UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

DANTE CARDOSO PINTO DE ALMEIDA

A PERSISTÊNCIA DO PARADOXO DA COGNOSCIBILIDADE

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA AO INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS DA UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM FILOSOFIA.

ITALA MARIA LOFFREDO D'OTTAVIANO

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO, E ORIENTADA PELA PROFa.DRa. ITALA M. L. D'OTTAVIANO
CPG, 16/09/2011

CAMPINAS, 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARTA DOS SANTOS – CRB/8 - 5892 – BIBLIOTECA DO IFCH UNICAMP

AL64p

Almeida, Dante Cardoso Pinto de, 1984-
A persistência do Paradoxo da Cognoscibilidade / Dante Cardoso Pinto de Almeida. - - Campinas, SP : [s. n.], 2011.

Orientador: Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Modalidade (Lógica). 2. Epistemologia. 3. Lógica não clássica. 4. Paradoxos. I. D'Ottaviano, Ítala Maria Loffredo, 1944- II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Informação para Biblioteca Digital

Título em Inglês: The persistence of Knowability Paradox
Palavras-chave em inglês:
Modality (Logic)
Epistemology
Non-classical logic
Paradoxes
Área de concentração: Filosofia
Titulação: Mestre em Filosofia
Banca examinadora:
Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano [Orientador]
Ricardo Pereira Tassinari
Alexandre Fernandes Batista Costa Leite
Data da defesa: 16/09/2011
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Dissertação de Mestrado, em sessão pública realizada em 16 de setembro de 2011, considerou o candidato DANTE CARDOSO PINTO DE ALMEIDA aprovado.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora.

Profa. Dra. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano ________________

Prof. Dr. Ricardo Pereira Tassinari ________________

Prof. Dr. Alexandre Fernandes Batista Costa Leite ________________

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo a análise de um resultado em lógica alético-epistêmica, divulgado por Frederic Fitch em 1963, conhecido como Paradoxo da Cognoscibilidade. Segundo este resultado, se todas verdades podem ser conhecidas, então todas verdades são conhecidas. Isto sugere que há alguma verdade impossível de ser conhecida.

Descrevemos, nesta dissertação, a lógica modal alética e a epistêmica, que consistem em recursos formais requeridos para a análise do Paradoxo. Também esclarecemos o papel deste no debate filosófico entre as correntes de pensamento realistas e antirealistas. Apontamos e analisamos duas propostas de solução do Paradoxo mais discutidas na literatura.

Como principal ojetivo desta dissertação, investigamos o Paradoxo da Cognoscibilidade em sistemas multiagentes. Demonstramos que, apesar de em tais sistemas o Paradoxo ser minimizado, ele ainda não é completamente resolvido.

Por fim, também apresentamos várias formas de obter a contraparte doxástica do Resultado, conhecida como Paradoxo da Credibilidade.

ABSTRACT

This text studies a result in epistemic-alethic logic, published by Frederic Fitch in 1963, known as Knowability Paradox. According to this result, if all truths are knowable, then all truths are known. This suggests there are unknowable truths.

We describe alethic and epistemic modal logics, which are formal resources required in order to study the paradox. Also, we examine its role in the philosophical debate between realists and anti-realists. We point out and analize two attempts to solve the Paradox.

The main aim of this text is to explore the Knowability Paradox in multi-agents systems. We shoe that, although in these systems the Paradox is weaker, it's not entirely solved.

We also show many ways to derive the doxastic counterpart of the result, known as Belivability Paradox.

Índice

Introdução

"Os deuses não revelaram, desde o início, todas as coisas para nós. Mas, no decorrer do tempo, pela procura, podemos aprender e conhecer melhor as coisas.

Contudo, para certa verdade, nenhum homem a conheceu, nem a conhecerá; seja pelos deuses, seja pelas coisas das quais eu falo.

E mesmo que por acaso [o homem] proferisse a verdade perfeita, não a (re)conheceria, pois tudo não passa de uma teia trêmula de conjecturas". Xenófanes.[1]

A questão de quais seriam os limites do conhecimento humano é uma das mais antigas da filosofia. Somos potencialmente omniscientes ou existem limites intransponíveis à aquisição do saber?

Princípios realistas sugerem que a resposta para esta questão é "sim". Não é difícil listar as barreiras ao conhecimento humano. A maior parte do Universo é inacessível pela nossa atual tecnologia e talvez haja restrições físicas insuperáveis por mais que avancemos tecnologicamente. Há eventos passados para os quais não houve testemunhas e que não deixaram vestígios. Não temos acesso direto aos estados mentais uns dos outros, de forma que sempre paira uma sombra de dúvida acerca do que se passa de fato na mente alheia. Ou ainda, pode haver verdades complexas demais para qualquer ser humano apreender, ou cuja verificação requer mais tempo do que a humanidade venha a existir.

Contudo, todos estes limites são contingentes, isto é, não há quaisquer necessidades estritamente lógicas concernentes às limitações físicas ou intelectuais citadas acima. Portanto há espaço para indagarmos: A nossa ignorância é meramente contingente ou há verdades logicamente impossíveis de serem conhecidas?

Alguns resultados famosos em lógica formal, tais como o *Teorema de Incom-*

[1] Extraído de POPPER (2002) p.34 e traduzido livremente a partir do Inglês

pletude de Gödel e o *Problema da Parada de Turing*, sugerem a segunda alternativa. Contudo, a relação entre estes resultados e a tese de que somos necessariamente ignorantes é atrelada a certos pressupostos filosóficos, que relacionam cognoscibilidade e decidibilidade.

Há um resultado mais direto a favor da necessidade lógica da nossa ignorância, apresentado pelo lógico americano Frederic Brenton Fitch (1908-1987). O resultado em questão – sua contraposição, para ser mais específico – recebe o nome de "Paradoxo da Cognoscibilidade", cuja análise consiste no objetivo desta dissertação.

0.1. Uma breve introdução histórica ao Paradoxo da Cognoscibilidade

Em seu artigo *A Logical Analysis of Some Value Concepts*, publicado em 1963 no *The Journal of Symbolic Logic*, Fitch declara e demonstra um teorema bastante sugestivo:

Teorema 5. Se há alguma proposição verdadeira a qual ninguém sabe (ou soube ou saberá) ser verdadeira, então há alguma proposição a qual ninguém pode saber ser verdadeira. (FITCH, 1963, p.135–142)

Recebe o nome de "*Paradoxo da Cognoscibilidade*" a contraposição deste teorema:

"Se toda verdade pode ser conhecida, então toda verdade é conhecida".

Curiosamente, Fitch atribui o resultado ao referee anônimo de uma versão anterior do artigo, nunca publicada. A identidade do avaliador era ignorada até recentemente, até que Joe Salerno, um estudioso do Paradoxo, descobriu tratar-se de ninguém menos que o matemático e lógico americano Alonzo Church (1903–1995), co-editor do *Journal of Symbolic Logic* na época da publicação do artigo.[2]

Deve-se ter cautela com o fato do resultado ser chamado de “paradoxo”. Ele não consiste em um resultado meramente anti-intuitivo, como os Paradoxos da Implicação Material; mas também não chega a ser uma antinomia como o Paradoxo do Mentiroso ou o Paradoxo de Russell. O resultado apresentado por Fitch está em contradição com o bom senso.

0.2. O Paradoxo da Cognoscibilidade em termos informais

Neste primeiro momento, apresentaremos o Paradoxo da Cognoscibilidade por meio da linguagem natural, deixando seu tratamento formal para capítulos posteriores.

0.2.1. Assunções acerca do conhecimento

É notável que este resultado se baseia em duas assunções epistêmicas bastante modestas:

1. *Princípio de (semi)Distributividade do Conhecimento na Conjunção*: [3], se sabe-se que p e q, então sabe-se p e sabe-se q.

[2] Vide: CHURCH (2009).

[3] A assunção de que o conhecimento seja distributivo na conjunção já é bastante modesta e é teorema em todo sistema normal de lógica epistêmica (como demonstraremos posteriormente). Mas para obter o Paradoxo da Cognoscibilidade, basta assumir que o conhecimento seja apenas semidistributivo.

2. *Princípio de Veracidade do Conhecimento*: se sabe-se que p, então p (é o caso).

0.2.2. A Tese Fitch-Moore

Para obter o Paradoxo, faz-se necessário demonstrar um resultado intermediário que aqui chamamos de Tese de Fitch-Moore, segundo a qual:

É impossível (para um agente cognoscente) saber que: p (é o caso), mas p é ignorada (pelo mesmo agente).

A tese em questão leva este nome em referência tanto a Frederic Fitch quanto ao filósofo inglês George Edward Moore (1873–1958).[4]

Considere sentenças nas formas:

- *p, mas não acredito que p.*
- *p, mas acredito que não p.*

Moore observou[5] que tais sentenças podem muito bem ser verdadeiras para certas p, uma vez que nem toda verdade é acreditada e nem toda crença é verdadeira. Contudo, intuitivamente reconhecemos que há algo de muito errado ao ouvirmos (ou lermos) alguém dizer “está chovendo, mas não acredito nisto” ou “ainda é dia, mas acredito que já seja noite”.

[4]Uma menção deve ser feita a Hintikka, que provou antes de Fitch uma versão desta tese, a qual não envolve o conceito de impossibilidade (HINTIKKA, 2005), enquanto Fitch lida com duas modalidades.

[5]MOORE (1942).

Sentenças deste tipo, as quais recebem o nome de “sentenças de Moore”, quer sejam verdadeiras ou falsas, afirmá-las, acreditar nelas ou conhecê-las [6] acarreta contradição.

O que Fitch formalizou em seu artigo foi que as sentenças de Moore em suas versões epistêmicas, “*p, mas ignoro p*”,[7] não podem ser conhecidas.[8]

Prova:

Suponha que alguém:

(1) sabe que: *p* e ignora que *p*.

Dado que o conhecimento é (semi-)distributivo na conjunção, este indivíduo:

(2) sabe que *p* e sabe que ignora que *p*.

Aplicando o Princípio de Veracidade do Conhecimento no segundo termo da conjunção, obtém-se que o indivíduo:

(3) sabe que *p* e ignora que *p*.

Uma vez que, a partir da hipótese (1), derivou-se uma contradição, conclui-se que:

(4) é impossível que alguém saiba que: *p* e ignore *p*.

---

[6] Assumindo que conhecimento implica em crença.

[7] A variante “*p, mas sei que não p*’ não consiste em uma sentença de Moore, uma vez que, segundo o Princípio de Veracidade do Conhecimento, não podem ser verdadeiras.

[8] Mas podem ser afirmadas e acreditadas por aqueles que têm a virtude intelectual de reconhecer que nem todas suas crenças são conhecimento.

0.2.3. O Princípio de Cognoscibilidade

Segundo o *Princípio de Cognoscibilidade*, ou *Princípio de Verificação*, [9] *toda verdade é cognoscível*, isto é, *toda verdade pode ser conhecida*.

Este é um princípio que algumas correntes de pensamento defenderam com maior ou menor ênfase. Entre elas podemos, sem pretensão de rigor, citar:

- Os formalistas matemáticos hilbertianos, os quais tinham um projeto de reduzir toda a matemática a sistemas axiomáticos consistentes e completos.
- Os antirealistas, segundo os quais verdade e falsidade são constructos do intelecto humano, não havendo, portanto, uma necessidade lógica de que alguém ignore seus próprios construtos.
- Os positivistas lógicos, como Ayer, segundo os quais uma sentença só constitui uma proposição legítima (com sentido) se for verificável, isto é, que haja um procedimento para determinar sua verdade ou falsidade. Assim, o que é incognoscível é inverificável, ou seja, uma pseudoproposição. Logo, toda verdade deve ser cognoscível.

Contudo, há uma demonstração bem simples de que o Princípio de Cognoscibilidade tem uma consequência absurda, a qual dificilmente seus proponentes estão inclinados a aceitar.

(1) Toda verdade é cognoscível.

Isto equivale a:

[9] Apesar de ambos nomes serem comuns na literatura relativa ao Paradoxo da Cognoscibilidade, os positivistas lógicos utilizavam o nome "Princípio Verificacionista" em um contexto distinto. A fim de evitar confusão, preferimos utilizar apenas o nome "Princípio de Cognoscibilidade".

(2) O que é incognoscível é falso (não é o caso).

Como demonstrado, para qualquer proposição p:

(3) É incognoscível que: p e ignora-se p.

De (2) e (3) segue:

(4) Não é o caso de: p e ignora-se p.

Isto equivale a:

(5) Se p (é verdade), então sabe-se que p.

Ou seja, a partir de um princípio segundo o qual toda verdade é cognoscível, deriva-se que somos omniscientes.

0.3. Interpretando o Paradoxo da Cognoscibilidade

A interpretação filosófica mais óbvia do Paradoxo da Cognoscibilidade é tomá-lo como uma refutação do Princípio de Cognoscibilidade. Segundo esta interpretação, a sequência de raciocínios pela qual se obtem o Paradoxo da Cognoscibilidade consiste numa prova de que nem toda verdade é possível ser conhecida. Portanto, alguma(s) verdade(s) é(são) incognoscível(is). Entre os que interpretam o Paradoxo nestes termos, encontram-se RESCHER (2005) e o próprio FITCH (1963).

Contudo, como dito acima, o Princípio de Cognoscibilidade é uma tese cara a muitas correntes de pensamento, de forma que filósofos comprometidos com estas formulam interpretações mais compatíveis com suas ideias.

A forma mais simples de interpretar o Paradoxo da Cognoscibilidade, sem rejeitar o Princípio de Cognoscibilidade ou aceitar o absurdo de que somos omniscientes, consiste em apontar que não é do Princípio de Cognoscibilidade sozinho que se conclui a omnisciência, mas desse juntamente com o Princípio de Veracidade do Conhecimento e o Princípio de (semi-)Distributividade do Conhecimento na Conjunção.

Assim, a rejeição da conclusão em questão não implica na rejeição de uma das teses em específico, mas da conjunção delas. O maior problema que esta interpretação enfrenta é o fato de que o mesmo resultado pode ser obtido por meio de outras teses epistêmicas, o que trataremos em capítulos específicos deste trabalho.

Agora, consideremos um filósofo que, apesar de rejeitar a conclusão do Paradoxo da Cognoscibilidade, aceite todas suas assunções epistêmicas, inclusive o Princípio de Cognoscibilidade. Como este deveriam interpretar o Paradoxo? Oras, se o problema não se encontra nas premissas, então se encontra nos raciocínios. Uma vez que os raciocínios são válidos segundo a Lógica Clássica, filósofos que aceitam o Princípio de Cognoscibilidade poderiam considerar a adoção de lógicas alternativas, ao menos para tratar questões epistemológicas.

O maior expoente desta interpretação é WILLIANSON (1982), que argumenta a favor da Lógica Intuicionista.

Há também uma posição intermediária entre aceitar e rejeitar o Princípio de Cognoscibilidade.

Ao longo da história da filosofia e das ciências formais, diversas intuições legítimas tem sido expressas (ou formalizadas) em princípios que, apesar de em um primeiro momento parecerem razoáveis, revelaram-se ingênuos, devido suas consequências absurdas.

Para os adeptos do posicionamento intermediário, este é o caso do Princípio de Cognoscibilidade. "Toda verdade é cognoscível" consiste, segundo esta interpretação, numa formulação ingênua de uma intuição legítima.

Ingênua, por tratar a cognoscibilidade de forma simplista. Afinal de contas, o que é conhecimento é conhecido por algum agente cognoscente, a partir de algum momento, adquirido de alguma forma etc. Em resumo, o conhecimento se dá em um determinado contexto.

Os adeptos do posicionamento intermediário defendem que o Paradoxo da Cognoscibilidade seja resolvido reformulando o Princípio de Cognoscibilidade, de forma que leve em consideração algum ou alguns destes aspectos contextuais.

Uma proposta de reformulação do Princípio bastante discutida na literatura é a de TENNANT (1997), a qual descreveremos no Capítulo 3.

0.4. Abordagem formal do Paradoxo da Cognoscibilidade

Há duas maneiras de tratar formalmente o Paradoxo da Cognoscibilidade:

(1) Utilizando uma linguagem formal que admita quantificação sobre variáveis proposicionais. Desta forma, o Princípio de Cognoscibilidade é expresso por:

$$\forall p(p \to \Diamond Kp).$$

(2) Formalizando o Princípio de Cognoscibilidade como um esquema de fórmula, adotado como (esquema de) axioma:

$$\varphi \to \Diamond K\varphi,$$

onde "φ" é uma variável da metalinguagem, podendo ser instanciada por qualquer fórmula bem formada ou esquema de fórmula bem formada.[10]

Ambas abordagens tem prós e contras. A abordagem (1) confere um enorme poder expressivo, uma vez que também conta com o quantificador existencial, $\exists$. Pode-se, por exemplo, formalizar "*existe uma proposição verdadeira e ignorada*" por $\exists p(p \wedge \neg Kp)$. O mesmo não pode ser feito pela abordagem (2) sem especificar a proposição em questão.

