

DENISE SILVA VILELA

**ANÁLISE DAS CRÍTICAS DE FREGE A CANTOR: A NOÇÃO DE NÚMERO E O
EMPREGO DA ABSTRAÇÃO NAS DEFINIÇÕES.**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Departamento de Filosofia do Instituto de
Filosofia e Ciências Humanas da Universidade
Estadual de Campinas, sob a orientação do
Prof. Dr. Michael Wrigley

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação defendida e aprovada
pela Comissão Julgadora
em 01 / 07 / 96.

Banca:



Prof. Dr. Michael B. Wrigley (orientador).

Prof. Dra. Ítala M. D'Otaviano.

Prof. Dr. Walter Carnielli.

Prof. Dr. Jairo José da Silva (suplente).

junho/1996

INSTITUIÇÃO: BC
 ENDEREÇO: 7/UNICAMP
 VILA: V711a
 V. Ex
 T. L. 80 80/28178
 PROC. 664/96
 C ☐ D ☒
 PREÇO R\$ 11,00
 DATA 10/08/96
 N.º CPOC M. 0009099 7-4

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
 BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP**

V711a

Vilela, Denise Silva

Análise das críticas de Frege a Cantor: a noção de número e o emprego da abstração nas definições / Denise Silva Vilela. - - Campinas, SP : [s.n.], 1996.

Orientador: Michael B. Wrigley.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Frege, Gottlob, 1848-1925. 2. Cantor, Georg, 1845-1918. 3. Número - conceito. 4. Teoria dos conjuntos.
 5. Números transfinitos. 6. Números cardinais. 7. Abstração. I. Wrigley, Michael. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.
 III. Título.

Ao Thales

AGRADECIMENTOS

Agradeço

à Capes pelo financiamento dessa pesquisa,
à orientação e à convivência com o Prof. Dr. Michael B. Wrigley,
à leitura cuidadosa e às sugestões dos membros da banca Prof. Dr. Walter Carnielli e Profa.
Dra. Ítala M. L. D'Ottaviano,
à participação do prof. Dr. Jairo José da Silva
à dedicação das funcionárias da biblioteca do CLE
aos auxílios dos funcionários do CLE e do IFCH
à atenção das colegas Francisca e Flávia e do Dr. Carlos Gonzáles que discutiram comigo a
teoria de conjuntos,
às correções de português de Cristina e de Maria Lúcia e aos auxílios nas traduções de alemão
de Frau Uta, Débora e Thales,
à D. Suad pelo *Les fondements de l'arithmétique- traduction et introduction de Claude
Imbert*
à amizade de Rita, Lilian e Yma
ao carinho dos meus pais, irmãos e sobrinhos.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	8
CAPÍTULO 1:	
A teoria dos números transfinitos de G. Cantor: suas diferentes estratégias de introdução do novo número	14
1.1 A primeira versão da teoria dos números transfinitos de G. Cantor ...	16
1.1.1 Descrição comentada da formação dos números finitos e transfinitos em 1883	17
1.1.2 Aprofundamento no significado da noção de enumerar (Anzahl)	25
1.1.3 Discussão sobre a relação entre potência e número cardinal	28
1.2 Considerações gerais sobre a concepção filosófica da matemática em Cantor	31
1.3 A nova estratégia na definição dos números transfinitos: o emprego da abstração em 1884-1895	44
1.3.1 A noção de conjunto em Cantor	46
1.3.2 As circunstâncias que antecedem o emprego da abstração nas definições de número	49
1.3.3 As definições por abstração	52
CAPÍTULO 2:	
A concepção de número e o conceito de objetividade em Frege: críticas a Cantor	58
2.1 As críticas de Frege a Cantor: ao artigo de 1883 nos <i>Fundamentos da Aritmética</i> e ao uso da abstração na definição de número a partir de 1884	58
2.1.1 A noção de número ordinal na mira de Frege e a resposta de Cantor	59

2.1.2 O ataque de Frege ao emprego da abstração nas definições de número	62
2.2 Conceito, objeto e extensão de conceito	65
2.3 A abstração para Frege: procedimento empirista-psicologista.....	70
2.3.1 O número não é propriedade do objeto e de coisas externas	72
2.3.2 A Independência entre o número e o sujeito.....	74
2.3.3 "O número como conjunto" descartado por Frege.....	77
2.3.4 Objetividade do número	79
2.3.5 O significado de abstração para Frege e a sua relação com psicologismo-empirismo	81
2.4 A definição de número nos <i>Fundamentos da Aritmética</i>	86
2.4.1 Os números aplicam-se a objetos só por meio de conceitos.	86
2.4.2 O esboço da definição de número	87
CAPÍTULO 3:	
Análise	92
3.1 Análise do conceito de número: ordinal ou cardinal?	93
3.2 Análise da equivalência entre as noções de 'potência' e 'número cardinal'	97
3.3 Análise do emprego da abstração por Cantor	101
3.3.1 O significado lógico da abstração	103
3.3.2 Abstração funcional em Cantor.....	106
3.4 Conclusão.....	109
BIBLIOGRAFIA	122

INTRODUÇÃO

Quando se diz que G. Cantor (1845-1918) é o pai da teoria de conjuntos isso não quer dizer, como literalmente pode parecer, que ele teve essa meta e, tampouco, que tenha produzido algo parecido com o que conhecemos hoje na teoria axiomática de conjuntos¹, embora muito do que temos na atualidade possa ser visto como um prosseguimento de suas formulações. Cantor tinha como objetivo introduzir os números transfinitos, que foram concebidos a partir da constatação da existência de conjuntos infinitos comparáveis, quando ele tentava resolver problemas relacionados com os números reais. Por exemplo, enquanto o conjunto dos números naturais é 'igualmente' infinito ao conjunto dos racionais, no sentido de ser possível corresponder um a um os seus elementos, esses últimos representam um infinito 'menor' que o conjunto dos números irracionais. Os diferentes números que poderiam representar esses conjuntos foram chamados 'números transfinitos' que, como se pode perceber pelo exemplo, foram determinados- definidos e justificados - a partir dos conjuntos.

Ocorreu que os resultados de Cantor, relativos à sequência dos números além dos conhecidos 1,2,3,..., resultaram, entre outras coisas, em uma gama de problemas que não se referem à noção de número, mas à noção de conjunto, duas noções inseparáveis na teoria de Cantor (TILES, 1989, p. 116), isto porque, para estabelecer os números transfinitos como uma continuação dos números finitos, Cantor explicava esses últimos, já supostamente existentes, também através de conjuntos. Mais especificamente, os problemas relativos à noção de infinito reduziram-se a problemas sobre conjuntos (HALLETT, 1984, p. 8). Assim, as dificuldades encontraram solução na teoria axiomática de conjuntos e isso pode significar duas coisas: que uma estrutura axiomática representa uma formulação mais rigorosa do que Cantor usava intuitivamente; e que a teoria dos números transfinitos foi embasada em conjuntos, tendo como consequência a substituição da noção de número, até então a mais elementar da aritmética, pela noção de conjunto que, através da teoria axiomática, adquiriu considerável importância na matemática a partir de então. Mas essa mudança não foi nada simples. Objetivamos refletir e discutir essa mudança através de temas relativos à noção de conjunto e não abordaremos diretamente a primeira questão.

Pretendemos deixar claro ao longo desta dissertação que a associação entre números e conjuntos representa um passo sofisticado dado por Cantor, que transitou também pela filosofia e teologia para justificar sua teoria de números e essa ligação. Como bem explica Hallett, o

¹Usaremos para essa comparação as exposições axiomáticas de (Halmos, F. 1973) e (Hrbacek, K. & Jech, T. 1984).

conceito de conjunto torna-se elementar- de fato, 'primitivo'- com os sistemas de axiomas e com isso oculta os problemas em torno dele, à medida que, sobre esse conceito, edificam-se diversas áreas da matemática. A sequência dos números naturais, por exemplo, é um caso particular de conjunto indutivo. O conceito de conjunto e a definição de número através dele, são questões problemáticas que podem ser elaboradas com a análise do trabalho de Cantor.

É importante lembrar que a noção de conjunto tornou-se elementar, mas isso não quer dizer que, para Cantor, ela constituiu o objeto fundamental da matemática² como é atualmente. Como fundador de uma nova área, Cantor oscilava entre noções intuitivas e a formalização delas, no caso entre a noção de conjunto do senso comum e aquela própria da matemática que ainda era tomada por ele intuitivamente e ganhava, pouco a pouco, um sentido próprio. Sendo assim, os números eram os objetos que mereceram maior destaque para Cantor (HALLETT, 1984, p. 8) e a sua associação a conjuntos exigiu explicações e novos conceitos. A definição de número como um conjunto é resultado de um processo sofisticado de elaboração conceitual, que se iniciou com Cantor, sendo esse o tema que permeia esta dissertação: as definições de número de Cantor através de conjuntos.

Selecionamos, para delimitar e dirigir esse tema, o ponto de vista de G. Frege (1846-1925), através das críticas que formulou aos trabalhos de Cantor. Autor de trabalhos de destaque sobre a noção de número, Frege será o interlocutor de Cantor nesta dissertação. Os temas que serão analisados são fornecidos pelas críticas que o primeiro fez ao segundo. Por exemplo, o conceito de conjunto e a definição de número são problematizados por Frege e podem ser elaborados analisando o trabalho de Cantor sob o seu ponto de vista. A escolha desse interlocutor justifica-se também porque Frege, em suas formulações, que teremos que explorar para compreender sua crítica a Cantor, fornece grandes contribuições para a teoria axiomática de conjuntos.

Os temas que serão analisados, alvos das críticas de Frege a Cantor, relacionam-se justamente com a dificuldade de associar números a conjuntos. Cantor introduziu noções intermediárias entre número e conjunto, ou seja, noções que faziam essa ligação. As noções intermediárias são, inicialmente, a de *enumerar* (*Anzahl*)³ e *potência* (*Mächtigkeit*), que se relacionam à noção de número em Cantor, a qual se caracteriza essencialmente por ser ordinal. Essa noção de *Anzahl* se opõe à noção de Frege, que significa número cardinal. Esse é um dos temas criticados por Frege e que será analisado.

²Quando usamos o termo matemática, em todo nosso texto, não estamos incluindo a geometria.

³O termo *Anzahl* será traduzido aqui por *enumerar*, seguindo a orientação de P. Jourdain (JOURDAIN, 1915, p. 52) e Hallett (HALLETT, 1984, p. 51, n.1) para diferenciar da palavra *Zahl*. Mais tarde Cantor não diferencia mais *enumerar* de número ordinal e, por isso, passa a empregar basicamente o último termo (*Anzahl*). Eventualmente, se não houver prejuízo no sentido, usamos a expressão anacrônica *número ordinal* (*Ordnungszahl*) para designar o *enumerar*.

As noções de *enumerar* e *potência* perderam a função de conectar número e conjunto quando a definição de número foi substituída, na teoria de Cantor, por um procedimento, o da *abstração* a partir de conjuntos. Portanto, o segundo tema diz respeito ao emprego da abstração nas definições que Cantor passa a dar, tanto aos números ordinais como aos cardinais.

Os dois temas convergem na complicada associação entre conjunto e número porque a noção de *enumerar*, do primeiro tema, e a de *abstração*, do segundo, são modos de associá-los. Essa associação demandou justificativas filosóficas. O escrúpulo em associar números a conjuntos foi abandonado na matemática de hoje, que se utiliza da noção de conjunto de modo imprescindível, inclusive para definir números.

Assim, o objetivo desta dissertação é analisar algumas das críticas de Frege a Cantor, lembrando, contudo, que aquele concordou e elogiou seus resultados matemáticos. As críticas se concentram basicamente nessas duas temas, a saber, a noção de número e o emprego da abstração nas definições. Como já dissemos acima, os problemas com a noção de número caem sobre a noção de conjunto que, por isso, também faz parte da nossa análise.

Os principais textos que vamos utilizar nessa análise, em ordem cronológica de publicação, são:

Ano	Autor	Títulos (original, reedição e traduções utilizadas)
1883	CANTOR	<i>Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.</i> Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten 5 Fondements d'une théorie générale des ensembles Foundations of a general theory of manifolds
1884	FREGE	Grundlagen der Arithmetik Fundamentos da Aritmética (doravante FA)
1885	CANTOR	Die Grundlagen der Arithmetik (Rezension der Schrift von Frege)
1887-8	CANTOR	Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten
1890	FREGE	[Draft towards a Review of Georg Cantor's <i>Gesammelte Abhandlungen zur Lehre vom transfiniten</i> (1887-8)]
1892	FREGE	Review of Georg Cantor, <i>Zur Lehre vom transfiniten</i> (1887-8).

A referência a essas publicações no decorrer do texto será feita pelo ano da publicação⁴. Frege refere-se a Cantor também no *Grundgesetze der Arithmetik*, a respeito da teoria dos números reais. Esse tema excede a proposta deste estudo e, portanto, não será abordado.

⁴As traduções do alemão para o português, quando apoiadas em outra, terão a fonte referida em seguida à referência primária. Além disso, indicaremos no rodapé o trecho original.

A motivação para análise do primeiro tema - a noção de número- surge de um dado frequentemente mencionado⁵, usualmente justificando a tradução do termo *Anzahl* por 'número cardinal', quando se trata dos FA. O fato é que Cantor e Frege empregam o mesmo termo, *Anzahl*, para designar noções diferentes, a saber, 'número ordinal' e 'número cardinal', respectivamente. Surge, então, a questão do significado de número para esses autores.

Esse tema justifica-se pela importância e expressão dos trabalhos de Frege e Cantor sobre 'número', embora feitos com abordagens e objetivos distintos, e também porque resultou na teoria axiomática de conjuntos a partir das soluções aos problemas levantados por esses autores. O projeto de Frege era encontrar os 'fundamentos seguros para a aritmética', que poderiam ser encontrados na lógica. Nos FA 'Frege ocupa-se do esboço informal da definição lógica de número e da demonstração lógica das leis aritméticas fundamentais a partir de leis lógicas' (SANTOS, 1983, p. 179). O resultado fundamental dessa obra é uma profunda análise da noção de número (IMBERT, 1969, p.29), expressa pelo subtítulo dos FA- "uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número". Cantor, por sua vez, tem um objetivo claro, não só em 1883 mas ao longo de suas publicações, de inserir os novos números, chamados transfinitos, no corpo do conhecimento matemático. Dessa meta, que demandava justificar e fundamentar sua 'descoberta' e acreditando que os novos números possuem os mesmos fundamentos que os números já admitidos, resultou uma elaborada associação entre números e conjuntos que culminou, como resultado de desenvolvimentos, em uma nova área inspirada pelos trabalhos de Cantor, em 'teorias axiomáticas de conjuntos', amplamente conhecidas por lógicos e matemáticos contemporâneos.

A motivação para análise do segundo tema -o recurso à abstração em definições por Cantor- decorre, de modo geral, do fato de esse termo ser usado com frequência quando se trata de explicar a formação dos conceitos matemáticos. Mais especificamente, diz respeito às correntes filosóficas que predominavam no período em que Frege e Cantor publicavam, denominadas de psicologismo e empirismo; a primeira trata os números como entidades mentais e a segunda remete aos objetos físicos e coleções as explicações sobre os números. Por um lado, é visível a opinião comum aos dois autores quanto à necessidade de se afastar interpretações empiristas e psicologistas da aritmética; contrasta com isso crítica de Frege a Cantor, acusando-o justamente de empirista e psicologista.

Para ilustrar muito rapidamente o contraste dessa situação, abordamos a opinião comum entre os autores mencionando um tema que é recorrente nos textos listados acima. Frege e Cantor concordam que há necessidade de afastar "o positivismo acadêmico cético presente na Alemanha" (CANTOR, 1885, p. 440 e FREGE, 1892, p. 181), o qual se refere ao que

⁵IMBERT, 1969, p.5; SANTOS, 1983, p. 203; CURRIE, 1982, p. 54, entre outros.

denominamos de psicologismo e empirismo nesse período naturalista do país, que se caracterizou, de modo geral, pela supervalorização das ciências empíricas que poderiam explicar até a lógica e a matemática. Esses elementos psicologista-empiristas inicialmente são negados por Frege nos FA (FREGE, 1884, parte I, II e III), na forma de uma crítica extensa e vigorosa; em seguida, Cantor elogia a reação de Frege a essa tendência na resenha dos FA em 1885 (CANTOR, 1885, p. 440); depois, são diretamente discutidos, negados e citados por Cantor em 1887 (CANTOR, 1887, p. 383-4) e, por último, repetidos e renegados literalmente por Frege (citação acima), com uma sutil ironia na resenha desse último artigo de Cantor em 1892 (FREGE, 1892, p. 181).

Identificamos a ironia e aí se encontra o contraste, porque, nessa resenha, Frege critica Cantor justamente como psicologista e empirista, sendo o recurso à abstração o alvo central, ao mesmo tempo que finaliza o texto repetindo as palavras de Cantor contra essa tendência.

Para abordar os temas da análise e realizá-la, apresentamos no capítulo 1 algumas noções básicas da teoria dos números transfinitos e as estratégias diferentes de definição dos novos números que aparecem nas sucessivas publicações da teoria de Cantor. A primeira publicação da teoria foi em 1883, e nela Cantor define o número transfinito ordinal e a noção de potência com base nos números ordinais. A descrição desse artigo e a ênfase à noção de ordem como estratégia da definição dos transfinitos compõem a seção 1.1. Sobre esse artigo enfatizamos seu conceito de número ordinal em detrimento da noção de número cardinal, não abordada por Cantor explicitamente. Salientamos, ainda, a força da noção de ordem na teoria dos números transfinitos e a existência de conceitos intermediários entre número e conjunto: *enumerable* e *potência*, sendo essa última uma característica particular da publicação de 1883, que ressaltamos aqui porque é importante para compreendermos o significado de abstração em Cantor.

Frege criticou sua noção de número ordinal nos FA e, por influência dessa crítica ou não, Cantor passou a definir número ordinal e número cardinal independente um do outro e, pelo mesmo processo, o recurso à abstração. Descrevemos as novas definições de Cantor na seção 1.3, onde também iniciamos nossa interpretação sobre o significado da abstração em suas definições. Essa interpretação é realizada dentro da concepção filosófica de Cantor, marcada por um tipo de platonismo, em que os objetos da matemática existem num reino à parte e as verdades da matemática se impõem, exigindo apenas formulações para que sejam integradas ao corpo dos conhecimentos. A concepção filosófica de Cantor é exposta na seção 1.2.

No capítulo 2 apresentamos inicialmente, na seção 2.1, as críticas de Frege a Cantor formuladas nas seções 85 e 86 dos FA e aquelas contidas em suas resenhas sobre os artigos de

Cantor. A partir dessas críticas, selecionamos os conteúdos da obra de Frege que precisam ser esclarecidos para que aquelas sejam compreendidas. São eles a concepção de empirismo e psicologismo, a concepção de abstração e a ligação dessa última com a corrente empirista-psicologista, explorada a partir dos FA e exposta adiante, na seção 2.2. Por último, na seção 2.3, apresentamos a definição e concepção de número de Frege e os termos que as compõem.

No último capítulo, passamos a analisar os temas dessa crítica, uma vez esclarecidas as noções envolvidas.

Nós nos propomos, em relação ao primeiro tema, a fazer uma análise conceitual da noção de número dentro das questões levantadas por Frege e Cantor. Como resultado desta análise, verificamos que o contraste entre as duas noções de *Anzahl* possibilita uma compreensão mais rica e apurada de cada uma -ordinal e cardinal- permitindo ainda explorar e conhecer profundamente a teoria de cada autor no limite da discussão entre eles. Conforme foi previsto no projeto inicial desta dissertação, o confronto das noções dos dois autores possibilitou uma análise mais profunda do que seria a análise de cada noção isoladamente. A análise das noções de número ordinal e cardinal é um tema de expressiva importância para a história e filosofia da matemática. Além disso, resultou dessa análise a identificação das noções intermediárias entre conjunto e número introduzidas por Cantor. Isso permitiu uma reflexão filosófica crucial sobre o emprego da noção de conjunto de modo estrutural. Essa reflexão representa ainda uma interpretação possível para o posterior emprego da 'abstração', discutido na segunda parte do capítulo 3.

Em relação ao segundo tema, o recurso à abstração na definição de números a partir de conjuntos, pretendemos avaliar a pertinência da crítica de Frege a Cantor e com isso esclarecer o contraste entre as acusações a Cantor e suas próprias afirmações. Será que Cantor, que nem sempre é claro em suas explicações, apresenta-se contraditório? Ao longo desta dissertação poderemos esclarecer qual seria a posição de Cantor, o que nos permitirá concluir que o apelo frequente à intuição e o uso de termos característicos do psicologismo-empirismo é próprio da circunstância em que ele se encontrava, a saber, implementando uma nova área que possuía o conjunto como noção fundamental. Conjunto, na época, era uma noção de fronteira entre a filosofia e a matemática e a ansia pela inserção dos novos números, respaldados por sua concepção filosófica, sobrepõe sua preocupação com relação ao rigor e à cautela com termos que eram alvo da crítica de Frege. Por essa razão, avaliamos que não é pertinente a crítica em toda sua abrangência, porque Frege atacou um tipo de psicologismo 'fraco' e tomou seu ponto de vista para avaliar os trabalhos de Cantor.

Tomaremos o cuidado, durante a exposição das noções de Cantor, de explicar a relação delas com as formulações atuais da teoria axiomática de conjuntos, com o propósito de evitar compreensão deturpada ou confusa das noções cantorianas abordadas nesta dissertação.

Sobre isso, vale esclarecer que não pretendemos identificar a relação dos conceitos de Cantor com os atuais, ou seja, comparamos as noções e mencionamos a terminologia contemporânea, na medida necessária para compreendermos as noções de Cantor. Não nos propomos a identificar precisamente as contribuições do autor na formulação atual da teoria de conjuntos, pois essa tarefa exigiria um empenho que ultrapassa, pela complexidade, nosso objetivo. Isso porque a maneira pela qual Cantor desenvolveu e alcançou seus resultados, muitos deles presentes na teoria contemporânea, é muito diferente da forma axiomática da apresentação atual, inclusive no que diz respeito à relação número e conjunto, que não era imediata como hoje⁶. Outra grande diferença entre a abordagem de Cantor e a teoria axiomática de conjuntos é que ele não usa axiomas matemáticos mas suposições filosóficas mais amplas, que exemplificaremos oportunamente. As contribuições de Frege também poderiam ser identificadas rigorosamente, mas serão apenas rapidamente mencionadas.

Acentuamos que esses temas são sugeridos por Frege nos comentários que tece à pesquisa de Cantor e, ainda, que o limite da nossa análise foi extraído da própria discussão, ou seja, aprofundamos a análise até que o argumento extraído do autor fosse esclarecido. Nesse sentido, esclarecemos, ainda, que as noções de Cantor e sua teoria são o objeto principal desta dissertação, enquanto as críticas de Frege nos servem de referência.

CAPÍTULO 1: A TEORIA DOS NÚMEROS TRANSFINITOS DE G. CANTOR: SUAS DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE INTRODUÇÃO DO NOVO NÚMERO

A origem da noção dos números transfinitos nos estudos de Cantor é anterior ao artigo que expõe a teoria. Ela está apresentada no artigo de 1874⁷, em que ele demonstrou que o conjunto dos números irracionais, tema que ocupava os matemáticos da época, não é enumerável, isto é, que não é possível fazer uma correspondência entre um conjunto enumerável, por exemplo o dos números naturais, e o conjunto dos números irracionais, elemento a elemento⁸. Está implícito, nesse resultado, que existem conjuntos infinitos de 'tamanhos' diferentes: por exemplo, o conjunto dos números naturais 'é menor' que o conjunto dos números irracionais. Uma nova noção foi empregada para expressar o que, intuitivamente, foi chamado de 'tamanho de conjuntos infinitos': *potência de conjuntos*. Observamos que essa

⁶Sobre a relação dos conceitos e resultados de Cantor com a teoria axiomática atual ver, por exemplo, a segunda parte do livro de Hallett (HALLETT, 1984, parte 2); (TILES, 1989) e (CAVAILLÈS, 1962).

⁷"Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", publicado em 1874. Uma tradução para o francês foi publicada em 1883.

⁸Chamamos essa correspondência de correspondência 1-1. Um conjunto é dito enumerável quando é possível correspondê-lo 1-1 com os números naturais.

noção introduzida por Cantor para comparar conjuntos através da correspondência entre seus elementos não recorre à noção de número, isto é, dois conjuntos têm a mesma potência se for possível estabelecer uma correspondência 1-1 entre eles.

O resultado central do artigo de 1874 é a caracterização dos números reais, conteúdo da área da 'análise matemática'⁹. A análise, como diz Pollard, é inspiração e justificativa, como veremos na seção 1.1.1, para teoria dos números transfinitos de Cantor (POLLARD, 1990, p. 33). E assim, uma importante consequência extrapola a área da 'análise', em que Cantor vinha trabalhando, através da concepção de conjuntos infinitos distintos, abrindo caminho para uma nova teoria, a dos números transfinitos, pois a comparação de conjuntos por correspondência 1-1 entre seus elementos determina a comparação da cardinalidade deles.

A primeira versão da teoria dos números transfinitos foi publicada em 1883 sob o título *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*¹⁰. Mas, especificamente no artigo de 1883, a noção que possibilita a definição do número transfinito, diferentemente da sua origem cardinal, é a de número ordinal (*Anzahl*) e a de conjunto bem ordenado. Cantor desenvolve expressivamente a teoria de números ordinais e determina, em 1883, sobre a natureza do número, seu caráter inicialmente ordinal e a mesma 'realidade' dos números finitos e transfinitos. Queremos mostrar que nessa publicação o número ordinal é o pilar da teoria e antecede a do número cardinal (seção 1.1), se é que podemos afirmar a existência de uma teoria de cardinais nessa primeira versão.

As dificuldades que surgem com as noção de ordem, fundamental da teoria dos números transfinitos, em 1883, podem ter levado Cantor a tentar outra estratégia para a definição dos números transfinitos. Cantor passa a definir os números transfinitos ordinais e cardinais independentes um do outro, sendo que as duas noções são igualmente definidas por abstração de conjuntos e, assim, os números ordinais e cardinais transfinitos apresentam *status* semelhantes. As definições por abstração são apresentadas não só na publicação de 1887, que reúne artigos e correspondências datados de 1884 em diante, como também nos artigos de 1895 e 1897.

⁹Há outros resultados que não são relevantes para nós, como outra demonstração do teorema de Liouville, resultado explicitado pelo próprio autor (CANTOR, 1874, p. 306).

¹⁰A referência a este artigo será feita pelo ano desta publicação, 1883. Ele foi publicado originalmente como parte 5 de uma série de artigos que se intitulam *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Em seguida foi reeditado isoladamente com o título *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Utilizamos também a tradução parcial deste artigo para o francês - *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, *Acta Mathematica*, 2, 381-408, 1883 e uma tradução mais recente para o inglês. O número da página, de onde é extraída uma citação, refere-se a essa tradução para o inglês. Indicamos também a seção correspondente para facilitar a localização da referência em outras versões.

É importante observar que o objetivo e a estratégia de Cantor permanecem nas outras versões que se modificam quanto à abordagem da teoria¹¹. Para alcançar seu objetivo, ou seja, generalizar a noção de número, Cantor apresentou os números transfinitos formados a partir dos mesmos princípios (que expomos abaixo) que os números finitos. Esse objetivo e estratégia - introduzir os números transfinitos explicando-os pelos mesmos princípios que os finitos - é importante para nossa abordagem porque, de alguma forma, determina a trajetória matemática de Cantor e também porque, ao trabalhar para introduzir os números transfinitos, ele desenvolve sua noção de número em geral, particularmente a noção de número finito, explorada nesta dissertação.

1.1 A PRIMEIRA VERSÃO DA TEORIA DOS NÚMEROS TRANSFINITOS DE G. CANTOR

As primeiras críticas de Frege a Cantor encontram-se nas seções 85 e 86 dos FA que foram dedicadas a comentar uma nova teoria elaborada por Cantor. Frege se refere ao artigo de 1883 que apresenta a primeira versão 'Teoria dos Números Transfinitos'. Nosso objetivo nesta primeira seção é expor os principais conceitos e esboçar rapidamente a teoria de Cantor conforme essa publicação. Com isso pretendemos ter clareza das noções de Cantor que foram criticadas por Frege e compreender como Cantor fez a ligação entre a noção de número e conjunto no artigo de 1883.

Para facilitar a compreensão dos conceitos de enumeral e potência, próprios do artigo de 1883, vamos antes compará-los às noções contemporâneas de número ordinal e número cardinal respectivamente. A noção de enumeral pode ser compreendida a partir da noção de 'tipo de ordem': o enumeral é um caso particular de tipo de ordem, isto é, é o tipo de ordem de conjuntos bem ordenados, onde tipo de ordem possui o mesmo significado no texto de Cantor e nos textos contemporâneos (HRBACEK & JECH, 1984, p. 85 e 139). Observamos, em relação à noção de potência, que ela corresponderia à noção de número cardinal e é a essa noção atual, familiar para nós, que podemos compará-la. Além disso, essa noção foi posteriormente denominada assim pelo próprio Cantor.

Entretanto, pelos detalhes que apresentaremos adiante, relativos à necessidade de justificar a teoria, veremos que há uma diferença, importante na nossa abordagem, entre enumeral e 'número ordinal', assim como entre potência e 'número cardinal', e que a expressão 'número cardinal' nem é empregada no artigo de 1883. Isto é, as noções de enumeral e potência não correspondem exatamente às noções de número ordinal e cardinal. Essa comparação com noções atuais nos dá uma idéia mais grosseira dos significados dos conceitos, porém suficiente

¹¹Cantor reafirma esse objetivo e método de generalizar a noção de número em 1895 (CANTOR, 1895, s.5, p. 97-98).

para acompanharmos o estudo do artigo. Após a descrição da primeira apresentação da teoria dos números transfinitos, explicaremos o sentido preciso de enumeral e daremos uma possível interpretação para potência (seções 1.1.2 e 1.1.3). No artigo de 1883, há uma diferença entre enumeral e número ordinal e entre potência e número cardinal que queremos ressaltar nesta seção, por ser fundamental para nosso objetivo. O aprofundamento no significado dessas noções nos possibilita uma interpretação do conceito de abstração, revelando a dificuldade de conexão entre número e conjunto.

Salientamos que, apesar de o próprio Cantor denominá-la também número cardinal depois de 1883, a interpretação que daremos se restringe a essa primeira publicação da teoria. Salientamos, ainda, que o que se denomina 'Axioma das Potências' (HALMOS, p. 20) na teoria axiomática de conjuntos não se relaciona com a 'potência de um conjunto', termo cantoriano empregado nesta dissertação.

Os termos empregados nesta seção referem-se exclusivamente aos termos e noções de Cantor empregados em 1883, salvo exceções explicitamente anunciadas.

A estratégia de Cantor para cumprir o objetivo de introduzir os números transfinitos no artigo de 1883 é 'generalizar a noção de números inteiros', isto é, ele pretende estender o conjunto dos números inteiros positivos¹², através da introdução dos números infinitos, que recebem um novo nome - 'números transfinitos' - devido ao significado delimitado e específico que passam a ter na teoria de Cantor.

1.1.1 Descrição comentada da formação dos números finitos e transfinitos em 1883

Focalizamos nessa seção os procedimentos e resultados matemáticos para introdução dos números transfinitos.

A noção de enumeral, que representa 'o tipo de ordem de conjuntos bem ordenados', estratégica para a obtenção do novo número, traz a suposição de se poder ordenar um conjunto qualquer. Cantor denomina o conjunto que origina o enumeral de *conjunto bem ordenado* e o define da seguinte maneira :

"Por um conjunto ou sistema *bem ordenado* entende-se todo sistema bem definido onde os elementos são entre eles unidos por uma sucessão dada e determinada, de modo que haja *um primeiro elemento do sistema*; cada elemento (desde que não seja o último da sucessão) é seguido imediatamente de um outro determinado e a cada sistema arbitrário de elementos, finito ou infinito, pertence um elemento determinado que é seguido imediatamente dentro da sucessão (desde

¹²Usamos para designar esses números a expressão 'números naturais', não empregada por Cantor.

que dentro do conjunto haja elementos que seguem todos os elementos do sistema parcial considerado)" (CANTOR, 1883, s.2 p. 72- grifo do autor).

Todas essas noções parecem muito corretas para Cantor e, portanto, ele acredita que:

"é sempre possível colocar todo conjunto *bem-definido* na forma de conjunto bem ordenado" (CANTOR, 1883, s.2, p. 72)¹³.

A postulação da boa ordem para qualquer conjunto tem implicações de natureza filosófica e matemática, porque traz dificuldades que Cantor não consegue solucionar, e que mencionaremos na última seção desse capítulo.

Tendo isso como pressuposto, Cantor inicia o artigo de 1883 definindo o 'infinito atual' que merece longas discussões que fogem do nosso objetivo. Cantor define, ao lado da noção de *infinito próprio* comumente aceita, o *infinito impróprio*, ou infinito atual, que significa considerar o infinito como um todo e não apenas a possibilidade potencial do conjunto de aumentar indefinidamente:

"...a primeira forma se apresenta como um infinito variável [o infinito próprio] e a segunda como um infinito absolutamente determinado [o infinito atual ou impróprio]" (CANTOR, 1883, s.1 p. 70).

A suposição do infinito atual é uma hipótese filosófica de amplo alcance. Para nosso objetivo é suficiente compreender parte do significado dessa suposição filosófica, aquela inserida na necessidade de Cantor de manipular os conjuntos infinitos como objetos matemáticos determinados. Ao comparar o que intuitivamente seria chamado de 'tamanhos' diferentes de conjuntos infinitos ou, precisamente, 'os conjuntos infinitos possuem potências diferentes', Cantor impõe 'determinação' aos conjuntos infinitos, o que possibilita manipular os conjuntos infinitos do mesmo modo que se faz com os conjuntos finitos, dos quais conhecemos cada um dos elementos, o começo e o final do conjunto. Podemos identificar com isso que conceber o infinito como um todo conduz a resultados semelhantes aos da noção de potência [*Mächtigkeit*]¹⁴, porque a noção de potência pressupõe considerar os conjuntos em sua totalidade. Do ponto de vista operacional, a suposição do infinito atual rompe com o processo sucessivo possibilitando, entre outras coisas, alcançar o número transfinito, independentemente do processo potencial de percorrer todos os números anteriores, o que obviamente torna inviável os novos números.

Sobre a hipótese filosófica de Cantor- do infinito atual- é preciso ainda esclarecer que ela não corresponde ao 'axioma do infinito' admitido na contemporânea teoria axiomática de

¹³ Esta é uma forma equivalente ao que hoje denominamos 'axioma da escolha'.

¹⁴ Jourdain (JOURDAIN, 1915, p. 46) concorda com isso. Ele afirma: "A concepção de potência contém, como um caso particular, a noção de número num todo [*whole number*]..." (JOURDAIN, 1915, p. 46).

conjuntos, necessária para garantir a existência de 'conjuntos indutivos', dos quais os números naturais representam um caso particular (HRBACEK & JECH, 1984, p. 49-50), ainda que ambos - o axioma do infinito e a pressuposição do infinito atual- possibilitem manipular conjuntos infinitos e considerá-los em sua totalidade¹⁵. De fato, tentar comparar a imposição do infinito atual de Cantor com o axioma do infinito é uma tarefa complicada devido ao diferente propósito de cada uma das suposições, isto é, a suposição filosófica do infinito atual é mais ampla na medida em que permite *também* determinações matemáticas. Além disso, por ser o axioma do infinito existencial e sabendo que Cantor supunha a existência dos números naturais, naturalmente não precisava de axiomas que garantissem a existência de um número e do seu sucessor.

A ordem das 'descobertas' de Cantor não corresponde à ordem da exposição, na versão de 1883 da teoria dos números transfinitos. Ao contrário, a noção de potência, formulada desde 1874, nesse artigo é apresentada como posterior aos conceitos de ordinalidade que se estruturam pelas 'classes de números' que, por sua vez, são 'geradas pelos princípios de formação dos números'. Apresentamos o significado de cada uma dessas noções, na sequência lógica do artigo, isto é, apontando a dependência entre elas até alcançarmos a noção de potência, conforme exposta por Cantor em 1883. Com isso, queremos enfatizar a estratégia de Cantor em 1883 para a introdução dos números transfinitos, pautada na noção de ordem.

Cantor vai formar os números, finitos e transfinitos, através de três princípios que, na sequência de números, determinam divisões 'naturais' chamadas classes de números. O primeiro princípio forma os números finitos- classe (I)- pela adição de unidades:

"A formação dos números inteiros reais [*reellen*]¹⁶ finitos [1, 2, 3, ..., ν , ...-classe (I)] repousa sobre o princípio de adição de unidades a um número já formado. Denominarei o *primeiro princípio de formação*."
(CANTOR, 1883, a.11 p. 87)

Parafraseando Cantor na sequência desta seção, ele introduz ω -o primeiro número transfinito, através do *segundo princípio de formação*: nos infinitos números da classe (I), não há um número maior que todos os outros. Seria, portanto, contraditório falar de um número máximo da classe (I); contudo, pode, por outra parte, imaginar-se um novo número, que chamaremos de ω e que serve para exprimir todo o conjunto (I) que foi dado antes pela lei de sucessão natural. Pode mesmo representar o novo número ω como limite para o qual tendem os

¹⁵O axioma do infinito garante também, inclusive, a existência dos conjuntos infinitos.

¹⁶Pelo sentido da sentença, pode-se perceber que Cantor usa aqui, como em outros momentos do texto, a palavra 'real', como um adjetivo relativamente a existência do número, e não no sentido usual na matemática- o conjunto dos números racionais e irracionais. As palavras em alemão são diferentes: *reellen* e *realen Zahlen*, respectivamente. Nas traduções essa diferença não aparece. Ver (DAUBEN, 1979, p. 328, nota 8).

números v , com a condição de ω ser o menor inteiro que segue todos os números v , de modo que se declara superior a todos os números v . O novo número ω representa ao mesmo tempo a seqüência dos números finitos em sua ordem natural e a unificação das unidades num todo "similar ao caminho pelo qual v é....[ambas as coisas, seqüência e totalidade]" (CANTOR, 1883, s. 11, p. 87).

A combinação e a aplicação sucessiva, do primeiro e segundo princípio de formação, geram a segunda classe de números -números ordinais transfinitos- mas não permitem transpor a segunda classe para prosseguir a formação dos números: pelo segundo princípio obtém-se ω , limite da primeira classe de números $1, 2, 3, \dots, v, \dots$; aplicando novamente o primeiro princípio de adição de unidades sobre ω , obtém-se: $\omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+v, \dots$; o limite dessa seqüência considerada desde 1 é 2ω , sobre o qual pode-se aplicar novamente o primeiro princípio e assim nunca termina a formação da segunda classe de números: $1, 2, 3, \dots, v, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+v, \dots, 2\omega, 2\omega+1, 2\omega+2, 2\omega+3, \dots, 2\omega+v, \dots, 3\omega, 3\omega+1, \dots, v\omega, \dots, \omega^2, \dots, v_0\omega^{n+v_1}\omega^{n-1} + v_n, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \alpha, \dots$ ¹⁷.

