Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas

Edson Vinicius Bezerra

Uma Análise das Bivalorações do Ponto de Vista da Semântica de Sociedades

CAMPINAS
2017

EDSON VINICIUS BEZERRA

Uma Análise das Bivalorações do Ponto de Vista da Semântica de Sociedades

Dissertação apresentada ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Supervisor/Orientador: Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli

Co-supervisor/Coorientador: Profa. Dra. Juliana Bueno

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO EDSON VINICIUS BEZERRA E ORIENTADO PELO PROF. DR. WALTER ALEXANDRE CARNIELLI

CAMPINAS

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 131467/2015-8

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
Paulo Roberto de Oliveira - CRB 8/6272

	Bezerra, Edson Vinícius, 1992-
B469a	Uma análise das bivalorações do ponto de vista das semânticas de sociedades / Edson Vinícius Bezerra. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.
	Orientador: Walter Alexandre Carnielli.
	Coorientador: Juliana Bueno-Soler.
	Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.
	1. Lógicas Multivaloradas. 2. Semântica. 3. Sociedades. I. Carnielli, Walter Alexandre, 1952-. II. Bueno-Soler, Juliana, 1976-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. IV. Título.

<u>Informações para Biblioteca Digital</u>

Título em outro idioma: An analysis of bivaluations from society semantics point of view
Palavras-chave em inglês:
Many-valued Logics
Semantics
Society
Área de concentração: Filosofia
Titulação: Mestre em Filosofia
Banca examinadora:
Walter Alexandre Carnielli [Orientador]
Alexandre Fernandes Batista Costa Leite
Marcelo Esteban Coniglio
Data de defesa: 21-09-2017
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Dissertação de Mestrado composta pelos professores Doutores a seguir descritos, em sessão pública realizada em 21 de Setembro de 2017, considerou o candidato Edson Vinicius Bezerra aprovado.

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli

Prof. Dr. Alexandre Fernandes Batista Costa Leite

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio

A Ata de Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no processo de vida acadêmica do aluno.

Dedico esta dissertação às duas mulheres mais importantes de minha vida: Maristela e Michele.

Agradecimentos

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por ter financiado esta pesquisa.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Walter Carnielli e à minha coorientadora Juliana Bueno-Soler pela dedicação ao me orientarem, bem como pela simpatia proporcionada a mim durante o meu mestrado. Agradeço ao Professor Marcelo Coniglio tanto pelos cursos ministrados com maestria quanto por ter aceitado a fazer parte da banca examinadora, ao Professor Marco Ruffino por ter me incentivado a cursar o mestrado na Unicamp e por ter me recebido da melhor forma possível, fazendo com que eu me sentisse em casa, e também por ter aceitado a fazer parte da banca. Ao Professor Giorgio Venturi pelas observações feitas sobre esta Dissertação. Agradeço aos Professores Abílio Rodrigues e Alexandre Costa-Leite por terem aceitado fazer parte da banca examinadora desta dissertação. Agradeço também ao professor Jean-Yves Bèziau por ter me introduzido aos estudos de lógica.

Agradeço aos funcionários do Centro de Lógica e Epistemologia Geraldo, Augusto, Rovilson, Rejane, Fábio, Roney e Cássia pela gentileza diária, tornando muito agradável o local de trabalho e, respectivamente, à ex-secretária do IFCH Maria Rita e à secretária Daniela Grigolletto por terem me ajudando prontamente nos momentos que precisei.

Agradeço também aos meus amigos que tornaram minha estadia em Campinas muito feliz. Aos amigos Bruno, Tamires, Laura, Gilson e Henrique, que foram para mim uma família. Aos amigos João Vitor, Vincenzo, Igor, Sanfelice, Edgar e Alfredo pela amizade e pelas longas e quase intermináveis conversas e que me proporcionaram momentos muito agradáveis. E, acima de tudo, pela paciência. Também agradeço aos colegas do Dojô, especialmente Marcelo e Elena, pela amizade.

Finalmente, agradeço à minha família, em especial à minha mãe, que sempre foi para mim um exemplo a ser seguido, e que me apoiou de todas as maneiras possíveis. Agradeço à minha namorada Michele Siqueira que além de ser uma pessoa extraordinária, sempre me apoiou em tudo e faz com que minha vida seja mais feliz e leve, sendo minha companheira com um sorriso e olhar amáveis. Sem ela este trabalho simplesmente não existiria. *Verba volant, scripta manent.*

Resumo

Este trabalho pretende investigar as bivalorações lógicas do ponto de vista das Semânticas de Sociedades. Discutimos a importância da Tese de Suszko no contexto das bivalorações lógicas bem como a importância de fornecer bivalorações que sejam intuitivas, que sejam capazes de mostrar em que sentido as lógicas multivaloradas podem ser interessantes. Nesse sentido, defendemos que as Semânticas de Sociedades são interessantes para essas lógicas, mostrando que tais lógicas podem descrever contextos de informações contraditórias e contextos de informações incompletas. Nesta investigação, abordamos algumas lógicas multivaloradas para as quais essas semânticas foram apresentadas, tais como as lógicas P^1 e I^1 e Ł$_3$. Após a exposição dessas lógicas, definimos tais semânticas para a Lógica do Paradoxo (LP), para a lógica relevante RM_3 e para a lógica trivalorada de Kleene K_3. Além disso, apresentamos as lógicas multivaloradas LFI1 e Ł$_4$ para as quais a definição de semântica de sociedades depende dos conectivos chamados de conectivos de restauração local.
Palavras-chave: Semântica de Sociedades, Bivalorações, Lógicas Multivaloradas.

Abstract

This work investigates logical bivaluations from the perspective of Society Semantics. We discuss the importance of Suszko's Thesis in the context of logical bivaluations as well as the importance of proposing intuitive bivaluations, which shows in what sense many-valued logics can be interesting. In this sense, we argue that Society Semantics are interesting semantics for these logics, showing that such logics can describe contexts of contradictory information and contexts of incomplete information. We expose some many-valued logics such as P^1, I^1 and Ł$_3$ for which Society Semantics were presented for. We characterize the logics LP, RM_3 and K_3 by means of Society Semantics. Moreover, we present the logics LFI1 and Ł$_4$ to show how the local restoration connectives are important to define a Society Semantics for these logics.
Keywords: Society Semantics, Bivaluations, Many-Valued Logics.

Sumário

1 Introdução **10**

2 A Tese de Suszko **15**

2.1 Dois Valores: o *Verdadeiro* e o *Falso* 21

3 Semântica de Sociedades **35**

3.1 As Lógicas P^1 e I^1 39

3.2 Semântica de Sociedades Biassertivas para P^1 e I^1 42

4 Semântica de Sociedades e Lógicas Trivaloradas **46**

4.1 A Lógica do Paradoxo 47

4.2 A Lógica Trivalorada RM_3 48

4.3 A Lógica Trivalorada de Kleene K_3 51

4.4 A Lógica Trivalorada de Łukasiewicz: $Ł_3$ 52

4.5 Semântica de Sociedades para LP 52

4.6 Semântica de Sociedades para RM_3 56

4.7 Semântica de Sociedades para K_3 59

4.8 Semântica de Sociedades para $Ł_3$ 62

5 Lógicas Multivaloradas e Conectivos de Restauração **63**

5.1 A Lógica Trivalorada LFI1 63

5.2 A Lógica Tetravalorada de Łukasiewicz 66

5.3 Semântica de Sociedades para LFI1 68

5.4 Semântica de Sociedades para $Ł_4$ 74

6 Considerações Finais **80**

6.1 Outras Lógicas (Multivaloradas) 81

6.1.1 A Lógica Trivalorada de Hallden: H_3 81

6.1.2 Lógicas de Łukasiewicz: $Ł_n$ 83

6.2 Limitações (Possíveis) da Semântica 85

6.3 Bivalência 86

Capítulo 1

Introdução

As Lógicas Multivaloradas ou Multivalentes (LMV's) tiveram início no século XX a partir de investigações independentes de Bernays, Post e Łukasiewicz (BÉZIAU, 2012a). Com o objetivo de provar que os axiomas da lógica proposicional apresentados nos *Principia Mathematica* de Russell & Whitehead são independentes uns dos outros, Paul Bernays em 1919 (ZACH, 1999), (KNEALE; KNEALE, 1962) oferece modelos conhecidos hoje como modelos não-padrão ao oferecer interpretações nas quais existem valores de verdade além do verdadeiro e do falso[1]. Segundo Zach (ZACH, 1999), embora possa ser discutido se Bernays pode ser de fato chamado de precursor dessas lógicas, seu método foi de indiscutível importância para o desenvolvimento das lógicas não-clássicas. Carnielli (2012) argumenta que a contribuição de Bernays é inovadora não somente em relação às lógicas multivaloradas, mas também ao que chamamos atualmente de semânticas algébricas. Em 1920, Łukasiewicz iniciou um tratamento formal pioneiro das modalidades aléticas, introduzindo um terceiro valor de verdade, o *possível* (denominado numericamente por $\frac{1}{2}$) ao apresentar seu sistema trivalorado $Ł_3$[2]. Tal introdução visava tratar do problema dos *futuros contingentes*. Proposições tais como "amanhã haverá uma batalha naval" não podem ter como valores de verdade verdadeiro ou falso. Segundo Łukasiewicz, proposições desse tipo são possíveis, mas não necessárias. Ele argumenta que se essa proposição fosse verdadeira no momento de seu proferimento, ela seria necessária, o que contradiz a hipótese de ela ser possível e não necessária. O mesmo ocorreria caso ela fosse falsa no momento do proferimento. A partir de uma investigação muito geral, Post (1921) estabelece que as tabelas de verdade são procedimentos de decisão para a lógica proposicional. Segundo Post, sua generalização poderia ser facilmente traduzida em uma lógica multivalorada (POST, 1921) e (KNEALE; KNEALE, 1962). As LMV's, portanto, são lógicas que têm outros valores de verdade além do verdadeiro e do falso. Elas são conhecidas por transgredirem a *Lei do Terceiro Excluído*, segundo a qual uma proposição e sua negação não podem ser ambas falsas.

[1] Carnielli (2012) chama esses modelos de *non-standard models*.
[2] Ver (RESCHER, 1968).

Depois da década de 1920, sistemas multivalorados foram propostos para tratar de diferentes problemas[3]. Para tratar do problema da antinomia do mentiroso, Bochvar (1939) propõe a lógica B_3 na qual o terceiro valor é interpretado como *paradoxal* ou *sem sentido*. Posteriormente, Kripke (1975) utiliza a lógica trivalorada de Kleene (1938), K_3, para oferecer também uma solução para o problema do mentiroso. Nessa lógica, o terceiro valor é interpretado como *indefinido*. Ambas as propostas têm em comum o fato de as lógicas propostas serem *paracompletas*. Segundo Loparic e Costa (1984), uma lógica é *paracompleta* quando uma fórmula e sua negação são ambas falsas, não obedecendo à Lei do Terceiro Excluído.

Na lógica clássica, a introdução do predicado de *sentença verdadeira* na sua linguagem objeto acarreta na sentença do mentiroso, *esta sentença é falsa*, a qual abreviamos por λ, conduz a contradições. A introdução desse predicado de sentença verdadeira, o qual chamamos T, na linguagem objeto permite a formulação do paradoxo do mentiroso: $T(\lambda)$ sse $\neg T(\lambda)$. Isto é, λ é *verdadeira* sse λ é *falsa*, o que é uma contradição na lógica clássica. Para tratar desse problema, Priest (1979) propôs um sistema trivalorado no qual o terceiro valor pode ser visto não como um intermediário entre o verdadeiro e o falso, mas como um valor *paradoxal* (PRIEST; TANAKA; WEBER, 2016). Essa lógica, que foi na verdade construída por Asenjo et al. (1966), pode ser usada para tratar dos paradoxos semânticos tais como o *Paradoxo do Mentiroso*. Já na lógica de Asenjo/Priest, essa consequência da sentença λ deixa de acarretar trivialidade, pois as sentenças $T(\lambda)$ e $\neg T(\lambda)$ recebem o valor paradoxal. A lógica de Asenjo, posterior e vastamente investigada por Priest em (PRIEST, 1979) e (PRIEST, 2006), passou a ser chamada de *Lógica do Paradoxo*, denotada por LP[4]. Essa lógica não se trivializa na presença de contradições. Por isso, essa lógica é uma *lógica paraconsistente*[5], no sentido de que essas lógicas fazem uma distinção entre teorias triviais e teorias inconsistentes. Uma lógica é paraconsistente se uma contradição não acarreta sua trivialidade. Essas lógicas são conhecidas por transgredirem o *Princípio da Explosão*, segundo o qual a presença de premissas contraditórias permite a derivação de qualquer conclusão.

Dos tratamentos acima acerca do problema dos futuros contingentes, da questão da independência dos axiomas e o dos paradoxos semânticos, podemos pensar que acrescentar valores de verdade além do *verdadeiro* e do *falso*, estamos escapando da dicotomia bivalente clássica. Porém, da mesma maneira, poderíamos acrescentar aos dois valores já existentes oito valores de verdade além do verdadeiro e do falso, alcançando a *decavalência*. Mas faria isso sentido? A bivalência pode ser superada apenas adicionando-se

[3]Rescher (1968) e Malinowski (2007) expõem diversos sistemas multivalorados que foram propostos para tratar de diferentes problemas, tanto de origem conceitual quanto ligados a motivações puramente técnicas.

[4]Priest (2006) constroi uma teoria paraconsistente da verdade cuja lógica de base é LP com o objetivo de poder representar o predicado de sentença verdadeira na linguagem objeto da lógica.

[5]Carnielli, Coniglio e Marcos (2007) e Priest, Tanaka e Weber (2016) abordam diversas lógicas paraconsistentes, bem como levantam questões conceituais acerca dessas lógicas.

mais (novos) valores de verdade? O aspecto trivalente de $Ł_3$ e das demais lógicas acima mencionadas aparece somente nas tabelas de verdade, pois existe uma distinção em nível metateórico entre dois conjuntos de valores: o conjunto de *distinguidos* e o de valores *não-distinguidos*. Essa distinção tem que ser feita para preservar as noções de *tautologia* e *consequêcia lógica*. Desse modo, a multivaloração pode ser reduzida à bivalência. De acordo com Suszko[6], existe uma distinção entre dois tipos de valores que têm uma natureza conceitual muito distinta: os *valores algébricos* e os *valores lógicos*. Os primeiros são os valores de valoções que vão do conjunto de variáveis proposicionais para o conjunto da álgebra de valores. Já os últimos são o *Verdadeiro* e o *Falso* [7]. Esse fenômeno ocorre em muitas lógicas multivaloradas, especialmente as *tarskianas estruturais*. Uma lógica é *tarskiana estrutural* se sua relação de consequência lógica é preservada mediante substituições uniformes das fórmulas constituintes dessa relação. A afirmação de que existem somente dois valores lógicos é conhecida por *Tese de Suszko* (WANSING; SHRAMKO, 2008, 405). Segundo ele (WANSING; SHRAMKO, 2008), toda lógica tarskiana estrutural é bivalente. Mais ainda, Suszko afirma que "Łukasiewicz é o autor principal de um magnífico engodo conceitual na lógica matemática até os dias atuais". Suszko (1975) apresenta uma semântica bivalorada para a lógica $Ł_3$, mostrando que o caráter trivalente dessa lógica é apenas aparente.

Depois de Suszko, métodos de redução à bivalência mais gerais que o de Suszko foram propostos, tornando sua tese ainda mais geral. Por exemplo, Caleiro et al. (2007) e Costa et al. (1996) mostram que o fato de uma lógica ser estrutural não é necessário para a redução à bivalência. Assim, a mesma crítica direcionada a Łukasiewicz, cabe aos demais proponentes de lógicas multivaloradas listados acima. Como veremos, em todos esses sistemas existe a distinção entre valores *distinguidos* e valores *não-distinguidos*, sendo assim, bivalentes metateoricamente.

Além do fato de as LMV's serem bivalentes, elas são muito criticadas pelo fato de a introdução dos valores intermediários não ser acompanhada de uma justificativa plausível desses valores. Pogorzelski e Pogorzelski (1994) afirma que as LMV's não tiveram sucesso em oferecer boas alternativas para tratar problemas como futuros contingentes, noções modais e o do determinismo. Dessas limitações, ele afirma que o sucesso cognitivo dessas lógicas é fraco, não constituindo boas alternativas para tratar de problemas de natureza conceitual ou, até mesmo, problemas de natureza técnica, tal como os fundamentos da matemática. Esses problemas podem ser vistos como fatais para essas lógicas. A questão que levantamos é se é possível uma perspectiva que, ao mesmo tempo que reconhece a bivalência das LMV's, mostra que elas podem ser cognitivamente interessantes.

Nuseibeh, Easterbrook e Russo (2001) reconhecem a importância do tratamento das informações inconsistentes. Segundo eles, nem sempre é proveitoso evitar as inconsistên-

[6]Ver (SUSZKO, 1977, 378).
[7]Ver (SUSZKO, 1977, 378).

cias, pois elas podem ser importantes na própria tomada de decisões frente a manipulação de informações inconsistentes entre si. Além de considerar as inconsistências, podemos também considerar casos em que não temos informações suficientes para decidir entre uma proposição e sua negação. Nesse sentido, afirmamos que as LMV's podem ser interessantes para tratar desses casos. Mais ainda, afirmamos que as *Semânticas de Sociedades* são adequadas para ressaltar esses aspectos interessantes dessas lógicas.

As Semânticas de Sociedades foram introduzidas por Carnielli e Lima-Marques (1999) para lidar com situações discordantes entre agentes dentro de uma sociedade. Uma sociedade é vista como um conjunto de agentes racionais, que individualmente se comportam de acordo com uma lógica subjacente e que, individualmente, não têm crenças contraditórias. Mas, mesmo assim, é possível que haja uma situação na qual dois agentes possam ter crenças conflitantes acerca de uma mesma proposição. Esse conflito tem que ser solucionado dentro dessa sociedade. Desse modo, a semântica de sociedades tem como objetivo dar um tratamento formal para esse tipo de conflito de modo que seja possível lidar de modo não trivial com tal situação.

Esta Dissertação está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2, apresentamos teoria das matrizes lógicas e sua relação com a *Tese de Suszko*. Como exemplo, mostramos como a lógica Ł$_3$ pode ser caracterizada com uma semântica bivalente, mas não verofuncional. Traçamos uma relação entre a existência dos valores lógicos com conceito fregeano de *referência* (FREGE, 1948), bem como exporemos em que sentido as posições de Frege e Suszko diferenciam-se. Apresentamos algumas críticas em relação à Tese de Suszko, bem como as possíveis respostas a essas críticas. E, após responder a essas críticas à Tese de Suszko, defendemos que essa tese é compatível com o *pluralismo lógico* (BEALL; RESTALL, 2006). No Capítulo 3, apresentamos as definições originais das semânticas de sociedades proposta por Carnielli e Lima-Marques (1999) para interpretar as lógicas P^1 e I^1.

No Capítulo 4, mostramos que as lógicas trivaloradas LP, RM_3, K_3 e Ł$_3$ podem ser intepretadas por esse tipo de semântica. Com a exceção da semântica de sociedades para Ł$_3$, que foi apresentada em (MARCOS, 2000), as semânticas de sociedades apresentadas para as referidas lógicas nesse capítulo são contribuições desta Dissertação. Na semântica para essas lógicas mostraremos que, mudando as condições de aceitação para as fórmulas complexas, a sociedade dessas lógicas pode conter somente agentes clássicos. A justificativa da escolha da lógica LP consiste na importância que essa lógica adquiriu ao ser proposta como uma solução para os paradoxos semânticos, bem como os paradoxos da teoria de conjuntos. O problema é que essa lógica tem um conectivo de implicação cuja capacidade expressiva é muito fraca, não validando inferências por *Modus Ponens*. Assim, uma forma de corrigir esse problema é acrescentando à essa lógica um conectivo de implicação que valide tal regra. Uma lógica fruto dessa extensão é a lógica RM_3. Uma vez que escolhemos apresentar uma semântica de sociedades para a lógica LP, uma questão natural é saber se é possível apresentar tal semântica para a lógica dual de LP, que é a lógica K_3. O problema é que a lógica K_3 não possui tautologias e um modo de corrigir esse problema é acrescentando um conectivo de implicação que possui tautologias tais como $p \rightarrow p$. A lógica resultante dessa extensão é $Ł_3$. Por essas razões, justificamos nosso interesse em apresentar tais semânticas para essas lógicas.

No Capítulo 5 contribuimos com a apresentação dessa semântica para as lógicas LFI1 e $Ł_4$, a lógica tetravalorada da hierarquia $Ł_n$. E, relacionado a essas duas lógicas, destacaremos a importância dos *conectivos de restauração*, investigados por Corbalán (2012). Esses conectivos serão interessantes pois eles permitirão descrever casos em que a sociedade dá como veredito a inconsistência de uma proposição (LFI1) e casos em que os próprios agentes estão *indecisos* acerca de uma proposição ($Ł_4$).

Capítulo 2

A Tese de Suszko

Neste capítulo, apresentamos a teoria das matrizes lógicas e sua relação com a chamada Tese de Suszko e argumentamos que existe uma relação dessa tese com o conceito fregeano de *referência* e, para finalizar, apontamos os pontos em que tais abordagens se diferem. Posteriormente, apresentamos possíveis críticas à Tese de Suszko bem como suas possíveis respostas. Por fim, defendemos que essa tese é compatível com a tese do *pluralismo lógico*, segundo a qual existe mais de uma lógica verdadeira.

No famoso artigo (FREGE, 1956) Frege expõe sua visão sobre qual é o objetivo da Lógica, que é a *verdade*:

> The word 'true' indicates the aim of Logic as does 'beautiful' that of Aesthetics or 'good' that of Ethics. All sciences have truth as their goal; but Logic is also concerned with it in a quite different way from this. It has much the same relation to truth as Physics has to weight or heat. To discover truths is the task of all sciences; it falls to Logic to discern the laws of truth. (FREGE, 1956, 289)

A palavra 'lei' é entendida por Frege como uma regra segundo a qual todas as ocorrências particulares de um determinado evento têm de se conformar. Desse modo, discernir as leis da verdade é identificar as regras que regimentam as asserções, os julgamentos e as inferências. É importante mencionar que essas leis são diferentes das leis do pensamento. Essas últimas concernem à psicologia, não à lógica[1]. No que diz respeito às inferências, é necessário então que a lógica investigue as regras que regimentam a preservação de verdade de uma conclusão a partir de um conjunto de premissas.

Beall e Restall (2006) afirmam que, dada a posição de Frege acerca da verdade, a noção de *consequência lógica* cumpre, de certa forma, papel secundário. Ela é, de certo modo, uma noção derivada, já que a lógica deve se ocupar primariamente da verdade e das regras que regimentam as inferências. Ou seja, a consequência lógica deve preservar

[1] Frege (1956, 289).

a *verdade* das premissas para a conclusão. Podemos dizer que a visão de Frege acerca da lógica é particularmente restritiva, já que ele afirma que o *verdadeiro* e o *falso* são os únicos valores lógicos. Além disso, tal como Kneale e Kneale (1962) apontam, existe um comprometimento por parte de Frege com os princípios lógicos de Não-Contradição e Terceiro Excluído. Em relação ao Princípio da Explosão, cabe lembrar que o Paradoxo de Russell significou a ruína do projeto logicista de Frege (KNEALE; KNEALE, 1962, 654) e (HAACK, 2002, 188). Nesse sentido, a posição de Frege é restritiva no sentido de ele defender que o *verdadeiro* e o *falso* estão sujeitos aos princípios da lógica clássica. Beall e Restall (2006) dizem que depois de Frege, a lógica passou a se preocupar primariamente da noção de consequência lógica, focando-se em investigar quais argumentos são, de fato, válidos. Essa inversão de prioridades pode ser vista como mais liberal, na medida em que a lógica passa a tratar das leis que regimentam a consequência lógica, não necessariamente das leis que regimentam a verdade e a falsidade.

Como dissemos, após a década de 1920, houve uma proliferação de lógicas multivaloradas que foram propostas para tratar de diversos problemas. Mesmo que os proponentes dessas lógicas adicionem valores de verdade além do verdadeiro e do falso, as noções de *tautologia* e de *consequência lógica* precisam ser mantidas. Segundo Béziau (2010), para tratar de ambos os conceitos nas lógicas multivaloradas é feita uma generalização da semântica da lógica proposicional clássica, chamada de *matrizes lógicas*. A teoria das matrizes lógicas teve início com os trabalhos de Bernays (CARNIELLI, 2012), ao usá-la como um método para provar a independência dos axiomas da lógica proposicional clássica e dos trabalhos de Emil Post (1921), que a usou como um método de decidibilidade para a lógica proposicional. Mas essa teoria teve investigação sistemática a partir dos trabalhos de Łukasiewicz, Tarski e Lindenbaum (TARSKI, 1983)[2]. Informalmente, construímos a linguagem proposicional L de uma lógica $\mathcal{L}$ da seguinte maneira. Consideramos um conjunto enumerável $\mathcal{V} = \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ de variáveis proposicionais, as quais chamamos de *sentenças* (ou *fórmulas*) *atômicas*. Usaremos também os símbolos $p,q,r,...$ como *metavariáveis* que variam única e exclusivamente sobre sentenças atômicas. Além disso, consideramos uma família de conjuntos $\Sigma^{\mathcal{L}} = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i^{\mathcal{L}}$ de conectivos, a qual chamamos de *assinatura proposicional* de $\mathcal{L}$, onde cada $\Sigma_i^{\mathcal{L}} = \{c_1, ..., c_k\}$ é um conjunto de conectivos c_j $(1 \leq j \leq k)$ de aridade i $1 \leq i \leq n$. A partir do conjunto $\mathcal{V}$ e da assinatura Σ, geramos recursivamente o conjunto de fórmulas da linguagem L, denotado por $For(\Sigma^{\mathcal{L}})$, da seguinte maneira: (i) $p_m \in For(\Sigma^{\mathcal{L}})$; (ii) se $\phi_1, ..., \phi_k \in For(\Sigma^{\mathcal{L}})$ e $c_j \in \Sigma^{\mathcal{L}}$, então $c_j(\phi_1, ..., \phi_k) \in For(\Sigma^{\mathcal{L}})$, (iii) são consideradas fórmulas de $\mathcal{L}$ somente fórmulas que satisfazem às condições (i)-(ii). Aqui estamos usando ϕ como uma metavariável que varia sobre todas as fórmulas de $For(\Sigma^{\mathcal{L}})$[3]. As sentenças (ou fórmulas) da forma $c_j(\phi_1, ..., \phi_k)$

[2] A teoria das matrizes lógicas é apresentada no capítulo IV, *Investigations into the Sentential Calculus*, p. 38 - 60.

[3] Achamos conveniente destacar que estamos utilizando dois tipos de metavariáveis (p,q,r para atômicas e ϕ para todas as fórmulas da linguagem em questão), pois no capítulo 3 essa diferença ficará patente

são chamadas de sentenças (fórmulas) *moleculares*. Desse modo, a linguagem L de $\mathcal{L}$ é uma estrutura da forma $L = (For(\Sigma^{\mathcal{L}}), c_1, ..., c_n)$.

A interpretação de uma lógica multivalorada $\mathcal{L}$ é constituída da seguinte maneira. Seja V um conjunto de elementos chamados de *valores de verdade*. Seja $D \subseteq V$ o conjunto de elementos chamados de *valores distinguidos* e $U = V - D$ o conjunto de *valores não-distinguidos*. Além disso, $D \cup U = V$ e $D \cap U = \emptyset$. Seja $O = \{f_{c_1}, ..., f_{c_k}\}$ um conjunto de operações $f_{c_j} : V^i \mapsto V$ $(1 \leq j \leq k)$ da mesma aridade i que a do conectivo c_j $(1 \leq j \leq k)$. As operações f_{c_j} são interpretações dos conectivos c_j. A partir dos conjuntos V e O, geramos uma estrutura $\mathfrak{A} = (V, O)$. Uma *matriz* de uma lógica $\mathcal{L}$ é uma estrutura $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = (\mathfrak{A}, D, U)$, onde $\mathfrak{A}$ é uma estrutura, D é o conjunto de valores distinguidos e U é o conjunto de valores não-distinguidos.

Uma *valoração* é uma função $v : For(\Sigma^L) \mapsto V$ que atribui para cada fórmula $\phi \in For(\Sigma^L)$ um valor de verdade do conjunto V. Para fórmulas $c_k(\phi_1, ..., \phi_n) \in For(\Sigma^L)$, as valorações v são definidas da seguinte maneira: $v(c_k(\phi_1, ..., \phi_n)) = f_{c_k}(v(\phi_1), ..., v(\phi_k))$. O conjunto de todas as valorações $v : For(\Sigma^L) \mapsto V$ é chamado de *semântica* de $\mathcal{L}$, denotado por $sem_{\mathcal{L}}$. Dizemos que uma valoração v *satisfaz* ϕ, ou que é *modelo* de ϕ, se $v(\phi) \in D$. Dizemos que v é modelo de um conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq For(\Sigma^L)$ se para toda $\gamma \in \Gamma$ é o caso que $v(\gamma) \in D$. A *classe de modelos* de Γ é o conjunto de todas as valorações $v \in sem_{\mathcal{L}}$ que atribuem aos elementos de Γ um valor no conjunto de valores distinguido D: $MOD(\Gamma) = \{v(\gamma) \in D : \gamma \in \Gamma \text{ e } v \in sem_{\mathcal{L}}\}$. Se $v(\gamma) \in D$ para toda $v \in sem_{\mathcal{L}}$, então ϕ é uma *tautologia* de $\mathcal{L}$. Se $v(\gamma) \in D$ para alguma $v \in sem_{\mathcal{L}}$, então ϕ é *satisfatível* em $\mathcal{L}$. Se $v(\gamma) \in U$ para toda $v \in sem_{\mathcal{L}}$, então ϕ é uma *contradição* de $\mathcal{L}$. A relação de consequência semântica, $\models_{sem_{\mathcal{L}}} \subseteq \wp(For(\Sigma^L)) \times For(\Sigma^L)$, é definida da seguinte maneira: seja $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma^L)$. Dizemos que a fórmula α é *consequência semântica* de Γ ($\Gamma \models_{sem_{\mathcal{L}}} \alpha$) sse: se $v(\gamma) \in D$ para toda $\gamma \in \Gamma$, então $v(\alpha) \in D$. Dizemos que uma lógica $\mathcal{L}$ é n-valorada se a cardinalidade de V é n. Portanto, $\mathcal{L}$ é multivalorada se a cardinalidade de V é maior do que dois.

Além de preservar as noções de tautologia e consequência lógica, Marcos (2009) aponta que as matrizes lógicas preservam nas lógicas multivaloradas a propriedade da *verofuncionalidade*, de acordo com a qual o valor de uma fórmula molecular depende exclusivamente dos valores de verdade das fórmulas que a compõe. Marcos (2009) chama as lógicas caracterizáveis por semânticas verofuncionais de *lógicas verofuncionais*. Todas as lógicas com as quais trabalharemos nesta Dissertação são verofuncionais, pois podemos caracterizar essas lógicas por meio de uma semântica verofuncional, que é a semântica de matrizes.

Marcos (2009) observa que é possível que exista mais de uma matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ associada a uma lógica $\mathcal{L}$. É possível que existam, por exemplo, duas matrizes $\mathcal{M}^1_{\mathcal{L}} = (\mathfrak{A}^1, O^1)$ e $\mathcal{M}^2_{\mathcal{L}} = (\mathfrak{A}^2, O^2)$ em que a cardinalidade n de V^1 de $\mathfrak{A}^1$ seja maior que a cardinalidade k de V^2 de $\mathfrak{A}^2$. Assim, a mesma lógica $\mathcal{L}$ seria n-valorada e k-valorada. Isso se deve ao fato

quando apresentarmos a definição de semântica de sociedades.

de que para uma mesma lógica está associada uma classe de matrizes $\mathcal{M}$, não somente uma. Segundo Marcos (2009), para afastar esse tipo de ambiguidade, podemos chamar uma lógica $\mathcal{L}$ de *genuinamente* n-valorada se n é a menor cardinalidade de um conjunto V de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = (\mathfrak{A}, O)$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ é uma matriz associada à lógica $\mathcal{L}$.

