UMA NOVA ABORDAGEM PARA A NOÇÃO DE QUASE-VERDADE

Luiz Henrique da Cruz Silvestrini

Tese apresentada ao
Departamento de Filosofia do
Instituto de Filosofia e Ciências
Humanas da Universidade
Estadual de Campinas para
obtenção do grau de Doutor em
Filosofia (Área de Lógica).

Orientador: **Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio**

*Durante a elaboração deste
trabalho o autor recebeu apoio
financeiro da Capes*

Março de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP
Bibliotecária: Cecília Maria Jorge Nicolau CRB nº 3387

Silvestrini, Luiz Henrique da Cruz
Si39n **Uma Nova Abordagem para a Noção de Quase-Verdade / Luiz Henrique da Cruz Silvestrini. - - Campinas, SP : [s. n.], 2011.**

Orientador: Marcelo Esteban Coniglio.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Lógica matemática não-clássica. 2. Lógica simbólica e matemática. 3. Linguagens formais – Semântica. I. Coniglio, Marcelo Esteban. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III.Título.

Título em inglês: A New Approach to the Concept of Quasi-Truth

Palavras chaves em inglês (keywords) : **Nonclassical mathematical logic**
Symbolic and mathematical logic
Formal languages - Semantics

Área de Concentração: Filosofia

Titulação: Doutor em Filosofia

Banca examinadora: **Marcelo Esteban Coniglio, Hércules de Araújo Feitosa, Alexandre Costa-Leite, Juliana Bueno-Soler, Edélcio Gonçalves de Souza**

Data da defesa: 25-03-2011

Programa de Pós-Graduação: Filosofia

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Tese de Doutorado, em sessão pública realizada em 25 de março de 2011, considerou o candidato LUIZ HENRIQUE DA CRUZ SILVESTRINI aprovado.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora.

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio ________________

Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa ________________

Prof. Dr. Alexandre Fernandes Batista Costa-Leite ________________

Profa. Dra. Juliana Bueno Soler ________________

Prof. Dr. Edélcio Gonçalves de Souza ________________

Agradecimentos

Agradecemos a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho. De forma muito especial, queremos manifestar nossa gratidão:

- ao Prof. Marcelo Coniglio, pela orientação e pelas discussões profícuas que contribuíram para a exequibilidade deste trabalho;

- aos Profs. Walter Carnielli e Alexandre Costa-Leite, pelas inúmeras sugestões e conselhos;

- aos Profs. Hércules A. Feitosa, Juliana Bueno-Soler e Edélcio de Souza pelas valiosas contribuições;

- à Profa. Ítala D'Ottaviano, pela constante motivação para nosso crescimento acadêmico;

- ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia do IFCH - UNICAMP, ao CLE e à CAPES pela bolsa de doutorado concedida;

- aos colegas de pós, pelas conversas e também apoio, Newton, Samir, Ramon, Ricardo, Rafael, Leandro, Inês, Anderson...

- aos bibliotecários Eliana e Daniel do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência pela presteza na localização e empréstimo de materiais bibliográficos.

- aos meus pais Dirce e Carlos, exemplos de determinação, pela confiança que sempre depositaram em mim.

A todos vocês, muito obrigado.

"[...] indeed, even at this stage, I predict a time when there will be mathematical investigations of calculi containing contradictions, and people will actually be proud of having emancipated themselves from contradiction (WITTGENSTEIN, 1964, p. 332)."

Resumo

Mikenberg, da Costa e Chuaqui (1986) introduziram a noção de *quase-verdade* por meio da noção de *estruturas parciais*, e para tanto, conceberam os predicados como ternas. O arcabouço conceitual resultante proporcionou o emprego de estruturas parciais na ciência, pois, em geral, não sabemos tudo a respeito de um determinado domínio de conhecimento. Generalizamos a noção de predicados como ternas para fórmulas complexas. A partir desta nova abordagem, obtemos uma definição de quase-verdade via noção de *satisfação pragmática* de uma fórmula A em uma estrutura parcial E. Introduzimos uma lógica subjacente à nossa nova definição de quase-verdade, a saber, a lógica paraconsistente trivalente LPT1, a qual possui uma axiomática de primeira ordem. Relacionamos a noção de quase-verdade com algumas lógicas paraconsistentes já existentes. Defendemos que a formalização das Sociedades Abertas, introduzidas por Carnielli e Lima-Marques (1999), quando combinada com quantificadores modulados, introduzidos por Grácio (1999), constitui uma alternativa para capturar a componente indutiva presente na atividade científica, e mostramos, a partir disso, que a proposta original de da Costa e colaboradores pode ser explicada em termos da nova noção de sociedades moduladas.

Palavras-chave: Quase-verdade, Modelos parciais, Lógica paraconsistente, Semântica de sociedades, Quantificadores modulados, Base de dados evolutiva.

Abstract

Newton da Costa and his collaborators have introduced the notion of *quasi-truth* by means of *partial structures*, and for this purpose, they conceived the predicates as ordered triples: the set of tuples which satisfies, does not satisfy and can satisfy or not the predicate, respectively (the latter represents lack of information). This approach provides a conceptual framework to analyse the use of (first-order) structures in science in contexts of informational incompleteness. In this Thesis, the notion of predicates as triples is extended recursively to any complex formula of the first-order object language. From this, a new definition of quasi-truth via the notion of *pragmatic satisfaction* is obtained. We obtain the proof-theoretic counterpart of the logic underlying our new definition of quasi-truth, namely, the three-valued paraconsistent logic LPT1, which is presented axiomatically in a first-order language. We relate the notion of quasi-truth with some existing paraconsistent logics. We defend that the formalization of (open) society semantics when combined with the modulated quantifiers constitutes an alternative to capture the inductive component present in scientific activity, and show, from this, that the original proposal of da Costa and collaborators can be explained in terms of the new concept of modulated societies.

Keywords: Quasi-truth, Partial models, Paraconsistent logic, Society semantics, Modulated quantifiers, Evolutionary databases.

Sumário

Introdução

Inspirados por textos dos filósofos pragmáticos, como os de W. James e de C. S. Peirce, Newton da Costa e colaboradores desenvolveram uma teoria da verdade, a qual denominaram de quase-verdade ou verdade pragmática.

Nessa teoria, a quase-verdade é empregada como a concepção de verdade inerente às ciências empíricas, i.e., em domínios do conhecimento em que há conhecimento parcial, ou até mesmo conflitantes, por exemplo, em teorias incompatíveis entre si usadas na explicação de um determinado fenômeno.

Além disso, teorias contraditórias, em certas situações, poderão ser ambas quase-verdadeiras. E ainda, podemos dizer que, do ponto de vista informal, é intuitivo, pois, por exemplo, dentro de certas limitações, as teorias de Ptolomeu (teoria geocêntrica) e de Copérnico (teoria heliocêntrica) conduzem praticamente às mesmas previsões referentes à esfera celeste. De fato, do ponto de vista experimental, o sistema de Copérnico não era melhor do que o de Ptolomeu.

Uma das originalidades da concepção de quase-verdade reside no fato de que as estruturas, nas quais uma determinada linguagem é interpretada, deixam de ser estruturas totais, como no caso da teoria de Tarski, e tornam-se estruturas parciais. Nessa abordagem, uma teoria científica pode ser representada como uma classe de estruturas parciais.

A partir de uma estrutura parcial apropriada, podemos identificar suas estruturas normais com os mundos de uma estrutura de Kripke.

Em 1999, da Costa apresentou uma lógica modal para a quase-verdade que, posteriormente, foi reapresentada por Carlos Hifume (2003) com maiores detalhes e provando novos resultados. Todavia, tal lógica (axiomática modal) era estabelecida por meio de dois sistemas lógicos modais associados entre si, e estava apoiada pela noção de estruturas normais.

Newton da Costa e colaboradores (cf. [MdCC86] e [dCF03]) introduziram a noção de *quase-verdade* por meio de *estruturas parciais*, em que as relações envolvidas numa estrutura são parciais, ao invés de totais. Nesse sentido, a pertinência (ou não) de uma dada n-upla do domínio em tal relação não está sempre definida e, assim, as fórmulas atômicas são interpretadas como uma relação parcial R definida como uma terna ordenada de conjuntos $\langle R_+, R_-, R_u \rangle$ em que R_+ é o conjunto das n-uplas as quais efetivamente pertencem a R, R_- é o conjunto das n-uplas as quais efetivamente não pertencem a R, e R_u é o conjunto das n-uplas cuja pertinência a R é (ainda) indeterminada.

Desse modo, a abordagem dos "predicados como ternas" fornece um quadro conceitual para analisar o uso de estruturas (de primeira ordem) na ciência em contextos nos quais haja incompletude informacional. No presente trabalho, a noção de predicados como ternas é estendida recursivamente para toda fórmula complexa (i.e., não-atômica) da linguagem objeto de primeira ordem. Assim, a interpretação de cada fórmula φ, em uma estrutura parcial $\mathfrak{A}$, origina, indutivamente, uma tripla $\langle \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \rangle$, que generaliza a abordagem, para fórmulas atômicas, de da Costa e colaboradores.

Por outro lado, esta proposta generaliza a perspectiva clássica de uma dada fórmula de primeira ordem φ (com, no máximo, n variáveis livres), em uma estrutura $\mathfrak{A}$, vista como uma relação $R = \{\vec{a} \in D^n : \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]\}$, a qual é definida indutivamente. A partir disso, obtemos uma nova definição de quase-verdade via noção de *satisfação pragmática*. Em seguida, apresentamos um sistema hilbertiano de primeira ordem que é correto e completo para uma semântica obtida a partir da satisfação pragmática.

A fim de estabelecer uma formulação complementar da quase-verdade, Bueno e de Souza (cf. [BdS96]) introduziram uma definição diferente de quase-verdade, com o propósito de apresentar uma perspectiva filosófica distinta, no sentido de estabelecer uma estrutura para a noção de verdade de acordo com o empirismo e a dinâmica do desenvolvimento científico. Além disso, esta estratégia evitava a construção de estruturas "normais" e, para este fim, Bueno e de Souza apresentaram o conceito de quase-verdade por meio da noção de quase-satisfação.

Contudo, aquela tentativa de simplificar a matematização da quase-verdade não explicitava qual era a lógica subjacente apropriada. Além disso, apontamos para uma diferença formal entre esta definição de quase-verdade e a caracterização de da Costa e colaboradores. Em seguida, mostramos que a nossa proposta está mais próxima da noção original de da Costa e colaboradores de quase-verdade.

Surge, dessa maneira, a busca por uma nova abordagem para a quase-verdade, que possa, por um lado, estabelecer uma metodologia que permita obter lógicas com uma axiomática de primeira-ordem não modal, e por outro lado, evitar a construção de estruturas normais.

Os objetivos dessa Tese são: (1) generalizar a definição de quase-verdade de da Costa e colaboradores; (2) determinar a lógica subjacente à nossa nova definição de quase-verdade; (3) relacionar a noção de quase-verdade com algumas lógicas paraconsistentes já existentes, a saber, a LFI1 (a lógica dos bancos de dados evolutivos, abordada em [CMdA00]) e a P^1 (a lógica da semântica de sociedades abertas, abordada em [CLM99]); (4) defender que a formalização das semânticas de sociedades, quando combinada com tipos específicos de quantificadores generalizados, constitui uma alternativa para capturar a componente indutiva presente na atividade científica, além de possibilitar uma nova formalização para a noção de quase-verdade.

A estrutura da Tese está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 1, propomos uma noção de quase verdade que generaliza a de Mikenberg, da Costa e Chuaqui, assim como a noção de verdade de Tarski, por meio da noção de satisfação pragmática. No Capítulo 2, apresentamos as principais contribuições técnicas da Tese: a obtenção de uma lógica proposicional paraconsistente LPT, com uma semântica trivalente, que representa a parte proposicional da lógica da verdade pragmática, proposta no Capítulo 1. Por outro lado, provamos que a sua versão de primeira ordem, LPT1, é correta e completa com relação à noção de consequência pragmática. Dessa maneira, introduzimos, axiomaticamente, uma lógica da quase-verdade.

O Capítulo 3 é de natureza especulativa. Introduzimos uma combinação da teoria de semântica de sociedades com a de quantificadores modulados, com o intuito de aplicar estas estruturas, chamadas de sociedades moduladas, na teoria da quase-verdade. Com efeito, mostraremos que a proposta original de Mikenberg, da Costa e Chuaqui pode ser explicada em termos de sociedades moduladas.

No Capítulo 4, com os resultados obtidos nos capítulos anteriores, sugerimos que a teoria original da quase-verdade proposta por Mikenberg, da Costa e Chuaqui pode estar baseada na lógica paraconsistente trivalorada P^1 introduzida por M. Sette. Por outro lado, com as técnicas do Capítulo 2, provamos que a proposta da lógica da quase-verdade de Bueno e de Souza está baseada na lógica clássica, o que a tornaria pouco apropriada para a manipulação de informações parciais e/ou inconsistentes, típicas no contexto das teorias da quase-verdade.

Finalmente, apresentamos em um breve capítulo as considerações finais sobre a presente Tese, assim como as possíveis linhas de pesquisa futuras a partir dos resultados aqui obtidos.

Usaremos $\blacksquare$ para indicar o fim das definições ou observações e, para indicar fim da demonstração, utilizaremos $\square$. Usaremos, ainda, 'sse' para a abreviação de "... se, e somente se, ..." da metalinguagem, bem como o símbolo $\therefore$ para denotar conclusão, o qual pode ser lido como 'portanto'.

As definições, proposições, lemas, teoremas, corolários e observações serão numeradas por seção e capítulo. Por exemplo: "Definição 3.1.2" refere-se a

Definição 2, da Seção 1, do Capítulo 3.

Capítulo 1

Generalizando o Conceito de Quase-Verdade

Apresentaremos, neste capítulo, o conceito de *quase-verdade* ou *verdade pragmática* introduzida por Newton da Costa e seus colaboradores [MdCC86] como uma estrutura formal para representar o conceito de verdade no contexto da Filosofia da Ciência. De fato, a quase-verdade pode ser vista como uma concepção pragmática de verdade. Embora da Costa e seus colaboradores não estejam preocupados em promover uma exegese da posição de C. S. Peirce (1839 – 1914), o criador do pragmatismo, podemos dizer que a definição dada por eles apreende aspectos relevantes e significativos da posição peirciana [Abe91] e, portanto, se estabelece como uma teoria da verdade pragmática [Hif03].

Uma das originalidades da concepção de quase-verdade reside no fato de que as estruturas, nas quais uma determinada linguagem é interpretada, deixam de ser estruturas totais, como no caso da teoria de Tarski, e tornam-se estruturas parciais. Dessa maneira, segundo Vickers (2009), uma teoria científica pode ser representada, por meio desta formalização, como uma classe de estruturas parciais (cf. [Vic09], p. 233).

Mostraremos como a teoria de modelos da quase-verdade está relacionada com a semântica de banco de dados evolutivos introduzida em [CMdA00]. Além disso, a relação entre a abordagem original de da Costa e colaboradores e a formalização da quase-verdade proposta por Bueno e de Souza [BdS96] também será estudada.

Estenderemos, recursivamente, a noção utilizada por da Costa e colaboradores de predicados como triplas ou ternas ordenadas, para toda fórmula complexa (não-atômica) da linguagem objeto de primeira ordem. Assim, a interpretação de cada fórmula φ origina, indutivamente, em uma estrutura parcial $\mathfrak{A}$, uma tripla $\langle \varphi_{+}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{-}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{u}^{\mathfrak{A}} \rangle$. A partir desta generalização, introduziremos uma nova definição de quase-verdade via noção de *satisfação pragmática*.

1.1 Formalizações da quase-verdade

Como podemos fornecer uma maneira de acomodar a incompletude conceitual e a natureza parcial inerentes às representações científicas? Para esta abertura e parcialidade da atividade científica, Newton C. A. da Costa e seus colaboradores apresentaram uma resposta contundente ao introduzirem a noção de *estruturas parciais* numa abordagem modelo-teorética.

As estruturas parciais são obtidas de uma maneira natural, porque quando estudamos um determinado domínio do conhecimento Δ, podemos começar por caracterizá-lo por meio de uma estrutura conjunto-teorética $\mathfrak{A}$. Dado que, em geral, não sabemos tudo sobre Δ, $\mathfrak{A}$ deve ser normalmente uma estrutura que reflita nosso conhecimento parcial e entendimento do mundo (see [dCF03] e [MdCC86]).

Nesse sentido, não podemos dizer com certeza que uma teoria particular sob este domínio Δ é verdadeira. Contudo, podemos dizer que, na medida em que nosso conhecimento sobre Δ nos permite, a teoria é verdadeira pragmaticamente, ou seja, ela é *quase-verdadeira*. Assim, o conceito de quase-verdade (ou *verdade pragmática*) foi introduzido por da Costa e colaboradores como uma estrutura formal para representar o conceito de verdade no contexto da

Filosofia da Ciência.

De acordo com da Costa e French [dCF03], a ciência pode ser melhor entendida em termos da busca por teorias quase-verdadeiras, isto é, teorias as quais descrevem parcialmente os fenômenos que elas supostamente acomodam, mas não capturam, em cada detalhe, todos os seus aspectos. A noção de quase-verdade de da Costa é, de fato, uma generalização da noção de verdade de Tarski em uma estrutura para contextos parciais, como mostrado em [MdCC86].

Nesta seção, apresentaremos nossa descrição da teoria de modelos da quase-verdade e, então, relacionaremos nossa abordagem à respectiva formalização da mesma de acordo com Bueno-de Souza (cf. [BdS96]). Para este fim, iniciamos nossa descrição pelo conceito de *relação parcial*, o qual é necessário para a formalização da verdade pragmática. Em seguida, apresentaremos a definição de *estrutura parcial*, e descrevemos a relação entre a noção de quase-verdade de da Costa e colaboradores e a verdade tarskiana, por meio do conceito de *estruturas normais* ou *totais*.

Por fim, pretendemos obter estruturas normais apropriadas, i.e., estruturas totais que preservam cada informação que conhecemos, corroboradas empiricamente ou, ao menos, aceita como verdadeira. Em outras palavras, a fim de restringir as extensões aceitáveis de uma estrutura parcial $\mathfrak{A}$, uma vez que pode haver muitas estruturas normais geradas a partir de $\mathfrak{A}$, precisamos de uma noção auxiliar adicional, a saber, o conceito de *estrutura pragmática*.

Agora, apresentaremos algumas definições preliminares para, em seguida, introduzir a quase-verdade de acordo com [dCF03] e [MdCC86].

Neste trabalho, apresentaremos, por vezes, os resultados no nível de uma teoria geral de relações de consequência. Seja $\wp(A)$ o conjunto das partes A. De modo usual, dado um conjunto For de fórmulas, dizemos que $\vdash \subseteq \wp(For) \times For$ define uma *relação de consequência usual ou standard*, aqui denotada por S-relação de consequência sobre For, se as cláusulas seguintes valem, para toda escolha de fórmulas α e β, e de subconjuntos Δ e Γ de For

(lembramos ainda que fórmulas e vírgulas do lado esquerdo de $\vdash$ denotam, como usual, conjuntos e uniões de conjuntos de fórmulas):

(C_1) $\alpha \in \Gamma$ implica $\Gamma \vdash \alpha$ (reflexividade)

(C_2) $(\Delta \vdash \alpha$ e $\Delta \subseteq \Gamma)$ implica $\Gamma \vdash \alpha$ (monotonicidade)

(C_3) $(\Delta \vdash \alpha$ e $\Gamma, \alpha \vdash \beta)$ implica $\Delta, \Gamma \vdash \beta$ (corte)

Desse modo, uma S-lógica $\mathcal{L}$ será definida simplesmente como uma estrutura da forma $\langle For, \vdash \rangle$, a qual apresenta um conjunto de fórmulas For e uma S-relação de consequência $\vdash$ definida sobre este conjunto.

Uma propriedade adicional de uma lógica que será utilizada neste trabalho é a *derivabilidade finita*. Seja Γ_0 um subconjunto finito de Γ, então definimos:

(C_4) $\Gamma \vdash \alpha$ implica $\Gamma_0 \vdash \alpha$, para algum finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ (compacidade)

Assumiremos que a linguagem de toda lógica $\mathcal{L}$ é definida sobre uma *assinatura* $\Sigma = \{\Sigma_n\}_{n\in\omega}$, em que Σ_n é o conjunto de conectivos de aridade n. Assumiremos ainda que $\mathcal{V} = \{p_n : n \in \omega\}$ é o conjunto de *variáveis proposicionais* (ou fórmulas atômicas) a partir do qual geramos a álgebra For de fórmulas através de Σ. A linguagem obtida de Σ será denotada por $\mathbb{L}_\Sigma$.

A abreviatura CPC denota o Cálculo Proposicional Clássico. Por sua vez, CPC^+ denota o fragmento positivo de CPC.

Consideraremos também linguagens de primeira ordem, definidas sobre uma assinatura proposicional, substituindo o conjunto $\mathcal{V}$ de variáveis proposicionais por famílias de símbolos de predicados, símbolos de função (ambos com a sua respectiva aridade), e símbolos de constantes, com um conjunto fixo de variáveis de indivíduo. As noções de variável *livre* e variável *ligada* são definidas de modo usual. As fórmulas da forma $P(\tau_1, ..., \tau_n)$ (dado P um símbolo de predicado n-ário e τ_i termos) são chamadas de atômicas. Quando não houver risco de confusão, denotaremos também por For o conjunto das fórmulas de primeira ordem.

Dada uma assinatura de primeira ordem baseada nos conectivos $\neg$, $\rightarrow$ e $\wedge$, a função *complexidade* é a função $\ell : For \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como segue:

1. $\ell(\alpha) = 1$, para α atômica;

2. $\ell(\neg\alpha) = \ell(\alpha) + 1$;

3. $\ell(\alpha\#\beta) = \ell(\alpha) + \ell(\beta) + 1$, em que $\# \in \{\wedge, \rightarrow\}$;

4. $\ell(\forall x(\alpha)) = \ell(\alpha) + 1$.

Previamente, lembramos da definição usual, ou tarskiana, de estruturas de primeira ordem. Um dos principais aspectos da caracterização de verdade de Tarski é que uma sentença de uma linguagem $\mathbb{L}$ é verdadeira ou falsa somente relativo a uma interpretação em uma dada estrutura.

Definição 1.1.1. Dada uma linguagem $\mathbb{L} = \mathbb{L}_\Sigma$, definimos uma *estrutura tarskiana* para $\mathbb{L}$, ou uma *interpretação* para $\mathbb{L}$, ou um *modelo* para $\mathbb{L}$, como sendo um par $\mathfrak{A} = \langle A, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$, em que A é um conjunto não-vazio (chamado de domínio de $\mathfrak{A}$ e denotado por $|\mathfrak{A}|$) e $(\cdot)^{\mathfrak{A}}$ é uma função definida em Σ da seguinte forma:

(i) a cada símbolo de predicado n-ário P de $\mathbb{L}$, $n \geq 1$, temos que $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$;

(ii) a cada símbolo de função n-ária f de $\mathbb{L}$, $n \geq 1$, temos que $f^{\mathfrak{A}} : A^n \longrightarrow A$;

(iii) a cada constante c de $\mathbb{L}$, $c^{\mathfrak{A}} \in A$. ■

Agora, se considerarmos, por exemplo, os conectivos lógicos $\neg, \wedge, \rightarrow$ e o quantificador universal $\forall$ no alfabeto da linguagem $\mathbb{L}$, podemos definir, por recursão na complexidade da fórmula α, a noção de satisfatibilidade usual.

Definição 1.1.2. Sejam $\alpha(x_1, ..., x_n)$ uma fórmula, $\mathfrak{A}$ uma estrutura tarskiana e $\vec{a}$ uma sequência em $|\mathfrak{A}|$. Dizemos que $\vec{a}$ *satisfaz* α em $\mathfrak{A}$, denotado por $\mathfrak{A} \vDash \alpha[\vec{a}]$, quando:

1. α é $P(\tau_1, ..., \tau_n)$ atômica; então $\mathfrak{A} \vDash P(\tau_1, ..., \tau_n)[\vec{a}]$ sse $(\tau_1[\vec{a}], ..., \tau_n[\vec{a}]) \in P^{\mathfrak{A}}$;

2. α é $\neg\beta$; então $\mathfrak{A} \vDash \neg\beta[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{A} \nvDash \beta[\vec{a}]$;

3. α é $(\beta \wedge \lambda)$; então $\mathfrak{A} \vDash (\beta \wedge \lambda)[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{A} \vDash \beta[\vec{a}]$ e $\mathfrak{A} \vDash \lambda[\vec{a}]$;

4. α é $(\beta \rightarrow \lambda)$; então $\mathfrak{A} \vDash (\beta \rightarrow \lambda)[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{A} \nvDash \beta[\vec{a}]$ ou $\mathfrak{A} \vDash \lambda[\vec{a}]$;

5. α é $\forall x(\beta)$. Seja y a primeira variável livre para x em β, que não pertence a $\{x_1, ..., x_n\}$; então $\mathfrak{A} \vDash \forall x(\beta)[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{A} \vDash \beta^x_y[a, \vec{a}]$, para todo $a \in |\mathfrak{A}|$. ∎

A partir de agora, definiremos uma noção central para a quase-verdade, qual seja, a de estrutura parcial.

Definição 1.1.3. Seja D um conjunto não-vazio. Uma *relação parcial* n-ária R definida sobre D é uma tripla ordenada $\langle R_+, R_-, R_u \rangle$, em que R_+, R_-, e R_u são conjuntos mutuamente disjuntos, e $R_+ \cup R_- \cup R_u = D^n$ tal que:

(i) R_+ é o conjunto das n-uplas que sabemos que pertencem a R;

(ii) R_- é o conjunto das n-uplas que sabemos que não pertencem a R;

(iii) R_u é o conjunto das n-uplas para as quais não está definido se elas pertencem ou não a R, i.e., é indeterminado se elas estão ou não na relação R. ∎

Observação 1.1.4. Se $R_u = \emptyset$, então R é uma relação n-ária usual a qual pode ser identificada com R_+. Além disso, neste caso, R é uma *relação total.* ∎

A definição a seguir desempenhará um papel central na teoria da quase-verdade, pois como veremos adiante, em especial no Capítulo 4, ela possibilitará acomodar a parcialidade informacional encontrada na prática científica, sobretudo na ciência empírica.

Definição 1.1.5. Uma *estrutura parcial* para uma linguagem de primeira ordem L, ou um *modelo parcial* para L, é um par ordenado $\mathfrak{A} = \langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$, em que D é um conjunto não-vazio e $(\cdot)^{\mathfrak{A}}$ é uma função definida sobre L tal que para cada relação n-ária R,

$$R^{\mathfrak{A}} = \langle R_+^{\mathfrak{A}}, R_-^{\mathfrak{A}}, R_u^{\mathfrak{A}} \rangle$$

i.e., as relações e operações estão definidas para alguns dos elementos do domínio D. Ademais, $c^{\mathfrak{A}} \in D$ para cada constante c. ∎

Observação 1.1.6. Se todas as relações e operações estão definidas sobre todos os elementos do domínio, então a estrutura parcial $\mathfrak{A}$ é uma *estrutura total.* Ou seja, todas as relações e funções n-árias sobre D estão definidas sobre todas as n-uplas de elementos de D. ∎

Agora, a fim de se estabelecer uma relação com a verdade *à lá* Tarski, da Costa e colaboradores introduziram a noção de estrutura $\mathfrak{A}$-normal, a qual estende uma relação parcial $\mathfrak{A}$ a uma total.

Definição 1.1.7. Seja $\mathfrak{A} = \langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$ uma estrutura parcial. Dizemos que uma estrutura de primeira ordem clássica $\mathfrak{B} = \langle D', (\cdot)^{\mathfrak{B}} \rangle$, no sentido da Definição 1.1.1, é uma estrutura $\mathfrak{A}$-*normal* se

0. $\mathfrak{B}$ tem o mesmo tipo de similaridade que $\mathfrak{A}$;

1. $D' = D$.

2. Toda constante da linguagem em questão é interpretada pelo mesmo objeto nas estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

3. R_j' em $\mathfrak{B}$ estende a relação correspondente R_j em $\mathfrak{A}$. Ou seja, R_j' é uma relação total e, portanto, definida para toda n-upla de objetos do seu domínio, tal que $(R_j)_+ \subseteq R_j'$.

■

Para gerar estruturas normais convenientes, ou ainda, a fim de restringir as possíveis extensões de $\mathfrak{A}$, uma vez que podem existir muitas estruturas $\mathfrak{A}$-normais construídas a partir de $\mathfrak{A}$, necessitamos da seguinte noção auxiliar.

Definição 1.1.8. Uma *estrutura pragmática* é uma tripla $\mathfrak{A} = \langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}}, \Omega \rangle$, em que D é um conjunto não-vazio, $(R_j)_{j \in J}$ é uma família de relações parciais definida sobre D, e Ω é um conjunto de sentenças fechadas da linguagem L de mesmo tipo de similaridade que em $\mathfrak{A}$. ■

Na definição anterior, Ω denota o conjunto de sentenças *primárias* verdadeiras, pois é constituído de enunciados que pertencem ao diagrama de $\mathfrak{A}$, i.e., ao conjunto de sentenças de $L(\mathfrak{A})$ as quais são aceitas como sendo verdadeiras ou como sendo falsas. Do ponto de vista empírico, tais sentenças estão baseadas na experiência, ou foram instituídas por investigações anteriores. Por exemplo, tais sentenças podem denotar certas leis de um determinado domínio de conhecimento.

Uma condição para a existência de estruturas $\mathfrak{A}$-normais, entretanto, consiste em requerer que a extensão seja feita de tal forma que ela seja consistente com certas sentenças aceitas α em Ω, e isso fornece, de fato, uma restrição para as possíveis extensões. Apresentaremos, agora, as condições necessárias e suficientes para a existência de estruturas $\mathfrak{A}$-normais, dadas em ([MdCC86], p. 204), e em ([dCB99], p. 218).

