ANA FLÁVIA DE FARIA CHOLODOVSKIS

LÓGICAS DE INCONSISTÊNCIA FORMAL E NÃO-MONOTONICIDADE

CAMPINAS

2014

Departamento de Filosofia - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas - Universidade Estadual de Campinas

ANA FLÁVIA DE FARIA CHOLODOVSKIS

LÓGICAS DE INCONSISTÊNCIA FORMAL E NÃO-MONOTONICIDADE

ORIENTADOR: PROFESSOR DOUTOR WALTER ALEXANDRE CARNIELLI

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Filosofia.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA PELA ALUNA ALA FLÁVIA DE FARIA CHOLODOVSKIS E ORIENTADA PELO PROF. DR. WALTER A. CARNIELLI

CAMPINAS, 26/09/2014

Campinas

IFCH/UNICAMP

2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
Cecília Maria Jorge Nicolau - CRB 8/338

C453L

Cholodovskis, Ana Flávia de Faria, 1988-
Lógicas de inconsistência formal e não-monotonicidade / Ana Flávia de Faria Cholodovskis. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Walter Alexandre Carnielli.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Lógica paraconsistente. 2. Lógica. 3. Lógica matemática não-clássica. I. Carnielli, Walter Alexandre,1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Logics of formal inconsistency and nonmonotonicity
Palavras-chave em inglês:
Paraconsistent logic
Logic
Nonclassical mathematical logic
Área de concentração: Filosofia
Titulação: Mestra em Filosofia
Banca examinadora:
Walter Alexandre Carnielli [Orientador]
Marco Antonio Caron Ruffino
Abilio Azambuja Rodrigues Filho
Juliana Bueno
Márcio Moretto Ribeiro
Data de defesa: 26-09-2014
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Dissertação de Mestrado, em sessão pública realizada em 26 de setembro de 2014, considerou a candidata ANA FLÁVIA DE FARIA CHOLODOVSKIS aprovada.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora.

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli ____________________

Prof. Dr. Marco Antonio Caron Ruffino ____________________

Prof. Dr. Abílio Azambuja Rodrigues Filho ____________________

Profa. Dra. Juliana Bueno ____________________

Prof. Dr. Márcio Moretto Ribeiro ____________________

Resumo

Existem diversas razões para justificar o desenvolvimento de lógicas não-clássicas tais como a expressividade destas linguagens e como elas poderiam ajudar a formalizar o pensamento humano. Neste sentido, as lógicas não-monotônicas foram desenvolvidas em prol de formalizar raciocínios cotidianos baseados na premissa de que nós deveríamos ser capazes de retratar conclusões previamente obtidas quando confrontadas com novas informações[1].

Algumas lógicas não-monotônicas utilizam a noção de *pensamento default* para formalizar raciocínios cotidianos [2]. Por outro lado, as lógicas paraconsistentes são aquelas lógicas que estudam teorias não-explosivas e foram desenvolvidas em prol de lidar com contradições. Sobre as lógicas paraconsistentes, existe uma classe de sistemas que se mostram realmente interessantes, particularmente: as Lógicas de Inconsistência Formal [LIFs][10]. LIFs são um tipo especial de lógicas paraconsistentes que são gentilmente explosivas e internalizam o conceito de *consistência* no nível da linguagem-objeto utilizando o operador de consistência $\circ$ [10].

A questão inicial *Poderia a Paraconsistência substituir a Não-Monotonicidade?* apresentada em [14] nos guiou à formalização de uma pergunta mais específica, entretanto, mais intrigante: *É possível desenvolver uma lógica não-monotônica gentilmente explosiva?*. No intuito de buscar responder a essa questão, é importante investigar conceitual e filosoficamente a relevância e as problemáticas de se desenvolver tal lógica. Este trabalho visa justificar a importância de uma lógica não-monotônica paraconsistente baseada nas Lógicas de Inconsistência Formal a partir de uma análise intuitiva dos conceitos e das noções envolvidas em tais sistemas formais considerando, ainda, abordagens possíveis a partir das chamadas Lógicas Adaptativas de Inconsistência e das Lógicas Moduladas.

Abstract

There are many reasons to justify the development of non-classical logics such as the expressivity of those languages and how they could help to formulate human reasoning. In that sense, nonmonotonic logics were developed in order to formalize everyday reasoning based on the premise that we should be able to retract conclusions previously obtained in face of new information [1]. Some nonmonotonic logics uses the notion of *default reasoning* to formalize everyday reasoning [2]. On the other hand, paraconsistent logics are those logics that studies non-explosive theories and were developed in order to deal with contradictions. About paraconsistent logics, there is a class of systems that has shown to be really interesting, particularly: the Logics of Formal Inconsistency [LFIs] [10]. LFIs are a special kind of paraconsistent logics that are gently explosive and internalize the concept of *consistency* at the object-language level using the consistency operator $\circ$ [10].

The initial question *Can Paraconsistency replace Nonmonotonicity?* presented in [14] guided us to the formulation of a more specific yet intriguing question: *Is it possible to develop a gently explosive nonmonotonic logic?*. In order to answer that question, it is important to investigate both conceptual and philosophical relevance and problems of developing such logic. This work intends to justify the importance of a non-monotonic paraconsistent logic based on Logics of Formal Inconsistency from an intuitive analysis of concepts and notions involved in such formal systems, also considering possible approaches from the so called Adaptive Logics of Inconsistency an Modulated Logics.

Sumário

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Henrique e Heloísa, que sempre me apoiaram em todas as minhas decisões e batalhas, por toda a ajuda e amor incondicional que me ofereceram.

Agradeço ao Rodrigo por todo o amor, paciência e carinho que o fez estar ao meu lado partilhando crises, conquistas e sonhos.

Agradeço ao meu orientador, Walter Carnielli, por toda a sua ajuda, incentivo e compreensão que tornaram possível o desenvolvimento deste trabalho e um amadurecimento acadêmico antes inimaginável.

Agradeço a meus irmãos, Henrique e Gabriela, e aos meus avós, Mariza e Jair, pela compreensão, pelo interesse e pela saudade que compartilhamos.

Agradeço aos professores que tanto me ensinaram por, saciando muitas dúvidas e instigando tantas outras, abrirem espaço para a curiosidade e para busca de novos conhecimentos e interesses.

Agradeço aos meus amigos por toda a ajuda que me ofereceram, pelos ouvidos atentos, pelos incentivos desregrados, pelas dúvidas sanadas, pelas risadas soltas e pelos problemas assistidos. Particularmente, agradeço à Inés, ao Edgar, à Carolina, ao Leandro e ao Henrique por estarem tão presentes em todos os aspectos deste processo.

Agradeço aos membros da banca examinadora, Abílio Rodrigues e Marco Ruffino, pela atenção, pela disponibilidade e pela gentileza de participarem desta etapa tão importante em minha formação. Agradeço também por todos os conselhos e recomendações que me deram, dão e, esperançosa, ainda darão.

A todos que me acompanharam neste processo, deixo meu singelo, porém sincero,

Muito Obrigada.

Capítulo 1

Introdução

As Lógicas Não-Clássicas são aquelas nas quais alguns dos princípios lógicos clássicos e/ou propriedades das consequências lógicas não valem. As Lógicas Paraconsistentes estudam as teorias contraditórias, mas que não são triviais. Já as Lógicas Não-Monotônicas são aquelas nas quais a propriedade de *monotonicidade* não se aplica. Uma grande motivação para tais lógicas é a de que, ao nos depararmos com novas informações, poderia não ser possível tirar as mesmas conclusões que tínhamos anteriormente. Desta forma, precisamos fazer uma revisão de nossas crenças e trabalhar com o novo conjunto de informações de forma diferente, no intuito de evitarmos contradições que, neste contexto, trivializariam a lógica. Utilizamos, assim, o raciocínio não-monotônico quando temos que revisar a conclusão anterior, mediante novas informações. Por outro lado, frequentemente, as contradições fornecem informações relevantes que não deveriam ser descartadas ou trivializar a lógica. As Lógicas de Inconsistência Formal são lógicas paraconsistentes que internalizam os conceitos de consistência e inconsistência no nível da linguagem-objeto, para que possamos trabalhar com as contradições sem que a lógica exploda, derivando-se, assim, qualquer coisa. Essas lógicas lógicas derrogam o princípio da explosão clássico (ou "ex contradictione sequitur quodlibet"). Algumas vezes, as novas informações são contraditórias em relação ao conjunto de informações anterior. Como, então, trabalhar com as contradições que são adicionadas ou geradas a partir da adição de novas sentenças ao conjunto inicial de premissas?

1.1 Lógicas Clássicas *versus* Lógicas Não-Clássicas

Existe grande debate quanto ao pluarismo de sistemas formais: uma dessas questões refere-se à investigação se há mais de um sistema lógico correto, i.e., se as fórmulas que são logicamente verdadeiras no sistema correspondem a enunciados que são logicamente verdadeiros fora do sistema. Grosso modo, os posicionamentos perante essa questão são distinguidos da seguinte forma [16]:

- *Monalismo*: há apenas uma lógica correta;
- *Pluralismo*: há mais de uma lógica correta;
- *Instrumentalismo*: não há uma lógica correta[1].

Algumas *monistas* defendem que há apenas um sistema clássico correto, enquanto outros admitem que a Lógica Proposicional Clássica e suas extensões (mais especificamente, a Lógica de Primeira Ordem e a Lógica Modal) formam fragmentos de um sistema lógico correto [16]. Um pluralismo que admite a Lógica Proposicional Clássica e suas extensões como sistemas corretos, no que concerne às Lógicas Clássicas, assim, podem coincidir com a visão monista neste ponto. Portanto, quando tratamos do debate sobre pluralismos lógicos, podemos nos atentar na evidente distinção entre as Lógicas Clássicas e as Não-Clássicas, ponto de discordância crucial entre os dois distintos posicionamentos.

Dentre os pluralistas, por sua vez, existem outras distinções acerca de quais sistemas formais poderiam ser considerados corretos. O *pluralista local* defende que diferentes sistemas formais são aplicáveis a diferentes áreas do dicurso, relativizando as noções de validade e verdade para além do sistema formal: um argumento não seria simplesmente válido, ele seria válido em um dado contexto. Por outro lado, o *pluralista global* defende, assim como os monistas, de que princípios lógicos deveriam valer independentemente do âmbito do discurso: porém, os pluralistas globais questionam se os sistemas considerados clássicos utilizam conceitos como *verdade* e *validade* no mesmo sentido que sistemas não-clássicos o fazem, colocando em debate as definições utilizadas pela Lógica Proposicional Clássica e suas extensões [16].

Já a posição *instrumentalista* nega o próprio conceito de *correção*, estipulando que seja mais adequado tratar a relevância de sistemas formais por critérios como o de utilidade, conveniência, entre outros; alguns instrumentalistas, por sua vez, ainda rejeitam qualquer noção de *verdade* associada a uma lógica, levando em consideração que uma dada lógica deve ser pensada apenas como um conjunto de *regras* e *procedimentos* [16].

[1] A noção de correção é considerada inapropriada quando falamos de sistemas lógicos

Consideremos neste trabalho que há um pluralismo de sistemas formais[2] e que existem *extensões* da Lógica Proposicional Clássica[3] (a Lógica de Primeira Ordem e a Lógica Modal, por exemplo) e *alternativas* à família de Lógicas Clássicas, denominadas de Lógicas Não-Clássicas e apresentadas de forma breve anteriormente. Assim, a Lógica Proposicional Clássica e a Lógica de Primeira Ordem têm como intuito fornecer cânones precisos, padrões formais para se determinar a validade de argumentos [16], resgatando essa idéia de ser uma base para trabalhar o pensamento formalizado por uma linguagem específica e com uma semântica e sintaxe bem definidas. Por outro lado, existe um pluralismo de sistemas formais considerados alternativos que *rejeitam* um ou mais princípios lógicos clássicos, podendo restringir ou alterar alguns dos axiomas ou princípios válidos no cânone apresentado pela Lógica Clássica ou, ainda, sistemas que modificam apenas as noções semânticas da Lógica Clássica.

É importante compreender os principais conceitos e propriedades clássicos para que se possa compreender a motivação por trás do desenvolvimento de classes de Lógicas Não-Clássicas como as Paraconsistentes e as Não-Monotônicas. Veremos, assim, uma breve introdução dos conceitos clássicos que serão utilizados e analisados nos capítulos posteriores. No intuito de não alongar o texto com informações muito detalhadas, a apresentação de tais conceitos é feita de forma sucinta e relacionada com a noção de Lógicas Não-Clássicas. Consideremos que as definições e resultados que valem para a Lógica Proposicional Clássica, também valem para todas as suas extensões tal como a Lógica de Primeira Ordem e a Lógica Modal. Assim, como afirmado anteriormente, nos referiremos às lógicas que compartilham tais propriedades como Lógicas Clássicas.

1.1.1 Lógicas Clássicas

Lógica Proposicional Clássica

A Lógica Proposicional Clássica, que denotaremos no presente trabalho por **LPC**, é apresentada segundo [9]. Assim, **LPC** consiste de:

1. Uma linguagem formal;
2. mecanismos que verificam as proposições *válidas* da linguagem;
3. mecanismos que obtêm sequências de proposições válidas (*provas* ou *demonstrações*).

[2] Particularmente, adotaremos a visão pluralista local, de que cada sistema formal pode ser aplicado a diferentes âmbitos do discurso.

[3] A Lógica Proposicional Clássica e suas extensões serão denominadas apenas como Lógicas Clássicas, considerando que tais sistemas formais respeitam os princípios lógicos clássicos. A Lógica Proposicional Clássica, por sua vez, pode ser referida tanto como **LPC** quando, simplesmente, Lógica Clássica.

A linguagem de **LPC** é composta por:

- Variáveis proposicionais (p_0, p_1, ..., p_n, ...);
- Conectivos lógicos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$);
- Símbolos auxiliares (parênteses e vírgulas).

Os mecanismos que verificam as proposições válidas valem-se de certas definições, apresentadas a seguir.

Definição 1.1.1 *Uma **valoração** é uma função que leva fórmulas bem-formadas (**fbfs**) em **valores-de-verdade**: **verdadeiro**, denotado por V, ou **falso**, denotado por F, aplicado às fbfs. Semanticamente, **contradições** são consideradas falsidades lógicas, ou seja, são sentenças que, independentemente dos valores-de-verdade atribuídos às suas componentes atômicas, sempre recebem o valor-de-verdade falso.*

Definição 1.1.2 *Seja For o conjunto de todas as fbfs de **LPC**. Seja Γ um subconjunto de For. Dizemos, então, que Γ é uma **teoria** de **LPC**.*

Considere $\Gamma \subseteq For$ e seja $\alpha \in For$. Dizemos que α é *consequência semântica* de Γ, denotado por $\Gamma \models \alpha$, se, para toda valoração v, vale o seguinte:

$$\text{se } v(\beta)= \text{V para todo } \beta \in \Gamma, \text{ então } v(\alpha)= \text{V.}$$

Se $\Gamma \models \alpha$ não vale, escrevemos $\Gamma \not\models \alpha$.

A relação de consequência semântica $\models$ satisfaz as seguintes propriedades:

- $\alpha \models \alpha$ (reflexividade);
- Se $\Gamma \models \alpha$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \alpha$ (monotonicidade);
- $\Gamma \models \alpha$ e $\Delta,\alpha \models \beta$, então $\Gamma,\Delta \models \beta$ (corte).

Algumas Lógicas Não-Clássicas rejeitam uma ou mais propriedades das apresentadas acima: as Lógicas Não-Monotônicas, por exemplo, recusam a propriedade da *monotonicidade*.

Os conceitos de *fórmulas equivalentes*, *tautologia* e *contradição* são centrais em toda lógica. Assim,

Definição 1.1.3 *Dizemos que duas fórmulas* α *e* β *são* ***semanticamente equivalentes*** *e denotaremos por* $\alpha \equiv \beta$ *se, para toda valoração v, temos que v(*α*)=v(*β*)*[4].

As *tautologias* são verdades lógicas, proposições que, independentemente do valor-de-verdade atribuído às suas componentes atômicas, recebem como valor-de-verdade *verdadeiro*[5]. O conceito dual da tautologia é o de **contradição**. As contradições são falsidades lógicas, proposições que, independentemente dos valores-de-verdade atribuídos às suas componentes atômicas, recebem o valor-de-verdade *falso*[6]. Sentenças que não são nem tautologias nem contradições são chamadas de *contingências* dado que recebem valor-de-verdade ora verdadeiro ora falso, dependendo do valor-de-verdade atribuído às suas componentes atômicas.

A partir da linguagem de **LPC**, podemos definir demonstrações de fórmulas a partir de um conjunto dado de premissas. As *demonstrações* são sequências finitas de fórmulas, justificadas a partir de regras, que terminam na fórmula que desejamos demonstrar, caso haja sucesso na demonstração.

Se existir uma demonstração de α a partir de Γ em um sistema, então dizemos que α é *consequência sintática* ou *derivado* de Γ e denotamos por $\Gamma \vdash \alpha$. Caso contrário, escrevemos $\Gamma \nvdash \alpha$.

A relação de consequência sintática $\vdash$ satisfaz as seguintes propriedades:

- $\alpha \vdash \alpha$ (reflexividade);
- Se $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \alpha$ (monotonicidade);
- $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Delta, \alpha \vdash \beta$, então $\Gamma, \Delta \vdash \beta$ (corte).

Dessas três propriedades, destaquemos a *monotonicidade*: intuitivamente, a monotonicidade nos garante que se uma conclusão foi obtida a partir de um conjunto de premissas, essa conclusão se mantém na extensão desse conjunto.

A Lógica Proposicional Clássica e suas extensões são consideradas corretas e completas, isto é, $\Gamma \vdash \alpha$ se, e somente se, $\Gamma \models \alpha$.

Sejam Γ e Δ subconjuntos de *For*, ou seja, *teorias* de **LPC**, e α e β fórmulas de *For*. Dizemos que Γ é *contraditória em relação à negação clássica* $\neg$ se existe um α tal que $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$ simultaneamente. Γ é dita *trivial* se, para todo α, $\Gamma \vdash \alpha$. Dizemos que Γ é *explosiva* se, para todo α e para todo β, $(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \vdash \beta)$.

[4] A saber, a relação de equivalência é reflexiva ($\alpha \equiv \alpha$, para toda α), simétrica ($\alpha \equiv \beta$ implica $\beta \equiv \alpha$, para toda α e para toda β) e transitiva ($\alpha \equiv \beta$ e $\beta \equiv \gamma$ implica $\alpha \equiv \gamma$, para toda α, β, γ)

[5] ou 1

[6] ou 0

Lógica de Primeira Ordem

Uma linguagem de Primeira Ordem consiste em:

- Um conjunto enumerável **V** = $\{v_n \mid n \geq 0\}$ de variáveis individuais;
- Um conjunto (potencialmente vazio) **C** de constantes individuais;
- Para cada $n \geq 1$, um conjunto P_n de símbolos de predicados n-ários;
- Para cada $n \geq 1$, um conjunto F_n de símbolos de funções n-árias;
- Conectivos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$);
- Quantificadores ($\forall$ e $\exists$);
- Símbolos auxiliares: Parênteses e vírgulas.

Os símbolos $\forall$ e $\exists$ são ditos, respectivamente, *universal* e *existencial* [27]. Na linguagem apresentada por Smullyan [27], usa-se letras minúsculas *x, y, z, ...* para denotar variáveis individuais arbitrárias; letras minúsculas *a, b, c, ...* com ou sem índices para denotar constantes individuais; e letras maiúsculas *P, Q, R,* ... com ou sem índices para denotar predicados. Apesar de algumas notações serem adotadas a partir das definições de Smullyan, letras gregas como α, β, φ, ψ, γ, ... denotarão fórmulas da linguagem.

Definição 1.1.4 *Por uma **fórmula atômica** entendemos uma (n+1)-upla $P_{c_1,\ldots,c_n}$ onde P é qualquer predicado n-ário e $c_1, \ldots, c_n$ quaisquer símbolos individuais (variáveis ou constantes) [27].*

Definição 1.1.5 *A partir das fórmulas atômicas, construímos o conjunto de todas as fórmulas pelas regras de formação da Lógica Proposicional [Clássica] juntamente com a regra:*

Se α é uma fórmula e x é uma variável, então ambas $(\forall_x)\alpha$ e $(\exists_x)\alpha$ são fórmulas [27].

Termos da linguagem podem ser dados como se segue e constituem o conjunto *TER*:

Definição 1.1.6 *Considere a Linguagem de Primeira Ordem. O conjunto de termos da linguagem denotado por TER será formado por:*

- *Constantes e variáveis são termos;*
- *Se t_1, ..., t_n são termos e f é uma função n-ária, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ são termos;*

- *Apenas essas expressões são termos.*

Definição 1.1.7 *Uma ocorrência de uma variável x numa fórmula α é* ***ligada*** *se x ocorre em $\forall_x$ ou se x ocorre no escopo de uma quantificação $\forall_x$*[7]*. Caso contrário, a ocorrência é* ***livre****.*

Definição 1.1.8 *Φ[x/t] denota a fórmula obtida a partir de Φ ao substituirmos todas as ocorrências livres de x pelo termo t.*

Além dos axiomas da Lógica Proposicional Clássica e da regra de inferência Modus Ponens, a Lógica de Primeira Ordem possui outra regra de inferência: a *generalização*:

[Gen] Se $\vdash \varphi$, então $\vdash \forall_x \varphi$

Definição 1.1.9 *Considere uma Linguagem de Primeira Ordem. Uma* **interpretação** *é um par* $\mathbf{U} = \langle D, u \rangle$ *tal que:*

- *D é um conjunto não-vazio e é considerado o domínio de* **U***;*

- *ü é uma função que interpreta os símbolos da linguagem da seguinte maneira:*

  1. *Se c é uma constante, então $c^u \in D$;*

  2. *Se f é uma função n-ária, então f^u é uma função n-ária tal que $f^u: D^n \to D$;*

  3. *Se P é um predicado n-ário, então $P^u \subseteq D^n$.*

Definição 1.1.10 *Seja* **U** *uma interpretação sobre a linguagem, TER o conjunto de todos os termos da linguagem,* **V** *o conjunto de variáveis, D o domínio de* **U** *e s:* $\mathbf{V} \to D$ *uma função*[8]*. Definimos $s^\star$: TER $\to D$ como se segue:*

- $s^\star(v_i) = s(v_i)$;

- $s^\star(c) = c^u$;

- $s^\star(f(t_1, ..., t_n)) = f^u(s^\star(t_1), ..., s^\star(t_n))$

Definição 1.1.11 *Considere* **U** *e s como acima definidos. Dizemos que (***U***, s)* **satisfaz** *uma fórmula φ da linguagem e denotaremos por* $\mathbf{U} \models_s \varphi$*, se:*

[7] α é o escopo de $\forall_x \alpha$

[8] interpretação de variáveis

- $\varphi = P(t_1, ..., t_n)$, *então* $\mathbf{U} \models_s P(t_1, ..., t_n)$ *se, e somente se,* $(s^\bigstar(t_1), ..., s^\bigstar(t_n)) \in P^{\mathbf{U}}$*;*

- $\mathbf{U} \models_s \neg\varphi$ *se, e somente se,* $\mathbf{U} \not\models_s \varphi$*;*

- $\mathbf{U} \models_s (\varphi \rightarrow \psi)$ *se, e somente se,* $\mathbf{U} \not\models_s \varphi$ *ou* $\mathbf{U} \models_s \psi$*;*

- $\mathbf{U} \models_s \forall_x \varphi$ *se, e somente se, para todo* $a \in D$, $\mathbf{U} \models_{s^a} \varphi$, *onde* $s^a(v) = s(v)$, *se* $v \neq x$ *e a, se* $v = x$.

