



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS**

**PEDRO HENRIQUE CARRASQUEIRA ZANEI**

**SEMÂNTICAS DE JOGOS PARA LÓGICAS DE  
INCONSISTÊNCIA FORMAL E A  
PRAGMÁTICA DA PARACONSISTÊNCIA**

**CAMPINAS**

**2018**

**PEDRO HENRIQUE CARRASQUEIRA ZANEI**

**SEMÂNTICAS DE JOGOS PARA LÓGICAS DE INCONSISTÊNCIA FORMAL E A  
PRAGMÁTICA DA PARACONSISTÊNCIA**

Dissertação apresentada ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Filosofia.

*Supervisor/Orientador:* Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO  
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO  
ALUNO PEDRO HENRIQUE CARRASQUEIRA  
ZANEI E ORIENTADA PELO PROF. DR. WALTER  
ALEXANDRE CARNIELLI.

CAMPINAS  
2018

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES**

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas  
Cecília Maria Jorge Nicolau - CRB 8/3387

C231s Carrasqueira Zanei, Pedro Henrique, 1983-  
Semânticas de jogos para lógicas de inconsistência formal e a pragmática da paraconsistência / Pedro Henrique Carrasqueira Zanei. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Walter Alexandre Carnielli.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Semântica (Filosofia). 2. Jogos. 3. Lógica paraconsistente. 4. Pragmática. I. Carnielli, Walter Alexandre, 1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Game semantics for logics of formal inconsistency and the pragmatics of paraconsistency

**Palavras-chave em inglês:**

Semantics (Philosophy)

Games

Paraconsistent logic

Pragmatics

**Área de concentração:** Filosofia

**Titulação:** Mestre em Filosofia

**Banca examinadora:**

Walter Alexandre Carnielli [Orientador]

Edelcio Gonçalves de Souza

Marco Antonio Caron Ruffino

**Data de defesa:** 30-05-2018

**Programa de Pós-Graduação:** Filosofia



## **UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

### **INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS**

A Comissão Examinadora dos trabalhos de Dissertação de Mestrado, composta pelos professores doutores a seguir nomeados, em sessão pública realizada em 30 de maio de 2018, considerou o candidato Pedro Henrique Carrasqueira Zanei aprovado.

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli

Prof. Dr. Marco Antonio Caron Ruffino

Prof. Dr. Edelcio Gonçalves de Souza

*A Ata de Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no processo de vida acadêmica do aluno.*

*À Thais.*

*Porque a vida é real e de viés.*

Agradeço a meus pais, a minha irmã, e a todos os meus mestres, em especial aqueles que me ensinaram a errar: Giacomo Bartoloni, Luis Alberto Peluso, Anderson Beraldo de Araújo, e meu orientador, Walter Alexandre Carnielli.

Agradeço por fim à CAPES pelo financiamento da pesquisa.

## Resumo

Nesta dissertação apresento semânticas de jogos adequadas para as *lógicas de inconsistências formal* (LIFs) conhecidas como mbC e mbCciw, e então discuto como essas semânticas permitem a construção rigorosa de exemplos que ilustram a pragmática dessas lógicas. De um ponto de vista técnico, para se obterem essas semânticas de jogos fez-se necessária a introdução de um artifício, aqui o denominado *instanciações*, a fim de forçar uma forma de composicionalidade às operações lógicas não-determinísticas de mbC e mbCciw. De um ponto de vista filosófico, esses resultados permitiram, de interesse, a comparação concreta das distintas motivações e consequências do estilo de paraconsistência dessas duas LIFs com o da lógica paraconsistente conhecida como LP.

**Palavras-chave:** Semântica (Filosofia); Jogos; Lógica paraconsistente; Pragmática

## **Abstract**

In this dissertation I present adequate game semantics for the logics of formal inconsistency (LFI) known as mbC and mbCciw, and then discuss how those semantics allow the rigorous construction of examples that illustrate the pragmatics of those logics. From a technical point of view, to obtain those game semantics it was necessary to introduce an artifice, here called *instantiations*, in order to force a form of compositionality upon the non-deterministic logical operations of mbC and mbCciw. From a philosophical point of view, those results allowed of interest a concrete comparison of the distinct motivations and consequences of the style of paraconsistency of those two LFI with that of the paraconsistent logic known as LP.

**Keywords:** Semantics (Philosophy); Games; Paraconsistent logic; Pragmatics

# Conteúdo

|          |                                                                         |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                       | <b>11</b> |
| 1.1      | Sobre a estrutura da dissertação . . . . .                              | 15        |
| <b>2</b> | <b>Conceitos fundamentais</b>                                           | <b>18</b> |
| 2.1      | Teoria dos conjuntos . . . . .                                          | 18        |
| 2.2      | Relações e funções . . . . .                                            | 19        |
| 2.3      | Sequências . . . . .                                                    | 20        |
| <b>3</b> | <b>Lógica</b>                                                           | <b>22</b> |
| 3.1      | Sintaxe . . . . .                                                       | 22        |
| 3.1.1    | Linguagens canônicas . . . . .                                          | 25        |
| 3.2      | Semântica . . . . .                                                     | 27        |
| 3.2.1    | Semânticas de valores de verdade para as linguagens canônicas . . . . . | 30        |
| <b>4</b> | <b>Lógicas e suas semânticas de valores de verdade</b>                  | <b>32</b> |
| 4.1      | Condições de verdade para LC, LP, mbC e mbCciw . . . . .                | 33        |
| 4.2      | Unicidade de valorações . . . . .                                       | 39        |
| 4.3      | Paraconsistência . . . . .                                              | 45        |
| 4.3.1    | Estilos de paraconsistência . . . . .                                   | 48        |
| <b>5</b> | <b>Jogos</b>                                                            | <b>50</b> |
| 5.1      | Jogos . . . . .                                                         | 50        |
| 5.2      | Subjogos . . . . .                                                      | 57        |

|          |                                                                |            |
|----------|----------------------------------------------------------------|------------|
| <b>6</b> | <b>Jogos semânticos para as lógicas clássicas</b>              | <b>61</b>  |
| 6.1      | Jogos semânticos para LC . . . . .                             | 63         |
| 6.2      | Jogos semânticos para LP . . . . .                             | 71         |
| <b>7</b> | <b>Jogos semânticos para as LIFs</b>                           | <b>76</b>  |
| 7.1      | Jogos semânticos para mbC e mbCciw . . . . .                   | 77         |
| 7.2      | Jogos semânticos para mbC e mbCciw com instanciações . . . . . | 86         |
| <b>8</b> | <b>Pragmática</b>                                              | <b>93</b>  |
| 8.1      | Argumentação e jogos . . . . .                                 | 93         |
| 8.2      | A pragmática da inconsistência . . . . .                       | 100        |
| <b>9</b> | <b>Conclusão</b>                                               | <b>103</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>                                            | <b>104</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

O objetivo desta dissertação é desenvolver semânticas de jogos para lógicas de inconsistência formal (LIFs), em particular para mbC e mbCciw. LIFs são lógicas paraconsistentes dotadas de um operador especial que marca se contradições envolvendo uma fórmula são explosivas [11], [12]. Dentre as LIFs, mbC é uma lógica paraconsistente mínima, no sentido de que é mínimo o que ela assume a respeito do que seja uma negação paraconsistente, do que seja a consistência, e de como estas se relacionam. A respeito da negação, ela assume que uma fórmula e sua negação não são necessariamente contrárias (isto é: que podem ser ambas verdadeiras), mas que de resto a negação é clássica (não podendo, portanto, uma fórmula e sua negação ser ambas falsas). A respeito da consistência, mbC assume que contradição implica inconsistência (isto é: que, se uma fórmula e sua negação são ambas verdadeiras, então sua consistência é falsa), mas não o inverso. Por ser mínima nesse sentido, mbC apresenta-se como caso de estudo especialmente apropriado à compreensão da paraconsistência de uma perspectiva bastante geral. mbCciw distingue-se de mbC por assumir que contradição é condição não apenas suficiente mas também necessária para inconsistência [11], [12].

As semânticas de jogos, por sua vez, foram elaboradas de modo explícito e consciente pela primeira vez por Hintikka, e têm por justificação filosófica a concepção da lógica como certa parte bem definida da estrutura da interação entre agentes racionais envolvidos na atividade de argumentar [31]. Neste sentido, as semânticas de jogos de uma lógica seriam parte de um modelo formal da pragmática da argumentação quando conduzida nos termos dessa lógica. Paradigmaticamente, no caso da lógica clássica [28] a interpretação de uma fórmula de uma linguagem proposicional usual em uma semântica de jogos envolve dois elementos: primeiro, uma interpretação das variá-

veis proposicionais da linguagem; segundo, um jogo de dois jogadores de movimentos sequenciais (mais conhecido da literatura como jogo na forma extensiva, embora essa denominação seja muito menos intuitiva).

Dada a interpretação, esse jogo tem a seguinte forma. À fórmula dada corresponde a posição inicial da partida, e às suas subfórmulas próprias correspondem as posições seguintes; em particular, às suas subfórmulas simples correspondem, portanto, as posições terminais da partida. Para cada operador da linguagem há uma regra do jogo. Tais regras estabelecem de qual jogador é o movimento numa posição correspondente a uma subfórmula em que o operador em questão ocorre como principal. Aos jogadores são atribuídos inicialmente papéis — um deles sendo o verificador e o outro o falsificador —, papéis estes que eles carregam de posição a posição, exceto quando as regras relativas aos operadores estabelecem que se invertam. Um jogador ganha uma partida de um jogo semântico se chega a uma fórmula simples sendo o verificador e essa é verdadeira sob a interpretação dada, ou se chega sendo o falsificador e ela é falsa sob a interpretação; senão, ele perde a partida.

O mais importante fato a respeito da semântica de jogos para a lógica proposicional clássica (LC) é por certo este: que, dada uma interpretação das variáveis proposicionais da linguagem, essa interpretação é, numa semântica verofuncional usual, um modelo de uma fórmula qualquer da linguagem se e somente se o verificador inicial tem uma estratégia vencedora no jogo semântico clássico para a fórmula sob essa interpretação. Note-se que, porque um jogo semântico é determinado (isto é: em cada um desses jogos, um e somente um dos jogadores tem uma estratégia vencedora), também é verdade que a interpretação não é um modelo da fórmula se e somente se o falsificador inicial tem uma estratégia vencedora no jogo semântico para ela sob essa interpretação.

A principal dificuldade encontrada para adaptar semânticas de jogos tais quais concebidas por Hintikka a mbC e mbCciw é esta: que, diferentemente da semântica verofuncional usual de LC, as semânticas análogas para mbC e mbCciw (suas respectivas semântica bivaloradas, como são conhecidas da literatura [11], [12]) não são composicionais: o valor de verdade de uma fórmula complexa dessas lógicas não é — como é no caso de LC — determinado pela interpretação das variáveis proposicionais da linguagem e pelas condições de verdade relativas aos operadores que ocorrem na fórmula; e, não só isso, mas em geral não é sequer determinado pelo valor de suas subfórmulas próprias imediatas. Com efeito, pode-se demonstrar em relação a LC que, dada uma

fórmula qualquer, a única extensão possível de uma valoração das fórmulas simples da linguagem para uma valoração clássica de todas as suas fórmulas equivale, num sentido preciso, a uma regra para a construção de uma estratégia vencedora para um único dos jogadores no jogo semântico clássico para a fórmula; e disso, justamente, é que decorre a equivalência de verdade (falsidade) da fórmula e existência de uma estratégia vencedora para o seu verificador (falsificador). Porque, porém, uma valoração das fórmulas simples da linguagem das duas LIFs pode ser satisfatoriamente estendida para todas as fórmulas da linguagem de mais de um modo, parece desde logo que tal equivalência não poderia existir em jogos semânticos para mbC e mbCciw análogos aos concebidos por Hintikka para LC.

A fim de deixar essa constatação ainda mais evidente, decidi introduzir, à guisa de termo médio da comparação entre as LIFs e LC, a lógica conhecida como lógica do paradoxo (LP). Essa lógica foi introduzida por Asenjo, e em seguida famosamente recuperada e desenvolvida por Priest a fim de servir de lógica subjacente a seu dialeteísmo (a posição em filosofia da lógica segundo a qual uma mesma proposição pode ser concomitantemente verdadeira e falsa [35]). Coerente com essa posição, LP é a lógica que se obtém semanticamente de LC ao abandonar-se o pressuposto de que valorações devem ser funcionais (ou seja, que não podem valorar tanto como verdadeira quanto como falsa uma mesma fórmula) [34].

A comparação das LIFs com LP interessa ademais porque, apesar de ser também ela paraconsistente, é fácil mostrar que uma semântica de jogos para LP pode-se obter da semântica de jogos de LC de modo quase trivial; trivial, sim, mas que implica uma notável diferença nas dinâmicas de seus respectivos jogos semânticos, — a saber: que, nesses jogos semânticos para LP (outras formas de jogos semânticos para essa lógica são possíveis, *cf.* [3]), a depender da interpretação das variáveis proposicionais da linguagem ambos os jogadores podem ganhar uma mesma partida. Esse contraste, como se poderá observar melhor ao longo desta dissertação, revela que o formalismo de Hintikka para jogos semânticos pressupõe, num sentido preciso, composicionalidade.

Composicionalidade, ao menos para nossos propósitos, significa que o valor de verdade de uma fórmula complexa é inteiramente determinado pelos valores de verdade de suas subfórmulas simples e pela semântica dos operadores envolvidos na sua composição [2]. Ao dizer que é determinado, quero dizer que, dado o valor de verdade (ou os valores, no caso de LP) que suas subfórmulas simples recebem sob certa valoração, está também dado, pela semântica dos operadores,

o valor de verdade da fórmula ela mesma sob essa valoração; ou, em outros termos, que, dada uma interpretação das variáveis proposicionais da linguagem, existe uma e única valoração que coincide com essa interpretação nas fórmulas simples e que, ao valorar as fórmulas complexas, respeita as operações lógicas associadas aos operadores da linguagem.

Porque as respectivas semânticas bivaloradas de mbC e mbCciw *não* são composicionais nesse sentido (e, com efeito, nenhuma das semânticas existentes para essas lógicas é ou mesmo pode ser [12]), mas são, antes, não-determinísticas, o problema técnico central desta dissertação divide-se em dois.

O primeiro deles é este: como seriam semânticas de jogos para mbC, ou para mbCciw, que seguissem de perto suas semânticas bivaloradas?; e que semelhanças e diferenças esses jogos teriam em relação aos jogos semânticos para LC e LP, em especial no que concerne à relação entre existência de estratégias vencedoras e valor da fórmula?

O segundo é este: poderiam as semânticas bivaloradas ser modificadas a fim de se tornarem adequadamente tratáveis pelo instrumental das semânticas de jogos tal qual concebido por Hintikka? Como seria essa modificação, se for possível?

A despeito de sua importância intrínseca como contribuição à literatura sobre LIFs, nesta dissertação esses e outros problemas técnicos não se estudam gratuita nem desinteressadamente. Como disse a princípio, as semânticas de jogos oferecem uma perspectiva única a respeito da lógica, pois permitem vê-la como o estudo de padrões de certas interações discursivas que se poderiam observar ocorrendo entre agentes racionais. Talvez mais adequadamente se chamariam, nesse sentido — e como também já se sugeriu —, *pragmáticas* de jogos, e não semânticas.

Seja como for, essa perspectiva interessa pela seguinte razão. Diferente de LC, que seria em certo sentido a descrição formal do raciocínio proposicional conduzido em geral nas matemáticas, e de LP, que, ao menos tal qual retomada por Priest, serve a propiciar um fundo lógico a uma posição em filosofia da lógica, mbC e mbCciw, como tantas outras LIFs, foram introduzidas na literatura sobre paraconsistência por razões, se não exclusivamente, ao menos primordialmente teóricas, como partes de um amplo programa de estudos da consistência que não necessariamente pressupõe um compromisso concreto com a modelagem matemática de processos inferenciais observados (como no caso de LC) ou conjecturados (como no de LP). Os argumentos que se encontram nessa literatura em favor da adoção das LIFs como lógicas para modelar raciocínios envolvendo contradições

são, por isso, em sua maioria de possibilidade, mas não de cogência dessa adoção. Se por um lado isso em nada diminui o valor e interesse abstrato desse trabalho técnico, por outro penso que limita injustificadamente a capacidade de impacto, sobretudo filosófico, dessas lógicas. Por elas exemplificarem de forma precisa o que seria a pragmática dessas lógicas, com as semânticas de jogos temos condições de vislumbrar como seriam discussões efetivamente conduzidas em termos dos padrões de racionalidade codificados por mbC, ou então por mbCciw. Dessa feita pretendo nesta dissertação contribuir um mínimo que seja para a superação do que julgo ser um dos maiores empecilhos a que as LIFs, ou ao menos essas duas, venham a ser do interesse de um público filosófico mais amplo.

## 1.1 Sobre a estrutura da dissertação

A dissertação consiste de sete capítulos.

O primeiro capítulo trata do conceito abstrato de lógica, apresentando as noções de sintaxe e semântica, e o conceito de validade argumentativa em semânticas com dois valores de verdade. Apresentem-se também as linguagens das lógicas que serão introduzidas no capítulo seguinte. A função desse capítulo é estabelecer um ambiente suficientemente amplo para permitir o estudo comparado das lógicas de que nos ocuparemos.

Assim sendo, no segundo capítulo apresentam-se LC, LP, mbC e mbCciw em termos das condições de verdade que suas operações lógicas satisfazem. Nesse capítulo também se demonstram certas propriedades dessas lógicas que serão relevantes para a elaboração de suas respectivas semânticas de jogos. Mais importante que isso, no entanto, é que já nesse capítulo introduz-se uma instrumental simples que torna o não-determinismo da operação de negação de mbC e mbCciw e de consistência de mbC tratável, ao menos para os propósitos das semânticas de jogos.

No terceiro capítulo apresenta-se a noção formal de jogo que nos importará nesta dissertação (os jogos de dois jogadores na forma extensiva com informação perfeita), e demonstra-se, em especial, que esses jogos, quando são de horizonte finito e de ganha-perde (como são os jogos semânticos que nos importarão) são determinados, — isto é: que, neles, um e somente um dos jogadores tem uma estratégia vencedora. Nesse capítulo também se demonstram algumas variações úteis desse teorema, e como a existência de uma estratégia vencedora para um jogador em um jogo relaciona-se à existência de estratégias vencedoras para o mesmo jogador em certos subjogos seus. Isto é o

necessário de teoria dos jogos para apresentar e desenvolver as semânticas de jogos nos capítulos seguintes.

No quarto capítulo apresentam-se a semântica de jogos para LC, tal qual concebida por Hintikka, e em seguida sua adaptação natural para LP. Porque pretendemos obter semânticas de jogos para lógicas cujo comportamento em semânticas de valores de verdade é bastante distinto daquele dessas duas, procura-se apresentá-las de forma pormenorizada e rigorosa, a fim de apreender precisamente como funcionam. Disso resulta, de interessante, que alguns fatos a respeito da semântica de jogos de LC que costumam ser apresentados informalmente na literatura fazem-se aqui demonstráveis.

No quinto capítulo apresenta-se uma outra forma de semânticas de jogos, que traz algumas (poucas e mínimas, mas importantes) modificações do formalismo de Hintikka, necessárias a acomodar, numa primeira aproximação, as duas LIFs. Em particular, faz-se indispensável distinguir com clareza, de uma lado, as identidades dos jogadores no jogo, e, do outro, os papéis que eles assumem ao longo de uma partida. As simetrias relacionadas à negação clássica fazem essa distinção indiferente no que concerne a LC e LP, mas ela é indispensável para uma negação não-clássica como a de mbC e de mbCciw. Em relação a estas, os principais resultados obtidos na primeira metade do capítulo são uma semântica de jogos para mbC, e com uma única adaptação, também uma para mbCciw.

As semânticas de jogos assim obtidas, no entanto, são apenas um resultado parcial, posto que relacionam a existência de estratégia vencedora para um ou para o outro jogador não à verdade e à falsidade da fórmula sob a interpretação dada, mas sim à existência ou inexistência de uma bivaloração que satisfaça a fórmula compatível com a interpretação dada das variáveis proposicionais da linguagem. Esse resultado é ostensivamente mais fraco que as equivalências demonstradas em relação a LC e LP, e, por isso, embora as construções propostas sejam por certo jogos semânticos em certo sentido — jogos cuja estrutura carrega informação a respeito das semânticas de bivalorações de mbC e mbCciw —, elas não chegam a constituir semânticas de jogos em sentido pleno. Apesar disso, elas são importantes ao argumento da dissertação por explicitarem os pressupostos do formalismo de Hintikka, e em particular por fazerem ver como a negação clássica interage com a estrutura dos jogos semânticos.

Assim sendo, na segunda metade do quinto capítulo introduzem-se enfim semânticas de jogos

para  $mbC$  e  $mbCciw$  que são de fato equivalentes às semânticas de bivalorações dessas lógicas. Isso encerra o trabalho técnico matemático da dissertação.

No sexto e último capítulo, reflete-se a respeito de como as semânticas de jogos serviriam a permitir um melhor entendimento da pragmática de lógicas que admitem contradições.

Há ainda um capítulo prévio, no qual se apresentam os conceitos fundamentais de teoria dos conjuntos que serão necessários a desenvolver as definições e demonstrações nos capítulos seguintes.

A despeito da ordem em que são apresentados, os capítulos 1 e 2 e o capítulo 3 poderiam em princípio ser lidos na ordem inversa (isto é, primeiro o 3 e em seguida os capítulos 1 e 2), dado que são inteiramente independentes. Com efeito, esta dissertação é um trabalho duplo, que envolve lógica e jogos a fim de chegar a conclusões a respeito das relações entre esses dois assuntos. O leitor fica, pois, livre para iniciar a leitura por aquele que julgue mais conveniente ao seu entendimento e seus interesses. Em particular, porque literatura introdutória em português a respeito de teoria dos jogos é ainda escassa, talvez o capítulo 3 possa vir a ser de interesse por si só para alguns leitores. O mesmo se diga, aliás, da literatura a respeito das semânticas de jogos.

## Capítulo 2

### Conceitos fundamentais

Neste capítulo explicito os conhecimentos de teoria dos conjuntos esperados do leitor desta dissertação. O leitor é convidado a lê-lo e então retornar a ele quando os conceitos aqui definidos e os termos aqui fixados fizerem-se necessários.

#### 2.1 Teoria dos conjuntos

Suponho que o leitor está habituado às noções fundamentais da teoria dos conjuntos [17], [22], [24], [26], [41], que denotaremos por seus signos usuais: a noção de *pertinência* e a relação de *estar em* e sua negação ( $\in$ ,  $\notin$ ); a noção de *subconjunto* e a relação de *estar contido em* ( $\subseteq$ ) e *estar contido propriamente em* ( $\subset$ ); a noção de conjuntos das partes ( $\wp$ ); as noções de *união* ( $\cup$ ,  $\cup$ ), intersecção ( $\cap$ ,  $\cap$ ), e de *diferença* ( $\setminus$ ) de dois conjuntos; e a noção de *conjunto vazio* ( $\emptyset$ ). Suponho também que o leitor está habituado com a notação de *termo de classe* para um subconjunto de  $X$  cujos elementos satisfazem a fórmula  $\varphi$  (isto é: a expressão  $\{x \in X : \varphi(x)\}$ , onde  $x$  ocorre livre em  $\varphi$ ) e suas variantes.

Seja  $X$  um conjunto e  $x_0, \dots, x_{n-1}$  elementos seus. Por vezes denotaremos abreviadamente o fato de que  $x_0 \in X, \dots$  e  $x_{n-1} \in X$  por  $x_0, \dots, x_{n-1} \in X$ .

Seja  $X$  um conjunto. Uma *partição* de  $X$  é um conjunto  $\mathfrak{P}$  de subconjuntos de  $X$  tal que todo  $x \in X$  está em pelo menos um  $P \in \mathfrak{P}$  e tal que nenhum  $x$  está em mais que um  $P$ .

Suponho, ademais, que o leitor está habituado à noção de *par ordenado* de  $x$  e  $y$  ( $\langle x, y \rangle$ ). Denotaremos o conjunto de todos os pares ordenados  $\langle x, y \rangle$  tais que  $x \in X$  e  $y \in Y$  por  $X \times Y$ .

Por fim, suponho que o leitor está habituado à noção de *número ordinal* e sua aritmética. Denotaremos por  $\mathbb{N}$  o conjunto dos ordinais finitos ( $\{0, 1, 2, \dots\}$ ).

## 2.2 Relações e funções

Dizemos que um conjunto  $R$  tal que  $R \subseteq X \times Y$  para algum  $X$  e algum  $Y$  é uma *relação binária*. Dizemos que  $X$  e  $Y$  são, respectivamente, a *origem* e o *alvo* da relação. Quando a origem e o alvo de uma relação forem evidentes pelo contexto, omitiremos menção a eles. Denotaremos o fato de que  $\langle x, y \rangle \in R$  por  $xRy$ , e o fato de que  $\langle x, y \rangle \notin R$  por  $x \not R y$ . Se  $Y = X$ , dizemos que  $R$  é uma relação *em*  $X$ .

Dizemos que uma relação  $R$  em  $X$  é *reflexiva* se  $xRx$  para todo  $x$ , e *irreflexiva* se  $x \not R x$  para todo  $x$ . Dizemos que ela é *simétrica* se, para todos  $x, x'$ , se  $xRx'$ , então  $x'Rx$ , e *assimétrica* se, para todos  $x, x'$ , se  $xRx'$ , então  $x' \not R x$ . Note-se que uma relação assimétrica é irreflexiva. Dizemos que ela é *transitiva* se, para todos  $x, x', x''$ , se  $xRx'$  e  $x'Rx''$ , então  $xRx''$ . Dizemos que uma relação transitiva e simétrica (e, portanto, reflexiva) é uma relação de *equivalência*.

Dizemos que  $R$  é *antissimétrica* se, para todos  $x, x'$ , se  $xRx'$  e  $x'Rx$ , então  $x = x'$ . Por fim, dizemos que ela é *completa* se, para todos  $x, x'$ , ou  $xRx'$  ou  $x'Rx$ . Note-se que uma relação completa é reflexiva. Dizemos que uma relação transitiva, antissimétrica e completa é uma *ordem*. Se  $R$  é uma ordem em  $X$ , dizemos que  $X$  é *ordenado* por  $R$ .

Seja  $R \subseteq X \times Y$  uma relação binária. Denotaremos o *domínio* de  $R$  (o conjunto de todos os  $x \in X$  tais que  $xRy$  para algum  $y \in Y$ ) por  $\text{Dom}(R)$ , e sua *imagem* (o conjunto de todos os  $y \in Y$  tais que  $xRy$  para algum  $x \in X$ ) por  $\text{Imag}(R)$ . Se  $\text{Dom}(R) = X$ , dizemos que  $R$  é *total* em relação a  $X$  (ou simplesmente que é total, se o conjunto  $X$  é evidente pelo contexto). *Atenção:* nesta dissertação, a menos quando se diga o contrário, assumiremos que *todas* as relações binárias são totais.

A *restrição* de uma relação  $R \subseteq X \times Y$  a um conjunto  $Z$  é o conjunto  $\{\langle x, y \rangle \in R : x \in Z\}$ . Denotaremos a restrição de  $R$  a  $Z$  por  $R \upharpoonright Z$ .

A *inversa*  $\check{R}$  de uma relação  $R$  é a relação  $\check{R} \subseteq Y \times X$  tal que  $y\check{R}x$  se e somente se  $xRy$ .

Se uma relação binária  $f \subseteq X \times Y$  é tal que, para todos  $x \in X$  e todos  $y, y' \in Y$ , se  $xfy$  e  $xfy'$  então  $y = y'$ , dizemos que  $f$  é *funcional*, ou simplesmente que é uma *função*. Quando  $f$  for

uma função, denotaremos o fato de que  $xfy$  por  $f(x) = y$ , e diremos que  $f$  *de*  $x$  *é*  $y$ . Também denotaremos o fato de que  $f \subseteq X \times Y$  por  $f : X \mapsto Y$ , e diremos que  $f$  é uma função *de*  $X$  *em*  $Y$ .

Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos. Denotaremos o conjunto de todas as funções de  $Y$  em  $X$  por  $X^Y$ .

Se  $f \subseteq X \times Y$  é uma função total em relação a  $X$  e a inversa de  $f$  é uma função total em relação a  $Y$ , dizemos que  $f$  é uma *correspondência* entre  $X$  e  $Y$ .

Seja  $I$  um conjunto. Um *perfil* indexado por  $I$  é um conjunto  $P$  tal que existe uma correspondência entre elementos de  $I$  e de  $P$ . Se um conjunto  $P$  é um perfil indexado por  $I$ , dizemos que  $I$  são os *índices* do perfil. Nesses casos, denotaremos  $P$  por  $(p_i)_{i \in I}$  (onde  $p_i \in P$ ). Quando quisermos ser explícitos a respeito dos elementos de um perfil finito com  $n$  elementos, simplesmente os listaremos na forma  $(p_{i_0}, \dots, p_{i_{n-1}})$ .

## 2.3 Sequências

Seja  $E$  um conjunto, e seja  $\mathfrak{D}$  um ordinal. Uma *sequência* de elementos de  $E$  de comprimento  $\mathfrak{D}$  é uma função  $s : \mathfrak{D} \mapsto E$ .

Se  $s(n) = e$ , dizemos que  $e$  é a  $n$ -ésima *entrada* de  $s$  (e, se  $s(n) = e$  para algum  $n$ , simplesmente que é uma entrada de  $s$ ).

Seja  $s$  uma sequência. Se  $\text{Dom}(s) \in \mathbb{N}$ , dizemos que  $s$  é uma sequência *finita*; senão, que é *infinita*. Se  $\text{Dom}(s) \subseteq \mathbb{N}$ , dizemos que  $s$  é uma sequência *contável*; senão, que é *incontável*.

Seja  $s$  uma sequência finita tal que  $\text{Dom}(s) = n$  e tal que  $e_0, \dots, e_{n-1}$  são suas entradas. Quando conveniente, denotaremos  $s$  por  $\langle e_0, \dots, e_{n-1} \rangle$ . Quando  $e_0, \dots, e_{n-1}$  forem signos quaisquer, também denotaremos a sequência por *concatenação*, — isto é, na forma  $e_0 \dots e_{n-1}$ . Com efeito, não havendo risco de confusão, nesses casos também concatenaremos sequências elas mesmas, da seguinte forma. Seja  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $s_i$  é uma sequência de signos, para todo  $i$ . Então  $s_0 \dots s_{n-1}$  denota a sequência  $S$  cujas  $m_0$  primeiras entradas são as  $m_0$  entradas de  $s_0$ , cujas  $m_1$  entradas seguintes são as  $m_1$  entradas de  $S_1$ , etc.

Sejam  $s$  e  $s'$  sequências tais que  $\text{Dom}(s) \subseteq \text{Dom}(s')$ . Se  $s' \upharpoonright \text{Dom}(s) = s$ , dizemos que  $s$  é um *segmento inicial* de  $s'$ , ou que  $s'$  *estende*  $s$ . Denotaremos o fato de que  $s$  é um segmento inicial de  $s'$  por  $s \sqsubseteq s'$ . Se  $s \sqsubseteq s'$ , então, se  $s \neq s'$ , dizemos que  $s$  é um segmento inicial *próprio* de  $s'$ ; senão, que é *impróprio*. Denotaremos o fato de que  $s$  é um segmento inicial próprio de  $s'$  por  $s \sqsubset s'$ .

Sejam  $s$  e  $s'$  sequências finitas tais que  $s \sqsubseteq s'$  e tais que  $\text{Dom}(s') = \text{Dom}(s) + 1$ , e seja  $e$  a última entrada de  $s'$ . Quando conveniente, denotaremos nesses casos  $s'$  por  $s \hat{\ } e$ .