Lema 1.1.9. Dada uma estrutura pragmática $\mathfrak{A}$, uma condição para a existência de estruturas $\mathfrak{A}$-normais é estabelecida da seguinte maneira:

(a) Seja $\mathfrak{A} = \langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}}, \Omega \rangle$ uma estrutura pragmática;

(b) Para cada relação parcial R_j, construímos um conjunto W_j de sentenças atômicas e de negações de sentenças atômicas, de forma que as primeiras correspondam às n-uplas que satisfazem R_j, e as segundas àquelas n-uplas que não satisfazem R_j;

(c) Seja $W = \cup_{j \in \omega} W_j$;

(d) Uma estrutura pragmática $\mathfrak{A}$ admite uma estrutura $\mathfrak{A}$-normal se, e somente se, o conjunto $W \cup \Omega$ é consistente.

Demonstração. Ver Mikenberg, da Costa e Chuaqui (1986). $\square$

Por exemplo, consideremos uma estrutura pragmática $\mathfrak{A} = \langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}}, \Omega \rangle$, em que R_j é composta unicamente pela relação parcial binária P. Assim, pela definição de relação parcial, P é uma terna composta de P_+, P_- e P_u, onde P_+ corresponde aos pares ordenados que pertencem a P, P_- corresponde aos pares ordenados que não pertencem a P e Pu são os pares ordenados que não sabemos se pertencem ou não a P. Agora:

- Associemos a relação parcial P ao predicado M, ou seja, $I(P) = M$.

- Sejam a, b, c, ... elementos de D.
- Sejam $P_+ = \{(e,b)\}$ e $P_- = \{(e,d),(e,c)\}$.
- Pelo critério de condição de existência, construímos um conjunto W_j de sentenças atômicas e de negações de sentenças atômicas:

  De P_+, obtemos: $\{M(e,b)\}$;

  De P_-, obtemos: $\{\neg M(e,d), \neg M(e,c)\}$.
- Então, $W_j = M_2 = \{M(e,b), \neg M(e,d), \neg M(e,c)\}$.
- Logo, $W = \cup_{j\in\omega} W_j = M_2$.

Portanto, a estrutura pragmática $\mathfrak{A}$ admite uma estrutura $\mathfrak{A}$-normal se o conjunto $W \cup \Omega$ é consistente, ou seja, se pelo menos a parte "conhecida" da família de relações parciais é consistente com o conjunto Ω.

Na definição a seguir, supomos que uma estrutura $\mathfrak{A}$-normal satisfaz classicamente Ω.

Definição 1.1.10. Sejam $\mathfrak{A}$ uma estrutura pragmática e α uma sentença. Dizemos que:

(i) α é *quase-verdadeira* em $\mathfrak{A}$ com respeito a uma estrutura $\mathfrak{A}$-normal $\mathfrak{B}$ se $\mathfrak{B} \models \alpha$, i.e., α é verdadeira em $\mathfrak{B}$ no sentido tarskiano (ver Definição 1.1.2). Denotamos isto por $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathfrak{B}} \alpha$.

(ii) α é *quase-verdadeira* em $\mathfrak{A}$ se $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathfrak{B}} \alpha$ para alguma estrutura $\mathfrak{A}$-normal $\mathfrak{B}$. Notação: $\mathfrak{A} \Vdash \alpha$. Ou seja, existe uma estrutura total ($\mathfrak{A}$-normal) $\mathfrak{B}$ tal que α é verdadeira no sentido tarskiano. Caso contrário, α é *quase-falsa*.

(iii) α é *verdadeira* em $\mathfrak{A}$ se $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathfrak{B}} \alpha$ para toda estrutura $\mathfrak{A}$-normal $\mathfrak{B}$. Notação: $\mathfrak{A} \approx \alpha$. ■

Observação 1.1.11. Podemos ter $\mathfrak{A} \Vdash \alpha$ e $\mathfrak{A} \Vdash \neg\alpha$. De fato podem existir estruturas $\mathfrak{A}$-normais $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ tais que $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathfrak{C}} \alpha$ e $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathfrak{C}'} \neg\alpha$. Contudo, neste caso, $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}'$. A partir desta observação, mostramos que a relação $\Vdash$ pode ser contraditória, contudo, pelo fato de serem obtidas por estruturas totais distintas, pois $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}'$, a relação $\Vdash$ é paraconsistente. De fato, como veremos nas seções seguintes, a lógica subjacente será paraconsistente. ∎

Assumimos a linguagem L definida de modo usual, como na lógica de primeira ordem clássica. Além disso, a partir de agora usaremos $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ para *termos fechados*.

Lema 1.1.12. Seja R um símbolo de predicado n-ário e suponha $\Omega = \emptyset$.

(i) $\exists \mathfrak{B} : \mathfrak{A} \Vdash_{\mathfrak{B}} R(\tau_1, ..., \tau_n) \quad \text{sse} \quad (\tau_1^{\mathfrak{A}}, ..., \tau_n^{\mathfrak{A}}) \in R_+^{\mathfrak{A}} \cup R_u^{\mathfrak{A}}$;

(ii) $\exists \mathfrak{B} : \mathfrak{A} \Vdash_{\mathfrak{B}} \neg R(\tau_1, ..., \tau_n) \quad \text{sse} \quad (\tau_1^{\mathfrak{A}}, ..., \tau_n^{\mathfrak{A}}) \in R_-^{\mathfrak{A}} \cup R_u^{\mathfrak{A}}$

Demonstração. (i) e (ii) seguem da Definição 1.1.10 e por meio da noção de satisfação clássica. □

A partir do lema anterior, podemos explicitar as propriedades da relação $\Vdash$.

Teorema 1.1.13. Seja R um símbolo de predicado n-ário.

(#1) $\mathfrak{A} \Vdash R(\tau_1, ..., \tau_n) \quad \text{sse} \quad (\tau_1^{\mathfrak{A}}, ..., \tau_n^{\mathfrak{A}}) \in R_+^{\mathfrak{A}} \cup R_u^{\mathfrak{A}}$;

(#2) $\mathfrak{A} \Vdash \neg R(\tau_1, ..., \tau_n) \quad \text{sse} \quad (\tau_1^{\mathfrak{A}}, ..., \tau_n^{\mathfrak{A}}) \in R_-^{\mathfrak{A}} \cup R_u^{\mathfrak{A}}$;

(#3) $\mathfrak{A} \Vdash \alpha \wedge \beta$ implica $\mathfrak{A} \Vdash \alpha$ e $\mathfrak{A} \Vdash \beta$;

(#4) $\mathfrak{A} \nVdash \alpha$ implica $\mathfrak{A} \Vdash \neg\alpha$;

(#5) $\mathfrak{A} \Vdash \alpha \vee \beta$ sse $\mathfrak{A} \Vdash \alpha$ ou $\mathfrak{A} \Vdash \beta$;

(#6) $\mathfrak{A} \Vdash \alpha \to \beta$ sse $\mathfrak{A} \Vdash \neg\alpha$ ou $\mathfrak{A} \Vdash \beta$;

(#7) $\mathfrak{A} \Vdash \forall x(\alpha)$ implica $\mathfrak{A} \Vdash \alpha(a)$, para toda a.

Demonstração. Estes itens seguem da Definição 1.1.10 e do Lema 1.1.12. □

Por outro lado, a relação $\models\!\!\approx$ satisfaz as seguintes propriedades:

Teorema 1.1.14. Seja R um símbolo de predicado n-ário.

(1) $(\tau_1^{\mathfrak{A}}, ..., \tau_n^{\mathfrak{A}}) \in R_+^{\mathfrak{A}}$ implica $\mathfrak{A} \models\!\!\approx R(\tau_1, ..., \tau_n)$;

(2) $(\tau_1^{\mathfrak{A}}, ..., \tau_n^{\mathfrak{A}}) \in R_-^{\mathfrak{A}}$ implica $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \neg R(\tau_1, ..., \tau_n)$;

(3) $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \neg\alpha$ sse $\mathfrak{A} \nVdash \alpha$;

(4) $\mathfrak{A} \not\models\!\!\approx \alpha$ sse $\mathfrak{A} \Vdash \neg\alpha$;

(5) $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \alpha \wedge \beta$ sse $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \alpha$ e $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \beta$;

(6) $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \alpha$ ou $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \beta$ implica $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \alpha \vee \beta$;

(7) $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \neg\alpha$ ou $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \beta$ implica $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \alpha \to \beta$;

(8) $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \forall x(\alpha)$ sse $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \alpha(a)$, para toda a.

Demonstração. Estes itens seguem da Definição 1.1.10. □

Observação 1.1.15. Pelos teoremas anteriores é fácil observar que $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \alpha$ implica $\mathfrak{A} \Vdash \alpha$, mas a recíproca não é válida. Por outro lado, podemos ter $\mathfrak{A} \Vdash \alpha \wedge \neg\alpha$, por exemplo para α atômica, porém nunca é possível ter $\mathfrak{A} \models\!\!\approx \alpha \wedge \neg\alpha$, ou seja, a relação $\models\!\!\approx$ não é paraconsistente. ■

Bueno e de Souza (cf. [BdS96]) introduzem uma definição diferente de quase-verdade com o objetivo de apresentar uma perspectiva filosófica distinta da versão de da Costa e colaboradores, no sentido de estabelecer um arcabouço para a noção de verdade de acordo com o empirismo e a dinâmica do conhecimento científico.

A estratégia de Bueno-de Souza evita construir as estruturas totais (e o conjunto associado Ω) e introduz o conceito de quase-verdade por meio da noção de *quase-satisfação*. Nesta nova definição de quase-verdade, destacaremos uma diferença formal com a caracterização de da Costa.

De acordo com Bueno-de Souza, a noção de quase-satisfação é dada *mutatis mutandis* pela noção tarskiana de satisfação. O ponto principal desta definição consiste na condição de ser uma fórmula atômica, porque neste caso o componente R_u da estrutura parcial é usado.

Agora, descreveremos a definição de quase-satisfação de acordo com Bueno-de Souza (cf. [BdS96], p. 192) e, em seguida, enunciamos a noção de quase-verdade.

Definição 1.1.16. Sejam $\varphi(x_1, ..., x_n)$ uma fórmula, $\langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$ uma estrutura parcial, e $\vec{a}$ uma sequência em D. Dizemos que $\vec{a}$ *quase-satisfaz* φ em $\langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$ se

(1) Suponhamos que φ é a fórmula atômica $R(\tau_1, ..., \tau_k)$, em que R é um símbolo de relação k-ária, então $\vec{a}$ quase-satisfaz φ em $\langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$ sse

$$(\tau_1^{\mathfrak{A}}[\vec{a}], ..., \tau_k^{\mathfrak{A}}[\vec{a}]) \in R_+^{\mathfrak{A}} \cup R_u^{\mathfrak{A}}$$

(2) $\vec{a}$ quase-satisfaz $\neg\psi$ em $\langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$ sse $\vec{a}$ não quase-satisfaz ψ em $\langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$.

(-) Esta definição continua *mutatis mutandis* a noção clássica de satisfação. ■

Definição 1.1.17. Uma fórmula φ é *quase-verdadeira* em $\langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$ sse φ é quase-satisfeita em $\langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$ por todas as sequências em $|\mathfrak{A}|$. Denotamos isto por $\mathfrak{A} \Vdash \varphi[\vec{a}]$, para toda $\vec{a}$. ■

Teorema 1.1.18. Sejam R um símbolo de predicado n-ário e $\mathfrak{A}$ uma estrutura parcial. Então:

(∇1) $\mathfrak{A} \models R(\tau_1, ..., \tau_n)[\vec{a}] \quad \text{sse} \quad (\tau_1^{\mathfrak{A}}[\vec{a}], ..., \tau_n^{\mathfrak{A}}[\vec{a}]) \in R_+^{\mathfrak{A}} \cup R_u^{\mathfrak{A}}$;

(∇2) $\mathfrak{A} \models \neg R(\tau_1, ..., \tau_n)[\vec{a}] \quad \text{sse} \quad (\tau_1^{\mathfrak{A}}[\vec{a}], ..., \tau_n^{\mathfrak{A}}[\vec{a}]) \in R_-^{\mathfrak{A}}$.

Demonstração. Estes itens se seguem da definição 1.1.16 e de estrutura parcial. □

De acordo com o exposto acima, existe uma diferença formal entre a definição de quase-verdade, introduzida por da Costa e colaboradores e aquela apresentada por Bueno e de Souza. De fato, basta verificarmos os itens (#2) e (∇2). Uma interpretação filosófica e um problema, a partir do nível formal na definição de quase-satisfação, serão estabelecidos na Seção 4.3.

A fim de recuperarmos a indeterminação (componente R_u) para as fórmulas atômicas negadas, e preservarmos a proposta original de da Costa e colaboradores, introduziremos a noção de satisfação pragmática. A partir desta nova definição, inspirados na proposta de Bueno e de Souza de evitar a construção de estruturas $\mathfrak{A}$-normais, iremos usar apenas estruturas parciais e, neste caso, poderemos admitir que $\Omega = \emptyset$. Além disso, diferentemente de Bueno e de Souza, conseguimos estabelecer uma lógica subjacente à nossa nova definição de quase-verdade, como veremos no Capítulo 2.

1.2 Sobre bancos de dados evolutivos

Nesta seção, apresentaremos uma semântica formal para banco de dados evolutivos proposta por Carnielli et al. (2000) e, em seguida, relacionaremos esta abordagem com nossa definição de quase-verdade.

Primeiramente, um banco de dados relacional será considerado aqui como uma coleção finita de relações finitas nas quais a informação é armazenada. Ademais, ele apresenta sentenças, as chamadas *restrições de integridade*, cujo papel é introduzir com segurança alguma informação no sistema, de maneira que contradições sejam evitadas. Contudo, duas bases de dados locais podem ser mutuamente contraditórias. Um banco de dados pode ser atualizado, i.e., algumas informações poderão ser adicionadas, modificadas ou removidas por meio de suas relações. Neste sentido, tais bancos de dados são chamados *bancos de dados evolutivos*.

Adicionar, remover ou modificar informações num banco de dados, especialmente para que este conjunto de informações se mantenha consistente, pode ser visto como operações que fazem parte de uma especialidade da Inteligência Artificial conhecida como Revisão de Crença e que tem sido amplamente estudada.

Esta teoria teve como fundamento a necessidade de modelar o comportamento de bases de conhecimento dinâmicas, que ao receberem uma nova informação se tornam inconsistentes (cf. [Gär88]). A maior parte da literatura na área é baseada nos trabalhos de Alchourrón, Gärdenfors e Makinson (cf. [AGM85]), que propuseram postulados para descrever as propriedades formais que um processo de revisão deve obedecer.

A teoria de revisão de crenças baseia-se nos chamados *estados epistêmicos*, que podem ser representados, por exemplo, por meio da noção de *mundos possíveis*. Um dos princípios fundamentais desta teoria é o chamado Princípio da Mudança Mínima, que consiste no fato de que uma mudança no conjunto original de crenças seja a menor possível, ou seja, deve-se reter o máximo possível de informação.

Ao considerarmos um conjunto de informações de um banco de dados como um conjunto de crenças da teoria de revisão de crenças, podemos correlacionar a manipulação das informações em um banco de dados com as operações da teoria de revisão de crenças.

De fato, com relação às operações envolvidas, a *expansão* consiste em adicionar uma crença α e todas as suas consequências lógicas ao conjunto K de crenças; a *contração* abandona uma crença α e possivelmente outras crenças que impliquem em α; e por fim, a *revisão* indica que após uma crença ser acrescentada ao conjunto K, a fim de manter a consistência do conjunto, pode ser necessário abandonar outras crenças de K.

Aqui, defendemos o uso de alguns sistemas lógicos paraconsistentes que mais do que permitir modificações/revisões num banco de dados, esses sistemas possuem a capacidade de empregar as restrições de integridade, como dissemos antes e, assim, uma informação é adicionada com muito mais segurança na base de dados.

Nesse sentido, os sistemas lógicos introduzidos em [CMdA00], que axiomatizam uma representação formal de inconsistência (naquele trabalho considerada equivalente à contradição) na lógica clássica, são considerados como ferramentas convenientes para a manipulação de informação num ambiente de banco de dados relacional.

Esta abordagem permite não apenas que dados inconsistentes sejam representados e manipulados, mas também que novas restrições de integridade sejam adicionadas, as quais poderiam mudar o estado dos dados já armazenados.

Estes sistemas formais são apresentados por meio de duas axiomáticas corretas e completas, a saber, LFI1 e LFI2, as quais são exemplos do que Carnielli e Marcos (2002) chamam de *Lógicas de Inconsistência Formal*, ou simplesmente LFIs, como empregado na sigla em inglês.

As LFIs, introduzidas em [CM02], foram, posteriormente, estudadas em [Mar05] e [CCM07]. Neste último artigo, os aspectos semânticos destas lógicas são abordados em detalhes.

Nos sistemas lógicos clássicos, não há distinção entre contradição e outras formas de inconsistência. Assim, adota-se o preceito básico de que contradições, em uma teoria, equivalem a trivialização dedutiva. Este fato também é denominado de Princípio de Explosão, e será formalizado mais à frente.

Por outro lado, as LFIs determinam uma classe ampla de lógicas paraconsistentes, ou seja, são tolerantes às contradições, no sentido em que o Princípio de Explosão não vale em geral. E ainda, a não-trivialidade não pode ser definida apenas como ausência de contradição, pois nessa relação está pressuposto o conceito de consistência. Nesse sentido, a trivialidade não mais equivale à contradição, e isto pode ser representado por meio da seguinte equação:

$$\text{Contradição} + \text{Consistência} = \text{Trivialização}$$

Ademais, numa LFI, o sistema mantém sua capacidade de realizar inferências razoáveis, mesmo na presença de contradições. Assim, de acordo com ([CC08], p.167).

> As LFIs permitem raciocinar sob contradição, mas jamais inferem contradições como teoremas: as contradições podem ocorrer como hipóteses, mas nunca constituirão um objeto de demonstração *per se*. As contradições possibilitam, por um lado, extrair novas informações acerca das premissas envolvidas, permitindo detectar quais premissas, dentro de uma argumentação, são duvidosas. Esta propriedade é particularmente útil no contexto de bases de dados, na medida em que a partir de informações contraditórias a base de dados pode ser depurada.

Uma das originalidades das LFIs com relação à proposta original de da Costa consiste na possibilidade de se considerar a consistência (e/ou inconsistência) de uma fórmula como uma noção primitiva, descrita através de conectivos específicos da linguagem.

De modo usual, em conformidade com [CMdA00], um sistema lógico L pode ser definido como um par $(For, \Vdash_L)$ formado por um conjunto For de fórmulas munido de uma relação de consequência $\Vdash_L$. Além disso, um sistema lógico é *paraconsistente* quando nos permite distinguir entre teorias *contraditórias* Γ (no sentido em que $\Gamma \Vdash_L \alpha$ e $\Gamma \Vdash_L \neg\alpha$, para alguma fórmula α) e teorias *triviais* Δ (no sentido em que todo $\Delta \Vdash_L \beta$, para toda fórmula β). De modo equivalente, podemos dizer que um sistema lógico é paraconsistente se, e somente se, ele é *não-explosivo*, i.e., um sistema no qual o *Princípio de Explosão* $(\alpha, \neg\alpha \Vdash_L \beta)$ não é válido.

Definição 1.2.1. Seja $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ um conjunto de fórmulas em For. Uma lógica L é uma LFI (com respeito a negação $\neg$) se:

(i) $\exists\Gamma\exists\alpha\exists\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nvdash \beta)$, i.e., a lógica não é explosiva e

(ii) Existe um conjunto de fórmulas $\bigcirc(p)$ que depende exatamente da variável proposicional p, o qual satisfaz, para fórmulas α e β:

1. $\bigcirc(\alpha), \alpha \nvdash \beta$
2. $\bigcirc(\alpha), \neg\alpha \nvdash \beta$

e é tal que $\forall\Gamma\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \bigcirc(\alpha), \alpha, \neg\alpha \vdash \beta)$, i.e., vale o *princípio de explosão fraca.*

■

Agora, apresentaremos a semântica referente ao sistema LFI1*, o qual é a extensão de primeira ordem de LFI1. Esta lógica, como dissemos antes, é uma LFI (cf. [CCM07], p. 22) e, assim, verifica as cláusulas de uma LFI ao considerarmos $\bigcirc(\alpha) = \{\circ\alpha\}$, em que $\circ\alpha$ formaliza a consistência de α. Dessa maneira, se considerarmos a consistência como aquilo que falta para uma contradição se tornar explosiva, então a lógica LFI1 é capaz de expressar a consistência no nível da linguagem-objeto.

Definiremos, a partir de agora, algumas noções básicas deste sistema.

Consideremos $\mathbb{L}^+$ a linguagem definida da maneira usual, como na lógica de primeira ordem clássica, com a adição de um novo símbolo $\bullet$ (lido como 'é inconsistente'). Assim, todas as noções sintáticas são aquelas familiares, com as modificações óbvias. Uma fórmula φ é chamada *inconsistente* se ela é da forma $\bullet\lambda$, para alguma fórmula λ. Uma fórmula é chamada um *literal estendido* se ela é ou uma fórmula atômica, ou a negação de uma fórmula atômica, ou uma fórmula atômica inconsistente. Por exemplo, se φ é uma fórmula atômica, então φ, $\neg\varphi$ e $\bullet\varphi$ são seus literais estendidos.

Além disso, consideramos que nossas estruturas são as mesmas como no caso clássico, com a única diferença que reservamos dois indivíduos distinguidos não-clássicas, $\checkmark$ e $\ltimes$, presentes no universo de toda estrutura. Os termos e predicados são interpretados como na definição usual, mas diretamente adaptados para incluir aqueles novos objetos. Assim, dado um predicado n-ário R em $\mathbb{L}^+$, a *interpretação* clássica R^I de R na estrutura I (com universo $|I|$) é uma relação n-ária $R^I \subseteq |I|^n$, e a *interpretação estendida* de R é uma nova relação $R^{I^+} \subseteq R^I \times \{\checkmark, \ltimes\}$, em que $(\vec{a}, \checkmark)$ e $(\vec{a}, \ltimes)$ não ocorrem simultaneamente, para $\vec{a}$ uma sequência em $|I|$ e $\vec{a} \in R^I$.

A interpretação para LFI1* é definida abaixo.

Definição 1.2.2. A *interpretação* $\vDash$ para as sentenças em LFI1*, i.e., as sentenças de primeira ordem em $\mathbb{L}^+$, em uma dada estrutura I, é indutivamente definida como segue ($\nvDash$ denota a falha de uma cláusula):

(1) $I \vDash \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow I \vDash \alpha$ e $I \vDash \beta$

(2) $I \vDash \alpha \vee \beta \Leftrightarrow I \vDash \alpha$ ou $I \vDash \beta$

(3) $I \vDash \alpha \to \beta \Leftrightarrow I \nvDash \alpha$ ou $I \vDash \beta$

(4) $I \vDash \neg\neg\alpha \Leftrightarrow I \vDash \alpha$

(5) $I \nvDash \bullet \bullet \alpha$

(6) $I \vDash \bullet\alpha \Rightarrow I \vDash \alpha$

(7) $I \vDash \neg\alpha \Leftrightarrow I \nvDash \alpha$ ou $I \vDash \bullet\alpha$

(8) $I \vDash \bullet(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow I \vDash \bullet\alpha \wedge \beta$ ou $I \vDash \bullet\beta \wedge \alpha$

(9) $I \vDash \bullet(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow I \vDash \bullet\alpha \wedge \neg\beta$ ou $I \vDash \bullet\beta \wedge \neg\alpha$

(10) $I \vDash \bullet(\alpha \to \beta) \Leftrightarrow I \vDash \alpha \wedge \bullet\beta$

Para literais estendidos, dados os termos fechados$\tau_1, ..., \tau_n$:

(11) $I \vDash R(\tau_1, ..., \tau_n) \Leftrightarrow (\tau_1^I, ..., \tau_n^I, \checkmark) \in R^{I^+}$ ou $(\tau_1^I, ..., \tau_n^I, \ltimes) \in R^{I^+}$

(12) $I \vDash \neg R(\tau_1, ..., \tau_n) \Leftrightarrow (\tau_1^I, ..., \tau_n^I, \ltimes) \in R^{I^+}$, ou ambos
$(\tau_1^I, ..., \tau_n^I, \checkmark) \notin R^{I^+}$ e $(\tau_1^I, ..., \tau_n^I, \ltimes) \notin R^{I^+}$

(13) $I \vDash \bullet R(\tau_1, ..., \tau_n) \Leftrightarrow (\tau_1^I, ..., \tau_n^I, \ltimes) \in R^{I^+}$

Agora, para quantificação:

(14) $I \vDash \forall x\alpha(x) \Leftrightarrow I \vDash \alpha(\tau)$ para todo termo fechado τ.

(15) $I \vDash \exists x\alpha(x) \Leftrightarrow I \vDash \alpha(\tau)$ para algum τ fechado

(16) $I \vDash \neg(\forall x\alpha(x)) \Leftrightarrow I \vDash \exists x\neg\alpha(x)$

(17) $I \vDash \neg(\exists x\alpha(x)) \Leftrightarrow I \vDash \forall x\neg\alpha(x)$

(18) $I \vDash \bullet(\forall x\alpha(x)) \Leftrightarrow I \vDash \forall x\alpha(x)$ e $I \vDash \exists x \bullet \alpha(x)$

(19) $I \vDash \bullet(\exists x\alpha(x)) \Leftrightarrow I \vDash \forall x\neg\alpha(x)$ a $I \vDash \exists x \bullet \alpha(x)$ ∎

Uma vez que nosso objetivo é mostrar como a teoria de modelos da quase-verdade está relacionada com a semântica de bancos de dados evolutivos, abordamos apenas estas noções semânticas relativas ao sistema LFI1*. A partir disso, na seção seguinte, vincularemos tais relações com as definições de verdade apresentadas neste trabalho.

1.3 Conexões entre quase-verdade e bancos de dados evolutivos

A fim de caracterizarmos as conexões entre a noção de quase-verdade de da Costa, formalizada na Seção 1.1, e a semântica formal de bancos de dados evolutivos, apresentada na seção anterior, construiremos uma estrutura pragmática $\mathfrak{A}$ a partir de um modelo I, no sentido de Carnielli et al. (2000), e, em seguida, faremos o caminho inverso.

Começamos pela definição de uma estrutura pragmática induzida por um modelo de banco de dados evolutivos. E, ainda, definimos uma estrutura de banco de dados evolutivos induzida por uma estrutura pragmática, e exibimos algumas propriedades entre ambos os modelos definidos.

A partir de agora, uma estrutura no sentido da Definição 1.2.2 será chamada de *estrutura evolutiva*.

Definição 1.3.1. Seja I uma estrutura evolutiva. A estrutura pragmática $\mathfrak{A}$ *induzida por* I, denotada por $\mathfrak{A}_I$, é definida como segue: Se R é uma relação n-ária e R^{I^+} é sua interpretação estendida em I, então $R^{\mathfrak{A}_I} = \langle R_+^{\mathfrak{A}_I}, R_-^{\mathfrak{A}_I}, R_u^{\mathfrak{A}_I} \rangle$ é tal que:

(C1) $R_+^{\mathfrak{A}_I} = \{\vec{a} \in D^n \ : \ (\vec{a}, \checkmark) \in R^{I^+}\}$;

(C2) $R_u^{\mathfrak{A}_I} = \{\vec{a} \in D^n \ : \ (\vec{a}, \ltimes) \in R^{I^+}\}$;

(C3) $R_-^{\mathfrak{A}_I} = \{\vec{a} \in D^n \ : \ (\vec{a}, \checkmark) \notin R^{I^+} \ \text{ e } \ (\vec{a}, \ltimes) \notin R^{I^+}\}$. ∎

No sentido inverso, a seguinte definição é muito intuitiva.

Definição 1.3.2. Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura pragmática. A estrutura evolutiva *I induzida por* $\mathfrak{A}$, denotada por $I_{\mathfrak{A}}$, é definida como segue: se R é uma relação n-ária e $R^{\mathfrak{A}} = \langle R_+^{\mathfrak{A}}, R_-^{\mathfrak{A}}, R_u^{\mathfrak{A}} \rangle$ então:

(D0) $R^{I_{\mathfrak{A}}} = R_+^{\mathfrak{A}} \cup R_u^{\mathfrak{A}}$;

(D1) $R^{I_{\mathfrak{A}}^+} = \{(\vec{a}, \checkmark) \ : \ \vec{a} \in R_+^{\mathfrak{A}}\} \cup \{(\vec{a}, \ltimes) \ : \ \vec{a} \in R_u^{\mathfrak{A}}\}$. ■

Observação 1.3.3. Ressaltamos que $\vec{a} \in R_-^{\mathfrak{A}}$ sse $(\vec{a}, \checkmark) \notin R^{I_{\mathfrak{A}}^+}$ e $(\vec{a}, \ltimes) \notin R^{I_{\mathfrak{A}}^+}$. ■

Destacamos ainda que, dadas $\mathfrak{A}$ e I, temos que $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{I_{\mathfrak{A}}}$ e $I = I_{\mathfrak{A}_I}$. Assim, o seguinte resultado pode ser provado:

Proposição 1.3.4. Sejam as estruturas $\mathfrak{A}$ e I tais que uma é induzida pela outra. Então, para toda relação n-ária R e todo $\vec{a} \in D^n$:

(a) (E1) $\vec{a} \in R_+^{\mathfrak{A}}$ sse $(\vec{a}, \checkmark) \in R^{I^+}$;

(E2) $\vec{a} \in R_u^{\mathfrak{A}}$ sse $(\vec{a}, \ltimes) \in R^{I^+}$;

(E3) $\vec{a} \in R_-^{\mathfrak{A}}$ sse $(\vec{a}, \checkmark) \notin R^{I^+}$ e $(\vec{a}, \ltimes) \notin R^{I^+}$.

