UNICAMP

Leandro Oliva Suguitani

Sobre a lógica e a aritmética das relações

Campinas

2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

LEANDRO OLIVA SUGUITANI
Bolsista da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP

SOBRE A LÓGICA E A ARITMÉTICA DAS RELAÇÕES

ORIENTADORA: ITALA M. L. D'OTTAVIANO

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas (IFCH) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) para a obtenção do Título de Doutor em Filosofia.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO LEANDRO O. SUGUITANI, ORIENTADA PELA PROFA. ITALA M. L. D'OTTAVIANO.

CPG, 19 de novembro, 2013.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
Cecília Maria Jorge Nicolau - CRB 8/338

Su35s

Suguitani, Leandro Oliva, 1976-
Sobre a lógica e a aritmética das relações / Leandro Oliva Suguitani. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Itala Maria Loffredo D'Ottaviano.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Lógica simbólica e matemática . 2. Aritmética . 3. Formas binárias . I. D'Ottaviano, Itala Maria Loffredo,1944-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: On the logic and arithmetic of relations
Palavras-chave em inglês:
Symbolic and mathematical logic
Arithmetic
Binary forms
Área de concentração: Filosofia
Titulação: Doutor em Filosofia
Banca examinadora:
Itala Maria Loffredo D'Ottaviano [Orientador]
Jorge Petrúcio Viana
Renata Pereira de Freitas
Rodolfo Cristian Ertola Biraben
Rodrigo de Alvarenga Freire
Data de defesa: 19-11-2013
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Tese de Doutorado, em sessão pública realizada em 19 de novembro de 2013, considerou o candidatoLEANDRO OLIVA SUGUITANI aprovado.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora.

Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano ______

Prof. Dr. Jorge Petrúcio Viana ______

Prof. Dr. Renata Pereira de Freitas Renata P. de Freitas

Prof. Dr. Rodolfo Cristian Ertola Biraben ______

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Freire ______

Aos meus pais.

Agradecimentos

Eu jamais teria conseguido concluir esta Tese de Doutorado sozinho. Expresso aqui a minha profunda gratidão àqueles que contribuíram, diretamente, com esta conquista.

Minha orientadora, Itala M. L. D'Ottaviano, sempre atenciosa e prestativa, nunca mediu esforços para que eu pudesse desenvolver meu trabalho da melhor maneira possível. Da minha parte, admiração, respeito e carinho foram os sentimentos nutridos durante esses anos de trabalho juntos.

Meu "co-orientador", Jorge Petrúcio Viana, a quem devo muito mais do que ele possa reconhecer. O aprendizado foi além dos conteúdos acadêmicos e a convivência não poderia ter sido mais agradável. Certamente, uma referência que inspira positivamente as minhas escolhas dentro da carreira acadêmica.

Os professores, Walter A. Carnielli e Marcelo E. Coniglio, sempre presentes e interessados em oferecer boas condições de trabalho aos alunos.

Os colegas, Edgar Almeida e Henrique Antunes Almeida que, além de revisarem o texto, sempre estiveram dispostos a discutir o conteúdo da minha tese. Essa parceria, sem dúvida, melhorou o resultado final deste trabalho.

Os demais colegas do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE), com quem convivi durante esses anos de pós-graduação, que criaram um ambiente amistoso e propício para a minha pesquisa.

O Grupo de Lógica do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade Federal Fluminense, onde desenvolvi parte desta pesquisa e sempre encontrei portas abertas e disposição para interagir.

Finalmente, expresso minha gratidão aos funcionários do CLE, por ajudarem a sustentar a estrutura que tornou possível a conclusão deste trabalho.

> For, aside from the fact that the concepts occurring in this calculus possess an objective importance and are in these times almost indispensable in any scientific discussion, the calculus of relations has an intrinsic charm and beauty which makes it a source of intellectual delight to all who become acquainted with it.
>
> — A. Tarski

Resumo

Neste trabalho, investigamos a lógica e a aritmética das relações binárias. Propomos um sistema axiomático para a *álgebra relacional*, com o objetivo de "flexibilizar" a aritmética das relações, dada por essa álgebra. No nosso sistema, a noção de *conexão de Galois* desempenha um papel central. A lógica subjacente ao sistema é a *lógica da ordem*. Introduzimos uma formalização desta lógica e apresentamos uma comparação formal desta com a bem conhecida *lógica equacional*, considerando o poder de expressão, o poder de prova e a normalização de provas. Aperfeiçoamos o sistema de dedução natural, introduzido por W. W. Wadge, para a *lógica clássica das relações* e, a partir da nossa versão, introduzimos um sistema de dedução natural para a *lógica intuicionista das relações*. Com estes dois sistemas, mostramos que o Teorema K, um dos primeiros teoremas do cálculo relacional, demonstrado originalmente por A. De Morgan, pressupõe a lógica clássica como norma dedutiva.

Abstract

In this work, we investigate the logic and arithmetic of binary relations. We propose an axiomatic system for *relation algebra*, aiming at easing the arithmetic of binary relations, given by this algebra. In our system, the notion of *Galois connection* plays a central role. The underlying logic of the system is the *logic of order*. We introduce a formalization of this logic and compare it with the well known *equational logic*, considering the expressive power, the proof power and the normalization of formal proofs. We improve W. W. Wadge's natural deduction system for the *classical logic of relations* and, from our version, we introduce a system of natural deduction for the *intuitionistic logic of relations*. With these two systems, we show that Theorem K, one of the first theorems of the relational calculus, originally demonstrated by A. De Morgan, assumes classical logic as standard, since it cannot be obtained within the intuitionistic logic of relations.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, investigamos alguns aspectos da *aritmética* e da *lógica* das *relações binárias*.

Quando relações binárias são objeto de estudo matemático, geralmente, elas são consideradas como *álgebras*, ou seja, como conjuntos não vazios:

1. cujos elementos são as relações binárias em questão,
2. munidos de operações distinguidas, que atuam sobre relações binárias e têm relações binárias como resultado,
3. munidos de relações distinguidas, que atuam sobre relações binárias e têm um valor, *verdadeiro* ou *falso*, como resultado.

Neste modelo, a relação de *igualdade* (entre relações) está, obrigatoriamente, entre as relações distinguidas da álgebra.

Esta apresentação algébrica pode ser utilizada tanto para o tratamento de relações específicas, quanto para o tratamento das relações em geral. Por exemplo, podemos considerar:

1. as relações binárias entre números naturais *identidade* ($=$), *menor* ($<$), *maior* ($>$) e *menor ou igual* ($\leq$), como elementos de um universo;
2. as operações *união* ($\cup$) e *inversão* ($^{-1}$), como operações distinguidas;
3. as relações *inclusão* ($\subseteq$) e *igualdade* ($\approx$), como relações distinguidas.

A partir desses elementos, podemos investigar algumas propriedades das relações $=$, $\leq$, $<$ e $>$, por meio de expressões linguísticas — que podem ser verdadeiras ou falsas — tais como:

$\leq \; \subseteq \; =$ (falso)

$<^{-1} \approx >$ (verdadeiro)

$= \cup \leq \approx \leq$ (verdadeiro)

Por outro lado, se estamos interessados em investigar as propriedades das relações binárias em geral, podemos considerar um conjunto qualquer $B \neq \emptyset$ como *conjunto base*, e o conjunto $2^{B \times B}$, de todas as relações binárias entre elementos de B, como *conjunto universo*. Neste caso, a escolha das operações vai depender do tipo de investigação que está sendo levada a termo e dos propósitos em questão.

Esta maneira de tratar as relações binárias está fortemente relacionada com o desenvolvimento do *cálculo relacional*, cujas origens descrevemos brevemente a seguir, como motivação histórica do nosso trabalho.

De Morgan, 1860. A. De Morgan (1806–1871) foi o primeiro autor a considerar um tratamento sistemático das relações binárias [DM60].

O principal objetivo de De Morgan era estender a silogística para dar conta da validade de argumentos que contêm enunciados como:

todo homem acredita em algum deus,

que possuem ocorrências de outras partículas além da cópula *é* e que possuem ocorrências de quantificadores tanto nos sujeitos quanto nos predicados. Sob esta perspectiva, De Morgan introduziu e investigou as operações de *complementação*, *reversão*, *composição*, e mais duas operações que não possuem nomes específicos, sobre relações. Estas duas operações consideradas por De Morgan podem ser vistas como "inversas da composição" e estão diretamente relacionadas com a quantificação de sujeitos e predicados.

Considerando U como universo de discurso, R e S relações binárias em U e utilizando uma notação semelhante à utilizada em [SS93, Sch11], as operações introduzidas por De Morgan podem ser definidas por:

$$\begin{array}{lcl}
R^{\mathsf{c}} & ::= & \{(x,y) \in U \times U : (x,y) \notin R\} \\
R^{\mathsf{T}} & ::= & \{(x,y) \in U \times U : (y,x) \in R\} \\
R \circ S & ::= & \{(x,y) \in U \times U : \exists z((x,z) \in R \wedge (z,y) \in S)\} \\
R \triangleleft S & ::= & \{(x,y) \in U \times U : \forall z((x,z) \in R \leftarrow (z,y) \in S)\} \\
R \triangleright S & ::= & \{(x,y) \in U \times U : \forall z((x,z) \in R \rightarrow (z,y) \in S)\}
\end{array}$$

Tomando estas operações como base, De Morgan iniciou a investigação das leis aritméticas fundamentais sobre relações. Por exemplo, provou os seguintes resultados, para todas as relações R, S e T:

$$R^{\mathsf{T}^{\mathsf{T}}} \approx R$$

$$(R \circ S)^{\mathsf{T}} \approx S^{\mathsf{T}} \circ R^{\mathsf{T}}$$

$$R \circ S \subseteq T \Rightarrow R^{\mathsf{T}} \circ T^{\mathsf{c}} \subseteq S^{\mathsf{c}}$$

Uma lista (aparentemente) completa dos resultados aritméticos apresentados por De Morgan, em [DM60], pode ser encontrada em [Mer90].

De Morgan também foi o precursor do estudo de relações que satisfazem certas propriedades especiais, introduzindo algumas noções fundamentais sobre relações, como por exemplo, ser *reflexiva*, *simétrica* (que ele chamou de *convertível*) e *transitiva*. Em particular, De Morgan precebeu que as relações simétricas e transitivas desempenhavam um papel importante na sua análise sobre a validade de silogismos. Mais especificamente, dada uma relação R, De Morgan definiu:

$$R \text{ é convertível } \Leftrightarrow R \subseteq R^{\mathsf{T}}$$

$$R \text{ é transitiva } \Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$$

Utilizando estas definições, De Morgan ilustrou a utilidade das propriedades aritméticas fundamentais, já estabelecidas, investigando estes tipos de relações. Por exemplo, ele provou que, para toda relação R, temos:

$$R \circ R^{\mathsf{T}} \text{ é convertível}$$

De fato, aplicando as propriedades aritméticas fundamentais, é imediato verificar que

$$(R \circ R^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \approx R^{\mathsf{T}^{\mathsf{T}}} \circ R^{\mathsf{T}} \approx R \circ R^{\mathsf{T}}.$$

Se R é transitiva, também temos:

$$R^{\mathsf{T}} \circ R^{\mathsf{C}} \subseteq R^{\mathsf{C}}$$

Da mesma maneira, aplicando as propriedades aritméticas fundamentais, neste caso, temos:

$$R \circ R \subseteq R \Rightarrow R^{\mathsf{T}} \circ R^{\mathsf{C}} \subseteq R^{\mathsf{C}}$$

Muitos autores consideram que o trabalho de De Morgan tem um valor intrínseco, por ser o fruto de uma das primeiras tentativas sistemáticas de romper com as amarras impostas pelos que propunham a silogística como um sistema universal. Porém, como sistema lógico-algébrico, o cálculo relacional de De Morgan deixa um pouco a desejar, talvez por não ter sido definido dentro do paradigma algébrico-abstrato, emergente em sua época. Podemos dizer que, na verdade, De Morgan apenas aponta o caminho e deixa em aberto o problema de definir uma álgebra das relações.

Peirce, 1870-1892. C.S. Peirce (1839–1914) estendeu o trabalho de De Morgan e promoveu o desenvolvimento do cálculo relacional a outro patamar. Em [Pei83], encontramos o que é considerado a forma mais bem acabada da álgebra de relações binárias definida por Peirce.

O principal objetivo de Peirce era estender a álgebra de conjuntos (*álgebra Booleana*, na expressão de Peirce) para criar uma álgebra das relações binárias que fosse adequada para a investigação dos aspectos lógicos das relações binárias. Peirce introduziu e investigou as operações *Booleanas* de *complementação*, *interseção* e *união*, em paralelo com as operações *Peirceanas* de *reversão*, *composição* e *dual da composição*. Além de adicionar novas operações àquelas definidas por De Morgan, Peirce também introduziu e investigou as relações distintas *vazia*, *universal*, *identidade* e *diversidade*, sobre um universo de discurso dado.

Considerando U como universo de discurso, R e S relações binárias em U e utilizando uma notação semelhante à utilizada em [SS93, Sch11], as operações introduzidas por Peirce podem ser definidas da seguinte maneira:

$$\begin{array}{lcl}
R \sqcap S & ::= & \{(x,y) \in U \times U : (x,y) \in R \wedge (x,y) \in S\} \\
R \sqcup S & ::= & \{(x,y) \in U \times U : (x,y) \in R \vee (x,y) \in S\} \\
R \oplus S & ::= & \{(x,y) \in U \times U : \forall z((x,z) \in R \vee (z,y) \in S)\} \\
\mathsf{O} & ::= & \{(x,y) \in U \times U : x, y \notin U\} \\
\mathsf{E} & ::= & \{(x,y) \in U \times U : x, y \in U\} \\
\mathsf{I} & ::= & \{(x,y) \in U \times U : x = y\} \\
\mathsf{D} & ::= & \{(x,y) \in U \times U : x \neq y\}
\end{array}$$

Ao adotar estas operações e relações distintas na definição da sua álgebra das relações, Peirce destaca a existência de dois componentes que se interrelacionam: um conjuntista e outro relacional.

Entre os componentes conjuntistas, à vezes chamados de *estáticos*, estão as operações, aplicadas sobre relações, que são definidas para conjuntos em geral, enquanto que, entre os componentes relacionais, às vezes chamados de *dinâmicos*, estão as operações, aplicadas sobre relações, que levam em conta a estrutura interna das relações como conjuntos de pares ordenados. As operações Booleanas são exemplos de componentes estáticos e as operações Peirceanas são exemplos de componentes dinâmicos.

Assim, Peirce expõe um paralelismo entre as operações Booleanas e Peirceanas, que evidencia algumas propriedades análogas.

$$\begin{array}{lclllll}
\text{Estático} & : & R \sqcup S & R \sqcap S & R^{\mathsf{C}} & \mathsf{O} & \mathsf{E} \\
\text{Dinâmico} & : & R \oplus S & R \circ S & R^{\mathsf{T}} & \mathsf{I} & \mathsf{D}
\end{array}$$

Este paralelismo destacado por Peirce desempenha um papel importante em um dos sistemas que iremos introduzir neste trabalho.

É fácil ver que o sistema proposto por Peirce contém o de De Morgan como um subsistema. De fato, as operações de complementação, reversão e composição são adotadas por Peirce. Além disso, é fácil ver que as outras operações podem ser interdefinidas:

$$R \triangleleft S ::= (R^{\mathsf{C}} \circ S)^{\mathsf{C}}$$

$$R \triangleright S ::= (R \circ S^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}}$$

Assim, todas as leis provadas por De Morgan também fazem parte do repertório provado por Peirce. Mas além destas, Peirce apresenta várias leis especiais envolvendo as operações introduzidas por ele. Em particular, as seguintes leis são verdadeiras para todas as relações R, S e T:

$$R \circ (S \oplus T) \subseteq (R \circ S) \oplus T$$

$$(R \oplus S) \circ T \subseteq R \oplus (S \circ T)$$

$$\mathsf{I} \subseteq \mathsf{R} \oplus \mathsf{R}^{\mathsf{c}^{\mathsf{T}}}$$

$$\mathsf{I} \subseteq \mathsf{R} \oplus \mathsf{S} \Leftrightarrow \mathsf{I} \subseteq \mathsf{S} \oplus \mathsf{R} \Leftrightarrow \mathsf{I} \subseteq \mathsf{S}^{\mathsf{T}} \oplus \mathsf{R}^{\mathsf{T}} \Leftrightarrow \mathsf{I} \subseteq \mathsf{R}^{\mathsf{T}} \oplus \mathsf{S}^{\mathsf{T}}$$

Uma lista (aparentemente) completa dos resultados aritméticos apresentados por Peirce, em [Pei83], pode ser encontrada em [Mad91].

A abordagem de Peirce foi essencial para que o cálculo relacional pudesse evoluir como teoria algébrica. Talvez por essa razão, A. Tarski (1901–1983) tenha conferido a Peirce (e não a De Morgan) o título de 'criador' do cálculo relacional.

Schröder, 1895. Coube a F.W.K.E. Schröder (1841–1902) o papel de explorar as fronteiras matemáticas do cálculo relacional de Peirce [Sch95]. Por exemplo, uma das aplicações do cálculo relacional, vislumbrada por Schröder, foi utilizá-lo como recurso matemático para resolver um problema investigado à época, principalmente, por R. Dedekind (1831–1916), sobre definições indutivas na fundamentação dos números naturais. Mais ainda, Schröder sugeriu converter o cálculo relacional de Peirce, potencializado com novas operações infinitárias, em uma possível ferramenta para a fundamentação da matemática, abrindo caminho para uma nova investigação, além da lógica, não prevista por seus antecessores.

Schröder introduziu e investigou as operações de *fecho transitivo*, *fecho reflexivo-transitivo* e suas duais, para as quais provou vários resultados aritméticos fundamentais, além de demonstrar vários teoremas do cálculo relacional de Peirce.

Considerando U como universo de discurso, R e S relações binárias em U e utilizando uma notação moderna, as operações introduzidas por Schröder são definidas da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\overset{*}{R} &::= \{(x,y) \in U \times U : \exists n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in U((x,x_1) \in R \wedge \ldots \wedge (x_n,y) \in R)\} \\
\overset{*=}{R} &::= \{(x,y) \in U \times U : x = y \vee \exists n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in U((x,x_1) \in R \wedge \ldots \wedge (x_n,y) \in R)\} \\
\overset{\circ}{R} &::= \{(x,y) \in U \times U : \forall n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in U((x,x_1) \in R \vee \ldots \vee (x_n,y) \in R)\} \\
\overset{\circ=}{R} &::= \{(x,y) \in U \times U : x = y \vee \forall n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in U((x,x_1) \in R \vee \ldots \vee (x_n,y) \in R)\}
\end{aligned}
$$

O trabalho de Schröder foi, por muito tempo e por muitos autores, considerado como marginal. Atualmente é visto como uma das peças fundamentais no desenvolvimento das ideias que levaram ao estabelecimento da lógica matemática, principalmente dentro da chamada tradição algébrica.

Löwenheim, 1915 e 1940. Embora L. Löwenheim (1878–1957) não tenha contribuído diretamente com o desenvolvimento do cálculo relacional e, geralmente, não seja citado ao lado de De Morgan, Peirce e Schröder, como integrante dessa linha histórica, seus trabalhos foram, em grande medida, desenvolvidos sobre o cálculo relacional de Peirce-Schröder. A possibilidade de fundamentar a matemática sobre uma teoria das relações binárias foi defendida enfaticamente por Löwenheim.

As contribuições de Löwenheim [Löw15] que consideramos importantes neste contexto foram:

- A prova de que nem todo enunciado de um fragmento do cálculo relacional de Peirce-Schröder (que corresponde à Lógica de Primeira Ordem com Igualdade) pode ser escrito como uma *igualdade* do cálculo relacional de Peirce, isto é, apenas com as operações *Booleanas* e *Peirceanas*, introduzidas por Peirce.

- A prova do primeiro meta-resultado sobre o cálculo de Peirce-Schröder. A saber, que no fragmento deste cálculo que corresponde à Lógica de Primeira Ordem com Igualdade, toda sentença que possui um modelo infinito, também possui um modelo enumerável. Esta é uma versão primitiva do famoso Teorema de Löwenheim-Skölem, considerado o primeiro resultado da *teoria de modelos* da lógica de primeira ordem (LPO).

- A prova de que, com a introdução de mais duas relações distintas “especiais”, qualquer enunciado da LPO pode ser reescrito como uma igualdade do cálculo relacional de Peirce.

A influência do Teorema de Löwenheim, sobre a impossibilidade da LPO definir a noção de não enumerabilidade, não encontra precedentes no desenvolvimento da lógica matemática. Por outro lado, o seu uso sistemático do cálculo de Peirce-Schröder e sua insistência sobre a utilização deste cálculo como um veículo para a fundamentação da matemática não encontraram eco entre os seus contemporâneos, pelo contrário, parece que houve um certo desinteresse pelo cálculo relacional. Muitos anos passaram-se até que A. Tarski (1901–1983) tenha retomado o estudo formal das relações binárias, propondo uma abordagem lógico-algébrica moderna para o cálculo relacional.

Tarski, 1941-1987. A 'beleza intrínsica' do cálculo de Peirce-Schröder, juntamente com a motivação de elaborar um sistema algébrico no qual a matemática pudesse ser formalizada — sugerida por Löwenheim — inspiraram A. Tarski (1901–1983) a propor, em [Tar41], uma retomada dos estudos do cálculo relacional, no âmbito da lógica. Neste artigo, Tarski considera dois métodos para formalizar o cálculo relacional. O primeiro, que tem como resultado uma formalização rigorosa da *lógica das relações* (proveniente do cálculo de Peirce-Schröder), consiste essencialmente em estender a LPO por meio de um conjunto de predicados binários, fechado sob certas operações de construção de predicados binários. A este sistema Tarski denomina *teoria elementar das relações (binárias)* (`TERB`). O segundo, que Tarski denomina *cálculo das relações* (`CR`), consiste essencialmente em tomar o fragmento da `TERB` que é restrito à Lógica Sentencial.

Após aplicar o `CR` para apresentar provas formais de alguns teoremas do cálculo relacional, Tarski obtém como corolário a seguinte generalização de um resultado de Schröder, sobre o poder de expressão e o poder de prova do fragmento equacional:

> toda sentença do `CR` pode ser tranformada em uma sentença equivalente
> da forma $R = S$, e mesmo da forma $T = 1$.

Este resultado sugere outro método para formalizar o cálculo relacional, que consiste essencialmente em tomar o fragmento do `CR` que é restrito à Lógica Equacional, ou seja, manter apenas as equações como fórmulas, já que estas dão conta de exprresar qualquer informação que possa ser expressa no cálculo das relações.

Uma apresentação equacional do cálculo das relações (binárias) — principalmente no que diz respeito à escolha de um conjunto adequado de axiomas — levou Tarski à definição da *álgebra relacional* (AR). Devemos ter cuidado para não confundir *álgebra relacional* no sentido de Tarski, com *álgebra relacional* no sentido de F. Codd [Cod70]. Em português o termo é ambíguo, mas em inglês usa-se, atualmente, *relation algebra* para a teoria de Tarski e *relational algebra* para o sistema de Codd.

Após notar algumas semelhanças entre o cálculo das relações e a teoria dos grupos, Tarski iniciou a discussão de uma série de problemas metalógicos que ainda fomentam o interesse nos estudos dos cálculos relacionais em geral:

1. *Problema da Completude* – Toda sentença do `CR`, que é verdadeira em todos os domínios, é derivável a partir dos axiomas do `CR`?

2. *Problema da Representação* – Todo modelo dos axiomas do `CR` é isomorfo a uma álgebra de relações?

3. *Problema da Decidibilidade* – Existe um método que nos permite, em cada caso particular, decidir se uma dada sentença, expressa na linguagem do `CR`, é um teorema do `CR`?

4. *Problema da Expressividade* – Toda sentença formulada na `TERB` pode ser transformada em uma sentença equivalente do `CR`?

5. *Problema da Decidibilidade da Expressividade* – Como a resposta para o Problema da Expressividade é negativa, existe um critério para, em cada caso particular, decidir se uma dada sentença expressa na linguagem da `TERB`, pode ser transformada em uma sentença equivalente do `CR`?

Além de resgatar o estudo formal das relações binárias, transpondo-as para um ambiente matemático contemporâneo, onde resultados análogos aos obtidos para a Álgebra Booleana poderiam ser investigados, as principais contribuições de Tarski, nesta época, foram:

- A prova de que o Problema da Decisão tem uma resposta negativa. A existência de uma prova foi anunciada em [Tar41], mas uma prova completa só foi publicada em [GT87].

- A própria definição de AR, elaborada em conjunto com seu estudante B. Jónsson, em 1948 [JT48], que consistiu originalmente de uma proposta de axiomática algébrica finitária (conjunto finito de operações primitivas e conjunto finito de axiomas equacionais) para o cálculo relacional de Peirce.

- Uma generalização do resultado de Löwenheim sobre a limitação do poder expressivo do `CR` em comparação com à `TERB`. Em [Tar53], Tarski anunciou a caracterização das sentenças da *Lógica das Relações Binárias* (LPO restrita às relações binárias) que podem ser reescritas como uma igualdade da AR.

- Uma generalização de outro resultado de Löwenheim, mostrando como podemos estender os axiomas propostos por ele (Tarski) para obter um cálculo relacional no qual qualquer sentença da LPO pode ser reescrita como uma igualdade do cálculo de Peirce.

Atualmente, a AR é investigada de acordo com os paradigmas algébricos, cujas ênfases podem ser:

- *Aritmética*: quando o interesse é obter fórmulas que expressem as propriedades dos elementos e das operações de uma álgebra relacional;

- *Algébrica*: quando o interesse é investigar a classe das estruturas que os axiomas definem, teoremas de representação, construção de álgebras relacionais a partir de outras álgebras relacionais por meio de conceitos como *subálgebra*, *homomorfismo*, *produto direto* etc.;

- *Lógica*: quando o interesse está na construção de sistemas lógicos cujos modelos são contra-partes das álgebras de relações. Nesta ênfase, a preocupação é estabelecer a sintaxe, a semântica e o mecanismo de inferência do sistema, seguidos da investigação sobre os problemas usuais de corretude e completude, além do poder de expressão, da teoria da prova, da complexidade do sistema, etc.

Acreditamos que esta breve descrição histórica seja suficiente para contextualizar o nosso trabalho. Muitos autores, resultados e desenvolvimentos, anteriores e posteriores à Tarski, foram omitidos pois estão fora dos propósitos desta introdução.

Nossa abordagem da aritmética das relações é desenvolvida a partir da AR. Como mencionamos, em [Tar53], Tarski provou que não existe um algoritmo para determinar se uma equação da AR – i.e., uma equação envolvendo elementos arbitrários de uma álgebra relacional e as operações sobre estes – é uma consequência dos axiomas que a definem. O exercício de calcular fórmulas (provar teoremas) da AR torna-se, muitas vezes, uma experiência frustrante pois, como esse resultado mostra, a aritmética da AR é intrinsicamente "indigesta".

Neste trabalho, propomos um sistema de axiomas para a AR que torna a sua aritmética mais "flexível", em comparação com alguns dos principais sistemas propostos na literatura [CT51, JT93, Dij90]. Mantemos o caráter algébrico do sistema original, mas "priorizamos" inequações como fórmulas, ao invés de equações, pois a ordem desempenha um papel central no nosso sistema.

Para fundamentarmos o sistema sobre o ambiente algébrico dado pelas inequações, introduzimos um formalismo para a *lógica da ordem*, o qual comparamos com um formalismo para a usual e bem explorada *lógica equacional*.

Grosso modo, o propósito do nosso sistema de axiomas para a AR é fornecer uma dinâmica de prova que facilite as demonstrações dos teoremas. Isto é feito por meio da aplicação de *conexões de Galois*, estabelecidas pelos axiomas.

Nossa abordagem da lógica das relações é através de sistemas de dedução natural. Propomos melhorar o sistema introduzido por W.W. Wadge [Wad75], cuja motivação original foi formalizar a AR em um sistema lógico. Além disso, a partir da nossa versão do sistema do Wadge, introduzimos um sistema para o que podemos chamar de *lógica intuicionista das relações*. Com esses formalismos, os resultados do cálculo relacional podem ser investigados quanto aos seus pressupostos lógicos, se *clássicos* ou *intuicionistas*. Em particular, investigamos o Teorema K, demonstrado originalmente por De Morgan e considerado o primeiro teorema "mais sofisticado" do cálculo relacional. Mostramos que este resultado não pode ser integralmente obtido em um cálculo relacional cuja lógica subjacente seja a lógica intuicionista.

Pontualmente, os principais resultados e desenvolvimentos deste trabalho são:

– uma formalização da lógica da ordem;

– uma investigação formal da relação conceitual entre *ordem* e *igualdade*;

– a introdução de um sistema de axiomas para a AR que torna sua aritmética mais flexível;

– a introdução de um sistema de dedução natural para a lógica intuicionista das relações, obtido a partir de uma versão aprimorada do sistema de Wadge;

– a elucidação dos aspectos *clássicos* e *intuicionistas* do Teorema K.

Reforçamos que esta tese é sobre a lógica e a aritmética das relações. O leitor interessado nas propriedades algébricas da AR, desde resultados obtidos por Tarski até desenvolvimentos mais recentes, pode consultar [Mad06] e [HH02].

No Capítulo 1, preparamos as bases formais do nosso sistema de axiomas para a AR. Introduzimos a *lógica da ordem* $\mathcal{L}_{\leq}$ e demonstramos os resultados de corretude, completude e normalização de provas.

No Capítulo 2, propomos uma análise formal da relação conceitual entre igualdade e ordem. Em particular, avaliamos, tecnicamente, uma alegação informal de Peirce, segundo a qual existe um sentido lógico para afirmar que a *ordem* é um conceito 'mais amplo' e portanto 'logicamente mais simples' do que a *igualdade* [Pei73].

No Capítulo 3, tratamos a aritmética das relações a partir da AR. Após apresentarmos o conceito de *conexão de Galois* e demostrarmos algumas de suas propriedades básicas, introduzimos o nosso sistema de axiomas para AR. Mostramos que os axiomas estabelecem conexões de Galois e apresentamos a dinâmica de prova deste sistema. Comparamos o nosso sistema com os que foram propostos em [JT93], [CT51] e [Dij90]. Finalmente, provamos a consistência dos axiomas e derivamos os axiomas dos sistemas mencionados a partir dos nossos.

No Capítulo 4, tratamos a lógica das relações em sistemas de dedução natural. Refinamos o sistema de Wadge e, a partir da nossa versão, introduzimos um sistema de dedução natural para a lógica intuicionista das relações. Provamos os teoremas de corretude e completude para ambos os sistemas e investigamos o Teorema K a partir dos mesmos.

Capítulo 1

A lógica da ordem $\mathcal{L}_{\leq}$

O estudo da relação das *partes* com o *todo* é chamado, em algumas tradições filosóficas, de *mereologia* [Var12]. Conceitualmente, sob o enfoque deste trabalho, essa relação generaliza a noção de *ordem*, definida matematicamente. Por isso, chamamos de *raciocínio mereológico* o mecanismo de inferência no qual *inequações* — proposições que expressam uma ordem entre dois elementos — são deduzidas a partir de outras inequações, por alguma regra de substituição de *termos* por *termos menores* ou *maiores*, dependendo da ordem em questão. Consideramos como *lógica da ordem* qualquer formalização do raciocínio mereológico.

Não é fácil encontrar, na literatura, sistemas formais propostos para a lógica da ordem, no contexto em que esta é tratada aqui (uma exceção pode ser encontrada em [Blo76]). Por essa razão, optamos por introduzir o formalismo $\mathcal{L}_{\leq}$, baseados no tratamento formal para a *lógica da igualdade*, apresentado em [Hen77].

Na Seção 1.1, definimos a sintaxe de $\mathcal{L}_{\leq}$. Na Seção 1.2, apresentamos o mecanismo de inferência deste sistema e definimos a noção de *prova mereológica*. Na Seção 1.3, demonstramos a *normalização* das provas mereológicas. Na Seção 1.4, definimos a semântica de $\mathcal{L}_{\leq}$ para, finalmente, na Seção 1.5, demonstrarmos sua *corretude* e *completude*.

1.1 Sintaxe

O *alfabeto* de $\mathcal{L}_{\leq}$ é dado nas seguintes categorias gramaticais:

– *Variáveis individuais*: uma sequência enumerável de símbolos,

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots \rangle,$$

O conjunto das variáveis individuais é denotado por Var e seus elementos são denotados genericamente pelas letras x, y, z, indexadas ou não.

– *Símbolos para operações* (operadores): para cada $n \in \mathbb{N}$, uma sequência, possivelmente vazia, de símbolos,

$$\mathsf{Ope}_n = \langle f_i^n : i \in I \rangle.$$

Cada elemento $f_i^n \in \mathsf{Ope}_n$ é um *símbolo de operação n-ário.*

O conjunto dos símbolos para operações é

$$\mathsf{Ope} = \bigcup_{n}^{\infty} \mathsf{Ope}_n$$

e seus elementos são denotados genericamente pelas letras f, g, h, indexadas ou não.

– *Símbolo de ordem*: um único símbolo,

$$\leq,$$

chamado o *símbolo de ordenação.*

– *Símbolos auxiliares*: os símbolos,

$$(\quad , \quad),$$

chamados de *abre parênteses*, *vírgula* e *fecha parênteses*, respectivamente.

Os *termos* de $\mathcal{L}_{\leq}$ são definidos pela seguinte gramática:

$$t \quad ::= \quad x \ \mid \ f(t_1, \ldots, t_n),$$

onde $x \in \mathsf{Var}$ e $f \in \mathsf{Ope}_n$.

O conjunto dos termos é denotado por Trm e seus elementos são denotados genericamente pelas letras t, u, v, indexadas ou não.

As *fórmulas* de $\mathcal{L}_{\leq}$, chamadas de *inequações*, são as expressões da forma:

$$t_1 \leq t_2,$$

onde $t_1, t_2 \in \mathsf{Trm}$.

Como usual, quando interpretados, os símbolos de Ope denotam operações n-árias definidas sobre um domínio de interpretação das variáveis. Em geral, estas operações poderiam não ter relação alguma com a interpretação de $\leq$. Mas, em todos os contextos que vamos considerar, as operações são *monotônicas* (preservam a ordem) ou *antitônicas* (revertem a ordem) em cada uma das suas coordenadas. Assim, temos a seguinte definição, que impõe uma restrição na interpretação dos operadores, especificando seus comportamentos com relação a ordem.

A *característica* de um operador $f \in \mathsf{Ope}_n$ é uma sequência $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$, onde $s_i \in \{\mathbf{p}, \mathbf{i}\}$ para $1 \leq i \leq n$.

Intuitivamente, a característica de f expressa, para cada coordenada i, $1 \leq i \leq n$, se a operação simbolizada por f **p**reserva ou **i**nverte a ordem na coordenada i.

1.2 Mecanismo de inferência

O conceito de *árvore* e algumas terminologias usuais sobre árvores, tais como *folha*, *raiz*, *tamanho*, *posição* etc., estarão envolvidas em muitas definições e demonstrações a partir daqui. Assumimos que estes termos sejam conhecidos pelo leitor, caso contrário, podem ser encontrados na maioria dos textos introdutórios sobre grafos.

Uma operação sintática que costuma desempenhar papel importante na formulação de algumas regras de inferência de sistemas formais em geral, não apenas em $\mathcal{L}_{\leq}$, é a operação de *substituição*.

Uma *substituição* é uma função $\mathsf{s} : \mathsf{Var} \to \mathsf{Trm}$.

Seja $t \in \mathsf{Trm}$ e s uma substituição. O *termo obtido de t pela substituição* s, denotado s^*t, é definido, recursivamente, da seguinte maneira:

– $\mathsf{s}^*x ::= \mathsf{s}(x)$,

– $\mathsf{s}^*(f(t_1, ..., t_n)) ::= f(\mathsf{s}^*t_1, \ldots, \mathsf{s}^*t_n)$.

Quando não houver ambiguidade, vamos denotar $\mathtt{s}^*$ simplesmente por $\mathtt{s}$.

Apresentamos as regras de inferência de $\mathcal{L}_{\leq}$ como pares $\dfrac{\Gamma}{\varphi}$, onde Γ é uma conjunto de inequações e φ é uma inequação, chamadas, respectivamente, de *premissas* e *conclusão*.

Dado um conjunto Γ de *axiomas* (inequações), as *regras de inferência* de $\mathcal{L}_{\leq}$ são as seguintes:

$$\mathsf{Axi}\,\frac{}{\varphi}\quad \text{para todo } \varphi \in \Gamma \qquad\qquad \mathsf{Ref}\,\frac{}{t \leq t}$$

$$\mathsf{Tra}\,\frac{t_1 \leq t_2 \qquad t_2 \leq t_3}{t_1 \leq t_3}$$

$$\mathsf{Com}\,\frac{t_1 \leq t_1' \qquad \ldots \qquad t_n \leq t_n'}{f(u_1, \ldots, u_n) \leq f(v_1, \ldots, v_n)} \qquad\qquad \mathsf{Sub}\,\frac{t_1 \leq t_2}{\mathsf{s}^* t_1 \leq \mathsf{s}^* t_2}$$

onde $\mathtt{s}$ é uma substituição qualquer.

onde $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ é a característica de f e

$$u_i ::= \begin{cases} t_i & \text{se } s_i \text{ é } \mathbf{p} \\ t_i' & \text{se } s_i \text{ é } \mathbf{i} \end{cases}, \quad v_i ::= \begin{cases} t_i & \text{se } s_i \text{ é } \mathbf{i} \\ t_i' & \text{se } s_i \text{ é } \mathbf{p} \end{cases}$$

Quando $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ são tais como estão definidos na regra Com, dizemos que $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ estão de acordo com a característica do operador f.

Uma *prova mereológica a partir de* Γ é uma *árvore rotulada* com inequações, denotada genericamente por Π ou π, indexada ou não, definida pelas regras abaixo, onde a notação $\begin{matrix}\Pi\\ \varphi\end{matrix}$, indica que φ é a raiz Π.

– Para toda fórmula $\psi \in \Gamma$,

$$\mathsf{Axi}\,\frac{}{\psi}$$

é uma prova;

– Para todo termo $t \in \mathsf{Trm}$,

$$\mathsf{Ref}\,\frac{}{t \leq t}$$

é uma prova;

– Se Π_1 e Π_2 são provas, então

$$\mathsf{Tra}\,\frac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 \leq t_3\end{matrix}}{t_1 \leq t_3}$$

é uma prova.

– Se $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ são provas, então

$$\mathsf{Com}\,\frac{\begin{array}{ccc}\Pi_1 & & \Pi_n \\ t_1 \leq t_1' & \ldots & t_n \leq t_n'\end{array}}{f(u_1, \ldots, u_n) \leq f(v_1, \ldots, v_n)}$$

onde $u_1, \ldots u_n, v_1, \ldots, v_n$ estão de acordo com a característica de f, é uma prova;

– Se Π é uma prova, então

$$\mathsf{Sub}\,\frac{\begin{array}{c}\Pi \\ t_1 \leq t_2\end{array}}{\mathtt{s}^* t_1 \leq \mathtt{s}^* t_2}$$

onde $\mathtt{s}$ é uma substituição qualquer, é uma prova.

Dizemos que Π *é uma prova mereológica de* φ *a partir de* Γ, ou simplesmente *prova de* φ, quando Π é uma prova mereológica a partir de Γ e φ é a raiz de Π.

Denotamos uma prova de φ por $\Pi : \varphi$ ou $\begin{array}{c}\Pi \\ \varphi\end{array}$.

Escrevemos $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{\leq}} \varphi$ quando existe uma prova mereológica de φ a partir de Γ. Omitimos o subescrito $\mathcal{L}_{\leq}$, em $\vdash_{\mathcal{L}_{\leq}}$, sempre que não há risco de ambiguidade sobre qual é o sistema com o qual estamos trabalhando.

Dizemos que uma inequação φ é um *teorema* de $\mathcal{L}_{\leq}$, denotado por $\vdash_{\mathcal{L}_{\leq}} \varphi$, quando existe uma prova de φ a partir do conjunto vazio. Os teoremas de $\mathcal{L}_{\leq}$ são triviais, como mostra a proposição abaixo.

Proposição 1.2.1. $\vdash \varphi$ *se, e somente se,* φ *é da forma* $t \leq t$.

PROVA. ($\Rightarrow$) Por indução no tamanho da prova. Seja Π uma prova mereológica de φ. Se $t(\Pi) = 0$ então Π é da forma

$$\mathsf{Ref}\,\frac{}{t \leq t}$$

ou seja, φ é da forma $t \leq t$.

Suponhamos que para toda prova $\Pi' : \varphi$ tal que $t(\Pi') < n$, $n \in \mathbb{N}$, φ é da forma $t \leq t$.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova de tamanho n.

Assim:

Caso 1: se Π for da forma

$$\mathsf{Tra}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \psi_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2 \\ \psi_2\end{matrix}}{\varphi}$$

então $t(\Pi_1) < n$ e $t(\Pi_2) < n$. Por hipótese de indução, ψ_1 e ψ_2 são da forma $t \leq t$ e, portanto, pela regra Tra, φ é da forma $t \leq t$.

Caso 2: se Π for da forma

$$\mathsf{Com}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \psi_1\end{matrix} \qquad \ldots \qquad \begin{matrix}\Pi_n \\ \psi_n\end{matrix}}{\varphi}$$

então $t(\Pi_1) < n, \ldots, t(\Pi_n) < n$. Por hipótese de indução, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ são da forma $t \leq t$ e, portanto, pela regra Com, φ é $f(t, \ldots, t) \leq f(t, \ldots, t)$, para todo operador n-ário f, isto é, φ é da forma $t \leq t$.

Caso 3: se Π for da forma

$$\mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi' \\ \psi\end{matrix}}{\varphi}$$

então $t(\Pi') < n$. Por hipótese de indução, ψ é da forma $t \leq t$ e, portanto, pela regra Sub, φ é $\mathtt{s}t \leq \mathtt{s}t$, para toda substituição $\mathtt{s}$, isto é, φ é da forma $t \leq t$.

($\Leftarrow$) Pela regra Ref. ■

1.3 Normalização em $\mathcal{L}_{\leq}$

Nesta seção, estabelecemos uma forma normal para as provas mereológicas e provamos um teorema de normalização para $\mathcal{L}_{\leq}$. Algumas notações e nomenclaturas usadas nesta seção são adaptadas de [AL10].

Antes das definições formais, apresentamos alguns exemplos que ilustram e motivam a *forma normal* das provas mereológicas.

Exemplo 1.3.1. Seja $\mathtt{s}$ uma substituição qualquer e $t, t' \in \mathsf{Trm}$. As seguintes árvores π e π' são provas diferentes de $\mathtt{s}t \leq \mathtt{s}t$ a partir de $\{t \leq t', \mathtt{s}t' \leq \mathtt{s}t\}$.

$$\pi : \quad \texttt{Tra}\,\dfrac{\texttt{Sub}\,\dfrac{\texttt{Tra}\,\dfrac{\texttt{Ref}\,\dfrac{}{t \leq t} \qquad \texttt{Axi}\,\dfrac{}{t \leq t'}}{t \leq t'}}{\mathtt{s}t \leq \mathtt{s}t'} \qquad \texttt{Axi}\,\dfrac{}{\mathtt{s}t' \leq \mathtt{s}t}}{\mathtt{s}t \leq \mathtt{s}t} \qquad\qquad \pi' : \quad \texttt{Ref}\,\dfrac{}{\mathtt{s}t \leq \mathtt{s}t}$$

A prova π contém "passos redundantes" que a torna desnecessariamente maior do que a prova π'. Qualquer instância de $t \leq t$, em particular, $\mathtt{s}t \leq \mathtt{s}t$, pode ser derivada diretamente do conjunto vazio, por uma aplicação de Ref, como está feito em π'.

Exemplo 1.3.2. Seja $\mathtt{s}$ uma substituição qualquer, $t_1, \ldots, t_5 \in \mathsf{Trm}$, f um operador de característica $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle$. As seguintes árvores π e π' são provas diferentes de $\mathtt{s}f(t_1, t_4) \leq \mathtt{s}f(t_3, t_5)$ a partir de $\{t_1 \leq t_2, t_2 \leq t_3, t_4 \leq t_5\}$.

π :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 \leq t_2}\,\texttt{Axi} \quad \dfrac{}{t_2 \leq t_3}\,\texttt{Axi}}{t_1 \leq t_3}\,\texttt{Tra} \quad \dfrac{}{t_4 \leq t_5}\,\texttt{Axi}}{f(t_1, t_4) \leq f(t_3, t_5)}\,\texttt{Com}}{\mathtt{s}f(t_1, t_4) \leq \mathtt{s}f(t_3, t_5)}\,\texttt{Sub}$$

π' :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 \leq t_2}\,\texttt{Axi}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2}\,\texttt{Sub} \quad \dfrac{\dfrac{}{t_4 \leq t_5}\,\texttt{Axi}}{\mathtt{s}t_4 \leq \mathtt{s}t_5}\,\texttt{Sub}}{f(\mathtt{s}t_1, \mathtt{s}t_4) \leq f(\mathtt{s}t_2, \mathtt{s}t_5)}\,\texttt{Com} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_2 \leq t_3}\,\texttt{Axi}}{\mathtt{s}t_2 \leq \mathtt{s}t_3}\,\texttt{Sub} \quad \dfrac{}{\mathtt{s}t_5 \leq \mathtt{s}t_5}\,\texttt{Ref}}{f(\mathtt{s}t_2, \mathtt{s}t_5) \leq f(\mathtt{s}t_3, \mathtt{s}t_5)}\,\texttt{Com}}{f(\mathtt{s}t_1, \mathtt{s}t_4) \leq f(\mathtt{s}t_3, \mathtt{s}t_5)}\,\texttt{Com}}{}$$

Na prova π, a regra Sub é aplicada abaixo das regras Tra e Com, sobre a fórmula $f(t_1, t_4) \leq f(t_3, t_5)$, enquanto que na prova π a regra Sub é aplicada acima das regras Tra e Com, sobre as fórmulas $t_1 \leq t_2$, $t_2 \leq t_3$ e $t_4 \leq t_5$. Ou seja, em π, a substituição de variáveis é feita em termos de maior complexidade do que os termos onde essa substituição é feita em π'. Esta é uma das razões porque a ordem de aplicação das regras deve ser considerada: a possibilidade de diminuir a complexidade dos termos sobre os quais a substituição se aplica.

É desejável que uma prova seja "enxuta e bem estruturada". Assim, tentamos evitar que as provas contenham "passos redundantes" ou regras aplicadas "fora de ordem". Nossa tarefa, a seguir, é formalizar essas características desejadas das provas formais para torná-las matematicamente tratáveis.

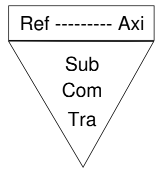
Uma prova mereológica π a partir de Γ está em *forma normal* quando:

1. instâncias de $t \leq t$ ou fórmulas de Γ ocorrem apenas nas folhas,

2. a regra Tra nunca é aplicada em uma instância de $t \leq t$,

3. não existem ocorrências das regras Com e Tra *acima* (em direção às folhas) das ocorrências da regra Sub e

4. não existem ocorrências da regra Tra acima das ocorrências da regra Com.



Intuitivamente, as cláusulas 1 e 2 evitam os passos redundantes, enquanto que as cláusulas 3 e 4 fixam uma ordem de aplicação das regras, fornecendo a estrutura das provas em forma normal.

Quando uma prova π não satisfaz uma dessas cláusulas, dizemos que π contém *desvios*. Em particular, quando π não satifaz 1 ou 2, dizemos que π contém *redundância* e quando π não satisfaz 3 ou 4, dizemos que π contém *desordem*.

Exemplo 1.3.3. Apresentamos duas provas de $\mathtt{s}f(t_1, t_5) \leq \mathtt{s}f(t_3, t_4)$, a partir de $\Gamma = \{t_1 \leq t_2, t_2 \leq t_3, t_4 \leq t_5\}$, onde $\langle \mathbf{p}, \mathbf{i} \rangle$ é a característica de f e $\mathtt{s}$ é uma substituição qualquer. A primeira, Π, contém redundância e desordem, a segunda, Π', está em formal normal.

$$\Pi : \quad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Com}\,\dfrac{\mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Ref}\,\dfrac{}{t_1 \leq t_1} \quad \mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_1 \leq t_2}}{t_1 \leq t_2} \quad \mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_2 \leq t_3}}{t_1 \leq t_3} \quad \mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_4 \leq t_5}}{f(t_1, t_5) \leq f(t_3, t_4)}}{\mathtt{s}f(t_1, t_5) \leq \mathtt{s}f(t_3, t_4)}$$

$$\Pi' : \quad \mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Com}\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_1 \leq t_2}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2} \quad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_4 \leq t_5}}{\mathtt{s}t_4 \leq \mathtt{s}t_5}}{f(\mathtt{s}t_1, \mathtt{s}t_5) \leq f(\mathtt{s}t_2, \mathtt{s}t_4)} \quad \mathsf{Com}\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_2 \leq t_3}}{\mathtt{s}t_2 \leq \mathtt{s}t_3} \quad \mathsf{Ref}\,\dfrac{}{\mathtt{s}t_4 \leq \mathtt{s}t_4}}{f(\mathtt{s}t_2, \mathtt{s}t_4) \leq f(\mathtt{s}t_3, \mathtt{s}t_4)}}{f(\mathtt{s}t_1, \mathtt{s}t_5) \leq f(\mathtt{s}t_3, \mathtt{s}t_4)}$$

Para enumerarmos as redundâncias de uma prova π, definimos o *grau de redundância*, denotado por $\mathtt{r}(\pi)$, como o número natural dado pela soma das seguintes parcelas:

– número de ocorrências de axiomas ou instâncias de $t \leq t$ em vértices internos de π,

– número de ocorrências da regra Tra aplicada em uma instância de $t \leq t$.

Exemplo 1.3.4. Na prova π, abaixo, temos $\mathtt{r}(\pi) = 2$.

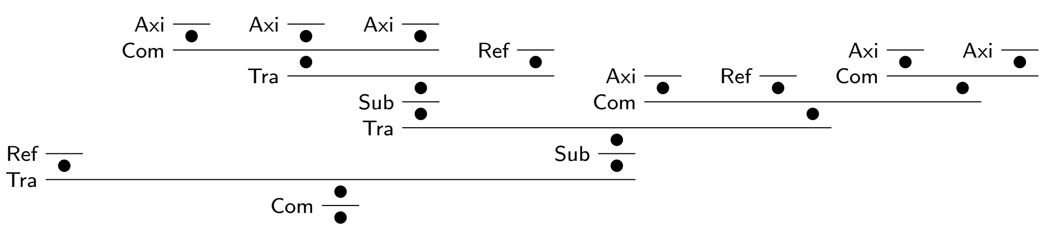
$$\mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Ref}\,\dfrac{}{t \leq t}}{\mathtt{s}t \leq \mathtt{s}t} \qquad \mathsf{Axi}\,\dfrac{}{\mathtt{s}t \leq t_2}}{\mathtt{s}t \leq t_2}$$

Precisamos ainda de um parâmetro para enumerarmos a desordem de uma prova.

Cada ocorrência da regra Sub possui um *grau de desordem*, que é dado pelo número de ocorrências das regras Com e Tra acima desta ocorrência de Sub. Da mesma maneira, cada ocorrência da regra Com possui um *grau de desordem*, dado pelo número de ocorrências da regra Tra acima desta ocorrência de Com.

O *grau de desordem de uma prova* π, denotado por $\mathtt{d}(\pi)$, é a soma do grau de desordem de todas ocorrências das regras Sub e Com.

Exemplo 1.3.5. Na prova abaixo, temos $\mathtt{d}(\pi) = 9$.



Como, neste exemplo, as fórmulas são irrelevantes, indicamos os vértices da árvore apenas com pontos. O grau de desordem da última (mais abaixo) ocorrência da regra Com é 2 e das demais é 0, enquanto que o grau de desordem de uma das ocorrência da regra Sub é 2 e da outra é 5.

O *grau de desvio* de uma prova π, denotado por $\mathtt{D}(\pi)$, é dado pela fórmula

$$\mathtt{D}(\pi) = \mathtt{r}(\pi) + \mathtt{d}(\pi).$$

Agora temos um parâmetro para medir o "quão distante de uma prova em forma normal", uma dada prova está.

Lema 1.3.1. *Uma prova π está em forma normal se, e somente se,* $\mathtt{D}(\pi) = 0$.

PROVA. Direto das definições. ■

Falta ainda formalizarmos o processo de colocar uma dada prova em forma normal.

Uma *regra de transformação de provas mereológicas* é um par de provas, denotado por $\pi_1 \rightsquigarrow \pi_2$, tal que:

1. π_1 e π_2 têm a mesma raiz e

2. $\mathsf{fol}(\pi_2) \subseteq \mathsf{fol}(\pi_1) \cup \{t \leq t : t \in \mathsf{Trm}\}$,

   onde $\mathsf{fol}(\pi)$ denota o conjunto de fórmulas que são folhas de π.

Note que, para qualquer conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, se $\pi_1 \rightsquigarrow \pi_2$ é uma regra de transformação e π_1 é uma prova de φ a partir de Γ, então π_2 também é uma prova de φ a partir de Γ.

Um *procedimento de transformação de provas mereológicas* é um conjunto de regras de transformação. Procedimentos de transformação são denotados por $\rightsquigarrow$.

Em geral, apresentamos um procedimento de transformação por meio de esquemas de pares de provas. O exemplo a seguir apresenta o procedimento de transformação $\rightsquigarrow_{\mathcal{L}_{\leq}}$ que vamos empregar na normalização das provas mereológicas em $\mathcal{L}_{\leq}$.