Para transpor a segunda classe, Cantor introduz o terceiro princípio, denominado *princípio de limitação*, que produz cortes na sucessão de números transfinitos interrompendo a seqüência dos números formados pela aplicação sucessiva do primeiro e do segundo princípio, possibilitando transpor da segunda para a terceira classe e dessa para a seguinte e assim por diante. Este princípio tem com o objetivo produzir cortes na sucessão de números transfinitos e distinguir as diversas classes. Cantor argumenta em favor da interrupção da segunda classe através de uma característica comum a todos os números formados a partir da aplicação do segundo princípio, isto é, a partir do ω :

"Se nós ponderarmos que todos aqueles números obtidos até o presente satisfazem uma certa condição [ter potência igual a da primeira classe de número, $\aleph_0$ diríamos hoje], nós veremos que esta condição, se nós a colocamos obrigatória a todos os números a serem formados, esta condição nos apareceria como um terceiro princípio, que nós chamaremos de *parada ou princípio de limitação*..." (CANTOR, 1883, s. 11, p. 88).

Na seqüência da sua exposição, Cantor diz que vai mostrar (§12 e §13) que, em virtude deste princípio, a segunda classe assim delimitada não apenas tem a potência maior que a primeira classe de números, 'mas precisamente a potência imediatamente superior, e por

¹⁷Na notação atual, o que Cantor denota $2\omega, 3\omega$, etc, encontra-se $\omega 2, \omega 3$, etc (JECH, 1984, p. 135).

consequência a segunda potência¹⁸ (CANTOR, 1883, s. 11, p. 88). O primeiro número da terceira classe, ao qual Cantor se refere na seção 13, é denotado por Ω .

Aplicando sucessivamente os três princípios, obtém-se todos os números ordinais e ainda, simultaneamente, um representante de cada potência, consequência dos princípios que 'separam' os números formados em classes :

"É possível obter, dentro da sequência absolutamente infinita de números, divisões naturais, que eu denominarei classe de números...A primeira classe de números (I) é o sistema de números finitos 1, 2, 3, ... v , ...; vem em seguida a segunda classe de números (II), composta de certos números inteiros [ganzen] infinitos α de acordo com sua ordem de sucessão determinada: ω , $\omega+1$, $\omega+2$, ..., 2ω , $2\omega+1$, ..., $v_0\omega^n + v_1\omega^{n-1} + v_n$, ..., ω^ω , ..., ω^{ω^ω} , ..., α , ... à segunda classe segue a terceira, e depois a quarta classe de números e assim sucessivamente" (CANTOR, 1883, s.1 p. 71¹⁹)

Antes de prosseguir na descrição do artigo de 1883, a partir mesmo da citação acima que introduz indiretamente as potências, ressaltamos a noção de ordem nos princípios de formação e nas classes de números. Observamos, inicialmente, que cada classe é composta de números ordinais. Podemos respaldar essa afirmação na intenção de Cantor de 'generalizar os números inteiros', visto que se refere ao número genérico α da segunda classe como 'inteiro'. Esses são da mesma natureza lógica que os números finitos explicitamente afirmados ordinais porque são formados pelos mesmos princípios. Observamos também que, no segundo princípio, a forte presença da noção de ordem se destaca, pois o primeiro número transfinito ω é definido como o primeiro número que segue após todos, limite da primeira classe de números. Esse número serve para exprimir a totalidade da primeira classe num todo, dada sua ordem de sucessão natural (CANTOR, 1883, s 11, p. 87 - grifo nosso).

Se nos retivermos um pouco mais na segunda classe de números, observaremos que cada numeral corresponde, por construção, a uma sequência ordenada determinada: por exemplo, o número α corresponde à sequência 1, 2, 3, ..., $\alpha-1$ ²⁰. A recíproca deste resultado, que Cantor sempre acreditou verdadeira, vale se admitimos, como ele, que todo conjunto pode ser bem ordenado:

¹⁸Explicaremos melhor a noção de potência em páginas subseqüentes apesar de estarmos usando tal noção para explicar este terceiro princípio.

¹⁹No artigo original e a tradução para o inglês não aparece a enumeração dos números da segunda classe. Essa enumeração assim como outros exemplos que daremos adiante só aparecem na tradução para o francês, que, segundo Dauben, foi supervisionada por Cantor (DAUBEN, 1979, p. 96). A referência precisa da citação é (CANTOR, *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, 1883, p. 383-4).

²⁰Cantor demonstra esse resultado no artigo de 1897, seção 15, teorema H (CANTOR, 1897, p. 165-166). A recíproca do teorema é discutida por Tiles (TILES, 1989, p. 110-111).

"...todo sistema de potência da primeira potência [classe] pode estar enumerado por um número da segunda classe de número e só por estes, e por outro lado, pode sempre colocar-se uma ordem de sucessão nos elementos do sistema da primeira classe tal que o sistema seja ordenado por um enumeral da segunda classe de números dados ao acaso, número que expressa o enumeral dos elementos do sistema em relação a esta sucessão." (CANTOR, 1883, s.2 p. 72)²¹.

Regras análogas se aplicam a sistemas de potências mais elevadas. O mesmo não ocorre para conjuntos finitos que possuem o mesmo enumeral qualquer que seja a sucessão.

É importante notar no resultado: 'dado um α qualquer podemos ordenar um determinado conjunto de modo que ele possua como enumeral o número α ', que o resultado, tem como condição necessária supor que todo conjunto pode ser bem ordenado. Por exemplo, cada número da segunda classe pode ser pensado como que obtido por uma seqüência de números naturais ordenada de forma mais ou menos complicada (TILES, 1989, p. 105). Na recíproca do resultado, que afirma que todo conjunto bem ordenado possui como enumeral um número da classe de números, está implícito que, na sucessão de números ordinais, encontra-se o número de um dado enumeral de um conjunto qualquer. Isto quer dizer, por exemplo, que a cada seqüência de números da primeira classe pode atribuir-se um número da segunda classe ou, ao considerarmos um modo de bem ordenar os racionais ou os reais, eles corresponderiam, respectivamente, a algum α da segunda classe de números (ele pode ser escrito como combinação dos ω (RUSSELL, 1903, p. 312), ou a um número da terceira classe de números. De modo geral, tomamos o exemplo extraído de Tiles, dado 3ω ordenamos os números naturais assim: (1,4,7,10,...2,5,8,11,...3,6,9,12,...); dado agora o conjunto (2,4,6,...3,6,9,...5,10,15,...), a seqüência dos números formada pelo números divisíveis por 2, em seguida pelos números divisíveis por 3, depois pelos divisíveis por 5, e por todos os números primos, encontramos na segunda classe de números o $\omega.\omega$ (TILES, 1989, p. 105).

Sobre isso, vale notar ainda, em comparação com teoria axiomática dos conjuntos, que o resultado que Cantor obteve é a própria definição atual de número ordinal: um conjunto α é um número ordinal se α é um conjunto bem ordenado pela relação $\in$ (de pertinência) e α é transitivo (HRBACEK & JECH, 1984, p. 139). Os axiomas da teoria axiomática dos conjuntos e suas relações previamente estabelecidas com seus resultados desenvolvidos possibilitaram a atual definição. A estratégia de Cantor, estabelecer os números finitos e transfinitos pelos mesmos princípios, produziu a seqüência de números como uma generalização dos números

²¹Este teorema relaciona potência e enumeral. Voltamos a nos referir a ele a seguir

naturais. Isso nos permite afirmar, e reforça a argumentação da seção 1.1.3, que, para Cantor, os números, em sua formulação de 1883, eram ordinais.

Retomamos a descrição do artigo com exemplos de números ordinais de conjuntos bem ordenados: o enumeral de número ω dos três conjuntos bem ordenados compostos de números da primeira classe, $1, 2, 3, \dots$, ou da segunda classe, representado por α :

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_v, \alpha_{v+1}, \dots)$

$(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_3, \dots, \alpha_{2v}, \alpha_{2v+1}, \dots)$

$(1, 2, 3, \dots, v, \dots)$

Os conjuntos abaixo são bem ordenados, a eles se atribuem os números: $\omega+2$ e 2ω :

$(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_v, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_1, \alpha_2)$

$(\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2v-1}, \alpha_{2v+1}, \dots, \alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2v-2}, \alpha_{2v}, \dots)^{22}$.

Tendo definido os princípios e formado as classes de números, Cantor associa a cada classe uma potência: aos conjuntos capazes de correspondência 1-1 com a primeira classe de números concede-se a menor potência do sistema infinito [de potências] (CANTOR, 1883, s.1 p. 71); a potência da segunda classe de números difere da potência da primeira classe (demonstrado na seção 12) e também é a potência imediatamente superior (demonstrado na seção 13). Essa potência será denominada potência da segunda classe de números ou segunda potência e ela corresponde aos conjuntos capazes de correspondência 1-1 com a segunda classe de números. De maneira análoga, à terceira classe corresponde a terceira potência, etc. Isso quer dizer que os mesmos princípios de formação que introduzem os números ordinais determinam, na seqüência deles, 'cortes' que diferenciam as classes por suas potências correspondentes.

"...as classes de números...mostram-se ser representantes naturais da lícita seqüência ascendente das potências dos conjuntos bem definidos." (CANTOR, 1883, s.1, p. 71).

Vemos com isso que as potências são definidas a partir das classes, ou seja, com base nos números ordinais. Cantor afirma que 'a introdução dos novos números [transfinitos ordinais] é significativa para o desenvolvimento e precisão do conceito de potência' (CANTOR, 1883, s.1, p. 71). Ele parece querer dizer que as diferentes classes (de ordinais) representam cada potência e, ainda que apenas em sistemas infinitos, distingue-se claramente potência de enumeral. Entretanto, vale notar que Cantor admite explicitamente, como era de se esperar devido à trajetória do desenvolvimento de sua teoria exposto acima, a independência entre as noções de potência e ordem apesar de optar por determinar essa noção a partir de

²² ω é um número do enumeral do conjunto indicado. A tradução para o francês, que traz esses exemplos não diferencia os dois termos (CANTOR, *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, 1883, s.2 p. 393-394).

classe e, portanto, dependente da noção de ordem. Observamos na explicação que o autor apresenta de potência que para Cantor as duas noções são conceitualmente independentes:

"Em sistemas finitos a potência corresponde ao *enumerat* dos elementos, pois esses sistemas, como se sabe, independentemente da forma como estão arranjados, possuem o mesmo *enumerat* de elementos.

Para sistemas infinitos, ao contrário, não é possível fazer uma generalização, nem a partir de meu trabalho nem de outros, e dizer que a potência é o *enumerat* de elementos, definidos com precisão²³. Mas pode-se atribuir a cada sistema uma potência determinada e *completamente independente da ordem de seus elementos*." (CANTOR, 1883, s.1 p. 71 -grifo nosso).

Todos os exemplos, (ν) e (α_ν) acima ((α_ν) é a forma simples de representar a série²⁴ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_\nu, \dots$ (CANTOR, 1883, s.12, p. 88)), têm a potência da classe (I), posteriormente denominada $\aleph_0$. A relação entre o *enumerat* e a potência é que ambos se atribuem a conjuntos bem definidos, diz Cantor, e que a classe de uma potência determinada pode ser enumerada por qualquer número da classe de potência superior (CANTOR, 1883, s.2, p. 72),

O significado do conceito de potência não é explicitado em nenhum momento até a publicação de 1883, inclusive. Nesse artigo, por exemplo, Cantor afirma já ter apresentado a noção de potência nos artigos de 1874 e 1878 (CANTOR, 1883, s.1, p. 71). Buscando as referências observa-se que, no artigo de 1874, onde é dado o primeiro passo para a introdução dessa noção, como indicamos acima, Cantor determina quando dois conjuntos têm a mesma potência: quando é possível estabelecer uma correspondência 1-1 entre eles. A mesma definição de igualdade de potências encontra-se no artigo de 1878 e no artigo de 1883:

"A mesma potência pode ser atribuída a dois conjuntos se eles podem ser coordenados um ao outro reciprocamente, univocamente, elemento a elemento." (CANTOR, 1883, s.1, p. 71).

Em 1878, Cantor apresenta também a idéia intuitiva do conceito: a potência corresponde ao 'número de elementos' quando se trata de conjuntos finitos. Apesar de não ser encontrada uma definição explícita de potência, as características deste conceito são mencionadas frequentemente, entre as quais, como na citação acima, destaca-se que a potência não depende

²³Isso quer dizer apenas que, para conjuntos infinitos, os conceitos de potência e *enumerat* não coincidem.

²⁴Cantor chama de série o que nós denominamos seqüência.

da ordem em que os elementos de uma sequência estão arranjados mas corresponde a 'quantidade de elementos'.

Por consequência da definição de potência a partir das classes, ou seja, com base nos números ordinais, a necessidade de supor que todo conjunto pode ser bem ordenado, mencionada acima, se apresenta também para as potências, pois, está implícito que qualquer conjunto bem definido tem uma potência, que a potência equivale a alguma das classes de números (este é um caso geral da 'hipótese do contínuo') e ainda, que a classe de números forma uma coleção ordenada linear (HALLETT, 1984, p. 62). O problema é que não há garantia de que todo número cardinal (obtido de qualquer conjunto dado) estará representado entre a sequência de potências representadas pelas classes de números geradas pelos três princípios (TILES, 1989, p. 110).

1.1.2 Aprofundamento no significado da noção de numeral (*Anzahl*)

Cantor introduz a noção de numeral como intermediária entre o conjunto e o número, como tentaremos mostrar a seguir. Assim, a noção de numeral nos revela a dificuldade entre a conexão de número ordinal e conjunto nas formulações iniciais da teoria dos números transfinitos e nos ajuda a explicar o significado da 'abstração' nas suas definições posteriores. Essa distinção entre as noções de numeral e número ordinal vai-se atenuando até desaparecer ao longo das exposições da teoria, na proporção em que diminui a dificuldade de associar número e conjunto, ou na medida em que o procedimento da abstração abarca essa dificuldade. Enfatizaremos, portanto, a noção de numeral, contida no artigo de 1883, necessária para associar a cada conjunto um número que, explicaremos a seguir, expressa a ordem em que os elementos estão arranjados:

"Outro grande ganho tributável ao novo número [transfinito], no meu modo de entender, é um novo conceito que não existe previamente, o conceito de *numeral* dos elementos de um conjunto bem ordenado infinito. Esse conceito é sempre expresso por um número inteiramente determinado do nosso campo numérico expandido, assumindo apenas que a ordem dos elementos do conjunto- a ser definida abaixo- é determinada." (CANTOR, 1883, s. 2, p. 71).

Observamos brevemente o raciocínio de Cantor, para esclarecê-lo em seguida: ele parte da existência de conjuntos finitos e infinitos, em seguida associa a forma de ordenação desse conjunto ao numeral, que é uma 'representação na mente' da ordenação do conjunto e, por fim, esse numeral é sempre expresso por um número. Destacamos, inicialmente, que a existência de conjuntos finitos e infinitos é empregada por Cantor na medida em que é amplamente admitida na matemática em geral. Portanto, o procedimento para definir o número

transfinito é, realizado através da passagem do conjunto ao número, via enumerar, ou seja, a definição se processa do conjunto para o enumerar e do enumerar para o número. O enumerar, na publicação de 1883, compõe a estratégia de Cantor, à qual nos referimos acima, para generalizar a noção de número: o enumerar é a imagem de um conjunto- finito ou infinito- na mente, o qual é sempre expresso por um número. Vamos separar cada uma das passagens para compreender as relações entre conjunto- enumerar e enumerar -número.

Em relação à passagem do conjunto para o enumerar, a natureza da conexão entre eles é pouco explicada por Cantor, que parece supô-la curta, direta e imediata, como ele próprio diz (ver citação abaixo) e Hallett enfatiza: 'Cantor acredita e afirma que o passo do conjunto bem ordenado para o enumerar é curto e imediato' (HALLETT, 1984, p. 54). Através da observação das sentenças empregadas por ele no artigo de 1883, em que o termo enumerar aparece, interpretamos que o enumerar sempre é 'enumerar dos elementos de um conjunto', lembrando que Cantor se referia, nessa época, exclusivamente a conjuntos de números:

"o enumerar (*Anzahl*) da [seqüência] de números (*Zahlen*)" (CANTOR, 1883, s.1 p. 71- grifo nosso);

"o enumerar (*Anzahl*) dos elementos determinados por uma dada ordem de sucessão" (CANTOR, 1883, s.2, p. 72- grifo nosso);

"...qual o número determina o enumerar (*Anzahl*) dos elementos...." (CANTOR, 1883, s.2 p. 72- grifo nosso);

"O conceito de enumerar (*Anzahl*) dos elementos tem uma representação " (CANTOR, 1883, s.2 p. 71- grifo nosso);

"Em sistemas finitos a potência coincide com o enumerar (*Anzahl*) dos elementos" (CANTOR, 1883, s.1 p. 71 -grifo nosso)²⁵.

Em relação à passagem do enumerar para o número, que tampouco é suficientemente explicada por Cantor, notamos que o enumerar é sempre expresso por um número:

"...qual o número (*Zahl*) determina o enumerar (*Anzahl*) dos elementos....". (CANTOR, 1883, s.2 p. 72- grifo nosso);

"...todo sistema de potência da primeira potência [classe] pode estar ordenado de tal modo que o enumerar (*Anzahl*) dos elementos com respeito a sua ordem torna-se igual a um número (*Zahl*), pré-fixado arbitrariamente, da segunda classe " (CANTOR, 1883, s.2 p. 72- grifo nosso);

"na seqüência estendida dos números (*erweiterten Zahlenreihe*) é sempre possível encontrar um e apenas um número (*Zahlen*) α ...do enumerar (*Anzahl*) dos números (*Zahlen*)". (CANTOR, 1883, s. 2 p. 72- grifo nosso).

²⁵Atenção! Isso não quer dizer que conceitualmente potência e enumerar sejam a mesma coisa.

Cada enumerai, que expressa um conjunto, é associado a um número como vimos acima. Essa associação é a base da estratégia de Cantor que usa então o enumerai de conjuntos - finitos e infinitos - para determinar os números. O número já é bem conhecido quando o conjunto é finito e, quando o conjunto não é finito, o número do enumerai é um novo número, o número transfinito:

"O conceito de enumerai dos elementos tem uma representação objetiva imediata na nossa intuição [*Anschauung*] interna; portanto através dessa conexão entre enumerai de elementos e o número, a realidade do último a qual eu já enfatizei é provada mesmo nos casos onde ele é determinantemente infinito" (CANTOR, 1883, s.2 p. 71-72)²⁶.

O enumerai fica determinado apenas por uma "representação imediata na nossa intuição interna", isto é, Cantor recorre simplesmente a um argumento existencial subjetivo: uma vaga representação na mente. Pode ser questionada a suficiência desse procedimento para estabelecer a existência e consistência de um novo conceito matemático. Voltaremos a isto no final deste capítulo ao explicar o uso da abstração nas definições posteriores a 1883.

Pela associação do enumerai aos elementos de um conjunto e por ser o enumerai uma representação imediata na mente, concluímos que o enumerai, está próximo de uma imagem ordenada, a qual está associada mais a um conjunto que a um número. O enumerai, diz Hallett, mede o comprimento ou a 'natureza essencial' de um conjunto bem-ordenado, ou o que existe em comum nos membros das classes de conjuntos bem ordenados isomorfos (HALLETT, 1984, p. 52). Por outro lado, a todo enumerai é associado um número, que expressa esse enumerai.

Com essa análise podemos concluir que as afirmações 'o enumerai é atribuído a conjuntos de números' e 'a todo enumerai é atribuído um número' não implicam que número ordinal e enumerai sejam a mesma coisa, como estamos acostumados a ler nos livros que expõem a teoria axiomática de conjunto: "número ordinal é o conjunto bem ordenado α tal que" (HALMOS, p. 83). O enumerai é usado como estratégia para definir o número transfinito. Por outro lado ainda, no artigo de 1883, número não é só o enumerai, o número é mais que isso, ou seja, o número, além de representar uma sequência determinada (pelo enumerai), é também 'a unificação das unidades num todo'. Essa dupla propriedade do número pode ser respaldada pela explicação de Cantor sobre o significado de cada número v (número finito qualquer):

²⁶ "...da andererseits der Anzahlbegriff in unserer inneren Anschauung eine unmittelbare gegenständliche Repräsentation erhält, so ist durch diesen Zusammenhang zwischen Anzahl und Zahl die von mir betonte Realität der letzteren auch in den Fällen, dass sie bestimmt-unendlich ist, erwiesen." (CANTOR, 1883, s.2 p. 548).

"O número v é a expressão ao mesmo tempo para um numeral finito das consecutivas posições, como também para a unificação das unidades colocadas num todo" (CANTOR, 1883, s. 11, p. 87)²⁷.

Assim, o numeral, obtido pela imagem de um conjunto na mente é expresso, sempre, por um número, o que possibilita estender o campo numérico até os transfinitos. Cada número, por sua vez, representa uma sequência que o antecede e, ao mesmo tempo, é o resultado da adição das unidades.

1.1.3 Discussão sobre a relação entre potência e número cardinal

Encerramos essa seção levantando uma questão sobre a relação entre número, conforme o sentido expresso por Cantor no artigo de 1883, e potência, noção introduzida em 1874 pela comparação da cardinalidade de conjuntos infinitos, mas 'definida' em 1883 como classes de números ordinais. A questão que se coloca pode nos ajudar a compreender melhor o significado de número para Cantor. Como já pudemos observar, os números obtidos pelos princípios de formação são ordinais. Resta saber se a potência é um número. A importância dessa questão, se a potência é ou não um número no artigo de 1883, diz respeito à relação entre número e conjunto na formulação inicial da teoria dos números transfinitos pois, como a potência é determinada pela totalidade (quantidade de elementos) de uma classe de números, Cantor, nesse artigo, pode estar mais ou menos perto da associação imediata entre conjunto e número. Como ele não é muito claro sobre essa questão particularmente, é útil discutir as possibilidades de respostas para ela. Inicialmente, levantamos argumentos que contradizem essa questão para, em seguida, defendê-la.

Por um lado, respondendo afirmativamente à questão, é possível admitir potência como número. Observa-se que a teoria dos números transfinitos ainda estava em elaboração e já havia sido concebida no início da década anterior originalmente como potência, isto é, Cantor concebeu o número transfinito pela potência, mas optou por outra estratégia de exposição em 1883, que apresentou problemas, nessa época ainda desconhecidos, ao longo de suas pesquisas. Assim, se olharmos além do artigo de 1883, percebemos que, antes dele, a intenção de Cantor era a representação dos 'tamanhos' dos conjuntos infinitos, pelos números transfinitos e olhando o desenvolvimento da teoria a partir do artigo de 1883, ele passa a chamar potência de número cardinal. E, ainda, a apresentação da teoria dos números

²⁷Poderíamos, diante desta afirmação, arriscar uma comparação entre a definição de conjunto transitivo e a citação acima, que seria uma versão filosófica desta definição: um conjunto T é transitivo se todo elemento de T é um subconjunto de T (JECH, 1984, p. 139). Esta comparação é complicada devido à diferença de uma abordagem matemática e aquela 'matemático-filosófica' de Cantor.

transfinitos, através da generalização da noção de enumerar de conjuntos em 1883, representa uma opção de Cantor e a sua crença nessa forma de apresentação da teoria.

Por outro lado, Dauben, que focaliza exclusivamente o artigo de 1883 (DAUBEN, 1979, p. 179-180), nega que potência seja número cardinal, o que enfatiza que Cantor, em sua definição de potência e no modo de referir-se a esse conceito, especificamente no artigo de 1883, evita qualquer sugestão que permita interpretar potência como número. Assim, por esse artigo, podemos afirmar que a potência de um conjunto não é um número e número para Cantor é somente o ordinal. O que poderia contrariar essa afirmação é a menção que Cantor faz à 'representação natural da potência pelas classes de números que indica um sistema crescente de potências' (CANTOR, 1883, s.l, p. 71) mas Cantor não especifica que sistemas crescentes sejam exclusivamente de números²⁸. Poderia ser dito, também, que potência corresponde ao 'número de elementos' quando se trata de conjuntos finitos. Respondendo a esse argumento, pode-se dizer que entre os números finitos, conforme a construção de Cantor, não se distingue com clareza o ordinal do cardinal²⁹ e, além disso, quando ele se refere à potência dos conjuntos infinitos, afirma que 'não se pode dizer que [potência dos conjuntos infinitos] seja o número de elementos, definidos com precisão' (CANTOR, 1883, s.l p. 71).

Outro argumento para corroborar essa afirmação encontra-se na resenha elaborada aos FA em 1885³⁰. Neste texto, Cantor afirma que não concorda com Frege quanto à equivalência (admissível por Frege somente nos FA, como veremos a seguir) entre a sua noção de potência e a dele de número cardinal *Anzahl*, em que percebemos que Cantor insiste em distinguir potência de número:

"Eu não tenho como certa a opinião exposta pelo autor no §85, a qual identifica o que eu chamo de "potência" com o que ele chama de

²⁸Hallett discute a concepção de número de Cantor sobre a qual defende que potência, ou número cardinal (considerando não só o artigo de 1883) é classe de números (HALLETT, 1984, p.119-120 e 126). Entretanto, sua discussão não coincide com a nossa porque Hallett trata da relação número /classe e isto é outro detalhe que não diz respeito diretamente à relação potência e número que estamos discutindo. Especificamente, sobre número ser classe de números ou não, entendemos que não necessitamos penetrar nessa discussão já que as duas possibilidades são passíveis de serem analisadas, considerando que Cantor é pouco claro em sua afirmação a respeito do significado de número: "o uso das classes de números como representantes das potências não força alguém a assumir que elas são números. Outras possibilidades são avaliáveis..." (HALLETT, 1984, p. 119).

²⁹A distinção entre cardinal e ordinal para os números finitos é conceitual e pode (e deve) ser considerada nos artigos de Cantor porque ele construiu os números finitos como ordinais em 1883 e em 1895 construiu os números finitos como cardinais (CANTOR, 1895, §5, p.98). Isso se dá devido ao objetivo de Cantor em 'generalizar a noção de número', isto é, os números transfinitos (entre os quais se distinguem efetivamente os ordinais e cardinais) são de mesma natureza que os números finitos.

³⁰CANTOR, Die Grundlagen der Arithmetik (Rezension der Schrift von G. Frege...), 1885. Referimo-nos a esse texto pelo ano da sua publicação original.

"número cardinal". Eu chamo de "potência um sistema ou conjunto de elementos"..." (CANTOR, 1885, p. 441)³¹.

Ele afirma, ainda, que esse termo *Anzahl*, conforme Frege o emprega, teria licença de ser utilizado na sua concepção de *Anzahl* (ordinal) apenas para conjuntos finitos 'ferindo pouco' seu conceito de número³².

Observamos, na citação acima, que Cantor associa a potência a conjunto, e se potência é um número, a associação entre número e conjunto estaria facilitada.

No último argumento consideramos a forte ligação que Cantor estabelece entre número e conjunto. Para explicá-lo, seguindo o curso do nosso texto, partimos da relação conjunto --- enumerar --- número, explicada acima, na seção 1.1.2. Podemos interpretar a potência de forma equivalente ao enumerar, como sendo uma noção intermediária entre conjunto e número: conjunto --- potência --- número cardinal e, portanto, à potência atribui-se um número e não é o caso que seja propriamente um número.

Portanto, do ponto de vista do artigo de 1883 e da resenha aos FA, o número, como foi empregado por Cantor, é somente o número ordinal. Outro fato pode ser lembrado reforçando também essa afirmação. No artigo de 1883, Cantor desenvolve uma aritmética dos números ordinais e somente deles. Posteriormente, Cantor constitui uma sequência (ordenada) de números cardinais transfinitos ($\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots$), e aí desenvolve também uma aritmética deles, além da dos ordinais.

Devemos ressaltar que essa explicação sugere, ainda, que no artigo de 1883, potência é uma noção intermediária e não necessariamente associada ao número. É essa a ênfase adotada nesta dissertação: enumerar e potência são noções intermediárias entre conjunto e número em 1883 e número é apenas ordinal. Por isso, descartamos a hipótese de potência ser um número já nessa formulação inicial, porque ela nos impediria de observar com clareza a complexa associação de números a conjuntos. Ou seja, com isso queremos salientar a sofisticada associação entre número e conjunto, lentamente alcançada por Cantor e absolutamente admitida na teoria axiomática de conjuntos.

No artigo de 1883, comentado por Frege, podemos dizer que foi dado o primeiro passo no sentido da elaboração da potência como número, mas, por esses argumentos expostos acima, poderemos afirmar que neste artigo há a postulação dos números cardinais, não seria uma conclusão imediata e sim uma 'interpretação possível', diferente da nossa.

³¹ "Ich halte es daher auch nicht für zutreffend, wenn der Verf. in §85 die Meinung ausspricht, dasjenige, was ich "Mächtigkeit" nenne, stimme mit dem überein, was er "Anzahl" nennt. Ich nenne "Mächtigkeit" eines Inbegriffs oder einer Menge von Elementen" * (CANTOR, 1885, p. 441).

³² "... im vorliegenden Falle aber, wo er sich doch wohl nur auf endliche Mengen bezieht, durch die bei mir vollzogene Verschärfung des Anzahlbegriffs kaum verletzt sein dürfte. (CANTOR, 1885, p. 441 grifo do autor).

A importância da discussão que estamos levantando relaciona-se com a associação entre números e conjuntos. Posteriormente, essa associação deixa de ser realizada pelo enumerar e passa a ser feita por abstração. Com objetivo de alcançar o significado da abstração nas definições de Cantor apresentaremos aspectos da concepção dele sobre a matemática, sobretudo a partir do artigo de 1883 agora sob o ponto de vista filosófico. Isso é necessário para compreendermos o significado de abstração para Cantor, porque, a primeira vista ou olhando pontualmente, abstração pode parecer psicologista. Mas, inserindo o contexto filosófico de Cantor abrimos a possibilidade de avaliar a afirmação de Kitcher, segundo a qual, no platonismo ingênuo de Cantor, que procuramos explicar a seguir, abstração independe da mente (KITCHER, 1984, p.110).

1.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A CONCEPÇÃO FILOSÓFICA DA MATEMÁTICA EM CANTOR

Os artigos de 1883 e a publicação de 1887 reúnem a maior parte da discussão filosófica de Cantor. Por exemplo, as definições de Cantor no artigo de 1883 são entremeadas das justificativas do autor que pretendem ser o suporte filosófico de sua teoria, conforme a referência que faz ao público leitor alvo de seu artigo:

"Eu escrevi principalmente para dois círculos de leitores: para os filósofos que têm acompanhado o desenvolvimento da matemática no período mais recente, e para os matemáticos que têm familiaridade com os escritos antigos mais importantes e os mais recentes trabalhos em filosofia." (CANTOR, 1883, Prefácio, p.70).

Precisamos recorrer, nesta dissertação, à concepção filosófica de Cantor, por dois motivos: primeiro, porque ele busca apoio para sua nova teoria na filosofia; segundo, porque na concepção filosófica dele encontramos elementos que nos ajudam a compreender o significado da abstração nas definições.

Sobre a necessidade de Cantor de apoio filosófico, destacamos nesta dissertação os argumentos que justificam a definição de número através de conjuntos e deixamos de lado outros argumentos filosóficos que fogem aos objetivos aqui propostos, como o estabelecimento do infinito atual. A teoria dos números transfinitos não poderia se estruturar apenas na noção de número, que até então era considerada a noção primitiva e fundamental da aritmética. Cantor recorreu aos conjuntos para introduzi-la e essa noção passa a fundamentar também os números. Imputar à noção de conjunto os fundamentos da própria noção de número e, conseqüentemente da aritmética, exigiu a elaboração conceitual e a delimitação formal dessa noção. Como bem

explica Lungarzo, a noção de conjunto parecia criada pela lógica, "uma disciplina tradicionalmente filosófica" (LUNGARZO, 1993, p.79). Por não haver até então um conceito mais simples do que o do próprio número, o emprego de conjuntos para defini-lo, 'coloca o matemático na fronteira de sua ciência, pois a nova teoria [de conjuntos] *não é tradicionalmente matemática*. (LUNGARZO, 1993, p.78-79 (grifo nosso)).

Sobre a possibilidade de encontrar na concepção filosófica de Cantor elementos para compreendermos o procedimento da abstração devemos esclarecer sobre a existência dos objetos matemáticos em um 'reino independente da mente e das coisas materiais'. Conhecer dados da ontologia cantoriana nos permite afastar a interpretação de ser a abstração um procedimento psicologista e empirista, no sentido em que a abstração não se realiza a partir das coisas existentes no mundo externo e tampouco é um processo mental para construir o número. A abstração, veremos no terceiro capítulo, com o auxílio do estudo desenvolvido nesta seção, é mais um meio para explicar a relação entre os conjuntos e números que existem num mundo à parte.

É preciso, antes de fazê-la, esclarecer o limite da nossa abordagem à concepção filosófica de Cantor. A posição filosófica de Cantor culmina num tipo 'teologia' (que explicaremos adiante), o que torna sua posição muito complexa diante dos restritos objetivos desta dissertação³³. Entretanto, será suficiente para nosso objetivo esclarecer a posição de Cantor, que chamamos platonista, que afirma a existência de entidades matemáticas independentes do conhecimento humano acerca delas, sem aprofundar a ponto de especificar as propriedades 'do reino matemático', o qual passa gradualmente a se identificar com intelecto divino.

O tema central da discussão filosófica de Cantor é a defesa do infinito atual que, ao longo da história da filosofia, encontra muita resistência. É a partir da argumentação de Cantor em favor do infinito atual e do número transfinito que transparecem os elementos da concepção que Cantor teria da matemática em geral.

Cantor, frequentemente, é vago em sua argumentação e, curiosamente, faz recorrentes referências à história da matemática. Desta, ele aparentemente toma dados como referência e apoio para estabelecer sua concepção, como pode ser notado pelas várias menções que faz aos fatos da história. Essas referências exemplificam, ora o emprego da noção de infinito pela geometria projetiva ou teoria de funções, ora o processo para o estabelecimento de novas noções, como os números irracionais e complexos, pela inserção do novo conceito a partir de outros já existentes. Essas últimas nos importam, pois o interesse de Cantor é inserir um novo

³³Sobre isso ver DAUBEN, J. Georg Cantor and Pope Leo XIII: mathematics, theology and the infinite. *Journal of the history of ideas*, 38: 85-108, 1977.

conceito que deve se instalar no meio do conhecimento já admitido. Ele compara diversas vezes os números transfinitos com o irracional quanto ao método de introduzi-los por limite de seqüência quando, por exemplo, menciona a definição do número irracional pela seqüência de racionais (CANTOR, 1883, s.4 p. 74) ou pelos "cortes" de Dedekind (CANTOR, 1883, s.9 p. 80):

"Os números transfinitos são num certo sentido *novos irracionais*, e de fato para mim os melhores métodos para se definir os números irracionais finitos são muito semelhantes; eu gostaria em princípio de dizer que esse é o mesmo método descrito acima, empregado por mim para a introdução dos números transfinitos. Pode-se afirmar absolutamente: os números transfinitos *colocam-se* ou *existem* como números finitos irracionais; eles se parecem em sua natureza mais profunda; os primeiros e os últimos (números) são formas definidas delineadas ou modificações do infinito atual." (CANTOR, 1887, p. 395-6, Dauben, 1979, p.128)³⁴.

A explicação que Hallett apresenta da concepção filosófica de Cantor nos possibilita encontrar uma razão para a recorrência aos exemplos históricos (HALLETT, 1984, p. 19). A explicação de Hallett, que abrange outros elementos que não abordaremos, concilia as duas características principais da filosofia de Cantor ditas, uma delas, "elementos formalistas", que diz respeito à consistência dos procedimentos construtivos, originários da afirmação de Cantor sobre a "liberdade da matemática" e a outra dita "elementos platônicos", afirmada a partir da constatação de um "reino independente e permanente da matemática" (DAUBEN, 1979, p. 125-132); (GRATTAN- GUINNESS, 1980, 83-85).

A idéia geral do pensamento de Cantor, que obtivemos analisando seus artigos, relaciona os exemplos históricos, o platonismo e o formalismo da seguinte maneira: o matemático tem, gradualmente, acesso às verdades e elas, para comporem o quadro do conhecimento, devem se instalar no meio do conhecimento já adquirido, respeitando as regras e o conhecimento já consolidado, sem criar contradições. Por exemplo, como vimos na seção 1.1.1, a construção de todos os números é realizada pelos 'princípios de formação', considerando o 1 e a adição de 1 já conhecidos. Desse modo, Cantor apresentou em um mesmo sistema os números finitos e transfinitos, sistema este que não apresentava contradições (até

³⁴"Die transfiniten Zahlen sind in gewissem Sinne selbst neue Irrationalitäten und in der Tat ist die in meinen Augen beste Methode, die endlichen Irrationalzahlen zu definieren, ganz ähnlich, ja ich möchte sogar sagen im Prinzip dieselbe wie meine oben beschriebene Methode der Einführung transfiniter Zahlen. Man kann unbedingt sagen: die transfiniten Zahlen stehen oder fallen mit den endlichen Irrationalzahlen; sie gleichen einander ihrem innersten Wesen nach." (CANTOR, 1887, p. 395-6).

aquele momento) e portanto não haveria motivo para não a aceitação dos novos números, assim como os finitos já eram irrestritamente admitidos.

Tentaremos mostrar, com base no aspecto platônico de sua concepção, que os números ordinais, finitos e transfinitos, não são produtos da construção mental apesar de construídos pelos princípios. Esse caminho para introduzir o novo número é análogo, segundo ele, à introdução dos números irracionais, que são um exemplo muito frequente no texto de Cantor³⁵. Eles são definidos de forma que seguem da existência dos outros e, por outro lado, respeitam as relações e propriedades não criando contradições. Por isso, ele é um conceito verdadeiro, do reino da matemática, que se faz presente, por ser coerente, na realidade mental e externa. Também, a coerência é relativa à natureza desse novo número e os já existentes. Vamos reconstruir esse argumento pausadamente, partindo da identificação do 'elemento formalista' da filosofia de Cantor. Nesse ponto aderimos à interpretação de Hallett (HALLETT, 1984, p. 12-24) e descartamos uma abordagem mais pontual aqui expressa pela descrição de um artigo de Grattan-Guinness (GRATTAN-GUINNESS, 1980, p. 61-93).

Hallett enfatiza a "coerência", que passaremos a explicar em seguida, em detrimento da "consistência", esclarecendo a relação desses dois elementos - formalistas e platonistas - que, se interpretados simplificarmente, parecem contraditórios. Em seguida, interpretamos esse elemento formalista internamente a sua concepção filosófica geral, explicando o significado da existência para Cantor e como as coisas existentes refletem-se na realidade mental e externa. A questão da existência atinge explicações teológicas, às quais nos referimos muito rapidamente no final desta seção.

