María Inés Corbalán

Conectivos de Restauração Local

Campinas
2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

María Inés Corbalán

Conectivos de Restauração Local

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Unicamp para obtenção do título de Mestre em Filosofia.
Orientador: Dr. Marcelo Esteban Coniglio.

Este exemplar corresponde à versão definitiva defendida em 4/05/2012.

Campinas
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
SANDRA APARECIDA PEREIRA-CRB8/7432 - BIBLIOTECA DO IFCH
UNICAMP

C81c	Corbalán, María Inés, 1978- Conectivos de restauração local / María Inés Corbalán. -- Campinas, SP : [s.n.], 2012
	Orientador: Marcelo Esteban Coniglio Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.
	1. Lógica. 2. Inconsistência (Lógica). 3. Lógica matemática não clássica. I. Coniglio, Marcelo Esteban, 1963- II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em Inglês: Local Restoration Connectives
Palavras-chave em inglês:
Logic
Inconsistency (Logic)
Nonclassical mathematical logic
Área de concentração: Filosofia
Titulação: Mestre em Filosofia
Banca examinadora:
Marcelo Esteban Coniglio [Orientador]
Walter Alexandre Carnielli
Hércules de Araujo Feitosa
Data da defesa: 04-05-2012
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Dissertação de Mestrado, em sessão pública realizada em 04 de maio de 2012, considerou a candidata MARÍA INÉS CORBALÁN aprovada.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora.

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli

Prof. Dr. Hercules Araujo Feitosa

A mis padres

A Gladys D. Palau

Agradecim(i)entos

Este trabajo no habría sido posible, si yo no hubiera recibido el apoyo económico, académico y anímico de diferentes instituciones y personas.

Agradezco al *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* por la beca de maestría otorgada. Agradezco también, al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por la beca otorgada en el año 2008, que me permitió realizar los primeros cursos de lógica en el Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciencia de la UNICAMP.

Agradezco profundamente a mi orientador, Marcelo E. Coniglio, por su trabajo, dedicación, apoyo, confianza, incentivo y, fundamentalmente, por su paciencia infinita.

Agradezco a los profesores Walter A. Carnielli y João Marcos por haber conformado el jurado del examen de cualificación; les agradezco la lectura detenida y las importantes observaciones y correcciones de mi trabajo. A ellos y también a Hércules de Araujo Feitosa y a Márcio Moretto Ribeiro les agradezco por haber aceptado participar como miembros del jurado de defensa de esta disertación.

Estoy muy agradecida con Sônia Bia, secretaria de postgrado del IFCH, y con la abogada Luciana Pacheco, por haber tornado simples todos los trámites administrativos. Agradezco al personal de las diferentes bibliotecas de la UNICAMP, en especial, al personal de la biblioteca del CLE, del IFCH y del IMECC.

Agradezco a mis colegas del CLE. A Newton, por haber leído con atención y dedicación el primer escrito que acabaría en el presente texto, por sus correcciones y detalladas explicaciones gramaticales y, fundamentalmente, por su amistad. Soy grata por haber podido conocer a Elí, a Márcio, a Anderson, a Edgar, a Leandro, a Luiz Enrique, a Rafa y a Carol y por haber compartido con ellxs momentos de trabajo y de ocio.

Agradezco a quienes iniciaron y motivaron mi interés por el estudio de la lógica: Cecilia Duran, Gladys Palau, Javier Legris.

Este trabajo no existiría, si no fuera por el apoyo, también, del entorno no-lógico y no-formal de Barão. Agradezco, por ello, a mis amigxs intercambistas del 2009, en especial, a Valentina y a Angel. No tengo palabras para agradecer el apoyo de mi "familia" colombiana: May y Oscar & Co., Edwar, Juan, Johana, John, Nathalia, Patricia, Ma. Elvira, Rafael(es) y de quienes, no siendo colombianxs, formaron parte de esa "familia": Cintia, Vicky, Luanda, Meli.

Agradezco a mi familia —Juanjo, Nane, Ignacio y Mercedes— que me acompañó y apoyó incondicionalmente durante todos estos años de estudio y ausencia. A mi sobrina, Mora, que creció a la par de esta disertación, pero sin que yo pudiera verla crecer. A mi abuela Sarita.

A mis amigxs de la vida. A Fede, Ana, Mar, Andrea, Vero, Andres(es), Georgi, Adriana y Daniel agradezco por los mates compartidos a la distancia. A Mónica, por continuar estando.

A mis alumnxs del curso de español les agradezco que me hicieran recordar lo feliz que me siento compartiendo lo que alguna vez yo aprendí. A mis entrenadores, ET y Montanha, y a mis colegas de atletismo agradezco por las horas de entrenamiento y dispersión.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal definir o conceito de *Conectivo de Restauração Local*. Revemos diversos sistemas lógicos conhecidos na literatura sob o ângulo do novo conceito introduzido. Procuramos conectivos de restauração local nas lógicas do sem-sentido de Bočvar, Halldén e Åqvist, nos sistemas n-valorados de Łukasiewicz e nas Lógicas Intuicionista e Minimal. Nossa caracterização de um conectivo como sendo um conectivo de restauração local estará estreitamente ligada à possibilidade de obter Teoremas de Ajuste de Derivabilidade entre sistemas lógicos. Como resultado da pesquisa, mostramos que em cada uma destas lógicas é possível achar conectivos de restauração local. Estabelecemos, assim, novas e conhecidas vinculações entre sistemas lógicos desde uma nova perspectiva. Mostramos que os diferentes sistemas estudados constituem novos exemplos de Lógicas da Inconsistência Formal e de Lógicas da Indeterminação Formal. Mostramos, também, que a estratégia de definir conectivos de restauração local pode ser aplicada para obter novas demonstrações de conhecidos metateoremas lógicos. Finalmente, estabelecemos um esquema geral a partir do qual definir novos conectivos de restauração local.

Palavras-chave

Lógica - Inconsistência (Lógica) - Lógica matemática não clássica

Abstract

The present work aims principally to define the concept of *Local Restoration Connective*. We review known systems of logic from the point of view of such new concept. We look for local restoration connectives in the nonsense logics of Bočvar, Halldén, Åqvist, in the n-valued logics of Łukasiewicz and in the Intuitionistic and Minimal logics. Our characterization of a local restoration connective is connected to obtaining Derivability Adjustment Theorems between logical systems. As a result of our research, we show local restoration connectives to those logical systems. We set old and new relations between logical systems in a new way, showing new examples of Logics of Formal Inconsistency and Logics of Formal Undeterminedness. We also show how this technique for defining local restoration connectives can be applied to prove some classical metatheorems in a new way. Finally, we set a general scheme from which it is possible to define further local restoration connectives.

Keywords

Logic - Inconsistency (Logic) - Nonclassical mathematical logic

Sumário

Capítulo 1

Introdução e Justificativa

Os trabalhos sobre *Lógica Paraconsistente* (**LP**) têm sido teoricamente frutíferos não apenas pela proliferação de novos sistemas lógicos, mas também pela instauração de uma nova perspectiva de estudo, pelos conceitos produzidos e resultados obtidos nesse âmbito. Com o consequente desenvolvimento dos estudos sobre lógica paraconsistente, diversos sistemas lógicos ganham novo interesse ao serem focalizados pelo ângulo das **LPs**. A lógica intuicionista (**LI**) começa a ser estudada em termos da sua dualidade com sistemas de **LP**; matrizes multivaloradas são utilizadas para definir negações paraconsistentes, sistemas de **LP** são considerados parte de sistemas de lógica relevante; sistemas modais expõem sua capacidade para definir negações paraconsistentes ao mesmo tempo que negações paraconsistentes geram operadores intensionais, por exemplo (cf. [14]).

De maneira similar, o surgimento das *Lógicas da Inconsistência Formal* (*Logics of Formal Inconsistency* - **LFIs**) tem motivado releituras dos sistemas paraconsistentes. Sistemas tais como a lógica minimal (**LM**) de Kolmogorov e Johánsson [38] e [35], o sistema $\mathbf{P}^1$ de Sette [29], o cálculo $\mathbf{J}_3$ de da Costa e D'Ottaviano [56], o sistema **D2** de Jaśkowski [34], e o sistema $\mathbf{C}_1$ de da Costa [21], prévios ao conceito de **LFI**, foram classificados como sendo ou não **LFIs**, como tendo ou não operadores de (in)consistência e, consequentemente, como tendo ou não capacidade para recuperar inferências clássicas perdidas, através de *Teoremas de Ajuste de Derivabilidade* (DATs, pela sigla em inglês).

Os Teoremas de Ajuste de Derivabilidade surgiram na escola belga de lógica adaptativa, liderada por D. Batens. As lógicas adaptativas (**ALs**) foram propostas pelo grupo belga da Universidade de Ghent para entender e explicar certos processos de raciocínio que são revogáveis (*defeasible*). Historicamente, as primeiras lógicas adaptativas propostas trataram do raciocínio paraconsistente. Vários sistemas de lógica adaptativa, além dos sistemas de lógica paraconsistentes, foram posteriormente propostos a partir do trabalho fundacional de Batens [7].

Nossa proposta será também, em certo sentido, um trabalho de releitura. Nossa releitura é inspirada tanto nos trabalhos das **LFIs**, quanto nos trabalhos das lógicas adaptativas. Propomos rever diversos sistemas lógicos conhecidos na literatura sob um novo ângulo: à luz do conceito de conectivo de (in)consistência introduzido pelas **LFIs** e à luz dos DATs introduzidos pela escola de lógica adaptativa. O objetivo principal de nosso projeto de releitura será definir o conceito abrangente de *Conectivo de Restauração Local*, determinar condições suficientes e necessárias para um conectivo ser chamado de conectivo de restauração local. Visando estender a proposta das **LFIs** e incluir os conectivos de consistência na classe dos nossos conectivos de restauração, observamos que os conectivos de consistência das **LFIs** são conectivos unários a partir dos quais é possível recuperar certos princípios da lógica consistente perdidos em qualquer **LFI**. É por meio desses conectivos unários que as **LFIs** conseguem recuperar as inferências consistentes no âmbito paraconsistente. E é através dos DATs que a recuperação das inferências é expressa. Nós limitaremos nossa pesquisa ao estudo de conectivos unários e nossa caracterização de um conectivo unário como sendo um conectivo de restauração local estará estreitamente ligada à possibilidade de obter teoremas de ajuste de derivabilidade entre dois sistemas lógicos.

Os resultados obtidos em nossa pesquisa são, fundamentalmente, consequência da perspectiva com que afrontamos o estudo de conhecidos sistemas lógicos. Essa perspectiva impõe certas restrições formais na nossa escolha das lógicas a serem estudadas: estudaremos sistemas que são comparáveis em termos de sua força inferencial e que compartilham uma mesma linguagem. A seleção de nossos sistemas é, por outro lado, já não condicionada, mas sim motivada pelos estudos anteriores na temática dos DATs, das **LFIs** e das *Lógicas da Indeterminação Formal* (**LFUs**, pela sigla em inglês).

Nosso trabalho é dividido em três partes —Antecedentes, Proposta e Observações Finais. A **primeira parte** é dividida, principalmente, em quatro capítulos. No primeiro deles apresentaremos conceitos lógicos básicos que usaremos ao longo de nosso trabalho. Nos dois seguintes apresentamos os conceitos-chaves das linhas de pesquisa que guiam o nosso trabalho: **LFIs**, **LFUs** e **ALs**. Apresentaremos os princípios formais que caraterizam as **LFIs** e **LFUs**, o papel dos conectivos de consistência e de completude, a estrutura e condições gerais dos DATs, a caracterização semântica e a teoria da prova das lógicas adaptativas. Reunimos, também, alguns exemplos de DATs espalhados na literatura das **LFIs** e das **ALs**. Finalmente, no quarto capítulo, destacamos o aspecto local da proposta dessas lógicas.

A **segunda parte** de nosso trabalho é dividida, por sua vez, em quatro capítulos: *Conectivos de Restauração Local*, *Lógicas do Sem-sentido*, *Lógicas n-valoradas* e *Lógicas Construtivas*. No primeiro capítulo definimos o conceito de conectivo de restauração local. Nos três seguintes capítulos apresentamos diferentes sistemas lógicos conhecidos na literatura sob uma nova perspectiva: em cada um desses sistemas procuramos conectivos de restauração local.

Finalmente, nosso trabalho é encerrado, na **terceira parte**, com as conclusões de nossa pesquisa. Nessa parte recuperamos as conclusões parciais obtidas ao longo de nossa apresentação e destacamos algumas limitações de nossa proposta.

Parte I

Antecedentes

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Definição 2.0.1 *Seja* $prop = \{p_1, p_2, \ldots\}$ *um conjunto enumerável de variáveis proposicionais e seja* $\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ *uma assinatura proposicional, tal que cada* Σ_n *é um conjunto de conectivos, e tal que* $\Sigma_n \cap \Sigma_m = \emptyset$*, se* $n \neq m$*.* Σ_n *é o conjunto de conectivos n-ários. Em particular, os elementos de* Σ_0 *são chamados de constantes. O* conjunto de fórmulas $For(\Sigma)$ *é definido como uma álgebra livremente gerada por* $prop$ *sobre* Σ.[1]

Observação 2.0.2 *O conjunto de fórmulas* $For(\Sigma)$ *dependerá da assinatura* Σ*, uma vez que o conjunto* $prop$ *permanecerá fixado em todas as seções.*

Notação 2.0.3 *Seja* R *uma relação binária sobre um conjunto* X *e sejam* $x, y \in X$*. Quando* $\langle x, y \rangle \in R$*, anotaremos também* xRy*.*

Definição 2.0.4 *Seja* $\wp(X)$ *o conjunto das partes do conjunto* X *e seja* $For(\Sigma)$ *um conjunto de fórmulas.*[2] Então, $\Vdash \subseteq \wp(For(\Sigma)) \times For(\Sigma)$ define uma *relação de consequência (de conclusão única) padrão* sobre $For(\Sigma)$, se as seguintes condições 1-3 são satisfeitas para quaisquer fórmulas α, β e conjuntos $\Gamma, \Delta \subseteq For(\Sigma)$:[3]

[1] Como é usual, usaremos as letras p, q, r, s, t, u como metavariáveis proposicionais.

[2] Seja X um conjunto. $\wp(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$ é o conjunto das partes de X.

[3] Fórmulas e vírgulas à esquerda do signo $\Vdash$ denotarão conjuntos e uniões de conjuntos de fórmulas, respectivamente. Assim, por exemplo $\Gamma, \alpha \Vdash \beta$ denotará $\Gamma \cup \{\alpha\} \Vdash \beta$, enquanto $\Gamma, \Delta \Vdash \beta$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \Vdash \beta$ denotarão $\Gamma \cup \Delta \Vdash \beta$ e $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \Vdash \beta$, respectivamente.

1. **Reflexividade** se $\alpha \in \Gamma$, então $\Gamma \Vdash \alpha$,

2. **Monotonicidade** se $\Delta \Vdash \alpha$ e $\Delta \subseteq \Gamma$, então $\Gamma \Vdash \alpha$,

3. **Corte** se $\Delta \Vdash \alpha$ e $\Gamma, \alpha \Vdash \beta$, então $\Delta, \Gamma \Vdash \beta$.

Uma relação de consequência que satisfaz as condições 1-3 é também chamada de *relação de consequência tarskiana.*

Definição 2.0.5 *Uma* lógica $\mathbf{L}$ *é uma estrutura* $\langle For(\Sigma), \Vdash \rangle$*, em que* $For(\Sigma)$ *é um conjunto de fórmulas e* $\Vdash$ *é uma relação de consequência padrão definida sobre* $For(\Sigma)$*.*

Notação 2.0.6 *Escrevemos* $For\left(\Sigma^{\mathbf{L}}\right)$ *ou, mais simplesmente,* $For^{\mathbf{L}}$*, para indicar o conjunto de fórmulas da lógica* $\mathbf{L}$*, e* $\Sigma^{\mathbf{L}}$ *para indicar a assinatura da lógica* $\mathbf{L}$*.*

Definição 2.0.7 *Uma* relação de consequência *padrão* $\Vdash$ *diz-se* compacta *se ela é uma relação de consequência padrão e satisfaz a seguinte condição 4:*

4. **Compacidade** se $\Gamma \Vdash \alpha$, então $\Delta \Vdash \alpha$, para algum conjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$.

Definição 2.0.8 *Uma* relação de consequência *padrão diz-se* estrutural *se ela é uma relação de consequência padrão e satisfaz a seguinte condição 5:*

5. **Estruturalidade** Para todo endomorfismo σ em $For(\Sigma)$, se $\Gamma \Vdash \alpha$, então $\sigma(\Gamma) \Vdash \sigma(\alpha)$.

Definição 2.0.9 *Dizemos que uma lógica* $\mathbf{L} = \langle For(\Sigma), \Vdash \rangle$ *é reflexiva (monotônica, compacta, estrutural) se a relação de consequência* $\Vdash$ *de* $\mathbf{L}$ *satisfaz a condição 1 (2, 4, 5) da definição 2.0.4.*

Definição 2.0.10 *Uma* teoria Γ *sobre uma lógica* $\mathbf{L}$ *é um conjunto* $\Gamma \subseteq For(\Sigma)$*.*

Definição 2.0.11 *Seja* $\Vdash_{\mathbf{L}}$ *a relação de consequência da lógica* $\mathbf{L}$*. Dizemos que* $\alpha \in For\left(\Sigma^{\mathbf{L}}\right)$ é tese *de* $\mathbf{L}$*, se* $\Gamma \Vdash \alpha$*, para todo conjunto* $\Gamma \subseteq For\left(\Sigma^{\mathbf{L}}\right)$*.*

Definição 2.0.12 *Seja* $\Vdash_{\mathbf{L}}$ *a relação de consequência da lógica* $\mathbf{L}$ *e seja* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\left(\Sigma^{\mathbf{L}}\right)$. *Se* $\langle \Gamma, \alpha \rangle \in \Vdash_{\mathbf{L}}$ *então, dizemos que* $\Gamma \Vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ *é uma inferência da lógica* $\mathbf{L}$ *tal que a fórmula* α segue do conjunto Γ *de fórmulas em* $\mathbf{L}$.

Notação 2.0.13 *No caso que* $\langle \Gamma, \alpha \rangle \notin \Vdash$, *então escreveremos* $\Gamma \nVdash \alpha$ *e dizemos que* α *não segue de* Γ.

Definição 2.0.14 *Sejam* $\mathbf{L}_1 = \langle For(\Sigma^{\mathbf{1}}), \Vdash_{\mathbf{1}} \rangle$ *e* $\mathbf{L}_2 = \langle For(\Sigma^{\mathbf{2}}), \Vdash_{\mathbf{2}} \rangle$ *duas lógicas. Dizemos que* $\mathbf{L}_1$ *é uma* extensão linguística (própria) *de* $\mathbf{L}_2$ *se* $For(\Sigma^{\mathbf{2}})$ *é um subconjunto (próprio) de* $For(\Sigma^{\mathbf{1}})$. *Dizemos que* $\mathbf{L}_1$ *é uma* extensão dedutiva (própria) *de* $\mathbf{L}_2$ *se* $\Vdash_{\mathbf{2}}$ *é um subconjunto (próprio) de* $\Vdash_{\mathbf{1}}$. *Se* $\mathbf{L}_1$ *é uma extensão linguística e dedutiva de* $\mathbf{L}_2$ *e para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma^{\mathbf{2}})$, *então* $\Gamma \Vdash_{\mathbf{2}} \alpha$ *sse* $\Gamma \Vdash_{\mathbf{1}} \alpha$, *então dizemos que* $\mathbf{L}_1$ *é uma* extensão conservativa *de* $\mathbf{L}_2$. *No caso em que* $\mathbf{L}_1$ *é uma extensão (linguística, dedutiva, conservativa) de* $\mathbf{L}_2$, *dizemos também que* $\mathbf{L}_2$ *é um* fragmento *(linguístico, dedutivo, conservativo) de* $\mathbf{L}_1$.[4]

Definição 2.0.15 *A relação* $\Vvdash \subseteq \wp(For(\Sigma)) \times \wp(For(\Sigma))$ *é uma* relação de consequência tarskiana com conclusão múltipla, *se satisfaz as seguintes condições:*

Reflexividade $\Gamma, \alpha, \Theta \Vvdash \Delta, \alpha, \Omega$

Monotonicidade $\Gamma \Vvdash \Delta$ *sse* $\Gamma, \Theta \Vvdash \Delta, \Omega$

Corte *se* $\Gamma \Vvdash \alpha, \Delta$ *e* $\Theta, \alpha \Vvdash \Omega$, *então* $\Gamma, \Theta \Vvdash \Delta, \Omega$.

Neste contexto, $\Gamma, \alpha, \Theta \Vvdash \Delta, \beta, \Omega$ significa que $\langle \Gamma \cup \{\alpha\} \cup \Theta, \Delta \cup \{\beta\} \cup \Omega \rangle \in \Vvdash$ e intuitivamente expressa que alguma das fórmulas do conjunto —conclusão— à direita de $\Vvdash$ segue do conjunto de fórmulas —premissas— da esquerda. As componentes do conjunto das fórmulas à direita devem ser entendidas como alternativas.

[4] Sejam X, Y dois conjuntos quaisquer. X é um subconjunto próprio de Y sse X é um subconjunto de Y e existe β tal que $\beta \in Y$ e $\beta \notin X$. Como é usual, usaremos *sse* como abreviatura de *se e somente se*.

Definição 2.0.16 *Seja* $var : For\,(\Sigma) \to \wp\,(prop)$ *uma função que leva fórmulas do conjunto* $For\,(\Sigma)$ *de fórmulas no conjunto das partes* $\wp\,(prop)$ *do conjunto de variáveis proposicionais. Definimos a função* variáveis var *da seguinte maneira:*

1. $var\,(\alpha) = \{\alpha\}$, *se* $\alpha \in prop$,

2. $var\,(\alpha) = \emptyset$, *se* $\alpha \in \Sigma_0$,

3. $var\,(\clubsuit\,(\alpha_1 \ldots \alpha_n)) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} var\,(\alpha_i)$, *para* $\clubsuit \in \Sigma_n$ *com* $n \geq 1$.

Notação 2.0.17 *Se* Γ *é um conjunto de fórmulas, então* $var(\Gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} var(\gamma)$.

Definição 2.0.18 *Seja* Σ *uma assinatura. Seja* $sub : For\,(\Sigma) \to \wp\,(For\,(\Sigma))$ *uma função que leva fórmulas do conjunto* $For\,(\Sigma)$ *de fórmulas no conjunto das partes* $\wp\,(prop)$ *do conjunto de fórmulas. Definimos a função* subfórmula sub *da seguinte maneira:*

1. $sub\,(\alpha) = \{\alpha\}$, *se* $\alpha \in For\,(\Sigma_0)$,

2. $sub\,(\alpha) = \{\alpha\} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} sub\,(\gamma_i)$, *se* $\alpha = (\clubsuit\,(\gamma_1 \ldots \gamma_n))$, *com* $\clubsuit \in \Sigma_n$, *com* $n \geq 1$.

Notação 2.0.19 *Se* Γ *é um conjunto de fórmulas, então* $sub\,(\Gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} sub\,(\gamma)$.

Definição 2.0.20 *Seja* $V_{\mathbf{L}}$ *um conjunto não vazio de valores de verdade da lógica* $\mathbf{L}$, *tal que* $V_{\mathbf{L}} = D_{\mathbf{L}} \cup U_{\mathbf{L}}$, $D_{\mathbf{L}} \cap U_{\mathbf{L}} = \emptyset$, *e* $D_{\mathbf{L}} = \{d_1, d_2, \ldots\}$ *e* $U_{\mathbf{L}} = \{u_1, u_2, \ldots\}$ *são subconjuntos —não vazios— do conjunto* $V_{\mathbf{L}}$ *de valores de verdade. Os elementos* $d_i \in D_{\mathbf{L}}$ *são chamados de valores de verdade designados e os elementos* $u_i \in U_{\mathbf{L}}$ *são chamados de valores de verdade não designados da lógica* $\mathbf{L}$, *respectivamente. Uma* semântica *sobre* $For(\Sigma^{\mathbf{L}})$ *e* $V_{\mathbf{L}}$ *é um conjunto* $sem_{\mathbf{L}}$ *de funções* $v_{\mathbf{L}} : For(\Sigma) \to V_{\mathbf{L}}$, *chamadas de* valorações*.*

Definição 2.0.21 *Seja* $V_{\mathbf{C}} = \{1, 0\}$ *o conjunto de valores de verdade da lógica clássica* ***LC****, tal que* $D_{\mathbf{C}} = \{1\}$. *Seja* $v : prop \to \{1, 0\}$ *uma função atribuição de valores de verdade no conjunto das variáveis proposicionais. Uma semântica sobre* $For\left(\Sigma^{\mathbf{LC}}\right)$ *e* $V_{\mathbf{C}}$ *é um conjunto* $sem_{\mathbf{C}}$ *de funções* $v_{\mathbf{C}} : For\left(\Sigma^{\mathbf{LC}}\right) \to V_{\mathbf{C}}$, *tal que:*

1. $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = v(\alpha)$, *se* $\alpha \in prop$,

2. $v_{\mathbf{C}}(\neg\alpha) = 1$ *sse* $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 0$,

3. $v_{\mathbf{C}}(\alpha \wedge \beta) = 1$ *sse* $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$ *e* $v_{\mathbf{C}}(\beta) = 1$,

4. $v_{\mathbf{C}}(\alpha \vee \beta) = 1$ *sse* $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$ *ou* $v_{\mathbf{C}}(\beta) = 1$,

5. $v_{\mathbf{C}}(\alpha \to \beta) = 1$ *sse* $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 0$ *ou* $v_{\mathbf{C}}(\beta) = 1$.

Definição 2.0.22 *Dizemos que o conectivo* $\vee \in \Sigma_2^{\mathbf{L}}$ *da lógica* $\boldsymbol{L}$ *é uma* disjunção padrão *sse* $v_{\mathbf{L}}(\alpha \vee \beta) \in D$ *sse* $v_{\mathbf{L}}(\alpha) \in D$ *ou* $v_{\mathbf{L}}(\beta) \in D$, *para toda* $v_{\mathbf{L}} \in sem_{\mathbf{L}}$.

Definição 2.0.23 *Dizemos que o conectivo* $\wedge \in \Sigma_2^{\mathbf{L}}$ *da lógica* $\boldsymbol{L}$ *é uma* conjunção padrão *sse* $v_{\mathbf{L}}(\alpha \wedge \beta) \in D$ *sse* $v_{\mathbf{L}}(\alpha) \in D$ *e* $v_{\mathbf{L}}(\beta) \in D$, *para toda* $v_{\mathbf{L}} \in sem_{\mathbf{L}}$.

Definição 2.0.24 *Seja* $V_{\mathbf{L}}$ *o conjunto de valores de verdade da lógica* $\mathbf{L}$ *e seja* $V_{\mathbf{C}}$ *o conjunto de valores de verdade de* $\boldsymbol{LC}$. *Considere* $\mathbf{L} \neq \mathbf{LC}$. *Chamamos de* valores de verdade não clássicos *aos valores do conjunto* $V_{\mathbf{L}} - V_{\mathbf{C}}$.

Notação 2.0.25 *Quando não for confuso, anotaremos* $v_{\mathbf{L}}$, $V_{\mathbf{L}}$, $D_{\mathbf{L}}$, $sem_{\mathbf{L}}$, *etc simplesmente como* v, V, D, sem, *etc.*

Definição 2.0.26 *Dada uma semântica,* sem, $n-$valorada *e uma fórmula* $\varphi \in For(\Sigma)$, *diz-se que* φ tem modelo *se existe alguma* $v \in sem$ *tal que* $v(\varphi) \in D$. *Nesse caso, a valoração* $v \in sem$ *é o modelo de* φ.

Definição 2.0.27 *Uma valoração* v *é o* modelo de um conjunto de fórmulas Γ *se, e somente se,* v *é um modelo de cada fórmula* $\psi \in \Gamma$.

Definição 2.0.28 *Seja* Γ *um conjunto de fórmulas.* $\mathfrak{Mod}(\Gamma) = \{v \in sem : v(\Gamma) \subseteq D\}$ *é a* classe de modelos *de* Γ.

Definição 2.0.29 *Se $v(\varphi) \in D$, para toda $v \in sem$, então diz-se que φ é* logicamente válida *ou, simplesmente, que φ é* tautologia. *Se $v(\varphi) \in U$, para toda $v \in sem$, então diz-se que φ é uma* contradição. *Se $v_1(\varphi) \in D$, para alguma valoração $v_1 \in sem$ e $v_2(\varphi) \in U$ para alguma outra valoração $v_2 \in sem$, então diz-se que φ é uma* contingência. *Seja $\Gamma \subseteq For(\Sigma)$, diz-se que Γ é* satisfatível *se existe uma valoração $v \in sem$ tal que $v(\varphi) \in D$, para toda $\varphi \in \Gamma$, isto é, Γ é satisfatível se Γ tem algum modelo. Caso contrário, diz-se que Γ é* insatisfatível.

Definição 2.0.30 *A relação $\models_{sem} \subseteq \wp(For(\Sigma)) \times For(\Sigma)$ de* consequência semântica *associada à semântica sem pode ser definida da seguinte maneira. Seja $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma)$, então:*

$$\Gamma \models_{sem} \alpha \textit{ sse para toda valoração } v \in sem,\ v(\alpha) \in D, \textit{ se } v(\Gamma) \subseteq D.$$

Logo, uma fórmula $\alpha \in For(\Sigma)$ é consequência semântica de um conjunto de fórmulas Γ —denotado $\Gamma \models_{sem} \alpha$— se, e somente se, todos os modelos das fórmulas de Γ são modelos de α. Caso contrário, α não é consequência semântica de Γ, o que é denotado por $\Gamma \not\models_{sem} \alpha$. Se $\Gamma \models_{sem} \alpha$, para todo Γ, escreveremos simplesmente $\models_{sem} \alpha$. Caso contrário, escreveremos $\not\models_{sem} \alpha$.

Definição 2.0.31 *Dizemos que uma* inferência $\Gamma \Vdash \alpha$ *é* válida *em* $\mathbf{L}$ *se* $\Gamma \models_{sem_{\mathbf{L}}} \alpha$

Notação 2.0.32 *Em geral, usaremos $\models_{\mathbf{L}}$ no lugar de $\models_{sem_{\mathbf{L}}}$.*

Proposição 2.0.33 *A relação de consequência semântica $\models_{\mathbf{LC}}$ da lógica clássica tem as seguintes propriedades:*

1. (reflexividade) $\varphi \models_{\mathbf{LC}} \varphi$;
2. Se $\models_{\mathbf{LC}} \varphi$, então $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \varphi$;
3. Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \varphi$;
4. (monotonicidade) Se $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models_{\mathbf{LC}} \varphi$;

5. Se $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \varphi$ e $\varphi \models_{\mathbf{LC}} \psi$, então $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \psi$;

6. (corte) Se $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \varphi$ e $\Delta, \varphi \models_{\mathbf{LC}} \psi$, então $\Gamma, \Delta \models_{\mathbf{LC}} \psi$.

Capítulo 3

Lógicas da Inconsistência Formal e Lógicas da Indeterminação Formal

Neste capítulo apresentaremos as Lógicas Paraconsistentes (**LPs**) e as Lógicas da Inconsistência Formal (**LFIs**), as Lógicas Paracompletas e as Lógicas da Indeterminação Formal (**LFUs**). Apresentaremos os princípios que caracterizam essa classe de lógicas e o esquema geral dos DATs para **LFIs** e **LFUs**. Finalmente, expomos exemplos de **LFIs** e reunimos alguns DATs espalhados na literatura.

3.1 Lógicas Paraconsistentes e Lógicas da Inconsistência Formal

As *Lógicas da Inconsistência Formal* (**LFIs**) são uma classe particular de lógicas paraconsistentes. As lógicas paraconsistentes são lógicas capazes de suportar contradições sem cair na trivialidade. As lógicas paraconsistentes são capazes de diferenciar os conceitos de contraditoriedade e trivialidade, que na Lógica Clássica (**LC**) resultam equivalentes.

Definição 3.1.1 *Seja* Γ *uma teoria de* **L**. *Dizemos que* Γ *é* contraditória com relação a uma negação $\neg$ *se* Γ *satisfaz:*

$$\Gamma \Vdash \alpha \text{ e } \Gamma \Vdash \neg\alpha, \text{ para alguma } \alpha \in For\left(\Sigma^{\mathbf{L}}\right).$$

Definição 3.1.2 *Uma teoria* Γ *de* **L** *é* consistente *se ela não é contraditória.*

Definição 3.1.3 *Uma teoria* Γ *de* **L** *é chamada de* trivial *se satisfaz:*

$$\Gamma \Vdash \alpha, \text{ para toda } \alpha \in For\left(\Sigma^{\mathbf{L}}\right).$$

Definição 3.1.4 *Uma teoria* Γ *de* **L** *é chamada de* explosiva *se satisfaz o seguinte* Princípio de Explosão *(PE):*

$$\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta, \text{ para todo } \Gamma \subseteq For\left(\Sigma^{\mathbf{L}}\right) \text{ e para toda } \alpha, \beta \in For\left(\Sigma^{\mathbf{L}}\right). \tag{PE}$$

Uma *lógica* **L** diz-se *explosiva* se para toda teoria Γ de **L**, Γ é explosiva. A lógica clássica **LC** é explosiva, isto é, toda teoria clássica Γ é explosiva. No caso de Γ ser uma teoria explosiva e contraditória com respeito à negação $\neg$, então Γ é trivial. Em **LC** as noções de contraditoriedade e de trivialidade resultam equivalentes: se uma teoria Γ é contraditória, então Γ é trivial e, se Γ é trivial, então Γ é contraditória. Tanto a lógica clássica quanto a lógica intuicionista pressupõem a consistência das teorias. Para essas lógicas, as contradições têm um caráter explosivo: se a teoria é contraditória, então ela "explode" e qualquer afirmação se segue dela. Tal como na lógica clássica, também no contexto da lógica intuicionista não é possível diferenciar os conceitos de inconsistência e de trivialidade.

Definição 3.1.5 *Uma lógica* **L** *é dita* consistente *se é tanto explosiva quanto não-trivial. Em caso de* **L** *ser não-explosiva ou ser trivial,* **L** *é dita de* inconsistente.

Uma Lógica Paraconsistente é uma lógica que rejeita a equivalência entre os conceitos de contraditoriedade e de trivialidade. Uma lógica paraconsistente admite que teorias contraditórias sejam não triviais. A distinção entre o fato de uma teoria ser contraditória e o fato da teoria ser trivial é resultado, em uma lógica paraconsistente, da falha do PE. Assim, uma teoria paraconsistente Γ pode suportar as contradições sem, por isso, ser trivial. Uma *teoria* é *paraconsistente* se a sua relação de consequência subjacente não satisfaz o PE, isto é, se a relação de consequência não é explosiva. Assim, uma lógica paraconsistente é inconsistente. Uma lógica paraconsistente rejeita a pressuposição da consistência, permitindo, assim, separar as noções de inconsistência e trivialidade. A falha do PE expressa que o fato de uma teoria ser contraditória não é condição suficiente para a trivialização da teoria. Daí segue que **LP** seja considerada como a lógica subjacente de teorias contraditórias e não triviais.

As **LFIs**, que apareceram na literatura pela primeira vez em [18], são uma classe de lógicas paraconsistentes. As **LFIs** são particularmente expressivas; têm capacidade de internalizar, isto é, de expressar no nível da linguagem objeto, a noção metateórica de consistência. A internalização da noção de consistência é feita, em termos gerais, a partir de um conjunto $\bigcirc(.)$, tal que $\bigcirc(p)$ é um conjunto —possivelmente vazio— de fórmulas que depende apenas da variável proposicional p. No caso de $\bigcirc(p)$ ser um conjunto unitário, $\circ p$ expressa o único elemento do conjunto $\bigcirc(p)$. Nesse caso particular, $\circ$ é um *conectivo unário de consistência* e a fórmula $\circ\alpha$ denota que a fórmula α é consistente.

Pelo fato de serem paraconsistentes, as **LFIs** rejeitam PE; mas pela capacidade de expressar na linguagem objeto a consistência das fórmulas, elas conseguem validar o *Princípio Gentil de Explosão* (PGE), uma versão enfraquecida de PE.

Definição 3.1.6 *(PGE) Seja $\bigcirc(p)$ um conjunto —possivelmente vazio— de fórmulas que depende apenas da variável proposicional p. Uma* teoria Γ *diz-se* gentilmente explosiva *com relação a $\bigcirc(p)$ se ela satisfaz as seguintes condições:*

1. $\Gamma, \bigcirc(\alpha), \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta$, para todo Γ, α, β;

2. $\Gamma, \bigcirc(\alpha), \alpha \nVdash \beta$, para algum Γ, α, β;

3. $\Gamma, \bigcirc(\alpha), \neg\alpha \nVdash \beta$, para algum Γ, α, β.

Definição 3.1.7 *(cf. [19, p. 20]) Uma* Lógica da Inconsistência Formal *é uma lógica paraconsistente gentilmente explosiva, isto é, uma lógica que não satisfaz PE e que satisfaz PGE.*

Em outros termos, uma lógica **L** é uma **LFI** (com relação à negação $\neg$) se ela satisfaz:

1. $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nVdash \beta$, para algum Γ, α, β e

2. existe um conjunto de fórmulas $\bigcirc(p)$ que depende apenas da variável proposicional p e tal que $\Gamma, \bigcirc(\alpha), \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta$, para todo Γ, α, β e em que $\bigcirc(\alpha)$ satisfaz as cláusulas 2 e 3 da Definição 3.1.6.

Na ausência do PE, as teorias paraconsistentes contraditórias não são explosivas. Porém, pela validade do PGE, as teorias paraconsistentes que são contraditórias e consistentes são explosivas. Assim, uma teoria paraconsistente é trivial se ela é contraditória e consistente. O PGE expressa, então, não apenas que a fórmula marcada com $\bigcirc$ tem um comportamento diferente, consistente, mas também expressa a maneira de recuperarmos PE ao nos depararmos com contradições. Para recuperar PE é suficiente acrescentar certas premissas consistentes.

Mas não apenas PE falha em toda lógica paraconsistente; a falha do PE acarreta em uma **LP** a falha de outras inferências clássicas, como por exemplo, a seguinte inferência, chamada de silogismo disjuntivo (SD). Assumamos que $\{\neg, \vee\} \subseteq \Sigma^{\mathbf{LP}}$ e seja $\Vdash_{\mathbf{LP}}$ a relação de consequência de uma lógica paraconsistente **LP**. Em geral temos que:

$$\neg\alpha, \alpha \vee \beta \nVdash_{\mathbf{LP}} \beta.$$

Tal como no caso de PE, a falha de SD em uma **LP** é consequência da aceitação de fórmulas contraditórias não explosivas, dado que em **LP** é admitida a inferência de Adição (Ad) —de α segue $\alpha \vee \beta$. Com efeito, se SD for aceito junto com Ad, então a partir de $\{\alpha, \neg\alpha\}$ seguiria β, admitindo-se a explosividade das contradições. Assim, a aceitação conjunta de SD e Ad em **LP** acarretaria indirectamente a aceitação de PE.

Como **LP** é caracterizada pela falha de PE, e como em geral Ad é aceita em **LP**, então SD não pode ser aceito em **LP**. SD falha em **LP** porque α e $\neg\alpha$ podem ser aceitas conjuntamente em uma teoria cuja lógica subjacente é paraconsistente, lembrando que a contraditoriedade não é condição suficiente para a explosividade em **LP**.

Embora a contraditoriedade não seja uma condição suficiente para a explosividade nas **LPs**, a consistência das fórmulas contraditórias é uma condição suficiente —e necessária— para a explosividade das contradições nas **LFIs**. Uma **LFI** é caracterizada por aceitar a explosividade das teorias quando elas forem contraditórias e consistentes. Assim como a falha de PE acarreta a falha de SD em uma **LP**, a aceitação da versão gentil do PE —PGE— acarreta a aceitação de uma versão consistente de SD em uma **LFI**. Com efeito, a seguinte inferência é aceita em uma **LFI**:

$$\bigcirc(\alpha), \neg\alpha, \alpha \vee \beta \Vdash \beta.$$

A ideia geral que está, então, por trás do PGE e da versão consistente de SD é a de que as **LFIs**, por sua capacidade de assumir explicitamente a consistência das fórmulas, podem recuperar as inferências consistentes dentro do âmbito inconsistente. Pela assunção explícita do comportamento consistente de algumas fórmulas, as **LFIs** conseguem recuperar as inferências perdidas da lógica consistente no âmbito inconsistente. Assim como é possível obter uma versão consistente de PE e de SD, mostraremos que cada inferência consistente perdida na lógica inconsistente pode ser recuperada nas **LFIs** pelo acréscimo de premissas $\bigcirc(.)$ consistentes.

A formalização da ideia geral de recuperação das inferências consistentes no âmbito inconsistente é expressa no *Teorema de Ajuste de Derivabilidade* (DAT).[1] Para uma variedade de **LFIs**, foram demonstradas instâncias do seguinte esquema de teorema DAT.

Teorema 3.1.8 *Considere* $\mathbf{L}_1 = \langle For(\Sigma^{\mathbf{1}}), \Vdash_{\mathbf{1}} \rangle$ *e* $\mathbf{L}_2 = \langle For(\Sigma^{\mathbf{2}}), \Vdash_{\mathbf{2}} \rangle$ *duas lógicas tais que* $\Sigma^{\mathbf{1}} = \Sigma^{\mathbf{2}}$*, tal que* $\mathbf{L}_1$ *satisfaz PE e tais que* $\Vdash_{\mathbf{2}} \subset \Vdash_{\mathbf{1}}$*, isto é,* $\mathbf{L}_2$ *é um fragmento*

[1] Na seção 4.2, dedicada às Lógicas Adaptativas, apresentaremos com detalhe a motivação dos teoremas DATs.

dedutivo próprio de $\mathbf{L}_1$ *que valida as inferências de* $\mathbf{L}_1$ *se, e somente se, elas forem compatíveis com a falha do PE. E seja* $\bigcirc(p)$ *um conjunto —possivelmente vazio— de fórmulas de* $\mathbf{L}_2$ *que depende exatamente da variável proposicional* p.[2] Então:

$$\forall\Gamma\forall\gamma\exists\Delta\left(\Gamma \Vdash_{\mathbf{1}} \gamma \;\Leftrightarrow \bigcirc(\Delta), \Gamma \Vdash_{\mathbf{2}} \gamma\right). \qquad \text{DAT}$$

3.2 Lógicas Paracompletas e Lógicas da Indeterminação Formal

A estratégia de recuperar o raciocínio de uma lógica maior, perdido em uma lógica menor, por meio do acréscimo de informação, não é exclusiva das **LFIs**.

Os seguintes princípios permitiram definir os conceitos de lógica completa e lógica paracompleta.

Definição 3.2.1 *Seja* Γ *uma teoria de* $\mathbf{L}$ *e seja* $\Vvdash_{\mathbf{L}}$ *a relação de consequência com conclusão múltipla de* $\mathbf{L}$*. Dizemos que* Γ *é* completa com relação a uma negação $\neg$ *se* Γ *satisfaz PI:*

$$\forall\alpha\left(\Gamma \Vvdash \alpha, \neg\alpha\right). \qquad \text{(PI)}$$

Um princípio semelhante, expressado em termos da relação de consequência com conclusão única, é o Princípio do Terceiro Excluído *(PTE):*

$$\forall\alpha\left(\Gamma \Vdash \alpha \vee \neg\alpha\right). \qquad \text{(PTE)}$$

Definição 3.2.2 *Seja* Γ *uma teoria de* $\mathbf{L}$ *e seja* $\Vdash_{\mathbf{L}}$ *a relação de consequência com conclusão única de* $\mathbf{L}$*. Dizemos que* Γ *é* completa com relação a uma negação $\neg$ *se* Γ *satisfaz PTE.*

Definição 3.2.3 *Dizemos que uma* lógica $\mathbf{L}$*, cuja relação de consequência tem conclusão múltipla (única), é* completa com relação a uma negação $\neg$ *se toda teoria* Γ *de* $\mathbf{L}$ *satisfaz PI (PTE).*

[2] Na metalinguagem formalizada usaremos os signos $\Leftrightarrow$ e $\Rightarrow$ para expressar *se, e somente se,* e *se, então*, respectivamente.

Definição 3.2.4 *Uma teoria* Γ *é* paracompleta com relação a uma negação $\neg$ *se ela não é completa. Assim, uma teoria* Γ *diz-se paracompleta com relação à negação* $\neg$*, se ela satisfaz não satisfaz PI (PTE). Uma lógica* **L** *diz-se paracompleta sse alguma teoria* Γ *de* **L** *não é completa.*

Assim, levando em consideração o conceito de Lógicas da Inconsistência Formal e a dualidade entre as lógicas paraconsistentes, que não satisfazem PE, e as lógicas paracompletas, que não satisfazem PI, em [50] foi proposto o conceito de *Lógicas da Indeterminação Formal* (*Logics of Formal Undeterminedness* - **LFUs**). As **LFUs** são um tipo especial de lógica paracompleta. Apesar de terem uma negação paracompleta, as **LFUs** podem expressar a indeterminação da negação e satisfazer versões fracas do PI ou do PTE. A internalização da noção de indeterminação é feita, em termos gerais, a partir de um conjunto $\bigstar(.)$, tal que $\bigstar(p)$ é um conjunto —possivelmente vazio— de fórmulas que depende apenas da variável proposicional p. No caso de $\bigstar(p)$ ser um conjunto unitário, $\star p$ expressa o único elemento do conjunto $\bigstar(p)$. Nesse caso particular, $\star$ é um *conectivo unário de indeterminação* e a fórmula $\star\alpha$ denota que a fórmula α é indeterminada.

Definição 3.2.5 *(PGI) Seja* $\bigstar(p)$ *um conjunto —possivelmente vazio— de fórmulas que depende apenas da variável proposicional* p*. Uma* teoria Γ *é* gentilmente implosiva *com relação a* $\bigstar(p)$ *se ela satisfaz as seguintes condições:*

1. $\Gamma \Vdash \bigstar\alpha, \alpha, \neg\alpha$, para todo Γ, α;

2. $\Gamma \nVdash \alpha, \bigstar\alpha$, para algum Γ, α;

3. $\Gamma \nVdash \neg\alpha, \bigstar\alpha$, para algum Γ, α.

Definição 3.2.6 *Uma* Lógica da Indeterminação Formal *é uma lógica paracompleta gentilmente implosiva, isto é, uma lógica que não satisfaz PI e que satisfaz PGI.*

Em outros termos, uma lógica **L** é uma **LFU** com relação à negação $\neg$ se ela satisfaz as seguintes duas condições e satisfaz as condições 2 e 3 da Definição 3.2.5:

1. $\Gamma \nVdash \alpha, \neg\alpha$, para algum Γ, α,

2. existe um conjunto de fórmulas $\bigstar(p)$ que depende apenas da variável proposicional p e tal que $\Gamma \Vdash \bigstar(\alpha), \alpha, \neg\alpha$, para todo Γ, α.

O *Princípio Gentil de Implosão* (PGI) é característico das **LFUs**. PGI expressa que o raciocínio completo pode ser recuperado acrescentando, *na conclusão*, informação sobre o comportamento indeterminado de certas fórmulas. A ideia geral que está, então, por trás do PGI é a de que as **LFUs**, por sua capacidade de assumir explicitamente a indeterminação das fórmulas por meio do conjunto $\bigstar(.)$, podem recuperar as inferências completas dentro do âmbito incompleto. Pela assunção explícita do comportamento indeterminado de algumas fórmulas, as **LFUs** conseguem recuperar as inferências perdidas da lógica completa no âmbito incompleto. A introdução do conceito de indeterminação na linguagem objeto permite tanto recuperar, em uma versão fraca, o princípio clássico PTE e PI, quanto vincular as lógicas paracompletas à lógica completa por meio dos correspondentes DATs.

Tal como no caso das **LFIs**, a formalização da ideia geral de recuperação das inferências completas no âmbito incompleto é expressa no *Teorema de Ajuste de Derivabilidade* (DAT). Considere duas lógicas, $\mathbf{L}_1 = \langle For(\Sigma^{\mathbf{1}}), \Vdash_{\mathbf{1}} \rangle$ e $\mathbf{L}_2 = \langle For(\Sigma^{\mathbf{2}}), \Vdash_{\mathbf{2}} \rangle$ tais que $\Sigma^{\mathbf{1}} = \Sigma^{\mathbf{2}}$, tal que $\mathbf{L}_1$ satisfaz PI e tais que $\Vdash_{\mathbf{2}} \subset \Vdash_{\mathbf{1}} \subseteq \wp\left(For\left(\Sigma^{\mathbf{L}}\right)\right) \times \wp\left(For\left(\Sigma^{\mathbf{L}}\right)\right)$ é um fragmento dedutivo próprio de $\mathbf{L}_1$ que valida as inferências de $\mathbf{L}_1$ se, e somente se, elas forem compatíveis com a falha do PI. E seja $\bigstar(p)$ um conjunto —possivelmente vazio— de fórmulas de $\mathbf{L}_2$ que depende exatamente da variável proposicional p. Então:

$$\forall\Gamma\forall\gamma\exists\Delta\left(\Gamma \Vdash_{\mathbf{1}} \gamma \ \Leftrightarrow \Gamma \Vdash_{\mathbf{2}} \gamma, \bigstar(\Delta)\right). \qquad \text{DAT}$$

Assim como é possível obter uma versão completa de PI, o DAT expressa que cada inferência completa perdida na lógica incompleta pode ser recuperada pelo acréscimo de alternativas de indeterminação nas **LFUs**.

3.3 DATs antecedentes

Desde os primeiros trabalhos sobre o tema, em [11] e [18], o conceito de **LFI** mostrou-se frutífero, servindo não apenas como base para formular novos sistemas lógicos, mas também para subsumir nele grande parte dos sistemas paraconsistentes existentes na literatura. Como em [18] se expressa, a proposta de internalizar a noção de consistência na linguagem foi, de fato, inspirada na obra sobre paraconsistência de N. C. A. da Costa, pai da hierarquia de sistemas paraconsistentes $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$. Assim, já na origem do conceito, os primeiros sistemas paraconsistentes, os conhecidos sistemas $\mathbf{C}_n$ de da Costa e o sistema de lógica discussiva **D2** de Jaśkowski, foram apresentados como exemplos de **LFIs**. E a partir deles, diversos DATs vinculando lógicas paraconsistentes à lógica consistente têm-se proposto na literatura.

Nesta seção apresentaremos –sucintamente– DATs para algumas **LFIs**. Para cada uma delas mostraremos o correspondente operador de consistência, seja exibindo os axiomas que regulam sua conduta ou sua definição em termos dos outros conectivos da linguagem. Apresentaremos, também, algumas instâncias particulares do DAT geral, exemplificando assim, o processo de recuperação de inferências consistentes perdidas no âmbito inconsistente.

Sistema D2 (Jaśkowski)

Em [34] Jaśkowski apresenta um sistema proposicional de lógica discussiva (*discussive logic*). O sistema proposicional discussivo **D2**, que é baseado no sistema modal **S5**, é considerado o primeiro sistema formal de lógica paraconsistente. Em [18] a relação de consequência $\models_{\mathbf{D2}}$ de **D2** é caracterizada por meio da relação de consequência $\models_{\mathbf{S5}}$ do sistema modal **S5**. Considerando que $\Diamond\Gamma = \{\Diamond\gamma : \text{para todo } \gamma, \gamma \in \Gamma\}$ tem-se que:

$$\Gamma \models_{\mathbf{D2}} \alpha \text{ sse } \Diamond\Gamma \models_{\mathbf{S5}} \Diamond\alpha.$$

Embora o sistema paraconsistente **D2** de Jaśkowski não tenha sido proposto como tendo um conectivo de consistência, em [18] se mostra como definir um tal conectivo a partir dos conectivos primitivos da linguagem e se mostra, também, como recuperar, por meio do conectivo de consistência, o raciocínio clássico perdido. Para definir esse conectivo de consistência, é definida, em primeiro lugar, a negação clássica $\sim$ com base na negação paraconsistente $\neg$:

$$\sim\alpha =_{def} \alpha \to \neg(\alpha \vee \neg\alpha).$$

O conectivo $\circ$ de consistência é definido mediante essas duas negações, a clássica e a paraconsistente:

$$\circ\alpha =_{def} \sim\alpha \vee \sim\neg\alpha.$$

Com base nesse novo conectivo, o raciocínio consistente pode ser recuperado no ambiente inconsistente. Em [51] é formulado o seguinte DAT.

Teorema 3.3.1 *Sejam* $\Vdash_{\mathbf{LC}}$ *e* $\Vdash_{\mathbf{D2}}$ *as relações de consequência da lógica clássica e de* ***D2****, respectivamente:*

$$\forall\Gamma\forall\alpha\left(\Gamma \Vdash_{\mathbf{LC}} \alpha \Leftrightarrow \exists\Sigma(\circ\Sigma, \Gamma \Vdash_{\mathbf{D2}} \alpha)\right).$$

Apenas como exemplo dessa estratégia de recuperação por adição de premissas consistentes, considere as seguintes versões recuperadas de inferências clássicas perdidas em **D2** (cf. [51]):

1. $\circ\alpha, \alpha, \neg\alpha \Vdash_{\mathbf{D2}} \beta$,

2. $\circ\alpha, \alpha \vee \beta \Vdash_{\mathbf{D2}} \neg\alpha \to \beta$,

3. $\circ\beta, \alpha \to \beta \Vdash_{\mathbf{D2}} \neg\left(\alpha \wedge \neg\beta\right)$,

4. $\circ\alpha, \alpha \wedge \beta \Vdash_{\mathbf{D2}} \neg\left(\neg\alpha \vee \neg\beta\right)$ ou $\circ\beta, \alpha \wedge \beta \Vdash_{\mathbf{D2}} \neg\left(\neg\alpha \vee \neg\beta\right)$.

Sistema $\mathbf{C}_1$ (da Costa)

O sistema $\mathbf{C}_1$ de da Costa, pertencente a hierarquia de sistemas $\mathbf{C}_n$, é uma **LFI**, em que $\bigcirc(p) = \{\circ p\}$. A assinatura Σ do sistema paraconsistente $\mathbf{C}_1$ contém, como conectivos primitivos, os símbolos $\neg, \wedge, \vee$ e $\rightarrow$.[3] Neste sistema, a consistência das fórmulas é expressa por meio de um conectivo definido a partir dos conectivos primitivos $\wedge$ e $\neg$:

$$\circ\alpha =_{def} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha).$$

O sistema $\mathbf{C}_1$ é construído com base no fragmento positivo do cálculo intuicionista, $\mathbf{LI}^+$**,** com o acréscimo de quatro axiomas que determinam o comportamento da negação paraconsistente $\neg$ e do conectivo $\circ$.[4] Os axiomas e a regra de inferência de $\mathbf{C}_1$ são:

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
3. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$
4. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
5. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
6. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
7. $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
8. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$
9. $\alpha \vee \neg\alpha$
10. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
11. $\circ\beta \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)))$
12. $(\circ\alpha \wedge \circ\beta) \rightarrow \circ(\alpha \wedge \beta) \wedge \circ(\alpha \vee \beta) \wedge \circ(\alpha \rightarrow \beta)$

modus ponens de α e $\alpha \rightarrow \beta$, pode-se inferir β.

[3] O conectivo $\leftrightarrow$ é definido da maneira usual: $\alpha \leftrightarrow \beta =_{def} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

[4] Para uma apresentação axiomática do sistema intuicionista **LI** e do fragmento positivo $\mathbf{LI}^+$ *vide* 9.1 e, particularmente, 9.1.7.

Embora no sistema $\mathbf{C}_1$ não sejam válidas, por exemplo, as formas de contraposição, é possível recuperá-las nesse sistema mediante o acréscimo de premissas $\circ$ consistentes.

Exemplo 3.3.2 *As seguintes inferências são válidas em* $\boldsymbol{C}_1$ *(cf. [21, p. 14]):*

1. $\circ\beta, \alpha \to \beta \Vdash \neg\beta \to \neg\alpha$,

2. $\circ\beta, \alpha \to \neg\beta \Vdash \beta \to \neg\alpha$,

3. $\circ\beta, \neg\alpha \to \beta \Vdash \neg\beta \to \alpha$,

4. $\circ\beta, \neg\alpha \to \neg\beta \Vdash \beta \to \alpha$.

Essas inferências são apenas exemplos de um fenômeno mais geral, expresso no seguinte Teorema de Ajuste de Derivabilidade.

Teorema 3.3.3 *(cf. [21, p. 15]) Se* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *são os componentes primos da fórmula* F*, é condição necessária e suficiente para que* $\vdash F$ *no cálculo clássico que* $\circ A_1 \wedge \circ A_2 \wedge \ldots \wedge \circ A_n \vdash F$ *em* $\mathbf{C}_1$*.*

Teorema 3.3.4 *(cf. [21, p. 16]) Se* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *são os componentes primos das fórmulas de* Γ *e da fórmula* F*, é condição necessária e suficiente para que* $\Gamma \vdash F$ *no cálculo proposicional clássico que* $\Gamma, \circ A_1 \wedge \circ A_2 \wedge \ldots \wedge \circ A_n \vdash F$ *em* $\mathbf{C}_1$*.*

Sistema $\mathbf{V}_0$ (Arruda - Alves)

Em [5] e [6] são propostos quatro sistemas para o estudo da vaguidade vinculada à negação. São caracterizados sintática e semanticamente quatro tipos de vaguidade vinculada à falha, para uma negação, seja do PTE, seja do Princípio de Não Contradição (PNC):

$$\forall\alpha\left(\neg\left(\alpha \wedge \neg\alpha\right)\right). \tag{PNC}$$

Como resultado do estudo são obtidos os sistemas $\mathbf{V_0}$, $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$ e $\mathbf{C_1}$ (o primeiro sistema da hierarquia de da Costa). São definidos os três seguintes conectivos.

1. $\alpha\circ =_{def} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$,

2. $\circ\alpha =_{def} \alpha \vee \neg\alpha$,

3. $\alpha+ =_{def} \alpha\circ \wedge \circ\alpha$.

Assim, $\alpha\circ$ expressa que α é consistente, $\circ\alpha$ expressa que α é completa, ou determinada, e $\alpha+$ expressa que α é tanto consistente quanto completa (ou determinada).

Em $\mathbf{V}_0$ é possível definir um outro conectivo de negação, clássico, a partir da negação primitiva e do conectivo de consistência da seguinte maneira:

Definição 3.3.5 $\sim\alpha =_{def} \alpha \to (\neg\alpha \wedge \alpha\circ)$

O sistema $\mathbf{V}_0$, por exemplo, caracteriza uma negação que não satisfaz nem o PTE nem o PNC. Seja $\Sigma^{\mathbf{V}_0} = \Sigma^{\neg\wedge\vee\to}$ a assinatura de $\mathbf{V}_0$. O cálculo $\mathbf{V}_0$ é construído acrescentando os seguintes esquemas de axiomas à base axiomática de $\mathbf{LI}^+$:

Ax.9 $((\circ\alpha \wedge \beta\circ) \wedge ((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \neg\beta))) \to \neg\alpha$

Ax.10 $(\alpha\circ \wedge \beta\circ) \to ((\alpha \wedge \beta)\circ \wedge (\alpha \vee \beta)\circ \wedge (\alpha \to \beta)\circ)$

Ax.11 $(\circ\alpha \wedge \circ\beta) \to (\circ(\alpha \wedge \beta) \wedge \circ(\alpha \vee \beta) \wedge \circ(\alpha \to \beta))$

Ax.12 $\alpha\circ \to (\neg\alpha)\circ$

Ax.13 $\circ\alpha \to \circ(\neg\alpha)$

Ax. 14 $\sim\sim\alpha \to \alpha$

O esquema Ax. 10 expressa que se α é completa (ou determinada) e α gera uma contradição que é consistente, então α deve ser rejeitada.[5] Quando apresentarmos a

[5] É interessante destacar a diferença entre essa versão paracompleta e paraconsistente do Princípio de Redução ao Absurdo (Intuicionista) e a versão apenas paraconsistente que é válida, por exemplo, no sistema $\mathbf{C}_1$ (*vide* Ax. 12 de $\mathbf{C}_1$). Uma versão (Dialética) de Redução ao Absurdo, mais próxima à proposta em $\mathbf{V}_0$, aparece em [22].

Definição 6.0.17, veremos que os esquemas de axioma Ax. 11 - Ax. 14 expressam a propagação do comportamento consistente e completo através das fórmulas complexas.

Em [5] é formulada a seguinte metade de um DAT entre **LC** e $\mathbf{V}_0$.

Teorema 3.3.6 *Suponha que as fórmulas de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ são fórmulas de **LC**, cujas variáveis proposicionais são $p_1, \ldots, p_n$.*

$$\text{Se } \Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha, \text{ então } p_1+, \ldots, p_n+, \Gamma \vdash_{\mathbf{V}_0} \alpha.$$

Sistema mbC (Carnielli - Marcos)

O sistema **mbC** [18] é uma **LFI** e, do mesmo modo que **D2**, $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{V}_0$, tem capacidade para expressar a consistência mediante uma única fórmula da linguagem objeto, isto é, $\bigcirc(p) = \{\circ p\}$. Porém, em **mbC** o conectivo de consistência $\circ$ é primitivo e é logicamente independente da fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, que define $\circ\alpha$ em $\mathbf{C}_1$ e $\alpha\circ$ em $\mathbf{V}_0$. De fato, na taxonomia presentada em [19], **mbC** é o sistema mais fraco das **LFIs** que têm em sua linguagem o conectivo de consistência como primitivo. A assinatura Σ de **mbC** contém os símbolos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ e $\circ$ como conectivos primitivos. **mbC** pode ser obtido a partir do fragmento positivo do cálculo intuicionista, $\mathbf{LI}^+$, acrescentando as seguintes fórmulas como esquemas de axioma:

Ax.10 $\alpha \vee \neg\alpha$

Ax.12 (bc1) $\circ\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta))$

Como salientamos anteriormente, uma das condições para se obter um DAT entre duas lógicas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$, é a de que a linguagem de $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ seja a mesma. Como na linguagem do sistema **mbC** o conectivo de consistência $\circ$ é primitivo, as linguagens de **mbC** e de **LC** não coincidem. Assim, para vincular **mbC** à lógica clássica mediante um DAT é preciso ampliar a linguagem de **LC**, incorporando o conectivo $\circ$ como primitivo. O sistema **eLC** (*extended classical logic*) é uma *extensão linguisticamente relevante da lógica clássica*, que presupõe que todas as fórmulas são consistentes. **eLC** é apenas uma versão de **LC** em uma assinatura estendida, na assinatura de **mbC**. O sistema **eLC** é obtido acrescentando a fórmula (ext) como esquema de axioma à lógica clássica:

(ext) $\circ\alpha$

Logo, **mbC** pode ser caracterizado como um fragmento dedutivo de **eLC**; todos os axiomas de **mbC** são válidos em **eLC**; porém, certas inferências **eLC-**válidas são **mbC-**inválidas. O seguinte DAT mostra a maneira de recuperar as perdas de **mbC**: para cada inferência clássica que não é válida em **mbC** tem-se uma versão ajustada dessa inferência em **mbC** (cf. [19, p. 50]):

Teorema 3.3.7

$$\forall\Gamma\forall\gamma\exists\Delta(\Gamma \Vdash_{\mathbf{eLC}} \gamma \Leftrightarrow \circ(\Delta), \Gamma \Vdash_{\mathbf{mbC}} \gamma).$$

Sistema bC (Carnielli - Marcos)

O sistema **bC** [18] pode ser obtido a partir de **mbC** pelo acréscimo da seguinte fórmula como esquema de axioma:

Ax.11 $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

bC pode ser construído, também, em uma linguagem contendo $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ e $\circ$ como conectivos primitivos, adicionando Ax.10 - Ax.12 como novos axiomas a $\mathbf{LI}^+$. Tal como em **mbC**, em **bC** o conectivo de consistência $\circ$ é primitivo, não é uma abreviatura de fórmulas quaisquer. Em [20] a recuperação das inferências de **LC** em **bC** é formulada no seguinte DAT.[6]

Teorema 3.3.8 *Seja $\circ(\Delta) = \{\circ\beta : \beta \in \Delta\}$, tal que Δ é um conjunto finito de fórmulas.*[7]

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha \text{ sse } \circ(\Delta), \Gamma \vdash_{\mathbf{bC}} \alpha.$$

[6] A observação de que as linguagens dos sistemas vinculados por meio do DAT têm que ser idênticas não foi formulada em [20], onde o DAT é estabelecido com respeito a **LC** e não, como no caso anterior, com respeito a **eLC**. Na Definição 6.0.5 proporemos um DAT, que chamaremos de DAT externo, que não exige que as assinaturas das linguagens dos sistemas sejam as mesmas.

[7] Nesse artigo não é indicada qual é a relação entre os conjuntos Δ e $\Gamma \cup \{\alpha\}$.

Sistema Cia (Carnielli - Marcos)

A lógica **Cia** [18] pode ser obtida a partir de **bC** pelo acréscimo dos seguintes axiomas:

Ax.13 $(\circ\alpha \wedge \circ\beta) \to \circ(\alpha \wedge \beta) \wedge \circ(\alpha \vee \beta) \wedge \circ(\alpha \to \beta)$

Ax.14 (ci) $\neg\circ\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)$

Ax.15 (cc$_n$) $\circ\neg^n\circ\alpha \quad (n \geq 0)$

Em [19, p. 70] é demonstrado o seguinte DAT.

Teorema 3.3.9 *Seja* Π *o conjunto de variáveis proposicionais que ocorrem em* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *e seja* $\vdash_{\text{Cia}}$ *a relação de consequência da lógica* ***Cia****,*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha \textit{ sse } \exists\Delta \subseteq \Pi, \textit{ tal que } \circ(\Delta), \Gamma \vdash_{\text{Cia}} \alpha.$$

Concluimos aqui com a nossa breve descrição das principais características das Lógicas da Inconsistência Formal e das Lógicas da Indeterminação Formal, que motivaram a proposta do conceito-chave de nossa pesquisa: *conectivos de restauração local*.

Capítulo 4

Lógicas Adaptativas

Neste capítulo apresentaremos brevemente os principais aspectos das Lógicas Adaptativas, expondo a sua semântica e a sua teoria da prova (dinâmica). Apresentaremos, também, exemplos de tais lógicas.

