Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas

LUIS CLÁUDIO BALAN DE CAMPOS

KANT E A GEOMETRIA

Campinas
2016

LUIS CLÁUDIO BALAN DE CAMPOS

KANT E A GEOMETRIA

Dissertação apresentada ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Supervisor/Orientador: Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO LUIS CLÁUDIO BALAN DE CAMPOS, E ORIENTADO PELO PROF. DR. WALTER ALEXANDRE CARNIELLI

CAMPINAS

2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
Cecília Maria Jorge Nicolau - CRB 8/3387

C157k

Campos, Luis Cláudio Balan de, 1967-
Kant e a geometria / Luis Cláudio Balan de Campos. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Walter Alexandre Carnielli.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Kant, Immanuel, 1724-1804. 2. Filosofia alemã. 3. Geometria não-euclidiana. 4. Geometria. 5. Idealismo alemão. I. Carnielli, Walter Alexandre,1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Kant and the geometry
Palavras-chave em inglês:
Philosophy, German
Non-Euclidean geometries
Geometry
Idealism, German
Área de concentração: Filosofia
Titulação: Mestre em Filosofia
Banca examinadora:
Walter Alexandre Carnielli [Orientador]
Marco Antonio Caron Ruffino
Abilio Azambuja Rodrigues Filho
Data de defesa: 20-05-2016
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas

A Comissão julgadora dos trabalhos de Defesa de Dissertação composta pelos Professores Doutores a seguir descritos, em sessão pública realizada aos vinte dias do mês de maio do ano de dois mil e dezesseis, considerou o candidato Luis Cláudio Balan de Campos aprovado.

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli

Prof. Dr. Marco Antonio Caron Ruffino

Prof. Dr. Abilio Azambuja Rodrigues Filho

A Ata de Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no processo de vida acadêmica do aluno.

À Nara: parte do que sou, minha melhor parte.

Agradecimentos

Ao professor José Oscar de Almeida Marques, que deu início a esse projeto e às suas excelentes aulas sobre a filosofia de Kant.

Ao professor Abilio Rodrigues, pela participação e proveitosa discussão em minha banca.

Ao professor Marco Ruffino, pelas valiosas sugestões.

Ao meu orientador, professor Walter Carnielli, pelo constante incentivo e confiança, expresso minha profunda gratidão.

Resumo

Em contraste às correntes filosóficas de sua época, Kant propõe para a solução de problemas metafísicos o Idealismo Transcendental: adequamos os dados dos sentidos às intuições e aos conceitos que já possuíamos de forma anterior a qualquer experiência, ou *a priori*. Como um dos modelos para a Metafísica, Kant se vale da Matemática pura e dela utiliza a aritmética e a geometria euclidiana. Entretanto, com o surgimento de geometrias alternativas toda a argumentação é posta em dúvida desde sua base. O objetivo deste trabalho é apresentar o papel da geometria ao longo da obra kantiana e sua extrema importância na estrutura argumentativa do texto que inaugura o Idealismo Transcendental, a *Crítica da Razão Pura*, indicando as possíveis bases lógicas da geometria em tal texto. Será discutida a validade do caráter sintético *a priori* da geometria euclidiana, tal como sua presença em elementos fundamentais do projeto crítico kantiano, que a tornam a única geometria possível para a estruturação da nossa realidade, quais sejam, a "construção de um conceito" e os "Axiomas da Intuição". Para que a geometria mantenha esse papel no Idealismo Transcendental, faz-se necessário esclarecer e confrontar as principais interpretações do chamado "argumento da geometria", que fornece sustentação à estrutura argumentativa da *Crítica* e de que maneira esse argumento pode estar relacionado às conclusões de Kant, sobre a forma de nossa intuição *a priori* do espaço. Visto que tal relação foi severamente criticada após o aparecimento de geometrias não euclidianas, será necessário apresentar o desenvolvimento de tais geometrias, o conhecimento de Kant sobre o assunto, através da análise de suas cartas e manuscritos, assim como estabelecer em que medida elas influenciam o Idealismo Transcendental e a experiência humana.

Palavras-chave: Kant; Idealismo Transcendental; construção de um conceito; "argumento da geometria"; geometrias não euclidianas.

Abstract

Contrasting the philosophical trends of his time, Kant purposes, for the metaphysical problems, the Transcendental Idealism: we adequate the data from the senses to the intuitions and the concepts we already had before any experience, or *a priori*. As one of the models for the Metaphysics, Kant makes use of pure Mathematics and from it employs the Arithmetic and the Euclidean Geometry. However, with the arrival of alternative geometries, all argumentation is called into question from its foundation. The objective of this work is to present the role of the geometry through Kant's work and its extreme relevance into the argumentative structure of the text that launches the Transcendental Idealism, the *Critique of Pure Reason*, pointing out the possible logical bases of the geometry within that text. It is discussed the validity of the synthetic and *a priori* character of the Euclidean Geometry, as its presence in fundamental elements of Kant's critical project, which makes that into the only possible geometry to structure our reality, whichever are, the "construction of a concept" and the "Axioms of Intuition". For the geometry to maintain that rule in the Transcendental Idealism, it is necessary to clarify and confront the main interpretations of the so called "geometry argument", which provides sustainability to the argumentative structure of the *Critique* and in which manner this argument may be related to Kant's conclusions about the way it relates to our *a priori* intuition of space. Since that relation was severely criticized after the appearance of the non-Euclidean geometries, it is necessary to present the development of such geometries, Kant's knowledge about the matter, through the analysis of his letters and manuscripts, as well to establish in which extent they influenced the Transcendental Idealism and the human experience.

Keywords: Kant; Transcendental Idealism; construction of a concept; "argument from geometry"; non-Euclidean geometries.

SUMÁRIO

Introdução

A origem e possibilidade do conhecimento sempre tiveram grande relevância na História da Filosofia. As possíveis respostas podem ser divididas em dois grupos opostos: os racionalistas acreditam que a razão é a principal fonte de conhecimento e os empiristas creditam essa fundamentação à experiência adquirida através dos sentidos e, apesar das variadas interpretações feitas ao longo do tempo, à época de Kant permanecia o impasse entre o empirismo britânico e o racionalismo continental. Sua resposta não foi conciliadora, foi revolucionária: o conhecimento não é mais regulado pelo objeto, mas pelo sujeito através de intuições e conceitos *transcendentais*; ou seja, que já pertenciam ao sujeito antes de qualquer experiência e são condição de possibilidade para que ela aconteça.

Kant não nega, como o faria o idealista, a realidade do mundo empírico, dos objetos externos, mas não admite que eles possam ser conhecidos de forma absoluta, além da experiência humana possível ou como "coisas em si". Os dados brutos dos sentidos são regulados por características próprias ao nosso aparato cognitivo e temos conhecimento das coisas *como se apresentam para nós*. Kant chama tal ciência de Idealismo Transcendental e é exposta na *Crítica da Razão Pura*[1], obra na qual o conhecimento humano é dividido em dois grandes troncos de raiz desconhecida para nós: a sensibilidade, na qual os objetos nos são dados e o entendimento no qual eles são pensados. Na primeira parte, a *Estética Transcendental*, são analisados os princípios da forma pura da sensibilidade e, para tanto, retira-se de uma representação qualquer tudo o que se possa pensar e sentir a respeito dela. Aquilo que restar desse processo será chamado de forma pura da sensibilidade ou intuição pura. Este exame levará a dois resultados: o espaço e o tempo. Será de principal interesse o espaço, dada a sua evidente ligação com a geometria.

Na *Estética*, há duas exposições do conceito de espaço: a metafísica e a transcendental, das quais a primeira apresentará de forma clara, contudo não pormenorizada, o que pertence ao conceito enquanto dado *a priori*. Em seguida, na exposição transcendental é explicado um conceito a partir de conhecimentos sintéticos *a priori* que ele possa produzir, isto é, novos conhecimentos que não estavam dados nesse conceito e, além disso, anteriores a qualquer experiência. Nessa exposição é oferecido um argumento para apoiar a exposição anterior e que

[1] Daqui para frente apenas *Crítica*.

ficou conhecido como "argumento da geometria", o qual afirma ser essa uma ciência que determina as propriedades do espaço sinteticamente e *a priori*. Tal afirmação já havia sido explicada no item V da Introdução (B), no qual Kant afirma que nenhum princípio de geometria pura pode ser analítico. Como exemplo, é citada a conhecida afirmação que um segmento de reta representa a distância mais curta entre dois pontos. Essa é uma proposição sintética porque do conceito qualitativo de reta não se extrai, necessariamente, o conceito quantitativo de mais curta, ou menor, que deve ser acrescentado ao conceito de reta. Em retorno à *Estética*, Kant também enfatiza a certeza e necessidade das proposições geométricas: o espaço ter somente três dimensões não pode ser um juízo empírico ou derivado deste. É claro que só a geometria euclidiana tem tais características e é irrefutável à época de Kant como a ciência que evidencia as propriedades do espaço.

Ao reunir os resultados das duas exposições: a metafísica conclui ser o espaço uma forma *a priori* da intuição pura, enquanto a transcendental garante que a geometria euclidiana determina as propriedades *desse espaço* de forma sintética e *a priori*. Segundo vários comentadores, há uma relação entre as duas exposições, de tal forma que o "argumento da geometria" se faz essencial às conclusões de Kant sobre o espaço, como forma predeterminada de nossa intuição. Desse modo, se geometrias alternativas determinarem as propriedades do espaço de forma sintética e *a priori*, então ele não será uma forma da intuição pura, destruindo pela base o Idealismo Transcendental.

Este texto tem o objetivo de mostrar a função e importância da geometria na obra de Kant, com destaque para a *Crítica*, além de compilar e esclarecer os vários tipos de alegações contrárias ao Idealismo Transcendental, que possuam como base o "argumento da geometria". Também incluo uma interpretação pessoal desse argumento, a fim de estabelecer uma nova posição para a geometria na arquitetura argumentativa da *Crítica*.

Para tanto, no capítulo 1, há a necessidade de se analisar o estilo de argumentação que acredito predominar na *Crítica*, essencial à nova abordagem que proponho, assim como as várias interpretações que Kant faz sobre o espaço, no decorrer de toda sua obra. Esse capítulo evidenciará as alternâncias em seu pensamento e que em momentos anteriores foram germinadas as conclusões da *Crítica*, da qual será destacada a extrema relevância da geometria euclidiana, paradigma do conhecimento sintético *a priori*, essencial aos "Axiomas da Intuição" e à "construção de um conceito na intuição". Esse último tema se impõe ao longo do texto e mostra o projeto crítico kantiano como uma estruturação da experiência, uma construção da realidade, sem pretensões a um conhecimento de sua real forma ou conteúdo.

A "construção de um conceito" fornece o material necessário à discussão sobre a construção de figuras e o método diagramático, usado desde a antiguidade como artifício na demonstração de teoremas geométricos. Serão usados como referências recentes estudos de Kenneth Manders e veremos na resposta de Michael Friedman uma inovadora interpretação da filosofia da matemática em Kant, baseada em conceitos da lógica moderna. A perspectiva de Fiedman, aliada aos singulares trabalhos de Jaakko Hintikka, darão o rigor lógico necessário para reconduzir a geometria a uma nova posição argumentativa na *Crítica*.

No capítulo 2 veremos um histórico sobre o postulado das paralelas, que deu origem às geometrias não euclidianas, e o conhecimento de Kant sobre o assunto, através da análise de suas cartas, manuscritos e mesmo dos livros catalogados em sua biblioteca pessoal. Contrário ao que muitos críticos afirmam, ficará evidente seu interesse e participação nas pesquisas matemáticas da época e sua rigorosa interpretação do postulado das paralelas. Assim, poderemos descartar a influência de geometrias alternativas na composição da *Crítica*, não tanto por serem desconhecidas por Kant, mas por sua irrelevância no escopo da obra.

O capítulo 3 é dedicado às várias críticas ao chamado "argumento da geometria" e foi dividido segundo os diferentes tipos de abordagem. As duas principais linhas de ataque se baseiam na impossibilidade da geometria euclidiana ser sintética *a priori*. A primeira linha, representada principalmente por Hans Reinchenbach, forte defensor da teoria da relatividade, afirma que as propriedades do espaço físico não são *a priori*, pois podem ser verificadas experimentalmente como não euclidianas. Esta argumentação, que leva em conta evidências empíricas para contestar o "argumento da geometria", é fundamentada na geometria como ciência de medidas, representada por Hermann von Helmholtz, além da geometria visual, que será exposta e discutida em detalhes, nas suas várias interpretações. A segunda linha de ataque teve Bertrand Russell e Michael Friedman como principais expoentes e dirigem suas críticas às geometrias pura e aplicada, supostamente não diferenciadas por Kant. Essa linha será discutida através da abordagem de Boris Grosdanoff, que acredito fornecer a resposta mais adequada à questão.

Ao afastar as camadas externas de críticas, chegamos ao capítulo 4, o verdadeiro núcleo do texto, no qual veremos os argumentos favoráveis ao Idealismo Transcendental. Nesse caso, duas interpretações são possíveis: em primeiro lugar, aquela em que a geometria não desempenha papel relevante na *Estética* e pode ser tomada como apenas um exemplo complementar à teoria. Idealizada por Steve Palmquist, entre outros, essa vertente não pode levar muito longe, visto a importância da geometria para o Idealismo Transcendental, que aponto em todo o texto. Tomaremos então um segundo caminho, aberto por Lisa Shabel, que exibe uma ponte filosófica entre a *Exposição Metafísica* e o Idealismo Transcendental, construída com o material do "argumento da geometria".

Aproveitando o terreno preparado por Shabel, projeto uma arquitetura diferente para a *Crítica*, na qual a geometria não é uma ponte, uma coluna ou apenas um adorno, mas a própria fundação do imenso edifício, o conhecimento sintético e *a priori* por excelência, que possibilitará a Kant erguer o Idealismo Transcendental. Em vista disso, será mostrado que a geometria euclidiana tem realmente tais propriedades e que geometrias alternativas também as possuem. Desse modo, uma e outra parecem ser apenas modelos aplicados em situações diferentes. Entretanto, apenas a geometria euclidiana apresentará as características essenciais para ser a ciência da forma de nossa intuição do espaço, que torna possível a experiência externa e a realidade como aparece para nós.

Capítulo 1: O estilo argumentativo e a função da geometria na obra kantiana

1.1) A argumentação transcendental

A importância da geometria na *Crítica da Razão Pura* está diretamente ligada ao estilo argumentativo usado por Kant, que adverte que o sistema criado pela razão pura é uma esfera isolada e coesa, com partes de tal forma interligadas que a função de cada uma só pode ser entendida a partir da compreensão do todo (cf. *Prolegômenos*, §4, p. 6). Essa esfera supostamente inatingível, a arquitetura argumentativa da *Crítica*, foi construída em uma simultaneidade sucessiva, complexa a tal ponto que um toque reflete em todo a sua estrutura e sua estabilidade depende da força de sua base, a fundação do edifício, a *Estética Transcendental* e a intuição do espaço nela deduzido.

A pilastra ideal, perfeita, deve estar livre da contingência empírica, objetivo impossível, pois estamos imersos na experiência e a construção da *Crítica* manifesta nossa própria construção da realidade, com nossos limitados recursos. A primeira dificuldade já se impõe ao criar um sistema conceitual baseado em sua própria teoria do conhecimento e diante dessa dificuldade, Kant deve escolher para alicerce, pedra angular da imensa estrutura, dentre os elementos disponíveis aqueles os mais puros. A melhor opção argumentativa e o verdadeiro princípio, como pura forma sem conteúdo empírico, deveria ser a lógica que se manifesta nas inferências entre as relações espaciais que construímos em nossa realidade, através da geometria euclidiana e seus entes fundamentais: ponto, reta e plano. Mas a base foi construída segundo outra escolha, que enfraqueceu a estrutura argumentativa.

Kant afirma que sua argumentação na *Crítica* é sintética ou progressiva, na qual a razão faz uma autoreflexão, para determinar as leis para seu uso puro. Esse método argumentativo deve partir de princípios e busca pela base do conhecimento, sem se importar com qualquer fato que seja:

> Pretendi, na Crítica da razão pura, trabalhar essa questão sinteticamente, a saber, levando a investigação para dentro da própria razão pura e buscando determinar no interior dessa fonte tanto os elementos como as leis de seu uso puro, segundo princípios. Esse trabalho é difícil e requer um leitor resoluto para penetrar gradualmente pelo pensamento em um sistema que não toma como dado nenhum fundamento exceto a própria razão, e que busca, portanto, desenvolver a cognição a partir de seus gérmens originais sem apoiar-se em nenhum fato que seja. (*Prolegômenos a qualquer metafísica futura que possa apresentar-se como ciência*, § 4, p.13).

Por outo lado, o estilo de argumentação transcendental inicia com alguma característica inquestionável de nossa experiência e chega, de forma regressiva, a uma forte conclusão sobre a natureza do sujeito, que deve ser necessária para que a experiência ocorra (cf. *Philosophical Arguments*, p.20-1). Essa forma de argumentação é analítica ou regressiva, caminho que Kant admite ter percorrido nos *Prolegômeno*s:

> Os Prolegômenos, pelo contrário, devem ser apenas exercícios preparatórios, e indicar, antes, o que deve ser feito para trazer, se possível, uma ciência à existência do que propriamente expor essa ciência. *Eles* [IV: 275] *devem, portanto, apoiar-se em algo que já se conhece como confiável, a partir de que se possa avançar com confiança e ascender a fontes que ainda são desconhecidas* e cuja descoberta irá, não apenas esclarecer o que já se sabia, mas também expor um domínio formado por muitas cognições que brotam, todas, dessas mesmas fontes. O procedimento metodológico dos prolegômenos, principalmente daqueles que devem preparar para uma metafísica futura, serão, portanto, analíticos. (*Prolegômenos a qualquer metafísica futura que possa apresentar-se como ciência*, § 4, p.13, meus itálicos).

Contrário ao que Kant afirma, o método de argumentação analítico-regressivo foi usado também na *Crítica* em uma de suas passagens mais controversas[2] e que supostamente serviria de apoio às conclusões elaboradas na *Exposição Metafísica do Conceito de Espaço*[3] e coluna mestra do Idealismo Transcendental, o espaço como forma da intuição pura. Essa confirmação, presente na *Exposição Transcendental do Conceito de Espaço*, afirma que a geometria só é possível, como um conhecimento que determina as propriedades do espaço de maneira sintética e *a priori*, se houver uma forma do sentido externo, que já pertença ao sujeito e determine como ele será afetado pela representação imediata de objetos empíricos. Essa forma do sentido externo só pode ser a intuição pura do espaço:

> A geometria é uma ciência que determina sinteticamente, e contudo a priori, as propriedades do espaço. Que deverá ser, portanto, a representação do espaço para que esse seu conhecimento seja possível? O espaço tem de ser originariamente uma intuição, porque de um simples conceito não se podem extrair proposições que ultrapassem o conceito, o que acontece, porém, na geometria (Introdução, V). Mas essa intuição deve-se encontrar em nós a priori, isto é, anteriormente a toda a nossa percepção de qualquer objeto, sendo portanto intuição pura e não empírica. (*Crítica*, B 41).

Conhecido como o "argumento da geometria", esse raciocínio mostra-se nitidamente circular. Segundo Palmer, as exposições metafísica e transcendental podem ser resumidas em 3 proposições que evidenciam a circularidade da argumentação:

> S The science of geometry is possible if and only if Space is contributed by us.
> C Space is contributed by us.
> G We do have a science of geometry.

---

[2] A argumentação regressiva será usada por Kant em outras passagens da *Crítica*, que serão vistas no momento oportuno.

[3] Ver *Crítica*, B 37-B 40. A *Exposição Metafísica* será analisada em detalhes no capítulo 4.

> But these propositions are combined to form two quite different arguments. In the Critique Kant first produces reasons for believing C[4], then uses the 'if'-bit of S to establish G[5]. Later on, using the 'only-if', he argues back from G to C[6]. (*Presupposition and Transcendental Inference*, p. 63)

Ainda de acordo com Palmer, esperava-se que ao argumentar da intuição do espaço para a consequente possibilidade da geometria, Kant deveria fornecer outros resultados dessa intuição ou ao menos estabelecer axiomas da geometria, como fez com a Física nas *Analogias*. Visto que isso não foi feito, o movimento argumentativo da intuição do espaço para a geometria é notadamente fraco, em contraste ao movimento contrário, que é claro e válido (cf. *idem*, p. 64-5). O movimento contrário, regressivo, ao qual se refere Palmer é a argumentação transcendental, que permite a compreeensão da possibilidade do conhecimento sintético *a priori* considerando-se esse conhecimento como já verificado, real, enquanto o movimento progressivo estipula a necessidade de tal conhecimento sem a pressuposição de sua realidade.

Para Oliveira, entretanto, apenas o método progressivo é adequado à filosofia transcendental, que ao visar a refutação do ceticismo não pode justificar o conhecimento sintético *a priori* baseado na realidade desse conhecimento, alvo do cético, porque através do método regressivo cairia no raciocínio circular e transformaria a teoria transcendental em um imenso *petitio principii* (cf. *Para além da fragmentação*, p. 109).

Acredito que o método regressivo é uma forma de argumentação não só válida, mas necessária, pois imersos em nossa peculiar construção da realidade, os dados empíricos, só nos resta saber como essa realidade foi construída e que limites essas condições impõem à descoberta de novos conhecimentos. Temos então dois movimentos argumentativos: regressivo, dos fatos para seus princípios de possibilidade e progressivo, dos princípios aos novos conhecimentos. O primeiro movimento é essencial e reconhecido por Kant na própria *Crítica*:

> Ora, *toda a razão pura*, no seu uso simplesmente especulativo, não contém um único juízo por conceitos, diretamente sintético. Efetivamente, como mostramos, não é capaz de formar, por meio de idéias, nenhum juízo sintético que tenha validade objetiva; por meio de conceitos do entendimento, porém, *estabelece princípios certos, não diretamente por conceitos, mas apenas indiretamente, pela relação desses conceitos a algo de totalmente contingente, a saber, a experiência possível; pois, quando é suposta esta experiência (algo enquanto objeto de experiência possível), estes princípios podem ser, sem dúvida, apodicticamente certos*, mas não podem, em

---

[4] Feita na *Exposição Metafísica*.

[5] "Assim, as proposições geométricas, como, por exemplo, que num triângulo a soma de dois lados é maior do que o terceiro, não derivam nunca de conceitos gerais de linha e de triângulo, mas da intuição, e de uma intuição *a priori*, com uma certeza apodítica." (*Crítica*, A 25/B 39).

[6] Elaborada na *Exposição Transcendental*.

> si mesmos (diretamente), ser conhecidos a priori. (*Crítica*, A 737/B 765, meus itálicos)

Entretanto, os danos menores para a argumentação regressiva ocorrerão quando a escolha do ponto de apoio empírico, *apenas porque fato inegável*, for um conhecimento aceito como sintético e *a priori*, ou seja, uma ciência seguramente estabelecida, de conclusões universalmente válidas, que para tanto não tenha necessidade de nenhum suporte na experiência e conduza a novos conhecimentos apodíticos e universais. A ciência com tais características deve ser a geometria euclidiana, que para assegurar sua posição deve ser testada em sua influência e importância na obra de Kant, fundamentação lógica, realidade objetiva, caráter sintético e *a priori* e única como adequada à nossa construção da realidade.

1.2) O espaço e a geometria no período pré-crítico

Com o desenvolvimento das ciências, a natureza do espaço e do tempo foram temas de grande importância na discussão filosófica do século XVIII. O debate entre absolutistas e relacionalistas, explícito na *Correspondência entre Leibniz e Clarke* (1717), teve grande influência na obra de Kant. Menções a esse debate podem ser vistas em vários trechos da *Crítica*[7].

Em seu período pré-crítico, voltado mais à Física e Metafísica, seus argumentos próprios somam-se às características de uma ou outra concepção, em alternância.

Em seu primeiro trabalho publicado, *Idéias para uma verdadeira avaliação das forças vivas* (1746), Kant propõe uma explicação física da tridimensionalidade do espaço e a vincula com os efeitos causados por forças, essenciais das substâncias, que estão em proporção inversa ao quadrado da distância. Se essas forças estivessem em outra proporção haveria outras dimensões e a geometria seria a ciência encarregada de estudar todos os Espaços possíveis:

> The threefold dimension seems to arise from the fact that substances in the existing world so act upon one another that the strength of the action holds inversely as the square of the distances […] A science of all these possible kinds of space would undoubtedly be the highest enterprise which a finite understanding could undertake in the field of geometry (*The true estimation of living forces*, *apud* Kant's Inaugural Dissertation and Early Writings on Space, p. 11-2).

[7] Ver *Crítica* A 23/B 37, A 39/B 56 e A 46/B 64.

A passagem anterior mostra o interesse inicial de Kant pela fundamentação filosófica do espaço e das possíveis geometrias a ele relacionadas[8]. Esse propósito se mantém ao longo de sua obra, passando por várias alterações e influências.

Segundo Hatfield, em 1756, com a obra *Monadologia Physica*, Kant se volta ao problema de reconciliar a divisibilidade infinita do espaço, como proposto pela geometria, com a teoria das substâncias simples, proposta por Leibniz e Wolff. A questão em debate pode ser formulada da seguinte maneira: como uma composição finita de substâncias simples e indivisíveis pode formar um espaço contínuo? Kant aceita que os corpos sejam formados por substâncias simples, ou mônadas, porém, em desacordo com Leibniz e Wolff, estas substâncias não estão simplesmente no espaço, mas elas o preenchem com um sistema de forças mutuamente interativas. Adiantando concepções posteriores, Kant afirma que o espaço é um *aparecimento* gerado pelas relações externas entre as mônadas. Dessa forma, a divisibilidade infinita da geometria é dada em um espaço contínuo preenchido pelas interações entre substâncias simples (cf. *Kant on the perception of space (and time)*, p.71-2).

Entretanto, em uma carta de 8 abril de 1766 a Mendelsohn[9], Kant já mostrava suas dúvidas sobre essas conclusões e na obra *Sobre o primeiro fundamento da diferença entre as regiões do espaço* (1768) a refuta definitivamente baseado no conceito de contrapartidas incongruentes como, por exemplo, a mão esquerda e a direita: se for possível obter, a partir de A, uma contrapartida incongruente A', então A exibe uma característica espacial independente de suas partes e, para diferenciá-las será necessário utilizar um sistema de orientação: para cima, para baixo, para a direita, para a esquerda. Dessa forma, o espaço não é um puro sistema de relações entre os corpos que o ocupam, pois é necessário um referencial externo comum: o universal e absoluto espaço de Newton (cf. *Sobre o primeiro fundamento da diferença entre as regiões do espaço*, p. 10-2).

Após assimilar características das duas concepções anteriores, Kant propõe uma solução inovadora em sua Dissertação de 1770, *Sobre a forma e os princípios do mundo sensível e inteligível*: o espaço é uma representação singular, não uma noção abstrata, que não sendo formado por sensações, é uma intuição pura que se mostra evidente nos axiomas da geometria e nas construções mentais de seus postulados e teoremas. O argumento apoia-se, também, nas

---

[8] Segundo Rosenfeld, Kant foi inclusive o primeiro a propor a existência de espaços multidimensionais. (cf. *A History of Non-Euclidean Geometry*, p. 179).

[9] Ver *Philosophical Correspondence*, p. 54-7.

contrapartidas incongruentes. Mas agora, além do exemplo cotidiano das mãos esquerda e direita, Kant se vale de triângulos formados por dois hemisférios opostos de uma esfera[10]. A incongruência só pode ser notada, através de uma descrição discursiva, se já possuirmos a intuição pura do espaço. Assim, a geometria deve fazer uso de princípios além de qualquer dúvida e demonstra suas proposições através de uma intuição singular, ao invés de um conceito universal. (cf. *Dissertação de 1770*, II:402-3).

Podemos perceber que na *Dissertação* estão as bases para o Idealismo Transcendental, pois Kant considera o Espaço como subjetivo, ideal, próprio à mente humana e que coordena todos os objetos dados externamente:

> O espaço não é algo de objetivo e real, nem substância, nem acidente, nem relação; mas algo subjetivo e ideal, saído da natureza da mente por uma lei estável, à maneira de um esquema mediante o qual ela coordena para si absolutamente todas as coisas que são externamente sentidas (*idem*, II:403).

Na sequência, Kant rejeita a visão leibniziana de um espaço relacional como uma ficção da razão e, também, a "inglesa", newtoniana, de um espaço absoluto e receptáculo de todas as coisas possíveis e que relega a geometria às ciências de princípios empíricos: "Efetivamente, se todas as propriedades do espaço são tiradas das relações externas apenas mediante experiência, então os axiomas geométricos só possuem uma universalidade relativa, tal como a que se obtém por indução [...]" (*idem*, II:404).

O §15 da *Dissertação* estabelece, em resumo: o espaço é uma intuição pura, evidente nos axiomas da geometria, a qual deve ter caráter *a priori*; ou seja, necessário, apodítico e universal. A geometria adotada deve ser a euclidiana e o espaço tridimensional. Quaisquer outras relações espaciais serão consideradas como ficções.

1.3) O espaço e a geometria na *Crítica da Razão Pura*

As conclusões da *Dissertação* aparecem quase inalteradas na *Estética Transcendental* da primeira edição da *Crítica* (1781). Deve-se salientar que na segunda edição (1787), a *Estética* traz uma retificação essencial para a interpretação da filosofia kantiana da geometria. A tradução de Guyer (cf. *Critique of Pure Reason*, p. 155) não lhe faz referência, entretanto, é citada por Falkenstein: "That which makes the manifold of appearance able to be ordered [A:

---

[10] É evidente que os triângulos devem ser escalenos, pois quando rotacionados e deslocados não se sobrepõem, ou não são congruentes e formam apenas uma imagem espelhada um do outro. Esta argumentação será revista no capítulo 4.

be intuited as ordered] in certain relations I call the *form* of the appearance. (A20/B34)" (*Kant´s Intuitionism*, p.72).

Nessa passagem Kant fala sobre o que ele chama de *forma* do aparecimento[11]. É fundamental a diferença quando comparadas as duas edições:

Edição A: A forma do aparecimento é o que faz com que o seu múltiplo *se intua ordenado* em certas relações.

Dito dessa forma, podemos interpretar de modo incorreto que a sensibilidade é responsável integralmente pela ordenação desse aparecimento, o que daria à intuição um papel único na representação de qualquer objeto intuído.

Edição B: A forma do aparecimento é o que faz com que o seu múltiplo *possa ser ordenado* em certas relações.

Agora percebemos que a forma do aparecimento é parte de um processo maior. A fonte de conhecimento, inclusive geométrico, não provém exclusivamente da intuição do espaço; ou seja, não é um princípio de ordem, mas torna possível que se ordene a matéria sensível segundo certas relações que serão apresentadas na *Analítica*, na qual ficará clara a participação do entendimento e o caráter, apenas provisório, da exposição da doutrina do espaço na *Estética*:

> Space, represented as object (as is really required in geometry), contains more than the mere form of intuition, namely the comprehension a of the manifold given in accordance with the form of sensibility in an intuitive representation, so that the form of intuition merely gives the manifold, but the formal intuition gives unity of the representation. In the Aesthetic I ascribed this unity merely to sensibility, only in order to note that it precedes all concepts [...] (*Crítica*, B 161n).

Percebemos que a intuição do espaço deve fornecer as condições para que um objeto externo seja intuído, as quais constituem a *forma da intuição.* Em contrapartida, a *intuição formal* organiza os dados da experiência externa para que sejam pensados através de conceitos. Podemos dizer que o material dos sentidos é colocado em um molde, feito pelas propriedades da intuição, que passa por diversas sínteses, no entendimento, para poder se tornar uma representação. Para a geometria, destaco a síntese da imaginação produtiva, que permite que possamos perceber uma sucessão e o movimento enquanto descrição de um objeto no espaço[12]: "Não podemos pensar uma linha sem a traçar em pensamento; nem pensar um círculo sem o

[11] Diferente da tradução consagrada "fenômeno" para *Erscheinung*, uso "aparecimento", que tem um significado muito mais claro em língua portuguesa.

[12] É claro que o movimento de um objeto é percebido de forma empírica e não pertence à ciência pura. Entretanto, o movimento enquanto descrição do espaço pertence é um ato puro da síntese sucessiva do diverso e à geometria. (cf. *Crítica*, B 156n)

descrever, nem obter a representação das três dimensões do espaço sem traçar três linhas perpendiculares entre si, a partir do mesmo ponto [...]” (*Crítica*, B 154).

Mesmo em pensamento, qualquer representação seria impossível sem que fossem percebidas como distintas uma série de impressões sucessivas. Além disso, os dados sensoriais devem formar uma unidade ao longo de diferentes momentos, operação feita pela síntese da apreensão; ou seja, para traçar uma linha devo perceber que o traço de antes é diferente do traço de agora e se juntam como uma representação única: uma linha. Para que esse processo seja possível a representação de uma figura no espaço é precedida pela intervenção das sínteses que só atuam em conformidade com o tempo:

> Toda a intuição contém em si um diverso que, porém, não teria sido representado como tal, se o espírito não distinguisse o tempo na série das impressões sucessivas, pois, como encerrada num momento, nunca pode cada representação ser algo diferente da unidade absoluta. Ora, para que deste diverso surja a unidade da intuição (como, por exemplo, na representação do espaço), é necessário, primeiramente, percorrer esses elementos diversos e depois compreendê-los num todo. Operação a que chamo síntese da apreensão, porque está diretamente orientada para a intuição, que, sem dúvida, fornece um diverso. Mas este, como tal, e como contido numa representação, nunca pode ser produzido sem a intervenção de uma síntese. (*Crítica*, A 99).

Para uma nova abordagem, minha intenção é mostrar que os princípios para uma representação qualquer espalham-se pela *Crítica*, como vimos. Assim, para concluir propriedades da intuição do espaço, na *Estética*, Kant não usa um princípio, mas uma representação complexa de “parte”, o que equivale a tentar tirar o côncavo do convexo. Veremos que isso torna a argumentação fraca e os verdadeiros princípios para iniciar o argumento só serão encontrados na geometria.

1.3.1) A construção de um conceito

Para uma apresentação clara do “argumento da geometria” e suas consequências, faz-se necessário seguir os paradigmas geométricos na argumentação de Kant, assim como a relação desses com o Idealismo Transcendental. Essa relação é dada pelo caráter sintético *a priori* das proposições matemáticas e nos faz retornar ao real problema da razão pura: como são possíveis juízos sintéticos a priori?

No prefácio da segunda edição, Kant já indica porque o modelo geométrico forneceu à Matemática o caminho seguro de uma ciência: a habilidade dos matemáticos para produzir figuras, por construção, de acordo com conceitos *a priori* (cf. *Crítica*, B XII).

A teoria de Kant sobre a "construção de um conceito"[13] é a base para a afirmação de que as proposições matemáticas são sintéticas. Apesar das referências a essa teoria, em diversos trechos da *Crítica*, ela é analisada em detalhes na parte intitulada "Disciplina da Razão Pura" e, como exemplo, utiliza a proposição 32 do livro I de *Os Elementos*: "Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos[14], e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos." (*Os Elementos*, p.122).