Se $\mathbf{U} \models_s \varphi$ *para toda s, então* φ *é dita uma proposição* **verdadeira**.

As definições acima mostram-se necessárias pois alguns elementos da linguagem de Primeira Ordem são explicitamente utilizados na formulação de algumas Lógicas Não-Monotônicas e outras Lógicas Não-Clássicas que não se limitam ao nível proposicional. Visando um texto sucinto, apenas os elementos cruciais para a compreensão de alguns pontos deste trabalho foram apresentados, assim como a notação utilizada. Posteriormente, outras definições e resultados necessários poderão ser evidenciados ao longo do texto.

Quando se discursa acerca de Lógica Proposicional Clássica e suas extensões, resgatamos as noções e princípios que as regem. Três importantes princípios da Lógica Proposicional Clássica e que valem para todas as Lógicas que a estendem são [9]:

- **[1] Princípio da Não-Contradição**:

  existe um Γ, para todo α, tal que $(\Gamma \nvdash \alpha$ ou $\Gamma \nvdash \neg\alpha)$[9];

- **[2] Princípio da Não-Trivialidade**:

  existe um Γ e existe um α tais que $\Gamma \nvdash \alpha$[10];

- **[3] Princípio da Explosão**:

  para todo Γ, para todo α e para todo β, $(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \vdash \beta)$[11].

Algumas Lógicas Paraconsistentes rejeitam o *Princípio da Não-Contradição*; já as Lógicas de Inconsistência Formal, por exemplo, diferentemente de outras Lógicas Paraconsistentes, rejeitam o *Princípio da Explosão*. Intuitivamente, o Princípio da Não-Contradição e o Princípio da Não-Trivialidade não causam

[9]Intuitivamente, o Princípio da Não-Contradição nos garante que, dado um conjunto de sentenças Γ e uma fórmula α, ou Γ tem como consequência α ou a negação de α $(\neg\alpha)$, mas não α e $\neg\alpha$ simultaneamente.

[10]Intuitivamente, o Princípio da Não-Trivialidade nos diz que existe ao menos uma fórmula da linguagem que não pode ser consequência de um conjunto qualquer de premissas, isto é, nos garante que a teoria não é trivial.

[11]Intuitivamente, o Princípio da Explosão que a presença de uma contradição (ou seja, $\alpha \wedge \neg\alpha$) nos leva a derivar qualquer fórmula da linguagem.

maiores espantos quando os vemos pelo ponto de vista da linguagem natural. Por outro lado, se pensarmos o Princípio da Explosão aplicado aos raciocínios rotineiros percebemos que algo potencialmente informativo pode ser ignorado se este princípio fosse seguido à risca. O Princípio Gentil da Explosão utilizado pelas Lógicas de Inconsistência Formal[10], por exemplo, fornece uma alternativa à rigidez do Princípio Clássico da Explosão.

Estas definições nos levam, assim, à um conceito importante tanto para as Lógicas Clássicas quanto para as Lógicas de Inconsistência Formal e para as Lógicas Não-Monotônicas: o conceito de *consistência*. Como veremos ao longo do texto, este conceito exerce papel central na análise filosófica das Lógicas Não-Clássicas especificamente trabalhadas aqui.

Definição 1.1.12 *Dizemos que uma lógica é* ***consistente*** *se é explosiva e não-trivial, ou seja, se para todo* Γ*, para todo* α *e para todo* β*, vale (*$\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nvdash \beta$*). Caso contrário, ela é dita* ***inconsistente****.*

Uma outra definição possível para o conceito de *consistência* em uma Lógica Clássica é [17]:

Definição 1.1.13 *Dizemos que um conjunto* Γ *de fórmulas da linguagem é* **consistente** *ou* **satisfatótio** *se, e somente se, existe alguma valoração v tal que v(*Γ*) = V; i.e., v (*α*) = V para todo* $\alpha \in \Gamma$*. Caso contrário, dizemos que* Γ *é* **inconsistente** *ou* **insatisfatório***.*

Considerando o conjunto de fórmulas da linguagem como uma teoria, as definições apresentadas acima referem-se à noção *formal* da consistência de uma lógica ou de uma teoria. Elas referem-se, em especial, aos sistmas formais considerados partes das Lógicas Não-Clássica, embora sejam utilizados em muitos sistemas formais alternativos. Tomamos, assim, estas definições como parte da relação entre os diferentes tipos de lógica, considerando a existência de múltiplos sistemas formais numa visão pluralista da Lógica e considerando a Lógica Proposicional Clássica e suas extensões (tal como a Lógica de Primeira Ordem) como o cânone a partir do qual trabalharemos as Lógicas Não-Clássicas.

1.1.2 Lógicas Não-Clássicas

Uma *lógica não-clássica*, como afirmado, é uma lógica na qual uma ou mais propriedades ou princípios da lógica clássica não valem. Existe uma gama de lógicas categorizadas como não-clássicas: as lógicas intuicionistas, as lógicas paraconsistentes e as lógicas não-monotônicas são alguns exemplos. A Lógica pode ser vista como um processo interno, de raciocínio, que parte da mente para o mundo. A partir dela, formulamos e derivamos idéias e pensamentos. Parte da motivação para o desenvolvimento dessas lógicas vem da associação entre pensamento e inferência. Assim, na tentativa de aproximar as formalizações lógicas do processo de raciocínio humano, diversos filósofos, lógicos e matemáticos preocuparam-se em desenvolver lógicas capazes de suportar as peculiaridades desse processo, levando em consideração as particularidades do pensamento.

A partir do debate sobre a existência ou não de múltiplos sistemas formais, temos que a pluralidade de sistemas lógicos - ou simplesmente *lógicas* - fornece alternativas que dependem de preconcepções metafísicas ou epistmológicas, contrapondo a noção de que a Lógica (enquanto disciplina) ocupa-se apenas da *forma*, não do *conteúdo* dos argumentos [16]. Dessa forma, existe uma necessidade que motivou o aparecimento das lógicas que restrigem ou ampliam a Lógica Clássica. Grosso modo, como podemos ver na passagem a seguir, a Lógica Proposicional Clássica e suas extensões se mostram insatisfatórias para fornalizar alguns tipos de raciocínio cotidianos o que leva ao desenvolvimento de sistemas não-clássicos:

> As pressões para mudar os cálculos bivalentes clássicos, o sentencial e o de predicados, têm vindo de preocupações com a aparente inadequação do aparato clássico para representar os vários tipos de argumento formal, e sobre a interpretação e aplicação desse aparato [16].

Como vemos, existe uma preocupação para que os sistemas formais não sejam completamente desconexos do raciocínio cotidiano: não haveria propósito algum caso o fosse como afirma Van Benthem [30]. Logo, o surgimento de novas lógicas possuem motivações filosóficas e de aplicabilidade relacionados ao raciocínio cotidiano, procurando melhores formas de lidar com argumentos com os quais a Lógica Clássica não consegue trabalhar de forma satisfatória. Para isso, se buscam formalismos com graus mais elevados de expressividade.

Há muito interesse em se desenvolver Lógicas Não-Clássicas tais como a família de Lógicas Não-Monotônicas que abandonam a propriedade de monotonicidade em prol de formalizar situações nas quais retratamos conclusões previamente obtidas. Assim, Antonelli define as Lógicas Não-Monotônicas como se segue:

> O termo *lógica não-monotônica* cobre uma família de teorias formais concebidas para capturar e representar *inferências retratáveis*, i.e., aquele tipo de inferência da vida cotidiana na qual os pensadores derivam conclusões com base na *tentativa e erro*, reservando o direito de se retratarem quando se deparam com novas informações [1].

Uma lógica regida pelos princípios clássicos nos garante que a conclusão obtida a partir de premissas verdadeiras também será *verdadeira* e, ainda, que a adição de novas premissas não altera os valores-de-verdade de conclusões obtidas anteriormente. Entretanto, informações incompletas, premissas *indisponíveis*[12] e dados imprecisos fazem parte do cotidiano fazendo com que o raciocínio dedutivo e conservativo se mostre insatisfatório para formalizar este tipo de pensamento. Assim, o raciocínio não-monotônico aparece como ferramenta para tratar raciocínios não-dedutivos e/ou não-conservativos dentro do campo de Inteligência Artificial. A relação entre os sistemas não-monotônicos e a Inteligência Artificial não é tão recente e também motivado pela necessidade de se formalizar raciocínios sob certas condições:

> O campo do pensamento não-monotônico na inteligência artificial tem cerca de 16 anos, um adolescente, agora. Durante este tempo, muitos aparatos lógicos, mais ou menos formais, foram propostos para cumprir a tarefa de raciocinar sob certas condições, i.e., para executar inferências sensíveis nas bases de conhecimento realisticamente incompletos [20].

Assim, a aplicabilidade do raciocínio não-monotônico é um ponto importante na Inteligência Artificial. É intuitivo, assim, pensar que contribuições às Lógicas Não-Monotônicas também podem contribuir para o campo da Inteligência Artificial. Desta forma, não seria possível superar os limites da não-monotonicidade e também trabalhar com contradições potencialmente informativas dentro de um ambiente não-monotônico? Assim como muitas das Lógicas Não-Clássicas, as motivações e a relevância de uma lógica que lide com contradições dentro de um ambiente não-monotônico podem auxiliar na formalização de um pensamento mais próximo ao utilizado comumente devido a um alto grau de expressividade da sua linguagem. É evidente que as motivações para o desenvolvimento de lógicas não-clássicas estejam relacionadas às situações nas quais as ferramentas disponíveis não são suficientemente satisfatórias. O aparato clássico, por exemplo, não permite que trabalhemos com contradições dentro de uma dada lógica: as contradições são vistas como algo a ser evitado principalmente pelo receio de ferir o Princípio da Explosão. Entretanto, contradições podem ser informativas: a presença de contradições, por exemplo, poderia nos indicar um desconhecimento acerca dos valores-de-verdade dessas e de outras fórmulas que interagem com as contradições. Em muitas situações as contradições ou novas informações não podem ser simplesmente descartadas. Assim, Lógicas Paraconsistentes e, em especial, as Lógicas de Inconsistência Formal nos permitem trabalhar com informações que nos são apresentadas cotidianamente. Como obtenção de novas informações também é algo cotidiano, as Lógicas Não-Monotônicas se apresentam como uma forma viável de lidar com essas situações. Os conhecimentos-base, que tomamos como *certezas*, nos são frequentemente apresentados após conclusões obtidas a partir de outras informações e, ainda, podemos nos deparar com contradições. As diversas bases de conhecimento podem ser inconsistentes entre

[12] Premissas às quais não temos acesso por alguma razão.

si. Nossas certezas são artifícios para que possamos desenvolver ideias e novos conhecimentos; elas são falseáveis, permitindo um exercício de substituição de teorias por novas mais adequadas. Não podemos, portanto, assumir que todas as nossas bases de conhecimento são determinantemente verdadeiras e concretas. A necessidade de revisar as nossas crenças vem, em parte, dessa noção de que o conhecimento possui um processo de evolução que seleciona e descarta hipóteses à medida que novas informações são descobertas ou inferidas. Existem inúmeros exemplos de situações nas quais utilizamos esse tipo de pensamento, muitos, inclusive, ligados à áreas científicas como explicitamente no caso da Biologia: novas informações específicas, em geral neste contexto, tendem a invalidar informações generalizadas previamente aceitas.

Considere um detetive investigando um assassinato. Nenhuma das conclusões tiradas pelo detetive se segue dedutivamente, no senso estrito do termo, a partir das evidências. Essas conclusões envolvem suposições e conjecturas, além da sempre presente possibilidade de algo dar errado [17]. A cada pista encontrada pelo detetive, ele a analisa perante o conjunto de informações que já possui e só então deriva uma nova conclusão. O que fazer quando, por exemplo, uma nova pista contradiz uma conclusão possível ou alguma das informações já obtidas? Esse é um caso no qual somos obrigados a pensar contradições dentro de um ambiente não-monotônico, ou seja, uma situação na qual o formalismo clássico se mostra insatisfatório.

Apesar da possibilidade de concluir algo não-verdadeiro, o que o detetive faz ainda é considerado um tipo raciocínio: não o invalidamos baseando-nos em possíveis erros e conclusões falseáveis. Há muitas abordagens para casos como o do detetive acá descrito e formalizar uma lógica capaz de trabalhar com contradições e com conclusões retratáveis parece ser uma opção. Este tema foi abordado anteriormente, por exemplo, em [21]. Entretanto, nunca foi feita uma abordagem com base nas Lógicas de Inconsistência Formal. Uma nova abordagem, baseada nas LFIs, parece natural e com potencial de aplicações, embora o interesse principal do presente trabalho seja conceitual e filosófico. Essa investigação também leva em consideração a relevância filosófica de tal lógica, na tentativa de justificar o seu desenvolvimento perante o pensamento humano. Assim, o objetivo geral é compreender os principais conceitos relacionados às Lógicas Paraconsistentes e às Lógicas Não-Monotônicas e suas relações com o pensamento humano, buscando novas formas de lidar com contradições quando estamos em um ambiente onde a propriedade de monotonicidade já não se aplica e, ainda assim, sendo capazes de fazer inferências válidas, não descartando conclusões que seriam geradas por uma lógica contraditória e trivial.

Novas conclusões, assim, podem ser obtidas depois que novas informações surgem. Isso não significa necessariamente que existe um problema no raciocínio anteriormente aplicado. Algumas retratações poderiam advir, também, de reflexões posteriores feitas sobre o conjunto de premissas. Tais retratações poderiam ser consideradas dentro do âmbito das Lógicas Adapativas como parte de um processo de *dinâmica interna*. As inferências anteriores podem ser reorganizadas a partir das mais razoáveis (ou consistentes) para que possamos trabalhar com o novo conjunto de sentenças: pode-se, por exemplo, questionar o fato de certas retratações advirem de conclusões obtidas a partir de generalizações; neste caso, as Lógicas Moduladas oferecem uma alternativa para evitar tais retratações utilizando *modulador* para indicar a noção de *geralmente*. Sinteticamente, existem inúmeras justificativas para o desenvolvimento de Lógicas Não-Clássicas, variando desde a busca por maior expressividade na linguagem formal até uma tentativa de formalizar o raciocínio cotidiano tornando as Lógicas Não-Clássicas muito interessantes do ponto de vista filosófico. Visando investigar as Lógicas Não-Monotônicas e as Lógicas de Inconsistência Formal, diversos conceitos mostram-se intuitivos enquanto outros apresentam-se como problemáticos o que acaba por justificar o interesse em tais formalismos não só do ponto de vista formal, mas, primordialmente no presente trabalho, do ponto de vista conceitual.

Capítulo 2

Lógicas Não-Monotônicas

As Lógicas Não-Monotônicas, grosso modo, são a família de lógicas que rejeitam a propriedade de *monotonicidade*. Em um raciocício não-monotônico, desejamos obter conclusões que podem não ter sido derivadas antes de obtermos novas informações [23]. Em muitos raciocícios cotidianos tiramos conclusões com base em *tentativa-e-erro*, baseadas em informações parciais ou incompletas, reservando o direito de retratar tais conclusões ao nos depararmos com novas informações. Esse é o tipo de raciocício *não-monotônico* [1]. Não existe apenas um sistema que formaliza o pensamento dito não-monotônico, mas sim uma família de formalismos não-monotônicos:

> Não existe, de fato, tal coisa chamada *lógica não-monotônica*, mas sim uma família de diferentes formalismos, com diferentes propriedades matemáticas e graus de adequação material que buscam capturar e representar padrões de pensamento *default* [1].

Muitos motivos são apresentados para justificar a rejeição da propriedade de monotonicidade. Situações nas quais informações generalizadas[1] são confrontadas com informações mais específicas que contradizem (ao menos em parte) as generalizações e/ou a credibilidade das premissas adotadas no raciocício podem gerar conclusões conflitantes.

Certos conflitos[2], entretanto, são gerados pela não-monotonicidade [1]: uma questão intrínseca relacionada às lógicas não-monotônicas, embora não seja uma questão técnica, formal, é a de como lidar com os *conflitos* entre diferentes conclusões possíveis [1]. Existem dois tipos de conflitos que podem surgir

[1]Generalizações são frequentemente utilizadas com fins pedagógicos, ou ainda, como forma de raciocinar perante informações incompletas.

[2]Conflitos podem surgir perante anormalidades, como as contradições.

nos sistemas não-monotônicos e, quando eles aparecem, é necessário seguir certos passos para restaurar a consistência[3] do sistema. Assim, os dois tipos de conflitos podem ser descritos como se segue:

- conflitos entre conclusões possíveis e *fatos*, que podem ter sido recentemente aprendidos;
- conflitos entre duas conclusões possíveis.

Em toda lógica não-monotônica, as conclusões podem ser retratadas perante novas informações; daí a rejeição à propriedade de monotonicidade. Duas atitudes podem ser adotadas diante conflitos como os acima: podemos concluir de forma *cautelosa* ou *cética* e evitar inferir conclusões que entrem conflito, não se comprometendo com nenhuma delas; ou podemos concluir de forma *crédula* e nos comprometermos com o máximo de conclusões possíveis que permitam que o sistema se mantenha consistente. Para cada tipo de atitude, adotamos tipos distintos de relações de inferência que fornecem as ferramentas formais para representar essas diferentes visões dentro de um sistema lógico. Suponha, por exemplo, que você seja convidado para um evento. As condições para tal evento são: caso chova, todos devem levar um guarda-chuva; caso não chova, todos devem levar protetor solar. A atitude *crédula* indicaria que você deve se preparar para levar tanto o guarda-chuva quanto o protetor solar (as duas conclusões possíveis); enquanto a *cautelosa* lhe faria esperar até o dia do evento para que, perante as novas informações acerca do tempo, você decida qual dos dois itens você deve levar.

A primeira formulação geral de pensamento *default* foi desenvolvida por Reiter em 1980 e chamada de *Lógica Default*. A ideia básica por trás dessa formulação é possuir uma série de regras *default* disponíveis e adicionar à uma teoria o máximo de regras *default* consistentemente possíveis [8]. Por ser a primeira formulação de uma lógica não-monotônica, a Lógica Default de Reiter é considerada uma das mais importantes lógicas não-monotônicas e serve de base para diferentes sistemas formais.

As tentativas iniciais de formular lógicas não-monotônicas foram insatisfatórias do ponto de vista técnico [8], fazendo com que tais lógicas sofressem muitas críticas, particularmente, aos aspectos técnicos e sintáticos do poder de inferência das lógicas não-monotônicas que utilizam a regra de inferência *default* e à negligência no desenvolvimento das semânticas dessas lógicas. Dentre as críticas apresentadas, está a de que adotar regras não-monotônicas que atingem conclusões apenas parcialmente suportadas pode levar à contradições. Adotar essas regras, assim, nos leva a atribuir o valor-de-verdade clássico *verdadeiro* a proposições que podem ser retratadas perante novas informações, o que pode levar à inconsistências.

[3] A noção de *consistência* é um pouco problemática nas Lógicas Não-Monotônicas. Entretanto, quando nos referimos aqui à *consistência de um sistema*, estamos utilizamos a noção de *consistência* definida anteriormente ne Lógica Proposicional Clássica.

Um conceito muito importante quando tratamos de não-monotonicidade é o conceito de *consistência* e, apesar de ser um conceito problemático em alguns sistemas não-monotônicos, existem diversos formalismos fundamentam-se nesta noção como podemos ver a seguir:

> Uma ampla classe de formalismos não-monotônicos pode ser caracterizada como *abordagens baseadas em consistência*. O nome é derivado do fato de que, enquanto todos os formalismos não-monotônicos lidam com conflitos entre novos fatos e conclusões possíveis da mesma forma (os fatos ganham e as conclusões são retratadas), alguns desses formalismos também permitem potenciais conflitos entre as conclusões possíveis (e, então, eles podem diferir na forma que lidam com esse segundo tipo de conflito [2].

Usualmente, a consistência é associada às justificativas em uma regra de inferência default e alguns desses sistemas utilizam este conceito na resolução de problemas técnicos nas chamadas Lógicas Default. Entretanto, não há um método preciso e amplamente aceito na literatura para determinar a *consistência de uma justificativa*. A consistência de uma justificativa, assim, aparece como um conceito não muito bem definido e que está sujeito à interpretações possíveis.

2.1 Lógica Default de Reiter

Existem duas formas de lidar com a não-monotonicidade dentro de uma lógica: pode-se alterar a lógica para que seja falseável ou, ainda, estabelecer que algumas premissas no argumento lógico podem não serem permitidas quando uma nova informação é recebida [23]. A Lógica Default é uma formalização deste segundo tratamento possível, fornecendo regras que adicionam premissas a argumentos lógicos e foi introduzida por Reiter em 1980 [24] e é considerada uma das abordagens para raciocício não-monotônico bastante relevante pela sua aplicabilidade.

Definição 2.1.1 *O* **pensamento default** *corresponde ao processo de derivar conclusões a partir de um conjunto baseando-se em padrões de inferência da forma "na ausência de qualquer informação contrária a γ, suponha γ [24].*

Utilizamos o raciocínio não-monotônico quando temos que revisar a conclusão anterior, mediante novas informações. Se a Lógica Clássica fosse utilizada, seria necessário adicionar todas as possíveis condições (que ainda não foram apresentadas) para que a conclusão pudesse ser garantida. Assim, seria preciso estabelecer todas as condições particulares de uma regra antes que ela fosse aplicada. Isso, entretanto, não parece sensato; afinal, o número de condições poderia ser muito grande e estabelecer as condições para cada regra não seria nada prático. Suponha, por exemplo, que Mr. X vai de ônibus ao trabalho dadas certas condições específicas: o carro está no conserto; ou está nevando; ou precisa fazer compras; etc. Seria inviável formalizar as condições que fazem com que Mr. X vá ao trabalho na Lógica Clássica: seria preciso adicionar como regras todas as condições que o fariam ir de ônibus. Mais ainda, Mr. X pode sempre ter novas justificativas para ir de ônibus que não estavam inicialmente previstas pelas regras. Faz-se uso, nesses casos, do pensamento *default* [2]. Qualquer lógica que se proponha a formular o pensamento default deve ser não-monotônica [24].

Grigoris Antoniou apresenta de forma concisa a Lógica Default de Reiter em [2]. Usa-se como base nesta apresentação as notações presentes em seu trabalho. Dessa forma, considere uma linguagem de Primeira Ordem. Sejam γ, θ e τ fórmulas fechadas, ou seja, que não possuem variáveis livres, de uma dada linguagem. Uma regra de inferência falseável **default** é da forma:

$$\frac{\gamma : \theta}{\tau}$$

onde γ é dito um *pré-requisito* conhecido; θ é uma *justificativa* e não tenho evidências de que possa ser falsa; e τ é a conclusão do *default*. Informalmente, podemos interpretar um *default* da seguinte forma: se γ é conhecido e θ é consistente; então podemos concluir τ. Grosso modo, uma regra default especifica que fórmulas podem ser usadas como premissas em um argumento lógico [23].

Definição 2.1.2 *uma **teoria default** T é um par (W,D) consistindo de um conjunto X de fórmulas da Linguagem de Primeira Ordem (que chamamos de* **fatos** *ou* **axiomas***) e de um conjunto enumerável D de defaults.*

Formalmente, um default δ tem a forma ideal:

$$\frac{\gamma : \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n}{\tau}$$

onde $\gamma, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \tau$ são fórmulas fechadas da linguagem e $n > 0$. Nesta formulação, há o requerimento de que as fórmulas sejam fechadas, isto é, não possuam variáveis livres. Por outro lado, os defaults abertos são interpretados como esquemas-default e representam um *conjunto de defaults* potencialmente infinito.