4.1 Apresentação

Os DATs foram propostos no âmbito da escola belga de lógica adaptativa. As lógicas adaptativas foram desenvolvidas pelo grupo belga da Universidade de Ghent para entender e explicar certos processos de raciocínio que são revogáveis (*defeasible*). O raciocínio não-monotônico é um tipo de raciocínio revogável. Uma lógica é não-monotônica se a sua relação de consequência é não-monotônica. Uma relação de consequência $\Vdash$ é não-monotônica se ela não satisfaz a condição de monotonicidade da Definição 2.0.4:

$$\text{se } \Delta \Vdash \alpha \text{ e } \Delta \subseteq \Gamma, \text{ então } \Gamma \Vdash \alpha.$$

Quando a relação de consequência é não-monotônica, a obtenção de uma dada conclusão α a partir de um conjunto de premissas Γ não é garantida, também, a partir de todo conjunto de premissas Δ, com $\Gamma \subseteq \Delta$. Quando a lógica subjacente a um raciocínio é não-monotônica, o acréscimo de premissas pode acarretar a rejeição a conclusões previamente obtidas. O raciocínio não-monotônico apresenta uma dinâmica, pois as conclusões obtidas a partir dele são revogáveis. A dinâmica da relação de consequência não-monotônica é externa: a conclusão de um tal raciocíno pode ser retirada em vista da nova informação acrescentada ao conjunto inicial de premissas.

O tipo de raciocínio que é objeto de estudo da escola belga apresenta, também, uma dinâmica; porém, o grupo de Ghent estuda raciocínios que apresentam uma dinâmica interna. No raciocínio com dinâmica interna, a rejeição de conclusões previamente obtidas não é consequência da modificação do conjunto inicial de premissas, mas do crescente entendimento das premissas iniciais (cf. [12]). A retirada de conclusões obtidas e, portanto, a dinâmica interna de um processo de inferência são consequência da melhor compreensão de um conjunto de premissas que é fixo. Ainda sendo estável o conjunto de premissas, a conclusão de um raciocínio dinâmico é provisional.

O objetivo da escola belga de lógica adaptativa é, portanto, a explicação de formas de raciocínio revogáveis que apresentam essa classe de dinâmica interna. O programa da lógica adaptativa propõe um marco unificado para o estudo formal de diferentes tipos de raciocínio dinâmico que acontecem tanto na ciência quanto no cotidiano. Nesses âmbitos, certos processos inferenciais são realizados sob pressuposições ou condições de normalidade. Uma lógica adaptativa supõe que as fórmulas envolvidas em uma inferência têm comportamento normal. Essas pressuposições de normalidade podem ser anuladas; uma fórmula suposta com comportamento normal pode evidenciar um comportamento anormal. Como a lógica adaptativa supõe que as fórmulas têm comportamento normal, as conclusões obtidas estão condicionadas à normalidade das fórmulas envolvidas no processo inferencial. No caso de uma fórmula demonstrar comportamento anormal, as conclusões obtidas sob o pressuposto de normalidade dessa fórmula são anuladas. Em palavras de D. Batens [12, p. 7], "uma lógica é adaptativa se ela se adapta às premissas específicas às quais ela é aplicada".[1] As inferências formalizadas por uma lógica adaptativa são revogáveis porque dependem de pressuposições de normalidade, que são revogáveis. Qual seja o comportamento normal pressuposto das fórmulas dependerá

[1] A tradução do inglês para o português é nossa. *A logic is adaptive if it adapts itself to the specific premises to which it is applied.*

do tipo de lógica adaptativa e, portanto, do âmbito de conhecimento formalizado por essa lógica.

A lógica adaptativa tem como alvo diferentes processos inferenciais que apresentam uma dinâmica interna, tal como a discussão, a diagnose, a inferência indutiva, a inferência a partir de dados inconsistentes, o raciocínio a partir das próprias convicções, por exemplo. As inferências realizadas nesses diferentes âmbitos de conhecimento dependem de diferentes noções de normalidade. Em uma lógica adaptativa de inconsistência, por exemplo, uma fórmula terá comportamento normal se ela é consistente e, no caso contrário, ela será anormal. Em uma lógica adaptativa de indução, a anormalidade será a negação de uma generalização. Em uma lógica da discussão, o consenso dos participantes será a normalidade e a discrepância, a anormalidade. Mesmo que diferentes, todos esses processos inferenciais têm uma característica comum: a (a)normalidade das fórmulas supõe a determinação da (in)compatibilidade entre afirmações. A revogabilidade desta classe de raciocínio é produzida pela ausência de um teste positivo para a determinação da compatibilidade entre fórmulas. Embora seja possível demonstrar a incompatibilidade das fórmulas, não existe, em geral, um teste positivo para determinar a compatibilidade das fórmulas. Um teste positivo para determinar a compatibilidade entre duas afirmações α e β é um algoritmo para determinar efetivamente, em uma quantidade finita de passos, que α e β não acarretam uma contradição. A determinação da compatibilidade entre afirmações inferidas a partir de um conjunto Γ de premissas supõe a determinação da não-derivabilidade de uma contradição a partir delas. Como não existe, em geral, um teste para determinar efectivamente em uma quantidade finita de passos se uma fórmula α é não-derivável a partir de um conjunto Γ, então não existe um teste positivo para determinar a compatibilidade e, portanto, a normalidade das fórmulas. De fato, a compatibilidade nem sequer é, em geral, uma relação semidecidível, pois não existe, em geral, um teste positivo para determinar para quaisquer conjunto Γ e fórmula α, se α é derivável a partir de Γ. A compatibilidade não é uma relação semidecidível pois não existe, em geral, um teste positivo para a derivabilidade. Assim, embora Γ seja um conjunto recursivo, a relação de compatibilidade entre Γ e uma dada fórmula α não é semidecidível.[2]

Batens esclarece essas limitações, colocando o raciocíno a partir das próprias convicções como exemplo. Tal como nos outros âmbitos, o raciocíno sobre as convicções pessoais supõe a normalidade das convicções: quem raciocina a partir das próprias convicções considera que elas são consistentes. Porém, a consistência dessas convicções não pode ser demonstrada. Por um lado, a compatibilidade entre as convicções não pode ser demonstrada, pois isso exigiria a determinação da não-derivabilidade de afirmações contraditórias entre elas. Por outro lado, indica Batens, em geral os humanos não são concientes da totalidade das consequências que são implicadas por um conjunto de convicções próprias, ainda sabendo quais convicções formam parte desse conjunto; os humanos não sempre são omniscientes com respeito às consequências das próprias convicções e, portanto, nem sempre têm capacidade para determinar, dado o conjunto Γ de convicções, quais são todas as consequências de Γ. Assim, a consistência das convicções deve ser afirmada sem demonstração, é um pressuposto revogável; a consistência das convicções será rejeitada no caso de ser demonstrada a sua inconsistência. A relação de incompatibilidade, a diferença da relação de compatibilidade, é semidecidível: existe um teste positivo para determinar se uma dada fórmula α é incompatível com Γ. Como o raciocínio depende da compatibilidade das fórmulas e não existe um teste positivo para determiná-la, então a normalidade das fórmulas terá um *status* rejeitável; no caso de ser demonstrada a incompatibilidade, o pressuposto de normalidade delas será rejeitado e as consequências obtidas sob esse pressuposto serão revisadas. Segundo Batens, aquele que raciocina sobre convicções que resultam ser inconsistentes não utiliza, de fato, nem uma lógica clássica nem uma lógica paraconsistente (monotônica).

Na ausência de um teste positivo, os raciocínios que dependem da noção de compatibilidade são analisados em termos da lógica adaptativa. A ausência de um teste

[2] Diz-se que um conjunto Δ é recursivo sse a função característica χ_Δ de Δ é recursiva. Seja Δ um conjunto. Chama-se função característica χ_Δ de Δ à função tal que $\chi_\Delta(x) = 0$, se $x \notin \Delta$, e $\chi_\Delta(x) = 1$, se $x \in \Delta$. Seja R uma relação $n-$ádica. Diz-se que R é decidível sse existe um algoritmo que permite decidir, para cada tupla $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, se $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in R$ ou se $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin R$.

positivo é, segundo Batens, um critério para determinar que a relação de consequência é caracterizada por uma lógica adaptativa. Batens coloca o seguinte exemplo:[3]

> Considere a lógica, denotada **L1**, que atribui α como consequência de Γ se, e somente se, α é uma consequência clássica de um elemento de Γ que não contradiz a si próprio. Assim, p é uma consequência em **L1** de $\{(p \wedge q), r\}$, mas p não é uma consequência em **L1** de $\{p \wedge (q \wedge \neg q), r\}$, pois p não é uma consequência clássica de r e $(p \wedge (q \wedge \neg q))$ contradiz a si próprio [12, p. 8].

Como o próprio Batens observa, a determinação da relação de consequência da lógica **L1** requer, não apenas determinar se uma dada fórmula é consequência clássica de um conjunto de premissas dado, mas também determinar a compatibilidade entre duas fórmulas. Embora a relação de consequência clássica seja decidível, a determinação da relação de compatibilidade não é semidecidível. Assim definida, a relação de consequência da lógica **L1** não é, portanto, semidecidível: não há um teste positivo para determinar se uma dada fórmula β é consequência de um conjunto Γ nessa lógica **L1**, embora Γ seja um conjunto recursivo.

Historicamente, os primeiros trabalhos da escola belga de lógica adaptativa foram propostos para raciocinar sobre dados inconsistentes. Atualmente, o programa de lógica adaptativa tem se estendido bastante e tem se proposto lógicas adaptativas para tratar diversos tipos de anormalidades. O sistema **ACLaC2** [8], por exemplo, considera anormalidades com respeito à conjunção; o sistema adaptativo $\mathbf{D2}^r$ (Meheus) é uma lógica adaptativa da inconsistência estreitamente vinculada ao sistema paraconsistente **D2** de Jaśkowski. Tem se proposto, também, lógicas adaptativas para tratar tipos de raciocínio não-monotônicos [54] e para tratar ambiguidades de constantes não lógicas [8].

[3] A tradução do inglês para o português é nossa. *Consider the logic, call it **L1**, that assigns A as a consequence to* Γ *iff (if and only if) A is a **CL**-consequence of a member of* Γ *that does not contradict itself. Thus p is a **L1**-consequence of* $\{p \wedge q, r\}$*, but p is not a **L1**-consequence of* $\{p \wedge (q \wedge \neg q), r\}$ *because p is not a **CL**-consequence of r whereas* $p \wedge (q \wedge \neg q)$ *contradicts itself.*

Caracterização de AL

A dinâmica que é formalizada pela lógica adaptativa é, segundo Batens, a dinâmica que, de fato, exibem determinados processos de inferência presentes tanto no âmbito cotidiano, quanto no âmbito científico. A lógica subjacente de, por exemplo, o raciocínio sobre convicções é, segundo Batens, dinâmica, adaptativa: aquele que raciocina sobre as próprias convicções supõe que elas são consistentes, normais, a não ser que seja demonstrado o contrário. No caso do conjunto de convicções não apresentar qualquer anormalidade, o raciocínio prosseguirá por caminhos consistentes. Porém, no caso de se demonstrar a inconsistência das convicções, o raciocínio a partir delas percorrerá caminhos paraconsistentes. Em uma lógica adaptativa de inconsistências interagem, assim, duas lógicas: uma lógica paraconsistente e uma lógica consistente. E em geral, em toda lógica adaptativa interagem duas lógicas: uma lógica limitante inferior e uma lógica limitante superior.

Uma lógica adaptativa **AL** é umaterna formada pelas seguintes componentes:

1. Uma lógica limitante inferior **LLL** (*lower limit logic*),
2. um conjunto Ω de anormalidades,
3. uma estratégia adaptativa.

Semântica das lógicas adaptativas

Lógica LLL e conjunto de anormalidades A lógica **LLL** é uma lógica tarskiana compacta. Intuitivamente, **LLL** é a parte de uma lógica adaptativa **AL** que admite anormalidades.

O conjunto Ω de anormalidades é um conjunto de fórmulas caracterizado por uma (possivelmente restringida) forma lógica F. A forma F das fórmulas de Ω depende do tipo de lógica adaptativa; porém, as fórmulas de Ω contêm pelo menos um símbolo lógico. Em termos intuitivos, as fórmulas do conjunto de anormalidades são consideradas como falsas, a menos que —e até que— seja demonstrado o contrário. De uma perspectiva semântica, a forma lógica das fórmulas do conjunto Ω de anormalidades é contingente em **LLL**. Desse modo, a lógica **LLL** admite modelos que validam as anormalidades. Porém, as fórmulas de Ω não são tautológicas em **LLL**, de modo que elas não serão válidas em todos os modelos de **LLL**. Desse modo, em **LLL** haverá modelos que validam anormalidades e modelos que não as validam.

Definição 4.1.1 *Seja* $\boldsymbol{F}$ *um conjunto de fórmulas que têm determinada forma lógica* F. *O conjunto* Ω *de anormalidades é dado por* $\Omega = \{\alpha : \alpha \in \mathbf{F} \text{ e } \nvDash_{\mathbf{LLL}} \alpha\}$.

Os **AL**-modelos de Γ formam um subconjunto dos **LLL**-modelos de Γ, aqueles **LLL**-modelos que validam certas fórmulas do conjunto Ω. Assim, todo modelo **AL** de um conjunto Γ de premissas é modelo **LLL** de Γ. A lógica adaptativa interpreta as premissas como sendo *tão normais quanto possível*. O que é *normal* depende do tipo de lógica adaptativa e do que é considerado padrão de normalidade. O que é *possível* depende da estratégia adaptativa escolhida.

Definição 4.1.2 *Sejam* $Cn_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \{\alpha : \Gamma \models_{\mathbf{L}} \alpha\}$ *o conjunto das* **L**-*consequências do conjunto* Γ, W *um conjunto de fórmulas de uma linguagem,* ***AL*** *uma lógica adaptativa e* ***LLL*** *uma lógica monotônica:*[4]

$$Cn_{\mathbf{LLL}}(\Gamma) = \bigcap \{\alpha : \Gamma \cup \Delta \models_{\mathbf{LA}} \alpha, \emptyset \subseteq \Delta \subseteq W\}.$$

Daqui, temos que $Cn_{\mathbf{LLL}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$. Em geral, uma lógica adaptativa estende o conjunto das consequências de **LLL** pressupondo que tantos membros do conjunto Ω de anormalidades são falsos quanto as premissas permitirem.

As **AL**-consequências de um conjunto Γ são as fórmulas que podem ser obtidas a partir de Γ por meio da lógica **LLL** e que supõem a falsidade dos membros de Ω, porquanto Γ o permite. Que Γ permita os membros do conjunto Ω de anormalidades serem falsos significa que certas anormalidades não são obtidas a partir de Γ.

[4]A rigor, na definição de $Cn_{\mathbf{L}}$ o conjunto W é o conjunto das fórmulas fechadas da linguagem. Porém, nós apenas apresentamos a linguagem proposicional, cujas fórmulas são todas fechadas.

As inferências são realizadas sob condição de que certas anormalidades não são obtidas a partir de Γ. As **AL**-consequências de um conjunto Γ são as fórmula válidas em certos modelos **LLL** selecionados. As consequências **LLL** de um conjunto de premissas Γ são todas as consequências **AL** desse conjunto Γ e de um conjunto de fórmulas Δ. Os modelos **AL** de um conjunto de premissas Γ são um subconjunto dos modelos **LLL** de Γ: são os **LLL** modelos que não validam determinadas anormalidades. A escolha dos modelos **AL** de um conjunto Γ depende tanto do conjunto Ω de anormalidades quanto da estratégia adaptativa. Em uma lógica adaptativa, um modelo M é uma função valoração v que depende do tipo de lógica adaptativa e, portanto, do tipo de anormalidade considerada[5].

Notação 4.1.3 *Quando uma fórmula α é verdadeira em um modelo M, escrevemos $M \models \alpha$.*

Definição 4.1.4 *Sejam M um **LLL**-modelo de Γ e Ω um conjunto de anormalidades. Então:*

$$Ab\,(M) = \{A \in \Omega : M \models_{\mathbf{LLL}} A\}.$$

$Ab\,(M)$ é a parte anormal de cada modelo M, é o conjunto das anormalidades verificadas pelos modelos M de **LLL**. Os **LLL**-*modelos normais* são os **LLL**-modelos que não validam qualquer anormalidade de Ω. Um conjunto Γ de fórmulas é normal sse $\Omega \cap Cn_{\mathbf{LLL}}\,(\Gamma) = \emptyset$. Como veremos a seguir, Γ é normal sse Γ tem modelos na lógica limitante superior (*upper limit logic* - **ULL**).

Exemplo 4.1.5 *Nas lógicas adaptativas de inconsistência, por exemplo, o conjunto Ω é formado por fórmulas da forma $\alpha \wedge \neg\alpha$. Nesta classe de lógicas adaptativas é assumido que as contradições sejam falsas: as fórmulas da forma $\alpha \wedge \neg\alpha$ são consideradas anormais.*

[5] A rigor, um modelo M é uma estrutura $\langle D, v\rangle$, em que D é o domínio da estrutura e v é uma função valoração. Porém, como nós apenas apresentamos o nível proposicional da linguagem, podemos identificar os modelos e a função valoração $v : For\,(\Sigma) \rightarrow \{1, 0\}$.

Lógica adaptativa e estratégias adaptativas Duas noções de consequência adaptativa são definidas em [10] segundo a estratégia adaptativa escolhida: anormalidade mínima (*minimal abnormality*) e confiabilidade (*reliability*). A seleção dos modelos **LLL** em uma lógica adaptativa **AL** depende da estratégia adaptativa escolhida. Para ambas as estratégias, a noção de consequência é definida considerando o conjunto $Ab\,(M)$ das anormalidades verificadas pelo modelo M em **LLL**.

Definição 4.1.6 *Um **LLL**-modelo M de Γ é* minimamente anormal *se não existe um **LLL**-modelo N de Γ tal que $Ab\,(N) \subsetneq Ab\,(M)$.*

Seja $\mathfrak{M}^m\,(\Gamma)$ o conjunto de todos os modelos **AL** minimamente anormais de Γ. Então $M \in \mathfrak{M}^m\,(\Gamma)$ sse qualquer outro **LLL**-modelo $M\prime$ de Γ é mais anormal que M.

Definição 4.1.7 $\Gamma \models_{\mathbf{AL}^m} \alpha$ *sse α é válida em todos os modelos minimamente anormais de Γ.*

A definição da relação de consequência adaptativa seguindo a estratégia de confiabilidade depende, não apenas do conjunto $Ab\,(M)$ de anormalidades, mas também da determinação das mínimas consequências-Dab e do conjunto $U\,(\Gamma)$ de fórmulas duvidosas (*unreliable*).

Definição 4.1.8 *Seja $\Delta \subseteq \Omega$ um conjunto finito de fórmulas. Seja $Dab\,(\Delta)$ uma disjunção de anormalidades. $Dab\,(\Delta)$ é consequência-Dab de Γ sse $\Gamma \models_{\mathbf{LLL}} Dab\,(\Delta)$.*

Na definição anterior, $Dab(\Delta)$ denota a disjunção clássica dos elementos de Δ (cf. [10]). $Dab(\Delta)$ é, portanto, uma disjunção clássica de anormalidades. No caso de Δ ser um conjunto unitário, $Dab(\Delta)$ é uma anormalidade, $Dab(\Delta)$ é um elemento do conjunto Ω, e não ocorre qualquer disjunção clássica. Se $\Delta = \emptyset$, então a disjunção $\alpha \vee Dab(\Delta)$ é simplesmente α. Temos que se $\Gamma \models_{\mathbf{LLL}} Dab\,(\Delta)$, então $\Gamma \models_{\mathbf{LLL}} Dab\,(\Delta \cup \Theta)$, para qualquer conjunto Θ finito. Para definir a noção de consequência adaptativa seguindo a estratégia de confiabilidade é necessário não apenas determinar as consequências-Dab, mas também as *mínimas consequências-Dab*.

Definição 4.1.9 *$Dab(\Delta)$ é uma* mínima consequência-Dab *de* Γ *sse* $\Gamma \models_{\mathbf{LLL}} Dab(\Delta)$ *e* $\Gamma \not\models_{\mathbf{LLL}} Dab(\Theta)$ *para todo* $\Theta \subset \Delta$.

A determinação desse mínimo conjunto de consequências-Dab depende apenas da lógica **LLL**.

Definição 4.1.10 *Sejam* $Dab(\Delta_1), Dab(\Delta_2), \ldots$ *as mínimas consequências-Dab de* Γ. *O* conjunto $U(\Gamma)$ de fórmulas duvidosas *é definido com respeito às mínimas consequências-Dab de* Γ *da seguinte maneira:*

$$U(\Gamma) = \bigcup \{\Delta : Dab(\Delta) \text{ é uma mínima consequência-}Dab \text{ de } \Gamma\}.$$

A partir do conjunto $Ab(M)$ de anormalidades verificadas pelo modelo M em **LLL** e do conjunto $U(\Gamma)$ de fórmulas duvidosas é possível definir a noção de modelo **LLL** confiável e de consequência adaptativa confiável.

Definição 4.1.11 *Um modelo **LLL** de* Γ *é confiável sse* $Ab(M) \subseteq U(\Gamma)$.

Os modelos **LLL** confiáveis de Γ são os **LLL**-modelos de Γ nos quais apenas as fórmulas que são duvidosas têm comportamento anormal. $U(\Gamma)$ é o conjunto de fórmulas de Γ que são duvidosas. Seguindo a estratégia de confiabilidade, os modelos adaptativos de Γ são um subconjunto dos modelos **LLL**, eles são apenas os modelos **LLL** de Γ que são confiáveis. A estratégia de confiabilidade considera que uma fórmula tem comportamento anormal somente se ela é um membro do conjunto $U(\Gamma)$ de fórmulas duvidosas.

Definição 4.1.12 $\Gamma \models_{\mathbf{AL}^r} \alpha$ *sse* α *é válida em todos os modelos confiáveis de* Γ.

Não é em geral o caso que, se $\Gamma \models_{\mathbf{LLL}} Dab(\Delta)$, então $\Gamma \models_{\mathbf{LLL}} \delta$, para alguma anormalidade $\delta \in \Delta$. Em outros termos, se $Dab(\Delta)$ é o conjunto das mínimas consequências de Δ, então pela Definição 4.1.9, teremos que $\Gamma \models_{\mathbf{LLL}} Dab(\Delta)$, de modo que algum membro do conjunto Γ de premissas terá comportamento anormal. Porém, a lógica **LLL** não permite determinar o elemento de Γ que apresenta tal comportamento anormal. Considere o seguinte exemplo.

Exemplo 4.1.13 *(Cf. [12]) Considere uma lógica adaptativa de inconsistência e seja* $\Omega = \left\{\alpha \wedge \neg\alpha : \not\models_{\mathbf{LLL}} (\alpha \wedge \neg\alpha) \text{ e } \alpha \in For\left(\Sigma^{\mathbf{LLL}}\right)\right\}$ *o conjunto de anormalidades. Seja* $\Gamma = \{\neg p, \neg q, p \vee q, r \vee \neg s, p \vee s, q \vee s\}$. *Se a disjunção e a conjunção tiverem comportamento clássico em* ***LLL****, então teríamos que* $\Gamma \models_{\mathbf{LLL}} (p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$. *Assim, ou* p *ou* q *têm comportamento anormal. Porém, as premissas não permitem determinar se* p *tem comportamento anormal, pois* $\Gamma \not\models_{\mathbf{LLL}} p \wedge \neg p$*, ou se* q *tem comportamento anormal, pois* $\Gamma \not\models_{\mathbf{LLL}} q \wedge \neg q$. *Se adotarmos a estratégia de confiabilidade, deveríamos considerar tanto* p *quanto* q *como fórmulas anormais. Desse modo,* $\Gamma \not\models_{\mathbf{AL}^r} s$. *Se adotarmos a estratégia de mínima anormalidade, então deveríamos considerar anormais a* p *ou a* q*, mas não às duas. Seguindo essa estratégia,* p *tem comportamento normal sse* q *tem comportamento anormal. Desse modo,* $\Gamma \models_{\mathbf{AL}^m} s$.

Proposição 4.1.14 *Seja* $\mathfrak{M}^{\mathbf{LLL}}(\Gamma)$ *o conjunto de todos os modelos* ***LLL*** *de* Γ*, seja* $\mathfrak{M}^m(\Gamma)$ *o conjunto de todos os modelos* ***AL*** *minimamente anormais de* Γ *e seja* $\mathfrak{M}^r(\Gamma)$ *o conjunto de todos os modelos* ***AL*** *confiáveis de* Γ. *Então:*

$$\mathfrak{M}^m(\Gamma) \subseteq \mathfrak{M}^r(\Gamma) \subseteq \mathfrak{M}^{\mathbf{LLL}}(\Gamma).$$

Demonstração. Em [10, p. 230]. ∎

Corolário 4.1.15 *(Cf. [9]) Seja* $Cn_{\mathbf{AL}^m}$ *o conjunto de consequências adaptativas obtido pela estratégia de mínima anormalidade, seja* $Cn_{\mathbf{AL}^r}$ *o conjunto de consequências adaptativas obtido pela estratégia de confiabilidade e seja* $Cn_{\mathbf{LLL}}$ *o conjunto das* ***LLL****-consequências. Então:*

$$Cn_{\mathbf{LLL}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}^r}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}^m}(\Gamma).$$

Contudo, no caso particular em que $\Gamma \models_{\mathbf{LLL}} Dab(\Delta)$ sse $\Gamma \models_{\mathbf{LLL}} \delta$, para algum $\delta \in \Delta$ e algum Γ, as duas estratégias —mínima anormalidade e confiabilidade— coincidem e são chamadas de estratégia adaptativa simples [12].[6]

[6] Outras estratégias dinâmicas, tais como cegueira (*blindness*), seleção normal (*normal selection*), *counting* e etc são apresentadas em [12].

Definição 4.1.16 *Um modelo **LLL** de* Γ *é simplesmente bom (*simply all right*) sse* $Ab(M) = \{A \in \Omega : \Gamma \models_{\mathbf{LLL}} A\}$.

Definição 4.1.17 $\Gamma \models_{\mathbf{AL}^s} \alpha$ *sse* α *é validada por todos os modelos simplesmente bons de* Γ.

Proposição 4.1.18 *Seja **AL**^{s} uma lógica adaptativa baseada na estratégia simples e seja* $Cn_{\mathbf{AL}^s}$ *a sua relação de consequência. Então:*

$$Cn_{\mathbf{LLL}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}^r}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}^s}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}^m}(\Gamma).$$

Lógica ULL

Uma lógica **LLL** junto com o conjunto Ω de anormalidades determinam uma lógica **ULL**. **ULL** é obtida a partir de **LLL** supondo que as anormalidades sejam impossíveis. Na **ULL** é suposto que todas as anormalidades contidas em Ω são falsas. Em termos semânticos, os modelos **ULL** são os modelos **LLL** que não validam qualquer anormalidade. Os modelos de **ULL** são, assim, um subconjunto dos modelos de **LLL**. Em outros termos, uma **LLL** é o fragmento da lógica **ULL** que permite as anormalidades serem verdadeiras.

Definição 4.1.19 *Um modelo **LLL** é um modelo **ULL** sse ele não valida qualquer membro do conjunto* Ω *de anormalidades (cf. [12]).*

Cada **ULL** é uma extensão de uma **LLL**; todo modelo **ULL** que verifica as fórmulas de um conjunto Γ é um modelo **LLL** de Γ. Assim, se um conjunto de premissas Γ é verificado por algum modelo M de **ULL**, então o conjunto de premissas não exige que as anormalidades sejam verdadeiras (cf. [12]). Porém, a relação inversa não é certa: haverá modelos **LLL** de Γ que não sejam modelos **ULL** de Γ.

Definição 4.1.20 *Um conjunto* Γ *de premissas é normal se* $\mathfrak{M}^{\mathbf{ULL}}(\Gamma) \neq \emptyset$. *Em caso contrário, o conjunto* Γ *é anormal.*

Em outros termos, um conjunto Γ é dito de normal quando os modelos **LLL** de Γ não validam $Dab\,(\Delta)$.

Definição 4.1.21 $\Gamma \models_{\mathbf{ULL}} \alpha$ *sse* α *é válida em todo modelo* ***LLL*** *de* Γ *que não valida quaisquer anormalidades..*

Proposição 4.1.22 *Seja* $\mathfrak{M}^{\mathbf{L}}(\Gamma)$ *o conjunto dos modelos de* Γ *da lógica* $\mathbf{L}$ *e seja* $Cn_{\mathbf{L}}(\Gamma)$ *o conjunto das consequências de* Γ *na lógica* $\mathbf{L}$*. Então:*

$$\mathfrak{M}^{\mathbf{ULL}}(\Gamma) \subseteq \mathfrak{M}^{m}(\Gamma) \subseteq \mathfrak{M}^{r}(\Gamma) \subseteq \mathfrak{M}^{\mathbf{LLL}}(\Gamma)$$

e

$$Cn_{\mathbf{LLL}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}^{r}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}^{m}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{ULL}}(\Gamma).$$

Em caso de Γ ser um conjunto normal de premissas, o conjunto das consequências adaptativas confiáveis e o conjunto das consequências minimamente normais coincidem com o conjunto das consequências da lógica **ULL**. Com efeito, se Γ é um conjunto normal de premissas, então o conjunto $U\,(\Gamma)$ de fórmulas duvidosas é vazio e apenas modelos **ULL** de Γ conformam o conjunto $Ab\,(M)$ de modelos minimamente normais. Assim, temos a seguinte proposição, pela qual se vinculam os modelos de uma lógica **ULL**, das lógicas **AL** e de **LLL**.

Proposição 4.1.23 *Se* Γ *é um conjunto normal de premissas, então:*

$$\mathfrak{M}^{\mathbf{ULL}}(\Gamma) = \mathfrak{M}^{m}(\Gamma) = \mathfrak{M}^{r}(\Gamma)$$

e, portanto,

$$Cn_{\mathbf{AL}^{r}}(\Gamma) = Cn_{\mathbf{AL}^{m}}(\Gamma) = Cn_{\mathbf{ULL}}(\Gamma).$$

Demonstração. Veja [9, p. 15]. ■

As lógicas adaptativas baseadas na estratégia de confiabilidade ou na estratégia de mínima anormalidade estendem o conjunto de consequências da lógica inferior **LLL**. As anormalidades do conjunto Ω são supostas, pelas lógicas **AL** como falsas até que seja demonstrado o contrário. Como caso limite, a lógica **ULL** estabelece que as anormalidades do conjunto Ω sejam imposíveis. Daqui, as lógicas adaptativas têm **LLL** como limite inferior e **ULL** como limite superior. Aplicando **AL**, procura-se alcançar o poder inferencial de **ULL** tanto quanto for possível. **AL** consegue capturar o poder inferencial de **ULL** apenas no caso das premissas serem normais. Porém, ainda em caso de anormalidade, e procurando atingir o poder inferencial da lógica superior **ULL**, **AL** amplia o poder inferencial da lógica menor **LLL**.

4.2 Teorema de Ajuste de Derivabilidade

A semântica das lógicas adaptativas **ALs** é posterior ao desenvolvimento da teoria da prova dinâmica, característica das **ALs** (cf. [8]). A teoria da prova dinâmica permite comprender a maneira como as relações de derivabilidade das lógicas **ULL** e **LLL** se vinculam.

A relação de derivabilidade de **ULL** é caracterizada a partir da lógica **LLL** e do conjunto de anormalidades Ω da seguinte maneira. Seja $\Delta^{\neg} = \{\neg\alpha : \alpha \in \Delta\}$.

Definição 4.2.1 *([10, p. 225])* $\Gamma \vdash_{\mathbf{ULL}} \alpha$ *sse* $\Gamma \cup \Omega^{\neg} \vdash_{\mathbf{LLL}} \alpha$.

Em termos axiomáticos, a lógica **ULL** é obtida acrescentando-se à lógica **LLL** um ou mais axiomas que reduzem a anormalidade à trivialidade. Assim, **ULL** é construída a partir de **LLL** acrescentando axiomas que impedem —sob risco de trivialidade— as anormalidades. A **ULL** determina as consequências que se derivam apenas em situações de normalidade. Construída desse modo, cada **ULL** é uma extensão de uma **LLL** tal que, se $\Gamma \vdash_{\mathbf{ULL}} \alpha$, então ou $\Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} \alpha$ ou algumas fórmulas têm comportamento anormal em Γ (cf. [53]). E se Γ tem comportamento anormal, então certas anormalidades serão deriváveis em **LLL** a partir de Γ.

O Teorema de Ajuste de Derivabilidade permite relacionar as duas lógicas extremas de uma lógica adaptativa: **LLL** e **ULL**. Para qualquer lógica adaptativa é demonstrado o seguinte teorema DAT.

Teorema 4.2.2 *Seja $\Delta \subseteq \Omega$ um conjunto finito de fórmulas.*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{ULL}} \alpha \textit{ sse existe } \Delta \textit{ tal que } \Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} \alpha \vee Dab(\Delta). \tag{DAT}$$

Demonstração. Em [9] e [10]. ■

Esse teorema é fundamental para se comprender a dinâmica de uma demonstração na lógica adaptativa. Em termos intuitivos, o DAT garante que para cada consequência α de **ULL** obtida a partir de Γ ou α é consequência **LLL** obtida a partir de Γ ou existe (no mínimo um) $\Delta \subseteq \Omega$, tal que algumas fórmulas de Δ têm comportamento anormal em Γ. O DAT expressa que α é adaptativamente derivável de Γ sse os membros de Δ têm comportamento normal em Γ. Para obter uma fórmula α por meio da lógica **ULL** a partir do conjunto Γ é necessario considerar apenas a mínima quantidade de anormalidades em Γ, isto é, $Dab\,(\Delta)$.

A **AL** supõe o comportamento normal das fórmulas a não ser que, e até que, seja mostrado o contrário. O DAT sugere que nas demonstrações da lógica adaptativa é possível derivar a conclusão α a partir de Γ desde que nenhum dos elementos do conjunto Δ tenha comportamento anormal com relação a Γ. A lógica **AL** é dinâmica pois ela se desloca da **ULL** para a **LLL**: em condições de normalidade, **AL** dispõe as mesmas consequências que **ULL**, em condições de anormalidade, **AL** dispõe as mesmas consequências que **LLL**.

Teoria da prova dinâmica

Como consequência da condição —revogável— de normalidade e do status intermediário de **AL**, as demonstrações de **AL** apresentam uma dinâmica interna. Intuitivamente, **LLL** é a parte estável de uma lógica adaptativa, **LLL** é a parte que não prescreve qualquer condição de normalidade às premissas de uma inferência. Assim, as fórmulas derivadas em **AL** seguindo a sua parte estável **LLL** não dependem de qualquer condição de normalidade e não serão, portanto, revogáveis. Porém, **AL** estende a lógica **LLL** impondo certas condições de normalidade, de modo que **AL** produz, também, consequências que são revogáveis. Fórmulas obtidas em uma demonstração **AL** sob condição de normalidade serão anuladas em caso da condição demonstrar ser incorreta. A teoria da prova da lógica adaptativa tem duas classes de regras: regras condicionais e regras incondicionais, isto é, regras de inferência que dependem de condições de normalidade e regras que não dependem delas. Intuitivamente, as condições de normalidade das regras não são condições de aplicação, mas condições de anulação de fórmulas previamente obtidas em uma derivação. A teoria da prova de **AL** é dinâmica no sentido de que certas fórmulas são derivadas de modo condicional e podem ser retiradas no caso das condições não serem satisfeitas.

Uma prova dinâmica é uma sequência de fórmulas. As provas de **AL** são provas anotadas compostas de uma sequência de linhas, cada uma das quais tem os seguintes cinco elementos: (i) um número de linha, (ii) uma fórmula α derivada, (iii) o(s) número(s) da(s) linha(s) da(s) fórmula(s) a partir da(s) quais(l) α é derivada, (iv) a regra pela qual α é derivada, e (v) uma (possivelmente vazia) condição.[7] Essa condição especifica quais fórmulas devem ter comportamento normal para α ser derivada. As provas adaptativas são provas anotadas porque as linhas que compõem as provas podem estar marcadas. Assim, o peculiar das provas dinâmicas de **AL** é que as fórmulas derivadas suportam condições e têm marcas. Enquanto as condições são determinadas pela lógica **LLL** e o conjunto de anormalidades Ω, as marcas dependem da definição de marca (*marking definition*) e, portanto, da estratégia adaptativa escolhida.

A teoria da prova da lógica adaptativa é caracterizada pelas seguintes três regras:

- uma regra de premissa (PREM),
- uma regra incondicional (RI),
- uma regra condicional (RC).

[7] Em [12] a regra pela qual a fórmula é derivada, isto é, (iv), não é considerada um componente da prova adaptativa. Em termos estritos, uma prova é uma sequência de fórmulas. Assim, os componentes de uma prova dinâmica seriam apenas as fórmulas de (ii).

Seja

$$\alpha \qquad \Delta$$

uma abreviatura de α *ocorre na prova a condição de que* Δ. Então, as regras são as seguintes (cf. [10]):

PREM Se $\alpha \in \Gamma$:

$$\begin{array}{cc} \ldots & \ldots \\ \hline \alpha & \emptyset \end{array}$$

RI Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_{\mathbf{LLL}} \beta$:

$$\begin{array}{cc} \alpha_1 & \Delta_1 \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_n & \Delta_n \\ \hline \beta & \Delta_1 \cup \ldots \Delta_n \end{array}$$

RC Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_{\mathbf{LLL}} \beta \vee Dab\,(\Theta)$:

$$\begin{array}{cc} \alpha_1 & \Delta_1 \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_n & \Delta_n \\ \hline \beta & \Delta_1 \cup \ldots \Delta_n \cup \Theta \end{array}$$

Em termos intuitivos, em uma demonstração adaptativa, as linhas são acrescentadas junto com certas condições, se as fórmulas foram obtidas por aplicação de regras condicionais. Quando uma fórmula é adicionada em uma demonstração por aplicação de uma regra condicional, então na demonstração é acrescentada uma condição, é acrescentado um conjunto de fórmulas.

Em termos intuitivos, as fórmulas do conjunto Δ são supostas como normais até que seja demonstrado o contrário. Porém, o que significa exatamente isso depende da estratégia adaptativa e da definição de marca. Intuitivamente, as condições estipulam que as fórmulas dos conjuntos Δ, Θ de condições devem ter comportamento normal. As linhas de uma demonstração podem ser consideradas como derivadas a partir do conjunto de premissas no caso em que as fórmulas do conjunto de condições adaptativas Δ possam ser consideradas normais. Uma linha de uma demonstração dinâmica pode ser rejeitada em caso da condição de normalidade não ser satisfeita. Com o objetivo de indicar que não todos os elementos da condição adaptativa de uma determinada linha têm comportamento normal, essa linha recebe uma marca junto às condições. Uma linha marcada de uma demonstração dinâmica não é considerada parte da demonstração.

A teoria da prova das **ALs** é dinâmica, pois uma linha marcada em um passo da demonstração pode ser desmarcada em um passo posterior e uma linha não marcada pode ser posteriormente marcada, como consequência da demonstração da anormalidade das fórmulas da correspondente condição. Como já notamos, uma lógica adaptativa é caracterizada, não apenas pela lógica **LLL** e o conjunto de anormalidades Ω, mas também pela estratégia adaptativa que, na teoria da prova adaptativa, determina a marcação das linhas de uma demonstração.

Antes de mostrar a maneira como a estratégia adaptativa determina a marcação das linhas em uma prova adaptativa, mostraremos um exemplo de aplicação das regras PREM, RC e RI.

Exemplo 4.2.3 *[53] Seja **LLL** a lógica (proposicional) paraconsistente **CLuN**, obtida pelo acréscimo de $\alpha \vee \neg\alpha$ como axioma à lógica positiva clássica **LC**$^+$ e seja **ULL** a lógica (proposicional) **LC**.*[8] *O conjunto Ω de anormalidades é formado por fórmulas da forma $\alpha \wedge \neg\alpha$.*[9] *Seja $\Gamma = \{p \wedge \neg t, q \wedge (t \vee s), \neg p \vee \neg q, r \rightarrow \neg s, u \rightarrow p, u \rightarrow \neg p\}$.*

[8] A lógica **CLuN** é chamada de **P** em [53] e de **PI** em [7].

[9] A lógica positiva clássica **LC**$^+$ pode ser obtida acrescentando a Lei de Peirce (LPi): $(((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ ao fragmento positivo da lógica intuicionista **LI**$^+$.

1	$p \wedge \neg t$	–	PREM	$\emptyset$
2	$q \wedge (t \vee s)$	–	PREM	$\emptyset$
3	$\neg p \vee \neg q$	–	PREM	$\emptyset$
4	$r \rightarrow \neg s$	–	PREM	$\emptyset$
5	$u \rightarrow p$	–	PREM	$\emptyset$
6	$u \rightarrow \neg p$	–	PREM	$\emptyset$
7	$\neg u$	5,6	RC	$\{p \wedge \neg p\}$
8	$\neg t$	1	RU	$\emptyset$
9	$t \vee s$	2	RU	$\emptyset$
10	s	8,9	RC	$\{t \wedge \neg t\}$
11	$\neg r$	4,10	RC	$\{t \wedge \neg t, s \wedge \neg s\}$
12	$(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$	1-3	RU	$\emptyset$

A fórmula da linha 7 é obtida por aplicação do esquema inferencial $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta \Vdash \neg\alpha$ às premissas das linhas 5 e 6 e, portanto, a sua derivação depende da normalidade da fórmula p. A fórmula da linha 10 é obtida por aplicação do esquema inferencial $\neg\alpha$, $\alpha \vee \beta \Vdash \beta$ às fórmulas das linhas 8 e 9 e, portanto, a sua derivação depende da normalidade da fórmula t. A fórmula da linha 11 é obtida por aplicação do esquema inferencial $\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta \Vdash \neg\alpha$ às fórmulas das linhas 4 e 10 e, portanto, a sua derivação depende da normalidade das fórmulas t e s. Finalmente, na linha 12 é derivada uma fórmula $Dab\,(\Delta)$ a partir das premissas 1-3. A fórmula $(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$ expressa que ou p ou q têm comportamento anormal em Γ. Obtida a fórmula da linha 12, o progresso da demonstração depende da definição de marca de fórmulas e, portanto, da estratégia adaptativa que caracterize **AL**. Nessa etapa da demonstração, a definição de marca deve ser invocada. Como consequência da definição de marca, algumas linhas da demonstração serão marcadas e algumas outras linhas poderão ser desmarcadas. Para maior simplicidade, e considerando que as estratégias de confiabilidade e mínima anormalidade foram explicadas com detalhe na Seção 4.1, nós não apresentaremos formalmente as definições de marca.

A seguir, mostraremos informalmente, a partir de um exemplo, a maneira como as duas definições de marca, correspondentes a essas duas estratégias adaptativas, determinam diferentes provas adaptativas. Usaremos o signo ✓ para indicar que uma linha da prova é marcada.

Exemplo 4.2.4 *Consideremos novamente o conjunto* Γ *do Exemplo 4.1.13. Assim, seja* $\Gamma = \{\neg p, \neg q, p \vee q, r \vee \neg s, p \vee s, q \vee s\}$*. Seja **LLL** uma lógica de inconsistência e seja* Ω *o conjunto de anormalidades formado pelas fórmulas da forma* $\alpha \wedge \neg\alpha$*.*

1. Consideraremos, em primeiro lugar, uma prova baseada na estratégia adaptativa de confiabilidade.

1	$\neg p$	–	PREM	$\emptyset$
2	$\neg q$	–	PREM	$\emptyset$
3	$p \vee q$	–	PREM	$\emptyset$
4	$r \vee \neg s$	–	PREM	$\emptyset$
5	$p \vee s$	–	PREM	$\emptyset$
6	$q \vee s$	–	PREM	$\emptyset$
7	s	1,5	RC	$\{p \wedge \neg p\}$ ✓
8	$(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$	1-3	RI	$\emptyset$
9	s	2,6	RC	$\{q \wedge \neg q\}$ ✓

Intuitivamente, a estratégia de confiabilidade leva a marcar uma linha em um passo da prova se algum dos elementos da condição correspondente a essa linha não é confiável nesse passo, isto é, se algum dos elementos da condição é um disjuntivo de uma mínima fórmula-*Dab* derivada na prova. Daqui, se adotamos a estratégia de confiabilidade, deveríamos considerar tanto p quanto q como fórmulas anormais, pois $(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$ é a mínima fórmula *Dab* obtida a partir de Γ. Portanto, seguindo a definição de marca baseada na estratégia de confiabilidade, as linhas 7 e 9 deveriam ser as duas marcadas.

Consequentemente, as linhas 7 e 9 não formariam parte da prova adaptativa a partir de Γ.

2. Consideraremos, agora, duas provas —a. e b.— baseadas na estratégia de mínima anormalidade.[10]

a.

1	$\neg p$	–	PREM	$\emptyset$
2	$\neg q$	–	PREM	$\emptyset$
3	$p \vee q$	–	PREM	$\emptyset$
4	$r \vee \neg s$	–	PREM	$\emptyset$
5	$p \vee s$	–	PREM	$\emptyset$
6	$q \vee s$	–	PREM	$\emptyset$
7	s	1,5	RC	$\{p \wedge \neg p\}$
8	$(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$	1-3	RI	$\emptyset$
9	s	2,6	RC	$\{q \wedge \neg q\}$ ✓

b.

1	$\neg p$	–	PREM	$\emptyset$
2	$\neg q$	–	PREM	$\emptyset$
3	$p \vee q$	–	PREM	$\emptyset$
4	$r \vee \neg s$	–	PREM	$\emptyset$
5	$p \vee s$	–	PREM	$\emptyset$
6	$q \vee s$	–	PREM	$\emptyset$
7	s	1,5	RC	$\{p \wedge \neg p\}$ ✓
8	$(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$	1-3	RI	$\emptyset$
9	s	2,6	RC	$\{q \wedge \neg q\}$

[10] A rigor, deveriamos considerar apenas uma prova com marcas alternativas. Porém, para maior clareza expositiva, escolhemos apresentar duas provas alternativas.

Como a disjunção $(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$ é derivada a partir de Γ, então, se adotarmos a estratégia de mínima anormalidade, deveríamos considerar anormais p ou q, mas não deveríamos considerar anormais tanto p quanto q. A definição de marca correspondente à estratégia de mínima anormalidade estipula que a linha 7 ou a linha 9 deveriam ser marcadas. Porém, a definição não determina marcar as duas linhas. Assim, ou a linha 7 ou a linha 9 deverão permanecer desmarcadas. Logo, ou a linha 7 ou a linha 9 formam parte da prova adaptativa a partir de Γ e, portanto, a fórmula s é derivada a partir de Γ no passo 7 ou no passo 9 da prova.

As regras de inferência junto com a definição de marca determinam duas noções de derivabilidade: derivabilidade em uma linha s da prova e derivabilidade final.

Definição 4.2.5 *Uma fórmula α é derivada a partir de Γ em um passo m da prova sse α está em uma linha que não é marcada no passo m.*

Seguindo o nosso exemplo, e considerando a definição anterior, podemos afirmar que s é derivada a partir de Γ na linha 7 ou s é derivada a partir de Γ na linha 9 por meio da estratégia de mínima anormalidade. Porém, a fórmula s não é derivada a partir de Γ nem na linha 7 nem na linha 9, se considerarmos a estratégia de confiabilidade.

Definição 4.2.6 *Uma* fórmula α *é* finalmente derivada *a partir de Γ em uma linha i de uma prova finita de m passos sse (1) α é o segundo elemento da linha i, (2) a linha i não está marcada no passo m, e (3) toda extensão da prova na qual a linha i é marcada pode ser posteriormente estendida de modo que a linha i seja desmarcada.*

4.3 Lógicas adaptativas e DATs: exemplos

Em nossa primeira seção, dedicada à lógica adaptativa, notamos que diferentes processos inferenciais, tais como a discussão, a diagnose, a inferência indutiva, a inferência abdutiva, a inferência a partir de dados inconsistentes, o raciocínio a partir das próprias convicções, são objeto do programa de lógica adaptativa da Escola de Gantes. Vários sistemas de lógica adaptativa foram propostos a partir do trabalho fundacional de D. Batens sobre lógica paraconsistente [7]. Nesta seção apresentaremos algumas poucas lógicas adaptativas com o objetivo de exemplificar as vinculações entre as correspondentes lógicas **LLL** e **ULL**.

Lógica adaptativa AJ (Meheus)

A lógica adaptativa **AJ** é caracterizada pela lógica modal **S5** como lógica **LLL**, pelo conjunto $\Omega = \left\{(\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha) : \alpha \in F^P\right\}$ de anormalidades, com F^P sendo o conjunto das fórmulas primitivas da linguagem de **S5**, e pela estratégia de confiabilidade.[11] A lógica **Triv** é a correspondente lógica **ULL**, pois **Triv** carece de modelos que verifiquem qualquer anormalidade $\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha$ de **LLL**. **Triv** pode ser obtida a partir de **S5** acrescentando a fórmula $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\alpha$ como esquema de axioma.

Seja $\Gamma^{\Diamond} = \{\Diamond\alpha : \alpha \in \Gamma\}$. Uma fórmula α não é confiável em **AJ** se $\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha$ é um disjuntivo de uma mínima consequência-*Dab* de $\Gamma^{\Diamond}$.

Em [54] é demonstrado o seguinte DAT entre os sistemas **S5** e **Triv**.

Teorema 4.3.1

$$\textit{Se } \Gamma \models_{\mathbf{Triv}} \alpha, \textit{ então existe } \Delta \subseteq F^P \textit{ tal que } \Gamma \models_{\mathbf{S5}} \alpha \vee Dab\,(\Delta)\,. \qquad \text{(DAT)}$$

O DAT garante que toda vez que α é válido nos modelos **Triv** de Γ, então ou α é válido nos modelos **S5** de Γ ou existe $\gamma_i \in \Delta$ tal que γ_i que tem comportamento anormal com respeito ao conjunto de premissas Γ. O teorema DAT oferece as bases para a teoria da prova dinâmica de **AJ**, pois sugere que é possível derivar α a partir de Γ e a condição de que todos os γ_i têm comportamento normal.

---

[11] O sistema modal **S5** **(KTB4)** é obtido acrescentando os esquemas de axioma T: $\Box\alpha \rightarrow \alpha$, B: $\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ e 4: $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ ao sistema modal **K**, que é obtido, por sua vez, acrescentando o esquema de axioma K: $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$ e a regra de necessitação Nec: *se* $\vdash_{\mathbf{K}} \alpha$, então $\vdash_{\mathbf{K}} \Box\alpha$ a **LC** (cf. [23]).

Exemplo 4.3.2 *[52] Em **S5** temos:*

1. $\Diamond(p \vee q), \Diamond\neg p \nvdash_{\mathbf{S5}} \Diamond q$. *Mas* $\Diamond(p \vee q), \Diamond\neg p \vdash_{\mathbf{S5}} \Diamond q \vee Dab(p)$,

2. $\Diamond(p \vee q), \Diamond\neg p \nvdash_{\mathbf{S5}} \Diamond((p \vee q) \wedge \neg p)$.

   Mas $\Diamond(p \vee q), \Diamond\neg p \vdash_{\mathbf{S5}} \Diamond((p \vee q) \wedge \neg p) \vee Dab(p)$,

3. $\Diamond p, \Diamond\neg p \nvdash_{\mathbf{S5}} \Diamond(p \wedge \neg p)$. *Mas* $\Diamond p, \Diamond\neg p \vdash_{\mathbf{S5}} \Diamond(p \wedge \neg p) \vee Dab(p)$.

Lógica adaptativa ACLuN (Batens)

O sistema de lógica adaptativa de inconsistência **ACLuN** tem a lógica clássica **LC** como **ULL** e a lógica paraconsistente **CLuN** como **LLL**.[12] $\Omega = \{\alpha \wedge \neg\alpha : \alpha \in For^{\mathbf{CLuN}}\}$ é o conjunto de anormalidades de **ACLuN**. $\mathbf{ACLuN}^r$ e $\mathbf{ACLuN}^m$ são as versões baseadas nas estratégias de confiabilidade e de mínima anormalidade, respectivamente, da lógica adaptativa de inconsistência **ACLuN**.

Exemplo 4.3.3 *[53] Na lógica **CLuN** temos:*

1. $\neg t, t \vee s \nvdash_{\mathbf{CLuN}} s$. Mas $\neg t, t \vee s \vdash_{\mathbf{CLuN}} s \vee (t \wedge \neg t)$,

2. $p, \neg p \vee q, r \rightarrow \neg q \nvdash_{\mathbf{CLuN}} \neg r$. Mas $p, \neg p \vee q, r \rightarrow \neg q \vdash_{\mathbf{CLuN}} \neg r \vee ((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q))$.

Lógica adaptativa $\mathbf{C}_n^m$ (Batens)

As lógicas adaptativas de inconsistência $\mathbf{C}_n^m$ estão baseadas nos sistemas paraconsistentes $\mathbf{C}_n$ de da Costa. Com efeito, cada lógica $\mathbf{C}_n^m$, com $(1 \leq n \leq \omega)$ tem $\mathbf{C}_n$ como **LLL**, $\Omega = \{(\alpha \wedge \neg\alpha) : \alpha \in For^{\mathbf{C}_n}\}$ e está baseada na estratégia de mínima anormalidade (cf. [11]).

[12] Para a caracterização de **CLuN** veja exemplo 4.2.3.

Outras lógicas adaptativas

A lógica adaptativa de indeterminação **ACLaN** é dual da lógica adaptativa de inconsistência **ACLuN**. A lógica **LLL** de **ACLaN** é a lógica paracompleta **CLaN** e a lógica superior **ULL** é **LC**. $\Omega = \left\{\alpha \vee \neg\alpha : \alpha \in For^{\mathbf{CLaN}}\right\}$ é o conjunto de anormalidades de **ACLaN**. A lógica adaptativa **ACLoN** [8] tem uma negação que é tanto paracompleta quanto paraconsistente.

Concluimos aqui com a nossa breve descrição dos principais aspectos das Lógicas Adaptativas. Nos seguintes capítulos utilizaremos a ideia dos Teoremas de Ajuste de Derivabilidade para definir o conceito-chave de nossa pesquisa: *conectivo de restauração local*.

Capítulo 5

Observação Local: Localidade em ALs, LFIs e LFUs

Como vimos anteriormente, uma lógica adaptativa é intermediária às lógicas **LLL** e **ULL**. Uma lógica **AL** se desloca entre as duas lógicas limitantes gerando consequências **ULL** ou **LLL**, dependendo do comportamento normal ou anormal das premissas, respectivamente. No caso das fórmulas terem comportamento normal com relação às premissas, o conjunto de consequências adaptativas obtidas a partir de Γ será idêntico com o conjunto das **ULL** consequências de Γ. Porém, no caso das fórmulas terem comportamento anormal com relação a Γ, o conjunto de consequências adaptativas de Γ será menor que o conjunto das consequências **ULL** de Γ. A lógica adaptativa não autoriza a aplicação de certas regras de inferência de **ULL**, se as fórmulas tiverem comportamento anormal. Assim, **AL** não rejeita uma regra de inferência, mas as consequências obtidas por uma determinada aplicação da regra. Podemos dizer, então, que **AL** rejeita de modo local uma determinada regra de inferência. Uma lógica adaptativa de inconsistência, por exemplo, rejeitará as consequências obtidas por aplicação do esquema inferencial de silogismo disjuntivo (SD) —de $\alpha \vee \beta$ e $\neg\alpha$ pode-se inferir β— apenas no caso de α demonstrar comportamento anormal. Porém, até e apenas no caso em que o comportamento anormal de α seja demonstrado, esse esquema inferencial e, portanto, as consequências da sua aplicação serão admitidas, tal como na lógica monotônica superior **ULL**. Assim, enquanto uma lógica paraconsistente não adaptativa rejeita uma determinada regra de inferência da lógica consistente, uma lógica adaptativa de inconsistência rejeita apenas certas consequências obtidas pela aplicação da regra (cf. [53]). Uma **AL** rejeita consequências obtidas por aplicação das regras condicionais em casos específicos, apenas nos casos em que uma determinada anormalidade seja demonstrada. Que uma determinada instância de aplicação de uma regra de inferência seja sancionada depende do manifesto comportamento anormal de certas fórmulas.

Uma lógica monotônica, a diferença de uma lógica adaptativa, aceita ou rejeita de modo global um determinado esquema inferencial. Assim, por exemplo, a lógica clássica aceita o PTE, admitindo de modo global a completude da negação. A lógica intuicionista, como veremos na Seção 9.1, admite o PE e concede, de modo global, a consistência às fórmulas. No lado oposto, as lógicas paracompletas e as lógicas paraconsistentes rejeitam de modo global esses princípios lógicos. A não admissão desses princípios redunda na inconsistência ou indeterminação das fórmulas com respeito a uma certa negação nesses contextos não clássicos.

A capacidade expressiva das **LFIs** e das **LFUs** permite que a consistência e a determinação da negação sejam readmitidas de modo local em âmbitos não clássicos. Por meio dos conectivos de consistência e (in)determinação, as **LFIs** e as **LFUs** recuperam versões fracas de princípios inválidos em contextos paraconsistentes e paracompletos. As **LFIs** e **LFUs** aceitam determinados princípios clássicos somente em contextos que poderíamos chamar de "bem comportados", se considerarmos a lógica clássica como padrão de bom comportamento. Esse bom comportamento das fórmulas com respeito à negação seria manifesto por meio dos conectivos de consistência e (in)determinação que caracterizam as **LFIs** e **LFUs**, respectivamente. A presença desses conectivos na linguagem e, portanto, a capacidade de se expressar o bom comportamento das fórmulas habilita a recuperação dos princípios lógicos perdidos nesses âmbitos não clássicos. As **LFIs** admitem PE ou SD, por exemplo, no caso das fórmulas manifestarem comportamento consistente. A aceitação desses esquemas inferenciais consistentes é restrita aos casos em que a consistência seja declarada explicitamente por meio da marcação das fórmulas. De modo análogo, as **LFUs** admitem versões do PTE nas quais a determinação é declarada explicitamente. Desse modo, tal como as **ALs** adquirem uma postura local com respeito à rejeição a determinados princípios lógicos, as **LFIs** e **LFUs** adquirem uma postura local com respeito à admissão a determinados princípios lógicos.

Contudo, enquanto as **LFIs** e as **LFUs** rejeitam o bom comportamento das fórmulas com respeito a uma negação até que seja apontado o contrário, as **ALs** pressupõem a normalidade das fórmulas até que seja demonstrado o contrário. As **LFIs** e as **LFUs** têm uma atitude local com relação à admissão da consistência e determinação das fórmulas, respectivamente: determinados esquemas inferenciais são aplicados exclusivamente em fórmulas que explicitam bom comportamento. As **ALs** têm uma atitude local com relação à rejeição à normalidade das fórmulas: determinados esquemas inferenciais não são aplicados apenas em fórmulas cuja anormalidade é demonstrada. Assim, poderíamos subscrever o afirmado em [50] e reconhecer que entre a proposta das **LFIs** e **LFUs** e a proposta das lógicas adaptativas existe uma diferença fundamentalmente idiossincrática: enquanto a lógica adaptativa pressupõe a normalidade das fórmulas até que seja demonstrado o contrário, as **LFIs** e **LFUs** rejeitam esse pressuposto até que seja registrado o contrário.

Parte II

Proposta

Capítulo 6

Conectivos de Restauração Local

Como notamos no capítulo anterior, tanto as **LFIs** e **LFUs** quanto as **ALs** têm uma atitude local com respeito à aceitação ou rejeição à aplicação de certos esquemas inferenciais. Em particular, como vimos em 3.3, os sistemas paraconsistentes **D2**, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{V}_0$, **mbC**, **bC** e **Cia** têm *conectivos unários* de consistência que habilitam a aceitação de uma versão —gentil— do PE. Por outro lado, o sistema $\mathbf{V}_0$ tem, também, um conectivo unário de completude $\circ$ e um conectivo de consistência e completude $+$, que habilitam a aceitação de uma versão —gentil— do PTE.

Levando em consideração essas ideias, a nossa proposta será definir um conceito geral de *conectivo unário de restauração local*, de modo tal que a classe definida inclua os conectivos desses sistemas paraconsistentes e paracompletos. Para isso, a nossa definição do conceito de conectivo de restauração local será baseada nos Teoremas de Ajuste de Derivabilidade. Porém, proporemos diferentes tipos de Teoremas de Ajuste de Derivabilidade. Distinguiremos entre DATs que chamaremos de DATs internos e de DATs externos e estabeleceremos uma distinção no interior deles, diferenciando entre DATs p-internos (externos), DATs c-internos (externos). A partir dessa distinção entre DATs c- e DATs p- definiremos os conceitos de conectivo de restauração em premissas e de conectivo de restauração em conclusão. Finalmente, definiremos as propriedades de propagação e de retropropagação da restauração.

Definição 6.0.4 *Sejam* $\boldsymbol{L}_1 = \langle For\,(\Sigma^{\mathbf{1}}), \Vdash_{\mathbf{1}}\rangle$ *e* $\boldsymbol{L}_2 = \langle For\,(\Sigma^{\mathbf{2}}), \Vdash_{\mathbf{2}}\rangle$ *duas lógicas tais que* $\Vdash_{\mathbf{2}} \subset \Vdash_{\mathbf{1}}$ *e tais que* $\Sigma^1 = \Sigma^2$. *Seja* $Ⓡ(p)$ *um conjunto —possivelmente vazio— de fórmulas de* $\mathbf{L}_2$ *que depende exatamente da variável proposicional* p. *Dizemos que* recuperamos $\mathbf{L}_1$ em $\mathbf{L}_2$ pelo acréscimo de premissas, *se podemos demonstrar o seguinte DAT p-interno. Para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\,(\Sigma^{\mathbf{1}})$, *existe* $\Delta \subseteq sub\,(\Gamma \cup \{\alpha\})$ *tal que:*

$$\Gamma \Vdash_{\mathbf{1}} \alpha \text{ sse } Ⓡ(\Delta), \Gamma \Vdash_{\mathbf{2}} \alpha, \qquad \text{(DAT p-interno)}$$

em que $Ⓡ(\Delta) = \bigcup_{\delta\in\Delta} Ⓡ(\delta)$.

Definição 6.0.5 *Sejam* $\boldsymbol{L}_1 = \langle For\,(\Sigma^{\mathbf{1}}), \Vdash_{\mathbf{1}}\rangle$ *e* $\boldsymbol{L}_2 = \langle For\,(\Sigma^{\mathbf{2}}), \Vdash_{\mathbf{2}}\rangle$ *duas lógicas tais que* $\boldsymbol{L}_i$ *é definida na assinatura* Σ_i *com* $i = 1, 2$, *tal que* $\Sigma^{\mathbf{1}} \subset \Sigma^{\mathbf{2}}$. *Seja* $Ⓡ(p)$ *um conjunto (não vazio) de fórmulas de* $\boldsymbol{L}_2$ *que depende exatamente da variável proposicional* p *e que contém símbolos de* $\Sigma^{\mathbf{2}}$ *que não pertencem a* $\Sigma^{\mathbf{1}}$. *Suponha que o fragmento de* $\boldsymbol{L}_2$ *sobre* $\Sigma^{\mathbf{1}}$ *está estritamente contido em* $\boldsymbol{L}_1$, *isto é:* $\Gamma \vdash_{\mathbf{2}} \alpha$ *implica* $\Gamma \vdash_{\mathbf{1}} \alpha$, *para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\,(\Sigma^{\mathbf{1}})$, *mas a recíproca não é verdadeira. Dizemos que* recuperamos $\mathbf{L}_1$ em $\mathbf{L}_2$ pelo acréscimo de premissas, *se podemos demonstrar o seguinte DAT p-externo. Para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\,(\Sigma^{\mathbf{1}})$, *existe* $\Delta \subseteq sub\,(\Gamma \cup \{\alpha\})$ *tal que:*

$$\Gamma \Vdash_{\mathbf{1}} \alpha \text{ sse } Ⓡ(\Delta), \Gamma \Vdash_{\mathbf{2}} \alpha, \qquad \text{(DAT p-externo)}$$

em que $Ⓡ(\Delta) = \bigcup_{\delta\in\Delta} Ⓡ(\delta)$.

Definição 6.0.6 *Se nas Definições 6.0.4 ou 6.0.5 o conjunto de fórmulas* $Ⓡ(p)$ *é unitário, dizemos que* Ⓡ *é um* conectivo unário de restauração local em premissas de $\mathbf{L}_1$ em $\mathbf{L}_2$.

Assim, chamaremos um conectivo unário $Ⓡ \in \Sigma_1^{\mathbf{2}}$ de conectivo unário de restauração local em premissas de $\mathbf{L}_1$ em $\mathbf{L}_2$ se, e somente se, $Ⓡ(p)$ é um conjunto unitário de fórmulas de $\mathbf{L}_2$ e, pelo acréscimo de um conjunto $Ⓡ(\Delta)$ de premissas é possível demonstrar um DAT entre $\mathbf{L}_2$ e $\mathbf{L}_1$ tal como em 6.0.4 ou 6.0.5.

Notação 6.0.7 *Se nas Definições 6.0.4 ou 6.0.5 o conjunto de fórmulas* $Ⓡ(p)$ *é unitário, escreveremos* $Ⓡp$.

Definição 6.0.8 *Se* Ⓡ *é um conectivo unário de restauração local em premissas e* Δ *é um conjunto de premissas, dizemos que* $Ⓡ\Delta = \{Ⓡ\delta : \delta \in \Delta\}$ *é um* conjunto de premissas restauradoras *ou, alternativamente, um* conjunto de premissas de restauração.