(b) (F1) $I \models R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ sse $\mathfrak{A} \Vdash R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$;

(F2) $I \models \neg R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ sse $\mathfrak{A} \Vdash \neg R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

■

Demonstração:
Para o item (b), basta observarmos que:

(F1) $I \models R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ sse

$(\tau_1^I, \ldots, \tau_n^I, \ltimes) \in R^{I^+}$ ou $(\tau_1^I, \ldots, \tau_n^I, \checkmark) \in R^{I^+}$ sse

$(\tau_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}) \in R_+^{\mathfrak{A}} \cup R_u^{\mathfrak{A}}$ sse

$\mathfrak{A} \Vdash R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$;

(F2) $I \models \neg R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ sse

$(\tau_1^I, \ldots, \tau_n^I, \ltimes) \in R^{I^+}$ ou $(\tau_1^I, \ldots, \tau_n^I, \checkmark) \notin R^{I^+}$ sse

$(\tau_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}) \in R_u^{\mathfrak{A}}$ ou $(\tau_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}) \notin R_+^{\mathfrak{A}}$ sse

$(\tau_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}) \in R_-^{\mathfrak{A}} \cup R_u^{\mathfrak{A}}$ sse

$\mathfrak{A} \Vdash \neg R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. □

Corolário 1.3.5. Sejam as estruturas $\mathfrak{A}$ e I como acima. Então:
$I \models \alpha$ se, e somente se, $\mathfrak{A} \Vdash \alpha$ para toda sentença α sem ocorrências do conectivo $\bullet$ e sem quantificadores. Além disso, as negações são aplicadas apenas nas sentenças atômicas. Aqui, consideramos também $\Omega = \emptyset$. ■

Diante do exposto, pelas semelhanças formais apresentadas, o sistema LFI1* oferece boas perspectivas para se caracterizar como uma lógica que consiga formalizar a quase-verdade de da Costa e colaboradores. Contudo, essa aproximação com a noção da quase-verdade é observada apenas no nível proposicional e para os literais estendidos, pois no caso quantificacional elas não coincidem.

Para observarmos este distanciamento, basta considerarmos a cláusula (18) da Definição 1.2.2, e ainda, se considerarmos $\circ\alpha \stackrel{def}{=} \neg\bullet\alpha$, em que $\circ\alpha$ denota a consistência de α, então, podemos obter a consistência de uma fórmula universal $\circ(\forall x\alpha(x))$, a partir de uma evidência contrária $\exists x\neg\alpha(x)$, o que não nos parece razoável para uma noção de verdade que se aproxima da vertente pragmática.

Dessa maneira, proporemos alguns sistemas lógicos que se mostrarão mais adequados para a noção de quase-verdade, a partir de uma generalização da noção de predicados como ternas.

1.4 Satisfação pragmática: (re)definindo a quase-verdade

A quase-verdade, apresentada por Mikenberg, da Costa e Chuaqui em 1986 (cf. [MdCC86]), constitui uma mudança no nível formal de verdade, com a introdução das estruturas parciais, que induz a uma interpretação diferente de verdade, a qual exibe um caráter pragmático. As relações envolvidas em tais estruturas são parciais, no sentido em que não estão necessariamente definidas para todas as n-uplas de objetos de um dado domínio. Assim, a pertinência (ou não) de uma dada n-upla do domínio a uma tal relação não está sempre definida.

Toda relação parcial R é uma tripla ou terna ordenada de conjuntos $\langle R_+, R_-, R_u\rangle$ e é formalizada como vimos na Seção 1.1. Desta maneira, a abordagem dos predicados como ternas fornece um quadro conceitual para a análise do uso de estruturas (de primeira ordem) na ciência, mas em contextos de incompletude informacional.

Porém, este enfoque de da Costa e colaboradores limita-se apenas às fórmulas atômicas, tendo em vista que as fórmulas complexas são tratadas da maneira clássica. Uma questão que surge naturalmente é se esta abordagem adicional, de considerar predicados como ternas, poderia ser estendida a todas as fórmulas da linguagem, originando uma generalização da noção tarskiana de verdade e que refletisse outra noção de quase-verdade.

Apresentamos, nessa seção, uma proposta original para estender, de maneira recursiva, a noção de predicados como ternas para todas as fórmulas da linguagem, em vez da limitação às fórmulas atômicas. Assim, a interpretação de cada fórmula φ em uma estrutura parcial $\mathfrak{A}$ origina, indutivamente, uma terna $\langle \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \rangle$. Com isso, generalizamos a abordagem de da Costa e colaboradores. Em seguida, veremos que esta generalização reflete em uma mudança na lógica paraconsistente proposicional na qual se baseiam as duas noções de quase-verdade, a saber: a noção de [MdCC86] e a obtida aqui a partir da nossa generalização.

Como mencionado acima, esta proposta generaliza a perspectiva usual tarskiana de uma dada fórmula de primeira ordem φ (com, no máximo, n variáveis livres) em uma estrutura $\mathfrak{A}$, vista como um conjunto, ou ainda, como uma relação $R = \{\vec{a} \in D^n : \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]\}$, a qual é definida indutivamente. A partir disto, obtemos uma nova definição de quase-verdade via noção de *satisfação pragmática*.

Desse modo, necessitamos indicar como obter estas ternas indutivamente para fórmulas complexas. A fim de instituir tal definição, fomos inspirados no Teorema da Representação de Stone, que estabelece um isomorfismo entre as álgebras de Boole e álgebras de conjuntos. A demonstração deste teorema pode ser encontrada nos manuais de Teoria de Conjuntos (ver, por exemplo, [Jec02], p.81). Empregaremos, a partir de agora, o símbolo metalinguístico $\equiv$ para denotar que duas fórmulas são equivalentes, no sentido de apresentarem a mesma terna. Assim, para uma fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ em geral, $\varphi^{\mathfrak{A}} = \langle \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \rangle$ é definida recursivamente como segue.

Definição 1.4.1. Sejam D um conjunto não-vazio; φ_+, φ_- e φ_u conjuntos mutuamente disjuntos tais que $\varphi_+ \cup \varphi_- \cup \varphi_u = D^n$.

1. Se $\varphi^{\mathfrak{A}}$ está definida, i.e., $\varphi^{\mathfrak{A}} = \langle \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \rangle$, então:

$$(\neg\varphi)^{\mathfrak{A}} \stackrel{def}{=} \langle \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \rangle;$$

2. Se $\varphi^{\mathfrak{A}} = \langle \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \rangle$ e $\lambda^{\mathfrak{A}} = \langle \lambda_+^{\mathfrak{A}}, \lambda_-^{\mathfrak{A}}, \lambda_u^{\mathfrak{A}} \rangle$ estão definidas, então:

   2.1 $(\varphi \wedge \lambda)^{\mathfrak{A}} \stackrel{def}{=} \langle \varphi_+^{\mathfrak{A}} \cap \lambda_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}} \cup \lambda_-^{\mathfrak{A}}, D^n - \left[\left(\varphi_+^{\mathfrak{A}} \cap \lambda_+^{\mathfrak{A}}\right) \cup \left(\varphi_-^{\mathfrak{A}} \cup \lambda_-^{\mathfrak{A}}\right)\right] \rangle;$

   2.2 $(\varphi \vee \lambda)^{\mathfrak{A}} \stackrel{def}{=} \langle \varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \lambda_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}} \cap \lambda_-^{\mathfrak{A}}, D^n - \left[\left(\varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \lambda_+^{\mathfrak{A}}\right) \cup \left(\varphi_-^{\mathfrak{A}} \cap \lambda_-^{\mathfrak{A}}\right)\right] \rangle;$

   2.3 $(\varphi \rightarrow \lambda)^{\mathfrak{A}} \stackrel{def}{=} \langle \varphi_-^{\mathfrak{A}} \cup \left(\lambda_+^{\mathfrak{A}} \cup \lambda_u^{\mathfrak{A}}\right), \left(\varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}\right) \cap \lambda_-^{\mathfrak{A}}, \emptyset \rangle.$ ∎

Proposição 1.4.2. Partindo de ternas de conjuntos $(\varphi_+, \varphi_-, \varphi_u)$ dois a dois disjuntos e cuja união é D^n, então todas as ternas obtidas a partir das regras da Definição 1.4.1 são formadas por conjuntos dois a dois disjuntos e cuja união é D^n.

Demonstração. É trivial, utilizando as noções básicas da teoria de conjuntos. □

Observação 1.4.3. A partir da Definição 1.4.1 observamos que a interpretação da contrapositiva, pela estrutura $\mathfrak{A}$, i.e.,

$$(\neg\lambda \rightarrow \neg\varphi)^{\mathfrak{A}} = \langle \lambda_+^{\mathfrak{A}} \cup \left(\varphi_-^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}\right), \left(\lambda_-^{\mathfrak{A}} \cup \lambda_u^{\mathfrak{A}}\right) \cap \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \emptyset \rangle$$

não coincide, em geral, com a tripla obtida pela condicional dada originalmente, entretanto, um caso em que isto ocorre, por exemplo, será quando $\varphi_u^{\mathfrak{A}} = \lambda_u^{\mathfrak{A}} = \emptyset$. ∎

Além disso, é imediato da definição anterior que $\varphi^{\mathfrak{A}} \equiv (\neg\neg\varphi)^{\mathfrak{A}}$. E ainda, vale De Morgan, i.e., $[\neg(\varphi \wedge \lambda)]^{\mathfrak{A}} \equiv [\neg\varphi \vee \neg\lambda]^{\mathfrak{A}}$. De fato, a interpretação de cada uma das fórmulas, pela estrutura $\mathfrak{A}$, origina a mesma tripla pois, por um lado

$$\begin{aligned}
[\neg(\varphi\wedge\lambda)]^{\mathfrak{A}} &= \langle(\varphi\wedge\lambda)_{-}^{\mathfrak{A}}, (\varphi\wedge\lambda)_{+}^{\mathfrak{A}}, (\varphi\wedge\lambda)_{u}^{\mathfrak{A}}\rangle \\
&= \langle\varphi_{-}^{\mathfrak{A}}\cup\lambda_{-}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{+}^{\mathfrak{A}}\cap\lambda_{+}^{\mathfrak{A}}, D^n-\left[(\varphi\wedge\lambda)_{+}^{\mathfrak{A}}\cup(\varphi\wedge\lambda)_{-}^{\mathfrak{A}}\right]\rangle \\
&= \langle\varphi_{-}^{\mathfrak{A}}\cup\lambda_{-}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{+}^{\mathfrak{A}}\cap\lambda_{+}^{\mathfrak{A}}, D^n-\left[\left(\varphi_{+}^{\mathfrak{A}}\cap\lambda_{+}^{\mathfrak{A}}\right)\cup\left(\varphi_{-}^{\mathfrak{A}}\cup\lambda_{-}^{\mathfrak{A}}\right)\right]\rangle
\end{aligned}$$

e a mesma tripla é obtida pelo outro lado,

$$\begin{aligned}
&[\neg\varphi\vee\neg\lambda]^{\mathfrak{A}} = \langle(\neg\varphi)_{+}^{\mathfrak{A}}\cup(\neg\lambda)_{+}^{\mathfrak{A}}, (\neg\varphi)_{-}^{\mathfrak{A}}\cap(\neg\lambda)_{-}^{\mathfrak{A}}, \\
&D^n-\left\{\left[(\neg\varphi)_{+}^{\mathfrak{A}}\cup(\neg\lambda)_{+}^{\mathfrak{A}}\right]\cup\left[(\neg\varphi)_{-}^{\mathfrak{A}}\cap(\neg\lambda)_{-}^{\mathfrak{A}}\right]\right\}\rangle = \\
&= \langle\varphi_{-}^{\mathfrak{A}}\cup\lambda_{-}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{+}^{\mathfrak{A}}\cap\lambda_{+}^{\mathfrak{A}}, D^n-\left[\left(\varphi_{-}^{\mathfrak{A}}\cup\lambda_{-}^{\mathfrak{A}}\right)\cup\left(\varphi_{+}^{\mathfrak{A}}\cap\lambda_{+}^{\mathfrak{A}}\right)\right]\rangle
\end{aligned}$$

De modo análogo, temos que $[\neg(\varphi\vee\lambda)]^{\mathfrak{A}}\equiv[\neg\varphi\wedge\neg\lambda]^{\mathfrak{A}}$, basta observarmos que:

$$\begin{aligned}
[\neg(\varphi\vee\lambda)]^{\mathfrak{A}} &= \langle\varphi_{-}^{\mathfrak{A}}\cap\lambda_{-}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{+}^{\mathfrak{A}}\cup\lambda_{+}^{\mathfrak{A}}, D^n-\left[\left(\varphi_{+}^{\mathfrak{A}}\cup\lambda_{+}^{\mathfrak{A}}\right)\cup\left(\varphi_{-}^{\mathfrak{A}}\cap\lambda_{-}^{\mathfrak{A}}\right)\right]\rangle \\
&= [\neg\varphi\wedge\neg\lambda]^{\mathfrak{A}}
\end{aligned}$$

Outro exemplo é a fórmula $(\varphi\wedge\neg\varphi)$, cuja interpretação pela estrutura $\mathfrak{A}$ é a tripla abaixo. Uma vez que, por definição, temos $\varphi_{+}^{\mathfrak{A}}$, $\varphi_{-}^{\mathfrak{A}}$, e $\varphi_{u}^{\mathfrak{A}}$ conjuntos mutuamente disjuntos, vale dizer que:

$$\begin{aligned}
(\varphi\wedge\neg\varphi)^{\mathfrak{A}} &= \langle\varphi_{+}^{\mathfrak{A}}\cap\varphi_{-}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{-}^{\mathfrak{A}}\cup\varphi_{+}^{\mathfrak{A}}, D^n-\left[\left(\varphi_{+}^{\mathfrak{A}}\cap\varphi_{-}^{\mathfrak{A}}\right)\cup\left(\varphi_{-}^{\mathfrak{A}}\cup\varphi_{+}^{\mathfrak{A}}\right)\right]\rangle \\
&= \langle\varphi_{+}^{\mathfrak{A}}\cap\varphi_{-}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{-}^{\mathfrak{A}}\cup\varphi_{+}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{u}^{\mathfrak{A}}\rangle \\
&= \langle\emptyset, \varphi_{+}^{\mathfrak{A}}\cup\varphi_{-}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{u}^{\mathfrak{A}}\rangle
\end{aligned}$$

Isto pode ser interpretado da maneira seguinte: dada uma relação parcial R, a nova relação parcial $R \wedge \neg R$ não apresenta qualquer evidência positiva; as evidências negativas são dadas pelo corpo de conhecimento da relação R, isto é, pelas evidências negativas e positivas de R, enquanto que a falta de conhecimento da nova relação coincide com a falta de conhecimento da relação original R.

De modo análogo, podemos verificar que:

$$\begin{aligned}(\varphi \vee \neg\varphi)^{\mathfrak{A}} &= \langle \varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}} \cap \varphi_+^{\mathfrak{A}}, D^n - \left[\left(\varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_-^{\mathfrak{A}}\right) \cup \left(\varphi_-^{\mathfrak{A}} \cap \varphi_+^{\mathfrak{A}}\right)\right]\rangle \\ &= \langle \varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \emptyset, \varphi_u^{\mathfrak{A}}\rangle\end{aligned}$$

Como fizemos acima, podemos dar uma leitura em termos de relações parciais. Assim, dada uma relação parcial R, a nova relação parcial $R \vee \neg R$ não apresenta qualquer evidência negativa; as evidências positivas são dadas pelo corpo de conhecimento da relação R, enquanto que a falta de conhecimento da nova relação coincide com a falta de conhecimento da relação original R.

Agora, analisaremos o caso quantificacional. Para este fim, devemos considerar $A \subseteq D^{n+1}$ e, além disso, os conjuntos $\forall(A) \subseteq D^n$ e $\exists(A) \subseteq D^n$ definidos classicamente do seguinte modo.

$$\begin{aligned}\forall(A) &= \{\vec{a} \in D^n : (b, \vec{a}) \in A, \text{para todo b} \in D\} \\ \exists(A) &= \{\vec{a} \in D^n : (b, \vec{a}) \in A, \text{para algum b} \in D\}.\end{aligned}$$

De maneira que, se $A \subseteq D$ (i.e., se $n = 0$), então:

$$\forall(A) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad A = D \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\exists\,(A) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad A \neq \emptyset \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Além disso:
$\exists b, (b, \vec{a}) \in \varphi_{-}^{\mathfrak{A}}$ implica $\vec{a} \in \exists(\varphi_{-}^{\mathfrak{A}})$
E ainda,
$\forall b, (b, \vec{a}) \in \varphi_{+}^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_{u}^{\mathfrak{A}}$ implica $\vec{a} \in \forall(\varphi_{+}^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_{u}^{\mathfrak{A}})$.

Definição 1.4.4. Consideremos que $\varphi^{\mathfrak{A}} = \langle \varphi_{+}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{-}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{u}^{\mathfrak{A}} \rangle$ está definida sobre D^{n+1}, $n \geq 1$. Então:

$$(\forall x \varphi)^{\mathfrak{A}} \stackrel{def}{=} \left\langle \forall \left(\varphi_{+}^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_{u}^{\mathfrak{A}} \right), \exists \left(\varphi_{-}^{\mathfrak{A}} \right), \emptyset \right\rangle$$

■

Proposição 1.4.5. Partindo de triplas de conjuntos $\langle \varphi_{+}, \varphi_{-}, \varphi_{u} \rangle$ dois a dois disjuntos e cuja união é D^{n+1}, então as triplas obtidas a partir da regra da Definição 1.4.4 são formadas por conjuntos dois a dois disjuntos e cuja união é D^{n}.

Demonstração. É trivial, a partir das definições anteriores. □

Definiremos também $\exists x \varphi \stackrel{def}{=} \sim \forall x \sim \varphi$, em que $\sim$ denota a negação clássica, definível a partir dos outros conectivos. Isto será feito na Seção 2.2.

A partir da Definição 1.4.1, a fim de fornecer uma formulação complementar de quase-verdade, seguindo a proposta original de da Costa, podemos introduzir a noção de *satisfação pragmática*. Esta estratégia evita a construção de estruturas totais, e é dada *mutatis mutandis* pela noção tarskiana de satisfação, mas baseada agora em fórmulas vistas como triplas de conjuntos (que representam as evidências positivas, negativas e a falta de informação), ao invés de considerar as fórmulas como representando apenas conjuntos (contendo apenas a informação positiva). A diferença determinante desta definição, com relação à proposta de Bueno-de Souza, baseia-se na condição para uma fórmula negada, dado que neste caso é utilizado a componente de indeterminação $\varphi_u^{\mathfrak{A}}$ na estrutura parcial.

Em caráter preliminar para atingir este objetivo, consideraremos os seguintes casos para uma dada fórmula $\varphi^{\mathfrak{A}} = \langle \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \rangle$:

(i) Para φ com n variáveis livres: $\varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \subseteq D^n$, em que $n > 0$. Além disso, $\varphi_+^{\mathfrak{A}}$, $\varphi_-^{\mathfrak{A}}$, e $\varphi_u^{\mathfrak{A}}$ são conjuntos mutuamente disjuntos, e também $\varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_-^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}} = D^n$.

ou

(ii) Para cada sentença φ: $\varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \in \{0, 1\}$ em que apenas uma das $\varphi_*^{\mathfrak{A}}$ é 1, em que $* \in \{+, -, u\}$. Daí, $\langle 1, 0, 0 \rangle$, $\langle 0, 0, 1 \rangle$ e $\langle 0, 1, 0 \rangle$ representam φ verdadeira, verdadeira por ausência de evidência contrária e falsa, respectivamente. Observamos ainda que, a partir da definição do quantificador universal (ver Definição 1.4.4), podemos simplificar a análise se considerarmos $A = \varphi_+^{\mathfrak{A}}$, $B = \varphi_-^{\mathfrak{A}}$ e $C = \varphi_u^{\mathfrak{A}}$, daí $\forall x \langle A, B, C \rangle = \langle \forall (A \cup C), \exists (B), \emptyset \rangle$ e, assim, para o caso $n = 0$ (ver Definição 1.4.4) temos:

$$\forall \langle A, B, C \rangle = \begin{cases} \langle 1, 0, 0 \rangle & \text{se} \quad B = \emptyset; \\ \langle 0, 1, 0 \rangle & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, diremos neste caso que $\forall x(\varphi)$ é verdadeira em $\mathfrak{A}$, se não há evidência 'puramente' negativa para φ, i.e., $\varphi_-^{\mathfrak{A}} = 0$. Por outro lado, $\forall x(\varphi)$ é falsa em $\mathfrak{A}$, se existe evidência negativa para φ, i.e., $\varphi_-^{\mathfrak{A}} \neq 0$.

Definição 1.4.6. Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura pragmática. Seja $\varphi_{\vec{x}}$ uma fórmula com o contexto $\vec{x} = x_1 ... x_n$, e $V = \{x_1, x_2, ...\}$, com $var(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, i.e., φ com variáveis livres contidas em $\vec{x}$. Desta maneira, temos $\varphi^{\mathfrak{A}}$ definida recursivamente, como acima: $\varphi^{\mathfrak{A}}_{\vec{x}} = \left\langle \varphi^{\mathfrak{A}}_{\vec{x}_+}, \varphi^{\mathfrak{A}}_{\vec{x}_-}, \varphi^{\mathfrak{A}}_{\vec{x}_u} \right\rangle$. Temos, também, o caso especial em que φ é uma sentença. Para este caso, devemos fazer $\varphi^{\mathfrak{A}}_{\emptyset} \in \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Introduziremos, agora, a definição de satisfação pragmática, e, em seguida, enunciaremos a definição de quase-verdade.

Definição 1.4.7. Sejam $\varphi(x_1,...,x_n)$ uma fórmula, $t(x_1,...,x_n)$ um termo, $\mathfrak{A} = \langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$ uma estrutura parcial, e $\vec{a}$ uma sequência em D. A sequência $\vec{a}$ *satisfaz pragmaticamente* φ em $\mathfrak{A}$, o que é denotado por $\mathfrak{A} \Vdash \varphi[\vec{a}]$, quando:

(1) Se φ é uma fórmula atômica $R(\tau_1,...,\tau_k)$, em que R é um símbolo de relação k-ário, então:

$$\mathfrak{A} \Vdash\ R(\tau_1,...,\tau_k)[\vec{a}] \quad \text{sse} \quad (\tau_1^{\mathfrak{A}}[\vec{a}],...,\tau_k^{\mathfrak{A}}[\vec{a}]) \in R_+^{\mathfrak{A}} \cup R_u^{\mathfrak{A}}\ ;$$

(2) $\mathfrak{A} \Vdash\ \neg\psi[\vec{a}] \quad \text{sse} \quad \vec{a} \in \psi_-^{\mathfrak{A}} \cup \psi_u^{\mathfrak{A}}$;

(3) $\mathfrak{A} \Vdash (\varphi \wedge \psi)[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{A} \Vdash \varphi[\vec{a}]$ e $\mathfrak{A} \Vdash \psi[\vec{a}]$;

(4) $\mathfrak{A} \Vdash (\varphi \vee \psi)[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{A} \Vdash \varphi[\vec{a}]$ ou $\mathfrak{A} \Vdash \psi[\vec{a}]$;

(5) $\mathfrak{A} \Vdash (\varphi \rightarrow \psi)[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{A} \nVdash \varphi[\vec{a}]$ ou $\mathfrak{A} \Vdash \psi[\vec{a}]$;

(6) $\mathfrak{A} \Vdash \forall x\varphi[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{A} \Vdash \varphi[b, \vec{a}]$, para todo $b \in D$. ■

Definição 1.4.8. Uma fórmula $\varphi(x_1,...,x_n)$ é quase-verdadeira em uma estrutura parcial $\mathfrak{A}$ se para toda sequência $\vec{a}$, $\mathfrak{A} \Vdash \varphi[\vec{a}]$. Denotamos que φ é quase-verdadeira em $\mathfrak{A}$ por $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ e dizemos que $\mathfrak{A}$ satisfaz pragmaticamente φ, ou φ é satisfeita pragmaticamente por $\mathfrak{A}$. ■

A partir desta formalização, generalizamos a noção clássica de que cada fórmula de primeira ordem φ (com, no máximo, n variáveis livres) define indutivamente um conjunto formado pelas n-uplas v para as quais a estrutura $\mathfrak{A}$ satisfaz φ com parâmetros v. Assim, estabelecemos a definição seguinte.

Proposição 1.4.9. Sejam $\mathfrak{A} = \langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}} \rangle$ uma estrutura parcial, $\varphi(x_1, ..., x_n)$ uma fórmula e $\vec{a}$ uma sequência em D. Então:

(i) $\varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}} = \{\vec{a} : \mathfrak{A} \Vdash \varphi[\vec{a}]\}$;

(ii) $\varphi_-^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}} = \{\vec{a} : \mathfrak{A} \Vdash (\neg\varphi) [\vec{a}]\}$;

(iii) $\varphi_u^{\mathfrak{A}} = \{\vec{a} : \mathfrak{A} \Vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) [\vec{a}]\}$.

Demonstração. Estes itens seguem das Definições 1.4.1 e 1.4.7. $\square$

Teorema 1.4.10. Sejam R um símbolo de predicado n-ário, φ uma fórmula complexa e $\mathfrak{A}$ uma estrutura parcial.

(i) $\mathfrak{A} \Vdash R(\tau_1, ..., \tau_k)[\vec{a}]$ sse $(\tau_1^{\mathfrak{A}}[\vec{a}], ..., \tau_k^{\mathfrak{A}}[\vec{a}]) \in R_+^{\mathfrak{A}} \cup R_u^{\mathfrak{A}}$;

(ii) $\mathfrak{A} \Vdash \neg R(\tau_1, ..., \tau_k)[\vec{a}]$ sse $(\tau_1^{\mathfrak{A}}[\vec{a}], ..., \tau_k^{\mathfrak{A}}[\vec{a}]) \in R_-^{\mathfrak{A}} \cup R_u^{\mathfrak{A}}$;

(iii) $\mathfrak{A} \Vdash \varphi[\vec{a}]$ sse $\vec{a} \in \varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}$;

(iv) $\mathfrak{A} \Vdash \neg\varphi[\vec{a}]$ sse $\vec{a} \in \varphi_-^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}$;

(v) $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ sse $\varphi_-^{\mathfrak{A}} = 0$.[1]

Demonstração. Estes itens seguem das Definições 1.4.7 e 1.4.8. $\square$

[1]Lembramos que, no caso das sentenças, as ternas são da forma $\langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle$ ou $\langle 0, 0, 1 \rangle$

A partir da definição de quase-verdade proposta na Definição 1.4.7, surge naturalmente uma noção de consequência lógica entre sentenças fechadas, isto é, sem variáveis livres.

Definição 1.4.11. Se $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é um conjunto de sentenças, dizemos que φ é uma consequência pragmática de Γ, o que é denotado por $\Gamma \Vdash \varphi$, se $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ para toda estrutura parcial $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \Vdash \psi$, para toda $\psi \in \Gamma$. ■

Dizemos que φ é verdadeira numa estrutura parcial $\mathfrak{A}$ se $\varphi_u^{\mathfrak{A}} = \emptyset$, e o denotamos por $\mathfrak{A} \models \varphi$, por analogia com a usual noção tarskiana de satisfação.

Observe que, se $\varphi_u^{\mathfrak{A}} = \emptyset$, então φ representa uma relação usual.

Proposição 1.4.12. Se $\mathfrak{A}$ é uma estrutura total, isto é, $R_u^{\mathfrak{A}} = \emptyset$ para todo símbolo de relação R, então $\varphi_u^{\mathfrak{A}} = \emptyset$ para toda fórmula φ.

Demonstração. Trivial. □

A partir da proposição anterior, vemos que nossa noção de quase-verdade, de fato, generaliza a noção tarskiana de verdade, sendo esta última um caso particular da nossa em que todas as relações são clássicas. Obviamente, a noção de verdade e de quase-verdade coincidem no caso de estruturas totais, assim como as respectivas relações de consequência.

Capítulo 2

Lógicas segundo a Satisfação Pragmática

Neste capítulo, procuramos desenvolver a lógica de primeira ordem subjacente à nossa generalização de quase-verdade via satisfação pragmática. Introduziremos um sistema axiomático proposicional, chamado de LPT, cuja semântica é dada a partir de matrizes trivaloradas. Denominaremos a lógica matricial de TLP, e mostraremos o correspondente teorema de correção e completude com o auxílio de uma semântica de bivalorações, i.e., as bivalorações serão uma ferramenta para a obtenção da completude. Em seguida, estenderemos LPT para um sistema de primeira ordem, denominado LPT1, e demonstramos ser este correto e completo com relação à noção de consequência pragmática definida no final do capítulo anterior.

2.1 LPT: Uma lógica proposicional da verdade pragmática

A partir de matrizes trivalentes, as quais serão estabelecidas seguindo as diretrizes da definição de satisfação pragmática, introduziremos um sistema axiomático proposicional denominado LPT, o qual será a *lógica proposicional da verdade pragmática* de acordo com a nossa formalização da quase-verdade. Ademais, provaremos que LPT é um sistema adequado, i.e., correto e completo com relação à semântica de matrizes trivalentes, as quais foram obtidas a partir da nossa definição de quase-verdade.