Cantor apresenta um forte traço formalista, que pode ser observado através da construção dos números transfinitos pelos princípios de formação partindo dos números 'inteiros positivos' já existentes e, também, pelas afirmações relativas à importância da consistência no estabelecimento de um novo conceito:

"A matemática é completamente livre em seu desenvolvimento e limitada apenas pela auto-evidência acerca de seus conceitos que devem, ao mesmo tempo, não ter contradições internas e estar dispostos dentro de relações definidas organizadas pelo significado de definições de conceitos já previamente formados, existentes e provados" (CANTOR, 1883, s. 8, p. 79).

³⁵De fato, muito mais do que um exemplo frequente, a definição dos números irracionais compõe propriamente o artigo de 1883 (CANTOR, 1883, s. 9, p. 80-81), além da publicação de 1872.

Segundo Cantor, os grandes matemáticos não teriam alcançado suas teorias caso houvesse 'limitações metafísicas'³⁶ para introdução de novos conceitos, ou seja, o desenvolvimento dessa área do conhecimento é assegurado pela liberdade dela:

"...e se Kummer não tivesse tomado a liberdade, rica em consequências, de introduzir o chamado número "ideal" na teoria dos números, nós não estaríamos hoje na posição de admirar os excelentes e muito importantes trabalhos de álgebra e aritmética de Kronecker e Dedekind." (CANTOR, 1883, s.8, p. 79-80).

Sobre esses aspectos formalistas Grattan-Guinness afirma que, para Cantor, a "consistência da construção é condição necessária e suficiente para a existência do número construído" (GRATTAN- GUINNESS, 1980, 83). É possível interpretar assim a afirmação de Cantor partindo de uma análise literal e pontual, restrita ao trecho citado, que coloca a matemática absolutamente livre em seu desenvolvimento, limitada apenas pela condição de seus conceitos não permitirem contradições internas. Nesse caso, a consistência é, portanto, o fator determinante da existência em matemática. Os limites da matemática para Cantor seriam a contradição, isto é, a consistência é condição para a introdução de novos conceitos e para garantir a realidade e legitimidade para qualquer tipo de número- racional, irracional, complexo ou transfinito- como ocorreu, segundo Cantor, com o estabelecimento 'recente' dos números complexos e dos irracionais.

Entendemos que a afirmação de Grattan-Guinness é mais forte e abrangente do que de fato podemos observar do pensamento de Cantor, apesar de bastante razoável quando focalizamos trechos específicos do artigo de 1883. A interpretação de Grattan-Guinness nos leva a salientar essa possível interpretação mais literal do artigo de 1883, que possui como consequência a ênfase no formalismo, no sentido de 'aparentemente' dispensar as considerações sobre a existência em função da consistente integração do novo conceito, particularmente de um número:

"A matemática é completamente livre em seu desenvolvimento ...Em particular, na introdução de novos números o matemático é obrigado apenas a dar as definições deles como que tomando-lhes um tipo de determinação, e, em certas circunstâncias, um tipo de relação com os números antigos, que, no caso dado, lhes permite serem definitivamente distinguidos um do outro. Tão logo um número satisfaça todas essas condições, o matemático pode e deve observar isto como existente e real." (CANTOR, 1883, s.8, p. 79).

³⁶ Abaixo fica mais claro o que Cantor entende por limitação metafísica.

É evidente a sugestão da formalização implicar na existência, diante da afirmação "o matemático é obrigado apenas a dar as definições deles...". Porém, Cantor, de fato, acrescenta mais coisas sobre a realidade dos números, que acabam revelando a existência última deles, determinando assim o limite do formalismo na sua concepção.

Acreditamos que a consistência é tomada por Cantor como o parâmetro de justificação de sua teoria, o que garante a existência dos conceitos na medida em que haja coerência no contexto em que se estabelecem. Sem inconsistência não há razão para negar a existência dos números transfinitos³⁷. Entretanto, Cantor não afirma que qualquer conceito (inventado ou construído) possa existir simplesmente porque não traz inconsistência. Isso ficará claro a seguir, quando explicamos como o número existe previamente na concepção cantoriana.

Com isso entendemos que Grattan-Guinness é estanco em sua exposição, visando apenas a descrever isoladamente cada 'elemento da concepção de Cantor' sem analisá-lo levando em consideração os outros aspectos de sua concepção. Contudo, Grattan-Guinness admite que Cantor não é um formalista em dois aspectos: primeiro, porque este não reconhece a matemática como símbolos vazios simplesmente satisfazendo a consistência, diz o comentador, comparando-o com o formalismo dos contemporâneos de Cantor, Heine e Lipschitz; segundo, porque ele não demonstra, através da 'metamatemática', a consistência de sua teoria, aqui comparando-o com o formalismo associado a Hilbert (GRATTAN-GUINNESS, 1980, 84).

O argumento de Hallett nos parece mais profundo e coerente com os demais aspectos da concepção filosófica de Cantor, distante de uma interpretação literal. Hallett expressa muito bem a relação desse 'elemento formalista' com os demais elementos, afirmando que a consistência é importante na filosofia de Cantor mas, por sua vez, não caracteriza o formalismo no que tange à natureza do número, isto é, questões filosóficas sobre a existência fazem parte da filosofia de Cantor, ao contrário do formalismo convencional, que se limita a discutir a consistência e a ausência de contradições, de modo que se torna impertinente a discussão sobre a existência:

"Mas, em virtude dessa similaridade [com o programa formalista de Hilbert³⁸], é importante acentuar de novo a diferença entre a posição de Cantor e aquela dos formalistas. Cantor não estava apenas e de fato muito seriamente ocupado com a não contraditoriedade dos conceitos (Certamente ele não estava atento à consistência formal, já que não

³⁷Cantor discute na seção 6, 1883, as possíveis inconsistências destes dois tipos de números.

³⁸Hallett aqui não está se referindo aos sistemas formais axiomáticos de Hilbert, mas à liberdade da matemática em relação às investigações filosóficas dos seus conceitos, em particular do infinito. (HALLETT, 1984, p. 19).

tinha nem idéia de uma teoria formalmente apresentada). Melhor dito, a ênfase de Cantor em um novo conceito mantendo 'relações ordenadas com conceitos já existentes' é muito melhor descrita enquanto uma noção de *coerência*, preferencialmente com a coerente integração à estrutura conceitual existente do que a *mera* não contradição.Mas, na prática, os matemáticos concentraram-se muito mais em algo como a coerência de Cantor, a extensão e generalização plausíveis das teorias já razoavelmente bem estabelecidas. E nesse sentido ela tem sido bem livre" (HALLETT, 1984, p. 19, (grifo do autor)).

Hallett parece levar em consideração, nessa interpretação, a recorrente exemplificação histórica dada por Cantor, argumentando do seguinte modo: encontram-se na história da matemática, definições de um novo conceito através da extensão de, e em harmonia com, conceitos previamente estabelecidos. Essa argumentação ultrapassa o limite estrito da afirmação de Cantor sobre a liberdade da matemática, mas representa o caminho que um conceito novo deve percorrer e as condições que precisa satisfazer para se estabelecer. A objetividade e a realidade de um novo conceito ficam garantidas pela coerência que, por sua vez, não é a determinação exclusiva da sua existência. A existência está suficientemente caracterizada em outras passagens que abordaremos em seguida.

Para Cantor, um conceito matemático não é produto da construção mental que se institui no corpo do conhecimento, caso não cause contradições. Tampouco a origem de um conceito matemático está na experiência sensível e esta não induz o conhecimento. A matemática aplica-se ao mundo externo e não é obtida daí como pode parecer por essa aplicação³⁹. É o que Cantor expressa ao explicar que o contínuo não pode ser elucidado pela intuição do tempo (ou do espaço), mas ocorre o contrário, ou seja, primeiro é realizada uma teoria conceitual abstrata com a qual nos pré-equipamos para investigar o mundo físico (HALLETT, 1984, p. 15):

"É a minha opinião que o *tempo* é uma noção que, para sua clara explicação, pressupõe o conceito de continuidade, o qual é independente dele..." (CANTOR, 1883, s. 10, p. 85).

A realidade externa pode estimular a mente em busca das associações, as quais resultam na instalação de um conceito real por via da formalização mencionada. O que queremos dizer é que a realidade da matemática é acessível imediatamente à mente e se institui legalmente no que reconhecemos da matemática através da definição e determinação da relação com o que já existe:

³⁹Cantor parece associar realidade externa à aplicação, como veremos adiante.

"...o conhecimento pode ser obtido pelo significado de conceitos e idéias os quais podem, no máximo, ser estimulados pela experiência externa, mas são formados principalmente através da indução e dedução interna como alguma coisa que, em certo sentido, já está colocada em nós e meramente deve ser despertada e trazida para a consciência." (CANTOR, 1883, s.8, n.6 p. 95).

"... na introdução do novo número o matemático é obrigado apenas a dar a definição dele como que emprestando-lhe um tipo de determinação e, sob certas circunstâncias, suas relações com os números antigos, as quais, em dados casos, permitem que seja distinguido dos outros. Tão logo um número satisfaça todas essas condições, os matemáticos podem considerar o novo número como existente e real." (CANTOR, 1883, s.8 p. 79).

Portanto, para definir um novo número, que foi trazido à consciência, é necessário formular sua definição e estabelecer sua relação com os números antigos. Notamos, ainda, que o novo número ou conceito a ser introduzido já possuía 'existência prévia' e é trazido à consciência pela associação de idéias. Esse é um dado contrário a um formalismo puro. Cantor dá como exemplo os números complexos e os números irracionais, nos quais estas duas condições são simultaneamente realizadas. Também o número transfinito foi definido como limite da sequência dos números inteiros positivos, assim como os números irracionais foram definidos como limite da sequência dos números racionais:

"O procedimento para a correta formação de conceitos é, na minha opinião, sempre o mesmo: uma coisa sem qualidades é colocada, a qual não é nada inicialmente mas apenas um nome ou um sinal A, e a este sinal são designados diferentes, mesmo infinitamente diversos predicados compreensíveis de maneira ordenada, predicados cujos significados estejam ligados a idéias existentes já conhecidas e que não devem contradizer uns aos outros; desse modo, a relação de A com conceitos já existentes, e em particular com os cognoscíveis, é determinada. Uma vez que esse processo esteja definitivamente concluído então todas as condições para despertar o conceito A, o qual estava adormecido em nós, existem, e neste momento o conceito estará pronto, equipado com a realidade intrasubjetiva a qual é a única coisa que pode ser exigida por qualquer conceito. É tarefa da metafísica estabelecer, então, seu significado transiente." (CANTOR, 1883, n. 7 e 8, p. 95).

Enfatizamos desse trecho a formalização de um novo conceito, obtida a partir da coerência com os já existentes. Além disso, um novo elemento da sua concepção filosófica se introduz no nosso texto por meio dessa citação, a saber, a realidade do número: imanente e transiente. E, sobre a realidade, a ênfase na primeira é que de certa forma condiciona a segunda.

Explicaremos melhor: a existência dos números manifesta-se através de dois tipos de realidade. Essa dupla realidade do número, assim como a existência, é um prolongamento da realidade dos números já existentes. Cantor insiste na existência real dos números transfinitos (CANTOR, 1883, s.8, p. 78) assim como para ele existem, na realidade atual, os números racionais, irracionais e complexos. Ele acredita, ainda, conforme expressa em 1883, na mesma 'natureza' dos números finitos e transfinitos e essa é a sua estratégia de definição e justificativa do novo número. Discutiremos a seguir qual é a natureza dos números para Cantor. Por hora, observamos apenas que a realidade e objetividade do número transfinito é semelhante à realidade dos números finitos, cuja existência é, por um lado, naturalmente refletida na matéria e espaço do mundo físico e, por outro lado, distinta na mente em relação aos outros números.

Ao introduzir o novo número ω Cantor justificou sua existência através da concepção de dois tipos de realidade: a realidade imanente ou intrasubjetiva, que diz respeito a um lugar ou posição definida em nossa mente ou intelecto, que torna o número claro e diferenciado dos outros componentes do nosso pensamento, assentado em relações definidas entre eles, e assim modificando a nossa mente de forma definitiva; e uma realidade transiente ou transubjetiva, observada como expressão ou imagem das ocorrências e relações no mundo externo em relação ao intelecto (CANTOR, 1883, s.8 p. 78). O que Cantor entende por realidade imanente é mais claro para nós do que possa ser para ele a realidade transiente. Sobre a realidade imanente, Cantor refere-se a Platão afirmando que o 'conhecimento de conceitos está munido da verdadeira luz' e que 'o que pode ser conhecido é e o que não pode ser conhecido não é'. A realidade imanente diz respeito à existência das entidades dentro do pensamento por meio das definições; a realidade transiente é aquela externa em relação ao intelecto e diz respeito ao que existe concretamente no mundo físico, porém de forma diferente da usual, na medida em que considera os elementos construídos da teoria parte do mundo externo:

"...assim como as diferentes classes de números (I), (II), (III), e as outras representantes das potências, as quais ocorrem de fato na natureza corporal e mental." (CANTOR, 1883, s. 8, p. 79).

A realidade transiente manifesta-se por exemplificação ou representação no mundo físico através da expressão de grandezas ou relações que caracterizam fenômenos físicos, de modo que se assemelham ao que costumamos chamar de aplicações da matemática. A realidade transiente corresponde, no caso dos números irracionais, por exemplo, à representação na reta

geométrica dos números reais, por um axioma (ver CANTOR, 1872). Assim como os números irracionais estavam em certo sentido concretizados em virtude da sua representação geométrica ($\sqrt{2}$ a diagonal de um quadrado de lado 1), Cantor estabelece uma realização material para os números transfinitos obtida em virtude da aplicação na física matemática, relativamente às propriedades químicas da matéria, luz, calor, eletricidade e magnetismo (ver DAUBEN, 1979, p. 126). Ele afirma, então que a *matéria* do universo físico, deixada totalmente indefinida na maioria das pesquisas sobre o assunto, é da primeira potência, enquanto que o *éter* que compõe a natureza é da segunda potência e, ainda, pode-se considerar qualquer coleção infinita de objetos (DAUBEN, 1971, p. 89 e 91):

"Com base nesse ponto de vista [a existência de duas diferentes classes de mônadas, a matéria corpórea e o éter], a primeira questão sobre a qual nem Leibniz nem seus sucessores pensaram, é a respeito da potência daquelas duas matérias em relação a seus elementos, desde que sejam vistos como conjuntos de mônadas de *natureza corpórea* e *etérea*. Relativo a isso, anos atrás, eu já formei a *hipótese* de que a *potência da matéria corpórea* é a que eu chamo nas minhas pesquisas de *primeira* potência e, que a *potência da matéria etérea* é de *segunda* potência. Para esse conhecimento existem várias razões que eu explicarei numa ocasião posterior." (CANTOR, Über verschiedene Theorie aus der Theorie der Punktmengen in ...1885, p. 275-6 (grifo do autor))⁴⁰.

Ocorre, segundo Cantor, que a realidade transiente é menos importante para o matemático do que a realidade imanente. Retomando finalmente a última frase da citação acima, que afirma que o significado transiente é então tarefa da metafísica, (CANTOR, 1883, n. 7 e 8, p. 95), lembramos que, para Cantor, a matemática é livre e independente daquela disciplina, à qual cabe estabelecer o significado transiente. Observamos também que Cantor parece acreditar que a realidade mental do número (ou outra noção matemática) sempre implica na realidade externa dele, ou seja, para o matemático é suficiente obter o significado imanente porque a expressão externa virá por pesquisas metafísicas ou de outras ciências:

"...não há dúvidas para mim sobre esses dois tipos de realidade que sempre serão encontrados juntos, no sentido de que um conceito que é

⁴⁰ "Auf diesem Standpunkte ergibt sich als die erste Frage, woran aber weder Leibniz noch die Späteren gedacht haben, welche Mächtigkeiten jenen beiden Materien in Ansehung ihrer Elemente, sofern sie als Mengen von Körpern- resp. Äthermonaden zu betrachten sind, zukommen; in dieser Beziehung habe ich mir schon vor Jahren die Hypothese gebildet, daß die Mächtigkeit der Körpermaterie diejenige ist, welche ich in meinen Untersuchungen die erste Mächtigkeit nenne, daß dagegen die Mächtigkeit der Äthermaterie die zweite ist." (CANTOR, 1885, p. 275-6 (grifo do autor)).

considerado existente com respeito à primeira realidade [imane] sempre terá, mesmo que de diversos modos, uma realidade transiente. Evidentemente, a determinação dessa realidade geralmente está entre as tarefas mais problemáticas e difíceis da metafísica e, com frequência, deve ser deixada para o tempo em que o desenvolvimento natural de outra ciência revele o significado transiente do conceito em questão. " (CANTOR, 1883, s.8, p. 79).

A tarefa do matemático é considerar a realidade intelectual, sendo isso suficiente devido a uma 'coerência' entre as duas realidades, imane e transiente, que se fundamentam, ambas, em uma "unidade de tudo":

"....o matemático na formulação do seu material conceitual precisa abranger explicações *somente e unicamente* da realidade *imane* dos seus conceitos, assim não está sujeito a qualquer obrigação de testar também esses conceitos com respeito a sua transiente realidade. " (CANTOR, 1883, s.8, p. 79).

O mais importante para nós não são as atribuições do matemático e a diferença da matemática e das outras ciências abordadas na sequência do texto citado. Importa-nos afirmar, primeiro que a matemática é livre no sentido de que é livre da realidade transiente ou explicações metafísicas e limitada apenas pelas contradições internas possíveis de existir na relação da nova definição e dos conceitos previamente construídos. Lembremos que o número transfinito "torna-se parte indisputável da matemática" (DAUBEN, 1971, p. 89).

Notamos, ainda, que essa liberdade da matemática pode ser entendida nas duas realidades, imane e transiente, ou além delas. A própria liberdade da matemática ou algo que está por trás dela, fornece a ligação das duas realidades, tarefa da metafísica, diz Cantor, garantindo a existência na realidade transiente, quando um conteúdo é apenas concebido mentalmente inserindo-se sem contradizer o que já se conhece. O que está por trás dessas duas realidades foi identificado por Hallett no trecho em que Cantor fala da coerência das duas realidades conectadas num todo:

"Esta coerência das duas realidades [é suficiente para o matemático determinar uma, sendo que a outra virá com o tempo] tem seu verdadeiro fundamento na *Unidade do Todo a qual nós mesmos pertencemos*. " (CANTOR, 1883, s. 8, p. 79; grifo do autor).

Ao mesmo tempo em que, por um lado, uma realidade é independente da outra, por outro, a unidade da matemática oferece coerência entre elas. Essa coerência, segundo Hallett, é determinada por um apelo a Deus muito tímido e obscuro, presente nesse trecho do artigo de 1883, identificado nesse *Todo* (HALLETT, 1984, p. 20).

O apelo a Deus acaba se confirmando no tratamento futuro sobre a existência (HALLETT, 1984, p. 20). De fato, ele vai se tornando mais freqüente ao longo do desenvolvimento da sua teoria e, possivelmente, relaciona-se com as dificuldades que o autor encontra na sua aceitação. Entretanto, isso não quer dizer que Cantor sempre manteve a mesma posição e constância em relação à crença em Deus sustentando sua teoria. Apresentaremos trechos que ilustram que Cantor passa a apelar a Deus e que nem sempre foi assim para ele. Faremos essa breve menção porque encontramos entre os comentadores uma afirmação contrária a essa, o que cria uma oportunidade de um pequeno contato com esse importante assunto da concepção de Cantor. Exibiremos um trecho de uma carta de Cantor a Hermite, em que ele afirma ter mudado de posição em relação a uma das teses que defendeu no doutoramento. Em seguida, reproduzimos um trecho no qual Dauben afirma que Cantor sempre manteve a mesma posição quanto à evocação a Deus para justificar sua teoria.

Numa carta de Cantor a Hermite, de 1895, ele parece afirmar ter mudado de posição com relação à existência dos objetos da matemática. O autor afirma que, no seu exame escrito de doutoramento, das três teses que ele defendeu publicamente nessa ocasião, a terceira concordava com a posição de Hermite, a qual afirma que "os números inteiros parecem-me constituir um mundo de realidades que existem fora de nós, com o mesmo caráter de absoluta necessidade que a realidade da natureza, onde o conhecimento nos é dado por nossos sentidos". (HERMITE, *apud* CANTOR, 1967, p.262). Tese essa formulada por Cantor do seguinte modo:

*"Números integros simili modo atque corpore coelestia totum quoddam legibus et relationibus compositum efficere."*⁴¹ (CANTOR, G. Cantor an Charles Hermite (1895), 1967, p. 262 (grifo do autor)).

Entretanto, na ocasião desta carta, Cantor reproduz sua tese para contrariá-la, pois ele muda de posição e acredita que a realidade dos números inteiros lhe parece ser bem mais forte do que as coisas que existem externamente :

"Permita-me observar que a realidade e a regularidade absoluta dos números inteiros parecem-me ser bem mais fortes do que aquela do mundo sensível." (CANTOR, G. Cantor an Charles Hermite (1895) 1967, p. 262)⁴².

Ele insiste que a realidade e absoluta legitimidade dos números naturais é muito maior que qualquer existência no mundo real perceptível através dos sentidos. Isso ocorre por uma única

⁴¹ "Números inteiros, do mesmo modo que os corpos celestes, constituem uma espécie de todo, regidos por leis e relações".

⁴² "Gestatten Sie mir aber dazu zu bemerken, daß mir die Realität und absolute Gesetzmäßigkeit der ganzen Zahlen eine viel stärkere zu sein scheint als die der Sinnenwelt." (CANTOR, (1895) 1967, p. 262).

e simples razão: os números, se tomados coletivamente ou separadamente, existem no intelecto divino:

"E que isso seja assim [mais forte que a existência no mundo sensível] só tem uma única razão muito simples: a razão pela qual os números inteiros, se tomados separadamente ou na sua totalidade atual e infinita, existem no intelecto Divino enquanto idéias eternas no mais alto grau da realidade." (CANTOR, G. Cantor an Charles Hermite (1895), 1967, p. 262)⁴³.

J. Dauben interpreta essa mesma passagem de modo contrário. Dauben acha que a tese de Cantor exposta no exame de doutoramento é semelhante à tese da realidade eterna do intelecto divino dos números naturais:

"Cantor acrescenta que esse conhecimento [da existência dos números naturais no intelecto divino] não veio para ele como uma nova revelação. De fato, ele já tinha expressado visão similar no início de sua carreira, em 1869, em uma das três teses do final do seu *Habilitationsschrift*" (DAUBEN, 1979, p. 228-229).

Discordamos dessa interpretação com base no próprio texto de Cantor, a carta a Hermite, e pela relação não complementar das duas teses, a saber, existência no mundo externo perceptível pelos sentidos e existência no intelecto divino.

Diante da 'evolução' na concepção de Cantor sobre a realidade dos números, constatada acima, levantamos a questão a respeito da posição de Cantor, em 1883, mais próxima daquela exposta por Hermite ou tendendo mais para a existência no intelecto divino. Acreditamos haver uma pequena referência a essa posição em detrimento da existência do número no mundo externo, esta última visivelmente rechaçada por Cantor em 1883, conforme já citado acima. Com isso concluímos que, a partir das exposições da teoria do número transfinito, de 1883 em diante, o apelo a Deus está presente e se torna cada vez mais frequente e evidente.

A unidade, identificada por trás das realidades imanente e transiente, é o que comumente conduz à afirmação de que 'qualquer menção ao formalismo seria sobreposta pela realidade dos conceitos matemáticos', que existem como que em 'um reino permanente e independente', o reino da matemática única e absoluta que possui como 'crivo' para a determinação na realidade mental o surgimento de contradição, que aponta rapidamente quando um conceito é inútil ou infrutífero. Por exemplo, Cantor constrói os números ordinais pelos

⁴³ "Und daß es sich so verhält, hat einen einzigen, sehr einfachen Grund, nämlich diesen, daß die ganzen Zahlen sowohl getrennt wie auch in ihrer actual unendlichen Totalität als ewige Ideen in intellectu Divino im höchsten Grade der Realität existieren." (CANTOR, 1895, p. 262).

princípios de formação, mas isso não quer dizer que são produtos da construção mental (TILES, 1989, p.112). O matemático tem, gradualmente, acesso às verdades, que se instalam em meio ao conhecimento já adquirido e respeitam as regras do conhecimento já consolidado.

Para finalizar nossa abordagem, obtida a partir da exposição de Hallett, citamos esse mesmo autor que concatena os aspectos acima enfatizados da filosofia de Cantor: a liberdade da matemática e a existência da matemática no intelecto divino, caracterizando com bastante precisão o significado da existência na filosofia de Cantor:

"O que Cantor sugere primeiro é que a ausência de contradições de um conceito (ou de coerência se nós seguimos a apresentação de 1883) torna *possível* que objetos caíam sob ele. Então, neste caso, diz Cantor, tais objetos podem ter sido criados por Deus." (HALLETT, 1984, p. 20).

Com isso, a questão da existência, obscurecida pelo elemento formalista de Cantor, explicado acima através da afirmação de Grattan-Guinness, fica melhor compreendida como 'possível de existir pela consistência', isto é, se não surgir inconsistência, o matemático estará diante de um conceito existente e real do intelecto divino e não simplesmente dispensa a questão sobre a existência.

Essa interpretação de Hallett, que evidencia uma realidade divina por trás da imanente e transiente, está coerente com o "esquema ou categorização do infinito" na teoria de Cantor. Esse esquema se baseia nas distinções entre: (i): o infinito potencial; (ii): o infinito atual que, por sua vez, originalmente na concepção de Cantor, desdobra-se em (ii)(a): o infinito atual aumentável, ou *transfinito* e (ii)(b): o inaugmentável ou *Absoluto* infinito atual (HALLETT, 1984, p. 12). Cantor explica detalhadamente essa diferença, que é seu argumento contra acusações 'panteístas' da sua teoria (ver CANTOR, *Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche*, 1885, p. 375-6).

Considerando esses elementos que caracterizam a concepção da matemática de Cantor, passamos a verificar as alterações nas definições de número cardinal e ordinal para compreender o emprego da abstração nas definições.

1.3 A NOVA ESTRATÉGIA NA DEFINIÇÃO DOS NÚMEROS TRANSFINITOS: O EMPREGO DA ABSTRAÇÃO EM 1884-1895

Na coletânea de textos publicados originalmente em 1887 e 1888⁴⁴, comentada por Frege, Cantor prossegue a exposição da teoria dos números transfinitos, acrescentando explicações e justificativas de caráter filosófico e teológico, respondendo a diversas críticas que havia recebido e tentando novas abordagens para resolver a hipótese do contínuo. Em 1883, ele havia percebido a independência entre a potência e o número ordinal, mas optou por desenvolver sua teoria sobre as classes de números. Entre 1883 e 1895, movido pelas dificuldades com a noção de ordem, que envolve a noção de enumerar e a suposição de que todo conjunto pode ser bem ordenado Cantor, por um lado, obteve um grande aprofundamento na teoria de conjuntos ordenados e do 'tipo de ordem' (generalização da noção de enumerar). Por outro lado, visto não obter os resultados necessários nessa área, resulta a desvinculação da teoria dos números cardinais da teoria dos ordinais, através de formulação equivalente para ambas as teorias por abstração de conjuntos e não mais com uma noção definida a partir da outra, rompendo com aquela definição de potência por classes de ordinais. Explicaremos, inicialmente (seção 1.3.1), essas dificuldades que devem ter conduzido Cantor a utilizar a abstração para definir números ordinais e cardinais.

Tendo descrito acima aspectos da teoria dos números transfinitos (seção 1.1.1), o foco da nossa atenção, nas publicações posteriores a 1883, é a apresentação da nova forma de definir e fundamentar a existência dos números cardinal e ordinal através da "abstração" dos conjuntos, comum nos artigos de 1887 e 1895. Esse elemento novo introduzido por Cantor, o recurso à abstração, ainda visa à estruturação da teoria dos números transfinitos e traz uma certa homogeneidade por meio desse recurso, utilizado para definir a noção de tipo de ordem, de número ordinal, de potência ou número cardinal, finito e transfinito. Daremos as novas definições na seção 1.3.2, explicando como o recurso à abstração pode estar contribuindo para afastar as dificuldades apresentadas. As definições por abstração apresentadas no artigo de 1887 se assemelham às de 1895 e por isso as utilizamos também.

Obviamente não se incluem nos comentários de Frege de 1892 as publicações de 1895 e 1897, parte I e II do *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* que representam 'a maior publicação matemática de Cantor' (DAUBEN, 1979, p. 169) ou 'apresentam as afirmações finais e logicamente mais apuradas dos muitos e mais importantes resultados da longa série de artigos publicados a partir de 1870' (JOURDAIN, 1915, p. v). Mesmo não sendo comentada por Frege, abordaremos algumas definições dessas publicações, pois as mudanças do artigo de 1887 para o de 1895 aparecem, sobretudo, no modo de

⁴⁴CANTOR, Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, 1887 e 1888. Reeditado como parte do *Gesammelte Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten*, 1890. Outro artigo reeditado nesse livro denomina-se Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche. Utilizamos aqui a coletânea organizada por E. Zermelo, de 1932.

apresentar a teoria e na exclusão das explicações de caráter filosófico e teológico, que ocupam grande parte da publicação de 1887. As definições de número cardinal e a relação de ordem dos números, assuntos que nos interessam, assim como as regras da adição, por exemplo, aparecem igualmente em 1887 e 1895, com pequenas diferenças (DAUBEN, 1979, p. 171, 172, 173). Na medida da necessidade dessa pesquisa retomaremos, com a especificação necessária, não só a diferença de conteúdos do artigo de 1887, comentado por Frege, como também dos artigos de 1895 e 1897.

Ao longo das apresentações da teoria dos números transfinitos, o objetivo e a concepção filosófica da matemática de Cantor são permanentes, ambos no que diz respeito ao que abordamos acima. Quanto à concepção filosófica, Cantor mantém sua crença num reino permanente das verdades que, ao serem reconhecidas na mente, devem ser inseridas ao conhecimento já instituído. Quanto ao objetivo, basicamente o problema é a apresentação consistente da sequência dos números transfinitos o que requer, especificamente, precisar a conexão entre o enumeral (nessa ocasião tipo ordinal [*Ordnungstypus*]) e o conjunto, que se associam 'imediatamente', porque a noção de enumeral possibilitou a definição dos novos números. Essa constância poupa-nos a repetição dos dados da teoria de Cantor permitindo-nos utilizar os artigos de 1895 e 1897 e ter a concepção de Cantor descrita acima como base do seu pensamento em todo esse período.

Potência, agora, também é denominada número cardinal. Sobre isso ressaltamos que Cantor mantém os dois termos até, inclusive, a sua publicação de 1895 e 1897, como poderemos ver na citação abaixo (seção 1.3.3), quando eles são empregados como sinônimos, o que representa uma alteração das últimas publicações em relação a de 1883 - diante da qual foi levantada a questão a respeito de a potência ser ou não um número. Entendemos e explicaremos na seção seguinte, que em 1887 a importância e o significado específicos das noções de enumeral e potência, intermediárias entre conjunto e número, estão em transição com relação à publicação de 1883 e às de 1895 e 97, no sentido de irem gradualmente perdendo a função como noções intermediárias, que é grande em 1883 e praticamente desaparece em 1895, como que num movimento de elaboração da ligação entre conjunto e número.

Outra noção, a de conjunto, aparece mais geral a partir de 1883. Cantor substitui o conjunto de pontos por um reino abstrato onde as unidades são desembaraçadas da sua realidade física e até mesmo da ordem que elas devem apresentar para produzir os números ordinais e cardinais transfinitos. Ocupar-nos-emos, a seguir, especificamente dessa noção.

1.3.1 A noção de conjunto em Cantor

A noção de conjunto, apesar de fundamental em sua teoria, é também importante para nosso objetivo porque a abstração é realizada a partir de conjuntos e é, em geral, muito pouco

explicada por Cantor. Restringimo-nos aqui a apresentar dois aspectos da sua noção de conjunto: primeiro, aquele que contrasta mais imediatamente com Frege, que diz respeito à ênfase aos elementos dos conjuntos em detrimento da intenção que os reúne; segundo, um aspecto que se destaca em relação à teoria de conjuntos contemporânea: sua intuição de conjunto transitivo. O termo 'conjunto' quando empregado no artigo de 1883, é explicitado somente em uma nota de rodapé que explica o significado de 'teoria de conjuntos':

"Por uma "variedade" ou "conjunto" eu entendo geralmente toda multiplicidade que pode ser pensada como uma, isto é, qualquer totalidade de elementos definidos que, por meio de uma lei, podem ser unidos num todo e ..." (CANTOR, 1883, s.1, n.1, p. 93)⁴⁵.

Desse modo, a noção de conjunto relaciona os elementos e a lei que os reúne. Percorrendo o artigo podemos afirmar, entretanto, a ênfase ao elemento em detrimento da unidade do conjunto, dado que, no seu curso, Cantor refere-se às classes dos números, ao invés de 'conjuntos', as quais são construídas pela introdução de elemento por elemento que as constituem, elementos esses determinados pelos princípios de formação. Observamos oportunamente que, nesse artigo, Cantor ainda estaria associando conjunto a conjunto de números⁴⁶.

No artigo de 1887, em que Frege se baseia no prolongamento dessa discussão, fica mais claro que Cantor trata os conjuntos pelos elementos que são enumerados, sem considerar a intenção e a articulação que os uniu. Hallett, entre outros⁴⁷, denomina essa abordagem por 'extensionalismo' (HALLETT, 1984, p. 34). Cantor explica o que entende por conjunto num parêntese da definição de número cardinal:

"Por potência e número cardinal de um conjunto M (que consiste de elementos $m, m', \dots$ distintos e conceitualmente separados, determinados e delimitados) eu entendo..." (CANTOR, 1887, p. 387)⁴⁸.

M. Tiles expressa a ênfase de Cantor nos elementos com bastante clareza: "um conjunto é pensado como uma determinada coleção de objetos (um todo dado depois de suas partes) cuja identidade é inteiramente dependente de seus membros (os objetos colecionados) e

⁴⁵"Unter einer Mannichfaltigkeit oder Menge verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken läßt, d. h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welche durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann und..." (CANTOR, 1883, s.1, n.1, p. 587).

⁴⁶Dizemos 'ainda' pela conhecida trajetória de Cantor, que desenvolve sua teoria dos números transfinitos através dos conjuntos de pontos. Sobre isso ver JOURDAIN, 1915 e DAUBEN, 1971, p. 181-216, 1979 p. 30-94, entre outros. Ressaltamos também que esse argumento poderia ser incluído contra a nossa posição, na discussão acima sobre a potência não ser um número em 1883.

⁴⁷Por exemplo Mary Tiles (TILES, 1989, p. 100) e Imbert (IMBERT, 1969, p.72).

⁴⁸"Unter Mächtigkeit und Kardinalzahl einer Menge M (die wohlunterschiedenen, begrifflichgetrennten Elementen $m, m', \dots$ besteht und insofern bestimmt und abgegrenzt) verstehe ich..." (CANTOR, 1887, p. 387).

não como qualquer método pelo qual eles podem ser agrupados ou colecionados" (TILES, 1989, p. 99).

No artigo de 1895, fica evidente, pelo menos em dois momentos, o caráter extensional do conjunto. Um deles, quando Cantor desconsidera completamente o conceito que teria unido os elementos ao definir 'união' dos conjuntos $M, N, P, \dots$ (disjuntos):

"Os elementos desse conjunto $\{(M, N, P, \dots)\}$ são, portanto, os elementos de M , de N , de $P, \dots$, tomados juntos." (CANTOR, 1895, s.1 p. 86).

Outro momento em 1895 que mostra a ênfase sobre os elementos encontra-se na definição do que chamamos de subconjunto de um conjunto dado:

"Nós chamamos pelo nome de "parte" ou "conjunto parcial" de um conjunto M qualquer outro conjunto M_1 cujos elementos são também elementos de M ." (CANTOR, 1895, s.1 p. 86).⁴⁹

Essa visão extensionalista corresponde ao axioma da extensão na teoria axiomática de conjuntos, necessário para estabelecer logicamente a igualdade. Entretanto, "esta não é uma asserção trivial sobre a pertinência" (HALMOS, 1960, p. 3). Suponhamos, exemplifica Halmos para esclarecer a não trivialidade, que consideramos conjuntos de seres humanos e que, se x e A são seres humanos, escrevemos $x \in A$ se x é um ancestral de A . O análogo ao axioma da extensão diria que, se dois seres humanos são iguais, então têm os mesmos ancestrais e também que, se dois seres humanos têm os mesmos ancestrais, então eles são iguais e essa última afirmação é falsa (HALMOS, 1960, p. 3).

Imbert aponta, sobre a noção de conjunto de Cantor, a possibilidade da confusão entre conjunto e grupo 'material de objetos' (IMBERT, 1969, p.72). De fato, não identificamos precisamente a 'confusão' apontada por Imbert. Sobre isso, observamos que os elementos de um conjunto podem ser números, conjunto de números e, tomando os exemplos dele, objetos materiais. Vejamos os exemplos de equivalência entre conjuntos apresentados por Cantor, para ilustrar a presença de objetos materiais como elementos de conjunto:

"O conjunto das cores do arco-íris (vermelho, laranja, amarelo, verde azul, anil, violeta) e o conjunto das notas musicais (dó, ré, mi, fá sol, lá si) são conjuntos equivalentes e ambos se colocam sob o conceito geral *sete*." (CANTOR, 1887, p. 412)⁵⁰.

⁴⁹Segundo a lógica dos FA essa definição [análoga a uma de Dedekind] caracteriza melhor a espécie aristotélica do que é conjunto ou subconjunto no sentido lógico (IMBERT, 1969 p. 73). Frege faz essa referência no parágrafo 53.

⁵⁰"Die Menge der Regenbogenfarben (Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett) und die Menge der Tonstufen (C, D, E, F, G, A, H) sind äquivalente Mengen und stehen beide unter dem Allgemeinbegriff Sieben" (CANTOR, 1887, p. 412).

A ênfase de Cantor está colocada nos elementos que constituem o conjunto mas, por outro lado, a noção de conjunto tem um aspecto 'holístico'⁵¹, o que quer dizer que a determinação do conjunto também considera a conexão dos elementos através do que Cantor denomina por 'coisa em si' [*Ding für sich*] (CANTOR, 1887, p. 419), que é obtida por meio da 'abstração'. Trataremos deste tema mais adiante, devido ao interesse no referido ato e também à possibilidade de associar, através desse ato (não só através dele), o número a conjuntos. Essa abordagem sobre os elementos devidamente caracterizados e reunidos por meio de um 'ato do pensamento' permanece na elaboração de 1895, quando o autor já alcançou a devida distância com o caso particular do conjunto numérico:

"Por um conjunto nós entendemos qualquer coleção M tomada como um todo de objetos m definidos e separados da nossa intuição ou do nosso pensamento." (CANTOR, 1895, p. 85).