Exemplo 6.0.9 *Na Seção 3.3 reunimos exemplos de DATs espalhados na literatura das **LFIs**. Notamos que o esquema do DAT para as **LFIs** proposta na Definição 3.1.8 é um caso particular de nossa Definição 6.0.4. Assim, seguindo a nossa definição, podemos incluir os DATs, por exemplo, dos sistemas paraconsistentes* $\boldsymbol{C}_1$*, **mbC**, C**ia** na categoria de DATs p-internos. No entanto, como notamos quando apresentamos o DAT para o sistema **bC**, a assinatura desse sistema não coincide com a assinatura do sistema **LC**, que é recuperado em **bC** pelo acréscimo de premissas. Assim, podemos incluir o DAT do sistema **bC** na categoria de DATs p-externos.*

Notação 6.0.10 *Como é usual,* $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ *denotará a disjunção de* $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ *(na mesma ordem), sem importar a ordem dos parênteses.*

Definição 6.0.11 *Sejam* $\mathbf{L}_1 = \langle For\,(\Sigma^{\mathbf{1}})\,, \Vdash_{\mathbf{1}}\rangle$ *e* $\mathbf{L}_2 = \langle For\,(\Sigma^{\mathbf{2}})\,, \Vdash_{\mathbf{2}}\rangle$ *duas lógicas tais que* $\Sigma^{\mathbf{1}} = \Sigma^{\mathbf{2}}$ *e tais que* $\Vdash_{\mathbf{2}} \subset \Vdash_{\mathbf{1}}$*. Seja* $Ⓡ(p)$ *um conjunto —possivelmente vazio— de fórmulas de* $\mathbf{L}_2$ *que depende exatamente da variável proposicional* p*. Dizemos que* recuperamos $\boldsymbol{L}_1$ em $\boldsymbol{L}_2$ pelo acréscimo de alternativas*, se podemos demonstrar o seguinte DAT c-interno. Para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\,(\Sigma^{\mathbf{1}})$*, existe* $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\} \subseteq sub\,(\Gamma \cup \{\alpha\})$ *tal que:*

$$\Gamma \Vdash_{\mathbf{1}} \alpha \text{ sse } \Gamma \Vdash_{\mathbf{2}} \alpha \vee \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n, \qquad \text{(DAT c-interno)}$$

para todo $\beta_i \in Ⓡ\,(\delta_i)$*, com* $i = 1, \ldots, n$*.*

Definição 6.0.12 *Sejam* $\mathbf{L}_1 = \langle For\,(\Sigma^{\mathbf{1}})\,, \Vdash_{\mathbf{1}}\rangle$ *e* $\mathbf{L}_2 = \langle For\,(\Sigma^{\mathbf{2}})\,, \Vdash_{\mathbf{2}}\rangle$ *duas lógicas tais que* $\Sigma^{\mathbf{1}} \subset \Sigma^{\mathbf{2}}$*. Seja* $Ⓡ(p)$ *um conjunto —possivelmente vazio— de fórmulas de* $\boldsymbol{L}_2$ *que depende exatamente da variável proposicional* p *e que contém símbolos de* $\Sigma^{\mathbf{2}}$ *que não pertencem a* $\Sigma^{\mathbf{1}}$*. Suponha que o fragmento de* $\boldsymbol{L}_2$ *sobre* $\Sigma^{\mathbf{1}}$ *está estritamente contido em* $\boldsymbol{L}_1$*, isto é:* $\Gamma \vdash_{\mathbf{2}} \alpha$ *implica* $\Gamma \vdash_{\mathbf{1}} \alpha$*, para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\,(\Sigma^{\mathbf{1}})$*, mas a recíproca não* *é verdadeira. Dizemos que* recuperamos $\mathbf{L}_1$ em $\mathbf{L}_2$ pelo acréscimo de alternativas*, se podemos demonstrar o seguinte DAT c-externo: para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma^{\mathbf{1}})$*, existe* $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\} \subseteq sub(\Gamma \cup \{\alpha\})$ *tal que:*

$$\Gamma \Vdash_{\mathbf{1}} \alpha \ sse \ \Gamma \Vdash_{\mathbf{2}} \alpha \vee \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n, \qquad \text{(DAT c-externo)}$$

para todo $\beta_i \in \circledR(\delta_i)$*, com* $i = 1, \ldots, n$*.*

Definição 6.0.13 *Se nas Definições 6.0.11 ou 6.0.12 o conjunto de fórmulas* $\circledR(p)$ *é unitário, dizemos que* $\circledR$ *é um* conectivo unário de restauração local em conclusão *de* L_1 *em* L_2*.*

Assim, dizemos que $\circledR$ é um conectivo unário de restauração local em conclusão da lógica L_1 na lógica L_2 sse é possível demonstrar um DAT c-interno ou um DAT c-externo entre L_1 e L_2.

Observação 6.0.14 *Observe que no caso de* $\mathbf{L}_2$ *ter um conectivo de conjunção (primitivo ou não) que distribua com a disjunção, então denotando por* $\bigwedge\Theta$ *a fórmula* $\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n$*, para* $\Theta = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$*, o DAT c-interno adopta a seguinte forma. Para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma^{\mathbf{1}})$*, existe* $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\} \subseteq sub(\Gamma \cup \{\alpha\})$ *tal que:*

$$\Gamma \Vdash_{\mathbf{1}} \alpha \ sse \ \Gamma \Vdash_{\mathbf{2}} \alpha \vee \bigwedge \circledR(\gamma_1) \vee \ldots \vee \bigwedge \circledR(\gamma_n).$$

Notação 6.0.15 *Se nas Definições 6.0.11 ou 6.0.12 o conjunto de fórmulas* $\circledR(p)$ *é unitário, escreveremos* $\circledR p$*.*

Definição 6.0.16 *Seja* $\circledR \in \Sigma_1^{\mathbf{2}}$ *um conectivo unário de* $\boldsymbol{L}_2$*. Dizemos que* $\circledR$ *é um* conectivo unário de restauração local de $\mathbf{L}_1$ em $\mathbf{L}_2$ *sse* $\circledR$ *é um conectivo unário de restauração local em premissas de* $\mathbf{L}_1$ *em* $\mathbf{L}_2$ *ou* $\circledR$ *é um conectivo unário de restauração local em conclusão de* $\mathbf{L}_1$ *em* $\mathbf{L}_2$*.*

Definição 6.0.17 *(propagação da restauração) Seja* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq For(\Sigma)$*. Seja* $\circledR \in \Sigma_1$ *um conectivo unário de restauração local. Dizemos que* $\circledR$ é propagado *na assinatura* Σ *na lógica* $\mathbf{L} = \langle For(\Sigma), \Vdash_{\mathbf{L}} \rangle$ *sse vale:*

1. $\Vdash_{\mathbf{L}} ®\alpha$, *para* $\alpha \in \Sigma_0$,

2. $®\alpha_1, \ldots, ®\alpha_n \Vdash_{\mathbf{L}} ® (\clubsuit (\alpha_1 \ldots \alpha_n))$, *para* $\clubsuit \in \Sigma_n$ *e* $n \geq 1$.

Definição 6.0.18 *(retropropagação da restauração) Seja* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq For(\Sigma)$. *Dizemos que o conectivo unário de restauração* ® é retropropagado *na assinatura* Σ *na lógica* $\mathbf{L} = \langle For(\Sigma), \Vdash_{\mathbf{L}} \rangle$ *sse vale:*

1. $® (\clubsuit (\alpha_1 \ldots \alpha_n)) \Vdash_{\mathbf{L}} ®\alpha_1, \ldots, ®\alpha_n$, *para* $\clubsuit \in \Sigma_n$ *e* $n \geq 1$.

Exemplo 6.0.19 *Nos sistemas* $\boldsymbol{C}_1$, ***Cia*** *e* $\boldsymbol{V}_0$ *—da Seção 3.3— o conectivo de —restauração da— consistência é* propagado *na assinatura* $\Sigma^{\neg\wedge\vee\rightarrow}$, *mas* não é retropropagado. *A propagação é expressa em Ax. 13 de* $\boldsymbol{C}_1$ *e* ***Cia*** *e em Ax. 11 de* $\boldsymbol{V}_0$. *Em* ***mbC*** *e* ***bC*** *o conectivo de —restauração da— consistência não é propagado nem retropropagado.*

Nos seguintes capítulos procuraremos conectivos unários de restauração local em diferentes sistemas lógicos. Demonstraremos, portanto, diferentes teoremas DATs. Em particular, no capítulo dedicado às Lógicas do sem-sentido apresentaremos exemplos de DATs p-externos. No entanto, avaliaremos a possibilidade de demonstrar DATs c-externos. No capítulo dedicado às Lógicas n-valoradas apresentaremos tanto DATs do tipo p-interno, quanto do tipo c-interno. Finalmente, no capítulo dedicado à Lógica Intuicionista e à Lógica Minimal apresentaremos DATs do tipo p-interno. Determinaremos se os conectivos de restauração local, por nós propostos para cada um dos sistemas estudados, satisfazem ou não as propriedades de propagação e de retropropagação e mostraremos a maneira como a satisfação de tais propriedades determina a complexidade das fórmulas acrescentadas como premissas ou alternativas nos DATs.

Observação 6.0.20 *As relações de consequência semântica das lógicas que apresentaremos nos capítulos seguintes satisfazem as propriedades de monotonicidade, reflexividade e corte da Definição 2.0.33.*

Capítulo 7

Lógicas do Sem-sentido

Neste capítulo apresentaremos, fundamentalmente, três sistemas trivalorados nos quais o terceiro valor de verdade é interpretado como um valor sem-sentido ou sem significado. Nos sistemas trivalorados de Bočvar, Halldén e Åqvist, que trabalharemos neste capítulo, procuramos conectivos de sentido e demonstramos que esses conectivos são conectivos de restauração local em premissas. Para cada um desses sistemas, demonstramos Teoremas de Ajuste de Derivabilidade vinculando-os à Lógica Clássica. Finalmente, concluímos o capítulo avaliando a possibilidade de recuperar o Metateorema da Dedução e a possibilidade de definir conectivos de restauração em conclusão.

7.1 Introdução: (Sem)sentido

As lógicas multivaloradas foram formalmente introduzidas no início da década de 1920, a partir dos trabalhos independentes de J. Łukasiewicz [42] e E. Post [59]. No entanto, a aceitação de valores de verdade além dos valores *verdadeiro* e *falso* foi tema de discusão já na Grécia Antiga, no debate do problema dos futuros contingentes. Com efeito, a interpretação de eventos como sendo possíveis ou não determinados foi vinculada à negação do *Princípio da Bivalência*, permitindo a aceitação de um terceiro valor de verdade (cf., por exemplo, [37]).

Durante a segunda metade do século XIX, nos trabalhos de H. McColl e Ch. S. Peirce reaparece a ideia de rejeitar o Princípio de Bivalência, característico da lógica clássica (cf. [29]).

A obra de D. A. Bočvar [16] faz parte, segundo Gottwald [29], da época posterior ao início da fase polonesa das lógicas multivaloradas, isto é, da época iniciada com os trabalhos de Łukasiewicz. O sistema trivalorado de Bočvar, publicado no ano 1938, tem como objeto resolver as antinomias semânticas surgidas na Teoria de Conjuntos.[1] Daí, no cálculo trivalorado de Bočvar, o terceiro valor é entendido como *sem-sentido* (ou *sem significado*, ou *paradoxal*) e as proposições são separadas em duas categorias, as significativas e as sem-sentido, e mapeadas em dois níveis de linguagem formal. A linguagem proposicional da lógica de Bočvar tem dois níveis, um interno e outro externo, que correspondem à linguagem objeto e à metalinguagem, respectivamente. A passagem do nível interno para o nível externo é garantida por um operador metalinguístico A de *asserção externa*. Como veremos em detalhe adiante, com ajuda desse operador A, na lógica trivalorada de Bočvar é possível recuperar os conectivos clássicos —chamados *conectivos externos*. Diversos autores estudaram posteriormente outras *lógicas do sem-sentido* definidas a partir de matrizes trivaloradas. Merece particular destaque a extensa monografia *The Logic of Nonsense*, de S. Halldén, publicada em 1949 [30]. Surpreendentemente, nesse trabalho independente e original, Halldén redescobre a lógica de Bočvar. A lógica trivalorada de Halldén, tal como a lógica de Bočvar, possui um conectivo metalinguístico; neste caso, um conectivo $\#$ de *significatividade*. Assim, $\#\alpha$ tem a leitura intuitiva de que a sentença α *é significativa*, ou α *tem significado*. Esse estudo foi aprofundado e reinterpretado posteriormente por Lennart Åqvist [2] e por Krister Segerberg [63]. Åqvist introduziu, em 1962, uma variante da lógica de Halldén. A motivação dele foi o tratamento das orações normativas. A lógica proposta por Åqvist considera um operador primitivo T que permite definir, como conectivos

[1] Nesse mesmo período Gottwald coloca também a obra de S. Kleene. Em [36] Kleene investigou a aplicação de lógicas de três valores para o estudo de funções recursivas parciais, interpretando o terceiro valor de verdade como sendo "indefinido".

derivados, operadores de *significatividade* e de *não-significatividade*. Finalmente, a lógica de Segerberg, que não estudaremos em detalhe, abarca as propostas de Halldén e de Åqvist, acrescentando o operador T de Åqvist às matrizes da negação e da conjunção de Halldén. Assim, ainda que os quatro sistemas lógicos foram motivados por problemas filosóficos diferentes, todos eles interpretam o valor de verdade não clássico como sendo sem-sentido e todos eles têm um *operador linguístico de sentido* ou *de significatividade*.

Estas abordagens às lógicas do sem-sentido, que incorporam de alguma maneira operadores de *sentido*, nos permitem estabelecer paralelos com a abordagem da paraconsistência nas **LFIs**. Assim como nas **LFIs** é possível distinguir as sentenças *clássicas*, ou *consistentes*, daquelas *paraconsistentes* ou *inconsistentes* com ajuda do conectivo de consistência $\circ$, nestas lógicas do sem-sentido é possível distinguir entre as sentenças significativas e as assignificativas a partir de diferentes operadores de sentido. Neste capítulo estudaremos as lógicas trivaloradas de Bočvar, Halldén e Åqvist à luz do conceito de conectivo de restauração local por nós definido.

As três lógicas do sem-sentido que estudaremos neste capítulo são lógicas trivaloradas. Assim, os três sistemas rejeitam o Princípio de Bivalência. Como veremos a seguir, a não admissão do Princípio de Bivalência é associada, nos sistemas de Bočvar e Åqvist, à rejeição ao *Princípio do Terceiro Excluído*:

$$\forall \Gamma \forall \alpha \left(\Gamma \Vdash \alpha \vee \neg \alpha \right). \tag{PTE}$$

O sistema de Halldén rejeita o Princípio de Bivalência rejeitando a outra cara dele, (uma versão de) o *Princípio de Explosão*:

$$\forall \alpha \forall \beta \left(\alpha \wedge \neg \alpha \Vdash \beta \right). \tag{EFSQ}$$

Assim, nos sistemas trivalorados de Bočvar e Åqvist a negação $\neg$ é paracompleta; veremos que, em termos semânticos, poderia ser o caso de nem α nem $\neg\alpha$ serem as duas verdadeiras. No sistema de Halldén a negação é paraconsistente; veremos que, em termos semânticos, poderia ser o caso das sentenças α e $\neg\alpha$ terem as duas valores designados. Daqui, PE pode falhar no sistema de Halldén. Utilizaremos o conceito de conectivo de restauração local para tratar tanto a lógica paraconsistente de Halldén, quanto as duas lógicas trivaloradas paracompletas de Bočvar e Åqvist. Especificamente, mostraremos a maneira de recuperar o raciocínio clássico —consistente e completo— no ambiente destas três lógicas do sem-sentido. Assim, neste capítulo não apenas estudamos um novo exemplo de **LFI**, mas também esboçamos nossa proposta alternativa às **LFUs**, isto é, nossa perspectiva de estudo das lógicas paracompletas sob a perspectiva das **LFIs**. Com essa finalidade, procuraremos, em cada um destes sistemas, *conectivos de sentido* ou *significatividade* que permitam recuperar as inferências clássicas —significativas— perdidas neles. Demonstraremos, com ajuda desses conectivos, novos Teoremas de Ajuste de Derivabilidade do tipo p-DAT. Demonstraremos, portanto, que por meio do acréscimo de premissas com sentido é possível recuperar em cada uma das três lógicas do sem-sentido o poder inferencial da lógica clássica. Desse modo, mostraremos que esses conectivos são conectivos de restauração local em premissas de cada uma dessas três lógicas do sem-sentido.

7.2 A lógica do sem-sentido de Bočvar

Apresentação

Dmitri A. Bočvar propôs, em [16], dois sistemas proposicionais trivalorados a partir, fundamentalmente, da distinção entre dois modos de asseverar e negar: interna e externamente. Segundo Bočvar, as declarações (*statements*) podem ser assignificativas (*meaningless* ou *nonsensical*) ou significativas (*meaningful*) e, apenas neste último caso, as declarações podem ser ou verdadeiras ou falsas. Assim, cada declaração recebe exatamente um dos três valores: assignificativo, verdadeiro ou falso. Para estabelecer a distinção entre os modos internos e externos de asseveração e negação, Bočvar sugere que seja considerado o caso de uma declaração α assignificativa. Nesse caso, a asserção *α é verdadeira* e a declaração *α é falsa* serão as duas significativas e falsas. Porém, a negação *não-α* será, tal como α, também assignificativa. Essa distinção entre modos internos e externos é estendida às diferentes operações lógicas, tais como a conjunção, disjunção e implicação, originando dois sistemas lógicos proposicionais, que Bočvar denomina *cálculo interno de declarações* ou *cálculo clássico* e *cálculo externo* ou *não-clássico*, e que nós denotaremos por $\mathbf{B}_3^I$ e $\mathbf{B}_3^E$, respectivamente.[2]

Esses dois sistemas proposicionais constituem a base de um cálculo de funções que Bočvar constrói com o objetivo de analisar e solucionar os paradoxos lógicos. Em particular, ele formaliza o conhecido paradoxo de Russell e o paradoxo de Weyl e demonstra formalmente que os dois paradoxos constituem declarações —externas— sem significado.[3]

A seguir, apresentaremos o sistema interno $\mathbf{B}_3^I$. Em seguida, mostraremos como é construído o sistema externo $\mathbf{B}_3^E$ a partir daquele.

Sistema interno

Definição 7.2.1 *O conjunto de fórmulas $For(\Sigma^{\mathbf{B}_3^I})$ do sistema $\boldsymbol{B}_3^I$ é definido como uma álgebra livremente gerada por prop sobre a assinatura $\Sigma^{\mathbf{B}_3^I}$, tal que:*

- $\Sigma_0^{\mathbf{B}_3^I} = \emptyset$,
- $\Sigma_1^{\mathbf{B}_3^I} = \{\neg\}$,

[2] Bočvar chama de cálculo clássico o cálculo interno, pois a lógica proposicional clássica não considera à asserção um conectivo veritativo-funcional. A lógica clássica apenas tem um modo —interno— de asserção.

[3] O paradoxo de Weyl, também conhecido como paradoxo de Grelling-Nelson, é originado na classificação dos adjetivos em duas classes excludentes: adjetivos autodescritivos e adjetivos não-autodescritivos (cf. [28]). Como exemplo de adjetivos autodescritivos, temos os termos "polissílabo", "legível", "escrito", "traduzível", que são polissílabo, legível, escrito e traduzível, respectivamente. Adjetivos não-autodescritivos são, por exemplo, "monossílabo", "amável", "oxítono", pois eles não são monossílabo, amável e oxítono, respectivamente. O paradoxo é originado na pergunta: é o adjetivo "não-descritivo" um adjetivo não-descritivo? Se "não-descritivo" for não-descritivo, então ele seria um adjetivo descritivo. Porém, se "não-descritivo" for descritivo, então ele seria não-descritivo. Desse modo, o termo "não-descritivo" é descritivo se, e somente se, ele é não-descritivo.

- $\Sigma_2^{\mathbf{B}_3^I} = \{\wedge\}$,

- $\Sigma_n^{\mathbf{B}_3^I} = \emptyset$, para cada $n > 2$.

Notação 7.2.2 *Denotaremos a assinatura* $\Sigma^{\mathbf{B}^I}$ *também como* $\Sigma^{\neg\wedge}$.

Definição 7.2.3 $V = \left\{1, \frac{1}{2}, 0\right\}$ *é o conjunto de valores de verdade de* $\boldsymbol{B}_3^I$*, e* $D = \{1\}$ *é o subconjunto de valores designados.*

O significado dos operadores $\neg$ e $\wedge$ é dado pelas seguintes tabelas de verdade:

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

Julgando que uma declaração com componentes assignificativos é, ela própria, assignificativa, Bočvar propôs tabelas de verdade para $\mathbf{B}_3^I$ pelas quais toda fórmula complexa tem valor assignificativo $\frac{1}{2}$ se, e somente se, alguma das suas componentes tem valor $\frac{1}{2}$. Em palavras do próprio Bočvar:[4]

> É obvio que se α é uma declaração assignificativa, então *não-*α é também assignificativa; é também claro que cada combinação de uma declaração assignificativa α com quaisquer declarações β por meio das operações ___ *e* ___, ___ *ou* ___, e *se* ___, *então* ___ produzirá apenas uma nova declaração assignificativa [16, p. 90].

[4] A tradução do inglês para o português é nossa. *It is obvious, that if A is a meaningless statement, then not-A is also meaningless; it is also clear that each combination of a meaningless statement A with any statement B by means of the operations "— and —", "— or —", and "if —, then —" will only result in a new meaningless statement.*

Definição 7.2.4 *O significado dos conectivos internos $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ é dado pelas seguintes definições:*

1. $\alpha \vee \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

2. $\alpha \rightarrow \beta =_{def} \neg\alpha \vee \beta$

3. $\alpha \leftrightarrow \beta =_{def} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

Assim definidos, as tabelas para os conectivos internos $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são as seguintes:

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\leftrightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

Proposição 7.2.5 *(Infecciosidade) Seja $v_{\mathbf{B}}$ uma valoração de $\mathbf{B}_3^I$ e $\alpha \in For\,(\Sigma^{\neg\wedge})$. Se $v_{\mathbf{B}}\,(p) = \frac{1}{2}$, para alguma $p \in var\,(\alpha)$, então $v_{\mathbf{B}}\,(\alpha) = \frac{1}{2}$.*

Demonstração. Por indução na estrutura de α.

Seja $\alpha = p$. Se $v_{\mathbf{B}}\,(p) = \frac{1}{2}$, então $v_{\mathbf{B}}\,(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Seja $\alpha = \neg\beta$. Se $v_{\mathbf{B}}\,(p) = \frac{1}{2}$, para alguma $p \in var\,(\alpha)$, então $v_{\mathbf{B}}\,(p) = \frac{1}{2}$, para alguma $p \in var\,(\neg\beta)$ e, portanto, $v_{\mathbf{B}}\,(p) = \frac{1}{2}$, para alguma $p \in var\,(\beta)$. Por hipótese de indução, então $v_{\mathbf{B}}\,(\beta) = \frac{1}{2}$. Portanto, pela tabela de $\neg$ de $\mathbf{B}_3^I$, $v_{\mathbf{B}}\,(\neg\beta) = v_{\mathbf{B}}\,(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Seja $\alpha = \beta \wedge \gamma$. Se $v_{\mathbf{B}}\,(p) = \frac{1}{2}$, para alguma $p \in var\,(\alpha)$, então $v_{\mathbf{B}}\,(p) = \frac{1}{2}$, para alguma $p \in var\,(\beta \wedge \gamma)$. Portanto, $v_{\mathbf{B}}\,(p) = \frac{1}{2}$, para alguma $p \in var\,(\beta)$ ou $v_{\mathbf{B}}\,(p) = \frac{1}{2}$, para alguma $p \in var\,(\gamma)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $v_{\mathbf{B}}\,(p) = \frac{1}{2}$, para alguma $p \in var\,(\gamma)$. Por hipótese de indução, $v_{\mathbf{B}}\,(\gamma) = \frac{1}{2}$. Pela tabela de $\wedge$, $v_{\mathbf{B}}\,(\beta \wedge \gamma) = v_{\mathbf{B}}\,(\alpha) = \frac{1}{2}$. ■

O terceiro valor $\frac{1}{2}$ é, por assim dizer, infeccioso. Contudo, as tabelas de verdade de $\neg$ e $\wedge$ de $\mathbf{B}_3^I$ concordam com as tabelas clássicas bivaloradas no caso de considerarmos apenas os valores clássicos. Assim, se para toda valoração de Bočvar $v_{\mathbf{B}}$, $v_{\mathbf{B}}\,(\alpha) = 1$, então α é tautologia clássica e, se para toda valoração de Bočvar $v_{\mathbf{B}}$, $v_{\mathbf{B}}\,(\alpha) = 0$, então

α é uma contradição clássica. Porém, a afirmação inversa não é correta: se para toda valoração clássica $v_{\mathbf{C}}, v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$, não é em geral certo que $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = 1$, para toda valoração de Bočvar $v_{\mathbf{B}}$, e se $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 0$, para toda valoração clássica $v_{\mathbf{C}}$, não é em geral certo que $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = 0$ para toda valoração de Bočvar $v_{\mathbf{B}}$. De fato, como o valor não designado $\frac{1}{2}$ é infeccioso, então o sistema trivalorado interno de Bočvar não tem fórmulas tautológicas

Proposição 7.2.6 *(cf. [16, p. 94s]). Nenhuma fórmula interna é válida no cálculo de declarações* $\boldsymbol{B}_3^I$.

Em particular, PTE não é válido em $\mathbf{B}_3^I$.

Proposição 7.2.7 *Seja* $\models_{\mathbf{B}^I}$ *a relação de consequência semântica de* $\boldsymbol{B}_3^I$. *Para toda* $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\wedge})$,

$$\not\models_{\mathbf{B}^I} \alpha \vee \neg\alpha.$$

Demonstração. Considere uma valoração $v_{\mathbf{B}}$ de Bočvar tal que $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = \frac{1}{2}$. ■

Por conseguinte, $\mathbf{B}_3^I$ é um sistema *paracompleto*.

Além de todas as tautologias clássicas serem inválidas em $\mathbf{B}_3^I$, outra perda importante no sistema interno é o *metateorema da dedução*.

Proposição 7.2.8 *(MTD) Seja* $\models_{\mathbf{B}^I}$ *a relação de consequência semântica de* $\boldsymbol{B}_3^I$. *Não é em geral válido que*

$$se\ \Gamma, \alpha \models_{\mathbf{B}^I} \beta,\ então\ \Gamma \models_{\mathbf{B}^I} \alpha \to \beta.$$

Demonstração. Considere, em particular, o caso em que $\Gamma = \emptyset$. Suponha $\alpha \models_{\mathbf{B}^I} \beta$ e considere, em particular, o caso em que $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = \frac{1}{2}$. Logo, $v_{\mathbf{B}}(\alpha \to \beta) = \frac{1}{2}$, para todo β. Daqui, $\not\models_{\mathbf{B}_3^I} \alpha \to \beta$. ■

Como demonstraremos a seguir, no Lema 7.2.17, além das tautologias clássicas serem todas inválidas em $\mathbf{B}_3^I$, certas inferências do cálculo proposicional clássico resultam também inválidas neste sistema trivalorado.

Exemplo 7.2.9 *As seguintes inferências clássicas são inválidas em* $\boldsymbol{B}_3^I$*:*

- $p \Vdash p \vee q$,
- $p \Vdash q \rightarrow p$,
- $p \Vdash (q \rightarrow q) \rightarrow p$,
- $p \rightarrow q \Vdash (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$.

Contudo, como mostraremos a seguir, Bočvar demonstra que o sistema interno $\mathbf{B}_3^I$ contém uma parte idêntica, módulo notação, ao cálculo proposicional clássico. Tal fragmento é obtido por um processo de transformação das fórmulas de $\mathbf{B}_3^I$ em fórmulas do sistema externo $\mathbf{B}_3^E$.

Sistema externo

O sistema externo $\mathbf{B}_3^E$ é, tal como $\mathbf{B}_3^I$, um sistema trivalorado, cujo terceiro valor é interpretado como assignificativo. Ele é resultado da ampliação do sistema interno pelo acréscimo de um conectivo de *asserção externa* A e de um conectivo de *negação externa* $\sim$. Por meio deles são definidos novos conectivos externos em $\mathbf{B}_3^E$.

Definição 7.2.10 *O conjunto de fórmulas* $For(\Sigma^{\mathbf{B}_3^E})$ *do sistema* $\boldsymbol{B}_3^E$ *é definido como uma álgebra livremente gerada por prop sobre a assinatura* $\Sigma^{\mathbf{B}_3^E}$*, tal que:*

- $\Sigma_i^{\mathbf{B}_3^E} = \Sigma_i^{\mathbf{B}_3^I}$, para $i = 0$ ou $i \geq 2$,
- $\Sigma_1^{\mathbf{B}_3^E} = \Sigma_1^{\mathbf{B}_3^I} \cup \{A, \sim\}$.

A diferença entre $\mathbf{B}_3^I$ e $\mathbf{B}_3^E$ reside, apenas, no conjunto de conectivos, dado que o conjunto de valores de verdade e o conjunto de valores designados permanece o mesmo.

O significado dos novos conectivos externos são dados pelas tabelas:

	A
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	0

	$\sim$
1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

$A\alpha$ deve ser lida como α *é verdadeira* e $\sim \alpha$ deve ser lida como α *é falsa*.

Definição 7.2.11 *A partir do conectivo A e da negação externa $\sim$ os seguintes conectivos externos são definidos:*

1. $\alpha \curlywedge \beta =_{def} A\alpha \wedge A\beta$
2. $\alpha \curlyvee \beta =_{def} A\alpha \vee A\beta$
3. $\alpha \supset \beta =_{def} A\alpha \to A\beta$
4. $\alpha \leftrightarrows \beta =_{def} (\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$
5. $\alpha \equiv \beta =_{def} (\alpha \leftrightarrows \beta) \wedge (\beta \leftrightarrows \alpha)$
6. $\downarrow \alpha =_{def} \neg (A\alpha \vee \sim \alpha)$
7. $\frown \alpha =_{def} \neg A\alpha$

A fórmula $\downarrow \alpha$ expressa α *é assignificativa* e $\frown \alpha$ expressa α *não é verdadeira*.

As tabelas dos conectivos externos sempre têm apenas os valores clássicos 1 ou 0 como resultado. O conectivo A torna indistinguíveis os dois valores não designados 0 e $\frac{1}{2}$, atribuindo-lhes o valor não designado 0. Assim, mediante o acréscimo do conectivo A, se torna possível definir em $\mathbf{B}_3^E$ conectivos bivalorados que satisfaçam todas as inferências clássicas.

Definição 7.2.12 *Seja $t : For\,(\Sigma^{\neg\vee\wedge\to}) \to For\,(\Sigma^{\frown\curlyvee\curlywedge\supset})$ uma função que transforma as fórmulas da linguagem de $\boldsymbol{B}_3^I$ na linguagem definida de $\boldsymbol{B}_3^E$ da seguinte maneira:*

1. $t(\alpha) = \alpha$, *se* $\alpha \in prop$,

2. $t(\neg\alpha) = \frown t(\alpha)$,

3. $t(\alpha \vee \beta) = t(\alpha) \curlyvee t(\beta)$,

4. $t(\alpha \wedge \beta) = t(\alpha) \curlywedge t(\beta)$,

5. $t(\alpha \rightarrow \beta) = t(\alpha) \supset t(\beta)$.

A partir desses conectivos é possível recuperar em $\mathbf{B}_3^E$ as inferências válidas e as tautologias de **LC**. Com efeito, as tautologias clássicas, inválidas em $\mathbf{B}_3^I$, resultam válidas em $\mathbf{B}_3^E$, quando transformadas pela função t.

Exemplo 7.2.13 *O seguinte vale em* $\boldsymbol{B}_3^E$ *(cf. [16, p. 96]):*

1. $\nvDash_{\mathbf{B}_3^E} p \rightarrow (p \vee q)$. Porém, $\vDash_{\mathbf{B}_3^E} p \supset (p \curlyvee q)$,

2. $p \nvDash_{\mathbf{B}_3^E} (q \rightarrow p)$. Porém, $p \vDash_{\mathbf{B}_3^E} (q \supset p)$,

3. $\nvDash_{\mathbf{B}_3^E} p \vee \neg p$. Porém, $\vDash_{\mathbf{B}_3^E} p \curlyvee \frown p$.

Conectivo de restauração e DAT para $\mathbf{B}_3^E$

Nossa proposta é diferente da de Bočvar: não pretendemos transformar as fórmulas de $\mathbf{B}_3^I$ em fórmulas de **LC**, mas propomos recuperar o raciocínio clássico dentro de $\mathbf{B}_3^E$ a partir de um conectivo de restauração local. Propomos expressar a efetiva recuperação desse raciocínio por meio de um Teorema de Ajuste de Derivabilidade análogo aos das **LFIs**. Assim, procuraremos restaurar as inferências clássicas no ambiente do sem-sentido acrescentando premissas de restauração.

Visando obter um DAT entre **LC** em $\mathbf{B}_3^E$ definimos, em primeiro lugar, um conectivo de sentido ou de significatividade Ⓢ em $\mathbf{B}_3^E$ da seguinte maneira:

$$Ⓢ\alpha =_{def} A\alpha \vee \sim \alpha.$$

Logo, a tabela para o novo conectivo definido Ⓢ é:

	Ⓢ
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	1

Daí, Ⓢα pode-se interpretar como α *tem sentido* ou α *é significativa*. A nossa proposta de recuperação das inferências clássicas perdidas em $\mathbf{B}_3^E$ consistirá em acrescentar premissas restauradoras de sentido em um ambiente de raciocínio com premissas possivelmente sem sentido.

É interessante destacar que o nosso conectivo de restauração Ⓢ é propagado na assinatura $\Sigma^{\neg\wedge\vee\to Ⓢ}$ e retropropagado na assinatura $\Sigma^{\neg\vee\wedge\to}$.

Proposição 7.2.14 *((Retro)Propagação) Em $\boldsymbol{B}_3^E$ temos o seguinte:*

1. Ⓢ$\alpha \models_{\mathbf{B}_3^E}$ ⓈⓈα *mas* ⓈⓈ$\alpha \not\models_{\mathbf{B}_3^E}$ Ⓢα
2. Ⓢ$\alpha \models_{\mathbf{B}_3^E}$ Ⓢ$(\neg\alpha)$ *e* Ⓢ$(\neg\alpha) \models_{\mathbf{B}_3^E}$ Ⓢα
3. Ⓢα, Ⓢ$\beta \models_{\mathbf{B}_3^E}$ Ⓢ$(\alpha \wedge \beta)$ *e* Ⓢ$(\alpha \wedge \beta) \models_{\mathbf{B}_3^E}$ Ⓢ$\alpha \wedge$ Ⓢβ
4. Ⓢα, Ⓢ$\beta \models_{\mathbf{B}_3^E}$ Ⓢ$(\alpha \vee \beta)$ *e* Ⓢ$(\alpha \vee \beta) \models_{\mathbf{B}_3^E}$ Ⓢ$\alpha \wedge$ Ⓢβ
5. Ⓢα, Ⓢ$\beta \models_{\mathbf{B}_3^E}$ Ⓢ$(\alpha \to \beta)$ *e* Ⓢ$(\alpha \to \beta) \models_{\mathbf{B}_3^E}$ Ⓢ$\alpha \wedge$ Ⓢβ

Demonstração. Demonstraremos apenas os itens 1 e 2.

Para 1. Como $v_{\mathbf{B}}$ (Ⓢ$\alpha) = 1$, se $v_{\mathbf{B}}(\alpha) \in \{1, 0\}$ e $v_{\mathbf{B}}$ (Ⓢ$\alpha) = 0$, se $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = \frac{1}{2}$, então $v_{\mathbf{B}}$ (ⓈⓈ$\alpha) = 1$ para toda valoração $v_{\mathbf{B}}$. Porém, $v_{\mathbf{B}}$ (Ⓢ$\alpha) = 0$, quando $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Para 2. Seja $v_{\mathbf{B}}$ uma valoração de Bočvar. Logo, $v_{\mathbf{B}}$ (Ⓢ$\alpha) = 1$ sse $v_{\mathbf{B}}(\alpha) \in \{1, 0\}$ sse $v_{\mathbf{B}}(\neg\alpha) \in \{1, 0\}$ sse $v_{\mathbf{B}}$ (Ⓢ$(\neg\alpha)) = 1$. ■

A seguir, demonstraremos que Ⓢ é um conectivo de restauração local de **LC** em $\mathbf{B}_3^E$, obtendo um DAT apropriado. Como é simples de observar, as assinaturas dos sistemas **LC** e $\mathbf{B}_3^E$ são diferentes. O conectivo Ⓢ de sentido ou significatividade de $\mathbf{B}_3^E$ não pertence à assinatura de **LC** e, como notamos, o sistema $\mathbf{B}_3^E$ é um fragmento dedutivo próprio de **LC**, se restringirmos a assinatura de $\mathbf{B}_3^E$ à assinatura de **LC**. Assim, proporemos um DAT externo para recuperar as inferências de **LC** em $\mathbf{B}_3^E$.

Lema 7.2.15 *Seja $v_{\mathbf{B}}$ uma valoração de $\boldsymbol{B}_3^E$. Para qualquer $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\wedge})$, $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = \frac{1}{2}$ sse existe alguma variável $p_i \in var(\alpha)$, tal que $v_{\mathbf{B}}(p_i) = \frac{1}{2}$.*

Demonstração. Por indução na estrutura de $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\wedge})$.

$\Longrightarrow$ Caso base, $\alpha = p_i$. Seja $v_{\mathbf{B}}$ uma valoração de Bočvar tal que $v_{\mathbf{B}}(p_i) = \frac{1}{2}$. Logo, $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = v_{\mathbf{B}}(p_i) = \frac{1}{2}$.

Seja $\alpha = \neg\beta$. Se $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = v_{\mathbf{B}}(\neg\beta) = \frac{1}{2}$, então pela tabela $\mathbf{B}_3^E$ de $\neg$, $v_{\mathbf{B}}(\beta) = \frac{1}{2}$. Logo, por hipótese de indução, existe alguma variável $p_i \in var(\beta)$ tal que $v_{\mathbf{B}}(p_i) = \frac{1}{2}$. Logo, existe alguma variável $p_i \in var(\neg\beta) = var(\alpha)$ tal que $v_{\mathbf{B}}(p_i) = \frac{1}{2}$.

Seja $\alpha = \beta \wedge \gamma$. Se $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = v_{\mathbf{B}}(\beta \wedge \gamma) = \frac{1}{2}$, então pela tabela $\mathbf{B}_3^E$ de $\wedge$, $v_{\mathbf{B}}(\beta) = \frac{1}{2}$ ou $v_{\mathbf{B}}(\gamma) = \frac{1}{2}$. Sem perda de generalidade, considere-se o caso em que $v_{\mathbf{B}}(\beta) = \frac{1}{2}$. Então, por hipótese de indução, temos que existe alguma variável $p_i \in var(\beta)$ tal que $v_{\mathbf{B}}(p_i) = \frac{1}{2}$. Logo, existe alguma variável $p_i \in var(\beta \wedge \gamma) = var(\alpha)$ tal que $v_{\mathbf{B}}(p_i) = \frac{1}{2}$.

$\Longleftarrow$ Similar à demonstração da Proposição 7.2.5. ■

Lema 7.2.16 *Seja $\Delta \neq \emptyset$ um conjunto de variáveis proposicionais. Seja $v_{\mathbf{B}}$ uma valoração de $\boldsymbol{B}_3^E$ tal que $v_{\mathbf{B}}(p) \in \{1, 0\}$, para toda variável $p \in \Delta$. Seja $v_{\mathbf{C}}$ uma valoração clássica tal que $v_{\mathbf{C}}(p) = v_{\mathbf{B}}(p)$, para toda variável $p \in \Delta$. Então $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = v_{\mathbf{C}}(\alpha)$, para toda $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\wedge})$ tal que $var(\alpha) \subseteq \Delta$.*

Demonstração. Por indução na estrutura de $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\wedge})$.

Observe que, pelo Lema 7.2.15, $v_{\mathbf{B}}(\alpha) \in \{1, 0\}$, se $v_{\mathbf{B}}(p) \in \{1, 0\}$, para toda variável $p \in var(\alpha)$.

Caso base: $\alpha = p_i$. $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = v_{\mathbf{B}}(p_i) = v_{\mathbf{C}}(p_i) = v_{\mathbf{C}}(\alpha)$, por hipótese.

Seja $\alpha = \neg\beta$. Então, $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = v_{\mathbf{B}}(\neg\beta) \in \{1, 0\}$. Se $v_{\mathbf{B}}(\neg\beta) = 1$, então $v_{\mathbf{B}}(\beta) = 0$ e se $v_{\mathbf{B}}(\neg\beta) = 0$, então $v_{\mathbf{B}}(\beta) = 1$. Por hipótese de indução, se $v_{\mathbf{B}}(\beta) = 0$, então $v_{\mathbf{C}}(\beta) = 0$

e se $v_{\mathbf{B}}(\beta) = 1$,então $v_{\mathbf{C}}(\beta) = 1$. Logo, $v_{\mathbf{C}}(\neg\beta) = 1$ se $v_{\mathbf{B}}(\neg\beta) = 1$ e $v_{\mathbf{C}}(\neg\beta) = 0$ se $v_{\mathbf{B}}(\neg\beta) = 0$.

Seja $\alpha = \beta \wedge \gamma$. Então, $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = v_{\mathbf{B}}(\beta \wedge \gamma) \in \{1, 0\}$. Se $v_{\mathbf{B}}(\beta \wedge \gamma) = 1$, então $v_{\mathbf{B}}(\beta) = 1$ e $v_{\mathbf{B}}(\gamma) = 1$. Por hipótese de indução, temos que $v_{\mathbf{C}}(\beta) = v_{\mathbf{C}}(\gamma) = 1$, e portanto, $v_{\mathbf{C}}(\beta \wedge \gamma) = 1$. Se $v_{\mathbf{B}}(\beta \wedge \gamma) = 0$, então $v_{\mathbf{B}}(\beta) = 0$ ou $v_{\mathbf{B}}(\gamma) = 0$. Sem perda de generalidade, considere o caso em que $v_{\mathbf{B}}(\beta) = 0$. Por hipótese de indução, temos então que $v_{\mathbf{C}}(\beta) = 0$. Logo, $v_{\mathbf{C}}(\beta \wedge \gamma) = 0$. ■

Lema 7.2.17 *(cf. [16, p. 95]) Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma^{\neg\wedge})$ *tal que* $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$. *Se* $\Gamma \not\models_{\mathbf{B}_3^E} \alpha$, *então* $var(\alpha) \subsetneq var(\Gamma)$.

Demonstração. Assuma $\Gamma \not\models_{\mathbf{B}_3^E} \alpha$. Suponha, por absurdo, que $var(\alpha) \subseteq var(\Gamma)$. Então, para toda variável p_i, se $p_i \in var(\alpha)$, então $p_i \in var(\gamma)$ para alguma $\gamma \in \Gamma$.

Pela assunção, existe uma valoração $v_{\mathbf{B}}$, tal que $v_{\mathbf{B}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$ e $v_{\mathbf{B}}(\alpha) \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

Se $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = 0$, então considerando que $v_{\mathbf{B}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$, pelo Lema 7.2.15 temos que $v_{\mathbf{B}}(p_i) \in \{1, 0\}$, para toda $p_i \in var(\Gamma)$. Então pelo Lema 7.2.16 teríamos que $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 0$, para uma $v_{\mathbf{C}}$ tal que $v_{\mathbf{C}}(p_i) = v_{\mathbf{B}}(p_i)$, isto é, $v_{\mathbf{B}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Porém, como $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$, então apenas se deve analisar o caso em que $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Mas se $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = \frac{1}{2}$, pelo Lema 7.2.15, então existe uma variável $p_i \in var(\alpha)$ tal que $v_{\mathbf{B}}(p_i) = \frac{1}{2}$. Pela hipótese do absurdo —$var(\alpha) \subseteq var(\Gamma)$— então existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $v_{\mathbf{B}}(\gamma) = \frac{1}{2}$. Daqui, $v_{\mathbf{B}}(\Gamma) \subsetneq \{1\}$ para tal valoração $v_{\mathbf{B}}$. Absurdo. Então, $var(\alpha) \subsetneq var(\Gamma)$. ■

Observação 7.2.18 *A recíproca não é válida em* $\boldsymbol{B}_3^E$, *isto é, não é o caso que se* $var(\alpha) \subsetneq var(\Gamma)$, *então* $\Gamma \not\models_{\mathbf{B}_3^E} \alpha$. *Como exemplo, note que a inferência clássica* $p, \neg p \Vdash q$ *é válida em* $\boldsymbol{B}_3^E$.

Proposição 7.2.19 *(cf. [66], [48]) Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma^{\neg\wedge})$ *um conjunto de fórmulas tal que* $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$. *Se* Γ *é classicamente insatisfatível ou* $var(\alpha) \subseteq var(\Gamma)$, *então* $\Gamma \models_{\mathbf{B}_3^E} \alpha$.

Demonstração. Por contraposição do Lema 7.2.17, temos que se $var(\alpha) \subseteq var(\Gamma)$, então $\Gamma \models_{\mathbf{B}_3^E} \alpha$, pois $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$.

Suponha que Γ é insatisfatível em **LC**. Então, não existe valoração clássica $v_{\mathbf{C}}$ tal que $v_{\mathbf{C}}(\gamma_i) = 1$, para toda $\gamma_i \in \Gamma$, isto é, para cada $\gamma_i \in \Gamma$ existe uma valoração clássica $v_{\mathbf{C}}$ tal que $v_{\mathbf{C}}(\gamma_i) = 0$.

Suponha, por absurdo, que $\Gamma \not\models_{\mathbf{B}_3^E} \alpha$. Logo, existe uma valoração de Bočvar $v_{\mathbf{B}}$ tal que $v_{\mathbf{B}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$ e $v_{\mathbf{B}}(\alpha) \neq 1$. Considere uma valoração clássica $v_{\mathbf{C}}$ tal que $v_{\mathbf{C}}(p_i) = v_{\mathbf{B}}(p_i)$, para toda variável p_i tal que $p_i \in var(\Gamma)$. Então, pelo Lema 7.2.16 temos que $v_{\mathbf{C}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$, o que contradiz a hipótese de que Γ é clássicamente insatisfatível. ■

Teorema 7.2.20 *Seja $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma^{\neg\wedge})$. Seja $var(\alpha) - var(\Gamma) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ o conjunto das fórmulas atômicas que ocorrem em α mas que não ocorrem em Γ.*

$$\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha \text{ sse } Ⓢp_1, \ldots, Ⓢp_n, \Gamma \models_{\mathbf{B}_3^E} \alpha. \qquad (\text{DAT - } \mathbf{B}_3^E)$$

Em particular, se $\Gamma = \emptyset$, então $var(\alpha) - var(\Gamma) = var(\alpha)$. Logo,

$$\models_{\mathbf{LC}} \alpha \text{ sse } Ⓢp_1, \ldots, Ⓢp_n \models_{\mathbf{B}_3^E} \alpha.$$

Demonstração. $\Longrightarrow$ Assuma $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$ e considere uma valoração $v_{\mathbf{B}}$ de Bočvar tal que $v_{\mathbf{B}}(Ⓢp_1) = \ldots = v_{\mathbf{B}}(Ⓢp_n) = v_{\mathbf{B}}(\gamma_i) = 1$, para toda $\gamma_i \in \Gamma$. Pelo Lema 7.2.15 temos que se $v_{\mathbf{B}}(\gamma_i) = 1$, para toda $\gamma_i \in \Gamma$, então, para toda variável $p_j \in var(\Gamma)$, $v_{\mathbf{B}}(p_j) \in \{1, 0\}$. Como $v_{\mathbf{B}}(Ⓢp_1), \ldots, v_{\mathbf{B}}(Ⓢp_n) = 1$, então pela tabela de Ⓢ, temos que $v_{\mathbf{B}}(p_1), \ldots, v_{\mathbf{B}}(p_n) \in \{1, 0\}$. Como assumimos $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$, se $var(\alpha) \subseteq var(\Gamma)$ então, pela Proposição 7.2.19, temos que $\Gamma \models_{\mathbf{B}_3^E} \alpha$. Pela propriedade de monotonicidade, obtemos $Ⓢp_1, \ldots, Ⓢp_n, \Gamma \models_{\mathbf{B}_3^E} \alpha$. Se $var(\alpha) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\} \cup var(\Gamma)$, então, pelo Lema 7.2.15, temos que $v_{\mathbf{B}}(\alpha) \in \{1, 0\}$. Considere uma valoração clássica $v_{\mathbf{C}}$ tal que $v_{\mathbf{C}}(p_i) = v_{\mathbf{B}}(p_i)$, para toda variável $p_i \in \{p_1, \ldots, p_n\} \cup var(\Gamma)$. Como para toda variável $p_j \in var(\Gamma)$, $v_{\mathbf{B}}(p_j) \in \{1, 0\}$ e $v_{\mathbf{B}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$, então, pelo Lema 7.2.16 temos que $v_{\mathbf{B}}(\Gamma) = v_{\mathbf{C}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Daqui, pela assunção inicial, $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$.

Se $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = 0$, então pelo Lema 7.2.16, temos que $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 0$. Absurdo. Portanto, $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = 1$. Logo, $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = 1$, se $v_{\mathbf{B}}(Ⓢp_1) = 1, \ldots, v_{\mathbf{B}}(Ⓢp_n) = 1$ e $v_{\mathbf{B}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Então $Ⓢp_1, \ldots, Ⓢp_n, \Gamma \models_{\mathbf{B}_3^E} \alpha$.

$\Longleftarrow$ Assuma $Ⓢp_1, \ldots, Ⓢp_n, \Gamma \models_{\mathbf{B}_3^E} \alpha$. Suponha que existe uma valoração $v_{\mathbf{C}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Estenda-se essa valoração clássica tal que $v_{\mathbf{C}}(p_1), \ldots, v_{\mathbf{C}}(p_n) \in \{1, 0\}$. E considere uma valoração de Bočvar tal que $v_{\mathbf{B}}(p_i) = v_{\mathbf{C}}(p_i)$, para $i = 1, \ldots, n$ e tal que $v_{\mathbf{B}}(p_j) = v_{\mathbf{C}}(p_j)$ para $p_j \in var(\Gamma)$. Assim, temos uma valoração $v_{\mathbf{B}}$ tal que $v_{\mathbf{B}}(Ⓢp_1) = 1, \ldots, v_{\mathbf{B}}(Ⓢp_n) = 1$ e, pelo Lema 7.2.16, temos $v_{\mathbf{B}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Então, pelo assumido inicialmente, $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = 1$. Como $var(\alpha) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\} \cup var(\Gamma)$ e consideramos uma valoração de Bočvar $v_{\mathbf{B}}$ tal que $v_{\mathbf{B}}(\{p_1, \ldots, p_n\} \cup var(\Gamma)) \subseteq \{1, 0\}$, então pelo Lema 7.2.16, $v_{\mathbf{B}}(\alpha) = v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$. Assim, se $v_{\mathbf{C}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$, então $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$. Portanto, $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$. ■

Exemplo 7.2.21 *Em $\boldsymbol{B}_3^E$ valem as seguintes inferências (restauradas)*

1. $Ⓢp \Vdash p \vee \neg p$,
2. $Ⓢq, p \Vdash p \vee q$,
3. $Ⓢr, p \to q \Vdash (q \to r) \to (p \to r)$.

7.3 A lógica do sem-sentido de Halldén

Apresentação

A livro de Sören Halldén *A Logic of Nonsense* visa analisar certos problemas vinculados ao conceito de significatividade (*meaningfulness*). A significatividade é, na perspectiva de Halldén, a propriedade que uma proposição tem de ser verdadeira ou falsa. As proposições podem ser significativas ou assignificativas e, quando significativas, elas podem ser verdadeiras ou falsas.[5] *Esta proposição é falsa* é um exemplo de proposição

[5] Pelo contrário, na perspectiva de Bočvar, as proposições apenas podem ser significativas. Segundo Bočvar, as proposições formam uma subclasse das declarações. As declarações podem ser tanto significativas quanto assignificativas; as proposições são aquelas declarações que são significativas.

que não pode ser nem verdadeira nem falsa e que é, portanto, assignificativa.

Halldén propõe a construção de um sistema formal para tratar com proposições (as)significativas tomando como base o sistema axiomático da lógica proposicional clássica e certas intuições lógicas a respeito das proposições (as)significativas. O sistema proposto é, segundo o próprio Halldén, prematuro, pois poucas proposições relativas ao conceito de significatividade são intuitivamente evidentes e, portanto, o processo de construção do sistema formal é uma sucessiva reconstrução e requer uma contínua revisão dos princípios significativos estabelecidos. Contudo, o objetivo final de Halldén é a construção de um sistema formal que admita o raciocínio com proposições sem-sentido ou assignificativas.

O tratamento das condições de significatividade e a introdução do conceito de (as)significatividade no sistema formal permitem a convergência de temas filosóficos e lógicos no âmbito do sem-sentido: os paradoxos e o problema da vaguidade.

Tal como na lógica de Bočvar, a linguagem da lógica de Halldén contém um conectivo unário de significatividade e um conectivo de assignificatividade. Além da assignificatividade ser um valor de verdade das proposições, tal como a falsidade e a verdade, a (as)significatividade é um conectivo unário, tal como a negação. A introdução do conceito de significatividade na linguagem objeto permite afirmar que as proposições paradoxais são assignificativas. A lógica de Halldén, tal como a lógica de Bočvar, não bloqueia a derivação das proposições paradoxais; nesses sistemas formais, os paradoxos podem ser deduzidos como teoremas do sistema. Contudo, tanto no sistema de Halldén quanto no sistema de Bočvar, as proposições paradoxais são proposições assignificativas.

Halldén analisa as proposições vinculadas à vaguidade e às inferências conhecidas como *paradoxos de sorites* em termos do conceito de *assignificatividade* ou *sem-sentido*. Como exemplo de paradoxo de sorites, considere a seguinte inferência (cf. [7]):

Uma pessoa de um dia de idade não é um adulto (caso base).

Para todo n, se uma pessoa de n dias não é adulto, então uma pessoa de $n+1$ dias não é adulto.

Por conseguinte, uma pessoa de 21.915 dias (60 anos) de idade não é adulto.

Uma situação análoga se apresenta com a propriedade de ser careca e com várias outras propriedades. Considere uma linguagem na qual possa-se distinguir entre expressões para referir a individuos e expressões para falar de propriedades. Determinar se um certo indivíduo a tem a propriedade C de ser careca não é —intuitivamente— uma tarefa simples, pois o conjunto que é referência da propriedade C tem limites difusos. *Ser careca* e *ser adulto* são exemplos de predicados vagos, predicados que referem a conjuntos cujos limites não estão bem definidos. A vaguidade é usualmente definida em termos de casos limite: um predicado é vago se admite casos limite. Os objetos limites são objetos dos quais não é possível determinar de modo unívoco se uma propriedade pode ser predicada dela ou não, ou seja, se os objetos pertencem ou não aos conjuntos que são referência das propriedades. Como consequência da predicação de propriedades vagas a indivíduos, o valor de verdade de uma sentença pode resultar indeterminado. Para determinar o valor de verdade de uma proposição como Ca, que expressa *a é careca*, deveriamos poder determinar se o indivíduo que é referência do nome a pertence ou não a esse conjunto das entidades carecas.

Halldén não considera verdadeira uma proposição como *O homem com cem fios de cabelo é careca* nem a sua negação *O homem com cem fios de cabelo não é careca*; porém, tampouco as considera falsas. As duas proposições recebem um terceiro valor de verdade; as duas são assignificativas. Assim, além dos valores verdadeiro e falso, Halldén introduz a assignificatividade como um terceiro valor de verdade para atribuir às proposições que predicam conceitos vagos de objetos limite. Em [66] está indicado que a obra de Halldén é um dos primeiros trabalhos que analisam o problema filosófico da vaguidade em termos de lógicas multivaloradas.

Em geral, a indeterminação gerada pela vaguidade costuma ser modelada em termos de sobredeterminação ou de subdeterminação da verdade. Na perspectiva da sobredeterminação, se a é um caso limite de, por exemplo, brancura, os enunciados *a é branco* e *a não é branco* são ambos verdadeiros. Na perspectiva da sobredeterminação, uma sentença e a sua negação têm ambas o mesmo valor de verdade. A sobredeterminação origina excesso de valores de verdade (*gluts*); a subdeterminação origina vazio ou lacunas de valores (*gaps*). Como Halldén considera assignificativas certas sentenças e suas negações, então a sua obra é situada na perspectiva da sobredeterminação.

Pelo fato de aceitar que pares de proposições α e não-α tenham ambas as duas o valor de verdade sem-sentido e por considerar designado esse terceiro valor, podemos colocar a obra de Halldén na linha da lógica paraconsistente. Embora aceitando contradições "designadas", a lógica de Halldén não aceita a trivialidade, pois rejeita que todas as sentenças sejam verdadeiras. Como veremos logo, a lógica do sem-sentido de Halldén rejeita o Princípio de Explosão. Em [33] e em [7] a obra de Halldén é considerada uma das primeiras lógicas paraconsistente da vaguidade.[6] Como veremos a seguir, a lógica de Halldén é uma das primeiras **LFIs** propostas na literatura.

A obra de Halldén tem sido estudada, assim, desde no mínimo quatro perspectivas: como lógica multivalorada, como lógica do sem-sentido, como lógica da vaguidade e como lógica paraconsistente. Nós concentraremos nosso estudo dela nos aspectos trivalorado, paraconsistente e sem-sentido.

Sistema formal $\mathbf{H}_3$

Nesta seção apresentaremos a linguagem e as tabelas para os conectivos do sistema de lógica trivalorada de Halldén $\mathbf{H}_3$. Logo, vincularemos **LC** e $\mathbf{H}_3$ por meio de um DAT e mostraremos que o conectivo de significatividade é um conectivo de restauração local. Mostraremos, também, que $\mathbf{H}_3$ satisfaz as definições 3.1.6 e 3.1.7: mostraremos que o conectivo de significatividade é um conectivo de consistência e que a lógica trivalorada paraconsistente do sem-sentido de Halldén é uma **LFI**.

Definição 7.3.1 *O conjunto de fórmulas $For(\Sigma^{\mathbf{H}_3})$ do sistema $\mathbf{H}_3$ é definido como uma álgebra livremente gerada por prop sobre a assinatura $\Sigma^{\mathbf{H}_3}$, tal que:*

[6] Junto a obra de Halldén é situado o trabalho de Jaśkowski [34].

- $\Sigma_0^{\mathbf{H}_3} = \emptyset$,
- $\Sigma_1^{\mathbf{H}_3} = \{\neg, \#\}$,
- $\Sigma_2^{\mathbf{H}_3} = \{\wedge\}$,
- $\Sigma_n^{\mathbf{H}_3} = \emptyset$, para cada $n > 2$.

Notação 7.3.2 *Às vezes escreveremos $\Sigma^{\neg\wedge\#}$ no lugar de $\Sigma^{\mathbf{H}_3}$ e $\Sigma^{\neg\wedge}$ denotará o conjunto de fórmulas geradas sobre $\Sigma^{\neg\wedge\#} - \{\#\}$.*

Definição 7.3.3 *$V = \left\{1, \frac{1}{2}, 0\right\}$ é o conjunto de valores de verdade de $\boldsymbol{H}_3$, e $D = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ é o conjunto de valores designados.*

O significado dos operadores $\neg$, $\wedge$ e $\#$ é dado pelas seguintes tabelas de verdade:

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0

	$\#$
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	1

Como apontamos a partir do exemplo *O homem com cem fios de cabelo é careca*, Halldén propõe que a negação de uma proposição assignificativa é, ela mesma, assignificativa. Pelo contrário, a negação de uma proposição com sentido, seja verdadeira ou falsa, é uma proposição com sentido, falsa ou verdadeira, respectivamente. Como se observa nas tabelas de verdade de $\neg$ e $\wedge$ —idênticas às de Bočvar— uma proposição, composta com apenas esses conectivos, será verdadeira ou falsa no sistema trivalorado de Halldén somente se as suas componentes todas forem verdadeiras ou falsas. Na lógica de Halldén, uma proposicão complexa é significativa apenas no caso que as suas componentes forem todas significativas; se, pelo contrário, uma proposição tiver alguma componente com valor assignificativo, a proposição complexa formada a partir dela será também assignificativa. O valor $\frac{1}{2}$ é, tal como em $\mathbf{B}_3^E$, infeccioso na assinatura $\Sigma^{\neg\wedge}$. E, tal como em $\mathbf{B}_3^E$, no caso de considerarmos apenas os valores clássicos, as tabelas para esses conectivos de $\mathbf{H}_3$ coincidem com as correspondentes tabelas clássicas. Essa estratégia de construção das tabelas dos conectivos é modificada no caso do operador $\#$, pois $\#$ atribui um valor de verdade clássico ao valor de verdade não clássico, bloqueando desta maneira a atribuição do valor infeccioso não clássico. $\#\alpha$ é interpretada como α *tem sentido* ou α *é significativa.* O conectivo $\#$ é considerado um *conectivo linguístico de significatividade.*

Lema 7.3.4 *Seja* $v_{\mathbf{H}}$ *uma valoração de* $\boldsymbol{H}_3$*. Para qualquer* $\alpha \in For\left(\Sigma^{\neg\wedge}\right)$, $v_{\mathbf{H}}\left(\alpha\right) = \frac{1}{2}$ *sse existe alguma variável* $p_i \in var(\alpha)$*, tal que* $v_{\mathbf{H}}\left(p_i\right) = \frac{1}{2}$*.*

Demonstração. Similar à demonstração do Lema 7.2.15. ■

Halldén define —da maneira usual— os conectivos $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, de modo que as tabelas desses conectivos coincidem com as tabelas propostas por Bočvar para os conectivos de $\mathbf{B}_3^I$.[7]

Lema 7.3.5 *Seja* $v_{\mathbf{H}}$ *uma valoração de* $\boldsymbol{H}_3$ *tal que* $v_{\mathbf{H}}(p_1), \ldots, v_{\mathbf{H}}(p_n) \in \{1, 0\}$*. Seja* $v_{\mathbf{C}}$ *uma valoração clássica tal que* $v_{\mathbf{C}}(p_i) = v_{\mathbf{H}}(p_i)$ *para* $i = 1, \ldots, n$*. Então* $v_{\mathbf{H}}(\alpha) = v_{\mathbf{C}}(\alpha)$*, para toda* $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\wedge})$ *tal que* $var(\alpha) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}$*.*

Demonstração. Similar à demonstração do Lema 7.2.16. ■

Halldén define, também, um conectivo $\natural$ de assignificatividade:

1. $\natural\alpha =_{def} \neg\#\alpha$.

Como observamos na Introdução deste capítulo, o sistema proposto por Halldén tem surpreendentes semelhanças com o sistema trivalorado de Bočvar. Nos dois sistemas trivalorados o terceiro valor, $\frac{1}{2}$, é interpretado como sem-sentido e nos dois sistemas ele é um valor infeccioso. Além disso, as tabelas dos conectivos primitivos $\neg$ e $\wedge$ são idênticas em $\mathbf{H}_3$ e $\mathbf{B}_3^E$. Por outro lado, embora o sistema $\mathbf{B}_3^E$ não contenha um conectivo primitivo de significação, o conectivo $\#$ de Halldén coincide com o conectivo de restauração Ⓢ

[7] *Vide* definição 7.2.4.

por nós definido em $\mathbf{B}_3^E$; portanto, um conectivo de assignificatividade, com a mesma tabela que $\natural$, também pode ser definido em $\mathbf{B}_3^E$. Contudo, a afirmação recíproca não é verdadeira: o conectivo primitivo de asserção A de Bočvar não pode ser definido no sistema de Halldén.

Definição 7.3.6 *Sejam $v_{\mathbf{L}_1}$ e $v_{\mathbf{L}_2}$ valorações de $\boldsymbol{L}_1$ e de $\boldsymbol{L}_2$, respectivamente. Dizemos que um conectivo $\clubsuit \in \Sigma_1^{\mathbf{L}_2}$ é definível em $\boldsymbol{L}_1$ sse existe uma fórmula $\alpha(p) \in For\left(\Sigma_1^{\mathbf{L}_1}\right)$ que depende apenas da variável p e tal que para toda valoração $v_{\mathbf{L}_1}$, $v_{\mathbf{L}_1}(\alpha(p)) = v_{\mathbf{L}_2}(\clubsuit p)$.*

Lema 7.3.7 *Seja $\alpha(p) \in For\left(\Sigma^{\neg\wedge\#}\right)$ tal que para toda valoração $v_{\mathbf{H}}$ de Halldén, $v_{\mathbf{H}}(\alpha) \in \{1, 0\}$. Sejam $v_{\mathbf{H}}^1$ e $v_{\mathbf{H}}^2$ valorações de Halldén tais que $v_{\mathbf{H}}^1(p) = 1$ e $v_{\mathbf{H}}^2(p) = 0$. Então, $v_{\mathbf{H}}^1(\alpha) = v_{\mathbf{H}}^2(\alpha)$.*

Demonstração. Por indução na estrutura de α.

Observe que, dado que $v_{\mathbf{H}}(\alpha) \neq \frac{1}{2}$, para toda $v_{\mathbf{H}}$, então $\#$ deve ocorrer em α.

Seja $\alpha = \#p$. Então o resultado vale, pela tabela de $\#$.

Seja $\alpha = \#\beta$. Então, dado que $v_{\mathbf{H}}^i(\beta) \in \{1, 0\}$, para $i = 1, 2$, temos que $v_{\mathbf{H}}^1(\alpha) = v_{\mathbf{H}}^2(\alpha) = 1$, pela tabela de $\#$.

Seja $\alpha = \neg\beta$. Então $v_{\mathbf{H}}(\beta) \in \{1, 0\}$, para toda $v_{\mathbf{H}}$. Logo, pela hipótese de indução, $v_{\mathbf{H}}^1(\beta) = v_{\mathbf{H}}^2(\beta)$. Portanto, $v_{\mathbf{H}}^1(\alpha) = \neg v_{\mathbf{H}}^1(\beta) = \neg v_{\mathbf{H}}^2(\beta) = v_{\mathbf{H}}^2(\alpha)$.

Seja $\alpha = \beta \wedge \gamma$. Então $v_{\mathbf{H}}(\beta) \in \{1, 0\}$ e $v_{\mathbf{H}}(\gamma) \in \{1, 0\}$, para toda $v_{\mathbf{H}}$. Logo, por hipótese de indução, $v_{\mathbf{H}}^1(\beta) = v_{\mathbf{H}}^2(\beta)$ e $v_{\mathbf{H}}^1(\gamma) = v_{\mathbf{H}}^2(\gamma)$. Logo, $v_{\mathbf{H}}^1(\alpha) = v_{\mathbf{H}}^2(\alpha)$. ■

Teorema 7.3.8 *Considere $\Sigma^{\neg\wedge\#}$ como assinatura de $\boldsymbol{H}_3$ e considere $\Sigma^{\neg\wedge A}$ como assinatura de $\boldsymbol{B}_3^E$. Sejam $v_{\mathbf{B}}$ e $v_{\mathbf{H}}$ valorações de $\boldsymbol{B}_3^E$ e de $\boldsymbol{H}_3$, respectivamente. O conectivo $A \in \Sigma^{\mathbf{B}_3^E}$ não é definível em $\boldsymbol{H}_3$.*

Demonstração. Seja $\alpha(p) \in For\left(\Sigma^{\neg\wedge\#}\right)$ uma fórmula da linguagem de Halldén que depende apenas da variável p. Suponha que $\alpha(p)$ define a tabela do operador A da lógica de Bočvar:

	A
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	0

Logo, $v_{\mathbf{H}}(\alpha) \in \{1, 0\}$ para toda valoração $v_{\mathbf{H}}$ de Halldén. Mas então, $v^1_{\mathbf{H}}(\alpha) = v^2_{\mathbf{H}}(\alpha)$, se $v^1_{\mathbf{H}}(p) = 1$ e $v^2_{\mathbf{H}}(p) = 0$, pelo Lema 7.3.7. Isto contraria o fato de $\alpha(p)$ representar o operador A. Portanto, não existe fórmula $\alpha(p) \in For\left(\Sigma^{\mathbf{H}}\right)$ que represente o conectivo A da lógica de Bočvar. ■

Como os conectivos da lógica de Halldén podem ser definidos na lógica de Bočvar mas o conectivo A da lógica de Bočvar não pode ser definido por meio dos conectivos da lógica de Halldén, temos que o poder expressivo de $\mathbf{B}_3^E$ é estritamente maior do que o poder expressivo de $\mathbf{H}_3$.

