabemos que $Hom_\xi(A^B, C) \approx Hom_\xi(A, B + C)$; como estamos trabalhando com classes de equivalência [f] e os conjuntos $Hom_\xi(A^B, C)$ e $Hom_\xi(A, B + C)$ são isomorfos, a cada $[f] \in Hom_\xi(A^B, C)$, há o correspondente $[g] \in Hom_\xi(A, B + C)$. Entretanto, vejamos, inicialmente, que $h \leq g \cup h$; por outro lado, como $f \leq g \cup f$ e $Hom_\xi(A^B, A) \approx Hom_\xi(A, B + A)$, segue-se que f — g $\leq$ f, isto é , é comutativo o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
A \text{—} B \arrow[rr, tail, "f \text{—} g"] \arrow[dr, "p"'] & & D \\
& A \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

com f — g = f o p. Combinando os dois resultados, temos

$$\begin{tikzcd}
A \text{—} B \arrow[r, tail, "q"] \arrow[d, "p"'] & C \arrow[r, tail, "h"] \arrow[d, "i_C"] & D \\
A \arrow[r, tail] & B \cup C \arrow[ur, "g \cup h"'] &
\end{tikzcd}$$

e, como g ∪ h o m o p = f o p, segue-se que f — g = h o q, como era para ser mostrado. Para a recíproca o raciocínio é análogo. ■

Este teorema mostra que Sub(D), que como é conhecido tem a estrutura de uma álgebra de Heyting, em determinados casos, tem a estrutura, também, de uma álgebra de Brouwer.

Até agora trabalhamos com Sub(D), ou, o que é o mesmo, com $\mathrm{Hom}_\xi(D, \Omega)$; tais objetos estão em SET, e assim, são externos ao *topos* Mas podemos "transferir" a estrutura algébrica de Sub(D) para Sub(**1**); no primeiro caso estaremos lidando com os "elementos" de Ω: em analogia a SET, podemos definir os elementos de A ∈ Ob(***C***) como os morfismos da forma $x: 1 \longrightarrow A$ e assim, em Sub(**1**), estaremos lidando com os morfismos de $\mathrm{Hom}_\xi(\mathbf{1}, \Omega)$, isto é, com objetos que desempenham um papel importante na lógica interna ao *topos*.

Ao se lidar como Sub(Ω) pode-se produzir morfismos que correspondem a "operações lógicas". Faremos a seguir algumas dessas construções.

Teorema 5.11

Sejam ξ um topos e $A \in Ob(\mathbf{C})$. As seguintes proposições são equivalentes:

*i. A é subobjeto de **1**, isto é, o único morfismo $A \longrightarrow \mathbf{1}$ é monomorfismo;*

ii. Para qualquer B, existe no máximo um morfismo $B \longrightarrow A$;

iii. Qualquer morfismo com domínio A é monomorfismo.

Demonstração

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) Imediato. Basta então provar que (i) $\Rightarrow$ (ii). Suponhamos que (i) valha e f,g: $B \longrightarrow A$. Então, para h: $A \longrightarrow \mathbf{1}$, $h \circ f = h \circ g$ e, como h é monomorfismo, então f = g. Logo (ii). ■

Este teorema mostra que os elementos de Sub(**1**) podem ser olhados como domínios de monomorfismos cujo codomínio é **1**. Assim, se f: $A \rightarrowtail \mathbf{1}$ e g: $B \rightarrowtail \mathbf{1}$, temos $[f \cap g] := A \times B \rightarrowtail \mathbf{1}$, $[f \cup g]$ é igual à imagem da função [f,g](A+B) em **1**; $[f — g]$:= a exponencial dual e $[\sim f] := [id_{\mathbf{1}} — f]$. Além destes objetos, característicos de uma álgebra de Brouwer, os seguintes objetos também estão em Sub(**1**): $[f \supset g]$:= a exponencial usual B^A em **1** e $[\neg f] := \varnothing^A$ e, aqui, $\neg f$ é o morfismo $f \supset \varnothing$, conforme é definida a negação numa álgebra de Heyting. Veremos alguns desses objetos, após construirmos os morfismos $\Omega^n \longrightarrow \Omega$, que serão olhados como conectivos.

Definição 5.12

Seja ξ um *topos* e Ω o classificador de subobjetos. O *morfismo "falso",* denotado por $\perp$, $\perp: \Omega \longrightarrow \Omega$, é definido pelo morfismo característico do objeto inicial $\varnothing$, através do *pullback* abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r, tail] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d, "\chi_{\varnothing\mathbf{1}} = \perp"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Assim, falso = $\chi_{\varnothing\mathbf{1}} = \perp$ é o morfismo característico de $\varnothing_{\mathbf{1}}$: $\varnothing \rightarrowtail \mathbf{1}$.

Nós dizemos que θ é um *conectivo n-ário* num *topos* se é um morfismo

$\theta := \Omega^n \longrightarrow \Omega$

no qual $\Omega^n = \Omega \times \Omega \times ... \times \Omega$, n vezes.

a) Negação "¬" (numa álgebra de Heyting)

$\neg : \Omega \longrightarrow \Omega$ é definida através do seguinte diagrama, que é um *pullback*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\perp"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\chi_{\perp} = \neg"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

b) Conjunção "$\wedge$"

Consideremos o seguinte diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[dl, "\top"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\top"] & \\
\Omega & \Omega \times \Omega \arrow[l] \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

que é o diagrama que define o produto de $\Omega \times \Omega$ e $\top$: $\mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ é o morfismo *true* . Nota-se que h = < true, true> e se, agora, construirmos o *pullback*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "<\top,\top>"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\chi_{<\top,\top>}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

vemos que $\wedge : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ é dada pelo morfismo característico de <true, true>, que é o único morfismo que faz do diagrama dado um *pullback*.

c) Disjunção "$\vee$"

Para a disjunção consideremos os seguintes diagramas

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[d, "\top"'] & \Omega \arrow[l] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "id_\Omega"] & \\
\Omega & \Omega \times \Omega \arrow[l] \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \Omega \arrow[r] \arrow[dl, "id_\Omega"'] \arrow[d, "k"] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\
\Omega & \Omega \times \Omega \arrow[l] \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

nos quais $!: \Omega \longrightarrow \mathbf{1}$ é o único morfismo de Ω a $\mathbf{1}$, $\top$(true): $\mathbf{1} \longrightarrow \Omega$, e chamamos $\top_\Omega$ à composição de $\top$ e !; tem-se assim que h: $\Omega \longrightarrow \Omega \times \Omega$ é $<\top_\Omega, id_\Omega>$ e k: $\Omega \longrightarrow \Omega \times \Omega$ é $<id_\Omega, \top_\Omega>$ e tomemos o co-produto:

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r] & \Omega + \Omega \arrow[d, "\lambda"] & \Omega \arrow[l] \\
& \Omega \times \Omega \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Por construção, $\ell: \Omega+\Omega \longrightarrow \Omega \times \Omega$ é o morfismo $[<\top_\Omega, id_\Omega>,<id_\Omega, \top_\Omega>]$ que, em qualquer *topos*, pode ser fatorado num epimorfismo seguido de monomorfismo. Seja im(ℓ) o monomorfismo obtido da fatoração épico-mônica. Assim, o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
\Omega+\Omega \arrow[r, "im(\lambda)"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\chi_{im(\ell)}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}$$

que é um pullback, dá-nos a disjunção $\vee$: $\chi_{im(\ell)} = im\ [<\top_\Omega, id_\Omega>,<id_\Omega, \top_\Omega>]$.

d) Implicação "$\supset$"

Consideremos, inicialmente, o seguinte *pullback*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "p_1"] \\ \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

O morfismo e: E $\longrightarrow \Omega$ x Ω é o equalizador de $\wedge$ e p_1, a primeira projeção do produto Ω x Ω. O seguinte *pullback*, então, define o morfismo "$\supset$":

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\supset"] \\ \mathbf{1} \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

Notemos que as construções anteriores são generalizações adequadas de SET, nas quais Ω x Ω é tomado como o conjunto 2 x 2 com as operações usuais de tabelas de verdade. Para a implicação, em SET, o equalizador E é o conjunto $\{(x, y) \in 2 \text{ x } 2 \,/\, x \leq y\} = \{(x, y) \in 2 \text{ x } 2 \,/\, x \wedge y = x\} = \{(x, y) \in 2 \text{ x } 2 \,/\, \wedge(x, y) = p_1(x, y)\}$, que é a forma como se define o conectivo. Isto sugere que se defina a implicação brouweriana "—" como o conjunto $\{(x, y) \in 2 \text{ x } 2 \,/\, x \geq y\} = \{(x, y) \in 2 \text{ x } 2 \,/\, x \vee y = x\} = \{(x, y) \in 2 \text{ x } 2 \,/\, \vee(x, y) = p_1(x, y)\}$ e assim se pode definir um equalizador de $\vee: \Omega \text{ x } \Omega \longrightarrow \Omega$ e $p_1: \Omega \text{ x } \Omega \longrightarrow \Omega$, a primeira projeção do produto Ω x Ω.

e) Implicação brouweriana "—"

Esta é dada pelo *pullback* abaixo

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "__ = \chi e_1"] \\
\mathbf{1} \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}$$

no qual e_1 é o equalizador de $\vee$ e p_1.

Para definirmos a negação brouweriana (que estamos denotando por "~") como um endomorfismo do objeto valor verdade Ω, entretanto, temos o seguinte resultado(que se encontra em [ReZ93:600]):

Teorema 5.13

Seja $\alpha\colon \Omega \longrightarrow \Omega$ *um operador tal que* $\alpha \leq id_\Omega$. *Então, para todo* $p \in \Omega$, $\alpha \text{ o } p = p \wedge \alpha \text{ o } T$.