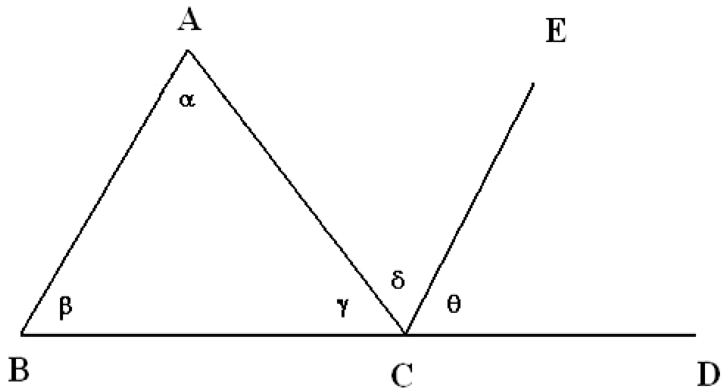

Figura 1

Na figura acima vemos o triângulo ABC e as construções auxiliares necessárias à demonstração da proposição. Kant descreve, inicialmente, o método analítico do filósofo, o qual não produzirá uma nova informação , além daquelas já implícitas nos conceitos de linha reta ou de ângulos:

> Dê-se a um filósofo o conceito de um triângulo e o encargo de investigar, à sua maneira, como pode ser a relação da soma dos ângulos desse triângulo com o ângulo reto. [O filósofo] Nada possui a não ser o conceito de uma figura que está limitada por três linhas retas e nessa figura o conceito de igual número de ângulos. Pode então refletir tanto quanto quiser sobre esse conceito, que, a partir dele, nada produzirá de novo. Pode analisar e tornar claro o conceito de linha reta ou de ângulo ou do número três, mas não chegará a outras propriedades que não estejam contidas nestes conceitos (*Crítica*, A 716/B 744).

Em seguida, é descrito o método sintético do matemático apresentando a demonstração de Euclides. O matemático extrai uma nova relação entre os ângulos internos do triângulo, que não estava contida nos conceitos iniciais de reta ou de ângulos[15]:

> Mas que o geômetra tome esta questão. Começa imediatamente a construir um triângulo [ABC]. Porque sabe que dois ângulos retos valem juntamente tanto como

[13] Muito caro à filosofia da matemática em Kant, o tema da "construção de um conceito" tem aqui apenas uma introdução. Este tema será tratado com maiores detalhes ao longo do texto.
[14] Deve-se entender que o ângulo exterior é igual *à soma* dos dois ângulos interiores e opostos.
[15] Identifico, entre colchetes,os segmentos e ângulos aos quais Kant se refere, conforme a figura 1.

> todos os ângulos adjacentes que podem traçar-se de um ponto tomado numa linha reta, prolonga um lado do seu triângulo [segmento CD] e obtém dois ângulos adjacentes que, conjuntamente, são iguais a dois retos [γ + ângulo ACD = 180º]. Divide em seguida o ângulo externo, traçando uma linha paralela ao lado oposto do triângulo [segmento CE] e vê que daí resulta um ângulo adjacente que é igual a um ângulo interno, etc [$\theta = \beta$, pois são correspondentes, $\delta = \alpha$, pois são alternos internos]. Consegue desta maneira, graças a uma cadeia de raciocínios, guiado sempre pela intuição, a solução perfeitamente clara e ao mesmo tempo universal do problema [$\alpha + \beta + \gamma = \gamma + \delta + \theta = 180º$] (*idem*, *ibidem*).

As construções auxiliares mostram ao geômetra informações que não estavam contidas na proposição inicial; ou seja, um conhecimento sintético para o qual a apresentação de um conceito à intuição é indispensável.

De acordo com Shabel, temos como consequência a construção de um *único* triângulo que representa *todos* os triângulos; ou seja, esse triângulo singular tem características gerais e universais que valem para qualquer outro. Apesar de ser construído na intuição empírica, seja na imaginação, no papel ou na areia, e exibido como um objeto, correspondente ao seu conceito, sua construção não foi baseada em nenhum modelo da experiência de uma figura triangular, pois seus lados e ângulos não possuem medidas específicas[16]. Esse paradigma de triângulo representará, também, todos os objetos triangulares da sensação. (cf. *Kant's philosophy of mathematics*, p.109-11).

Entendo, com suporte na passagem seguinte da *Crítica*, que a "construção de um conceito", ou "apresentação de um conceito à intuição", são expressões que remetem também à realidade objetiva desse conceito. Por exemplo, três segmentos de reta, nos quais a soma de dois deles é menor que o terceiro, não constituem um conceito de triângulo que possa ser apresentado à intuição, visto que tal figura não é adequada ao molde de nossa intuição do espaço:

> [...] os conceitos são totalmente impossíveis, e nem podem ter qualquer significado, se não for dado um objeto ou a esses próprios conceitos ou, pelo menos, aos elementos de que são constituídos e, por conseguinte, não se podem referir a coisas em si (sem considerar se nos podem ser dadas e como); vimos, além disso, que a única maneira pela qual nos são dados objetos é uma modificação da nossa sensibilidade [...] (*Crítica*, A 139/B 178).

Como foi visto, a construção de um conceito é essencial para a argumentação de Kant, entretanto, o uso legítimo de figuras no raciocínio geométrico levou às mesmas críticas já feitas

[16] O que a rigor seria impossível, visto que o conceito de triângulo tem lados que são segmentos de reta, que não tendo altura nem largura não podem ser vistos e medidos. Na verdade, o conceito de triângulo e suas propriedades são extendidos a objetos *virtualmente* triangulares da sensação e isso só é possível pois já possuimos um molde no qual se encaixam tais objetos. A meu ver, a "construção de um conceito" reforça a posição da geometria como base para a argumentação do espaço como forma pura da intuição.

a Euclides. Acredito que a melhor apresentação do problema possa ser dividida em duas situações diferentes: a construção de figuras e a demonstração de teoremas.

1.3.2) Construção de figuras

Para Kant, a construção de figuras não tem a necessidade de ser empírica; ou seja, para que o conceito seja apresentado à intuição, ele não precisa ser desenhado, mas pode ser analisado apenas segundo esse mesmo conceito. A técnica para se desenhar uma parábola, por exemplo, não interessa ao geômetra. Sua função será deduzir as propriedades de uma curva a partir de sua definição e formar um conceito da relação entre tais propriedades e, dessa forma, fica demonstrado o conceito dado na intuição *a priori* da parábola. O geômetra conhece a possibilidade da construção pura do conceito no momento de sua definição. A construção mecânica pode ser feita, se for preciso, de acordo com a construção pura ou esquemática. (cf. *Da utilidade de uma nova crítica da Razão Pura*, p. 21-5).

Em outro exemplo, Kant lembra que Arquimedes estudou a proporção entre polígonos regulares de 96 lados, inscritos e circunscritos a uma circunferência. A intuição não foi colocada como base do conceito destes polígonos, *quando os desenhou*, o que seria absurdo, mas de acordo com a regra de construção desse conceito. Dessa forma, pode deduzir propriedades do objeto sem que o mostre aos sentidos, mas apenas o *construa na intuição*, o que demonstrará a validade da própria regra e a do conceito[17] (*idem*, p.56).

Na *Crítica*, Kant enfatiza que o conceito pode ser dado à intuição através de uma representação real ou *possível*. É justamente a possibilidade da experiência o que confere validade objetiva aos nossos conhecimentos *a priori*:

> Para que um conhecimento possua realidade objetiva, isto é, se refira a um objeto e nele encontre sentido e significado, deverá o objeto poder, de qualquer maneira, ser dado. Sem isto os conceitos são vazios e, se é certo que por seu intermédio se pensou, nada realmente se conheceu mediante este pensamento, apenas se jogou com representações. Dar um objeto, se isto, por sua vez, não deve ser entendido apenas de maneira imediata, mas também ser apresentado imediatamente na intuição, não é mais do que referir a sua representação à experiência (real ou possível). (*Crítica*, A156/B195)

Deve-se salientar que, diferente de um polígono de 96 ou de 1000 lados, os conceitos de um espaço físico com mais de 3 dimensões, ou de uma figura limitada por duas retas, não podem ser apresentados à intuição nem ao menos como uma possibilidade de experiência.

[17] Uma das principais distinções da filosofia kantiana foi entre intuição e sensação. O espaço como uma intuição pura não pode ser visto ou tocado. Os fatos brutos das sensações preenchem este espaço predeterminado segundo regras e esquemas, na construção de conceitos, que nos levam a conhecimentos e juízos.

1.3.3) Demonstração de teoremas e o raciocínio diagramático

Quanto às demonstrações de teoremas, Kant utiliza casos mais simples dos *Elementos*, como a proposição 32, vista acima, para exemplificar a "construção de um conceito" e a crítica pode ser tanto a Kant quanto a Euclides, pois mesmo o melhor dos geômetras pode se enganar em uma demonstração mais longa e complexa, utilizando-se apenas da imaginação ou de uma figura mal desenhada. Essa é a opinião de Ayer, que lembra o erro que pode incorrer o geômetra ao tomar por gerais características de uma figura particular:

> The appeal to intuition, though generally of psycological value, is also a source of danger to the geometer. He is tempted to make assumptions which are accindentally true of the particular figure he is taking as illustration, but not follow from his axioms. It has, indeed, been shown that Euclid himself was guilty of this, and consequently that the presence of the figure is essential to some of his proofs (*Language, Truth and Logic*, p.79).

E ainda, Russell acusa Kant de falta de rigor ao não demonstrar um teorema de forma estritamente lógica e se valendo da figura e da intuição:

> Kant, having observed that the geometries of his day could not prove their theorems by unaided argument, *but required an appeal to the figure*, invented a theory of mathematical reasoning according to which the inference is never strictly logical, but always requires the support of what is called 'intuition.' The whole trend of modern mathematics, with its increased pursuit of rigor, has been against this Kantian theory (*Introduction to Mathematical Philosophy*, p.144-5, meus itálicos).

O problema visto acima refere-se ao raciocínio diagramático, o uso de figuras na demonstração de teoremas geométricos. Nesse ponto, Kenneth Manders fornece a pesquisa de maior interesse para a filosofia da Matemática e, em sua opinião, tal raciocínio é inadequado e não confiável por uma série de motivos: os desenhos são imperfeitos e individuais, há diferentes formas de geometria, com diferentes conclusões, de tal maneira que o raciocínio aplicado a uma figura pode não satisfazer aos vários tipos de geometria. Apesar de sua aparente fragilidade como método de prova, o raciocínio diagramático manteve-se durante séculos e, reconhece Manders, as demonstrações de Euclides, Apolonius e Arquimedes estão virtualmente corretas. Assim, impõe-se novamente a questão: como uma figura particular justifica conclusões gerais? (cf. *Diagram-Based Geometrical Practice*, p. 65-8).

Como passo inicial para resolver o problema, Manders divide as características de um diagrama em co-exatas e exatas, de tal forma que as primeiras se referem àquelas que podem sofrer alterações em sua aparência sem afetar a demonstração de um teorema: a relação parte/todo entre regiões e os segmentos que as limitam. Em contrapartida, igualdades e proporcionalidades são condições exatas, que afetam completamente uma demonstração, ao sofrerem quaisquer variações (cf. *idem*, p. 69).

Com suporte nessas distinções, Manders compara sua compreensão dos diagramas euclidianos à concepção de Kant, que relaciona intuições particulares às conclusões gerais, através de esquemas. Para tanto, o uso de diagramas particulares, de propriedades *co-exatas*, permitem que quaisquer distorções conduzam às mesmas conclusões; ou seja, o caráter *a priori* da intuição geométrica é independente de qualquer caso empírico:

> [...] Kant's conception (cf. Shabel (2003), Goodwin (2003)) that intuitions (diagrams) are particular, and connected to general claims via schematization (conceptualization via the diagram construction conditions). That diagram-based (co-exact) claims are stable under diagram distortion, hence independent of any particular empirical realization, might then motivate the necessity or apriority of geometrical intuition. (*idem*, p. 74).

Para apoiar as conclusões acima, Manders faz referência à dissertação de Shabel, que esclarece a diferença entre as demonstrações mecânica e matemática, ilustrada pela mesma proposição I.32, dos *Elementos*, vista acima[18]. Na demonstração mecânica, a afirmação de que os ângulos ABC e BAC juntos são iguais ao ângulo ACD justifica-se pela medição de todos os três ângulos com instrumentos e pela comparação dos resultados; ou seja, baseia-se em informações exatas das grandezas envolvidas, enquanto na demonstração matemática não há informações *exatas*, pois o diagrama fornece relações parte/todo, sem determinar igualdades entre elas. Os dois métodos demonstrativos não são distintos pelo uso de uma figura, mas pelas diferentes maneiras de extrair inferências, da mesma figura (cf. *Mathematics in Kant's Critical Philosophy*: *Reflections on Mathematical Practice*, p. 99-101). Resta evidente que, na concepção de Manders, as propriedades exatas estão para a demonstração mecânica, assim como as propriedades co-exatas para a demonstração matemática.

Vimos a posição de Shabel sobre a intuição pura no raciocínio diagramático, quando da construção de um conceito[19], que parece ecoar com poucas variações sua dissertação, citada acima: em um diagrama individual concreto, a intuição pura é simplesmente uma intuição empírica, que se comporta de forma pura. Na demonstração essa intuição pura é uma imagem universalizável, pois a cognição matemática considera o universal no particular (cf. *idem*, p. 102 e p. 109-114).

---

[18] Ver figura 1.

[19] Ver seção 1.3.1.

Friedman discorda das interpretações de Shabel e Manders e oferece uma alternativa que utiliza uma interessante abordagem lógica para a compreensão do método diagramático em Kant[20]. Seu argumento, nesse sentido, inicia com uma importante passagem da *Crítica*, que indica ser inviável uma imagem particular como base de um conceito sensível puro, reproduzida a seguir:

> De fato, os nossos conceitos sensíveis puros não assentam sobre imagens dos objetos, mas sobre esquemas. Ao conceito de um triângulo em geral nenhuma imagem seria jamais adequada. Com efeito, não atingiria a universalidade do conceito pela qual este é válido para todos os triângulos, retângulos, de ângulos oblíquos, etc., ficando sempre apenas limitada a uma parte dessa esfera. O esquema do triângulo só pode existir no pensamento e significa uma regra da síntese da imaginação com vista a figuras puras no espaço. (*Crítica*, A 141/B 180).

Se tomarmos essa "regra da síntese" como a própria construção euclidiana, com seus conceitos geométricos fundamentais como linha, círculo e triângulo, Friedman acredita que o esquema de um conceito nada mais é do que uma função ou operação construtiva. Por exemplo, o esquema do conceito de triângulo toma três linhas arbitrárias como *imput*, no qual a soma de duas sempre seja maior que a terceira, e fornece, como *output*, o triângulo construído. É a própria função construtiva que fornece a generalidade dos conceitos, pois com *imputs* apropriados são gerados todos os exemplos particulares, ou imagens, desses conceitos. E ainda, apesar da universalidade e necessidade, a matemática pura não envolve recursos cognitivos do pensamento conceitual, o procedimento lógico da subsunção, mas o raciocínio por substituição, essencialmente iterativo, no qual um objeto é usado como argumento de uma função, que tem seu resultado usado como argumento de outra função e assim por diante (cf. *Kant on Geometry and Spatial Intuition*, p. 6-9).

A aplicação iterativa, de operações construtivas, desempenha na geometria euclidiana o mesmo papel que as suposições existenciais expressas por enunciados quantificados. Por exemplo, para Hilbert a divisibilidade infinita de uma linha é dada pelo axioma de que entre dois pontos quaisquer há sempre um terceiro[21], que corresponde em Euclides à possibilidade de construirmos, de forma indefinida, a função bissecção de um segmento[22]. Da mesma forma,

---

[20] Apesar de Friedman possuir uma extensa obra sobre a Filosofia da Matemática em Kant, enfatizo este artigo por ser o mais recente e, em minha opinião, o mais importante texto de Friedman sobre a real importância da geometria, no corpo da *Crítica*.

[21] 3º axioma de ordem: "Of any three points situated on a straight line, there is always one and only one which lies between the other two." (*Foundations of Geometry*, p.4).

[22] Friedman refere-se à Proposição I.10 dos *Elementos*:

utilizando a aplicação iterativa de três operações construtivas iniciais, os três primeiros postulados[23], Euclides pode construir, com régua e compasso, todos os pontos necessários de um plano, a partir de dois pontos dados. Essas mesmas operações, através de iterações finitas, podem também construir as suposições existenciais que justifiquem as construções auxiliares, necessárias aos procedimentos de prova. Para tanto, tais suposições devem ser dadas por funções de Skolem[24] que substituem os quantificadores existenciais dos axiomas, utilizados na lógica moderna[25] (cf. *Kant on Geometry and Spatial Intuition*, p. 10).

Resta saber como são possíveis as representações da estrutura matemática infinita, presentes no espaço euclidiano ou em uma série numérica, visto que Kant utiliza a lógica de sujeito e predicado, mas que devem conter conceitos limitados por representações finitas, como fica claro na *Crítica*:

> Ora, não há dúvida que pensamos necessariamente qualquer conceito como uma representação contida numa multidão infinita de representações diferentes possíveis (como sua característica comum), por conseguinte, subsumindo-as; porém, nenhum conceito, enquanto tal, pode ser pensado como se encerrasse em si uma infinidade de representações. (*Crítica*, B 40).

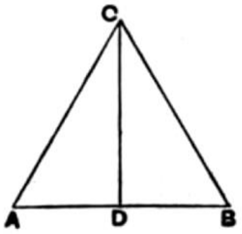

Figura 2

To bisect a given finite straight line. Let *AB* be the given finite straight line. Thus it is required to bisect the finite straight line *AB*.Let the equilateral triangle *ABC* be constructed on it, [Proposição I. 1] and let the angle *ACB* be bisected by the straight line *CD* [Proposição I. 9]; I say that the straight line AB has been bisected at the point D.
For, since *AC* is equal to *CB*, and *CD* is common, the two sides *AC*, *CD* are equal to the two sides *BC*, *CD* respectively; and the angle *ACD* is equal to the angle *BCD*; therefore the base *AD* is equal to the base *BD* [Proposição I. 4].
Therefore the given finite straight line AB has been bisected at D.
Q. E. F. (*The Thirteen Books of Euclid's Elements*, p.267).

[23] Os três primeiros Postulados:
1º) Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2º) Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3º) E, com todo centro e distância, descrever um círculo. (*Os Elementos*, p.98).

[24] Friedman se refere ao artifício de *skolemização*, usado para simplificar sentenças com vários quantificadores, inseridos uns nos outros. Vamos considerar, como um exemplo simples, a sentença: $\forall x \exists y$ vizinho(x,y); todo x tem ao menos um vizinho y. Agora, dado um domínio fixo de discurso, representado por uma estrutura de primeira ordem, digamos $\mathfrak{M}$, teremos $\mathfrak{M} \models$vizinho(x,y)[b,c] ou seja, todo b, pertencente ao domínio, tem ao menos um vizinho c. Se a sentença original for verdadeira, então podemos escolher para cada b certos vizinhos específicos, com determinada propriedade, por exemplo, seu vizinho mais próximo f(b). E teremos para cada b a sentença seguinte: $\mathfrak{M} \models$vizinho(x,y)[b, f(b)], que poderemos reescrever na forma geral $\mathfrak{M} \models \forall x$ vizinho(x, f(x)) e a cadeia $\forall x \exists y$ foi reduzida a $\forall x$. Esse procedimento é chamado *skolemização* e a função f é a função de Skolem para a sentença quantificada original (cf. *Language, Proof and Logic*, p. 530-1).

[25] Entendo que podemos escrever o 3º axioma de ordem de Hilbert como $\forall x \forall y \exists z$ ponto médio((x,y), z) e na forma proposta por Friedman, em que f é a função bissecção de um segmento, como $\forall x \forall y$ ponto médio((x,y), f(x,y)), eliminando-se o quantificador existencial.

Essas estruturas infinitas não podem ser representadas através de uma lógica monádica, que utiliza um único argumento, ou o que Friedman chama de imput, pois para quaisquer operações geométricas no plano serão necessários ao menos dois argumentos[26]. Assim, *de nosso ponto de vista atual*, Kant utiliza uma lógica poliádica, com uso iterativo de funções de Skolem, na imaginação produtiva, a qual desempenha um papel de extrema importância nas construções *a priori*, ou esquemas, de conceitos geométricos[27] (cf. *Kant on Geometry and Spatial Intuition*, p. 11).

Para fundamentar essa importância, Friedman se apóia na passagem seguinte da *Crítica*, na qual Kant considera que além da forma da intuição pura, também a síntese da imaginação produtiva deve ser uma condição essencial, necessária e anterior para formar qualquer representação empírica:

> Parece, com efeito, que se poderia conhecer a possibilidade de um triângulo a partir do seu conceito tomado em si mesmo (que é certamente independente da experiência), pois podemos, de fato, dar-lhe um objeto totalmente a priori, isto é, construí-lo. Como esta construção, porém, seria apenas a forma de um objeto, o triângulo seria sempre um produto da imaginação e a possibilidade do objeto desse produto seria duvidosa, porquanto exigiria ainda outra coisa, a saber, que tal figura fosse pensada apenas nas condições em que assentam todos os objetos da experiência. Ora, só porque o espaço é uma condição formal a priori de experiências externas *e porque a síntese figurativa pela qual construímos na imaginação um triângulo é totalmente idêntica à que usamos na apreensão de um fenômeno para o converter num conceito da experiência*, só por isso se pode ligar a este conceito de triângulo a representação da possibilidade de uma coisa semelhante. (*Crítica*, A 223/B 272, meus itálicos).

A síntese figurativa a que se refere Kant é justamente a síntese da imaginação produtiva, que é responsável por esquematizar os conceitos gerais na intuição pura e deve ficar claro que tanto tais conceitos, quanto seus esquemas, são também representações *puras*. Assim, quaisquer imagens ou diagramas, particulares e concretos, devem respeitar às mesmas condições impostas à qualquer intuição empírica; ou seja, uma imagem particular ocorre apenas de forma incidental, como resultado de um procedimento de determinação intelectual *realizado pela intuição pura*. Dessa forma, intuição pura e empírica são diferenciadas com rigor e é clara a crítica à interpretação de Shabel, como esclarece Friedman:

> Tanto os conceitos gerais em questão como seus esquemas gerais correspondentes são representações puras, e não empíricas; e uma figura concreta particular ocorre, por assim dizer, apenas incidentalmente para Kant, ao final de um processo de determinação intelectual da sensibilidade pura (e não empírica). [...] Assim, diagramas concretos efetivamente percebidos pressupõem a estrutura da intuição pura tanto

[26] Deve ficar claro que nas relações geométricas usa-se uma lógica poliádica, que contém mais de um argumento, porque a geometria envolve relações como por exemplo “estar entre” e não por ser uma estrutura infinita.

[27] A síntese da imaginação produtiva também atua de forma essencial conectando as proposições geométricas à nossa realidade objetiva. Essa relação será vista em detalhes na seção intitulada “Os Axiomas da Intuição”.

> quanto todos os outros objetos percebidos pelos sentidos, e *é, portanto, no mínimo muito enganoso interpretar uma intuição pura kantiana como um certo tipo de intuição empírica.* Ao contrário, temos de ligar a concepção kantiana de raciocínio geométrico, em primeira instância, com as intuições puras de espaço e tempo – não com figuras espaciais particulares traçadas no papel ou quadro-negro, mas com o espaço e o tempo eles próprios, enquanto intuições puras, e não empíricas. (*Kant on Geometry and Spatial Intuition*, p. 12, meus itálicos).

Ainda sobre o uso do método diagramático em Kant, Manders e Shabel consideram na interpretação da *Crítica* que um diagrama particular e impreciso pode, através de esquemas, levar às propriedades gerais sobre proposições geométricas justamente por não possuírem propriedades ou medidas precisas!

Entretanto, Kant tem uma concepção muito mais avançada entre conceitos geométricos, esquemas e imagens. O esquema em si mesmo nada mais é que um produto da imaginação, mas o *esquema de um conceito* é um processo, elaborado pela síntese da imaginação produtiva, que fornece a um conceito sua imagem, de acordo com as condições da forma da sensibilidade às quais o conceito está restrito.

Por exemplo, *a imagem* do número cinco pode ser representada de várias formas, como cinco pontos enfileirados (…..), mas quando penso um número qualquer, mesmo que ele não possa ser visualizado ou comparado a seu conceito, caso do número mil, *tal pensamento é a representação de um procedimento*, um método para estabelecer como deve ser representado o conceito de número, qualquer número. Assim, é claro que nenhuma imagem será adequada ao seu respectivo conceito[28], inclusive aos conceitos geométricos (cf. *Crítica*, A 140 - A141/B 179 - B180).

As intenções de Kant são muito mais ambiciosas do que explicar o procedimento euclidiano de prova e Friedman concorda que uma demonstração geométrica *pode* ser feita a partir de uma figura empírica concreta e mal desenhada, entretanto, isso só acontece porque todas as intuições empíricas, inclusive a usada na demonstração, respeitam às mesmas sínteses da imaginação produtiva e não porque tal figura, apesar de individual, não tenha medidas e propriedades específicas, como afirmam Shabel e Manders. Assim, a síntese da imaginação produtiva explica não apenas o paradigma da geometria pura, os *Elementos*, mas também é

[28] Acredito que nenhuma imagem é adequada a seu conceito porque o conceito e seu esquema são procedimentos e condições necessárias justamente para se produzir tal imagem. A meu ver, Kant realiza na *Crítica* a argumentação transcendental como uma engenharia reversa, em que a partir de atributos gerais do produto final dado é deduzida toda a sua cadeia de produção.

fundamento para a realidade objetiva de nossa intuição empírica do espaço[29] (cf. *Kant on Geometry and Spatial Intuition*, p.30).

Ao supor que as construções de conceitos geométricos utilizam o uso iterativo de funções de Skolem na imaginação produtiva, Friedman não somente critica as análises de Shabel e Manders, como também busca conciliar a interpretação "lógica" da filosofia da geometria de Kant, tal como desenvolvida por Evert Beth, Jaakko Hintikka e por ele próprio, com a interpretação "fenomenológica" articulada por Charles Parsons e Emily Carson (cf. *idem*, p. 15, n19). Devido às várias considerações sobre intuição e construção de um conceito, assim como suas implicações para a interpretação da geometria na *Crítica*, julgo mais profícuo aos objetivos desse texto os trabalhos de Hintikka e Parsons, temas tratados a seguir.

1.3.4) As interpretações lógica e fenomenológica da geometria em Kant

No terreno da *Crítica*, Hintikka e Parsons discordam sobre o significado preciso de um dos pilares do Idealismo Transcendental: a intuição (*Anschauung*), que terá como consequência duas interpretações diferentes da filosofia da matemática em Kant. Antes de as expor devemos verificar a definição que o termo adquiriu ao longo da obra kantiana.

Grande parte dos elementos da doutrina kantiana da intuição está no §10 da *Dissertação Inaugural*, em que tal termo é caracterizado como um princípio de forma sob o qual algo é visto pela mente de maneira imediata e singular. Ainda, tal princípio é condição para o conhecimento sensível:

> Com efeito, toda a nossa intuição está limitada por um certo princípio da forma, somente sob a qual alguma coisa *é vista*[30] pela mente de forma imediata, ou seja, como singular e não pode ser concebida apenas discursivamente segundo conceitos gerais. Mas este princípio formal da nossa intuição (o espaço e o tempo) é a condição sobe a qual algo pode ser objeto dos nossos sentidos e, desse modo, como condição de conhecimento sensitivo, não serve de meio para a intuição intelectual. (*Dissertação Inaugural*, p.45).

Essas características da intuição se refletem na *Crítica*: "O conhecimento, por sua vez, é intuição ou conceito (intuitus vel conceptus). A primeira refere-se imediatamente ao objeto e é singular, o segundo refere-se mediatamente, por meio de um sinal que pode ser comum a várias coisas". (*Crítica*, A 320/B 337).

---

[29] Esse tema será discutido na seção 1.3.5.

[30] É claro que Kant não se refere apenas ao sentido da visão, mas como tal sentido é adaptado aos objetos externos pelo citado princípio de forma. É frequente a confusão feita entre sensação e sensibilidade, ou entre intuição e sentidos e aponto essa distinção ao longo do texto.

Apesar de a intuição ser qualificada como singular e imediata na *Dissertação* e na *Crítica*, essa não é uma constante na obra de Kant e há variações de tais critérios. Vemos na *Lógica Jäsche* que o critério de imediaticidade não aparece:

> All cognitions, that is, all representations related with consciousness to an object, are either intuitions or concepts. An intuition is a singular" representation (*repraesentatio singularis*), a concept a universal *(repraesentatio per notas communes*) or reflected" representation (*repraesentatio discursiva*). (*Lógica Jäsche*, p. 91).

Para Hintikka a singularidade é o critério mais importante para a definição de intuição e a imediaticidade será apenas uma consequência da singularidade, consideração que levará à interpretação lógica da geometria em Kant. Por outra perspectiva, Parsons leva em conta tanto a singularidade quanto a imediaticidade, que conduzirá à interpretação fenomenológica da geometria.

Hintikka aponta trechos pertinentes da obra kantiana[31] que favorecem essa afirmação, que terá como consequência uma nova leitura da estrutura argumentativa da *Crítica*, na qual a teoria do método da Matemática deveria vir *antes* da *Estética Transcendental*[32]:

> My main suggestion towards an interpretation of Kant's theory of the mathematical method, as presented at the end of the first Critique, is that this theory is not posterior but rather systematically prior to the Transcendental Aesthetic. If so, it follows that, within this theory, the therm 'intuition' shold be taken in the 'unintuitive' sense which Kant gave to it in his definition of the notion. [...] There are, in fact, very good reasons for concluding that the discussion of the mathematical method in the *Doctrine of Method* is prior to, and presupposed by, kant's typically critical discussion of space and time in the *Transcendental Aesthetic*. (*Kant on the Mathematical Method*, p. 355-6).

Hintikka apresenta dois motivos para sua opinião sobre a anterioridade da *Doutrina do Método*: em primeiro lugar, nos *Prolegômenos* o argumento sobre a sinteticidade da Matemática, apoiado sobre a construção de um conceito e presente na *Doutrina*, aparece antes dos argumentos sobre o espaço, como forma da intuição pura, localizados na *Estética*[33], pois justamente nos *Prolegômenos* Kant procura esclarecer a estrutura de seu argumento e nesta obra vemos de forma explícita a dependência da *Estética* para com a *Doutrina* (cf. *idem*, p.356).

Para que o segundo motivo fique claro, faz-se necessário ressaltar uma afirmação essencial na argumentação de Hintikka, reconhecidamente originada em Paton[34]: a ligação entre

[31] Ver *Dissertação de 1770* §10, *Crítica* A 320/B 376-B 377 e *Prolegômenos* §8.
[32] Na seção 1.1 fiz uma análise sobre a estrutura argumentativa da *Crítica* e exponho, em várias partes do texto, motivos pelos quais a geometria deve ser o ponto de partida argumentativo para definir o espaço como forma pura da intuição.
[33] A sinteticidade da Matemática aparece no §2, enquanto os argumentos sobre o espaço estão no §10 (ver *Prolegômenos*, p. 10 e p.18, respectivamente).
[34] Ver *Kant's Metaphysic of Experience*, p. 93-4.

sensibilidade e intuição, dada na *Estética*[35], não deve ser tomada como uma premissa, ou uma consequência lógica da definição de intuição, mas antes como uma proposição a ser provada (cf. *idem*, p.355). Destaco uma passagem da *Crítica* em que tal vínculo não é uma regra universal:

> Chamo problemático a um conceito que não contenha contradição e que, como limitação de conceitos dados, se encadeia com outros conhecimentos, mas cuja realidade objetiva não pode ser de maneira alguma conhecida. O conceito de um númeno, isto é, de uma coisa que não deve ser pensada como objeto dos sentidos, mas como coisa em si (exclusivamente por um entendimento puro), não é contraditório, pois *não se pode afirmar que a sensibilidade seja a única forma possível de intuição.* (*Crítica*, A 254/ B 310, meus itálicos).

A conexão, entre intuição e sensibilidade, feita na *Estética* em A 16/B 33 é precipitada, pois a passagem A 254/ B 310 a contradiz, como vimos. Desse modo, temos a outra razão para a anterioridade do método matemático na arquitetura da *Crítica*: se a definição precisa de intuição ocorre apenas na *Doutrina*, como uma representação singular de um conceito geral, então na *Estética* a ligação entre sensibilidade e intuição será apenas um argumento análitico, não dizendo sobre a intuição nada além do que foi definido. Desse modo, interpreto que para Hintikka a ligação entre intuição e sensibilidade, dada na *Estética*, só será parte de um argumento sintético se considerarmos antes os resultados da *Doutrina*, que a deveria preceder:

> Another persuasive reason is that at critical junctures Kant in the *Transcendental Aesthetic* means by intuitions precisely what his own definitions tell us. For instance, he argues about space as follows: 'Space is not a ... general concept of relations of things in general, but a pure intuition. For ... we can represente to ourselves only one space ... Space is essentiall one; the manifold in it, and therefore the general concept of spaces[36] depends solely on the introduction of limitations. Hence it follows that an ... intuition underlies all concepts of space' (A 24-25/B 39). Here intuitivity is inferred directly from individuality, and clearly more than the latter. (*Kant on the Mathematical Method*, p. 356).

A meu ver, o assunto acima, essencial à filosofia crítica de Kant, pode ser interpretado segundo um retorno às definições estabelecidas no início da *Estética*: a intuição se relaciona imediatamente aos objetos e se verifica apenas quando eles nos forem dados[37]. Justamente a capacidade de receber representações segundo a maneira como somos afetados por esses objetos é chamada de sensibilidade e apenas através dela teremos intuições. Ainda, o efeito de

---

[35] "A capacidade de receber representações (receptividade), graças à maneira como somos afetados pelos objetos, denomina-se *sensibilidade.* Por intermédio, pois, da sensibilidade são-nos *dados* objetos e só ela nos fornece *intuições*;" (*Crítica*, A 16/B 33).

[36] O Espaço é uma forma da intuição pura e não um conceito, logo a expressão "conceito geral de espaço" se refere ao espaço como objeto, necessário ao uso da geometria e que compreende um múltiplo dado em acordo com a forma da sensibilidade (ver *Crítica*, B 161n).

[37] Acredito que a intuição pura existe *potencialmente* e existirá *efetivamente* apenas quando for preenchida com tais objetos, seja de forma empírica ou na imaginação.

um objeto sobre a sensibilidade é chamado de sensação, a qual será usada como meio para que possamos nos relacionar com um objeto da intuição empírica, da qual um objeto indeterminado é chamado aparecimento. Tudo o que se referir à sensação em tal aparecimento terá o nome de matéria e o que possibilita que os dados brutos do aparecimento se ordenem será chamado de forma. Finalmente, àquela forma da qual for retirado tudo o que for relativo à sensação será uma forma pura da sensibilidade ou intuição pura (cf. *Crítica*, B 33- B35).

