UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS E LETRAS

Departamento de Filosofia

José Carlos Magossi 275

UMA LÓGICA MODAL TEMPORAL

Dissertação elaborada sob orientação do Prof. Dr. José Alexandre Durry Guerzoni e apresentada como requisito para obtenção do grau de Mestre em Lógica e Filosofia da Ciência.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 24/06/94

José A. D. Guerzoni

JUNHO

1994

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. José Alexandre Durry Guerzoni, a quem muito me ajudou no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Carlos Lungarzo e Dr. Carlos Gonzalez, pela amizade desenvolvida.

À UNICAMP .

À UNIMEP .

Ao CNPq e CAPES pelo apoio financeiro.

À minha mãe Maria José, meus irmãos e meus sobrinhos, Gilberto e Miriam, pelo incentivo e carinho passados neste período de trabalho.

À minha esposa Silvia, pela compreensão e amor.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

A motivação fundamental deste trabalho surge da idéia de se estudar, no âmbito proposicional, as relações entre operadores modais (aléticos) e temporais, tratando-os como conjuntos independentes de operadores, de sorte que nem os operadores modais sejam definíveis a partir dos temporais, nem vice-versa. Assim, introduzimos uma linguagem que contém como símbolos primitivos tanto àqueles tomados da Lógica Modal, como da Lógica Temporal, além, obviamente, dos símbolos para um conjunto adequado (funcionalmente completo) de operadores clássicos.

A parte fundamental do presente trabalho consiste, por um lado, em uma caracterização semântica de uma lógica, a partir da idéias fundamentais da Semântica de Mundos Possíveis, e por outro, na obtenção de um sistema axiomático que mostraremos ser correto e completo com respeito àquela semântica.

Da Semântica de Mundos Possíveis para a Lógica Modal, tomamos a idéia de considerar simultâneamente uma classe de mundos relacionados entre si, a fim de fornecer uma interpretação para a linguagem (em particular, definir a noção de verdade para as fórmulas da linguagem).

Associamos, então, a cada mundo possível, uma certa estrutura temporal, definida tal como na Semântica de Mundos Possíveis para a Lógica Temporal (ou seja, como um conjunto de instantes de tempo e uma relação de sucessão temporal), de sorte que a estrutura temporal associada a um mundo é completamente independente à estrutura associada a outro mundo, inclusive aos que lhe são acessíveis. De um ponto de vista intuitivo, é como se tivéssemos uma família de mundos paralelos, cada um com sua própria "ordem" temporal.

A fim de podermos interpretar a linguagem, consideramos a-inda, para cada um dos mundos possíveis, uma função (dita função de acessibilidade temporal) que associa aos instantes de tempo em um mundo, instantes de tempo nos outros mundos relacionados ao primeiro.

Desse modo, enquanto a relação entre mundos (relação de acessibilidade) serve de contraparte semântica dos operadores modais usuais, as relações de sucessão temporal em cada mundo, permite-nos interpretar os operadores temporais; ao passo que as iterações de operadores modais e temporais são representadas pelas funções de acessibilidade.

Neste trabalho consideraremos apenas a lógica que resulta quando impomos uma única restrição às relações de acessibilidade, (qual seja, que para todo mundo exista pelo menos um acessível a ele), mas nenhuma restrição é imposta, seja à relação de sucessão temporal, seja às funções de acessibilidade temporal. Desse modo, o sistema axiomático que obtemos é aquele que resulta da adição dos postulados básicos de Prior ao sistema KD usual da Lógica Modal; vale dizer, não se faz necessário nenhum novo postulado que envolva essencialmente a iteração de operadores aléticos e temporais[1].

[1] Apenas na seção referente a Observações Finais apresentaremos, a título de ilustração para trabalhos futuros, alguns resultados que já obtivemos quando se impõe restrições às funções de acessi-

Ademais, apresentaremos inicialmente um breve sumário da Lógica Temporal com o intuito de, por um lado, facilitar a compreensão no trabalho que desenvolvemos na Lógica Modal Temporal, e, por outro, uniformizar a terminologia a ser usada.

Neste trabalho, com o objetivo de se atingir precisão e auto-suficiência, apresentamos as definições formais de cada um dos principais conceitos sobre o tema em estudo, inclusive os mais simples e comumente usados como os de *fórmula, verdade, modelo, consequência, validade, consistência, dedução, maximalidade.* É possível que, a uma primeira leitura, certas definições pareçam de difícil apreensão intuitiva, mas acreditamos que os comentários suplementares de natureza intuitiva as tornem mais compreensíveis.

bilidade temporal, bem como outras idéias.

Capítulo I

Lógica Temporal

1 - A Linguagem da Lógica Temporal

As expressões da linguagem $\mathcal{L}^T$, são agrupamentos (de comprimento finito) de símbolos, os quais, por sua vez, são os seguintes:

Variáveis proposicionais: São compostas pela letra minúscula p seguida de um índice inferior numérico.

Constantes lógicas: são os símbolos $\neg$, $\rightarrow$, G , H, $\perp$, $\top$.
Também nos referiremos às constantes lógicas como conectivos.

Sinais de pontuação:),(.

Definição 1.0: O conjunto das fórmulas da linguagem, $\mathcal{F}(\mathcal{L})$, é definido indutivamente pelas seguintes cláusulas recursivas:

(1) toda v.p. sozinha, $\perp$ e $\top$ pertencem a $\mathcal{F}(\mathcal{L})$.

(2) se A e B $\in \mathcal{F}(\mathcal{L})$, então $\neg A$, $(A \rightarrow B)$, GA, HA, também pertencem a $\mathcal{F}(\mathcal{L})$.

(3) só é fórmula o que advém das cláusulas 1) e 2) acima.

Em nossa metalinguagem, usaremos eventualmente as letras maiúsculas do alfabeto A,B,C,..., acompanhadas ou não de índices numéricos inferiores ($\in \mathbb{N}$) para representar fórmulas.

Para quaisquer fórmulas A e B temos que:

(1) $\neg A$ é chamado a negação de A, e pode ser lido "não A".

(2) $(A \rightarrow B)$ é chamado um condicional, onde A é o antecedente e B o consequente, e pode ser lido "A implica B".

(3) HA é chamado o passado forte de A, e pode ser lido "o passado forte de A".

(4) GA é chamado futuro forte de A, e pode ser lido "o futuro forte de A".

Observação: Nos ítens acima descrevemos a maneira como podem ser lidas a fórmulas da linguagem, com isso não estamos ainda atribuindo um significado a elas.

Usaremos as letras gregas maiúsculas Γ, Δ, Σ,..., para representar conjuntos de fórmulas.

Quando um conjunto Δ de fórmulas inclui um conjunto Γ de fórmulas, (isto é, $\Gamma \subseteq \Delta$), diremos que Δ é uma extensão de Γ. Para $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \neq \Delta$, diremos que Δ é uma extensão própria de Γ.

Introduziremos outros conectivos por meio das definições a seguir. Para A e B fórmulas, temos:

D(F) : $FA \equiv_{def} \neg G \neg A$.

D(P) : $PA \equiv_{def} \neg H \neg A$.

$D(\wedge) : (A \wedge B) \equiv_{def} \neg(A \rightarrow \neg B).$

$D(\vee) : (A \vee B) \equiv_{def} (\neg A \rightarrow B).$

$D(\leftrightarrow): (A \leftrightarrow B) \equiv_{def} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$

Algumas vezes usaremos o símbolo $\equiv_{def}$ para denotar a identidade por definição, e o símbolo $\sim$ para denotar a negação quando usada na metalinguagem. Para $n \geq 0$, usaremos $\mathbf{P}_n$ para representar a n-ésima variável proposicional.

Modalidades. Por uma modalidade queremos dizer uma sequência finita, possivelmente vazia, de operadores $\neg$, G, H; por exemplo GHG, H$\neg$G, etc... .

Seja ϕ uma modalidade. Escreveremos

$\phi^n A$

para indicar que a fórmula A está sujeita a n iterações de uma modalidade ϕ, onde n pode ser qualquer número natural.

As iterações de uma modalidade, podem, formalmente serem definidas da seguinte maneira:

Definição 1.1:

1) $\phi^0 A = A.$

2) $\phi^n A = \phi\phi^{n-1} A$, para $n > 0$

onde $A \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ e ϕ é uma modalidade qualquer.

Observemos que:

1) $\underset{.}{\phi}^{n}A = \underset{.}{\phi}\underset{.}{\phi}^{n-1}A = \underset{.}{\phi}^{n-1}\underset{.}{\phi}A$, para $n > 0$

onde $A \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ e ϕ é uma modalidade qualquer.

2 - Uma Semântica para Ω^{T}

Definição 2.0: Uma Base Temporal $\mathfrak{T}$ é uma estrutura $\langle T,S \rangle$ onde:

i) $T \neq \emptyset$.

ii) $S \subseteq T^{2}$.

Intuitivamente T é o conjunto dos instantes do tempo e S é a relação de sucessão temporal. Usaremos a letra t para representar os elementos de T.

Definição 2.1: Uma valoração em $\mathfrak{T} = \langle T,S \rangle$ é uma função V que associa a cada $n \in \mathbb{N}$, um elemento V_n do conjunto das partes de T.

Como é usual, escreveremos V_n ao invés de $V(n)$, para indicar o valor que V assume para o argumento n.

Definição 2.2: Uma estrutura temporal proposicional $\mathfrak{m}$ é um par $\langle \mathfrak{T},V \rangle$ onde $\mathfrak{T}$ é uma base, dita a base de $\mathfrak{m}$, e V é uma valoração nesta base.

Definição 2.3: Seja $\mathfrak{m} = \langle T,S,V \rangle$ uma estrutura temporal proposicional. A relação "A é uma fórmula verdadeira no instante t" (em símbolos $\mathfrak{m} \models_t A$) é definida indutivamente através das seguintes cláusulas recursivas:

1) $\mathfrak{m} \models_t \mathbb{P}_n$ sse $t \in V_n$ para $n = 1,2,3,\ldots$.

2) $\mathfrak{m} \models_t \top$.

3) não ocorre $\mathfrak{m} \models_t \bot$[1] .

4) $\mathfrak{m} \models_t \neg A$ sse não ocorre $\mathfrak{m} \models_t A$.

5) $\mathfrak{m} \models_t (A \to B)$ sse se $\mathfrak{m} \models_t A$ então $\mathfrak{m} \models_t B$.

6) $\mathfrak{m} \models_t GA$ sse $\forall\, t_1 \in T$ tal que $t\ S\ t_1$ então $\mathfrak{m} \models_{t_1} A$.

7) $\mathfrak{m} \models_t HA$ sse $\forall\, t_{-1} \in T$ tal que $t_{-1} S\ t$ então $\mathfrak{m} \models_{t_{-1}} A$.

Definição 2.4:

A é verdadeira numa estrutura temporal $\mathfrak{m} = \langle T,S,V \rangle$ (em símbolos, $\mathfrak{m} \models A$) se para todo $t \in T$, tivermos que $\mathfrak{m} \models_t A$.

Definição 2.5:

A é válida (em símbolos, $\models A$) se para toda estrutura temporal $\mathfrak{m}$, tivermos que $\mathfrak{m} \models A$.

Definição 2.6: Um modelo para um conjunto Γ é uma estrutura temporal proposicional $\mathfrak{m} = \langle T,S,V \rangle$ e um instante de tempo $t \in T$, tal que para toda fórmula $A \in \Gamma$, $\mathfrak{m} \models_t A$.

Por abuso de linguagem, diremos que um modelo do conjunto unitário { A } é um modelo de A.

[1] Como é usual, denotaremos também por $\mathfrak{m} \not\models_t \bot$.

Definição 2.7: A é consequência de Γ (em símbolos, $\Gamma \models A$) sse todo modelo de Γ é modelo de A[2].

Observação:

$\Gamma \models A$ sse $\Gamma \cup \{\neg A\}$ não tem modelo.

Nota-se que, se A é consequência de Γ, então para qualquer estrutura temporal, se não é modelo de A então não é modelo de Γ, ou seja, se é modelo de $\{ \neg A \}$ então não é modelo de Γ, isto é, o conjunto $\Gamma \cup \{\neg A\}$ não tem modelo.

No que segue apresentaremos um teorema que explicita a preservação do significado usual dos símbolos lógicos, com base nas definições de verdade apresentadas anteriormente.

Teorema 2.0: Seja $\mathfrak{m} = \langle T,S,V \rangle$ e sejam A, B fórmulas.

I) $\mathfrak{m} \models_t A \wedge B$ sse $(\mathfrak{m} \models_t A$ e $\mathfrak{m} \models_t B)$.

II) $\mathfrak{m} \models_t A \vee B$ sse $(\mathfrak{m} \models_t A$ ou $\mathfrak{m} \models_t B)$.

III) $\mathfrak{m} \models_t A \leftrightarrow B$ sse $(\mathfrak{m} \models_t A$ sse $\mathfrak{m} \models_t B)$.

IV) $\mathfrak{m} \models_t FA$ sse $\exists t_1 \in T(t\ S\ t_1$ e $\mathfrak{m} \models_{t_1} A)$.

V) $\mathfrak{m} \models_t PA$ sse $\exists t_{-1} \in T(t_{-1}\ S\ t$ e $\mathfrak{m} \models_{t_{-1}} A)$.

Demonstração:

[2] Veja-se CHANG,C.C. & KEISLER,H.J..

I) $m \models_t A \wedge B$ sse (por definição)

$m \models_t \neg(A \rightarrow \neg B)$ sse

$m \not\models_t (A \rightarrow \neg B)$ sse

$m \models_t A$ e $m \not\models_t \neg B$ sse

$m \models_t A$ e $m \models_t B$.

II) $m \models_t A \vee B$ sse (por definição)

$m \models_t \neg A \rightarrow B$ sse

(se $m \models_t \neg A$ então $m \models_t B$) sse

$m \models_t A$ ou $m \models_t B$.

III) $m \models_t A \leftrightarrow B$ sse (por definição)

$m \models_t (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ sse (por I)

$m \models_t (A \rightarrow B)$ e $m \models_t (B \rightarrow A)$ sse

($m \models_t (\neg A \vee B)$ e $m \models_t (\neg B \vee A)$) sse (por II)

(($m \models_t \neg A$ ou $m \models_t B$) e ($m \models_t \neg B$ ou $m \models_t A$)) sse

($m \models_t A$ sse $m \models_t B$).

IV) $m \models_t FA$ sse (por definição)

$m \models_t \neg G \neg A$ sse

$m \not\models_t G \neg A$ sse

$\sim(\forall t_1 \in T(t\ S\ t_1$ então $m \models_{t_1} \neg A))$ sse

$\exists t_1 \in T(t\ S\ t_1$ e $m \models_{t_1} A)$.

V) $m \models_t PA$ sse (por definição)

$m \models_t \neg H \neg A$ sse

$m \not\models_t H \neg A$ sse

$\sim(\forall\, t_{-1} \in T(t_{-1}\ S\ t$ então $m \models_{t_{-1}} \neg A))$ sse

$\exists\, t_{-1} \in T(t_{-1}\ S\ t$ e $m \models_{t_{-1}} \neg A)$. ■

2.1 - Propriedades Semânticas

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades semânticas que, além de explicitarem o comportamento dos operadores temporais, contribuirão para a demonstração do teorema da correção do sistema axiomático que será introduzido no próximo capítulo. Mais precisamente, mostraremos a validade dos seguintes esquemas:

1) $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$.

2) $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$.

3) $A \rightarrow GPA$.

4) $A \rightarrow HFA$.

Teorema 2.1.0: Seja $m = \langle T,S,V \rangle$ uma estrutura temporal proposicional qualquer e $t \in T$, então:

1) $m \models_t G(A \to B) \to (GA \to GB)$.

2) $m \models_t H(A \to B) \to (HA \to HB)$.

3) $m \models_t A \to GPA$.

4) $m \models_t A \to HFA$.

Demonstração:

1) Mostraremos que $m \models_t G(A \to B) \to (GA \to GB)$.

Por contraposição temos que:

$m \not\models_t (GA \to GB)$, logo

$m \models_t GA$ e $m \not\models_t GB$, portanto existe t_1, tal que $t\ S\ t_1$ e

$m \models_{t_1} A$ e $m \not\models_{t_1} B$, assim

$m \not\models_{t_1} A \to B$.

Logo, como $t\ S\ t_1$ temos que

$m \not\models_t G(A \to B)$.

2) Mostraremos que $m \models_t H(A \to B) \to (HA \to HB)$.

Por contraposição temos que:

$m \not\models_t (HA \to HB)$, logo

$m \models_t HA$ e $m \not\models_t HB$, portanto existe t_{-1}, tal que $t_{-1}\ S\ t$ e

$m \models_{t_{-1}} A$ e $m \not\models_{t_{-1}} B$, assim

$m \not\models_{t_{-1}} A \to B$.

Logo, como $t_{-1}\ S\ t$ temos que

$m \not\models_t H(A \to B)$.

3) Mostraremos que $m \models_t A \to GPA$.

Por contraposição temos:

$m \not\models_t GPA$

Logo, existe t_1, tal que $t\ S\ t_1$ e

$m \not\models_{t_1} PA$ e, portanto, para todo t_{-1}, tal que $t_{-1}\ S\ t_1$,

$m \not\models_{t_{-1}} A$. Como $t\ S\ t_1$, temos que

$m \not\models_t A$.

4) Mostraremos que $m \models_t A \rightarrow HFA$.

Por contraposição temos:

$m \not\models_t HFA$

Logo, existe t_{-1}, tal que $t_{-1}\ S\ t$ e

$m \not\models_{t_{-1}} FA$ e, portanto, para todo t_1, tal que $t_{-1}\ S\ t_1$,

$m \not\models_{t_1} A$. Como $t_{-1}\ S\ t$, temos que

$m \not\models_t A$. ∎

3 - Axiomática

Os conceitos apresentados anteriormente, de consequência e validade, são conceitos semânticos. Por outro lado os conceitos de dedutibilidade e de teorema são sintáticos, suas definições só dizem respeito aos aspectos gráficos das expressões.

Com o objetivo de caracterizar as fórmulas válidas sintáticamente, escolheremos como axiomas algumas fórmulas válidas, para que possamos a partir destas, deduzir por meio de regras outras fórmulas válidas.

Na primeira seção introduziremos os axiomas e regras, para depois definirmos as noções de dedutibilidade e consistência, caracterizando as noções sintáticas[3].

3.1 - Axiomas e Regras

Apresentaremos agora um sistema axiomático[4] para a Lógica Temporal. Esse sistema que denominaremos de T, é caracterizado pelos seguintes esquemas de axiomas:

T1) $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$.

T2) $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$.

T3) $A \rightarrow GPA$.

T4) $A \rightarrow HFA$.

T5) A, se A for uma fórmula tautológica[5].

[3] Veja-se MATES, BENSON..