Demonstração

Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[r, tail] \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "h"] & \Omega \arrow[d, "\alpha"] \\
\Omega & \Omega \times \Omega \arrow[l] \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Assim, $h = < p, \alpha \text{ o } T>$.

Agora consideremos o diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "h"] \arrow[d, "p"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\wedge"] \\
\Omega \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

o que dá o resultado procurado. ■

Corolário 5.14

Seja N: $\Omega \longrightarrow \Omega$ um operador tal que $N \leq id_\Omega$ e N o T = T. Então $N = id_\Omega$.

<u>Demonstração</u>

Se N o T = T, então, pela proposição anterior, N o p = p e, assim, $N = id_\Omega$. ■

Nós dizemos que um *topos* ξ é *booleano* se, e somente se, Ω é uma álgebra booleana.

O seguinte fato é bastante conhecido (para a prova ver [Bel82] ou [Gol84:184]):

Teorema 5.15

Num topos ξ, as seguintes condições são equivalentes:

1. ξ é booleano;

2. $\neg\neg = id_\Omega$ $(\sim\sim = id_\Omega)$ ■

Esses resultados dizem-nos que a negação brouweriana, que satisfaz as equações $\sim\sim a \leq a$ e $\sim\sim T = T$, não pode ser expressa como subobjeto do objeto valor de verdade, da forma $\sim: \Omega \longrightarrow \Omega$ (Corolário 5.14). Para que tal ocorresse seria necessário que satisfizesse a equação $\sim\sim a = a$, que já sabemos, faz da álgebra brouweriana uma álgebra booleana, ou seja, num *topos*, a negação brouweriana e a negação de Heyting colapsam na negação clássica (Teorema 5.15). Este resultado não é novo; com efeito, F.Lawvere [Law91] comenta que, em *topoi* nos quais o reticulado dos subobjetos é uma *álgebra de co-Heyting* (o dual de uma álgebra de Heyting, que neste trabalho chamamos de álgebra brouweriana), vale o resultado que acabamos de mostrar. Este fato remete à divisão entre lógica interna e lógica externa. Sub(D) pode ser visto como uma álgebra brouweriana, mas Ω nunca o é (exceto, no caso trivial, quando $a — b$ é definido como $a \cap \sim b$). É sabido que Sub(D) é "externo" ao *topos* ξ e nem sempre é o caso em que a lógica de ξ e a lógica de Sub(D) coincidem. O exemplo clássico, em teoria das categorias, é o *topos* SET^{M2} (com M_2 um monóide $<\{0,1\}, \bullet, 1>$ com identidade 1 e no qual 0 não tem inverso): Sub(D) é booleano e, entretanto, Ω, internamente, não é uma álgebra de Boole.

A Definição 5.3 e o Teorema 5.10 foram atenuados com a expressão "para determinados *topoi*". O teorema seguinte estabelece as condições necessárias e suficientes desta atenuação (para notação e definições ver [ReZ91]).

Teorema 5.16

A álgebra dos subobjetos de qualquer objeto de um topos ξ é uma álgebra de Brouwer se, e somente se, existe um topos booleano B e um morfismo geométrico $\Gamma: B \longrightarrow \xi$, tal que a operação canônica $\delta: \Omega_\xi \longrightarrow \Gamma(\Omega_B)$ tem um adjunto à esquerda relaxado.

<u>Demonstração</u>: [ReZ96:36-37].

Exemplos e comentários

a) Da exponencial dual

Tomemos um conjunto totalmente ordenado $(P,\leq)$ com elemento zero $\varnothing$ (inicial). Neste conjunto, olhado como uma categoria na qual os elementos de P são os objetos da categoria e as flechas seus morfismos, definamos:

$q^p = \varnothing$ se $q \leq p$

ou

$q^p = q$ se $p < q$.

i) existe um morfismo *avd*: $q \longrightarrow q^p \vee p$

Basta verificar que $q \leq q^p \vee r$.

<u>Caso 1</u>. Se $q \leq p$ então $q^p = \varnothing$ e, portanto, $q \leq \varnothing \vee p$, o que é o caso.

<u>Caso 2</u>. Se $p < q$ então $q^p = q$ e, assim, $q \leq q \vee p$, o que também é o caso.

ii) Comutação do diagrama

Seja $q \longrightarrow r \vee p$ outro morfismo, isto é, $q \leq r \vee p$; queremos mostrar que existe um único morfismo $q^r \longrightarrow p$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} q \arrow[r] \arrow[dr] & q^r \vee p \arrow[d] \\ & p \vee r \end{tikzcd}$$

comuta. Isto é, temos que verificar que $q^r \leq p$ e que $q^r \vee r \leq r \vee p$.

<u>Fato 1</u> $q^r \leq p$

i) Se $q \leq r$ então $q^r = \varnothing \leq p$ e, portanto, $q^r \leq p$.

ii) Se $r < p$, consideremos dois subcasos:

ii.1) $p \leq r < q$ e assim $r \vee p = r$; portanto, $q^r = q$ e tem-se que $p < q$ e

$q \leq p$, o que é uma contradição;

ii.2) $r < p$ e assim $p \vee r = p$; $q^p = q^r = \varnothing$ e $q^p \leq p$, o que é o caso, e $q^r \leq p$ é

único.

Fato 2 $q^r \vee r \leq p \vee r$, o que decorre facilmente do fato acima.

Da definição usual de exponencial, sabe-se que

$Hom_C(C, A^B) \approx Hom_C(C \text{ x } B, A)$.

A definição de exponencial dual sugere o seguinte isomorfismo:

$Hom_C(B^A, C) \approx Hom_C(B, C + A)$

cuja existência pode ser demonstrada. Note-se que podemos interpretar o isomorfismo na categoria $(P, \leq)$ do exemplo acima da seguinte forma:

$Hom_{(P,\leq)}(q^r, p) \approx Hom_{(P,\leq)}(q, p \vee r)$, isto é,

$q — r \leq p$ se, e somente se, $q \leq p \vee r$.

b) Do morfismo "—"

Vejamos como funciona a operação brouweriana "—" num *topos* bastante particular: *a categoria dos pré-feixes sobre* ***C***. Seja $SET^{\boldsymbol{C}^{op}}$ tal categoria, com ***C*** uma categoria pequena. Veremos como funciona o classificador de subobjetos nesta categoria e depois aplicaremos tal fato no caso em que ***C*** é um conjunto parcialmente ordenado **P**.

Seja $A \in Ob(\boldsymbol{C}^{op})$. Definimos então

$C_A = \{f \,/\, \text{para algum } B,\ f\colon B \longrightarrow A\}$

a coleção de morfismos com codomínio A. C_A é fechado por composição à direita, isto é, se $f \in C_A$ então, para $g\colon C \longrightarrow B$, $f \circ g \in C_A$, ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] & & A \\ & C \arrow[ul, "g"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad f \circ g = k$$

comuta - $k = f \circ g \in C_A$.

Um *crivo em A* (A-crivo) é um subconjunto S de C_A fechado por composição à direita: se $f \in S$ então $f \circ g \in S$. Existem sempre, pelo menos, dois crivos em A, a saber C_A e $\varnothing$.

Definamos o funtor $\Omega\colon \boldsymbol{C}^{op} \longrightarrow SET$ por

$\Omega(A) = \{ S \,/\, S \text{ é um A-crivo}\}$

e que, para $f\colon B \longrightarrow A \in Ob(\boldsymbol{C}^{op})$,

$\Omega(f)\colon \Omega(A) \longrightarrow \Omega(B)$

é a função que toma um A-crivo S e leva ao B-crivo dado por $\{g\colon C \longrightarrow B \,/\, f \circ$

$g \in S$ }.

Definamos T: $\mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ como a transformação natural que tem como componente T_A: $\{0\} \longrightarrow \Omega_A$, dada por $T_A(0) = C_A$, o "maior" A-crivo.

Se τ: F $\longrightarrow$ G é monomorfismo em $SET^{C^{op}}$, o componente

τ_A: F(A) $\longrightarrow$ G(A)

também é monomorfismo e o morfismo característico χ_τ: G $\longrightarrow \Omega$ de τ é a transformação natural com componente $(\chi_\tau)_A$, ou seja, um conjunto de funções de G(A) a Ω(A).

$(\chi_\tau)_A$ atribui a cada $x \in A$ um A-crivo

$(\chi_\tau)_A(x) = \{f: B \longrightarrow A \,/\, G(f)(x) \in F(B)\}$,

isto é,

$(\chi_\tau)_A(x) = \{f: B \longrightarrow A \,/\, G(f)(x) \in \tau_B(F(B))\}$

$= \{f: B \longrightarrow A \,/\,$ para algum $y \in F(B)$, $G(f)(x) = \tau_B(y)\}$.

Seja agora **P** = <P, ≤ > um conjunto parcialmente ordenado. Um conjunto $A \subseteq P$ é *ancestral* em **P** se, sempre que $p \in A$ e $q \leq p$, $q \in A$; ao conjunto $(p] = \{q \,/\, q \leq p\}$ chamaremos de *conjunto **P**-ancestral* gerado por p ou (p]-ancestral. A coleção de subconjuntos ancestrais de **P** será denotada por $\mathbf{P}^{-}$. Note-se que $\mathbf{P}^{-}$ é um sistema parcialmente ordenado sob inclusão e que $(p]^{-}$, a coleção dos conjuntos que são ancestrais em (p], também é um conjunto parcialmente ordenado. De fato, $< \mathbf{P}^{-}, \subseteq>$ e $< (p]^{-}, \subseteq>$ são álgebras de Brouwer, como se mostra a seguir.