Devemos considerar ainda, para o argumento que proponho, que para Kant o método matemático é sintético e *a priori* justamente pelo seu modo exclusivo de proceder através da construção de um conceito: a apresentação de uma intuição *singular* e não empírica[38] ao conceito dado (cf. *Crítica*, A 713/B 741 a A 718/B 746). Vimos acima que a intuição será *imediata* apenas na presença de um objeto, impondo seu caráter sensível, em contrapartida à intuição singular de caráter *a priori* e, como tal, deve ter prioridade sobre as aparências ou, dito de outra forma, "a intuição empírica está submetida a uma intuição sensível pura" (*Crítica*, B 144). Assim, da mesma forma, a *Doutrina do Método*, na qual a intuição é definida como singular, deve preceder a *Estética*, em que a intuição imediata[39] será apenas consequência.

Dado que a individualidade prevalece sobre a imediaticidade, Hintikka tem razões para considerar a intuição como a representação de um individual. Entretanto, deve-se esclarecer que Hintikka não toma a intuição pelo intuído, ou seja, a "representação de um individual" não deve ser caracterizada como um objeto sensível, com características determinadas, mas uma meio através do qual essa representação é possível sem nenhum tipo de comparação ou atributos que possam ser compartilhados com outras representações individuais: "An intuition is *what represents* an individual directely, whithout going 'by way of' the attributes and relations wich the individual may share with other individuals." (*Logic, Language-Games and Information*, p.44, meus itálicos). Em outra passagem, Hintikka torna mais explícita a relação entre intuição como um meio através do qual um individual é representado:

> For him [Kant], intuitions in the minimal sense of the word are nothing but singular representations in contradistinction to general concepts. Intuition was not a source of truths or insights, *but merely the medium of representing particulars* [...] (*The notion of intuition in Husserl*, p. 171, meus itálicos).

[38] A intuição singular usada na construção de um conceito pode ser empírica, no sentido de que uma figura geométrica pode ser desenhada em um quadro negro ou papel, mas está intuição é empírica apenas em sua construção, pois suas características são indiferentes e não há perda de generalidade (ver *Crítica*, A 714/B 742).

[39] "Sejam quais forem o modo e os meios pelos quais um conhecimento se possa referir a objetos, é pela *intuição* que se relaciona imediatamente com estes e ela é o fim para o qual tende, como meio, todo o pensamento." (*Crítica*, A 16/ B 33).

Em perspectiva distinta, Parsons considera que a intuição é descrita tanto pelo seu caráter singular quanto imediato e apoia sua afirmação em passagens da *Crítica*[40], através das quais conclui, em evidente oposição a Hintikka, que a imediaticidade não mantém apenas uma relação "obscura" com a singularidade, mas a intuição é a única fonte do conhecimento imediato de objetos apresentados à percepção:

> One might think that the criterion of "immediate relation to objects" for being an intuition is just an obscure formulation of the singularity condition. But it evidently means that the object of an intuition is in some way directly present to the mind, as in perception, and that intuition is thus a source, ultimately the only source, of immediate knowledge of objects. [...] Many of the passages Hintikka cites also mention the immediacy criterion, and it is not clear why Hintikka thinks it nonessential. (*Kant's Philosophy of Arithmetic*, p. 44).

Segundo Parsons, a imediaticidade deve ser interpretada em Kant como uma presença para a mente que seja direta ou fenomenológica, como ocorre na percepção (cf. *The Transcendental Aesthetic*, p.66) e aquilo que satisfizer o critério de imediaticidade irá satisfazer o de singularidade, pois o que se apresenta à mente de forma imediata é sempre um objeto singular, porém o inverso não é verdadeiro, visto que um conceito pode ser uma representação de um único objeto sem ser imediata, por exemplo, o conceito de Deus:

> It does not seem that the converse must be true. The idea of a singular representation formed from concepts seems quite natural to us. Such a representation would relate to a single object if to any at all, but it hardly seems immediately. By associating it with a definite description rather than with a general term, we would distinguish it from a concept under which exactly one object falls (even if necessarily). For Kant, however, the passage from A 320 /B 376-7 seems to allow such a representation to be a concept, this might also be suggested by the fact that the idea of God is called a concept; it is nowhere suggested that it is an intuition. (cf. *Kant's Philosophy of Arithmetic*, p. 45).

Em minha opinião, o argumento de Parsons não se sustenta porque a discussão se baseia na imediaticidade ou singularidade como principal critério de uma intuição e não de um conceito, que são totalmente distintos e para os quais não cabe a analogia feita nesse caso. Além disso, Deus não é apenas um conceito para Kant, mas uma ideia da razão, algo bem mais específico, por ser um princípio de uso do entendimento[41]. A passagem da *Crítica* citada por

---

[40] Parsons considera a passagem A 16/ B 33, vista em nota acima, na qual parece ficar explícito apenas o caráter imediato da intuição. Em outro trecho destaca seu cunho tanto imediato quanto singular: "O conhecimento, por sua vez, é intuição ou *conceito* (intuitus *vel conceptus*). A primeira refere-se imediatamente ao objeto e é singular, o segundo refere-se mediatamente, por meio de um sinal que pode ser comum a várias coisas." (*Crítica*, A 320/B 376- B 377).

[41] "Portanto, a idéia da razão é o análogo de um esquema da sensibilidade, mas com esta diferença: a aplicação dos conceitos do entendimento ao esquema da razão não é um conhecimento do próprio objeto (como a aplicação das categorias aos seus esquemas sensíveis), mas tão-só uma regra ou um princípio da unidade sistemática de todo o uso do entendimento." (*Crítica* A 665/B 693) e a passagem na qual Kant enumera Deus como uma ideia da razão: "A terceira idéia da razão pura, que contém uma suposição simplesmente relativa de um ser considerado

Parsons[42] apenas classifica os conceitos e considerar uma ideia da razão como conceito é tomar a parte pelo todo. Devemos supor também a intuição sob o ponto de vista humano, em uma experiência possível e utilizada na matemática. Assim, mesmo a "intuição intelectual", considerada por Parsons[43], apesar de imediata, é um conceito limite, pois está além de uma experiência sensível[44] e inútil para a matemática e para a discussão sobre seu método. Como argumentei antes, nas intuições o imediato deve estar submetido ao singular porque uma *intuição empírica* está submetida à *intuição pura.*

Dada a singularidade como principal característica da intuição, Hintikka pode concluir que o raciocínio matemático utilizado por Kant é muito mais característico da lógica de primeira ordem contemporânea do que qualquer modo de raciocínio matemático do século XIX (cf. *Kant's Theory of Mathematics Revisited*, p. 202).

Tendo o método matemático de raciocínio em Kant tal ligação com a teoria lógica da quantificação, parece-me muito mais natural que qualquer argumento parta de princípios lógicos, antes de quaisquer outros. Assim, é de uma clareza solar que a Matemática deva ser a base argumentativa da *Estética* e a *Doutrina do Método* a preceda, como bem apontou Hintikka, que acrescenta ainda que tal método matemático é essencialmente geométrico, pois se baseia em construções usadas nos *Elementos* de Euclides: "The only reason why Kant thought that mathematics is based on the use of constructions was that constructions were necessary in the elementary geometry of his day, derived in most cases almost directly from Euclid's *Elementa*." (*Kant on Mathematical Method*, p.353). Podemos então ampliar o argumento afirmando que o *método geométrico de construção de conceitos*, presente na *Doutrina*, deve preceder a *Estética* como sua base argumentativa, o que novamente indica a imensa importância da Geometria na *Crítica*.

Segundo Hintikka[45], o próprio Kant reconhece o sistema de Euclides como um paradigma para sua teoria sobre o método de raciocínio matemático[46]. Para aprofundar essa

como a causa única e totalmente suficiente de todas as séries cosmológicas é o conceito racional de *Deus.* (*Crítica*, A 685/B 713).

[42] "O conceito é empírico ou puro e ao conceito puro, na medida em que tem origem no simples entendimento (não numa imagem pura da sensibilidade), chama-se noção (notio). Um conceito extraído de noções e que transcende a possibilidade da experiência é a idéia ou conceito da razão." (*Crítica*, A 320/B 376-B 377).

[43] Ver *Kant's Philosophy of Arithmetic*, p. 47.

[44] "Como, porém, tal intuição, isto é, a intuição intelectual, está totalmente fora do alcance da nossa faculdade de conhecer, a aplicação das categorias não pode transpor a fronteira dos objetos da experiência;" (*Crítica*, B 309).

[45] Ver *Kant on Mathematical Method*, p. 360.

[46] Para apoiar esta afirmação, Hintikka faz referência à passagem de um escrito pré-crítico (ver *Nachricht von der Einrichtung seiner Vorlesungen in dem Winterhalbenjahre von 1765-1766*, p.307). Interessante notar que nessa

discussão faz-se necessário comparar o procedimento de prova euclidiano às conclusões de tal teoria e mostrar toda a estrutura de uma demonstração de Euclides, que consiste de 5 ou 6 partes[47]. A primeira parte é o "enunciado" (*πρότασις*) e vamos considerar como exemplo a proposição I-20 dos *Elementos*: " Os dois lados de todo triângulo, sendo tomados juntos de toda maneira, são maiores do que o restante." (*Elementos*, p.112).

A segunda parte é a "exposição" (*έκθεσις*), na qual o conteúdo do enunciado é aplicado a uma figura particular que é desenhada: "Seja, pois o triângulo ABC, sendo tomados juntos de toda maneira, são maiores que o restante, por um lado, os BA, AC, do que o BC, e, por outro lado, os AB, BC, do que o AC, enquanto os BC, CA, do que o AB." (*idem*, *ibidem*).

A terceira parte é chamada de "preparação" (*κατασκευέ*), na qual a figura construída na etapa anterior recebe construções adicionais como pontos, retas ou circunferências: "Fique, pois, traçada através a BA até o ponto D, e fique posta a AD igual a CA, e fique ligada a DC." (*idem*, *ibidem*). Segue a figura que resulta após a preparação:

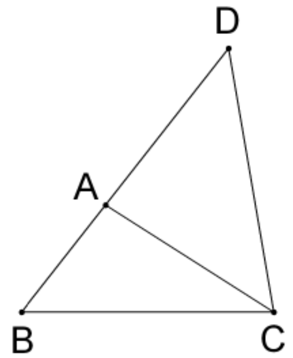

Figura 3

Em seguida, teremos a prova adequada (*άπόδειξις*), na qual nenhuma nova construção será feita e várias inferências serão realizadas, com vistas à figura construída. Em tais

passagem Kant cita autores que devem ser consultados para se adquirir determinados conhecimentos. Para circunstâncias históricas deve-se recorrer a Políbio, por exemplo. Entretanto, para a disciplina que coube a Euclides é usada por Kant a expressão "doutrina de grandezas" (*Größenlehre*), que representa a expressão matemática primária do pensamento exato e dará origem a vários ramos dessa disciplina. Para maiores detalhes sobre o termo *Größenlehre* ver *A debate about the axiomatization of arithmetic: Otto Hölder against Robert Graßmann*.
Há outra evidência não considerada por Hintikka muito mais forte na obra de Kant, que considera a geometria não só como paradigma do método matemático, *mas também como paradigma de todas as ciências puras* (*Ver Dissertação de 1770*, § 15). Usarei essa evidência em minha argumentação no capítulo 4.

[47] Ver *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, p. 129-131.

inferências serão usados os axiomas, proposições anteriormente provadas e propriedades que seguem do modo como a figura foi construída:

> Como, de fato, a DA é igual à AC, também o ângulo sob ADC é igual ao sob ACD [proposição 5]; portanto, o sob BCD é maior do que o sob ADC [propriedade da figura construída, pois BCD ≡ ACD + BCA]; e, como DCB é um triângulo, tendo o ângulo sob BCD maior do que o sob BDC, e o maior lado é subentendido pelo maior ângulo [proposição 19], portanto, a DB é maior do que a BC. Mas a DA é igual a AC; portanto, as BA, AC são maiores do que BC. Do mesmp modo, então provaremos que também, por um lado, as AB, BC são maiores do que CA, e, por outro lado, as BC, CA do que a AB. (*idem*, p. 112-13).

Após a prova ser feita sobre uma figura particular, Euclides retorna ao enunciado geral: "Portanto, os dois lados de todo triângulo, sendo tomados juntos de toda maneira, são maiores do que o restante; o que era preciso provar." (*idem*, p.113).

Diante da estrutura de prova euclidiana, Hintikka indica vários paralelos possíveis com o método matemático presente na *Doutrina*. Por exemplo, tal método considera *in concreto* o conceito, não através de uma intuição empírica, mas através de uma intuição pura apresentada ao conceito, isto é, construída. Além disso, o resultado geral de tal construção deve valer para todos os objetos que caiam sob o mesmo conceito. Aqui temos uma clara afinidade com a "exposição" (*ἔκθεσις*), na qual a partir do conceito de triângulo é exibida uma figura particular. A vantagem do método matemático sobre o filosófico é justamente a possibilidade de desenhar a figura, ou imaginá-la se quisermos, e nela adicionar outros pontos, linhas, circunferências e realizar construções auxiliares, justamente a etapa de "preparação" (*κατασκευέ*) (cf. *Kant on Mathematical Method*, p.362).

As considerações sobre os métodos de raciocíno matemático e filosófico, apresentadas por Kant na *Doutrina*, foram na verdade concebidas em um texto pré-crítico que fornece elementos para a interpretação fenomenológica de Parsons. Entretanto, ao compararmos os trechos relevantes, desses dois momentos da obra kantiana, percebemos que são incompatíveis. Do texto pré-crítico, conhecido também como "Ensaio do Prêmio", destaco a passagem seguinte:

> [...] mathematics, in its inferences and proofs, regards its universal knowledge under signs *in concreto*, whereas philosophy always regards its universal knowledge *in abstrato*, as existing alongside signs. And this constitutes a substantial difference in the way in which the two inquiries attain to certainty. For since *signs in mathematics are sensible means to cognition*: it follows that one can know that no concept has been overlooked, and that each particular comparison has been drawn in accordance with easily observed rules etc. *And these things can be known with the degree of assurance characteristic of seeing something with one's own eyes*. And in this, the attention is considerably facilitated by the fact that it does not have to think things in their

> universal representation; it has rather to think the signs as they occur in their particular cognition which, in this case, is sensible in character. [...] Furthermore, in geometry the signs are similar to the things signified, so that the certainty of geometry is even greater, though the certainty of algebra is no less reliable. (*Inquiry Concerning the Distinctness of the Principles of Natural Theology and Morality*, p. 265, meus itálicos.)

Resta evidente a ênfase dada por Kant ao caráter sensível do conhecimento matemático, principalmente na geometria, na qual uma figura é o equivalente visual de seu conceito, o que fornece um apoio para se verificar " com os próprios olhos" cada passo dado. Ainda mais, Kant liga esse caráter sensível, visual, de uma figura representada, ou do uso de símbolos algébricos, à certeza de um procedimento matemático. Essa afirmação tem reflexos na *Crítica*, na qual, para a álgebra e a geometria, estabelece que "sem mesmo considerar o aspecto heurístico, todas as conclusões estão garantidas contra o erro pelo fato de cada, uma delas ser posta à nossa vista." (*Crítica*, A 734 /B 762). Segundo Parsons[48], esses trechos evidenciam a conexão entre a matemática e a sensibilidade por meio de construções simbólicas, porém, vemos em outra passagem da *Crítica*, que os métodos de raciocínio matemático e filosófico são comparados sem nenhum destaque de cunho sensível:

> O conhecimento filosófico considera, pois, o particular apenas no geral, o conhecimento matemático, o geral no particular e mesmo no individual, mas a priori e por meio da razão, de tal modo que, da mesma maneira que este individual está determinado por certas condições gerais da construção, também o objeto do conceito, a que este individual corresponde apenas como seu esquema, deve ser pensado como universalmente determinado. (*Crítica*, A714/B742).

Parsons reconhece que o "Ensaio do Prêmio" e a *Crítica* são incompatíveis, visto que na última a certeza do raciocíno matemático não está em uma confirmação sensível[49] ou visual, mas na operação de símbolos de acordo com regras pré-estabelecidas, sem que se dê atenção ao significado de tais símbolos (cf. *Kant's Philosophy of Arithmetic*, p. 66). Nessa afirmação acredito que a referência seja à álgebra, na qual os símbolos hoje são variáveis sem conteúdo específico, mas à época de Kant tal disciplina era apenas um apoio à geometria e suas variáveis representavam medidas, como veremos ainda nessa seção.

Dessa forma, não é por conta de operações simbólicas, conduzidas entre variáveis destituídas de conteúdo, que a geometria não precisa de uma confirmação visual, mas em virtude de seu método de construção de um conceito, ou a *possibilidade* de fornecer uma

---

[48] Ver *Kant's Philosophy of Arithmetic*, p. 65.

[49] Parsons parece confundir os termos sensibilidade e sentido, pois os usa de forma indiscriminada (ver *Kant's Philosophy of Arithmetic*, p. 65). Insisto que a sensibilidade é um conjunto de características, *a priori*, ou *a posteriori*, que nos possibilitam receber dados dos objetos externos através dos sentidos, os quais me fornecem a sensação como uma alteração na capacidade representativa. (Para maiores detalhes ver *Crítica*, A 17/B 33-B 34).

intuição[50] segundo seu conceito. Assim, um polígono regular de 96 lados não precisa ser desenhado ou verificado visualmente, mas pode ter suas propriedades estudadas pela apresentação de intuições ao conceito desse polígono[51]. Contudo, Parsons considera tais intuições de forma análoga às variáveis livres, das quais seus respectivos predicados correspondem aos conceitos construídos e justamente essa construção, em acordo com as condições formais da experiência fornece a possibilidade de um objeto matemático (cf. *Kant's Philosophy of Arithmetic*, p. 73-4).

A analogia entre a estrutura de prova das proposições geométricas em Euclides e a teoria da matemática em Kant pode ser ampliada para explicar também o critério de sinteticidade[52], mas antes devemos perceber como tal critério está diretamente ligado ao método matemático de raciocínio por construção de um conceito, como afirma a *Crítica*:

> Para formular um juízo sintético de um conceito devemos sair desse conceito e mesmo recorrer à intuição na qual é dado. Com efeito, se permanecermos no que está contido no conceito, o juízo seria meramente analítico e uma explicação do pensamento segundo aquilo que realmente nele está contido. Mas posso passar do conceito para a intuição, pura ou empírica, que lhe corresponde, e aí examiná-lo *in concreto* e conhecer *a priori* ou *a posteriori* o que convém ao seu objeto. *O primeiro caso é o conhecimento racional e matemático, pela construção do conceito*; o segundo, o conhecimento simplesmente empírico (mecânico), que nunca pode dar proposições necessárias e apodíticas. (*Crítica*, A 721/B 749, meus itálicos).

Esta é uma questão de extrema importância, visto que o objetivo da *Crítica* é manter a metafísica, a filosofia, no caminho seguro das ciências e para alcançá-lo é necessário responder à pergunta: Existem juízos sintéticos a priori? Pois tais juízos, universais, necessários e apodíticos seriam o paradigma de conhecimento seguro adequado à filosofia. Estes juízos são encontrados na matemática devido ao seu método de construção de um conceito, como ficou mostrado de forma evidente na passagem acima.

Entretanto, aquilo que garante, na construção de um conceito, a sinteticidade da matemática para Kant, é justamente a introdução de novos individuais no argumento. Basta retornarmos à *Doutrina do Método*[53] para confirmar essa afirmação. É dado ao filósofo e ao matemático o conceito de um triângulo e uma proposição a ser demonstrada, a soma dos ângulos internos, por exemplo. Ambos podem desenhar um triângulo qualquer, então não é na etapa da "exposição" (*ἔκθεσις*) que se dá a diferença entre o método analítico e sintético, todavia apenas

[50] Leia-se *intuído*, um objeto singular.
[51] Para maiores detalhes, ver *Da Utilidade de uma nova Crítica da Razão Pura*, p. 54-7.
[52] Farei no capítulo 4 uma discussão sobre a sinteticidade da geometria, mas sob um ponto de vista totalmente diverso.
[53] Ver *Crítica*, A716/B744.

o matemático, no caso o geômetra, pode acrescentar novas informações que pertençam ao conceito de triângulo em geral, pois ao filósofo só resta raciocinar sobre os conceitos dados inicialmente: uma figura limitada por três segmentos de reta. Logo, a separação entre os dois métodos acontece na "preparação" (*κατασκευέ*) e o método sintético difere do analítico pela introdução de novos individuais ou novas intuições.

Mas até aqui a geometria parece figurar apenas como um exemplo do método matemático de construção de um conceito. Contudo, visto que o meu objetivo é mostrar a importância da geometria em Kant, principalmente na *Crítica*, devemos então nos perguntar: quando Kant elege a matemática, como paradigma de juízos sintéticos *a priori*, ele se refere na verdade à geometria? E quais os papéis desempenhados pela álgebra e aritmética?

Hintikka tem também sobre esse tema afirmações essenciais: o juízo sintético em Kant tem como paradigma não apenas a matemática, mas especificamente a geometria, pois a "construção de um conceito", que define o juízo sintético, nada mais é do que realmente uma construção, realizada na etapa de "preparação" (*κατασκευέ*) através de novas *entidades geométricas*, ou construções auxiliares.

A base para tal afirmação é histórica, pois a intenção de Hintikka é mostrar que Kant segue uma tradição, um padrão de origem geométrica[54], que remonta à antiguidade grega, sofre alterações já em Galeno e também na Idade Média, depois retorna à época de Kant ao seu primeiro sentido. Para tanto, a referência inicial é a mais completa compilação a respeito do uso dos métodos analítico e sintético, na antiguidade, encontrada em um texto de Pappus de Alexandria[55]. Entretanto, visto que Hintikka omite justamente o trecho que relaciona tais métodos *exclusivamente* à geometria, vou deixá-lo explícito:

> That which is called the Domain of Analysis, my son Hermodorus, is, taken as a whole, a special resource that was prepared, after the composition of the Common Elements, for those who want *to acquire a power in geometry* that is capable of solving problems set to them; and *it is useful for this alone*. It was written by three men: Euclid the Elementarist, Apollonius of Perge, and Aristaeus the elder, and its approach is by analysis and synthesis. (*Book 7 of the Collection*, p. 82, meus itálicos).

---

[54] Destaco uma passagem da *Crítica* pouco lembrada pelos comentadores: "In jenem Versuche, das bisherige Vorfahren der Metaphysik umzuändern, und dadurch, daβ wir nach dem Beispiele der Geometer und Naturforscher eine gänzliche Revolution mit derselben vornehmen, besteht nun das Geschäft dieser Kritik der reinen spekulativen Vernunft. (Neste ensaio, a tarefa da Crítica especulativa da Razão Pura consiste em fazer uma revolução total no método anterior da Metafísica, seguindo o exemplo dos geômetras e dos físicos)." (*Kritik der reinen Vernunft*, B XXII, minha tradução). Temos aqui o reconhecimento de Kant sobre qual o seu paradigma matemático, para realinhar a Metafísica. Ele não cita a álgebra ou a aritmética, mas a geometria. E visto que sabemos que esta tarefa só é possível pelo uso de juízos sintéticos *a priori*, a geometria deve ser a fonte de tais juízos.

[55] Ver *Logic, Language-Games and Information*, p.199. Entretanto, uso uma fonte mais recente para a tradução do texto de Pappus.

É clara a relação entre a explanação que virá e seu uso *exclusivo* na geometria. Prossegue Pappus:

> Now, analysis is the path from what one is seeking, as if it were established, by way of its consequences, to something that is established by synthesis. That is to say, in analysis we assume what is sought as if it has been achieved, and look for the thing from which it follows, and again what comes before that, until by regressing in this way we come upon some one of the things that are already known, or that occupy the rank of a first principle. We call this kind of method 'analysis', as if to say *anapalin lysis* (reduction backward). In synthesis, by reversal, we assume what was obtained last in the analysis to have been achieved already, and, setting now in natural order, as precedents, what before were following, and fitting them to each other, we attain the end of the construction of what was sought. This is what we call 'synthesis'. (*idem, ibidem*).

Percebemos que o método analítico de prova é aquele que parte de um resultado supostamente já alcançado e argumenta de volta às condições que tornaram esse resultado possível, enquanto no método sintético chega-se a um resultado desejado efetuando-se sucessivas conexões entre consequências. Pappus faz também uma distinção entre a análise de teoremas e de problemas:

> There are two kinds of analysis: one of them seeks after truth, and is called 'theorematic'; while the other tries to find what was demanded, and is called 'problematic'. In the case of the theorematic kind, we assume what is sought as a fact and true, then, advancing through its consequences, as if they are true facts according to the hypothesis, to something established, if this thing that has been established is a truth, then that which was sought will also be true, and its proof the reverse of the analysis; but if we should meet with something established to be false, then the thing that was sought too will be false. In the case of the problematic kind, we assume the proposition as something we know, then, proceeding through its consequences, as if true, to something established, if the established thing is possible and obtainable, which is what mathematicians call 'given', the required thing will also be possible, and again the proof will be the reverse of the analysis; but should we meet with something established to be impossible, then the problem too will be impossible. (*Book 7 of the Collection*, p. 82 e 84).

A análise de teoremas usa os mesmos passos da prova sintética, mas supõe o que deve ser provado e avança para uma conclusão verdadeira ou falsa, independente da suposição inicial. Esta técnica tem utilidade apenas para a redução ao absurdo, não sendo possível a inversão dos passos do argumento para se obter uma prova válida de uma proposição, motivo pelo qual era pouco usada na antiguidade. Em contrapartida, a análise de problemas era de uso muito comum na Grécia antiga, devido às vantagens sobre o método anterior: há um grande repertório de operações que são reversíveis na construção geométrica, o que possibilita também um grau maior de irrefutabilidade. (cf. *idem*, p. 67). Percebemos no texto citado acima, que a análise de um problema, parte de uma proposição conhecida e através de consequências atinge algo estabelecido, uma construção, por exemplo, se ela for possível[56]. Dessa maneira, quando alcançado o objetivo a prova será o caminho inverso da análise.

Como foi mostrado, a definição geral de análise para Pappus diz que se deve assumir o que está sendo buscado como verdadeiro e realizado. Assim, Hintikka propõe que construções auxiliares estão implícitas nessa definição, caso contrário não se poderia assumir tal resultado. E ainda, a essência da prova de uma proposição geométrica ou da resolução de um problema está em encontrar construções auxiliares adequadas, tema presente também em Aristóteles que evidencia a importância do procedimento em uma demonstração geométrica. Na *Metafísica* encontra-se a passagem de maior relevância, na qual uma *proposição* em matemática é descoberta através de uma atividade, uma divisão da figura por linhas que antes estão manifestas potencialmente, mas que se tornam evidentes se a divisão já tiver sido feita[57]. É de consenso entre os comentadores que a palavra "proposição" (*διαγράμματα*) tem aqui o sentido de "construção geométrica"[58] e é justamente a ambiguidade da palavra que indica a Hintikka que se tomou a parte pelo todo[59] e aponta novamente a importância desse procedimento na antiga geometria grega (cf. *Language, Proof and Logic*, p. 202-3).

Ainda na antiguidade[60], temos em Galeno o uso mais geral dos termos analítico e sintético, que na Idade Média perdem totalmente suas identidades geométricas, que ressurgem no século XVI, como aponta Gilbert:

> Although Galen speaks of synthesis and analysis, he never, so far as I have been able to determine, takes cognizance of the two correlative geometrical methods, but always gives to the terms meanings they had received in the philosophical tradition. [...]The medieval Scholastics, deprived of this most detailed description, had only the earlier philosophical accounts to study which, as one can see, are quite vague and secondhand. Many of the Greek commentators on Aristotle, Themistius especially, refer to Euclid's Elements when discussing Aristotle's theories of demonstration but, not being skilled mathematicians, do not develop the subject of geometrical method. In short, the analysis and synthesis of geometry, while never quite lost from sight in the commentaries, do not emerge into the full light of day until the late sixteenth century, when they quickly became the common property of philosophers as well as scientists. Previous to this time they tend to be blurred and lend themselves to identification with all sorts of other kinds of 'analysis' or 'synthesis'. (*Renaissence Concepts of Method*, p. 33-5)

---

[56] Uma construção determinada e que possa ser construída é o significado mais comum de "given" (*δοθέν*). A trissecção do ângulo, por exemplo, é um problema que não resulta em uma construção possível (cf. *Book 7 of the Collection*, p. 67).

[57] Para maiores detalhes, ver *Methaphysics* θ, 9, 1051a, 21-31

[58] Ver o comentário de Ross em *Aristotle's Metaphysics*, p.268 e de Heath em *Mathematics in Aristotle*, p.216.

[59] Toma-se a etapa de preparação pela própria demonstração.

[60] Na sequência da análise histórica, aponto em maiores detalhes as indicações de Hintikka (ver *Language, Proof and Logic*, p. 202-5).

Durante o Humanismo houve uma redescoberta das fontes gregas na matemática, tornando-se necessário avaliar o sentido preciso dos termos análise e síntese, que na Idade Média receberam em latim os nomes de *resolutio* e *compositio*[61], respectivamente, muito distantes de sua origem na geometria. Somente após a tradução de Pappus por Federigo Commandino, publicada em 1589, pode-se considerar a relevância da geometria grega sobre o método filosófico. Dessa forma, os termos *resolutio* e *compositio*, de conotações mais extensas porém vagas, foram substituídos por análise e síntese para os usos filosófico e científico. (cf. *idem*, p. 81-3).

Em Leibniz vemos o método de síntese ligado às demonstrações geométricas[62], nas quais são apontadas as etapas dos *Elementos*, dando-se agora explícita deferência à "preparação" como a maior habilidade que se deve ter no procedimento de prova, responsável também pelas inferências para se chegar à conclusão:

> As for the four degrees which you remark in mathematical demonstrations, I find that usually the first, viz. : the discovery of proofs, does not appear therein, as is to be desired. There are syntheses, found sometimes without analysis, and sometimes the analysis has been suppressed. Geometers in their demonstrations put first the *proposition* which is to be proved, and in order to come to the demonstration they set forth by some figure what is given. This is called *ecthesis*. After this they come to the *preparation*, and draw new lines which they need in the reasoning; and often the greatest art consists in finding this preparation. This done, they construct the *reasoning* itself, by drawing inferences from what was given in the *ecthesis* and from what has been added thereto by the preparation; and employing for this purpose truths already known or demonstrated, they reach the *conclusion*. (*New Essays concerning the Human Understanding* , livro IV, cap.17, §3, itálicos no original, grifos meus).

Nas ciências a terminologia sofreu modificações para reestabelecer a ligação entre os sentidos geométrico e filosófico de análise e síntese, de tal forma que a relação das partes de uma configuração geométrica, na antiguidade grega, acaba por influenciar o estudo dos fatores físicos experimentais (cf. *Language, Proof and Logic*, p. 204, n14). Newton mostra o uso dos termos ao final de sua obra *Óptica*, na qual percebemos, ainda agregados a termos medievais, a influência das definições de Pappus. Vemos que a análise parte do efeito para as causas e é usada em acordo com o método científico de indução, enquanto a síntese (*compositio*) parte das causas e princípios estabelecidos para as explicações:

> As in Mathematicks, so in Natural Philofophy, the Investigation of difficult things by the Method of Analysis, ought ever to precede the Method of Composition.This Analysis consists in making Experiments and Observations, and in drawing general Conclusions from them by Induction, [...] By this way of Analysis we may proceed

[61] Apesar de seu extremo interesse para a filosofia, os empregos do par conceitual *resolutio* e *compositio* em Tomás de Aquino não possuem nenhuma base geométrica.
[62] Ver *New Essays concerning the Human Understanding*, p. 565, para uma referência de Leibniz a Pappus.

> from Compounds to Ingredients, and from Motions to the Forces producing them, and in general, from Effects to their Causes, and from particular Causes to more general ones, till the Argument end in the most general. This is the Method, of Analysis : And the Synthesis consists in assuming the Causes discover'd, and establish'd as Principles, and by them explaining the Phaenomena proceeding from them, and proving the Explanations. (*Optiks*, p. 380-1)

Nas definições de Pappus para análise e síntese vimos uma interpretação *direcional* desses métodos: o primeiro parte do resultado para as condições que o possibilitam enquanto no segundo é feito o caminho inverso. Segundo Hintikka[63], esses termos são adaptados por Kant às suas necessidades, sem que se abandone seu sentido geométrico inicial. Assim, a *Crítica* estabelece uma interpretação *construtiva*: contrário ao método analítico, o método sintético é aquele que introduz novas entidades no argumento, ou realiza a construção de um conceito. Para evidenciar seu afastamento da interpretação direcional, Kant acredita ser mais apropriado chamar os métodos que a compõem por regressivo e progressivo, que corresponderiam aos termos anteriores analítico e sintético, respectivamente, como indicado nos *Prolegômenos*:

> O método analítico, na medida em que se opõe ao sintético, é algo completamente diferente de uma coleção de proposições analíticas; ele significa apenas que se parte daquilo que é buscado como se estivesse dado, e ascende-se às condições que são as únicas sob as quais ele é possível. Nesse método frequentemente empregam-se apenas proposições sintéticas, como exemplifica a análise matemática, e ele poderia ser mais propriamente denominado *método regressivo*, para distingui-lo do método sintético ou *progressivo*. (*Prolegômenos*, § 5, n).

E porque Kant precisa se afastar da interpretação direcional?

Porque não podemos considerar um filósofo apenas por sua obra, mas pela questão que ele procura responder e por suas influências. Vimos no breve histórico sobre análise e síntese que à época de Kant esses termos eram de uso corrente, inclusive por Leibniz e Newton, em afinidade com as etapas da demonstração na geometria euclidiana. Dessa forma, essa será a principal influência exercida sobre Kant no método matemático presente na *Crítica* e que modelou suas concepções sobre a construção de um conceito e, por consequência, o juízo sintético.

Entretanto, vemos desde a introdução da *Crítica*[64], que a noção de síntese para Kant é sempre a de um conhecimento extensivo, algo que não estava contido no sujeito e a ele deve ser *acrescentado*. Resta evidente que isso não pode ser feito se for seguida a interpretação trivial e ampla de análise e síntese, que se opõem pela direção de método; qual seja, *grosso modo*, do resultado para a causa e vice-versa, mas deve apresentar o raciocínio que é paradigma para o

[63] Ver *Language, Proof and Logic*, p.206.
[64] Ver *Crítica*, A7/B11.

conhecimento extensivo, sintético e que se encontra em forma de construções auxiliares, na introdução de novas intuições ou entidades geométricas, que ocorrem especificamente na preparação (*κατασκευέ*) das demonstrações de Euclides.

Temos assim fortes indícios que a geometria euclidiana é a base para a concepção de Kant sobre a construção de um conceito e, em consequência, o juízo sintético *a priori*, pilar da *Crítica* e do Idealismo transcendental, ou nas palavras de Hintikka: “Kant’s wider notion of a construction is thus nothing but a generalization from the constructions which make geometrical arguments synthetic.” (*Language, Proof and Logic*, p. 207) e faz-se necessário evidenciar agora os papéis exercidos pela álgebra e aritmética, ao considerarmos a geometria como o paradigma de juízo sintético *a priori*[65] na *Crítica*.