[4] Veja-se GABBAY, D. e GUENTHNER, F.; RESCHER, N. AND URQUHART, A. e PRIOR, ARTHUR N..

[5] O conceito de fórmula tautológica é definido de maneira análoga à corrente em lógica modal. Veja-se CHELLAS, BRIAN F..

As **regras de inferência** são as seguintes:

RP. A / HA.

RF. A / GA.

MP. A, A → B / B (Modus Ponens).

3.2 - Dedutibilidade e Consistência

Definição 3.2.0: Uma *demonstração* em T é uma sequência $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de fórmulas tal que, para cada i, ou A_i é um axioma de T ou A_i é obtido de fórmulas anteriores por meio de regras de inferência.

Definição 3.2.1: Um *teorema* de T é uma fórmula A da linguagem $\mathfrak{L}^T$ tal que existe uma *demonstração*, na qual a última fórmula é A. Tal demonstração é chamada uma demonstração de A.

Usualmente escreveremos $\vdash A$ para significar que A é um teorema.

Definição 3.2.2: Uma *dedução* de A a partir de Γ é uma sequência finita de fórmulas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tais que $A_n = A$, e, para cada i = 1,2,...,n ao menos uma das seguintes condições é satisfeita:

I) A_i é um axioma;

II) $A_i \in \Gamma$, neste caso diremos que A_i é uma hipótese;

III) existem $j,l < i$, tais que A_j é $A_l \to A_i$;

IV) existe $j < i$, tal que:

i) A_i é GA_j e, para alguns

$j_1, j_2, \ldots, j_m \leq j$,

$A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m} = A_j$ é uma demonstração em T de A_j.

ii) A_i é HA_j e, para alguns

$j_1, j_2, \ldots, j_m \leq j$,

$A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m} = A_j$ é uma demonstração em T de A_j.

Diremos que A é dedutível de Γ (em símbolos, $\Gamma \vdash A$) se existir uma dedução de A a partir de Γ.

Lema 3.2.0 (Teorema da Dedução[6]): Se Γ é um conjunto de fórmulas, e A e B são fórmulas, e $\Gamma, A \vdash B$, então $\Gamma \vdash A \to B$. Em particular, se $A \vdash B$ então $\vdash A \to B$.

Demonstração:

Seja $B_1, B_2, \ldots, B_n$ uma dedução de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$, onde $B_n = B$. Vamos demonstrar, por indução em i, que $\Gamma \vdash A \to B_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Base Indutiva: $i = 1$.

Assim, $B_1 \in \Gamma$ ou B_1 é um axioma de T, ou B_1 é o próprio A. Como $B_1 \to (A \to B_1)$ é uma fórmula tautológica, nos dois primeiros casos, por Modus Ponens, $\Gamma \vdash A \to B_1$. Para o terceiro caso, quando

[6] Veja-se MENDELSON, ELLIOTT..

B_1 é A, usando a fórmula tautológica $A \rightarrow A$, temos que $\vdash A \rightarrow B_1$, e, portanto $\Gamma \vdash A \rightarrow B_1$.

Hipótese Indutiva: Supomos que $\Gamma \vdash A \rightarrow B_k$ para todo $k < i$.

Desse modo ao menos um dos seguintes casos deve ocorrer:

1) B_i é um axioma,

2) B_i está em Γ,

3) B_i é A,

4) B_i é obtido por Modus Ponens para algum B_j e B_l, onde $j < i$, $l < i$, e B_l tem a forma $B_j \rightarrow B_i$,

5) B_i é GB_j, e existe uma demonstração em linhas anteriores para B_j,

6) B_i é HB_j, e existe uma demonstração em linhas anteriores para B_j.

Nos três primeiros casos, $\Gamma \vdash A \rightarrow B_i$, como mostrado acima no caso $i = 1$.

Para o caso 4), temos, por hipótese indutiva, que $\Gamma \vdash A \rightarrow B_j$ e $\Gamma \vdash A \rightarrow (B_j \rightarrow B_i)$. Como $(A \rightarrow (B_j \rightarrow B_i)) \rightarrow ((A \rightarrow B_j) \rightarrow (A \rightarrow B_i))$ é uma fórmula tautológica, aplicando Modus Ponens duas vezes temos que $\Gamma \vdash A \rightarrow B_i$.

Para o caso 5). Como existe uma demonstração para B_j, então pela regra RF, temos GB_j, e como $GB_j \rightarrow (A \rightarrow GB_j)$ é uma fórmula tautológica, temos que $\Gamma \vdash A \rightarrow B_i$.

Para o caso 6). Como existe uma demonstração para B_j, então pela regra RP, temos HB_j, e como $HB_j \rightarrow (A \rightarrow HB_j)$ é uma fórmula tautológica, temos que $\Gamma \vdash A \rightarrow B_i$. ■

Notação: Escreveremos $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$ como sendo:

a) $\top$ se $n = 0$,

b) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ se $n > 0$.

Lema 3.2.1: $\Gamma \vdash A$ sse existem $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \in \Gamma$ ($n \geq 0$) tais que $\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n) \to A$.

Demonstração:

Da direita para a esquerda, segue que:

Por hipótese, existem $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \in \Gamma$ e $\vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to A$.

Caso $n = 0$, então temos que $\vdash \top \to A$ e, portanto, $\Gamma \vdash A$.

Se $n > 0$, então, por tautologia,

$\vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to \ldots \to (A_n \to A) \ldots)$ e aplicando Modus Ponens n vezes, temos que

$\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\} \vdash A$, ou seja $\Gamma \vdash A$.

Por outro lado,

se $\Gamma \vdash A$ então existe uma sequência $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m = A$, que é uma dedução de A a partir de Γ. Sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, todas as fórmulas de Γ que ocorrerem em $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$. Assim, pela definição de dedução $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\} \vdash A$. E, desse modo por n aplicações do teorema da dedução, $\vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to \ldots \to (A_n \to A) \ldots)$, e, por tautologia, $\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n) \to A$. ∎

Um conjunto de fórmulas Γ é consistente , escreveremos $Con\Gamma$, somente no caso em que a fórmula $\perp$ não é dedutível de Γ. Assim Γ é inconsistente , escreveremos $ICon\Gamma$, justamente no caso em que $\Gamma \vdash \perp$.

Definição 3.2.3: $Con\Gamma$ sse não acontece $\Gamma \vdash \bot$.

Teorema 3.2.0:

(1) $\vdash A$ sse $\emptyset \vdash A$.

(2) $\vdash A$ sse para cada Γ, $\Gamma \vdash A$.

(3) Se $A \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash A$.

(4) Se $\Gamma \vdash B$ e $\{B\} \vdash A$, então $\Gamma \vdash A$.

(5) Se $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash A$.

(6) $\Gamma \vdash A$ sse existe um subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash A$.

(7) $\Gamma \vdash A \to B$ sse $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$.

(8) $Con\Gamma$ sse existe um A tal que não acontece $\Gamma \vdash A$.

(9) $ICon\Gamma$ sse existe A tal que ambos $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash \neg A$.

(10) Se $Con\Gamma$ e $\Delta \subseteq \Gamma$, então $Con\Delta$.

(11) $Con\Gamma$ sse para cada subconjunto finito Δ de Γ, $Con\Delta$.

(12) $\Gamma \vdash A$ sse $ICon\Gamma \cup \{\neg A\}$.

(13) $Con\Gamma \cup \{A\}$ sse não acontece $\Gamma \vdash \neg A$.

Demonstração:

Para (1). Se $\vdash A$, então, como uma demonstração é uma dedução a partir de qualquer conjunto, então particularmente para o $\emptyset$ segue que $\emptyset \vdash A$. Por outro lado, se $\emptyset \vdash A$, então existe uma dedução na qual não ocorre nenhuma hipótese. Portanto, uma demonstração, ou seja, $\vdash A$.

Para (2). Segue da definição de demonstração, que toda demonstração é uma dedução a partir de qualquer conjunto. Por outro lado, supomos que $\Gamma \vdash A$, para cada conjunto de fórmulas Γ. Então em particular para $\Gamma = \emptyset$ temos que $\emptyset \vdash A$, e, usando (1), temos que $\vdash A$.

Para (3). Supomos que $A \in \Gamma$. A fórmula $A \to A$ é uma tautologia, logo é um teorema de T, onde o antecedente da condicional está em Γ, portanto $\Gamma \vdash A$.

Para (4). Se $\Gamma \vdash B$ então existe uma dedução de B a partir de Γ, tal como explicitado na definição 3.2.2, de modo análogo, existe uma dedução de A a partir de $\{B\}$. Se substituirmos a dedução de B a partir de Γ em cada ocorrência de B na dedução de A a partir de $\{B\}$, teremos então uma dedução de A a partir de Γ.

Para (5). Se $\Gamma \vdash A$ então existe uma dedução de A a partir de Γ, tal como definido em 3.2.2. Como $\Gamma \subseteq \Delta$, tal dedução é também uma dedução de A a partir de Δ, ou seja, $\Delta \vdash A$.

Para (6). Da direita para a esquerda segue de (5). O outro lado segue do fato de se ter sempre um número finito de hipóteses que forma a sequência finita $A_1,\ldots,A_n = A$.

Para (7). Se $\Gamma \vdash A \to B$ então pelo lema 3.2.1, existe uma sequência $A_1, \ldots, A_n \in \Gamma$, onde $A_n = A \to B$ e é teorema $\vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to (A \to B)$ e, por tautologia $\vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A) \to B$ e pelo mesmo lema, $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$. Reciprocamente, usando o lema 3.2.0, segue que, se $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ então $\Gamma \vdash A \to B$.

Para (8). Supomos que ConΓ, isto é, que não acontece $\Gamma \vdash \perp$, então, claramente existe uma fórmula A, tal que não aconteça $\Gamma \vdash A$. Por outro lado, supomos que IConΓ, isto é, que $\Gamma \vdash \perp$. Do cálculo proposicional, temos que $\{\perp\} \vdash A$, para qualquer fórmula A. Assim, pelo ítem (4), $\Gamma \vdash A$, para qualquer fórmula A.

Para (9). Supomos que IConΓ, isto é, $\Gamma \vdash \perp$ e, como $\perp \to A$ é uma tautologia, então $\Gamma \vdash A$, para qualquer fórmula A. Portanto, para toda fórmula A, $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash \neg A$. Por outro lado, se existe uma fórmula A, tal que $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash \neg A$, então, como $(A \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \wedge \neg A)))$ é uma fórmula tautológica, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A$, e, como $A \wedge \neg A \vdash \bot$, por (4), $\Gamma \vdash \bot$, logo Γ é inconsistente.

Para (10). Supomos que IConΔ, isto é, que $\Delta \vdash \bot$. Como $\Delta \subseteq \Gamma$, por (5), temos que $\Gamma \vdash \bot$, ou seja IConΓ.

Para (11). Supomos que IConΓ, isto é, $\Gamma \vdash \bot$, por (6), existe um subconjunto $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash \bot$, ou seja, IConΔ. Por outro lado, supomos que existe um subconjunto finito Δ de Γ, tal que IConΔ. assim $\Delta \vdash \bot$ e, por (6), $\Gamma \vdash \bot$, ou seja, IConΓ.

Para (12). Supomos que $\Gamma \vdash A$. Por (5), temos que $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash A$, e por (3), $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \neg A$, assim por (9), ICon$\Gamma\cup\{\neg A\}$. Reciprocamente, supomos que ICon$\Gamma\cup\{\neg A\}$, isto é, que $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \bot$. Então por (7), $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow \bot$. Do cálculo proposcional, temos que $\{\neg A \rightarrow \bot\} \vdash A$. Assim, por (4), $\Gamma \vdash A$.

Para (13). Supomos que ICon$\Gamma\cup\{A\}$, por (12), ICon$\Gamma\cup\{A\}$ sse $\Gamma \vdash \neg A$, ou seja, Con$\Gamma\cup\{A\}$ sse não acontece $\Gamma \vdash A$. ■

3.3 - Propriedades sintáticas

Apresentaremos a seguir uma lista de teoremas de T que, além de permitirem uma melhor compreensão do sistema, contribuirão para a demonstração do teorema da completude. Alguns desses teoremas podem também serem encontrados em Burgess[7].

[7] Veja-se GABBAY, D. e GUENTHNER, F..

Teorema 3.3.0: Sendo A,B e C fórmulas de $\mathfrak{L}^T$, e p uma variável proposicional, então,

se $\vdash A \leftrightarrow B$ então $\vdash C\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow C\ {}^{p}/_{B}$.

Demonstração:

Suponhamos que $\vdash A \leftrightarrow B$. Mostraremos por indução na complexidade de C que $\vdash C\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow C\ {}^{p}/_{B}$.

Base Indutiva:

C é uma variável proposicional. Temos dois casos:

1) C é a variável proposicional p. Neste caso,

$C\ {}^{p}/_{A}$ é igual a A e $C\ {}^{p}/_{B}$ é igual a B,

consequentemente , por hipótese,

$\vdash A \leftrightarrow B$.

2) C é uma variável proposicional diferente de p, seja por exemplo p'. Neste caso,

$C\ {}^{p}/_{A}$ é igual a p' e $C\ {}^{p}/_{B}$ é igual a p',

e, portanto,

$\vdash p' \leftrightarrow p'$.

Hipótese Indutiva: O teorema é válido para fórmulas de complexidades menores que C.

1) C é do tipo $\neg X$.

Por hipótese de indução,

$\vdash (X)\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow (X)\ {}^{p}/_{B}$,

logo, por tautologia e Modus Ponens,

$\vdash \neg(X)\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow \neg(X)\ {}^{p}/_{B}$,

ou seja,

$\vdash (\neg X)\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow (\neg X)\ {}^{p}/_{B}$.

2) C é do tipo $(X \rightarrow Y)$.

Por hipótese de indução,

i) $\vdash (X)\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow (X)\ {}^{p}/_{B}$ e

ii) $\vdash (Y)\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow (Y)\ {}^{p}/_{B}$.

Logo, por tautologia,

$\vdash (X\ {}^{p}/_{A} \rightarrow Y\ {}^{p}/_{A}) \leftrightarrow (X\ {}^{p}/_{B} \rightarrow Y\ {}^{p}/_{B})$,

assim,

$\vdash (X \rightarrow Y)\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow (X \rightarrow Y)\ {}^{p}/_{B}$.

3) C é do tipo GX.

Por hipótese de indução,

$\vdash (X)\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow (X)\ {}^{p}/_{B}$.

Logo, por tautologia, regra RF, e axioma T1,

$\vdash G(X)\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow G(X)\ {}^{p}/_{B}$,

assim,

$\vdash (GX)\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow (GX)\ {}^{p}/_{B}$.

4) C é do tipo HX.

Por hipótese de indução,

$\vdash (X)\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow (X)\ {}^{p}/_{B}$.

Logo, por tautologia, regra RP, e axioma T2,

$\vdash H(X)\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow H(X)\ {}^{p}/_{B}$,

assim,

$\vdash (HX)\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow (HX)\ {}^{p}/_{B}$. ■

Apresentaremos a seguir algumas demonstrações em T, destacando algumas linhas, onde ocorrem teoremas que serão usados futuramente.

	(1) $G(A \rightarrow B) \rightarrow G(\neg B \rightarrow \neg A)$	fórmula tautológica
	(2) $G(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (G\neg B \rightarrow G\neg A)$	axioma
T3.3.1)	(3) $G(A \rightarrow B) \rightarrow (FA \rightarrow FB)$	1,2
	(4) $GA \rightarrow G(B \rightarrow A \wedge B)$	fórmula tautológica
	(5) $G(B \rightarrow A \wedge B) \rightarrow (FB \rightarrow F(A \wedge B))$	3
T3.3.2)	(6) $GA \wedge FB \rightarrow F(A \wedge B)$	4,5
	(7) $A \rightarrow GPA$	axioma
	(8) $GPA \wedge FB \rightarrow F(PA \wedge B)$	6
T3.3.3)	(9) $(A \wedge FB) \rightarrow F(PA \wedge B)$	7,8
	(10) $G(A \wedge B) \rightarrow GA$	fórmula tautológica
	(11) $G(A \wedge B) \rightarrow GB$	fórmula tautológica
	(12) $G(B \rightarrow A \wedge B) \rightarrow (GB \rightarrow G(A \wedge B))$	axioma
T3.3.4)	(13) $GA \wedge GB \leftrightarrow G(A \wedge B)$	4,10,11,12
	(14) $G\neg A \wedge G\neg B \rightarrow G(\neg A \wedge \neg B)$	13
	(15) $G\neg A \wedge G\neg B \rightarrow G\neg(A \vee B)$	14
T3.3.5)	(16) $FA \vee FB \leftrightarrow F(A \vee B)$	15
	(17) $GA \rightarrow G(A \vee B)$	fórmula tautológica

	(18)$GB \to G(A \vee B)$	fórmula tautológica
T3.3.6)	(19)$GA \vee GB \to G(A \vee B)$	17,18
	(20)$G\neg A \vee G\neg B \to G(\neg A \vee \neg B)$	19
	(21)$G\neg A \vee G\neg B \to G\neg(A \wedge B)$	20
T3.3.7)	(22)$F(A \wedge B) \to (FA \wedge FB)$	21
	(23)$\neg A \to HF\neg A$	axioma
	(24)$\neg A \to H\neg GA$	23
T3.3.8)	(25)$PGA \to A$	24

Obs: Por demonstrações análogas, temos como teoremas as fórmulas obtidas dos teoremas acima, trocando-se G por H e F por P, uniformemente.

T3.3.9) Se $\vdash A \to B$ então $\vdash HA \to HB$.

Demonstração: Segue dos teoremas anteriores.

T3.3.10) Se $\vdash A \to B$ então $\vdash PA \to PB$.

Demonstração: Segue dos teoremas anteriores.

T3.3.11) Se $\vdash A \to B$ então $\vdash GA \to GB$.

Demonstração: Segue dos teorema anteriores.

T3.3.12) Regra RPL

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ / A , se A for consequência tautológica[8] de $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

[8] Veja-se CHELLAS, BRIAN F..

Demonstração: Segue diretamente dos axiomas e Modus Ponens. Pois, se A for consequência tautológica de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, então a fórmula $(A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow A)\ldots)$ é uma tautologia, por conseguinte, um axioma. Assim, por n aplicações de Modus Ponens, obtemos que A é dedutível de $A_1, A_2, \ldots, A_n$. ■

3.4 - Correção

Para apresentar a correção de T, devemos demonstrar que todos os axiomas preservam a validade, e que cada regra preserva a validade. A validade dos axiomas é exibida na seção 2.1, resta somente mostrar que as regras preservam a validade. Assim devemos estabelecer o seguinte:

Teorema 3.4.0:(Regra RF)

Se $\models A$ então $\models GA$.