Teorema 5.17

$< (p]^{-}, \subseteq >$ é uma álgebra de Brouwer.

<u>Demonstração</u>

Dado que $(p] = \{q \,/\, q \leq p\}$ e ,como $p \leq p$, tais conjuntos não são vazios. Seja $(p] \mathbin{-\!-} (q] = \{t \,/\, (p] \cap (t] \leq (q]\}$; $p \leq p \wedge t \in (p] \mathbin{-\!-} (q]$. Se, por hipótese, $(p] \mathbin{-\!-} (q] \subseteq (r]$ então $p \in (q]$, pois $p \wedge t \leq q$ e $p \in (r]$ (pela hipótese). Logo, $p \in (q] \cup (r]$, isto é, $(p] \subseteq (q] \cup (r]$; por outro lado, se $(p] \subseteq (q] \cup (r]$ então $p \leq q$ e, assim, $p \in (p] \mathbin{-\!-} (q]$, ou $p \leq r$ e, assim, $p \in (p] \mathbin{-\!-} (q]$, pois este está contido em $(r]$.

Definamos então, para $R, S \in \mathbf{P}^{-}$(ou $(p]^{-}$)

$$R \mathbin{-\!-} S = \{t \,/\, R \cap (t] \subseteq S\}$$

e, se S é qualquer subconjunto de P, seja $Sp = S \cap (p] = \{q \,/\, q \in S \text{ e } q \leq p\}$.

Consideremos, então, a categoria $SET^{\mathbf{Pop}}$; nesta categoria, pela definição geral apresentada acima:

$\Omega(p)$ = conjunto de todos os p-crivos.

Mas um p-crivo é um subconjunto S de

$$Cp = \{f \,/\, \text{para algum } q,\ f\colon q \longrightarrow p\}$$

que é fechado por composição à direita, isto é, se $g\colon r \longrightarrow q$ é um **P**-morfismo e $f\colon q \longrightarrow p \in Cp$, então $f \circ g \in Cp$. Como **P** é um sistema parcialmente ordenado, existe, no máximo, um morfismo de q a p, dado quando $q \leq p$. Assim, dado p, podemos identificar o morfismo f: q $\longrightarrow$ p com seu domínio q. Logo, Cp é

$$Cp = \{q \,/\, q \leq p\,\} = (p]$$

e a descrição de S como p-crivo é, então,

$$r \in S \text{ sempre que } q \in S \text{ e } r \leq q,$$

isto é, S é (p]-ancestral. Assim, $\Omega(p)$ é a coleção de todos os subconjuntos ancestrais em (p].

Em teoria das categorias, para um funtor F:**P** $\longrightarrow$ SET, usa-se a notação Fp para a imagem F(p) de p em SET; nós a adotamos aqui, embora os funtores sejam definidos para $\mathbf{P}^{\mathbf{op}}$. Para $p \leq q$, F dá uma função Fq em Fp, denotada por Fqp. Podemos, então, dizer que F é a coleção $\{Fp \,/\, p \in P\}$ de conjuntos indexados por P e Fqp: Fp $\longrightarrow$ Fq, sempre que $q \leq p$. Em particular Fpp é a identidade em Fp.

Este resultado justifica a semântica de Kripke para H^dQ do Capítulo 4.

Assim, se $q \leq p$, Ωqp: $\Omega p \longrightarrow \Omega q$ leva $S \in (p]$ a $\Omega qp(S) = Sq$. O objeto terminal de SET^{Pop} é o funtor constante **1**: $P^{op} \longrightarrow$ SET tal que $\mathbf{1}p = \{0\}$, para todo $p \in P$ e $\mathbf{1}qp = id_{\{0\}}$, para $q \leq p$. True: $\mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ é a transformação natural cuja p-ésima componente é

$$True_p(0) = (p]$$

e, assim, podemos dizer que,

para cada $x \in Gp$, $(\chi_\tau)_p = \{q \,/\, q \leq p \text{ e } Gqp(x) \in Fq\}$.

Vejamos então o morfismo "—".

O equalizador $e_1:(\leq) \rightarrowtail \Omega \times \Omega$, de $\vee: \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ e da primeira projeção $p_1: \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$, tem como domínio o funtor

$(\leq): P^{op} \longrightarrow SET$, com

$$(\leq)_p = \{ \langle S, R\rangle / \vee_p(\langle S, R\rangle) = (p_1)_p (S, R)\}$$

$$= \{ \langle S, R\rangle / R \subseteq S\} \in \Omega p \times \Omega p$$

e $(\leq)_{qp}$, para $q \leq p$, leva $\langle S, R\rangle$ a $\langle Sq, Rq\rangle$; os componentes de e_1 são as inclusões

$$(e_1)_p: (\leq)_p \hookrightarrow \Omega p \times \Omega p.$$

O morfismo $—: \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$, sendo o morfismo característico de e_1, tem componentes $—_p$ dadas por

$$—_p (\langle S, R\rangle) = \{q / q \leq p \text{ e } \langle \Omega qp (S), \Omega qp(S)\rangle \in (\leq)_p\}$$

$$= \{q / q \leq p \text{ e } S \cap (q] \subseteq R \cap (q]\}$$

$$= \{q / q\leq p \text{ e } S \cap(q] \subseteq R\}$$

$$= (p] \cap (S — R)$$

$$= (S — R)_{p.}$$

c) Da negação brouweriana "~"

Tomemos SET^{Cop} com $C = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$. Um objeto G em SET^{Cop} é da forma $G = (G_0, G_1, i, f)$, na qual G_0 e G_1 são conjuntos e i e f são funções; podemos interpretar G_0 como um conjunto de vértices, G_1 como um conjunto das flechas orientadas e i, f: $G_1 \longrightarrow G_0$ são funções que associam a cada flecha de G_1, o vértice inicial e final, respectivamente, em G_0. SET^{Cop} é o *topos dos grafos* *orientados* (não-reflexivos) [Law91:280]. Um *subgrafo* X de G consiste da quádrupla (X_0, X_1, *i, f*), com $X_0 \subseteq G_0$ e $X_1 \subseteq G_1$ e na qual i^X e f^X são as restrições de *i* e *f* a X_1, isto é, X é tal que toda flecha de X_1 tem vértice inicial e vértice final em X_0. No reticulado *S*, dos subgrafos de G, definamos a seguinte operação

$$\sim X = \text{o menor subgrafo de } S \text{ tal que } X \cup \sim X = G.$$

Consideremos o seguinte grafo: G_0={1, 2, 3}, G_1={a, b} e *i*(a) = 1, *f*(a) = *i*(b) = 2 e *f*(b) = 3. Para o subgrafo X = (X_0={1, 2}, X_1={a}, *i, f*), $\sim X$ = (X_0={2, 3}, X_1={b}, *i, f*); pode-se checar que $X \cap \sim X = \{2\}$, que também é subgrafo. Assim, as contradições não são o falso de *S*, isto é, $X \cap \sim X \neq \emptyset$.

Note-se, ainda, que, $\sim\sim X \subseteq X$ e $X \cup \sim X = G$ e $\sim (X \cap \sim X) = G$; bem como se $X \subseteq Y$, então $\sim Y \subseteq \sim X$; assim, as teses básicas de CC_ω, são válidas neste modelo, bem como numa álgebra brouweriana.

F.Lawvere [Law91] chamou de *fronteira* ao resultado da operação $x \cap \sim x$; numa álgebra booleana, a fronteira de qualquer elemento é $\perp$ e isso caracteriza as álgebras booleanas; no *topos* dos grafos orientados, a fronteira consiste de todos os nós que são vértices finais ou iniciais de flechas que não estão em X, como no exemplo acima.

Dado que *S* é um sistema parcialmente ordenado por inclusão, podemos definir uma outra semântica para CC_ω.

O estudo dos *topoi* de pré-feixes, isto é, de SET^{Cop}, mediante a caracterização adequada da categoria C, seria deveras interessante para a lógica paraconsistente.

CAPÍTULO VI

Retorno às questões e considerações finais

No decorrer deste trabalho, foram levantadas várias questões que, agora, após o desenvolvimento formal dos capítulos anteriores, podem ser melhor elucidadas. Trataremos agora de:

a) Situar, efetivamente, Popper, no cenário da paraconsistência; explicitando Popper, apresentamos um cálculo de seqüentes para CC_ω;

b) Propor uma interpretação para a negação paraconsistente;

c) Interpretar os conectivos da lógica dual do intuicionismo; e

d) Apontar direções que parecem ser interessantes de serem investigadas.

Parece fora de questão que se deve incluir Popper entre aqueles que viram a possibilidade de construir lógicas nas quais proposições contraditórias não derivem uma proposição arbitrária. Não se pode, entretanto, dizer que Popper construiu uma lógica deste tipo; os trabalhos mencionados no Capítulo I mostram que o filósofo está preocupado em estabelecer um sistema geral de derivabilidade e, neste sistema, tem sentido argüir quando uma proposição é demonstrável ou quando uma proposição é refutável. A caracterização dos conectivos "$\not\subset$" e da negação mínima de a, a^m , visa explicitar as ferramentas deste sistema geral e é conseqüência dos conceitos de demonstrabilidade e de refutabilidade.