Exemplo 1.3.6. Particionamos o procedimento de transformação $\rightsquigarrow_{\mathcal{L}_{\leq}}$ em dois conjuntos (disjuntos e exaustivos) $\rightsquigarrow_{\mathsf{ER}}$ e $\rightsquigarrow_{\mathsf{O}}$. O conjunto $\rightsquigarrow_{\mathsf{ER}}$ contém as regras de transformação que são aplicadas para **e**liminar as **r**edundâncias de uma prova, enquanto que o conjunto $\rightsquigarrow_{\mathsf{O}}$ contém as regras de transformação que são aplicadas para **o**rdenar as regras de inferência.

$\rightsquigarrow_{\mathsf{ER}}$ consiste das três regras de transformação (esquemas) listadas a seguir:

– A regra $\pi_1 \rightsquigarrow^1_{\mathsf{ER}} \pi_2$ elimina a aplicação de Tra em uma instância de $t \leq t$.

$$\mathsf{Tra}\,\frac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t \leq t\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ t \leq t'\end{array}}{t \leq t'} \quad \rightsquigarrow^1_{\mathsf{ER}} \quad \begin{array}{c}\Pi_2\\ t \leq t'\end{array}$$

– A regra $\pi_1 \rightsquigarrow^2_{\mathsf{ER}} \pi_2$ elimina as ocorrências de instâncias de $t \leq t$ fora das folhas.

$$\begin{array}{c}\Pi\\ t \leq t\end{array} \quad \rightsquigarrow^2_{\mathsf{ER}} \quad \mathsf{Ref}\,\frac{}{t \leq t}$$

– A regra $\pi_1 \rightsquigarrow^3_{\mathsf{ER}} \pi_2$ elimina as ocorrências de axiomas φ fora das folhas.

$$\begin{matrix}\Pi\\ \varphi\end{matrix} \quad \rightsquigarrow^3_{\mathsf{ER}} \quad \mathsf{Axi}\,\dfrac{}{\varphi}$$

O conjunto $\rightsquigarrow_{\mathsf{O}}$ consiste das três regras de transformação (esquemas) listadas a seguir:

– A regra $\pi_1 \rightsquigarrow^1_{\mathsf{O}} \pi_2$ inverte a ordem de aplicação das regras de inferência Com e Sub.

$$\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Com}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t'_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Pi_n\\ t_n \leq t'_n\end{matrix}}{f(u_1,\dots,u_n) \leq f(v_1,\dots,v_n)}}{\mathtt{s}(f(u_1,\dots,u_n)) \leq \mathtt{s}(f(v_1,\dots,v_n))} \quad \rightsquigarrow^1_{\mathsf{O}}$$

$$\rightsquigarrow^1_{\mathsf{O}} \quad \mathsf{Com}\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t'_1\end{matrix}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t'_1} \quad \dots \quad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_n\\ t_n \leq t'_n\end{matrix}}{\mathtt{s}t_n \leq \mathtt{s}t'_n}}{f(\mathtt{s}u_1,\dots,\mathtt{s}u_n) \leq f(\mathtt{s}v_1,\dots,\mathtt{s}v_n)}$$

onde $u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n$ estão de acordo com a característica de f.

– A regra $\pi_1 \rightsquigarrow^2_{\mathsf{O}} \pi_2$ inverte a ordem de aplicação das regras de inferência Tra e Sub.

$$\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Tra}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 \leq t_3\end{matrix}}{t_1 \leq t_3}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_3} \quad \rightsquigarrow^2_{\mathsf{O}} \quad \mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2} \quad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 \leq t_3\end{matrix}}{\mathtt{s}t_2 \leq \mathtt{s}t_3}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_3}$$

– A regra $\pi_1 \rightsquigarrow^3_{\mathsf{O}} \pi_2$ inverte a ordem de aplicação das regras de inferência Com e Tra.

$$\mathsf{Com}\,\dfrac{\mathsf{Tra}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 \leq t_3\end{matrix}}{t_1 \leq t_3} \quad \begin{matrix}\Pi'_1 \dots\\ t'_1 \leq t''_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi'_n\\ t'_m \leq t''_m\end{matrix}}{f(u_1,\dots,u_{m+1}) \leq f(v_1,\dots,v_{m+1})}$$

$$\rightsquigarrow^3_{\mathsf{O}} \quad \mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Com}\,\dfrac{\pi_1 \quad \begin{matrix}\Pi'_1\\ t'_1 \leq t''_1 \dots\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi'_m\\ t'_m \leq t''_m\end{matrix}}{f(u_1,\dots,u_{m+1}) \leq f(v'_1,\dots,v'_{m+1})} \quad \mathtt{Com}\,\dfrac{\pi_2 \quad \mathsf{Ref}\,\dfrac{}{t^1 \leq t^1} \dots \mathsf{Ref}\,\dfrac{}{t^m \leq t^m}}{f(v'_1,\dots,v'_{m+1}) \leq f(v_1,\dots,v_{m+1})}}{f(u_1,\dots,u_{m+1}) \leq f(v_1,\dots,v_{m+1})}$$

onde $\langle s_1,\dots,s_n\rangle$ é a característica de f, $u_1,\dots,u_{m+1}$, $v_1,\dots,v_{m+1}$, $v'_1,\dots,v'_{m+1}$ estão de acordo com a característica de f e

$$\pi_1 \text{ é } \begin{cases} \Pi_1 & \text{se} \quad s_1 = \mathbf{p} \\ \Pi_2 & \text{se} \quad s_1 = \mathbf{i} \end{cases}, \quad \pi_2 \text{ é } \begin{cases} \Pi_1 & \text{se} \quad s_1 = \mathbf{i} \\ \Pi_2 & \text{se} \quad s_1 = \mathbf{p} \end{cases}, \quad t^i \text{ é } \begin{cases} t_i'' & \text{se} \quad s_{i+1} = \mathbf{p} \\ t_i' & \text{se} \quad s_{i+1} = \mathbf{i} \end{cases}$$

Intuitivamente, a aplicação das regras de $\rightsquigarrow_{\mathcal{L}_\leq}$ normaliza uma prova Π (que não está em forma normal) por meio de um "implante". A analogia parece razoável, já que uma subárvore "doente" de Π, com pelo menos uma redundância ou desordem, é retirada e substituída por uma subárvore "mais sadia", com no mínimo um desvio a menos. Repetimos esse processo quantas vezes forem necessárias, até eliminarmos todos os desvios de Π, e obtermos um prova Π' em forma normal. Antes de tornamos essa idéia mais precisa, introduzimos algumas notações.

Denotamos por $\pi|_p$ a subárvore de π cuja raiz está na posição p e denotamos por $\pi \xleftarrow{p} \pi'$ a árvore obtida a partir de π substituindo a subárvore $\pi|_p$ por π'.

Seja $\rightsquigarrow$ um procedimento de transformação. Dizemos que uma prova Π' é uma *redução* de uma prova Π quando existem:

1. uma regra $\pi_1 \rightsquigarrow \pi_2$ em $\rightsquigarrow$ e
2. uma posição p em Π tal que

   $\Pi|_p = \pi_1$ e $\Pi' = \Pi \xleftarrow{p} \pi_2$.

Note que, por definição, para qualquer conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, se Π é uma prova de φ a partir de Γ e Π' é uma redução de Π, então Π' também é uma prova de φ a partir de Γ.

Exemplo 1.3.7. Usando o procedimento de transformação $\rightsquigarrow_{\mathcal{L}_\leq}$, vamos normalizar a prova Π do Exemplo 1.3.3, cujo grau de desvio é $\mathtt{D}(\Pi) = 6$.

$$\Pi : \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 \leq t_1}\,\mathsf{Ref} \quad \dfrac{}{t_1 \leq t_2}\,\mathsf{Axi}}{t_1 \leq t_2}\,\mathsf{Tra} \quad \dfrac{}{t_2 \leq t_3}\,\mathsf{Axi}}{t_1 \leq t_3}\,\mathsf{Tra} \quad \dfrac{}{t_4 \leq t_5}\,\mathsf{Axi}}{f(t_1, t_5) \leq f(t_3, t_4)}\,\mathsf{Com}}{\mathtt{s}f(t_1, t_5) \leq \mathtt{s}f(t_3, t_4)}\,\mathsf{Sub}$$

Aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^1_{\mathsf{ER}} \pi_2$ na posição $p = 1.1.1$ de Π para eliminar uma redundância. Isso é possível pois $\Pi|_{1.1.1} = \pi_1$ e, conforme a definição, a seguinte árvore, $\Pi_1 = \Pi \xleftarrow{1.1.1} \pi_2$, é uma redução de Π, cujo grau de desvio é $\mathtt{D}(\Pi_1) = 3$.

$$\Pi_1 : \quad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Com}\,\dfrac{\mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_1 \leq t_2} \qquad \mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_2 \leq t_3}}{t_1 \leq t_3} \qquad \mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_4 \leq t_5}}{f(t_1, t_5) \leq f(t_3, t_4)}}{\mathtt{s}f(t_1, t_5) \leq \mathtt{s}f(t_3, t_4)}$$

Aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^1_{\mathtt{O}} \pi_2$ na posição $p = 0$ de Π_1, para ordenar as regras Com e Sub. Isso é possível pois $\Pi_1|_0 = \pi_1$ e, conforme a definição, a seguinte árvore, $\Pi_2 = \Pi \xleftarrow{0} \pi_2$, é uma redução de Π_1, cujo grau de desvio é $\mathtt{D}(\Pi_2) = 2$.

$$\Pi_2 : \quad \mathsf{Com}\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_1 \leq t_2} \qquad \mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_2 \leq t_3}}{t_1 \leq t_3}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_3} \qquad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_4 \leq t_5}}{\mathtt{s}t_4 \leq \mathtt{s}t_5}}{f(\mathtt{s}t_1, \mathtt{s}t_5) \leq f(\mathtt{s}t_3, \mathtt{s}t_4)}$$

Aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^2_{\mathtt{O}} \pi_2$ na posição $p = 1$ da redução Π_2 para ordenar as regras Sub e Tra. Isso é possível pois $\Pi_2|_1 = \pi_1$ e, conforme a definição, a seguinte árvore, $\Pi_3 = \Pi \xleftarrow{1} \pi_2$, é uma redução de Π_2, cujo grau de desvio é $\mathtt{D}(\Pi_3) = 1$.

$$\Pi_3 : \quad \mathsf{Com}\,\dfrac{\mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_1 \leq t_2}}{\mathtt{s}t_1 \leq t_2} \qquad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_2 \leq t_3}}{\mathtt{s}t_2 \leq t_3}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_3} \qquad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_4 \leq t_5}}{\mathtt{s}t_4 \leq \mathtt{s}t_5}}{f(\mathtt{s}t_1, \mathtt{s}t_5) \leq f(\mathtt{s}t_3, \mathtt{s}t_4)}$$

Finalmente, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^3_{\mathtt{O}} \pi_2$ na posição $p = 0$ da redução Π_3 para ordenar as regras Com e Tra. Isso é possível pois $\Pi_3|_0 = \pi_1$ e, conforme a definição, a seguinte árvore, $\Pi' = \Pi \xleftarrow{0} \pi_2$, é uma redução de Π_3, cujo grau de desvio é $\mathtt{D}(\Pi_3) = 0$, ou seja, Π' está em forma normal.

$$\Pi' : \quad \mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Com}\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_1 \leq t_2}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2} \qquad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_4 \leq t_5}}{\mathtt{s}t_4 \leq \mathtt{s}t_5}}{f(\mathtt{s}t_1, \mathtt{s}t_5) \leq f(\mathtt{s}t_2, \mathtt{s}t_4)} \qquad \mathsf{Com}\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_2 \leq t_3}}{\mathtt{s}t_2 \leq \mathtt{s}t_3} \qquad \mathsf{Ref}\,\dfrac{}{\mathtt{s}t_4 \leq \mathtt{s}t_4}}{f(\mathtt{s}t_2, \mathtt{s}t_4) \leq f(\mathtt{s}t_3, \mathtt{s}t_4)}}{f(\mathtt{s}t_1, \mathtt{s}t_5) \leq f(\mathtt{s}t_3, \mathtt{s}t_4)}$$

O ideal seria que, sempre que aplicássemos uma regra de transformação do procedimento $\rightsquigarrow_{\mathcal{L}_{\leq}}$ em uma prova Π, o grau de desvio da redução Π' fosse menor do que o de Π. Todavia, o próximo exemplo mostra que, quando ordenamos uma prova Π, ou seja, quando aplicamos alguma regra do procedimento $\rightsquigarrow_{\mathtt{O}}$, podemos, eventualmente, obter uma redução Π' com novas redundâncias, geradas pela inversão da ordem das regras, fazendo com que $\mathtt{D}(\Pi') = \mathtt{D}(\Pi)$.

Exemplo 1.3.8. Seja π a seguinte prova de $\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_3$, a partir de $\{t_1 \leq t_2, t_2 \leq t_3, \mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2\}$. Temos que $\mathtt{D}(\pi) = 1$, sendo $\mathtt{r}(\pi) = 0$ e $\mathtt{d}(\pi) = 1$.

π :

$$\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_1 \leq t_2} \qquad \mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_2 \leq t_3}}{t_1 \leq t_3}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_3}$$

Aplicamos a regra $\pi_1 \rightsquigarrow^2_{\mathsf{O}} \pi_2$ para eliminarmos a desordem e obtemos a seguinte prova π'.

π' :

$$\mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_1 \leq t_2}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2} \qquad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_2 \leq t_3}}{\mathtt{s}t_2 \leq \mathtt{s}t_3}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_3}$$

Acontece que π' é uma redução com o mesmo grau de desvio de π pois, agora, temos a ocorrência do axioma $\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2$ em um vértice interno da árvore. Assim, $\mathtt{D}(\pi') = 1$, sendo $\mathtt{d}(\pi') = 0$ e $\mathtt{r}(\pi') = 1$.

O próximo resultado mostra que, por outro lado, quando eliminamos redundâncias de uma prova não geramos desordem na árvore.

Usaremos linhas tracejadas nas provas para explicitar as suas folhas. Assim, se Π é uma prova cujas folhas são $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, temos que Π também pode ser representada por

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \hdashline & \Pi & \end{array}$$

Lema 1.3.2. *Se π_2 é uma redução de π_1 obtida por meio da aplicação de alguma regra de transformação do procedimento $\rightsquigarrow_{\mathsf{ER}}$, então $\mathtt{d}(\pi_2) \leq \mathtt{d}(\pi_1)$.*

PROVA. Caso 1: aplicação da regra $\pi_1 \rightsquigarrow^1_{\mathsf{ER}} \pi_2$.

Nesse caso, π_1 contém uma aplicação de Tra a uma instância de $t \leq t$. Ou seja, π_1 e π_2 são da forma

$$\pi_1: \begin{array}{ccc} \mathsf{Tra}\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t \leq t\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ t \leq t'\end{array}}{t \leq t'} & \begin{array}{c}\Pi_3 \ldots\\ \varphi_3\end{array} & \begin{array}{c}\Pi_n\\ \varphi_n\end{array} \\ \hdashline & \Pi'_1 & \\ & \varphi & \end{array} \qquad\qquad \pi_2: \begin{array}{ccc} \begin{array}{c}\Pi_2\\ t \leq t'\end{array} & \begin{array}{c}\Pi_3 \ldots\\ \varphi_3\end{array} & \begin{array}{c}\Pi_n\\ \varphi_n\end{array} \\ \hdashline & \Pi'_1 & \\ & \varphi & \end{array}$$

A árvore π_2 é obtida a partir de π_1, eliminando a subárvore Π_1, identificando as instâncias de $t \leq t'$ que são premissa e conclusão da regra Tra e deixando o resto inalterado. Assim, π_2 não contém as possíveis desordens de π_1 que são decorrentes da subárvore Π_1. Portanto $\mathtt{d}(\pi_2) \leq \mathtt{d}(\pi_1)$.

Um argumento análogo aplica-se aos demais casos, para os quais apenas apresentamos as formas de π_1 e π_2, pois estas devem tornam o argumento evidente.

Caso 2: aplicação da regra $\pi_1 \leadsto^2_{\mathsf{ER}} \pi_2$.

Nesse caso, π_1 contém uma instância de $t \leq t$ em um vértice interno. Ou seja, π_1 e π_2 são da forma

$$\begin{array}{l} \pi_1 : \\ \begin{array}{c} \dfrac{\Pi_1}{t \leq t} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2 \ldots \\ \varphi_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_n \\ \varphi_n\end{array} \\ \hdashline \Pi'_1 \\ \varphi \end{array} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \pi_2 : \\ \begin{array}{c} \dfrac{}{t \leq t}\,\mathsf{Ref} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2 \ldots \\ \varphi_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_n \\ \varphi_n\end{array} \\ \hdashline \Pi'_1 \\ \varphi \end{array} \end{array}$$

Caso 3: aplicação da regra $\pi_1 \leadsto^3_{\mathsf{ER}} \pi_2$.

Nesse caso, π_1 contém uma instância de uma axioma ψ em um vértice interno. Ou seja, π_1 e π_2 são da forma

$$\begin{array}{l} \pi_1 : \\ \begin{array}{c} \dfrac{\Pi_1}{\psi} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2 \ldots \\ \varphi_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_n \\ \varphi_n\end{array} \\ \hdashline \Pi'_1 \\ \varphi \end{array} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \pi_2 : \\ \begin{array}{c} \dfrac{}{\psi}\,\mathsf{Axi} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2 \ldots \\ \varphi_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_n \\ \varphi_n\end{array} \\ \hdashline \Pi'_1 \\ \varphi \end{array} \end{array}$$

Este caso completa a demonstração. ■

O próximo resultado garante que é sempre possível ordenar as aplicações das regras de uma prova de acordo com a ordem da forma normal.

Lema 1.3.3. *Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de inequações. Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_\leq} \varphi$, então existe uma prova mereológica Π' de φ a partir de Γ tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.*

Prova. Indução no grau de desordem $\mathtt{d}(\Pi)$.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $\mathtt{d}(\Pi) = 1$.

Temos três casos.

Caso 1: Sub é aplicada abaixo de Com.

Indução no tamanho de Π.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $t(\Pi) = 2$. Então, Π é da forma

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 \leq t_1'}\text{Axi (ou Ref)} \quad \dots \quad \dfrac{}{t_n \leq t_n'}\text{Axi (ou Ref)}}{f(u_1, \dots, u_n) \leq f(v_1, \dots, v_n)}\text{Com}}{\mathtt{s}f(u_1, \dots, u_n) \leq \mathtt{s}f(v_1, \dots, v_n)}\text{Sub}$$

onde $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ estão de acordo com a característica de f.

Aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^1_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição $p = 0$, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 \leq t_1'}\text{Axi (ou Ref)}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_1'}\text{Sub} \quad \dots \quad \dfrac{\dfrac{}{t_n \leq t_n'}\text{Axi (ou Ref)}}{\mathtt{s}t_n \leq \mathtt{s}t_n'}\text{Sub}}{f(u_1', \dots, u_n') \leq f(v_1', \dots, v_n')}\text{Com}$$

onde $u_1', \dots, u_n', v_1', \dots, v_n'$ estão de acordo com a característica de f.

Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$, pois o grau de desordem das ocorrências de Com e Sub é 0.

Suponhamos que, para toda prova $\Pi : \varphi$ tal que $t(\Pi) < n$, existe uma prova $\Pi' : \varphi$ tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$. Na verdade, para simplificar a demonstração, podemos assumir que $\mathtt{d}(\Pi) = 0$, já que Π e Π' são provas de φ a partir de Γ e podem ser intercambiadas quando são subárvores de uma prova Π''.

Seja Π uma prova tal que $t(\Pi) = n$.

Π é da forma

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 \leq t_1'\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}\Pi_n\\ t_n \leq t_n'\end{array}}{f(u_1, \dots, u_n) \leq f(v_1, \dots, v_n)}\text{Com}[p]}{\mathtt{s}f(u_1, \dots, u_n) \leq \mathtt{s}f(v_1, \dots, v_n)}\text{Sub} \qquad \begin{array}{c}\Pi_{n+1}\\ \varphi_{n+1}\end{array} \dots \qquad \begin{array}{c}\Pi_m\\ \varphi_m\end{array} \\
\hdashline
\Pi_1' \\
\varphi
\end{array}$$

onde $[p]$ indica que a conclusão da regra Com está na posição p (esta notação será adotada daqui em diante) e $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ estão de acordo com a característica de f.

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^1_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 \leq t_1'\end{array}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_1'}\,\mathsf{Sub} \quad \ldots \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_n\\ t_n \leq t_n'\end{array}}{\mathtt{s}t_n \leq \mathtt{s}t_n'}\,\mathsf{Sub}}{f(u_1', \ldots, u_n') \leq f(v_1', \ldots, v_n')}\,\mathsf{Com} \qquad \begin{array}{c}\Pi_{n+1}\\ \varphi_{n+1}\end{array} \ldots \quad \begin{array}{c}\Pi_m\\ \varphi_m\end{array}\\
\text{- -}\\
\Pi_1'\\
\varphi
\end{array}
$$

onde $u_1', \ldots, u_n', v_1', \ldots, v_n'$ estão de acordo com a característica de f.

Por hipótese de indução, $\Pi_1, \ldots, \Pi_m, \Pi_1'$ são tais que $\mathtt{d}(\Pi_i) = 0$, $1 \leq i \leq m$, e $\mathtt{d}(\Pi_1') = 0$. Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π, tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

Caso 2: Sub é aplicada abaixo de Tra.

Indução no tamanho de Π.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $t(\Pi) = 2$. Então, Π é da forma

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 \leq t_2}\,\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)} \qquad \dfrac{}{t_2 \leq t_3}\,\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}}{t_1 \leq t_3}\,\mathsf{Tra}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_3}\,\mathsf{Sub}
$$

Aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^2_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição $p = 0$, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 \leq t_2}\,\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2}\,\mathsf{Sub} \qquad \dfrac{\dfrac{}{t_2 \leq t_3}\,\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}}{\mathtt{s}t_2 \leq \mathtt{s}t_3}\,\mathsf{Sub}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_3}\,\mathsf{Tra}
$$

Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π, tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$, pois o grau de desordem das ocorrências de Sub é 0.

Suponhamos que, para toda prova $\Pi : \varphi$, tal que $t(\Pi) < n$, temos que $\mathtt{d}(\Pi) = 0$.

Seja Π uma prova tal que $t(\Pi) = n$.

Π é da forma

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_2\\ t_2 \leq t_3\end{array}}{t_1 \leq t_3}\,\mathsf{Tra}[p]}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_3}\,\mathsf{Sub} \qquad \begin{array}{c}\Pi_3\\ \varphi_3\end{array} \ldots \quad \begin{array}{c}\Pi_n\\ \varphi_n\end{array}\\
\text{- - - - - - - - - - - - - - - - -}\\
\Pi_1'\\
\varphi
\end{array}
$$

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^2_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$
\begin{array}{c}
\mathsf{Tra}\;\dfrac{\mathsf{Sub}\;\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2} \qquad \mathsf{Sub}\;\dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 \leq t_3\end{matrix}}{\mathtt{s}t_2 \leq \mathtt{s}t_3}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_3} \qquad \begin{matrix}\Pi_3 \dots\\ \varphi_3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_n\\ \varphi_n\end{matrix}\\
\hdashline
\Pi_1'\\
\varphi
\end{array}
$$

Por hipótese de indução, $\Pi_1, \dots, \Pi_n, \Pi_1'$ são tais que $\mathtt{d}(\Pi_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$, e $\mathtt{d}(\Pi_1') = 0$. Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π, tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

Caso 3: Com é aplicada abaixo de Tra.

Indução no tamanho de Π.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $t(\Pi) = 2$ e seja $\langle s_1, \dots, s_n \rangle$ a característica de f. Então, Π é da forma

$$
\mathsf{Com}\;\dfrac{\mathsf{Tra}\;\dfrac{\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}\;\dfrac{}{t_1 \leq t_2} \qquad \mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}\;\dfrac{}{t_2 \leq t_3}}{t_1 \leq t_3} \qquad \mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}\;\dfrac{}{t_1' \leq t_1''} \qquad \mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}\;\dfrac{}{t_m' \leq t_m''}}{f(u_1, \dots, u_{m+1}) \leq f(v_1, \dots, v_{m+1})}
$$

onde $u_1, \dots, u_{m+1}, v_1, \dots, v_{m+1}$ estão de acordo com a característica de f.

Aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^3_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição $p = 0$, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$
\mathsf{Tra}\;\dfrac{\mathsf{Com}\;\dfrac{\mathsf{Axi\ (Ref)}\;\dfrac{}{\psi_1} \quad \mathsf{Axi\ (Ref)}\;\dfrac{}{t_1' \leq t_1'' \dots} \quad \mathsf{Axi\ (Ref)}\;\dfrac{}{t_m' \leq t_m''}}{f(u_1, \dots, u_{m+1}) \leq f(v_1', \dots, v_{m+1}')} \qquad \mathsf{Com}\;\dfrac{\mathsf{Axi\ (Ref)}\;\dfrac{}{\psi_2} \quad \mathsf{Ref}\;\dfrac{}{t^1 \leq t^1} \cdots \quad \mathsf{Ref}\;\dfrac{}{t^m \leq t^m}}{f(v_1', \dots, v_{m+1}') \leq f(v_1, \dots, v_{m+1})}}{f(u_1, \dots, u_{m+1}) \leq f(v_1, \dots, v_{m+1})}
$$

onde ψ_1 é $\begin{cases} t_1 \leq t_2 & \text{se} \quad s_1 = \mathbf{p} \\ t_2 \leq t_3 & \text{se} \quad s_1 = \mathbf{i} \end{cases}$, ψ_2 é $\begin{cases} t_1 \leq t_2 & \text{se} \quad s_1 = \mathbf{i} \\ t_2 \leq t_3 & \text{se} \quad s_1 = \mathbf{p} \end{cases}$, t^i é $\begin{cases} t_i'' & \text{se} \quad s_{i+1} = \mathbf{p} \\ t_i' & \text{se} \quad s_{i+1} = \mathbf{i} \end{cases}$

e $u_1, \dots, u_{m+1}, v_1, \dots, v_{m+1}, v_1', \dots, v_{m+1}'$ estão de acordo com a característica de f.

Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$, pois o grau de desordem das ocorrências de Com é 0.

Suponhamos que, para toda prova $\Pi : \varphi$ tal que $t(\Pi) < n$, temos que $\mathtt{d}(\Pi) = 0$.

Seja Π uma prova tal que $t(\Pi) = n$.

Π é da forma

$$
\begin{array}{c}
\mathsf{Com}\;\dfrac{\mathsf{Tra}[p]\;\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 \leq t_3\end{matrix}}{t_1 \leq t_3} \qquad \begin{matrix}\Pi_1' \dots\\ t_1' \leq t_1''\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_m'\\ t_m' \leq t_m''\end{matrix}}{f(u_1, \dots, u_{m+1}) \leq f(v_1, \dots, v_{m+1})} \qquad \begin{matrix}\Pi_3 \dots\\ \varphi_3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_n\\ \varphi_n\end{matrix}\\
\hdashline
\Pi_0'\\
\varphi
\end{array}
$$

onde $u_1, \dots, u_{m+1}, v_1, \dots, v_{m+1}$ estão de acordo com a característica de f.

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^1_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$\begin{array}{c}
\mathtt{Tra}\,\dfrac{\mathtt{Com}\,\dfrac{\pi_1 \quad \begin{matrix}\Pi'_1\\ t'_1 \le t''_1\end{matrix} \cdots \quad \begin{matrix}\Pi'_m\\ t'_m \le t''_m\end{matrix}}{f(u_1, \dots, u_{m+1}) \le f(v'_1, \dots, v'_{m+1})} \qquad \mathtt{Com}\,\dfrac{\pi_2 \quad \mathtt{Ref}\,\dfrac{}{t^1 \le t^1} \cdots \quad \mathtt{Ref}\,\dfrac{}{t^m \le t^m}}{f(v'_1, \dots, v'_{m+1}) \le f(v_1, \dots, v_{m+1})}}{f(u_1, \dots, u_{m+1}) \le f(v_1, \dots, v_{m+1})} \qquad \begin{matrix}\Pi_3 \dots\\ \varphi_3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_n\\ \varphi_n\end{matrix} \\
\hdashline
\Pi'_0 \\
\varphi
\end{array}$$

$$\text{onde} \quad \pi_1 \text{ é} \begin{cases} \Pi_1 & \text{se} \quad s_1 = \mathbf{p} \\ \Pi_2 & \text{se} \quad s_1 = \mathbf{i} \end{cases}, \quad \pi_2 \text{ é} \begin{cases} \Pi_1 & \text{se} \quad s_1 = \mathbf{i} \\ \Pi_2 & \text{se} \quad s_1 = \mathbf{p} \end{cases}, \quad t^i \text{ é} \begin{cases} t''_i & \text{se} \quad s_{i+1} = \mathbf{p} \\ t'_i & \text{se} \quad s_{i+1} = \mathbf{i} \end{cases}$$

e $u_1, \dots, u_{m+1}$, $v_1, \dots, v_{m+1}$, $v'_1, \dots, v'_{m+1}$ estão de acordo com a característica de f.

Por hipótese de indução, $\Pi_1, \dots, \Pi_n, \Pi'_1, \dots, \Pi'_m, \Pi'_0$ são tais que $\mathtt{d}(\Pi_i) = 0$, $1 \le i \le n$, $\mathtt{d}(\Pi'_i) = 0$, $1 \le i \le m$ e $\mathtt{d}(\Pi'_0) = 0$. Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π, tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

Suponhamos, agora, que para toda prova $\Pi : \varphi$, tal que $\mathtt{d}(\Pi) < n$, existe uma prova $\Pi' : \varphi$, tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $\mathtt{d}(\Pi) = n$.

A partir das folhas de Π, percorremos a árvore em direção à raiz (qualquer ramo) e identificamos a primeira desordem. Aplicamos a regra de transformação correspondente a esta desordem e obtemos uma redução Π' tal que $\mathtt{d}(\Pi') < n$. Mostraremos apenas para um caso, sendo os demais casos análogos a este.

Suponhamos que a desordem seja uma aplicação de Sub abaixo de Tra.

Π é da forma

$$\begin{array}{c}
\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Tra}[p]\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \le t_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 \le t_3\end{matrix}}{t_1 \le t_3}}{\mathbf{s}t_1 \le \mathbf{s}t_3} \qquad \begin{matrix}\Pi_3 \dots\\ \varphi_3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_n\\ \varphi_n\end{matrix} \\
\hdashline
\Pi'_1 \\
\varphi
\end{array}$$

Note que o grau de desordem dessa ocorrência de Sub, em Π, é 1, pois Tra está aplicada acima dessa ocorrência e tomamos a primeira desordem, ou seja, não existem mais ocorrências da regra Tra e nem da regra Com nas subárvores Π_1 e Π_2.

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^2_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{array}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2}\,\mathsf{Sub} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\ t_2 \leq t_3\end{array}}{\mathtt{s}t_2 \leq \mathtt{s}t_3}\,\mathsf{Sub}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_3}\,\mathsf{Tra} \qquad \begin{array}{c}\Pi_3 \ldots\\ \varphi_3\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_n\\ \varphi_n\end{array}\\
\hdashline
\Pi_1'\\
\varphi
\end{array}
$$

Agora, em Π', o grau de desordem de cada uma dessas ocorrências de Sub é 0. Como o restante da árvore permaneceu inalterado, ao invertermos a ordem de Sub com Tra, diminuímos o grau de desordem da prova, ou seja, $\mathtt{d}(\Pi') < \mathtt{d}(\Pi) = n$.

Portanto, por hipótese de indução, existe uma prova $\Pi'' : \varphi$ tal que $\mathtt{d}(\Pi'') = 0$. ■

Finalmente, estamos prontos para provar o principal resultado desta seção: toda prova pode ser colocada em forma normal. A estratégia da demonstração é simples, primeiramente ordenamos as regras de uma prova $\Pi : \varphi$ e depois eliminamos as possíveis redundâncias, obtendo uma prova $\Pi' : \varphi$ tal que $\mathtt{D}(\Pi') = 0$.

Teorema 1.3.1 (Normalização)**.** *Seja* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *um conjunto de inequações. Se* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{\leq}} \varphi$ *então existe uma prova mereológica* Π' *(de* φ *a partir de* Γ*), tal que* $\mathtt{D}(\Pi') = 0$.

Prova. Seja $\Pi : \varphi$ uma prova que não está em forma normal. Pelo Lema 1.3.3, podemos assumir que $\mathtt{d}(\Pi) = 0$, ou seja, Π contém apenas redundâncias. Pelo Lema 1.3.2, as reduções obtidas a partir de Π, por meio das regras de transformação do procedimento $\rightsquigarrow_{\mathsf{ER}}$, não contêm desordens. Logo, basta mostrar que podemos eliminar todas as redundâncias de Π.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $\mathtt{r}(\Pi) = 1$.

Temos três casos.

Caso 1: Tra está aplicada a uma instância de $t \leq t$.

Omitimos os detalhes da rotina de indução, no tamanho de Π, mas o seguinte argumento deve deixar claro que a redundância pode ser eliminada.

Π é da forma

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{}{t \leq t}\,\mathsf{Ref} \qquad \begin{array}{c}\Pi_1\\ t \leq t'\end{array}}{t \leq t'}\,\mathsf{Tra}[p] \qquad \begin{array}{c}\Pi_2 \ldots\\ \varphi_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_n\\ \varphi_n\end{array}\\
\hdashline
\Pi_1'\\
\varphi
\end{array}
$$

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^1_{\mathsf{ER}} \pi_2$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1 & \Pi_2 \ldots & \Pi_n \\ t \leq t' & \varphi_2 & \varphi_n \\ \hdashline & \Pi'_1 & \\ & \varphi & \end{array}$$

Assim, $\mathtt{r}(\Pi') = 0$ pois a única ocorrência de Tra em uma instância de $t \leq t$, que havia em Π, foi eliminada.

Caso 2: Uma instância de $t \leq t$ ocorre em um vértice interno da árvore. Ou seja, Π é da forma

$$\begin{array}{ccc} [p]\,\dfrac{\Pi_1}{t \leq t} & \begin{array}{c}\Pi_2 \ldots \\ \varphi_2\end{array} & \begin{array}{c}\Pi_n \\ \varphi_n\end{array} \\ \hdashline & \Pi'_1 & \\ & \varphi & \end{array}$$

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^2_{\mathsf{ER}} \pi_2$ na posição p de Π e obtemos a seguinte redução Π', que está em forma normal:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Ref}\,\dfrac{}{t \leq t} & \begin{array}{c}\Pi_2 \ldots \\ \varphi_2\end{array} & \begin{array}{c}\Pi_n \\ \varphi_n\end{array} \\ \hdashline & \Pi'_1 & \\ & \varphi & \end{array}$$

Assim, $\mathtt{r}(\Pi') = 0$ pois a única instância de $t \leq t$ em vértice interno, que havia em Π, foi eliminada.

Caso 3: Uma instância de um axioma ψ ocorre em um vértice interno da árvore. Ou seja, Π é da forma

$$\begin{array}{ccc} [p]\,\dfrac{\Pi_1}{\psi} & \begin{array}{c}\Pi_2 \ldots \\ \varphi_2\end{array} & \begin{array}{c}\Pi_n \\ \varphi_n\end{array} \\ \hdashline & \Pi'_1 & \\ & \varphi & \end{array}$$

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^3_{\mathsf{ER}} \pi_2$ na posição p de Π e obtemos a seguinte redução Π', que está em forma normal:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Axi}\,\dfrac{}{\psi} & \begin{array}{c}\Pi_2 \ldots \\ \varphi_2\end{array} & \begin{array}{c}\Pi_n \\ \varphi_n\end{array} \\ \hdashline & \Pi'_1 & \\ & \varphi & \end{array}$$

Assim, $\mathtt{r}(\Pi') = 0$ pois a única instância de axioma em vértice interno, que havia em Π, foi eliminada.

Suponhamos agora que, para toda prova $\Pi : \varphi$, tal que $\mathtt{r}(\Pi) < n$, existe uma prova $\Pi' : \varphi$, tal que $\mathtt{r}(\Pi') = 0$.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova, tal que $\mathtt{r}(\Pi) = n$.

A partir das folhas de Π, percorremos a árvore em direção à raiz (por qualquer ramo) e identificamos a primeira redundância. Aplicamos a regra de transformação correspondente a essa redundância e obtemos uma redução Π'. Assim como na base da indução, é imediato verificar $\mathtt{r}(\Pi') < n$, por isso omitimos os detalhes. Por hipótese de indução, existe uma prova $\Pi'' : \varphi$ tal que $\mathtt{r}(\Pi'') = 0$. Pelo Lema 1.3.2, $\mathtt{d}(\Pi'') = 0$ pois Π'' foi obtida a partir de Π por meio, apenas, das regras de transformação do procedimento $\rightsquigarrow_{\mathsf{ER}}$. Portanto $\mathtt{D}(\Pi'') = 0$ e, pelo Lema 1.3.1, Π'' está em forma normal. ■

1.4 Semântica

Como estamos interessados em formalizar o raciocínio sobre a relação de ordem, parece razoável que a semântica pretendida de $\mathcal{L}_{\leq}$ seja sobre a classe das álgebras *parcialmente ordenadas*, i.e., álgebras cujos domínios são *posets* — conjuntos munidos de uma relação binária reflexiva, transitiva e antissimétrica. Acontece que a ausência de um símbolo para a relação de igualdade, em $\mathcal{L}_{\leq}$, não permite expressarmos a propriedade de antissimetria. Assim, declinamos a exigência desta propriedade e definimos a semântica de $\mathcal{L}_{\leq}$ sobre uma classe maior, a saber, a classe das álgebras *pré-ordenadas*, i.e., álgebras cujos domínios são *pré-ordens* — conjuntos munidos de uma relação binária reflexiva e transitiva.

Mostraremos mais adiante que essa aparente incompatibilidade entre a semântica pretendida e a semântica definida não é um problema pois, relativamente à linguagem de $\mathcal{L}_{\leq}$, as classes mencionadas são *equivalentes*, no sentido de que não existe um conjunto de inequações que sejam *válidas*, exclusivamente, na classe das álgebras parcialmente ordenadas ou na classe das álgebras *estritamente* pré-ordenadas — cuja relação não é antissimétrica. Em outras palavras, a linguagem de $\mathcal{L}_{\leq}$ não é capaz de separar ordens parcias de pré-ordens estritas.

Considerando essa "cegueira" da linguagem, temos duas razões para definir a semântica de $\mathcal{L}_\leq$ sobre a classe das pré-ordens, uma de cunho filosófico e uma técnica.

A primeira delas apoia-se na célebre "recomendação" do filósofo L. Wittigenstein, "sobre aquilo que não se pode falar, deve-se calar..." [Wit94]. Quando não impomos que a relação das estruturas seja antissimétrica, estamos, na verdade, propondo um "silêncio" sobre esta propriedade, dado que ser ou não ser antissimétrica é irrelevante para o significado das fórmulas de $\mathcal{L}_\leq$. Assim, se não podemos expressar essa propriedade na linguagem de $\mathcal{L}_\leq$, não temos motivos para exigí-la semanticamente.

A razão técnica para escolhermos a classe das pré-ordens é que, como será visto na demonstração do teorema da completude, a construção do modelo canônico é bastante simples, já que a relação deste modelo precisa satisfazer apenas a reflexividade e a transitividade.

Dado que as classes são equivalentes, quando demonstramos os teoremas de corretude e completude de $\mathcal{L}_\leq$ para a semântica definida sobre as pré-ordens, também estamos mostrando que, relativamente à linguagem de $\mathcal{L}_\leq$, este sistema também é completo e correto para a semântica pretendida, sobre as ordens parciais.

Uma *estrutura* para $\mathcal{L}_\leq$, ou $\mathcal{L}_\leq$-estrutura, é uma tripla

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{f^\mathfrak{A} \mid f \in \mathsf{Ope}\}, \leq^\mathfrak{A}\rangle,$$

onde:

1. A é um conjunto não vazio, chamado de *universo de* $\mathfrak{A}$,
2. $\leq^\mathfrak{A} \subseteq A^2$ é uma pré-ordem em A, ou seja, $\leq^\mathfrak{A}$ é reflexiva e transitiva.
3. para cada $n \in \mathbb{N}$, se $f \in \mathsf{Ope}_n$, então $f^\mathfrak{A} : A^n \to A$ é uma operação n-ária sobre A tal que $f^\mathfrak{A}$ *respeita* a característica $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle$ de f, ou seja, a operação $f^\mathfrak{A}$ **p**reserva a pré-ordem $\leq^\mathfrak{A}$ na i-ésima coordenada quando s_i é **p** e **i**nverte a pré-ordem $\leq^\mathfrak{A}$ na i-ésima coordenada quando s_i é **i**.

Dizemos que $\leq^\mathfrak{A}$ é uma *pré-ordem compatível* com as operações. Quando não houver ambiguidade sobre qual estrutura estamos lidando, denotamos a relação $\leq^\mathfrak{A}$ por $\preceq$.

Estruturas são genericamente denotadas por $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$, indexadas ou não; e seus respectivos universos por $A, B, C, \ldots$ indexadas ou não, de maneira correspondente.

Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura para $\mathcal{L}_{\leq}$. Uma *atribuição* em $\mathfrak{A}$, ou simplesmente $\mathfrak{A}$-atribuição, é uma função $\mathsf{a} : \mathsf{Var} \to A$.

Sejam $t \in \mathsf{Trm}$, $\mathfrak{A}$ uma estrutura e a uma $\mathfrak{A}$-atribuição. O *valor de t em $\mathfrak{A}$, de acordo com* a, denotado por $\mathtt{v}^{\mathfrak{A}}_{\mathsf{a}}(t)$, é definido, recursivamente, da seguinte maneira:

– $\mathtt{v}^{\mathfrak{A}}_{\mathsf{a}}(x) ::= \mathsf{a}(x)$,

– $\mathtt{v}^{\mathfrak{A}}_{\mathsf{a}}(f(t_1, \ldots, t_n)) ::= f^{\mathfrak{A}}(\mathtt{v}^{\mathfrak{A}}_{\mathsf{a}}(t_1), \ldots, \mathtt{v}^{\mathfrak{A}}_{\mathsf{a}}(t_n))$.

Quando não houver ambiguidade, denotamos $\mathtt{v}^{\mathfrak{A}}_{\mathsf{a}}(t)$ por $\mathtt{v}^{\mathfrak{A}}t$, $\mathtt{v}_{\mathsf{a}}t$ ou, ainda, $\mathtt{v}t$.

Sejam $\varphi : t_1 \leq t_2$ uma inequação, $\mathfrak{A}$ uma estrutura e a uma $\mathfrak{A}$-atribuição. Dizemos que:

1. $\mathfrak{A}$ e a *satisfazem* φ, denotado por $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash t_1 \leq t_2$, quando $\mathtt{v}t_1 \preceq \mathtt{v}t_2$;

2. φ é *verdadeira* em $\mathfrak{A}$, denotado por $\mathfrak{A} \vDash \varphi$, quando, para toda $\mathfrak{A}$-atribuição a, temos que $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash \varphi$; neste caso, dizemos também que $\mathfrak{A}$ é um *modelo* de φ;

3. φ é *válida*, denotado por $\vDash \varphi$, quando, para todo modelo $\mathfrak{A}$, temos que $\mathfrak{A} \vDash \varphi$.

Dizemos que uma estrutura $\mathfrak{A}$ é *modelo* de um conjunto de inequações Γ, denotado por $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$, quando, para toda inequação $\varphi \in \Gamma$, temos que $\mathfrak{A} \vDash \varphi$.

Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de inequações. Dizemos que φ é *consequência semântica* (*global*) de Γ, denotado por $\Gamma \vDash \varphi$, quando todo modelo de Γ é modelo de φ, ou seja, para toda estrutura $\mathfrak{A}$, se $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$ então $\mathfrak{A} \vDash \varphi$.

Temos, agora, conceitos e notações suficientes para tornarmos mais precisa parte da observação feita no início desta seção, sobre a cegueira linguística de $\mathcal{L}_{\leq}$.

Consideramos a linguagem de $\mathcal{L}_{\leq}$ sem símbolos para operações, também chamada de *linguagem vazia*. As inequações dessa linguagem são da forma $x \leq y$, onde $x, y \in \mathsf{Var}$. As estruturas para essa linguagem são as pré-ordens, i.e., estruturas do tipo $\mathfrak{A} = \langle A, \preceq \rangle$, onde $\preceq$ é uma pré-ordem sobre A.

Tomamos a seguinte pré-ordem estrita

$$\mathfrak{A} = \langle \{a, b, c\}, \{(a, b), (b, a), (c, a), (c, b)(a, a), (b, b), (c, c)\}\rangle$$

e a ordem parcial

$$\mathfrak{B} = \langle \{a, b, c\}, \{(a, b), (a, a), (b, b), (c, c)\}\rangle.$$

É imediato verificar que uma inequação φ é válida em $\mathfrak{A}$ se, e somente se, é da forma $x \leq x$, se, e somente se, φ é válida em $\mathfrak{B}$. De fato, se φ é da forma $x \leq y$, basta tomar uma $\mathfrak{A}$-atribuição — que também é uma $\mathfrak{B}$-atribuição — tal que $\mathsf{a}(x) = a$ e $\mathsf{a}(y) = c$. Assim, $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \not\models x \leq y$ e $\mathfrak{B}, \mathsf{a} \not\models x \leq y$, logo, $\mathfrak{A} \not\models x \leq y$ e $\mathfrak{B} \not\models x \leq y$.

Isso mostra que não existe um conjunto Γ de inequações capaz de separar a classe das ordens parciais da classe das pré-ordens, pois se existisse, Γ deveria ser tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ e $\mathfrak{B} \not\models \Gamma$ ou $\mathfrak{A} \not\models \Gamma$ e $\mathfrak{B} \models \Gamma$, ou seja, se Γ separasse as duas classes, deveria, em particular, separar estas duas estruturas.

1.5 Corretude e completude

Os primeiros lemas provados nesta seção mostram que as regras de inferência de $\mathcal{L}_{\leq}$ são corretas, no sentido de que não permitem a derivação de inequações falsas a partir de inequações tomadas como verdadeiras. O Teorema da Corretude, apresentado em seguida, é uma consequência da correção das regras.

Para que as demonstrações dos lemas fiquem mais enxutas, nos próximos resultados, consideramos que $t, t_1, t'_1, t_2, t'_2, \ldots, t_n, t'_n$ são termos arbitrários e $\mathfrak{A} = \langle A, \{f^{\mathfrak{A}} \mid f \in \mathsf{Ope}\}, \preceq\rangle$ é uma estrutura arbitrária.

Lema 1.5.1. *$\mathfrak{A} \models t \leq t$.*

PROVA. Seja a uma $\mathfrak{A}$-atribuição. Como v é uma função e $\preceq$ é reflexiva, temos que $\mathsf{v}t \preceq \mathsf{v}t$. Assim, $\mathfrak{A} \models t \leq t$. ■

Lema 1.5.2. *Se $\mathfrak{A} \models t_1 \leq t_2$ e $\mathfrak{A} \models t_2 \leq t_3$ então $\mathfrak{A} \models t_1 \leq t_3$.*

PROVA. Suponhamos que $\mathfrak{A} \models t_1 \leq t_2$ e $\mathfrak{A} \models t_2 \leq t_3$. Seja a uma $\mathfrak{A}$-atribuição. Da hipótese, temos $\mathsf{v}t_1 \preceq \mathsf{v}t_2$ e $\mathsf{v}t_2 \preceq \mathsf{v}t_3$. Agora, como $\preceq$ é transitiva, temos $\mathsf{v}t_1 \preceq \mathsf{v}t_3$. Assim, $\mathfrak{A} \models t_1 \leq t_3$. ■

Lema 1.5.3. *Se* $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle$ *é a característica de* f *e* $\mathfrak{A} \vDash t_1 \leq t'_1, \ldots, \mathfrak{A} \vDash t_n \leq t'_n$*, então* $\mathfrak{A} \vDash f(u_1, ..., u_n) \leq f(v_1, ..., v_n)$*, onde* $u_i ::= \begin{cases} t_i & se\ s_i\ é\ \boldsymbol{p} \\ t'_i & se\ s_i\ é\ \boldsymbol{i} \end{cases}$ *e* $v_i ::= \begin{cases} t_i & se\ s_i\ é\ \boldsymbol{i} \\ t'_i & se\ s_i\ é\ \boldsymbol{p} \end{cases}$.

Prova. Suponhamos que f tem característica $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle$ e $\mathfrak{A} \vDash t_1 \leq t'_1, \ldots, \mathfrak{A} \vDash t_n \leq t'_n$. Seja a uma $\mathfrak{A}$-atribuição. Da hipótese, temos $\mathtt{v}t_i \preceq \mathtt{v}t'_i$, para $1 \leq i \leq n$.

Tomamos uma coordenada qualquer i e suponhamos que $s_i = \mathbf{i}$ (o caso $s_i = \mathbf{p}$ é inteiramente análogo).

Temos que $f(\ldots, u_i, \ldots)$ é $f(\ldots, t'_i, \ldots)$ e $f(\ldots, v_i, \ldots)$ é $f(\ldots, t_i, \ldots)$. Como $f^{\mathfrak{A}}$ inverte a ordem $\preceq$, na coordenada i, e respeita a característica de f, temos que

$$f^{\mathfrak{A}}(\ldots, \mathtt{v}t'_i, \ldots) \preceq f^{\mathfrak{A}}(\ldots, \mathtt{v}t_i, \ldots),$$

e portanto, por definição de $\mathtt{v}$,

$$\mathtt{v}f(\ldots, t'_i, \ldots) \preceq \mathtt{v}f(\ldots, t_i, \ldots).$$

Logo, $\mathfrak{A} \vDash f(\ldots, u_i, \ldots) \leq f(\ldots, v_i, \ldots)$. ■

Para provarmos que a regra Sub é correta, usamos o seguinte resultado:

Teorema 1.5.1 (Substituição)**.** *Se* $\mathfrak{A} = \langle A, \{f^{\mathfrak{A}} \mid f \in \mathsf{Ope}\}, \preceq\rangle$ *é uma estrutura,* $\mathtt{s} : \mathit{Var} \to \mathit{Trm}$ *é uma substituição,* $\mathsf{a} : \mathit{Var} \to A$ *é uma* $\mathfrak{A}$*-atribuição e* $\mathtt{b} : \mathsf{Var} \to A$ *é a* $\mathfrak{A}$*-atribuição definida por* $\mathtt{b}(x) ::= \mathtt{v}^*_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}x)$*, então:*

$$\mathtt{v}^*_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}^*t) = \mathtt{v}^*_{\mathtt{b}}(t), \tag{1.1}$$

para todo $t \in \mathit{Trm}$*.*

Prova. Por indução em termos. Para todo $x \in \mathsf{Var}$, por definição de $\mathtt{b}$, temos

$$\mathtt{b}(x) ::= \mathtt{v}_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}x),$$

e, por definição de $\mathtt{v}_{\mathtt{b}}$,

$$\mathtt{v}_{\mathtt{b}}(x) ::= \mathtt{b}(x).$$

Logo, $\mathtt{v}_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}x) = \mathtt{v}_{\mathtt{b}}(x)$.

Suponhamos que

$$\mathtt{v}^*_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}t_1) = \mathtt{v}^*_{\mathtt{b}}(t_1), \ldots, \mathtt{v}^*_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}t_n) = \mathtt{v}^*_{\mathtt{b}}(t_n)$$

Por definição de $\mathtt{s}^*$,

$$\mathtt{s}^* f(t_1, \ldots, t_n) ::= f(\mathtt{s}^* t_1, \ldots, \mathtt{s}^* t_n),$$

ou seja,

$$\mathtt{v}_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}^* f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathtt{v}_{\mathtt{a}}(f(\mathtt{s}^* t_1, \ldots, \mathtt{s}^* t_n)).$$

Por definição de $\mathtt{v}^*_{\mathtt{a}}$,

$$\mathtt{v}^*_{\mathtt{a}}(f(\mathtt{s}^* t_1, \ldots, \mathtt{s}^* t_n)) ::= f^{\mathfrak{A}}(\mathtt{v}^*_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}^* t_1), \ldots, \mathtt{v}^*_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}^* t_n)).$$

Por hipótese de indução,

$$f^{\mathfrak{A}}(\mathtt{v}^*_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}^* t_1), \ldots, \mathtt{v}^*_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}^* t_n)) = f^{\mathfrak{A}}(\mathtt{v}^*_{\mathtt{b}}(t_1), \ldots, \mathtt{v}^*_{\mathtt{b}}(t_n)).$$

Por definição de $\mathtt{v}^*_{\mathtt{b}}$,

$$\mathtt{v}^*_{\mathtt{b}}(f(t_1, \ldots, t_n)) ::= f^{\mathfrak{A}}(\mathtt{v}^*_{\mathtt{b}}(t_1), \ldots, \mathtt{v}^*_{\mathtt{b}}(t_n)).$$

Portanto,

$$\mathtt{v}^*_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}^*(f(t_1, \ldots, t_n))) = \mathtt{v}^*_{\mathtt{b}}(f(t_1, \ldots, t_n))$$

e o teorema está provado. ■

O Teorema da Substituição garante que fazer uma substituição seguida de uma valoração é o mesmo que fazer uma única valoração, desde que a atribuição subjacente seja escolhida de maneira adequada. Isto fica mais evidente se reescrevemos (1.1) da seguinte maneira:

$$[\mathtt{v}^*_{\mathtt{a}} \circ \mathtt{s}^*](t) = \mathtt{v}^*_{[\mathtt{v}^*_{\mathtt{a}} \circ \mathtt{s}]}(t),$$

onde $\circ$ denota a composição de relações que, neste caso, são funções.

Lema 1.5.4. *Se* $\mathfrak{A} \models t_1 \leq t_2$ *então* $\mathfrak{A} \models \mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2$.