Demonstração:

$\not\models GA$ então existe $\mathfrak{m}$ e existe $t \in T$ em $\mathfrak{m}$ tal que $\mathfrak{m} \not\models_t GA$, logo existe $t_1 \in T$ tal que $t\ S\ t_1$ e $\mathfrak{m} \not\models_{t_1} A$, ou seja $\not\models A$ (A não é válida). ■

Teorema 3.4.1:(Regra RP)

Se $\models A$ então $\models HA$.

Demonstração:

$\not\models$ HA então existe m e existe $t \in T$ em m tal que $m \not\models_t$ HA, logo existe $t_{-1} \in T$ tal que t_{-1} S t e $m \not\models_{t_{-1}}$ A, ou seja $\not\models$ A (A não é válida). ■

Teorema 3.4.2:(Regra MP)

Se $\models$ A e $\models$ A $\rightarrow$ B então $\models$ B.

Demonstração:

Por redução ao absurdo, assumimos que $\models$ A, $\models$ A $\rightarrow$ B e $\not\models$ B. Assim se $\not\models$ B então existe m e existe $t \in T$ em m tal que $m \not\models_t$ B. Como $\models$ A, então para todo m e todo $t \in T$ em m, $m \models_t$ A. Disso segue que existe m e existe $t \in T$ em m, tal que $\not\models$ A $\rightarrow$ B, o qual contradiz a hipótese. ■

Desse modo estamos em condição de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.4.3(Correção): Seja $\mathfrak{L}^T$ uma linguagem temporal, Γ e A, respectivamente, um conjunto de fórmulas e uma fórmula de $\mathfrak{L}^T$. Nessas condições vale:

i) Se $\vdash$ A então $\models$ A.

ii) Se $\Gamma \vdash$ A então $\Gamma \models$ A.

Demonstração:

O ítem (i) segue de (ii) quando consideramos $\Gamma = \emptyset$. (ii) é demonstrado por indução no comprimento de uma dada dedução de A a partir de Γ, levando-se em conta os teoremas 2.1.0, 3.3.0, 3.4.0, 3.4.1, 3.4.2. ■

4 - Completude

Nos capítulos anteriores caracterizamos conceitos sintáticos e semânticos com respeito a linguagem Ω^T. Neste capítulo, caracterizaremos que é possível mostrar que o conceito semântico de consequência coincide, extensionalmente, com o conceito sintático de dedutibilidade, ou seja, mostraremos que, para cada fórmula A e conjunto de fórmulas Γ, A é consequência de Γ se e somente se A é dedutível de Γ, em símbolos,

$\Gamma \models A$ sse $\Gamma \vdash A$.

Como, já expusemos que se $\Gamma \vdash A$ então $\Gamma \models A$, falta mostrar apenas que se $\Gamma \models A$ então $\Gamma \vdash A$.

Para a prova da completude precisaremos de alguns resultados preliminares.

4.1 - Maximalidade e Lema de Lindenbaum

Um conjunto maximal consistente é, do ponto de vista intuitivo, um conjunto que contém o maior número possível de fórmulas que pode conter sem se tornar inconsistente. Nós escreveremos $Max\Gamma$ para significar que Γ é maximal consistente.

Definição 4.1.0: $Max\Gamma$ sse

(i) $Con\Gamma$, e

(ii) para cada A, se $Con\Gamma\cup\{A\}$, então $A \in \Gamma$.

Teorema 4.1.0: Seja Γ um conjunto maximal consistente de fórmulas. Então:

(1) $A \in \Gamma$ sse $\Gamma \vdash A$.

(2) $\top \in \Gamma$.

(3) $\bot \notin \Gamma$.

(4) $\neg A \in \Gamma$ sse $A \notin \Gamma$.

(5) $A \rightarrow B$ sse se $A \in \Gamma$ então $B \in \Gamma$.

Demonstração:

Supomos que Γ seja um conjunto maximal consistente.

Para (1). Da esquerda para a direita é o teorema 3.2.0 (3). Por outro lado, supomos que $\Gamma \vdash A$, mas $A \notin \Gamma$. Então pela maximalidade de Γ, $ICon\Gamma\cup\{A\}$. Disto e do teorema 3.2.0(13), temos que $\Gamma \vdash \neg A$. Assim pelo teorema 3.2.0(9), $ICon\Gamma$, o que contradiz a hipótese de Γ ser consistente.

Para (2). Supomos por absurdo que $\top$ não pertença a Γ. Pela maximalidade de Γ, $ICon\Gamma\cup\{\top\}$. Assim pelo teorema 3.2.0(13), $\Gamma \vdash \neg\top$, ou seja, $\Gamma \vdash \bot$, caracterizando que Γ é inconsistente, o que contradiz a hipótese de Γ ser consistente.

Para (3). Supomos por absurdo, que $\perp \in \Gamma$. Então, por (1), $\Gamma \vdash \perp$, o que significa que $\mathrm{ICon}\Gamma$, o que contradiz a maximalidade de Γ.

Para (4). Vamos dividir em dois casos:

(i) Não ambos $A \in \Gamma$ e $\neg A \in \Gamma$.

(ii) Ou $A \in \Gamma$ ou $\neg A \in \Gamma$.

Para (i), assumimos o contrário, que Γ contém ambos A e $\neg A$. Então, por (1), ambos são dedutíveis de Γ, o que caracteriza que Γ é inconsistente, contradizendo a maximalidade de Γ.

Para (ii), supomos o contrário, que Γ não contém nem A, nem $\neg A$. Então por (1) nenhum é dedutível de Γ. Isto significa, pelo teorema 3.2.0(12 e 13) que $\mathrm{Con}\Gamma \cup \{A\}$ e $\mathrm{Con}\Gamma \cup \{\neg A\}$. Por definição, $A \in \Gamma$ e $\neg A \in \Gamma$, o qual é impossível.

Para (5). Da esquerda para a direita, supomos que $(A \to B) \in \Gamma$ e $A \in \Gamma$. Por (1), segue que $\Gamma \vdash (A \to B)$ e $\Gamma \vdash A$, e pelo cálculo proposicional B é dedutível dessas duas fórmulas, e pelo teorema 3.2.0(4), $\Gamma \vdash B$, e portanto por (1), $B \in \Gamma$.

Por outro lado, supomos que $A \to B \notin \Gamma$, para mostrar que $A \in \Gamma$ e $B \notin \Gamma$. Por (4) e (1), $\Gamma \vdash \neg(A \to B)$. Pelo cálculo proposicional A e $\neg B$ são dedutíveis de Γ. Por (1), $A \in \Gamma$ e $\neg B \in \Gamma$, e por (4) segue que $B \notin \Gamma$. ∎

O próximo teorema é conhecido como lema de Lindenbaum[9].

[9] Veja-se BELL, J.L. AND MACHOVER, M.; CHELLAS, BRIAN F. e CHANG, C.C. AND KEISLER, H.J. .

Teorema 4.1.1: Se ConΓ, então existe um Δ tal que :

(i) $\Gamma \subseteq \Delta$, e

(ii) MaxΔ.

Demonstração:

Seja Γ um conjunto consistente de fórmulas. Nosso plano é definir um conjunto Δ de fórmulas em termos de Γ, o qual provaremos ser uma extensão maximal de Γ.

Seja

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

uma dada enumeração do conjunto de fórmulas de Ω^T.

Em termos do conjunto Γ e desta enumeração de fórmulas, nós definimos uma sequência infinita de conjuntos de fórmulas,

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots .$$

A definição é indutiva. Primeiro nós definimos o conjunto inicial da sequência, Δ_0; então nós especificaremos como qualquer outro conjunto na sequência, Δ_n, é definido em termos de seu predecessor imediato, Δ_{n-1}.

Definição I:

(1) $\Delta_0 = \Gamma$.

(2) Para $n > 0$, Δ_n é: i) $\Delta_{n-1} \cup \{A_n\}$, se Con$\Delta_{n-1} \cup \{A_n\}$;

ii) Δ_{n-1}, caso contrário;

Em outras palavras: Δ_0 é o conjunto Γ; e, para $n > 0$, Δ_n é formado pela adição da n-ésima fórmula na enumeração, A_n, para Δ_{n-1} se esta adição for consistente, caso contrário, Δ_n é o mesmo que Δ_{n-1}. É óbvio que, nesta construção, cada conjunto é consistente. O primeiro conjunto na sequência é consistente por definição, e os outros são formados por adições consistentes em seus predecessores. Assim:

Lema I: Δ_n é consistente, para $n \geq 0$.

Demonstração: Por indução em n.

Base Indutiva: $n = 0$.

Δ_0 é consistente, pois $\Delta_0 = \Gamma$ e Γ é consistente por hipótese do lema de Lindenbaum.

Hipótese Indutiva:

Para $n > 0$, se Δ_n é consistente então Δ_{n+1} também o é.

Como para $n > 0$, Δ_{n+1} é:

i) $\Delta_n \cup \{A_{n+1}\}$, se $Con\Delta_n \cup \{A_{n+1}\}$;

ii) Δ_n, caso contrário;

temos desse modo que Δ_{n+1} é consistente.■

Vamos definir agora o conjunto Δ como sendo uma coleção infinita de todas as fórmulas em quaisquer dos conjuntos na sequência.

Definição II: $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$.

Desse modo Δ inclui cada um dos conjuntos da sequência, assim:

Lema II: $\Delta_n \subseteq \Delta$, para $n \geq 0$.

Em particular Δ inclui Γ (que é Δ_0), assim:

Lema III: $\Gamma \subseteq \Delta$.

Assim Δ é uma extensão de Γ. Resta mostrar que Δ é maximal. Para isso necessitaremos de alguns lemas.

Lema IV: $\Delta_k \subseteq \Delta_n$, para $k \leq n \geq 0$.

De acordo com esse lema, cada conjunto na sequência inclui todos os seus predecessores. Isto é óbvio pela construção da sequência.

Lema V: $A_k \in \Delta_k$, sempre que $A_k \in \Delta$, para $k > 0$.

Este lema assegura que uma fórmula com índice k na enumeração das fórmulas está sempre no conjunto na sequência que tem índice k.

Por construção,

para $k > 0$, Δ_k é:

i) $\Delta_{k-1} \cup \{A_k\}$, se $\mathrm{Con}\Delta_{k-1} \cup \{A_k\}$;

ii) Δ_{k-1}, caso contrário;

Desse modo se $A_k \in \Delta$ e $\Delta \supseteq \Delta_k$, para $k \geq 0$, então $A_k \in \Delta_k$, pois se não pertencesse a Δ_k, A_k não pertenceria a Δ e Δ_k seria Δ_{k-1}.

Lema VI: Para cada subconjunto finito Δ' de Δ, $\Delta' \subseteq \Delta_n$, para algum $n \geq 0$.

Esse lema diz que para cada subconjunto finito de Δ, existe um conjunto na sequência que o contém.

Supomos que Δ' seja um subconjunto finito de Δ, e seja A_n uma fórmula em Δ' com o maior índice inteiro n (essa fórmula deve e-xistir, uma vez que Δ' é finito). Agora mostraremos que $\Delta' \subseteq \Delta_n$.

Seja A uma fórmula em Δ'. Pelo fato de que A ocorre na enumeração considerada de fórmulas, $A = A_k$, onde $k \leq n$. Desde que A ($= A_k$) está em Δ', está também em Δ. Assim, pelo lema *V*, A ($=A_k$) está no conjunto Δ_k. Pelo lema *IV*, $\Delta_k \subseteq \Delta_n$. Portanto A está em Δ_n.

Lema VII: Δ é maximal consistente. Isto é:

i) Δ é consistente;

ii) para cada A, se $\{A\} \cup \Delta$ é consistente, então $A \in \Delta$.

Para i) é suficiente, usando o teorema 3.2.0(11), mostrar que cada subconjunto finito de Δ é consistente. Supomos o contrário, que Δ tem um subconjunto finito inconsistente, a saber, Δ'. Seja A_n uma fórmula em Δ' com o maior índice n. Então Δ' é um subconjunto do conjunto Δ_n na sequência, e assim pelo teorema 3.2.0(10), Δ_n é inconsistente. Isto contradiz o lema I.

Para ii), supomos que $\Delta \cup \{A\}$ é consistente para algum A. Pelo fato de que para algum n, A aparece como a n-ésima fórmula na enumeração de fórmulas, podemos equivalentemente dizer que: $\{A_n\} \cup \Delta$ é consistente. Pelo teorema 3.2.0(10), cada subconjunto deste conjunto é consistente. Em particular, $\Delta_{n-1} \cup \{A_n\}$ é consistente (desde que $\Delta_{n-1} \subseteq \Delta$, pelo lema II). Pela definição I, então, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cup \{A_n\}$. Desde que A_n está em Δ_n, está em Δ, isto é, $A \in \Delta$. ■

Do lema de Lindenbaum, levando em conta o teorema 4.1.0, segue que uma fórmula é dedutível de um conjunto de fórmulas se e somente se ela pertence a cada extensão maximal do conjunto, e também que uma fórmula é um teorema justamente no caso em que ela é um membro de cada conjunto maximal de fórmulas.

Teorema 4.1.2:

(1) $\Gamma \vdash A$ sse $A \in \Delta$, para cada MaxΔ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.

(2) $\vdash A$ sse $A \in \Delta$, para cada MaxΔ.

Demonstração:

Para (1). Supomos que $\Gamma \vdash A$, Δ é maximal consistente, e $\Gamma \subseteq \Delta$. Pelo teorema 3.2.0(5), $\Delta \vdash A$, e pelo teorema 4.1.0(1), $A \in \Delta$. Reciprocamente, supomos que não acontece de $\Gamma \vdash A$, para mostrar que existe uma extensão maximal de Γ não contendo A. Segue do teorema 3.2.0(12), que o conjunto $\Gamma \cup \{\neg A\}$ é consistente. Pelo lema de Lindenbaum este conjunto tem uma extensão maximal Δ, o qual é também uma extensão de Γ. Pelo fato de que $\neg A \in \Delta$, segue pelo teorema 4.1.0(4) que $A \notin \Delta$.

Para (2). Raciocínio análogo a (1), considerando $\Gamma = \emptyset$ e o teorema 3.2.0(1). ■

4.2 - Estrutura Temporal Canônica

O método de estruturas canônicas[10] para provar a completude é

[10] Veja-se LEMMON,E.J. AND SCOTT,D.S.; HUGHES,G.E. & CRESSWELL,M.J. e CHELLAS, BRIAN F. .

muito usado tanto em Lógica Modal como em Lógica Temporal, sendo uma técnica extremamente forte e flexível, que pode se adaptar a um grande número de sistemas em Lógica Modal e Temporal. Neste texto usaremos essa mesma técnica para a prova da completude.

Definição 4.2.0: Uma estrutura temporal $\mathfrak{m}_c=\langle T_c,S,V\rangle$ é uma estrutura temporal canônica, se satisfizer as seguintes condições:

i) $T_c = \{ \Gamma : \Gamma$ é maximal consistente $\}$.

ii) Para cada $\Delta \in T_c$, $GA \in \Delta$ sse para cada $\Delta' \in T_c$ tal que $\Delta\ S\ \Delta'$, $A \in \Delta'$.

iii) Para cada $\Delta \in T_c$, $HA \in \Delta$ sse para cada $\Delta' \in T_c$ tal que $\Delta'\ S\ \Delta$, $A \in \Delta'$.

iv) $V_n = \{ \mathrm{Max}\Delta : \mathbb{P}_n \in \Delta \}$ para $n = 0,1,2,3,\ldots$.

A principal característica de uma estrutura canônica para a lógica temporal é que se uma fórmula A é verdadeira para algum $\Delta \in T_c$ em $\mathfrak{m}_c = \langle T_c,S,V\rangle$ (em símbolos, $\mathfrak{m}_c \models_\Delta A$), então ela pertence a Δ, isto é:

$\mathfrak{m}_c \models_\Delta A$ sse $A \in \Delta$.

Podemos assim dizer que só pertence o que é verdadeiro. A demonstração desse fato será feito na sequência.

Teorema 4.2.0: Sejam $\underline{\Delta}$ e $\underline{\Delta}'$ conjuntos maximais consistentes, e $m_C = \langle T_C, S, V \rangle$ uma estrutura temporal canônica, então temos que:

a) para cada $\underline{\Delta} \in T_C$, para qualquer fórmula A, se $FA \in \underline{\Delta}$ então existe Δ', Δ S Δ' e $A \in \Delta'$.

b) para cada $\underline{\Delta} \in T_C$, para qualquer fórmula A, se $PA \in \underline{\Delta}$ então existe Δ', Δ' S Δ e $A \in \Delta'$.

Demonstração:

Para a) procedemos assim:

Por contraposição temos que,

para todo $\underline{\Delta}'$ tal que $\underline{\Delta}$ S $\underline{\Delta}'$, $A \notin \underline{\Delta}'$, então pela maximalidade,

para todo Δ' tal que Δ S Δ', $\neg A \in \Delta'$, então pela definição 4.2.0, ítem ii),

para todo $\underline{\Delta}$, $G\neg A \in \underline{\Delta}$, então pela maximalidade,

$\neg G \neg A \notin \Delta$ então por D(F),

$FA \notin \Delta$.

Para provar b), procedemos assim:

Por contraposição temos que,

para todo $\underline{\Delta}'$ tal que $\underline{\Delta}'$ S $\underline{\Delta}$, $A \notin \underline{\Delta}'$, então pela maximalidade,

para todo Δ' tal que Δ' S Δ, $\neg A \in \Delta'$, então pela definição 4.2.0, ítem iii),

para todo $\underline{\Delta}$, $H\neg A \in \underline{\Delta}$, então pela maximalidade,

$\neg H \neg A \notin \Delta$ então por D(P),

$PA \notin \Delta$. ■

Teorema 4.2.1: Se $\mathfrak{m}_c = \langle T_c, S, V \rangle$ uma estrutura temporal canônica . Então para todo $\Delta \in T_c$ em $\mathfrak{m}_c$ temos que :

$\mathfrak{m}_c \models_\Delta A$ sse $A \in \Delta$.

Demonstração: Mostraremos por indução na complexidade de A.

Base Indutiva: Seja $\Delta \in T_c$.

1º caso: A é do tipo $\mathbb{P}_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Se $\mathbb{P}_n \in \Delta$ (Δ maximal) então pelo ítem iv), definição 4.2.0,

$\Delta \in V_n$ então pela definição 2.3, ítem 1),

$\mathfrak{m}_c \models_\Delta \mathbb{P}_n$.

Por outro lado,

Se $\mathfrak{m}_c \models_\Delta \mathbb{P}_n$ então pela definição 2.3, ítem 1),

$\Delta \in V_n$ então pela definição 4.2.0, ítem iv),

$\mathbb{P}_n \in \Delta$.

2º caso: A é do tipo $\top$.

$\mathfrak{m}_c \models_\Delta \top$ pela definição 2.3, ítem 2), e, por outro lado,

pelo teorema 4.1.0, ítem 2),

$\top \in \Delta$.