Consideremos a lógica proposicional TLP apresentada por meio das tabelas de verdade abaixo, em que os valores distinguidos são 1 e $\frac{1}{2}$, de acordo com a Definição 2.1.3. Lembramos ainda que, para o caso das sentenças, consideramos, como antes, $1 = \langle 1,0,0\rangle$, $\frac{1}{2} = \langle 0,0,1\rangle$ e $0 = \langle 0,1,0\rangle$. Daí, a partir da Definição 1.4.1 de relações complexas como ternas, obtemos, por exemplo, que $\neg 1 = 0$, $\frac{1}{2} \rightarrow 0 = 0$ e $1 \wedge \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\neg \langle 1,0,0\rangle &= \langle 0,1,0\rangle \\
\langle 0,0,1\rangle \rightarrow \langle 0,1,0\rangle &= \langle 0,1,0\rangle \\
\langle 1,0,0\rangle \wedge \langle 0,0,1\rangle &= \langle 0,0,1\rangle
\end{aligned}
$$

E assim, construímos as tabelas de TLP.

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

	$\neg$
1	0
1/2	1/2
0	1

A linguagem de TLP é a linguagem proposicional clássica $\mathbb{L}$ com os seguintes conectivos lógicos em seu alfabeto: $\neg$, $\wedge$, $\rightarrow$, os quais denotam, respectivamente, uma negação paraconsistente, a conjunção e a implicação. Consideramos, ainda, os conectivos definidos a partir daqueles primitivos da linguagem $\mathbb{L}$, como a seguir:

Símbolo definido			Conectivo
$\alpha \vee \beta$	$\stackrel{def}{=}$	$\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	disjunção
$\top_\alpha$	$\stackrel{def}{=}$	$\alpha \to \alpha$	top
$\bot_\alpha$	$\stackrel{def}{=}$	$\neg(\alpha \to \alpha)$	bottom
$\sim \alpha$	$\stackrel{def}{=}$	$\alpha \to \bot_\alpha$	negação clássica
$\circ\alpha$	$\stackrel{def}{=}$	$\sim(\alpha \wedge \neg\alpha)$	consistência
$\alpha \leftrightarrow \beta$	$\stackrel{def}{=}$	$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$	bicondicional

As tabelas dos conectivos derivados são, portanto, as seguintes:

$\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

	$\sim$
1	0
1/2	0
0	1

	$\circ$
1	1
1/2	0
0	1

$\leftrightarrow$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	0	0	1

	$\top$
1	1
1/2	1
0	1

	$\bot$
1	0
1/2	0
0	0

Pelas matrizes apresentadas, podemos observar que esta lógica é uma LFI de tipo 8K, introduzida em [Mar00].

Observação 2.1.1. Pela Definição 1.4.1 podemos obter a interpretação das fórmulas abaixo a partir de uma estrutura parcial $\mathfrak{A}$. Lembramos que, como antes, $\varphi^{\mathfrak{A}} = \langle \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \rangle$, em que, $D \neq \emptyset$ e $\varphi_i \cap \varphi_j = \emptyset$ para $i \neq j$,

$i, j \in \{+, -, u\}$; além disso, $\varphi_+ \cup \varphi_- \cup \varphi_u = D^n$, se $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$. Assim,

(i)

$$\begin{aligned}(\top_\varphi)^{\mathfrak{A}} &= (\varphi \to \varphi)^{\mathfrak{A}} \\ &= \langle \varphi_-^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}, \left(\varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}\right) \cap \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \emptyset\rangle \\ &= \langle D^n, \emptyset, \emptyset\rangle\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(\bot_\varphi)^{\mathfrak{A}} &= (\neg\top_\varphi)^{\mathfrak{A}} \\ &= \langle \emptyset, D^n, \emptyset\rangle\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}(\sim\varphi)^{\mathfrak{A}} &= (\varphi \to \bot_\varphi)^{\mathfrak{A}} \\ &= \langle \varphi_-^{\mathfrak{A}} \cup \emptyset, \left(\varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}\right) \cap D^n, \emptyset\rangle \\ &= \left\langle \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}, \emptyset\right\rangle\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}(\circ\varphi)^{\mathfrak{A}} &= [\sim(\varphi \wedge \neg\varphi)]^{\mathfrak{A}} \\ &= \left[\sim\left\langle \emptyset, \varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}}\right\rangle\right]^{\mathfrak{A}} \\ &= \left\langle \varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \emptyset \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}, \emptyset\right\rangle \\ &= \left\langle \varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}}, \emptyset\right\rangle\end{aligned}$$

■

A lógica LPT, a contraparte sintática das matrizes de TLP, será definida a seguir pelo método Hilbertiano.

Esquemas de Axiomas:

(A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

(A2) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$

(A3) $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$

(A4) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

(A5) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$

(A6) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$

(A7) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$

(A8) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$

(A9) $\alpha \vee (\alpha \to \beta)$

(A10) $\alpha \vee \neg\alpha$

(A11) $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$

(A12) $\circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))$

(A13) $\neg \circ \alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)$

(A14) $\circ(\alpha \to \beta)$

(A15) $(\circ\alpha \wedge \circ\beta) \to \circ(\alpha \wedge \beta)$

(A16) $(\alpha \wedge \neg\alpha \wedge \beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg(\beta \wedge \alpha)$

Regra de Inferência:

$$(\mathrm{MP}) \qquad \frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$$

Observação 2.1.2. Seja Σ^+ a assinatura obtida a partir de Σ sem o símbolo $\neg$, e For^+ o correspondente fragmento de For sem $\neg$. A *Lógica Clássica Positiva*, denotada aqui por CPC^+, pode ser axiomatizada na assinatura Σ^+ pelos axiomas (Ax1)-(Ax9), mais a regra (MP) como mostrado em [CCM07]. O Cálculo Proposicional Clássico, CPC, é uma extensão de CPC^+ na assinatura Σ, em que a negação $\neg$ é governada por dois axiomas, quais sejam, o axioma (Ax10) e o 'Princípio de Explosão':

$$(PE) \qquad \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$$

■

As noções sintáticas para LPT tais como demonstração, teorema, dedução, etc., são as mesmas do CPC. Assim, denotamos que α é uma consequência sintática de um conjunto Γ de fórmulas de LPT por $\Gamma \vdash_{LPT} \alpha$.

Por exemplo, podemos demonstrar o seguinte teorema em LPT.

$$\vdash_{LPT} \bot_\alpha \rightarrow \beta$$

Demonstração:

1. $\vdash_{LPT} \alpha \rightarrow \alpha$ (teorema de CPC^+);
2. $\vdash_{LPT} \circ(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta))$ (axioma (A12));
3. $\vdash_{LPT} \circ(\alpha \rightarrow \alpha)$ (axioma (A14));
4. $\vdash_{LPT} \neg(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$ ((MP) duas vezes em 2);
5. $\vdash_{LPT} \bot_\alpha \rightarrow \beta$ (definição de bottom em 4).

□

Por outro lado, uma vez que LPT está baseada nas matrizes trivalentes apresentadas no início da seção, as noções semânticas são dadas de acordo com a definição de consequência semântica polivalente abaixo.

Definição 2.1.3. Uma *semântica polivalente* para um conjunto de fórmulas For será, aqui, uma coleção Sem de funções $\upsilon_k : For \longrightarrow \mathcal{V}_k$, chamadas *valorações*, em que o conjunto de valores de verdade $\mathcal{V}_k$ está dividido em valores designados (ou distinguidos) $\mathcal{D}_k$ (que denota o conjunto dos 'valores verdadeiros') e valores não designados $\mathcal{U}_k$ (que denota o conjunto dos 'valores falsos'), ou seja, $\mathcal{V}_k$ é tal que $\mathcal{V}_k = \mathcal{D}_k \cup \mathcal{U}_k$ e $\mathcal{D}_k \cap \mathcal{U}_k = \emptyset$, para toda $\upsilon \in Sem$. Uma *relação de consequência semântica* polivalente $\vDash \subseteq \wp(For) \times For$ pode então ser definida, para toda escolha de $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For$, da seguinte maneira:

$$\Gamma \vDash \alpha \quad \text{sse, para cada } \upsilon \in Sem, \upsilon(\alpha) \in \mathcal{D} \text{ sempre que } \upsilon(\Gamma) \subseteq \mathcal{D}.$$

No caso da lógica TLP, consideramos valorações $w : For^{\circ} \longrightarrow \left\{1, \frac{1}{2}, 0\right\}$, em que $\mathcal{D} = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ e $\mathcal{U} = \{0\}$, exigindo ainda que w seja um homomorfismo entre álgebras. Isto é, $w(\alpha \# \beta) = w(\alpha) \# w(\beta)$, para $\# \in \{\wedge, \rightarrow\}$, e $w(\neg\alpha) = \neg w(\alpha)$. Aqui, como é usual, identificamos um conectivo com a sua interpretação matricial. Denotamos a consequência semântica em TLP por $\Gamma \vDash_{TLP} \alpha$. ∎

Assim, $\Gamma \vDash_{TLP} \alpha$ sse, para toda valoração w, se $w(\Gamma) \subseteq \{1, \frac{1}{2}\}$ então $w(\alpha) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

Na Seção 1.2, vimos que uma LFI é qualquer lógica não explosiva e que adota o princípio de explosão fraca. Desse modo, podemos verificar que a lógica TLP é uma LFI e, portanto, uma lógica paraconsistente. Com efeito, basta considerarmos w a valoração definida a partir das tabelas de verdade de TLP e observar que $\alpha, \neg\alpha \nvDash_{TLP} \beta$, para α e β distintas. Neste caso, existe uma valoração que torna os valores de α e $\neg\alpha$ distinguidos, porém o valor de β não é um distinguido. Para que isto ocorra, considere $w(\alpha) = \frac{1}{2}$ e considere que $w(\beta) = 0$. Além disso, para o conectivo $\circ$, o qual formaliza a consistência, consideramos $\bigcirc(\alpha) = \{\circ\alpha\}$ e, obviamente vale que $\circ\alpha, \alpha, \neg\alpha \vDash_{TLP} \beta$, uma vez que não é possível w atribuir algum valor distinguido para $\circ\alpha$, α e $\neg\alpha$ ao mesmo tempo. Além disso, é fácil verificarmos que $\circ\alpha, \alpha \nvDash_{TLP} \beta$, assim como, $\circ\alpha, \neg\alpha \nvDash_{TLP} \beta$, para certas fórmulas α, β. De fato, para o primeiro caso, existe uma valoração que torna os valores de $\circ\alpha$ e α distinguidos, porém o valor de β não é um distinguido, por exemplo, considere $w(\alpha) = w(\circ\alpha) = 1$ e $w(\beta) = 0$. Para o segundo caso, considere, por exemplo, $w(\alpha) = 0$, $w(\circ\alpha) = 1$ e $w(\beta) = 0$.

Em decorrência do exposto acima, observamos também que TLP não admite um modelo trivial, ou seja, não existe w tal que $w(\alpha) \in \mathcal{D}$, para toda fórmula α, visto que $w(\circ\alpha) = 1$ implica $w(\alpha) = 0$ ou $w(\neg\alpha) = 0$.

A partir de agora, estabeleceremos uma prova de completude de LPT com relação à *semântica de bivalorações* paraconsistentes, isto é, funções de verdade (não vero-funcionais) que atribuem, a cada sentença da linguagem, um valor de verdade 1 (verdadeiro) ou 0 (falso). Por meio deste resultado, provaremos então que as relações de consequência de LPT e TLP coincidem.

Definição 2.1.4. Seja $\mathbf{2} \stackrel{def}{=} \{0, 1\}$ o conjunto de valores de verdade, em que 1 denota o valor 'verdadeiro' e 0 denota o valor 'falso'. Uma $\mathbf{2}_{LPT}$-valoração é qualquer função $\upsilon : For^{\circ} \longrightarrow \mathbf{2}$ que satisfaz as seguintes cláusulas:

(υ1) $\upsilon(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\beta) = 1$;

(υ2) $\upsilon(\alpha \to \beta) = 1$ sse $\upsilon(\alpha) = 0$ ou $\upsilon(\beta) = 1$;

(υ3) $\upsilon(\neg\alpha) = 0$ implica $\upsilon(\alpha) = 1$;

(υ4) $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\neg\neg\alpha)$;

(υ5) $\upsilon(\circ\alpha) = 1$ implica $\upsilon(\alpha) \neq \upsilon(\neg\alpha)$

(υ6) $\upsilon(\neg \circ \alpha) = 1$ implica $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\neg\alpha) = 1$

$(\upsilon 7)$ $\upsilon(\circ(\alpha \to \beta)) = 1$;

$(\upsilon 8)$ $\upsilon(\circ\alpha) = \upsilon(\circ\beta) = 1$ implica $\upsilon(\circ(\alpha \wedge \beta)) = 1$;

$(\upsilon 9)$ $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\neg\alpha) = \upsilon(\beta) = 1$ implica $\upsilon(\neg(\alpha \wedge \beta)) = \upsilon(\neg(\beta \wedge \alpha)) = 1$.

■

A partir da definição acima, podemos verificar que:

Proposição 2.1.5.

i. $\upsilon(\alpha \vee \beta) = 1$ sse $\upsilon(\alpha) = 1$ ou $\upsilon(\beta) = 1$;

ii. $\upsilon(\perp) = 0$.

Demonstração:

Fato 1: $\upsilon(\alpha) \neq \upsilon(\neg\alpha)$ implica que $\upsilon(\circ\alpha) = 1$.
Fato 2: $\upsilon(\circ\alpha) = 1$ implica que $\upsilon(\circ\neg\alpha) = 1$.
Demonstração dos Fatos:
(1) suponha que $\upsilon(\circ\alpha) = 0$, logo $\upsilon(\neg \circ \alpha) = 1$, por $(\upsilon 3)$. Daqui, $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\neg\alpha)$, por $(\upsilon 6)$.
(2) suponha que $\upsilon(\circ\neg\alpha) = 0$, logo $\upsilon(\neg\alpha) = \upsilon(\neg\neg\alpha)$, pelo Fato 1. Então, por $(\upsilon 4)$, temos que $\upsilon(\neg\alpha) = \upsilon(\alpha)$ e então, por $(\upsilon 5)$, $\upsilon(\circ\alpha) = 0$. Assim, concluímos as provas dos Fatos.

(i)($\Rightarrow$) suponha que $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\beta) = 0$. Logo, $\upsilon(\neg\alpha) = \upsilon(\neg\beta) = 1$, por $(\upsilon 3)$. E então, por $(\upsilon 1)$,

$$\cdots \qquad \upsilon(\neg\alpha \wedge \neg\beta) = 1 \qquad (\sharp)$$

Dado que $\upsilon(\alpha) \neq \upsilon(\neg\alpha)$, temos que $\upsilon(\circ\alpha) = 1$, pelo Fato 1. Logo, $\upsilon(\circ\neg\alpha) = 1$, pelo Fato 2. Analogamente, provamos que $\upsilon(\circ\neg\beta) = 1$. Então, por

($\upsilon 8$), obtemos que $\upsilon(\circ(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) = 1$ e então, por ($\upsilon 5$), $\upsilon(\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) \neq \upsilon(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$. Daí, por ($\sharp$), deduzimos que $\upsilon(\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) = 0$, i.e., $\upsilon(\alpha \vee \beta) = 0$. Portanto, provamos que $\upsilon(\alpha \vee \beta) = 1$ implica $\upsilon(\alpha) = 1$ ou $\upsilon(\beta) = 1$.

(i)($\Leftarrow$) suponha que $\upsilon(\alpha \vee \beta) = 0$, i.e., $\upsilon(\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) = 0$. Por ($\upsilon 3$), $\upsilon(\neg\alpha \wedge \neg\beta) = 1$. Então, por ($\upsilon 1$), $\upsilon(\neg\alpha) = \upsilon(\neg\beta) = 1$.
(i)($\Leftarrow$)(a) suponha que $\upsilon(\alpha) = 1$. Logo, por ($\upsilon 4$), $\upsilon(\neg\neg\alpha) = 1$. Daqui, $\upsilon(\neg\alpha) = \upsilon(\neg\neg\alpha) = \upsilon(\neg\beta) = 1$, e então, por ($\upsilon 9$), $\upsilon(\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) = 1$, um absurdo! Logo, $\upsilon(\alpha) = 0$.
(i)($\Leftarrow$)(b) suponha que $\upsilon(\beta) = 1$. Logo, por ($\upsilon 4$), $\upsilon(\neg\neg\beta) = 1$. Daqui, $\upsilon(\neg\beta) = \upsilon(\neg\neg\beta) = \upsilon(\neg\alpha) = 1$, e então, por ($\upsilon 9$), $\upsilon(\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) = 1$, um absurdo! Logo, $\upsilon(\beta) = 0$.
Assim, provamos que $\upsilon(\alpha) = 1$ ou $\upsilon(\beta) = 1$ implica que $\upsilon(\alpha \vee \beta) = 1$.

(ii) A partir de ($\upsilon 2$) temos que $\upsilon(\alpha \to \alpha) = 1$. De ($\upsilon 7$) e ($\upsilon 5$) obtemos que $\upsilon(\circ(\alpha \to \alpha)) = 1$ e $\upsilon(\alpha \to \alpha) \neq \upsilon(\neg(\alpha \to \alpha))$. Logo, $\upsilon(\neg(\alpha \to \alpha)) = 0$. Portanto, $\upsilon(\perp) = 0$. $\square$

Para todo conjunto $\Gamma \cup \{\alpha\}$ de fórmulas de LPT, $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \alpha$ denota, de maneira usual, que é atribuído o valor 1 a α para toda $\mathbf{2}_{LPT}$-valoração que atribui o valor 1 para os elementos de Γ.

A demonstração da corretude de LPT, com respeito à semântica de bivalorações acima, é imediata.

Teorema 2.1.6. [Corretude] Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas em For. Então:
$\Gamma \vdash_{LPT} \alpha$ implica $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \alpha$.

Demonstração. É suficiente verificar que todos os axiomas de LPT assumem apenas valores distinguidos em toda $\mathbf{2}_{LPT}$-valoração, e que (MP) preserva a validade. $\square$

A fim de estabelecer a completude de LPT, iremos provar alguns lemas auxiliares. Antes, porém, iremos revisar alguns conceitos clássicos básicos.

Seja $\Delta \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas em For. Dizemos que uma teoria Δ é *relativamente maximal com respeito a* α em LPT (ou ainda, que Δ é um conjunto α-saturado em LPT), se $\Delta \nvdash_{LPT} \alpha$ e para toda fórmula β em For tal que $\beta \notin \Delta$, temos que $\Delta, \beta \vdash_{LPT} \alpha$.

Ademais, assumimos que LPT é uma lógica com uma relação de consequência usual, ou seja, uma S-lógica, de acordo com a definição dada na Seção 1.1. Como mencionado anteriormente, LPT além de conter CPC^{+}, sabemos, via matrizes de TLP, que esta lógica é uma LFI. Sabemos também que a negação clássica $\sim$ é definida em LPT. Dessa maneira, LPT pode ser considerada um fragmento dedutivo de CPC.

O argumento de Lindenbaum-Asser (cf. [CCM07], Lema 57, p.38) mostra que para qualquer lógica que apresente uma relação de consequência usual e compacta, como é o caso de LPT, temos que toda teoria que não deduz α pode ser estendida a uma teoria relativamente maximal com relação a α. Assim, um resultado importante que usaremos para a completude de LPT é proporcionado pelo seguinte lema, demonstrado em [CCM07].

Lema 2.1.7. Seja $\mathcal{L}$ uma S-lógica compacta. Dados algum conjunto de fórmulas Γ e uma fórmula α, tal que $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \alpha$, então existe um conjunto $\Delta \supseteq \Gamma$ que é relativamente maximal com respeito a α em $\mathcal{L}$. $\blacksquare$

Além disso, de modo usual, dizemos que uma teoria é *fechada* se contém todas as consequências de seus elementos, ou seja, $\Delta \vdash_{LPT} \alpha$ se, e somente se, $\alpha \in \Delta$. A partir disso, podemos provar que:

Lema 2.1.8. Todo conjunto de fórmulas relativamente maximal é uma teoria fechada.

Demonstração. Dado um conjunto de fórmulas Δ relativamente maximal com respeito a uma fórmula α, devemos verificar que:
$\Delta \vdash_{LPT} \beta \quad \text{sse} \quad \beta \in \Delta$.
Da direita para esquerda é imediato. Da esquerda para direita: dado algum $\beta \notin \Delta$, por hipótese, sabemos que Δ é relativamente maximal com respeito a α, então temos que (i) $\Delta \nvdash_{LPT} \alpha$ e (ii)$\Delta, \beta \vdash_{LPT} \alpha$. Logo, usando corte em (i) e (ii), concluímos que $\Delta \nvdash_{LPT} \beta$. □

Lema 2.1.9. Seja $\Delta \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas em For tal que Δ é relativamente maximal com respeito a α em LPT. Então Δ verifica as seguintes propriedades:

(i) $(\beta \wedge \lambda) \in \Delta \quad \text{sse} \quad \beta \in \Delta \quad \text{e} \quad \lambda \in \Delta$;

(ii) $(\beta \vee \lambda) \in \Delta \quad \text{sse} \quad \beta \in \Delta \quad \text{ou} \quad \lambda \in \Delta$;

(iii) $(\beta \to \lambda) \in \Delta \quad \text{sse} \quad \beta \notin \Delta \quad \text{ou} \quad \lambda \in \Delta$;

(iv) $\beta \notin \Delta \quad \text{implica} \quad \neg\beta \in \Delta$;

(v) $\beta \in \Delta \quad \text{sse} \quad \neg\neg\beta \in \Delta$;

(vi) $\perp \notin \Delta$;

(vii) $\circ\alpha \in \Delta \quad \text{implica} \quad \alpha \notin \Delta \text{ ou } \neg\alpha \notin \Delta$;

(viii) $\neg \circ \beta \in \Delta \quad \text{implica} \quad \beta \in \Delta \quad \text{e} \quad \neg\beta \in \Delta$;

(ix) $\circ(\beta \to \lambda) \in \Delta$;

(x) $\circ\beta, \circ\lambda \in \Delta \quad \text{implica} \quad \circ(\beta \wedge \lambda) \in \Delta$;

(xi) $\beta, \neg\beta, \lambda \in \Delta$ implica $\neg(\beta \wedge \lambda) \in \Delta$ e $\neg(\lambda \wedge \beta) \in \Delta$.

Demonstração:
Propriedade (i)
($\Rightarrow$) Suponhamos que $(\beta \wedge \lambda) \in \Delta$, como Δ é α-saturado podemos usar o fechamento garantido pelo Lema 2.1.8, então $\Delta \vdash_{LPT} \beta \wedge \lambda$. E ainda, pelos axiomas (A4) e (A5), temos que $\Delta \vdash_{LPT} (\beta \wedge \lambda) \to \beta$ e $\Delta \vdash_{LPT} (\beta \wedge \lambda) \to \lambda$. Portanto, $\Delta \vdash_{LPT} \beta$ e $\Delta \vdash_{LPT} \lambda$. Pelo Lema 2.1.8, concluímos que $\beta \in \Delta$ e $\lambda \in \Delta$.
($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $\beta \in \Delta$ e $\lambda \in \Delta$, logo pelo Lema 2.1.8, $\Delta \vdash_{LPT} \beta$ e $\Delta \vdash_{LPT} \lambda$. Pelo axioma (A3), temos que $\Delta \vdash_{LPT} \beta \to (\lambda \to (\beta \wedge \lambda))$. Portanto, $\Delta \vdash_{LPT} (\beta \wedge \lambda)$ e de novo pelo Lema 2.1.8, obtemos que $(\beta \wedge \lambda) \in \Delta$.

Propriedade (ii)
($\Rightarrow$) Suponhamos que $(\beta \vee \lambda) \in \Delta$, $\beta \notin \Delta$ e $\lambda \notin \Delta$. Então, como Δ é α-saturado, temos que $\Delta, \beta \vdash_{LPT} \alpha$ e $\Delta, \lambda \vdash_{LPT} \alpha$. Assim, temos que $\Delta \vdash_{LPT} \beta \to \alpha$ e $\Delta \vdash_{LPT} \lambda \to \alpha$. Pelo axioma (A8) sabemos que $(\beta \to \alpha) \to ((\lambda \to \alpha) \to ((\beta \vee \lambda) \to \alpha))$. Logo, $\Delta \vdash_{LPT} (\beta \vee \lambda) \to \alpha$. Pela aplicação do Lema 2.1.8 na hipótese, obtemos que $\Delta \vdash_{LPT} (\beta \vee \lambda)$. Portanto, $\Delta \vdash_{LPT} \alpha$, um absurdo, pois Δ é α-saturado, i.e., $\Delta \nvdash_{LPT} \alpha$.
($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $\beta \in \Delta$ ou $\lambda \in \Delta$. Assim, pelo Lema 2.1.8, temos que $\Delta \vdash_{LPT} \beta$ ou $\Delta \vdash_{LPT} \lambda$. Daí, pelos axiomas (A6) e (A7), temos que: $\Delta \vdash_{LPT} \beta \to (\beta \vee \lambda)$ e $\Delta \vdash_{LPT} \lambda \to (\beta \vee \lambda)$. Portanto, em qualquer caso, obtemos que $\Delta \vdash_{LPT} (\beta \vee \lambda)$. Logo, pelo Lema 2.1.8 temos que $(\beta \vee \lambda) \in \Delta$.

Propriedade (iii)
($\Rightarrow$) Suponhamos que $(\beta \to \lambda) \in \Delta$, $\beta \in \Delta$ e $\lambda \notin \Delta$. Agora, pelo Lema 2.1.8 temos que $\Delta \vdash_{LPT} (\beta \to \lambda)$ e $\Delta \vdash_{LPT} \beta$, e então obtemos $\Delta \vdash_{LPT} \lambda$. Logo, pelo Lema 2.1.8, $\lambda \in \Delta$, um absurdo.
($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $\beta \notin \Delta$ ou $\lambda \in \Delta$.

Caso 1. $\beta \notin \Delta$: Se $(\beta \to \lambda) \notin \Delta$ então, pelo axioma (A9), sabemos que

$\Delta \vdash_{LPT} \beta \vee (\beta \to \lambda)$. Pelo Lema 2.1.8, obtemos que $\beta \vee (\beta \to \lambda) \in \Delta$. Daí, pela Propriedade (ii) temos que $\beta \in \Delta$ ou $(\beta \to \lambda) \in \Delta$, em qualquer caso temos um absurdo. Portanto, $(\beta \to \lambda) \in \Delta$.

Caso 2. $\lambda \in \Delta$: Pelo axioma (A1), sabemos que $\Delta \vdash_{LPT} \lambda \to (\beta \to \lambda)$. E ainda, pelo Lema 2.1.8 temos que $\Delta \vdash_{LPT} \lambda$, e portanto, $\Delta \vdash_{LPT} (\beta \to \lambda)$. Logo, pelo mesmo lema novamente, $(\beta \to \lambda) \in \Delta$.

Propriedade (iv)
Suponhamos que $\beta \notin \Delta$ e $\neg\beta \notin \Delta$. Pelo axioma (A10) temos que $\Delta \vdash_{LPT} \beta \vee \neg\beta$ e, então, pelo Lema 2.1.8 obtemos que $\beta \vee \neg\beta \in \Delta$. Daí, pela propriedade (ii), temos que $\beta \in \Delta$ ou $\neg\beta \in \Delta$, em qualquer caso é absurdo com as hipóteses iniciais.

Propriedade (v)
($\Rightarrow$) Suponhamos que $\beta \in \Delta$. Daí, pelo Lema Lema 2.1.8, temos que $\Delta \vdash_{LPT} \beta$. Pelo axioma (A11) sabemos que $\Delta \vdash_{LPT} \neg\neg\beta \leftrightarrow \beta$, e pela definição do bicondicional, temos que $\Delta \vdash_{LPT} (\neg\neg\beta \to \beta) \wedge (\beta \to \neg\neg\beta)$. Então, pelo axioma (A5) e (MP) obtemos $\Delta \vdash_{LPT} (\beta \to \neg\neg\beta)$. Logo, $\Delta \vdash_{LPT} \neg\neg\beta$, e de novo pelo Lema 2.1.8 concluímos que $\neg\neg\beta \in \Delta$.
($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $\neg\neg\beta \in \Delta$, então $\Delta \vdash_{LPT} \neg\neg\beta$ pelo Lema 2.1.8. Agora, pelo axioma (A11) e definição do bicondicional temos que $\Delta \vdash_{LPT} (\neg\neg\beta \to \beta) \wedge (\beta \to \neg\neg\beta)$. Então, pelo Lema 2.1.8 $(\neg\neg\beta \to \beta) \wedge (\beta \to \neg\neg\beta) \in \Delta$ e pela propriedade (i) obtemos que $\Delta \vdash_{LPT} \neg\neg\beta \to \beta$. Logo, $\Delta \vdash_{LPT} \beta$ e então, $\beta \in \Delta$ pelo Lema 2.1.8.

Propriedade (vi)
Suponhamos que $\bot \in \Delta$, então $\Delta \vdash_{LPT} \bot$ pelo Lema 2.1.8. Sabemos que $\Delta \vdash_{LPT} \bot \to \alpha$, pois vimos que tal fórmula é um teorema de LPT. Logo, $\Delta \vdash_{LPT} \alpha$, o que é um absurdo, pois Δ é α-saturado, e portanto, $\Delta \nvdash_{LPT} \bot$, logo $\bot \notin \Delta$.

Propriedade (vii)

Suponhamos que $\circ\alpha \in \Delta$, e ainda que $\alpha \in \Delta$ e $\neg\alpha \in \Delta$. Daí, pelo axioma (A12) obtemos que Δ é trivial, e portanto Δ deduz α, o que é absurdo, pois Δ é, por hipótese, um conjunto α-saturado.

Propriedade (viii)

Suponhamos que $\neg \circ \beta \in \Delta$, então $\Delta \vdash_{LPT} \neg \circ \beta$ pelo Lema 2.1.8. Além disso, pelo axioma (A13) temos que $\Delta \vdash_{LPT} \neg \circ \beta \to (\beta \wedge \neg\beta)$. Logo, por (MP), $\Delta \vdash_{LPT} \beta \wedge \neg\beta$, daí $\beta \wedge \neg\beta \in \Delta$ e, pela propriedade (i) concluímos que $\beta \in \Delta$ e $\neg\beta \in \Delta$.