Prova. Suponhamos que $\mathfrak{A} \vDash t_1 \leq t_2$. Seja a uma $\mathfrak{A}$-atribuição e $\mathtt{s} : \mathsf{Var} \to \mathsf{Trm}$ uma substituição. Definimos a $\mathfrak{A}$-atribuição $\mathtt{b}$, tal que $\mathtt{b}(x) ::= \mathtt{v}_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}x)$. Pela hipótese e pelo Teorema da Substituição temos que

$$\mathtt{v}_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}t_1) = \mathtt{v}_{\mathtt{b}}(t_1) \preceq \mathtt{v}_{\mathtt{b}}(t_2) = \mathtt{v}_{\mathtt{a}}(\mathtt{s}t_2).$$

Logo, $\mathfrak{A} \vDash \mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2$. ∎

Teorema 1.5.2 (Corretude). *Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de fórmulas. Se $\Gamma \vdash \varphi$ então $\Gamma \vDash \varphi$.*

Prova. Por indução no tamanho da prova de φ a partir de Γ, aplicando diretamente os Lemas 1.5.1—1.5.4. ∎

A corretude de $\mathcal{L}_{\leq}$ está diretamente relacionada com a noção de *consequência global* adotada aqui. Aproveitamos para fazer uma breve observação sobre o uso desta noção, em oposição ao uso da noção de *consequência local*, que é usada na definição de certos sistemas formais [Men97].

Uma fórmula φ é dita ser *consequência local* de um conjunto Γ quando, para toda estrutura $\mathfrak{A}$ e para toda atribuição a, se $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash \Gamma$ então $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash \varphi$.

É imediato verificar que a relação de consequência local está contida na relação de consequência global, ou seja, se φ é consequência local de Γ, então φ é consequência global de Γ, mas a recíproca não é verdadeira. De fato, suponhamos que φ é consequência local de Γ e tomamos uma estrutura $\mathfrak{A}$, tal que $\mathfrak{A}$ é modelo de Γ. Seja a uma $\mathfrak{A}$-atribuição qualquer. Assim, temos que $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash \Gamma$. Por hipótese, temos também que $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash \varphi$. Dado que tomamos a como uma $\mathfrak{A}$-atribuição qualquer, segue que $\mathfrak{A} \vDash \varphi$, ou seja, φ é consequência global de Γ.

Por outro lado, pela regra Sub, aplicando uma substituição $\mathtt{s}$ tal que $\mathtt{s}(x) = z$ e $\mathtt{s}(y) = w$, temos que $x \leq y \vdash_{\mathcal{L}_{\leq}} z \leq w$. Assim, pelo Lema 1.5.4, $z \leq w$ é consequência global de $x \leq y$. Todavia, basta tomar a estrutura dos números naturais com a ordem usual $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ e a $\mathfrak{A}$-atribuição a tal que $\mathsf{a}(x) = 1$, $\mathsf{a}(y) = 2$, $\mathsf{a}(z) = 5$ e $\mathsf{a}(w) = 3$ para verificarmos que $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash x \leq y$ mas $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \nvDash z \leq w$, ou seja, $z \leq w$ não é consequência local de $x \leq y$. Este exemplo mostra que a regra Sub não seria correta se adotássemos aqui a relação de consequência local.

Uma discussão mais profunda sobre as diferenças e semelhanças entre essas, e possivelmente outras, relações de consequência está fora do escopo desta tese. Nossa intenção é apenas apontar para o fato de que, embora a relação de consequência local seja muitas vezes preferida na definição de formalismos lógicos, na prática algébrica, é a relação de consequência global que melhor formaliza as inferências válidas.

Agora, começamos a demonstrar o Teorema de Completude, de $\mathcal{L}_{\leq}$.

Lema 1.5.5. *Para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, existe uma estrutura $\mathfrak{A}_\Gamma$ tal que as seguintes condições são equivalentes:*
(a) $\mathfrak{A}_\Gamma \vDash \varphi$.
(b) $\Gamma \vdash \varphi$.

Prova. Para construir $\mathfrak{A}_\Gamma$, consideramos primeiramente uma relação binária $\leq_\Gamma$, definida no conjunto dos termos Trm de $\mathcal{L}_{\leq}$, da seguinte maneira:

$$t_1 \leq_\Gamma t_2 \text{ sse } \Gamma \vdash t_1 \leq t_2.$$

As regras de inferência Ref e Tra garantem que $\leq_\Gamma$ é reflexiva e transitiva, ou seja, $\leq_\Gamma$ é uma pré-ordem sobre Trm.

Definimos as operações de $\mathfrak{A}_\Gamma$, $\{f^{\mathfrak{A}_\Gamma} \mid f \in \mathsf{Ope}\}$, sobre Trm, da seguinte maneira: para cada $n \in \mathbb{N}$, se $f \in \mathsf{Ope}_n$, então a operação $f^{\mathfrak{A}_\Gamma}$ é tal que

$$f^{\mathfrak{A}_\Gamma}(t_1, \dots, t_n) ::= f(t_1, \dots, t_n),$$

para todos $t_1, \dots, t_n \in \mathsf{Trm}$.

A regra de inferência Con garante que as operações estão bem definidas e que respeitam a característica dos operadores.

Para finalizar, resta mostrar que a estrutura $\mathfrak{A}_\Gamma = \langle \mathsf{Trm}, \{f^{\mathfrak{A}_\Gamma} \mid f \in \mathsf{Ope}\}, \leq_\Gamma \rangle$ satisfaz a condição do lema.

Seja $\varphi : t_1 \leq t_2$ uma inequação qualquer.

(a) $\Rightarrow$ (b): Suponhamos que $\Gamma \nvdash \varphi$. Portanto, t_1 e t_2 não estão relacionados por $\leq_\Gamma$, ou seja, $t_1 \nleq_\Gamma t_2$.

Para provar que $\mathfrak{A}_\Gamma \nvDash \varphi$, vamos exibir uma $\mathfrak{A}_\Gamma$-atribuição a tal que $\mathsf{v_a}(t_1) \nleq_\Gamma \mathsf{v_a}(t_2)$.

Fato 1.5.1. *Se* $\mathtt{i} : \mathsf{Var} \to \mathsf{Trm}$ *é a atribuição* identidade*, i.e.,* $\mathtt{i}(x) = x$*, então* $\mathtt{v_i} : \mathsf{Trm} \to \mathsf{Trm}$ *é tal que* $\mathtt{v_i}t = t$*, para todo* $t \in \mathsf{Trm}$*.*

Provamos este fato por indução em termos. Por definição, temos que $\mathtt{v_i}x ::= \mathtt{i}x ::= x$.

Suponhamos que $\mathtt{v_i}t_1 = t_1, \ldots, \mathtt{v_i}t_n = t_n$. Por definição de $\mathtt{v_i}$, temos

$$\mathtt{v_i}f(t_1, \ldots, t_n) ::= f^{\mathfrak{A}_\Gamma}(\mathtt{v_i}t_1, \ldots, \mathtt{v_i}t_n).$$

Por hipótese de indução,

$$f^{\mathfrak{A}_\Gamma}(\mathtt{v_i}t_1, \ldots, \mathtt{v_i}t_n) = f^{\mathfrak{A}_\Gamma}(t_1, \ldots, t_n).$$

Portanto, por definição de $f^{\mathfrak{A}_\Gamma}$,

$$\mathtt{v_i}f(t_1, \ldots, t_n) ::= f(t_1, \ldots, t_n). \quad \square$$

Segue deste fato e da hipótese $\Gamma \nvdash \varphi$ que, para a $\mathfrak{A}_\Gamma$-atribuição identidade $\mathtt{i}$, temos:

$$\mathtt{v_i}t_1 = t_1 \not\leq_\Gamma t_2 = \mathtt{v_i}t_2$$

Assim, $\mathfrak{A}_\Gamma, \mathtt{i} \nvDash \varphi$, portanto $\mathfrak{A}_\Gamma \nvDash \varphi$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi$.

Fato 1.5.2. *Se* $\mathtt{s} : \mathsf{Var} \to \mathsf{Trm}$ *é uma substituição — que também pode ser vista como uma* $\mathfrak{A}_\Gamma$*-atribuição — e* $t \in$ *Trm, então*

$$\mathtt{s}^*t = \mathtt{v_s}t.$$

Provamos este fato por indução em termos. Por definição de $\mathtt{s}^*$ e $\mathtt{v_s}$, temos

$$\mathtt{s}^*x ::= \mathtt{s}x ::= \mathtt{v_s}x.$$

Suponhamos que

$$\mathtt{s}^*t_1 = \mathtt{v_s}t_1, \ldots, \mathtt{s}^*t_n = \mathtt{v_s}t_n.$$

Por definição de $\mathtt{s}^*$,

$$\mathtt{s}^*f(t_1, \ldots, t_n) ::= f(\mathtt{s}^*t_1, \ldots, \mathtt{s}^*t_n).$$

Por hipótese de indução

$$f(\mathtt{s}^*t_1, \ldots, \mathtt{s}^*t_n) = f(\mathtt{v_s}t_1, \ldots, \mathtt{v_s}t_n).$$

Por definição de $f^{\mathfrak{A}_\Gamma}$,

$$f(\mathtt{v_s}t_1, \ldots, \mathtt{v_s}t_n) ::= f^{\mathfrak{A}_\Gamma}(\mathtt{v_s}t_1, \ldots, \mathtt{v_s}t_n).$$

Finalmente, por definição de $\mathtt{v_s}$,

$$f^{\mathfrak{A}_\Gamma}(\mathtt{v_s}t_1, \ldots, \mathtt{v_s}t_n) ::= \mathtt{v_s}f(t_1, \ldots, t_n). \quad \square$$

Para provar que $\mathfrak{A}_\Gamma \vDash \varphi$, tomamos $\mathsf{a} : \mathsf{Var} \to \mathsf{Trm}$ uma $\mathfrak{A}_\Gamma$-atribuição qualquer. Considerando a como uma substituição e aplicando a regra de inferência Sub em φ, obtemos $\Gamma \vdash \mathsf{a}t_1 \leq \mathsf{a}t_2$. Pela definição de $\leq_\Gamma$, temos $\mathsf{a}t_1 \leq_\Gamma \mathsf{a}t_2$. Pelo Fato 1.5.2,

$$\mathtt{v_a}t_1 \leq_\Gamma \mathtt{v_a}t_2.$$

Como a foi tomada arbitrariamente, isso mostra que $\mathfrak{A}_\Gamma \vDash \varphi$. ■

Teorema 1.5.3 (Completude)**.** *Dados um conjunto de fórmulas Γ e uma fórmula φ, se $\Gamma \vDash \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$.*

Prova. Suponhamos que $\Gamma \nvdash \varphi$. Para mostrar que $\Gamma \nvDash \varphi$, precisamos apresentar uma estrutura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$ e $\mathfrak{A} \nvDash \varphi$. Pelo Lema 1.5.5, $\mathfrak{A}_\Gamma$ é uma estrutura com esta propriedade. ■

Capítulo 2

Igualdade *versus* ordem: uma análise conceitual formalizada

Neste capítulo, analisamos formalmente a relação conceitual entre a igualdade e a ordem, de modo a sustentar e contrapor algumas considerações informais de C. S. Peirce a esse respeito.

No seu famoso artigo [Pei73], onde ordem e igualdade são contrapostas como relações básicas na definição do seu cálculo relacional, Peirce afirma que:

> It is universally admitted that a higher conception is logically more simple than a lower one under it (...) Now, all equality is inclusion in, but the converse is not true; hence inclusion in is a wider concept than equality, and therefore logically a simpler one.

Em linguagem contemporânea, Peirce parece estar se referindo à definição da igualdade a partir da ordem parcial, dada, em notação moderna, pela bem conhecida equivalência

$$a = b \text{ se, e somente se, } a \leq b \text{ e } b \leq a,$$

todavia, uma definição análoga da ordem, a partir da igualdade, parece não ser possível. No caso da *teoria dos reticulados*, por exemplo, uma definição da ordem, a partir da igualdade, pode ser dada pela também bem conhecida equivalência

$$a \leq b \text{ se, e somente se, } a = a \cdot b,$$

onde $\cdot$ é o *ínfimo* de a e b, porém, esta definição envolve o que chamamos, atualmente, de um operador *não-lógico* ($\cdot$) — específico da teoria — enquanto que a equivalência anterior define a igualdade, a partir da ordem, sem fazer uso de operadores não-lógicos de qualquer teoria.

Embora esta particularidade notada por Peirce faça parte do folclore matemático e, em princípio, não seja surpreendente, parece não haver ainda uma análise formal que confirme suas alegações de que o conceito de ordem é "mais amplo" e "logicamente mais simples" do que o conceito de igualdade. Pretendemos dar um sentido preciso à relação conceitual entre ordem e igualdade à luz dos resultados desenvolvidos neste capítulo.

Basicamente, nossa proposta consiste em comparar a lógica da igualdade $\mathcal{L}_=$, a ser apresentada na Seção 2.1, e a lógica da ordem $\mathcal{L}_\leq$, introduzida no Capítulo 1. Na Seção 2.2, apresentamos o método de comparação, o qual faz uso de um formalismo auxiliar ($\mathcal{L}_\leq^=$), definido na Seção 2.3. Na Seção 2.4, a comparação entre $\mathcal{L}_=$ e $\mathcal{L}_\leq$ é desenvolvida em detalhes. Com os resultados desta seção, articulamos nossa análise formal, pontuando quais aspectos das considerações de Peirce podem ser sustentados por estes resultados e quais são controversos. Encerramos esta seção com os teoremas de corretude e completude de $\mathcal{L}_=$. Finalmente, na Seção 2.5, estendemos a comparação entre $\mathcal{L}_\leq$ e $\mathcal{L}_=$ para analisarmos um aspecto que Peirce certamente não evoca nas suas considerações, mas que pode ser avaliado com as ferramentas formais que temos disponíveis. Assim como apresentamos a forma normal das provas mereológicas e demonstramos o teorema de normalização, faz sentido apresentarmos a forma normal das provas equacionais e demonstrarmos o teorema de normalização para a lógica da igualdade. Constatamos que, embora este teorema seja bastante mencionado nas referências sobre esta lógica, não é fácil encontrar uma demonstração cuidadosa do mesmo.

2.1 A lógica da igualdade $\mathcal{L}_=$

Chamamos de *raciocínio equacional* o mecanismo de inferência no qual *equações* — proposições que expressam identidade entre dois elementos — são deduzidas a partir de outras equações, pela regra que permite a substituição de *termos* por *termos iguais*. Consideramos como *lógica da igualdade* ou *lógica equacional* qualquer formalização do raciocínio equacional.

Não é exagero dizer que quase todos os aspectos da lógica da igualdade já foram estudados. Muitas informações relevantes podem ser encontradas em [BS81, Tay79, Tar68] e nas referências contidas nestes trabalhos.

Em nossa breve apresentação do sistema $\mathcal{L}_=$, adaptada de [Hen77], aproveitamos algumas definições e notações usadas para o sistema $\mathcal{L}_\leq$ e seguimos, basicamente, o mesmo roteiro do capítulo anterior, com exceção dos teoremas de corretude e completude, que serão demonstrados na Seção 2.4, a partir dos teoremas de corretude e completude de $\mathcal{L}_\leq$, e do teorema de normalização, demonstrado na Seção 2.5, por ser um aspecto complementar ao que desenvolvemos nas outras seções.

2.1.1 Sintaxe

O alfabeto de $\mathcal{L}_=$ é constituído pelos mesmos símbolos do alfabeto de $\mathcal{L}_\leq$, com exceção do símbolo de ordem $\leq$, que é substituído pelo *símbolo de igualdade* $=$.

Os *termos* de $\mathcal{L}_=$ são os mesmos de $\mathcal{L}_\leq$.

As *fórmulas* de $\mathcal{L}_=$, chamadas de *igualdades* (ou *equações*), são as expressões da forma:

$$t_1 = t_2,$$

onde $t_1, t_2 \in \mathsf{Trm}$.

Diferentemente de $\mathcal{L}_\leq$, em $\mathcal{L}_=$, não precisamos considerar a característica dos operadores. Naquele sistema, a relação de ordem, denotada por $\leq$, não é uma relação de equivalência e, consequentemente, não define uma congruência sobre as estruturas da semântica de $\mathcal{L}_\leq$, ou seja, não é para qualquer estrutura $\mathfrak{A}$ que a relação $\leq^{\mathfrak{A}}$ preserva as operações de $\mathfrak{A}$. Assim, por exemplo, para um operador unário f qualquer, não podemos derivar $f(t_1) \leq f(t_2)$ diretamente de $t_1 \leq t_2$, pois, no caso da característica de f ser $\langle \mathbf{i} \rangle$ — indicando que a operação denotada por f inverte a ordem — esta inferência estaria incorreta.

Por outro lado, de acordo com a semântica de $\mathcal{L}_=$, a ser definida, a relação de igualdade, denotada por $=$, é uma congruência sobre as estruturas, ou seja, além de ser reflexiva e transitiva, esta relação é simétrica e preserva as operações das estruturas. Assim, a característica dos operadores não impõe restrições às inferências.

2.1.2 Mecanismo de inferência

Para um dado conjunto Γ de axiomas (equações), as *regras de inferência* da lógica da igualdade são as seguintes:

$$\mathsf{Axi}\ \frac{}{\varphi}\quad \text{para todo } \varphi \in \Gamma \qquad\qquad \mathsf{Ref}\ \frac{}{t = t}$$

$$\mathsf{Sim}\ \frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1} \qquad\qquad \mathsf{Tra}\ \frac{t_1 = t_2 \qquad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}$$

$$\mathsf{Con}\ \frac{t_1 = t_1' \qquad \ldots \qquad t_n = t_n'}{f(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1', \ldots, t_n')} \qquad\qquad \mathsf{Sub}\ \frac{t_1 = t_2}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_2}$$

onde f é um operador n-ário

onde $\mathtt{s}$ é uma substituição qualquer

Os conceitos *prova equacional de* φ *a partir de* Γ e *teorema*, bem como a notação $\vdash_{\mathcal{L}_=}$, são análogos ou idênticos aos formulados para $\mathcal{L}_\leq$.

O seguinte resultado é uma versão equacional da Proposição 1.2.1, indicando que, em termos de teoremas, tanto a lógica da ordem quanto a lógica da igualdade são triviais.

Proposição 2.1.1. *Se* $\vdash_{\mathcal{L}_=} \varphi$*, então* φ *é da forma* $t = t$*.*

PROVA. Análoga à demonstração da proposição 1.2.1, usando as regras de $\mathcal{L}_=$. ■

2.1.3 Semântica

Em $\mathcal{L}_=$, assim como em $\mathcal{L}_\leq$, temos uma aparente incompatibilidade entre a semântica pretendida e a semântica definida. Vale mencionar que, neste ponto, adotamos um viés alternativo às apresentações usuais da lógica equacional encontradas na literatura, onde geralmente o símbolo de igualdade não é interpretado na estrutura e a relação *identidade* é "imposta" como interpretação do símbolo.

Em princípio, como queremos formalizar o raciocínio sobre a relação de igualdade, parece razoável que a semântica pretendida seja sobre a classe dos chamados *modelos normais* — estruturas onde a relação denotada por $=$ é a *identidade*. Todavia, definimos a semântica de $\mathcal{L}_\leq$ sobre a classe (maior) das estruturas onde a relação é uma *congruência* qualquer — não necessariamente a identidade. Da mesma maneira que em $\mathcal{L}_\leq$, essa incompatibilidade não gera problemas pois, relativamente à linguagem de $\mathcal{L}_=$, essas duas classes são equivalentes. Após termos definido a semântica de $\mathcal{L}_=$, usaremos um argumento análogo ao do capítulo anterior para mostrarmos que a linguagem de $\mathcal{L}_=$ não é expressiva o suficiente para distinguir a relação identidade de uma relação de congruência.

Uma *estrutura* para $\mathcal{L}_=$, ou $\mathcal{L}_=$-estrutura, é uma tripla

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{f^{\mathfrak{A}} \mid f \in \mathsf{Ope}\}, =^{\mathfrak{A}}\rangle,$$

onde:

1. A é um conjunto não vazio, chamado de *universo* de $\mathfrak{A}$,

2. para cada $n \in \mathbb{N}$, se $f \in \mathsf{Ope}_n$, então $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ é uma operação n-ária sobre A,

3. $=^{\mathfrak{A}} \subseteq A^2$ é uma relação de equivalência em A, ou seja, $=^{\mathfrak{A}}$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

4. $=^{\mathfrak{A}}$ é uma *congruência* em $\langle A, \{f^{\mathfrak{A}} \mid f \in \mathsf{Ope}\}\rangle$, i.e., para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathsf{Ope}_n$, e $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_n \in A$, se $a_1 =^{\mathfrak{A}} a'_1, \ldots, a_n =^{\mathfrak{A}} a'_n$, então $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) =^{\mathfrak{A}} f^{\mathfrak{A}}(a'_1, \ldots, a'_n)$.

Quando não houver ambiguidade sobre qual estrutura estamos lidando, denotamos a relação $=^{\mathfrak{A}}$ por $\cong$.

Os conceitos semânticos de *satisfabilidade*, *verdade*, *validade*, *modelo* e *consequência (global)* são análogos ou idênticos aos formulados para $\mathcal{L}_\leq$.

Podemos, agora, mostrar que a linguagem de $\mathcal{L}_=$ não é capaz de distinguir a relação identidade de uma relação de congruência.

Consideramos a linguagem vazia de $\mathcal{L}_=$, i.e., sem símbolo para operações. As equações dessa linguagem são da forma $x = y$, onde $x, y \in \mathsf{Var}$. As estruturas para essa linguagem são conjuntos munidos de uma relação de congruência, i.e., estruturas do tipo $\mathfrak{A} = \langle A, \cong\rangle$, onde $\cong$ é uma relação de congruência sobre A.

Tomamos a seguinte estrutura, munida da relação identidade,

$$\mathfrak{A} = \langle \{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}\rangle$$

e a estrutura

$$\mathfrak{B} = \langle \{a, b, c\}, \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b), (c, c)\}, \rangle$$

onde a relação é uma congruência — dado que é uma relação de equivalência e a estrutura não contém operações. É imediato verificar que uma equação φ é válida em $\mathfrak{A}$ se, e somente se, é da forma $x = x$, se, e somente se, φ é válida em $\mathfrak{B}$. De fato, se φ é da forma $x = y$, basta tomar uma $\mathfrak{A}$-atribuição — que também é uma $\mathfrak{B}$-atribuição — tal que $\mathsf{a}(x) = a$ e $\mathsf{a}(y) = c$. Assim, $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \nvDash x = y$ e $\mathfrak{B}, \mathsf{a} \nvDash x = y$, logo, $\mathfrak{A} \nvDash x = y$ e $\mathfrak{B} \nvDash x = y$.

Isso mostra que não existe um conjunto Γ de equações capaz de separar a classe dos modelos normais da classe das estruturas onde a relação denotada por $=$ é uma congruência, pois se existisse, Γ deveria ser tal que $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$ e $\mathfrak{B} \nvDash \Gamma$ ou $\mathfrak{A} \nvDash \Gamma$ e $\mathfrak{B} \vDash \Gamma$, ou seja, se Γ separasse as duas classes, deveria, em particular, separar estas duas estruturas.

2.2 Um método de comparação: $\mathcal{L}_{\leq}$ *versus* $\mathcal{L}_{=}$

Quando queremos comparar dois sistemas lógicos, um método relativamente bem difundido na literatura é o de *traduções entre lógicas*, cujos trabalhos precursores datam da primeira metade do século XX [Kol25, Gli29, Göd33, Gen33].

Este método consiste, grosso modo, em definir uma *tradução* entre dois sistemas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ para mostrar que $\mathcal{L}_2$ herda algumas propriedades de $\mathcal{L}_1$. Por exemplo, as primeiras traduções na literatura foram definidas como funções $f : \mathcal{L}_C \to \mathcal{L}_I$, do conjunto de sentenças de um sistema $\mathcal{L}_C$, da lógica proposicional clássica, para o conjunto de sentenças de um sistema $\mathcal{L}_I$, da lógica proposicional intuicionista, tal que: se φ é um teorema de $\mathcal{L}_C$ então $f(\varphi)$ é um teorema de $\mathcal{L}_I$. Com esta propriedade e mais algumas características específicas dos sistemas, foi possível mostrar que: se a lógica clássica, formalizada em $\mathcal{L}_C$, fosse inconsistente — como poderiam advogar alguns intuicionistas, principalmente em razão da *lei do terceiro excluído* — então a lógica intuicionista, formalizada em $\mathcal{L}_I$, também o seria.

Atualmente, encontramos diferentes definições de *tradução* — por exemplo, em [MP68, Wój88, Eps90, Con05, CCD09] — com propósitos variados. O desenvolvimento histórico dessa noção, incluindo resultados técnicos mais recentes, tal como uma análise da evolução conceitual, pode ser encontrado em [D'O13].

Em [DdSS99], os autores introduzem uma definição bastante geral de *tradução*, que contempla quase todas as demais, na qual uma lógica $\mathcal{L}$ é considerada, de maneira abstrata, como um par $\langle A, \mathsf{C}\rangle$, onde A é o domínio de $\mathcal{L}$ e C é um *operador de consequência* (Tarskiano) em A. Uma *tradução* de uma lógica $\mathcal{L}_1 = \langle A_1, \mathsf{C}_1\rangle$ em uma lógica $\mathcal{L}_2 = \langle A_2, \mathsf{C}_2\rangle$ é uma função $t : A_1 \to A_2$ tal que, para qualquer $X \subseteq A_1$, $t(\mathsf{C}_1(X)) \subseteq \mathsf{C}_2(t(X))$.

Um método alternativo de comparação entre dois sistemas, mas ainda relacionado à noção de *tradução*, foi usado por Givant e Tarski, em [GT87], para comparar o *poder de expressão* e o *poder de prova*.

Basicamente, este método consiste em comparar dois sistemas, $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, através de uma *extensão* comum $\mathcal{L}_{1,2}$, onde os sistemas são "internalizados".

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{L}_{1,2} & \\
\mathcal{L}_1 \arrow[ur, bend right] & & \mathcal{L}_2 \arrow[ul, bend left]
\end{tikzcd}
$$

Em geral, para mostrarmos que $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ possuem o mesmo poder de expressão e prova, mostramos que ambos possuem o mesmo poder de expressão e prova da extensão $\mathcal{L}_{1,2}$. A noção central deste método — que formaliza a comparação entre os dois sistemas — a ser definida, é a de *sistemas equipolentes*.

No nosso caso, considerando que queremos analisar o poder de expressão e o poder de prova dos sistemas $\mathcal{L}_=$ e $\mathcal{L}_\leq$, sem levar em conta propriedades como *consistência*, *decidibilidade* etc., optamos por aplicar o segundo método, pois este parece estar sob medida para os nossos propósitos, precisando apenas ser adaptado ao nosso contexto. De qualquer maneira, como mencionamos anteriormente, os dois métodos estão relacionados. Tarski e Givant usam uma noção de *tradução*, que é um caso particular da definição anterior, e mostram que um sistema $\mathcal{L}_1$ (ou $\mathcal{L}_2$) e sua extensão $\mathcal{L}_{1,2}$ são equipolentes se, e somente se, existe uma tradução de $\mathcal{L}_{1,2}$ em $\mathcal{L}_1$ (ou $\mathcal{L}_2$).

Encerramos esta seção, apresentando algumas definições, terminologias e notações que serão aplicadas no método de comparação que adotamos.

Estamos considerando que um *sistema formal* $\mathcal{L}$ pode ser caracterizado por quatro componentes básicos, denotado genericamente por $\langle \Sigma_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}}, \mathsf{C}_{\mathcal{L}}, \vDash_{\mathcal{L}}\rangle$, a saber:

– um conjunto de sentenças $\Sigma_{\mathcal{L}}$,

– uma relação de consequência sintática, $\vdash_{\mathcal{L}}$, entre um conjunto de sentenças $\Gamma \subseteq \Sigma_{\mathcal{L}}$ e uma sentença $\varphi \in \Sigma_{\mathcal{L}}$,

– uma classe de estruturas $\mathtt{C}_{\mathcal{L}}$, onde a semântica de $\mathcal{L}$ é definida, e

– uma relação de validade semântica, $\models_{\mathcal{L}}$, entre uma estrutura $\mathfrak{A} \in \mathtt{C}_{\mathcal{L}}$ e uma sentença $\varphi \in \Sigma_{\mathcal{L}}$.

Omitimos o subscrito $\mathcal{L}$ nos componentes do sistema $\langle \Sigma_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}}, \mathtt{C}_{\mathcal{L}}, \models_{\mathcal{L}} \rangle$ quando não houver ambiguidade ou quando o sistema for irrelevante.

Tanto $\mathcal{L}_{\leq}$ quanto $\mathcal{L}_{=}$ possuem os componentes listados acima que os caracterizam como sistemas formais.

Sejam Γ e Γ' conjuntos de sentenças de um dado sistema formal $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash, \mathtt{C}, \models \rangle$. Dizemos que Γ e Γ' são *semanticamente equivalentes*, denotado por $\Gamma \equiv_{\mathcal{L}} \Gamma'$, quando, para toda estrutura $\mathfrak{A} \in \mathtt{C}$, temos que $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \Gamma$ se, e somente se, $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \Gamma'$.

Sejam $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1, \mathtt{C}_1, \models_1 \rangle$ e $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2, \mathtt{C}_2, \models_2 \rangle$ sistemas formais. Dizemos que $\mathcal{L}_1$ é um *subsistema* de $\mathcal{L}_2$, ou $\mathcal{L}_2$ é uma *extensão* de $\mathcal{L}_1$, quando $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ e, para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \Sigma_1$, se $\Gamma \vdash_1 \varphi$ então $\Gamma \vdash_2 \varphi$.

Seja $\mathcal{L}_2$ uma extensão de $\mathcal{L}_1$. Dizemos que $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são *equipolentes em termos de expressão* quando, para todo $\Gamma_1 \subseteq \Sigma_1$, existe um $\Gamma_2 \subseteq \Sigma_2$ tal que $\Gamma_1 \equiv_2 \Gamma_2$ e, para todo $\Gamma_2 \subseteq \Sigma_2$, existe um $\Gamma_1 \subseteq \Sigma_2$ tal que $\Gamma_1 \equiv_2 \Gamma_2$.

Esta definição formaliza a idéia que temos quando dizemos que duas linguagens possuem o mesmo poder de expressão, pois, intuitivamente, sentenças que são verdadeiras exatamente nas mesmas estruturas estão expressando a mesma informação.

Dizemos que $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são *equipolentes em termos de prova* quando, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \Sigma_1$, temos que $\Gamma \vdash_2 \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \vdash_1 \varphi$.

Esta definição formaliza a idéia que temos quando dizemos que dois mecanismos de inferência possuem o mesmo poder de prova, pois, intuitivamente, quando a relação de consequência sintática é preservada, ambos os sistemas provam as mesmas fórmulas, a partir de um conjunto de sentenças comum aos dois.

Dizemos que $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são *equipolentes* quando $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são equipolentes em termos de expressão e equipolentes em termos de prova.

Observamos que essa noção de *sistemas equipolentes* não pode ser aplicada diretamente aos sistemas $\mathcal{L}_{\leq}$ e $\mathcal{L}_{=}$ pois nenhum é extensão do outro. A seguir, definimos uma extensão comum aos dois sistemas, que servirá de "ponte" para que a comparação possa ser feita.

2.3 O sistema $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$

2.3.1 Sintaxe

O alfabeto de $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ é constituído pelos mesmos símbolos do alfabeto de $\mathcal{L}_{\leq}$, acrescido do símbolo de igualdade $=$.

Os *termos* de $\mathcal{L}_{=}$ são os mesmos de $\mathcal{L}_{\leq}$.

As fórmulas de $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ são tanto equações quanto inequações.

$$\Sigma_{\mathcal{L}_{\leq}^{=}} = \Sigma_{\mathcal{L}_{\leq}} \cup \Sigma_{\mathcal{L}_{=}}.$$

2.3.2 Mecanismo de inferência

As regras de inferência de $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ são as mesmas de $\mathcal{L}_{\leq}$, acrescidas das seguintes regras:

$$\mathsf{Def}_1\ \frac{t_1 \leq t_2 \qquad t_2 \leq t_1}{t_1 = t_2} \qquad \mathsf{Def}_2\ \frac{t_1 = t_2}{t_1 \leq t_2} \qquad \mathsf{Def}_3\ \frac{t_1 = t_2}{t_2 \leq t_1}$$

Deve estar claro, pela maneira como foi definido, que $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ é uma extensão de $\mathcal{L}_{\leq}$. De fato, basta verificar que toda prova em $\mathcal{L}_{\leq}$ é uma prova em $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$, pois $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ contém todas as regras de $\mathcal{L}_{\leq}$. Por outro lado, talvez não esteja tão claro que $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ também é uma extensão de $\mathcal{L}_{=}$, mas mostramos, mais adiante, que este é o caso.

2.3.3 Semântica

Uma estrutura para $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$, ou $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$-estrutura, é uma quádrupla:

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{f^{\mathfrak{A}} \mid f \in \mathsf{Ope}\}, \preceq, \cong \rangle,$$

onde:

1. A é um conjunto não vazio, chamado de *universo* de $\mathfrak{A}$,

2. $\preceq\ \subseteq A^2$ é uma pré-ordem em A, ou seja, $\leq^{\mathfrak{A}}$ é reflexiva e transitiva.

3. $\cong$ é uma notação para a relação $\preceq \cap \preceq^{-1}$, i.e, a relação dada pela intersecção de $\preceq$ com a sua inversa $\preceq^{-1}$,

4. para cada $n \in \mathbb{N}$, se $f \in \mathsf{Ope}_n$, então $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ é uma operação n-ária sobre A tal que $f^{\mathfrak{A}}$ *respeita* a característica $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle$ de f, ou seja, para todo elemento de A, a operação $f^{\mathfrak{A}}$ **p**reserva a pré-ordem $\leq^{\mathfrak{A}}$ na i-ésima coordenada quando s_i é $\mathbf{p}$ e **i**nverte a pré-ordem $\leq^{\mathfrak{A}}$ na i-ésima coordenada quando s_i é $\mathbf{i}$.

É imediato verificar que a relação $\cong$ é uma congruência em $\langle A, \{f^{\mathfrak{A}} \mid f \in \mathsf{Ope}\}\rangle$. Assim, uma $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$-estrutura é uma *expansão* de uma $\mathcal{L}_{=}$-estrutura, ou ainda, uma $\mathcal{L}_{=}$-estrutura é um *reduto* de uma $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$-estrutura. Dessa maneira, podemos interpretar as fórmulas de $\mathcal{L}_{=}$ em $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$-estruturas — apenas ignorando a relação de pré-ordem — assim como podemos interpretar equações de $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ em $\mathcal{L}_{=}$-estruturas.

Omitimos a rotina de demonstrar que uma equação φ é verdadeira em uma $\mathcal{L}_{=}$–estrutura $\mathfrak{A}$ se, e somente se, φ é verdadeira em qualquer expansão de $\mathfrak{A}$, em particular, em uma $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$-estrutura. Em algumas demonstrações adiante, nos referimos a esta equivalência como *preservação de validade por expansão* (ou *reduto*). Assim, podemos então relevar a aparente incompatibilidade de interpretar fórmulas em duas classes de estruturas diferentes. Considerações análogas a estas, tal como a preservação de validade por expansão (ou reduto), também valem para os sistemas $\mathcal{L}_{\leq}$ e $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$.

2.4 Comparando $\mathcal{L}_{\leq}$ e $\mathcal{L}_{=}$ via $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$

Informalmente, podemos enunciar os principais resultados desta seção da seguinte maneira:

1. $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ e $\mathcal{L}_{\leq}$ possuem o mesmo poder de expressão e prova,

2. $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ e $\mathcal{L}_{=}$ possuem o mesmo poder de prova,

3. $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ é mais expressivo do que $\mathcal{L}_{=}$.

Com as noções formais que temos definido, podemos enunciar estes resultados de maneira precisa e fundamentar formalmente nosso trabalho de análise conceitual, contrapondo estes resultados com algumas alegações de Peirce, mencionadas no início deste capítulo, a respeito da igualdade e da ordem.

Proposição 2.4.1. *$\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ e $\mathcal{L}_{\leq}$ são equipolentes.*

Prova. Primeiramente, verificamos que, para toda equação $t_1 = t_2$, o conjunto unitário $\{t_1 = t_2\}$ é semanticamente equivalente ao conjunto $\{t_1 \leq t_2\ ,\ t_2 \leq t_1\}$ de inequações, ou seja, para toda $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$–estrutura $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \vDash t_1 = t_2 \text{ se, e somente se, } \mathfrak{A} \vDash t_1 \leq t_2 \text{ e } \mathfrak{A} \vDash t_2 \leq t_1.$$

De fato, mostramos uma das implicações ($\Rightarrow$) tomando uma $\mathfrak{A}$–atribuição a qualquer. Por hipósete $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash t_1 = t_2$, i.e., $\mathsf{a}(t_1) \cong \mathsf{a}(t_2)$. Por definição $\mathsf{a}(t_1) \preceq \mathsf{a}(t_2)$ e $\mathsf{a}(t_1) \preceq^{-1} \mathsf{a}(t_2)$, ou seja, $\mathsf{a}(t_1) \preceq \mathsf{a}(t_2)$ e $\mathsf{a}(t_2) \preceq \mathsf{a}(t_1)$, i.e., $\mathfrak{A}, a \vDash t_1 \leq t_2$ e $\mathfrak{A}, a \vDash t_2 \leq t_1$. Como a é uma $\mathfrak{A}$–atribuição qualquer, temos que $\mathfrak{A} \vDash t_1 \leq t_2$ e $\mathfrak{A} \vDash t_2 \leq t_1$. A outra implicação ($\Leftarrow$) é imediata.

Assim, para todo conjunto $\Gamma \subseteq \Sigma_{\mathcal{L}_{\leq}^{=}}$, tomamos o conjunto $\Gamma' \subseteq \Sigma_{\mathcal{L}_{\leq}}$ tal que Γ' é obtido a partir de Γ, apenas substituindo as equações $t_1 = t_2$ (se houver) pelas duas inequações $t_1 \leq t_2$ e $t_2 \leq t_1$. É imediato verificar que $\Gamma' \equiv_{\mathcal{L}_{\leq}^{=}} \Gamma$.

Dado que $\mathcal{L}_{\leq}$ é um subsistema de $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$, ou seja, $\Sigma_{\mathcal{L}_{\leq}} \subseteq \Sigma_{\mathcal{L}_{\leq}^{=}}$, é óbvio que para todo conjunto $\Gamma \subseteq \Sigma_{\mathcal{L}_{\leq}}$, existe um conjunto $\Gamma' \subseteq \Sigma_{\mathcal{L}_{\leq}^{=}}$, tal que $\Gamma \equiv_{\mathcal{L}_{\leq}^{=}} \Gamma'$. Basta tomar $\Gamma' = \Gamma$.

Com isso, mostramos que $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ e $\mathcal{L}_{\leq}$ são equipolentes em termos de expressão. Falta mostrar que $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ e $\mathcal{L}_{\leq}$ são equipolentes em termos de prova.

Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de inequações. Como $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ é uma extensão de $\mathcal{L}_{\leq}$, por definição, se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{\leq}} \varphi$ então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{\leq}^{=}} \varphi$.

Suponhamos, agora, que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{\leq}^{=}} \varphi$.

Seja Π uma prova de φ a partir de Γ, em $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$.

Caso 1: Π não contém equações. Neste caso, por definição, Π é uma prova mereológica de φ a partir de Γ em $\mathcal{L}_{\leq}$, pois as regras de inferência usadas em Π são regras de $\mathcal{L}_{\leq}$. Portanto, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{\leq}} \varphi$.

Caso 2: Π contém equações. Neste caso, vamos eliminar as equações e transformar Π em uma prova mereológica Π'. Para isso, usaremos o seguinte procedimento de transformação $\rightsquigarrow_{\mathsf{Def}}$:

$$\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 \leq t_1\end{matrix}}{\mathsf{Def}_2\,\dfrac{t_1 = t_2}{t_1 \leq t_2}} \qquad \rightsquigarrow^{1}_{\mathsf{Def}} \qquad \begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix}$$

$$\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 \leq t_1\end{matrix}}{\mathsf{Def}_3\,\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 \leq t_1}} \qquad \rightsquigarrow^{2}_{\mathsf{Def}} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 \leq t_1\end{matrix}$$

Indução no número de equações de Π.

Se Π contém uma equação então Π é da forma:

$$\begin{matrix}\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 \leq t_1\end{matrix}}{\mathsf{Def}_2[p]\,\dfrac{t_1 = t_2}{t_1 \leq t_2}} \qquad \begin{matrix}\Pi_3 \ldots\\ \varphi_3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_n\\ \varphi_n\end{matrix}\\ \hdashline \Pi'_1\\ \varphi\end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix}\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 \leq t_1\end{matrix}}{\mathsf{Def}_3[p]\,\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 \leq t_1}} \qquad \begin{matrix}\Pi_3 \ldots\\ \varphi_3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_n\\ \varphi_n\end{matrix}\\ \hdashline \Pi'_1\\ \varphi\end{matrix}$$

No caso da forma à esquerda, aplicamos a regra de transformação $\rightsquigarrow^{1}_{\mathsf{Def}}$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$\begin{matrix}\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_3 \ldots\\ \varphi_3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_n\\ \varphi_n\end{matrix}\\ \hdashline \Pi'_1\\ \varphi\end{matrix}$$

que é uma prova de φ a partir de Γ sem equações, onde todas as regras de inferência são regras de $\mathcal{L}_{\leq}$. Portanto, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{\leq}}$.

Analogamente, se Π for da forma à direita, aplicamos a regra $\rightsquigarrow^{2}_{\mathsf{Def}}$.

Suponhamos que para toda prova Π, com n equações, existe uma prova Π' sem equações.

Seja Π uma prova com $n+1$ equações. A partir das folhas de Π, percorremos a árvore em direção à raiz (qualquer ramo) e identificamos a primeira equação. Aplicamos adequadamente uma das regras de transformação do procedimento $\rightsquigarrow_{\mathsf{Def}}$ — a base de indução deve ter deixado claro qual regra usar — e obtemos uma prova Π' com n equações. Por hipótese de indução, existe uma prova $\Pi'' : \varphi$ sem equações. Portanto, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{\leq}} \varphi$. ∎

Para mostrarmos que $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ e $\mathcal{L}_{=}$ possuem o mesmo poder de prova, vamos usar a noção de prova *espelho*, cuja definição baseia-se na simetria da relação de igualdade $=$, implícita nas regras Def_2 e Def_3.

Sejam Γ um conjunto de equações, φ uma inequação e Π uma prova de φ a partir de Γ em $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$. Dizemos que a prova Π', obtida a partir de Π, apenas substituindo todas as aplicações de Def_2 por Def_3 e todas as aplicações de Def_3 por Def_2, é a prova *espelho* de Π. O fato de que uma prova espelho de Π é uma prova em $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ pode ser verificado na demonstração do resultado (mais forte) a seguir.

Lema 2.4.1. *Seja Γ um conjunto de equações e $t_1 \leq t_2$ uma inequação. Se Π é uma prova de $t_1 \leq t_2$ a partir de Γ, em $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$, então a prova Π' espelho de Π é uma prova de $t_2 \leq t_1$ a partir de Γ.*

Prova. Indução no tamanho de Π.

Se $t(\Pi) = 1$, então Π é da forma:

$$\mathsf{Def}_2\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_1 = t_2}}{t_1 \leq t_2} \quad \text{ou} \quad \mathsf{Def}_3\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_2 = t_1}}{t_1 \leq t_2}$$

Substituindo a aplicação da regra Def_2 pela regra Def_3 na prova à esquerda ou a aplicação da regra Def_3 pela regra Def_2 na prova à direita, obtemos a prova espelho de cada uma delas, que é uma prova de $t_2 \leq t_1$ a partir de Γ, da forma:

$$\mathsf{Def}_3\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_1 = t_2}}{t_2 \leq t_1} \quad \text{ou} \quad \mathsf{Def}_2\,\dfrac{\mathsf{Axi}\,\dfrac{}{t_2 = t_1}}{t_2 \leq t_1}$$

Suponhamos que, para toda prova Π tal que $t(\Pi) \leq n$, se Π é uma prova de $t_1 \leq t_2$ a partir de Γ, então a prova Π' espelho de Π é uma prova de $t_2 \leq t_1$ a partir de Γ.

Seja Π uma prova tal que $t(\Pi) = n$.

Caso 1: Π é da forma

$$\mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{array}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2}$$

Por hipótese de indução, a prova Π_1' espelho de Π_1 é uma prova de $t_2 \leq t_1$ a partir de Γ. Portanto, a seguinte prova Π', espelho de Π, é uma prova de $\mathtt{s}t_2 \leq \mathtt{s}t_1$ a partir de Γ.

$$\mathsf{Sub}\ \frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ t_2 \leq t_1\end{array}}{\mathtt{s}t_2 \leq \mathtt{s}t_1}$$

Caso 2: Π é da forma

$$\mathsf{Tra}\ \frac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ t_2 \leq t_3\end{array}}{t_1 \leq t_3}$$

Por hipótese de indução, as provas Π_1' e Π_2', espelhos de Π_1 e Π_2, são provas de $t_2 \leq t_1$ e $t_3 \leq t_2$, respectivamente, a partir de Γ. Portanto, a seguinte prova Π', espelho de Π, é uma prova de $t_3 \leq t_1$ a partir de Γ.

$$\mathsf{Tra}\ \frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ t_2 \leq t_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2'\\ t_3 \leq t_2\end{array}}{t_3 \leq t_1}$$

Caso 3: Π é da forma

$$\mathsf{Com}\ \frac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 \leq t_1'\end{array} \qquad \ldots \qquad \begin{array}{c}\Pi_n\\ t_n \leq t_n'\end{array}}{f(u_1, \ldots, u_n) \leq f(v_1, \ldots, v_n)}$$

onde $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ estão de acordo com a característica de f.

Por hipótese de indução, as provas $\Pi_1', \ldots, \Pi_n'$, espelhos de $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$, são provas de $t_1' \leq t_1, \ldots, t_n' \leq t_n$, respectivamente, a partir de Γ. Portanto, a seguinte prova Π', espelho de Π, é uma prova de $f(v_1, \ldots, v_n) \leq f(u_1, \ldots, u_n)$ a partir de Γ.

$$\mathsf{Com}\ \frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ t_1' \leq t_1\end{array} \qquad \ldots \qquad \begin{array}{c}\Pi_n'\\ t_n' \leq t_n\end{array}}{f(u_1', \ldots, u_n') \leq f(v_1', \ldots, v_n')}$$

onde $u_1', \ldots, u_n', v_1', \ldots, v_n'$ estão de acordo com a característica de f. De fato, seja $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ a característica de f. Se $s_i = \mathbf{p}$, temos $u_i = t_i = v_i'$ e $v_i = t_i' = u_i'$. Por outro lado, se $s_i = \mathbf{i}$, temos $u_i = t_i' = v_i'$ e $v_i = t_i = u_i'$.

Caso 4: Π é da forma

$$\mathsf{Def}_2\ \frac{\mathsf{Def}_1\ \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ t_2 \leq t_1\end{array}}{t_1 = t_2}}{t_1 \leq t_2}$$

Por hipótese de indução, as provas Π_1' e Π_2', espelhos de Π_1 e Π_2, são provas de $t_2 \leq t_1$ e $t_1 \leq t_2$, respectivamente, a partir de Γ. Portanto, a seguinte prova Π', espelho de Π, é uma prova de $t_2 \leq t_1$ a partir de Γ.

$$\mathsf{Def}_3\,\dfrac{\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi'_1 & \qquad \Pi'_2\\ t_2 \leq t_1 & \qquad t_1 \leq t_2\end{matrix}}{t_1 = t_2}}{t_2 \leq t_1}$$

Caso 5: Π é da forma

$$\mathsf{Def}_3\,\dfrac{\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & \qquad \Pi_2\\ t_1 \leq t_2 & \qquad t_2 \leq t_1\end{matrix}}{t_2 = t_1}}{t_1 \leq t_2}$$

Por hipótese de indução, as provas Π'_1 e Π'_2, espelhos de Π_1 e Π_2, são provas de $t_2 \leq t_1$ e $t_1 \leq t_2$, respectivamente, a partir de Γ. Portanto, a seguinte prova Π', espelho de Π, é uma prova de $t_2 \leq t_1$ a patir de Γ,

$$\mathsf{Def}_2\,\dfrac{\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi'_1 & \qquad \Pi'_2\\ t_2 \leq t_1 & \qquad t_1 \leq t_2\end{matrix}}{t_2 = t_1}}{t_2 \leq t_1}$$

e o lema está demonstrado. ∎

Podemos, agora, mostrar que $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$ e $\mathcal{L}_{=}$ possuem o mesmo poder de prova.

Proposição 2.4.2. *Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de equações. Temos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_=} \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}^{=}_{\leq}} \varphi$.*

Prova. Para que a primeira implicação ($\Rightarrow$) seja verdadeira, basta que as regras de inferência de $\mathcal{L}_=$ possam ser derivadas em $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$, como mostramos a seguir.

$\mathcal{L}_=$	$\mathcal{L}^{=}_{\leq}$
Ref	$\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\mathsf{Ref}\,\dfrac{}{t \leq t} \quad \mathsf{Ref}\,\dfrac{}{t \leq t}}{t = t}$
Sim	$\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\mathsf{Def}_2\,\dfrac{t_1 = t_2}{t_1 \leq t_2} \quad \mathsf{Def}_3\,\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 \leq t_1}}{t_2 = t_1}$
Sub	$\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Def}_2\,\dfrac{t_1 = t_2}{t_1 \leq t_2}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2} \quad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Def}_3\,\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 \leq t_1}}{\mathtt{s}t_2 \leq \mathtt{s}t_1}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_2}$
Tra	$\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Def}_2\,\dfrac{t_1 = t_2}{t_1 \leq t_2} \quad \mathsf{Def}_2\,\dfrac{t_2 = t_3}{t_2 \leq t_3}}{t_1 \leq t_3} \quad \mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Def}_3\,\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 \leq t_1} \quad \mathsf{Def}_3\,\dfrac{t_2 = t_3}{t_3 \leq t_2}}{t_3 \leq t_1}}{t_1 = t_3}$

Derivamos a regra Con, em $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$, da seguinte maneira:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{t_1 = t_1'}{\varphi_1}\,\mathsf{Def}_{x_1} \quad \ldots \quad \dfrac{t_n = t_n'}{\varphi_n}\,\mathsf{Def}_{x_n}}{f(t_1,\ldots,t_n) \leq f(t_1',\ldots,t_n')}\,\mathsf{Com} \qquad \dfrac{\dfrac{t_1 = t_1'}{\psi_1}\,\mathsf{Def}_{y_1} \quad \ldots \quad \dfrac{t_n = t_n'}{\psi_n}\,\mathsf{Def}_{y_n}}{f(t_1',\ldots,t_n') \leq f(t_1,\ldots,t_n)}\,\mathsf{Com}}{f(t_1,\ldots,t_n) = f(t_1',\ldots,t_n')}\,\mathsf{Def}_1$$

onde,

$$\begin{aligned} x_i &= \begin{cases} 1 & \text{se a coordenada } i \text{ da característica do operador } f \text{ é } \mathbf{p} \\ 2 & \text{se a coordenada } i \text{ da característica do operador } f \text{ é } \mathbf{i} \end{cases} \\ y_i &= \begin{cases} 1 & \text{se a coordenada } i \text{ da característica do operador } f \text{ é } \mathbf{i} \\ 2 & \text{se a coordenada } i \text{ da característica do operador } f \text{ é } \mathbf{p} \end{cases} \end{aligned}$$

e, φ_i, ψ_i são as inequações correpondentes às aplicações das regras Def_2 ou Def_1.

Assim, mostramos que $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$ tem, no mínimo, o mesmo poder de prova de $\mathcal{L}_=$. Vamos mostrar agora que o poder de prova de $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$ não é maior do que o de $\mathcal{L}_=$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que Π seja uma prova de $t_1 = t_2$ a partir de Γ em $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$. A única regra de $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$ que deriva uma equação é Def_1, logo, Π é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ t_1 \leq t_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2 \\ t_2 \leq t_1\end{matrix}}{t_1 = t_2}\,\mathsf{Def}_1$$

Em princípio, não temos garantia de que Π_2 é uma prova espelho de Π_1, no entanto, pelo Lema 2.4.1, se tomarmos a prova Π_1', espelho de Π_1, a seguinte prova também é uma prova de $t_1 = t_2$ a partir de Γ.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ t_1 \leq t_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_1' \\ t_2 \leq t_1\end{matrix}}{t_1 = t_2}\,\mathsf{Def}_1$$

Assim, vamos assumir que a prova Π é sempre da forma acima.

Como Γ é um conjunto de equações, então $t(\Pi) \geq 2$. Se $t(\Pi) = 2$, então Π é da forma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 = t_2}\,\mathsf{Axi}}{t_1 \leq t_2}\,\mathsf{Def}_2 \qquad \dfrac{\dfrac{}{t_1 = t_2}\,\mathsf{Axi}}{t_2 \leq t_1}\,\mathsf{Def}_3}{t_1 = t_2}\,\mathsf{Def}_1$$

Neste caso, a seguinte prova Π' é uma prova equacional de $t_1 = t_2$ a partir de Γ em $\mathcal{L}_=$.

$$\dfrac{}{t_1 = t_2}\,\mathsf{Axi}$$

Suponhamos que para toda prova Π de $t_1 = t_2$ a partir de Γ, em $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$, tal que $t(\Pi) < n$, existe uma prova equacional Π' de $t_1 = t_2$ a partir de Γ, em $\mathcal{L}_{=}$.

Seja Π uma prova de $t_1 = t_2$ a partir de Γ, em $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$, tal que $t(\Pi) = n$.