3º caso: A é do tipo $\perp$.

$\mathfrak{m}_c \not\models_\Delta \perp$ pela definição 2.3, ítem 3), e, por outro lado,

$\perp \notin \Delta$ pois Δ é consistente,

portanto,

$\mathfrak{m}_c \models_\Delta \perp$ sse $\perp \in \Delta$.

Hipótese indutiva: Assumimos que o teorema é válido para fórmulas de complexidades menores que A, isto é, para todo $\Delta \in T_C$ em m_C temos que:

$m_C \models_\Delta B$ sse $B \in \Delta$.

1º caso: A é do tipo $\neg B$.

$m_C \models_\Delta \neg B$ sse

$m_C \not\models_\Delta B$ sse pela hipótese de indução,

$B \notin \Delta$ sse pelo teorema 4.1.0, item 4),

$\neg B \in \Delta$.

2º caso: A é do tipo $B \to C$.

$m_C \models_\Delta (B \to C)$ sse pela definição 2.3, item 5),

se $m_C \models_\Delta B$ então $m_C \models_\Delta C$ sse pela hipótese indutiva,

se $B \in \Delta$ então $C \in \Delta$ sse pelo teorema 4.1.0, item 5),

$(B \to C) \in \Delta$.

3º caso: A é do tipo GB.

Mostraremos que $m_C \models_\Delta GB$ sse $GB \in \Delta$.

Da esquerda para a direita a prova por contraposição fica:

$GB \notin \Delta$ então, como Δ é maximal consistente,

$\neg GB \in \Delta$ então, por D(F),

$F\neg B \in \Delta$ então, pela teorema 4.2.0, ítem a),

$\exists \Delta'(\Delta \, S \, \Delta'$ e $\neg B \in \Delta')$ então, como Δ' é maximal consistente,

$\exists \Delta'(\Delta \, S \, \Delta'$ e $B \notin \Delta')$ então pela H.I.,

$\exists \Delta'(\Delta \, S \, \Delta'$ e $m_C \not\models_{\Delta'} B)$ então,

$\sim(\forall\Delta'(\Delta\ S\ \Delta'$ então $m_c \models_{\Delta'} B))$ então,

$m_c \not\models_\Delta GB$.

Da direita para a esquerda também provando por contraposição, temos:

$m_c \not\models_\Delta GB$ então

$\sim(\forall\Delta'(\Delta\ S\ \Delta'$ então $m_c \models_{\Delta'} B))$ então,

$\exists\ \Delta'(\Delta\ S\ \Delta'$ e $m_c \not\models_{\Delta'} B$ então pela H.I.,

$\exists\ \Delta'(\Delta\ S\ \Delta'$ e $B \notin \Delta')$ então pela definição 4.2.0, item ii),

$GB \notin \Delta$.

5º caso: A é do tipo HB.

Mostraremos que $m_c \models_\Delta HB$ sse $HB \in \Delta$.

Da esquerda para a direita a prova por contraposição fica:

$HB \notin \Delta$ então, como Δ é maximal consistente,

$\neg HB \in \Delta$ então, por D(P),

$P\neg B \in \Delta$ então, pelo teorema 4.2.0, ítem b),

$\exists\ \Delta'(\Delta'\ S\ \Delta$ e $\neg B \in \Delta')$ então, como Δ' é maximal consistente,

$\exists\ \Delta'(\Delta'\ S\ \Delta$ e $B \notin \Delta')$ então pela H.I.,

$\exists\ \Delta'(\Delta'\ S\ \Delta$ e $m_c \not\models_{\Delta'} B)$ então,

$\sim(\forall\Delta'(\Delta'\ S\ \Delta$ então $m_c \models_{\Delta'} B))$ então,

$m_c \not\models_\Delta HB$.

Da direita para a esquerda também provando por contraposição, temos:

$m_c \not\models_\Delta HB$ então,

$\sim(\forall\Delta'(\Delta'\ S\ \Delta$ então $m_c \models_{\Delta'} B))$ então,

$\exists\ \Delta'(\Delta'\ S\ \Delta$ e $m_c \not\models_{\Delta'} B)$ então pela H.I.,

$\exists\ \Delta'(\Delta'\ S\ \Delta$ e $B \notin \Delta')$ então pela definição 4.2.0, ítem iii),

$HB \notin \underline{\Delta}$. ■

O próximo teorema mostra que em uma estrutura temporal proposicional os teoremas são justamente as fórmulas verdadeiras na estrutura.

Teorema 4.2.2: Seja $\mathfrak{m}_C = \langle T_C, S, V\rangle$ uma estrutura temporal canônica. Então,

$\mathfrak{m} \models A$ sse $\vdash A$.

Demonstração:

Da direita para a esquerda, segue que:

$\vdash A$ então pelo teorema 4.1.2(2),

$A \in \underline{\Delta}$ para todo $\underline{\Delta}$ maximal, então pelo teorema 4.2.1,

$\mathfrak{m} \models_\Delta A$ para todo $\Delta \in T_C$ em $\mathfrak{m}_C$ então, pela definição 2.4,

$\mathfrak{m} \models A$.

Por outro lado,

$\not\vdash A$ então pelo teorema 4.1.2(2),

$A \notin \Delta$ para algum Δ maximal, então pelo teorema 4.2.1,

$\mathfrak{m} \not\models_\Delta A$ para algum $\Delta \in T_C$ em $\mathfrak{m}_C$ então, pela definição 2.4,

$\mathfrak{m} \not\models A$. ■

4.3 - Estrutura Temporal Canônica Própria

A existência de estruturas canônicas ainda não foi demonstrada. Na definição 4.3.1 determinamos uma certa estrutura, a qual denominaremos de estrutura canônica própria para a lógica temporal, então provaremos que esta estrutura é uma estrutura canônica, mostrando assim, que existem tais estruturas.

As definições e teoremas na sequência tem o propósito de auxiliar na determinação de tal estrutura.

Definição 4.3.0: Definimos uma relação S_c, chamada de sucessão canônica, entre conjuntos maximais consistentes, pondo:

$\Delta\ S_c\ \Gamma$ sse $\{A : GA \in \Delta\} \subseteq \Gamma$.

Teorema 4.3.0: Para quaisquer conjuntos Δ, Γ maximais consistentes, as seguintes cláusulas são equivalentes:

a) $\{ C : GC \in \Delta \} \subseteq \Gamma$.

b) $\{ PA : A \in \Delta \} \subseteq \Gamma$.

c) $\{ FB : B \in \Gamma \} \subseteq \Delta$.

d) $\{ D : HD \in \Gamma \} \subseteq \Delta$.

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (c)

Assumimos (a) e $B \in \Gamma$ como hipóteses. Então pela maximalidade,

$\neg B \notin \Gamma$ então pela hipótese,

$G\neg B \notin \Delta$ então pela maximalidade,

$\neg G \neg B \in \Delta$ então pela definição de F,

$FB \in \Delta$.

(c) $\Rightarrow$ (d)

Assumimos (c) e $HD \in \Gamma$ como hipóteses. Então pela hipótese,

$FHD \in \Delta$ então por T3, tautologia, D(F) e D(P) ,

$D \in \Delta$.

(d) $\Rightarrow$ (b)

Assumimos (d) e $A \in \Delta$ como hipóteses. Então pela maximalidade,

$\neg A \notin \Delta$ então pela hipótese,

$H\neg A \notin \Gamma$ então pela maximalidade,

$\neg H \neg A \in \Gamma$ então por D(P),

$PA \in \Gamma$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Assumimos (b) e $GC \in \Delta$ como hipóteses. Então pela hipótese,

$PGC \in \Delta$ então pelo T3.3.8,

$C \in \Delta$. ■

Definição 4.3.1: A estrutura temporal canônica própria m_{cp} = $\langle T_{cp}, S_c, V \rangle$ é a estrutura temporal na qual:

i) $T_{cp} = \{ \Gamma : \Gamma$ é maximal consistente $\}$.

ii) S_c é a relação de sucessão canônica.

iii) $V_n = \{ \Delta : \mathbb{P}_n \in \Delta$ e Δ é maximal consistente $\}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.3.1: A estrutura temporal canônica própria é uma estrutura temporal canônica .

Demonstração:

Seja m_{cp} a estrutura temporal canônica própria. Precisamos mostrar que para cada conjunto maximal consistente , temos que:

a) $GA \in \Delta$ sse para cada $\Delta' \in T_{cp}$, tal que $\Delta\ S_c\ \Delta'$, $A \in \Delta'$.

b) $HA \in \Delta'$ sse para cada $\Delta \in T_{cp}$ em m_{cp}, tal que $\Delta\ S_c\ \Delta'$, $A \in \Delta$.

Para a).

Supomos que Δ seja um conjunto maximal consistente de fórmulas.

Da esquerda para a direita é trivial, ou seja,

se $GA \in \Delta$ e $\{A : GA \in \Delta\} \subseteq \Delta'$, então $A \in \Delta'$.

Da direita para a esquerda, temos que:

Supomos que $A \in \Delta'$, para cada conjunto maximal Δ' tal que $\{A : GA \in \Delta\} \subseteq \Delta'$, isto é, que A pertence a cada extensão maximal do conjunto $\{A : GA \in \Delta\}$. Pelo teorema 4.1.2, item 1), isto significa que A é dedutível deste conjunto de fórmulas, isto é,

$\{A : GA \in \Delta\} \vdash A$.

Isto significa que existem fórmulas $A_1, A_2, \ldots, A_n (n \geq 0)$ no conjunto $\{A : GA \in \Delta\}$ que são tais que

$\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow A$.

Assim podemos inferir pela regra RF, axioma T1, T3.3.4 e tautologia, que,

$\vdash (GA_1 \wedge GA_2 \wedge \ldots \wedge GA_n) \rightarrow GA$.

Mas como Δ contém cada um dos $GA_1, GA_2, \ldots, GA_n$,

$\Delta \vdash GA$.

Pelo teorema 4.1.0,item 1),

$GA \in \Delta$.

Para b).

Pelo teorema 4.3.0, é suficiente mostrar que:

b') $HA \in \Delta'$ sse para cada $\Delta \in T_{cp}$ em m_{cp}, tal que $\{A : HA \in \Delta'\} \subseteq \underline{\Delta}$, $A \in \underline{\Delta}$.

Supomos que $\underline{\Delta}$ seja um conjunto maximal consistente de fórmulas.

Da esquerda para a direita, temos que:

se $HA \in \Delta'$ e $\{A : HA \in \Delta'\} \subseteq \Delta$, então $A \in \Delta$.

Da direita para a esquerda, temos que:

Supomos que $A \in \underline{\Delta}$, para cada conjunto maximal $\underline{\Delta}$ tal que $\{A : HA \in \Delta'\} \subseteq \Delta$, isto é, que A pertence a cada extensão maximal do conjunto $\{A : HA \in \Delta'\}$. Pelo teorema 4.1.2, item 1), isto significa que A é dedutível deste conjunto de fórmulas, isto é,

$\{A : HA \in \Delta'\} \vdash A$.

Isto significa que existem fórmulas $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 0)$ no conjunto $\{A : HA \in \Delta'\}$ que são tais que

$\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A$.

Assim podemos inferir pela regra RF, axioma T2, tautologia e pelo teorema obtido a partir do T3.3.4, trocando-se G por H e F por P que,

$\vdash (HA_1 \wedge HA_2 \wedge \dots \wedge HA_n) \rightarrow HA$.

Mas Δ' contém cada um dos $HA_1, HA_2, \dots, HA_n$, assim HA é dedutível de Δ'; isto é,

$\Delta' \vdash HA$.

Pelo teorema 4.1.0,item 1),

$HA \in \Delta'$. ■

Teorema 4.3.2(Completude): Seja $\mathfrak{L}^T$ uma linguagem temporal, Γ e A, respectivamente, um conjunto de fórmulas e uma fórmula de $\mathfrak{L}^T$. Nessas condições vale:

i) Se $\models A$ então $\vdash A$.

ii) Se $\Gamma \models A$ então $\Gamma \vdash A$.

iii) Se Γ é um conjunto consistente de fórmulas, então Γ tem modelo.

Demonstração:

a) Inicialmente mostraremos que iii) implica ii) que implica i). Obviamente, ii) implica i), pois basta tomar $\Gamma = \emptyset$. Cabe mostrar que iii) implica ii). Para tanto, suponhamos que

$\Gamma \models A$ e

supomos por absurdo que $\Gamma \nvdash A$, assim, pelo teorema 3.2.0, ítem 13, $\Gamma \cup \{\neg A\}$ é consistente. Portanto por iii), o conjunto $\Gamma \cup \{\neg A\}$ tem modelo, consequentemente $\Gamma \not\models A$.

b) Demonstração de iii).

Seja Γ um conjunto consistente, então existe um Δ maximal consistente, tal que $\Gamma \subseteq \Delta$, então, pela definição de T_{cp} (definição 4.3.1), $\Delta \in T_{cp}$, então, pelo teorema 4.2.1, $\mathfrak{m}_{cp} \models_\Delta A$ para todo $A \in \Delta$ em T_{cp}, visto que $\mathfrak{M}_{cp}$ é uma estrutura canônica como foi mostrado no teorema 4.3.1. Logo $\mathfrak{m}_{cp} = \langle T_{cp}, S, V \rangle$ é um modelo para Δ, como $\Gamma \subseteq \Delta$, temos que é um modelo também para Γ. ■

Capítulo II

Lógica Modal Temporal

Neste capítulo trabalharemos com uma linguagem que compreende simultâneamente três operadores primitivos não clássicos, dois tomados da lógica temporal e um da lógica modal, a saber, "G e H" e "□", respectivamente.

Nesse contexto utilizaremos sempre que necessário definições e teoremas do capítulo anterior. Para a prova da completude a técnica será a de estruturas canônicas, tal como foi usada anteriormente.

5 - A Linguagem da Lógica Modal Temporal : Ω^{MT}

A linguagem Ω^{MT} é obtida a partir de Ω^{T} acrescentando-se ao vocabulário o símbolo " □ " que funciona mais exatamente como um operador unário. Desse modo, se A é uma fórmula da linguagem Ω^{MT}, □A também o é.

Obs: □A é chamado a necessitação de A, e pode ser lido "necessário A".

O símbolo "□" também é chamado de conectivo.

De maneira comparável a Lógica Modal, introduziremos o operador " $\Diamond$ " através da seguinte definição contextual:

$D(\Diamond)$: $\Diamond A \equiv_{def} \neg\Box\neg A$,
para qualquer fórmula A.

Modalidades. Na definição de modalidade, consideramos também o operador " $\Box$ ".

6 - A Semântica de $\mathcal{L}^{MT}$

A semântica a ser introduzida tem algo em comum com a introduzida no capítulo I, seção 2. A diferença consiste em que na semântica para $\mathcal{L}^{MT}$ trabalhamos com várias bases temporais e também com relações entre as bases temporais, que é usada para interpretar o operador "$\Box$". Dessa maneira uma estrutura modal temporal proposicional conterá bases temporais e relações entre estas.

Definição 6.0: Uma Base Modal Temporal $\mathcal{B}$ é uma estrutura $\langle W,(T_w)_{w\in W}, R, (\varphi_{\langle w,w'\rangle})_{\langle w,w'\rangle\in R}\rangle$ onde

i) $W \neq \emptyset$.

ii) $R \subseteq W^2$ e $\forall\, w \in W$, $\exists\, w' \in W$ tal que $w\, R\, w'$.(Observamos desse modo que $R \neq \emptyset$).

iii) Para todo $w \in W$, $T_w = \langle |T_w|, S_w \rangle$ é uma base temporal dita a base temporal de w (Tal como foi definido anteriormente, def. 2.0).

iv) Para todo w,w' tal que wRw' e $w \neq w'$, $\varphi_{<w,w'>}$ é uma função entre os universos das bases temporais $|T_w|$ e $|T_{w'}|$.(Denominada de *função de acessibilidade temporal*)

Definição 6.1: Dado uma base $\mathfrak{B} = \langle W, (T_w)_{w\in W}, R, (\varphi_{<w,w'>})_{<w,w'>\in R}\rangle$, o universo modal-temporal $\mathfrak{U}_{\mathfrak{B}}$ de $\mathfrak{B}$ é o conjunto $\{ \langle w,t\rangle \in (W \times \bigcup_{w\in W} |T_w|)$ tais que $t \in |T_w| \}$.

Definição 6.2: Uma valoração em $\mathfrak{B}$ é uma função P que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $P_n \in \mathcal{P}(\mathfrak{U}_{\mathfrak{B}})$ (conjunto das partes de $\mathfrak{U}_{\mathfrak{B}}$). Como é usual, escreveremos P_n ao invés de P(n), para indicar o valor que P assume para o argumento n.

Definição 6.3: Uma estrutura modal temporal proposicional $\mathfrak{M}$ é um par $\langle \mathfrak{B},P\rangle$ onde $\mathfrak{B}$ é uma base, dita a base de $\mathfrak{M}$, e P é uma valoração nesta base.

Definição 6.4: Seja $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{B},P\rangle$ uma estrutura modal temporal proposicional e seja $\langle w,t\rangle$ um elemento de $\mathfrak{U}_{\mathfrak{B}}$. A relação "A é uma fórmula verdadeira em $\mathfrak{M}$ com respeito a $\langle w,t\rangle$ (em símbolos, $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} A$), é definida indutivamente através das seguintes cláusulas recursivas:

1) $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \mathbb{P}_n$ sse $\langle w,t\rangle \in P_n$ para $n = 1,2,3,\dots$.

2) $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \top$.

3) não ocorre $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \bot$.

4) $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg A$ sse não ocorre $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} A$.

5) $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} (A \rightarrow B)$ sse se $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} A$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} B$.

6) $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Box A$ sse $\forall$ w' tal que wRw' então $\mathfrak{M} \models_{<w',t'>} A$, onde $t' = \varphi_{<w,w'>}(t)$ se $w \neq w'$, e é o próprio t caso contrário.

7) $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} GA$ sse $\forall\, t_1 \in |T_w|$ tal que $t\, S_w\, t_1$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_1>} A$.

8) $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} HA$ sse $\forall\, t_{-1} \in |T_w|$ tal que $t_{-1} S_w\, t$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_{-1}>} A$.

Definição 6.5: Seja $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{B}, P\rangle$. Então, para toda fórmula A, A é verdadeira na estrutura modal temporal proposicional $\mathfrak{M}$ (em símbolos $\mathfrak{M} \models A$), se para todo $\langle w,t\rangle \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} A$.

Definição 6.6:

Diremos que uma fórmula é válida (em símbolos $\models A$) se, para toda estrutura modal temporal $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{B}, P\rangle$ tivermos que $\mathfrak{M} \models A$.

Definição 6.7: Um modelo para um conjunto Γ é uma estrutura modal temporal proposicional $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{B}, P\rangle$ e um par $\langle w,t\rangle \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{B}}$, tal que para toda fórmula $A \in \Gamma$, $\mathfrak{m} \models_{<w,t>} A$.