Propriedade (ix)

Como instância do axioma (A14) temos que $\Delta \vdash_{LPT} \circ(\beta \to \lambda)$. Portanto, pelo Lema 2.1.8 obtemos que $\circ(\beta \to \lambda) \in \Delta$.

Propriedade (x)

Suponhamos que $\circ\beta \in \Delta$ e $\circ\lambda \in \Delta$. Então, $(\circ\beta \wedge \circ\lambda) \in \Delta$, obtido a partir da propriedade (i). Daí, $\Delta \vdash_{LPT} \circ\beta \wedge \circ\lambda$ pelo Lema 2.1.8. E ainda, pelo axioma (A15) obtemos que $\Delta \vdash_{LPT} (\circ\beta \wedge \circ\lambda) \to \circ(\beta \wedge \lambda)$. Logo, $\Delta \vdash_{LPT} \circ(\beta \wedge \lambda)$, e portanto, $\circ(\beta \wedge \lambda) \in \Delta$ pelo mesmo Lema 2.1.8.

Propriedade (xi)

Suponhamos que $\beta, \neg\beta, \lambda \in \Delta$, então pela propriedade (i) obtemos que $(\beta \wedge \neg\beta \wedge \lambda) \in \Delta$. Daí, pelo Lema 2.1.8, $\Delta \vdash_{LPT} (\beta \wedge \neg\beta \wedge \lambda)$. Além disso, pelo axioma (A16) temos que $\Delta \vdash_{LPT} (\beta \wedge \neg\beta \wedge \lambda) \to \neg(\beta \wedge \lambda) \wedge \neg(\lambda \wedge \beta)$. Então, $\Delta \vdash_{LPT} \neg(\beta \wedge \lambda) \wedge \neg(\lambda \wedge \beta)$. Logo, $\neg(\beta \wedge \lambda) \wedge \neg(\lambda \wedge \beta) \in \Delta$, pelo mesmo lema. Portanto, pela propriedade (i), temos que $\neg(\beta \wedge \lambda) \in \Delta$ e $\neg(\lambda \wedge \beta) \in \Delta$. $\square$

Uma ferramenta bastante útil, neste momento, para o nosso arcabouço em busca da completude de LPT, é a *função característica*. Esta é uma função definida em um conjunto Π que indica se o elemento pertence a um subconjunto Γ do conjunto dado, ou seja, é a função $\chi_\Gamma : \Pi \longrightarrow \{0,1\}$ definida por:

$$\chi_\Gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \Gamma \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \Gamma \end{cases}$$

A partir disso, estabelecemos o resultado seguinte.

Corolário 2.1.10. A função característica de um conjunto relativamente maximal de fórmulas em LPT define uma $\mathbf{2}_{LPT}$-valoração.

Demonstração. Seja Δ um conjunto de fórmulas relativamente maximal com respeito a α e consideremos uma função $v : For^\circ \longrightarrow \{0,1\}$ tal que, para toda fórmula λ em For°, $v(\lambda) = 1 \quad \text{sse} \quad \lambda \in \Delta$. Assim, usando o Lema 2.1.9, podemos verificar que v satisfaz as cláusulas $(v1)$ a $(v9)$ da Definição 2.1.4. Faremos a demonstração de algumas cláusulas, pois as demais seguem de maneira análoga.

A cláusula $(v2)$ é satisfeita. De fato, $v(\beta \to \lambda) = 1$ sse (pela definição da função característica v) $(\beta \to \lambda) \in \Delta$ sse (pelo Lema 2.1.9(iii)) $\beta \notin \Delta$ ou $\lambda \in \Delta$ sse (pela definição de v) $v(\beta) = 0$ ou $v(\lambda) = 1$.

Para $(v3)$ temos: $v(\neg\beta) = 0$ implica (pela definição de v) $\neg\beta \notin \Delta$ implica (pelo Lema 2.1.9(iv)) $\neg\neg\beta \in \Delta$ implica (pelo Lema 2.1.9(v)) $\beta \in \Delta$ implica (pela definição de v) $v(\beta) = 1$.

Para $(v7)$: Pelo Lema 2.1.9(ix), temos que $\circ(\beta \to \lambda) \in \Delta$, então pela definição de v concluímos que $v(\circ(\alpha \to \beta)) = 1$.

Para $(v9)$: $v(\beta) = v(\neg\beta) = v(\lambda) = 1$ implica (pela definição de v) $\beta, \neg\beta, \lambda \in \Delta$ implica (pelo Lema 2.1.9(xi)) $\neg(\beta \wedge \lambda) \in \Delta$ e $\neg(\lambda \wedge \beta) \in \Delta$ implica (pela definição de v) $v(\neg(\beta \wedge \lambda)) = 1$ e $v(\neg(\lambda \wedge \beta)) = 1$. $\square$

Agora, necessitamos vincular nossa semântica de bivalorações com as valorações das matrizes de TLP, de maneira que obtemos a completude de TLP por meio da completude para as bivalorações. Os dois lemas seguintes nos permitirão demonstrar que as relações $\vDash_{TLP}$ e $\vDash_{\mathbf{2}}$ são as mesmas.

Lema 2.1.11. Para cada $\mathbf{2}_{LPT}$-valoração υ, existe uma valoração w definida de acordo com as tabelas de verdade de TLP tal que $\upsilon(\alpha) = 1$ se e somente se $w(\alpha) \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$, para toda fórmula α.

Demonstração: Seja υ uma $\mathbf{2}_{LPT}$-valoração dada. Definimos uma valoração w para LPT da seguinte forma:

Para cada fórmula atômica p, $w(p)$ é definida por:

$$w(p) = \begin{cases} 1 & \text{se e somente se} \quad \upsilon(p) = 1, \text{e } \upsilon(\neg p) = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se e somente se} \quad \upsilon(p) = 1, \text{e } \upsilon(\neg p) = 1 \\ 0 & \text{se e somente se} \quad \upsilon(p) = 0. \end{cases}$$

e, para toda fórmula não atômica α, $w(\alpha)$ é definida de acordo com as tabelas de verdade de TLP.

Demonstraremos, por indução na complexidade de α, que $\upsilon(\alpha) = 1$ sse $w(\alpha) \in \mathcal{D}$. Aqui, $\mathcal{D}$ denota o conjunto dos elementos designados de TLP, i.e., $\mathcal{D} = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$.

[Base] α é atômica. Então, $w(p) \in \mathcal{D}$ sse $w(p) = 1$ ou $w(p) = \frac{1}{2}$ sse (pela definição de w) $\upsilon(p) = 1$.

[HI] o lema vale para fórmulas de complexidade $k < n$:

[α é da forma $\neg\beta$] assim:

(a)($\Leftarrow$) Se $w(\alpha) = w(\neg\beta) = 1$, então (pela tabela da negação paraconsistente) $w(\beta) = 0$. Logo, por (HI), $\upsilon(\beta) = 0$ e, portanto, por ($\upsilon 3$), $\upsilon(\neg\beta) = \upsilon(\alpha) = 1$. Além disso, por ($\upsilon 4$) $\upsilon(\neg\alpha) = \upsilon(\neg\neg\beta) = \upsilon(\beta) = 0$.

(a)($\Rightarrow$) Se $\upsilon(\alpha) = 1$ e $\upsilon(\neg\alpha) = 0$, neste caso, $\upsilon(\neg\beta) = 1$ e $\upsilon(\neg\neg\beta) = \upsilon(\beta) = 0$, por ($\upsilon 4$). Logo, por (HI) $w(\beta) = 0$, e portanto $w(\alpha) = w(\neg\beta) = \neg w(\beta) = 1$.

(b)($\Leftarrow$) Se $w(\alpha) = w(\neg\beta) = \frac{1}{2}$, então $w(\beta) = \frac{1}{2}$. Logo, por (HI) e pela definição de w, $\upsilon(\beta) = 1$ e $\upsilon(\neg\beta) = 1$. Portanto, $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\neg\beta) = 1$. E ainda, por ($\upsilon 4$) temos $\upsilon(\neg\alpha) = \upsilon(\neg\neg\beta) = \upsilon(\beta) = 1$.

(b)($\Rightarrow$) Se $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\neg\alpha) = 1$, por ($\upsilon 4$), $\upsilon(\neg\beta) = \upsilon(\beta) = 1$ e, então, por (HI) e definição de w, $w(\beta) = \frac{1}{2}$. Portanto, $w(\alpha) = w(\neg\beta) = \neg w(\beta) = \frac{1}{2}$.

(c)($\Leftarrow$) Se $w(\alpha) = w(\neg\beta) = 0$, então $w(\beta) = 1$, logo, por (HI) e definição de w, $\upsilon(\beta) = 1$ e $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\neg\beta) = 0$.

(c)($\Rightarrow$) Se $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\neg\beta) = 0$, então por ($\upsilon 3$), $\upsilon(\beta) = 1$. Logo, por (HI) e definição de w, temos que $w(\beta) = 1$. Portanto, $w(\alpha) = w(\neg\beta) = \neg w(\beta) = 0$.

[α é da forma $\beta \to \lambda$]

(d)($\Leftarrow$) Se $w(\alpha) = w(\beta \to \lambda) = 1$

(d)($\Leftarrow$)(i) Se $w(\beta) = 0$, então por (HI), $\upsilon(\beta) = 0$ e por ($\upsilon 2$), $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\beta \to \lambda) = 1$. Além disso, de ($\upsilon 7$) sabemos que $\upsilon(\circ\alpha) = \upsilon(\circ(\beta \to \lambda)) = 1$, pela Proposição 2.1.5 sabemos que $\upsilon(\bot) = 0$, e pela definição de consistência temos que $\upsilon(\circ\alpha) = \upsilon((\alpha \wedge \neg\alpha) \to \bot) = 1$. Logo, $\upsilon(\alpha \wedge \neg\alpha) = 0$, então por ($\upsilon 1$) temos que $\upsilon(\neg\alpha) = 0$.

(d)($\Leftarrow$)(ii) Se $w(\lambda) \in \mathcal{D}$, então por (HI), $\upsilon(\lambda) = 1$, logo por ($\upsilon 2$), $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\beta \to \lambda) = 1$. E ainda, $\upsilon(\neg\alpha) = 0$ como no item anterior.

(d)($\Rightarrow$) Se $\upsilon(\alpha) = 1$, e como mostrado nos itens anteriores, $\upsilon(\neg\alpha) = 0$. Então, por ($\upsilon 2$), $\upsilon(\beta) = 0$ ou $\upsilon(\lambda) = 1$.

(d)($\Rightarrow$)(1) Se $\upsilon(\beta) = 0$, então por (HI) $w(\beta) = 0$. Logo, $w(\beta \to \lambda) = w(\alpha) = 1$

(d)($\Rightarrow$)(2) Se $\upsilon(\lambda) = 1$, então por (HI) $w(\beta) \in \mathcal{D}$. Portanto, $w(\beta \to \lambda) = w(\alpha) = 1$

(e)($\Leftarrow$) Se $w(\alpha) = w(\beta \to \lambda) = 0$, então $w(\beta) \in \mathcal{D}$ e $w(\lambda) = 0$. Logo, por (HI) temos que $\upsilon(\beta) = 1$ e $\upsilon(\lambda) = 0$. Portanto, $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\beta \to \lambda) = 0$.

(e)($\Rightarrow$) Se $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\beta \to \lambda) = 0$, então $\upsilon(\beta) = 1$ e $\upsilon(\lambda) = 0$, logo (por HI) $w(\beta) \in \mathcal{D}$ e $w(\lambda) = 0$. Daí, pela tabela da condicional, concluímos que $w(\alpha) = w(\beta \to \lambda) = 0$.

(f) Se $w(\alpha) = \frac{1}{2}$, então o lema é vacuamente satisfeito. Basta verificar que é falso que $w(\beta \to \lambda) = \frac{1}{2}$, pois pela tabela do condicional, este caso é impossível. E ainda, vimos pelo item (d)($\Rightarrow$)(i) que é falso que $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\neg\alpha) = 1$. Logo $w(\alpha) = \frac{1}{2}$ sse $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\neg\alpha) = 1$.

[α é da forma $\beta \wedge \lambda$]

(g)($\Leftarrow$) Se $w(\alpha) = w(\beta \wedge \lambda) = 1$, então $w(\beta) = w(\lambda) = 1$. Daí, por (HI) $\upsilon(\beta) = \upsilon(\lambda) = 1$ e pela definição de w, $\upsilon(\neg\beta) = \upsilon(\neg\lambda) = 0$. Portanto, por ($\upsilon$1), $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\beta \wedge \lambda) = 1$. Além disso, como $\upsilon(\neg\beta) = 0$, então $\upsilon(\beta) \neq \upsilon(\neg\beta)$, e daí pelo Fato 1 da Proposição 2.1.5, temos que $\upsilon(\circ\beta) = \upsilon((\beta \wedge \neg\beta) \to \bot) = 1$, e ainda, pela mesma razão temos que $\upsilon(\circ\lambda) = 1$. Logo, por ($\upsilon$8), $\upsilon(\circ(\beta\wedge\lambda)) = \upsilon(((\beta\wedge\lambda)\wedge\neg(\beta\wedge\lambda)) \to \bot) = 1$. Então, por ($\upsilon$2), $\upsilon(\alpha\wedge\neg\alpha) = 0$, e dado que já sabemos que $\upsilon(\alpha) = 1$, deduzimos que $\upsilon(\neg\alpha) = 0$.

(g)($\Rightarrow$) Se $\upsilon(\alpha) = 1$ e, como vimos no item anterior, $\upsilon(\neg\alpha) = 0$, então, neste caso $\upsilon(\beta \wedge \lambda) = 1$, logo $\upsilon(\beta) = \upsilon(\lambda) = 1$. Assim, por (HI), $w(\beta) \in \mathcal{D}$ e $w(\lambda) \in \mathcal{D}$. Portanto, $w(\alpha) \in \mathcal{D}$. Além disso, dado que $\upsilon(\neg\alpha) = \upsilon(\neg(\beta \wedge \lambda)) = 0$, então por ($\upsilon$9), temos que $\upsilon(\neg\beta) = 0$ e $\upsilon(\neg\lambda) = 0$. Daí, como já sabemos que $\upsilon(\beta) = 1$ e $\upsilon(\lambda) = 1$, então pela definição de w, temos que $w(\beta) = w(\lambda) = 1$. Portanto, $w(\alpha) = w(\alpha \wedge \beta) = 1$.

(h)($\Leftarrow$) Se $w(\alpha) = w(\beta \wedge \lambda) = \frac{1}{2}$. Então, temos três casos possíveis:

(h)($\Leftarrow$)(1) Se $w(\beta) = \frac{1}{2}$ e $w(\lambda) = 1$, então por (HI) e definição de w, $\upsilon(\beta) = \upsilon(\neg\beta) = 1$ e $\upsilon(\lambda) = 1$ e $\upsilon(\neg\lambda) = 0$. Portanto, por ($\upsilon$1), $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\beta \wedge \lambda) = 1$ e, por (υ9), $\upsilon(\neg(\beta \wedge \lambda)) = \upsilon(\neg\alpha) = 1$.

(h)($\Leftarrow$)(2) Se $w(\beta) = w(\lambda) = \frac{1}{2}$. Este caso é provado de modo análogo ao anterior.

(h)($\Leftarrow$)(3) Se $w(\beta) = 1$ e $w(\lambda) = \frac{1}{2}$. (idem).

(h)($\Rightarrow$) Se $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\neg\alpha) = 1$, então $\upsilon(\alpha \wedge \neg\alpha) = 1$ e daí, $\upsilon(\circ\alpha) =$

$\upsilon((\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \bot) = 0$, i.e., $\upsilon(\circ(\beta \wedge \lambda)) = 0$. Então, por contraposição de $(\upsilon 8)$ podemos concluir que $\upsilon(\circ\beta) = \upsilon((\beta \wedge \neg\beta) \rightarrow \bot) = 0$ ou $\upsilon(\circ\lambda) = \upsilon((\lambda \wedge \neg\lambda) \rightarrow \bot) = 0$. Portanto, $(\upsilon(\beta) = \upsilon(\neg\beta) = 1)$ ou $(\upsilon(\lambda) = \upsilon(\neg\lambda) = 1)$. Logo, por (HI) e definição de w temos que $w(\beta) = \frac{1}{2}$ ou $w(\lambda) = \frac{1}{2}$. Por hipótese, sabemos que $\upsilon(\beta \wedge \lambda) = 1$, logo $\upsilon(\beta) = \upsilon(\lambda) = 1$, então por (HI), $w(\beta) \in \mathcal{D}$ e $w(\lambda) \in \mathcal{D}$. Assim, no primeiro caso temos que $w(\beta) = \frac{1}{2}$ e $w(\lambda) \in \mathcal{D}$, logo $w(\alpha) = w(\beta \wedge \lambda) = \frac{1}{2}$. No segundo caso, temos que $w(\lambda) = \frac{1}{2}$ e $w(\beta) \in \mathcal{D}$, portanto $w(\alpha) = w(\beta \wedge \lambda) = \frac{1}{2}$.

(i)($\Leftrightarrow$) $w(\alpha) = w(\beta \wedge \lambda) = 0$ sse $w(\beta) = 0$ ou $w(\lambda) = 0$ sse [por (HI)] $\upsilon(\beta) = 0$ ou $\upsilon(\lambda) = 0$ sse [por $(\upsilon 1)$] $\upsilon(\alpha) = \upsilon(\beta \wedge \lambda) = 0$. □

Lema 2.1.12. Para toda valoração w para TLP, existe uma $\mathbf{2}_{LPT}$-valoração υ, tal que $\upsilon(\alpha) = 1$ se, e somente se, $w(\alpha) \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ para toda fórmula α.

Demonstração: Seja w uma valoração para TLP dada. Definimos uma valoração $\upsilon : For \longrightarrow \mathbf{2}$ tal que $\upsilon(\alpha) = 1$ se e somente se $w(\alpha) \in \mathcal{D}$. Assim, devemos verificar que υ satisfaz as propriedades $(\upsilon 1)$ - $(\upsilon 9)$.
[$\upsilon 1$]: $\upsilon(\beta \wedge \lambda) = 1$ sse [pela definição de υ] $w(\beta \wedge \lambda) \in \mathcal{D}$ sse [pela tabela da conjunção] $w(\beta) \in \mathcal{D}$ e $w(\lambda) \in \mathcal{D}$ sse [pela definição de υ] $\upsilon(\beta) = \upsilon(\lambda) = 1$.

[$\upsilon 2$]: $\upsilon(\beta \rightarrow \lambda) = 1$ sse $w(\beta \rightarrow \lambda) \in \mathcal{D}$ sse $w(\beta) \notin \mathcal{D}$ ou $w(\lambda) \in \mathcal{D}$ sse $\upsilon(\beta) = 0$ ou $\upsilon(\lambda) = 1$.

[$\upsilon 3$]: $\upsilon(\neg\beta) = 0$ implica $w(\neg\beta) = 0$ implica $w(\beta) = 1$ implica $\upsilon(\beta) = 1$.

[$\upsilon 4$]:(i) $\upsilon(\beta) = 1$ implica $w(\beta) \in \mathcal{D}$, mas $w(\beta) = w(\neg\neg\beta)$, logo $\upsilon(\neg\neg\beta) = 1$. (ii) $\upsilon(\beta) = 0$ implica $w(\beta) = 0 = w(\neg\neg\beta)$, logo $\upsilon(\neg\neg\beta) = 0$. Portanto, de (i) e (ii) temos que $\upsilon(\beta) = \upsilon(\neg\neg\beta)$.

$[\upsilon 5]$: $\upsilon(\circ\beta) = 1$ implica $w(\circ\beta) \in \mathcal{D}$ implica $w(\circ\beta) = 1$, logo $w(\beta) \neq w(\neg\beta)$ e assim, $\upsilon(\beta) \neq \upsilon(\neg\beta)$.

$[\upsilon 6]$: Se $\upsilon(\neg \circ \beta) = 1$, então $w(\neg \circ \beta) \in \mathcal{D}$. E daí, pela tabela do operador de consistência, temos que $w(\neg \circ \beta) = 1$. Logo, $w(\circ\beta) = 0$. Então, $w(\beta) = \frac{1}{2}$ e ainda $w(\neg\beta) = \frac{1}{2}$. Portanto, temos que $\upsilon(\beta) = \upsilon(\neg\beta) = 1$.

$[\upsilon 7]$: Dado que $w(\beta \to \lambda) \in \{0, 1\}$, então pela tabela do operador de consistência temos $w(\circ(\beta \to \lambda)) = 1$. Portanto, $\upsilon(\circ(\beta \to \lambda)) = 1$.

$[\upsilon 8]$: Se $\upsilon(\circ\beta) = \upsilon(\circ\lambda) = 1$, então $w(\circ\beta) = w(\circ\lambda) = 1$. Logo, $w(\beta) \in \{0, 1\}$ e $w(\lambda) \in \{0, 1\}$. Daí, $w(\beta \wedge \lambda) \in \{0, 1\}$, e então $w(\circ(\beta \wedge \lambda)) = 1$. Portanto, $\upsilon(\circ(\beta \wedge \lambda)) = 1$

$[\upsilon 9]$: Se $\upsilon(\beta) = \upsilon(\neg\beta) = \upsilon(\lambda) = 1$, logo $w(\beta) = \frac{1}{2}$ e $w(\lambda) \in \mathcal{D}$. Então, $w(\beta \wedge \lambda) = \frac{1}{2}$, e daí $w(\neg(\beta \wedge \lambda)) = w(\neg(\lambda \wedge \beta)) = \frac{1}{2}$. Portanto, $\upsilon(\neg(\beta \wedge \lambda)) = \upsilon(\neg(\lambda \wedge \beta)) = 1$. $\square$

Corolário 2.1.13. $\Gamma \vDash_{TLP} \alpha$ sse $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \alpha$.

Demonstração:
($\Leftarrow$) Suponhamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \alpha$ e seja w uma valoração de TLP tal que, para todo $\beta \in \Gamma$, $w(\beta) \in \mathcal{D}$. Logo, pelo Lema 2.1.12, para todo $\beta \in \Gamma$, $\upsilon(\beta) = 1$. Então, pela hipótese inicial, vale que $\upsilon(\alpha) = 1$. Portanto, pelo Lema 2.1.12, $w(\alpha) \in \mathcal{D}$ e, assim, provamos que $\Gamma \vDash_{TLP} \alpha$.
($\Rightarrow$) Suponhamos que $\Gamma \vDash_{TLP} \alpha$ e seja υ uma $\mathbf{2}_{LPT}$-valoração tal que para todo $\beta \in \Gamma$, $\upsilon(\beta) = 1$. Logo, pelo Lema 2.1.11, para todo $\beta \in \Gamma$, $w(\beta) \in \mathcal{D}$. Daí, pela hipótese inicial, vale que $w(\alpha) \in \mathcal{D}$. Portanto, pelo Lema 2.1.11, $\upsilon(\alpha) = 1$. Desse modo, provamos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \alpha$. $\square$

Agora, estamos prontos para demonstrar a completude de LPT, com relação à semântica de bivalorações.

Teorema 2.1.14. [Completude de LPT para bivalorações] Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas em For. Então: $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{LPT} \alpha$.

Demonstração. Dada uma fórmula α em For tal que $\Gamma \nvdash_{LPT} \alpha$, podemos estender Γ (pelo Lema 2.1.7) a um conjunto Δ que é relativamente maximal com respeito a α. Como $\Delta \nvdash_{LPT} \alpha$, então, pela definição usual de dedução, $\alpha \notin \Delta$. Pelo Corolário 2.1.10, a função característica v de Δ é uma $\mathbf{2}_{LPT}$-valoração tal que, para todo $\beta \in \Delta$, $v(\beta) = 1$, enquanto que $v(\alpha) = 0$. Portanto, $\Delta \nvDash_{\mathbf{2}} \alpha$, e dado que $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Gamma \nvDash_{\mathbf{2}} \alpha$. □

Teorema 2.1.15. [Corretude de LPT com relação a TLP] Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas de For. Então: $\Gamma \vdash_{LPT} \alpha$ implica $\Gamma \vDash_{TPL} \alpha$.

Demonstração. É uma consequência imediata do Teorema 2.1.6 e do Corolário 2.1.13. □

Teorema 2.1.16. [Completude de LPT com relação a TLP] Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas em For. Então: $\Gamma \vDash_{TLP} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{LPT} \alpha$.

Demonstração. Pelo Corolário 2.1.13, temos que $\Gamma \vDash_{TLP} \alpha$ implica $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \alpha$. Agora, pelo Teorema 2.1.14 da completude para bivalorações, concluímos que $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{LPT} \alpha$. □

Como aplicação dos resultados anteriores, ou seja, que de fato mostram que $\vdash_{LPT}$, $\vDash_{TLP}$ e $\vDash_{\mathbf{2}}$ coincidem, podemos provar o seguinte:

Proposição 2.1.17. Os seguintes esquemas de fórmulas são demonstráveis em LPT:

(i) $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$;

(ii) $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$;

(iii) $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\sim \alpha \vee \beta)$;

(iv) $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\sim (\alpha \rightarrow \beta))$;

(v) $\sim (\sim \alpha) \rightarrow \alpha$;

Demonstração. É fácil ver que os esquemas acima são tautologias de TLP. □

2.2 LPT1: Uma lógica de primeira ordem para a verdade pragmática

Nesta seção, introduzimos uma lógica de primeira ordem, denotada por LPT1, que será obtida a partir de LPT. Por isso, por vezes, faremos referência à seção anterior, bem como resultados lá obtidos. Além disso, mostraremos um resultado de completude, segundo o modelo canônico, de LPT1 com relação à semântica pragmática de estruturas parciais introduzida no final do Capítulo 1.

A linguagem de LPT1 é a linguagem clássica de primeira ordem $\mathbb{L}$ que apresenta $\neg, \wedge, \rightarrow$ como conectivos primitivos, além do quantificador universal $\forall$. Introduziremos a lógica LPT1 também pelo método Hilbertiano.

Esquemas de Axiomas:
Os axiomas de LPT1 são os axiomas de LPT, acrescido do seguinte:

(A17) $\forall x\varphi \rightarrow \varphi[x/t]$, t livre para x em φ.

Regras de Inferência:

$$\text{(MP)} \qquad \frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

e

$$\text{(I}\forall\text{)} \qquad \frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \forall x\beta} \qquad (x \text{ não livre em } \alpha)$$

Observamos ainda que $\exists x\varphi \overset{def}{=} \sim \forall x \sim \varphi$. Assim, a semântica de LPT1 será dada pelas estruturas parciais definidas no Capítulo 1. Temos então o seguinte:

$$\begin{aligned}
(\sim \varphi)^{\mathfrak{A}} &= \left\langle \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}, \emptyset \right\rangle \\
(\forall x \sim \varphi)^{\mathfrak{A}} &= \left\langle \forall(\varphi_-^{\mathfrak{A}}), \exists(\varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}), \emptyset \right\rangle \\
(\sim \forall x \sim \varphi)^{\mathfrak{A}} &= \left\langle \exists\left(\varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}\right), \forall\left(\varphi_-^{\mathfrak{A}}\right), \emptyset \right\rangle \\
\therefore\ (\exists x\varphi)^{\mathfrak{A}} &= \left\langle \exists\left(\varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}\right), \forall\left(\varphi_-^{\mathfrak{A}}\right), \emptyset \right\rangle
\end{aligned}$$

Definição 2.2.1. Seja Δ uma teoria relativamente maximal (em LPT1) com respeito a α, escrita na linguagem $\mathbb{L}$. Uma estrutura parcial $\mathfrak{A}(\Delta)$ é definida da seguinte forma (aqui, P, f e c denotam símbolos de predicado, de função e de constante da linguagem $\mathbb{L}$, respectivamente. Além disso, o domínio de $\mathfrak{A}(\Delta)$ é o conjunto D dos termos fechados de $\mathbb{L}$, isto é, sem variáveis):

$P_+^{\mathfrak{A}} = \{\vec{a} : P(\vec{a}) \in \Delta, \neg P(\vec{a}) \notin \Delta\}$;

$P_-^{\mathfrak{A}} = \{\vec{a} : P(\vec{a}) \notin \Delta, \neg P(\vec{a}) \in \Delta\}$;

$P_u^{\mathfrak{A}} = \{\vec{a} : P(\vec{a}) \in \Delta, \neg P(\vec{a}) \in \Delta\}$;

$f^{\mathfrak{A}}(\tau_1, ..., \tau_n) = f(\tau_1, ..., \tau_n)$;

$c^{\mathfrak{A}} = c$. ∎

O Lema 2.1.9 pode ser estendido para conjuntos de sentenças fechadas (isto é, sem variáveis livres) Δ relativamente maximais em LPT1, provando que estes conjuntos satisfazem, adicionalmente, a seguinte propriedade:

$$(xii) \qquad \forall x(\varphi)(\vec{a}) \in \Delta \quad \text{sse} \quad \varphi(b, \vec{a}) \in \Delta, \forall b \in D$$

em que D denota o conjunto dos termos fechados da linguagem.

A fim de garantirmos que uma teoria Δ gerada em LPT1 não seja trivial, estabelecemos o seguinte lema para Δ, um conjunto de fórmulas relativamente maximal com respeito a α.

Lema 2.2.2. Seja Δ um conjunto de fórmulas relativamente maximal com relação a α. Então: $\alpha \in \Delta$ sse $\alpha \to \perp \notin \Delta$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $\alpha \in \Delta$ e $\alpha \to \perp \in \Delta$. Então, $\perp \in \Delta$, um absurdo, pois de Δ maximal temos que $\perp \notin \Delta$.
($\Leftarrow$) Se $\alpha \to \perp \notin \Delta$, então, $\neg(\alpha \to \perp) \in \Delta$. Logo, pela instância do axioma (A15), $(\alpha \to \perp) \to \perp \in \Delta$ e, portanto, pelo axioma (A16), $\alpha \in \Delta$. □

Por outro lado, dado que LPT1, enquanto um sistema de Hilbert, é uma S-lógica compacta, então o Lema 2.1.7 pode ser aplicado a LPT1.