Sobre a noção de conjunto, queremos destacar ainda que Cantor não diferencia conjunto de elementos e conjunto de conjunto. Por exemplo, na sequência infinita de números construída pelos princípios de formação $1, 2, 3, 4, \dots, v, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, 2\omega, 2\omega+1, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \alpha, \dots$, as classes de número são "divisões naturais que representam cada potência" e "são representantes da sequência ascendente de potências" (CANTOR, 1883, s.l p. 71, citado acima). Esse é um caso em que vemos que Cantor não distingue entre o elemento que pertence a um conjunto e a inclusão de um conjunto em outro. Ou seja, Cantor trabalha com conjunto de elementos e não com conjunto de conjuntos ou classe de classes. Cada classe de números, que é representante da sequência ascendente de potências, não é concebida como um conjunto do conjunto das potências, assim: $\{\{1, 2, 3, 4, \dots, v, \dots\}, \{\omega, \omega+1, \omega+2, \dots, 2\omega, 2\omega+1, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \alpha, \dots\}, \{\Omega, \Omega+1, \dots\}\}$. Constata-se, dessa forma, uma intuição do autor em direção ao que é chamado atualmente de conjunto transitivo (HALMOS, 1960, p. 51) e caracteriza o conjunto dos números naturais e o conjunto dos ordinais (HRBACEK & JECH, 1984, p. 138).

1.3.2 As circunstâncias que antecedem o emprego da abstração nas definições de número

Antes de apresentar as novas definições de número, introduziremos em seguida as circunstâncias anteriores ao emprego da abstração a fim de alcançar seu significado, isto é, lembramos dois aspectos fundamentais da definição do número transfinito e as dificuldades e problemas que ficaram pendentes no artigo de 1883. As dificuldades têm origem nas noções de

⁵¹ Este termo é empregado por Dauben, principalmente quanto à consideração do infinito atual (DAUBEN, 1979, p. 170).

conjunto bem ordenado, de enumerar e nos princípios de formação dos números. Cada um desses conceitos apresentou dificuldades de caráter diverso.

Sobre a importância e problemas da noção de conjunto bem ordenado, lembremos que Cantor *assumia* que todo conjunto podia ser bem ordenado⁵². Além disso, outros problemas de natureza mais técnica, como a 'hipótese do contínuo', permaneciam sem solução. Mencionamos a trajetória de Cantor para compreendermos o problema na sua origem: por um longo período ele dedicou-se à generalização no estudo da ordem dos conjuntos. Ele desenvolveu, a partir de 1883, a teoria dos números ordinais que culminou numa teoria mais geral sobre ordem de conjuntos quaisquer onde os tipos de ordem simples [enumerar] representam um caso particular da teoria dos tipos de ordem. Essa trajetória possibilitou um grande desenvolvimento da teoria de números ordinais, em que poderia ser encontrada a resposta para o problema da potência do contínuo. Entre outras coisas, ele explorou com detalhes os tipos de ordem dos números naturais (ω), dos racionais (η) e dos números reais (θ), pois, para Cantor, o problema do contínuo poderia não depender somente da questão da potência mas também da ordem em que o conjunto era arranjado. A exemplo do que ocorre com os números racionais, que ao exibirem um tipo de ordem η ou ω , obviamente da mesma potência, exibem a propriedade da densidade só na ordem natural η , a propriedade fundamental do contínuo podia parecer só na ordem natural θ e não ao exibir a ordem da segunda classe de números, que Cantor acreditava ser equivalente ao contínuo. Pelo estudo dos tipos de ordem em geral e do contínuo θ ele poderia caracterizar completamente a ordenação de número θ e assim demonstrar a 'hipótese do contínuo', conforme prometera em 1883 (CANTOR, 1883, s. 10, p. 86).

Ocorreu que Cantor não obteve as provas que buscava nessa abordagem. Do insucesso dessa busca resultou a mudança de estratégia, ou seja, essas dificuldades e conseqüentemente a ausência de resultados fundamentais, como a demonstração do teorema da boa ordenação e da hipótese do contínuo pelo estudo da ordem, podem ter conduzido o autor a apresentar a seqüência dos cardinais finitos e transfinitos de forma independente, pelo menos aparentemente ou sob determinadas suposições⁵³. Em outras palavras, Cantor buscou outra forma de apresentar a teoria dos números transfinitos suspendendo a dependência que a noção de número cardinal mantinha com a de número ordinal e classes de números. A outra forma empregada para esse fim é a definição de números pela abstração de conjuntos. As dificuldades descritas acima, que momentaneamente chamamos de 'dificuldades técnicas', nos apontam a finalidade com que a abstração é empregada: como meio de desvincular a noção de potência da noção de

⁵²Essa afirmação consiste não em um resultado que pode ser demonstrado mas num axioma, equivalente ao axioma da escolha, estabelecido por Zermelo.

⁵³A necessidade de esclarecermos o significado de abstração para Cantor nos fará observar que esta independência em relação à noção de ordem é aparente. Retomamos esta questão na conclusão (seção 3.4).

ordem e com isso apresentar duas seqüências independentes de números transfinitos, tema que retomamos adiante⁵⁴.

O segundo aspecto fundamental na formação dos números, finitos e transfinitos, são os princípios de formação cuja forte noção de ordem que eles pressupõem foi destacada anteriormente (seção 1.1.1) e que apresentou dificuldades técnicas, como vimos acima. Um bom exemplo é o segundo princípio, responsável pela introdução do número transfinito, que faz apelo à noção de ordem ao recorrer ao limite da seqüência, isto é, ao recorrer ao 'menor número maior que todos os anteriores'⁵⁵. Justamente a noção de ordem, além dessas dificuldades formais, era alvo de críticas, como aquela elaborada por Frege nos FA, que podem ter levado Cantor a alterar a estrutura da teoria⁵⁶. Chamamos essa dificuldade com a noção de ordem de 'dificuldade conceitual'. Essa dificuldade indica, ainda, com que finalidade a abstração foi empregada: para evitar a forte dependência da teoria dos números transfinitos em relação à noção de ordem.

A última dificuldade, de caráter mais filosófico, pode nos ajudar a entender melhor o significado da abstração nos textos de Cantor. Ela surge com o conceito de enumeral, que ficou pouco explicado em 1883. A dificuldade à qual nos referimos surgiu quando Cantor, para introduzir o transfinito, estendendo a seqüência dos números, introduz a noção de enumeral, a qual garante a equivalência conceitual entre os números ordinais finitos e transfinitos. Lembramos que Cantor partiu do acordo sobre a existência dos números finitos, conjuntos finitos e infinitos; a noção de enumeral é a representação do conjunto na mente, à qual se deve associar um número. Por exemplo, ao conjunto $\{1,2,3\}$ Cantor associa o enumeral, que é 'a imagem do conjunto bem ordenado na mente'⁵⁷ de número 3; ao conjunto $\{1,2,3,\dots,v,\dots\}$ ele associa o enumeral, 'a imagem do conjunto bem ordenado na mente', de número ω , do campo estendido dos números. Isto é possível porque o enumeral dos elementos pode ser determinado para todo conjunto e a ele é associado um número. Entretanto, Cantor não explicou qual a natureza dessa imagem ou representação e como a concebemos pré-formada. Esse é um passo para o estabelecimento do número transfinito simplesmente curto e imediato, as palavras de Cantor foram "representação objetiva e imediata", não explicadas ou justificadas por ele. Esse procedimento oculto ou misterioso, como diz Frege, possibilitou, em 1883, a concepção dos

⁵⁴Cantor, de fato, precisava de noções exatas de ordem para determinar a seqüência de números cardinais transfinitos. Apenas o primeiro número cardinal transfinito, assim como os números finitos, podem ser definidos sem considerar ordenações (HALMOS, 1975, p. 47,48 e 83).

⁵⁵Recorrer ao limite de uma seqüência não é um procedimento descartado por Cantor depois de 1883, ainda que não seja esse o meio para obtenção dos números transfinitos. Ver " (CANTOR, 1895, §10, p.158);

⁵⁶Com a demonstração de Frege, poderíamos cogitar que Cantor pudesse ter se convencido da ordinalidade como propriedade.

⁵⁷Ou, precisamente, "O conceito de enumeral dos elementos tem uma representação objetiva imediata na nossa intuição [*Anschauung*] interna" (CANTOR, 1883, s.2 p. 71-72, citado acima).

números transfinitos, isto é, Cantor apresentou um argumento existencial subjetivo. A conexão entre conjunto e número que em 1883 era realizada pelo enumeral foi, naquela ocasião, substituída pela abstração, que se coloca na posição equivalente ao enumeral, no sentido em que possibilita a conexão entre conjunto e número, como veremos em seguida, ainda que evite apelo direto aos argumentos subjetivos.

1.3.3 As definições por abstração

Identificamos acima as dificuldades que antecedem a nova definição, as quais envolvem a noção de ordem, no seu aspecto técnico ou conceitual ou na origem intuitiva da teoria dos conjuntos, sobretudo na concepção de enumeral. Portanto, essas dificuldades levaram Cantor, intencionalmente ou não, à introdução do recurso à abstração nas definições de número cardinal e ordinal⁵⁸:

"Por potência ou número cardinal de um conjunto M (...) entendo o conceito geral ou genérico (universal) que é obtido quando no conjunto se abstrai da natureza de seus elementos como também de todas as relações que os elementos têm, seja entre si, seja com outras coisas, em particular também da ordem que pode reinar entre eles, e só se reflete no que é comum a todos os conjuntos "equivalentes" a M ." (CANTOR, 1887 [1884⁵⁹], p. 387)⁶⁰.

"Sob o conceito enumeral (*Anzahl*) ou número ordinal (*Ordnungszahl*) de um conjunto bem ordenado M , eu entendo o conceito geral (genérico, universal) que é obtido quando se abstrai da natureza e da designação de seus elementos e só reflete [retém] a hierarquia na qual os elementos se colocam em relação entre eles". (CANTOR, 1887 [1884], p. 388)⁶¹.

⁵⁸Esses problemas que podem ter conduzido Cantor a definições por abstração estão indicados por Hallett (HALLETT, 1984, p. 120, 121, 129, 146) e Dauben (DAUBEN, 1979, p. 133-140, 156-158).

⁵⁹Esse trecho publicado em 1887 é parte de uma carta datada de 1884, assim como outros trechos devidamente registrados pelo autor nesse artigo.

⁶⁰"Unter Mächtigkeit oder Kardinalzahl einer Menge M (...) verstehe ich den Allgemeinbegriff oder Gattungsbegriff (universale), welchen man erhält, indem man bei der Menge sowohl von der Beschaffenheit ihrer Elemente, wie auch von allen Beziehungen, welche die Elemente, sei es unter einander, sei es zu anderen Dingen haben, also im besondern auch von der Ordnung, welche unter den Elementen herrschen mag, abstrahiert und nur auf das reflektiert, was allen Mengen gemeinsam ist, die mit M äquivalent sind" (CANTOR, G, 1887, p. 387).

⁶¹"Unter Anzahl oder Ordnungszahl einer wohlgeordneten Menge M verstehe ich den Allgemeinbegriff (Gattungsbegriff, universale), welchen man erhält, indem man bei der wohlgeordneten Menge M von der Beschaffenheit und Bezeichnung ihrer Elemente abstrahiert und nur auf die Rangordnung reflektiert, durch welche die Elemente in Beziehung zu einander stehen;" (CANTOR, G, 1887, p. 388).

"Nós chamamos pelo nome de "potência" ou "número cardinal" de M o conceito geral, por meio da nossa faculdade ativa de pensamento, nasce do conjunto M quando nós abstraímos da natureza de seus vários elementos m e da ordem em que eles estão dados" (CANTOR, 1895, §1, p.86).

"Por isso [tipo ordinal] nós entendemos conceito geral, que resulta do conjunto M quando nós abstraímos apenas da natureza de seus vários elementos m e retemos a ordem de procedência entre eles." (CANTOR, 1895, §7, p.112).

Estando claras as dificuldades com a noção de ordem e a natureza do enumerar abordadas acima (seção 1.1.2), entendemos que o recurso à abstração pode superar essas dificuldades do seguinte modo: por abstração Cantor define o número ordinal e o cardinal com o mesmo recurso, o que conduz a duas seqüências de números transfinitos e livra o número cardinal da forte presença da ordem que tinha em 1883, já que não define o número cardinal dependente do ordinal e das classes de números mas, através da abstração; a abstração estabelece a conexão entre o conjunto e o número e com isso explica a "representação na intuição interna".

Para esclarecer como a abstração avança em relação às dificuldades colocadas, buscamos caracterizar as definições de número cardinal e de número ordinal, citadas acima, nos seguintes aspectos: primeiro vemos que os dois números são definidos independentemente; em seguida apontamos a interação entre uma crítica de Frege e essa mudança de estratégia na teoria de Cantor; por último, observamos, pelas citações, a potência como número cardinal, nessa ocasião. Entretanto, precisamos olhar cuidadosamente para o significado de número que pode ser entendido em 1887 como transitório entre o que explicamos sobre seu significado em 1883 e aquele que passa a ter em 1895-1897.

Enfatizamos primeiramente que, de certo modo, o número cardinal agora é independente do ordinal, e mais que isso, conceitualmente equivalente no que diz respeito ao recurso para o seu estabelecimento. Isso pode ser notado na citação acima e nessa que apresentamos em seguida:

"Não só o número cardinal, como o tipo ordinal são *simples* imagens conceituais; cada uma delas *verdadeiras unidades* [Einheit], porque a *unidade dos uns* [Einsen] une-se no conjunto e pluralidade." (CANTOR, 1887, p. 380 (grifo do autor))⁶².

⁶² "Die Kardinalzahlen sowohl, wie die Ordnungstypen sind einfache Begriffsbildungen; jede von ihnen ist eine wahre Einheit, weil in ihr eine Vielheit und Mannigfaltigkeit von Einsen einheitlich verbunden ist."

Por exemplo, em 1895, antes de mencionar qualquer coisa sobre ordem, Cantor introduz os números cardinais finitos e o $\aleph_0$ e anuncia toda a sequência de cardinais transfinitos, e aí sim, recorre à teoria do tipo ordem para obter "o fundamento rigoroso desse assunto" (CANTOR, 1895, §6, p.109). Como na teoria axiomática contemporânea, Cantor desvinculou da noção de ordem até o número cardinal $\aleph_1$, o que, por outro lado, representa uma abordagem bem diferente daquela presente no artigo de 1883.

Abstraindo da ordem e da natureza dos elementos obtemos o número cardinal; abstraindo somente da natureza deles obtemos o número ordinal. Observaremos no próximo capítulo quando apresentarmos a crítica de Frege a Cantor nos FA, que a noção de número cardinal definida desse modo é menos 'ampla' que a noção de número ordinal, que retém duas características do conceito. Não podemos afirmar com isso que Cantor acatava a orientação de Frege, mas é possível observar que Cantor, eventualmente, arriscava-se em direções que concordavam com a proposta fregeana.

Nas citações que iniciam esta seção verifica-se que os conceitos de enumeral (ou tipo ordinal de conjunto bem ordenado) são usados indistintamente em relação ao conceito de número ordinal e o mesmo ocorre com a noção de potência e número cardinal de um conjunto M ou $\mathbb{M}$ -bem ordenado, isto é, a função desses conceitos intermediários já não aparece em 1895 e 1897. Nas últimas publicações fica evidente que potência é número, pela observação da opção que Cantor oferece de emprego de qualquer um, identificada pelo uso do conectivo 'ou' entre os dois termos, como por exemplo no título da seção de abertura desse artigo "A concepção de potência ou número cardinal" (CANTOR, 1895, §1, p.85); logo à frente ele diz "Nós chamamos pelo nome de potência ou número cardinal de M [conjunto]...." (CANTOR, 1895, §1, p.86); ou pelo uso indistintamente de um ou de outro termo em sentenças com referências similares aos conjuntos: "Nós vemos que a potência de $(M.N)$ depende apenas da potência $\overline{M} = a$ e $\overline{N} = b$..." (CANTOR, 1895, §3, p.92); assim, o número cardinal de $(M|N)$ depende apenas do número cardinal $\overline{M} = a$ e $\overline{N} = b$..." (CANTOR, 1895, §3, p.92). Entretanto, observando a publicação de 1887 e 1888, notamos que essa passagem é gradual, isto é, apesar da distinção entre número ordinal e enumeral ter diminuído com a nova definição por abstração, ela não desaparece nos artigos de 1887.. Nesses artigos Cantor refere-se à "potência e ao número cardinal" (CANTOR, 1887, p. 387⁶³ (grifo nosso)).

Se a função específica das noções de enumeral e potência é clara e distinta da função dos números em 1883 e praticamente nula em 1895, nas publicações de 1887 e 88 essa função não é tão transparente e precisa ser observada cuidadosamente. Por um lado, se fixamos nossa atenção na conexão entre número e conjunto, observamos que a conexão entre conjunto e

⁶³Citado acima.

número é mais direta, isto é, não precisa explicitamente dos conceitos de enumerar ou de seu análogo, potência, para se estabelecer. Cantor afirmou diversas vezes nesse artigo que números são abstração de conjuntos que eles numeram:

"Aqui se encontram concepções de *todo número* [infinito atual] e *tipo de ordem* como *universalien* por mim construídas nesses quatro anos, elas se relacionam com *conjuntos* e resultam dele quando nós abstraímos da natureza dos elementos. Cada conjunto com seus elementos bem definidos pode ser visto como uma coisa em si unida. Abstraindo não só da natureza dos elementos, como também da ordem em que eles são dados consegue-se um conceito geral, o *número cardinal* ou *potência* do conjunto, no qual os elementos, assim chamados *uns* (*Einsen*), que de algum modo se fundem em um tipo orgânico e com um todo homogêneo, não têm nenhuma posição privilegiada em relação aos outros." (CANTOR, 1887, p. 379 (grifo do autor); Cavaillès, 1938, p.97).⁶⁴

Por outro lado, número permanece sendo uma composição de duas características, a seqüência e o todo, isto é, o número pode ser entendido como o enumerar dos elementos, ou a potência deles, que corresponde àquela imagem do conjunto na mente, sendo que o número é também a unificação das unidades:

"Os elementos que compõem um conjunto devem ser apresentados separados; na imagem intelectual *M* dos mesmos, que eu chamo de tipo de ordem, os *uns*, no entanto, são unidos num organismo. Cada tipo de ordem pode ser visto como uma composição de *matéria* e *forma*; ela [tipo de ordem] contém a *matéria* que fornece a diferenciação conceitual dos *uns*, enquanto que a existência da ordem corresponde à *forma*." (CANTOR, 1887, p. 380 (grifo do autor))⁶⁵.

⁶⁴ "Hier findet sich die von mir seit etwa vier Jahren vertretene und in meinen Vorlesungen vielfach ausgebildete Auffassungsweise der ganzen Zahlen und Ordnungstypen als Universalien, die sich auf Mengen beziehen und aus ihnen sich ergeben, wenn von der Beschaffenheit der Element abstrahiert wird. Jede Menge wohlunterschiedener Dinge kann als ein einheitliches Ding für sich angesehen werden, in welchem jene Dinge Bestandteile oder konstitutive Elemente sind. Abstrahiert man sowohl von der Beschaffenheit der Elemente, wie auch von der Ordnung ihres Gegebenseins, so erhält man die Kardinalzahl oder Mächtigkeit der Menge, einen Allgemeinbegriff, in welchem die Elemente, als sogenannte Einsen, gewissermassen organisch ineinander derartig zu einem einheitlichen Ganzen verwachsen sind, dass keine vor den anderen ein bevorzugtes Rangverhältnis hat".

⁶⁵ "Die Elemente der uns gegenüberstehenden Menge *M* sind getrennt vorzustellen; in dem intellektuellen Abbilde *M* derselben, welches ich ihren Ordnungstypus nenne, sind dagegen die Einsen zu einem Organismus vereinigt. In gewissen Sinne lässt sich jeder Ordnungstypus als ein Kompositum aus Materie und Form ansehen; die darin enthaltenen, begrifflich unterschiedenen Einsen liefern die Materie, während die unter diesen bestehende Ordnung das der Form entsprechende ist."

Portanto, concluímos que ao tratar potência como número, os conceitos intermediários entre o conjunto e o número, são englobados ao número pela abstração, porque esse procedimento abarca a representação do conjunto na mente.

Tendo presente que o objetivo de Cantor era encontrar a melhor maneira para inserir os números transfinitos no corpo do conhecimento matemático e que as formulações da teoria não variaram quanto ao conteúdo geral- ela se desenvolveu, amadureceu e atingiu uma forma lógica mais apurada- entendemos que a abstração substitui o enumeral. Isto porque a conexão conjunto e enumeral, que ficou indeterminada em 1883, (ou correspondentemente, conjunto e potência) e mal explicada por "a representação na intuição interna" a qual sugere apelo subjetivo, se esclarece pela abstração. A abstração é o processo ou procedimento que realiza agora a passagem do conjunto para o número ordinal ou para o cardinal. Com introdução deste recurso à abstração, Cantor estaria explicando como obter imagem e representação de conjuntos, que ao serem vistos como um todo são identificados pelo número que expressa aquela noção. A abstração, sob esse ponto de vista, não visa justificar a teoria, que se sustenta pela não contradição, mas pode representar um método que proporciona a cópia ideal da estrutura do conjunto, no que diz respeito a sua ordem ou ao seu tamanho e que foge da referência direta à intuição.

Essas definições para Cantor, assim como o processo de abstração, são legítimas, não arbitrarias ou artificiais (DAUBEN, 1979, p. 156). Os teoremas podem ser demonstrados a partir das definições por abstração, que por isso se mostram fecundas, afirma Cantor após apresentar uma propriedade dos números transfinitos:

"Pois, como já foi dito, trata-se nestes nossos números transfinitos de uma nova geração de números, cujas características devem ser pesquisadas, mas não preparadas conforme a receita de preconceitos. Estas afirmações, como todas as outras que não posso citar neste pequeno resumo, têm a sua consistência sólida pela potência lógica de provas que, partindo de definições dadas anteriormente, não arbitrarias ou artificiais, mas brotadas da fonte da abstração natural, alcançam o seu objetivo com a ajuda de silogismos. "

(CANTOR, 1887, p. 418 (grifo do autor); Dauben, 1979, p. 156)⁶⁶.

⁶⁶ "Denn, wie schon gesagt, es handelt sich bei unsern transfiniten Zahlen um ein neues Zahlengeschlecht, dessen Beschaffenheit man zu erforschen, nicht aber nach dem Rezept von Vorurteilen eigenmächtig zu präparieren hat. Jene Sätze sowie alle anderen, die ich in diesem kurzen Abriß nicht anführen kann, haben ihren festen Bestand durch die logische Kraft von Beweisen, die, von den vorher gegeben, nicht willkürlichen oder gekünstelten, sondern aus dem Quell naturgemäßer Abstraktion entsprungenen Definitionen ausgehend, mit Hilfe von Syllogismen zum Ziele gelangen." (CANTOR, 1887, p. 418).

A crença de Cantor no procedimento da abstração, com o significado explicado acima, está de acordo com as relações que o autor acredita necessárias para inserir um novo conceito na matemática: em relação à mente, o novo conceito se encaixa dentro do corpo de conhecimentos já admitido, relacionando-se com eles; o novo número é abstração de conjunto, que é parte do corpo conhecido.

Não se trata, portanto, de uma definição por postulação ou da descrição da silhueta incolor que parte dos objetos distintos que perdem esta distinção ao negligenciar o conteúdo dela, formando aqueles uns que compõem uma pluralidade e que não possuem nada que os distinga entre eles (CAVAILLÈS, 1938, p. 97-98), como as definições por abstração poderiam ser interpretadas.

Para Cantor, a existência parece mais ligada à capacidade de construir e exhibir, no caso, os novos números, buscando formular e indicar como formular, como alcançar esse novo componente da realidade. A abstração, portanto, pode representar mais um elemento para explicação dos novos números mas, como ela atua sobre um todo orgânico e não através da substituição de cada unidade, o significado desse procedimento não é evidente.

Cantor pretendia estender a sequência dos números finitos até os números transfinitos e, para isso, parte dos conjuntos. Mesmo mudando a estratégia no que diz respeito ao apoio maior no número ordinal, ele permanece argumentando sobre a relação dos novos números com os números já existentes, fazendo analogia com os outros desenvolvimentos da matemática, que avança respeitando as relações já admitidas e interagindo o elemento novo com eles, se o elemento novo não implicar em contradições.

A pergunta que ocorre imediatamente após a instalação da abstração que 'substitui' a intuição é sobre o caráter dessa abstração, se ela diz respeito a um processo orgânico, lógico, mental, enfim, se Cantor avançou no que tange ao estabelecimento dos números transfinitos ao acrescentar esse procedimento. Se, pela reação de Frege que passaremos a analisar, medirmos a resposta concluiremos que Cantor, no mínimo, caiu mais explicitamente no subjetivismo do que a "misteriosa intuição interna" já indicava.

CAPÍTULO 2: A CONCEPÇÃO DE NÚMERO E O CONCEITO DE OBJETIVIDADE EM FREGE: CRÍTICAS A CANTOR

As menções explícitas de Frege a Cantor ocorrem nas seções 85 e 86 dos FA e nas resenhas que elabora sobre a teoria dos números transfinitos, rascunho (1890) e versão publicada de 1892 e no *Grundgesetze*. Abordaremos as duas primeiras, das quais extraímos dois temas que serão analisados no próximo capítulo: a noção de número cardinal e ordinal e o emprego da abstração na definição desses conceitos. Em *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege discutiu a teoria dos números reais de Cantor, que envolve a discussão de aspectos formais como o significado de uma definição e o rigor na apresentação da teoria, entre outras coisas que poderiam ser acrescentadas nesse estudo. Mas isso exigiria um aprofundamento na lógica de Frege, o que vai além da nossa proposta. Assim, descartamos o conteúdo da discussão contida nessa obra sem prejuízo ao estudo proposto, já que ela não contém argumentos necessários ao tema escolhido.

Na seção 2.1 expomos as críticas de Frege a Cantor sobre a noção de número e o uso da abstração. O propósito das críticas, neste capítulo, é motivar e delimitar a exposição dos conceitos fregeanos. Esses conceitos, como os de *conceito e objeto*, dos quais nos ocuparemos na seção 2.2, assim como o significado dos termos psicologismo, empirismo e abstração, abordados na seção 2.3, são necessários para compreendermos as críticas, por isso deixaremos a análise delas para o próximo capítulo. Por último, na seção 2.4, buscamos também conhecer a definição de número esboçada nos FA para fazermos adiante a discussão sobre essa noção.

Assim, nosso objetivo nesse capítulo consiste em esclarecer, principalmente através dos FA, os termos empregados por Frege nas suas críticas à noção de número e ao emprego da abstração em Cantor.

2.1 AS CRÍTICAS DE FREGE A CANTOR: AO ARTIGO DE 1883 NOS FA E AO USO DA ABSTRAÇÃO NA DEFINIÇÃO DE NÚMERO A PARTIR DE 1884

Nesta exposição, as críticas de Frege a Cantor estão separadas em duas. A primeira, seção 2.1.1, foi extraída das seções 85 e 86 dos FA e tem como alvo exclusivo a publicação de 1883. Nessa crítica, Frege mantém uma postura simpática à teoria dos números transfinitos e, mais que isso, admite certa afinidade entre algumas noções dos FA e do artigo de 1883. A segunda crítica, seção 2.1.2, foi extraída das resenhas e tem como alvo a publicação de 1887. O tema central dessa crítica é o uso da abstração que, para Frege, representa um modo empirista-psicologista. O tom de Frege nessa segunda crítica é de ironia e hostilidade.

Das críticas de Frege a Cantor, que serão analisadas no próximo capítulo, extraímos os temas que exploramos na sequência deste.

2.1.1 A noção de número ordinal na mira de Frege e a resposta de Cantor

Nas seções 85 e 86 dos FA, Frege não apenas tece críticas a Cantor como também elogia inicialmente sua obra que introduz os números infinitos⁶⁷. Elogia também a noção de número proposta, no que diz respeito à sua aplicabilidade aos números infinitos, ou seja, os números finitos e infinitos são passíveis do mesmo tratamento rigoroso⁶⁸.

Frege manteve nos FA uma postura simpática à teoria dos números transfinitos de Cantor, apresentada no seu artigo de 1883. Frege reconhece que essa teoria abre um caminho aritmético para os números transfinitos (FREGE, 1884, §86, p. 264). A divergência apontada por Frege, origem de um dos dois temas de nossa análise, é a terminologia:

"Concordando, como creio, com Cantor neste ponto, divirjo um pouco dele, porém, na terminologia. Ele chama o meu número de "potência", enquanto que o seu conceito de número faz referência à ordenação." (FREGE, 1884, §85, p. 263).

Esta crítica envolve a noção de número em dois aspectos que serão analisados no próximo capítulo. O primeiro diz respeito à relação entre o número cardinal de Frege e o conceito de potência do artigo de 1883 de Cantor. A crítica acima sugere que essas noções sejam equivalentes, isto é, que potência e número cardinal, conforme empregados por Cantor e Frege respectivamente, possuam o mesmo significado. Para compreender e analisar o que pode significar exatamente essa equivalência buscamos neste capítulo compreender o significado de número cardinal para Frege, desenvolvido a partir da seção 2.2.

O segundo aspecto da noção de número que extraímos dessa crítica é sobre a cardinalidade e ordinalidade dos números. Para bem compreendê-lo, acompanharemos na seção 2.4 os passos de Frege para a definição dos números naturais como cardinais com propriedades de uma sequência ordenada, obtidas do que está anteriormente definido, .

Esses temas permitem uma reflexão sobre a noção de número, resultando num rico debate conceitual concluído no capítulo 3 e ainda possibilitam perceber algumas contribuições

⁶⁷Frege define no §84 seu número infinito, um cardinal. E refere-se ao 'número transfinito' de Cantor por 'número infinito'.

⁶⁸"Efetivamente real" é o termo empregado por Frege para caracterizar os números finitos e infinitos. O significado dessa expressão para Cantor e Frege não é idêntico. Frege comenta que se restringimos o significado dessa expressão por aquilo que produz efeitos nos sentidos diretamente ou produz remotamente consequências perceptíveis, nem os números finitos nem os infinitos podem ser ditos efetivamente reais' (FREGE, 1884, §85 e §26, p. 263 e 223). A suposição do significado dessa expressão desprezado por Frege pode ser uma referência ao significado dela em Cantor, que se esclarece pela sua concepção filosófica explicada acima, seção 1.2 (ver CANTOR, 1883, s.8 p. 79).

dos dois autores para a teoria axiomática de conjuntos, mesmo que de uma forma não sistemática.

Pelo conteúdo das seções 85 e 86 dos FA, poderíamos afirmar que Frege acredita mais na afinidade de seu trabalho com o de Cantor do que coloca as teorias como rivais. Aliás, o que poderia ser considerado oposto na teoria deles é a qualidade primeira do número-ordinal para um deles e cardinal para o outro. Entretanto, isso não é entendido por Frege como oposição: ele acredita ter acrescentado um resultado à teoria de Cantor, com a demonstração da ordinalidade do número a partir da cardinalidade. De fato, as seções 85 e 86 dos FA acentuam, principalmente, a convergência dos temas de pesquisa (IMBERT, 1969, p. 70). Além da equivalência entre as noções de potência e número cardinal, ele sugere uma interação entre seus fundamentos e o novo desenvolvimento da teoria dos números transfinitos através da 'correção' em definições, demonstrações e preenchimento de 'lacunas' indicadas explicitamente: alteração do termo que designa 'potência' para 'número cardinal' e estabelecimento lógico de 'seguir em uma sucessão'. Frege não deseja "atingir a teoria de Cantor em sua legitimidade ou fecundidade" (FREGE, 1884, §86, p. 263) pois ele está de acordo com seu desenvolvimento e acredita que ela pode se estabelecer de acordo com seu padrão de rigor:

"Parecem-me faltar ainda definições precisas de seguir em uma sucessão e do número cantoriano. Cantor recorre então a uma "intuição interna" um tanto misteriosa, onde deveria esforçar-se por obter uma demonstração a partir de definições, o que seria de fato possível. Pois acredito antever como estes conceitos poderiam ser determinados." (FREGE, 1884, §86, p. 263).

Cantor, por sua vez, não recebe a crítica de Frege com parcimônia e tampouco parece concordar com um paralelo entre algumas noções das duas teorias (ver IMBERT, 1969, p. 68; CURRIE, 1982, p. 54). Além de discordar da equivalência entre as noções de potência e número cardinal, Cantor acusa Frege de apresentar uma definição indeterminada e circular:

"Parece-me que teve pouco sucesso a sua própria tentativa de fundamentar rigorosamente o conceito de número....O autor toma por fundamento do conceito de número aquilo que se chama "extensão de conceito" que é em geral estritamente indeterminado em relação à quantidade. ...Para uma precisa determinação da "extensão do

conceito" é necessário antes ser dado o conceito de "potência" e de "número" (CANTOR, 1885, p. 440)⁶⁹.

Concordamos com a avaliação de Imbert de que Cantor não compreendeu exatamente a definição lógica de Frege por meio de extensão de conceito. Imbert afirma que Frege estaria mais avançado na "lógica dos conceitos" que seus contemporâneos (IMBERT, 1969, p.68 e 71)⁷⁰. Mas não é nosso objetivo verificar a pertinência das críticas de Cantor a Frege, a qual retomaremos rapidamente na conclusão com o intuito de enfatizar algum resultado de Frege. Nos restringiremos ao debate conceitual da noção de número e, para tanto, apresentamos o esboço da definição de Frege na seção 2.3 mas não enfocaremos os detalhes apontados por Cantor a esse respeito. De fato, com a citação pretendemos ilustrar o início dos desacordos entre os dois autores.

Diante da resposta de Cantor aos FA, que não correspondeu em simpatia ou afinidade, Frege percebeu que a concepção de Cantor era diferente das suas noções básicas, como a de conjunto e de número. A própria estrutura lógica sobre a qual Frege desenvolveu suas definições e demonstrações não teve a adesão de Cantor. A diferença é sentida ainda mais por Frege ao tomar contato com o prosseguimento da exposição e explicações de Cantor em outras publicações. Isso se expressa na resenha que Frege faz do artigo de Cantor de 1887. Por exemplo, tomando conhecimento desses novos escritos de Cantor, Frege muda de crença sobre a possibilidade de conciliar sua noção de número cardinal com a de potência de Cantor e confirma o contrário:

"Naquele tempo [1884] me pareceu que isto [a definição de potência de Cantor] diferenciava da minha, não na sua essência, mas apenas nas suas palavras....Agora eu vejo que as verdades que eu anunciei no meu livro não eram, contudo, como verdades caídas na rua que cada um pode simplesmente inclinar-se e fazer sua. Sr. Cantor deu outras

⁶⁹"Weniger erfolgreich dagegen scheint mir sein eigener Versuch zu sein, den Zahlbegriff streng zu begründen. Der Verf. ... "Umfang eines Begriffes" genannt wird, zur Grundlagen des Zahlbegriffs zu nehmen....Für eine derartige quantitative Bestimmung des "Umfang eines Begriffes" müssen aber die Begriffe "Zahl" e "Mächtigkeit" vorher von anderen Seite her bereits gegeben sein. ..." (CANTOR, 1885, p. 440)

⁷⁰Ver CANTOR, Die Grundlagen der Arithmetik (Rezension der Schrift von G. Frege...), 1885. Após a exposição da definição de Frege deve ficar mais claro porque a crítica de Cantor não cabe à definição de Frege. Por hora, adiantamos que Frege teria respondido a Cantor que a crítica exposta na revisão dos FA sobre a indeterminação quantitativa da sua definição, seria pertinente se ele tivesse definido o número de satélites de Júpiter como a extensão do conceito "satélites de Júpiter". A sua definição identifica o número de satélites de Júpiter com a extensão do conceito "equinúmero ao conceito 'satélites de Júpiter'", na qual não é suposto o número de satélites de Júpiter (IMBERT, 1969, p.71). Ocorre, sucintamente falando, que Cantor entende por extensão de conceito a sua noção de conjunto. Ver (HALLETT, 1984, p. 126).

definições que me parecem firmemente acomodadas numa posição antiquada.⁷¹ " (FREGE, 1892, p. 179 [270]).

Mas o que se deu na discussão entre Cantor e Frege não se restringiu à avaliação das noções semelhantes e discussões formais de estruturação de teorias. Frege passou a atacar Cantor atingindo a estrutura da teoria dos transfinitos de um modo que, aparentemente, é capaz de impedir qualquer interação entre eles.

2.1.2 O ataque de Frege ao emprego da abstração nas definições de número

Depois de comentar o artigo de Cantor de 1883 nos FA Frege comentou o artigo de 1887 através de uma resenha. Sobre essa resenha, é importante notar que ela está hoje disponível em duas versões, a que foi publicada em 1892, e portanto aquela que Cantor teve acesso, e o 'rascunho' ao qual nos referimos pelo ano em que foi escrita, 1890. Apenas uma pequena parte do rascunho é igual à versão publicada. O trecho comum dessas duas versões refere-se ao infinito atual e à introdução dos números transfinitos. Frege permanece aceitando as novas noções, elogia e reforça os argumentos de Cantor contra as críticas que recebia (FREGE, 1890, p. 68 e 1892, p. 178). Na outra parte da resenha, tanto no rascunho como no texto publicado, Frege passa a acusar a postura de Cantor em suas definições e exposição geral da teoria, sobretudo pelo uso da abstração para obter tanto o número cardinal - definido por Cantor por abstração da ordem e da natureza dos elementos- como o número ordinal -definido por abstração da natureza:

"Cantor demanda mais [além da abstração da natureza dos elementos]: para chegar ao número cardinal, nós somos requeridos a abstrair da ordem na qual eles estão. O que pode ser entendido por isso?" (FREGE, 1890, p. 70).

"Agora, no que diz respeito aos números e tipos ordinais, eu não posso aceitar que os fundamentos que o Sr. Cantor dá a eles são adequados, não mais [adequados] que no caso dos números cardinais. Ele indica como nós devemos abstrair para obtê-los. Mas, tal indicação não pode passar por uma definição, pois isso pressupõe que nós já conheçamos o que está para ser definido, ou isto não o determina inequivocamente no caso que é possível fazer-se a abstração, mas nem isso é o caso aqui." (FREGE, 1892, p. 180-181 [272]).

⁷¹"Sie schien mir damals von meiner eignen nur unwesentlich in den Ausdrücken verschieden zu sein, ...Jetzt sehe ich, daß die in meinem Buche ausgesprochenen Wahrheiten doch nicht so auf der Straße lagen, daß man sich nur zu bücken brauchte, um sie sich anzueignen. Herr Cantor gibt nämlich noch andere Definitionen...." (FREGE, 1892, p. 164).

A crítica à abstração é o tema das duas versões da resenha. No rascunho da resenha destaca-se o visível sarcasmo e a ironia usada por Frege para comentar originalmente o artigo de 1887 de Cantor. As modificações da resenha na versão publicada tornam a ironia mais sutil que no rascunho. Após a parte amigável da resenha, Frege segue no rascunho, tomando um tom agressivo ao afirmar que 'Cantor é menos feliz em suas definições'...(FREGE, 1890, p. 70). Frege continua nesse mesmo tom, fazendo comparações irônicas que podemos sentir lendo-o diretamente:

"Nós podemos fazer aqui uma observação geral. Quando os negros do interior da África vêem um telescópio ou relógio de bolso pela primeira vez, eles são levados a atribuir a essas coisas as mais espantosas propriedades mágicas. Muitos matemáticos fazem o mesmo com expressões filosóficas. Aqui eu estou pensando em particular no seguinte: 'definir' (Brahma), 'refletir' (Vishnu), 'abstrair' (Shiva). Os nomes dos deuses indianos entre parênteses têm o significado de indicar o tipo de efeito mágico que se supõe que a expressão tenha. Se, por exemplo, você acha que alguma propriedade de uma coisa o incomoda, você abstrai dela." (FREGE, 1890, p. 69).