Seja  $s$  uma sequência contável, e seja  $m \in \mathbb{N}$ . A *seção* de  $s$  na altura  $m$  é a sequência  $s'$  tal que  $s'(n) = s(n + m)$  pra todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Sejam  $s$  e  $s'$  sequências contáveis tais que  $s \sqsubseteq s'$  e tal que  $\text{Dom}(s) = n$ . Por extensão, falaremos da seção de  $s'$  na altura *de*  $s$  para dizer o mesmo que a seção de  $s'$  na altura  $n - 1$ . Denotaremos a seção de  $s'$  na altura de  $s$  por  $s'|s$ .

## Capítulo 3

### Lógica

Neste capítulo, apresento de modo bastante abstrato os principais conceitos necessários ao entendimento do que discutiremos a seguir a respeito das lógicas tratadas nesta dissertação. Porque trataremos de várias lógicas comparativamente, é essencial que estabeleçamos desde o início um arranjo conceitual comum que nos permita passar de uma a outra sem que suas especificidades induzam a confusões. A solução encontrada para essa nossa necessidade foi apresentar a noção mais geral de lógica proposicional em termos de semânticas com interpretações e valorações *relacionais*, típicas do formalismo da lógica conhecida da literatura como *implicação de primeiro grau* (“*first degree entailment*” [34], no original).

No mais, além do livro já citado, esta apresentação é retrabalhada do material em [2], [5], [10], [11] e [12].

#### 3.1 Sintaxe

Como afirma Aczel [1], a lógica matemática, se é uma ciência, é uma ciência aplicada, que tem por objeto sistemas simbólicos em sua relação com os processos inferenciais que seus símbolos e estruturas veiculam. Nesta dissertação, lógicas nos interessam sobretudo na medida em que são tanto descritivas quanto prescritivas do *comportamento racional* de agentes engajados em alguma forma de *argumentação*, seja ela humana ou suficientemente semelhante à humana. Naturalmente, portanto, os sistemas simbólicos que nos importam são *linguagens* semelhantes em algum sentido a linguagens humanas.

Em particular, estaremos interessados em lógicas com linguagens ditas *proposicionais* (ou sentenciais, ou qualquer outra variante que se prefira — as distinções conceituais que se poderiam fazer neste ponto são irrelevantes para nossos propósitos, e não nos apegaremos a disputas por termos). A fim de definir rigorosamente o que sejam linguagens proposicionais, necessitamos primeiro do conceito de *vocabulário* proposicional. (Porque todas as lógicas de que nos ocuparemos nesta dissertação são proposicionais, deixaremos de usar esse qualificador daqui em diante.)

**Definição 3.1.** Uma *vocabulário*  $\mathcal{V}$  consiste dos seguintes elementos.

- Um conjunto  $\mathcal{P}$  no máximo contável, — as *variáveis proposicionais*.
- Um conjunto  $\mathcal{O}$  finito, — os *operadores primitivos*.
- Uma função  $\mathcal{A} : \mathcal{O} \mapsto \mathbb{N}$ , — a *ariedade* dos operadores primitivos.

Dizemos que  $\mathcal{P} \cup \mathcal{O}$  são os *signos* da linguagem.

De posse do conceito de vocabulário, podemos seguir ao conceito de *linguagem*.

**Definição 3.2.** Uma *linguagem*  $\mathcal{L}$  consiste dos seguintes elementos.

- Um vocabulário  $\mathcal{V} = (\mathcal{P}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ .
- O menor conjunto  $\mathcal{F}$  de sequências de signos do vocabulário assim definido recursivamente, — as *fórmulas* da linguagem.
  - Se  $p$  é uma variável proposicional, então  $p$  é uma fórmula.
  - Se  $f_0, \dots, f_{n-1}$  são fórmulas e  $o$  é um operador primitivo de ariedade  $n$ , então  $of_0 \dots f_{n-1}$  é uma fórmula.

Se uma fórmula  $f = p$  para  $p$  uma variável proposicional, dizemos que ela é *simples*, senão que é *complexa*.

Se  $f = of_0 \dots f_{n-1}$  onde  $o$  é um operador  $n$ -ário e  $f_0, \dots, f_{n-1}$  são fórmulas, dizemos que  $o$  é o operador *principal* da fórmula. É um resultado fundamental em álgebras signos [14] que fórmulas assim definidas admitem uma única leitura, — de modo que não há possibilidade de confusão sobre qual seja o operador principal de uma fórmula.

Como se disse, estamos interessados em lógicas na medida em que codificam o comportamento de agentes que argumentam. Eis, pois, o que entendemos por *argumento*, num sentido o mais abstrato possível.

**Definição 3.3.** Seja  $\mathcal{L}$  uma linguagem. Um *argumento* nessa linguagem é um par  $\langle P, c \rangle$  tal que  $P$  é um conjunto de fórmulas da linguagem e  $c$  é uma fórmula da linguagem. Dizemos que  $P$  são as *premissas* do argumento, e  $c$  sua *conclusão*.

Esta é a noção de argumento que se diz de conclusão *única*. Poderíamos conceber argumentos algo mais complexos, envolvendo um conjunto de premissas e um conjunto de conclusões, — isto é, como argumentos de conclusões *múltiplas* [14], [23]. Nesta dissertação não teremos necessidade de recorrer a essa noção. Convém, no entanto, mencioná-la, a fim de se ressaltar que nossas conclusões são todas condicionadas por essa concepção mais limitada do que sejam argumentos.

Intuitivamente, argumentos são a forma linguística de *inferências*. Ter certa fórmula por conclusão de um argumento com certas premissas é, em algum sentido, entender que, se a informação carregada pelas premissas está disponível, então a informação carregada pela conclusão também estaria, — ao menos em princípio, ainda que não necessariamente de fato. Isso, claro, é linguagem vaga. O que cumpre fazer, pois, é especificar que sentido seria esse, e que condições essa relação entre informações deveria satisfazer. Esta breve reflexão nos conduz ao conceito de *estrutura de consequência dedutiva*.

**Definição 3.4.** Uma *estrutura de consequência dedutiva* consiste dos seguintes elementos.

- Um conjunto  $\Phi$  no máximo contável.
- Uma relação  $\Vdash$  contida em  $\wp(\Phi) \times \Phi$  — a *relação de consequência dedutiva* — tal que, para todo  $\Gamma, \Delta$  em  $\wp(\Phi)$  e toda  $\varphi, \psi$  em  $\Phi$ :

**Reflexividade** se  $\varphi$  está em  $\Gamma$ , então  $\Gamma \Vdash \varphi$ ;

**Monotonicidade** se  $\Gamma \Vdash \varphi$  e  $\Gamma$  está contido em  $\Delta$ , então  $\Delta \Vdash \varphi$ ;

**Transitividade** se  $\Gamma \Vdash \varphi$  para toda  $\varphi$  em  $\Delta$  e  $\Delta \Vdash \psi$ , então  $\Gamma \Vdash \psi$ .

Parece-me intuitivamente bastante razoável esperar que estruturas como as por nós intencionadas satisfaçam ao menos essas três condições. Com efeito, seguindo com a intuição a respeito de

relações entre informações, o que essas condições significam, respectivamente, é que: informações dadas estão disponíveis; adicionar informações às dadas não subtrai informações já disponíveis; e, se, dadas certas informações, outras estão disponíveis, então também já estão disponíveis, ao menos em *princípio*, as informações que estariam disponíveis se aquelas outras estivessem dadas.

Note-se que, coerente com a intuição a respeito de informações, na definição de estrutura de consequência dedutiva não assumimos que  $\Phi$  deve ser um conjunto de fórmulas. Essa definição é, enfim, absolutamente geral, e neutra em relação a quais seriam os objetos que carregariam informação e que se relacionariam consequencialmente. Ao restringir, pois, a noção de estrutura de consequência dedutiva a relações consequenciais em uma linguagem, chegamos enfim ao conceito de *lógica*.

**Definição 3.5.** Uma *lógica* é uma estrutura de consequência dedutiva  $\Lambda = (\Phi, \Vdash)$  tal que  $\Phi$  são as fórmulas de alguma linguagem  $\mathcal{L}$ .

Dizemos que uma fórmula  $\varphi$  é um *teorema* de uma lógica se  $\Gamma \Vdash \varphi$  para todo conjunto  $\Gamma$  de fórmulas da linguagem dessa lógica.

Sejam  $\Lambda_0$  e  $\Lambda_1$  duas lógicas de mesma linguagem, e sejam  $\Vdash_0$  e  $\Vdash_1$  suas respectivas relações de consequência dedutiva. Dizemos que  $\Lambda_0$  é *correta* em relação a  $\Lambda_1$  se  $\Gamma \Vdash_0 \varphi$  implica que  $\Gamma \Vdash_1 \varphi$  para todo  $\Gamma$  e toda  $\varphi$ . Dizemos que  $\Lambda_0$  é *completa* em relação a  $\Lambda_1$  se o inverso também é o caso.

### 3.1.1 Linguagens canônicas

As lógicas de que trataremos nesta dissertação constituem-se de uma destas duas linguagens, que serão fixadas para esta dissertação.

**Definição 3.6.** Seja  $\mathcal{V}^c = (\mathcal{P}^c, \mathcal{O}^c, \mathcal{A}^c)$  o vocabulário assim definido:

- $\mathcal{P}^c = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ;
- $\mathcal{O}^c = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg\}$ ;
- $\mathcal{A}^c(\vee) = \mathcal{A}^c(\wedge) = \mathcal{A}^c(\rightarrow) = 2$ , e  $\mathcal{A}^c(\neg) = 1$ ,

e seja  $\mathcal{V}^\circ = (\mathcal{P}^\circ, \mathcal{O}^\circ, \mathcal{A}^\circ)$  o vocabulário assim definido:

- $\mathcal{P}^\circ = \mathcal{P}^c$ ;

- $\mathcal{O}^\circ = \mathcal{O}^c \cup \{\circ\}$ ;
- $\mathcal{A}^\circ(\circ) = 1$  e  $\mathcal{A}^\circ(o) = \mathcal{A}^c(o)$  para  $o \in \mathcal{O}^c$ .

A linguagem  $\mathcal{L}^c = (\mathcal{V}^c, \mathcal{F}^c)$  é a linguagem *clássica*, e a linguagem  $\mathcal{L}^\circ = (\mathcal{V}^\circ, \mathcal{F}^\circ)$ , a linguagem *com operador de consistência*.

Chamamos  $\neg$  a *negação*,  $\vee$  a *disjunção*,  $\wedge$  a *conjunção*,  $\rightarrow$  o *condicional* e  $\circ$  a *consistência*.

Por suas ariedades,  $\neg$  e  $\circ$  são ditos operadores *unários*, e  $\vee$ ,  $\wedge$  e  $\rightarrow$ , *binários*. Por legibilidade, escreveremos informalmente as fórmulas  $\vee\alpha\beta$ ,  $\wedge\alpha\beta$  e  $\rightarrow\alpha\beta$  dessas linguagens em notação *infixa* — ou seja: respectivamente, como  $(\alpha \vee \beta)$ ,  $(\alpha \wedge \beta)$  e  $(\alpha \rightarrow \beta)$  —, valendo-nos assim dos *parênteses* para desambiguar sua leitura, mas dispensando sempre, daqui em diante, os parênteses mais externos de uma fórmula.

Fórmulas, como se pode notar, são objetos construídos por recursão, objetos tais que todas suas componentes são elas mesmas fórmulas. Ter a lista de todas as fórmulas envolvidas na construção de uma fórmula será indispensável tanto para a apresentação das semânticas de valores de verdade das lógicas que nos interessam quanto para o desenvolvimento, nos capítulos seguintes, de suas das semânticas de jogos. Para isso, recorreremos ao conceito de *subfórmula*.

Há, aqui, no entanto, um complicador que é preciso observar. Por razões que ficarão evidentes no que segue, incluir por convenção  $\neg\alpha$  entre as subfórmulas de  $\circ\alpha$  será necessário. Isso talvez pareça pouco usual ao leitor habituado com a noção natural de subfórmula, mas nada de inusitado resulta dessa mudança. Seja como for, adequamos também a noção de *complexidade* de fórmulas, de modo que essa convenção não importará confusão alguma para as provas por indução.

Enfim, eis a definição.

**Definição 3.7.** As *subfórmulas* de  $\varphi$  são o menor conjunto  $\text{Sub}(\varphi)$  assim definido.

- $\varphi$  é uma subfórmula de  $\varphi$ .
- Se  $\alpha \vee \beta$ , ou  $\alpha \wedge \beta$  ou  $\alpha \rightarrow \beta$  é uma subfórmula de  $\varphi$ , então  $\alpha$  e  $\beta$  também são;
- se  $\neg\alpha$  é uma subfórmula de  $\varphi$ , então  $\alpha$  também é;
- se  $\circ\alpha$  é uma subfórmula de  $\varphi$ , então  $\neg\alpha$  e  $\alpha$  também são.

$\varphi$  é dita uma subfórmula *imprópria* de  $\varphi$ , e as demais são ditas *próprias*.  $\alpha$  e  $\beta$  são ditas as subfórmulas próprias imediatas de  $\alpha \vee \beta$ ,  $\alpha \wedge \beta$  e  $\alpha \rightarrow \beta$ , assim como  $\alpha$  de  $\neg\alpha$ , e  $\neg\alpha$  e  $\alpha$  de  $\circ\alpha$ .

Se um conjunto de fórmulas  $F$  é tal que todas as subfórmulas das fórmulas em  $F$  também estão em  $F$ , dizemos que ele é *fechado sob subfórmulas*. (Note-se que, por sua definição, o conjunto de todas as fórmulas de uma linguagem é fechado sob subfórmulas.)

**Definição 3.8.** A *complexidade* das fórmulas da linguagem clássica é a função  $\ell^c : \mathcal{F}^c \mapsto \mathbb{N}$  assim definida.

- $\ell^c(p) = 0$  para  $p$  uma fórmula simples.
- $\ell^c(\neg\alpha) = 1 + \ell^c(\alpha)$ ;
- $\ell^c(\alpha \vee \beta) = \ell^c(\alpha \wedge \beta) = \ell^c(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + \ell^c(\alpha) + \ell^c(\beta)$ .

A complexidade das fórmulas da linguagem com operador de consistência é a função  $\ell^\circ : \mathcal{F}^\circ \mapsto \mathbb{N}$  assim definida.

- $\ell^\circ(p) = 0$  para  $p$  uma fórmula simples.
- $\ell^\circ(\neg\alpha) = 1 + \ell^\circ(\alpha)$ ;
- $\ell^\circ(\alpha \vee \beta) = \ell^\circ(\alpha \wedge \beta) = \ell^\circ(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + \ell^\circ(\alpha) + \ell^\circ(\beta)$ ;
- $\ell^\circ(\circ\alpha) = 1 + \ell^\circ(\neg\alpha)$ .

## 3.2 Semântica

Como dito, concebemos relações de consequência dedutiva como relações entre informações, e as fórmulas de uma lógica como carregadores de informação. Dessa perspectiva, a semântica de uma lógica seria um modelo formal dessa informação. Nesta seção é apresentada a teoria geral (geral para nossos propósitos, ao menos) do que podemos chamar de semânticas de *valores de verdade*, entendidos esses valores no sentido mais estrito, — ou seja: assumindo a princípio que existem apenas *dois* valores possíveis, a verdade, e a falsidade.

Essa concepção envolve uma abstração e uma simplificação. Mais naturalmente, as variáveis proposicionais de uma linguagem seriam entendidas como representações de sentenças declarativas

carregadas de sentido, — as contrapartes formais de sentenças da linguagem natural tais quais “Sócrates é mortal”, “A neve é branca”, *etc.* Como, porém, famosamente observou Frege, o que quer que queiram dizer essas e outras sentenças importa *inferencialmente* apenas na medida em que sejam verdadeiras ou falsas, sendo indiferente qual seria seu significado para além disso.

Isto nos traz ao conceito de *interpretação* das variáveis proposicionais de uma linguagem.

**Definição 3.9.** Seja  $\mathcal{L}$  uma linguagem tal que  $\mathcal{P}$  são suas variáveis proposicionais. Uma *interpretação* dessa linguagem é uma relação  $\mathcal{I}$  contida em  $\mathcal{P} \times 2$ .

Naturalmente, pensamos já o 0 e o 1 como sendo um o falso e o outro o verdadeiro. Cumpre então estabelecer qual é qual e estender essa concepção de significado para todas as fórmulas da linguagem, de preferência de uma forma coerente com o entendimento do que seja o significado das variáveis proposicionais.

**Definição 3.10.** Seja  $\mathcal{L}$  uma linguagem tal que  $\mathcal{F}$  são suas fórmulas. Uma *valoração* das fórmulas dessa linguagem é uma relação  $v$  contida em  $\mathcal{F} \times 2$ .

Seja  $\mathcal{I}$  uma interpretação dessa linguagem. Dizemos que uma valoração  $v$  de suas fórmulas é *fundada* em  $\mathcal{I}$  se  $p \mapsto n$  se e somente se  $p \mathcal{I} n$  para toda variável proposicional  $p$  e todo valor de verdade  $n$ .

Seja  $f$  uma fórmula da linguagem. Se  $f v 1$ , dizemos que  $f$  é *verdadeira* sob  $v$ ; se  $f v 0$ , que é *falsa*.

Se uma valoração  $v$  é tal que toda fórmula da linguagem é verdadeira sob  $v$ , dizemos que  $v$  é *trivial*.

**Definição 3.11.** Seja  $\mathcal{L}$  uma linguagem, seja  $f$  uma fórmula dessa linguagem, seja  $\mathcal{V}$  uma classe de valorações das fórmulas dessa linguagem e seja  $v$  uma valoração. Dizemos que  $v$  *satisfaz* (*contrafaz*)  $f$  em relação a  $\mathcal{V}$  se  $v$  está em  $\mathcal{V}$  e  $f$  é verdadeira (falsa) sob  $v$ .

Seja  $\mathcal{I}$  uma interpretação da linguagem. Por extensão, dizemos que  $f$  é *satisfazível* (*contrafazível*) sob  $\mathcal{I}$  em relação à classe de valorações  $\mathcal{V}$  das fórmulas dessa linguagem se existe alguma  $v$  em  $\mathcal{V}$  fundada em  $\mathcal{I}$  que satisfaz (contrafaz)  $f$ .

Dizemos que uma interpretação  $\mathcal{I}$  de uma linguagem é um *modelo* (*contramodelo*) de uma fórmula  $f$  em relação à classe de valorações  $\mathcal{V}$  das fórmulas dessa linguagem se toda  $v$  em  $\mathcal{V}$  fundada em  $\mathcal{I}$  satisfaz (contrafaz)  $f$ .

Seja  $F$  um conjunto de fórmulas de uma linguagem. Por extensão, dizemos que  $v$  satisfaz (contrafaz)  $F$  se  $v$  satisfaz (contrafaz) toda  $f$  em  $F$ , e que  $\mathfrak{I}$  é um modelo (contramodelo) de  $F$  se  $\mathfrak{I}$  é um modelo (contramodelo) de toda  $f$  em  $F$ .

De posse desses conceitos, podemos enfim expressar o conceito de *lógica* diretamente em termos semânticos.

**Definição 3.12.** Seja  $\mathcal{L} = (\mathcal{V}, \mathcal{F})$  uma linguagem, seja  $\mathcal{V}$  uma classe de valorações das fórmulas dessa linguagem, e seja  $\models_{\mathcal{V}}$  contida em  $\wp(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$  a relação assim definida:  $F \models_{\mathcal{V}} f$  se e somente se toda  $v$  em  $\mathcal{V}$  que satisfaz  $F$  satisfaz  $f$ .

Se um argumento  $\langle P, c \rangle$  nessa linguagem é tal que  $P \models_{\mathcal{V}} c$ , dizemos que ele é *válido* nessa classe de valorações.

**Teorema 3.1.** *Seja  $\mathcal{L}$  uma linguagem e seja  $\mathcal{V}$  uma classe de valorações das fórmulas dessa linguagem. A relação de validade em  $\mathcal{V}$  satisfaz as condições de **Reflexividade**, **Monotonicidade** e **Transitividade**.*

*Demonstração.* Seja  $\Gamma$  um conjunto qualquer de fórmulas da linguagem, seja  $\varphi$  uma fórmula em  $\Gamma$ , e seja  $v$  uma valoração qualquer em  $\mathcal{V}$  que satisfaz  $\Gamma$ . Porque  $v$  satisfaz todas as fórmulas em  $\Gamma$ , em particular  $v$  satisfaz  $\varphi$ . Portanto, porque  $v$  é qualquer,  $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \varphi$ .

Seja, agora,  $\Gamma$  um conjunto qualquer de fórmulas da linguagem, seja  $\varphi$  uma fórmula tal que  $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \varphi$ , seja  $\Delta$  um conjunto qualquer de fórmulas da linguagem tal que  $\Gamma$  está contido em  $\Delta$ , e seja  $v$  uma valoração qualquer em  $\mathcal{V}$  que satisfaz  $\Delta$ . Porque  $v$  satisfaz todas as fórmulas em  $\Delta$  e  $\Gamma$  está contido em  $\Delta$ ,  $v$  também satisfaz todas as fórmulas em  $\Gamma$ , e, por suposição,  $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \varphi$  — isto é: toda valoração que satisfaz  $\Gamma$  satisfaz  $\varphi$ . Portanto,  $v$  satisfaz  $\varphi$ , e, porque  $v$  é qualquer,  $\Delta \models_{\mathcal{V}} \varphi$ .

Por fim, sejam  $\Gamma$  e  $\Delta$  conjuntos quaisquer de fórmulas da linguagem tais que  $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \varphi$  para toda  $\varphi$  em  $\Delta$ , seja  $\psi$  uma fórmula da linguagem tal que  $\Delta \models_{\mathcal{V}} \psi$ , e seja  $v$  uma valoração qualquer em  $\mathcal{V}$  tal que  $v$  satisfaz  $\Gamma$ . Porque  $v$  satisfaz  $\Gamma$  e, por suposição,  $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \varphi$  para toda  $\varphi$  em  $\Delta$ ,  $v$  também satisfaz todas as fórmulas em  $\Delta$ . Mas, também por suposição,  $\Delta \models_{\mathcal{V}} \psi$  — isto é: toda valoração que satisfaz  $\Delta$  também satisfaz  $\psi$ . Portanto,  $v$  também satisfaz  $\psi$ , e, porque  $v$  é qualquer,  $\Gamma \models_{\mathcal{V}} \psi$ .  $\square$

**Corolário 3.1.1.**  $\Lambda = (\Phi, \models_{\mathcal{V}})$  tal que  $\Phi$  são as fórmulas de  $\mathcal{L}$  é uma lógica.

*Demonstração.* Segue-se do teorema e da definição de lógica.  $\square$

**Corolário 3.1.2.** *Uma fórmula  $\varphi$  em  $\Phi$  é um teorema de  $\Lambda$  se e somente se  $\emptyset \models_V \varphi$ .*

*Demonstração.* Se  $\varphi$  é um teorema, então por definição  $\Gamma \models_V \varphi$  para todo  $\Gamma$ , e em particular para  $\emptyset$ . Se  $\emptyset \models_V \varphi$ , então por definição toda valoração que satisfaz  $\emptyset$  satisfaz  $\varphi$ . Mas, vacuamente, toda valoração satisfaz  $\emptyset$ ; portanto, toda valoração satisfaz  $\varphi$ . Em particular, dado um  $\Gamma$  qualquer, toda valoração que satisfaz  $\Gamma$  satisfaz  $\varphi$ .  $\square$

### 3.2.1 Semânticas de valores de verdade para as linguagens canônicas

**Definição 3.13.** Seja  $\mathcal{L}$  uma das linguagens canônicas. Uma *matriz bivalorada determinística* que interpreta os operadores dessa linguagem é uma função  $\mathcal{M}$  que designa, para cada operador primitivo  $o$  tal que toda fórmula em que ele ocorre como principal tem  $n$  subfórmulas próprias imediatas, uma função  $\mathcal{M}(o) : 2^n \mapsto 2$ .

Dada uma matriz bivalorada determinística  $\mathcal{M}$  para a linguagem, dizemos que  $\mathcal{M}(o)$  é uma *operação determinística*.

Seja  $v$  uma valoração das fórmulas dessa linguagem. Dizemos que  $v$  *respeita* a matriz bivalorada determinística  $\mathcal{M}$  que interpreta seus operadores se, para todo operador primitivo  $o$  e toda fórmula  $f$  em que  $o$  ocorre como operador principal, para todas subfórmulas próprias imediatas  $f_0, \dots, f_{i-1}$  de  $f$ , se  $f_0 v n_0, \dots, f_{i-1} v n_{i-1}$  e  $f v n$ , então  $\mathcal{M}(o)(\langle n_0, \dots, n_{i-1} \rangle) = n$ .

**Definição 3.14.** Seja  $\mathcal{L}$  uma das linguagens canônicas. Uma *semântica bivalorada determinística* para essa linguagem é um par  $\mathcal{S} = (\mathcal{M}, \mathcal{V})$  tal que  $\mathcal{M}$  é uma matriz determinística que interpreta seus operadores e  $\mathcal{V}$  é a classe de todas as valorações das fórmulas da linguagem que respeitam a matriz.

**Definição 3.15.** Seja  $\mathcal{L}$  uma das linguagens canônicas. Uma *matriz bivalorada não-determinística* que interpreta os operadores dessa linguagem é uma função  $\mathcal{M}$  que designa, para cada operador primitivo  $o$  tal que toda fórmula em que ele ocorre como principal tem  $n$  subfórmulas próprias imediatas, uma função  $\mathcal{M}(o) : 2^n \mapsto \wp(2) \setminus \emptyset$ .

Analogamente, dada uma matriz bivalorada não-determinística  $\mathcal{M}$  para a linguagem, dizemos que  $\mathcal{M}(o)$  é uma *operação não-determinística*.

Seja  $v$  uma valoração *funcional* das fórmulas dessa linguagem. Dizemos que  $v$  *respeita* a matriz bivalorada não-determinística  $\mathcal{M}$  que interpreta seus operadores se, para todo operador primitivo

$o$  e toda fórmula  $f$  em que  $o$  ocorre como operador principal, para todas subfórmulas próprias imediatas  $f_0, \dots, f_{i-1}$  de  $f$ ,  $v(f)$  está em  $\mathcal{M}(o)(\langle v(f_0), \dots, v(f_{i-1}) \rangle)$ .

**Definição 3.16.** Seja  $\mathcal{L}$  uma das linguagens canônicas. Uma *semântica bivalorada não-determinística* (ou, simplesmente, uma *semântica de bivalorações*) para essa linguagem é um par  $\mathcal{S} = (\mathcal{M}, \mathcal{V})$  tal que  $\mathcal{M}$  é uma matriz não-determinística que interpreta seus operadores e  $\mathcal{V}$  é a classe de todas as valorações funcionais das fórmulas da linguagem que respeitam a matriz.

*Observação 3.2.1.* Se uma semântica bivalorada (determinística ou não) satisfaz adicionalmente a restrição de que todas as valorações admitidas sejam funcionais, dizemos que ela é uma *semântica verofuncional*.

*Comentário 3.2.1.* Note-se que semânticas de matrizes não-determinísticas estão definidas somente para valorações funcionais, de modo que são trivialmente verofuncionais. A propósito, note-se que uma semântica não-determinística *degenera*, num sentido bastante óbvio, em uma determinística verofuncional se, para todo operador  $o$  da linguagem,  $\mathcal{M}(o)(\langle n_0, \dots, n_{i-1} \rangle)$  é um conjunto unitário para quaisquer ênuplas de valores. Podemos, pois, se assim quisermos, pensar as semânticas bivaloradas determinísticas e as não-determinísticas, tais quais aqui definidas, como generalizações diferentes do conceito de semântica bivalorada (determinística) verofuncional<sup>1</sup>.

Naturalmente, todas essas noções podem ser generalizadas para acomodar *mais* valores de verdade [10]. Em lugar do **2**, podem-se tomar como valores possíveis das fórmulas os elementos de um conjunto  $\mathcal{U}$  qualquer, e, em lugar do **1**, que interpretamos como o valor verdadeiro, um subconjunto próprio  $\mathcal{D}$  qualquer de  $\mathcal{U}$  — os “verdadeiros generalizados”, por assim dizer (sendo, portanto,  $\mathcal{U} \setminus \mathcal{D}$  os “falsos generalizados”) —, adaptando-se os conceitos de interpretação, valoração, satisfação, modelo, validade, *etc.* de acordo<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>O leitor conhecedor da literatura deve ter notado que nossas matrizes determinísticas e não-determinísticas não correspondem exatamente às matrizes de Avron [2], mas são delas adaptadas para corresponder mais proximamente às *condições de verdade* que, na literatura, costumam caracterizar lógicas com semânticas de bivalorações como mbC e mbCciw (cf. [11]). A justificação disso ficará evidente no capítulo que segue.

<sup>2</sup>Porque teremos necessidade da generalização desses conceitos apenas de passagem, por simplicidade preferi sua versão mais restrita.

## Capítulo 4

# Lógicas e suas semânticas de valores de verdade

Neste capítulo, apresento as quatro lógicas das quais pretendemos tratar com o instrumental da semântica de jogos: a *lógica clássica* (LC), a *lógica do paradoxo* (LP), a *lógica de inconsistência formal mínima com a propriedade fundamental da consistência* (mbC), e a lógica conhecida da literatura como mbCciw.

A apresentação dessas lógicas será predominantemente semântica. Isto por duas razões. A primeira é que ao desenvolvimento de semânticas de jogos para essas lógicas o que importa é mostrar que, e como, certos jogos e certas propriedades suas estão relacionados a certas estruturas semânticas e certas propriedades de suas semânticas de valores de verdade. Assim sendo, teremos virtualmente nenhum uso para seus sistemas dedutivos. A segunda razão é que o ambiente semântico nos permitirá comparar essas quatro lógicas em termos mais adequados e intuitivos, por fazer mais explícitas as semelhanças e diferenças entre elas.

A isto se adicione que nos interessa em especial a comparação entre LP, de um lado, e mbC e mbCciw, do outro, por as três serem lógicas paraconsistentes, mas paraconsistentes com motivações e justificações muito distintas para seus respectivos tratamentos da negação. Na literatura, o tratamento dado a LP tem sido predominantemente (e, a bem dizer, quase que exclusivamente) semântico. Isso não é apenas por preferência ou acaso, mas deve-se antes de mais nada ao fato de que a LP falta a regra de dedução conhecida como *modus ponens*. Assim sendo, porque é de qualquer modo impossível dar um tratamento axiomático usual a LP, essa via de comparação é-nos

vedada de saída.

## 4.1 Condições de verdade para LC, LP, mbC e mbCciw

Considerem-se as seguintes condições que uma valoração  $v$  das fórmulas da linguagem clássica pode satisfazer.

Condições  $\Rightarrow^+$ :

$\vee^+_{\Rightarrow}$  Se  $\alpha \vee \beta v1$ , então ou  $\alpha v1$  ou  $\beta v1$ .

$\wedge^+_{\Rightarrow}$  Se  $\alpha \wedge \beta v1$ , então  $\alpha v1$  e  $\beta v1$ .

$\rightarrow^+_{\Rightarrow}$  Se  $\alpha \rightarrow \beta v1$ , então ou  $\alpha v0$  ou  $\beta v1$ .

$\neg^+_{\Rightarrow}$  Se  $\neg \alpha v1$ , então  $\alpha v0$ .

Condições  $\Rightarrow^-$ :

$\vee^-_{\Rightarrow}$  Se  $\alpha \vee \beta v0$ , então  $\alpha v0$  e  $\beta v0$ .

$\wedge^-_{\Rightarrow}$  Se  $\alpha \wedge \beta v0$ , então ou  $\alpha v0$  ou  $\beta v0$ .

$\rightarrow^-_{\Rightarrow}$  Se  $\alpha \rightarrow \beta v0$ , então  $\alpha v1$  e  $\beta v0$ .

$\neg^-_{\Rightarrow}$  Se  $\neg \alpha v0$ , então  $\alpha v1$ .