Definição 6.8: $\Gamma \models A$ sse todo modelo de Γ é modelo de A.

Observação: $\Gamma \models A$ sse $\Gamma \cup \{\neg A\}$ não tem modelo[1].

1 Ver observação no capítulo I, definição 2.7.

Observemos que as definições de verdade acima apresentadas preservam o significado usual dos símbolos lógicos, em particular aqueles introduzidos por definição, como mostra o teorema seguinte.

Além disso, os postulados usuais tanto da Lógica Modal (sistema KD), como da Lógica Temporal (sistema T) são válidos, como estabeleceremos na seção seguinte.

Teorema 6.0: Seja $\mathfrak{M} = \langle W,(T_w)_{w\in W}, R, (\varphi_{\langle w,w'\rangle})_{\langle w,w'\rangle\in R}, P\rangle$, $w \in W$, $t \in |T_w|$ e sejam A, B fórmulas.

I) $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} A \wedge B$ sse ($\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} A$ e $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} B$).

II) $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} A \vee B$ sse ($\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} A$ ou $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} B$).

III) $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} A \leftrightarrow B$ sse ($\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} A$ sse $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} B$).

IV) $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} FA$ sse $\exists t_1 \in |T_w|(t\ S_w\ t_1$ e $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t_1\rangle} A)$.

V) $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} PA$ sse $\exists t_{-1} \in |T_w|(t_{-1}\ S_w\ t$ e $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t_{-1}\rangle} A)$.

VI) $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} \Diamond A$ sse $\exists$ w'(w R w' e $\mathfrak{M} \models_{\langle w',t'\rangle} A)$, onde $t' = \varphi_{\langle w,w'\rangle}(t)$.

Demonstração :Faremos para o ítem VI), o restante procede-se de modo análogo à demonstração do teorema 2.0.

Para VI).

$\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} \Diamond A$ sse (por definição),

$\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} \neg\Box\neg A$ sse

$\mathfrak{M} \not\models_{\langle w,t\rangle} \Box\neg A$ sse

$\sim(\forall$ w'(w R w' então $\mathfrak{M} \models_{\langle w',t'\rangle} \neg A))$ onde $t' = \varphi_{\langle w,w'\rangle}(t)$, sse

$\exists$ w'(w R w' e $\mathfrak{M} \models_{<w',t'>}$ A), onde t'= $\varphi_{<w,w'>}$(t). ■

6.1 - Resultados Semânticos

Nesta seção demonstraremos a validade de certos esquemas de fórmulas e apresentaremos algumas propriedades semânticas que, além de caracterizar como se comportam os operadores modais temporais, servirão também para a demonstração do teorema da correção do sistema axiomático que será introduzido posteriormente.

Teorema 6.1.0: Sejam $\langle w,t\rangle \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{B}}$ e $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{B},P\rangle$ uma estrutura modal temporal proposicional, então para A e B fórmulas, temos:

1) $\models \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

2) $\models \Box A \to \Diamond A$.

3) $\models G(A \to B) \to (GA \to GB)$.

4) $\models H(A \to B) \to (HA \to HB)$.

5) $\models A \to GPA$.

6) $\models A \to HFA$.

Demonstração:

Para 1).

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

Por contraposição temos que:

$\mathfrak{M} \not\models_{<w,t>} (\Box A \to \Box B)$, logo

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Box A$ e $\mathfrak{M} \not\models_{<w,t>} \Box B$, portanto existe w', tal que wRw' e

$\mathfrak{M} \models_{<w',t'>} A$ e $\mathfrak{M} \not\models_{<w',t'>} B$ onde t' é $\varphi_{<w,w'>}(t)$ se $w \neq w'$, ou o próprio t caso contrário, assim

$\mathfrak{M} \not\models_{<w',t'>} A \rightarrow B$.

Logo como wRw' temos que

$\mathfrak{M} \not\models_{<w,t>} \Box(A \rightarrow B)$.

Para 2).

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Box A \rightarrow \Diamond A$.

Por contraposição temos que:

$\mathfrak{M} \not\models_{<w,t>} \Diamond A$, para todo w', tal que wRw', então

$\mathfrak{M} \not\models_{<w',t'>} A$ onde t' é $\varphi_{<w,w'>}(t)$ se $w \neq w'$, ou o próprio t caso contrário.

Logo como existe um w' tal que wRw', temos que

$\mathfrak{M} \not\models_{<w,t>} \Box A$.

Para 3).

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$.

Análogo à demonstração do teorema 2.1.0.

Para 4).

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$.

Análogo à demonstração do teorema 2.1.0.

Para 5).

$\mathfrak{M} \models_{<w,>} A \rightarrow GPA$.

Análogo à demonstração do teorema 2.1.0.

Para 6).

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} A \rightarrow HFA$.

Análogo à demonstração do teorema 2.1.0. ∎

Os conceitos e resultados que apresentamos a seguir, embora não sejam necessários para o desenvolvimento do tema neste capítulo, eles ampliam nossa compreensão da semântica anteriormente apresentada.

Quando t S t' dizemos que t' está relacionado uma vez com t, pela relação de sucessão temporal. Escreveremos

$t\ S^n\ t'$

para dizer que t está relacionado n vezes com t' pela relação de sucessão temporal. Poderemos também dizer que t' está n vezes a-fastado de t, ou que t' pode ser alcançado por meio de n passos na relação S.

A relação S^n é chamada de n-ésimo produto relativo de S por ela própria, e é definida indutivamente como se segue:

Definição 6.1.0: Sejam $t,t' \in |T_w|$ em $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{B},P\rangle$ então:

1) $t\ S^1\ t'$ sse $t\ S\ t'$.

2) para $n > 1$,

$t\ S^n\ t'$ sse para algum $u \in |T_w|$ em $\mathfrak{M}$, $t\ S\ u$ e $u\ S^{n-1}\ t'$.

De modo equivalente ao comentário feito para a definição 6.1.0, procedemos aqui, onde $w\ R^n\ w'$ é dito ser o n-ésimo produto relativo de R por ela própria, definida indutivamente como segue:

Definição 6.1.1: Seja w , $w' \in W$ em $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{B},P\rangle$.

(1) wR^1w' sse $w\ R\ w'$.

(2) para $n > 1$,

$w\ R^n\ w'$ sse para algum $u \in W$ em $\mathfrak{M}$, $w\ R\ u$ e $u\ R^{n-1}\ w'$.

Com a definição anterior podemos estabelecer condições de verdade para fórmulas do tipo G^nA, H^nA, etc... .

Teorema 6.1.1: Seja $\mathfrak{M} = \langle W,(T_w)_{w\in W}, R,(\varphi_{\langle w,w'\rangle})_{\langle w,w'\rangle\in R}, P\rangle, w \in W$, $t \in |T_w|$ e sejam A, B fórmulas, então para $n \geq 1$ temos que:

1) $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} G^nA$ sse $\forall\ t_1 \in |T_w|(t\ S^n_w\ t_1$ então $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t_1\rangle} A)$.

2) $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle} H^nA$ sse $\forall\ t_{-1} \in |T_w|(t_{-1}\ S^n_w\ t$ então $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t_{-1}\rangle} A)$.

3) $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Box^n A$ sse $\forall$ w' tal que $w\ R^n\ w'$ então $\mathfrak{M} \models_{<w',t'>} A$ onde $t' = \varphi_{<w,w'>}(t)$ se $w \neq w'$, e é o próprio t caso contrário.

Demonstração:

(i) A demonstração é feita por indução em n.

Base Indutiva: n = 1.

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} G^1 A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} GA$ sse pela definição 6.4, ítem 7,

$\forall\ t_1 \in |T_w| (t\ S_w\ t_1$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_1>} A)$ sse pela definição 6.1.0,

$\forall\ t_1 \in |T_w| (t\ S^1_w\ t_1$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_1>} A)$.

Hipótese Indutiva: Supomos que o teorema é válido para todo $k < n$, onde $n > 1$. Então em particular para cada $t \in |T_w|$ em $\mathfrak{M}$,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} G^{n-1}A$ sse $\forall\ t_1 \in |T_w| (t\ S^{n-1}_w\ t_1$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_1>} A)$.

Assim,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} G^n A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} GG^{n-1}A$ sse pela definição 6.4, ítem 7,

$\forall\ t_2 \in |T_w| (t\ S_w\ t_2$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_2>} G^{n-1}A)$ sse pela hipótese indutiva,

$\forall t_2 \in |T_w| (t\ S_w\ t_2$ então $(\forall t_1 \in |T_w| (t_2\ S^{n-1}_w\ t_1$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_1>} A)))$

sse

$\forall\ t_1 \in |T_w|$, se $\exists\ t_2 \in |T_w|$ tal que $t\ S_w\ t_2$ e $t_2\ S^{n-1}_w\ t_1$, então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_1>} A$ sse pela definição 6.1.0,

$\forall\ t_1 \in |T_w|(t\ S_w^n\ t_1$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_1>} A)$.

(2) A demonstração é feita por indução em n.

Base Indutiva: n = 1.

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} H^1 A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} HA$ sse pela definição 6.4, ítem 8,

$\forall\ t_{-1} \in |T_w|(t_{-1}\ S_w\ t$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_{-1}>} A)$ sse pela definição 6.1.0

$\forall\ t_{-1} \in |T_w|(t_{-1}\ S_w^1\ t$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_{-1}>} A)$.

Hipótese Indutiva: Supomos que o teorema é válido para todo k < n, onde n > 1. Então em particular para cada t ∈ $|T_w|$ em $\mathfrak{M}$,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} H^{n-1}A$ sse $\forall\ t_{-1} \in |T_w|(t_{-1}\ S_w^{n-1}\ t$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_{-1}>} A)$.

Assim,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} H^n A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} HH^{n-1}A$ sse pela definição 6.4, ítem 8,

$\forall\ t_{-2} \in |T_w|(t_{-2}\ S_w\ t$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_{-2}>} H^{n-1}A)$ sse pela hipótese indutiva,

$\forall\ t_{-2} \in |T_w|\ (\ t_{-2}\ S_w\ t$ então $(\ \forall\ t_{-1} \in |T_w|\ (\ t_{-1}\ S_w^{n-1}\ t_{-2}$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_{-1}>} A)))$ sse

$\forall\ t_{-1} \in |T_w|$, se $\exists\ t_{-2} \in |T_w|$ tal que $t_{-1}\ S_w\ t_{-2}$ e $t_{-2}\ S_w^{n-1}\ t$, então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_{-1}>} A$ sse pela definição 6.1.0,

$\forall\ t_{-1} \in |T_w|(t_{-1}\ S_w^n\ t$ então $\mathfrak{M} \models_{<w,t_{-1}>} A)$.

(3) A demonstração será feita por indução em n.

Base Indutiva: $n = 1$.

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Box^1 A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Box A$ sse pela definição 6.4, ítem 6,

$\forall$ w' tal que w R w' então $\mathfrak{M} \models_{<w',t'>} A$ sse pela definição 6.1.1,

$\forall$ w' tal que w R^1 w' então $\mathfrak{M} \models_{<w',t'>} A$, onde $t' = \varphi_{<w,w'>}(t)$ se $w \neq w'$, e é o próprio t caso contrário.

Hipótese Indutiva: Supomos que o teorema é válido para todo $k < n$, onde $n > 1$. Então em particular para cada $w \in W$ em $\mathfrak{M}$,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Box^{n-1} A$ sse $\forall$ w'(w R^{n-1} w' então $\mathfrak{M} \models_{<w',t'>} A$) onde $t' = \varphi_{<w,w'>}(t)$ se $w \neq w'$, e é o próprio t caso contrário.

Assim,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Box^n A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Box\Box^{n-1} A$ sse pela definição 6.4, ítem 6,

$\forall$ w'' (w R w'' então $\mathfrak{M} \models_{<w'',t''>} \Box^{n-1} A$) onde $t'' = \varphi_{<w,w''>}(t')$ sse pela hipótese indutiva,

$\forall$ w'' (w R w'' então $\forall$ w'(w'' R^{n-1} w' então $\mathfrak{M} \models_{<w',t'>} A$) onde $t' = \varphi_{<w'',w'>}(t)$ sse

$\forall$ w' em $\mathfrak{M}$, se existe um w'' em $\mathfrak{M}$, tal que w R w'' e w'' R^{n-1} w' então $\mathfrak{M} \models_{<w',t'>} A$) onde $t' = \varphi_{<w,w'>}(t)$ sse pela definição 6.1.1

temos que,

$\forall$ w' (w R^n w' então $\mathfrak{M} \models_{<w', t'>} A$) onde t' = $\varphi_{<w, w'>}(t)$. ■

Teorema 6.1.2: Seja $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{B}, P \rangle$, $t \in |T_w|$ e $w \in W$, $A \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$, então

1) $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} F^n A$ sse $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg G^n \neg A$.

2) $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} P^n A$ sse $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg H^n \neg A$.

3) $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Diamond^n A$ sse $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg \Box^n \neg A$.

Demonstração:

1) Por indução em n.

Base Indutiva: n = 1.

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} F^1 A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} FA$ sse por D(F),

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg G \neg A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg G^1 \neg A$.

Hipótese Indutiva: Supomos que "$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} F^n A$ sse $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg G^n \neg A$" vale para n = k, vamos mostrar que vale para n = k + 1.

Assim $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} F^{k+1} A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} FF^k A$ sse pela hipótese indutiva,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} F \neg G^k \neg A$ sse por D(F),

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg G \neg\neg G^k \neg A$ sse por tautologia,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg G G^k \neg A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg G^{k+1}\neg A$.

2) Por indução em n.

Base Indutiva: n = 1.

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} P^1 A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} PA$ sse por D(P),

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg H \neg A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg H^1 \neg A$.

Hipótese Indutiva: Supomos que "$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} P^n A$ sse $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg H^n \neg A$" vale para n = k, vamos mostrar que vale para n = k+ 1.

Assim $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} P^{k+1} A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} PP^k A$ sse pela hipótese indutiva,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} P\neg H^k \neg A$ sse por D(P),

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg H \neg\neg H^k \neg A$ sse por tautologia,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg HH^k \neg A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg H^{k+1} \neg A$.

3) Por indução em n.

Base Indutiva: n = 1.

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Diamond^1 A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Diamond A$ sse por D($\Diamond$),

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg\Box\neg A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg\Box^1 \neg A$.

Hipótese Indutiva: Supomos que "$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Diamond^{n} A$ sse $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg\Box^{n}\neg A$" vale para n = k, vamos mostrar que vale para n = k+ 1.

Assim $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Diamond^{k+1} A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Diamond\Diamond^{k} A$ sse pela hipótese indutiva,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Diamond\neg\Box^{k}\neg A$ sse por D($\Diamond$),

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg\Box\neg\neg\Box^{k}\neg A$ sse por tautologia,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg\Box\Box^{k}\neg A$ sse pela definição 1.1,

$\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \neg\Box^{k+1}\neg A$. ■

7 - Axiomática

Como é usual, para caracterizar as noções sintáticas, tais como dedutibilidade, consistência, é preciso explicitar as fórmulas válidas que funcionam como axiomas, bem como as regras de inferência. Assim, no que se segue, exporemos os axiomas e as regras da linguagem $\mathfrak{L}^{MT}$.

7.1 - Axiomas e Regras

Os **axiomas** de MT são as fórmulas de Ω^{MT}, determinadas pelos seguintes esquemas:

MT1) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.

MT2) $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$.

MT3) $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$.

MT4) $A \rightarrow GPA$.

MT5) $A \rightarrow HFA$.

MT6) $\Box A \rightarrow \Diamond A$.

MT7) A, se A for uma fórmula tautológica[2].

As **regras de inferência** são as seguintes:

RP. A / HA.

RF. A / GA.

RN. A / $\Box$A.

MP. A, A $\rightarrow$ B / B (Modus Ponens).

[2] Ver observação no capítulo I, seção 3.1.

7.2 - Dedutibilidade e Consistência

Definição 7.2.0: Uma *demonstração* em MT é uma sequência $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de fórmulas tal que, para cada i, ou A_i é um axioma de MT ou A_i é obtido de fórmulas anteriores por meio de regras de inferência.

Definição 7.2.1: Um *teorema* de MT é uma fórmula A da linguagem Ω^{MT} tal que existe uma *demonstração*, na qual a última fórmula é A. Tal demonstração é chamada uma demonstração de A.

Usualmente escreveremos $\vdash A$ para significar que A é um teorema.

Definição 7.2.2: Uma dedução de A a partir de Γ é uma sequência finita de fórmulas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tais que $A_n = A$, e, para cada i = 1,2,...,n ao menos uma das seguintes condições é satisfeita:

I) A_i é um axioma;

II) $A_i \in \Gamma$, neste caso dizemos que A_i é uma hipótese;

III) existem $j, l < i$, tais que A_j é $A_l \rightarrow A_i$;

IV) existe $j < i$, tal que:

i) A_i é GA_j e, para alguns

$j_1, j_2, \ldots, j_m \leq j$,

$A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m} = A_j$ é uma demonstração em MT de A_j.

ii) A_i é HA_j e, para alguns

$j_1, j_2, \ldots, j_m \leq j$,

$A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m} = A_j$ é uma demonstração em MT de A_j.

iii) A_i é $\Box A_j$ e, para alguns

$j_1, j_2, \ldots, j_m \leq j$,

$A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m} = A_j$ é uma demonstração em MT de A_j.

Diremos que A é dedutível de Γ (em símbolos, $\Gamma \vdash A$) se existir uma dedução de A a partir de Γ.

Lema 7.2.0 (Teorema da dedução): Se Γ é um conjunto de fórmulas, e A e B são fórmulas, e $\Gamma, A \vdash B$, então $\Gamma \vdash A \rightarrow B$. Em particular, se $A \vdash B$, então $\vdash A \rightarrow B$.

Demonstração: Análoga ao lema 3.2.0.

Lema 7.2.1: $\Gamma \vdash A$ sse existem $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \in \Gamma$ ($n \geq 0$) tais que $\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow A$.

A demonstração é semelhante a apresentada no capítulo I, seção 3.2, lema 3.2.1.

Um conjunto de fórmulas Γ é consistente , escreveremos ConΓ, somente no caso em que a fórmula $\bot$ não é dedutível de Γ. Assim Γ é inconsistente , escreveremos IConΓ, justamente no caso em que $\Gamma \vdash \bot$.

Definição 7.2.3: ConΓ sse não acontece $\Gamma \vdash \bot$.

Teorema 7.2.0:

(1) $\vdash A$ sse $\emptyset \vdash A$.

(2) $\vdash A$ sse para cada Γ, $\Gamma \vdash A$.

(3) Se $A \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash A$.

(4) Se $\Gamma \vdash B$ e $\{B\} \vdash A$, então $\Gamma \vdash A$.