Frege prossegue explicando os poderes mágicos da 'reflexão', que possui o efeito de cessar a abstração e reter uma propriedade que você não quer ver destruída no processo da abstração; e da 'definição' que possui a capacidade de outorgar à coisa uma certa propriedade de que ela careça. Para ficar mais claro, reproduzimos o exemplo de aplicação dessas 'expressões mágicas' dado na sequência da resenha de Frege ao texto de Cantor:

"Pense como essas potências poderiam ser usadas numa sala de aula: um professor tem alunos de boa natureza mas preguiçosos e estúpidos. Ele irá então abstrair da preguiça e estupidez e refletir tudo neles da boa natureza. Então, por meio da definição ele lhes outorga as propriedades de entusiasmo e inteligência." (FREGE, 1890, p. 69).

Neste tom de ironia Frege prossegue sua crítica ao emprego da abstração nas definições de número cardinal e ordinal que constam nos artigos de Cantor a partir de 1883. Frege fala do matemático que usa esses poderes como uma pessoa extraordinária e que não erra (FREGE, 1890, p. 69) e atribui a Cantor, sobretudo, os poderes de abstrair e refletir:

"Em Cantor, é Shiva e Vishnu que possuem mais fama." (FREGE, 1890, p. 70).

Como se não bastassem as menções ao 'poder sobrenatural dos deuses indianos' e aos 'milagres do professor', Frege tenta mostrar a insuficiência do processo cantoriano para a obtenção de números por meio de um exemplo: homens diante de uma gaiola de camundongos.

Cantor abstrai da natureza e da ordem dos camundongos para obter o número cardinal e, para obter o número ordinal, abstrai da natureza e reflete a ordem deles. A insuficiência enfatizada por Frege diz respeito à arbitrariedade do processo:

"Bem, se num certo momento nós comparamos a posição dos camundongos, nós vemos que dois deles estão mais ao norte que outros, ou que ambos estão à mesma distância do norte....Mas isso não é tudo: se nós comparamos os camundongos com respeito a suas idades, nós encontramos que dois deles são mais velhos que os outros ou que ambos têm a mesma idade. Nós podemos continuar e compará-los com respeito a seu comprimento, ...com respeito ao tom de seus grunhido, seu peso, sua massa muscular e muitos outros aspectos além desses. Todas essas relações geram ordem." (FREGE, 1890, p. 70).

Dessa resenha, tanto no rascunho como no texto publicado, Frege traz elementos novos para a discussão entre eles quando passa a acusar a postura de Cantor em suas definições e exposição geral da teoria, sobretudo pelo uso da abstração de "empirista e psicologista" e incapaz de determinar de forma única e comum os significados dos conceitos por ele empregados.

Para podermos realizar a análise dessas críticas, buscaremos antes, nos textos de Frege, compreender mais precisamente o que ele entende por abstração. O significado desse termo para ele está associado, como mostraremos na sequência desse capítulo, ao empirismo e psicologismo, noções que Frege compreende do seu modo e por isso também serão exploradas, assim como a conexão entre o procedimento da abstração e essas noções (seção 2.3). Mostraremos, a seguir, que nos FA, Frege tece duras críticas a essas correntes, que já se alastravam pelas diversas ciências, alcançando até a aritmética, contra a qual Frege triunfaria ao estabelecer seus fundamentos lógicos. Mas nessa crítica, que ocupa pelo menos duas das cinco partes dos FA, não há qualquer referência a Cantor, que só é abordado nas referidas seções 85 e 86.

No entanto, esse mesmo tema, empirismo e psicologismo, passa a compor os ataques de Frege a Cantor pelas formulações de 1887, assim como caberiam às de 1895, como explicamos acima (seção 1.3.1). Na resenha, ele retoma e enfatiza os argumentos, já presentes nos FA, contra o empirismo e o psicologismo convergindo-os ao uso da abstração nas definições matemáticas, que portanto, é entendida como empirista e psicologista.

Essa crítica também cai sobre a noção de ordem, conforme Cantor a emprega, mesmo independentemente do uso da abstração, usada para defini-la também. Tanto a noção de ordem como o uso da abstração nas definições são atingidos pela nova crítica, que alcança o coração da estrutura teórica montada por Cantor, porque compromete o que Frege denomina

'objetividade' da teoria. A noção de 'objetividade' possui, na filosofia de Frege, um sentido específico e fundamental que será esclarecido na seção 2.3.4, e significa, de modo geral, aquilo que possui o mesmo significado para qualquer agente de conhecimento e, ao mesmo tempo, é independente dele. 'Objetividade' se opõe ao caráter arbitrário e subjetivo, fortemente associado ao emprego de recursos psicológicos.

Para encerrar listamos resumidamente os temas que obtivemos nesta seção, a partir das críticas de Frege a Cantor, para motivar e selecionar, entre os escritos de Frege, os assuntos que abordaremos a seguir: a noção de número cardinal; a propriedade ordinal do número cardinal; a noção de abstração, de empirismo-psicologismo e objetividade. Para tanto, partimos de noções estruturais em sua ontologia, extraídas dos artigos *Função e Conceito*, de 1891 e *Sobre o Conceito e o Objeto*, de 1892. Essas noções foram utilizadas nos FA pois nestes artigos Frege esclarece assuntos que já havia discutido em seu *Begriffsschrift* e acrescenta 'complementos e novas concepções que lhe ocorreram a partir daí' (FREGE, 1891, p. 35).

2.2 CONCEITO, OBJETO E EXTENSÃO DE CONCEITO

A noção de objeto em Frege é diferente da nossa noção intuitiva de objeto e apresenta um significado específico também em relação ao significado deste termo em outros autores, que explicaremos a seguir junto com a noção de conceito. Por exemplo, como diz Frege, sua noção é diferente da 'tendência, muito difundida naquela época, de reconhecer como objeto somente o que pode ser percebido pelos sentidos' (FREGE, 1891, p. 36).

Para esta dissertação, a necessidade de investigarmos as noções de conceito e objeto decorre de estarem elas intimamente associadas, pelas definições de Frege, à noção de número do seguinte modo: números são subconjuntos dos objetos, sendo anterior a essa afirmação a pressuposição de Frege de que os objetos existem (ALCOFORADO, 1975, p. 23); e números são atribuídos aos conceitos, isto é, 'quando afirmamos que *as maravilhas do mundo são sete* estamos afirmando que, sob o conceito *maravilhas do mundo*, caem sete indivíduos' (ALCOFORADO, 1975, p. 20). Pretendemos deixar claro neste capítulo, após elucidarmos as noções de conceito e objeto e as relações entre eles, o que significa atribuir um número a um conceito.

Para entender o significado de conceito precisamos esclarecer a noção de função, pois o conceito é um tipo especial de função e a relação do conceito com o objeto pode ser entendida através da relação deste com a função.

A noção de função é empregada por Frege num sentido semelhante ao significado desse termo na matemática. Resumidamente, podemos dizer que na expressão $f(x)$, $f()$ é a

função e x o argumento da função. Frege chama a atenção para este detalhe sutil, mas importante, para compreendermos sua noção: o argumento x não faz parte da função $f()$, e essas noções se diferenciam pelo caráter 'insaturado' da função em oposição ao caráter saturado do argumento:

"Importa mostrar que o argumento não é parte da função, mas, compõe, juntamente com a função, um todo completo; pois a função, por si só deve ser denominada de incompleta, necessitada de complementação ou insaturada...Para reconhecer a função é necessário decompor a expressão [funcional] onde ela ocorre; e a possibilidade de uma tal decomposição é sugerida pela estrutura da expressão.

As duas partes em que a expressão do cálculo está decomposta, o sinal do argumento e a expressão da função, são heterogêneas: o argumento é um número, um todo completo em si mesmo, o que a função não é." (FREGE, 1891, p. 36-37).

A função incompleta, ou insaturada, forma um todo ao ser preenchida por um argumento que também é um todo completo. Além disso, pensando na noção de função matemática que nos é familiar, a função saturada possui um valor que Frege denomina, como nós, valor da função e, por analogia ao gráfico de uma função, os vários pares (argumento, valor da função) ou $(x, f(x))$ formam o que Frege denominou percurso de valores da função:

"Denominamos àquilo em que a função resulta, quando completada por seu argumento, o valor da função para este argumento. Assim, 3 é o valor da função $2x^2+x$ para o argumento 1, já temos $2.1^2+1=3$ " (FREGE, 1891, p. 39).

A função saturada, assim como o argumento, opõe-se à função insaturada sendo estes os primeiros exemplos do que Frege denomina objeto. Frege explica o significado de objeto relacionando-o à função, opondo-os radicalmente como dois aspectos fundamentais de sua ontologia:

"Considero impossível uma definição regular, já que temos aqui algo que, por sua simplicidade, não admite uma decomposição lógica. Só é possível indicar o que se quer dizer. Aqui só se pode dizer sucintamente: um objeto é tudo que não é uma função, de modo que uma expressão dele não contém lugar vazio." (FREGE, 1891, p. 47).

Os objetos são todos do mesmo tipo e por isso não há classificação entre eles. A função está num nível diferente do objeto, porque pode ter um ou vários argumentos e que estes argumentos podem ser objetos ou outras funções saturadas. Essas diferenças dificultam

compará-los ainda que seja suficiente para este estudo entender objeto e função por sua oposição.

A partir da noção de função matemática, assim explicada por Frege, o autor amplia seu significado em dois sentidos: no campo dos argumentos e no 'campo das operações' (FREGE, 1891, p. 42).

No campo das operações Frege acrescenta os sinais de $=$, $>$ e $<$ à formação de expressões funcionais, por exemplo $x^2=1$ é uma função onde x está no lugar do argumento (FREGE, 1891, p. 43). O valor da função, neste exemplo e em outros semelhantes, é definido por Frege como um 'valor de verdade', verdadeiro ou falso.

Com essas considerações sobre os valores da função, estamos muito próximos do significado de conceito para Frege, esta sim uma noção importante nesta dissertação. O conceito é um tipo de função, cujos valores são valores de verdade. Mas, as sentenças assertativas também podem ser compreendidas como as funções e nelas identificamos mais facilmente os conceitos:

"As sentenças assertativas podem ser entendidas, assim como as equações e expressões analíticas, como decompostas em duas partes, uma completa em si mesma e a outra necessitando de complementação, sendo insaturada. Assim, por exemplo, pode-se decompor a sentença

"César conquistou as Gálias"

em "César" e "conquistou as Gálias"....Aqui, denomino de função esta parte insaturada. Neste caso o argumento é César." (FREGE, 1891, p. 46).

No exemplo acima, o valor da função é um valor de verdade. Por isso, a função do exemplo é um conceito. Mas, para chegarmos a isso, devemos notar que houve uma ampliação dos argumentos, sobre a qual Frege chama a atenção, pois já no seu exemplo, o argumento não é um número mas "objetos em geral", entre os quais se incluem nomes de pessoas.

Entretanto, é preciso notar ainda que, sentenças assertativas são funções que nem sempre são conceitos. Por exemplo, a função "a capital de x " possui Berlim como valor ao tomarmos 'Império alemão' como argumento. Concluindo sobre a ampliação no campo dos argumentos: os valores da função podem ser também qualquer objeto e não apenas valores de verdade.

Diante da consideração que admite objetos em geral como argumentos devemos salientar sobre isso que há, na concepção de Frege, uma ampliação em relação ao domínio de uma função, pensando em seu significado matemático, porque qualquer argumento pode ser inserido na 'lacuna' de um conceito [ou função] para saturá-lo (FREGE, 1884, §56, p. 244). O valor de verdade V do conceito que delimitaria a enorme amplitude do percurso de valores

produzido pelo preenchimento da função. Para tanto, um conceito deve ser 'suficientemente delimitado' ou capaz de decidir se algo cai ou não sob o conceito, ou ainda, dizendo de outra forma, o conceito deve ter limites nítidos para ser capaz de decidir o valor de verdade quando qualquer objeto o preenche.

Frege afirma que uma definição, e este é um dado peculiar na filosofia fregeana, deve poder decidir quais os argumentos que cabem ao conceito, já que qualquer argumento pode ser inserido na lacuna da função. Por exemplo, na definição de número, através do conceito, deve ser possível decidir se o que cai sob ele é ou não um número:

"...para dar um exemplo grosseiro- se a um conceito convém o número Júlio César, se esse famoso conquistador das Gálias é ou não um número." (FREGE, 1884, §56, p. 244).

Retomamos os dados sobre a função agora considerando o caso específico dos conceitos. Vimos que um conceito é uma função com um contra domínio restrito ao conjunto dos valores de verdade V (verdadeiro) ou F (falso); ele e o objeto formam uma estrutura que representa uma classificação ontológica na filosofia de Frege. Esses dois elementos, conceito e objetos, são complementares da realidade e podem ser reconhecidos por meio da linguagem, como explicaremos a seguir, ainda que não possam ser definidos como entidades linguísticas devido a sua relação com a realidade fregeana. Para reconhecer o objeto e o conceito na linguagem, precisamos primeiro lembrar que os elementos que estruturam uma sentença, conforme a lógica tradicional, divididos em sujeito e predicado⁷², são rejeitados por Frege. Ele classifica os componentes da sentença por conceito /objeto, determinando que o conceito é a parte incompleta ou insaturada da sentença ou aquilo que resulta quando se tira dela o nome. O nome é a parte da sentença que possui como referência o objeto, que é saturado ou completo e, normalmente, vem acompanhado do artigo definido, sendo esse o modo linguístico de reconhecer o objeto. Por exemplo, na sentença 'o livro é verde', 'o livro' é o nome que possui o objeto como referência ou, para simplificar, 'o livro' é a parte da sentença relativa ao objeto; a outra parte da sentença, o conceito, pode ser identificada como uma estrutura incompleta e, por isso, é ilustrativo expressá-la com uma lacuna, assim: '.....é verde'.

Os conceitos podem ser do primeiro nível (ou de primeira ordem) caso se apliquem diretamente aos objetos, ou do segundo nível se aplicarem-se a conceitos. Este último caso é empregado na definição de número. Por exemplo, na sentença "Nenhum objeto cai sobre o conceito $x \neq x$ ", "Nenhum objeto cai sobre ..." é um conceito de segundo nível pois cai sob ele o conceito "conceito $x \neq x$ "⁷³.

⁷²A estrutura sujeito predicado não é suficiente para captar todas as afirmações, como as existenciais.

⁷³Ver * (FREGE, 1884, §53, p. 242).

As noções de conceito e objeto são fundamentais para compreendermos o significado de 'extensão do conceito'⁷⁴, este empregado diretamente na definição de número e, portanto, fundamental para compreendê-la. A noção de extensão não é suficientemente explicada nos FA, mas é suposta certa familiaridade com essa noção que possui um papel essencial e determinado nessa obra:

"Pressupusemos então conhecido o sentido da expressão "extensão do conceito". Esta maneira de superar a dificuldade [não poder avaliar se uma equação é verdadeira ou falsa se apenas um dos lados tiver a forma para que a equinumericidade se estabeleça] poderá não encontrar aprovação unânime...." (FREGE, 1884, §107, p. 275).

Apesar das dificuldades que surgem dessa noção⁷⁵, como essa mencionada na citação, a 'extensão do conceito' possui uma unidade essencial e corresponde ao percurso de valores da função, explicado acima.

Num sentido mais técnico dizemos que a extensão pode ser entendida como um conjunto de pares ordenados, cada um formado por um elemento do domínio da função, como a abscissa, ao qual é associado seu valor de verdade V , como sua ordenada. Observemos que a extensão é formada, no que diz respeito aos elementos do domínio, apenas com argumentos verdadeiros que a compõem. Ao acrescentar o valor de verdade ao argumento (que é associado ao elemento de um conjunto), o papel do conceito na determinação da extensão torna-se evidente. Portanto, a extensão não é o conjunto de objetos ou os objetos simplesmente que caem sob o conceito, mas pares compostos de argumento e valor de verdade positivo.

Um conceito F determina a extensão porque delimita os objetos x do domínio que compõem, junto com os valores de verdade V , a extensão $\{(F,x) \text{ tal que } Fx \text{ é } V\}$, para os conceitos do segundo nível, e $\{(x,V)\}$ para os conceitos do primeiro nível. Com isso, queremos salientar que Frege não concorda com o procedimento de Cantor que usa a enumeração dos elementos para definir um conjunto. Para Frege, a extensão não deve ser pensada como a enumeração dos elementos de um conjunto mas, ao contrário, os elementos devem ser identificados por meio de um conceito. Isso pode ser percebido pela distinção traçada por Frege entre 'nota característica' de um conceito e 'propriedade' dos conceitos. A 'nota

⁷⁴O termo extensão de conceito corresponde ao percurso de valores da função.

⁷⁵As dificuldades dizem respeito à tricotomia que se aplica aos números, enquanto que, sobre a extensão, podemos afirmar apenas a igualdade e a inclusão, isto é, entre os números podem estabelecer-se as relações de $>$, $<$, $=$ (maior, menor e igual) enquanto que à extensão ('idêntica' ao número se entendemos o 'é' da definição de Frege como identidade) cabem outras relações, a de inclusão e igualdade. Outra dificuldade diz respeito à não distinção precisa da extensão como 'classe de equivalência' ou como elemento do conjunto quociente. Sobre isso ver Imbert p.54 e 71, respectivamente.

característica' é propriedade dos objetos que caem sob um conceito, enquanto que as propriedades de um conceito não dizem respeito ao objeto diretamente:

"Por propriedades que se enunciam de um conceito entendo naturalmente não as notas características que compõem o conceito. Estas [as notas características] são propriedades das coisas que caem sob o conceito, não do conceito." (FREGE, 1884, §53, p. 241).

A relação entre os elementos que compõem uma extensão e o conceito que a determina, é que, só através dos objetos da extensão, a igualdade dos conceitos pode ser verificada, pois a identidade consiste em uma relação entre objetos:

"Dois conceitos podem ter a mesma extensão sem coincidir." (FREGE, 1884, §69, n.95, p. 252)....Mas a coincidência na extensão é condição necessária e suficiente para a ocorrência entre conceitos da relação que corresponde à identidade entre objetos (FREGE, 1894, p. 200.).

Por exemplo, 'é correto dizer que o conceito ângulo reto' e o conceito ângulo igual a seu adjacente 'tem a mesma extensão, mas não é correto dizer que os conceitos tem o mesmo conteúdo' (FREGE, 1894, p. 199).

Para Frege, independentemente da extensão ser finita ou infinita, ela é totalmente determinada pelo conceito e não depende da discriminação dos elementos que caíam sob ele.

Tendo esclarecido estas noções fundamentais da ontologia fregeana, como conceito, objeto e extensão de conceito, prosseguimos com a exposição de partes dos FA onde Frege realiza um 'minucioso estudo crítico das soluções já apresentadas acerca da noção de número' (ALCOFORADO, 1975, p. 19).

2.3 A ABSTRAÇÃO PARA FREGE: PROCEDIMENTO EMPIRISTA-PSICOLOGISTA

Na primeira, segunda e terceira parte (seções 5 a 44) dos *Fundamentos da Aritmética*, Frege elabora a crítica de abordagens filosóficas, como o empirismo e psicologismo que explicaremos a seguir, para justificar a necessidade de encontrar os mais rigorosos fundamentos para a aritmética, a matemática⁷⁶ em geral. Nessa crítica Frege levanta questões básicas da filosofia da matemática como 'o que é o número um', 'o que é o número em geral' e questiona as respostas que poderiam ser encontradas nos escritos de filosofia dessa área. A discussão crítica sobre a natureza do número, apresentada por Frege, possui grande interesse na análise conceitual sobre o número propriamente e é importante também, para

⁷⁶Quando usamos o termo matemática, não estamos incluindo a geometria que é, para Frege, de outra natureza. Ver, por exemplo §14, dos FA.

compreendermos o significado do número nos FA, pois, a cada passo da crítica, Frege aponta aspectos de sua teoria.

Em sua investigação sobre o conceito de número Frege apresenta primeiramente argumentos negativos através de sua crítica ao psicologismo e empirismo⁷⁷, isto é, ele nega que os números sejam conceitos ou propriedades dos objetos ou das coisas, nega que sejam imagens mentais ou criações psicológicas. Tentaremos ao longo dessa seção esclarecer essa crítica e ao mesmo tempo tentar compreender o que Frege entende por psicologismo e empirismo. Em seguida, tendo frisado o que o número não é, Frege expõe a sua definição de número. Vale notar que essa argumentação representa na história da filosofia da matemática uma inovação, tanto pelos argumentos positivos, isto é por essas novas noções que Frege introduz, como pelos negativos, isto é, pela profundidade da análise que realiza ao formular as críticas.

Nas críticas ao empirismo e psicologismo, formuladas na parte II dos FA, Frege apresenta primeiro os argumentos contrários à tese que afirma que "o número é uma propriedade das coisas exteriores", depois à que diz que "o número é algo subjetivo" e, por último, Frege também vai negar que números são conjuntos. Reproduzimos sinteticamente o fundamento dessas críticas com o objetivo de compreendermos o significado desses termos empregados posteriormente nas críticas a Cantor, aquelas que têm como alvo a abstração. A abstração, usada para obter número a partir de conjuntos é, para Frege, um exemplo de procedimento empirista-psicologista porque significa 'negligenciar características das coisas'.

Assim, o objetivo da presente discussão é percorrer a crítica elaborada por Frege nos FA, precisar o significado dos termos empirismo e psicologismo empregados também na crítica a Cantor e entender, ainda, como Frege conecta a abstração e psicologismo.

A análise que realizaremos dos FA de Frege oferece, para esta dissertação, duas contribuições: a primeira, uma discussão conceitual sobre a noção de número, que retomaremos depois, no capítulo 3 comparando as noções de Cantor (seção 1.1) com as de Frege (seção 2.4); a segunda contribuição diz respeito à oportunidade de penetrar no trabalho de Cantor através das críticas de Frege, que representa um expoente em rigor na época.

⁷⁷Deixamos de lado a crítica de Frege a um certo tipo de 'formalismo' que explica os números pela linguagem, entendendo a matemática como um jogo de signos vazios de significados. Ressaltamos ainda que, separar psicologismo de empirismo, corresponde apenas às finalidades desta exposição. Na história da filosofia, o que denominamos psicologismo e empirismo, representa aspectos distintos de uma mesma abordagem filosófica da corrente naturalista. O próprio Frege não dissocia um do outro. Sobre naturalismo, esclareceremos que este termo é empregado aqui com o mesmo sentido dado a ele por Sluga para denominar o período que antecede a publicação dos FA. O naturalismo valoriza as ciências empíricas ao ponto de reduzir as ciências às ciências da natureza (astronomia, física, química, biologia, fisiologia e história natural), respaldadas pelos bons resultados dos métodos próprios dessas ciências de observação, experimentação e redução das formas às leis, isto é, para eles as ciências empíricas podem explicar tudo, inclusive a lógica e a matemática. Ver (SLUGA, 1980, p. 8-44, 1980).

2.3.1 O número não é propriedade do objeto e de coisas externas

Para Frege, o caráter fundamental do número é que ele é atribuído aos conceitos e não às coisas. Inicialmente apresentamos a contestação de Frege à possibilidade de o número estar nas coisas exteriores como uma propriedade delas. Frege fala ironicamente com Mill- um dos interlocutores empiristas⁷⁸- sobre essa possibilidade de encontrar o número nas coisas externas:

"O que dizer daqueles que, ao invés de prosseguir este trabalho ["de conhecer um conceito em sua pureza"] onde ele não aparece ainda realizado, o menosprezam, se dirigem ao quarto das crianças ou se transportam para as mais antigas fases conhecidas de desenvolvimento da humanidade, a fim de lá descobrir, como J.S. Mill, algo como aritmética de pãezinhos e pedrinhas! Falta atribuir ao sabor do pão um significado particular para o conceito de número." (FREGE, 1884, introdução, p. 200).

Frege apresenta vários argumentos contra a existência do número como propriedade das coisas externas. Um argumento empregado nas críticas é que definições de números ou propriedades deles, dadas pelos empiristas, não são extensivas aos outros números ou não incluem outros aspectos da teoria. Por exemplo, os empiristas afirmam que os números são propriedades das coisas externas, o '10 representa dez corpos sólidos ou dez batidas do pulso', mas não têm como justificar o um, o zero e os números grandes como propriedade das coisas externas. Na discussão 'sobre a unidade e um' (parte III dos FA) Frege questiona, por exemplo, como o um pode ser pensado como propriedade de coisas; neste caso, ele seria uma propriedade de todas as coisas, o que descaracteriza 'uma propriedade':

"As razões que se fizeram valer acima contra a idéia de que o número seja uma propriedade de coisas acrescentam-se neste caso ainda algumas razões específicas. Em primeiro lugar, seria notável que cada coisa tivesse esta propriedade. Seria absolutamente incompreensível o motivo da atribuição explícita da propriedade a uma coisa. Apenas em virtude da possibilidade de que algo não seja sábio ganha sentido a asserção de que Sólon é sábio. O conteúdo do conceito diminui quando sua extensão aumenta: se esta passa a abranger tudo, o conteúdo deve perder-se totalmente. Não é fácil conceber como a linguagem chegaria

⁷⁸Frege classifica Mill como empirista: "...mas seu preconceito [de J. S. Mill] de que todo o saber seja empírico, por outro lado, arruína imediatamente a concepção correta." (FREGE, 1884, §7, p. 208).

a criar uma palavra para propriedade que não pudesse servir de modo algum para determinar mais completamente um objeto." (FREGE, 1884, §29, p. 227).

Frege prossegue apresentando contra-exemplos que refutam a afirmação de ser o número um conceito obtido das coisas através da percepção. Ele quer convencer o leitor de que o número não é um conceito obtido dos objetos mas um 'objeto' propriamente (no sentido explicado na seção 2.2.1, acima). No caso de números muito grandes, por exemplo, eles ficam fora do alcance da percepção:

"Onde no mundo estaria o fato observado ou, como Mill também diz, o fato físico assertado na definição do número 777864?" (FREGE, 1884, §7, p. 208).

Os empiristas poderiam responder a Frege que alguns números são definidos pela percepção e outros pelo acréscimo de 1. Sobre isso, Frege diria que não há critério para determinar que os números pequenos são obtidos pelos sentidos e os maiores através desses outros. Então, parafraseando Frege, podemos perguntar quais são os números pequenos. Até o 10? Mas se é possível formar o 11 a partir do 10 e do 1, não há razão pela qual não se possa também compor o 2 a partir do 1 e 1 da mesma maneira. (FREGE, 1884, §8, p. 210).

Também para refutar a afirmação de que um número é obtido por impressão sensível a partir dos objetos observados, Frege lembra que números são aplicados também às coisas não sensíveis e apresenta a impossibilidade de se ter impressão sensível de coisas não sensíveis, não empíricas "como se tem de $\therefore$ ":

"...pois nunca se tem delas [três sensações gustativas, três maneiras de resolver uma equação...] uma impressão sensível com se tem de $\therefore$." (FREGE, 1884, §7, p. 209).

Contra a possibilidade de ser o número propriedade de coleções ou objetos Frege, esclarece um aspecto crucial. Diz ele que, dependendo do ponto de vista de quem os reconhece, ocorre que a um objeto podem ser atribuídos diversos números, como podemos notar em um dos exemplos apresentados por Frege: 'podemos apreender *Iliada* como *um* poema ou como 24 cantos ou como um *grande número* de versos' (FREGE, 1884, §22, p. 220 (grifo nosso)). Uma interpretação descuidada poderia admitir que o argumento de Frege que está por trás dessa crítica é que o número não estaria unicamente determinado como propriedade das coisas externas. Mas, de fato, aqui está implícito um argumento fundamental da lógica de Frege, a saber, a impossibilidade de atribuir números às coisas, e com isso Frege caminha em direção a sua tese: o número é atribuído aos conceitos.

A origem da crença de que os números são propriedade de coisas externas pode ser decorrência de o número ter uma vasta aplicação no mundo externo⁷⁹. Mas, de fato, as leis numéricas e equações podem não descrever propriedades dos objetos e coisas externas. A situação apontada por Frege expressa que há, entre os empiristas e psicologistas, uma espécie de inversão entre a aplicação e a origem: por seu vasto campo de aplicação no mundo exterior, os empiristas acham que a matemática teve sua origem ali. Não distinguir exatamente a matemática pura da sua aplicação causa a impressão de se encontrar a matemática nas coisas da experiência sensível:

"A proposição $5 + 2 = 7$ não significa que, quando vertemos dois volumes de líquido em cinco volumes de líquido, obtemos sete volumes de líquido, mas esta é uma aplicação apenas admissível se, em consequência de uma reação química, digamos, não ocorre alteração de volume... Mill confunde sempre as aplicações... freqüentemente físicas e pressupondo fatos observados, com a própria proposição puramente matemática" (FREGE, 1884, §9, p. 210).

Mas, se traçamos a distinção entre a matemática pura e sua aplicação, podemos concluir que nem o número é obtido das coisas, nem as fórmulas numéricas tratam dos corpos físicos: a aplicação da matemática às coisas não quer dizer que ela existe nas coisas. Frege apresenta um contra-exemplo à afirmação de que a fórmula numérica representa propriedades de um objeto:

"...pois o que se enuncia de a [um número qualquer] é uma propriedade comum dos números, enquanto $1^1=1$ não enuncia nada da lua, nem do sol, nem do Saara, nem do pico de Tenerife; pois qual poderia ser o sentido de um tal enunciado?" (FREGE, 1884, Introdução, p. 197).

O número e as equações não são propriedade das coisas. Dentro do objetivo de determinar o significado de objetividade, esclarecemos que Frege compara o número a objetos físicos no sentido de que ambos se assemelham quanto à objetividade: tanto os objetos físicos como os números são 'objetos' e ambos independem do sujeito (mesmo podendo ser conhecidos por ele). Retomaremos adiante esse aspecto. Veremos a seguir a independência do número com o sujeito.

2.3.2 A Independência entre o número e o sujeito

⁷⁹A 'aplicação' é um problema importante da filosofia da matemática, pois explicar a aplicação da matemática às diversas áreas do conhecimento, muitas delas práticas, é um dos critérios para aceitabilidade da teoria. Os empiristas apresentam uma boa explicação da aplicabilidade da matemática, ou seja, eles consideram este problema e tentam resolvê-lo.

As imagens mentais e representações podem ser geradas por percepção sensível ou constituírem objetos do pensamento independentemente de se relacionarem com a percepção de objetos físicos. A análise dessas representações possui um caráter psicológico restrito à mente. Veremos, do ponto de vista dos FA, que a representação, o processo genético de conhecer e as explicações fisiológicas da mente são processos relativos ao sujeito, são explicações de caráter psicológico e subjetivo de quem desconhece a existência independente da matemática.

O significado do termo 'subjetivo' está associado nos FA à expressão 'o significado para cada pessoa' e expressa 'privacidade' do conteúdo que é válido, segundo Frege, para um único sujeito:

""O que é o número um?" Contudo, se cada um tivesse o direito de entender o que quisesse por este nome [um], a mesma proposição a respeito do um significaria coisas diferentes para cada pessoa; tais proposições não teriam nenhum conteúdo comum." (FREGE, *Fundamentos da Aritmética*, 1884, introdução, p. 197).

Frege vai apresentando aspectos de sua concepção conforme apresenta sua crítica. Nela detectamos um aspecto crucial da noção de objetividade que abordaremos especificamente na seção 2.3.4. Com base na citação, adiantamos que um dado é objetivo se todas as pessoas que chegarem ao seu conhecimento admitirem que não há diferentes perspectivas fundamentais sobre ele.

Freqüentemente Frege menciona as imagens internas e representações que são individuais, interiores, subjetivas e que ocorrem também no pensamento matemático mas são absolutamente irrelevantes para a fundamentação da aritmética. Na explicação dada por Frege sobre como ele usa o termo 'representação', podemos encontrar justificativa à afirmação de que representações dizem respeito ao sujeito cognoscente e não ao objeto do conhecimento. O termo representação está, desde o início, bem marcado pelo sentido subjetivo que tem no texto de Frege, conforme explicita em nota da seção 27. Ele explica outros possíveis significados desse termo e, ao fazê-lo, deixa também uma caracterização nítida do termo subjetivo:

"Representação em sentido subjetivo é aquilo a que se referem as leis psicológicas da associação; sua natureza é sensível, figurativa. Representação em sentido objetivo pertence à lógica, sendo essencialmente não sensível, embora a palavra que significa uma representação objetiva freqüentemente carregue consigo também uma [representação] subjetiva, que não é contudo seu significado. A representação subjetiva, na maioria dos casos, é nitidamente diferente em diferentes pessoas, a objetiva é a mesma para todas. As representações objetivas podem-se classificar em objetos e conceitos.

Para evitar confusão, empregarei "representação" apenas em sentido subjetivo..." (FREGE, 1884, §27 (nota 48), p. 225).

Destacamos dessa citação o caráter 'sensível' das associações e representações. Anotamos esse aspecto que será útil para analisar outra situação em que aparece também essa 'conexão' entre o mental e o sensível, entre a abstração e a existência das coisas externas.

Devido à existência do número independente do sujeito, a possibilidade de representá-lo ou não é uma questão irrelevante para a matemática.

"O número não pode ser representado nem como objeto independente nem como propriedade de uma coisa exterior, porque não é algo sensível nem propriedade de uma coisa exterior." (FREGE, 1884, §58, p. 246).

Quanto à crítica de Frege ao empirismo e ao psicologismo, reforçamos que essas abordagens são incapazes, segundo Frege, de dar conta da matemática tal qual a percebemos. Esse argumento abrange grande parte de sua crítica. Por exemplo, a indução na versão psicologista traz certeza empírica de que não corresponde à segurança que presenciamos na aritmética. Certeza empírica é insuficiente para garantir os fundamentos estáveis da aritmética e, ao ser colocada na base das demonstrações, na concepção de Frege, carrega incerteza pela teoria devido à possibilidade de encontrar um contra-exemplo, mesmo numa demonstração sem lacunas ou contradições que se baseia apenas em definições não fundamentadas logicamente⁸⁰:

"Também sou de opinião que as definições devem ser confirmadas por sua fecundidade, pela possibilidade de com elas serem conduzidas demonstrações. Mas deve-se atentar bem ao fato de que o rigor de uma demonstração permanece ilusório, ainda que a cadeia de raciocínio não tenha lacunas, enquanto as definições apenas justificarem-se retrospectivamente, por não se ter esbarrado em nenhuma contradição. Portanto, tem-se sempre obtido de fato apenas uma certeza empírica, e deve-se estar sempre preparado para encontrar por fim uma contradição..."(FREGE, 1884, introdução, p. 202).

Por isso também a necessidade de aprender acuradamente os conceitos.

Frege aponta uma confusão, comum nos psicologistas, entre tomar conhecimento de uma verdade e a existência dela propriamente. A gênese da representação de um conceito e a referência ao pensamento agregativo mecânico são exemplos de abordagem subjetiva

⁸⁰Esta crítica cai, também, sobre o formalismo. Frege coloca aqui que não aceita uma matemática livre, no sentido de se limitar por contradições (Cantor e Frege se opõem neste ponto, que retornaremos adiante sob a perspectiva do primeiro).

confundida com o conteúdo ou justificativa da asserção e que espelham a confusão entre a compreensão e o conceito lógico.

A partir da menção às 'imagens internas', Frege explica a diferença da gênese do conceito e sua definição lógica. Ao método histórico a gênese ajuda a reconhecer a natureza das coisas mas "que não se tome a descrição da gênese de uma representação por uma definição" (FREGE, 1884, introdução, p. 200). Frege explica que a gênese se confunde com a essência e, por isso, a explicação psicológica é solicitada:

"Imagina-se, pelo que parece, que os conceitos nascem na alma individual como as folhas nas árvores, e pretende-se ser possível conhecer sua essência por meio da investigação de sua gênese, que se procura explicar psicologicamente a partir da alma humana. Mas esta concepção lança tudo no subjetivismo....(FREGE, 1884, introdução, p. 200)."

A confusão da gênese com a definição teria como consequência a limitação da existência do objeto à concepção individual:

Se o tornar-se conhecido fosse a gênese não poderíamos dizer dele nada de positivo no que concerne ao período anterior a esta suposta gênese." (FREGE, 1884, §26, p. 224).

A justificativa de uma asserção não são as condições fisiológicas ou psicológicas de como se obtém um conceito.

Cabe à psicologia discutir a gênese dos conceitos, o pensamento agregativo mecânico e as representações, de origem empírica ou não. Mas tudo isso não tem qualquer relação com o conteúdo da aritmética:

"Não, a aritmética não tem absolutamente nada a ver com sensações. Nem tampouco com imagens mentais formadas a partir dos vestígios deixados por impressões sensíveis anteriores." (FREGE, Fundamentos da Aritmética, 1884, introdução, p. 199).

2.3.3 "O número como conjunto" descartado por Frege

A citação que utilizamos acima como título desta seção é o título da terceira subdivisão da parte II, na qual Frege discute esses itens que estamos abordando: primeiro, ele dá os argumentos contrários a "o número é uma propriedade das coisas exteriores", depois contrários a "o número é algo subjetivo" e, por último, Frege também vai negar que números são conjuntos.

Essa discussão é importante nesta dissertação em dois aspectos: primeiro, porque ela revela a dificuldade da associação entre número e conjunto, ao mesmo tempo que esta

associação começa a se realizar efetivamente na matemática. Segundo, porque a abstração é um procedimento geralmente empregado para relacionar número a conjuntos. A palavra "conjunto", segundo Frege, evoca o pensamento de coisas no espaço, e por isso é fácil reter a ingênua concepção de número como um conjunto ou coleção (KENNY, 1995, p. 69). Assim, como conjuntos são geralmente formados de coisas através da reunião deles na mente, as críticas de Frege descritas acima ao número como propriedade das coisas e aos procedimentos mentais na obtenção do número, cabem na intenção de definir número como abstração de conjunto. Por exemplo, como poderia ser obtido o zero a partir de um conjunto?

Os conjuntos empregados para definir os números, os quais Frege discute, ou são formados de coisas, ou são formados de 'unidades'. No primeiro caso, os argumentos de Frege estão sintetizados nas seções acima. O segundo caso é detalhadamente discutido por Frege em toda a parte III e apresentado aqui muito rapidamente.

A definição de número como conjunto de unidades é preferida à de coisas como elemento, porque as unidades aparentam uma certa identidade entre elas, que negligencia as diferenças entre os elementos, tornando-os semelhantes. Mas, argumenta Frege, se as unidades possuem essa semelhança, a possibilidade de distinguir as unidades de um conjunto para contá-las desapareceria:

"Por meio de um procedimento meramente conceitual não se consegue tornar as coisas diferentes [do que são originalmente]. Se conseguíssemos, porém, não teríamos mais coisas, e sim uma coisa."
(FREGE, 1884, §34, p. 230).