E ainda, enquanto na abordagem (2) o Princípio de Cognoscibilidade deve ser assumido como esquema de axioma, na abordagem (1) pode-se assumí-lo apenas como premissa. Assim, o Paradoxo da Cognoscibilidade é expresso na abordagem (1) por:

$$\forall p(p \to \Diamond Kp) \vdash_S \forall p(p \to Kp)$$

Onde S é um sistema no qual vale a Veracidade do Conhecimento, $\forall p(Kp \to p)$, e a (semi-)Distributividade do Conhecimento na Conjunção,
$\forall p \forall q(K(p \wedge q) \to (Kp \wedge Kq))$.

Ao fazer a contraposição do resultado, obtem-se:

$$\exists p(p \wedge \neg Kp) \vdash_S \exists p(p \wedge \neg \Diamond Kp)$$

O que é interpretável como "*Alguma verdade é ignorada. Logo, alguma verdade é incognoscível*". Ou seja, interpretações filosóficas do resultado são formalizáveis.

[10] Uma variação desta abordagem é utilizar, ao invés de esquemas, fórmulas juntamente com a metaregra de substituição uniforme.

Contudo, o poder expressivo da abordagem (1) tem seu preço. Sistemas de lógica modal com quantificadores são formalmente complicados e filosoficamente controversos.

Estes problemas refletem nas discussões acerca do Paradoxo da Cognoscibilidade, a ponto de haver autores[11] que questionam a validade dos raciocínios utilizados para obter o resultado em questão pela abordagem (1).

Para os objetivos do nosso trabalho, sacrificar algum poder expressivo em prol da simplicidade formal e evitar algumas controvérsias filosóficas consiste em uma barganha vantajosa. Portanto, trataremos o Paradoxo da Cognoscibilidade pela abordagem (2).

0.4.1. Algumas considerações notacionais

Uma vez que estamos estabelecendo a nossa abordagem formal, convém adiantarmos alguns aspectos da notação que utilizaremos.

A não ser quando dito o contrário, proposições atômicas serão representadas por letras romanas minúsculas – p, q, r etc. – enquanto fórmulas na metalinguagem serão representadas por letras gregas minúsculas – φ, ψ, χ etc.

Conjuntos de fórmulas serão representados por letras gregas maiúsculas – Γ, Δ, Σ etc. Demais conjuntos serão representados por letras romanas maiúsculas estilizadas – $\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ etc.

0.5. Sobre o trabalho desenvolvido na Dissertação

Desenvolveremos nesta dissertação um estudo do Paradoxo da Cognoscibilidade utilizando recursos da lógica contemporânea.

[11] Tais como EDGINGTON (1985).

Nosso objetivo principal é estudar o Paradoxo em sistemas de lógica epistêmica multiagentes, ou seja, sistemas que lidam com o conhecimento e levam em conta a multiplicidade de agentes cognoscentes, uma vez que autores como VAN BENTHEM (2009) sugerem que o estudo do Paradoxo nestes sistemas é prolífico. Mostraremos que em tais sistemas é formulável uma versão mais fraca do Princípio de Cognoscibilidade, a qual minimiza a nefasta consequência do Paradoxo, mas não a resolve por completo.

Como objetivo secundário, esclareceremos alguns aspectos das discussões filosóficas em torno do Paradoxo da Cognoscibilidade, em específico o seu papel na querela entre realismo e antirealismo. Muitos autores tratam esta questão de forma incompreensível àqueles não familiarizados com certos conceitos filosóficos. Esperamos poder sanar este fato.

Dividiremos a Dissertação em cinco capítulos:

O primeiro consiste numa introdução geral à lógica modal. Mencionaremos e demonstraremos alguns resultados que serão relevantes no desenvolvimento do nosso trabalho.

No segundo capítulo é apresentada em geral a lógica modal epistêmico-doxástica, a qual formaliza as noções de *conhecimento* e *crença*. Além de apresentar o formalismo e notação necessários para o desenvolvimento do trabalho, esclareceremos como lidamos com o Problema da Omnisciência Lógica, um efeito colateral do formalismo que deve ser levado em consideração a fim de justificar a relevância dos resultados.

O Paradoxo da Cognoscibilidade, sua discussão, e duas propostas de solução apresentadas na literatura são o tema do terceiro capítulo.

O quarto capítulo trata do objetivo principal: o estudo do Paradoxo em sistemas multiagentes.

No quinto capítulo discutiremos uma variação do Paradoxo da Cognoscibilidade, conhecida como Paradoxo da Credibilidade, a qual recebe este nome por depender de princípios diferentes, mais adequados para a formalização da crença. Este capítulo também inclui uma variação do Paradoxo, a qual não encontramos na literatura consultada.

1. Sobre Lógicas Modais

1.1. O que são Lógicas Modais

Lógicas Modais são sistemas de lógica que lidam com modalidades, ou seja, operadores modais sobre proposições, tais como "é necessário *p*", "é possível *p*", "acredita-se que *p*", "é permitido *p*" etc. As modalidades, em contraste com os conectivos lógicos, não podem ser descritas como funções-veritativas bivalentes.

A lógica modal remonta a Aristóteles, o qual já havia levantado considerações sobre raciocínios silogísticos modais nos *Primeiros Analíticos* . Raciocínios envolvendo modalidades também são uma preocupação recorrente entre os lógicos medievais.

O primeiro tratamento formal da lógica modal se deve ao matemático escocês Hugh MacColl (1837—1909), que a abordou pelo estilo algebrista booleano. Um tratamento ao estilo hilbertiano da lógica modal alética viria a ser desenvolvido apenas na década de 1910 pelo filósofo americano Clarence Irving Lewis (1883—1964). [12]

A motivação de Lewis foi propor uma formulação para a implicação que não incorresse nos mesmos resultados anti-intuitivos que a implicação da Lógica Clássica (também conhecida como *implicação material*), no sentido de que toda proposição verdadeira é implicada por uma proposição qualquer, e que toda proposição falsa implica em uma proposição qualquer.

Estes resultados decorrem da vero-funcionalidade da Lógica Clássica, na qual uma implicação só é falsa quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso, e verdadeira caso contrário. Ou seja, $\alpha \rightarrow \beta$ equivale classicamente a

[12] Como referência sobre a história da lógica modal simbólica, vide GOLDBLAT (2006)

$\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$. Assim, segundo a leitura usual dos operadores clássicos, *α implica β* equivale a *não é o caso de α e não β*.

A solução adotada por Lewis foi o uso de conectivos modais aléticos para definir uma implicação mais forte, a qual viria a ser chamada de implicação estrita. Assim, *α implica [estritamente] β* se, e somente se, *não é possível α e não β*, ou ainda, *é necessário que α implica β*.

A seguir, é introduzida, de forma breve e sucinta, a lógica modal. São apresentados alguns resultados para o desenvolvimento deste trabalho, com algumas demonstrações consideradas fundamentais.

1.2. Linguagem

A linguagem da lógica modal alética é uma extensão da linguagem da Lógica Clássica com o acréscimo dos operadores $\Box$ e $\Diamond$.

Uma vez que estes dois operadores são interdefiníveis:

$$\Diamond\alpha \overset{\text{def}}{=} \neg\Box\neg\alpha$$
$$\Box\alpha \overset{\text{def}}{=} \neg\Diamond\neg\alpha$$

pode-se adotar apenas um deles como primitivo. Como usual, adotaremos $\Box$.

- Proposições atômicas são fórmulas bem formadas (fbf).
- Se α é uma fbf, então $\Box\alpha$ e $\neg\alpha$ são fbfs.
    - $\Diamond\alpha$ abrevia $\neg\Box\neg\alpha$.
- Se α e β são fbfs, então $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são fbfs.
    - Parenteses externos são dispensáveis.

$\Box\alpha$ é interpretada aleticamente como "*é necessário que* α". Já $\Diamond\alpha$ é interpretada como "*é possível que* α".

1.3. Axiomática

A seguir são apresentados alguns axiomas (esquemas) e regras de inferência adotados nos sistemas modais mais relevantes da literatura.

- Axioma *LC*. Todos os teoremas da lógica clássica
- Axioma *K*. $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
- Axioma *T*. $\Box\varphi \rightarrow \varphi$
- Axioma *D*. $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
- Axioma *B*. $\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$
- Axioma *4*. $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
- Axioma *5*. $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$
- *MP*. $\dfrac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$
- *RN*. $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi}$

1.3.1. Algumas notas sobre os axiomas modais

- Estes axiomas não são todos independentes entre si, como será mostrado ainda neste capítulo.

- O Axioma *LC* não se aplica apenas a fórmulas clássicas, mas também às instâncias não-clássicas de teoremas clássicos. Por exemplo, $\Box\varphi \vee \neg\Box\varphi$ e $\Diamond\varphi \rightarrow (\Box\neg\psi \rightarrow \Diamond\varphi)$ são casos de *LC*, uma vez que estas fómulas são instâncias das teoremas clássicos $\varphi \vee \neg\varphi$ e $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$, respectivamente.

- Autores que adotam ambos operadores modais, $\Box$ e $\Diamond$, como primitivos (e.g.: CHELLAS, 1980), também adotam algum axioma que os relaciona, como $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$ ou $\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$.

- Eventualmente, autores adotam versões alternativas destes axiomas, isto é, formulações distintas, mas logicamente equivalentes. Por exemplo, o Axioma *K* aparece em alguns textos como $(\Box(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \Box\varphi) \rightarrow \Box\psi$. Já os Axiomas *D* e *5*, às vezes aparecem respectivamente nas formas $\neg(\Box\varphi \wedge \Box\neg\varphi)$ e $\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$, principalmente em textos de autores que não adotam um operador dual para $\Box$.

- Pode-se adotar apenas o $\Diamond$ como primitivo, adotando-se as versões contrapostas destes axiomas. Por exemplo, $\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ como o Axioma *T*, $\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ como o Axioma *4* etc.

1.3.2. Sistemas Normais

Definição 2.3.2.1: Um sistema de lógica modal S é chamado *normal* quando, dado um conjunto Γ de fórmulas e $\Box\Gamma = \{\Box\varphi \,|\, \varphi \in \Gamma\}$, se $\Gamma \vdash_S \psi$, então $\Box\Gamma \vdash_S \Box\psi$. Ou seja, um *sistema normal* é aquele no qual as consequências lógicas de fórmulas necessárias também são necessárias.

Os sistemas normais têm em comum *K*, *LC*, *MP* e *RN*. O mais elementar destes é o sistema **K**, ao qual não é adicionado qualquer axioma além destes.

Outros sistemas modais notáveis são:

Sistema **KD**: Axiomas *K* e *D*.

Sistema **T**: Axiomas *K* e *T*.

Sistema **S4**: Axiomas *K*, *T* e *4*.

Sistema **B**: Axiomas *K*, *T* e *B*.

Sistema **S5**: Axiomas *K*, *T* e *5*; ou axiomas *K*, *T*, *B* e *4*

1.4. Algumas teses modais notáveis

A seguir, apresentar-se-á alguns resultados modais dignos de nota com suas respectivas provas, discriminados pelos sistemas nos quais estes são demonstráveis, os quais serão relevantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Observe que, uma vez que na Lógica Clássica vale o Teorema da Dedução[13], as provas, quando possível, serão abreviadas utilizando uma inferência clássica no lugar de uma teorema clássico. Por exemplo, utilizando a inferência

$$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$$

ao invés do teorema

$$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)),$$

economiza-se três passos na prova.

[13] $\Gamma \vdash \alpha_1 \to (\alpha_2 \to ...\beta)$ sse $\Gamma \cup \{\alpha_1, \alpha_2 ...\} \vdash \beta$

Resultado 1.4.1: *Regra de Regularidade* (*RR*), $\frac{\vdash\varphi\to\psi}{\vdash\Box\varphi\to\Box\psi}$

1	$\varphi \to \psi$	Premissa
2	$\Box(\varphi \to \psi)$	1 *RN*
3	$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	*K*
4	$\Box\varphi \to \Box\psi$	3, 2 *MP*

A *RR* é válida em qualquer sistema normal.

Resultado 1.4.2: $\vdash_{\mathbf{K}} \Box(\alpha \wedge \beta) \to (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$

1	$(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$	*LC*
2	$(\alpha \wedge \beta) \to \beta$	*LC*
3	$\Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha$	1 *RR*
4	$\Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\beta$	2 *RR*
5	$\Box(\alpha \wedge \beta) \to (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$	3, 4 *LC*, $\frac{\varphi\to\chi \quad \varphi\to\psi}{\varphi\to(\chi\wedge\psi)}$

Resultado 1.4.3: $\vdash_{\mathbf{K}} (\Box\alpha \wedge \Box\beta) \to \Box(\alpha \wedge \beta)$

1	$\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$	*LC*
2	$\Box\alpha \to \Box(\beta \to (\alpha \wedge \beta))$	1 *RR*
3	$\Box(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to (\Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta))$	*K*
4	$\Box\alpha \to (\Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta))$	2, 3 *LC*, $\frac{\varphi\to\psi \quad \psi\to\chi}{\varphi\to\chi}$
5	$(\Box\alpha \wedge \Box\beta) \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	4 *LC*, $\frac{\varphi\to(\psi\to\chi)}{(\varphi\wedge\psi)\to\chi}$

Observa-se que $\Box$ é distributivo em relação a $\wedge$ em qualquer sistema normal clássico.

Resultado 1.4.4: $\vdash_{\mathbf{K}} \Diamond(\alpha \vee \beta) \to (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$

1	$(\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta) \to \Box(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	Resultado 1.4.3
2	$\neg\Box(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta)$	1 *LC*, $\frac{\varphi\to\psi}{\neg\psi\to\neg\varphi}$
3	$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \vee \beta)$	*LC*
4	$\Box(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \Box\neg(\alpha \vee \beta)$	3 *RR*
5	$\Diamond(\alpha \vee \beta) \to \neg\Box(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	4 *LC*, $\frac{\varphi\to\psi}{\neg\psi\to\neg\varphi}$
6	$\Diamond(\alpha \vee \beta) \to \neg(\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta)$	2, 5 *LC*, $\frac{\varphi\to\psi \quad \psi\to\chi}{\varphi\to\chi}$
7	$\neg(\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta) \to (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$	*LC*
8	$\Diamond(\alpha \vee \beta) \to (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$	6, 7 *LC*, $\frac{\varphi\to\psi \quad \psi\to\chi}{\varphi\to\chi}$

Resultado 1.4.5: $\vdash_{\mathbf{K}} (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta) \rightarrow \Diamond(\alpha \vee \beta)$

1	$\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	*LC*
2	$\Box\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \Box(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	1 *RR*
3	$\Box(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow (\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta)$	Resultado 1.4.2
4	$\Box\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta)$	2, 3 *LC*, $\frac{\varphi\rightarrow\psi \quad \psi\rightarrow\chi}{\varphi\rightarrow\chi}$
5	$\neg(\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta) \rightarrow \Diamond(\alpha \vee \beta)$	4 *LC*, $\frac{\varphi\rightarrow\psi}{\neg\psi\rightarrow\neg\varphi}$
6	$(\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta) \rightarrow \neg(\Box\neg\alpha \wedge \Box\neg\beta)$	*LC*
7	$(\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta) \rightarrow \Diamond(\alpha \vee \beta)$	6, 5 *LC*, $\frac{\varphi\rightarrow\psi,\psi\rightarrow\chi}{\varphi\rightarrow\chi}$

Observa-se que $\Diamond$ é distributivo sobre $\vee$ em qualquer sistema normal.

Resultado 1.4.6: $\vdash_{\mathbf{K}} (\Box\alpha \vee \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$

1	$\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	*LC*
2	$\Box\alpha \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	1 *RR*
3	$\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	*LC*
4	$\Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	3 *RR* $\frac{\varphi\rightarrow\psi,\psi\rightarrow\chi}{\varphi\rightarrow\chi}$
5	$(\Box\alpha \vee \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	2, 4 *LC*, $\frac{\varphi\rightarrow\chi,\psi\rightarrow\chi}{(\varphi\vee\psi)\rightarrow\chi}$

Resultado 1.4.7: $\vdash_{\mathbf{K}} \Diamond(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$

1	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$	*LC*
2	$\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$	1 *LC*, $\frac{\varphi\rightarrow\psi}{\neg\psi\rightarrow\neg\varphi}$
3	$\Box\neg\alpha \rightarrow \Box\neg(\alpha \wedge \beta)$	2 *RR*
4	$\Diamond(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Diamond\alpha$	3 *LC*, $\frac{\varphi\rightarrow\psi}{\neg\psi\rightarrow\neg\varphi}$
5	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$	*LC*
6	$\neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$	5 *LC*, $\frac{\varphi\rightarrow\psi}{\neg\psi\rightarrow\neg\varphi}$
7	$\Box\neg\beta \rightarrow \Box\neg(\alpha \wedge \beta)$	6 *RR*
8	$\Diamond(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Diamond\beta$	7 *LC*, $\frac{\varphi\rightarrow\psi}{\neg\psi\rightarrow\neg\varphi}$
9	$\Diamond(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$	4, 8 *LC*, $\frac{\varphi\rightarrow\psi \quad \varphi\rightarrow\chi}{\varphi\rightarrow(\psi\wedge\chi)}$

Quando tratarmos de modelos para as lógicas modais, mostraremos que as inversas dos resultados 1.4.6 e 1.4.7, a saber,

$$(\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta) \rightarrow \Diamond(\alpha \wedge \beta)$$
$$\Box(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\Box\alpha \vee \Box\beta)$$

não são válidas para quaisquer α e β.