Daremos como exemplo a aplicação das matrizes lógicas na lógica multivalorada $Ł_3$, a lógica trivalorada de Łukasiewicz:

A assinatura da lógica $Ł_3$ é $\Sigma^{Ł_3} = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i^{Ł_3}$, onde:

- $\Sigma_1^{Ł_3} = \{\neg\}$;
- $\Sigma_2^{Ł_3} = \{\rightarrow\}$;
- $\Sigma_n^{Ł_3} = \emptyset$, para $n > 2$.

Os subíndices denotam a aridade do conectivo: o conectivo de negação, $\neg$, tem aridade 1 e o conectivo de implicação, $\rightarrow$, tem aridade 2.

O conjunto de fórmulas de $Ł_3$, $For(\Sigma^{Ł_3})$, é gerado pelo conjunto enumerável de variáveis proposicionais $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, ..., p_n, ...\}$[4] sobre a assinatura $\Sigma^{Ł_3}$ da seguinte maneira:

(i) $p_n \in For(\Sigma^{Ł_3})$;

(ii) Se $\phi, \psi \in For(\Sigma^{Ł_3})$, então $\neg\phi, \phi \rightarrow \psi \in For(\Sigma^{Ł_3})$.

Em (WAJSBERG, 1977), a lógica $Ł_3$ é apresentada pelos seguintes esquemas de axiomas e regra de inferência:

($Ł_3$-1) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

($Ł_3$-2) $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \gamma) \rightarrow (\phi \rightarrow \gamma))$

($Ł_3$-3) $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

($Ł_3$-4) $(((\phi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$

Modus Ponens (MP) $\phi, \phi \rightarrow \psi / \psi$

Em (WAJSBERG, 1977) é mostrado que a axiomática de $Ł_3$ é completa e correta em relação às seguinte matriz $\mathcal{M}_{Ł_3} = (\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \neg, \rightarrow, \{1\}, \{\frac{1}{2}, 0\})$ cujas operações têm as seguintes tabelas:

$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

[4]Durante esta Dissertação manteremos o conjunto $\mathcal{V}$ como fixo.

onde 1 é o único valor distinguido e $U = \{\frac{1}{2}, 0\}$ é o conjunto de valores não-distinguidos.

Definição 2.0.1. Seja $V_n = \{\frac{m}{n-1} \mid 0 \leq m \leq n-1 \text{ e } m, n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto de valores de verdade de $Ł_n$ e $For(\Sigma^{Ł_n})$ o conjunto de fórmulas de $Ł_n$ onde $\Sigma^{Ł_n} = \Sigma^{Ł_3}$.[5] Uma *valoração* v de $Ł_n$ é uma função $v : For(\Sigma^{Ł_n}) \mapsto V_n$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) $v(\neg\phi) = 1 - v(\phi)$;

(2) $v(\phi \to \psi) = \begin{cases} 1 & se \quad v(\phi) \leq v(\psi) \\ min\{1, (1 - v(\phi)) + v(\psi)\} & se \quad v(\phi) > v(\psi) \end{cases}$

O conjunto das valorações $v : For(\Sigma^{Ł_n}) \mapsto V_n$ é chamado *semântica* de $Ł_n$, $sem_{Ł_n}$.

Seja ϕ uma fórmula de $For(\Sigma^{Ł_3})$. Dizemos que uma valoração v *satisfaz* ϕ se $v(\phi) = 1$, ou que v é um *modelo* de ϕ. Dizemos que uma valoração v é um *modelo* de $\Gamma \subseteq For(\Sigma^{Ł_3})$ se, para toda $\gamma \in \Gamma$, temos que $v(\gamma) = 1$. A *classe de modelos* de Γ, $MOD(\Gamma)$, é o conjunto de todas as valorações $v : For(\Sigma^{Ł_3}) \mapsto \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ que atribuem a Γ um valor do conjunto de valores distinguidos $\{1\}$: $MOD(\Gamma) = \{v(\gamma) = 1 : \gamma \in \Gamma \text{ e } v \in sem_{Ł_3}\}$. Se $v(\phi) = 1$, para toda $v \in sem_{Ł_3}$, então dizemos que ϕ é uma *tautologia* de $Ł_3$. Se $v(\phi) \in 1$, para alguma $v \in sem_{Ł_3}$, então dizemos que ϕ é *satisfatível* em $Ł_3$. Finalmente, se $v(\phi) \in \{\frac{1}{2}, 0\}$, para toda $v \in sem_{Ł_3}$, então dizemos que ϕ é uma *contradição* de $Ł_3$. A relação de consequência semântica, $\models_{sem_{Ł_3}} \subseteq \wp(For(\Sigma^{Ł_3})) \times For(\Sigma^{Ł_3})$, é definida da seguinte maneira: seja $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma^{Ł_3})$. Dizemos que a fórmula α é *consequência semântica* do conjunto de fórmulas Γ ($\Gamma \models_{sem_{Ł_3}} \alpha$) sse: se $v(\gamma)1$, para toda $\gamma \in \Gamma$, então $v(\alpha) = 1$.

Segundo Łoś e Suszko (1958) e Wansing e Shramko (2008), a definição da relação de consequência a partir da divisão de valores distinguidos e valores não-distinguidos determina que a relação de consequência tenha as seguintes características:

1 *Reflexividade*: $\Delta \cup \{\phi\} \models_{sem_{Ł_3}} \phi$ (lê-se: uma sentença ϕ é consequência lógica de si própria);

2 *Monotonicidade*: se $\Delta \models_{sem_{Ł_3}} \phi$ e $\Delta \subseteq \Gamma$, então $\Gamma \models_{sem_{Ł_3}} \phi$ (lê-se: se uma sentença ϕ é consequência lógica do conjunto de sentenças Δ, então ϕ é consequência lógica de uma extensão Γ de Δ);

3 *Corte*: se $\Gamma \models_{sem_{Ł_3}} \phi$ e $\Delta, \phi \models_{sem_{Ł_3}} \psi$, então $\Gamma, \Delta \models_{sem_{Ł_3}} \psi$ (lê-se: se uma sentença ϕ é consequência lógica do conjunto de sentenças Δ e uma sentença ψ é consequência lógica do conjunto de sentenças Γ e da sentença ϕ, então ψ é consequência lógica dos conjuntos de sentenças Γ e Δ)

Uma relação de consequência lógica que satisfaz as condições 1 - 3 acima é chamada de *tarskiana*. Ela é chamada de *tarskiana estrutural* se ela tem a condição 4:

[5] É importante notar que a axiomática de $Ł_n$ não é a mesma que a de $Ł_3$.

4 *Estruturalidade*: $\Delta \models_{sem_{Ł_3}} \phi$ sse $\Delta' \models_{sem_{Ł_3}} \phi'$ (lê-se: uma sentença ϕ é consequência lógica de um conjunto de sentenças Δ se e somente se a sentença ϕ', obtida de ϕ ao substituirmos todas as ocorrências de variáveis proposicionais *p* por *p'*, é consequência lógica de Δ', obtido de Δ ao substituirmos todas as ocorrências de variáveis proposicionais *p* por *p'* em todas as sentenças que ocorrem em Δ).

Portanto, dada uma matriz, a distinção entre valores distinguidos e valores não-distinguidos, que é feita para preservar as noções de tautologia e de consequência lógica, acarreta que a relação de consequência lógica tenha as característica acima mencionadas.

Exemplo 1. Mostraremos as matrizes lógicas para a *Lógica Proposicional Clássica* (LPC)[6]. LPC possui a assinatura $\Sigma^{LPC} = \{\neg, \rightarrow\}$ e seu conjunto de fórmulas $For(\Sigma^{LPC})$ é gerado da maneira usual.

Em (MENDELSON, 2015), Mendelson apresenta LPC com os seguintes esquemas de axiomas e regra de inferência:

(LPC-1) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

(LPC-2) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \gamma))$

(LPC-3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$

(MP) $\phi, \phi \rightarrow \psi / \psi$

Em (MENDELSON, 2015), é provado que a axiomática de LPC é correta e completa em relação à matriz $\mathcal{M}_{LPC} = (\{1, 0\}, \neg, \rightarrow, \{1\}, \{0\})$ cujas operações têm as seguintes tabelas:

	$\neg$
1	0
0	1

$\rightarrow$	1	0
1	1	0
0	1	1

onde 1 é o valor distinguido e 0 é o valor não-distinguido.

Definição 2.0.2. Uma valoração v de LPC é uma função $v : For(\Sigma^{LPC}) \mapsto \{1, 0\}$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) $v(\neg\phi) = 1 - v(\phi)$;

(2) $v(\phi \rightarrow \psi) = \begin{cases} 1 & se \quad v(\phi) \leq v(\psi) \\ min\{1, (1 - v(\phi)) + v(\psi)\} & se \quad v(\phi) > v(\psi) \end{cases}$

[6]A exposição da LPC se justifica pelo seu uso nos capítulos 2 e 4. Nesta Dissertação ocupar-no-emos única e exclusivamente com lógicas proposicionais. A construção do conjunto de fórmulas de cada uma delas é similar. Além disso, as definições de satisfabilidade, de modelo, tautologia e consequência lógica de suas matrizes são também similares. Daqui em diante, decidimos por expor informalmente as assinaturas de cada lógica e pressuporemos as definições de matrizes expostas neste capítulo. Somente as definições de valorações que serão expostas para cada lógica, dado que elas diferem de uma para outra. Caso haja alguma peculiaridade na matriz de uma lógica, ressaltaremo-la na sua exposição.

O conjunto das valorações $v : For(\Sigma^{LPC}) \mapsto \{1, 0\}$ é chamado de *semântica* de LPC, sem_{LPC}.

Os conectivos de disjunção, conjunção e bicondicional são definidos como:

$$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$$
$$p \vee q \equiv \neg p \to q$$
$$p \leftrightarrow q \equiv \neg((p \to q) \to \neg(q \to p))$$

Suas matrizes são as seguintes:

$\wedge$	1	0
1	1	0
1	0	0

$\vee$	1	0
1	1	1
1	1	0

$\leftrightarrow$	1	0
1	1	0
1	0	1

A relação de consequência da LPC também satisfaz as propriedades de *reflexividade*, *monotonicidade*, *Corte* e *Estruturalidade*. Logo, a relação de consequência de LPC é tarskiana estrutural. **Fim do Exemplo**.

2.1 Dois Valores: o *Verdadeiro* e o *Falso*

Independentemente de Suszko, Scott (1974) e Dummett (1978) levantaram críticas em relação ao fato de que a distinção entre valores distinguidos e valores não-distinguidos mostra que essas lógicas são bivalentes do ponto de vista metateórico. Da constatação de que a intepretação dos valores não-clássicos dessas lógicas é problemática, Scott afirma que é possível reduzir os valores de verdade dessas lógicas a valorações que atribuem somente verdadeiro ou falso para as sentenças da lógica em questão. Já Dummett afirma que para o conhecimento do sentido de uma sentença, seu modo de apresentação, é suficiente que saibamos se seu valor é designado ou não, e que a multivaloração só faz sentido na medida que ela mantém o caráter verofuncional dos conectivos.

Suszko (1977) observa que a distinção entre valores distinguidos e valores não-distinguidos mostra que as lógicas multivaloradas são, na verdade, *bivalentes*. Como podemos ver, os conceitos de tautologia e de consequência lógica são definidos a partir da bipartição do conjunto de valores anteriormente mencionados. Segundo o autor, os três valores da lógica de Łukasiewicz, $1, \frac{1}{2}$ e 0 não são *valores lógicos*, mas são *valores algébricos*, que são entendidos por Suszko como referentes admissíveis de fórmulas. Já os valores lógicos são o *verdadeiro* e o *falso*. Esses dois tipos de valores são, segundo Suszko, de natureza completamente distinta. Em virtude desse caráter dicotômico dos dois conjuntos de valores de verdade, Suzsko diz que *toda lógica é bivalorada logicamente*[7], no sentido de o verdadeiro

[7] Ver (SUSZKO, 1977, 378)

e o falso serem os únicos valores lógicos. Tal afirmação é chamada por muitos de *Tese de Suszko*[8].

De acordo com Suszko, a multiplicação de valores de verdade promovida por Łukasiewicz ocasionou o que Suszko chama de *abolição do axioma fregeano* (**AF**), que pode ser formulado da seguinte maneira[9]:

> **AF**: Todas as sentenças verdadeiras (respectivamente, todas as falsas) têm um referente comum.

Assim, as sentenças verdadeiras têm como referente o *verdadeiro* e todas as sentenças falsas têm o *falso* como referente. Como as matrizes de Łukasiewicz tomam o terceiro valor, $\frac{1}{2}$ como não-distinguido, nem todas as sentenças falsas terão o falso como referente, pois $\frac{1}{2}$ e 0 são referências distintas de sentenças. Mais ainda, Suszko aponta uma diferença entre a natureza das *valorações lógicas* e das *valorações algébricas*:

> (...) the logical valuations and algebraic valuations are functions of quite different nature. The former relate to truth and falsity and, the latter represent the referent assignments. The formulas play a double semantical role, in general. It is the Fregean Axiom which amalgamates it into the inseparable unity. (SUSZKO, 1977, 378)

Neste ponto, chegamos, de certa forma, a um impasse: mesmo que Suszko diga que a distinção entre valores distinguidos e valores não-distinguidos sugira que as lógicas multivaloradas sejam bivalentes, poderíamos nos perguntar como demonstrar que essas lógicas são de fato bivalentes. Para provar sua tese[10], Suszko mostra que qualquer lógica multivalorada verofuncional pode ser caracterizada por uma semântica bivalorada não-verofuncional. A estratégia é associar cada valor algébrico do conjunto de valores distinguidos ao verdadeiro (T) e cada valor do conjunto de valores não-distinguidos ao falso (F). E, em seguida, mostrar que a semântica bivalente obtida tem o mesmo conjunto de tautologias que o da semântica matricial.

Por exemplo, em (SUSZKO, 1975) , (MALINOWSKI, 1993) , (BÉZIAU, 1999), são apresentadas uma semântica bivalorada para a lógica $Ł_3$, provando que a semântica matricial dessa lógica trivalorada pode ser reduzida a uma semântica bivalorada não-verofuncional. A ideia é associar o valor distinguido, 1, ao verdadeiro (T), e os valores não-distinguidos 0 e $\frac{1}{2}$ ao falso (F). Mostraremos agora como definir uma semântica bivalorada para $Ł_3$. Primeiro, definimos uma função $t : \{1\} \cup \{\frac{1}{2}, 0\} \mapsto \{T, F\}$ que satisfaz as seguintes condições:

$$t(a) = \begin{cases} T & se \quad a = 1 \\ F & se \quad a = \frac{1}{2} \text{ ou } a = 0 \end{cases}$$

[8]Ver, por exemplo, os trabalhos (COSTA et al., 1996) , (BÉZIAU, 2012a) , (BÉZIAU, 2010).
[9](SUSZKO, 1977, 377).
[10](SUSZKO, 1977, 378).

O próximo passo é definir uma bivaloração do conjunto de fórmulas de $Ł_3$, $For(\Sigma^{Ł_3})$, para $\{T, F\}$. Como uma valoração é da forma $v : For(\Sigma^{Ł_3}) \mapsto \{1, \frac{1}{2}, 0\}$, podemos definir uma bivaloração b como $b = t \circ v$. Logo, $b : For(\Sigma^{Ł_3}) \mapsto \{T, F\}$. Para toda $\phi, \psi \in For(\Sigma^{Ł_3})$, b satisfaz as seguintes condições:

(a) $b(\phi) = F$ ou $b(\neg\phi) = F$;

(b) $b(\phi \to \psi) = T$ sempre que $b(\psi) = T$;

(c) Se $b(\phi) = T$ e $b(\psi) = F$, então $b(\phi \to \psi) = F$;

(d) Se $b(\phi) = b(\psi)$ e $b(\neg\phi) = b(\neg\psi)$, então $b(\phi \to \psi) = T$;

(e) Se $b(\phi) = b(\psi) = F$ e $b(\neg\phi) \neq b(\neg\psi)$, então $b(\phi \to \psi) = b(\neg\phi)$;

(f) Se $b(\neg\phi) = F$, então $b(\neg\neg\phi) = b(\phi)$;

(g) Se $b(\phi) = T$ e $b(\psi) = F$, então $b(\neg(\phi \to \psi)) = b(\neg\psi)$;

(h) Se $b(\phi) = b(\neg\phi) = b(\psi)$ e $b(\neg\psi) = T$, então $b(\neg(\phi \to \psi)) = F$.

Béziau (1999) mostra que a semântica bivalorada, mas não verofuncional, de $Ł_3$ é equivalente a semântica matricial de $Ł_3$, no sentido de que as duas semânticas têm as mesmas tautologias. Segundo Wolenski (2009), embora Suszko não mencione explicitamente a *estruturalidade*, ele a assume em seu resultado de redução. Contudo, Caleiro et al. (2007) enfatizam que essa propriedade da relação de consequência pode ser dispensada, tornando tal redução ainda mais geral. Para tal, eles propõem um método para reduzir qualquer lógica multivalorada a uma semântica bivalente. Esse procedimento de redução depende única e exclusivamente da capacidade expressiva dessas lógicas.

Como observam Caleiro et al. (2007), na redução da multivaloração à bivalência existe uma *troca*: na semântica multivalorada temos a verofuncionalidade, que é uma propriedade útil de uma semântica. Por meio dela, temos um meio bastante simples de calcular o valor de verdade de proposições complexas a partir das suas proposições simples utilizando as tabelas das operações pertencentes à matriz. Já na semântica bivalente, a verofuncionalidade é perdida, uma vez que existe um colapso de valores algébricos em lógicos. Como vimos no caso de $Ł_3$, os valores algébricos $\frac{1}{2}$ e 0 são colapsados em F. Desse modo, a restauração da bivalência tem como preço a perda da verofuncionalidade. Nesse sentido, o aparente paradoxo de uma lógica multivalorada ser bivalente é resolvido.

Já que perdemos a verifuncionalidade da semântica, o que pode tornar mais complexo a verificação das tautologias da lógica dotada de uma semântica bivalente, uma pergunta natural é saber quais seriam as vantagens de obter semânticas bivalentes para as lógicas multivaloradas. Caleiro e Marcos (2010) discutem as vantagens dessas semânticas bivalentes, que são as seguintes:

- As semânticas bivaloradas são capazes de apresentar uma caracterização clássica para uma infinidade de lógicas não-clássicas, no sentido que essas lógicas serão caracterizadas em termos de T e F. Segundo os autores, isso facilita a comparação de uma lógica com outra.

- *Decidibilidade.* Para as lógicas que não possuem semântica multivalorada, essas semânticas atuam como procedimentos de decisão.

- *Teoria da Prova.* Para as lógicas que possuem semântica matricial, a semântica bivalorada uniformiza a apresentação dessas lógicas por meio de *tablôs* ((CARNIELLI, 1987) , (CALEIRO; MARCOS, 2010) , (MARCOS, 2010)).

Caleiro e Marcos (2010) afirmam ainda que:

> Suszko's Thesis is certainly fruitless if we regard it as a dogma, but it can be an insightful tool of logical analysis (...) Truth-functionality is for sure a nice and simple rule for our algebraic-oriented-minds, but there is no reason to fear its absence, even from a strictly algebraic point of view. (CALEIRO; MARCOS, 2010, 5)

Assim, podemos ver que esses procedimentos de redução, herdados em parte de Suszko, podem ser frutíferos para a análise de problemas, não se limitando a uma simples redução.

Tese de Suszko e o Conceito Fregeano de *Referência*

De acordo com Caleiro et al. (2007), a Tese de Suszko é uma reconstrução da distinção fregeana do *sentido* e *referência*. Frege (1948) expõe sua teoria do significado[11] com o objetivo de distinguir os conceitos de *sentido* e *referência*. Frege defende que *nomes próprios* expressam sentido e, possivelmente, designam um referente[12]. O sentido de um nome próprio é seu modo de apresentação, enquanto seu referente é o objeto em questão. Segundo Kneale & Kneale, o objeto não é necessariamente perceptível:

> (...) it is to be assumed that every distinguishable complete sign has both sense and reference. The referent is an object of some kind, but no necessarily a perceptible object (...) The sense, on the other hand, something by which the object may be singled out for attention (...). In speech of the ordinary kind all names are supposed to have references, and in a logically perfect language designed for the purposes every expression constructed to work like a proper name would indeed have reference. (KNEALE; KNEALE, 1962, 496)

[11] Para uma exposição detalhada acerca das diferentes teorias do significado, ver (SPEAKS, 2016).
[12] Ver (FREGE, 1948, 214).

Por exemplo, o nome próprio *Platão* pode ter como sentido '*o mestre de Aristóteles*' ou '*o autor do diálogo Fédon*', e a designação do nome Platão é o próprio objeto físico chamado de Platão. Desse exemplo, vemos que é possível que um nome próprio tenha mais de um sentido[13]. Além dos nomes próprios, Frege também investiga o sentido e a referência de *sentenças declarativas*. Do mesmo modo que os nomes próprios, as sentenças declarativas têm sentido e referência. Segundo Frege, o sentido dessas sentenças é o *pensamento* por elas expressado. Por sua vez, Frege entende por pensamento o *conteúdo objetivo*, que pode ser comum a vários pensantes[14]. A característica distintiva das sentenças é que seus referentes são os *valores de verdade*:

> We are driven to accepting the *truth value* of a sentence as its referent. By the truth value of a sentence I understand the circumstance that it is true or false. There are no further truth values. For brevity I call the one the true, the other the false. Every declarative sentence concerned with the referents of its words is therefore to be regarded as a proper name, and its referent, if it exists, is either the true or the false. (FREGE, 1948, 216)

Dado o que expusemos acima acerca da natureza dos valores lógicos, podemos ver certa proximidade da posição de Suszko sobre os valores lógicos das sentenças declarativas com posição de Frege sobre os referentes das sentenças declarativas. O próprio *axioma fregeano* acima mencionado é a formulação de Frege sobre os referentes dessas sentenças. O teorema de Suszko, por sua vez, é importante por mostrar que a bivalência vale até mesmo no âmbito das lógicas multivaloradas. Mesmo que os valores algébricos dessas lógicas possam representar uma transgressão ao dito axioma, é possível caracterizar essas lógicas por meio de bivalorações lógicas, mostrando que toda sentença ou é verdadeira ou é falsa. Desse modo, os valores lógicos são resgatados por meio de uma semântica bivalente que não é verofuncional.

Neste ponto, poderíamos pensar que Suszko endossa completamente a posição de Frege segundo a qual os referentes das sentenças são os seus valores de verdade (verdadeiro e o falso). Contudo, segundo Malinowski (1985), Omyła (2007) e Silva (2015), Suszko rejeita (**AF**) no sentido de que ele diferencia o referente de uma sentença de seu valor lógico (verdadeiro ou falso). Embora Suszko defenda que toda sentença tem sentido e referência, ele não defende que os valores lógicos são os referentes das sentenças. Por um lado, Suszko defende que as sentenças referem a *situações* ou *estados de coisas*, sendo esses últimos entendidos de acordo com a perspectiva de Wittgenstein no *Tractatus* ((WITTGENSTEIN, 2010)), que podemos interpretar como uma combinação de objetos. Por outro lado, mesmo que os referentes das sentenças sejam situações, as sentenças podem ser somente verdadeiras ou falsas, já que Suszko aceita o *Princípio da Bivalência*, princípio segundo o qual toda sentença é verdadeira ou falsa.

[13]Ver (FREGE, 1948, 210).
[14]Ver (FREGE, 1948, 214).

De acordo com Silva (2015), Suszko rejeita (**AF**) por duas razões. Em primeiro lugar, (**AF**) implica que existem somente duas situações possíveis, sendo essas os referentes das sentenças. Ou seja, se as sentenças se referem a valores lógicos, então existem apenas duas situações possíveis. Segundo, (**AF**) gera uma confusão no que diz respeito ao que as sentenças denotam e quais são seus valores lógicos. Nesse sentido, Suszko (1977) afirma que foi devido a essa confusão promovida pelo (**AF**) que Łukasiewicz aboliu tal axioma, introduzindo um "valor lógico" a mais. O problema é que a *possibilidade* não é, para Suszko, nem um valor lógico nem um referente admissível de fórmulas.

Já que Suszko abole (**AF**), em que sentido podemos ainda dizer que as posições de Suszko e a de Frege são próximas? Uma razão para sustentarmos tal proximidade é que Suszko afirma que os únicos valores lógicos das sentenças são o verdadeiro e o falso. Para que as noções de tautologia e de consequência lógica sejam definidas, temos que biparticionar o conjunto de valores algébricos em dois: o conjunto de valores distinguidos e o conjunto de valores não distinguidos. Ou seja, por mais que hajam muitos valores algébricos, as definições de tautologia e de consequência lógica, tal como definidas pela semântica de matrizes, consideram dois conjuntos de valores. Além disso, além do fato de ele afirmar que a lógica é bivalente, ele também defende que as sentenças possuem sentido e referência. Nesse sentido, a Tese de Suszko pode ser vista como uma reconstrução do sentido e referência fregeano.

Parênteses 2.1.1. Além de ser conhecido pela sua tese, pelos seus trabalhos em Teoria de Modelos e em Lógica Abstrata, Suszko também é conhecido pelos seus trabalhos em lógicas conhecidas como *Lógicas não-Fregeanas* (**LNF**). Segundo Malinowski (1985), as **LNF** são a realização do programa fregeano (distinção entre *sentido* e *referência*) sem a hipótese de que o conjunto das referências das sentenças é reduzido a dois (verdadeiro e falso), rejeitando portanto o **AF**. Assim, não há mais a correspondência entre os referentes das sentenças e seus valores lógicos. Nessas lógicas são definidas, além das valorações lógicas (valorações em T e F), funções de sentido das sentenças, funções de referentes das sentenças e um conectivo de identidade entre sentenças.

Existem muitas formulações dessas lógicas, cada uma com muitas especificidades. Como a exposição dessas lógicas desviaria dos objetivos deste trabalho, decidimos não tratá-las aqui. Em ((MALINOWSKI, 1985)), Malinowski expõe diferentes formulações das **LNF**s, mostrando as particularidades de cada lógica. Além disso, tal como expõe Molick ((SILVA, 2015)), existem diferentes formulações do (**AF**) e cada uma dessas formulações não leva necessariamente à mesma lógica. **Fim do Parênteses**.

Podemos ver a Tese de Suszko como um ataque aos fundamentos das lógicas multivaloradas[15], no sentido que ela diz que só existem dois valores lógicos, não importando o número de valores algébricos que a lógica possui. Ou seja, os valores algébricos são

[15]Ver (WANSING; SHRAMKO, 2008, 406).

de natureza completamente distinta da dos valores lógicos. Esses últimos têm natureza bipartite, enquanto aqueles não têm necessariamente uma natureza bipartite, podendo ser tripartite, tetrapartite e assim por diante. De acordo com a Tese de Suszko, se a existência das lógicas multivaloradas depende dessa confusão entre valores algébricos e valores lógicos, então seus fundamentos teóricos estão seriamente comprometidos, já que seus valores algébricos sempre podem ser divididos em dois valores lógicos.

A Tese de Suszko vem sendo amplamente investigada. Segundo Marcos (2000) e Caleiro et al. (2007), embora Suszko tenha apresentado uma semântica bivalorada para $Ł_3$ ((SUSZKO, 1975)), ele não disse como tal procedimento fora obtido em relação a essa lógica e não disse como pode ser aplicado para outras lógicas. Visando preencher essa lacuna, eles oferecem procedimentos gerais de como se obter bivalorações a partir de lógicas multivaloradas[16]. Contudo, a Tese de Suszko sofre de críticas que exporemos a seguir.

Wolenski (2009) apresenta uma objeção à Tese de Suszko, argumentando que Suszko não apresenta argumentos puramente lógicos para afirmar que o verdadeiro e o falso são os únicos valores lógicos. Como vimos anteriormente, a redução de Suszko diz respeito às lógicas que possuem uma relação de consequência tarskiana, ou seja, a relação de consequência dessas lógicas é reflexiva, monotônica, possuem a propriedade de corte e são estruturais. O problema, segundo Woleński, é que essas propriedades da relação de consequência, embora sejam matematicamente elegantes e úteis, são de escolha arbitrária. Por exemplo, defensores de lógicas não-monotônicas, mesmo reconhecendo a elegância da relação de consequência tarskiana, argumentam que para lidar com o raciocínio científico e do senso comum, precisamos de uma teoria que provavelmente dispense a monotonicidade. Outro exemplo dado por Woleński é em relação à estruturalidade. Segundo ele, a estruturalidade é criticável por ignorar contextos intensionais que possuem papel importante na comunicação humana. Em suma, Woleński objeta a Tese de Suszko ao dizer que ela, ao se basear em uma relação de consequência tarskiana e não em outra, se baseia em critérios pragmáticos, não puramente lógicos.

Para responder à objeção de Woleński, basear-no-emos na própria motivação da definição tarskiana de consequência lógica adotada por Suszko. Tarski (1935) motiva sua investigação do conceito de consequência lógica como uma noção *formal*, isto é, ela deve considerar única e exclusivamente a forma das sentenças, não o conhecimento empírico que temos acerca delas. Por isso, Tarski diz que a relação de consequência não pode ser afetada mediante substituições uniformes. Desse modo, para definir de maneira mais abrangente possível tal conceito, Tarski define a relação de consequência lógica a partir da noção de modelos. Além disso, podemos dizer que essa definição não é totalmente arbi-

[16]Como esses trabalhos destoam do nosso objetivo nesta dissertação, mencionaremos alguns trabalhos feitos: (CALEIRO et al., 2007), (CALEIRO; MARCOS, 2010), (CALEIRO et al., 2003), (MARCOS, 2010). Esses trabalhos fazem isso de semáticas de bivalorações com aplicações em tablôs semânticos, com o objetivo de tornar a redução à bivalência mais geral possível.

trária, pois essa definição também abrange uma concepção da própria natureza da lógica, concepção essa que diz que a lógica deve se ocupar dos aspectos formais das sentenças, das formas válidas, e não do conhecimento material que temos das sentenças[17]. No artigo (SUSZKO, 1977), de acordo com o trabalho de Tarski acerca da relação de consequência lógica ((TARSKI, 1983)), Suszko assume que a relação de consequência seja estrutural, não dando razões para tal hipótese. Uma possível justifiva para essa suposição é que esse artigo foi preparado para uma fala em um congresso que ocorreu na Cracóvia, Polônia. Mas, Łoś e Suszko (1958) concentram-se somente em relações de consequência estruturais. Segundo Zygmund ((BÉZIAU, 2012b)[18]), a razão para tal é que ambos consideram que a relação de consequência é sobre formas de sentenças, desconsiderando seu conteúdo. Novamente, temos que essa concepção de relação de consequência carrega consigo uma concepção sobre a própria natureza da lógica. Desse modo, a alegação de que a escolha de Suszko é arbitrária é falsa.

Suszko (1961) afirma que a relação de consequência é uma noção fundamental da lógica, o que mostra uma preocupação primária do autor a respeito desse conceito e mostra que a adoção de uma relação de consequência estrutural não é arbitrária. Łoś e Suszko (1958) definem uma relação de consequência satisfazendo as propriedades de *reflexividade*, *monotonicidade*, *corte* e a *estruturalidade*. Além disso, uma lógica sentencial é definida por Łoś e Suszko como um conjunto de fórmulas dotado de uma relação de consequência tarskiana estrutural. Wójcicki (2013) associa a estruturalidade à *logicidade* e, para verificar isso, basta notar que ele chama a propriedade de estruturalidade de propriedade lógica[19]. Suszko (1977) mostra que uma lógica dotada de uma relação de consequência tarskiana estrutural admite semântica bivalente. Desse modo, é de se esperar que esse resultado dependa de determinadas hipóteses (estruturalidade, por exemplo). Por sua vez, a redução de Suszko seria problemática caso a relação de consequência adotada fosse ela mesma problemática, caso conduzisse a paradoxos ou antinomias. Caso contrário, a crítica perde sua força. Criticar a Tese de Suszko sob a alegação de que a escolha da relação de consequência tarkiana não foi acompanhada de argumentos puramente lógicos consiste em uma inversão de ônus argumentativo. O dever de levantar argumentos puramente lógicos em defesa de outras relações de consequência é dos defensores de outras relações de consequência lógica. Por exemplo, uma pessoa interessada em descrever o raciocínio intensional é quem deve apresentar argumentos puramente lógicos de que a relação de consequência tarskiana não é a melhor candidata para descrever contextos intensionais. Portanto, defendemos que a crítica de Woleński carece de força por se basear em uma

[17]Beall e Restall (2006) argumentam que a definição tarskiana de consequência lógica reforça a ideia de que Tarski tinha uma concepção de lógica enquanto uma teoria que leva apenas o aspecto formal das sentenças em consideração, não o conhecimento empírico que temos das sentenças.