Além de terem assinaturas diferentes, os dois sistemas se diferenciam fundamentalmente na escolha dos valores designados. Como consequência da designação dos valores 1 e $\frac{1}{2}$ na lógica de Halldén, os conjuntos de fórmulas tautológicas e de inferências válidas em $\mathbf{H}_3$ são diferentes aos conjuntos correspondentes de $\mathbf{B}_3^E$. De fato, já mostramos que $\mathbf{B}_3^E$ não contém tautologias. Como mostraremos a seguir, o conjunto das tautologias de $\mathbf{H}_3$, na linguagem de **LC**, coincide com o conjunto das tautologias clássicas. Porém, o conjunto das inferências válidas em **LC** é maior do que o conjunto correspondente em $\mathbf{H}_3$, na linguagem de **LC**. Em particular, em $\mathbf{H}_3$ o princípio clássico PE não é válido.

Proposição 7.3.9 *Para alguma $\alpha, \beta \in For(\Sigma^{\neg\wedge})$:*

$$\alpha, \neg\alpha \not\models_{\mathbf{H}} \beta.$$

Demonstração. Considere uma valoração $v_{\mathbf{H}}$ de Halldén tal que $v_{\mathbf{H}}(p) = \frac{1}{2}$ e $v_{\mathbf{H}}(q) = 0$. Como $v_{\mathbf{H}}(p) = \frac{1}{2}$, então $v_{\mathbf{H}}(\neg p) = \frac{1}{2}$. ■

Assim, PE falha em $\mathbf{H}_3$ e, por conseguinte, $\mathbf{H}_3$ é um sistema *paraconsistente* com relação à negação $\neg$.

Sendo o conjunto das inferências válidas em $\mathbf{H}_3$ menor que o conjunto das inferências clássicas e sendo que as duas lógicas coincidem com relação ao conjunto das tautologias (na linguagem clássica), temos que em $\mathbf{H}_3$ a regra de *modus ponens* não é em geral válida.

Proposição 7.3.10 *(modus ponens) Seja $\models_{\mathbf{H}}$ a relação de consequência semântica de $\boldsymbol{H}_3$. Seja $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq For(\Sigma^{\mathbf{H}_3})$. Em $\boldsymbol{H}_3$ não é válido, em geral, o seguinte:*

$$\text{se } \Gamma \models_{\mathbf{H}} \alpha \to \beta, \text{ então } \Gamma, \alpha \models_{\mathbf{H}} \beta.$$

Demonstração. Considere, em particular, o caso em que $\Gamma = \emptyset$, $v_{\mathbf{H}}(p) = \frac{1}{2}$ e $v_{\mathbf{H}}(q) = 0$. Assim, $((p \wedge q) \to q)$ é uma tautologia de $\mathbf{H}_3$. Mas $p \wedge q \not\models_{\mathbf{H}} q$. ■

Corolário 7.3.11 *(cf. [30, p. 45]) Sejam $\alpha, \beta \in For(\Sigma^{\mathbf{H}_3})$. Em $\boldsymbol{H}_3$ não é em geral válido que:*

$$\textit{se } \models_{\mathbf{H}} \alpha \to \beta \textit{ e } \models_{\mathbf{H}} \alpha, \textit{ então } \models_{\mathbf{H}} \beta.$$

Demonstração. Considere uma valoração $v_{\mathbf{H}}$ de $\mathbf{H}_3$ tal que $v_{\mathbf{H}}(p) = \frac{1}{2}$. Assim, temos que $v_{\mathbf{H}}((p \vee \neg p) \to \#p) \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$, para toda valoração $v_{\mathbf{H}}$ e $v_{\mathbf{H}}(p \vee \neg p) \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$, para toda valoração $v_{\mathbf{H}}$. Porém, $v_{\mathbf{H}}(\#p) = 0$, para uma valoração $v_{\mathbf{H}}$. ■

Halldén propõe uma versão restringida da regra de inferência *modus ponens*. Para isso, ele define, em primeiro lugar, os conceitos de fórmula aberta e fórmula coberta.

Definição 7.3.12 *α é* coberta em *β se α ocorre em β e toda ocorrência de α em β ocorre em uma expressão $\#\gamma$.*[8]

Definição 7.3.13 *Uma fórmula α é* aberta em *uma fórmula β se α ocorre em β e α não é coberta em β.*

Exemplo 7.3.14 *(cf. [30, p. 46]) A variável p é coberta em $\#p$. A variável p é aberta nas fórmulas $p \vee \neg p$ e $(p \vee \neg p) \to \#p$.*

[8]Em [30, p. 46]: *P is covered in Q, if and only if, P occurs in Q and every occurrence of P in Q occurs in an expression $\#R$. P is open in Q, if and only if, P occurs in Q and is not covered in Q.*

Definição 7.3.15 *(modus ponens restringido) (cf. [30, p. 48]) Sejam $\alpha, \beta \in For^{\mathbf{H}_3}$ tais que nenhuma variável p que é aberta em α é coberta em β e $var(\alpha) \subseteq var(\beta)$. Então:*

$$\text{se } \models_{\mathbf{H}} \alpha \text{ e } \models_{\mathbf{H}} \alpha \to \beta, \text{ então } \models_{\mathbf{H}} \beta.$$

Proposição 7.3.16 *(MTD) Seja $\models_{\mathbf{H}}$ a relação de consequência semântica de $\boldsymbol{H}_3$. Então:*

$$\text{se } \Gamma, \alpha \models_{\mathbf{H}} \beta, \text{ então } \Gamma \models_{\mathbf{H}} \alpha \to \beta.$$

Demonstração. Suponha $\Gamma, \alpha \models_{\mathbf{H}} \beta$. Considere, por absurdo, que existe uma valoração $v_{\mathbf{H}}$ de $\mathbf{H}_3$ tal que $v_{\mathbf{H}}(\Gamma) \subseteq \{1, \frac{1}{2}\}$ e tal que $v_{\mathbf{H}}(\alpha \to \beta) = 0$. Então, segundo a tabela de $\to$, $v_{\mathbf{H}}(\alpha) = 1$ e $v_{\mathbf{H}}(\beta) = 0$. Portanto, existe uma valoração $v_{\mathbf{H}}$ tal que $v_{\mathbf{H}}(\Gamma \cup \{\alpha\}) \subseteq \{1, \frac{1}{2}\}$. Daqui e pela hipótese, $v_{\mathbf{H}}(\beta) \subseteq \{1, \frac{1}{2}\}$. Absurdo. Logo, se $v_{\mathbf{H}}(\Gamma) \subseteq \{1, \frac{1}{2}\}$, então $v_{\mathbf{H}}(\alpha \to \beta) \in \{1, \frac{1}{2}\}$. ■

Como notamos, embora sejam válidas em $\mathbf{H}_3$ todas as tautologias clássicas, certas inferências clássicas falham neste sistema trivalorado.

Exemplo 7.3.17 *Em $\boldsymbol{H}_3$ temos o seguinte:*

1. $p \vee q, \neg p \not\models_{\mathbf{H}} q$,
2. $p \to q, \neg q \not\models_{\mathbf{H}} \neg p$,
3. $(p \to q) \wedge (q \to r) \not\models_{\mathbf{H}} (p \to r)$.

Para 1, considere uma valoração $v_{\mathbf{H}}$ de Halldén tal que $v_{\mathbf{H}}(p) = \frac{1}{2}$ e $v_{\mathbf{H}}(q) = 0$. Para 2, considere uma valoração $v_{\mathbf{H}}$ tal que $v_{\mathbf{H}}(p) = 1$ e $v_{\mathbf{H}}(q) = \frac{1}{2}$. Finalmente, para 3 considere $v_{\mathbf{H}}(p) = 1$, $v_{\mathbf{H}}(q) = \frac{1}{2}$ e $v_{\mathbf{H}}(r) = 0$.

A seguir, mostraremos a maneira como as inferências válidas em **LC** perdidas em $\mathbf{H}_3$ podem ser recuperadas, no contexto de nossa proposta, com ajuda do conectivo $\#$. Em particular, a seguir mostraremos que $\mathbf{H}_3$ é uma **LFI** com relação à negação $\neg$. Para isso, e como já mostramos que PE não vale em $\mathbf{H}_3$, seguindo a Definição 3.1.7, temos que demonstrar que PGE vale em $\mathbf{H}_3$.

Proposição 7.3.18 *Em $\boldsymbol{H}_3$ temos o seguinte:*

1. $\#\alpha, \alpha, \neg\alpha \models_{\mathbf{H}} \beta$, para toda $\alpha, \beta \in For\left(\Sigma^{\mathbf{H}_3}\right)$,

2. $\#\alpha, \alpha \nvDash_{\mathbf{H}} \beta$, para algumas $\alpha, \beta \in For\left(\Sigma^{\mathbf{H}_3}\right)$,

3. $\#\alpha, \neg\alpha \nvDash_{\mathbf{H}} \beta$, para algumas $\alpha, \beta \in For\left(\Sigma^{\mathbf{H}_3}\right)$.

Demonstração. Para 1. Suponha, por absurdo, que existe uma valoração $v_{\mathbf{H}}$ de $\mathbf{H}_3$ tal que $v_{\mathbf{H}}(\#\alpha) = v_{\mathbf{H}}(\alpha) = v_{\mathbf{H}}(\neg\alpha) \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ e $v_{\mathbf{H}}(\beta) = 0$. Como $v_{\mathbf{H}}(\#\alpha) \neq \frac{1}{2}$, então $v_{\mathbf{H}}(\#\alpha) = 1$ e, portanto, $v_{\mathbf{H}}(\alpha) \in \{1, 0\}$. Como $v_{\mathbf{H}}(\alpha) = 1$ sse $v_{\mathbf{H}}(\neg\alpha) = 0$, então não existe uma valoração $v_{\mathbf{H}}$ de $\mathbf{H}_3$ tal que $v_{\mathbf{H}}(\#\alpha) = v_{\mathbf{H}}(\alpha) = v_{\mathbf{H}}(\neg\alpha) \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$. Assim, vale o resultado.

Para 2. Considere uma valoração $v_{\mathbf{H}}$ de $\mathbf{H}_3$ tal que $v_{\mathbf{H}}(p) = 1$ e $v_{\mathbf{H}}(q) = 0$. Assim, $v_{\mathbf{H}}(p) = v_{\mathbf{H}}(\#p) = 1$ e $v_{\mathbf{H}}(q) = 0$.

Para 3. Considere uma valoração $v_{\mathbf{H}}$ de $\mathbf{H}_3$ tal que $v_{\mathbf{H}}(p) = v_{\mathbf{H}}(q) = 0$. Assim, $v_{\mathbf{H}}(\#p) = v_{\mathbf{H}}(\neg p) = 1$ e $v_{\mathbf{H}}(q) = 0$. ■

Conectivo de restauração e DAT para $\mathbf{H}_3$

O conectivo $\#$ de $\mathbf{H}_3$ tem capacidade de se propagar das fórmulas simples às fórmulas complexas na assinatura $\Sigma^{\neg\wedge\#}$. Porém, o conectivo é retropropagado apenas na assinatura $\Sigma^{\neg\wedge}$.

Proposição 7.3.19 *Em $\boldsymbol{H}_3$ vale o seguinte:*

1. $\#\alpha \models_{\mathbf{H}} \#\#\alpha$ *mas* $\#\#\alpha \nvDash_{\mathbf{H}} \#\alpha$,

2. $\#\alpha \models_{\mathbf{H}} \#(\neg\alpha)$ *e* $\#(\neg\alpha) \models_{\mathbf{H}} \#\alpha$,

3. $\#\alpha, \#\beta \models_{\mathbf{H}} \#(\alpha \wedge \beta)$ *e* $\#(\alpha \wedge \beta) \models_{\mathbf{H}} \#\alpha \wedge \#\beta$,

4. $\#\alpha, \#\beta \models_{\mathbf{H}} \#(\alpha \vee \beta)$ *e* $\#(\alpha \vee \beta) \models_{\mathbf{H}} \#\alpha \wedge \#\beta$,

5. $\#\alpha, \#\beta \models_{\mathbf{H}} \#(\alpha \rightarrow \beta)$ *e* $\#(\alpha \rightarrow \beta) \models_{\mathbf{H}} \#\alpha \wedge \#\beta$, *6.* $\#\alpha, \#\beta \models_{\mathbf{H}} \#(\alpha \leftrightarrow \beta)$ *e* $\#(\alpha \leftrightarrow \beta) \models_{\mathbf{H}} \#\alpha \wedge \#\beta$.[9]

Demonstração. Demonstraremos apenas os itens 2 e 3.

Para 2. Seja $v_{\mathbf{H}}$ uma valoração de $\mathbf{H}_3$ tal que $v_{\mathbf{H}}(\#\alpha) \in D$. Então, pela tabela de $\#$, $v_{\mathbf{H}}(\#\alpha) = 1$. Daqui, $v_{\mathbf{H}}(\alpha) \in \{1, 0\}$. Pela tabela de $\neg$, $v_{\mathbf{H}}(\alpha) \in \{1, 0\}$ e, portanto, pela tabela de $\#$, $v_{\mathbf{H}}(\#\neg\alpha) = 1$. Logo, $v_{\mathbf{H}}(\#\neg\alpha) \in D$.

Para 3. Seja $v_{\mathbf{H}}$ uma valoração de $\mathbf{H}_3$ tal que $v_{\mathbf{H}}(\#\alpha \wedge \#\beta) \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$. Então, pela tabela de $\wedge$, $v_{\mathbf{H}}(\#\alpha) = v_{\mathbf{H}}(\#\beta) = 1$ ou $v_{\mathbf{H}}(\#\alpha) = \frac{1}{2}$ ou $v_{\mathbf{H}}(\#\beta) = \frac{1}{2}$. Porém, $v_{\mathbf{H}}(\#\gamma) \neq \frac{1}{2}$, para qualquer $\gamma \in For(\Sigma^{\mathbf{H}_3})$. Logo, $v_{\mathbf{H}}(\#\alpha) = v_{\mathbf{H}}(\#\beta) = 1$ e, então $v_{\mathbf{H}}(\alpha) = v_{\mathbf{H}}(\beta) \in \{1, 0\}$. Daqui, pela tabela de $\wedge$, $v_{\mathbf{H}}(\alpha \wedge \beta) \in \{1, 0\}$. Portanto, pela tabela de $\#$, $v_{\mathbf{H}}(\#(\alpha \wedge \beta)) = 1$. A recíproca é demonstrada de modo análogo. ■

Para justificar a intuição que apoia a aceitação da Proposição 7.3.19, Halldén estabelece um paralelo entre essas inferências e a definição recursiva de fórmula bem formada, pela qual se prescreve, por exemplo, que $\alpha \wedge \beta$ é uma fórmula bem formada (fbf), se tanto α quanto β são fórmulas bem formadas e que $\neg\alpha$ é uma fbf, se α é uma fbf. Segundo Halldén, a significatividade dos componentes de uma fórmula é uma condição suficiente e necessária da significatividade da fórmula complexa construída a partir deles. No estudo da lógica de Halldén por parte de Åqvist, a infecciosidade do valor intermediário e, consequentemente, a (retro)propagação do conectivo $\#$, foi por ele chamada de *doutrina da predominância do elemento ateórico.*

Mostraremos, a seguir, que $\#$ é um conectivo de restauração local de **LC** em $\mathbf{H}_3$, demonstrando um DAT apropriado. Tal como no caso da lógica de Bočvar, a assinatura $\Sigma^{\neg\wedge\#}$ da lógica $\mathbf{H}_3$ de Halldén não coincide com a assinatura da lógica clássica. Em consequência, demonstraremos, tal como fizemos anteriormente para recuperar **LC** em $\mathbf{B}_3^E$, um DAT do tipo externo entre **LC** e $\mathbf{H}_3$.

[9] Como se mostra em [30, p. 45-47], as fórmulas $\#\alpha \leftrightarrow \#\neg\alpha$, $(\#\alpha \wedge \#\beta) \leftrightarrow \#(\alpha \wedge \beta)$, $(\#\alpha \wedge \#\beta) \leftrightarrow \#(\alpha \vee \beta)$, $(\#\alpha \wedge \#\beta) \leftrightarrow \#(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\#\alpha \wedge \#\beta) \leftrightarrow \#(\alpha \leftrightarrow \beta)$ e $\#\#\alpha$ são teoremas de $\mathbf{H}_3$. Porém, já mostramos que em $\mathbf{H}_3$ não é em geral válido que se $\models_{\mathbf{H}} \alpha \rightarrow \beta$, então $\alpha \models_{\mathbf{H}} \beta$.

Proposição 7.3.20 *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma^{\neg\wedge})$ *tal que* $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$.

$$Se\ \Gamma \not\models_{\mathbf{H}} \alpha,\ então\ var(\Gamma) \subsetneq var(\alpha).$$

Demonstração. Assuma que $\Gamma \not\models_{\mathbf{H}} \alpha$. Então, existe uma valoração $v_{\mathbf{H}}$ de Halldén tal que $v_{\mathbf{H}}(\Gamma) \subseteq \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ e $v_{\mathbf{H}}(\alpha) = 0$. Suponha, por absurdo, que $var(\Gamma) \subseteq var(\alpha)$. Dado que $v_{\mathbf{H}}(\alpha) = 0$, então pelo Lema 7.3.4, $v_{\mathbf{H}}(p_i) \in \{1, 0\}$, para toda variável $p_i \in var(\alpha)$. Portanto, $v_{\mathbf{H}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Seja $v_{\mathbf{C}}$ uma valoração de **LC** tal que $v_{\mathbf{C}}(p_i) = v_{\mathbf{H}}(p_i)$, para toda $p_i \in var(\alpha) = var(\alpha) \cup var(\Gamma)$. Logo, pelo Lema 7.3.5, $v_{\mathbf{C}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$ mas $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 0$, o que contraria o fato que $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$. Portanto, $var(\Gamma) \subseteq var(\alpha)$. ■

Proposição 7.3.21 *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma^{\neg\wedge})$, *tal que* $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$. *Se* $var(\Gamma) \subseteq var(\alpha)$ *ou* α *é tautologia, então* $\Gamma \models_{\mathbf{H}} \alpha$. *Assim, se* $\Gamma = \emptyset$, *então* $\models_{\mathbf{H}} \alpha$ *sse* $\models_{\mathbf{LC}} \alpha$ *para qualquer* $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\wedge})$.

Demonstração. Por contraposição do Lema 7.3.20, temos que se $var(\Gamma) \subseteq var(\alpha)$, então $\Gamma \models_{\mathbf{H}} \alpha$.

E se α é tautologia, então pela propriedade 2.0.33. 4 da relação de consequência semântica de $\mathbf{H}_3$, temos que $\Gamma \models_{\mathbf{H}} \alpha$, para qualquer $\Gamma \subseteq For(\Sigma^{\neg\wedge})$. ■

Teorema 7.3.22 *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma^{\neg\wedge})$ *e seja* $var(\Gamma) - var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ *o conjunto das fórmulas atômicas que ocorrem em* Γ, *mas que não ocorrem em* α. *Então:*

$$\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha \quad sse \quad \#p_1, \ldots, \#p_n, \Gamma \models_{\mathbf{H}} \alpha. \tag{DAT - $\mathbf{H}_3$}$$

Demonstração. $\Longrightarrow$ Suponha $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$. Considere uma valoração $v_{\mathbf{H}}$ de Halldén tal que $v_{\mathbf{H}}(\Gamma \cup \{\#p_1, \ldots, \#p_n\}) \subseteq \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$. Pela tabela do conectivo #, temos que $v_{\mathbf{H}}(\#\delta) \in \{1, 0\}$ para toda $\delta \in For(\Sigma^{\neg\wedge})$. Assim, $v_{\mathbf{H}}(\#p_i) = 1$, para $i = 1, \ldots, n$. Daqui, pela tabela de #, $v_{\mathbf{H}}(p_i) \in \{1, 0\}$, para $i = 1, \ldots, n$.

Se $\frac{1}{2} \in v_{\mathbf{H}}(\Gamma)$, então pelo Lema 7.3.4, existe $p_j \in var(\Gamma)$ tal que $v_{\mathbf{H}}(p_j) = \frac{1}{2}$. Se $p_j \in var(\alpha)$, então novamente pelo Lema 7.3.4 temos que $v_{\mathbf{H}}(\alpha) = \frac{1}{2}$. Mas se $p_j \notin var(\alpha)$, então $p_j = p_i$ para algum $i = 1, \ldots, n$. Mas pela hipótese inicial,

$v_{\mathbf{H}}(p_i) \in \{1, 0\}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim, não existe $p_j \in var(\Gamma)$, com $v_{\mathbf{H}}(p_j) = \frac{1}{2}$ e tal que $p_j \notin var(\alpha)$. Assim, se $v_{\mathbf{H}}(\# p_i) \in \{1, 0\}$, para $i = 1, \ldots, n$ e $\frac{1}{2} \in v_{\mathbf{H}}(\Gamma)$, então $v_{\mathbf{H}}(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Se $v_{\mathbf{H}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$, então pelo Lema 7.3.4, $v_{\mathbf{H}}(p_j) \in \{1, 0\}$ para toda variável p_j tal que $p_j \in var(\Gamma)$. Considere, então, uma valoração clássica $v_{\mathbf{C}}$ tal que $v_{\mathbf{C}}(p_j) = v_{\mathbf{H}}(p_j)$, para toda variável $p_j \in var(\Gamma)$. Então, pelo Lema 7.3.5, $v_{\mathbf{C}}(\Gamma) = v_{\mathbf{H}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Daqui, pela hipótese inicial, temos que $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$. Se existe $p_k \in var(\alpha)$ tal que $v_{\mathbf{H}}(p_k) = \frac{1}{2}$, então pelo Lema 7.3.4, $v_{\mathbf{H}}(\alpha) = \frac{1}{2}$. Caso contrário, para toda variável $p_k \in var(\alpha)$, $v_{\mathbf{H}}(p_k) \in \{1, 0\}$. Então pelo Lema 7.3.5 $v_{\mathbf{H}}(\alpha) = v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$, desde que definamos $v_{\mathbf{C}}(p_i) = v_{\mathbf{H}}(p_i)$, para toda variável $p_i \in var(\alpha) - var(\Gamma)$. Portanto, $v_{\mathbf{H}}(\alpha) \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$, se $v_{\mathbf{H}}(\# p_1), \ldots, v_{\mathbf{H}}(\# p_n), v_{\mathbf{H}}(\gamma_i) \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$, para toda $\gamma_i \in \Gamma$. Logo, $\# p_1, \ldots, \# p_n, \Gamma \models_{\mathbf{H}} \alpha$.

$\Longleftarrow$ Suponha $\# p_1, \ldots, \# p_n, \Gamma \models_{\mathbf{H}} \alpha$. Seja $v_{\mathbf{C}}$ uma valoração clássica tal que $v_{\mathbf{C}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Seja $v_{\mathbf{H}}$ uma valoração de Halldén tal que, para toda variável p_i, tal que $p_i \in var(\Gamma \cup \{\alpha\})$, $v_{\mathbf{C}}(p_i) = v_{\mathbf{H}}(p_i)$. Pelo Lema 7.3.5, $v_{\mathbf{H}}(\beta) = v_{\mathbf{C}}(\beta)$, para toda $\beta \in For(\Sigma^{\neg\wedge})$. Portanto, em particular, $v_{\mathbf{H}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Como $v_{\mathbf{H}}(p_i) = v_{\mathbf{C}}(p_i)$, para todo $i = 1, \ldots, n$, então temos que $v_{\mathbf{H}}(p_i) \in \{1, 0\}$. Então, pela tabela de $\#$, $v_{\mathbf{H}}(\# p_1), \ldots, v_{\mathbf{H}}(\# p_n) = 1$. Assim, $v_{\mathbf{H}}(\Gamma \cup \{\# p_1, \ldots, \# p_n\} \subseteq \{1\}$. Pela hipótese inicial, então $v_{\mathbf{H}}(\alpha) = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$. Assim, pelo Lema 7.3.5, $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$. ■

Exemplo 7.3.23 *Em $\boldsymbol{H}_3$ valem as seguintes inferências (restauradas)*

1. $\# p, p \wedge q \Vdash q$,

2. $\# p, p, p \rightarrow q \Vdash q$,

3. $\# q, p \rightarrow q, q \rightarrow r \Vdash (p \rightarrow r)$,

4. $\# p, p, \neg p \Vdash q$.

7.4 A lógica do sem-sentido de Åqvist

Apresentação

Inspirado na lógica trivalorada de Halldén, Lennart Åqvist propôs uma outra lógica do sem-sentido. No entanto, a lógica de Åqvist é motivada em intuições alternativas às que fundamentam o sistema lógico de Halldén. Em particular, Åqvist rejeita a doutrina da predominância do elemento ateórico —assignificativo— que motiva as tabelas de verdade da lógica de Halldén.

Tal como a lógica de Halldén, a lógica de Åqvist é uma lógica trivalorada na qual os três valores de verdade possíveis para atribuir às sentenças são verdade, falsidade e assignificatividade. O sem-sentido ou assignificatividad é, simplesmente, o que não é nem verdadeiro nem falso.

A introdução do terceiro valor de verdade é justificada na intuição de que *sentenças normativas*, *imperativas* e *emotivas*, que contêm termos tais como *dever*, *correto*, *bom* podem ser significativas e que é possível estabelecer relações de inferência entre elas. Como exemplo disso, Åqvist nota que a sentença *Se você for para Estocolmo, então vá na ópera* implica, junto com a sentença *Você vai para Estocolmo*, a sentença *Vá na ópera*. Contudo, a sentença *Vá na ópera* é imperativa e, portanto, segundo algumas teorias, ela não admitiria um valor de verdade clássico e, consequentemente, ela não poderia ser analisada com as ferramentas lógicas usuais. Introduzindo o terceiro valor de verdade e um conectivo linguístico de verdade, a partir do qual é definido um conectivo de significatividade, Åqvist admite que o raciocíno a partir de sentenças normativas e imperativas pode ser viável.

Sistema formal Å_3

Definição 7.4.1 *O conjunto de fórmulas* $For(\Sigma^{\text{Å}_3})$ *do sistema* Å_3 *é definido como uma álgebra livremente gerada por* $prop$ *sobre a assinatura* $\Sigma^{\text{Å}_3}$*, tal que:*

- $\Sigma_0^{\text{Å}_3} = \emptyset$,

- $\Sigma_1^{\mathbf{\AA}_3} = \{\neg, T\}$,

- $\Sigma_2^{\mathbf{\AA}_3} = \{\vee\}$,

- $\Sigma_n^{\mathbf{\AA}_3} = \emptyset$, para cada $n > 2$.

Definição 7.4.2 *$V = \left\{1, \frac{1}{2}, 0\right\}$ é o conjunto de valores de verdade de $\mathbf{\AA}_3$, e $D = \{1\}$ é o conjunto de valores designados.*

O significado dos operadores $\neg$, T e $\vee$ é dado pelas seguintes tabelas de verdade:

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

	T
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	0

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

Åqvist define da maneira usual os conectivos $\wedge, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$. Como pode-se observar, os três sistemas considerados até aqui propõem a mesma tabela de verdade para a negação. O conectivo T coincide, por outro lado, com o conectivo de asserção A da lógica de Bočvar. E assim, pelo demonstrado no Teorema 7.3.8, o conectivo T de $\mathbf{\AA}_3$ não pode ser definido no sistema de Halldén $\mathbf{H}_3$. O significado da disjunção $\vee$ em $\mathbf{\AA}_3$, pelo contrário, é diferente das duas propostas —coincidentes— de Bočvar e Halldén. Na lógica de Åqvist o valor intermédio não é infeccioso, pois não tem predominância sobre os valores de verdade clássicos. De fato, a tabela para $\vee$ em $\mathbf{\AA}_3$ é construída de maneira padrão (cf. Definição 2.0.22): a disjunção obtém o valor designado se, e somente se, algum dos componentes tiver valor designado. A tabela para a conjunção é também padrão (cf. Definição 2.0.23): para a conjunção obter valor designado, é necessário e suficiente ter os dois componentes com valor designado.

Proposição 7.4.3 *Em $\mathbf{\AA}_3$ valem as seguintes inferências:*

1. $\alpha \Vdash \alpha \vee \beta$,

2. $\alpha \wedge \beta \Vdash \alpha$.

A implicação, ainda sendo definida a partir da disjunção, não é, neste sentido, padrão: não é o caso que uma implicação $\alpha \rightarrow \beta$ tenha valor designado se, e somente se, ou α não for designado ou β for designado.[10] Apesar disso, a inferência de *modus ponens* é ainda válida em $\mathring{\mathbf{A}}_3$.

Proposição 7.4.4 *(modus ponens) Seja* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq For\left(\Sigma^{\neg T \vee}\right)$. *Em* $\mathring{\mathbf{A}}_3$ *vale o seguinte:*

$$\textit{se } \Gamma \models_{\mathbf{A}} \alpha \rightarrow \beta, \textit{ então } \Gamma, \alpha \models_{\mathbf{A}} \beta.$$

Demonstração. Suponha $\Gamma \models_{\mathbf{A}} \alpha \rightarrow \beta$ e seja $v_{\mathbf{A}}$ uma valoração de $\mathring{\mathbf{A}}_3$ tal que $v_{\mathbf{A}}(\Gamma \cup \{\alpha\}) \subseteq \{1\}$. Daqui e pela hipótese inicial, $v_{\mathbf{A}}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$. Logo, temos que $v_{\mathbf{A}}(\beta) = 1$, quando $v_{\mathbf{A}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$ e $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = 1$. Portanto, $\Gamma, \alpha \models_{\mathbf{A}} \beta$. ■

Embora o valor assignificativo $\frac{1}{2}$ não seja infeccioso na assinatura $\Sigma^{\neg\vee}$ como nos sistemas $\mathbf{B}_3$ e $\mathbf{H}_3$, no caso de todas as fórmulas mais simples terem o valor $\frac{1}{2}$, as fórmulas da assinatura $\Sigma^{\neg\vee}$ receberão o valor $\frac{1}{2}$.

Proposição 7.4.5 *Seja* $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\vee})$. *Se* $v_{\mathbf{A}}(p_i) = \frac{1}{2}$, *para toda variável* $p_i \in var(\alpha)$, *então* $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Demonstração. Por indução na estrutura de α.

Seja $\alpha = p_i$. Se $v_{\mathbf{A}}(p_i) = \frac{1}{2}$, então $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Seja $\alpha = \neg\beta$. Se $v_{\mathbf{A}}(p_i) = \frac{1}{2}$, para toda variável $p_i \in var(\neg\beta)$, então $v_{\mathbf{A}}(p_i) = \frac{1}{2}$, para toda variável $p_i \in var(\beta)$. Logo, por hipótese de indução, $v_{\mathbf{A}}(\beta) = \frac{1}{2}$. E pela tabela de $\neg$, $v_{\mathbf{A}}(\neg\beta) = v_{\mathbf{A}}(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Seja $\alpha = \beta \vee \gamma$. Se $v_{\mathbf{A}}(p_i) = \frac{1}{2}$, para toda variável $p_i \in var(\beta \vee \gamma)$, então $v_{\mathbf{A}}(p_i) = \frac{1}{2}$, para toda variável $p_j \in var(\beta)$, e para toda variável $p_k \in var(\gamma)$. Logo, pela hipótese de indução, $v_{\mathbf{A}}(\beta) = v_{\mathbf{A}}(\gamma) = \frac{1}{2}$. Então, pela tabela de $\vee$, $v_{\mathbf{A}}(\beta \vee \gamma) = v_{\mathbf{A}}(\alpha) = \frac{1}{2}$. ■

[10] Tal como na lógica de Bočvar, é possível definir conectivos clássicos com ajuda do operador T, dado que as tabelas de $\mathring{\mathbf{A}}_3$ coincidem com as tabelas de **LC** nos casos dos valores 0 e 1.

De acordo com a proposição acima, para toda fórmula α na assinatura $\Sigma^{\neg\vee}$ existe uma valoração $v_{\mathbf{A}}$ de Åqvist tal que $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = \frac{1}{2}$. Como o valor $\frac{1}{2}$ é não designado, o sistema $\mathbf{Å}_3$ não tem tautologias com apenas os conectivos primitivos $\neg$, $\vee$ (e com os definidos a partir deles), da mesma forma que $\mathbf{B}_3^I$.

Com vistas às aplicações filosóficas do seu enfoque formal, Åqvist define os conectivos unários F, L e M:

1. $F\alpha =_{def} T\neg\alpha$,

2. $L\alpha =_{def} T\alpha \vee F\alpha$,

3. $M\alpha =_{def} \neg L\alpha$.

Assim, a fórmula $F\alpha$ expressa que α é falsa e a fórmula $L\alpha$ expressa que α é verdadeira ou falsa. Assim, $L\alpha$ expressa que α *tem sentido* ou que α *é significativa*. L é, portanto, um conectivo unário de sentido ou significatividade e M é um conectivo unário de assignificatividade.

Considerando a noção de ocorrência de uma variável em uma fórmula, Åqvist redefine as noções de *fórmula aberta* e de *fórmula coberta* propostas por Halldén e define a noção de *fórmula completamente aberta*.

Definição 7.4.6 *([2, p. 141]). Uma* fórmula α *é* coberta *se toda ocorrência de variáveis em α ocorre em uma fórmula da forma $T\beta, F\beta, M\beta$ ou $L\beta$.*

Definição 7.4.7 *Uma* fórmula α *é* aberta *se α não é coberta.*

Definição 7.4.8 *Uma* fórmula α *é* completamente aberta *(c-aberta) se nenhuma ocorrência das variáveis de α ocorre em fórmulas da forma $T\alpha$, $F\alpha$, $L\alpha$ ou $M\alpha$.*

Como o próprio Åqvist nota, as fórmulas do cálculo proposicional clássico são c-abertas e nenhuma fórmula c-aberta é teorema no sistema $\mathbf{Å}_3$ (cf. [2, p. 141]).

Tal como $\mathbf{B}_3$ e $\mathbf{H}_3$, o sistema $\mathbf{Å}_3$ é um fragmento da lógica clássica: as inferências escritas na assinatura $\Sigma^{\neg\vee}$ válidas em $\mathbf{Å}_3$ são **LC**-válidas; porém algumas inferências válidas em **LC** são $\mathbf{Å}_3$-inválidas.

Proposição 7.4.9 *Para toda* $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\vee})$,

$$\nvDash_{\mathbf{A}} \alpha \vee \neg\alpha.$$

Demonstração. Considere uma valoração de Åqvist $v_{\mathbf{A}}$ tal que $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = \frac{1}{2}$. ■

$\mathbf{Å}_3$ é, portanto, um sistema *paracompleto* com relação à negação $\neg$.

Tal como no sistema de Bočvar, outra perda importante no sistema $\mathbf{A}_3$ é o Metateorema da Dedução.

Proposição 7.4.10 *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq For(\Sigma^{\neg\vee})$. *Não é em geral válido que:*

$$\textit{se } \Gamma, \alpha \models_{\mathbf{A}} \beta, \textit{ então } \Gamma \models_{\mathbf{A}} \alpha \to \beta.$$

Demonstração. Considere, em particular, o caso em que $\Gamma = \emptyset$, $\alpha = p \wedge q$ e $\beta = p$. Considere uma valoração $v_{\mathbf{A}}$ de $\mathbf{Å}_3$ tal que $v_{\mathbf{A}}(p) = v_{\mathbf{A}}(q) = \frac{1}{2}$. Nesse caso, temos que $v_{\mathbf{A}}((p \wedge q) \to p) = \frac{1}{2}$. Portanto, $\nvDash_{\mathbf{A}} (p \wedge q) \to p$. No entanto, não existe valoração $v_{\mathbf{A}}$ tal que $v_{\mathbf{A}}(p \wedge q) = 1$ e $v_{\mathbf{A}}(p) \in \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$. Daqui, $p \wedge q \models_{\mathbf{A}} p$. ■

Embora os teoremas clássicos não sejam válidos em $\mathbf{Å}_3$, Åqvist não rejeita o cálculo clássico: a validade dos teoremas clássicos é restringida à classe de fórmulas significativas. De fato, o próprio Åqvist propõe um modo de recuperarmos as tautologias clássicas acrescentando premissas significativas (cf. [2, p. 149]). Assim, a estratégia por ele empregada é muito similar à estratégia de restauração por nós proposta para os sistemas $\mathbf{B}_3$ e $\mathbf{H}_3$. Desse modo, assim como dissemos que Halldén foi uns dos primeiros lógicos a propor uma **LFI**, poderiamos dizer que Åqvist foi um dos primeiros lógicos a propor um teorema DAT.

Conectivo de restauração e DAT para $\mathbf{Å}_3$

Nesta seção, seguiremos a proposta de Åqvist de acrescentar premissas $L\alpha$ com sentido e mostraremos que, além de recuperarmos as tautologias clássicas, a estratégia de Åqvist permite recuperar também as inferências clássicas perdidas em $\mathbf{Å}_3$.

Embora Åqvist rejeite a doutrina de Halldén da infecciosidade do valor $\frac{1}{2}$, modificando a tabela da disjunção e, consequentemente, as tabelas dos conectivos definidos a partir dela, em $\mathbf{Å}_3$ ainda é válida a propagacão do operador L com relação aos conectivos de $\Sigma^{\neg\vee}$ e aos definidos a partir deles. Porém, a retropropagação não é válida sequer na assinatura $\Sigma^{\wedge\vee\rightarrow}$.

Proposição 7.4.11 *Em $\mathbf{Å}_3$ temos o seguinte:*

1. $L\alpha \models_{\mathbf{A}} LL\alpha$, *porém* $LL\alpha \not\models_{\mathbf{A}} L\alpha$,
2. $L\alpha \models_{\mathbf{A}} L(\neg\alpha)$ *e* $L(\neg\alpha) \models_{\mathbf{A}} L\alpha$,
3. $L\alpha, L\beta \models_{\mathbf{A}} L(\alpha \wedge \beta)$, *porém* $L(\alpha \wedge \beta) \not\models_{\mathbf{A}} L\alpha$,
4. $L\alpha, L\beta \models_{\mathbf{A}} L(\alpha \vee \beta)$, *porém* $L(\alpha \vee \beta) \not\models_{\mathbf{A}} L\alpha$,
5. $L\alpha, L\beta \models_{\mathbf{A}} L(\alpha \rightarrow \beta)$, *porém* $L(\alpha \rightarrow \beta) \not\models_{\mathbf{A}} L\alpha$,
6. $L\alpha, L\beta \models_{\mathbf{A}} L(\alpha \leftrightarrow \beta)$ *e* $L(\alpha \leftrightarrow \beta) \models_{\mathbf{A}} L\alpha$.[11]

Demonstração. Demonstraremos apenas os itens 1, 3 e 6, sendo que as demonstrações dos restantes itens são similares.

Para 1. Em [2, p. 144] está indicado que a fórmula $Lp \leftrightarrow L\neg p$ é teorema de $\mathbf{Å}_3$. Como em $\mathbf{Å}_3$ vale *modus ponens,* então a partir desse teorema, temos que $Lp \models_{\mathbf{A}} L\neg p$ e que $L\neg p \models_{\mathbf{A}} Lp$.

Para 3. Considere uma valoração $v_{\mathbf{A}}$ de Åqvist tal que $v_{\mathbf{A}}(L\alpha) = v_{\mathbf{A}}(L\beta) = 1$. Então, pela tabela do conectivo L, obtemos que $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = v_{\mathbf{A}}(\beta) \in \{1, 0\}$. Daqui, pela tabela para $\wedge$, obtemos que $v_{\mathbf{A}}(\alpha \wedge \beta) \in \{1, 0\}$ e pela tabela para L, obtemos que $v_{\mathbf{A}}(L(\alpha \wedge \beta)) = 1$. Porém, a inferência inversa não é válida em $\mathbf{Å}_3$. Para isso, considere o caso em que $v_{\mathbf{A}}(p) = \frac{1}{2}$ e $v_{\mathbf{A}}(q) = 0$. Então, pela tabela para $\wedge$ de $\mathbf{Å}_3$ obtemos que $v_{\mathbf{A}}(p \wedge q) = 0$. E, daqui pela tabela para L, obtemos que $v_{\mathbf{A}}(L(p \wedge q)) = 1$.

[11] Alternativamente, $L(\alpha \leftrightarrow \beta) \models_{\mathbf{A}} L\beta$ e $L(\alpha \spadesuit \beta) \not\models_{\mathbf{A}} L\beta$, para $\spadesuit \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Porém, pela tabela para L e pelo fato de $v_{\mathbf{A}}(p) = \frac{1}{2}$, temos que $v_{\mathbf{A}}(Lp) = 0$. Assim, $L(\alpha \wedge \beta) \nvDash_{\mathbf{A}} L\alpha$.

Para 6. Em [2, p. 151] está indicado que $L(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (Lp \wedge Lq)$ é teorema de $\mathbf{\AA}_3$. Assim, pela validade de *modus ponens*, obtemos que $Lp, Lq \models_{\mathbf{A}} L(p \leftrightarrow q)$ e $L(p \leftrightarrow q) \models_{\mathbf{A}} Lp$. ■

Lema 7.4.12 *Seja $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\vee})$ e seja $var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Então, para qualquer valoração $v_{\mathbf{A}}$ de Åqvist, se $v_{\mathbf{A}}(p_1), \ldots, v_{\mathbf{A}}(p_n) \in \{1, 0\}$, então $v_{\mathbf{A}}(\alpha) \in \{1, 0\}$.*

Demonstração. Por indução na estrutura de α. ■

Lema 7.4.13 *Seja $v_{\mathbf{A}}$ uma valoração de $\mathbf{\AA}_3$ tal que $v_{\mathbf{A}}(p_1), \ldots, v_{\mathbf{A}}(p_n) \in \{1, 0\}$. Seja $v_{\mathbf{C}}$ uma valoração clássica tal que $v_{\mathbf{C}}(p_i) = v_{\mathbf{A}}(p_i)$ para $i = 1, \ldots, n$. Então $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = v_{\mathbf{C}}(\alpha)$ para toda $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\vee})$ tal que $var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$.*

Demonstração. Similar à demonstração do Lema 7.2.16. ■

Lema 7.4.14 *Seja $v_{\mathbf{A}}$ uma valoração de Åqvist e defina-se uma valoração clássica $v_{\mathbf{C}}$ a partir de $v_{\mathbf{A}}$ da seguinte maneira:*

$$v_{\mathbf{C}}(p) =_{def} \begin{cases} 1, & \textit{se } v_{\mathbf{A}}(p) = 1; \\ 0, & \textit{se } v_{\mathbf{A}}(p) = 0; \\ \textit{arbitrário}, & \textit{se } v_{\mathbf{A}}(p) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Então, para toda fórmula $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\vee})$, se $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = 1$, então $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$ e se $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = 0$, então $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 0$.

Demonstração. Por indução na estrutura de α.

Caso base: $\alpha = p$

$v_{\mathbf{A}}(\alpha) = v_{\mathbf{A}}(p)$.

Se $v_{\mathbf{A}}(p) = 1$, então pela definição, $v_{\mathbf{C}}(p) = 1$.

Se $v_{\mathbf{A}}(p) = 0$, então pela definição, $v_{\mathbf{C}}(p) = 0$.

Seja $\alpha = \neg\beta$.

Se $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = v_{\mathbf{A}}(\neg\beta) = 1$, então $v_{\mathbf{A}}(\beta) = 0$. Pela hipótese de indução, $v_{\mathbf{C}}(\beta) = 0$. Daí, pela tabela de $\neg$ de **LC** temos que $v_{\mathbf{C}}(\neg\beta) = v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$.

Se $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = v_{\mathbf{A}}(\neg\beta) = 0$, então $v_{\mathbf{A}}(\beta) = 1$. Pela hipótese de indução, $v_{\mathbf{C}}(\beta) = 1$. Daí, pela tabela de $\neg$ de **LC** temos que $v_{\mathbf{C}}(\neg\beta) = v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 0$.

Seja $\alpha = \beta \vee \delta$.

Se $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = v_{\mathbf{A}}(\beta \vee \delta) = 1$, então $v_{\mathbf{A}}(\beta) = 1$ ou $v_{\mathbf{A}}(\delta) = 1$. Suponha, sem perda de generalidade, que $v_{\mathbf{A}}(\beta) = 1$. Então, pela hipótese de indução, $v_{\mathbf{C}}(\beta) = 1$. Daí, pela tabela do operador $\vee$ de **LC**, temos que $v_{\mathbf{C}}(\beta \vee \delta) = v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$.

Se $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = v_{\mathbf{A}}(\beta \vee \delta) = 0$, então $v_{\mathbf{A}}(\beta) = 0$ e $v_{\mathbf{A}}(\delta) = 0$. Pela hipótese de indução, $v_{\mathbf{C}}(\beta) = 0$ e $v_{\mathbf{C}}(\gamma) = 0$. Daí, pela tabela do operador $\vee$ de **LC**, temos que $v_{\mathbf{C}}(\beta \vee \delta) = v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 0$. ■

Tal como nos casos anteriores, a assinatura do sistema clássico **LC** não coincide com a assinatura do sistema trivalorado de Åqvist. Assim, também neste caso demonstraremos um teorema DAT do tipo externo. Recuperarararemos **LC** acrescentando, nas inferências clássicas perdidas, fórmulas que não pertencem à linguagem de **LC**.

Teorema 7.4.15 *(cf. [2, p. 149]) Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\,(\Sigma^{\neg\vee})$ *e seja* $var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ *o conjunto das fórmulas atômicas que ocorrem em* α. *Então:*

$$\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha \quad sse \quad Lp_1, \ldots, Lp_n, \Gamma \models_{\mathbf{A}} \alpha. \qquad (\text{DAT - } \mathbf{A}_3)$$

Demonstração. $\Longrightarrow$ Suponha $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$. Considere uma valoração $v_{\mathbf{A}}$ de $\mathbf{Å}_3$ tal que $v_{\mathbf{A}}\left(\{Lp_1, \ldots, Lp_n\} \cup \Gamma\right) \subseteq \{1\}$.

Então, em particular, temos que, para cada $1 \leq i \leq n$, $v_{\mathbf{A}}(Lp_i) = 1$ e que $v_{\mathbf{A}}(\gamma_i) = 1$, para cada $\gamma_i \in \Gamma$. Considere-se uma valoração clássica $v_{\mathbf{C}}$ definida a partir de $v_{\mathbf{A}}$ como no Lema 7.4.14 para toda variável p_j. Assim, pelo Lema 7.4.14 temos que $v_{\mathbf{C}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$, pois $v_{\mathbf{A}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Então, pela hipótese, $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$. Como para cada $1 \leq i \leq n$, $v_{\mathbf{A}}(Lp_i) = 1$, então para $i = 1, \ldots, n$, $v_{\mathbf{A}}(p_i) \in \{1, 0\}$. Agora, pelo Lema 7.4.14 temos que $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = v_{\mathbf{A}}(\alpha) = 1$. Daqui, $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = 1$, se $v_{\mathbf{A}}\left(\{Lp_1, \ldots, Lp_n\} \cup \Gamma\right) \subseteq \{1\}$, isto é, $Lp_1, \ldots, Lp_n, \Gamma \models_{\mathbf{A}} \alpha$.

$\Longleftarrow$ Suponha que $\Gamma \nvDash_{\mathbf{LC}} \alpha$. Então, existe uma valoração clássica $v_{\mathbf{C}}$, tal que $v_{\mathbf{C}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$ e $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 0$. Considere uma valoração $v_{\mathbf{A}}$ de $\mathring{\mathbf{A}}_3$ tal que $v_{\mathbf{A}}(p_j) = v_{\mathbf{C}}(p_j)$ para toda variável $p_j \in var(\Gamma \cup \{\alpha\})$. Assim, $v_{\mathbf{A}}(Lp_1) = \ldots = v_{\mathbf{A}}(Lp_n) = 1$ e $v_{\mathbf{A}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$, pelo Lema 7.4.13, dado que $v_{\mathbf{A}}(p_j) \in \{1, 0\}$. E, novamente, pelo Lema 7.4.13, $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 0$. Assim, $Lp_1, \ldots, Lp_n, \Gamma \nvDash_{\mathbf{A}} \alpha$, se $\Gamma \nvDash_{\mathbf{LC}} \alpha$. Portanto, se $Lp_1, \ldots, Lp_n, \Gamma \vDash_{\mathbf{A}} \alpha$, então $\Gamma \vDash_{\mathbf{LC}} \alpha$. ■

Exemplo 7.4.16 *As seguintes inferências e tautologias —válidas em $\boldsymbol{LC}$— podem ser recuperadas em $\mathring{\boldsymbol{A}}_3$ acrescentando premissas de restauração:*

1. $p \nvDash_{\mathbf{A}} (q \to q)$ e $\nvDash_{\mathbf{A}} p \to (q \to q)$. Porém, $Lq, p \vDash_{\mathbf{A}} (q \to q)$ e $Lq, Lp \vDash_{\mathbf{A}} p \to (q \to q)$,
2. $q \nvDash_{\mathbf{A}} (p \vee \neg p)$ e $\nvDash_{\mathbf{A}} q \to (p \vee \neg p)$. Porém, $Lp, q \vDash_{\mathbf{A}} (p \vee \neg p)$ e $Lp, Lq \vDash_{\mathbf{A}} q \to (p \vee \neg p)$,
3. $\nvDash_{\mathbf{A}} p \vee \neg p$. Porém $Lp \vDash_{\mathbf{A}} p \vee \neg p$,
4. $\nvDash_{\mathbf{A}} (p \wedge q) \to p$. Porém, $Lp, Lq \vDash_{\mathbf{A}} (p \wedge q) \to p$,
5. $\nvDash_{\mathbf{A}} p \vee (p \to q)$. Porém, $Lp, Lq \vDash_{\mathbf{A}} p \vee (p \to q)$.

Observação 7.4.17 *É interesante notar que a estratégia de restauração de inferências proposta no Teorema DAT 7.4.15, embora permita recuperarmos tanto as tautologias quanto as inferências clássicas, não permite, em geral, recuperarmos o Metateorema da Dedução em $\mathring{\boldsymbol{A}}_3$.*

Proposição 7.4.18 *Seja $\{p_1, \ldots, p_n\} = var(\beta)$. Então, não é em geral válido que:*

$$\textit{se } Lp_1, \ldots, Lp_n, \Gamma, \alpha \vDash_{\mathbf{A}} \beta, \textit{ então } Lp_1, \ldots, Lp_n, \Gamma \vDash_{\mathbf{A}} \alpha \to \beta.$$

Demonstração. Considere, em particular, o caso em que $\Gamma = \emptyset, \alpha = p \wedge \neg p$ e $\beta = q$. Como $p \wedge \neg p \vDash_{\mathbf{A}} q$, então pela monotonicidade da relação de consequência, temos que $Lq, p \wedge \neg p \vDash_{\mathbf{A}} q$. Porém, $Lq \nvDash_{\mathbf{A}} (p \wedge \neg p) \to q$, pois quando $v_{\mathbf{A}}(p) = \frac{1}{2}$ e $v_{\mathbf{A}}(q) = 0$, $v_{\mathbf{A}}(Lq) = 1$, mas $v_{\mathbf{A}}((p \wedge \neg p) \to q) = \frac{1}{2}$. ■

Recuperando o Metateorema da Dedução em $\mathring{\mathbf{A}}_3$

Teorema 7.4.19 *Seja* $\{p_1, \ldots, p_n\} = var(\alpha)$*.*

$$\textit{Se } Lp_1, \ldots, Lp_n, \Gamma, \alpha \models_{\mathbf{A}} \beta, \textit{ então } Lp_1, \ldots, Lp_n, \Gamma \models_{\mathbf{A}} \alpha \to \beta.$$

Demonstração. Assuma $Lp_1, \ldots, Lp_n, \Gamma, \alpha \models_{\mathbf{A}} \beta$. E suponha um valoração $v_{\mathbf{A}}$ de $\mathring{\mathbf{A}}_3$ tal que $v_{\mathbf{A}}(Lp_1) = \ldots = v_{\mathbf{A}}(Lp_n) = 1$ e $v_{\mathbf{A}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Segundo a tabela do operador L, $v_{\mathbf{A}}(p_i) \in \{1, 0\}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Como $\{p_1, \ldots, p_n\} = var(\alpha)$, então $v_{\mathbf{A}}(\alpha) \in \{1, 0\}$. Se $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = 1$, então pela hipótese inicial, $v_{\mathbf{A}}(\beta) = 1$. Assim, $v_{\mathbf{A}}(\alpha \to \beta) = 1$. Se $v_{\mathbf{A}}(\alpha) = 0$, então pela tabela do operador $\to$, $v_{\mathbf{A}}(\alpha \to \beta) = 1$. Logo, se $v_{\mathbf{A}}(Lp_1) = \ldots = v_{\mathbf{A}}(Lp_n) = v_{\mathbf{A}}(\gamma_i) = 1$, para todo $\gamma_i \in \Gamma$, então $v_{\mathbf{A}}(\alpha \to \beta) = 1$. ■

7.5 Os sistemas de Segerberg

Em 1965, Krister Segerberg propôs três lógicas do sem-sentido, conjugando as propriedades das lógicas do sem-sentido de Halldén e de Åqvist. A sua proposta é puramente formal e não esteve motivada em problemas filosóficos mas em problemas estritamente lógicos. Dois desses sistemas são extensões do sistema de Halldén e o restante é uma extensão do sistema de Åqvist. Assim, como Segerberg indica, a importância filosófica dos seus cálculos será similar à dos sistemas de Halldén e Åqvist. Nesta seção apresentaremos de modo não pormenorizado apenas um deles, que indicamos por $\mathbf{S}_3$.[12]

O conjunto de fórmulas $For(\Sigma^{\mathbf{S}_3})$ do sistema $\mathbf{S}_3$ é definido como uma álgebra livremente gerada por *prop* sobre a assinatura $\Sigma^{\mathbf{S}_3}$, tal que:

- $\Sigma_0^{\mathbf{S}_3} = \emptyset$,
- $\Sigma_1^{\mathbf{S}_3} = \{\neg, T\}$,
- $\Sigma_2^{\mathbf{S}_3} = \{\wedge\}$,

[12] O sistema aqui chamado de $\mathbf{S}_3$ corresponde ao sistema chamado $\mathbf{S}_1$ em [17] e ao sistema chamado $\mathbf{D}$ em [63].

- $\Sigma_n^{\mathbf{S}_3} = \emptyset$, para cada $n > 2$.

Definição 7.5.1 *$V = \left\{1, \frac{1}{2}, 0\right\}$ é o conjunto de valores de verdade de $\boldsymbol{S}_3$ e $D = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ é o conjunto de valores designados.*

O significado dos operadores $\neg$, $\wedge$ e T é dado pelas seguintes tabelas de verdade:

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0

	T
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	0

As tabelas da negação $\neg$ e da conjunção $\wedge$ da lógica $\mathbf{S}_3$ de Segerberg coincidem com as correspondentes tabelas de Halldén, a tabela de T coincide com a correspondente tabela de Åqvist e, consequentemente, é idêntica com a tabela do operador de asserção A de Bočvar. O conjunto de valores de verdade distinguidos é $\{1, \frac{1}{2}\}$, como na lógica de Halldén. Segerberg propõe um cálculo do mesmo tipo do cálculo de Halldén, mas com uma linguagem desenvolvida como no sistema de Åqvist. Lembramos que no sistema $\mathbf{H}_3$, cuja assinatura é $\Sigma^{\neg\wedge\#}$, o conectivo primitivo de verdade T da lógica de Åqvist não é definível. Assim, o cálculo de Segerberg compartilha os valores distinguidos e as tabelas —infecciosas— dos conectivos $\neg$ e $\wedge$ com a lógica de Halldén e compartilha o conectivo primitivo de verdade com a lógica de Åqvist.

Além dos conectivos $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, definidos da maneira usual, Segerberg apresenta os conectivos definidos $\sim$ e $\#$, que correspondem aos conectivos de falsidade F e de significatividade L, respectivamente, da lógica de Åqvist.

- $\sim\alpha =_{def} T\neg\alpha$,
- $\#\alpha =_{def} \neg(\neg T\alpha \wedge \neg T\neg\alpha)$.

O sistema $\mathbf{S}_3$ constitui uma extensão linguística de $\mathbf{H}_3$, de modo que em $\mathbf{S}_3$ todas as tautologias clássicas são válidas. Por outro lado, as inferências clássicas perdidas em $\mathbf{S}_3$ podem ser recuperadas acrescentando-se premissas de restauração significativas tal como já foi demonstrado no Teorema DAT 7.3.22 correspondente ao sistema $\mathbf{H}_3$. E, tal como em $\mathbf{H}_3$, a inferência de *modus ponens* não será válida em $\mathbf{S}_3$ para a implicação $\rightarrow$, definida em termos dos conectivos $\neg$ e $\wedge$ acima (cf. Proposição 7.3.10).

Contudo, a introdução do conectivo T, que permite definir o conectivo de negação $\sim$, permite definir um novo conectivo de implicação em $\mathbf{S}_3$.

Definição 7.5.2 $\alpha \supset \beta =_{def} \sim\alpha \vee \beta$

Assim definida, a tabela da implicação é a seguinte:

$\supset$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

Como pode-se observar, o valor $\frac{1}{2}$ não é infeccioso das fórmulas complexas $\alpha \supset \beta$. De fato, uma fórmula condicional $\alpha \supset \beta$ terá o valor designado se α tiver valor não designado ou se β tiver valor designado. Assim, em $\mathbf{S}_3$ a inferência de *modus ponens* vale para a implicação $\supset$.

Proposição 7.5.3 *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq For\left(\Sigma^{\mathbf{S}_3}\right)$. *Se* $\Gamma \models_{\mathbf{S}} \alpha \supset \beta$, *então* $\Gamma, \alpha \models_{\mathbf{S}} \beta$.

Como Segerberg observa, apesar de terem uma linguagem mais desenvolvida que o sistema $\mathbf{H}_3$, nem o seu cálculo $\mathbf{S}_3$ nem o cálculo de Åqvist $\mathbf{\AA}_3$ têm capacidade para definir os 27 conectivos unários admisíveis no sistema. Em particular, esses dois sistemas —$\mathbf{S}_3$ e $\mathbf{\AA}_3$— carecem de um conectivo unário $\clubsuit$ tal que, se $v(\alpha) = 1$, então $v(\clubsuit\alpha) = \frac{1}{2}$. Os outros dois sistemas propostos por Segerberg são extensões de $\mathbf{S}_3$ e $\mathbf{\AA}_3$ que contêm, além dos correspondentes conectivos $\wedge$ e $\vee$, um conectivo H cuja tabela é a seguinte:

	H
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0
0	1

Como os dois novos sistemas são extensões linguísticas dos cálculos $\mathbf{S}_3$ e $\mathbf{Å}_3$ e, portanto, têm as mesmas inferências e tautologias clássicas que $\mathbf{S}_3$ e $\mathbf{Å}_3$, respectivamente, esses sistemas apresentam o mesmo interesse em relação à restauração quanto $\mathbf{H}_3$ e $\mathbf{Å}_3$, que já trabalhamos com detalhe nas seções anteriores.

7.6 Observações com sentido

Âmbito de recuperação

Para cada um dos sistemas trivalorados estudados, propusemos um conectivo com ajuda do qual conseguimos restaurar, em cada um dos sistemas trivalorados, as inferências e/ou tautologias clássicas perdidas neles. Assim, os conectivos Ⓢ de $\mathbf{B}_3^E$, # de $\mathbf{H}_3$ e $\mathbf{S}_3$ e o conectivo L de $\mathbf{Å}_3$ são conectivos unários de restauração local. Esses três conectivos compartilham a propriedade de propagação na assinatura $\Sigma^{\neg\wedge\vee\rightarrow}$, enquanto que apenas os conectivos Ⓢ de $\mathbf{B}_3^E$ e # de $\mathbf{H}_3$ e $\mathbf{S}_3$ satisfazem a retropropagação nessa assinatura. Embora tenhamos considerado desnecessária essa propriedade para um conectivo ser chamado de conectivo de restauração local, o fato de um conectivo ter a propriedade de propagação simplifica a formulação dos correspondentes DATs. Com efeito, em cada um dos correspondentes DATs por nós propostos para restaurar **LC** acrescentamos apenas *variáveis restauradoras* e não fórmulas complexas restauradoras.

Em 7.4.18 mostramos que o Teorema DAT 7.4.15 proposto para recuperar inferências e tautologias clássicas em $\mathbf{Å}_3$ não permite, porém, recuperarmos o MTD perdido. Contudo, em 7.4.19 mostramos que é possível recuperar uma versão do MTD no sistema $\mathbf{Å}_3$ modificando o conjunto de variáveis de restauração. Com efeito, quando $\{p_1, \ldots, p_n\} = var\,(\alpha)$,

$$\text{se } Lp_1, \ldots, Lp_n, \Gamma, \alpha \models_{\mathbf{A}} \beta, \text{ então } Lp_1, \ldots, Lp_n, \Gamma \models_{\mathbf{A}} \alpha \rightarrow \beta.$$

A situação em $\mathbf{B}_3^E$ é similar à de $\mathbf{Å}_3$. Como já indicamos, em $\mathbf{B}_3^E$ o MTD também não é válido. E neste sistema não é possível restaurá-lo com base no nosso Teorema

DAT 7.2.20. Embora através do acréscimo de premissas seja possível restaurar em $\mathbf{B}_3^E$ as tautologias e inferências clássicas, essa estratégia não permite, porém, recuperar o MTD.

Proposição 7.6.1 *Se* $\{p_1, \ldots, p_n\} = var(\beta) - var(\Gamma \cup \{\alpha\})$*, não é em geral válido que se* $Ⓢp_1, \ldots, Ⓢp_n, \Gamma, \alpha \models_{\mathbf{B}_3^E} \beta$ *então* $Ⓢp_1, \ldots, Ⓢp_n, \Gamma \models_{\mathbf{B}_3^E} \alpha \to \beta$*.*

Demonstração. Considere $\Gamma = \emptyset$, $\alpha = p$ e $\beta = p \vee q$. Temos, então que $p \not\models_{\mathbf{B}_3^E} p \vee q$ mas, pelo DAT, $Ⓢq, p \models_{\mathbf{B}_3^E} p \vee q$. Porém, $Ⓢq \not\models_{\mathbf{B}_3^E} p \to (p \vee q)$. ■

LFIs e LFUs com sentido

Como indicamos em 3.2, o conceito de **LFUs** foi proposto notando a dualidade estabelecida entre as lógicas paraconsistentes e as lógicas paracompletas e considerando o conceito de **LFIs**. Podemos lembrar que as **LFUs** são lógicas paracompletas que possuem capacidade para expressar a indeterminação das fórmulas na linguagem por meio de um conectivo ★, que possibilita a restauração das inferências perdidas da lógica completa.

Como notamos nas seções correspondentes, os sistemas trivalorados $\mathbf{B}_3^E$ e $\mathbf{Å}_3$ de Bočvar e Åqvist, respectivamente, são paracompletos com relação à negação $\neg$, pois esse conectivo não satisfaz PTE. Mostramos, também, a maneira de restaurar o PTE na perspectiva das **LFIs**, isto é, considerando conectivos de *restauração nas premissas*. Com efeito, sendo Ⓡ o conectivo de restauração local Ⓢ ou L e sendo $\mathbf{X}$ o sistema $\mathbf{B}_3^E$ ou $\mathbf{Å}_3$, respectivamente, mostramos que

$$Ⓡ\alpha \models_{\mathbf{X}} \alpha \vee \neg\alpha.$$

Assim, $\mathbf{Å}_3$ e $\mathbf{B}_3^E$ poderiam ser consideradas **LFUs** em um sentido análogo às **LFIs**, recuperando o poder da lógica clássica a partir do acréscimo de premissas de restauração, tal como o sistema paracompleto (e paraconsistente) $\mathbf{V}_0$ apresentado –sucintamente– na seção 3.3.

Porém, na perspectiva das **LFUs** são considerados conectivos de *restauração na conclusão* das inferências perdidas. As **LFUs** se caracterizam por validar uma versão gentil do PTE, que seria expressada em termos da relação de consequência com conclusão única no PTEG:

$$\Vdash \alpha \vee \neg\alpha \vee \bigstar\alpha \tag{PTEG}$$

É claro que os conectivos de restauração local Ⓢ e L de $\mathbf{B}_3^E$ e $\mathbf{\mathring{A}}_3$ não podem ser conectivos de indeterminação no sentido das **LFUs**. Esses conectivos, que têm a mesma tabela de verdade, atribuem o valor não designado 0 a Ⓢα e $L\alpha$, no caso de α ter valor não designado $\frac{1}{2}$. Desse modo, existe uma valoração $v_{\mathbf{B}}$ de Bočvar tal que $v_{\mathbf{B}}(\alpha \vee \neg\alpha \vee$ Ⓢ$\alpha) = \frac{1}{2}$ e, de igual maneira, existe uma valoração $v_{\mathbf{A}}$ de Åqvist pela qual $v_{\mathbf{A}}(\alpha \vee \neg\alpha \vee L\alpha) = \frac{1}{2}$. Embora isso, $\mathbf{\mathring{A}}_3$ contém um conectivo de assignificatividade M que permite recuperar PTE na conclusão. Com efeito, em $\mathbf{\mathring{A}}_3$ temos

$$\models_{\mathbf{A}} \alpha \vee \neg\alpha \vee M\alpha$$

e temos, também

$$\not\models_{\mathbf{A}} p \vee Mp \text{ e } \not\models_{\mathbf{A}} \neg p \vee Mp.$$

Para isto, considere uma valoração $v_{\mathbf{A}}$ de $\mathbf{\mathring{A}}_3$ tal que $v_{\mathbf{A}}(p) = 0$, de modo que $v_{\mathbf{A}}(p \vee Mp) = 0$ e considere uma valoração $v_{\mathbf{A}}$ tal que $v_{\mathbf{A}}(p) = 1$, de modo que $v_{\mathbf{A}}(\neg p \vee Mp) = 0$.