Resultado 1.4.8: $\vdash_{\mathbf{T}} \alpha \to \Diamond\alpha$

1	$\Box\neg\alpha \to \neg\alpha$	T
2	$\alpha \to \Diamond\alpha$	1 LC, $\frac{\varphi\to\neg\psi}{\psi\to\neg\varphi}$

Resultado 1.4.9: $\vdash_{\mathbf{T}} \Box\alpha \to \Diamond\alpha$

1	$\Box\alpha \to \alpha$	T
2	$\alpha \to \Diamond\alpha$	Resultado 1.4.7
3	$\Box\alpha \to \Diamond\alpha$	1, 2 LC, $\frac{\varphi\to\psi \quad \psi\to\chi}{\varphi\to\chi}$

Este resultado mostra que o sistema **T** é uma extensão de **KD**.

Resultado 1.4.10: $\vdash_{\mathbf{S5}} \alpha \to \Box\Diamond\alpha$

1	$\alpha \to \Diamond\alpha$	Resultado 1.4.8
2	$\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	5
3	$\alpha \to \Box\Diamond\varphi$	1, 2 LC, $\frac{\varphi\to\psi,\psi\to\chi}{\varphi\to\chi}$

Este resultado mostra que o sistema **S5** é uma extensão de **B**.

1.5. Conceitos definíveis

Vários conceitos interessantes podem ser definidos na lógica modal alética. Alguns exemplos são:

Implicação estrita: $\varphi \prec \psi \stackrel{\text{def}}{=} \Box(\varphi \to \psi)$ ou $\varphi \prec \psi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\Diamond(\varphi \wedge \neg\psi)$.

Consistência entre proposições: $\varphi\blacktriangle\psi \stackrel{\text{def}}{=} \Diamond(\varphi \wedge \psi)$

Contingência: $\nabla\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \Diamond\varphi \wedge \Diamond\neg\varphi$

A implicação estrita, como dito anteriormente, foi a motivação de Lewis para formalizar a lógica modal. Contudo, esta incorre em seus próprios resultados anti-intuitivos, conhecidos como *paradoxos da implicação estrita*. A saber:

$\Box\varphi \prec (\psi \prec \varphi)$.

Ou seja, uma proposição necessária é estritamente implicada por uma proposição qualquer.

$\neg\Diamond\varphi \prec (\varphi \prec \psi)$.

Ou seja, uma proposição impossível implica estritamente uma proposição qualquer.

Ambos resultados são válidos em qualquer sistema normal, pois decorrem da aplicação da *Regra de Regularidade* e de *Necessitação* nos teoremas clássicos $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ e $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$, respectivamente.

Alguns autores, como o próprio Lewis em algumas ocasiões[14] adotam $\prec$ como primitivo, definindo $\Box\varphi$ como $(\varphi \prec \varphi) \prec \varphi$.

[14] Vide GOLDBLAT, 2006

1.6. Semântica de Mundos Possíveis

Apesar de Lewis ter introduzido formalmente a Lógica Modal na década de 1910, a precursora da semântica atualmente utilizada para esta só seria desenvolvida por Carnap na década de 1940.[15] A semântica de descrição de estados de Carnap formaliza a noção de Leibniz de mundos possíveis[16] de que é verdade que *é possível* φ se, e somente se, φ é verdadeira em algum mundo possível, e que é verdade que *é necessário* φ se, e somente se, φ é verdadeira em todos mundos possíveis:

> *Não apenas elas [as verdades necessárias] valerão enquanto o mundo existir, como também valeriam se Deus tivesse criado o mundo de acordo com um plano diferente.* Leibniz[17]

Contudo, a semântica de Carnap serve apenas para o sistema **S5**. Ainda que este (discutivelmente) seja adequado para formalizar as noções de possibilidade e necessidade lógicas, existem outras versões destas. Por exemplo, quando é dito "é impossível ultrapassar a velocidade da luz" ou "é impossível encontrar ursos no Pólo Sul", está-se a utilizar conceitos não estritamente lógicos de (im)possibilidade, para os quais **S5** é demasiadamente forte.

O sistema **S5** também é inadequado para interpretações doxásticas, deônticas, demonstrabilísticas (relativas a demonstrações) e diversas outras interpretações dos operadores modais. Por exemplo, se $\Box$ for interpretado como *"acredita-se que"*, *"é obrigatório que"* ou *"é demonstrável na aritmética de Peano que"*; então, o Axioma T, $\Box\varphi \to \varphi$, afirma, respectivamente, a infalibilidade das crenças,

[15] GOLDBLAT (2006)

[16] Idem

[17] Citado e traduzido de GOLDBLAT (2006), p.18.

o cumprimento total das obrigações e a corretude da aritmética de Peano. Oras, as duas primeiras afirmações são falsas (ao menos na maior parte dos casos), enquanto a terceira é indemonstrável (Teorema de Gödel).

Uma vez que sistemas de lógica modal mais fracos que (ou distintos de) **S5** são necessários para fomalizar diversos conceitos, são também necessários modelos para esses. Isto foi obtido por Saul Aaron Kripke.

A semântica de Kripke refina a semântica de Carnap, estipulando que necessidade ou possibilidade de uma proposição em um mundo dependem da relação deste com outros mundos. Para fins de ilustração, retomemos a proposição "é impossível encontrar ursos no Pólo Sul". Ainda que possamos descrever um mundo possível (estado de coisas ou contexto) no qual existam ursos no Pólo Sul, este mundo não é relevante para os mundos nos quais a proposição em questão é verdadeira.

A semântica de Kripke é feita nos seguintes termos. Define-se um *modelo* $\mathcal{M}$ por meio de um conjunto $\mathcal{W}$ de mundos, um conjunto $\textsc{Atom}$ de proposições atômicas, uma função $\mathfrak{v}$ e uma relação $\mathcal{R}$ entre mundos tais que:

- $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v} \rangle$
- $\mathcal{W} \neq \emptyset$
- $\mathfrak{v} : \mathcal{W} \times \textsc{Atom} \to \{V, F\}$
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$

Observação: abreviaremos $\langle w, w' \rangle \in \mathcal{R}$ por $w\mathcal{R}w'$

Define-se a relação $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha$, a qual é lida como *"$\alpha$ é verdadeira no mundo w do modelo $\mathcal{M}$"*, nos seguintes termos:

- Se $p \in$ ATOM, então $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash p$ sse $\mathfrak{v}(w, p) = V$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \neg\alpha$ sse $\langle \mathcal{M}, w \rangle \nvDash \alpha$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha \wedge \beta$ sse $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha$ e $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \beta$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha \vee \beta$ sse $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha$ ou $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \beta$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha \rightarrow \beta$ sse $\langle \mathcal{M}, w \rangle \nvDash \alpha$ ou $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \beta$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha \leftrightarrow \beta$ sse $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \alpha \rightarrow \beta$ e $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \beta \rightarrow \alpha$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\alpha$ sse, para todo $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \alpha$
- $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Diamond\alpha$ sse, para algum $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \alpha$

Diz-se que um modelo $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v} \rangle$ satisfaz um esquema de fórmula φ quando, para todo $w \in \mathcal{W}$ e para qualquer instância φ' de φ, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \varphi'$.

Para fins de ilustração, considere um modelo $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{R}_1, \mathfrak{v} \rangle$ tal que:

ATOM $= \{p, q\}$

$\langle \mathcal{M}_1, w_1 \rangle \vDash p \wedge q$, $\langle \mathcal{M}_1, w_2 \rangle \vDash p \wedge \neg q$, $\langle \mathcal{M}_1, w_3 \rangle \vDash \neg p \wedge q$ e $\langle \mathcal{M}_1, w_4 \rangle \vDash \neg p \wedge \neg q$

$\mathcal{R}_1 = \{\langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_2, w_2 \rangle, \langle w_2, w_4 \rangle, \langle w_3, w_1 \rangle, \langle w_4, w_1 \rangle, \langle w_4, w_3 \rangle\}$

Tal como ilustrado abaixo:

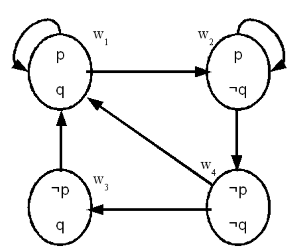

Figura 1: Modelo $\mathcal{M}_1$

Neste caso temos $\langle \mathcal{M}_1, w_1 \rangle \vDash \Box p$, pois, para todo w acessível a w_1 por $\mathcal{R}$, $\mathfrak{v}(w, p) = V$. Como $w_1 \mathcal{R} w_2$ e $\langle \mathcal{M}_1, w_2 \rangle \vDash \neg q$, temos $\langle \mathcal{M}_1, w_1 \rangle \vDash \Diamond \neg q$. Repare que $\langle \mathcal{M}_1, w_3 \rangle \vDash \neg p \wedge \Box p$, pois no único mundo o qual w_3 acessa, $\mathfrak{v}(w_1, p) = V$.

Agora, considere o modelo $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{R}_2, \mathfrak{v} \rangle$, o qual difere de $\mathcal{M}_1$ apenas por sua relação de acessibilidade $\mathcal{R}_2 = \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_1$. Ou seja, cada mundo neste modelo acessa a si próprio e a todos os demais, tal como ilustrado abaixo:

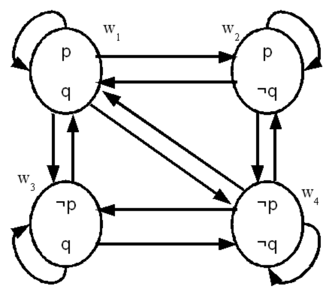

Figura 2: Modelo $\mathcal{M}_2$

Assim, para qualquer $w \in \mathcal{W}_1$, temos

$\langle \mathcal{M}_2, w \rangle \vDash \Diamond p \wedge \Diamond \neg p$

$\langle \mathcal{M}_2, w \rangle \vDash \Diamond q \wedge \Diamond \neg q$.

$\mathcal{M}_2$, tal como prometido acima, serve de contra modelo para os esquemas de fórmula $(\Diamond \alpha \wedge \Diamond \beta) \rightarrow \Diamond(\alpha \wedge \beta)$ e $\Box(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\Box \alpha \vee \Box \beta)$.

Basta permutar α e β, respectivamente, por p e $\neg p$.

No primeiro caso obtem-se $(\Diamond p \wedge \Diamond \neg p) \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg p)$. Como já dito, para todo $w \in \mathcal{W}_1$, $\langle \mathcal{M}_2, w \rangle \vDash \Diamond p \wedge \Diamond \neg p$.

Contudo, $\langle \mathcal{M}_2, w\rangle \vDash \Diamond(p \wedge \neg p)$ sse $w\mathcal{R}_2w'$ e $\langle \mathcal{M}_2, w'\rangle \vDash p \wedge \neg p$.
Não existe tal w'. Portanto, $\langle \mathcal{M}_2, w\rangle \nvDash (\Diamond p \wedge \Diamond\neg p) \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg p)$.

No segundo caso obtem-se $\Box(p \vee \neg p) \rightarrow (\Box p \vee \Box\neg p)$. Uma vez que $p \vee \neg p$ é tautologia, para todo $w \in \mathcal{W}_1$, $\langle \mathcal{M}_2, w\rangle \vDash \Box(p \vee \neg p)$.
Contudo, uma vez que para cada w existem um w' e um w'' tais que, $w\mathcal{R}w'$, $w\mathcal{R}w''$, $\langle \mathcal{M}_2, w'\rangle \vDash p$ e $\langle \mathcal{M}_2, w''\rangle \vDash \neg p$, segue que $\langle \mathcal{M}_2, w\rangle \nvDash \Box p$ e $\langle \mathcal{M}_2, w\rangle \nvDash \Box\neg p$.
Portanto, $\langle \mathcal{M}_2, w\rangle \nvDash \Box(p \vee \neg p) \rightarrow (\Box p \vee \Box\neg p)$.

1.7. Modelos que satisfazem os Axiomas

Com exeção do Axioma K, a satisfação dos axiomas aqui descritos depende de certas propriedades da relação de acessibilidade do modelo em questão. [18]

Resultado 2.7.1: Qualquer modelo de Kripke satisfaz o Axioma *K*

Prova:

Sejam $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v}\rangle$ um modelo e $w \in \mathcal{W}$ um mundo tais que $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Box(\varphi \rightarrow \psi)$.
Portanto, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \vDash \varphi \rightarrow \psi$.
Suponha $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Box\varphi$, ou seja, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \vDash \varphi$.
Disto segue que $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \vDash \psi$. Portanto, $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Box\psi$.
Logo, $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$. *Q.e.d.*

[18]Uma abordagem completa da semântica dos sistemas normais de lógica modal requer mais conceitos do que os tratados nesta dissertação, tais como *estruturas de Kripke* e *modelos canônicos*. Contudo, preferimos adotar uma postura mais parcimoniosa na exposição de resultados, restringindo-nos àqueles de relevância para o desenvolvimento do nosso trabalho. Para os leitores interessados em um estudo mais profundo dessa questão, sugerimos CARNIELLI e PIZZI (2008).

Resultado 1.7.2: O Axioma *T* é satisfeito por um modelo $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v} \rangle$, se $\mathcal{R}$ for reflexiva, *i.e.*, para todo $w \in \mathcal{W}$, $w\mathcal{R}w$.

Prova:

Seja a relação $\mathcal{R}$ reflexiva.

Suponha que $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\varphi$. Isto é, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \varphi$.

Como $w\mathcal{R}w$ (reflexividade), segue que $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \varphi$. Logo, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\varphi \rightarrow \varphi$. *Q.e.d.*

Resultado 1.7.3: O Axioma *D* é satisfeito por um modelo $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v} \rangle$, se $\mathcal{R}$ for serial, *i.e.*, para todo $w' \in \mathcal{W}$, existe um $w'' \in \mathcal{W}$ tal que $w'\mathcal{R}w''$.

Prova:

Seja $\mathcal{R}$ serial.

Suponha $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\varphi$. Ou seja, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \varphi$.

Por absurdo, suponha $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\neg\varphi$. Ou seja, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \neg\varphi$.

Como $\mathcal{R}$ é serial, existe um w' tal que $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \varphi \wedge \neg\varphi$, o que é absurdo.

Portanto, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \neg\Box\neg\varphi$.

Ou seja, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$. *Q.e.d*

Resultado 1.7.4: O Axioma *4* é satisfeito por um modelo $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v} \rangle$, se $\mathcal{R}$ for transitiva, *i.e.*, se $w'\mathcal{R}w''$ e $w''\mathcal{R}w'''$, então $w'\mathcal{R}w'''$.

Prova:

Seja $\mathcal{R}$ uma relação transitiva.

Suponha $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Box\varphi$. Ou seja, para todo w' tal que $w\mathcal{R}w'$, $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \vDash \varphi$.

Agora, para cada w'' tal que $w'\mathcal{R}w''$, dado que $w\mathcal{R}w''$ (transitividade), segue que $\langle \mathcal{M}.w\rangle \vDash \varphi$.

Assim, $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \vDash \Box\varphi$. Consequentemente, $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Box\Box\varphi$.

Logo, $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$. *Q.e.d.*

Os critérios de satisfatibilidade dos demais axiomas serão declarados sem demonstração:

O Axioma *B* é satisfeito por um modelo $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v}\rangle$, se $\mathcal{R}$ é simétrica, *i.e.*, se $w'\mathcal{R}w''$, então $w''\mathcal{R}w'$.

O Axioma *5* é satisfeito por um modelo $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathfrak{v}\rangle$, se $\mathcal{R}$ é euclideana, *i.e.*, se $w'\mathcal{R}w''$ e $w'\mathcal{R}w'''$, então $w''\mathcal{R}w'''$.

Como referência para as demonstrações dos resultados acima, ver CHELLAS (1980), pág. 81.

1.8. Outras lógicas modais

Além da lógica modal alética, outras formas de modalidades vieram a ter um tratamento lógico-simbólico ao longo do século XX.[19]

Lógicas que tratam a temporalidade como modalidades foram desenvolvidas em 1957 por Arthur Prior.