(5) Se $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash A$.

(6) $\Gamma \vdash A$ sse existe um subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash A$.

(7) $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ sse $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$.

(8) $Con\Gamma$ sse existe um A tal que não acontece $\Gamma \vdash A$.

(9) $ICon\Gamma$ sse existe A tal que ambos $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash \neg A$.

(10) Se $Con\Gamma$ e $\Delta \subseteq \Gamma$, então $Con\Delta$.

(11) $Con\Gamma$ sse para cada subconjunto finito Δ de Γ, $Con\Delta$.

(12) $\Gamma \vdash A$ sse $ICon\Gamma\cup\{\neg A\}$.

(13) $Con\Gamma\cup\{A\}$ sse não acontece $\Gamma \vdash \neg A$.

A demonstração é análoga à apresentada no capítulo I, teorema 3.2.0.

7.3 - Resultados

Nesta seção apresentaremos as demonstrações de alguns teoremas que são essenciais para dar andamento às provas de correção e completude.

Teorema 7.3.0: Sejam A,B e C fórmulas, e p uma variável proposicional, então

se $\vdash A \leftrightarrow B$ então $\vdash C\ {}^{p}/_{A} \leftrightarrow C\ {}^{p}/_{B}$.

A demonstração é semelhante à feita no capítulo I, teorema 3.3.0.

O seguinte esquema é um teorema de MT.

T7.3.1) $(\Box A \wedge \Box B) \leftrightarrow \Box(A \wedge B)$.

Demonstração:

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$	Fórmula tautológica
(2) $(A \wedge B) \rightarrow A$	Fórmula tautológica
(3) $(A \wedge B) \rightarrow B$	Fórmula tautológica
(4) $\Box(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$	RN 1
(5) $\Box((A \wedge B) \rightarrow A)$	RN 2
(6) $\Box((A \wedge B) \rightarrow B)$	RN 3
(7) $\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow (A \wedge B))$	MT1 e tautologia em 4
(8) $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A$	MT1 e tautologia em 5
(9) $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B$	MT1 e tautologia em 6
(10) $(B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$	Fórmula tautológica
(11) $\Box(B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow \Box(B \rightarrow (A \wedge B))$	MT1 e tautologia em 10
(12) $\Box(B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$	MT1
(13) $\Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$	tautologia 7,12
(14) $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$	tautologia 13
(15) $\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$	tautologia 8,9
(16) $(\Box A \wedge \Box B) \leftrightarrow \Box(A \wedge B)$	tautologia 14,15

A seguir apresentaremos alguns resultados que, embora não estejam diretamente ligados ao tema deste capítulo, ampliarão nossa compreensão a respeito do sistema axiomático apresentado.

T7.3.2) $\vdash A \rightarrow G^nP^nA$, para $n \geq 1$.

Demonstração: Por indução em n.

Base Indutiva: $n = 1$

$\vdash A \rightarrow G^1P^1A$, então pela definição 1.1,

$\vdash A \rightarrow GPA$ que é o axioma MT4.

Hipótese Indutiva: Assumimos que o teorema vale para $n = k$, vamos mostrar que vale para $n = k + 1$.

Assim, temos como hipótese que $\vdash A \rightarrow G^kP^kA$.

$\vdash A \rightarrow GPA$ então, por tautologia,

$\vdash P^kA \rightarrow GPP^kA$, então aplicando k vezes a regra RF temos,

$\vdash G^kP^kA \rightarrow G^kGPP^kA$, então, pela definição 1.1,

$\vdash G^kP^kA \rightarrow G^{k+1}P^{k+1}A$, então usando a hipótese e tautologia,

$\vdash A \rightarrow G^{k+1}P^{k+1}A$. ∎

T7.3.3) $A \rightarrow H^nF^nA$, para $n \geq 1$.

Demonstração: Por indução em n.

Base Indutiva: $n = 1$.

$\vdash A \to H^1F^1A$, então pela definição 1.1,

$\vdash A \to HFA$ que é o axioma MT5.

Hipótese Indutiva: Assumimos que o teorema vale para n = k, vamos mostrar que vale para n = k + 1.

Assim, temos como hipótese que $\vdash A \to H^kF^kA$.

$\vdash A \to HFA$ então, por tautologia,

$\vdash F^kA \to HFF^kA$, então aplicando k vezes a regra RP temos,

$\vdash H^kF^kA \to H^kHFF^kA$, então, pela definição 1.1,

$\vdash H^kF^kA \to H^{k+1}F^{k+1}A$, então usando a hipótese e tautologia,

$\vdash A \to H^{k+1}F^{k+1}A$. ■

T7.3.4) $\vdash (G^nA \wedge G^nB) \leftrightarrow G^n(A \wedge B)$ para $n \geq 1$.

Demonstração: Por indução em n.

Base Indutiva: n = 1.

$\vdash (G^1A \wedge G^1B) \leftrightarrow G^1(A \wedge B)$ então pela definição 1.1, temos que,

$\vdash (GA \wedge GB) \leftrightarrow G(A \wedge B)$ que é o teorema T3.3.4.

Hipótese Indutiva: Supomos que o teorema é válido para n = k, vamos mostrar que vale para n = k + 1.

Assim, temos como hipótese que $\vdash (G^kA \wedge G^kB) \leftrightarrow G^k(A \wedge B)$.

Por hipótese, temos que,

$\vdash (G^kA \wedge G^kB) \leftrightarrow G^k(A \wedge B)$ então, aplicando a regra RF,

$\vdash G((G^kA \wedge G^kB) \leftrightarrow G^k(A \wedge B))$ então, pelo axioma MT2 e tautologia,

$\vdash G(G^kA \wedge G^kB) \leftrightarrow GG^k(A \wedge B)$ então pelo teorema T3.3.4 e tautologia,

$\vdash (GG^kA \wedge GG^kB) \leftrightarrow GG^k(A \wedge B)$ então, pela definição 1.1,

$\vdash (G^{k+1}A \wedge G^{k+1}B) \leftrightarrow G^{k+1}(A \wedge B)$. ∎

T7.3.5) $\vdash (H^nA \wedge H^nB) \leftrightarrow H^n(A \wedge B)$ para $n \geq 1$.

Demonstração: Por indução em n.

Base Indutiva: $n = 1$.

$\vdash (H^1A \wedge H^1B) \leftrightarrow H^1(A \wedge B)$ então pela definição 1.1, temos que,

$\vdash (HA \wedge HB) \leftrightarrow H(A \wedge B)$ que é a aplicação ao teorema T3.3.4 da observação contida na página 22..

Hipótese Indutiva: Supomos que o teorema é válido para $n = k$, vamos mostrar que vale para $n = k + 1$.

Assim, temos como hipótese que $\vdash (H^kA \wedge H^kB) \leftrightarrow H^k(A \wedge B)$.

Por hipótese, temos que,

$\vdash (H^kA \wedge H^kB) \leftrightarrow H^k(A \wedge B)$ então, aplicando a regra RP,

$\vdash H((H^kA \wedge H^kB) \leftrightarrow H^k(A \wedge B))$ então, pelo axioma MT3 e tautologia,

$\vdash H(H^kA \wedge H^kB) \leftrightarrow HH^k(A \wedge B)$ então pela aplicação da observação, página 22, ao teorema T3.3.4 e tautologia,

$\vdash (HH^kA \wedge HH^kB) \leftrightarrow HH^k(A \wedge B)$ então, pela definição 1.1,

$\vdash (H^{k+1}A \wedge H^{k+1}B) \leftrightarrow H^{k+1}(A \wedge B)$. ■

T7.3.6) $\vdash F^n(A \wedge B) \rightarrow (F^nA \wedge F^nB)$ para $n \geq 1$.

Demonstração: Por indução em n.

Base Indutiva: $n = 1$.

$\vdash F^1(A \wedge B) \rightarrow (F^1A \wedge F^1B)$ então pela definição 1.1,

$\vdash F(A \wedge B) \rightarrow (FA \wedge FB)$ que é o teorema T3.3.7.

Hipótese Indutiva: Supomos que o teorema vale para $n = k$, vamos mostrar que vale para $n = k + 1$.

Assim, como hipótese temos que $\vdash F^k(A \wedge B) \rightarrow (F^kA \wedge F^kB)$.

Por hipótese, temos que,

$\vdash F^k(A \wedge B) \rightarrow (F^kA \wedge F^kB)$, então por tautologia,

$\vdash (\neg F^kA \vee \neg F^kB) \rightarrow \neg F^k(A \wedge B)$ então aplicando a regra RF, tautologia e axioma MT2, temos,

$\vdash G(\neg F^kA \vee \neg F^kB) \rightarrow G\neg F^k(A \wedge B)$ então pelo teorema T3.3.6 e tautologia,

$\vdash (G\neg F^kA \vee G\neg F^kB) \rightarrow G\neg F^k(A \wedge B)$ então por tautologia,

$\vdash \neg G\neg F^k(A \wedge B) \rightarrow \neg(G\neg F^kA \vee G\neg F^kB)$ então por tautologia e D(F),

$\vdash FF^k(A \wedge B) \rightarrow (FF^kA \wedge FF^kB)$ então pela definição 1.1,

$\vdash F^{k+1}(A \wedge B) \rightarrow (F^{k+1}A \wedge F^{k+1}B)$. ■

T7.3.7) $\vdash P^n(A \wedge B) \rightarrow (P^nA \wedge P^nB)$ para $n \geq 1$.

Demonstração: Por indução em n.

Base Indutiva: $n = 1$.

$\vdash P^1(A \wedge B) \rightarrow (P^1A \wedge P^1B)$ então pela definição 1.1,

$\vdash P(A \wedge B) \rightarrow (PA \wedge PB)$ que é o teorema que se obtém quando aplica-se ao teorema T3.3.7 a observação situada à página 22.

Hipótese Indutiva: Supomos que o teorema vale para $n = k$, vamos mostrar que vale para $n = k + 1$.

Assim, como hipótese temos que $\vdash P^k(A \wedge B) \rightarrow (P^kA \wedge P^kB)$.

Por hipótese, temos que,

$\vdash P^k(A \wedge B) \rightarrow (P^kA \wedge P^kB)$, então por tautologia,

$\vdash (\neg P^kA \vee \neg P^kB) \rightarrow \neg P^k(A \wedge B)$ então aplicando a regra RP, tautologia e axioma MT3, temos,

$\vdash H(\neg P^kA \vee \neg P^kB) \rightarrow H\neg P^k(A \wedge B)$ então pela aplicação da observação, página 22, ao teorema T3.3.6 e tautologia,

$\vdash (H\neg P^kA \vee H\neg P^kB) \rightarrow H\neg P^k(A \wedge B)$ então por tautologia,

$\vdash \neg H\neg P^k(A \wedge B) \rightarrow \neg(H\neg P^kA \vee H\neg P^kB)$ então por tautologia e D(P),

$\vdash PP^k(A \wedge B) \rightarrow (PP^kA \wedge PP^kB)$ então pela definição 1.1,

$\vdash P^{k+1}(A \wedge B) \rightarrow (P^{k+1}A \wedge P^{k+1}B)$. ■

T7.3.8) $\vdash F^n(B_1 \wedge ... \wedge B_m) \rightarrow (F^nB_1 \wedge ... \wedge F^nB_m)$ para $n \geq 1$.

Demonstração: Uma generalização de T7.3.6).

T7.3.9) $\vdash P^n(B_1 \wedge ... \wedge B_m) \rightarrow (P^nB_1 \wedge ... \wedge P^nB_m)$ para $n \geq 1$.

Demonstração: Uma generalização de T7.3.7).

T7.3.10) $\vdash (H^n B_1 \wedge \ldots \wedge H^n B_m) \rightarrow H^n(B_1 \wedge \ldots \wedge B_m)$ para $n \geq 1$.

Demonstração: Uma generalização de T7.3.5).

T7.3.11) $\vdash (G^n B_1 \wedge \ldots \wedge G^n B_m) \rightarrow G^n(B_1 \wedge \ldots \wedge B_m)$ para $n \geq 1$.

Demonstração: Uma generalização de T7.3.4).

7.4 - Correção

A correção de MT é obtida quando certificamos a demonstração de que cada axioma é uma fórmula válida e que cada regra preserva a validade. A validade dos axiomas foi exibida na seção 6.1, resta somente apontar que as regras preservam a validade. Assim devemos demonstrar os seguintes teoremas enunciados abaixo.

Seja $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{B}, P \rangle$ uma estrutura modal temporal proposicional. Então:

Teorema 7.4.0: (Regra RN).

Se $\models A$ então $\models \Box A$.

Demonstração: (Por contraposição).

$\not\models \Box A$ então existe $\mathfrak{M}$ e existe $\langle w,t \rangle \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ em $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M}$ $\not\models_{\langle w,t \rangle} \Box A$, logo existe $w' \in W$, tal que $w \; R \; w'$ e $\mathfrak{M} \not\models_{\langle w',t' \rangle} A$ (onde $t' = \varphi_{\langle w,w' \rangle}(t)$), ou seja $\not\models A$ (A não é válida). ■

Teorema 7.4.1:(Regra RF).

Se $\models$ A então $\models$ GA.

Demonstração:(Por contraposição).

$\not\models$ GA então existe $\mathfrak{M}$ e existe $\langle w,t\rangle \in \mathfrak{U}_{\mathcal{B}}$ em $\mathfrak{M}$ tal que

$\mathfrak{M} \not\models_{\langle w,t\rangle}$ GA, logo existe $t_1 \in |T_w|$, tal que t S t_1 e

$\mathfrak{M} \not\models_{\langle w,t_1\rangle}$ A, ou seja

$\not\models$ A (A não é válida). ■

Teorema 7.4.2:(Regra RP).

Se $\models$ A então $\models$ HA.

Demonstração:(Por contraposição).

$\not\models$ HA então existe $\mathfrak{M}$ e existe $\langle w,t\rangle \in \mathfrak{U}_{\mathcal{B}}$ em $\mathfrak{M}$ tal que

$\mathfrak{M} \not\models_{\langle w,t\rangle}$ HA,

logo existe $t_{-1} \in |T_w|$ tal que t_{-1} S t e $\mathfrak{M} \not\models_{\langle w,t_{-1}\rangle}$ A, ou seja

$\not\models$ A (A não é válida). ■

Teorema 7.4.3:(Regra MP).

Se $\models$ A e $\models$ A → B então $\models$ B.

Demonstração:

Por redução ao absurdo, assumimos que $\models$ A, $\models$ A → B e $\not\models$ B. Assim se $\not\models$ B então existe $\mathfrak{M}$ e existe $\langle w,t\rangle \in \mathfrak{U}_{\mathcal{B}}$ em $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \not\models_{\langle w,t\rangle}$ B. Como $\models$ A, então para todo $\mathfrak{M}$ e todo $\langle w,t\rangle \in \mathfrak{U}_{\mathcal{B}}$ em $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models_{\langle w,t\rangle}$ A. Disso segue que existe $\mathfrak{M}$ e existe $\langle w,t\rangle \in \mathfrak{U}_{\mathcal{B}}$ em $\mathfrak{M}$, tal que $\not\models$ A → B, o que leva a uma contradição. ■

Desse modo estamos em condição de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 7.4.4(Correção): Seja $\mathfrak{L}^{MT}$ uma linguagem modal temporal, Γ e A, respectivamente, um conjunto de fórmulas e uma fórmula de $\mathfrak{L}^{MT}$. Nessas condições vale:

i) Se $\vdash A$ então $\models A$.

ii) Se $\Gamma \vdash A$ então $\Gamma \models A$.

Demonstração:

O ítem (i) segue de (ii) quando consideramos $\Gamma = \emptyset$. (ii) é demonstrado por indução no comprimento de uma dada dedução de A a partir de Γ, levando-se em conta os teoremas 6.1.0, 7.3.0, 7.4.0, 7.4.1, 7.4.2 e 7.4.3. ■

8 - Completude

A linguagem $\mathfrak{L}^{MT}$ compreende conceitos sintáticos e semânticos, precisamos mostrar que eles coincidem extensionalmente, isto é, devemos verificar para cada fórmula A e conjunto de fórmulas Γ que, A é consequência de Γ, se e somente se A é dedutível de Γ, em símbolos,

$\Gamma \models A$ sse $\Gamma \vdash A$.

Como já exibimos que se $\Gamma \vdash A$ então $\Gamma \models A$, falta apenas mostrar que se $\Gamma \models A$ então $\Gamma \vdash A$.

No que se segue, apresentaremos alguns resultados significantes para a prova da completude.

8.1 - Maximalidade e Lema de Lindenbaum

As definições sobre conjuntos maximais consistentes, bem como seus teoremas básicos, tais como os teoremas 4.1.0, 4.1.1 e 4.1.2, apresentados na seção 4, são demonstrados de maneira análoga, e por isso nos limitaremos a enunciá-los, sem no entanto, fazer suas respectivas demonstrações.

Definição 8.1.0: MaxΓ sse

(i) ConΓ, e

(ii) para cada A, se Con$\Gamma \cup \{A\}$, então $A \in \Gamma$.

Teorema 8.1.0: Seja Γ um conjunto maximal consistente de fórmulas. Então:

(1) $A \in \Gamma$ sse $\Gamma \vdash A$.

(2) $\top \in \Gamma$.

(3) $\bot \notin \Gamma$.

(4) $\neg A \in \Gamma$ sse $A \notin \Gamma$.

(5) $A \rightarrow B$ sse se $A \in \Gamma$ então $B \in \Gamma$.

Teorema 8.1.1:(Lema de Lindenbaum) Se ConΓ, então existe um Δ tal que :

(i) $\Gamma \subseteq \Delta$, e

(ii) MaxΔ.

Teorema 8.1.2:

(1) $\Gamma \vdash A$ sse $A \in \Delta$, para cada MaxΔ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.

(2) $\vdash A$ sse $A \in \Delta$, para cada MaxΔ.

8.2 - Estrutura Modal Temporal Canônica

O método da prova da completude por meio de estruturas canônicas, tal como feito neste texto para a lógica temporal será usado novamente neste capítulo. Tal método tem sido aplicado, tanto na lógica modal como na lógica temporal, aqui utilizaremos para a lógica modal temporal.