[18]Mais especificamente, o artigo em questão é *Structural Consequence Operations and Logical Matrices Adequate for Them*, p. 163-175.

[19]Ver (WÓJCICKI, 2013).

inversão de ônus.

Costa et al. (1996)) e Wansing e Shramko (2008)) criticam a Tese de Suszko tendo em vista a proposta de Malinowski (2009)[20]. Malinowski (2007) reconhece que a divisão na matriz de valores distinguidos e valores não-distinguidos acarreta bivalência. Contudo, ele afirma que a *multivaloração lógica* ainda é possível, ou seja, Malinowski considera que existem valores lógicos além do verdadeiro e do falso. Mais especificamente, existe um valor lógico além do verdadeiro e do falso. Para ele, a solução é a seguinte:

> The departure is a division of the matrix universe into three subsets of: *rejected* elements, *accepted* elements and all other elements. On such grounds it was possible to define the relation being a formal counterpart of reasoning admitting rules of inference which from non-rejected assumptions lead to accepted conclusions (...) The relation was then called, somewhat inaccurately, a *q-consequence* (...) According to this α is inferred from the set of premisses X, whenever it is the case that if all premisses are not rejected then α is accepted. (MALINOWSKI, 2007, 68)

Tsuji (1998) observa que essa relação de consequência definida por Malinowski não é reflexiva e, por isso, ela não configura um contraexemplo para a redução de Suszko. Mas, segundo da Costa & Béziau & Bueno, ela configura um contraexemplo para a Tese de Suszko no sentido que a matriz a partir da qual a *q-consequência* é definida pode não admitir uma redução à bivalorações lógicas, mas somente trivalorações lógicas[21]. Malinowski (2007) admite que é possível, como um caso limite, descrever a lógica clássica em termos da *q-consequência*, isto é, pode-se estender os elementos da matriz da lógica clássica, que são somente dois elementos (um corresponde ao verdadeiro e o outro ao falso) a uma *q-consequência* trivalorada.

Malinowski (2009) mostra como a lógica trivalorada $Ł_3$ pode ser descrita em termos dessa relação de consequência lógica. Em (MALINOWSKI, 1990), Malinowski mostra que as lógicas munidas da *q-consequência* são *logicamente* bivaloradas ou trivaloradas. Como dissemos anteriormente, esse resultado não é um contraexemplo para o teorema de Suszko, mas pretende-se como um contraexemplo para a Tese de Suszko. Em virtude dessa possibilidade, Costa et al. (1996) dizem que não temos razões *a priori* para rejeitar a possibilidade de mais de dois valores lógicos e isso é uma razão para rejeitarmos a Tese de Suszko.

Podemos responder a essa segunda objeção adotando uma postura mais distante da argumentação do próprio Suszko. Como Suszko não argumenta sobre a natureza problemática de possíveis valores lógicos além do verdadeiro e do falso, responderemos às

[20]Ver também (MALINOWSKI, 1994) e (MALINOWSKI, 2007)
[21]Ver (MALINOWSKI, 2007) e (WANSING; SHRAMKO, 2008).

críticas acima valendo-nos dessa estratégia. No caso das lógicas que não admitem redução à bivaloração, é totalmente legítimo questionar qual é a interpretação do sistema para que possa ser chamado de lógica. Sobre esse problema, Rescher (1968) coloca a seguinte questão:

> Certainly a system of logic must have a bearing upon the formal structure of inference and reasoning. It must systematize our informal intuitions in this sphere in a way akin to that in which arithmetical calculating systems formalize the informal calculations we can "do in our head". Given an austerely formal system, a purely abstract calculus, we are not even entitled (...) to speak of it as a "logic" until after the development of a semantical interpretation (involving such concepts as those of *meaning* and *truth* of propositions, and relationships of *consequence* and *inconsistency* among groups thereof). Only a system that achieves this objective of systematizing the formal, generic features of inference and reasoning as we conduct it in the context of precise inquiries like those of mathematics and science can qualify for characterization as a "system of logic". (RESCHER, 1968, 218)

Como a passagem acima aponta, para que um sistema formal possa ser considerado como uma lógica de fato, é necessário que ele seja intepretado. E, claramente, a interpretação (a semântica) em questão deve dar conta de explicar o significado dos símbolos lógicos, bem como ser capaz de descrever a verdade e a consequência lógica. Considere, por exemplo, uma lógica dotada de uma *q-consequência* que não pode ser reduzida a um modelo bivalente, mas a um modelo trivalente. O problema é que nem Malinowski (2007), nem Costa et al. (1996), e nem Wansing e Shramko (2008) apresentam uma interpretação em termos de verdade para essas lógicas não redutíveis a um modelo bivalente. Desse modo, a crítica de que essas lógicas são contraexemplos da Tese de Suszko também perde força.

Beall e Restall (2006) oferecem uma versão "pré-teórica" da noção de consequência lógica para defender a tese do *pluralismo lógico*, tese segundo a qual existe mais de uma lógica que pode ser dita como verdadeira. A versão oferecida pelos autores é a seguinte:

V Uma conclusão c *segue de* um conjunto de premissas P sse *em qualquer caso* em que cada premissa em P é verdadeira também é o caso que a conclusão c é verdadeira.

Segundo Beall & Restall, **V** não caracteriza exatamente uma relação de consequência de uma lógica em virtude do fato de a palavra *caso* não conter especificação alguma. Todavia, ao especificar o que se entende por caso, estamos no contexto mais específico de lógicas. Por exemplo, Tarski define a relação de consequência lógica via *modelos* para a lógica de primeira ordem, sendo *modelos* a palavra que substitui *caso*. Por exemplo, no contexto das lógicas modais, trocamos a palavra *caso* por *mundos possíveis*, e assim por diante. Segundo os autores, essa definição é capaz de abranger uma vasta gama de lógicas, incluindo lógicas intuicionistas, lógicas relevantes e, até mesmo, as lógicas multivaloradas. No contexto das lógicas multivaloradas, temos que a palavra *caso* é entendida como valorações e a palavra *verdadeira* é substituída por uma mais geral que é *ter valor(es) designado(s).* Aqui, temos que a relação de consequência lógica obedece exatamente às propriedades da relação de consequência tarskiana estrutural.

Além disso, Beall e Restall (2006) afirmam que é dúbio dizer que relações de consequência que não obedecem, por exemplo, a reflexividade podem ser chamadas de relações de consequência. Essas relações podem ser capazes de modelar outros fenômenos, mas não modelam a noção de consequência lógica, pois é complicado dizer que uma relação de consequência que se ocupe em *preservar verdades* não satisfaça $\phi \models \phi$. Novamente, é fraca a crítica segundo a qual essas lógicas que não são caracterizáveis por modelos bivalentes constituem contraexemplos para a Tese de Suszko. Portanto, não temos razões *a priori* para aceitar a existência de valores lógicos além do verdadeiro e do falso.

Já em relação às lógicas que tanto podem ser caracterizadas tanto por uma relação de consequência tarskiana quanto por uma *q-consequência* trivalente, temos que ver em que sentido essa última relação constitui de fato uma relação de consequência lógica preservadora de verdade. Como vimos argumentando, é no mínimo dúbio que as *q-consequências* constituam relações de consequência pelo fato de elas não satisfazerem propriedades básicas da relação de consequência tais como a reflexividade. Assim, é difícil afirmar que elas lidam com a preservação de verdade. Por mais que ferramentas matemáticas sejam úteis para modelar nossas intuições, devemos ser cautelosos para não cairmos em abstrações que nos distanciam dos nossos propósitos iniciais.

A esta altura, poderíamos fazer a seguinte pergunta: a Tese de Suszko é um golpe definitivo contra as lógicas multivaloradas? Nossa posição é de que as lógicas multivaloradas podem coexistir com a tese de que o verdadeiro e o falso são os únicos valores lógicos. Isso se deve ao fato de essas lógicas não se reduzirem à semântica de matrizes. Tomando como exemplo a própria lógica $Ł_3$, em (MARCOS, 2000) é apresentada uma semântica de mundos possíveis para ela. A própria semântica bivalorada que Suszko oferece para $Ł_3$ mostra que ela não se reduz à semântica matricial. Como o teorema de Suszko abrange lógicas finitamente valoradas, podemos dizer que essa idependência entre semântica matricial e as lógicas multivaloradas é geral. Nesse sentido, a semântica matricial seria uma possível representação para essas lógicas. Segundo Marcos (2009), a não ser que exista um resultado que impeça que uma lógica tenha uma determinada propriedade, é um erro classificá-la tendo em vista a semântica a partir da qual essa lógica é *circunstancialmente* apresentada. Ou seja, não podemos dizer, do ponto de vista semântico, que uma lógica tem essencialmente uma determinada propriedade já que é a princípio possível dar uma semântica para essa lógica que não tenha essa propriedade, a não ser que a lógica em questão falhe em possuir determinada propriedade. Por exemplo, não podemos dizer que a semântica matricial de Ł$_3$ nos compromete com um terceiro valor de verdade além do verdadeiro e do falso já que é possível caracterizar essa lógica por meio de uma semântica bivalente na qual esse terceiro valor não existe. Assim, por mais que essas lógicas sejam apresentadas através de uma semântica matricial que admitem mais valores (algébricos) de verdade além do verdadeiro e do falso, elas podem ser representadas por semânticas bivalentes. E elas admitem semânticas bivalentes devido aos resultados redutivos aos quais estão sujeitas.

Observação 2.1.2. Existem lógicas que falham em ser caracterizáveis por matrizes finitas, isto é, essas lógicas não podem ter como matrizes correspondentes as que possuem um conjunto V finito. Isso é o caso com a lógica Intuicionista devido ao resultado de Godel (1932), com respeito à lógica modal S5 (HUGHES; CRESSWELL, 1996), devido ao resultado de James Dugundji (BÉZIAU, 2010), e com respeito às lógicas paraconsistentes C_n de da Costa (MARCOS, 1999). Além de ser caracterizada pela semântica de mundos possíveis, lógica modal S5 pode ser caracterizada por matrizes infinitas, que tem o conjunto V infinito. Como dissemos anteriormente, isso não implica que S5 não seja verofuncional, já que matrizes infinitas são também verofuncionais.

Marcos (2009) traça uma diferença entre *semânticas não-verofuncionais* e *lógicas não-verofuncionais*. Em uma semântica não-verofuncional, o valor de uma fórmula complexa pode não depender do valor de suas proposições simples. Como dissemos anteriormente, as semânticas de bivalorações são semânticas não-verofuncionais e elas podem caracterizar lógicas caracterizáveis por semânticas verofuncionais, como é o caso de Ł$_3$, que mostramos ser caracterizável por bivalorações. Como dissemos anteriormente, uma lógica caracterizada (ou caracterizável) por uma semântica verofuncional é chamada por Marcos de *lógica verofuncional*. Por exemplo, todas as lógicas multivaloradas são lógicas verofuncionais. Já uma *lógica não-verofuncional* não dispõe da propriedade de ser caracterizável por uma semântica verofuncional, tal como é o caso da *Lógica Minimal Intuicionista* (CARNIELLI; CONIGLIO; MARCOS, 2007). **Fim da Observação.**

Além disso, defendemos que a Tese de Suszko pode conviver com a tese do *pluralismo lógico*. Por mais que a Tese de Suszko afirme que existem somente dois valores lógicos, ela não diz nada a respeito das leis sob as quais esses valores estão sujeitos. Por exemplo, na lógica clássica os valores verdadeiro e falso estão sujeitos ao Princípio do Terceiro Excluído (**PTE**), Princípio de Não-Contradição (**PNC**), no sentido de que esses princípios são tautologicas na lógica clássica. Já na semântica bivalorada para Ł$_3$ os valores lógicos não estão sujeitos a esses princípios no sentido de que eles não são tautologias de Ł$_3$. O mesmo ocorre com outras lógicas multivaloradas caracterizadas por semânticas bivalentes. Nessas lógicas, é possível que tanto **PTE** quanto **PNC** valham; que **PTE** valha mas **PNC** não valha; e que **PNC** valha mas **PTE** não valha. Por exemplo, na lógica LP[22], tanto **PTE**

[22]As lógicas sobre as quais falaremos neste parágrafo serão apresentadas em detalhe nos capítulos

quanto **PNC** são tautologias. Na lógica P^1, **PTE** é válido, mas **PNC** não o é. E na lógica I^1, **PTE** não é válido, mas **PNC** o é. Para todas essas lógicas serão oferecidas semânticas bivalentes. Desse modo, vemos que essas lógicas, mesmo sendo logicamente bivalentes, diferem entre si pelo fato de não obedecerem ou a um princípio ou a outro, o que sugere que o princípio de bivalência é, de certa forma, independente do **PTE** e do **PNC**[23]. Nesse sentido, argumentamos que o pluralismo lógico consegue conviver em harmonia com a Tese de Suszko, pois uma coisa é dizer que o *verdadeiro* e o *falso* são os únicos valores lógicos e outra coisa completamente diferente é dizer quais leis governam esses valores.

Mesmo que a Tese de Suszko não seja um golpe definitivo para as lógicas multivaloradas, essas últimas são muito criticadas do ponto de vista conceitual. Pogorzelski e Pogorzelski (1994) levanta a seguinte crítica em relação a essas lógicas:

> The cognitive value of many-valued logics, no matter whether this many valuedness is intended or not, is small (if we omit intuitionistic logic). Hardly anyone is using matrix method of constructing new propositional logics nowadays; besides it is rather evident that this method was ineffective from the beginning. Many-valued logics have not played an important role in the analysis of the notion of determinism and have not explained modal notions (although a value of Kripke's models is unquestionable). Neither have they played an important role in methodology of sciences and their development is, generally, stimulated by their inner problems or by still not realized hopes for obtaining an essential cognitive success. (POGORZELSKI; POGORZELSKI, 1994, 289)

Como podemos ver na citação acima, a crítica de Pogorzelski tem foco especial na construção de lógicas multivaloradas a partir do método das matrizes lógicas. Contudo, como vimos acima, a semântica de matrizes é um modo de representar tais lógicas. Carnielli e Lima-Marques (1999) argumentam que o surgimento das lógicas não-clássicas, em especial as multivaloradas, está conectado à questão de representar conhecimento que não é necessariamente matemático. Eles dão como exemplo a lógica trivalorada de Kleene, K_3, na qual o valor intermediário $\frac{1}{2}$ para tratar de sentenças que carecem de informações suficientes para serem verdadeiras ou falsas. Caso fosse dada uma nova interpretação para tais lógicas, essa objeção perderia força.

Como dissemos anteriormente, Suszko não apresentou um método que permite obter bivalorações a partir das lógicas multivaloradas. Também vimos que essas lógicas são criticadas pelo fato de o valor cognitivo da semântica matricial associada a essas lógicas ser pequeno. Sendo assim, temos o seguinte desafio: é possível obter uma semântica que,

---

seguintes.

[23]Para uma discussão sobre a relação do princípio de bivalência com **PTE** e **PNC**, ver Béziau (2003).

sendo uma bivaloração, tenha um valor cognitivo interessante? Carnielli (1990) argumenta que as lógicas multivaloradas são interessantes para descrever sistemas capazes de raciocinar *sobre* o conhecimento, de modo que esses sistemas sejam capazes de isolar as inconsistências sem que elas acarretem a trivialidade. No que concerne as bivalorações, não pensamos que seja adequado utilizar bivalorações tal como as bivalorações que definimos acima para $Ł_3$, pois essas bivalorações são criticadas pelo fato de não serem muito explicativas. Por exemplo, na semântica bivalorada de $Ł_3$, é possível que $b(\phi) = b(\neg\phi) = F$. O problema, tal como apontado nos trabalhos (CARNIELLI, 1990), (MARCOS, 2000) e(CARNIELLI; CONIGLIO; MARCOS, 2007), é que essa semântica não nos explica o fenômeno que nos permitiu concluir que $b(\phi) = b(\neg\phi) = F$. Assim, desejamos uma semântica bivalorada que seja capaz de nos explicar como esse tipo de fenômeno surge. Nos capítulos que seguem tentaremos responder positivamente a esse desafio utilizando as *Semânticas de Sociedades*[24], que são semânticas bivalentes para lógicas multivaloradas capazes de descrever situações em que agentes podem discordar acerca de uma dada proposição ou de descrever situações nas quais esses agentes podem não aceitar a mesma proposição.

[24]Uma das nossas preocupações neste trabalho é também ajudar a estabelecer um léxico em língua portuguesa a respeito de termos técnicos que ocorrem usualmente em inglês. Dessa forma, optamos por preferir "semânticas de sociedades" ao invés de "semânticas de sociedade", por analogia com os usos "semânticas de mundos possíveis" e "semânticas de traduções possíveis" que já ocorrem na literatura.

Capítulo 3

Semântica de Sociedades

Como dissemos no fim do capítulo anterior, seria importante resgatar o valor cognitivo das lógicas multivaloralodas por meio de outra semântica, dado que, de acordo com Pogorzelski, a semântica matricial falha nesse aspecto. Além disso, essa semântica deve ser uma bivaloração, dado que essas lógicas são, de acordo com a Tese de Suszko, bivalentes. Acreditamos que essas lógicas podem ser interessantes para lidar com informações incompatíveis e inconsistentes de agentes. A importância em oferecer um tratamento formal para proposições inconsistentes já era tema de importância para o lógico polonês Stanislaw Jaśkovski ((JAŚKOWSKI, 1999)). Segundo ele, uma lógica que trate de inconsistências deve satisfazer os seguintes critérios:

(i) O cálculo sentencial não deve ser trivial quando aplicado a sistemas inconsistentes;

(ii) O sistema deve ser rico o suficiente de modo que possibilite inferências práticas;

(iii) O sistema deve ter uma justificação intuitiva.

E sua proposta para esse problema é a seguinte:

Parênteses 3.0.1. A lógica proposta por Jaśkowski é proposta tendo como base a lógica modal S5, a qual apresentaremos a seguir:

A lógica S5 possui a assinatura $\Sigma^{S5} = \{\neg, \Diamond, \Box, \rightarrow\}$. O conjunto de fórmulas de S5, $For(\Sigma^{S5})$, é gerado pelo conjunto de variáveis proposicionais $\mathcal{V}$ sobre a assinatura Σ^{S5} de modo que: se ϕ e ψ são fórmulas de $For(\Sigma^{S5})$, então $\neg\phi, \Diamond\phi, \Box\phi$ e $\phi \rightarrow \psi$ são fórmulas de $For(\Sigma^{S5})$.

Hughes e Cresswell (1996) apresentam S5 com os seguintes esquemas de axiomas e regras de inferência:

(S5-1) Todos os axiomas da LPC (ver **Exemplo 1**, **Capítulo 2**).;

(S5-2) $\Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$

(S5-3) $\Box\phi \to \phi$

(S5-4) $\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$

(MP) $\phi, \phi \to \psi/\psi$

Generalização : $\phi/\Box\phi$

Em (HUGHES; CRESSWELL, 1996), é mostrado que a axiomática de S5 é completa em relação à classe de frames de Kripke:

Definição S5 (1). Uma *estrutura* é um par ordenado $\langle W, R\rangle$, onde W é um conjunto não-vazio de objetos (mundos) e R é uma relação de acessibilidade que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) *Reflexividade*: para todo $w \in W$, *wRw*;

(ii) *Simetria*: para todo $w, w' \in W$, *wRw'* implica *w'Rw*;

(iii) *Transitividade*: para todo $w, w', w'' \in W$: se *wRw'* e *w'Rw"*, então *wRw"*.

Um *modelo* para S5 baseado na uma estrutura $\langle W, R\rangle$ é uma terna $\langle W, R, V\rangle$ onde $\langle W, R\rangle$ é uma estrutura e V é uma atribuição de valores de verdade satisfazendo as seguintes condições:

1. para qualquer $p_n \in For(\Sigma^{S5})$ e qualquer $w \in W$: $V(p, w) = 1$ ou $V(p, w) = 0$;
2. para qualquer $\alpha \in For(\Sigma^{S5})$ e qualquer $w \in W$: $V(\neg\alpha, w) = 1$ sse $V(\alpha, w) = 0$;
3. para quaisquer $\alpha, \beta \in For(\Sigma^{S5})$ e qualquer $w \in W$: $V(\alpha \to \beta, w) = 1$ sse $V(\alpha, w) = 0$ ou $V(\beta, w) = 1$;
4. para qualquer $\alpha \in For(\Sigma^{S5})$ e qualquer $w \in W$: $V(\Diamond\alpha, w) = 1$ sse para algum $w' \in W$ tal que *wRw'*, $V(\alpha, w') = 1$;
5. para qualquer $\alpha \in For(\Sigma^{S5})$ e qualquer $w \in W$: $V(\Box\alpha, w) = 1$ sse para todo $w' \in W$ tal que *wRw'*, $V(\alpha, w') = 1$;

Uma fórmula $\alpha \in For(\Sigma^{S5})$ é *válida* em uma estrutura $\langle W, R\rangle$ sse todo modelo $\langle W, R, V\rangle$ baseado em $\langle W, R\rangle$, $V(\alpha, w) = 1$, para todo $w \in W$. Uma fórmula é válida em S5 sse ela é válida em toda estrutura. A relação de consequência semântica, $\models_{S5} \subseteq \wp(For(\Sigma^{S5})) \times For(\Sigma^{S5})$ é definida da seguinte maneira: seja $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma^{S5})$, dizemos que α é *consequência semântica* de Γ ($\Gamma \models_{S5} \alpha$) sse: se para todo modelo $\langle W, R, V\rangle$ e para todo mundo $w \in W$ tal que $V(\gamma, w) = 1$, para todo $\gamma \in \Gamma$, então $V(\alpha, w) = 1$.

A lógica J de Jaśkowski é construída a partir da assinatura da LPC (**Exemplo 1**) e é tal que:

$$\Gamma \models_J \alpha \text{ sse } \Diamond\Gamma \models_{S5} \Diamond\alpha$$

Onde $\Diamond\Gamma = \{\Diamond\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. O caráter paraconsistente de J consiste em: suponha um modelo de S5 tal que $W = \{w, w'\}$ onde o mundo w é tal que $V(p, w) = 1$ e $V(q, w) = 0$ e o mundo w' é tal que $V(\neg p, w') = 1$ e $V(q, w) = 0$. Logo, $p, \neg p \nvDash_J q$. **Fim do Parênteses**.

Por exemplo, em relação à essa problemática de informações inconsistentes em desenvolvimento de softwares, Nuseibeh, Easterbrook e Russo (2001) defendem que:

> We have found that a systematic approach to handling inconsistency is helpful, and view inconsistency management as a central activity throughout software development. We argue that maintaining consistency at all times is counter-productive. In many cases, it may be desirable to tolerate or even encourage inconsistency, to facilitate distributed collaborative working, to prevent premature commitment to design decisions, and to ensure all stakeholder views are taken into account. (NUSEIBEH; EASTERBROOK; RUSSO, 2001, 170)

Embora não seja nosso objetivo lidar com desenvolvimento de softwares, é interessante ressaltar a importância em termos à disposição sistema capazes de lidar com contradições. Poderíamos colocar o problema de maneira mais geral, abrangendo os casos em que não sejamos capazes de atribuir verdade ou falsidade para uma dada proposição. Para tratar desse problema, defendemos que a *Semântica de Sociedades* pode ser uma ferramenta útil para lidar tanto com casos de inconsistências de informações dadas por agentes racionais dentro de uma sociedade quanto com casos em que as informações dadas por esses agentes são incompletas, não permitindo decidir se uma proposição nem sua negação são verdadeiras ou falsas. Como dissemos, a semântica de sociedades foi introduzida para lidar com situações de conflitos informacionais entre agentes dentro de uma sociedade. Uma sociedade é entendida como um conjunto de agentes racionais que raciocinam segundo uma determinada lógica[1]. Segundo Carnielli e Lima-Marques (1999), contradições podem nascer dentro de uma sociedade composta por esses agentes pelo fato de as informações serem produzidas localmente e serem processadas globalmente: são os agentes que produzem as informações e é a sociedade que as processa. Nesse caso, a sociedade deve ser capaz de lidar com essas informações que, possivelmente, podem ser contraditórias ou até mesmo incompletas.

Carnielli e Lima-Marques (1999) definem dois tipos de sociedades: *sociedades abertas* e *sociedades fechadas*. Uma sociedade é aberta se uma proposição p (respectivamente, sua negativa, $\neg p$) é aceita no caso de ao menos um agente aceitá-la (respectivamente, rejeitá-la). E uma sociedade é fechada se uma proposição p (respectivamente, sua negativa, $\neg p$) é

[1]Nesta dissertação, trabalharemos somente com sociedades nas quais todos os agentes seguem a mesma lógica. Em (FERNÁNDEZ, 2001), são exibidas sociedades que possuem agentes que raciocinam de acordo com diferentes lógicas.

aceita no caso de todos os agentes aceitarem-na (respectivamente, rejeitarem-na). A título de ilustração, os autores fazem uma analogia com dois possíveis comitês de avaliação de um artigo, chamemo-los de C^1 e C^2. Suponha que o comitê C^1 seja uma sociedade fechada e que tenha como agentes os membros do comitê. Os agentes, por sua vez, raciocinam de acordo com a lógica clássica: cada um deles aceita ou rejeita o artigo. Nesse caso, um artigo só é aceito no comitê C^1 no caso de todos os membros (agentes) aceitarem-no e é rejeitado no caso de todos os membros rejeitarem-no. Ou seja, o artigo só é aceitado ou recusado por unanimidade. Podemos ver que nessa sociedade um artigo pode não ser nem aceitado nem rejeitado, gerando um caso de indecisão em relação à sua aceitação.

Agora suponha que o comitê C^2 seja uma sociedade aberta em que cada membro (agentes) também raciocina de acordo com a lógica clássica. No caso do comitê C^2, um artigo é aceito se ao menos um membro aceitá-lo e é rejeitado se ao menos um membro rejeitá-lo. Podemos ver que nessa sociedade um artigo pode ser tanto aceitado quanto rejeitado, gerando um caso de conflito informacional no que diz respeito à sua aceitação.

Dadas essas características das sociedades, Carnielli e Lima-Marques (1999) dizem que sociedades abertas correspondem a lógicas multivaloradas paraconsistentes e as sociedades fechadas correspondem a lógicas multivaloradas paracompletas. A correspondência entre essas características da sociedade e as lógicas multivaloradas paracompletas e paraconsistentes sugere um fenômeno interessante: a lógica da sociedade é diferente da lógica dos agentes. Como vimos, em uma sociedade aberta formada por agentes que têm como subjacente a lógica clássica, a lógica da sociedade é paraconsistente. Em uma sociedade fechada formada por agentes clássicos, a lógica da sociedade é paracompleta. É importante notar, tal como Carnielli e Lima-Marques (1999) o fazem, que o número de agentes na sociedade deve ser maior ou igual a dois. Caso contrário, a lógica da sociedade seria a mesma que a do agente. Desse modo, nos concentraremos em sociedades com número maior ou igual a dois.

Como dissemos, uma sociedade $S = \{Ag_1, ..., Ag_n, ...\}$ é entendida como um conjunto não-vazio de agentes Ag_i $(1 \leq i \leq n)$, onde cada agente é uma valoração da forma $Ag_i : \mathcal{V} \mapsto V$, em que $\mathcal{V}$ denota o conjunto de variáveis proposicionais e V denota o conjunto de valores de verdade de uma determinada lógica, a qual será a lógica subjacente do agente. Além disso, a própria linguagem da sociedade é a mesma que a linguagem dos agentes. Assim, se os agentes tiverem a linguagem da lógica proposicional clássica, então a linguagem da sociedade também será a da lógica proposicional clássica. Isto é, será uma linguagem formada pelo conjunto de variáveis proposicionais $\mathcal{V}$ sobre os conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$.

Carnielli e Lima-Marques (1999) introduzem o conceito de *negação biassertiva*. Segundo os autores, uma negação é biassertiva se $\neg\phi$ não depende funcionalmente de ϕ, ou seja, $\neg\phi$ e ϕ podem ser tomadas como independentes uma da outra. E uma sociedade é dita biassertiva se sua negação for biassertiva. Assim, já que $\neg p$ não depende funcionalmente de p, podemos dizer que essas semânticas de sociedades não são verofuncionais. Os autores se concetram boa parte do mencionado artigo em sociedades biassertivas (abertas e fechadas). Em Carnielli e Lima-Marques (1999) mostram que a lógica das sociedades biassertivas abertas é a lógica paraconsistente P^1 e a lógica das sociedades biassertivas fechadas é a lógica paracompleta I^1.

3.1 As Lógicas P^1 e I^1

A lógica P^1 possui a assinatura $\Sigma^{P^1} = \{\neg, \to\}$ e seu conjunto de fórmulas é $For(\Sigma^{P^1})$.

Em (SETTE, 1973), a lógica P^1 é apresentada pelos seguintes esquemas de axiomas e regra de inferência:

(P^1-1) $\phi \to (\psi \to \phi)$

(P^1-2) $(\phi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \gamma))$

(P^1-3) $(\neg\phi \to \neg\psi) \to ((\neg\phi \to \neg\neg\psi) \to \phi)$

(P^1-4) $(\phi \to \psi) \to \neg\neg(\phi \to \psi)$

(MP) $\phi, \phi \to \psi / \psi$

Em (SETTE, 1973), é mostrado que a axiomática de P^1 é completa e correta em relação à matriz $\mathcal{M}_{P^1} = (\{T, T^*, F\}, \neg, \to, \{T, T^*\}, \{F\})$ cujas operações são regidas pelas seguintes tabelas:

$\to$	T	T*	F
T	T	T	F
T*	T	T	F
F	T	T	T

	$\neg$
T	F
T*	T
F	T

em que o conjunto de valores distinguidos é $\{T, T^*\}$ e F é o único valor não-distinguido.

Definição 3.1.1. Uma valoração v de P^1 é uma função $v : For(\Sigma^{P^1}) \mapsto \{T, T^*, F\}$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) $v(\neg\phi) = \begin{cases} F & se \quad v(\phi) = T \\ T & \text{caso} \quad \text{contrário} \end{cases}$

(2) $v(\phi \to \psi) = T$ sse $v(\phi) = F$ ou $v(\psi) \in \{T, T^*\}$;

O conjunto das valorações $v : For(\Sigma^{P^1}) \mapsto \{T, T^*, F\}$ é chamado de *semântica* P^1 e será denotado por sem_{P^1}.

Ademais, a negação clássica é definida como:

$$\sim p \equiv \neg(\neg p \to p).$$

E a tabela da operação correspondente a esse conectivo é a seguinte:

	$\sim$
T	F
T*	F
F	T

Já a conjunção e a disjunção são definidas como:

$$\phi \wedge \psi \equiv \neg(\phi \to \sim \psi)$$
$$\phi \vee \psi \equiv (\sim \phi \to \psi)$$

E suas respectivas operações têm as seguintes tabelas:

$\wedge$	T	T*	F
T	T	T	F
T*	T	T	F
F	F	F	F

$\vee$	T	T*	F
T	T	T	T
T*	T	T	T
F	T	T	F

Uma característica dessa lógica é que o Princípio da Explosão é válido somente para fórmulas não-atômicas, isto é, o sistema admite contradições apenas no nível atômico e negações de atômicas, isto é: $p, \neg p \nvDash_{sem_{P1}} q$. Esse príncipio vale para qualquer *fórmula molecular*, fórmulas que são compostas a partir dos conectivos da linguagem. Por exemplo, a seguinte instância do Princípio da Explosão vale: $p \to q, \neg(p \to q) \models_{sem_{P1}} r$. O caráter paraconsistente da lógica P^1 existe somente no nível de p e $\neg p$.

Por outro lado, a lógica I^1 possui a assinatura $\Sigma^{I^1} = \{\neg, \to\}$ e seu conjunto de fórmulas é $For(\Sigma^{I^1})$.