[19] Vide GOLDBLAT (2006) e PRIEST (2001)

Lógicas deônticas são aquelas que tratam das noções de obrigatoriedade e permissibilidade. O primeiro sistema modal deôntico foi desenvolvido pelo lógico finlandês Georg Henrik von Wright, em 1951.

O primeiro tratamento do conhecimento como operador modal foi realizado por von Wright em 1957, o que inaugurava a lógica epistêmica. Um tratamento mais profundo desta, inclusive introduzindo a crença como operação modal, viria a ser feito em 1962 por outro finlandês, Jaakko Hintikka.

Esta lógica desenvolvida por Hintikka, a qual chamamos de *epistêmico-doxástica*, é o tema do próximo capítulo.

2. Sobre a Lógica Epistêmico-Doxástica

2.1. Introdução

A lógica epistêmico-doxástica é aquela que trata crença e conhecimento como modalidades. Observe que o conhecimento tratado como uma modalidade deve tratar de proposições. Ou seja, o *saber* que tem como objeto uma proposição, *"saber que [uma proposição]"*.

Faz-se necessário observar que a lógica epistêmico-doxástica não tem a pretensão de descrever como agentes cognoscentes de fato raciocinam. Afinal, seres humanos (principais agentes cognoscentes a considerar) nem sempre raciocinam de forma coerente. Com frequência mantemos crenças inconsistentes sem ter consciência deste fato, ou ignoramos consequências lógicas do nosso conhecimento, por mais óbvias que sejam. Se tudo isto fosse levado em conta, seria extremamente difícil formular uma axiomática para a lógica epistêmico-doxástica.

Tal lógica, portanto, requer que lidemos de forma idealizada com os agentes cognoscentes. Assim como, em ciências naturais, trabalhar com sistemas ideais – sem atrito, no vácuo perfeito, termodinamicamente fechados etc. – é útil para obter resultados tangíveis em um universo no qual tais sistemas não existem, uma lógica que formaliza agentes cognoscentes ideais mostra-se uma ferramenta poderosa para filosofia, ciências da computação e teoria dos jogos.

O primeiro tratamento da lógica epistêmico-doxástica foi feito por Jaakko Hintikka na obra *Knowledge and Belief, An Introduction to the Logic of the Two Notions*, em 1962.

Nos sistemas nos quais crença e conhecimento não são interdefiníveis, que constituem a maioria na literatura, a lógica epistêmico-doxástica consiste em uma lógica bimodal, havendo nas semânticas associadas uma relação de acessibilidade para cada operador.

Usualmente, os lógicos que trabalham com lógica epistêmica formalizam o conceito platonista de conhecimento: *conhecimento é crença verdadeira e justificada*.

Como referência ao estudo deste tipo de lógica, recomenda-se HINTIKKA (1962) e MORTARI (1999). O fragmento epistêmico destas é muito bem tratado em CARNIELLI e PIZZI (2008).

2.2. Linguagem

- Proposições atômicas são fórmulas bem formadas (fbf).
- Se α é uma fbf, então $K\alpha$, $B\alpha$ e $\neg\alpha$ são fbfs.
- Se α e β são fbfs, então $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são fbfs.

Alguns autores (e.g. Hintikka) utilizam os operador P e C, tais que $P\varphi$ e $C\varphi$ são fbfs lidas respectivamente como "é possível, em vista de tudo o que é sabido, φ" e "φ é compatível com tudo o que é acreditado".

P e C são definíveis:

$P\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg K \neg \varphi$

$C\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg B \neg \varphi$

A expressão "*sabe-se se* φ" é formalizável por $K\varphi \vee K\neg\varphi$.

2.3. Modelo

A semântica da a lógica epistêmico-doxástica é exatamente a mesma da a lógica modal alética, a semântica de mundos possíveis de Kripke. Observe que neste capítulo adotamos a nomenclatura de alguns autores (e.g. MORTARI, 1999), os quais utilizam o termo "estado epistêmico" no lugar de "mundo possível".

Define-se um *modelo* $\mathcal{M}$ para a lógica epistêmico-doxástica como uma quadrupla ordenada $\mathcal{M} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{K}, \mathfrak{v} \rangle$ tal que,

- $\mathcal{S} \neq \emptyset$
- $\mathfrak{v} : \mathcal{S} \times \textsc{Atom} \rightarrow \{V, F\}$
- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$
- $\mathcal{B}$ é serial
- $\mathcal{K}$ é reflexiva

Define-se a relação $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash \alpha$ nos seguintes termos:

- Se $p \in \textsc{Atom}$, então $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash p$ sse $\mathfrak{v}(\mathfrak{s}, p) = V$
- $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash \neg\alpha$ sse $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \nvDash \alpha$
- $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash \alpha \wedge \beta$ sse $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash \alpha$ e $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash \beta$
- $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash \alpha \vee \beta$ sse $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash \alpha$ ou $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash \beta$
- $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash \alpha \rightarrow \beta$ sse $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \nvDash \alpha$ ou $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash \beta$
- $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash \alpha \leftrightarrow \beta$ sse $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash \alpha \rightarrow \beta$ e $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash \beta \rightarrow \alpha$

- $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash K\alpha$ sse, para todo $\mathfrak{s}' \in \mathcal{S}$ tal que $\mathfrak{s}\mathcal{K}\mathfrak{s}'$, $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s}' \rangle \vDash \alpha$

- $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s} \rangle \vDash B\alpha$ sse, para todo $\mathfrak{s}' \in \mathcal{S}$ tal que $\mathfrak{s}\mathcal{B}\mathfrak{s}'$, $\langle \mathcal{M}, \mathfrak{s}' \rangle \vDash \alpha$

2.4. Axiomática Básica para a Lógica Epistêmico-Doxástica

Um sistema axiomático básico para a lógica epistêmico-doxástica é o Sistema **X**,[20] o qual consiste nos seguintes axiomas e regras:

- *LC*. Todos os teoremas da Lógica Clássica

- Axioma T_K. $K\varphi \to \varphi$

- Axioma D_B. $B\varphi \to \neg B \neg \varphi$

- Axioma K_K. $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$

- Axioma K_B. $B(\varphi \to \psi) \to (B\varphi \to B\psi)$

- Axioma *M*. $K\varphi \to B\varphi$

- *MP*. $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$

- *RK*. $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash K\varphi}$

Portanto, o sistema **X** consiste no sistema **T** para o operador epistêmico, sistema **KD** para o operador doxástico e um axioma que os relaciona, *M*. Observe que a regra de necessitação para o operador *B* pode ser derivada de *M* e *RK*.

[20] Esta nomenclatura é a utilizada por MORTARI (1999).

2.5. Extensões do Sistema X

A seguir são apresentados os axiomas que podem ser adotados em extensões de **X**, assim como uma breve e despretensiosa discussão acerca destes. [21]

2.5.1. Axiomas de Introspecção Positiva

Os *axiomas de introspecção positiva* recebem este nome por versarem acerca da crença ou conhecimento sobre a própria crença ou conhecimento.

- Axioma 4_K. $K\varphi \rightarrow KK\varphi$

Ou seja, se é sabido que φ, então sabe-se que é sabido que φ.

- Axioma 4_B. $B\varphi \rightarrow BB\varphi$

Ou seja, se é acreditado que φ, então acredita-se que é acreditado que φ.

- Axioma *P*. $B\varphi \rightarrow KB\varphi$

Ou seja, se é acreditado que φ, então sabe-se que é acreditado que φ.

- Axioma *C*. $B\varphi \rightarrow BK\varphi$

Ou seja, se é acreditado que φ, então acredita-se que sabe-se que φ.

[21] Tal breviedade e despretensiosidade são justificadas pelo fato de que tais axiomas têm pouca relevância no estudo do Paradoxo da Cognoscibilidade, ainda que sejam relevantes em algumas de suas variações.

Os Axiomas 4_K, 4_B e P são aceitáveis, uma vez que se aceite que a noção de conhecimento e crença tratada pela lógica epistêmico-doxástica exclui o conhecimento e crença subconscientes.

Quanto ao axioma C, as razões para rejeitá-lo pesam mais do que as para aceitá-lo. É perfeitamente cabível que um agente cognoscente tenha uma crença mas tenha consciência de que não é capaz de justificá-la racionalmente. Ou seja, $KB\varphi \wedge K\neg K\varphi$ não é uma contradição, portanto, o axioma C é rejeitável.

2.5.2. Axiomas de Introspecção Negativa

Os *axiomas de introspecção negativa* recebem este nome por versarem acerca do conhecimento ou crença sobre a própria ignorância ou descrença.

- Axioma 5_K. $\neg K\varphi \to K\neg K\varphi$

Ou seja, se não é sabido que φ, então sabe-se que não é sabido que φ.

- Axioma 5_B. $\neg B\varphi \to B\neg B\varphi$

Ou seja, se não é acreditado que φ, então acredita-se que não é acreditado que φ.

- Axioma Q. $\neg B\varphi \to K\neg B\varphi$

Ou seja, se não é acreditado que φ, então sabe-se que não é acreditado que φ.

- Axioma V. $\neg K\varphi \to B\neg K\varphi$

Ou seja, se não é sabido que φ, então acredita-se que não é sabido que φ.

- Axioma G. $\neg K\neg K\varphi \to K\neg K\neg\varphi$

Ou seja, se é possível, em vista de tudo o que se sabe, que se saiba φ, então sabe-se que é possível, em vista de tudo o que se sabe, φ.[22]

Há um forte motivo para rejeitar tanto 5_K quanto V, ao menos quando se trata de agentes cognoscentes humanos. A virtude de ter consciência da própria ignorância é rara entre os homens. É justamente esta virtude que distinguiu Sócrates de seus contemporâneos atenienses.

Ainda assim, 5_K pode ser útil para trabalhar com inteligências artificiais, das quais é esperado que quando não tenham informação suficiente para resolver um problema ou responder uma questão, sejam capazes de informar este fato.

2.6. Cenários com Múltiplos Agentes Epistêmicos

Com algumas pequenas alterações na linguagem, é possível trabalhar com a multiplicidade de agentes epistêmicos/cognoscentes.

Se φ é uma fbf e a um agente epistêmico, também são fbfs $Ka\varphi$ e $Ba\varphi$, as quais são lidas respectivamente como "a sabe que φ" e "a acredita que φ".

Um modelo para a lógica epistêmico-doxástica de múltiplos agentes é definido como uma sequência $\mathcal{M} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_m, \mathcal{K}_1, ..., \mathcal{K}_m, \mathfrak{v} \rangle$ tal que,

- $\mathcal{S} \neq \emptyset$
- $\mathfrak{v} : \mathcal{S} \times \textsc{Atom} \rightarrow \{V, F\}$
- $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, para todo $1 \leq i \leq m$.
- $\mathcal{B}_i$ é serial, para todo $1 \leq i \leq m$.

[22] Observe que $\neg K \neg$ é lido aqui como em HINTIKKA (1962).

- $\mathcal{K}_i$ é reflexiva, para todo $1 \leq i \leq m$.

Os axiomas são adaptados a esta abordagem por meio de variáveis da metalinguagem. Por exemplo, o Axioma T_K é expresso na forma:

$$Ki\varphi \rightarrow \varphi \text{ , para todo } 1 \leq i \leq m.$$

A adição de múltiplos agentes epistêmicos confere à linguagem uma grande capacidade expressiva, permitindo tratar, por exemplo, do compartilhamento de conhecimento. Pode-se demonstrar, por exemplo, que o conhecimento é transitivo:

$\vdash_{\mathbf{X}} KaKb\varphi \rightarrow Ka\varphi$

Prova:

1	$Kb\varphi \rightarrow \varphi$	T
2	$KaKb\varphi \rightarrow Ka\varphi$	RR

2.7. Problema da Omnisciência Lógica

A Regra de Necessitação epistêmica RK declara que, se α é um teorema, então sabe-se que α. Isto parece ser uma situação muito idealizada, dado que até os lógicos ignoram vários teoremas, e mesmo um computador eletrônico poderia carecer de capacidade computacional para verificar se uma fórmula é teorema, caso sua demonstração fosse muito grande.

Por RK e K_K, deriva-se a Regra de Regularidade epistêmica, $\frac{\vdash\varphi\rightarrow\psi}{\vdash K\varphi\rightarrow K\psi}$, segundo a qual um agente cognoscente sabe todas as consequências lógicas de seu conhecimento. Assim, segundo a Regra de Regularidade, alguém que conheça todos os axiomas de uma teoria, também conhece todos os teoremas desta. Esta situação é inverídica, uma vez que existem conjecturas ainda não provadas ou refutadas dentro de teorias axiomatizadas.

Ainda que no início deste capítulo argumentou-se a favor de uma lógica que lida com agentes cognoscentes ideais, tal nível de idealização compromete a aceitação do argumento.

Existem formas de contornar esta situação, conhecida como *Problema da Onisciência Lógica*, dentre as quais convém listar:

1. Aceitar que a lógica epistêmico-doxástica trata de agentes extremamente idealizados.

2. Adotar uma leitura do operador epistêmico que não sugere consciência do agente cognoscente. Assim, $K\varphi$ é lida, por exemplo, como "sabe-se implicitamente que φ", "φ é consequência do conhecimento [do agente epistêmico em questão] que φ" ou "em todo estado epistêmico compatível com o conhecimento [do agente epistêmico em questão], φ".

3. Adotar um sistema axiomático não-normal no qual não valham Ax. K_K e RK.

Nenhuma destas soluções é gratuita. O custo da solução (1) é a dificuldade em interpretar resultados desta lógica para agentes cognoscentes reais. A adoção da solução (2) é acompanhada da indiscernibilidade do que é conscientemente conhecido e o que é consequência do que é conhecido. A solução (3) requer outro tipo de semântica que não os modelos de Kripke. [23]

Adotamos a solução (1), compatível com nossa abordagem do Paradoxo da Cognoscibilidade, uma vez que podemos adaptar resultados concernentes a agentes ideais para resultados concernentes a agentes reais, nos seguintes termos:

- Se o Paradoxo da Cognoscibilidade for interpretado como uma prova de que há verdades incognoscíveis a agentes ideais, então, *a fortiori*, há verdades incognoscíveis a agentes reais.

- Por outro lado, dada uma solução do Paradoxo na qual o Princípio de Cognoscibilidade (ou alguma reformulação deste) é compatível com a assunção de que agentes ideais não são totalmente omniscientes (ainda que estes sejam logicamente omniscientes), então, *a fortiori*, o Princípio de Cognoscibilidade é compatível com o fato de que agentes reais não são omniscientes.

[23]Para mais informações sobre sistemas não-normais, vide PRIEST (2001).

3. Paradoxo da Cognoscibilidade de Fitch

3.1. Introdução

O Paradoxo da Cognoscibilidade, como já discutido na Introdução, é um resultado em lógica modal alético-epistêmica, divulgado pela primeira vez por Frederic Fitch em seu artigo "*A Logical Analysis of Some Value Concepts*" (1963).

O presente capítulo trata deste resultado, o qual será aqui apresentado com os recursos contemporâneos da lógica simbólica. Também será discutida a relevância filosófica do paradoxo, principalmente levando em conta seu papel na querela *realismo versus antirealismo*.

3.2. Preliminares

Em primeiro lugar, faz-se necessário o esclarecimento da terminologia aqui empregada, assim como do sistema no qual o resultado em questão é derivável.

Definição 3.2.1: Diz-se que uma proposição φ é *cognoscível* se, e somente se, $\Diamond K\varphi$, ou seja, é possível conhecer φ.

Definição 3.2.2: Chama-se *Princípio de Cognoscibilidade* (PC) a tese filosófica segundo a qual toda verdade é cognoscível, o que é expresso em lógica alético-epistêmica pelo esquema:

$$\text{PC: } \varphi \to \Diamond K\varphi.$$

O sistema de lógica alético-epistêmica, o qual denotamos por **SF**, é composto pelos seguintes axiomas e regras de inferência.

- *LC*. Todos os teoremas da Lógica Clássica
- Axioma T_K. $K\varphi \to \varphi$
- Axioma K_K. $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$
- Axioma K. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
- *MP*. $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$
- *RK*. $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash K\varphi}$
- *RN*. $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi}$

Observe que, como demonstrado em 1.4.2,

$$\vdash_{\mathbf{SF}} K(\varphi \wedge \psi) \to (K\varphi \wedge K\psi).$$

Chamamos de $\mathbf{SF}^\star$ o sistema resultante da adição do Princípio de Cognoscibilidade, $\varphi \to \Diamond K\varphi$, ao sistema **SF**. [24]

[24] Estes sistemas multimodais podem ser estudados de forma rigorosa e profunda através do método de fusões de lógicas. Para maiores informações, ver CARNIELLI, CONIGLIO, GABBAY, GOUVEIA e SERNADAS (2008).