Condições  $\Leftarrow^+$ :

$\vee^+_{\Leftarrow}$  Se ou  $\alpha v1$  ou  $\beta v1$ , então  $\alpha \vee \beta v1$ .

$\wedge^+_{\Leftarrow}$  Se  $\alpha v1$  e  $\beta v1$ , então  $\alpha \wedge \beta v1$ .

$\rightarrow^+_{\Leftarrow}$  Se ou  $\alpha v0$  ou  $\beta v1$ , então  $\alpha \rightarrow \beta v1$ .

$\neg^+_{\Leftarrow}$  Se  $\alpha v0$ , então  $\neg \alpha v1$ .

Condições  $\Leftarrow^-$ :

$\vee^-_{\Leftarrow}$  Se  $\alpha v0$  e  $\beta v0$ , então  $\alpha \vee \beta v0$ .

$\wedge^-_{\Leftarrow}$  Se ou  $\alpha v0$  ou  $\beta v0$ , então  $\alpha \wedge \beta v0$ .

$\rightarrow_{\Leftarrow}^-$  Se  $\alpha v 1$  e  $\beta v 0$ , então  $\alpha \rightarrow \beta v 0$ .

$\neg_{\Leftarrow}^-$  Se  $\alpha v 1$ , então  $\neg \alpha v 0$ .

Considerem-se, adicionalmente, as seguintes condições que uma valoração  $v$  de fórmulas da linguagem com operador de consistência pode satisfazer.

$\circ_{\Rightarrow}^+$  Se  $\circ \alpha v 1$ , então ou  $\alpha v 0$  ou  $\neg \alpha v 0$ .

$\circ_{\Rightarrow}^-$  Se  $\circ \alpha v 0$ , então  $\alpha v 1$  e  $\circ \alpha v 1$ .

$\circ_{\Leftarrow}^+$  Se ou  $\alpha v 0$  ou  $\neg \alpha v 0$ , então  $\circ \alpha v 1$ .

$\circ_{\Leftarrow}^-$  Se  $\alpha v 1$  e  $\neg \alpha v 1$ , então  $\circ \alpha v 0$ .

Chamaremos as condições marcadas por  $\Rightarrow$  *necessárias*, e as por  $\Leftarrow$ , *suficientes*. Chamaremos as condições marcadas por  $+$  positivas, e as por  $-$ , negativas. Chamaremos essas condições todas *condições de verdade*.

Como o leitor pode facilmente constatar por si mesmo, se uma valoração é *funcional*, então: se ela satisfaz a condição necessária positiva relativa a certo operador, então satisfaz também a suficiente negativa relativa ao mesmo operador; e, se satisfaz a necessária negativa, satisfaz a suficiente positiva.

**Definição 4.1.** LC é a lógica  $(\mathcal{F}^c, \models_{\mathcal{V}^{LC}})$ , onde  $\mathcal{V}^{LC}$  é a classe de todas as valorações funcionais das fórmulas da linguagem clássica que satisfazem todas as condições de verdade necessárias (e, portanto, também as suficientes) relativas aos operadores dessa linguagem [16], [32], [40].

**Definição 4.2.** LP é a lógica  $(\mathcal{F}^c, \models_{\mathcal{V}^{LP}})$ , onde  $\mathcal{V}^{LP}$  é a classe de todas as valorações das fórmulas da linguagem clássica que satisfazem todas as condições de verdade relativas aos operadores dessa linguagem [35], [34].

*Observação 4.2.1.* O que é distintivo de LP é que a classe de valorações que define sua relação de validade admite valorações sob as quais uma mesma fórmula é verdadeira e falsa (donde seu nome).

**Definição 4.3.** A *lógica de inconsistência formal mínima com a propriedade fundamental da consistência* (mbC) é a lógica  $(\mathcal{F}^o, \models_{\mathcal{V}^{mbC}})$ , onde  $\mathcal{V}^{mbC}$  é a classe de todas as valorações funcionais das

fórmulas da linguagem com operador de consistência funcionais e que satisfazem todas as condições de verdade necessárias relativas aos operadores da linguagem clássica *exceto* a positiva relativa negação (e, portanto, também as suficientes exceto a negativa relativa à negação), mais a condição necessária positiva (e, portanto, também a suficiente negativa) relativa à consistência [11], [12].

*Observação 4.3.1.* Usualmente, mbC é apresentada em termos *sintáticos*, na forma de um sistema axiomático com uma única regra de dedução, e então se demonstra que o sistema lógico assim apresentado é *correto* e *completo* em relação à classe de valorações  $\mathcal{V}^{\text{mbC}}$ . Contudo, como já se observou ao início do capítulo, porque a nossos propósitos nesta dissertação somente importará sua semântica de valores de verdade, apresentar mbC na sua forma usual é não apenas desnecessário mas, com efeito, seria também demasiado ostensivo.

Convém observar, no entanto, que a semântica de mbC aqui apresentada *não* é a única que esse sistema lógico admite. Nesta dissertação, *identificamos* mbC deliberadamente a essa semântica em particular — sua semântica de bivaloração — porque é ela a semântica que permite comparar mais diretamente mbC a LC e LP.

**Definição 4.4.** mbCciw é a lógica  $(\mathcal{F}^\circ, \models_{\mathcal{V}^{\text{mbCciw}}})$ , onde  $\mathcal{V}^{\text{mbCciw}}$  é a classe de todas as valorações funcionais das fórmulas da linguagem com operador de consistência que satisfazem as mesmas condições que para mbC e, adicionalmente, a condição necessária negativa (e, portanto, também a suficiente positiva) relativa à consistência [11], [12].

*Observação 4.1.1.* Quando for evidente pelo contexto de que lógica falamos, omitiremos o índice referente à classe de valorações ao escrever a relação de validade dessa lógica.

Seja  $v$  uma valoração qualquer. Se  $v$  está na classe das valorações da lógica  $\Lambda$ , dizemos que é uma  $\Lambda$ -valoração. Se alguma valoração de  $\Lambda$  for fundada em  $\mathfrak{J}$ , dizemos que essa é uma  $\Lambda$ -interpretação. De forma análoga, falaremos de  $\Lambda$ -fórmulas, também de  $\Lambda$ -jogos semânticos, *etc.*

O comportamento das operações lógicas correspondentes aos operadores primitivos dessas quatro lógicas está resumido nas seguintes tabelas (nas quais, nas operações binárias, as entrada da primeira coluna são valores do primeiro operando e as da primeira linha do segundo).

Estas são as tabelas para as LC-operações primitivas.

|        |   |   |
|--------|---|---|
| $\vee$ | 0 | 1 |
| 0      | 0 | 1 |
| 1      | 1 | 1 |

|          |   |   |
|----------|---|---|
| $\wedge$ | 0 | 1 |
| 0        | 0 | 0 |
| 1        | 0 | 1 |

|               |   |   |
|---------------|---|---|
| $\rightarrow$ | 0 | 1 |
| 0             | 1 | 1 |
| 1             | 0 | 1 |

|   |        |
|---|--------|
|   | $\neg$ |
| 0 | 1      |
| 1 | 0      |

Estas são as para as LP-operações primitivas. (Note-se que, como em LC,  $\alpha \rightarrow \beta$  é equivalente a  $\neg\alpha \vee \beta$ <sup>1</sup>.)

|        |     |   |     |
|--------|-----|---|-----|
| $\vee$ | 0   | 1 | 0,1 |
| 0      | 0   | 1 | 0,1 |
| 1      | 1   | 1 | 1   |
| 0,1    | 0,1 | 1 | 0,1 |

|          |   |     |     |
|----------|---|-----|-----|
| $\wedge$ | 0 | 1   | 0,1 |
| 0        | 0 | 0   | 0   |
| 1        | 0 | 1   | 0,1 |
| 0,1      | 0 | 0,1 | 0,1 |

|               |     |   |     |
|---------------|-----|---|-----|
| $\rightarrow$ | 0   | 1 | 0,1 |
| 0             | 1   | 1 | 1   |
| 1             | 0   | 1 | 0,1 |
| 0,1           | 0,1 | 1 | 0,1 |

|     |        |
|-----|--------|
|     | $\neg$ |
| 0   | 1      |
| 1   | 0      |
| 0,1 | 0,1    |

Nos casos de mbC e mbCciw, podemos omitir as tabelas para a conjunção, a disjunção e o condicional, que são idênticas às para LC. Ademais, é mais conspícuo observar o comportamento da negação e da consistência conjuntamente.

Assim sendo, eis a tabela para mbC:

|   |        |         |
|---|--------|---------|
|   | $\neg$ | $\circ$ |
| 0 | 1      | 0       |
|   |        | 1       |
| 1 | 0      | 0       |
|   | 1      | 0       |

<sup>1</sup>Esta observação faz-se necessária a fim de lembrar que apresentações de LP (por exemplo [35] e [34]) costumam introduzir o condicional como um operador derivado ao invés de primitivo. Essa mudança, claro, é indiferente, posto que o condicional permanece definível.

e esta, a para mbCciw:

|   | $\neg$ | $\circ$ |
|---|--------|---------|
| 0 | 1      | 1       |
| 1 | 0      | 1       |
|   | 1      | 0       |

Algumas explicações fazem-se necessárias a respeito dessas tabelas. A primeira e mais óbvia delas é que, a rigor, somente as tabelas para os operadores de LC são *tabelas veritativas*, — isto é: representam operações ou funções *veritativas*, funções que levam de ênuplas de valores de verdade a valores de verdade, tais quais definidas no capítulo anterior. É preciso, pois, cuidar para entender adequadamente as demais.

As tabelas de LP, assim como estão postas, poderiam ser lidas de dois modos. Primeiro, poderíamos lê-las como funções de ênuplas de conjuntos de valores de verdade a conjuntos de valores de verdade. Mais precisamente, tomaríamos os conjuntos  $\{0\}$ ,  $\{1\}$  e  $\{0, 1\}$  como os “valores” possíveis das fórmulas de LP<sup>2</sup>. Note-se, no entanto, que não é esta a leitura adequada à definição de LP em termos de condições de verdade.

Contudo, a relação entre esse modo de conceber as operações lógicas de LP e o modo intencionado — a saber: por meio de uma semântica determinística com valorações relacionais compatível com as condições de verdade que definem LP — é bastante evidente. Uma LP-valoração relaciona cada fórmula da linguagem ou a 0, ou a 1, ou a ambos. Ora, como se pode facilmente observar nas tabelas, quando restritas a ênuplas de conjuntos unitários de valores essas operações comportam-se exatamente como as de LC. (Em especial, é nesse sentido clássica a negação de LP.) De resto, a heurística para a construção das demais entradas dessas tabelas é a seguinte. Tome-se para exemplo a disjunção, e suponha-se, também para fins do exemplo, que ambas  $\alpha$  e  $\beta$  são verdadeiras e falsas sob certa LP-valoração. Classicamente, quando pelo menos uma das disjuntas é verdadeira, a disjunção é verdadeira. Portanto,  $\alpha \vee \beta$  é verdadeira em LP. Mas ambas também são falsas, e,

---

<sup>2</sup>Dessa perspectiva, LP seria uma lógica *trivalorada* tendo  $\{1\}$  e  $\{0, 1\}$  como valores *designados*. Mais precisamente, seria uma lógica com interpretações funcionais contidas em  $\mathcal{P} \times \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ , e valorações em  $\mathcal{F} \times \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$  que respeitassem as tabelas de verdade de LP, estendendo-se da mesma feita a noção de validade argumentativa para comportar o fato de que tanto  $\{1\}$  quanto  $\{0, 1\}$  são agora interpretados como *verdade*.

classicamente, nesse caso a disjunção é falsa. Portanto,  $\alpha \vee \beta$  também é falsa é LP. O mesmo raciocínio vale para as demais entradas não-clássicas da tabela da disjunção em LP, bem como para a interpretação dos demais operadores.

Corretamente entendidas, portanto, o que essas tabelas representam é como as LP-avalações interagem com a matriz determinística que interpreta os operadores de LP (matriz essa que, a rigor, é a mesma de LC)<sup>3</sup>.

mbC- e mbCciw-avalações lógicas, por sua vez, levam em geral de ênuplas de valores de verdades a conjuntos de valores de verdade, dentre os quais uma mbC-avalação (mbCciw-avalação) escolhe então, a cada fórmula envolvendo o operador correspondente, um e único valor<sup>4</sup>. Intuitivamente, se se quiser, podem-se pensar as avalações não-determinísticas de mbC e mbCciw, e em especial a negação, como *múltiplas* avalações, porém não necessariamente a mesma se instanciando a cada fórmula valorada.

Pode-se dar um pouco mais de rigor a essa intuição da seguinte forma.

No caso da avalação de negação, note-se que para a entrada 0 ela retorna sempre 1, mas para a entrada 1 ela pode retornar tanto o 0 como o 1. Podemos, pois, pensar a avalação de negação de mbC e de mbCciw como duas avalações determinísticas *instanciadas* não-deterministicamente: uma, que retorna 1 para a entrada 0 e 0 para 1 (a negação clássica, enfim), e a outra, que retorna 1 para ambas entradas.

No caso da consistência, seu comportamento já é perfeitamente regular em mbCciw: para avalações clássicas de uma fórmula e de sua negação (ou seja: para as entradas 0 e 1, bem como para 1 e 0) ela retorna o valor 1, enquanto que para a avalação não-clássica (para as entradas 1 e 1) ela retorna 0. Em mbC, ela também retorna sempre 0 para a avalação não-clássica, mas para as avalações clássicas ela às vezes retorna 1 (como a consistência em mbCciw), às vezes 0. Dessa feita, podemos pensar a consistência de mbC igualmente como duas avalações determinísticas instanciadas não-deterministicamente: uma, que retorna 1 para avalações clássicas e 0 para não-clássicas;

---

<sup>3</sup>Se bem que essas duas formas de conceber as avalações lógicas de LP resultem na mesma lógica, para nossos propósitos esta segunda será muitíssimo mais conveniente, embora a primeira seja algebricamente mais adequada. Mas ainda voltaremos à concepção algébrica de LP em pelo menos uma ocasião importante.

<sup>4</sup>Isto é, algebricamente são o que se chama na literatura de *hiperavalações* [12].

e a outra, que retorna 0 tanto para umas quanto para a outra valoração<sup>5</sup>.

Resume-se isso nas tabelas a seguir, marcando-se com o índice 0 a negação clássica e com o 1 a não-clássica, e com os mesmos índices respectivamente a consistência “clássica” (isto é, a de mbCciw) e a “não-clássica”:

|   |          |   |          |   |        |           |   |        |           |
|---|----------|---|----------|---|--------|-----------|---|--------|-----------|
|   | $\neg_0$ |   | $\neg_1$ |   | $\neg$ | $\circ_0$ |   | $\neg$ | $\circ_1$ |
| 0 | 1        | 0 | 1        | 0 | 1      | 1         | 0 | 1      | 0         |
| 1 | 0        | 1 | 1        | 1 | 0      | 1         | 1 | 0      | 0         |
|   |          |   |          |   |        |           |   |        |           |

## 4.2 Unicidade de valorações

Os teoremas seguintes resumem bem esse contraste entre as duas lógicas clássicas, LC e LP, e as duas LIF.

**Teorema 4.1** (Lema da unicidade para LC). *Dada uma LC-interpretação, existe uma e única LC-valoração fundada nessa interpretação.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{I}$  uma LC-interpretação. Por definição, existe pelo menos uma LC-valoração fundada em  $\mathcal{I}$ . Seja, pois,  $v$  essa valoração, e suponha-se, por absurdo, que existe  $v'$  diferente de  $v$  também fundada em  $\mathcal{I}$ . Assim sendo, existe pelo menos uma  $\varphi$  tal que  $v(\varphi) \neq v'(\varphi)$ . Porque a complexidade de uma fórmula qualquer é finita, podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $\varphi$  é uma dentre as fórmulas de menor complexidade para as quais  $v$  e  $v'$  divergem.

Prosseguimos por indução na complexidade das fórmulas. Provaremos a proposição apenas para o caso básico, o caso da disjunção e o da negação, deixando para o leitor as provas dos demais casos, que se assemelham a estes últimos de forma óbvia. (De resto, convém lembrar que em LC os operadores binários são interdefiníveis através da negação.)

Se  $\varphi = p$  para  $p$  uma fórmula simples, então por suposição  $v(p) = \mathcal{I}(p)$  e  $v'(p) = \mathcal{I}(p)$ , e o absurdo se segue trivialmente.

Se  $\varphi = \alpha \vee \beta$ , então, por suposição,  $v(\alpha \vee \beta) \neq v'(\alpha \vee \beta)$ . Suponha-se, sem perda de generalidade, que  $\alpha \vee \beta$  é verdadeira sob  $v$  e falsa sob  $v'$ . Assim sendo, pelas LC-condições de verdade, ou  $\alpha$  ou  $\beta$

<sup>5</sup>Em outros termos, é simplesmente dizer que, no fundo, a negação de mbC é não-determinada entre ser a negação clássica e o *verum*, e a consistência entre ser a consistência clássica e o *falsum*.

é verdadeira sob  $v$ , enquanto que ambas são falsas sob  $v'$ . Portanto,  $v$  e  $v'$  também divergem numa fórmula de complexidade menor, contradizendo a suposição. Absurdo.

Se  $\varphi = \neg\alpha$ , então, por suposição,  $v(\neg\alpha) \neq v'(\alpha)$ . Suponha-se, sem perda de generalidade, que  $\neg\alpha$  é verdadeira sob  $v$  e falsa sob  $v'$ . Assim sendo, pelas LC-condições de verdade,  $\alpha$  é falsa sob  $v$  e verdadeira sob  $v'$ . Portanto,  $v$  e  $v'$  também divergem numa fórmula de complexidade menor, contradizendo a suposição. Absurdo.  $\square$

**Corolário 4.1.1.** *Uma LC-fórmula é satisfazível (contrafazível) sob uma interpretação se e somente se essa interpretação é um modelo (contramodelo) da fórmula.*

*Demonstração.* Decorre imediatamente do lema e das definições de satisfazibilidade e de modelo.  $\square$

**Teorema 4.2** (Lema da unicidade para LP). *Dada uma LP-interpretação, existe uma e única LC-valorização fundada nessa interpretação.*

*Demonstração.* A demonstração faz-se por absurdo e por indução, como no lema análogo para LC. O caso básico é igualmente trivial. Como antes, provaremos somente para os casos da disjunção e da negação (lembrando que também em LP os operadores binários são interdefiníveis através da negação, aliás do mesmo modo que em LC).

Seja, pois,  $\varphi$  a fórmula, sejam  $v$  e  $v'$  as interpretações, e tome-se  $\varphi = \alpha \vee \beta$ . Por suposição,  $v$  e  $v'$  divergem em  $\alpha \vee \beta$ . Assim sendo, existe pelo menos um valor ao qual uma delas relaciona  $\alpha \vee \beta$  que a outra não relaciona. Se ambas não relacionam  $\alpha \vee \beta$  a ao menos um valor, então elas são funcionais em relação à fórmula, e o raciocínio segue idêntico ao caso clássico da conjunção. Portanto, uma delas relaciona a fórmula a dois valores, e uma a apenas um. Suponha-se sem perda de generalidade que seja  $v'$  a não relacionar a algum valor. Então  $\alpha \vee \beta$  é tanto verdadeira quanto falsa sob  $v$ , e ou é verdadeira somente ou falsa somente sob  $v'$ . Porque é tanto verdadeira quanto falsa sob  $v$ , pelas LP-condições de verdade, ambas  $\alpha$  e  $\beta$  são falsas, e pelo menos uma delas é também verdadeira. Se  $\alpha \vee \beta$  for verdadeira somente sob  $v'$ , então ou  $\alpha$  ou  $\beta$  é verdadeira somente; se for falsa, então ambas são falsas somente. Em qualquer caso,  $v$  e  $v'$  divergem numa fórmula de menor complexidade.

Tomando-se  $\varphi = \neg\alpha$ , o raciocínio é semelhante. Se  $\alpha$  é verdadeira somente sob  $v$  e falsa somente sob  $v'$ , ou o inverso, o argumento é análogo ao para o mesmo caso em LC. Se assumimos

sem perda de generalidade que  $\neg\alpha$  é verdadeira e falsa sob  $v$  e verdadeira somente sob  $v'$ , então  $\alpha$  é verdadeira e falsa sob  $v$  e falsa somente sob  $v'$ ; se que  $\neg\alpha$  é verdadeira e falsa sob  $v$  e falsa somente sob  $v'$ , então  $\alpha$  é verdadeira e falsa sob  $v$  e falsa somente sob  $v'$ . Em qualquer caso,  $v$  e  $v'$  divergem numa fórmula de menor complexidade.  $\square$

**Corolário 4.2.1.** *Uma LP-fórmula é satisfazível (contrafazível) sob uma interpretação se e somente se essa interpretação é um modelo (contramodelo) da fórmula.*

*Demonstração.* As razões são idênticas às do lema análogo para LC.  $\square$

Por essa propriedade de LC e LP, de haver em suas respectivas semânticas de valores de verdade uma relação biunívoca entre interpretações e valorações, dizemos que suas semânticas são *composicionais*, — isto é: que, num sentido preciso, o significado (o valor de verdade, enfim) de uma fórmula complexa é inteiramente determinado pelos valores de verdade das mais simples que a compõem e por como suas operações lógicas agem sobre esses valores. Já mbC e mbCciw *não* são composicionais nesse sentido, como se pode notar pelo seguinte simples exemplo: se  $p$  é uma variável proposicional tal que  $\mathcal{I}(p) = 1$  para  $\mathcal{I}$  uma interpretação funcional, então tanto  $v$  fundada em  $\mathcal{I}$  tal que  $v(\neg p) = 0$  e  $v'$  fundada em  $\mathcal{I}$  tal que  $v'(\neg p) = 1$  são valorações admitidas pelas condições de verdade da lógica em questão.

Contudo, fiéis à intuição de que as operações não-determinísticas de mbC e mbCciw seriam em verdade operações determinísticas instanciadas não-deterministicamente, podemos contornar essa limitação pela introdução do seguinte conceito.

**Definição 4.5.** Uma *instanciação* das operações de negação e consistência de mbC (ou, por brevidade, uma mbC-instanciação) é uma função  $\mathfrak{S}_{\text{mbC}} : \mathcal{F}^\circ \mapsto \{\langle \neg, \circ \rangle : \neg \in \{\neg_0, \neg_1\} \text{ e } \circ \in \{\circ_0, \circ_1\}\}$ , onde  $\neg_0, \neg_1, \circ_0$  e  $\circ_1$  são as operações assim nomeadas acima. Como esperado, chamamos a primeira entrada de  $\mathfrak{S}_{\text{mbC}}(\varphi)$  a *instanciação* da negação em relação a  $\varphi$ , e a segunda a da consistência.

Dizemos que uma valoração é *compatível* com uma instanciação se os valores das fórmulas sob essa valoração respeitam as instanciações da negação e da consistência por ela especificadas a cada fórmula. Dizemos que uma interpretação é *instanciada* se alguma valoração compatível com uma instanciação é fundada nela.

Dizemos que uma fórmula é  $\mathfrak{S}$ -satisfazível ( $\mathfrak{S}$ -contrafazível) sob  $\mathcal{I}$  se ela é verdadeira (falsa) sob alguma valoração fundada em  $\mathcal{I}$  compatível com  $\mathfrak{S}$ . Por fim, dizemos que  $\mathcal{I}$  é um  $\mathfrak{S}$ -modelo

( $\mathfrak{S}$ -contramodelo) de uma fórmula se ela é verdadeira (falsa) sob toda valoração fundada em  $\mathfrak{I}$  compatível com  $\mathfrak{S}$ .

Da posse do conceito de instanciiação, podemos obter uma noção de composicionalidade específica para mbC e mbCciw, como mostra o teorema a seguir.

**Teorema 4.3** (Lema da unicidade para mbC sob interpretações instanciadas). *Dada uma interpretação mbC-instanciada, existe uma e única mbC-valoração fundada nessa interpretação compatível com a instanciiação.*

*Demonstração.* Por absurdo e por indução. Provaremos somente para os casos da negação e da consistência, uma vez que para os casos das fórmulas simples e dos demais operadores a noção de instanciiação é irrelevante, e portanto as provas são idênticas às para os mesmos operadores em LC.

Seja  $\langle \mathfrak{I}, \mathfrak{S} \rangle$  uma interpretação mbC-instanciada. Pelo desenho das tabelas das operações  $\neg_0$ ,  $\neg_1$ ,  $\circ_0$  e  $\circ_1$ , existe pelo menos uma mbC-valoração fundada em  $\mathfrak{I}$  compatível com  $\mathfrak{S}$ . Seja, pois,  $v$  essa valoração, e suponha-se, por absurdo, que existe  $v'$  diferente de  $v$  também fundada em  $\mathfrak{I}$  compatível com  $\mathfrak{S}$ . Como nos teoremas análogos para LC e LP, tomamos para exemplo uma fórmula  $\varphi$  da menor complexidade para a qual as valorações divergem.

Se  $\varphi = \neg\alpha$  e a instanciiação da negação é  $\neg_0$ , o caso é idêntico ao da negação em LC. Se a instanciiação é  $\neg_1$ , então, porque  $v$  e  $v'$  respeitam essa instanciiação da negação, elas necessariamente convergem em  $\neg\alpha$ .

Se  $\varphi = \circ\alpha$  e a instanciiação da consistência é  $\circ_0$ , então, por suposição,  $v(\circ\alpha) \neq v'(\circ\alpha)$ . Suponha-se, sem perda de generalidade, que  $\circ\alpha$  é verdadeira sob  $v$  e falsa sob  $v'$ . Assim sendo, porque  $v$  e  $v'$  respeitam essa instanciiação da consistência, ou  $v(\alpha) = 0$  e  $v(\neg\alpha) = 1$ , ou  $v(\alpha) = 1$  e  $v(\neg\alpha) = 0$ ; mas  $v'(\alpha) = v'(\neg\alpha) = 0$ . Assim sendo, ou  $v$  diverge de  $v'$  em  $\alpha$ , ou elas divergem em  $\neg\alpha$ . Em qualquer caso, elas também divergem numa fórmula de complexidade menor, contradizendo a suposição. Se a instanciiação da consistência é  $\circ_1$ , então, porque  $v$  e  $v'$  respeitam essa instanciiação, elas necessariamente convergem em  $\circ\alpha$ .  $\square$

*Comentário 4.3.1.* Note-se que o converso do teorema *não* é verdadeiro: dada uma mbC-valoração  $v$ , pode haver mais que uma interpretação mbC-instanciada com a qual ela é compatível. Precisamente, que  $v(\varphi) = 0$ ,  $v(\neg\varphi) = 1$  e  $v(\circ\varphi) = 1$  para  $\varphi$  uma fórmula qualquer é possível tanto se a instanciiação da negação é  $\neg_0$  quanto se é  $\neg_1$ ; e, da mesma feita,  $v(\varphi) = v(\neg\varphi) = 1$  e  $v(\circ\varphi) = 0$

tanto se a da consistência é  $\circ_0$  quanto se é  $\circ_1$ . No entanto, existe pelo menos uma interpretação mbC-instanciada com a qual a valoração é compatível, e, pelo desenho das tabelas operações instanciadas, somente mbC-valorações são compatíveis com uma interpretação mbC-instanciada qualquer.

Ademais, como já se observou a princípio,  $\circ_0$  é simplesmente a operação de consistência mbC-ciwi. As mbCciwi-valorações são, portanto, as mbC-valorações compatíveis com interpretações mbC-instanciadas nas quais a instanciamento da consistência é  $\circ_0$  para todas as fórmulas.

Estas considerações nos levam aos seguintes corolários, que nos oferecem definições alternativas de mbC e mbCciwi.

**Corolário 4.3.1.** *A classe  $\mathcal{V}_{\text{mbC}}$  é a classe das valorações fundadas em interpretações funcionais e compatíveis com mbC-instanciações que respeitam, a cada fórmula, as instanciações dadas da negação, da consistência, e as tabelas de verdade dos demais operadores. mbC é a lógica definida semanticamente em termos dessa classe.*

**Corolário 4.3.2.** *mbCciwi é a lógica que se obtém semanticamente de mbC ao se restringirem as valorações admissíveis àquelas fundadas em interpretações funcionais mbC-instanciadas em que a instanciação da consistência é  $\circ_0$  para todas as fórmulas da linguagem.*

*Comentário 4.3.2.* Embora canonicamente a lógica proposicional clássica seja concebida numa linguagem sem operador de consistência, porque mbC-valorações em que  $\circ\varphi$  é verdadeira para toda  $\varphi$  são, em certo sentido, valorações clássicas (num sentido preciso: tais valorações, se restrito seu domínio às fórmulas da linguagem clássica, são efetivamente LC-valorações), nada a rigor nos impede de pensar como seria um operador de consistência compatível com essa noção de consistência subjacente a LC. Naturalmente, como se disse, esse operador deveria retornar o valor verdadeiro para qualquer fórmula; ou, num sentido mais geral, retornar esse valor para qualquer fórmula para a qual a negação se comporte classicamente (o que, em LC, também é o caso de todas as fórmulas). Por isso podemos legitimamente chamar não só  $\neg_0$  a negação clássica, mas também  $\circ_0$  a consistência clássica, agora sem o pudor das aspas.

Seja, pois, a *lógica proposicional clássica com operador de consistência* (LCC) a lógica que se obtém de mbC ao se restringirem as valorações admissíveis àquelas fundadas em interpretações funcionais mbC-instanciadas em que a instanciação da negação é  $\neg_0$  e a da consistência  $\circ_0$  para

todas as fórmulas da linguagem. É então verdadeiro também o seguinte corolário.

*Corolário 4.3.3. LC é a lógica que se obtém sintaticamente de LCC ao se restringir sua linguagem à linguagem clássica.*

*Comentário 4.3.3.* Uma interessante questão põe-se aqui<sup>6</sup>. Poderíamos admitir dessa mesma feita um operador de consistência em LP? Intuitivamente, o que esperaríamos é que a operação de consistência em LP retornasse o valor verdadeiro quando  $\alpha$  e  $\neg\alpha$  são uma delas verdadeira somente e a outra falsa somente, e o valor falso quando ambas são verdadeiras. Parece-me razoável, pois, convencionar que a consistência em LP controlasse para a *classicalidade* das valorações, levando igualmente ao falso quando ambas  $\alpha$  e  $\neg\alpha$  são falsas (possibilidade esta que, em LP, coincide com o caso de ambas serem verdadeiras). Isso justificaria a análoga introdução de uma *lógica do paradoxo com operador de consistência* (LPC), modificando-se da seguinte forma a tabela da operação de consistência clássica a fim de interpretar esse operador:

|      | $\neg$ | $\circ$ |
|------|--------|---------|
| 0    | 1      | 1       |
| 1    | 0      | 1       |
| 0, 1 | 0, 1   | 0       |

Note-se — e este é um fato pleno de consequências — que a semântica desse operador *não* pode ser descrita na forma relacional, como combinação de valores singulares em uma semântica bivalorada. As duas primeiras colunas da última linha dessa tabela são a combinação das duas primeiras colunas da primeira linha com as duas primeiras colunas da segunda linha (como para os demais operadores de LP), mas a última coluna da última linha *não* é a combinação das duas últimas colunas das duas primeiras linhas (o que resultaria no valor 1, como manda a heurística da construção das tabelas das operações lógicas de LP). LPC *só* pode ser descrita semanticamente, portanto, por uma semântica trivalorada.

<sup>6</sup>Que eu saiba, esta questão nunca foi considerada na literatura.