Em (CARNIELLI; LIMA-MARQUES, 1999), a lógica I^1 é apresentada pelos seguintes esquemas de axiomas e regra de inferência:

(I^1-1) $\phi \to (\psi \to \phi)$

(I^1-2) $(\phi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \gamma))$

(I^1-3) $(\neg\neg\phi \to \neg\psi) \to ((\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi)$

(I^1-4) $\neg\neg(\phi \to \psi) \to (\phi \to \psi)$

(MP) $\phi, \phi \to \psi / \psi$

Em (SETTE; CARNIELLI, 1995), é mostrado que a axiomática de I^1 é completa em relação à matriz $\mathcal{M}_{I^1} = (\{T, F^*, F\}, \neg, \to, \{T\}, \{F^*, F\})$ cujas operações são regidas pelas seguintes tabelas:

$\to$	T	F*	F
T	T	F	F
F*	T	T	T
F	T	T	T

	$\neg$
T	F
F*	F
F	T

onde T é o único valor distinguido e $\{F^*, F\}$ é o conjunto de valores não-distinguidos.

Definição 3.1.2. Uma valoração v de I^1 é uma função $v : For(\Sigma^{I^1}) \mapsto \{T, F*, F\}$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) $v(\neg\phi) = \begin{cases} T & se \quad v(\phi) = F \\ F & \text{caso} \quad \text{contrário} \end{cases}$

(2) $v(\phi \to \psi) = T$ sse $v(\phi) \in \{F^*, F\}$ ou $v(\psi) \in \{T\}$;

O conjunto das valorações $v : For(\Sigma^{I^1}) \mapsto \{T, F^*, F\}$ é chamado de *semântica* I^1, e é denotado por sem_{I^1}.

A negação clássica é definida como:

$$\sim p \equiv p \to \neg p$$

E a tabela da operação correspondente a esse conectivo é a seguinte:

	$\sim$
T	F
F*	T
F	T

Já a conjunção e a disjunção são definidas como:

$$\phi \wedge \psi \equiv \neg(\phi \to \sim \psi)$$
$$\phi \vee \psi \equiv (\sim \phi \to \psi)$$

E suas respectivas operações têm as seguintes tabelas:

$\wedge$	T	F^*	F
T	T	F	F
F^*	F	F	F
F	F	F	F

$\vee$	T	F^*	F
T	T	T	T
F^*	T	F	F
F	T	F	F

Uma característica da lógica I^1 é que seu caráter paracompleto vigora somente no nível proposicional, em relação à p e $\neg p$. Ou seja, $\not\models_{sem_{I^1}} p \vee \neg p$. Mas, para qualquer outra fórmula molecular, temos que $\models_{sem_{I^1}} \phi \vee \neg\phi$.

3.2 Semântica de Sociedades Biassertivas para P^1 e I^1

Carnielli e Lima-Marques (1999) definem semânticas de sociedades para as lógicas P^1 e I^1. Essas sociedades são biassertivas pelo fato de nessas semânticas $\neg p$ não depender funcionalmente de p. Tais sociedades serão composta por agentes clássicos.

Uma *Sociedade Biassertiva Aberta*, *SBA*, é um conjunto não-vazio de agentes da lógica clássica. Um agente da lógica proposicional clássica é uma função da forma $Ag_i : \mathcal{V} \mapsto \{1, 0\}$ definida na linguagem da lógica proposicional clássica em que: se $Ag_i(p) = 1$, dizemos que o agente Ag_i *aceita* a proposição p; se $Ag_i(p) = 0$, dizemos que o agente Ag_i *rejeita* a proposição p. Essa sociedade é construída a partir da mesma linguagem que a dos agentes, a lógica proposicional clássica. $SBA \models \phi$ ($SBA \nvDash \phi$) significa que a sociedade SBA *aceita* (*rejeita*) ϕ.

Definição 3.2.1. *SBA* é uma sociedade aberta cuja relação de aceitação é definida da seguinte maneira:

(*SBA-1*) $SBA \models p$ sse existe $Ag_i \in SBA, Ag_i(p) = 1$[2];

(*SBA-2*) $SBA \models \neg p$ sse existe $Ag_i \in SBA, Ag_i(p) = 0$;

(*SBA-3*) $SBA \models \phi \wedge \psi$ sse $SBA \models \phi$ e $SBA \models \psi$

(*SBA-4*) $SBA \models \phi \vee \psi$ sse $SBA \models \phi$ ou $SBA \models \psi$

(*SBA-5*) $SBA \models \phi \rightarrow \psi$ sse $SBA \nvDash \phi$ ou $SBA \models \psi$

(*SBA-6*) $SBA \models \neg\phi$ sse $SBA \nvDash \phi$ para ϕ não atômica.

Seja *SOCba* o conjunto de todas as sociedades *SBA*. Uma fórmula ϕ é *satisfatível* em *SBA* se existe uma sociedade $SBA \in SOCba$ tal que $SBA \models \phi$. Uma fórmula ϕ é uma *tautologia* em *SBA* se toda sociedade $SBA \in SOCba$ é tal que $SBA \models \phi$. Dizemos que α é *consequência lógica* do conjunto de fórmulas Γ ($\Gamma \models_{SBA} \alpha$) sse: se, para toda sociedade $SBA \in SOCba$, $SBA \models \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então $SBA \models \alpha$.

A definição de agentes para a *Sociedade Biassertiva Fechada*, *SBF*, é similar à de *SBA*. Uma *SBF* é um conjunto não-vazio de agentes clássicos. $SBF \models \phi$ ($SBF \nvDash \phi$) significa que a sociedade *SBF* *aceita* (*rejeita*) ϕ.

Definição 3.2.2. *SBF* é uma sociedade fechada cuja relação de aceitação é definida da seguinte maneira:

[2]Como observamos no **Capítulo 2**, p é uma metavariável que varia somente sobre sentenças atômicas. Esta observação vigora para as demais definições de semânticas de sociedades apresentadas nesta Dissertação.

(SBF-1) $SBF \models p$ sse todo $Ag_i \in SBF, Ag_i(p) = 1$;

(SBF-2) $SBF \models \neg p$ sse todo $Ag_i \in SBF, Ag_i(p) = 0$;

As cláusulas (*SBF-3*)- são as mesmas da **Definição 2.2.1**.

As definições de *tautologia* e de *consequência lógica* de *SBF* são as mesmas de *SBA*.

Observação 3.2.3. Em (CARNIELLI; LIMA-MARQUES, 1999), os agentes são apresentados como um par $Ag_i = (C_i, L_i)$ onde C_i é um conjunto de variáveis proposicionais e L_i é a lógica a qual o agente está sujeito. As proposições pertencentes ao conjunto C_i são as proposições que o agente aceita. Por sua vez, um agente aceita uma proposição p, denotado em (CARNIELLI; LIMA-MARQUES, 1999) por $Ag_i \models p$ se $p \in C_i$. Como dissemos nos casos de *SBA* e *SBF*, os agentes estão sujeitos às leis da lógica clássica. Desse modo, as cláusulas (*SBA-1*) e (*SBA-2*) são apresentadas em (CARNIELLI; LIMA-MARQUES, 1999) da seguinte maneira:

(SBA-1) $SBA \models p$ sse existe $Ag_i \in SBA$ tal que $Ag_i \models p$ (para $p \in \mathcal{V}$);

(SBA-2) $SBA \models \neg p$ sse existe $Ag_i \in SBA$ tal que $Ag_i \not\models p$; (para $p \in \mathcal{V}$).

Já as cláusulas (*SBF-1*) e (*SBF-2*) são apresentadas em (CARNIELLI; LIMA-MARQUES, 1999) da seguinte maneira:

(SBF-1) $SBF \models p$ sse para todo $Ag_i \in SBF$ tal que $Ag_i \models p$ (para $p \in \mathcal{V}$);

(SBF-2) $SBF \models \neg p$ sse para todo $Ag_i \in SBF$ tal que $Ag_i \not\models p$ (para $p \in \mathcal{V}$).

A nossa apresentação de agentes como valorações segue a mesma linha de apresentação desse mesmo conceito feita em (FERNÁNDEZ, 2001). Já que uma proposição p pode pertencer ou não a um agente Ag_i, podemos estabelecer que: $Ag_i \models p$ sse $Ag_i(p) = 1$. A adoção dessa notação é justificada pelo fato de que posteriormente apresentamos semânticas de sociedades nas quais os agentes são valorações de lógicas que possuem mais de dois valores de verdade, como será o caso da semântica de sociedades para a lógica $Ł_4$. Nessa sociedade, os agentes são entendidos como valorações da lógica $Ł_3$. **Fim da Observação**.

O seguinte resultado mostra uma propriedade interessante provada por Carnielli & Lima-Marques em relação à cardinalidade do conjunto de agentes:

Teorema 3.2.4. Seja S uma sociedade biassertiva aberta (respectivamente, fechada). Então existe uma sociedade biassertiva aberta (respectivamente, fechada) contendo no máximo dois agentes, S_2, tal que:

$$SBA \models \phi \text{ sse } SBA_2 \models \phi$$
$$SBF \models \phi \text{ sse } SBF_2 \models \phi$$

A prova deste resultado encontra-se em (CARNIELLI; LIMA-MARQUES, 1999). De posse das definições de *SBA* e *SBF*, Carnielli e Lima-Marques (1999) provam que a lógica das sociedades biassertivas fechadas é I^1 e em Fernández (2001) prova que a lógica das sociedades biassertivas abertas é P^1.

O teorema abaixo provará a equivalência da semântica de matrizes de I^1 com a semântica de sociedades *SBF*, no sentido de que as duas semânticas possuem as mesmas tautologias. Ou seja, o que será provado é que para cada sociedade $SBF \in SOCbf$ existe uma valoração $v_S \in sem_{I^1}$ tal que $SBF \models \phi$ sse $v_S(\phi) = T$. Por outro lado, para cada valoração $v \in sem_{I^1}$ existe uma sociedade $SBF_v \in SOCbf$ tal que $v(\phi) = T$ sse $SBF_v \models \phi$. Daqui, pode ser estabelecido que $\Gamma \models_{sem_{I^1}} \phi$ sse $\Gamma \models_{SBF} \phi$. Essas considerações também se aplicam em relação às lógicas que trabalharemos nos capítulos posteriores.

Teorema 3.2.5. (**Conveniência**) Para toda sociedade *SBF* existe uma valoração $v_S \in sem_{I^1}$ que é tal que $SBF \models \phi$ sse $v_S(\phi) = T$, para toda fórmula ϕ.

Demonstração. Dada uma socidade $SBF_2 = \{Ag_1, Ag_2\}$[3], definimos uma valoração $v_S : \mathcal{V} \mapsto \{T, F^*, F\}$ tal como:
$v_S(\phi) = T$ sse $SBF_2 \models \phi$ e $SBF_2 \not\models \neg\phi$
$v_S(\phi) = F^*$ sse $SBF_2 \not\models \phi$ e $SBF_2 \not\models \neg\phi$
$v_S(\phi) = F$ sse $SBF_2 \not\models \phi$ e $SBF_2 \models \neg\phi$

O que tem que ser mostrado agora é que v_S é uma valoração de I^1. A prova é por indução na complexidade da fórmula. Q.E.D.

Teorema 3.2.6. (**Representabilidade**) Dada uma valoração $v \in sem_{I^1}$, podemos definir uma sociedade SBF_v tal que $SBF_v \models \phi$ sse $v(\phi) = T$.

Demonstração. Seja v uma valoração de I^1. Defina os seguintes conjuntos:

$$X = \{p \in \mathcal{V} : \ v(p) = T\}$$
$$Y = \{p \in \mathcal{V} : \ v(p) = F^*\}$$
$$Z = \{p \in \mathcal{V} : \ v(p) = F\}$$

Definimos uma *SBF* a partir de v como:

$$SBF_v = \{Ag_1, Ag_2\}$$

onde, $Ag_1 = X$ e $Ag_2 = X \cup Y$. O que tem que ser provado é que $SBF_v \models \phi$ sse $v(\phi) = T$ por indução na complexidade da fórmula. Q.E.D.

Dos teoremas acima, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 3.2.7. *A lógica das Sociedades Biassertivas Fechadas é* I^1.

[3]O Teorema 2.2.2. garante a existência dessa sociedade.

Demonstração. É uma consequência direta dos **Teoremas 3.2.5** e **Teoremas 3.2.6** e da **Definição 3.2.2**. Q.E.D.

As provas completas dos teoremas acima podem ser checadas em (CARNIELLI; LIMA-MARQUES, 1999). Como expusemos anteriormente, a semântica de matrizes de I^1 é completa e correta em relação à sua axiomática. Dada a equivalência da semântica de matrizes de I^1 com *SBF*, temos que *SBF* é também completa e correta com relação à axiomática de I^1. Em relação à P^1 um resultado similar pode ser provado:

Teorema 3.2.8. *A lógica das Sociedas Biassertivas Abertas é* P^1*.*

A prova deste teorema é similar à demonstração feita no caso de I^1 e pode ser encontrada em (FERNÁNDEZ, 2001). Em (FERNÁNDEZ; CONIGLIO, 2003), (FERNÁNDEZ, 2001), Fernández e Fernández & Coniglio apresentam uma generalização dessa semântica para mostrar que a lógica da sociedade que possui como agentes que são valorações da lógica I^n (resp., P^n) é I^{n+1} (resp. P^{n+1}). Assim, os resultados acima tornam-se casos particulares dessa generalização. Eles afirmam que ambas as semânticas de sociedades acima expostas são exemplos de sociedades chamadas *Semântica de Sociedades de Extensão Booleana*, e a razão para esse nome é devido ao fato que a aceitação das fórmulas complexas é definida de maneira similar à lógica clássica. Nesse sentido, os autores chamam essa forma de aceitação de *homomorfismo booleano*. Como os autores constatam em (FERNÁNDEZ; CONIGLIO, 2003) e (FERNÁNDEZ, 2001), se mudarmos as cláusulas de aceitação das fórmulas complexas, poderemos obter diferentes lógicas ainda que estejamos combinando somente valorações clássicas.

Capítulo 4

Semântica de Sociedades e Lógicas Trivaloradas

Como dissemos anteriormente, muitas lógicas multivaloradas surgiram com o objetivo de solucionar um problema ou modelar conceitos. A lógica $Ł_3$ foi proposta para solucionar o problema dos futuros contingentes, bem como para modelar o conceito de modalidades aléticas. A lógica LP foi, por sua vez, proposta para solucinar o problema dos paradoxos semânticos. E a lógica K_3 foi proposta por Kleene para modelar situações nas quais funções recursivas podem não estar definidas para determinados argumentos e também foi usada por Kripke para solucionar o problema dos paradoxos semânticos. Neste capítulo, apresentamos as semânticas de sociedades para as lógicas paraconsistentes LP, RM_3 e para as lógicas paracompletas K_3, e $Ł_3$. Como dissemos no capítulo anterior, mudando as cláusulas de aceitação das fórmulas complexas, podemos obter diferentes lógicas, mesmo combinando o mesmo tipo de agentes para essas diferentes sociedades: os agentes clássicos. Além disso, as condições de aceitação das fórmulas p e $\neg p$ para as semânticas de sociedades para LP e RM_3 serão as mesmas que as condições de aceitação de p e $\neg p$ em SBA. Analogamente, as condições de aceitação das fórmulas p e $\neg p$ para as semânticas de sociedades para K_3 e $Ł_3$ serão as mesmas condições de aceitação das fórmulas p e $\neg p$ da semântica de sociedades para I^1, SBF. Desse modo, podemos dizer que a alteração das condições de aceitação das fórmulas complexas nos dá *outras* semânticas de sociedades abertas e fechadas.

Exceto as lógicas $Ł_3$ e RM_3, para as quais apresentaremos sistemas axiomáticos, as lógicas LP e K_3 não são comumente apresentadas por meio desses sistemas. No caso de K_3, ela não possui tautologias (RESCHER, 1968), (PRIEST, 2008) e (AVRON, 1991), o que impossibilita a apresentação de um sistema de axiomas, já que os axiomas de uma lógica são tautologias. Mas podem ser apresentados para essas duas lógicas sistemas de dedução natural e de cálculo de sequentes (BAAZ et al., 1996), bem como tablôs analíticos (PRIEST, 2008), (CARNIELLI, 1987) e (BOLC; BOROWIK, 1992). Como a apresentação desses sistemas de prova poderia nos desviar do propósito desta dissertação, decidimos não tratá-los aqui.

4.1 A Lógica do Paradoxo

A Lógica do Paradoxo (LP) é apresentada em (PRIEST, 1979) por Priest, embora ela tenha sido proposta por Asenjo em (ASENJO et al., 1966). Essa lógica foi apresentada pelo autor para tratar de paradoxos semânticos, tal como o paradoxo do mentiroso, e de teoria dos conjuntos, tal como o paradoxo de Russell. A lógica LP possui a assinatura $\Sigma^{LP} = \{\neg, \wedge\}$ e seu conjunto de fórmulas é $For(\Sigma^{LP})$.

Em (PRIEST, 2008) e (PRIEST, 1979) LP é apresentada como sendo caracterizada pela matriz $\mathcal{M}_{LP} = (\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \neg, \wedge, \{1, \frac{1}{2}\}, \{0\})$ cujas operações têm as seguintes tabelas:

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

onde $\{1, \frac{1}{2}\}$ é o conjunto de valores distinguidos e 0 é o único valor não-distinguido.

Definição 4.1.1. Uma valoração v de LP é uma função $v : For(\Sigma^{LP}) \mapsto \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) $v(\neg\phi) = 1 - v(\phi)$;

(2) $v(\phi \wedge \psi) = min\{v(\phi), v(\psi)\}$;

O conjunto das valorações $v : For(\Sigma^{LP}) \mapsto \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ é chamado de *semântica* de LP, denotado por sem_{LP}.

A disjunção, $\vee$, é definida da seguinte maneira:

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

Consequentemente, sua tabela é a seguinte:

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

Beziau (2015) e Shramko e Wansing (2011) notam que LP não possui contradições. Beziau (2015) mostra que das matrizes de LP tem-se que para toda fórmula ϕ existe uma valoração v tal que $v(\phi) = \frac{1}{2}$. E a matriz de LP não possui operações c_i e c_i tais que $c_i(\frac{1}{2}) = 1$ (ou $c_i(\frac{1}{2}) = 0$) e $c_j(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$ (ou $c_j(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$). Além disso, para toda toda ϕ

existe uma valoração v tal que $v(\phi) = v(\neg\phi) = \frac{1}{2}$. Como $\frac{1}{2}$ é um valor distinguido, LP não possui contradições. Esse fenômeno é chamado por Beziau (2015) de *dialeteísmo trivial*, posição segundo a qual todas as fórmulas são *paradoxais* ou *dialeteias*. Segundo Priest e Berto (2017), uma dialeteia é uma fórmula ϕ tal que ϕ e $\neg\phi$ são ambas verdadeiras. Em outras palavras, todas as fórmulas contêm uma interpretação de acordo com a qual elas são tais que $v(\phi) = v(\neg\phi) = \frac{1}{2}$.

4.2 A Lógica Trivalorada RM_3

Como Priest observa (PRIEST, 1979) e (PRIEST, 2008) a regra do *Modus Ponens* não é válida em LP, devido ao fato de o conectivo de implicação ser definido em LP como $p \supset q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$. Sua tabela correspondente é a seguinte:

$\supset$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

Para checar que o *Modus Ponens* não é válido, considere uma valoração $v \in sem_{LP}$ tal que $v(p) = \frac{1}{2}$ e $v(q) = 0$. Assim, $v(p \supset q) = \frac{1}{2}$. Logo, $p, p \supset q \nvDash_{sem_{LP}} q$. Mas, segundo Priest (1979), LP não tem poder expressivo suficiente para definir uma implicação na qual essa regra valha. Além disso, uma implicação que não possui a regra do *Modus Ponens* não é muito útil para representar os raciocínios que fazemos mediante a implicação. De acordo com Priest (2008), um modo de sanar esse problema é estender LP com uma implicação na qual vale o *Modus Ponens*. Priest (2008) afirma que uma possível extensão de LP é a lógica RM_3. Segundo Avron (1991), RM_3 é a lógica mais forte na família das *lógicas relevantes* estudadas por Anderson e Belnap (1975).

A lógica RM_3 possui a assinatura $\Sigma^{RM_3} = \{\neg, \wedge, \rightarrow\}$ e seu conjunto de fórmulas é $For(\Sigma^{RM_3})$.

Brady (1982) apresenta a lógica RM_3 pelos seguintes esquemas de axiomas e regras de inferência:

(RM_3-1) $\phi \rightarrow \phi$

(RM_3-2) $(\phi \wedge (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$

(RM_3-3) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$

(RM_3-4) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi$

(RM_3-5) $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \wedge \gamma))$

(RM_3-6) $(\phi \wedge (\psi \vee \gamma)) \rightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \gamma))$

(RM_3-7) $(\phi \to \neg\phi) \to \neg\phi)$

(RM_3-8) $(\phi \to \neg\gamma) \to (\psi \to \neg\phi)$

(RM_3-9) $\neg\neg\phi \to \phi$

(RM_3-10) $(\neg\phi \wedge \psi) \to (\phi \to \psi)$

(RM_3-11) $\neg\phi \to (\phi \vee (\phi \to \psi))$

(MP) $\phi, \phi \to \psi/\psi$

(Regra 2) $\phi, \psi/\phi \wedge \psi$

(Regra 3) $\phi \to \psi, \gamma \to \delta/(\psi \to \gamma) \to (\phi \to \delta)$

Em (BRADY, 1982) é mostrado que a axiomática de RM_3 é completa e correta em relação à matriz $\mathcal{M}_{RM_3} = (\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \neg, \to, \vee, \{1, \frac{1}{2}\}, \{0\})$ cujas operações têm as seguintes tabelas:

$\to$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

onde $\{1, \frac{1}{2}\}$ é o conjunto de valores distinguidos e 0 é o único valor não-distinguido.

Definição 4.2.1. Uma valoração v de RM_3 é uma função $v : For(\Sigma^{RM_3}) \mapsto \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) $v(\neg\phi) = 1 - v(\phi)$;

(2) $v(\phi \wedge \psi) = min\{v(\phi), v(\psi)\}$;

(3) $v(\phi \to \psi) = \begin{cases} \frac{1}{2} & se \quad v(\phi) = v(\psi) = \frac{1}{2} \\ 0 & se \quad v(\phi) > v(\psi) \\ 1 & \text{caso} \quad \text{contrário} \end{cases}$

O conjunto das valorações $v : For(\Sigma^{RM_3}) \mapsto \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ é chamado de *semântica* de RM_3, denotado por sem_{RM_3}.

Da mesma maneira que em LP, a disjunção é definida como:

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

Como dissemos no início desta seção, a lógica RM_3 é, segundo Avron ((AVRON, 1991)), a mais forte da família das lógicas relevantes. Segundo Mares (2014)[1], as lógicas relevantes foram desenvolvidas com o objetivo de escapar dos *paradoxos da implicação material*, dentre os quais destacamos os seguintes:

1. $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
2. $p \rightarrow (q \vee \neg q)$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
4. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
5. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$

Nenhum dos itens 1-5 são tautologias de RM_3: Para checar que 1 não é uma tautologia, considere uma valoração $v \in sem_{RM_3}$ tal que $v(p) = \frac{1}{2}$ e $v(q) = 0$. Então, $v((p \wedge \neg p) \rightarrow q) = 0$. No caso de 2, considere uma valoração $v \in sem_{RM_3}$ tal que $v(p) = 1$ e $v(q) = \frac{1}{2}$. Logo, $v(p \rightarrow (q \vee \neg q)) = 0$. Para 3, considere uma valoração $v \in sem_{RM_3}$ tal que $v(p) = \frac{1}{2}$ e $v(q) = 1$. Logo, $v(p \rightarrow (q \rightarrow p)) = 0$. No caso de 4, considere uma valoração $v \in sem_{RM_3}$ tal que $v(p) = \frac{1}{2}$ e $v(q) = 0$. Então, $v(\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)) = 0$. Para 5, considere uma valoração $v \in sem_{RM_3}$ tal que $v(p) = 1$, $v(q) = \frac{1}{2}$ e $v(r) = 0$. Por conseguinte, $v((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)) = 0$.

De acordo com Robles et al. (2016), a lógica RM_3 captura aspectos interessantes de lógicas relevantes pelo fato de ela não ter como tautologias os itens 1-5 acima, especialmente os itens 3 e 4 que, segundo a autora, são os paradoxos mais ofensivos da implicação. Mas, segundo a autora, RM_3 não pode ser considerada como sendo propriamente uma lógica relevante por ela não satisfazer a propriedade de *partilhamento de variáveis* que as lógicas relevantes satisfazem. Essa propriedade pode ser enunciada da seguinte maneira: Seja $\mathcal{L}$ uma lógica relevante. Se $\phi \rightarrow \psi$ é uma tautologia de $\mathcal{L}$, então ϕ e ψ têm ao menos uma variável em comum. Embora RM_3 não satisfaça essa propriedade, ela satisfaz a propriedade de *quase-relevância*, que pode ser enunciada da seguinte maneira: Se $\phi \rightarrow \psi$ é uma tautologia de $\mathcal{L}$, então (1) ϕ e ψ têm ao menos uma variável em comum ou (2) $\neg\phi$ e ψ são tautologias de $\mathcal{L}$. Nesse sentido RM_3 é uma lógica quase-relevante.

Segundo Ciucci e Dubois (2015), ainda que a lógica RM_3 não tenha sido proposta como uma lógica paraconsistente, ela pode ser tomada como tal por não validar a inferência $p, \neg p \models q$. Para ver que essa inferência não é válida em RM_3, considere uma valoração $v \in sem_{RM_3}$ tal que $v(p) = \frac{1}{2}$ e $v(q) = 0$. Daqui, $p, \neg p \not\models_{sem_{RM_3}} q$.

Dado que o nosso objetivo é apresentar uma semântica de sociedades para RM_3, a questão é saber como representaremos seus conectivos em sua respectiva semântica de

[1]Mares (2014) discute alguns desenvolvimentos e algumas intuições que são bases das lógicas relevantes. Já Anderson e Belnap (1975) expõem uma série de lógicas relevantes bem como resultados acerca delas.

sociedades. O único conectivo cuja representação não é imediatamente intuitiva é o conectivo de implicação. Para tratar desse conectivo em especial, exibiremos suas condições de verdade mediante valorações da seguinte maneira:

(1) Se $(v(\neg\phi) = 1$ ou $v(\phi) = v(\neg\phi))$ e $v(\psi) = 1$, então $v(\phi \to \psi) = 1$;

(2) Se $v(\phi) = v(\neg\phi)$ e $v(\psi) = v(\neg\psi)$, então $v(\phi \to \psi) = v(\neg(\phi \to \psi))$;

(3) Se $v(\phi) = 1$ e $(v(\neg\psi) = 1$ ou $v(\psi) = v(\neg\psi))$, então $v(\neg(\phi \to \psi)) = 1$.

Quando escrevemos $v(\neg\phi) = 1$, queremos dizer que $v(\phi) = 0$. Quando escrevemos $v(\phi) = v(\neg\phi)$, queremos dizer que $v(\phi) = \frac{1}{2}$. Escrever as valorações dessa maneira será muito útil quando expusermos a semântica de sociedades para RM_3. Essa ideia de descrever as condições de verdade mediante as valorações da lógica em questão foi proposta por Marcos (2000), Béziau (1999) e por Caleiro et al. (2007) para obter um método que permita apresentar uma semântica de bivalorações para lógicas finitamente multivaloradas.

Marcos (1999) constata que a matriz da lógica RM_3 não é capaz de definir operações c_i e c_j tais que $c_i(\frac{1}{2}) = 1$ (ou $c_i(\frac{1}{2}) = 0$) e $c_j(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$ (ou $c_j(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0)$[2]. Isto é, caso uma operação tenha como entrada somente o valor $\frac{1}{2}$, o valor resultante é $\frac{1}{2}$. Nesse caso, para toda fórmula ϕ haverá uma valoração v tal que $v(\phi) = \frac{1}{2}$. Da tabela da negação, temos que $v(\phi) = v(\neg\phi) = \frac{1}{2}$. Como $\frac{1}{2}$ é um valor distinguido, RM_3 não possui contradições.

4.3 A Lógica Trivalorada de Kleene K_3

A lógica K_3 possui a assinatura $\Sigma^{K_3} = \{\neg, \wedge\}$ e seu conjunto de fórmulas é $For(\Sigma^{K_3})$. Ela é apresentada como sendo caracterizada pela seguinte matriz $\mathcal{M}_{K_3} = (\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \neg, \wedge, \{1\}, \{\frac{1}{2}, 0\})$ cujas operações possuem as mesmas tabelas que as de LP, apresentada na seção **3.1**. A diferença é que 1 é o único valor distinguido e $\frac{1}{2}$ e 0 são os valores não-distinguidos. A definição de valoração de K_3 é similar à **Definição 4.1.1**.

Como notam Rescher (1968)), Bolc e Borowik (1992), Priest (2008) e Avron (1991), K_3 não possui tautologias. Isso se deve ao fato de que a matriz de K_3 não tem operações c_i e c_j tais que $c_j(\frac{1}{2}) = 1$ (ou $c_j(\frac{1}{2}) = 0)$ $c_j(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$ (ou $c_j(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0)$. Desse modo, para toda toda ϕ existe uma valoração v tal que $v(\phi) = v(\neg\phi) = \frac{1}{2}$. Já que $\frac{1}{2}$ é um valor não-distinguido, K_3, não possui tautologias.

[2]Na verdade, essa constatação de Marcos (1999) foi em relação à lógica $RM_3^{\supset}$, também chamada de *Pac* (CARNIELLI; CONIGLIO; MARCOS, 2007). A diferença de $RM_3^{\supset}$ para RM_3 consiste no conectivo de implicação. Contudo, a partir dos conectivos de RM_3, podemos definir a implicação de $RM_3^{\supset}$ da seguinte maneira: $p \supset q \equiv q \vee (p \to q)$. A recíproca também é válida: dos conectivos de $RM_3^{\supset}$ definimos a implicação de RM_3 da seguinte maneira: $p \to q \equiv (p \supset q) \wedge (\neg q \supset \neg p)$. Nesse sentido, podemos dizer que as matrizes de $RM_3^{\supset}$ e de RM_3 são interdefiníveis.

4.4 A Lógica Trivalorada de Łukasiewicz: Ł$_3$

Como vimos anteriormente, a lógica K_3 não possui tautologias em virtude do fato que para toda fórmula $\phi \in For(\Sigma^{K_3})$, existe uma valoração v que é tal que $v(\phi) = \frac{1}{2}$. Consequentemente, $p \rightarrow p$ não é uma tautologia, já que o conectivo de implicação de K_3 é definido da mesma maneira que em LP. Segundo Priest (2008), um modo de fortalecer esse sistema é acrescentar um conectivo de implicação $\rightarrow$ tal que $v(\phi \rightarrow \phi) = 1$, para toda v. Essa extensão resulta na lógica Ł$_3$. Já que apresentamos os detalhes dessa lógica no Capítulo 2, exporemos aqui somente a matriz dessa lógica para a comodidade do leitor. A matriz de Ł$_3$ é a estrutura $\mathcal{M}_{Ł_3} = (\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \neg, \rightarrow, \{1\}, \{\frac{1}{2}, 0\})$:

$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

As definições de valoração, modelo, classe de modelo, tautologia e consequência lógica foram apresentadas anteriormente. Em (MARCOS, 2000), Marcos apresenta as condições de verdade da implicação da seguinte maneira:

(1) Se $v(\neg\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$ ou $v(\alpha) = v(\neg\alpha) = v(\beta) = v(\neg\beta)$, então $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$;

(2) Se $(v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = v(\neg\beta))$ ou $(v(\alpha) = v(\neg\alpha)$ e $v(\neg\beta) = 1)$, então $v(\alpha \rightarrow \beta) = v(\neg(\alpha \rightarrow \beta))$;

(3) Se $v(\alpha) = 1$ e $v(\neg\beta) = 1$, então $v(\neg(\alpha \rightarrow \beta)) = 1$

Semelhante ao caso de RM_3, descrever as trivalorações da maneira como mostramos acima será muito útil, especialmente os itens (1) e (3), quando expusermos a semântica de sociedades para Ł$_3$.

4.5 Semântica de Sociedades para LP

Nesta seção definiremos uma semântica de sociedades para a lógica LP. Uma sociedade para LP, que denotamos por SLP é um conjunto não-vazio de agentes da lógica clássica que, por sua vez, foram definidos anteriormente. Essa sociedade é construída a partir da mesma linguagem da lógica dos agentes, que é a lógica proposicional clássica. $SLP \models \phi$ (resp. $SLP \not\models \phi$) significa que a sociedade *aceita* (resp. *rejeita*) ϕ.