Proposição 2.2.3. Sejam Δ uma teoria relativamente maximal com respeito a α e $\mathfrak{A}(\Delta)$ uma estrutura parcial como na Definição 2.2.1. Então, para toda fórmula φ:

(i) $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \varphi[\vec{a}]$ sse $\varphi(\vec{a}) \in \Delta$;

(ii) $\vec{a} \in \varphi_u^{\mathfrak{A}}$ implica $\neg\varphi(\vec{a}) \in \Delta$.

Demonstração:
A demonstração é por indução na complexidade da fórmula φ.
[Base] [$\varphi = P(\tau_1, ..., \tau_k)$ atômica]

(a.i) $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \varphi[\vec{a}]$ sse, pela definição de satisfação pragmática, $(\tau_1[\vec{a}], ..., \tau_k[\vec{a}]) \in P_+^{\mathfrak{A}} \cup P_u^{\mathfrak{A}}$ sse, pela Definição 2.2.1, $P(\tau_1[\vec{a}], ..., \tau_k[\vec{a}]) \in \Delta$ see $\varphi(\vec{a}) \in \Delta$.

(a.ii) $\vec{a} \in P(\tau_1, ..., \tau_k)_u^{\mathfrak{A}}$ implica $(\tau_1[\vec{a}], ..., \tau_k[\vec{a}]) \in P_u^{\mathfrak{A}}$ implica $\neg P(\tau_1[\vec{a}], ..., \tau_k[\vec{a}]) \in \Delta$ implica $\neg\varphi(\vec{a}) \in \Delta$.

[HI] a proposição vale para fórmulas de complexidade $k < n$. Agora:

[$\varphi = \neg\lambda$] assim:

(b.i)($\Rightarrow$) Se $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \neg\lambda[\vec{a}]$ e como estamos em um ambiente paraconsistente, podem ocorrer 2 casos:

(b.i)($\Rightarrow$)(1) $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \lambda[\vec{a}]$ implica, pela definição de satisfação pragmática, $\vec{a} \in \lambda_u^{\mathfrak{A}}$ implica, por HI, $\neg\lambda(\vec{a}) \in \Delta$.

(b.i)($\Rightarrow$)(2) $\mathfrak{A}(\Delta) \nVdash \lambda[\vec{a}]$ implica, por HI, $\lambda(\vec{a}) \notin \Delta$ implica, pelo Lema 2.1.9 (iv), $\neg\lambda(\vec{a}) \in \Delta$.

(b.i)($\Leftarrow$) Se $\neg\lambda(\vec{a}) \in \Delta$, então temos dois casos possíveis:

(b.i)($\Leftarrow$)(1) $\lambda(\vec{a}) \in \Delta$ implica, pela Definição 2.2.1, $\vec{a} \in \lambda_u^{\mathfrak{A}}$ implica, pela definição de satisfação pragmática, $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \neg\lambda[\vec{a}]$.

(b.i)($\Leftarrow$)(2) $\lambda(\vec{a}) \notin \Delta$ implica, pela Definição 2.2.1, $\vec{a} \in \lambda_-^{\mathfrak{A}}$ implica, pela definição de satisfação pragmática, $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \neg\lambda[\vec{a}]$.

(b.ii) $\vec{a} \in (\neg\lambda)_u^{\mathfrak{A}}$ implica, pela Definição 1.4.1, $\vec{a} \in \lambda_u^{\mathfrak{A}}$ implica, pela Definição 1.4.7, $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \lambda[\vec{a}]$ implica, por HI, $\lambda(\vec{a}) \in \Delta$ implica, pelo Lema 2.1.9 (v), $\neg\neg\lambda(\vec{a}) \in \Delta$.

[$\varphi = \beta \to \lambda$]

(c.i) $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash (\beta \to \lambda)[\vec{a}]$ sse, pela Definição 1.4.7, $\mathfrak{A}(\Delta) \nVdash \beta[\vec{a}]$ ou $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash$

$\lambda[\vec{a}]$ sse, por HI, $\beta(\vec{a}) \notin \Delta$ ou $\lambda(\vec{a}) \in \Delta$ sse, pelo Lema 2.1.9, $\beta(\vec{a}) \rightarrow \lambda(\vec{a}) \in \Delta$.

(c.ii) Pela Definição 1.4.1, sabemos que $(\beta \rightarrow \lambda)_u^{\mathfrak{A}} = \emptyset$, logo o item (ii) vale trivialmente.

$[\varphi = \beta \wedge \lambda]$

(d.i) $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash (\beta \wedge \lambda)[\vec{a}]$ sse, pela Definição 1.4.7, $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \beta[\vec{a}]$ e $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \lambda[\vec{a}]$ sse, por HI, $\beta(\vec{a}) \in \Delta$ e $\lambda(\vec{a}) \in \Delta$ sse, pelo Lema 2.1.9, $\beta(\vec{a}) \wedge \lambda(\vec{a}) \in \Delta$.

(d.ii) $\vec{a} \in (\beta \wedge \lambda)_u^{\mathfrak{A}}$ implica, pela Definição 1.4.7, $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \neg(\beta \wedge \lambda))[\vec{a}]$ implica, pela Proposição 2.1.17 (i), $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash (\neg\beta \vee \neg\lambda)[\vec{a}]$ implica, pela Definição 1.4.7, $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \neg\beta[\vec{a}]$ ou $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \neg\lambda[\vec{a}]$ implica, por HI, $\neg\beta(\vec{a}) \in \Delta$ ou $\neg\lambda(\vec{a}) \in \Delta$ implica, pelo Lema 2.1.9(ii), $\neg\beta(\vec{a}) \vee \neg\lambda(\vec{a}) \in \Delta$ implica, pela Proposição 2.1.17 (i), $\neg(\beta(\vec{a}) \wedge \lambda(\vec{a})) \in \Delta$.

$[\varphi = \forall x(\lambda)]$

(e.i) $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \forall x(\lambda)[\vec{a}]$ sse, pela Definição 1.4.7, $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \lambda[b, \vec{a}], \forall b \in D$ sse, por HI, $\lambda(b, \vec{a}) \in \Delta, \forall b \in D$ sse, pelo Lema 2.1.9(xii), $\forall x(\lambda)(\vec{a}) \in \Delta$.

(e.ii) Pela Definição 1.4.4, sabemos que $(\forall x(\lambda))_u^{\mathfrak{A}} = \emptyset$, logo o item (ii) vale trivialmente. $\square$

Lembremos da Definição 1.4.11 de consequência semântica pragmática entre sentenças fechadas, denotada por $\Vdash$. Provaremos que esta relação de consequência coincide com a de LPT1. Isto é, provaremos que LPT1 é correta e completa com relação à semântica de estruturas parciais introduzida no Capítulo 1.

Teorema 2.2.4. [Corretude] Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de sentenças fechadas de primeira ordem. Então $\Gamma \vdash_{LPT1} \varphi$ implica $\Gamma \Vdash \varphi$.

Demonstração. É simples provar que os axiomas de LPT1 são válidos em toda estrutura parcial, usando a Definição 1.4.7. Por outro lado, o novo axioma de LPT1 é também válido nas estruturas parciais. Finalmente, as regras de inferência preservam a validade segundo a Definição 1.4.7. $\square$

Teorema 2.2.5. [Completude] Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de sentenças fechadas de $\mathbb{L}$. Então

$$\Gamma \Vdash \varphi \text{ implica } \Gamma \vdash_{LPT1} \varphi.$$

Demonstração. Suponhamos que $\Gamma \nvdash_{LPT1} \varphi$. Logo, pelo Lema 2.1.7, existe Δ, relativamente maximal com respeito a φ, que estende Γ. Então, pela Proposição 2.2.3, temos que $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \lambda[\vec{a}]$ se, e somente se $\lambda(\vec{a}) \in \Delta$, para toda λ e para toda $\vec{a}$. Em particular, $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \lambda$ se, e somente se $\lambda \in \Delta$, para toda sentença λ. Consequentemente, dado que $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\mathfrak{A}(\Delta) \Vdash \Gamma$. Por hipótese inicial, temos que $\Delta \nvdash_{LPT1} \varphi$, então pelo Lema 2.1.8 temos que $\varphi \notin \Delta$. Logo, $\mathfrak{A}(\Delta) \nVdash \varphi$. Portanto, $\Gamma \nVdash \varphi$, pois existe uma estrutura parcial que satisfaz pragmaticamente Γ, mas que não satisfaz pragmaticamente φ. $\square$

Diante do exposto acima, destacamos que definimos uma lógica correta e completa para uma generalização da teoria da quase-verdade de da Costa e colaboradores. Destacamos, ainda, que a semântica não precisa completar as estruturas parciais (isto é, considerar estruturas $\mathfrak{A}$-normais), contemplando a idéia de que predicados são ternas. Por outro lado, a lógica para estas estruturas é introduzida axiomaticamente e sua apresentação é bastante natural, sem precisar lançar mão de recursos formais extravagantes.

Capítulo 3

A Semântica de Sociedades via Quantificadores Modulados

Segundo da Costa e French (2003), a atividade científica é uma atividade conceitual por meio da qual se busca a quase-verdade de uma maneira racional.

> Nossa afirmação ousada é que na vida cotidiana, na ciência, e na tecnologia, usamos certas técnicas indutivas para fazer previsões e conjeturar experiências futuras, entre outras coisas. A indução, portanto, impõe-se sobre nós uma realidade significativa, e alguma forma de lógica indutiva deve ser desenvolvida para investigar e sistematizá-la. A forma que temos em mente, é claro, incorpora a noção de quase-verdade no coração do programa. (DA COSTA e FRENCH, 2003, p. 131, tradução nossa)

Na proposta de da Costa e colaboradores, as estruturas parciais foram introduzidas para formalizar a noção de quase-verdade, de maneira que para alguma estrutura parcial $\mathfrak{A}$, que representa, digamos, informação estatística sobre um dado domínio, existem diferentes estruturas $\mathfrak{A}$-normais que estendem aquela informação parcial a uma total. Por exemplo, diferentes teorias estatísticas são usadas para informar a construção de diferentes estruturas

$\mathfrak{A}$-normais. E isto gera um componente indutivo típico da abordagem de estruturas parciais.

De acordo com da Costa ([dC99], p. 203), a atividade científica, em particular, no domínio das ciências empíricas, é apresentada sob três dimensões, a saber:

1. *Dimensão lógica*: É atividade fundada em uma lógica dedutiva básica;
2. *Dimensão indutiva*: Recorre, também, na formulação, teste e corroboração de hipóteses, leis e teorias, à lógica indutiva; isto pressupõe que, na observação e na experimentação, ela apele para as normas metodológicas pertinentes (técnicas de medição, teoria dos erros, curva de Gauss, estatística etc.);
3. *Dimensão crítica*: Afigura-se inseparável de atitude crítica permanente e radical.

Nesse sentido, a atividade científica pode conter uma componente de indução, segundo a qual a 'realidade' pode ser dominada através de tentativas e erros, por meio de métodos como a analogia, a formulação de hipóteses e a estatística. Por outro lado, mostramos que o raciocínio engendrado pelas lógicas moduladas, via quantificadores generalizados, capta tipos específicos de raciocínio indutivo. Assim, a fim de introduzir esta componente de indução no modelo de racionalidade científica, propomos adicionar um quantificador generalizado na definição de semântica de sociedades.

Para este objetivo, apresentaremos, nesse capítulo, a semântica de sociedades, em seguida abordamos as lógicas moduladas e, por fim, mostramos uma possibilidade de redefinir a semântica de sociedades abertas por meio dos quantificadores modulados e, assim, utilizar este arcabouço para a noção de quase-verdade.

Neste capítulo, não propomos uma generalização da semântica de sociedades com o rigor formal desenvolvido nos capítulos anteriores. Todavia, estabelecemos as relações entre esses conceitos e, por meio de um tratamento intuitivo, lançamos propostas para uma investigação teórica pertinente.

3.1 A semântica de sociedades

Em 1999, W. Carnielli e M. Lima-Marques introduziram um método que permite obter novas lógicas a partir da combinação dos "agentes", i.e., das valorações de uma dada lógica, e denominaram este método de Semântica de Sociedades. Esta abordagem situa-se numa área de estudo relativamente nova dentro da Lógica, a qual estuda combinações entre diferentes sistemas lógicos, ou seja, trata-se de construir novas lógicas a partir de outras.

A Semântica de Sociedades foi desenvolvida também como uma tentativa de responder à questão, muito presente na Lógica, de como expressar adequadamente casos que possam permitir a presença de enunciados contraditórios. Assim, a fim de manipular informações contraditórias, as semânticas de sociedades possibilitam uma interpretação mais natural e intuitiva para as inconsistências presentes em sistemas formais.

Esta proposta teve como motivação inicial o estudo do processamento da informação obtida a partir de observações feitas por agentes "clássicos", mas onde o resultado de tal processo pudesse ter características não clássicas, tais como a rejeição do princípio do terceiro excluído (Sociedades Paracompletas) ou a rejeição do princípio da não-contradição, sem que esta negação trivializasse o cálculo obtido (Sociedades Paraconsistentes).

Podemos ilustrar esta motivação, em conformidade com [Fer01] e [FC03], do seguinte modo. Há situações nas quais se processa informação com relação a certo evento φ, a partir de um conjunto de várias medições de φ. Essas medições, as quais diremos que são emitidas por *agentes*, podem ser consideradas como opiniões de tais agentes, no sentido em que elas são clássicas, i.e., a opinião de cada agente é a favor ou contra, mas não as duas coisas ao mesmo tempo. Uma possível situação é que a opinião de um agente A_1 sobre φ seja favorável, mas que a opinião de outro agente A_2 não o seja. Dessa maneira, quando consideramos todas as opiniões sobre certo evento, podemos estar na presença de asserções contraditórias.

Neste caso, é preciso decidir o que fazer para obter algum tipo de resposta satisfatória, que leve novamente esta situação aos padrões clássicos. Mas para isso é conveniente modelar a situação, coletando os diferentes pareceres dos agentes num conjunto, o qual chamaremos de *Sociedade*, e definir, mediante certos critérios de seleção, um conjunto de opiniões aceitas a partir da Sociedade, o qual apresenta características não clássicas. A caracterização deste processo denomina-se Semântica de Sociedades.

Em [CLM99] são apresentadas as duas primeiras soluções possíveis mais intuitivas sobre o comportamento de uma sociedade a partir das várias opiniões dos agentes, com respeito a um mesmo fato φ. A primeira solução seria adotar uma *política aberta*, ou seja, podemos decidir, por exemplo, que a sociedade S, a qual é formada por um conjunto não-vazio de agentes, aceite φ sempre que existir, no mínimo, um agente que opine a favor de φ, e que aceite $\neg\varphi$ quando existir, no mínimo, um agente que rejeite φ. Uma sociedade deste tipo pode ser paraconsistente, pois φ poderia ser aceito e rejeitado ao mesmo tempo por diferentes agentes.

Outra solução seria adotar uma *política fechada*, e o procedimento seria dual, no sentido em que S aceita φ se, e somente se, todos os agentes aceitam φ, e aceitará $\neg\varphi$ quando todos os agentes rejeitarem φ. Este tipo de sociedade é suscetível de não aceitar nem rejeitar φ, pois, por exemplo, podem existir agentes distintos A_1 e A_2 em que A_1 aceita e A_2 rejeita φ e, assim, a sociedade apresenta um caráter paracompleto e, ainda, a lei do terceiro excluído não é válida em geral. Nesse sentido, uma sociedade fechada teria um caráter intuicionista, visto que, por exemplo, $\varphi \vee \neg\varphi$ não é válida.

Como mencionado em [CLM99], esta abordagem é análoga as idéias de S. Jaśkowski em sua proposta para a Lógica Discussiva, introduzida em 1948 (cf.

[Jaś69]), na qual há também uma aproximação a situações contraditórias a partir de opiniões que não são individualmente contraditórias, e cujo enfoque é expressável a partir de conceitos modais.

Originalmente, o método da Semântica de Sociedades foi formalizado para alguns casos especiais de sociedades, a saber: as sociedades *biassertivas*, no sentido em que para cada variável proposicional p, os valores de p e $\neg p$ são independentes. E ainda, as sociedades *triassertivas*, em que nem a negação nem a dupla negação são funcionais veritativas, i.e., os valores de p, $\neg p$ e $\neg\neg p$ são independentes para toda variável proposicional p, ou seja, elas podem ocorrer como fórmulas primitivas.

Segundo o critério adotado para a aceitação das fórmulas iniciais, podemos ter sociedades biassertivas *abertas* ou *fechadas*, as quais são representadas, respectivamente, pelos sistemas trivalentes P^1 (paraconsistente) e I^1 (paracompleta). Além disso, podemos ter sociedades triassertivas *abertas* ou *fechadas*, as quais são representadas, respectivamente, pelos sistemas tetravalentes P^2 (paraconsistente) e I^2 (paracompleta) (cf. [CLM99]).

Formalizaremos o método das Semânticas de Sociedades seguindo o formalismo introduzido em [Fer01] e [FC03], tendo em vista que naqueles trabalhos foram apresentadas várias generalizações deste método e, em seguida, dados dois exemplos de aplicação deste novo formalismo, quais sejam, uma hierarquia de lógicas paraconsistentes chamadas P^n (para $n \in \mathbb{N}$) e uma hierarquia de lógicas paracompletas denominadas I^n (para $n \in \mathbb{N}$).

Definição 3.1.1. Seja **CPC** o Cálculo Proposicional Clássico. Um *agente clássico*, ou bivalorado, é uma valoração clássica $Ag : \mathbb{L} \to \{T, F\}$ definida na linguagem $\mathbb{L}$ do **CPC**. Uma *sociedade de agentes clássicos* é um conjunto não vazio $\mathcal{S}$ de agentes clássicos. ∎

A partir de agora, usaremos $\sqcup$, $\sqcap$ e $-$ para denotar, respectivamente, as operações de supremo, ínfimo e complemento em $\{0, 1\}$, com relação à sua estrutura usual de álgebra de Boole. E ainda, $\mathcal{V}$ é o conjunto de variáveis proposicionais, i.e., $\mathcal{V} = \{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Definição 3.1.2. Seja $\mathcal{S}$ uma sociedade de agentes clássicos. A *sociedade biassertiva aberta* gerada por $\mathcal{S}$, denotada por $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}$, é uma função de valoração $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}} : \mathbb{L} \to \{0,1\}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(SBA-1) $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(p) = 1$ sse existe um agente $Ag \in \mathcal{S}$, tal que $Ag(p) = T$ $(p \in \mathcal{V})$;

(SBA-2) $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\neg p) = 1$ sse existe um agente $Ag \in \mathcal{S}$, tal que $Ag(p) = F$ $(p \in \mathcal{V})$;

(SBA-3) $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\varphi \to \lambda) = \ - \mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\varphi) \sqcup \mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\lambda)$;

(SBA-4) $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\varphi \wedge \lambda) = \ \mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\varphi) \sqcap \mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\lambda)$;

(SBA-5) $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\varphi \vee \lambda) = \ \mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\varphi) \sqcup \mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\lambda)$;

(SBA-6) $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\neg \varphi) = \ - \mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\varphi)$ (sempre que $\varphi \notin \mathcal{V}$). ■

Definição 3.1.3. Uma fórmula φ é *satisfatível em uma sociedade biassertiva aberta* $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}$, ou ainda, $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}$ *satisfaz* φ, quando $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\varphi) = 1$. Notação: $\mathfrak{S}^+ \vDash_{\mathcal{S}} \varphi$. Dizemos que $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}$ *não satisfaz* φ, se $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\varphi) = 0$. Notação: $\mathfrak{S}^+ \nvDash_{\mathcal{S}} \varphi$. ■

Definição 3.1.4. Seja $\mathcal{S}$ uma sociedade de agentes clássicos. A *sociedade biassertiva fechada* (SBF) gerada por $\mathcal{S}$, denotada por $\mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}$, é uma função de valoração $\mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}} : \mathbb{L} \to \{0,1\}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(SBF-1) $\mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(p) = 1$ sse para todo agente $Ag \in \mathcal{S}$, $Ag(p) = T$ $(p \in \mathcal{V})$;

(SBF-2) $\mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(\neg p) = 1$ sse para todo agente $Ag \in \mathcal{S}$, $Ag(p) = F$ $(p \in \mathcal{V})$;

(SBF-3) $\mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(\varphi \to \lambda) = \quad - \mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\varphi) \sqcup \mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(\lambda)$;

(SBF-4) $\mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(\varphi \wedge \lambda) = \quad \mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(\varphi) \sqcap \mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(\lambda)$;

(SBF-5) $\mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(\varphi \vee \lambda) = \quad \mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(\varphi) \sqcup \mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(\lambda)$;

(SBF-6) $\mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(\neg\varphi) = \quad - \mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(\varphi)$ (sempre que $\varphi \notin \mathcal{V}$). ■

As definições de satisfatibilidade em uma SBF são análogas às definições introduzidas na Definição 3.1.3.

Definição 3.1.5. Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de fórmulas do **CPC**. Definimos a *relação de consequência aberta*, denotada por $\vDash^+$ (respectivamente, a *relação de consequência fechada*, denotada por $\vDash^-$), do seguinte modo: $\Gamma \vDash^+ \varphi$ (respectivamente, $\Gamma \vDash^- \varphi$) sse para toda sociedade $\mathcal{S}$ tal que $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\lambda) = 1$ (respectivamente, $\mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(\lambda) = 1$) para todo $\lambda \in \Gamma$, também vale que $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\varphi) = 1$ (respectivamente vale que $\mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}(\varphi) = 1$). A partir disso, dizemos que uma fórmula φ é uma *tautologia aberta* (respectivamente *tautologia fechada*) se, e somente se, é satisfatível por toda sociedade aberta $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}$ (respectivamente para toda sociedade fechada $\mathfrak{S}^-_{\mathcal{S}}$). ■

A fim de simplificar a representação de uma sociedade biassertiva (aberta ou fechada) de agentes clássicos para verificar, por exemplo, se uma fórmula é tautologia (aberta ou fechada), temos em ([CLM99], Teorema 2.1) a demonstração do seguinte resultado.

Teorema 3.1.6. Seja $\mathcal{S}$ uma sociedade de agentes clássicos. Então, existem sociedades de agentes clássicos $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, cada uma delas contendo, no máximo, dois agentes em que para toda fórmula φ:

$$\mathfrak{S}^+ \vDash_{\mathcal{S}} \varphi \quad \text{sse} \quad \mathfrak{S}^+ \vDash_{\mathcal{S}_1} \varphi$$

$$\mathfrak{S}^- \vDash_{\mathcal{S}} \varphi \quad \text{sse} \quad \mathfrak{S}^- \vDash_{\mathcal{S}_2} \varphi$$

□

Nossa próxima etapa será introduzir tipos específicos de quantificadores generalizados na definição de sociedades abertas. Este procedimento será justificado pelo tipo de raciocínio indutivo que tais quantificadores possibilitam e, então, relacionaremos com a noção de incerteza e a parcialidade da atividade científica segundo o modelo de racionalidade científica de da Costa.

Na Seção 4.1, definiremos o sistema P^1, por meio da axiomática introduzida em [CLM99], e abordamos, naquela mesma obra, a equivalência desta lógica com as sociedades abertas. Em seguida, demonstraremos que P^1 pode ser considerada a lógica da quase-verdade para contextos em que haja manipulação de conhecimento inconsistente.

3.2 Sobre quantificadores modulados

A partir do trabalho de A. Mostowski (cf. [Mos57]), evidenciou-se o fato de que existem muitos e matematicamente interessantes quantificadores, denominados quantificadores generalizados, que não são definíveis em termos daqueles usuais da lógica de primeira-ordem clássica, e ainda, relevantes pesquisas têm sido publicadas sobre este tema, dentre elas, Keisler introduziu em [Kei70] uma lógica com o quantificador "existem incontavelmente muitos"; Sgro em [Sgr77] apresentou um quantificador topológico, e Barwise e Cooper em [BC81] investigaram a relação entre quantificadores lógicos e a linguagem natural.

Como sistema lógico não-monotônico, podemos citar a Lógica do Padrão (Default Logic) desenvolvida por R. Reiter em [Rei80], que se caracteriza pelo acréscimo de regras ou "padrões" à lógica de primeira ordem clássica. A noção de padrão se estabelece como uma ferramenta (regra do padrão), por meio da qual podemos atribuir uma propriedade a uma constante/indivíduo "na ausência de qualquer informação contrária", uma vez que, segundo Reiter, essa "ausência de informação contrária" pode ser interpretada como "é consistente assumir que". E ainda, sua regra pode ser interpretada como uma representação para o quantificador "quase todos", ou "a maioria", sem fazer uso de recursos quantitativos como distribuições de frequências ou raciocínio aproximado formalizado pelas Lógicas Difusas (Fuzzy Logics).

Contudo, os sistemas lógicos não-monotônicos têm sido criticados por alguns autores, dentre eles Sette, Carnielli e Veloso (cf. [SCV99]), basicamente, sob dois pontos presentes nas abordagens não-monotônicas: o primeiro diz respeito a uma grande desvantagem computacional, diante do fato de esses sistemas precisarem "rever" as informações (regras, premissas e teoremas já demonstrados) a cada nova demonstração, o que pressupõe uma falta de localidade dos procedimentos de demonstração. O segundo ponto é que embora estes sistemas formalizem um tipo de raciocínio sob incerteza (noção de senso comum), eles de fato não capturam a noção de "quase todos" ou "a maioria", pois podem existir modelos sem que necessariamente "quase todos" os indivíduos satisfaçam as proposições acreditadas. Este último ponto é de especial relevância, visto que

> Alguns sistemas se propõem a formalizar raciocínio sob incerteza por senso comum, sem diferenciá-lo do raciocínio que generaliza proposições do tipo "quase todos" ou "a maioria". Entretanto, existe uma diferença entre a crença em determinada proposição e a quantificação de uma proposição dada por "quase todos" ou "a maioria" ([Grá99], p. 72).

No sentido de superar esses entraves da lógica não-monotônica, surgiram vários sistemas monotônicos destinados a formalizar o raciocínio sob incerteza.

A lógica dos ultrafiltros, introduzida em [SCV99], enquanto sistema lógico monotônico, mostrou-se como uma alternativa à lógica do padrão de Reiter (1980). Segundo os autores, é inadequada a identificação de "na ausência de qualquer informação contrária" com "é consistente assumir que" para tratar do problema de como atribuímos a um indivíduo genérico, uma propriedade que se mostra "quase sempre" verdadeira para os indivíduos do universo. A lógica dos ultrafiltros apresenta-se como uma extensão da lógica clássica de primeira ordem, dada pelo acréscimo de um quantificador generalizado, em que este quantificador "quase todos" semanticamente é interpretado por uma estrutura denominada *ultrafiltro próprio*.

Veloso abordou em [Vel99] a Lógica de Ultrafiltro e, por meio desta lógica, destacou a possibilidade de aplicá-la à área de raciocínio indutivo, utilizado em experimentos e testes empíricos. Segundo Veloso ([Vel99], p. 500):

> Isso surge da observação de que, enquanto as leis da matemática pura podem ser da forma **"Todos os M's são N's"**, pode-se argumentar que as leis empíricas (como nas ciências naturais) podem ser consideradas asserções - mais cautelosas - da forma **"Quase todos os M's são N's"** (tradução e grifo nosso).

E ainda, o poder de expressão do quantificador "quase-todos" é ilustrado por meio de testes de programas.

> [...] testa-se o comportamento de um programa para um conjunto (pequeno) de dados e, então, espera-se argumentar que o programa exibirá este comportamento em geral. Aqui, a justificativa é que o conjunto de dados de teste é "representativo", na medida em que abrange os possíveis caminhos de execução. Isso pode ser considerado um exemplo de um salto indutivo: de uma evidência experimental comparativamente pequena, para uma conclusão quase universal (VELOSO, 1999, p. 500, tradução e grifo nosso).

No mesmo sentido de propor um sistema monotônico para formalizar o raciocínio sob incerteza, a partir de perspectivas abertas em Carnielli e Veloso (cf. [CV04]) e em [SCV99], destacamos o trabalho de Grácio em [Grá99] que introduziu uma ampla família de sistemas lógicos, denominada de *lógicas moduladas*. Cada sistema modulado é caracterizado, sintaticamente, pela inclusão de um novo quantificador generalizado na linguagem da lógica de primeira ordem.

Do ponto de vista semântico, tais quantificadores são interpretados por subconjuntos do conjunto das partes do universo e buscam a formalização de alguns quantificadores de nossa linguagem natural, distintos do universal e do existencial. Dessa maneira, por exemplo, a lógica dos ultrafiltros se estabelece como um caso particular de lógica modulada.

Grácio em [Grá99] desenvolveu, para cada sistema lógico modulado, o que ela denominou de *raciocínio genérico*, o qual permite raciocinar sobre objetos "genéricos", ou "prototípicos", sobre um dado universo.

As lógicas moduladas constituem, de fato, numa formalização geral do raciocínio indutivo, visto que cada sistema modulado consegue formalizar um tipo de crença indutiva por meio de seu quantificador generalizado e, assim, caracterizar uma forma particular de raciocínio indutivo.

Caracterizamos as lógicas moduladas $L(\nabla)$ pela inclusão de um quantificador generalizado ∇, ou seja, um quantificador que permeia o universal e o existencial, na sintaxe da lógica clássica de predicados de primeira ordem, cuja interpretação semântica é dada por um subconjunto do conjunto das partes do universo. Os quantificadores "quase todos", "quase nenhum", "a maioria" e "a minoria" são exemplos de quantificadores modulados.