G.Priest e R.Routley [PRN89] comentam a afirmação de Popper que apresentamos no Capítulo I:

> Entretanto, a afirmação de Popper não é apenas inexata, mas decididamente enganosa. Primeiro, a afirmação implícita de Popper de que existe apenas um sistema formal de lógica paraconsistente é falsa, como se verá na introdução da próxima parte do livro [Parte II de PRN89: 151 e seguintes]. Segundo, existem sistemas paraconsistentes bastante fortes, nos quais *modus ponens* é válida como também se verá. Terceiro, o operador de "negação" de Popper não é realmente um operador de negação. É um tipo dual da "negação" intuicionista, para o qual $\vdash A, \neg A$ vale mas $A, \neg A \vdash$ falha. É, portanto, como implicitamente Popper admite (1940, p.323), um operador de formar subcontrárias. Neste sentido, é como o operador de "negação" de da Costa (...). Popper vislumbrou a possibilidade da lógica formal paraconsistente, mas não mais que isso. [PRN89:67, n.150]

Apenas para registro, devemos salientar que o texto de 1940, acima citado pelos autores (embora com a paginação de [Pop72]), é distinto do texto incluído, com o mesmo título, "Que é dialética?", em *"Conjecturas e Refutações*"(1963). É o texto de 1963 que, efetivamente, é tomado em consideração por G.Priest e R.Routley . Não se pode inferir de tal trabalho - seja na versão de 1940, seja na versão de 1963 - que a negação popperiana é um operador de formar subcontrárias. Esta forma de compreender a negação só é possível se se examina o texto de 1948: "*On the theory of deduction"*[Pop48].

No texto de 1948 está dito que a negação intuicionista de *a* "é a mais fraca daquelas sentenças que são fortes o bastante para contradizer *a*"; se se pensa em termos de um sistema parcialmente ordenado com *sup* e *inf* para qualquer par de elementos (um reticulado), tem-se

$$a^i := \neg a := \sup \{c : a \wedge c \leq \bot\},$$

que é a forma da negação numa álgebra de Heyting. E, ainda, é definida a negação mínima de *a*, que chamamos (Dual) como "a mais forte das sentenças que são fracas o bastante para serem complementos de *a*"; em termos de um reticulado, com elemento unitário T, isto significa:

$$a^m := \neg\, a := \inf \{ c : T \leq a \vee c \},$$

que é a forma da negação brouweriana de *a*. Apenas se compreendermos o operador de negação intuicionista como operador de formar contrárias (como o fazem G.Priest e R.Routley), é que se pode dizer que o operador de negação brouweriano é um operador de formar subcontrárias (voltaremos ao tema adiante).

Mais adiante, os autores, G.Priest e R.Routley, acrescentam:

> Dado seu trabalho lógico anterior, Popper poderia saber mais. Ele mostra que está ciente da possibilidade da lógica formal paraconsistente, mas ingenuamente supõe que apenas uma única lógica de tal tipo, extraordinariamente fraca, seria possível. [PRN89: 95, n.75]

Os trabalhos que indicamos para a compreensão do desenvolvimento da lógica paraconsistente [Arr80], [PRN89], [DOt90], exceto pelas referências acima indicadas, não examinaram os trabalhos de Popper de 1948 e, a esse respeito, cabe precisar o seguinte:

1. O texto original de Popper "Que é a dialética?" publicado em *Mind* ***49*** *(1940)* não faz qualquer menção à discussão acima. Há uma diferença profunda entre aquele texto e o que aparece em "*Conjecturas e Refutações*" (1963). Um dos dez parágrafos incluídos no texto de 1940 para a publicação em 1963 é o que citamos no Capítulo I;

2. O texto de 1948 [Pop48], embora traga a caracterização dos conectivos duais dos conectivos implicação e negação intuicionistas e ainda a regra dual a *modus ponens*, não diz, explicitamente, o potencial de uma tal lógica, nem traz a sua construção; Popper afirma apenas que "a teoria do anti-condicional é muito interessante"[Pop48:n.15], mas não há qualquer referência de que numa teoria deste tipo proposições contraditórias não implicariam uma proposição qualquer; isso só é dito no texto de 1963. É possível então sustentar que, embora de posse

de ferramentas apropriadas em 1948, Popper não cogitava de uma lógica paraconsistente; apenas em 1963, encontra-se uma afirmação que permite tal inferência.

Apenas como contraponto, vale lembrar que em 1948 e 1949, portanto à época da publicação de Popper, Stanislaw Jaškowski propõe a construção de cálculos proposicionais com as seguintes propriedades: 1) quando aplicados a sistemas contraditórios, não implicassem sempre na supercompletude dos cálculos (todas as fórmulas são teses); 2) fossem ricos o bastante para permitir inferências práticas; 3) tivessem uma justificação intuitiva (conforme [DOt90:101]). Com tais idéias Jaškowski marca, de forma cabal, o início da lógica paraconsistente e, parece-nos, que não é o caso de Popper. As definições que ele propõe em [Pop48] só vêm a ser clarificadas como um novo sistema lógico e, tal como entendemos hoje, paraconsistente, em 1963, data em que, coincidentemente, N.C.A.da Costa traz à luz a hierarquia dos cálculos C_n, $1 \leq n \leq \omega$.

Entretanto, voltemos ao texto de 1948. Usando o operador de conseqüência de Tarski (Con) [Tar30] é possível "apreender" a definição popperiana da negação intuicionista

(Int) $a \vdash b^i$ se, e somente se, $a, b \vdash$

como

(Int) $B^i \in Con(\{A\})$ se, e somente se, $Con(\{A,B\}) = FOR$

(tal como se encontra em [AlQ91:70]) e, então, a negação dual

(Dual) $A^m \vdash B$ se, e somente se, $\vdash A, B$

como

(Dual) $B \in Con(\{A^m\})$ se, e somente se, $A \vee B \in Con(\emptyset)$.

Mantendo a caracterização de Tarski do conectivo "$\supset$" (isto é, $B \in Con(\Gamma \cup \{A\})$ se, e somente se, $A \supset B \in Con(\Gamma)$), podemos derivar as seguintes teses relativas a a^m:

$A^m \in Con(\{A^m\})$ se, e somente se, $A \vee A^m \in Con(\varnothing)$.

Noutra direção e, dado que $A \vee A^m \in Con(\varnothing)$,

$A \vee A^m \in Con(\varnothing)$ se, e somente se, $A \in Con(\{A^{mm}\})$ se, e somente se, $A^{mm} \supset A \in Cn(\varnothing)$.

E assim, mantida a axiomatização tarskiana dos conectivos $\supset$, $\wedge$, $\vee$ (ver [AlQ91:68]) - o que gera a axiomatização da lógica positiva PL - juntamente com a caracterização acima da negação (Dual), à maneira de Tarski, temos a axiomática do cálculo C_ω da hierarquia de da Costa, o que nos permite afirmar, de modo efetivo, que a negação de C_ω é **dual** da negação intuicionista e que C_ω captura a negação "mínima" popperiana mantendo intactos todos os axiomas e regras de inferência da lógica positiva, inclusive *modus ponens*.

Poderíamos também buscar caracterizar, ao modo de Tarski, o conectivo "$\not\subset$":

$C \in Con(\{A \not\subset B)$ se, e somente se, $B \vee C \in Con(\{A\})$.

Assim fazendo, e definindo-se que uma fórmula A é tese de tal sistema se, e somente se, $\varnothing \in Cn(\{A\})$, isto é, se A é refutável, temos o sistema H^d já apresentado no Capítulo III.

A idéia de uma lógica dual do intuicionismo foi ainda objeto de um trabalho de Nicolas Goodman, *The Logic of Contradiction* [Goo81]. Tomando como ponto de partida as noções de vaguedade e indeterminação, o autor propõe enfraquecer a lógica clássica numa certa direção e propõe-se a construir uma lógica anti-intuicionista; infelizmente o empreendimento se revela pouco eficaz, pois segundo ele tal lógica "não contém uma noção adequada da implicação", sendo este "o preço a pagar para afirmar consistentemente contradições" [Goo81:119]. Também mediante álgebras de Brouwer, N.Goodman esboça a construção de uma lógica dual do intuicionismo que "parece tão natural quanto o cálculo intuicionista" [Goo81:121]. Entretanto, o autor interpreta o conectivo "—" brouweriano como "mas não"; "a — b" é para ser lido "a mas não b" e, assim, é tomado de forma booleana, $a — b := a \cap \neg b$. Interpretando dessa forma, conclui que:

> "*Unfortunately, this caracterization does not give a calculus distinct from the classical propositional calculus*". [Goo81:122]

No Teorema 3.10.iv deste trabalho, mostramos que

$$a — b \leq a \cap \neg b$$

e já observamos (após o Teorema 3.22) que, se tomarmos $a — b = a \cap \neg b$, temos uma álgebra booleana.

Com tal interpretação do funtor "—" brouweriano, N.Goodman mostra que não existe um conectivo binário "$\rightarrow$" definido em termos de $\wedge$, $\vee$, —, T tal que, para qualquer álgebra brouweriana B e qualquer função s dos símbolos de sentenças atômicas, temos $s(\varphi \rightarrow \psi) = T$ se, e somente se, $s(\varphi) \subseteq s(\psi)$; a lógica FB que apresentamos no capítulo IV, entretanto, e dado que não tomamos "a — b" interpretado como "$a \cap \neg b$", mostra o contrário do que afirma N.Goodman, e esta lógica é um fragmento de uma grande classe de lógicas - as lógicas relevantes - que, na história da lógica paraconsistente, buscam se impor como alternativa às lógicas desenvolvidas por N.C.A.da Costa e colaboradores.

N.Goodman também apresenta um cálculo de seqüentes para a lógica anti-intuicionista, diferente daquele que propomos para G_1^d na regra relativa ao conectivo "$\not\subset$":

Sistema G_1^d Goodman81

$$\frac{\Lambda, A \Rightarrow^d \Delta \qquad \theta \Rightarrow^d B, \Gamma}{\Lambda, \theta \Rightarrow^d B \not\subset A, \Delta, \Gamma} \qquad\qquad \frac{A \not\subset B \Rightarrow \Delta}{A \Rightarrow \Delta, B}$$

Goodman acrescenta uma regra, $\varphi \Rightarrow T$, na qual T denota o maior elemento do reticulado, que é derivável em G_1^d (esquema 13 do Teorema 3.29). Os sistemas de Goodman e G_1^d não são equivalentes.