Frege discute também a opinião daqueles que afirmam que as unidades são diferentes. Diante disso, pergunta como distingui-las. Se é necessário distinguir as unidades, diz ele, não se pode perceber o motivo da insistência em manter um elemento comum:

" A igualdade, contudo, perdeu-se novamente, e a indicação de uma certa semelhança não serve para nada. O um desfaz-se assim em nossas mãos e ficamos com os objetos e todas as suas particularidades. Os sinais $1', 1'', 1'''$ são expressões que falam de nosso embaraço: necessitamos da igualdade; por isso o 1; necessitamos da diferença; por isso os índices, que infelizmente apenas suprimem de novo a igualdade." (FREGE, 1884, §36, p. 232).

Frege instala, com isso, um impasse no emprego de conjuntos de unidades para definir os números: por um lado, se as unidades são iguais elas precisam ser distinguidas e, por outro lado, se elas são diferentes, perdem a necessidade de manter o elemento comum.

Queremos destacar que a definição de número de Frege supera esse impasse e mostrar, também, como isso ocorre. Utilizamos a explicação de Kenny que afirma que, de fato, não é verdade que, para se tornarem contáveis, as unidades devam ter todas as suas propriedades em comum [isto corresponderia a atribuir um número ao conjunto]. O que é verdade, diz Kenny sobre o argumento explorado por Frege, é que, para se tornarem contáveis, duas coisas têm que cair sob um conceito único (KENNY, 1995, p. 70).

Essa observação mais uma vez reflete que os problemas apontados por Frege conduzem o leitor à sua definição de número; ela é importante para explicar o significado de abstração para Frege e, também, o que significa de número para ele. A abstração, segundo ele, é um modo de obter conceitos e não números e é o conceito que delega a 'unidade' a um conjunto que deve ser contado. Passaremos a explicar o significado de abstração para Frege e estaremos, em seguida, prontos para compreendermos sua noção de número.

2.3.4 Objetividade do número

Concluimos a discussão crítica sobre o número destacando sua característica fundamental de objetividade, sintetizando o significado desse termo e apontando sua importância na filosofia fregeana, fazendo assim uma conexão entre as críticas destacadas acima e os aspectos do logicismo que mencionaremos rapidamente a seguir.

O emprego de recursos psicológicos e empíricos representa, para Frege, uma ameaça à "objetividade" da teoria que os utiliza. A discussão sobre a objetividade é especialmente importante em sua filosofia porque se inclui no projeto mais geral de caráter epistemológico (CURRIE, 1982, p. 2). Ele acredita na objetividade e na certeza do conhecimento matemático, um exemplo quanto à existência de conhecimento seguro. Fundamentar a aritmética na lógica assegura epistemologicamente a matemática, justifica a validade da matemática independentemente das coisas do mundo exterior e do sujeito (e das representações que são dele). A lógica teria, para Frege, propriedades que independem da intuição, das condições de conhecimento e do conteúdo dos juízos; a essência da lógica, para ele, é que ela expressa as leis da verdade, que se caracterizam por sua generalidade⁸¹, por sua objetividade (no sentido fregeano) normatividade e certeza (CURRIE, 1982, p. 19-37 e 100-101). Segundo Frege, *conceito, número, extensão, cair sob um conceito* são noções próprias da lógica. A objetividade opõe-se, exatamente, às justificativas subjetivas e empíricas e, portanto, ao acusar

⁸¹Generalidade da lei lógica se opõe ao domínio particular de uma lei da física ou da química por exemplo, que se aplicam a um domínio material e é geral apenas nesse domínio. A generalidade, por outro lado, também pode levar a contradições: considerando os passos de generalidade de uma sentença, partindo de um caso particular, a generalização conduz a uma sentença sem sentido $Fa \rightarrow \forall x Fx \rightarrow (\forall \phi) (\forall x) \phi(x)$.

Cantor de tratar psicológica e empiricamente suas noções fundamentais, Frege ataca a objetividade da sua teoria.

Frege inicia a argumentação sobre a objetividade do número comparando-o às coisas que existem objetivamente na realidade concreta, enfatizando novamente que processos psicológicos existem, mas nem por isso interferem na objetividade do conceito: um e outro podem igualmente ser objeto da psicologia ou resultado de processos psíquicos o que não prejudica em nada a objetividade, que independe de nossas representações ou de coisas semelhantes. Quanto à objetividade, ele usa o 'Mar do Norte' para comparar com o número, ressaltando que, apesar de ambos serem igualmente objetivos, eles são diferentes quanto à atualidade- o número apenas não é 'palpável' como o Mar do Norte:

"Pois o número não é mais um objeto da psicologia, ou um resultado de processos psíquicos que, digamos, o Mar do Norte. A objetividade do Mar do Norte não é prejudicada pelo fato de depender de nosso arbítrio qual parte da totalidade da água que cobre a terra pretendemos delimitar e marcar com o nome "Mar do Norte". Esta não é uma razão para pretender investigar este mar por vias psicológicas. Assim, também o número é algo objetivo. Quando dizemos "O Mar do Norte tem 10 000 milhas quadradas" não nos referimos, por "Mar do Norte" ou por "10 000", a um estado ou processo interno, mas assertamos algo totalmente objetivo, independente de nossas representações ou coisa semelhante"" (FREGE, 1884, §26, p. 223).

"Distinguo o objetivo do palpável, espacial e efetivamente real. O eixo da terra e o centro de massa do sistema solar são objetivos, mas preferiria não chamá-los de efetivamente reais como a própria terra. Chama-se frequentemente o equador de linha imaginária; mas seria falso chamá-lo de linha imaginada; ele não nasceu do pensamento, não é produto de um processo mental, mas é apenas conhecido pelo pensamento." (FREGE, 1884, §26, p. 224).

Um outro elemento que caracteriza a objetividade de algo é a sua possibilidade de ser expresso em palavras, em oposição ao intuível, que nem sempre é comunicável. E, por fim define:

"Assim, entendo por objetividade uma independência com respeito a nosso sentir, intuir, representar, ao traçado de imagens internas a partir de lembranças de sensações anteriores, mas não uma independência com respeito à razão; pois responder à questão do que são as coisas

independentes da razão significa julgar sem julgar, lavar-se e não se molhar." (FREGE, 1884, §26, p. 224).

Em oposição aos processos internos, privados e não comparáveis, a objetividade do número lhe garante o reconhecimento público repetidas vezes. Mas, devemos ressaltar que, como o dado objetivo é independente de todos nós, ele pode ser total ou parcialmente desconhecido:

"...é uma questão objetiva, do mesmo modo que uma folha verde reflete certos raios luminosos atinjam eles meus olhos ou não, provoquem uma sensação ou não, do mesmo modo que um grão de sal é solúvel em água posto na água ou não, observado o processo ou não, e do mesmo modo que ele permanece solúvel mesmo não me sendo possível realizar a experiência." (FREGE, 1884, §80, p. 260).

Ou seja, a objetividade é mais do que a existência de uma única resposta correta, pois Frege aceitaria a possibilidade de todo mundo estar errado. Então, a unanimidade seria uma garantia da objetividade, caso todo mundo que raciocinasse corretamente não admitisse perspectivas diferentes para aquilo em qualquer situação.

O que poderia ser considerado intuitivo e comum entre os números é a relação de vizinhança, a posição de um número em relação aos outros mas, para Frege, esse argumento não teria a menor relevância. A intuição é a base epistemológica da geometria, diria ele (FREGE, 1884, §14, p. 215 e CURRIE, 1982, p. 32) mas não da aritmética, que possui a lógica como base (FREGE, 1884, Introdução, p. 197- 202). Frege buscou definir os conceitos aritméticos em termos puramente lógicos, estabelecer os axiomas lógicos e as regras de inferência de modo que qualquer proposição aritmética pudesse ser derivada daí.

Algumas características que indicam para Frege o caráter não intuitivo da aritmética, conforme descritas por Currie (CURRIE, 1982, p. 32-35) são a impossibilidade de tomar na intuição elementos da aritmética para representar todos os outros (por exemplo, um número particular carece de similaridade em relação aos outros, diferentemente da geometria onde uma reta ou um ponto pode representar as outras retas ou pontos, no sentido que um ponto considerado intuitivamente na intuição, não é distinto de outro), a infinidade de aplicação da aritmética que vai além da intuição e a impossibilidade de todos os números serem representados por um número que os identifique através de propriedades comuns entre eles (FREGE, 1884, §13, p. 214).

2.3.5 O significado de abstração para Frege e a sua relação com psicologismo-empirismo

Com a discussão que apresentamos a seguir enfatizamos a tentativa de Frege de preparar o leitor para sua tese em que afirma que números não são conceitos, assim como não

são propriedade das coisas ou representações mentais. Obtemos daí que abstração, para Frege, é um dos meios para obter conceitos e não números. A abstração é um processo mental de negligenciar as propriedades das coisas das quais se abstrai e, por isso, está associada ao psicologismo e ao empirismo.

Associada a idéia de reunir elementos para obter os números, encontra-se o procedimento da abstração muitas vezes empregado para realizar essa passagem. Frege critica o emprego da abstração para obter números. O número não é obtido por abstração e, mais que isso, abstração é um procedimento possível para obter 'conceitos' (o que deixaremos claro até o final desta seção):

"O número não é, da mesma maneira que a cor, o peso e a dureza, abstraído das coisas, não é no mesmo sentido, uma propriedade das coisas" (FREGE, 1884, §45, p. 238).

Vários argumentos empregados contra o fato de o número ser propriedade das coisas são retomados por Frege contra o emprego da abstração para obter o número. Ele pergunta como obteríamos o 0 e o 1 por abstração. Aborda também outras dificuldades já apontadas acima:

"Em particular o que Jevons diz não convém de modo algum ao 0 e ao 1. Do que se deve propriamente fazer abstração para, a partir da lua, por exemplo, chegar ao número 1? Por abstração obtém-se de fato os conceitos: satélite da terra, satélite de um planeta, corpo celeste sem luz própria, corpo celeste, corpo, objeto; mas não se encontra nesta lista o 1; pois ele não é conceito, sob o qual a lua pudesse cair. No caso do 0, nunca se terá um objeto a partir do qual se pudesse abstrair-lo." (FREGE, 1884, §44, p. 237).

De fato, retomar os argumentos contra ser o número propriedade das coisas é pertinente visto que Frege associa a abstração ao empirismo e ao psicologismo porque, para ele, a abstração é realizada a partir das coisas ou objetos por meio de um processo mental.

Enfatizamos, inicialmente, como Frege relaciona a abstração ao pensamento empirista: abstrair significa negligenciar "elementos constitutivos" (FREGE, 1890, p. 70-71). Quem supõe que os números estão nas coisas usa a abstração para desprezar todas aquelas coisas que supõe desnecessárias para formar o conceito requerido, isto é, abstrai de todas as propriedades em virtude das quais uma coisa é aquilo especificamente, abstrai da localização espacial e temporal e de tudo mais que não seja o conceito que se busca. Frege, no irônico comentário à definição de número que Cantor apresenta, a partir de 1883, utilizando a abstração, expressa a relação desse procedimento - a abstração- com objetos físicos:

"Diante de uma gaiola de camundongos, os matemáticos reagem diferentemente quando o número deles está em questão. Alguns incluem no número os camundongos como eles são, até o último pêlo; outros -e eu devo incluir Cantor entre eles- acham fora de propósito que pêlos possam fazer parte do número e então abstraem deles. Eles encontram nos camundongos um hospedeiro de outras coisas que são impróprias ao número e são indignas de incluí-las nele. Nada mais simples: alguém abstrai de todo o lote. De fato, quando você faz isso, todas as coisas do camundongo parecem fora de propósito: a gota de seus olhos não menos que o comprimento da sua calda e a acuidade de seus dentes. Então alguém abstrai da natureza do camundongo⁸². Mas não é dito o que se abstrai da natureza; então abstrai-se presumivelmente, de todas as suas propriedades, mesmo daquelas em virtude de que nós os chamamos camundongos, " (FREGE, 1890, p. 70).

O processo da abstração para obtenção dos números, do modo como Frege o compreende, é um processo psicológico. Na resenha de 1890 Frege deixa claro, através de um exemplo, que a abstração é um processo subjetivo, oposto ao objetivismo explicado acima, porque permite que cada pessoa dê uma resposta diferente à mesma pergunta e, como já foi dito, as definições matemáticas devem ser de tais que a resposta seja unânime. A abstração permite chegar a conceitos, a partir de um objeto físico e como tal não deve ser empregada nas definições matemáticas:

"Vamos pegar um grupo de homens e pedir para eles fazerem o máximo possível para abstrair da natureza de um lápis e da ordem em que seus elementos são dados. Depois de termos dado a eles tempo suficiente para essa difícil tarefa, nós perguntamos para o primeiro: 'Qual o conceito geral⁸³ a que você chegou?' Não sendo um matemático, ele responde: ao 'O puro ser'. O segundo pensa o contrário: ao 'O puro nada', o terceiro -que eu suspeito ser aluno de Cantor- ao 'O número cardinal um'" (FREGE, 1890, p. 70-71).

Na versão publicada da revisão dos textos de Cantor de 1887, Frege também associa o emprego da abstração na definição de número de Cantor ao empirismo e psicologismo, e aqui de modo mais explícito, ainda que menos sarcástico, que na versão não publicada:

⁸²Aqui, Frege dá a referência do texto em que Cantor refere-se a "abstrair da natureza..." (CANTOR, 1887, p. 357, 411).

⁸³Frege, aqui, repete os termos empregados por Cantor em sua definição.

"Além disso, o verbo 'abstrair' é uma expressão psicológica e, como tal, deve ser evitada na matemática". (FREGE, 1892, p. 181 [272]).

A abstração não serve para a matemática mas, admite Frege, é um procedimento útil para obtenção de conceitos. Podemos pensar que ele está desmembrando a relação entre número e as coisas, inserindo o conceito entre eles. Representamos esquematicamente o argumento de Frege: objetos→conceitos→números. Inicialmente notamos que, segundo ele, ao abstrair obtém-se (conforme afirmamos na seção 2.2) um conceito e não um número:

"As propriedades pelas quais as coisas se distinguem são indiferentes e estranhas a seu número... Quando, como requer Thomae, "faz-se abstração das peculiaridades dos indivíduos de um conjunto de objetos", ou 'ignoram-se, no exame de coisas separadas, as características pelas quais elas se distinguem", o que sobra não é, como julga Lipschitz, "o conceito do número das coisas examinadas, mas obtém-se um conceito geral, sob o qual caem estas coisas. Se ao examinar um gato branco e um preto, por exemplo, ignoro as propriedades pela qual se distinguem, obtenho algo como o conceito "gato". Mesmo que submeta ambos a este conceito e os chame de unidades, o branco permanecerá branco e o preto sempre preto." (FREGE, 1884, §34, p. 230).

O significado do termo abstração para Frege é extrair um conceito da realidade física e subjetiva. O conceito pode ou não ser obtido por abstração, isto é, a recíproca do esquema acima (objetos→conceitos→números⁸⁴) é verdadeira na associação de números a conceitos, mas não é necessária na relação entre objetos e conceitos. O esquema recíproco válido seria: número←conceito←{objetos, notas características, associação de características diversas, etc}. Por exemplo, pode-se obter um conceito combinando características determinadas e, neste caso em que não está partindo da realidade física, coisa nenhuma pode cair sob o conceito de unicórnio, por exemplo (KENNY, 1995, p. 75). Outro modo de obter conceitos é através das 'notas características do conceito', isto é, da "propriedade das coisas que caem sob o conceito, não do conceito" (FREGE, 1884, §53, p. 241). Frege afirma isso:

"...[é um] erro supor que um conceito apenas possa ser obtido diretamente por abstração a partir de vários objetos. Pelo contrário, pode-se também chegar a um conceito partindo-se das notas características; e neste caso é possível que nada caia sob ele. Se isso

⁸⁴Não é a todo conceito que um número pode ser associado. Ao conceito 'vermelho' não se associa número. Sobre os tipos de conceito ver (IMBERT, 1969, p.44, 74-76).

não acontecesse, nunca se poderia negar a existência, e assim também a afirmação de existência perderia o conteúdo." (FREGE, 1884, §49, p. 240).

A abstração, explica Frege, é normalmente associada aos números devido ao fato de ser esse processo empregado para obter o conceito ao qual o número é atribuído:

"Vemos também como se chega a pretender obter o número por abstração a partir das coisas. O que se obtém assim é o conceito, onde o número é então descoberto. Por isso a abstração de fato frequentemente precede à formação de um juízo numérico." (FREGE, 1884, §48, p. 239-240).

A associação de um número a objetos é explicada por Frege como um mal entendido que pode ter se originado da compreensão de que o número não é um conceito, mas sim atribuído a conceitos, os quais podem ser obtidos por abstração. Ocorre que, da forma como o número é empregado na linguagem pode-se, com frequência, ter a sensação de que se trata da propriedade das coisas ou de conceitos, ou seja, a linguagem natural indica uma relação entre os conceitos e as coisas e, como o número aparece na sentença ligado às coisas (de fato ele é ligado ao conceito e este às coisas), conseqüentemente o número parece ser um conceito. Por exemplo:

"...a linguagem atribui decerto números a objetos, não a conceitos: diz-se "o numero das balas", como "o peso das balas". Assim, fala-se aparentemente de objetos, quando na verdade quer-se enunciar algo de conceitos. Esse uso linguístico é enganador. A expressão "quatro nobres cavalos" desperta a ilusão de que quatro acrescenta uma determinação ao conceito "nobre cavalo", assim como "nobre" acrescenta ao conceito "cavalo". No entanto, apenas "nobre" é nota característica dessa espécie; através da palavra quatro enunciamos algo de um conceito." (FREGE, 1884, §52, p. 241).

Todo esforço de Frege na primeira e segunda parte dos FA é no intuito de aniquilar qualquer sentido que isso possa ter, para que sua concepção de número como objeto apareça como a melhor forma de resolver os problemas selecionados por ele e apresentados nos FA.

O processo da abstração para obtenção dos conceitos é um ato mental e por este ato de abstrair obtêm-se conceitos de primeiro nível, isto é, conceitos relativos às coisas, com as quais os números são confundidos. Ou seja, a abstração produz conceitos a partir de coisas observadas, empíricas.

Com isso, pretendemos ter deixado claro o que Frege entende por abstração, a relação da abstração com o psicologismo e empirismo e por que Cantor é acusado de empirista e psicologista por recorrer à abstração em sua definição de número.

2.4 A DEFINIÇÃO DE NÚMERO NOS FA

Tendo apresentado as críticas aos argumentos opostos à sua definição, Frege introduz sua noção de número que se caracteriza por ser atribuído a conceitos (seção 2.4.1). O esboço de sua definição será reproduzido na seção 2.4.2. Frege elaborou esquemas formais para definir o 0, para definir a relação de vizinhança dos números naturais e um modo de gerá-los sistematicamente por meio de regras formais. Por meio de sua definição Frege, resolve as dificuldades, apontadas por ele, que surgem das definições psicologista-empiristas e, como poderemos observar, acrescenta alguns elementos que poderiam ser vistos como suas contribuições à teoria axiomática de conjuntos.

2.4.1 Os números aplicam-se a objetos só por meio de conceitos

O número, para Frege, é propriedade de um conceito, ou mais precisamente, o número assinala uma propriedade de um conceito. A propriedade do conceito não deve ser confundida com a nota característica, esta sim propriedade dos objetos (que caem sob um conceito):

"Se observando o mesmo fenômeno exterior posso dizer de modo igualmente verdadeiro: "Isto é um grupo de árvores" e "isto são cinco árvores", ou "aqui há quatro companhias" e "aqui há 500 homens", o que varia não é o objeto circular nem o todo, o conjunto, mas sim minha maneira de denominar. No entanto isto é apenas índice de substituição de um conceito por outro. Impõem-se assim, como resposta à primeira questão da seção anterior, que a indicação numérica contém um enunciado sobre um conceito. É o que fica claro no caso do número 0. Se digo: "Vênus tem 0 luas" não há absolutamente nenhuma lua ou agregados de luas sobre o que algo se pudesse enunciar, mas ao conceito "lua de Vênus" atribui-se desse modo a propriedade, a saber, a de não subsumir nada." (FREGE, 1884, §46, p. 238).

Ao contrário do que pode ocorrer diante da hipótese de o número ser atribuído às coisas, ao considerar o número atribuído a conceitos, pode-se observar que a um conceito não se pode atribuir mais que um único número (KENNY, 1995, p. 74), o que garante a objetividade do número.

O problema da igualdade ou distinguibilidade das unidades também encontra solução diante da resposta de Frege que afirma que número se atribui a conceitos (FREGE, 1884, §54, p. 242-3). Quando um número é atribuído a um conceito⁸⁵ este lhe confere unidade. Por exemplo, na proposição "Júpiter tem 4 luas" há uma unidade em relação ao conceito "luas de Júpiter" e não há necessidade de introduzir unidade a cada lua. Mas, diante deste conceito, cada uma das luas que, por um lado são objetos distintos, são igualmente luas daquele planeta Júpiter (KENNY, 1995, p. 77). Frege afirma exatamente isso quando explica o resultado e alcance do processo de abstração:

"O conceito "gato", obtido por abstração, de fato não contém mais as particularidades, mas é precisamente por isso apenas um." (FREGE, 1884, §34, p. 230).

Sob os conceitos podem ou não cair objetos, ou seja, substituindo argumentos na lacuna de um conceito e não obtendo assim nenhum valor de verdade V, o número que se atribui ao conceito é o 0.

Frege afirma que uma definição deve poder decidir quais os argumentos que cabem ao conceito e se o que cai sob o conceito é ou não um número, conforme explicamos acima na seção 2.2.

Pela necessidade de decidir se o que cai sob um conceito é um número ou não, Frege opta por formular uma definição explícita de cada número, isto é, não é suficiente "estabelecer o sentido das locuções "o número 0 convém a..." "o número 1 convém a..."; pois isso não nos autoriza a discernir o 0 e o 1 como objetos independentes e possíveis de serem reconhecidos novamente." (FREGE, 1884, §56, p. 245).

Portanto, estabelecer conceitos para definir os números não é suficiente para determinar que tal número existe. É preciso, primeiro, definir o número explicitamente e, a seguir, mostrar que algo cai sob o conceito.

2.4.2 O esboço da definição de número

Antes de apresentar sua definição de número, Frege faz uma tentativa (seção 67) que se mostra insuficiente por falta de delimitação, isto é, a definição descartada decide se dois números são iguais ou não, mas não responde se um objeto é ou não um número. Uma definição deve garantir a existência de um objeto que a satisfaz e a unicidade dele, conforme explicado acima.

⁸⁵Nem sempre os números podem ser atribuídos aos conceitos. Frege distingue três tipos de conceitos. Por exemplo, os conceitos que descrevem qualidade, chamados de não individualizantes, isto é, que não determinam quais os objetos que caem ou não sob o conceito, como o conceito "vermelho", não se atribui números. Ver (IMBERT, 1969, p.75).

Em sua definição explícita Frege parte de algo já conhecido e isso é igualado ao que está sendo definido: 'o número que pertence ao conceito F é a extensão de um conceito equinúmero ao conceito F'. Isto é, ' n é um número' significa o mesmo que 'existe um conceito tal que n é o número ao qual ele pertence' (KENNY, 1995, p. 91). O que está sendo definido é 'o número que pertence ao conceito F' através da extensão de um conceito, conceito esse de equinumericidade com o conceito F. Observemos que a extensão de um tal conceito 'equinúmero com o conceito F' não é o conjunto dos objetos que caem sob F, pois esta seria a extensão do conceito F. A extensão do conceito 'equinúmero ao conceito F' é a classe dos conceitos que possuem seus objetos equivalentes. Observemos, ainda, que a equinumericidade não supõe o conceito de número, mas simplesmente é capaz de determinar quando dois números são iguais:

"Para abreviar, direi que o conceito F é equinúmero ao conceito G quando houver essa possibilidade [de coordenar biunivocamente os objetos que caem sob um conceito aos que caem sob outro]." (FREGE, 1884, §68, p. 251)⁸⁶.

Após dar a definição geral de número, Frege os define individualmente através de um conceito adequado para especificar cada extensão. Ele define o 0 como a extensão do conceito 'diferente de si próprio'. Para ir do 0 ao 1, Frege define a relação de vizinhança entre dois números, ou "n segue na série dos números naturais após m"

"Há um conceito F e um objeto x que cai sob ele tais que o número que convém a F é n e o número que convém ao conceito 'cai sob F mas não é igual a x é m" (FREGE, 1884, §76, p. 258).

Ao tomar o conceito F como sendo o conceito 'igual a zero', obtém-se que o m da definição é o 0 enquanto o n é o vizinho de 0. O resultado desse procedimento é a definição do 1 como sendo o número que convém ao conceito "igual a 0" e, como resultado da definição de seguir em uma série, obtemos que:

"1 segue na série natural dos números imediatamente após 0" (FREGE, 1884, §76, p. 258).

Frege completa sua definição na seção 78, com proposições que garantem a existência e unicidade do 1.

Para definir os outros números o conceito adequado emprega o número já formado, a partir da extensão do conceito equinúmero ao conceito dado. Com isso, é possível ver que cada um dos seus números finitos é um número cardinal, conforme ele afirma enfaticamente quando discute com Cantor. Por exemplo,

⁸⁶A equinumericidade é definida logicamente em dois estágios (ver KENNY, 1995, p. 90).

0 é o número pertencente ao conceito *diferente de si próprio*⁸⁷

1 é o número pertencente ao conceito *igual a 0*

2 é o número pertencente ao conceito *igual a 0 ou a 1*

3 é o número pertencente ao conceito *igual a 0, 1 ou 2,*

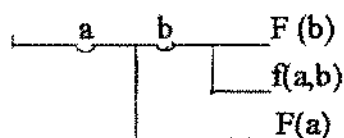
O último passo necessário para completar a série dos números naturais, que são definidos pautados na cardinalidade do número já definido, é mostrar que este modelo pode ser repetido infinitas vezes e, assim, fica garantida a infinidade dos números naturais. Para mostrar a infinidade dos números basta mostrar que, após cada número, segue outro número. Para tanto, Frege usa sua definição de *propriedade hereditária* tomado do *Begriffsschrift* (1879):

Considere uma relação f tal que f relaciona elementos a e b . f pode ser, por exemplo, a relação de pai para filho ou de número para seu sucessor assim:

$f(a,b)$: b é filho de a

$f(a,b)$: b é sucessor de a

Sobre a f -relação define-se uma propriedade F : dizemos que F é uma 'propriedade hereditária em f ' se F é propriedade de x e se x f -relaciona-se com y , então F é propriedade de y . No exemplo, F é propriedade de ser 'ser humano' ou 'ser número': $F(x)$ e $f(x,y) \Rightarrow F(y)$. Na notação de Frege:



Em seguida, usando a noção de 'propriedade hereditária', define-se 'seguir em uma série': y segue x em uma série se y possui todas as propriedades hereditárias que x possui.

Frege observa que, apenas 'por meio da definição de seguir em uma série, torna-se possível reduzir o modo de inferência de n a $n+1$, que aparentemente é peculiar à matemática, às leis lógicas gerais' (FREGE, 1884, §80, p. 260).

Para realizar essa passagem de n a $n+1$ usando a definição de 'seguir em uma série', Frege primeiro introduz um conceito específico ao qual o número a ele atribuído segue em uma série após o número n , o que compõe o conceito "pertence à série natural dos números que termina em n ", conceito este equivalente a "segue na série dos números após n ou é o mesmo que n ". A seguir, ele demonstra a seguinte proposição: Se a é um número que cai sob o conceito definido acima, então a segue n imediatamente na série natural dos números.

⁸⁷A extensão desse conceito é infinita e não vazia, como era de se esperar, sobretudo se os números para Frege são cardinais. Todos os conceitos que não possuem elementos que caiam sob eles pertencem a essa extensão, por exemplo: 'ferro de madeira', 'círculo quadrado', 'triângulo retângulo equilátero', entre outros. Frege refaz essa definição no *Grundgesetze*.

Os passos dessa demonstração, indicados por Frege nos FA, são: "1) Se a segue na série natural dos números imediatamente após d , e se vale para d :

o número que convém ao conceito "pertence à série dos números que termina em d " segue na série dos números imediatamente após a .

2) Deve-se mostrar que vale para 0 o que se enuncia de d e a nas proposições acima formuladas, e em seguida inferir que isto vale também para n , se n pertence à série dos números que começa com o 0. Esta inferência é uma aplicação da definição que foi dada à expressão " y segue após x na série natural dos números", devendo-se tomar como conceito F o que de comum se enunciou sobre d e a , 0 e n . (FREGE, 1884, §82, p. 261).

Facilmente reconhecemos o que chamamos de 'indução matemática' nos passos demonstrados por Frege, indicados acima.

Vemos que não há qualquer referência à ordenação. Currie, em sua explicação, fala de f como uma sequência e nem sempre somente como uma relação. Preferimos manter o termo sequência afastado da nossa descrição para enfatizar que Frege, de fato, mantém a independência em relação à noção de ordem.

Entretanto, nem todos os passos da demonstração indicada por Frege possuem o aparato lógico que ele afirma. Segundo Kenny, uma avaliação cuidadosa pode revelar apelos às premissas não lógicas em alguns pontos da argumentação (KENNY, 1995, p. 98). Kenny afirma, ainda, que o procedimento de Frege não é logicamente mais hermético do que as provas oferecidas pelos matemáticos atuais. Na verdade, uma comparação precisa da definição atual com a de Frege seria uma tarefa bastante complexa porque os axiomas de Frege são axiomas da lógica, base do cálculo funcional, e não se relacionam diretamente com os axiomas da contemporânea teoria axiomática de conjuntos. A noção de propriedade hereditária, definida logicamente, é uma forma mais forte do axioma do infinito (HRBACEK & JECH, 1984, p. 50) que afirma que conjunto indutivo existe, e por isso Frege demonstra, não de modo estritamente lógico como ele pretendia, que o princípio da indução é uma propriedade dos números naturais⁸⁸.

Sobre isso, devemos notar entretanto que, para Frege, os números naturais são originariamente cardinais. Tal atribuição conceitual não é pertinente aos números finitos conforme a teoria axiomática de conjuntos, pois na teoria contemporânea, os números naturais são definidos através do axioma da compreensão, axioma do par e, sobretudo do axioma da união⁸⁹. Os números assim definidos representam um exemplo simples de números ordinais e números cardinais, ainda que esses conceitos não estejam propriamente presentes na definição.

⁸⁸Imbert expõe algumas dificuldades que a noção de número apresenta. Ver (IMBERT, 1969, p.50).

⁸⁹Poderíamos incluir nessa lista de axiomas o do infinito que garante a existência de conjuntos infinitos. Sem o axioma do infinito os números finitos ficam determinados potencialmente, isto é, se existe n existe $n+1$.

Por outro lado, tal distinção é fundamental nas definições de números transfinitos. Para Cantor e Frege, que buscavam, de modos e com intenções diferentes, definir os números finitos e transfinitos sobre a mesma base, essa distinção era fundamental também em se tratando dos números finitos que, com isso, estariam revelando sua natureza primitiva.

CAPÍTULO 3: ANÁLISE

Nos capítulos 1 e 2 expusemos as concepções e conceitos de Cantor e Frege, respectivamente, sobre temas obtidos da discussão entre eles. Os temas são, de modo geral, a noção de número, que analisaremos nas seções 3.1 e 3.2 e o emprego da abstração nas definições, que analisaremos na seção 3.3.

Sobre o primeiro tema, observamos que a discussão travada entre os dois autores nos leva a refletir a respeito da questão ontológica da matemática através, nada menos, do que da noção de número.

Sobre o segundo tema levantamos uma questão motivada por uma aparente contradição. Por um lado, Frege julga Cantor psicologista e empirista em seu modo de definir número por abstração. Por outro lado, Cantor se posiciona explicitamente contra o psicologismo na matemática. Cantor aceita e reafirma a posição de Frege em sua resenha de 1885, concordando com ele em um ponto essencial: a matemática pura nada tem a ver com sentimentos e sensações:

"Também deve ser reconhecido que o autor adotou a posição correta no ponto em que demandou que intuição temporal, assim como espacial, e da mesma forma todos os elementos psicológicos, devem ser mantidos fora dos conceitos e que, a partir daí, pode-se adquirir o direito de aplicar o recurso da aritmética nos objetos de conhecimento" (CANTOR, *Rezension der Schrift von G. Frege Die Grundlagen der Arithmetik*, 1885, p. 440; Hallett, 1984, p. 121)⁹⁰.

A questão que se coloca diante da afirmação explícita de um acordo entre Frege e Cantor quanto aos elementos que não devem interferir na aritmética por um lado e da crítica de Frege por outro é: qual o significado da abstração nos escritos de Cantor? Ele emprega esse recurso num sentido psicologista-empirista e Frege tem razão na sua crítica a ele? Ou o recurso à abstração possui outro significado para Cantor e portanto Frege está equivocado em sua crítica?

Diante dos dois temas para a discussão, que obtivemos da crítica de Frege a Cantor nas seções 2.1.1.e 2.1.2, ou seja, o significado do número e da abstração, colocamos outra

⁹⁰"Auch muß anerkannt werden, daß der Verf. den richtigen Gesichtspunkt erfaßt hat, indem er die Forderung aufstellt, daß sowohl die räumliche wie die zeitliche Anschauung und ebenso alle psychologischen Momente von den arithmetischen Begriffen und Grundsätzen fernheit und damit die Berechtigung gewonnen werden kann, das Hilfsmittel der Arithmetik auf die anschaulichen Erkenntnisobjekte anzuwenden." (CANTOR, *Rezension der Schrift von G. Frege Die Grundlagen der Arithmetik*, 1885, p. 440)

questão: há nessas críticas, entre as formuladas nos FA e essas de 1890 e 1892, uma 'unidade'? Isto é, queremos saber se a demanda por objetividade na definição de número e nos resultados da teoria está por trás das críticas de Frege, que serão discutidas na primeira seção do capítulo 3, ao artigo de 1883? Quando Frege acusou Cantor de deixar 'lacunas', de apresentar 'definições imprecisas' e de ter admitido a 'ordinalidade como propriedade primitiva do número', ele já suspeitava de psicologismo, ou acreditou que Cantor pudesse contornar esse risco utilizando suas sugestões? Ou, por outro lado, a crítica de Frege é exclusivamente para a formulação a partir de 1883? Se encontrarmos uma resposta afirmativa para essa questão, isto é, se não for identificada uma 'unidade' nas críticas de Frege, encontradas nos FA e na resenha de 1890 e 1892 (rascunho e versão publicada), isso implicaria num 'rigor' maior, do ponto de vista de Frege, da teoria na sua primeira versão? Queremos saber se os textos de Cantor a partir de 1883 apresentam, de fato, elementos novos, em relação ao que especificamos sobre objetividade, ou se, a partir daí, o autor deixou transparecer mais sua tendência à subjetividade, de modo que essa tendência torna-se suficientemente clara a ponto de estar suscetível às críticas já formuladas nos FA.

Essa questão implica em verificar a afirmação de P. Jourdain, que manteve correspondência com Cantor, sobre a posição deste em sua trajetória matemática: "os primeiros trabalhos de Cantor pertencem a um estágio *formal*, e seus trabalhos posteriores [a 1883] que podem ser chamados de estágio *psicológico*" (JOURDAIN, 1915, p. 70).

Para responder às questões levantadas- pertinência de crítica de Frege ao emprego da abstração nas definições de Cantor; se há ligação entre a crítica que consta nos FA e nas resenhas- e para realizarmos a discussão conceitual sobre a noção de número, utilizamos as noções de Cantor e Frege desenvolvidas acima.

Lembremos que foram estas diferenças entre Frege e Cantor, quanto ao caráter essencial dos números e à possível contradição de Cantor sobre os psicologismos na matemática, que motivaram inicialmente nossa pesquisa. Ou seja, abordamos e estudamos os temas acima com o objetivo de compreender essas questões que são facilmente percebidas numa primeira leitura dos textos dos próprios autores e dos respectivos comentadores.

3.1 ANÁLISE DO CONCEITO DE NÚMERO: ORDINAL OU CARDINAL?

Retomamos a crítica de Frege a Cantor apresentada nos FA para dar início a nossa análise, agora que conhecemos o significado dos termos empregados por Frege.

"Concordando, como creio, com Cantor neste ponto, divirjo um pouco dele, porém, na terminologia. Ele chama o meu número de "potência", enquanto que o seu conceito de número faz referência à ordenação." (FREGE, 1884, §85, p. 263).

Vamos separar duas afirmações dessa citação: uma sobre a 'equivalência' entre o número cardinal e potência; outra, sobre o conceito de número ordinal de Cantor.

Analisamos inicialmente a afirmação relativa ao significado do termo *Anzahl*, empregado com sentidos diferentes por Frege e Cantor, sentidos este que abrangem o conceito de número, respectivamente, cardinal/ordinal. Tendo em mente os argumentos de Frege sobre ordinalidade como propriedade obtida a partir dos números cardinais, penetraremos na discussão sobre a diferença da concepção de número de Cantor e Frege, verificando, com isso, que a diferença não se restringe à terminologia.

Frege explica que o número cardinal é aquele que responde à pergunta 'quantos?', enquanto que o número ordinal responde à pergunta 'que lugar ocupa na sucessão o último membro?', (FREGE, 1884, §85, p. 263). Frege explica por que o seu número é antes cardinal, diferentemente de Cantor que apresenta o número originalmente ordinal. Dizemos 'antes cardinal' porque Frege mostra que o número assim definido tem como propriedade 'ter um sucessor', o que determina a seqüência ordenada. Em 1883, Cantor desenvolveu sua teoria em sentido contrário: a potência [cardinalidade] das classes é obtida a partir das divisões naturais que aparecem nas classes dos números ordinais.

O número cardinal, segundo Frege, concorda melhor com o 'uso lingüístico' do que o ordinal porque a última forma apresenta seu significado ampliado:

"Minha terminologia parece por isso concordar melhor com o uso lingüístico. Quando o significado de uma palavra é ampliado, deve-se cuidar para que o maior número possível de proposições gerais mantenha sua validade, e sobretudo proposições tão fundamentais quanto o é para o número a independência em relação à seqüência ordenada em série. (FREGE, 1884, §85, p. 263),

Frege parece querer dizer que os vocábulos que denominam os números na linguagem usual são empregados de uma maneira que representam na sentença o número cardinal. Para ele, a forma ordinal é 'mais ampla' que a cardinal. Para compreendermos o que Frege quer dizer, recolhemos exemplos de sentenças em que ocorrem números, utilizados por Frege nos FA, em suas críticas ou explicações e comparamos com outras sentenças. Os números empregados por Frege são cardinais, ou seja, respondem à pergunta 'quantos?' (denominamos estas sentenças de sentenças cardinais):

"quatro nobres cavalos" (§52);

"aqui há quatro companhias" (§46);

"aqui há 500 homens" (§46);

"Vênus tem zero luas" (§46);

"A carruagem do imperador é puxada por quatro cavalos" (§46);

"O número de figuras do raciocínio é quatro" (§24);

"Muitas casas formam uma cidade" (§25);

"Ilíada é um poema com 24 cantos" (§22), etc.