Caso 1: Π é da forma

$$\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix}}{\mathtt{s}t_1 \leq \mathtt{s}t_2}\qquad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi'_1\\ t_2 \leq t_1\end{matrix}}{\mathtt{s}t_2 \leq \mathtt{s}t_1}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_2}$$

Neste caso, a seguinte prova Π' também é uma prova de de $\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_2$ a partir de Γ, em $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$, tal que $t(\Pi') = n$.

$$\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_2\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Pi'_1\\ t_2 \leq t_1\end{matrix}}{t_1 = t_2}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_2}$$

Por hipótese de indução, existe uma prova equacional Π'' de $t_1 = t_2$ a partir de Γ, em $\mathcal{L}_{=}$. Portanto, a seguinte prova é uma prova equacional de $\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_2$ a partir de Γ, em $\mathcal{L}_{=}$.

$$\mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi''\\ t_1 = t_2\end{matrix}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_2}$$

Nos próximos casos, omitimos o passo anterior ao da hipótese de indução, onde explicitamos a ocorrência de $t_1 = t_2$ em uma subárvore de Π', de tamanho menor do que n.

Caso 2: Π é da forma

$$\mathsf{Def}_1\,\dfrac{\mathsf{Tra}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 \leq t_3\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ t_3 \leq t_2\end{matrix}}{t_1 \leq t_2}\qquad \mathsf{Tra}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi'_1\\ t_3 \leq t_1\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Pi'_2\\ t_2 \leq t_3\end{matrix}}{t_2 \leq t_1}}{t_1 = t_2}$$

Por hipótese de indução, existem provas equacionais Π''_1 e Π''_2, de $t_1 = t_3$ e de $t_3 = t_2$, a partir de Γ, em $\mathcal{L}_{=}$. Portanto, a seguinte prova é uma prova equacional de $t_1 = t_2$ a partir de Γ, em $\mathcal{L}_{=}$.

$$\mathsf{Tra}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi''_1\\ t_1 = t_3\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Pi''_2\\ t_3 = t_2\end{matrix}}{t_1 = t_2}$$

Caso 3: Π é da forma

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & & \Pi_n \\ t_1 \leq t'_1 & \dots & t_n \leq t'_n\end{matrix}}{f(u_1,\dots,u_n) \leq f(v_1,\dots,v_n)}\,\textsf{Com} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi'_1 & & \Pi'_n \\ t'_1 \leq t_1 & \dots & t'_n \leq t_n\end{matrix}}{f(v_1,\dots,v_n) \leq f(u_1,\dots,u_n)}\,\textsf{Com}}{f(u_1,\dots,u_n) = f(v_1,\dots,v_n)}\,\textsf{Def}_1$$

onde $u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n$ estão de acordo com a característica de f.

Por hipótese de indução, existem provas equacionais $\Pi''_1,\dots,\Pi''_n$ de $t_1 = t'_1,\dots,t_n = t'_n$, a partir de Γ, em $\mathcal{L}_=$. Ainda, assumimos que $\Pi''_1,\dots\Pi''_n$ podem ser provas de $t'_1 = t_1,\dots,t'_n = t_n$, a partir de Γ, em $\mathcal{L}_=$, já que a regra $\textsf{Def}_1$ não pressupõe uma disposição fixa das duas premissas, ou seja, de $t_1 \leq t_2$ e $t_2 \leq t_1$, derivamos, pela regra $\textsf{Def}_1$, tanto $t_1 = t_2$ quanto $t_2 = t_1$. Assim, a seguinte prova é uma prova equacional de $t_1 = t_2$ a partir de Γ, em $\mathcal{L}_=$.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi''_1 & & \Pi''_n \\ \varphi_1 & \dots & \varphi_n\end{matrix}}{f(u_1,\dots,u_n) = f(v_1,\dots,v_n)}\,\textsf{Con}$$

onde φ_i é $t_i = t'_i$, se a coordenada i da característica de f é $\mathbf{p}$, e $t'_i = t_i$ se a coordenada i da característica de f é $\mathbf{i}$.

Caso 4: Π é da forma

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ t_1 = t_2\end{matrix}}{t_1 \leq t_2}\,\textsf{Def}_2 \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2 \\ t_1 = t_2\end{matrix}}{t_2 \leq t_1}\,\textsf{Def}_3}{t_1 = t_2}\,\textsf{Def}_1$$

Por hipótese de indução, existe uma prova equacional Π'_1 de $t_1 = t_2$ a partir de Γ, em $\mathcal{L}_=$. ■

Ao demonstrar que $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$ e $\mathcal{L}_=$ possuem o mesmo poder de prova, mostramos que $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$ é, de fato, uma extensão de $\mathcal{L}_=$.

Como $\Sigma_{\mathcal{L}_=} \subseteq \Sigma_{\mathcal{L}^{=}_{\leq}}$, o sistema $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$ é, no mínimo, tão expressivo quanto $\mathcal{L}_=$. O próximo resultado mostra que $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$ é, de fato, mais expressivo do que $\mathcal{L}_=$.

Proposição 2.4.3. *$\mathcal{L}^{=}_{\leq}$ e $\mathcal{L}_=$ não são equipolentes em termos de expressão.*

PROVA. Vamos mostrar que existe uma linguagem de $\mathcal{L}_=$ para a qual não existe um conjunto $\Gamma \subseteq \Sigma_{\mathcal{L}_=}$ tal que $\Gamma \equiv_{\mathcal{L}^{=}_{\leq}} \{\varphi\}$, onde φ é uma inequação de $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$.

Consideramos a linguagem de $\mathcal{L}_{\leq}^{=}$ constituída apenas pelas constantes a e b, além, claro, das variáveis e dos símbolos de ordem e de igualdade. Tomamos as seguintes estruturas que interpretam essa linguagem:

$$\mathfrak{A} = \langle \{a, b\}, a, b, \{(a, b), (a, a), (b, b)\}, \{(a, a), (b, b)\}\rangle$$

$$\mathfrak{B} = \langle \{a, b\}, a, b, \{(b, a), (a, a), (b, b)\}, \{(a, a), (b, b)\}\rangle.$$

Interpretamos as constantes a e b nas respectivas estruturas da seguinte maneira:

$$a^{\mathfrak{A}} ::= a^{\mathfrak{B}} ::= a \text{ e } b^{\mathfrak{A}} ::= b^{\mathfrak{B}} ::= b.$$

É imediato verificar que, para toda $\mathfrak{A}$–atribuição $\mathtt{a}$ e termo t, $v_{\mathtt{a}}^{\mathfrak{A}}(t)$ e $v_{\mathtt{a}}^{\mathfrak{B}}(t)$ são idênticos. Da mesma maneira, para toda $\mathfrak{B}$–atribuição $\mathtt{b}$ e termo t, $v_{\mathtt{b}}^{\mathfrak{A}}(t)$ e $v_{\mathtt{b}}^{\mathfrak{B}}(t)$ são idênticos.

A inequação $a \leq b$ é válida em $\mathfrak{A}$ mas não é válida em $\mathfrak{B}$, ou seja, $a \leq b$ é uma fórmula que separa a estrutura $\mathfrak{A}$ da estrutura $\mathfrak{B}$. Logo, um conjunto de equações que fosse semanticamente equivalente à $a \leq b$, por definição, também teria que separar essas duas estruturas. Acontece que, para toda equação $t_1 = t_2$, $\mathfrak{A} \vDash t_1 = t_2$ se, e somente se, $\mathfrak{B} \vDash t_1 = t_2$. De fato, suponhamos que $\mathfrak{A} \vDash t_1 = t_2$ e seja $\mathtt{b}$ uma $\mathfrak{B}$-atribuição qualquer. Como $\mathfrak{B}$ é também uma $\mathfrak{A}$-atribuição, por hipótese, $\mathfrak{A}, \mathtt{b} \vDash t_1 = t_2$, i.e., $(v_{\mathtt{b}}^{\mathfrak{A}}(t_1), v_{\mathtt{b}}^{\mathfrak{A}}(t_2)) \in =^{\mathfrak{A}}$. Como $=^{\mathfrak{A}}$ e $=^{\mathfrak{B}}$ são idênticos, temos que $(v_{\mathtt{b}}^{\mathfrak{B}}(t_1), v_{\mathtt{b}}^{\mathfrak{B}}(t_2)) \in =^{\mathfrak{B}}$. Portanto, $\mathfrak{B} \vDash t_1 = t_2$. A volta é análoga. ■

Finalmente, com os resultados obtidos até aqui, podemos articular nossa análise sobre a relação conceitual entre a igualdade e a ordem.

Reforçamos que a lógica da igualdade não é, estritamente, a lógica da *identidade* e nem a lógica da ordem é, estritamente, a lógica da *ordem parcial*. O que costuma ser chamado, na literatura, de lógica da igualdade, ou lógica equacional, é, na verdade, a *lógica da congruência*, pois, como vimos, a relação *identidade* não pode ser capturada pela linguagem de $\mathcal{L}_{=}$. Da mesma maneira, a lógica da ordem, introduzida no Capítulo 1, é, na verdade, a *lógica da pré-ordem compatível*, pois a relação de *ordem parcial* não pode ser capturada pela linguagem de $\mathcal{L}_{\leq}$.

Assim, formalmente, a definição matemática usual de igualdade, a partir da ordem, trata-se, na verdade, da definição de *congruência* a partir da *pré-ordem compatível*.

Não temos como afirmar se as considerações de Peirce foram feitas sobre a *identidade* e a *ordem parcial* ou sobre a *congruência* e a *pré-ordem compatível*, pois o nível de formalização dos sistemas a que Peirce se referia não nos permite ser conclusivos a este respeito. De qualquer modo, este é um ponto marginal que não compromete nossa análise acerca das alegações de Peirce, de tal maneira que, feita esta ressalva, continuamos a usar os termos *igualdade* e *ordem*, de maneira genérica.

Agora, analisamos formalmente as considerações de Peirce, citadas no início deste capítulo.

As Proposições 2.4.1 e 2.4.3 parecem corroborar uma de suas alegações — 'all equality is inclusion in but the converse is not true'. Ainda, dado que a classe das estruturas da semântica de $\mathcal{L}_{\leq}$ inclui a classe das estruturas da semântica de $\mathcal{L}_{\leq}$, a primeira de suas inferências — 'hence inclusion in is a wider concept' — também parece estar formalmente sustentada pelas lógicas que regem a igualdade e a ordem.

Já a conclusão de Peirce — 'and therefore logically a simpler one' — parece ser menos evidente. Atualmente, o termo *logicamente mais simples* compromete não só a relação de interdefinibilidade dos conceitos, ou a abrangência intensional dos mesmos, mas também a *relação de consequência* da lógica que os formaliza. É claro que esta análise é anacrônica e não temos a pretensão de afirmar o significado do que Peirce disse, porém, temos meios de contrapor uma possível interpretação desta alegação com o que desenvolvemos formalmente aqui.

Mostramos, na Proposição 2.4.2, que $\mathcal{L}_{=}$ e $\mathcal{L}_{\leq}$ possuem o mesmo poder de prova e, portanto, se a interpretação de *logicamente mais simples* envolver, de alguma maneira, a relação de consequência da lógica da igualdade e da lógica da ordem, então a afirmação é controversa, mesmo que a intenção de Peirce tenha sido menos pretenciosa a este respeito.

Finalmente, uma possível leitura dos nossos resultados é que a *ordem* é, de fato, uma noção 'conceitualmente mais ampla' do que a *igualdade*, como apontou Peirce, mas não necessariamente 'logicamente mais simples', pois não encontramos um respaldo formal para esta última afirmação da mesma maneira que encontramos para a primeira.

Encerramos esta seção demonstrando os teoremas de corretude e completude de $\mathcal{L}_=$, a partir da corretude e completude de $\mathcal{L}_\leq$, via $\mathcal{L}_\leq^=$.

Observamos que não precisamos demonstrar a corretude e completude de $\mathcal{L}_\leq^=$, basta verificar que, para quaquer $\Gamma \subseteq \Sigma_{\mathcal{L}_\leq^=}$, temos:

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_\leq^=} \varphi \text{ se, somente se } \Gamma' \vdash_{\mathcal{L}_\leq^=} \varphi,$$

onde Γ' é o conjunto de inequações semanticamente equivalente ao conjunto Γ (definido na demonstração da Prop. 2.4.1).

De fato, pelas regras Def_1, Def_2, Def_3 e Axi, é imediato verificar que $\Gamma \vdash \Gamma'$ e $\Gamma' \vdash \Gamma$.

Teorema 2.4.1 (Corretude de $\mathcal{L}_=$)**.** *Seja* $\Gamma \cup \{t_1 = t_2\}$ *um conjunto de equações. Se* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_=} t_1 = t_2$ *então* $\Gamma \vDash_{\mathcal{L}_=} t_1 = t_2$.

PROVA. Suponhamos $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_=} t_1 = t_2$. Pela Prop. 2.4.2, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_\leq^=} t_1 = t_2$. Assim, para o conjunto de inequações Γ', semanticamente equivalente à Γ, temos $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}_\leq^=} t_1 = t_2$.

Logo, $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}_\leq^=} t_1 \leq t_2$ e $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}_\leq^=} t_2 \leq t_1$. De fato, se $t_1 = t_2 \in \Gamma$, então $t_1 \leq t_2 \in \Gamma'$ e $t_2 \leq t_1 \in \Gamma'$ e portanto, pela regra Axi, $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}_\leq^=} t_1 \leq t_2$ e $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}_\leq^=} t_2 \leq t_1$.

Caso contrário, $t_1 = t_2$ é derivada da regra Def_1, que pressupõe a existência dessas provas.

Pela Prop. 2.4.1, $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}_\leq} t_1 \leq t_2$ e $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}_\leq} t_2 \leq t_1$. Pelo teorema da corretude de $\mathcal{L}_\leq$, $\Gamma' \vDash_{\mathcal{L}_\leq} t_1 \leq t_2$ e $\Gamma' \vDash_{\mathcal{L}_\leq} t_2 \leq t_1$. Pela preservação da validade por expansão das estruturas, $\Gamma' \vDash_{\mathcal{L}_\leq^=} t_1 \leq t_2$ e $\Gamma' \vDash_{\mathcal{L}_\leq^=} t_2 \leq t_1$.

Como Γ' é semanticamente equivalente à Γ, temos que $\Gamma \vDash_{\mathcal{L}_\leq^=} t_1 \leq t_2$ e $\Gamma \vDash_{\mathcal{L}_\leq^=} t_2 \leq t_1$, ou seja, $\Gamma \vDash_{\mathcal{L}_\leq^=} \{t_1 \leq t_2, t_2 \leq t_1\}$. Acontece que $\{t_1 \leq t_2, t_2 \leq t_1\}$ é semanticamente equivalente ao conjunto $\{t_1 = t_2\}$. Portanto, $\Gamma \vDash_{\mathcal{L}_\leq^=} t_1 = t_2$. ∎

Teorema 2.4.2 (Completude de $\mathcal{L}_=$)**.** *Seja* $\Gamma \cup \{t_1 = t_2\}$ *um conjunto de equações. Se* $\Gamma \vDash_{\mathcal{L}_=} t_1 = t_2$ *então* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_=} t_1 = t_2$.

PROVA. Suponhamos $\Gamma \vDash_{\mathcal{L}_=} t_1 = t_2$. Pela preservação da validade por expansão das estruturas, temos que $\Gamma \vDash_{\mathcal{L}_\leq^=} t_1 = t_2$. Assim, para o conjunto de inequações Γ', semanticamente equivalente à Γ, temos que $\Gamma' \vDash_{\mathcal{L}_\leq^=} t_1 = t_2$. Como o conjunto

$\{t_1 = t_2\}$ é semanticamente equivalente ao conjunto $\{t_1 \leq t_2, t_2 \leq t_1\}$, isso implica que $\Gamma' \vDash_{\mathcal{L}^{=}_{\leq}} t_1 \leq t_2$ e $\Gamma' \vDash_{\mathcal{L}^{=}_{\leq}} t_2 \leq t_1$.

Pela preservação da validade por reduto das estruturas, $\Gamma' \vDash_{\mathcal{L}_{\leq}} t_1 \leq t_2$ e $\Gamma' \vDash_{\mathcal{L}_{\leq}} t_2 \leq t_1$. Pelo teorema da completude de $\mathcal{L}_{\leq}$, $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}_{\leq}} t_1 \leq t_2$ e $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}_{\leq}} t_2 \leq t_1$. Como $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$ é extensão de $\mathcal{L}_{\leq}$, $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}^{=}_{\leq}} t_1 \leq t_2$ e $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}^{=}_{\leq}} t_2 \leq t_1$.

Pela regra Def_1, $\Gamma' \vdash_{\mathcal{L}^{=}_{\leq}} t_1 = t_2$. Como Γ' é semanticamente equivalente à Γ, temos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}^{=}_{\leq}} t_1 = t_2$.

Pela Prop. 2.4.2, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{=}} t_1 = t_2$. ■

A comparação dos sistemas $\mathcal{L}_{\leq}$ e $\mathcal{L}_{=}$ pode ser estendida para a normalização das provas, mas não através do sistema $\mathcal{L}^{=}_{\leq}$. Na próxima seção, apresentamos um teorema de normalização para $\mathcal{L}_{=}$ que complementa os resultados obtidos até aqui.

2.5 Normalização em $\mathcal{L}_{=}$

Não é fácil encontrar, na literatura sobre a lógica equacional, uma demonstração detalhada do teorema da normalização, embora este resultado seja bastante mencionado e faça parte do folclore desta lógica. Aproveitamos os conceitos e a estratégia de demonstração que usamos para o teorema da normalização da lógica da ordem $\mathcal{L}_{\leq}$ e apresentamos os detalhes da demonstração deste teorema para a lógica da igualdade $\mathcal{L}_{=}$. Pretendemos que esta demonstração contribua para preencher uma lacuna na literatura especializada.

Primeiramente, precisamos definir a *forma normal* de uma prova equacional.

Uma prova equacional π (a partir de Γ) está em *forma normal* quando:

1. instâncias de $t = t$ ou fórmulas de Γ ocorrem apenas nas folhas,

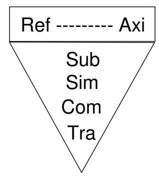
2. a regra Tra nunca é aplicada em uma instância de $t = t$

3. a regra Sim nunca é aplicada em uma conclusão de Sim

4. não existem ocorrências das regras Sim, Con e Tra *acima* (em direção às folhas) das ocorrências da regra Sub

5. não existem ocorrências das regras Con e Tra *acima* das ocorrências da regra Sim

6. não existem ocorrências da regra Tra acima das ocorrências da regra Con



Observamos que, além das redundâncias que podem ocorrer em provas mereológicas (cláusulas 1 e 2), as provas equacionais podem conter mais um tipo de redundância, gerada por aplicações consecutivas da regra Sim (cláusula 3). Como esta regra apenas inverte os termos de uma equação, fica claro que a inversão da inversão leva à equação original, sendo desnecessária a aplicação de Sim sob uma aplicação de Sim. Ainda, como $\mathcal{L}_=$ possui uma regra a mais do que $\mathcal{L}_\leq$, temos também mais uma cláusula de ordenação das regras. Consequentemente, temos mais casos de desvios e, portanto, precisamos de mais regras de transformação de árvores para corrigirmos todos os possíveis desvios.

Precisamos adequar as noções de *grau de redundância* e *grau de desordem* — definidas para provas mereológicas — para provas equacionais.

O *grau de redundância* de uma prova equacional, denotado por $\mathtt{r}(\pi)$, é o número natural dado pela soma das seguintes parcelas:

– número de ocorrências de axiomas ou instâncias de $t \leq t$ em vértices internos de π,

– número de ocorrências da regra Tra, aplicada em uma instância de $t \leq t$.

– número de ocorrências da regra Sim, aplicada em uma conclusão de Sim

Cada ocorrência da regra Sub possui um *grau de desordem*, que é dado pelo número de ocorrências das regras Sim, Con e Tra acima desta ocorrência de Sub. Cada ocorrência da regra Sim possui um *grau de desordem*, que é dado pelo número de ocorrências das regras Con e Tra acima desta ocorrência de Sim. Da mesma maneira, cada ocorrência da regra Con possui um *grau de desordem*, dado pelo número de ocorrências da regra Tra acima desta ocorrência Con.

O *grau de desordem de uma prova equacional* π, denotado por $\mathtt{d}(\pi)$, é a soma do grau de desordem de todas ocorrências das regras Sim, Sub e Con.

O *grau de desvio* de uma prova equacional π, denotado por $\mathtt{D}(\pi)$, é dado pela fórmula

$$\mathtt{D}(\pi) = \mathtt{r}(\pi) + \mathtt{d}(\pi).$$

A seguir, definimos o procedimento de transformação $\rightsquigarrow_{\mathcal{L}_=}$, que usaremos para normalizar as provas equacionais. Assim como fizemos para o procedimento $\rightsquigarrow_{\mathcal{L}_\leq}$, particionamos o procedimento de transformação $\rightsquigarrow_{\mathcal{L}_=}$ em dois conjuntos (disjuntos e exaustivos) $\rightsquigarrow_{\mathsf{ER}}$ e $\rightsquigarrow_{\mathsf{O}}$. O conjunto $\rightsquigarrow_{\mathsf{ER}}$ contém as regras de transformação que são aplicadas para **e**liminar as **r**edundâncias de uma prova, enquanto que o conjunto $\rightsquigarrow_{\mathsf{O}}$ contém as regras de transformação que são aplicadas para **o**rdenar as regras de inferência.

$\rightsquigarrow_{\mathsf{ER}}$ consiste das quatro regras de transformação (esquemas) listadas a seguir:

A regra $\pi_1 \rightsquigarrow^1_{\mathsf{ER}} \pi_2$ elimina a aplicação de Tra em uma instância de $t = t$.

$$\mathsf{Tra}\,\frac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t = t\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ t = t'\end{matrix}}{t = t'} \quad \rightsquigarrow^1_{\mathsf{ER}} \quad \begin{matrix}\Pi_2\\ t = t'\end{matrix}$$

A regra $\pi_1 \rightsquigarrow^2_{\mathsf{ER}} \pi_2$ elimina as ocorrências de instâncias de $t = t$ fora das folhas.

$$\begin{matrix}\Pi\\ t = t\end{matrix} \quad \rightsquigarrow^2_{\mathsf{ER}} \quad \mathtt{Ref}\,\frac{}{t = t}$$

A regra $\pi_1 \rightsquigarrow^3_{\mathsf{ER}} \pi_2$ elimina a ocorrência de um axioma ψ fora das folhas.

$$\begin{matrix}\Pi\\ \psi\end{matrix} \quad \rightsquigarrow^3_{\mathsf{ER}} \quad \mathtt{Axi}\,\frac{}{\psi}$$

A regra $\pi_1 \rightsquigarrow^4_{\mathsf{ER}} \pi_2$ elimina a aplicação de Sim em uma conclusão de Sim.

$$\mathsf{Sim}\,\frac{\mathsf{Sim}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 = t_2\end{matrix}}{t_2 = t_1}}{t_1 = t_2} \quad \rightsquigarrow^4_{\mathsf{ER}} \quad \begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 = t_2\end{matrix}$$

O conjunto $\rightsquigarrow_{\mathsf{O}}$ consiste das seis regras de transformação listadas abaixo.

A regra $\pi_1 \leadsto^1_{\mathsf{O}} \pi_2$ inverte a ordem de aplicação das regras de inferência Sub e Sim, do seguinte modo:

$$\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Sim}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ t_1 = t_2\end{matrix}}{t_2 = t_1}}{\mathtt{s}t_2 = \mathtt{s}t_1} \quad \leadsto^1_{\mathsf{O}} \quad \mathsf{Sim}\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ t_1 = t_2\end{matrix}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_2}}{\mathtt{s}t_2 = \mathtt{s}t_1}$$

A regra $\pi_1 \leadsto^2_{\mathsf{O}} \pi_2$ inverte a ordem de aplicação das regras de inferência Sub e Con, do seguinte modo:

$$\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Con}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 = t'_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Pi_n\\ t_n = t'_n\end{matrix}}{f(t_1, \dots, t_n) = f(t'_1, \dots, t'_n)}}{\mathtt{s}f(t_1, \dots, t_n) = \mathtt{s}f(t'_1, \dots, t'_n)} \quad \leadsto^2_{\mathsf{O}}$$

$$\leadsto^2_{\mathsf{O}} \quad \mathsf{Con}\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 = t'_1\end{matrix}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t'_1} \quad \dots \quad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_n\\ t_n = t'_n\end{matrix}}{\mathtt{s}t_n = \mathtt{s}t'_n}}{f(\mathtt{s}t_1, \dots, \mathtt{s}t_n) = f(\mathtt{s}t'_1, \dots, \mathtt{s}t'_n)}$$

A regra $\pi_1 \leadsto^3_{\mathsf{O}} \pi_2$ inverte a ordem de aplicação das regras de inferência Sub e Tra.

$$\mathsf{Sub}\,\dfrac{\mathsf{Tra}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 = t_2\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 = t_3\end{matrix}}{t_1 = t_3}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_3} \quad \leadsto^3_{\mathsf{O}} \quad \mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 = t_2\end{matrix}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_2} \quad \mathsf{Sub}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ t_2 = t_3\end{matrix}}{\mathtt{s}t_2 = \mathtt{s}t_3}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_3}$$

A regra $\pi_1 \leadsto^4_{\mathsf{O}} \pi_2$ inverte a ordem de aplicação das regras de inferência Sim e Con, do seguinte modo:

$$\mathsf{Sim}\,\dfrac{\mathsf{Con}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 = t'_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Pi_n\\ t_n = t'_n\end{matrix}}{f(t_1, \dots, t_n) = f(t'_1, \dots, t'_n)}}{f(t'_1, \dots, t'_n) = f(t_1, \dots, t_n)} \quad \leadsto^4_{\mathsf{O}}$$

$$\leadsto^4_{\mathsf{O}} \quad \mathsf{Con}\,\dfrac{\mathsf{Sim}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 = t'_1\end{matrix}}{t'_1 = t_1} \quad \dots \quad \mathsf{Sim}\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_n\\ t_n = t'_n\end{matrix}}{t'_n = t_n}}{f(t'_1, \dots, t'_n) = f(t_1, \dots, t_n)}$$

A regra $\pi_1 \leadsto^5_{\mathsf{O}} \pi_2$ inverte a ordem de aplicação das regras de inferência Sim e Tra, do seguinte modo:

$$
{\scriptstyle\mathsf{Sim}}\dfrac{{\scriptstyle\mathsf{Tra}}\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1=t_2\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\Pi_2\\ t_2=t_3\end{matrix}}{t_1=t_3}}{t_3=t_1}
\quad\rightsquigarrow^{5}_{\mathsf{O}}\quad
{\scriptstyle\mathsf{Tra}}\dfrac{{\scriptstyle\mathsf{Sim}}\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1=t_2\end{matrix}}{t_2=t_1}\qquad{\scriptstyle\mathsf{Sim}}\dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ t_2=t_3\end{matrix}}{t_3=t_2}}{t_3=t_1}
$$

A regra $\pi_1 \rightsquigarrow^{6}_{\mathsf{O}} \pi_2$ inverte a ordem de aplicação das regras de inferência Con e Tra, do seguinte modo:

$$
{\scriptstyle\mathtt{Con}}\dfrac{{\scriptstyle\mathtt{Tra}}\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1=t_2\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\Pi_2\\ t_2=t_3\end{matrix}}{t_1=t_3}\qquad\begin{matrix}\Pi'_1\ldots\\ t'_1=t''_1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\Pi'_n\\ t'_m=t''_m\end{matrix}}{f(t_1,t'_1\ldots,t'_m)=f(t_3,t''_1,\ldots,t''_m)}
\quad\rightsquigarrow^{6}_{\mathsf{O}}
$$

$$
\rightsquigarrow^{6}_{\mathsf{O}}\quad
{\scriptstyle\mathtt{Tra}}\dfrac{{\scriptstyle\mathtt{Con}}\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1=t_2\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\Pi'_1\\ t'_1=t''_1\ldots\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\Pi'_m\\ t'_m=t''_m\end{matrix}}{f(t_1,t'_1\ldots,t'_m)=f(t_2,t''_1\ldots,t''_m)}\qquad{\scriptstyle\mathtt{Con}}\dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ t_2=t_3\end{matrix}\qquad{\scriptstyle\mathtt{Ref}}\dfrac{}{t''_1=t''_1}\;\cdots\;{\scriptstyle\mathtt{Ref}}\dfrac{}{t''_m=t''_m}}{f(t_2,t''_1,\ldots,t''_m)=f(t_3,t''_1,\ldots,t''_m)}}{f(t_1,t'_1\ldots,t'_m)=f(t_3,t''_1,\ldots,t''_m)}
$$

Agora que temos definido o procedimento de transformação $\rightsquigarrow_{\mathcal{L}_=}$, seguimos o mesmo roteiro de demonstração do teorema da normalização para a lógica da ordem $\mathcal{L}_{\leq}$. Começamos mostrando que, ao eliminar redundâncias de uma prova equacional, não geramos desordem na árvore.

Lema 2.5.1. *Se π_2 é uma redução de π_1 obtida por meio da aplicação de alguma regra de transformação do procedimento $\rightsquigarrow_{\mathsf{ER}}$, então $\mathtt{d}(\pi_2) \leq \mathtt{d}(\pi_1)$.*

PROVA. Apresentamos apenas o caso de aplicação da regra $\pi_1 \rightsquigarrow^{4}_{\mathsf{ER}} \pi_2$, sendo os demais casos inteiramente análogos à demonstração do Lema 2.5.1.

Nesse caso, π_1 contém uma aplicação de Sim em uma conclusão de Sim. Ou seja, π_1 e π_2 são da forma

$$
\pi_1:\quad
\begin{matrix}
{\scriptstyle\mathsf{Sim}}\dfrac{{\scriptstyle\mathsf{Sim}}\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1=t_2\end{matrix}}{t_2=t_1}}{t_1=t_2}\qquad\begin{matrix}\Pi_2\ldots\\ \varphi_2\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\Pi_n\\ \varphi_n\end{matrix}\\
\hdashline
\Pi'_1\\
\varphi
\end{matrix}
\qquad\qquad
\pi_2:\quad
\begin{matrix}
\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1=t_2\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\Pi_2\ldots\\ \varphi_2\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\Pi_n\\ \varphi_n\end{matrix}\\
\hdashline
\Pi'_1\\
\varphi
\end{matrix}
$$

A árvore π_2 é obtida a partir de π_1, apenas eliminando duas aplicações da regra Sim. Assim, π_2 não contém as possíveis desordens de π_1 que são decorrentes dessas ocorrências de Sim. Portanto $\mathtt{d}(\pi_2) \leq \mathtt{d}(\pi_1)$. ■

Mostramos a seguir que sempre podemos ordenar as regras de inferência de uma prova equacional de acordo com a ordem da forma normal.

Lema 2.5.2. *Seja* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *um conjunto de equações. Se* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_=} \varphi$ *então existe uma prova equacional* Π' *de* φ *a partir de* Γ *tal que* $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

PROVA. Indução no grau de desordem $\mathtt{d}(\Pi)$.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $\mathtt{d}(\Pi) = 1$.

Temos seis casos.

Caso 1: Sub é aplicada abaixo de Sim.

Indução no tamanho de Π.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $t(\Pi) = 2$. Então, Π é da forma

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 = t_2}\ \mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}}{t_2 = t_1}\ \mathsf{Sim}}{\mathbf{s}t_2 = \mathbf{s}t_1}\ \mathsf{Sub}$$

Aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^1_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição $p = 0$, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 = t_2}\ \mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}}{\mathbf{s}t_1 = \mathbf{s}t_2}\ \mathsf{Sub}}{\mathbf{s}t_2 = \mathbf{s}t_1}\ \mathsf{Sim}$$

Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$, pois o grau de desordem das ocorrências de Sim e Sub é 0.

Suponhamos que, para toda prova $\Pi : \varphi$ tal que $t(\Pi) < n$, existe uma prova $\Pi' : \varphi$ tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$. Na verdade, para simplificar a demonstração, podemos assumir que $\mathtt{d}(\Pi) = 0$, já que Π e Π' são provas de φ a partir de Γ e podem ser intercambiadas quando são subárvores de uma prova Π''.

Seja Π uma prova tal que $t(\Pi) = n$.

Π é da forma

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 = t_2\end{matrix}}{t_2 = t_1}\,\mathsf{Sim}[p]}{\mathtt{s}t_2 = \mathtt{s}t_1}\,\mathsf{Sub} & \begin{matrix}\Pi_2 \ldots\\ \varphi_2\end{matrix} & \begin{matrix}\Pi_n\\ \varphi_n\end{matrix}
\end{array}\\
\hdashline
\Pi_1'\\
\varphi
\end{array}
$$

onde $[p]$ indica que a conclusão da regra Sim está na posição p.

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^1_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ t_1 = t_2\end{matrix}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_2}\,\mathsf{Sub}}{\mathtt{s}t_2 = \mathtt{s}t_1}\,\mathsf{Sim} & \begin{matrix}\Pi_2 \ldots\\ \varphi_2\end{matrix} & \begin{matrix}\Pi_n\\ \varphi_n\end{matrix}
\end{array}\\
\hdashline
\Pi_1'\\
\varphi
\end{array}
$$

Por hipótese de indução, $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ são tais que $\mathtt{d}(\Pi_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$, e $\mathtt{d}(\Pi_1') = 0$. Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π, tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

Caso 2: Sub é aplicada abaixo de Con.

Indução no tamanho de Π.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $t(\Pi) = 2$. Então, Π é da forma

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 = t_1'}\,\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)} \quad \ldots \quad \dfrac{}{t_n = t_n'}\,\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}}{f(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1', \ldots, t_n')}\,\mathsf{Con}}{\mathtt{s}f(t_1, \ldots, t_n) = \mathtt{s}f(t_1', \ldots, t_n')}\,\mathsf{Sub}
$$

Aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^2_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição $p = 0$, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_n = t_n'}\,\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}}{\mathtt{s}t_n = \mathtt{s}t_n'}\,\mathsf{Sub} \quad \ldots \quad \dfrac{\dfrac{}{t_n = t_n'}\,\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}}{\mathtt{s}t_n = \mathtt{s}t_n'}\,\mathsf{Sub}}{f(\mathtt{s}t_1', \ldots, \mathtt{s}t_n') = f(\mathtt{s}t_1', \ldots, \mathtt{s}t_n')}\,\mathsf{Con}
$$

Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π, tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$, pois o grau de desordem das ocorrências de Con e Sub é 0.

Suponhamos que, para toda prova $\Pi : \varphi$, tal que $t(\Pi) < n$, existe uma prova $\Pi' : \varphi$ tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

Seja Π uma prova tal que $t(\Pi) = n$.

Π é da forma

$$\begin{array}{c}
\mathsf{Sub}\ \dfrac{\mathsf{Con}[p]\ \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ t_1 = t'_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Pi_n \\ t_n = t'_n\end{matrix}}{f(t_1,\dots,t_n) = f(t'_1,\dots,t'_n)}}{\mathtt{s}f(t_1,\dots,t_n) = \mathtt{s}f(t'_1,\dots,t'_n)} \qquad \begin{matrix}\Pi_{n+1} \dots \\ \varphi_{n+1}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_m \\ \varphi_m\end{matrix} \\ \hdashline
\Pi'_1 \\
\varphi
\end{array}$$

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^2_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$\begin{array}{c}
\mathsf{Con}\ \dfrac{\mathsf{Sub}\ \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ t_1 = t'_1\end{matrix}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t'_1} \quad \dots \quad \mathsf{Sub}\ \dfrac{\begin{matrix}\Pi_n \\ t_n = t'_n\end{matrix}}{\mathtt{s}t_n = \mathtt{s}t'_n}}{f(\mathtt{s}t_1,\dots,\mathtt{s}t_n) \leq f(\mathtt{s}t'_1,\dots,\mathtt{s}t'_n)} \qquad \begin{matrix}\Pi_{n+1} \dots \\ \varphi_{n+1}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_m \\ \varphi_m\end{matrix} \\ \hdashline
\Pi'_1 \\
\varphi
\end{array}$$

Por hipótese de indução, $\Pi_1, \dots, \Pi_m, \Pi'_1$ são tais que $\mathtt{d}(\Pi_i) = 0$, $1 \leq i \leq m$, e $\mathtt{d}(\Pi'_1) = 0$. Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π, tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

Caso 3: Sub é aplicada abaixo de Tra.

Indução no tamanho de Π.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $t(\Pi) = 2$. Então, Π é da forma

$$\mathsf{Sub}\ \dfrac{\mathsf{Tra}\ \dfrac{\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}\ \dfrac{}{t_1 = t_2} \qquad \mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}\ \dfrac{}{t_2 = t_3}}{t_1 = t_3}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_3}$$

Aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^3_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição $p = 0$, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$\mathsf{Tra}\ \dfrac{\mathsf{Sub}\ \dfrac{\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}\ \dfrac{}{t_1 = t_2}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_2} \qquad \mathsf{Sub}\ \dfrac{\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}\ \dfrac{}{t_2 = t_3}}{\mathtt{s}t_2 = \mathtt{s}t_3}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_3}$$

Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$, pois o grau de desordem das ocorrências de Sub é 0.

Suponhamos que, para toda prova $\Pi : \varphi$ tal que $t(\Pi) < n$, temos que $\mathtt{d}(\Pi) = 0$.

Seja Π uma prova tal que $t(\Pi) = n$. Então, Π é da forma

$$\begin{array}{c}
\mathsf{Sub}\ \dfrac{\mathsf{Tra}[p]\ \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ t_1 = t_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2 \\ t_2 = t_3\end{matrix}}{t_1 = t_3}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_3} \qquad \begin{matrix}\Pi_3 \dots \\ \varphi_3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_n \\ \varphi_n\end{matrix} \\ \hdashline
\Pi'_1 \\
\varphi
\end{array}$$

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^3_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 = t_2\end{array}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_2}\,\mathsf{Sub} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\ t_2 = t_3\end{array}}{\mathtt{s}t_2 = \mathtt{s}t_3}\,\mathsf{Sub}}{\mathtt{s}t_1 = \mathtt{s}t_3}\,\mathsf{Tra} \quad \begin{array}{c}\Pi_3 \ldots\\ \varphi_3\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_n\\ \varphi_n\end{array}\\
\hdashline
\Pi'_1\\
\varphi
\end{array}
$$

Por hipótese de indução, $\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \Pi'_1$ são tais que $\mathtt{d}(\Pi_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$, e $\mathtt{d}(\Pi'_1) = 0$. Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

Caso 4: Sim é aplicada abaixo de Con.

Indução no tamanho de Π.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $t(\Pi) = 2$. Então, Π é da forma

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 = t'_1}\,\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)} \quad \ldots \quad \dfrac{}{t_n = t'_n}\,\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}}{f(t_1, \ldots, t_n) = f(t'_1, \ldots, t'_n)}\,\mathsf{Con}}{f(t'_1, \ldots, t'_n) = f(t_1, \ldots, t_n)}\,\mathsf{Sim}
$$

Aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^4_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição $p = 0$, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 = t'_1}\,\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}}{t'_1 = t_1}\,\mathsf{Sim} \quad \ldots \quad \dfrac{\dfrac{}{t_n = t'_n}\,\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}}{t'_n = t_n}\,\mathsf{Sim}}{f(t'_1, \ldots, t'_n) = f(t_1, \ldots, t_n)}\,\mathsf{Con}
$$

Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$, pois o grau de desordem das ocorrências de Con e Sim é 0.

Suponhamos que, para toda prova $\Pi : \varphi$, tal que $t(\Pi) < n$, existe uma prova $\Pi' : \varphi$ tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

Seja Π uma prova tal que $t(\Pi) = n$.

Π é da forma

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 = t'_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Pi_n\\ t_n = t'_n\end{array}}{f(t_1, \ldots, t_n) = f(t'_1, \ldots, t'_n)}\,\mathsf{Con}[p]}{f(t'_1, \ldots, t'_n) = f(t_1, \ldots, t_n)}\,\mathsf{Sim} \quad \begin{array}{c}\Pi_{n+1} \ldots\\ \varphi_{n+1}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_m\\ \varphi_m\end{array}\\
\hdashline
\Pi'_1\\
\varphi
\end{array}
$$

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^4_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\mathsf{Sim}\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 = t'_1\end{array}}{t'_1 = t_1} \quad \ldots \quad \mathsf{Sim}\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_n\\ t_n = t'_n\end{array}}{t'_n = t_n}}{f(t'_1, \ldots, t'_n) \leq f(t_1, \ldots, t_n)}\,\mathsf{Con} \qquad \begin{array}{c}\Pi_{n+1} \ldots\\ \varphi_{n+1}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_m\\ \varphi_m\end{array}\\
\hdashline
\Pi'_1\\
\varphi
\end{array}$$

Por hipótese de indução, $\Pi_1, \ldots, \Pi_m, \Pi'_1$ são tais que $\mathtt{d}(\Pi_i) = 0$, $1 \leq i \leq m$, e $\mathtt{d}(\Pi'_1) = 0$. Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

Caso 5: Sim é aplicada abaixo de Tra.

Indução no tamanho de Π.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $t(\Pi) = 2$. Então, Π é da forma

$$\mathsf{Sim}\,\dfrac{\mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}\,\dfrac{}{t_1 = t_2} \qquad \mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}\,\dfrac{}{t_2 = t_3}}{t_1 = t_3}}{t_3 = t_1}$$

Aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^5_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição $p = 0$, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$\mathsf{Tra}\,\dfrac{\mathsf{Sim}\,\dfrac{\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}\,\dfrac{}{t_1 = t_2}}{t_2 = t_1} \qquad \mathsf{Sim}\,\dfrac{\mathsf{Axi\ (ou\ Ref)}\,\dfrac{}{t_2 = t_3}}{t_3 = t_2}}{t_3 = t_1}$$

Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$, pois o grau de desordem das ocorrências de Sim é 0.

Suponhamos que, para toda prova $\Pi : \varphi$ tal que $t(\Pi) < n$, temos que $\mathtt{d}(\Pi) = 0$.

Seja Π uma prova tal que $t(\Pi) = n$.

Π é da forma

$$\begin{array}{c}
\mathsf{Sim}\,\dfrac{\mathsf{Tra}[p]\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 = t_2\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_2\\ t_2 = t_3\end{array}}{t_1 = t_3}}{t_3 = t_1} \qquad \begin{array}{c}\Pi_3 \ldots\\ \varphi_3\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_n\\ \varphi_n\end{array}\\
\hdashline
\Pi'_1\\
\varphi
\end{array}$$

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^5_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$
\begin{array}{c}
\textsf{Tra}\,\dfrac{\textsf{Sim}\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 = t_2\end{array}}{t_2 = t_1} \qquad \textsf{Sim}\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\ t_2 = t_3\end{array}}{t_3 = t_2}}{t_3 = t_1} \qquad \begin{array}{c}\Pi_3 \ldots\\ \varphi_3\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_n\\ \varphi_n\end{array}\\
\hdashline
\Pi'_1\\
\varphi
\end{array}
$$

Por hipótese de indução, $\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \Pi'_1$ são tais que $\mathtt{d}(\Pi_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$, e $\mathtt{d}(\Pi'_1) = 0$. Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

Caso 6: $\textsf{Con}$ é aplicada abaixo de $\textsf{Tra}$.

Indução no tamanho de Π.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $t(\Pi) = 2$. Então, Π é da forma

$$
\textsf{Con}\,\dfrac{\textsf{Tra}\,\dfrac{\textsf{Axi (ou Ref)}\,\dfrac{}{t_1 = t_2} \qquad \textsf{Axi (ou Ref)}\,\dfrac{}{t_2 = t_3}}{t_1 = t_3} \qquad \textsf{Axi (ou Ref)}\,\dfrac{}{t'_1 = t''_1} \qquad \textsf{Axi (ou Ref)}\,\dfrac{}{t'_m = t''_m}}{f(t_1, t'_1 \ldots, t'_m) = f(t_3, t''_1 \ldots, t''_m)}
$$

Aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^{6}_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição $p = 0$, de Π, e obtemos a seguinte redução Π', onde $\textsf{Reg}$ pode ser $\textsf{Axi}$ ou $\textsf{Ref}$ (de acordo com Π):

$$
\textsf{Tra}\,\dfrac{\textsf{Con}\,\dfrac{\textsf{Reg}\,\dfrac{}{t_1 = t_2} \quad \textsf{Reg}\,\dfrac{}{t'_1 = t''_1 \ldots} \quad \textsf{Reg}\,\dfrac{}{t'_m = t''_m}}{f(t_1, t'_1 \ldots, t'_m) = f(t_2, t''_1 \ldots, t''_m)} \qquad \textsf{Con}\,\dfrac{\textsf{Reg}\,\dfrac{}{t_2 = t_3} \quad \textsf{Ref}\,\dfrac{}{t''_1 = t''_1} \cdots \quad \textsf{Ref}\,\dfrac{}{t''_m = t''_m}}{f(t_2, t''_1, \ldots, t''_m) = f(t_3, t''_1, \ldots, t''_m)}}{f(t_1, t'_1 \ldots, t'_m) = f(t_3, t''_1, \ldots, t''_m)}
$$

Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$, pois o grau de desordem das ocorrências de $\textsf{Con}$ é 0.

Suponhamos que, para toda prova $\Pi : \varphi$ tal que $t(\Pi) < n$, temos que $\mathtt{d}(\Pi) = 0$.

Seja Π uma prova tal que $t(\Pi) = n$.

Π é da forma

$$
\begin{array}{c}
\textsf{Con}\,\dfrac{\textsf{Tra}[p]\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 = t_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ t_2 = t_3\end{array}}{t_1 = t_3} \qquad \begin{array}{c}\Pi'_1 \ldots\\ t'_1 = t''_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi'_m\\ t'_m = t''_m\end{array}}{f(t_1, t'_1 \ldots, t'_m) = f(t_3, t''_1 \ldots, t''_m)} \qquad \begin{array}{c}\Pi_3 \ldots\\ \varphi_3\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_n\\ \varphi_n\end{array}\\
\hdashline
\Pi'_0\\
\varphi
\end{array}
$$

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^{6}_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$
\begin{array}{c}
\textsf{Tra}\,\dfrac{\textsf{Con}\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 = t_2\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi'_1\\ t'_1 = t''_1 \ldots\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi'_m\\ t'_m = t''_m\end{array}}{f(t_1, t'_1, \ldots, t'_m) = f(t_2, t''_1, \ldots, t''_m)} \qquad \textsf{Con}\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\ t_2 = t_3\end{array} \quad \textsf{Ref}\,\dfrac{}{t''_1 = t''_1} \cdots \quad \textsf{Ref}\,\dfrac{}{t''_m \leq t''_m}}{f(t_2, t''_1, \ldots, t''_m) = f(t_3, t''_1, \ldots, t''_m)}}{f(t_1, t''_1, \ldots, t''_m) = f(t_3, t''_1, \ldots, t''_m)} \qquad \begin{array}{c}\Pi_3 \ldots\\ \varphi_3\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_n\\ \varphi_n\end{array}\\
\hdashline
\Pi'_0\\
\varphi
\end{array}
$$

Por hipótese de indução, $\Pi_1, \dots, \Pi_n, \Pi'_1, \dots, \Pi'_m, \Pi'_0$ são tais que $\mathtt{d}(\Pi_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$, $\mathtt{d}(\Pi'_i) = 0$, $1 \leq i \leq m$, e $\mathtt{d}(\Pi'_0) = 0$. Assim, $\Pi' : \varphi$ é uma redução de Π tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

Suponhamos, agora, que para toda prova $\Pi : \varphi$ tal que $\mathtt{d}(\Pi) < n$, existe uma prova $\Pi' : \varphi$ tal que $\mathtt{d}(\Pi') = 0$.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $\mathtt{d}(\Pi) = n$.

A partir das folhas de Π, percorremos a árvore em direção à raiz (por qualquer ramo) e identificamos a primeira desordem. Aplicamos a regra de transformação correspondente a esta desordem e obtemos uma redução Π' tal que $\mathtt{d}(\Pi') < n$. Mostraremos apenas para um caso, sendo os demais casos análogos a este.

Suponhamos que a desordem seja uma aplicação de Sim abaixo de Con.

Π é da forma

$$\begin{array}{c}
\mathsf{Sim}\ \dfrac{\mathsf{Con}[p]\ \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & & \Pi_n \\ t_1 = t'_1 & \dots & t_n = t'_n\end{matrix}}{f(t_1, \dots, t_n) = f(t'_1, \dots, t'_n)}}{f(t'_1, \dots, t'_n) = f(t_1, \dots, t_n)} \quad \begin{matrix}\Pi_{n+1} \dots & \Pi_m \\ \varphi_{n+1} & \varphi_m\end{matrix} \\
\hdashline
\Pi'_1 \\
\varphi
\end{array}$$

Note que o grau de desordem dessa ocorrência de Sim, em Π, é 1, pois Con está aplicada acima dessa ocorrência e tomamos a primeira desordem, ou seja, não existem ocorrências da regra Tra e nem da regra Con nas subárvores $\Pi_1, \dots, \Pi_n$.

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^4_{\mathsf{O}} \pi_2$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$\begin{array}{c}
\mathsf{Con}\ \dfrac{\begin{matrix}\mathsf{Sim}\ \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ t_1 = t'_1\end{matrix}}{t'_1 = t_1} & \dots & \mathsf{Sim}\ \dfrac{\begin{matrix}\Pi_n \\ t_n = t'_n\end{matrix}}{t'_n = t_n}\end{matrix}}{f(t'_1, \dots, t'_n) = f(t_1, \dots, t_n)} \quad \begin{matrix}\Pi_{n+1} \dots & \Pi_m \\ \varphi_{n+1} & \varphi_m\end{matrix} \\
\hdashline
\Pi'_1 \\
\varphi
\end{array}$$

Agora, em Π', o grau de desordem de cada uma dessas ocorrências de Sim é 0. Como o restante da árvore permaneceu inalterado, ao ivertermos a ordem de Sim e Con, diminuímos o grau de desordem da prova, ou seja, $\mathtt{d}(\Pi') < \mathtt{d}(\Pi) = n$.

Portanto, por hipótese de indução, existe uma prova $\Pi'' : \varphi$ tal que $\mathtt{d}(\Pi'') = 0$. ■

Finalmente, encerramos este capítulo com a demonstração do teorema da normalização para a lógica da igualdade $\mathcal{L}_=$.

Teorema 2.5.1 (Normalização)**.** *Seja* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *um conjunto de equações. Se* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_=} \varphi$ *então existe uma prova equacional* Π' *(de* φ *a partir de* Γ*) tal que* $\mathtt{D}(\Pi') = 0$.

Prova. Seja $\Pi : \varphi$ uma prova que não está em forma normal. Pelo Lema 2.5.2, podemos assumir que $\mathtt{d}(\Pi) = 0$, ou seja, Π contém apenas redundâncias. Pelo Lema 2.5.1, as reduções obtidas a partir de Π, por meio das regras de transformação do procedimento $\rightsquigarrow_{\mathsf{ER}}$, não contêm desordens. Logo, basta mostrar que podemos eliminar todas as redundâncias de Π.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $\mathtt{r}(\Pi) = 1$. Mostraremos apenas o caso de redundância em que a regra Sim é aplicada em uma conclusão de Sim, pois os demais casos são inteiramente análogos ao teorema da normalização para a lógica da ordem $\mathcal{L}_\leq$. Omitimos os detalhes da rotina de indução, no tamanho de Π, mas o seguinte argumento deve deixar claro que a redundância pode ser eliminada.

Π é da forma

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
\mathsf{Sim}\,\dfrac{\mathsf{Sim}[p]\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 = t_2\end{array}}{t_2 = t_1}}{t_1 = t_2} & \begin{array}{c}\Pi_2 \ldots\\ \varphi_2\end{array} & \begin{array}{c}\Pi_n\\ \varphi_n\end{array}
\end{array}\\
\hdashline
\Pi'_1\\
\varphi
\end{array}$$

Nesse caso, aplicamos a regra de transformação $\pi_1 \rightsquigarrow^4_{\mathsf{ER}} \pi_2$ na posição p, de Π, e obtemos a seguinte redução Π':

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}\Pi_1\\ t_1 = t_2\end{array} & \begin{array}{c}\Pi_2 \ldots\\ \varphi_2\end{array} & \begin{array}{c}\Pi_n\\ \varphi_n\end{array}
\end{array}\\
\hdashline
\Pi'_1\\
\varphi
\end{array}$$

Assim, $\mathtt{r}(\Pi') = 0$ pois a única aplicação de Sim em uma conclusão de Sim, que havia em Π, foi eliminada.

Suponhamos agora que, para toda prova $\Pi : \varphi$ tal que $\mathtt{r}(\Pi) < n$, existe uma prova $\Pi' : \varphi$ tal que $\mathtt{r}(\Pi') = 0$.

Seja $\Pi : \varphi$ uma prova tal que $\mathtt{r}(\Pi) = n$.

A partir das folhas de Π, percorremos a árvore em direção à raiz (por qualquer ramo) e identificamos a primeira redundância. Aplicamos a regra de transformação correspondente a essa redundância e obtemos uma redução Π'. Assim como na base da indução, é imediato verificar $\mathtt{r}(\Pi') < n$, por isso omitimos os detalhes. Por hipótese de indução, existe uma prova $\Pi'' : \varphi$ tal que $\mathtt{r}(\Pi'') = 0$. Pelo Lema 2.5.1, $\mathtt{d}(\Pi'') = 0$ pois Π'' foi obtida a partir de Π por meio, apenas, das regras de transformação do procedimento $\rightsquigarrow_{\mathsf{ER}}$. Portanto $\mathtt{D}(\Pi'') = 0$ e, pelo Lema 1.3.1, Π'' está em forma normal. $\blacksquare$

Capítulo 3

Álgebra relacional, conexões de Galois e a aritmética das relações

A *teoria das álgebras relacionais*, ou simplesmente *álgebra relacional* (AR), é a teoria algébrica proposta inicialmente por Tarski [Tar41] como uma fundamentação do cálculo das relações binárias. Em sua versão mais difundida, AR é apresentada como uma teoria equacional cujas operações primitivas são as principais operações utilizadas por Peirce e Schröder na sua formulação do Cálculo das Relações Binárias (de primeira ordem).