3.3. Obtendo o Paradoxo

A seguir, a demonstração do Paradoxo da Cognoscibilidade, dividida em dois passos.

Resultado 3.3.1: Tese e Fitch-Moore (TFM):

$$\vdash_{\mathbf{SF}} \neg\Diamond K(\varphi \wedge \neg K\varphi)$$

Prova:

1	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \rightarrow (K\varphi \wedge K\neg K\varphi)$	Resultado 2.4.2
2	$(K\varphi \wedge K\neg K\varphi) \rightarrow K\neg K\varphi$	*LC*
3	$K\neg K\varphi \rightarrow \neg K\varphi$	Axioma T_K
4	$(K\varphi \wedge K\neg K\varphi) \rightarrow \neg K\varphi$	2, 3 *LC*, $\frac{\alpha\rightarrow\beta \quad \beta\rightarrow\gamma}{\alpha\rightarrow\gamma}$
5	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \rightarrow \neg K\varphi$	1, 4 *LC*, $\frac{\alpha\rightarrow\beta \quad \beta\rightarrow\gamma}{\alpha\rightarrow\gamma}$
6	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \rightarrow K\varphi$	1 *LC*, $\frac{\alpha\rightarrow(\beta\wedge\gamma)}{\alpha\rightarrow\beta}$
7	$\neg K(\varphi \wedge \neg K\varphi)$	5, 6 *LC*, $\frac{\alpha\rightarrow\beta \quad \alpha\rightarrow\neg\beta}{\neg\alpha}$
8	$\Box\neg K(\varphi \wedge \neg K\varphi)$	7 RN
9	$\neg\Diamond K(\varphi \wedge \neg K\varphi)$	8 *LC* $\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$

Em linguaguem natural, este resultado é interpretável como "É impossível que se saiba que: φ, mas ignora-se φ".

Resultado 3.3.2: Paradoxo da Cognoscibilidade ou Colapso do operador modal K pela adição do Princípio de Cognoscibilidade

Se adicionarmos PC como axioma em **SF**, o operador epistêmico colapsa. Isto é:

$$\vdash_{\mathbf{SF}^{\star}} K\varphi \leftrightarrow \varphi$$

Prova:

1	$(\varphi \wedge \neg K\varphi) \rightarrow \Diamond K(\varphi \wedge \neg K\varphi)$	*PC*
2	$\neg\Diamond K(\varphi \wedge \neg K\varphi)$	Resultado 4.3.1
3	$\neg(\varphi \wedge \neg K\varphi)$	1, 2 *LC*, $\frac{\alpha\rightarrow\beta\,,\,\neg\beta}{\neg\alpha}$
4	$\varphi \rightarrow K\varphi$	3 *LC*, $\frac{\neg(\alpha\wedge\neg\beta)}{\alpha\rightarrow\beta}$
5	$K\varphi \rightarrow \varphi$	Axioma *T*
6	$K\varphi \leftrightarrow \varphi$	5, 4 *LC*, $\frac{\alpha\rightarrow\beta\,,\,\beta\rightarrow\alpha}{\alpha\leftrightarrow\beta}$

É interessante observar que o resultado acima pode ser simplificado para uma única modalidade. Ao adicionar $\varphi \rightarrow \Diamond\Box\varphi$ ao sistema **T**, por meio de raciocínios idênticos aos expostos acima, substituindo cada ocorrência de K por $\Box$, deriva-se $\Box\varphi \leftrightarrow \varphi$.[25]

[25] Ver COSTA-LEITE (2003), Pg. 78

3.4. Considerações filosóficas sobre o paradoxo

3.4.1. Interpretação filosófica do Paradoxo da Cognoscibilidade

A partir das seguintes teses epistêmicas:

1. O conhecimento é distributivo na conjunção, $K(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (K\varphi \wedge K\psi)$ (utilizada no passo 1 do Resultado 3.3.1)

2. O conhecimento é verídico, $K\varphi \rightarrow \varphi$ (utilizada no passo 3 do Resultado 3.3.1)

3. Toda verdade é cognoscível, $\varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$ (utilizada no passo 2 do Resultado 3.3.2),

deriva-se o absurdo de que toda verdade é conhecida, isto é, $\varphi \rightarrow K\varphi$ (passo 4 do Resultado 3.3.2).

Portanto, se for aceita a lógica utilizada na obtenção deste resultado, ao menos uma destas teses deve ser falsa.

A tese (1) é bastante modesta e tem grande apelo intuitivo. Sem contar que (1) é teorema em qualquer sistema de lógica epistêmica normal.

Quanto à tese (2), esta é bastante aceitável, ainda que existam certas objeções quanto a ela, assunto que será tratado logo adiante. Além do mais, o paradoxo pode ser obtido em sistemas nos quais não valem o Axioma *T*, como será mostrado no Capítulo 5.

Portanto, é mais razoável que a tese (3), justamente a mais arrojada e controversa, seja falsa. Mas, se nem toda verdade é cognoscível, então deve existir alguma verdade incognoscível.

Esta leitura do Paradoxo da Cognoscibilidade tem sido apontada por alguns autores – e.g.: BROGAARD e SALERNO (2009), WILLIANSON (1982) – como desfavorável a posicionamentos filosóficos antirrealistas.

3.4.2. Sobre realismo e antirrealismo

A fim de esclarecer a observação acima, cabe, em primeiro lugar, descrever em que consiste o realismo. Alertamos o leitor que a descrição a seguir é genérica, havendo muitos pensadores denominados "realistas" cujo posicionamento varia em alguns dos pontos aqui expressos.

Segundo o realismo, existe uma realidade na qual os agentes cognoscentes estão inseridos, a qual independe diretamente dos juízos que estes tenham acerca dela. Esta realidade, segundo o realismo, é o parâmetro absoluto do conhecimento.

No geral, pensadores realistas adotam a teoria correspondencial da verdade, segundo a qual uma proposição é verdadeira se, e somente se, corresponde a um estado de coisas que é o caso na realidade.[26] Por exemplo, a proposição "*a neve é branca*" é verdadeira se, e somente se, existe na realidade uma entidade denotada pela palavra "neve" e esta entidade de fato possui a propriedade "ser branca".

Assim, em sistemas epistemológicos de orientação realista, o conhecimento corresponde à constatação, na realidade, do valor veritativo das proposições.

É importante observar que um pensador pode defender as teses realistas para certas questões e rejeitá-las para outras. Por exemplo, pode-se defender que as teses realistas se aplicam às questões acerca da natureza (realismo físico), mas rejeitar que se apliquem às questões matemáticas. Ou ainda, pode-se ser um realista

[26]Esta é a leitura que realistas fazem da teoria correspondencial da verdade. Outras correntes de pensamento também podem adotar esta teoria, fazendo leituras apropriadas.

físico e matemático, mas rejeitar que as teses realistas se apliquem às questões morais.

Retomando o ponto epistemológico, um realista pode estar inclinado a aceitar que existam parcelas da realidade que, por razões lógicas ou físicas, sejam inacessíveis aos agentes cognoscentes. As proposições que remetem a estas parcelas da realidade seriam, portanto, incognoscíveis. Tais pensadores são denominados “realistas moderados”.

Como exemplo de pensamento realista moderado, considere Karl R. Popper (1902–1994). POPPER (2002), sob evidente influência de David Hume (1711–1776), argumentava que, uma vez que nossa observação da realidade física é limitada no tempo e no espaço, ainda que possamos constatar se proposições acerca de eventos ou objetos particulares são verdadeiras ou falsas, é impossível constatar que uma proposição universal seja verdadeira. Ainda assim, é possível constatar que esta seja falsa, bastando verificar um caso que a contradiga. Segundo Popper, toda teoria legitimamente científica é falsificável, ou seja, é passível de refutação. Ainda assim, nenhuma teoria científica pode ser considerada verdadeira sem qualquer sombra de dúvida. Popper inclusive defendia que o conceito filosófico de conhecimento deve ser definido de forma a abarcar as teorias científicas, o que em termos lógicos significa rejeitar que o Axioma T_K.

Dado isto, fica claro que a rejeição do Princípio de Cognoscibilidade não é apenas compatível com o realismo, mas é inclusive defendida por certas correntes do realismo.

Como referência e para maiores detalhes sobre o pensamento realista, sugerimos MILLER (2010).

Muitas são as correntes de pensamento que divergem do realismo, mas são denominadas “antirealistas” aquelas que rejeitam enfaticamente todas ou a maior parte das teses realistas.

Os pensadores antirealistas alegam que a verdade consiste em um constructo intelectual dos agentes cognoscentes. Em vista disto, estes estão mais inclinados a assumir o Princípio de Cognoscibilidade, uma vez que não haveria qualquer razão para que o intelecto não reconheça seus próprios constructos. Um dos melhores exemplos de correntes de pensamento antirealista é o intuicionismo, ainda que muitos dos intuicionistas o sejam apenas em relação à matemática.

Segundo os intuicionistas, uma vez que a matemática consiste em um constructo intelectual humano, é incabível afirmar que uma proposição matemática seja verdadeira (ou falsa) ou que um objeto matemático exista (ou inexista) independentemente da consciência do fato, a qual só poderia ser determinada por uma demonstração construtiva.

A despeito do pensamento intuicionista ter sido desenvolvido originalmente pelo matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) em 1912, o primeiro sistema de sistema de lógica intuicionista considerado na literatura só veio a ser desenvolvido pelo seu discípulo Arend Heyting (1898 – 1980) em 1930.[27] A Lógica Intuicionista de Heyting rejeita certos princípios da Lógica Clássica, tais como terceiro excluído, $\varphi \vee \neg\varphi$, eliminação da dupla negação,$\neg\neg\varphi \to \varphi$,

[27] O matemático russo Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903 – 1987) também propôs um sistema de lógica que formalizasse o pensamento intuicionista. Contudo, o sistema desenvolvido por Heyting é o que veio a ser reconhecido como a Lógica Intuicionista, enquanto o sistema de Kolmogorov veio a ser desenvolvido independentemente pelo matemático norueguês Ingebrigt Johansson (1904 – 1987) e reconhecido como um fragmento da Lógica Intuicionista chamado de “Lógica Minimal”.

e interdefinibilidade de quantificadores, $\neg\forall x \neg\varphi \leftrightarrow \exists x\varphi$.

Como referência à lógica intuicionista e sua filosofia, ver HEYTING (1971), CARNIELLI e EPSTEIN (2009), PRIEST (2001).

É digno de nota o fato de que, do ponto de vista intuicionista, '*existe alguma verdade incognoscível*' é um contra-senso.

Afinal, segundo os critérios intuicionistas de validade e demonstrabilidade, a fim de provar uma proposição na forma '*existe um objeto que verifica tais e tais propriedades*', faz-se necessário demonstrar construtivamente que para [ao menos] um objeto específico, tais e tais propriedades valem.

No caso em questão, seria necessário apontar uma proposição p, demonstrar p e demonstrar que p é incognoscível. Mas, se há uma demonstração de p, então ela é uma verdade justificada, acreditada por qualquer pessoa razoável que entenda a demonstração. Ou seja, p é cognoscível.

3.5. Propostas de solução do paradoxo

Muitas têm sido as propostas para resolver o Paradoxo da Cognoscibilidade. Por "soluções", entenda formas pelas quais o PC e as demais teses epistêmicas possam ser assumidos sem que o operador epistêmico colapse.

Como apontado anteriormente, pode-se,

1. rejeitar a lógica subjacente aos raciocínios que levam ao colapso, ou

2. reformular o PC.

Adiante são apresentados casos representativos de (1) e (2), respectivamente.

3.5.1. Proposta intuicionista

T. Williamson em *Intuitionism Disproved?* (1982) argumenta que o Paradoxo justifica a adoção da lógica intuicionista como lógica subjacente à epistemologia. [28]

A princípio, a proposta de Williamson parece legítima, pois o intuicionismo é, como dito acima, uma corrente de pensamento antirrealista.

Dado isto, considere o sistema **SFH**, obtido de $\mathbf{SF}^{\star}$ pela substituição do Axioma *LC* pelo seguinte:

Axioma *LH*. Todos os teoremas da Lógica Intuicionista

Ainda que o Resultado 3.3.1 seja intuicionisticamente válido, o Paradoxo da Cognoscibilidade não pode ser obtido, já que o passo 4 do Resultado 3.3.2 é obtido por uma inferência inválida na lógica intuicionista:

$$\frac{\neg(\alpha \land \neg\beta)}{\alpha \to \beta}\ .$$

Contudo, mesmo não incorrendo no colapso do operador epistêmico, a abordagem intuicionista não está livre de resultados problemáticos. Afinal, no sistema de Heyting, é válido o passo 3 do resultado 3.3.2, $\neg(\varphi \land \neg K\varphi)$, o qual é interpretável como "não há proposições verdadeiras e ignoradas". E, uma vez que na lógica intuicionista vale a inferência

$$\frac{\neg(\alpha \land \neg\beta)}{\neg\beta \to \neg\alpha}$$

tem-se

[28] Ver BROGAARD e SALERNO (2009), WILLIAMSON (1982).

$$\vdash_{SFH} \neg K\varphi \rightarrow \neg\varphi$$

Este resultado é interpretável como "o que é ignorado, é falso".

Não bastassem estes resultados contra-intuitivos, P. Percival em *Fitch and Intuitionistic Knowability* (1990) deriva em **SFH** um resultado especialmente problemático para o intuicionismo, uma vez que sua legibilidade está em desacordo com os princípios epistemológicos intuicionistas aqui descritos: [29]

Resultado 4.5.1.1: $\vdash_{SFH} \neg(\neg K\varphi \wedge \neg K\neg\varphi)$.

Prova:

1	$(\neg K\varphi \wedge \neg K\neg\varphi) \rightarrow \neg K\varphi$	LH
2	$(\neg K\varphi \wedge \neg K\neg\varphi) \rightarrow \neg K\neg\varphi$	LH
3	$\neg K\varphi \rightarrow \neg\varphi$	resultado de SFH
4	$\neg K\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	resultado de SFH
5	$(\neg K\varphi \wedge \neg K\neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$	1, 3 LH
6	$(\neg K\varphi \wedge \neg K\neg\varphi) \rightarrow \neg\neg\varphi$	2, 4 LH
7	$(\neg K\varphi \wedge \neg K\neg\varphi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	5, 6 LH
8	$\neg(\neg K\varphi \wedge \neg K\neg\varphi)$	7 LH

[29] Ver BROGAARD e SALERNO (2009), PERCIVAL (1990).

Este resultado pode ser interpretado como, assumindo PC, conclui-se que não existem proposições epistemicamente indecidíveis, isto é, proposições que sejam ignoradas assim como suas negações. [30]

Outra forma de revisão lógica envolve a adoção de lógicas paraconsistentes como realizado, por exemplo, por COSTA-LEITE (2003).

3.5.2. Proposta de Tennant

Neil Tennant, em *The Taming of the True* (1997), propõe uma reformulação do Princípio de Cognoscibilidade, restringindo quais são as verdades cognoscíveis.

Definição 3.5.2.1: Diz-se que uma proposição φ é *anticartesiana* quando $K\varphi \vdash \bot$, isto é, conhecê-la acarreta contradição. Caso contrário, $K\varphi \nvdash \bot$, é dita *cartesiana*.

Tennant reformula o Princípio de Cognoscibilidade, versão a qual será referida por PCT, nos seguintes termos:

Toda verdade cartesiana é cognoscível.

O PCT é formalizável não por um esquema de fórmula, mas por uma regra de inferência:

$$\frac{\varphi \qquad K\varphi \nvdash \bot}{\Diamond K\varphi}$$

A proposta de Tennant resolve o Paradoxo na medida em que proposições na forma $\psi \wedge \neg K\psi$ são anticartesianas. Assim, o PCT é compatível com a existência

[30] Não confundir *decidibilidade epistêmica* com "decidibilidade" no sentido de haver prova ou contraprova de uma proposição.

de verdades ignoradas. Contudo, tal solução deixa a desejar, uma vez que Tennant assume que existam verdades incognoscíveis.

No capítulo a seguir, investigaremos como o Princípio de Cognoscibilidade pode ser reformulado em cenários que lidam com a multiplicidade de agentes epistêmicos.

4. A Questão da Cognoscibilidade em Sistemas Multiagentes

Zhuangzi: *Veja quão felizes estão os peixes a nadar pelo rio.*

Huizi: *Como você sabe que os peixes estão felizes? Você não é um peixe.*

Zhuangzi: *E você não é eu. Como você sabe que eu não sei que os peixes estão felizes?*[31]

4.1. Introdução

Qualquer indivíduo com um mínimo de humildade e sapiência socrática é capaz de reconhecer que haja proposições verdadeiras que ele ignora. Contudo, como demonstrado acima, é impossível que um indivíduo saiba que uma determinada proposição é verdadeira, mas ignorada por ele. Por outro lado, outro indivíduo poderia reconhecer este fato. Ou seja, certamente é incognoscível a i que *φ é verdadeira e ignorada por i*, mas talvez não o seja para um j distinto.