Definição 2.1.3 *Um esquema-default define um conjunto de defaults:*

$$\frac{\gamma^\sigma : \theta_1^\sigma, \theta_2^\sigma, \ldots, \theta_n^\sigma}{\tau^\sigma}$$

para todas as substituições σ que designam valores para todas as variáveis livres que ocorrem no esquema. Dizemos que uma **instância** *de um default é obtida quando substituímos uniformemente constantes no lugar de variáveis livres.*

Ressalta-se que essa formulação de regra de inferência default é problemática e baseia-se no trabalho de Reiter. Por vezes, exemplos são utilizados no intuito de explanar melhor o conceito de *default*. Um exemplo de default seria o seguinte:

$$\frac{\textit{pássaro}(X) : \textit{voa}(X)}{\textit{voa}(X)}$$

que é lido comom "Se X é um pássaro e se é consistente assumir que X voa, então podemos concluir que X voa". Assim, na ausência de algo contrário que nos force a não aceitar que X voa, assumimos a gerenalização "Tipicamente (Usualmente), pássaros voam". O default torna-se inaplicável quando já não se pode assumir a consistência da(s) justificativa(s).

Os *defaults* são regras de inferência que podem ser utilizadas para modular diversas formas de pensamento não-monotônico, pensamento incerto, pensamento flexível e/ou falseável tais como [2]:

- **Prototypical Reasoning**: a maior parte das instâncias de um conceito possuem alguma propriedade em comum, o que torna plausível que conclua-se algo de um objeto específico a partir do conhecimento da propriedade geral de um conceito.

- **No-Risk Reasoning**: situações nas quais inferimos uma conclusão, mesmo que ela não seja a mais provável, porque outra decisão seria desastrosa.

- **Best-Guest Reasoning**: suposições prováveis a partir de informações relacionadas previamente conhecidas.

- **Diagnosis**: a partir de sintomas observados, deve-se determinar uma explicação; ou seja, a partir das informações que podem ser observadas, deve-se chegar a uma conclusão. A qualquer instante, novas informações podem ser observadas e a conclusão pode, a partir do novo cenário, não se manter.

Esses são alguns exemplos de situações nas quais podemos aplicar a regra de inferência *default*. Como visto anteriormente, em um *esquema-default*, o pré-requisito, as justificativas e a consequência não precisam, necessariamente, serem fórmulas fechadas, isto é, fórmulas nas quais todas as suas variáveis estão ligadas à algum quantificador. Nesses casos, as variáveis livres são interpretadas como sendo universalmente quantificadas. Considere o seguinte *default*:

$$\frac{\varphi(p) : \psi(p)}{\psi(p)}$$

Assim, se todo p é φ e para todo p, ψ vale, então podemos que ψ(p) vale, para φ e ψ abertas. As generalizações acabam tomando forma e, assim, podemos tirar conclusões baseadas em informações prévias. Caso tenhamos conhecimento de informações mais específicas, podemos aplicar novos *defaults*. A aplicação de *defaults* requer que a condição de consistência seja satisfeita; entretanto, como as aplicações podem ser feitas de forma complexa, nem sempre é fácil identificar quando tal condição é satisfeita.

Considere os seguintes defaults:

$$\frac{\varphi : \psi}{\gamma}$$

e

$$\frac{\theta : \neg\gamma}{\delta}$$

Se testarmos a consistência das justificativas dos *defaults* acima e elas se mostrarem consistentes, então poderíamos aplicar os dois defaults. Assim, aplicamos o primeiro *default* e obtemos γ. Assumir $\neg\gamma$ geraria, então, uma inconsistência. Portanto, não poderemos mais assumir $\neg\gamma$, pois teríamos uma contradição e, como a Lógica Default é uma lógica explosiva, derivaríamos qualquer coisa. Então, o procedimento nos diz que devemos bloquear o segundo default, ou seja, ele não poderia ser aplicado. Nesse ponto, há um claro interesse em lidar com as contradições de forma consistente e não bloquear o segundo default. Como as justificativas já se mostraram consistentes, parece contra-intuitivo excluí-las.

A idéia central por trás da semântica da Lógica Default consiste em aplicar o máximo de defaults possíveis; se descobrirmos que um default não deveria ter sido aplicado, então voltamos um passo e tentamos outra alternativa [2].

Defaults podem ocorrer em distintos domínios de aplicação. Em alguns casos, os defaults precisam ser "ajustados"[4] para serem aplicados a domínios distintos, como quando se trata de *hierarquias*, noção comumemente utilizada dentro da Biologia, por exemplo. Considere as seguintes premissas:

- Tipicamente, moluscos possuem conchas.
- Cefalópodes são moluscos.
- Cefalópodes não possuem conchas.

Representando essas sentenças no default, teremos:

$$\frac{\mathit{molusco(X) : contémconcha(X)}}{\mathit{contémconcha(X)}}$$

É preciso, então, adaptar o default para este domínio específico e, para tal, adicionaremos a seguinte regra:

$$\mathit{cefalópode(X)} \rightarrow \mathit{molusco(X)} \wedge \neg \mathit{contémconcha(X)}$$

Essa adaptabilidade dos defaults permite que eles sejam usados para formular diferentes tipos de raciocício não-monotônico, moldando-os à diferentes contextos de aplicação.

2.1.1 Semântica da Lógica Default

Visando apresentar a ideia subjacente à Semântica Padrão da Lógica Default, considere um default δ da forma:

$$\frac{\gamma : \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n}{\tau}$$

No intuito de formalizar as interpretações possíveis é preciso determinar onde γ deve ser incluso e em relação ao quê $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ deve ser consistente. Usualmente, a consistência das justificativas é testada em relação ao conjunto de fatos ou base de conhecimento atual. Se γ é atualmente conhecido e se todo θ_i (*para* $n \geq i > 0$) é consistente com a base de conhecimento atual, então conclui-se τ. A base de conhecimento atual E é obtida a partir dos fatos e dos consequentes de alguns defaults que tenham sido aplicados anteriormente [2]. Formalmente:

[4] i.e., passam por certas adaptações para contemplar os distintos pré-requisitos e justificativas

Definição 2.1.4 *Considere o seguinte default*

$$\delta = \frac{\gamma : \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n}{\tau}$$

Seja E um conjunto dedutivamente fechado de fórmulas. Dizemos que δ *é* **aplicável** *a E se, e somente se,* $\gamma \in E$ *e* $\neg\theta_1 \notin E, \ldots, \neg\theta_n \notin E$*.*

Formalmente, a regra para especificar quando uma conclusão de um default pode ser adicionada ao argumento lógico é definida em termos de *extensões* da teoria [23]. Assim, a Semântica da Lógica Default é dada levando em termos de *extensões* que serão definidas como base de conhecimento atual satisfazendo algumas condições. Defaults podem ser vistos como instruções sobre como criar extensões em teorias incompletas [24]. Antoniou nos apresenta uma ideia intuitiva do que são as extensões numa Lógica Default:

> [...] extensões representam visões de mundos possíveis que são baseados em dadas teorias defaults; eles pretendem estender o conjunto de fatos conhecidos com conjecturas "razoáveis" baseadas nos defaults disponíveis [2].

Em outras palavras, extensões fornecem um conjunto de consequências possíveis de uma teoria default [23]. Enquanto elas

Algumas propriedades são listadas [2] como propriedades desejáveis de extensões da Lógica Default, tais como:

- Uma extensão deve incluir o conjunto W de fatos já que W contém uma determinada informação.
- Um extensão deve ser deditivamente fechada para não impedir raciocício clássico dentro de ambientes não-monotônicos.
- Uma extensão E deve ser *fechada sob a aplicação de defaults em D*[5].

Uma abordagem possível é chamada *black block approach*[6]. Intuitivamente, essa abordagem lida com as extensões da seguinte maneira: defaults passam instruções de como criar extensões para uma teoria default determinando que informações são inseridas na teoria, quais são mantidas e quais são retiradas:

[5] Formalmente: se $\delta \in D$, $\gamma \in E$ e $\neg\theta_1 \notin E, \ldots, \neg\theta_n \notin E$, então $\tau \in E$. Isso significa que não paramos a aplicação de defaults até que sejamos forçados a tal. Não existem motivos para parar em alguma instância particular se mais defaults podem ser aplicados; extensões são visões de mundos possíveis.

[6] Abordagem da Caixa Preta

Definição 2.1.5 *Para uma dada teoria default T=(W,D), seja* $\Pi = (\delta_0, \delta_1, \ldots)$ *uma sequência finita ou infinita de defaults de D sem múltiplas ocorrências. Denotamos por* $\Pi[k]$ *o segmento inicial de* Π *com comprimento k . A cada sequência* Π *associamos dois conjuntos de fórmulas de primeira-ordem* $In(\Pi)$ *e* $Out(\Pi)$ *tais que:*

- $In(\Pi)$ *coleta a informação obrtida pela aplicação dos defaults em* Π *e representa a* **base de conhecimento atual** *após a aplicação dos defaults em* Π
- $Out(\Pi)$ *coleta fórmulas que não podem voltar a ser verdadeiras, isto é, que não deveriam pertencer à base de conhecimento atual após aplicação de defauls.*

Definição 2.1.6 Π *é dito um* **processo** *de T se, e somente se,* δ_k *é aplicável a* $In(\Pi[k])$*, para todo k tal que* δ_k *ocorre em* Π*.* Π *é* **bem-sucedido** *se, e somente se,* $In(\Pi) \cap Out(\Pi) = \emptyset$*; caso contrário* Π **fracassou**.

A ideia de um processo bem-sucedido visa captar a noção intuitiva de que não há problemas em assumir as justificativas dos defaults aplicados como sendo verdadeiras; i.e., nenhuma fórmula $\neg\theta$ no conjunto $Out(\Pi)$ tornou-se parte do conjunto de conhecimento atual: assim, é consistente assumir θ. Se todo $\delta \in D$ aplicável a $In(\Pi)$ já ocorrer em Π, então dizemos que Π é *fechado*.

Definição 2.1.7 *Um conjunto de fórmulas E é uma* **extensão de uma teoria default T** *se, e somente se, existe algum processo fechado e bem-sucedido* Π *de T tal que* $E = In(\Pi)$*.*

Se, aplicando os defaults numa ordem particular, atingirmos uma situação de fracasso do processo, então simplesmente retornarmos um passo do processo, bloqueamos a aplicação deste default específico e tentamos outra alternativa. Essa abordagem é passível de críticas por sua arbitrariedade e por ser considerada problemática do ponto de vista técnico [8]. Vale ressaltar que a Lógica Default é não-monotônica em relação a W e a D [2].

Reiter, então, define o conceito de *consistência* de uma teoria default como se segue:

Definição 2.1.8 *Uma teoria default fechada é* **consistente** *se, e somente se, possui uma extensão [24]*[7].

O seguinte vale na Lógica Default de Reiter [24]:

[7] Entretanto, essa definição não contempla a possibilidade de existir um conjunto maximal consistente na teoria e é passível de críticas.

Corolário 2.1.1 *a) Uma teoria default fechada T = (D, W) possui uma extensão inconsistente se, e somente se, W é inconsistente.*

b) Se uma teoria default fechada T = (D, W) possui uma extensão inconsistente, então esta é a sua única extensão.

c) Se (D, W) é consistente, então W é consistente.

Se a teoria default é fixa, então não há não-monotonicidade. O comportamento não-monotônico apenas aparece quando há alguma mudança na teoria. Alterar W ou D pode modificar o conjunto de extensões de forma imprevisível. Expandir D com novos defaults, neste caso, pode levar a novas extensões, destruir as já existentes ou modificar extensões. Os defaults determinam o comportamento da base de conhecimento, enquanto o conjunto W de *fatos* pode variar a partir de observações e adição de novas informações, por exemplo. Assim, de modo geral, quando falamos em não-monotonicidade em uma Lógica Default, na verdade, estamos lidando mais especificamente com o comportamento não-monotônico no conjunto W.

Quando uma teoria default possui defaults em conflito, então há mais de uma extensão para essa teoria; e, estender o conjunto de defaults D em uma teoria default normal, não diminui o número de extensões. Essas são propriedades garantidas para uma classe especial de defaults chamada *teorias default normais*; entretanto, tais propriedades podem não valer para todos os defaults arbitrários, pois defaults podem estar em conflito em relação às justificativas e isso pode não aparecer nas extensões. As propriedades especiais das chamadas *Teorias Default Normais* as tornam um tópico relevante nas Lógicas Default.

2.1.2 Teorias Default Normais

Os *defaults normais* são uma subclasse de teorias default nos quais o consequente do default é a sua única justificativa. Todo processo de uma teoria default normal é bem-sucedido. Assim, defaults normais sempre possuem extensões e são "bem-comportados"; isto é, eles evitam defaults estranhos tais como o abaixo:

$$\frac{verdadeiro : a}{\neg a}$$

Definição 2.1.9 *Um default é dito* ***normal*** *se, e somente se, seu consequente é a sua única justificativa. Assim, defaults normais são da forma [2]:*

$$\frac{\gamma : \theta}{\theta}$$

*Uma teoria default T=(W,D) é dita **normal** se, e somente se, todos os defaults em D são normais.*

Um default normal, assim, simplesmente conclui θ quando conhecemos γ e é consistente concluir θ. Nada, entretanto, nos é dito acerca das relações possíveis entre tais proposições. Usualmente, uma regra default por si mesma quase sempre se comporta como um default normal: os problemas surgem quando diferentes defaults são obrigados a interagir dentro de uma teoria default [2].

Trabalhando com defaults normais, temos uma série de propriedades interessantes sobre os defaults. Uma delas é a **ortogonalidade de extensões** [2]:

Teorema 2.1.1 Ortogonalidade de Extensões *Sejam E e F diferentes extensões de uma teoria default normal T. Então $E \cup F$ é inconsistente.*

Assim, dadas extensões de uma mesma teoria, se elas são diferentes[8] então podemos concluir que a união entre essas extensões será inconsistente, dado que quando T possui defaults em conflito (e conflitos podem ser interpretados como contradições e/ou inconsistências), então há mais de uma extensão para essa teoria.

Considere duas extensões diferentes E e F de uma mesma teoria T=(W,D). Se expandirmos D adicionando defaults normais (obtendo, assim, D') teremos uma T' tal que T'= (W, D'). E e F podem ser estendidas para novas extensões E' e F', respectivamente. Assim, $E \cup F$ seria um subconjunto de $E' \cup F'$. Suponha que E' = F'. Assim, $E \cup F$ seria um subconjunto de E' = F' e seria, então, consistente. Porém, pela ortogonalidade das extensões, temos que $E \cup F$ é inconsistente. Logo, teremos o seguinte resultado:

Corolário 2.1.2 *Expandir o conjunto de defaults D em uma teoria default normal adicionando defaults normais não diminui o número de extensões [2].*

Ressaltemos, aqui, que as propriedades acima apresentadas valem *exclusivamente* para defaults da forma normal. Em termos gerais, temos:

Teorema 2.1.2 *Seja E uma extensão de uma teoria default T = (W,D). Então E também é extensão de uma teoria T' = ($W \cup W'$, D) para cada $W' \subset E$.*

Assim, quando não estamos tratando exclusivamente de defaults normais, algumas extensões de T podem desaparecer e novas extensões sem nenhuma relação com as extensões de T surgirem.

[8] Diferentes extensões de uma mesma teoria default podem suportar diferentes ontologias [24].

2.2 Críticas e Abordagens Alternativas

Apesar da Lógica Default ter sido uma das primeiras formulações de uma Lógica Não-Monotônica, outras abordagens surgiram no intuito de solucionar problemas apresentados na Lógica Default de Reiter. Um problema levantado é o da possibilidade de uma teoria não ter extensões [2]. Uma outra presente preocupação é a necessidade de checar a consistência das proposições quando aplicamos defaults [25].

Lógica Default é um método para lidar com pensamento não-monotônico, assim, não podemos esperar comportamento monotônico quando adicionamos novas informações ao conjunto W de uma teoria. Desta forma, esperamos que a adição de novas informações nos levaria a novas conclusões ou menos conclusões possíveis. Se adotarmos a possibilidade de não existirem extensões como um problema, duas abordagens possíveis são apresentadas na literatura [2]:

- Podemos restringir a classe de teorias default apenas para aquelas nas quais a existência de extensões é garantida[9];
- Podemos modificar o conceito de extensão de forma a garantir que todas as teorias default tenham ao menos uma extensão e a semi-monotonicidade é garantida.

Nas teorias default normais, vale o seguinte:

Teorema 2.2.1 *Teorias default normais sempre possuem extensões. Todo processo finito* Π *pode ser expandido para um processo fechado* Π*'.*

Isso se deve ao fato de que todos os processos em uma teoria default normal são bem-sucedidos. Além disso, teorias default normais respeitam a **semi-monotonicidade**:

Teorema 2.2.2 Semi-Monotonicidade: *Sej T = (W, D) e T' = (W, D') teorias default normais tais que D* $\subseteq$ *D'. Então, cada extensão de T está contida em uma extensão de T'.*

Assim, quando falamos especificamente de teorias default normais, não tratamos a possibilidade de não existirem extensões como um problema. Entretanto, ainda é possível haver conflitos na aplicação de defaults. Assim, outro problema levantado leva em consideração a consistência das proposições em uma teoria default[8].

[9]Teorias Default Normais garantem a existência de ao menos uma extensão, por exemplo.

Parte desse problema se deve ao fato de que a *consistência conjunta das justificativas* não é requerimento em uma Lógica Default; i.e., as justificativas não pretendem formar um conjunto de crenças possíveis, mas sim são vistas como algo necessário para que se conclua algo. Uma alternativa a esse problema é a abordagem dada pela *Lógica Default Estrita* que requer a consistência conjunta das justificativas em uma extensão[2]. Sob a propriedade de consistência conjunta das justificativas, defaults do tipo

$$\frac{\gamma : \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n}{\tau}$$

são equivalentes a defaults do tipo

$$\frac{\gamma : \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \ldots \wedge \theta_n}{\tau}$$

modificando as justificativas no intuito de se obter uma única justificativa consistente. Entretanto, essa abordagem é criticada pois, do ponto de vista da Lógica Default, um default com diversas justificativas seria necessariamente mais expressivo que um default com apenas uma justificativa [2] e, supostamente, tornaria impossível a representação de fatos desconhecidos possivelmente conflitantes [8]. Na exigência de consistência conjunta das justificativas não é possível assumir a possibilidade de conclusões potencialmente conflitantes: não há, assim, como tratar conflitos entre duas conclusões possíveis (um dos problemas iniciais das Lógicas Não-Monotônicas, como vimos anteriormente [1]).

É possível encontrar muitas abordagens alternativas à Lógica Default apresentadas ao longo da literatura. Entretanto, nenhuma delas ainda se mostrou satisfatória para tratar de forma definitiva algumas situações presentes quando trabalhamos em ambientes não-monotônicos. Esse é um problema ainda mais grave quando lidamos com conflitos entre proposições ou possíveis contradições dentro de uma teoria default. Apresentaremos a seguir, as Lógicas Moduladas e sua relação com o raciocínio incerto e/ou flexível.

2.2.1 Lógicas Moduladas

Muitas retratações dentro de âmbitos não-monotônicos advêm de conflitos gerados entre generalizações e novas informações que contradizem tais generalizações. Ora, frequentemente utilizamos generalizações e exceções em argumentos no intuito de derivar conclusões sob informações incompletas ou com finalidade pedagógica. E é no intuito de formalizar pensamento flexível envolvendo noções vagas dadas por “moduladores” tais como *geralmente*, *muitos*, etc [31], que surgiram as Lógicas Moduladas. Em tais sistemas formais, esses “modeladores” são interpretados como quantificadores ou operadores que expressam essas noções e nos permitem raciocinar a partir delas. Tais expressões são comumente utilizadas na linguagem natural e é intuitivo pensar em formas de lidar com elas formalmente quando aparecem em argumentos lógicos.

O signficado proposto da sentença “objetos *geralmente* possuem uma dada propriedade φ” pode ser dado em termos do conjunto dos objetos que de fato possuem tal propriedade ou, ainda, pelo conjuntos das exceções [31]. O mesmo vale para a sentença “objetos *raramente* possuem uma dada propriedade φ”. A contagem do *geralmente* e do *raramente* é quantitativa, porém não muito rígida e está relacionada com a ideia de “a *maioria*[10] dos objetos possuem uma dada propriedade φ como “objetos excepcionais, i.e., aqueles que falham em possuir a propriedade φ, formam um “pequeno”[11] conjunto [31].

As Lógicas Modulares propostas em [31] adicionam à Lógica Clássica de Primeira Ordem quantificadores generalizados, no intuito de serem interpretados como imagens sobre dadas famílias de subconjuntos relevantes do universo do discurso. Considere a Linguagem de Primeira Ordem apresentada anteriormente. Chamaremos de $For^{\triangledown}$ a extensão obtida a partir da Linguagem de Primeira Ordem adicionando o operador $\triangledown$. Este operador visa expressar sentenças que possuem a noção de *generalização*, isto é, sentenças do tipo “P geralmente X” [31].

Assim, levando em consideração o ponto de vista pluralista dos sistemas formais, a família de sistemas formais dita Lógicas Moduladas engloba formalismos que são considerados extensões das Lógica Clássica: os quantificadores são interpretados como extensões dos modelos clássicos no intuito de incluir subconjuntos do universo do discurso definidos a partir de certas estruturas [12].

Considere Q um quantificador modular. Considere For_m uma linguagem obtida ao estendermos a Linguagem de Primeira Ordem com um dado quantificador Q e L_m a Lógica Modulada com essa linguagem. Se φ é uma fórmula da linguagem, então $Q_x\varphi$ também é uma fórmula da linguagem, onde x é uma variável livre. Por sua vez, L_m posssui os axiomas clássicos acrescidos dos seguintes axiomas [12]:

- **[Ax1]** $\forall_x \varphi(x) \rightarrow Q_x\varphi(x)$;
- **[Ax2]** $Q_x(\varphi(x)) \rightarrow \exists_x(\varphi(x))$;
- **[Ax3]** $\forall_x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Q_x(\varphi(x)) \leftrightarrow Q_x(\psi(x)))$;

[10] Ou *a maior parte*.

[11] Aqui, um pequeno conjunto significa um conjunto com menos elementos.

- **[Ax4]** $Q_x(\varphi(x)) \leftrightarrow Q_y(\varphi(y))$.

Intuitivamente, **[Ax1]** expressa que todos os indivíduos do universo suportam uma cerca proposição e, portanto, são proposições indutivas[12]; já **[Ax2]** visa expressar que uma proposição indutiva formalizada na linguagem não pode ser suportada por um conjunto vazio de evidências; por fim, **[Ax3]** determina que existem proposições indutivas equivalentes [12]. As regras lógicas que regem L_m são Modus Ponens e Generalização. Como veremos, L_m preserva vários resultados da Lógica Clássica de Primeira Ordem.

Teorema 2.2.3 *O sistema L_m é consistente [12].*

Dado um conjunto Σ de fórmulas da linguagem, seja $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\}$ um conjunto de proposições e χ uma fórmula da linguagem. Então, em L_m vale o que se segue [12]:

Teorema 2.2.4 **Dedução** *Se $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \chi$, então $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$.*

Teorema 2.2.5 *a) Σ é* **consistente** *se, e somente se, todo subconjunto finito Σ' de Σ é consistente.*

b) $\Sigma \cup \{\varphi\}$ é **inconsistente** *se, e somente se, $\Sigma \vdash \neg\varphi$.*

Os quantificadores Q, entretanto, não são considerados quantificadores numéricos[13], ou seja, não podemos atribuir algorítimos para delimitar a utilização de tais quantificadores nas expressões.