## 4.3 Paraconsistência

**Definição 4.6.** Como se pode facilmente constatar, do fato de que para nenhuma  $v \in \mathcal{V}^{\text{LC}}$  é o caso que  $v(\neg\alpha) = v(\alpha) = 1$  decorre que LC satisfaz o chamado *princípio de explosão* [11], [12]:  $\{\alpha, \neg\alpha\} \models \beta$  para quaisquer  $\alpha, \beta$ . Assim sendo, diz-se que LC *explode*, ou *trivializa*, sob *contradições*. Uma lógica que não satisfaz o princípio da explosão é uma lógica *paraconsistente* [11], [12], [36]. Como também se pode facilmente constatar, LP e mbC são lógicas paraconsistentes. Com efeito, LP inclusive admite uma valoração trivial (na qual, que conste, todas as fórmulas são também valoradas falsas). No caso de mbC, note-se que nenhuma mbC-valoração satisfaz  $\{\varphi, \neg\varphi, \circ\varphi\}$ , e que, portanto,  $\{\varphi, \neg\varphi\} \not\models_{\text{mbC}} \circ\varphi$ .

**Definição 4.7.** Além de paraconsistente, mbC é uma *lógica de inconsistência formal* [11], [12]. Dada uma linguagem com o operador de negação, seja  $\bigcirc$  um conjunto qualquer de fórmulas dessa linguagem na variável  $p$ , e seja  $\bigcirc(\varphi)$  o conjunto das fórmulas que se obtêm por substituição uniforme da variável  $p$  pela fórmula  $\varphi$  nas fórmulas em  $\bigcirc$ . Uma lógica nessa linguagem é uma *lógica de inconsistência formal* (LIF) se e somente se ela é uma lógica tal que existe um conjunto  $\bigcirc$  tal que:

- para alguma  $\varphi$  e alguma  $\psi$ :
  - $\{\varphi, \neg\varphi\} \not\models \psi$ ;
  - $\bigcirc(\varphi) \cup \{\varphi\} \not\models \psi$ ;
  - $\bigcirc(\varphi) \cup \{\neg\varphi\} \not\models \psi$ ,
- mas, para toda  $\varphi$  e toda  $\psi$ :
  - $\bigcirc(\varphi) \cup \{\varphi, \neg\varphi\} \models \psi$ .

Se uma lógica é uma LIF<sup>7</sup>, dizemos que o conjunto  $\bigcirc(\varphi)$  (ou, mais propriamente, qualquer deles — pois pode haver mais que um) *expressa a consistência* de  $\varphi$ . Intuitivamente, uma lógica de

---

<sup>7</sup>Esta definição corresponde à noção de LIF *forte* da literatura [12]. Pessoalmente, julgo-a mais intuitiva que a noção original e que a noção de LIF *fraca* porque mais uniforme. No entanto, porque uma lógica ser uma LIF forte implica ser uma LIF tanto no sentido original quanto no sentido fraco, e porque tanto mbC quanto mbCciw são LIFs fortes, essas nuances conceituais são aqui indiferentes.

inconsistência formal é uma lógica que se comporta como a lógica clássica em relação à fórmula  $\varphi$  quando se sabe que ela é consistente — e, portanto, necessariamente uma lógica que tem os meios formais para expressar esse fato.

**Teorema 4.4.** *mbC é uma LIF.*

*Demonstração.* Sejam  $p$  e  $q$  variáveis proposicionais. Evidentemente,  $\{p, \neg p\} \not\models q$ , pois  $v$  tal que  $v(p) = v(\neg p) = 1$  e  $v(q) = 0$  é uma mbC-valorção. Também é evidente que  $\{\circ p, p\} \not\models q$  e que  $\{\circ p, \neg p\} \not\models q$ , pois  $v'$  tal que  $v'(\circ p) = v'(p) = 1$  e  $v'(\neg p) = v'(q) = 0$ , e  $v''$  tal que  $v''(\circ p) = v''(\neg p) = 1$  e  $v''(p) = v''(q) = 0$ , também são mbC-valorções.

Por certo,  $\circ\varphi$  faz a lógica explosiva na presença de contradição envolvendo  $\varphi$ , posto que, pelas condições de verdade da consistência, se  $\circ\varphi$  é verdadeira, então não é possível que  $\varphi$  e  $\neg\varphi$  sejam ambas verdadeiras — de modo que, vacuamente, todo modelo de  $\{\circ\varphi\} \cup \{\varphi, \neg\varphi\}$  é um modelo de qualquer fórmula. Portanto,  $\{\circ\varphi\}$  expressa a consistência de  $\varphi$  para qualquer  $\varphi$ .  $\square$

**Teorema 4.5.** *mbCciw é uma LIF.*

*Demonstração.* A prova é idêntica à para mbC.  $\square$

LP, apesar de paraconsistente, *não* é uma LIF. Note-se nas tabelas das operações lógicas de LP que se pode provar por simples indução que, para qualquer operador da linguagem, quando as fórmulas que constituem uma fórmula complexa tendo esse operador como principal são todas verdadeiras e falsas, a fórmula complexa também é. Assim sendo, porque a qualquer conjunto  $\bigcirc(p)$  que pretensamente expressaria a consistência de  $p$  por definição pertencem *somente* fórmulas na variável  $p$ , e porque  $p$  e  $\neg p$  só são ambas verdadeiras em LP quando  $p$  é verdadeira e falsa, todas as fórmulas em  $\bigcirc(p)$  necessariamente serão também verdadeiras e falsas quando  $p$  e  $\neg p$  forem ambas verdadeiras. Mas, assim como em qualquer de nossas lógicas, em LP o valor de verdade de  $q$  uma variável proposicional qualquer diferente de  $p$  é *independente* do valor de  $p$ . Portanto, sempre existe uma LP-valorção tal que: sob ela  $p$  e  $\neg p$  são ambas verdadeiras (e falsas); conseqüentemente, sob ela as fórmulas em  $\bigcirc(p)$  são também todas verdadeiras (e todas falsas), quaisquer que sejam elas; mas  $q$  é falsa somente. Ou seja: não existe um conjunto de fórmulas da linguagem de LP que expresse a consistência de  $p$ . (Note-se que, em particular, como já se observou, a consistência clássica é indefinível em LP.)

A propósito, a LP faltam outras coisas que se podem razoavelmente esperar de uma lógica, seja ela paraconsistente ou não. Mais importantemente, falta-lhe a regra de dedução *modus ponens*: em LP não é verdade que, para quaisquer  $\Gamma, \Delta$  e quaisquer  $\alpha, \beta$ ,

$$\text{se } \Gamma \Vdash \alpha \rightarrow \beta \text{ e } \Delta \Vdash \alpha, \text{ então } \Gamma \cup \Delta \Vdash \beta.$$

LC, assim como mbC e mbCciw, satisfazem essa regra, mas não LP, — e é fácil explicar por quê. Sejam  $p$  e  $q$  fórmulas simples quaisquer tais que, sob certa LP-avaliação,  $p$  é verdadeira e falsa porém  $q$  é falsa somente. Então, pelas LP-condições de verdade,  $p$  é verdadeira (e falsa), e, portanto, ambas  $p \rightarrow q$  e  $p$  são em particular verdadeiras, — mas  $q$  é falsa. Basta, pois, para produzir o contraexemplo à regra que se tome na definição de *modus ponens*  $\alpha$  como sendo  $p$ ,  $\beta$  como sendo  $q$ ,  $\Gamma$  como sendo  $\{p \rightarrow q\}$  e  $\Delta$  como sendo  $\{p\}$ .

Outro fato importante a respeito de LP é que todos os teoremas de LC são teoremas seus. Isto, que pode parecer inusitado, também se explica facilmente. Toda LC-avaliação é uma LP-avaliação; LP, no entanto, admite mais avaliações que LC, — as suas avaliações não-funcionais. Portanto, LP só teria menos teoremas que LC (por óbvio, não poderia ter mais) se alguma dessas avaliações servisse a produzir um contraexemplo *novo* a algum teorema clássico. Mas, como se pode diretamente observar nas tabelas de verdade da versão algébrica de LP, em um *único* caso ocorre de uma ou mais das subfórmulas próprias imediatas de uma fórmula complexa ser verdadeira e falsa mas a fórmula complexa ser falsa somente: no caso em que uma dentre  $\alpha$  e  $\beta$  é falsa somente em  $\alpha \wedge \beta$ . Nesse caso, no entanto, como mais uma vez se pode observar nas tabelas, fosse a outra fórmula verdadeira somente ou falsa somente,  $\alpha \wedge \beta$  seria também falsa somente. — Em resumo: nenhuma das avaliações não-funcionais de LP é capaz de produzir um contraexemplo novo a um teorema clássico.

Isto parece inusitado porque  $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$  e, em especial,  $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$  são, portanto, teoremas de LP. Contudo, inferencialmente ao menos, nada há de estranho nesse fato, posto que, como já se observou, LP não satisfaz *modus ponens*. (Com efeito, outro jeito de provar que LP não satisfaz *modus ponens* é observando que LP é paraconsistente, sua conjunção é *adjuntiva* — isto é: se  $\Gamma \models \alpha$  e  $\Delta \models \beta$ , então  $\Gamma \cup \Delta \models \alpha \wedge \beta$  — e, no entanto,  $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$  é um teorema seu.)

Se bem que de LP não seja uma LIF, sua contraparte com operador de consistência, LPC, é<sup>8</sup>. A

<sup>8</sup>Infelizmente provar isto extrapolaria em muito os estritos limites desta dissertação, mas conjecturo que LPC, tal

prova desse fato, aliás, seria exatamente como a prova análoga para mbC e mbCciw (exceto que, naturalmente, nesse caso haveria três, e não dois, valores de verdade a se considerar).

### 4.3.1 Estilos de paraconsistência

Como se pode constatar dessa breve exposição semântica dos principais traços dessas lógicas, LP, de um lado, e mbC e mbCciw, do outro, têm — podemos dizê-lo assim — *estilos* de paraconsistência muito distintos. Em LP, a paraconsistência é obtida preservando-se a negação clássica mas admitindo valorações não necessariamente funcionais, — ou seja, abandonando o pressuposto de funcionalidade de valorações binárias (às vezes referido na literatura por *princípio de consistência*<sup>9</sup> [30]). Já nos casos de mbC e mbCciw mantém-se esse pressuposto, abandonando-se em lugar dele a condição clássica de que uma fórmula e sua negação sejam *contrárias*, — isto é, que não poderiam ser ambas verdadeiras (embora mantenha-se a condição de serem *subcontrárias*, não se admitindo serem ambas falsas).

Assim sendo, a adoção de LP como lógica que comporta contradições seria a princípio motivada pela noção de que há casos em que a concepção clássica de verdade e falsidade como *mutuamente excludentes* é inadequada, — mas não a concepção clássica da negação [35]; enquanto que a adoção de mbC, ou mbCciw seria motivada pela noção de que há casos em que a concepção clássica da *negação* é que seria inadequada [36], — embora nada se tenha a objetar ao princípio de consistência<sup>10</sup>.

Voltaremos a isto ao discutir a pragmática dessas lógicas paraconsistentes. Para fazê-lo com

---

qual aqui definida, é capaz de capturar sintaticamente os princípios da semântica da lógica do paradoxo minimamente inconsistente (LPm), introduzida por Priest para contornar essas deficiências dedutivas de LP [35]. Penso que, se isto puder ser realizado, mostrará de forma decisiva a universalidade do programa de pesquisa das LIF em relação aos estudos da paraconsistência.

<sup>9</sup>Evitei este nome até aqui para não promover alguma confusão com a noção de consistência das LIFs. O fato de que LPC não pode ser definida numa semântica bivalorada relacional talvez sugira que há alguma relação entre as duas noções de consistência, mas esse é um tema de investigação em si mesmo e não nos convém determo-nos nesse ponto.

<sup>10</sup>Naturalmente, uma vez que estejamos discutindo a possibilidade de outro sistema lógico que não LC ser o adequado a modelar padrões de inferência proposicional envolvendo disjunção, conjunção, condicional e negação, devemos considerar inclusive a possibilidade de que não haja então um único sistema lógico adequado a todos os casos [6]. Estas observações, portanto, não nos comprometem com uma filosofia da lógica em particular, e em especial não nos comprometem sequer com a questão de se é plausível o dialeteísmo de Priest, usualmente associado a LP.

---

rigor, necessitaremos de seus respectivos *jogos semânticos*, — o que nos obriga a um breve excuroso pela teoria dos jogos, ao qual o próximo capítulo é dedicado.

# Capítulo 5

## Jogos

Neste capítulo apresento os conceitos de teoria dos jogos que serão necessários à introdução e desenvolvimento de semânticas de jogos nos próximos. Todos os jogos semânticos de que trataremos nesta dissertação são jogos de dois jogadores com movimentos sequenciais, horizonte finito, de ganhou-ou-perde e com informação perfeita.

Nem todos os jogos analisados pela teoria dos jogos são dessa espécie. Porque necessitaremos apenas de uma pequena parcela de seu instrumental formal, não nos deteremos em todas as distinções conceituais que poderiam ser feitas numa apresentação mais geral da teoria. Para os efeitos desta dissertação, portanto, a menos que se diga o contrário, “jogo” quererá dizer sempre jogo de dois jogadores com movimentos sequenciais, horizonte finito e informação perfeita.

Esta apresentação da teoria dos jogos é adaptada em sua maior parte de [33] e, em menor parte, de [8]. Para o leitor ainda pouco habituado com a teoria dos jogos, uma excelente introdução curta é [27].

### 5.1 Jogos

**Definição 5.1.** Um *jogo* (de dois jogadores, com movimentos sequenciais, horizonte finito e informação perfeita)  $\mathbb{J}$  consiste dos seguintes elementos.

- Um conjunto  $J$  com dois elementos, — os *jogadores*.
- Um conjunto  $P$ , — as *posições* possíveis.

- Uma posição possível distinguida  $i$ , — a *posição inicial*.
- Um conjunto  $T$  não-vazio de sequências finitas de posições possíveis que estendem  $\langle i \rangle$ , — os *estágios terminais*.
- O conjunto  $I$  de todos os segmentos iniciais dos estágios terminais, — os *estágios intermediários*.
- Uma função  $d : I \rightarrow J$ , que determina de que jogador é a vez de *escolher* em cada estágio intermediário.
- para cada jogador  $j$ , um conjunto  $V_j$  e um conjunto  $D_j$ , que juntos constituem uma partição dos estágios terminais, — respectivamente, os *resultados de vitória* e de *derrota* desse jogador.

Seja  $s$  um estágio intermediário do jogo tal que é de  $j$  a vez em  $s$ . Chamamos  $A_s = \{p \in P : s \cap p \in I \cup T\}$  as *alternativas* disponíveis para a escolha de  $j$  em  $s$ .

Sejam  $t, t' \in T$ . Se  $t \in V_j$  e  $t' \in D_j$ , dizemos que  $j$  *prefere*  $t$  a  $t'$ . Se  $t, t' \in V_j$ , ou se  $t, t' \in D_j$ , dizemos que  $j$  é *indiferente* entre  $t$  e  $t'$ .

*Observação 5.1.1.* Dizemos que um jogo é *finito* se tem um número finito de estágios, senão que é *infinito*.

Os jogos de que nos ocuparemos nesta dissertação serão todos finitos.

*Comentário 5.1.1.* O que faz o conceito de jogo como aqui definido ser um de jogos de *horizonte finito* é o fato de que admitimos somente sequências finitas como estágios terminais. Nada impediria que admitíssemos também sequências infinitas. Intuitivamente, isso resultaria em admitir jogos cujas partidas poderiam não terminar em tempo finito. No que interessa às semânticas de jogos, jogos com horizonte *infinito* servem a prover semânticas para lógicas *infinitárias*, — lógicas que admitem conjunções e disjunções infinitas. Não teremos ocasião de discutir esse assunto aqui. A respeito dele, consulte-se [42].

**Definição 5.2.** Uma *partida* de um jogo é um conjunto cujos elementos são um único estágio terminal e todos seus segmentos iniciais.

Seja  $\pi$  uma partida, e  $s$  um estágio. Se  $s \in \pi$ , dizemos que  $s$  *ocorre* em  $\pi$ .

*Observação 5.2.1.* Note-se que das definições segue-se de imediato que uma partida é ordenada por  $\sqsubseteq$ . Disso, por sua vez, se segue que uma partida tem ao menos um estágio que outra não tem se e somente se seus estágios terminais são diferentes. Assim sendo, por vezes identificaremos, sem risco de confusão, uma partida e seu estágio terminal.

*Observação 5.2.2.* Intuitivamente, partidas de jogos são processos com duração, cada uma de suas posições sendo um momento da partida (uma configuração possível de um tabuleiro de xadrez, as cláusulas já estabelecidas numa negociação contratual, *etc.*). Por isso também é que concebemos intuitivamente as decisões dos jogadores como movimentos em uma partida, *etc.* Quando, portanto, estivermos falando do estágio  $s$  no contexto de uma partida na qual, intuitivamente,  $s$  seria o estágio *atual*, nós nos referiremos à última entrada desse estágio por posição atual da partida. Em particular, se  $s$  for o estágio terminal da partida, referir-nos-emos a sua última entrada também por posição *terminal* da partida.

Quando não houver risco de confusão, por vezes falaremos somente da posição atual da partida, deixando o estágio a que nos referimos subentendido.

**Definição 5.3.** Seja  $\mathbb{J}$  um jogo e  $j$  um de seus jogadores. Uma *estratégia* de  $j$  nesse jogo é uma função parcial  $\sigma_j : \{s \in I : d(s) = j\} \mapsto P$  tal que  $\sigma_j(s)$  é uma das alternativas disponíveis para a escolha de  $j$  em  $s$ . Informalmente, é dizer que uma estratégia de um jogador é uma regra que determina que escolha  $j$  deve fazer em cada estágio em que é sua a vez de escolher.

*Observação 5.3.1.* O que faz o conceito de jogo como aqui definido ser um de jogo de informação *perfeita* é o fato de que uma mesma estratégia de um jogador pode divergir em quaisquer dois estágios diferentes nos quais, apesar disso, as alternativas disponíveis para sua escolha são as mesmas. Isso se interpreta como informação perfeita no sentido de que os jogadores podem, ao tomar decisões, levar em conta o que se passou na partida até aquele momento, e não apenas o que está por vir. Se se impõe a restrição de que pelo menos um jogador decida igualmente em ao menos dois estágios em que as alternativas disponíveis para sua escolha são as mesmas, então o jogo passa a ser de informação *imperfeita*.

Além da consequência óbvia de reduzir o número de estratégias admissíveis, informação imperfeita afeta a *determinação* (noção fundamental, esta, que discutiremos a seguir) dos jogos de dois jogadores de ganha-perde. No que interessa às semânticas de jogos, jogos com informação

imperfeita servem a prover semânticas para lógicas quantificadas com *independência* de quantificadores. Mais uma vez, este é um assunto que não teremos mais ocasião de discutir aqui. A respeito, consulte-se [28].

*Observação 5.3.2.* Seja  $(\sigma_j)_{j \in J}$  um perfil de estratégias. É fácil notar que  $\bigcup(\sigma_j)_{j \in J}$  é uma função de  $I$  em  $P$ , e ademais que é total. (Basta notar que  $d$  é uma função total de  $I$  em  $J$  e que  $\text{Dom}(\sigma_j) \cup \text{Dom}(\sigma_{j'}) = I$  para  $j \neq j'$ .)

Seja, pois,  $\mathbb{J}$  um jogo. Por um lado, dado um perfil de estratégias  $(\sigma_j)_{j \in J}$ , o menor conjunto  $\pi$  de estágios assim definido por recursão:

- $\langle i \rangle \in \pi$ ;
- se  $s \in \pi$ , então  $s \smallfrown \bigcup(\sigma_j)_{j \in J}(s) \in \pi$

é patentemente uma partida desse jogo. Por outro lado, dado o estágio terminal  $t$  dessa partida, e sabido que há uma correspondência entre partidas e estágios terminais, também é patente que qualquer perfil de estratégias  $(\sigma'_j)_{j \in J}$  que satisfaçam o seguinte *esquema*:

$$\sigma'_j(s) = \begin{cases} p \text{ tal que } s \smallfrown p \sqsubseteq t, \text{ se } s \sqsubset t; \text{senão} \\ p \text{ qualquer} \end{cases}$$

gera a partida  $\pi$  — gera, no sentido de que, se os jogadores seguirem as estratégias desse perfil, pela definição anterior a partida que terá então transcorrido será exatamente  $\pi$ . Assim sendo, quando conveniente identificaremos uma partida a um dos perfis de estratégias que resultam nela. Isto simplificará muito e fará muito mais transparente a notação em algumas ocasiões.

**Definição 5.4.** Note-se que nossa definição de jogo *não* exclui a possibilidade de mais de um jogador sair vitorioso (ou derrotado) de uma partida. Se um jogo é tal que um jogador *ganha* uma partida se e somente se o outro *perde* (formalmente:  $t$  está em  $V_j$  se e somente se está em  $D_{j'}$ ), dizemos que é um jogo de *ganha-perde*. Se um jogo é tal que não existem estágios terminais em que ambos os jogadores são derrotados, dizemos que é um jogo de *ganha-ou-perde*. Por óbvio, jogos de ganha-perde são de ganha-ou-perde.

**Definição 5.5.** Seja  $\mathbb{J}$ . Uma estratégia *vencedora* do jogador  $j$  nesse jogo é uma estratégia  $\sigma_j^*$  tal que  $j$  ganha a partida  $(\sigma_j^*, \sigma_{j'})$  para toda estratégia  $\sigma_{j'}$  de  $j'$ .

Dizemos que um estágio  $s$  é *vitorioso* para  $j$  se existe uma estratégia  $\sigma_j^*$  tal que esse jogador ganha a partida  $(\sigma_j^*, \sigma_{j'})$  para toda estratégia  $\sigma_{j'}$  tal que  $s$  está em  $(\sigma_j^*, \sigma_{j'})$ . Uma estratégia de  $j$  é vencedora, portanto, se e somente se o estágio inicial é um estágio vitorioso para  $j$ .

Sejam  $s$  e  $s'$  estágios de um jogo. Se uma estratégia  $\sigma_j$  é tal que  $s'$  está em  $(\sigma_j, \sigma_{j'})$  para toda  $\sigma_{j'}$  tal que  $s$  está em  $(\sigma_j, \sigma_{j'})$ , dizemos que  $\sigma_j$  *força* o estágio  $s'$  a partir do estágio  $s$ . Em particular, se uma estratégia força um estágio a partir do estágio inicial, dizemos simplesmente que ela força esse estágio, sem qualificações. Disso se segue imediatamente que, se uma estratégia força um estágio vitorioso a partir de um estágio  $s$ , então  $s$  ele mesmo é um estágio vitorioso. Assim sendo, podemos também definir, alternativamente, estratégia vencedora como uma estratégia que força um estágio vitorioso.

**Definição 5.6.** Se um jogo é tal que um e somente um dos jogadores tem uma estratégia vencedora nele, dizemos que é *determinado*.

**Teorema 5.1** (Teorema da determinação). *Jogos de ganha-perde são determinados.*

*Demonstração.* Seja  $\mathbb{J}$  um jogo de ganha-perde qualquer. Do fato de que o jogo é de ganha-perde segue-se imediatamente que não mais que um jogadores tem uma estratégia vencedora nesse jogo. Resta mostrar que ao menos um deles tem uma.

Para cada jogador  $j$ , seja  $u_j : T \mapsto J$  a função assim definida:  $u_j(t) = j$  se e somente se  $t$  está em  $V_j$  (e observe-se que, por suposição,  $V_j = D_{j'}$  para  $j' \neq j$ ), e seja  $\bar{u}_j : I \cup T \mapsto J$  a função que estende  $u_j$  assim definida recursivamente.

- Se  $s$  é um estágio terminal, então  $\bar{u}_j(s) = u_j(s)$ .
- Se em  $s$  é a vez de  $j$  de escolher e alguma alternativa  $p$  nesse estágio é tal que  $\bar{u}_j(s \smallfrown p) = j$ , ou se em  $s$  não é a vez de  $j$  de escolher mas  $\bar{u}_j(s \smallfrown p) = j$  para toda alternativa  $p$  nesse estágio, então  $\bar{u}_j(s) = j$ ; senão
- $\bar{u}_j(s) = j'$ .

É patente que, se um estágio é tal que é a vez de  $j$  de escolher e uma das alternativas disponíveis conduz a um estágio vitorioso para  $j$ , ou a escolha não é sua mas todas as alternativas disponíveis conduzem a um estágio vitorioso para  $j$ , então esse estágio ele mesmo já é vitorioso para  $j$ . Intuitivamente, o que  $\bar{u}_j$  faz é rotular esses estágios como vitórias para  $j$ , e quaisquer outros estágios

como vitórias para  $j'$  — e, portanto, como derrotas para  $j$ . Note-se que, porque o jogo é de ganha-perde — e, portanto,  $u_j(t) = u_{j'}(t)$  para  $j \neq j'$  —, pela dualidade dos quantificadores envolvidos nas suas definições, a função  $\bar{u}_{j'}$ , definida da mesma forma que  $\bar{u}_j$  mas para o outro jogador, rotula os estágios exatamente da mesma forma. (Note-se, a propósito, que isso *não* implica que a ocorrência de um destes estágios na partida seria derrota certa para  $j$ . O caso é apenas que, nesses estágios, ele não tem como *assegurar* sua vitória.)

Enfim, por construção, ou  $\bar{u}_j(\langle i \rangle) = j$  ou  $\bar{u}_j(\langle i \rangle) = j'$ . Suponha-se, sem perda de generalidade, que  $\bar{u}_j(\langle i \rangle) = j$ , e seja  $\sigma_j^*$  uma estratégia de  $j$  satisfazendo o seguinte esquema:

$$\sigma_j^*(s) = \begin{cases} p \text{ tal que } \bar{u}_j(s \smallfrown p) = j, & \text{se } \bar{u}_j(s) = j; \\ p \text{ qualquer,} & \text{se } \bar{u}_j(s) \neq j. \end{cases}$$

O que o esquema estratégico diz é que  $\sigma_j^*$  deve ser tal que se um estágio  $s$  é vitorioso para  $j$ , então, se é sua vez de escolher, ele deve escolher uma alternativa que conduza a outro estágio vitorioso, caso exista algum. Por construção, se um estágio é vitorioso para  $j$  e é sua vez de escolher, então algum estágio seguinte também é; e, se é vitorioso e não é sua vez de escolher, então todos são. Assim sendo, da suposição de que  $\bar{u}_j(\langle i \rangle) = j$  segue-se por indução que essa estratégia de  $j$  conduz uma partida a um estágio terminal em que ele ganha. Essa estratégia, enfim, é vencedora nesse jogo.  $\mathbb{J}$ , portanto, é determinado. Porque  $\mathbb{J}$  é qualquer, jogos de ganha-perde são determinados.  $\square$

**Comentário 5.1.1.** A suposição de que o jogo é de ganha-perde (e não meramente de ganha-ou-perde) é necessária a estabelecer sua determinação. Note-se, no entanto, que ela *não* é necessária a estabelecer a *existência* de uma estratégia vencedora, mas apenas para estabelecer que *somente um* dos jogadores tem uma (isto é, para estabelecer o fato de que  $\bar{u}_j(s) = \bar{u}_{j'}(s)$  para todo estágio  $s$ , do qual decorre que somente um dos jogadores tem uma estratégia vencedora, se algum tem). Se dispensamos essa restrição, portanto, obtemos o seguinte resultado.

**Corolário 5.1.1** (Teorema da determinação – primeira generalização). *Em um jogo de ganha-ou-perde, ao menos um dos jogadores tem uma estratégia vencedora.*

**Demonstração.** A demonstração consiste, primeiramente, em levar a cabo a mesma construção de uma rotulação dos estágios do jogo. Ao final, no entanto, é possível que  $\bar{u}_j(s) \neq \bar{u}_{j'}(s)$  para algum

estágio  $s$ . Porque, porém, o jogo é de ganha-ou-perde, é evidentemente impossível que ambas  $\bar{u}_j$  e  $\bar{u}_{j'}$  rotulem o estágio inicial como de derrota. Ao menos uma delas rotulará o estágio inicial como vitorioso para seu respectivo jogador (e possivelmente ambas).  $\square$

*Comentário 5.1.2.* Num jogo de ganha-ou-perde, é possível tanto que somente um jogador ganhe certas partidas quanto que ambos ganhem certas outras. (Exemplo trivial: um jogo que consista de somente dois estágios terminais,  $\langle i, 1 \rangle$  e  $\langle i, 2 \rangle$ , nos quais, respectivamente, somente um jogador ganha e ambos ganham.) Mas seja  $\mathbb{J}$  um jogo mais complexo que o do exemplo. Num jogo como esse é ainda possível, contudo, que um e somente um dos jogadores tenha estratégias vencedoras, mas que algumas delas conduzam a vitória somente para ele, enquanto outras conduzem a vitória para ambos. Se, porém, um jogador tem *mais que uma* estratégia vencedora, e elas conduzem a *resultados* diferentes (isto é: a estágios em *partições* diferentes dos estágios terminais; no caso, aquela dos estágios em que só esse jogador ganha, e a dos estágios em que ambos ganham), esse jogador, por óbvio, pode *forçar* um desses resultados (isto é: um estágio terminal em uma dessas partições) simplesmente se valendo da estratégia que conduz a ele.

Em essência, o que estamos fazendo, nesse raciocínio, é substituir a questão de se um jogador tem uma estratégia vencedora pela questão de se ele tem uma estratégia que força certo resultado que não seja necessariamente a vitória. Com efeito, vitória e derrota são resultados importantes porque traduzem a estrutura das *preferências* dos jogadores, sem as quais é impossível fazer previsões justificadas do comportamento de agentes racionais em situações de interação potencialmente conflituosa (pois, afinal, são justamente as preferências dos agentes em relação aos resultados possíveis de sua interação que determinam se a situação é conflituosa ou não). O que importa aqui, entretanto, é constatar se um jogador *poderia* forçar certo resultado *se* assim quisesse.

Segue-se do próprio conceito de estratégia que as estratégias disponíveis para um jogador são as mesmas independentemente de quais estágios terminais sejam vitória e quais derrota para ele. Apenas o *estatuto* dessas estratégias (isto é, se são vencedoras ou não) depende disso. Um pouco mais formalmente, é dizer que, se  $\mathbb{J}$  e  $\mathbb{J}'$  são jogos tais todos seus elementos são iguais, diferindo apenas na classificação dos estágios terminais em de vitória e de derrota, então as estratégias que existem para um jogador em  $\mathbb{J}'$  são as mesmas que existem para esse mesmo jogador em  $\mathbb{J}$ .

Mas, assim sendo, exatamente a mesma construção feita para demonstrar o teorema da determinação pode ser empregada de modo óbvio para demonstrar o seguinte resultado que o generaliza:

**Corolário 5.1.2** (Teorema da determinação – segunda generalização). *Num jogo com exatamente dois resultados possíveis, dado um desses resultados, um e somente um dos jogadores tem uma estratégia que o força.*

*Demonstração.* Na construção do teorema da determinação, substituam-se  $V_j$  e  $V_{j'}$  por outras duas partições  $P_j$  e  $P_{j'}$  dos estágios terminais, e rotulem-se então os estágios terminais com os jogadores a elas correspondentes. O restante da demonstração é análoga<sup>1</sup>.  $\square$

## 5.2 Subjogos

**Definição 5.7.** Seja  $\mathbb{J} = (J, P, i, T, I, d, (V_j)_{j \in J}, (D_j)_{j \in J})$  um jogo, e seja  $s^*$  um estágio seu de comprimento  $n$ . O *subjogo*  $\mathbb{J}'$  de  $\mathbb{J}$  gerado por  $s^*$  é o jogo que consiste dos seguintes elementos.

- $J' = J$ .
- $P' = P$ .
- $i' = s^*(n - 1)$ .
- $T' = \{t' \in P^{\mathbb{N}} : t' = t|_{s^*} \text{ para algum } t \in T\}$ .
- $d'(s|_{s^*}) = d(s)$  para todo  $s$  para o qual  $s|_{s^*}$  está definido.
- $V'_j = \{t|_{s^*} \in T' : t \in V_j\}$  e  $D'_j = \{t|_{s^*} \in T' : t \in D_j\}$ .

(Note-se que a definição de  $I'$  decorre imediatamente da definição de  $T'$  e da definição de jogo.)