Nesta seção, desenvolver-se-á formalmente esta ideia por meio de sistemas que lidam com uma multiplicidade de operadores epistêmicos, tais que $Ki\varphi$ deva ser lido como "i sabe que φ".

Ainda que esta linha de estudos já tenha sido iniciada por autores como Johan van Benthem,[32] esforçamo-nos para desenvolvê-la com maior profundidade, rigor e clareza.

Considere o seguinte sistema de n agentes epistêmicos, o qual será referido

[31] ZHUANGZI e WATTSON (1968) p.188. Traduzido indiretamente do Inglês.

[32] Vide VAN BENTHEM (2009)

por sistema $\mathbf{T}_K\mathbf{K}_\Box$

- *LC.* Todos os teoremas da Lógica Proposicional Clássica
- Axioma T_K. $Ki\varphi \rightarrow \varphi$, para todo $1 \leq i \leq n$
- Axioma K_K. $Ki(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (Ki\varphi \rightarrow Ki\psi)$, para todo $1 \leq i \leq n$
- Axioma *K*. $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
- *MP.* $\dfrac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$
- *RK.* $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash Ki\varphi}$, para todo $1 \leq i \leq n$
- *RN.* $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi}$

É importante ressaltar que neste sistema a Tese Fitch-Moore é válida para todo agente cognoscente, isto é, $\vdash_{\mathbf{T}_K\mathbf{K}_\Box} \neg\Diamond Ki(\psi \wedge \neg Ki\psi)$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Em $\mathbf{T}_K\mathbf{K}_\Box$, são definidos, por abuso de linguagem, as fórmulas a seguir:

Def. 4.1.1: $\forall x\, Kx\varphi =_{df} K1\varphi \wedge K2\varphi \wedge ... \wedge Kn\varphi$

Isto é, "todos sabem que φ".

Def. 4.1.2: $\exists x\, Kx\varphi =_{df} K1\varphi \vee K2\varphi \vee ... \vee Kn\varphi$

Isto é, "alguém sabe que φ".

Observe que não se trata de lógica de primeira-ordem. O uso de quantificadores aqui consiste apenas em um abuso, a fim de facilitar a leitura.

Uma vez definidos estes conceitos, pode-se formular duas versões do PC:

Princípio de Cognoscibilidade Forte (PC Forte): $\varphi \rightarrow \Diamond\forall x\, Kx\varphi$

Ou seja, toda verdade é possível de ser conhecida por todos.

Princípio de Cognoscibilidade Fraco (PC Fraco): $\varphi \rightarrow \Diamond\exists x\, Kx\varphi$

Ou seja, toda verdade é possível de ser conhecida por alguém.

Agora, a fim de reconhecer as consequências de cada versão, considere os sistemas:

$SF' = \mathbf{T}_K\mathbf{K}_\Box \oplus$PC Forte

$SF'' = \mathbf{T}_K\mathbf{K}_\Box \oplus$PC Fraco

4.2. Resultado A

$\vdash_{SF'} Ki\varphi \leftrightarrow \varphi$, para todo $1 \leq i \leq n$

Isto é, SF' é inconsistente com a alegação de que haja uma proposição verdadeira e ignorada por um agente cognoscente qualquer.

Prova:

Considere o PC Forte

$\varphi \rightarrow \Diamond\forall x\, Kx\varphi$

Por definição,

$\varphi \rightarrow \Diamond(K1\varphi \wedge K2\varphi \wedge ... \wedge Kn\varphi)$

Como $\Diamond$ é semidistributivo na conjunção, (vide capítulo 1, resultado 1.4.7)

$\varphi \rightarrow (\Diamond K1\varphi \wedge \Diamond K2\varphi \wedge ... \wedge \Diamond Kn\varphi)$

Da qual pode-se derivar n conclusões, na forma,

$\varphi \rightarrow \Diamond Ki\varphi$, para $1 \leq i \leq n$.

Como em $\mathbf{T}_K\mathbf{K}_\Box$ é demonstrável a tese Fitch-Moore, $\neg\Diamond Ki(\varphi \wedge \neg Ki\varphi)$, obtem-se, tal como demonstrado no capítulo anterior, o colapso dos operadores epistêmicos,

$$Ki\varphi \leftrightarrow \varphi.$$

4.3. Resultado B

SF'' é consistente com a alegação de que haja uma proposição verdadeira e ignorada por um agente cognoscente.

Basta mostrar um modelo de Kripke que satisfaça SF'', no qual haja ao menos um mundo possível / estado epistêmico no qual uma proposição seja verdadeira e ignorada por algum agente.

Considere o modelo $\mathcal{M}^{SF''} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathfrak{v} \rangle$ tal que:

$\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$

$\langle \mathcal{M}, w_1 \rangle \vDash p$

$\langle \mathcal{M}, w_2 \rangle \vDash \neg p$

$\mathcal{K}_1 = \{\langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle, \langle w_2, w_2 \rangle\}$

$\mathcal{K}_2 = \{\langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_2, w_2 \rangle, \langle w_1, w_2 \rangle\}$

$\mathcal{R} = \mathcal{W} \times \mathcal{W}$

$\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\alpha$ sse, para todo $w' \in \mathcal{W}$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \alpha$

$\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash K1\alpha$ sse, para todo $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{K}_1 w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \alpha$

$\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash K2\alpha$ sse, para todo $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{K}_2 w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \alpha$

Segue abaixo a ilustração deste modelo, na qual as setas finas e contínuas representam a relação $\mathcal{K}_1$, enquanto as setas grossas tracejadas representam $\mathcal{K}_2$.

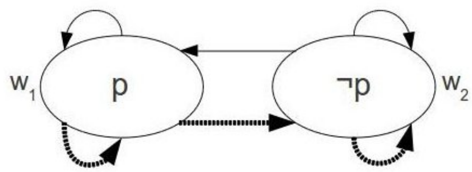

Figura 3: Modelo $\mathcal{M}^{SF''}$

(i) $\mathcal{M}^{SF''}$ satisfaz SF''.

Prova: Sendo $\mathcal{M}^{SF''}$ um modelo de Kripke, os Axiomas K e K_K são satisfeitos (Resultado 1.7.1), assim como as regras de inferência. E, uma vez que $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ são reflexivas, o Axioma T_K é satisfeito (Resultado 1.7.2). Resta apenas mostrar a satisfatibilidade de PC Fraco, o qual, pela definição, neste caso consiste em

$$\varphi \to \Diamond(K1\varphi \vee K2\varphi).$$

Para $n = 1$ e $m = 2$, ou $n = 2$ e $m = 1$, suponha que $\langle \mathcal{M}^{SF''}, w_n \rangle \vDash \varphi$. Como $\langle w_n, w_n \rangle \in \mathcal{K}_n$ e $\langle w_n, w_m \rangle \notin \mathcal{K}_n$, tem-se $\langle \mathcal{M}^{SF''}, w_n \rangle \vDash Kn\varphi$.

Logo, $\langle \mathcal{M}^{SF''}, w_n \rangle \vDash Kn\varphi \vee Km\varphi$. Uma vez que $\mathcal{R} = \mathcal{W} \times \mathcal{W}$, segue $\langle \mathcal{M}^{SF''}, w_n \rangle \vDash \Diamond(Kn\varphi \vee Km\varphi)$.

Portanto, $\langle \mathcal{M}^{SF''}, w_n \rangle \vDash \varphi \to \Diamond(Kn\varphi \vee Km\varphi)$. *Q.e.d.*

(ii) Em um mundo há uma verdade ignorada por algum agente.

Prova: Uma vez que $\langle \mathcal{M}^{SF''}, w_1 \rangle \vDash p$, $\langle \mathcal{M}^{SF''}, w_2 \rangle \vDash \neg p$ e $\langle w_1, w_2 \rangle \in \mathcal{K}_2$, tem-se que $\langle \mathcal{M}^{SF''}, w_1 \rangle \vDash p \wedge \neg K2p$.

4.4. Resultado C

$\vdash_{SF''} \psi \to \exists x\ Kx\psi$

Ou seja, em SF'', toda verdade é conhecida por ao menos um agente cognoscente.

Prova:

Considere o PC Fraco,

1) $\varphi \to \Diamond\exists x\ Kx\varphi$

Por definição,

2) $\varphi \to \Diamond(K1\varphi \lor K2\varphi \lor ... \lor Kn\varphi)$

Como $\Diamond$ é distributivo na disjunção,

3) $\varphi \to (\Diamond K1\varphi \lor \Diamond K2\varphi \lor ... \lor \Diamond Kn\varphi)$

O que equivale a

4) $(\varphi \to \Diamond K1\varphi) \lor (\varphi \to \Diamond K2\varphi) \lor ... \lor (\varphi \to \Diamond Kn\varphi)$

Agora considere φ como sendo a fórmula $\psi \land \neg\exists x\ Kx\psi$.

Ou seja, φ é $\psi \land \neg(K1\psi \lor K2\psi \lor ... \lor Kn\psi)$.

Isto é, $\psi \land \neg K1\psi \land \neg K2\psi \land ... \land \neg Kn\psi$.

Considere o termo disjunto de 4, $\varphi \to \Diamond K1\varphi$. Fazendo as devidas substituições, obtem-se $(\psi \land \neg\exists x\ Kx\psi) \to \Diamond K1(\psi \land \neg K1\psi \land \neg K2\psi \land ... \land \neg Kn\psi)$.

Dado $\vdash_{\mathbf{T}_K\mathbf{K}_\Box} \neg\Diamond K1(\psi \land \neg K1\psi)$, segue $\vdash_{\mathbf{T}_K\mathbf{K}_\Box} \neg\Diamond K1(\psi \land \neg K1\psi \land ... \land \neg Kn\psi)$

Portanto, do termo disjunto considerado, obtém-se

4.1) $\neg(\psi \land \neg\exists x\ Kx\psi)$

O que equivale a

4.2) $\psi \to \exists x\ Kx\psi$

Como pode-se aplicar o mesmo raciocínio a cada termo disjunto de 4, obtém-se:

5) $\psi \rightarrow \exists x\, Kx\psi$

4.5. Algumas considerações

Foi mostrada neste capítulo uma forma de atenuar o Paradoxo da Cognoscibilidade, pela adoção de uma versão mais fraca do Princípio de Cognoscibilidade. A mais forte objeção a esta abordagem talvez seja que o Paradoxo não foi suficientemente atenuado. Afinal, segundo o Resultado C, tem-se que uma proposição é verdadeira se, e somente se, for conhecida por alguém. Ou seja, não há, no sistema SF'', verdades ignoradas por todos.

Os resultados aqui obtidos ainda podem ser úteis por indicarem como formalizar contextos nos quais vale alguma forma do Princípio de Cognoscibilidade, sem acarretar o colapso dos operadores epistêmicos. Ou ainda, que sirvam de alerta de que nem toda reformulação do PC está imune de consequências indesejáveis.

5. Paradoxo da Credibilidade

“Every thing possible to be beliv’d is an image of truth” William Blake em *Proverbs of Hell*

O Paradoxo da Credibilidade consiste em um resultado semelhante ao Paradoxo da Cognoscibilidade, na medida que versa sobre o colapso do operador doxástico B em um sistema no qual valem os Axiomas K_B, D_B, 4_B e o Princípio de Credibilidade, $\varphi \rightarrow \Diamond B\varphi$, segundo o qual toda verdade pode ser acreditada.

É importante, ao tratar do Paradoxo da Cognoscibilidade, também considerar sua contraparte doxástica, pelos seguintes motivos:

1. O Paradoxo da Credibilidade é adaptável para a lógica epistêmica, bastando substituir os Axiomas K_B, D_B e 4_B pelos Axiomas K_K, D_K e 4_K. Este fato mina a proposta de solução do Paradoxo da Cognoscibilidade pela rejeição do Axioma T_K.

2. Como tratado anteriormente, há correntes de pensamento que interpretam o Paradoxo da Cognoscibilidade rejeitando o Princípio de Cognoscibilidade. Afinal de contas, o conhecimento é algo muito criterioso, de forma que um pensador de orientação realista pode muito bem aceitar que haja fatos de forma tal que as proposições a estes correspondentes nunca satisfaçam os critérios de conhecimento. A crença, por outro lado, é tão menos rigorosa que o conhecimento, que é difícil para um pensador, qualquer que seja sua orientação, justificar a rejeição do Princípio de Credibilidade.

5.1. Obtendo o Paradoxo

5.1.1. O Sistema SFD

Chamaremos o sistema no qual o Paradoxo da Credibilidade é obtido de **SFD**, o qual consiste nos seguintes axiomas e regras de inferência.

- *LC*. Todos os teoremas da Lógica Clássica
- Axioma K_B. $B(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (B\varphi \rightarrow B\psi)$
- Axioma D_B. $B\varphi \rightarrow \neg B\neg\varphi$
- Axioma 4_B. $B\varphi \rightarrow BB\varphi$
- Axioma *K*. $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
- *PCD*. $\varphi \rightarrow \Diamond B\varphi$
- *MP*. $\dfrac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$
- *RB*. $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash B\varphi}$
- *RN*. $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi}$

5.1.2. Tese de Fitch-Moore Doxástica

$$\vdash_{\mathbf{SFD}} \neg\Diamond B(\varphi \wedge \neg B\varphi)$$

Prova:

1	$B(\varphi \wedge \neg B\varphi) \rightarrow (B\varphi \wedge B\neg B\varphi)$	Resultado 2.4.2
2	$B(\varphi \wedge \neg B\varphi) \rightarrow B\varphi$	1 LC $\frac{\alpha\rightarrow(\beta\wedge\gamma)}{\alpha\rightarrow\beta}$
3	$B(\varphi \wedge \neg B\varphi) \rightarrow B\neg B\varphi$	1 LC $\frac{\alpha\rightarrow(\beta\wedge\gamma)}{\alpha\rightarrow\gamma}$
4	$B\varphi \rightarrow BB\varphi$	Axioma 4_B
5	$B(\varphi \wedge \neg B\varphi) \rightarrow BB\varphi$	2, 4 LC $\frac{\alpha\rightarrow\beta \qquad \beta\rightarrow\gamma}{\alpha\rightarrow\gamma}$
6	$B\neg B\varphi \rightarrow \neg B\neg\neg B\varphi$	Axioma D_B
7	$B\varphi \rightarrow \neg\neg B\varphi$	LC (instância de $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$)
8	$BB\varphi \rightarrow B\neg\neg B\varphi$	7 Regra de Regularidade
9	$\neg B\neg\neg B\varphi \rightarrow \neg BB\varphi$	8 LC $\frac{\alpha\rightarrow\beta}{\neg\beta\rightarrow\neg\alpha}$
10	$B\neg B\varphi \rightarrow \neg BB\varphi$	6, 9 LC $\frac{\alpha\rightarrow\beta \qquad \beta\rightarrow\gamma}{\alpha\rightarrow\gamma}$
11	$B(\varphi \wedge \neg B\varphi) \rightarrow \neg BB\varphi$	3, 10 LC $\frac{\alpha\rightarrow\beta \qquad \beta\rightarrow\gamma}{\alpha\rightarrow\gamma}$
12	$\neg B(\varphi \wedge \neg B\varphi)$	5, 11 LC $\frac{\alpha\rightarrow\beta \qquad \alpha\rightarrow\neg\beta}{\neg\alpha}$
13	$\Box\neg B(\varphi \wedge \neg B\varphi)$	12 RN
14	$\neg\Diamond B(\varphi \wedge \neg B\varphi)$	13 LC $\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$

Este resultado é interpretável como "é inacredidável que: φ e não acredita-se que φ".

5.1.3. Colapso do Operador Doxástico

($\Leftarrow$) $\vdash_{\mathbf{SFD}} \varphi \rightarrow B\varphi$

Prova:

1	$(\varphi \wedge \neg B\varphi) \rightarrow \Diamond B(\varphi \wedge \neg B\varphi)$	Princípio de Credibilidade
2	$\neg\Diamond B(\varphi \wedge \neg B\varphi)$	Tese Fitch-Moore Doxástica
3	$\neg(\varphi \wedge \neg B\varphi)$	1, 2 LC $\frac{\alpha \rightarrow \beta \qquad \neg\beta}{\neg\alpha}$
4	$\varphi \rightarrow B\varphi$	3 LC $\frac{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)}{\alpha \rightarrow \beta}$

($\Rightarrow$) $\vdash_{\mathbf{SFD}} B\varphi \rightarrow \varphi$

Prova:

1	$B\varphi \rightarrow \neg B\neg\varphi$	Axioma D_B
2	$\neg\varphi \rightarrow B\neg\varphi$	tal como demonstrado acima
3	$\neg B\neg\varphi \rightarrow \varphi$	2 LC $\frac{\neg\alpha \rightarrow \beta}{\neg\beta \rightarrow \alpha}$
4	$B\varphi \rightarrow \varphi$	1, 3 LC $\frac{\alpha \rightarrow \beta \qquad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$

5.2. Uma proposta de solução para o Paradoxo da Credibilidade

Reiterando, a partir das seguintes teses doxástiscas,

1. A crença é distributiva na conjunção, $B(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (B\varphi \wedge B\psi)$ (utilizada no passo 1 do Resultado 5.1.2).