Partindo das noções iniciais sobre Lógicas Moduladas, apresentaremos de forma breve a seguir sistemas formais mais específicos, a saber, a *Lógica da Maioria Simples*, a *Lógica do Muitos*, a *Lógica da Plausibilidade* e, por fim, a *Lógica do Quase Todos*[14]. Para tal, especificaremos distintos quantificadores no lugar do quantificador geral Q e suas propriedades particulares.

[12] A noção que a expressão *proposição indutiva* visa expressar parece ser a de que conclusões obtidas a partir de premissas contendo moduladores podem mostrar-se falsas mesmo quando as premissas são verdadeiras. Considere as seguintes premissas, por exemplo:

- Geralmente pássaros voam.
- Pinguim é tipo um pássaro.

Ambas podem receber valor-de-verdade V. Teríamos, então, a conclusão indutiva ”Pinguins voam“. Porém, sabemos que pinguins não voam. Logo, a conclusão mostrou-se falsa mesmo perante premissas verdadeiras. Isso, no entanto, não deveria nos forçar a não derivar conclusões e, geralmente na linguagem natural, não nos impede de concluirmos algo. Daí uma grande importância das Lógicas Moduladas.

[13] A saber, formalmente, sejam m e n números inteiros não-negativos, e T e T' duas funções tais que $\{T(\kappa, \theta) = 1\} \equiv (\kappa = m$ e $\{T'(\kappa, \theta) = 1\} \equiv (\theta = n$, onde $\equiv$ denota a relação de equivalência definida como usual. Quantificadores Q_T e $Q_{T'}$ serão denotados por $\Sigma^{(m)}$ e $\Pi^{(n)}$, respectivamente. Para *m, n* = 0, 1, 2, ..., polinômios booleanos de quantificadores $\Sigma^{(m)}$ e $\Pi^{(n)}$ são ditos **quantificadores numéricos**.

[14] *Ultrafilter Logic*

Considere proposições indutivas que visam expressar a intuição de *a maioria* no sentido de *maioria simples*[15]. Dizemos que *a maioria simples* dos indivíduos satisfaz uma sentença quando o conjunto formado por esses indivíduos é estritamente maior[16] do que o conjunto formado por elementos que não satisfazem essa mesma sentença. A abordagem não-qualitativa pretende explicitar a noção de *maioria* em termos de frequência ou cardinalidade [12].

O sistema $L_\sharp$ consitui uma Lógica Modulada que visa capturar a noção de *maioria simples*. A linguagem deste sistema é obtida especificando o quantificador Q acima apresentado pelo quantificador $\sharp$ interpretado como a "maioria simples". A semântica das fórmulas da linguagem de $L_\sharp$ é definida em termos de *estruturas moduladas* identificadas, neste caso, como a classe q contendo os seguintes subconjuntos [12]:

Definição 2.2.1 $q = \{\Delta \subseteq D : |\Delta| > |\Delta^c|\}$[17]

A noção de *satisfatibilidade* de uma fórmula do tipo $\sharp_x\varphi$ cujas variáveis livres estão contidas em $\{y_1,...,y_n\}$ é definida como se segue:

Definição 2.2.2 *Seja D um conjunto de fórmulas e a sequência* $\underline{a} = (a_1,...,a_n)$ *em D. Então* $D \models \sharp_x\varphi[\underline{a}]$ *se, e somente se,* $\{b \in D : D \models \varphi[b/\underline{a}]\} \in q$.

Intuitivamente, $\sharp_x\varphi$(x) é verdadeiro em D se, e somente se, a maioria simples dos indivíduos em D satisfaz φ(x). É evidente que este tipo de sistema formal possui aplicações no campo da política, em especial, na questão dos votos, no intuito de formular sentenças do tipo "A maior parte dos eleitores prefere φ" como $\sharp_x\varphi$(x) [12].

Além dos axiomas **[Ax1]**, **[Ax2]**, **[Ax3]** e **[Ax4]** apresentados acima para a noção geral de quantificador modular Q, $L_\sharp$ possui os seguintes axiomas que regem $\sharp$:

- [**Ax5**$_\sharp$] $\forall_x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\sharp_x(\varphi(x)) \to \sharp_x(\psi(X)))$;
- [**Ax6**$_\sharp$] $\sharp_x(\varphi(x)) \to \neg\sharp_x(\neg\varphi(x))$;
- [**Ax7**$_\sharp$] $(\sharp_x(\varphi(x)) \wedge \sharp_x(\psi(x))) \to \exists_x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$.

[15] Maioria simples pode ser definida como "mais da metade".
[16] Em número de elementos.
[17] |X| denota a cardinalidade de um conjunto X entendida, grosso modo, como o número de elementos de X enquanto X^c denota o complemento de X.

Intuitivamente, dada uma interpretação com domínio D e fórmulas φ e ψ contendo apenas uma variável livre, então para conjunto $[\varphi] = \{a \in D : \varphi[a]\}$ e $[\psi] = \{a \in D : \psi[a]\}$, os axiomas $[\mathbf{Ax5}]_\sharp$, $[\mathbf{Ax6}]_\sharp$ e $[\mathbf{Ax7}]_\sharp$ nos afirmam, respectivamente, que se $[\varphi] \subset [\psi]$ e a maioria simples dos indivíduos pertencem a $[\varphi]$, então a maioria simples dos indivíduos pertence a $[\psi]$; se $[\varphi]$ é formado pela maioria dos indivíduos, então $[\neg\varphi]$ não é formado pela maioria dos indivíduos; e se $[\varphi]$ e $[\psi]$ são formados pela maioria dos indivíduos, então a $[\varphi] \cap [\psi] \neq \emptyset$ [11].

Teorema 2.2.6 *As seguintes fórmulas são teoremas de $L_\sharp$:*

a) $\sharp_x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow (\sharp_x(\varphi(x)) \wedge \sharp_x(\psi(x)))$;

b) $\sharp_x(\varphi(x)) \rightarrow \sharp_x(\varphi(x) \vee \psi(x))$;

c) $\sharp_x(\neg\varphi(x)) \rightarrow \neg\sharp_x(\varphi(x))$;

d) $(\forall_x(\varphi(x)) \wedge \sharp_x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))) \rightarrow \sharp_x(\psi(x))$.

Como $L_\sharp$ é uma extensão da Lógica Clássica de Primeira Ordem, as regras de inferência básicas e os conceitos sintáticos são como os usuais na Lógica Clássica. Embora $L_\sharp$ seja um sistema que preserva a correção, ele não preserva a completude [12]. Vale ressaltar que o quantificador $\sharp$ não é um quantificador numérico.

Consideremos, agora, proposições indutivas que visam expressar a noção de *muitos*, associada ao conceito de *conjunto grande de evidências*[18], mas não necessariamente ligada ao conceito de *maioria simples* [11], apresentado anteriormente. A noção de *muitos* pode ser considerada, assim como algumas contagens de *a maioria* e *quase todos*, como uma noção intermediária entre a visão dual fornecida pelos quantificadores $\forall$ e $\exists$ [12].

Além das propriedas gerais para Lógicas Moduladas, as seguinte propriedade é identificada na noção de *muitos*: se muitos indivíduos satisfazem uma sentença φ e $\varphi \subseteq \psi$, então ψ também satisfaz a maior parte dos indivíduos do domínio [12].

Sintaticamente, definiremos o quantificador $\heartsuit$, dito *quantificador de muitos*, como se segue [11]:

Definição 2.2.3 $\heartsuit_x\varphi(x)$ *significa "para muitos x, $\varphi(x)$".*

Denotaremos a Lógica de Muitos por $L_\heartsuit$. Além dos axiomas **[Ax1]**, **[Ax2]**, **[Ax3]** e **[Ax4]** apresentados acima para a noção geral de quantificador modular Q, o sistema $L_\heartsuit$ possui o seguinte axioma que rege $\heartsuit$ [12]:

[18] *large evidence set*

- $[\mathbf{Ax}_{\heartsuit}]\ \forall_x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\heartsuit_x(\varphi(x)) \to \heartsuit_x(\psi(x)))$

Dada uma interpretação com universo D e fórmulas φ e ψ da linguagem contendo extamente uma variável livre, intuitivamente, o axioma $[\mathbf{Ax}]_{\heartsuit}$ nos diz que, para conjuntos $[\varphi] = \{a \in D : \varphi[a]\}$ e $[\psi] = \{a \in D : \psi[a]\}$, se $[\varphi]$ contem muitos indivíduos e $[\varphi] \subseteq [\psi]$, então $[\psi]$ contém muitos indivíduos [12]. As regras de inferência e noções sintáticas são as mesmas das Lógicas Moduladas generalizadas, representadas pelo quantificador Q acima.

Teorema 2.2.7 *As seguintes fórmulas são teoremas em $L_{\heartsuit}$ [11]:*
a) $\heartsuit_x\varphi(x) \wedge \heartsuit_x\psi(x) \to \heartsuit_x(\varphi(x) \vee \psi(x))$*;*
b) $\neg\heartsuit_x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$.

Ao contrário da Lógica de Maioria Simples, a Lógica do Muitos é correta e completa e o seguinte vale para $L_{\heartsuit}$ [12]:

Teorema 2.2.8 *Seja A um conjunto de sentenças em $L_{\heartsuit}$. Então A é consistente se, e somente se, A possui um modelo.*

Por outro lado, no intuito de formalizar proposições indutivas do tipo "um grande número de...", essa expressão é interpretada como uma quantidade relevante porém não necessariamente grande em relação ao domínio [11] na *Lógica da Plausibilidade* que será denotada por $L_{\blacktriangledown}$. Intuitivamente, parece plausível que, se existir um "bom" número de indivíduos para os quais φ é verdadeiro e também existir um "bom" número de indivíduos para os quais ψ é verdadeiro, então existe um "bom" número de indivíduos para os quais φ ou ψ são satisfeitos [12].

Intuitivamente, a noção de plausibilidade envolve as seguintes propriedades [12]:

- a) Se duas afirmações são plausíveis, então a disjunção e a conjunção entre elas também é plausível;
- b) Se todos os indivíduos do domínio satisfazem a afirmação, então a afirmação é plausível;
- c) Se nenhum indivíduo do domínio satisfaz a afirmação, então não é plausível.

Sintaticamente, definiremos o quantificador $\blacktriangledown$, dito *quantificador de plausibilidade*, como se segue [11]:

Definição 2.2.4 $\blacktriangledown_x\varphi(x)$ *representa a sentença "para um bom número de x, $\varphi(x)$" ou, ainda, "existem x suficientes tais que $\varphi(x)$ é onipresente".*

Além dos axiomas **[Ax1]**, **[Ax2]**, **[Ax3]** e **[Ax4]** apresentados acima para a noção geral de quantificador modular Q, $L_{\blacktriangledown}$ possui os seguintes axiomas que regem $\sharp$ [12]:

- $[\mathbf{Ax5}_{\blacktriangledown}]$ $(\blacktriangledown_x\varphi(x) \wedge \blacktriangledown_x\psi(x)) \to \blacktriangledown_x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$;

- $[\mathbf{Ax6}_{\blacktriangledown}]$ $\blacktriangledown_x\varphi(x) \wedge \blacktriangledown_x\psi(x) \to \blacktriangledown_x(\varphi(x) \vee \psi(x))$.

Dada uma interpretação com universo D e fórmulas φ e ψ da linguagem contendo extamente uma variável livre, intuitivamente, os axiomas $[\mathbf{Ax5}]_{\blacktriangledown}$ e $[\mathbf{Ax6}]_{\blacktriangledown}$ nos dizem, respectivamente, que, para conjuntos $[\varphi] = \{a \in D : \varphi[a]\}$ e $[\psi] = \{a \in D : \psi[a]\}$, se um bom número de indivíduos pertencem a $[\varphi]$ e a $[\psi]$, então um bom número de indivíduos pertence à conjunção entre eles; e, se um bom número de indivíduos satisfaz condições $[\varphi]$ a $[\psi]$, então um bom número de indivíduos satisfaz a disjunção entre eles [12].

A Lógica de Plausibilidade é correta e sua completude é dada em termos de modelos topológicos, a saber. O seguinte vale em $L_{\blacktriangledown}$ [12]:

Teorema 2.2.9 *As seguintes fórmulas são teoremas em* $L_{\blacktriangledown}$*:*

a) $\blacktriangledown_x\varphi(x) \wedge \blacktriangledown_x\psi(x) \to \exists_x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$*;*

b) $\blacktriangledown_x\varphi(x) \to \neg\blacktriangledown_x\neg\varphi(x)$.

O desenvolvimento das Lógicas Moduladas teve sua primeira motivação inspirada pela Lógica de Ultrafiltro: no intuito de expressar proposições generalizadas formalmente, é introduzido o novo operador $\triangledown$ para expressar a noção de *geralmente* em proposições como "Pessoas *geralmente* gostam de chocolate"[31]. A ideia central da sistema modulado baseado na Lógica de Ultrafiltro é a noção intuitiva de *geralmente* como *quase todos* [12]. Denotaremos a Lógica do Quase Todos obtida pela especificação do operador Q como $\triangledown$ por $L_{\triangledown}$.

Além dos axiomas **[Ax1]**, **[Ax2]**, **[Ax3]** e **[Ax4]** apresentados acima para a noção geral de quantificador modular Q, $L_{\triangledown}$ possui os seguintes axiomas que regem $\triangledown$ [12]:

- $[\mathbf{Ax5}_{\triangledown}]$ $\forall_x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to ((\triangledown_x\varphi(x)) \to (\triangledown_x\psi(x)))$;

- $[\mathbf{Ax6}_{\triangledown}]$ $((\triangledown_x\varphi(x)) \wedge (\triangledown_x\psi(x))) \to \triangledown_x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$;

- $[\mathbf{Ax6}_{\triangledown}]$ $\triangledown_x\varphi(x) \vee \triangledown_x\neg\varphi(x)$.

Dada uma interpretação com universo D e fórmulas φ e ψ da linguagem contendo extamente uma variável livre, intuitivamente, os axiomas $[\mathbf{Ax5}]_{\triangledown}$, $[\mathbf{Ax6}]_{\triangledown}$ e $[\mathbf{Ax7}]_{\triangledown}$ nos dizem, respectivamente, que, para conjuntos $[\varphi] = \{a \in D : \varphi[a]\}$ e $[\psi] = \{a \in D : \psi[a]\}$, se $[\varphi] \subset [\psi]$ e $[\varphi]$ é grande[19], então $[\psi]$ também o é; se $[\varphi]$ e $[\psi]$ são grandes, então $[\varphi] \cap [\psi]$ também o é; e ou φ ou seu complemento $[\neg\varphi]$ é grande, mas não os dois simultaneamente [12].

Diversos resultados interessantes sobre $L_\triangledown$ já foram provados na literatura e podem ser consultados, por exemplo, em [31] e em [11]. Mais ainda, interações entre Lógicas Moduladas podem ser consultadas em [12].

O conceito das Lógicas Moduladas é permitir que trabalhemos com proposições indutivas que podem levar a inconsistências. Neste sentido, mostram-se alternativas viáveis para formalizar diversos pensamentos *default* e evitar alguns problemas gerados pela Lógica Default de Reiter quando informações generalizadas são confrontadas com informações mais específicas. Por mais que nos permitam evitar certos conflitos entre possíveis proposições, por serem extensões da Lógica Clássica, tais sistemas modulados não suportam raciocínios sob contradições como as Lógicas Paraconsistentes o fazem: eles trivializam na presença de fórmulas do tipo $\alpha \wedge \neg\alpha$.

[19]Ou seja, quase todos os indivíduos de D.

Capítulo 3

Lógicas de Inconsistência Formal

3.1 Lógicas Paraconsistentes

Considera-se como precursores da lógica paraconsistente[1] Łukasiewicz, Vasiliev e Jaśkowski. Para Łukasiewicz, a lei da não-contradição pode ser derrogada por não ser intuitiva nem demonstrável. Vasiliev, por sua vez, mostrou em uma série de artigos que se formularmos a propriedade da não-contradição na forma *um objeto não pode ter um predicado que o contradiga*, essa propriedade pode ser derrogada. Por fim, Jaśkowski foi o primeiro a propor um sitema lógico, a *Lógica Discurssiva*, formalizada posteriormente pelo brasileiro Newton da Costa em trabalhos conjuntos [4].

Propriamente, Jaśkowski, Nelson e Newton da Costa são considerados os fundadores da Lógica Paraconsistente como a entendemos hoje e propuseram, independentemente, o estudo das lógicas que acomodam teorias contraditórias, porém não-triviais [10]. Newton da Costa formulou "uma hierarquia enumerável de lógicas paraconsistentes de primeira ordem, dos respectivos cálculos de descrições e um esboço de teorias paraconsistentes de conjuntos construídas sobre suas lógicas"[4]. Cada um dos lógicos apresentados acima tem sua própria definição de Lógica Paraconsistente. Para da Costa, uma lógica é *paraconsistente* se serve como base para teorias contraditórias, mas não-triviais; já para Jaśkowski, uma lógica é *paraconsistente* se falha no Princípio de Explosão.

Grosso modo, uma lógica é considerada paraconsistente [2] se é inconsistente, mas não é trivial[3]: pode-

[1] "aqueles estudiosos que se preocuparam com a possibilidade de derrogação da lei da contradição"[4]

[2] O termo *Lógica Paraconsistente* foi cunhado por F. Miró Quesada em 1976. Até essa época, usava-se o termo *lógica para sistemas formais inconsistentes*, introduzido por da Costa em 1963 [4].

[3] Se em uma dada lógica $\perp$ (que denota contradição lógica) é teorema, então a lógica é trivial. Neste caso, todas as fórmulas tornam-se $\perp$

se dizer que as lógicas paraconsistentes controlam a explosão. Assim, temos o seguinte.

Teorema 3.1.1 *a) Uma lógica trivial é tanto contraditória quanto explosiva.*

b) Uma lógica explosiva falha no Princípio da Não-Trivialidade se, e somente se, falha no Princípio da Não-Contradição.

Diz-se, ainda, simplesmente, que "*uma lógica é paraconsistente* quando ela pode ser usada como lógica subjacente de uma teoria inconsistente e não-trivial [...] uma *teoria é paraconsistente* quando a sua lógica subjacente for paraconsistente"[4]. Mais ainda, temos que:

> Uma lógica paraconsistente pode ser fraca ou forte. Fraca, quando pode servir de base tanto para teorias paraconsistentes, quanto para teorias consistentes; e forte, quando só pode servir de base para teorias paraconsistentes. Assim sendo, numa lógica paraconsistente forte, geralmente, já existe uma fórmula tal que ela e sua negação são teoremas nessa lógica; porém isso não acontece nas lógicas paraconsistentes fracas [4].

Há diferentes lógicas paraconsistentes com abordagens distintas sobre teorias contraditórias porém não-triviais compondo a chamada família de Lógicas Paraconsistentes. Uma lógica que falha no Princípio da Não-Contradição, por exemplo, é dita uma Lógica Paraconsistente *Dialetéica*. Porém, a maioria das lógicas paraconsistentes presentes na literatura não seguem o dialeteismo. Por outro lado, as lógicas paraconsistentes normalmente possuem teorias vazias não-contraditórias, seus axiomas não são contraditórios e suas regras de inferência não geram contradições. Portanto, lógicas paraconsistentes são ferramentas para trabalhar com contradições dentro de uma teoria. Dentre as Lógicas Paraconsistentes existentes na literatura, uma tipo particular nos chama a atenção: as Lógicas de Inconsistência Formal (LIFs ou LFIs, do inglês *Logics of Formal Inconsistency*), apresentadas a seguir.

3.2 Lógicas de Inconsistência Formal

Lógicas paraconsistentes são ferramentas para raciocinar sob condições que não supõem consistência [10]. Frequentemente as contradições fornecem informações relevantes que não deveriam ser descartadas ou fazer com que a lógica derive qualquer coisa. Como apresentado anteriormente, a Paraconsistência é o estudo de teorias contraditórias, porém não triviais. As Lógicas de Inconsistência Formal são um tipo especial de Lógicas Paraconsistentes que internalizam os conceitos de consistência e inconsistência no nível da linguagem-objeto, ou seja, as LIFs são Lógicas Paraconsistentes capazes de expressar a propriedade de algumas fórmulas de serem consistentes ou inconsistentes, permitindo-nos trabalhar com as contradições de forma particular sem que a lógica exploda. Dentro do contexto paraconsistente, estabelecer a consistência de uma proposição, assim, traz grande contribuição à expressividade de um sistema. Em suma, as Lógicas de Inconsistência Formal, ou simplesmente *LIFs*, são as lógicas paraconsistentes que respeitam um certo Princípio de Explosão Gentil que será apresentado em seguida.

Uma divergência entre os sistemas clássicos e uma lógica paraconsistente encontra-se no conectivo unário de *negação*. Assim, consideremos dois tipos primordiais de negações: negações paraconsistentes; e a negação clássica. Neste capítulo, faremos a seguinte adaptação na linguagem de **LPC**: $\neg$ denotará uma negação paraconsistente e $\sim$ denotará a negação clássica, se necessário. O conjunto de fórmulas desta linguagem será denotado nesta seção por **For**.

Considere o conjunto $\bigcirc(p)$ de fórmulas dependendo [4] unicamente da variável proposicional p, satisfazendo o seguinte:

Existem fórmulas α e β tais que:

a) $\bigcirc(\alpha), \alpha \nVdash \beta$;

b) $\bigcirc(\alpha), \neg\alpha \nVdash \beta$.

Definição 3.2.1 *Dizemos que uma teoria Γ é **gentilmente explosiva** (em relação a $\bigcirc(p)$) se $\forall\alpha\forall\beta$ (Γ, $\bigcirc(\alpha)$, α, $\neg\alpha \Vdash \beta$). Se todas as teorias de uma dada lógica são gentilmente explosivas, então essa lógica é dita **gentilmente explosiva** [10].*

Para qualquer fórmula α, o conjunto $\bigcirc(\alpha)$ pretende expressar, num sentido específico, a consistência de α relativa à uma dada lógica. Quando é um conjunto unário, denotamos o único elemento de $\bigcirc(\alpha)$ por $\circ\alpha$ e, neste caso, $\circ$ define um operador de consistência [10].

Teorema 3.2.1 *Seja **L** uma lógica contendo $\bot$, $\vee$, $\rightarrow$ respeitando Modus Ponens e $\neg$ tal que existe uma fórmula α satisfazendo o seguinte:*

a) $\alpha, (\neg\alpha \rightarrow \bot) \nVdash \bot$*;*

b) $\neg\alpha, (\alpha \rightarrow \bot) \nVdash \bot$.