Definição 4.5.1. SLP é uma sociedade *aberta* cuja relação de aceitação é definida da seguinte maneira:

(SLP - 1) $SLP \models p$ sse existe $Ag_i \in SLP, Ag_i(p) = 1$

(SLP - 2) $SLP \models \neg p$ sse existe $Ag_i \in SLP, Ag_i(p) = 0$

(SLP - 3) $SLP \models \neg\neg\phi$ sse $SLP \models \phi$

(SLP - 4) $SLP \models \phi \wedge \psi$ sse $SLP \models \phi$ e $SLP \models \psi$

(SLP - 5) $SLP \models \neg(\phi \wedge \psi)$ sse $SLP \models \neg\phi$ ou $SLP \models \neg\psi$

Seja *SOCLP* o conjunto de todas as sociedades *SLP*. Uma fórmula ϕ é *satisfatível* em *SLP* se existe uma sociedade $SLP \in SOCLP$ tal que $SLP \models \phi$. Uma fórmula ϕ é uma *tautologia* em *SLP* se toda sociedade $SLP \in SOCLP$ é tal que $SLP \models \phi$. E dizemos que α é *consequência lógica* do conjunto de fórmulas Γ ($\Gamma \models_{SLP} \alpha$) sse: se, para toda sociedade $SLP \in SOCLP$, $SLP \models \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então $SLP \models \alpha$.

Como tomamos a negação e a conjunção como primitivos, podemos definir a disjunção, que é definida da mesma maneira que na lógica LP. Consequentemente, suas condições de aceitação em *SLP* são as seguintes:

(SLP - 6) $SLP \models \phi \vee \psi$ *sse* $SLP \models \phi$ ou $SLP \models \psi$

(SLP - 7) $SLP \models \neg(\phi \vee \psi)$ *sse* $SLP \models \neg\phi$ e $SLP \models \neg\psi$

Mesmo que SLP seja uma sociedade aberta cujas cláusulas de aceitação para p e $\neg p$ sejam as mesmas de *SBA*, suspendemos o juízo no que diz respeito ao fato de se SLP é biassertiva. Conjecturamos, contudo, que pode ser provado para SLP um resultado análogo ao **Teorema 3.2.4**, que foi provado em relação às semânticas SBA e SBF. Além disso, a única restrição que fizemos em relação à cardinalidade da sociedade é que ela tenha um número de agentes maior ou igual a dois. Caso a sociedade tivesse somente um agente, a lógica da sociedade seria a lógica do agente. Do modo como definimos uma sociedade não excluímos a possibilidade de a sociedade conter um número infinito de agentes. Mesmo assim, supomos que seja igualmente possível checar as tautologias de SLP através de um número finito de agentes, uma vez que as definições de tautologia e consequência lógica consideram um conjunto *SOCLP* de sociedades SLP, podendo ser ou finitas ou infinitas. Essas considerações acerca da cardinalidade da sociedade se aplicam de igual modo às demais semânticas de sociedades que serão apresentadas neste capítulo. Provaremos agora que:

Teorema 4.5.2. (**Conveniência**) Dada uma sociedade $SLP \in SOCLP$, podemos definir uma função v_S que é uma valoração de LP tal que, para toda fórmula ϕ, $v_S(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ sse $SLP \models \phi$.

Demonstração. Defina $v_S : For(\Sigma^{LP}) \mapsto \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ como:
$v_S(\phi) = 1$ sse $SLP \models \phi$ e $SLP \not\models \neg\phi$

$v_S(\phi) = \frac{1}{2}$ sse $SLP \models \phi$ e $SLP \models \neg\phi$
$v_S(\phi) = 0$ sse $SLP \not\models \phi$ e $SLP \models \neg\phi$

Para toda fórmula não atômica, mostraremos que v_S é uma valoração de LP por indução na complexidade da fórmula, isto é, devemos mostrar que v_S é definida de acordo com as tabelas de verdade de LP. O caso atômico segue da definição de v_S.

Caso 1 : Negação.

Caso 1.1 : Se $v_S(\phi) = 1$, então, por definição $SLP \models \phi$ e $SLP \not\models \neg\phi$. Pela definição de SLP, $SLP \models \neg\neg\phi$. Já que $SLP \not\models \neg\phi$ e $SLP \models \neg\neg\phi$, então $v_S(\neg\phi) = 0$.

Caso 1.2 : Se $v_S(\phi) = \frac{1}{2}$, então, por definição, $SLP \models \phi$ e $SLP \models \neg\phi$. Pela definição de SLP, $SLP \models \neg\neg\phi$. Já que $SLP \models \neg\phi$ e $SLP \models \neg\neg\phi$, então $v_S(\neg\phi) = \frac{1}{2}$.

Caso 1.3 : Se $v_S(\phi) = 0$, então, por definição, $SLP \not\models \phi$ e $SLP \models \neg\phi$. Pela definição de SLP, $SLP \not\models \neg\neg\phi$. Já que $SLP \models \neg\phi$ e $SLP \not\models \neg\neg\phi$, então $v_S(\neg\phi) = 1$.

Caso 2 : Conjunção.

Caso 2.1 : Se $v_S(\phi) = 1$, então, por definição, $SLP \models \phi$ e $SLP \not\models \neg\phi$. Assim, temos os seguintes subcasos:

Caso 2.1.1 : Se $v_S(\psi) = 1$, então, por definição, $SLP \models \psi$ e $SLP \not\models \neg\psi$. Pela definição de SLP, $SLP \models \phi \wedge \psi$ e $SLP \not\models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = 1$.

Caso 2.1.2 : Se $v_S(\psi) = \frac{1}{2}$, então, por definição, $SLP \models \psi$ e $SLP \models \neg\psi$. Pela definição de SLP, $SLP \models \phi \wedge \psi$ e $SLP \models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = \frac{1}{2}$.

Caso 2.1.3 : Se $v_S(\psi) = 0$, então, por definição, $SLP \not\models \psi$ e $SLP \models \neg\psi$. Pela definição de SLP, $SLP \not\models \phi \wedge \psi$ e $SLP \models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = 0$.

Caso 2.2 : Se $v_S(\phi) = \frac{1}{2}$, então, por definição, $SLP \models \phi$ e $SLP \models \neg\phi$. Assim, temos os seguintes subcasos:

Caso 2.2.1 : Se $v_S(\psi) = 1$, então, por definição, $SLP \models \psi$ e $SLP \not\models \neg\psi$. Pela definição de SLP, $SLP \models \phi \wedge \psi$ e $SLP \models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = \frac{1}{2}$.

Caso 2.2.2 : Se $v_S(\psi) = \frac{1}{2}$, então, por definição, $SLP \models \psi$ e $SLP \models \neg\psi$. Pela definição de SLP, $SLP \models \phi \wedge \psi$ e $SLP \models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = \frac{1}{2}$.

Caso 2.2.3 : Se $v_S(\psi) = 0$, então, por definição, $SLP \not\models \psi$ e $SLP \models \neg\psi$. Pela definição de SLP, $SLP \not\models \phi \wedge \psi$ e $SLP \models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = 0$.

Caso 2.3 : Se $v_S(\phi) = 0$, então, por definição, $SLP \not\models \phi$ e $SLP \models \neg\phi$. Assim, temos os seguintes subcasos:

Caso 2.3.1 : Se $v_S(\psi) = 1$, então, por definição, $SLP \models \psi$ e $SLP \not\models \neg\psi$. Pela definição de SLP, $SLP \not\models \phi \wedge \psi$ e $SLP \models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = 0$.

Caso 2.3.2 : Se $v_S(\psi) = \frac{1}{2}$, então, por definição, $SLP \models \psi$ e $SLP \models \neg\psi$. Pela definição de SLP, $SLP \not\models \phi \wedge \psi$ e $SLP \models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = 0$.

Caso 2.3.3 : Se $v_S(\psi) = 0$, então, por definição, $SLP \not\models \psi$ e $SLP \models \neg\psi$. Pela definição de SLP, $SLP \not\models \phi \wedge \psi$ e $SLP \models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = 0$.

Este caso conclui a prova. Logo, $v_S(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ sse $SLP \models \phi$. Q.E.D.

Teorema 4.5.3. (**Representabilidade**) Dada uma valoração $v \in sem_{LP}$, podemos definir uma sociedade SLP_v, tal que $SLP_v \models \phi$ sse $v(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$, para toda ϕ.

Demonstração. Seja v uma valoração de LP. Considere os seguintes conjuntos:

$$X = \{p \in \mathcal{V} :\ v(p) = 1\}$$
$$Y = \{p \in \mathcal{V} :\ v(p) = \tfrac{1}{2}\}$$
$$Z = \{p \in \mathcal{V} :\ v(p) = 0\}$$

Definimos uma SLP como:

$$SLP_v = \{Ag_1, Ag_2\}$$

Onde, $Ag_1 = X$ e $Ag_2 = X \cup Y$.

Estenderemos agora as valorações de Ag_i para as fórmulas moleculares, com o objetivo de provar, por indução na complexidade de ϕ que $SLP_v \models \phi$ sse $v(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

1 Quando ϕ é atômica, temos:

Se $v(p) \in \{1, \frac{1}{2}\}$, então $p \in X \cup Y$. Da construção dos agentes, temos que $Ag_2(p) = 1$. Logo, $SLP_v \models p$. Reciprocamente, se $SLP_v \models p$, então existe um agente $Ag_{i=1,2}$ tal que $Ag_i(p) = 1$. Da construção dos agentes, temos que $Ag_2(p) = 1$. Logo, $v(p) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

2 Quando $\phi = \neg\psi$ e ψ é atômica, temos:

Se $v(\neg p) \in \{1, \frac{1}{2}\}$, temos $v(p) \in \{0, \frac{1}{2}\}$. Então,$p \in Y \cup Z$ e $Ag_1(p) = 0$. Portanto, $SLP \models \neg p$. Reciprocamente, se $SLP \models \neg p$, então existe um agente Ag_i $(i = 1, 2)$ tal que $Ag_i(p) = 0$. Já que $Ag_1 = X$, temos que $p \in Y \cup Z$. Assim, $v(p) \in \{0, \frac{1}{2}\}$ e, então, $v(\neg p) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

3 Quando $\phi = \neg\neg\psi$ e ψ é atômica, temos que:

$SLP_v \models \neg\neg p$ sse (por SLP - 3) $SLP_v \models p$, que segue direto da definição dos agentes. Assim, $v(p) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

4 Quando $\phi = \neg\alpha$ e $\alpha = (\psi \wedge \gamma)$, temos:

$SLP_v \models \neg(\psi \wedge \gamma)$ sse $SLP_v \models \neg\psi$ ou $SLP_v \models \neg\gamma$ (por SLP - 5) sse (por definição) $v(\neg\psi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ ou $v(\neg\gamma) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ sse temos as seguintes possibilidades:

4.i $v(\psi) = 0$ e $v(\gamma) = 0$. Daqui, $v(\neg(\psi \wedge \gamma)) = 1$

4.ii $v(\psi) = \frac{1}{2}$ e $v(\gamma) = \frac{1}{2}$. Daqui, $v(\neg(\psi \wedge \gamma)) = \frac{1}{2}$.

4.iii $v(\psi) = \frac{1}{2}$ e $v(\gamma) = 0$. Daqui, $v(\neg(\psi \wedge \gamma)) = 1$.

4.iv $v(\psi) = 0$ e $v(\gamma) = \frac{1}{2}$. Daqui, $v(\neg(\psi \wedge \gamma)) = 1$.

De **4.i-4.iv**, temos que $v(\neg(\psi \wedge \gamma)) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

5 Quando $\phi = \psi \wedge \gamma$, temos:

$SLP_v \models \psi \wedge \gamma$ sse $SLP_v \models \psi$ e $SLP_v \models \gamma$ (por SLP - 4) sse (por definição) $v(\psi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ e $v(\gamma) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ sse temos as seguintes possibilidades:

5.i $v(\psi) = 1$ e $v(\gamma) = 1$. Daqui, $v(\psi \wedge \gamma) = 1$.

5.ii $v(\psi) = \frac{1}{2}$ e $v(\gamma) = \frac{1}{2}$. Daqui, $v(\psi \wedge \gamma) = \frac{1}{2}$.

5.iii $v(\psi) = \frac{1}{2}$ e $v(\gamma) = 1$. Daqui, $v(\psi \wedge \gamma) = \frac{1}{2}$.

5.iv $v(\psi) = 1$ e $v(\gamma) = \frac{1}{2}$. Daqui, $v(\psi \wedge \gamma) = \frac{1}{2}$.

De **5.i-5.iv**, temos que $v(\psi \wedge \gamma) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

Daqui, temos que $SLP_v \models \phi$ sse $v(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$, como desejado. E isso conclui a prova. Q.E.D.

Corolário 4.5.4. A lógica de SLP é LP.

Demonstração. Consequência imediata do **Teorema 4.5.2**, **Teorema 4.5.3** e da **Definição 4.5.1**. Q.E.D.

4.6 Semântica de Sociedades para RM_3

Uma sociedade para RM_3, que chamaremos SRM_3 é um conjunto não-vazio de agentes da lógica clássica que, por sua vez, foram definidos anteriormente. Essa sociedade é construída a partir da mesma linguagem da lógica dos agentes, que é a lógica proposicional clássica. $SRM_3 \models \phi$ (resp. $SRM_3 \not\models \phi$) significa que a sociedade *aceita* (resp. *rejeita*) ϕ.

Definição 4.6.1. SRM_3 é uma sociedade aberta cuja relação de aceitação é definida da seguinte maneira:

As cláusulas de aceitação (SRM_3 - 1) - (SRM_3 - 5) são exatamente as mesmas de SLP (**Definição 4.5.1**). Além disso:

(SRM_3 - 6) $SRM_3 \models \phi \rightarrow \psi$ sse $SRM_3 \not\models \phi$ ou $SRM_3 \not\models \neg\psi$ ou (($SRM_3 \models \phi$ e $SRM_3 \models \neg\phi$) e ($SRM_3 \models \psi$ e $SRM_3 \models \neg\psi$))

(SRM_3 - 7) $SRM_3 \models \neg(\phi \rightarrow \psi)$ sse $SRM_3 \models \phi$ e $SRM_3 \models \neg\psi$

As definições de tautologia e consequência lógica de SRM_3 são as mesmas que a da **Definição 4.5.1.**

A disjunção é definida da mesma maneira que em *SLP*.

A prova do teorema abaixo é similar ao caso de SLP, exceto que nesta semântica trataremos dos casos do conectivo de implicação. Assim, exporemos somente os casos da implicação.

Teorema 4.6.2. (**Conveniência**) Dada uma sociedade $SRM_3 \in SOCRM3$, podemos definir uma função v_S que e uma valoração de RM_3 tal que, para toda ϕ, $v_S(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ sse $SRM_3 \models \phi$.

Demonstração. Defina $v_S : For(\Sigma^{RM_3}) \mapsto \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ como:
$v_S(\phi) = 1$ sse $SRM_3 \models \phi$ e $SRM_3 \not\models \neg\phi$
$v_S(\phi) = \frac{1}{2}$ sse $SRM_3 \models \phi$ e $SRM_3 \models \neg\phi$
$v_S(\phi) = 0$ sse $SRM_3 \not\models \phi$ e $SRM_3 \models \neg\phi$

Para toda fórmula não atômica, mostraremos que v_S é uma valoração de RM_3 por indução na complexidade da fórmula, isto é, devemos mostrar que v_S é definida de acordo com as tabelas de verdade de RM_3. O caso atômico segue da definição de v_S.

A verificação dos casos (1 e 2) da negação e da conjunção é exatamente a mesma feita no **Teorema 4.5.2**. Desse modo, nos ocuparemos aqui somente com o caso da implicação.

Caso 1 : Implicação

Caso 1.1 : Se $v_S(\phi) = 0$, então, por definição, $SRM_3 \not\models \phi$ e $SRM_3 \models \neg\phi$. Pela definição de SRM_3, $SRM_3 \models \phi \rightarrow \psi$ e $SRM_3 \not\models \neg(\phi \rightarrow \psi)$. Assim, $v_S(\phi \rightarrow \psi) = 1$.

Caso 1.2 : Se $v_S(\phi) = 1$, então, por definição, $SRM_3 \models \phi$ e $SRM_3 \nvdash \neg\phi$. Assim, temos os seguintes subcasos:

Caso 1.2.1 : $v_S(\psi) = 1$, então, por definição, $SRM_3 \models \psi$ e $SRM_3 \not\models \neg\psi$. Pela definição de SRM_3, $SRM_3 \models \phi \rightarrow \psi$ e $SRM_3 \not\models \neg(\phi \rightarrow \psi)$. Assim, $v_S(\phi \rightarrow \psi) = 1$.

Caso 1.2.2 : $v_S(\psi) = \frac{1}{2}$, então, por definição, $SRM_3 \models \psi$ e $SRM_3 \models \neg\psi$. Pela definição de SRM_3, $SRM_3 \not\models \phi \rightarrow \psi$ e $SRM_3 \models \neg(\phi \rightarrow \psi)$. Assim, $v_S(\phi \rightarrow \psi) = 0$.

Caso 1.2.3 : Se $v_S(\psi) = 0$, então, por definição, $SRM_3 \models \phi$ e $SRM_3 \models \neg\psi$. Pela definição de SRM_3, $SRM_3 \not\models \phi \rightarrow \psi$ e $SRM_3 \models \neg(\phi \rightarrow \psi)$. Assim, $v_S(\phi \rightarrow \psi) = 0$.

Caso 1.3 : $v_S(\phi) = \frac{1}{2}$, então, por definição, $SRM_3 \models \phi$ e $SRM_3 \models \neg\phi$. Temos então os seguintes subcasos:

Caso 1.3.1 : $v_S(\psi) = 1$, então, por definição, $SRM_3 \models \psi$ e $SRM_3 \not\models \neg\psi$. Pela definição de SRM_3, $SRM_3 \models \phi \to \psi$ e $SRM_3 \not\models \neg(\phi \to \psi)$. Assim, $v_S(\phi \to \psi) = 1$.

Caso 1.3.2 : $v_S(\psi) = \frac{1}{2}$, então, por definição, $SRM_3 \models \psi$ e $SRM_3 \models \neg\psi$. Pela definição de SRM_3, $SRM_3 \models \phi \to \psi$ e $SRM_3 \models \neg(\phi \to \psi)$. Assim, $v_S(\phi \to \psi) = \frac{1}{2}$.

Caso 1.3.3 : Se $v_S(\psi) = 0$, então, por definição, $SRM_3 \not\models \psi$ e $SRM_3 \models \neg\psi$. Pela definição de SRM_3, $SRM_3 \not\models \phi \to \psi$ e $SRM_3 \models \neg(\phi \to \psi)$. Assim, $v_S(\phi \to \psi) = 0$.

E isso conclui a prova. Logo, $v_S(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ sse $SRM_3 \models \phi$. Q.E.D.

Teorema 4.6.3. (**Representabilidade**) Dada uma valoração $v \in sem_{RM_3}$, podemos definir uma sociedade SRM_{3v} tal que $SRM_{3v} \models \phi$ sse $v(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

Demonstração. Seja v uma valoração de RM_3. Considere os seguintes conjuntos:

$$X = \{p \in \mathcal{V} : \ v(p) = 1\}$$
$$Y = \{p \in \mathcal{V} : \ v(p) = \tfrac{1}{2}\}$$
$$Z = \{p \in \mathcal{V} : \ v(p) = 0\}$$

Definimos uma SRM_3 como:

$$SRM_{3v} = \{Ag_1, Ag_2\}$$

Onde, $Ag_1 = X$ e $Ag_2 = X \cup Y$.

Estenderemos agora as valorações de Ag_i para as fórmulas moleculares, com o objetivo de provar, por indução na complexidade de ϕ que $SRM_{3v} \models \phi$ sse $v(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

A verificação dos casos $\phi = p$ ($p \in \mathcal{V}$), $\phi = \neg p$ ($p \in \mathcal{V}$), $\phi = \neg\neg\psi$ e $\psi = p$ ($p \in \mathcal{V}$), $\phi = \neg(\psi \wedge \gamma)$ e $\phi = \psi \wedge \gamma$ é exatamente a mesma feita no **Teorema 3.5.3**. Assim, nos ocuparemos única e exclusivamente dos casos envolvendo a implicação.

1 Quando $\phi = \neg(\psi \to \gamma)$, temos:
$SRM_{3v} \models \neg(\psi \to \gamma)$ sse $SRM_{3v} \models \psi$ e $SRM_{3v} \models \neg\gamma$ sse (por definição) $v(\psi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ e $v(\neg\gamma) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ sse $v(\neg(\psi \to \gamma)) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

2 Quando $\phi = \psi \to \gamma$, temos:
$SRM_{3v} \models \psi \to \gamma$ sse $SRM_{3v} \not\models \psi$ ou $SRM_{3v} \not\models \neg\gamma$ ou $((SRM_{3v} \models \psi$ e $SRM_{3v} \models \neg\psi)$ e $(SRM_{3v} \models \gamma$ e $SRM_{3v} \models \neg\gamma))$ sse (por definição) $v(\psi) = 0$ ou $v(\neg\gamma) = 0$ ou $((v(\psi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ e $v(\neg\psi) \in \{1, \frac{1}{2}\})$ e $(v(\gamma) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ e $v(\neg\gamma) \in \{1, \frac{1}{2}\}))$ sse $v(\psi \to \gamma) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

Daqui, temos que $SRM_{3v} \models \phi$ sse $v(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$, como desejado. E isso conclui a prova. Logo, $SRM_{3v} \models \phi$ sse $v(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$. Q.E.D.

Corolário 4.6.4. A lógica de SRM_3 é RM_3.

Demonstração. Consequência imediata dos dois teoremas anteriores e da definição de SRM_3. Q.E.D.

4.7 Semântica de Sociedades para K_3

Nesta seção definiremos uma semântica de sociedades para a lógica K_3 e chamaremo-la de SK_3. Da mesma maneira que em *SLP*, SK_3 é um conjunto não-vazio de agentes clássicos. Da mesma maneira que em *SLP*, $SK_3 \models \phi$ (resp. $SK_3 \not\models \phi$) significa que a sociedade *aceita* (resp. *rejeita*) ϕ.

Definição 4.7.1. SK_3 é uma sociedade fechada cuja relação de aceitação é definida da seguinte maneira:

(SK_3 - 1) $SK_3 \models p$ sse todo $Ag_i \in SK_3, Ag_i(p) = 1$

(SK_3 - 2) $SK_3 \models \neg p$ sse todo $Ag_i \in SK_3, Ag_i(p) = 0$

As cláusulas (SK_3 - 3) - (SK_3 - 5) são as mesmas de *SLP*.

As definições de tautologia e consequência lógica de SK_3 são as mesmas que a da **Definição 4.5.1.**

Como tomamos a negação e a conjunção como primitivos, a disjunção é definida da mesma maneira que em SLP. Consequentemente, as condições de aceitação da disjunção em SK_3 são as mesmas que as de *SLP*.

Teorema 4.7.2. (**Conveniência**) Dada uma sociedade $SK_3 \in SOCK3$, podemos definir uma função v_S que é uma valoração de K_3 tal que, para toda fórmula ϕ, $v_S(\phi) = 1$ sse $SK_3 \models \phi$.

Demonstração. Defina $v_S : For(\Sigma^{K_3}) \mapsto \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ como:
$v_S(\phi) = 1$ sse $SK_3 \models \phi$ e $SK_3 \not\models \neg\phi$
$v_S(\phi) = \frac{1}{2}$ sse $SK_3 \not\models \phi$ e $SK_3 \not\models \neg\phi$
$v_S(\phi) = 0$ sse $SK_3 \not\models \phi$ e $SK_3 \models \neg\phi$

Para toda fórmula não atômica, mostraremos que v_S é uma valoração de K_3 por indução na complexidade da fórmula, isto é, devemos mostrar que v_S é definida de acordo com as tabelas de verdade de K_3. O caso atômico segue da definição de v_S.

Caso 1 : Negação.

Caso 1.1 : Se $v_S(\phi) = 1$, então, por definição, $SK_3 \models \phi$ e $SK_3 \not\models \neg\phi$. Pela definição de SK_3, $SK_3 \models \neg\neg\phi$. Já que $SK_3 \not\models \neg\phi$ e $SK_3 \models \neg\neg\phi$, então $v_S(\neg\phi) = 0$.

Caso 1.2 : Se $v_S(\phi) = \frac{1}{2}$, então, por definição, $SK_3 \nvDash \phi$ e $SK_3 \nvDash \neg\phi$. Pela definição de SK_3, $SK_3 \nvDash \neg\neg\phi$. Já que $SK_3 \nvDash \neg\phi$ e $SK_3 \nvDash \neg\neg\phi$, então $v_S(\neg\phi) = \frac{1}{2}$.

Caso 1.3 : Se $v_S(\phi) = 0$, então, por definição, $SK_3 \nvDash \phi$ e $SK_3 \models \neg\phi$. Pela definição de SK_3, $SK_3 \nvDash \neg\neg\phi$. Já que $SK_3 \models \neg\phi$ e $SK_3 \nvDash \neg\neg\phi$, então $v_S(\neg\phi) = 1$.

Caso 2 : Conjunção.

Caso 2.1 : Se $v_S(\phi) = 1$, então, por definição, $SK_3 \models \phi$ e $SK_3 \nvDash \neg\phi$. Assim, temos os seguintes subcasos:

Caso 2.1.1 : Se $v_S(\psi) = 1$, então, por definição, $SK_3 \models \psi$ e $SK_3 \nvDash \neg\psi$. Pela definição de SK_3, $SK_3 \models \phi \wedge \psi$ e $SK_3 \nvDash \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = 1$.

Caso 2.1.2 : Se $v_S(\psi) = \frac{1}{2}$, então, por definição, $SK_3 \nvDash \psi$ e $SK_3 \nvDash \neg\psi$. Pela definição de SK_3, $SK_3 \nvDash \phi \wedge \psi$ e $SK_3 \nvDash \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = \frac{1}{2}$.

Caso 2.1.3 : Se $v_S(\psi) = 0$, então, por definição, $SK_3 \nvDash \psi$ e $SK_3 \models \neg\psi$. Pela definição de SK_3, $SK_3 \nvDash \phi \wedge \psi$ e $SK_3 \models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = 0$.

Caso 2.2 : Se $v_S(\phi) = \frac{1}{2}$, então, por definição, $SK_3 \models \phi$ e $SK_3 \models \neg\phi$. Assim, temos os seguintes subcasos:

Caso 2.2.1 : Se $v_S(\psi) = 1$, então, por definição, $SK_3 \models \psi$ e $SK_3 \nvDash \neg\psi$. Pela definição de SK_3, $SK_3 \models \phi \wedge \psi$ e $SK_3 \nvDash \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = \frac{1}{2}$.

Caso 2.2.2 : Se $v_S(\psi) = \frac{1}{2}$, então, por definição, $SK_3 \nvDash \psi$ e $SK_3 \nvDash \neg\psi$. Pela definição de SK_3, $SK_3 \nvDash \phi \wedge \psi$ e $SK_3 \nvDash \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = \frac{1}{2}$.

Caso 2.2.3 : Se $v_S(\psi) = 0$, então, por definição, $SK_3 \nvDash \psi$ e $SK_3 \models \neg\psi$. Pela definição de SK_3, $SK_3 \nvDash \phi \wedge \psi$ e $SK_3 \models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = 0$.

Caso 2.3 : Se $v_S(\phi) = 0$, então, por definição, $SK_3 \models \phi$ e $SK_3 \models \neg\phi$. Assim, temos os seguintes subcasos:

Caso 2.3.1 : Se $v_S(\psi) = 1$, então, por definição, $SK_3 \models \psi$ e $SK_3 \nvDash \neg\psi$. Pela definição de SK_3, $SK_3 \nvDash \phi \wedge \psi$ e $SK_3 \models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = 0$.

Caso 2.3.2 : Se $v_S(\psi) = \frac{1}{2}$, então, por definição, $SK_3 \models \psi$ e $SK_3 \models \neg\psi$. Pela definição de SK_3, $SK_3 \nvDash \phi \wedge \psi$ e $SK_3 \models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = 0$.

Caso 2.3.3 : Se $v_S(\psi) = 0$, então, por definição, $SK_3 \nvDash \psi$ e $SK_3 \models \neg\psi$. Pela definição de SK_3, $SK_3 \nvDash \phi \wedge \psi$ e $SK_3 \models \neg(\phi \wedge \psi)$. Assim, $v_S(\phi \wedge \psi) = 0$.

Q.E.D.

Teorema 4.7.3. (**Representabilidade**) Dada uma valoração $v \in sem_{K_3}$, podemos definir uma sociedade SK_{3v} tal que $SK_{3v} \models \phi$ sse $v(\phi) = 1$, para toda ϕ.

Demonstração. Seja v uma valoração de K_3. Considere os seguintes conjuntos:

$$X = \{p \in \mathcal{V} : \ v(p) = 1\}$$
$$Y = \{p \in \mathcal{V} : \ v(p) = \tfrac{1}{2}\}$$
$$Z = \{p \in \mathcal{V} : \ v(p) = 0\}$$

Definimos uma SK_{3v} como:

$$SK_{3v} = \{Ag_1, Ag_2\}$$

Onde, $Ag_1 = X$ e $Ag_2 = X \cup Y$.

Estenderemos agora as valorações de Ag_i para as fórmulas moleculares, com o objetivo de provar, por indução na complexidade de ϕ que $SK_{3v} \models \phi$ sse $v(\phi) = 1$.

1 Quando $\phi = p$, temos:

Se $SK_{3v} \models p$, então $Ag_1(p) = 1$ e $Ag_2(p) = 1$. Então, $p \in X \cup Y$. Portanto $v(p) = 1$. Reciprocamente, se $v(p) = 1$, então $p \in X \cup Y$. Pela construção dos agentes, temos $Ag_1(p) = 1$ e $Ag_2(p) = 1$. Portanto, $SK_{3v} \models p$.

2 Quando $\phi = \neg\psi$ e ψ é atômica, temos:

Se $SK_{3v} \models p$, então $Ag_1(p) = 0$ e $Ag_2(p) = 0$. Portanto, $p \notin X \cup Y$. Assim, $v(p) = 0$ e $v(\neg p) = 1$. Reciprocamente, se $v(\neg p) = 1$, então $v(p) = 0$. Portanto, $p \notin X \cup Y$ e, pela construção dos agentes, temos que $Ag_1(p) = 0$ e $Ag_2(p) = 0$. Logo, $SK_{3v} \not\models p$ e $SK_{3v} \models \neg p$.

3 Quando $\phi = \neg\psi$ e $\psi = \neg\gamma$ e γ é atômica, temos:

Se $SK_{3v} \models \neg\neg p$ sse $SK_{3v} \models p$. Com o mesmo raciocínio que fizemos no caso base, concluímos que $v(p) = 1$. Logo, $v(\neg\neg p) = 1$. Reciprocamente, $v(\neg\neg p) = 1$ sse $v(p) = 1$. . Com o mesmo raciocínio que fizemos no caso base, concluímos que $SK_{3v} \models p$. Logo, pela definição de SK_{3v}, temos $SK_{3v} \models \neg\neg p$.

4 Quando $\phi = \neg\psi$ e $\psi = \neg(\psi \wedge \gamma)$, temos:

$SK_{3v} \models \neg(\psi \wedge \gamma)$ sse $SK_{3v} \models \neg\psi$ ou $SK_{3v} \models \neg\gamma$ sse por definição $v(\neg\psi) = 1$ ou $v(\neg\gamma) = 1$ sse $v(\psi) = 0$ ou $v(\gamma) = 0$ sse $v(\psi \wedge \gamma) = 0$ sse $v(\neg((\psi \wedge \gamma)) = 1$.

5 Quando $\phi = \psi \wedge \gamma$, temos:

$SK_{3v} \models \psi \wedge \gamma$ sse $SK_{3v} \models \psi$ e $SK_{3v} \models \gamma$ sse por definição $v(\psi) = 1$ e $v(\gamma) = 1$ sse $v(\psi \wedge \gamma) = 1$.

Daqui, temos que $SK_{3v} \models \phi$ sse $v(\phi) = 1$, como desejado. E isso conclui a prova.

Q.E.D.

Corolário 4.7.4. a lógica de SK_3 é K_3.

4.8 Semântica de Sociedades para Ł$_3$

Nesta seção apresentamos uma semântica de sociedades para a lógica Ł$_3$ e chamaremo-la de SŁ$_3$. Ela também é um conjunto finito e não vazio de agentes clássicos. SŁ$_3 \models \phi$ (resp. SŁ$_3 \not\models \phi$) significa que a sociedade *aceita* (resp., *rejeita*) ϕ.