2. A crença é consistente, $B\varphi \rightarrow \neg B\neg\varphi$ (utilizada no passo 6 do Resultado 5.1.2 e no passo 6 do Resutado 5.1.3($\Rightarrow$)).

3. Crença envolve introspecção positiva, $B\varphi \rightarrow BB\varphi$ (utilizada no passo 4 do Resultado 5.1.2).

4. Toda verdade é acreditável, $\varphi \rightarrow \Diamond B\varphi$ (utilizada no passo 1 do Resultado 6.1.3($\Leftarrow$)),

deriva-se o absurdo de que ser verdadeiro equivale a ser acreditado, $B\varphi \leftrightarrow \varphi$.

Analogamente ao Paradoxo da Cognoscibilidade, se for aceita a lógica utilizada na obtenção deste resultado, ao menos uma destas teses deve ser falsa. Contudo, como dito acima, enquanto há correntes de pensamento que aceitam de bom grado a rejeição do Princípio de Cognoscibilidade, o mesmo não se aplica ao Princípio de Credibilidade.

Sugerimos nesta dissertação que essa situação seja atenuada pela mesma solução que propomos para o Paradoxo da Cognoscibilidade, ou seja, reformulando o *PCD* em um sistema multi-agentes.

5.2.1. O Sistema SFD$''$

Chamaremos de **SFD$''$** o sistema de n agentes cognoscentes composto pelos seguintes axiomas e regras de inferência:

- *LC*. Todos os teoremas da Lógica Proposicional Clássica
- Axioma K_B. $Bi(\varphi \to \psi) \to (Bi\varphi \to Bi\psi)$, para todo $1 \leq i \leq n$
- Axioma D_B. $Bi\varphi \to \neg Bi\neg\varphi$, para todo $1 \leq i \leq n$
- Axioma 4_B. $Bi\varphi \to BiBi\varphi$, para todo $1 \leq i \leq n$
- Axioma *K*. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
- *PCD* Fraco. $\varphi \to \Diamond\exists xBx\varphi$ †
- *MP*. $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$
- *RK*. $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash Bi\varphi}$ para todo $1 \leq i \leq n$
- *RN*. $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi}$

†$\exists x\ Bx\varphi =_{df} B1\varphi \vee B2\varphi \vee ... \vee Bn\varphi$

5.2.2. Resultado

SFD$''$ *é consistente com a alegação de que haja uma proposição verdadeira e desacreditada por um agente cognoscente.*

Considere o modelo $\mathcal{M}^{SFD''} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathfrak{v} \rangle$ tal que:

$\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$

$\langle \mathcal{M}, w_1 \rangle \vDash p$

$\langle \mathcal{M}, w_2 \rangle \vDash \neg p$

$\mathcal{B}_1 = \{\langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle\}$

$\mathcal{B}_2 = \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_2, w_2 \rangle\}$

$\mathcal{R} = \mathcal{W} \times \mathcal{W}$

$\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Box\alpha$ sse, para todo $w' \in \mathcal{W}$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \alpha$

$\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash B1\alpha$ sse, para todo $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{B}_1 w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \alpha$

$\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash B2\alpha$ sse, para todo $w' \in \mathcal{W}$ tal que $w\mathcal{B}_2 w'$, $\langle \mathcal{M}, w' \rangle \vDash \alpha$

Segue abaixo a ilustração deste modelo, na qual as setas finas e contínuas representam a relação $\mathcal{B}_1$, enquanto as setas grossas tracejada representam $\mathcal{B}_2$.

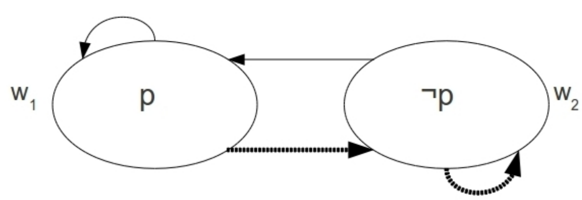

Figura 4: Modelo $\mathcal{M}^{SFD''}$

(i) $\mathcal{M}^{SFD''}$ satisfaz SFD''.

Prova: Sendo $\mathcal{M}^{SFD''}$ um modelo de Kripke, os Axiomas K e K_B são satisfeitos, assim como as regras de inferência. E, uma vez que $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são seriais e transitivas, os Axiomas D_B e 4_B são satisfeitos.

Resta apenas mostrar a satisfatibilidade de PCD_f, o qual, pela definição, neste caso consiste em $\varphi \rightarrow \Diamond(B1\varphi \vee B2\varphi)$.

Para $n = 1$ e $m = 2$, ou $n = 2$ e $m = 1$, suponha que $\langle \mathcal{M}^{SFD''}, w_n \rangle \vDash \varphi$.

Como $\mathcal{B}_n = \{\langle w_m, w_n \rangle, \langle w_n, w_n \rangle\}$, tem-se $\langle \mathcal{M}^{SFD''}, w_m \rangle \vDash Bn\varphi$.

Logo, $\langle \mathcal{M}^{SFD''}, w_m \rangle \vDash Bn\varphi \vee Bm\varphi$.

Dado que $\langle w_n, w_m \rangle \in \mathcal{R}$, segue-se que $\langle \mathcal{M}^{SFD''}, w_n \rangle \models \Diamond(Bn\varphi \vee Bm\varphi)$.

Logo, $\langle \mathcal{M}^{SFD''}, w_n \rangle \models \varphi \rightarrow \Diamond(Bn\varphi \vee Bm\varphi)$. *Q.e.d.*

(ii) Em algum mundo há uma verdade desacreditada por algum agente.

Prova: Uma vez que $\langle \mathcal{M}^{SFD''}, w_1 \rangle \models p$, $\langle \mathcal{M}^{SFD''}, w_2 \rangle \models \neg p$ e $\langle w_1, w' \rangle \in \mathcal{B}_2$ sse $w' = w_2$, tem-se que $\langle \mathcal{M}^{SFD''}, w_1 \rangle \models p \wedge \neg B2p$.

5.3. Uma variação do Paradoxo da Credibilidade

Encontramos uma forma variante de obter o Paradoxo da Credibilidade, a qual não consta na bibliografia consultada. Aproveitamos, portanto, a oportunidade de registrá-la e partilha-lá com o leitor.

Ao invés do Axioma 4_B, a variação em questão depende da inversa deste,

$$BB\varphi \rightarrow B\varphi$$

a qual chamaremos de 4_B^c. [33]

Esta fórmula é interpretável como "Se se acredita que se acredita que φ, então acredita-se que φ", o que soa como uma tese doxástica bastante razoável.

Informalmente, chamaremos a tese 4_B^c por "*Princípio de Infalibilidade da Introspecção Positiva*", uma vez que esta afirma que todas as crenças de um agente cognoscente acerca de suas próprias crenças estão corretas.

[33] O esquema de fórmula $\Box\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$ recebe nomes divergentes na literatura. Em CHELLAS (1980), pág. 71, o esquema é nomeado de 4_c, o que salienta que este se trata da inversa do esquema 4, $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$, enquanto em CARNIELLI e PIZZI (2008), pág. 62, recebe o nome de T_1, o que salienta que este se trata de um caso particular do esquema T, $\Box\varphi \rightarrow \varphi$.
Segundo CARNIELLI e PIZZI (2008), pág. 62, o esquema em questão é válido em modelos de Kripke com relação densa, i.e., $\forall w\, \forall w'\, wRw' \rightarrow (\exists w''\, wRw'' \wedge w''Rw')$

Esta variante também depende de uma versão ligeiramente diferente da Tese Fitch-Moore Doxástica, a saber,

$$\neg\Diamond B(\varphi \wedge B\neg\varphi)$$

a qual é interpretável como "é inacredidável que: φ e acredita-se que não φ". Chamaremos o sistema no qual a variante do Paradoxo da Credibilidade é obtido de **SFD♯**, o qual é obtido a partir de **SFD**, substituindo o Axioma 4_B pelo Axioma 4^c_B.

5.3.1. Variação da Tese Fitch-Moore Doxástica

$$\vdash_{\mathbf{SFD}\sharp} \neg\Diamond B(\varphi \wedge B\neg\varphi)$$

Prova:

1	$B(\varphi \wedge B\neg\varphi) \to (B\varphi \wedge BB\neg\varphi)$	Resultado 1.4.2
2	$B(\varphi \wedge B\neg\varphi) \to B\varphi$	1 LC $\frac{\alpha\to(\beta\wedge\gamma)}{\alpha\to\beta}$
3	$B(\varphi \wedge B\neg\varphi) \to BB\neg\varphi$	1 LC $\frac{\alpha\to(\beta\wedge\gamma)}{\alpha\to\gamma}$
4	$BB\neg\varphi \to B\neg\varphi$	Axioma 4^c_B
5	$B(\varphi \wedge B\neg\varphi) \to B\neg\varphi$	3, 4 LC $\frac{\alpha\to\beta \quad \beta\to\gamma}{\alpha\to\gamma}$
6	$B(\varphi \wedge B\neg\varphi) \to (B\varphi \wedge B\neg\varphi)$	2, 5 LC $\frac{\alpha\to\beta \quad \alpha\to\gamma}{\alpha\to(\beta\wedge\gamma)}$
7	$B\varphi \to \neg B\neg\varphi$	Axioma D_B
8	$\neg(B\varphi \wedge B\neg\varphi)$	7 LC $\frac{\alpha\to\neg\beta}{\neg(\alpha\wedge\beta)}$
9	$\neg B(\varphi \wedge B\neg\varphi)$	6, 8 LC $\frac{\alpha\to\beta \quad \neg\beta}{\neg\alpha}$
10	$\Box\neg B(\varphi \wedge B\neg\varphi)$	9 RN
11	$\neg\Diamond B(\varphi \wedge B\neg\varphi)$	10 LC $\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$

5.3.2. O Esquema T_B é Dedutível em SFD♯

$$\vdash_{\mathbf{SFD}\sharp} B\varphi \rightarrow \varphi$$

Prova:

1	$(\neg\varphi \wedge B\neg\neg\varphi) \rightarrow \Diamond B(\neg\varphi \wedge B\neg\neg\varphi)$	PCD
2	$\neg\Diamond B(\neg\varphi \wedge B\neg\neg\varphi)$	Resultado 5.3.1
3	$\neg(\neg\varphi \wedge B\neg\neg\varphi)$	1, 2 LC $\frac{\alpha\rightarrow\beta \quad\quad \neg\beta}{\neg\alpha}$
4	$B\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	3 LC $\frac{\neg(\neg\alpha\wedge\beta)}{\beta\rightarrow\alpha}$
5	$\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	LC
6	$B\varphi \rightarrow B\neg\neg\varphi$	5 Regra de Regularidade
7	$B\varphi \rightarrow \varphi$	6, 4 LC $\frac{\alpha\rightarrow\beta \quad\quad \beta\rightarrow\gamma}{\alpha\rightarrow\gamma}$

Dado que o esquema T_B é dedutível em **SFD♯**, o colapso do operador doxástico é dedutível da mesma forma que o colapso do operador epistêmico é dedutível em **SF**$^\bigstar$ (tal como consta no Capítulo 3).

5.4. Outra variação do Paradoxo da Credibilidade

Existe ainda uma terceira forma de obter o Paradoxo da Credibilidade, notável por sequer depender do Axioma D_B. Assim, tal variação sequer depende da assunção de que um agente cognoscente tenha crenças consistentes.

Por outro lado, a variação em questão depende de uma tese doxástica bastante razoável, a tese 5^c_B:

$$B\neg B\varphi \to \neg B\varphi$$

A tese 5^c_B é interpretável como "Se se acredita que não se acredita que φ, então não se acredita que φ".

Informalmente, chamaremos a tese 5^c_B por "*Princípio de Infalibilidade da Introspecção Negativa*", uma vez que esta afirma que todas as crenças de um agente cognoscente acerca de suas próprias descrenças estão corretas

5.4.1. O Sistema SFD♣

Chamaremos o sitema no qual a variante do Paradoxo da Credibilidade é obtido de **SFD♣**, o qual consiste nos seguintes axiomas e regras de inferência:

- *LC*. Todos os teoremas da Lógica Clássica
- Axioma K_B. $B(\varphi \to \psi) \to (B\varphi \to B\psi)$
- Axioma 5^c_B. $B\neg B\varphi \to \neg B\varphi$
- Axioma *K*. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
- *PCD*. $\varphi \to \Diamond B\varphi$
- *MP*. $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$
- *RB*. $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash B\varphi}$
- *RN*. $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi}$

5.4.2. Tese de Fitch-Moore Doxástica

$$\vdash_{\mathbf{SFD}\clubsuit} \neg\Diamond B(\varphi \wedge \neg B\varphi)$$

Prova:

1	$B(\varphi \wedge \neg B\varphi) \to (B\varphi \wedge B\neg B\varphi)$	Resultado 1.4.2
2	$B(\varphi \wedge \neg B\varphi) \to B\varphi$	1 LC $\frac{\alpha\to(\beta\wedge\gamma)}{\alpha\to\beta}$
3	$B(\varphi \wedge \neg B\varphi) \to B\neg B\varphi$	1 LC $\frac{\alpha\to(\beta\wedge\gamma)}{\alpha\to\gamma}$
4	$B\neg B\varphi \to \neg B\varphi$	Axioma 5^c_B
5	$B(\varphi \wedge \neg B\varphi) \to \neg B\varphi$	3, 4 LC $\frac{\alpha\to\beta \quad \beta\to\gamma}{\alpha\to\gamma}$
6	$\neg B(\varphi \wedge \neg B\varphi)$	2, 5 LC $\frac{\alpha\to\beta \quad \alpha\to\neg\beta}{\neg\alpha}$
7	$\Box\neg B(\varphi \wedge \neg B\varphi)$	6 RN
8	$\neg\Diamond B(\varphi \wedge \neg B\varphi)$	7 LC $\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$

Uma vez que em **SFD♣** deriva-se a Tese Fitch-Moore doxástica, tem-se que $\varphi \to B\varphi$ (Resultado 5.1.3($\Leftarrow$)), o qual consiste em um resultado extremamente indesejável, mesmo sem o colapso do operador doxástico.

6. Considerações Finais

Este espaço é reservado para considerações acerca do trabalho realizado nesta dissertação, assim como sugestões para futuros estudos do Paradoxo da Cognoscibilidade.

6.1. Sobre o Paradoxo e suas interpretações

Neste momento convém recaptularmos o Paradoxo da Cognoscibilidade e as maneiras de interpretá-lo.

De forma extremamente resumida, o Paradoxo da Cognoscibilidade é um resultado segundo o qual: a partir do Princípio de Cognoscibilidade, juntamente com algumas teses epistêmicas modestas, conclui-se, por meio de raciocínios válidos na Lógica Clássica, que toda verdade é conhecida (omnisciência).

Assumindo que a rejeição desta conclusão seja ponto pacífico, pode-se interpretar o resultado das seguintes formas:

1. O resultado consiste em uma refutação do Princípio de Cognoscibilidade.

2. O resultado consiste em uma refutação das teses epistêmicas (vide a Introdução).

3. O resultado sugere que lógicas subjacentes alternativas sejam utilizadas no tratamento de questões epistêmicas.

4. O resultado sugere que o Princípio de Cognoscibilidade seja reformulado de forma mais cautelosa.

Analizemos, portanto, cada uma destas interpretações, com base nos resultados expostos nesta dissertação.

Como dito no Capítulo 3, a interpretação (1) – refutação do Princípio de Cognoscibilidade – é típica de pensadores de orientação realista que não são adeptos do otimismo epistemológico. Esta é uma interpretação perfeitamente legítima do Paradoxo. Infelizmente deixa pouquíssimo espaço para maiores estudos e considerações do resultado.

Quanto à interpretação (2) – refutação das teses epistêmicas – não nos dá muitas alternativas de trabalho. Afinal, como mostrado no capítulo anterior, vários conjuntos de teses doxásticas acarretam o Paradoxo da Credibilidade. Basta assumir as contrapartes epistêmicas destas teses para obter diferentes versões do Paradoxo da Cognoscibilidade.

Pode-se apontar que todos os conjuntos de teses têm em comum o *Princípio de Distributividade do Conhecimento na Conjunção*. Contudo, este é um princípio tão modesto que negá-lo é quase o mesmo que negar que haja alguma lógica epistêmica. Além do mais, a questão de se toda verdade é cognoscível ou não, a um agente epistêmico, torna-se um tanto irrelevante quando sequer é garantido a este agente que este saiba uma consequência tão óbvia e imediata de seu conhecimento.