Definição 8.2.0: Uma estrutura modal temporal canônica $\mathfrak{M}_C = \langle W_C, (T_w)_{w \in W}, R, (\varphi_{<w,w'>})_{<w,w'> \in R}, P \rangle$ é uma estrutura modal temporal, tal que, para cada $w \in W$, temos que:

i) $T_w = \langle |T_w|, S\rangle$, $|T_w|$ é um conjunto de conjuntos maximais consistentes e para cada Δ em $|T_w|$,Δ é maximal.

ii) para cada $\Delta \in |T_w|$, $\Box A \in \Delta$ sse para cada w' tal que w R w', $A \in \varphi_{\langle w,w'\rangle}(\Delta)$.

iii) para qualquer fórmula A, qualquer $\Delta \in |T_w|$, se $\Diamond A \in \Delta$ então existe w', w R w' e $A \in \varphi_{\langle w,w'\rangle}(\Delta)$.

iv) $P_n = \{ \langle w,\Delta\rangle : \Delta \in |T_w|$ e $\mathbb{P}_n \in \Delta \}$ para n = 0,1,2,3,... .

v) Para cada $\Delta \in |T_w|$ em $\mathfrak{M}_C$, $GA \in \Delta$ sse para cada $\Delta' \in |T_w|$ em $\mathfrak{M}_C$ tal que Δ S Δ', $A \in \Delta'$.

vi) Para cada $\Delta \in |T_w|$ em $\mathfrak{M}_C$, $HA \in \Delta$ sse para cada $\Delta' \in |T_w|$ em $\mathfrak{M}_C$ tal que Δ' S Δ, $A \in \Delta'$.

Teorema 8.2.0: Sejam Δ e Δ' conjuntos maximais consistentes, e $\mathfrak{M}_C = \langle W, (T_w)_{w\in W}, R, (\varphi_{\langle w,w'\rangle})_{\langle w,w'\rangle \in R}, P\rangle$ uma estrutura modal temporal, então temos que:

a) para cada $\Delta \in |T_w|$ em $\mathfrak{M}_C$, para qualquer fórmula A, se $FA \in \Delta$ então existe Δ', Δ S Δ' e $A \in \Delta'$.

b) para cada $\Delta \in |T_w|$ em $\mathfrak{M}_C$, para qualquer fórmula A, se $PA \in \Delta$ então existe Δ', Δ' S Δ e $A \in \Delta'$.

Demonstração: Análoga à apresentada no capítulo I, teorema 4.2.0.

Teorema 8.2.1: Se $\mathfrak{M}_C = \langle W_C, (T_w)_{w\in W}, R, (\varphi_{\langle w,w'\rangle})_{\langle w,w'\rangle\in R}, P\rangle$ for uma estrutura modal temporal canônica . Então para todo $\langle w,\Delta\rangle$ em $\mathfrak{U}_{\mathfrak{B}_C}$[3], temos que :

$\mathfrak{M} \models_{\langle w,\Delta\rangle} A$ sse $A \in \Delta$.

Demonstração: Mostraremos por indução na complexidade de A.

Base Indutiva: Seja $\langle w,\Delta\rangle \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{B}_C}$, isto é, $\Delta \in |T_w|$.

1º caso: A é do tipo $\mathbb{P}_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Se $\mathbb{P}_n \in \Delta$ (Δ maximal) então pelo ítem iv), definição 8.2.0

$\langle w,\Delta\rangle \in P_n$ então pela definição 6.4, ítem 1),

$\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta\rangle} \mathbb{P}_n$.

Por outro lado,

Se $\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta\rangle} \mathbb{P}_n$ então pela definição 6.4, ítem 1),

$\langle w,\Delta\rangle \in P_n$ então pela definição 8.2.0, ítem iv),

$\mathbb{P}_n \in \Delta$.

2º caso: A é do tipo $\top$.

$\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta\rangle} \top$ pela definição 6.4, ítem 2), e, por outro lado,

pelo teorema 8.1.0, ítem 2),

$\top \in \Delta$.

[3] O universo modal temporal canônico é dado por:

$\mathfrak{U}_{\mathfrak{B}_C} = \{ \langle w,\Delta\rangle \in (W \times \bigcup_{w\in W_C} |T_w|$ tais que $\Delta \in |T_w|)\}$.

$3^{\underline{o}}$ caso: A é do tipo $\bot$.

$\mathfrak{M}_C \not\models_{\langle w,\Delta\rangle} \bot$ pela definição 6.4, ítem 3), e, por outro lado,

$\bot \notin \Delta$ pois Δ é consistente,

portanto,

$\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta\rangle} \bot$ sse $\bot \in \Delta$.

Hipótese indutiva: Assumimos que o teorema é válido para fórmulas de complexidades menores que A, isto é, para todo $\Delta \in |T_w|$ em $\mathfrak{M}_C$ temos que:

$\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta\rangle} B$ sse $B \in \Delta$.

$1^{\underline{o}}$ caso: A é do tipo $\neg B$.

$\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta\rangle} \neg B$ sse

$\mathfrak{M}_C \not\models_{\langle w,\Delta\rangle} B$ sse pela hipótese de indução,

$B \notin \Delta$ sse pelo teorema 8.1.0, ítem 4),

$\neg B \in \Delta$.

$2^{\underline{o}}$ caso: A é do tipo $B \rightarrow C$.

$\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta\rangle} (B \rightarrow C)$ sse pela definição 6.4, ítem 5),

se $\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta\rangle} B$ então $\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta\rangle} C$ sse pela hipótese indutiva,

se $B \in \Delta$ então $C \in \Delta$ sse pelo teorema 8.1.0, ítem 5),

$(B \rightarrow C) \in \Delta$.

$3^{\underline{o}}$ caso: A é do tipo $\Box B$.

Mostraremos que $\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta\rangle} \Box B$ sse $\Box B \in \Delta$.

Da esquerda para a direita a prova por contraposição fica:

$\Box B \notin \Delta$ então, como Δ é maximal consistente,

$\neg\Box B \in \Delta$ então, por $D(\Diamond)$,

$\Diamond\neg B \in \Delta$ então, pela definição 8.2.0, ítem iii),

$\exists$ w'(w R w' e $\neg B \in \Delta'$) onde $\Delta' = \varphi_{<w,w'>}(\Delta)$ então, como Δ' é maximal consistente,

$\exists$ w'(w R w' e $B \notin \Delta'$) onde $\Delta' = \varphi_{<w,w'>}(\Delta)$ então pela H.I.,

$\exists$ w'(w R w' e $\mathfrak{M}_C \not\models_{<w',\Delta'>} B$) onde $\Delta' = \varphi_{<w,w'>}(\Delta)$ então,

$\sim(\forall$w'(w R w' então $\mathfrak{M}_C \models_{<w',\Delta'>} B$)) onde $\Delta' = \varphi_{<w,w'>}(\Delta)$ então,

$\mathfrak{M}_C \not\models_{<w,\Delta>} \Box B$.

Da direita para a esquerda também provando por contraposição, temos:

$\mathfrak{M}_C \not\models_{<w,\Delta>} \Box B$ então,

$\sim(\forall$w'(w R w' então $\mathfrak{M}_C \models_{<w',\Delta'>} B$)) onde $\Delta' = \varphi_{<w,w'>}(\Delta)$ então,

$\exists$ w'(w R w' e $\mathfrak{M}_C \not\models_{<w',\Delta'>} B$) onde $\Delta' = \varphi_{<w,w'>}(\Delta)$ então pela H.I.,

$\exists$ w'(w R w' e $B \notin \Delta'$) onde $\Delta' = \varphi_{<w,w'>}(\Delta)$ então pela definição 8.2.0, ítem ii),

$\Box B \notin \Delta$.

4º caso: A é do tipo GB.

Mostraremos que $\mathfrak{M}_C \models_{<w,\Delta>} GB$ sse $GB \in \Delta$.

Da esquerda para a direita a prova por contraposição fica:

$GB \notin \Delta$ então, como Δ é maximal consistente,

$\neg GB \in \Delta$ então, por D(F),

$F\neg B \in \Delta$ então, pelo teorema 8.2.0, ítem a),

$\exists$ Δ'(Δ S Δ' e $\neg B \in \Delta'$) então, como Δ' é maximal consistente,

$\exists$ Δ'(Δ S Δ' e $B \notin \Delta'$) então pela H.I.,

$\exists$ Δ'(Δ S Δ' e $\mathfrak{M}_C \not\models_{<w,\Delta'>} B$) então,

$\sim(\forall\Delta'$(Δ S Δ' então $\mathfrak{M}_C \models_{<w,\Delta'>} B$)) então,

$\mathfrak{M}_C \not\models_{\langle w,\Delta\rangle} GB$.

Da direita para a esquerda também provando por contraposição, temos:

$\mathfrak{M}_C \not\models_{\langle w,\Delta\rangle} GB$ então,

$\sim(\forall\Delta'(\Delta \; S \; \Delta'$ então $\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta'\rangle} B))$ então,

$\exists \; \Delta'(\Delta \; S \; \Delta'$ e $\mathfrak{M}_C \not\models_{\langle w,\Delta'\rangle} B$ então pela H.I.,

$\exists \; \Delta'(\Delta \; S \; \Delta'$ e $B \notin \Delta')$ então pela definição 8.2.0, ítem v),

$GB \notin \Delta$.

$5^{\underline{o}}$ caso: A é do tipo HB.

Mostraremos que $\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta\rangle} HB$ sse $HB \in \Delta$.

Da esquerda para a direita a prova por contraposição fica:

$HB \notin \Delta$ então, como Δ é maximal consistente,

$\neg HB \in \Delta$ então, por D(P),

$P\neg B \in \Delta$ então, pelo teorema 8.2.0, ítem b),

$\exists \; \Delta'(\Delta' \; S \; \Delta$ e $\neg B \in \Delta')$ então, como Δ' é maximal consistente,

$\exists \; \Delta'(\Delta' \; S \; \Delta$ e $B \notin \Delta')$ então pela H.I.,

$\exists \; \Delta'(\Delta' \; S \; \Delta$ e $\mathfrak{M}_C \not\models_{\langle w,\Delta'\rangle} B)$ então,

$\sim(\forall\Delta'(\Delta' \; S \; \Delta$ então $\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta'\rangle} B))$ então,

$\mathfrak{M}_C \not\models_{\langle w,\Delta\rangle} HB$.

Da direita para a esquerda também provando por contraposição, temos:

$\mathfrak{M}_C \not\models_{\langle w,\Delta\rangle} HB$ então,

$\sim(\forall\Delta'(\Delta' \; S \; \Delta$ então $\mathfrak{M}_C \models_{\langle w,\Delta'\rangle} B))$ então,

$\exists \; \Delta'(\Delta' \; S \; \Delta$ e $\mathfrak{M}_C \not\models_{\langle w,\Delta'\rangle} B)$ então pela H.I.,

$\exists \; \Delta'(\Delta' \; S \; \Delta$ e $B \notin \Delta')$ então pela definição 8.2.0, ítem vi),

$HB \notin \Delta$. ■

8.3 - Estrutura Modal Temporal Canônica Própria

No que se segue, consideramos Σ como sendo o conjunto de todos os conjuntos maximais consistentes. Consideramos também a seguinte identidade por definição: $\varepsilon(\omega^{\varkappa}) \equiv_{def} \{ A : \varkappa A \in \omega\}$, para toda fórmula A, todo conjunto maximal consistente ω, e $\varkappa \in \{\Box, G, F, H, P, \Diamond\}$[4].

Exemplo: $\varepsilon(\Delta^{\Box}) = \{ A : \Box A \in \Delta\}$.

Definição 8.3.0: Definimos uma relação S_c, chamada de sucessão canônica, entre conjuntos maximais consistentes, pondo:

$\Delta\ S_c\ \Gamma$ sse $\{A : GA \in \Delta\} \subseteq \Gamma$.

Definição 8.3.1: (Mundos canônicos).

O conjunto de "mundos" canônicos W_{cp} é o conjunto : $\{\langle\Sigma,\Delta,A\rangle : \Delta \in \Sigma$ e A é uma fórmula$\}$.

Definição 8.3.2: Definimos uma relação R_c em W_{cp}, chamada de acessibilidade canônica entre mundos canônicos, pondo:

[4] Veja-se LOPARIČ,A.M. AND MORTARI,C.A..

para quaisquer ternos $\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle$ e $\langle\Sigma,\Delta,A\rangle \in W_{cp}$,

$\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle\ R_c\ \langle\Sigma,\Delta,A\rangle$ sse $\Diamond A \in \Delta$.

Observação: Essa relação, aparentemente fraca, tem por objetivo assegurar que para todo conjunto maximal e toda fórmula A, sempre é possível achar um mundo e um momento do tempo nesse mundo onde A é verdadeira.

Definição 8.3.3: Uma estrutura modal temporal canônica própria $\mathfrak{M}_{cp} = \langle W_{cp},(T_w)_{w\in W},R,(\varphi_{\langle w,w'\rangle})_{\langle w,w'\rangle\in R},P\rangle$ é uma estrutura modal temporal na qual:

i) W_{cp} é o conjunto de mundos canônicos.

ii) S_c é a relação de sucessão canônica.

iii) Para todo $w \in W_{cp}$, $T_w = \langle \Sigma,S_c \rangle$.

iv) R_c é a relação de acessibilidade canônica.

v) $P_n = \{ \langle\Sigma,\Delta\rangle : \Delta \in \Sigma$ e $\mathbb{P}_n \in \Delta \}$ para $n = 0,1,2,3,\ldots$.

vi) para todo par $w = \langle\Sigma,\Gamma,B\rangle$ e $w' = \langle\Sigma,\Delta,A\rangle$ em R_c, $\varphi_{\langle w,w'\rangle}$ é uma função de Σ em Σ, tal que:

a) $\varepsilon(\Delta^{\Box}) \cup \{A\} \subseteq \varphi_{\langle w,w'\rangle}(\Delta)$.

b) Para todo $\Pi \in \Sigma$, $\varepsilon(\Pi^{\Box}) \subseteq \varphi_{\langle w,w'\rangle}(\Pi)$.

Para mostrar que existe uma estrutura tal como definida acima é necessário mostrar a existência da função; no que se segue, os teoremas apresentados terão esse propósito.

Teorema 8.3.0: Para todo $\Delta \in \Sigma$, e para toda fórmula B, tal que $\Diamond B \in \Delta$, existe $\Delta' \in \Sigma$, tal que $\varepsilon(\Delta^{\Box}) \cup \{B\} \subseteq \Delta'$.

Demonstração:

É suficiente mostrar que $\{ A : \Box A \in \Delta \} \cup \{B\}$ é consistente, pois daí, pelo lema de Lindenbaum, teremos que existe um Δ' maximal consistente de modo que $\{A: \Box A \in \Delta\} \cup \{B\} \subseteq \Delta'$. E, logo, $\Delta' \in \Sigma$. Supomos por absurdo que $\{A : \Box A \in \Delta\} \cup \{B\}$ é inconsistente, assim existem fórmulas $A_1,\dots,A_n$ tal que

$\vdash (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \wedge B \rightarrow \bot$ ou seja,

$\vdash (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow \neg B$, então pela regra RN

$\vdash \Box((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow \neg B)$ então pelo esquema $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

$\vdash \Box(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow \Box\neg B$ então pelo esquema $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$

$\vdash (\Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box\neg B$, como $\Box A_1,\dots,\Box A_n \in \Delta$, temos que $(\Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_n) \in \Delta$, logo por Modus Ponens ,

$\vdash \Box\neg B \in \Delta$ e pela definição de $\Diamond$, temos

$\vdash \neg\Diamond B \in \Delta$, mas por hipótese $\Diamond B \in \Delta$, o que caracteriza uma contradição. ∎

Teorema 8.3.1: Para todo $\Delta \in \Sigma$, existe $\Delta' \in \Sigma$, tal que $\varepsilon(\Delta^{\Box}) \subseteq \Delta'$.

Demonstração:

Vamos supor por absurdo que $\varepsilon(\Delta^{\Box})$ seja inconsistente, assim $\varepsilon(\Delta^{\Box}) \vdash \bot$, desse modo, existem fórmulas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tais que $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \vdash \bot$ então, por tautologia,

$\vdash (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow \bot)\ldots)$ então por RN, axioma MT1 e MP,

$\vdash (\Box A_1 \rightarrow (\Box A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\Box A_n \rightarrow \Box\bot)\ldots)$ então, por tautologia,

$\vdash (\Box A_1 \wedge \Box A_2 \wedge \ldots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box\bot$ então como $\Box A_1, \Box A_2, \ldots, \Box A_n \in \Delta$, temos que $(\Box A_1 \wedge \Box A_2 \wedge \ldots \wedge \Box A_n) \in \Delta$, e por MP ,

$\vdash \Box\bot$,ou seja,

$\Box\bot \in \Delta$, e como $\neg\Box\bot \in \Delta$, Δ seria inconsistente, o que contradiz a hipótese.

Portanto o escôpo dos necessários que estão em Δ é consistente, e pelo lema de Lindenbaum existe Δ' maximal consistente e $\varepsilon(\Delta^{\Box}) \subseteq \Delta'$. ■

Teorema 8.3.2: Para cada $w = \langle\Sigma,\Gamma,B\rangle$ e cada $w' = \langle\Sigma,\Delta,A\rangle$, tais que $w\, R_C w'$, existe uma função $\varphi_{\langle w,w'\rangle}$ de Σ em Σ, tal que, para qualquer $\Pi \in \Sigma$, temos que:

a) se $\Pi = \Delta$, $\varepsilon(\Delta^{\Box}) \cup \{A\} \subseteq \varphi_{\langle w,w'\rangle}(\Pi)$ e

b) se $\Pi \neq \Delta$, $\varepsilon(\Pi^{\Box}) \subseteq \varphi_{\langle w,w'\rangle}(\Pi)$.

Demostração:

Como $\Diamond A \in \Delta$, visto que $w\, R_C\, w'$, temos pelo teorema 8.3.0, que existe $\Delta' \in \Sigma$ onde $\varepsilon(\Delta^{\Box}) \cup \{A\} \subseteq \Delta'$. E por outro lado, pelo teorema 8.3.1 temos que para todo $\Pi \in \Sigma$, $\Pi \neq \Delta$, existe $\Pi' \in \Sigma$ onde

$\varepsilon(\Pi^{\Box}) \subseteq \Pi'$. Assim pelo axioma da escolha[5] existe a função procurada. ■

Teorema 8.3.3: Uma estrutura modal temporal canônica própria é uma estrutura modal temporal canônica.

Demonstração:

Seja $\mathfrak{M}_{cp}$ uma estrutura modal temporal canônica própria. Precisamos mostrar que para cada terno $\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle$ e para cada $\Delta \in \Sigma$:

a) $GA \in \Delta$ sse para cada $\Delta' \in \Sigma$ em $T_{\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle}$, tal que $\{A : GA \in \Delta\} \subseteq \Delta'$, $A \in \Delta'$.

b) $HA \in \Delta'$ sse para cada $\Delta \in \Sigma$ em $T_{\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle}$, tal que $\{A : GA \in \Delta\} \subseteq \Delta'$, $A \in \Delta$.

c) Para cada $\Delta \in \Sigma$, $\Box A \in \Delta$ sse para cada $w' = \langle\Sigma,\Phi,C\rangle$, tal que $\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle \; R_c \; \langle\Sigma,\Phi,C\rangle$, ou seja $\Diamond C \in \Phi$, $A \in \varphi_{\langle\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle,\langle\Sigma,\Phi,C\rangle\rangle}(\Delta)$.

d) para qualquer fórmula A, se $\Diamond A \in \Delta$ então existe $w' = \langle\Sigma,\Phi,C\rangle$, tal que $\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle \; R_c \; \langle\Sigma,\Phi,C\rangle$, ou seja $\Diamond C \in \Phi$, $A \in \varphi_{\langle\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle,\langle\Sigma,\Phi,C\rangle\rangle}(\Delta)$.