Definição 4.8.1. ((MARCOS, 2000)) SŁ$_3$ é uma sociedade fechada cuja relação de aceitação é definida da seguinte maneira:

(SŁ$_3$-1) SŁ$_3 \models p$ sse para todo $Ag_i \in S$Ł$_3$, $Ag_i(p) = 1$;

(SŁ$_3$-2) SŁ$_3 \models \neg p$ sse para todo $Ag_i \in S$Ł$_3$, $Ag_i(p) = 0$;

(SŁ$_3$-3) SŁ$_3 \models \neg\neg\phi$ sse SŁ$_3 \models \phi$;

(SŁ$_3$-4) SŁ$_3 \models \phi \to \psi$ sse SŁ$_3 \models \neg\phi$ ou SŁ$_3 \models \psi$ ou ((SŁ$_3 \not\models \phi$ e SŁ$_3 \not\models \neg\phi$) e (SŁ$_3 \not\models \psi$ e SŁ$_3 \not\models \neg\psi$));

(SŁ$_3$-5) SŁ$_3 \models \neg(\phi \to \psi)$ sse SŁ$_3 \models \phi$ e SŁ$_3 \models \neg\psi$.

As definições de tautologia e consequência lógica de SŁ$_3$ são as mesmas que a da **Definição 4.5.1.**

Marcos (2000) prova que:

Teorema 4.8.2. *A lógica de SŁ$_3$ é Ł$_3$.*

Até aqui, analisamos semânticas de sociedades nas quais as condições iniciais são definidas apenas para proposições atômicas e suas negações. Na próxima seção analisamos semânticas de sociedades nas quais as condições de aceitação admitem mais fórmulas além de p e $\neg p$.

Capítulo 5

Lógicas Multivaloradas e Conectivos de Restauração

Neste capítulo, abordamos lógicas multivaloradas nas quais os *conectivos de restauração* têm papel fundamental na construção da semântica de sociedades.

5.1 A Lógica Trivalorada LFI1

A lógica LFI1 é uma *Lógica da Inconsistência Formal*. *Lógicas da Inconsistência Formal* (CARNIELLI; MARCOS; AMO, 2004) são lógicas paraconsistentes que, mesmo trangredindo o *Princípio da Explosão* ($\phi, \neg\phi \models \psi$) respeitam o *Princípio da Explosão Gentil* ($\circ\phi, \phi, \neg\phi \models \psi$). Essas lógicas são conhecidas por internalizarem na linguagem objeto a noção de *consistência*. Dizemos que uma fórmula α é consistente se $\circ\alpha$, em que $\circ$ é o operador de consistência. Assim, o princípio da explosão gentil segue a seguinte intuição: se uma teoria T admite $\circ\phi$, ϕ e $\neg\phi$, então a teoria T é trivial. A lógica LFI1 é *maximal* em relação à lógica clássica, no sentido que se acrescentarmos à lógica LFI1 um teorema clássico que não seja teorema de LFI1, obtemos a lógica clássica (CARNIELLI; MARCOS; AMO, 2004).

A lógica LFI1 possui a assinatura $\Sigma^{LFI1} = \{\neg, \wedge, \rightarrow, \vee, \bullet\}$ em que $\bullet$ é um conectivo unário e seu conjunto de fórmulas é $For(\Sigma^{LFI1})$.

O conectivo $\bullet$ é o conectivo que rotula uma fórmula ϕ como *inconsistente*. Em (CARNIELLI; MARCOS; AMO, 2004), a lógica LFI1 é apresentada pelos seguintes esquemas de axiomas e regra de inferência:

(Ax1) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

(Ax2) $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\phi \rightarrow \gamma))$

(Ax3) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi))$

(Ax4) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$

(Ax5) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi$

(Ax6) $\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$

(Ax7) $\psi \rightarrow (\phi \vee \psi)$

(Ax8) $(\phi \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \gamma))$

(Ax9) $\phi \vee \neg\phi$

(Ax10) $\neg\neg\phi \leftrightarrow \phi$

(Ax11) $\circ\phi \rightarrow (\phi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi))$

(Ax12) $\bullet\phi \rightarrow (\phi \wedge \neg\phi)$

(Ax13) $\bullet(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow ((\bullet\phi \wedge \psi) \vee (\bullet\psi \wedge \phi))$

(Ax14) $\bullet(\phi \vee \psi) \leftrightarrow ((\bullet\phi \wedge \neg\psi) \vee (\bullet\psi \wedge \neg\phi))$

(Ax15) $\bullet(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\phi \wedge \bullet\psi)$

(MP) $\phi, \phi \rightarrow \psi / \psi$

Em (CARNIELLI; MARCOS; AMO, 2004) é provado que a axiomática de LFI1 é completa em relação à matriz $\mathcal{M}_{LFI1} = (\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \neg, \rightarrow, \vee, \bullet, \{1, \frac{1}{2}\}, \{0\})$ cujas operações têm as seguintes tabelas:

$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

	$\neg$	$\bullet$
1	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0

onde $\{1, \frac{1}{2}\}$ é o conjunto de valores distinguidos e $\{0\}$ é o conjunto de valores não-distinguidos.

Definição 5.1.1. Uma valoração v de LFI1 é uma função $v : For(\Sigma^{LFI1}) \mapsto \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) $v(\neg\phi) = 1 - v(\phi)$;

(2) $v(\bullet\phi) = 1 - [2v(\phi) - 1]$;

(3) $v(\phi \vee \psi) = max\{v(\phi), v(\psi)\}$;

O conjunto das valorações $v : For(\Sigma^{LFI1}) \mapsto \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ é chamado de *semântica* de LFI1, denotado por sem_{LFI1}.

Na lógica LFI1, podemos tomar como conectivos primitivos somente $\bullet$, $\neg$ e $\vee$. A implicação pode ser definida como segue[1]:

$$\phi \to \psi \equiv \psi \vee \neg(\phi \vee \bullet\phi)$$

Além disso, os conectivos de *consistência* e de conjunção, $\circ$ e $\wedge$, respectivamente, são definidos da seguinte maneira:

$$\circ\phi \equiv \neg \bullet \phi$$
$$\phi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$$

E suas operações possuem as seguintes tabelas:

	$\circ$
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	1

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

É importante dizer que a lógica LFI1 é equivalente à lógica J_3, apresentada por d'Ottaviano e Costa (1970) como uma proposta que satisfizesse os critérios **(i)-(iii)** de Jaśkovski (**Capítulo 3**). A diferença entre LFI1 e J_3 é que essa última é apresentada com o conectivo unário ∇ como conectivo primitivo ao invés do conectivo $\bullet$. A tabela da operação correspondente ao conectivo ∇ é a seguinte:

	∇
1	1
$\frac{1}{2}$	1
0	0

Como notam Carnielli, Marcos e Amo (2004), podemos definir em J_3 o conectivo $\bullet$, e podemos definir em LFI1 o conectivo ∇. Essa interdefinibilidade pode ser estabelecida da seguinte maneira:

$$\bullet p \equiv_{J_3} \nabla p \wedge \nabla\neg p$$
$$\nabla p \equiv_{LFI1} p \vee \bullet p$$

A partir dessa interdefinibilidade dos conectivos, é possível demonstrar que as lógicas J_3 e LFI1 são interdefiníveis:

Teorema 5.1.2. ((CARNIELLI; MARCOS; AMO, 2004)) LFI1 e J_3 são interdefiníveis.

Como consequência direta:

[1] Ver (CARNIELLI; MARCOS; AMO, 2004), p. 125.

Corolário 5.1.3. (Carnielli et al (CARNIELLI; MARCOS; AMO, 2004)) LFI1 e J_3 têm os mesmos teoremas na linguagem **L** da Lógica Proposicional Clássica.

De acordo com D'Ottaviano & da Costa, a lógica J_3 é adequada para lidar com conceitos exatos e conceitos inexatos de modo que o valor $\frac{1}{2}$ descreve situações em que ϕ e $\neg\phi$ são proposições verdadeiras ao mesmo tempo. Esse valor é interpretado pelos autores como um valor provisório de fórmulas de uma teoria que está em fase de construção. Além disso, J_3 é também pretendida para ser um fundamento para teorias inconsistentes e não triviais.

5.2 A Lógica Tetravalorada de Łukasiewicz

Como já apresentamos a definição de valoração para $Ł_n$, apresentamos nesta seção somente as tabelas das operações da matriz do sistema. Embora seja possível apresentar um sistema axiomático para $Ł_4$, também é possível apresentar para essa lógica um sistema de tablôs na linha de Carnielli (1987) bem como na de Marcos (2010). Não trataremos de tais sistemas de prova neste trabalho, pois isso poderia nos desviar de nossos propósitos.

$\to$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	1	1	1	$\frac{2}{3}$
0	1	1	1	1

	$\neg$
1	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	1

onde 1 é o único valor distinguido e $\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\}$ é o conjunto de valores não-distingudos. Já que 1 é o único valor distinguido, as definições de modelo, classe de modelos, tautologia e consequência lógica são também as mesmas de $Ł_3$[2].

Como vimos anteriormente, a implicação de $Ł_3$ não é booleana da mesma maneira que é o caso das lógicas I^1 e P^1, no sentido que a extensão das valorações para as fórmulas moleculares não é a mesma que a da lógica clássica. E, na seção **4.4**, mostramos como dar as condições de verdade do conectivo de implicação de $Ł_3$ usando a negação com o objetivo de caracterizar os valores 0 e $\frac{1}{2}$. No que diz respeito à lógica $Ł_4$, essa tarefa de caracterizar os valores de verdade mediante seu comportamento em um conectivo é mais complicada. Essa dificuldade deve-se ao fato de que $Ł_4$ possui dois valores intermediários, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$, e não temos que $v(\phi) = v(\neg\phi)$ tal como temos em $Ł_3$. Em $Ł_3$ podemos saber que quando $v(\neg\phi) = 1$ o valor de ϕ é $v(\phi) = 0$; e que quando $v(\neg\phi) = v(\phi)$, o valor de ϕ é $v(\phi) = \frac{1}{2}$. Desse modo, precisamos de um modo de caracterizar os valores intermediários.

[2] É importante notar que essa lógica não é a *lógica tetravalorada modal* de Łukasiewicz, que é chamada de B_4 em (FONT; HÁJEK, 2002). O sistema que estamos lidando neste trabalho pertence à hierarquia de lógicas *n-valoradas* $Ł_n$.

Dos conectivos de negação e implicação, podemos definir os conectivos de *possibilidade* ($\Diamond$) e *necessidade* ($\Box$) como: $\Diamond p \equiv \neg p \to p$ e $\Box p \equiv \neg\Diamond\neg p$. As tabelas das operções desses conectivos são as seguintes:

	$\Diamond$	$\Box$
1	1	1
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
0	0	0

Além disso, também podemos definir os conectivos de disjunção ($\vee$), conjunção ($\wedge$) e o bicondicional ($\leftrightarrow$) como $\alpha \vee \beta \equiv (\alpha \to \beta) \to \beta$, $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ e $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$. E as tabelas das suas respectivas operações são as seguintes:

$\wedge$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	0	0	0	0

$\vee$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	1	1	1
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

$\leftrightarrow$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Com esses conectivos à nossa disposição, podemos definir um conectivo definido por Rosser e Turquette (1952), chamado de *conectivo-J*. Esse tipo de conectivo é chamado por Corbalán (2012) de *conectivo de restauração local*, no sentido de que conectivos desse tipo permitem, de certa forma, resgatar o raciocínio clássico (portanto, bivalente) dentro das lógicas multivaloradas. Eles são importantes por permitirem que identifiquemos os valores não-clássicos. O conectivo-J que iremos definir é o seguinte:

$$\blacktriangledown p \equiv \Box\Box\Diamond(p \wedge (p \leftrightarrow \neg p))$$

E sua tabela é a seguinte:

	$\blacktriangledown$
1	0
$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	0
0	0

Agora, com o conectivo $\blacktriangledown$ seremos capazes de dar as condições de verdade do conectivo de implicação da seguinte maneira:

(1) Se $v(\neg\phi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$ ou $[(v(\blacktriangledown\phi) = 1$ e $v(\blacktriangledown\psi) = 1)$ ou $(v(\blacktriangledown\neg\phi) = 1$ e $v(\blacktriangledown\psi) = 1)$ ou $(v(\blacktriangledown\neg\phi) = 1$ e $v(\blacktriangledown\neg\psi) = 1)]$, então $v(\phi \to \psi) = 1$[3];

[3]Usamos colchetes para facilitar a leitura.

(2) Se ($v(\phi) = 1$ e $v(\blacktriangledown\psi) = 1$) ou ($v(\blacktriangledown\phi) = 1$ e $v(\blacktriangledown\neg\psi) = 1$) ou ($v(\blacktriangledown\neg\phi) = 1$ e $v(\neg\psi) = 1$), então $v(\blacktriangledown(\phi \to \psi)) = 1$;

(3) Se ($v(\phi) = 1$ e $v(\blacktriangledown\neg\psi) = 1$) ou ($v(\blacktriangledown\phi) = 1$ e $v(\neg\psi) = 1$), então $v(\blacktriangledown\neg(\phi \to \psi)) = 1$;

(4) Se $v(\phi) = 1$ e $v(\neg\psi) = 1$, então $v(\neg(\phi \to \psi)) = 1$.

Quando escrevemos $v(\blacktriangledown\neg\phi) = 1$, queremos dizer que $v(\phi) = \frac{1}{3}$ Já que a linguagem da sociedade deve ter a mesma linguagem dos agentes, é importante observar que o conectivo $\blacktriangledown$ é definível em Ł$_3$ da mesma maneira que em Ł$_4$. A tabela da sua operação é a seguinte:

	$\blacktriangledown$
1	0
$\frac{1}{2}$	1
0	0

Cabe também observar que poderíamos usar o conectivo $\blacktriangledown$ para descrever as condições de verdade da implicação de Ł$_3$, mas a diferença com o caso de Ł$_4$ é que as cláusula (3) descreve o caso em que $v(\phi \to \psi) = \frac{1}{2}$. E no caso da cláusula (2), somente o primeiro disjunto e o terceiro disjunto descreveriam o caso que $v(\phi \to \psi) = \frac{1}{2}$, pois o segundo disjunto descreveria o caso em que $v(\phi \to \psi) = 1$.

5.3 Semântica de Sociedades para LFI1

Como dissemos no início do Capítulo 3, a linguagem a partir da qual a sociedade é construída é a mesma linguagem da lógica dos agentes. Assim, por exemplo, se os agentes da sociedade da lógica LFI1 forem agentes clássicos, a linguagem da sociedade também tem que ser a linguagem da lógica clássica. O problema é que a LPC não tem a mesma linguagem que LFI1, pois o conectivo $\bullet$ não pertence à linguagem de LPC. Esse problema pode ser resolvido, contudo, se esse conectivo for incorporado à linguagem de LPC. Carnielli, Coniglio e Marcos (2007) afirmam que é possível estender linguisticamente a linguagem da LPC com o conectivo de consistência, $\circ$. Assim, a assinatura resultante dessa adição é $\Sigma^{LPC^{\circ}}$. Além disso, é acrescentado o seguinte axioma:
(LPC-4) $\circ\phi$

Assim, qualquer fórmula da forma $\circ\phi$ se comportará como uma fórmula verdadeira em todas as situações. E podemos definir tal fórmula da seguinte maneira:

$$\circ p \equiv p \to p$$

Sua matriz é a seguinte:

	$\circ$
1	1
0	1

Agora, é possível definir o conectivo $\bullet$ em LPC da seguinte maneira:

$$\bullet p \equiv \neg \circ p$$

Como afirmam Carnielli, Coniglio e Marcos (2007), a extensão de Σ^{LPC} para $\Sigma^{LPC^{\circ}}$ é inócua, mas é linguisticamente relevante. Acreditamos que sem essa extensão não seria possível construir uma semântica de sociedades para a lógica LFI1.

Uma sociedade para LFI1, que chamaremos de SLFI1, é um conjunto de agentes da LPC°, a lógica proposicional clássica com a assinatura $\Sigma^{LPC^{\circ}}$. $SLFI1 \models \phi$ (resp., $SLFI1 \not\models \phi$) significa que a sociedade *aceita* ϕ (resp., *rejeita* ϕ).

Definição 5.3.1. SLFI1 é uma sociedade aberta cuja relação de aceitação é definida da seguinte maneira:

(SLFI1-1) $SLFI1 \models p$ sse para algum $Ag_i \in SLFI1, Ag_i(p) = 1$

(SLFI1-2) $SLFI1 \models \neg p$ sse para algum $Ag_i \in SLFI1, Ag_i(p) = 0$

(SLFI1-3) $SLFI1 \models \bullet p$ sse existem dois agentes $Ag_i, Ag_j \in SLFI1, Ag_i(p) = 1$ e $Ag_j(p) = 0$

(SLFI1-4) $SLFI1 \models \neg\neg\phi$ sse $SLFI1 \models \phi$

(SLFI1-5) $SLFI1 \models \phi \to \psi$ sse $SLFI1 \not\models \phi$ ou $SLFI1 \models \psi$

(SLFI1-6) $SLFI1 \models \neg(\phi \to \psi)$ sse $SLFI1 \models \phi$ e $SLFI1 \models \neg\psi$

(SLFI1-7) $SLFI1 \models \phi \vee \psi$ sse $SLFI1 \models \phi$ ou $SLFI1 \models \psi$

(SLFI1-8) $SLFI1 \models \neg(\phi \vee \psi)$ sse $SLFI1 \models \neg\phi$ e $SLFI1 \models \neg\psi$

(SLFI1-9) $SLFI1 \models \bullet(\phi \to \psi)$ sse ($SLFI1 \models \phi$ e $SLFI1 \models \bullet\psi$) ou ($SLFI1 \models \bullet\phi$ e $SLFI1 \models \bullet\psi$)

(SLFI1-10) $SLFI1 \models \bullet(\phi \vee \psi)$ sse ($SLFI1 \models \bullet\phi$ e $SLFI1 \models \neg\psi$) ou ($SLFI1 \models \neg\phi$ e $SLFI1 \models \bullet\psi$)

(SLFI1-11) $SLFI1 \models \bullet\neg\phi$ sse $SLFI1 \models \bullet\phi$

(SLFI1-12) $SLFI1 \models \neg \bullet \phi$ sse $SLFI1 \not\models \bullet\phi$

(SLFI1-13) $SLFI1 \not\models \bullet(\bullet\phi)$ para toda ϕ

As definições de tautologia e consequência lógica de SLFI1 são as mesmas que a da **Definição 3.5.1.**

Teorema 5.3.2. (**Conveniência**) Dada uma sociedade $SLFI1 \in SOCLFI1$, podemos definir uma função v_S que é uma valoração de LFI1 tal que, para toda ϕ, $SLFI1 \models \phi$ sse $v_S(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

Demonstração. Definimos $v_S : For(\Sigma^{LFI1}) \mapsto \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ como:
$v_S(p) = 1$ sse $SLFI1 \models p$ e $SLFI1 \not\models \neg p$ e $SLFI1 \not\models \bullet p$
$v_S(p) = \frac{1}{2}$ sse $SLFI1 \models p$ e $SLFI1 \models \neg p$ e $SLFI1 \models \bullet p$
$v_S(p) = 0$ sse $SLFI1 \not\models p$ e $SLFI1 \models \neg p$ e $SLFI1 \not\models \bullet p$

Para toda fórmula não atômica, mostraremos que v_S é uma valoração de LFI1 por indução na complexidade da fórmula, isto é, devemos mostrar que v_S é definida de acordo com as tabelas de verdade de LFI1. O caso atômico segue da definição de v_S.

Caso 1 : Negação.

Caso 1.1 : se $v_S(\phi) = 1$, então por definição $SLFI1 \models \phi$ e $SLFI1 \not\models \neg\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\phi$. Pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \neg\neg\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\neg\phi$. Já que $SLFI1 \not\models \neg\phi$, $SLFI1 \models \neg\neg\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\neg\phi$, temos $v_S(\neg\phi) = 0$.

Caso 1.2 : se $v_S(\phi) = \frac{1}{2}$, então por definição $SLFI1 \models \phi$ e $SLFI1 \models \neg\phi$ e $SLFI1 \models \bullet\phi$. Pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \neg\neg\phi$ e $SLFI1 \models \neg\phi$. Já que $SLFI1 \models \bullet\neg\phi$, $SLFI1 \models \neg\neg\phi$ e $SLFI1 \models \neg\phi$, temos $v_S(\neg\phi) = \frac{1}{2}$.

Caso 1.3 : se $v_S(\phi) = 0$, então por definição $SLFI1 \not\models \phi$ e $SLFI1 \models \neg\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\phi$. Pela definição de SLFI1, $SLFI1 \not\models \neg\neg\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\neg\phi$. Já que $SLFI1 \models \neg\phi$, $SLFI1 \not\models \neg\neg\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\neg\phi$, temos $v_S(\neg\phi) = 1$.

Caso 2 : operador $\bullet$.

Caso 2.1 : se $v_S(\phi) = 1$, então por definição $SLFI1 \models \phi$ e $SLFI1 \not\models \neg\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\phi$. Pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \neg\bullet\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\bullet\phi$. Já que $SLFI1 \not\models \bullet\phi$, $SLFI1 \models \neg\bullet\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\bullet\phi$, então $v_S(\bullet\phi) = 0$.

Caso 2.2 : se $v_S(\phi) = \frac{1}{2}$, então por definição $SLFI1 \models \phi$ e $SLFI1 \models \neg\phi$ e $SLFI1 \models \bullet\phi$. Pela definição de SLFI1, $SLFI1 \not\models \neg\bullet\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\bullet\phi$. Já que $SLFI1 \models \bullet\phi$, $SLFI1 \not\models \neg\bullet\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\bullet\phi$, então $v_S(\bullet\phi) = 1$.

Caso 2.3 : se $v_S(\phi) = 0$, então por definição $SLFI1 \not\models \phi$ e $SLFI1 \models \neg\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\phi$. Pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \neg\bullet\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\bullet\phi$. Já que $SLFI1 \not\models \bullet\phi$, $SLFI1 \models \neg\bullet\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\bullet\phi$, então $v_S(\bullet\phi) = 0$.

Caso 3 : Implicação

Caso 3.1 : se $v_S(\phi) = 0$, então por definição $SLFI1 \not\models \phi$ e $SLFI1 \models \neg\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\phi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \phi \to \psi$, $SLFI1 \not\models \neg(\phi \to \psi)$ e $SLFI1 \not\models \bullet(\phi \to \psi)$. Então, $v_S(\phi \to \psi) = 1$.

Caso 3.2 : se $v_S(\phi) = \frac{1}{2}$, então por definição $SLFI1 \models \phi$ e $SLFI1 \models \neg\phi$ e $SLFI1 \models \bullet\phi$. Assim, temos os seguintes subcasos:

Caso 3.2.1 : se $v_S(\psi) = 1$, então por definição $SLFI1 \models \psi$ e $SLFI1 \nvDash \neg\psi$ e $SLFI1 \nvDash \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \phi \to \psi$, $SLFI1 \nvDash \neg(\phi \to \psi)$ e $SLFI1 \nvDash \bullet(\phi \to \psi)$. Então, $v_S(\phi \to \psi) = 1$.

Caso 3.2.2 : se $v_S(\psi) = \frac{1}{2}$, então por definição $SLFI1 \models \psi$ e $SLFI1 \models \neg\psi$ e $SLFI1 \models \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \phi \to \psi$, $SLFI1 \models \neg(\phi \to \psi)$ e $SLFI1 \models \bullet(\phi \to \psi)$. Então, $v_S(\phi \to \psi) = \frac{1}{2}$.

Caso 3.2.3 : se $v_S(\psi) = 0$, então por definição $SLFI1 \nvDash \psi$ e $SLFI1 \models \neg\psi$ e $SLFI1 \nvDash \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \nvDash \phi \to \psi$, $SLFI1 \models \neg(\phi \to \psi)$ e $SLFI1 \nvDash \bullet(\phi \to \psi)$. Então, $v_S(\phi \to \psi) = 0$.

Caso 3.3 : se $v_S(\phi) = 1$, então por definição $SLFI1 \models \phi$ e $SLFI1 \nvDash \neg\phi$ e $SLFI1 \nvDash \bullet\phi$. Assim, temos as seguintes subcasos:

Caso 3.3.1 : se $v_S(\psi) = 1$, então por definição $SLFI1 \models \psi$ e $SLFI1 \nvDash \neg\psi$ e $SLFI1 \nvDash \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \phi \to \psi$, $SLFI1 \nvDash \neg(\phi \to \psi)$ e $SLFI1 \nvDash \bullet(\phi \to \psi)$. Então, $v_S(\phi \to \psi) = 1$.

Caso 3.3.2 : se $v_S(\psi) = \frac{1}{2}$, então por definição $SLFI1 \models \psi$ e $SLFI1 \models \neg\psi$ e $SLFI1 \models \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \phi \to \psi$, $SLFI1 \models \neg(\phi \to \psi)$ e $SLFI1 \models \bullet(\phi \to \psi)$. Então, $v_S(\phi \to \psi) = \frac{1}{2}$.

Caso 3.3.3 : se $v_S(\psi) = 0$, então por definição $SLFI1 \nvDash \psi$ e $SLFI1 \models \neg\psi$ e $SLFI1 \nvDash \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \nvDash \phi \to \psi$, $SLFI1 \models \neg(\phi \to \psi)$ e $SLFI1 \nvDash \bullet(\phi \to \psi)$. Então, $v_S(\phi \to \psi) = 0$.

Caso 4 : Disjunção

Caso 4.1 : se $v_S(\phi) = 1$, então por definição $SLFI1 \models \phi$ e $SLFI1 \nvDash \neg\phi$ e $SLFI1 \nvDash \bullet\phi$. Assim, temos os seguintes subcasos:

Caso 4.1.1 : se $v_S(\psi) = 1$, então por definição $SLFI1 \models \psi$ e $SLFI1 \nvDash \neg\psi$ e $SLFI1 \nvDash \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \phi \vee \psi$, $SLFI1 \nvDash \neg(\phi \vee \psi)$ e $SLFI1 \nvDash \bullet(\phi \vee \psi)$. Então, $v_S(\phi \vee \psi) = 1$.

Caso 4.1.2 : se $v_S(\psi) = \frac{1}{2}$, então por definição $SLFI1 \models \psi$ e $SLFI1 \models \neg\psi$ e $SLFI1 \models \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \phi \vee \psi$, $SLFI1 \nvDash \neg(\phi \vee \psi)$ e $SLFI1 \nvDash \bullet(\phi \vee \psi)$. Então, $v_S(\phi \vee \psi) = 1$.

Caso 4.1.3 : se $v_S(\psi) = 0$, então por definição $SLFI1 \not\models \psi$ e $SLFI1 \models \neg\psi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \phi \vee \psi$, $SLFI1 \not\models \neg(\phi \vee \psi)$ e $SLFI1 \not\models \bullet(\phi \vee \psi)$. Então, $v_S(\phi \vee \psi) = 1$.

Caso 4.2 : se $v_S(\phi) = \frac{1}{2}$, então por definição $SLFI1 \models \phi$ e $SLFI1 \models \neg\phi$ e $SLFI1 \models \bullet\phi$. Assim, temos os seguintes subcasos:

Caso 4.2.1 : se $v_S(\psi) = 1$, então por definição $SLFI1 \models \psi$ e $SLFI1 \not\models \neg\psi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \phi \vee \psi$, $SLFI1 \not\models \neg(\phi \vee \psi)$ e $SLFI1 \not\models \bullet(\phi \vee \psi)$. Então, $v_S(\phi \vee \psi) = 1$.

4.2.2 : se $v_S(\psi) = \frac{1}{2}$, então por definição $SLFI1 \models \psi$ e $SLFI1 \models \neg\psi$ e $SLFI1 \models \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \phi \vee \psi$, $SLFI1 \models \neg(\phi \vee \psi)$ e $SLFI1 \models \bullet(\phi \vee \psi)$. Então, $v_S(\phi \vee \psi) = \frac{1}{2}$.

Caso 4.2.3 : se $v_S(\psi) = 0$, então por definição $SLFI1 \not\models \psi$ e $SLFI1 \models \neg\psi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \phi \vee \psi$, $SLFI1 \models \neg(\phi \vee \psi)$ e $SLFI1 \models \bullet(\phi \vee \psi)$. Então, $v_S(\phi \vee \psi) = \frac{1}{2}$.

Caso 4.3 : se $v_S(\phi) = 0$, então por definição $SLFI1 \not\models \phi$ e $SLFI1 \models \neg\phi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\phi$. Temos os seguintes subcasos:

Caso 4.3.1 : se $v_S(\psi) = 1$, então por definição $SLFI1 \models \psi$ e $SLFI1 \not\models \neg\psi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \phi \vee \psi$, $SLFI1 \not\models \neg(\phi \vee \psi)$ e $SLFI1 \not\models \bullet(\phi \vee \psi)$. Então, $v_S(\phi \vee \psi) = 1$.

4.3.2 : se $v_S(\psi) = \frac{1}{2}$, então por definição $SLFI1 \models \psi$ e $SLFI1 \models \neg\psi$ e $SLFI1 \models \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \models \phi \vee \psi$, $SLFI1 \models \neg(\phi \vee \psi)$ e $SLFI1 \models \bullet(\phi \vee \psi)$. Então, $v_S(\phi \vee \psi) = \frac{1}{2}$.

Caso 4.3.3 : se $v_S(\psi) = 0$, então por definição $SLFI1 \not\models \psi$ e $SLFI1 \models \neg\psi$ e $SLFI1 \not\models \bullet\psi$. Logo, pela definição de SLFI1, $SLFI1 \not\models \phi \vee \psi$, $SLFI1 \models \neg(\phi \vee \psi)$ e $SLFI1 \not\models \bullet(\phi \vee \psi)$. Então, $v_S(\phi \vee \psi) = 0$.

Q.E.D.

Teorema 5.3.3. (**Representabilidade**) Dada uma valoração $v \in sem_{LFI1}$, podemos definir uma sociedade $SLFI1_v$ tal que $SLFI1_v \models \phi$ sse $v(phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$, para toda ϕ.

Demonstração. Seja v uma valoração de LFI1. Considere os seguintes conjuntos:

$$X = \{p \in \mathcal{V} : \; v(p) = 1\}$$
$$Y = \{p \in \mathcal{V} : \; v(p) = \tfrac{1}{2}\}$$
$$Z = \{p \in \mathcal{V} : \; v(p) = 0\}$$

Assim, definimos uma SLFI1 como:

$$SLFI1_v = \{Ag_1, Ag_2, Ag_3\}$$

Onde $Ag_1 = X$, $Ag_2 = X \cup Y$ e $Ag_3 = Y$.

Estenderemos agora as valorações Ag_i $(1 \leq i \leq 3)$ para as fórmulas moleculares com o objetivo de provar, por indução na complexidade da fórmula que $v(\phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ sse $SLFI1_v \models \phi$.

1 : quando ϕ é atômica, temos:
Se $v(p) \in \{1, \frac{1}{2}\}$, então $p \in X \cup Y$. Da definição dos agentes, temos que $Ag_1(p) = Ag_2(p) = Ag_3(p) = 1$. Logo, pela definição de sociedade $SLFI1_v$, temos $SLFI1_v \models p$. Reciprocamente, se $SLFI1_v \models p$, então existe um agente $Ag_i \in SLFI1_v$ tal que $Ag_i(p) = 1$. Da construção dos agentes, temos que $Ag_1(p) = Ag_2(p) = Ag_3(p) = 1$. Logo, $p \in X \cup Y$. Então $v(p) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

2 : quando $\phi = \neg\psi$ e ψ é atômica, temos:
Se $v(\neg p) \in \{1, \frac{1}{2}\}$, então $v(p) \in \{0, \frac{1}{2}\}$. Logo, $p \in Y \cup Z$. Da definição dos agentes, temos que $Ag_1(p) = 0$. Então, pela definição de sociedade $SLFI1_v$, temos $SLFI1_v \models \neg p$. Reciprocamente, se $SLFI1_v \models \neg p$, então existe um agente $Ag_i \in SLFI1_v$ tal que $Ag_i(p) = 0$. Da construção dos agentes, temos que $Ag_1(p) = 0$. Então, $p \in Y \cup Z$. Logo, $v(p) \in \{0, \frac{1}{2}\}$. Portanto, $v(\neg p) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

2.1 : quando $\phi = \neg\psi$ e $\psi = \alpha \to \gamma$, temos:
$SLFI1_v \models \neg(\alpha \to \gamma)$ sse $SLFI1_v \models \alpha$ e $SLFI1_v \models \neg\gamma$ sse (por definição) $v(\alpha) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ e $v(\neg\gamma) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ e $v(\gamma) \in \{0, \frac{1}{2}\}$ sse $v(\alpha \to \gamma) \in \{0, \frac{1}{2}\}$ sse $v(\neg(\alpha \to \gamma)) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

2.2 : quando $\phi = \neg\psi$ e $\psi = \alpha \vee \gamma$, temos:
$SLFI1_v \models \neg(\alpha \vee \gamma)$ sse $SLFI1_v \models \neg\alpha$ e $SLFI1_v \models \neg\gamma$ sse (por definição) $v(\neg\alpha) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ e $v(\neg\gamma) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ sse $v(\alpha) \in \{0, \frac{1}{2}\}$ e $v(\gamma) \in \{0, \frac{1}{2}\}$ sse $v(\alpha \vee \gamma) \in \{0, \frac{1}{2}\}$ sse $v(\neg(\alpha \vee \gamma)) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

2.3 : quando $\phi = \neg\psi$ e $\psi = \bullet\gamma$, temos:
$SLFI1_v \models \neg \bullet \gamma$ sse $SLFI1_v \not\models \bullet\gamma$ sse (por definição) $v(\bullet\gamma) = 0$ sse $v(\neg \bullet \gamma) = 1$.