Em [Pei73], Peirce antecipou que provar teoremas do Cálculo Relacional poderia ser uma tarefa extremamente complicada, aparentemente sendo necessário o uso de métodos *ad hoc* para a descoberta das provas dos teoremas do sistema. O prognóstico feito por Peirce foi justificado por Tarski quando anunciou, em [Tar53], a prova de que a aritmética de AR é, de fato, indecidível. Assim, não existe um *algoritmo* para determinar se uma dada equação da AR — i.e., uma equação envolvendo elementos arbitrários de uma álgebra relacional e as operações sobre estes – é um teorema. Na falta de um método de decisão para AR, a tarefa de demonstrar propriedades aritméticas das relações binárias, expressas nos teoremas da AR, torna-se, como previu Peirce, muito difícil. Este fato acaba impulsionando a procura por métodos/sistemas/técnicas que possam auxiliar, tanto quanto possível, esta tarefa. Para citar alguns, *dedução natural* [Wad75], *cálculo de sequentes* [Mad83], *tablôs* [OP10] e *diagramas* [FVVV06, FVVV09] são considerados métodos bem sucedidos nesse sentido.

Este capítulo enquadra-se nessa procura por recursos que proporcionem maior flexibilidade à aritmética das relações.

Propomos um sistema axiomático alternativo para a AR, denominado `Á`*lgebra* `R`*elacional via* `C`*onexões de* `G`*alois* (`ARCG`), cujas características peculiares são: a lógica da ordem, ao invés da usual lógica da igualdade, como formalismo subjacente; um conjunto de operações primitivas diferentes das usualmente utilizadas na definição de AR; e um conjunto de axiomas que, para cada operação, estabelece uma conexão de Galois entre conjuntos parcialmente ordenados definidos sobre relações binárias.

Nossa experiência com este sistema tem mostrado que as provas dos teoremas da AR tendem a ser "mais determinísticas" do que, por exemplo, as usuais provas equacionais.

Como o enfoque deste capítulo é a aritmética das relações, optamos por apresentar `ARCG` como um formalismo mais matemático do que lógico, como é usual nos trabalhos sobre AR. Uma apresentação estritamente formal de `ARCG`, com sintaxe, semântica, mecanismo de inferência etc., pressupõe uma formalização da noção de conexão de Galois que, pelo que encontramos na bibliografia especializada, ainda não foi feita e é matéria para um trabalho futuro.

Na Seção 3.1, apresentamos os sistemas axiomáticos para AR mais difundidos na literatura, destacando algumas características de cada um para, mais adiante, podermos compará-los com `ARCG`. Na Seção 3.2, apresentamos o conceito de *conexão de Galois* e mostramos algumas de suas propriedades básicas. Finalmente, na Seção 3.3, introduzimos o sistema `ARCG` e exploramos a sua aplicação na investigação das propriedades aritméticas das relações binárias. Ainda, provamos a consistência de `ARCG` e derivamos os axiomas dos sistemas apresentados na primeira seção.

3.1 Alguns sistemas axiomáticos para a AR

Como já mencionamos, vários sistemas têm sido propostos no esforço de tornar a aritmética de AR mais palatável. Na verdade, devido ao resultado de Tarski de 1953, cuja prova completa só foi apresentada em [GT87], qualquer sistema apresentará severas limitações. Nesse sentido, `ARCG` não é diferente e também possui suas limitações. No entanto, `ARCG` acrescenta técnicas alternativas de prova ao repertório de técnicas já existentes, contribuindo com a investigação das propriedades aritméticas das relações.

Na nossa opinião, os trabalhos que mais se aproximam da abordagem que adotamos para definir a AR, via `ARCG`, são [CT51], [JT93] e [Dij90]. Nesta seção, apresentamos estes sistemas e destacamos alguns de seus aspectos mais proeminentes.

Antecipamos aqui que a AR é uma *álgebra booleana com operadores.* Assim sendo, podemos definir uma ordem a partir da igualdade e de alguma das usuais operações binárias booleanas, pela bem conhecida equivalência:

$$a \leq b \text{ se, e somente se, } a = a \cdot b,$$

onde $\cdot$ é o ínfimo de a e b, ou ainda,

$$a \leq b \text{ se, e somente se, } b = a + b.$$

onde $+$ é o supremo de a e b.

Embora muitos trabalhos definam a AR por meio de equações, as propriedades ariméticas da AR podem ser expressas por meio da relação de ordem, inerente às álgebras booleanas, sendo conveniente, em alguns casos, usar as inequações como fórmulas. Como veremos, em `ARCG`, a relação de ordem desempenha um papel fundamental na formulação dos axiomas, sendo as fórmulas do sistema, predominantemente, constituídas por inequações.

3.1.1 O sistema `CT` (Chin e Tarski)

Em [CT51], Chin e Tarski propõem um sistema, que denominamos `CT`, baseado na lógica equacional, para definir a classe das álgebras relacionais.

Uma álgebra

$$\mathfrak{A} = (A,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ;\ ,\ ^{-},\ ^{\smile},\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1'\ ),$$

do tipo $(2,2,2,1,1,0,0,0)$, é uma *álgebra relacional* se, para todo $r, s, t \in A$, os seguintes axiomas são satisfeitos:

$$
\begin{array}{ll}
(CT_1) & (A,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ^{-}\ ,\ 0\ ,\ 1\ )\text{ é uma álgebra Booleana} \\
(CT_2) & (r\ ;\ s)\ ;\ t = r\ ;\ (s\ ;\ t) \\
(CT_3) & (r + s)\ ;\ t = (r\ ;\ t) + (s\ ;\ t) \\
(CT_4) & r\ ;\ 1' = 1'\ ;\ r = r \\
(CT_5) & r^{\smile\smile} = r \\
(CT_6) & (r + s)^{\smile} = r^{\smile} + s^{\smile} \\
(CT_7) & (r\ ;\ s)^{\smile} = s^{\smile}\ ;\ r^{\smile} \\
(CT_8) & (r^{\smile}\ ;\ \overline{(r\ ;\ s)}\ ) + \overline{s} = \overline{s}
\end{array}
$$

Observamos que todos os axiomas de CT são equações e, nesse contexto, a aritmética da AR é feita essencialmente sobre a lógica equacional, onde as equações CT_i, $2 \leq i \leq 8$, fazem parte dos chamados axiomas não-lógicos da teoria. Em termos lógicos, dizemos que esse tipo de sistema constitui uma *teoria equacional*. Se, por um lado, a formulação da AR como uma teoria equacional fornece imediatamente várias propriedades algébricas da classe de modelos da teoria — é fechada para subálgebras, imagem homomórfica e produto direto [BS81] — por outro, a restrição ao uso da regra de substituição de termos por termos iguais impõe uma rigidez à investigação aritmética, em particular, à derivação de fórmulas. Esta dificuldade fica evidente quando notamos que provas equacionais detalhadas raramente são apresentadas, mesmo em [CT51].

3.1.2 O sistema JT (Jónsson e Tsinakis)

Em [JT93], Jónsson e Tsinakis propõem um sistema, que denominamos JT, baseado na lógica equacional acrescida de equivalências entre equações, para definir a classe das álgebras relacionais. Mais especificamente, eles tratam a aritmética da AR dentro do escopo (mais geral) das álgebras Booleanas com operadores de resíduo (ou conjugados).

Uma álgebra

$$\mathfrak{A} = (A,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ;\ ,\ \rhd\ ,\ \lhd\ ,\ ^{-},\ ^{\smile},\ 0\ ,\ 1'\ ),$$

do tipo $(2,2,2,2,2,1,1,0,0)$, é uma *álgebra relacional* se, para todo $r,s,t \in A$:

(JT_1)	$(A,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ^{-}\ ,\ 0\ ,\ 0\ ^{-})$ é uma álgebra Booleana
(JT_2)	$(r\ ;\ s)\cdot t =\ 0$ sse $(r \rhd t)\cdot s =\ 0$ sse $(t \lhd s)\cdot r =\ 0$
(JT_3)	$r\ ;\ 1' \ =\ 1'\ ;r = r$
(JT_4)	$r \rhd s = r^{\smile}\ ; s$
(JT_5)	$r \lhd s = r\ ;\ s^{\smile}$

Observamos que a definição de JT_2 contém duas equivalências entre equações, o que torna mais aparente a frequente aplicação de equivalências na demonstração das propriedades aritméticas da AR.

Aplicando os axiomas JT_4 e JT_5, o axioma JT_2 pode ser escrito usando os conceitos primitivos de `CT`, como a seguinte sequência de equivalências:

$$(r\ ;\ s)\cdot t =\ 0 \text{ sse } (r^{\smile}\ ;\ t)\cdot s =\ 0 \text{ sse } (t\ ;\ s^{\smile})\cdot r =\ 0$$

Estas equivalências fornecem certa flexibilidade na hora de provar resultados importantes da aritmética da AR [SS85].

Em termos lógicos, dizemos que esse tipo de sistema constitui uma teoria equacional estendida por *equivalências*. Isto é, formalmente, `JT` pode ser visto como um sistema cujas fórmulas são dadas em duas categorias: equações e equivalências entre equações; e o mecanismo de inferência inclui os axiomas, as regras da lógica equacional e regras para a derivação de equivalências. De um outro ponto de vista, podemos afirmar que o sistema `JT` define a AR não apenas por meio de axiomas $(JT_1, JT_3 - JT_5)$, mas também por meio das seguintes regras não-lógicas, provenientes de JT_2:

$$\frac{(r\ ;\ s)\cdot t =\ 0}{(r \rhd t)\cdot s =\ 0}\ ,\qquad \frac{(r \rhd t)\cdot s =\ 0}{(t \lhd s)\cdot r =\ 0}\ ,\qquad \frac{(t \lhd s)\cdot r =\ 0}{(r\ ;\ s)\cdot t =\ 0}$$

3.1.3 O sistema `D` (Dijkstra)

Em [Dij90], Dijkstra propõe uma maneira alternativa de definir a AR. Embora não esteja rigorosamente formalizado, seu sistema, que denominamos `D`, é baseado na lógica da ordem e na lógica equacional, estendidas por equivalências.

Uma álgebra

$$\mathfrak{A} = (A,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ;\ ,\ ^{-},\ ^{\bar{\smile}},\ 0\ ,\ 1'\ ,\ 0'\ )$$

do tipo $(2,2,2,1,1,0,0,0)$ é uma *álgebra relacional* se, para todo $r, s, t \in A$:

(D_1)	$(A,\ +,\ \cdot,\ ^{-},\ 0,\ 0^{-})$ é uma álgebra Booleana
(D_2)	$r \leq s^{\bar{\smile}}$ sse $s \leq r^{\bar{\smile}}$
(D_3)	$r^{\bar{\smile}} \leq s$ sse $s^{\bar{\smile}} \leq r$
(D_4)	$r \;;\; (s \;;\; t) = (r \;;\; s) \;;\; t$
(D_5)	$r \;;\; s \leq 0'$ sse $r \leq s^{\bar{\smile}}$
(D_6)	$(r^{\bar{\smile}} \;;\; s^{\bar{\smile}})^{\bar{\smile}} = (s^{-} \;;\; r^{-})^{-}$

Observamos que alguns dos axiomas de `D` são equações e outros são equivalências entre inequações. Na nossa opinião, esse caráter híbrido de `D` torna-o mais adequado para provar os teoremas da AR a partir dos axiomas, pois proporciona um ambiente aritmético ainda mais maleável do que `JT`.

Em termos lógicos, dizemos que esse tipo de sistema constitui uma teoria mereológica estendida por *equivalências*. Isto é, formalmente, `D` pode ser visto como um sistema cujas fórmulas são dadas em três categorias: inequações, equações (que sempre estão presentes quando temos inequações, ver Cap. 2) e equivalências entre inequações; e o mecanismo de inferência inclui os axiomas, as regras da lógica da ordem e regras para a derivação de equivalências. Assim como acontece no sistema `JT`, além das regras lógicas, podemos considerar que os axiomas D_2 e D_3 provêem regras não-lógicas para o sistema:

$$\frac{r \leq s^{\bar{\smile}}}{s \leq r^{\smile}} \qquad \frac{r^{\bar{\smile}} \leq s}{s^{\smile} \leq r}$$

Em `ARCG`, procuramos reunir algumas características dos sistemas apresentados nesta seção, de maneira conveniente, e agregamos a ideia de que algumas operações podem ser definidas por meio de conexões de Galois. Tomamos essas operações como primitivas e apresentamos um conjunto de axiomas, a partir dos quais a tarefa de provar teoremas da AR torna-se menos indigesta.

Antes de introduzirmos `ARCG`, apresentamos, na próxima seção, o conceito de conexão de Galois e demonstramos algumas de suas propriedades básicas.

3.2 Conexões de Galois

Nossa aplicação da noção de *conexão de Galois* parece corroborar a seguinte afirmação de M. Erné *et al*, em [EKMS06]:

> If one recognizes that a Galois connection is involved in a phenomenon that may be relatively complex, then many aspects of that phenomenon immediatly become clear, and thus, the whole situation typically becomes much easier to understand.

Informalmente, no nosso caso, reconhecemos que algumas operações relacionais podem atuar como funções entre duas álgebras relacionais, organizadas como *posets*, de maneira a vincular as relações de ordem com a aplicação dessas operações. Tomamos essas operações como primitivas e fixamos axiomas que estabelecem as conexões de Galois. A partir daí, aplicamos esta noção, além de algumas propriedades, para derivar teoremas da AR, atenuando algumas das dificuldades encontradas em outros sistemas.

O estudo sobre conexões de Galois vai muito além do que apresentamos aqui. O leitor interessado em aprofundar-se um pouco mais, tanto no estudo do conceito e propriedades quanto nas suas aplicações, principalmente na ciência da computação e na matemática, pode consultar, por exemplo, [Aar92] e [EKMS06].

Sejam $\mathfrak{P} = \langle P, \leq_P \rangle$ e $\mathfrak{Q} = \langle Q, \leq_Q \rangle$ conjuntos parcialmente ordenados e $f : P \to Q$ e $g : Q \to P$ funções.

Dizemos que $\langle \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, f, g \rangle$ é uma *conexão de Galois* (CG) se

$$fx \leq_Q y \text{ iff } x \leq_P gy, \quad (\mathsf{CG})$$

para todo $x \in P$ e $y \in Q$. Neste caso, dizemos que f é o *adjunto inferior* de g e g é o *adjunto superior* de f.

A condição (CG) garante que o adjunto inferior é a *inversa parcial* do adjunto superior e vice-versa, como pode ser confirmado pela seguinte proposição.

Proposição 3.2.1. (a) *$x \leq_P gfx$, para todo $x \in P$.*
(b) *$fgy \leq_Q y$, para todo $y \in Q$.*

Prova. (a) Para todo $x \in P$, temos:

$$\begin{array}{l} x \leq_P gfx \\ \Uparrow \ (\mathsf{CG}) \\ fx \leq_Q fx, \\ \text{ref. de } \leq_Q . \end{array}$$

(b) Inteiramente análoga à demonstração de (a), por (CG) e reflexividade de $\leq_P$. ■

A Proposição 3.2.1 tem algumas consequências imediatas interessantes. A primeira é que f e g preservam a ordem.

Proposição 3.2.2. (a) *Para todo $x, y \in P$, se $x \leq_P y$, então $fx \leq_Q fy$.*
(b) *Para todo $x, y \in Q$, se $x \leq_Q y$, então $gx \leq_P gy$.*

Prova. (a) Para todo $x, y \in P$:

$$\begin{array}{l} fx \leq_Q fy \\ \Uparrow \ \text{(CG)} \\ x \leq_P gfy \\ \Uparrow \ \text{Prop. 3.2.1 e trans. de } \leq_P \\ x \leq_P y, \\ \text{hip.} \end{array}$$

(b) Inteiramente análoga à prova de (a). ■

Uma consequência interessante de (CG), juntamente com a Proposição 3.2.1, é que, para conjuntos arbitrários $A \subseteq P$ e $B \subseteq Q$, f é distributiva sobre o supremo de A e g é distributiva sobre o ínfimo de B, quando estes existem.

Proposição 3.2.3. (a) *Seja $\{x_i : i \in I\} \subseteq P$. Se $\bigvee\{x_i : i \in I\}$ existe, então*

$$f \bigvee\{x_i : i \in I\} =_Q \bigvee\{fx_i : i \in I\}$$

(b) *Seja $\{y_i : i \in I\} \subseteq Q$. Se $\bigwedge\{y_i : i \in I\}$ existe, então*

$$g \bigwedge\{y_i : i \in I\} =_P \bigwedge\{gy_i : i \in I\}$$

Prova. (a) Para todo $\{x_i : i \in I\} \subseteq P$, temos:

$$\begin{array}{l} f \bigvee\{x_i : i \in I\} \leq_Q \bigvee\{fx_i : i \in I\} \\ \Uparrow \ \text{(CG)} \\ \bigvee\{x_i : i \in I\} \leq_P g \bigvee\{fx_i : i \in I\} \\ \Uparrow \ \text{def. de sup.} \\ x_i \leq_P g \bigvee\{fx_i : i \in I\}, \text{ para todo } i \in I \\ \Uparrow \ \text{(CG)} \\ fx_i \leq_Q \bigvee\{fx_i : i \in I\}, \text{ para todo } i \in I, \\ \text{def. de sup.} \end{array}$$

A prova da outra inequação é feita da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{l}
\bigvee\{fx_i : i \in I\} \leq_Q f \bigvee\{x_i : i \in I\} \\
\Uparrow \ \text{def. de sup.} \\
fx_i \leq_Q f \bigvee\{x_i : i \in I\}, \ \text{para todo } i \in I \\
\Uparrow \ (\mathsf{CG}) \\
x_i \leq_P gf \bigvee\{x_i : i \in I\}, \ \text{para todo } i \in I \\
\Uparrow \ \text{def. de sup. e trans. de } \leq_P \\
\bigvee\{x_i : i \in I\} \leq_P gf \bigvee\{x_i : i \in I\}, \\
\text{Prop. 3.2.1.}
\end{array}
$$

(b) Inteiramente análoga à prova de (a), por (CG). ■

Uma consequência da Proposição 3.2.3 é que f preserva o menor elemento (0) e g preserva o maior elemento (1), quando estes existem.

Proposição 3.2.4. (a) *Se* $0 \leq_P x$*, para todo* $x \in P$*, então* $f0 \leq_Q y$*, para todo* $y \in Q$*.*
(b) *Se* $y \leq_Q 1$*, para todo* $y \in Q$*, então* $x \leq_P g1$*, para todo* $x \in P$*.*

Prova. (a)

$$
\begin{array}{l}
f0 \leq_Q y, \ \text{para todo } y \in Q, \\
\Uparrow \ \text{def. de sup.} \\
f0 =_Q \bigvee\{fx_i : i \in \emptyset\} \\
\Uparrow \ \text{Prop. 3.2.3} \\
0 =_P \bigvee\{x_i : i \in \emptyset\} \\
\Uparrow \ \text{def. de sup.} \\
0 \leq_P x, \ \text{para todo } x \in P, \\
\text{hip.}
\end{array}
$$

(b) Inteiramente análoga à prova de (a), pela definição de mci. ■

As Proposições 3.2.3 e 3.2.2 podem ser interpretadas como as condições necessárias para que uma função entre posets tenha adjuntos superior e inferior. Agora, mostramos que essas proposições são também suficientes, quando existem o supremo e o ínfimo de um certo tipo de conjunto.

Proposição 3.2.5. *Sejam* $\mathfrak{P} = \langle P, \leq_P\rangle$ *e* $\mathfrak{Q} = \langle Q, \leq_Q\rangle$ *posets.* (a) *Seja* $f : P \to Q$ *uma função tal que, para todo* $y \in Q$*, existe* $\bigvee\{z \in P : fz \leq_Q y\} \in P$*. Então,* f *tem um adjunto superior se, e somente se:*

(i) $f \bigvee\{z \in P : fz \leq_Q y\} \leq_Q y$ *e*

(ii) f *preserva a ordem.*

(b) *Seja* $g : Q \to P$ *uma função tal que, para todo* $x \in P$, *existe* $\bigwedge\{z \in Q : x \leq_P gz\} \in Q$. *Então,* g *tem um adjunto inferior se, e somente se:*

(i) $x \leq_P g \bigwedge\{z \in P : fz \leq_Q y\}$ *e*

(ii) g *preserva a ordem.*

Prova. (a) A implicação da esquerda para a direita segue diretamente das proposições 3.2.3 e 3.2.2. Para provar a implicação inversa, definimos $g : Q \to P$ tal que $gy = \bigvee\{z \in P : fz \leq_Q y\}$, para todo $y \in Q$. Dado $x \in P$ e $y \in Q$, temos:

$$\begin{array}{l} x \leq_P gy \\ \Uparrow \ \text{def. de } g \\ x \leq_P \bigvee\{z \in P : fz \leq_Q y\} \\ \Uparrow \ \text{def. de sup.} \\ fx \leq_Q y, \end{array}$$

ou seja, provamos que $fx \leq_Q y \Rightarrow x \leq_P gy$. A seguir, segue a prova que $x \leq_P gy \Rightarrow fx \leq_Q y$:

$$\begin{array}{l} fx \leq_Q y \\ \Uparrow \ \text{(i)} \\ fx \leq_Q f \bigvee\{z \in P : fz \leq_Q y\} \\ \Uparrow \ \text{(ii)} \\ x \leq_P \bigvee\{z \in P : fz \leq_Q y\} \\ \Uparrow \ \text{def. de } g \\ x \leq_P gy. \end{array}$$

(b) Inteiramente análoga à prova de (a). ■

3.3 Álgebra relacional via CG: o sistema `ARGC`

Estamos, agora, aptos a introduzir o nosso sistema axiomático para a AR. Enfatizamos que `ARGC` não é apresentado como um sistema lógico, ou seja, mediante uma definição formal de sua sintaxe, semântica e mecanismo de inferência. Como o nosso principal objetivo é investigar a aplicabilidade de conexões de Galois no estudo da aritmética das relações, o nível de rigor formal que estamos empregando aqui é o mesmo utilizado em estudos algébricos usuais e é suficiente para os nossos própositos.

Uma característica de `ARCG` que o diferencia da maioria dos sistemas para AR é o seu conjunto de operações primitivas. Como usual, em se tratando de relações binárias, `ARCG` tem dois conjuntos de operações: as *Booleanas* e as *Peirceanas*. As operações Booleanas são as usuais operações conjuntistas de *intersecção*, *complementação* e *vazio*, denotadas, respectivamente, pelos símbolos $\cdot$, $^-$ e 0 . As operações Peirceanas são as operações sobre relações binárias de *composição*, *correversão* e (relação) *diversidade*, denotadas, respectivamente pelos símbolos $;$, $^{\smile}$ e $0'$.

Na linguagem usual da teoria dos conjuntos, onde r e s denotam relações binárias sobre um universo U, essas operações são definidas da seguinte maneira:

$$\begin{array}{lcl} r \cdot s & ::= & \{(a,b) \mid (a,b) \in r \text{ e } (a,b) \in s\} \\ r^- & ::= & \{(a,b) \mid (a,b) \notin r\} \\ 0 & ::= & \{(a,b) \mid (a,b) \in \emptyset\} \\ r \mathbin{;} s & ::= & \{(a,b) \mid \exists c \in U[(a,c) \in r \text{ e } (c,b) \in s]\} \\ r^{\smile} & ::= & \{(a,b) \mid (b,a) \notin r\} \end{array}$$

A escolha dessas operações como primitivas justifica-se, basicamente, por duas razões interligadas: (1) as conexões de Galois estabelecidas por meio dessas operações e (2) a simetria existente entre os axiomas que definem as operações. Para explicitar essa simetria, particionamos o conjunto dos axiomas em dois blocos: o dos axiomas *estáticos* — que lidam com as operações Booleanas — e o dos axiomas *dinâmicos* – que lidam com as operações Peirceanas.

Uma álgebra

$$\mathfrak{A} = (A,\ \cdot\ ,\ ;\ ,\ ^-,\ ^{\smile},\ 0\ ,\ 0'\ ),$$

do tipo $(2,2,1,1,0,0)$ é uma *álgebra relacional* se os axiomas da Tabela 3.1 são satisfeitos, para todo $r, s, t \in A$.

Axiomas estáticos

$$
\begin{array}{ll}
(B_1) & r \cdot (s \cdot t) \leq (r \cdot s) \cdot t \ \text{ e } \ (r \cdot s) \cdot t \leq r \cdot (s \cdot t) \\
(B_2) & 0^{-} \cdot r \leq r \ \text{ e } \ r \leq r \cdot 0^{-} \\
 & r \cdot 0^{-} \leq r \ \text{ e } \ r \leq 0^{-} \cdot r \\
(B_3) & r^{-} \leq s \ \text{ sse } \ s^{-} \leq r \\
(B_4) & r \leq s^{-} \ \text{ sse } \ s \leq r^{-} \\
(B_5) & r \cdot s \leq t \ \text{ sse } \ s \leq (t^{-} \cdot r)^{-} \\
(S) & r \leq s \cdot t \ \text{ sse } \ r \leq s \text{ and } r \leq t
\end{array}
$$

Axiomas dinâmicos

$$
\begin{array}{ll}
(P_1) & r \,;\, (s \,;\, t) \leq (r \,;\, s) \,;\, t \ \text{ e } \ (r \,;\, s) \,;\, t \leq r \,;\, (s \,;\, t) \\
(P_2) & 0'^{\smile} \,;\, r \leq r \ \text{ e } \ r \leq r \,;\, 0'^{\smile} \\
 & r \,;\, 0'^{\smile} \leq r \ \text{ e } \ r \leq 0'^{\smile} \,;\, r \\
(P_3) & r^{\smile} \leq s \ \text{ sse } \ s^{\smile} \leq r \\
(P_4) & r \leq s^{\smile} \ \text{ sse } \ s \leq r^{\smile} \\
(P_5) & r \,;\, s \leq t \ \text{ sse } \ s \leq (t^{\smile} \,;\, r)^{\smile} \\
(D) & (r^{\smile} \,;\, s^{\smile})^{\smile} \leq (s^{-} \,;\, r^{-})^{-} \ \text{ e } \ (s^{-} \,;\, r^{-})^{-} \leq (r^{\smile} \,;\, s^{\smile})^{\smile}
\end{array}
$$

Tabela 3.1: Axiomas para a AR via conexões de Galois

O B nos axiomas estáticos refere-se à Boole, o P nos axiomas dinâmicos refere-se à Peirce, o S à Schröder e o D à Dijkstra.

Chamamos a atenção para a similaridade das formas dos axiomas (B_i) e (P_i), $1 \leq i \leq 5$. Cada axioma (P_i) correspondente a um axioma (B_i), e vice-versa, apenas trocando as ocorrências de $\cdot$, $^{-}$, e 0 por ocorrências de $;$, $^{\smile}$, e $0'$, respectivamente. Os axiomas (B_3) e (B_4) lidam com ocorrências de $^{-}$. (B_3) mostra uma equivalência quando a operação $^{-}$ é aplicada do lado esquerdo da inclusão, enquanto que (B_4) mostra uma equivalência similar quando a operação $^{-}$ é aplicada do lado direito. Uma observação inteiramente análoga a esta pode ser feita para o par (B_5) e (S) e as ocorrências de $\cdot$, também para o par (P_3) e (P_4) e as ocorrências de $^{\smile}$ e o par (P_5) e (D) e as ocorrências de $;$.

3.3.1 Conexões de Galois e a aritmética da AR

Percebemos que, em teorias equacionais, a estratégia de prova consiste, basicamente, em encontrar instâncias de teoremas que nos guiem, por meio das regras de inferência da lógica equacional, até a equação a ser demonstrada. Acontece que algumas vezes essa estratégia acaba sendo frustrante porque a capacidade de encontrar essas instâncias depende muito da prática e da habilidade do agente que desenvolve a prova – provas difíceis geralmente requerem bons especialistas da teoria.

Nossa motivação, ao introduzir o sistema `ARGC`, foi tornar o exercício das demonstrações uma tarefa menos árdua, oferecendo ferramentas para que as provas sejam, de alguma maneira, mais determinísticas e não dependam tanto da habilidade matemática de quem as desenvolve. Nesse sentido, as conexões de Galois, estabelecidas pelos axiomas de `ARGC`, parecem internalizar no sistema uma heurística para provar teoremas — que outros sistemas não possuem, ou pelo menos, que não está clara. Muitas das demonstrações que seguem testemunham o que estamos alegando.

Estamos prontos para mostrar que cada um dos axiomas (B_3), (B_4), (B_5), (S), (P_3), (P_4), e (P_5) estabelece uma conexão de Galois. Ao fazer isto, obtemos como corolários, várias propriedades aritméticas que podem ser provadas na AR.

Proposição 3.3.1. *O axioma (B_3) estabelece uma conexão de Galois.*

PROVA. Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra relacional. Definimos os posets $\mathfrak{P} = (A, \leq)$ e $\mathfrak{Q} = (A, \geq)$, e as funções $f : A \to A$ e $g : A \to A$ da seguinte maneira

$$fr = gr = r^{-}, \text{ para todo } r \in A.$$

Assim, $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, f, g)$ é uma conexão de Galois. De fato, temos:

$$\begin{array}{l} fr \leq s \text{ sse } r \geq gs \\ \Uparrow \ \text{def. de } f \text{ e } g \\ r^{-} \leq s \text{ sse } s^{-} \leq r \\ (B_3) \end{array}$$

para todos $r, s \in A$. ■

A fórmula do corolário seguinte expressa uma das propriedades aritméticas básicas das álgebras Booleanas, em particular da AR, e costuma ser usada como axioma em alguns sistemas equacionais. Para derivá-la no nosso sistema — como se trata de uma equação — temos que provar duas inequações. Acontece que essas inequações são expressões imediatas de uma das propriedades de CG, demonstrada na seção anterior.

Corolário 3.3.1. *Para todo r em uma álgebra relacional, temos $r^{-^{-}} = r$.*

Prova. Pela Prop. 3.2.1, aplicando a conexão de Galois dada por (B_3). ■

Proposição 3.3.2. *O axioma (B_4) estabelece uma conexão de Galois.*

Prova. Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra relacional. Definimos os posets $\mathfrak{P} = (A, \geq)$ e $\mathfrak{Q} = (A, \leq)$, e as funções $f : A \to A$ e $g : A \to A$ da seguinte maneira

$$fr = gr = r^{-}, \text{ para todo } r \in A.$$

Assim, $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, f, g)$ é uma conexão de Galois. De fato, temos:

$$\begin{array}{l} fr \geq s \text{ sse } r \leq gs \\ \Uparrow \text{ def. de } f \text{ and } g \\ s \leq r^{-} \text{ sse } r \leq s^{-}, \\ (B_4) \end{array}$$

para todos $r, s \in A$. ■

O próximo corolário também é um resultado bem conhecido das álgebra Booleanas.

Corolário 3.3.2. *Para todo r, s em uma álgebra relacional, temos $r \leq s \Longrightarrow s^{-} \leq r^{-}$.*

Prova. Pela Prop. 3.2.2, aplicando a conexão de Galois dada por (B_4). ■

Proposição 3.3.3. *O axioma (B_5) estabelece uma conexão de Galois.*

Prova. Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra relacional e $r \in A$. Definimos os posets $\mathfrak{P} = (A, \leq)$ e $\mathfrak{Q} = (A, \leq)$, e as funções $f : A \to A$ e $g : A \to A$ da seguinte maneira:

$$fs = r \cdot s, \text{ para todo } s \in A, \text{ e}$$

$$gt = (t^{-} \cdot r)^{-}, \text{ para todo } t \in A.$$

Assim, $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, f, g)$ é uma conexão de Galois. De fato, temos:

$$\begin{array}{l} fs \leq t \text{ sse } s \leq gt \\ \Uparrow \text{ {\small def. de} } f \text{ {\small e} } g \\ r \cdot s \leq t \text{ sse } s \leq (t^{-} \cdot r)^{-}, \\ (B_5) \end{array}$$

para todos $s, t \in A$. ■

Corolário 3.3.3. *Para todos r, s, t de uma álgebra relacional, temos:*
(a) $r \cdot (s^{-} \cdot r)^{-} \leq s$,
(b) $s \leq t \Longrightarrow r \cdot s \leq r \cdot t$.

Prova. (a) Pela Prop. 3.2.1, aplicando a conexão de Galois dada por (B_5).
(b) Pela Prop. 3.2.2, aplicando a conexão de Galois dada por (B_5). ■

Proposição 3.3.4. *O axioma (S) estabelece uma conexão de Galois.*

Prova. Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra relacional. Definimos os posets $\mathfrak{P} = (A, \leq)$ e $\mathfrak{Q} = (A \times A, \preccurlyeq)$, onde $\preccurlyeq$ é a ordem induzida por $\leq$, e as funções $f : A \to A \times A$ e $g : A \times A \to A$ da seguinte maneira:

$$fr = (r, r), \text{ para todo } s \in A, \text{ e}$$

$$g(s, t) = s \cdot t, \text{ para todo } (s, t) \in A \times A.$$

Assim, $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, f, g)$ é uma conexão de Galois. De fato, temos:

$$\begin{array}{l} fr \preccurlyeq (s, t) \text{ sse } r \leq g(s, t) \\ \Uparrow \text{ {\small def. de} } f \text{ {\small e} } g \\ r \leq s \cdot t \text{ sse } r \leq s \text{ e } r \leq t, \\ (S) \end{array}$$

para todos $r, s, t \in A$. ■

Corolário 3.3.4. *Para todos r, s, t em uma álgebra relacional, temos*
(a) $r \cdot s \leq s$ *e* $r \cdot s \leq r$,
(b) $r \leq s$ *e* $t \leq u \Longrightarrow r \cdot t \leq s \cdot u$.

Prova. (a) Pela Prop. 3.2.1, aplicando a conexão de Galois dada por (S).

(b) Pela Prop. 3.2.2, aplicando a conexão de Galois dada por (S). ■

Uma das conveniências de ARGC está na simetria, já mencionada, entre os axiomas estáticos e dinâmicos. Como (P_3), (P_4), e (P_5) podem ser obtidos de (B_3), (B_4), e (B_5) apenas trocando as ocorrências de $\cdot$, $^-$, e 0 pelas ocorrências de $;$, $^\smile$, e $0'$, respectivamente, a próxima proposição e seu corolário são imediatos.

Proposição 3.3.5. *O axiomas (P_3), (P_4) e (P_5) estabelecem conexões de Galois.*

Corolário 3.3.5. *Para todo r, s, t de uma álgebra relacional, temos*

(a) $r^{\smile\smile} = r$.

(b) $r \leq s \Longrightarrow s^\smile \leq r^\smile$.

(c) $s \leq t \Longrightarrow r \;;\; s \leq r \;;\; t$.

O Corolário 3.3.2 garante que a operação $^-$ é anti-tônica. O Corolário 3.3.5, item (b), garante que a operação $^\smile$ é anti-tônica. O Corolário 3.3.4, item (b), garante que a operação $\cdot$ é monotônica. Todavia, como a prova do Corolário 3.3.4 é baseado na conexão de Galois dada por (S), não temos um análogo imediato garantindo que a operação $;$ seja monotônica. O Corolário 3.3.2, item (b), garante a monotonicidade à esquerda da operação $\cdot$ e a prova é a baseada na conexão de Galois dada por (B_5) e, portanto, temos o análogo, item (c), do Corolário 3.3.5, garantindo a monotonicidade à esquerda da operação $;$. Ainda, dos axiomas (P_4) e (P_5), segue a monotonicidade à direita da operação $;$, como vemos na próxima proposição.

Proposição 3.3.6. *Para todos r, s, t de uma álgebra relacional, temos*

$$r \leq s \Longrightarrow r \;;\; t \leq s \;;\; t.$$

Prova. Temos que:

$$
\begin{array}{l}
r \;;\; t \leq s \;;\; t \\
\Uparrow \ \text{Corol. 3.3.5 } (a) \\
r \;;\; t \leq (s \;;\; t)^{\smile\smile} \\
\Uparrow \ P_4 \\
(s \;;\; t)^{\smile} \leq (r \;;\; t)^{\smile} \\
\Uparrow \ \text{Corol. 3.3.5 } (a) \\
(s \;;\; t)^{\smile} \leq (r^{\smile\smile} \;;\; t)^{\smile} \\
\Uparrow \ P_5 \\
t \;;\; (s \;;\; t)^{\smile} \leq r^{\smile} \\
\Uparrow \ P_4 \\
r \leq (t \;;\; (s \;;\; t)^{\smile})^{\smile} \\
\Uparrow \ \text{hip. } (r \leq s) \\
s \leq (t \;;\; (s \;;\; t)^{\smile})^{\smile} \\
\Uparrow \ \text{Corol. 3.3.5 } (a) \\
s \leq (t^{\smile\smile} \;;\; (s \;;\; t)^{\smile})^{\smile} \\
\Uparrow \ P_5 \\
(s \;;\; t)^{\smile} \;;\; s \leq t^{\smile} \\
\Uparrow \ P_4 \\
t \leq ((s \;;\; t)^{\smile} \;;\; s)^{\smile} \\
\Uparrow \ P_5 \\
s \;;\; t \leq s \;;\; t, \\
\text{Ref}
\end{array}
$$

para todos r, s, t. ■

O axioma (B_1) garante que a operação $\cdot$ é associativa. O axioma (B_2) garante que a constante 0^{-} é um elemento neutro para a operação $\cdot$. Assim, o axioma (B_1), juntamente com o axioma (B_2) garantem que, para qualquer álgebra relacional $\mathfrak{A}$, o sistema algébrico associado $\langle A, \cdot, 0^{-} \rangle$ é um monóide. Considerando a similaridade dos axiomas que temos enfatizado, também concluímos que os axiomas (P_1) e (P_2) garantem que o sistema algébrico associado $\langle A, ;, 0'^{\smile} \rangle$ é um monóide. Dessa maneira, de acordo com o nosso sistema de axiomas, ter uma álgebra relacional é como ter dois monóides "intercalados".

Veremos que os axiomas (B_3), (B_4), (B_5) e (S) "forçam" o monóide $\langle A, \cdot, 0^{-} \rangle$ a ser um reticulado Booleano (i.e. um reticulado complementado distributivo limitado). Mas antes, temos que definir a operação binária $+$ e o elemento distinguido

1 , em ARGC, e provar algumas de suas propriedades aritméticas. Definindo

$$r + s ::= (r^- \cdot s^-)^- \quad \text{e} \quad 1 ::= 0^-$$

temos os resultados seguintes.

Proposição 3.3.7. *Para todo r, s, t de uma álgebra relacional, temos*

(a) $r \leq r + s$.

(b) $s \leq r + s$.

(c) $r \leq t$ *e* $s \leq t \Longrightarrow r + s \leq t$.

(d) $r \cdot s = s \cdot r$.

(e) $(r \cdot t)^- \cdot (r \cdot (s^- \cdot t^-)^-) \leq r$.

(f) $(r \cdot t)^- \cdot (r \cdot (s^- \cdot t^-)^-) \leq s$.

Prova. Para o item (a), temos:

$$\begin{array}{l} r \leq r + s \\ \Uparrow \ \text{def. de } + \\ r \leq (r^- \cdot s^-)^- \\ \Uparrow \ (B_5) \\ s^- \cdot r \leq r, \\ \text{Corol. 3.3.4.} \end{array}$$

A prova de (b) é análoga à prova de (a).

Para o item (c), temos:

$$\begin{array}{l} r + s \leq t \\ \Uparrow \ \text{def. de } + \\ (r^- \cdot s^-)^- \leq t \\ \Uparrow \ (B_3) \text{ e Corol. 3.3.1} \\ t^- \leq r^- \cdot s^- \\ \Uparrow \ (S) \\ t^- \leq r^- \text{ e } t^- \leq s^- \\ \Uparrow \ \text{Corol. 3.3.2} \\ r \leq t \text{ e } s \leq t, \\ \text{hip.} \end{array}$$

Para provar (d), temos que provar as inequações $r \cdot s \leq s \cdot r$ e $s \cdot r \leq r \cdot s$. Mas estas seguem, de maneira imediata, do Corolário 3.3.4 e do axioma (S).

Para o item (e), temos:

$$
\begin{array}{ll}
(e) & (r \cdot t)^{-} \cdot (r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-}) \leq r \\
 & \Uparrow \ (d) \\
 & (r \cdot t)^{-} \cdot ((s^{-} \cdot t^{-})^{-} \cdot r) \leq r \\
 & \Uparrow \ (B_1) \\
 & ((r \cdot t)^{-} \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-}) \cdot r \leq r \\
 & \text{Corol. 3.3.4.}
\end{array}
$$

Para o item (f), temos:

$$
\begin{array}{l}
((r \cdot t)^{-} \cdot (r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-})) \leq s \\
\Uparrow \ \text{Corol. 3.3.1} \\
((r \cdot t)^{-} \cdot (r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-}))^{--} \leq s^{--} \\
\Uparrow \ \text{Corol. 3.3.2} \\
s^{-} \leq ((r \cdot t)^{-} \cdot (r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-}))^{-} \\
\Uparrow \ (B_5) \\
(r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-}) \cdot s^{-} \leq r \cdot t \\
\Uparrow \ (B_1) \\
r \cdot ((s^{-} \cdot t^{-})^{-} \cdot s^{-}) \leq r \cdot t \\
\Uparrow \ \text{do Corol. 3.3.3 } (b) \\
(s^{-} \cdot t^{-})^{-} \cdot s^{-} \leq t \\
\Uparrow \ (d) \\
s^{-} \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-} \leq t \\
\text{do Corol. 3.3.3 } (a)
\end{array}
$$

Isto conclui a prova do resultado. ■

O axioma (B_1) e a Proposição 3.3.7(d) mostram que a operação $\cdot$ é associativa e comutativa, respectivamente. O mesmo segue, diretamente da definição apresentada, para a operação $+$. Para mostrarmos que a estrutura $\langle A, +, \cdot \rangle$ é um reticulado, falta provar a *lei de absorção*.

Proposição 3.3.8. *Os axiomas* (B_3), (B_4), (B_5) *e* (S) *garantem que o reduto algébrico* $(A, +, \cdot, ^{-}, 0, 1)$ *é um um reticulado complementado distributivo li-*

mitado, ou seja, para todo $r,\ s,\ t \in A$, temos

(a)	$r + r \cdot s = r$	(lei de absorção)
(b)	$0 \leq r$	(limitado inferiormente)
(c)	$r \leq 1$	(limitado superiormente)
(d)	$r^{-} + r = 1$	(complementado 1)
(e)	$r^{-} \cdot r = 0$	(complementado 2)
(f)	$r \cdot (s + t) = (r \cdot s) + (r \cdot t)$	(distributivo)

Prova. Para cada equação, vamos provar duas inequações.

Para o item (a), temos:

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{a}') & r + r \cdot s \leq r \\
& \Uparrow \ \text{Def. de } + \\
& (r^{-} \cdot (r \cdot s)^{-})^{-} \leq r \\
& \Uparrow \ (B_3) \\
& r^{-} \leq r^{-} \cdot (r \cdot s)^{-} \\
& \Uparrow \ (S) \\
& r^{-} \leq r^{-} \text{ e } r^{-} \leq (r \cdot s)^{-} \\
& \Uparrow \ \text{Corol. 3.3.2} \\
& r^{-} \leq r^{-} \text{ e } r \cdot s \leq r \\
& \text{Ref e Corol. 3.3.4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{a}'') & r \leq r + r \cdot s \\
& \text{Prop. 3.3.7 } (a)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{b}) & 0 \leq r \\
& \Uparrow \ \text{Corol. 3.3.2 } (b) \text{ e Corol. 3.3.1} \\
& r^{-} \leq 0^{-} \\
& \Uparrow \ (S) \\
& r^{-} \leq r^{-} \cdot 0^{-} \\
& (B_2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{c}) & r \leq 1 \\
& \Uparrow \ \text{def. de } 1 \\
& r \leq 0^{-} \\
& \Uparrow \ (S) \\
& r \leq r \cdot 0^{-} \\
& (B_2)
\end{array}$$

O item (d′) é uma consequência imediata de (c).

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{d}'') & 1 \leq r^{-} + r \\
& \Uparrow \ \text{def. de } + \text{ e } 1 \\
& 0^{-} \leq ((r^{-})^{-} \cdot r^{-})^{-} \\
& \Uparrow \ \text{Corol. 3.3.1} \\
& 0^{-} \leq (r \cdot r^{-})^{-} \\
& \Uparrow \ \text{Corol. 3.3.7 } (d) \\
& 0^{-} \leq (r^{-} \cdot r)^{-} \\
& \Uparrow \ (B_5) \\
& r \cdot 0^{-} \leq r \\
& (B_2)
\end{array}$$

O item (e′) é uma consequência imediata de (b).

$$
\begin{array}{ll}
(e'') & r^{-} \cdot r \leq 0 \\
& \Uparrow\ (B_5) \\
& r \leq (0^{-} \cdot r^{-})^{-} \\
& \Uparrow\ \text{Corol. 3.3.2 e Corol. 3.3.1} \\
& 0^{-} \cdot r^{-} \leq r^{-} \\
& (B_2)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(f') & r \cdot (s + t) \leq (r \cdot s) + (r \cdot t) \\
& \Uparrow\ \text{def. de } + \\
& r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-} \leq ((r \cdot s)^{-} \cdot (r \cdot t)^{-})^{-} \\
& \Uparrow\ (B_5) \\
& (r \cdot t)^{-} \cdot (r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-}) \leq r \cdot s \\
& \Uparrow\ (S) \\
& (r \cdot t)^{-} \cdot (r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-}) \leq r \quad \text{e} \quad (r \cdot t)^{-} \cdot (r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-}) \leq s \\
& \text{Prop. 3.3.7 } (e) \text{ e } (f)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(f'') & (r \cdot s) + (r \cdot t) \leq r \cdot (s + t) \\
& \Uparrow\ \text{def. de } + \\
& ((r \cdot s)^{-} \cdot (r \cdot t)^{-})^{-} \leq r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-} \\
& \Uparrow\ (B_3) \text{ e Corol. 3.3.1} \\
& (r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-})^{-} \leq (r \cdot s)^{-} \cdot (r \cdot t)^{-} \\
& \Uparrow\ (S) \\
& (r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-})^{-} \leq (r \cdot s)^{-} \quad \text{e} \quad (r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-})^{-} \leq (r \cdot t)^{-} \\
& \Uparrow\ \text{Corol. 3.3.2} \\
& r \cdot s \leq r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-} \quad \text{e} \quad r \cdot t \leq r \cdot (s^{-} \cdot t^{-})^{-} \\
& \Uparrow\ \text{Corol. 3.3.3} \\
& s \leq (s^{-} \cdot t^{-})^{-} \quad \text{e} \quad t \leq (s^{-} \cdot t^{-})^{-} \\
& \Uparrow\ \text{def. de } + \\
& s \leq s + t \ \text{ e } \ t \leq s + t \\
& \text{Prop. 3.3.7 } (a) \text{ e } (b)
\end{array}
$$

Isto conclui a prova do resultado. ■

Podemos afirmar que os axiomas (B_i) e (P_i), $1 \leq i \leq 5$, são similares na forma, enquanto que esta relação de similaridade não se aplica aos axiomas (S) e (D). A seguir, utilizamos a Proposição 3.2.5 para justificar esta (particular) "assimetria".

Consideremos a seguinte estrutura

$$\mathfrak{A} = \langle A, \cap, \circ, ^c, ^{-1^c}, \emptyset, \mathsf{D} \rangle,$$

onde A é o conjunto de todas as relações binárias sobre um dado conjunto U, $\cap$ e $\circ$ são as operações binárias de *intersecção* e *composição* (de relações), ^{c} e $^{-1^c}$ são as operações unárias de *complementação* e *correversão*, e os elementos distinguidos $\emptyset$ e D são o conjunto *vazio* e a relação *diversidade*.

Assumimos que $\mathfrak{A}$ é um modelo (*padrão*) para os nossos axiomas e que um produto direto de modelos padrão também é um modelo. A primeira afirmação será verificada na próxima seção.

Considere que a, b são dois elementos distintos em U. Tomando os posets $\mathfrak{P} ::= \langle A \times A, \subseteq_{\mathfrak{P}} \rangle$ e $\mathfrak{Q} ::= \langle A, \subseteq_{\mathfrak{Q}} \rangle$, onde $\subseteq_{\mathfrak{P}}$ é a restrição do produto cartesiano da inclusão conjuntista a $\mathfrak{P}$ e $\subseteq_{\mathfrak{Q}}$ é a restrição da inclusão conjuntista a $\mathfrak{Q}$, definimos a função $g : A \times A \to A$ por $g(s, t) ::= s \circ t$, para todo $(s, t) \in A \times A$. Dessa maneira, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ e g satisfazem as hipóteses da Proposição 3.2.5, ou seja, para todo $r \in A$, existe $\bigcap\{(s, t) \in A \times A : r \subseteq_{\mathfrak{Q}} s \circ t\} \in A \times A$.

Agora, para $r = \{(a, b)\}$, temos

$$\bigcap\{(s, t) \in A \times A : r \subseteq s \circ t\} = \{(\emptyset, \emptyset)\}.$$

De fato, basta observar que $r \subseteq \{(a, a)\} \circ \{(a, b)\}$ e $r \subseteq \{(a, b)\} \circ \{(b, b)\}$.

Logo $r \not\subseteq g(\bigcap\{(s, t) \in A \times A : r \subseteq s \circ t\})$ e, pela Proposição 3.2.5, g não tem um adjunto inferior.

Assim, temos um obstáculo para a existência de um axioma dinâmico análogo a (S), pois tal axioma, assim como (S), estabeleceria uma conexão de Galois e, se este fosse o caso, g teria um adjunto inferior.

3.3.2 Consistência de ARGC

Vamos mostrar que qualquer estrutura

$$\mathfrak{A} = \langle A, \cap, \circ, ^c, ^{-1^c}, \emptyset, \mathsf{D} \rangle$$

como definida no final da seção anterior é, de fato, um modelo da nossa axiomatização, apresentando assim uma prova semântica da sua consistência.

Seja $\mathfrak{A} = \langle A, \cap, \circ, ^c, ^{-1^c}, \emptyset, \mathsf{D}\rangle$ uma estrutura padrão. Os axiomas estáticos lidam com o reduto Booleano de $\mathfrak{A}$. Omitiremos as provas conjuntistas mais diretas, como é o caso de (B_1), que expressa a associatividade para a intersecção de conjuntos, (B_2), que expressa que o complemento do vazio (a relação universal) é o elemento neutro da interseção e (S), que pode ser checado apenas usando a definição de interseção.

Provamos que $\mathfrak{A}$ é um modelo dos outros axiomas estáticos. Para isto, usaremos relações binárias arbitrárias $a, b, c \in A$.

(B_3) $\mathfrak{A} \models r^{-} \leq s$ see $s^{-} \leq r$.

Prova. Suponhamos que $a^c \leq b$. Tomemos um elemento $x \in b^c$. Então $x \notin b$, pela hipótese, $x \notin a^c$. Assim, $x \in a$, ou seja, $b^c \leq a$. O outro lado da equivalência é análoga. ■

(B_4) $\mathfrak{A} \models r \leq s^{-}$ see $s \leq r^{-}$.

Prova. Suponhamos que $a \leq b^c$. Tomemos um elemento $x \in b$. Então, $x \notin b^c$, pela hipótese, $x \notin a$. Assim, $x \in a^c$, ou seja, $b \leq a^c$. O outro lado da equivalência é análoga. ■

(B_5) $\mathfrak{A} \models r \cdot s \leq t$ see $s \leq (t^{-} \cdot r)^{-}$.

Prova. Suponhamos que $a \cap b \leq c$. Tomemos um elemento $x \in b$. Suponhamos que $x \notin (c^c \cap a)^c$. Então, $x \in c^c \cap a$, ou seja, $x \in c^c$ e $x \in a$. Assim, $x \notin c$ e $x \in a$. Segue que $x \in a \cap b$ e $x \notin c$, contradição com a hipótese. Portanto, $x \in (c^c \cap a)^c$ e $b \leq (c^c \cap a)^c$.

Agora, suponhamos que $b \leq (c^c \cap a)^c$. Tomemos um elemento $x \in a \cap b$, ou seja, $x \in a$ e $x \in b$. Pela hipótese, $x \in (c^c \cap a)^c$. Então, $x \notin c^c \cap a$, isto é, $x \notin c^c$ ou $x \notin a$. Mas, como $x \in a$, segue que $x \notin c^c$, ou seja, $x \in c$. Portanto, $a \cap b \leq c$. ■

Os axiomas dinâmicos regulam as operações Peirceanas, que levam em conta o aspecto *binário* das relações, de serem conjuntos de *pares ordenados*. Omitiremos a rotina de provar a associatividade da composição (P_1).

Provamos que $\mathfrak{A}$ é um modelo dos outros axiomas dinâmicos.

(P_2) $\mathfrak{A} \models 0'^{\smile} ; r \leq r$, $\quad \mathfrak{A} \models r \leq r ; 0'^{\smile}$, $\quad \mathfrak{A} \models r ; 0'^{\smile} \leq r$, $\quad \mathfrak{A} \models r \leq 0'^{\smile} ; r$.

PROVA. Tomemos $(x, y) \in 0'^{-1^c} \circ a$. Então,

$\exists z[(x, z) \in 0'^{-1^c}$ e $(z, y) \in a]$.

$\Rightarrow (x, z) \notin 0'^{-1}$ e $(z, y) \in a$

$\Rightarrow (x, z) \notin 0'$ (pois $0'^{-1} = 0'$) e $(z, y) \in a$

$\Rightarrow x = z$ e $(z, y) \in a$

$\Rightarrow (x, y) \in a$

Assim, $0'^{-1^c} \circ a \leq a$.

Agora, tomemos $(x, y) \in a$ e suponhamos que $(x, y) \notin 0'^{-1^c} \circ a$.

$\Rightarrow \neg\exists z[(z, y) \in 0'^{-1^c}$ e $(x, z) \in a]$

$\Rightarrow \neg\exists z[(z, y) \notin 0'$ e $(x, z) \in a]$

$\Rightarrow \neg\exists z[x = z$ e $(z, y) \in a]$,

o que contradiz $(x, y) \in a$.