Intuitivamente, o subjogo de  $\mathbb{J}$  gerado por  $s^*$  é o jogo que alguém jogaria se substituísse um dos jogadores em  $\mathbb{J}$  *durante* uma partida desse jogo que já tivesse avançado até o estágio  $s^*$ .

*Observação 5.7.1.* Dizemos que o subjogo de  $\mathbb{J}$  gerado por  $s^*$  é *próprio* se  $s^* \neq \langle i \rangle$ ; senão que é *impróprio*. Dizemos que é *mediato* se  $s^* = \langle i \rangle \frown p$  para alguma posição possível  $p$ .

*Observação 5.7.2.* Note-se que, porque as preferências dos jogadores em relação aos estágios terminais relevantes são preservadas nele, um subjogo de um jogo de ganha-ou-perde também é um jogo de ganha-ou-perde; e o mesmo vale para jogos de ganha-perde.

<sup>1</sup>Uma demonstração um pouco mais detida da versão mais geral destes teoremas pode ser encontrada em [8].

**Definição 5.8.** Seja  $\mathbb{J}$  um jogo, seja  $s^*$  um estágio seu, seja  $\mathbb{J}'$  seu subjogo gerado por  $s^*$ , e seja  $\sigma_j$  uma estratégia do jogador  $j$  em  $\mathbb{J}$ . A *restrição* de  $\sigma_j$  ao subjogo  $\mathbb{J}'$  é a estratégia  $\sigma_j|_{s^*}$  de  $j$  em  $\mathbb{J}'$  tal que  $\sigma_j|_{s^*}(s|s^*) = \sigma_j(s)$  para todo  $s$  para o qual  $s|s^*$  está definido.

*Observação 5.8.1.* Note-se que, por definição,  $d'(s|s^*) = d(s)$  para todo  $s$  para o qual  $s|s^*$  está definido, de modo que a imagem de  $\sigma_j|_{s^*}$  está contida na imagem de  $\sigma_j$ . Deixaremos esse fato um tanto óbvio sempre subentendido no que segue.

**Teorema 5.2** (Teorema da extensibilidade). *Se no estágio inicial de um jogo é a vez de certo jogador escolher e ele tem uma estratégia vencedora em algum dos seus subjogos imediatos, ou não é sua vez de escolher e ele tem estratégias vencedoras em todos os seus subjogos imediatos, então ele tem uma estratégia vencedora nesse jogo.*

*Demonstração.* Seja  $\mathbb{J}$  um jogo, seja  $j$  um jogador, e seja  $i$  a posição inicial desse jogo.

Suponha-se, primeiro, que no estágio inicial é a vez de  $j$  de escolher e que ele tem uma estratégia vencedora  $\sigma_j^p$  no subjogo de  $\mathbb{J}$  gerado pelo estágio  $\langle i \rangle^\sim p$ . Seja, pois,  $\sigma_j$  uma estratégia de  $j$  em  $\mathbb{J}$  satisfazendo o seguinte esquema:

$$\sigma_j(s) = \begin{cases} p, & \text{se } s = \langle i \rangle; \text{ senão,} \\ \sigma_j^p(s|\langle i \rangle^\sim p), & \text{se } s|\langle i \rangle^\sim p \text{ está definido; senão} \\ p & \text{qualquer.} \end{cases}$$

Essa estratégia de  $j$  é patentemente vencedora em  $\mathbb{J}$ . Por suposição,  $\sigma_j^p$  é uma estratégia vencedora no subjogo de  $\mathbb{J}$  gerado por  $s|\langle i \rangle^\sim p$ . Porque vencedora, por definição  $j$  ganha a partida  $(\sigma_j^p, \sigma_{j'}^p)$  para qualquer estratégia  $\sigma_{j'}^p$  do outro jogador nesse subjogo. Seja, pois,  $\sigma_{j'}$  uma estratégia de  $j'$  em  $\mathbb{J}$ , seja  $(\sigma_j^p, \sigma_{j'}^p)$  a partida do subjogo de  $\mathbb{J}$  gerado por  $\langle i \rangle^\sim p$  tal que  $\sigma_{j'}^p = \sigma_{j'}|_{\langle i \rangle^\sim p}$ , e seja  $t|\langle i \rangle^\sim p$  seu estágio terminal. Assim sendo, por suposição  $t|\langle i \rangle^\sim p$  é uma vitória de  $j$  nesse subjogo, e por definição  $t$  é uma vitória de  $j$  em  $\mathbb{J}$ . Mas: o estágio inicial desse subjogo é  $\langle i \rangle^\sim p$ ; por definição,  $\sigma_j$  força  $\langle i \rangle^\sim p$ , e  $\sigma_j|_{\langle i \rangle^\sim p}(s|\langle i \rangle^\sim p) = \sigma_j^p(s)$  para todos os estágios seguintes. Por indução, conclui-se que  $t$  é o estágio terminal de  $(\sigma_j, \sigma_{j'})$ .

Suponha-se, agora, que no estágio inicial é a vez do outro jogador escolher, e que  $j$  tem uma estratégia vencedora  $\sigma_j^p$  no subjogo de  $\mathbb{J}$  gerado pelo estágio  $\langle i \rangle^\sim p$ , para toda alternativa  $p$ . Seja, pois,  $\sigma_j$  a estratégia de  $j$  em  $\mathbb{J}$  assim definida:

$$\sigma_j(s) = \sigma_j^p(s|\langle i \rangle^\wedge p), \text{ se } s|\langle i \rangle^\wedge p \text{ está definido para alguma } p.$$

(Note-se oportunamente que  $\sigma_j^p = \sigma_j^{p'}$  para  $p \neq p'$ , de modo que  $\sigma_j$  é de fato uma função.)

Essa estratégia de  $j$  é patentemente vencedora em  $\mathbb{J}$ . Por suposição, esse jogador tem uma estratégia vencedora  $\sigma_j^p$  no subjogo de  $\mathbb{J}$  gerado por  $s|\langle i \rangle^\wedge p$  para toda alternativa  $p$ . Seja, pois,  $p$  uma dessas alternativas. Porque  $\sigma_j^p$  é vencedora, por definição  $j$  ganha a partida  $(\sigma_j^p, \sigma_{j'}^p)$  para qualquer estratégia  $\sigma_{j'}^p$  do outro jogador nesse subjogo. Seja, pois,  $\sigma_{j'}$  uma estratégia de  $j'$  em  $\mathbb{J}$ , seja  $(\sigma_j^p, \sigma_{j'}^p)$  a partida do subjogo de  $\mathbb{J}$  gerado por  $\langle i \rangle^\wedge p$  tal que  $\sigma_{j'}^p = \sigma_{j'}|\langle i \rangle^\wedge p$ , e seja  $t|\langle i \rangle^\wedge p$  seu estágio terminal. Assim sendo, por suposição  $t|\langle i \rangle^\wedge p$  é uma vitória de  $j$  nesse subjogo, e por definição  $t$  é uma vitória de  $j$  em  $\mathbb{J}$ . Mas: o estágio inicial desse subjogo é  $\langle i \rangle^\wedge p$ ; por definição,  $\sigma_j|\langle i \rangle^\wedge p(s|\langle i \rangle^\wedge p) = \sigma_j^p(s)$  para todos os estágios  $s$ . Por indução, conclui-se que  $t$  é o estágio terminal de  $(\sigma_j, \sigma_{j'})$ . Mas, por suposição, qualquer estratégia do oponente em  $\mathbb{J}$  resulta numa partida  $\pi$  tal que  $\langle i \rangle^\wedge p$  está em  $\pi$  para algum alternativa  $p$ .  $\square$

**Definição 5.9.** Seja  $\mathbb{J}$  um jogo. Um perfil de estratégias  $(\sigma_j^*, \sigma_{j'}^*)$  nesse jogo é um *equilíbrio* se e somente se  $j$  prefere  $(\sigma_j^*, \sigma_{j'}^*)$  a  $(\sigma_j, \sigma_{j'}^*)$  ou é indiferente entre eles para toda estratégia  $\sigma_j$  sua, e  $j'$  prefere  $(\sigma_j^*, \sigma_{j'}^*)$  a  $(\sigma_j^*, \sigma_{j'})$  ou é indiferente entre eles para toda estratégia  $\sigma_{j'}$  sua. (Note-se que, que estamos aqui recorrendo à convenção de identificar uma partida e seu estágio terminal.)

Informalmente, é dizer que um equilíbrio é uma situação em que nenhum dos jogadores poderia obter um resultado melhor mudando de estratégia, exceto, talvez, se o outro jogador também mudasse.

Em jogos de ganha-perde, o conceito mais geral de equilíbrio é desinteressante, sendo suplantado pelo conceito de determinação. (Note-se que, nesses jogos, equilíbrio reduz-se a um perfil em que a estratégia de um dos jogadores é vencedora.) O conceito que definimos a seguir, no entanto, permanece de interesse.

**Definição 5.10.** Seja  $\mathbb{J}$  um jogo. Um perfil de estratégias  $(\sigma_j^*, \sigma_{j'}^*)$  nesse jogo é um *equilíbrio perfeito em subjogos* se  $(\sigma_j^*|_s, \sigma_{j'}^*|_s)$  é um equilíbrio no subjogo gerado por  $s$  para todo estágio  $s$  desse jogo.

**Teorema 5.3.** Um perfil de estratégias  $(\sigma_j^*, \sigma_{j'}^*)$  no jogo  $\mathbb{J}$  de ganha-ou-perde é um equilíbrio perfeito em subjogos se e somente se, para todo estágio  $s$  desse jogo, ou  $\sigma_j^*|_s$  ou  $\sigma_{j'}^*|_s$  é uma

*estratégia vencedora no subjogo gerado por  $s$ .*

*Demonstração.* Segue-se imediatamente das definições. □

**Teorema 5.4.** *Todo jogo de ganha-ou-perde tem ao menos um equilíbrio perfeito.*

*Demonstração.* Segue-se do teorema anterior, junto com a primeira generalização do teorema da determinação e com o teorema da extensibilidade. □

**Corolário 5.4.1.** *O perfil de estratégias  $(\sigma_j^*, \sigma_{j'}^*)$  é um equilíbrio perfeito nesse jogo se e somente se, a cada subjogo de  $\mathbb{J}$ , tanto a restrição de  $\sigma_j^*$  quanto a de  $\sigma_{j'}^*$  a esse jogo satisfazem o esquema definatório do teorema da determinação.*

*Comentário 5.2.1.* A noção de equilíbrio perfeito em subjogos revela um sentido em que o fato de um dos jogadores ter estratégias vencedoras não implica que todas elas são igualmente boas, bem como um sentido em que o fato de um jogador não ter estratégias vencedoras não implica que todas suas estratégias são igualmente ruins. Isto porque algumas delas conduziriam um jogador à vitória se o outro cometesse certo *erro* ao seguir sua estratégia vencedora, enquanto outras o conduziriam à derrota *ainda que* esse erro fosse cometido. Em termos, é dizer que a noção de equilíbrio perfeito em subjogos oferece uma medida da *racionalidade estratégica* dos jogadores. Sendo bem-sucedida a interpretação dos jogos semânticos como *pragmáticas* de suas respectivas lógicas, essa noção de racionalidade estratégica pode vir a ser alguma relevância.

Vamos, pois, enfim a esses jogos.

## Capítulo 6

# Jogos semânticos para as lógicas clássicas

Neste capítulo, apresento semânticas de jogos para as lógicas que se podem dizer *clássicas* — isto é, as lógicas em que a *negação* é clássica —, LC e LP. Em sua forma atual, semânticas de jogos foram introduzidas e desenvolvidas por Hintikka [19], [20], embora ele próprio reconheça que o uso informal de jogos como artifício para interpretar operações lógicas é intuitivo, e inclusive que se podem encontrar precedentes na literatura da lógica matemática e da matemática em geral [21], [20]. Com efeito, Hintikka concebe as semânticas de jogos como uma tentativa de dar forma precisa às reflexões de Wittgenstein a respeito de jogos de linguagem [18], [20].

Exatamente a que jogos de linguagem, pois, corresponderiam as semânticas de jogos?

Imagine-se a seguinte situação: duas pessoas — Ptolomeu e Orígenes, digamos —, discutindo a respeito de uma proposição qualquer, expressa pela sentença  $\varphi$ , cuja estrutura é estritamente proposicional. Ao dizer que *discutem*, quero dizer que pelo menos um deles (que suporemos ser Ptolomeu) tem o interesse de estar *certo* a respeito de  $\varphi$ , enquanto o outro (Orígenes) tem o interesse de fazê-lo reconhecer que está *errado*.

Pois bem. Suponha-se que Orígenes pergunte a Ptolomeu se ele julga que  $\varphi$ , e que Ptolomeu responda que sim. Suponha-se que  $\varphi$  é da forma  $\alpha \vee \beta$ . Porque Ptolomeu disse a Orígenes julgar que  $\alpha \vee \beta$ , então, se Orígenes perguntar-lhe agora se ele julga que  $\alpha$ , e Ptolomeu responder que não, então Orígenes poderá legitimamente assumir que Ptolomeu julga que  $\beta$ : pois, a ser coerente com a interpretação clássica da disjunção, Ptolomeu *deveria* nesse caso responder que julga que  $\beta$  se Orígenes perguntasse-lhe a respeito de  $\beta$ ; e o mesmo vale em relação a  $\alpha$  se, em vez disso, ele lhe perguntasse a respeito de  $\beta$  e Ptolomeu respondesse que não. Se, entretanto, Ptolomeu tivesse

respondido que sim, que julga que  $\alpha$  (ou que  $\beta$ ), então não haveria necessidade de lhe perguntar a respeito da outra a fim de saber se Ptolomeu é coerente: por caridade interpretativa, Orígenes poderia assumi-lo e prosseguir com a inquirição. Da mesma feita, se se supõe que  $\varphi$  seja da forma  $\alpha \wedge \beta$  e que Ptolomeu responda que sim, então Orígenes, sem lhe fazer quaisquer perguntas mais, poderia legitimamente assumir que, se coerente, Ptolomeu julga que  $\alpha$  e também que  $\beta$ . Já se  $\varphi$  fosse  $\neg\alpha$  e ele respondesse igualmente que sim, então Orígenes poderia assumir (supondo que Ptolomeu interprete a negação classicamente!) que ele responderia que não à pergunta sobre  $\alpha$ .

Naturalmente, caso Ptolomeu respondesse que *não* à pergunta inicial em qualquer desses casos, os direitos e deveres de perguntante e respondente seriam duais (ao menos, se continuarmos a supor que eles entendem os operadores classicamente): isto é, Orígenes poderia assumir que Ptolomeu responderia também que não às perguntas sobre  $\alpha$  e sobre  $\beta$  se a pergunta inicial fosse sobre  $\alpha \vee \beta$ , mas deveria inquiri-lo especificamente a respeito de uma delas se a pergunta fosse sobre  $\alpha \wedge \beta$ ; e, no caso da negação, poderia assumir que a resposta à pergunta sobre  $\alpha$  seria que sim.

Uma vez iniciada, essa troca de perguntas e respostas poderia então prosseguir segundo o mesmo padrão para as subfórmulas de  $\varphi$  que Orígenes suscitasse, ao menos até que a disputa chegasse a uma fórmula simples, — quando então os interlocutores teriam que recorrer a uma fonte de informação segura, ou ao menos uma convencionalmente aceita por ambos, a fim de decidir qual dos dois *tem razão*.

Assim sendo, uma vez dada a resposta à pergunta inicial sobre  $\varphi$ , Orígenes deveria fazer perguntas e suscitar subfórmulas de modo a conduzir a conversa a uma subfórmula simples de  $\varphi$  em relação à qual Ptolomeu responda (ou deveria responder) que sim, que julga que ela é o caso, quando em realidade ela não é, ou então responda que não, que julga que ela não é o caso, quando em realidade ela é; enquanto Ptolomeu deve responder às perguntas de Orígenes de modo a conduzir a conversa a uma fórmula simples em relação à qual sua resposta coerente seria também adequada<sup>1</sup>.

É a essas intuições a respeito de jogos de linguagem como esses que a semântica de jogos de Hintikka pretende dar forma. A fim, portanto, de refazer aqui o trabalho de Hintikka, necessitaremos da seguinte noção.

---

<sup>1</sup>Note-se, a propósito e por curiosidade, que isto corresponde às famosas definições de Aristóteles de verdade e falsidade.

**Definição 6.1.** Sejam  $\mathcal{F}$  as fórmulas de uma linguagem qualquer, e sejam  $\mathcal{S}$  signos quaisquer. Uma fórmula *rotulada* é um par  $\langle S, f \rangle$  em  $\mathcal{S} \times \mathcal{F}$ . O signo  $S$  em uma fórmula rotulada é dito o *rótulo* de  $f$ . Denotaremos fórmulas rotuladas por concatenação.

Poderíamos pensar, no que segue, o rótulo de uma fórmula como representando a resposta dada, ou que deveria ser dada, em relação à formula por um agente na mesma condição que Ptolomeu às perguntas de um agente na mesma condição que Orígenes. Com efeito, esse seria um modo muito natural e sugestivo de entendê-los. No entanto, seguindo as intuições de Hintikka, pensaremos o rótulo de uma fórmula de outro modo, — como a expressão do *dever discursivo* que o agente na mesma condição de Ptolomeu assume ao responder que sim, ou que não, à pergunta do interlocutor a respeito da fórmula.

Que conste, a semântica de jogos para LC aqui apresentada é retrabalhada do material em [28] e em [42], além de, por óbvio, [20]. A semântica de jogos para LP, apesar de ser, como se poderá notar, uma generalização trivial da semântica de jogos para LC, foi apresentada pela primeira vez em [3]<sup>2</sup>.

## 6.1 Jogos semânticos para LC

**Definição 6.2.** Um *LC-jogo semântico*  $\mathbb{S}_{LC}(\varphi, \mathcal{I})$  para a fórmula  $\varphi$  sob a LC-interpretação  $\mathcal{I}$  consiste dos seguintes elementos.

- Há dois jogadores, o *Proponente* e o *Oponente*.
- As posições possíveis do jogo são as fórmulas rotuladas em  $\{V, F\} \times \text{Subf}(\varphi)$ .

As regras do jogo são as seguintes.

**R<sub>i</sub>** A posição inicial de uma partida é  $V\varphi$ .

**R<sub>V</sub><sup>V</sup>** Se a posição atual é  $V\alpha \vee \beta$ , então o *Proponente* escolhe uma posição em  $\{V\alpha, V\beta\}$ .

**R<sub>V</sub><sup>F</sup>** Se a posição atual é  $F\alpha \vee \beta$ , então o *Oponente* escolhe uma posição em  $\{F\alpha, F\beta\}$ .

---

<sup>2</sup>A propósito, nesse artigo também se apresenta uma outra semântica de jogos possível para LP, com *três* jogadores em lugar de dois.

$R_{\wedge}^V$  Se a posição atual é  $V\alpha \wedge \beta$ , então o *Oponente* escolhe uma posição em  $\{V\alpha, V\beta\}$ .

$R_{\wedge}^F$  Se a posição atual é  $F\alpha \wedge \beta$ , então o *Proponente* escolhe uma posição em  $\{F\alpha, F\beta\}$ .

$R_{\rightarrow}^V$  Se a posição atual é  $V\alpha \rightarrow \beta$ , então o *Proponente* escolhe uma posição em  $\{F\alpha, V\beta\}$ .

$R_{\rightarrow}^F$  Se a posição atual é  $F\alpha \rightarrow \beta$ , então o *Oponente* escolhe uma posição em  $\{V\alpha, F\beta\}$ .

$R_{\neg}^V$  Se a posição atual é  $V\neg\alpha$ , então a partida prossegue para  $F\alpha$ .

$R_{\neg}^F$  Se a posição atual é  $F\neg\alpha$ , então a partida prossegue para  $V\alpha$ .

$R_t$  Fórmulas simples são posições terminais.

*Observação 6.2.1.* Note-se que, porque a complexidade da fórmula atual diminui conforme uma partida prossegue, os estágios desse jogo são de fato sequências finitas, e o jogo, portanto, de horizonte finito. O mesmo valerá para os demais jogos semânticos apresentados neste e no próximo capítulo.

*Observação 6.2.2.* Dizemos que uma fórmula  $\psi$  ocorre numa partida desse jogo se ou a posição  $V\psi$  ou a posição  $F\psi$  ocorre na partida. Por extensão, assim como falamos da posição inicial, da posição atual e da posição terminal da partida, falaremos também da fórmula inicial, da fórmula atual e da fórmula terminal.

As regras de vitória e derrota são as seguintes.

$R_v$  Seja  $p$  a variável proposicional da fórmula terminal da partida.

- Se a posição terminal é  $Vp$  e  $\mathcal{I}(p) = 1$ , ou se é  $Fp$  e  $\mathcal{I}(p) = 0$ , então o *Proponente* ganha a partida.
- Se a posição terminal é  $Vp$  e  $\mathcal{I}(p) = 0$ , ou se é  $Fp$  e  $\mathcal{I}(p) = 1$ , então o *Oponente* ganha a partida.

$R_d$  Se um jogador não ganha a partida, então ele perde.

*Comentário 6.1.1.* As designações “Proponente” e “Oponente” são reminiscentes das lógicas dialógicas de Lorenz e Lorenzen, conceitualmente muito próximas das semânticas de jogos [39]. Na formulação original de Hintikka, no entanto, muito mais importantes que suas identidades são os

*papéis* dos jogadores em relação a cada fórmula, aqui representados pelos seus rótulos. O rótulo V marca o papel de *verificador* do Proponente, e F o de *falsificador*. Assume-se implicitamente que, se o Oponente ocupa um papel em relação a uma fórmula em uma partida, então o Oponente ocupa o outro.

O leitor atento certamente terá notado que as regras relativas aos papéis e operadores correspondem de modo óbvio às LC-condições de verdade necessárias para esses operadores, as regras para as posições marcadas com V correspondendo às condições positivas e as com F às negativas. Ademais, terá talvez notado que regras correspondendo a condições de verdade expressas em forma disjuntiva estabelecem que a vez de escolher é do Proponente, e que as correspondendo a condições em forma conjuntiva estabelecem que a vez é do Oponente; e por certo terá notado que, pelas regras da negação, esse operador corresponde à inversão dos papéis atuais dos jogadores.

**Teorema 6.1.** *LC-jogos semânticos são de ganha-perde.*

*Demonstração.* Segue-se imediatamente das regras de vitória e derrota e do fato de que LC-interpretações são funcionais. □

**Teorema 6.2.** *LC-jogos semânticos são determinados.*

*Demonstração.* Segue-se do teorema anterior e do teorema da determinação. □

**Definição 6.3.** O *LC-jogo semântico dual* de  $\mathbb{S}_{LC}(\varphi, \mathcal{I})$  é o jogo  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\varphi, \mathcal{I})$  que se obtém da definição de LC-jogo semântico substituindo-se V por F na regra de início.

Informalmente, o dual nada mais é que o mesmo jogo mas com os papéis originais dos jogadores invertidos.

*Observação 6.3.1.* Não é usual, na literatura da semântica de jogos para a lógica clássica, apresentar explicitamente os jogos semânticos duais como faço aqui. Fazê-lo, no entanto, parece-me absolutamente natural, e há um ganho epistêmico no fato de que, ao fazê-lo, passa a ser *demonstrável* o fato de a *identidade* de um jogador (quer dizer: se ele é o Proponente ou o Oponente) é indiferente nesses jogos semânticos: indiferente, no sentido de que é estrategicamente equivalente eles jogarem um jogo ou jogarem o seu dual com identidades trocadas.

**Teorema 6.3** (Lema da dualidade para LC-jogos semânticos). *O Proponente tem uma estratégia vencedora no LC-jogo semântico  $\mathbb{S}_{LC}(\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se o Oponente tem no seu dual.*

*Demonstração.* A demonstração se faz por indução na complexidade das fórmulas.

$\varphi = p$  **uma fórmula simples** A posição inicial é a única posição terminal tanto desse jogo quanto de seu dual. Pelas regras, se  $\mathcal{I}(p) = 1$ , o Proponente ganha  $\mathbb{S}_{LC}(p, \mathcal{I})$  e o Oponente seu dual, e o inverso se  $\mathcal{I}(p) = 0$ . Porque em ambos não há escolhas a ser feitas, a estratégia vazia é a única estratégia de ambos os jogadores em ambos os jogos. Portanto, a estratégia vazia é uma estratégia vencedora do Proponente em  $\mathbb{S}_{LC}(p, \mathcal{I})$  e do Oponente em seu dual caso  $\mathcal{I}(p) = 1$ , e o inverso  $\mathcal{I}(p) = 0$ .

$\varphi = \alpha \vee \beta$  Suponha-se que o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha \vee \beta, \mathcal{I})$ . Porque a posição inicial é  $V\alpha \vee \beta$ , o Proponente escolhe entre  $V\alpha$  e  $V\beta$ . Suponha-se, sem perda de generalidade, que sua estratégia vencedora instrui que escolha  $V\alpha$ . Assim sendo,  $V\alpha$  é uma posição vencedora para o Proponente, e, porque por definição  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  é justamente o subjogo de  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha \vee \beta, \mathcal{I})$  gerado por essa posição, por hipótese de indução o Oponente tem uma estratégia vencedora no dual de  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ . Mas, no dual desse jogo, por definição  $F\alpha$  é a posição inicial. Portanto, essa é uma posição vencedora para o Oponente em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ . Ora, mas a posição inicial de  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha \vee \beta, \mathcal{I})$  é  $F\alpha \vee \beta$ , e, pelas regras, o Oponente escolhe entre  $F\alpha$  e  $F\beta$ . Pelo teorema da extensibilidade, a estratégia que consiste em escolher  $F\alpha$  e então seguir sua estratégia vencedora de  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  é uma estratégia vencedora em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha \vee \beta, \mathcal{I})$ . Portanto, o Oponente tem uma estratégia vencedora no dual de  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha \vee \beta, \mathcal{I})$ .

O converso é absolutamente simétrico e será omitido.

$\varphi = \alpha \wedge \beta$  Suponha-se que o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha \wedge \beta, \mathcal{I})$ . Porque a posição inicial é  $V\alpha \wedge \beta$ , o Oponente escolhe entre  $V\alpha$  e  $V\beta$ . Assim sendo, tanto  $V\alpha$  quanto  $V\beta$  são posições vencedoras para o Proponente, e, porque por definição  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  é justamente o subjogo de  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha \wedge \beta, \mathcal{I})$  gerado por  $V\alpha$  e  $\mathbb{S}_{LC}(\beta, \mathcal{I})$  o gerado por  $V\beta$ , por hipótese de indução o Oponente tem estratégias vencedoras nos duais desses jogos. Mas, nos duais desses jogos, por definição respectivamente  $F\alpha$  e  $F\beta$  são as posições iniciais. Portanto, essas são posições vencedoras para o Oponente em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  e em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\beta, \mathcal{I})$ , respectivamente. Ora, mas a posição inicial de  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha \wedge \beta, \mathcal{I})$  é  $F\alpha \wedge \beta$ , e, pelas regras, o Proponente escolhe entre  $F\alpha$  e  $F\beta$ . Pelo teorema da extensibilidade, a estratégia que consiste seguir sua estratégia vencedora de  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  se escolher  $F\alpha$  e a de  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\beta, \mathcal{I})$  se

$F\beta$  é uma estratégia vencedora em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha \wedge \beta, \mathcal{I})$ . Portanto, o Oponente tem uma estratégia vencedora no dual de  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha \wedge \beta, \mathcal{I})$ . Novamente, é simétrico o converso.

$\varphi = \neg\alpha$  Suponha-se que o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LC}(\neg\alpha, \mathcal{I})$ . Porque a posição inicial é  $V\neg\alpha$ , pelas regras a partida prossegue necessariamente para  $F\alpha$ . Porque o Proponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo,  $F\alpha$  é uma posição vencedora para o Proponente nele; e porque por definição  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  é justamente o subjogo de  $\mathbb{S}_{LC}(\neg\alpha, \mathcal{I})$  gerado por essa posição, o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ . Porque LC-jogos semânticos são determinados, o Oponente não tem uma. Porque  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  é o dual de  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ , por hipótese de indução o Oponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ . Ora, mas a posição inicial de  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\neg\alpha, \mathcal{I})$  é  $F\neg\alpha$ , pelas regras a partida prossegue necessariamente para  $V\alpha$ , e  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  é justamente o subjogo de  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\neg\alpha, \mathcal{I})$  gerado por essa posição. Pelo teorema da extensibilidade, a estratégia que consiste em seguir sua estratégia vencedora de  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\neg\alpha, \mathcal{I})$  é uma estratégia vencedora sua nesse jogo. Portanto, o Oponente tem uma estratégia vencedora no dual de  $\mathbb{S}_{LC}(\neg\alpha, \mathcal{I})$ .

Novamente, o converso é absolutamente simétrico e será omitido.

$\varphi = \alpha \rightarrow \beta$  O argumento é semelhante aos para os casos anteriores de modo óbvio e fica a cargo do leitor.  $\square$

*Comentário 6.3.1.* Note-se que, em termos dos papéis dos jogadores, o teorema equivale a dizer que o jogador que ocupa o papel de verificador tem uma estratégia vencedora num jogo se e somente se o jogador que o ocupa o mesmo papel no seu dual também tem (e, por determinação, o mesmo vale para o falsificador).

**Teorema 6.4** (Teorema da equivalência para LC-jogos semânticos). *O Proponente tem uma estratégia vencedora no LC-jogo semântico  $\mathbb{S}_{LC}(\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\varphi$ .*

*Comentário 6.4.1.* Note-se que decorre imediatamente do lema da dualidade que este teorema é equivalente a este outro: que o Oponente tem uma estratégia vencedora no dual de  $\mathbb{S}_{LC}(\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\varphi$ . Ademais, do lema da unicidade e do fato de que LC-jogos semânticos são determinados decorre que esses dois teoremas são equivalentes a estes dois outros: que o Oponente tem uma estratégia vencedora no LC-jogo semântico  $\mathbb{S}_{LC}(\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se  $\mathcal{I}$  é

um contramodelo de  $\varphi$ , e (novamente pelo lema da dualidade) que o *Proponente* tem uma estratégia vencedora no dual de  $\mathbb{S}_{LC}(\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se  $\mathcal{I}$  é um contramodelo de  $\varphi$ .

*Demonstração.* A demonstração se faz por indução na complexidade das fórmulas. Como no teorema anterior, o caso  $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$  será omitido porque semelhante aos demais.

**$\varphi = p$  uma fórmula simples** Suponha-se, primeiro, que  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $p$ . Assim sendo,  $p$  é verdadeira sob toda  $v$  fundada em  $\mathcal{I}$ . Seja, pois,  $v$  uma dessas valorações. Porque  $p$  é simples, por definição ela é verdadeira sob  $v$  se e somente se  $\mathcal{I}(p) = 1$ . Portanto,  $\mathcal{I}(p) = 1$ . Porque não há escolhas a ser feitas, a única estratégia do Proponente é a estratégia vazia. Porque a posição inicial  $Vp$  é também a única posição terminal desse jogo, disso e das regras segue-se que o Proponente ganha qualquer partida desse jogo seguindo essa estratégia. Portanto, a estratégia vazia é uma estratégia vencedora do Proponente.

Suponha-se, agora, que sua única estratégia nesse jogo, a estratégia vazia, é uma estratégia vencedora do Proponente. Porque a posição inicial  $Vp$  é também a única posição terminal desse jogo, pelas regras o Proponente ganha uma partida desse jogo seguindo essa estratégia se e somente se  $\mathcal{I}(p) = 1$ . Ora, porque a estratégia vazia é por suposição vencedora,  $\mathcal{I}(p) = 1$ . Assim sendo, por definição toda valoração  $v$  fundada em  $\mathcal{I}$  satisfaz  $p$ . Portanto,  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $p$ .