N.Goodman apresenta uma interpretação intuitiva de uma tal lógica dizendo que, enquanto "o cálculo intuicionista afirma menos que o cálculo clássico, mas nega tudo o que o cálculo clássico nega" - em face da tradução de Glivenko, no cálculo anti-intuicionista ocorre o contrário: "uma fórmula uma vez falsa, permanece falsa" e, ao modo de Popper, no lugar de se provar novos teoremas, rejeitam-se novas conjecturas. Adiante, quando ensaiarmos uma interpretação dual à interpretação BHK da lógica intuicionista, abordaremos este tema. Deve ser dito que I.Urbas [Urb96] conseguiu mostrar uma formulação dual do Teorema de Glivenko e que LDJ[—,$\supset$/] é a lógica H^d que apresentamos no Capítulo III.

Importa agora mencionar que Hércules A. Feitosa, em sua tese de doutorado sobre traduções conservativas, apresenta uma tradução conservativa entre a lógica H^d e o cálculo proposicional clássico CL que é similar à tradução de Glivenko e mostra que : "A é tese de CL se, e somente se, A é tese de H^d, para fórmulas de CL sem o conectivo — ", ou seja, H^d rejeita tudo o que CL rejeita mas permite afirmar mais. H.Feitosa demonstra, ainda, que há uma tradução conservativa de H^d em S_4 e, dessa forma, a proposta de interpretação modal do "cálculo intuicionista dual" [Pop72:n.8] é uma interpretação adequada, bastando tomar a função

$$h : H^d \longrightarrow S_4$$

tal que

$$h(P) := \Diamond P$$

$$h(\neg A) := \Diamond \neg h(A)$$

$$h(A \vee B) := h(A) \wedge h(B)$$

$$h(A \wedge B) := h(A) \vee h(B)$$

$$h(A \not\subset B) := \Diamond (h(B) \supset h(A)).$$

Em face do exposto, reafirmamos as conclusões do Capítulo I: a negação a^m e o conectivo "$\not\subset$", popperianos, são ferramentas para a compreensão da dualidade entre intuicionismo e paraconsistência. Popper, não fosse sua aversão à lógica dialética, poderia, como salientaram G.Priest e R.Routley, ter construído um dos primeiros sistemas de lógica paraconsistente. Sua interpretação modal é matematicamente defensável e, contrariamente à sua afirmação, vários sistemas de lógica paraconsistente são possíveis; sua caracterização da negação dual do intuicionismo permite, inclusive, axiomatizar o cálculo C_ω da hierarquia de cálculos de N.C.A da Costa.

Efetivamente, não há uma única lógica paraconsistente; nos propósitos de seus pioneiros, S.Jaškowski e N.C.A. da Costa, vários sistemas preencheriam, de fato, as condições propostas, um destes o cálculo intuído por Popper e que, neste trabalho, chamamos G_1^d ou H^d. Deve-se lembrar também que, entre os intuicionistas, não é pacífico que a lógica de Heyting seja, efetivamente, a lógica intuicionista - a formulação de Kolmogorov, que é equivalente à lógica minimal de Johánsson também atende aos objetivos de Brouwer. No caso da lógica paraconsistente, todos os autores concordam que vários cálculos atendem aos requisitos e a questão é saber como estes se relacionam.

Embora possamos afirmar que a negação de C_ω é a negação dual da negação intuicionista, não afirmamos que C_ω seja a lógica dual do intuicionismo com respeito à negação. Isto porque, se tomarmos o cálculo G_1 e dualizarmos apenas as regras para o conectivo "¬", nós obtemos outra lógica, já referida no corpo deste trabalho. Tomemos este novo sistema (isto é G_1 com dualização apenas nas regras de negação) e vejamos as seguintes derivações:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow \neg A, A}}{\neg\neg A \Rightarrow A}}{\Rightarrow \neg\neg A \supset A}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow \neg A, A}}{\Rightarrow \neg A \vee A, A}}{\Rightarrow \neg A \vee A, \neg A \vee A}}{\Rightarrow \neg A \vee A}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow B}{A \supset B, A \Rightarrow B} \qquad \Rightarrow [A \supset B]}{A \Rightarrow B}}{\Rightarrow \neg A, B}}{\neg B \Rightarrow \neg A}}{\Rightarrow \neg B \supset \neg A}$$

e aqui supomos que $[A \supset B]$ tem uma prova no sistema.

Não se deriva, neste cálculo, $\Rightarrow A \wedge \neg A \supset B$ ou qualquer de seus correlatos; e este cálculo tem, como teses, $\neg\neg A \supset A$, $A \vee \neg A$ e

$A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$. Logo, este é um cálculo de seqüentes para a lógica CC_ω, a lógica proposta por R.Sylvan em [Syl90]; assim CC_ω, é o **dual** da lógica intuicionista com respeito à negação.

Voltemos agora à interpretação intuitiva da negação paraconsistente. G.Priest e R.Routley insistem que a negação paraconsistente não é, efetivamente, um operador de negação, mas um operador de formar subcontrárias. Os termos envolvidos na discussão remontam a Aristóteles. Em "*De Interpretatione*", Aristóteles, ao tratar da oposição entre proposições, define duas proposições como *contrárias* se podem ser ambas falsas mas não podem ser ambas verdadeiras ao mesmo tempo; duas proposições são *contraditórias* se a verdade de uma implica necessariamente na falsidade da outra e vice-versa; e *subcontrárias* se podem ser ambas verdadeiras, mas não falsas ao mesmo tempo. Através da oposição entre proposições é possível uma inferência imediata: da verdade de uma proposição dada infere-se a falsidade de sua contrária, mas nada se infere se a premissa for falsa; tal relação se inverte quando se tratam de proposições subcontrárias: da falsidade de uma dada proposição se infere a verdade da sua subcontrária mas nada se infere se a premissa for verdadeira.

Realmente, a semântica para C_n, $(1 \leq n \leq \omega)$, admite a possibilidade de teorias nas quais uma fórmula e sua negação são ambas verdadeiras; além disso, se uma fórmula recebe, segundo a semântica, o valor falso, então sua negação recebe o valor verdadeiro. Isto se parece com a definição de proposições subcontrárias e achamos importante insistir no termo "se parece". Precisemos esta questão. Na lógica intuicionista, dada uma fórmula A, ou se tem uma prova de A e então a proposição é tomada como verdadeira, ou da hipótese de que seja verdadeira, chega-se a uma contradição e neste caso, $\neg A$ é verdadeira ou nada se afirma acerca da proposição A. Apesar de $A \vee \neg A$ não ser válido em geral, nada garante que exista uma fórmula tal que A e $\neg A$ sejam ambas falsas segundo uma mesma interpretação - o que não é o caso da lógica aristotélica, que tem sua peculiaridade no tocante a esta questão. Na lógica aristotélica, ainda que se possa tratá-la de modo puramente formal, dizer uma proposição é relacionar conceitos, é indicar o modo como tais conceitos devem ser tomados; a relação de contrariedade tem um sentido próprio nesta lógica. Mas, compreender a negação intuicionista como um operador de formar contrárias parece um equívoco, principalmente, se atentarmos ao fato de que a lógica intuicionista admite supercompletude mediante o mesmo signo de trivialização da lógica clássica, e é este signo que deve ser evitado (ou atenuado) na lógica paraconsistente.

A lógica G_1^d, absolutamente dual da lógica intuicionista, permite lançar alguma luz também neste problema. Enquanto em G_1^d, contradições não a trivializam, $A \vee \neg A$ faz este papel. Isto significa que nesta lógica, uma proposição e sua negação não podem ser ambas não válidas mas não validade em G_1^d não é sinônimo de falsidade, assim como no intuicionismo o fato de que $A \vee \neg A$ não ser válido não implica A e $\neg A$ falsos e, portanto, a negação não pode ser tomada como um operador de formar subcontrárias. Note-se que o intuicionismo, na formulação de Heyting, afirma duas teses: $A \wedge \neg A$ é explosivo, provoca supercompletude e $\neg (A \wedge \neg A)$; a lógica G_1^d afirma que $A \vee \neg A$ é explosivo e também $\neg (A \vee \neg A)$; o dual de $A \vee \neg A$ não é o princípio de não-contradição, mas a contradição; o dual da não-contradição é a tese $\neg(A \vee \neg A)$. O cálculo C_ω, que já mostramos ter a negação dual da negação intuicionista, é uma lógica paraconsistente e, tal como para o intuicionismo não se pode dizer que seu operador de negação é operador de formar contrárias, para C_ω não se pode dizer que tenha um operador de formar subcontrárias.

É interessante observarmos uma formulação dual da interpretação dos conectivos intuicionistas.

Há uma interpretação consagrada da lógica intuicionista (e dos conectivos intuicionistas), esboçada em [vDa86: p.228ss.], que retoma as idéias e intuições originais de Brouwer: a verdade de uma proposição é estabelecida por meio de uma prova. Assim, a interpretação dos conectivos deve ser explicada em termos de provas e construções.

A noção "a é uma prova de φ" é admitida como noção primitiva. Uma *prova* é um tipo particular de construção mental.