Hintikka explica a sinteticidade da álgebra segundo a linha de raciocínio de suas interpretações de intuição e construção de um conceito, que foram apresentadas desde o início dessa seção: ao consideramos “intuição” como o representativo de um individual, os símbolos utilizados na álgebra, quando substituídos por números individuais, desempenham o papel de intuições. Em vista disso, as operações algébricas ao combinarem duas letras e um sinal funcional, a+b, por exemplo, introduzem uma expressão f(a,b) que representa um novo individual, ou seja, uma nova intuição, justamente a construção de um conceito e a garantia de sinteticidade (cf. *Kant on Mathematical Method*, p. 359).

Acredito que ao consideramos apenas os símbolos e sinais funcionais, podemos considerar a álgebra como um jogo de linguagem que combina os símbolos e sinais de acordo com as regras A, que possibilitam a melhor escolha, o valor colocado no lugar do símbolo, para uso nas regras G.

Ao estabelecer a sinteticidade da álgebra, resta saber de que forma está ligada à geometria. Para Hintikka, ao estender a construção de um conceito, originário na geometria, para outras partes da matemática, Kant segue uma concepção comum à sua época, na qual as operações algébricas básicas e as operações geométricas estão diretamente ligadas (cf. *Language, Proof and Logic*, p.212). Em certa passagem Kant evidencia essa ligação: "Daher auch der Anfänger in der Algebra bey der geometrischen Construction der Aeqvationen durch

[65] Há uma série de considerações a fazer sobre o papel da Física, pois apesar de possuir certos princípios fundamentais que lhe garantam um método sintético, seu caráter puro é apenas parcial, diante de seu método indutivo, empírico (ver *Crítica*, B X e para a diferença entre puro e a priori ver *idem*, B 3). Além disso, diferente da geometria, a Física não é parte argumentativa das formas puras da intuição. Uma discussão mais extensa sobre o assunto, apesar de interessante, afasta-se dos objetivos propostos.

das Gelingen derselben mit einer angenehmen Bewunderung überrascht wird. (Portanto, o inciante em álgebra irá se surpreender, com uma admiração agradável, pelo sucesso da construção geométrica da mesma equação)" (*Handschriftlicher Nachlaß*, p. 58, minha tradução).

A principal referência de Hintikka para essa questão é a obra *La Géométrie*[66], na qual Descartes interpreta todas as expressões polinomiais em concordância com a geometria plana. Desse modo, as operações de soma, subtração, multiplicação e extração de raízes tem seus correspondentes nas construções geométricas. Por exemplo, se quisermos multiplicar os segmentos de medidas BD e BC, da figura seguinte, basta considerar AB = 1, ligar os pontos A e C e construir a paralela DE ao segmento CA. Dessa forma, o segmento BE será o resultado dessa multiplicação[67] (cf. A.T. VI, p. 370).

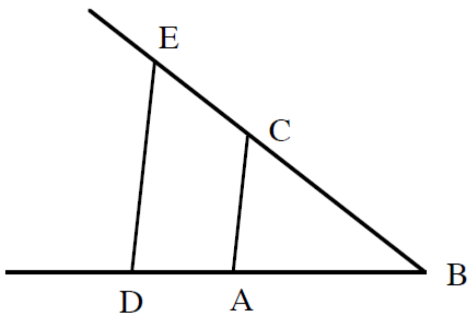

Figura 4

Vistas de acordo com essa interpretação, entre a álgebra e a geometria haveria uma analogia evidente, contudo, as duas únicas passagens da *Crítica* que as relacionam[68] parecem contraditórias. Na primeira, Kant faz nitidamente uma aproximação entre os métodos de construção das duas disciplinas, simbólica no caso da álgebra e ostensiva para a geometria:

> A matemática, porém, não constrói simplesmente grandezas (quanta) como na geometria. Constrói também a pura grandeza (a quantitas), como acontece na álgebra, em que faz inteiramente abstração da natureza do objeto que deve ser pensado segundo um tal conceito de grandeza. Escolhe então uma certa notação de todas as construções de grandezas em geral (números), como as da adição, da subtração, extração de raízes, etc. e, depois de ter indicado o conceito geral das grandezas segundo as suas diferentes relações, representa na intuição, de acordo com certas regras gerais, toda a operação pela qual é engendrada ou modificada a quantidade. Quando uma grandeza deve ser dividida por outra, combina os caracteres de ambas

[66] Ver *Language, Proof and Logic*, p. 212.
[67] Neste exemplo, Descartes usa o Teorema de Tales, demonstrado por Euclides na proposição 2 do livro VI dos *Elementos* (Ver *Os Elementos*, p. 233). Forma-se aqui a seguinte proporção: $\frac{BC}{BA} = \frac{BE}{BD}$, então BC.BD = BE.BA, mas como BA = 1, temos BC.BD = BE.
[68] Na verdade, também as duas únicas passagens da *Crítica* sobre álgebra.

> segundo a forma que designa a divisão, etc., *e alcança assim, mediante uma construção simbólica, tal como a geometria por* [uma] *construção ostensiva ou geométrica (dos próprios objetos),* aquilo que o conhecimento discursivo, mediante simples conceitos, nunca poderia alcançar. (*Crítica*, A 717/B 745, meus itálicos).

Entretanto, na segunda passagem Kant garante que a álgebra e a geometria tem métodos de construção totalmente distintos:

> Mesmo *o método da álgebra*, com as suas equações, das quais extrai, por redução, a verdade, juntamente com a prova, *não é, sem dúvida nenhuma, uma construção geométrica*, mas *contudo uma construção característica*, na qual, com a ajuda de sinais, se representam os conceitos na intuição, especialmente os de relação de grandezas e onde, sem mesmo considerar o aspecto heurístico, todas as conclusões estão garantidas contra o erro pelo fato de cada ,uma delas ser posta à nossa vista. (*Crítica*, A734/B762, meus itálicos).

Shabel pode elucidar essa aparente contradição a partir de opiniões elaboradas segundo a análise histórica da matemática no século XVIII, principalmente nos trabalhos de Wolff, que tiveram grande influência sobre Kant. Após extensa argumentação, Shabel conclui que naquele momento os símbolos da álgebra não eram variáveis livres, mas representavam objetos individuais da construção geométrica. Assim, a álgebra não tinha o estatuto de um ramo independente da matemática, mas estava subordinada à geometria como um apoio que tornava mais clara a resolução de problemas. Vista segundo este contexto, na passagem acima quando Kant diz que o método da álgebra não é uma construção geométrica, devemos entender que a álgebra e seus símbolos *não interferem* em tal construção, mas antes representam os conceitos na intuição, ou seja, *representam* as entidades geométricas (cf. *Kant on the 'Symbolic Construction' of Mathematical Concepts*, p. 614-18).

Ainda segundo Shabel, ao diferenciar o raciocínio filosófico do matemático, a geometria euclidiana é o verdadeiro paradigma da construção de um conceito, do juízo sintético *a priori* e do conhecimento matemático em geral para Kant. Assim, a álgebra e mesmo a aritmética devem se subordinar à geometria:

> Kant explains both the difference between the mathematical and philosophical methods and the syntheticity of mathematical judgments by virtue of the fact that mathematical concepts are constructed in intuition [*Crítica*, A713/B741]. His examples of such constructions, and indeed of mathematical knowledge in general, rely on the paradigm of Euclidean geometry and its postulates for constructing geometric figures; even arithmetic cognition relies on the construction of strokes or points. (*idem*, p.618).

As afirmações de Shabel fortalecem as de Hintikka sobre as analogias entre álgebra e geometria e as minhas próprias convicções, quando proponho ao longo desse texto que por ser a geometria o juízo sintético *a priori*, por excelência, deveria ser a base argumentativa para a *Crítica* e para o Idealismo Transcendental.

As referências à aritmética feitas por Kant na *Crítica* também podem ser interpretadas segundo uma analogia ao modelo geométrico. Quando, Kant diz que expressões como 7+5=12 são imediatas e indemonstráveis[69], por exemplo, devemos compará-las à estrutura da proposição euclidiana, vistas nessa seção. Antes de se efetivar a soma, os números 7 e 5 são exibidos, seja por pontos ou dedos, comparativamente na fase inicial chamada "exposição" (*ἔκθεσις*). Logo em seguida, ao se unir os dois números pela operação de soma, teremos a fase de "preparação" (*κατασκευέ*), na qual são acrescentadas novas intuições às anteriores e feita a construção de um conceito, fase sintética da proposição. Entretanto, as inferências que devem ser feitas da preparação para a prova adequada (*ἀπόδειξις*) se reduzem a um mínimo, praticamente coincidem, pois é necessária apenas a verificação do resultado. Por isso tais expressões são chamadas por Kant de indemonstráveis, ou seja, de resultado imediato (cf. *Kant on Mathematical Method*, p.365-6).

Hintikka considera a intuição como a representação de um individual e a construção de um conceito nada mais é do que acrescentar novos individuais, ou novas intuições, em um argumento. Tal procedimento tem como modelo a proposição euclidiana e ocorre na etapa sintética da preparação, na qual novas entidades geométricas são incluídas na prova de um teorema ou resolução de um problema. O paradigma euclidiano se estende para a álgebra e aritmética, além de possuir analogias na lógica moderna com a instanciação existencial. Assim, a meu ver, a interpretação feita por Hintikka fornece fortes argumentos para colocar a geometria em um lugar mais adequado na filosofia crítica de Kant.

Parsons considera a geometria na *Crítica* sob o caráter sensível, fenomenológico, mas a prioridade para Kant está diretamente ligada à construção de um conceito na intuição, na qual a visualização não é condição necessária, como vimos. Apesar disso, Parsons considera que a possibilidade de existência dos objetos geométricos é fornecida justamente por essa construção, só realizada na intuição formal, ou seja, em um acordo entre a intuição pura, as categorias e a imaginação.

1.3.5) Axiomas da Intuição

[69] Ver *Crítica* A164/B204-B205.

Foi apresentado o caráter sintético *a priori* das proposições geométricas, contudo, sua relação com a nossa realidade objetiva fica explícita nos "Axiomas da Intuição", nos quais é formulado o princípio de que todas as intuições são grandezas extensivas, ou seja, aquelas em que a representação das partes torna possível e antecede a representação do todo (cf. *Crítica*, B 02)[70]. A representação de uma linha, por exemplo, só é possível se suas partes forem produzidas sucessivamente a partir de um ponto e todos os aparecimentos só podem ser compreendidos na apreensão por uma síntese sucessiva[71] e que os torna já intuídos como agregados (cf. *idem*, B 203).

Entretanto, a definição de grandeza extensiva parece estar em direta contradição com o que foi dito sobre o espaço na *Estética*: "Estas partes [do espaço] não podem anteceder esse espaço único, que tudo abrange, como se fossem seus elementos constituintes (que permitissem sua composição); pelo contrário, só podem ser pensados nele." (idem, A25/B39).

Para Dycker, esta contradição é resolvida considerando-se o espaço sob dois pontos de vista: ontológico e epistemológico. Visto de forma ontológica, procura-se saber o que o espaço é. Neste caso, ele é único e não pode ser dividido em partes constituintes. Entretanto, sob um ponto de vista epistemológico, procuramos conhecer o tamanho de uma extensão do espaço e isto seria impossível sem a aplicação de uma unidade de medida, repetidamente. A possibilidade desta medição pressupõe que o espaço possa ser dividido em partes iguais, que correspondem a esta unidade arbitrária. (cf. *Kant's Theory of Knowledge*, p.64).

Sobre a proposta acima, talvez Dycker confunda os vários sentidos do termo "grandeza", na filosofia kantiana[72], visto que a relação entre a unidade arbitária e o objeto a ser medido seria

---

[70] Assim como em vários outros pontos, ao decorrer da *Crítica*, nos "Axiomas" Kant usa a palavra "intuição" de maneira ambígua e pode-se traduzir melhor o princípio como: Todo *intuído* é uma grandeza [ou magnitude] extensiva.

[71] Esta é justamente a síntese da imaginação produtiva.

[72] Shabel verifica que Kant utiliza o termo magnitude ou grandeza (*Größe*) em três sentidos (cf. *Kant on the "Symbolic Construction"*…, p. 609-10), enumerados a seguir, em que acrescento exemplos de uso na *Crítica*:

1) Magnitude (*quanta*) ou (*quantum*) = formato de objetos construídos na geometria, figuras:

"Ora, a consciência do diverso homogêneo na intuição em geral, na medida em que só assim é possível a representação de um objeto, é o conceito de uma grandeza (de um *quantum*). Portanto, a própria percepção de um objeto como fenômeno só é possível mediante essa mesma unidade sintética do diverso da intuição sensível dada, pela qual é pensada a unidade da composição do diverso homogêneo no conceito de uma *grandeza*; isto é, os fenômenos são todos eles grandezas e *grandezas extensivas*, porque, enquanto intuições no espaço ou na tempo, têm de ser representados pela mesma síntese que determina o espaço e o tempo em geral." (*Crítica*, B203).

2) Magnitude (*quantitas*) = apenas o aspecto quantitativo, quantidade sem qualidade. Conceito puro de quantidade ou a aplicação do conceito de quantidade a um objeto qualquer:

"Porém, no que se refere à quantidade (*quantitas*), ou seja, à resposta à pergunta acerca de quanto uma coisa é grande, não há, na verdade, a esse respeito, axiomas propriamente ditos, embora muitas dessas proposições sejam sintéticas e imediatamente certas (*indemonstrabilia*)." (*idem*, A164/ B205).

apenas empírica, sem a universalidade de um axioma geométrico (cf. *Crítica*, A164/B205) e, por isso, deslocada da discussão proposta nos "Axiomas da Intuição", que visa provar a realidade objetiva dos objetos *a partir de condições subjetivas* e não pode se valer de relações empíricas. Na verdade, Dycker toma uma figura (*quantum* ou *quanta*) pela medida dessa figura (*quantitas*).

Além disso, não posso dividir o espaço em dois pontos de vista separados, como propõe Dycker, pois de qualquer forma o epistemológico estaria sujeito ao ontológico; ou seja, só posso fazer medidas no espaço, utilizando uma unidade arbitrária, *porque* antes de mais nada o espaço é uma forma da intuição com características predeterminadas. A contradição entre a *Estética* e os "Axiomas da Intuição" permanece justamente por conta do que apontei antes: para provar que o espaço é uma forma pura da intuição, Kant isola a *Estética* do resto da *Crítica*, desconsiderando a síntese da imaginação produtiva, responsável por qualquer sucessão de aparecimentos e também desconsidera os "Axiomas da Intuição", nos quais toda representação já é um agregado.

E podemos agora, *através da geometria como base do argumento*, relacionar as condições subjetivas da intuição à validade objetiva daquilo que é intuído. Para tanto, devemos lembrar que a geometria se baseia na construção de figuras cujas partes devem permanecer em meu pensamento, ou no papel, enquanto construo outras partes, caso contrário, ela não seria possível. Logo, a geometria se fundamenta na mesma síntese que é forma essencial de todo intuído e que torna possível a experiência externa e, além disso, o conhecimento dos objetos dessa experiência: "A intuição empírica só é possível mediante a intuição pura (do espaço e do tempo); o que a geometria diz de uma deverá irrefutavelmente valer para a outra [...]" (*Crítica*, B 206).

Dito desta maneira, a geometria e a própria forma da intuição do espaço parecem indiscerníveis e, novamente, aponto o uso do argumento transcendental nos "Axiomas da Intuição": temos o fato inegável que a geometria é possível e faz uso da síntese da imaginação produtiva, para a construção de figuras. Qual é o pressuposto subjetivo para que isso ocorra? Que a síntese que torna possível a geometria seja a mesma de qualquer intuição representada

3) Magnitude em geral: Um objeto é considerado sob o conceito de "magnitude em geral" ao ser quantificado em relação a uma unidade escolhida; ou seja, saber a magnitude (tamanho) de uma magnitude (figura):
"Ninguém pode definir o conceito de grandeza em geral senão dizendo, por exemplo, que é a determinação de uma coisa, que permite pensar quantas vezes nela se contém a unidade. Mas este quantas vezes assenta na repetição sucessiva, portanto sobre o tempo e a síntese (do homogêneo) no tempo." (*idem*, A 242/B 300).

no espaço. Como a geometria é a ciência da grandeza extensiva, leia-se figura, todo *intuído* também será da mesma forma:

> Ora,a consciência do diverso homogêneo na intuição em geral, na medida em que só assim é possível a representação de um objeto, é o conceito de uma grandeza (de um quantum). Portanto, a própria percepção de um objeto como fenômeno só é possível mediante essa mesma unidade sintética do diverso da intuição sensível dada, pela qual é pensada a unidade da composição do diverso homogêneo no conceito de uma grandeza; isto é, os fenômenos são todos eles grandezas e grandezas extensivas, porque, enquanto intuições no espaço ou no tempo, têm de ser representados pela mesma síntese que determina o espaço e o tempo em geral. (*Crítica*, B203).

Capítulo 2: Kant e as geometrias não euclidianas

2.1) O postulado 5 e o surgimento de novas geometrias

Euclides apresenta no livro I de *Os Elementos* cinco postulados:

"1- Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

2 - Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

3 - E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

4 - E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

5 - E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos." (*Os Elementos*, p. 98).

A figura a seguir ilustra o postulado 5. Se $\alpha + \beta < 180º$ então as retas r e s encontram-se no ponto E.

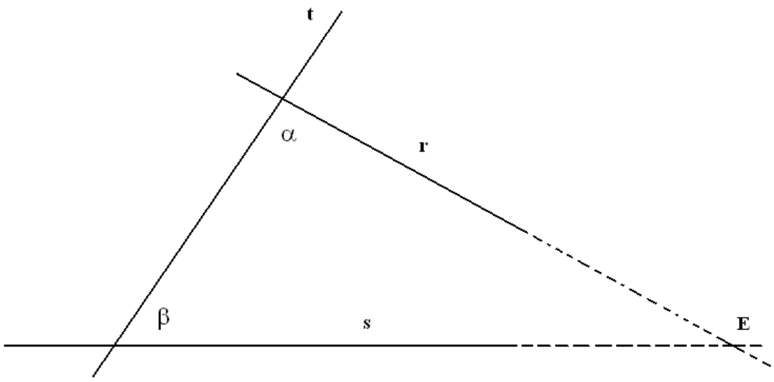

Figura 5

Por mais de 2000 anos esse postulado tem causado controvérsias. Ele não pode ser deduzido dos quatro primeiros e não é autoevidente. Pode-se dizer que é antes um teorema do que um postulado e deve ser provado. Talvez Euclides estivesse consciente da fragilidade do postulado 5, pois dele dependem poucas proposições. Na tabela a seguir vemos as 32 primeiras proposições do livro I dos *Elementos* e o que exatamente fundamentou cada demonstração. Em negrito estão destacadas aquelas que dependem do postulado 5:

Proposição	Definições	Postulados	Noções Comuns	Proposições	Proposição	Definições	Postulados	Noções Comuns	Proposições
1	15,20	1,3	1		17		2	4	13,16
2	15,20	1,2,3	1,3	1	18		1	8	3,5,16
3	15	3	1	2	19				5,18
4			7,9		20		1,2	8	2,5,19
5		1,2	3	3,4	21		2	4	16,20
6		1	8	3,4	22	15	1,3	1	2,3,20
7		1	8	5	23		1		8,22
8			7	7	24		1	1,8	2,4,5,19,23
9	20			1,3,8	25				4,24
10	20			1,4,9	26		1	1,8	3,4,16
11	10,20	1		1,2,3,8	27	23	2		16
12	10,15	1,3		8,10	28		4	1,2,3	13,15,27
13	10		1,2	11	**29**	23	2,**5**	1,2,4	13,15
14		2,4	1,2,3,8	13	30			1	27,**29**
15		4	1,2,3	13	31		1,2		23,27
16		1,2	8	2,3,4,10,15	**32**		2	1,2	13,**29**,31

Tabela 1

Desde Poseidonius, o postulado 5 foi enunciado de muitas maneiras alternativas a fim de torná-lo mais acessível à demonstração (cf. *The Non-Euclidean Revolution*, p.128). O substituto mais usado é creditado a John Playfair, apesar de ter sido enunciado por Proclo no século V: Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta. O teorema I-27 dos *Elementos*[73] garante a existência de pelo menos uma reta.

As várias tentativas para demonstrar o postulado 5 se mostraram raciocínios circulares, que utilizavam, tacitamente, suposições baseadas nele próprio. Inovações foram feitas por Girolamo Saccheri em obra publicada em 1733 sob o título *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides livre de toda imperfeição), precursora das geometrias não euclidianas desenvolvidas posteriormente por vários outros, como afirma Heath:

> It [a obra de Saccheri] is of much greater importance than all the earlier attempts to prove Post. 5 because Saccheri was the first to contemplate the possibility of hypotheses other than that of Euclid, and to work out a number of consequences of those hypotheses. He was therefore a true precursor of Legendre and of Lobachewsky, as Beltrami called him [...], and, it might be added, of Riemann also. For, as Veronese observes [...], Saccheri obtained a glimpse of the theory of parallels in all its generality, while Legendre, Lobachewsky and G. Bolyai excluded a priori, without knowing it, the " hypothesis of the obtuse angle," or the Riemann hypothesis. (*The Thirteen Books*..., p. 211).

[73] Devemos observar que, no livro I dos *Elementos*, os teoremas de 1 a 28 e 31 não dependem do postulado 5, enquanto os teoremas 29, 30 e 32 a 48 dependem. Lembrando que Kant usa o teorema 32, como exemplo de construção de um conceito, sua atenção deveria estar voltada aos impasses causados por esse postulado, o que será visto na próxima seção.

Para seus propósitos de prova, Saccheri toma um quadrilátero plano ABCD, no qual devemos considerar AC e BD congruentes e perpendiculares a AB, como visto na figura abaixo:

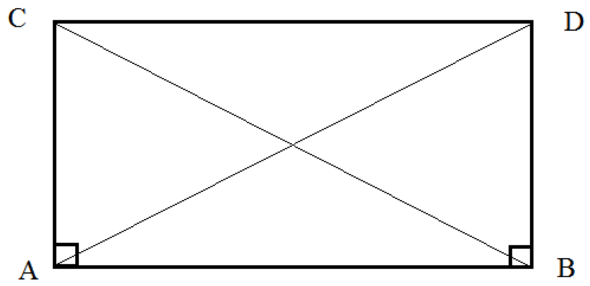

Figura 6

Demonstra-se que os ângulos ACD e CDB são congruentes[74] e podem ser retos, agudos ou obtusos, que levam a 3 hipóteses diferentes, com seus respectivos teoremas[75]. Dessa forma, Saccheri pretendia demonstrar, por redução ao absurdo, que se as hipóteses dos ângulos agudo e obtuso resultassem em contradições, então o postulado 5 seria provado. Na figura a seguir vemos as 3 hipóteses:

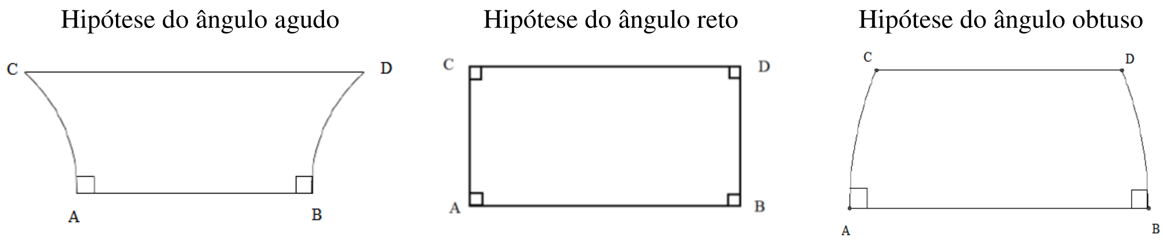

Figura 7

Heath aponta as conclusões mais importantes feitas por Saccheri a partir do quadrilátero, que envolvem a generalidade dos resultados e a soma dos ângulos internos de um triângulo:

> (1) If the hypothesis of the right angle, or of the obtuse angle, or of the acute angle is proved true in a single case, it is true in every other case. (Props. V, VI, VII.)[76]
> (2) According as the hypothesis of the right angle, the obtuse angle, or the acute angle is true, the sum of the three angles of a triangle [ABD, por exemplo] is equal to, greater than, or less than two right angles. (Prop. IX)

---

[74] Prova sem o uso do postulado das paralelas: Os triângulos CAB e ADB, da figura 6 acima, são congruentes (caso LAL). Então teremos ∢ ACB ≡ ∢ ADB e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Agora, os triângulos ACD e BCD são congruentes (caso LLL). Assim, ∢ BCD ≡ ∢ ADC, logo ∢ ACB + ∢ BCD ≡ ∢ ADB + ∢ ADC, portanto ∢ C ≡ ∢ D.

[75] Na verdade, o quadrilátero da figura e as 3 hipóteses que dele resultam foram observados anteriormente pelo persa Umar Khayyām e pelo árabe Nasīr al-Dīn Tūsī (ver *A History of Non Euclidean Geometry*, p. 98 ss).

[76] Para as proposições V, VI e VII, ver *Euclides ab omnia naevo vindicatus*, p. 29 a 37. Para as proposições IX e XV, ver *idem* p. 40-1 e 61-5, respectivamente.

> (3) From the existence of a single triangle in which the sum of the angles is equal to, greater than, or less than two right angles the truth of the hypothesis of the right angle, obtuse angle, or acute angle respectively follows. (Prop. XV.) (*idem*, p. 211-2).

Após provar que a hipótese do ângulo obtuso é falsa[77], Saccheri tenta provar de duas formas diferentes que também é falsa a hipótese do ângulo agudo[78], mas não se satisfez com os resultados, pois precisou antes demonstrar que uma linha e uma reta dada no mesmo plano, com todos os pontos equidistantes, serão congruentes, o que enfraqueceu a refutação:

> It is well to consider here a notable difference between the foregoing redargutions of the two hypotheses. For in regard to the hypothesis of obtuse angle the thing is clearer than midday light; since from it assumed as true is demonstrated the absolute universal truth of the controverted Euclidean postulate, from which afterward is demonstrated the absolute falsity of this hypothesis; as is established from P. XIII. and P. XIV. [proposições XIII e XIV].
> But on the contrary I do not attain to proving the falsity of the other hypothesis, that of acute angle, without previously proving; that the line, all of whose points are equidistant from an assumed straight line lying in the same plane with it, is equal to this straight, which itself finally I do not appear to demonstrate from the viscera of the very hypothesis, as must be done for a perfect refutation. (*idem*, p. 233 e 235)

Três décadas depois da morte de Saccheri, o suíço Johan Heinrich Lambert tomou um quadrilátero contendo três ângulos retos. Assim, o quarto ângulo poderia ser agudo, reto ou obtuso[79], conforme vemos na figura abaixo:

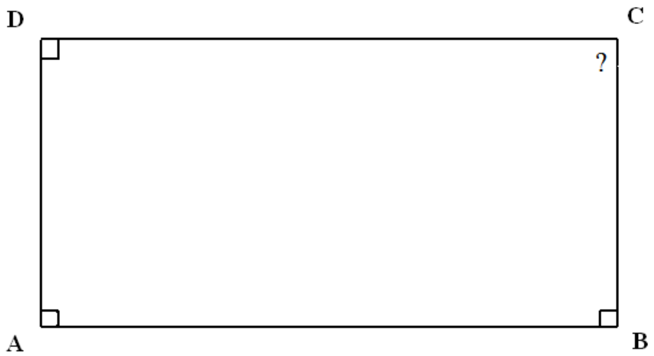

Figura 8

Sobre esse estudo foi publicada em 1786 a obra de Lambert *Theorie der Parallellinien* (Teoria das linhas paralelas). Para expor seus resultados vamos considerar duas linhas retas a e b, perpendiculares à linha BA. Traçamos então a partir dos pontos B_1, B_2, ..., B_n as perpendiculares que contém os segmentos B_1A_1, B_2A_2, ..., B_nA_n, de acordo com a figura

[77] Saccheri demonstra a falsidade da hipótese do ângulo obtuso na proposição XIV. Para maiores detalhes sobre o método de prova, ver *idem*, p. 59 e 61.
[78] Ver *idem*, proposição XIII, p. 173 e proposição XXXVIII, p. 225.
[79] O mesmo método usado anteriormente pelo egípcio Ibn al-Haytham, que também suscitou as 3 hipóteses levantadas por Lambert (ver *A History of Non Euclidean Geometry*, p. 59 ss).

abaixo. Para a hipótese do ângulo obtuso, tais segmentos diminuem continuamente e as diferenças entre um dado segmento e o próximo aumentam. Assim teremos a desigualdade BA - B_nA_n > n (BA - B_1A_1), entretanto, para "n" grande o suficiente[80] o segundo membro da inequação acima é tão grande quanto se queira, enquanto o primeiro membro terá um o valor próximo de BA, uma clara contradição, que torna a hipótese do ângulo obtuso falsa para Lambert (cf. *Non-Euclidean Geometry*, p. 45-6).

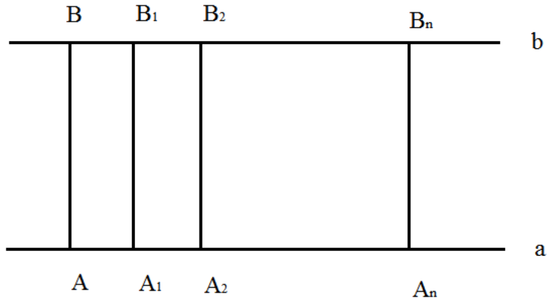

Figura 9

Quanto à hipótese do ângulo agudo, ao considerar a mesma figura, Lambert conclui que tanto os segmentos B_1A_1, B_2A_2, ..., B_nA_n, quanto a diferença entre um segmento e o seguinte, crescem continuamente, resultado que não leva a nenhuma contradição[81], mas tem como importante consequência a medida absoluta de comprimentos, áreas e volumes. Para tanto, parte-se do fato que existe uma medida absoluta para um ângulo e através dela pode-se medir a área do quadrilátero de Lambert[82]. Tal consequência o faz declarar que a hipótese do ângulo agudo pode ser verdadeira: "Diese Folge hat etwas Reizendes, welches leicht den Wunsch abdringt, die dritte Hypothese mochte doch wahr seyn! (Essa consequência tem algo de encantador, que facilmente faz desejar, que a terceira hipótese seja verdadeira!)" (*Theorie der Parallellinien*, p. 200, minha tradução). Mas, apesar de seus importantes resultados, propondo inclusive que a hipótese do ângulo agudo possa valer em uma esfera de raio imaginário, Lambert deixa em suspenso a demonstração do postulado das paralelas.

---

[80] Para tanto, deve ser admitido o Axioma de Arquimedes (ver *Non Euclidean Geometry*, p. 46, n 1), o qual estabelece que "for any two segments there is a natural number n such that if we lay off the smaller segment n times then we obtain a segment larger than the larger segment; (para quaisquer dois segmentos há um número natural n de tal forma que se estendermos o menor segmento n vezes então obteremos um segmento maior que o menor segmento;)" (*A History of Non Euclidean Geometry*, p. 262, minha tradução).

[81] Ver *Non-Euclidean Geometry*, p. 46.

[82] Lambert demonstra que a área do quadrilátero é proporcional ao seu ângulo agudo (para maiores detalhes ver *Theorie der Parallellinien*, p. 200 ss).

Adrien-Marie Legendre, na intenção de demonstrar o postulado das paralelas, usou como base de argumentação a soma dos ângulos internos de um triângulo, que poderia ser maior, menor ou igual a dois ângulos retos[83], mas não obteve sucesso em contradizer a hipótese de uma soma menor que 180º. Seus esforços foram publicados nas várias edições de sua obra *Éléments de Géométrie* entre 1794 e 1823.

Em uma abordagem do postulado 5, na forma de Playfair, Karl Friedrich Gauss, Janos Bolyai e Nicolai Ivanovitch Lobachevsky consideraram que por um ponto dado podem ser traçadas mais do que uma, exatamente uma, ou nenhuma paralela a uma reta dada. Essas possibilidades correspondem às hipóteses do ângulo agudo, reto e obtuso, respectivamente. Descartada a última hipótese, os três chegaram à conclusão, de forma independente, que a primeira hipótese levava a uma geometria consistente e concluíram que o postulado das paralelas não depende dos demais e não pode ser deduzido deles (cf. *Introdução à História da Matemática*, p. 541-2).

Gauss não publicou nada sobre suas conclusões e Bolyai apenas um apêndice em um livro de matemática de seu pai, embora tenha deixado milhares de páginas em manuscrito.

Lobachevsky publicou, em alemão, um livro intitulado *Geometrische Untersuchungen Zur Theorie der Parallellinien* (Estudos Geométricos da Teoria das Linhas Paralelas) e pouco antes de sua morte outra versão, mais condensada e em francês, com o título *Pangéométrie*. A geometria de Lobachevsky é baseada em superfícies hiperbólicas, como mostra a figura seguinte:

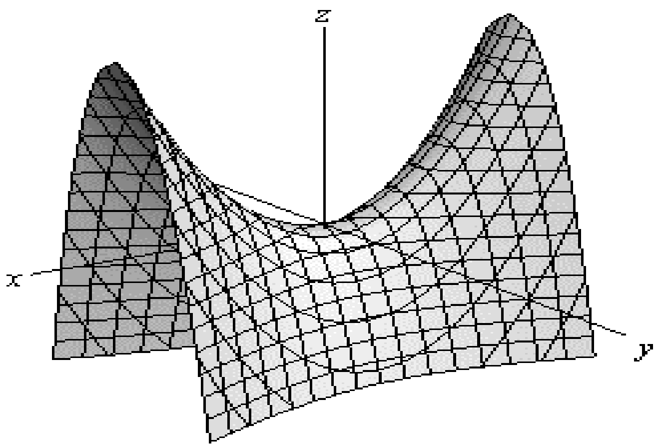

Figura 10

[83] Para detalhes sobre essa demonstração ver *Non-Euclidean Geometry*, p. 55-6.

No plano hiperbólico, também chamado disco de Poincaré ou disco Σ, percebemos que por um ponto podem ser definidas infinitas retas paralelas a uma reta dada:

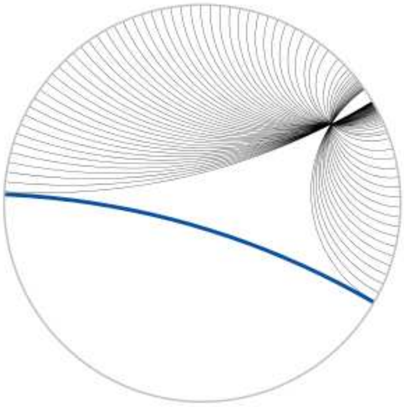

Figura 11

A total consistência da hipótese do ângulo agudo foi feita, através de demonstrações, por Eugenio Beltrami, Felix Klein e Henry Poincaré usando o método de modelos geométricos (cf. *idem*, p. 544).