Veremos algumas sentenças do uso linguístico que respondem à questão 'que lugar ocupa na sucessão o último membro?', isto é, exemplos de sentenças em que ocorrem números ordinais (denominamos estas sentenças de sentenças ordinais):

'Meu aniversário é no 10º dia do mês de abril'

'Susana casa-se aos 16 dias do mês de maio'

'André é o segundo nome da lista de frequência'

'O livro verde encontra-se na quarta prateleira depois da porta'

'E é a quinta letra do alfabeto'

Para comparar as duas formas numéricas, devemos observar que as sentenças cardinais só podem ser reescritas na forma de sentenças ordinais se acrescentarmos a ordem em que os elementos estão dispostos e de indicarmos a quantidade de elementos. Por exemplo, "Aqui há o primeiro, o segundo, o terceiro, ...o cincocentésimo homem e não há o cincocentésimo primeiro homem".

O mesmo não ocorre com as sentenças ordinais. Elas, quando reescritas na forma cardinal, não acrescentam dados e a referência ao 'lugar', à 'posição numa sequência', passa a estar no conceito ao qual o número é atribuído:

'A quantos dias do mês de abril faço aniversário?' 'Passados 9 dias do mês de abril faço aniversário'

'Dois é o número de nomes da lista de frequência até o nome André'

'Quatro são as prateleiras depois da porta até aquela que contém o livro verde'

'Cinco são as letras do alfabeto até a letra E.'

Com essa análise interpretamos o que Frege quer dizer com 'forma ampliada' do número de Cantor: o número ordinal acrescenta a ordenação ao número cardinal, ou, o número cardinal apresenta uma independência lógica em relação ao ordinal, no sentido de o cardinal não supor o ordinal. Em outras palavras, ao responder a pergunta 'quantos?' não aparece informação sobre a posição, enquanto que, ao responder à pergunta 'que lugar ocupa na sequência?' a resposta informa sobre a posição e sobre a quantidade.

A ampliação do significado da palavra número escapa à exigência lógica de uma definição que deve garantir o maior número possível de proposições gerais. Neste caso, o que escapa é a independência do número em relação à sequência ordenada. Frege percebe que a definição de número ordinal Cantor visava a unificar os princípios que geram os números finitos e infinitos. Mas os números infinitos podem ser definidos sem essa suposição adicional da relação à sequência ordenada:

"Não se faz necessária absolutamente nenhuma ampliação, visto que nosso conceito de número inclui imediatamente também os números infinitos" (FREGE, 1884, §85, p. 263).

Os números infinitamente grandes dependem da seqüência em série, não necessariamente ordenada, isto é, dependem mais precisamente do infinito atual, que significa considerar o conjunto como um todo; nesse caso particular, o conjunto é o dos números naturais que representam uma seqüência ordenada, em que Frege e Cantor concordam:

"O número que convém ao conceito "número finito" é infinito. Designemo-lo, digamos, por ω_1 ." (FREGE, 1884, §84, p. 262).

Frege, assim como Cantor em 1874, concebeu a cardinalidade de conjuntos transfinitos sem considerar a ordem, somente a partir do infinito atual. Mas, desvincular os números finitos também da ordenação é um mérito de Frege. Sua definição, conforme indicamos no final do capítulo 2, corresponde parcialmente à definição atual que desvincula o número finito da ordem e também da cardinalidade. A independência do número em relação à seqüência ordenada, sustentada por Frege, diferentemente de Cantor -que percebeu uma certa independência dos números em relação à seqüência ordenada mas optou por defini-los como dependentes- não é absolutamente intuitiva e evidente, pois as propriedades dos números estão ligadas à posição deles na seqüência. Ou, se olharmos para a psicologia propriamente, pesquisas específicas sobre cognição indicam que 'os conceitos de cardinal e ordinal [os dois] aparecem psicologicamente vinculados ao conceito de número (MENEGETTI, 1995)⁹¹. Uma forma simples de conceber o número é a ordinal (IMBERT, 1969, p.6). Simples quer dizer que diante da seqüência 1,2,3,...v,... a característica que salta aos olhos, que é intuitivamente acessível (simples), é a relação entre cada número, a posição de um em relação aos outros. Por exemplo, os contemporâneos de Frege, Cantor, Dedekind, Weierstrass, definiram o número ordinal, considerando-o o elemento primitivo da aritmética

"Frege entende por ele [número] aquele que responde à pergunta: quantos? Ele se opõe ao uso de seus contemporâneos Weierstrass e Cantor. O primeiro designa por *Anzahl* o ato da enumeração; o segundo, o número ordinal. Frege inova duplamente. Primeiro, enquanto trata do número independente do ato de contar; em seguida, enquanto trata a noção de número cardinal anteriormente à noção de número ordinal e logicamente mais simples." (IMBERT, 1969, p. 5- 6). "Ao invés da ordem servir para definir os números, é o conhecimento real dos números [cardinal] que permite definir precisamente a noção:

⁹¹ A autora refere-se à psicologia genética de Piaget

sucedem dentro da sequência natural dos números." (IMBERT, 1969, p. 36).

Provavelmente, por essa forte associação entre número e sua posição na sequência, comum entre nós, não é fácil ver nos FA como Frege consegue total independência da ordem na sua definição dos números. De fato, ele não discorda simplesmente da intuição como fundamento da aritmética, mas estabelece esquemas lógicos que expressam que todo número tem um sucessor, usando apenas sua definição de número e propriedades demonstradas. Em particular, Frege estabelece a 'indução matemática', conceito fundamental da aritmética e método de demonstração de resultados, como um princípio e verdade lógica geral, isto é, não restrita à matemática. É verdade que Frege não alcança seu ideal logicista de manter a intuição totalmente afastada em alguns pontos da construção dos números (KENNY, 1995, p.98). Mas, é inegável o extraordinário avanço na formalização, pela lógica, das noções fundamentais da aritmética (RESNIK, 1980, p. 202). Se compararmos as definições de Frege com as da teoria axiomática de conjuntos, muitos dos passos dados por ele, como a definição do zero, da função sucessor e a comparação entre conjuntos, estão presentes nas definições atuais:

"Pois se os números individuais são tomados como 0, $S(0)$, $SS(0)$, ..., e ao 0 e à função sucessor são dadas as definições explícitas de Frege, nós teremos uma efetiva notação teórica de conjuntos para gerar o nome dos números. E, por outro lado, se os números são dados por

$$0 = \text{número de } \hat{x} (x \neq x)^{92}$$
$$S(n) = \text{número de } \hat{x} (x \leq n)$$

nós podemos obter novamente uma efetiva notação pelo significado das definições de Frege." (RESNIK, 1980, p. 202).

A diferença mais visível, se não nos propomos a fazer comparação formal da consistência, é que na definição atual da sequência dos números naturais não é necessária a noção da cardinalidade, que, por sua vez compunha o aparato conceitual de Frege. Isso porém não diminui seu mérito de desvincar o número da ordem. Por outro lado, Frege só definiu o primeiro número transfinito. Se ele fosse adiante, como o fez Cantor, teria necessidade formal da ordenação, pois a definição dos números transfinitos além do enumerável é feita usando os números ordinais (HALMOS, 1970, p. 103) (HRBACEK & JECH, 1984, p. 157).

3.2 ANÁLISE DA EQUIVALÊNCIA ENTRE AS NOÇÕES DE 'POTÊNCIA' E 'NÚMERO CARDINAL'

⁹²A notação $\hat{x}$ F representa, conforme Resnik, o objeto lógico associado ao conceito F, isto é, sua extensão (RESNIK, 1980, p. 207).

Ao abordar a diferença de termos, Frege se refere ao que ele chama de número cardinal e ao que Cantor denomina potência.

Cantor, freqüentemente, é vago em suas noções. Por isso, reconhecer afinidade entre ele e Frege exige acatar interpretações, isto é, se a equivalência entre as noções está sugerida, devemos determinar quais os modos de interpretar Cantor para perceber a equivalência e, então, avaliar a pertinência da interpretação.

É preciso lembrar que esta equivalência foi sugerida por Frege considerando o artigo de Cantor de 1883, em que Cantor usou as classes para definir a potência e não a abstração. Mesmo Frege, que inicialmente admitia uma diferença apenas na "terminologia" diante exclusivamente do artigo de 1883, reconsiderou essa afirmação depois de tomar conhecimento da resenha de Cantor aos FA e, com isso, da sua compreensão sobre sua definição de número (FREGE, 1892, p. 179 [270] citado acima 2.1).

Ainda assim, realizada a partir da publicação específica, a análise da equivalência permite a nós um aprofundamento no conceito dos autores e mostra, particularmente, que Cantor associa conjunto a números distanciando, gradualmente, a noção de conjunto do seu sentido mundano e trazendo-o para o interior da matemática mais abstrata (POLLARD, 1990, p. 32-32).

Para estabelecer a equivalência entre as noções de número cardinal e potência seguiremos a orientação de P. Alcoforado (ALCOFORADO, 1978, p.20-21) e T. Bynum (BYNUM, 1972, p. 27); para isso, serão necessárias considerações específicas em etapas distintas da equivalência, que apontaremos enquanto compararmos os termos que compõem as definições de número cardinal e potência e depois de os compararmos também.

Recordamos que as noções envolvidas no conceito de potência estabelecido por Cantor são as classes de números- cada classe representa uma potência; e a correspondência 1-1 - recurso que estabelece a igualdade de potências. As noções envolvidas no conceito de número cardinal, de Frege, são extensão de conceitos e equinumericidade.

A equivalência sugerida por P. Alcoforado e T. Bynum é realizada pelos termos que compõem as definições de potência e número cardinal: entre 'cada classe [de números ordinais]', de Cantor, e 'extensão de conceitos', de Frege; entre a 'correspondência 1-1', de Cantor, e a 'equinumericidade entre a extensão dos conceitos F e G', de Frege; e entre os elementos (conjuntos) da mesma potência, de Cantor, e aqueles que 'caíam sob um conceito F [de segundo nível]' na definição, de Frege. Através das definições e um exemplo, vamos estabelecer a equivalência dessas noções, identificar algumas dificuldades e as alterações necessárias para tal equivalência. Tomamos o número cardinal $\aleph_0$ e o correspondente ω_1 como exemplo.

Sejam as definições de Cantor e Frege, respectivamente, e o exemplo a elas associado:

N é o número da potência da classe X e das classes que correspondem 1-1 a ela.

$\aleph_0$ é o número da potência da 'primeira classe de números' e das classes que se equivalem a ela.

O número que convém ao conceito F é a extensão do conceito "equinúmero ao conceito $\aleph_0$ ".

O número ω_1 que convém ao conceito 'número finito' é a extensão do conceito "equinúmero ao conceito 'número finito'".

De início, já é preciso reconhecer potência como número, tomando uma posição contrária àquela tomada diante da questão levantada na seção 1.1.3 acima, em que admitimos que potência não é número em 1883. Consideramos agora, para estabelecer a equivalência, que Cantor associaria um número à potência no artigo de 1883⁹⁴. Observamos, com isso, que acrescentamos, a partir de uma interpretação possível, o *N* na sentença '*N é o número da potência da classe X....*', pois essa não é uma expressão de Cantor.

No exemplo, $\aleph_0$ (cunhado posteriormente) é o número da potência da 'primeira classe de números'.

Com isso, obtemos o primeiro passo da equivalência: $\aleph_0 = \omega_1$.

Os procedimentos denominados por Cantor, de correspondência 1-1, e por Frege, equinumericidade, são idênticos por definição:

"A mesma potência é atribuída a dois conjuntos se eles podem ser coordenados um com o outro reciprocamente, univocamente, elemento a elemento." (CANTOR, 1883, s. 1, p. 71).

"Para abreviar, direi que o conceito F é equinúmero ao conceito G quando houver essa possibilidade [de coordenar biunivocamente os objetos que caem sob um conceito aos que caem sob outro]." (FREGE, 1884, §68, p. 251).

Esse modo de determinar se dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos sem usar a noção de número, é um termo importante da equivalência entre os dois autores que não apresenta qualquer diferença. É preciso lembrar, entretanto, que esse procedimento não é inédito nas publicações deles.

Nós podemos estabelecer equivalência entre os objetos que, pela definição de Frege, caem sob o conceito 'equinúmero ao conceito número finito' -como, por exemplo, o conjunto

⁹³(FREGE, 1884, §72, p. 255).

⁹⁴Por analogia à relação que ele trava explicitamente entre: conjunto ---enumerar---número ordinal, estabelecemos a relação conjunto ----potência ----número cardinal associada à potência. Ver seção 1.1.3.

dos números racionais ($\mathbb{Q}$), o dos números pares ($2\mathbb{N}$) e todos aqueles conjuntos que são equinumeros aos números naturais ($\mathbb{N}$)- e aqueles conjuntos, referidos por Cantor, que possuem a mesma potência que a primeira classe de números- por exemplo, ($\mathbb{Q}$), ($2\mathbb{N}$) que correspondem 1-1 à primeira classe ($\mathbb{N}$)- pois eles são os mesmos.

Podemos, ainda, estender a equivalência para outras potências ou números cardinais. Consideramos o 'número que convém ao conceito F', variando o conceito adequadamente (isto é, buscando o conceito que determina cada número, chamamos essa variação de ΔF) podemos obter uma seqüência de números cardinais $1, 2, 3, \dots, v, \dots, \aleph_1, \dots$, que caem sob o conceito ΔF , por exemplo:

"0 é o número que convém ao conceito "diferente de si próprio"." (FREGE, 1884, §74, p. 256).

"1 é o número que convém ao conceito "igual a 0" (FREGE, 1884, §77, p. 258).

Nesse caso, os mesmos valores corresponderiam à seqüência ascendente de potências $1, 2, 3, \dots, v, \dots, \aleph_0, \aleph_1, \dots$ e, então, poderíamos dizer que cada número cardinal pertence à seqüência ascendente de potências.

Com a equivalência assim estabelecida, apontamos elementos desconsiderados nela, mas que compõem a concepção dos autores.

Primeiro, desconsideramos a diferença entre a concepção de número. Para Frege, a indicação numérica contém um enunciado sobre um conceito (FREGE, 1884, §46, p. 238), isto é, o número é especificado por e se aplica a um conceito e não diretamente às coisas, nem a conjuntos, enquanto que, para Cantor, o número cardinal está associado a um conjunto (de número ou das cores do arco-íris) via potência desse conjunto. No nosso exemplo, a equivalência implicou na associação entre o $\aleph_0$, o número da primeira classe de números, e o número $\aleph_1$, que convém ao conceito...

Além disso, Cantor trabalha com conjunto de elementos e não com conjunto de conjuntos ou classe de classes. As colocações de Cantor associam imediatamente potência à classe. Número, para Frege, está mais 'longe' do conjunto que venha a cair sob um conceito. Número é a extensão de um conceito, mas a extensão de um conceito nem sempre é um número.

Com isso, podemos observar que também não consideramos a diferença entre a extensão - coleção de pares ordenados e conjuntos, formados de elementos. De fato, o número para Frege é um objeto, portanto saturado, do tipo (Fx, valor de verdade = V) tal que F é o conceito 'ser equivalente a F' e x a variável dos conceitos que satisfazem essa condição, isto é, um objeto formado a partir da saturação de um conceito específico do segundo nível. Pela definição de extensão, poderíamos associar $\aleph_1$ ao par ((X), V), sendo X qualquer conceito equinumerico ao conceito 'número finito'. O $\aleph_0$, por sua vez, representa, ao mesmo tempo a potência, nesse sentido sempre de um conjunto e também é um valor que dá a totalidade da

coleção, sendo esse significado de número obtido pela analogia que estabelecemos entre a potência e o enumerar.

O que Cantor não percebeu, de fato, na definição de Frege, é que o número é definido como a extensão de um conceito do segundo nível. Essa extensão é composta de conceitos que satisfazem a condição de serem equinumericos, esta sim uma relação entre objetos, aqueles que caem sob um conceito.

Observamos por último que Frege define o número formalmente dentro dos princípios lógicos determinados por ele mesmo, enquanto Cantor apresenta uma 'definição' que parece mais com uma explicação de como proceder para alcançar o número transfinito pela construção a partir dos princípios de formação. A 'definição de conjunto', que faz parte da 'definição' de número, segundo M. Tiles, é menos uma definição do que uma tentativa de explicação de alguma coisa à qual está sendo dado o *status* de um termo primitivo e indefinido (TILES, 1989, p. 99).

Concluimos que essa equivalência se dá efetivamente com a noção de equinumericidade e correspondência 1-1, mas a equivalência entre o número cardinal de Frege e a potência de Cantor não é possível se as consideramos detalhadamente. No máximo, podemos admitir que, considerando número cardinal apenas aquele que responde à pergunta 'quantos?', segundo Frege, essa definição cabe à noção de potência ou número cardinal de Cantor.

Acentuamos que a busca dessa equivalência em seus detalhes é uma oportunidade de concatenar as informações que estavam isoladas nas descrições acima e, através da comparação entre os autores, ficam mais nítidas suas diferentes abordagens e contribuições. O caminho que Cantor usou para definir o número é muito diferente do de Frege, assim como seus objetivos. Cantor associa conjunto a número, explorando noções intermediárias fora da matemática, enquanto Frege estrutura logicamente, ainda que de modo bastante complicado se comparado com a teoria atual, a ligação entre número e extensão, atribuindo número a conceitos.

3.3 ANÁLISE DO EMPREGO DA ABSTRAÇÃO POR CANTOR

A análise acima foi realizada tendo como fonte o artigo de Cantor de 1883. As noções de número cardinal e ordinal são apresentadas de modo diferente a partir desse artigo (seção 1.3). O novo modo de apresentar essas noções emprega a abstração a partir de conjuntos para as duas, independentes uma da outra, nesse aspecto diferente do de 1883. A definição por abstração foi duramente criticada por Frege (seção 2.1), que associa a abstração ao psicologismo e empirismo (seção 2.3.5).

Se, por um lado, Frege critica Cantor e acusa-o de empirista e psicologista, por outro, Cantor também é contra essas correntes na matemática. Diante desse contraste e conhecendo o significado das noções criticadas, do ponto de vista de quem critica e de quem é criticado, nos propomos a esclarecê-lo, confrontando agora os significados dos dois autores.

Avaliar a pertinência da crítica de Frege a Cantor justifica-se, primeiro, pelo contraste indicado acima que pode significar ou que Frege está equivocado ou que Cantor é contraditório e, segundo, porque na época, contemporâneos de Cantor empregavam o que se denominava "princípio de abstração" em definições como um recurso lógico e Cantor, aparentemente, pode ser incluído entre esses. Queremos dizer que a abstração pode ser considerada em outros sentidos além do sentido psicológico, conforme Frege o entende e emprega em sua crítica. Um dos sentidos exclusivamente lógico, a que nos referimos de agora em diante, é aquele que foi empregado pelos matemáticos Russell e Peano⁹⁵. O significado do "princípio de abstração" como um recurso lógico deveria se chamar, para expressar melhor seu significado oposto ao significado psicológico, "princípio para evitar a abstração" (WEINBERG, 1967, p.8). Cantor não é tão claro em suas explicações e o modo segundo o qual o interpretamos (seção 1.3) não possibilita uma conclusão definitiva. Desenvolveremos, portanto, o significado lógico de abstração, mencionado por Russell, na seção 3.1.1 e, em seguida, na seção 3.3.2, adotaremos a interpretação que nos parece mais pertinente sobre o significado da abstração em Cantor. A interpretação que adotamos foi extraída das explicações de Hallett e não se coloca de acordo nem com a interpretação psicológica e nem com a lógica: ela é um procedimento funcional que se parece mais com uma explicação do que com uma definição. Retomamos, ao final, o significado fregeano para então compará-lo com a concepção de Cantor e a interpretação que adotamos da abstração em suas definições.

⁹⁵Dizemos 'um sentido lógico' porque há outros sentidos lógicos para abstração além desse que explicaremos em seguida. Por exemplo, o axioma da compreensão também é dito axioma da abstração e pode-se dizer que possui sentido lógico.

3.3.1 O significado lógico da abstração

A possibilidade de avaliar o emprego da abstração nos textos de Cantor como um recurso lógico não nos ocorreu a partir da leitura deles, que trazem por exemplo, como mostramos acima (capítulo 1), frequentes referências à intuição e nenhuma menção às etapas lógicas indicadas no "princípio de abstração" tal qual Russell o descreve. A possibilidade de interpretar os procedimentos de Cantor como lógicos foi sugerida por B. Russell em *The Principles of Mathematics* do qual extraímos seu significado. Além disso encontramos, em textos mais recentes, explicações equivalentes à de Russell quanto ao emprego da abstração lógica nos textos de Cantor (ver WEINBERG, 1957, p.8; e GARDIES, 1989, p. 82). Foge ao nosso objetivo percorrer as formulações desses autores e comentadores no que tange aos objetivos específicos de seus textos. O que nos importa, aqui, é simplesmente ampliar as possibilidades de interpretar o recurso à abstração empregado por Cantor, interpretação essa que buscamos fundamentalmente na análise do texto do próprio autor. Também não consideramos outros sentidos existentes na lógica contemporânea para abstração lógica.

O procedimento denominado "princípio de abstração" utiliza-se de uma relação de equivalência sobre um conjunto que resultará em classes com uma característica nova e evidente, que é dita então, abstraída do conjunto. A relação entre os conjuntos sendo uma relação de equivalência⁹⁶, isto é, uma relação que satisfaz as propriedades simétricas, reflexiva e transitiva, possibilitaria o acréscimo de conteúdo. Ou seja, partimos de um conjunto e de uma relação R definida sobre ele, satisfazendo as propriedades de uma relação de equivalência. R determina no conjunto uma *partição*, que em um conjunto é uma coleção de subconjuntos do conjunto original satisfazendo a condição de serem disjuntos e sua união o próprio conjunto original. Esses subconjuntos são denominados *classes de equivalência*. Se R é uma relação de equivalência em um conjunto A e se a é um elemento de A , a classe de equivalência de a em relação a R é o conjunto de todos os elementos x tal que aRx . O que distingue cada classe de equivalência é um novo conceito do qual se diz, portanto, que é abstraído do conjunto pela relação dada.

O procedimento descrito acima como 'definição por abstração' é muito bem ilustrado pelo próprio Frege na seção 64 dos FA de onde, do conceito de paralelismo entre retas, emerge o conceito de direção. Ele rejeitou esse tipo de definição por não ser explícita ou 'suficientemente delimitada', mas ele ressaltou as etapas da relação de equivalência que fundam um novo conceito:

⁹⁶O termo 'relação de equivalência' não era usado na época de Frege e Russell.

"§64. O juízo: "a reta a é paralela à reta b ", simbolicamente:

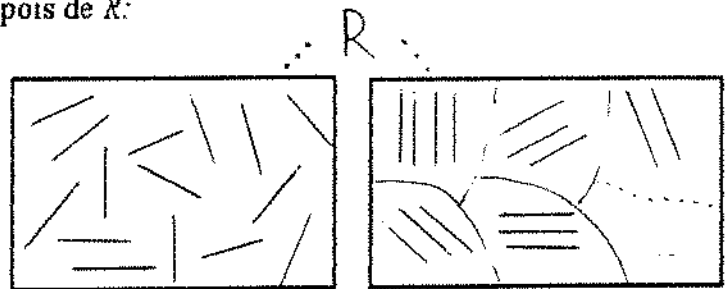
$$a//b,$$

pode ser apreendido como equação. Ao fazê-lo, obtemos o conceito de direção e dizemos : a direção de a é igual à direção de b ". Substituímos pois o sinal de $//$ pelo sinal mais geral $=$, repartindo o conteúdo particular do primeiro entre a e b . Partimos o conteúdo de maneira diferente da original $[a//b]$ e obtemos assim um novo conceito. Frequentemente, é certo, isto é entendido de maneira inversa, e muitos autores dizem: retas paralelas são aquelas de igual direção. A proposição "se duas retas paralelas a uma terceira são iguais entre si" pode então ser muito comodamente demonstrada, recorrendo-se à formulação análoga referente à igualdade." (FREGE, 1884, p. 248).

No exemplo, consideremos o conjunto de todas as retas, representadas por retas genéricas a e b . Definimos R : *ser paralela*. R é uma relação de equivalência porque satisfaz as propriedades:

- 1) reflexiva, isto é, $a//a$;
- 2) simétrica, isto é, se $a//b$ então $b//a$;
- 3) transitiva, isto é, se $a//b$ e $b//c$ então $a//c$.

Sendo R uma relação de equivalência, no conjunto das retas é determinada uma partição em A . Intuitivamente, poderíamos dizer que a relação R separa as retas que são paralelas entre si em classes. Cada classe, portanto, possui retas de mesma *direção*, conceito novo denominado ϕ . Cada classe corresponde a uma direção possível representada por uma reta da classe. No conjunto particionado temos todas as direções. Os diagramas abaixo ilustram o conjunto das retas antes e depois de R :



Portanto, definimos uma nova entidade $\phi(a)$, que é idêntica a $\phi(b)$, pois a e b são retas que possuem a mesma direção⁹⁷. Assim nossa relação é analisada dentro da relação de igualdade do novo termo $\phi(a)$, ou $\phi(b)$ (RUSSELL, 1903, p. 220), no exemplo, $\phi(a)$ (a direção da reta a) = $\phi(b)$ (a direção da reta b). Usando uma notação atual para expressar o novo

⁹⁷ $\phi(a)$ é uma direção específica, a da reta a , exatamente a mesma da reta b .

conceito que é erigido da classe de equivalência temos: $\forall a, b [a \in P \Rightarrow (b \in P \Leftrightarrow a \text{ é equivalente a } b)]$, P é propriedade de ter uma direção (GARDIES, 1989, p. 74).

Retomando a idéia do início desta seção, a possibilidade de interpretar a definição de Cantor logicamente é sugerida por Russell e reafirmada por comentadores contemporâneos com base na sua definição de 'conjuntos equivalentes' para comparar os números cardinais. Por exemplo, Weinberg afirma, concordando com Russell, que a técnica empregada por Frege, Cantor e por outros matemáticos para elucidar noção de número cardinal, foi reconhecida por Russell como uma aplicação do princípio geral que Russell chama "princípio da abstração" (WEINBERG, 1957, p.8). Russell cita trechos de Cantor, do artigo de 1895, ilustrando o emprego do 'princípio da abstração':

"Por meio do princípio da abstração, nós podemos dar, como vimos na parte II, uma definição formal de número cardinal. Esse método, no essencial, é dado por Cantor imediatamente após a definição informal ['potência ou número cardinal é obtido por abstração da ordem e da natureza...']. Nós já vimos que, se duas classes são chamadas similares quando há uma correspondência 1-1 que casa cada termo de um com um e apenas um termo do outro, então a similaridade é simétrica e transitiva e é reflexiva para toda a classe." (RUSSELL, 1903, §284, p.305).

Russell, nesse texto, entende por 'princípio de abstração' um procedimento lógico adequado para definir números:

"A relação de similaridade entre as classes tem as três propriedades, a de ser reflexiva, simétrica e transitiva. ...Estas propriedades seguem facilmente da definição. Agora estas três propriedades da relação são sustentadas por Peano e o senso comum indica que, quando a relação se realiza entre dois termos, aqueles dois termos têm uma certa propriedade comum e vice-versa. Esta propriedade comum nós chamamos o seu número. Esta é a definição de número por abstração. (RUSSELL, 1903, §109, p.114).

...Isto, então, é uma irreprovável definição de número de uma classe em termos puramente lógicos⁹⁸. (RUSSELL, 1903, §111, p.115).

Entretanto, como podemos ver pela citação acima, Russell identifica o princípio lógico da abstração à relação de equivalência entre os conjuntos e não necessariamente ao que

⁹⁸Russell, para chegar a esta conclusão, fez os ajustes necessários para tornar o processo logicamente válido. Não é de nosso interesse percorrer sua definição e a de Peano, em quem Russell se baseia. Sobre isso ver (RUSSELL, 1903, §110-111 p 114-115).

Cantor chama de abstração. Russell não considera o trecho em que o autor emprega a abstração como uma verdadeira definição mas apenas uma explicação:

"Isso ['potência ou número cardinal é obtido por abstração da ordem e da natureza...'], é meramente uma frase indicando o que está sendo falado, não uma verdadeira definição." (RUSSELL, 1903, §284, p.305).

Não está dito explicitamente no texto de Russell que a abstração lógica é o que Cantor chama de abstração. Ainda que este dado não implique que abstração para Cantor não seja lógica⁹⁹, entendemos que Cantor é muito vago para admitirmos um significado tão específico de abstração em seus textos.

Com isso, essa possibilidade de a abstração ser um procedimento lógico no texto de Cantor fica descartada porque, mesmo que Russell tivesse se referido à abstração de Cantor, não vemos que Cantor faz qualquer associação entre o que ele chama de abstração e uma relação de equivalência, ao contrário, Cantor refere-se à abstração associando-a à "nossa ativa faculdade de pensamento" (CANTOR, 1895, §1, p.86). Além disso, há outra interpretação, que expomos em seguida, que nos parece mais razoável, no sentido em que é preciso menos suposições para admiti-la.

3.3.2 Abstração funcional em Cantor

Os conjuntos, segundo os exemplos dados por Cantor na publicação de 1887, podem ser constituídos de elementos da própria realidade física- dedos da mão- ou abstrata- notas musicais, pontos da reta e pontos do triângulo de Pascal (CANTOR, 1887, p. 412-413).

Pela abstração rompe-se com conjuntos particulares como os de elementos da realidade física, de pontos, de números naturais, de racionais, etc. A abstração nas definições, conforme é notado por Dauben, acrescenta a 'generalidade' como resultado do procedimento. Desse modo Cantor deixa de considerar apenas os números obtidos pelos princípios de formação e passa a abstrair de qualquer coleção:

⁹⁹Se Russell não se refere ao que Cantor chama abstração quando aponta a existência de abstração lógica em suas definições, isso não exclui a possibilidade de interpretar que há uma abstração lógica na explicação de Cantor por dois motivos: primeiro, porque poderíamos pensar que inicialmente Cantor estava explicando 'informalmente' o que é abstração, e nesse momento ele usa esse termo, para em seguida abordar a correspondência 1-1, considerada por Russell como abstração lógica; segundo, porque em nenhum momento Cantor falava explicitamente de algo que correspondesse à relação de equivalência, como Frege, por exemplo, o fez, ou seja, Cantor não se refere à abstração lógica, ou a suas etapas, nem em um momento nem em outro. Neste sentido, poderia ser dito que, como ele não explicitava a relação lógica, ela estaria associada tanto aos momentos em que ele utilizava o termo abstração como aos momentos em que não empregava esse termo.

"Abstração, para Cantor, era menos um método para definir que um meio de fazer sua teoria completamente geral" (DAUBEN, 1979, p. 224-225).

Assim, o procedimento da abstração indica um avanço em direção à teoria axiomática de conjuntos no que diz respeito à noção elementar de conjunto, que estava adquirindo generalidade para substituir a noção de número, até então elementar na aritmética.

Com o emprego da abstração nas definições, Cantor cria um reino abstrato onde as unidades são desembaraçadas da sua realidade física, para produzir o número ordinal e mesmo da ordem em que elas podem ser dadas, para produzir o número cardinal. A partir dessa observação e de citações relativas às definições por abstração colocadas acima (seção 1.3.3), relacionamos esse procedimento com as *unidades* e *uns*, de modo que a abstração apresenta como resultado esses últimos, isto é, os elementos abstraídos dos conjuntos são os *uns*:

"Isto prova que o número é explicado apenas como uma unidade orgânica de *uns* obtidos por um ato singular de abstração" (CANTOR, 1887, p. 381 (nota1)).

Segundo Hallett, os *uns* representam antes um modo de explicar o produto da abstração de conjuntos (HALLETT, 1984, p. 130). Adotamos essa interpretação porque ela contempla dois aspectos importantes visíveis nos textos de Cantor: sua concepção platônica (seção 1.2) e as referências às unidades nas definições por abstração. Por um lado, os números existem em um reino à parte e são independentes da mente humana e da realidade externa; por outro lado, os números são definidos por abstração de conjuntos, o que os distanciam da realidade física pela abstração de propriedades que particularizam e pela reflexão de propriedades específicas comuns aos conjuntos.

Os *uns*, diz Hallett, não são usados para formar os números através do agrupamento das unidades através de um processo sucessivo. A abstração não é um ato que se refere a cada elemento gradualmente extirpando suas propriedades, isto é, a abstração não substitui elementos *m* por *e* [*Eins*]¹⁰⁰, mas assemelha-se a uma clássica operação funcional (HALLETT, 1984, p. 133). Observamos o procedimento funcional de passar de um conjunto a outro (sem a necessidade de percorrer cada elemento), ao qual Hallett se refere, nas etapas indicadas por Cantor para obter os números ordinal e cardinal de um conjunto *M*:

"Se nós abstrairmos do conjunto *M* dado, consistindo de coisas concretas, determinadas e diferenciadas, ou de conceitos abstratos, chamados de elementos de *M*, pensados como uma coisa em si, tanto pela natureza dos elementos quanto pela ordem em que são dados,

¹⁰⁰ Essa seria o alvo da crítica de Frege.

resulta dentro de nós um conceito geral e determinado (universale, unum versus alia, no seu significado: unum aptum inesse multis), que eu chamo de *potência* de M ou o *número cardinal* do conjunto M reunido. Eu denoto a potência de M , pelo sinal $\overline{M}$. Os dois traços sobre M indicam a execução de uma dupla abstração, tanto em relação à natureza dos elementos quanto também em relação à ordem em que estão um em relação ao outro." (CANTOR, 1887, p. 411-412 (grifo do autor))¹⁰¹.

Cantor prossegue definindo 'tipo ordinal' "um conceito geral e determinado" que é representado por $\overline{M}$, quando nós abstraímos só da natureza dos elementos. Por abstrair somente da natureza, a denotação consta de apenas um traço sobre M . Essas etapas, descritas e ilustradas por Cantor na denotação, representam o procedimento funcional anunciado por Hallett.

Ainda em favor do argumento de ser a abstração 'uma clássica operação funcional', observa-se que a abstração evita os princípios de formação dos números e a necessidade mais evidente da boa ordenação de conjuntos. Desse modo, Cantor desvia do processo sucessivo, construtivo de percorrer os números. Tal processo é substituído pelo recurso imediato da abstração, acrescido da concepção de infinito atual. Entendemos que os *uns* não poderiam formar os números porque eles existiam prévia e eternamente no reino divino, mas representavam a 'descrição da silhueta incolor dos objetos distintos que perderam esta distinção quando o conteúdo deles foi abstraído ou negligenciado' (CAVAILLES, 1938, p. 97-98)

A abstração das unidades não está sendo empregada de modo 'materialista', que substitui os elementos por marcas | ou e , mas considerando a preocupação de Cantor com a existência, concordamos que ele busca caracterizar os objetos que existem eternamente no reino independente (HALLETT, 1984, p. 132). Isso está considerado na explicação a respeito dos *uns*.

O emprego de *uns* como resultado da abstração de conjuntos cairia certamente nas críticas de Frege que questiona se os *uns* são iguais ou diferentes. Cantor assume que os *uns* são diferentes e o que os diferencia é um apelo à posição ou lugar que os números ocupam na

¹⁰¹ "Abstrahieren wir bei einer gegebenen Menge M , welche aus bestimmten, wohlunterschiedenen konkreten Dingen oder abstrakten Begriffen, welche Elemente der Menge genannt werden, besteht und als ein Ding fuer sich gedacht wird, sowohl von der Beschaffenheit der Elemente wie auch von der Ordnung ihres Gegebenseins, so entsteht in *uns* ein bestimmter Allgemeinbegriff (universale, unum versus alia, in der Bedeutung: unum aptum inesse multis), den ich die Mächtigkeit von M oder die der Menge M zukommende Kardinalzahl nenne. Ich setze fest, dass M ein Zeichen für die Mächtigkeit von M sei. Die zwei Striche über dem M sollen andeuten, dass an M ein Zweifacher Abstraktionsakt vollzogen ist, sowohl in bezug auf die Beschaffenheit der Elemente, wie auch in bezug auf ihre Ordnung zueinander."

sucessão. Ao substituir $m \in M$ por $f(m) \in M'$, por exemplo, a ordem dos conjuntos não se altera ou $\overline{M} = \overline{M}'$, ou: $f(m)$ ocupa exatamente na mesma posição que m na aplicação de f ou abstração, isto é, os elementos de M dão origem aos mesmos *uns* que resultariam do M' .

O que possibilita o apelo à posição ou lugar que o elemento ocupa na sequência é a existência de uma 'ordem canônica' que, considerando a concepção de Cantor, existe em um reino independente. Assim, ao abstrair da natureza dos elementos obtemos conjuntos de 'puros uns' ou números ordinais. Ao abstrair também da ordem, há um colapso da ordem particular daquele conjunto e é conservada uma ordem canônica, representando um tipo de ordem específico, que não importa qual seja, pois essa ordem tem a função exclusiva de preservar a diferença dos *uns* através da posição que ocupam na sequência (HALLETT, 1984, p. 141).

Um modo de esclarecer essa explicação é relembrarmos as classes de números. Numa analogia com elas, o tipo de ordem canônico representariam diversos conjuntos de mesma cardinalidade, ou uma classe de números¹⁰².

Assim, admitindo a abstração como um procedimento funcional, concluímos que Cantor permanece dependente de conjuntos bem ordenados apesar de alcançar maior generalidade nessa noção.

3.4 CONCLUSÃO

Muitas de nossas conclusões estão expostas ao longo das análises acima, algumas das quais retomaremos brevemente enfatizando agora as interações entre Frege e Cantor. Retomamos os temas analisados conectando-os a partir da avaliação que fazemos das críticas de Frege: ele, apesar de oferecer boas sugestões para a estruturação da teoria dos números transfinitos, formulava suas críticas sem amplitude suficiente, isto é, considerava um aspecto da formulação de Cantor e deixava de lado outros que, na nossa opinião, poderiam alterar seu ponto de vista. Além disso, Frege projetava suas perspectivas e objetivos em Cantor. Nesta última seção vamos esclarecer gradualmente essa afirmação.

Frege registrou nos FA, a respeito do artigo de 1883 de Cantor, a diferença de termos empregados por cada um, as lacunas no método e nas definições e admitiu a possibilidade de afinidade das duas teorias. Ele não contesta os resultados do artigo, como a imposição do infinito atual e os números transfinitos. Ao contrário, é fácil ver que a existência dos números transfinitos é mais um forte argumento para refutação ao empirismo, este sim alvo de críticas de Frege.

¹⁰²Hallett discute a hipótese da abstração representar simplesmente um disfarce da teoria das classes correspondentes às potências (HALLETT, 1984, p. 133-141).