*Então **L** define um operador de consistência $\circ\alpha$ tal que $\circ\alpha \stackrel{def}{=} (\alpha \rightarrow \bot) \vee (\neg\alpha \rightarrow \bot)$ [10].*

Apresentamos, então, o **Princípio da Explosão Gentil**:

[4]Uma fórmula α da linguagem construída usando todas e apenas as variáveis $p_o,...,p_n$ é denotada por $\alpha(p_o,...,p_n)$ e dita *dependendo apenas* das variáveis que nela ocorrem.

$$\forall_\alpha \forall_\beta\ (\circ\alpha, \alpha, \neg\alpha \vdash \beta)$$

A partir do Princípio de Explosão Gentil definimos as *Lógicas de Inconsistência Formal* ou, para simplificar, LIFs:

Definição 3.2.2 *Uma lógica* **L** *é uma LIF em relação a uma negação* $\neg$ *se:*

a) $\exists_\Gamma \exists_\alpha \exists_\beta$ *(*$\Gamma, \alpha, \neg\alpha \not\Vdash \beta$*); e*

b) existe $\bigcirc(p)$ *tal que* $\forall_\Gamma \forall_\alpha \forall_\beta$ *(*$\Gamma, \bigcirc(\alpha), \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta$*).*

Intuitivamente, o Princípio da Explosão mantém-se nas LIFs, de forma alternativa: apenas quando se tem proposições consistentes o Princípio de Explosão vale. Como as LIFs não são lógicas triviais, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2 *Qualquer teoria ou lógica não-trivial é gentilmente explosiva, supondo que exista uma fórmula* α *tal que* $\neg\alpha$ *não é* $\bot$*.*

As Lógicas de Inconsistência Formal possuem a capacidade de recuperar, assim, inferências que seriam descartadas em uma Lógica Clássica por se encontrarem dentro do âmbito consistente. Por outro lado, elas também conseguem restaurar o comportamento clássico de algumas proposições dentro da teoria. O Teorema de Ajuste de Derivabilidade (DAT), ou ao menos algumas de suas instâncias, vale para grande parte das Lógicas de Inconsistência Formal. DAT mostra como uma lógica "mais fraca" pode ser usada para analisar uma lógica "mais forte" e pode ser formulado como se segue:

Teorema 3.2.3 [DAT] $\forall_\Gamma \forall_\gamma \exists_\Delta$ *(*$\Gamma \Vdash_{z_1} \gamma$ *se, e somente se,* $\bigcirc(\Delta), \Gamma \Vdash_{z_2} \gamma$

onde $\Vdash_{z_1}$ *é a relação de consequência de uma lógica "mais fraca" e* $\Vdash_{z_1}$*, a relação de consequência de uma lógica "mais forte".*

Existem outras formas de apresentar DAT, de acordo com a linguagem da lógica subjacente. Entretanto, o interessante é que esse dinamismo e tradução de lógicas utilizando DAT auxilia na interação entre lógicas e no desenvolvimento de novos sistemas formais.

3.2.1 mbC

As Lógicas de Inconcistência Formal são uma família de sistemas formais paraconsistentes que internalizam na linguagem a noção de *consistência*. A lógica **mbC** é uma dessas lógicas e, assim como qualquer sistema que contenha o operador de consistência $\circ$, é necessário explicitar regras de inferência ou axiomas regendo esse operador. A Lógica **mbC** é uma Lógica de Inconsistência Formal proposicional fundamental que interpreta o operador de consistência $\circ$ como primitivo[5] e é axiomatizada da seguinta forma:

- **[Ax1]**: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- **[Ax2]**: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
- **[Ax3]**: $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$
- **[Ax4]**: $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
- **[Ax5]**: $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
- **[Ax6]**: $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
- **[Ax7]**: $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
- **[Ax8]**: $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$
- **[Ax9]**: $(\alpha \to \beta) \vee \alpha$
- **[Ax10]**: $\alpha \vee \neg\alpha$
- **[bc1]**: $\circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))$
- **Regra de Inferência: [MP]**

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}$$

O axioma **[bc1]** é chamado de **lei da explosão gentil** e nos diz, intuitivamente, que se uma proposição α é consistente e temos α e sua negação $\neg\alpha$, então podemos derivar qualquer proposição arbitrária. Vale notar que os axiomas **[Ax1]** a **[Ax9]** juntamente com **[MP]** formam a base da Lógica Clássica Positiva, base da lógica **mbC** e de suas respectivas extensões. Assim, de acordo com **[bc1]**, se α é consistente e contraditória, então temos explosão. Nada ainda foi dito sobre o caráter das negações apresentadas. Podemos, então, definir negações com distintos comportamentos em **mbC**.

[5] **mbC** pode ser considerado o sistema mais fraco dentre as LIFs que interpretam $\circ$ como um operador primitivo.

Definição 3.2.3 *Considere $\neg$ uma negação paraconsistente em* **mbC**. *Então,* $\wr\alpha \stackrel{def}{=} \neg\alpha \wedge \circ\alpha$.

Essa definição nos permite definir $\perp_\beta \stackrel{def}{=} \alpha \wedge \wr\alpha$, para todo α. Considere, agora, a seguinte definição de $\sim_\beta \alpha$ como $\sim_\beta \alpha \stackrel{def}{=} \alpha \rightarrow \perp_\beta$ e $\vdash_{mbC}$ a relação de consequência da Lógica mBC. Então, temos que $\forall_\alpha\forall_\gamma(\alpha, \wr\alpha \vdash_{mbC} \gamma$ e $\forall_\beta\forall_\alpha\forall_\gamma(\alpha, \sim_\beta \alpha \vdash_{mbC} \gamma)$ [10]. Assim, $\sim_\beta$ define a negação clássica em **mbC**. Consideramos, portanto, $\neg$ como uma negação explosiva, ou seja, não-clássica. Em alguns pontos, **mbC** pode ser considerada um fragmento dedutivo da Lógica Proposicional Clássica.

Considere a linguagem da Lógica Proposicional Clássica acrescida do operador $\circ$. Usaremos α^1 para denotar a fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ e α^{n+1} denorará a fórmula $\neg(\alpha^n \wedge \neg\alpha^n)$, para n$\geq$1.

Alguns resultados são importantes em **mbC**, tais como:

Teorema 3.2.4 *a) Há, em* **mbC**, *teoremas da forma $\neg\gamma$ para alguma fórmula γ*

b) Existem fórmulas α e β em **mbC** *tais que $\alpha \neq \beta$, α e β são equivalentes e $\neg\alpha$ e $\neg\beta$ também são equivalentes.*

c) Não existem teoremas da forma $\circ\alpha$ em **mbC**.

Teorema 3.2.5 *As seguintes regras de redução ao absurdo valem em* **mbC**:

- *($\Gamma \vdash_{mbC} \circ\alpha$ e $(\Delta,\beta \vdash_{mbC} \alpha)$ e $(\Lambda, \beta \vdash_{mbC} \neg\alpha)$ implicam $(\Gamma,\Delta,\Lambda \vdash_{mbC} \neg\beta$;*
- *$(\Gamma \vdash_{mbC} \circ\alpha)$ e $(\Delta, \neg\beta \vdash_m bC\alpha)$ e $(\Lambda, \neg\beta \vdash_m bC\neg\alpha)$ implicam $(\Gamma, \Delta, \Lambda \vdash_{mbC} \beta)$.*

As seguintes regras de contraposição valem em **mbC**:

- $\circ\beta, (\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{mbC} (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
- $\circ\beta, (\alpha \rightarrow \neg\beta) \vdash_{mbC} (\beta \rightarrow \neg\alpha)$
- $\circ\beta, (\neg\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{mbC} (\neg\beta \rightarrow \alpha)$
- $\circ\beta, (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \vdash_{mbC} (\beta \rightarrow \alpha)$

Vale o seguinte em **mbC**[6]:

- $\alpha, \neg\alpha \vdash_{mbC} \neg\circ\alpha$
- $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash_{mbC} \neg\circ\alpha$

[6] O inverso das regras abaixo falha em **mbC**.

- $\circ\alpha \vdash_{mbC} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

- $\circ\alpha \vdash_{mbC} \neg(\neg\alpha \wedge \alpha)$

Em **mbC***:*

- *$(\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash_m bC(\beta \wedge \alpha)$ vale, mas $\neg(\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash_m bC\neg(\beta \wedge \alpha)$ não vale;*

- *$(\alpha \vee \beta) \dashv\vdash_m bC(\beta \vee \alpha)$ vale, mas $\neg(\alpha \vee \beta) \dashv\vdash_m bC\neg(\beta \vee \alpha)$ não vale;*

- *$(\alpha \wedge \neg\alpha) \dashv\vdash_m bC(\neg\alpha \wedge \alpha)$ vale, mas $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \dashv\vdash_m bC\neg(\neg\alpha \wedge \alpha)$ não vale;*

- *$\alpha \vee \neg\alpha$ é $\top$, já que $(\alpha \vee \neg\alpha) \dashv\vdash_m bC(\beta \vee \neg\beta)$ vale, mas $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \dashv\vdash_m bC\neg(\beta \vee \neg\beta)$ não vale.*

Definição 3.2.4 *Considere o conjunto de valores-de-verdade {V, F} onde V denota verdadeiro e F, falso e* **For** *o conjunto de fórmulas da linguagem. Uma* **mbC-valoração** *é qualquer função v:* **For** $\rightarrow$ *{V, F} sujeita às seguintes condições:*

- **[v1]** *v($\alpha \wedge \beta$) = V se, e somente se, v(α) = V e v(β) = V;*

- **[v2]** *v($\alpha \vee \beta$) = V se, e somente se, v(α) = V ou v(β) = V;*

- **[v3]** *v($\alpha \rightarrow \beta$) = V se, e somente se, v(α) = F e v(β) = V.*

- **[v4]** *v($\neg\alpha$) = F implica v(α) = V;*

- **[v5]** *v($\circ\alpha$) = V implica v(α) = F ou v($\neg\alpha$) = F.*

A relação de consequência semântica[7] *em* **mbC** *será denotada por $\vDash_{mbC}$. O sistema* **mbC** *é correto e completo [10].*

Teorema 3.2.6 **Correção** *Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas de* **mbC***. Então $\Gamma \vdash_{mbC} \alpha$ implica $\Gamma \vDash_{mbC} \alpha$.*

Teorema 3.2.7 **Completude** *Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas de* **mbC***. Então $\Gamma \vDash_{mbC} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{mbC} \alpha$.*

[7]Para um conjunto $\Gamma \cup \{\alpha\}$ de fórmulas em **mbC**, $\Gamma \vDash_{mbC} \alpha$ significa que v(α) = V para toda mbC-valoração que designa valor V aos elementos de Γ.

Além do operador de consistência $\circ$, **mbC** também possui o operador de *inconsistência* $\bullet$, dual de $\circ$. Definimos, assim:

Definição 3.2.5 $\bullet\alpha \stackrel{def}{=} \sim \circ\alpha$

O sistema **mbC** nos mostra como podemos lidar com o operador de consistência $\circ$ e é a Lógica de Inconsistência Formal mais fundamental apresentada na literatura. Mais ainda, é possível obter um precedimento de decisão em **mbC**: isso pode ser realizado a partir de tabelas-verdade que representam múltiplos cenários e serão descritas a seguir.

3.2.2 Semânticas de Traduções Possíveis

Considere as seguintes tabela-verdade trivaloradas, onde T e t são valores distinguidos. A coleção de tabelas-verdade abaixo será denotada por μ_0 e será utilizada para fornecer a semântica de **mbC**.

$\wedge$	T	t	F
T	t	t	F
t	t	t	F
F	F	F	F

$\vee$	T	t	F
T	t	t	t
t	t	t	t
F	t	t	F

$\rightarrow$	T	t	F
T	t	t	F
t	t	t	F
F	t	t	t

	$\neg_1$	$\neg_2$	$\circ_1$	$\circ_2$
T	F	F	t	F
t	F	t	F	F
F	T	t	t	F

O valor-de-verdade de t pode ser interpretado como *verdadeiro por falta de evidência do contrário*[8]. T e F são os usuais *verdadeiro* e *falso*, respectivamente. As tabelas-verdade para $\vee$, $\wedge$ e $\rightarrow$ nunca retornam T. Assim, em princípio nunca há absoluta certeza sobre a condição de verdade de algumas proposições. Já para os operadores $\neg_1$, $\neg_2$, $\circ_1$ e $\circ_2$, há duas interpretações possíveis, baseadas numa ideia de *cenários múltiplos* [10]: pode-se pensar que existam dois tipos de situações acerca de proposições que não são verdadeiras em relação aos sucessivos instantes de tempo. Como as tabelas-acima demonstram, é possível interpretar o operador $\circ$ de diferentes formas.

Definição 3.2.6 *Sejam L_1 e L_2 lógicas com conjuntos de fórmulas For_1 e For_2, respectivamente. Uma função $\bigstar$: $For_1 \rightarrow For_2$ é dita uma* **tradução** *de L_1 e L_1 se, para todo conjunto $\Gamma \cup \alpha$ de fórmulas de L_1, temos que:*

$\Gamma \vdash_{L_1} \alpha$ *implica* $\bigstar(\Gamma) \vdash_{L_2} \bigstar(\alpha)$ [9].

Definição 3.2.7 *Considere* **For** *o conjunto de fórmulas da linguagem de* **mbC** *e For_{μ_0} o conjunto de fórmulas geradas. O conjunto Tr_0 é o conjunto de todas as funções*[10] $\bigstar$: **For** $\rightarrow For_{\mu_0}$ *tal que:*

[tr_0]: $p^\bigstar = p$, *se p é uma fórmula atômica;*

[tr_1]: $(\alpha \sharp \beta)^\bigstar = (\alpha^\bigstar \sharp \beta^\bigstar)$, *para todo* $\sharp \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

[tr_2]: $(\neg\alpha)^\bigstar \in \{\neg_1^\bigstar, \neg_2^\bigstar\}$

[tr_3]: $(\circ\alpha)^\bigstar \in \{\circ_1^\bigstar, \circ_2^\bigstar, \circ_1(\neg\alpha)^\bigstar\}$

Dizemos, então, que $PT_0 = \langle \mu_0 , Tr_0 \rangle$ é uma **estrutura semântica de traduções possíveis** *para* **mbC**.

Se $\vDash_{\mu_0}$ denota a relação de consequência em μ_0 e $\Gamma \cup \{\alpha\}$ é um conjunto de fórmulas de **mbC**, então a relação de consequência associada $\vDash_{PT_0}$ é definida como se segue [10]:

Definição 3.2.8 $\Gamma \vDash_{PT_0} \alpha$ *se, e somente se,* $\Gamma^\bigstar \vDash_{\mu_0} \alpha^\bigstar$ *para todas as traduções $\bigstar$ em Tr_o.*

[8]*Truth-by-Default*

[9]Nesta definição, $\bigstar(\gamma) = \{\bigstar(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$.

[10]Uma *função* $\bigstar$ é uma relação binária tal que associa a cada elemento de um dado domínio **For** um único elemento de For_{μ_0} .

Chamaremos de **tradução possível** de uma fórmula α qualquer imagem das funções de Tr_0.

Teorema 3.2.8 Correção*: Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas de* **mbC***. Então $\Gamma \vdash_{mbC} \alpha$ implica $\Gamma \vDash_{PT_0} \alpha$.*

Teorema 3.2.9 Completude*: Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas de* **mbC***. Então $\Gamma \vDash_{PT_0} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{mbC} \alpha$.*

Teorema 3.2.10 Representabilidade *Dada uma uma mbC-valoração v, existe uma tradução $\bigstar$ em TR_0 e uma valoração w em μ_0 taia que, para toda fórmula α em* **mbC***, temos:*

- *$w(\alpha^\bigstar) = T$ implica $v(\neg\alpha) = F$*
- *$w(\alpha^\bigstar) = F$ se, e somente se, $v(\alpha) = F$*

Como podemos ver, existe uma tradução de **mbC** a uma lógica trivalorada definida por μ_0 [11]. As Semânticas de Traduções Possíveis oferecem um procedimento de decisão imediato para qualquer lógica que seja completa em relação a uma estrutura semântica de traduções possíveis PT = $\langle \mu, Tr \rangle$ onde μ é decidível e Tr é recursivo [10].

[11] Essa garantia nos permite conceber a possibilidade de aplicar o método apresentado em [3] para desenvolver relações de consequência paraconsistente e/ou não-monotônicas, que será apresentado a seguir.

Capítulo 4

Inferências

4.1 Relações de Consequência

De acordo com Antoniou [2], dois conceitos centrais na Lógica são as noções de *relação de consequência* e de *inferência*. *Consequência* é um conceito relevante neste trabalho, pois está intimamente ligado ao conceito de *consistência* [17]. Considere a seguinte definição de *consistência* anteriormente apresentada:

Definição 4.1.1 *Dizemos que um conjunto* Γ *de fórmulas da linguagem é* **consistente** *ou* **satisfatótio** *se, e somente se, existe alguma valoração v tal que* $v(\Gamma) = V$*; i.e.,* $v(\alpha) = V$ *para todo* $\alpha \in \Gamma$. *Caso contrário, dizemos que* Γ *é* **inconsistente** *ou* **insatisfatório**.

Então, a consequência clássica e a consistência são interdefiníveis [17]:

Proposição 4.1.1 *a)* $\Gamma \vdash \alpha$ *se, e somente se,* $\Gamma \cup \neg\alpha$ *é inconsistente.*

b) Γ *é consistente se, e somente se,* $\Gamma \nvdash \beta$ *onde* β *é uma fórmula da forma* $p \wedge \neg p$.

Para Tarski, no artigo *On the Concept of Logical Consequence*, qualquer definição precisa do conceito de *consequência lógica* pode mostrar características arbitrárias, em menor ou maior grau. Assim, intuitivamente, tomamos as *relações de consequência lógica* como operações entre premissas e conclusões, ou seja, a ideia de que uma dada proposição se segue logicamente de uma ou mais proposições. Elas podem ter diferentes propriedades, dependendo do tipo de relação e da tipo de lógica com a qual trabalhamos e/ou desejamos desenvolver.

A primeira tentativa de se formular uma definição precisa para o conceito de *consequência* foi feita por Carnap, de acordo com Tarski [28], e pode ser formulada como se segue:

> A sentença X se segue logicamente das sentenças da classe K se, e somente se, a classe composta por todas as sentenças de K e pela negação de X é contraditória.

A noção de *consequência lógica* também pode ser interpretada de outras formas: é o caso das definições feitas do ponto de vista semântico, como as que envolvem o conceito de *modelo*. Entretanto, em casos extremos apenas definiríamos tal conceito com termos da linguagem formal. Tarski em [6] afirma que o conceito de consequência *formal* deveria coincidir com o [conceito] de consequência *material*. Uma dada sentença X da linguagem de um sistema deveria, nesse caso, seguir de uma classe K de sentenças desse sistema se X fosse verdadeira ou se ao menos uma sentença da classe K fosse falsa.

4.2 Relações de Consequência Não-Clássicas

Como antes afirmado, as Lógicas Não-Monotônicas são aquelas nas quais a propriedade de *monotonicidade* não vale. Dentre as tentativas de solucionar a rejeição à propriedade de monotonicidade nessas Lógicas e ainda termos uma lógica não-trivial capaz de derivar conclusões, estão as lógicas que substituem essa propriedade pela **Monotonicidade Cautelosa** na relação de consequência não-monotônica, como afirma Antonelli [1]. Examinar as propriedades não-monotônicas das relações de consequência auxiliam na classificação dos diferentes tipos de lógicas não-monotônicas e no desenvolvimento de novas lógicas. A Lógica Default desenvolvida por Reiter, por exemplo, é um dos primeiros sistemas não-monotônicos formais e o primeiro a utilizar a chamada *regra de inferência default* para formalizar o tipo de pensamento falseável.

Para entender a relação entre a não-monotonicidade e a paraconsistência, devemos, primeiramente, analisar diferentes tipos de relação de consequência. Em geral, as lógicas não-monotônicas possuem uma lógica monotônica subjacente. Entretanto, não é necessário que tal lógica subjacente seja clássica. As relações de consequência definidas a seguir são consideradas relações fortes e servem como base para o desenvolvimento de novas definições. Assim, de acordo com [3]:

Definição 4.2.1 *Uma relação de consequência ordinária **Tarskiana** (**tcr**, para simplificar) é uma relação binária $\vdash_t$ entre conjunto de fórmulas e fórmulas que satisfaz as seguintes condições:*

- ***s-TR*** $\Gamma \vdash_t \varphi$, *para todo* $\varphi \in \Gamma$ *(T-reflexividade forte)*

- ***TM*** *Se* $\Gamma \vdash_t \varphi$ *e* $\Gamma \subseteq \Delta$, *então* $\Delta \vdash_t \varphi$ *(T-monotonicidade)*

- ***TC*** *Se* $\Gamma \vdash_t \varphi$ *e* $\Delta, \varphi \vdash_t \psi$, *então* $\Gamma, \Delta \vdash_t \psi$ *(T-corte)*

A propriedade de reflexividade de **tcr** nos diz que se uma fórmula φ pertence a um conjunto Γ, então existe uma prova/demonstração desta fórmula a partir do conjunto Γ. Já a monotonicidade em **tcr** assume a seguinte intuição: se existe uma prova de uma fórmula φ a partir de um conjunto Γ e Γ é um subconjunto de um dado conjunto Δ, então existe uma prova de φ a partir de Δ; afinal, se $\Gamma \vdash_t \varphi$, então φ é elemento de Γ e, por $\Gamma \subseteq \Delta$, então φ é um elemento de Δ e, assim, $\Delta \vdash_t \varphi$.

Definição 4.2.2 *Uma relação de consequência ordinária* ***Scott*** *(**scr**, para simplificar) é uma relação binária* $\vdash_s$ *entre conjuntos de fórmulas que satisfaz as seguintes condições:*

- ***s-R*** *Se* $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, *então* $\Gamma \vdash_s \Delta$ *(reflexividade forte)*

- ***M*** *Se* $\Gamma \vdash_s \Delta$ *e* $\Gamma \subseteq \Gamma_1$, $\Delta \subseteq \Delta_1$, *então* $\Gamma_1 \vdash_s \Delta_1$ *(monotonicidade)*

- ***C*** *Se* $\Gamma \vdash_s \varphi, \Delta$ *e* $\Gamma_1, \varphi \vdash_s \Delta_1$, *então* $\Gamma, \Gamma_1 \vdash_s \Delta, \Delta_1$ *(corte)*

A monotonicidade em **scr**, por sua vez, assume uma forma distinta da T-monotonicidade apresentada acima: ela se dá através dos conjuntos e nos diz que, dados conjuntos Γ e Δ, se $\Gamma \vdash_s \Delta$, então uma extensão Γ_1 de Γ provará uma extensão Δ_1 de Δ.

Independente da forma adotada pela propriedade de monotonicidade, em toda lógica não-monotônica as conclusões podem ser retratadas perante novas informações; daí a rejeição à propriedade de monotonicidade [1]. Duas atitudes podem ser adotadas diante de conflitos entre conclusões possíveis e *fatos*, que podem ter sido recentemente aprendidos; e/ou conflitos entre duas conclusões possíveis: podemos concluir de forma *cautelosa* ou *cética* e evitar inferir conclusões que entrem conflito, não se comprometendo com nenhuma delas; ou podemos concluir de forma *crédula* e nos comprometermos com o máximo de conclusões possíveis que permitam que o sistema se mantenha consistente. Assim, a partir das relações monotonicas fortes descritas acima, podemos definir as seguintes relações de consequência não-monotônicas.

Definição 4.2.3 *Uma relação de consequência tarskiana* ***cautelosa*** *(**tccr**, para simplificar) é uma relação binária* $\vdash_q$ *entre conjuntos de fórmulas e fórmulas de uma dada linguagem que satisfaz as seguintes condições [3]:*

- ***s-TR*** $\Gamma \vdash_q \varphi$, *para todo* $\varphi \in \Gamma$ *(T-reflexividade forte)*

- ***TCM*** *Se* $\Gamma \vdash_q \varphi$ *e* $\Gamma \vdash_q \psi$, *então* $\Gamma, \varphi \vdash_q \psi$ *(T-monotonicidade cautelosa)*

- ***TCC*** *Se* $\Gamma \vdash_q \varphi$ *e* $\Gamma, \varphi \vdash_q \psi$, *então* $\Gamma \vdash_q \psi$ *(T-corte cauteloso)*

A *monotonicidade cautelosa* em **tccr** "restringe" a regra da monotonicidade apenas àqueles casos nos quais a premissa adicionada já foi previamente demonstrada. Essa é uma forma de evitar fórmulas que não se comportam adequadamente no sistema (fórmulas que podem levar à trivialização ou à explosão, por exemplo) e determinar uma forma de manter a monotonicidade nos casos em que a adicição de novas premissas não gere inconsitências, por exemplo. Assim como a relação de consequência tarskiana, a relação de consequência scott também apresenta uma versão no qual a monotonicidade é cautelosa, como podemos conferir abaixo:

Definição 4.2.4 *Uma relação de consequência scott cautelosa (sccr, para simplificar) é uma relação binária* $\vdash_r$ *entre conjuntos de fórmulas não-vazios que satisfaz as seguintes condições [3]:*

- ***s-R*** *Se* $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$ *então* $\Gamma \vdash_r \Delta$ *(reflexividade forte)*

- ***CM*** *Se* $\Gamma \vdash_r \varphi$ *e* $\Gamma \vdash_r \Delta$, *então* $\Gamma, \varphi \vdash_r \Delta$ *(monotonicidade cautelosa)*

- ***CC***^{1} *Se* $\Gamma \vdash_r \varphi$ *e* $\Gamma, \varphi \vdash_r \Delta$, *então* $\Gamma \vdash_r \Delta$ *(1-corte cauteloso)*

Tais relações não-monotônicas não são as únicas possíveis dentro dos sistemas nos quais a monotonicidade não se aplica. Considere a linguagem proposicional clássica, com os conectivos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\approx$, onde $\approx$ denota uma equivalência e os outros conectivos exercem suas funções usuais, além da constante proposicional $\top$. Utilizando essa linguagem, Arieli e Avron apresentam tipos distintos de relações de consequência em [3]. A primeira noção apresentada é a de relação de consequência *cumulativa*.