Os axiomas de $L(\nabla)$ são aqueles da lógica clássica de primeira ordem, incluindo os axiomas da identidade, acrescentando-se os seguintes axiomas para o quantificador ∇:

1. $\vdash_{L(\nabla)} \forall x(\theta(x) \leftrightarrow \lambda(x)) \rightarrow (\nabla x\theta(x) \leftrightarrow \nabla x\lambda(x))$;

2. $\vdash_{L(\nabla)} \nabla x\theta(x) \rightarrow \nabla y\theta(y)$, se y é livre para x em $\theta(x)$;

3. $\vdash_{L(\nabla)} \forall x\theta(x) \rightarrow \nabla x\theta(x)$;

4. $\vdash_{L(\nabla)} \nabla x\theta(x) \rightarrow \exists x\theta(x)$.

As Regras de Inferência são *Modus Ponens* e *Generalização*. De forma esquemática, temos:

$$(\mathbf{MP}) \qquad \frac{\theta,\ \theta \rightarrow \lambda}{\lambda} \qquad\qquad\qquad (\mathbf{Gen}) \qquad \frac{\theta}{\forall x \theta}$$

Segundo Grácio (cf. [Grá99]), as lógicas moduladas constituem uma formalização geral do raciocínio indutivo, visto que cada sistema modulado consegue formalizar um tipo de crença indutiva por meio de seu quantificador generalizado e, assim, caracterizar uma forma particular de raciocínio indutivo.

Todavia, devemos ressaltar que cada quantificador modulado (diante de uma proposição) não especifica a maneira como foi gerada determinada crença (uma vez que a proposição quantificada poderá ser premissa no sistema inferencial), apenas identifica uma crença indutiva àquela proposição e nos fornece uma estrutura que modela um conjunto de crenças indutivas, porquanto podemos dizer que:

> Essa ampla família de sistemas lógicos, denominada lógicas moduladas, é caracterizada pela presença de um subconjunto (q) do conjunto das partes do universo em sua semântica, representando um conjunto arbitrário de crenças (proposições não necessariamente válidas, mas que são inferidas com base nas evidências) de uma base de conhecimento. Sintaticamente, este subconjunto q é representado por um quantificador generalizado (Q). Intuitivamente, estendemos a lógica clássica de primeira ordem, dotando-a de um conjunto de crenças e, conforme as propriedades que o subconjunto q apresenta, ele descreve uma forma particular de raciocínio indutivo, ou seja, uma particularização das lógicas moduladas ([Grá99], p.76).

Os quantificadores formalizados pelas lógicas moduladas são os quantificadores generalizados, tais como: "a maioria", "muitos"e "quase em toda parte".

A Lógica do Plausível, por exemplo, formaliza raciocínios indutivos do tipo "uma 'boa parte' dos indivíduos possui determinada propriedade θ". Posteriormente, esta lógica foi rebatizada de Lógica da Ubiquidade pelo fato de capturar a noção de "em quase toda a parte" ou "quase sempre" (cf. [CG08]). A noção de crença que a indução abrange é aquela na qual acreditamos que o futuro será como o passado, baseando-nos em evidências favoráveis; porém, "estamos preparados para admitir que o que acreditamos pode estar errado". Para isto, a semântica desta lógica está estruturada num modelo matemático denominado pseudo-topologia. Nesta lógica, embora dedutiva, engendra-se um tipo de raciocínio indutivo: o raciocínio genérico, que por meio de regras, possibilita-nos realizar inferências que atribuam a um indivíduo genérico um comportamento observado em "boa parte" dos indivíduos do universo.

A linguagem da lógica do plausível, denotada por $\mathcal{L}(\mho)$, é uma extensão da linguagem clássica de primeira ordem, dada pelo acréscimo do quantificador do plausível $\mho$.

Em vista disso, as definições sintáticas, para $\mathcal{L}(\mho)$, são estabelecidas de modo usual. Tendo em vista que a lógica do plausível é apresentada num sistema axiomático, os axiomas de $\mathcal{L}(\mho)$ contém todos aqueles da lógica de primeira ordem clássica, e isto inclui os axiomas da igualdade, além de axiomas que manipulem fórmulas quantificadas com o quantificador da ubiquidade $\mho$. Para isto, foram acrescidos à parte clássica os axiomas seguintes:

(LP1) $\vdash_{L(\mho)} \mho x\theta(x) \wedge \mho x\lambda(x) \rightarrow \mho x(\theta(x) \wedge \lambda(x))$;

(LP2) $\vdash_{L(\mho)} \mho x\theta(x) \wedge \mho x\lambda(x) \rightarrow \mho x(\theta(x) \vee \lambda(x))$;

(LP3) $\vdash_{L(\mho)} \forall x\theta(x) \rightarrow \mho x\theta(x)$;

(LP4) $\vdash_{L(\mho)} \mho x\theta(x) \rightarrow \exists x\theta(x)$;

(LP5) $\vdash_{L(\mho)} \forall x(\theta(x) \leftrightarrow \lambda(x)) \rightarrow (\mho x\theta(x) \leftrightarrow \mho x\lambda(x))$;

(LP6) $\vdash_{L(\mho)} \mho x\theta(x) \rightarrow \mho y\theta(y)$, se y é livre para x em $\theta(x)$.

E a regra:

$$(\mathbf{RP}) \qquad \frac{\mho x\theta(x)}{\theta(g)}$$

Aqui, a fórmula $\mho x\theta(x)$ pode ser lida como "$\theta(x)$ é ubíquo".

A lógica do plausível possibilita engendrar um tipo de raciocínio indutivo, qual seja, o *raciocínio genérico*. Este raciocínio genérico é uma teoria do plausível em $\mathcal{L}(\mho)$, formada por um conjunto de fórmulas desta linguagem que se apresenta fechado sob as regras de inferências *Modus Ponens*, *Generalização* e uma terceira regra de inferência que será definida como *regra do plausível* (RP). Segundo Grácio, a regra do Plausível permite inferir para um indivíduo genérico um comportamento presente em 'boa parte' dos indivíduos do universo.

Resumidamente, a regra do plausível é definida em $\mathcal{L}(\mho)$, pela ampliação do tipo de similaridade por meio de uma nova constante g, denominada *constante genérica*. Assim, dado $\mho x\theta(x)$ inferimos, via (RP), $\theta(g)$.

De fato, o quantificador generalizado do plausível $\mho$ será o responsável por expressar as crenças obtidas pelas evidências favoráveis, e, assim, confrontamos o raciocínio genérico desta lógica com relação ao método hipotético-dedutivo de Popper (cf. [Pop59]) como segue.

> [...] a presença de instâncias negando as crenças apresentadas não necessariamente as derrubam [falsificam], como acontece com o método hipotético-dedutivo. Enquanto Popper [e toda a ciência] estava preocupado com proposições universais obtidas com base na experiência, nós estamos basicamente preocupados com proposições que afirmam fatos que apresentem evidências positivas a seu favor, mas não necessariamente certos ([Grá99], p. 179).

Este sistema não depende da noção de conjunto grande, mas está vinculada à noção de um conjunto suficiente de evidências para a inferência da crença indutiva e, além disso, contempla importantes teoremas, tais como o teorema da dedução, da consistência, da correção e da completude.

Em ([Grá99], p. 139) é introduzida uma estrutura matemática denominada *pseudo-topologia* com a finalidade de manipular os conjuntos de crenças, uma vez que a definição usual de topologia não apresenta duas noções requeridas pelo raciocínio genérico, neste caso, noções de plausibilidade, a saber:

(i) na topologia usual $\mathcal{T}$ temos que $\emptyset \in \mathcal{T}$. Contudo, não é intuitivo inferirmos proposições em que nenhum indivíduo corrobore determinadas asserções.

(ii) outra cláusula da topologia usual diz que "a reunião de uma família qualquer de abertos é um aberto". Contudo, as operações de raciocínios indutivos, sejam elas realizadas por humanos ou pela máquina, são de natureza finita.

Para evitar estas discrepâncias, Grácio introduz uma noção mais abstrata de topologia chamada de *pseudo-topologia*. Esta noção é definida como uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de um conjunto U, chamados os *subconjuntos abertos reduzidos*, os quais apresentam as seguintes propriedades:

(a) a interseção de dois subconjuntos abertos reduzidos quaisquer é um subconjunto aberto reduzido;

(b) a reunião de dois abertos reduzidos quaisquer é um subconjunto aberto reduzido;

(c) U é um subconjunto aberto reduzido;

(d) o subconjunto $\emptyset$ não é um aberto reduzido.

As definições para *espaço pseudo-topológico* e *subconjuntos fechados* são dadas de maneira usual.

Dessa maneira, em ([Grá99], p.142) temos a demonstração dos seguintes resultados.

Teorema 3.2.1. Toda pseudo-topologia define uma base de abertos densos de um espaço topológico. □

Proposição 3.2.2. Toda família de abertos densos em um espaço topológico é uma pseudo-topologia. □

Estes resultados justificam a interpretação do quantificador do tipo "quase em toda parte" por meio da noção de pseudo-topologia, pois embora o conjunto de evidências possa não ser grande, em relação ao universo, os indivíduos satisfazendo esta propriedade estão densamente espalhados no universo. Aqui, de forma usual, um subconjunto A é denso em um espaço pseudo-topológico X se para todo $U \neq \emptyset$ em β (uma base no espaço topológico), temos que $U \cap A \neq \emptyset$.

Caracterizamos uma *estrutura pseudo-topológica* para $\mathcal{L}(\mho)$ mediante a inclusão da pseudo-topologia na estrutura clássica de primeira ordem, assim, dado um conjunto não-vazio A e uma pseudo-topologia $\mathcal{T}$ sobre A, $\mathfrak{A}^{\mathcal{T}}$ é definida do seguinte modo:

$$\mathfrak{A}^{\mathcal{T}} = \left\langle \mathfrak{A}, \mathcal{T}^A \right\rangle = \left\langle A, \left\{R_i^{\mathfrak{A}}\right\}_{i \in I}, \left\{f_j^{\mathfrak{A}}\right\}_{j \in J}, \left\{c_k^{\mathfrak{A}}\right\}_{k \in K}, \mathcal{T}^A \right\rangle$$

ou seja, $\mathfrak{A}^{\mathcal{T}}$ é uma estrutura de tipo de similaridade $\tau = \langle I, J, K, T_0, T_1 \rangle$ e $\mathcal{T}^A$ um conjunto de subconjuntos do universo A. Além disso, $R_i^{\mathfrak{A}}$ é uma relação de aridade $T_0(i)$ definida sobre A; $f_i^{\mathfrak{A}}$ é uma função de aridade $T_1(j)$ definida sobre A e $\left\{c_k^{\mathfrak{A}}\right\}_{k \in K}$ é uma família de constantes de A.

A noção de *satisfatibilidade* das fórmulas de $\mathcal{L}(\mho)$ é definida da seguinte maneira:

$$\mathfrak{A}^{\mathcal{T}} \vDash \mho x \theta \quad \text{sse} \quad \left\{b \in A : \mathfrak{A}^{\mathcal{T}} \vDash \theta(b)\right\} \in \mathcal{T}^A$$

De acordo com da Costa (cf. [dC99], p. 203), a indução é uma componente patente da atividade científica e, nesse sentido, defendemos que a formalização da semântica de sociedades quando combinada com os quantificadores modulados constitui uma alternativa para capturar tal dimensão indutiva na ciência, além de possibilitar uma nova abordagem para a noção de quase-verdade. Para este objetivo, proporemos, a seguir, utilizar as lógicas moduladas na definição das semânticas de sociedades.

3.3 A semântica de sociedades moduladas

Como expusemos anteriormente, a semântica de sociedades foi originalmente formalizada em [CLM99] para alguns casos especiais, segundo o critério adotado para aceitação das fórmulas iniciais. Nesse sentido, poderíamos ter, por exemplo, sociedades biassertivas abertas ou fechadas. Um primeiro critério apresentado foi adotar uma política aberta, na qual a sociedade S, formada por um conjunto não-vazio de agentes, aceita φ sempre que existir, no mínimo, um agente que aceite φ.

Contudo, podemos estabelecer outros critérios para decidir quando uma sociedade aceita φ. Para este objetivo, introduziremos os quantificadores modulados para reformular tal método e com isso desenvolvemos uma nova alternativa para a proposta introduzida em [CLM99].

Intuitivamente, poderíamos, por exemplo, adotar o seguinte critério: uma sociedade aceita φ se, e somente se, *a maioria* dos agentes opinem a favor de φ. Outro exemplo seria adotar o quantificador da ubiquidade: uma sociedade aceita φ se, e somente se, *quase todos* os agentes opinam a favor de φ.

Diante do exposto, no nível proposicional, podemos estabelecer o critério abaixo para definir uma sociedade aberta.

Dada uma sociedade $\mathcal{S} = \{Ag_1, ..., Ag_n, ...\}$ de agentes clássicos, definimos uma *estrutura de sociedade modulada* a partir de $\mathcal{S}$, denotada por

$\mathfrak{A}^{\nabla}$, por meio da escolha de um quantificador modulado ∇, adicionado na linguagem da sociedade $\mathcal{S}$, denotada por $\mathbb{L}(\nabla)$. Este quantificador modulado é interpretado por um conjunto de subconjuntos do conjunto das partes de $\mathcal{S}$, chamado *complexo* e denotado por q, i.e., $q \subseteq \wp(\mathcal{S}) - \{\emptyset\}$, assim tal estrutura é definida pelo seguinte par:

$$\mathfrak{A}^{\nabla} = \langle \mathfrak{S}, q \rangle$$

aqui, $\mathfrak{S}$ é considerada a estrutura subjacente à sociedade $\mathcal{S}$ dada.

A partir disso, podemos adaptar a Definição 3.1.2 pela inclusão de uma estrutura modulada, e desta maneira, tal sociedade é chamada de *Sociedade Modulada Aberta*, denotada por $\mathfrak{S}^{+}_{\mathcal{S}^{\nabla}}$, se satisfaz as propriedades a seguir:

(SMA-1) $\mathfrak{S}^{+}_{\mathcal{S}^{\nabla}}(p) = 1 \quad \text{sse} \quad \{Ag : Ag \in \mathcal{S}, Ag(p) = T\} \in q;$

(SMA-2) $\mathfrak{S}^{+}_{\mathcal{S}^{\nabla}}(\neg p) = 1 \quad \text{sse} \quad \{Ag : Ag \in \mathcal{S}, Ag(p) = F\} \in q.$

Nesta definição, uma sociedade modulada aberta (SMA) aceita p ($p \in \mathcal{V}$) se, e somente se, os indivíduos em $\mathcal{S}$ que aceitam p pertencem ao complexo q, ou seja, pertencem a um determinado conjunto definido por uma certa estrutura matemática (como filtro, ultrafiltro, espaços topológicos e suas generalizações, e assim por diante). Além disso, as demais cláusulas da Definição 3.1.2 poderiam ser preservadas.

Na tentativa de promover uma definição para uma sociedade aberta de primeira ordem, concebemos agora os agentes como estruturas de primeira ordem. Dessa maneira, podemos estender a relação de consequência aberta ($\vDash^{+}$) da Definição 3.1.5.

Sejam $\mathcal{S} = \{\mathfrak{A}_1, ..., \mathfrak{A}_n\}$ uma sociedade, R um símbolo de predicado n-ário. Então, $\mathfrak{S}^{+}_{\mathcal{S}}$ é chamada de *sociedade aberta* gerada por $\mathcal{S}$, se verificar as seguintes propriedades:

(SMA1*) $\vDash^{+} R(\tau_1, \ldots, \tau_k) \quad \text{sse} \quad \mathfrak{A}_i \vDash R(\tau_1, \ldots, \tau_k), \text{para alguma } \mathfrak{A}_i;$

(SMA2*) $\vDash^+ \neg R(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ sse $\mathfrak{A}_i \nvDash R(\tau_1, \ldots, \tau_k)$, para alguma $\mathfrak{A}_i$.

A partir desta definição, poderíamos também introduzir quantificadores generalizados. Neste caso, ao invés de exigirmos que alguma estrutura satisfaça R, podemos estabelecer, por exemplo, que *quase nenhuma* das estruturas satisfaçam tal fórmula. Estas possibilidades, no entanto, necessitam de um tratamento formal mais rigoroso.

Os agentes que compõem a sociedade aberta, quando definidos como estruturas de primeira ordem, permitem-nos uma aproximação com a definição de quase-verdade. Com efeito, podemos interpretar os agentes como estruturas totais (normais) dadas a partir de uma estrutura parcial, aqui vista como a possível estrutura apresentada pela Sociedade dada inicialmente para manipular as informações oferecidas pelos agentes.

A quase-verdade, neste sentido, poderia ser vista como a verdade apresentada por uma Sociedade Aberta, na suposição de que a estrutura $\mathfrak{A}$ subjacente a ela seja parcial e seus agentes definidos como estruturas $\mathfrak{A}$-normais.

A própria definição de quase-verdade dada pela Definição 1.1.10 (ii) nos possibilita uma abordagem com a introdução dos quantificadores modulados. Assim, para esboçarmos um exemplo da aplicação de quantificação modulada naquela definição, temos que φ é quase-verdadeira em uma sociedade modulada aberta, se em *quase nenhuma* das estruturas estendidas $\mathfrak{A}$-normais (i.e., os agentes) φ também é verdadeira. Por outro lado, na Definição 1.1.10 (iii) poderíamos usar um tipo de sociedade modulada fechada e, assim, adotaríamos, por exemplo, o quantificador modulado *quase todos*.

A escolha dos quantificadores generalizados modulados não foi arbitrária. De fato, a justificativa desta escolha se dá em razão da adequação que estes quantificadores apresentam para ambientes de raciocínio sob incertezas (contextos parciais), o que nos remete diretamente para a noção de quase-verdade, pois Mikenberg, da Costa e Chuaqui (1986) observaram que o formalismo da quase-verdade pode ser empregado como uma forma de verdade aproximada, uma vez que a quase-verdade é uma noção contextual (relativa a uma dada relação parcial). Além disso, por meio destes quantificadores, podemos obter um tipo de raciocínio indutivo pertinente com a componente indutiva presente na atividade científica.

A contextualidade supracitada pode ser obtida, em nosso formalismo, por meio do complexo q introduzido na semântica do sistema lógico, a fim de interpretar o quantificador generalizado ∇. Na seção anterior, vimos que este complexo representa um conjunto de crenças de uma base de conhecimento, ou seja, proposições não necessariamente válidas, mas que são inferidas com base nas evidências.

Dessa forma, segundo o tipo de crença empregado no complexo, os quantificadores modulados caracterizam tipos particulares de raciocínio indutivo, e permitem estabelecer o *raciocínio genérico*. No caso da Lógica da Ubiquidade, mostramos que podemos inferir para um indivíduo genérico um comportamento observado em *boa parte* dos indivíduos do universo.

Segundo o modelo de racionalidade científica de da Costa e colaboradores (cf. [BdC07], p. 386), o qual busca explicar tanto a existência de revoluções na ciência quanto o amplo papel desempenhado pelas inconsistências na prática científica, existe uma componente indutiva que precisa ser considerada no referido modelo. Esta componente significativa da racionalidade diz respeito à habilidade de gerar e acomodar os procedimentos para que possamos obter as premissas de nossas derivações. A inferência estatística e a analogia são exemplos de tais procedimentos.

Dessa maneira, consideramos o raciocínio genérico, obtido pelo acréscimo de um quantificador modulado em uma lógica de primeira ordem, como uma alternativa adequada para capturar a componente indutiva presente na atividade científica. Ademais, quando adicionamos um quantificador modulado a uma Sociedade Aberta de primeira ordem, ou seja, uma Sociedade Modulada Aberta, esta estratégia nos possibilita uma nova abordagem para a noção de quase-verdade.

Capítulo 4

Teorias da Quase-Verdade e Sociedades Paraconsistentes

De acordo com Bueno e da Costa (2007), uma componente crucial da racionalidade científica é a capacidade de fazer derivações, mas isto requer uma lógica apropriada, a qual considere aspectos como a natureza parcial inerente às representações científicas.

Nesse sentido, em concordância com Bueno e da Costa, não defendemos a tese de que exista uma lógica adequada que possa ser usada em todos os contextos, pois segundo o domínio do conhecimento considerado, lógicas diferentes são adequadas para a tarefa. Em outras palavras, estamos diante de um pluralismo lógico.

Por exemplo, em um contexto no qual pretendamos modelar aspectos construtivos do raciocínio matemático, a lógica clássica não é adequada, mas sim uma das diversas lógicas intuicionistas. Em contextos inconsistentes, a fim de evitar a trivialidade e a perda de informação, uma das várias lógicas paraconsistentes é adequada. Assim, estes exemplos ilustram que, em um dado contexto, mais de uma lógica pode ser apropriada.

Diante do exposto, evidenciaremos que, assim como em [BdC07] foi mostrado que a quase-verdade consegue acomodar este aspecto da racionalidade, pela introdução das estruturas parciais, encontramos em uma Sociedade Paraconsistente uma lógica que se mostrará bastante apropriada para a formalização da noção de quase-verdade, pela capacidade que esta possui de interpretar as possíveis inconsistências em sistema formais, ou seja, uma lógica capaz de modelar situações em que haja conflitos de informação e, assim, manipular conhecimento inconsistente.

Para este objetivo, apresentaremos o sistema trivalente e paraconsistente P^1 introduzido por A. M. Sette em 1973 (ver [Set73]), e revisitaremos um resultado especial que estabelece P^1 como a lógica das Sociedades Biassertivas Abertas (cf. [CLM99]).

Em seguida, mostraremos que aquele sistema paraconsistente também pode ser adotado como a lógica da quase-verdade, mediante ajuste nas cláusulas da Definição 1.4.1, a qual estabelece a interpretação de uma fórmula φ em uma estrutura parcial $\mathfrak{A}$ e, pela noção de satisfação pragmática dada pela Definição 1.4.7.

No Teorema 1.1.18, vimos que a definição de Quase-Satisfação (cf. Definição 1.1.16), proposta por Bueno-de Souza (1996), difere da proposta original de da Costa em um aspecto formal, qual seja o de não introduzir a indeterminação nas fórmulas complexas, em especial destacamos a negação. A despeito da definição de Bueno e de Souza permitir uma interpretação mais próxima de uma visão empirista, nosso trabalho aqui será mostrar o quanto ela pode ser discrepante do ponto de vista formal com a proposta original de da Costa.

4.1 A lógica paraconsistente das sociedades biassertivas abertas

O sistema trivalente P^1 foi introduzido em [Set73] a fim de se obter o cálculo paraconsistente mais simples possível. Sabemos ainda que P^1 é um subsistema de CPC, e é maximal no sentido em que se adicionarmos qualquer tautologia que não seja uma P^1-tautologia, o sistema resultante colapsa com o CPC.

De acordo com Carnielli e Lima-Marques ([CLM99]), podemos caracterizar P^1, axiomaticamente, com o uso da linguagem do CPC da seguinte maneira:

P^1-1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

P^1-2. $(\alpha \to (\beta \to \delta)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \delta))$

P^1-3. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to \alpha)$

P^1-4. $(\alpha \to \beta) \to \neg\neg(\alpha \to \beta)$

a *modus ponens* é a única regra.

Consideremos, ainda, que $\to$ e $\neg$ são os conectivos primitivos de P^1 e que $\wedge$ e $\vee$ são definidos. Assim, podemos definir a expressão matricial desta lógica como $P^1 = \langle \{T, T^*, F\}, \{\to, \neg\}, \{T, T^*\} \rangle$ e esta pode ser provada adequada com respeito às matrizes abaixo (cf.[Set73]), em que os valores de verdade são T, T^* e F, dos quais T, T^* são os valores distinguidos. Intuitivamente, T e F denotam verdade e falsidade, enquanto T^* pode ser entendido como "verdade por *default*" ou "verdade por falta de evidência em contrário".

	$\neg$
T	F
T^*	T
F	T

$\to$	T	T^*	F
T	T	T	F
T^*	T	T	F
F	T	T	T

O comportamento paraconsistente é obtido apenas no nível atômico. Como podemos observar, a negação primitiva é paraconsistente (ou fraca) no sentido em que, por exemplo, $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ não é uma P^1-tautologia, pois dadas as matrizes acima, se atribuirmos os valores T^* a α e F a β, obtemos como resultado o valor F, que não é um valor distinguido.

Todavia, é possível definir uma negação forte em P^1 que recupere o poder da negação clássica, e a partir desta nova negação podemos também definir a conjunção e a disjunção em P^1 como segue:

$$
\begin{aligned}
\overline{\neg}\alpha &\stackrel{def}{=} \neg(\neg\alpha \to \alpha) \\
\alpha \wedge \beta &\stackrel{def}{=} \neg(\alpha \to \overline{\neg}\beta) \\
\alpha \vee \beta &\stackrel{def}{=} (\overline{\neg}\alpha \to \beta)
\end{aligned}
$$

	$\overline{\neg}$
T	F
T^*	F
F	T

$\wedge$	T	T^*	F
T	T	T	F
T^*	T	T	F
F	F	F	F

$\vee$	T	T^*	F
T	T	T	T
T^*	T	T	T
F	T	T	F

Agora, estamos em condições de enunciar um resultado que explicita a equivalência entre as sociedades abertas, estabelecidas pela Definição 3.1.2, e a lógica P^1.

A demonstração do próximo teorema aparece em [CLM99], contudo, apresentaremos um esquema da demonstração porque consideramos a técnica nela empregada de especial relevância, uma vez que, tal prática é comum a quase todas as demonstrações referentes à Semântica de Sociedades. Neste caso, um procedimento semântico que vincula, por um lado, as valorações de P^1, via matrizes, e por outro, a Sociedade Aberta.

Teorema 4.1.1. A lógica das sociedades abertas é P^1.

Demonstração. Esta será realizada em duas partes (I) e (II), como segue:

(I): Seja $\mathcal{S}$ uma sociedade de agentes clássicos. Definimos a valoração $\upsilon_{\mathcal{S}}$ para P^1 da seguinte forma:

Para cada fórmula atômica p, $\upsilon_{\mathcal{S}}(p)$ é definida por:

$$\upsilon_{\mathcal{S}}(p) = T \quad \text{se e somente se} \quad \mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(p) = 1 \quad \text{e} \quad \mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\neg p) = 0.$$

$$\upsilon_{\mathcal{S}}(p) = T^* \quad \text{se e somente se} \quad \mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(p) = 1 \quad \text{e} \quad \mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\neg p) = 1.$$

$$\upsilon_{\mathcal{S}}(p) = F \quad \text{se e somente se} \quad \mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(p) = 0.$$

E ainda, para toda fórmula não atômica φ, $\upsilon_{\mathcal{S}}(\varphi)$ é definida de acordo com as tabelas de verdade de P^1. A partir desta definição, podemos demonstrar, por indução na complexidade de φ, que para cada Sociedade Aberta gerada por $\mathcal{S}$, existe uma valoração $\upsilon_{\mathcal{S}}$ para P^1 tal que para toda fórmula φ:

$$\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}}(\varphi) = 1 \quad \text{se e somente se} \quad \upsilon_{\mathcal{S}}(\varphi) \in \mathcal{D}.$$

(II): Seja υ uma valoração da lógica P^1. Consideremos os seguintes conjuntos:
$\mathrm{X} = \{p : p \quad \text{é fórmula atômica e} \quad \upsilon(p) = T\}$;
$\mathrm{Y} = \{p : p \quad \text{é fórmula atômica e} \quad \upsilon(p) = T^*\}$;
$\mathrm{Z} = \{p : p \quad \text{é fórmula atômica e} \quad \upsilon(p) = F\}$.

Definimos uma sociedade $\mathcal{S}_\upsilon = \{Ag_1, Ag_2\}$ de agentes clássicos do seguinte modo:

$$Ag_1(p) = T \quad \text{sse} \quad p \in \mathrm{X} \cup \mathrm{Y};$$

$$Ag_2(p) = T \quad \text{sse} \quad p \in \mathrm{X}.$$

As extensões dos valores dos Ag_i (com $i = 1, 2$), para fórmulas complexas são feitas de acordo com as tabelas de verdade clássicas.

Dada $\mathcal{S}_\upsilon = \{Ag_1, Ag_2\}$, podemos demonstrar que para toda valoração υ para P^1, existe um conjunto de Agentes $\mathcal{S}_\upsilon$ tal que a Sociedade gerada por $\mathcal{S}_\upsilon$, i.e., $\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}_\upsilon}$, verifica que:

$$\mathfrak{S}^+_{\mathcal{S}_\upsilon}(\varphi) = 1 \quad \text{se e somente se} \quad \upsilon(\varphi) \in \mathcal{D}.$$

Assim, de (I),(II) e pela Definição 3.1.5, temos que as relações $\models^+$ e $\models^{P^1}$ são as mesmas.

$\square$

4.2 P^1 e a quase-verdade

Até aqui, vimos que P^1 é a lógica das Sociedades Biassertivas Abertas. Além disso, mostramos, na Seção 3.1, que este tipo de sociedade pode aceitar e rejeitar uma informação λ ao mesmo tempo. Contudo, cada agente constituinte de tal sociedade é clássico e, por esta razão, o aceite e a recusa de λ são dados por agentes diferentes. Assim, uma sociedade aberta permite manipular inconsistências oriundas de diferentes fontes de informação e representadas, neste contexto, pelos agentes.

A lógica paraconsistente empregada pelas sociedades abertas é uma lógica polivalente, o que nos permite uma interessante aproximação com os nossos desenvolvimentos realizados para a lógica trivalente LPT, introduzida na Seção 2.1.

Essa abordagem, baseada em lógicas trivalentes, pode ser entendida como o fornecimento de um novo significado para certas classes das lógicas polivalentes.

Diante disso, a objeção filosófica acerca das lógicas polivalentes, que surge pela dificuldade de atribuir significado a mais do que um par de valores de verdade, perde força quando consideramos que tais lógicas estão conectadas à questão de representar e manipular conhecimento diferente do ambiente matemático ou Booleano. Assim, é o caso da proposta original das Semânticas de Sociedades em que, no exemplo de P^1, os valores de verdade (T, T^*, F) estão organizados de modo que T^* é interpretado, intuitivamente, como "verdadeiro por falta de evidência contrária". Dessa forma, um terceiro valor de verdade é compatível com incrementos de informação.