Outra geometria não euclidiana, consistente a partir da hipótese do ângulo obtuso, foi desenvolvida por Georg Bernhard Riemann. Nessa geometria não existem retas paralelas, pois são substituídas pelas circunferências máximas de uma superfície esférica, as geodésicas. Assim, as retas são todas linhas congruentes e fechadas, além disso, duas delas sempre se cruzam em dois pontos chamados antípodas. Na figura seguinte, temos algumas geodésicas e alguns pontos antípodas como, por exemplo, A e A'.

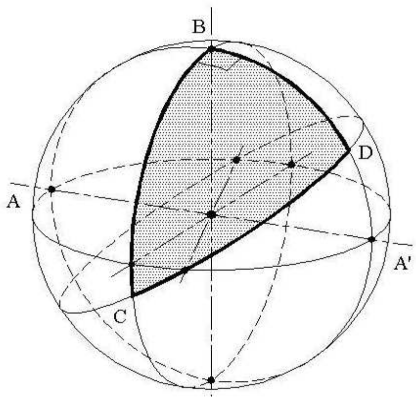

Figura 12

Podemos perceber que no triângulo esférico CDB a soma dos ângulos internos é maior que 180º. As idéias de Riemann possibilitaram o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein que supõe a geometria do espaço afetada pela matéria.

Diante do exposto resta a pergunta sobre qual a verdadeira geometria. Nas palavras de Poincaré, não existe uma verdadeira geometria, pois elas são convenções e uma não é mais verdadeira que outra, apenas mais conveniente:

> If geometry were an experimental science, it would not be an exact science. It would be subjected to continual revision. […] The geometrical axioms are therefore neither synthetic a priori intuitions nor experimental facts. They are conventions. […] One geometry cannot be more true than another: it can only be more convenient (*Science and Hypothesis*, p.50)

Deve ficar claro que nos é perfeitamente possível imaginar ou construir uma esfera e suas geodésicas ou a sela de Lobachvesky e suas hipérboles, na 3ª dimensão. Entretanto, quando essas geometrias se aplicam ao espaço elas não podem ser apresentadas à intuição, não fazem parte de uma experiência possível. Ao curvarmos uma folha de papel ela adquire uma terceira dimensão, da mesma forma, ao curvarmos o espaço ele adquire uma quarta dimensão impossível de visualizar ou imaginar, pois totalmente inadequada ao nosso limitado aparato sensível. Na distinção entre realidade e idealidade do espaço, Kant destaca a importância do Espaço diante de uma experiência possível e sua inutilidade como fundamento de coisas em si:

> Afirmamos, pois, a realidade empírica do espaço (no que se refere a toda a experiência exterior possível) e, não obstante, a sua idealidade transcendental, ou seja, que o espaço nada é, se abandonarmos a condição de possibilidade de toda a experiência e o considerarmos com algo que sirva de fundamento das coisas em si (*Crítica*, B44).

2.2) A influência das geometrias não euclidianas em Kant

Muitos autores consideram que Kant se omitiu em fazer qualquer consideração sobre o postulado das paralelas e suas consequências no surgimento de outras geometrias. Podemos citar, por exemplo, William Ewald:

> Kant has surprisingly little to say in his philosophical writings about Euclid's Axiom of Parallels or about its relevance to his theory of geometry. He was surely aware that mathematicians had unsuccessfully attempted to prove the Axiom, and that the absence of a proof was regarded as a notoriously unsolved problem; but in the *Critique of Pure Reason* he does not discuss the Axiom or the possibility of alternative Geometries (*From Kant to Hilbert*, vol.1, p.135).

Já vimos no capítulo 1 que em seu primeiro trabalho publicado, *Idéias para uma verdadeira avaliação das forças vivas* (1746), Kant admite a possibilidade de outras geometrias que possam representar o espaço e estejam vinculadas à força de atração gravitacional.

Em relação à *Crítica*, Kant foi mais cauteloso e admite que geometrias alternativas tenham possibilidade lógica, entretanto, as construções de tais figuras no espaço não possuem realidade objetiva:

> [...] no conceito de uma figura delimitada por duas linhas retas não há contradição, porque os conceitos de duas linhas retas e do seu encontro não contêm a negação de uma figura; a impossibilidade não assenta no conceito em si mesmo, mas na sua construção no espaço, isto é, nas condições do espaço e sua determinação; estas, por sua vez, têm a sua realidade objetiva, isto é, referem-se a coisas possíveis, porque contêm em si, *a priori*, a forma da experiência em geral (*Crítica*, B268/A221).

Acredito que Kant se refira a uma figura como vista a seguir:

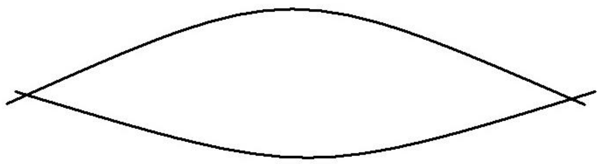

Figura 13

A figura, conhecida como biângulo, tem existência lógica, baseada nos conceitos de retas e figuras, que não se contradizem. Entretanto, não é possível a construção do conceito; ou seja, apresentá-lo à intuição, pois a figura é limitado por duas curvas e não duas retas em sentido estrito e não tem possibilidade real[84].

Quanto ao postulado das paralelas, é bem conhecida a estreita relação de Kant com pesquisadores do tema, os já citados Lambert e Schultz, seu discípulo e intérprete. A importante obra de Lambert, *Theorie der Parallellinien*, foi publicada em uma compilação sobre o assunto e não consta da biblioteca pessoal de Kant (cf. *Immanuel Kants Bücher*, p. 38-40), assim como não há evidência direta sobre as paralelas em cartas trocadas entre eles. Entretanto, Kant possuía o livro de Schultz, *Entdeckte Theorie der Parallelen*, (cf. *idem*, p. 40) e houve entre eles uma significativa troca de correspondência. Em artigo que será usado como referência nessa seção, Jeremy Heis cita apenas as datas das cartas[85], mas acredito que as passagens mais importantes devem ser evidenciadas, que se verificam em carta de 17 de fevereiro de 1784, na qual Kant comenta sobre o citado livro de Shultz: "Ich zweisle gar nicht, dass diese Schrift, so wie Ihre sinnreiche Theorie der Parallellinien, zur Erweiterung und Verbreitung der Kenntnisse und Ihrem verdienten Ruhme beitragen werde. (Eu não tenho dúvidas, que esta publicação, assim

---

[84] Para uma distinção mais detalhada entre possibilidade lógica e real ver *Crítica*, BXXVII, n.
[85] Ver *Kant on Parallel Lines*, p. 4, n16.

como sua engenhosa Teoria das Linhas Paralelas, vão contribuir para o aumento e difusão do conhecimento e para sua merecida fama.)" (*Briefwechsel*, p.368, minha tradução). É claro que ao considerar a teoria de Schultz engenhosa (*sinnreiche*), Kant nos fornece uma evidência de ter lido a obra.

Em relação às paralelas, além da correspondência citada, a maior evidência sobre a preocupação de Kant está em várias notas não publicadas, porém editadas pela Akademie[86]. Essas notas serão usadas, em detalhes, na sequência em que analiso o artigo de Heis, que acredita ter sido Kant muito mais crítico ao problema imposto pelas paralelas do que seus contemporâneos, mesmo até do que Lambert e Leibniz.

Para tanto, a argumentação usará a "construção de um conceito", tema visto no capítulo 1. É suficiente lembrar que para construir um conceito é necessário exibir uma representação única e não empírica, uma intuição *a priori*, que corresponda ao conceito e que terá validade universal; ou seja, para todas as intuições sob o mesmo conceito. Por exemplo, a construção de um triângulo é baseada em seu conceito de figura fechada formada pelo cruzamento de três linhas retas e não tenho que recorrer à experiência para fazê-la. Aquilo que for demonstrado para esse triângulo genérico valerá para quaisquer triângulos e também para as formas triangulares da sensação.

É claro que se impõe a questão: como um caso particular de um objeto imperfeito da observação pode levar a conclusões *a priori* de objetos perfeitos da geometria?

A resposta leva a duas consequências importantes para a teoria dos conceitos matemáticos em Kant e essenciais para suas reflexões sobre as paralelas. Primeira consequência: os conceitos matemáticos e suas definições são sempre compreendidos juntos, pois é impossível, por exemplo, compreender um triângulo sem compreender antes o que seja uma figura ou três linhas retas. É justamente essa ligação entre definição e conceito que nos permite tirar conclusões gerais de um triângulo qualquer (cf. *Kant on Parallel Lines*, p. 10).

Esse assunto já foi discutido antes, mas a interpretação de Heis segue um caminho diferente e tem por base a afirmação de Kant de que, na Matemática, a definição sempre precede o conceito que deve ser construído exatamente de acordo com as intruções da definição (cf. *Crítica*, A731/B759).

Acredito que, devido ao seu caráter simples e geral, a definição levará a um conceito de mesma natureza e, quando apresentado à intuição, resultará em uma representação única, porém

---

86 Ver *Kant's Handschriftlicher Nachlaß*, p. 23-52.

sem nenhuma característica que não esteja contida na própria definição. Aquilo que for demonstrado para essa representação genérica deve valer para todas as outras que estejam sob a mesma definição e, claro, sob o mesmo conceito. Como uma figura fechada por três linhas retas, a definição de um triângulo é de tal forma que não posso colocar nada de mais específico em minha representação. A demonstração que for feita nessa figura, através de um raciocínio matemático válido, pode ser feita da mesma forma em outra figura que respeite a definição e assim por diante, atingindo caráter universal.

Segunda consequência: a posse de um conceito matemático é condição necessária e suficiente para estar apto a representar quaisquer objetos, que estejam sob o mesmo conceito. Como condição suficiente, a posse do conceito nos permite executar uma demonstração sem qualquer uso da experiência, ou *a priori*, visto que o conceito de triângulo deriva da definição e nesta não há nenhuma medida de segmentos ou ângulos. Como condição necessária, a posse do conceito nos assegura a generalidade da demonstração, pois na construção de um *conceito* cada figura torna-se apenas um rótulo, um símbolo, que pode ser um desenho imperfeito, garantindo ainda mais essa generalidade (cf. *Kant on Parallel Lines*, p. 9-11).

Para esclarecer melhor esta questão recorrente usarei o exemplo dado por Kant: o conceito de cão é uma *regra* segundo a qual imagino a figura geral de um animal quadrúpede, sem ficar restrito à minha experiência com cães ou mesmo a um desenho de um cão. Da mesma forma, ao conceito de triângulo nenhuma imagem seria adequada; ao contrário, as imagens só são possíveis como um produto, um monograma, da imaginação *a priori* e devem estar sempre submetidas aos conceitos que formam essa imagem (cf. *Crítica*, B180). Dito de outra forma, posso construir exemplos com a regra, mas não posso deduzir a regra através de exemplos.

Ainda na teoria dos conceitos matemáticos, é necessário esclarecer certas concepções de Kant para entender sua reflexão sobre as paralelas. Por exemplo, as definições matemáticas são chamadas de "definições reais": aquelas que além de mostrar na intuição o objeto, segundo seu conceito, ainda tornam possível a aplicação do conceito a um objeto empírico ou, dito de outra forma, tais definições tornam compreensível a possibilidade de um objeto dos sentidos. Deve ficar claro que o conceito é sempre produzido *a priori*, mas sua aplicação é empírica sem a qual ele não teria nenhum sentido (cf. *Crítica*, A240-2).

Novamente, chamo atenção sobre a possibilidade real de um conceito, pois os conceitos das geometrias não euclidianas não se aplicam aos objetos de nossos sentidos, aos nossos objetos empíricos, pois não existe correspondência ao molde de nossa intuição. Um Espaço com mais de 3 dimensões não tem para nós nenhum sentido prático, é uma abstração que nunca poderá se apresentar diretamente aos sentidos. Acredito ser dessa forma porque, em termos evolutivos, uma capacidade de perceber espaços assim seria completamente desnecessária à nossa sobrevivência e, se algum dia existiu, atrofiou-se como um órgão inútil, um apêndice caudal.

Para Kant, uma definição pode ser também "genética": aquela que produz um conceito *a priori in concreto* e afirma que todas as definições matemáticas são dessa forma (cf. *The Jäsche Logic*, §106, n3). As expressões *in abstracto* e *in concreto* não devem ser relacionadas aos conceitos, vistos que são todos abstratos, mas com o uso que se faz do conceito[87]. Conforme adicionamos determinações ao conceito, passamos para níveis mais concretos até chegarmos ao *maximum concreto*, o indivíduo; ou seja, passamos do universal para casos e circunstâncias cada vez mais particulares. Por exemplo, de todos os triângulos tomamos um isósceles, depois um isósceles retângulo e assim por diante.

Para a discussão das paralelas, precisamos também esclarecer a concepção de Kant para "postulado": uma proposição prática, que contém uma regra para a construção de um objeto e produção de seu conceito. Essa proposição não pode ser demonstrada porque sua regra de construção é exatamente o conceito da figura. Por exemplo, o postulado 3 de Euclides: com um ponto e uma distância pode-se descrever um círculo (cf. *Crítica*, A234/ B287).

Vimos ser impossível possuir um conceito sem ter a definição que o preceda, mas todas as definições matemáticas são genéticas o que me possibilita descrever o conceito *a priori* e *in concreto*. Logo, não posso ter um conceito sem saber, simultaneamente, sua regra de construção, o que torna as definições genéticas da matemática e seus postulados intercambiáveis. Pode-se dizer que o postulado é um corolário prático da definição (cf. *Kant on Parallel Lines*, p. 14).

Kant afirna na *Crítica* que as definições matemáticas nunca são falsas, entretanto, apesar de verdadeiras em seu conteúdo podem ser imprecisas em sua forma. Por exemplo, a definição de circunferência, como uma linha *curva* na qual todos os pontos estão à mesma distância de um outro, introduz inutilmente uma determinação de curva. Para Kant, a melhor definição de

[87] Com base nas passagens da *Crítica*: A 713-A 717/B 741- B 745, podemos resumir essa distinção. Através do desenho de figuras geométricas, o matemático está apto a considerar conceitos *in concreto*, que são conceitos universais derivados de uma única intuição individual, enquanto o filósofo raciocina discursivamente e só pode chegar a conceitos universais *in abstracto*; ou seja, deriva de tais conceitos apenas o que neles já está contido.

circunferência é a de uma linha cujos pontos estão equidistantes de um outro (cf. *Crítica*, A731/B760).

Outras duas possíveis definições de circunferência, analisadas por Kant, podem ser vistas em *Reflexionen zur Mathematik* 5 e 6. São outros dois importantes exemplos de definições imprecisas:

> Der Cirkel ist eine Linie (auf einer Ebne), auf welche aus einem (bestimten) Puncte alle Mogliche in derselben zu ziehende Linien perpendicular stehen. (A circunferência é uma linha (em um plano), em que toda possível linha traçada, no mesmo [plano], de um (determinado) ponto fique perpendicular [à ela]). (*Kant's Handschriftlicher Nachlaß*, p. 23, minha tradução).

Essa definição parece estranha, pois uma reta não pode ser perpendicular a uma curva e Heis não fornece maiores detalhes. Entretanto, retornando à fonte primária citada logo acima, percebemos que há uma nota do editor explicando melhor a definição, pois o raio faz um ângulo reto com a tangente, em seu ponto de tangência:

> Die obige Definition behauptet, dass jeder Radius auf der Kreislinie senkrecht steht; das ist richtig, soweit man nur das unendlich kleine Stück (den Punkt) der Kreislinie im Auge hat, in welchem sie mit der Tangente zusammenfällt. (A definição acima referida estabelece que cada raio representa uma perpendicular sobre a circunferência; o que está correto, no que se refere a uma só parte infinitamente pequena (o ponto) da circunferência que se tem em mente, na qual, coincide com a tangente). (*idem*, p. 31, notas, linhas 25-8, minha tradução).

Kant toma como exemplo outra definição de circunferência, que é uma variação do teorema corda-arco:

> Der Cirkel ist eine krumme Linie, deren alle Bogen durch dieselbe Perpendicular-Linie, welche ihre Sehne in zwey gleich Theile theilt, auch in zwey gleiche Theile geschnitten werden. (A circunferência é uma linha curva, na qual todo arco dividido pela mesma linha-perpendicular, que em duas partes iguais divide as suas cordas, também será cortado [dividido] em duas partes iguais.). (*idem*, p. 31, minha tradução).

Nos dois exemplos, para construir perpendiculares seria necessário construir um triângulo equilátero (proposição I.11), que por sua vez é feito com o auxílio de circunferências (proposição I.1); ou seja, pelas definições acima, só conseguiremos construir o conceito de circunferência com o uso de outras circunferências![88] Kant questiona esse último exemplo: " Wie viel läβt sich aus dieser Erklärung des Cirkels folgern? (Quanto se pode concluir dessa declaração sobre os círculos?)". (*idem*, p. 31, minha tradução).

A pergunta se refere ao sentido dessa definição, à aplicação do conceito ao objeto empírico e percebemos que as duas definições são imprecisas, pois não são genéticas, não

---

[88] Ver *The Thirteen Books...*, p. 269 e 241, respectivamente.

contém a construção de seu conceito e, por isso, inadequadas para tal aplicação. Em contraste, vejamos a definição 23 dos *Elementos* para retas paralelas: “são aquelas que estão no mesmo plano e quando prolongadas em ambas as direções não se encontram em nenhuma.” (*The Thirteen Books*..., p. 190, minha tradução). Da mesma forma, esta definição não contém nenhum método de construção de seu conceito e Kant conclui:

> Ich denke, aus einer Definition, welche nicht zugleich die Construction des Begrifs in sich enthält, läβt sich nichts folgern [...] Euclid’s Definition von Parallellinien ist von der Art. (Eu penso, que [de] uma definição, que não contém ao mesmo tempo a construção de seu conceito, nada se pode deduzir [...] A definição de linhas paralelas de Euclides é do mesmo tipo.). (*Kant’s Handschriftlicher Nachlaß,* p. 31, minha tradução).

Por não conter nenhum método para a construção de seu conceito, *a definição de Euclides não apresenta a possibilidade das paralelas* e não pode ser considerada nem mesmo uma definição real.

Se considerarmos só o que foi exposto até aqui, é indiscutível o interesse de Kant pelas grandes questões matemáticas de seu tempo, em especial pela discussão sobre o postulado das paralelas, que deu origem às geometrias não euclidianas. Visto que grande parte de *Reflexionen zur Mathematik* é dedicada ao tema, acho extraordinário que tão pouco se tenha dito a esse respeito.

Na *Reflexão* 6, Kant faz sua crítica à definição de paralelas de Euclides e nas *Reflexões* 7-11 irá voltar sua análise para uma solução alternativa, conhecida como teoria da equidistância e proposta na antiguidade por Posidonius: retas paralelas são aquelas que mantém entre si sempre a mesma distância. Nos tempos modernos foi usada por Borelli e Clavius, no qual se basearam Leibniz e Christian Wolff [89], que usará uma abordagem peculiar dessa definição para provar os postulados 27 a 29, do livro I dos *Elementos*, no que será duramente criticado por Kant.

De início, vejamos as diferenças entre as definições de paralelas usando a teoria da equidistância. A definição de Wolff: “ Linea OP parallela est alteri QR, si ubique eandem ab ea distantian servat. (A linha OP é paralela à outra QR, desde que guardem a mesma distância em todo lugar).” (*Elementa Matheseos Universae*, § 81, minha tradução). E a definição de Kant, para comparação: “Wir haben zwar eine Definition von parallellinien, d. i. solchen (geraden Linien), deren Weite von einander durchgehends gleich ist [...] (Nós temos de fato uma

[89] Ver *The Thirteen Books*..., p. 190-4.

definição de linhas paralelas, isto é aquelas (linhas retas), cuja distância entre si é continuamente igual [...])”. (*Kant’s Handschriftlicher Nachlaß*, p. 33, minha tradução).

A diferença entre as duas é evidente, pois Kant define paralelas especificamente como linhas *retas* enquanto Wolff não o faz, ou deixa isso implícito, como aponta Heis[90], mas não comenta que a definição de Wolff é acompanhada pela figura que se segue, na qual está evidente que OP e QR são linhas retas:

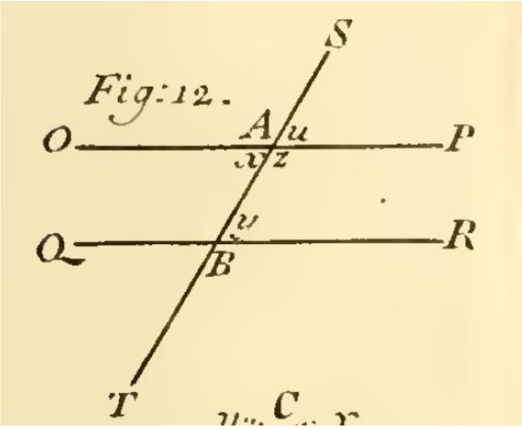

Figura 14

Entretanto, na Geometria vale o que é definido e provado a partir das definições e não o que parece ser. Assim, sem mencionar “linhas retas” em seu enunciado, faltará rigor à definição de paralelas o que a tornará “fraca”. Como consequência, Wolff terá métodos demonstrativos falaciosos e a análise de Kant sobre eles nos mostrará mais do seu interesse pela teoria das paralelas, assim como outros importantes conceitos de sua filosofia da matemática.

Por exemplo, referindo-se a duas paralelas e uma transversal, as proposições 27 e 28 do livro I dos *Elementos* são adaptadas e demonstradas, como um único teorema, por Wolff:

> Si duas lineas AB et CD secet transversa EF in G et H, ita ut vel 1º. y=u; vel 2º. x=u; vel 3º. o+u=180º; erunt linea ista inter se parallela. (Se duas retas AB e CD são cortadas por uma transversal EF em G e H, de modo que ou 1º. y=u; ou 2º. x=u; ou 3º. o+u=180º; estas linhas serão paralelas entre si.). (*Elementa Matheseos Universae*, §255, itálicos do original, minha tradução).

[90] Ver *Kant on Parallel Lines*, p. 20, n 53.

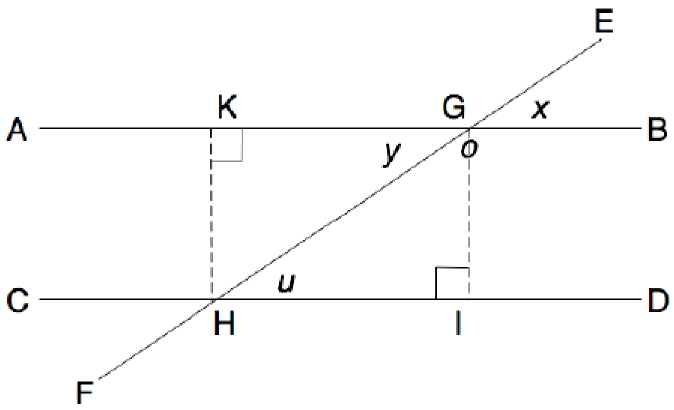

Figura 15

> Demonstratio. Demittantur ex H & G perpendiculares HK & GI; erit K=I. Est vero & y=u, per hypoth. & HG=HG (sic). Quare HK=GI, consequenter cum HK & GI sint distantiae linearum AB & CD; linea AB & CD sunt interse parallelae. (Demonstração. A partir de H e G são traçadas as perpendiculares HK e GI; será K=I [os ângulos HKG e GIH são retos]. Verdadeiro também que y=u, por hipótese, e HG=HG (sic). Porque HK=GI, e desde que HK e GI são distâncias das linhas AB e CD; as linhas AB e CD são paralelas entre si.). (*idem*, *ibidem*, minha tradução).

Sobre a demonstração acima, é evidente que HK=GI pelo caso de congruência apontado na proposição 26 dos *Elementos* (ver *The Thirteen Books*..., p. 301), entretanto, na opinião de Kant, não podemos concluir da igualdade desses segmentos que eles sejam também distâncias das linhas AB e CD, visto que Wolff definiu paralelas, mas não definiu que a distância entre duas retas é uma perpendicular mútua. Kant já havia destacado esse ponto:

> Die Entfernung zweyner geraden Linien von einander ist die Perpendikellinie, die aus einem Puncte der einen auf die andere gefället wird, so fern sie mit derjenigen, die aus demselben Puncte auf die erstere (perpendicular) errichtet (wird), [mit dieser] congruirt. (A distância entre duas linhas retas é a linha perpendicular, que deve ser baixada [traçada] de um ponto de uma até um ponto da outra, de tal forma que deve ser congruente com uma linha (perpendicular) erguida desse mesmo ponto até o primeiro.” (*Kant’s Handschriftlicher Nachlaß*, p. 33, minha tradução).

A prova geométrica de Wolff tem por base os conceitos de distâncias determinadas e de linhas paralelas, entretanto, nenhum conceito foi bem definido, pois as distâncias não são perpendiculares mútuas e as linhas não são retas. É claro que dessa forma os conceitos não podem ser construídos e a prova matemática não tem nenhum sentido.

Outra importante afirmação de Kant que podemos ligar com a teoria das paralelas é a de que uma definição real é aquela suficiente, através de suas determinações internas, para a cognição de um objeto. Tais definições não podem ser negativas, pois só mostrariam o que um objeto não é, mas não o que ele é, a sua essência:

> Definitions of things, or real definitions, on the other hand, are ones that suffice for cognition of the object according to its inner determinations, since they present the possibility of the object from inner marks. [...] Thus the latter contain what always belongs to the thing - its real essence. Merely negative definitions cannot be called real definitions either, because negative marks can serve just as well as affirmative ones for distinguishing one thing from others, but not for cognition of the thing according to its inner possibility." (*The Jäsche Logic*, §106).

Tomando novamente a definição de Euclides para retas paralelas: aquelas que, estando no mesmo plano, prolongadas em ambas as direções *não se encontram* em nenhuma, percebemos ser uma definição negativa, logo não real e impossível a construção de seu conceito. Justamente por usar a "construção de um conceito", na busca do conhecimento matemático, Kant foi muito mais crítico ao postulado das paralelas que seus contemporâneos. (cf. *Kant on Parallel Lines*, p.36-8).

Capítulo 3: Críticas ao "argumento da geometria"

Segundo a interpretação de Rolf Horstmann, há duas linhas gerais de ataque à filosofia da geometria em Kant. Ambas criticam a tese de que a geometria determina sinteticamente e *a priori* as propriedades do espaço. A primeira, alega que as quatro provas da intuição *a priori* do espaço falham por completo e a segunda, que as proposições da geometria não são sintéticas *a priori*. (cf. *Space as intuition and geometry*, p. 17-8).

Representada principalmente por Hans Reichenbach, um forte defensor da teoria da relatividade, a primeira linha afirma que as propriedades do espaço e as proposições geométricas são empíricas e não *a priori* porque, segundo Einstein, a geometria do espaço físico é não euclidiana e pode ser verificada experimentalmente. Em uma segunda frente de ataque, Bertrand Russell defende que as provas de teoremas geométricos usam apenas conceitos lógicos e não requerem nenhuma intuição. (cf. *Kant, Geometry of Intuition, and Intuition of Geometry*, p. 1) Acredito que na proposta de Horstmann a primeira linha de ataque pode ser subdividida, pois o alegado caráter empírico da geometria leva a diferentes argumentações, expostas a seguir.

3.1) A geometria como ciência de medidas e a geometria visual

Historicamente, Hermann von Helmholtz iniciou o ataque à teoria do espaço em Kant frente às novas descobertas em geometria. Pesquisas em teoria das cores e campos visuais o levaram à conexão entre operações de medidas e a métrica espacial, base de sua geometria física e da crítica a Kant. Para Helmholtz, a concepção de Espaço presente no Idealismo Transcendental não pode ser aplicada aos objetos reais empíricos, como bem resume Hyder:

> […] the actual source of the arguments that Helmholtz offers. Here the central concern is with the role of geometry as a science of spatial measurement. Geometrical propositions are empirical not so much in the sense that they are inductive as that they are material. The criticism directed against Kant is that he conceives of space as a system of magnitudes that can never be objects of experience. Since, however, natural science deals with of the relations among real things, all of its propositions should concern material, that is to say, empirically given states of affairs (*Kant and Helmholtz on the physical meaning of geometry*, p.197).

O movimento inicial de ataque de Helmholtz a Kant parte justamente de um dos mais caros conceitos ao Idealismo Transcendental, a aprioridade da geometria. Assim, causa desconfiança em Helmholtz a possibilidade e aceitação de axiomas geométricos *a priori*, assim como seu uso como prova da existência da intuição pura do espaço, esquema formal destituído de conteúdo e que deve aceitar qualquer fato empírico. A intenção de Helmholtz é relacionar os axiomas da geometria com a experiência ou substituí-los:

> Kant's famous question "How are synthetic a priori propositions possible?", the axioms of geometry probably constitute the examples which seem to show most evidently, that synthetic propositions a priori are in general possible. The circumstance that such propositions exist, and necessarily force our assent, is moreover for him a proof that space is a form, given a priori, of all outer intuition. By that he seems to mean not merely that this form given a priori has the character of a purely formal scheme, in itself devoid of any content, and into which any arbitrary content of experience would fit. [...] My intention is namely to give you an account of a recent series of interconnected mathematical studies, which concern the axioms of geometry, their relations to experience, and the logical possibility of replacing them with others. (Epistemological Writtings, p. 1-2)

Para Tanto, Helmholtz enfatiza a aplicação científica da geometria, por meio da medida de segmentos, áreas e volumes. Dessa forma, os problemas dessa disciplina seriam resolvidos pelo uso de magnitudes conhecidas no cálculo das desconhecidas, como ocorre na geometria analítica. Além disso, os axiomas da geometria podem ter como base a medida de magnitudes, tais como a reta ser o caminho *mais curto* entre dois pontos e a soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a 180º, uma variante do postulado das paralelas:

> However, we have also another way of dealing with geometry scientifically. All spatial relationships known to us are namely measurable, meaning that they can be reduced to the specification of magnitudes (lengths of lines, angles, areas, volumes). For just this reason, the problems of geometry can also be solved by looking for the methods of calculation whereby the unknown spatial magnitudes have to be derived from the known ones. This occurs in analytic geometry, where all of the structures of space are only treated as magnitudes and specified by means of other magnitudes. Our axioms themselves also speak of spatial magnitudes. The straight line is defined as the shortest between two points - in this one is specifying a magnitude. The axiom of parallels declares that if two straight lines in the same plane do not intersect (are parallel), the corresponding angles, or the alternate angles, made by a third line intersecting them are pairwise equal t. Or it is postulated, in place of this, that the sum of the angles any triangle is equal to two right angles. These too are cases of specifying magnitudes. (*Epistemological Writtings*, p. 11)

Helmholtz desconsidera pontos importantes da filosofia kantiana em sua argumentação. Em primeiro lugar, para que sejam feitas quaisquer medidas é necessário estabelecer uma unidade arbitrária e sua repetição sucessiva, que só pode ocorrer de acordo com a síntese da imaginação produtiva, justamente o que fornece realidade objetiva aos objetos empíricos[91]. Além disso, ao efetuar qualquer medida, não só a intuição pura do espaço e a imaginação produtiva estão envolvidas, mas também as partes que se repetem *dependem do tempo*, como afirma Kant:

---

[91] Como visto nos *Axiomas da Intuição*, seção 1.3.5.

> Ninguém pode definir o conceito de grandeza em geral [fazer medidas] senão dizendo, por exemplo, que é a determinação de uma coisa, que permite pensar quantas vezes nela se contém a unidade. Mas este quantas vezes assenta na repetição sucessiva, portanto sobre o tempo e a síntese (do homogêneo) no tempo. (*Crítica*, A 242/ B 300)

A estratégia de Helmholtz é mostrar que se existirem outros espaços imagináveis, além do euclidiano de curvatura zero, então os axiomas da geometria não podem ser uma consequência de nossa forma *a priori* da intuição do espaço. De fato, Helmholtz aponta vários avanços feitos em geometrias não euclidianas e mostra as alterações métricas e visuais, que poderiam ocorrer em um espaço pseudoesférico. As imagens nesse mundo hipotético seriam similares àquelas vistas por quem usasse óculos de lentes côncavas e, depois de algum tempo, estaríamos acostumados a elas, da mesma forma que não estranhamos a perspectiva de objetos distantes em nosso cotidiano. Logo, se é possível deduzir leis para nossa percepção sensorial em tal mundo alternativo, Helmholtz conclui que os axiomas da geometria não se sustentam sobre a forma de nossa intuição ou guardam qualquer conexão com ela (cf. *Epistemological Writtings*, p. 18-23).

Entretanto, após a argumentação sobre a percepção visual em mundos alternativos, Helmholtz afirma que somos absolutamente incapazes de conceber de forma intuitiva a 4ª dimensão[92]:

> It is otherwise with the three dimensions of space. All our means of intuition by the senses only stretch to a space of three dimensions, and the fourth dimension would not be a mere modification of what exists, but something completely new. Thus if only on account of our bodily makeup, we find ourselves absolutely unable to imagine a way of intuitively conceiving a fourth dimension. (*Epistemological Writtings*, p. 23)

Mas essa é justamente a interpretação que pode ser feita em trecho da *Crítica*, que esclarece a diferença entre uma possibilidade lógica e transcendental[93], a que já fiz alusão em vários momentos. Na primeira possibilidade temos conceitos que podem ser pensados e não se contradizem, ou seja, todas as geometrias alternativas, suas aplicações práticas e experiências que as confirmem.

Na segunda possibilidade deve existir uma intuição, melhor dizendo, um *intuído* que corresponda a esse conceito, ou seja, uma representação sensível da 4ª dimensão espacial, na qual veríamos, teoricamente, os objetos da 3ª dimensão de todas as perspectivas possíveis, inclusive por dentro. Para tanto, acredito que seria necessário não apenas uma deformação, mas

---

[92] Helmholtz se refere aqui à quarta dimensão exclusivamente espacial, visto que o trabalho de Minkowski sobre o espaço-tempo de 4 dimensões foi publicado em 1907, anos após a morte de Helmholtz, ocorrida em 1894.
[93] Ver *Crítica*, B 203.

um total rompimento na tessitura do espaço-tempo. Assim, um espaço de curvatura diferente de zero pode ser pensado, teorizado, mas por ser inviável à intuição nunca poderá ter possibilidade transcendental. Moritz Schlick, que faz as notas e comentários na edição usada como referência de *Epistemological Writtings* possui a mesma interpretação da doutrina kantiana:

> Even according to Kant's doctrine, non-Euclidean axiom systems would be wholly thinkable, i.e. they could be set up without contradiction. But they would not be imaginable, not realizable in products of intuitive imagination, and they could find no application in physical actuality[94], for this, as being intuitively perceptible, would be subject to the laws governing the manner in which we intuit. If the Euclidean axioms were amongst these laws, then we would be unable to perceive and imagine the corporeal world other than as ordered in Euclidean space. (*Epistemological Writtings*, p. 32, n 35)

Segundo Friedman, a proposta de Helmholtz, ao utilizar uma interpretação perceptual-cinemática dos fundamentos da geometria, transforma radicalmente a concepção kantiana desses fundamentos, baseada unicamente nos movimentos de rotação e translação, que geram linhas retas e círculos na construção euclidiana. Sendo assim, Friedman acredita que tal proposta é muito mais adequada ao que Kant chama de intuição empírica, como oposta à intuição pura (cf. *Geometry, Construction, and Intuition in Kant and His Successors*, p. 211).