**$\varphi = \alpha \vee \beta$**  Suponha-se, primeiro, que  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\alpha \vee \beta$ . Assim sendo,  $\alpha \vee \beta$  é verdadeira sob toda  $v$  fundada em  $\mathcal{I}$ . Seja, pois,  $v$  uma dessas valorações. Porque  $\alpha \vee \beta$  é verdadeira sob  $v$ , pelas LC-condições de verdade da disjunção, ou  $\alpha$  ou  $\beta$  é verdadeira sob  $v$ . Suponha-se, sem perda de generalidade, que seja  $\alpha$ . Mas, por definição,  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  é o subjogo de  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha \vee \beta, \mathcal{I})$  gerado por essa posição, e, por hipótese de indução, o Proponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo. Portanto,  $V\alpha$  é uma posição vencedora para o Proponente em  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ . Mas, porque a posição inicial é  $\alpha \vee \beta$ , pelas regras o Proponente escolhe entre  $V\alpha$  e  $V\beta$ , e pode, pois, forçar essa posição. Dessa feita, a estratégia que resulta de escolher  $V\alpha$  na posição inicial e então seguir sua estratégia vencedora de  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha \vee \beta, \mathcal{I})$  é uma estratégia vencedora do Proponente em  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ .

Suponha-se, agora, que o Proponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo. Porque a posição inicial é  $\alpha \vee \beta$ , pelas regras o Proponente escolhe entre  $V\alpha$  e  $V\beta$ . Porque ele tem uma estratégia vencedora, ou  $V\alpha$  ou  $V\beta$  é uma posição vencedora para o Proponente. Suponha-se, sem perda de

generalidade, que seja  $V\alpha$ . Assim sendo, por hipótese de indução,  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\alpha$ . Portanto,  $\alpha$  é verdadeira sob toda LC-avaliação fundada em  $\mathcal{I}$ . Seja  $v$  uma dessas avaliações. Ora, pelas LC-condições de verdade, se  $\alpha$  é verdadeira sob  $v$ , então  $\alpha \vee \beta$  também é, e  $\alpha$  é verdadeira sob  $v$ . Porque  $v$  é qualquer,  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\alpha \vee \beta$ .

$\varphi = \alpha \wedge \beta$  Suponha-se, primeiro, que  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\alpha \wedge \beta$ . Assim sendo,  $\alpha \wedge \beta$  é verdadeira sob toda  $v$  fundada em  $\mathcal{I}$ . Seja, pois,  $v$  uma dessas avaliações. Porque  $\alpha \wedge \beta$  é verdadeira sob  $v$ , pelas LC-condições de verdade da conjunção, ambas  $\alpha$  e  $\beta$  são verdadeiras sob  $v$ . Mas, por definição,  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  é o subjogo de  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha \wedge \beta, \mathcal{I})$  gerado por  $V\alpha$  e  $\mathbb{S}_{LC}(\beta, \mathcal{I})$  o gerado por  $V\alpha$ , e, por hipótese de indução, o Proponente tem uma estratégia vencedora em cada um desses jogos. Portanto,  $V\alpha$  e  $V\beta$  são posições vencedoras para o Proponente em  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ . Porque a posição inicial é  $\alpha \wedge \beta$ , pelas regras o Oponente escolhe entre  $V\alpha$  e  $V\beta$ . Não importa, pois, que escolha o Oponente faça, ela resulta em uma posição vencedora para o Proponente. Pelo teorema da extensibilidade, a estratégia que consiste em seguir sua estratégia vencedora de  $\mathbb{S}_{LC}(\beta, \mathcal{I})$  caso o Oponente escolha  $V\alpha$  e a de  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  caso  $V\beta$  é uma estratégia vencedora do Proponente em  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha \wedge \beta, \mathcal{I})$ .

Suponha-se, agora, que o Proponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo. Porque a posição inicial é  $\alpha \wedge \beta$ , pelas regras o Oponente escolhe entre  $V\alpha$  e  $V\beta$ . Porque, pois, o Proponente tem uma estratégia vencedora, ambas  $V\alpha$  e  $V\beta$  são posições vencedoras para o Proponente. Assim sendo, por hipótese de indução,  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\alpha$  e de  $\beta$ . Portanto,  $\alpha$  e  $\beta$  são verdadeiras sob todas LC-avaliações fundadas em  $\mathcal{I}$ . Seja  $v$  uma dessas avaliações. Ora, pelas LC-condições de verdade, se  $\alpha$  e  $\beta$  são verdadeiras sob  $v$ , então  $\alpha \wedge \beta$  também é, e  $\alpha$  e  $\beta$  são verdadeiras sob  $v$ . Porque  $v$  é qualquer,  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\alpha \wedge \beta$ .

$\varphi = \neg\alpha$  Suponha-se, primeiro, que  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\neg\alpha$ . Assim sendo,  $\neg\alpha$  é verdadeira sob toda  $v$  fundada em  $\mathcal{I}$ . Seja, pois,  $v$  uma dessas avaliações. Porque  $\neg\alpha$  é verdadeira sob  $v$ , pelas LC-condições de verdade da negação,  $\alpha$  é falsa sob  $v$ . Porque existe pelo menos uma avaliação fundada em uma interpretação qualquer que seja ela,  $\mathcal{I}$  não é um modelo de  $\alpha$ . Por hipótese de indução, o Proponente não tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ . Mas, porque LC-jogos semânticos são determinados, o Oponente tem uma. Portanto, pelo lema da dualidade, o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ . Mas este é justamente o subjogo de  $\mathbb{S}_{LC}(\neg\alpha, \mathcal{I})$  gerado por  $F\alpha$ ,

para a qual esse jogo prossegue necessariamente da posição inicial. Dessa feita, a estratégia do Proponente em  $\mathbb{S}_{LC}(-\alpha, \mathcal{I})$  que consiste simplesmente em seguir sua estratégia de  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  a partir da posição  $F\alpha$  é uma estratégia vencedora. Portanto, o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LC}(-\alpha, \mathcal{I})$ .

Por contraposição, suponha-se, agora, que  $\mathcal{I}$  não é um modelo de  $\neg\alpha$ . Assim sendo, existe alguma  $v$  fundada em  $\mathcal{I}$  tal que  $\neg\alpha$  é falsa sob  $v$ . Pelo lema da unicidade,  $v$  é única. Portanto, pelas LC-condições de verdade,  $\alpha$  é verdadeira sob  $v$ . Mas, porque  $v$  é a única LC-avaliação fundada em  $\mathcal{I}$ , trivialmente toda avaliação funda em  $\mathcal{I}$  satisfaz  $\alpha$ , e, portanto,  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\alpha$ . Por hipótese de indução, o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ , e pois, pelo lema da dualidade, o Oponente tem uma em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ . Porque  $\mathbb{S}_{LC}(-\alpha, \mathcal{I})$  prossegue necessariamente para  $F\alpha$  da posição inicial, e porque  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$  é justamente o subjogo de  $\mathbb{S}_{LC}(-\alpha, \mathcal{I})$  gerado por essa posição, ela é uma posição vencedora para o Oponente. Portanto, o Proponente não tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LC}(-\alpha, \mathcal{I})$ .  $\square$

Da prova do teorema da equivalência segue-se imediatamente o seguinte corolário a respeito da negação em LC.

**Corolário 6.4.1.** *O Proponente tem uma estratégia vencedora no LC-jogo semântico  $\mathbb{S}_{LC}(-\alpha, \mathcal{I})$  se e somente se o Oponente tem em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ .*

*Comentário 6.1.2.* Em suma, em LC-jogos semânticos são equivalentes estes três fatos (assim como são equivalentes entre si seus duais):

- o *Proponente* ter uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LC}(-\alpha, \mathcal{I})$ ;
- o *Proponente* ter em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ ; e
- O *Oponente* ter em  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ ;

ou, de forma ainda mais concisa (igualmente sendo equivalentes entre si seus duais):

- o *verificador* ter uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LC}(-\alpha, \mathcal{I})$ ;
- o *falsificador* ter em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ ; e
- o *falsificador* ter em  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ .

*Comentário 6.1.3.* No que concerne à relação entre LC-jogos semânticos e a semântica de valores de verdade de LC, são equivalentes estes dois fatos:

- o *verificador* ter uma estratégia vencedora num LC-jogo semântico para a fórmula  $\varphi$  sob a LC-interpretação  $\mathfrak{I}$ ;
- $\mathfrak{I}$  ser um modelo de  $\varphi$ ,

e estes dois:

- o *falsificador* ter uma estratégia vencedora num LC-jogo semântico para a fórmula  $\varphi$  sob a LC-interpretação  $\mathfrak{I}$ ;
- $\mathfrak{I}$  ser um contramodelo de  $\varphi$ .

O que essas equivalências todas significam é que: em LC-jogos semânticos as *identidades* dos jogadores são *duais* (com efeito, pode-se já interpretar assim o fato de esses jogos serem determinados), como também o são seus *papéis*; e que a negação clássica *expressa* essas dualidades.

## 6.2 Jogos semânticos para LP

Uma vez estabelecidos os jogos semânticos para LC, podem-se facilmente obter jogos semânticos para LP, da seguinte forma.

**Definição 6.4.** Um *LP-jogo semântico*  $\mathbb{S}_{LP}(\varphi, \mathfrak{I})$  para a fórmula  $\varphi$  sob a LP-interpretação  $\mathfrak{I}$  consiste dos mesmos elementos que um LC-jogo semântico, exceto que a regra da vitória é alterada para esta.

$R_v$  Seja  $p$  a variável proposicional da fórmula terminal da partida.

- Se a posição terminal é  $Vp$  e  $p\mathfrak{I}1$ , ou se é  $Fp$  e  $p\mathfrak{I}0$ , então o *Proponente* ganha a partida.
- Se a posição terminal é  $Vp$  e  $p\mathfrak{I}0$ , ou se é  $Fp$  e  $p\mathfrak{I}1$ , então o *Oponente* ganha a partida.

Em particular, define-se seu dual de forma análoga.

**Teorema 6.5.** *LP-jogos semânticos são de ganha-ou-perde.*

*Demonstração.* Segue-se imediatamente das regras de vitória e de derrota e do fato de que LP-interpretações são relacionais.  $\square$

**Teorema 6.6.** *Num LP-jogo semântico, pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia vencedora.*

*Demonstração.* Segue-se do teorema anterior e da primeira generalização do teorema da determinação.  $\square$

**Teorema 6.7** (Lema da dualidade para LP-jogos semânticos). *Um jogador tem uma estratégia vencedora no LP-jogo semântico  $\mathbb{S}_{LP}(\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se o outro tem no seu dual.*

*Demonstração.* A prova se faz, como a do teorema análogo para LC-jogos, por indução na complexidade das fórmulas. Por sua semelhança, serei mais breve neste demonstração, deixando os passos dedutivos omitidos a cargo do leitor, bem como os argumentos para os casos  $\varphi = \alpha \wedge \beta$  e  $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$ .

$\varphi = p$  **uma fórmula simples** A estratégia vazia é a única estratégia de ambos os jogadores, e, pela regra de vitória, se ela é vencedora jogo para o Proponente nesse jogo é vencedora para o Oponente no seu dual, e vice-versa.

$\varphi = \alpha \vee \beta$  Suponha-se, primeiro, que o Proponente tem uma estratégia vencedora. Porque no estágio inicial é sua a vez de escolher, ou  $V\alpha$  ou  $V\beta$  é uma posição vencedora para ele nesse jogo. Suponha-se, sem perda de generalidade, que é  $V\alpha$ . Pelas definições de subjogo gerado por uma posição, de dual e por hipótese de indução, o Oponente tem uma no jogo  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\alpha, \mathcal{I})$ . Portanto, pelas regras e pelo teorema da extensibilidade, também tem uma em  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\alpha \vee \beta, \mathcal{I})$ .

Suponha-se, agora, que o Oponente tem uma. Porque pelas regras no estágio inicial é do Proponente a vez de escolher, ambas  $V\alpha$  e  $V\beta$  são posições vencedoras do Oponente nesse jogo. Pelas definições de subjogo gerado por uma posição, de dual e por hipótese de indução, o Proponente tem estratégias vencedoras em  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\alpha, \mathcal{I})$  e em  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\beta, \mathcal{I})$ . Portanto, pelas regras e pelo teorema da extensibilidade, também tem uma em  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\alpha \vee \beta, \mathcal{I})$ .

$\varphi = \neg\alpha$  Suponha-se que o Proponente tem uma estratégia vencedora. Porque pelas regras uma partida desse jogo prossegue necessariamente para  $F\alpha$  da posição inicial, essa é uma posição vencedora para o Proponente. Pelas definições de subjogo gerado por uma posição, de dual e por hipótese de indução, o Oponente tem estratégias vencedora em  $\bar{\mathbb{S}}_{LP}(\alpha, \mathcal{I})$ . Portanto, pelas regras e pelo teorema da extensibilidade, também tem uma em  $\bar{\mathbb{S}}_{LP}(\neg\alpha, \mathcal{I})$ .

O argumento para a suposição de que é o Oponente quem tem uma estratégia vencedora é simétrico.  $\square$

**Teorema 6.8** (Teorema da equivalência para LP-jogos semânticos). *O Proponente tem uma estratégia vencedora no LP-jogo semântico na forma  $\mathbb{S}_{LP}(\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\varphi$ , e no seu dual se e somente se ela é um contramodelo da fórmula.*

*Comentário 6.8.1.* Note-se que decorre imediatamente do lema da dualidade para LP-jogos que este teorema é equivalente a este outro: que o *Oponente* tem uma estratégia vencedora no LP-jogo semântico  $\mathbb{S}_{LP}(\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se  $\mathcal{I}$  é um *contramodelo* de  $\varphi$ , e no seu dual se e somente se ela é um *modelo* da fórmula.

*Demonstração.* Mais uma vez, a prova se faz por indução na complexidade das fórmulas.

$\varphi = p$  **uma fórmula simples** Trivial.

$\alpha \vee \beta$  Suponha-se, primeiro, que ele tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LP}(\varphi \vee \beta, \mathcal{I})$ . Porque pelas regras no estágio inicial é sua a vez de escolher, ou  $V\alpha$  ou  $V\beta$  é uma posição vencedora para ele nesse jogo. Suponha-se, sem perda de generalidade, que é  $V\alpha$ . Pela definição de subjogo gerado por uma posição, ele tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LP}(\alpha, \mathcal{I})$ , e, por hipótese de indução,  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\alpha$ . Pelas LP-condições de verdade, essa interpretação é também um modelo de  $\alpha \vee \beta$ .

Suponha-se, agora, que  $\mathcal{I}$  é um modelo da fórmula. Pelas LP-condições de verdade, ou  $\alpha$  ou  $\beta$  é verdadeira sob essa interpretação. Suponha-se, sem perda de generalidade, que é  $\alpha$ . Por hipótese de indução, o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LP}(\alpha, \mathcal{I})$ . Pela definição de subjogo gerado por uma posição e porque na posição inicial de  $\mathbb{S}_{LP}(\varphi \vee \beta, \mathcal{I})$  é sua a vez de escolher, pelas regras e pelo teorema da extensibilidade ele tem uma estratégia vencedora nesse jogo.

Suponha-se, em seguida, que ele tem uma estratégia vencedora em  $\bar{\mathbb{S}}_{LP}(\varphi \vee \beta, \mathcal{I})$ . Porque pelas regras no estágio inicial é do Oponente a vez de escolher, ambas  $V\alpha$  e  $V\beta$  são posições vencedoras

do Proponente nesse jogo. Pela definição de subjogo gerado por uma posição, ele tem estratégias vencedoras em  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\alpha, \mathcal{I})$  e em  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\beta, \mathcal{I})$ , e, por hipótese de indução,  $\mathcal{I}$  é um contramodelo de  $\alpha$  e de  $\beta$ . Pelas LP-condições de verdade, essa interpretação é também um contramodelo de  $\alpha \vee \beta$ .

Suponha-se, por fim, que  $\mathcal{I}$  é um contramodelo da fórmula. Pelas LP-condições de verdade, ambas  $\alpha$  e  $\beta$  são falsas sob  $\mathcal{I}$ . Por hipótese de indução, o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\alpha, \mathcal{I})$  e uma em  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\beta, \mathcal{I})$ . Pela definição de subjogo gerado por uma posição e porque na posição inicial de  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\alpha \vee \beta, \mathcal{I})$  é do Oponente a vez de escolher, pelas regras e pelo teorema da extensibilidade o Proponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo.

$\varphi = \neg\alpha$  Suponha-se, primeiro, que ele tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LP}(\neg\alpha, \mathcal{I})$ . Porque pelas regras uma partida desse jogo prossegue necessariamente para  $F\alpha$  de sua posição inicial, essa é uma posição vencedora para ele nesse jogo. Pela definição de subjogo gerado por uma posição, ele tem uma estratégia vencedora em  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\alpha, \mathcal{I})$ , e, por hipótese de indução,  $\mathcal{I}$  é um contramodelo de  $\alpha$ . Pelas LP-condições de verdade, essa interpretação é um modelo de  $\neg\alpha$ .

Suponha-se, agora, que  $\mathcal{I}$  é um modelo da fórmula. Pelas LP-condições de verdade,  $\alpha$  é falsa sob essa interpretação. Por hipótese de indução, o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\alpha, \mathcal{I})$ . Pela definição de subjogo gerado por uma posição e porque pelas regras uma partida de  $\mathbb{S}_{LP}(\neg\alpha, \mathcal{I})$  prossegue necessariamente para  $F\alpha$  da posição inicial, pelo teorema da extensibilidade ele tem uma estratégia vencedora nesse jogo.

Os argumentos para as suposições de que o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\neg\alpha, \mathcal{I})$  e de que  $\mathcal{I}$  é um contramodelo de  $\neg\alpha$  são simétricos.  $\square$

**Corolário 6.8.1.** *Somente um dos jogadores tem uma estratégia vencedora num LP-jogo semântico se e somente se somente o outro tem no seu dual, e ambos têm estratégias vencedoras se e somente se ambos têm no dual.*

**Corolário 6.8.2.** *Um jogador tem uma estratégia vencedora no LP-jogo semântico  $\mathbb{S}_{LP}(\neg\alpha, \mathcal{I})$  se e somente se tem em  $\overline{\mathbb{S}}_{LP}(\alpha, \mathcal{I})$ .*

*Comentário 6.2.1.* Em suma, em LP-jogos semânticos, são equivalentes estes três fatos (assim como são equivalentes entre si seus duais):

- um jogador ter uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LC}(\neg\alpha, \mathcal{I})$ ;

- o mesmo jogador ter em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ ; e
- o outro jogador ter em  $\mathbb{S}_{LC}(\alpha, \mathcal{I})$ ,

mas também são equivalentes este dois:

- somente um jogador ter uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{LC}(\varphi, \mathcal{I})$ ;
- somente o outro jogador ter em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\varphi, \mathcal{I})$ ,

e estes dois:

- ambos jogadores terem estratégias vencedoras em  $\mathbb{S}_{LC}(\varphi, \mathcal{I})$ ;
- ambos jogadores terem em  $\overline{\mathbb{S}}_{LC}(\varphi, \mathcal{I})$ .

*Comentário 6.2.2.* No que concerne à relação entre LP-jogos semânticos e a semântica de valores de verdade para LP, valem as mesmas equivalências que para LC-jogos semânticos, e também estas.

São equivalentes:

- somente o *verificador* ter uma estratégia vencedora num LP-jogo semântico para a fórmula  $\varphi$  sob a LP-interpretação  $\mathcal{I}$ ;
- $\mathcal{I}$  ser um modelo de  $\varphi$  mas *não* um contramodelo,

como também são equivalentes:

- somente o falsificador ter uma estratégia vencedora num LP-jogo semântico para a fórmula  $\varphi$  sob a LP-interpretação  $\mathcal{I}$ ;
- $\mathcal{I}$  ser um contramodelo de  $\varphi$  mas *não* um modelo,

e, por fim:

- ambos verificador e falsificador terem estratégias vencedoras num LP-jogo semântico para a fórmula  $\varphi$  sob a LP-interpretação  $\mathcal{I}$ ;
- $\mathcal{I}$  ser tanto modelo quanto contramodelo de  $\varphi$ .

## Capítulo 7

### Jogos semânticos para as LIFs

Neste capítulo enfim introduzo semânticas de jogos para mbC e mbCciw, as duas LIFs consideradas nesta dissertação. Com efeito, introduzo *duas* semânticas de jogos distintas para essas lógicas, motivadas por intuições distintas a respeito do que uma semântica de jogos deve ser. Em qualquer caso, a fim de fazê-lo necessitamos antes tornar explícita a *heurística* da construção dos jogos semânticos para LC e LP.

Um exemplo bastará. Voltemos a Ptolomeu e Orígenes, agora disputando a fórmula  $\alpha \vee \beta$ , e suponhamos que Ptolomeu respondeu inicialmente a Orígenes julgar que  $\alpha \vee \beta$  é o caso. Digamos que Orígenes, fugindo a seu costume, decida ser ostensivo em sua inquirição, e que pergunte a Ptolomeu a respeito de  $\alpha$  e de  $\beta$  em qualquer caso. Há três *conjuntos* de respostas coerentes com a semântica da disjunção que Ptolomeu poderia dar-lhe então. Ele poderia responder-lhe julgar que  $\alpha$  e que  $\beta$ ; que  $\alpha$ , mas não que  $\beta$ ; ou, enfim, julgar que  $\beta$ , mas não que  $\alpha$ . Os três conjuntos têm em comum que em todos Ptolomeu diz julgar que pelo menos uma dentre  $\alpha$  e  $\beta$  é o caso. Por isso, enfim, é que era desnecessário levar em conta todos eles, bastando para dar seguimento à discussão uma fórmula em relação à qual Ptolomeu respondesse, ou deveria responder, que sim ao questionamento de Orígenes.

Contudo Orígenes (e nós) *poderíamos* levar em conta todos eles, se assim quiséssemos. Com efeito, nada obriga Ptolomeu a ser coerente em suas respostas, e, como já se disse, é apenas por caridade interpretativa que Orígenes fica dispensado de ser ostensivo em sua inquirição.

Pois bem. No caso da negação em mbC e mbCciw, bem como da consistência em mbC, não nos resta outra opção senão ser ostensivos. A verdade de  $\neg\alpha$  é coerente tanto com a verdade quanto com

a falsidade de  $\alpha$ . Já a verdade de  $\circ\alpha$  é coerente tanto com  $\alpha$  ser verdadeira e  $\neg\alpha$  falsa, quanto com o inverso, enquanto que a falsidade de  $\circ\alpha$  é coerente com ambas serem verdadeiras, em mbCciw, e também com serem uma verdadeira e a outra falsa, em mbC. Como ficará mais evidente a seguir, essas distinções não podem ser suprimidas, como podem no exemplo da disjunção, sem perda de informação relevante. Assim sendo, as regras para esses operadores, nas semânticas de jogos a seguir introduzidas, serão ostensivas nesse sentido.

## 7.1 Jogos semânticos para mbC e mbCciw

**Definição 7.1.** Um *mbC-jogo semântico*  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(C\varphi, \mathcal{J})$  para a fórmula rotulada  $C\varphi$  sob a mbC-interpretação  $\mathcal{J}$  consiste dos seguintes elementos.

- Os jogadores são, como nos demais jogos semânticos, o *Proponente* e *Oponente*.
- A posição inicial e posições em  $\{V, F\} \times \text{Subf}(\varphi)$  são posições em que é do Proponente a vez de escolher; posições em  $\wp(\{V, F\} \times \text{Sub}(\varphi))$  são posições em que a vez de escolher é do Oponente.

A regra de início é esta.

$R_i$  A posição inicial de uma partida é  $C\varphi$ .

As regras para o Proponente são as seguintes.

$R_V^V$  Se a posição atual é  $V\alpha \vee \beta$ , então ele escolhe um conjunto de fórmulas rotuladas dentre  $\{V\alpha\}$  e  $\{V\beta\}$ .

$R_V^F$  Se  $F\alpha \vee \beta$ , então a partida prossegue para  $\{F\alpha, F\beta\}$ .

$R_\wedge^V$  Se  $V\alpha \wedge \beta$ , então a partida prossegue para  $\{V\alpha, V\beta\}$ .

$R_\wedge^F$  Se  $F\alpha \wedge \beta$ , então ele escolhe dentre  $\{F\alpha\}$  e  $\{F\beta\}$ .

$R_\rightarrow^V$  Se  $V\alpha \rightarrow \beta$ , então ele escolhe dentre  $\{F\alpha\}$  e  $\{V\beta\}$ .

$R_\rightarrow^F$  Se  $F\alpha \rightarrow \beta$ , então a partida prossegue para  $\{V\alpha, F\beta\}$ .

$R_{\neg}^V$  Se  $V\neg\alpha$ , então ele escolhe dentre  $\{V\alpha\}$  e  $\{F\alpha\}$ .

$R_{\neg}^F$  Se  $F\neg\alpha$ , então a partida prossegue para  $\{V\alpha\}$ .

$R_{\circ}^V$  Se  $V\circ\alpha$ , então ele escolhe dentre  $\{F\neg\alpha, V\alpha\}$  e  $\{V\neg\alpha, F\alpha\}$ .

$R_{\circ}^F$  Se  $F\circ\alpha$ , então ele escolhe dentre  $\{V\neg\alpha, V\alpha\}$ ,  $\{F\neg\alpha, V\alpha\}$  e  $\{V\neg\alpha, F\alpha\}$ .

A única regra para a o Oponente é esta.

$R^O$  Se a posição atual é um conjunto de fórmulas rotuladas, então ele escolhe uma delas.

A regra de término é esta.

$R_t$  Fórmulas simples são posições terminais.

As regras de vitória e derrota são as seguintes.

$R_c$  Se, para quaisquer dois conjuntos de fórmulas rotuladas que ocorreram na partida,  $V\psi$  está em um e  $F\psi$  está no outro para alguma fórmula  $\psi$ , então o Proponente perde a partida e o Oponente ganha.

$R_v$  Senão, seja  $p$  a variável proposicional da fórmula rotulada terminal da partida.

- Se a posição terminal é  $Vp$  e  $\mathcal{I}(p) = 1$ , ou se é  $Fp$  e  $\mathcal{I}(p) = 0$ , então o *Proponente* ganha a partida.
- Se a posição terminal é  $Vp$  e  $\mathcal{I}(p) = 0$ , ou se é  $Fp$  e  $\mathcal{I}(p) = 1$ , então o *Oponente* ganha a partida.

$R_d$  Se um jogador não ganha a partida, então ele perde.

*Observação 7.1.1.* A regra  $R_c$ , a *regra de coerência*, cumpre a seguinte função. Fiéis à intuição que nos trouxe a estas regras, interpretamos intuitivamente os conjuntos dentre os quais o Proponente escolhe como conjuntos de respostas suas a perguntas do Oponente. Assim sendo pensamos, por exemplo, que  $\{V\neg\alpha, F\alpha\}$  ser escolhido pelo Proponente na posição  $V\circ\alpha$  modelaria o fato de Ptolomeu responder a Orígenes que *sim* à pergunta sobre  $\neg\alpha$  e que *não* à sobre  $\alpha$  após ter asseverado ou de algum outro modo concedido que  $\circ\alpha$ . Pelas regras da negação, em princípio Orígenes deveria

então assegurar a Ptolomeu nesse caso a escolha entre responder sim e responder não à pergunta sobre  $\alpha$ , caso desejasse seguir com a arguição nesse sentido. No entanto, Ptolomeu *já* respondeu que sim à pergunta sobre  $\alpha$  antes, e, intuitivamente, seria incoerente que mudasse sua resposta a seguir. Essa regra tem por efeito forçar um comportamento coerente do Proponente nesse sentido. Note-se, no entanto, que *força*, mas não *garante*: a regra ainda deixa o Proponente livre para falhar estrategicamente.

**Teorema 7.1.** *mbC-jogos semânticos são de ganha-perde e determinados.*

**Teorema 7.2** (Teorema da equivalência para mbC-jogos semânticos). *O Oponente tem uma estratégia vencedora no mbC-jogo semântico  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se  $\varphi$  não é satisfazível por  $\mathcal{I}$ , e no jogo  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se ela não é contrafazível; e o Proponente tem uma estratégia vencedora no mbC-jogo semântico  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se  $\varphi$  é satisfazível sob  $\mathcal{I}$ , e no jogo  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se ela é contrafazível sob essa interpretação.*

**Comentário 7.2.1.** Intuitivamente, podemos interpretar fórmulas rotuladas como representando *compromissos proposicionais*. Quer dizer: podemos entender  $V\varphi$  como representando o fato de que um agente crê que a  $\varphi$  é verdadeira ou, ao menos, que ele se comporta inferencialmente em certa situação *como se* acreditasse que  $\varphi$  é verdadeira; e igualmente para  $F\varphi$  e a falsidade da fórmula.

Em jogos semânticos, essa interpretação das fórmulas rotuladas que neles ocorrem como posições adquire muito naturalmente um sentido pragmático — fato, este, que exploraremos no próximo capítulo. Para nossos propósitos presentes, no entanto, o que importa é que essa noção de compromisso proposicional permite expressar o teorema de forma mais sucinta e intuitiva. Fazemos assim. Dizemos que o compromisso proposicional de um agente com a verdade de uma fórmula é *bem-sucedido* sob uma valoração se a fórmula é satisfeita por essa valoração, e igualmente para o compromisso com a falsidade da fórmula e ela ser contrafeita; e, por extensão, também dizemos que é bem-sucedido sob uma interpretação se ela é um modelo da fórmula, no caso de seu compromisso ser com a verdade, ou se é um contramodelo, no caso de ser com a falsidade. Por fim, se uma fórmula é satisfazível por uma interpretação, dizemos que o compromisso com sua verdade *pode* ser bem-sucedido sob essa interpretação, e, se é contrafazível, que o compromisso com a falsidade pode ser bem-sucedido.

Dessa feita, assim se expressa o mesmo teorema numa forma que me parece mais intuitiva: que o *Oponente* tem uma estratégia vencedora no mbC-jogo semântico  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(C\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se  $C\varphi$  não pode ser bem-sucedido sob  $\mathcal{I}$ , e o *Proponente* se e somente se ele pode ser bem-sucedido. A propósito, por isso entendemos naturalmente esse compromisso proposicional como sendo do *Proponente*, — uma vez que, nos termos dessa reformulação do teorema, é ele quem teria o encargo de defender o compromisso.

*Demonstração.* Por indução na complexidade das fórmulas. Por brevidade, omitiremos sempre no argumento a menção do seguinte fato: que, dada uma mbC-interpretação, uma fórmula não é satisfazível sob essa interpretação se e somente se ela é um contramodelo da fórmula, e não é contrafazível se e somente se um modelo; e, porque existe pelo menos uma mbC-valorização fundada nessa interpretação qualquer que ela seja, ela ser um modelo implica a fórmula ser satisfazível sob ela, e ser um contramodelo implica ser contrafazível.

$\varphi = p$  **uma fórmula simples** A estratégia vazia é a única estratégia de ambos os jogadores em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(Vp, \mathcal{I})$  e em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(Fp, \mathcal{I})$  e, pelas regras de vitória e derrota, ela é vencedora para o Proponente em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(Vp, \mathcal{I})$  se  $\mathcal{I}$  é um modelo da fórmula e para o Oponente se um contramodelo (sendo  $Vp$  a única posição terminal desse jogo), e para o Proponente em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(Fp, \mathcal{I})$  (por ser  $Fp$  sua única posição terminal) se um contramodelo e para o Oponente se um modelo. De resto, note-se que por definição quaisquer mbC-valorizações fundadas em  $\mathcal{I}$  concordam com a interpretação nas fórmulas simples.

$\varphi = \alpha \rightarrow \beta$  Suponha-se que é V o rótulo da fórmula.