A interpretação é como segue (supondo-se, sem perda de generalidade, que a linguagem percorra números naturais):

1) $\underline{a}$ é uma prova de $\varphi \wedge \psi$ se, e somente se, $\underline{a}$ é um par $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ tal que $\underline{a}_1$ é uma prova de φ e $\underline{a}_2$ é uma prova de ψ;

2) $\underline{a}$ é uma prova de $\varphi \vee \psi$ se, e somente se, $\underline{a}$ é um par $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ tal que $\underline{a}_1 = 0$ e $\underline{a}_2$ é uma prova de φ ou $\underline{a}_1 = 1$ e $\underline{a}_2$ é uma prova de ψ;

3) $\underline{a}$ é uma prova de $\varphi \supset \psi$ se, e somente se, $\underline{a}$ é uma construção que converte cada prova $\underline{b}$ de φ em uma prova $\underline{a(b)}$ de ψ;

4) não existe uma prova de $\perp$;

5) $\underline{a}$ é uma prova de $\exists y\ \varphi(y)$ se, e somente se, $\underline{a}$ é um par $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ tal que $\underline{a}_1$ é uma prova de $\varphi(\mathbf{a_2})$;

6) $\underline{a}$ é uma prova de $\forall y\ \varphi(y)$ se, e somente se, $\underline{a}$ é uma construção tal que, para cada número natural $\mathbf{n}$, $\underline{a}\,(\mathbf{n})$ é uma prova de $\varphi(\mathbf{n})$.

A noção, informalmente apresentada acima, pode ser refinada - pode-se exigir que a afirmação "$\underline{a}$ é uma prova de φ" seja decidível (Kreisel 1965) ou que "construções" sejam vistas como *processos* (Sundholm 1963). Isto é a chamada interpretação BHK da lógica intuicionista.

Heuristicamente uma semântica de Kripke para a lógica intuicionista reproduz a atividade mental de um matemático ideal, *h*, que no decorrer do tempo adquire um corpo de conhecimentos e estabelece alguns fatos; tal corpo de conhecimentos cresce no decorrer do tempo e *h*, percorrendo estágios, não apenas pode estabelecer novos fatos, mas também construir objetos, novos elementos de seu universo.

Tais noções podem ser dualizadas, se fixarmos nossa atenção na lógica paraconsistente H^d.

Assim (supondo que a linguagem percorra os números naturais):

1') $\underline{a}$ é uma prova de $\varphi \vee \psi$ se, e somente se, $\underline{a}$ é um par $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ tal que $\underline{a}_1$ é uma prova de φ e $\underline{a}_2$ é uma prova de ψ;

2') $\underline{a}$ é uma prova de $\varphi \wedge \psi$ se, e somente se, $\underline{a}$ é um par $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ tal que $\underline{a}_1 = 0$ e $\underline{a}_2$ é uma prova de φ ou $\underline{a}_1 = 1$ e $\underline{a}_2$ é uma prova de ψ;

3') $\underline{a}$ é uma prova de $\varphi \not\subset \psi$ se, e somente se, $\underline{a}$ é uma construção que converte cada prova $\underline{b}$ de ψ em uma prova $\underline{a(b)}$ de φ;

4') nada é uma prova de T;

5') $\underline{a}$ é uma prova de $\exists y\ \varphi(y)$ se, e somente se, $\underline{a}$ é um par $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ tal que $\underline{a}_1$ é uma prova de $\varphi(\mathbf{a_2})$;

6') $\underline{a}$ é uma prova de $\forall y\ \varphi(y)$ se, e somente se, $\underline{a}$ é uma construção que para cada número natural **n**, $\underline{a}$ **(n)** é uma prova de φ(**n**).

Algum comentário se faz necessário. Conforme se depreende do Teorema da Completude para H^d (Teorema 3.36), a lógica H^d está conectada com o elemento $\perp$ de uma álgebra de Brouwer. Assim, uma conjunção é falsa se um de seus elementos conjuntivos é falso; para que uma disjunção seja falsa exige-se que cada componente o seja; isso se estende de maneira padrão para a interpretação dos quantificadores. Vejamos o caso então do conectivo "$\not\subset$" : afirmar $\varphi \not\subset \psi$ é afirmar que se tem um processo que converte cada prova de ψ numa prova de φ ou ainda, dada uma prova de φ foram dadas todas as provas de

ψ; na lógica H^d pode-se entender a negação de uma fórmula α, isto é, $\neg\alpha$ como $T \not\subset \alpha$; assim, afirmar $\neg\alpha$ é dizer que se pode converter uma prova de α numa prova de T, o que é impossível, isto é, α nunca é falsa e estamos querendo infirmar proposições.

De maneira natural pode-se interpretar os conectivos em face da semântica de Kripke proposta; suponhamos que **K** é uma coleção de estados de conhecimento; para um certo $t \in$ **K**, uma determinada coleção de conhecimentos e uma coleção de objetos são conhecidas; se há informação bastante para a rejeição de uma certa fórmula α, nós dizemos que "**K** força α no ponto t" e escrevemos **K** $||\!-_t \alpha$; assim rejeita-se $\alpha \wedge \beta$ se há informação suficiente para rejeitar α ou para rejeitar β; rejeita-se $\alpha \vee \beta$ se, e somente se, rejeita-se ambos, α e β; se $\alpha \not\subset \beta$ foi rejeitado no ponto t então $\alpha \not\subset \beta$ foi rejeitado em todo ponto anterior a t, ou seja, em qualquer tempo anterior a t, se nosso conhecimento não era suficiente para rejeitar β então não era suficiente para rejeitar α; e rejeita-se $\neg\alpha$ se não é possível rejeitar α em qualquer estágio anterior. Para a interpretação dos quantificadores, temos que se rejeita $\exists y\, \varphi(y)$ se, e somente se, para algum objeto b do estágio t, não se verifica $\varphi(b)$ e rejeita-se $\forall y\, \varphi(y)$ se para todo objeto b não se verifica $\varphi(b)$ seja no estágio presente, seja nos estágios anteriores.

Pode-se afirmar, então, que a lógica H^d nos dá aquilo que deve ser rejeitado e que a rejeição é preservada - se se rejeita uma proposição agora é porque num tempo anterior, nosso estágio de conhecimento também não podia afirmá-la. O aparato semântico dá-nos, entretanto, tão somente a possibilidade de rejeitar proposições, não de afirmá-las e poderíamos perguntar se é possível se rejeitar, *a priori*, uma fórmula e sua negação; a cláusula 4' da interpretação de prova impede que tal ocorra pois, se assim fosse, então **K** $||\!-_t \alpha$ e **K** $||\!-_t \neg\alpha$ e, portanto, teríamos **K** $||\!-_t \alpha \vee \neg\alpha$ e **K** forçaria uma proposição qualquer, o que trivializaria H^d.

Podemos, agora, ante o exposto, discutir uma interpretação da negação paraconsistente. Claro está que toda negação desempenha um papel de oposição e que tal oposição não pode ser compreendida de forma única, como se depreende, seja em Aristóteles, do qual se extrai três relações possíveis entre uma proposição e uma outra que a nega, seja em Popper que distingue seis negações (entre estas a clássica, a intuicionista e a paraconsistente), ou na literatura sobre o intuicionismo e sobre a paraconsistência. Também é pacífica a compreensão de que a negação clássica é a mais forte das negações; ela expressa o terceiro excluído e também o fato de que contradições são explosivas, geram supercompletude. A negação intuicionista pode ser "capturada", pelo operador de conseqüência de Tarski, na fórmula que caracteriza esta explosão, enquanto a negação paraconsistente, na fórmula que caracteriza o terceiro excluído (ou complementação, nas palavras de Popper). A negação intuicionista é, com efeito, **dual** da negação paraconsistente. Podemos pensar ([8]), baseados nas semânticas de Kripke para IL e H^d, que o intuicionismo assume uma postura mais exigente para afirmar uma fórmula, rejeitando aquelas que não satisfazem tais exigências; é como se proposições fossem tomadas a princípio como falsas e, se atendidas certas exigências, podemos tomá-las como verdadeiras; na lógica paraconsistente ocorre o contrário; proposições são, em princípio, verdadeiras e, se satisfeitas certas exigências, devem ser tomadas como falsas. O rótulo "liberal" para as deduções paraconsistentes e "conservadora" para as deduções intuicionistas ([Goo81:121] e [SeC95:201]) parece, portanto, adequado. Na lógica intuicionista há uma espécie de *epochê* diante de proposições contraditórias, até que se prove uma delas. Na lógica H^d ocorre o contrário: aceita-se proposições contraditórias sem o risco de trivialização.

Não discutimos aqui o que as contradições são; a questão onto-lógica é por demais controversa e sua discussão foge aos limites deste trabalho. Mas contradições aparecem no discurso e, em contextos bastante determinados

[8] Devo muito do que se segue a discussões com o Prof. Walter A. Carnielli; numa terminologia computacional, o Prof. Carnielli pensa que no intuicionismo uma proposição é "falsa por *default*" enquanto na paraconsistência é "verdadeira por *default*".

(banco de dados, situações de incerteza, indeterminação, vaguedade, normas jurídicas - ver, por exemplo, a discussão que se encontra em [Mis96]), proposições contraditórias ocorrem e podem ser tomadas, ambas, como verdadeiras a princípio, ainda que expressem oposição; que lógicas capazes de servir como base a teorias inconsistentes sejam necessárias para a compreensão do raciocínio humano e na elucidação de vários conceitos empregados nas ciências dedutivas, é tema já assentado e fundamentado na história da lógica paraconsistente.