Deve-se acrescentar que o apelo à intuição empírica é legítimo para Kant na obtenção de conhecimento e mesmo para fornecer validade objetiva a um conceito, ou seja, sua possibilidade lógica e real:

> Para conhecer um objeto é necessário poder provar a sua possibilidade (seja pelo testemunho da experiência a partir da sua realidade, seja a priori pela razão). Mas posso pensar no que quiser, desde que não entre em contradição comigo mesmo, isto é, desde que o meu conceito seja um pensamento possível, embora não possa responder que, no conjunto de todas as possibilidades, a esse conceito corresponda ou não também um objeto[95]. Para atribuir, porém, a um tal conceito validade objetiva (possibilidade real, pois a primeira era simplesmente lógica) é exigido mais. *Mas essa qualquer coisa de mais não necessita de ser procurada nas fontes teóricas do conhecimento, pode também encontrar-se nas fontes práticas*. (*Crítica*, B XXVII, n., meus itálicos)

A passagem acima mostra ser natural para Kant que o conhecimento tenha acréscimos ou alterações de acordo com a experiência. Podemos citar como exemplo as geometrias alternativas que fornecem a base teórica para espaços de curvatura diferente de zero e que podem ser verificados empiricamente, como aconteceu no famoso experimento de Eddington,

---

[94] Discordo nesse ponto de Schlick, em decorrência de *Crítica*, B XXVII, n, passagem que analisarei na sequência.

[95] É claro que tal objeto deve sempre estar em acordo com a forma da intuição pura do espaço, condição sem a qual não é possível nenhuma experiência.

realizado em 1919 na cidade de Sobral, no Brasil e na ilha de Príncipe, na costa ocidental da África, pontos mais favoráveis à observação de um eclipse solar ocorrido naquele ano. O experimento teve como objetivo comparar a posição de estrelas, no caso as Plêiades da constelação de Touro, no momento de um eclipse e em outro momento, durante a noite. Vemos na figura seguinte o negativo e o positivo de uma mesma fotografia feita em Sobral:

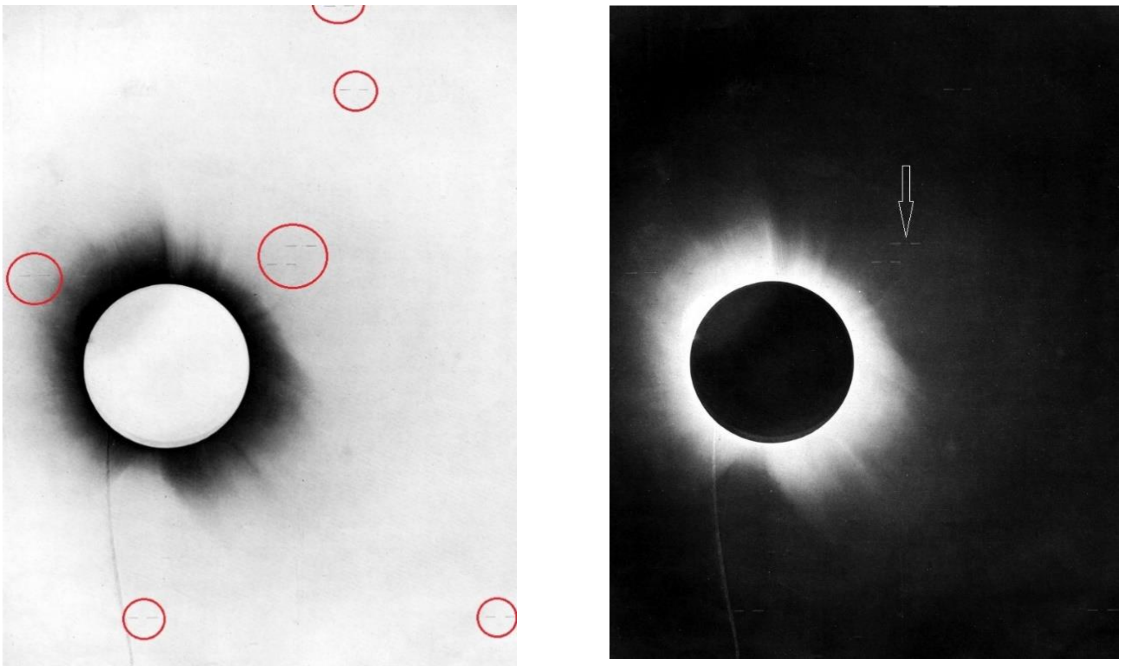

Figura 16

Assinalei com círculos no negativo os pares de traços horizontais, feitos por Eddington, entre os quais está a estrela que terá sua posição comparada, como indica a seta na fotografia em positivo. Devido à deflexão da luz, provocada pela curvatura do espaço em torno do Sol, eram esperadas posições diferentes para uma mesma estrela durante o eclipse, quando comparadas àquelas verificadas em momento diverso e adequado. Tais diferenças de posição trariam evidências para a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, como relata Eddington em seu livro sobre o experimento:

> The best check on the results obtained with the 4-inch lens at Sobral is the striking internal accordance of the measures for different stars. The theoretical deflection should vary inversely as the distance from the sun's centre; hence, if we plot the mean radial displacement found for each star separately against the inverse distance, the points should lie on a straight line. This is show [figura 17] where the broken line shows the theoretical prediction of Einstein, the deviations being within the accidental errors of the determinations. A line of half the slope representing the half-deflection

> would clearly be inadmissible. […] Those who regard Einstein's law of gravitation as a natural deduction from a theory based on the minimum of hypotheses will be satisfied to find that his remarkable prediction is quantitatively confirmed by observation, and that no unforeseen cause has appeared to invalidate the test. (*Space Time and Gravitation*, p. 109 -11)

Os resultados experimentais fortalecem ainda mais as afirmações de Kant sobre a forma tridimensional *a priori* da intuição do espaço, pois acredito que o limite do aparato sensível humano deve ser diretamente proporcional àqueles impostos por nossa inata intuição do espaço. Para amparar esse argumento, farei uso do gráfico que mostra os dados obtidos por Eddington[96]:

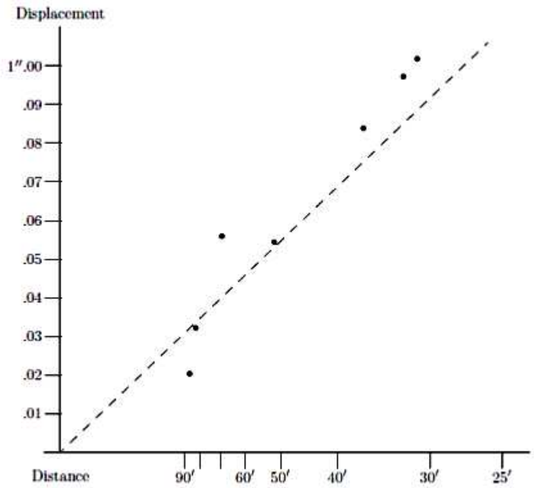

Figura 17

Podemos observar que o ângulo de deflexão máximo está próximo de 1" (um segundo) de arco[97], magnitude 60 vezes menor que o poder de resolução do olho humano normal, em condições favoráveis, que é de 1' (1 minuto) de arco[98], para que se obtenha uma imagem de tamanho mínimo. Lembrando que o Sol é o corpo mais massivo próximo à Terra, que pode causar a maior deflexão da luz e assim uma percepção, ao menos indireta, de alterações em nossa geometria cotidiana, podemos concluir que *para nós quaisquer curvaturas no espaço são visualmente insignificantes*!

---

[96] Desde que foi realizado, o experimento de Eddington recebeu uma série de críticas questionando sua acuidade. Além disso, em eclipses posteriores não foram constatatos os mesmos resultados. Para maiores detalhes ver *Testing relativity from the 1919 eclipse— a question of bias*.

[97] O valor previsto pela Teoria da Relatividade de Einstein é de 1"74, para uma deflexão no limite do disco solar (Ver *Space Time and Gravitation*, p. 108).

[98] Para este valor ver *Spatial Vision*, p. 173.

Assim, o experimento de Eddington, como intuição empírica, forneceu evidências para a Teoria da Relatividade, mas a própria curvatura do espaço que a teoria prevê não é um “objeto” no sentido kantiano, pois não é adequada à nossa intuição pura do espaço.

De modo geral, as críticas feitas a Kant, de acordo com a geometria visual, pretendem mostrar que geometrias alternativas podem ser também apresentadas à intuição, concorrendo assim com a geometria euclidiana em seu posto de conhecimento sintético *a priori*, o que poderia colocar em dúvida o “argumento da geometria” e o próprio Idealismo Transcendental. Nesse sentido, temos quatro tipos principais de argumentação:

1ª) As geometrias não euclidianas podem ser visualizadas.

2ª) A geometria como representada na imaginação visual.

3ª) A geometria indeterminada.

4ª) A geometria visual esférica e hiperbólica.

A primeira tese, vista acima na interpretação de Helmholtz, teve também como expoente Hans Reichenbach, que acredita ser a teoria do espaço em Kant insustentável diante de dois episódios conjugados: o caminho preparado por Riemann, para que uma geometria alternativa fosse aplicada à realidade física e as bases filosóficas lançadas por Helmholtz, para a visualização de espaços não euclidianos (cf. *The Philosophy of Space and Time*, p. 35-6).

Seguindo seu próprio caminho argumentativo, Reichenbach pressupõe que exista uma função normativa da visualização que se impõe ao raciocínio. Por exemplo, ao vermos uma linha reta que intercepta um dos lados de um triângulo, percebemos visualmente que se esta reta for prolongada o suficiente irá encontrar outro lado do triângulo. O processo visual desempenha uma função restritiva sobre o pensamento lógico, que o impediria de aceitar situações possíveis, porém visualmente impraticáveis. Ao se perguntar pela existência de uma superfície com uma única face, ilustra Reichenbach, a resposta usual seria negativa, apesar de que tal superfície pode ser feita:

> Rather late in the history of mathematics the analysis situs was discovered, which led to certain peculiarities of visualization. Does there exist a surface having only one side? Visualization suggests a prompt "no." But every student of a lecture on topology has taken a strip of paper, and twisted once around itself, pasted it together in form of a ring; this paper surface has indeed only one side (*The Philosophy of Space and Time*, p. 41)

Reichenbach refere-se à cinta de Möbius, vista na figura a seguir. Note-se que a partir de qualquer ponto pode ser percorrida toda a superfície, retornando ao ponto de partida em uma superfície de face única:

Figura 18

Para Reichenbach, o juízo sintético *a priori* de Kant é influenciado muito mais pelas leis válidas para a visualização do que pelo pensamento lógico. Assim, a filosofia apriorística resiste às geometrias não euclidianas pelo fato de que, apesar de sua possível construção lógica, não podem ser visualizadas. Se utilizarmos apenas elementos euclidianos na tentativa de realizar tal objetivo, a tarefa será impossível. O enfoque deve ser então alterado de tal forma a recompor os elementos da imagem, para que a partir dela possamos identificar as leis das geometrias não euclidianas (cf. *The Philosophy of Space and Time*, p. 43-4).

Para tal mudança de enfoque, devemos primeiro considerar que nossa visualização de curvatura é sempre a partir de um ponto de vista externo, ou seja, não será verificada a curvatura de uma superfície se teoricamente estivéssemos nela, mas só a partir de um referencial externo, na 3ª dimensão. Analogamente, para perceber a curvatura do espaço ele deve ser visualizado a partir de fora, de um ponto externo a ele, o que é impossível:

> If a piece of paper is fashioned into a cylinder, it will have an exterior curvature, but not an interior curvature [o pedaço de papel, não o cilindro], because the rolling does not involve an expansion; the surface of a cylinder has therefore the geometry of the Euclidean plane. What we usually visualize as the curvature of a surface is its exterior curvature. If we were to attempt a similar visualization for a three-dimensional manifold, we would have to imbed it in (at least) a four-dimensional space. Here lies the difficulty of the problem. It seems to be very difficult to impose a new dimension upon visualization. (*idem*, p. 53)

A única saída é tentar visualizar curvaturas no espaço a partir de um referencial interno, na 3ª dimensão e, para tanto, Reichenbach considera que a visualização euclidiana é apenas um hábito que pode ser modificado de acordo com um ajuste de perspectiva, executado sobre a congruência de objetos, que deve ser redefinida. Tal método não deixa de ser um mapeamento de relações não euclidinas sobre o espaço euclidiano:

> It is indeed possible to visualize non-Euclidean space by an adjustment of visualization to a different congruence. Euclidean space has thus lost its privileged status. It should not be objected that even this method constitutes a mapping of non-Euclidean relations upon Euclidean space. […] Space will be visualized as non-Euclidean if we succeed in visualizing the new definition of congruence as congruence, i.e., in adjusting our eyes to it. It is, in fact, the result of training the eyes to adjust to the behavior of solid bodies seen in different angular perspectives that

> enables us to visualize Euclidean congruence. If we readjust the eyes we can similarly visualize non-Euclidean congruence. (*idem*, p. 56-7)

A argumentação de Reichenbach é obscura, mas creio que sua intenção é mudar a perspectiva da geometria euclidiana do espaço, de maneira semelhante àquela situação ilusória que acontece quando percebemos sólidos desenhados em um papel. Na próxima figura, por exemplo, podemos visualizar um cubo, apesar de termos apenas doze segmentos em uma superfície plana[99]:

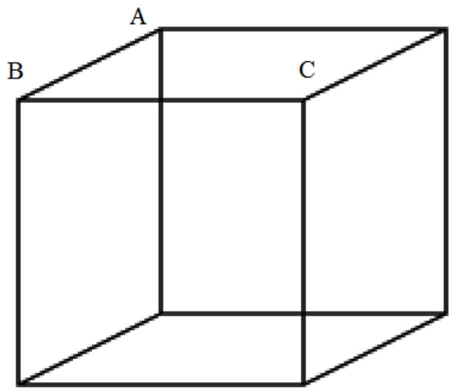

Figura 19

Vemos acima apenas dois quadrados e quatro paralelogramos que possuem pontos em comum, mas para que a figura seja apreendida como um cubo, dentre outros processos visuais, devemos considerar ilusoriamente que os segmentos AB e BC são congruentes[100]. De maneira semelhante, acredito que o método de Reichenbach consiste em "treinar os olhos" para estabelecer congruências na perspectiva tridimensional, de tal forma que a curvatura do espaço seja apreendida, como fazemos naturalmente com o suposto cubo acima.

Entretanto, geometria não é um hábito ou uma ilusão. No momento em que ligo dois pontos A e B por um segmento de reta e por uma curva, será sempre imediato que o caminho mais curto entre os pontos é o segmento de reta. Nenhuma argumentação, por mais elaborada que seja, fará tal distorção visual e lógica, que os considere congruentes. Acontece que não

[99] Na verdade é impossível para nós qualquer apreensão sensível da 2ª dimensão. Um plano nos é tão inacessível quanto um espaço não euclidiano. Da mesma forma que descrevemos melhor certos eventos astronômicos através de geometrias alternativas, da mesma forma usamos recursos teóricos na descrição de nosso espaço cotidiano. Quando digo uma superfície "plana", estou me referindo a um objeto tridimensional com uma medida muito pequena, em comparação às outras duas.
[100] É evidente que processos bem mais complexos estão envolvidos nessa apreensão, não só em vista da fisiologia moderna, mas mesmo para a filosofia crítica kantiana. Vou me ater ao aspecto da congruência apenas, para seguir a argumentação de Reichenbach.

tenho só um segmento de reta e uma curva, bem ou mal desenhados, mas todas as relações geométricas de maior, menor, entre dois pontos e assim por diante, com as quais faço inferências. Imaginar que o segmento de reta e a curva, que ligam A e B, sejam congruentes, equivale a corromper não só a imagem, mas também todas essas relações e suas consequentes inferências.

De qualquer forma, o procedimento de Reichenbach leva em conta apenas disposições pessoais para perceber uma curvatura do espaço cotidiano, que é insignificante para os padrões humanos, como já vimos. Além disso, deve-se considerar que para Kant, ainda mais importante do que a possibilidade lógica de um conceito é sua possibilidade de *construção*, como observa Martin:

> It seems to be the case that there are ways in which non-Euclidean geometries can also be constructed, by purely analytical means or by constructing Euclidean models of non-Euclidean geometries, and certainly Kant's assumption that non-Euclidean geometries could never be used in physics has proved be too narrow. […] When Kant emphasises the importance of intuition for geometry he means to say, if we are right, that many geometries are thinkable without contradiction but that from the extensive region of what is thinkable whithout contradiction Euclidean geometry is singled out and distinguished by the fact that it can be constructed. (*Kant's Metaphysics and Theory of Science*, p. 25).

Discordo de Martin, quando na passagem acima assegura que as geometrias não euclidianas seriam inúteis para a Física, na concepção de Kant[101]. Insisto que não é uma preocupação de Kant fazer considerações sobre a real natureza física do espaço no escopo da *Crítica*, na qual as opiniões sobre a utilidade de geometrias alternativas são bem mais contidas do que em textos pré-críticos, como *The true estimation of living forces*[102]. Além disso, vimos na análise da passagem B XXVII, feita nessa seção, que as fontes empíricas são para Kant elementos importantes na aquisição de conhecimento. Assim, nada impede que a curvatura do espaço seja usada como base teórica para eventos relativísticos, mas em termos kantianos *não pode ser apresentada como intuição*, não há uma representação sensível para seu conceito, ou seja, não pode ser construída.

A "construção de um conceito" é por isso um dos pontos focais do Idealismo Transcendental, pois como um símbolo do projeto crítico de Kant, reflete ponto a ponto seus elementos essenciais, quais sejam, conceitos e intuições *a priori*, imaginação produtiva e esquemas, que levam aos conhecimentos sintéticos, universais, apodíticos e por consequência

---

[101] A base argumentativa de Martin é o biângulo ao qual Kant se refere em A 220 / B 268. (Ver *Kant's Metaphysics and Theory of Science*, p. 24).

[102] Ver seção 1.2.

às validades objetivas, imperfeitas é claro, mas suficientes, tanto para nossa vida cotidiana, quanto para a aquisição de novos conhecimentos científicos e imposição de limites à Metafísica. A "construção de um conceito" é um símbolo da *construção da realidade*[103], verdadeiro núcleo da filosofia revolucionária de Kant e que tem como eixo argumentativo a geometria euclidiana.

A segunda tese se refere à geometria como representada na imaginação visual e é defendida por Peter Strawson. Sua argumentação aponta diferenças entre um objeto apresentado à intuição pura e um objeto físico, de tal forma que no primeiro caso temos uma geometria espacial fenomênica ou de "aparências", justamente aquela fornecida pela imaginação visual, na qual é válida a geometria euclidiana e a teoria do espaço em Kant. No segundo caso temos a geometria dos objetos físicos, como realmente são, nos quais a estrutura é não euclidiana[104]. Para Strawson o erro fundamental de Kant foi não levar em conta essa diferença:

> Kant attempts to use his insight into the necessities of *phenomenal* geometry to resolve the other and greater difficulty, the difficulty created by the apparently necessary application of Euclidean geometry to physical space. *This* difficulty, *this* necessity, are indeed illusory. Kant's fundamental error, for which, at that stage in the history of science, he can scarcely be reproached, lay in not distinguishing between Euclidean geometry in its phenomenal interpretation and Euclidean geometry in its physical interpretations […] Because he did not make this distinction, he supposed that the necessity which truly belongs to Euclidean geometry in its phenomenal interpretation also belongs to it in its physical interpretation. He thought that the geometry of physical space had to be identical with the geometry of phenomenal space. (*The Bounds of Sense*, p. 285).

Como já foi dito, Kant deixa explícito na *Crítica*[105], que o espaço tem realidade empírica enquanto condição para uma experiência possível e idealidade transcendental, ou seja nada significa, quando considerado como fundamento das coisas em si, ou das coisas como são realmente. A argumentação de Strawson se fundamenta sobre uma diferença entre o que vemos ou imaginamos e a real natureza do espaço, frente às novas evidências empíricas. Entretanto, pelo seu próprio procedimento de verificação e raciocínio indutivo, a ciência também não poderá dar uma palavra final sobre o assunto, algo que Kant também deixa bem claro:

> […] o conceito transcendental dos fenômenos no espaço é uma advertência crítica de que nada, em suma, do que é intuído no espaço é uma coisa em si, de que o espaço não é uma forma das coisas, forma que lhes seria própria, de certa maneira, em si, mas que nenhum objeto em si mesmo nos é conhecido e que os chamados objetos exteriores são apenas simples representações da nossa sensibilidade, cuja forma é o espaço, mas cujo verdadeiro correlato, isto é, a coisa em si, não é nem pode ser

[103] Deve-se notar que tal construção é feita a partir de elementos existentes, ou seja, não é uma construção ficcional que Kant contesta na *Refutação do Idealismo* (Ver *Crítica*, A 226 / B 275).
[104] Ver *Bounds of Sense*, p. 280; 286.
[105] Ver A 28 / B 44.

> conhecida por seu intermédio; de resto, jamais se pergunta por ela na experiência. (*Crítica*, A 30 / B 45)

Strawson não percebe em sua totalidade o caráter subjetivo do espaço kantiano, pois sua crítica é fundamentada na imaginação visual, que é limitada pela forma da intuição pura do espaço, com tamanha imposição que os objetos dizem muito mais sobre nós do que conseguimos dizer sobre eles. A geometria euclidiana é a ciência da forma pura da intuição externa e da intuição empírica que lhe é sempre adequada. Kant nunca teve a pretensão de estender seu uso além desse limite.

Representando a terceira tese, James Hopkins critica a proposta de Strawson e propõe que a geometria fenomênica é indeterminada, pois pode ser tanto euclidiana, quanto não euclidiana. O que vai determinar o uso da geometria adequada será a escala que se deve aplicar a cada situação:

> One may feel, for example, that it should be possible to draw or imagine any simple figure, of any size, in space; and hence to picture figures on the astral scale, *or with regard to the minute differences, relevant to the verification of non-Euclidean geometry*. One may also feel that we ought somehow be able to form pictures, different from any we have, of the non-Euclidean; or, failing this, that our imagery is unambiguously Euclidean. If it is possible to picture with a precision or on a scale relevant to detecting non-Euclidean phenomena, it should be possible to picture detectably non-Euclidean phenomena, and our imagery remains as Euclidean when constructed whith reference to an astral scale as when referred to the middle-sized or the very small. (*Visual Geometry*, p. 24, meus itálicos)

Como destacado na passagem acima, Hopkins deixa claro que a escolha de uma escala é relevante na *verificação* de geometrias não euclidianas, ou seja, é proposto um método para melhorar a acuidade de um experimento. Eddington, por exemplo, teve que usar um micrômetro[106] para medir a diferença na posição das estrelas nas chapas fotográficas de Sobral, pois a deflexão da luz não chega a 2” (dois segundos) de arco. Pela proposta de Hopkins, poderíamos talvez ampliar as fotografias, modificar a escala, para que a medida fosse feita com mais facilidade. Entretanto, a mudança de escala traz outros problemas técnicos que podem influenciar a acuidade, como aumento da granulação das imagens, ruídos e outros efeitos. De qualquer forma, uma escolha de escalas serviria apenas na *verificação do efeito* de geometrias não euclidianas e a visualização da curvatura do espaço continuaria impossível.

A quarta e última tese a ser considerada, qual seja, a geometria visual esférica é representada por Thomas Reid e sua interpretação sobre o assunto é comentada por James van

---

[106] Ver *Space Time and Gravitation*, p. 108.

Cleve, Gideon Yaffe e Gordon Belot. A argumentação de Thomas Reid é fundamentada em uma geometria visual esférica[107] e supõe inicialmente que o olho, considerado como um ponto no centro de uma esfera, considera cada uma das circunferências, com raio igual ao da esfera[108], como se fossem retas. Isso acontece porque a curvatura da esfera está sempre voltada diretamente para o olho que, assim, não a percebe. Também é considerado que qualquer linha desenhada no plano dessas circunferências será vista como uma reta (cf. *An Inquiry into Human Mind*, p. 212). Essa afirmação é esclarecida pela figura seguinte, na qual a linha AB é visualizada como se fosse o segmento CD, ou qualquer outro que tenha extremidades nas linhas EA e EB. Além disso, terão o mesmo comprimento visual definido apenas pelo ângulo α.

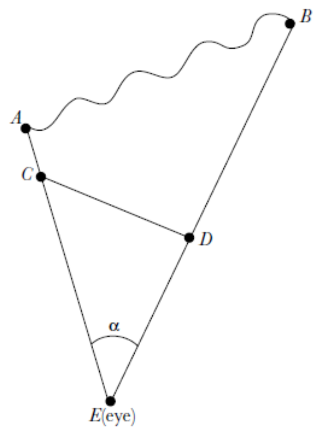

Figura 20

Segundo Reid, essas considerações iniciais terão como consequências que o olho percebe apenas a posição de objetos em relação a ele e não suas distâncias. Assim, quaisquer pontos que tiverem a mesma posição em relação ao olho serão vistos como um único ponto[109] e considerado algum grande círculo da esfera, quaisquer retas nele contidas terão a mesma posição visual, assim como qualquer circunferência de um grande círculo, quando prolongada retornará sobre si mesma e será percebida como uma linha reta (cf. *idem*, p. 213). Tais afirmações são ilustradas na figura seguinte, na qual a posição esférica do ponto A depende

[107] Reid apresenta sua teoria em oito princípios e doze proposições. Para maiores detalhes ver *An Inquiry into Human Mind*, p. 212 - 17.
[108] Para usar as palavras de Reid, vou chamá-las grandes círculos.
[109] Não exatamente por esses pontos se localizarem ma mesma linha de visão, mas por que têm posições esféricas iguais, como acentua Yaffe (ver *Reconsidering Reid's Geometry of Visibles*, p. 614-5).

apenas dos ângulos α, β e γ. Assim, qualquer ponto do segmento CA terá a mesma posição esférica.

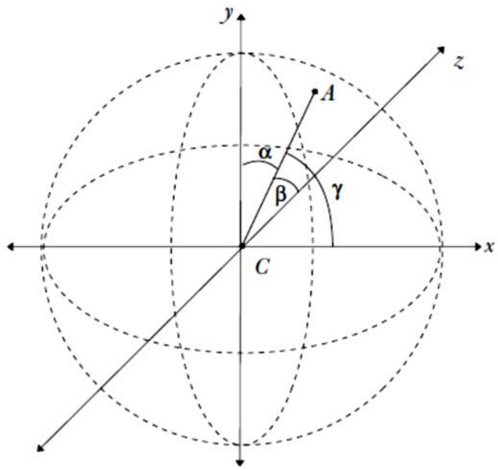

Figura 21

Apesar da interessante teoria de Reid, sua fundamentação em elementos euclidianos elimina qualquer aprioridade e não pode ser utilizada contra o “argumento da geometria”. Pelo mesmo motivo pode-se descartar a geometria visual hiperbólica, sugerida pelos experimentos conduzidos e publicados por Albert A. Blank, na década de 50[110],

Fundamentadas na geometria visual, as quatro teses expostas acima poderiam colocar em dúvida o “argumento da geometria”, devido à possibilidade de que geometrias alternativas definissem o espaço físico-visual contrariando a argumentação de Kant na *Estética*, que supostamente concederia essa função unicamente à geometria de Euclides. Entretanto, vimos que no projeto crítico de Kant a geometria euclidiana é a ciência de nossa intuição pura do espaço e não tem outras pretensões!

Cada tese foi exposta e contra-argumentada separadamente. Mas, podemos ainda dizer que todas elas ignoram a importante distinção feita por Kant entre imagem e esquema (*schema*). Este último só pode existir em pensamento e é uma regra da síntese da imaginação. Assim, nenhum objeto da experiência ou sua imagem atingiriam o conceito empírico, pois este é geral, uma regra da síntese pura que não pode se reduzir a uma imagem particular. Dessa forma, a imagem só é possível através do esquema de conceitos sensíveis, aos quais essas imagens nunca serão totalmente adequadas, como esclarece a *Crítica*:

[110] Ver *Metric Geometry in Human Binocular Perception: Theory and Fact*.

> De fato, os nossos conceitos sensíveis puros não assentam sobre imagens dos objetos, mas sobre esquemas. Ao conceito de um triângulo em geral nenhuma imagem seria jamais adequada. Com efeito, não atingiria a universalidade do conceito pela qual este é válido para todos os triângulos, retângulos, de ângulos oblíquos, etc., ficando sempre apenas limitada a uma parte dessa esfera. O esquema do triângulo só pode existir no pensamento e significa uma regra da síntese da imaginação com vista a figuras puras no espaço. Muito menos ainda um objeto da experiência ou a sua imagem alcançaria alguma vez o conceito empírico, pois este refere-se sempre imediatamente ao esquema da imaginação, como a uma regra da determinação da nossa intuição de acordo com um certo conceito geral. [...] Só poderemos dizer que a imagem é um produto da faculdade empírica da imaginação produtiva, e que o esquema de conceitos sensíveis (como das figuras no espaço) é um produto e, de certo modo, um monograma da imaginação pura a priori, pelo qual e segundo o qual são possíveis as imagens; estas, porém, têm de estar sempre ligadas aos conceitos, unicamente por intermédio do esquema que elas designam e ao qual não são em si mesmas inteiramente adequadas. (*Crítica*, A 141-2 / B 180 -2).

3.2) As geometrias pura e aplicada

A questão das geometrias pura e aplicada coloca em dúvida a sinteticidade a priori da geometria e, em conseqüência, a exposição transcendental. A crítica começa com Russell, que afirma ser a geometria pura aquela que deduz consequências que se seguem logicamente de axiomas e, apesar de *a priori*, não pode ser sintética, enquanto a geometria como um ramo da Física é uma ciência empírica, inferida de medidas e não é *a priori*, apesar de sintética:

> The transcendental (or epistemological) argument, which is best stated in the Prolegomena, is more definite than the metaphysical arguments, and is also more definitely refutable."Geometry," as we now know, is a name covering two different studies. On the one hand, there is pure geometry, which deduces consequences from axioms, without inquiring whether the axioms are "true"; this contains nothing that does not follow from logic, and is not "synthetic," and has no need of figures such as are used in geometrical text-books. On the other hand, there is geometry as a branch of physics, as it appears, for example, in the general theory of relativity; this is an empirical science, in which the axioms are inferred from measurements, and are found to differ from Euclid's. Thus of the two kinds of geometry one is a priori but not synthetic, while the other is synthetic but not a priori. This disposes of the transcendental argument (*A History of Western Philosophy*, p. 716).

Friedman apresenta argumentos semelhantes e afirma que a geometria pura é um estudo de relações lógicas entre proposições de um sistema axiomático, enquanto a geometria aplicada deve verificar a aplicabilidade desse sistema de axiomas no mundo real:

> The standard modern complaint against Kant runs as follows. Kant fails to make the crucial distinction between pure and applied geometry. Pure geometry is the study of the formal or logical relations between propositions in a particular axiomatic system, an axiomatic system for Euclidean geometry, say. As such it is indeed a prior and certain (as a prior and certain as logic is, anyway), but it involves no appeal to spatial intuition or any other kind of experience. Applied geometry, on the other hand, concerns the truth or falsity of such a system of axioms under a particular interpretation in the real world (*Kant's Theory of Geometry*, p. 455-6).

Para fortalecer sua argumentação, Friedman se apóia na passagem seguinte da *Crítica*, na qual Kant afirma que o movimento de um objeto não pertence a uma ciência pura, enquanto o movimento como descrição de um espaço deve ser estudado pela geometria:

> O movimento de um objeto no espaço não compete a uma ciência pura, e, portanto, não pertence à geometria; só pela experiência, e não a priori, se pode conhecer que algo seja móvel. Mas o movimento, enquanto descrição de um espaço, é um ato puro da síntese sucessiva do diverso na intuição externa em geral por intermédio da imaginação produtiva e pertence não só à geometria, mas também mesmo à filosofia transcendental (*Crítica*, B155n).

Friedman considera o anacronismo de suas afirmações sobre a geometria em Kant e afirma que a matemática pura deve ser independente da aplicada, sendo que à primeira não pertence a idéia de movimento. Entretanto, essa "mistura de idéias" físicas e matemáticas é essencial à unidade do sistema kantiano (cf. *Kant's Theory of Geometry*, p. 481-2).

Para Palmquist, entretanto, essa passagem da *Crítica* mostra a fundamental diferença entre a perspectiva transcendental e empírica e pode ser vista como precursora da moderna distinção entre geometria pura e aplicada (cf. *Kant on Euclid*, n12), enquanto Martin tem uma interpretação mais contida sobre a questão e mais próxima ao texto kantiano. Para ele, Kant vai muito além de uma aplicação da matemática na física descobrindo uma habilidade humana que está ativa nas duas ciências:

> By discovering the connection between mathematics and natural science Kant fundamentally went far beyond the concept of applied mathematics. What we have is not a ready-made mathematics which is applied in physics, but one fundamental human faculty which is active in mathematics and in physics (*Kant's Metaphysics and Theory of Science*, p.36).

Apesar das várias opiniões vistas acima, acredito que Grosdanoff desenvolve a questão de forma satisfatória. Para ele, tais críticas baseadas em geometrias pura e aplicada falham na interpretação da própria filosofia kantiana, pois o espaço da intuição pura não pode ser destinado às "coisas em si". Este é justamente o caminho percorrido pela física atual ao investigar pelas propriedades do espaço. Para Kant, não é a experiência que vai nos dizer o que é o espaço, visto que para nós ele já está determinado como forma da intuição pura, que exclui quaisquer influências empíricas, ao contrário, é a intuição que dará possibilidade a qualquer experiência externa. Assim, para Grosdanoff, as geometrias pura e aplicada são em Kant uma única, visto que elas devem valer apenas para as coisas como aparecem para nós, não como são em si mesmas (cf. *Kant's theory of space and non-Euclidean geometries*, p.4-6).

Uma das principais críticas feitas ao "argumento da geometria" é a distinção entre geometria pura e aplicada, mas vimos que se sustentam apenas em uma interpretação incorreta da *Crítica* e do próprio Idealismo Transcendental. A intuição pura do espaço é um molde inato, no qual colocamos a matéria sensorial bruta da experiência externa e, como veremos, esse molde força os dados do sentidos de maneira única e constante. É evidente que as propriedades do molde da sensibilidade, unidas às condições impostas pelo entendimento, fornecerão as características do produto pronto: a representação, a realidade como a conhecemos.