E é claro que poderíamos definir um conectivo de sem-sentido em $\mathbf{B}_3^E$ a partir do conectivo de sentido Ⓢ e da negação $\neg$:

Definição 7.6.2 $\bullet\alpha =_{def} \neg$Ⓢ$\alpha$

No entanto, como não é o caso da disjunção $\alpha \vee \beta$ do sistema $\mathbf{B}_3^E$ ter valor designado, no caso de α ou β terem valor designado, o conectivo $\bullet$ não pode ser um conectivo de indeterminação no sentido das **LFUs**. De fato, por causa do valor não designado $\frac{1}{2}$ ser infeccioso das fórmulas disjuntivas e da relação de consequência ser definida em termos de conclusão única, o sistema $\mathbf{B}_3^E$ carece de qualquer conectivo de indeterminação. Com efeito, em $\mathbf{B}_3^E$ existe uma valoração $v_{\mathbf{B}}$ tal que $v_{\mathbf{B}}(\alpha \vee \neg\alpha \vee \bigstar\alpha) = \frac{1}{2}$, para qualquer conectivo $\bigstar \in \Sigma^{\mathbf{B}_3^E}$, de modo que PTEG será inválido nesse sistema.

Contudo, as **LFUs** são definidas, em [51], em termos da relação de conclusão múltipla. Assim, as **LFUs** são caracterizadas como uma classe de lógicas paracompletas que validam o PI, isto é, para todo conjunto Γ de fórmulas e toda fórmula α vale:

$$\Gamma \Vdash \alpha, \neg\alpha, \bigstar\alpha.$$

No contexto da relação de conclusão múltipla, tanto o conectivo M de assignificatividade da lógica trivalorada de Åqvist ,quanto o conectivo $\bullet$ de sem-sentido da lógica de Bočvar satisfazeriam as condições para serem conectivos de indeterminação na conclusão.

Capítulo 8

Lógicas n-valoradas

Neste capítulo apresentaremos diferentes sistemas multivalorados propostos por Łukasiewicz. Em primeiro lugar apresentamos dos sistemas que foram formulados com o objetivo de formalizar princípios modais da tradição aristotélica. Para o sistema trivalorado, que constitui um fragmento da Lógica Clássica, propomos um conectivo modal como conectivo de restauração local. Logo depois, mostramos a maneira de definir de modo geral conectivos de restauração em conclusão para cada uma das lógicas da hierarquia de sistemas n-valorados. Encerramos o capítulo realçando a condição de **LFU**s dos sistemas n-valorados e avaliando a importância das propriedades de propagação e retropropagação dos conectivos de restauração em conclusão.

8.1 Lógica trivalorada de Łukasiewicz

Em [42] Łukasiewicz apresentou um sistema de lógica com um terceiro valor de verdade, afastando-se, assim, do sistema aristotélico, que aceita apenas dois valores de verdade: a verdade e a falsidade. Em palavras do próprio Łukasiewicz [42, p. 88], "a lógica trivalorada tem, acima de tudo, importância teórica como um esforço para construir um sistema de lógica não-aristotélica".[1]

[1] A tradução é nossa: *that three-valued logic has above all theoretical importance as an endeavour to construct a system of non-Aristotelian logic.* No entanto, em [43, p. 173] Łukasiewicz considera que

Definição 8.1.1 *O conjunto de fórmulas* $For(\Sigma^{Ł_3})$ *do sistema trivalorado de Łukasiewicz* $Ł_3$ *é definido como uma álgebra livremente gerada por prop sobre a assinatura* $\Sigma^{Ł_3}$ *tal que:*

- $\Sigma_0^{Ł_3} = \emptyset$,
- $\Sigma_1^{Ł_3} = \{\neg\}$,
- $\Sigma_2^{Ł_3} = \{\rightarrow\}$,
- $\Sigma_m^{Ł_3} = \emptyset$, *para* $m > 2$.

Notação 8.1.2 *Também escreveremos* $For(\Sigma^{\neg\rightarrow})$ *para denotar o conjunto de fórmulas do sistema* $Ł_3$*.*[2]

Definição 8.1.3 $V_3 = \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ *é o conjunto de valores de verdade de* $Ł_3$ *e* $D = \{1\}$ *é o conjunto de valores designados de* $Ł_3$*.*

O significado dos operadores $\neg$ e $\rightarrow$ é dado pelas seguintes tabelas de verdade:

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

Definição 8.1.4 *O significado dos conectivos* $\vee$ *e* $\wedge$ *é dado pelas seguintes definições:*

---

um sistema que rejeite o princípio pelo qual toda proposição é verdadeira ou é falsa não deveria ser chamado de não-aristotélico, pois o próprio Aristóteles rejeitara esse princípio para certas proposições.

[2] No sistema apresentado em [42] o conectivo de negação $\prime$ é definido em termos da implicação $<$ e da falsidade 0 da seguinte maneira: $\alpha\prime =_{def} \alpha < 0$. Em [43] Łukasiewicz utiliza a notação —prefixa— polonesa; ele utiliza a letra N como símbolo da negação e a letra C como símbolo da implicação. Nós manteremos a notação infixa e os símbolos de conectivos usados nas seções anteriores. Assim, por exemplo, onde Łukasiewicz escreve $CNpp$, nós escreveremos $(\neg p \rightarrow p)$ ou, mais simplesmente, $\neg p \rightarrow p$.

1. $\alpha \vee \beta =_{def} (\alpha \to \beta) \to \beta$,

2. $\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$.

Assim definidos, as tabelas dos conectivos $\vee$ e $\wedge$ são:

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

Exceto a implicação, todas as fórmulas complexas de $\mathbf{Ł}_3$ formadas pelos conectivos acima apresentados recebem o valor intermédio $\frac{1}{2}$, quando todas as suas componentes tiverem o valor $\frac{1}{2}$. Daí, a implicação de $\mathbf{Ł}_3$ não pode ser definida, como em **LC**, em termos dos pares de conectivos $\langle\neg, \vee\rangle$ e $\langle\neg, \wedge\rangle$. De modo diferente da implicação clássica, em $\mathbf{Ł}_3$ uma implicação com antecedente e consequente não designados pode ter um valor não designado. Em outros termos, não é condição suficiente para uma implicação ter valor designado, ela ter consequente designado ou antecedente não designado. Porém, as tabelas de verdade de $\neg, \wedge, \vee$ e $\to$ de $\mathbf{Ł}_3$ coincidem, como nos anteriores sistemas trivalorados por nós estudados, com as tabelas clássicas bivaloradas, no caso de considerarmos apenas os valores 1 e 0. Se considerarmos o conjunto $\{1, 0\}$ de valores de verdade clássicos, obtemos as correspondentes tabelas bivaloradas clássicas. Assim, toda fórmula que receba o valor designado em $\mathbf{Ł}_3$ terá o valor designado na lógica clássica. Em consequência, toda fórmula tautológica em $\mathbf{Ł}_3$ será tautológica em **LC**. A afirmação inversa, porém, não é certa: não é o caso que toda tautologia clássica seja tautologia em $\mathbf{Ł}_3$.

Exemplo 8.1.5 *As seguintes tautologias de* $\boldsymbol{LC}$ *não são tautologias de* $\boldsymbol{Ł}_3$*:*

1. $p \vee \neg p$,

2. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$,

3. $\neg (p \wedge \neg p)$,

4. $(p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow \neg p$,

5. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$,

6. $\neg (p \rightarrow \neg p) \vee \neg (\neg p \rightarrow p)$.

Como em $\mathbf{Ł}_3$ a fórmula $\alpha \vee \neg\alpha$ não é tautologia, então o sistema $\mathbf{Ł}_3$ é paracompleto com relação à negação $\neg$.

A axiomatização de $\mathbf{Ł}_3$, devida a Wajsberg [32], é a primeira axiomatização de um sistema de lógica multivalorada. O sistema axiomático proposto por Wajsberg tem *modus ponens* e substituição como regras de inferência e os seguintes axiomas:

W1 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

W2 $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

W3 $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

W4 $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow p)$

Interpretação modal de $\mathbf{Ł}_3$

O sistema trivalorado de Łukasiewicz foi motivado por indagações a respeito das noções de possibilidade e necessidade vinculadas às proposições modais, provenientes da tradição aristotélica, isto é, proposições do tipo *é possível que* p, ou *não é possível que não* p, em que p é uma proposição qualquer. Duas foram as razões que levaram Łukasiewicz a propor um sistema modal multivalorado: a consideração de certos princípios da tradição lógica como básicos para um sistema modal e a análise formal das proposições aristotélicas sobre fatos futuros contingentes.

A primera motivação do sistema modal multivalorado foi a consideração de certos princípios provindos da lógica aristotélica e mantidos na tradição medieval e leibniziana como princípios para a caracterização da noção modal de possibilidade. Há três teses modais da tradição lógica que Łukasiewicz considera básicas e evidentes, mas que apresentam inconsistências quando formalizadas na lógica bivalorada. As três teses que, segundo Łukasiewicz, determinariam o comportamento básico da noção de possibilidade são:

1. Se não é possível que p, então não-p.

2. Se é suposto que não-p, então sob essa hipótese, não é possível que p.

3. Para algum p, é possível que p e é possível que não-p.

A primeira tese resume, segundo Łukasiewicz, um grupo de teoremas modais da tradição escolástica, entre eles, os princípios *Ab oportere ad esse valet consequentia*, que afirma que é possível inferir aquilo que é a partir do que deve ser, e *Ab esse ad posse valet consequentia*, que afirma que é possível inferir aquilo que pode ser a partir do que é. Esses princípios teriam sido conhecidos, mas não explicitamente formulados por Aristóteles. A segunda proposição representaria a tese leibniziana *Unumquodque, quando est, oportet esse*, formulada em *De Interpretatione 9* em termos do *Princípio de necessidade*: *todo existente é necessário quando existe, e todo inexistente é impossível quando não existe*. A terceira tese daria conta da noção complexa de possibilidade aristotélica, chamada de *contingência*.[3] Segundo o lógico polonês, a validade do terceiro princípio reflete a posição aristotélica sobre a existência de proposições contingentes verdadeiras. Segundo Łukasiewicz, Aristóteles aceitaria tanto a proposição *É possível*

[3]Na seção 8.1, quando examinarmos a noção de contingência, apresentaremos a distinção aristotélica entre uma noção simples e uma noção complexa de possibilidade.

que amanhã haverá uma batalha naval quanto a sua negação *É possível que amanhã não haverá uma batalha naval* e, portanto, a sua conjunção.

Se $\Diamond$ é o operador modal de possibilidade e $\exists p$ é uma quantificação existencial sobre proposições, em [43, p. 156-159] Łukasiewicz sugere uma primeira proposta formal dessas teses:[4]

1. $\neg\Diamond p \to \neg p$

2. $\neg p \to \neg\Diamond p$

3. $\exists p\,(\Diamond p \wedge \Diamond\neg p)$.

Como indicamos, uma das razões que motivaram Łukasiewicz a propor um sistema multivalorado foi a sua consideração de certas teses modais como fundamentais para um sistema de lógica modal (aristotélica). Como Łukasiewicz nota, essas três proproposições modais não podem ser simultaneamente válidas, se considerarmos o operador modal $\Diamond$ como um conectivo veritativo-funcional da lógica bivalorada. Na lógica bivalorada há apenas quatro conectivos unários e veritativo-funcionais para uma proposição p: Fp, Tp, $\neg p$ e Ip:

p	Fp	Tp	$\neg p$	Ip
1	0	1	0	1
0	0	1	1	0

Se F, T, $\neg$, I são os quatro possíveis operadores unários bivalorados, fica claro que as teses modais 1 e 3 são as duas válidas apenas no caso de $\Diamond p$ ser Tp, que as teses 1 e 2 são conjuntamente válidas apenas no caso de $\Diamond p$ ser Ip, e que não há interpretação bivalorada de $\Diamond$ que torne às proposições 2 e 3 simultaneamente válidas. De modo que não há interpretação veritativo-funcional bivalorada das teses fundamentais da tradição modal que as torne simultaneamente válidas. Esses princípios modais básicos evidenciam, portanto, que o operador modal $\Diamond$ não é qualquer um dos quatro conectivos

[4] Łukasiewicz utiliza o signo M para a possibilidade.

unários —F, T, $\neg$ ou I— do cálculo bivalorado. Por meio desse raciocínio, Łukasiewicz conclui que uma lógica modal de raizes aristotélicas não pode ser bivalorada.

A segunda motivação da proposta multivalorada de Łukasiewicz foi a discussão aristotélica sobre os eventos futuros contingentes. Łukasiewicz propôs atribuir um terceiro valor de verdade, diferente dos valores verdadeiro e falso, às sentenças sobre tais eventos. Esse terceiro valor de verdade foi interpretado como o possível, mas também como o indeterminado. Em palavras de Łukasiewicz:[5]

> Eu posso supor sem contradição que a minha presença em Varsóvia em um certo momento do ano próximo, por exemplo, no meio-dia de 21 de Dezembro, no momento presente ainda não está determinada nem positiva nem negativamente. Daí é *possível*, mas não *necessário*, que eu esteja presente em Varsóvia naquele momento dado. Nesta suposição, a proposição *Estarei presente em Varsóvia no meio-dia de 21 de Dezembro do próximo ano* não é verdadeira nem falsa no momento presente. Porque se fosse verdadeira no momento presente, a minha futura presença em Varsóvia seria necessária, o que contradiz a suposição. E, por outro lado, se fosse falsa no momento presente, então a minha futura presença em Varsóvia seria impossível, o que também contradiz a suposição. Portanto, a proposição considerada não é, no momento presente, *nem verdadeira nem falsa* e deve ter um terceiro valor, diferente de "0" ou falso e "1" ou verdadeiro. Esse valor pode ser designado por "$\frac{1}{2}$". Ele representa "o possível" e se une com "o verdadeiro" e "o falso" como um terceiro valor [43, p. 165s].

[5] A tradução do inglês para o português é nossa: *I can assume without contradiction that my presence in Warsaw at certain moment of next year, e.g. at noon on 21 December, is at the present time determined neither positively nor negatively. Hence it is* possible, *but not* necessary, *that I shall be present in Warsaw at the given time. On this assumption the proposition "I shall be in Warsaw at noon on 21 December of next year", can at the present time be neither true nor false. For if it were true now, my future presence in Warsaw would have to be necessary, wich is contradictory to the assumption. If it were false now, on the other hand, my future presence in Warsaw would have to be impossible, which is also contradictory to the assumption. Therefore the proposition considered is at the moment* neither true nor false *and must possess a third value, different from "0" or falsity and "1" or truth. This value we can designate by "$\frac{1}{2}$". It represents "the possible", and joins "the true" and "the false" as a third value.*

Assim, considerando que o operador modal $\Diamond$ não é representado pelos conectivos bivalorados unários e considerando que as proposições que expressam fatos futuros contingentes não podem ser nem verdadeiras nem falsas, Łukasiewicz começou, em 1920, a construção de um sistema trivalorado de lógica modal. Esse sistema foi posteriormente desenvolvido em [43]. Por meio do sistema trivalorado, Łukasiewicz pretendia construir uma definição veritativo-funcional do conceito de possibilidade, que permitisse estabelecer de modo consistente a validade de todos os princípios intuitivos da tradição aristotélica modal. Em [43] Łukasiewicz define, de modo veritativo-funcional, dois operadores modais trivalorados: um operador $\Box$ de necessidade e um operador $\Diamond$ de possibilidade, cujas tabelas de verdade são:

	$\Diamond$
1	1
$\frac{1}{2}$	1
0	0

	$\Box$
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	0

O valor $\frac{1}{2}$, intermediário aos valores clássicos 1 e 0, é interpretado como *possível.*[6] Assim, segundo a tabela de $\Diamond$, se uma proposição α é falsa, então a proposição *É possível que* α será também falsa. Mas se α é verdadeira ou possível, então *É possível que* α será verdadeira. No caso de $\Box$, temos que apenas no caso de α ser verdadeira, a proposição *É necessário que* α será verdadeira.

As definições desses dois operadores modais em termos dos conectivos primitivos $\neg$ e $\rightarrow$ do sistema $\mathbf{Ł}_3$ foram sugeridas a Łukasiewicz por Tarski em 1921.

1. $\Diamond\alpha =_{def} \neg\alpha \rightarrow \alpha$

[6] Na seção 8.3, ao tratarmos dos sistemas $n-$valorados, que contêm $n-2$ valores intermediários a 1 e 0, consideraremos esses valores como valores indeterminados, mas que como graus diferentes de possibilidade.

2. $\Box\alpha =_{def} \neg(\alpha \to \neg\alpha)$.

Em palavras de Łukasiewicz, a primeira definição estabelece que "se uma proposição *pode* ser inferida a partir do seu oposto contraditório, com certeza, a proposição não é falsa, portanto também não é impossível".[7] Com efeito, se a proposição α segue da proposição $\neg\alpha$, então α não é falsa, mas é verdadeira ou possível, em cujos casos a proposição $\Diamond\alpha$ é verdadeira. Com respeito à segunda definição, ele asevera que, falando em termos simples, "uma proposição α é necessária se, e somente se, ela não contém a sua própria negação".[8] Em outros termos, quando α é uma proposição com valor de verdade falso ou possível, α pode implicar a sua própria negação, pois $\neg\alpha$ terá o valor verdadeiro ou possível, respectivamente; pelo contrário, quando α é uma proposição verdadeira, ela não pode implicar a sua própria negação, pois $\neg\alpha$ será uma proposição falsa. Assim, se, e somente se, α é verdadeira, α não implica a sua própria negação.

Com base nessas duas definições, Łukasiewicz mostrou que os três princípios modais básicos da tradição aristotélica são —de algum modo— satisfeitos em seu sistema formal $\mathbf{Ł}_3$. Com efeito, a fórmula $\neg\Diamond p \to \neg p$, que formaliza o primeiro desses princípios recebe o valor verdadeiro para toda atribuição de valores à variável p. Portanto, $\neg\Diamond p \to \neg p$ é uma tautologia de $\mathbf{Ł}_3$. Contudo, a fórmula $\neg p \to \neg\Diamond p$, destinada a representar a máxima aristotélica *todo inexistente é impossível quando não existe*, não é tautologia da lógica modal $\mathbf{Ł}_3$. Essa fórmula é apenas possível em $\mathbf{Ł}_3$, visto que recebe os valores 1 e $\frac{1}{2}$ para toda atribuição de valores de verdade à variável p. Daí que Łukasiewicz propôs, também em [43], modificar a simbolização desse princípio e sugeriu $\neg p \to (\neg p \to \neg\Diamond p)$ como a correta simbolização da máxima aristotélica. Essa nova versão formal $\neg p \to (\neg p \to \neg\Diamond p)$ do princípio aristotélico é tautologia em $\mathbf{Ł}_3$. O caso do terceiro princípio, $\exists p\,(\Diamond p \land \Diamond\neg p)$, é um pouco mais complexo. Segundo Łukasiewicz, essa tese seria satisfeita em $\mathbf{Ł}_3$, pois $(\Diamond p \land \Diamond\neg p)$ é verdadeira para uma atribuição de

[7] A tradução é nossa (cf. [43, p. 169]): *If any proposition* can *be inferred from its contradictory opposite, it is certainly not false, hence not impossible either.*

[8] A tradução é nossa (cf. [43, p. 169]): *Freely speaking, we can then assert that a certain proposition "α" is necessary, if and only if it does not contain its own negation.*

valores de verdade à variável p. Porém, a fórmula $(\Diamond p \wedge \Diamond\neg p)$ não é uma tautologia de Ł_3; ela é verdadeira —apenas— quando p recebe o valor $\frac{1}{2}$. Assim, $(\Diamond p \wedge \Diamond\neg p)$ também não é uma contradição, mas uma fórmula satisfatível. Levando em consideração as valorações dessas máximas em Ł_3, Łukasiewicz afirma:[9]

> todos os teoremas tradicionais para as proposições modais foram estabelecidos livres de contradição no cálculo proposicional trivalorado, com base na definição $\Diamond p =_{def} \neg p \to p$ [43, p. 172].

Metateorema da Dedução

Como o próprio Łukasiewicz nota, a falha de $p \to \Diamond p$ e de $\neg p \to \neg\Diamond p$ em Ł_3 é causada pela falha do Princípio de Contração nesse sistema:

$$(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)\,.$$

Em Ł_3 as fórmulas $\alpha \to (\alpha \to \beta)$ e $(\alpha \to \beta)$ não são, como na lógica bivalorada clássica, logicamente equivalentes. Para observar isso, é suficiente considerarmos uma valoração $v_{\text{Ł}}$ de Ł_3 tal que $v_{\text{Ł}}(p) = \frac{1}{2}$ e $v_{\text{Ł}}(q) = 0$. Desse modo, $v_{\text{Ł}}(p \to (p \to q)) = 1$ e $v_{\text{Ł}}(p \to q) = \frac{1}{2}$.

A falha do Princípio de Contração acarreta a invalidade do Metateorema da Dedução (MTD) em Ł_3.

Proposição 8.1.6 *Sendo $\models_{\text{Ł}}$ a relação de consequência de Ł_3, temos que não é em geral válido que:*

$$\textit{se } \Gamma, \alpha \models_{\text{Ł}} \beta, \textit{ então } \Gamma \models_{\text{Ł}} \alpha \to \beta.$$

Demonstração. Considere o caso em que $\Gamma = \{p \to (q \to r), p \to q\}$, $\alpha = p$ e $\beta = q$. Temos, então, que $\Gamma, \alpha \models_{\text{Ł}} \beta$. Considere uma valoração $v_{\text{Ł}}$ de Ł_3 tal que

[9] A tradução do inglês para o português é nossa: *All the traditional theorems for modal propositions have been established free of contradiction in the three-valued propositional calculus, on the basis of definition "$Mp = Cnpp$".*

$v_{\text{Ł}}(p) = v_{\text{Ł}}(q) = \frac{1}{2}$ e $v_{\text{Ł}}(r) = 0$. Nesse caso, $v_{\text{Ł}}(p \to (q \to r)) = v_{\text{Ł}}(p \to q) = 1$ e $v_{\text{Ł}}(p \to r) = \frac{1}{2}$. Logo, $p \to (q \to r), p \to q \nvDash_{\text{Ł}} p \to r$. Daqui, $\Gamma \nvDash_{\text{Ł}} \alpha \to \beta$. Assim, $\Gamma, \alpha \vDash_{\text{Ł}} \beta$, mas $\Gamma \nvDash_{\text{Ł}} \alpha \to \beta$. ■

Proposição 8.1.7 *Em Ł_3 é valido que:*

$$se\ \Gamma, \alpha \vDash_{\text{Ł}} \beta,\ então\ \Gamma \vDash_{\text{Ł}} \alpha \to (\alpha \to \beta).$$

Demonstração. Assuma $\Gamma, \alpha \vDash_{\text{Ł}} \beta$. Suponha uma valoração $v_{\text{Ł}}$ de Ł_3 tal que $v_{\text{Ł}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Se $v_{\text{Ł}}(\alpha) = 1$, então pela hipótese inicial, $v_{\text{Ł}}(\beta) = 1$ e, portanto, $v_{\text{Ł}}(\alpha \to (\alpha \to \beta)) = 1$. Se $v_{\text{Ł}}(\alpha) = 0$, então pela tabela de $\to$, $v_{\text{Ł}}(\alpha \to (\alpha \to \beta)) = 1$. E se $v_{\text{Ł}}(\alpha) = \frac{1}{2}$, então $v_{\text{Ł}}(\alpha \to \beta) \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ e, portanto, $v_{\text{Ł}}(\alpha \to (\alpha \to \beta)) = 1$. De modo que $\Gamma \vDash_{\text{Ł}} \alpha \to (\alpha \to \beta)$. ■

Por conseguinte, ainda sendo inválido o MTD, as seguintes versões modais desse metateorema são válidas em Ł_3:

Proposição 8.1.8 *(cf. [55]) Para todo $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq For(\Sigma^{\neg\to})$:*

1. *Se $\Gamma, \Box\alpha \vDash_{\text{Ł}} \beta$, então $\Gamma \vDash_{\text{Ł}} \Box\alpha \to \beta$,*

2. *Se $\Gamma, \Diamond\alpha \vDash_{\text{Ł}} \beta$, então $\Gamma \vDash_{\text{Ł}} \Diamond\alpha \to \beta$,*

3. *Se $\Gamma, \neg\Box\alpha \vDash_{\text{Ł}} \beta$, então $\Gamma \vDash_{\text{Ł}} \neg\Box\alpha \to \beta$,*

4. *Se $\Gamma, \neg\Diamond\alpha \vDash_{\text{Ł}} \beta$, então $\Gamma \vDash_{\text{Ł}} \neg\Diamond\alpha \to \beta$.*

Demonstraremos apenas o item 1, sendo que as demonstrações dos restantes itens são similares.

Demonstração. Assuma $\Gamma, \Box\alpha \vDash_{\text{Ł}} \beta$. Suponha, por absurdo, que existe uma valoração $v_{\text{Ł}}$ da lógica trivalorada Ł_3 tal que $v_{\text{Ł}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$ e tal que $v_{\text{Ł}}(\Box\alpha \to \beta) \in \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$. Pela tabela do operador $\Box$, temos que $v_{\text{Ł}}(\Box\delta) \neq \frac{1}{2}$, para toda $\delta \in For(\Sigma^{\neg\to})$ e toda valoração $v_{\text{Ł}}$ de Ł_3. Daqui, e pela tabela de $\to$, temos que se $v_{\text{Ł}}(\Box\alpha \to \beta) = \frac{1}{2}$, então $v_{\text{Ł}}(\Box\alpha) = 1$ e $v_{\text{Ł}}(\beta) = \frac{1}{2}$. E se, $v_{\text{Ł}}(\Box\alpha \to \beta) = 0$, então pela tabela $\to$, $v_{\text{Ł}}(\Box\alpha) = 1$

e $v_{\text{Ł}}(\beta) = 0$. Logo, temos uma valoração $v_{\text{Ł}}$ tal que $v_{\text{Ł}}(\Box\alpha) = 1$ e $v_{\text{Ł}}(\beta) \in \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$. Portanto, temos uma valoração $v_{\text{Ł}}$ tal que $v_{\text{Ł}}(\Gamma \cup \{\Box\alpha\}) \subseteq \{1\}$ e $v_{\text{Ł}}(\beta) \in \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$. Absurdo. Logo, se $v_{\text{Ł}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$, então $v_{\text{Ł}}(\Box\alpha \to \beta) = 1$, isto é, $\Gamma \models_{\text{Ł}} \Box\alpha \to \beta$. ■

Operador modal de restauração

Tal como nas seções anteriores, propomos recuperar as tautologias clássicas perdidas em $\mathbf{Ł}_3$ seguindo a nossa estratégia motivada nas **LFIs**. Em particular, mostraremos que é possível recuperar o PTE em $\mathbf{Ł}_3$ acrescentando premissas de restauração. Para isso, definimos, em primeiro lugar, um novo operador em termos do operador modal $\Diamond$ e dos conectivos primitivos de $\mathbf{Ł}_3$:

Definição 8.1.9 $\triangledown\alpha =_{def} \Diamond\neg\alpha \to \neg\Diamond\alpha$

Assim, a tabela para esse novo operador $\triangledown$ é:

	$\triangledown$
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	1

A fórmula $\triangledown\alpha$ pode ser interpretada como α *é não-contingente*, se considerarmos o valor $\frac{1}{2}$ como possível, ou pode ser interpretada como α *é determinada*, se considerarmos $\frac{1}{2}$ como valor indeterminado. A fórmula $\Diamond\neg\alpha \to \neg\Diamond\alpha$, utilizada para definir $\triangledown\alpha$ equivale em $\mathbf{Ł}_3$ à fórmula $\neg\Diamond\alpha \vee \Box\alpha$. Assim, a proposição α *é não-contingente* será verdadeira no caso de ser verdadeira a proposição α *é necessária* ou no caso de ser verdadeira a proposição α *é impossível* e, portanto, no caso de α ser verdadeira ou falsa. A tabela do conectivo de não-contingência junto com a definição de $\triangledown\alpha$ em termos disjuntivos parecem vincular de modo estreito as noções aléticas de verdade e falsidade com as noções modais de necessidade e impossibilidade, seguindo de perto o princípio modal 2: *todo existente é necessário quando existe e todo inexistente é impossível quando não existe*. No caso da proposição α ser verdadeira, o evento expressado por α não poderá não ocorrer, é determinado e, portanto, a proposição $\Box\alpha$ é verdadeira. De modo análogo, no caso de α ser uma proposição falsa, então o evento expressado por α não poderá ocorrer, é determinado. Nesse caso, a proposição $\neg\Diamond\alpha$ é verdadeira.

Contingência e possibilidade em Aristóteles

A noção modal de possibilidade, que é primordial tanto na obra de Aristóteles quanto na do lógico polonês, é estreitamente vinculada na obra aristotélica à noção de contingência. A noção de possibilidade recebe um tratamento ambíguo na obra de Aristóteles. Ele trabalha alternativamente com duas noções de possibilidade: uma noção simples e uma noção complexa. Essas duas noções aparecem conjuntamente em *De Interpretatione* 13, onde Aristóteles apresenta as relações de derivação que se estabelecem entre a modalidade *possível* e a sua negação *não-possível* de um lado e as modalidades primitivas *admissível, necessário* e *impossível*— do outro.[10] A utilização simultânea de duas noções de possibilidade acarreta inconsistências no quadro de derivações. A inconsistência é ocasionada, em particular, pela vinculação entre as duas noções de possibilidade e a noção de necessidade. Aristóteles estabelece as seguientes relações de derivabilidade entre as modalidades (não) possível (não) e (não) necessário (não):

[10] Na suas notas do capítulo 12 da tradução do *De Interpretatione*, Ackrill afirma que em geral, Aristóteles utiliza os termos *endechomenon* ($\varepsilon\nu\delta\varepsilon\chi o\mu\varepsilon\nu o\mu$) e *dynaton* ($\delta\upsilon\nu\alpha\tau o\nu$) como termos com idêntico significado. Ambos os termos poderiam ser traduzidos, segundo Ackrill, por *possível*. No entanto, no tratamento das modalidades, Aristóteles utilizaria esses dois termos para apresentar duas modalidades diferentes. Embora interderiváveis, Ackrill considera que os termos devem receber diferente traduções. E, apesar de que o termo *endechomenon* tenha sido traduzido na tradição pelo termo *contingente*, ele prefere traduzi-lo pelo termo *admissível*. Assim, as quatro modalidades primitivas são, na tradução de Ackrill, *possível (dynaton)*, *admissível (endechomenon)*, *impossível* e *necessário*. Por sua parte, Łukasiewicz [46] afirma que as quatro modalidades aristotélicas são: *possível*, *contingente* (*endechomenon*), *necessário* e *impossível*. Porém, ele reconhece que o termo *contingente* recebe diferente significado em *De Interpretatione* e *Analíticos Anteriores*. Nós manteremos a proposta de Ackrill de usar *admisível* como tradução de *endechomenon* e usaremos o termo *contingente* para a noção complexa de possibilidade.

A De *é possível* segue *não é necessário.*

B De *não é possível* segue *é necessário que não.*

C De *é possível que não* segue *não é necessário que não.*

D De *não é possível que não* segue *é necessário.*

Assim, se aceitarmos a tese **A**, junto com alguns princípios lógicos aceitos na tradição aristotélica, deveríamos aceitar também que da expressão *é necessário* segue *não é possível.* Mas Aristóteles indica, na línha **B**, que da expressão *não é possível* segue *é necessário que não.* Assim, as teses **A** e **B** juntamente expressam que de *é necessário* segue *é necessário que não* o que equivale a afirmar que de *é necessário* segue *não é possível.* De outro lado, se aceitarmos juntamente a teses **C** e **D** poderíamos concluir, por um raciocínio similar, que de *é necessário que não* segue *é necessário*, ou seja, que de *não é possível* segue *é necessário.* Desse modo, juntando as consequências das quatro teses obtemos que o que *é necessário* e o que *não é possível* são modalidades interderiváveis. Porém, essa interderivabilidade não é aceita pelo próprio Aristóteles que, no mesmo capítulo, evita o colapso —resultante da interderivabilidade— das modalidades *ser necessário* e *não ser possível* distinguindo duas noções de possibilidade: uma noção complexa e uma noção simples (cf. [37, p. 80]). Em **A** e **C** a modalidade *possível* teria um sentido complexo, equivalente à conjunção das modalidades *não-necessário* e *não-impossível.* Em **B** e **D** a modalidade *possível* teria um sentido simples, equivalente —apenas— à modalidade *não-impossível.* Assim, enquanto no sentido complexo, o possível exclui o que é necessário, dado que implica pela definição o que é não necessário, no sentido simples, o possível e o necessário são compatíveis. Assim, frente à dificuldade apresentada no quadro de derivações, Aristóteles modifica as linhas **A** e **C** do quadro, escolhendo o sentido simples para reestabelecer de modo consistente as relações de derivabilidade entre a possibilidade e as restantes modalidades. Assim, as teses **A** e **C** são substituídas, no final do capítulo, pelas teses **A'** e **C'**:

A' De *é possível* segue *não é necessário que não.*

C' De *é possível que não* segue *não é necessário.*

Assim, o colapso das modalidades é solucionado pelo próprio Aristóteles no final do Capítulo 13 priorizando a noção simples de possibilidade.

Embora isso, no tratamento das inferências modais Aristóteles, parece priorizar a noção complexa de possibilidade. Como Aristóteles afirma em *Analíticos Anteriores* I. 13, 32a18-21:[11]

> chamo ser admissível e admissível à coisa que quando —não sendo necessária— ao ser assumida, não acarreta nenhuma impossibilidade (digo não sendo necessária porque aplicamos o termo admissível homonimamente ao que é necessário).

E em *Analíticos Anteriores* I. 25a37-40 Aristóteles expõe esses dois sentidos de admissível quando assinala que ser admissível é empregado em vários sentidos, pois "chamamos de admissível tanto o que é necessário, como o que é não-necessário e é possível". Sendo que em *De Interpretatione* 13 Aristóteles indica que entre a modalidade possível e a modalidade admissível há uma relação de derivação mútua, então aquilo que ele expressa com respeito a ser admissível poderia ser afirmado também para o que é possível.

A escolha da noção complexa de possibilidade por Aristóteles, no tratamento das inferências modais, é fundada, segundo [37], em questões metafísicas. A noção lógica de possibilidade é vinculada com a noção metafísica de potência. A distinção lógica entre o que é possível em um sentido simples e em um sentido complexo reflete a distinção metafísica aristotélica entre as potências racionais e as potências irracionais. Uma potência racional seria, por exemplo, o caso do fogo, que não tem capacidade de esquentar e de não esquentar. As potências racionais, por sua parte, são potências de contrários. Como exemplo de uma tal potência, Aristóteles indica, em *De Interpretatione* 12, 21b13 que aquilo que *pode* caminhar ou pode ser cortado *pode não* caminhar ou não ser cortado. Também em *Metafísica* IX. 2, 1046b4-7 Aristóteles assinala que todas as potências racionais abarcam ambos os contrários, enquanto que as potências

[11] Em [3] o tradutor utiliza o termo *contingente* para traduzir *endechomenon*.

irracionais são cada uma delas de apenas um contrário. Como exemplo de potência irracional, Aristóteles coloca o quente, que apenas pode esquentar, e como exemplo de potência racional, ele coloca a medicina, que pode produzir tanto a saúde, quanto a doença. Assim, na obra aristotélica convivem dois sentidos da modalidade possível, o simples e o complexo. No sentido complexo, a possibilidade exclui a necessidade; a possibilidade complexa é considerada como aquilo que não é necessário, nem é impossível. Neste sentido complexo, a possibilidade é indeterminação ou *contingência*.

Operador de restauração não-contingente

Se aceitarmos simbolizar o sentido simples de possibilidade por meio do operador $\Diamond$, então seguindo a Łukasiewicz [46], poderíamos definir o conectivo de contingência ou indeterminação $\blacktriangledown$ da seguinte maneira:[12]

Definição 8.1.10 $\blacktriangledown\alpha =_{def} \Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha.$

A contingência seria, então, uma possibilidade ambivalente, isto é, uma possibilidade que *pode* ser o caso, mas que também *pode não* ser o caso. Assim definida, a fórmula $\blacktriangledown\alpha$ resulta equivalente em $\mathbf{Ł}_3$ à fórmula $\neg(\Diamond\alpha \to \Box\alpha)$ e, portanto, é equivalente a $\neg\triangledown\alpha$.

A seguir, propomos restaurar as inferências clássicas perdidas em $\mathbf{Ł}_3$ acrescentando premissas não-contingentes $\triangledown(.)$. O conectivo de não-contingência $\triangledown$ é propagado das fórmulas simples às complexas mas não é, em geral, retropropagado na assinatura $\Sigma^{\neg\to}$:

1. $\triangledown\alpha \models_{\mathbf{Ł}} \triangledown\neg\alpha$ e $\triangledown\neg\alpha \models_{\mathbf{Ł}} \triangledown\alpha$,

2. $\triangledown\alpha, \triangledown\beta \models_{\mathbf{Ł}} \triangledown(\alpha \to \beta)$, mas $\triangledown(\alpha \to \beta) \not\models_{\mathbf{Ł}} \triangledown\alpha$.[13]

[12] A rigor, na lógica modal aristotélica, a diferença da lógica modal moderna, a modalidade *impossível* não é equivalente com a negação contraditória de *possível*. Embora em *De Interpretatione* 13, 22a25 Aristóteles afirme que impossível é derivado de não ser possível, a inferência inversa não é por ele afirmada. Contudo, qual seja o tipo de negação involucrada na modalidade *impossível* e qual o tipo de oposição estabelecido entre essa modalidade e *possível* não será objeto de análise na nossa pesquisa.

[13] Alternativamente, $\triangledown(\alpha \to \beta) \not\models_{\mathbf{Ł}} \triangledown\beta$.

Demonstração. Apenas demonstraremos o item 2. Considere uma valoração $v_{\text{Ł}}$ de Ł_3 tal que $v_{\text{Ł}}(\nabla\alpha) = v_{\text{Ł}}(\nabla\beta) = 1$. Então, pela tabela de ∇, $v_{\text{Ł}}(\alpha) \in \{1, 0\}$ e $v_{\text{Ł}}(\beta) \in \{1, 0\}$. Daqui, pela tabela de $\rightarrow$, $v_{\text{Ł}}(\alpha \rightarrow \beta) \in \{1, 0\}$. Portanto, pela tabela ∇, $v_{\text{Ł}}(\nabla(\alpha \rightarrow \beta)) = 1$.

Considere o caso em que $v_{\text{Ł}}(p) = v_{\text{Ł}}(q) = \frac{1}{2}$. Então, pela tabela de $\rightarrow$, $v_{\text{Ł}}(p \rightarrow q) = 1$ e, pela tabela de ∇, $v_{\text{Ł}}(\nabla(p \rightarrow q)) = 1$. Porém, pela tabela de ∇, teremos $v_{\text{Ł}}(\nabla p) = v_{\text{Ł}}(\nabla q) = 0$. ■

DAT para Ł_3

Lema 8.1.11 *Seja $v_{\text{Ł}}$ uma valoração de Ł_3 tal que $v_{\text{Ł}}(p_1), \ldots, v_{\text{Ł}}(p_n) \in \{1, 0\}$. E seja $v_{\mathbf{C}}$ uma valoração clássica tal que $v_{\mathbf{C}}(p_i) = v_{\text{Ł}}(p_i)$, para $i = 1, \ldots, n$. Então $v_{\text{Ł}}(\alpha) = v_{\mathbf{C}}(\alpha)$ e, portanto, $v_{\text{Ł}}(\alpha) \in \{1, 0\}$, para toda $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\rightarrow})$, tal que $var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$.*

Demonstração. Similar à do Lema 7.2.16. ■

Teorema 8.1.12 *Seja $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\Sigma^{\neg\rightarrow})$. E seja $var(\Gamma \cup \{\alpha\}) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ o conjunto de variáveis proposicionais que ocorrem em $\Gamma \cup \{\alpha\}$. Então:*

$$\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha \ sse \ \nabla p_1, \ldots, \nabla p_n, \Gamma \models_{\text{Ł}} \alpha. \qquad (\text{DAT - } \mathbf{Ł}_3)$$

Demonstração. $\Longrightarrow$ Suponha $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$.

Seja $v_{\text{Ł}}$ uma valoração de Ł_3 tal que $v_{\text{Ł}}(\{\nabla p_1, \ldots, \nabla p_n\} \cup \Gamma) \subseteq \{1\}$. Daqui e pela tabela do conectivo ∇ temos que $v_{\text{Ł}}(\{p_1, \ldots, p_n\}) \subseteq \{1, 0\}$. Seja $v_{\mathbf{C}}$ uma valoração clássica tal que $v_{\mathbf{C}}(p_j) = v_{\text{Ł}}(p_j)$, para $j = 1, \ldots, n$, tal que $var(\Gamma \cup \{\alpha\}) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Como $var(\alpha) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}$, então pelo Lema 8.1.11 temos que $v_{\text{Ł}}(\alpha) = v_{\mathbf{C}}(\alpha)$. Se $v_{\text{Ł}}(\alpha) = v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 0$, então pela hipótese, $v_{\mathbf{C}}(\gamma_i) = 0$, para alguma $\gamma_i \in \Gamma$. Então, pelo Lema 8.1.11, $v_{\text{Ł}}(\gamma_i) = 0$, para alguma $\gamma_i \in \Gamma$. Absurdo. Assim, $v_{\text{Ł}}(\alpha) = 1$, se $v_{\text{Ł}}(\Gamma \cup \{\nabla p_1, \ldots, \nabla p_n\}) \subseteq \{1\}$. Daqui, $\nabla p_1, \ldots, \nabla p_n, \Gamma \models_{\text{Ł}} \alpha$.

$\Longrightarrow$ Suponha $\nabla p_1, \ldots, \nabla p_n, \Gamma \models_{\text{Ł}} \alpha$.

Seja $v_{\mathbf{C}}$ uma valoração clássica tal que $v_{\mathbf{C}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Defina uma valoração $v_{\mathbf{Ł}}$ de $\mathbf{Ł}_3$ tal que $v_{\mathbf{Ł}}(p_i) = v_{\mathbf{C}}(p_i)$, com $i = 1, \ldots, n$, tal que $var(\Gamma \cup \{\alpha\}) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Logo, pelo Lema 8.1.11, temos que $v_{\mathbf{Ł}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$ e $v_{\mathbf{Ł}}(\{\nabla p_1, \ldots, \nabla p_n\}) \subseteq \{1\}$. Então, pela hipótese, $v_{\mathbf{Ł}}(\alpha) = 1$. E, pelo Lema 8.1.11, $v_{\mathbf{C}}(\alpha) = 1$. ■

Exemplo 8.1.13 *As seguintes inferências (restauradas) valem em $\boldsymbol{Ł}_3$:*

1. $\nabla p \Vdash p \vee \neg p$,
2. $\nabla p, ((p \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow p) \vee q) \Vdash q \vee r$,
3. $\nabla p, p \rightarrow (p \rightarrow q) \Vdash p \rightarrow q$,
4. $\nabla p \Vdash (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$,
5. $\nabla p, p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q \Vdash p \rightarrow r$,
6. $\nabla p, \neg p \rightarrow \neg q, \neg p \rightarrow q \Vdash p$,
7. $\nabla p, \nabla q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \Vdash (p \wedge q) \rightarrow r$.

Observação 8.1.14 *Considere novamente os exemplos acima.*

1. *Considere os exemplos 1 e 4, em que $\Gamma \models_{\mathbf{LC}} \alpha$ e $\Gamma = \emptyset$. Nesse caso, $\Gamma \nvDash_{\boldsymbol{Ł}} \alpha$ e, como $var(\Gamma) = \emptyset$, então não é suficiente acrescentar as variáveis de Γ como premissas de restauração para recuperar as inferências clássicas perdidas em $\boldsymbol{Ł}_3$; para recuperá-las é necessário acrescentar as variáveis de α.*

2. *Considere novamente o exemplo 2, em que $\Gamma = \{((p \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow p)) \vee q\}$ e $\alpha = q \vee r$. Considere uma valoração $v_{\boldsymbol{Ł}}$ de Łukasiewicz tal que $v_{\boldsymbol{Ł}}(p) = \frac{1}{2}$ e $v_{\boldsymbol{Ł}}(q) = v_{\boldsymbol{Ł}}(r) = 0$. Assim, teremos que $v_{\boldsymbol{Ł}}(p \rightarrow \neg p) = v_{\boldsymbol{Ł}}(\neg p \rightarrow p) = 1$ e, portanto, $v_{\boldsymbol{Ł}}(((p \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow p)) \vee q) = 1$. Porém, $v_{\boldsymbol{Ł}}(q \vee r) = 0$. Assim, $\Gamma \nvDash_{\boldsymbol{Ł}} \alpha$. Como $v_{\boldsymbol{Ł}}(q) = v_{\boldsymbol{Ł}}(r) = 0$, então pela tabela de ∇, $v_{\boldsymbol{Ł}}(\nabla q) = v_{\boldsymbol{Ł}}(\nabla r) = 1$. Desse modo, $\nabla p_1, \ldots, \nabla p_n, \Gamma \nvDash_{\boldsymbol{Ł}} \alpha$, se $\{p_1, \ldots, p_n\} = var(\alpha)$. Assim, não é suficiente acrescentar as variáveis de α como premissas de restauração; para recuperar*

as inferências clássicas perdidas em $\L_3$ é necessário acrescentar —também— as variáveis de Γ*.*

Metateorema da Dedução Modal

Em 8.1.8 afirmamos versões modais do Metateorema da Dedução que são válidas para os conectivos modais $\Box$ e $\Diamond$. A seguir, mostraremos que o Metateorema da Dedução Modal é válido também para o conectivo de não-contingência $\triangledown$.

Proposição 8.1.15 *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq For\left(\Sigma^{\neg\rightarrow}\right)$.

$$\text{Se } \Gamma, \triangledown\alpha \models_{\L} \beta, \text{ então } \Gamma \models_{\L} \triangledown\alpha \rightarrow \beta.$$

Demonstração. Assuma $\Gamma, \triangledown\alpha \models_{\mathbf{L}} \beta$. Considere uma valoração $v_{\mathbf{L}}$ de $\mathbf{L}_3$ tal que $v_{\mathbf{L}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Suponha, pelo absurdo, que $v_{\mathbf{L}}(\triangledown\alpha \rightarrow \beta) \in \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$.

Se $v_{\mathbf{L}}(\triangledown\alpha \rightarrow \beta) = \frac{1}{2}$, então como $v_{\mathbf{L}}(\triangledown\delta) \neq \frac{1}{2}$, para todo $\delta \in For\left(\Sigma^{\neg\rightarrow}\right)$, então $v_{\mathbf{L}}(\triangledown\alpha) = 1$ e $v_{\mathbf{L}}(\beta) = \frac{1}{2}$. Absurdo, pois estamos assumindo que $\Gamma, \triangledown\alpha \models_{\mathbf{L}} \beta$.

Se $v_{\mathbf{L}}(\triangledown\alpha \rightarrow \beta) = 0$, então $v_{\mathbf{L}}(\triangledown\alpha) = 1$ e $v_{\mathbf{L}}(\beta) = 0$. Absurdo, pois estamos assumindo que $\Gamma, \triangledown\alpha \models_{\mathbf{L}} \beta$.

Logo, $v_{\mathbf{L}}(\triangledown\alpha \rightarrow \beta) = 1$, se $v_{\mathbf{L}}(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Assim, $\Gamma \models_{\mathbf{L}} \triangledown\alpha \rightarrow \beta$. ■

8.2 Lógica modal tetravalorada

Com posterioridade à proposta trivalorada, Łukasiewicz considerou que o sistema $\mathbf{L}_3$ não satisfazia todas as intuições relativas às modalidades. Em particular, a proposição $\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha$, pela qual seria formalizada a tese aristotélica da existência de proposições contingentes verdadeiras, não resulta válida no sistema $\mathbf{L}_3$ mas apenas satisfatível. Em [46] Łukasiewicz construiu um outro sistema modal polivalente, um sistema tetravalorado modal $\mathbf{L}_d$, que valida as mesmas teses que a lógica proposicional clássica.

Definição 8.2.1 *O conjunto de fórmulas* $For\left(\Sigma^{\L_d}\right)$ *do sistema tretravalorado modal de Łukasiewicz* $\L_d$ *é definido como uma álgebra livremente gerada por prop sobre a assinatura* $\Sigma^{\L_d}$ *tal que:*

- $\Sigma_0^{\L_d} = \emptyset$,
- $\Sigma_1^{\L_d} = \{\neg, \Diamond\}$,
- $\Sigma_2^{\L_d} = \{\rightarrow\}$,
- $\Sigma_n^{\L_d} = \emptyset$, *para* $n > 2$.

Definição 8.2.2 $V_d = \left\{1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right\}$ *é o conjunto de valores de verdade de* $\L_d$ *e* $D = \{1\}$ *é o conjunto de valores designados de* $\L_d$.

O significado dos operadores primitivos $\neg, \Diamond$ e $\rightarrow$ é dado pelas seguintes tabelas de verdade:

	$\neg$
1	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	1

	$\Diamond$
1	1
$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$

$\rightarrow$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
0	1	1	1	1

Os valores não clássicos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ são interpretados como graus de verdade mais ou menos próximos à verdade e à falsidade. As tabelas para os conectivos $\wedge$ e $\vee$ são obtidas a partir das seguintes definições:

- $\alpha \wedge \beta =_{def} \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$,
- $\alpha \vee \beta =_{def} \neg\alpha \rightarrow \beta$.

$\wedge$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
0	0	0	0	0

$\vee$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	1	1	1
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

- $\alpha \leftrightarrow \beta =_{def} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

Para esse sistema tetravalorado, Łukasiewicz apresentou um outro operador de possibilidade, que nós simbolizamos por $\blacklozenge$, cuja definição e correspondente tabela são:[14]

Definição 8.2.3 $\blacklozenge\alpha =_{def} (\lozenge\alpha \rightarrow \alpha)$

	$\blacklozenge$
1	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	1
0	$\frac{2}{3}$

A partir dos dois operadores de possibilidade —$\lozenge$ e $\blacklozenge$— em [46, p. 145] Łukasiewicz define dois operadores de necessidade —$\square$ e $\blacksquare$— e dois operadores de contingência —$\triangle$ e $\blacktriangle$— da seguinte maneira:

- $\square\alpha =_{def} \neg\lozenge\neg\alpha$,
- $\blacksquare\alpha =_{def} \neg\blacklozenge\neg\alpha$,
- $\triangle\alpha =_{def} \lozenge\alpha \wedge \blacklozenge\neg\alpha$,
- $\blacktriangle\alpha =_{def} \blacklozenge\alpha \wedge \lozenge\neg\alpha$.

Assim definidos, as tabelas para esses operadores são:[15]

	$\square$
1	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	0
0	0

	$\blacksquare$
1	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	0

	$\triangle$
1	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	0
0	$\frac{1}{3}$

	$\blacktriangle$
1	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	0
$\frac{1}{3}$	1
0	$\frac{2}{3}$

[14] Os signos M e W de [46] e os signos Δ e ∇ de [45] se correspondem com os signos $\lozenge$ e $\blacklozenge$ por nós utilizados.

[15] Para os dois operadores de contingência, Łukasiewicz utiliza em [46] os signos X e Υ.

No sistema modal tetravalorado as fórmula $\triangle(\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha)$ e $\blacktriangle(\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha)$ recebem ambas as duas o valor designado. Em palavras de Łukasiewicz [46, p. 145], "existe em nosso sistema uma proposição $\triangle$-contingente verdadeira e uma proposição $\blacktriangle$-contingente verdadeira. Podemos acomodar a contingência no sentido aristotélico com nossa lógica modal tetravalorada".[16]

Além disso, o sistema modal Ł_d valida a formalização do princípio modal básico 1, mas invalida as duas formalizações propostas do princípio de necessidade expressado alternativamente por 2 e 2' em 8.1.

Proposição 8.2.4 *Sendo $\models_{\mathbf{d}}$ a relação de consequência semântica de Ł_d, temos:*

1. $\models_{\mathbf{d}} \neg\Diamond p \rightarrow \neg p$,

2. $\not\models_{\mathbf{d}} \neg p \rightarrow \neg\Diamond p$ *e* $\not\models_{\mathbf{d}} \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\Diamond p)$,

3. $\models_{\mathbf{d}} (\neg p \rightarrow \neg\Diamond p) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\Diamond p))$.

No entanto, embora esse sistema modal consiga validar proposições contingentes verdadeiras e os princípios escolásticos básicos formalizados por 1, o sistema tetravalorado valida algumas inferências que se opõem à compreensão intuitiva das modalidades (cf. [15], [41], [55]). Considere o seguinte exemplo.

Exemplo 8.2.5 *No sistema tetravalorado modal Ł_d as seguintes inferências são válidas:*

1. $\neg\triangle\alpha \Vdash \blacktriangle\alpha$ e $\blacktriangle\alpha \Vdash \neg\triangle\alpha$,

2. $\neg\blacktriangle\alpha \Vdash \triangle\alpha$ e $\triangle\alpha \Vdash \neg\blacktriangle\alpha$,

3. $\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta \Vdash \Diamond(\alpha \wedge \beta)$,

4. $\Box(\alpha \vee \beta) \Vdash \Box\alpha \vee \Box\beta$.

[16] A tradução do espanhol para o português é nossa.

Em primeiro lugar, o significado do conectivo de contingência desse sistema se afasta do sentido intuitivo que esse operador recebe no sistema modal $\mathbf{Ł}_3$. No sistema trivalorado, a negação de uma proposição contingente $\triangle\alpha$ resulta equivalente à disjunção de $\neg\Diamond\alpha$ e $\Box\alpha$. Porém, no sistema tetravalorado modal, a negação de uma proposição contingente é também uma proposição contingente. Por outro lado, a validade da inferência em 3 implica que $\Diamond(\alpha \wedge \neg\alpha)$ seria tese do sistema modal, se $\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha$ fosse tese. Como já notamos, no sistema de Łukasiewicz a aceitação de proposições contingentes verdadeiras não valida a fórmula $\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha$, mas $\triangle(\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha)$. A tese 4 implica que $\Box\alpha \vee \Box\neg\alpha$ seria tese do sistema, se $\Box(\alpha \vee \neg\alpha)$ fosse tese do sistema. Embora $\alpha \vee \neg\alpha$ seja tese do sistema $\mathbf{Ł}_d$, $\Box(\alpha \vee \neg\alpha)$ não é $\mathbf{Ł}_d$-válida.[17]

De modo diferente de $\mathbf{Ł}_3$, todas as teses da lógica bivalorada clássica permanecem válidas em $\mathbf{Ł}_d$. O conjunto das tautologias de **LC** está incluído no correspondente conjunto do sistema $\mathbf{Ł}_d$.

8.3 Lógicas n-valoradas

Já no ano 1922 Łukasiewicz generalizou a proposta trivalorada e propôs uma família de sistemas multivalorados, com finitos e infinitos valores de verdade. O sistema trivalorado $\mathbf{Ł}_3$ e o sistema bivalorado **LC** resultam casos particulares de uma família de sistemas n-valorados.

[17] As inferências 3 e 4 resultam válidas também em $\mathbf{Ł}_3$. O sistema modal tetravalorado apresentado em [45] tem as seguintes tabelas de verdade dos operadores modais $\Diamond$ e $\Box$.

	$\Diamond$
1	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	0

	$\Box$
1	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$

Com base nessas tabelas, as inferências intuitivamente rejeitáveis $\alpha \Vdash \Box\alpha$ e $\Diamond\alpha \Vdash \alpha$ resultam válidas.

A definição do conjunto de fórmulas $For\left(\Sigma^{\text{Ł}_n}\right)$ de cada sistema Ł_n, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, com $n = \aleph_0$ ou $n = \aleph_1$ é uma generalização da definição 8.1.1.

Definição 8.3.1 *O conjunto de valores (de verdade) V_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, é definido por:*

$$V_n = \left\{ \ 0, \tfrac{1}{n-1}, \tfrac{2}{n-1}, \ldots, 1 \ \right\}.$$

Definição 8.3.2 *O conjunto de valores distinguidos de cada sistema Ł_n é $D_n = \{1\}$.*

Definição 8.3.3 *Para cada sistema Ł_n, com $n \geq 2$, $v_n : For\left(\Sigma^{\text{Ł}_n}\right) \rightarrow V_n$ é uma função de valoração sse satisfaz as seguintes condições:*

1. $v_n(\alpha) = \frac{k}{n-1}$, se $\alpha \in prop$ e $k, n \in \mathbb{N}$, tais que $0 \leq k \leq n-1$,
2. $v_n(\neg\alpha) = 1 - v_n(\alpha)$,
3. $v_n(\alpha \rightarrow \beta) = \min[1, 1 - v_n(\alpha) + v_n(\beta)]$,
4. $v_n(\alpha \vee \beta) = \max[v_n(\alpha), v_n(\beta)]$,
5. $v_n(\alpha \wedge \beta) = \min[v_n(\alpha), v_n(\beta)]$.

Como é claro, o sistema trivalorado de Łukasiewicz proposto em [42] constitui um caso particular da definição dos sistemas Ł_n. De modo análogo, o sistema bivalorado clássico **LC** constitui um caso particular da hierarquia Ł_n, pois coincide com o sistema bivalorado Ł_2. Porém, o sistema tetravalorado modal, que nós chamamos de Ł_d, não é equivalente ao sistema Ł_4 da hierarquia Ł_n definida em 8.3.1 - 8.3.3, pois, como já mostramos, o conjunto das tautologias de Ł_d é idêntico ao conjunto das tautologias de **LC** na assinatura $\Sigma^{\neg\rightarrow}$ e, como veremos a seguir, o conjunto das tautologias de cada sistema n-valorado está contido estritamente no conjunto das tautologias de **LC**.

Lógica bivalorada e n-valorada

Em [47] é demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 8.3.4 *Seja* $Taut\,(\mathbf{X})$ *o conjunto das tautologias do sistema* $\boldsymbol{X}$*. Se* $2 < n < \aleph_0$*, então:*[18]

$$Taut\,(\mathbf{Ł}_n) \subset Taut\,(\mathbf{Ł}_2)\,.$$

Demonstração. Uma demonstração detalhada aparece em [1, p. 42] ∎

De acordo com esse teorema, o conjunto das tautologias de $\mathbf{Ł}_n$, com $n > 2$, é estritamente incluído no conjunto de tautologias de $\mathbf{Ł}_2$. Logo, certas fórmulas válidas em **LC** resultam inválidas em cada sistema $\mathbf{Ł}_n$, para $n > 2$. Em particular, a fórmula $p \vee \neg p$ não é tautologia de $\mathbf{Ł}_n$, se $n > 2$.

Proposição 8.3.5 *Para todo* $n \in \mathbb{N}, n > 2$*,*

$$\not\models_n p \vee \neg p.$$

Demonstração. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Seja $\mathbf{Ł}_n$ um sistema multivalorado com $n > 2$ valores de verdade. Então, existe m, com $m \neq 1$ e $m < n$ tal que $\frac{n-m}{n-1} \in V_n$. Seja $v_n\,(p) = \frac{n-m}{n-1}$. Como $m \neq 1$, então $v_n\,(p) \neq 1$. Pela Definição 8.3.3, cláusula 2, $v_n\,(\neg p) = 1 - \frac{n-m}{n-1} = \frac{m-1}{n-1}$. Como $m \neq n$, $v_n\,(\neg p) \neq 1$. Assim, $v_n\,(p \vee \neg p) \neq 1$. ∎

Em 8.1.12 mostramos como recuperar em $\mathbf{Ł}_3$ as inferências de $\mathbf{Ł}_2$ perdidas, definindo o conectivo $\triangledown$ de não-contingência a partir do operador modal $\Diamond$ e acrescentando premissas não-contingentes às inferências perdidas. Mostramos, assim, a maneira de ajustar as tautologias de $\mathbf{Ł}_2$ que não valem em $\mathbf{Ł}_3$, acrescentando premissas restauradoras de modo de obtermos versões ajustadas delas. Como caso particular do Teorema 8.1.12, em que $\models_3$ é a relação de consequência de $\mathbf{Ł}_3$, temos que:[19]

[18] A rigor, esse teorema vale para $2 < n \leq \aleph_0$, mas nesta seção trabalharemos apenas os sistemas n-valorados com $n \in \mathbb{N}$. Na seção 8.3 apresentaremos a definição dos sistemas $\aleph_0$ e $\aleph_1$.

[19] Ao tratarmos conjuntamente dos sistemas $n-$valorados, anotaremos $\models_n$ a relação de consequência do sistema $\mathbf{Ł}_n$, para $n \in \mathbb{N}$.

$$\nabla p \models_3 p \vee \neg p.$$

Mas também, como notamos em 7.6, seguindo a ideia das **LFUs**, poderíamos definir um conectivo de restauração local em conclusão. De fato, em Ł_3 poderíamos utilizar o conectivo $\blacktriangledown$ de contingência definido em 8.1.10 com o objetivo de recuperarmos a versão gentil do PTE.

Proposição 8.3.6 *Seja $\models_3$ a relação de consequência de Ł_3.*

$$\nabla p \models_3 p \vee \neg p \textit{ sse } \models_3 p \vee \neg p \vee \blacktriangledown p.$$

Demonstração. $\Longrightarrow$ Assuma $\nabla p \models_3 p \vee \neg p$. Suponha, por absurdo, que existe uma valoração v_3 de Ł_3 tal que $v_3 (p \vee \neg p \vee \blacktriangledown p) \in \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$. Pela tabela do operador $\blacktriangledown$, temos que $v_3 (\blacktriangledown \gamma) \neq \frac{1}{2}$, para toda $\gamma \in For\,(\Sigma^{\neg\rightarrow})$. Assim, $v_3 (p) \in \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$ e $v_3 (\neg p) \in \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$ e $v_3 (\blacktriangledown p) = 0$. Mas se $v_3 (\blacktriangledown p) = 0$, então $v_3 (\nabla p) = 1$ e, pela hipótese, $v_3 (p \vee \neg p) = 1$.

$\Longleftarrow$ Assuma que $v_3 (p \vee \neg p \vee \blacktriangledown p) = 1$, para toda valoração v_3 de Ł_3. Então, $v_3 (p) = 1$ ou $v_3 (\neg p) = 1$ ou $v_3 (\blacktriangledown p) = 1$, para cada valoração v_3. Se $v_3 (p) = 1$ ou $v_3 (\neg p) = 1$, então $v_3 (p \vee \neg p) = 1$. E se $v_3 (\blacktriangledown p) = 1$, então $v_3 (\nabla p) = 0$. Assim, não existe valoração v_3 de Ł_3 tal que $v_3 (\nabla p) = 1$ e $v_3 (p \vee \neg p) = 0$. Então, $\nabla p \models_3 p \vee \neg p$.

■

Assim, em Ł_3 temos a seguinte versão gentil do PTE (cf. [48]):

$$\models_3 p \vee \neg p \vee \blacktriangledown p. \tag{PTEG}$$

A seguir, generalizaremos essa ideia; definiremos um conectivo de restauração local em conclusão para cada sistema Ł_n, com $2 < n < \aleph_0$, para recuperarmos as tautologias de Ł_2 em cada um desses sistemas.

Conectivos de restauração contingente

Operadores J

Para generalizar a ideia de recuperação em conclusão, e mostrar que a hierarquia de sistemas $\mathbf{Ł}_n$ constitui uma hierarquia de **LFUs**, utilizaremos os operadores J, definidos por Rosser e Turquette [62] e utilizados por eles na sua apresentação axiomática dos sistemas $\mathbf{Ł}_n$ de Łukasiewicz. Os operadores J são governados pela seguinte condição geral.

Definição 8.3.7 *Para qualquer sistema $Ł_n$, com $n \in \mathbb{N}$, seja $0 \leq i \leq n-1$:*

$$v_n\left(J_{[i,n]}(p)\right) =_{def} \begin{cases} 1, & se\ v_n(p) = \frac{i}{n-1}, \\ 0, & se\ v_n(p) \neq \frac{i}{n-1}. \end{cases}$$

Como $0 \leq i \leq n-1$, cada sistema n-valorado $Ł_n$ terá exactamente n operadores J. Assim, por exemplo, os únicos dois operadores J do sistema $Ł_2$ são $J_{[0,2]}$ e $J_{[1,2]}$. E, seguindo a Definição 8.3.7, as tabelas dos três operadores J de $Ł_3$ —$J_{[0,3]}$, $J_{[1,3]}$ e $J_{[2,3]}$— são:

	$J_{[0,3]}$
1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

	$J_{[1,3]}$
1	0
$\frac{1}{2}$	1
0	0

	$J_{[2,3]}$
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	0

Como pode-se observar, as tabelas das fórmulas $J_{[2,3]}(p)$ e $J_{[1,3]}(p)$ são idênticas com as tabelas de $\Box p$ e $\neg\nabla p$ de $\mathbf{Ł}_3$, respectivamente. Desse modo, $J_{[2,3]}(p)$ poderia ser definida como $\neg(p \rightarrow \neg p)$ e $J_{[1,3]}(p)$ poderia ser definida por meio da fórmula $\neg((\neg p \rightarrow p) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p))$. De fato, os próprios Rosser e Turquette mostraram como definir os n operadores J de cada sistema $\mathbf{Ł}_n$ em termos dos conectivos primitivos $\neg$ e $\rightarrow$ (cf. [61, p. 90], [1, p. 47]).

Operadores J e conectivos de restauração ▼

Como é simples de imaginar pelas tabelas de $\mathbf{Ł}_3$ acima, por meio dos operadores J é possível identificar cada um dos n valores de verdade do sistema $\mathbf{Ł}_n$. Com efeito, cada um dos três operadores J de $\mathbf{Ł}_3$ atribui o valor designado a um dos três valores de verdade de $\mathbf{Ł}_3$ e o valor clássico não designado aos restantes valores. De modo similar, cada um dos dois operadores J de $\mathbf{Ł}_2$ atribui o valor designado a exatamente um dos valores de verdade do sistema bivalorado. Desse modo, a fórmula $J_{[0,2]}(p)$ equivale a $\neg p$ e $J_{[1,2]}(p)$ equivale a p em $\mathbf{Ł}_2$. Assim, o princípio clássico $p \vee \neg p$ pode ser rescrito em termos dos operadores J de $\mathbf{Ł}_2$ da seguinte maneira:

$$J_{[1,2]}(p) \vee J_{[0,2]}(p).$$

Ou, equivalentemente:

$$\bigvee_{i=0}^{1} J_{[i,2]}(p) \tag{PJ_3E}$$

Essa versão J do PTE, que nós chamamos de PJ_3E, expressa que são apenas dois os operadores J definíveis em $\mathbf{Ł}_2$: um terceiro operador J é excluído em $\mathbf{Ł}_2$. Com efeito, como $v_3\left(J_{[0,3]}(p)\right) = v_2\left(J_{[0,2]}(p)\right) = 1$ sse $v_n(p) = 0$ e $v_3\left(J_{[2,3]}(p)\right) = v_2\left(J_{[1,2]}(p)\right) = 1$ sse $v_n(p) = 1$, para $n \in \{2,3\}$, então as fórmulas $J_{[0,3]}(p)$ e $J_{[2,3]}(p)$ de $\mathbf{Ł}_3$ correspondem a $J_{[0,2]}(p)$ e $J_{[1,2]}(p)$ de $\mathbf{Ł}_2$, respectivamente. Porém, a fórmula $J_{[1,3]}(p)$, que expressa a indeterminação de p, não tem correspondente em $\mathbf{Ł}_2$. O operador $J_{[1,3]}$ de $\mathbf{Ł}_3$, que identifica o terceiro valor de verdade $\frac{1}{2}$, não é definível em $\mathbf{Ł}_2$.