A segunda parte é análoga. ■

$(P_3) \models r^{\triangledown} \leq s$ sse $s^{\triangledown} \leq r$.

PROVA. Suponhamos que $a^{-1^c} \leq b$ e tomemos $(x, y) \in b^{-1^c}$,

$\Rightarrow (x, y) \notin b^{-1}$

$\Rightarrow (y, x) \notin b$

$\Rightarrow (y, x) \notin a^{-1^c}$ (pela hipótese)

$\Rightarrow (y, x) \in a^{-1}$

$\Rightarrow (x, y) \in a$

O outro lado da equivalência é análogo. ■

$(P_4) \models r \leq s^{\triangledown}$ sse $s \leq r^{\triangledown}$.

PROVA. Suponhamos que $a \leq b^{-1^c}$ e tomemos $(x, y) \in b$,

$\Rightarrow (y, x) \in b^{-1}$

$\Rightarrow (y, x) \notin b^{-1^c}$

$\Rightarrow (y, x) \notin a$ (pela hipótese)

$\Rightarrow (x, y) \notin a^{-1}$

$\Rightarrow (x, y) \in a^{-1^c}$

O outro lado da equivalência é análogo. ■

$(P_5) \vDash r \, ; s \leq t$ sse $s \leq (t^{\smile} \, ; r)^{\smile}$.

Prova. Suponhamos que $a \circ b \leq c$ e tomemos $(x, y) \in b$.

Suponhamos (por absurdo) que $(x, y) \notin (c^{-1^c} \circ a)^{-1^c}$,

$\Rightarrow (x, y) \in (c^{-1^c} \circ a)^{-1}$

$\Rightarrow (y, x) \in (c^{-1^c} \circ a)$

$\Rightarrow \exists z[(y, z) \in c^{-1^c}$ e $(z, x) \in a]$

$\Rightarrow \exists z[(y, z) \notin c^{-1}$ e $(z, x) \in a]$

$\Rightarrow \exists z[(z, y) \notin c$ e $(z, x) \in a]$

o que contradiz a hipótese inicial pois, se $(z, x) \in a$ e $(x, y) \in b$, então $(z, y) \in c$.

Agora, suponhamos que $b \leq (c^{-1^c} \circ a)^{-1^c}$ e tomemos $(x, y) \in a \circ b$,

$\Rightarrow \exists z[(x, z) \in a$ e $(z, y) \in b]$

$\Rightarrow (z, y) \in (c^{-1^c} \circ a)^{-1^c}$ (pela hipótese)

$\Rightarrow (z, y) \notin (c^{-1^c} \circ a)^{-1}$

$\Rightarrow (y, z) \notin (c^{-1^c} \circ a)$

$\Rightarrow \neg\exists w[(y, w) \in c^{-1^c}$ e $(w, z) \in a]$

$\Rightarrow \neg\exists w[(y, w) \notin c^{-1}$ e $(w, z) \in a]$

$\Rightarrow \neg\exists w[(w, y) \notin c$ e $(w, z) \in a]$

$\Rightarrow \forall w[$ se $(w, z) \in a$ então $(w, y) \in c]$

$\Rightarrow (x, y) \in c$ pois $(x, z) \in a$. ■

(D) $\mathfrak{A} \vDash (r^{\smile} \, ; s^{\smile})^{\smile} \leq (s^{-} \, ; r^{-})^{-}$, $\quad \mathfrak{A} \vDash (s^{-} \, ; r^{-})^{-} \leq (r^{\smile} \, ; s^{\smile})^{\smile}$.

Prova. Tomemos $(x, y) \in (a^{-1^c} \circ b^{-1^c})^{-1^c}$,

$\Rightarrow (x, y) \notin (a^{-1^c} \circ b^{-1^c})^{-1}$

$\Rightarrow (y, x) \notin (a^{-1^c} \circ b^{-1^c})$

$\Rightarrow \neg\exists z[(y, z) \in a^{-1^c}$ e $(z, x) \in b^{-1^c}]$

$\Rightarrow \neg\exists z[(y, z) \notin a^{-1}$ e $(z, x) \notin b^{-1}]$

$\Rightarrow \neg\exists z[(z, y) \notin a$ e $(x, z) \notin b]$

$\Rightarrow (x, y) \notin b^c \circ a^c$

$\Rightarrow (x, y) \in (b^c \circ a^c)^c$

■

3.3.3 CT, JT e D a partir de ARGC

Vamos agora mostrar como obter os axiomas de `CT`, `JT` e `D` a partir dos axiomas de `ARGC`. Estes resultados fazem parte da aritmética das relações, já que os axiomas de `CT`, `JT` e `D` expressam algumas das propriedades aritméticas mais básicas da AR. Ao demonstrarmos esses resultados, evidenciamos a funcionalidade de `ARGC`, que temos enfatizado, no que diz respeito à heurística de provar teoremas.

D e ARGC

Já temos definidas todas as operações do sistema `D` a partir das operações de `ARGC`. Quanto aos axiomas de `D`, é imediato verificarmos que (D_1), (D_2), (D_3), (D_4), e (D_6) seguem dos nossos. Derivamos aqui apenas o axioma (D_5), cuja demonstração é menos trivial. Esse axioma pode parecer estranho à primeira vista mas é, na verdade, uma versão muito natural, para as operações Peirceanas, da seguinte equivalência Booleana: $r \cdot s \leq 0$ see $r \leq s^{-}$.

Proposição 3.3.9. *Para todos r, s de uma álgebra relacional:*

$$(D_5) \qquad r \,;\, s \leq 0' \ \ sse\ r \leq s^{\smile}.$$

Prova.

$$\begin{aligned}
& r \,;\, s \leq 0' \\
& \Updownarrow \ (P_5) \\
& s \leq (0'^{\smile} \,;\, r)^{\smile} \\
& \Updownarrow \ (P_2) \\
& s \leq r^{\smile} \\
& \Updownarrow \ (P_4) \text{ e Prop. 3.3.5} \\
& r \leq s^{\smile}
\end{aligned}$$

■

CT e ARGC

Para derivarmos os axiomas de `CT` em `ARGC`, primeiramente temos que definir as operações primitivas de `CT`, que não constam em `ARGC`, a partir das operações de `ARGC`.

Já temos definidos as operações Booleanas. As outras operações são definidas da seguinte maneira:

$$r^{\smile} ::= r^{\overline{\smile}\,-} \quad \text{e} \quad 1' ::= 0'^{\,\overline{\smile}}.$$

Antes de provarmos os axiomas de `CT`, demonstraremos alguns resultados prévios auxiliares. Note que esses resultados reforçam, de maneira ainda mais profunda, a relação entre as operações Booleanas e Peirceanas do nosso sistema. Chamamos a atenção do leitor para o caráter híbrido das demonstrações, onde a lógica da igualdade e a lógica da ordem estão constantemente sendo aplicadas como lógicas subjacentes.

Proposição 3.3.10. *Para toda álgebra relacional, temos* $0'^{\,\overline{\smile}} = 0'^{\,-}$.

Prova.

$$
\begin{array}{l}
0'^{\,\overline{\smile}} = 0'^{\,-} \\
\Uparrow \ \text{def. de } = \\
0'^{\,-} \leq 0'^{\,\overline{\smile}} \ \text{e} \ 0'^{\,\overline{\smile}} \leq 0'^{\,-} \\
\Uparrow \ \text{Corol. 3.3.1} \\
0'^{\,-} \leq {0'^{\,\overline{\smile}\,-}}^{-} \ \text{e} \ {0'^{\,\overline{\smile}\,-}}^{-} \leq 0'^{\,-} \\
\Uparrow (B_3) \text{ e } (B_4) \\
0'^{\,\overline{\smile}\,-} \leq {0'^{\,-}}^{-} \ \text{e} \ {0'^{\,-}}^{-} \leq 0'^{\,\overline{\smile}\,-} \\
\Uparrow \ \text{def. de } = \\
0'^{\,\overline{\smile}\,-} = {0'^{\,-}}^{-} \\
\Uparrow (P_2) \ \text{e Corol. 3.3.5} \\
0'^{\,\overline{\smile}\,-\,\overline{\smile}\,\overline{\smile}} = (\,0'^{\,-} \ ; \ 0'^{\,\overline{\smile}})^{-} \\
\Uparrow (P_2) \ \text{e Corol. 3.3.1} \\
(\,0'^{\,\overline{\smile}\,-\,\overline{\smile}} \ ; \ 0'^{\,\overline{\smile}})^{\overline{\smile}} = (\,0'^{\,-} \ ; \ {0'^{\,\overline{\smile}\,-}}^{-}\,)^{-} \\
(D)(\text{com } r = \ 0'^{\,\overline{\smile}\,-} \ \text{e } s = \ 0'\,)
\end{array}
$$

■

O resultado seguinte fornece uma maneira de determinarmos quando dois elementos de uma álgebra Booleana são iguais.

Lema 3.3.1. *Seja* $\mathfrak{P} = \langle A, \leq \rangle$ *o poset induzido por uma álgebra Booleana* $\mathfrak{A}$ *qualquer e* $r, s \in A$*. Se, para todo* $x \in A$*, temos que* $r \leq x$ *see* $s \leq x$*, então* $r = s$*.*

Prova. Suponhamos (por absurdo) que $r \neq s$.

Caso 1: $r < s$

Tomemos $t ::= r + s^{-}$. Temos que $r \leq t$ mas não é o caso que $s \leq t$. Contradição com a hipótese.

Caso 2: $s < r$

Análogo ao Caso 1.

Caso 3: r e s são *incomparáveis*.

Tomemos $t ::= r$. Temos que $r \leq t$ mas não é o caso que $s \leq t$. Contradição com a hipótese. ■

Usando uma linguagem mais simbólica, o lema acima pode ser escrito como

$$\forall x(r \leq x \text{ see } s \leq x) \Longrightarrow r = s$$

ou ainda,

$$\forall x(r \cdot x^{-} \leq 0 \text{ see } s \cdot x^{-} \leq 0) \Longrightarrow r = s.$$

Em ARCG, temos uma versão Peirceana desta implicação, evidenciando mais uma vez o paralelismo entre as operações Booleanas e Peirceanas.

Proposição 3.3.11.

$$\forall x(r \,;\, x^{\smile} \leq 0' \;\; \textit{see} \; s \,;\, x^{\smile} \leq 0') \Longrightarrow r = s$$

Prova.

$$
\begin{array}{l}
r = s \\
\Uparrow \text{ Lema 3.3.1} \\
\forall x(r \leq x \text{ see } s \leq x) \\
\Uparrow \text{ Corol. 3.3.5} \\
\forall x(r \leq (x^{\smile})^{\smile} \text{ sse } s \leq (x^{\smile})^{\smile}) \\
\Uparrow \text{ Prop. 3.3.9} \\
\forall x(r \,;\, x^{\smile} \leq 0' \text{ sse } s \,;\, x^{\smile} \leq 0') \\
\text{hip.}
\end{array}
$$

■

Estamos, agora, em condições de provar uma propriedade importante das operações de complementação e correversão — que facilita muitas provas de teoremas — a saber, que estas operações comutam.

Proposição 3.3.12. *Para todo r de uma álgebra relacional, $r^{\bar{\smile}\,-} = r^{-\,\bar{\smile}}$.*

Prova. Para provarmos essa equação, pela Prop. 3.3.11, é suficiente provarmos que, para todo x de uma álgebra relacional,

$$r^{-\,\bar{\smile}} \,;\, x \leq 0' \;\text{ see }\; r^{\bar{\smile}\,-} \,;\, x \leq 0' ,$$

cuja demonstração segue da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l}
r^{-\,\bar{\smile}} \,;\, x \leq 0' \\
\Updownarrow \text{ Corol. 3.3.5} \\
(r^{-\,\bar{\smile}} \,;\, x^{\bar{\smile}\,\bar{\smile}})^{\bar{\smile}\,\bar{\smile}} \leq 0' \\
\Updownarrow \ (D) \\
(x^{\bar{\smile}\,-} \,;\, r^{-\,-})^{-\,\bar{\smile}} \leq 0' \\
\Updownarrow \ (P_3) \\
0'^{\,\bar{\smile}} \leq (x^{\bar{\smile}\,-} \,;\, r^{-\,-})^{-} \\
\Updownarrow \text{ Prop. 3.3.10, } (B_3)\text{, Corol. 3.3.1 e Corol. 3.3.2} \\
x^{\bar{\smile}\,-} \,;\, r \leq 0' \\
\Updownarrow \text{ Prop. 3.3.9} \\
x^{\bar{\smile}\,-} \leq r^{\bar{\smile}} \\
\Updownarrow \ (B_3) \\
r^{\bar{\smile}\,-} \leq x^{\bar{\smile}} \\
\Updownarrow \text{ Prop. 3.3.9} \\
r^{\bar{\smile}\,-} \,;\, x \leq 0'
\end{array}$$

■

Finalmente, podemos demonstrar que os axiomas de `CT` seguem dos axiomas de `ARGC`.

Proposição 3.3.13. *Seja $\mathfrak{A} = \langle A,\ \cdot\ ,\ ;\ ,\ ^{-},\ ^{\bar{\smile}},\ 0\ ,\ 0'\ \rangle$ uma álgebra relacional de acordo com* `ARGC`*. Então* $\mathsf{CT}\mathfrak{A} = \langle A,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ;\ ,\ ^{-},\ ^{\smile},\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1'\ \rangle$ *é uma álgebra relacional de acordo com* `CT`*.*

Prova. Pela Prop. 3.3.8, o reduto $\langle A,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ^{-},\ 0\ ,\ 1\ \rangle$ é uma álgebra Booleana, portanto, já provamos (CT_1). Para os outros axiomas, temos que (CT_2) é o nosso

(P_1); (CT_3) segue do fato que (P_5) estabelece uma conexão de Galois; e (CT_4) é o nosso (P_2), de acordo com a definição $1' ::= 0'^{\overline{\smile}}$.

Para (CT_5), temos:

$$\begin{array}{l}
r^{\smile\smile} = r \\
\Updownarrow \text{ def. de } ^{\smile} \\
r^{\overline{\smile}-\overline{\smile}-} = r \\
\Updownarrow \ (P_3), (P_4) \\
(r^{\overline{\smile}})^{-} = (r^{-})^{\overline{\smile}} \\
\text{Prop. 3.3.12}
\end{array}$$

O estabelecimento de (CT_6) em `ARGC` segue de um resultado mais forte. A saber, para todos r, s de uma álgebra relacional, temos

$$r^{\smile} \leq s \text{ sse } r \leq s^{\smile}$$

As seguintes equivalências estabelecem o resultado:

$$\begin{array}{l}
r^{\smile} \leq s \\
\Updownarrow \text{ def. de } ^{\smile} \\
r^{\overline{\smile}-} \leq s \\
\Updownarrow \ (B_3) \\
s^{-} \leq r^{\overline{\smile}} \\
\Updownarrow \ (P_4) \\
r \leq s^{-\overline{\smile}} \\
\Updownarrow \text{ Prop. 3.3.12} \\
r \leq s^{\overline{\smile}-} \\
\Updownarrow \text{ def. de } ^{\smile} \\
r \leq s^{\smile}
\end{array}$$

Estas equivalências mostram que $^{\smile}$ estabelece uma conexão de Galois e, desta maneira, (CT_6) segue do fato que o adjunto inferior preserva supremo, cf. Prop. 3.2.3.

Para (CT_7), temos:

$$(r\ ;\ s)^{\smile} = s^{\smile}\ ;\ r^{\smile}$$
$\Uparrow$ def. de $^{\smile}$
$$(r\ ;\ s)^{\bar{\smile}\,-} = (s^{\bar{\smile}\,-}\ ;\ r^{\bar{\smile}\,-})$$
$\Uparrow$ def. de $=$
$$(s^{\bar{\smile}\,-}\ ;\ r^{\bar{\smile}\,-}) \leq (r\ ;\ s)^{\bar{\smile}\,-} \text{ e } (r\ ;\ s)^{\bar{\smile}\,-} \leq (s^{\bar{\smile}\,-}\ ;\ r^{\bar{\smile}\,-})$$
$\Uparrow$ $(B3)$ e $(B4)$
$$(r\ ;\ s)^{\bar{\smile}} \leq (s^{\bar{\smile}\,-}\ ;\ r^{\bar{\smile}\,-})^{-} \text{ e } (s^{\bar{\smile}\,-}\ ;\ r^{\bar{\smile}\,-})^{-} \leq (r\ ;\ s)^{\bar{\smile}}$$
$\Uparrow$ def. de $=$
$$(r\ ;\ s)^{\bar{\smile}} = (s^{\bar{\smile}\,-}\ ;\ r^{\bar{\smile}\,-})^{-}$$
$\Uparrow$ (D)
$$(r\ ;\ s)^{\bar{\smile}} = (r^{\bar{\smile}\,\bar{\smile}}\ ;\ s^{\bar{\smile}\,\bar{\smile}})^{\bar{\smile}}$$
$\Uparrow$ Corol. 3.3.5
$$(r\ ;\ s)^{\bar{\smile}} = (r\ ;\ s)^{\bar{\smile}}$$

Finalmente, para (CT_8), temos:

$$(r^{\smile}\ ;\ (r\ ;\ s)^{-}) + s^{-} = s^{-}$$
$\Uparrow$ def. de $+$
$$((r^{\smile}\ ;\ (r\ ;\ s)^{-})^{-} \cdot s^{-\,-})^{-} = s^{-}$$
$\Uparrow$ Prop. 3.3.1 e Prop. 3.3.2
$$(r^{\smile}\ ;\ (r\ ;\ s)^{-})^{-} \cdot s = s$$
$\Uparrow$ def. de $=$
$$(r^{\smile}\ ;\ (r\ ;\ s)^{-})^{-} \cdot s \leq s \text{ e } s \leq (r^{\smile}\ ;\ (r\ ;\ s)^{-})^{-} \cdot s$$
$\Uparrow$ Prop. 3.3.4 (S)
$$s \leq (r^{\smile}\ ;\ (r\ ;\ s)^{-})^{-}$$
$\Uparrow$ (B_3)
$$r^{\smile}\ ;\ (r\ ;\ s)^{-} \leq s^{-}$$
$\Uparrow$ (P_5)
$$(r\ ;\ s)^{-} \leq (s^{-\,\bar{\smile}}\ ;\ r^{\smile})^{\bar{\smile}}$$
$\Uparrow$ def. de $^{\smile}$ e Prop. 3.3.12
$$(r\ ;\ s)^{-} \leq (s^{-\,\bar{\smile}}\ ;\ r^{-\,\bar{\smile}})^{\bar{\smile}}$$
$\Uparrow$ (D)
$$(r\ ;\ s)^{-} \leq (r^{-\,-}\ ;\ s^{-\,-})^{-}$$
Prop. 3.3.1.

$\blacksquare$

As únicas operações de JT que falta definirmos são $\rhd$ e $\lhd$. Todavia, os axiomas (JT_4) e (JT_5) definem essas operações em termos das operações $\breve{}$ e $;$. Assim, podemos definir uma álgebra relacional de maneira alternativa, porém equivalente a JT, absorvendo os axiomas (JT_4) e (JT_5) no axioma (JT_2), usando diretamente as definições de $\rhd$ e $\lhd$.

Deve estar claro que o seguinte sistema, que denominamos JT$'$, é uma versão equivalente à JT.

$$\mathfrak{A} = (A,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ;\ ,\ ^-,\ ^{\smile},\ 0\ ,\ 1'\ ),$$

do tipo $(2, 2, 2, 1, 1, 0, 0)$, é uma *álgebra relacional* se, para todo $r, s, t \in A$:

$$\begin{array}{ll}
(JT_1) & (A,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ^-,\ 0\ ,\ 0\ ^-)\text{ é uma álgebra Booleana} \\
(JT_2) & (r\ ;\ s) \cdot t =\ 0\ \text{ sse } (r^{\smile}\ ;\ t) \cdot s =\ 0\ \text{ sse } (t\ ;\ s^{\smile}) \cdot r =\ 0 \\
(JT_3) & r\ ;\ 1'\ =\ 1'\ ; r = r
\end{array}$$

Proposição 3.3.14. *Seja* $\mathfrak{A} = \langle A,\ \cdot\ ,\ ;\ ,\ ^-,\ ^{\bar{\smile}},\ 0\ ,\ 0'\ \rangle$ *uma álgebra relacional de acordo com* ARGC*. Então* $\mathfrak{A}_{\mathtt{JT}'} = (A,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ;\ ,\ ^-,\ ^{\smile},\ 0\ ,\ 1'\ )$ *é uma álgebra relacional de acordo com* JT$'$*.*

Prova. Pela Prop. 3.3.8, o reduto $\langle A,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ^-,\ 0\ ,\ 0\ ^-\rangle$ é uma álgebra Booleana, portanto, já provamos (JT_1). Para os outros axiomas, temos que (JT_3) é o nosso (P_2); uma das inclusões de cada equação de (JT_2) segue diretamente da Proposição 3.3.7 b). Assim, resta-nos mostrar as seguintes equivalências:

$$(r\ ;\ s) \cdot t \leq\ 0\ \text{ sse } (r^{\bar{\smile}\,-}\ ;\ t) \cdot s \leq\ 0\ \text{ sse } (t\ ;\ s^{\bar{\smile}\,-}) \cdot r \leq\ 0$$

$$
\begin{array}{lcl}
(r\ ;\ s)\cdot t \leq\ 0 & & (t\ ;\ s^{\smile\,-})\cdot r \leq\ 0 \\
\Updownarrow\ (B_5) & & \Updownarrow\ (B_5) \\
t \leq (\ 0^{-}\cdot r\ ;\ s)^{-} & & r \leq (\ 0^{-}\cdot (t\ ;\ s^{\smile\,-}))^{\smile} \\
\Updownarrow\ (B_2) & & \Updownarrow\ (B_2) \\
t \leq (r\ ;\ s)^{-} & & r \leq (t\ ;\ s^{\smile\,-})^{-} \\
\Updownarrow\ (B_4) & & \Updownarrow\ (B_4) \\
r\ ;\ s \leq t^{-} & & t\ ;\ s^{\smile\,-} \leq r^{-} \\
\Updownarrow\ (P_5) & & \Updownarrow\ (P_5) \\
s \leq (t^{-\,\smile}\ ;\ r)^{\smile} & & s^{\smile\,-} \leq (r^{-\,\smile}\ ;\ t)^{\smile} \\
\Updownarrow\ \text{Corol. 3.3.5 a)} & & \Updownarrow\ \text{Prop. 3.3.12} \\
s \leq (t^{-\,\smile}\ ;\ t^{\smile\,\smile})^{\smile} & & s^{-\,\smile} \leq (r^{-\,\smile}\ ;\ t)^{\smile} \\
\Updownarrow\ (D) & & \Updownarrow\ \text{Corol. 3.3.5 b)} \\
s \leq (r^{\smile\,-}\ ;\ t^{-\,-})^{-} & & (r^{-\,\smile}\ ;\ t)^{\smile\,\smile} \leq s^{-\,\smile\,\smile} \\
\Updownarrow\ \text{Corol. 3.3.1} & & \Updownarrow\ \text{Corol. 3.3.5 a)} \\
s \leq (r^{\smile\,-}\ ;\ t)^{-} & & r^{-\,\smile}\ ;\ t \leq s^{-} \\
\Updownarrow\ (B_2) & & \Updownarrow\ (B_4) \\
s \leq\ 0^{-}\cdot (r^{\smile\,-}\ ;\ t)^{-} & & s \leq (r^{\smile\,-}\ ;\ t)^{-} \\
\Updownarrow\ (B_5) & (B_5) & \Updownarrow\ (B_2) \\
(r^{\smile\,-}\ ;\ t)\cdot s \leq\ 0 & \Longleftrightarrow & s \leq\ 0^{-}\cdot (r^{\smile\,-}\ ;\ t)^{-}
\end{array}
$$

Assim, o resultado está demonstrado. ■

Em termos de derivação, nosso sistema é equivalente aos sistemas `JT`, `CT` e `D`. Omitimos a prova de que os axiomas de `ARCG` são derivados nestes sistemas.

Podemos demonstrar vários teoremas da AR, em `ARCG`, como exemplos da flexibilidade que alegamos fornecer com este sistema, todavia, a apresentação das provas, por si só, pode não ser suficientemente convincente. As vantagens desse sistema apresentam-se quando estamos provando um teorema (e não na prova pronta), pois são de caráter heurístico. Sugerimos que o leitor interessado em experimentar tal flexibilidade teste o sistema, tentando demonstrar os teoremas da AR com os recursos que este oferece.

Capítulo 4

Sistemas de dedução natural e a lógica das relações

No capítulo anterior, abordamos a aritmética das relações por meio do sistema algébrico `ARCG`. Neste capítulo, vamos abordar a lógica das relações por meio dos sistemas de dedução natural `W` e `WI`, que formalizam o que podemos chamar de *lógica clássica das relações* e *lógica intuicionista das relações*, respectivamente.

Existem vários sistemas lógicos propostos para formalizar o cálculo relacional e seus subsistemas, inclusive a AR. Entre estes, o mais “fiel” à AR — no sentido de ter apenas equações como fórmulas e aplicar a lógica equacional como mecanismo de inferência — é o sistema `AR`, que pode ser obtido a partir do formalismo $\mathcal{L}^{\times}$, apresentado em [GT87], se eliminamos a restrição de que os termos de $\mathcal{L}^{\times}$ são construídos a partir de uma única variável para relações.

Como sistema lógico, `AR` caracteriza-se como um *cálculo de Hilbert*, cujos axiomas não-lógicos são os axiomas da AR e as regras de inferência são as regras da lógica equacional. A semântica padrão de `AR` é definida sobre a classe das álgebras de relações (modelos padrão de `ARGC`), ou seja, os termos são interpretados como relações binárias e as operações e constantes são as operações e constantes usuais, Booleanas e Peirceanas, do cálculo relacional.

Devido a um resultado de R. Lyndon, referente à AR [Lyn50], sabemos que `AR` é incompleto para esta semântica. Devido a um resultado de Tarski — que mostra que é possível axiomatizar a classe das álgebras de relações equacionalmente [Tar54, Tar55] — existe uma extensão de `AR` que é completa para a semântica padrão. No entanto, alguns resultados indicam o quão difícil é descrever uma extensão completa deste sistema. Por exemplo, Monk mostrou que não existe uma axiomatização equacional finita para a classe das álgebras de relações [Mon64]. Em 1975, em uma de suas conferências na Unicamp, Tarski anunciou que esta classe também não pode ser axiomatizada usando um conjunto finito de variáveis [Sug08]. Ainda nesta ocasião, apesar das limitações impostas pelos resultados mencionados, Tarski considerou como um problema em aberto encontrar uma axiomatização "simples" ou "natural" para a classe das álgebras de relações.

Lyndon já havia apresentado uma axiomatização em [Lyn56] que antecipava as dificuldades deste problema e, mais recentemente, outras duas propostas de axiomatização, apresentadas em [Mad06] e [HH02], confirmam que, de fato uma extensão completa de `AR` deve ser um sistema bastante complexo.

Estes resultados mostram que, se quisermos manter o ambiente algébrico da AR, formalizado em `AR`, *à la* Hilbert, teremos que lidar com um sistema lógico de alguma maneira indigesto.

Entre as propostas alternativas para formalizar a lógica das relações, estão: *dedução natural* [Wad75], *cálculo de sequentes* [Mad83], *tablôs* [OP10] e *diagramas* [FVVV06, FVVV09], sendo todos estes sistemas completos para a semântica padrão e com uma apresentação simples, em comparação às extensões completas de `AR`. O preço a se pagar por essa simplicidade é abrir mão do ambiente algébrico. Por exemplo, em [Wad75, Mad83, OP10], variáveis individuais são acrescidas à linguagem e as fórmulas não são equações. Em [FVVV09], a linguagem é diagramática, as relações são representadas por flechas, as operações são "configurações" de flechas e os termos são diagramas, os quais podem ser comparados entre si de maneira a estabelecer uma relação de igualdade e/ou inclusão entre os mesmos, para verificar a validade das fórmulas usuais do cálculo relacional.

Na nossa opinião, não há razões para nos comprometermos com qualquer método em particular pois, dada a dificuldade intrínsica à AR, enfatizada no capítulo anterior, qualquer método que forneça recursos formais eficazes, de preferência simples, para provar teoremas do cálculo relacional e explorar a lógica das relações, é bem-vindo. Todavia, entre os formalismos lógicos citados acima, para o cálculo relacional, não estamos totalmente satisfeitos com o sistema de dedução natural introduzido por Wadge [Wad75].

Na primeira seção deste capítulo, apresentamos algumas críticas ao sistema de Wadge, considerando critérios que, embora não estivessem estabelecidos à época da publicação do seu trabalho, indicam que o seu sistema precisa ser melhorado.

Na Seção 4.2, apresentamos o sistema `W`, que é um formalismo baseado no sistema original de Wadge, mas que escapa às críticas articuladas na seção anterior.

Na Seção 4.3, apenas eliminando uma das regras do mecanismo de inferência de `W`, introduzimos o sistema `WI`, para formalizar a lógica intuicionista das relações, que não é tratada no trabalho de Wadge. Demonstramos a corretude e completude de `WI`, para a semântica de Kripke.

Com estes dois sistemas definidos, na Seção 4.4, motivamos uma investigação sobre os teoremas do cálculo relacional enquanto resultados que pressupõem a lógica clássica, ou intuicionista, como norma dedutiva. Mostramos que o primeiro resultado "mais sofisticado" do cálculo relacional, conhecido como Teorema K, demonstrado por De Morgan [DM60], só pode ser obtido integralmente se assumirmos a lógica clássica das relações. Este teorema é expresso por meio de equivalências. Verificamos quais implicações dessas equivalências podem ser obtidas em `WI` e quais podem ser obtidas apenas em `W`, explicitando, com precisão, os aspectos clássicos e intuicionistas do teorema.

4.1 Críticas ao sistema de Wadge

É difícil definir o termo *sistema de dedução natural* de maneira a contemplar todos os sistemas que são classificados como tais na literatura e a excluir todos os que não são. Assumimos aqui o exposto nas referências [Ben86, Pel99, Ind10], que parecem estar de acordo sobre os aspectos que fundamentam nossas críticas ao sistema de Wadge.

Segundo Indrzejcak [Ind10], um sistema de dedução natural deve possuir as seguintes características gerais:

- possuir meios de introduzir hipóteses em uma prova e também de eliminá-las (ou *descarregá-las*). Isso geralmente é feito com recursos de notação que armazenam as hipóteses e indicam que devem ser descarregadas para completar uma prova;

– ausência (ou um conjunto muito limitado) de axiomas, pois o papel destes é desempenhado pelas regras de introdução e eliminação das constantes lógicas;

– liberdade para construção de provas, possibilitando a aplicação de diferentes estratégias, tais como provas condicionais, prova por casos, redução ao absurdo, etc.

Em princípio, estes critérios parecem ser razoáveis para separar os sistemas de dedução natural de outros sistemas usuais como, por exemplo, sistemas axiomáticos, diagramas, sequentes, tablôs, etc., pois estes, à primeira vista, não possuem essas três características conjuntamente.

Entre os sistemas de dedução natural, Indrzejcak ainda propõe distinguí-los quanto à sua apresentação formal, considerando os seguintes aspectos:

– as *unidades básicas* do mecanismo de inferência, a partir das quais as regras são definidas: podem ser fórmulas, fórmulas assinaladas, sequentes, etc.;

– a *representação das provas*: podem ser árvores, sequências, caixas de sequências, etc.

Assim, podemos estabelecer uma classificação inicial de sistemas de dedução natural, baseados na combinação desses critérios. Por exemplo, dizemos que um sistema de dedução natural é um FA-sistema quando as unidades básicas são **F**órmulas e as provas são **Á**rvores; dizemos que é um SL-sistema quando as unidades básicas são **S**equentes e as provas são **L**ineares (sequências), e assim por diante. Algumas semelhanças e diferenças entre esses tipos de sistemas são analisadas em [Ind10]. O leitor interessado em distinções ainda mais refinadas de sistemas de dedução natural, pode consultar [Ben86, BK82, Pel99].

Para os nossos propósitos, esses critérios já são suficientes para identificarmos algumas "falhas" e "deselegâncias" do sistema de Wadge, enquanto sistema de dedução natural.

As fórmulas do seu sistema são expressões do tipo xTy, onde x e y são variáveis individuais e T é um termo, construído a partir das variáveis relacionais e das constantes Ω, U e E — para as relações vazia, universal e identidade, respectivamente — por aplicação dos operadores $\cup$, $\cap$, $^{-}$, $^{\smile}$ e $;$, para as operações usuais de *união*, *interseção*, *complementação*, *reversão* e *composição*, respectivamente.

O mecanismo de inferência de Wadge consiste das seguintes regras, onde F e G são fórmulas e Γ é um conjunto de fórmulas:

$$AI)\ \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, G \vdash F} \qquad AE)\ \frac{\Gamma \vdash G \qquad \Gamma, G \vdash F}{\Gamma \vdash F}$$

$$\cup I)\ \frac{xRy}{xR \cup Sy} \quad \frac{xSy}{xR \cup Sy} \qquad \cup E)\ \frac{\Gamma, xRy \vdash F \qquad \Gamma, xSy \vdash F \qquad \Gamma \vdash xR \cup Sy}{\Gamma \vdash F}$$

$$\cap I)\ \frac{xRy \quad xSy}{xR \cap Sy} \qquad \cap E)\ \frac{xR \cap Sy}{xRy} \quad \frac{xR \cap Sy}{xSy}$$

$$^{-}I)\ \frac{\Gamma, xRy \vdash a\Omega a}{\Gamma \vdash x\overline{R}y} \qquad ^{-}E)\ \frac{\Gamma, xRy \vdash F \quad \Gamma, x\overline{R}y \vdash F}{\Gamma \vdash F}$$

$$\Omega I)\ \frac{xRy \quad x\overline{R}y}{a\Omega a} \qquad \Omega E)\ \frac{a\Omega a}{F}$$

$$UI)\ \frac{}{xUy} \qquad UE)\ \frac{\Gamma, xUy \vdash F}{\Gamma \vdash F}$$

$$^{\smile}I)\ \frac{\Gamma \vdash xRy}{\Gamma \vdash y\breve{R}x} \qquad ^{\smile}E)\ \frac{\Gamma \vdash x\breve{R}y}{\Gamma \vdash yRx}$$

$$;\ I)\ \frac{xRv \quad vSy}{xR\ ;\ Sy} \qquad ;\ E)\ \frac{\Gamma, xRv, vSy \vdash F \quad \Gamma \vdash xR\ ;\ Sy}{\Gamma \vdash F}$$

$$\subseteq I)\ \frac{\Gamma, xRy \vdash xSy}{\Gamma \vdash R \subseteq S} \qquad \subseteq E)\ \frac{R \subseteq S \quad xRy}{xSy}$$

$$EI)\ \frac{}{xEx} \qquad EE)\ \frac{xRv \quad vEy}{xRy}$$

Parece não ser possível classificar o sistema de Wadge de acordo com os critérios estabelecidos por Indrzejcak, pois as regras do sistema não possuem as mesmas unidades básicas.

Observamos que a regra AI e AE não são regras de inferência no sentido estrito, pois relacionam provas e não fórmulas. Por exemplo, AI deve ser lida como:

se existe uma prova de F a partir de Γ então existe uma prova de F a partir de $\Gamma \cup \{G\}$,

ou seja, esta regra diz respeito à relação de consequência $\vdash$ e não à inferência de fórmulas, mas é apresentada no sistema como uma regra de inferência. Regras desse tipo são, usualmente, chamadas de *regras estruturais*, pois lidam com a estrutura da prova e não com operadores específicos da linguagem.

A regra $\overline{\ }E$, embora tenha a aparência de uma regra estrutural (pela a ocorrência do símbolo $\vdash$), na verdade, não se enquadra como tal pois elimina o operador não-lógico $\overline{\quad}$ e não diz respeito apenas à estrutura da prova, mas à ocorrência deste operador. Por outro lado, assumindo que as unidades básicas do mecanismo de inferência de Wadge são fórmulas, $\overline{\ }E$ também não se enquadra como uma regra de inferência típica, como por exemplo $\cap I$, pois não é aplicada sobre fórmulas. Ainda, se formos aceitar que o mecanimo de inferência deste sistema mescla dois tipos de unidades básicas, sendo um deles fórmulas e o outro, por exemplo, *sequentes*, então a noção de prova — definida a partir das regras — teria que ser revista pois, neste sistema, esta noção está definida como sequência de fórmulas, por aplicação das regras, da maneira usual.

Além disso, como Indrzejcak aponta de maneira pertinente, as regras em um cálculo de sequentes, geralmente, introduzem fórmulas no antecedente ou no consequente do sequente, enquanto que as regras em um sistema de dedução natural onde sequentes são as unidades básicas, "deveriam" introduzir e eliminar fórmulas apenas no consequente. Se esta observação for aplicada ao pé da letra, então podemos questionar se o sistema de Wadge é, de fato, um sistema de dedução natural, pois a presença da regra $\overline{\ }E$ não permite que o classifiquemos como tal. Nem tampouco podemos classificá-lo como um cálculo de sequentes, basta olhar para as outras regras.

Parece-nos que o problema está na ambiguidade da notação. Em particular, do símbolo $\vdash$. Por exemplo, na regra AI, o símbolo $\vdash$ tem o significado usual (*existe uma prova*) e estaria sendo usado de maneira apropriada, pois trata-se de uma regra estrutural — conhecida como *monotonicidade* — embora seja uma propriedade da relação $\vdash$, demonstrável a partir da definição de prova e poderia, em princípio, ser omitida do mecanismo de inferência. Por outro lado, na regra $\bar{}E$, o símbolo $\vdash$ estaria sendo usado para indicar a introdução das hipóteses xRy e $x\overline{R}y$ em uma "tentativa" de prova de F. Esta regra deveria ser lida como:

> supondo xRy e $x\overline{R}y$, se existe uma prova de F a partir de Γ então existe uma prova de F a partir de Γ,

ou seja, $\bar{}E$ é uma regra que fornece condições para *descarregar* hipóteses que são introduzidas em uma prova.

Apontamos ainda que, quando Wadge demonstra a completude do seu sistema, um dos passos 'triviais', que foi omitido na demonstração, faz uso de uma regra estrutural não introduzida no sistema, a saber:

$$\mathsf{Fin})\ \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma_{\mathrm{Fin}} \vdash F}$$

onde Γ_{Fin} é um subconjunto finito de Γ.

Esta regra também é uma propriedade da relação $\vdash$ que, assim como AI, poderia ser demonstrada e não necessariamente precisaria ser enunciada como regra do mecanismo de inferência. Mas é estranho que Wadge inclua AI como uma regra de inferência e Fin não seja sequer mencionada, embora tenha que ser aplicada para a demonstração da completude do sistema.

Finalmente, chamamos a atenção para a ocorrência da expressão $R \subseteq S$ nas regras $\subseteq I$ e $\subseteq E$. Wadge insere esta expressão como abreviação de uma fórmula do sistema, cuja interpretação pretendida é a sugerida pelo uso do símbolo $\subseteq$ entre termos relacionais, ou seja, *inclusão*. Assim, temos um caso atípico na definição formal de um sistema, da adoção de regras de eliminação e introdução para um símbolo definido no sistema. Neste caso, parece-nos que seria mais adequado derivar esta regra das demais — ao invés de inserí-la no mecanimo de inferência — para mostrar que a fórmula abreviada por $R \subseteq S$, de fato, define a relação pretendida $\subseteq$ de maneira adequada, conservando as propriedades conhecidas desta relação.

Apesar dessas críticas, que apontam uma falta de rigor formal e certa deselegância do sistema, consideramos que, em geral, a proposta de Wadge foi bem sucedida. Além de seu sistema ser correto e completo para a semântica padrão, há indicações precisas de como ele pode ser estendido para tratar das relações de aridades arbitrárias.

Reconhecemos que nossas críticas talvez não pudessem ter sido articuladas à época da publicação do trabalho de Wadge, dado que estamos considerando evoluções posteriores, na literatura especializada, sobre o estudo de caracterização e distinção de sistemas de dedução natural. De qualquer maneira, dado que, atualmente, temos as ferramentas formais à nossa disposição, é natural procurarmos por um sistema de dedução natural típico para formalizar a lógica das relações. Na verdade, o sistema de Wadge não está distante de uma formulação "pura" de dedução natural e, por essa razão, homenageamos seu trabalho, denominando por $\mathtt{W}$ e $\mathtt{WI}$ os sistemas de dedução natural introduzidos neste capítulo.

4.2 O sistema $\mathtt{W}$

A linguagem de $\mathtt{W}$ possui símbolos para as mesmas operações do sistema de Wadge, com exceção das constantes para a relação identidade e a relação universal. Também mantivemos a mesma semântica de Wadge. Alteramos de maneira mais significativa o seu mecanismo de inferência, onde substituímos ou adaptamos algumas de suas regras, para organizá-lo como um sistema de dedução natural puro, com uma apresentação que escape às nossas críticas ao seu sistema.

De acordo com a classificação apresentada na seção anterior, $\mathtt{W}$ é um DA-sistema, onde D denota *derivação*, que é a unidade básica — a ser definida — do mecanismo de inferência. Ainda, diferentemente de Wadge, representamos as provas de $\mathtt{W}$ por meio de árvores.

4.2.1 Sintaxe

O *alfabeto* de $\mathtt{W}$ é dado nas seguintes categorias gramaticais:

– *Variáveis individuais*: uma sequência enumerável de símbolos,

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots \rangle.$$

  O conjunto das variáveis individuais é denotado por VarI e seus elementos são denotados genericamente pelas letras x, y, z, indexadas ou não.

– *Variáveis relacionais*: uma sequência enumerável de símbolos,

$$\langle R_1, R_2, \ldots, R_i, \ldots \rangle.$$

O conjunto das variáveis relacionais é denotado por VarR e seus elementos são denotados genericamente pelas letras R, S, Q, indexadas ou não.

– *Símbolos para operações*:

três operadores binários: $+$, $\cdot$ e $;$

dois operadores unários: $^{-}$ e $^{\smile}$

um operador zero-ário (constante): 0

– *Símbolos auxiliares*: os símbolos,

$$(\quad , \quad)$$

chamados de *abre parênteses*, *vírgula* e *fecha parênteses*, respectivamente.

Os *termos* de `W` são definidos pela seguinte gramática:

$$T \quad ::= \quad R \ \mid \ 0 \ \mid \ T^{\smile} \ \mid \ T^{-} \ \mid \ T_1 + T_2 \ \mid \ T_1 \cdot T_2 \ \mid \ T_1 \,;\, T_2,$$

onde $R \in \mathsf{VarR}$. O conjunto dos termos é denotado por Trm e seus elementos são denotados genericamente pelas letras T, U e V, indexadas ou não.

As *fórmulas* de `W` são as expressões da forma:

$$xTy,$$

onde $x, y \in \mathsf{VarI}$ e $T \in \mathsf{Trm}$. O conjunto das fórmulas é denotado por Frm e seus elementos são denotados genericamente pelas letras φ, ψ, θ, indexadas ou não.

4.2.2 Mecanismo de inferência

Assumimos uma familiaridade básica com sistemas de dedução natural por parte do leitor, em particular, com a idéia de *introduzir* e *descarregar* hipóteses em uma prova. Usamos colchetes [ ] para indicar as hipóteses introduzidas.

As unidades básicas do mecanismo de inferência de $\mathtt{W}$ são as *derivações*. Uma *derivação* é um par $\Gamma \Vdash \varphi$, onde Γ é um conjunto de fórmulas e φ é uma fórmula.

Seja Γ um conjunto de *hipóteses* (fórmulas). Uma *dedução a partir de* Γ é uma árvore rotulada com derivações, genericamente denotada por Π (indexada ou não), definida recursivamente pelas seguintes *regras de construção de provas*, onde $x, y, v, u \in \mathsf{VarI}$ e $T, U \in \mathsf{Trm}$:

* I_+ e E_+

Se

$$\frac{\Pi}{\Gamma \Vdash xTy}$$

é uma dedução, então

$$I_+ \frac{\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash xTy}}{\Gamma \Vdash xT + Uy}$$

é uma dedução.

Se

$$\frac{\Pi}{\Gamma \Vdash xUy}$$

é uma dedução, então

$$I_+ \frac{\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash xUy}}{\Gamma \Vdash xT + Uy}$$

é uma dedução.

Se

$$\frac{\Pi_1}{\Gamma, [xTy] \Vdash \varphi}, \quad \frac{\Pi_2}{\Gamma, [xUy] \Vdash \varphi} \quad \text{e} \quad \frac{\Pi_3}{\Gamma \Vdash xT + Uy}$$

são deduções a partir de $\Gamma \cup \{xTy\}$, $\Gamma \cup \{xUy\}$ e Γ, respectivamente, então

$$E_+ \frac{\dfrac{\Pi_1}{\Gamma, [xTy] \Vdash \varphi} \quad \dfrac{\Pi_2}{\Gamma, [xUy] \Vdash \varphi} \quad \dfrac{\Pi_3}{\Gamma \Vdash xT + Uy}}{\Gamma \Vdash \varphi}$$

é uma dedução a partir de Γ, onde as hipóteses xTy e xUy são *descarregadas*.

* $I.$ e $E.$

Se

$$\frac{\Pi_1}{\Gamma \Vdash xTy} \quad \text{e} \quad \frac{\Pi_2}{\Gamma \Vdash xUy}$$

são deduções, então

$$I.\ \dfrac{\dfrac{\Pi_1}{\Gamma \Vdash xTy} \qquad \dfrac{\Pi_2}{\Gamma \Vdash xUy}}{\Gamma \Vdash xT \cdot Uy}$$

é uma dedução.

Se

$$\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash xT \cdot Uy}$$

é uma dedução, então

$$E.\ \dfrac{\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash xT \cdot Uy}}{\Gamma \Vdash xTy}$$

é uma dedução.

Se

$$\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash xT \cdot Uy}$$

é uma dedução, então

$$E.\ \dfrac{\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash xT \cdot Uy}}{\Gamma \Vdash xUy}$$

é uma dedução.

∗ I_{-} e E_{-}

Se

$$\dfrac{\Pi}{\Gamma, [xTy] \Vdash u\ 0\ v}$$

é uma dedução a partir de $\Gamma \cup \{xTy\}$, então

$$I_{-}\ \dfrac{\dfrac{\Pi}{\Gamma, [xTy] \Vdash u\ 0\ v}}{\Gamma \Vdash xT^{-}y}$$

é uma dedução a partir de Γ, onde a hipótese xTy é *descarregada*.

Se $\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash xT^{-^{-}}y}$ é uma dedução, então

$$E_{-}\ \dfrac{\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash xT^{-^{-}}y}}{\Gamma \Vdash xTy}$$

é uma dedução;

$*$ I_{0} e E_{0}

Se

$$\frac{\Pi_1}{\Gamma \Vdash xTy} \quad \text{e} \quad \frac{\Pi_2}{\Gamma \Vdash xT^{-}y}$$

são deduções, então

$$I_{0}\ \frac{\dfrac{\Pi_1}{\Gamma \Vdash xTy} \qquad \dfrac{\Pi_2}{\Gamma \Vdash xT^{-}y}}{\Gamma \Vdash x\ 0\ y}$$

é uma dedução.

Se $\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash u\ 0\ v}$ é uma dedução, então

$$E_{0}\ \frac{\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash u\ 0\ v}}{\Gamma \Vdash \beta}$$

para qualquer fórmula β, é uma dedução.

$*$ $I_{\smile}$ e $E_{\smile}$

Se $\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash xTy}$ é uma dedução, então

$$I_{\smile}\ \frac{\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash xTy}}{\Gamma \Vdash yT^{\smile}x}$$

é uma dedução.

Se $\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash xT^{\smile}y}$ é uma dedução, então

$$E_{\smile}\ \frac{\dfrac{\Pi}{\Gamma \Vdash xT^{\smile}y}}{\Gamma \Vdash yTx}$$

é uma dedução.

$*$ $I_{;}$ e $E_{;}$

Se

$$\frac{\Pi_1}{\Gamma \Vdash xTv} \quad \text{e} \quad \frac{\Pi_2}{\Gamma \Vdash vUy}$$

são deduções, então

$$I_{;}\ \frac{\dfrac{\Pi_1}{\Gamma \Vdash xTv} \qquad \dfrac{\Pi_2}{\Gamma \Vdash vUy}}{\Gamma \Vdash xT\ ;\ Uy}$$

é uma dedução.

Se

$$\frac{\Pi_1}{\Gamma, [xTv], [vUy] \Vdash \varphi} \quad \text{e} \quad \frac{\Pi_2}{\Gamma \Vdash xT \mathbin{;} Uy}$$

são deduções a partir de $\Gamma \cup \{xTv, vUy\}$ e Γ, respectivamente, e a variável v não ocorrer nas fórmulas de Γ, então

$$E_{;}\ \frac{\dfrac{\Pi_1}{\Gamma, [xTv], [vUy] \Vdash \varphi} \qquad \dfrac{\Pi_2}{\Gamma \Vdash xT \mathbin{;} Uy}}{\Gamma \Vdash \varphi}$$

é uma dedução a partir de Γ, onde as hipóteses xTv e vUy são *descarregadas*.

Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de fórmulas. Uma *prova* de φ a partir de Γ é uma dedução a partir de Γ tal que

i) a raiz é a derivação $\Gamma \Vdash \varphi$,

ii) as folhas são derivações da forma $\Sigma \Vdash \psi$, onde $\psi \in \Sigma$ e

iii) todas as hipóteses introduzidas são descarregadas.

Escrevemos $\Gamma \vdash \varphi$ se existe uma prova de φ a partir de Γ e dizemos que φ é *consequência sintática* de Γ. Dizemos que φ é *teorema* de `W` se existe uma prova de φ a partir do conjunto vazio. O ***f**echo **s**intático* de Γ é o conjunto $\mathsf{FS}(\Gamma)$ de todas as consequências sintáticas de Γ. Dizemos que Γ é *dedutivamente fechado* quando $\Gamma = \mathsf{FS}(\Gamma)$.

Separamos do mecanismo de inferência as seguintes *regras estruturais* (definidas sobre provas e não sobre derivações). Estas regras são propriedades da relação $\vdash$ que podem ser demonstradas a partir da definição de *prova*.

Para quaisquer conjuntos de fórmulas Γ e Δ.

Mon) Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$.

Fin) Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma_{\text{fin}} \vdash \varphi$, onde Γ_{fin} é um subconjunto finito de Γ.

4.2.3 Semântica

Uma *estrutura* $\mathfrak{A}$ *para* `W`, ou `W`-*estrutura*, é uma dupla $\langle A, I \rangle$, onde:

– A é um conjunto não-vazio;

– I é uma *função interpretação* $I : \mathsf{VarR} \to \wp(A^2)$;

Dada uma W-estrutura $\mathfrak{A}$ e um termo T, a *denotação de T em* $\mathfrak{A}$, simbolizada por $[\![T]\!]_{\mathfrak{A}}$, é definida recursivamente da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{lcll}
[\![R]\!]_{\mathfrak{A}} & ::= & I(R),\ \text{para todo } R \in \mathsf{VarR} & \\
[\![\ 0\ ]\!]_{\mathfrak{A}} & ::= & \emptyset & \text{(vazio)} \\
[\![T^{-}]\!]_{\mathfrak{A}} & ::= & [\![T]\!]_{\mathfrak{A}}{}^{c} & \text{(complementação)} \\
[\![T^{\smile}]\!]_{\mathfrak{A}} & ::= & [\![T]\!]_{\mathfrak{A}}{}^{-1} & \text{(inversão)} \\
[\![T + U]\!]_{\mathfrak{A}} & ::= & [\![T]\!]_{\mathfrak{A}} \cup [\![U]\!]_{\mathfrak{A}} & \text{(união)} \\
[\![T \cdot U]\!]_{\mathfrak{A}} & ::= & [\![T]\!]_{\mathfrak{A}} \cap [\![U]\!]_{\mathfrak{A}} & \text{(intersecção)} \\
[\![T\ ;\ U]\!]_{\mathfrak{A}} & ::= & [\![T]\!]_{\mathfrak{A}} \circ [\![U]\!]_{\mathfrak{A}} & \text{(composição)}
\end{array}
$$

Uma *atribuição* em uma W-estrutura $\mathfrak{A}$, ou simplesmente $\mathfrak{A}$-atribuição, é uma função $\mathsf{a} : \mathsf{VarI} \to A$

Sejam xTy uma fórmula, $\mathfrak{A}$ uma WI-estrutura e a uma $\mathfrak{A}$-atribuição. Dizemos que:

1. $\mathfrak{A}$ e a *satisfazem* φ, denotado por $\mathfrak{A}, a \vDash xTy$, quando $(\mathsf{a}x, \mathsf{a}y) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{A}}$;

2. φ é *verdadeira* em $\mathfrak{A}$, denotado por $\mathfrak{A} \vDash xTy$, quando, para toda $\mathfrak{A}$-atribuição a, temos que $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash xTy$; neste caso, dizemos também que $\mathfrak{A}$ é um *modelo* de xTy;

3. φ é *válida*, denotado por $\vDash xTy$, quando, para todo modelo $\mathfrak{A}$, temos que $\mathfrak{A} \vDash xTy$.

Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de fórmulas. Dizemos que φ é *consequência semântica* (*local*) de Γ, denotado por $\Gamma \vDash \varphi$, quando, para toda W-estrutura $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}$-atribuição a, se $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash \Gamma$ então $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash \varphi$.

4.2.4 O sistema original de Wadge *versus* W

Definidas a sintaxe e a semântica de W, estamos em condições de mostrar que este sistema resiste às críticas que apresentamos ao sistema original de Wadge.

Em W, não existe confusão sobre as unidades básicas do mecanismo de inferência, pois todas as regras de construção de prova estão definidas sobre *derivações*. Evidenciamos a introdução de hipóteses em uma dedução através de colchetes [ ], evitando a ambiguidade do sistema de Wadge para o símbolo $\vdash$. Também deixamos claro que nem toda derivação é prova pois, para tal, as hipóteses introduzidas devem ser descarregadas de acordo com as regras de construção de prova. Finalmente, também está claro quais são as regras estruturais do sistema, que estão separadas das regras de construção de prova.