3 : quando $\phi = \bullet\psi$ e ψ é atômica, temos:
Se $v(\bullet p) = 1$, então $v(p) = \frac{1}{2}$. Logo, $p \in Y$. Da definição dos agentes, temos $Ag_1(p) = 0$ e $Ag_2(p) = Ag_3(p) = 1$. Logo, $SLFI1_v \models \bullet p$. Reciprocamente, se $SLFI1_v \models \bullet p$, então existem agentes Ag_i e Ag_j em $SLFI1_v$ tais que $Ag_i(p) = 1$ e $Ag_j(p) = 0$. Dado que, da construção dos agentes, $Ag_3(p) = 1$, temos que $p \in Y$. Por outro lado, dado que, da construção dos agentes, $Ag_1(p) = 0$, temos que $p \notin X$. Logo $v(p) = \frac{1}{2}$. Portanto, $v(\bullet p) = 1$.

3.1 : quando $\phi = \bullet\psi$ e $\psi = \alpha \to \gamma$, temos:
$SLFI1_v \models \bullet(\alpha \to \gamma)$ sse (i) $SLFI1_v \models \alpha$ e $SLFI1_v \models \bullet\gamma$ ou (ii) $SLFI1_v \models \bullet\alpha$ e $SLFI1_v \models \bullet\gamma$. Assim:

(i) $SLFI1_v \models \alpha$ e $SLFI1_v \models \bullet\gamma$ sse (por definição) $v(\alpha) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ e $v(\bullet\gamma) = 1$ e $v(\gamma) = \frac{1}{2}$ sse $v(\alpha \to \gamma) = \frac{1}{2}$ sse $v(\bullet(\alpha \to \gamma)) = 1$.

(ii) $SLFI1_v \models \bullet\alpha$ e $SLFI1_v \models \bullet\gamma$ sse (por definição) $v(\bullet\alpha) = 1$ e $v(\bullet\gamma) = 1$ e $v(\alpha) = \frac{1}{2}$ e $v(\gamma) = \frac{1}{2}$ sse $v(\alpha \to \gamma) = \frac{1}{2}$ sse $v(\bullet(\alpha \to \gamma)) = 1$.

3.2 : quando $\phi = \bullet\psi$ e $\psi = \alpha \vee \gamma$, temos:
$SLFI1_v \models \bullet(\alpha \vee \gamma)$ sse (a) $SLFI1_v \models \bullet\alpha$ e $SLFI1_v \models \neg\gamma$ ou (b) $SLFI1_v \models \neg\alpha$ e $SLFI1_v \models \bullet\gamma$. Assim:

3.2 (a) $SLFI1_v \models \bullet\alpha$ e $SLFI1_v \models \neg\gamma$ sse (por definição) $v(\bullet\alpha) = 1$ e $v(\alpha) = \frac{1}{2}$ e $v(\neg\psi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ e $v(\gamma) = \frac{1}{2}$ sse $v(\alpha \vee \gamma) = \frac{1}{2}$ sse $v(\bullet(\alpha \vee \gamma)) = 1$;

3.2 (b) análogo ao item (a).

3.3 : quando $\phi = \bullet\psi$ e $\psi = \neg\alpha$, temos:
$SLFI1_v \models \bullet\neg\alpha$ sse $SLFI1_v \models \bullet\alpha$ sse casos anteriores.

4 : quando $\phi = \psi \to \gamma$, temos:
$SLFI1_v \models \psi \to \gamma$ sse $SLFI1_v \not\models \psi$ ou $SLFI1_v \models \gamma$ sse (por definição) $v(\psi) = 0$ ou $v(\gamma) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ sse $v(\psi \to \gamma) = 1$.

5 : quando $\phi = \psi \vee \gamma$, temos:
$SLFI1_v \models \psi \vee \gamma$ sse $SLFI1_v \models \psi$ ou $SLFI1_v \models \gamma$ sse (por definição) $v(\psi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ ou $v(\gamma) \in \{1, \frac{1}{2}\}$ sse $v(\psi \to \gamma) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

Daqui, $SLFI1_v \models \phi$ sse $v(phi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$. Q.E.D.

Corolário 5.3.4. A lógica de SLFI1 é LFI1.

5.4 Semântica de Sociedades para Ł$_4$

Nesta seção definiremos uma semântica de sociedade para a lógica Ł$_4$, que chamaremos de SŁ$_4$. SŁ$_4$ é um conjunto não-vazio de agentes da lógica Ł$_3$. Um agente da lógica Ł$_3$ é uma função da forma $Ag : \mathcal{V} \mapsto \{1.\frac{1}{2}, 0\}$ em que: $Ag(p) = 1$, dizemos que o agente Ag *aceita* a proposição p; $Ag(p) = 0$, dizemos que o agente Ag *rejeita* a proposição p; e $Ag(p) = \frac{1}{2}$, dizemos que o agente Ag está *indeciso* acerca da proposição p. SŁ$_4 \models \phi$ (resp., SŁ$_4 \not\models \phi$) significa que a sociedade *aceita* (resp., *rejeita* ϕ).

Definição 5.4.1. SŁ$_4$ é uma sociedade fechada cuja relação de aceitação é definida da seguinte maneira:

(SŁ$_4$-1) SŁ$_4 \models p$ sse para todo agente $Ag_i \in S$Ł$_4, Ag_i(p) = 1$

(SŁ$_4$-2) SŁ$_4 \models \neg p$ sse para todo agente $Ag_i \in S$Ł$_4, Ag_i(p) = 0$

(SŁ$_4$-3) SŁ$_4 \models \blacktriangledown p$ sse para todo agente $Ag_i \in S$Ł$_4, Ag_i(p) = \frac{1}{2}$

(SŁ$_4$-4) SŁ$_4 \models \neg\neg\phi$ sse SŁ$_4 \models \phi$;

(SŁ$_4$-5) SŁ$_4 \models \phi \rightarrow \psi$ sse SŁ$_4 \models \neg\phi$ ou SŁ$_4 \models \psi$ ou ((SŁ$_4 \models \blacktriangledown\phi$ e SŁ$_4 \models \blacktriangledown\psi$) ou ($S$Ł$_4 \models \blacktriangledown\neg\phi$ e SŁ$_4 \models \blacktriangledown\psi$) ou ($S$Ł$_4 \models \blacktriangledown\neg\phi$ e SŁ$_4 \models \blacktriangledown\neg\psi$));

(SŁ$_4$-6) SŁ$_4 \models \neg(\phi \rightarrow \psi)$ sse SŁ$_4 \models \phi$ e SŁ$_4 \models \neg\psi$;

(SŁ$_4$-7) SŁ$_4 \models \blacktriangledown(\phi \rightarrow \psi)$ sse ((SŁ$_4 \models \phi$ e SŁ$_4 \models \blacktriangledown\psi$) ou ($S$Ł$_4 \models \blacktriangledown\phi$ e SŁ$_4 \models \blacktriangledown\neg\psi$) ou ($S$Ł$_4 \models \blacktriangledown\neg\phi$ e SŁ$_4 \models \neg\psi$));

(SŁ$_4$-8) SŁ$_4 \models \blacktriangledown\neg\phi$ sse SŁ$_4 \not\models \phi$ e SŁ$_4 \not\models \neg\phi$ e SŁ$_4 \not\models \blacktriangledown\phi$;

(SŁ$_4$-9) SŁ$_4 \models \neg\blacktriangledown\phi$ sse SŁ$_4 \not\models \blacktriangledown\phi$ e (SŁ$_4 \models \phi$ ou SŁ$_4 \models \neg\phi$ ou SŁ$_4 \models \blacktriangledown\neg\phi$);

(SŁ$_4$-10) SŁ$_4 \not\models \blacktriangledown\blacktriangledown\phi$, para toda ϕ.

As definições de tautologia e consequência lógica de SŁ$_4$ são as mesmas que a da **Definição 3.5.1.**

Teorema 5.4.2. Dada uma SŁ$_4 \in SOC$Ł$_4$, podemos definir uma função v_S que é uma valoração de Ł$_4$ tal que, para toda ϕ, SŁ$_4 \models \phi$ sse $v_S(\phi) = 1$.

Demonstração. Esta demonstração tem duas partes: na primeira parte, provamos que, para toda Conversamente, provamos

Parte I. Seja SŁ$_4$ uma sociedade. Definimos a seguinte valoração de Ł$_4$ como uma função $v_S : For(\Sigma^{Ł_4}) \mapsto \{1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\}$ tal que, para toda fórmula atômica $v_S(p)$ é definida como:
$v_S(p) = 1$ sse SŁ$_4 \models p$ e SŁ$_4 \not\models \neg p$ e SŁ$_4 \not\models \blacktriangledown p$
$v_S(p) = \frac{2}{3}$ sse SŁ$_4 \not\models p$ e SŁ$_4 \not\models \neg p$ e SŁ$_4 \models \blacktriangledown p$
$v_S(p) = \frac{1}{3}$ sse SŁ$_4 \not\models p$ e SŁ$_4 \not\models \neg p$ e SŁ$_4 \not\models \blacktriangledown p$
$v_S(p) = 0$ sse SŁ$_4 \not\models p$ e SŁ$_4 \models \neg p$ e SŁ$_4 \not\models \blacktriangledown p$

Para toda fórmula não atômica, mostraremos que v_S é uma valoração de Ł$_4$ por indução na complexidade da fórmula, isto é, devemos mostrar que v_S é definida de acordo com as tabelas de verdade de Ł$_4$. O caso atômico segue da definição de v_S.

Caso 1: Negação

Caso 1.1: se $v_S(\phi) = 1$, então por hipótese de indução $SŁ_4 \models \phi$ e $SŁ_4 \not\models \neg\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\phi$ e, pela definição de $SŁ_4$, $SŁ_4 \models \neg\neg\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\neg\phi$. Já que, $SŁ_4 \not\models \neg\phi$, $SŁ_4 \models \neg\neg\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\neg\phi$, temos $v_S(\neg\phi) = 0$.

Caso 1.2: se $v_S(\phi) = \frac{2}{3}$, então por definição $SŁ_4 \not\models \phi$ e $SŁ_4 \not\models \neg\phi$ e $SŁ_4 \models \blacktriangledown\phi$. Pela definição de $SŁ_4$, temos $SŁ_4 \not\models \neg\neg\phi$. Já que $SŁ_4 \models \blacktriangledown\phi$, temos $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\neg\phi$, pela definição de $SŁ_4$. Portanto $v_S(\neg\phi) = \frac{1}{3}$.

Caso 1.3: se $v_S(\phi) = \frac{1}{3}$, então por definição $SŁ_4 \not\models \phi$ e $SŁ_4 \not\models \neg\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\phi$. Pela definição de $SŁ_4$, temos $SŁ_4 \models \blacktriangledown\neg\phi$. Já que $SŁ_4 \not\models \phi$, temos $SŁ_4 \not\models \neg\neg\phi$. Então $v_S(\neg\phi) = \frac{2}{3}$.

Caso 1.4: se $v_S(\phi) = 0$, então por definição, $SŁ_4 \not\models \phi$ e $SŁ_4 \models \neg\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\phi$. Pela definição de $SŁ_4$, temos $SŁ_4 \not\models \neg\neg\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\neg\phi$. Portanto, $v_S(\neg\phi) = 1$.

Caso 2: Conectivo $\blacktriangledown$

Caso 2.1: se $v_S(\phi) = 1$, então por definição, $SŁ_4 \models \phi$ e $SŁ_4 \not\models \neg\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\phi$. Pela definição de $SŁ_4$, $SŁ_4 \models \neg\blacktriangledown\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\blacktriangledown\phi$. Então $v_S(\blacktriangledown\phi) = 0$.

Caso 2.2: se $v_S(\phi) = \frac{2}{3}$, então por definição $SŁ_4 \not\models \phi$ e $SŁ_4 \not\models \neg\phi$ e $SŁ_4 \models \blacktriangledown\phi$. Já que $SŁ_4 \models \blacktriangledown\phi$, temos, pela definição de $SŁ_4$, $SŁ_4 \not\models \neg\blacktriangledown\phi$ $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\blacktriangledown\phi$. Então $v_S(\blacktriangledown\phi) = 1$.

Caso 2.3: se $v_S(\phi) = \frac{1}{3}$, então por definição $SŁ_4 \not\models \phi$ e $SŁ_4 \not\models \neg\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\phi$. Pela definição de $SŁ_4$, temos $SŁ_4 \models \blacktriangledown\neg\phi$ e $SŁ_4 \models \neg\blacktriangledown\phi$. Já que $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\phi$ e $SŁ_4 \models \neg\blacktriangledown\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\blacktriangledown\phi$, então $v_S(\blacktriangledown\phi) = 0$.

Caso 2.4: se $v_S(\phi) = 0$, então por definição $SŁ_4 \not\models \phi$ e $SŁ_4 \models \neg\phi$. Desse modo, pela definição de $SŁ_4$, $SŁ_4 \models \neg\blacktriangledown\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\blacktriangledown\phi$. Portanto, $v_S(\blacktriangledown\phi) = 0$.

Caso 3: Implicação

Caso 3.1: se $v_S(\phi) = 0$, então por definição $SŁ_4 \not\models \phi$ e $SŁ_4 \models \neg\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\phi$. Assim, pela definição de $SŁ_4$, temos $SŁ_4 \models \phi \to \psi$ e $SŁ_4 \not\models \neg(\phi \to \psi)$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown(\phi \to \psi)$. Então $v(\phi \to \psi) = 1$.

Caso 3.2: se $v_S(\phi) = 1$, então por definição $SŁ_4 \models \phi$ e $SŁ_4 \not\models \neg\phi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\phi$. Assim, existem as seguintes possibilidades:

Caso 3.2.1: se $v_S(\psi) = 1$, então por definição $SŁ_4 \models \psi$ e $SŁ_4 \not\models \neg\psi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\psi$. Pela definição de $SŁ_4$, temos $SŁ_4 \models \phi \to \psi$ e $SŁ_4 \not\models \neg(\phi \to \psi)$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown(\phi \to \psi)$. Portanto, $v_S(\phi \to \psi) = 1$.

Caso 3.2.2: se $v_S(\psi) = \frac{2}{3}$, então por definição $SŁ_4 \not\models \psi$ e $SŁ_4 \not\models \neg\psi$ e $SŁ_4 \models \blacktriangledown\psi$. Então, pela definição de $SŁ_4$, $SŁ_4 \not\models \phi \to \psi$ e $SŁ_4 \not\models \neg(\phi \to \psi)$ e $SŁ_4 \models \blacktriangledown(\phi \to \psi)$. Logo, $v_S(\phi \to \psi) = \frac{2}{3}$.

Caso 3.2.3: se $v_S(\psi) = \frac{1}{3}$, então por definição $SŁ_4 \not\models \psi$ e $SŁ_4 \not\models \neg\psi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\psi$. Então, pela definição de $SŁ_4$, $SŁ_4 \not\models \phi \to \psi$ e $SŁ_4 \not\models \neg(\phi \to \psi)$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown(\phi \to \psi)$. Logo, $v_S(\phi \to \psi) = \frac{1}{3}$.

Caso 3.2.4: se $v_S(\psi) = 0$, então por definição $SŁ_4 \not\models \psi$ e $SŁ_4 \models \neg\psi$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown\psi$. Então, pela definição de $SŁ_4$, $SŁ_4 \not\models \phi \to \psi$ e $SŁ_4 \models \neg(\phi \to \psi)$ e $SŁ_4 \not\models \blacktriangledown(\phi \to \psi)$. Então, $v_S(\phi \to \psi) = 0$.

Caso 3.3: se $v_S(\phi) = \frac{2}{3}$, então por definição $S\text{Ł}_4 \not\models \phi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \neg\phi$ e $S\text{Ł}_4 \models \blacktriangledown\phi$. Assim, os seguintes casos são possíveis:

Caso 3.3.1: se $v_S(\psi) = 1$, é similar ao caso **3.2.1**.

Caso 3.3.2: se $v_S(\psi) = \frac{2}{3}$, então por definição $S\text{Ł}_4 \not\models \psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \neg\psi$ e $S\text{Ł}_4 \models \blacktriangledown\psi$. Pela definição de $S\text{Ł}_4$, $S\text{Ł}_4 \models \phi \to \psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \neg(\phi \to \psi)$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \blacktriangledown(\phi \to \psi)$. Logo, $v_S(\phi \to \psi) = 1$.

Caso 3.3.3: se $v_S(\psi) = \frac{1}{3}$, então por definição $S\text{Ł}_4 \not\models \phi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \neg\psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \blacktriangledown\psi$. Assim, pela definição de $S\text{Ł}_4$, $S\text{Ł}_4 \models \blacktriangledown\neg\psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \phi \to \psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \neg(\phi \to \psi)$ e $S\text{Ł}_4 \models \blacktriangledown(\phi \to \psi)$. Portanto, $v_S(\phi \to \psi) = \frac{2}{3}$.

Caso 3.3.4: se $v_S(\psi) = 0$, então por definição $S\text{Ł}_4 \not\models \psi$ e $S\text{Ł}_4 \models \neg\psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \blacktriangledown\psi$. Pela definição $S\text{Ł}_4$, $S\text{Ł}_4 \not\models \phi \to \psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \neg(\phi \to \psi)$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \blacktriangledown(\phi \to \psi)$. Então, $v_S(\phi \to \psi) = \frac{1}{3}$.

Caso 3.4: $v_S(\phi) = \frac{1}{3}$, então por definição $S\text{Ł}_4 \not\models \phi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \neg\phi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \blacktriangledown\phi$. Logo, $S\text{Ł}_4 \models \blacktriangledown\neg\phi$. Portanto, temos os seguintes casos:

Caso 3.4.1: se $v_S(\psi) = 1$, é similar ao caso **3.2.1**.

Caso 3.4.2: se $v_S(\psi) = \frac{2}{3}$, então por definição $S\text{Ł}_4 \not\models \psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \neg\psi$ e $S\text{Ł}_4 \models \blacktriangledown\psi$. Pela definição de $S\text{Ł}_4$, $S\text{Ł}_4 \models \phi \to \psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \neg(\phi \to \psi)$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \blacktriangledown\phi \to \psi$. Portanto, $v_S(\phi \to \psi) = 1$.

Caso 3.4.3: se $v_S(\psi) = \frac{1}{3}$, então por definição $S\text{Ł}_4 \not\models \psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \neg\psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \blacktriangledown\psi$. Logo, $S\text{Ł}_4 \models \blacktriangledown\neg\psi$. Pela definição de $S\text{Ł}_4$, $S\text{Ł}_4 \models \phi \to \psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \neg(\phi \to \psi)$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \blacktriangledown\phi \to \psi$. Logo, $v_S(\phi \to \psi) = 1$.

Caso 3.4.4: se $v_S(\psi) = 0$, então por definição $S\text{Ł}_4 \not\models \psi$ e $S\text{Ł}_4 \models \neg\psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \blacktriangledown\psi$. Pela definição de $S\text{Ł}_4$, $S\text{Ł}_4 \not\models \phi \to \psi$ e $S\text{Ł}_4 \not\models \neg(\phi \to \psi)$ e $S\text{Ł}_4 \models \blacktriangledown(\phi \to \psi)$. Então, $v_S(\phi \to \psi) = \frac{2}{3}$. Q.E.D.

Teorema 5.4.3. (**Representabilidade**) Dada uma valoração $v \in sem_{\text{Ł}_4}$, podemos definir uma sociedade $S\text{Ł}_{4v}$ tal que $v(\phi) = 1$ sse $S\text{Ł}_{4v} \models \phi$, para toda ϕ.

Demonstração. Seja v uma valoração de Ł_4. Considere os seguintes conjuntos:

$$X = \{p : v(p) = 1\}$$
$$W = \{p : v(p) = \tfrac{2}{3}\}$$
$$Y = \{p : v(p) = \tfrac{1}{3}\}$$
$$Z = \{p : v(p) = 0\}$$

Definimos uma sociedade $S\text{Ł}_{4v} = \{Ag_1, Ag_2, Ag_3, Ag_4\}$ composta por agentes da lógica Ł_3 definidos como:

$$Ag_1 = \begin{cases} 1 & se \quad p \in X \\ \frac{1}{2} & se \quad p \in W \cup Y \\ 0 & se \quad p \in Z \end{cases} \quad Ag_2 = \begin{cases} 1 & se \quad p \in X \\ \frac{1}{2} & se \quad p \in X \cup W \\ 0 & se \quad p \in Z \cup Y \end{cases}$$

$$Ag_3 = \begin{cases} 1 & se \quad p \in X \cup Y \\ \frac{1}{2} & se \quad p \in W \\ 0 & se \quad p \in Z \end{cases} \qquad Ag_4 = \begin{cases} 1 & se \quad p \in X \cup Y \\ \frac{1}{2} & se \quad p \in X \cup W \cup Y \\ 0 & se \quad p \in Z \cup Y \end{cases}$$

Estenderemos as valorações Ag de acordo com $Ł_3$ para obter diferentes valorações quando uma fórmula ϕ é não atômico. Essa prova será por indução na complexidade da fórmula.

1: Quando ϕ é atômica, temos:

Se $SŁ_{4v} \models p$, então para todo agente Ag_i $(1 \leq i \leq 4)$, $Ag_i(p) = 1$. Daqui, $p \in X \cup Y$. Portanto, $v(p) \in \{1, \frac{1}{3}\}$. Já que $Ag_1(p) = Ag_2(p) = 1$, temos que $v(p) = 1$. Reciprocamente, se $v(p) = 1$, então $p \in X$. Já que $Ag_i(p) = 1$, temos $SŁ_{4v} \models p$.

2: Casos da negação

2.1: Quando $\phi = \neg\psi$ e ψ é uma fórmula atômica, temos:
Se $SŁ_{4v} \models \neg p$, então para todo agente Ag_i $(1 \leq i \leq 4)$, $Ag_i = 0$. Logo, $p \in Z \cup Y$. Daqui, pela construção dos agentes Ag_1 e Ag_3, obtemos $v(p) = 0$. Reciprocamente, se $v(\neg p) = 1$, então $v(p) = 0$. Daqui, $p \in Z$. Da definição dos agentes, temos que $Ag_i(p) = 0$. Logo, $SŁ_{4v} \models \neg p$

2.2: Quando $\phi = \neg\psi$ e $\psi = \neg\gamma$, temos:
$SŁ_{4v} \models \neg\neg\gamma$ sse $SŁ_{4v} \models \gamma$ sse por definição $v(\gamma) = 1$ sse $v(\neg\neg\gamma) = 1$.

2.3: Quando $\phi = \neg\psi$ e $\psi = \alpha \to \gamma$, temos:
$SŁ_{4v} \models \neg(\alpha \to \gamma)$ sse $SŁ_{4v} \models \alpha$ e $SŁ_{4v} \models \neg\gamma$ sse por definição $v(\alpha) = 1$ e $v(\neg\gamma) = 1$ sse $v(\neg(\alpha \to \gamma)) = 1$.

2.4: Quando $\phi = \neg\psi$ e $\psi = \blacktriangledown\gamma$, temos:
$SŁ_{4v} \models \neg\blacktriangledown\gamma$ sse $SŁ_{4v} \not\models \blacktriangledown\gamma$ e ((i)$SŁ_{4v} \models \gamma$ ou (ii)$SŁ_{4v} \models \neg\gamma$ ou (iii)$SŁ_{4v} \models \blacktriangledown\neg\gamma$) sse por definição $v(\blacktriangledown\gamma) = 0$ e $(v(\gamma) = 1$ or $v(\neg\gamma) = 1$ ou $v(\blacktriangledown\neg\gamma) = 1)$ sse $v(\neg\blacktriangledown\gamma) = 1$.

3: Caso do conectivo $\blacktriangledown$.

3.1: Quando $\phi = \blacktriangledown\psi$ e ψ é uma fórmula atômica, temos:
Se $SŁ_{4v} \models \blacktriangledown p$, então para todo agente Ag_i $(1 \leq i \leq 4)$, $Ag_i(p) = \frac{1}{2}$ pela construção dos agentes Ag. Assim, $p \in W \cup Y \cup X$. Daqui, $v(p) \in \{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$. Já que $Ag_3(p) = \frac{1}{2}$, temos $v(p) = \frac{2}{3}$. Portanto, $v(\blacktriangledown p) = 1$. Reciprocamente, se $v(\blacktriangledown p) = 1$, então $v(p) = \frac{2}{3}$. Daqui, $p \in W$. Pela construção dos agentes, temos $Ag_i(p) = \frac{1}{2}$, para todo agente. Então, $SŁ_{4v} \models \blacktriangledown p$.

3.2: Quando $\phi = \blacktriangledown\psi$ e $\psi = \neg\gamma$, então:
$SŁ_{4v} \models \blacktriangledown\neg\gamma$ sse $SŁ_{4v} \not\models \gamma$ e $SŁ_{4v} \not\models \neg\gamma$ e $SŁ_{4v} \not\models \blacktriangledown\gamma$ sse $v(\gamma) \in \{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\}$, $v(\neg\gamma) \in \{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\}$ e $v(\blacktriangledown\gamma) = 0$ sse $v(\gamma) = \frac{1}{3}$ e $v(\neg\gamma) = \frac{2}{3}$ sse $v(\blacktriangledown\neg\gamma) = 1$.

3.3 Quando $\phi = \blacktriangledown\psi$ e $\psi = \alpha \to \gamma$, então:
$SŁ_{4v} \models \blacktriangledown(\alpha \to \gamma)$ sse (i) $SŁ_{4v} \models \alpha$ e $SŁ_{4v} \models \blacktriangledown\gamma$, (ii) $SŁ_{4v} \models \blacktriangledown\alpha$ e $SŁ_{4v} \models \blacktriangledown\neg\gamma$, e (iii) $SŁ_{4v} \models \blacktriangledown\neg\alpha$ e $SŁ_{4v} \models \neg\gamma$. Assim, temos os seguintes subcasos:
3.3(i) $SŁ_{4v} \models \alpha$ e $SŁ_{4v} \models \blacktriangledown\gamma$ sse $v(\alpha) = 1$ e $v(\blacktriangledown\gamma) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ e $v(\gamma) = \frac{2}{3}$ e

$v(\alpha \to \gamma) = \frac{2}{3}$ sse $v(\blacktriangledown(\alpha \to \gamma)) = 1$.
3.3(ii) $S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\alpha$ e $S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\neg\gamma$ sse $v(\blacktriangledown\alpha) = 1$ e $v(\blacktriangledown\neg\gamma) = 1$ sse $v(\alpha) = \frac{2}{3}$ e $v(\neg\gamma) = \frac{2}{3}$ e $v(\gamma) = \frac{1}{3}$ sse $v(\alpha \to \gamma) = \frac{2}{3}$ sse $v(\blacktriangledown(\alpha \to \gamma)) = 1$.
3.3(iii) $S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\neg\alpha$ e $S\text{Ł}_{4v} \models \neg\gamma$ sse $v(\blacktriangledown\neg\alpha) = 1$ e $v(\neg\gamma) = 1$ sse $v(\neg\alpha) = \frac{2}{3}$ e $v(\alpha) = \frac{1}{3}$ e $v(\neg\gamma) = 1$ e $v(\gamma) = 0$ sse $v(\alpha \to \gamma) = \frac{2}{3}$ sse $v(\blacktriangledown(\alpha \to \gamma)) = 1$.

4 Quando $\phi = \psi \to \gamma$, temos: $S\text{Ł}_{4v} \models \psi \to \gamma$ sse (i) $S\text{Ł}_{4v} \models \neg\psi$ ou (ii) $S\text{Ł}_{4v} \models \gamma$ ou (iii)($S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\psi$ e $S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\gamma$) ou (iv)($S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\neg\psi$ e $S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\gamma$) ou (v)($S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\neg\psi$ e $S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\neg\gamma$). Então, temos os seguintes casos:

4(i) $S\text{Ł}_{4v} \models \neg\psi$ sse $v(\neg\psi) = 1$ sse $v(\psi) = 0$ sse $v(\psi \to \gamma) = 1$.

4(ii) $S\text{Ł}_{4v} \models \gamma$ sse $v(\gamma) = 1$ sse $v(\psi \to \gamma) = 1$.

4(iii) $S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\psi$ e $S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\gamma$ sse $v(\blacktriangledown\psi) = 1$ e $v(\blacktriangledown\gamma) = 1$ sse $v(\psi) = \frac{2}{3}$ e $v(\gamma) = \frac{2}{3}$ sse $v(\psi \to \gamma) = 1$.

4(iv) $S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\neg\psi$ e $S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\gamma$ sse $v(\blacktriangledown\neg\psi) = 1$ e $v(\blacktriangledown\gamma) = 1$ sse $v(\neg\psi) = \frac{2}{3}$ e $v(\psi) = \frac{1}{3}$ e $v(\gamma) = \frac{2}{3}$ sse $v(\psi \to \gamma) = 1$.

4(v) $S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\neg\psi$ e $S\text{Ł}_{4v} \models \blacktriangledown\neg\gamma$ sse $v(\blacktriangledown\neg\psi) = 1$ e $v(\blacktriangledown\neg\gamma) = 1$ sse $v(\neg\psi) = \frac{2}{3}$ e $v(\psi) = \frac{1}{3}$ e $v(\neg\gamma) = \frac{2}{3}$ e $v(\gamma) = \frac{1}{3}$ sse $v(\psi \to \gamma) = 1$.

Daqui $v(\phi) = 1$ sse $S\text{Ł}_{4v} \models \phi$. E isso conclui a demonstração. Q.E.D.

Corolário 5.4.4. A lógica de $S\text{Ł}_4$ é Ł_4.

É importante deixar claro que a presença de agentes trivalorados em $S\text{Ł}_4$ não torna essa sociedade trivalente. Caso essa sociedade fosse trivalente em virtude das três possíveis atitudes que um agente pode ter em relação a $p \in \mathcal{V}$, nosso projeto de justificar o interesse das lógicas multivaloradas através de semânticas bivalentes estaria seriamente comprometido. Por mais que os agentes possam ter três diferentes atitudes em relação a uma proposição atômica p, a sociedade aceita (ou rejeita) p. Nesse sentido, existe uma interação entre o caráter trivalorado dos agentes com o caráter bivalente da sociedade, pois um agente pode aceitar, ou rejeitar, ou estar indeciso acerca de $p \in \mathcal{V}$. Já $S\text{Ł}_4$ aceita (ou rejeita) $p \in \mathcal{V}$, ou $\neg p$ $(p \in \mathcal{V})$, ou $\blacktriangledown p$ $(p \in \mathcal{V})$. Nesse último caso, ela aceita (ou rejeita) a indecisão acerca de uma proposição p. Por isso, julgamos interessante o uso dos conectivos de restauração local, pois eles conseguem resgatar o caráter bivalente de uma lógica multivalorada, tendo papel imprescindível na construção de semânticas bivalentes para essas lógicas.