Das críticas contidas nos FA, extraímos dois temas que foram analisados, ambos relativos à noção de número. O primeiro, sobre o aspecto ordinal ou cardinal do número e o segundo, sobre uma noção específica de Cantor em 1883, a noção de potência, que foi comparada à de número cardinal de Frege.

Em relação ao primeiro tema, o aspecto ordinal ou cardinal do número, é preciso lembrar que essa discussão é própria do período de elaboração da definição dos números finitos e transfinitos, assim como da implementação de uma nova disciplina, a teoria de conjuntos. Isto significaria que essa discussão não seria pertinente no contexto exclusivo da teoria contemporânea, mas fundamental para uma análise conceitual das noções de conjunto, número, ordinal e cardinal. Isto fica claro quando observamos, de modo não sistemático, as contribuições de Frege e Cantor à teoria axiomática de conjuntos que serão indicadas a seguir, juntamente com outros elementos de destaque das formulações desses autores.

Sobre a definição de número de Frege destacamos que para ele números só se aplicam aos objetos por meio de conceitos. Com isso, Frege realiza um desdobramento da passagem intuitiva dos objetos aos números, estabelecendo o conceito entre eles. Desse modo, Frege resolve as dificuldades apontadas nos FA, relativas a modos, diferentes do dele, de definir número -a partir de coisas, ou como representação mental ou conjunto de unidades. Ilustramos essas soluções com um exemplo relativo à dificuldade, mencionada acima (seção 2.3.3), em relação à definição de números a partir de unidades:

"Nós podemos oferecer um sentido para a questão que discute se as unidades são indiscerníveis ou distinguíveis. Na proposição "Júpiter possui quatro luas" as unidades são idênticas, no sentido de que a unidade é o conceito simples *lua de Júpiter*. Sob esse conceito se encaixam as quatro luas, I, II, III, IV. A unidade para a qual I está relacionada é idêntica à unidade relacionada a II e assim por diante. Mas, quando dizemos que as unidades são distinguíveis, afirmamos que cada uma das luas, ou seja, cada uma das coisas numeradas, é distinguível da outra. Então, podemos fazer justiça a cada uma das demandas aparentemente irreconciliáveis, a saber, que as unidades deveriam ser idênticas e que elas deveriam ser distinguíveis (KENNY, 1995, p. 77).

Mas a sua definição conceitual de número não se restringe a resolver dificuldades plantadas por ele. A tese de Frege que diz que uma afirmação numérica sempre trata de conceitos, é amplamente aceita atualmente, ainda que possa ser discutida.

Ainda sobre a definição de número de Frege, retomamos a questão que levantamos na seção 2.1.1 a respeito da crítica de Cantor à definição de número de Frege acusada de

"circular". A não circularidade da definição de Frege fica garantida pelo seguinte: ele, ao definir o número de um conceito como a extensão do conceito, estabelece a existência do número por uma equação em que um dos lados já é conhecido (ver FREGE, 1884, §68, p. 251-252 ou seção 2.4 acima). A partir disso, ele usa a relação de equivalência para definir a igualdade de dois números. Mas essa definição de igualdade é geral, isto é, não se restringe à igualdade de números (FREGE, 1884, §63, p. 248) e além disso, para o caso dos números ela não supõe o conceito de número, como Cantor imaginou. E, ainda, como o conceito é logicamente anterior à extensão, Frege evita assim a interpretação de extensão como conjunto material de objetos que caem sob o conceito, pois a extensão é composta de conceitos. Por exemplo, o zero é definido assim: o número 0 é a extensão do conceito equinúmero ao conceito 'diferente de si próprio'¹⁰³ (FREGE, 1884, §74, p. 256).

Quanto às contribuições de Frege à teoria axiomática de conjuntos, destacamos os esquemas lógicos que geram a série dos números naturais, a definição do 0 e o sucessor de cada número. Especificamente sobre a análise realizada na seção 3.1 sobre o uso linguístico dos termos ordinais e cardinais, e se admitimos que o número ordinal supõe a cardinalidade e o inverso não ocorre, notamos que a definição de número cardinal de Frege está, neste sentido, mais próxima da definição contemporânea quando se trata apenas dos números finitos porque na definição atual eles não são necessariamente nem ordinais nem cardinais. Isto é, eles são definidos a partir dos axiomas da compreensão, da extensionalidade, da união e do par e independentes dos conceitos de número ordinal e cardinal, cuja definição é posterior (HRBACEK & JECH, 1984, p. 49, 50, 74, 75, 85 e 86). De fato, os números finitos são exemplos simples, precisos e ilustrativos desses conjuntos.

Já citamos Resnik e Imbert (seção 3.1) que enfatizaram os desenvolvimentos de Frege em relação a teoria axiomática de conjuntos e, especificamente, quanto a sua definição de número e seu aspecto independente da ordinalidade. Abordando o vínculo ou não do número em relação à sequência ordenada, Hallett também se inclui acentuando que é instrutivo comparar Frege e Cantor sob este aspecto (HALLETT, 1984, p. 151).

Observando melhor nossa afirmação sobre a concepção *cardinal* de número transfinito em 1874, concluímos que Cantor mantinha como referência a sequência ordenada dos números finitos $1, 2, 3, \dots, v, \dots$. Depois, com o procedimento da abstração para definir os números, que em vários aspectos rompe com a sequência de números e proposições sobre a ordenação de conjuntos, Cantor, pela interpretação de abstração que defendemos, mantém referência à sequência ordenada.

¹⁰³A extensão desse conceito é infinita e não vazia, como era de se esperar. Alguns dos elementos da extensão do conceito 'equinúmero ao conceito 'diferente de si próprio' são, por exemplo: 'ferro de madeira', círculo quadrado' (FREGE, 1884, §74, p. 256). Frege refaz essa definição no *Grundgesetze*.

Hallett aponta que para Cantor, a noção de cardinalidade tem a função de tornar conjuntos infinitos contáveis, como uma generalização dos conjuntos finitos. Ou seja, neste sentido, Cantor mais uma vez permanece no nível intuitivo. Por sua vez, Frege alcança, em sua definição de número, um patamar mais abstrato e formal pela independência do processo de contagem ou da ordem. Deste modo, olhando agora para a noção de número formalizada, é possível observar que Frege rompe com elementos intuitivos e psicológicos e, sob este aspecto, se assemelha à definição atual.

Por outro lado, focalizando agora a definição de números transfinitos, quando Frege acusa Cantor de ampliar sua definição, porque inclui a ordinalidade, ele não está levando em conta a sequência desses novos números. Para definir a sequência de números transfinitos, indiscutivelmente uma grande contribuição de Cantor, a ordinalidade é condição necessária. Cantor teve intuições que foram elaboradas e que compõem a teoria axiomática de conjuntos no que dizem respeito, por exemplo, à importância do número ordinal, à necessidade de supor que todo conjunto pode ser bem ordenado para estender a sequência de números e à propriedade transitiva do conjunto dos números naturais e ordinais. Além disso, Cantor plantou uma série de problemas, envolvendo, sobretudo, a ordem, que tiveram soluções e consequências importantes na teoria contemporânea (HALLETT, 1984, p. 154).

A partir do segundo tema que analisamos, extraído das críticas a Cantor nos FA, pudemos elaborar a noção de conjunto que passa a ser elementar na aritmética a partir dos desenvolvimentos da teoria dos números transfinitos, que resultou na da teoria axiomática de conjuntos. A elaboração da noção de conjunto é sugerida pelo segundo tema e representa, ainda, uma conexão entre este e o terceiro tema analisado - o recurso à abstração para definir números.

Cantor, visivelmente, passa a precisar da noção de conjunto para introduzir os novos números e o faz não diretamente como hoje - "número é um conjunto.." mas através da noção de enumerar e do recurso à abstração. Frege atribui números aos conceitos através de sua extensão e não de um conjunto de coisas, mas não deixa de caminhar na mesma direção que recorre aos conjuntos. Neste sentido, ressaltamos que a insistência de Frege em evitar o tratamento extensional dos conjuntos é inútil a partir do sentido matemático que eles adquirem, que explicaremos logo a seguir. Por hora, queremos acrescentar que os conjuntos, na teoria axiomática, são tratados extensionalmente como objetos independentes, e separados da intenção que pode nos ajudar a defini-los ou reconhecê-los (HALLET, 1984, p. 196).

Elaborar a introdução da noção de conjunto na base da aritmética, ou a substituição da noção elementar de número por conjunto pode parecer desnecessário quando focalizamos apenas a teoria axiomática atual. É verdade que a noção de conjunto empregada na teoria atual é uma noção primitiva e não carece de definição. Porém, esta é uma noção especial, no sentido

que não é a mesma do senso comum e que só adquire seu sentido posteriormente ao conhecimento da teoria de conjuntos. Dessas teses defendidas por Pollard, nos interessa destacar a primeira, com intuito de justificar a necessidade da elaboração da noção de conjunto:

"A teoria de conjuntos não deve suas características essenciais a qualquer intrusão das noções do senso comum para dentro do domínio matemático. A característica central e distintiva (a extensão da aritmética até o transfinito e um compromisso com conjunto de conjuntos) brota da resposta matemática aos problemas matemáticos - problemas nascidos na teoria de funções e números reais." (POLLARD, 1990, p. 39).

Pollard afirma também que as dificuldades com a introdução de conjuntos resolveram-se dentro da própria matemática, na ocasião em que as justificativas filosóficas foram abandonadas. Pollard usa o exemplo da definição dos 'cortes de Dedekind' para ilustrar como na época, essa noção era de fronteira:

"O escrúpulo de Dedekind na discriminação entre cortes e [números] reais não era visto como matematicamente defensível, e foi abandonado. Números reais tornaram-se cortes. Mas cortes são conjuntos." (POLLARD, 1990, p. 38).

A publicação de 1895 de Cantor reflete essa tendência, porque nela, as discussões filosóficas são deixadas de lado e com isso a aceitação da teoria dos transfinitos é maior nessa versão. Não estamos desconsiderando o uso da abstração nas definições para fazer essa afirmação; Cantor não se desprende dos escrúpulos ao usar conjunto enquanto noção elementar mas, ao afastar-se das discussões filosóficas, sua teoria ganhou maior respaldo entre os matemáticos.

Na análise sobre a noção de número, a qual nos permitiu elaborar a noção de conjunto da matemática, não caberia, segundo nosso ponto de vista, tomar a posição de Cantor ou de Frege. Os dois pontos dessa discussão nos proporcionaram uma análise rica que enche de sentido a definição atual que, se por um lado parece ser bem diferente das definições de Cantor e Frege, por outro a definição atual parece ter sua gênese na discussão e exposição desses autores, parece mesmo ser a reunião das duas cuidadosamente lapidada.

Quanto as críticas de Frege contidas em sua resenha do texto de Cantor, o clima de hostilidade e ironia. Ele retoma os argumentos contrários ao empirismo e psicologismo desenvolvidas nos FA. Faz isso para atacar Cantor que emprega abstração nas definições de número, já que Frege associava abstração ao psicologismo.

Frege mostra que o empirismo-psicologismo é incapaz de dar conta da matemática tal qual a percebemos no que diz respeito a sua generalidade. As explicações apresentadas por

ele, segundo Frege, são artificiais e estanques, porque alcançam, por exemplo, alguns números, mas outros não, e a estrutura simplista de interpretação do conhecimento os impede de reconhecer os aspectos do significado dos conceitos, que na definição de número garante unicidade, unidade, entre outras coisas.

Psicologismo lógico corresponde a reduzir os princípios da lógica a hipóteses empíricas sobre a mente humana. Neste caso, a lógica é apenas a representação externa das leis psicológicas de operação mental (BROCKHAUS, 1991, p. 503). A lógica, para Frege, expressa a objetividade, a certeza e as normas, que identificam as relações entre as proposições em virtude dos valores de verdade e não se relacionam com descrições do pensamento nem com o reconhecimento dessas relações pelas pessoas. Na concepção psicologista, a função normativa da lógica diminui sobremaneira passando a ter uma função descritiva.

A crítica de Frege atinge a redução da lógica. A redução da lógica ao domínio psicológico e empírico conduz a uma confusão entre o compreensão e significado. Para os psicologistas e empiristas não havia preocupação com o conteúdo separado da compreensão, que diz respeito a 'como se conhece' e 'em que consiste a compreensão'. O caráter da lógica é essencialmente descritivo, associado aos processos mentais e ao reconhecimento. E não poderia ser de outra maneira pois, tirando o pressuposto de ser a lógica independente do pensamento, isto é, assumindo o psychologismo, que considera que a lógica se baseia em entidades mentais, e admitindo a concepção empirista- que considera o conhecimento como algo que se funda na própria mente a partir da observação, a distinção entre significado e compreensão tendem a desaparecer. Ou seja, do ponto de vista do psicologista, o significado é o conteúdo compreendido, a origem é igual aos fundamentos.

Lembramos que Frege levou a cabo o princípio, um dos três dos FA, de separar o lógico do psicológico, de retirar do domínio da filosofia as explicações psicológicas e reservou à psicologia as explicações sobre os processos que nos levam a conhecer¹⁰⁴, ou seja, Frege reconhece que a psicologia, assim como a abstração, possuem funções. Entretanto, essas funções não se relacionam com o caráter lógico do conhecimento, de acordo com a sua concepção. Para Frege, as representações, imagens mentais e o modo como as conhecemos, são aspectos subjetivos do conhecimento, portanto privados e não comparáveis, que dizem respeito apenas ao sujeito e em nada se relacionam com o conhecimento objetivo.

¹⁰⁴Esclarecemos que, apesar dos procedimentos serem descartados por não serem lógicos, Frege reconhece, em diversos momentos do seu texto, o interesse e utilidade que há neles. As 'imagens mentais', a 'descrição da gênese', as 'representações' não possuem interesse para o conteúdo [lógico] da aritmética, mas possuem função e utilidade reconhecida por Frege em outros aspectos, didáticos explicativos, etc (FREGE, 1884, introdução, p. 199-200, p. 201).

Frege mostra que o psicologismo é incapaz de traçar distinções entre o conteúdo e a justificação do conteúdo e assim não percebe, não alcança a objetividade da ciência. Isso ocorre, por exemplo, conforme mencionamos ao final da seção 2.3.2, na confusão entre a explicação da gênese do conhecimento e a definição dele; ou ainda o próprio emprego da abstração para definições pode ser enquadrado nesse caso.

Se, por um lado, uma grande contribuição de Frege é traçar uma aguda distinção entre o modo de conhecer e o sentido, o significado e o conteúdo próprio das coisas objetivas¹⁰⁵; e é identificar o problema do significado, do conteúdo e da validade do conhecimento, por outro lado, o problema da compreensão é ignorado por ele.

Neste sentido, é importante esclarecer que Frege se ocupa em relação à lógica nos FA, unicamente com o que ela é, deixando totalmente de lado o ato mental de alcançá-la e deixando para a psicologia a forma de conhecê-la. Especificamente, a noção de significado é básica nos FA, em oposição à noção de 'compreensão' que é 'notoriamente pouco explicada por Frege (MCGINN, p. 99)¹⁰⁶. Essa informação é importante nesta dissertação porque nos ajuda a avaliar a crítica de Frege a Cantor quanto a suas explicações psicológicas.

Observamos primeiro a contribuição de Frege no sentido de esclarecer a confusão entre a gênese de um conceito e sua natureza, a qual espelha o empirismo e psicologismo dominando a lógica e a teoria do conhecimento. Abordar a crítica de Frege possibilitou elucidar parcialmente essas confusões e elaborar o significado de conteúdo lógico, tão importante quanto complexo em sua filosofia. Ele separa o que é lógico e o que não é, através da distinção entre o conteúdo, a justificativa e a maneira de alcançar o conteúdo. Ele separa os critérios de verdade do conhecimento, o instrumento de controle da produção do conhecimento e sua origem. Ele separa o conteúdo do pensamento do ato de pensamento, a 'representação' que constitui o veículo do ato mental, do objeto desse ato (BROCKHAUS, 1991, p. 509 e 511).

Entretanto, esse mesmo filósofo não apresenta uma teoria sobre como conhecemos. Ele desenvolve a lógica, elabora definições mas deixa essa questão de como conhecemos sem qualquer explicação.

Essa lacuna na filosofia de Frege é apontada por McGinn, que admite que ele, ao esbarrar no tema relacionado com o processo da compreensão do significado, não escapa à explicação de ser este um 'ato mental dirigido a uma entidade abstrata independente da mente' (MCGINN, 1984, p. 98):

¹⁰⁵ Ver (FREGE, 1884, §3, p. 204).

¹⁰⁶ McGinn questiona o antipsicologismo de Frege em relação à 'compreensão'. Nesse caso, não é tão clara e inquestionável uma absoluta independência entre 'alcançar o sentido' e os processos mentais. Sobre isso ver (MCGINN, 1984, p.98).

"O caráter desse ato mental é notoriamente pouco explicado por Frege, mas nós podemos supô-lo semelhante àqueles atos da 'intuição matemática' que os platonistas nos fazem conceber como relacionados cognitivamente aos números: um tipo de ato mental no qual um tipo de entidade vem diante da mente, apesar de essa entidade não ser nem mental nem concreta." (MCGINN, 1984, p. 99).

Frege explica bem o que não deve ser confundido com a compreensão, mas não se dedica a esclarecer o que lhe cabe. E isso é importante não apenas por ser um dos itens de explicação filosófica, mas para o enfoque desta dissertação, sobretudo, porque se relaciona às questões psicológicas, como ele mesmo, de algum modo, reconhece. Entre admitir, por um lado, a existência de verdades independentes da mente e, por outro, instalar rigorosamente essas verdades em uma sequência lógica, fica faltando explicar como chegamos a conhecê-la. As explicações relativas ao modo de alcançar o conhecimento esbarram no assunto da psicologia:

"Mesmo conferindo que o sentido não é dependente da mente, agarrar um sentido ou compreender uma palavra ou frase, como expressando um sentido é, com certeza, um ato mental, algo do reino da psicologia." (DUMMETT, 1991, p. 55).

Concluimos com isso que Frege se esquivava de tratar de problemas que, no mínimo, se encontram na fronteira dessas duas áreas - a filosofia e a psicologia, enquanto que Cantor, ao abordar suas novas noções, oferece explicações de como conhecê-las tornando-se, principalmente por isso, alvo das críticas de Frege. Duas coisas precisam ser distinguidas nesta nossa conclusão, as quais não se restringem somente a essa crítica: a primeira é que Frege não avalia amplamente a teoria e as exposições de Cantor ao comentá-las; a segunda é que Frege projeta em Cantor suas perspectivas, seus objetivos e limitações.

Em relação à primeira conclusão observamos, especificamente, que o emprego da abstração é incluído por Frege entre os procedimentos privados e individuais, pois esta é considerada por ele um processo mental que é realizado a partir dos objetos e das coisas externas, sendo assim, um modo de percepção sensorial. É nesse sentido que Frege chama Cantor de empirista.

A abstração é empregada por Cantor também com a função de associar número a conjunto. Em 1883, poderíamos perceber essa associação de uma forma leve e implícita, quando o número ordinal representa a 'imagem' de um conjunto organizado em uma ordem específica. Explicitando essa associação a partir de 1883, Cantor se expõe mais aos ataques de Frege no que diz respeito à fundamentação, porque a abstração, a partir de conjuntos, passa a

ser o principal argumento para conceber os números. A abstração para obter conceitos é uma forma intuitiva que ajuda na divulgação deles.

Avaliamos que essa crítica, do modo como Frege a coloca não é pertinente, mesmo tendo constatado que Cantor usou termos psicologistas e empiristas e observado que a abstração é um exemplo da confusão, mencionada acima, entre o conteúdo e a compreensão. A não pertinência da crítica deve-se, sobretudo, ao fato de Frege não considerar outros aspectos da teoria ou concepção de Cantor e neste caso, ele não leva em conta que, para Cantor, a matemática existe em um reino à parte.

Cantor acredita na existência dos objetos matemáticos em um reino independente. Isso não permite interpretar a abstração como um elemento psicologista-empirista, no sentido de Frege, pois não é o caso em que o número seja obtido por abstração de conjuntos da realidade. A abstração parece ser o modo de Cantor explicar como chegar a novos conceitos, como conhecer coisas que existem independentemente ou não da existência própria.

Ainda sobre a crítica de Frege à abstração queremos salientar da nossa conclusão que Frege ataca uma forma fraca de psicologismo e empirismo, ou seja, ataca uma forma de psicologismo extremo, totalmente apegada à percepção de coisas físicas e a explicações relativas a processos mentais, isto é, Frege não considera outras formas de psicologismo, que garantem explicações diversas das mentais para questões do significado, por exemplo. O interesse em descrever outras formas de psicologismo resulta desta dissertação como um assunto possível para o prolongamento desta pesquisa. Lembramos que, aqui, nos restringimos sempre ao que Frege compreendeu por essas correntes e apenas após concluirmos a pertinência de sua crítica, é que surge essa necessidade.

Em relação à segunda conclusão, apontamos a seguir outro aspecto das críticas que não só nos parecem restritas a problemas e trechos específicos da obra de Cantor, como também refletem que Frege não está atento simplesmente aos propósitos de Cantor, mas elabora suas críticas sob o prisma de seu próprio projeto. Tentamos, no capítulo 1 e 2, destacar as intenções, objetivos e os modos de cada um porque, no caso, Frege parece não reconhecer os objetivos de Cantor mas, simplesmente, projetar os seus.

Segundo Frege algumas definições e demonstrações de Cantor deveriam ser substituídas pelas suas que deveriam ser tomadas como modelo. Cantor poderia ter se beneficiado com algumas das sugestões mas, o que se destaca nessa discussão, é que Frege não parece compreender o alcance dos objetivos de Cantor que não pretende 'fundamentar a aritmética'. De fato, Cantor *pressupõe* a existência dos números naturais que são, inclusive, o protótipo do conjunto bem ordenado, quando gera os números ordinais, conforme já mostramos, 'a partir do outro já formado', isto é, ele não define o conceito de número e não define o 1, por exemplo, e não define +1 antes de acionar o primeiro princípio de formação.

Frege entende essa suposição, como faria com as outras teorias que não alcançam ou buscam o 'grau de rigor' demandado por ele, como lacunas no artigo de 1883:

"Parecem-me faltar, ainda, definições precisas ...do número cantoriano....acredito antever como estes conceitos poderiam ser determinados." (FREGE, 1884, §86, p. 263).

Frege mantém essa visão da necessidade de Cantor de fundamentar e definir precisamente a noção de número e outras (conjunto, seguir em uma seqüência) em seu artigo de 1892, na revisão que faz do artigo de Cantor, de 1887:

"Se Cantor não tivesse apenas resenhado meu FA, mas também lido-o atenciosamente, ele teria evitado muitos erros" (FREGE, 1892, p. 179 [270]).

Devemos, mais uma vez, lembrar o objetivo de Cantor: definir os números transfinitos como uma extensão, uma ampliação dos números finitos. Por isso, recorremos às exposições da teoria dos números transfinitos, que não é exatamente nosso tema, para obter sua concepção de número. De acordo com esse objetivo parece compreensível que ele não tenha definido o conceito de número e o 1, mas considera-os conhecidos. Cantor criava algo novo a partir de coisas conhecidas, as que Frege queria fundamentar. Ele não buscava, como Frege, fundamentar a aritmética fora dos problemas específicos da matemática (ver CURRIE, p. 10). Seu objetivo de generalizar a noção de número é reconhecido por Frege, que afirma que Cantor abre um caminho aritmético para os números transfinitos (FREGE, 1884, §86, p. 264) e isto é real.

Aliás, Cantor concorda com Frege sobre a necessidade de fundamentar a aritmética, porque essa área é fundamental para garantir a certeza e o método em toda a matemática:

"O objetivo do texto, de submeter os fundamentos da aritmética a um novo exame, é louvável e não está posto em dúvida que este ramo da matemática, no qual as outras disciplinas da matemática se baseiam, exige uma profunda investigação do conceito e método," (CANTOR, 1885, p. 440)¹⁰⁷.

Cantor admite ainda que, apesar da admiração, ele próprio não possui inclinação para prover os fundamentos lógicos da aritmética (CANTOR, 1888, *apud* DAUBEN, 1979, p. 346 n.2).

Tudo isso nos permite concluir sobre a unidade ou não das críticas de Frege a Cantor nos dois momentos em que as enfocamos, o dos FA e o das resenhas. Por um lado, avaliamos

¹⁰⁷ "Der Zweck dieses Schriftchens, die Grundlagen der Arithmetik einer erneuten Untersuchung zu unterwerfen, ist ein löblicher, denn es unterliegt keinem Zweifel, daß dieser Zweig der Mathematik, welcher allen anderen mathematischen Disziplinen zur Basis dient, eine weit tiefere Erforschung seiner Grundbegriffe und Methoden verlangt, als ihm bisher im allgemeinen zu Teil geworden ist" (CANTOR, 1885, p. 440).

de maneira exagerada e pontual as críticas de Frege e não concordamos que Cantor é psicologista no sentido em que Frege usa esse termo; por outro, vemos que a tendência de Cantor aos frequentes apelos à intuição e explicações de como alcançar suas noções, ao invés de se restringir a dar definições formais, foi menor na publicação mais madura de sua teoria. Poderíamos dizer, pois concordamos com a tese de Pollard descrita acima, que Cantor, em 1895, já possuía suas noções bem mais elaboradas do que quando iniciou suas publicações. Especificamente, a noção de conjunto já tinha avançado bastante, como notamos acima quanto a generalidade, no sentido de adquirir seu significado próprio. Por isso, não concordamos com Jourdain em nenhuma das duas afirmações contidas no trecho que citamos no início deste capítulo, ainda que devamos admitir que não pesquisamos que sentido ele atribui a esses termos. Ele via Cantor de modo mais formalista no início, o que contraria nossa interpretação sobre o formalismo nesse autor, descrito na seção 1.2. Também não concordamos que Cantor estivesse em um período mais psicológico nas últimas publicações, porque não nos deixamos tomar pela interpretação de ser o emprego da abstração um recurso psicológico, ainda que tenhamos concordado que não é este o melhor modo de definir e tenhamos admitido a presença de aspectos subjetivos em todo o desenvolvimento da teoria dos números transfinitos.

A unidade que observamos nesse estudo não diz respeito às críticas de Frege a Cantor. Observamos, através do enfoque adotado nesta dissertação, que a noção de conjunto é o ponto comum deste estudo e dá unidade a ele. As discussões sobre a noção de números e sobre o emprego da abstração para definição deles, resultam numa generalização dessa noção através da noção de conjunto, ou seja, números são casos particulares da noção de conjunto e esse último torna-se possível de ser aplicado em outras áreas da matemática. A partir do desenvolvimento da teoria dos números transfinitos pudemos elaborar, aqui, essa generalização que ainda precisa ser absorvida e por isso merece ser discutida filosoficamente. A tese de que a matemática se ocupa, no nível mais fundamental, com coleções de objetos, isto é, com conjuntos, permanece, segundo Hallett, como um princípio central na matemática clássica depois de Cantor (HALLETT, 1984, p. 195).

Desse ponto de vista, a interação entre Cantor e Frege se dá mais ao longo da formulação da teoria de conjuntos do que na época em que leram e comentaram mutuamente seus trabalhos. Muitas das dificuldades que Cantor enfrentava na formulação de uma nova teoria, vista por Frege com imprecisões, deram origem a noções fundamentais e incorporadas à teoria axiomática de conjuntos. Sobre a interação entre Frege e Cantor, na época que divulgavam suas idéias e teorias, apontamos alguns detalhes a seguir.

Frege era simpático à teoria de Cantor e isso pode ter sugerido a P. Alcoforado uma interação positiva entre Cantor e Frege. Esse tradutor chega a cogitar, sem evidenciar o

suficiente, que Frege foi influenciado por Cantor na sua definição de número cardinal devido à equivalência apontada acima:

"o que levou Frege a formular sua definição de número cardinal foi, provavelmente, seu estudo de Cantor" (ALCOFORADO, 1978, p.20).

Entendemos que é possível reconhecer uma influência de Cantor sobre Frege na concepção da cardinalidade, mas não exatamente na 'definição do número cardinal' que possui uma especificidade conceitual e lógica nos FA. A influência poderia ser cogitada simplesmente na concepção de número em sua forma cardinal, menos intuitiva do que a ordinal, pois, de fato, nos números finitos, não se distingue cardinalidade e ordinalidade (CANTOR, 1883, s.1 p. 71 citado acima). Portanto, a partir da teoria dos números transfinitos de Cantor, os conceitos de número cardinal /ordinal ficam mais claros, assim como se tornam mais evidentes esses dois aspectos do número depois do confronto dos conceitos nos dois autores.

Do ponto de vista de Cantor, constatamos que, influenciado ou não por Frege, depois do artigo de 1883, ele passa a potência de número cardinal, termo empregado por Frege. Além disso, ele passa a definir primeiro o cardinal e posteriormente o ordinal¹⁰⁸, seguindo a sequência de apresentação dos FA. É sabido, entretanto, que Cantor continuava tentando demonstrar os teoremas da boa ordem¹⁰⁹. Sem sucesso no desenvolvimento da teoria dos números ordinais, ele mantém a teoria dos números transfinitos a partir dos números cardinais e insere a abstração como recurso para definir os números, antes definidos a partir dos números ordinais, mantendo ainda, como hipótese fundamental, que todo conjunto precisa ser bem ordenado.

Cantor, porém, não se livrou dos ataques de Frege, mesmo 'tendo atendido' a algumas de suas observações. As críticas de Frege até aí eram bem suaves comparadas, com as que vieram, talvez correspondendo à amargura com que Cantor recebia os comentários de Frege (IMBERT, p. 68, nota 3). A própria noção de ordem, mesmo com a importância diminuída, permaneceu sendo o alvo de Frege que daí incluiu esse termo entre os subjetivos, junto com a abstração, o maior alvo a partir de então.

Sobre a interação entre Frege e Cantor, concluímos que, a partir dos textos em que um se refere ao outro, analisados nesta dissertação, obtivemos muita informação quanto às suas próprias teorias e interesses, tivemos oportunidade de aprofundar-nos em algumas noções e conseguimos poucos dados que tenham provocado significativas alterações nos trabalhos

¹⁰⁸No mesmo ano foi publicada uma tradução para o francês supervisionada pelo próprio Cantor, em que, devido a uma nova disposição das seções do artigo, a teoria do ordinal foi transferida para o final do artigo e as seções contendo a teoria das potências (cardinal) trazidas para o início. A nova estrutura foi conservada até 1895, em *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* quando a teoria foi publicada em sua forma matemática mais elaborada.

¹⁰⁹(HALLETT, 1984, p. 121); (DAUBEN, 1979 p. 150).

alheios. Ou seja, a interação entre Frege e Cantor foi pequena quando olhamos exclusivamente para os trabalhos publicados na época.

Mas, do ponto de vista matemático, tomando a teoria axiomática de conjuntos como referência, observamos que ela é composta de resultados de problemas suscitados por Cantor e plantada no aparato lógico implementado por Frege. Neste sentido, a interação entre os autores é expressiva. Isto nos leva a concluir que a contemporânea teoria de conjuntos tornou-se pano de fundo importante nesta dissertação, surpreendendo nossas expectativas ao adquirir uma função bem maior do que a prevista inicialmente.

Do ponto de vista filosófico, destaca-se a reflexão de Frege sobre a sua noção de número e a de Cantor, que levamos também para dentro desta reflexão.

Tendo respondido às questões inicialmente colocadas, encerramos esta dissertação salientando a discussão conceitual da noção de número através dos conceitos de ordinalidade e cardinalidade, a percepção efetiva da generalidade que a noção de conjunto proporcionou à matemática e, ainda, a tenacidade entre as explicações de conceitos e as abordagens psicológicas do conhecimento. Novas questões colocaram-se durante a realização do presente estudo como, por exemplo, a equivalência formal entre as noções contemporâneas e as de Frege e Cantor, assim como surgiu a necessidade de abordar aspectos da epistemologia de Frege mais profundamente.

BIBLIOGRAFIA

- ALCOFORADO, P. *Gottlob Frege- Lógica e filosofia da linguagem*, São Paulo, Cultrix-Universidade de São Paulo, 1978.
- BROCKHAUS, R. Realism and Psychologism in 19th Century Logic, *Philosophy and Phenomenological Research*, v. LI, n. 3, 1991, p. 493- 525.
- BYNUM, T. W. Introduction, In: *Conceptual Notation*, Oxford, Clarendon Press, 1972
- _____. Review of Georg Cantor, *Zur Lehre vom transfiniten* (1888). In *Collected papers on Mathematics, logic and philosophy* Oxford, Basil Blackwell, p. 178-81, 1984.
- CANTOR, Georg. Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réel (1874), *Acta Mathematica*, v. 2, p.305-10, 1883.
- _____. Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten 5, *Mathematische Annalen*, v.21, p. 545-86, 1883.
- _____. Fondements d'une théorie générale des ensembles, *Acta Mathematica*, v. 2, p. 381-408, 1883.
- _____. Foundations of a general theory of manifolds (1883), Trad. Uwe Parpart. *The Campaigner*, v.9, n. 1-2, p. 69-96, 1976.
- _____. Die Grundlagen der Arithmetik (Rezension der Schrift von G. Frege...), (1885). In: *Gesammelte Abhandlungen mathematische und philosophische Inhalts* (ed. Ernest Zermelo). Berlin, Springer, p. 440-441, 1932.
- _____. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, (1887) In: *Gesammelte Abhandlungen mathematische und philosophische Inhalts* (ed. Ernest Zermelo). Berlin, Springer, p. 378-439, 1932.
- _____. Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche, (1885) In: *Gesammelte Abhandlungen mathematische und philosophische Inhalts* (ed. Ernest Zermelo). Berlin, Springer, p. 370-377, 1932.
- _____. Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n -fach ausgedehnten stetigen Raume C_n . Zweite Mitteilung, (1885). In: *Gesammelte Abhandlungen mathematische und philosophische Inhalts* (ed. Ernest Zermelo). Berlin, Springer, p. 261-277, 1932.
- _____. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 46, p. 481-512, 1895.
- _____. *Contributions to the founding of theory of transfiniten numbers*. (1895) Trad. P. Jourdain). New York, Dover, 1955.

_____. Georg Cantor an Charles Hermite (1895). In: *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*. (ed. H. Meschkowski), Braunschweig, Vieweg, 1967, p. 262-3.

CAVAILLÈS, J. *Philosophie Mathématique* (1938), Paris, Hermann, 1962.

CURRIE, G. *Frege - an introduction to his philosophy*, Brighton, Harvester Press, 1982.

DAUBEN, J. *Georg Cantor- historical Mathematics and Philosophy of the Infinite* (1979). New Jersey, Princeton University Press, 1990.

_____. Georg Cantor and Pope Leo XIII: mathematics, theology and the infinite. *Journal of the history of ideas*, v. 38, p. 85-108, 1977.

_____. Georg Cantor's philosophy of mathematics: the irrational and transfinite numbers. *Actes de XIII^e Congrès International d'Histoire des Sciences*, Moscou, v. 5, p. 86-93, 1971.

DUMMETT, M. *Truth and others enigmas*. Cambridge MA, Harvard University Press, 1978.

_____. *Frege- philosophy of mathematics*, Cambridge MA, Harvard University Press, 1991.

FREGE, G. *Les fondements de l'arithmétique* (1884). Trad. C. Imbert, Paris, Éditions du Seuil, 1969.

_____. *Os fundamentos da aritmética* (1884). Trad. L.H. Santos, Os Pensadores v. 36, São Paulo, Abril, 1983.

_____. "On sense and reference" (1892), in *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Oxford, Basil Blackwell, 1970.

_____. "Função e Conceito" (1891), in *Lógica e filosofia da linguagem*. Trad. P. Alcoforado, São Paulo, Cultrix, 1975.

_____. "Sobre o Conceito e o Objeto" (1892), in *Lógica e filosofia da linguagem*. Trad. P. Alcoforado, São Paulo, Cultrix, 1975.

_____. *The basic laws of arithmetic*. Trad. Montgomery Furth, Berkeley, University of California Press, 1967.

_____. *Conceptual Notation* (1879), Trad. T. W Bynum, Oxford, Oxford University Press, 1972.

_____. Review of Georg Cantor, *Zur Lehre vom transfiniten* (1888). In *Collected papers on Mathematics, logic and philosophy* Oxford, Basil Blackwell, p. 178-81, 1984.

GARDIES, J. La conception néo-platonicienne de l'abstraction chez Dedekind, Cantor, Frege, et Peano. *Revue philosophique*, 1, p. 65-84, 1989.

GRATTAN-GUINNESS, I. Georg Cantor's influence on Bertrand Russell, *History and philosophy of logic*, 1, p. 61-93, 1980.

HALLETT, M. *Cantorian set theory and limitation of size*. Oxford, Oxford University Press, 1984.

- HALMOS, P. *Teoria Ingênua de Conjunto*, São Paulo, Universidade de São Paulo e Polígono, 1973.
- HRBACEK, V. & JECH, T. *Introduction to Set Theory*, New York, Dekker, 1984.
- IMBERT, CLAUDE. Introduction in *Les fondements de l'arithmétique*, Paris, Éditions du Seuil, 1969.
- JOURDAIN, P. Introduction (1915), In: *Contributions to the founding of theory of transfinite numbers*. New York, Dover, 1955.
- KENNY, A. *An introduction to the founder of modern analytic philosophy- Frege*, London, Penguin Books, 1995.
- KITCHER, P. *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford, Oxford University Press, 1984.
- KLINE, M. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford, Oxford University Press, 1972.
- LUNGARZO, C. A. Progreso en filosofía da la matemática, *Manuscrito*, v. XVI, n. 2, p. 71-119, 1993.
- MCGINN, C. *Wittgenstein on Meaning*, Oxford, Basil Blackwell, 1984.
- MENEGHETTI, *Sobre a transposição didática dos cardinais e ordinais*. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 1995. (Dissertação de mestrado).
- POLLARD, S. *A Philosophical introduction to set theory*, London, University of Notre dame Press, 1990.
- RESNIK, M. *Frege and the philosophy of mathematics*, London, Cornell University Press, 1980.
- RUSSELL, B. *The principles of mathematics [1903]*, New York, W. W. Norton & Company, 1943.
- _____. *Os problemas da filosofia [1912]* Trad. A. Sérgio Arménio Amado Coimbra New York, W. Norton & Company, 1980.
- SANTOS, L. H. Introdução (1974), In: *Os Pensadores* v. 36, São Paulo, Abril, p. 177- 186, 1983.
- SLUGA, H. *Gottlob Frege*. London, Routledge e Kegan Paul, 1980.
- THUILLIER, P. Dieu, Cantor et l'infini, *La Recherche*, v. 84, p. 68-74. 1977.
- TILES, M. *The philosophy of set theory*, Oxford, Basil Blackwell, 1989.
- WEINBERG, J. Abstraction in formation of concepts. In *Dictionary of the history of ideas* (ed. P. Wiener). New York: Charles Scribner's & sons, p. 1-9, 1957.
- WILDER, RAYMOND L. Relativity of standards of mathematical rigor , in *Dictionary of the history of ideas*. Ed. Philip P. Wiener. New York, Charles Scribner's & sons, v. 3, p. 170- 177, 1973.