Agora, mostramos que o significado da fórmula que foi usada por Wadge como definição de $T \subseteq U$ corresponde, de fato, ao significado usual dado para o símbolo $\subseteq$. No nosso caso, reservamos o símbolo $\subseteq$ para ser usado apenas no contexto semântico, como significado do símbolo $\leq$, introduzido sintaticamente, da seguinte maneira, para todos $T, U \in \mathsf{Trm}$ e $z \in \mathsf{VarI}$:

$$T \leq U ::= z(\, 0^{-} \,;\, (T \cdot U^{-}) \,;\, 0^{-})^{-}\, z,$$

Para mostrar que $\leq$ tem o significado pretendido, suponhamos que $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ é uma W-estrutura, tal que $\mathfrak{A} \vDash z(\, 0^{-} \,;\, (T \cdot U^{-}) \,;\, 0^{-})^{-}\, z$. Aplicando as definições adequadamente, temos que, para qualquer atribuição a:

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{A} \vDash z(\, 0^{-} \,;\, (T \cdot U^{-}) \,;\, 0^{-})^{-}\, z \\ \text{sse} & (\mathsf{a}(z), \mathsf{a}(z)) \in [\![(\, 0^{-} \,;\, (T \cdot U^{-}) \,;\, 0^{-})^{-}]\!]_{\mathfrak{A}} \\ \text{sse} & (\mathsf{a}(z), \mathsf{a}(z)) \notin [\![(\, 0^{-} \,;\, (T \cdot U^{-}) \,;\, 0^{-})]\!]_{\mathfrak{A}} \\ \text{sse} & \nexists a \in A : (\mathsf{a}(z), a) \in [\![\, 0^{-}]\!]_{\mathfrak{A}} \text{ e } (a, \mathsf{a}(z)) \in [\![((T \cdot U^{-}) \,;\, 0^{-}]\!]_{\mathfrak{A}} \end{array}$$

Como, por definição, $[\![\, 0^{-}]\!]_{\mathfrak{A}}$ é a relação universal $A \times A$, a primeira condição da conjunção acima é sempre verdadeira, logo, temos:

$$\begin{array}{ll} & \nexists a \in A : (\mathsf{a}(z), a) \in [\![((T \cdot U^{-}) \,;\, 0^{-}]\!]_{\mathfrak{A}} \\ \text{sse} & \nexists a \in A : \exists b \in A : (a, b) \in [\![T \cdot U^{-}]\!]_{\mathfrak{A}} \text{ e } (b, \mathsf{a}(z)) \in [\![\, 0^{-}]\!]_{\mathfrak{A}} \end{array}$$

Novamente, pela mesma razão apresentada anteriormente, a segunda condição da conjunção acima é sempre verdadeira, logo:

$$\begin{array}{ll} & \nexists a \in A : \exists b \in A : (a, b) \in [\![((T \cdot U^{-}) \,;\, 0^{-}]\!]_{\mathfrak{A}} \\ \text{sse} & \nexists a \in A : \exists b \in A : (a, b) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{A}} \text{ e } (a, b) \in [\![U^{-}]\!]_{\mathfrak{A}} \\ \text{sse} & \nexists a \in A : \exists b \in A : (a, b) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{A}} \text{ e } (a, b) \notin [\![U]\!]_{\mathfrak{A}} \end{array}$$

Ou seja, para todo $a \in A$, se existir um $b \in A$ tal que $(a, b) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{A}}$, então $(a, b) \in [\![U]\!]_{\mathfrak{A}}$.

Vamos deixar para demonstrar os Teoremas de Corretude e Completude do sistema `W` mais adiante, após termos introduzido o sistema `WI` e demonstrado os Teoremas Corretude e Completude deste sistema. Nosso propósito é evidenciar os aspectos de cada sistema, tanto sintáticos quanto semânticos, que desempenham um papel particular na demonstração desses teoremas, além de economizar resultados auxiliares que podem ser aplicados em ambos os sistemas.

4.3 O sistema `WI`

Nesta seção, introduzimos o sistema `WI`, suprimindo uma das regras de `W` e modificando a semântica adequadamente. Nosso objetivo é obter uma lógica de relações que seja correta e completa para os teoremas do cálculo relacional que são "verdadeiros intuicionisticamente". Assim, por intermédio de `WI` e `W`, podemos classificar os teoremas do cálculo relacional, em relação aos seus pressupostos lógicos, como intuicionistas ou clássicos. Exemplificaremos como isto pode ser feito, examinando, mais adiante, o Teorema K, de De Morgan.

4.3.1 Sintaxe

A sintaxe de `WI` é a mesma de `W`.

4.3.2 Mecanismo de inferência

As regras de construção de prova de `WI` são as regras de `W`, exceto a regra de eliminação da negação, E_{-}. As noções de *derivação*, *dedução*, *prova*, *teorema*, *consequência sintática* etc., em `WI`, são análogas às noções definidas para `W`. Quando for necessário, para evitar ambiguidade no uso dos símbolos $\vdash$ e $\vDash$, indicaremos a distinção por subscrito, $\vdash_{\mathtt{WI}}$, se existe uma prova em `WI`, e $\vdash_{\mathtt{W}}$, se existe uma prova em `W` e não existe uma prova em `WI`.

4.3.3 Semântica

Adaptamos a semântica de Kripke [Kri65], conforme apresentada em [Tho68], para o sistema WI.

Uma *estrutura* $\mathfrak{B}$ *para* WI, ou WI-*estrutura*, é uma quádrupla $\langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i\rangle$, onde:

– K é um conjunto não vazio de *pontos*;

– $\preceq$ é uma pré-ordem em K;

– $\{\mathfrak{A}_k : k \in K\}$ é um conjunto de W-estruturas, i.e., $\mathfrak{A}_k = \langle A_k, I_k\rangle$, onde $A_k \neq \emptyset$ e $I_k : \mathsf{VarR} \to \wp(A_k \times A_k)$ é uma função interpretação;

– $i : \mathsf{VarI} \to \bigcup_{k\in K} A_k$ é uma função que atribui a cada variável individual x um elemento do domínio de $\mathfrak{A}_k$, para algum $k \in K$;

– para todos os pontos $k, k' \in K$, se $k \preceq k'$ então $A_k \subseteq A_{k'}$ e $I_k(R) \subseteq I'_k(R)$.

De maneira genérica, reservamos a letra $\mathfrak{B}$ para WI-estruturas e a letra $\mathfrak{A}$ para W-estruturas.

Seja $\mathfrak{B} = \langle k, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i\rangle$ uma WI-estrutura, $k \in K$ e $T \in \mathsf{Trm}$. A *denotação de T em k*, denotada por $[\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}$, é definida recursivamente da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{lcll}
[\![R]\!]^k_{\mathfrak{B}} & = & I_k(R) & \\
[\![\ 0\ ]\!]^k_{\mathfrak{B}} & = & \emptyset & \text{(vazio)}\\
[\![T^-]\!]^k_{\mathfrak{B}} & = & \{(a,b) \in \bigcup_{k\in K} A_k : (a,b) \notin [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}\} & \text{(em geral, não é a complementação)}\\
[\![T^{\smile}]\!]^k_{\mathfrak{B}} & = & {[\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}}^{-1} & \text{(inversão)}\\
[\![T + U]\!]^k_{\mathfrak{B}} & = & [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} \cup [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}} & \text{(união)}\\
[\![T \cdot U]\!]^k_{\mathfrak{B}} & = & [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} \cap [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}} & \text{(interseção)}\\
[\![T\ ;\ U]\!]^k_{\mathfrak{B}} & = & [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} \circ [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}} & \text{(composição)}
\end{array}
$$

Quando não houver ambiguidade, omitimos os rótulos $\mathfrak{B}$ e/ou k de $[\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}$.

Lema 4.3.1. *Se $k \preceq k'$, então $[\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} \subseteq [\![T]\!]^{k'}_{\mathfrak{B}}$.*

Prova. Por indução nos termos e aplicação imediata das definições. ■

Sejam xTy uma fórmula, $\mathfrak{B} = \langle k, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i\rangle$ uma `WI`-estrutura e $k \in K$. Dizemos que:

1. xTy é *verdadeira em* k, denotado por $\mathfrak{B}, k \vDash xTy$, quando:

   – xTy não é da forma $xS^{-}y$ e $(i(x), i(y)) \in [\![T]\!]^{k}_{\mathfrak{B}}$;

   – xTy é da forma $xS^{-}y$ e, para todo k' tal que $k \preceq k'$, temos que $\mathfrak{B}, k' \nvDash xSy$, ou seja, $(i(x), i(y)) \notin [\![S]\!]^{k'}_{\mathfrak{B}}$;

2. xTy é *verdadeira em* $\mathfrak{B}$, denotado por $\mathfrak{B} \vDash xTy$, quando, para todo ponto $k \in K$, temos que $\mathfrak{B}, k \vDash xTy$, neste caso, dizemos também que $\mathfrak{B}$ é um *modelo* de xTy;

3. xTy é *válida*, denotado por $\vDash xTy$, quando, para toda `WI`-estrutura $\mathfrak{B}$, temos que $\mathfrak{B} \vDash xTy$.

Lema 4.3.2. *Se* $k \preceq k'$*, então* $\mathfrak{B}, k \vDash \varphi \Rightarrow \mathfrak{B}, k' \vDash \varphi$*.*

PROVA. Por indução nos termos e aplicação imediata das definições. ■

Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de fórmulas. Dizemos que φ é *consequência semântica* (*local*) de Γ, denotado por $\Gamma \vDash \varphi$, quando, para toda `WI`-estrutura $\mathfrak{B} = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i\rangle$ e $k \in K$, se $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$ então $\mathfrak{B}, k \vDash \varphi$.

Agora que temos os sistemas `W` e `WI` definidos — sintaxe, mecanismo de inferência e semântica — encerramos esta seção com algumas considerações que nos parecem relevantes.

Ambos os sistemas possuem a mesma sintaxe. A única diferença entre os mecanismos de inferência é a ausência da regra E_{-} no sistema `WI`. A relação entre as semânticas dos sistemas, no entanto, não é tão direta e requer uma análise mais cuidadosa.

Intuitivamente, deve estar claro que `WI`-estruturas são mais sofisticadas do que `W`-estruturas, basta observar que toda `W`-estrutura é um caso particular de uma `WI`-estrutura. Quando o conjunto de pontos K, de uma `WI`-estrutura $\mathfrak{B} = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i\rangle$, é unitário, o contradomínio de i é o universo da única `W`-estrutura $\mathfrak{A}$, presente em $\mathfrak{B}$. Neste caso, a função i é uma $\mathfrak{A}$-atribuição. Assim, a `WI`-estrutura $\mathfrak{B}$

"coincide" com a $\mathtt{W}$-estrutura $\mathfrak{A}$, munida de uma $\mathfrak{A}$-atribuição. Adiante, tornamos esta observação mais precisa quando demonstramos o Teorema de Corretude e o Teorema de Completude do sistema $\mathtt{W}$, a partir da corretude e completude de $\mathtt{WI}$.

Observamos que a noção de fórmula *verdadeira em* $\mathfrak{B} = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k :: k \in K\}, i\rangle$ é sempre relativa à atribuição i (das variáveis individuais), que está fixa na estrutura. Ainda, a noção de fórmula *verdadeira em um ponto* k, de $\mathfrak{B}$, não significa que a fórmula seja verdadeira em $\mathfrak{A}_k$. Intuitivamente, uma fórmula φ é verdadeira em um ponto k de $\mathfrak{B}$, quando a $\mathtt{W}$-estrutura $\mathfrak{A}_k$ e a atribuição i — que não necessariamente é uma $\mathfrak{A}_k$-atribuição, pois seu contradomínio pode não ser A_k — "satisfazem" φ.

Outro detalhe que gostaríamos de salientar relativo a noção de consequência local que definimos para ambos os sistemas. Em $\mathtt{W}$, esta noção é *local* com relação às atribuições das variáveis, enquanto que em $\mathtt{WI}$, esta noção é local com relação aos pontos da estrutura.

Finalmente, observamos que a noção de fórmula *válida*, embora definida de maneira análoga em ambos os sistemas, é mais forte em $\mathtt{WI}$ do que em $\mathtt{W}$ pois, como já mencionamos, as $\mathtt{W}$-estruturas são casos particulares de $\mathtt{WI}$-estruturas. Assim, relativa a $\mathtt{WI}$, esta noção requer que a fórmula seja verdadeira não apenas em todas as $\mathtt{W}$-estruturas mas também em todos os pontos de todas as $\mathtt{WI}$-estruturas. Esta observação parece estar de acordo com as "exigências" filosóficas da lógica intuicionista, na medida em que a noção de verdade está submetida ao crivo da demonstrabilidade, sendo natural que haja menos fórmulas "válidas intuicionisticamente" do que "classicamente".

4.3.4 Corretude de $\mathtt{WI}$

Para os lemas a seguir, x, y, u e v são variáveis individuais arbitrárias, T, U e V são termos arbitrários, Γ é um conjunto arbitrário de fórmulas, $\mathfrak{B} = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i\rangle$ é uma $\mathtt{WI}$-estrutura arbitrária e $k \in K$ um ponto arbitrário.

Lema 4.3.3. *Se* $\varphi \in \Gamma$ *e* $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$, *então* $\mathfrak{B}, k \vDash \varphi$.

PROVA. Por definição, $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$ se, e somente se, $\mathfrak{B}, k \vDash \varphi$, para toda $\varphi \in \Gamma$. ■

Lema 4.3.4. *Se* $\Gamma \vDash xTy$, *então* $\Gamma \vDash xT + Uy$.

PROVA. Suponhamos que $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$. Por hipótese, temos que $(i(x), i(y)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Logo, $(i(x), i(y)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} \cup [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}}$, ou seja, $(i(x), i(y)) \in [\![T + U]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Portanto, $\mathfrak{B}, k \vDash xT + Uy$. ■

Lema 4.3.5. *Se* $\Gamma \vDash xUy$*, então* $\Gamma \vDash xT + Uy$*.*

PROVA. Análoga à demonstração do Lema 4.3.4. ■

Lema 4.3.6. *Se* $\Gamma \vDash xT + Uv$*,* $xTy \vDash uVv$ *e* $xUy \vDash uVv$*, então* $\Gamma \vDash uVv$*.*

PROVA. Suponhamos que $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$. Por hipótese, temos que $(i(x), i(y)) \in [\![T + U]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Por definição, $(i(x), i(y)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} \cup [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Se $(i(x), i(y)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}$, isto é, $\mathfrak{B}, k \vDash xTy$, então, por hipótese, $\mathfrak{B}, k \vDash uVv$. Por outro lado, se $(i(x), i(y)) \in [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}}$, isto é, $\mathfrak{B}, k \vDash xUy$, então, por hipótese, $\mathfrak{B}, k \vDash uVv$. Portanto, $\mathfrak{B}, k \vDash uVv$. ■

Lema 4.3.7. *Se* $\Gamma \vDash xT \cdot Uy$*, então* $\Gamma \vDash xTy$*.*

PROVA. Suponhamos que $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$. Por hipótese, temos que $(i(x), i(y)) \in [\![T \cdot U]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Por definição, $(i(x), i(y)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} \cap [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Portanto, $(i(x), i(y)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}$, isto é, $\mathfrak{B}, k \vDash xTy$. ■

Lema 4.3.8. *Se* $\Gamma \vDash xT \cdot Uy$*, então* $\Gamma \vDash xUy$*.*

PROVA. Análoga à demonstração do Lema 4.3.7. ■

Lema 4.3.9. *Se* $\Gamma \vDash xTy$ *e* $\Gamma \vDash xUy$*, então* $\Gamma \vDash xT \cdot Uy$*.*

PROVA. Suponhamos que $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$. Por hipótese, $(i(x), i(y)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}$ e $(i(x), i(y)) \in [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}}$, ou seja, $(i(x), i(y)) \in [\![T \cdot U]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Portanto, $\mathfrak{B}, k \vDash xT \cdot Uy$ ■

Lema 4.3.10. *Se* $\Gamma, xTy \vDash u\ 0\ v$*, então* $\Gamma \vDash xT^{-}y$*.*

PROVA. Suponhamos que $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$ e $\mathfrak{B}, k \nvDash xT^{-}y$, isto é, para algum $k' \in K$ tal que $k \preceq k'$, temos $\mathfrak{B}, k' \vDash xTy$ e, pelo Lema 4.3.2, $\mathfrak{B}, k' \vDash \Gamma$. Pela hipótese, $\mathfrak{B}, k' \vDash u\ 0\ v$, ou seja, $(i(u), i(v)) \in [\![\ 0\ ]\!]^{k'}_{\mathfrak{B}}$, uma contradição, pois, por definição, $[\![\ 0\ ]\!]^{k'}_{\mathfrak{B}}$ é o conjunto vazio. Portanto, para todo $k' \in K$ tal que $k \preceq k'$, temos $\mathfrak{B}, k' \nvDash xTy$, isto é, $\mathfrak{B}, k \vDash xT^{-}y$. ■

Lema 4.3.11. *Se* $\Gamma \vDash xTy$ *e* $\Gamma \vDash xT^{-}y$*, então* $\Gamma \vDash u\ 0\ v$*.*

Prova. Suponhamos que $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$ e, para uma contradição, $\mathfrak{B}, k \nvDash u\ 0\ v$. Pelas hipóteses, temos que $(i(x), i(y)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}$ e $(i(x), i(y)) \notin [\![T]\!]^{k'}_{\mathfrak{B}}$, para todo k', $k \preceq k'$. Logo, $(i(x), i(y)) \notin [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}$, uma contradição. Portanto, $\mathfrak{B}, k \vDash u\ 0\ v$. ■

Lema 4.3.12. *Se* $\Gamma \vDash x\ 0\ y$*, então* $\Gamma \vDash uVv$*.*

Prova. Suponhamos que $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$. Pela hipótese, temos que $(i(x), i(y)) \in [\![\ 0\ ]\!]^k_{\mathfrak{B}} ::= \emptyset$. Como $\emptyset \subseteq [\![V]\!]^k_{\mathfrak{B}}$, temos que $(i(x), i(y)) \in [\![V]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Portanto, $\mathfrak{B}, k \vDash uVv$. ■

Lema 4.3.13. *Se* $\Gamma \vDash xTy$*, então* $\Gamma \vDash yT^{\smile}x$*.*

Prova. Suponhamos que $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$. Por hipótese, temos que $(i(x), i(y)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Logo, $(i(y), i(x)) \in {[\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}}^{-1} ::= [\![T^{\smile}]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Portanto, $\mathfrak{B}, k \vDash yT^{\smile}x$. ■

Lema 4.3.14. *Se* $\Gamma \vDash xT^{\smile}y$*, então* $\Gamma \vDash yTx$*.*

Prova. Suponhamos que $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$. Por hipótese, temos que $(i(x), i(y)) \in [\![T^{\smile}]\!]^k_{\mathfrak{B}} ::= {[\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}}^{-1}$. Logo, $(i(y), i(x)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Portanto, $\mathfrak{B}, k \vDash yTx$. ■

Lema 4.3.15. *Se* $\Gamma \vDash xTv$ *e* $\Gamma \vDash vUy$*, então* $\Gamma \vDash xT\ ;\ Uy$*.*

Prova. Suponhamos que $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$. Pelas hipóteses, temos que $(i(x), i(v)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}$ e $(i(v), i(y)) \in [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Logo, $(i(x), i(y)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} \circ [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}} ::= [\![T\ ;\ U]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Portanto $\mathfrak{B}, k \vDash xT\ ;\ Uy$. ■

Denotamos por $\mathsf{VarI}(\varphi)$ e $\mathsf{VarR}(\varphi)$, o conjunto de todas as variáveis individuais e relacionais, respectivamente, que ocorrem em φ. Para demonstra que a regra $E_{\ ;}$ é correta, provamos o seguinte lema.

Lema 4.3.16 (Concordância)**.** *Sejam* xTy *uma fórmula,* $\mathfrak{B} = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i\rangle$ *e* $\mathfrak{B}' = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}'_k : k \in K\}, i'\rangle$ *duas* `WI`*-estruturas tais que:*

– $A_k = A'_k$*, para todo* $k \in K$*;*

– $i(x) = i'(x)$ *e* $i(y) = i'(y)$*;*

– $I_k(R) = I'_k(R)$, *para toda variável* $R \in \mathsf{VarR}(xTy)$ *e ponto* $k \in K$.

Então, para todo $k \in K$*, temos:*

(a) $[\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} = [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}'}$,

(b) $\mathfrak{B}, k \vDash xTy$ *se, e somente se,* $\mathfrak{B}', k \vDash xTy$.

Prova. (a) Indução nos termos.

Por definição, para todo $k \in K$, temos que $[\![\ 0\ ]\!]^k_{\mathfrak{B}} = [\![\ 0\ ]\!]^k_{\mathfrak{B}'} ::= \emptyset$. Se R é uma variável relacional, por hipótese, $I_k(R) = I'_k(R)$, isto é, $[\![R]\!]^k_{\mathfrak{B}} = [\![R]\!]^k_{\mathfrak{B}'}$.

Suponhamos que, para dois termos T e U arbitrários e $k \in K$, temos $[\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} = [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}'}$ e $[\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}} = [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}'}$. Então é imediato verificar as seguintes igualdades, onde $=_{HI}$ indica a igualdade por hipótese de indução. Assim, temos:

$$
\begin{array}{lllll}
[\![T^{\smile}]\!]^k_{\mathfrak{B}} & ::= [\![T]\!]^{k\ -1}_{\mathfrak{B}} & =_{HI} [\![T]\!]^{k\ -1}_{\mathfrak{B}'} & ::= [\![T^{\smile}]\!]^k_{\mathfrak{B}'} \\
[\![T + U]\!]^k_{\mathfrak{B}} & ::= [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} \cup [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}} & =_{HI} [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}'} \cup [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}'} & ::= [\![T + U]\!]^k_{\mathfrak{B}'} \\
[\![T \cdot U]\!]^k_{\mathfrak{B}} & ::= [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} \cap [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}} & =_{HI} [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}'} \cap [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}'} & ::= [\![T \cdot U]\!]^k_{\mathfrak{B}'} \\
[\![T\ ;\ U]\!]^k_{\mathfrak{B}} & ::= [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} \circ [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}} & =_{HI} [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}'} \circ [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}'} & ::= [\![T\ ;\ U]\!]^k_{\mathfrak{B}'} \\
[\![T^{-}]\!]^k_{\mathfrak{B}} & ::= \{(a,b) : (a,b) \notin [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}\} & =_{HI} \{(a,b) : (a,b) \notin [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}'}\} & ::= [\![T^{-}]\!]^k_{\mathfrak{B}'}
\end{array}
$$

(b) Pelo item (a), temos que, para todo $k \in K$, $[\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}} = [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}'}$. Por hipótese, $i(x) = i'(x)$ e $i(y) = i'(y)$. Portanto $(i(x), i(y)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}$ se, e somente se, $(i'(x), i'(y)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}'}$, isto é, $\mathfrak{B}, k \vDash xTy$ se, e somente se, $\mathfrak{B}', k \vDash xTy$. ■

Lema 4.3.17. *Se* $\Gamma, xTv, vUy \vDash uVz$ *e* $\Gamma \vDash xT\ ;\ Uy$*, então* $\Gamma \vDash uVz$.

Prova. Suponhamos que $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$. Por hipótese, temos que $(i(x), i(y)) \in [\![T\ ;\ U]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Por definição, existe um $c \in A_k$ tal que $(i(x), c) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}}$ e $(c, i(y)) \in [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}}$. Tomamos a `WI`-estrutura $\mathfrak{B}' = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}'_k : k \in K\}, i'\rangle$, tal que $i'(w) = c$, onde w é uma variável individual nova (não ocorre em fórmulas do conjunto $\Gamma \cup \{xTv, vUy, uVz\}$), $i'(x) = i(x)$, para toda variável $x \in \mathsf{VarI} - \{w\}$, e $I'_k(R) = I_k(R)$, para toda variável $R \in \mathsf{VarR}$. Assim, pelo Lema 4.3.16 (a), temos que $(i'(x), i'(w)) \in [\![T]\!]^k_{\mathfrak{B}'}$ e $(i'(w), i'(y)) \in [\![U]\!]^k_{\mathfrak{B}'}$, ou seja, $\mathfrak{B}', k \vDash \{\Gamma, xTw, wUy\}$. Por hipótese, $\mathfrak{B}', k \vDash uVz$. Pelo Lema 4.3.16 (b), $\mathfrak{B}, k \vDash uVz$. ■

Teorema 4.3.1 (Corretude)**.** *Se* $\Gamma \vdash_{\mathtt{WI}} \varphi$*, então* $\Gamma \vDash_{\mathtt{WI}} \varphi$.

Prova. Seja Π uma prova de φ a partir de Γ. Nossa prova é por indução no tamanho $t(\Pi)$ da árvore de prova Π, temos:

Caso base, $t(\Pi) = 0$,

Π é da forma $\mathsf{Hip}\ \dfrac{}{\Gamma \Vdash \varphi}$, com $\varphi \in \Gamma$.

Pelo Lema 4.3.3, temos que $\Gamma \vDash \varphi$.

Suponhamos que o teorema valha para toda prova Π' tal que $t(\Pi') < n$.

Seja Π uma prova tal que $t(\Pi) = n$.

Apresentamos apenas um caso. Para os demais casos, basta aplicar os Lemas 4.3.3–4.3.17 de maneira análoga.

Se Π é da forma

$$I_+\ \dfrac{\dfrac{\Pi'}{\Gamma \Vdash xTy}}{\Gamma \Vdash xT + Uy},$$

então, pela hipótese de indução, temos $\Gamma \vDash xTy$. Portanto, pelo Lema 4.3.4, $\Gamma \vDash xT + Uy$. ∎

Encerramos esta seção mostrando que a regra de eliminação da negação (E_{-}), do sistema `W`, não é correta para a semântica de `WI`.

Lema 4.3.18. *Existe uma* `WI`*-estrutura* $\mathfrak{B} = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i\rangle$ *e um ponto* $k \in K$*, tal que* $\mathfrak{B}, k \vDash xR^{-^{-}}y$*, mas* $\mathfrak{B}, k \nvDash xRy$*.*

Prova. Definimos a estrutura $\mathfrak{B} = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i\rangle$, da seguinte maneira:

- $K ::= \{1, 2\}$
- $\preceq ::= \{(1,1), (2,2), (1,2)\}$
- $A_1 ::= \{a\}$ e $A_2 ::= \{a, b\}$
- $i(x) ::= a$ e $i(y) ::= b$
- $I_1(R) ::= \{(a,a)\}$
- $I_2(R) ::= \{(a,a), (a,b)\}$

Basta aplicar as definições para verificar que $\mathfrak{B}, 1 \vDash xR^{-^{-}}y$ e $\mathfrak{B}, 1 \nvDash xRy$. ∎

4.3.5 Completude de $\mathtt{WI}$

Apresentamos a estrutura da demonstração do Teorema de Completude do sistema $\mathtt{WI}$ na seguinte árvore.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Lema 4.3.19}}{\text{Lema 4.3.21}} \quad \dfrac{\text{Lema 4.3.19}}{\text{Lema 4.3.20}}}{\text{Lema 4.3.22}} \quad \text{Lema 4.3.23}}{\text{Teorema 4.3.2}} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Lema 4.3.19}}{\text{Lema 4.3.21}} \quad \dfrac{\text{Lema 4.3.19}}{\text{Lema 4.3.20}}}{\text{Lema 4.3.22}}}{\text{Teorema 4.3.3 (Completude)}}$$

Dado um conjunto V de variáveis individuais, dizemos que xTy é uma V-*fórmula* se $x, y \in \mathsf{V}$.

Dizemos que um conjunto dedutivamente fechado de V-fórmulas Γ é uma V-*teoria*. Note que esta noção é relativa ao mecanismo de inferência do sistema, já que o fecho sintático de um conjunto Γ depende das regras de inferência que o mecanismo dispõe. Assim, no nosso caso, podemos distinguir V-$\mathtt{WI}$-teorias de V-$\mathtt{W}$-teorias, já que $\mathtt{W}$ contém uma regra a mais do que $\mathtt{WI}$. A partir daqui, V-*teoria* refere-se tanto a V-$\mathtt{WI}$-teoria quanto a V-$\mathtt{W}$-teoria. Deixamos para explicitar o sistema quando necessário.

A *negação* de uma fórmula xTy é a fórmula $xT^{-}y$. Indicamos a negação de uma fórmula φ, em geral, por φ^{-}.

Dizemos que uma V-teoria Γ é *completa para a negação* quando Γ contém a negação de toda fórmula que não pertence a Γ.

Dizemos que uma V-teoria Γ é *completa para a composição*, quando, para quaisquer $x, y \in \mathsf{V}$ e termos $T, U \in \mathsf{Trm}$, se $xT \,;\, Uy \in \Gamma$ então existe $z \in \mathsf{V}$ tal que que $xTz \in \Gamma$ e $zUy \in \Gamma$.

Dizemos que uma V-teoria Γ é *completa para a disjunção* quando, para toda V-fórmula da forma $xT + Uy$, se $xT + Uy \in \Gamma$, então $xTy \in \Gamma$ ou $xUy \in \Gamma$.

Para demonstrar o Teorema de Completude para o sistema $\mathtt{WI}$, não precisamos lidar com V-teorias completas para a negação. Estas teorias desempenham um papel importante na demonstração da completude de $\mathtt{W}$. Mais adiante, mostramos que toda V-teoria completa para a negação é completa para a disjunção.

Dizemos que uma sequência de conjuntos de fórmulas $\langle \Gamma_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ é uma *cadeia* quando, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$.

Lema 4.3.19. *Sejam* V *um conjunto de variáveis individuais,* $\langle \Gamma_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ *uma cadeia e* φ *uma* V*-fórmula.*

(a) *Se, para cada* $i \in \mathbb{N}$*, temos que* Γ_i *é uma* V*-teoria, então* $\Delta ::= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$ *é uma* V*-teoria.*

(b) *Se, para cada* $i \in \mathbb{N}$*, temos que* $\Gamma_i \nvdash \varphi$*, então* $\Delta ::= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i \nvdash \varphi$*.*

Prova. (a) Suponhamos que $\Delta \vdash \psi$. Assim, por Fin, existe um conjunto finito $\Delta_{\text{fin}} \subseteq \Delta$ tal que $\Delta_{\text{fin}} \vdash \psi$. Como $\langle \Gamma_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ é uma cadeia, temos que, para algum $i \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, $\Delta_{\text{fin}} \subseteq \Gamma_i$. Logo, por Mon, $\Gamma_i \vdash \psi$. Como Γ_i é uma V-teoria, temos que $\psi \in \Gamma_i$. Portanto, $\psi \in \Delta$.

(b) Suponhamos que $\Delta \vdash \varphi$. Pelo mesmo argumento da cláusula anterior, para algum $i \in \mathbb{N}$, $\Gamma_i \vdash \varphi$, uma contradição, pois, por hipótese, $\Gamma_i \nvdash \varphi$. ■

Lema 4.3.20. *Sejam* V *um conjunto de variáveis individuais e* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *um conjunto de* V*-fórmulas tal que* $\Gamma \nvdash \varphi$*. Então existe uma* V*-teoria* Δ*, tal que* $\Gamma \subseteq \Delta$ *e, além disso,* $\Delta \nvdash \varphi$ *e* Δ *é completa para a disjunção.*

Prova. Definimos recursivamente uma sequência $\langle \Gamma_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ de conjuntos de fórmulas, da seguinte maneira:

1. $\Gamma_0 = \mathsf{FS}(\Gamma)$.

   Seja $\langle \varphi_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ uma enumeração de todas as V-fórmulas.

2. Dado Γ_i, definimos Γ_{i+1}, da seguinte maneira:

   – $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$, se $\Gamma_i \not\vdash \psi$, onde ψ é a primeira V-fórmula da forma $xT + Uy$, caso contrário,

   – $\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \mathsf{FS}(\Gamma_i \cup \{xTy\}), & \text{se } \Gamma_i \cup \{xT_y\} \nvdash \varphi \\ \mathsf{FS}(\Gamma_i \cup \{xUy\}), & \text{se } \Gamma_i \cup \{xT_y\} \vdash \varphi. \end{cases}$

É imediato verificar que $\langle \Gamma_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ é uma cadeia de V-teorias.

Tomamos $\Delta ::= \bigcup \{\Gamma_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Fato 4.3.1. Δ *é uma* V*-teoria.*

Pelo Lema 4.3.19(a).

Fato 4.3.2. $\Gamma \subseteq \Delta$.

Pela definição de Δ.

Fato 4.3.3. $\Delta \nvdash \varphi$.

Pelo Lema 4.3.19(b), basta provar que para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que $\Gamma_i \nvdash \varphi$. A prova é por indução em i.

Como $\Gamma_0 ::= \mathsf{FS}(\Gamma)$ e $\Gamma \nvdash \varphi$, temos que $\Gamma_0 \nvdash \varphi$. De fato, se $\mathsf{FS}(\Gamma) \vdash \varphi$, por definição, φ é consequência sintática de Γ, uma contradição.

Suponhamos que $\Gamma_i \nvdash \varphi$ e, para uma contradição, que $\Gamma_{i+1} \vdash \varphi$. Pela definição de Γ_{i+1}, e pelas regras Hip e $I_{\ +}$, temos que $\Gamma_i \vdash xT + Uy$ e $\Gamma_i, xTy \vdash \varphi$ e $\Gamma_i, xUy \vdash \varphi$. Aplicando a regra de dedução E_{+}, temos que $\Gamma_i \vdash \varphi$, contradição.

Fato 4.3.4. Δ *é completa para a disjunção.*

Se $xT + Uy \in \Delta$ então, para algum $i \in \mathbb{N}$, $xT + Uy \in \Gamma_i$. Por definição da sequência $\langle \Gamma_i : i \in \mathbb{N} \rangle$, para algum $j \geq i$, $xTy \in \Gamma_j$ ou $xUy \in \Gamma_j$. Logo, $xTy \in \Delta$ ou $xUy \in \Delta$. ∎

Lema 4.3.21. *Sejam* V *um conjunto de variáveis individuais e* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *um conjunto de* V*-fórmulas tal que* $\Gamma \nvdash \varphi$. *Então existe um conjunto enumerável de variáveis* V' *e uma* V'*-teoria* Δ, *tais que* $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{V}'$, $\Gamma \subseteq \Delta$ *e, além disso,* $\Delta \nvdash \varphi$ *e* Δ *é completa para a composição.*

PROVA. Definimos recursivamente uma sequência $\langle \mathsf{V}_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ de conjuntos de variáveis e uma sequência $\langle \Gamma_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ de conjunto de fórmulas, da seguinte maneira:

1. $\Gamma_0 ::= \mathsf{FS}(\Gamma)$ e $\mathsf{V}_0 ::= \mathsf{V}$;

   Sejam $\langle \varphi_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ uma enumeração de todas as V_i-fórmulas e $\langle v_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ uma enumeração de todas as variáveis em V_i.

2. Dados Γ_i e V_i, definimos Γ_{i+1} e V_{i+1}, da seguinte maneira:

   – $V_{i+1} ::= V_i \cup \{v_\psi : \psi$ é a primeira V_i-fórmula $xT \,;\, Uy$ tal que $\Gamma_i \vdash xT \,;\, Uy\}$

– $\Gamma_{i+1} = \mathsf{FS}(\Gamma_i \cup \{xTz, zUy : z$ é a primeira variável em V_{i+1} que não ocorre nas fórmulas de $\Gamma_i\})$

É imediato verificar que $\langle \Gamma_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ é uma cadeia de V-teorias.

Tomamos $\mathsf{V}' = \bigcup\{\mathsf{V}_i : i \in \mathbb{N}\}$ e $\Delta ::= \bigcup\{\Gamma_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Fato 4.3.5. Δ *é uma* V*-teoria.*

Pelo Lema 4.3.19(a).

Fato 4.3.6. $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{V}'$.

Imediato da definição de V'.

Fato 4.3.7. $\Gamma \subseteq \Delta$.

Imediato da definição de Δ.

Fato 4.3.8. $\Delta \nvdash \varphi$.

Pelo Lema 4.3.19(b), basta provar, por indução, que para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que $\Gamma_i \nvdash \varphi$.

Como $\Gamma_0 = \mathsf{FS}(\Gamma)$ e $\Gamma \nvdash \varphi$, temos que $\Gamma_0 \nvdash \varphi$. De fato, suponhamos, para uma contradição, que $\mathsf{FS}(\Gamma) \vdash \varphi$. Assim, $\varphi \in \mathsf{FS}(\Gamma)$, pois $\mathsf{FS}(\Gamma)$ é um conjunto dedutivamente fechado e, por definição, $\mathsf{FS}(\Gamma)$ é o conjunto das consequências sintáticas de Γ, logo $\Gamma \vdash \varphi$, uma contradição.

Suponhamos que $\Gamma_i \nvdash \varphi$ e, para uma contradição, que $\Gamma_{i+1} \vdash \varphi$. Por definição de Γ_{i+1}, temos que $\Gamma_i \vdash xT \,;\, Uy$ e $\Gamma_i, xTz \vdash \varphi$ e $\Gamma_i, zUy \vdash \varphi$. Aplicando a regra de dedução $E_{;}$, temos que $\Gamma_i \vdash \varphi$, contradição.

Fato 4.3.9. Δ *é completa para a composição.*

Se $xT \,;\, Uy \in \Delta$ então, para algum $i \in \mathbb{N}$, temos que $xT \,;\, Uy \in \Gamma_i$. Por definição das sequências $\langle \mathsf{V}_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ e $\langle \Gamma_i : i \in \mathbb{N} \rangle$, temos que, para algum $j \geq i$, existe uma variável $z \in \mathsf{V}_j$ tal que $xTz \in \Gamma_j$ e $zUy \in \Gamma_j$. Logo, $xTz \in \Delta$ e $zUy \in \Delta$. ■

Lema 4.3.22. *Sejam* V *um conjunto de variáveis individuais e* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *um conjunto de* V*-fórmulas tal que* $\Gamma \nvdash \varphi$. *Então existe um conjunto enumerável de variáveis individuais,* V'*, e uma* V'*-teoria,* Δ*, tais que* $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{V}'$*,* $\Gamma \subseteq \Delta$ *e, além disso,* $\Delta \nvdash \varphi$ *e* Δ *é completa para a disjunção e composição.*

Prova. Definimos recursivamente uma sequência de conjuntos de fórmulas $\langle \Gamma_i : i \in \mathbb{N} \rangle$, como segue:

(a) $\Gamma_0 = \mathsf{FS}(\Gamma)$,

(b) Γ_{2i+1} é uma V-teoria tal que $\Gamma_{2i+1} \nvdash \varphi$, Γ_{2i+1} é completa para a disjunção e $\Gamma_{2i} \subseteq \Gamma_{2i+1}$.

(c) Γ_{2i+2} é uma V'-teoria tal que $\Gamma_{2i+2} \nvdash \varphi$, Γ_{2i+2} é completa para composição, $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{V}'$ e $\Gamma_{2i+1} \subseteq \Gamma_{2i+2}$.

A existência de Γ_{2i+1} é garantida pelo Lema 4.3.20 e a de Γ_{2i+2} pelo Lema 4.3.21. Tomamos $\Delta = \bigcup\{\Gamma_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Argumentos análogos aos apresentados nos Lemas 4.3.20 e 4.3.21 (relativizando os índices entre pares e ímpares) demonstram que, Δ é uma V-teoria, $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{V}'$, $\Gamma \subseteq \Delta$, $\Delta \nvdash \varphi$ e Δ é completa para a disjunção e composição. ■

Lema 4.3.23. *Sejam V um conjunto de variáveis individuais, φ uma V-fórmula e Δ uma V-teoria tal que $\Delta \nvdash \varphi$ e Δ é completa para disjunção e composição. Então:*

(a) *$xT + Uy \in \Delta$ se, e somente se, $xTy \in \Delta$ ou $xUy \in \Delta$.*

(b) *$xT \cdot Uy \in \Delta$ se, e somente se, $xTy \in \Delta$ e $xUy \in \Delta$.*

(c) *Se $xT^{-}y \in \Delta$, então $xTy \notin \Delta$.*

(d) *$xT \,;\, Uy \in \Delta$ se, e somente se, existe $z \in \mathsf{V}$ tal que $xTz \in \Delta$ e $yUz \in \Delta$.*

(e) *$xT^{\smile}y \in \Delta$ se, e somente se, $yTx \in \Delta$.*

(f) *$x\ 0\ y \notin \Delta$.*

Prova. (a) Suponhamos que $xT + Uy \in \Delta$. Como Δ é completa para a disjunção, temos que $xTy \in \Delta$ ou $xUy \in \Delta$. Por outro lado, suponhamos que $xTy \in \Delta$ ou $xUy \in \Delta$. Aplicando as regras Hip e I_+, temos que $\Delta \vdash xT + Uy$. Portanto, como Δ é V-teoria, $xT + Uy \in \Delta$.

(b) Suponhamos que $xT \cdot Uy \in \Delta$. Aplicando as regras Hip e $E_{\cdot}$, temos que $\Delta \vdash xTy$ e $\Delta \vdash xUy$. Portanto, como Δ é V-teoria, $xTy \in \Delta$ e $xUy \in \Delta$. Por outro lado, suponhamos que $xTy \in \Delta$ e $xUy \in \Delta$. Aplicando as regras Hip e I . , temos que $\Delta \vdash xT \cdot Uy$. Portanto, como Δ é uma V-teoria, temos $xT \cdot Uy \in \Delta$.

(c) Suponhamos que $xT^{-}y \in \Delta$ e, para uma contradição, que $xTy \in \Delta$. Pela regra $I_{\ 0}$, temos que $\Delta \vdash u\ 0\ v$. Pela regra $E_{\ 0}$, temos que $\Delta \vdash \varphi$, uma contradição.

(d) Suponhamos que $xT\ ;\ Uy \in \Delta$. Como Δ é completa para a composição, existe $z \in \mathsf{V}$ tal que $xTz \in \Delta$ e $zUy \in \Delta$. Por outro lado, suponhamos que existe $z \in \mathsf{V}$ tal que $xTz \in \Delta$ e $yUz \in \Delta$. Aplicando as regras Hip e $I_{;}$, temos que $\Delta \vdash xT\ ;\ Uy$. Portanto, como Δ é V-teoria, $xT\ ;\ Uy \in \Delta$.

(e) Suponhamos que $xT^{\smile}y \in \Delta$. Aplicando as regras Hip e $E_{\smile}$, temos que $\Delta \vdash yTx$. Portanto, como Δ é uma V-teoria, $yTx \in \Delta$. Por outro lado, suponhamos que $yTx \in \Delta$. Aplicando as regras Hip e $I_{\smile}$, temos que $\Delta \vdash xT^{\smile}y$. Portanto, como Δ é V-teoria, $xT^{\smile}y \in \Delta$.

(f) Como $\Delta \nvdash \varphi$, pela regra $E_{\ 0}$, temos que $x\ 0\ y \notin \Delta$. ■

Teorema 4.3.2. *Sejam* V *um conjunto de variáveis individuais,* φ *uma* V*-fórmula e* Δ *uma* V-`WI`*-teoria tal que* $\Delta \nvdash_{\mathtt{WI}} \varphi$ *e* Δ *é completa para disjunção e composição. Então, existe uma* `WI`*-estrutura* $\mathfrak{B} = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i\rangle$ *e um ponto* $k \in K$ *tal que* $\Delta = \{\psi : \psi$ *é uma* V*-fórmula e* $\mathfrak{B}, k \vDash_{\mathtt{WI}} \psi\}$.

Prova. Definimos uma sequência de conjuntos de variáveis individuais, $\langle \mathsf{V}_j : j \in \mathbb{N}\rangle$, da seguinte maneira:

– $\mathsf{V}_0 = \mathsf{V}$,

– $\mathsf{V}_{j+1} = \mathsf{V}_j \cup \{x_1^j, x_2^j, \ldots\}$, onde para cada $k \in \mathbb{N}$, x_k^j é uma variável individual nova, ou seja, não pertence a V_j.

Seja $\mathsf{Var} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathsf{V}_j$.

Definimos $\mathfrak{B} = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i\rangle$, da seguinte maneira:

– $K ::= \{\Lambda : \Lambda$ é uma V_j-`WI`-teoria completa para a disjunção e composição, $\Delta \subseteq \Lambda$ e $\Lambda \nvdash_{\mathtt{WI}} \varphi\}$,

– $\preceq$ é a relação de inclusão em K,

– $\mathfrak{A}_\Lambda ::= \langle \mathsf{V}_j^\Lambda, I_\Lambda \rangle$, onde,

V_j^Λ é o *menor* conjunto V_j, da sequência $\langle \mathsf{V}_j : j \in \mathbb{N} \rangle$, tal que $\mathsf{Var}(\Lambda) \subseteq \mathsf{V}_j$,

$I_\Lambda(R) ::= \{(x, y) : xRy \in \Lambda\}$, para todo $\Lambda \in K$ e para todo $R \in \mathsf{VarR}$,

– $i(v) ::= v$, para todo $v \in \mathsf{Var}$.

Fato 4.3.10. $\mathfrak{B}$ *é uma* `WI`*-estrutura.*

Temos que $K \neq \emptyset$, pois $\Delta \in K$.

Sejam $\Lambda, \Lambda' \in K$ tais que $\Lambda \subseteq \Lambda'$. Assim, $\mathsf{V}_j^\Lambda \subseteq \mathsf{V}_j^{\Lambda'}$, caso contrário, V_j^Λ não é o *menor* conjunto V_j tal que $\mathsf{Var}(\Lambda) \subseteq \mathsf{V}_j$. Além disso, $I_\Lambda ::= \{(x, y) : xRy \in \Lambda\} \subseteq \{(x, y) : xRy \in \Lambda'\} ::= I_{\Lambda'}$.

Fato 4.3.11. *Para todo $\Lambda \in K$, temos que $xT^{-}y \in \Lambda$ se, e somente se, para todo $\Lambda' \in K$, tal que $\Lambda \subseteq \Lambda'$, temos que $xTy \notin \Lambda$.*

Suponhamos que $xT^{-}y \in \Lambda$ e, para uma contradição, que existe $\Lambda' \in K$, tal que $\Lambda \subseteq \Lambda'$ e $xTy \in \Lambda'$. Assim, $xT^{-}y \in \Lambda'$ e, como Λ' é uma V_j-`WI`-teoria, temos que $\Lambda' \vdash_{\mathtt{WI}} xTy$ e $\Lambda' \vdash_{\mathtt{WI}} xT^{-}y$. Agora, aplicando as regras $I_{\,0}$ e $E_{\,0}$, temos que $\Lambda' \vdash_{\mathtt{WI}} \varphi$, uma contradição.

Para provar a recíproca, suponhamos que $xT^{-}y \notin \Lambda$. Assim, como Λ é uma V_j-`WI`-teoria, temos que $\Lambda \nvdash_{\mathtt{WI}} xT^{-}y$. Logo, $\Lambda \cup \{xTy\} \nvdash_{\mathtt{WI}} xT^{-}y$ pois, caso contrário, um argumento similar ao usado acima mostraria que $\Lambda \vdash_{\mathtt{WI}} \varphi$. Assim, pelo Lema 4.3.22, existe uma $\mathsf{V}_{j'}$-`WI`-teoria Λ' tal que, $\mathsf{V}_j \subseteq \mathsf{V}_{j'}$, $\Lambda \cup \{xTy\} \subseteq \Lambda'$, $\Lambda' \nvdash_{\mathtt{WI}} xT^{-}y$ e Λ' é completa para a disjunção e para a composição. Ou seja, $\Lambda' \in K$, $\Lambda \subseteq \Lambda'$ e $xTy \in \Lambda'$.

Agora, por indução nos termos T, vamos mostrar que, para todo ponto $\Lambda \in K$ e fórmula ψ,

$$\mathfrak{B}, \Lambda \vDash \psi \text{ se, e somente se, } \psi \in \Lambda,$$

ou seja, $\Lambda = \{\psi : \psi \text{ é } \mathsf{V}_j^\Lambda\text{-fórmula e } \mathfrak{B}, \Lambda \vDash \psi\}$.

Caso base: ψ é da forma xRy, onde $R \in \mathsf{VarR}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{B}, \Lambda \vDash_{\mathtt{WI}} xRy & \text{sse} & (i(x), i(y)) \in [\![R]\!]_{\mathfrak{B}}^{\Lambda} \\ & \overset{\text{Def.}}{\text{sse}} & (x, y) \in \{(u, v) : uRv \in \Lambda\} \end{array}$$

Apresentamos apenas três casos, sendo os demais análogos a estes.

Caso 1: ψ é da forma $xT^{-}y$.

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{B}, \Lambda \vDash_{\mathtt{WI}} xT^{-}y & \text{sse} & \forall \Lambda' \in K : \Lambda \subseteq \Lambda', \text{ temos que } (i(x), i(y)) \notin [\![T]\!]_{\mathfrak{B}}^{\Lambda'} \\ & \text{sse} & \forall \Lambda' \in K : \Lambda \subseteq \Lambda', \text{ temos que } \mathfrak{B}, \Lambda' \nvDash_{\mathtt{WI}} xTy \\ & \overset{\text{H.I.}}{\text{sse}} & \forall \Lambda' \in K : \Lambda \subseteq \Lambda', \text{ temos que } xTy \notin \Lambda' \\ & \overset{4.3.11}{\text{sse}} & xT^{-}y \in \Lambda \end{array}$$

Caso 2: ψ é da forma $xT + Uy$.

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{B}, \Lambda \vDash_{\mathtt{WI}} xT + Uy & \text{sse} & (i(x), i(y)) \in [\![T + U]\!]_{\mathfrak{B}}^{\Lambda} \\ & \text{sse} & (x, y) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{B}}^{\Lambda} \cup [\![U]\!]_{\mathfrak{B}}^{\Lambda} \\ & \text{sse} & (x, y) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{B}}^{\Lambda} \text{ ou } (x, y) \in [\![U]\!]_{\mathfrak{B}}^{\Lambda} \\ & \text{sse} & \mathfrak{B}, \Lambda \vDash_{\mathtt{WI}} xTy \text{ ou } \mathfrak{B}, \Lambda \vDash_{\mathtt{WI}} xUy \\ & \overset{\text{H.I.}}{\text{sse}} & xTy \in \Lambda \text{ ou } xUy \in \Lambda \\ & \overset{4.3.23(a)}{\text{sse}} & xT + Uy \in \Lambda \end{array}$$

Caso 3: ψ é da forma $xT \,;\, Uy$.

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{B}, \Lambda \vDash_{\mathtt{WI}} xT \,;\, Uy & \text{sse} & (i(x), i(y)) \in [\![T \,;\, U]\!]_{\mathfrak{B}}^{\Lambda} \\ & \text{sse} & (i(x), z) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{B}}^{\Lambda} \text{ e } (z, i(y)) \in [\![U]\!]_{\mathfrak{B}}^{\Lambda}, \text{ para algum } z \in \mathsf{V}_j^{\Lambda}, \\ & \text{sse} & \mathfrak{B}, \Lambda \vDash_{\mathtt{WI}} xTz \text{ e } \mathfrak{B}, \Lambda \vDash_{\mathtt{WI}} zUy \\ & \overset{\text{H.I.}}{\text{sse}} & xTz \in \Lambda \text{ e } zUy \in \Lambda \\ & \overset{4.3.23(d)}{\text{sse}} & xT \,;\, Uy \in \Lambda \end{array}$$

Agora, pela definição de $\mathfrak{B}$, como $\Delta \in K$, temos que $\Delta = \{\psi : \psi$ é V-fórmula e $\mathfrak{B}, \Delta \vDash \psi\}$. ■

Teorema 4.3.3 (Completude)**.** *Sejam V um conjunto enumerável de variáveis individuais e $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de V-fórmulas. Se $\Gamma \vDash_{\mathtt{WI}} \varphi$, então $\Gamma \vdash_{\mathtt{WI}} \varphi$.*

Prova. Suponhamos que $\Gamma \nvdash_{\mathtt{WI}} \varphi$. Assim, pelo Lema 4.3.22, existe um conjunto de variáveis V' e uma V'-WI-teoria Δ, tais que $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{V}'$, $\Gamma \subseteq \Delta$, Δ é completa para a disjunção e composição e $\Delta \nvdash_{\mathtt{WI}} \varphi$. Logo, pelo Teorema 4.3.2, existe uma WI-estrutura $\mathfrak{B} = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i\rangle$ e um ponto $k \in K$ tal que $\Delta = \{\psi : \psi$ é uma V'-fórmula e $\mathfrak{B}, k \vDash_{\mathtt{WI}} \psi\}$.

Como $\Gamma \subseteq \Delta$, temos que $\mathfrak{B}, k \vDash_{\mathtt{WI}} \Gamma$. Como $\Delta \nvdash_{\mathtt{WI}} \varphi$, temos que $\varphi \notin \Delta$ e, assim, $\mathfrak{B}, k \nvDash_{\mathtt{WI}} \varphi$. Logo, $\Gamma \nvDash_{\mathtt{WI}} \varphi$. ■

4.3.6 Corretude e Completude de $\mathtt{W}$

Na Seção 4.3.4, mostramos que a regra E_{-} não é correta para a semântica de $\mathtt{WI}$. Mostramos, agora, que esta regra é correta para a semântica de $\mathtt{W}$.

Lema 4.3.24. *Se* $\Gamma \vDash_{\mathtt{W}} xT^{-^{-}} y$*, então* $\Gamma \vDash_{\mathtt{W}} xTy$.