Suponha-se, primeiro, que o Oponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo. Pelas regras, na posição inicial o Proponente escolhe dentre  $\{F\alpha\}$  e  $\{V\beta\}$ ; a partida prossegue necessariamente para  $F\alpha$ , se a primeira, e para  $V\beta$ , se a segunda. Pela definição de subjogo gerado por um estágio, essa estratégia do Oponente, restrita ao subjogo gerado pelo estágio correspondente a  $F\alpha$ , é vencedora nesse subjogo, e o mesmo para o correspondente a  $V\beta$ . Por hipótese de indução,  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\alpha$  e um contramodelo de  $\beta$ . Pelas mbC-condições de verdade, ela é um contramodelo de  $\alpha \rightarrow \beta$ .

Suponha-se, agora, que  $\mathcal{I}$  é um contramodelo de  $\alpha \rightarrow \beta$ . Pelas mbC-condições de verdade, ela

é um modelo de  $\alpha$  e um contramodelo de  $\beta$ . Por hipótese de indução, o Oponente tem estratégias vencedoras em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\alpha, \mathcal{I})$  e em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\beta, \mathcal{I})$ . Mas porque, pelas regras, se o Proponente escolher  $\{F\alpha\}$  na posição inicial de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha \rightarrow \beta, \mathcal{I})$  a partida necessariamente prosseguirá para  $F\alpha$ , e para  $V\beta$  se  $\{V\beta\}$ , e porque, pela definição de subjogo gerado por um estágio,  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\alpha, \mathcal{I})$  é justamente o subjogo de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha \rightarrow \beta, \mathcal{I})$  gerado pelo estágio correspondente a  $F\alpha$  e  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\beta, \mathcal{I})$  o pelo correspondente a  $V\beta$ , pelo teorema da extensibilidade a estratégia do Oponente que consiste em seguir sua estratégia vencedora de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\alpha, \mathcal{I})$  se o Proponente escolher  $\{F\alpha\}$  na posição inicial e a de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\beta, \mathcal{I})$  se  $\{V\beta\}$  é uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha \rightarrow \beta, \mathcal{I})$ .

Suponha-se que  $F$  é o rótulo da fórmula.

Suponha-se, primeiro, que o Oponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo. Pelas regras, da posição inicial a partida prossegue necessariamente para  $\{V\alpha, F\beta\}$ , e então o Oponente escolhe dentre  $V\alpha$  e  $F\beta$ . Suponha-se, primeiro, que sua estratégia vencedora instrui que escolha  $V\alpha$ , que é, portanto, uma posição vencedora para ele. Pela definição de subjogo gerado por um estágio, essa estratégia do Oponente, restrita ao subjogo gerado pelo estágio correspondente a  $V\alpha$ , é vencedora nesse subjogo. Por hipótese de indução,  $\mathcal{I}$  é um contramodelo de  $\alpha$ . Pelas mbC-condições de verdade, ela é um modelo de  $\alpha \rightarrow \beta$ . Se se supõe, agora, que sua estratégia vencedora instrui que escolha  $F\beta$ , por um raciocínio semelhante conclui-se igualmente que a interpretação é um modelo da fórmula.

Suponha-se, agora, que  $\mathcal{I}$  é um modelo da fórmula. Pelas mbC-condições de verdade, ela ou é um contramodelo de  $\alpha$  e um modelo de  $\beta$ . Suponha-se, primeiro, que é um contramodelo de  $\alpha$ . Por hipótese de indução, o Oponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha, \mathcal{I})$ . Mas porque, pelas regras, da posição inicial uma partida de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\alpha \rightarrow \beta, \mathcal{I})$  prossegue necessariamente para  $\{V\alpha, F\beta\}$  e então o Oponente escolhe dentre  $V\alpha$  e  $F\beta$ , pela definição de subjogo gerado por um estágio  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha, \mathcal{I})$  é justamente o subjogo de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\alpha \rightarrow \beta, \mathcal{I})$  gerado pelo estágio correspondente a  $V\alpha$ . Pelo teorema da extensibilidade, a estratégia do Oponente que consiste em escolher  $V\alpha$  depois da escolha inicial do Proponente e então seguir sua estratégia vencedora de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha, \mathcal{I})$  é uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\alpha \rightarrow \beta, \mathcal{I})$ . Se se supõe que a interpretação é um modelo de  $\beta$ , por um raciocínio semelhante conclui-se que o Oponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo.

Se se supõe que o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha \rightarrow \beta, \mathcal{I})$ , porque mbC-jogos semânticos são determinados, então o Oponente não tem uma. Pela parte anterior da prova,

$\mathcal{I}$  não é um contramodelo de  $\alpha \rightarrow \beta$ . Portanto, existe pelo menos uma mbC-valorização fundada em  $\mathcal{I}$  que satisfaz a fórmula.

Se se supõe que existe uma mbC-valorização  $v$  fundada em  $\mathcal{I}$  tal que  $\alpha \rightarrow \beta$  é satisfeita por  $v$ , então  $\mathcal{I}$  não é um contramodelo da fórmula. Pela parte anterior da prova, o Oponente não tem uma estratégia vencedora nesse jogo. Porque mbC-jogos semânticos são determinados, o Proponente tem uma.

Se se supõe que o Proponente tem uma estratégia vencedora  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\alpha \rightarrow \beta, \mathcal{I})$ , porque mbC-jogos semânticos são determinados, então o Oponente não tem uma. Pela parte anterior da prova,  $\mathcal{I}$  não é um modelo de  $\alpha \rightarrow \beta$ . Portanto, existe pelo menos uma mbC-valorização fundada em  $\mathcal{I}$  que contrafaz a fórmula.

Se se supõe que existe uma mbC-valorização  $v$  fundada em  $\mathcal{I}$  tal que  $\alpha \rightarrow \beta$  é contrafeita por  $v$ , então  $\mathcal{I}$  não é um modelo da fórmula. Pela parte anterior da prova, o Oponente não tem uma estratégia vencedora nesse jogo. Porque mbC-jogos semânticos são determinados, o Proponente tem uma.

$\varphi = \neg\alpha$  Suponha-se que  $V$  é o rótulo da fórmula.

Suponha-se, primeiro, que o Oponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo. Pelas regras, na posição inicial o Proponente escolhe dentre  $\{V\alpha\}$  e  $\{F\alpha\}$ , a partida prosseguindo necessariamente para  $V\alpha$ , se a primeira, e para  $F\alpha$ , se a segunda. Assim sendo, tanto  $V\alpha$  quanto  $F\alpha$  são posições vencedoras para o Oponente nesse jogo. Pela definição de subjogo gerado por um estágio e por hipótese de indução,  $\mathcal{I}$  é tanto um modelo quanto um contramodelo de  $\alpha$ . Mas, porque mbC-valorizações são funcionais, e porque existe pelo menos uma valorização fundada em uma interpretação qualquer que seja ela, isso é absurdo. A suposição, enfim, é falsa, e a implicação é, portanto, vacuamente verdadeira.

Suponha-se, agora, que  $\mathcal{I}$  é um contramodelo de  $\neg\alpha$ . Pelas mbC-condições de verdade, ela é um modelo de  $\alpha$ . Por hipótese de indução, o Oponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\alpha, \mathcal{I})$ . Mas porque, pelas regras, da posição inicial uma partida de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\neg\alpha, \mathcal{I})$  prossegue necessariamente para  $F\alpha$  e, pela definição de subjogo gerado por um estágio, esse é justamente o subjogo gerado pelo estágio correspondente a  $F\alpha$ , pelo teorema da extensibilidade a estratégia do Oponente que consiste em seguir sua estratégia vencedora de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\alpha, \mathcal{I})$  em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\neg\alpha, \mathcal{I})$  a partir dessa po-

sição é uma estratégia vencedora nesse jogo. (Note-se no entanto que essa suposição também é vazia, posto que, qualquer que seja  $\alpha$  — e em particular  $\alpha$  uma fórmula simples —, porque o valor de  $\neg\alpha$  *independe* do valor de  $\alpha$  quando  $\alpha$  é verdadeira, nunca ocorre de uma mbC-interpretação ser um contramodelo de uma fórmula negada.)

Suponha-se que  $F$  é o rótulo da fórmula.

Suponha-se, primeiro, que o Oponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo. Pelas regras, da posição inicial uma partida prossegue necessariamente para  $\{V\alpha\}$  e então para  $V\alpha$ , que é, portanto, uma posição vencedora para o Oponente. Pela definição de subjogo gerado por um estágio, essa estratégia sua, restrita ao subjogo gerado pelo estágio correspondente a essa posição, é vencedora nesse subjogo. Por hipótese de indução,  $\mathcal{I}$  é um contramodelo de  $\alpha$ . Pelas mbC-condições de verdade, ela é um modelo de  $\neg\alpha$ .

Suponha-se, agora, que  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\neg\alpha$ . Assim sendo, pelas mbC-condições de verdade ela é um contramodelo de  $\alpha$ . (Isto porque, se ela não fosse um contramodelo, o valor de verdade de  $\neg\alpha$  seria mais uma vez *independente* do valor de  $\alpha$ ; e, sendo independente, haveria alguma valoração fundada nessa interpretação que contrariaria  $\neg\alpha$  — contradizendo a suposição. Ademais, porque existe pelo menos uma mbC-valoração fundada nessa interpretação, qualquer que seja ela, ela não é vacuamente um modelo de  $\neg\alpha$ .) Por hipótese de indução, o Oponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha, \mathcal{I})$ . Mas porque, pelas regras, da posição inicial uma partida de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\neg\alpha, \mathcal{I})$  prossegue necessariamente para  $V\alpha$  e, pela definição de subjogo gerado por um estágio, esse é justamente o subjogo gerado pelo estágio correspondente a  $V\alpha$ , pelo teorema da extensibilidade a estratégia do Oponente que consiste em seguir sua estratégia vencedora de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha, \mathcal{I})$  em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\neg\alpha, \mathcal{I})$  a partir dessa posição é uma estratégia vencedora nesse jogo.

Decorre da parte anterior da prova e do fato de que mbC-jogos semânticos são determinados que o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\neg\alpha, \mathcal{I})$ ; e, como já se observou oportunamente, nenhuma mbC-interpretação é um contramodelo de alguma fórmula negada, e isto implica que  $\neg\alpha$  é satisfazível sob  $\mathcal{I}$ . Para as suposições de que o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\neg\alpha, \mathcal{I})$  e de que  $\neg\alpha$  é contrafazível sob  $\mathcal{I}$ , a prova segue exatamente como para as suposições análogas para o caso do condicional.

$\varphi = \circ\alpha$  Porque pelas regras para o operador de consistência há mais casos a se considerar ao tentar construir uma estratégia vencedora para o Oponente em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\circ\alpha, \mathcal{I})$  e em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\circ\alpha, \mathcal{I})$ , serei mais breve, omitindo os passos dedutivos que o leitor certamente será capaz de completar por si mesmo seguindo os exemplos dos argumentos para os outros operadores.

Se se supõe que o Oponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\circ\alpha, \mathcal{I})$ , então há quatro possibilidades (veja-se tabela abaixo): ou ela instrui que ele escolha  $F\neg\alpha$  caso o Proponente escolha  $\{F\neg\alpha, V\alpha\}$  na posição inicial e  $V\neg\alpha$  caso  $\{V\neg\alpha, F\alpha\}$ ; ou instrui que escolha  $F\neg\alpha$  no primeiro caso e  $F\alpha$  no segundo; ou, então, instrui que escolha  $V\alpha$  no primeiro caso e  $V\neg\alpha$  no segundo; ou, por fim, instrui que escolha  $V\alpha$  no primeiro caso e  $F\alpha$  no segundo. Se a primeira possibilidade, por hipótese de indução  $\mathcal{I}$  seria tanto um modelo quanto um contramodelo de  $\neg\alpha$  — absurdo; e o mesmo vale para a quarta possibilidade em relação a  $\alpha$ . Se a terceira possibilidade, então seria um contramodelo de  $\neg\alpha$  e de  $\alpha$  — o que é impossível para mbC-valorções. Por fim, se a segunda possibilidade, então a interpretação seria um modelo de  $\neg\alpha$  e de  $\alpha$ ; mas, pelas mbC-condições de verdade, qualquer modelo dessas duas fórmulas é também um contramodelo de  $\circ\alpha$ , — o que contradiz a suposição. Absurdo. A suposição, enfim, é falsa, e a implicação é, portanto, vacuamente verdadeira.

| $\{F\neg\alpha, V\alpha\}$ | $\{V\neg\alpha, F\alpha\}$ |
|----------------------------|----------------------------|
| $F\neg\alpha$              | $V\neg\alpha$              |
| $F\neg\alpha$              | $F\alpha$                  |
| $V\alpha$                  | $V\neg\alpha$              |
| $V\alpha$                  | $F\alpha$                  |

A suposição de que  $\mathcal{I}$  é um contramodelo de  $\circ\alpha$  é falsa, qualquer que seja  $\varphi$ . Isto porque, pelas mbC-condições de verdade, se  $\circ\alpha$  é falsa sob uma valoração fundada nessa interpretação, então  $\alpha$  e  $\neg\alpha$  ou são por ela valoradas classicamente (isto é, uma verdadeira e a outra falsa), ou não-classicamente (ou seja: ambas verdadeiras). Se classicamente, pelas mbC-condições de verdade o valor de  $\circ\alpha$  é independente dos valores de suas subfórmulas próprias, e em particular dos valores de suas subfórmulas simples. Se não-classicamente, então o valor de  $\neg\alpha$  é que é independente do valor de suas subfórmulas próprias, e, conseqüentemente, existe uma outra valoração em que  $\neg\alpha$

é falsa — e, portanto, também nesse caso o valor de  $\circ\alpha$  resulta independente dos valores de suas subfórmulas próprias. A implicação, portanto, é vacuamente verdadeira.

Se se supõe que o Oponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\circ\alpha, \mathcal{I})$ , então há oito possibilidades, resumidas na seguinte tabela.

| $\{V\neg\alpha, V\alpha\}$ | $\{F\neg\alpha, V\alpha\}$ | $\{V\neg\alpha, F\alpha\}$ |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $V\neg\alpha$              | $F\neg\alpha$              | $V\neg\alpha$              |
| $V\neg\alpha$              | $F\neg\alpha$              | $F\alpha$                  |
| $V\neg\alpha$              | $V\alpha$                  | $V\neg\alpha$              |
| $V\neg\alpha$              | $V\alpha$                  | $F\alpha$                  |
| $V\alpha$                  | $F\neg\alpha$              | $V\neg\alpha$              |
| $V\alpha$                  | $F\neg\alpha$              | $F\alpha$                  |
| $V\alpha$                  | $V\alpha$                  | $V\neg\alpha$              |
| $V\alpha$                  | $V\alpha$                  | $F\alpha$                  |

Exatamente como para a suposição de que ele teria uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\circ\alpha, \mathcal{I})$ , pela hipótese de indução a terceira e a sétima linhas implicam a existência de uma valoração inadmissível; as demais linhas implicam que  $\mathcal{I}$  é tanto um modelo quanto um contramodelo de  $\circ\alpha$ . Também neste caso pois, a suposição é falsa e, portanto, a implicação vacuamente verdadeira.

Também a suposição de que  $\mathcal{I}$  é um modelo de  $\circ\alpha$  é falsa. Isto porque, pelas mbC-condições de verdade,  $\circ\alpha$  só é verdadeira quando  $\alpha$  e  $\neg\alpha$  são valoradas classicamente, e, nesse caso, o valor de  $\circ\alpha$  é independente do valor de suas subfórmulas próprias, suas subfórmulas simples inclusas. Mais uma vez, portanto, a implicação é vacuamente verdadeira.

Pela determinação dos mbC-jogos semânticos, resulta imediatamente disso que o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(C\circ\alpha, \mathcal{I})$  qualquer que seja a fórmula, seu rótulo e a interpretação; e, como se discutiu na parte anterior da prova,  $\circ\alpha$  é tanto satisfazível quanto contrafazível por qualquer mbC-interpretação.

**Corolário 7.2.1.**  $V\neg\alpha$ ,  $V\circ\alpha$  e  $F\circ\alpha$  são posições vencedoras para o Proponente em quaisquer mbC-jogos semânticos, qualquer que seja  $\alpha$ .

*Demonstração.* Resulta do teorema e da definição de subjogo gerado por um estágio, aplicada aos estágios correspondentes a essas posições em um jogo qualquer.  $\square$

$\square$

**Definição 7.2.** Um mbCciw-jogo semântico é como um mbC-jogo semântico, exceto que a regra para o operador de consistência em relação ao rótulo  $F$  é substituída por esta:

$R_o^F$  Se  $F \circ \alpha$ , então a partida prossegue para  $\{V \neg \alpha, V \alpha\}$ .

Tudo o mais permanece o mesmo: mbCciw-jogos semânticos também são de ganha-perde e determinados, e o teorema da equivalência é análogo. Em particular,  $V \neg \alpha$  e  $V \circ \alpha$  são igualmente posições vencedoras para o Proponente em quaisquer mbCciw-jogos semânticos, qualquer que seja  $\alpha$ . Com efeito, na prova do teorema da equivalência, muda somente que ela é em verdade mais breve, por não haver a possibilidade de  $\circ \alpha$  ser falsa sob uma valoração clássica de  $\alpha$  e  $\neg \alpha$ . Os pormenores ficam para o leitor interessado.

## 7.2 Jogos semânticos para mbC e mbCciw com instanciações

As semânticas que introduzidas na seção anterior para mbC e mbCciw são em muitos sentidos insatisfatórias. A existência de uma estratégia vencedora para o Proponente corresponde à possibilidade de a fórmula ser satisfeita, ou contrafeita (a depender de qual seja seu compromisso proposicional), e a existência de uma para o Oponente corresponde à impossibilidade de a fórmula ser satisfeita, ou contrafeita (também a depender do compromisso proposicional do Proponente). Ora, uma das virtudes das semânticas de jogos para LC e LP é que elas podem ser usadas diretamente como substitutas para valorações. Mais precisamente, dada uma LC-interpretação, podemos construir a partir dela uma valoração estudando para quais fórmulas  $\varphi$  o Proponente tem estratégias vencedoras em  $\mathbb{S}_{mbC}(\varphi, \mathcal{I})$ , e para quais o Oponente é quem as tem; e o mesmo vale para LP-jogos semânticos.

Tal virtude, claro, deve-se ao fato de que, nessas lógicas, a cada interpretação corresponde uma e única valoração. O que se mostrou até aqui é que nada semelhante pode ser o caso para mbC e mbCciw, ao menos em relação a jogos semânticos estruturados em termos de simples interpretações. Contudo, que se possam substituir valorações por estratégias vencedoras parece ser uma condição necessária para que algo mereça ser chamado uma *semântica* de jogos. Por certo

os jogos antes introduzidos para as LIFs são *semânticos* em certo sentido, porque carregam informação semântica, a respeito da existência ou inexistência de certas valorações fundadas em uma interpretação dada; mas isso é tudo.

Lembremos, entretanto, que em relação a interpretações *instanciadas* nos temos uma noção de unicidade de valorações análoga às de LC e LP. O que mostrarei nesta seção é que adaptar os jogos semânticos da seção anterior para comportar interpretações instanciadas é suficiente para superar essas limitações e obter semântica de jogos plenas para mbC e mbCciw.

**Definição 7.3.** Um *mbC-jogo semântico*  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(C\varphi, \langle \mathcal{I}, \mathcal{G} \rangle)$  para a fórmula rotulada  $C\varphi$  sob a interpretação mbC-instanciada  $\langle \mathcal{I}, \mathcal{G} \rangle$  consiste dos mesmos elementos que um mbC-jogo semântico usual, com as seguintes modificações nas regras relativas à negação e à consistência:

$R_{\neg}^V$  Se a posição atual é  $V\neg\alpha$ , então:

- se a instanciação da negação em relação a  $\alpha$  é  $\neg_0$ , então a partida prossegue para  $\{F\alpha\}$ ;
- se é  $\neg_1$ , então o Proponente escolhe dentre  $\{V\alpha\}$  e  $\{F\alpha\}$ .

$R_{\neg}^F$  Se a posição atual é  $F\neg\alpha$ , então:

- se a instanciação da negação em relação a  $\alpha$  é  $\neg_0$ , então a partida prossegue para  $\{V\alpha\}$ ;
- se é  $\neg_1$ , então o Proponente perde e o Oponente ganha a partida.

$R_{\circ}^V$  Se a posição atual é  $V\circ\alpha$ , então:

- se a instanciação da consistência em relação a  $\alpha$  é  $\circ_0$ , então o Proponente escolhe dentre  $\{F\neg\alpha, V\alpha\}$  e  $\{V\neg\alpha, F\alpha\}$ ;
- se é  $\circ_1$ , então o Proponente perde e o Oponente ganha a partida.

$R_{\circ}^F$  Se a posição atual é  $F\circ\alpha$ , então:

- se a instanciação da consistência em relação a  $\alpha$  é  $\circ_0$ , então a partida prossegue para  $\{V\neg\alpha, V\alpha\}$ ;
- se é  $\circ_1$ , então o Proponente escolhe dentre  $\{V\neg\alpha, V\alpha\}$ ,  $\{F\neg\alpha, V\alpha\}$  e  $\{V\neg\alpha, F\alpha\}$ .

*Observação 7.3.1.* A fim de distingui-los, nós nos referiremos ao formalismo introduzido na seção anterior por mbC-jogos semânticos com operações *não-instanciadas*, e a estes por mbC-jogos semânticos com operações *instanciadas*.

Todas as demais regras permanecem as mesmas.

**Teorema 7.3.** *mbC-jogos semânticos com instanciações são de ganha-perde e determinados.*

**Teorema 7.4.** *O Proponente (Oponente) tem uma estratégia vencedora no mbC-jogo semântico com operações instanciadas  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(C\varphi, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{S} \rangle)$  se e somente o compromisso proposicional  $C\varphi$  é bem-sucedido (mal-sucedido) sob qualquer valoração fundada em  $\mathcal{I}$  compatível com  $\mathfrak{S}$ .*

*Em outros termos: o Proponente (Oponente) tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\varphi, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{S} \rangle)$  se e somente se  $\mathcal{I}$  é um  $\mathfrak{S}$ -modelo ( $\mathfrak{S}$ -contramodelo) de  $\varphi$ , e em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\varphi, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{S} \rangle)$  se e somente se a interpretação é um  $\mathfrak{S}$ -contramodelo ( $\mathfrak{S}$ -modelo) da fórmula.*

*Demonstração.* Omitiremos os casos das fórmulas simples e dos operadores binários, que são idênticos aos da demonstração do teorema da equivalência para mbC-jogos semânticos com operações não-instanciadas. Como de hábito, a demonstração é por indução.

$\varphi = \neg\alpha$  Suponha-se que  $V$  é o rótulo da fórmula.

Suponha-se, primeiro, que o Proponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo.

Se a instanciação da negação é  $\neg_0$ , então, pelas regras, a partida prossegue necessariamente para  $\{F\alpha\}$ , e então para  $F\alpha$ . Esta, portanto, é uma posição vencedora para o Proponente. Pela definição de subjogo gerado por um estágio, o Proponente tem uma estratégia vencedora no subjogo gerado pelo estágio correspondente a essa posição, ou seja, em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{S} \rangle)$ . Por hipótese de indução,  $\mathcal{I}$  é um  $\mathfrak{S}$ -contramodelo de  $\alpha$ . Pela tabela de verdade de  $\neg_0$ ,  $\mathcal{I}$  é um  $\mathfrak{S}$ -modelo de  $\alpha$ .

Se a instanciação da negação é  $\neg_1$ , então pela sua tabela de verdade  $\mathcal{I}$  necessariamente é um  $\mathfrak{S}$ -modelo de  $\alpha$ , e portanto a implicação é verdadeira ele tenha ou não uma estratégia vencedora. (Note-se no entanto que, pelas regras, ele *tem* uma: a estratégia vazia.)

Suponha-se, agora, que  $\mathcal{I}$  é um  $\mathfrak{S}$ -modelo de  $\neg\alpha$ .

Se a instanciação da negação é  $\neg_0$ , então, pela sua tabela de verdade,  $\mathcal{I}$  é um  $\mathfrak{S}$ -contramodelo de  $\alpha$ . Por hipótese de indução, o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{S} \rangle)$ . Mas, pela definição de subjogo gerado por um estágio, esse é precisamente o subjogo gerado pelo

estágio correspondente à posição  $F\alpha$  em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\neg\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{G} \rangle)$ , para a qual, pelas regras, esse jogo prossegue necessariamente da sua posição inicial. Pelo teorema da extensibilidade, a estratégia do Proponente que consiste em seguir sua estratégia vencedora de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{G} \rangle)$  é uma estratégia vencedora sua em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\neg\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{G} \rangle)$ .

Se a instanciação da negação é  $\neg_1$ , então, pela sua tabela de verdade e pelo lema da unicidade para mbC sob interpretações instanciadas,  $\mathcal{I}$  é ou um  $\mathfrak{G}$ -modelo de  $\alpha$  ou um  $\mathfrak{G}$ -contramodelo. Suponha-se, sem perda de generalidade, que o primeiro é o caso. Assim sendo, por hipótese de indução o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{G} \rangle)$ . Mas, pela definição de subjogo gerado por um estágio, esse é precisamente o subjogo gerado pelo estágio correspondente à posição  $V\alpha$  em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\neg\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{G} \rangle)$ . Pelas regras, o Proponente escolhe dentre  $\{V\alpha\}$  e  $F\alpha$  na posição inicial, e, se escolher  $\{V\alpha\}$ , a partida prossegue necessariamente para  $V\alpha$ . Pelo teorema da extensibilidade, a estratégia do Proponente que consiste em seguir sua estratégia vencedora de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{G} \rangle)$  depois de escolher  $\{V\alpha\}$  na posição inicial é uma estratégia vencedora sua em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\neg\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{G} \rangle)$ .

Suponha-se que  $F$  é o rótulo da fórmula.

Suponha-se, primeiro, que o Proponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo.

Se a instanciação da negação é  $\neg_0$ , então o argumento é simétrico ao para a suposição de que o rótulo é  $V$  para a mesma instanciação da negação.

Se a instanciação da negação é  $\neg_1$ , então pelas regras o Proponente necessariamente *não* tem uma estratégia vencedora nesse jogo, e portanto a implicação é vacuamente verdadeira.

Suponha-se, agora, que  $\mathcal{I}$  é um  $\mathfrak{G}$ -contramodelo de  $\neg\alpha$ .

Se a instanciação da negação é  $\neg_0$ , então novamente o argumento é simétrico ao para a suposição de que o rótulo é  $V$  para a mesma instanciação da negação.

Se a instanciação da negação é  $\neg_1$ , então pela sua tabela de verdade a suposição novamente é falsa, e portanto a implicação é vacuamente verdadeira.

$\varphi = \circ\alpha$  Suponha-se que  $V$  é o rótulo da fórmula.

Suponha-se, primeiro, que o Proponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo.

Se a instanciação da consistência é  $\circ_0$ , então, pelas regras, o Proponente escolhe dentre  $\{F\neg\alpha, V\alpha\}$  e  $\{V\neg\alpha, F\alpha\}$  na posição inicial. Suponha-se, primeiro, que sua estratégia vencedora instrui que es-

colha  $\{F\neg\alpha, V\alpha\}$ . Assim sendo, porque, pelas regras, o Oponente então escolhe dentre  $F\neg\alpha$  e  $V\alpha$ , ambas são posições vencedoras para o Proponente. Mas, pela definição de subjogo gerado por um estágio,  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\neg\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathcal{G} \rangle)$  é justamente o subjogo de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\circ\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathcal{G} \rangle)$  gerado pelo estágio correspondente a  $F\neg\alpha$ , e  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathcal{G} \rangle)$  o pelo correspondente a  $V\alpha$ . Por hipótese de indução,  $\mathcal{I}$  é um  $\mathcal{G}$ -contramodelo de  $\neg\alpha$  e um modelo de  $\alpha$ . Pela tabela de verdade de  $\circ_0$ ,  $\mathcal{I}$  é um  $\mathcal{G}$ -modelo de  $\circ\alpha$ . Se sua estratégia vencedora instrui que escolha  $\{V\neg\alpha, F\alpha\}$ , por um argumento semelhante conclui-se que a interpretação é um  $\mathcal{G}$ -modelo da fórmula.

Se a instanciação da consistência é  $\circ_1$ , então pela sua tabela de verdade  $\mathcal{I}$  necessariamente é um  $\mathcal{G}$ -contramodelo de  $\alpha$  — e, portanto, porque mbC-valorizações são funcionais, não é um modelo. Mas, pelas regras, o Oponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo (a estratégia vazia), e, porque mbC-jogos semânticos com operações instanciadas são determinados, o Proponente não tem uma. A implicação, portanto, é verdadeira.

Suponha-se, agora, que  $\mathcal{I}$  é um  $\mathcal{G}$ -modelo de  $\circ\alpha$ .

Se a instanciação da consistência é  $\circ_0$ , então, pela sua tabela de verdade,  $\mathcal{I}$  ou é um  $\mathcal{G}$ -contramodelo de  $\neg\alpha$  e um  $\mathcal{G}$ -modelo de  $\alpha$ , ou é um  $\mathcal{G}$ -modelo de  $\neg\alpha$  e um  $\mathcal{G}$ -contramodelo de  $\alpha$ . Suponha-se que o primeiro é o caso. Assim sendo, por hipótese de indução o Proponente tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\neg\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathcal{G} \rangle)$  e uma em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathcal{G} \rangle)$ . Mas porque, pelas regras, na posição inicial ele escolhe dentre  $\{F\neg\alpha, V\alpha\}$  e  $\{V\neg\alpha, F\alpha\}$ , e porque, se escolher  $\{F\neg\alpha, V\alpha\}$ , então o Oponente escolherá dentre  $F\neg\alpha$  e  $V\alpha$ , pelo teorema da extensibilidade a estratégia do Proponente que consiste em escolher  $\{F\neg\alpha, V\alpha\}$  na posição inicial e então seguir sua estratégia vencedora de  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\neg\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathcal{G} \rangle)$  se o Oponente escolher  $F\neg\alpha$  e a de  $\{V\neg\alpha, F\alpha\}$  se  $V\alpha$  é uma estratégia vencedora do Proponente em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\circ\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathcal{G} \rangle)$ . Se  $\mathcal{I}$  for um  $\mathcal{G}$ -modelo de  $\neg\alpha$  e um  $\mathcal{G}$ -contramodelo de  $\alpha$ , por um argumento semelhante conclui-se que o Proponente tem uma estratégia vencedora nesse jogo.

Para  $\circ_1$  a instanciação da consistência, a implicação é mais uma vez trivial.

Para a suposição de que o rótulo da fórmula é F os argumentos são semelhantes aos anteriores de forma óbvia, e por isso serão deixados a cargo do leitor.  $\square$

**Corolário 7.4.1.** *Seja C um rótulo qualquer dentre V e F, e denotemos por  $\bar{C}$  o outro rótulo. Assim sendo, em mbC-jogos semânticos com instanciações são equivalentes estes dois fatos:*

- o Proponente ter uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(C\varphi, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{S} \rangle)$ ;
- o Oponente ter uma em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(\overline{C}\varphi, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{S} \rangle)$ ;

mas não estes dois:

- o Proponente ter uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(C\neg\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{S} \rangle)$ ;
- o Proponente ter uma em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(\overline{C}\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{S} \rangle)$ .

*Demonstração.* A primeira parte segue-se do teorema e do fato de que mbC-jogos semânticos com instanciações são determinados. Quanto à segunda parte, é fácil notar que, se a instanciação da negação em relação a  $\alpha$  é  $\neg_1$ , então o Proponente necessariamente não tem uma estratégia vencedora em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(F\neg\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{S} \rangle)$ , mas pode ainda assim ter uma em  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(V\alpha, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{S} \rangle)$ .  $\square$

*Comentário 7.4.1.* Em essência, o que corolário significa é que por meios das interpretações instanciadas recuperamos em mbC-jogos semânticos a coincidência da dualidade dos papéis dos jogadores com a dualidade de suas identidades.