Definição 4.2.5 *Seja* $\vdash$ *a relação de consequência clássica, como acima. Uma relação binária* $\Vdash_c$ *entre fórmulas da linguagem de* ***LPC*** *é dita* ***cumulativa*** *se é fechada sob as seguintes regras[3]:*

- $\varphi \Vdash_c \varphi$ *(reflexividade)*

- *Se* $\varphi \Vdash_c \psi$ *e* $\varphi \Vdash_c \gamma$, *então* $\varphi \wedge \psi \Vdash_c \gamma$ *(monotonicidade cautelosa)*

- *Se* $\vdash \varphi \approx \psi$ *e* $\varphi \Vdash_c \gamma$, *então* $\gamma \Vdash_c \psi$ *(equivalência lógica à esquerda)*

- *Se* $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ *e* $\gamma \Vdash_c \varphi$*, então* $\gamma \Vdash_c \psi$ *(enfraquecimento à direita)*

A cumulatividade, em geral, é vista como uma propriedade desejável em uma lógica não-monotônica pois restringe a monotonicidade com sua versão cautelosa e pode ser definida, também, da seguinte forma [8]:

Definição 4.2.6 *Seja* $\vdash$ *a relação de consequência clássica. Uma relação de inferência* $\Vdash_i$ *é* ***cumulativa*** *se, e somente se, satisfaz:*

- ***Supraclassicalidade:*** *Se* $\Gamma \vdash \varphi$*, então* $\Gamma \Vdash_i \varphi$
- ***Inclusão:*** $\Gamma, \varphi \Vdash_i \varphi$
- ***Monotonicidade Cautelosa:*** *Se* $\Gamma \Vdash_i \varphi$ *e* $\Gamma \Vdash_i \psi$*, então* $\Gamma, \varphi \Vdash_i \psi$
- ***Corte:*** *Se* $\Gamma \Vdash_i \varphi$ *e* $\Gamma, \varphi \Vdash_i \psi$*, então* $\Gamma \Vdash_i \psi$

A Supraclassicalidade é uma propriedade interessante: ela nos garante que se uma proposição foi demonstrada na Lógica Proposicional Clássica (ou numa de suas extensões), então ela é demonstrável no sistema não-monotônico. Como podemos ver, as inferências e relações de consequência não-monotônicas podem tomar diversas formas. Caractarizamos, por exemplo, uma relação de consequência *preferencial* a partir da relação de consequência *cumulativa* $\Vdash_c$:

Definição 4.2.7 *Uma relação de consequência cumulativa* $\Vdash_c$ *é dita* ***preferencial*** *se é fechada sob a seguinte regra [3]:*

- *Se* $\varphi \Vdash_c \gamma$ *e* $\psi \Vdash_c \gamma$*, então* $\varphi \vee \psi \Vdash_c \gamma$ *(introdução da disjunção à esquerda)*

Nas Lógicas Não-Monotônicas, as relações de consequência descrevem o comportamento do sistema formal e quais conclusões podem ser derivadas a partir de um conjunto de premissas deste sistema[1]. Na Lógica Default, mais especificamente, podemos definir a relação de inferência $\Vdash_d$ da seguinte forma:

Definição 4.2.8 *Dado um conjunto enumerável de defaults, W* $\Vdash_d \alpha$ *se, e somente se, inclui todas as extensões de (W,D).*

As propriedades da relação de consequência não-monotônica variam de acordo com a lógica subjacente. Entretanto, algumas condições são satisfeitas por $\Vdash_d$ em qualquer Lógica Default: uma delas, por exemplo, é a propriedade de *Corte*.

[1] *Output*

4.2.1 Paraconsistência e Não-Monotonicidade

De acordo com Avron e Arieli [3], construir relações de consequência não-monotonicas preferenciais e as relações do tipo *scott* baseadas em semânticas multivaloradas nos permite definir intuitivamente relações de consequência que sejam não só não-monotonicas, mas também paraconsistentes, de forma geral. A idéia do método apresentado por eles [3] que permitiria definir relações de consequência não-monotonicas ou paraconsistentes é a de usar o conjunto de modelos preferenciais para fazer inferências, tomando em consideração a noção de que apenas um conjunto de modelos seria relevante para uma dada teoria. Tais modelos seriam adotados de acordo com o critério de preferência.

Definição 4.2.9 *Considere uma linguagem proposicional arbitrária. Uma* ***estrutura preferencial multivalorada*** *é uma quádrupla (L, F, S, <), onde L é um conjunto de valores-de-verdade, F*[2] *é um subconjunto estrito não-vazio de L, S é um conjunto de operações em L que correspondem com os conectivos da linguagem e < é uma ordem parcial bem definida em L. O conjunto F consiste de valores designados de L, isto é, aqueles valores que representam asserções verdadeiras.*

Suponha que L contenha ao menos os valores clássicos *verdadeiro* (V) e *falso* (F) e que V $\in F$, F $\notin F$. Então [3]:

Definição 4.2.10 *Seja (L, F, S, <) uma estrutura multivalorada preferencial.*

a) Uma valoração v é uma função que atribui um elemento de L a cada fórmula atômica. As extensões para fórmulas complexas são feitas de maneira usual.

b) Uma valoração v satisfaz uma fórmula α *se* $v(\alpha) \in F$.

c) Uma valoração v é um modelo de um conjunto Γ *de fórmulas, se v satisfaz toda fórmula em* Γ.

d) Denotaremos Γ *vdash*^{L,F} Δ *se todo modelo de* Γ *satisfaz alguma fórmula em* Δ.

Proposição 4.2.1 $\Gamma \vdash^{L,F} \Delta$ *é uma relação de consequência scott.*

Seja (*L, F, S,* <) uma estrutura multivalorada preferencial. Então é possível desenvolver uma relação de consequência $\Gamma \vdash^{L,F}_{\leq} \Delta$ a partir de modelos específicos de uma estrutura multivalorada preferencial P na qual os modelos comportam-se de forma não-monotônica e/ou paraconsistente.

João Marcos [18] propõe uma estrutura chamada *Representação de Traduções Possíveis* como uma estrutura extremamente geral para especificar a noção de relação de consequência. A Semântica de Traduções Possíveis que dá um procedimento de decisão a **mbC**, por exemplo, parece preencher todos os

[2]O conjunto F consiste dos valores designados de L, i.e, aqueles que representam proposições verdadeiras.

requisitos da definição de estrutura preferencial.Ele afirma que qualquer lógica baseada em relações de consequência tarskianas podem possuir uma representação de tradução possível adequada. Ele afirma, ainda, que toda lógica baseada em relações de consequência tarskianas (com monotonicidade clássica ou monotonicidade cautelosa) podem possuir uma Semântica de Traduções Possíveis. Dessa forma, parece haver uma Semântica de Tradução Possível para uma Lógica Não-Monotônica que utilize a relação de consequência tarskiana com monotonicidade cautelosa.

Parece plausível, assim, supor que o método descrito em [3] possa ser um caminho para desenvolver uma Lógica de Inconsitência Formal Não-Monotônica, partindo das relações de consequência das LIFs (suponha **mbC**, por exemplo, que possui uma tradução em uma lógica trivalorada baseada em μ_0 como apresentado anteriormente) e resultar em uma relação de consequência paraconsistente não-monotônica com uma estrutura multivalorada baseada na Semântica de Traduções Possíveis.

Hipótese do Mundo Fechado: um caso

Defaults são adaptáveis a diversas situações. Essa característica os fazem ser utilizados para modelar situações que são bem-conhecidas em alguns campos da Ciência da Computação e da Inteligência Artificial. Uma aplicação de destaque é o tratamento da *Hipótese do Mundo Fechado*, comumente usada em Teoria de Dados e Lógica da Programação. De acordo com a Hipótese do Mundo Fechado, um domínio de aplicação é descrito por certos axiomas com o seguinte entendimento: uma certa informação é tomada como falsa no domínio do problema se não se segue dos axiomas. Grosso modo, assumimos que apenas existe o que há explicitado no banco de dados e que não há mundo exterior contendo informações adicionais desconhecidas: assim, se a informação não está contida no domínio, então ela é falsa.

Na Hipótese do Mundo Fechado, todas as informações são tomadas como "positivas". Considere a Lógica Proposicional Clássica. Então, se uma sentença γ não pertence ao domínio, $v(\gamma) = Falso$. Como, *para toda* γ, $v(\gamma) = Falso \leftrightarrow v(\neg\gamma) = Verdadeiro$; teríamos que $v(\neg\gamma) = Verdadeiro$; isto é, se a sentença não se encontra no domínio, então sua negação é verdadeira.

A Hipótese do Mundo Fechado tem a seguinte representação por default:

$$\frac{verdadeiro : \neg\gamma}{\neg\gamma}$$

para cada fórmula atômica γ. Informalmente, dizemos que: se é consistente assumir $\neg\gamma$ (o que equivale dizer que *não há prova para* γ), então podemos concluir $\neg\gamma$.

Suponha um conjunto Δ de fórmulas da linguagem. Em uma Lógica de Inconsistência Formal, um tratamento possível seria: se $\neg\gamma \in \Delta$, então $\gamma \notin \Delta$ se, e somente se, $\circ\gamma \in \Delta$. Por outro lado, se levarmos em consideração **mbC**, se $\neg\gamma \in \Delta$, nada pode ser afirmado sobe γ, já que *v(γ)* poderia receber valor T ou valor t, dependendo do cenário.

Consideremos, agora, a possibilidade de adicionarmos novas informações ao conjunto Δ acima descrito. Consideremos o seguinte cenário:

- $[t_1]$ $\gamma \notin \Delta$
- $[t_2]$ $\gamma \in \Delta$ e $\neg\gamma \in \Delta$
- $[t_3]$ $\gamma \in \Delta$

Teríamos, assim, o seguinte:

- Em $[t_1]$, $v(\gamma) = t$ ou $v(\gamma)=T$
- Em $[t_2]$, $v(\gamma) = t$ ou $v(\gamma)=T$ e $v(\neg\gamma) = t$ ou $v(\neg\gamma)=T$
- Em $[t_3]$, $v(\neg\gamma) = F$ ou $v(\neg\gamma)= t$

Se $\circ\gamma \notin \Delta$, então, ao adicionarmos novas informações ao conjunto X, continuaríamos com um conjunto consistente, porém não teríamos informações precisas sobre os valores-de-verdade das proposições. Se simplemsmente tivéssemos $\circ\gamma \in \Delta$ em $[t_1]$, em $[t_2]$ e em $[t_3]$, então os cenários se comportariam classicamente e perderíamos o caráter paraconsistente para lidar com contradições no conjunto. Um tratamento não-monotônico e paraconsistente da Hipótese do Mundo Fechado poderia resolver esses problemas. Especificar quando uma proposição é consistente ou não, assim, auxiliaria na atribuição de valores-de-verdade a proposições presentes ou não no conjunto, caso a caso.

Do ponto de vista do racicínio cotidiano, a Hipótese do Mundo Fechado parece requerer um certo valor-de-verdade como *t*, já que inferências desta forma seriam derivadas a partir de informações incompletas e, por vezes, essas conclusões seriam retratadas perante novas informações que entrem em conflito com as já previamente concluídas.

4.2.2 Revisão de Crenças

No intuito de não ignorar um tópico importante no que concerne às Lógicas Não-Monotônicas, será apresentado brevemente o conceito de *Revisão de Crenças*. O pensamento não monotônico nos permite raciocinar sob possíveis conjecturas na ausência de informações complestas. Na presença de novas informações, faz-se necessário algum tipo de mecanismo para *revisar crenças* [24]. Assim, revisão de crenças ocorre quando uma nova informação que é *inconsistente* com a base de conhecimento atual é adicionada ao sistema de tal forma que se obtém um novo base de conhecimento atual consistente [15]. Se um sistema inteligente de informação representa o raciocínio do senso comum, então ele deveria ser capaz de derivar conclusões a partir de informações incompletas. Para tal, seria necessário que esse mesmo sistema fosse capaz de alterar sua base de conhecimento quando depara-se com novas informações. Isso é particularmente relevante quando a nova informação adquirida entra em conflito com a base de conhecimento atual.

Em suma, a revisão de crenças é um processo que pode ser utilizado para alterar a base de conhecimento quando novas informações são adicionadas: podemos aplicar expansão, contração ou revisão ao novo conjunto [2]. Mais especificamente, o mecanismo de Revisão de Crenças é sensível e adaptável ao sistema formal ao qual será aplicado, assim como os métodos específicos utilizados para revisar crenças [15].

- **Expansão** ocorre quando novas informações são adicionadas sem que nenhuma informação já presente no conjunto, previamente aceita ou obtida, seja retirada do mesmo;

- **Contração** ocorre quando se mostra necessário excluir ou retirar uma ou mais informações previamente presentes no conjunto. A dificuldade da contração se encontra em escolher quais informações devem ou não ser eliminadas;

- **Revisão** é a tentativa de se alterar a base de conhecimento atual o mínimo possível com o objetivo de incorporar a nova informação ao conjunto.

O processo de revisão de crenças, grosso modo, visa fornecer um *sistema de manutenção da verdade* que ofereça um mecanismo de atualização de crenças da base de conhecimento; tal sistema teria o intuito de determinar que crenças são suportadas pela lógica subjacente e resgatá-las para revisar novas crenças, quando necessário [29].

O problema da revisão de crenças é que considerações lógicas sozinhas não nos dizem quais crenças devemos abandonar. Isto, no entanto, deve ser decidido por outros meios [15]. O que torna as coisas mais complicadas é que crenças em uma base de conhecimento estão sujeitas a possuírem consequências lógicas dessas crenças. Assim, quando abandonamos uma crença, por exemplo, precisamos decidir também quais das consequências manteremos e quais retrataremos. Mais ainda, não existe um método puramente lógico para tal decisão [15].

Em uma lógica não-monotônica gentilmente explosiva, entretanto, talvez não seja necessário utilizar Revisão de Crenças para lidar com situações de conflitos: poderíamos ter garantir as conclusões derivadas de certas crenças mediante o critério de consistência das proposições. Outra alternativa, seria adaptar a Revisão de Crenças às situações aonde o Princípio de Explosão Clássico é substituído pelo Princípio de Explosão Gentil como forma de lidar com contradições e inconsistências. Como, geralmente, os conflitos são vistos como inconsistências que surgem a partir da aplicação de defaults, adotando uma abordagem baseada nas Lógicas de Inconsistência Formal, poderíamos trabalhar com possíveis contradições dentro de uma dada teoria sem, necessariamente, revisar a base de conhecimento. Desta forma, evitáriamos, por exemplo, a contração (que poderia levar à retirada de informações potencialmente relevantes do conjunto). Recorreríamos, assim, à Revisão de Crenças apenas nos casos em que tivéssemos explicitamente a consistência de informações contraditórias.

Capítulo 5

Lógicas Adaptativas

Os Teorema de Ajuste de Derivabilidade (DAT) e suas diversas formulações foram propostos, originalmente, a partir das Lógicas Adaptativas, desenvolvidas no intuito de trabalhar com raciocínio falseável[1]. Uma lógica não-monotônica como a Lógica Default, por exemplo, possui este aspecto dinâmico de trabalhar com raciocínio falseável, já que suas premissas podem ser retratadas perante novas informações.

Uma lógica é adaptativa se se adapta às premissas específicas às quais se aplica [6]. O raciocínio cotidiano e as inferências científicas, de modo geral, apresentam essa característica de adaptabilidade às premissas. Por outro lado, uma lógica considerada adaptativa pode ser vista como combinações específicas de duas lógicas usuais (uma mais fraca, dita *lógica limítrofe inferior*, e uma mais forte, dita *lógica limítrofe superior*. A Lógica Adaptativa resultante se comporta como a lógica mais forte se esta apresenta uma interpretação não-trivial para o conjunto de premissas; se a lógica mais forte não atribui uma interpretação ao conjunto de premissas, então a lógica adaptativa atribuirá ao conjunto as consequências atribuídas pela lógica mais fraca [6].

Historicamente, as primeiras formulações de Lógicas Adaptativas foram desenvolvidas para raciocinar sob contradições e inconsistências [13]. Atualmente, além de uma gama de formalismos para tratar anormalidades nos sistemas lógicos, as Lógicas Adaptativas têm sido usadas para tratar tipos de inferências não-monotônicas. Visando trabalhar com raciocínio cotidiano, as Lógicas Adaptativas interpretam este tipo de raciocínio de duas formas distintas de dinâmicas não-padrão [5]:

- *Dinâmica Externa*: uma conclusão pode ser retratada perante uma nova informação. Isso significa especificamente que a relação de consequência é não-monotônica.

[1] *defeasible*

- *Dinâmica Interna*: uma conclusão pode ser retratada perante um melhor entendimento das premissas fornecidas através da continuação do raciocínio.

A dinâmica da relação de consequência não-monotônica é, assim, uma dinâmica externa: a conclusão de uma inferência pode ser retratada perante novas informações adicionadas ao conjunto inicial de premissas. Já na dinâmica interna, o conjunto de premissas se mantém inalterado enquanto o tipo de raciocínio se comporta de forma dinâmica e flexível. Particularmente, as Lógicas Adaptativas concentram-se no tratamento de pensamento falseável do ponto de vista da dinâmica interna. Mais abrangente, a dinâmica interna não acontece apenas nos casos em que a relação de consequência é não-monotônica [5]. Em ambos os casos, uma conclusão previamente obtida pode ser retratada [6].

Considere as dinâmicas externas. Se estivermos raciocinando, em uma dada lógica, a partir de um conjunto de informações Γ e, em algum momento, nos é fornecido conjunto Γ' de informações adicionais, nós, geralmente, somos capazes de derivar mais conclusões a partir deste momento [5]. Denotemos o conjunto de conclusões possíveis a partir de um conjunto de informações Λ como Cn(Λ). Assim, formalmente, teremos [5]:

$\mathrm{Cn}(\Gamma) \subseteq Cn(\Gamma \cup \Gamma')$.

Agora, considere as dinâmicas internas. Dado um conjunto de regras de inferência, nem todas as fórmulas deriváveis a partir de um conjunto de premissas são deriváveis por uma única aplicação de uma regra de inferência em alguma instância da prova. O conjunto de fórmulas deriváveis de uma única aplicação de uma regra monotonicamente torna-se maior à medida que a prova continua [5].

Por um lado, situações de dinâmica externa são bastante trabalhados pelas Lógicas Não-Monotônicas e suas distintas formalizações. Entretanto, as Lógicas Não-Monotônicas não fornecem um tratamento satisfatório para as situações nas quais revisamos conclusões a partir de dinâmicas internas.

Uma outra dinâmica se relaciona ao fato de que humanos são incapazes de acessar de uma vez e automaticamente o conjunto de todas as conclusões possíveis a partir de um conjunto de premissas. Oriundo deste fato, temos que algumas afirmações apenas serão conhecidas como conclusões possíveis após algumas consequências serem concluídas a partir do conjunto inicial. Entrentato, a derivabilidade de uma sentença não depende se somos capazes de ver se esta sentença é derivável ou não; assim, essa forma de dinâmica interna está mais relacionada à aspectos computacionais do que, propriamente, à lógica subacente [5]. Exemplos de processos inferenciais que apresentam dinâmica interna, entre outros, são:

- Diagnose[2];

[2] Um dos exemplos de pensamento default que podem ser tratados sob a abordagem adaptativa.

- Inferência Indutiva;

- Inferências levando em consideração informações inconsistentes;

- Inferências a partir de conjunto de crenças.

Muitas relações de consequência são indecidíveis. Se uma lógica é indecidível, porém monotônica, talvez haja um teste positivo para derivabilidade. Entretanto, se uma relação de consequência é indecidível e não-monotônica, apenas haverá um teste positivo para derivabilidade em *casos artificiais* [5]: são nestes casos que as Lógicas Adaptativas e sua teoria de provas dinâmicas se apresentam como uma abordagem interessante por proporem uma forma unificada de lidar com diferentes tipos de raciocínio cotidiano.

As relações de consequência e algumas inferências monotônicas e não-monotônicas são consideradas corretas em uma Lógica Adaptativa se comportarem-se *normalmente*[3]. Na maior parte das Lógicas Adaptativas, as situações de anormalidade envolvem formas lógicas: contradições, negações de fórmulas universalmente quantificadas, entre outras [5]. Levando em consideração um conjunto de anormalidades determinado por uma certa forma lógica dentro de uma dada lógica, temos que uma Lógica Adaptativa é composta por:

- Uma lógica limítrofe inferior (*lower limit logic*);

- Um conjunto de anormalidades (proposições consideradas falsas até que se mostre o contrário)[4];

- Uma estratégia adaptativa para lidar com as anormalidades.

Especificando a lógica limítrofe inferior, o conjunto de anormalidades e uma estratégia adaptativa, obtemos uma lógica adaptativa. As Lógicas Adaptativas possuem um grande número de propriedades que se diferenciam de outras abordagens que tratam de pensamento default. Tome a generalização indutiva, por exemplo: a maior parte dos formalismos apresentados para lidar com generalizações indutivas acabam utilizando uma abordagem em prol de probabilidades [6] ou, ainda, no uso de operadores e quantificadores distintos dos usuais $\forall$ e $\exists$. Em uma Lógica Adaptativa, as condições que garantem que uma certa fórmula é derivada de um conjunto de premissas depende apenas da forma lógica das premissas e da forma da conclusão. Neste presente trabalho, por exemplo, nos focaremos nos sistemas formais adaptativos que lidam com inconsistências, i.e., cujo conjunto de anormalidades é composto por fórmulas do tipo $\alpha \wedge \neg\alpha$.

[3]O comportamento *normal* das fórmulas e inferências dependerá da lógica adaptativa subjacente e do tipo específico de raciocínio formalizado por esta lógica.

[4]Em contraste com o valor-de-verdade *t, verdadeiro até que se prove o contrário*.

5.1 Inconsistência como Anormalidade

Suponha uma dada lógica que possua fórmulas da forma $\exists_{\alpha}(\alpha \wedge \neg\alpha)$ na qual $\exists$ é um quantificador existencial agindo sobre qualquer variável livre em α[5]. Em algumas Lógicas Adaptativas, todas as fórmulas com esta forma são vistas como *anormalidades*. Isso vale, particularmente, se a lógica limítrofe inferior não é capaz de reduzir inconsistências complexas a disjunções ou conjunções mais simples [5].