Da mesma forma que o vazio dá forma ao vaso e não a argila, o molde vai impor à representação seu formato, nunca o contrário, de tal maneira que aquilo que se disser sobre o formato do molde vale necessariamente para o que foi moldado, como foi visto nos *Axiomas da Intuição*: "A intuição empírica só é possível mediante a intuição pura (do espaço e do tempo); o que a geometria diz de uma deverá irrefutavelmente valer para a outra [...]" (*Crítica*, B 206). Muita informação se perde no processo de moldagem e acredito que à totalidade de informações Kant chama de "coisa em si", mas a geometria que vale para as intuições pura e empírica é uma só; ou seja, não há para Kant uma diferenciação entre geometrias pura e aplicada.

Está claro que a argumentação na *Crítica* não tem outra escolha, senão partir da representação para a forma dessa representação e, em um movimento regressivo, estabelecer uma relação daquilo que é intuído para a intuição. Seguindo a analogia que fiz acima, não posso a partir do vazio concluir que ele forma um vaso, entretanto, posso aplicar aos vasos uma mesma ciência, sintética e *a priori*, que me fornecerá propriedades universais, como visto na "construção de um conceito". Então, se todos os vasos possuem as mesmas características, pois são necessariamente universais, procura-se por uma razão para que isso ocorra e conclui-se que todos devem ser feitos a partir do mesmo molde.

É a partir da possibilidade de uma experiência externa indiscutível que procuramos por suas causas subjetivas. A partir de uma representação dada chega-se na intuição que lhe deu forma e quanto mais simples essa representação, mais forte o argumento. Se partirmos de princípios, ou conceitos primitivos como ponto, reta e plano, então ele será inquestionável.

Esse é o início de minha abordagem da filosofia da matemática em Kant e que será detalhada no capítulo 4. No momento, basta que tenhamos em mente que a "construção de um conceito" e os "Axiomas da Intuição" fornecem, respectivamente, as propriedades universais de nossa intuição externa do espaço e a realidade objetiva dessa intuição, que são pilares do Idealismo Transcendental fincados no solo da geometria.

Capítulo 4: Justificativas ao "argumento da geometria"

Segundo alguns autores, o "argumento da geometria" não é uma parte essencial na argumentação kantiana, mas usado apenas como consequência da análise precedente na *Crítica*, que prova ser o espaço uma forma da intuição pura. De acordo com outra corrente, representada por Lisa Shabel, o "argumento da geometria" é essencial para a arquitetura argumentativa no projeto crítico. Veremos as duas possibilidades e suas consequências a seguir.

4.1) A geometria euclidiana é indiferente à *Estética*

Veremos nessa seção alguns autores que negam à geometria euclidiana um papel de destaque na *Crítica*. Dessa forma, o "argumento da geometria" não teria influências na estrutura argumentativa da Estética e não afetaria o Idealismo Transcendental. Dentre outros[111], Robert Pippin afirma que a argumentação kantiana sobre a intuição pura do espaço independe de quaisquer considerações sobre a geometria:

> My critical intention is to show that when the relation between Kant's arguments has been clarified, there is an argument apparent which attempts to demonstrate the ideality of space as a "form", and which does not directly depend on any views about geometry. […] (*Kant's theory of form*, p. 55).

Considerações dessa natureza são feitas também por Palmquist, que analisa a *Crítica* sob um sistema de perspectivas e cabe à *Estética* a perspectiva transcendental e não empírica. Como referência à argumentação é indicada a seguinte passagem da *Crítica*:

> [...] o conceito transcendental dos fenômenos no espaço é uma advertência crítica de que nada, em suma, do que é intuído no espaço é uma coisa em si, de que o espaço não é uma forma das coisas, forma que lhes seria própria, de certa maneira, em si, mas que nenhum objeto em si mesmo nos é conhecido e que os chamados objetos exteriores são apenas simples representações da nossa sensibilidade, cuja forma é o espaço, mas cujo verdadeiro correlato, isto é, a coisa em si, não é nem pode ser conhecida por seu intermédio; de resto, jamais se pergunta por ela na experiência (*Crítica*, A30/B45).

Sobre a passagem acima, Palmquist nota a advertência que Kant faz ao leitor para considerar os argumentos da *Estética* sob uma perspectiva transcendental, pois nesse ponto da *Crítica* nenhum argumento pode surgir de uma perspectiva empírica:

> Here Kant is clearly warning the reader not to regard the arguments of the Aesthetic, which adopt the transcendental perspective, as applying also to the empirical perspective. For, as he puts it quite bluntly, the sorts of questions he asks in this part of the Critique would not even arise if we limited our attention to the empirical perspective. Yet this warning has been overlooked or ignored by most of Kant's

[111] Pippin enumera outros autores que compartilham de sua interpretação (ver *Kant's theory of form*, p. 55, n 4).

> critics, with the result that Kant's position in the Aesthetic is probably the most frequently rejected part of the entire Critical System (*Kant on Euclid*, §11).

Sua posição é clara quanto ao papel da geometria como apenas um exemplo usado na *Estética* e de forma alguma essencial ao sistema kantiano. Vejamos uma importante passagem sobre essa argumentação de Palmquist, que comento em seguida:

> One of the most unfortunate results of the tendency to ignore Kant's warning against neglecting the perspectival character of his arguments is that he is interpreted as saying that Euclidean geometry is necessarily true of the physical world. In fact, a careful reading of the Aesthetic reveals that he never says anything of the kind! Rather, his whole argument is intended to draw the reader away from such empirical questions and towards questions concerning what is "bound up with [human] consciousness", and is therefore "apodeictic" in a completely non-physical (or metaphysical) way. The Aesthetic can only be understood as presenting a coherent argument once we recognize that in it Kant is not doing physics! Rather, he expects us to join with him in limiting our attention to the transcendental perspective. *Viewing it in this way enables us to see that Kant is using geometry as an example - a test case - and not as an essential element in his system*. (*idem*, §12, meus itálicos).

Concordo plenamente que o interesse de Kant na *Estética* não é utilizar a geometria euclidiana para uma análise de um espaço real, como afirmei várias vezes na seção anterior. Entretanto, após tudo o que foi dito até aqui, não posso concordar que a geometria seja apenas um exemplo, pois acredito que seu papel é fundamental não apenas na *Estética*, mas na arquitetura argumentativa de todo o projeto crítico kantiano, como ficará ainda mais evidente nas seções seguintes.

4.2) A geometria euclidiana é indispensável à *Estética*

Shabel propõe que o "argumento da geometria" seja uma ponte filosófica entre a *Exposição Metafísica* e o Idealismo Transcendental. Seu primeiro movimento é distinguir, na *Estética*, três afirmações que podem ser usadas separadamente para esclarecer o Idealismo Transcendental, mas não podem ser concluídas a partir do "argumento da geometria" (cf. *Kant's "Argument from Geometry"*, p.197):

[1] O Espaço é uma intuição pura;

[2] O Espaço é uma forma pura da intuição sensível;

[3] O Espaço só pode ser descrito como em [1] e [2].

Para expor essas afirmações e interligá-las através do "argumento da geometria", será necessário reler a *Estética* observando a estrutura do argumento kantiano. Essa primeira parte da *Crítica* tem por objetivo fornecer uma ciência de todos os princípios da sensibilidade *a priori*; isto é, mostrar que existe uma capacidade de representar características dos objetos de nossa experiência de forma intuitiva e não-empírica. Kant inicia a investigação com o desafio imaginativo[112] de se retirar de um corpo tudo que possa ser pensado a respeito dele. Restam desse processo a forma e a extensão, que devem pertencer à intuição pura, visto que permanecem mesmo sem a presença de um objeto real das sensações ou sentidos. Kant conclui que o Espaço é uma forma pura da intuição sensível e passa à sua avaliação, em duas exposições.

Na *Exposição Metafísica*, são propostos dois argumentos que mostram a universalidade e necessidade do Espaço. Tais características *nunca poderiam ser extraídas da experiência* e o tornam uma representação *a priori*. Os dois argumentos seguintes mostram que do Espaço temos *uma cognição não conceitual de uma única e infinita magnitude*; ou seja, o Espaço é uma intuição[113]. Esses quatro argumentos tomados juntos estabelecem o que foi considerado acima como afirmação [1]: o Espaço é uma intuição pura (cf. *Crítica*, B 40). E ainda, de acordo com a definição de exposição metafísica, dada pelo próprio Kant, tais argumentos devem fornecer apenas uma descrição parcial para caracterizar nossa representação do espaço: "Entendo, porém, por exposição (expositio) a apresentação clara (embora não pormenorizada) do que pertence a um conceito; a exposição é metafísica quando contém o que representa o conceito enquanto dado a priori." (*Crítica*, B 38).

Por conta disso, essa exposição procurou mostrar apenas características primitivas do Espaço com as quais temos cognições *a priori.* Devido às nossas restrições para representar o Espaço como infinito e único, a estratégia de argumentação se concentra em exibir a falta de limites da extensão espacial e a simultaneidade de suas partes (cf. *Kant's "Argument from Geometry"*, p. 199).

Na sequência da *Estética*, a *Exposição Transcendental* estabelece que são possíveis outros conhecimentos sintéticos *a priori*, utilizando como princípio básico a intuição pura do Espaço e, é claro, suas características primitivas de infinitude e singularidade, vistas na *Exposição Metafísica*. Assim, a *Exposição Metafísica* mostra as características únicas de nossa intuição espacial, enquanto a *Exposição Transcendental* apresenta o emprego dessa mesma intuição na busca de novos conhecimentos *a priori*. Kant apresenta esse tipo de conhecimento

[16] Em minha opinião, o desafio imaginativo é apenas retórico, pois o Espaço como forma da intuição é parte de nossa aparelhagem cognitiva e tão impossível de ser pensado como a inteligência ou a memória. Assim como a própria memória não pode ser lembrada, a forma da intuição não pode ser intuída. Voltarei a esse ponto.

[17] Para maiores detalhes sobre os quatro argumentos ver a Introdução.

no chamado “argumento da geometria”, a ciência que determina de forma sintética e *a priori* as propriedades do Espaço:

> A geometria é uma ciência que determina sinteticamente, e contudo a priori, as propriedades do espaço. Que deverá ser, portanto, a representação do espaço para que esse seu conhecimento seja possível? O espaço tem de ser originariamente uma intuição, porque de um simples conceito não se podem extrair proposições que ultrapassem o conceito, o que acontece, porém, na geometria (Introdução, V). Mas essa intuição deve-se encontrar em nós a priori, isto é, anteriormente a toda a nossa percepção de qualquer objeto, sendo portanto intuição pura e não empírica. Com efeito, as proposições geométricas são todas apodíticas, isto é, implicam a consciência da sua necessidade como por exemplo: o espaço tem somente três dimensões; não podem ser, portanto, juízos empíricos ou de experiência, nem derivados desses juízos (Introdução, II). (*Crítica*...B41).

Os críticos ao “argumento da geometria” tem a seguinte leitura da passagem acima:

> 1. We have synthetic a priori cognition of Euclidean geometry
> Or: Euclidean geometry is necessarily true
> 2. Such cognition is possible only if space is a pure intuition
> Or: pure intuition of space is a *necessary condition* of our synthetic a priori cognition of geometry
> Therefore, space is a pure intuition (*Kant's “Argument from Geometry”*, p.201, grifos nossos).

Explicando essa passagem de outra forma, seja P a proposição: o Espaço é uma intuição pura e G a proposição: nós temos um conhecimento sintético *a priori* da geometria euclidiana. Segundo a passagem acima, G é necessariamente verdadeira e P é condição necessária para G; ou seja, P é o consequente da condicional $G \longrightarrow P$. Ao relacionarmos G e P, através de uma condicional verdadeira, devemos ter P necessariamente verdadeiro. Visto dessa maneira, o Espaço como forma de uma intuição pura depende de nosso raciocínio matemático na geometria. Uma interpretação desse estilo é feita por Russell, que aplica o mesmo padrão argumentativo dos *Prolegômenos* na *Crítica*:

> Starting from the question; ‘How is pure mathematics possible?’ Kant first point.s out that all the propositions of mathematics are synthetic. He infers hence that these propositions cannot, as Leibniz had hoped, be proved by means of a logical calculus; on the contrary, they require, he says, certain synthetic a priori propositions, which may be called axioms, and even then (it would seem) the reasoning employed in deductions from the axioms is different from that of pure logic. Now Kant was not willing to admit that knowledge of the external world could be obtained otherwise than by experience; hence he concluded that the propositions of mathematics all deal with something subjective, which he calls a form of intuition. (*The Principles of Mathematics*, p. 456).

Entretanto, para Shabel, as exposições visam objetivos distintos e o movimento argumentativo se faz, sinteticamente, *da intuição pura do Espaço para a possibilidade de conhecimentos sintéticos na geometria*. (cf. *Kant's “Argument from Geometry”*, p.202).

À época de Kant a geometria euclidiana era considerada como um exemplo típico de conhecimento *a priori* e sua sinteticidade já havia sido discutida na Introdução V. Logo, o interesse de Kant não é se temos um conhecimento sintético *a priori* da geometria, mas como nossa representação do Espaço pode nos proporcionar esse conhecimento. Isso acontece porque, para ser feita a representação de um objeto da geometria, faz-se necessário representar as propriedades desse objeto, mesmo que mentalmente. Como representação de um objeto da geometria, se o Espaço for *a priori* então essas propriedades serão da mesma natureza e, ainda, se esta representação for uma intuição, tais propriedades serão sintéticas. Assim, é o conhecimento geométrico que depende de nossa intuição pura do Espaço e a *Exposição Metafísica* atingiu seu objetivo (cf. *idem*, p. 203-4).

Como reforço para a argumentação anterior, Shabel analisará a diferença entre as edições A e B da *Crítica* em relação ao "argumento da geometria". A primeira edição (A) não faz distinção entre *Exposição Metafísica* e *Exposição Transcendental* e apenas apresenta cinco argumentos na secção intitulada *Do Espaço*. Após os dois primeiros argumentos sobre a aprioridade e antes dos dois argumentos sobre a intuitividade do Espaço, localizava-se o argumento seguinte:

> Sobre esta necessidade *a priori* fundam-se a certeza apodítica de todos os princípios geométricos e a possibilidade da sua construção *a priori*. Efetivamente, se esta representação do espaço fosse um conceito adquirido a posteriori, e haurido na experiência externa geral, os princípios de determinação matemática outra coisa não seriam que percepções. Possuiriam, assim, toda a contingência da percepção e não seria necessário que entre dois pontos houvesse apenas uma só linha reta; a experiência é que nos ensinaria que sempre assim acontece. O que deriva da experiência possui apenas uma generalidade relativa, isto é, por indução. Dever-se-ia, portanto, unicamente dizer que, segundo as observações feiras (sic) até agora, não se descobriu espaço algum com mais de três dimensões. (*Crítica*...A24, n1).

Na passagem acima, percebemos que é o caráter *a priori* do Espaço que fundamenta os princípios geométricos e sua possibilidade de construção. Segundo Kant, se assim não fosse, tais princípios dependeriam da experiência e os axiomas da geometria não teriam a necessidade e universalidade que a Matemática requer. Para Shabel, essa conclusão transforma-se na primeira parte da *Exposição Transcendental* da edição B. A alteração entre as duas edições tem por objetivo mostrar que o "argumento da geometria" estava mal localizado, pois não tem a intenção de mostrar que o Espaço é uma intuição pura:

> This relocation is evidence of what I will try to show later, that the "argument from geometry" is not meant to show that space is a pure intuition. Realizing that the argument was misplaced in the A-edition, Kant reformulated and moved it to a new section in the B-edition, thus altering its role in the "Aesthetic." His stated goals for

> this new section are thus an important clue to the role of the “argument from geometry” on his revised view. (*Kant’s “Argument from Geometry”*, p.200, n17).

Retornando à *Exposição Transcendental*, Shabel volta-se para a segunda condição imposta por Kant de “que esses conhecimentos apenas sejam possíveis pressupondo-se um dado modo da explicação desse conceito.” (*Crítica,* B 40). Ou seja; nossos conhecimentos na geometria são possíveis apenas se considerarmos o Espaço como uma intuição pura. A passagem analisada é a que se segue:

> Mas como poderá haver no espírito uma intuição externa que preceda os próprios objetos e que permita determinar *a priori* o conceito destes? E evidente que só na medida em que se situa simplesmente no sujeito, como forma do *sentido externo* em geral, ou seja, enquanto propriedade formal do sujeito de ser afetado por objetos e, assim, obter uma *representação imediata* dos objetos, ou seja, uma *intuição*. (*Crítica,* B 41).

Esse argumento de Kant inicia-se com um tipo de pergunta paradoxal: como os princípios da geometria podem descrever um conhecimento *a priori* do espaço e de relações espaciais se essas relações nos são dadas por características sensíveis de objetos externos? Ou, dito de outra forma: como relações espaciais da geometria pura podem corresponder naturalmente às relações entre objetos empíricos? Repare que a pergunta não é *se* acontece, pois isso é um fato indiscutível, mas *como* isso é possível, visto que para tanto deveríamos ter uma intuição da relação espacial entre objetos externos sem antes ter qualquer intuição desses mesmos objetos.

A explicação de Kant para esse paradoxo é exatamente o que Shabel chamou de afirmação [2]: O Espaço é a forma pura da intuição sensível; isto é, a representação do Espaço deve ser tomada como subjetiva, parte da constituição cognitiva do sujeito. Assim, a possibilidade de aplicação da geometria pura aos objetos externos se dá *porque* a forma de nossa intuição pura do Espaço é também a forma de nosso senso externo. Interessante notar como já se desenha o caminho para o Idealismo Transcendental, pois os objetos externos se adequam às características *a priori* de nossa cognição.

Ao satisfazer a segunda condição imposta pela *Exposição Transcendental*, Kant amplia a representação do Espaço como uma intuição pura mostrando que essa mesma representação é também a base de nossa intuição empírica. Assim, são satisfeitas as duas condições propostas pela *Exposição Transcendental*: na primeira parte Kant mostra que o Espaço como intuição pura explica o conhecimento sintético *a priori* da geometria e na segunda parte mostra que o Espaço como forma de nossa intuição sensível explica a possibilidade de aplicação desses conhecimentos geométricos. Shabel insiste que toda a argumentação parte do conceito de Espaço para a geometria e não vice-versa. E ainda, se a intuição pura do Espaço não fornecesse os princípios da geometria, ela não poderia ser a ciência dos objetos espaciais. Vemos que o "argumento da geometria" teve como função mostrar que a geometria como ciência sintética a priori deve ter a intuição pura do Espaço como seu fundamento (cf. *Kant's "Argument from Geometry"*, p. 206-7).

Após a *Exposição Transcendental* Kant afirma que o Espaço tem validade objetiva e uma realidade empírica para uma experiência possível, entretanto, não representa propriedades das "coisas em si"; ou seja, aquelas que estão além da constituição de nossa sensibilidade. Este é o cerne do Idealismo Transcendental:

> As nossas explicações ensinam-nos, pois, a realidade do espaço (isto é, a sua validade objetiva) em relação a tudo o que nos possa ser apresentado exteriormente como objeto, mas ao mesmo tempo a idealidade do espaço em relação às coisas, quando consideradas em si mesmas pela razão, isto é, quando se não atenda à constituição da nossa sensibilidade. Afirmamos, pois, a realidade empírica do espaço (no que se refere a toda a experiência exterior possível) e, não obstante, a sua idealidade transcendental, ou seja, que o espaço nada é, se abandonarmos a condição de possibilidade de toda a experiência e o considerarmos com algo que sirva de fundamento das coisas em si (*Crítica*, B 44).

Em resumo, a *Exposição Metafísica* mostra o Espaço como uma intuição pura [1] e a *Exposição Transcendental* mostra o Espaço como forma do sentido externo [2]. Segundo Shabel, Kant fornecerá outros argumentos que mostrarão que o Espaço não é nada além de [1] e [2]. Para a autora é suficiente nesse momento ficar estabelecido que a *Exposição Transcendental* e o "argumento da geometria" não tem por objetivo mostrar que o Espaço é uma intuição pura ou somente uma intuição pura. Então, resta saber qual é a função do argumento nesse ponto da *Crítica*?

Todo o projeto crítico de Kant utiliza a matemática como um ideal de conhecimento puro, isento de quaisquer interferências empíricas que levariam apenas a raciocínios indutivos, sem garantias de certeza e universalidade. Para Shabel, argumentando *sinteticamente* da representação *a priori* do Espaço, Kant passa pelo conhecimento *a priori* da ciência do Espaço, a geometria, chegando à realidade empírica e à idealidade trancendental do Espaço. Dessa forma, o "argumento da geometria" serve como uma ponte para conectar a teoria do Espaço, vista na *Exposição Metafísica*, com o Idealismo Transcendental:

> [...] the "argument from geometry" provides a philosophical bridge from the "Metaphysical Exposition" to transcendental idealism by moving synthetically from our a priori representation of space through our a priori knowledge of the science of space to the empirical reality and transcendental ideality of space. More generally, I

> see Kant's entire critical project as informed by a conception of mathematics and a corresponding philosophy of mathematics that sees mathematics as able to serve as an ideal of pure cognition. That the "argument from geometry" serves to connect the theory of space with the doctrine of transcendental idealism is thus, on my view, consistent with Kant's critical methodology. (*Kant's "Argument from Geometry"*, p.207-8)

Em minha opinião, é inegável a importância da geometria euclidiana na *Crítica*, como paradigma de conhecimento sintético *a priori*, assim como são essenciais todos os seus desdobramentos, na construção de um conceito e nos "Axiomas da Intuição". Também concordo com a proposta de Shabel que a geometria flua (*fließen*) ou dependa da intuição pura do Espaço e nos forneça certeza e universalidade de conceitos e, dessa forma, possibilidade de conhecimento dos objetos empíricos. Mostrarei, entretanto, que o "argumento da geometria" não será uma ponte filosófica *argumentativa* entre a *Exposição Metafísica* e o Idealismo Transcendental, mas uma ligação conceitual, pois a dependência da geometria em relação à forma pura da intuição se dará *após uma argumentação regressiva*. Por isso, discordo de Shabel e do próprio Kant, quando afirmam que a argumentação da "Exposição Trancendental" é sintética. Nela é usada a argumentação transcendental, da qual falei no capítulo 1, e segue o mesmo estilo dos *Prolegômenos*. A própria *Crítica* toma o mesmo caminho quando faz sua pergunta emblemática: "Como são possíveis os juízos sintéticos *a priori*?" (*Crítica*, B 19). Ele não se pergunta se tais juízos existem, pois para Kant isso é um fato[114], mas como são possíveis.

Voltando à *Estética*, por mais que Kant tenha alertado ao leitor da difícil tarefa de somente através da própria razão chegar às sementes do conhecimento[115], seu movimento argumentativo na *Exposição Transcendental* foi regressivo. Vejamos novamente duas passagens fundamentais dessa exposição: "A geometria é uma ciência que determina sinteticamente, e contudo a priori, as propriedades do espaço. Que deverá ser, portanto, a representação do espaço para que esse seu conhecimento seja possível?" (*Crítica*, B 41). Kant parte de um fato inegável, indiscutível, a geometria demonstra teoremas de forma sintética *a priori* e que são usados, com sucesso, em objetos empíricos cotidianos e procura saber quais são seus pressupostos para que ela atue assim. E também: "Mas como poderá haver no espírito uma intuição externa que preceda os próprios objetos e que permita determinar *a priori* o conceito destes?" (*ibidem*). Parte-se novamente de um fato empírico evidente, os objetos existem!

---

[114] Ver *Crítica*, Introdução V.
[78] Ver *Prolegomena to Any Future Metaphysics*, § 4

Mas por que o "argumento da geometria" foi necessário?

Porque a geometria vai fornecer o paradigma para a Metafísica voltar ao caminho seguro das ciências. Esta seria a resposta padrão. Entretanto, acredito que a geometria surge não como uma ponte filosófica e não só como um reforço aos argumentos da "Esposição Metafísica", mas como o ponto realmente inicial da argumentação, visto ser o exemplo de conhecimento sintético *a priori* por excelência e porque os argumentos anteriores se baseiam em fatos empíricos para concluir que o Espaço é a forma pura da intuição; ou seja, são regressivos e analíticos. Não estou dizendo que essa forma pura da intuição deriva de experiências externas, o que seria absurdo e já afirmei várias vezes que ela é parte inata de nosso aparato cognitivo. Digo que *a argumentação* parte de fatos indiscutíveis da experiência e procura por seus pressupostos e seria impossível que fosse de outra maneira, pois ao procurar pela fonte do conhecimento empírico, partimos de uma realidade também empírica, inegável, da qual não poderemos sair, mas podemos discutir porque ela é assim e não de outra forma ou, ainda, *porque ela nos aparece assim*.

Deve ficar claro também que ao me referir a "fatos empíricos" não estou falando sobre objetos específicos do Espaço, com determinadas características e medidas, mas às representações desses objetos como um múltiplo ou diverso ou, dito de outra forma, considero os fatos empíricos como aqueles que nos são apresentados como uma *intuição formal*, indissociável da forma da intuição, como vemos nas palavras de Kant:

> O espaço representado como objeto (tal como é realmente necessário na geometria) contém mais que a simples forma da intuição, a saber, a síntese do diverso, dado numa representação intuitiva, de acordo com a forma da sensibilidade, de tal modo que a forma da intuição concede apenas o diverso, enquanto a intuição formal dá a unidade da representação. Na estética atribuí esta unidade à sensibilidade, apenas para fazer notar que é anterior a todo conceito [...] (*Crítica*, B 161n).

Ao extrair a forma da intuição da intuição formal, para analisá-la separadamente, o movimento argumentativo de Kant na *Estética* é claramente analítico[116], pois antes de qualquer coisa recebemos representações, como uma intuição formal, e para chegar na forma da intuição devemos argumentar de forma necessariamente regressiva. Vamos ver como essa discussão se aplica aos quatro argumentos da *Exposição Metafísica*:

1º) Para que seja possível diferenciar sensações exteriores a mim do próprio local onde estou e entre objetos em lugares diferentes entre si, o Espaço não pode ser um conceito

[116] Um dos maiores desafios da *Crítica* será reunir a unidade espontânea e a capacidade receptiva. Isso vai ser feito somente na *Analítica*.

empírico, extraído das relações entre essas sensações externas, ao contrário, a representação do Espaço é o fundamento da experiência externa e independente dela. (cf. *Crítica*, A 23).

O argumento parece curto, mas, na Introdução II, Kant já havia discorrido longamente sobre a diferença entre conhecimentos *a priori* e uma de suas características é a universalidade. Entendo que se a noção de Espaço proviesse de relações empíricas entre objetos, nunca chegaríamos a esta universalidade dado o número infinito de relações a serem investigadas.

No entanto, do *fato empírico* de que faço relações no Espaço de objetos exteriores a mim, e em lugares diferentes entre si, concluo *que essa experiência externa só é possível* se eu já possuir uma representação de Espaço não empírica. O fato empírico levou a um pressuposto *a priori*.

2º) O Espaço é uma noção necessária visto ser impossível uma representação de que não haja Espaço que é a condição de possibilidade de todos os objetos externos. (cf. *idem*, A 24).

Já existem objetos externos que devem estar em algum lugar, como elementos em um conjunto, entretanto, verifico antes que há elementos, para depois perceber que pertencem a um mesmo conjunto. Do fato empírico, novamente, chego a um pressuposto puro que explica a possibilidade desse fato.

Os dois primeiros argumentos mostram a universalidade e necessidade do Espaço, características e que o tornam uma forma *a priori* de nossas representações. Entretanto, demonstraram essa aprioridade do Espaço a partir de fatos empíricos inegáveis: existem objetos externos, com os quais e entre os quais estabeleço relações de posição. Nos dois próximos argumentos, Kant mostrará que o Espaço é uma intuição e não um conceito. Essencialmente, a diferença reside no fato da intuição ser uma representação imediata e singular, enquanto o conceito tem caráter geral, reunindo uma infinidade de representações através de características comuns:

3º) O Espaço não pode ser um conceito discursivo porque só é possível a representação de um Espaço único que não pode ser antecedido ou composto por elementos constituintes, pois quaisquer outros espaços devem ser pensados nesse Espaço único (cf. *idem*, B 39).

Partimos de representações da intuição formal, as partes do Espaço, e chegamos à conclusão que estas partes estão incluídas em um espaço único. Para pensarmos em partes e sua união faz-se necessária a síntese da imaginação produtiva, indissociável da forma da intuição em qualquer representação.

4º) O Espaço é uma grandeza infinita dada e *todas as suas partes são pensadas* neste Espaço infinito. O conceito, apesar de reunir uma infinidade de representações sob uma característica comum, não pode conter em si mesmo uma infinidade de representações. (cf. *idem*, B 40).

Nos dois últimos argumentos acima, a relação novamente é de elemento e conjunto: as partes nos levam às conclusões sobre o todo. Representações da intuição formal nos levam à forma da representação do Espaço. Ao usar os conceitos de parte e todo, Kant não parte de princípios para provar que o Espaço é uma intuição singular, mas de fatos empíricos que atestam tais conceitos, ou seja, *existem* partes e *existe* o todo. Em contrapartida, na *Dissertação Inaugural*, obra em que foram lançadas as bases para o projeto crítico[117], estão os princípios necessários que faltaram na argumentação da *Exposição Metafísica* e a enfraqueceram. Em passagem do §15, Kant assegura que o elemento mais simples do espaço não é uma "parte":

> Que o espaço deva ser necessariamente concebido como uma quantidade contínua, passo-o aqui por alto, por ser fácil de demonstrar. Mas daí resulta que o elemento simples no espaço não é uma parte mas sim um limite. O limite, porém, considerado em geral, é aquilo que numa quantidade contínua contém a razão das delimitações. O espaço que não é limite de um outro é completo (sólido). O limite do sólido é a superfície, o limite da superfície é a linha e o limite da linha é o ponto. São três, por conseguinte, os géneros de limites no espaço, da mesma forma que são três as suas dimensões. Destes limites, há dois (a superfície e a linha) que são eles memos espaços. O conceito de limite não intervém noutra quantidade que não seja o espaço e o tempo. (*Dissertação Inaugural*, §15, n, p. 58, itálicos no original)

Acredito que os *princípios* para a argumentação deveriam ser as noções primitivas ou entes geométricos fundamentais: ponto, reta e plano[118], mas Kant escolhe outro caminho, como vimos. Assim, os argumentos da *Exposição Metafísica* concluem que o espaço é representado como uma grandeza infinita dada e é uma intuição *a priori* que fundamenta todos os aparecimentos externos. Porém, como foram baseados em representações de objetos e partes, esses argumentos serão tão passíveis de falha quanto qualquer conhecimento empírico. Kant precisa recorrer a conhecimentos *a priori* para justificar a intuição pura do Espaço e no terceiro argumento já se vale de um exemplo geométrico:

> Assim, as proposições geométricas, como, por exemplo, que num triângulo a soma de dois lados é maior do que o terceiro, não derivam nunca de conceitos gerais de linha e de triângulo, mas da intuição, e de uma intuição a priori, com uma certeza apodítica. (*idem*, B 39).

[117] Ver seção 1.2.

[118] Uma alternativa de argumentação seria considerar a adimensionalidade do ponto como um símbolo da *apercepção*, a consciência de si mesmo e a representação mais simples. Assim, a argumentação seria desenvolvida a partir desse "eu" cartesiano representado pelo mais elementar ente geométrico.

É claro que esse exemplo deve ser entendido de acordo com a construção de um conceito, do qual derivam a certeza e generalidade das demonstrações geométricas de forma realmente sintética e *a priori*. Podemos dizer que essas demonstrações não usam representações já conhecidas empiricamente, para chegar às suas conclusões, mas partem apenas de princípios, para chegar à novas representações da intuição formal. Em comparação, a *Exposição Metafísica* não parte de princípios para chegar às suas conclusões, como Kant disse que faria[119], mas de representações empíricas da intuição formal, argumentando analiticamente para chegar à forma da intuição. Esse é o núcleo do meu argumento.

Logo, o "argumento da geometria" tem uma dupla função: é o verdadeiro início da argumentação que levará ao Espaço como forma pura da intuição e *só depois disso* ele fará uma ligação entre a intuição pura do Espaço e o Idealismo Transcendental. Mas, a ligação entre o "argumento da geometria" e a forma pura da intuição não ocorre sinteticamente, como alega Shabel.

Pelo que foi exposto, devemos considerar que *se* a geometria euclidiana determinar as propriedades do Espaço de forma sintética *e a priori*, *então* o Espaço será uma forma pura da Intuição. Agora, duas garantias devem ser feitas para que o Idealismo Transcendental se mantenha: que a geometria euclidiana seja realmente sintética *a priori* e a única geometria que para nós possa determinar as propriedades do Espaço dessa maneira.

4.3) A geometria euclidiana como conhecimento *a priori*

Kant fundamenta todos os princípios geométricos e a possibilidade de sua construção em uma necessidade e certeza *a priori*, pois se tais conceitos fossem adquiridos na experiência, teriam o caráter contingente da percepção e não lhes caberia a universalidade ou a necessidade de tais princípios. Assim, por exemplo, não seria necessário que entre dois pontos existisse uma única linha reta (cf. *Crítica*, A 24, n1). Entretanto, geometrias alternativas mostram que podemos passar mais de uma reta por dois pontos e impõe-se a questão: como um fato empírico pode contestar um conhecimento que não depende da experiência?

Esta questão retorna às concepções das geometrias pura e aplicada e acredito que Tuomas Tahko oferece a melhor resposta, ao considerar duas maneiras diferentes em que a geometria pode ser verdadeira: em primeiro lugar, uma geometria pode ser consistente quando for axiomatizável e todas as proposições verdadeiras da teoria forem derivadas de um conjunto

[119] Ver novamente *Prolegomena to Any Future Metaphysics*, § 4.

básico de axiomas; neste caso ela será *verdadeira em um modelo*. Em segundo lugar, o modelo anterior de geometria *pode* ser aplicado para fornecer uma explicação satisfatória do mundo físico; neste caso ela será chamada de *verdadeira para o mundo* (cf. *Euclidean Geometry and the A Priori*, p. 4). Vista dessa forma, a geometria pura é aquela verdadeira em um modelo, enquanto a geometria aplicada será aquela verdadeira para o mundo.

As geometrias alternativas não surgiram de uma evidência empírica, mas em consequência do postulado das paralelas não ser auto-evidente, como os outros axiomas. Apesar disso, ao final do século XIX, o trabalho de Hilbert *The Foundations of Geometry*[120] tornou totalmente axiomatizável e consistentes a geometria euclidiana e as não euclidianas, no sentido exposto acima. Assim, *aceitas como modelos*, todas as geometrias citadas são *a priori*, porque incontestáveis por evidências empíricas. Na aplicação ao mundo físico, deve-se usar a geometria mais conveniente a cada quadro teórico e a cada situação da experiência: um prédio não é construído de acordo com a geometria de Riemann, assim como campos gravitacionais não são avaliados pela geometria euclidiana. É esse justamente o ponto que nos faz retornar a Kant, pois para o Idealismo Transcendental o Espaço é uma condição subjetiva da sensibilidade, uma forma da determinação de objetos externos e que os precede. Essa configuração é restrita a uma experiência possível do ponto de vista humano:

> Só assim, do ponto de vista do homem, podemos falar do espaço, de seres extensos, etc. Se abandonarmos porém a condição subjetiva, sem a qual não podemos receber intuição exterior, ou seja, a possibilidade de sermos afetados pelos objetos, a representação do espaço nada significa. (*Crítica*, A 26/B 42)

Curvaturas do Espaço estão além dos limites de nossa sensibilidade e geometrias alternativas, apesar de verdadeiras *como modelos*, não são verdadeiras *à nossa realidade*, propriedade exclusiva da geometria euclidiana. Deve ficar claro que não me refiro aqui ao modelo de geometria que deve ser aplicado para explicar o mundo físico, ao contrário, refiro-me ao modelo inato que possuímos para receber impressões sensíveis e por nenhum malabarismo, óptico ou retórico, poderemos adaptar nossa sensibilidade a outro modelo[121]. Se estiver além da experiência humana possível, o modelo é logicamente viável, mas não

---

[120] Basta considerarmos nesse ponto que as geometrias são consistentes. Uma discussão detalhada sobre o projeto de Hilbert e suas consequências seriam aqui desnecessárias.