Lembrando que $\blacktriangledown p$ equivale em $\mathbf{Ł}_3$ a $\neg\nabla p$ e, portanto, a $J_{[1,3]}(p)$, temos que a versão gentil do PTE, válida em $\mathbf{Ł}_3$, pode ser rescrita em termos dos operadores J de $\mathbf{Ł}_3$ como

$$J_{[2,3]}(p) \vee J_{[0,3]}(p) \vee J_{[1,3]}(p) \tag{PJ_3GE}$$

ou equivalentemente como PJ_4E:

$$\bigvee_{i=0}^{2} J_{[i,3]}(p) \tag{PJ_4E}$$

Assim, para recuperarmos o PTE em $\mathbf{Ł}_3$ acrescentamos o disjuntivo $J_{[1,3]}(p)$, em que $J_{[1,3]}$ é um —terceiro— operador J definível em $\mathbf{Ł}_3$, que não é definível em $\mathbf{Ł}_2$.

Teorema 8.3.8 *Para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 2$*

$$\bigvee_{i=0}^{1} J_{[i,2]}\left(p\right) \tag{PJ_3E}$$

não é tautologia de $\mathbf{Ł}_n$.

Demonstração. Similar à demonstração da Proposição 8.3. ■

Teorema 8.3.9 *Para todo $n \geq 2$, $PJ_{n+1}E$,*

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} J_{[i,n]}\left(p\right) \tag{PJ_{n+1}E}$$

é tautologia de $\mathbf{Ł}_n$.

Demonstração. Veja [1, p. 48]. ■

DAT para $\mathbf{Ł}_n$ - $\mathbf{Ł_2}$

Feitas essas considerações, definiremos para cada sistema $\mathbf{Ł}_n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$, um conectivo de indeterminação a partir dos operadores J, com o objetivo de recuperar em cada sistema $\mathbf{Ł}_n$ as tautologias perdidas de $\mathbf{Ł}_2$. Demonstraremos que tal conectivo é um conectivo de restauração local em conclusão.

Definição 8.3.10 *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$.* $\blacktriangledown_{[n]}\alpha =_{df} \bigvee_{i=1}^{n-2} J_{[i,n]}\left(\alpha\right)$.

Em outros termos, para cada sistema $\mathbf{Ł}_n$ definimos um conectivo $\blacktriangledown_{[n]}$ como uma disjunção de todos os operadores J de $\mathbf{Ł}_n$, com exeção de $J_{[0,n]}$ e $J_{[n-1,n]}$. Desse modo, em cada sistema n-valorado, o conectivo $\blacktriangledown_{[n]}$ será uma disjunção de $n-2$ componentes J.

Em primeiro lugar, mostraremos que o conectivo $\blacktriangledown_{[n]}$ não é, em geral, (retro)propagado na assinatura $\Sigma^{\neg\rightarrow\vee}$.

Proposição 8.3.11 *Para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 2$:*

1. $\blacktriangledown_{[n]}\alpha \models_n \blacktriangledown_{[n]}\neg\alpha$ e $\blacktriangledown_{[n]}\neg\alpha \models_n \blacktriangledown_{[n]}\alpha$,

2. $\blacktriangledown_{[n]}\alpha, \blacktriangledown_{[n]}\beta \not\models_n \blacktriangledown_{[n]}\left(\alpha \rightarrow \beta\right)$ e $\blacktriangledown_{[n]}\left(\alpha \rightarrow \beta\right) \not\models_n \blacktriangledown_{[n]}\alpha$,

3. $\blacktriangledown_{[n]}\alpha, \blacktriangledown_{[n]}\beta \models_n \blacktriangledown_{[n]}(\alpha \vee \beta)$, mas $\blacktriangledown_{[n]}(\alpha \vee \beta) \not\models_n \blacktriangledown_{[n]}\alpha$.[20]

Demonstração. Para 1. Assuma que $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}\alpha\right) = 1$. Pela Definição de $\blacktriangledown_{[n]}$ temos que $v_n\left(J_{[1,n]}(\alpha) \vee J_{[2,n]}(\alpha) \vee \ldots \vee J_{[n-3,n]}(\alpha) \vee J_{[n-2,n]}(\alpha)\right) = 1$. Assim, pela Definição 8.3.3, cláusula 4, $v_n\left(J_{[1,n]}(\alpha)\right) = 1$ ou $v_n\left(J_{[2,n]}(\alpha)\right) = 1$ ou $\ldots$ ou $v_n\left(J_{[n-3,n]}(\alpha)\right) = 1$ ou $v_n\left(J_{[n-2,n]}(\alpha)\right) = 1$. Assim, pela Definição 8.3.7, $v_n(\alpha) = \frac{1}{n-1}$ ou $v_n(\alpha) = \frac{2}{n-1}$ ou $\ldots$ ou $v_n(\alpha) = \frac{n-3}{n-1}$ ou $v_n(\alpha) = \frac{n-2}{n-1}$. E pela Definição 8.3.3, cláusula 2, $v_n(\neg\alpha) = 1 - \frac{1}{n-1}$ ou $v_n(\neg\alpha) = 1 - \frac{2}{n-1}$ ou $\ldots$ ou $v_n(\neg\alpha) = 1 - \frac{n-3}{n-1}$ ou $v_n(\neg\alpha) = 1 - \frac{n-2}{n-1}$. Assim, $v_n(\neg\alpha) = \frac{n-2}{n-1}$ ou $v_n(\neg\alpha) = \frac{n-3}{n-1}$ ou $\ldots$ ou $v_n(\neg\alpha) = \frac{2}{n-1}$ ou $v_n(\neg\alpha) = \frac{1}{n-1}$. Logo, pela Definição 8.3.7, $v_n\left(J_{[1,n]}(\neg\alpha)\right) = 1$ ou $v_n\left(J_{[2,n]}(\neg\alpha)\right) = 1$ ou $\ldots$ ou $v_n\left(J_{[n-3,n]}(\neg\alpha)\right) = 1$ ou $v_n\left(J_{[n-2,n]}(\neg\alpha)\right) = 1$. Daqui, pela Definição 8.3.3, cláusula 4, $v_n\left(\bigvee_{i=1}^{n-2} J_{[i,n]}(\neg\alpha)\right) = 1$ o que equivale, pela Definição 8.3.10, a $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}(\neg\alpha)\right) = 1$.

Assuma que $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}(\neg\alpha)\right) = 1$. Então, pela Definição 8.3.10 do conectivo $\blacktriangledown_{[n]}$, $v_n\left(\bigvee_{i=1}^{n-2} J_{[i,n]}(\neg\alpha)\right) = 1$. Daqui, pela cláusula 4 da Definição 8.3.3, $v_n\left(J_{[1,n]}(\neg\alpha)\right) = 1$ ou $v_n\left(J_{[2,n]}(\neg\alpha)\right) = 1$ ou $\ldots$ ou $v_n\left(J_{[n-3,n]}(\neg\alpha)\right) = 1$ ou $v_n\left(J_{[n-2,n]}(\neg\alpha)\right) = 1$. Então, pela Definição 8.3.7, $v_n(\neg\alpha) = \frac{1}{n-1}$ ou $v_n(\neg\alpha) = \frac{2}{n-1}$ ou $\ldots$ ou $v_n(\neg\alpha) = \frac{n-3}{n-1}$ ou $v_n(\neg\alpha) = \frac{n-2}{n-1}$. E daqui, pela Definição 8.3.3, cláusula 2, $v_n(\alpha) = 1 - \frac{i}{n-1}$, com $1 \leq i \leq n-2$. Daqui, então $v_n(\alpha) \neq 0$ e $v_n(\alpha) \neq 1$. Então, pela Definição 8.3.7, $v_n\left(J_{[0,n]}(\alpha)\right) = 0$ e $v_n\left(J_{[n-1,n]}(\alpha)\right) = 0$. Assim, $v_n\left(\bigvee_{i=1}^{n-2} J_{[i,n]}(\alpha)\right) = v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}(\alpha)\right) = 1$.

Para 2. Considere uma valoração v_n tal que $v_n(p) = v_n(q) = \frac{n-2}{n-1}$.

Então $v_n\left(J_{[n-2,n]}(p)\right) = v_n\left(J_{[n-2,n]}(q)\right) = 1$. Assim, $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}(p)\right) = v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}(q)\right) = 1$. Pela Definição 8.3.3, cláusula 3, $v_n(p \to q) = \min\left[1, (1 - v_n(p)) + v_n(q)\right] = \min\left[1, \left(1 - \frac{n-2}{n-1}\right) + \frac{n-2}{n-1}\right] = \min\left[1, \frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\right] = \min\left[1, \frac{n-1}{n-1}\right] = 1$. Se $v_n(p \to q) = 1$, então pela Definição 8.3.7, $v_n\left(J_{[1,n]}(p \to q)\right) = v_n\left(J_{[2,n]}(p \to q)\right) = \ldots = v_n\left(J_{[n-2,n]}(p \to q)\right) = 0$. Daqui, pela Definição 8.3.10, $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}(p \to q)\right) = 0$.

Considere uma valoração v_n tal que $v_n(p) = \frac{n-1}{n-1}$ e $v_n(q) = \frac{n-2}{n-1}$. Aplicando a Definição 8.3.3, cláusula 3, temos que $v_n(p \to q) = \frac{n-2}{n-1}$. Assim, pela Definição 8.3.7, $v_n\left(J_{[n-2,n]}(p \to q)\right) = 1$. Então, pela Definição 8.3.10, temos que $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}(p \to q)\right) = 1$.

[20] Alternativamente, $\blacktriangledown_{[n]}(\alpha \to \beta) \not\models_n \blacktriangledown_{[n]}\beta$ e $\blacktriangledown_{[n]}(\alpha \vee \beta) \not\models_n \blacktriangledown_{[n]}\beta$.

Porém, como $v_n(p) = 1$, $v_n\left(J_{[1,n]}(p)\right) = v_n\left(J_{[2,n]}(p)\right) = \ldots = v_n\left(J_{[n-2,n]}(p)\right) = 0$. E, daqui, novamente pela Definição 8.3.10, $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}p\right) = 0$.

Para 3. Assuma $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}\alpha\right) = v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}\beta\right) = 1$. Então, $v_n\left(J_{[1,n]}(\alpha)\right) = 1$ ou $v_n\left(J_{[2,n]}(\alpha)\right) = 1$ ou $\ldots$ ou $v_n\left(J_{[n-2,n]}(\alpha)\right) = 1$ e $v_n\left(J_{[1,n]}(\beta)\right) = 1$ ou $v_n\left(J_{[2,n]}(\beta)\right) = 1$ ou $\ldots$ ou $v_n\left(J_{[n-2,n]}(\beta)\right) = 1$, pela Definição 8.3.10. Assim, pela Definição 8.3.7, $v_n(\alpha) = \frac{1}{n-1}$ ou $v_n(\alpha) = \frac{2}{n-1}$ ou $\ldots$ ou $v_n(\alpha) = \frac{n-2}{n-1}$ e $v_n(\beta) = \frac{1}{n-1}$ ou $v_n(\beta) = \frac{2}{n-1}$ ou $\ldots$ ou $v_n(\beta) = \frac{n-2}{n-1}$. Daqui, pela cláusula 4 da Definição 8.3.3, $v_n(\alpha \vee \beta) \neq 1$ e $v_n(\alpha \vee \beta) \neq 0$. Logo, pela Definição 8.3.7, $v_n\left(J_{[1,n]}(\alpha \vee \beta)\right) = 1$ ou $v_n\left(J_{[2,n]}(\alpha \vee \beta)\right) = 1$ ou $\ldots$ ou $v_n\left(J_{[n-2,n]}(\alpha \vee \beta)\right) = 1$. Assim, pela Definição 8.3.10, $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}(\alpha \vee \beta)\right) = 1$.

Considere uma valoração v_n de Ł_n tal que $v_n(p) = \frac{1}{n-1}$ e $v_n(q) = 0$. Pela cláusula 4 da Definição 8.3.3, $v_n(p \vee q) = \frac{1}{n-1}$. Assim, $v_n\left(J_{[1,n]}(p \vee q)\right) = 1$, pela Definição 8.3.7. Logo, pela Definição 8.3.10, $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}(p \vee q)\right) = 1$. Mas, como $v_n(q) = 0$, então $v_n\left(J_{[1,n]}(p)\right) = v_n\left(J_{[2,n]}(q)\right) = \ldots = v_n\left(J_{[n-2,n]}(q)\right) = 0$. Então, pela Definição 8.3.10, $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}q\right) = 0$. ■

Lema 8.3.12 *Sejam $n > 2$, $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\rightarrow})$ e $\{p_1, \ldots, p_j\} = var(\alpha)$. Considere uma valoração v_n de Ł_n tal que $v_n(p_1), \ldots, v_n(p_j) \in \{1, 0\}$. Então $v_n(\alpha) = v_2(\alpha)$ e, portanto, $v_n(\alpha) \in \{1, 0\}$ para tal valoração v_n.*

Demonstração. Por indução na estrutura de α, usando a Definição 8.3.3. ■

Teorema 8.3.13 *Sejam $\models_n$ a relação de consequência da lógica Ł_n, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$, e $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\rightarrow})$. Se $\{p_1, \ldots, p_j\} = var(\alpha)$, então:*

$$\models_2 \alpha \text{ sse} \models_n \alpha \vee \blacktriangledown_{[n]}p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[n]}p_j. \qquad (\text{DAT - }\mathbf{L}_n)$$

Demonstração. $\Longrightarrow$ Assuma $\models_2 \alpha$. Suponha, por absurdo, que para toda n existe uma valoração v_n de Ł_n tal que $v_n\left(\alpha \vee \blacktriangledown_{[n]}p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[n]}p_j\right) \neq 1$. Então, $v_n(\alpha) \neq 1$ e $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[n]}p_j\right) \neq 1$ para tal valoração v_n. Se $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[n]}p_j\right) \neq 1$, então pela Definição 8.3.3. 4, $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}p_1\right) \neq 1$ e $\ldots$ e $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}p_j\right) \neq 1$, para tal valoração

v_n. Daqui, pela Definição 8.3.10, $v_n\left(J_{[1,n]}(p_1) \vee J_{[2,n]}(p_1) \vee \ldots \vee J_{[n-2,n]}(p_1)\right) \neq 1$ e $\ldots$ e $v_n\left(J_{[1,n]}(p_j) \vee J_{[2,n]}(p_j) \vee \ldots \vee J_{[n-2,n]}(p_j)\right) \neq 1$, para tal valoração v_n. Então, por 8.3.7, $v_n(p_1) \neq \frac{1}{n-1}$ e $v_n(p_1) \neq \frac{2}{n-1}$ e $\ldots$ e $v_n(p_1) \neq \frac{n-2}{n-1}$ e $v_n(p_j) \neq \frac{1}{n-1}$ e $v_n(p_j) \neq \frac{2}{n-1}$ e $\ldots$ e $v_n(p_j) \neq \frac{n-2}{n-1}$. Então, $v_n(p_1), \ldots, v_n(p_j) \in \{1, 0\}$. Pelo Lema 8.3.12, $v_n(\alpha) = v_2(\alpha)$ e $v_n(\alpha) \in \{1, 0\}$ para tal valoração v_n. Como, pela hipótese, $v(\alpha) \neq 1$, então $v_n(\alpha) = v_2(\alpha) = 0$, para tal valoração v_n e alguma valoração v_2. Porém, pela assunção inicial, temos que $v_2(\alpha) = 1$, para toda valoração v_2. Absurdo. Logo, não existe valoração v_n de Ł_n tal que $v_n\left(\alpha \vee \blacktriangledown_{[n]}p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[n]}p_j\right) \neq 1$.

$\Longleftarrow$ Assuma $\models_n \alpha \vee \blacktriangledown_{[n]}p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[n]}p_j$. Suponha, por absurdo, que existe uma valoração v_2 tal que $v_2(\alpha) = 0$. Como $var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_j\}$, então existe uma valoração v_2 tal que $v_2(p_1), \ldots, v_n(p_j) \in \{1, 0\}$, tal que $v_2(\alpha) = 0$.

Seja v_2 uma valoração tal que se $v_2(p_k) = 1$, então $v_n(p_k) = 1$ e se $v_2(p_k) = 0$, então $v_n(p_k) = 0$, para $k = 1, \ldots, j$. Assim, se $v_2(p_1), \ldots, v_2(p_j) \in \{1, 0\}$, para alguma valoração v_2, então para todo $i \neq 0$, $n > 2$, $v_n\left(J_{[i,n]}(p_1)\right), \ldots, v_n\left(J_{[i,n]}(p_j)\right) \neq 1$. Então, $v_n\left(J_{[1,n]}(p_1)\right), \ldots, v_n\left(J_{[n-2,n]}(p_1)\right), \ldots, v_n\left(J_{[1,n]}(p_j)\right), \ldots, v_n\left(J_{[n-2,n]}(p_j)\right) \neq 1$. Então, $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}p_1\right) \neq 1$ e $v_n\left(\blacktriangledown_{[n]}p_j\right) \neq 1$. Logo, pela hipótese, $v_n(\alpha) = 1$, se $v_2(p_1), \ldots, v_2(p_j) \in \{1, 0\}$. ■

Lógicas n-valoradas

O Teorema 8.3.4 é um caso particular de um teorema mais geral que estabelece uma relação de inclusão entre os conjuntos de tautologias de determinados sistemas n-valorados. Um sistema multivalorado Ł_n perde tautologias de um sistema Ł_m conforme o aumento da cardinalidade do conjunto de valores de verdade V_n do sistema Ł_n. Toda tautologia de um sistema Ł_n será tautologia de um sistema Ł_m sse $m - 1$ é divisor de $n - 1$.

Proposição 8.3.14 *Sejam Ł_m e Ł_n sistemas multivalorados tais que $k(m-1) = (n-1)$ e tal que $2 \leq m < n < \aleph_0$ e $k > 1$. Sejam V_m e V_n os conjuntos de valores de verdade de Ł_n e Ł_m, respectivamente, e seja $\|V_x\| = x$, a cardinalidade do conjunto V_x. Então:*

$$V_m \subset V_n.$$

Demonstração. Pela Definição 8.3.1, $V_n = \left\{\frac{j}{n-1} : n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq j \leq n-1\right\}$ e $V_m = \left\{\frac{i}{m-1} : m \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq i \leq m-1\right\}$. Se $j = i = 0$, então $\frac{j}{n-1} = \frac{i}{m-1} = 0$ e se $j = n-1$ e $i = m-1$, então $\frac{j}{n-1} = \frac{i}{m-1} = 1$. Assim, $\{0,1\} \in V_n$ e $\{0,1\} \in V_m$. E como $k(m-1) = (n-1)$ e $2 \leq m < n < \aleph_0$, então para todo valor $\frac{i}{m-1} \in V_m$, existe valor $\frac{ki}{k(m-1)} \in V_n$. Assim, $V_m \subseteq V_n$. Se $V_n \subseteq V_m$, então, como temos que $V_m \subseteq V_n$, teríamos $V_n = V_m$. Daqui, $\|V_n\| = \|V_m\| = m = n$. Absurdo. Logo, $V_m \subset V_n$. ■

Exemplo 8.3.15 *Considere os seguintes sistemas $\boldsymbol{Ł}_n$ e os correspondentes conjuntos de valores de verdade $\boldsymbol{V}_n$:*

1. $\mathbf{Ł}_7$ e $\mathbf{Ł}_4$. $V_4 = \left\{1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right\} \subset V_7 = \left\{1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 0\right\}$,

2. $\mathbf{Ł}_5$ e $\mathbf{Ł}_3$. $V_3 = \left\{1, \frac{1}{2}, 0\right\} \subset V_5 = \left\{1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0\right\}$.

Teorema 8.3.16 *(cf. [47]) Seja $2 \leq m < n < \aleph_0$ e seja $k \geq 2$. Seja $Taut(\mathbf{X})$ o conjunto das tautologias do sistema $\boldsymbol{X}$.*

$$Taut(\boldsymbol{Ł}_n) \subseteq Taut(\boldsymbol{Ł}_m) \text{ sse } k(m-1) = (n-1).$$

Demonstração. Para uma detalhada demonstração desse teorema cf. [1, p. 60ss]. ■

Esse resultado é reforçado pelo seguinte teorema.

Teorema 8.3.17 *(cf. [1]) Seja $2 \leq m < n < \aleph_0$ e seja $Taut(\mathbf{X})$ o conjunto das tautologias do sistema $\boldsymbol{X}$.*

$$\text{Existe } \alpha \in Taut(\boldsymbol{Ł}_m) \text{ tal que } \alpha \notin Taut(\boldsymbol{Ł}_n).$$

Demonstração. Cf. [1, p. 63s]. ■

Corolário 8.3.18 *Seja $2 \leq m < n < \aleph_0$ e seja $Taut\,(\mathbf{X})$ o conjunto das tautologias do sistema $\boldsymbol{X}$. Então:*

$$Taut\,(\text{Ł}_n) \subset Taut\,(\text{Ł}_m) \text{ sse } k\,(m-1) = (n-1)\,.$$

Assim, no caso particular de sistemas Ł_m e Ł_n tal que $2 \leq m < n < \aleph_0$ e tal $k\,(m-1) \neq (n-1)$ então, pelo Corolário 8.3.18, temos que não é o caso de $Taut\,(\text{Ł}_n) \subset Taut\,(\text{Ł}_m)$. Nesse caso, os sistemas Ł_m e Ł_n serão incomparáveis a respeito do conjunto de tautologias; cada sistema terá tautologias que não são tautologias do outro sistema.

Exemplo 8.3.19 *Sejam $m = 3$ e $n = 4$. Como $k\,(m-1) \neq (n-1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então não é o caso que $Taut\,(\text{Ł}_3) \subset Taut\,(\text{Ł}_6)$. Considere, por exemplo, a fórmula $\alpha = ((p \to \neg p) \to p) \to p$. Então, $\models_3 \alpha$, mas $\not\models_6 \alpha$, pois se $v_6\,(p) = \frac{4}{5}$ ou $v_6\,(p) = \frac{3}{5}$, então $v_6\,(\alpha) = \frac{4}{5}$. Porém, como veremos no seguinte teorema, a relação inversa é estabelecida, isto é: $Taut\,(\text{Ł}_6) \subset Taut\,(\text{Ł}_3)$.*

Com efeito, a relação de inclusão estrita entre Ł_6 e Ł_3 é um caso particular de um teorema mais geral.

Teorema 8.3.20 *(cf. [1]) Sejam $(m-1)$ um número primo tal que $(m-1) > 1$ e $Taut\,(\mathbf{X})$ o conjunto das tautologias do sistema $\boldsymbol{X}$. Então:*

$$Taut\,(\text{Ł}_{\aleph_0}) \subset Taut\,(\text{Ł}_{km}) \subset \ldots \subset Taut\,(\text{Ł}_{2m}) \subset Taut\,(\text{Ł}_m) \subset Taut\,(\text{Ł}_2)\,.$$

Conectivos de restauração das Ł_n

Motivados pelos Teoremas 8.3.16 e 8.3.17, a seguir definiremos um novo conectivo em cada sistema Ł_n, para mostrar que tais conectivos constituem conectivos de restauração local para cada sistema Ł_n que seja um fragmento de Ł_m, com $2 \leq m < n < \aleph_0$ e $k\,(m-1) = (n-1)$. Com ajuda de tais conectivos, propomos recuperar em cada sistema Ł_n as fórmulas α, tais que $\alpha \in Taut\,(\text{Ł}_m)$ e $\alpha \notin Taut\,(\text{Ł}_n)$.

Na Seção 8.3, mostramos a maneira de definir conectivos de restauração local $\blacktriangledown_{[n]}$ de Ł_2 em Ł_n, para qualquer n em termos dos operadores J. Seguindo a mesma ideia, a seguir definiremos conectivos $\blacktriangledown_{[m,n]}$ e, posteriormente, demonstraremos que os conectivos $\blacktriangledown_{[m,n]}$ são conectivos de restauração local de sistemas Ł_m em sistemas Ł_n.

Definição 8.3.21 *Sejam $m, n, k \in \mathbb{N}$, tais que $k(m-1) = (n-1)$ e $k > 1$.*

$$I_{[m,n]} =_{def} \{0 \leq j \leq n-1 : j \neq ki, \text{ para todo } 0 \leq i \leq m-1\}.$$

$$\blacktriangledown_{[m,n]}\alpha =_{def} \bigvee_{j \in I_{[m,n]}} J_{[j,n]}(\alpha).$$

Como em cada lógica n-valorada Ł_n existem n operadores $J_{[j,n]}$ com $0 \leq j \leq n-1$, então em cada sistema Ł_n que seja um fragmento de Ł_m, com $2 \leq m < n < \aleph_0$ e $k(m-1) = (n-1)$ existem $n - m$ operadores $J_{[j,n]}$ com $0 \leq j \leq n-1$ e $j \neq ki$.

Exemplo 8.3.22 *Seja $\text{Ł}_m = \text{Ł}_4$ e seja $\text{Ł}_n = \text{Ł}_7$. Então, $I_{[m,n]} = \{1, 3, 5\}$. Portanto, $\blacktriangledown_{[4,7]}\alpha =_{def} J_{[5,7]}(\alpha) \vee J_{[3,7]}(\alpha) \vee J_{[1,7]}(\alpha)$. Considerando a Definição 8.3.7, a tabela para o conectivo $\blacktriangledown_{[4,7]}$ é:*

	$\blacktriangledown_{[4,7]}$
1	0
$\frac{5}{6}$	1
$\frac{4}{6}$	0
$\frac{3}{6}$	1
$\frac{2}{6}$	0
$\frac{1}{6}$	1
0	0

Observação 8.3.23 *Nossa Definição 8.3.10 é um caso particular de nossa Definição 8.3.21 do conectivo $\blacktriangledown_{[m,n]}$. Quando $m = 2$, $I_{[2,n]} = \{j \in \mathbb{N} : 0 < j < n-1\}$ e, portanto, $\blacktriangledown_{[2,n]}(\alpha) = J_{[1,n]} \vee \ldots \vee J_{[n-2,n]} = \bigvee_{j=1}^{n-2} J_{[j,n]}(\alpha)$.*

Em 2.0.18 apresentamos uma definição geral da função $sub(\alpha)$ a partir da qual obtemos as subfórmulas da fórmula α. Como $\blacktriangledown_{[m,n]}\alpha =_{def} \bigvee_{j\in I_{[m,n]}} J_{[j,n]}(\alpha)$, então $sub\left(\blacktriangledown_{[m,n]}\alpha\right) = \bigcup\left\{\left\{J_{[j_1,n]}(\alpha) \vee \ldots \vee J_{[j_l,n]}(\alpha)\right\}, sub\left(J_{[j_1,n]}(\alpha)\right), \ldots, sub\left(J_{[j_l,n]}(\alpha)\right)\right\}$.

Exemplo 8.3.24 *Considere os seguintes exemplos:*

1. Seja $\text{Ł}_m = \text{Ł}_3$ e seja $\text{Ł}_n = \text{Ł}_5$. $J_{[2,5]}(\alpha) \notin sub\left(\blacktriangledown_{[3,5]}\alpha\right)$, pois $\frac{2}{4} = \frac{k1}{k2} \in D_n$.

2. Seja $\text{Ł}_m = \text{Ł}_3$ e seja $\text{Ł}_n = \text{Ł}_5$. $J_{[1,5]}(\alpha) \in sub\left(\blacktriangledown_{[3,5]}\alpha\right)$, pois $\frac{1}{4} \neq \frac{ki}{k(m-1)}$, para todo $\frac{ki}{k(m-1)} \in V_m$.

DAT para Ł_n - Ł_m

Observação 8.3.25 *Sejam $m, n, k \in \mathbb{N}$ tais que $k(m-1) = (n-1)$, com $k > 1$. Se $0 \leq i \leq m-1$, então $0 \leq ki \leq n-1$.*

Lema 8.3.26 *Sejam $2 \leq m < n < \aleph_0$ tais que $k(m-1) = (n-1)$ e $k > 1$. Seja $0 \leq i \leq m-1$. Seja v_m uma valoração de Ł_m tal que $v_m(p) = \frac{i}{m-1}$. Defina uma valoração v_n de Ł_n tal que $v_n(p) = \frac{ki}{n-1}$. Logo, se $v_m(\alpha) = \frac{i}{(m-1)}$, então $v_n(\alpha) = \frac{ki}{n-1}$, para quaisquer valorações v_m, v_n e qualquer $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\rightarrow})$.*

Demonstração. Por indução na complexidade de α.

Seja $\alpha = p_i$. Seja $v_m(\alpha) = v_m(p_i) = \frac{i}{m-1}$. Pela Definição, $v_n(p_i) = \frac{ki}{n-1} = v_n(\alpha)$.

Seja $\alpha = \neg\beta$. Se $v_m(\neg\beta) = \frac{i}{m-1}$, então $v_m(\beta) = 1 - \frac{i}{m-1}$. Assim, $v_m(\beta) = \frac{(m-1)-i}{m-1} = \frac{k((m-1)-i)}{k(m-1)} = \frac{k(m-1)-ki}{k(m-1)} = \frac{(n-1)-ki}{n-1} = 1 - v_n(\beta)$, por hipótese de indução. Mas $1 - v_n(\beta) = v_n(\neg\beta) = v_n(\alpha)$.

Seja $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$. Se $v_m(\alpha) = v_m(\beta \rightarrow \gamma) = \frac{i}{m-1}$, então pela Definição 8.3.3, $\frac{i}{m-1} = \min[1, 1 - v_m(\beta) + v_m(\alpha)]$. Sejam $v_m(\beta) = \frac{i_1}{m-1}$ e $v_m(\gamma) = \frac{i_2}{m-1}$. Logo, $v_m(\beta \rightarrow \gamma) = \min\left[1, 1 - \frac{i_1}{m-1} + \frac{i_2}{m-1}\right] = \min\left[1, 1 - \frac{ki_1}{k(m-1)} + \frac{ki_2}{k(m-1)}\right] = \min\left[1, 1 - \frac{ki_1}{n-1} + \frac{ki_2}{n-1}\right] = \min[1, 1 - v_n(\beta) + v_n(\gamma)]$, por hipótese de indução. Mas $\min[1, 1 - v_n(\beta) + v_n(\gamma)] = v_n(\beta \rightarrow \gamma) = v_n(\alpha)$. $\blacksquare$

Lema 8.3.27 *Seja* $2 \leq m < n < \aleph_0$ *tal que* $k(m-1) = (n-1)$. *Seja* $0 \leq i \leq m-1$. *Seja* $\{p_1, \ldots, p_g\} = var(\beta)$. *Seja* v_n *uma valoração de* $\L_n$ *tal que para todo* $1 \leq j \leq g$ *existe* $0 \leq i_j \leq m-1$ *tal que* $v_n(p_j) = \frac{ki_j}{n-1}$. *Defina uma valoração* v_m *de* $\L_m$ *tal que* $v_m(p_j) = \frac{i_j}{m-1}$. *Se* $v_n(\alpha) = \frac{ki}{n-1}$, *então* $v_m(\alpha) = \frac{i}{m-1}$, *para* $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\rightarrow})$ *e* $var(\alpha) \subseteq \{p_1, \ldots, p_g\}$.

Demonstração. Seja $v_m(p)$ uma valoração de $\L_m$ definida a partir de $v_n(p)$ como na hipótese. Logo, podemos definir uma valoração $v_{n'}$ tal que $v_{n'}(p)$ é calculada a partir de $v_m(p)$ como no Lema 8.3.26. É obvio que $v_{n'}(p) = v_n(p)$ e, portanto, o resultado segue do Lema 8.3.26. ■

Teorema 8.3.28 *Seja* $2 \leq m < n < \aleph_0$ *tal que* $k(m-1) = (n-1)$ *e* $k > 1$. *Seja* $\{p_1, \ldots, p_g\} = var(\alpha)$ *o conjunto das variáveis de* α, *para* $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\rightarrow})$.

$$\models_m \alpha \text{ sse } \models_n \alpha \vee \blacktriangledown_{[m,n]} p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[m,n]} p_g. \qquad \left(\text{DAT - } \tfrac{\L_m}{\L_n}\right)$$

Demonstração. $\Longrightarrow$ Assuma $\models_m \alpha$.

Suponha, por absurdo, que $\not\models_n \alpha \vee \blacktriangledown_{[m,n]} p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[m,n]} p_g$. Então, existe alguma valoração $v_n\left(\alpha \vee \blacktriangledown_{[m,n]} p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[m,n]} p_g\right) = \frac{ki}{n-1}$ com $ki \neq n-1$. Daqui, pelas Definições 8.3.3 e 8.3.21, existe alguma valoração v_n tal que $v_n(\alpha) \neq 1$ e $v_n\left(\blacktriangledown_{[m,n]} p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[m,n]} p_g\right) = 0$. Se, para $l = 1, \ldots, g$, $v_n\left(\blacktriangledown_{[m,n]} p_l\right) = 0$ para alguma valoração v_n, então $v_n\left(\blacktriangledown_{[m,n]} p_1\right) = \ldots = v_n\left(\blacktriangledown_{[m,n]} p_g\right) = 0$. Daqui, pela Definição 8.3.21, $v_n\left(\bigvee_{j \in I_{[m,n]}} J_{[j,n]}(p_1)\right) = \ldots = v_n\left(\bigvee_{j \in I_{[m,n]}} J_{[j,n]}(p_g)\right) = 0$, para $j \neq ki$. Então, pelas Definições 8.3.3 e 8.3.7, para todo $l = 1, \ldots, g$ e $0 \leq i_l \leq m-1$, $v_n(p_l) = \frac{ki_l}{n-1}$. Para $l = 1, \ldots, g$ seja $v_m(p_l) = \frac{i_l}{m-1}$. Como $\{p_1, \ldots, p_g\} = var(\alpha)$, então pelo Lema 8.3.27, $v_m(\alpha) = \frac{i}{m-1}$, para $0 \leq i \leq m-1$. Como $ki \neq n-1$, então $i \neq m-1$. Assim, $v_m(\alpha) \neq 1$ para alguma valoração v_m. Absurdo. Portanto, $v_n\left(\alpha \vee \blacktriangledown_{[m,n]} p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[m,n]} p_g\right) = 1$ para toda valoração v_n.

$\Longleftarrow$ Suponha, por contraposição, $\not\models_m \alpha$. Logo, existe v_m tal que $v_m(\alpha) = \frac{i}{m-1}$ com $i \neq m-1$. Considere uma valoração v_m de $\L_m$ tal que $v_m(p_l) = \frac{i_l}{m-1}$, para $l = 1, \ldots, g$

e tal que $v_m(\alpha) \neq 1$. Defina uma valoração v_n de Ł_n tal que $v_n(p_l) = \frac{ki_l}{n-1}$, para $l = 1, \ldots, g$ e $0 \leq i_l \leq m-1$. Pelo Lema 8.3.26, $v_n(\alpha) = \frac{ki}{n-1}$ com $ki \neq n-1$, pois $i \neq m-1$. Portanto, $v_n(\alpha) \neq \frac{n-1}{n-1}$ para uma valoração v_n tal que $v_n(p_l) = \frac{ki_l}{n-1}$, para $l = 1, \ldots, g$ e $0 \leq i_l \leq m-1$. Daqui, e pela Definição 8.3.7, para todo $j \neq ki$ e $l = 1, \ldots, g$, temos que $v_n\left(J_{[j,n]}(p_l)\right) = 0$. Então, pela Definição 8.3.21, $v_n\left(\bigvee_{j \in I_{mn}} J_{[j,n]}(p_1)\right) = \ldots = v_n\left(\bigvee_{j \in I_{mn}} J_{[j,n]}(p_g)\right) = 0$ para $j \neq ki$, isto é, $v_n\left(\blacktriangledown_{[m,n]}p_1\right) = \ldots = v_n\left(\blacktriangledown_{[m,n]}p_g\right) = 0$. Portanto, $v_n\left(\blacktriangledown_{[m,n]}p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[m,n]}p_g\right) = 0$ para uma valoração v_n, com $v_n(\alpha) \neq \frac{n-1}{n-1}$. Assim, $v_n\left(\alpha \vee \blacktriangledown_{[m,n]}p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[m,n]}p_g\right) \neq 1$ para uma valoração v_n. Logo, $\nvDash_n \alpha \vee \blacktriangledown_{[m,n]}p_1 \vee \ldots \vee \blacktriangledown_{[m,n]}p_g$. ■

Sistemas $\aleph_0$ e $\aleph_1$

Como notamos anteriormente, a generalização da proposta trivalorada inclui sistemas com infinitos valores de verdade, que podem ser contáveis ou incontáveis..

Definição 8.3.29 *Seja V_n um conjunto de valores (de verdade) tal que:*

$$V_n = \left\{ \begin{array}{c} \frac{k}{l} : 0 \leq k \leq l, \text{ com } k, l \in \mathbb{N} \text{ e } l \neq 0, \text{ se } n = \aleph_0 \\ x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1, \text{ se } n = \aleph_1 \end{array} \right\}$$

Definição 8.3.30 *Seja $D_n = \{1\}$ o conjunto de valores distinguidos de cada sistema Ł_n.*

Definição 8.3.31 $v_n : For\left(\Sigma^{\text{Ł}_n}\right) \to V_n$ *é uma função valoração de $\text{Ł}_{\aleph_0}$ e $\text{Ł}_{\aleph_1}$ sse satisfaz as condições 2-5 da Definição 8.3.3 e satisfaz, respectivamente:*

1. $v_n(\alpha) = \frac{k}{l}$, *para $\alpha \in prop$ e $k, l \in \mathbb{N}$, tais que $0 \leq k \leq l$ e $l \neq 0$.*

2. $v_n(\alpha) = k$, *para $\alpha \in prop$ e $k \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq k \leq 1$.*

Em [47, p. 141] os dois seguintes teoremas, pelos quais são vinculados os sistemas n-valorados com $n \in \mathbb{N}$ e o sistema $\text{Ł}_{\aleph_0}$, são formulados:

Teorema 8.3.32 *Sejam* $2 \leq m < Ł_{\aleph_0}$ $2 \leq n \leq Ł_{\aleph_0}$ *e seja* $n-1$ *divisor de* $m-1$, *então:*

$$Ł_m \subseteq Ł_n.$$

Teorema 8.3.33 *Seja* $Taut\,(\mathbf{X})$ *o conjunto das tautologias do sistema* $\mathbf{X}$. *Então:*

$$Taut\,(Ł_{\aleph_0}) = \bigcap_{1 \leq n \leq \aleph_0} Taut\,(Ł_n)\,.$$

Finalmente, notamos que os sistemas infinitamente valorados $\mathbf{Ł}_{\aleph_0}$ e $\mathbf{Ł}_{\aleph_1}$ coincidem no conjunto de tautologias.

8.4 Observações valoradas

$n-$LFUs

Os sistemas n-valorados de Łukasiewicz, com $n > 2$, são paracompletos com relação à negação $\neg$; nesses sistemas o conectivo $\neg$ não satisfaz o PTE. Além de apresentarmos um conectivo de restauração local nas premissas para o sistema $\mathbf{Ł}_3$, desenvolvendo assim a perspectiva de recuperação das **LFIs**, neste capítulo desenvolvemos em detalhe a perspectiva das **LFUs**: apresentamos conectivos de determinação e demonstramos como recuperar o PTE acrescentando fórmulas indeterminadas na conclusão. Demonstramos que os sistemas infinitamente valorados constituem infinitos exemplos de **LFUs**. Neste capítulo demonstramos dois DATs. Por meio do primeiro deles demonstramos a maneira de recuperarmos a lógica bivalorada clássica no ambiente de cada lógica multivalorada. Por meio do segundo DAT vinculamos dois sistemas da hierarquia de sistemas n-valorados. Demonstramos, assim, que o conectivo de contingência de $\mathbf{Ł}_3$, em particular, e os conectivos de indeterminação dos sistemas $\mathbf{Ł}_n$, em geral, são conectivos de restauração local na conclusão.

Tal como no caso do sistema paracompleto de Åqvist, e a diferença do sistema paracompleto de Bočvar, nos sistemas n-valorados de Łukasiewicz é possível validar a versão em termos da relação de conclusão única do PTE. Tal como no sistema $\mathbf{Å}_3$, nos sistemas $\mathbf{Ł}_n$ uma fórmula disjuntiva $\alpha \vee \beta$ tem valor designado se, e somente se, as fórmulas α ou β têm valor designado. Por causa dessa característica da disjunção, os conectivos $\blacktriangledown_{[n]}$ e $\blacktriangledown_{[m,n]}$ de contingência ou indeterminação validam o PTEG e, portanto, resultam em conectivos de completude na perspectiva das **LFUs** com conclusão única.

Propagação e restauração

Na seção dedicada às lógicas do sem-sentido mostramos que a versão inferencial do Princípio ECQ, que não é válida na lógica de Halldén, pode ser restaurada se acrescentarmos premissas de restauração de sentido. Com efeito, em $\mathbf{H}_3$ temos:

$$p \wedge \neg p \nvDash_{\mathbf{H}} q, \text{ mas } \#p, p \wedge \neg p \vDash_{\mathbf{H}} q.$$

Como em $\mathbf{H}_3$ o conectivo de restauração local $\#$ é propagado e retropropagado na assinatura $\Sigma^{\neg\wedge}$, temos que se vale $\#p$, então vale $\#\neg p$ e que se vale tanto $\#p$ quanto $\#\neg p$, então vale $\#\left(p \wedge \neg p\right)$. Desse modo, em $\mathbf{H}_3$ temos, também:

$$\#\left(p \wedge \neg p\right), p \wedge \neg p \vDash_{\mathbf{H}} q.$$

De modo análogo, na lógica paracompleta $\mathbf{\AA}_3$ o conectivo M de restauração local em conclusão é propagado na assinatura $\Sigma^{\neg\vee}$, de modo que além de termos:

$$\vDash_{\mathbf{A}} p \vee \neg p \vee Mp.$$

temos também:

$$\vDash_{\mathbf{A}} p \vee \neg p \vee M\left(p \vee \neg p\right).^{21}$$

[21]Em $\mathbf{\AA}_3$ temos que $v_{\mathbf{A}}\left(M\alpha\right) = 1$ sse $v_{\mathbf{A}}\left(\alpha\right) = \frac{1}{2}$ sse $v_{\mathbf{A}}\left(\neg\alpha\right) = \frac{1}{2}$ sse $v_{\mathbf{A}}\left(M\neg\alpha\right) = 1$. Assim, $M\alpha \vDash_{\mathbf{A}} M\neg\alpha$ e $M\neg\alpha \vDash_{\mathbf{A}} M\alpha$. E se $v_{\mathbf{A}}\left(M\alpha\right) = v_{\mathbf{A}}\left(M\beta\right) = 1$, então $v_{\mathbf{A}}\left(\alpha\right) = v_{\mathbf{A}}\left(\beta\right) = \frac{1}{2}$. Então, $v_{\mathbf{A}}\left(\left(\alpha \vee \beta\right)\right) = \frac{1}{2}$. Portanto, $v_{\mathbf{A}}\left(M\left(\alpha \vee \beta\right)\right) = 1$. Assim, $Ma, M\beta \vDash_{\mathbf{A}} M\left(\alpha \vee \beta\right)$. Pelo contrário, não temos que se $v_{\mathbf{A}}\left(M\left(\alpha \vee \beta\right)\right) = 1$, então $v_{\mathbf{A}}\left(M\alpha\right) = v_{\mathbf{A}}\left(M\beta\right) = 1$. Em $\mathbf{\AA}_3$ temos que $M\left(\alpha \vee \beta\right) \nvDash_{\mathbf{A}} M\alpha$ ou $M\left(\alpha \vee \beta\right) \nvDash_{\mathbf{A}} M\beta$.

Mas no caso do conectivo $\blacktriangledown_{[n]}$ das lógicas n-valoradas, a propagação não é satisfeita para o conectivo $\to$. Com efeito, como mostramos na Proposição 8.3.11, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que $\blacktriangledown_{[n]}p, \blacktriangledown_{[n]}q \nvDash_n \blacktriangledown_{[n]}(p \to q)$. Assim, considere a fórmula $\neg(p \to \neg p) \vee \neg(\neg p \to p)$. Temos que

$$\nvDash_n (\neg(p \to \neg p) \vee \neg(\neg p \to p)).$$

Para isso, considere, em particular, uma lógica $\mathbf{Ł}_n$ com $n = (2 \cdot m) - 1$ e $m \geq 1$. Nesse caso, existe uma valoração v_n de $\mathbf{Ł}_n$ tal que $v_n(p) = \frac{(n+1)/2}{n-1}$, de modo que $v_n(p) = v_n(\neg p) = \frac{(n+1)/2}{n-1}$ e, portanto, $v_n(\neg(p \to \neg p)) = v_n(\neg(\neg p \to p)) = 0$. Porém, tal como nos outros casos, podemos recuperar a tautologia clássica com ajuda do conectivo de restauração local $\blacktriangledown_{[n]}$. Assim temos que

$$\vDash_n (\neg(p \to \neg p) \vee \neg(\neg p \to p)) \vee \blacktriangledown_{[n]}p.$$

No entanto, de modo distinto do que acontece nos sistemas $\mathbf{H}_3$ e $\mathbf{Å}_3$, em $\mathbf{Ł}_n$ temos que

$$\nvDash_n (\neg(p \to \neg p) \vee \neg(\neg p \to p)) \vee \blacktriangledown_{[n]}(\neg(p \to \neg p) \vee \neg(\neg p \to p)).$$

Considerando essas situações diversas, sugerimos a seguinte proposição:

Proposição 8.4.1 *Seja Σ uma assinatura do sistema $\boldsymbol{L}$ tal que a relação de consequência semântica $\vDash_{\mathbf{L}}$ de $\boldsymbol{L}$ é padrão, seja $\vee \in \Sigma_2^{\mathbf{L}}$ uma disjunção padrão e seja $\alpha(p) \in For(\Sigma)$ uma fórmula que depende apenas da variável proposicional p. Se ® $\in \Sigma_1^{\mathbf{L}}$ é um conectivo unário propagado em Σ, então podemos demonstrar que:*

$$se \ \vDash_{\mathbf{L}} \alpha(p) \vee ®p, \ então \ \vDash_{\mathbf{L}} \alpha(p) \vee ®\alpha(p).$$

E se ® $\in \Sigma_1^{\mathbf{L}}$ é um conectivo unário retropropagado em Σ, então podemos demonstrar que:

$$se \ \vDash_{\mathbf{L}} \alpha(p) \vee ®\alpha(p), \ então \ \vDash_{\mathbf{L}} \alpha(p) \vee ®p.$$

Demonstração. Assuma $\models_{\mathbf{L}} \alpha(p) \vee ®p$. Como a relação de consequência semântica de $\mathbf{L}$ e a disjunção são padrão, então temos que $v_{\mathbf{L}}(\alpha(p)) \in D$ ou $v_{\mathbf{L}}(®p) \in D$. Se $v_{\mathbf{L}}(\alpha(p)) \in D$, então $v_{\mathbf{L}}(\alpha(p) \vee ®\alpha(p)) \in D$. Se $v_{\mathbf{L}}(®p) \in D$, então como o conectivo ® é propagado na assinatura Σ, $v_{\mathbf{L}}(®\alpha(p)) \in D$, para toda $\alpha \in For(\Sigma)$. Assim, $v_{\mathbf{L}}(\alpha(p) \vee ®\alpha(p)) \in D$. Daqui, $\models_{\mathbf{L}} \alpha(p) \vee ®\alpha(p)$.

Assuma $\models_{\mathbf{L}} \alpha(p) \vee ®\alpha(p)$. Suponha que $v_{\mathbf{L}}(®\alpha(p)) \in D$. Como o conectivo ® é retropropagado na assinatura Σ e $\alpha(p) \in For(\Sigma)$ depende apenas da variável p, temos que $v_{\mathbf{L}}(®p) \in D$. Daqui, $v_{\mathbf{L}}(\alpha(p) \vee ®p) \in D$. E também no caso em que $v_{\mathbf{L}}(\alpha(p)) \in D$, temos $v_{\mathbf{L}}(\alpha(p) \vee ®p) \in D$. Daqui, $\models_{\mathbf{L}} \alpha(p) \vee ®p$. ■

Capítulo 9

Lógicas Construtivas

Neste capítulo apresentaremos os sistemas de lógica intuicionista e de lógica minimal seguindo a estratégia de definir conectivos de restauração em premissas. Apresentaremos três DATs e três conectivos de restauração. Definiremos os conectivos de restauração para **LI** e para **LM** em termos de princípios lógicos clássicos. Por meio de DATs, vincularemos os sistemas **LI** e **LM** com **LC**. No final do capítulo proporemos um conectivo de restauração alternativo em **LM** definido a partir de um princípio não aceito pela lógica **LI**. Demonstraremos, assim, um DAT alternativo para vincular **LM** e **LI**. Finalmente, realizaremos algumas observações relativas à propriedade de (retro)propagação e proporemos uma versão alternativa de recuperação de **LC** em **LI.**

9.1 Lógica Intuicionista e Lógica Minimal

Apresentação

O intuicionismo é uma das vertentes do construtivismo. O construtivismo é um ponto de vista normativo com respeito aos métodos e objetos da matemática, porquanto não apenas interpreta a matemática de acordo com certos princípios construtivos, mas também rejeita os métodos e resultados que não concordam com tais princípios (cf. [30]). A linha construtivista considera que os objetos matemáticos devem ser construídos ou computados. Os objetos da matemática são construções mentais de um sujeito criativo ideal. O raciocínio matemático consiste na construção de estruturas matemáticas. Para demonstrar um teorema que afirma a existência de certos objetos, deve ser dada, segundo o construtivismo, uma construção daqueles objetos cuja existência é asseverada. Daqui que os objetos matemáticos e as verdades matemáticas não sejam descobertos mas construídos.

Os fundamentos da matemática intuicionista foram apresentados por Luitzen E. J. Brouwer em 1907. Porém, foi no ano seguinte, logo depois de ter finalizado a sua tese doutoral, que Brouwer notou que a sua linha da matemática requeria uma revisão dos princípios da lógica clássica. Desde o ano 1912 até o ano 1928, Brouwer prosseguiu com a construção da matemática intuicionista, propondo explicitamente uma matemática divergente da matemática clássica. Em particular, Brouwer apresentou uma quantidade de princípios lógicos cuja validade não deveria, segundo ele, ser aceita pela matemática intuicionista. A lógica, segundo Brouwer, é uma parte da matemática: a matemática é pressuposta na formulação dos princípios lógicos. No intuicionismo, a matemática não pode ser fundamentada na lógica, é a lógica que depende da matemática.

Entre os princípios lógicos não aceitos pela matemática intuicionista, Brouwer salienta o Princípio de Terceiro Excluído (PTE) e o Princípio da Dupla Negação (DN):

$$\alpha \vee \neg\alpha \tag{PTE}$$

$$\neg\neg\alpha \to \alpha \tag{DN.}$$

Para entender a rejeição brouweriana a esses princípios clássicos, é fundamental entender a interpretação intuicionista das constantes lógicas. A interpretação intuicionista é conhecida como BHK, em honra a Brouwer, Arend Heyting e Andrei Kolmogorov. A interpretação BHK dos conectivos não é baseada na noção de verdade, como na matemática clássica, mas na noção informal ou intuitiva de demonstração. Essa interpretação foi apresentada, de modo independente, por Kolmogorov [39] e por Heyting [31] e é baseada nas ideias de Brouwer, quem usou implicitamente o conceito de *demonstração como construção* na sua tese de 1907. A proposta de Kolmogorov é considerar as proposições α, β, etc como problemas; o objetivo do cálculo é dar um método geral para resolver problemas. Kolmogorov não apresenta uma definição da noção de *problema*, mas apresenta diferentes exemplos deles. Um desses problemas é, por exemplo, achar quatro números inteiros x, y, z, n tais que a relação $x^n + y^n = z^n$ seja satisfeita. Um outro dos problemas apresentados por Kolmogorov [39, p. 329], que merece destaque, é o seguinte: "concedida uma expressão racional para o número π, isto é, $\pi = \frac{m}{n}$, achar uma expressão análoga para o número e".[1] Como Kolmogorov advertiu, esse problema é similar —em estrutura— ao problema de achar a raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$, suposto que já tenha sido dada uma das raízes de tal equação. Tanto o problema de achar a expressão racional da constante e, quanto o problema de achar a restante raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$ têm estrutura condicional. Um problema condicional $\alpha \rightarrow \beta$ expressa que se tivermos uma solução para o problema α, a partir dela poderemos obter uma solução para o problema β. Com efeito, a solução desses dois problemas depende da prévia demonstração da expressão racional de π e da prévia resolução de uma das raízes da equação, respectivamente. No entanto, pese à semelhança em estrutura, os dois problemas condicionais têm diferente conteúdo. A demonstração da expressão racional do número π é impossível e, consequentemente, o problema mesmo, segundo Kolmogorov, carece de conteúdo. A demonstração de que um problema é impossível e de que, portanto, o problema carece de conteúdo é uma solução de tal problema. Desse modo, problemas cuja solução é impossível têm solução e devem ser aceitos em um cálculo de problemas. Esse tipo de problema é diferente do problema —também apresentado como exemplo por Kolmogorov— de demonstrar a falsidade do Teorema de Fermat, que os intuicionistas não aceitaram como um tipo

[1] A tradução é nossa. *Provided that the number π is expressed rationally, say, $\pi = \frac{m}{n}$, to find an analogous expression for the number e.*

O número e, conhecido também como *número de Euler*, é, tal como o número π, um número irracional. O valor exacto do número e não pode ser expresso como um número finito de cifras decimais ou com decimais periódicos.

de problema.[2] Neste ponto Kolmogorov sustenta a definição brouweriana da negação. Segundo Brouwer, a proposição α *é falsa* deve ser entendida como α *acarreta uma contradição*. Assim, o problema $\neg\alpha$ é definido em termos de $\perp$ como $\alpha \rightarrow \perp$. Considerando que não existe uma solução para $\perp$, então o problema $\neg\alpha$ expressa que a solução do problema α é impossível. Demonstrar que a solução do problema α é impossível constitui uma solução do problema $\neg\alpha$. Com base nessa interpretação, Kolmogorov mostra que o problema $\alpha \vee \neg\alpha$ não pode ser aceito como postulado em um cálculo de problemas; aceitar $\alpha \vee \neg\alpha$ significaria que, dado um método geral para solucionar problemas, para todo problema α, ora é achada uma solução para α, ora —a partir da suposição da existência da solução para α— é obtida uma solução para $\perp$. Kolmogorov assinala que todo aquele que não considera a si próprio um ser onisciente deve rejeitar $\alpha \vee \neg\alpha$ da lista de problemas por ele solucionados. Os postulados do cálculo de problemas proposto por Kolmogorov são problemas elementares cuja solução é assumida como conhecida. A solução de problemas matemáticos e lógicos não é um fato subjetivo. Segundo Kolmogorov, as soluções dessa clase de problemas têm uma propriedade especial de validade geral. As soluções dos problemas matemáticos e lógicos podem ser apresentadas de modo que sejam inteligíveis para qualquer um e necessariamente são reconhecidas como soluções corretas. Porém, tal necessidade e a validade geral têm um certo caráter ideal, pois é baseada na pressuposição de que as soluções são construções de uma inteligência superior, de um sujeito criativo ideal.

A interpretação dos conectivos proposta por Heyting foi dada, não em termos de solução de problemas, mas em termos de construção de demonstrações. Heyting apresenta condições suficientes e necessárias para asseverar expressões matemáticas. Segundo Heyting, toda proposição matemática α exige uma construção matemática de α; a construção de α é uma demonstração da proposição α. Nessa interpretação, diz-se que não existe demonstração de $\perp$, e a demonstração de $\neg\alpha$ é um método para transformar toda demonstração de α em uma demonstração de $\perp$. Assim, a demonstração de $\neg\alpha$

[2] Segundo Kolmogorov [39, p. 329], o problema 2: *To prove the falsity of Fermat's theorem* (...) *does not yet constitute a particular intuitionistic claim.*

expressa que α não tem demonstração. Nesta interpretação, então, ter uma demonstração de $\alpha \vee \neg\alpha$ equivaleria a ter, para toda α, ora uma demonstração de α, ora uma demonstração de $\neg\alpha$ e, portanto, uma demonstração de que α não tem demonstração. Daí que a fórmula $\alpha \vee \neg\alpha$ não pode ser aceita. A rejeição à fórmula $\alpha \vee \neg\alpha$ acarreta a rejeição à fórmula $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ por parte de Kolmogorov e Heyting. Como eles consideram aceitável a fórmula $\neg\neg\alpha \vee \neg\alpha$, então se eles aceitarem DN, poderiam obter uma demonstração de $\alpha \vee \neg\alpha$.

Tanto Heyting quanto Kolmogorov apresentaram sistemas formais. O cálculo de problemas de Kolmogorov apresentado em [39] é formalmente idêntico à lógica intuicionista brouweriana, formalizada por Heyting em 1930. Nesses sistemas, nem PTE nem DN são aceitos. Assim, a matemática intuicionista e, portanto, a lógica intuicionista resultam, em um sentido, em sistemas mais fracos do que os sistemas da matemática e lógica clássicas. Porém, em [28], Valerii I. Glivenko estabeleceu dois resultados fundamentais vinculando a lógica proposicional clássica e a lógica proposicional intuicionista. Os dois *Teoremas de Glivenko* são:

1. Se $\vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$, então $\vdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg\alpha$.

2. Se $\vdash_{\mathbf{LC}} \neg\alpha$, então $\vdash_{\mathbf{LI}} \neg\alpha$.

A rigor, não se pode demonstrar a mesma proposição nos sistemas clássico e intuicionista (**LI**). O que foi demonstrado é que existe uma tradução da linguagem de um sistema na linguagem do outro sistema, de modo que, quando diz-se que α é demonstrável em ambos os cálculos, tratam-se na verdade de α e de sua *tradução* $t(\alpha)$ na outra linguagem.

Definição 9.1.1 *Sejam* $\mathbf{L}_1 = (\mathbb{L}_\mathbf{1}, \Vdash_\mathbf{1})$ *e* $\mathbf{L_2} = (\mathbb{L}_\mathbf{2}, \Vdash_\mathbf{2})$ *duas lógicas, em que* $\mathbb{L}_\mathbf{1}$ *e* $\mathbb{L}_\mathbf{2}$ *são linguagens formais e* $\Vdash_\mathbf{1}$ *e* $\Vdash_\mathbf{2}$ *são relações de consequência. Uma* tradução *é uma função* $t : For^{\mathbb{L}_\mathbf{1}} \rightarrow For^{\mathbb{L}_\mathbf{2}}$ *tal que, para todo subconjunto* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For^{\mathbb{L}_\mathbf{1}}$*, se* $\Gamma \Vdash_\mathbf{1} \alpha$*, então* $t(\Gamma) \Vdash_\mathbf{2} t(\alpha)$*, em que* $t(\Gamma) = \{t(\beta) : \beta \in \Gamma\}$*.*

Os dois *Teoremas de Glivenko* são considerados hoje em dia entre os primeiros resultados na *Teoria das Traduções entre Lógicas*. Em 1933, K. Gödel e G. Gentzen propuseram, de modo independente, traduções da lógica clássica na lógica intuicionista, com o objetivo de demonstrar a consistência relativa da lógica clássica com relação à lógica intuicionista. Esse resultado ficou conhecido como *Tradução negativa de Gödel-Gentzen*.[3]

Definição 9.1.2 *Seja* $t : For^{\mathbf{LC}} \to For^{\mathbf{LI}}$ *uma função que associa cada fórmula* α *da linguagem (proposicional) clássica* ***LC*** *na assinatura* $\Sigma^{\neg\wedge\vee\to}$ *com uma fórmula* $t(\alpha)$ *da linguagem da lógica (proposicional) intuicionista* ***LI*** *na assinatura* $\Sigma^{\neg\wedge\to}$*. A função* t *é definida recursivamente do seguinte modo:*

- $t(\alpha) = \neg\neg\alpha$, se $\alpha \in prop$,
- $t(\neg\alpha) = \neg t(\alpha)$,
- $t(\alpha \wedge \beta) = t(\alpha) \wedge t(\beta)$,
- $t(\alpha \vee \beta) = \neg(\neg t(\alpha) \wedge \neg t(\beta))$,
- $t(\alpha \to \beta) = t(\alpha) \to t(\beta)$.

Definição 9.1.3 *Uma* tradução t *entre duas lógicas* $\mathbf{L_1} = (\mathbb{L}_\mathbf{1}, \Vdash_\mathbf{1})$ *e* $\mathbf{L_2} = (\mathbb{L}_\mathbf{2}, \Vdash_\mathbf{2})$ *é* conservativa *se para todo subconjunto* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(\mathbb{L}_\mathbf{1})$ *vale que* $\Gamma \Vdash_\mathbf{1} \alpha$ *se, e somente se,* $t(\Gamma) \Vdash_\mathbf{2} t(\alpha)$ *(cf. [24]).*

Com base na tradução negativa de Gödel-Gentzen foi demonstrado o seguinte teorema.

[3] Essa tradução foi proposta por Gödel para demonstrar a consistência da aritmética clássica com relação à aritmética intuicionista. Porém, para efeitos de nossa apresentação, restringimos a tradução à linguagem proposicional.

Teorema 9.1.4 $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$ *sse* $t(\Gamma) \vdash_{\mathbf{LI}} t(\alpha)$. *Em particular,* $\alpha \wedge \neg\alpha$ *seria demonstrável para alguma fórmula* α *em* ***LC*** *se, e somente se,* $t(\alpha \wedge \neg\alpha) = t(\alpha) \wedge \neg t(\alpha)$ *for demonstrável em* ***LI***.

Exemplo 9.1.5 *Tradução de* ***LC*** *em* ***LI***

1. Seja $\alpha = p \vee \neg p$, então $t(\alpha) = \neg(\neg\neg\neg p \wedge \neg\neg\neg\neg p)$

2. Seja $\alpha = p \wedge \neg p$, então $t(\alpha) = \neg\neg p \wedge \neg\neg\neg p$

3. Seja $\alpha = \neg\neg p \rightarrow p$, então $t(\alpha) = \neg\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg p$

Esse resultado foi antecipado por Kolmogorov em [38] para um fragmento da lógica intuicionista, conhecido como lógica minimal ou lógica intuicionista minimal (**LM**).

Sistemas axiomáticos para LI, LM e LC

As primeiras apresentações da lógica intuicionista e minimal foram dadas, a diferença das lógicas multivaloradas, em termos de sistemas axiomáticos *à la* Hilbert, por meio de sistemas de dedução natural ou sistemas de sequentes. A nossa apresentação dos sistemas **LC, LI** e **LM** será em termos do método axiomático *à la* Hilbert e em termos do método de *Dedução Natural*, introduzido por Gentzen em [27]. A versão do sistema de dedução natural proposto por Prawitz em [60] será por nós utilizada nas demonstrações dos teoremas DATs. Apresentaremos, também, uma semântica em termos de modelos de Kripke adequada aos sistemas **LI** e **LM**, com o objetivo de demonstrar a invalidade de certas inferências em cada um desses sistemas.

Nesta seção apresentaremos dois sistemas axiomáticos —*à la* Hilbert— que, como é sabido, são equivalentes.

Definição 9.1.6 *O sistema proposicional* ***LI*** *proposto por Heyting em [31] tem 1-11 como esquemas de axiomas e modus ponens e adjunção como regras de inferência.*[4] O sistema é escrito na assinatura $\Sigma^{\neg\wedge\vee\rightarrow}$.

[4] Heyting observa que a necessidade da regra de adjunção depende da forma dos esquemas de axiomas.

1. $\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)$
2. $(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$
3. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \wedge \gamma))$
4. $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$
5. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
6. $(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta$
7. $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
8. $(\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha)$
9. $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)$
10. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
11. $((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \neg\beta)) \to \neg\alpha$

modus ponens de α e $\alpha \to \beta$ pode-se inferir β.

adjunção de α e β pode-se inferir $\alpha \wedge \beta$.

Definição 9.1.7 *Os esquemas de axioma 1-9 junto com as regras de inferência modus ponens e adjunção conformam o cálculo positivo intuicionista* $\boldsymbol{LI}^+$*.*

Definição 9.1.8 *Uma axiomatização alternativa de* ***LI****, proposta em [13] e escrita na assinatura* $\Sigma^{\wedge\vee\to\perp}$*, contém os seguintes esquemas de axiomas e* modus ponens *como única regra de inferência.*

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$

4. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$

5. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$

6. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

7. $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

8. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$

9. $\perp\rightarrow \beta$

modus ponens de α e $\alpha \rightarrow \beta$ pode-se inferir β.