Para finalizar esta questão e mostrar a diferença entre a negação intuicionista e a negação paraconsistente, observe-se que, do ponto de vista topológico, a negação intuicionista de uma proposição φ, interpretada como um subconjunto aberto $[\varphi]$, é o interior do complemento (conjuntista) de $[\varphi]$; a negação paraconsistente, nesta interpretação, é o fecho do complementar e isso nos diz que

$$\mathrm{int}[\varphi]^C \subseteq ([\varphi]^C)^*$$

ou seja, na lógica intuicionista excluem-se os pontos de fronteira, pontos que não pertencem a uma vizinhança aberta totalmente contida no conjunto; a lógica H^d inclui tais pontos; situações "na fronteira" não são decidíveis intuicionisticamente. A paraconsistência os leva em consideração e não se omite diante deles (ver o exemplo discutido em [Cai95:570]).

Ainda sobre a dualidade, consideremos os sistemas P^1 [Set73] e I^1 [SeC95], que são lógicas trivalentes, sistematizadas pelo método dos *tableaux* descritos em [Car87], no qual são apresentados *tableaux* para P^1 a partir das matrizes para os conectivos. Vamos explicitá-los, pois interessa-nos compará-los com aqueles para I^1.

Tableaux para P^1:

	$\neg$
0	2
1	0

$\supset$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2

$\vee$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2

2 | 0 2 | 0 0 0 2 | 0 0 2 2 | 2 2 2

N = {0, 1, 2} e D = {0, 1}

R1 $$\frac{a_0(\neg X)}{a_1(X) + a_2(X)}$$ R2 $$\frac{a_2(\neg X)}{a_0(X)}$$

R3 $$\frac{a_0(X \supset Y)}{a_2(X) + a_0(Y) + a_1(Y)}$$

R4 $$\frac{a_2(X \supset Y)}{\{a_0(X) * a_2(Y)\} + \{a_1(X) * a_2(Y)\}}$$

R5 $$\frac{a_0(X \vee Y)}{a_0(X) + a_1(X) + a_0(Y) + a_1(Y)}$$

R6 $$\frac{a_2(X \wedge Y)}{a_2(X) * a_2(Y)}$$

R7 $$\frac{a_0(X \wedge Y)}{\{a_0(X) * a_0(Y)\} + \{a_0(X) * a_1(Y)\} + \{a_1(X) * a_0(Y)\} + \{a_1(X) * a_1(Y)\}}$$

R8 $$\frac{a_2(X \wedge Y)}{a_2(X) + a_2(Y)}$$

Para I^1 nós temos as seguintes matrizes e regras:

	$\neg$
0	2
1	0
2	0

$\supset$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	0	2

$\vee$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	2	2	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	2

N = {0, 1, 2} e D = {2}

R1 $$\frac{a_0(\neg X)}{a_1(X) + a_2(X)}$$

R2 $$\frac{a_2(\neg X)}{a_0(X)}$$

R3 $$\frac{a_0(X \supset Y)}{\{a_2(X) * a_0(Y)\} + \{a_2(X) * a_1(Y)\}}$$

R4 $$\frac{a_2(X \supset Y)}{a_0(X) + a_1(Y) + a_2(Y)}$$

R5 $$\frac{a_0(X \vee Y)}{\{a_0(X) * a_0(Y)\} + \{a_0(X) * a_1(Y)\} + \{a_1(X) * a_0(Y)\} + \{a_1(X) * a_1(Y)\}}$$

R6 $$\frac{a_2(X \vee Y)}{a_2(X) + a_2(Y)}$$

R7 $$\frac{a_0(X \wedge Y)}{a_0(X) + a_1(X) + a_0(Y) + a_1(Y)}$$

R8 $$\frac{a_2(X \wedge Y)}{a_2(X) * a_2(Y)}$$

Uma lógica proposicional n-valente - na terminologia e notação de [Car87] - é um par $L = <S, \Im>$ no qual S é o conjunto das fórmulas da lógica em consideração, isto é, a álgebra livremente gerada por $\{P_i\}_{i \in I}$ com os conectivos $\{F_1, ..., F_r\}$ e $\Im$ é um pré-modelo para S construído da seguinte forma: $\Im$ é o par $= <A, D>$ no qual $A = <N, f_i: 1 \leq i \leq r>$ é uma álgebra similar a S; $N = \{0,1,2,...,(n-1)\}$ e $D \subseteq N$, o conjunto dos valores distinguidos.

Na construção de um *tableaux* para L, a regra $\pi(i, F)$ é uma função que associa a seguinte árvore à fórmula marcada $a_i(X)$, na qual X é o esquema de fórmula $F(X_1, ..., X_m)$, com F um conectivo m-ário,

$$\frac{a_i\,(F(X_1, ..., X_m))}{+ \{a_{ji}(X_{i1}) * ... * a_{jt}(X_{it}) : j_1,...,j_t < n, t \leq m \text{ e a condição proposicional } H_i(F: j_1, ..., j_t) \text{ vale}\},}$$

onde $H_i(F: j_1, ..., j_t)$ significa que existe um homomorfismo $h:S \longrightarrow A$, ou seja, uma valoração da linguagem S na classe A de todas as álgebras similares e que satisfaz o seguinte:

1) $h(X_{ik}) = j_k$;

2) Se f representa o conectivo F, então $f(v_1,...,v_{i1},...,v_{i2},...,v_{ik},...,v_m) = i$ para todos os valores da função f nos quais $v_{ik} = j_k$,e os outros v's são arbitrários;

3) nenhum $t' < t$ satisfaz 1) e 2).

A função t, do conjunto das árvores associadas às fórmulas de $P^1(Cl^P)$ no conjunto das árvores associadas às fórmulas de $I^1(Cl^I)$,

$$t: Cl^P(\pi(i, F)) \longrightarrow Cl^I(\pi(i, F)),$$

é dada por:

$t(\pi(i, \neg)) = \pi(i, h(\neg))$

$t(\pi(i, \wedge)) = \pi(i, h(\wedge))$

$t(\pi(i, \vee)) = \pi(i, h(\vee))$

$t(\pi(0, \supset)) = \pi(2, h(\supset))$

$t(\pi(2, \supset)) = \pi(0, h(\supset))$.

A função h, das fórmulas de P^1 às fórmulas de I^1, é definida como:

$h(\neg A) = \neg h(A)$

$h(A \supset B) = h(B) \supset h(A)$

$h(A \wedge B) = h(B) \vee h(A)$

$h(A \vee B) = h(B) \wedge h(A)$

é uma tradução das regras para a construção de um *tableaux* para uma fórmula marcada de P^1 às regras para a construção de um tableaux para fórmulas marcadas de I^1 ([9]).

Já mencionamos que o sistema β_2 de [LdC86] é equivalente ao sistema P^1 e que β_1 é equivalente a I^1; na formulação axiomática apresentada no Capítulo III não fica evidente aquilo que as regras R1-R8 acima explicitam: que os sistemas P^1 e I^1 são efetivamente duais com respeito aos conectivos $\wedge$ e $\vee$ nesta formulação e que, na tradução proposta, o comportamento do conectivo "$\supset$" assemelha-se àquele que propomos entre IL e H^d.

Muito interessante seria o estudo, com as ferramentas da teoria das categorias, de I^1 e P^1; note-se que ambos os sistemas são tais que, para $\neg:\Omega \longrightarrow \Omega$, $\neg \circ \neg = id_\Omega$. Por isso P^1 só é paraconsistente a nível atômico e I^1 só é intuicionista neste nível, enquanto que, a partir daí, em ambos os sistemas, as fórmulas comportam-se classicamente; poder-se-ia pensar em lógicas tais que $\neg^n = id_\Omega$, para $n > 2$. O que seriam tais lógicas?

Mediante álgebras duais às álgebras de Heyting, apresentamos uma lógica dual à lógica intuicionista que nos permitiu discutir vários aspectos da paraconsistência. Devemos mencionar que as álgebras de da Costa (ver, por exemplo, o item 3.6 de [DOt90]) constituem outra abordagem algébrica da lógica paraconsistente. É interessante estudar as relações entre álgebras brouwerianas e álgebras de da Costa; o estudo de tais relações permitiria estabelecer os relacionamentos entre a lógica H^d e as diversas lógicas paraconsistentes conhecidas. A lógica H^d, com seu conectivo de implicação brouweriano (“anti-condicional”, nas palavras de Popper ou “explicação”, nos trabalhos de C.Rauszer), não parece adequada ao estudo das relações entre as diversas lógicas paraconsistentes, pois está conectada aos ideais de uma álgebra de Brouwer. A lógica FB, que também é paraconsistente, entretanto, tem uma conexão estreita com os filtros de uma álgebra brouweriana e, assim, parece mais adequada a tal estudo.

Um conhecido resultado de V.Jankov [Jan68] mostra que entre o cálculo intuicionista e o cálculo clássico existe um *continuum* de lógicas intermediárias. É de se supor que entre FB e a lógica clássica um resultado similar possa ser alcançado. Isso explicaria a “proliferação” das lógicas paraconsistentes e a estreita relação entre certas lógicas relevantes e paraconsistentes; essa questão fica como problema a ser desenvolvido posteriormente.

Outra questão que merece atenção é a seguinte: no

---

[9] Uma tradução entre P^1 e I^1 encontra-se em [CaL96], similar à que propomos.

desenvolvimento de H^dQ, porque estávamos preocupados em estabelecer a lógica efetivamente dual da lógica intuicionista, exigimos um quantificador universal muito forte; exigimos na relação de forçamento "$\mathbf{K} \Vdash_p \forall y B(y)$" que a fórmula fosse forçada não apenas no ponto *p* para todo elemento de $\Re_p$, mas também para todo elemento de $\Re_q$, quando $q \leq p$. Isso não é necessário; poder-se-ia exigir um tratamento clássico do quantificador universal. A seguinte formulação da relação

$\mathbf{K} \Vdash_p \forall y B(y, x_1, ..., x_n) [c_1, ..., c_n]$ se, e somente para todo $b \in \Re_p$

$\Re_p \models B(y, x_1, ..., x_n) [b, c_1, ..., c_n]$

propicia outra lógica, também nas bases proposicionais de H^d e que também tem uma formulação topológica adequada, pois um ponto, pela topologia natural, num sistema parcialmente ordenado, é um elemento fechado.