Assim temos que:

Para a).

Demonstração análoga ao teorema 4.3.1(a).

[5]Veja-se HALMOS,PAUL R. e KURATOWSKI,K..

Para b).

Pelo teorema 4.3.0, é suficiente mostrar que:

b') $HA \in \Delta'$ sse para cada $\Delta \in \Sigma$ em $T_{\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle}$, tal que $\{A : HA \in \Delta'\} \subseteq \Delta$, $A \in \Delta$. Demonstração análoga ao teorema 4.3.1(b).

Para c).

Da esquerda para a direita, segue que:

Se $\Box A \in \Delta$ e $\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle\ R_C\ \langle\Sigma,\Phi,C\rangle$, então pela definição da função $\varphi_{\langle\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle,\langle\Sigma,\Phi,C\rangle\rangle}$, temos que $A \in \varphi_{\langle\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle,\langle\Sigma,\Phi,C\rangle\rangle}(\Delta)$.

Da direita para a esquerda, segue que:

$\Box A \notin \Delta$ então pela maximalidade de Δ,

$\neg\Box A \in \Delta$ então por $D(\Diamond)$,

$\Diamond\neg A \in \Delta$.

Tomamos o terno $\langle\Sigma,\Delta,\neg A\rangle$.

Por definição de R_C, $\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle\ R_C\ \langle\Sigma,\Delta,\neg A\rangle$. Além disso, pela definição de $\varphi_{\langle\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle,\langle\Sigma,\Delta,\neg A\rangle\rangle}$,

$\varphi_{\langle\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle,\langle\Sigma,\Delta,\neg A\rangle\rangle}(\Delta) \supseteq \varepsilon(\Delta^{\Box}) \cup \{\neg A\}$ ou seja,

$A \notin \varphi_{\langle\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle,\langle\Sigma,\Delta,\neg A\rangle\rangle}(\Delta)$,

para algum $\langle\Sigma,\Delta,\neg A\rangle$ tal que $\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle\ R_C\ \langle\Sigma,\Delta,\neg A\rangle$.

Para d).

Seja A uma fórmula tal que $\Diamond A \in \Delta$, tomemos o terno $\langle\Sigma,\Delta,A\rangle$. Pela definição de R_C, temos que $\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle\ R_C\ \langle\Sigma,\Delta,A\rangle$, pois $\Diamond A \in \Delta$. Logo pelo ítem vi) da definição 8.3.3, $A \in \varphi_{\langle\langle\Sigma,\Gamma,B\rangle,\langle\Sigma,\Delta,A\rangle\rangle}(\Delta)$. ■

Teorema 8.3.4(Completude): Seja $\mathfrak{L}^{MT}$ uma linguagem modal temporal, Γ e A, respectivamente, um conjunto de fórmulas e uma fórmula de $\mathfrak{L}^{MT}$. Nessas condições vale:

i) Se $\models A$ então $\vdash A$.

ii) Se $\Gamma \models A$ então $\Gamma \vdash A$.

iii) Se Γ é um conjunto consistente de fórmulas, então Γ tem modelo.

Demonstração:

a) Inicialmente mostraremos que iii) implica ii) que implica i). Semelhante à demonstração feita no teorema 4.3.2.

b) Demonstração de iii).

Seja Γ um conjunto consistente, então pelo Lema de Lindenbaum, existe um Δ maximal consistente, tal que $\Gamma \subseteq \Delta$. Como Δ é maximal, $\Delta \in |T_{\langle\Sigma,\Delta,A\rangle}|$ em $\mathfrak{M}_{cp}$, ou seja $\langle\langle\Sigma,\Delta,A\rangle,\Delta\rangle \in \mathfrak{U}_{\mathcal{B}_{cp}}$[6] e, pelo teorema 8.2.1 (lema semântico), $\mathfrak{M}_{cp} \models_{\langle\langle\Sigma,\Delta,A\rangle,\Delta\rangle} A$ para todo $A \in \Delta$, visto que $\mathfrak{M}_{cp}$ é uma estrutura canônica, como mostrado no teorema 8.3.3. Desse modo Δ tem modelo, e como $\Gamma \subseteq \Delta$, Γ também tem modelo, pois verifica todas as fórmulas de Γ no ponto $\langle\langle\Sigma,\Delta,A\rangle,\Delta\rangle$. ■

[6] $\mathfrak{U}_{\mathcal{B}_{cp}} = \{\langle\langle\Sigma,\Delta,A\rangle,\Delta\rangle \in (W_{cp} \times \bigcup_{w \in W_{cp}} |T_w|$ tais que $\Delta \in |T_w|)\}$.

Observações Finais

Perspectivas Futuras

Nesta seção, cuidaremos a título preliminar da questão acerca de como tratar outras lógicas modais temporais no âmbito da semântica apresentada no capítulo II. Para tal, devemos considerar classes particulares de estruturas modais temporais, em especial, àquelas classes determinadas por condições impostas às funções de acessibilidade temporal.

Consideremos, então, uma estrutura modal temporal $\mathfrak{M} = \langle W,(T_w)_{w\in W},R,(\varphi_{<w,w'>})_{<w,w'>\in R},P\rangle$ tal que:

(α) Para todo w,w' tal que w R w' e w $\neq$ w', e para quaisquer $t,t_1 \in |T_w|$, se $t\ S_w\ t_1$ então $\varphi_{<w,w'>}(t)\ S_{w'}\ \varphi_{<w,w'>}(t_1)$.

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 1: Sejam $\langle w,t\rangle \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{B}}$ e A e B fórmulas, temos, então, que:

1) $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} F\Box A \rightarrow \Box FA$.

2) $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} P\Box A \rightarrow \Box PA$.

Demonstração:

Para 1).

Mostraremos que $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} F\Box A \rightarrow \Box FA$.

Por redução ao absurdo, supomos que:

$\mathfrak{M} \not\models_{<w,t>} \Box FA$ e $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} F\Box A$.

Se $\mathfrak{M} \not\models_{<w,t>} \Box FA$ então,

$\sim(\forall w'(w\ R\ w'$ então $\mathfrak{M} \models_{<w',t'>} FA))$ onde $t' = \varphi_{<w,w'>}(t)$, então,

$\sim(\forall w'(w\ R\ w'$ então $(\exists\, t_1' \in |T_{w'}|(t'\ S_{w'}\ t_1'$ e $\mathfrak{M} \models_{<w',t_1'>} A)))$então

$\exists\, w'(w\ R\ w'$ e $\forall\, t_1' \in |T_{w'}|(t'\ S_{w'}\ t_1'$ então $\mathfrak{M} \not\models_{<w',t_1'>} A))$ (*)

onde $t_1' = \varphi_{<w,w'>}(t_1)$.

E, se $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} F\Box A$ então,

$\exists\, t_1 \in |T_w|(t\ S_w\ t_1$ e $\mathfrak{M} \models_{<w,t_1>} \Box A)$ então,

$\exists\, t_1 \in |T_w|(t\ S_w\ t_1$ e $\forall w'(w\ R\ w'$ então $\mathfrak{M} \models_{<w',t_1'>} A))$ (**)

onde $t_1' = \varphi_{<w,w'>}(t_1)$.

De (**), temos que existe um instante de tempo $t_1 = y$ relacionado com t onde para todo w', em particular para w'= x' de (*), temos que $\mathfrak{M} \models_{<x',y'>} A$, onde $y' = \varphi_{<w,w'>}(y)$.

Por (*), para todo $t_1' = \varphi_{<w,w'>}(t)$ em $w' = x'$, em particular para $t_1' = y' = \varphi_{<w,x'>}(y)$ de (**), $\mathfrak{M} \not\models_{<x',y'>} A$. Logo, de (*) e (**) segue-se uma contradição.

Para 2).

Mostraremos que $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} P\Box A \rightarrow \Box PA$.

Por redução ao absurdo, supomos que:

$\mathfrak{M} \not\models_{<w,t>} \Box PA$ e $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} P\Box A$.

Se $\mathfrak{M} \not\models_{<w,t>} \Box PA$ então,

$\sim(\forall w'(w\ R\ w'$ então $\mathfrak{M} \models_{<w',t'>} PA))$ onde $t' = \varphi_{<w,w'>}(t)$, então,

$\sim(\forall w'(w\ R\ w'$ então $(\exists t'_{-1} \in |T_{w'}|(t'_{-1}\ S_{w'}\ t'$ e $\mathfrak{M} \models_{<w',t'_{-1}>} A))))$,

então,

$\exists w'(w\ R\ w'$ e $\forall t'_{-1} \in |T_{w'}|(t'_{-1}\ S_{w'} t'$ então $\mathfrak{M} \not\models_{<w',t'_{-1}>} A))$ (*)

onde $t'_{-1} = \varphi_{<w,w'>}(t_{-1})$.

E, se $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} P\Box A$ então,

$\exists t_{-1} \in |T_w|(t_{-1}\ S_w\ t$ e $\mathfrak{M} \models_{<w,t_{-1}>} \Box A)$ então,

$\exists t_{-1} \in |T_w|(t_{-1} S_w\ t$ e $\forall w'(w\ R\ w'$ então $\mathfrak{M} \models_{<w',t'_{-1}>} A))$ (**)

onde $t'_{-1} = \varphi_{<w,w'>}(t_{-1})$.

De (**), temos que existe um instante de tempo $t_{-1} = y$ relacionado com t onde para todo w', em particular para $w' = x'$ de (*), $\mathfrak{M} \models_{<x',y'>} A$, onde $y' = \varphi_{<w,w'>}(y)$.

Por (*), para todo $t'_{-1} = \varphi_{<w,w'>}(t_{-1})$ em $w' = x'$, em particular para $t'_1 = y' = \varphi_{<w,x'>}(y)$ de (**), $\mathfrak{M} \not\models_{<x',y'>} A$. Logo, de (*) e (**) segue-se uma contradição. ■

Decorre desse teorema que as fórmulas $F\Box A \rightarrow \Box FA$ e $P\Box A \rightarrow \Box PA$ são válidas na classe das estruturas modais temporais nas quais as funções de acessibilidade temporal satisfazem a condição (α). Mais ainda, acreditamos que a adição desses dois esquemas como postulados ao sistema axiomático apresentado anteriormente, capítulo II, resulta em um sistema adequado (correto e completo) com respeito a essa classe de estruturas.

Além disso, se impormos a restrição adicional de que as funções de acessibilidade temporal sejam homomorfismos, então valem as seguintes fórmulas:

1) $\Diamond FA \rightarrow F\Diamond A$

2) $\Box PA \rightarrow P\Box A$

Demonstração:

Para 1).

Mostraremos que $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Diamond FA \rightarrow F\Diamond A$.

Por redução ao absurdo, supomos que:

$\mathfrak{M} \not\models_{<w,t>} F\Diamond A$ e $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Diamond FA$.

Se $\mathfrak{M} \not\models_{<w,t>} F\Diamond A$ então,

$\sim(\exists t_1 \in |T_w|(t\ S_w,\ t_1$ e $\mathfrak{M} \models_{<w',t_1'>} \Diamond A))$ então

$\sim(\exists t_1 \in |T_w|(t\ S_w\ t_1$ e $\exists w'\ (w\ R\ w'$ e $\mathfrak{M} \models_{<w',t_1'>} A)))$

onde $t_1' = \varphi_{<w,w'>}(t_1)$. então

$\forall t_1 \in |T_w|(t\ S_w\ t_1$ então $\forall w'\ (w\ R\ w'$ então $\mathfrak{M} \not\models_{<w',t_1'>} A))$ (*)

onde $t_1' = \varphi_{<w,w'>}(t_1)$.

E, se $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Diamond FA$ então,

$\exists w'(w\ R\ w'$ e $\mathfrak{M} \models_{<w',t'>} FA))$ onde $t' = \varphi_{<w,w'>}(t)$, então,

$\exists w'(w\ R\ w'$ e $(\exists t_1' \in |T_{w'}|(t'\ S_{w'},\ t_1'$ e $\mathfrak{M} \models_{<w',t_1'>} A))))$ (**)

onde $t_1' = \varphi_{<w,w'>}(t_1)$.

De (**) temos que existe w' relacionado com w, seja w' = x', e existe t'_1 relacionado com t', seja $t'_1 = y'$, onde $y' = \varphi_{<w,w'>}(t_1)$, onde $\mathfrak{M} \models_{<x',y'>} A$.

Como estamos considerando a função de acessibilidade temporal como sendo um homomorfismo, por (**), se $t' \, S_{w'} \, t'_1$ então $t \, S_w \, t_1$, ou seja, $t \, S_w \, y$. Assim, por (*), para todo t_1 relacionado com t, em particular para $t_1 = y$ e para todo w' relacionado com w, em particular para w' = x' , temos que $\mathfrak{M} \not\models_{<x',y'>} A$. Logo, de (*) e (**) segue-se uma contradição. ■

Para 2).

Mostraremos que $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Box PA \rightarrow P\Box A$.

Por redução ao absurdo, supomos que:

$\mathfrak{M} \not\models_{<w,t>} P\Box A$ e $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Box PA$.

Se $\mathfrak{M} \not\models_{<w,t>} P\Box A$ então,

$\sim(\exists \, t_{-1} \in |T_w|(t_{-1} \, S_w \, t$ e $\mathfrak{M} \models_{<w,t_{-1}>} \Box A))$ então

$\sim(\exists \, t_{-1} \in |T_w|(t_{-1} \, S_w \, t$ e $\forall w' \, (w \, R \, w'$ então $\mathfrak{M} \models_{<w',t'_{-1}>} A)))$

onde $t'_{-1} = \varphi_{<w,w'>}(t_{-1})$. então

$\forall t_{-1} \in |T_w|(t_{-1} \, S_w \, t$ então $\exists w' \, (w \, R \, w'$ e $\mathfrak{M} \not\models_{<w',t'_{-1}>} A))$ (*)

onde $t'_{-1} = \varphi_{<w,w'>}(t_{-1})$.

E, se $\mathfrak{M} \models_{<w,t>} \Box PA$ então,

$\forall w'(w \, R \, w'$ então $\mathfrak{M} \models_{<w',t'>} PA))$ onde $t' = \varphi_{<w,w'>}(t)$, então,

$\forall w'(w \, R \, w'$ então $(\exists \, t'_{-1} \in |T_{w'}|(t'_{-1} \, S_{w'} \, t'$ e $\mathfrak{M} \models_{<w',t'_{-1}>} A))))$ (**)

onde $t'_{-1} = \varphi_{<w,w'>}(t_{-1})$.

De (**) temos que para todo w' relacionado com w, existe t'_{-1} relacionado com t', seja $t'_{-1} = y'$, para $y' = \varphi_{<w,w'>}(t'_{-1})$, onde $\mathfrak{M} \models_{<w',y'>} A$.

Como estamos considerando a função de acessibilidade temporal como sendo um homomorfismo, por (**), se $t'_{-1}\ S_{w'}\ t'$ então $t_{-1} S_w\ t$, ou seja, $y\ S_w\ t$. Assim, por (*), para todo t_{-1} relacionado com t, em particular para $t_{-1} = y$ de (**), então existe w' relacionado com w, seja w'= x' , onde temos que $\mathfrak{M} \not\models_{<x',y'>} A$. Desse modo, por (**), para todo w' relacionado com w ,em particular para w' = x' de (*), temos que $\mathfrak{M} \models_{<x',y'>} A$. Logo, de (*) e (**) segue-se uma contradição. ■

Usando as definições D(F) e D(P), podemos estabelecer as seguintes equivalências :

1) $F\Box A \rightarrow \Box FA$ é equivalente a $\Diamond GA \rightarrow G\Diamond A$.

2) $P\Box A \rightarrow \Box PA$ é equivalente a $\Diamond HA \rightarrow H\Diamond A$.

3) $\Diamond FA \rightarrow F\Diamond A$ é equivalente a $G\Box A \rightarrow \Box GA$.

4) $\Box PA \rightarrow P\Box A$ é equivalente a $H\Diamond A \rightarrow \Diamond HA$.

Por último, observamos que, se exigirmos que tanto a relação de acessibilidade, quanto as relações de sucessão temporal em cada mundo forem relações de ordem, isto é, transitivas e reflexivas, podemos associar às estruturas modais temporais através da topologia canônica associada à ordem, uma estrutura topológica seguramente aparentada com feixes[1]. Desse modo, abre-se aqui a perspectiva de uma abordagem topológica ao tema.

[1] Veja-se TENNISON, B.R..

Referências Bibliográficas

1. CHANG, C.C. & KEISLER, H.J.. *Model Theory.* Amsterdam, North Holland, 1973.

2. HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M.J. *An Introduction to Modal Logic.* London, Methuen, 1968.

3. HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M.J. *A Companion to Modal Logic.* London, Methuen, 1984.

4. MENDELSON, ELLIOTT. *Introduction to Mathematical Logic.* California, Wadsworth, 1987.

5. CHELLAS, BRIAN F.. *Modal Logic: An Introduction.* Cambridge, Cambridge University Press, 1980.

6. GABBAY, D. e GUENTHNER F.. *Handbook of Philosophical Logic, Volume II: Extensions of Classical Logic.* Dordrecht, D. Reidel, 1984.

7. PRIOR, ARTHUR N.. *Time and Modality.* Oxford, Oxford University Press, 1957.

8. PRIOR, ARTHUR N.. *Past, Present and Future.* Oxford, Oxford University Press, 1967.

9. MATES, BENSON. *Lógica Elementar.* São Paulo, Editora Universidade de São Paulo, 1968.

10. HALMOS, PAUL R.. *Teoria Ingênua de Conjuntos.* São Paulo, Editora Polígono, 1970.

11. KURATOWSKI, K.. *Introduccion a la Teoria de Conjuntos y a la Topologia.* Barcelona, Editorial Vicens-Vives, 1966.

12. RESCHER, N. AND URQUHART, A.. *Temporal Logic.* Wien, Springer-Verlag, 1971.

13. LEMMON, E.J. AND SCOTT, D.S.. *The "Lemmon Notes" : An Introduction to Modal Logic.* Oxford, Blackwell, 1977.

14. LOPARIČ, A.M. AND MORTARI, C.A.. Valuations in Temporal Logic. *Journal of Non-Classical Logic, Volume II, Number I,* 49-60, 1983.

15. TENNISON, B.R.. *Sheaf Theory.* Cambridge, Cambridge University Press, 1975.

16. BELL, J.L. AND MACHOVER, M.. *A Course in Mathematical Logic.* Amsterdam, North Holland, 1977.