Capítulo 6

Considerações Finais

Julgamos que as semânticas de sociedades aqui trabalhadas são capazes de oferecer uma interessante perspectiva para as lógicas caracterizadas por meio delas, pois essas semânticas ressaltam o aspecto informacional que essas lógicas são capazes de dar conta. No caso de LP, por exemplo, sua semântica de sociedades mostra que essa lógica é capaz de descrever casos em que existe conflito informacional tanto no nível das proposições atômicas quanto no nível das proposições complexas. No caso de K_3, dual de LP, sua semântica de sociedades mostra que ela é capaz de descrever casos em que não existem informações suficientes para asseverar nem ϕ nem sua negação, $\neg\phi$.

Da mesma maneira que LP, a semântica de sociedades para RM_3 também mostra que essa lógica é capaz de descrever casos de informações conflitantes. A diferença é que a implicação dessa lógica é mais forte que a implicação de LP, sendo capaz de realizar inferências por modus ponens, o que a implicação de LP não é capaz de realizar.

Os casos de LFI1 e Ł$_4$ são particularmente interessantes pelo fato de que os conectivos de restauração local dessas lógicas permitirem que suas sociedades exprimam, respectivamente, casos de *inconsistência* e de *indecisão* das fórmulas, respectivamente. Como vimos, $SLFI1 \models \bullet p$ sse existem agentes $Ag_i, Ag_j \in SLFI1, Ag_i(p) = 1$ e $Ag_j(p) = 0$. Ou seja, a sociedade consegue identificar que uma proposição atômica p é inconsistente no caso de um par de agentes ser tal que um aceita p e o outro a rejeita. Na presença de um par de sentenças contraditórias ϕ e $\neg\phi$, a sociedade *SLFI1* assevera que ϕ é inconsistente. Assim, $SLFI1 \models \bullet\phi$. Já em SŁ$_4$, SŁ$_4 \models \blacktriangledown p$ sse para todo agente $Ag_i \in S$Ł$_4, Ag_i(p) = \frac{1}{2}$. Ou seja, a sociedade assevera a indecisão de uma proposição atômica p no caso de todos os agentes estarem indecisos a seu respeito.

Portanto, essas semânticas dão uma interessante perspectiva para essas lógicas, no sentido que elas ressaltam o aspecto informacional que essas lógicas são capazes de lidar. Neste capítulo, discutiremos possíveis aplicações das semânticas de sociedades para outras lógicas multivaloradas. Também discutiremos uma possível limitação de sua aplicação. E, por último, discutiremos sobre a relação da bivalência com as semânticas de sociedades.

6.1 Outras Lógicas (Multivaloradas)

Nesta dissertação, tratamos apenas de alguns exemplos de lógicas multivaloradas dentro de uma vasta gama dessas lógicas. Por exemplo, não tratamos da lógica da lógica trivalorada de Hallden, H_3. Vimos também que, além das lógicas Ł$_3$ e Ł$_4$, não mostramos como podemos construir semânticas de sociedades para as demais Ł$_n$. Nesta seção, discutiremos a possibilidade de definir tais semânticas para essas lógicas.

6.1.1 A Lógica Trivalorada de Hallden: H_3

A lógica H_3 foi investigada por Halldén (1949) para lidar com proposições sem sentido. O terceiro valor, $\frac{1}{2}$, descreve o caso em que as proposições são sem sentido. Para distinguir as proposições sem sentido das significativas, Hallden introduz o conectivo $\dashv$. $\dashv p$ significa que a proposição p é *significativa*. Essa lógica possui a assinatura $\Sigma^{H_3} = \{\neg, \dashv, \wedge, \rightarrow\}$ e seu conjunto de fórmulas é $For(\Sigma^{H_3})$.

Em (BOLC; BOROWIK, 1992), a lógica H_3 é apresentada pelos seguintes esquemas de axiomas:
(Ax1) $(\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$
(Ax2) $\phi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi)$
(Ax3) $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \gamma) \rightarrow (\phi \rightarrow \gamma))$
(Ax4) $\dashv \phi \leftrightarrow \dashv \neg\phi$
(Ax5) $\dashv (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\dashv \phi \wedge \dashv \psi)$
(Ax6) $\phi \rightarrow \dashv \phi$

H_3 é completa em relação à matriz $\mathcal{M}_{H_3} = (\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \dashv, \neg, \wedge, \{1, \frac{1}{2}\}, \{0\})$ cujas operações têm as seguintes tabelas:

	$\neg$	$\dashv$
1	0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0

onde $\{1, \frac{1}{2}\}$ é o conjunto de valores distinguidos e 0 é o único valor não-distinguido.

Definição 6.1.1. Uma valoração v de H_3 é uma função $v : For(\Sigma^{H_3}) \mapsto \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ que satisfaz as seguintes condições:
(1) $v(\neg\phi) = 1 - v(\phi)$;
(2) $v(\dashv \phi) = \begin{cases} 1 & se \quad v(\phi) \in \{1, 0\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$;
(3) $v(\phi \wedge \psi) = \begin{cases} v(\phi).v(\psi) & se \quad v(\phi), v(\psi) \in \{1, 0\} \\ \frac{1}{2} & \text{caso contrário;} \end{cases}$

Em H_3 a implicação pode ser definida como:

$$\phi \to \psi \equiv \neg(\phi \wedge \neg\psi)$$

E sua operação correspondente tem a seguinte tabela:

$\to$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	1

Como podemos ver, essa lógica possui uma certa similaridade com a lógica LFI1 no sentido de possuir um conectivo que identifica o valor intermediário, o conectivo $\dashv$. Já que a negação de H_3 é a mesma que a de LFI1 e ambas são lógicas paraconsistentes, as condições de aceitação para p e $\neg p$ serão as mesmas. Da mesma maneira que a sociedade de LFI1, a linguagem dos agentes clássicos será a linguagem de $LPC^{\dashv}$, com $\dashv p$ sendo definido da mesma maneira que $\circ p$. As diferenças consistirão nas definições de $\dashv p$ e na definição das cláusulas de aceitação para as fórmulas complexas. Conjecturamos que a definição da sociedade de H_3, SH_3, seja a seguinte:

(SH_3 - 1) $SH_3 \models p$ sse existe um $Ag_i \in SH_3$, $Ag_i(p) = 1$;

(SH_3 - 2) $SH_3 \models \neg p$ sse existe um $Ag_i \in SH_3$, $Ag_i(p) = 0$;

(SH_3 - 3) $SH_3 \models \dashv p$ sse todo par de agentes Ag_i e $Ag_j \in SH_3$, $Ag_i(p) = 1$ ou $Ag_i(p) = 0$;

(SH_3 - 4) $SH_3 \models \neg\neg\phi$ sse $SH_3 \models \phi$;

(SH_3 - 5) $SH_3 \models \phi \wedge \psi$ sse $SH_3 \models \phi \wedge \psi$ sse ($SH_3 \models \phi$ e $SH_3 \models \psi$) ou ($SH_3 \models \neg \dashv \phi$ e $SH_3 \models \psi$) ou ($SH_3 \models \neg \dashv \phi$ e $SH_3 \models \neg\psi$) ou ($SH_3 \models \phi$ e $SH_3 \models \neg \dashv \psi$) ou ($SH_3 \models \neg\phi$ e $SH_3 \models \neg \dashv \phi$) ou ($SH_3 \models \neg\phi$ e $SH_3 \models \neg \dashv \psi$);

(SH_3 - 6) $SH_3 \models \neg(\phi \wedge \psi)$ sse ($SH_3 \models \neg\phi$ ou $SH_3 \models \neg\psi$) ou ($SH_3 \models \neg \dashv \phi$ e $SH_3 \models \psi$) ou ($SH_3 \models \neg \dashv \phi$ e $SH_3 \models \neg\psi$) ou ($SH_3 \models \phi$ e $SH_3 \models \neg \dashv \psi$) ou ($SH_3 \models \neg\phi$ e $SH_3 \models \neg \dashv \phi$) ou ($SH_3 \models \neg\phi$ e $SH_3 \models \neg \dashv \psi$) ;

(SH_3 - 7) $SH_3 \models \dashv (\phi \wedge \psi)$ sse $SH_3 \models \dashv \phi$ e $SH_3 \models \dashv \psi$;

(SH_3 - 8) $SH_3 \models \dashv \neg\phi$ sse $SH_3 \models \dashv \phi$;

(SH_3 - 9) $SH_3 \models \neg \dashv \phi$ sse $SH_3 \not\models \dashv \phi$;

(SH_3 - 10) $SH_3 \models \dashv\dashv \phi$ sse $SH_3 \models \dashv \phi$.

As definições de tautologia e consequência lógica são exatamente as mesmas que expusemos anteriormente para as outras semânticas.

Cremos que uma intuição análoga poderia se aplicar a outras lógicas multivaloradas que possuem como conectivos primitivos esses que são capazes de reconhecer os valores intermediários, que chamamos de *conectivos de restauração local* trabalhados em (CORBALÁN, 2012).

6.1.2 Lógicas de Łukasiewicz: Ł$_n$

No último capítulo expusemos uma semântica de sociedade para a lógica tetravalorada de Łukasiewicz, Ł$_4$. Vimos que o uso do conectivo-J foi indispensável para a construção da semântica. Acreditamos que a possibilidade de definir esses operadores nas demais Ł$_n$ ($n \geq 5$) é de grande importância na construção da semântica de sociedades para as demais Ł$_n$. Como um exemplo, mostraremos aqui como definir os conectivos-J para a lógica Ł$_5$. A assinatura de Ł$_5$ é a mesma que a das lógicas Ł$_3$ e Ł$_4$. Além disso, as definições de valoração, modelo, tautologia, contradição e consequência lógica são as mesmas que Ł$_3$ e Ł$_4$. O único valor designado dessa lógica é 1. As tabelas das operações da matriz de Ł$_5$ são as seguintes:

$\rightarrow$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
$\frac{3}{4}$	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{4}$	1	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{1}{4}$	1	1	1	1	$\frac{3}{4}$
0	1	1	1	1	1

	$\neg$
1	0
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
0	1

Da mesma maneira que em Ł$_4$, definimos os conectivos $\Diamond$ e $\Box$ como: $\Diamond p \equiv \neg p \rightarrow p$ e $\Box p \equiv \neg\Diamond\neg p$. A tabelas da operações correspondentes a esses conectivos são as seguintes:

	$\Diamond$	$\Box$
1	1	1
$\frac{3}{4}$	1	$\frac{2}{4}$
$\frac{2}{4}$	1	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	0
0	0	0

Além disso, assim como em Ł$_4$, também podemos definir os conectivos de disjunção ($\vee$), conjunção ($\wedge$) e o bicondicional ($\leftrightarrow$) como $\alpha \vee \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$, $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ e $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. E as tabelas das suas respectivas operações são as seguintes:

$\vee$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	1	1	1	1	1
$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{2}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

$\wedge$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
0	0	0	0	0	0

$\leftrightarrow$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Definimos agora os conectivos-J para Ł$_5$ como $\boxdot p$, $\circ p$ e $\odot p$ da seguinte maneira:

$$\boxdot p \equiv \Diamond\Box(((p \leftrightarrow \neg p) \wedge p) \leftrightarrow p) \wedge p)$$
$$\circ p \equiv \Box(p \leftrightarrow \neg p)$$
$$\odot p \equiv \boxdot\neg p$$

As tabelas das operações são as seguintes:

	$\boxdot$	$\circ$	$\odot$
1	0	0	0
$\frac{3}{4}$	1	0	0
$\frac{2}{4}$	0	1	0
$\frac{1}{4}$	0	0	1
0	0	0	0

Uma vez definidos esses conectivos, acreditamos que a construção da semântica de sociedades para Ł$_5$ segue o mesmo padrão que no caso de Ł$_4$. A questão é saber quais conectivos, $\boxdot$, $\circ$ e $\odot$ além da negação serão definidos como condições iniciais da semântica de sociedades para Ł$_5$, e também saber qual será a lógica dos agentes, isto é, se eles serão valorações da lógica Ł$_3$ ou Ł$_4$.

Como dissemos no Capítulo 3, Fernández (2001) mostra que em uma semântica de sociedades aberta (resp., fechada) na qual os agentes são valorações da lógica P^n (resp., I^n), a lógica da sociedade é P^{n+1} (resp., I^{n+1}). Ou seja, é mostrado que as semânticas de sociedade são também interessantes para descrever uma hierarquia de lógicas. Desse modo, é natural questionar se o mesmo pode ser feito em relação à hierarquia de lógicas Ł$_n$. Acreditamos que essa tarefa seja, além de interessante, muito desafiadora. Exporemos aqui uma breve comparação com o caso de P^n. Fernández (2001) mostra como generalizar a semântica de sociedades a fim de provar o resultado mencionado anteriormente neste parágrafo. A definição dada pelo autor generaliza somente as condições de aceitação das fórmulas p e $\neg p$. Por exemplo, a definição das condições iniciais da semântica de sociedade para P^n terá o número n de condições iniciais que definem a iteração de negações: ou seja, $SP^n \models p$, $SP^n \models \neg p$,...,$SP^n \models \neg^n p$. Já a definição das fórmulas complexas permanece a mesma para toda a hierarquia. Já em relação à hierarquia Ł$_n$, o mesmo não acontece, pois deveremos definir os conectivos-J para descrever as condições de verdade do conectivo de implicação. E, proporcionalmente ao número de valores de verdade da lógica, a descrição das condições de verdade da implicação vai se tornando cada vez mais complexa. Por esse motivo, acreditamos que a tarefa de descrever uma semântica de sociedade que descreva a hierarquia das lógicas $Ł_n$ constitua um interessante desafio.

6.2 Limitações (Possíveis) da Semântica

O leitor poderia se perguntar se podemos construir semânticas de sociedades para todas as lógica multivalorada. Contudo, acreditamos que essa semântica pode não ser definível para todas as lógicas multivaloradas. Considere a hierarquia das lógicas de Bočvar (RESCHER, 1968), B_n:

A hierarquia B_n possui a assinatura $\Sigma^{B_n} = \{\neg, \wedge\}$ e seu conjunto de fórmulas, $For(\Sigma^{B_n})$, é gerado pelo conjunto de variáveis proposicionais $\mathcal{V}$ sobre a assinatura Σ^{B_n} da seguinte maneira: se ϕ e ψ são fórmulas de $For(\Sigma^{B_n})$, então $\neg\phi$, e $\phi \wedge \psi$ são fórmulas de $For(\Sigma^{B_n})$.

Como aponta Rescher (1968), B_n não possui sistema axiomático. Mas, poderíamos dar a essas lógicas um sistema de tablôs semânticos na linha de Carnielli (1987).

Definição 6.2.1. Seja $V_n = \{\frac{m}{n-1} \mid 0 \leq m \leq n-1\}$ o conjunto de valores de B_n e $For(\Sigma^{B_n})$ o conjunto de fórmulas de B_n gerado pela mesma assinatura que B_n. Uma *valoração* v de B_n é uma função $v : For(\Sigma^{B_n}) \mapsto V_n$ que satisfaz as seguintes condições:
(1) $v(\neg\phi) = 1 - v(\phi)$;
(2) $v(\phi \wedge \psi) = \begin{cases} v(\phi).v(\psi) & se \quad v(\phi), v(\psi) \in \{1, 0\} \\ Z(n) & se \quad \text{caso contrário;} \end{cases}$
$Z(n) = \frac{n-2}{2(n-1)}$

Nessa hierarquia 1 ($\frac{n-1}{n-1}$), é o único valor distinguido. O conjunto das valorações $v : For(\Sigma^{B_n}) \mapsto V_n$ é chamado *semântica* de B_n, denotado por sem_{B_n}.

Como 1 é o único valor distinguido, as definições de satisfatibilidade, classe de modelos e consequência lógica são análogas às definições semânticas das lógicas abordadas neste trabalho. Quando $n = 3$, podemos apresentar uma semântica de sociedades para B_3, tal como é feito em (FERNÁNDEZ, 2001). O problema é que quando $n \geq 4$, essa hierarquia de lógicas não possui poder expressivo suficiente para definir conectivos capazes de caracterizar os valores intermediários. A negação por si só não é capaz de realizar tal tarefa. Desse modo, acreditamos não ser possível apresentar uma semântica de sociedades para $B_{n\geq 4}$ pelo fato de não conseguirmos caracterizar os valores intermediários somente com os recursos da negação. Um possível modo de driblar tal problema seria estendendo a hierarquia de sistemas conectivos que identificassem os valores intermediários. Caleiro, Marcos e Volpe (2015) apontam a possibilidade de estender uma lógica multivalorada cuja capacidade expressiva é fraca a fim de obter uma semântica bivalente para essa mesma lógica. Contudo, o que pode ser levantado é que não estaremos mais falando da mesma lógica. Desse modo, é possível que somente possamos tratar das extensões das lógicas B_n por meio das semânticas de sociedade.

6.3 Bivalência

Como discutimos no Capítulo 2, as lógicas multivaloradas sofrem de críticas tanto em sua versão bivalente quanto pelo fato de a interpretação dos valores intermediários ser problemática. A empreitada de apresentar semânticas bivalentes para essas lógicas pode ser vista como uma reconstrução do conceito fregeano de referência, tal como argumentamos no mencionado capítulo. A ideia então é a de procurar por semânticas bivalentes que consigam mostrar em que sentido essas lógicas podem ter uma interpretação que seja bivalente, mas que consiga ressaltar aspectos interessantes que essas lógicas são capazes de descrever. Nesse sentido, propusemos que as semânticas de sociedades são adequadas para realizar tal tarefa.

As semânticas de sociedade representam um método de descrição de lógicas finitamente multivaloradas por meio de uma semântica bivalente, mas não vefofuncional. Esse fenômeno da perda da verofuncionalidade geralmente ocorre quando reduzimos uma semântica multivalorada (verifuncional) a uma semântica que têm somente dois valores. Podemos dizer que esse é o preço de sair de uma semântica multivalorada para uma semântica bivalente. As semânticas de sociedades não tem a propriedade da verofuncionalidade devido à própria definição de aceitação dos agentes. Por exemplo, na sociedade SLP as condições de aceitação das fórmulas p e $\neg p$ em SLP são definidas de modo que a aceitação p não determina a rejeição de $\neg p$, nem que a aceitação de $\neg p$ determina a rejeição de p. Ou seja, pode ser o caso que SLP aceite tanto p quanto $\neg p$. No caso de SK_3, a rejeição de p não determina a aceitação de $\neg p$ nem que a rejeição de $\neg p$ determina a aceitação de p, pois pode ser o caso que SK_3 rejeite tanto p quanto $\neg p$. As sociedades são bivalentes no sentido de que elas aceitam ou rejeitam uma fórmula ϕ. É como se elas julgassem essa mesma fórmula como verdadeira ou falsa, sem outra possibilidade. Nesse sentido, elas dão suporte à Tese de Suszko ao estabelecer que a aceitação (o *verdadeiro*) e a rejeição (o *falso*) são as únicas as únicas possibilidades (valores lógicos).

Por outro lado, mesmo que a verofuncionalidade seja perdida, podemos ver que essas semânticas de sociedades, assim como as bivalorações em geral o fazem, permitem uma descrição uniforme das lógicas que estão sendo descritas. Como vimos anteriormente, muitas das lógicas aqui tratadas foram descritas de maneira uniforme mediante essas semânticas. De fato, basta ver que as condições de aceitação para as fórmulas p e $\neg p$ foram tratadas de maneira uniforme nos capítulos 3 e 4. Claramente, a diferença entre as semânticas de sociedades dessas respectivas lógicas subjaz nas condições de aceitação das fórmulas complexas, o que é comum no tratamento das bivalorações de maneira geral.

Isso destaca a vantagem de se obter semânticas bivaloradas para lógicas finitamente multivaloradas, que é a de propor uma caracterização clássica e uniforme para essas lógicas, que são não-clássicas, o que permite uma comparação entre elas.

Referências Bibliográficas

ANDERSON, A. R.; BELNAP, N. D. *Entailment. Volume 1*. [S.l.]: Princeton University Press, 1975.

ASENJO, F. G. et al. A calculus of antinomies. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, University of Notre Dame, v. 7, n. 1, p. 103–105, 1966.

AVRON, A. Natural 3-valued logics—characterization and proof theory. *The Journal of Symbolic Logic*, Cambridge Univ Press, v. 56, n. 01, p. 276–294, 1991.

BAAZ, M. et al. Multlog 1.0: Towards an expert system for many-valued logics. In: SPRINGER. *International Conference on Automated Deduction*. [S.l.], 1996. p. 226–230.

BEALL, J. C.; RESTALL, G. *Logical pluralism*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2006.

BÉZIAU, J.-Y. A sequent calculus for Łukasiewicz's three valued logic based on suszko's bivalent semantics. *Bulletin of the Section of Logic*, v. 28, n. 2, p. 89–97, 1999.

BÉZIAU, J.-Y. Bivalence, excluded middle and non contradiction. *The Logica Yearbook*, Citeseer, p. 73–84, 2003.

BÉZIAU, J.-Y. Truth as a mathematical object. *Principia*, Universidade Federal de Santa Catarina, Núcleo de Epistemologia e Lógica, v. 14, n. 1, p. 31, 2010.

BÉZIAU, J.-Y. A History of Truth-Values. *Logic: A History of its Central Concepts*, v. 11, n. 235, p. 26, 2012.

BÉZIAU, J.-Y. *Universal Logic: An Anthology: from Paul Hertz to Dov Gabbay*. [S.l.]: Birkhäuser, 2012.

BEZIAU, J.-Y. Trivial dialetheism and the logic of paradox. *Logic and Logical Philosophy*, v. 25, n. 1, p. 51–56, 2015.

BOCHVAR, D. A. On a three valued calculus and its application to the analysis of contradictories. 1939.

BOLC, L.; BOROWIK, P. *Many-valued Logics, vol. 1*. [S.l.]: Springer, Berlin, 1992.

BRADY, R. T. Completeness proofs for the systems RM3 and BN4. *Logique et Analyse*, JSTOR, v. 25, n. 97, p. 9–32, 1982.

CALEIRO, C. et al. Two's company:"The humbug of many logical values". In: *Logica universalis*. [S.l.]: Springer, 2007. p. 175–194.

CALEIRO, C. et al. Suszko's Thesis and dyadic semantics. *Preprint available at: http://wslc. math. ist. utl. pt/ftp/pub/CaleiroC/03-CCCM-dyadic1. pdf*, p. 29, 2003.

CALEIRO, C.; MARCOS, J. Two Many Values: An Algorithmic Outlook on Suszko's Thesis. In: IEEE. *Multiple-Valued Logic (ISMVL), 2010 40th IEEE International Symposium on*. [S.l.], 2010. p. 93–97.

CALEIRO, C.; MARCOS, J.; VOLPE, M. Bivalent semantics, generalized compositionality and analytic classic-like tableaux for finite-valued logics. *Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 603, p. 84–110, 2015.

CARNIELLI, W.; CONIGLIO, M. E.; MARCOS, J. Logics of formal inconsistency. In: *Handbook of philosophical logic*. [S.l.]: Springer, 2007. p. 1–93.

CARNIELLI, W.; MARCOS, J.; AMO, S. D. Formal inconsistency and evolutionary databases. *Logic and logical philosophy*, v. 8, p. 115–152, 2004.

CARNIELLI, W. A. Systematization of finite many-valued logics through the method of tableaux. *The Journal of Symbolic Logic*, Cambridge Univ Press, v. 52, n. 02, p. 473–493, 1987.

CARNIELLI, W. A. Many-valued logics and plausible reasoning. In: IEEE. *Multiple-Valued Logic, 1990., Proceedings of the Twentieth International Symposium on*. [S.l.], 1990. p. 328–335.

CARNIELLI, W. A. Paul Bernays and the eve of non-standard models in logic. *Universal logic: an anthology*, 2012.

CARNIELLI, W. A.; LIMA-MARQUES, M. Society semantics and multiple-valued logics. *Advances in Contemporary Logic and Computer Science*, American Mathematical Society, v. 235, p. 33–52, 1999.

CIUCCI, D.; DUBOIS, D. From possibility theory to paraconsistency. In: *New Directions in Paraconsistent Logic*. [S.l.]: Springer, 2015. p. 229–247.

CORBALÁN, M. I. *Conectivos de Restauração Local*. Dissertação (Mestrado) — IFCH–State University of Campinas, Brazil, 2012.

COSTA, N. C. D. et al. Malinowski and Suszko on many-valued logics: on the reduction of many-valuedness to two-valuedness. *Modern Logic*, The Review of Modern Logic, v. 6, n. 3, p. 272–299, 1996.

D'OTTAVIANO, I. M.; COSTA, N. C. da. Sur un probleme de Jaskowski. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, v. 270, p. 1349–1353, 1970.

DUMMETT, M. *Truth and other enigmas*. [S.l.]: Harvard University Press, 1978.

FERNÁNDEZ, V. *Semântica de sociedades para lógicas n-valentes (Society semantics for n-valued logics, in Portuguese)*. Dissertação (Mestrado) — IFCH–State University of Campinas, Brazil, 2001.

FERNÁNDEZ, V. L.; CONIGLIO, M. E. Combining valuations with society semantics. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, Taylor & Francis, v. 13, n. 1, p. 21–46, 2003.

FONT, J. M.; HÁJEK, P. On Łukasiewicz's four-valued modal logic. *Studia Logica*, Springer, v. 70, n. 2, p. 157–182, 2002.

FREGE, G. Sense and reference. *The philosophical review*, JSTOR, v. 57, n. 3, p. 209–230, 1948.

FREGE, G. The thought: A logical inquiry. *Mind*, JSTOR, v. 65, n. 259, p. 289–311, 1956.

GODEL, K. Zum intuitionistischen aussagenkalkul. *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien*, v. 69, p. 65–66, 1932.

HAACK, S. *Filosofia das lógicas*. [S.l.]: Unesp, 2002.

HALLDÉN, S. The logic of nonsense. *Uppsala Universitet*, Uppsala, 1949.

HUGHES, G. E.; CRESSWELL, M. J. *A new introduction to modal logic*. [S.l.]: Psychology Press, 1996.

JAŚKOWSKI, S. Propositional calculus for contradictory deductive systems. *Logic and Logical Philosophy*, v. 7, p. 35–56, 1999.

KLEENE, S. C. On notation for ordinal numbers. *The Journal of Symbolic Logic*, Cambridge University Press, v. 3, n. 4, p. 150–155, 1938.

KNEALE, W. C.; KNEALE, M. *The Development of Logic*. [S.l.]: Oxford University Press, 1962.

KRIPKE, S. Outline of a theory of truth. *The journal of philosophy*, JSTOR, v. 72, n. 19, p. 690–716, 1975.

LOPARIC, A.; COSTA, N. C. D. Paraconsistency, paracompleteness, and valuations. *Logique et Analyse*, Logique et Analyse, v. 27, n. 106, p. 119–131, 1984.

ŁOŚ, J.; SUSZKO, R. Remarks on sentential logics. In: ELSEVIER. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*. [S.l.], 1958. v. 61, p. 177–183.

MALINOWSKI, G. Non-Fregean logic and other formalizations of propositional identity. *Bulletin of the Section of Logic*, v. 14, n. 1, p. 21–27, 1985.

MALINOWSKI, G. Q-consequence operation. *Reports on Mathematical Logic*, v. 24, n. 1, p. 4, 1990.

MALINOWSKI, G. *Many-valued logics*. [S.l.]: Clarendon Press, Oxford, 1993.

MALINOWSKI, G. Inferential many-valuedness. In: *Philosophical logic in Poland*. [S.l.]: Springer, 1994. p. 75–84.

MALINOWSKI, G. Many-valued logic and its philosophy. *Handbook of the History of Logic*, North-Holland, v. 8, p. 13–94, 2007.

MALINOWSKI, G. Concerning intuitions on logical many-valuedness. *Bulletin of the Section of Logic*, v. 38, n. 3, p. 49–59, 2009.

MARCOS, J. Semânticas de traduções possíveis. *Campinas: Universidade Estadual de Campinas*, 1999.

MARCOS, J. Many values, many semantics. *preprint*, 2000.

MARCOS, J. What is a Non-truth-functional Logic? *Studia Logica*, Springer, v. 92, n. 2, p. 215, 2009.

MARCOS, J. Automatic generation of proof tactics for finite-valued logics. *arXiv preprint arXiv:1003.4802*, 2010.

MARES, E. Relevance logic. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 2014. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2014.

MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic*. [S.l.]: CRC Press, 2015.

NUSEIBEH, B.; EASTERBROOK, S.; RUSSO, A. Making inconsistency respectable in software development. *Journal of Systems and Software*, Elsevier, v. 58, n. 2, p. 171–180, 2001.

OMYŁA, M. Remarks on non-Fregean logic. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, v. 10, n. 23, p. 21–31, 2007.

POGORZELSKI, W. A.; POGORZELSKI, A. W. *Notions and theorems of elementary formal logic*. [S.l.]: Warsaw University-Białystok Branch, 1994.

POST, E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions. *American journal of mathematics*, JSTOR, v. 43, n. 3, p. 163–185, 1921.

PRIEST, G. The logic of paradox. *Journal of Philosophical logic*, Springer, v. 8, n. 1, p. 219–241, 1979.

PRIEST, G. *In contradiction*. [S.l.]: Oxford University Press, 2006.

PRIEST, G. *An introduction to non-classical logic: From if to is*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008.

PRIEST, G.; BERTO, F. Dialetheism. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 2017. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2017.

PRIEST, G.; TANAKA, K.; WEBER, Z. Paraconsistent logic. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2016. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2016.

RESCHER, N. *Many-valued logic*. [S.l.]: Springer, 1968.

ROBLES, G. et al. The quasi-relevant 3-valued logic RM3 and some of its sublogics lacking the variable-sharing property. *Reports on Mathematical Logic*, Portal Czasopism Naukowych Ejournals. eu, v. 2016, n. 51, p. 105–131, 2016.

ROSSER, J.; TURQUETTE, A. *Many-valued Logics*. [S.l.]: North-Holland, Amsterdam, 1952.

SCOTT, D. Completeness and axiomatizability in many-valued logic. In: AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, PROVIDENCE. *Proceedings of the Tarski symposium.* [S.l.], 1974. v. 25, p. 411–436.

SETTE, A. M. On the propositional calculus P^1. *Mathematica Japonicae*, v. 18, p. 173–180, 1973.

SETTE, A. M.; CARNIELLI, W. A. Maximal weakly-intuitionistic logics. *Studia Logica*, Springer, v. 55, n. 1, p. 181–203, 1995.

SHRAMKO, Y.; WANSING, H. *Truth and falsehood: An inquiry into generalized logical values*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. v. 36.

SILVA, S. M. *Of madness and many-valuedness: an investigation into Suszko's Thesis.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2015.

SPEAKS, J. Theories of Meaning. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Spring 2016. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2016.

SUSZKO, R. Concerning the method of logical schemes, the notion of logical calculus and the role of consequence relations. *Studia Logica*, Springer, v. 11, n. 1, p. 185–214, 1961.

SUSZKO, R. Remarks on Lukasiewicz's three-valued logic. *Bulletin of the Section of Logic*, v. 4, n. 3, p. 87–90, 1975.

SUSZKO, R. The Fregean Axiom and Polish mathematical logic in the 1920 s. *Studia Logica*, Springer, v. 36, n. 4, p. 377–380, 1977.

TARSKI, A. Sobre o Conceito de Conseqüência lógica. *A concepçao semântica da verdade, traduçao de C. Braida et al. Mortari, CA*, 1935.

TARSKI, A. *Logic, semantics, metamathematics: papers from 1923 to 1938*. [S.l.]: Hackett Publishing, 1983.

TSUJI, M. Many-valued logics and Suszko's thesis revisited. *Studia Logica*, Springer, v. 60, n. 2, p. 299–309, 1998.

WAJSBERG, M. Axiomatization of the three-valued propositional calculus. *Mordechaj Wajsberg. Logical Works, Polish Academy of Sciences, Ossolineum*, 1977.

WANSING, H.; SHRAMKO, Y. Suszko's Thesis, inferential many-valuedness, and the notion of a logical system. *Studia Logica*, Springer, v. 88, n. 3, p. 405–429, 2008.

WITTGENSTEIN, L. Tractatus Logico-Philosophicus (lh santos, trad.). *São Paulo: Edusp.(Original publicado em 1921).*, 2010.

WÓJCICKI, R. *Theory of logical calculi: basic theory of consequence operations.* [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 199.

WOLENSKI, J. The principle of bivalence and Suszko thesis. *Bulletin of the Section of Logic*, v. 38, n. 3/4, p. 99–110, 2009.

ZACH, R. Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the development of propositional logic. *Bulletin of Symbolic Logic*, Cambridge Univ Press, v. 5, n. 03, p. 331–366, 1999.