Os problemas acima descritos, bem como o estudo sistemático de H^d, H^dQ e da lógica FB, tomando como base a lógica intuicionista, merecem ser investigados em outros trabalhos.

BIBLIOGRAFIA

[Alv76] Alves, E.H. **Lógica e Inconsistência: um estudo dos cálculos C_n, $1 \leq n \leq \omega$**. São Paulo, Dissertação de Mestrado/USP, 1976.

[Alv96] Alves, E.H. "On the equivalence between some systems of non-classical logic". Salvador, XI EBL,1996.(Resumos p.89).

[AlQ91] Alves, E.H. e G.S.Queiroz . "The construction of the calculi C_n of da Costa", ***The Journal of Non-Classical Logic***, *8(1991)*, p.67-78.

[Arr80] Arruda, A.I. "A survey of paraconsistent logic" *in* A.I.Arruda, N.C.A.da Costa, R.Chuaqui (eds.). **Mathematical Logic in Latin America**. Amsterdam: North-Holland, 1980, p.1-41.

[Bel82] Bell, J.L. "Categories, toposes and sets", ***Synthese*** *51(1982),* p.293-337.

[Cai95] Caicedo, X. "Lógica de los haces de estructuras", ***Rev. Acad. Colomb. Cienc.***, *19, n.74(1995)*, p.569-586.

[CaL96] Carnielli, W.A. e M.Lima-Marques. "Society semantics and multiple-valued logics", a aparecer, 1996.

[Car87] Carnielli, W.A. "Systematization of finite many-valued logics through the method of tableaux", ***The Journal of Symbolic Logic,*** *52(1987)*, p.473-493.

[Cur76] Curry, H.B. **Foundations of Mathematical Logic**. New York: Dover, 1976.

[Cze77] Czermak, J. "A remark on Gentzen's calculus of sequents", ***Notre Dame Journal of Formal Logic,*** *18(1977),* p.471-474.

[dCo93] Costa, N.C.A da . **Sistemas Formais Inconsistentes**. Curitiba: Ed. da UFPR, 1993.

[dCA77] Costa, N.C.A da e E.H.Alves. "A semantical analysis of the calculi C_n", ***Notre Dame Journal of Formal Logic,*** *18(1977),* p. 621-630.

[DOt90] D'Ottaviano, I.M.L. "On the development of paraconsistent logic and da Costa's work", ***The Journal of Non-Classical Logic**, 7(1990)*, p.89-152.

[DOF97] D'Ottaviano. I.M.L. e H.Feitosa. "Paraconsistent logics and translations", submetido à publicação.

[DSdS97] D'Ottaviano, I.M.L., A.M.Sette e J.J.da Silva. "What is a logical translation?", a aparecer.

[dSDS97] da Silva, J.J., I.M.L.D'Ottaviano e A.M.Sette. "Translations between logics", a aparecer.

[Dun86] Dunn, J.M. "Relevance logic and entailment" *in* D.Gabbay e F.Guenthner (eds.). **Handbook of Philosophical Logic**, vol III, Dordrecht: D.Reidel Publishing , p.117-224.

[Fei97] Feitosa, H.A. **Traduções Conservativas**. Campinas, Tese de Doutorado/ Unicamp, 1998.

[Gen69] Gentzen, G. "Investigation into logical deduction" *in* M.E.Szabo (ed.). **The Collected Papers of Gerhard Gentzen**, Amsterdam: North-Holland, 1969, p.68-131.

[Gli29] Glivenko, V. "Sur quelques points de la logique de M.Brouwer". ***Academie Royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences**, 15(1929),* p. 183-188.

[Gol84] Goldblatt, R. **Topoi: the categorial analysis of logic**. Amsterdam: North-Holland, 1984.

[Goo81] Goodman, N. "The logic of contradiction", ***Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik**, 27(1981)*, p. 119-126.

[Gra90] Grana, N. **Contraddizione e Incompletezza**. Napoli, Liguori Editore, 1990.

[Hat68] Hatcher, W. **Foundations of Mathematics**. New York: Saunders Co., 1968.

[Jan68] Jankov, V.A. "Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi", ***Soviet Math. Dokl.**, 8(1968)*, p. 806-807.

[Kle52] Kleene, S.C. **Introduction to Metamathematics**. Amsterdam: D.Van Nostrand, 1952.

[Law91] Lawvere, F.W. "Intrinsic co-Heyting boundaries and the Leibniz rule in certain toposes", ***Lecture Notes in Mathematics**, 1488 (1991)*, p. 279-281.

[LdC84] Loparic, A. e N.C.A.da Costa. "Paraconsistency, paracompleteness and valuations", ***Logique et Analyse***, *106 (1984)*, p.119-131.

[LdC86] Loparic, A. e N.C.A.da Costa. "Paraconsistency, paracompleteness and induction", ***Logique et Analyse***, *113 (1986)*, p.73-80.

[LMS90] Lewin, R.A., I.Mikenberg e M.G.Schwarze. "Algebraization of paraconsistent logic P^1", ***The Journal of Non-Classical Logic**, 7(1990)*, p.145-155.

[MaR95] Makkai, M. e G. Reyes. "Completeness results for intuitionistic and modal logic in categorical setting", ***Annals of Pure and Applied Logic**, 72(1995)*, p.25-101.

[McT44] McKinsey, J.C.C. e A.Tarski. "The algebra of topology", ***Annals of Mathematics**, 45(1944)*, p.141-191.

[McT46] McKinsey, J.C.C. e A.Tarski. "On closed elements in closure algebras", ***Annals of Mathematics**, 47(1946)*, p.122-162.

[McT48] McKinsey, J.C.C. e A.Tarski. "Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting", ***The Journal of Symbolic Logic**, 13, 1(1948)*, p.1-15.

[Mis96] Miserda, A. B. **Inconsistencias ¿Por qué no?**, Bogotá: Colcultura, 1996.

[Mor80] Mortensen, C. "Every quotient algebra for C_1 is trivial", ***Notre Dame Journal of Formal Logic**, 21(1980)*, p. 694-700.

[Pop40] Popper,K.R. "What is dialectic?", ***Mind**, 49(1940)*, p.403-426.

[Pop47] Popper, K.R. "New foundations for logic", ***Mind**, 56(1947),* p.193-235.

[Pop48] Popper, K.R. "On the theory of deduction. Part I and II", ***Indagationes Mathematicae***, *10(1948)*, p.173 -183 e 322-331.

[Pop72] Popper,K.R. **Conjectures and Refutations**. Londres: Routledge & Kegan Paul, 1972. **Conjecturas e Refutações**. Tradução brasileira por Sérgio Bath. Brasília: Editora da UnB, 1994, 3a.edição.

[PRN89] Priest, G.; R. Routley e J. Norman (eds.). **Paraconsistent Logic: essays on the inconsistent**. München: Philosophia, 1989.

[Ras74] Rasiowa, H. **An Algebraic Approach to Non-Classical Logic**. Amsterdam: North-Holland, 1974.

[Rau74] Rauszer, C. "Semi-boolean algebras and their applications to intuitionistic logic with dual operation", ***Fundamenta Mathematicae,*** *83(1974)*, p.219-249.

[Rau80] Rauszer, C. "An algebraic and Kripke-style approach to a certain extension of intuitionistic logic", ***Dissertationes Mathematicae***, *vol.168(1980).*

[ReZ91] Reyes,G. e H.Zolfaghari. "Topos-theoretic approaches to modality", ***Lecture Notes in Mathematics***, *1488(1991)*, p. 359-378.

[ReZ93] Reyes,G. e M.Zawadowski. "Formal systems for modal operators on locales", ***Studia Logic,*** *52(1993)*, p.595-613.

[ReZ96] Reyes,G. e H.Zolfaghari. "Bi-Heyting algebras, toposes and modalities", ***Journal of Philosophical Logic,*** *25(1996)*, p.25-43.

[Set73] Sette, A.M. "On the propositional calculus P^1", ***Mathematica Japonica,*** *18(1973)*, p.173-180.

[SeC85] Sette,A.M. e W.A.Carnielli. "Maximal weakly-intuitionistic logics", ***Studia Logica,*** *55(1995)*, p.181-203.

[SAQ96] Sette,A.M., E.H.Alves e G.S.Queiroz ."Brouwerian algebras and paraconsistent logic", 1997, a aparecer.

[Syl90] Sylvan,R. "Variations on da Costa C systems and dual-intuitionistic logic.I. Analyses of C_ω and CC_ω", ***Studia Logica,*** *49(1990)*. p.47-65.

[Tar30] Tarski, A. "On some fundamental concepts of metamathematics" *in* **Logic, Semantics, Metamathematics**. Oxford: Clarendon Press, 1956.

[TvD88] Troelstra, A.S. e D.van Dalen. **Construtivism in Mathematics**, vol.II. Amsterdam: North-Holland, 1988.

[Urb96] Urbas, I. "Dual-intuitionistic logics*", **Notre Dame Journal of Formal Logic**, vol.37(1996),* p.440-451.

[vDa86] van Dalen, Dirk. "Intuitionistic logic" *in* D.Gabbay e F.Guenthner (eds.). **Handbook of Philosophical Logic***,* vol III. Amsterdam: D.Reidel Publishing , p.225-339.