Nessa assinatura, o conectivo da negação $\neg$ é definido do seguinte modo:

Definição 9.1.9 $\neg\alpha =_{def} \alpha \rightarrow\perp$

Como já antecipamos, a lógica minimal ou lógica intuicionista minimal **LM** foi proposta por Kolmogorov em 1925. Em [38], Kolmogorov propôs a primeira formalização de **LM**, um cálculo no qual, tal como em **LI**, as fórmulas $\alpha \vee \neg\alpha$ e $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ não são aceitas. **LM** é um fragmento de **LI**, que diverge de **LI** pelo fato de não aceitar *ex contradictione quodlibet*

$$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \tag{ECQ}$$

nem *ex falsum sequitur quodlibet*

$$\perp\rightarrow \alpha. \tag{EFSQ}$$

Como já dissemos, a interpretação BHK dos conectivos garante que não existe solução do problema ou demonstração de $\perp$. Sob a interpretação em termos de solução de problemas propiciada por Kolmogorov em [39], a fórmula condicional $\perp\rightarrow \alpha$ resulta aceita no seu cálculo de problemas, tal como no sistema de Heyting. Porém, o cálculo apresentado em [38] não é baseado na interpretação dos conectivos em termos de solução de problemas. Nesse artigo anterior, Kolmogorov estabelece que uma afirmação condicional $\alpha \to \beta$ significa que, uma vez convencidos da verdade de α, temos que aceitar a verdade de β. Sob essa interpretação, divergente da interpretação BHK, o princípio ECQ e, portanto, o princípio EFSQ, não resultam intuitivos e, por causa disso, não são aceitos por Kolmogorov (cf. [33]). Assim, o cálculo **LM**, apresentado no artigo de 1925, constitui um fragmento do sistema **LI** apresentado em 1932.[5]

O sistema axiomático para **LM** pode ser obtido na assinatura $\Sigma^{\neg\wedge\vee\to}$ substraindo da primeira axiomatização do sistema **LI** o esquema de axioma 10 (ECQ). Alternativamente, o cálculo proposicional **LM** pode ser obtido acrescentando a fórmula $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$ ou a fórmula $(\alpha \to \neg\beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha)$ à lógica proposicional intuicionista positiva.[6] Uma axiomatização de **LM** na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\vee\to}$ pode ser obtida substraindo na segunda axiomatização de **LI** o esquema de axioma 9 (EFSQ). Nesse sentido, o sistema **LM** pode ser construído pelo acréscimo de, apenas, a constante de falsidade $\perp$ à assinatura $\Sigma^{\wedge\vee\to}$ do cálculo positivo intuicionista. Assim construída, a lógica minimal constitui uma extensão linguística da lógica positiva intuicionista. O sistema axiomático **LM** construído nessa assinatura não tem qualquer axioma para $\perp$, **LM** é constituido apenas pelos axiomas 1-8 de $\mathbf{LI}^+$. Definindo a negação a partir de $\perp$, é claro que a força do fragmento negativo do cálculo depende, então, da força do fragmento estritamente positivo. Como exemplo desse fenômeno, é simples notar que o *Princípio de redução ao absurdo minimal*

$$(\alpha \to \neg\beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha) \tag{Abs. M.}$$

é simplesmente uma instância do axioma positivo

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))\,.$$

[5] Um cálculo equivalente ao cálculo minimal apresentado por Kolmogorov em [38] foi proposto por Johansson em [35] (cf. [58]). A axiomatização proposta por Johansson é na assinatura $\Sigma^{\perp\to\wedge\vee}$.

[6] Em [58, p. 99s] é demonstrado que o Ax. 10 não é teorema do cálculo minimal de Kolmogorov.

De modo similar, o *Princípio de contraposição minimal*

$$(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha) \qquad \text{(Ctr. M.)}$$

é simplesmente uma instância do teorema positivo

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma)) \, .$$

O cálculo proposicional clássico, por sua vez, pode ser obtido acrescentando qualquer um dos seguintes esquemas de axiomas a **LI**:

PTE $\alpha \vee \neg\alpha$

DN $\neg\neg\alpha \to \alpha$

Assim, o sistema clássico diverge do sistema intuicionista na aceitação ou não dos princípios PTE e DN e das consequências que deles se derivam.[7] É interessante notar que, embora **LM** seja um sistema mais fraco do que **LI**, pois nele nem ECQ nem EFSQ são aceitos, o acréscimo de PTE a **LM** permite obter DN e, consequentemente, ECQ como teoremas. Desse modo, aceitar o PTE em **LI** ou **LM** como esquema de axioma implica na obtenção de DN como teorema. De modo análogo, a aceitação de DN como esquema de axioma implica na derivação de PTE como teorema. Assim, acrescentando PTE ou DN tanto a **LI** quanto a **LM** é possível obter o cálculo **LC**.

A equivalência dos princípios PTE e DN é expressa por Heyting dizendo que as duas afirmações seguintes são equivalentes (cf. [32]).

I Para toda afirmação matemática e todo sistema matemático, o Princípio de Terceiro Excluído se cumpre.

[7]Existem outras diferenças entre **LC** e **LI - LM** além da mera satisfação de certos princípios lógicos por uma e não pela outra (construtividade de **LI**, existência de modelos finitos de **LC**, etc.), que não pretendemos abordar aqui. Para os efeitos do nosso estudo, basta simplesmente diferenciar **LC** de **LI** e de **LM** com os princípios acima mencionados.

II Para toda afirmação matemática e todo sistema matemático, o Princípio de Reciprocidade das Espécies Complementares se cumpre.

Embora em **LI** nem PTE nem DN sejam aceitos, as seguintes inferências valem em **LI** (cf. [26]):

i. $\alpha \vee \neg\alpha \Vdash \alpha \vee (\alpha \to \beta)$;

ii. $\alpha \vee (\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) \Vdash \alpha \vee \neg\alpha$;

iii. $\alpha \vee \neg\alpha \Vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$;

iv. $\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to (\alpha \vee \neg\alpha) \Vdash \alpha \vee \neg\alpha$.

Em [32] Heyting chama a atenção sobre a inferência iii. Segundo Heyting, iii expressa que, se o PTE vale para uma afirmação matemática particular α, então para α vale também o Princípio de Reciprocidade das Espécies Complementares, isto é, DN. Heyting contrasta a equivalência das afirmações I e II com a inversa da inferência iii. Sendo I e II afirmações equivalentes e sendo iii uma inferência aceitável em **LI**, iii', isto é, a inferência inversa de iii, não é admitida em **LI**. Com efeito:

iii.' $\neg\neg\alpha \to \alpha \nVdash_{\mathbf{LI}} \alpha \vee \neg\alpha$.

Para demonstrar a invalidade da inferência iii' apresentaremos, a seguir, uma semântica adequada ao sistema **LI**.

Posteriormente, analisaremos a diferença entre a validade de iii e a invalidade de iii' em termos da nossa proposta dos conectivos de restauração local.

Semânticas para LI e LM

A interpretação dos conectivos em termos de demonstração proposta por Brouwer, Heyting e Kolmogorov é considerada a primeira semântica —natural— do intuicionismo. Apelando ao significado dos conectivos proposto na interpretação BHK, as regras de inferência são aceitas ou rejeitadas no intuicionismo. Em meados dos anos 30 foram propostas as primeiras semânticas formais, algébricas e topológicas, para a lógica intuicionista (cf. [31]). Nós apresentaremos a semântica proposta por S. Kripke, motivada na semântica de mundos possíveis proposta, também por ele, para a lógica modal. Em [40] Kripke apresenta uma semântica modelística para a lógica intuicionista de predicados de Heyting. Porém, nós apenas apresentaremos a semântica correspondente ao fragmento proposicional do sistema intuicionista.

A intuitição que está por trás da semântica da lógica intuicionista proposta por Kripke é a consideração de que os objetos e as demonstrações da matemática são construções produzidas pela actividade mental do sujeito criativo ideal. Esse processo de construção acontece no tempo e, em cada instante do tempo, o sujeito criador pode escolher diferentes cenários futuros para continuar o processo de construção. Assim, os diferentes cenários possíveis estão ordenados de modo parcial por meio de uma relação que pode ser pensada como uma relação de posterioridade temporal (cf. [33]). Tal ideia pode ser formalizada em termos de modelos, considerando um conjunto de estados ou cenários possíveis e uma relação de ordem entre tais cenários; em cada cenário possível certos objetos matemáticos são construídos pelo sujeito criativo.

Definição 9.1.10 *Um modelo (proposicional) de Kripke para* ***LI*** *é uma tripla* $\mathfrak{K} = \langle K, R, v\rangle$, *em que* $K \neq \emptyset$ *é um conjunto habitado de nós (de* $\mathfrak{K}$*) parcialmente ordenado pela relação binária* $R \subseteq K \times K$, *isto é,* R *é uma relação transitiva e reflexiva em* K, *e* $v : prop \times K \to \{1, 0\}$ *é uma função de valoração no conjunto* $prop \times K$ *e tal que:*

$$se\ v(p,k) = 1\ e\ \langle k, k_1\rangle \in R,\ então\ v(p,k_1) = 1,\ para\ cada\ p \in prop\ e\ k, k_1 \in K.$$

Notação 9.1.11 *Alternativamente, quando* $\langle k, k_1\rangle \in R$, *escreveremos* kRk_1.

A função binária v expressa que uma determinada fórmula é verdadeira ou falsa em um determinado nó k. A noção de verdade é relativizada a um certo nó do modelo: se $v(p,k) = 1$, então a fórmula p é verdadeira com respeito ao nó k. A última condição da função v é conhecida como *persistência*: se uma fórmula p é satisfeita em um nó k, então p será satisfeita nos nós k_1 tais que kRk_1.

Definição 9.1.12 *Dado um modelo $\langle K, R, v\rangle$, a função valoração v é estendida recursivamente às fórmulas complexas do seguinte modo:*

1. $v(\alpha \wedge \beta, k) = 1$ sse $v(\alpha, k) = 1$ e $v(\beta, k) = 1$,

2. $v(\alpha \vee \beta, k) = 1$ sse $v(\alpha, k) = 1$ ou $v(\beta, k) = 1$,

3. $v(\alpha \to \beta, k) = 1$ sse para todo k_1 tal que kRk_1, $v(\alpha, k_1) = 0$ ou $v(\beta, k_1) = 1$.

4. para todo $k \in K$, não é o caso que $v(\perp, k) = 1$ (alternativamente, $v(\perp, k) = 0$, para todo $k \in K$),

   Como $\neg\alpha =_{def} \alpha \to\perp$, a condição —derivada— para as fórmulas negadas é:

5. $v(\neg\alpha, k) = 1$ sse para todo k_1 tal que kRk_1, se $v(\alpha, k_1) = 1$, então $v(\perp, k_1) = 1$. Mas como não é o caso que $v(\perp, k) = 1$, para algum $k \in K$, então $v(\neg\alpha, k) = 1$ sse para todo k_1 tal que kRk_1, $v(\alpha, k_1) = 0$.

Proposição 9.1.13 *Para toda fórmula $\alpha \in For\left(\Sigma^{\perp\wedge\vee\to}\right)$, se $v(\alpha, k) = 1$ e kRk_1, então $v(\alpha, k_1) = 1$.*

Demonstração. Por indução na estrutura de α.

Seja $\alpha = p$. Então a proposição vale pela Definição 9.1.10.

Seja $\alpha =\perp$. Como, para todo $k \in K$, não é o caso que $v(\perp, k) = 1$, então a proposição é satisfeita trivialmente.

Seja $\alpha = \beta \wedge \gamma$. Suponha que $v(\beta \wedge \gamma, k) = 1$. Então, $v(\beta, k) = 1$ e $v(\gamma, k) = 1$. Como temos kRk_1, então, por hipótese de indução $v(\beta, k_1) = 1$ e $v(\gamma, k_1) = 1$. Assim, $v(\beta \wedge \gamma, k_1) = 1$.

Seja $\alpha = \beta \vee \gamma$. Suponha que $v(\beta \vee \gamma, k) = 1$. Então, $v(\beta, k) = 1$ ou $v(\gamma, k) = 1$. Assuma, sem perda de generalidade, que $v(\beta, k) = 1$. Como temos kRk_1, então, por hipótese de indução $v(\beta, k_1) = 1$. Assim, $v(\beta \vee \gamma, k_1) = 1$.

Seja $\alpha = \beta \to \gamma$. Suponha que $v(\beta \to \gamma, k) = 1$ e que kRk_1. Como k_1Rk_1, então se $v(\beta, k_1) = 0$, $v(\beta \to \gamma, k_1) = 1$. E se $v(\gamma, k_1) = 1$, então $v(\beta \to \gamma, k_1) = 1$. Assim, $v(\beta \to \gamma, k_1) = v(\alpha, k_1) = 1$. ■

Assim, a condição de persistência é satisfeita por toda fórmula $\alpha \in For\left(\Sigma^{\perp\wedge\vee\rightarrow}\right)$. A condição de persistência expressa que se uma fórmula α for verdadeira em um determinado nó k do modelo, então α é verdadeira em todo nó k_1 com o qual k é relacionado. Se interpretarmos tal relação como uma relação de posterioridade temporal entre cenários possíveis, então a condição de persistência expressa que se uma fórmula α é verdadeira em um cenário k, ela vai continuar sendo verdadeira em todo cenário possível k_1 que está no futuro de k. Assim, as construções do sujeito criativo ideal persistem no tempo, elas não podem ser "derrubadas" com o decorrer do tempo.

Definição 9.1.14 *Uma fórmula α é* válida em um nó *k de um modelo de Kripke $\mathfrak{K}$ sse $v(\alpha, k) = 1$. Nesse caso, escreveremos $k \models \alpha$. Caso contrário, escrevemos $k \nvDash \alpha$.*

Definição 9.1.15 *Uma fórmula α é* válida em um modelo *$\mathfrak{K} = \langle K, R, v\rangle$ sse $v(\alpha, k) = 1$, para todo $k \in K$. Se α é válida no modelo $\mathfrak{K}$, escrevemos $\mathfrak{K} \models \alpha$. Se uma fórmula α é válida em todo modelo $\mathfrak{K}$, escreveremos simplesmente $\models \alpha$. Caso contrário, escrevemos $\nvDash \alpha$.*

Definição 9.1.16 *Se todos os teoremas de um sistema formal **L** são válidos em um modelo $\mathfrak{K}$, então $\mathfrak{K}$ é chamado de* modelo para ***L***.

Definição 9.1.17 *Uma inferência $\Gamma \Vdash \alpha$ é válida se para todo nó $k \in K$ de toda estrutura de Kripke $\mathfrak{K} = \langle K, R, v\rangle$, se $k \models \gamma$, para cada $\gamma \in \Gamma$, então $k \models \alpha$.*

Em [40], Kripke demonstra a correção e completude do sistema **LI** com respeito à semântica de modelos proposta, isto é, demonstra que uma fórmula α é demonstrável no cálculo de Heyting se, e somente se, α é válida em todo modelo reflexivo e transitivo de Kripke $\mathfrak{K}$.[8] Kripke mostra, assim, que os modelos reflexivos e transitivos $\mathfrak{K}$ são modelos para o sistema intuicionista **LI**.

Desse modo, usando essa classe de modelos de Kripke, podemos demonstrar a invalidade em **LI** de inferências válidas na lógica clássica. Considere os seguintes exemplos.

[8] A rigor, Kripke apresenta a completude com respeito à semântica de árvores. Porém, ele demonstra a equivalência da semântica de modelos e de árvores.

Exemplo 9.1.18 *Para mostrar que* $\nvDash_{\mathbf{LI}} \alpha \vee \neg\alpha$, *considere um modelo* $\mathfrak{K}_1 = \langle K, R, v\rangle$ *tal que* $K = \{k_1, k_2\}$, $R = \{\langle k_1, k_1\rangle, \langle k_2, k_2\rangle, \langle k_1, k_2\rangle\}$, $v(p, k_2) = 1$ *e* $v(p, k_1) = 0$.

Como $v(p, k_2) = 1$ *e* $k_1 R k_2$, *então* $v(\neg p, k_1) = 0$. *Como* $v(p, k_1) = 0$, *então* $v(p \vee \neg p, k_1) = 0$. *Assim,* $k_1 \nvDash p \vee \neg p$.

Exemplo 9.1.19 *Para mostrar que* $\nvDash_{\mathbf{LI}} \neg\neg\alpha \to \alpha$ *considere um modelo* $\mathfrak{K}_2 = \langle K, R, v\rangle$ *tal que* $K = \{k_1, k_2\}$, $R = \{\langle k_1, k_1\rangle, \langle k_1, k_2\rangle, \langle k_2, k_2\rangle\}$ *e* $v(p, k_2) = 1$ *e* $v(p, k_1) = 0$.

Como $k_1 R k_2$ *e* $v(p, k_2) = 1$, *então* $v(\neg p, k_1) = 0$. *Como* $k_2 R k_2$ *e* $v(p, k_2) = 1$, *então* $v(\neg p, k_2) = 0$. *Assim,* $v(\neg\neg p, k_1) = 1$. *Mas como* $v(p, k_1) = 0$ *e* $k_1 R k_1$, *então* $v(\neg\neg p \to p, k_1) = 0$.

Exemplo 9.1.20 *Para* $\neg\alpha \to \neg\beta, \beta \nvDash_{\mathbf{LI}} \alpha$, *considere um modelo* $\mathfrak{K}_3 = \langle K, R, v\rangle$ *tal que* $K = \{k_1, k_2\}$, $R = \{\langle k_1, k_1\rangle, \langle k_2, k_2\rangle, \langle k_1, k_2\rangle\}$, $v(p, k_2) = v(q, k_1) = v(q, k_2) = 1$ *e* $v(p, k_1) = 0$.

Como $k_1 R k_2$ *e* $v(p, k_2) = 1$, *então* $v(\neg p, k_1) = 0$. *Como* $k_2 R k_2$ *e* $v(p, k_2) = 1$, *então* $v(\neg p, k_2) = 0$. *Daqui, como* $k_1 R k_1$ *e* $k_1 R k_2$, *então* $v(\neg p \to \neg q, k_1) = 1$. *Portanto,* $v(\neg p \to \neg q, k_1) = v(q, k_1) = 1$, *mas* $v(p, k_1) = 0$. *Assim,* $k_1 \vDash \neg p \to \neg q$ *e* $k_1 \vDash q$, *mas* $k_1 \nvDash p$.

Exemplo 9.1.21 *Para* $\neg\neg\alpha \to \alpha \nvDash_{\mathbf{LI}} \alpha \vee \neg\alpha$, *considere o modelo* $\mathfrak{K}_4 = \langle K, R, v\rangle$ *tal que* $K = \{k_1, k_2, k_3\}$, $R = \{\langle k_1, k_1\rangle, \langle k_2, k_2\rangle, \langle k_1, k_2\rangle, \langle k_1, k_3\rangle, \langle k_3, k_3\rangle\}$ *e* $v(p, k_2) = 1$, $v(p, k_1) = v(p, k_3) = 0$.

Como $v(p, k_2) = 1$ *e* $k_1 R k_2$, *então* $v(\neg p, k_1) = 0$. *Como* $v(\neg p, k_1) = v(p, k_1) = 0$, *então* $v(p \vee \neg p, k_1) = 0$. *Porém, como temos que* $v(\neg p, k_3) = 1$, *então temos que* $v(\neg\neg p, k_1) = v(\neg\neg p, k_3) = 0$. *E, como temos* $v(p, k_2) = 1$, *então para todo* $k \in K$, $v(\neg\neg p, k) = 0$ *ou* $v(p, k) = 1$. *Daqui,* $v(\neg\neg p \to p, k_1) = 1$. *Portanto,* $k_1 \vDash \neg\neg p \to p$, *mas* $k_1 \nvDash p \vee \neg p$.

Exemplo 9.1.22 *Para* $\nvDash_{\mathbf{LI}} \alpha \vee (\alpha \to \beta)$, *considere um modelo* $\mathfrak{K}_5 = \langle K, R, v\rangle$ *tal que* $K = \{k_1, k_2\}$, $R = \{\langle k_1, k_1\rangle, \langle k_2, k_2\rangle, \langle k_1, k_2\rangle\}$. *Seja* $v(p, k_2) = 1$ *e* $v(p, k_1) = v(q, k_1) = v(q, k_2) = 0$.

Como $k_1 R k_2$, então $v(p \to q, k_1) = 0$. E como $v(p, k_1) = 0$, obtemos $v(p \vee (p \to q), k_1) = 0$. Portanto, $k_1 \nvDash p \vee (p \to q)$.

A semântica de modelos para a lógica minimal foi proposta em [25] a partir da modificação dos modelos de Kripke para a lógica intuicionista.

Definição 9.1.23 *Um modelo (proposicional) de Kripke para* ***LM*** *na assinatura $\Sigma^{\neg\to\wedge\vee}$ é uma quádrupla $\mathfrak{K} = \langle K, R, Q, v \rangle$, em que $\langle K, R \rangle$ é como na Definição 9.1.10, $Q \subseteq K$ é um conjunto fechado pela relação R, isto é, se $k \in Q$ e kRk_1, então $k_1 \in Q$ e $v : prop \times K \to \{1, 0\}$ é uma função de valoração no conjunto $prop \times K$ tal como em 9.1.10 e tal que as condições 1-3 da definição 9.1.12 são satisfeitas e a condição 5 de 9.1.12 é substituída pela seguinte condição 5':*

5' *$v(\neg\alpha, k) = 1$ sse para todo $k_1 \in K$ tal que kRk_1, $v(\alpha, k_1) = 0$ ou $k_1 \in Q$.*[9]

O conjunto Q é considerado um conjunto de estados de informação inconsistente e é usado —apenas— na condição de valoração das fórmulas com estrutura $\neg\alpha$. A condição de persistência é satisfeita nos modelos de Kripke para **LM**.

Proposição 9.1.24 *Para toda fórmula $\alpha \in For(\Sigma^{\neg\wedge\vee\to})$, se $v(\alpha, k) = 1$ e kRk_1, então $v(\alpha, k_1) = 1$.*

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 9.1.13, desconsiderando o caso $\alpha = \perp$ e considerando o caso $\alpha = \neg\beta$. Suponha que $v(\neg\beta, k) = 1$ e que kRk_1. Seja k_2 tal que $k_1 R k_2$. Daqui $v(\beta, k_2) = 0$ ou $k_2 \in Q$. Se $k_2 \in Q$, então $v(\neg\beta, k_1) = 1$. Caso contrário, temos que kRk_2 e que $v(\beta, k_2) = 0$. Daqui, $v(\neg\beta, k_1) = 1$. ■

[9] Em [25, p. 40] a semântica para **LM** é definida na assinatura $\Sigma^{\perp\to\wedge\vee}$. No caso da função valoração ser definida nessa assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\vee\to}$, a condição 4 em 9.1.12 é suprimida (cf. [25, p. 40]). Assim, em um modelo para **LM** pode ser o caso de $v(\perp, k) = 1$ para algum $k \in K$. Como consequência da condição 4 ser suprimida, a condição —derivada— 5 não pode ser obtida. Tal como notamos quando apresentamos a axiomática de **LM** na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\vee\to}$, a constante de falsidade $\perp$ não introduz qualquer condição semântica.

Exemplo 9.1.25 *(cf. [23, p. 225]) Para mostrar que* $\nvDash_{\mathbf{LM}} (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$ *considere um modelo* $\mathfrak{K}_1 = \langle K, R, Q, v \rangle$ *tal que* $R = \{\langle k, k_2 \rangle, \langle k, k_1 \rangle, \langle k, k \rangle, \langle k_1, k_1 \rangle, \langle k_2, k_2 \rangle\}$, $K = Q = \{k, k_1, k_2\}$. *Seja* $(p, k) = v(p, k_1) = v(p, k_2) = 1$ *e* $v(q, k) = 0$.

Como $k_2, k_1, k \in Q$, kRk, kRk_1 *e* kRk_2, *então* $v(\neg p, k) = 1$. *E temos que* $v(p, k) = 1$. *Daqui,* $v(p \wedge \neg p, k) = 1$. *Porém,* $v(q, k) = 0$. *Como* kRk, *então* $v((p \wedge \neg p) \rightarrow q, k) = 0$. *Assim,* $k \nvDash (p \wedge \neg p) \rightarrow q$.

Exemplo 9.1.26 *Para mostrar que* $\alpha \rightarrow \beta \nvDash_{\mathbf{LM}} \neg\alpha \vee \beta$ *considere um modelo* $\mathfrak{K}_2 = \langle K, R, Q, v \rangle$ *tal que* $K = \{k_1, k_2\}$, $Q = \emptyset$, $R = \{\langle k_1, k_1 \rangle, \langle k_2, k_2 \rangle, \langle k_1, k_2 \rangle\}$ *e* $v(p, k_1) = v(q, k_1) = 0$ *e* $v(p, k_2) = v(q, k_2) = 1$.

Como existe k_2 *tal que* k_1Rk_2 *e tal que* $k_2 \notin Q$ *e* $v(p, k_2) = 1$, *então* $v(\neg p, k_1) = 0$. *Como* $v(q, k_1) = v(\neg p, k_1) = 0$, *então* $v(\neg p \vee q, k_1) = 0$. *Como* k_1Rk_1 *e* $v(p, k_1) = 0$, k_1Rk_2 *e* $v(q, k_2) = 1$, *então* $v(p \rightarrow q, k_1) = 1$. *Portanto,* $k_1 \vDash p \rightarrow q$, *mas* $k_1 \nvDash \neg p \vee q$.

Exemplo 9.1.27 *Para mostrar que* $\alpha \vee \neg\alpha, \neg\neg\alpha \nvDash_{\mathbf{LM}} \alpha$ *considere um modelo* $\mathfrak{K}_3 = \langle K, R, Q, v \rangle$ *tal que* $K = Q = \{k\}$, $R = \{\langle k, k \rangle\}$ *e* $v(p, k) = 0$.

Como $v(p, k) = 0$ *e* kRk, *então* $v(\neg p, k) = 1$. *Daqui,* $v(p \vee \neg p, k) = 1$. *E como* $k \in Q$, *então* $v(\neg\neg p, k) = 1$. *Assim, temos que* $v(p \vee \neg p, k) = v(\neg\neg p, k) = 1$, *mas* $v(p, k) = 0$. *Portanto,* $k \vDash p \vee \neg p$, $k \vDash \neg\neg p$, *mas* $k \nvDash p$.

DATs para Lógicas construtivas

Motivações

Em 3.3 lembramos a maneira na qual os sistemas paraconsistentes $\mathbf{C}_1$ e **mbC** conseguem recuperar as derivações de **LC** por meio de um conectivo $\circ$ de consistência. Indicamos que o cálculo $\mathbf{C}_1$ recupera as derivações de **LC** da seguinte maneira. Sendo $p_1, \ldots, p_n$ as variáveis proposicionais que ocorrem em $\Gamma \cup \{\alpha\}$:

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha \text{ sse } \neg(p_1 \wedge \neg p_1), \ldots, \neg(p_n \wedge \neg p_n), \Gamma \vdash_{\mathbf{C}_1} \alpha. \qquad \text{(DAT - C}_1\text{)}$$

Assim, em particular, já pela sua definição, o conectivo de consistência restaura *localmente* o esquema do Princípio de Não Contradição, perdido em $\mathbf{C}_1$, isto é, recupera tal princípio para as fórmulas atômicas de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ e, pela propriedade de propagação, também para todas as fórmulas de $\Gamma \cup \{\alpha\}$.

No caso do sistema paraconsistente **mbC** a situação é diferente. Sendo primitivo na linguagem, o operador $\circ$ de **mbC** não é, ele mesmo, um conectivo da lógica consistente. Porém, $\circ\alpha$ força *localmente* a validade de um princípio lógico não paraconsistente. Se olharmos com atenção o esquema de axioma (bc1) $\circ\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta))$, fica claro que $\circ\alpha$ pretende restaurar a consistência *local* de α forçando localmente a validade do princípio de *ex contradictione sequitur quodlibet* para α, inválido em **mbC** e em quaisquer lógicas paraconsistentes.

O raciocínio clássico, consistente, é recuperado nos sistemas $\mathbf{C}_1$, **mbC**, etc. através de um operador que *restaura localmente* os princípios consistentes perdidos. Em termos gerais, a estratégia é a seguinte: introduzir na lógica paraconsistente, por meio dos conectivos de consistência, instâncias particulares de princípios lógicos não aceitos nela. Por meio dos conectivos —primitivos ou definidos— de consistência, instâncias de princípios consistentes são reintroduzidos no raciocínio paraconsistente de modo local. Como resultado desse estratagema, as inferências da lógica maior, consistente, são restauradas na lógica menor, paraconsistente.

Nesta seção mergulharemos nessa estratégia propondo conectivos de restauração para as lógicas paracompletas **LI** e **LM**. Apresentaremos, a seguir, três DATs e três conectivos de restauração. Definiremos os conectivos de restauração para **LI** e para **LM** em termos de princípios lógicos clássicos. Por meio de DATs, vincularemos o sistema paracompleto **LI** com **LC** e o sistema paracompleto e paraconsistente **LM** com **LI** e **LC**.

Finalmente, afastando-nos dessa estratégia, proporemos um DAT alternativo para vincular **LM** e **LI**. Nesse caso, proporemos um conectivo de restauração para **LM** definido a partir de um princípio não aceito pela lógica maior **LI**.

DATs para LC e LI

Como notamos, o cálculo **LC** pode ser construído acrescentando os axiomas DN ou PTE a **LM**. Esses dois princípios não são aceitos na lógica paracompleta **LI** e, portanto, seguindo a estratégia de $\mathbf{C}_1$, a partir dele definiremos dois conectivos de restauração para **LI**.

Definição 9.1.28 *Sendo* $\Sigma^{\neg\wedge\vee\rightarrow}$ *a assinatura de* ***LI****, definimos*

1. $\circledast\alpha =_{def} \alpha \vee \neg\alpha$,

2. $\ominus\alpha =_{def} \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$.

Seja $\Delta \subseteq For\,(\Sigma^{\neg\wedge\vee\rightarrow})$ um conjunto de fórmulas. Definimos

$$\circledast\Delta =_{def} \{\circledast\delta \ : \ \delta \in \Delta\} \quad \text{e} \quad \ominus\,\Delta =_{def} \{\ominus\delta \ : \ \delta \in \Delta\}.$$

Usando o fato de que **LI** junto com PTE ou DN equivale a **LC**, obtemos imediatamente o seguinte DAT para **LI** com relação a **LC**.

Teorema 9.1.29 *O cálculo* ***LI*** *recupera as derivações de* ***LC*** *em, alternativamente, uma das seguintes maneiras:*

$$\forall\Gamma\forall\alpha\,[(\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha) \Leftrightarrow \exists\Delta\,(\circledast\Delta, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha)]\,. \qquad (\mathrm{DAT}_0 \text{ - } \mathbf{LI})$$

$$\forall\Gamma\forall\alpha\,[(\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha) \Leftrightarrow \exists\Delta\,(\ominus\Delta, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha)]\,. \qquad (\mathrm{DAT}_0 \text{ - } \mathbf{LI})$$

Demonstração. Suponha que $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$ e considere Δ como sendo o conjunto de todas as fórmulas da linguagem de **LI**. Assim, é imediato que $\circledast\Delta, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Reciprocamente, suponha que $\circledast\Delta, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$, para algum conjunto Δ de fórmulas. Dado que **LC** estende **LI**, e que $\vdash_{\mathbf{LC}} \circledast\delta$, para toda $\delta \in \Delta$, obtemos imediatamente que $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$.

A segunda versão do teorema é demonstrada de maneira análoga. ■

Embora existam similaridades formais entre o DAT para $\mathbf{C}_1$ e o DAT por nós proposto para **LI**, devemos observar uma grande diferença entre os dois resultados: no caso de $\mathbf{C}_1$, o conjunto Δ de premissas com comportamento clássico utilizado para recuperar as inferências de **LC** é dado de maneira explícita, Δ é construído de maneira unívoca a partir do conjunto $\Gamma \cup \{\alpha\}$; Δ é um conjunto de premissas de restauração local, pois depende de Γ e α. Porém, na nossa proposta para **LI**, o conjunto $\circledast\Delta$ de premissas de restauração não é construído explicitamente no enunciado do Teorema 9.1.29. De fato, na demonstração do teorema, Δ é tomado como sendo o conjunto de todas as sentenças da linguagem. Assim, nestes dois DATs, os operadores $\circledast$ e $\ominus$ apenas simulam ser conectivos *locais* de restauração. Na verdade, na demonstração do teorema, acrescentamos, para toda proposição $\alpha \in For\left(\Sigma^{\mathbf{LI}}\right)$, alternativamente, a seguinte afirmação:

$$(\alpha \vee \neg\alpha) \text{ é aceito em } \mathbf{LI.}$$

$$(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \text{ é aceito em } \mathbf{LI}.$$

E é claro, a partir da construção de **LC**, que as inferências de **LC** serão desse modo restauradas em **LI**.

A seguir, proporemos um outro DAT para **LI** e **LC**, construindo de maneira explícita o conjunto de premissas restauração local. No entanto, antes disso apresentaremos os cálculos **LC** e **LI** em termos do *Cálculo de Dedução Natural*, tal como aparece em [60], pois utilizaremos as regras desse cálculo nas demonstrações de nossos DATs.

Dedução Natural para LC, LI e LM

É bem sabido que no sistema de Dedução Natural os conectivos da linguagem dos sistemas lógicos são caracterizados pelas regras de inferência que, com exceção das regras do absurdo, são *regras de introdução* e *regras de eliminação*. Em particular, os sistemas de Dedução Natural para **LC**, **LM** e **LI** na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\vee\rightarrow}$ contêm as mesmas regras de introdução e de eliminação e se diferenciam apenas nas regras do absurdo.

As demonstrações em um sistema de dedução natural podem ser apresentadas como árvores de derivação (árvores de dedução), tal que o topo —folhas— da árvore são as suposições ou hipóteses e a raiz é a fórmula final. As fórmulas que não estão no topo são obtidas das fórmulas que estão acima por meio da aplicação de alguma das regras de inferência do sistema. Como veremos a seguir, por meio da aplicação de algumas regras de inferência certas suposições são canceladas. As suposições que são assim canceladas, são chamadas de abertas. As suposições que não são canceladas por aplicação de regras são chamadas de fechadas.

Como indicamos, os sistemas **LC, LI** e **LM** divergem apenas com relação à regra do absurdo, compartilhando as mesmas regras de introdução e eliminação dos conectivos $\wedge, \vee$ e $\rightarrow$. Essas regras comuns são:

$$I\wedge\ \frac{\alpha \quad \beta}{\alpha\wedge\beta} \qquad\qquad E\wedge\ \frac{\alpha\wedge\beta}{\alpha}$$

$$I\rightarrow\ \frac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\alpha\rightarrow\beta} \qquad\qquad E\rightarrow\ \frac{\alpha \quad \alpha\rightarrow\beta}{\beta}$$

$$I\vee\ \frac{\alpha}{\alpha\vee\beta} \qquad\qquad E\vee\ \frac{\alpha\vee\beta \quad \begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots\\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}[\beta]\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}$$

Observação 9.1.30 *A notação* $\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \psi\end{array}$ *significa que a regra supõe, como hipótese, a existência de uma derivação de* ψ *a partir de* φ*. O cancelamento da hipótese* φ*, denotado* $[\varphi]$*, é resultado da aplicação da regra.*

A respeito das regras do absurdo, a lógica intuicionista aceita uma versão fraca do absurdo clássico $\perp_c$, admitindo apenas a regra $\perp_i$:

$$\perp_i \ \frac{\perp}{\alpha} \qquad\qquad \perp_c \ \frac{\begin{matrix}[\neg\alpha] \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\alpha}$$

Na versão do sistema de dedução natural apresentado por Prawitz, estas duas regras do absurdo recebem as seguintes restrições: em $\perp_i$ a fórmula final α é diferente de $\perp$. E em $\perp_c$ a fórmula final α não é da forma $\beta \rightarrow \perp$.

Observação 9.1.31 *As regras $I \rightarrow$, $E\vee$ e $\perp_c$ são chamadas de* regras de dedução*. As premissas dessas regras não são fórmulas, mas deduções. As restantes regras —$I\wedge$, $I\vee$, $E\wedge$, $E \rightarrow$ e $\perp_i$— são chamadas de* regras próprias*.*

O sistema de Dedução Natural da lógica minimal é caracterizado, na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\vee\rightarrow}$, pelas regras do cálculo positivo. **LM** rejeita tanto a regra $\perp_c$ quanto a regra mais fraca $\perp_i$. A lógica minimal não tem qualquer regra do absurdo. Carecendo de regras de absurdo, a obtenção dos teoremas negativos da lógica minimal depende apenas do uso das regras de Introdução e Eliminação dos conectivos. Em particular, no sistema proposto em [60], instâncias das regras $E \rightarrow$ e $I \rightarrow$ caracterizam a negação minimal:[10]

$$E \rightarrow \ \frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \perp}{\perp} \qquad\qquad I \rightarrow \ \frac{\begin{matrix}[\alpha] \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\alpha \rightarrow \perp}$$

[10] O sistema original de Gentzen contém o conectivo $\neg$ como primitivo. Para tal conectivo são dadas as seguintes regras de eliminação e introdução (cf. [27, p. 186]): $E\neg \ \frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\perp}$ e $I\neg \ \frac{\begin{matrix}[\alpha] \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\neg\alpha}$.

Notação 9.1.32 *Usaremos as letras* Π, Σ, Ω *para denotar deduções (derivações) e usaremos* Γ, Δ *para denotar conjuntos de fórmulas.* $\dfrac{\Pi}{\alpha}$ *denotará uma dedução cuja fórmula final é* α. $\dfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2 \quad \ldots \quad \Pi_n}{\alpha}$ *denotará uma dedução cujas deduções imediatas são* $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ *e cuja fórmula final é* α. $\begin{matrix}\Gamma \\ \Pi\end{matrix}$ *denotará uma dedução* Π *que tem* Γ *como conjunto de suposições. Seja* $\gamma_1 \in \Gamma$, $\begin{matrix}\Gamma & [\gamma_1] \\ \Pi & \end{matrix}$ *denotará uma dedução* Π *que tem* $\Gamma - \{\gamma_1\}$ *como conjunto de suposições.*

Definição 9.1.33 Π *é uma* dedução *(derivação) em um sistema* $\boldsymbol{L}$ de *uma fórmula* α que depende de *um conjunto* Γ *de fórmulas se:*

1. α *é um axioma de* $\boldsymbol{L}$, *então* $\Pi = \alpha$ *é uma dedução em* $\boldsymbol{L}$ *de* α *que depende do conjunto vazio,*

2. α *não é um axioma de* $\boldsymbol{L}$, *então* $\Pi = \alpha$ *é uma dedução em* $\boldsymbol{L}$ *de* α *que depende do conjunto* $\{\alpha\}$,

3. Π_i *é uma dedução em* $\boldsymbol{L}$ *de* α_i *que depende de* Γ_i *para todo* $i \leq n$, *então* $\dfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2 \quad \ldots \quad \Pi_n}{\beta}$ *é uma dedução de* β *em* $\boldsymbol{L}$ *que depende de* Δ, *mostrado que:*

   a) $\dfrac{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_n}{\beta}$ *é uma regra de inferência própria em* $\boldsymbol{L}$ *e* $\Delta = \bigcup \Gamma_i$, *com* $i \leq n$,

   b) $\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 & [\gamma_1] & \Gamma_2 & [\gamma_2] & \ldots & \Gamma_n & [\gamma_n] \\ \Pi_1 & & \Pi_2 & & & \Pi_n & \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & \alpha_n & \end{matrix}}{\beta}$ *é uma instância de uma regra de dedução em* $\boldsymbol{L}$ *e* $\Delta = \bigcup \Gamma_i - \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$.

Definição 9.1.34 Π *é uma dedução no sistema* $\boldsymbol{L}$ *de* α *a partir de* Γ *se* Π *é uma dedução em* $\boldsymbol{L}$ *de* α *que depende de* Γ *ou de algum subconjunto de* Γ*.*

Definição 9.1.35 *A fórmula* α *é* dedutível *de um conjunto* Γ *em um sistema* $\boldsymbol{L}$ *—denotado* $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$*— se existe uma dedução em* $\boldsymbol{L}$ *de* α *a partir de* Γ*.*

Definição 9.1.36 *Uma dedução de* α *no sistema* $\boldsymbol{L}$ *que dependa do conjunto vazio é uma* demonstração *de* α *em* $\boldsymbol{L}$*.*

Definição 9.1.37 *Se existir uma demonstração de* α *no sistema* $\boldsymbol{L}$*, dizemos que* α *é um* teorema *de* $\boldsymbol{L}$*. Nesse caso, escreveremos* $\vdash_{\mathbf{L}} \alpha$*.*

Definição 9.1.38 *Seja* Π *uma dedução no sistema* $\boldsymbol{L}$ *de* α *a partir de* Γ*. O* comprimento da dedução $c(\Pi)$ *de* Π *é um número natural obtido recursivamente da seguinte maneira:*

1. *se* Π *é uma fórmula, então* $c(\Pi) = 1$*,*

2. *se* Π *é* $\dfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2 \quad \ldots \quad \Pi_n}{\alpha}$*, então* $c(\Pi) = c(\Pi_1) + c(\Pi_2) + \ldots + c(\Pi_n) + 1$*.*

Proposição 9.1.39 *As relações de dedutibilidade* $\vdash$ *dos sistemas* $\boldsymbol{LC}$*,* $\boldsymbol{LI}$ e $\boldsymbol{LM}$ *satisfazem as seguintes propriedades:*

1. (reflexividade) $\varphi \vdash \varphi$;

2. se $\vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$;

3. se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$;

4. (corte) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \beta$, então $\Gamma, \Delta \vdash \beta$;

5. (monotonicidade) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$;

6. se $\Gamma, \varphi \vdash \beta$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \beta$;

7. (derivabilidade finita) $\Gamma \vdash \alpha$ sse existe $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que Δ é finito e $\Delta \vdash \alpha$.

DAT para LC e LI

Lembramos que $\circledast\alpha =_{def} \alpha \vee \neg\alpha$ e que $\ominus\alpha =_{def} \neg\neg\alpha \to \alpha$. O conectivo $\circledast$ recupera as derivações de **LC** em **LI** da maneira seguinte.

Teorema 9.1.40 *Para todo conjunto* Γ *e toda* α *tal que* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\left(\Sigma^{\perp\wedge\vee\to}\right)$. *Então:*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha \textit{ sse } \circledast\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha. \tag{DAT$_1$ - \textbf{LI}}$$

Demonstração. Por indução no comprimento da dedução, em Dedução Natural, de $\Gamma \vdash \alpha$.

$\Longrightarrow$ Assuma $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$. Então existe uma dedução Π, no sistema clássico de Dedução Natural, de α a partir de Γ. Caso base: comprimento da dedução $c(\Pi) = 1$. Como o sistema de Dedução Natural na versão de Prawitz não contém axiomas, apenas devemos demonstrar o caso em que $\alpha \in \Gamma$. Se $\alpha \in \Gamma$, então pela propriedade 9.1.39. 3 temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. E pela propriedade de monotonicidade temos que $\circledast\Delta, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$, para todo Δ e, em particular, para $\Delta = \{\alpha\}$.

Se $\alpha \notin \Gamma$, então Π é uma dedução de α a partir de Γ que resulta da aplicação de algumas das regras de inferência para **LC**: $I\wedge$, $E\wedge$, $I\vee$, $E\vee$, $\perp_c$, etc. Como a diferença entre o cálculo de Dedução Natural de **LC** e de **LI** reside nas regras do absurdo, apenas devemos analisar o caso em que α for resultado da aplicação da regra do absurdo clássico.

Seja, então, $c(\Pi) = n$ o comprimento da dedução de α a partir de Γ por meio da regra $\perp_c$. Então, existe uma dedução Σ de $\perp$ a partir de $\neg\alpha, \Gamma$ tal que $c(\Sigma) = m$, com $m < n$.

Por hipótese de indução, temos então que existe uma dedução intuicionista de $\perp$ a partir de $\circledast\perp$,$\neg\alpha, \Gamma$, *i.e.*, $\perp \vee \neg\perp, \Gamma, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{LI}} \perp$. Como $\neg\perp =_{def} \perp\to\perp$ e temos que $\vdash_{\mathbf{LI}} \perp\to\perp$, então por $I\vee$ temos que $\vdash_{\mathbf{LI}} \perp \vee (\perp\to\perp)$ que equivale, por definição de $\neg$, a $\vdash_{\mathbf{LI}} \perp \vee \neg\perp$. Logo, usando o corte obtemos $\neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \perp$. Por $I \to$, temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \neg\alpha \to\perp$, que equivale, pela definição de $\neg$, a $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg\alpha$. Por outro lado, temos que $\neg\alpha, \neg\neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \perp$ a partir do qual obtemos, aplicando a regra $\perp_i$, $\neg\alpha, \neg\neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$.

Como temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg\alpha$, então pela propriedade do corte temos que $\neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Como temos também que $\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$, então aplicando a regra $E\vee$ às duas demonstrações temos que $\alpha \vee \neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Daqui, pela definição de $\circledast$, temos então $\circledast\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$.

$\Longleftarrow$ Assuma $\circledast\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Como **LC** estende **LI,** temos que $\circledast\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$ que, pela definição de $\circledast$ equivale a $\alpha \vee \neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$. Como $\vdash_{\mathbf{LC}} \alpha \vee \neg\alpha$**,** então pela regra do corte, temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$. ■

Exemplo 9.1.41 *Considere os seguintes exemplos:*

1. $\vdash_{\mathbf{LC}} \neg\neg p \to p$, *mas* $\nvdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg p \to p$ *(cf. Exemplo 9.1.21).*

   Porém, $(\neg\neg p \to p) \vee \neg(\neg\neg p \to p) \vdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg p \to p$.

2. $\vdash_{\mathbf{LC}} p \vee (p \to q)$, *mas* $\nvdash_{\mathbf{LI}} p \vee (p \to q)$ *(cf. Exemplo 9.1.22).*

   Porém, $(p \vee (p \to q)) \vee \neg(p \vee (p \to q)) \vdash_{\mathbf{LI}} p \vee (p \to q)$.

3. $\neg p \to q \vdash_{\mathbf{LC}} p \vee q$, *mas* $\neg p \to q \nvdash_{\mathbf{LI}} p \vee q$.

   Porém, $(p \vee q) \vee \neg(p \vee q), \neg p \to q \vdash_{\mathbf{LI}} p \vee q$.

4. $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash_{\mathbf{LC}} p \wedge q$, *mas* $\neg(\neg p \vee \neg q) \nvdash_{\mathbf{LI}} p \wedge q$.

   Porém, $(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q) \vdash_{\mathbf{LI}} p \wedge q$.

5. $\neg p \to \neg q, q \vdash_{\mathbf{LC}} p$, *mas* $\neg p \to \neg q, q \nvdash_{\mathbf{LI}} p$ *(cf. Exemplo 9.1.20).*

   Porém, $p \vee \neg p, \neg p \to \neg q, q \vdash_{\mathbf{LI}} p$.

Um segundo DAT vinculando **LC** e **LI** pode ser obtido trocando o operador $\circledast$ pelo operador $\ominus$ no Teorema 9.1.40. O conectivo $\ominus$ recupera as derivações de **LC** em **LI** do seguinte modo.

Teorema 9.1.42 *Para todo conjunto* Γ *e toda* α, $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\left(\Sigma^{\perp\wedge\vee\to}\right)$. *Então:*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha \text{ sse } \ominus\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha. \qquad (\mathrm{DAT}_2 \text{ - } \mathbf{LI})$$

Demonstração. $\Longrightarrow$ Como no caso anterior, apenas temos que analisar o caso em que α é obtida a partir de Γ pela aplicação da regra $\perp_c$, em uma dedução Π com $c(\Pi) = n \in \mathbb{N}$. Nesse caso, existe uma dedução Σ tal que $c(\Sigma) = m$, com $m < n$ de $\perp$ a partir de $\neg\alpha, \Gamma$. Pela hipótese de indução, $\ominus\perp, \neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \perp$, isto equivale, pela definição de $\ominus$, a $\neg\neg\perp \rightarrow \perp, \neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \perp$. Como $\neg\neg\perp \rightarrow \perp =_{def} ((\perp \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$ e $\vdash_{\mathbf{LI}} ((\perp \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$, pois $\vdash_{\mathbf{LI}} ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$, então $\neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \perp$. Logo, por $I \rightarrow$ temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg\alpha$. Pela reflexividade de $\vdash_{\mathbf{LI}}$ temos $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha \vdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$, e portanto, $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha, \neg\neg\alpha \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$, isto é, $\ominus\alpha, \neg\neg\alpha \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Logo, pela propriedade do corte, considerando o fato de termos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg\alpha$, obtemos $\ominus\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$.

$\Longleftarrow$ Como na demonstração do Teorema 9.1.40, observando que $\ominus\alpha =_{def} \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ e que $\vdash_{\mathbf{LC}} \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$. ■

Exemplo 9.1.43 *Considere os seguintes exemplos:*

1. $\neg p \rightarrow \neg q, q \vdash_{\mathbf{LC}} p$, *mas* $\neg p \rightarrow \neg q, q \nvdash_{\mathbf{LI}} p$. *Porém,* $\neg\neg p \rightarrow p, \neg p \rightarrow \neg q, q \vdash_{\mathbf{LI}} p$.

2. $\neg(p \rightarrow q) \nvdash_{\mathbf{LI}} p \wedge \neg q$, *mas* $\neg\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \wedge \neg q), \neg(p \rightarrow q) \vdash_{\mathbf{LI}} p \wedge \neg q$.

3. $\neg p \rightarrow q \nvdash_{\mathbf{LI}} p \vee q$, *mas* $\neg\neg(p \vee q) \rightarrow (p \vee q), \neg p \rightarrow q \vdash_{\mathbf{LI}} p \vee q$.

4. $\neg(p \wedge \neg q) \nvdash_{\mathbf{LI}} p \rightarrow q$, *mas* $\neg\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q), \neg(p \wedge \neg q) \vdash_{\mathbf{LI}} p \rightarrow q$.

Esses dois Teoremas DATs —9.1.40 e 9.1.42— mostram que toda dedução clássica $\Gamma \Vdash \alpha$, com $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\left(\Sigma^{\perp\wedge\vee\rightarrow}\right)$ pode ser recuperada em **LI** se a transformarmos em uma dedução na qual a conclusão da inferência é acrescentada como única premissa de restauração, isto é, se acrescentarmos —unicamente— $\circledast\alpha$ ou $\ominus\alpha$. Assim, temos que toda dedução clássica Π da forma

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \Pi \\ \alpha \end{array}$$

pode ser transformada em uma dedução intuicionista Π' da forma

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \cup \{\alpha \vee \neg\alpha\} & & \Gamma \cup \{\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha\} \\ \Pi\text{'} & \text{ou} & \Pi\text{'} \\ \alpha & & \alpha \end{array}$$

Apesar da similitude entre os teoremas DATs 9.1.40 e 9.1.42, a seguir mostraremos uma diferença importante entre eles: o Teorema DAT 9.1.40, a diferença do Teorema DAT 9.1.42 pode ser, em um certo sentido, simplificado. Explicaremos tal diferença em termos da (não)propagação dos conectivos de restauração em **LI**.

Proposição 9.1.44 *O conectivo $\circledast$ é propagado em **LI** na assinatura $\Sigma^{\perp\neg\wedge\vee\rightarrow}$:*

1. $\models_{\mathbf{LI}} \circledast\perp$,
2. $\circledast\alpha \models_{\mathbf{LI}} \circledast\neg\alpha$,
3. $\circledast\alpha, \circledast\beta \models_{\mathbf{LI}} \circledast(\alpha \wedge \beta)$,
4. $\circledast\alpha, \circledast\beta \models_{\mathbf{LI}} \circledast(\alpha \vee \beta)$,
5. $\circledast\alpha, \circledast\beta \models_{\mathbf{LI}} \circledast(\alpha \rightarrow \beta)$.

Demonstração. Para 1. Como para todo $k \in K$, $v(\perp, k) = 0$, então $v(\perp \rightarrow \perp, k) = 1$, para todo nó k. Daqui, $v(\perp \vee (\perp \rightarrow \perp), k) = 1$, para todo nó k, que equivale, por definição, a $v(\perp \vee \neg\perp, k) = v(\circledast\perp, k) = 1$, para todo nó k.

Para 2. Assuma que $v(\alpha \vee \neg\alpha, k) = 1$. Então, $v(\alpha, k) = 1$ ou $v(\neg\alpha, k) = 1$. Se $v(\neg\alpha, k) = 1$, então $v(\neg\alpha \vee \neg\neg\alpha, k) = 1$. E se $v(\alpha, k) = 1$, então $v(\neg\alpha, k) = 0$, pois para cada nó $k \in K$, kRk. Por outro lado, pela Proposição 9.1.13, temos que se $v(\alpha, k) = 1$, então para cada nó k_1 tal que kRk_1, $v(\alpha, k_1) = 1$. Em consequência, como k_1Rk_1, $v(\neg\alpha, k_1) = 0$, para cada nó k_1 tal que kRk_1. Então, $v(\neg\neg\alpha, k) = 1$, pois em cada k_1 tal que kRk_1, $v(\neg\alpha, k_1) = 0$. Logo, $v(\neg\alpha \vee \neg\neg\alpha, k) = 1$. Assim, se $v(\alpha \vee \neg\alpha, k) = 1$, $v(\neg\alpha \vee \neg\neg\alpha, k) = 1$.

Para 3. Assuma que $v(\alpha \vee \neg\alpha, k) = 1$ e que $v(\beta \vee \neg\beta, k) = 1$. Então, $v(\alpha, k) = 1$ ou $v(\neg\alpha, k) = 1$ e $v(\beta, k) = 1$ ou $v(\neg\beta, k) = 1$. Se $v(\neg\alpha, k) = 1$, então para todo $k_1 \in K$ tal que kRk_1, $v(\alpha, k_1) = 0$. E, analogamente, se $v(\neg\beta, k) = 1$, então para todo $k_1 \in K$ tal que kRk_1, $v(\beta, k_1) = 0$. Assim, $v(\alpha, k) = 1$ ou para todo $k_1 \in K$ tal que kRk_1, $v(\alpha, k_1) = 0$ e $v(\beta, k) = 1$ ou, para todo $k_1 \in K$ tal que kRk_1, $v(\beta, k_1) = 0$. Se $v(\alpha, k) = v(\beta, k) = 1$, então $v(\alpha \wedge \beta, k) = 1$. E se para todo $k_1 \in K$ tal que kRk_1, $v(\alpha, k_1) = 0$ ou $v(\beta, k_1) = 0$, então $v(\alpha \wedge \beta, k_1) = 0$, para todo k_1 tal que kRk_1. Daqui, $v(\neg(\alpha \wedge \beta), k) = 1$. Portanto, $v((\alpha \wedge \beta) \vee \neg(\alpha \wedge \beta), k) = 1$.

Para 4. Temos que $v(\alpha \vee \neg\alpha, k) = 1$ para um nó $k \in K$ sse $v(\alpha, k) = 1$ ou $v(\neg\alpha, k) = 1$. Mas $v(\neg\alpha, k) = 1$ em um nó $k \in K$ sse para todo nó $k_1 \in K$ tal que kRk_1, $v(\alpha, k_1) = 0$. De modo análogo, para $v(\beta \vee \neg\beta, k) = 1$. Mas temos que $v((\alpha \vee \beta) \vee \neg(\alpha \vee \beta), k) = 0$ sse $v(\alpha \vee \beta, k) = 0$ e $v(\neg(\alpha \vee \beta), k) = 0$. E $v(\alpha \vee \beta, k) = 0$ sse $v(\alpha, k) = 0$ e $v(\beta, k) = 0$. Assim, se $v((\alpha \vee \beta) \vee \neg(\alpha \vee \beta), k) = 0$, então, se $v(\alpha \vee \neg\alpha, k) = 1$ e $v(\beta \vee \neg\beta, k) = 1$, então para todo nó $k_1 \in K$ tal que kRk_1, $v(\alpha, k_1) = 0$ e, para todo nó $k_1 \in K$ tal que kRk_1, $v(\beta, k_1) = 0$. Porém, neste caso, $v(\alpha \vee \beta, k_1) = 0$, para todo nó $k_1 \in K$ tal que kRk_1. E, portanto, $v(\neg(\alpha \vee \beta), k) = 1$. Daqui, $v((\alpha \vee \beta) \vee \neg(\alpha \vee \beta), k) = 1$. Absurdo. Logo, não existe nó $k \in K$ tal que $v(\alpha \vee \neg\alpha, k) = 1$, $v(\beta \vee \neg\beta, k) = 1$ e $v((\alpha \vee \beta) \vee \neg(\alpha \vee \beta), k) = 0$.

Para 5. Tal como nos casos anteriores, se $v(\alpha \vee \neg\alpha, k) = 1$ e $v(\beta \vee \neg\beta, k) = 1$, então $v(\alpha, k) = 1$ ou, para todo $k_1 \in K$ tal que kRk_1, $v(\alpha, k_1) = 0$ e $v(\beta, k) = 1$ ou, para todo $k_1 \in K$ tal que kRk_1, $v(\beta, k_1) = 0$. Se $v(\beta, k) = 1$, então pela Proposição 9.1.13, $v(\beta, k_1) = 1$, para todo $k_1 \in K$ tal que kRk_1. Daqui, $v(\alpha \to \beta, k) = 1$. Caso contrário, $v(\beta, k_1) = 0$, para todo $k_1 \in K$ tal que kRk_1. E se $v(\alpha, k) = 1$, então novamente pela Proposição 9.1.13, temos que $v(\alpha, k_1) = 1$, para todo $k_1 \in K$ tal que kRk_1. Mas se $v(\alpha, k_1) = 1$ e $v(\beta, k_1) = 0$, para todo $k_1 \in K$ tal que kRk_1, então $v(\neg(\alpha \to \beta), k) = 1$. E se $v(\alpha, k_1) = 0$, para todo $k_1 \in K$ tal que kRk_1, então $v(\alpha \to \beta, k) = 1$. Portanto, $v((\alpha \to \beta) \vee \neg(\alpha \to \beta), k) = 1$. ■

Como notamos, o Teorema 9.1.40 garante que as inferências clássicas da forma $\Gamma \Vdash \alpha$ perdidas em **LI** podem ser recuperadas se acrescentarmos a conclusão da inferência como única premissa $\circledast\alpha$ de restauração. Como demonstramos que o conectivo de restauração $\circledast$ usado em tal DAT é propagado em **LI** na assinatura $\Sigma^{\perp\neg\wedge\vee\rightarrow}$, então podemos apresentar uma versão simplificada do Teorema DAT 9.1.40. Nesta nova versão propomos recuperar as inferências clássicas perdidas em **LI** acrescentando apenas premissas de restauração atômicas.

Teorema 9.1.45 *Seja $var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ o conjunto de variáveis proposicionais de α. Então:*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha \text{ sse } \circledast p_1, \ldots, \circledast p_n, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha.$$

Demonstração. Considere $\alpha \in For\left(\Sigma^{\perp\neg\wedge\vee\rightarrow}\right)$ tal que $var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Pela Proposição 9.1.44, temos que $\circledast p_1, \ldots, \circledast p_n \models_{\mathbf{LI}} \circledast\alpha$. Pela completude da semântica de modelos, temos que $\circledast p_1, \ldots, \circledast p_n \vdash_{\mathbf{LI}} \circledast\alpha$. Pelo Teorema 9.1.40 temos que $\circledast\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$ sse $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$. Daqui temos que $\circledast p_1, \ldots, \circledast p_n, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$ sse $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$. ■

Exemplo 9.1.46 *Considere os seguintes exemplos e confronte 1 - 4 com 1 - 4 do Exemplo 9.1.41:*

1. $\nvdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg p \rightarrow p$, *mas* $\circledast p \vdash_{\mathbf{LI}} \neg\neg p \rightarrow p$,

2. $\nvdash_{\mathbf{LI}} p \vee (p \rightarrow q)$, *mas* $\circledast p \vdash_{\mathbf{LI}} p \vee (p \rightarrow q)$,

3. $\neg p \rightarrow q \nvdash_{\mathbf{LI}} p \vee q$, *mas* $\circledast p, \neg p \rightarrow q \vdash_{\mathbf{LI}} p \vee q$,

4. $\neg(\neg p \vee \neg q) \nvdash_{\mathbf{LI}} p \wedge q$, *mas* $\circledast p, \circledast q, \neg(\neg p \vee \neg q) \vdash_{\mathbf{LI}} p \wedge q$.

5. $\neg p \rightarrow \neg q \nvdash_{\mathbf{LI}} q \rightarrow p$, *mas* $\circledast p, \neg p \rightarrow \neg q \vdash_{\mathbf{LI}} q \rightarrow p$,

6. $\neg(p \wedge q) \nvdash_{\mathbf{LI}} \neg p \vee \neg q$, *mas* $\circledast p, \neg(p \wedge q) \vdash_{\mathbf{LI}} \neg p \vee \neg q$,

7. $\nvdash_{\mathbf{LI}} ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$, *mas* $\circledast p \vdash_{\mathbf{LI}} ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$,

8. $\neg(\neg p \vee \neg q) \nvdash_{\mathbf{LI}} p \wedge q$, *mas* $\circledast p, \circledast q, \neg(\neg p \vee \neg q) \vdash_{\mathbf{LI}} p \wedge q$.

Este novo DAT 9.1.45 pode ser considerado como uma versão simplificada do DAT 9.1.40, porquanto a recuperação em **LI** das inferências clássicas é possível pelo acréscimo de premissas atômicas e, portanto, com estrutura de menor complexidade que a premissa de restauração do DAT 9.1.40. Com efeito, o novo DAT 9.1.45 permite afirmar que toda dedução clássica Π de α a partir de Γ, com $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\left(\Sigma^{\perp\neg\wedge\vee\rightarrow}\right)$,

$$\begin{array}{c}\Gamma \\ \Pi \\ \alpha\end{array}$$

pode ser transformada em uma dedução intuicionista Π' de α a partir de $\Gamma \cup \{p_1 \vee \neg p_1, \ldots, p_n \vee \neg p_n\}$, desde que $var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$

$$\begin{array}{c}\Gamma \cup \{p_1 \vee \neg p_1, \ldots, p_n \vee \neg p_n\} \\ \Pi\text{'} \\ \alpha\end{array}$$

No entanto, nesta nova versão DAT 9.1.45, a quantidade de premissas a serem acrescentadas para garantir a recuperação das inferências clássicas pode ser maior que no Teorema 9.1.40. Com efeito, a versão 9.1.40 do DAT entre **LC** e **LI**, garante que é suficiente acrescentarmos apenas uma premissa de restauração; se utilizamos a versão 9.1.45, não temos como garantir que apenas uma premissa deva ser acrescentada.

A situação do DAT 9.1.42 é diferente à do DAT 9.1.40, pois em **LI** o conectivo de restauração $\ominus$ não é, em geral, propagado na assinatura $\Sigma^{\perp\neg\wedge\vee\rightarrow}$, mas apenas em $\Sigma^{\perp\neg\wedge\rightarrow}$.

Proposição 9.1.47 *Em **LI** temos:*

1. $\models_{\mathbf{LI}} \ominus\perp$,

2. $\ominus\alpha \models_{\mathbf{LI}} \ominus\neg\alpha$,

3. $\ominus\alpha, \ominus\beta \models_{\mathbf{LI}} \ominus(\alpha \wedge \beta)$,

4. $\ominus\alpha, \ominus\beta \nvDash_{\mathbf{LI}} \ominus(\alpha \vee \beta)$,

5. $\ominus\alpha, \ominus\beta \vDash_{\mathbf{LI}} \ominus(\alpha \rightarrow \beta)$.

Demonstração. Para 1. Temos que $\ominus\bot =_{def} \neg\neg\bot \rightarrow \bot$ e que $\vDash_{\mathbf{LI}} \neg\neg\bot \rightarrow \bot$, pois para todo $k \in K$, $v(\bot, k) = 0$. Logo, $v(\neg\neg\bot \rightarrow \bot, k) = 1$ para todo nó k.

Para 2. Temos que $\ominus\neg\alpha =_{def} \neg\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$. Como $\vDash_{\mathbf{LI}} \neg\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$, então pela propriedade de monotonicidade, $\ominus\alpha \vDash_{\mathbf{LI}} \ominus\neg\alpha$.

Para 3. Assuma $v(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha, k) = v(\neg\neg\beta \rightarrow \beta, k) = 1$. Assim, $v(\neg\neg\alpha, k_1) = 0$ ou $v(\alpha, k_1) = 1$ para todo k_1 tal que kRk_1. De modo análogo, temos que $v(\neg\neg\beta, k_1) = 0$ ou $v(\beta, k_1) = 1$ para todo k_1 tal que kRk_1. Seja k_1 tal que kRk_1. Se $v(\alpha, k_1) = v(\beta, k_1) = 1$, então $v(\alpha \wedge \beta, k_1) = 1$. Daqui, $v(\alpha \wedge \beta, k_1) = 1$ ou $v(\neg\neg(\alpha \wedge \beta), k_1) = 0$. Se $v(\alpha, k_1) = 0$ ou $v(\beta, k_1) = 0$, então $v(\neg\neg\alpha, k_1) = 0$ ou $v(\neg\neg\beta, k_1) = 0$. Se $v(\neg\neg\beta, k_1) = 0$, então $v(\neg\beta, k_2) = 1$ para algum k_2 tal que k_1Rk_2. Logo, $v(\beta, k_3) = 0$ para todo k_3 tal que k_2Rk_3. Então, $v(\alpha \wedge \beta, k_3) = 0$ para todo k_3 tal que k_2Rk_3 e, portanto, $v(\neg(\alpha \wedge \beta), k_2) = 1$. Como existe k_2 tal que k_1Rk_2 e $v(\neg(\alpha \wedge \beta), k_2) = 1$, então $v(\neg\neg(\alpha \wedge \beta), k_1) = 0$. Daqui, $v(\neg\neg(\alpha \wedge \beta), k_1) = 0$ ou $v((\alpha \wedge \beta), k_1) = 1$. E, de modo análogo, se $v(\neg\neg\alpha, k_1) = 0$. Assim, concluimos que se $v(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha, k) = 1$ e $v(\neg\neg\beta \rightarrow \beta, k) = 1$, então $v(\neg\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \beta), k) = 1$.

Para 4. Temos que $\ominus p =_{def} \neg\neg p \rightarrow p$. Portanto, $\ominus\neg p = \neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$. Suponha, por absurdo, que vale a propagação de $\ominus$ para o conectivo de disjunção em **LI**, isto é, considere que vale $\ominus p, \ominus q \vDash_{\mathbf{LI}} \ominus(p \vee q)$. Então, como caso particular, teríamos $\ominus p, \ominus\neg p \vDash_{\mathbf{LI}} \ominus(p \vee \neg p)$. Pela propriedade do corte e pelo fato de $\vDash_{\mathbf{LI}} \neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$, teríamos $\ominus p \vDash_{\mathbf{LI}} \ominus(p \vee \neg p)$, isto é, $\ominus p \vDash_{\mathbf{LI}} \neg\neg(p \vee \neg p) \rightarrow (p \vee \neg p)$. Mas como $\neg\neg p \rightarrow p \vDash_{\mathbf{LI}} \neg\neg(p \vee \neg p)$, então obteríamos $\neg\neg p \rightarrow p \vDash_{\mathbf{LI}} p \vee \neg p$. Mas sabemos que $\neg\neg p \rightarrow p \nvDash_{\mathbf{LI}} p \vee \neg p$. Portanto, $\ominus p, \ominus q \nvDash_{\mathbf{LI}} \ominus(p \vee q)$.