**Corolário 7.4.2.** *O Proponente tem uma estratégia vencedora no mbC-jogo semântico com operações não-instanciadas  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(C\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se para alguma mbC-instanciação  $\mathfrak{S}$  ele tem uma no mbC-jogo semântico com operações instanciadas  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(C\varphi, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{S} \rangle)$ ; e o Oponente tem uma estratégia vencedora no mbC-jogo semântico com operações não-instanciadas  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(C\varphi, \mathcal{I})$  se e somente se para toda mbC-instanciação  $\mathfrak{S}$  ele tem uma no mbC-jogo semântico com operações instanciadas  $\mathbb{S}_{\text{mbC}}(C\varphi, \langle \mathcal{I}, \mathfrak{S} \rangle)$ .*

*Demonstração.* Decorre imediatamente dos respectivos teoremas de equivalência para esses jogos e das definições de valoração fundada em uma interpretação e de interpretação mbC-instanciada.  $\square$

É bastante óbvio que mbCciw-jogos semânticos com instanciações podem ser obtidos de mbC-jogos semânticos com instanciações simplesmente restringindo-se as instanciações admissíveis àquelas em que a instanciação da consistência é  $\circ_0$  para todas as fórmulas. A propósito, ao se restringirem as interpretações àquelas em que ademais a instanciação da negação é  $\neg_0$  obtemos um semântica de jogos para LCC (a lógica clássica com operador de consistência). Há um sentido, portanto, em que mbC-jogos semânticos com instanciações são jogos semânticos *universais*, ao menos

para esse universo restrito que nos interessa e que compreende LC, mbC e mbCciw. Ademais, já observamos no capítulo anterior que os jogos semânticos para LP, restritos as interpretações admissíveis às funcionais, reduzem-se aos jogos semânticos para LC.

Estamos enfim em condições de discutir comparativamente as pragmáticas dessas quatro lógicas.

## Capítulo 8

# Pragmática

Neste capítulo, exemplifico como os jogos semânticos apresentados nos capítulos anteriores podem ser usados como modelos da pragmática da racionalidade argumentativa de suas respectivas lógicas, e discuto brevemente as méritos epistemológicos dessa tratamento em comparação com outras formas de modelagem de argumentações.

### 8.1 Argumentação e jogos

Imagine-se a seguinte discussão, absolutamente banal em si mesma, que pode passar-se entre duas pessoas — os mesmos Ptolomeu e Orígenes digamos — por alguma razão interessadas na situação econômica de seu país:

Ptolomeu: “Com juros tão altos, não há quem se arrisque a empreender, e assim o desemprego não diminui.”

Orígenes: “Mas você não crê que os juros estão num bom patamar?”

Ptolomeu: “Não, de modo algum!”

Orígenes: “Está certo, está certo. Mas, veja, deu hoje no jornal que aumentaram os postos de trabalhos preenchidos em comparação com o trimestre passado... Então, o que me diz disso?”

Apesar de banal, há muito de interessante a ser observado nesse breve discussão, em termos da lógica nela envolvida. A linguagem em que se desenrola a conversa é patentemente proposicional. Nela só ocorrem, de operadores lógicos, a negação, a conjunção e o condicional (subentendido na primeira fala de Ptolomeu), e pois, em princípio ao menos, ela poderia ser formalizada em uma linguagem como a das lógicas de que tratamos nesta dissertação. A questão é: *como* modelar formalmente a discussão como um todo?; quer dizer: *o que* exatamente estamos observando, em termos lógicos, ao assistir a uma discussão como essa?

Uma possibilidade, talvez a mais óbvia, seria tentar abstrair *argumentos* dessa discussão. Isso, julgo, se faria mais ou menos assim.

Sejam  $p$  = 'Os juros estão altos.',  $q$  = 'Não há quem se arrisque a empreender.',  $r$  = 'O desemprego diminui.' e  $s$  = 'Os postos de trabalho preenchidos aumentaram em comparação com o trimestre passado.'. Isso posto, é mais ou menos evidente que a primeira fala de Ptolomeu seria a asserção da sentença  $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$ ; e podemos tomar, conjuntamente, a primeira fala de Orígenes e a segunda de Ptolomeu como a anuência de Ptolomeu a  $\neg p$ . Já a segunda fala de Orígenes é inegavelmente a asserção de  $s$ ; contudo, dos significados de  $r$  e  $s$  e da implicadura conversacional, depreende-se que nessa fala estaria também subentendido que  $s \rightarrow r$ . Naturalmente, é de se supor que Orígenes intencione sua última fala como uma refutação do argumento de Ptolomeu, — do argumento que ele *parece* entender ser o de Ptolomeu. Mais uma vez, precisamos nos socorrer da implicadura conversacional, que nos sugere então que seus argumentos seriam os mais óbvios possíveis — o que, no caso, implica: tomar as sentenças asseridas ou anuídas por cada um como as premissas de seus respectivos argumentos, e o que decorre delas por *modus ponens* como suas respectivas conclusões (já assumindo, por simplicidade, a equivalência clássica de  $\neg\neg p$  e  $p$ ). A bem dizer, no caso do argumento de Orígenes  $s$  teria que ser uma conclusão ainda parcial: pois a conclusão que ele *deveria* obter, se pretende refutar o argumento de Ptolomeu como parece querer, seria mais propriamente  $\neg(q \wedge \neg r)$  (que, de qualquer modo, também se infere validamente de suas premissas).

Dessa feita, seria enfim mais ou menos razoável conceber essa conversa como um par de argumentos, o argumento de Ptolomeu sendo  $\langle \{p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg p\}, q \wedge \neg r \rangle$ , e o de Orígenes sendo  $\langle \{s \rightarrow r, s\}, \neg(q \wedge \neg r) \rangle$ .

Há méritos inegáveis nesse tratamento, que recorre ao que seria o aparato formal de uma *lógica da argumentação* [7], — o mais óbvio deles, o fato de que assim se poderiam estudar diretamente em um *sistema dedutivo* as relações entre as crenças (ou ao menos entre os compromissos proposicionais explícitos) desses agentes. No entanto, enquanto *interpretação e representação formal* dessa conversa, tal tratamento por certo deixa muito a desejar.

Uma de suas limitações mais patentes e sérias (séria ao menos para o que importa a nossos propósitos) é que é virtualmente impossível interpretar uma discussão, mesmo uma simples como essa, sem preencher as *lacunas* dos argumentos supostamente intencionados pelos agentes, — sem completar, como fizemos, o que *de fato* foi dito, com as sentenças que *deveriam* ter sido ditas a fim de se expressarem argumentos com ao menos legítima pretensão de validade. Em uma palavra (uma cunhada por Aristóteles), é tratar discussões em linguagem natural supondo que são, em geral, trocas de *entimemas*.

Digo que essa limitação é séria porque ela obriga (consequência do princípio de caridade) a assumir de antemão qual seria a lógica nos termos da qual os agentes estariam conduzindo sua interlocução, sem o que não há como abstrair proposições dos *atos proposicionais* (as asserções e anuências tácitas) desses agentes. Dada, porém, a possibilidade do *pluralismo lógico* [6] — a possibilidade de que nem todos os processos inferenciais sejam regidos por uma única e mesma lógica —, assumir de antemão qual seria a lógica subjacente a uma discussão seria bastante desaconselhável. Ora, é certo que essa é uma possibilidade que não podemos ignorar no contexto do debate sobre a paraconsistência.

Além dessa, o que chamo de análise entimemática parece-me padecer da seguinte limitação, igualmente séria. Essa análise visa, como se disse, a abstrair do discurso algo que seja manejável pelo aparato de um sistema lógico. Mesmo quando complementado pelo aparato de uma lógica da argumentação, esse tratamento ainda resulta num modelo que permite sobretudo o estudo de relações entre proposições, ou então entre argumentos enquanto certas estruturas compostas por proposições. No mais, porém, ele é essencialmente cega à *interação* entre os interlocutores, tomada em si mesma. Pelo contrário, e como se pode facilmente notar na análise que fizemos dessa discussão, seriam antes as relações lógicas entre as alegações dos agentes o que, nesse modelo, permitiria depreender algo a respeito de sua interação argumentativa.

Julgo ser suficientemente claro que essas duas limitações estão intimamente relacionadas. Isto porque, como as semânticas de jogos revelam, há um sentido preciso em que padrões da interação entre agentes capazes no mínimo de se comunicar em linguagens proposicionais carregam informação a respeito da lógica que regeria essa sua interação; e, porque carregam tal informação (segundo o modelo das semânticas de jogos), ao menos em princípio parece que deveria ser possível depreender a lógica subjacente aos processos inferenciais desses agentes *sem* procurar desde o início por eventuais argumentos que eles estariam produzindo numa lógica pressuposta<sup>1</sup>.

Ademais, é inerente ao pluralismo lógico o problema epistemológico, a meu ver ainda não suficientemente tematizado na literatura<sup>2</sup>, de como distinguir quando um agente está apenas cometendo erros inferenciais e quando ele está de fato raciocinando nos termos de uma lógica diferente, — sobretudo quando a amostra de suas inferências disponível não é grande o suficiente para extrapolar dela um *fecho dedutivo* (isto é, conjunto de todas as proposições que são consequência lógica das premissas aceitas por ele). Esta dificuldade é especialmente pungente, claro, quando contradições não são todas explosivas. Entendidas como pragmáticas formais de suas respectivas lógicas, as semânticas de jogos auxiliariam de imediato a superar precisamente essa dificuldade.

Retornemos pois ao exemplo, a fim de entender como ele poderia ser interpretado nos termos de uma semântica de jogos.

A discussão inicia-se com a asserção por Ptolomeu da fórmula  $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$ . Supondo-se Ptolomeu um interlocutor sincero, ao asserir a fórmula Ptolomeu compromete-se com sua verdade. Esse ato estaria, portanto, iniciando o que parece ser um jogo semântico para o compromisso proposicional  $\forall p \rightarrow (q \wedge \neg r)$ , com Ptolomeu como proponente e Orígenes como oponente.

---

<sup>1</sup>Convém observar que *não* estamos, com isso, ignorando o fato de que agentes linguísticos podem ser também capazes de enunciar argumentos de modo explícito, sinalizando que o fazem usando deliberadamente de marcadores de premissas, de suposições, de conclusões e de suas relações lógicas (aqueles mesmos que são recorrentes em textos de lógica matemática como este: “Dado que”, “suponha-se que”, “portanto”, “segue-se que”, *etc.*). Nesses casos, é patente que a reconstrução racional dos argumentos subentendidos em entimemas é o tratamento mais apropriado do discurso. De modo nenhum pretendo, portanto, contrapor absolutamente lógica da argumentação e semânticas de jogos. Meu ponto é apenas que, como veremos, a produção deliberada de argumentos explícitos não só nem sempre é o caso em interações argumentativas, mas há inclusive razões para crer que ela nem sempre *pode* ser o caso. Eis por que a análise em termos de jogos sugere-se como alternativa.

<sup>2</sup>Esse problema é, no entanto, interessantemente discutido em [9]

O que se esperaria então de Ptolomeu seria uma escolha entre os compromissos proposicionais  $Fp$  e  $Vq \wedge \neg r$ . Pode-se então interpretar a pergunta que Orígenes lhe faz em seguida como sendo um teste de se Ptolomeu escolheria  $Fp$ , e a resposta de Ptolomeu como a recusa dessa alternativa — e consequente escolha de  $Vq \wedge \neg r$ .

Sendo agora sua a escolha — escolha entre  $Vq$  e  $V\neg r$  —, Orígenes ao que parece procede a  $V\neg r$ , e imediatamente (como num LC-jogo semântico) deste compromisso proposicional a  $Fr$ . Podemos enfim tomar a remissão aos dados veiculados pela mídia jornalística como fazendo as vezes da valoração, — a *fonte epistêmica* decisiva do valor de verdade das proposições simples.

Assim sendo, na ausência de evidência em contrário, é razoável admitir que a lógica subjacente a essa discussão é a clássica. (Estou assumindo como princípio — um que me parece muito plausível quando se trata de agentes humanos — que a presunção deve ser de que a lógica de suas inferências é a clássica até prova em contrário.)

Não há dúvida de que essa interpretação da mesma discussão resulta num modelo muitíssimo mais intuitivo e natural da interação entre os agentes nela envolvidos. Claro, estamos lidando com um exemplo deliberadamente concebido para ser passível de fácil análise. Exemplos reais são notavelmente mais difíceis de tratar, por razões óbvias: limitações de conhecimento, tempo, atenção e tantos outros recursos materiais e cognitivos, que de resto notoriamente variam de pessoa para pessoa [25], impedem muitas vezes que agentes reais sejam constantes em sua observância à lógica. Reconstruir racionalmente o que dizem ao interpretá-los é, por isso, não raro inevitável. Esta, contudo, é uma dificuldade universal, que afetará qualquer modelo formal da argumentação em linguagem natural. A vantagem obtida com o modelo de jogos, em comparação com o que chamei de modelo entimemático, porém, é a drástica redução das suposições que é preciso fazer a respeito das intenções argumentativas desses agentes. Esta vantagem não é pequena, pois é um fato que onisciência dedutiva é uma suposição absolutamente implausível (ou seja: nunca é razoável assumir que um agente está comprometido com tudo que está no fecho dedutivo do que crê ou alega).

Essas virtudes do modelo de jogos das interações argumentativas são interessantes e importantes, mas não nos deteremos mais nelas. Nosso objetivo, bem entendido, é entender como as semânticas de jogos poderiam cumprir uma função no debate sobre o pluralismo lógico. A pergunta que se põe, pois, é esta: como a semântica de jogos poderia nos ajudar a reconhecer quando

a lógica subjacente a uma interação argumentativa *não* é a clássica?

Ao menos no caso de LP, isso me parece mais ou menos simples. Retornemos a exemplos, e suponhamos que a discussão não se encerrou com a segunda fala de Orígenes, mas que Ptolomeu replicou com o seguinte:

Ptolomeu: “Sim, meu caro. Mas, se você ler com cuidado a reportagem, verá que o aumento observado pelo instituto de pesquisa é pequeno, e verá também que se menciona que um outro instituto, trabalhando com outra metodologia e levando em conta outros fatores, não observou aumento.”

A sermos consistentes em modelar o jornal como a fonte epistêmica que fundamenta a valoração das fórmulas, devemos concluir que a lógica dessa interação não é mais a clássica, dado que se admite agora que  $r$  seria verdadeira e falsa<sup>3</sup>. Convém notar que verdade e falsidade são aqui tomadas como noções contextuais, e não em sentido absoluto. Nada no exemplo nos compromete com o dialeteísmo de Priest em sua versão forte, *ontológica*. Ele reforça, contudo, a posição de Priest segundo a qual, ao menos em certos contextos de argumentação, nada há de absurdo em se comprometer com a verdade de uma sentença e concomitantemente conceder que ela é falsa<sup>4</sup>. Naturalmente, em termos de verdade e falsidade em sentido absoluto, a constatação de que a fonte epistêmica autoriza raciocínios paradoxais seria evidência mais que suficiente de que não é total a evidência por ela disponibilizada (embora Priest insistiria que há casos em que mesmo a evidência total continuaria a autorizar raciocínios paradoxais [35]). O que nos importa aqui, entretanto, é que a oposição de Orígenes ao compromisso proposicional de Ptolomeu, *nesse* contexto de argumentação, resulta insuficiente para o propósito de mostrar que Ptolomeu não teria direito a ele. Mais que isso, essa interação revela que Ptolomeu definitivamente *tem* direito ao compromisso proposicional, pois tem uma estratégia vencedora nesse jogo semântico, — uma que ele não tinha no exemplo original. O fato de seu direito a compromisso ser talvez precário em sentido absoluto, ontológico — isto é: enquanto *crença* — não o derroga em relação à discussão presente, nas condições presentes.

---

<sup>3</sup>Convém notar que assumimos implicitamente que nossos personagens são, em certo sentido, *crédulos*. Poder-se-ia argumentar que, ante as informações divergentes oferecidas pela fonte epistêmica, mais razoável seria assumir uma atitude *cética*, suspendendo-se o juízo.

<sup>4</sup>Com efeito, Priest não ignora a possibilidade de uma interpretação *epistêmica* do dialeteísmo: veja-se, nesse sentido, o exemplo do termômetro em [34, pp. 68-69]

Poderíamos modificar mais uma vez nosso exemplo a fim de fazê-lo ser regido por mbC ou, ao menos, a fim fazê-lo tal que mbC seja um modelo plausível da racionalidade argumentativa desses agentes? — Creio que sim, da seguinte forma.

Suponha-se que depois da última fala de Orígenes em nosso exemplo original, Ptolomeu replicasse isto:

Ptolomeu: “Ora, não digo que esses dados sejam incorretos, mas, meu amigo, você bem sabe que o viés desse jornal é a favor do governo e de suas políticas econômicas, e que por isso ele costuma ser seletivo com a informação que veicula.”

Julgo que essa nova versão do exemplo pode ser muito satisfatoriamente interpretada assim. Como no exemplo original, porque ao se comprometer com  $\forall q \wedge \neg r$  Ptolomeu necessariamente se compromete com  $\forall \neg r$ , Orígenes procede imediatamente a  $\forall r$ , pressupondo, como é razoável, que a discussão prosseguiria classicamente. Ptolomeu, no entanto, objeta, primeiro concedendo que  $r$  (isto é: comprometendo-se com  $\forall r$ ), porém em seguida arrogando-se o direito de permanecer comprometido com  $\forall \neg r$ , em função de a fonte epistêmica que fundamenta a valoração de  $r$  ser tendenciosa — e, portanto, *não-confiável* — a respeito de  $r$  *em particular*. Assim sendo, mais uma vez a oposição de Orígenes falha em derrogar o direito de Ptolomeu ao compromisso com  $\forall(p \rightarrow q \wedge \neg r)$ ; mas falha, note-se, *sem* implicar (como faz no caso de LP) que um compromisso com a falsidade da proposição seria igualmente razoável nesse mesmo contexto: pois, a despeito de ser tendenciosa a respeito de  $r$ , nada impede que, afinal, seja correta a informação disponibilizada pela fonte.

O estatuto da fonte epistêmica nesse exemplo está intimamente relacionado à noção de consistência. Se a fonte ser tendenciosa a respeito de  $r$  autoriza a manutenção do compromisso proposicional com a verdade de  $\neg r$  apesar de as evidências disponíveis serem em favor de  $r$ , e não contra, então a contradição não pode se comportar de modo clássico. Isso, por sua vez, implica que a consistência de  $r$  não pode ser verdadeira.

A propósito da consistência, note-se como seriam, nesse contexto, muito diferentes as interpretações dessa operação em mbC e mbCciw. Em mbC, a falsidade da consistência em alguns casos (a saber, quando a instanciação da consistência em relação à proposição é  $\circ_1$ ) autoriza, como se disse, o compromisso com a verdade de  $\neg \alpha$  ainda quando se concede que  $\alpha$ ; em outros casos (quando a

instanciação é  $\circ_0$ ), ela não apenas autoriza mas também *obriga*. Em mbCciw, portanto, ela *sempre* obriga. Em termos epistêmicos, isso corresponderia à diferença entre uma fonte de informação ser tendenciosa, e por isso não-confiável, e ser *confiavelmente errônea* — no sentido de que ela oferecer evidências que sustentariam  $\alpha$  seria por si só evidência suficiente de que  $\neg\alpha$  é o caso.

Dessa feita, fica evidente que a noção de inconsistência codificada por mbC é em certo sentido mais rica que a codificada por mbCciw. Talvez não fosse impossível perceber isso, bem como tantas outras coisas, estudando diretamente as axiomatizações dessas duas lógicas, ou suas semânticas de valores de verdade; e, a bem dizer, não faltam precedentes dessa leitura *epistêmica* da operação de consistência nessas e em outras LIFs (cf. [12]). Apesar disso, penso que as semânticas de jogos, por serem — como os exemplos evidenciam — mais fáceis de aplicar na modelagem de padrões de racionalidade argumentativa, também mais naturalmente se prestam a explicitar interpretações possíveis dessas (e de outras) lógicas.

## 8.2 A pragmática da inconsistência

Haveria aqui, pois, uma heurística *geral* para se interpretarem pragmaticamente sistemas lógicos quaisquer por meio de jogos semânticos?

Embora isso por certo seja desejável, essa é uma questão que devemos deixar em aberto. Para nossos propósitos filosóficos, o que importa é que as semânticas de jogos parecem prestar-se a explicitar, dentre outras coisas, as diferenças de estilos de paraconsistência de LP e das LIFs ao nível da racionalidade argumentativa, — dos padrões de interação discursiva e inferencial entre agentes racionais e inteligentes. Isto é desejável e mesmo necessário por duas razões.

A primeira é que paraconsistência é uma noção que abrange lógicas distintas *demais* (cf. [36]). Sem nos alongarmos desnecessariamente nos detalhes deste exemplo, considere-se a paraconsistência de lógicas proposicionais *relevantes*. Uma condição em geral entendida como necessária de *relevância* inferencial é que  $\varphi$  não seja uma consequência de  $\Gamma$  a menos que  $\varphi$  compartilhe pelo menos uma variável proposicional com alguma fórmula em  $\Gamma$  [15], [30]. Intuitivamente, essa restrição expressaria uma noção mínima de que  $\Gamma$  e  $\varphi$  “falam do mesmo assunto”. Pois bem. Decorre dessa condição que o princípio de explosão falha em toda lógica relevante: afinal, para quaisquer variáveis proposicionais  $p, q$ , inferir  $q$  de  $\{p, \neg p\}$  viola esse princípio. No entanto, *nada* no conceito

de relevância assim exposto sugere que seria racional *admitir* contradições. A paraconsistência das lógicas relevantes resulta como corolário de um argumento mais amplo contra inferências triviais (ou, mais precisamente, contra a noção “irrelevante” de consequência dedutiva). Apesar disso, a relação clássica entre contradição e trivialidade pode bem não ser (e por certo não é) a única boa razão para evitarem-se contradições.

Muito diferentes são os casos de LP e das LIFs estudadas nesta dissertação. Cada qual a seu modo, essas são lógicas desenhadas para *acomodar* contradições, e *disso* é que resulta sua paraconsistência. Elas são, digamos, lógicas *favoráveis* à inconsistência, e não apenas paraconsistentes. Mas, assim sendo, levar essas lógicas a sério obriga a assumir o ônus de produzir exemplos plausíveis de casos em que seria racional aceitar contradições<sup>5</sup>, e exemplos condizentes com os diferentes tratamentos que elas dão à negação.

O que as semânticas de jogos parecem nos propiciar nesse sentido é, no mínimo, uma heurística para a construção desses exemplos, — uma que, unida à noção de que interpretações das variáveis proposicionais da linguagem poderiam ser tomadas como *fontes de informação* com certas propriedades (em oposição a tomá-las como modelos da *realidade* ela mesma, cf. [12], [13]), tem a vantagem de ser *deflacionária*<sup>6</sup>. Tal heurística, penso, é de todo *necessária*, ao menos no que concerne à filosofia das lógicas paraconsistentes estudadas nesta dissertação.

As mais resilientes objeções ao dialeteísmo de Priest, cuja lógica subjacente é LP, tem sido no sentido de que é difícil conceber como se conduziriam discussões racionais quando interlocutores poderiam, em princípio ao menos, aceitar simultaneamente uma proposição e sua negação [37], [35]. Como revela o exemplo, o entendimento de LP a partir da sua semântica de jogos tem o mérito de separar com precisão essa questão estritamente *pragmática* da questão *ontológica* de se uma proposição pode ser concomitantemente verdadeira e falsa.

No que concerne a mbC e mbCciw, e a tantas outras LIFs, como se disse no início desta dissertação, elas foram introduzidas por razões estritamente teóricas, como parte de um programa amplo de estudo da noção de consistência. Dessa perspectiva abstrata, a motivação para a introdução daquelas duas lógicas em particular são bem evidentes e naturais, uma vez que suas semânticas de

---

<sup>5</sup>Com efeito, esse é um dos critérios propostos pelo introdutor das lógicas paraconsistentes, Stanislaw Jaskowski, para que uma lógica que admite contradições seja razoável [12]

<sup>6</sup>Em particular, contornando portanto o dialeteísmo forte de Priest.

fato expressam duas possíveis concepções bastante intuitivas de consistência. De uma perspectiva concreta, no entanto, faltava-lhes ainda uma justificação de mesma qualidade. Se meu argumento foi bem-sucedido, teremos por meio das semântica de jogos coberto enfim essa distância que havia dos conceitos ao exemplo.

## Capítulo 9

### Conclusão

Nesta dissertação apresentei semânticas de jogos adequadas para mbC e mbCciw, e discuti como essas semânticas permitem a construção rigorosa de exemplos que ilustram a pragmática dessas lógicas. Para se obterem essas semânticas de jogos foi necessário introduzir o artifício das instâncias, a fim de forçar uma forma de composicionalidade às operações lógicas não-determinísticas de mbC e mbCciw. Esses resultados permitiram a comparação concreta das motivações e consequências da paraconsistência dessas duas LIFs com as de LP.

Historicamente, contudo, o foco da tradição das semânticas de jogos tem sido o estudo da quantificação, tanto em linguagem natural como em sistemas lógicos formais. mbC tem, na literatura, uma versão quantificada, a lógica conhecida como QmbC [12]. Uma questão que muito naturalmente se põe, pois, é se a semântica de jogos aqui obtida para mbC poderia ser adaptada para QmbC. Esse não seria de modo algum um feito trivial, pois é sabido que o não-determinismo das operações lógicas de mbC interage de forma complexa com os quantificadores. Se, todavia, esse resultado puder ser obtido, creio que se abriria então toda uma ampla via de interações entre estudos de paraconsistência e de semânticas de jogos. Esta dissertação é apenas um primeiro passo nessa via.

## Bibliografia

- [1] ACZEL, P. *Non-well-founded sets*. Stanford: Center for The Study of Language and Information, 1988.
- [2] AVRON, A.; ZAMANSKI, A. *Non-deterministic semantics for logical systems*. In: GABBAY, D. M.; GUENTHNER, F. (ed.). *Handbook of philosophical logic*. 2.<sup>a</sup> ed. Dordrecht: Springer, v. 16, 2011, pp. 227-304.
- [3] BASKENT, C. *Game-theoretical semantics for a non-classical logic*. *Journal of applied non-classical logic*, v. 26, 2016, n.º 3, pp. 208-239.
- [4] BASKENT, C.; CARRASQUEIRA, P. *Game-theoretical semantics for a logic of formal inconsistency*. (A ser publicado.)
- [5] BEALL, J. C. *Logic: the basics*. Londres: Routledge, 2010.
- [6] BEALL, J. C.; RESTALL, G. *Logical pluralism*. Oxford: Oxford University, 2006.
- [7] BESNARD, P.; HUNTER, A. *Elements of argumentation*. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2008.
- [8] BINMORE, K. *Playing for real*. Oxford: Oxford University, 2007.
- [9] BUENO, O.; COLYVAN, M. *Logical non-apriorism and the 'law' of non-contradiction*. In: ARMOUR-GARB, B.; BEALL, J. C.; PRIEST, G. (eds.). *The law of noncontradiction*. Oxford: Oxford University, 2004.
- [10] CARNIELLI, W. A. *et al. Analysis and synthesis of logics*. Dordrecht: Springer, 2008.

- 
- [11] CARNIELLI, W. A.; CONIGLIO, M. E.; MARCOS, J. *Logics of formal inconsistency*. In: GABBAY, D. M.; GUENTHNER, F. (ed.). *Handbook of philosophical logic*. 2<sup>a</sup> ed. Dordrecht: Springer, v. 14, 2007, pp. 1-93.
- [12] CARNIELLI, W. A.; CONIGLIO, M. E. *Paraconsistent logic: consistency, contradiction and negation*. Dordrecht: Springer, 2016.
- [13] COSTA, N. C. A. da; FRENCH, S. *Science and partial truth*. Oxford: Oxford University, 2003.
- [14] DUNN, J. M.; HARDEGREE, G. M. *Algebraic methods in philosophical logic*. Oxford: Oxford University, 2001.
- [15] DUNN, J. M.; RESTALL, G. *Relevance logic*. In: GABBAY, D. M.; GUENTHNER, F. (ed.). *Handbook of philosophical logic*. 2<sup>a</sup> ed. Dordrecht: Springer, v. 6, 2006, pp. 1-128.
- [16] ENDERTON, H. B. *A mathematical introduction to logic*. 2<sup>a</sup> ed. San Diego: Harcourt, 2001.
- [17] ENDERTON, H. B. *Elements of set theory*. Nova Iorque: Academic, 1977.
- [18] HINTIKKA, J. *Language games*. In: SAARINEN, E. *Game-theoretical semantics*. Dordrecht: D. Reidel, 1979, pp.1-26.
- [19] HINTIKKA, J. *Quantifiers in logic and quantifiers in natural languages*. In: SAARINEN, E. *Game-theoretical semantics*. Dordrecht: D. Reidel, 1979, pp. 27-48.
- [20] HINTIKKA, J. *The principles of mathematics revisited*. Cambridge: Cambridge University, 1996.
- [21] HINTIKKA, J.; KULAS, J. *The game of language*. Dordrecht: D. Reidel, 1983.
- [22] HRBACEK, K.; JECH, T. *Introduction to set theory*. 3<sup>a</sup> ed. Marcel Decker: Nova Iorque, 1999.
- [23] HUMBERSTONE, L. *The connectives*. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2011.
- [24] JECH, T. *Set theory*. Berlim: Springer, 2003.
- [25] JOHNSON-LAIRD, P. N. *How we reason*. Oxford: Oxford University, 2008.
-

- 
- [26] LEVY, A. *Basic set theory*. Mineola: Dover, 2002.
- [27] LEYTON-BROWN, K.; SHOHAM, Y. *Essentials of game theory*. s/l: Morgan & Claypool, 2008.
- [28] MANN, A. L.; SANDU, G.; SEVENSTER, M. *Independence-friendly logic*. Cambridge: Cambridge University, 2011.
- [29] MARES, E. D. *Negation*. In: HOSTEN, L.; PETTIGREW, R. *The Bloomsbury companion to philosophical logic*. Londres: Bloomsbury, 2011, pp. 180-215.
- [30] MARES, E. D. *Relevant logic*. Cambridge: Cambridge University, 2004.
- [31] MARION, M. *Why play logical games?*. In: MAJER, O.; PIETARINEN, A.-V.; TULENHEIMO, T. (eds.) *Games: unifying logic, language, and philosophy*. Dordrecht: Springer, 2009, pp. 3-26.
- [32] MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic*. 6.<sup>a</sup> ed. Boca Raton: CRC, 2015.
- [33] OSBORNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. *A course in game theory*. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2012.
- [34] PRIEST, G. *An introduction to non-classical logic*. Cambridge: Cambridge University, 2008.
- [35] PRIEST, G. *In contradiction*. Oxford: Oxford University, 2006.
- [36] PRIEST, G. *Paraconsistent logic*. In: GABBAY, D. M.; GUENTHNER, F. (ed.). *Handbook of philosophical logic*. 2.<sup>a</sup> ed. Dordrecht: Springer, v. 6, 2006, pp. 287-393.
- [37] PRIEST, G. *What's so bad about contradictions?*. In: ARMOUR-GARB, B.; BEALL, J. C.; PRIEST, G. (eds.). *The law of noncontradiction*. Oxford: Oxford University, 2004, pp. 23-38.
- [38] PUTNAM, H. *There is at least one a priori truth*. In: *Philosophical papers*. Cambridge: Cambridge University, v. 3, 1983, pp. 98-114.
- [39] RAHMAN, S.; TULENHEIMO, T. *From games to dialogues and back*. In: MAJER, O.; PIETARINEN, A.-V.; TULENHEIMO, T. (eds.) *Games: unifying logic, language, and philosophy*. Dordrecht: Springer, 2009, pp. 153-208.
-

- 
- [40] SHOENFIELD, J. R. *Mathematical logic*. Reading: Addison-Wesley, 1967.
- [41] SUPPES, P. *Axiomatic set theory*. Nova Iorque: Dover, 1972.
- [42] VÄÄNÄNEN, J. *Models and games*. Cambridge: Cambridge University, 2011.