Prova. Suponhamos que $\mathfrak{A} \vDash_{\mathtt{W}} \Gamma$. Por hipótese, $\mathfrak{A} \vDash_{\mathtt{W}} xT^{-^{-}} y$, ou seja, $(Ix, Iy) \in [\![T^{-^{-}}]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![T]\!]_{\mathfrak{A}}{}^{cc} = [\![T]\!]_{\mathfrak{A}}$. Portanto, $\mathfrak{A} \vDash_{\mathtt{W}} [\![T]\!]_{\mathfrak{A}}$. ■

Agora, queremos "economizar" a demonstração de que as demais regras de $\mathtt{W}$ são corretas, dado que já demonstramos que estas são corretas para a semântica de $\mathtt{WI}$. Assim, precisamos, primeiramente, compatibilizar as semânticas dos dois sistemas para podermos aplicar os Lemas 4.3.3–4.3.17, que mostram a corretude das regras para $\mathtt{WI}$. A seguir, tornamos precisa a observação feita anteriormente, sobre $\mathtt{W}$-estruturas "coincidirem" com $\mathtt{WI}$-estruturas.

Lema 4.3.25. *Sejam* xTy *uma fórmula,* $\mathfrak{A}$ *uma* $\mathtt{W}$*-estrutura e* a *uma* $\mathfrak{A}$*-atribuição. Então,*

$$\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash_{\mathtt{W}} xTy \textit{ se, e somente se, } \mathfrak{B}, * \vDash_{\mathtt{WI}} xTy,$$

onde $\mathfrak{B}$ *é a* $\mathtt{WI}$*-estrutura* $\langle \{*\}, \{(*,*)\}, \{\mathfrak{A}\}, \mathsf{a} \rangle$.

Prova. Diretamente das definições, temos que $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash xTy$ sse $(\mathsf{a}(x), \mathsf{a}(y)) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{A}} ::= [\![T]\!]^{*}_{\mathfrak{B}}$ sse $\mathfrak{B}, * \vDash xTy$. ■

Dizemos que a $\mathtt{WI}$-estrutura $\mathfrak{B}$, definida no Lema 4.3.25, é *correspondente à* $\mathfrak{A}$ *com a* $\mathfrak{A}$-atribuição $\mathtt{A}$.

Segue a demonstração de que a regra $E_{\cdot}$ é correta para a semântica de $\mathtt{W}$. Para as demais regras, a demonstração é análoga e será omitida.

Sejam x e y variáveis individuais arbitrárias, T e U termos arbitrários, Γ um conjunto arbitrário de fórmulas, $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ uma $\mathtt{W}$-estrutura arbitrária e a uma $\mathfrak{A}$-atribuição arbitrária.

Lema 4.3.26. *Se* $\Gamma \vDash_{\mathtt{W}} xT \cdot Uy$*, então* $\Gamma \vDash_{\mathtt{W}} xUy$.

Prova. Suponhamos que $\mathfrak{A}, \mathtt{a} \vDash_{\mathtt{W}} \Gamma$. Pelo Lema 4.3.25, temos que $\mathfrak{B}, * \vDash_{\mathtt{WI}} \Gamma$, onde $\mathfrak{B}$ é a $\mathtt{WI}$-estrutura *correspondente a* $\mathfrak{A}$ *com a* $\mathfrak{A}$-atribuição $\mathtt{A}$.

Agora, pelo Lema 4.3.7, $\mathfrak{B}, * \vDash_{\mathtt{WI}} xUy$. Novamente, pelo Lema 4.3.25, temos que $\mathfrak{A}, \mathtt{a} \vDash_{\mathtt{W}} xUy$. ■

Com isso, completamos o que é necessário para demonstrarmos a corretude de $\mathtt{W}$.

Teorema 4.3.4 (Corretude). *Se* $\Gamma \vdash_{\mathtt{W}} \varphi$, *então* $\Gamma \vDash_{\mathtt{W}} \varphi$.

Prova. Análoga à demonstração do Teorema 4.3.1. ■

Agora, vamos tratar o Teorema de Completude para o sistema $\mathtt{W}$, cuja estrutura da demonstração está representada na seguinte árvore.

$$\dfrac{\dfrac{\text{Lema 4.3.27} \quad \text{Lema 4.3.23}}{\text{Teorema 4.3.5}} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Lema 4.3.19}}{\text{Lema 4.3.21}} \quad \dfrac{\dfrac{\text{Lema 4.3.28} \quad \text{Lema 4.3.29}}{\text{Lema 4.3.30}} \quad \text{Lema 4.3.19}}{\text{Lema 4.3.31}}}{\text{Lema 4.3.32}}}{\text{Teorema 4.3.6 (Completude)}}$$

Como já mencionamos, no caso de $\mathtt{W}$, vamos precisar lidar simplesmente com teorias completas para a negação. O próximo resultado mostra que esta propriedade é mais forte do que ser completa para a disjunção.

Lema 4.3.27. *Sejam* V *um conjunto de variáveis individuais,* φ *uma* V*-fórmula e* Δ *uma* V*-teoria tal que* $\Delta \nvdash \varphi$*. Se* Δ *é completa para a negação, então* Δ *é completa para a disjunção.*

Prova. Suponhamos que $xT + Uy \in \Delta$, mas $xTy \notin \Delta$ e $xUy \notin \Delta$. Como Δ é completa para a negação, temos que $xT^{-}y \in \Delta$ e $xU^{-}y \in \Delta$.

Pela dedução abaixo, $\Delta \vdash \varphi$, uma contradição.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta, xTy \Vdash xT^{-}\,y}\,\text{Hip} \quad \dfrac{}{\Delta, xTy \Vdash xTy}\,\text{Hip}}{\Delta, xTy \Vdash x\,0\,y}\,I_0 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Delta, xUy \Vdash xU^{-}\,y}\,\text{Hip} \quad \dfrac{}{\Delta, xUy \Vdash xUy}\,\text{Hip}}{\Delta, xUy \Vdash x\,0\,y}\,I_0 \qquad \dfrac{}{\Delta \Vdash xT + Uy}\,\text{Hip}}{\Delta \Vdash x\,0\,y}\,E_+}{\Delta \Vdash \varphi}\,E_0$$

■

De maneira análoga ao que foi feito para o sistema `WI`, dado um conjunto $\Gamma \cup \{\varphi\}$ de V-fórmulas, tal que $\Gamma \nvdash \varphi$, queremos garantir a existência de uma extensão Δ de Γ que seja completa para a negação e $\Delta \nvdash \varphi$. Para isso, precisamos demonstrar alguns resultados auxiliares, que não foram necessários na demonstração da completude de `WI`.

Lema 4.3.28. *Para qualquer conjunto Γ de fórmulas, $\Gamma, x(T+U)^{-}y \vdash xT^{-}y$.*

Prova.

$$
I_{-}\,\dfrac{I_{0}\,\dfrac{I_{+}\,\dfrac{\mathsf{Hip}\,\dfrac{}{\Gamma, xT+U^{-}y, xTy \Vdash xTy}}{\Gamma, x(T+U)^{-}y, xTy \Vdash xT+Uy} \qquad \mathsf{Hip}\,\dfrac{}{\Gamma, x(T+U)^{-}y, xTy \Vdash x(T+U)^{-}y}}{\Gamma, x(T+U)^{-}y, xTy \Vdash u\ 0\ v}}{\Gamma, x(T+U)^{-}y \Vdash xT^{-}y}
$$

■

Lema 4.3.29. *Para qualquer conjunto Γ de fórmulas, $\Gamma, x(T+U)^{-}y \vdash xU^{-}y$.*

Prova. Análoga à prova do Lema 4.3.28 ■

Lema 4.3.30. *Para qualquer conjunto Γ de fórmulas, $\Gamma \vdash xT+T^{-}y$.*

Prova.

$$
E_{-}\,\dfrac{I_{-}\,\dfrac{I_{0}\,\dfrac{\dfrac{\text{Lema 4.3.28}}{\Gamma, x(T+T^{-})^{-}y \Vdash xT^{-}y} \qquad \dfrac{\text{Lema 4.3.29}}{\Gamma, x(T+T^{-})^{-}y \Vdash xT^{--}y}}{\Gamma, x(T+T^{-})^{-}y \Vdash u\ 0\ v}}{\Gamma \Vdash x(T+T^{-})^{--}y}}{\Gamma \Vdash xT+T^{-}y}
$$

■

Lema 4.3.31. *Sejam V um conjunto de variáveis individuais e $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de V-fórmulas tal que $\Gamma \nvdash \varphi$. Então existe uma V-teoria Δ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$ e, além disso, $\Delta \nvdash \varphi$ e Δ é completa para a negação.*

Prova. Seja $\langle \varphi_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ uma enumeração das V-fórmulas.

Definimos recursivamente uma sequência $\langle \Gamma_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ de V-teorias que contém Γ, do seguinte modo:

1. $\Gamma_0 = \mathsf{FS}(\Gamma)$;
2. $\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i, & \text{se } \Gamma_i \vdash \varphi_i^{-} \\ \mathsf{FS}(\Gamma_i \cup \{\varphi_i\}), & \text{caso contrário} \end{cases}$

É imediato verificar que $\langle \Gamma_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ é uma cadeia de V-teorias.

Tomamos $\Delta ::= \bigcup \{\Gamma_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Fato 4.3.12. Δ *é uma* V*-teoria.*

Pelo Lema 4.3.19(a).

Fato 4.3.13. $\Gamma \subseteq \Delta$.

Imediato da definição de Δ.

Fato 4.3.14. $\Delta \nvdash \varphi$.

Seja $\varphi : xTy$. Pelo Lema 4.3.19(b), basta provar que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $\Gamma_i \nvdash xTy$. A prova é feita por indução em i. Como $\Gamma_0 = \Gamma$, temos que $\Gamma_0 \nvdash xTy$. Suponhamos que $\Gamma_i \nvdash xTy$ e, para uma contradição, que $\Gamma_{i+1} \vdash xTy$. Assim, $\Gamma_i \nvdash xT^{-^{-}} y$, pois, se $\Gamma_i \vdash xT^{-^{-}} y$, pela regra E_-, $\Gamma_i \vdash xTy$. Por definição de Γ_{i+1}, temos que $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{xT^{-}y\}$. Assim, $\Gamma_i \cup \{xT^{-}y\} \vdash xTy$ e, por Hip, $\Gamma_i \cup \{xTy\} \vdash xTy$. Pelo Lema 4.3.30, $\Gamma_i \vdash xT + T^{-}y$. Logo, por aplicação da regra E_+, temos que $\Gamma_i \vdash xTy$, uma contradição.

Fato 4.3.15. Δ *é completa para a negação.*

Suponhamos que Δ não seja completa para a negação. Então, existe uma V-fórmula φ_i tal que $\varphi_i \notin \Delta$ e $\varphi_i^{-} \notin \Delta$. Logo, para todo $j \in \mathbb{N}$, $\varphi_i \notin \Gamma_j$ e $\varphi_i^{-} \notin \Gamma_j$. Em particular, $\varphi_i^{-} \notin \Gamma_i$. Sendo assim, pela definição de $\langle \Gamma_i : i \in \mathbb{N} \rangle$, temos que $\varphi_i \in \Gamma_{i+1}$, uma contradição. ∎

Lema 4.3.32. *Sejam* V *um conjunto de variáveis individuais e* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *um conjunto de* V*-fórmulas tal que* $\Gamma \nvdash \varphi$*. Então existe um conjunto enumerável de variáveis* V' *e uma* V'*-teoria* Δ *tais que* $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{V}'$*,* $\Gamma \subseteq \Delta$ *e, além disso,* $\Delta \nvdash \varphi$ *e* Δ *é completa para a negação e composição.*

Prova. Definimos recursivamente uma sequência de conjunto de fórmulas $\langle \Gamma_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$, da seguinte maneira:

(a) $\Gamma_0 = \mathsf{FS}(\Gamma)$

(b) Γ_{2i+1} é uma V-teoria tal que $\Gamma_{2i+1} \nvdash \varphi$, Γ_{2i+1} é completa para a negação e $\Gamma_{2i} \subseteq \Gamma_{2i+1}$. A existência de Γ_{2i+1} é garantida pelo Lema 4.3.31

(c) Γ_{2i+2} é uma V'-teoria tal que $\Gamma_{2i+2} \nvdash \varphi$, Γ_{2i+2} é completa para composição, $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{V}'$ e $\Gamma_{2i+1} \subseteq \Gamma_{2i+2}$. A existência de Γ_{2i+1} é garantida pelo Lema 4.3.21

Tomamos $\Delta = \bigcup\{\Gamma_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Argumentos análogos aos apresentados nas provas dos Lemas 4.3.31 e 4.3.21 (relativizando os índices entre pares e ímpares) demonstram que: Δ é uma V-teoria, $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{V}'$, $\Gamma \subseteq \Delta$, $\Delta \nvdash \varphi$ e Δ é completa para a negação e composição. ■

Teorema 4.3.5. *Sejam* V *um conjunto de variáveis individuais,* φ *uma* V*-fórmula e* Δ *uma* $\mathtt{V}$*-teoria completa para a composição e negação tal que* $\Delta \nvdash_{\mathtt{W}} \varphi$*. Então existe uma* $\mathtt{W}$*-estrutura* $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ *e uma* $\mathfrak{A}$*-atribuição* a *tal que* $\Delta = \{\psi : \psi$ *é uma* V*-fórmula e* $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash \psi\}$*.*

Prova. Definimos a $\mathtt{W}$-estrutura $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$, do seguinte modo:

- $A = \mathsf{V}$

- $I(R) = \{(x, y) : xRy \in \Gamma\}$

Tomamos a $\mathfrak{A}$-atribuição $\mathsf{a}(x) ::= x$, para todo $x \in \mathsf{V}$.

Agora, por indução nos termos T, vamos mostrar que

$$\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash_{\mathtt{W}} \psi \text{ se, e somente se, } \psi \in \Delta.$$

ou seja, $\Delta = \{\psi : \psi$ é V-fórmula e $\mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash \psi\}$

Caso base: ψ é da forma xRy, onde $R \in \mathsf{VarR}$.

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash_{\mathtt{W}} xRy & \text{sse} & (\mathsf{a}(x), \mathsf{a}(y)) \in [\![R]\!]_{\mathfrak{A}}, \text{para toda } \mathfrak{A}\text{-atribuição}, \\ & \text{sse} & (x, y) \in \{(u, v) : uRv \in \Delta\} \\ & \text{sse} & xRy \in \Delta \end{array}$$

Apresentamos apenas três casos, sendo os demais análogos a estes.

Caso 1: ψ é da forma $xT^{-}y$.

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash_{\mathtt{W}} xT^{-}y & \text{sse} & (\mathsf{a}(x), \mathsf{a}(y)) \in [\![T^{-}]\!]_{\mathfrak{A}} \\ & \text{sse} & (x, y) \in [\![T]\!]^{c}_{\mathfrak{A}} \\ & \text{sse} & \mathfrak{A}, \mathsf{a} \nvDash_{\mathtt{W}} xTy \\ & \overset{\text{H.I.}}{\text{sse}} & xTy \notin \Delta \\ & \text{sse} & xT^{-}y \in \Delta \text{ (pois } \Delta \text{ é completa para a negação)} \end{array}$$

Caso 2: ψ é da forma $xT \,;\, Uy$.

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash_{\mathtt{W}} xT \,;\, Uy & \text{sse} & (\mathsf{a}(x), \mathsf{a}(y)) \in [\![T \,;\, U]\!]_{\mathfrak{A}} \\ & \text{sse} & (x, y) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{A}} \circ [\![U]\!]_{\mathfrak{A}} \\ & \text{sse} & (x, z) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{A}} \text{ e } (z, y) \in [\![U]\!]_{\mathfrak{A}}, \text{ para algum } z \in \mathsf{V} \\ & \text{sse} & \mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash_{\mathtt{W}} xTz \text{ e } \mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash_{\mathtt{W}} zUy \\ & \overset{\text{H.I.}}{\text{sse}} & xTz \in \Gamma \text{ e } zUy \in \Gamma \\ & \overset{\text{4.3.23(d)}}{\text{sse}} & xT \,;\, Uy \in \Delta \end{array}$$

Caso 3:

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash_{\mathtt{W}} xT + Uy & \text{sse} & (i(x), i(y)) \in [\![T + U]\!]_{\mathfrak{A}} \\ & \text{sse} & (x, y) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{A}} \cup [\![U]\!]_{\mathfrak{A}} \\ & \text{sse} & (x, y) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{A}} \text{ ou } ([x], [y]) \in [\![U]\!]_{\mathfrak{A}} \\ & \text{sse} & \mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash_{\mathtt{W}} xTy \text{ ou } \mathfrak{A}, \mathsf{a} \vDash_{\mathtt{W}} xUy \\ & \overset{\text{H.I.}}{\text{sse}} & xTy \in \Delta \text{ ou } xUy \in \Delta \\ & \overset{\text{4.3.27}}{\text{sse}} & xT + Uy \end{array}$$

■

Teorema 4.3.6 (Completude). *Sejam* V *um conjunto enumerável de variáveis individuais,* φ *uma* V*-fórmula e* Γ *uma* V*-*$\mathtt{W}$*-teoria. Se* $\Gamma \vDash_{\mathtt{W}} \varphi$*, então* $\Gamma \vdash_{\mathtt{WI}} \varphi$*.*

PROVA. Análoga à demonstração do Teorema 4.3.3, aplicando os Lema 4.3.32 e o Teorema 4.3.5. ■

4.4 O Teorema K

Agora que demonstramos que `W` é um sistema *adequado* (correto e completo) para a lógica clássica das relações e `WI` é adequado para a lógica intuicionista das relações, queremos investigar quais resultados do cálculo relacional são estritamente clássicos, no sentido de não poderem ser obtidos em `WI`. Em particular, começamos essa investigação pelo Teorema K. Versões deste teorema tem sido usadas como axiomas de alguns cálculos relacionais, inclusive da AR.

Na linguagem que estamos usando, o Teorema K pode ser enunciado como o seguinte conjunto de equivalências:

$$T \;;\, U \leq V \text{ sse } T^{\smile} \;;\, V^{-} \leq U^{-} \text{ sse } V^{-} \;;\, U^{\smile} \leq T^{-}$$

A seguir, exploramos esse teorema em detalhes. Mostramos quais “lados” dessas equivalências podem ser obtidos em `WI` e quais são obtidos apenas em `W`.

Para facilitar a leitura das provas formais, vamos adotar as regras de introdução e eliminação de $\leq$, introduzidas por Wadge. Temos que mostrar que estas regras são corretas, tanto em `W` quanto em `WI`. Neste sistemas, as regras são enunciadas da seguinte forma:

* $I_{\leq}$ e $E_{\leq}$

  – Se $\dfrac{\Pi}{\Gamma, [xTy] \Vdash xUy}$ é uma dedução a partir de $\Gamma \cup \{xTy\}$, então

  $$I_{\leq}\,\dfrac{\dfrac{\Pi}{\Gamma, [xTy] \Vdash xUy}}{\Gamma \Vdash T \leq U}$$

  é uma dedução a partir de Γ, onde a hipótese xTy é *descarregada*.

  – Se

  $$\dfrac{\Pi_1}{\Gamma \Vdash T \leq U} \quad \text{e} \quad \dfrac{\Pi_2}{\Gamma \Vdash xTy}$$

  são deduções, então

  $$E_{\leq}\,\dfrac{\dfrac{\Pi_1}{\Gamma \Vdash T \leq U} \qquad \dfrac{\Pi_2}{\Gamma \Vdash xTy}}{\Gamma \Vdash xUy}$$

  é uma dedução.

Pelo que já mostramos anterioremente, é suficiente demonstrar que estas regras são corretas para a semântica de `WI`.

Sejam x, y, u e v variáveis individuais arbitrárias, T, U e V termos arbitrários, Γ um conjunto arbitrário de fórmulas, $\mathfrak{B} = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i\rangle$ uma `WI`-estrutura arbitrária e $k \in K$ um ponto arbitrário.

Lema 4.4.1. *Se* $\Gamma, xTy \vDash xUy$ *então* $\Gamma \vDash T \leq U$.

Prova. Suponhamos que $\mathfrak{B}, k \vDash_{\mathtt{WI}} \Gamma$ e, para uma contradição, $\mathfrak{B}, k \nvDash_{\mathtt{WI}} T \leq U$.

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathfrak{B}, k \nvDash z(\ 0^{-}\ ;\ (T \cdot U^{-})\ ;\ 0^{-})^{-}\ z \\
\text{sse} & \exists k' \text{ tal que } k \preceq k' \text{ e } \mathfrak{B}, k' \vDash z(\ 0^{-}\ ;\ (T \cdot U^{-})\ ;\ 0^{-})z \\
\text{sse} & \exists k' \text{ tal que } k \preceq k' \text{ e } (i(z), i(z)) \in \llbracket(\ 0^{-}\ ;\ (T \cdot U^{-})\ ;\ 0^{-})\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}} \\
\text{sse} & \exists a \in A_{k'} : (i(z), a) \in \llbracket\ 0^{-}\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}} \text{ e } (a, i(z)) \in \llbracket((T \cdot U^{-})\ ;\ 0^{-}\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}}
\end{array}
$$

Por definição, $\llbracket\ 0^{-}\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}} ::= \{(a,b) : a, b \in \bigcup_{k \in K} A_k\}$. Logo, a primeira condição da conjunção acima é sempre verdadeira, logo, temos:

$$
\begin{array}{ll}
 & \exists a \in A_{k'} : (i(z), a) \in \llbracket((T \cdot U^{-})\ ;\ 0^{-}\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}} \\
\text{sse} & \exists a \in A_{k'} : \exists b \in A_{k'} : (a, b) \in \llbracket T \cdot U^{-}\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}} \text{ e } (b, i(z)) \in \llbracket\ 0^{-}\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}}
\end{array}
$$

Novamente, pela mesma razão apresentada anteriormente, a segunda condição da conjunção acima é sempre verdadeira, logo:

$$
\begin{array}{ll}
 & \exists a \in A_{k'} : \exists b \in A_{k'} : (a, b) \in \llbracket((T \cdot U^{-})\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}} \\
\text{sse} & \exists a \in A_{k'} : \exists b \in A_{k'} : (a, b) \in \llbracket T\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}} \text{ e } (a, b) \in \llbracket U^{-}\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}} \\
\text{sse} & \exists a \in A_{k'} : \exists b \in A_{k'} : (a, b) \in \llbracket T\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}} \text{ e } (a, b) \notin \llbracket U\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}}
\end{array}
$$

Ou seja, existe um ponto $k' \in K$, onde $\mathfrak{B}, k' \vDash xTy$ mas $\mathfrak{B}, k' \nvDash xUy$. Vamos mostrar que isto contradiz as hipóteses. De fato, como $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$, temos que $\mathfrak{B}, k' \vDash \Gamma$, pois $k \preceq k'$. Ainda, se $\mathfrak{B}, k' \vDash xTy$, então $\mathfrak{B}, k' \vDash \Gamma \cup \{xTy\}$. Logo, pela hipótese, $\mathfrak{B}, k' \vDash xUy$. ∎

Lema 4.4.2. *Se* $\Gamma \vDash T \leq U$ *e* $\Gamma \vDash xTy$ *então* $\Gamma \vDash xUy$.

Prova. Suponhamos que $\mathfrak{B}, k \vDash_{\mathtt{WI}} \Gamma$. Assim, por hipótese, temos que $\mathfrak{B}, k \vDash_{\mathtt{WI}} T \leq U$. Por definição,

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathfrak{B}, k \vDash z(\ 0^{-}\ ;\ (T \cdot U^{-})\ ;\ 0^{-})^{-}\ z \\
\text{sse} & \forall k' \text{ tal que } k \preceq k',\ \text{temos } \mathfrak{B}, k' \nvDash z(\ 0^{-}\ ;\ (T \cdot U^{-})\ ;\ 0^{-})z \\
\text{sse} & (i(z), i(z)) \notin \llbracket(\ 0^{-}\ ;\ (T \cdot U^{-})\ ;\ 0^{-})\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}} \\
\text{sse} & \nexists a \in A_{k'} : (i(z), a) \in \llbracket\ 0^{-}\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}} \text{ e } (a, i(z)) \in \llbracket((T \cdot U^{-})\ ;\ 0^{-}\rrbracket^{k'}_{\mathfrak{B}}
\end{array}
$$

Como, por definição, $[\![\ 0^{\ -}\ ]\!]_{\mathfrak{B}}^{k'}$ é a relação universal $\{(a,b) : (a,b) \notin \emptyset\}$, a primeira condição da conjunção acima é sempre verdadeira, logo, temos:

$$\begin{array}{ll} & \nexists a \in A_{k'} : (i(z), a) \in [\![((T \cdot U^{-})\ ;\ \ 0^{\ -}]\!]_{\mathfrak{B}}^{k'} \\ \text{sse} & \nexists a \in A_{k'} : \exists b \in A_{k'} : (a,b) \in [\![T \cdot U^{-}]\!]_{\mathfrak{B}}^{k'} \text{ e } (b, i(z)) \in [\![\ 0^{\ -}]\!]_{\mathfrak{B}}^{k'} \end{array}$$

Novamente, pela mesma razão apresentada anteriormente, a segunda condição da conjunção acima é sempre verdadeira, logo:

$$\begin{array}{ll} & \nexists a \in A_{k'} : \exists b \in A_{k'} : (a,b) \in [\![((T \cdot U^{-})]\!]_{\mathfrak{B}}^{k'} \\ \text{sse} & \nexists a \in A_{k'} : \exists b \in A_{k'} : (a,b) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{B}}^{k'} \text{ e } (a,b) \in [\![U^{-}]\!]_{\mathfrak{B}}^{k'} \\ \text{sse} & \nexists a \in A_{k'} : \exists b \in A_{k'} : (a,b) \in [\![T]\!]_{\mathfrak{B}}^{k'} \text{ e } (a,b) \notin [\![U]\!]_{\mathfrak{B}}^{k'} \end{array}$$

Ou seja, para todo $k' \in K$ tal que $k \preceq k'$, se $\mathfrak{B}, k' \vDash xTy$ então $\mathfrak{B}, k' \vDash xUy$. Como, por hipótese, $\mathfrak{B}, k \vDash \Gamma$ e $\mathfrak{B}, k \vDash xTy$, segue que, para todo $k' \in K$ tal que $k \preceq k'$, temos $\mathfrak{B}, k' \vDash \Gamma$ e $\mathfrak{B}, k' \vDash xTy$. Logo, para todo $k' \in K$ tal que $k \preceq k'$, temos $\mathfrak{B}, k' \vDash xUy$. Portanto, $\mathfrak{B}, k \vDash xUy$. ■

Podemos, agora, aplicar estas regras nas provas formais.

Teorema 4.4.1.

(a) $T\ ;\ U \leq V \vdash_{\mathtt{WI}} T^{\smile}\ ;\ V^{-} \leq U^{-}$.

(b) $T\ ;\ U \leq V \vdash_{\mathtt{WI}} V^{-}\ ;\ U^{\smile} \leq T^{-}$.

(c) $T^{\smile}\ ;\ V^{-} \leq U^{-} \vdash_{\mathtt{W}} T\ ;\ U \leq V$.

(d) $V^{-}\ ;\ U^{\smile} \leq T^{-} \vdash_{\mathtt{W}} T\ ;\ U \leq V$.

Prova. (a)

$$\Gamma_1 = \{T\ ;\ U \leq V\ ,\ [xT^{\smile}\ ;\ V^{-}y]\}.$$

$$\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \{[xT^{\smile}z]\ ,\ [zV^{-}y]\ ,\ [xUy]\}$$

$$
I_{\leq}\,\dfrac{E_{;}\,\dfrac{I_{-}\,\dfrac{I_{0}\,\dfrac{E_{\leq}\,\dfrac{I_{;}\,\dfrac{E_{\smile}\,\dfrac{\mathsf{Hip}\,\dfrac{}{\Gamma_0 \Vdash xT^{\smile}z}}{\Gamma_0 \Vdash zTx} \qquad \mathsf{Hip}\,\dfrac{}{\Gamma_0 \Vdash xUy}}{\Gamma_0 \Vdash zT\ ;\ Uy} \qquad \mathsf{Hip}\,\dfrac{}{\Gamma_0 \Vdash T\ ;\ U \leq V}}{\Gamma_0 \Vdash zVy} \qquad \mathsf{Hip}\,\dfrac{}{\Gamma_0 \Vdash zV^{-}y}}{\Gamma_0 \Vdash u\ 0\ v}}{\Gamma_1\ ,\ [xT^{\smile}z]\ ,\ [zV^{-}y] \Vdash xU^{-}y} \qquad \mathsf{Hip}\,\dfrac{}{\Gamma_1 \Vdash xT^{\smile}\ ;\ U^{-}y}}{\Gamma_1 \Vdash xU^{-}y}}{T\ ;\ U \leq V \Vdash T^{\smile}\ ;\ V^{-} \leq U^{-}}
$$

(b)

$\Gamma_1 = \{T\ ;U \leq V\ ,\ [xV^{-}\ ;U^{\smile}y]\}$

$\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \{[xV^{-}z]\ ,\ [zU^{\smile}y]\ ,\ [xTy]\}$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{
            \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_0 \Vdash zU^{\smile}y}\ \mathsf{Hip}}{\Gamma_0 \Vdash yUz}\ E_{\smile}
            \qquad
            \dfrac{}{\Gamma_0 \Vdash xT^{-\,-}y}\ \mathsf{Hip}
          }{\Gamma_0 \Vdash zT\ ;Uy}\ I_{;}
          \qquad
          \dfrac{}{\Gamma_0 \Vdash T\ ;U \leq V}\ \mathsf{Hip}
        }{\Gamma_0 \Vdash xVy}\ E_{\leq}
        \qquad
        \dfrac{}{\Gamma_0 \Vdash xV^{-}y}\ \mathsf{Hip}
      }{\Gamma_0 \Vdash u\ 0\ v}\ I_{0}
    }{\Gamma_1\ ,\ [xV^{-}z]\ ,\ [zU^{\smile}y] \Vdash xT^{-}y}\ I_{-}
    \qquad
    \dfrac{}{\Gamma_1 \Vdash xV^{-}\ ;U^{\smile}y}\ \mathsf{Hip}
  }{\Gamma_1 \Vdash xT^{-}y}\ E_{;}
}{T\ ;U \leq V \Vdash V^{-}\ ;U^{\smile} \leq T^{-}}\ I_{\leq}
$$

(c)

$\Gamma_1 = \{T^{\smile} \,;\, V^{-} \leq U^{-} \;,\; [xT \,;\, Uy]\}$

$\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \{[xTz] \;,\; [zUy] \;,\; [xV^{-}y]\}$

$$
{\scriptstyle I_{\leq}}\,\dfrac{{\scriptstyle E_{;}}\,\dfrac{{\scriptstyle E_{-}}\,\dfrac{{\scriptstyle I_{-}}\,\dfrac{{\scriptstyle I_{0}}\,\dfrac{{\scriptstyle E_{\leq}}\,\dfrac{{\scriptstyle I_{;}}\,\dfrac{{\scriptstyle E_{\smile}}\,\dfrac{\text{Hip}\,\dfrac{}{\Gamma_0 \Vdash xTz}}{\Gamma_0 \Vdash zT^{\smile}x} \qquad \text{Hip}\,\dfrac{}{\Gamma_0 \Vdash xV^{-}y}}{\Gamma_0 \Vdash zT^{\smile} \,;\, T^{-}y} \qquad \text{Hip}\,\dfrac{}{\Gamma_0 \Vdash T^{\smile} \,;\, V^{-} \leq U^{-}}}{\Gamma_0 \Vdash zU^{-}y} \qquad \text{Hip}\,\dfrac{}{\Gamma_0 \Vdash zUy}}{\Gamma_0 \Vdash u \; 0 \; v}}{\Gamma_1 \;,\; [xTz] \;,\; [zUy] \Vdash xV^{-^{-}}y}}{\Gamma_1 \;,\; [xTz] \;,\; [zUy] \Vdash xVy} \qquad \text{Hip}\,\dfrac{}{\Gamma_1 \Vdash xT \,;\, Uy}}{\Gamma_1 \Vdash xVy}}{U^{\smile} \,;\, V^{-} \leq U^{-} \Vdash T \,;\, U \leq V}
$$

(d)

$\Gamma_1 = \{V^{-}\ ; U^{\smile} \leq T^{-}\ ,\ [xT\ ; Uy]\}$

$\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \{[xTz]\ ,\ [zUy]\ ,\ [xV^{-}y]\}$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{Hip}
\UnaryInfC{$\Gamma_0 \Vdash zUy$}
\LeftLabel{$E_{\smile}$}
\UnaryInfC{$\Gamma_0 \Vdash yU^{\smile}z$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{Hip}
\UnaryInfC{$\Gamma_0 \Vdash xV^{-}y$}
\LeftLabel{$I_{;}$}
\BinaryInfC{$\Gamma_0 \Vdash xV^{-}\ ; U^{\smile}y$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{Hip}
\UnaryInfC{$\Gamma_0 \Vdash V^{-}\ ; U^{\smile} \leq T^{-}$}
\LeftLabel{$E_{\leq}$}
\BinaryInfC{$\Gamma_0 \Vdash xT^{-}y$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{Hip}
\UnaryInfC{$\Gamma_0 \Vdash xTy$}
\LeftLabel{I_{0}}
\BinaryInfC{$\Gamma_0 \Vdash u\ 0\ v$}
\LeftLabel{I_{-}}
\UnaryInfC{$\Gamma_1\ ,\ [xTz]\ ,\ [zUy] \Vdash xV^{--}y$}
\LeftLabel{E_{-}}
\UnaryInfC{$\Gamma_1\ ,\ [xTz]\ ,\ [zUy] \Vdash xVy$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{Hip}
\UnaryInfC{$\Gamma_1 \Vdash xT\ ; Uy$}
\LeftLabel{$E_{;}$}
\BinaryInfC{$\Gamma_1 \Vdash xVy$}
\LeftLabel{$I_{\leq}$}
\UnaryInfC{$U^{\smile}\ ; V^{-} \leq U^{-} \Vdash T\ ; U \leq V$}
\end{prooftree}
$$

$\blacksquare$

Finalmente, com o próximo resultado, concluímos a demonstração de que o Teorema K não pode ser obtido na lógica intuicionista das relações.

Teorema 4.4.2.

(a) $T^{\smile} ; V^{-} \leq U^{-} \nvdash_{\mathtt{WI}} T ; U \leq V$

(b) $V^{-} ; U^{\smile} \leq T^{-} \nvdash_{\mathtt{WI}} T ; U \leq V$

Prova. Seja $A = \{a, b\}$. Definimos três $\mathtt{W}$-estruturas, da seguinte maneira:

* $\mathfrak{A}_1 = \langle A, I_1 \rangle$, onde
  - $I_1(T) = \{(a, b)\}$,
  - $I_1(V) = \{(a, a)\}$,
  - $I_1(U) = \{(b, a), (b, b)\}$.
* $\mathfrak{A}_2 = \langle A, I_2 \rangle$, onde
  - $I_2(T) = \{(a, b)\}$,
  - $I_2(V) = \{(a, a), (a, b)\}$,
  - $I_2(U) = \{(b, a), (a, b)\}$.
* $\mathfrak{A}_3 = \langle A, I_3 \rangle$, onde
  - $I_3(T) = \{(a, b), (b, b)\}$,
  - $I_3(V) = \{(a, a)\}$,
  - $I_3(U) = \{(b, a), (b, b)\}$.

Definimos duas $\mathtt{WI}$-estruturas, da seguinte maneira:

* $\mathfrak{B} = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i \rangle$, onde
  - $K = \{1, 2\}$,
  - $\preceq = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2)\}$,
  - $\mathfrak{A}_k$ são as $\mathtt{W}$-estruturas definidas acima,
  - $i(x) = a$, para todo $x \in \mathsf{Var}$.

* $\mathfrak{B}' = \langle K, \preceq, \{\mathfrak{A}_k : k \in K\}, i \rangle$, onde
    - $K = \{1, 3\}$,
    - $\preceq = \{(1,1), (3,3), (1,3)\}$,
    - $\mathfrak{A}_k$ são as $\mathtt{W}$-estruturas definidas acima,
    - $i(x) = a$, para todo $x \in \mathsf{Var}$.

Aplicando as definições apropriadamente, verificamos que, no ponto $1 \in K$, temos $\mathfrak{B}, 1 \models T^{\smile} \mathbin{;} V^{-} \leq U^{-}$, mas $\mathfrak{B}, 1 \not\models T \mathbin{;} U \leq V$. Pela corretude de $\mathtt{WI}$, (a) está demonstrado.

Aplicando as definições apropriadamente, verificamos que, no ponto $1 \in K$, temos $\mathfrak{B}', 1 \models V^{-} \mathbin{;} U^{\smile} \leq T^{-}$, mas $\mathfrak{B}', 1 \not\models T \mathbin{;} U \leq V$. Pela corretude de $\mathtt{WI}$, (b) está demonstrado. ■

Considerações Finais

Finalizamos este trabalho com um panorama geral sobre os resultados obtidos, apresentando alguns desenvolvimentos, ainda em progresso, e indicando algumas possibilidades de desdobramentos futuros.

Como mencionamos, a lógica da ordem parece não receber o mesmo tratamento dado à lógica equacional, na literatura. Embora haja muitos trabalhos sobre *álgebras ordenadas*, o enfoque lógico-formal, quando existe, é sempre marginal. Essa foi uma das razões de termos introduzido o sistema $\mathcal{L}_{\leq}$, pois, além de atender adequadamente aos nossos própositos de formalizar a lógica subjacente ao sistema `ARCG`, acreditamos que esta lógica pode ser ainda mais explorada, tanto em termos de *teoria da prova* quanto de *teoria de modelos*. Neste trabalho, apresentamos apenas os primeiros resultados básicos, como o Teorema de Normalização e, de maneira superficial, analisamos a classe das estruturas definidas por essa lógica.

Parece-nos interessante explorar resultados mais sofisticados, que relacionem esta lógica com a classe das álgebras ordenadas, como por exemplo, resultados análogos ao Teorema de Birkhoff, para a lógica equacional. Será que garantir a axiomatização de uma teoria por inequações, ou equivalências de inequações, ou conjunções de inequações etc., reflete alguma propriedade de preservação dos modelos? Não exploramos esta questão.

O escopo de formalização do sistema $\mathcal{L}_{\leq}$ retringe-se às estruturas cujas operações são "bem comportadas", no sentido de preservarem, ou inverterem, a ordem em cada coordenada para todos os elementos do universo. No entanto, parece razoável definir um sistema que dê conta de formalizar o raciocínio mereológico aplicado às álgebras ordenadas em geral, mesmo quando as operações não se comportam dessa maneira. Este é mais um ponto que motiva futuras investigações sobre a lógica da ordem.

Consideramos que a análise apresentada no Capítulo 2, sobre a lógica da ordem $\mathcal{L}_{\leq}$ e a lógica equacional $\mathcal{L}_{=}$, foi um trabalho de retarguada, no sentido de confirmar que a relação conceitual — fortemente estabelecida na matemática — entre igualdade e ordem está formalmente amparada. Embora os resultados desta análise não sejam surpreendentes do ponto de vista matemático, nos pareceu necessário apresentá-los, pois estamos interessados em formalizar o sistema `ARCG`, cuja lógica subjacente aplica tanto o raciocínio equacional quanto mereológico. Assim, com estes resultados, autenticamos o uso do sistema $\mathcal{L}_{\leq}$, como formalismo subjacente à `ARGC`, pois mostramos que este sistema possui as propriedades esperadas de uma lógica da ordem, principalmente no que diz respeito à sua relação com a lógica equacional.

Temos experimentado, na prática, a flexibilidade do sistema `ARCG` para demonstrar teoremas da AR. Estamos satisfeitos com a dinâmica deste sistema mas, como mencionamos, ainda não temos um sistema lógico-formal. Por enquanto, o sistema está definido mais no "espírito" algébrico do que lógico. Parece natural que, primeiramente, tenhamos testado desta maneira, já que, inicialmente, precisávamos verificar se as conexões de Galois, de fato, flexibilizariam a aritmética da AR.

Agora que o formalismo subjacente (a lógica da ordem) está explícito e a sintaxe completamente pronta, podemos pensar no próximo passo, que é fornecer uma semântica e um mecanismo de inferência adequados. Quanto ao mecanismo de inferência, à primeira vista, a dificuldade está em formalizar o conceito de conexão de Galois, de maneira a aplicá-lo como regra de inferência do sistema. Com relação à semântica, dado que os nossos axiomas estabelecem conexões de Galois entre duas álgebras relacionais, aparentemente, precisamos de estruturas que, de alguma maneira, contemplem duas álgebras, para podermos interpretar as fórmulas.

Outro ponto que pretendemos explorar de `ARCG` é relacionado às possíveis extensões deste sistema, obtidas por meio do acrésicmos de novas operações. Como vimos, na gênese do cálculo relacional, houve uma preocupação, principalmente por parte de Peirce, em relacionar as operações Peirceanas com as operações Booleanas. Boole, por sua vez, introduziu as operações do cálculo de classes (lógica), relacionando-as com as operações da álgebra dos números (aritmética).

Se, por um lado, essa abordagem de Boole foi essencial para o desenvolvimento subsequente da lógica matemática, por outro, foi bastante criticada, principalmente, por não fornecer uma interpretação razoável para outras operações aritméticas na lógica, como por exemplo, a operação de *divisão* [Hai81, Bur00].

Trabalhos posteriores a Boole, que investigam esse tipo de relação entre as operações lógicas e operações aritméticas, como por exemplo [Bel27, Hur28], acabaram sendo negligenciados, talvez pelo sucesso da abordagem algébrico-abstrata da lógica, que emancipou os símbolos matemáticos de qualquer interpretação específica, ou mesmo pela crescente influência da escola logicista, que buscava reduzir a aritmética à lógica ao invés de contrapô-las.

Temos interesse em revisitar alguns desses trabalhos e explorar essas operações "lógico-aritméticas" no sistema `ARCG`, procurando preencher lacunas entre a álgebra dos números, a álgebra de conjuntos e a álgebra de relações. Acreditamos que uma investigação nesse sentido poderia iluminar as interrelações entre aritmética, lógica proposicional e lógica de predicados binários. O primeiro passo seria seguir o modelo inaugurado por Boole e Peirce para identificar as relações entre as operações lógicas e as operações aritméticas. Algumas delas já estão bem estabelecidas, outras são passíveis de investigação, como mostramos na tabela abaixo.

Aritmética	$+$	$\cdot$	$-$	0	1	$/$	Log	Exp	...
Cálculo de conjuntos	$+$	$\cdot$	$\overline{}$	0	1	?	?	?	...
Cálculo relacional	$\dagger$	$;$	$\smile$	$0'$	$1'$	?	?	?	...

O próximo passo seria, quando possível, tentar fornecer uma interpretação na lógica de resultados clássicos da aritmética, como, por exemplo, do Teorema Fundamental.

Finalmente, também pretendemos continuar desenvolvendo os sistemas `W` e `WI`. Tarski e Givant mostraram que o poder de expressão da AR é equivalente a um fragmento da Lógica de Primeira Ordem (LPO, com apenas três variáveis) [GT87]. Dado que mantivemos uma linguagem correspondente à linguagem da AR, todos os sistemas relacionais introduzidos nesta tese possuem este mesmo poder de expressão. Atualmente, existem extensões da AR que alcançam o mesmo poder de expressão da LPO [Mar01, BFV04, Via05]. Aplicando recursos utilizados em algumas dessas extensões, como *domínios estruturados* e *operações de armazenamento e recuperação*, queremos aumentar o poder de expressão dos sistemas `W` e `WI`. Essa seria uma maneira alternativa à de Wadge, de estender esses sistemas para lidar com relações de aridades arbitrárias, mantendo o caráter de dedução natural.

Referências Bibliográficas

[Aar92] Aarts, C. J.: *Galois connections presented calculationally*. Tese de Mestrado, Eindhoven University of Technology, 1992.

[AL10] Aiguier, M. e Longuet, D.: Some general results about proof normalization. *Logica Universalis*, 4(1):1–29, 2010.

[Bel27] Bell, E. T.: Arithmetic of logic. *Transactions of the American Mathematical Society*, 29(3):597–611, 1927.

[Ben86] Bencivenga, E.: Free logics. Em Gabbay, D. e Guenthner, F. (editores): *Handbook of Philosophical Logic, Vol. III: Alternatives in Classical Logic*, capítulo 6, páginas 373–427. Reidel, Dordrecht, 1986.

[BFV04] Baum, G. A., Frias, M. F. e Veloso, P. A. S.: Fork algebras: past, present and future. *Journal on Relational Methods in Computer Science*, 1:181–216, 2004.

[BK82] Barth, E. M. e Krabbe, E. C. W.: *From axiom to dialogue: a philosophical study of logics and argumentation*. Foundations of communication. De Gruyter, 1982.

[Blo76] Bloom, S. L.: Varieties of ordered algebras. *Journal of Computer System Sciences*, 13(2):200–212, 1976.

[BS81] Burris, S. e Sankappanavar, H. P.: *A course in universal algebra*, 1981. `http://www.math.uwaterloo.ca/~sn\-burris/htdocs/UALG/univ-algebra2012.pdf`, Edição Millennium (acessado em 07/2013).

[Bur00] Burris, S.: The laws of Boole's thought, 2000. `http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/MYWORKS/PRE\-PRINTS/aboole.pdf`, (acessado em 10/2013).

[CCD09] Carnielli, W. A., Coniglio, M. E. e D'Ottaviano, I. M. L.: New dimensions on translations between logics. *Logica Universalis*, 3:1–18, 2009.

[Cod70] Codd, E. F.: A relational model of data for large shared data banks. *Information Retrieval*, 13(6):377–387, 1970.

[Con05] Coniglio, M. E.: Towards a stronger notion of translation between logics. *Manuscrito*, 28(2):231–262, 2005.

[CT51] Chin, L. H. e Tarski, A.: Distributive and modular laws in the arithmetics of relation algebras. *University of California Publications in Mathematics*, 1:341–384, 1951.

[DdSS99] D'Ottaviano, I. M. L., Silva, J. J. da e Sette, A. M. A.: Translations between logics. Em Caicedo, X. e Montenegro, C. H (editores): *Models, Algebras and Proofs, Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics*, volume 203, páginas 435–448. Marcel Dekker, New York, 1999.

[Dij90] Dijkstra, E. W.: A relational summary, 1990. `http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/ewd10xx/EWD1047.PDF`, Manuscrito não publicado (acessado em 10/2013).

[DM60] De Morgan, A.: On the syllogism, No. IV., and on the logic of relations. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 10:331–358, 1860.

[D'O13] D'Ottaviano, I. M. L.: Translations as representations between logics. Em Agazzi, E. (editor): *Representation and explanation in the science.* Franco Angeli, 2013.

[EKMS06] Erné, M., Koslowski, J., Melton, A. e Strecker, G. E.: A primer on Galois connections. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 704:103–125, 2006.

[Eps90] Epstein, R. L.: *The semantic foundations of logic, volume 1: propositional logic*. Kluwer Academic Publishers, 1990.

[FVVV06] Freitas, R. P. de, Veloso, P. A. S., Veloso, S. R. M. e Viana, P.: Reasoning with graphs. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 165:201–212, 2006.

[FVVV09] Freitas, R. P. de, Veloso, P. A. S., Veloso, S. R. M. e Viana, P.: On graph reasoning. *Information and Computation*, 207(10):1000–1014, 2009.

[Gen33] Gentzen, G.: Über das verhältnis zwischen intuitionistischen un klassischen arithmetik, 1933. Manuscrito para *Mathematische Annalen* mas não publicado (recebido em 15.03.1933).

[Gli29] Glivenko, V.: Sur quelques points de la logique de M. Brouwer. *Bulletins de la classe des sciences*, 15(5):183–188, 1929.

[Göd33] Gödel, K.: Zur intuitionistischen arithmetik und zahlentheorie. *Ergebnisse eines mathematisches Kolloquiums*, 4:34–38, 1933.

[GT87] Givant, S. e Tarski, A.: *A formalization of set theory without variables*, volume 41 de *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 1987.

[Hai81] Hailperin, T.: Boole's algebra isn't Boolean algebra. *Mathematics Magazine*, 54(4):172–184, 1981.

[Hen77] Henkin, L.: The logic of equality. *The American Mathematical Monthly*, 84(8):597–612, 1977.

[HH02] Hirsch, R. e Hodkinson, I.: *Relation algebras by games*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, 2002.

[Hur28] Hurwitz, W. A.: On Bell's arithmetic of Boolean algebra. *Transactions of the Amercian Mathematical Society*, 30(2):420–424, 1928.

[Ind10] Indrzejczak, A.: *Natural deduction, hybrid systems and modal logics*, volume 30 de *Trends in Logic*. Springer, 2010.

[JT48] Jónsson, B. e Tarski, A.: Representation problems for relation algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54:80,1192, 1948.

[JT93] Jónsson, B. e Tsinakis, C.: Relation algebras as residuated Boolean algebras. *Algebra Universalis*, 30:469–478, 1993.

[Kol25] Kolmogorov, A. N.: On the principle of tertium non datur. *Matematicheskii Sbornik*, 32:646–667, 1925. Original em russo. Traduzido para o inglês em [vH67].

[Kri65] Kripke, S. A.: Semantical analysis of intuitionistic logic I. Em Crossley, J. N. e Dummett, M. A. E. (editores): *Formal Systems and Recursive Functions*, páginas 92–130. North-Holland, Amsterdam, 1965.

[Löw15] Löwenheim, L.: Über möglichkeiten im relativkalkül. *Mathematische Annalen*, 76:447–470, 1915. Traduzido para o inglês em [vH67].

[Lyn50] Lyndon, R. C.: The representation of relational algebras. *Annals of Mathematics*, 51(3):707–729, 1950.

[Lyn56] Lyndon, R. C.: The representation of relation algebras, II. *Annals of Mathematics*, 63(2):294–307, 1956.

[Mad83] Maddux, R. D.: A sequent calculus for relation algebras. *Annals of Pure and Applied Logic*, 25:73–101, 1983.

[Mad91] Maddux, R. D.: The origin of relation algebras in the development and axiomatization of the calculus of relations. *Studia Logica*, 50(3/4):421–455, 1991.

[Mad06] Maddux, R.: *Relation algebras*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, 2006.

[Mar01] Marx, M.: Relation algebra with binders. *Journal of Logic and Computation*, 11:691–700, 2001.

[Men97] Mendelson, E.: *Introduction to mathematical logic*. Chapman & Hall, 1997.

[Mer90] Merrill, D. D.: *Augustus De Morgan and the logic of relations*. The New Synthese Historical Library. Springer, 1990.

[Mon64] Monk, J. D.: On representable relation algebras. *Michigan Mathematical Journal*, 11:207–210, 1964.

[MP68] Malmnäs, P. E. e Prawitz, D.: A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logic. Em Schmidt, H. A, Schütte, K e Thiele, H. J. (editores): *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 50, páginas 215–229. Elsevier, 1968.

[OP10] Orlowska, E. e Pilarek, J.G.: *Dual tableaux: foundations, methodology, case studies*. Trends in Logic. Springer, 2010.

[Pei73] Peirce, C. S.: Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic. *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences*, 9(2):317–378, 1873.

[Pei83] Peirce, C. S.: Note B: the logic of relatives. *Studies in Logic by Members of the John Hopkins University*, páginas 187–203, 1883.

[Pel99] Pelletier, F. J.: A brief history of natural deduction. *History and Philosophy of Logic*, 20:1–31, 1999.

[Sch95] Schröder, F. W. K. E.: *Vorlesungen über die algebra der logik*, volume 3, "Algebra und logik de relative", part I. B. G. Teubner, Leipzig, 1895.

[Sch11] Schmidt, G.: *Relational mathematics*, volume 132. Cambridge University Press, 2011.

[SS85] Schmidt, G. e Ströhlein, T.: Relation algebras: concept of points and representability. *Discrete Mathematics*, 54:83–92, 1985.

[SS93] Schmidt, G. e Ströhlein, T.: *Relations and graphs*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.

[Sug08] Suguitani, L.: *Álgebra de relações: uma axiomatização Tarskiana.* Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas–Unicamp, 2008.

[Tar41] Tarski, A.: On the calculus of relations. *Journal of Symbolic Logic*, 6(3):73–89, 1941.

[Tar53] Tarski, A.: Some metalogical results concerning the calculus of relations. Em *Fifteenth Meeting of the Association for Symbolic Logic*, volume 18. Association for Symbolic Logic, 1953.

[Tar54] Tarski, A.: Contributions to the theory of models. *Indagationes Mathematicae*, 16:572–588, 1954.

[Tar55] Tarski, A.: Contributions to the theory of models III. *Indagationes Mathematicae*, 17:56–64, 1955.

[Tar68] Tarski, A.: Equational logic and equational theories of algebras. Em Schmidt, H. A., K., Schütte e Thiele, H. J. (editores): *Contributions to Mathematical Logic Proceedings of the Logic Colloquium, Hannover 1966*, volume 50 de *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, páginas 275 – 288. Elsevier, 1968.

[Tay79] Taylor, W.: Equational logic. Em Grätzer, G. (editor): *Universal Algebra*, páginas 378–400. Springer, New York, second edição, 1979.

[Tho68] Thomason, R. H.: On the strong semantical completeness of the intuitionistic predicate calculus. *Journal of Symbolic Logic*, 33(1):1–7, 1968.

[Var12] Varzi, A.: Mereology. Em Zalta, E. N. (editor): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2012 edição, 2012. `http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/mereology/`.

[vH67] Heijenoort, J. van: *From Frege to Godel; a source book in mathematical logic, 1879-1931.* Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967.

[Via05] Viana, P.: *Extensões não-lógicas do cálculo relacional.* Tese de Doutoramento, Universidade Federal do Rio de Janeiro–UFRJ, 2005.

[Wad75] Wadge, W. W.: *A complete natural deduction system for the relational calculus*. Relatório Técnico, University of Warwick, Coventry, UK., 1975.

[Wit94] Wittgenstein, L.: *Tractatus logico philosophicus*. EDUSP, São Paulo, 1994.

[Wój88] Wójcicki, R.: *Theory of logical calculi*. Reidel, Dordrecht, 1988.

Índice Remissivo