Para 5. Suponha que existe $k \in K$ tal que $v(\ominus\alpha, k) = v(\ominus\beta, k) = 1$ mas $v(\ominus(\alpha \rightarrow \beta), k) = 0$. Logo, existe k_1 tal que kRk_1 e $v(\neg\neg(\alpha \rightarrow \beta), k_1) = 1$ e $v(\alpha \rightarrow \beta, k_1) = 0$. Da última equação segue que existe k_2 tal que k_1Rk_2, tal que $v(\alpha, k_2) = 1$ e $v(\beta, k_2) = 0$. Dado que kRk_2 e que $v(\ominus\beta, k) = 1$, então pela Proposição

9.1.13, $v(\ominus\beta, k_2) = 1$. Mas $v(\beta, k_2) = 0$, logo $v(\neg\neg\beta, k_2) = 0$, pois k_2Rk_2. Daqui, existe k_3 tal que k_2Rk_3 e $v(\neg\beta, k_3) = 1$. Mas k_1Rk_3, logo $v(\neg\neg(\alpha \to \beta), k_3) = 1$, pela Proposição 9.1.13 e o fato de termos $v(\neg\neg(\alpha \to \beta), k_1) = 1$. Então, como k_3Rk_3, $v(\neg(\alpha \to \beta), k_3) = 0$. Daqui, existe k_4 tal que k_3Rk_4 e $v(\alpha \to \beta, k_4) = 1$. Mas em k_4 temos que $v(\alpha, k_4) = 1$, pois k_2Rk_4 e $v(\alpha, k_2) = 1$. Dado que k_4Rk_4 e que $v(\alpha \to \beta, k_4) = 1$, então $v(\beta, k_4) = 1$. Por outro lado, k_3Rk_4 e $v(\neg\beta, k_3) = 1$. Logo, $v(\beta, k_4) = 0$. Absurdo. Assim, se $v(\ominus\alpha, k) = v(\ominus\beta, k) = 1$, então $v(\ominus(\alpha \to \beta), k) = 1$.
■

Assim, pelo fato da inferência clássica $\neg\neg p \to p \Vdash p \vee \neg p$ não ser válida em **LI**, o conectivo de restauração $\ominus$ não é propagado para o conectivo da disjunção em **LI**. Embora não tenhamos a propagação do conectivo de restauração $\ominus$ na assinatura de **LI**, os seguintes exemplos sugerem que poderiamos obter uma versão simplificada do Teorema 9.1.42, na qual apenas premissas atômicas de restauração sejam acrescentadas para recuperarmos as inferências de **LC** perdidas.

Exemplo 9.1.48 *Considere os seguintes exemplos:*

1. *Em 9.1.43 dissemos que* $\ominus(p \to q), \neg(p \wedge \neg q) \vdash_{\mathbf{LI}} p \to q$. *Mas também temos que* $\ominus q, \neg(p \wedge \neg q) \vdash_{\mathbf{LI}} p \to q$.

2. *Em 9.1.43 dissemos, também, que* $\ominus(p \wedge \neg q), \neg(p \to q) \vdash_{\mathbf{LI}} p \wedge \neg q$. *Mas também temos que* $\ominus p, \neg(p \to q) \vdash_{\mathbf{LI}} p \wedge \neg q$.

Propagação e restauração

Como notamos, o DAT 9.1.42 não pode ser simplificado tal como o DAT 9.1.40, pois a inferência $\neg\neg p \to p \Vdash p \vee \neg p$ não é válida em **LI** e, portanto, em **LI** o conectivo de restauração $\ominus$ não é propagado para o conectivo da disjunção. Desse modo, embora $p \vee \neg p$ seja um teorema clássico perdido em **LI**, não temos como recuperá-lo acrescentando apenas $\ominus p$ como premissa de restauração.

No entanto, como mostramos na Proposição 9.1.47 a propagação do conectivo de restauração $\ominus$ falha, apenas, para a disjunção. Desse modo, considerando o fato do conectivo $\ominus$ ser propagado na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$, podemos propor uma versão simplificada do DAT 9.1.42 para o fragmento de **LI** escrito em tal assinatura reduzida. Assim, uma versão simplificada do Teorema DAT 9.1.42 entre **LC** e **LI**, que garanta que é suficiente acrescentar variáveis proposicionais restauradoras da forma $\ominus p$ para recuperarmos em **LI** as inferências clássicas perdidas, pode ser demonstrado se restringirmos a assinatura de **LI**, e consequentemente de **LC**, a $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$. Para isso, a seguir apresentamos, em primeiro lugar, uma versão do DAT 9.1.42 na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$.

Lema 9.1.49 *Seja **LC'** o fragmento da lógica clássica escrito na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$ e seja **LI'** o fragmento da lógica intuicionista escrito nessa assinatura. Para todo $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For^{\perp\wedge\rightarrow}$. Então:*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC'}} \alpha \textit{ sse } \ominus\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI'}} \alpha. \qquad \text{(DAT - \textbf{LI'})}$$

Demonstração. Similar à demonstração do Teorema 9.1.42, observando que as regras da disjunção não são utilizadas naquela demonstração. ■

Teorema 9.1.50 *Seja $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\left(\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}\right)$. Seja $var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ o conjunto das variáveis proposicionais de α. Então:*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC'}} \alpha \textit{ sse } \ominus p_1, \ldots, \ominus p_n, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI'}} \alpha. \qquad \text{(DAT - \textbf{LI'})}$$

Demonstração. Similar à demonstração do Teorema 9.1.45, levando em consideração o Lema 9.1.49 e a Proposição 9.1.47, cláusulas 1, 3 e 5. ■

Considerando essa nova versão simplificada do Teorema 9.1.42, cuja demonstração é baseada na propagação da restauração do conectivo $\ominus$ em **LI** na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$ propomos, a seguir, uma nova demonstração de um importante teorema proposto por Prawitz [60].

Observação 9.1.51 *Seja **LC'** o sistema clássico escrito na assinatura* $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$. *Uma fórmula disjuntiva* $\alpha \vee \beta$ *de **LC** é definida como* $\neg\alpha \rightarrow \beta$ *em **LC'**.*

Teorema 9.1.52 *(Teorema de Prawitz) (cf. [60, p. 39]) Seja **LC'** o sistema clássico escrito na assinatura* $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$. *Se* $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC'}} \alpha$, *então existe uma dedução em **LC'** de* α *a partir de* Γ *na qual a consequência de toda aplicação da regra* $\perp_c$ *é atômica.*[11]

Demonstração. Seja $\Pi^{\mathbf{C'}}$ uma dedução clássica de α a partir de Γ em **LC'**. Se a regra $\perp_c$ não foi utilizada em $\Pi^{\mathbf{C'}}$ ou $\perp_c$ foi utilizada e tem conclusão atômica, então o teorema vale trivialmente. Se a regra $\perp_c$ foi utilizada em $\Pi^{\mathbf{C'}}$ —e não pode ser substituída por aplicações das regras intuicionistas— então $\Gamma \nvdash_{\mathbf{LI'}} \alpha$. Porém, pelo DAT 9.1.50, como $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC'}} \alpha$, existe uma dedução intuicionista $\Sigma^{\mathbf{I}}$ de α a partir de $\Gamma \cup \{\ominus p_1, \ldots, \ominus p_n\}$, em que $\{p_1, \ldots, p_n\} = var(\alpha)$. Em consequência, temos que toda aplicação da regra clássica $\perp_c$ em $\Pi^{\mathbf{C'}}$ pode ser substituída por aplicações de regras intuicionistas, se acrescentarmos as fórmulas $\ominus p_1, \ldots, \ominus p_n$ como premissas da dedução. Assim, pelo DAT 9.1.50 temos uma dedução de α a partir de $\Gamma \cup \{\ominus p_1, \ldots, \ominus p_n\}$ na qual a regra $\perp_c$ não é utilizada, isto é, $\ominus p_1, \ldots, \ominus p_n, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI'}} \alpha$. Daqui obtemos que existe uma dedução em **LC'** de α a partir de $\Gamma \cup \{\ominus p_1, \ldots, \ominus p_n\}$ na qual a regra $\perp_c$ não é utilizada. Para cada i, considere a seguinte dedução: $\neg\neg p_i, \neg p_i \vdash_{\mathbf{LC'}} \perp$. Daqui, aplicando a regra de absurdo clássico obtemos $\neg\neg p_i \vdash_{\mathbf{LC'}} p_i$ e, daqui, por aplicação da regra $I \rightarrow$, obtemos $\vdash_{\mathbf{LC'}} \neg\neg p_i \rightarrow p_i$. Como $\ominus p_i =_{def} \neg\neg p_i \rightarrow p_i$, construimos uma dedução de $\ominus p_i$ para cada variável $p_i \in var(\alpha)$ e cada instância de $\ominus p_i$ que é usada como premissa de uma inferência em $\Sigma^{\mathbf{I}}$. Assim, cada dedução de $\ominus p_i$ para cada variável $p_i \in var(\alpha)$ e cada instância de $\ominus p_i$ que é usada como premissa de uma inferência é uma dedução clássica e tem conclusão atômica. Aplicando a regra do corte às deduções $\vdash_{\mathbf{LC'}} \ominus p_1, \ldots, \vdash_{\mathbf{LC'}} \ominus p_n$ e $\ominus p_1, \ldots, \ominus p_n, \Gamma \vdash_{\mathbf{LC'}} \alpha$ obtemos uma dedução

[11] *THEOREM I: If* $\Gamma \vdash_{C'} A$, *then there is a deduction in C' of A from* Γ *in which the consequence of every application of the* $\perp_C$*-rule is atomic.* Esse teorema foi proposto por Prawitz com o objetivo de demonstrar o Teorema de Normalização: se $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC'}} \alpha$, então existe uma dedução normal em **LC'** de α a partir de Γ.

clássica de α a partir de Γ na qual toda aplicação da regra $\perp_c$ tem conclusão atômica. Em consequência, se $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$, então existe uma dedução clássica em **LC**' de α a partir de Γ na qual a consequência de toda aplicação da regra $\perp_c$ é atômica. ■

Desse modo, se assumimos o nosso teorema DAT 9.1.50, podemos demonstrar o Teorema 9.1.52 de Prawitz. E, assim como nosso DAT 9.1.50 está vinculado com o Teorema de Prawitz, a seguir mostraremos que nosso Teorema DAT 9.1.42 está estreitamente vinculado com uma alternativa ao Teorema de Prawitz, proposta por Seldin em [64] e [65]. Em [57] a proposta de Seldin é apresentada, em termos muito gerais, da seguinte maneira:

> Transformar toda derivação Π no fragmento $\Sigma^{\perp\neg\wedge\vee\rightarrow}$ em uma derivação Π' tal que Π' contenha no máximo uma aplicação da regra de absurdo clássico. Caso essa aplicação de fato ocorra, ela é a última regra aplicada em Π' [57, p. 107].

A seguir, mostraremos que o nosso Teorema DAT 9.1.42 pode ser demonstrado usando o Teorema de Seldin anteriormente citado. Por maior clareza expositiva, lembraremos o enunciado do mencionado Teorema DAT.

Teorema Para todo conjunto Γ e toda α, tal que $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\left(\Sigma^{\perp\wedge\vee\rightarrow}\right)$. Então:

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha \text{ sse } \ominus\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha.$$

Demonstração. $\Longrightarrow$ Seja $\Pi^{\mathbf{C}}$ uma dedução clássica de α a partir de Γ. Pelo Teorema de Seldin temos que existe uma dedução clássica $\Pi_1^{\mathbf{C}}$ de α a partir de Γ tal que $\Pi_1^{\mathbf{C}}$ contém, no máximo, uma aplicação da regra $\perp_c$. Daqui, se $\Pi_1^{\mathbf{C}}$ não contém nenhuma aplicação da regra $\perp_c$, então temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$ e, pela propriedade de monotonicidade, obtemos $\ominus\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Pelo contrário, se a regra $\perp_c$ é aplicada em $\Pi_1^{\mathbf{C}}$, então pelo teorema de Seldin, essa aplicação é a última regra aplicada em $\Pi_1^{\mathbf{C}}$. Logo, existe uma única subdedução $\Sigma_1^{\mathbf{C}}$ em $\Pi_1^{\mathbf{C}}$, tal que $\Sigma_1^{\mathbf{C}}$ tem a seguinte forma:

$$\cfrac{\begin{matrix}[\neg\alpha] \\ \Sigma_1^{\mathbf{C}} \\ \bot\end{matrix}}{\alpha}$$

Assim, substitua a única subdedução $\Sigma_1^{\mathbf{C}}$ em $\Pi_1^{\mathbf{C}}$ pelas seguintes subdeduções $\Sigma^{\mathbf{I}}$ e $\Omega^{\mathbf{I}}$:

$$\cfrac{\begin{matrix}\cfrac{\begin{matrix}[\neg\alpha] \\ \Sigma^{\mathbf{I}} \\ \bot\end{matrix}}{\neg\neg\alpha} & \neg\neg\alpha \to \alpha \\ & \Omega^{\mathbf{I}}\end{matrix}}{\alpha}$$

Como $\ominus\alpha =_{def} \neg\neg\alpha \to \alpha$, obtemos, assim, uma dedução intuicionista de α a partir de $\Gamma \cup \{\ominus\alpha\}$. Daqui, $\ominus\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$.

$\Longleftarrow$ Análoga à demonstração feita em *9.1.42*. ∎

Observação 9.1.53 *Como indica Prawitz [60, p. 17], "se uma fórmula é usada como premissa em duas inferências diferentes, então ela ocorre também duas vezes na configuração".*[12] *Assim, notamos que, por meio de nosso DAT 9.1.42, dada uma dedução intuicionista de α a partir de $\Gamma \cup \{\ominus\alpha\}$, podemos garantir que existe uma dedução clássica de Γ a partir de α, construindo uma dedução clássica de $\ominus\alpha$ e aplicando a regra do corte às deduções $\vdash_{\mathbf{LC}} \ominus\alpha$* e *$\ominus\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$. Assim, o DAT 9.1.42 garante que existe uma dedução clássica $\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha$ na qual a regra clássica do absurdo é usada —apenas— para obter a premissa $\ominus\alpha$ da inferência intuicionista. Contudo, por meio de nosso DAT 9.1.42 não podemos garantir que a única premissa $\ominus\alpha$ seja usada uma única vez na dedução e, por conseguinte, não podemos garantir que a regra de $\bot_c$ seja usada uma*

[12] A tradução é nossa: *if a formula is used as a premiss in two different inferences, then it also occurs twice in the configuration.*

única vez na dedução clássica de α a partir de Γ. Desse modo, a partir de nosso DAT 9.1.42 não parece possível demonstrar o Teorema de Seldin, se não garantirmos que a premissa $\ominus\alpha$ seja usada uma única vez na dedução intuicionista de α a partir de $\Gamma \cup \{\ominus\alpha\}$.

Os Teoremas de Ajuste de Derivabilidade que demonstramos nesta seção e pelos quais mostramos o modo de recuperarmos as inferências clássicas perdidas em **LI** ganham maior importância pelo fato de permitirnos, também, apresentar uma demonstração alternativa do Teorema de Prawitz e entender, de certa forma, as diferenças entre o Teorema de Prawitz e o Teorema de Seldin. Já indicamos que o Teorema de Seldin foi proposto como uma alternativa ao Teorema de Prawitz. As diferenças fundamentais entre esses dois teoremas consistem em i) a quantidade de aplicações da regra $\perp_c$, ii) a complexidade das fórmulas às quais a regra clássica do absurdo é aplicada e iii) a assinatura de **LC**. De modo análogo, as diferenças entre os nossos teoremas DATs 9.1.42 e 9.1.50 consistem em i) a quantidade de premissas restauradoras $\ominus$ que devem ser acrescentadas à inferência clássica para recuperá-la em **LI**, ii) a complexidade das premissas restauradoras e iii) as assinaturas dos sistemas **LI** e **LC**. Essas diferenças entre os nossos DATs 9.1.42 e 9.1.50 são explicadas pela não propagação do conectivo de restauração $\ominus$ para o conectivo de disjunção em **LI** que, por sua vez, é justificada na falha da inferência clássica $\neg\neg p \to p \Vdash p \vee \neg p$ em **LI**. Mas, pelo fato do conectivo de restauração local $\ominus$ ser propagado na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\to}$, conseguimos obter uma versão simplificada do DAT 9.1.42 na qual apenas $i \leq n$ premissas atômicas restauradoras sejam acrescentadas, em que n é a quantidade de variáveis proposicionais contidas na conclusão α, isto é, DAT 9.1.50. Assim, é pelo fato do conectivo de restauração local $\ominus$ não ser propagado para o conectivo de disjunção em **LI** que não é possível obter uma simplificação do DAT 9.1.42 na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\vee\to}$. Pelo fato da propagação do conectivo de restauração local $\ominus$ falhar para a disjunção, as assinaturas dos sistemas vinculados pelos Teoremas DATs 9.1.42 e 9.1.50 são diferentes.

Assim como a propriedade de propagação nos permite entender as diferenças entre os DATs 9.1.42 e 9.1.50 e, em certa medida, também as diferenças entre os Teoremas de Prawitz e Seldin, a propagação permite, junto com o Teorema de Seldin, concluir o Teorema de Prawitz. Com efeito, mostramos que o Teorema de Seldin permite demonstrar o Teorema DAT 9.1.42 e, a partir desse DAT, juntamente com a propriedade de propagação do conectivo de restauração $\ominus$ em **LI** na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$ obtivemos o DAT 9.1.50. Por sua vez, apoiados no DAT 9.1.50 apresentamos uma demonstração alternativa do Teorema 9.1.52 de Prawitz. Desse modo, a partir do Teorema de Seldin e da propagação da restauração do conectivo $\ominus$ na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$ podemos obter o Teorema de Prawitz.

DAT para LC e LM

Como é bem sabido, o sistema axiomático **LC** pode ser construído, não apenas acrescentando DN e PTE à axiomática de **LI**, mas também acrescentando DN a **LM**. Se adotarmos essa segunda opção, então os princípios característicos de **LI** —*ex contradictione sequitur quodlibet* e *ex falsum sequitur quodlibet*— poderiam ser obtidos como derivados a partir de DN. De modo análogo, o cálculo de Dedução Natural para **LC** pode ser obtido acrescentando a regra clássica $\perp_c$ às regras do cálculo positivo. Nesse caso, também, a regra intuicionista do absurdo $\perp_i$ poderia ser obtida como regra derivada a partir de $\perp_c$.

A seguir, estenderemos novamente a estratégia proposta em $\mathbf{C}_1$ de acrescentar nas inferências de **LM** instâncias dos princípios clássicos perdidos. Recuperaremos, assim, o raciocínio completo e consistente no ambiente paracompleto e paraconsistente de **LM**.

Na seção anterior propusemos os conectivos de restauração $\circledast$ e $\ominus$ para recuperar as inferências clássicas no âmbito de **LI**. Propusemos dois DATs análogos mostrando que acrescentar $\circledast\alpha$ ou $\ominus\alpha$ como premissas de restauração é suficiente para restaurar uma inferência clássica $\Gamma \Vdash \alpha$ perdida em **LI**. Contudo, mostramos também que a complexidade da forma das premissas restauradoras $\circledast$, que permitem a recuperação das inferências de **LC,** poderia ser igual ou mais simples do que a complexidade das premissas restauradoras $\ominus$. Em particular, pelo fato de $\neg\neg p \to p \Vdash p \vee \neg p$ não ser válida em **LI**, o teorema clássico $p \vee \neg p$ não pode ser recuperado em **LI** pelo acréscimo da premissa $\ominus p$; para recuperá-lo devemos acrescentar a premissa restauradora complexa $\ominus(p \vee \neg p)$.

A situação em **LM** é diferente: não apenas a inferência clássica $\neg\neg p \to p \Vdash p \vee \neg p$ é inválida em **LM**, mas também a inferência inversa $p \vee \neg p \Vdash \neg\neg p \to p$ é inválida. Desse modo, não vai ser possível recuperar $\neg\neg p \to p$ em **LM** pelo acréscimo de, apenas, $\circledast p$. O operador $\circledast$ não leva vantagem sobre $\ominus$ em **LM**. Nesta seção, proporemos $\ominus$ como conectivo de restauração de **LC** em **LM**.

Teorema 9.1.54 *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\left(\Sigma^{\perp\wedge\vee\to}\right)$.

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LC}} \alpha \text{ sse } \ominus\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha. \qquad \text{(DAT - }\mathbf{LM}\text{)}$$

Demonstração. A demonstração é análoga à do Teorema 9.1.42. ■

Exemplo 9.1.55 $\alpha \to \beta \vdash_{\mathbf{LC}} \neg\alpha \vee \beta$, *mas* $\alpha \to \beta \nvdash_{\mathbf{LM}} \neg\alpha \vee \beta$ *(cf. Exemplo 9.1.26). No entanto,* $\neg\neg(\neg\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \vee \beta), \alpha \to \beta \vdash_{\mathbf{LM}} \neg\alpha \vee \beta$.

DATs para LM e LI

Finalmente, seguindo a estratégia de definir o conectivo de restauração para uma lógica menor em termos de princípios da lógica maior, propomos vincular as lógicas **LM** e **LI**. Como as duas lógicas são paracompletas e apenas **LM** é paraconsistente, o nosso operador será um conectivo de restauração de consistência. Sendo $\Sigma^{\perp\wedge\vee\to}$ a assinatura de **LM** propomos, então, o seguinte conectivo de restauração:

$$\odot\alpha =_{def} \perp \to \alpha$$

Lema 9.1.56

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \perp \text{ sse } \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \perp .$$

Demonstração. $\Longrightarrow$ Assuma $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \perp$. Então, ou $\perp \in \Gamma$ ou $\perp$ é obtido por aplicação das regras de inferência de **LI**. Se $\perp \in \Gamma$, então pela Proposição 9.1.39. 3, $\Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \perp$.

Se $\perp$ é obtido por aplicação das regras de inferência, então pela restrição à regra $\perp_i$, $\perp$ não pode ser resultado da aplicação dessa regra. Logo, $\perp$ é resultado da aplicação das regras E e I dos conectivos. Assim, $\Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \perp$.

$\Longleftarrow$ Como **LI** estende **LM**, se $\Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \perp$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \perp$. ■

Teorema 9.1.57 *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\left(\Sigma^{\perp\wedge\vee\rightarrow}\right)$.

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha \textit{ sse } \odot\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha. \qquad (\text{DAT}_1 \text{ - } \tfrac{\mathbf{LI}}{\mathbf{LM}})$$

Demonstração. $\Longrightarrow$ Assuma $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Então, existe uma demonstração intuicionista de α a partir de Γ. Se $\alpha \in \Gamma$ ou se α foi obtida por aplicação das regras I e E dos conectivos, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$. Logo, pela Proposição 9.1.39. 5, $\odot\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$. Se α foi obtida por aplicação da regra $\perp_i$ em uma dedução de comprimento n, então existe uma demonstração $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \perp$ de comprimento $m < n$. Logo, pelo Lema 9.1.56, temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \perp$. Temos, também que, para toda α, $\perp, \odot\alpha \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$, pela definição de $\odot$. E, aplicando a Proposição 9.1.39. 4 a $\Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \perp$ e $\perp, \odot\alpha \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$, obtemos $\odot\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$.

$\Longleftarrow$ Assuma $\odot\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$. Como **LI** estende **LM**, temos que $\odot\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. E como $\vdash_{\mathbf{LI}} \odot\alpha$, então pela regra do corte, $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. ■

Apresentamos vários DATs entre os sistemas **LC**, **LI** e **LM**. Para todos esses sistemas definimos um conectivo de restauração por meio de princípios aceitos na lógica maior, mas perdidos na lógica menor. Assim, por exemplo, por meio de fórmulas $\odot\alpha =_{def} \perp \rightarrow \alpha$ recuperamos em **LM** inferências perdidas de **LI**, e por meio de fórmulas $\circledast\alpha =_{def} \alpha \vee \neg\alpha$ recuperamos em **LI** inferências perdidas aceitas em **LC**. Nesta seção apresentaremos um DAT para **LI** e **LM** diferente dos anteriores: definiremos um conectivo de restauração na lógica menor **LM** a partir de um princípio lógico não aceito na lógica maior **LI**. Assim, o princípio utilizado para definir o conectivo de restauração será inaceitável tanto na lógica maior quanto na lógica menor.

DAT: uma "ponte" entre LC e LI

Teorema 9.1.58 *Seja* $\Delta \subseteq sub(\alpha)$ *e seja* $\circleddash\Delta =_{def} \{\circleddash\delta \ : \ \delta \in \Delta\}$.

$$se\ \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha,\ ent\tilde{a}o\ \circleddash\Delta, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha.$$

Demonstração. Se $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$, então, existe uma dedução, no sistema intuicionista de Dedução Natural, de α a partir de Γ. Como nos casos anteriores, apenas devemos analisar o caso em que α é obtida a partir de Γ por aplicação da regra $\perp_i$. Nesse caso, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \perp$ e pelo Lema 9.1.56 temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \perp$. Pela propriedade de 9.1.39. 5 da relação $\vdash_{\mathbf{LM}}$ temos que $\neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \perp$. Logo, pela regra $I \rightarrow$ e pela definição de $\neg$, obtemos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \neg\neg\alpha$. Novamente, por 9.1.39. 5 obtemos $\circleddash\Delta, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \neg\neg\alpha$ e, como $\alpha \in \Delta$, pela regra $E \rightarrow$ obtemos $\circleddash\Delta, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$. ■

Observação 9.1.59 *A inferência* $\neg\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta \Vdash \alpha$, *válida em* ***LC*** *e inválida em* ***LM*** *pode ser restaurada em* ***LM,*** *seguindo o nosso DAT 9.1.58, na forma de* $\circleddash\alpha, \neg\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta \Vdash \alpha$. *Porém, a inferência* $\neg\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta \Vdash \alpha$ *é intuicionisticamente inválida. Portanto, o sentido inverso de nosso teorema DAT 9.1.58 não pode ser aceito: se nós quisermos obter um DAT para expressar, não apenas que se* $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$, *então* $\circleddash\Delta, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$, *mas também o sentido inverso —se* $\circleddash\Delta, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$, *então* $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$*— o conjunto* $\circleddash\Delta$ *de premissas restauradoras deve ser restringido para impedir a restauração de inferências* ***LI****-inválidas. Como caso particular, notamos que se* $\Gamma \nvdash_{\mathbf{LI}} \alpha$, *então* $\circleddash\alpha \notin \circleddash\Delta$.

Restringiremos o conjunto $\circleddash\Delta$ de fórmulas restauradoras proposto em 9.1.58 de modo a definir um conjunto que permita recuperar em **LM** *todas e apenas as inferências válidas em* **LI**.

Definição 9.1.60 *Considere o conjunto* Δ *tal que:*

$$\Delta =_{def} \begin{cases} \alpha, & se\ \Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha; \\ \emptyset, & caso\ contr\acute{a}rio. \end{cases}$$

Definimos o conjunto $\ominus\Delta$ de premissas restauradoras da seguinte maneira:

$$\ominus\Delta =_{def} \{\ominus\delta \ : \ \delta \in \Delta\}.$$

Teorema 9.1.61 *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For\left(\Sigma^{\perp\wedge\vee\rightarrow}\right)$.

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha \textit{ sse } \ominus\Delta, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha. \qquad (\mathrm{DAT}_2 \text{ - } \tfrac{\mathbf{LI}}{\mathbf{LM}})$$

Demonstração. $\Longrightarrow$ Assuma $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Então, existe uma dedução, no sistema intuicionista de Dedução Natural, de α a partir de Γ. Como nos teoremas anteriores, apenas devemos analisar o caso no qual α é obtida por aplicação da regra $\perp_i$. Se $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \perp$, então pelo Lema 9.1.56, temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \perp$. E pela Proposição 9.1.39 5, obtemos que $\neg\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \perp$ e pela regra $I \rightarrow$ e definição de $\neg$, obtemos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \neg\neg\alpha$. Como temos $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha, \neg\neg\alpha \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$, então pela regra do corte temos que $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$. E como supusemos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$, então pela definição do conjunto $\ominus\Delta$, temos que $\ominus\alpha \in \ominus\Delta$. Assim, a partir de $\ominus\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$, obtemos $\ominus\Delta, \Gamma \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$.

$\Longleftarrow$ Suponha, por contraposição, que $\Gamma \nvdash_{\mathbf{LI}} \alpha$. Como **LI** estende **LM**, temos que $\Gamma \nvdash_{\mathbf{LM}} \alpha$. E, pela definição do conjunto $\ominus\Delta$, temos que $\ominus\Delta = \emptyset$. Então $\ominus\Delta, \Gamma \nvdash_{\mathbf{LM}} \alpha$.

■

Exemplo 9.1.62 $(\alpha \wedge \neg\alpha) \vdash_{\mathbf{LI}} \beta$, *mas* $(\alpha \wedge \neg\alpha) \nvdash_{\mathbf{LM}} \beta$ *(cf. Exemplo 9.1.25). Porém,* $\ominus\beta, (\alpha \wedge \neg\alpha) \vdash_{\mathbf{LM}} \beta$.

Exemplo 9.1.63 $\alpha \vee \neg\alpha, \neg\neg\alpha \vdash_{\mathbf{LI}} \alpha$, *mas* $\alpha \vee \neg\alpha, \neg\neg\alpha \nvdash_{\mathbf{LM}} \alpha$ *(cf. Exemplo 9.1.27). Porém,* $\ominus\alpha, \alpha \vee \neg\alpha, \neg\neg\alpha \vdash_{\mathbf{LM}} \alpha$.

9.2 Observações construtivas

Propagação e restauração

Em 8.4 demonstramos que as propriedades de propagação e de retropropagação dos conectivos de restauração em conclusão permitem obter versões diferentes das alternativas de restauração de uma inferência. Sugerimos, também, que as propriedades de propagação e de retropropagação dos conectivos de restauração em premissas permitem obter versões diferentes das premissas de restauração de uma inferência. Como demonstramos nos correspondentes DATs, pelo fato dos conectivos $\#$ de $\mathbf{H}_3$, Ⓢ de $\mathbf{B}_3^E$ e L de $\mathbf{\mathring{A}}_3$ serem propagados, as premissas de restauração das inferências clássicas podem ser atômicas. E, como sugerimos na Seção 8.4, pelo fato do conectivo M de $\mathbf{\mathring{A}}_3$ ser propagado na assinatura $\Sigma^{\neg\vee}$, para restaurar uma inferência clássica é suficiente acrescentar alternativas atômicas na conclusão da inferência. Observamos, também, que os conectivos $\blacktriangledown_{[n]}$ dos sistemas $\mathbf{Ł}_n$ não satisfazem a (retro)propagação, de modo que o comportamento indeterminado das fórmulas simples não acarreta o comportamento indeterminado das fórmulas complexas e, de modo inverso, o comportamento indeterminado das fórmulas complexas não acarreta o comportamento indeterminado das suas componentes. Por causa da falha da (retro)propagação, nos sistemas n-valorados o comportamento restaurador das fórmulas complexas não equivale ao comportamento restaurador das fórmulas atômicas componentes.

Neste capítulo demonstramos duas maneiras de recuperar, com ajuda do conectivo $\circledast$, as inferências clássicas $\Gamma \Vdash \alpha$ inválidas em **LI**. Como mostramos, tais inferências podem ser recuperadas em **LI** acrescentando, alternativamente, uma única premissa de restauração da forma $\circledast\alpha$ —Teorema DAT 9.1.40— ou, pelo fato do conectivo $\circledast$ ser propagado em **LI** na assinatura $\Sigma^{\perp\neg\wedge\vee\rightarrow}$, tais inferências podem ser recuperadas, também, acresentando um conjunto de premissas de restauração atômicas $\circledast p_1, \ldots, \circledast p_n$, com $var\,(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ —Teorema DAT 9.1.45. Porém, como já notamos, o DAT 9.1.42 não pode ser simplificado de modo análogo, pois a inferência $\neg\neg p \rightarrow p \Vdash p \vee \neg p$ não é válida em **LI** e, portanto, em **LI** o conectivo de restauração $\ominus$ não é propagado para o conectivo da disjunção. Desse modo, embora $p \vee \neg p$ seja um teorema clássico perdido em **LI**, não temos como recuperá-lo acrescentando apenas $\ominus p$ como premissa de restauração.

No entanto, como mostramos na Proposição 9.1.47, a propagação do conectivo de restauração $\ominus$ falha —apenas— para a disjunção. Desse modo, considerando o fato do conectivo $\ominus$ ser propagado na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$, propusemos uma versão simplificada do DAT 9.1.42 para o fragmento de **LI** escrito em tal assinatura reduzida. E, considerando essa nova versão simplificada do Teorema 9.1.42, cuja demonstração é baseada na propagação da restauração do conectivo $\ominus$ em **LI** na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\rightarrow}$, propusemos uma nova demonstração de um interessante teorema proposto por Prawitz [60] para a lógica clássica. Neste capítulo, mostramos também que o DAT 9.1.42 pode ser demonstrado a partir do Teorema de Seldin, que foi por ele proposto como alternativa ao Teorema de Prawitz.

Assim, consideramos que tanto os Teoremas de Ajuste de Derivabilidade entre **LC** e **LI** que demonstramos neste capítulo quanto a determinação da propriedade de propagação de um certo conectivo de restauração ganham maior importância pelo fato de permitirnos, não apenas mostrar o modo de recuperarmos as inferências clássicas perdidas em **LI**, mas também dar conta de diferenças fundamentais entre os Teoremas de Prawitz e de Seldin.

Restauração local e global

Neste capítulo apresentamos diferentes conectivos de restauração seguindo as ideias de —principalmente— duas **LFIs**: $\mathbf{C}_1$ e **mbC**. Notamos que o conectivo $\circ$ de consistência de $\mathbf{C}_1$ é um conectivo definido em termos dos outros conectivos da linguagem e tal que $\circ\alpha$ é uma abreviatura para a fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Em **mbC** o conectivo $\circ$ é primitivo e a sua caracterização como conectivo de consistência provém do axioma (bc1), que vincula a fórmula $\circ\alpha$ com o Princípio *ex contradictione quodlibet*. Seja pela definição ou seja pela caracterização por meio do axioma, nesses sistemas a fórmula $\circ\alpha$ expressa que α é uma fórmula com comportamento consistente. Desse modo, quando $\circ\alpha$, para α valem os princípios da lógica consistente.

Seguindo a ideia de $\mathbf{C}_1$, no nosso estudo das lógicas construtivas **LI** e **LM** definimos diferentes conectivos de restauração. E, seguindo a ideia de **mbC**, definimos conectivos de restauração observando —principalmente— os princípios clássicos que falham nesse sistemas paracompletos. Assim, definimos os conectivos de restauração observando o esquema de axioma que falta a **LI** para atingir o poder inferencial de **LC** e o esquema de axioma que falta a **LM** para atingir o poder inferencial de **LC** e de **LI.** Utilizamos os esquemas de axioma que falham em **LI** para definir conectivos de restauração local em **LI** e utilizamos esquemas de axioma que falham em **LM** para definir conectivos de restauração local nesse sistema.

Levando a ideia de **mbC** para a lógica intuicionista, podemos reformular **LI** em uma linguagem que inclua um novo operador unário de *completude*, por exemplo, $\ominus$, acrescentando a **LI** um (e somente um) dos seguintes axiomas:

RPTE $\ominus\alpha \rightarrow (\alpha \vee \neg\alpha)$

RDN $\ominus\alpha \rightarrow (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$

Tal como no caso das **LFIs**, procuramos conectivos não-triviais de completude, de modo que $\ominus\alpha \rightarrow \alpha$ e $\ominus\alpha \rightarrow \neg\alpha$ não deveriam valer nesse sistema.

Seguindo a ideia de **mbC** poderíamos, então, adotar o operador de restauração $\ominus$ como primitivo na linguagem de **LI** e acrescentar um desses axiomas-ponte (*bridge axioms*). Esses axiomas definirão, assim, a função de $\ominus$ como um conectivo de *completude*. Nessa versão de **LI**, que chamamos de $\mathbf{LI_R}$, o conectivo $\ominus$ resulta logicamente independente dos esquemas de axioma DN e PTE que pretende forçar. Como do ponto de vista global, isto é, considerando PTE e DN como axiomas, os princípios PTE e DN são logicamente equivalentes, então acrescentando a **LI** o axioma RDN ou o axioma RPTE, obtemos duas lógicas equivalentes.[13] Nessas duas versões de **LI** os conectivos de completude são primitivos e independentes dos esquemas DN e PTE, pelos quais nós os tínhamos definido anteriormente.

Como indicamos em 3.1.8, uma das condições para obter um Teorema de Ajuste de Derivabilidade (interno) é que as duas lógicas vinculadas no DAT compartilhem a

[13]Porém, notamos que do ponto de vista local, TE é mais forte do que DN. Essa diferença na força dos princípios é evidenciada –apenas– se assumirmos esses princípios *localmente*, *i.e.*, dentro de uma derivação, como um operador de restauração.

mesma linguagem. Essa exigência sobre a linguagem ocasiona, no caso do sistema **mbC**, a ampliação da linguagem de **LC**. A obtenção de um DAT para restaurar as inferências clássicas perdidas em **mbC** requer o acréscimo do conectivo $\circ$ e, consequentemente, o acrésimo do axioma (ext): $\circ\alpha$, que viabiliza a obtenção do PE como teorema.

Seguindo, então, a proposta de **mbC**, propomos obter $\mathbf{LC_R}$, isto é, **LC** na assinatura estendida $\Sigma^{\neg\wedge\vee\to\ominus}$, acrescentando o conectivo $\ominus$ à linguagem clássica e o seguinte axioma a $\mathbf{LI_R}$.[14]

(extc) $\ominus\alpha$

Assim, esta perspectiva de considerar conectivos de restauração como sendo primitivos não é restritiva às **LFIs**, e pode ser estendida a outras lógicas. De fato, é interessante salientar que a ideia de obter a lógica clássica estendendo a linguagem e propondo um novo axioma para esse novo operador foi sugerida no trabalho de Åqvist sobre a lógica do sem-sentido. Com efeito, frente à vinculação entre o seu cálculo trivalorado do sem-sentido e a lógica clássica, Åqvist expressa:[15]

> Isso significa que "rejeitamos" o cálculo proposicional clássico? Claro que não, apenas assumimos que sua validade deve se limitar a um domínio menor de sentenças, a saber, as significativas. [...] Suponha que a fórmula $L\alpha$, que afirma que toda sentença é significativa, fosse acrescentada como um postulado extra no cálculo $\mathbf{Å}_3$. Então, o cálculo clássico **LC** seria obtido imediatamente a partir de $\mathbf{Å}_3$ assim estendido [2, p. 149].

Esse trecho do artigo de Åqvist reforça ainda mais a ideia que tanto a estratégia de recuperação local realizada por meio do acréscimo de premissas, quanto a estratégia de

[14]É claro que as sugestões de obter uma versão de **LI** com o conectivo de completude $\ominus$ como primitivo podem ser realizadas também para o conectivo $\circledast$ definido em **LI** e, de modo análogo, para obter uma versão de **LM** na assinatura $\Sigma^{\neg\wedge\vee\to\odot}$.

[15]A tradução é nossa. *Does this mean that we "reject" the classical sentential calculus? Of course not; we only assume its validity to be restricted to a narrower range of sentences, viz., meaningful ones. [...] Now, suppose that the formula Lp, asserting that any sentence is meaningful, were added as an extra postulate to* **A**. *Then the classical calculus* **B** *would immediately follow from* **A** *thus extended.*

recuperação global realizada por meio do acréscimo de postulados podem ser estendidas a outros sistemas lógicos.

Parte III

Observações Finais

Capítulo 10

Recuperando Conclusões Locais

10.1 Alcances e limitações da restauração

O trecho, anteriormente citado, do artigo de Åqvist sobre a obtenção de **LC** a partir do sistema $\mathbf{\AA}_3$, a construção do sistema **mbC** e a nossa proposta de obter uma versão de **LC** na assinatura $\Sigma^{\perp\wedge\vee\rightarrow\ominus}$ sugere que, se tivermos duas lógicas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ formalizadas em termos de sistemas axiomáticos *à la* Hilbert, tais que $Ax(\mathbf{L}_2) = Ax(\mathbf{L}_1) \cup \{Ax_1, \ldots, Ax_n\}$, em que cada $Ax_i = Ax_i\,(p)$ é um axioma de $\mathbf{L}_2$ que depende apenas da variável proposicional p, e $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ compartilham as regras de inferência, poderíamos definir em $\mathbf{L}_1$ um conectivo (unário) de restauração ® de $\mathbf{L}_2$ em $\mathbf{L}_1$.

A seguir, propomos um esquema geral que estabelece certas condições suficientes para definir, em um sistema $\mathbf{L}_1$, novos conectivos de restauração local de um sistema $\mathbf{L}_2$ em $\mathbf{L}_1$. Mostramos, também, limitações de nossa proposta baseada nos conectivos unários de restauração local. Assim, para finalizar nossa pesquisa, mostraremos alcances e limitações da nossa proposta.

Podemos estabelecer a seguinte condição suficiente para definir conectivos de restauração local.

Teorema 10.1.1 *Sejam $\boldsymbol{L}_1$ e $\boldsymbol{L}_2$ duas lógicas tais que $\vdash_{\mathbf{L}_1}$ e $\vdash_{\mathbf{L}_2}$ são as relações de derivabilidade de $\boldsymbol{L}_1$ e $\boldsymbol{L}_2$, respectivamente, que satisfazem as propriedades do corte e* *monotonicidade. Seja* $Ax(\mathbf{L}_2) = Ax(\mathbf{L}_1) \cup \{Ax_1(p), \ldots, Ax_n(p)\}$ *uma apresentação axiomática* à la *Hilbert do sistema* $\boldsymbol{L}_2$*, tal que cada* $Ax_i = Ax_i(p)$ *é um axioma de* $\boldsymbol{L}_2$ *que depende apenas da variável proposicional* p *e tal que* $\boldsymbol{L}_1$ *e* $\boldsymbol{L}_2$ *compartilham as regras de inferência. Definimos o conjunto* Ⓡ$(p) =_{def} \{Ax_1(p), \ldots, Ax_n(p)\}$*. Assim definido,* Ⓡ$(p)$ *é um conjunto de fórmulas que depende apenas da variável* p*. Então:*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{L}_2} \alpha \textit{ sse } \exists \Delta\,(\text{Ⓡ}(\Delta), \Gamma \vdash_{\mathbf{L}_1} \alpha)$$

em que Ⓡ$(\Delta) = \bigcup\limits_{\delta \in \Delta}$ Ⓡ(δ).

Demonstração. $\Longrightarrow$ Assuma $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}_2} \alpha$ e considere $\alpha_1 \ldots \alpha_k = \alpha$ uma demonstração de α a partir de Γ. Sejam $\alpha_{i_j}, \ldots, \alpha_{i_m}$ as instâncias dos axiomas no conjunto Ⓡ(p) usados na demonstração. Logo, $\alpha_{i_j} = Ax_{l(i_j)}\left(\gamma_{i_j}\right) \in$ Ⓡ$\left(\gamma_{i_j}\right)$, para certa fórmula γ_{i_j} e certo índice $1 \leq l(i_j) \leq n$. Logo, aplicando as propriedades de monotonicidade e do corte é claro que Ⓡ$(\Delta), \Gamma \vdash_{\mathbf{L}_1} \alpha$, em que $\Delta = \left\{\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_m}\right\}$ e Ⓡ$(\Delta) = \bigcup\limits_{\gamma_{i_j} \in \Delta}$ Ⓡ$\left(\gamma_{i_j}\right)$.

$\Longleftarrow$ É obvia, aplicando a propriedade do corte e a definição de Ⓡ(Δ). ■

Corolário 10.1.2 Ⓡ(p) *é um conjunto de restauração local em premissas de* $\boldsymbol{L}_2$ *em* $\boldsymbol{L}_1$*.*

Demonstração. Considere a Definição 6.0.6 e observe que, como $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1 \cup \{Ax_1(p), \ldots, Ax_n(p)\}$, então $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$ e $\Sigma^1 = \Sigma^2$. Desse modo, Ⓡ$(p) = \{Ax_1(p), \ldots, Ax_n(p)\}$ é um conjunto de fórmulas de $\Sigma^1 = \Sigma^2$ que depende apenas da variável p e $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}_2} \alpha$ sse $\exists \Delta\,(\text{Ⓡ}(\Delta), \Gamma \vdash_{\mathbf{L}_1} \alpha)$. ■

A partir dessa proposta geral, observamos que vários conectivos de restauração podem ser definidos no âmbito das lógicas modais normais. Com efeito, sistemas modais tais como **D**, **T**, **S4**, **B** e **S5** são obtidos acrescentando um axioma com estrutura $Ax(p)$ aos sistemas modais **K** ou **T**. Como exemplo disso, considere apenas a construção dos sistemas **D** e **T** a partir do sistema modal **K**.

Definição 10.1.3 *O sistema modal* $\boldsymbol{K}$ *pode ser obtido acrescentando o operador* $\Box$ *à assinatura* $\Sigma^{\mathbf{LC}}$ *e o esquema de axioma* K *e a regra de necessitação* Nec *a* $\boldsymbol{LC}$*:*

K $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$

Nec *se* $\vdash_{\mathbf{K}} \alpha$*, então* $\vdash_{\mathbf{K}} \Box\alpha$

Definição 10.1.4 *Os sistemas modais* ***D*** *e* ***T*** *podem ser obtidos acrescentando os esquemas de axioma D e T, respectivamente, a* ***K*** *(em que* $\Diamond\alpha =_{def} \neg\Box\neg\alpha$*):*

D $\Box\alpha \to \Diamond\alpha$

T $\Box\alpha \to \alpha$

Assim, esses sistemas modais normais podem ser recuperados seguindo a estratégia de definir um conectivo de restauração unário em termos dos axiomas e acrescentando premissas nas inferências seguindo a estratégia dos DATs. Apenas a modo de exemplo, considerando que $\mathbf{K} \subset \mathbf{T}$ e $\Sigma^{\mathbf{T}} = \Sigma^{\mathbf{K}}$ sugerimos definir um conectivo unário de restauração $\boxplus$ de **T** em **K** da seguinte maneira: $\boxplus\alpha =_{def} \Box\alpha \to \alpha$.

Contudo, essas duas condições —suficientes— para definir conectivos de restauração local não são, também, condições necessárias. Reconsidere os sistemas **LI** e **LM**. Já mostramos que o sistema **LI** pode ser definido em termos axiomáticos a partir do sistema **LM** acrescentando um axioma com estrutura $Ax(p)$. E, de fato, nós definimos um conectivo de restauração $\odot$ em **LM** em termos de um axioma $Ax(p)$ de **LI**. Mas também, definimos um conectivo $\ominus$ em **LM** em termos de princípios não aceitos em **LI** e demonstramos o DAT 9.1.61; demonstramos, portanto, que $\ominus$ é um conectivo de restauração de **LI** em **LM**. Consequentemente, mostramos que é possível ter um conectivo de restauração de uma lógica $\mathbf{L}_1$ em outra lógica $\mathbf{L}_2$ sem necessidade de defini-lo em termos de princípios da lógica maior $\mathbf{L}_1$.

Finalmente, analisaremos o caso do fragmento positivo da lógica proposicional clássica, que não satisfaz a anterior estrutura geral de condições suficientes. Com efeito, seja $\mathbf{L}_1$ o fragmento positivo intuicionista $\mathbf{LI}^+$, ou seja, o fragmento de **LI** escrito na assinatura $\Sigma^{\wedge\vee\to}$. Seja $\mathbf{L}_2$ o fragmento positivo clássico $\mathbf{LC}^+$ obtido acrescentando o seguinte axioma LPi a $\mathbf{LI}^+$:

LPi $((p \to q) \to p) \to p$

Por um lado temos que $\Sigma^{\mathbf{LI}} = \Sigma^{\mathbf{LC}} = \Sigma^{\wedge\vee\to}$ e, pelo outro temos que $Ax\,(\mathbf{L}_2) = Ax\,(\mathbf{LC}) = Ax\,(\mathbf{L}_1) \cup \{Ax_1\} = Ax\,(\mathbf{LI})$ +LPi. Assim, $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$. Porém, o axioma LPi depende de duas variáveis proposicionais e, portanto, é da forma $Ax\,(p, q)$. Como não é possível definir um conjunto ®(p) de fórmulas que dependa apenas da variável proposicional p, então não podemos definir em $\mathbf{LI}^{+}$ um conectivo unário ®p de restauração local de $\mathbf{LC}^{+}$ em $\mathbf{LI}^{+}$ seguindo o nosso esquema geral 10.1.1.

10.2 Observações finais

Neste trabalho propusemos o conceito de *conectivo de restauração local* tendo como motivação os trabalhos sobre as **LFIs**, as **LFUs** e as **ALs**. Definimos, assim, tal conceito em estreita vinculação com os Teoremas de Ajuste de Derivabilidade. Realizamos uma releitura de conhecidos sistemas lógicos sob o ângulo do novo conceito por nós introduzido. Como resultado de nosso trabalho, propusemos conectivos de restauração local para três sistemas lógicos do sem-sentido, para a hierarquia de sistemas n-valorados de Łukasiewicz e para as lógicas intuicionista e minimal. Mostramos que os conectivos de restauração local propostos para essas lógicas são, ora conectivos de consistência, ora conectivos de completude. Apresentamos, portanto, novos exemplos de **LFIs** e **LFUs**. De fato, mostramos que a lógica do sem-sentido de Halldén constitui uma das primeiras **LFIs** e que Åqvist pode ser considerado um dos primeiros lógicos a propor um Teorema de Ajuste de Derivabilidade. Além disso, destacamos a importância da propriedade de propagação e de retropropagação dos conectivos de restauração na formulação de versões de diferente grau de complexidade dos DATs. Finalmente, como resultado de nossa releitura de sistemas lógicos conhecidos realizada sob o ângulo do conceito de conectivo de restauração local, apresentamos uma nova demonstração de um conhecido teorema de Prawitz e mostramos que a partir de uma versão alternativa ao Teorema de Prawitz apresentada por Seldin é possível obter um dos nossos Teoremas DATs.

Por tudo isso, consideramos que o conceito de conectivo de restauração local se mostra fecundo como ferramenta conceitual para obter novos exemplos de **LFIs** e **LFUs**. Mas também, a estratégia de definir conectivos de restauração local se mostra fértil como técnica para demonstrar conhecidas e novas relações entre sistemas lógicos desde uma perspectiva inovadora.

Referências

[1] R. Ackermann. *Introduction to many valued logics*. London & New York: Routledge & Kegan Paul. 1967.

[2] L. Åqvist. Reflections on the logic of nonsense. *Theoria*, 28:138-157, 1962.

[3] Aristóteles. *Órganon*. Tradução de Edson Bini. São Paulo: Edipro. 2005.

[4] Aristóteles. *Categories and De Interpretatione*. Em J. L. Ackrill. *Aristotle's Categories and De Interpretatione*. Oxford: Clarendon Press. 1990.

[5] A. I. Arruda e E. H. Alves. Some remarks on the logic of vagueness. *Bulletin of the Section of Logic*, 8(3):133-138, 1979.

[6] A. I. Arruda e E. H. Alves. A semantical study of some systems of vagueness logic. *Bulletin of the Section of Logic*, 8(3):139-144, 1979.

[7] D. Batens. Paraconsistent extensional propositional logics. *Logique et Analyse*, 90-91:195-234, 1980.

[8] D. Batens. A universally abnormality-adaptive logic. *Online Journal Logical Studies*, 7, 2001.

[9] D. Batens. The need for adaptive logics in epistemology. Em Shahid Rahman, John Symons, Dov M. Gabbay e Jean Paul Van Bendegem (editores.). *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*. Kluwer: Dordrecht, 459-485, 2004.

[10] D. Batens. A universal logic approach to adaptive logics. *Logica Universalis*, 1(1):221-242, 2007.

[11] D. Batens. Adaptive Cn logics. Em W. Carnielli, M. E. Coniglio e I. M. Loffredo D'Ottaviano (editores). *The Many Sides of Logic*. College Publications: London, 27-45, 2009.

[12] D. Batens. *Adaptive logics and dynamic proofs.* Pré-impresso.

[13] N. Bezhanishvili e D. de Jongh. *Intuitionistic logic*. Universiteit van Amsterdam. 2010.

[14] J. -Y. Béziau. The future of paraconsistent Logic. *Online Logical Studies Journal*, 2:1-17, 1999.

[15] J.-Y. Béziau. A new four-valued approach to modal logic. *Logique et Analyse*, 54:18-33, 2011.

[16] D. A. Bočvar. Ob odnom trechznačnom isčislenii i ego primenenii k analizu paradoksov klassiceskogo funkcional'nogo isčislenija. *Matematicheskii Sbornik*, 4(46):287-308, 1938. (Tradução em inglês: On a three-valued valculus and its application to the analysis of paradoxes of the classical extended functional calculus. *History and philosophy of logic*, 2:87-112, 1981.)

[17] L. Bolc e P. Borowic. *Many-valued logics I: Theoretical foundations.* Springer-Verlag: Berlin. 1992.

[18] W. A. Carnielli e J. Marcos. A taxonomy of C-systems. Em W. A. Carnielli, M. E. Coniglio e I. M. L. D'Ottaviano (editores). *Paraconsistency - The logical way to the inconsistent. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics.* Marcel Dekker: New York, 228:1-94, 2002.

[19] W. A. Carnielli, M. E. Coniglio e J. Marcos. Logics of formal inconsistency. Em D. Gabbay e F. Guenthner (editores) *Handbook of Philosophical Logic* (2^a edição). Dordrecht: Springer, 14: 1-93, 2007.

[20] W. A. Carnielli e J. Marcos. Tableau systems for logics of formal inconsistency. Em H. R. Arabnia (editor). *Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence*. CSREA Press: Athens GA, USA. 2000.

[21] N. C. A. da Costa. *Sistemas formais inconsistentes*. (Tese de Livre Docência), Universidade Federal do Paraná, Curitiba. Editora UFPR. 1993.

[22] N.C. A. da Costa e R. G. Wolf. Studies in paraconsistent logic: Dialectical principles of the unity of opposites. *Philosophia. Philosophical Quarterly of Israel*, 2:189-217, 1980.

[23] R. L. Epstein. *The semantic foundation of logic: propositional logics*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht. 1990.

[24] H. A. Feitosa. *Traduções conservativas*. (Tese de Doutorado) Campinas: Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas. 1997.

[25] M. Fitting. *Intuitionistic logic model theory and forcing*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam. 1969.

[26] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski e H. Ono. *Residual Lattices: An algebraic glimpse at substructural logics*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. vol. 151. Elsevier: Amsterdam. 2007.

[27] G. Gentzen. Untersuchungen über das logische Schließen I. *Mathematische Zeitschrift*. 39:176-210, 1934. (Tradução em inglês em M. E. Szabo (editor). *The collected papers of Gerhard Gentzen*. North Holland Publishing Company: Amsterdam. 1969.)

[28] V. Glivenko. Sur quelques points de la logique de M. Brouwer. *Académie Royale de Belgique, Bulletin,*15:183-188, 1929. (Tradução em inglês: On some points of the logic of Mr. Brouwer. Em [49, 301-305].)

[29] S. Gottwald. A Treatise on Many-Valued Logics. Em *Studies in Logic and Computation,* vol. 9. Baldock: Research Studies Press Ltd. 2001.

[30] S. Halldén. *The logic of nonsense*. Uppsala Universitet: Uppsala. 1949.

[31] A. Heyting. Sur la logique intuitionniste. *Académie Royale de Belgique, Bulletin*, 16:957-963, 1930. (Tradução em inglês: On intuitionistic logic. Em [49, 306-310].)

[32] A. Heyting. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 24-56, 1930. (Tradução em inglês: The formal rules of intuitionistic logic. Em [49, 331-327].)

[33] D. Hyde, M. Colyvan. Paraconsistent Vagueness: Why not?. *Australasian Journal of Logic*, 6:265-300, 2008.

[34] S. Jaśkowski. Rachunek zdań dla systemóv dedukcyjnych sprzecznych. *Studia Societatis Scientiarun Torunesis*, Sectio A, I(5):57-77, 1948. (Tradução em inglês: A propositional calculus for inconsistent deductive systems. *Logic and Logical Philosophy*, 7:35–56, 1999.)

[35] I. Johansson. Der Minimalkalkül, ein reduzierte intuitionistischer Formalismus. *Compositio Mathematica,* 4:119-136, 1937.

[36] S. C. Kleene. On notation for ordinal numbers. *Journal of Symbolic Logic*, 3:150-155, 1938.

[37] W. Kneale e M. O. Kneale. *O desenvolvimento da lógica.* Fundação Calouste Gulbenkian. 1980.

[38] A. N. Kolmogorov. O printsipe tertium non datur. *Matematicheskii Sbornik*, 32:646–667, 1925. (Tradução em inglês: On the principle of excluded middle. Em J. van Heijenoort (editor). *From Frege to Gödel. A source book in Mathematical Logic*, *1879-1931*, Harvard University Press: Cambridge. 1967.)

[39] A. N. Kolmogorov. Zur Deutung der intuitionistischen Logik. *Mathematische Zeitschrift*, 35:58-65, 1932. (Tradução em inglês: On the interpretation of intuitionistic logic. Em [49, 328-334].)

[40] S. Kripke. Semantical analysis of intuitionistic logic I. Em J. Crossley e M. Dummett (editores). *Formal Systems and Recursive Functions*. North-Holland Publishing Company: Amsterdam. 92-129, 1965

[41] M. Lechniack. Some Remarks on Jan Łukasiewicz's Understanding of Necessity. *Studies in Logic and Theory of Knowledge*. Lublin, 6:23-48, 2006.

[42] J. Łukasiewicz. O logice trójwartościowej. *Ruch Filozoficzny*. Lwów, 170-171, 1920. (Tradução em inglês: J. Łukasiewicz. On three-valued logic. Em [44, 87s].)

[43] J. Łukasiewicz. Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalkülus. *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*. 23(3):51-77, 1930. (Tradução em inglês: J. Łukasiewicz. Philosophical remarks on many-valued systems of propositional logic. Em [44, 153-178].)

[44] J. Łukasiewicz. *Selected works*. Studies in logic and the foundations of mathematics. North Holland Publishing Company: Amsterdam. 1970.

[45] J. Łukasiewicz. A system of modal logic. Em [44, 352-390].

[46] J. Łukasiewicz. *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la lógica formal moderna.* Madrid: Tecnos. 1977.

[47] J. Łukasiewicz e A. Tarski. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, 23(3):39–

50, 1930. (Tradução em inglês: Investigations into the sentential calculus. Em [44, 131-152].)

[48] G. Malinowski. Many-valued logic and its philosophy. Em D.M. Gabbay e J. Woods (editores). *The Many Valued and Nonmonotonic Turn in Logic. Handbook of the History of Logic.* North Holland Publishing Company: Amsterdam. 8:13-94. 2007.

[49] P. Mancosu. *From Brouwer to Hilbert. The debate on the foundations of mathematics in the 1920s.* Oxford University Press: New York & Oxford. 1998.

[50] J. Marcos. Nearly every normal modal logic is paranormal. *Logique et Analyse,* 48(189/192):279-300, 2005.

[51] J. Marcos. Modality and paraconsistency. Em M. Bilkova e L. Behounek (editores). *The Logica Yearbook 2004. Proceedings of the XVIII International Symposium.* Institute of Philosophy of the Academy of Sciences of the Czech Republic: Hejnice, CZ, 213-222, 2005.

[52] J. Meheus. An adaptive logic based on Jaśkowski's D2, 2001. Pré-impresso.

[53] J. Meheus. Adaptative logics and the integration of induction and deduction. Em F. Stadler (editor). *Induction and Deduction in the Sciences*, Kluwer: Dordrecht, 93-120, 2004.

[54] J. Meheus. An Adaptive Logic based on Jaskowski's Approach to Paraconsistency. *Journal of Philosophical Logic*, 35:539-567, 2006.

[55] P. Minari. A note on Łukasiewicz's three-valued logic. *Annali del Dipartimento di Filosofia dell'Università di Firenze.* Firenze University Press: Firenze, 163-190, 2003.

[56] I. M. L. D'Ottaviano e N. C. A. da Costa. Sur un problème de Jaśkowski. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris,* 270(A-B):1349-1353, 1970.

[57] L. C. Pereira, E. H. Hauesler e M. P. N. de Medeiros. Alguns resultados sobre fragmentos com negação da lógica clássica. *O que nos faz pensar,* 23:105-111, 2008.

[58] V. E. Plisko. The Kolmogorov calculus as a part of minimal calculus. *Russian Math. Surveys.* 43(6):95-110, 1988.

[59] E. L. Post. Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journal of Mathematics,* 43:163-185, 1921.

[60] D. Prawitz. *Natural deduction. A Proof–Theoretical study.* Almquist&Wiksell: Stockholm. 1965.

[61] N. Rescher. *Many-Valued Logic*, McGraw-Hill: New York. 1969.

[62] J. B. Rosser e A. R. Turquette. *Many-Valued Logics.* North-Holland Publishing Company: Amsterdam. 1952.

[63] K. Segerberg. A contribution to nonsense-logics. *Theoria,* 31(3):199-217, 1965.

[64] J. Seldin. Normalization and excluded middle. *Studia Logica,* 48:193-217, 1989.

[65] J. Seldin. On the proof theory of the intermediate logic MH. *Journal of Symbolic Logic*, 51:626-647, 1986.

[66] T. Williamson. *Vagueness.* Routledge: London & New York. 1994.

Bibliografia

[1] D. Batens. Dynamic dialectical logics. Em G. Priest, R. Routley e Jean Norman (editores). *Paraconsistent Logic: Essays on the inconsistent. Philosophia*, 187-217, 1989.

[2] D. Batens. Towards the unification of inconsistency handling mechanisms. *Logic and Logical Philosophy*, 8:5-31, 2000.

[3] D. Batens. It might have been Classical Logic. *Logique et Analyse.* Pré-impresso.

[4] D. Batens, J. Meheus, D. Provijn e L. Verhoeven. Some adaptive logics for diagnosis. *Logic and Logical Philosophy*, 11-12:39-65, 2003.

[5] N. Bezhanishvili. De Jongh's characterization of intuitionistic propositional calculus. *Liber Amicorum: Essays dedicated to Dick de Jongh*. Universiteit van Amsterdam. 2004.

[6] J. -Y. Béziau. A sequent calculus for Łukasiewicz's three-valued logic based on Suszko's bivalent semantics. *Bulletin of the Section of Logic*, 28:89-97, 1999.

[7] O. Bueno e M. Colyvan. Just what is vagueness?. *Australasian Association of Philosophy Conference*, 2002.

[8] C. Caleiro, W. A. Carnielli, M. E. Coniglio e J. Marcos. Two's company: The humbug of many valued logics. Em J.-Y. Béziau (editor). *Logica Universalis*, Basel: Birkhäuser Verlag, 169-189, 2007.

[9] C. Caleiro e J. Marcos. Classic-like analytic tableaux for finite valued-logics. Em H. Ono, M. Kanazawa e R. de Queiroz (editores). *Logic, Language, Information and Computation. Lecture Notes in Computer Science,* Springer: Berlin-Heidelberg, 5514:268-280, 2009.

[10] C. Caleiro e J. Marcos. Many-valuedness meets bivalence: using logical values in an effective way. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*. 2011.

[11] W. A. Carnielli, J. Marcos e S. de Amo. Formal inconsistency and evolutionary databases. *Logic and Logical Philosophy*, 8:115-152, 2000.

[12] N.C. A. da Costa, D. Krause e O. Bueno. Paraconsistent logics and paraconsistency. Em D. M. Gabbay, P. Thagard e J. Woods (editores). *Handbook of the Philosophy of Science*. Elsevier: Amsterdam, 5:655-781, 2007.

[13] H. B. Curry. *Foundations of mathematical logic.* McGraw-Hill: New York. 1963.

[14] H. A. Feitosa e I. M. L. D'Ottaviano. Conservative translations. *Annals of Pure and Applied Logic*, Amsterdam, 108:205-227, 2002.

[15] V. K. Finn. A criterion of functional completeness for B3. *Studia Logica*, 33:121-125, 1974.

[16] V. K. Finn e R. Grigolia. Nonsense logics and their algebraic properties. *Theoria*, 59: 207-273, 1993.

[17] M. Fitting. Tableau methods for Classical Propositional Logic. Em D'Agostino, M. Gabbay, D.M. Hähnle e R. Posegga (editores.) *Handbook of Tableau Methods*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht. 1999.

[18] A. García Suárez. Fatalismo, trivalencia y verdad: un análisis del problema de los futuros contingentes. *Anuario filosófico*, 16(1):307-330, 1983.

[19] A. Heyting. *Intuitionism. An introduction.* North Holland Publishing Company: Amsterdam. 1971.

[20] S. Jaśkowski. O koniunkcji dedukcyjnej w rachunku zdań dla systemæw dedukcyjnych sprzecznych. *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, sectio A, I(8):171-172, 1949. (Tradução em inglês: On the Discussive Conjunction in the Propositional Calculus for Inconsistent Deductive Systems. *Logic and Logical Philosophy*, 7:57–59, 1999.)

[21] D. de Jongh. Intuicionismo. *Azafea Revista de Filosofia*, 8:53-69, 2006.

[22] S. C. Kleene. *Introduction to metamathematics*. North-Holland Publishing Company: Amsterdam. 1952.

[23] S. C. Kleene e R. E. Vesley. *The foundation of intuitionistic mathematics*. North-Holland Publishing Company: Amsterdam. 1965.

[24] P. Mancosu e W. P. van Stigt. Intuitionistic logic. Em [49].

[25] D. Mendonça e J. Marcos. Automatic extraction of axiomatizations in terms of two-signed tableaux for finite-valued logics. Em *Proceedings of the CLE 30, XV EBL & XIV SLALM*, Campinas, 2008.

[26] D. Prawitz e P. E. Malmnäs. A survey of some connections between Classical, Intuitionistic and Minimal logic. *Studies in logic and the foundations of mathematics. Contributions to mathematical logic*, 50: 215-229, 1968.

[27] H. Rasiowa. *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*. North-Holland Publishing Company: Amsterdam. 1974.

[28] N. Rescher. *Paradoxes, their roots, range and resolution*. Open Court: Chicago e La Salle. 2001.

[29] A. M. Sette. On the propositional calculus P1. *Mathematica Japonicae,* 18:173-180, 1973.

[30] A. S. Troelstra. *History of the constructivism in the 20th century*. University of Amsterdam. 1991.

[31] A. S. Troelstra e D. van Dalen. *Constructivism in mathematics*. Studies in logic and the foundations of mathematics, vol. 121. North-Holland Publishing Company: Amsterdam. 1988.

[32] M. Wajsberg. Axiomatization of the three-valued sentential calculus. *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie.* 24:126-148, 1931.

[33] D. van Dalen. Kolmogorov and Brouwer on constructive implication and the Ex Falso rule. *Russian Mathematical Surveys*. 59:247–257, 2004.