[121] Há sobre o assunto um interessante estudo, sobre a aprioridade da geometria euclidiana em Kant, intitulado *Flexible intuitions of Euclidean geometry in an Amazonian indigene group*. Os pesquisadores examinaram as intuições de pontos, linhas e superfícies, em vários grupos de pessoas que não tiveram nenhum conhecimento geométrico formal, entre eles a tribo Mundurucu, da Amazônia. Mas, assim como acredito que a geometria euclidiana é *a priori* e não pode ser contestada de forma empírica, também não vejo necessidade de que seja confirmada experimentalmente.

representa uma *realidade objetiva para nós*[122]. Kant, entretanto, não rejeita a idéia de que outras geometrias possam ser inatas para outros seres: "Efetivamente, nada podemos ajuizar acerca das intuições de outros seres pensantes, nem saber se elas estão dependentes das condições que limitam a nossa intuição e são *para nós* universalmente válidas." (*Crítica*, A 27/B 43, meus itálicos).

Em minha opinião, as críticas ao Idealismo Transcendental falham ao interpretar a forma de nossa intuição do Espaço como um modelo a ser aplicado em toda situação. É claro que vista dessa forma, a geometria euclidiana é uma ferramenta insuficiente para explicar vários fenômenos que vão além da mecânica clássica e assegurar o que é realmente o Espaço físico. Entretanto, fora de uma experiência humana possível, o Espaço como forma de nossa intuição sensível nada representa, pois essa forma é exclusivamente euclidiana. E ainda, aplicadas como modelos a eventos empíricos, mesmo as geometrias alternativas estarão sujeitas a erros, correções e nunca darão conta de nos afirmar o que é o Espaço realmente!

4.4) A geometria euclidiana como conhecimento sintético

Como critério para reconhecer um conhecimento analítico, Kant utiliza o Princípio da não contradição, de tal forma que se afirmarmos um conceito sua negação deve ser contraditória ao que foi afirmado:

> Porque, se o juízo é analítico, quer seja negativo ou afirmativo, a sua verdade deverá sempre poder ser suficientemente reconhecida pelo princípio de contradição. Com efeito, o contrário do que se encontra já como conceito e que é pensado no conhecimento do objeto, é sempre negado com razão, enquanto o próprio conceito terá de ser necessariamente afirmado, porquanto o seu contrário estaria em contradição com o objeto. (*Crítica*..., B 190)

Segundo a interpretação de Peter Suber, em comparação, o juízo sintético é aquele não analítico; ou seja, são não contraditórias tanto a afirmação quanto a negação do conceito (cf. *Geometry and Arithmetic are Syntetic*, p. 2). Apesar de Suber admitir que essa definição de juízo sintético não é baseada em uma análise profunda do texto kantiano, podemos apontar uma passagem da *Crítica* que pode ser interpretada como ele sugere:

> Nos juízos sintéticos, porém, tenho de sair do conceito dado para considerar, em relação com ele, algo completamente diferente do que nele já estava pensado; relação que nunca é, por conseguinte, nem uma relação de identidade, nem de contradição, e pela qual, portanto, não se pode conhecer, no juízo em si mesmo, nem a verdade nem o erro. (*Crítica*, B 194/A 155).

[122] A realidade objetiva será discutida em maiores detalhes na seção seguinte.

Esta passagem, quando vista isoladamente pode parecer estranha, pois sem sabermos a verdade ou falsidade do juízo de que forma ele levará ao conhecimento? A verdade do juízo é verificada empiricamente e, por isso, não pode ser universalizada e estará sujeita ao erro. Diferente de tais juízos, que são sintéticos *a posteriori*, Kant procura por juízos sintéticos *a priori* que levarão a novos conhecimentos, não contidos no conceito dado, de forma necessária e universal. Este juízo não empírico e apodítico terá como paradigma as proposições da geometria, da qual a parte *a priori*, já foi vista na seção anterior e nos interessa, agora, sua parte sintética.

Kant afirma, na passagem acima, que não se pode conhecer a verdade ou o erro no juízo sintético, em si mesmo. Dessa maneira, não podem ser contraditórias nem a afirmação nem a negação do conceito, o que dá sentido à definição de Suber, na qual se baseia seu argumento sobre a sinteticidade da geometria. O ponto de partida será o postulado das paralelas que, como já visto, não pode ter seu lugar entre os outros axiomas e deve ser um teorema demonstrável. Após séculos de fracassos, Saccheri tenta um caminho alternativo: se a negação do postulado implicar em uma contradição, ele será confirmado por uma prova indireta. Entretanto, Saccheri não chega à contradição e possibilita, um século mais tarde, o desenvolvimento de geometrias não euclidianas por Lobachevski, Bolyai, e Gauss. Assim, a geometria de Euclides contém o postulado das paralelas como um axioma, enquanto as geometrias alternativas contém a negação do mesmo postulado, também como um axioma.

Considerando-se que a afirmação e a negação do postulado das paralelas levam a geometrias consistentes, como vimos na seção anterior, então o postulado deve ser sintético, assim como, também demonstrado por Hilbert, são sintéticos todos os axiomas independentes da geometria euclidiana, pois podem ser substituídos por suas respectivas negações sem gerar inconsistências. Visto que os teoremas da geometria euclidiana derivam desses axiomas, podemos concluir que ela deve ser sintética (cf. *Geometry and Arithmetic are Syntetic*, p. 5-17).

As duas últimas seções podem ser discutidas exaustivamente, dada a imensa bibliografia disponível, entretanto, optei pelos argumentos mais fortes, baseados apenas em contextos lógicos, e que mostram as geometrias não euclidianas e euclidiana como sintéticas e *a priori*. Visto que ambas satisfazem as características do tipo de conhecimento procurado por Kant, resta discutir o motivo que torna a geometria euclidiana a única possível como modelo para a forma de nossa intuição pura do Espaço.

4.5) Geometria euclidiana, a única possível como forma da intuição

Vimos que não procedem as críticas a Kant baseadas na distinção entre geometria pura e aplicada. Além de anacrônicas, tais críticas não levam em consideração que a referência kantiana é sempre relativa a um Espaço como forma de nossa experiência possível e não como ele realmente é ou como *coisa em si*, conceito que nos estaria inacessível, não só como uma intuição, mas de forma geral. Nem mesmo a ciência pode nos dizer com precisão absoluta o que algo realmente é, não só por uma limitação metodológica ou técnica, mas principalmente por nossa limitação humana e em relação à nossa realidade empírica esses limites devem ser euclidianos. Mas, se geometrias alternativas também são sintéticas e *a priori*, por que somente a geometria de Euclides pode ser a forma pura de nossa intuição?

Acredito que por questões de sobrevivência precisamos reconhecer padrões, referências. Seria impossível viver em um mundo no qual os objetos mudassem de forma de acordo com o tempo e o lugar onde se encontram. As distorções espaço-temporais são tão pequenas para nossa realidade que se tornam imperceptíveis, o que garante, por exemplo, que um triângulo com determinadas características as preserve, quando deslocado para outra posição, que acontecerá somente se o Espaço de nossa intuição tiver uma curvatura zero, distribuída de maneira uniforme. É claro que o modelo de geometria que possibilita essa invariância e congruência é o euclidiano, como também observa Gosdanoff:

> [...] if we find and if we need the notion of primitive invariance of geometrical properties in our spatial intuition we cannot resort to any of the non-Euclidean geometries. The only source of such invariance is provided by the Euclidean geometry and hence any criticism basing itself to attributing non-Euclidean geometries to the realm of the intuition must fail. (*Kant´s theory of space and non-euclidean geometries*, p. 9)

Entretanto, podemos seguir uma abordagem bem mais formal dessa questão dada por Lucas, que utiliza a teoria de operadores, proposta pela primeira vez por Felix Kein em 1872. Nessa teoria, as geometrias são consideradas como grupos de operadores que deixam inalteradas as propriedades geométricas das figuras. Para a geometria euclidiana os três operadores de reflexão, deslocamento e rotação são possíveis sem nenhuma alteração das propriedades geométricas, que podem ser definidas algebricamente como transformações da fórmula geral:

$$x_i = \sum y_{ij} x_j + a_{ij}$$

Para essa equação, a matriz (y_{ij}) é ortogonal; ou seja, sua transposta e inversa são iguais, seu determinante é igual a ± 1 e tal matriz representa a rotação ou giro da figura, com determinante (-1) para sua imagem espelhada. Algebricamente, o deslocamento da figura é representado por uma distância a_i na direção i. A reflexão é uma operação discreta e o deslocamento e rotação são contínuas, o que torna este grupo de transformações da geometria euclidiana aquele com a estrutura mais simples e fundamental possível e preeminente sobre quaisquer outros grupos em termos evolutivos e de adaptação. Além do critério de simplicidade, só na geometria euclidiana esses operadores são invariantes, o que torna possível que tenhamos quaisquer experiências, como aponta Lucas:

> The appeal of the theory of groups is not, however, purely formal. We see things reflected in mirrors: we see things from different sides and turn them round; and we both ourselves move, and move other things. If we did not pick out properties that were invariant under reflection, rotation and displacement, we should be unable to recognise as the same what we see in a mirror and what we see when we look direct, what we see from one side and what we see from the other, and what we see from afar off and what we see from nearby. And if we did not pick out properties that were invariant under rotation and displacement, we could not form the concept of a material object, something we can push around without affecting its properties. (Euclides ab omni naevo vindicatus, p. 6)

Kant insiste nessa invariância, ao salientar que as demonstrações de *conguências de figuras*, devem ser todas fundadas em proposições sintéticas *a priori* da geometria, e nas contrapartidas incongruentes, que representam imagens espelhadas (cf. *Prolegômenos* § 12-3). Segundo os operadores acima, a *congruência* a qual Kant se refere pode ser relacionada ao deslocamento de uma figura, que deve permanecer igual a si mesma no Espaço e no Tempo, enquanto as *contrapartidas incongruentes* representam o operador de reflexão. Para se fazer a diferenciação entre as imagens espelhadas, as mãos direita e esquerda, por exemplo, é insuficiente a comparação com quaisquer propriedades externas; ou seja, não está subordinada a nenhum conceito, mas somente na intuição pura do Espaço: "Não podemos, pois, fazer compreender por nenhum conceito a diferença de coisas semelhantes e iguais e, no entanto, incongruentes (por exemplo, volutas inversamente enroladas), mas unicamente pela relação à mão direita e à mão esquerda, que incide directamente na intuição." (*Prolegômenos* §13).

Em resumo, temos o fato inegável que os objetos externos a nós conservam sua forma e propriedades geométricas quando rotacionados, deslocados ou refletidos, o que faz com que nossa experiência externa, reconhecimento de padrões e referenciais e nossa própria existência sejam possíveis. Esta métrica já está em nós configurada e não pode ser induzida pelo hábito, subordinado às propriedades externas, mas unicamente pela intuição, visto que objetos refletidos não são diferenciados por conceitos. A geometria que mantém a invariância desses operadores, fornece realidade objetiva e torna possível qualquer experiência, é necessariamente euclidiana.

Poincaré também acredita que a escolha pela geometria euclidiana é uma questão de conveniência e simplicidade, pois essa opção está relacionada às nossas possíveis experiências e à insignificante influência da curvatura do espaço:

> Unquestionably reason has its preferences, but these preferences have not this imperative character. It has its preferences for the simplest because, all other things being equal, the simplest is the most convenient. Thus our experiences would be equally compatible with the geometry of Euclid and with a geometry of Lobatchévski which supposed the curvature of space to be very small. We choose the geometry of Euclid because it is the simplest. If our experiences should be considerably different, the geometry of Euclid would no longer suffice to represent them conveniently, and we should choose a different geometry. (*On the Foundations of Geometry*, p. 42)

Relembrando que o estilo de argumentação transcendental inicia com alguma característica empírica inquestionável e, de forma regressiva, resulta em uma forte conclusão sobre a natureza do sujeito, que deve ser necessária para que a experiência ocorra, podemos dizer que para a geometria euclidiana ser possível, como a única ciência que determina as propriedades do espaço, *como aparece para nós*, de forma sintética e *a priori*, deve haver uma forma do sentido externo, que já pertença ao sujeito, e que determine a maneira como ele será afetado pela representação imediata de objetos empíricos. Esta forma é justamente a intuição do Espaço.

Podemos propor que os argumentos da *Exposição Metáfisica* não foram fortes o bastante e Kant se vale, no "argumento da geometria" de uma ciência que determina as propriedades espaciais de nossa experiência externa de forma inquestionável e desse ponto de partida argumentativo bem mais forte, pois baseado em um conhecimento sintético e *a priori*, chega à conclusão sobre o Espaço ser uma forma pura de nossa intuição.

O importante uso da geometria como material argumentativo já havia sido explícito por Kant na Dissertação Inaugural, em que evidencia nessa ciência o uso de princípios indubitáveis e discursivos, a mais elevada e única ciência pura, exemplo e ferramenta para as demais. Ainda, a geometria contempla as relações do espaço de tal forma que "nada do que é percepcionado pelo sentido externo pode ser claro e evidente a não ser mediante a mesma intruição de cuja contemplação se ocupa aquela ciência." (*Dissertação Inaugural*, §15, p. 56). Vistas dessa forma, a geometria e a forma pura da intuição do espaço são indiscerníveis, faces de um mesmo princípio, que se refletiram na *Crítica*.

Vimos no decorrer do texto que a geometria euclidiana tem os princípios necessários, entes fundamentais, para ser o ponto argumentativo inicial da *Crítica*. Kant faz a opção pelo caminho regressivo e análitico, o “argumento da geometria”, expondo a estrutura às geometrias alternativas, aplicadas à Cosmologia. Entretanto, a esfera isolada e coesa da argumentação permanece inabalada, pois a geometria euclidiana a sustenta tanto pela sua fundamentação lógica, quanto por seu caráter sintético e *a priori* por excelência. Assim, essa ciência reune os elementos argumentativos necessários ao projeto crítico kantiano de construção da realidade refletida ponto a ponto na “construção de um conceito”.

Portanto, acredito que a geometria euclidiana é a real base argumentativa do projeto crítico, a partir da qual Kant chega às conclusões sobre o Espaço ser uma forma predeterminada de nossa cognição. Os desenvolvimentos de geometrias alternativas, mesmo que também sintéticas e *a priori*, não podem invalidar o Idealismo Transcendental, visto que por critérios evolutivos de simplicidade, a única geometria em que a realidade se apresenta para nós, a única que nos possibilita padrões de reconhecimento, para podermos sobreviver e não nos perdermos em uma névoa de incertezas, é a euclidiana.

Conclusão

Em seu primeiro trabalho publicado, *Idéias para uma verdadeira avaliação das forças vivas*, Kant faz uma interpretação, ousada para a época, que relaciona a geometria do espaço à força de atração gravitacional, sendo o primeiro a propor espaços multidimensionais e que seriam estudados por outras geometrias. Na *Crítica da Razão Pura* vemos propostas mais contidas em relação às geometrias alternativas, pois os interesses de Kant não estão voltados à fundamentacão da física do espaço. Sua intenção é indicar um caminho seguro à Metafísica, que só pode ser modelado pela geometria euclidiana, o paradigma de conhecimento sintético *a priori*. A imensa construção argumentativa da *Crítica* se inicia com as formas da intuição *a priori* do espaço e do tempo, entretanto, a pedra angular não foi colocada no solo seguro do conhecimento geométrico, certo e universal, mas no terreno instável da experiência.

Tendo à disposição os entes geométricos fundamentais como princípios argumentativos, Kant prefere se voltar aos insuficientes conceitos empíricos de parte e todo para elaborar uma intuição pura de espaço. Entretanto, como estrutura de vasta complexidade, esfera isolada e coesa, a *Crítica* precisava de suporte mais consistente e foi necessário refazer o caminho, de forma regressiva, do fato inegável para sua causa, movimento conhecido como “argumento da geometria”, uma escora no raciocínio que a qualquer momento poderia romper ou rachar. Uma oscilação ocorreu a partir de pesquisas em geometrias não euclidianas e sua aplicação em espaços espúrios aos quais até a luz se curva.

Por que não um modelo alternativo para a forma do espaço e mesmo para a forma da intuição, faces do mesmo argumento? Por que uma forma da intuição *a priori*, enfim, se a experiência se impõe de forma tão amargamente inevitável?

Essas perguntas só podem ser feitas porque nossa realidade é estruturada em um molde que deve ser o mais simples e constante, caso contrário nada teria sentido, nem mesmo as palavras que formam tais perguntas.

O projeto crítico de Kant torna nossa realidade uma construção subjetiva, porém não ilusória, na qual nunca alcançaremos o sentido preciso das coisas, além de um molde intuitivo. Limitados pela esfera isolada e coesa da *Crítica*, percebemos um ponto de sua arquitetura que se destaca, a “construção de um conceito”, verdadeiro símbolo da construção de nossa realidade, pois contém seus elementos essenciais: conceitos e intuições *a priori*, imaginação produtiva e esquemas, que podemos configurar para que se encontre as melhores inferências lógicas para atingir conhecimentos sintéticos, universais e de validade objetiva. Vista dessa forma, a "construção de um conceito" é o núcleo do projeto crítico de Kant e tem como eixo argumentativo a geometria euclidiana.

Assim, na filosofia crítica de Kant a importância da geometria euclidiana revela-se em duas frentes: ser o paradigma para todos os pontos essenciais ao Idealismo Transcendental, quais sejam, a sinteticidade *a priori* de um conhecimento apodítico e universalmente válido e a construção de um conceito, que leva à própria construção que fazemos da realidade e que tem seus elementos constitutivos filtrados pela intuição pura do Espaço e validados pela geometria de Euclides. Mas, além de um modelo, a geometria euclidiana é também a pedra angular do Idealismo Transcendental, uma viga mestra argumentativa, com poder lógico o suficiente para manter unidos tais elementos.

Mesmo que também sejam sintéticas e *a priori*, não podemos usar outras geometrias como ciências para a forma de nossa intuição do espaço, porque suas aplicações mostram um espaço curvo insignificante para nossa intuição empírica e que não possui nenhuma validade objetiva. Como foi visto, pela análise de suas cartas e manuscritos, Kant tinha pleno conhecimento das pesquisas em geometrias alternativas e foi muito mais severo na interpretação do postulado das paralelas do que seus contemporâneos, descartando tais geometrias de seu projeto crítico por sua irrelevância à construção de nossa realidade.

Assim, as críticas feitas ao Idealismo Transcendental, através do "argumento da geometria", falham por desconsiderar que o espaço físico tem que ser para nós do mesmo e único formato de nosso molde inato, aquele no qual percebemos os mais simples operadores da geometria, deslocamentos, reflexões e rotações, onde evoluimos como espécie e conseguimos sobreviver: o espaço euclidiano.

Por não reconhecer na geometria euclidiana a fundamentação sólida e na *Exposição Metafísica* usar argumentos mais fracos, baseados em representações empíricas e não em princípios, Kant torna o "argumento da geometria" uma escora de um raciocínio regressivo, expondo toda a construção ao vento das críticas.

Apesar desse ponto frágil, a esfera isolada continua coesa e a filosofia de Kant permanece como uma alerta de que é a nossa visão de mundo que determina a escolha das evidências.

Referências

AYER, Alfred J. *Language, Truth and Logic*. Londres: Penguin Books, 1946.

BARKER-PLUMMER, Dave; BARWISE, Jon; ETCHEMENDY, John. *Language, Proof and Logic*, CSLI Publications, 2011.

BONOLA, Roberto. *Non-Euclidean Geometry*. (Trad. H.S. Carslaw). Chicago: Open Court, 1912.

DE VALOIS, Russell; DE VALOIS, Karen. *Spatial Vision*, New York: Oxford University Press, 1990.

DESCARTES, René. La Géométrie. In: *L'édition Adam-Tannery des OEuvres de Descartes*, 13 vol.Paris: Cerf, vol. VI, 1902, p. 367 - 486.

DYCKER, Georges. *Kant's Theory of Knowledge: An Analytical Introduction*. Nova York: Oxford University Press, 2004.

EDDINGTON, Arthur Stanley. *Space Time and Gravitation*, An Outline of the General Relativity Theory. London: Cambridge University Press, 1920.

EUCLIDES. *Os Elementos*. (Trad. Ireneu Bicudo). São Paulo: Editora UNESP, 2009.

_________. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, *translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary*. (Trad. Thomas Heath). 2ª ed, v. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1925.

________. *Les Éléments*, Vol.1,2,3,4.(Trad Bernard Vitrac). Paris: PUF, 1994.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. (Trad. Hygino H. Domingues). Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1997.

EWALD, William. *From Kant to Hilbert*. 2 vols. Oxford: Clarendon Press, 1996.

FRIEDMAN, Michael. Geometry, Construction, and Intuition in Kant and His Successors. In: SHER, G. e TIESZEN, R. (Eds) *Between logic and intuition*, essays in honor of Charles Parsons. Cambridge: Cambridge University Press, 2000, p.186-218.

__________. Kant on Geometry and Spatial Intuition. (Trad. José Oscar de Almeida Marques e Andrea Faggion). *Kant e-Prints*. Campinas, Série 2, v. 7, n. 1, p. 02-32, número especial, jan.-jun., 2012.

__________. Kant's Theory of Geometry. *The Philosophical Review*, v. 94, n. 4, p. 455-506, out.1985.

GILBERT, Neal. *Renaissence Concepts of Method*. New York: Columbia University Press, 1960.

GOMEZ, Ricardo. Beltrami's Kantian View of Non-euclidean Geometry. *Kant-Studien* v. 77, p.102-107, jan. 1986.

GREENBERG, Marvin J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*: Development and History. Nova York: W. H. Freeman Company, 1993.

GROZDANOFF, Boris. (1997) *Kant's theory of space and non-Euclidean geometries*. Disponível em: http://www.personal.ceu.hu/students/03/Boris_Grozdanoff/link.htm. Acesso em: 30 de setembro de 2011.

GUYER, Paul. *Kant and the Claims of Knowledge*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

HAGAR, Amit. Kant and non-Euclidean Geometry. *Kant-Studien*, v. 99, n. 1, p. 80-98, mar. 2008.

HATFIELD, Gary. Kant on the perception of space (and time). In: GUYER, P. (ed.) *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy*. Cambridge University Press, 2007, p. 61-93.

HEATH, Thomas. *Mathematics in Aristotle*. Oxford: Clarendon Press, 1949.

HEIS, Jeremy. Kant on Parallel Lines. A ser publicado em: *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays.* Vol.1: The Critical Philosophy and Its Background. Ed. Ofra Rechter and Carl Posy.

HELMHOLTZ, Hermann von. Epistemological Writings: the Paul Hertz/Moritz Schlick Centenary Edition of 1921. (Trad. M. F. Lowe). In: COEHN, R. S. e ELKANA, Y. (ed.), *Boston Studies in the Philosophy of Science*, v. 79. Dordrecht: Reidel, 1977.

HICKS, Dan. *Kant geometry of intuition and intuition of geometry*. Disponível em: http://www.nd.edu/~dhicks1/writing/kant.pdf. Acesso em: 30 de setembro de 2011.

HILBERT, David. *The Foundations of Geometry*. (Trad. E.J. Townsend). La Salle, IL: Open Court Publishing, 1950.

HINTIKKA, Jaakko. Kant on the mathematical method. *The Monist*, v.51, p. 352-375, 1967.

_________. Kant's theory of mathematics revisited. *Philosophical Topics*, v.12, n.2, p. 201-15, 1981.

_________. Kant's Transcendental Method and His Theory of Mathematics. In: POSY, C. (ed.) *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays*. London: Kluwer Academic Publishers, 1992, p. 341-359.

_________. *Logic, Language-Games, and Information: Kantian Themes in the Philosophy of Logic*. Oxford: Clarendon Press, 1973.

_________. The notion of intuition in Husserl. *Revue internationale de philosophie*. n.224, p. 57-79, 2003.

HOPKINS, James. Visual geometry. *The Philosophical Review*, v. 82, n. 1, p. 3-34, jan. 1973.

HORSTMANN, Rolf. Space as intuition and geometry. *Ratio*, v. 18, p. 17-30, 1976.

HYDER, David. *The Determinate World: Kant and Hemholtz on the Physical Meaning of Geometry*. Berlin: de Gruyter, 2009.

IZARD, Véronique et al. Flexible intuitions of Euclidean geometry in an Amazonian indigene group. *Proceedings of the National Academy of Sciences of United States of America* (PNAS), v. 108, n. 24, p. 9782-9787, 2011.

KANT, Immanuel. Briefwechsel. In: *Gesammelte Schriften.* Editado por Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaft. 29 vols. Berlin: DeGruyter, 1922, vol. X.

______. *Crítica da Razão Pura* (Trad. Alexandre Fradique Morujão). Lisboa: Calouste Gulbenkian, 2008.

______. *Critique of Pure Reason* (Trad. Paul Guyer e Allen W. Wood). Cambridge University Press, 1998.

______. *Da utilidade de uma nova crítica da Razão Pura*. Resposta a Eberhard. (Trad. Márcio Pugliesi e Edson Bini). São Paulo: HEMUS, 1975.

______. *Dissertação de 1770*: Dissertação acerca da Forma e dos Princípios do Mundo Sensível e Inteligível. (Trad. Leonel Ribeiro dos Santos). Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda, 2004.

______. Handschriftlicher Nachlaβ. In: *Gesammelte Schriften.* Editado por Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaft. 29 vols. Berlin: DeGruyter, 1925, vol. XIV, p. 23-52.

______. Inquiry Concerning the Distinctness of the Principles of Natural Theology and Morality. In: WALFORD, D. (trad. e ed.) *Theoretical Philosophy, 1755-1770*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. p. 243-276.

______. Kritik der reinen Vernunft. In: *Gesammelte Schriften.* Editado por Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaft. 29 vols. Berlin: DeGruyter, 1911, vol. III.

______. Nachricht von der Einrichtung seiner Vorlesungen in dem Winterhalbenjahre von 1765-1766. In: *Gesammelte Schriften.* Editado por Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaft. 29 vols. Berlin: DeGruyter, 1925, vol. II, p. 303-313.

______. *Philosophical Correspondence 1759-99*. (Ed. e Trad. Arnulf Zweig). Chicago: The University of Chicago Press, 1970.

______. *Prolegômenos a qualquer metafísica futura que possa apresentar-se como ciência.* (Trad. José Oscar de Almeida Marques). Disponível em: http://www.unicamp.br/~jmarques/

______. *Sobre o primeiro fundamento da diferença entre as regiões do espaço*. (Trad. Rogério Passos Severo). Disponível em: https://sites.google.com/site/rpsevero/. Acesso em: 30 de setembro de 2011.

______. The Jäsche Logic. In: YOUNG, Michel (Ed. e Trad.). *Lectures on logic*. The Cambridge Edition of the Works of Immanuel Kant. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. p. 517-640.

______.*The true estimation of living forces*. In: *Kant's Inaugural Dissertation and Early Writings on Space*. (Trad. John Handyside e Norman Kemp Smith). Chicago: The Open Court Publishing Company, 1929.

KENNEFICK, Daniel. *Testing relativity from the 1919 eclipse - a question of bias*. Disponível em:http://www.philosophy.ox.ac.uk/__data/assets/pdf_file/0003/38685/kennefick_phystoday_09.pdf. Acesso: 20/03/2016.

LAMBERT, Johann Heinrich. Theorie der Parallellinien. In: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*. Leipzig: Teubner, 1895, p. 152-207.

LEIBNITZ, Gottfried Wilhelm. *New Essays concerning Human Understanding*. (trad. Alfred Gideon Langley. New York: The Macmillan Company, 1896.

LUCAS, J.R. Euclides ab omni naevo vindicatus, *British Journal For the Philosophy of Science*, n 20, p. 1-11, 1969.

MANDERS, Kenneth. Diagram-Based Geometrical Practice. In: MANCOSU, P. (org.), *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford University Press, 2008, p. 65-133.

MARTIN, Gottfried. *Kant's Metaphysics and Theory of Science*. (Trad. P. G. Lucas). Manchester University Press, 1955.

NEWTON, Isaac. *Optiks: or, a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light.* London: Willian and John Innys, 3ªed, 1721.

OLIVEIRA, M. A. de. *Para além da fragmentação*. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

PALMER, H. *Presupposition and Transcendental Inference*. New York: St. Martin's Press, 1985.

PALMQUIST, Stephen. *Kant on Euclid: Geometry in Perspective*. Disponível em: http://www.hkbu.edu.hk/~ppp/srp/arts/KEGP.html. Acesso em: 06 de outubro de 2011.

PAPPUS of Alexandria. Book 7 of the Collection. (ed., tr. and commentary Alexander Jones). *Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences*. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.

PARSONS, Charles. Kant's Philosophy of Arithmetic. In: POSY, Carl (ed.). *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays.* Dordrecht, Boston e London: Kluwer Academic Publishers, 1992, p. 43-68.

_________. The Transcendental Aesthetic. In: GUYER, P. (ed.) *The Cambridge Companion to Kant*. Cambridge University Press, 1999, p. 62-100.

PATON, H. J. *Kant's Metaphysic of Experience*. London: George Allen and Unwin, 1936.

PIPPIN, Robert. *Kant's Theory of Form*. New Haven: Yale University Press, 1982.

POINCARÉ, H. *Science and Hypothesis*. (Trad. Francis Maitland). New York: Dover, 1952.

__________. On the Foundations of Geometry, *The Monist,* v. 9, n 1, p. 1-43, 1898.

RADU, M. A debate about the axiomatization of arithmetic: Otto Hölder against Robert Graβmann. In: *Historia Mathematica*, v. 30, p. 341–377, 2003.

REICHENBACH, Hans. *The Philosophy of Space and Time*. (Trad. Maria Reichenbach e John Freund). Nova York: Dover, 1958.

REID, Thomas. *An Inquiry into the Human Mind*: on the Principles of Common Sense. Edinburgh: Bell & Bradfute, 1801.

ROSENFELD, Boris. A History of Non-Euclidean Geometry, Evolution of the Concept of a Geometric Space. (Trad. Abe Shenitzer). In: TOOMER, G. J. (ed.) *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences* v. 12. New York: Springer-Verlag, 1988.

ROSS, David. *Aristotle's Metaphysics, a revised text with introduction and comentary*. Oxford: Clarendon Press, v.2, 1924.

RUSSELL, Bertrand. *History of Western Philosophy*. Nova York: Simon and Schuster, 1946.

_________. *Introduction to Mathematical Philosophy*. New York: Macmillan, 1920.

_________. *The Principles of Mathematics*. New York: Norton, 1937.

SACCHERI, Girolamo. *Euclides ab omni naevo vindicatus*. (trad. George Bruce Halsted). Chicago: Open Court, 1920.

SHABEL, Lisa. Kant's "Argument from Geometry". *Journal of the History of Philosophy,* v. 42, n. 2, p.195–215, 2004.

________. Kant on the 'Symbolic Construction' of Mathematical Concepts. *Studies in History and Philosophy of* Science, v. 29, n. 4, p. 589-621, 1998.

________. Kant's Philosophy of Mathematics. In: GUYER, P. (ed.) *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy*. Cambridge University Press, 2007, p. 94-138.

________. *Mathematics in Kant's Critical Philosophy: Reflections on Mathematical Practice*. Routledge: Nova York e Londres: Routledge, 2003.

SCHULTZ, Johann. *Entdeckte Theorie der Parallelen.* Königsberg: Kanter, 1784

STRAWSON, P. F. *The Bounds of Sense*. Londres: Methuen, 1966.

SUBER, Peter. *Geometry and Arithmetic are Synthetic*. Disponível em: http://legacy.earlham.edu/~peters/writing/synth.htm. Acesso em: 10 de dezembro de 2012.

TAYLOR, Charles. *Philosophical Arguments*. Cambridge: Harvard University Press, 1995.

TAHKO, Tuomas. *Euclidean Geometry and the A Priori*. Disponível em: http://www.ttahko.net. Acesso em: 10 de setembro de 2013.

TRUDEAU, Richard J. *The Non-Euclidean Revolution*. Boston: Birkhäuser, 2008.

WARDA, Arthur. *Immanuel Kants Bücher.* Berlin: Breslauer, 1922.

WITTGENSTEIN, Ludwig. *Philosophical Investigations*. (Trad. G. E. M. Anscombe). Oxford: Basil Blackwell, 1986.

WOLFF, Christian. *Elementa Matheseos Universae*. Halle: 1730.

YAFFE, Gideon. Reconsidering Reid's Geometry of Visibles. *The Philosophical Quarterly*, v. 52, n. 209, p. 602 - 620, 2002.

Créditos das figuras

Figura 1 - Elaborada pelo autor.

Figura 2 - EUCLIDES (trad. Heath), p. 267

Figura 3 - EUCLIDES (trad. Heath), p. 286

Figura 4 - Reelaborada a partir de DESCARTES, p. 370

Figura 5 - Elaborada pelo autor.

Figura 6 - Elaborada pelo autor.

Figura 7 - Elaborada pelo autor.

Figura 8 - Elaborada pelo autor

Figura 9 - Reelaborada a partir de BONOLA, p. 45.

Figura 10 - Reelaborada a partir de http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/QuadricSurfaces.aspx

Figura 11 – Fonte: http://medlibrary.org/medwiki/Poincaré_disk_model

Figura 12 – Reelaborada pelo autor a partir de http://dibujandoabolibic.blogspot.com.br/2013/11/dibujo-geodesico-un-mapa-bidimensional.html

Figura 13 - Elaborada pelo autor.

Figura 14 - WOLFF, Fig. Geom. Tab. I, fig. 12.

Figura 15- HEIS, p. 22.

Figura 16 - Experimento de Eddington. Fonte: http://hendrix2.uoregon.edu/~imamura/FPS/images/1919_eclipse_negative.jpg

Figura 17 - EDDINGTON, p. 109.

Figura 18 - Cinta de Möbius. Fonte: https://www.prismnet.com/~dierdorf/mobius.jpg

Figura 19 – Elaborada pelo autor.

Figura 20 – YAFFE, p.609.

Figura 21 – YAFFE, p.613.

TABELAS

Tabela 1 - Reelaborada a partir de *Les Éléments*, p. 54.