No intuito de desenvolver uma Lógica Adaptativa da Inconsistência, é necessário que tenhamos uma lógica paraconsistente que possua um método de prova bem-definido[6]. Para ilustrar a ideia por trás das Lógicas Adaptativas, considere o conjunto $\Gamma = \{\alpha, \beta, \neg\alpha \vee \gamma, \neg\gamma \vee \lambda, \neg\lambda\}$. Por onde começar é, até o momento, algo arbitrário. Alguém poderia iniciar o raciocínio a partir de $\alpha e \neg\alpha \vee \gamma$; conquanto que tal procedimento não retorne, em alguma instância, um $\alpha \wedge \neg\alpha$, então poderíamos aplicar o Silogismo Disjuntivo (**SL**, para simplificar)[7] e concluir γ. Agora, apliquemos novamente **SD** a $\neg\gamma \vee \lambda$ e γ para derivar λ. Entretanto, temos que $\neg\lambda \in \Gamma$. Logo, o conjunto se mostra inconsistente. Portanto, devemos retratar a aplicação do **SL** a $\neg\gamma \vee \lambda$ e γ para que λ não seja uma consequência da aplicação de regras de inferência neste processo de raciocínio. Assim, temos uma dinâmica interna na qual retratamos algumas conclusões baseadas em um melhor entendimento das premissas e suas relações.

A lógica limítrofe inferior consiste, essencialmente, de um número finito de regras de inferências e/ou axiomas aceitos independentemente so *status* de consistência retornado pelo conjunto no processo de raciocínio. A Lógica Adaptativa de Inconsistências apresentada em [6] leva em consideração uma lógica paraconsistente não monotônica que é regular:

Definição 5.1.1 *Uma lógica é dita* **regular** *se, e somente se, difere-se da Lógica Proposicional Clássica apenas em relação à negação e é fragmento de LPC* [8].

Se uma teoria T é ou pretende ser consistente dada a Lógica Proposicional Clássica como lógica subjacente, porém posteriormente se mostra inconsistente, então substituir **LPC** por lógicas paraconsistentes monotônicas nos ofereceria uma teoria que é bem mais fraca do que "T pretendia ser" [6]. Consideremos que para um conjunto de premissas ser considerado inconsistente é necessário que alguma fórmula deste conjunto se comporte como uma inconsistência. Neste sentido, algumas lógicas paraconsistentes monotônicas podem ser consideradas muito fracas para lidar com certos tipos de inferências.

[5]Em casos proposicionais, a forma pode ser reduzida a $\alpha \wedge \neg\alpha$.

[6]Como vimos anteriormente, **mbC**, por exemplo, possui um procedimento de prova.

[7]$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vdash \beta$

[8]Isso significa que o conjunto de conclusões possíveis desta lógica está contido ou é igual ao conjunto de conclusões possíveis de LPC.

Assim, as inferências a partir da teoria T deveriam proceder de tal forma a obter uma *interpretação* de uma teoria o mais consistente possível; por esse motivo, o raciocínio não poderia seguir de acordo com uma lógica paraconsistente monotônica e, mais especificamente, qualquer lógica que invalide alguns teoremas de **LPC**, tais como o Silogismo Disjuntivo [6]. Entretanto, na abordagem das Lógicas Adaptativas essa invalidação não seria aplicada a todos os casos, mas apenas em algumas aplicações dessas regras: mais especificamente, para algumas regras, uma aplicação desta regra deveria ser válida quando aplicada sobre fórmulas que se comportam consistentemente em uma teoria e inválida, caso contrário[9].

Considere que a disjunção de anormalidades determina quais fórmulas estão conectadas em relação ao seu comportamento anormal em um dado conjunto de premissas. Então *Dab*(Δ)[10] denota a disjunção de $\exists(\alpha \wedge \neg\alpha)$, para toda $\alpha \in \Delta$. Dizemos que *Dab*(Δ) é uma ***Dab*-fórmula minimal** em relação a um conjunto de premissas Γ se, e somente se, não existe $\Delta' \subset \Delta$ tal que *Dab*(Δ') é uma consequência limítrofe inferior de Γ [6].

Uma *estratégia simples*, por exemplo, considera uma fórmula α como anormal se, e somente se, α se comporta anormalmente sobre as premissas. Essa estratégia leva apenas a resultados adequados em algumas lógicas adaptativas específicas, em especial aquelas nas quais fórmulas do tipo *Dab*-fórmulas minimais são conjuntos unários, ou seja, que contém apenas um elemento. Para tais lógicas, a *estratégia de confiabilidade*[11] e a *estratégia de anormalidade minimal*[12] são reduzidas às estratégias simples [5].

A *estratégia de confiabilidade* considera, para toda *Dab*(Δ) que é uma *Dab*-fórmula minimal em relação a um conjunto de premissas, que todos os membros de Δ são inconfiáveis [5]. Assim, se no raciocínio sobre o conjunto de premissas nos depararmos com alguma anormalidade, então as fórmulas derivadas que nos levaram a concluir tal anormalidade não poderiam ser consideradas consequências adaptativas do conjunto de premissas.

Já a *estratégia de anormalidade minimal* tende a permitir mais consequências adaptativas que aquelas obtidas por meio da estratégia de confiabilidade. Considere o conjunto $\Gamma = \{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \vee \beta, \gamma \vee \neg\lambda, \alpha \vee \lambda, \beta \vee \lambda\}$. Pela estratégia de anormalidade minimal, fórmulas do tipo $(\alpha \wedge \neg\alpha) \vee (\beta \wedge \neg\beta)$ derivadas por **SD** a partir de Γ são interpretadas como se segue: nem α nem β comportam-se de forma anormal; as premissas não determinam qual das duas levará a uma anormalidade, mas podemos supor que algumas

[9]Talvez os casos em que tais regras seriam invalidadas quando **mbC** é a lógica paraconsistente monotônica subjacente sejam exatamente os casos nos quais a consistência da proposição não estivesse explicitada pelo operador $\circ$; afinal, caso estivesse, o sistema formal se comportaria classicamente e não invalidaria tais teoremas de **LPC**.

[10]A disjunção de anormalidades é chamada nas Lógicas Adaptativas de *Dab*-fórmula.

[11]**Reliability strategy**

[12]**Minimal Abnormality strategy**

fórmulas se comportarão normalmente, enquanto outras se comportarão anormalmente. Se α se comporta anormalmente, então β se comporta normalmente e, portanto, λ é uma consequência do ponto de vista de $\neg\beta$ e $(\beta \vee \lambda)$. Por outro lado, se β se comporta anormalmente, então α se comporta normalmente e portanto, λ é uma consequência do ponto de vista de $\neg\alpha$ e $(\alpha \vee \lambda)$. Em qualquer dos casos, utilzando esta estratégia temos que λ é uma consequência adaptativa de um conjunto inconsistente de premissas [5].

Ressaltemos que as estratégias adaptativas variam de acordo com a lógica adaptativa proposta e as estratégias apresentadas acima são listadas como as mais importantes, porém, não únicas, estratégias adaptativas. A primeira formalização de uma Lógica Adaptativa de Inconsistências denominada **DDL** era restrita ao nível proposicional e adotava a *estratégia de confiabilidade* [5]. Desde então, outras estratégias têm sido apresentadas à medida que novas Lógicas Adaptativas são desenvolvidas a partir de distintos sistemas formais utilizados como lógicas limítrofes inferiores para lidar com diferentes conjuntos de anormalidades.

5.2 LFIs e Lógicas Adaptativas de Inconsistência

Pelo caráter adaptativo de tais lógicas e pelo fato das inconsistências serem consideradas anormalidades, parece intuitivo pensar na relação entre as Lógicas de Inconsistência Formal e as Lógicas Adaptativas. Uma Lógica Adaptativa de Inconsistências baseada em Lógicas de Inconsistência Formal não foi ainda desenvolvida formalmente, mas ma investigação inicial sobre tal lógica deveria se parecer foi realizada por Batens em [7] e será apresentada a seguir.

Considere uma Lógica de Inconsistência Formal **L**. A partir de alguns conjuntos de premissas é possível derivar um conjunto de contradições enquanto a partir de outros, apenas disjunções de contradições são deriváveis. Considere o conjunto $\Gamma = \{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \vee \beta, \alpha \vee \gamma, \beta \vee \lambda, \neg\theta, \tau \vee \theta\}$. De acordo com muitas lógicas paraconsistentes, nenhuma contradição é derivável a partir de Γ, porém disjunções de contrações poderiam ser derivadas, tais como $(\alpha \wedge \neg\alpha) \vee (\beta \wedge \neg\beta)$ [7]. Ressaltemos que a tradução de uma LIF com linguagem proposicional em uma LIF com linguagem de primeira ordem, embora não evidente, é possível e poderemos recorrer à extensão de primeira ordem, caso necessário.

Sejam ξ o conjunto de fórmulas fechadas da linguagem e Δ um conjunto de anormalidades tal que $\Delta = \{\alpha \wedge \neg\alpha \mid \alpha \in \xi\}$. Como vimos, a disjunção dos elementos de Δ é chamada *Dab*-fómula e, considerando Λ um subconjunto de $\Delta, Dab(\Lambda)$ denota a disjunção dos membros de Λ. Se $Gamma^1 \vdash_{\mathbf{L}} Dab(\Lambda)$, então $Dab(\Lambda)$ é uma *Dab*-consequência de Γ^1. Do ponto de vista semântico, seja M um modelo de **L**, definimos

[7]:

Definição 5.2.1 *Ab(M) = {$\alpha \in \Delta \mid M \Vdash \alpha$} é o conjunto de anormalidades verificadas por M também chamado de* **parte anormal** *de M.*

Estendendo Γ^1 com alguma fórmula do tipo $\circ\phi$ pode resultar em *Dab*-consequências que contêm menos disjunções [7]. Se os axiomas não-lógicos de uma teoria forem o conjunto $\Gamma^2 = \{\alpha, \beta, \neg\alpha \vee \gamma, \neg\beta \vee \lambda, \neg\beta\}$, então adicionar $\circ\beta$ ao conjunto Γ^2 trivializa a teoria, enquanto adicionar $\circ\alpha$, não [7].Considere, agora, o conjunto Γ acima descrito: nem $\circ\alpha$ nem $\circ\beta$ sozinhos trivializam o conjunto Γ: essa trivialização surge quando adicionamos $\circ\alpha$ e $\circ\beta$ juntos. Em geral, para toda teoria inconsistente *T*, existem conjuntos de fórmulas consistentes tais que adicionar todos os membros deste conjunto à teoria *T* causa trivialização, porém adicionar todos os elementos menos um, não [7]. Chamamos esse fenômeno de *perigo da trivialidade*.

Seja **AL** uma lógica adaptativa definida sobre uma dada lógica limítrofe inferior **L**, um conjunto Ω de anormalidades e uma estratégia de anormalidade minimal. No intuito de compreender a relação entre as Lógicas de Inconsistência Formal e as Lógicas Adaptativas, considere as definições apresentadas. Seja $M_\Gamma^{\mathbf{L}}$ o conjunto de todos os **L**-modelos de Γ e seja M_Γ^m o conjunto de todos os modelos minimalmente anormais de Γ definidos como se segue:

Definição 5.2.2 *$M \in M_\Gamma^m$ (M é um* **modelo minimalmente anormal** *de Γ) se, e somente se, $M \in M_\Gamma^{\mathbf{L}}$ e nenhum M' $\in M_\Gamma^{\mathbf{L}}$ é tal que Ab(M') $\subset$ Ab(M).*

Teorema 5.2.1 *Se Γ possui modelos da lógica limítrofe inferior, então $\phi \in \Phi(\Gamma)$ se, e somente se, ϕ = Ab(M) para algum modelo $M \in M_\Gamma^m$.*

Muitas Lógicas de Inconsistência Formal possuem um conjunto de consequências $Cn_{\mathbf{L}}(\Gamma)$ para cada conjunto finito Γ de premissas. Assim, é decidível se um conjunto de consequências $Cn_{\mathbf{L}}(\Gamma)$ é trivial ou não [7].

Formalmente, uma Lógica Adaptativa de Inconsistências baseada em LIFs deve ser composta de:

- Uma Lógica de Inconsistência Formal que é uma lógica limítrofe inferior;
- Um conjunto de anormalidades[13] Ω;

[13]Inconsistências

- Estratégias adaptativas.

Ter uma LIF como lógica limítrofe inferior permite derivar proposições consistentes que, após obtidas, comportam-se da forma usual da Lógica de Inconsistência Formal subjacente. Por sua vez, a ideia intuitiva por trás do conjunto de anormalidades é a de que contém as fórmulas que são assumidas como sendo falsas até que as premissas exijam que elas sejam verdadeiras, considerando que anormalidades, em geral, são contingentes [7]. Essa exigência, por sua vez, dependerá da estratégia adaptativa adotada e das das disjunções clássicas de anormalidades deriváveis pela lógica limítrofe inferior a partir do conjunto de premissas. Muitas Lógicas de Inconsistência Formal, teoricamente, podem ser combinadas com diferentes estratégias adaptativas no intuito de obter uma pluralidade de Lógicas Adaptativas de Inconsistência.

Se devemos adicionar $\circ\alpha$ ao invés de $\neg\beta$ a Γ, em nosso exemplo, é uma decisão arbitrária que pode ser movida por interesses que vão além do sistema formal. As Lógicas Adaptativas de Inconsistência que possuem uma LIF como lógica limítrofe inferior interpretam os conjuntos de premissas como mais consistentes possíveis; i.e., se uma proposição consistente não é uma consequência adaptativa de um conjunto de premissas, então adicionar esta proposição consistente pode levar a consequências triviais ou, ainda, envolverem uma escolha lógica arbitrária [7]. Vale ressaltar que se o conjunto de premissas é composto apenas por fórmulas normais da linguagem, então as consequências obtidas devem coincidir com as consequências clássicas desde mesmo conjunto.

No caso específico das Lógicas Adaptativas com LIF como lógica limítrofe inferior, como podemos definir em algumas Lógicas de Inconsistência Formal $\circ\alpha$ como $\circ\alpha \overset{def}{=} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, uma opção (vale ressaltar que não única) que temos é definir o conjunto de anormalidades como se segue:

Definição 5.2.3 $\Omega = \{\exists\neg\circ\alpha \| \alpha \in \xi\}$ *é um conjunto de* **anormalidades**, *onde* α *é uma fórmula da linguagem,* ξ *é o conjunto de* Γ = *{*$\neg\alpha, \neg\beta, \alpha\vee\beta, \alpha\vee\gamma, \beta\vee\lambda, \neg\theta, \tau\vee\theta$*} da linguagem,* $\exists$ *é o quantificador existencial fechado sobre* α[14] [15] *e* $\neg$ *é uma negação bem-definida.*

Se uma LIF **L** é regular, então deve existir um modelo para essa Lógica de Inconsistência Formal que verifica exatamente as mesmas fórmulas verificadas pela Lógica Clássica exceto fórmulas do tipo $\circ\alpha$ e fórmulas β tais que $\circ\alpha \to \beta$ [7]. Seja $Cn_{\mathbf{LPC}}$ o conjunto das consequências da Lógica Clássica. Então, para a maior parte das Lógicas de Inconsistência Formal, dado um conjunto Λ de fórmulas normais

[14] O resultado de prefixar uma fórmula A com um qunatificador existencial sobre toda variável livre em A é denotado por $\exists A$.

[15] De fato, se os quantificadores se comportam classicamente e a negação é bem-definida, então $\forall\circ\alpha$ é verdadeiro quando $\exists\neg\circ\alpha$ é falso.

da linguagem, $Cn_{\mathbf{L}}(\Lambda)$ será inconsistente se, e somente se, $Cn_{\mathbf{LPC}}(\Lambda)$ é inconsistente e as disjunções de anormalidades são **L**-deriváveis a partir de Λ enquanto nenhuma das anormalidades separadamente é **L**-deriváveis.

Proposição 5.2.1 *Sejam Ω o conjunto de anormalidades, Γ um conjunto de premissas e $\Delta \subseteq \Omega$. Então, $Cn_{\mathbf{L}}$($\Gamma \cup \Delta$ não é trivial se, e somente se, alguns modelos de* **L** *verificam todos os elementos de Δ [7].*

Mais ainda, se um modelo *M* não verifica α e $\neg\alpha$ simultaneamente, porém atribui o valor-de-verdade falso à $\circ\alpha$, pela regularidade da LIF **L**, então deve existir um **L**-modelo *M'* distinto de *M* que verifica as mesmas fórmulas que *M* verifica com exceção de $\circ\alpha$ e β tal que $\circ\alpha \to \beta$ [7].

Corolário 5.2.1 $\Delta \subseteq \Omega$ *é* **maximal** *em relação a um conjunto de premissas Γ e à* **L** *se, e somente se,* $\{\exists\neg\circ\alpha \| \forall\circ\alpha \in \Delta\} \in \Phi(\Gamma)$[16].

Considere novamente o conjunto de premissas $\Gamma = \{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha\vee\beta, \alpha\vee\gamma, \beta\vee\lambda, \neg\theta, \tau\vee\theta\}$. Então, $\Phi(\Gamma)$ = $\{\{\alpha\}, \{\beta\}\}$. Γ pode ser estendido com dois tipos de proposições consistentes [7]: toda extensão com uma fórmula $\forall\circ\alpha$ para a qual $\exists\neg\circ\alpha \notin \bigcup\Phi(\Gamma)$ pode ser dita *restauração da consistência*[17]; por outro lado, toda extensão com uma fórmula $\forall\circ\alpha$ para a qual $\exists\neg\circ\alpha \notin \bigcup\Phi(\Gamma)$ pode ser dita *decisão de consistência*[18]. Pode-se adicionar quantas restaurações de consistência possíveis a um conjunto sem risco de trivialização; o mesmo, no entanto, não se aplica às decisões. Assim,

Proposição 5.2.2 **Restauradores de Consistência***: Se Γ não é* **L***-trivial, $\Delta \subseteq \Omega$ e $\exists\neg\circ\alpha \notin \bigcup\Phi(\Gamma)$, quando temos $\forall\circ\alpha \in \Delta$, então $\Gamma \cup \Delta$ não é* **L***-trivial [7].*

Proposição 5.2.3 **Decisores de Consistência***: Se Γ não é* **L***-trivial, $\Delta \subseteq \Omega$ e $\exists\neg\circ\alpha \in \bigcup\Phi(\Gamma)$, quando temos $\forall\circ\alpha \in \Delta$, então $\Gamma \cup \Delta$ não é* **L***-trivial sem e somente se, existe uma $\phi \in \Phi(\Gamma)$ tal que $\exists\neg\circ\alpha \in \phi$ quando $\forall\circ\alpha \in \Delta$ [7].*

Uma lógica adaptativa de inconsistência, assim, restringe a si mesma estender um conjunto de premissas com todo o conjunto de restaurações de consistência[19] [7].

Não deve-se confundir a aplicação geral das Lógicas Adaptativas de Inconsistência (mesmo aquelas baseadas em Lógicas de Inconsistência Formal) com as abordagens das Lógicas de Inconsistência Formal:

[16]A notação utilizada neste corolário é a notação usada por por Batens em [7].
[17]*consistency reclaim*
[18]*consistency decision*
[19]Em geral, esses conjuntos são infinitos.

grosso modo, as Lógicas Adaptativas de Inconsistência visam lidar com o conjunto de fórmulas verificadas por todos os modelos minimais anormais enquanto a abordagem das LIFs visa o conjunto de fórmulas verificadas por todos os modelos de premissas que falsificam um conjunto específico de anormalidades. Mais especificamente, dado um conjunto de premissas Γ, uma Lógica Adaptativa de Inconsistência baseada em uma LIF **L** define, por si mesma e sem a interferência de nenhum agente que determine quais proposições são consistentes[20], um conjunto de consequências de Γ que contém todas as **L**-consequências e, ainda, todas as proposições consistentes obtidas a partir de *restauradores de consistência* [7].

Ainda há muito o que ser investigado na relação entre as Lógicas Adaptativas e as Lógicas de Inconsistência Formal. Interações entre LIFs e a Lógica Modal, por exemplo, já aparecem na literatura em [19]. Há, ainda, a possibilidade de interação entre LIFs e Lógica Modal a partir de uma abordagem adaptativa [7]. Por fim, existem múltiplas possibilidades de desenvolvimento de Lógicas Adaptativas de Inconsistências baseadas em LIF a partir de uma futura investigação mais detalhada da interação entre diferentes lógicas e distintas estratégias adaptativas.

[20]No caso das Lógicas de Inconsistência Formal, a determinação do *status* de consistência de uma dada premissa ainda mantém-se com um aspecto arbitrário, gerando espaço para interpretações possíveis do operador de consistência $\circ$.

Capítulo 6

Consistência e Não-Monotonicidade

Uma grande motivação para o desenvolvimento das Lógicas Paraconsistentes está relacionado às suas potenciais relações com outras lógicas. Muitos problemas de representação de conhecimento envolvendo modalidades, por exemplo, parecem requerer algum mecanismo de pensamento paraconsistente. Agentes capazes de representar suas crenças, por exemplo, pode ter evidências tanto para acreditar quando para não acreditar em algo [26]. Esse cenário fica ainda mais complexo quando nos encontramos em um âmbito onde nos deparamos constantemente com novas informações que talvez nos forcem a retratarmos algumas de nossas crenças.

Para evitar conflitos em uma teoria default, algumas abordagens alternativas utilizam operadores modais e/ou quantificadores: s estruturas moduladas apresentadas em [11], por exemplo, expressam noções como a de *extensão*[1] e a de *maioria*. Estruturas moduladas e quantificadores mudulados surgiram da idéia intuitiva de compreender as constantes lógicas de forma mais suava, no sentido de torna-las mais aptas a expressarem conceitos e formas de raciocínio já expressas pela linguagem natural [11].

Houve, ainda, a tentativa de formalizar um sistema modal não-monotônico [22] no intuito de solucionar o problema da consistência das justificativas em um default utilizando um operador M para designar "a maioria" e, assim, evitar conflitos gerados pela adição de novas informações. Esses conflitos, frequentemente, estão relacionados à adição de informações mais específicas que entram em contraste com informações generalizadas[2]. Tal tentativa, entretanto, sofreu diversas críticas do ponto de vista semântico ainda não solucionadas [25] e tal abordagem foi, assim, abandonada eventualmente.

[1]No sentido de amplidão.

[2]Generalizações são usualmente alvo de conflitos em situações não-monotônicas. Entretanto, a utilização de generalizações no raciocínio cotidiano possui o seu valor pedagógico e não deveriam ser simplesmente elimidadas.

Como vimos, existem diferentes formulações de Lógicas Não-Monotônicas tais como a Lógica Modal Não-Monotônica desenvolvida por McDermott e Doyle e a Lógica Default desenvolvida por Reiter [2]. Muitas dessas lógicas utilizam a noção de pensamento *default* e, ainda, existem lógicas que se baseiam no conceito de *consistência* e que utilizam a ideia de *conjunto de crenças*, aproximando os conceitos de *não-monotonicidade* e *crença*.

6.1 Não-Monotonicidade e Conjuntos de Crenças

Levando em consideração o pluralismo local de sistemas formais, podemos interpretar conjuntos de informações de diversas formas possíveis, dependendo do âmbito do discurso. Podemos, por exemplo, pensar os conjuntos de premissas como como um mero conjunto de fórmulas denotadas por símbolos; ou como um conjunto de afirmações positivas e/ou negativas sobre parâmetros aritméticos; ou, ainda, como um conjunto de informações e/ou dados sobre o mundo empírico.