Assim, assumindo que a aceitação deste princípio seja ponto pacífico, a interpretação (2) tem as seguintes ramificações:

- Assumir que o conhecimento seja formalizável por um sistema de lógica modal fraco, tal como o **KD**.

- Defender que o conhecimento seja formalizável por um sistema de lógica modal exótico, o qual não seja muito fraco mas também não incorra nas teses epistêmicas que acarretam o Paradoxo.[34]

Do ponto de vista estritamente formal, a abordagem (3) – utilização de lógicas subjacentes alternativas – é interessantíssima, uma vez que se trata de um estudo de caso de uma área de pesquisa para a qual ainda há muito o que ser explorado: lógicas alternativas complementares, isto é, lógicas que rejeitam princípios da Lógica Clássica, ao mesmo tempo que possuem uma linguagem mais rica que esta.

Já do ponto de vista filosófico, a interpretação (3) admite ao menos duas abordagens:

- Apontar que uma corrente de pensamento, que previamente adere a uma lógica alternativa, contorna o Paradoxo da Cognoscibilidade.
- Apontar o Paradoxo como uma motivação para aderir a uma lógica alternativa, ao menos no que tange a questões epistêmicas.

A primeira abordagem é perfeitamente legítima, ainda que outros resultados indesejáveis além do Paradoxo da Cognoscibilidade sejam deriváveis, tal como mostramos no Capítulo 3, Resultado 3.5.1.1.

Já a segunda abordagem é um tanto suspeita. Afinal de contas, lógicas alternativas são desenvolvidas e utilizadas por aqueles que não são intransigentes em

[34]Uma alternativa seria a interpretação epistêmica ou doxástica de axiomas típicos de lógicas da demonstrabilidade, tais como o axioma *GL*, $\Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$. Já existe precedentes para a interpretação doxástica de tais axiomas, como é visto em SMULLYAN (1988).

relação aos princípios tradicionais do raciocínio. Utilizá-las em prol de uma intransigência em relação a uma única tese, o Princípio de Cognoscibilidade, é, no mínimo, irônico.

Longe de nós negar que haja motivações razoáveis para aderir a lógicas alternativas no tratamento de questões epistêmicas. Apenas apontamos que a intransigência em relação a um único princípio parece não constituir uma motivação razoável.

Quanto à interpretação (4) – reformulação do Princípio de Cognoscibilidade – esta é bastante interessante, tanto sob o aspecto formal quanto filosófico.

Afinal, uma reformulação do Princípio de Cognoscibilidade requer o desenvolvimento de formalismos sofisticados, tais como lógicas multimodais, que por si próprios são dignos de serem estudados.

Além do mais, tais reformulações são motivadas por uma sensibilidade filosófica referente a elementos contextuais do conhecimento e da cognoscibilidade.

Contudo, como mostramos no Capítulo 4, nem toda reformulação do PC resolve por completo o Paradoxo.

6.2. Sobre nossa abordagem do Paradoxo da Cognoscibilidade

No Capítulo 4, investigamos a questão da cognoscibilidade em cenários multiagentes, no qual formulamos uma versão mais fraca do Princípio de Cognoscibilidade.

Adiante, (re-)analisaremos alguns aspectos da nossa abordagem.

6.2.1. Símbolos introduzidos na Linguagem

Com o intuito de formularmos versões distintas do PC em sistemas multi-agentes, introduzimos os seguintes símbolos na linguagem:

$$\forall xKx\varphi =_{df} K1\varphi \wedge ... \wedge Kn\varphi$$
$$\exists xKx\varphi =_{df} K1\varphi \vee ... \vee Kn\varphi$$

Tais "quantificadores" formalizam, respectivamente, os conceitos de "conhecido por todos" e "conhecido por alguém". Lidar com tais conceitos não é novidade em lógica epistêmica, a qual, inclusive, lida com conceitos ainda mais sofisticados, tais como *conhecimento comum* e *conhecimento compartilhado*.[35]

É importante reiterar que o uso de "quantificadores" consiste apenas em um abuso de linguagem, a fim de facilitar a leitura por parte daqueles que estão familiarizados com a notação lógica. Não estamos lidando com uma lógica de ordem maior que zero.

A propósito, para o desenvolvimento do nosso trabalho, poderíamos generalizar as definições acima, tal que a ocorrência dos "quantificadores" não obrigatoriamente antecedesse o operador K, o que permitiria escrevermos fórmulas como $\forall x(\varphi \rightarrow Kx\psi)$ e $\exists x\Diamond Kx\varphi$.

Para tal, considere a seguinte notação: $\varphi(Ki)$ é uma variável da metalinguagem que denota uma fórmula na qual ocorre Ki. Assim, definimos:

$$\forall v\varphi(Kv) =_{df} \varphi(K1) \wedge ... \wedge \varphi(Kn)$$
$$\exists v\varphi(Kv) =_{df} \varphi(K1) \vee ... \vee \varphi(Kn)$$

[35] Ver CARNIELLI e PIZZI (2008) pág. 183–204.

Dadas estas definições, $\forall x(\varphi \rightarrow Kx\psi)$ abrevia:

$$(\varphi \rightarrow K1\psi) \wedge ... \wedge (\varphi \rightarrow Kn\psi),$$

enquanto $\exists x\Diamond Kx\varphi$ abrevia:

$$\Diamond K1\varphi \vee ... \vee \Diamond Kn\varphi.$$

A transitividade do conhecimento, demonstrada no Capítulo 2, é generalizável na forma $\forall x\forall y(KxKy\varphi \rightarrow Kx\varphi)$, a qual abrevia:

$$\forall y(K1Ky\varphi \rightarrow K1\varphi) \wedge ... \wedge \forall y(KnKy\varphi \rightarrow Kn\varphi),$$

que, por sua vez, abrevia:

$$(K1K1\varphi \rightarrow K1\varphi) \wedge ... \wedge (K1Kn\varphi \rightarrow K1\varphi) \wedge ... \wedge (KnK1\varphi \rightarrow Kn\varphi) \wedge ... \wedge (KnKn\varphi \rightarrow Kn\varphi).$$

No que tange ao desenvolvimento futuro de formalismos que tratam de questões epistêmicas (ou doxásticas), será de suma importância levar em conta a multiplicidade de agentes epistêmicos, uma vez que estes interagem compartilhando conhecimento, trocando informações e conhecendo uns aos outros.

Seria interessante o desenvolvimento de uma lógica epistêmica de primeira-ordem, na qual as variáveis e constantes individuais fossem argumento tanto de predicados quanto do operador epistêmico. Em tal lógica, cuja linguagem contaria com quantificadores legítimos, seria possível escrever fórmulas como $\exists x(KxRxi)$ e $Ki\varphi \wedge \forall x(Kx\varphi \leftrightarrow x = i)$, as quais expressariam, respectivamente, "existe um x tal que x sabe que x é R–relacionado com i" e "somente i sabe que φ".

6.2.2. A utilização da Semântica de Kripke

No Capítulo 4 utilizamos a Semântica de Kripke, a fim de demonstrar que existe um modelo que satisfaz um sistema, no qual vale a versão fraca do PC e nenhum agente é omnisciente em todos mundos possíveis.

Muitos estudiosos do Paradoxo da Cognoscibilidade não lidam com a Semântica de Kripke, uma vez que esta satisfaz sistemas normais, os quais incorrem no Problema da Omnisciência Lógica. Tais estudiosos preferem apenas declarar como axiomas as teses epistêmicas das quais o Paradoxo depende diretamente:

- $K\varphi \rightarrow \varphi$
- $K(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (K\varphi \wedge K\psi)$
- $\varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$

Nós, por outro lado, preferimos lidar de outra forma com o Problema da Omnisciência Lógica, de forma que pudemos continuar contando com o recurso valioso que é a Semântica de Kripke.

Consideramos importante a utilização de recursos semânticos, quer seja a Semântica de Kripke ou qualquer outro, não apenas por questão de rigor, mas também por estes ampliarem o entendimento do contexto subjacente à questão tratada.

A propósito, o Princípio de Cognoscibilidade é muito restritivo em relação aos modelos que o satisfazem.

Considere um modelo $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{K}, \mathfrak{v} \rangle$ que satisfaça $\varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$. Ou seja, para qualquer mundo $w \in \mathcal{W}$, para qualquer fórmula φ, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$. Assim, suponha que $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \varphi$. Portanto, $\langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash \Diamond K\varphi$. Para tal, deve haver um w' tal que $w\mathcal{R}w'$ e $\langle\mathcal{M}, w'\rangle \vDash K\varphi$. Dado isto, para todo w'' tal que $w'\mathcal{K}w''$, $\langle\mathcal{M}, w''\rangle \vDash \varphi$.

Em vista disto, há uma séria restrição quanto à acessibilidade da relação $\mathcal{K}$. Basta haver um w'', tal que $w'\mathcal{K}w''$ e $\langle\mathcal{M}, w''\rangle \vDash \neg\varphi$, para que o modelo não satisfaça o Princípio de Cognoscibilidade.

É importante salientarmos que utilizamos apenas uma pequena parcela dos recursos semânticos disponíveis para um tratamento rigoroso das lógicas modais. Para os fins deste trabalho, fez-se necessário apenas demonstrar que certos modelos satisfazem certos axiomas. Não nos preocupamos neste trabalho, por exemplo, com questões como a completude de sistemas axiomáticos.

É bem provável que considerações semânticas mais profundas venham a esclarecer certos aspectos do Paradoxo da Cognoscibilidade.

6.2.3. Sobre os Resultados Obtidos

Estipulamos, no Capítulo 4, o sistema SF'', no qual vale não a formulação original do Princípio de Cognoscibilidade, mas uma versão mais fraca deste, $\varphi \to \Diamond\exists x K x\varphi$.

Para este sistema, demonstramos os seguintes resultados:

$$\nvdash_{SF''} \varphi \to Ki\varphi$$
$$\vdash_{SF''} \varphi \to \exists x K x\varphi$$

Ou seja, em SF'' não é demonstrável a omnisciência, mas toda verdade é conhecida por alguém.

Infelizmente, este resultado dificilmente é defensável. É razoável supor que para uma comunidade de agentes cognoscentes – a humanidade, por exemplo – haja verdades que nenhum agente conheça.

Ainda assim, estamos satisfeitos por ter demonstrado rigorosamente as limitações de uma abordagem multi-agentes.

Convém salientar que esta limitação não é facilmente contornável pela introdução do elemento temporal na questão da cognoscibilidade. Considere, por exemplo, uma linguagem na qual $Kti\varphi$ seja uma fórmula interpretável como "i sabe no instante t que φ". Também considere o sistema SFt tal que:

$$\vdash_{SFt} \exists t \exists x Ktx\varphi \rightarrow \varphi$$

$$\vdash_{SFt} \exists t \exists x Ktx(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists t \exists x Ktx\varphi \wedge \exists t \exists x Ktx\psi)$$

Assim, efetuando os mesmos raciocínios utilizados no Capítulo 3, demonstra-se: $\vdash_{SFt} \neg\Diamond\exists t \exists x Ktx(\varphi \wedge \neg\exists t' \exists y Kt'y\varphi)$.

Portanto, mesmo que em SFt valha uma forma bem enfraquecida do Princípio de Cognoscibilidade, $\vdash_{SFt} \varphi \rightarrow \Diamond\exists t \exists x Ktx\varphi$, será derivável, também por meio de raciocínios semelhantes aos do Capítulo 3, $\vdash_{SFt} \exists t \exists x Ktx\varphi \leftrightarrow \varphi$. Isto é, que toda verdade será conhecida por alguém, em algum momento. Novamente, um resultado dificilmente defensável.

6.3. Comentário Final

Já se passaram quase cinco décadas desde a divulgação do Paradoxo da Cognoscibilidade, por Fitch, em 1963. Desde então, este resultado tem inspirado tanto o debate filosófico quanto o desenvolvimento da lógica formal. Um feito notável para um resultado tão simples.

Esperamos ter contribuído ao debate, tanto filosófico quanto lógico, sobre o Paradoxo da Cognoscibilidade. Também temos a pretensão de influenciar futuros trabalhos relativos ao tema.

7. Bibliografia

- BEALL, J.C. Fitch's Proof, Verificationism, and the Knower Paradox. *Australasian Journal of Philosopohy*, pp.241–247, Routledge, Nova Iorque, EUA, 2000

- BROGAARD, B.; SALERNO, J. *Fitch's Paradox of Knowability* [online] Disponível na Internet via http://plato.stanford.edu/entries/fitch-paradox/ , Última atualização em 1 de Julho de 2009

- CARNIELLI, W.; CONIGLIO, M. E.; GABBAY D.; GOUVEIA P.; SERNADAS C. *Analysis and Synthesis of Logics*, Springer, 2008

- CARNIELLI, W.; EPSTEIN R. L. *Computabilidade:* funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática, Ed. Unesp, São Paulo, Brasil, 2009

- CARNIELLI, W.; PIZZI, C. *Modalities and multimodalities*, Springer, 2008

- CHELLAS, B. F. *Modal Logic, an introduction*, Cambridge University Press, 1980

- CHURCH, A. Referee reports on Fitch's "A definition of value". In: SALERNO, J. (ed.) *New essays on the Knowability Paradox*, pp.. 13–20 Oxford University Press, RU, 2009

- COSTA-LEITE, A. F. B. *Paraconsistência, modalidades e cognoscibilidade*, Campinas: UNICAMP, dissertação de mestrado, Programa de Pósgraduação em Filosofia, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 2003

- EDGINGTON, D. *The Paradox of Knowability*, *Mind*, vol. 94, pp.557–568 Oxford University Press, RU, 1985
- FITCH, F. *A logical analysis of some value concepts*, *The Journal of Symbolic Logic*, pp.135–142, Association for Symbolic Logic, Poughkeepsie, EUA, 1963
- FITTING, M.; MENDELSOHN, R.L. *First-Order modal logic*, Kluwer Academic Publishers, Dordrech, Países Baixos, 1998
- GOLDBLAT, R. *Mathematical modal logic:* a view of its evolution, In: *Handbook of the History of Logic*, vol. 6, Elsevier, Amsterdam, 2006
- HEYTING, A. *Intuitionism:* an introduction, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1971
- HINTIKKA, J. *Knowledge and belief*, an introduction to the logic of the two notions, King's College Publication, Londres, Reino Unido, 2005
- HUGHES, G.E.; CRESSWELL, M.J. *A new introduction to modal logic*, Routledge, Nova Iorque, EUA, 1996
- MILLER, A. *Realism* [online] Disponível na Internet via http://plato.stanford.edu/entries/Realism/ , Última atualização em 16 de Abril de 2010
- MOORE, G. E. A reply to my critics. In: SCHLIPP, P.A. (ed.), *The philosophy of G. E. Moore*, Northwestern University, Evanston, 1942
- MORTARI, C. A. Lógicas epistêmicas, In: *Nos limites da epistemologia analítica*, UFSC, Florianópolis, 1999

- PERCIVAL, P. *Fitch and intuitionistic knowability*, *Analysis*, pp.182–287, Oxford University Press, RU, 1990
- POPPER, K. *Conjectures and refutations*, Routledge, Nova Iorque, EUA, 2002
- PRIEST, G. *An introduction to non-classical logic*, Cambridge University Press, Cambridge, RU, 2001
- RESCHER, N. *Epistemic logic*, a survey if the logic of knowledge, University of Pittisburgh Press, Pittisburgh, EUA, 2005
- ROUTLEY, R. *Necessary limits to knowledge:* unknowable truths. In: EDGAR, M., OTTO, N., GERHARD, Z., (eds.), *Essays in Scientific Philosophy. Dedicated to Paul Weingartner/Philosophie als Wissenschaft. Paul Weingartner gewidmet*, pp. 93–115, Bad Reichenhall, Alemanha, 1981
- SALERNO, J. (ed.) *New essays on the Knowability Paradox*, pp. 130–146 Oxford University Press, RU, 2009
- SMULLYAN, R. M. Logicians who reason about themselves. In: *The Journal of Symbolic Logic*, pp.668–669, Association for Symbolic Logic, Poughkeepsie, EUA, 1988
- TENNANT, N. *The taming of the true*, Claredon Press, Oxford, RU, 1997
- VAN BENTHEM, J. Actions that make us know. In: SALERNO, J. (ed.) *New essays on the Knowability Paradox*, pp. 130–146 Oxford University Press, RU, 2009

- WILLIANSON, T. Intuitionism disproved?, *Analysis*, pp. 203–207, Oxford University Press, RU, 1982
- ZHUANGZI; WATSON B. *The complete works of Chuang Tzu*, Columbia University Press, Nova Iorque, EUA, 1968