Ademais, esta lógica das Sociedades Paraconsistentes mostra-se apropriada para a noção de quase-verdade num contexto que explicitamos abaixo.

De um ponto de vista pragmático, as inconsistências podem aparecer em base de dados de duas maneiras: em primeiro lugar, devido à descrição incompleta (parcial) de informações. Em segundo lugar, devido às descrições em conflito, provenientes de diferentes fontes de informação.

Para o primeiro caso, ou seja, contextos inconsistentes em que haja incompletude informacional, defendemos o uso do nosso sistema LPT, pois em nossa formalização (cf. Definição 1.4.1) conseguimos, por exemplo, manter explícita a componente de parcialidade $\varphi_u^{\mathfrak{A}}$ na negação de uma fórmula. No outro caso, i.e., para contextos inconsistentes provenientes de situações de conflito, consideramos a lógica P^1 como a mais apropriada para modelar este tipo de situação, visto que a interpretação de uma fórmula φ em uma estrutura parcial $\mathfrak{A}$, definida abaixo, estabelecerá a componente de parcialidade vazia para as fórmulas complexas.

P^1 pode ser considerada uma formalização adequada à noção de quase-verdade, mediante ajuste nas cláusulas da Definição 1.4.1 de fórmula enquanto triplas ordenadas. Trata-se, evidentemente, de uma adaptação não arbitrária, no sentido em que segue as diretrizes de da Costa em concordância com o Teorema 1.1.13 e a noção de satisfação pragmática. A partir disso, estabelecemos a definição abaixo.

Definição 4.2.1. Sejam D um conjunto não-vazio; φ_+, φ_- e φ_u conjuntos mutuamente disjuntos; e $\varphi_+ \cup \varphi_- \cup \varphi_u = D^n$.

1. Se $\varphi^{\mathfrak{A}}$ está definida , i.e., $\varphi^{\mathfrak{A}} = \langle \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \rangle$, então:

$$(\neg\varphi)^{\mathfrak{A}} \stackrel{def}{=} \langle \varphi_-^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}, \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \emptyset \rangle$$

2. Se $\varphi^{\mathfrak{A}} = \langle \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \rangle$ e $\lambda^{\mathfrak{A}} = \langle \lambda_+^{\mathfrak{A}}, \lambda_-^{\mathfrak{A}}, \lambda_u^{\mathfrak{A}} \rangle$ estão definidas, então:

2.1 $(\varphi \wedge \lambda)^{\mathfrak{A}} \overset{def}{=} \langle \left(\varphi_{+}^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_{u}^{\mathfrak{A}}\right) \cap \left(\lambda_{+}^{\mathfrak{A}} \cup \lambda_{u}^{\mathfrak{A}}\right), \varphi_{-}^{\mathfrak{A}} \cup \lambda_{-}^{\mathfrak{A}}, \emptyset \rangle$

2.2 $(\varphi \vee \lambda)^{\mathfrak{A}} \overset{def}{=} \langle \varphi_{+}^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_{u}^{\mathfrak{A}} \cup \lambda_{+}^{\mathfrak{A}} \cup \lambda_{u}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{-}^{\mathfrak{A}} \cap \lambda_{-}^{\mathfrak{A}}, \emptyset \rangle$

2.3 $(\varphi \rightarrow \lambda)^{\mathfrak{A}} \overset{def}{=} \langle \varphi_{-}^{\mathfrak{A}} \cup \left(\lambda_{+}^{\mathfrak{A}} \cup \lambda_{u}^{\mathfrak{A}}\right), \left(\varphi_{+}^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_{u}^{\mathfrak{A}}\right) \cap \lambda_{-}^{\mathfrak{A}}, \emptyset \rangle$ ■

Como dissemos acima, uma característica importante, a ser observada a partir da definição anterior, é que todas as fórmulas não-atômicas apresentam a componente de parcialidade vazia, i.e., $\alpha_{u}^{\mathfrak{A}} = \emptyset$ para toda α não atômica, o que resulta em uma lógica que possui comportamento paraconsistente apenas no nível atômico.

Esta distinção pode ser encontrada no caso de P^1, uma lógica que possui a seguinte propriedade notável: $\varphi, \neg\varphi \vDash \lambda$, para φ não atômica arbitrária (cf. [CCM07], p. 19). Além disso, nenhum operador lógico de P^1 apresenta, como resultado de sua operação, o valor de verdade T^*, que é um valor distinguido nesta lógica.

A partir destas considerações, podemos mostrar que as matrizes de P^1 apresentam-se como uma semântica apropriada para a lógica proposicional subjacente à definição de quase-verdade de Mikenberg, da Costa e Chuaqui.

Por exemplo, seja φ uma sentença de acordo com as condições dadas na Seção 1.4, assim:

Dado que $(\neg\varphi)^{\mathfrak{A}} \overset{def}{=} \langle \varphi_{-}^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_{u}^{\mathfrak{A}}, \varphi_{+}^{\mathfrak{A}}, \emptyset \rangle$, então,

$$\begin{array}{rcl} \neg \langle 1,0,0 \rangle & = & \langle 0,1,0 \rangle \\ \neg \langle 0,0,1 \rangle & = & \langle 1,0,0 \rangle \\ \neg \langle 0,1,0 \rangle & = & \langle 1,0,0 \rangle \end{array}$$

Agora, interpretando $\langle 1,0,0 \rangle$, $\langle 0,0,1 \rangle$ e $\langle 0,1,0 \rangle$, pelos valores T, T^* e F, respectivamente, obtemos a seguinte matriz para a negação:

	T	T^*	F
$\neg$	F	T	T

a qual coincide com a tabela de verdade da negação paraconsistente de P^1.

Dessa forma, podemos verificar as demais matrizes de P^1 a partir da definição acima. E então, a lógica das sociedades paraconsistentes mostra-se adequada para a formalização da noção de quase-verdade de Mikenberg, da Costa e Chuaqui.

4.3 A teoria da quase-verdade de Bueno e de Souza

Na Seção 1.1, expusemos a definição de quase-satisfação de Bueno e de Souza (1996), e mostramos que a noção de quase-verdade formalizada por meio daquela definição não emprega as noções de estrutura pragmática e estruturas $\mathfrak{A}$-normais. Ademais, foi explicitada uma discrepância formal entre aquela definição e a proposta original de da Costa.

A partir disso, uma interpretação filosófica diferente do formalismo da quase-verdade foi possível devido a certas 'intenções' subjacentes à concepção pragmática presentes naquela definição de quase-satisfação. Dessa forma, Bueno e de Souza justificaram a apresentação daquela definição de quase-verdade, pois esta nova abordagem de estruturas parciais avança no que parece ser uma noção apropriada de verdade para o empirismo.

O ponto fundamental da Definição 1.1.16 de quase-satisfação consiste na condição para fórmula atômica, em que a componente de estrutura parcial é abrangida. Assim, tal definição pode ser vista como uma quase-satisfação, pois leva em conta as relações que contém a componente R_u, para as quais o 'estado epistêmico' ainda permanece incerto.

Segundo a proposta de da Costa e colaboradores, de acordo como tais relações parciais são posteriormente tratadas, nossas afirmações de quase-verdade podem mudar. Dessa maneira, na medida em que o nosso conhecimento sobre o domínio considerado cresce, aquilo que estava em R_u poderá tornar-se elemento de R_+ ou R_- e, assim, uma fórmula que antes era quase-satisfeita, agora poderá não mais ser.

Este procedimento reproduz um aspecto análogo ao formulado por da Costa e colaboradores para a noção de quase-verdade, visto que, dada uma estrutura parcial $\mathfrak{A}$, existem várias estruturas $\mathfrak{A}$-normais distintas que estendem $\mathfrak{A}$ em uma estrutura total. E, uma vez diante de estruturas totais, tudo o que sabemos sobre a definição de Tarski de verdade pode então ser importado naturalmente para a definição de quase-verdade.

A estratégia diferente, adotada na definição de quase-satisfação, fica evidenciada ao contornarem a construção das estruturas $\mathfrak{A}$-normais e o conjunto associado Ω das estruturas pragmáticas.

Assim, a quase-verdade pode ser definida, por um lado, pelas estruturas $\mathfrak{A}$-normais, como na caracterização de Mikenberg, da Costa e Chuaqui, e nas quais a indeterminação obtida reside na pluralidade de estruturas $\mathfrak{A}$-normais, a partir de uma estrutura parcial $\mathfrak{A}$ dada. Por outro lado, Bueno e de Souza definem aquela noção por meio da quase-satisfação, em que uma indeterminação, similar à de da Costa e colaboradores, é encontrada na visão liberal de satisfação empregada.

A proposta de Bueno e de Souza permite definir uma noção de *grau de quase-verdade*, utilizada para examinar problemas da filosofia da ciência. Tal noção é estabelecida por meio da definição de modelo estendido, a qual é uma adaptação da definição usual de *expansão* de modelo, agora aplicada para as relações parciais.

Definição 4.3.1. Sejam $\mathfrak{A} = \langle D, \cdot^{\mathfrak{A}} \rangle$ e $\mathfrak{A}' = \langle D', \cdot^{\mathfrak{A}'} \rangle$ duas estruturas parciais distintas para uma linguagem de primeira ordem $\mathbb{L}$. Dizemos que $\mathfrak{A}'$ *expande* $\mathfrak{A}$ se:

(i) $D' = D$.

(ii) $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}'}$ para cada constante inividual c.

(iii) para cada símbolo de predicado n-ário R^i, temos que:

(a) $\left(R^i_+\right)^{\mathfrak{A}} \subseteq \left(R^i_+\right)^{\mathfrak{A}'}$;

(b) $\left(R^i_-\right)^{\mathfrak{A}} \subseteq \left(R^i_-\right)^{\mathfrak{A}'}$;

(c) $(R^i_u)^{\mathfrak{A}} \subseteq \left(R^i_+\right)^{\mathfrak{A}'} \cup \left(R^i_-\right)^{\mathfrak{A}'} \cup (R^i_u)^{\mathfrak{A}'}$. ∎

Embora as relações envolvidas sejam parciais, elas podem ser comparadas. De fato, Bueno e de Souza mostraram que o tipo de ordem introduzido pela relação de expansão entre estruturas parciais para linguagem de primeira ordem é reflexiva e anti-simétrica (cf. [BdS96], p. 194). A partir deste fato, é introduzido um novo tipo de comparação entre estruturas parciais, agora com relação à noção de verdade.

Definição 4.3.2. Sejam $\mathfrak{A} = \langle D, \cdot^{\mathfrak{A}}\rangle$ e $\mathfrak{A}' = \langle D', \cdot^{\mathfrak{A}'}\rangle$ duas estruturas parciais distintas, para uma linguagem de primeira ordem $\mathbb{L}$, e φ uma fórmula de $\mathbb{L}$.

(1) Dizemos que $\mathfrak{A}'$ *aproxima-se da verdade de* φ *em* $\mathfrak{A}$ se:

(1.a) $\mathfrak{A}'$ expande $\mathfrak{A}$;

(1.b) φ é quase-verdadeira em $\mathfrak{A}$;

(1.c) φ é verdadeira em $\mathfrak{A}'$ no sentido Tarskiano.

(2) Dizemos que φ é *aproximadamente verdadeira em* $\mathfrak{A}$, se existe uma estrutura parcial para a linguagem de primeira ordem de $\mathfrak{A}'$ tal que $\mathfrak{A}'$ *aproxima-se da verdade de* φ em $\mathfrak{A}$. ∎

De acordo com Bueno e de Souza, a definição anterior fornece uma noção anti-realista de aproximação à verdade, devido ao uso da quase-verdade como a noção de verdade subjacente, uma vez que, o conceito de verdade empregado na referida definição é simplesmente semântico, em termos conjunto-teorético, e de modo algum 'substantivo'. Uma discussão relevante de como as estruturas parciais podem ser usadas para elaborar uma forma de 'empirismo estrutural', a qual estende o 'empirismo construtivo' anti-realista de Bas van Fraassen em significantes aspectos, pode ser encontrada em ([Bue00], [dCF03] e [BdC07]).

A aproximação à verdade foi introduzida a fim de apresentar uma noção de grau de verdade.

> [...] De fato, em vez de exigirmos [...] [em (1.c) da Definição 4.3.2], que [...] [φ] seja verdadeira em [...] [$\mathfrak{A}'$], podemos requerer que ela seja quase-verdadeira em [...] [$\mathfrak{A}'$]. Agora, dado que, por [...] [(1.a)], [...] [$\mathfrak{A}'$] expande [...] [$\mathfrak{A}$], e que, por hipótese, [...] [$\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}$], [...] [$\varphi$] é 'mais' quase-verdadeira em [...] [$\mathfrak{A}'$] que em [...] [$\mathfrak{A}$], no sentido em que mais informações sobre o domínio das estruturas sob consideração são levadas em conta em [...] [$\mathfrak{A}'$] do que em [...] [$\mathfrak{A}$]. [...] Assim, é possível afirmarmos que um aspecto do desenvolvimento da ciência é o aumento no grau de quase-verdade de suas teorias. [...] e tal movimento é, naturalmente, inteiramente compatível com uma visão empirista. [...] Isto fornece, assim, um enquadramento distinto para representar a radical 'abertura' de nosso conhecimento, uma 'abertura' com a qual o empirista está particularmente preocupado (BUENO e DE SOUZA, 1996, p. 195, tradução nossa).

Diante do exposto, ao explicitarem uma noção de grau de quase-verdade, Bueno e de Souza fornecem ferramentas alternativas para examinar problemas relacionados à mudança de teoria na ciência, e a dinâmica do conhecimento científico. Por exemplo, a noção de expandir uma estrutura e o grau de quase-verdade de uma informação pode ser útil para fazer comparações entre esta informação trazida por dois modelos distintos.

A despeito da noção de quase-verdade, formalizada por Bueno e de Souza, promover interpretações filosóficas relevantes, como explicitadas acima, devemos considerar, a partir de agora, um problema oriundo do ponto de vista formal que a definição de quase-satisfação suscita.

Empregaremos, na definição de quase-verdade de Bueno e de Souza, o procedimento que permite definir as fórmulas enquanto triplas, geradas a partir de diretrizes de uma noção de quase-verdade, o qual foi usado na seção anterior para mostrar que P^1 é uma lógica adequada para a noção de quase-verdade de da Costa e colaboradores.

De acordo com o Teorema 1.1.18, vimos que a definição de quase-satisfação gera uma discrepância formal, em relação à noção de da Costa, ao considerarmos uma fórmula negada. E isto ocorre porque apenas a componente R_- é envolvida na quase-satisfação de $\neg R$, numa estrutura parcial $\mathfrak{A}$, ou seja, a componente de indeterminação R_u não é considerada. No teorema mencionado, R denota um símbolo de predicado n-ário.

Dessa maneira, é lícito afirmarmos que uma adaptação da Definição 1.4.1 seria dada pelo ajuste da cláusula de negação. Esta adaptação será dada em concordância com as diretrizes da quase-satisfação.

Assim, sejam D um conjunto não-vazio e φ_+,φ_- e φ_u conjuntos mutuamente disjuntos, tais que $\varphi_+ \cup \varphi_- \cup \varphi_u = D^n$. Consideremos $\varphi^{\mathfrak{A}} = \langle \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \rangle$, então

$$(\neg\varphi)^{\mathfrak{A}} \stackrel{def}{=} \langle \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_+^{\mathfrak{A}} \cup \varphi_u^{\mathfrak{A}}, \emptyset \rangle \qquad \circledast$$

A partir desta definição, podemos estabelecer a matriz para a negação.

Por exemplo, seja φ uma sentença de acordo com as condições dadas na Seção 1.4, então:

$$\begin{aligned} \neg\langle 1,0,0\rangle &= \langle 0,1,0\rangle \\ \neg\langle 0,0,1\rangle &= \langle 0,1,0\rangle \\ \neg\langle 0,1,0\rangle &= \langle 1,0,0\rangle \end{aligned}$$

e interpretando $\langle 1,0,0\rangle$, $\langle 0,0,1\rangle$ e $\langle 0,1,0\rangle$, pelos valores T, T^* e F, respectivamente, obtemos a seguinte matriz para a negação:

	T	T^*	F
$\sim$	F	F	T

Contudo, como constatamos acima, trata-se de uma negação clássica, pois não poderá haver uma valoração v' em que uma fórmula e sua negação admitam ambas sejam valores distinguidos desta lógica.

Desse modo, a partir de um nível formal, o problema que surge é que a lógica subjacente àquela definição de quase-satisfação tende à clássica, como evidenciado na tabela de verdade acima. Em consequência disso, estar em um ambiente clássico limita a manipulação de informações parciais e/ou inconsistentes de um dado domínio do conhecimento. Pois, como sabemos da lógica clássica, as contradições numa teoria equivalem à trivialização dedutiva. Como poderíamos justificar, por meio de uma lógica clássica, que teorias científicas incompatíveis entre si sejam usadas concomitantemente? Como poderia uma lógica que se assemelha à clássica, formalizar uma noção de quase-verdade?

Para deixar mais claro a afirmação de que esta noção de quase-verdade coincide com a clássica, considere, para cada estrutura parcial $\mathfrak{A} = \langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}}\rangle$, uma estrutura clássica, i.e., total, $\mathfrak{A}' = \langle D, (\cdot)^{\mathfrak{A}'}\rangle$ tal que, para cada símbolo de predicado R, $R^{\mathfrak{A}'} = R_+^{\mathfrak{A}} \cup R_u^{\mathfrak{A}}$; $f^{\mathfrak{A}'} = f^{\mathfrak{A}}$ e $c^{\mathfrak{A}'} = c^{\mathfrak{A}}$. Logo, é fácil provar que $\mathfrak{A} \Vert\!\!= \alpha[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{A}' \models \alpha[\vec{a}]$.

Por outro lado, dado que toda estrutura clássica é uma estrutura parcial, concluímos que a semântica da quase-verdade no sentido de [BdS96] coincide com a clássica.

Diante das limitações formais que a noção de quase-satisfação apresenta, defendemos o uso da formalização da quase-verdade por meio de uma definição mais geral que a de Bueno e de Souza, qual seja, a noção de satisfação pragmática introduzida neste trabalho, visto que ela engendra lógicas paraconsistentes adequadas para a noção de quase-verdade de da Costa.

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos diversas perspectivas no estudo da teoria da quase verdade originada por Mikenberg, da Costa e Chuaqui. Um dos aportes que gostaríamos de destacar é que apresentamos uma extensão da noção de "predicados como triplas" definida, recursivamente, para toda fórmula complexa da linguagem objeto de primeira ordem. Assim, a interpretação de cada fórmula φ em uma estrutura parcial $\mathfrak{A}$ origina, indutivamente, uma tripla $\langle \varphi_+^{\mathfrak{A}}, \varphi_-^{\mathfrak{A}}, \varphi_u^{\mathfrak{A}} \rangle$.

Ademais, esta proposta generaliza a perspectiva usual de uma dada fórmula de primeira ordem φ (com, no máximo, n variáveis livres) em uma estrutura $\mathfrak{A}$ vista como uma relação $R = \{\vec{a} \in D^n : \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]\}$, definida indutivamente. Isto é, nossa proposta generaliza simultaneamente a noção de verdade de Tarski e a noção de quase-verdade de Mikenberg, da Costa e Chuaqui.

A partir disto, fornecemos uma formulação complementar da quase-verdade, seguindo as principais diretrizes da versão de da Costa e colaboradores, pela introdução da definição de satisfação pragmática. Nossa estratégia evita construir as estruturas totais, e a noção de satisfação pragmática é dada *mutatis mutandis* pela noção tarskiana de satisfação.

O principal aporte técnico desta tese é a axiomatização da nossa noção de quase-verdade, e a obtenção de uma lógica paraconsistete trivalorada que representa a sua base proposicional.

Mostramos que as relações $\Vdash$ e $\models\!\!\approx$, de da Costa e colaboradores, perdem certas propriedades interessantes; em particular $\models\!\approx$ é explosiva, e tem axiomatização modal de primeira ordem, como vemos na literatura (cf. [dC99] e [Hif03]). Por outro lado, Bueno e de Souza não apresentam uma axiomatização. Contudo, pela nossa abordagem original, podemos estabelecer uma lógica de primeira ordem subjacente à noção de quase-verdade de forma bastante simples.

Nossa abordagem soluciona vários problemas apontados acima, como vemos a seguir:

(1) Generalizamos a idéia de predicados como triplas. Assim, por uma lado generalizamos a noção de da Costa *et al.* para fórmulas complexas, e generalizamos, por outro lado, a noção de verdade de Tarski.

(2) A nossa definição da relação $\Vdash$ é recursiva e paraconsistente. Ademais, não faz uso de estruturas $\mathfrak{A}$-normais e apresenta uma axiomática de primeira ordem pura, i.e., não modal, gerando uma lógica paraconsistente trivalente.

Outra proposta de trabalho, que se apresenta exequível, é o fornecimento de um tratamento formal mais detalhado de nosso tratamento intuitivo e semi-formal para a generalização do método da semântica de sociedades, pela introdução de quantificadores modulados como critério para uma sociedade aceitar ou rejeitar uma dado fato, como proposto no Capítulo 3.

Aplicações:

1. [Superverdade]

Em 1999, da Costa e Bueno (cf. [dCB99]) relacionaram a quase verdade com o método das supervalorações, via as estruturas parciais. Este método foi inicialmente introduzido como uma técnica para fornecer uma análise semântica para ambientes lógicos específicos. Nessa abordagem, uma proposição é verdadeira (ou falsa) em um contexto parcial se, e somente se, a proposição é verdadeira (falsa) em todas as extensões completas (estruturas totais). Nossa proposta aqui é, utilizando-se de nossa técnica original de formalizar a quase-verdade, fornecer uma modelagem alternativa para a superverdade.

2. [Dissolução de paradoxos da ciência]

Propomos aqui, por meio da quase-verdade, aplicar nossa abordagem à dissolução de alguns paradoxos da filosofia da ciência, tais como o paradoxo de Goodman, também conhecido como paradoxo do 'Grue', e o paradoxo de Hempel (ou paradoxo da Confirmação) (cf. [Goo83]). O paradoxo da confirmação de Hempel diz que a hipótese/conjectura de que "Todos os corvos são pretos" é confirmada por um corvo preto (instância positiva) e refutada por um não-preto. Contudo, é plausível dizer que tudo aquilo que confirma uma hipótese em alguma formulação deveria confirmá-la em qualquer formulação logicamente equivalente (a chamada condição equivalente). Uma sentença como "Aqui está um sapato vermelho" confirma "Todas as coisas não-pretas são não-corvos" dado que um sapato vermelho é um não-preto e não-corvo. Portanto, isso deveria também confirmar a sentença equivalente "Todos os corvos são pretos" o que parece absurdo, sugerindo que qualquer coisa corroboraria qualquer coisa.

3. Aplicar nossa técnica para axiomatizar outras noções de quase-verdade.

4. Utilizar o nosso arcabouço teórico para situações da Física em que não se pode obter uma estrutura $\mathfrak{A}$-normal para que uma determinada sentença seja V ou F, como por exemplo, em casos de decaimento radioativo e isomerismo.

Referências Bibliográficas

[Abe91] Abe, J. M.: *Verdade pragmática*. Estudos Avançados, 12(5):161–171, 1991.

[AGM85] Alchourron, C. E., P. Gärdenfors, e D. Makinson: *On the logic of theory change: partial meet contraction and revision functions*. Journal of Symbolic Logic, 1985.

[BC81] Barwise, J. e R. Cooper: *Generalized quantifiers and natural language*. Linguistics and Philosophy, 4(2), 1981.

[BdC07] Bueno, O. e N. C. A. da Costa: *Quasi-truth, paraconsistency, and the foundations of science*. Synthese, 154:383–399, 2007.

[BdS96] Bueno, O. e E. G. de Souza: *The concept of quasi-truth*. Logique & Analyse, 153-154:183–199, 1996.

[Bue00] Bueno, O.: *Quasi-truth in quasi-set theory*. Synthese, 125:33–53, 2000.

[CC08] Carnielli, W. A. e M. E. Coniglio: *Aristóteles, paraconsistentismo e a tradição budista*. O Que nos Faz Pensar, (23):163–175, 2008.

[CCM07] Carnielli, W. A., M. E. Coniglio, e J. Marcos: *Logics of formal inconsistency*. In Gabbay, D. e F. Guenthner (editores): *Handbook of Philosophical Logic (2nd. edition)*, volume 14, páginas 15–107. Springer, 2007.

[CG08] Carnielli, W. A. e M. C. G. Grácio: *Modulated logic and flexible reasoning.* Logic and Logical Philosophy, 17(3):211–249, 2008.

[CLM99] Carnielli, W. A. e M. Lima-Marques: *Society semantics and multiple-valued logics.* Advances in Contemporary Logic and Computer Science, 235:33–52, 1999.

[CM02] Carnielli, W. A. e J. Marcos: *A taxonomy of C-systems.* In Carnielli, W. A., M. E. Coniglio, e I.M.L. D' Ottaviano (editores): *Proceedings of the 2nd World Congress on Paraconsistency 2000*, páginas 1–94. Marcel Dekker, 2002. Versão preliminar publicada em *CLE e-Prints*, 1(5), 2001.

[CMdA00] Carnielli, W. A., J. Marcos, e S. de Amo: *Formal inconsistency and evolutionary databases.* Logic and Logical Philosophy, 8:115–152, 2000. Preprint available at *CLE e-Prints*, 1(6), 2001. URL = `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/abstract_6.htm`.

[CV04] Carnielli, W. A. e P. A. S. Veloso: *Logics for qualitative reasoning.* Logic, Epistemology and the Unity of Science, 1:487–526, 2004.

[dC99] Costa, N. C. A. da: *O conhecimento científico.* 2^a edição, 1999.

[dCB99] Costa, N. C. A. da e O. Bueno: *Quasi-truth, supervaluations and free logic.* History and Philosophy of Logic, (20):215–226, 1999.

[dCF03] Costa, N. C. A. da e S. French: *Science and partial truth: a unitary approach to models and scientific reasoning.* Oxford, 2003.

[DH07] D'Ottaviano, I. M. L. e C. Hifume: *Peircean pragmatic truth and da Costa's quasi-truth.* Studies in Computational Intelligence (SCI), 64:383–398, 2007.

[FC03] Fernández, V. L. e M. E. Coniglio: *Combining valuations with society semantics*. Journal of Applied Non-Classical Logics, 13(1):21–46, 2003.

[Fer01] Fernández, V. L.: *Semântica de sociedades para lógicas n-valentes*. Tese de Mestrado, IFCH-Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

[Goo83] Goodman, N.: *Fact, fiction, and forecast*. Harvard University Press, 1983.

[Gär88] Gärdenfors, P.: *Knowledge in flux: modeling the dynamics of epistemic states*. MIT Press, 1988.

[Grá99] Grácio, M. C. C.: *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza*. Tese de Doutoramento, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 1999.

[Haa98] Haack, S.: *Filosofia das lógicas*. Editora Unesp, 1998.

[Hif03] Hifume, C.: *Uma teoria da verdade pragmática: a quase-verdade de Newton C.A. da Costa*. Tese de Mestrado, IFCH-Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

[Hum72] Hume, D.: *Investigação acerca do entendimento humano*. Ed. Nacional, EDUSP, 1972.

[Jaś69] Jaśkowski, S.: *Propositional calculus for contradictory deductive systems*. Studia Logica, 24(-):143–157, 1969. Tradução para o inglês do artigo original em polonês publicado em 1948.

[Jec02] Jech, T.: *Set theory*. Springer, 2002.

[Kei70] Keisler, H. J.: *Logic with the quantifier "there exist uncountably many"*. Annals of Mathematical Logic, 1:1–93, 1970.

[Mar00] Marcos, J.: *8K solutions and semi-solutions to a problem of da Costa*. Draft, 2000.

[Mar05] Marcos, J.: *Logics of Formal Inconsistency* (in Portuguese). Tese de Doutoramento, State University of Campinas and IST-UTL (Lisboa), Campinas, Brazil, 2005.

[MdCC86] Mikenberg, I., N. C. A. da Costa, e R. Chuaqui: *Pragmatic truth and approximation to truth*. The Journal of Symbolic Logic, 51-1:201–221, 1986.

[Men97] Mendelson, E.: *Introduction to mathematical logic*. Chapman & Hall, 4^a edição, 1997.

[Mos57] Mostowski, A.: *On a generalization of quantifiers*. Fundamenta Mathematicae, 44:12–36, 1957.

[Pop59] Popper, K. R.: *The logic of scientific discovey*. Hutchinson & Co., Ltd., London, 1959. (English translation of *Logik der Forschung*, Julius Springer Verlag, Viena, 1936).

[Rei80] Reiter, R.: *A logic for default reasoning*. Artificial Intelligence, 13:81–132, 1980.

[SCV99] Sette, A. M., W. A. Carnielli, e P. A. S. Veloso: *An alternative view of default reasoning and its logic*. Pratica: Proofs, types and categories, páginas 127–158, 1999.

[Set73] Sette, A.M.: *On the propositional calculus P^1*. Mathematica Japonicae, 18(13):173–180, 1973.

[Sgr77] Sgro, J.: *Completeness theorems for topological models*. Annals of Mathematical Logic, 11:173–193, 1977.

[Vel99] Veloso, P. A. S.: *On 'almost all' and some pressupositions*. Manuscrito, XXII(2):469–505, 1999.

[Vic09] Vickers, P.: *Can partial structure accommodate inconsistent science?* Principia: Revista Internacional de Filosofia, 13(2):233–250, 2009.

[Wit64] Wittgenstein, L.: *Philosophical remarks.* Blackwell, 1964.