Particularmente, os conjuntos de proposições nas lógicas não-monotônicas podem ser interpretados como um *banco de crenças*, onde as *crenças* são proposições racionais ou coerentes que representam informações acerca do mundo empírico. Esses conjuntos contêm crenças, opiniões ou informações. As regras de inferência, assim, quando aplicadas à um banco de crenças, podem gerar novos conjuntos de informações, nas quais algumas conclusões anteriormente obtidas podem ser retratadas ou não [8]. Essa visão é corroborada pela estratégia da *revisão de crenças*, aplicável a diversos sistemas não-monotônicos e, em particular, às lógicas baseadas em defaults[3]. Como esses conjuntos estão sujeitos à regras e axiomas, podemos definir o que se segue:

Definição 6.1.1 *Seja Γ um banco de crenças básicas, ou seja, crenças que possuem garantias independentes do conjunto e onde Γ é subconjunto do conjunto For de fórmulas bem-formadas de uma dada lógica. Os elementos de um conjunto Δ obtido a partir da aplicação de uma regra de inferência sobre Γ são ditos* ***crenças derivadas*** *[8].*

Por vezes, referimo-nos aos bancos de crenças como bases de conhecimento[4]: esse entendimento parece vir da interpretação de conhecimento como *crença verdadeira justificada*. Entretanto, várias tentativas para estabelecer as condições necessárias e suficientes para que alguém conheça uma dada proposição

[3] As Lógicas Adaptativas permitem, também, essa interpretação possível para os conjuntos de premissas.

[4] A base de conhecimento atual também pode ser interpretada como uma coleção de axiomas dos quais fatos podem ser derivados [15].

já foram realizadas. A problemática aqui, parece ser renegada à Epistemologia: aceita-se, no entanto, as noções de forma intuitiva e a ideia de que a base de conhecimento pode ser interpretada apenas como um conjunto de informações falseáveis. Isso, claro, não implica dizer necessariamente que crenças são informações falseáveis: as crenças, neste contexto, posuem o sentido de *proposições tomadas como verdadeiras*, simplesmente. Vale ressaltar que ser *tomado como verdadeiro* não é equivalente a ser *verdadeiro absoluto*. Mais ainda, supõe-se uma visão de conhecimento coerentista e, assim, as crenças podem ser proposições tomadas como verdadeiras em relação à alguma coisa, quiçá ao conjunto de teorias coerentes entre si.

A credibilidade e a consistência das premissas são pontos importantes nas Lógicas Não-Monotônicas: em geral, o pensamento não-monotônico é usado quando ao menos uma das premissas falha em relação à credibilidade ou consistência. Em nosso contexto, parece intuitivo que a credibilidade seja interpretada como consistência, sem maiores problemas para o formalismo, embora com ressalvas filosóficas. A consistência das premissas poderia ser exatamente a ponte entre as proposições e suas manifestações no mundo empírico.

Raciocinamos cotidianamente com informações que são *tomadas como verdadeiras* e, por esse motivo, nos retratamos sem maiores implicações em derivações feitas a partir do mesmo conjunto, mas que não possuem relação direta com essas informações. Afinal, pensamento incerto ou flexível é algo comumente usado: na maioria dos casos, esse tipo de raciocínio poderia envolver quantificadores vagos do tipo *Quase todos*, *A maioria*, *Muitos*, etc [11]. As Lógicas Default, por exemplo, são muito utilizadas para formalizar pensamento vago ou incerto realçando essa noção de *crença* que nos leva a questionar *o que é consistência?*.

No caso das Lógicas Não-Monotônicas, prover uma definição formal do requerimento de consistência é, segundo Reiter [24], talvez a tarefa mais árdua no desenvolvimento de uma Lógica Default. Reiter até fornece uma definição de *teoria consistente*[5]; entretanto, ele não fornece uma noção do que realmente estamos dizendo quando afirmamos que “é consistente assumir γ”. Informalmente, como vimos, uma *teoria default* consiste de um conjunto de fatos que representam certas informações, usualmente incompletas, sobre o mundo empírico; um conjunto de defaults, assim, sanciona conclusões possíveis (não necessariamente verdadeiras).

Utilizar a consistência conjunta das premissas como na Lógica Default Estrita pode levantar contextos “sem sentido” quando aplicada a exemplos do mundo empírico. Aliás, o uso de exemplos cotidianos

[5]Um teoria default fechada é **consistente** se, e somente se, possui uma extensão.

levanta algumas problemáticas, das quais podemos destacar a questão da existência ou não de contradições no mundo empírico[6]. Diversos exemplos de "contradições" na verdade então intimamente ligados com problemas relacionados às referências e generalizações tomadas como *verdadeiras*.

Se uma teoria default de uma Lógica Default inclui informações "sem sentido" como:

$$\frac{verdadeiro : p}{\neg p}$$

então não teríamos nenhuma conclusão; i.e., a Lógica Default não suporta tal inconsistência. De acordo com essa visão, é função do usuário prover informações relevantes na forma de fatos e/ou justificativas consistentes. Um defaul é considerado inaplicável se não é consistente assumir a consistência da(s) justificativa(s). Uma *teoria default* consiste de um conjunto de fatos que representam certezas, embora incompletas, sobre o mundo; e de um conjunto de defaults que sancionam conclusões plausíveis, mas não necessariamente verdadeiras [2]. Em algumas circunstâncias, podemos recusar algumas dessas inferências não-monotônicas[7], acreditando que a evidência apresentada ainda não é suficiente para concluir algo [17]. Essa atitude nos leva a sermos cautelosos nas nossas inferências no intuito de não exagerar no poder da veracidade da conclusão em ambientes não-monotônicos. Assim, um terceiro valor-de-verdade abarca essa noção de algo que tomamos como verdadeiro momentaneamente, mas que não recebe um valor absoluto de verdade. Teríamos, portanto, o valores-de-verdade T sendo atribuído àquelas proposições explicitamente consistentes ($\circ\alpha$) ou derivadas de $\circ\alpha$, enquanto proposições das quais não sabemos o *status* de consistência receberiam o valor-de-verdade t.

Supondo que o método de verificação da consistência de uma proposição perante o mundo empírico seja algo bem-definido e livre de falhas, trabalharíamos, então, com conclusões possíveis que podem ser interpretadas como *verdadeiras até que se prove o contrário* e são derivadas de premissas que recebem o valor *verdadeiro* ou, ainda, *verdadeiro até que se prove o contrário*.

Suponha que os conceitos de *consistente* e *conhecido*[8] sejam equiparados: assim, podemos compreender o que se determina como proposição previamente conhecida na regra de inferência *default* e justificando, de certa forma, que possamos interpretar as premissas como consistentes. Como a consistência é um fator importante no pensamento não-monotônico, parece possível que possamos utilizar o operador de consistência $\circ$ em prol de deixar explicitamente evidente que as premissas, sejam elas pré-requisitos ou justificativas, são consistentes; garantindo, assim, que a inferência do default é válida.

[6] Esbarramos, assim, no problema de como verificar as proposições no mundo empírico.
[7] Neste caso, regras de inferência default.
[8] Ou *verificável*.

Quiçá pudéssemos utilizar a paraconsistência para lidar com contradições que se seguem do pensamento não-monotônico sem que tenhamos que abrir mão de contradições que podem conter informações relevantes. Poderíamos, dessa forma, tirar vantagem das contradições em um *default* se pudéssemos, por exemplo, não bloquear o segundo default caso haja uma contradição, lidando com ela de forma paraconsistente.

Se a consistência das justificativas for testada perante o conjunto dos fatos, ou pré-requisitos, e tais justificativas forem consistentes, então o *default* pode ser aplicado a ambas, mesmo que as conclusões acabem por ser contraditórias. Dessa forma, concluiríamos uma contradição, levando a uma inconsistência. Na Lógica Default, quando isso acontece, aplicamos primeiro o default e depois o testamos aplicando o segundo. Se o segundo default assume como justificativa a negação da conclusão do primeiro, então ele é bloqueado e desconsiderado. Entretanto, não é interessante excluir informações que podem ser relevantes.

Assim, do ponto de vista da consistência das justificativas em um default parece plausível que se possa desenvolver uma extensão paraconsistente para a Lógica Default, o que permitiria que o pensamento não-monotônico fosse aplicado em ambientes onde as contradições não trivializem a lógica. Dessa forma, não desconsideraríamos o segundo default, a menos que a consistência, internalizada na linguagem das LIFs, forçasse tal bloqueio. Trabalharíamos, então, o pensamento não-monotônico em um ambiente onde as contradições não são necessariamente descartadas, podendo tirar conclusões razoáveis e consistentes.

6.1.1 Operador $\circ$: Interpretações Possíveis

As Lógicas de Inconsistência Formal podem ser definidas como as lógicas paraconsistentes que abordam a consistência de forma significativa[10]. Intuitivamente, construir modelos nos quais contradições não sejam simplesmente interpretadas como *erros* estende nossa noção de *verdade* e, também, nossa noção de *consistência*. Nas LIFs, a consistência pode ser vista como uma noção primitiva nas Lógicas de Inconsistência Formal que nos fornecemo operador $\circ$ na linguagem.

Entretanto, o que queremos dizer com *consistência de uma proposição*? Para da Costa, a presença de uma *contradição* não seria um requisito suficiente para garantir seu caráter explosivo, mas a consistência poderia ser representada como uma fórmula ordinária da linguagem [10], de forma primitiva. Intuitivamente, percebemos o termo *consistência* como algo relativo à forma e/ou estrutura de algo. Mais ainda, *consistência* nos remete à constituição de algo, ao seu conteúdo.

Tomemos a interpretação da consistência de uma informação como sendo algo conhecido ou verossímel em relação ao conjunto de crenças, a noção de consistência de uma proposição também envolveria a necessidade de métodos empíricos de verificação da verossimilhança dessa proposição perante a base de conhecimento que tomamos como *real*[9] Toda verificação, confirmação e invalidação de uma proposição poderiam ocorrer dentro de um sistema formal. Entretanto, os métodos de verificação da consistência de uma premissa não se limitam ao sistema formal: é preciso "consultar" o mundo empírico e, assim sendo, seria necessária uma metodologia de verificação confiável. Afinal, uma proposição empírica pode ser *testada* [32], mesmo que haja dúvidas em relação ao *como*. Algumas proposições referentes ao mundo poderiam, por exemplo, serem verificadas pelo método científico; proposições que não pudessem ser verificadas pelo método científico, no entanto, poderiam requerer outra base de conhecimento que pudesse ser verificada, em tais casos, seria possível tomar o senso comum como a base com a qual deveríamos confrontar a consistência de uma proposição. De fato, quando raciocinamos em nosso cotidiano por vezes fazemos uso de conhecimento comum, ou seja, de informações já conhecidas e aceitas por um certo grupo de agentes, com a ressalva de que as informações conhecidas por esses agentes epistêmicos também poderiam ser encaradas como crenças e, portanto, também passíveis de serem retratadas. Caímos, assim, na participação humana no processo de verificação da consistência de uma proposição.

Suponha que a verificação retorne algum dos valores-de-verdade T, t ou F. Algumas verificações, evidentemente, se mostrariam triviais e retornariam quase que instantaneamente um valor-de-verdade para a proposição. Neste caso, é intuitivo pensar que este valor atribuído seja F ou t, para as proposições empíricas, e tomaríamos tais proposições que expressam conteúdo empírico como *certezas* que nos permitem dar continuidade ao pensamento. A dúvida que paira sobre a veracidade de tais afirmações apenas surgiria, assim, após eu aceitá-las como verdadeiras por evidência do contrário.

Pode ser, ainda, que algumas verificações não tenham fim. Se a verificação completa fosse um requisito imprescindível na atribuição de um valor-de-verdade à essas proposições, então correríamos o risco de não considerar informações relevantes. Algumas proposições, entretanto, exercem um papel especial na lógica e podem ser consideradas distintas das proposições empíricas: as proposições matemáticas, por exemplo, podem ser verificadas sem o auxílio de um método para acessar o mundo empírico, já que não afirmam conteúdos sobre o mundo e a atribuição de valores-de-verdade a elas poderia ser feita dentro do sistema formal.

Considerando os valores-de-verdade T, t e F, poderíamos pensar que as proposições interpretadas como crenças não receberiam o valor clássico T até que o método de verificação nos mostrasse a consistência desta proposição e este valor T passaria a ser interpretado como *é impossível que o falso seja*

[9]No sentido de *aquilo que existe de fato ou atualmente*.

verdadeiro. Por outro lado, também podemos pensar a consistência de uma proposição como sendo uma possibilidade "bem-justificada"[10] a partir da nossa base de pensamento. Sendo assim, a consistência de uma premissa poderia indicar que tal informação é, à primeira vista, verossímel [11]. A verossimilhança se apresenta como uma característica interessante, pois aproxima nossa noção de verdade à noção intuitiva expressa pelo valor-de-verdade *t* (*truth-by-default*), que pode, ainda, ser interpretado como *fundamentado*[12]. Aceitamos, assim, evidências consideradas *seguras* para atribuir o valor-de-verdade *t* à proposições empíricas. Essas mesmas evidências poderiam nos dizer, também, o *status* de consistência de uma premissa ou justificativa. Isso nos leva à necessidade de fazermos um certo comprometimento na interpretação dos valores-de-verdade apresentados pela Semântica de Traduções Possíveis Trivalente.

As conclusões tiradas em ambientes não-monotônicos que não possuam a consistência explicitada podem ser interpretadas como *certezas* no sentido entendido por Wittgenstein [32]: apenas um convencimento de que as coisas são como são, sem necessariamente ter "razão"[13]: mesmo que possam existir dúvidas, aceitamos a certeza por um mero critério de uso prático. Será que deveríamos pensar nas certezas como objetivos idealizados a serem alcançados, verdades absolutas? Ora, empiricamente, se assim o fosse, a Ciência estaria condenada a não desenvolver mais nenhuma teoria. Entretanto, tudo que "é descritivo em qualquer jogo de linguagem é do domínio da lógica" [32]: fazemos afirmações acerca do mundo empírico frequentemente; e, constantemente, variamos o nosso grau de segurança sobre a veracidade de cada uma dessas afirmações. Intuitivamente, isso nos diz que, pelo menos quando estamos tratando de proposições acerca do mundo empírico, nunca atribuímos às nossas crenças o valor-de-verdade T. Ora, mas isso implicaria que nenhuma sentença que nos informa algo sobre o mundo real seria verdadeira no sentido clássico. Neste sentido, todas as contradições que surgem a partir de proposições sobre o mundo não trivializariam a lógica, pois nenhuma delas receberia o status de consistente ($\circ$). Assim, apenas proposições matemáticas e metalógicas seriam consideradas consistentes e perderíamos um pouco a expressividade do sistema formal em representar e distinguir crenças mais fortes daquelas mais fracas.

Por outro lado, se usarmos o operador de consistência $\circ$ para denotar crenças mais fortes coerentes com outras crenças fortes previamente verificadas, adotaríamos a noção de que uma proposição é consistente se há um meio de verificar sua verossimilhança no mundo empírico. Neste contexto, temos que nem todas as nossas conclusões que se mostram falsas perante novas informações podem ser consideradas *erros*:

[10] Cuja explicação é consistente com a base de conhecimento.

[11] Aparentemente verdadeiro.

[12] Sobre as proposições empíricas: "Se o verdadeiro é o que é fundamentado, então o fundamento não é verdadeiro nem falso." [32]

[13] Este "ter razão" pode ser interpretado como o valor-de-verdade V.

de fato, no momento de obtenção da conclusão, ela não recebia o valor-de-verdade F. Logo, a *verdade* das nossas afirmações expressaria, apenas, nosso grau de compreensão e confiança na verossimilhança do conteúdo expressado por elas: a verdade de certas proposições empíricas estaria intimamente relacionada com as referências tomadas a partir da nossa base de conhecimento atual. É a partir dessas referências que faz-se possível distinguir valores-de-verdade de uma dada sentença.

Contudo, por essa interpretação, quando pensamos no operador de inconsistência $\bullet\alpha$ como *não é o caso que* $\circ\alpha$, estaríamos utilizando um recurso na linguagem para explicitar os casos nos quais não é possível verificar a consistência de uma proposição, o que nos levaria a interpretar $\bullet\alpha$ como α *suporta contradições*; α seria uma crença sem justificativa que poderia ser descartada e, sendo assim, nunca poderia ser tomada como uma proposição verdadeira (T).

Assim, retomamos a interpretação do conjunto de informações como um banco de crenças ou, ainda, uma base de conhecimento. Tanto as Lógicas de Inconsistência Formal e seu operador de consistência $\circ$ quanto as Lógicas Não-Monotônicas baseadas em Default e, ainda, as Lógicas Adaptativas parecem suportar essa interpretação dada ao conjunto de premissas. Além disso, possíveis interações e traduções podem permitir novas interpretações ao operado. Uma possível tradução para as Lógicas Modais já está sendo investigada e pode nos mostrar uma interpretação de que uma proposição α é consistente quando α é verdadeira em todos os mundos possíveis acessíveis. Tal tradução poderia ser definida para alguns sistemas modais como se segue:

Definição 6.1.2 *Considere a linguagem da Lógica Proposicional Clássica acrescida dos operadores modais $\diamond$ e $\Box$ definidos de forma usual e do operador de consistência $\circ$. Então, $\circ\alpha \stackrel{def}{=} \alpha \to \Box\alpha$ [19].*

Debates à parte, quando o operador $\circ$ é tomado como *primitivo* tomamos que seu uso na linguagem precede a interpretação do conceito associado ao termo. Isso nos permitiria uma interpretação flexível e múltipla do operador, como podemos ver nas tabelas-verdade e na ideia de múltiplos cenários fornecidas pela Semântica de Traduções Possíveis para uma fórmula do tipo $\circ\alpha$. Portanto, a utilização do operador $\circ$ estaria sujeita à interpretação dada pelo sistema formal que interage com ele e, evidentemente, a decisão de adicionar sentenças consistentes a uma teoria ultrapassa os limites formais.

6.1.2 Lógicas Adaptativas e Consistência

As Lógicas Adaptativas, como vimos, podem ser utilizadas para lidar com as situações de inconsistência [6]. Neste contexto, podemos englobá-las nos sistemas formais paraconsistentes. Por outro lado, as

Lógicas Adaptativas fornecem um procedimento para lidar com a dinâmica interna de conclusões falseáveis, garantindo um aspecto não-monotônico ao sistema formal. Assim como as Lógicas de Inconsistência Formal e as Lógicas Não-Monotônicas, as Lógicas Adaptativas também permitem interpretações distintas sobre seus conjuntos de premissas.

Suponha que estejamos trabalhando com uma base de conhecimento fundamentada em nossas próprias crenças. Quando assim o fazemos, em geral, estamos *certos* de que nossas crenças são consistentes entre si até que nos deparemos com novas informações que nos dizem o contrário. Neste contexto, o conjunto de sentenças é tratado como um conjunto de crenças. Neste caso, é intuitivo pensar que o tratamento a ser oferecido pelas Lógicas Adaptativas deve ser baseado em sistemas paraconsistentes, como a Lógica Adaptativa de Inconsistências nos mostra. Afinal, as razões para retratar uma conclusão, independente se a dinâmica trabalhada é externa ou interna, podem recair em nos casos nos quais nos deparamos com bons argumentos contrários a essa conclusão ou simplesmente nos casos em que não estamos tão convencidos assim da *certeza* desta proposição. Parece, por um lado, que um jeito simples de lidar com esses casos é evitando introduzir novas sentenças ao conjunto ou, ainda, adicionar novos requerimentos e condições para que uma dada Lógica Não-Monotônica mantenha-se consistente. Entretanto, nenhuma dessas alternativas parece viável no propósito de formular pensamento cotidiano.

Suponha, por exemplo, que uma teoria que se supunha consistente na Lógica Clássica se mostre inconsistente[14]. Como vimos, esse é um dos motivos do desenvolvimento de Lógicas Paraconsistentes. Porém, o tratamento provido por essas lógicas paraconsistentes monotônicas para esses casos pode ser considerado muito fraco ou insatisfatório, em alguns casos, por negar algumas inferências clássicas e não fornecer abordagens satisfatórias para situações não-monotônicas.

Por outro lado, Lógicas Adaptativas que lidam com inconsistências são corretas e interpretam o conjunto de premissas o máximo possível conquanto concordem com os parâmetros da dedução da Lógica Proposicional Clássica e suas extensões [5]. Em uma Lógica Adaptativa de Inconsistências [6] uma lógica paraconsistente interage com uma lógica consistente nas quais uma se mostra uma lógica limítrofe inferior e a outra, limítrofe superior. Em suma, as Lógicas Adaptativas oferecem uma nova forma de lidar com a interação entre as Lógicas de Inconsistência Formal (em especial, podemos considerar **mbC**, um sistema formal mais fraco) e as Lógicas Não-Monotônicas baseadas em defaults.

Como vimos anteriormente, fórmulas que se comportem de forma consistente em uma Lógica Adap-

[14]Essa é uma situação que se mostra frequente quando tratamos de teorias científicas, por exemplo. Como sabemos, entretanto, cientistas não descartam teorias que se mostram inconsistentes dentro de um sistema clássico simplesmente por serem inconsistentes. Trabalha-se, assim, sob inconsistências enquanto essas teorias se mostram como explicações suficientemente satisfatórias de fenômenos empíricos.

tativa não invalidariam algumas aplicações de teoremas da Lógica Proposicional Clássica. Entretanto, não existe um teste positivo para o comportamento consistente de uma dada fórmula dentro de um conjunto de premissas. Talvez uma linguagem contendo o operador de consistência $\circ$ provesse a distinção entre fórmulas que se comportam de forma consistente daquelas às quais não temos informação sobre sua consistência[15]. Vale ressaltar que distinguir a consistência de uma premissa devolve algumas consequências obtidas de forma clássica à teoria. Portanto, quando estabelecemos que uma fórmula (ou uma instância de uma fórmula) da linguagem é consistente, algumas consequências clássica do conjunto de premissas são adicionadas ao conjunto de consequências paraconsistentes [7].

Vale ressaltar que Lógicas de Inconsistência Formal e Lógicas Adaptativas de Inconsistência baseadas em LIF são distintas e, portanto, com aplicações distintas. Uma diferença crucial entre ambas é: enquanto nas LIFs pode-se decidir arbitrariamente quais proposições devem receber o *status* de consistência no intuito de obtermos uma extensão de uma teoria inconsistente e derivarmos novas conclusões não antes obtidas, as Lógicas Adaptativas de Inconsistência não dependem dessas escolhas de quais proposições devem ser consistentes e trabalham com as restaurações de consistência para tal fim [7].

Uma Lógica de Inconsistência Formal Adaptativa pode ser obtida utilizando-se alguma LIF como lógica limítrofe inferior [7], como apresentado previamente. Especificamente, o sistema **mbC**, por exemplo, pode ser considerado um fragmento da Lógica Proposicional Clássica [10]. Assim, pode ser considerado um sistema regular que contém um método de prova. A princípio, parece plausível pensar que **mbC** poderia ser utilizada como lógica limítrofe inferior interagindo com uma Lógica Default no intuito de fornecer um tratamento adequado. A lógica limítrofe inferior, em uma Lógica Adaptativa, é a parte do sistema formal que não está sujeita à adaptação [5]. Neste caso, **mbC** como lógica limítrofe inferior garantiria o aspecto paraconsistente da Lógica Adaptativa e as estratégias adaptativas seriam dirigidas à hipotética Lógica Não-Monotônica Default limítrofe superior. Desta forma, ampliaríamos a linguagem de uma Lógica Adaptativa de Inconsistências com o poder de expressão do operador de consistência $\circ$ e, mais ainda, uma forma de determinar aquelas proposições que *definitivamente* invalidam algumas instâncias de regras de **LPC** com o operador de inconsistência $\bullet$. Como vimos, adicionar uma proposição consistente a um conjunto pode depender de razões que ultrapassam os limites formais e pode ser algo completamente arbitrário. Entretanto, a expressividade do operador $\circ$ nas Lógicas Adaptativas de Inconsistência baseadas em LIF e a utilização de *restauradores* de consistência levantam muitas possibilidades e o interesse sobre a investigação das interações possíveis entre esse operador e outras lógicas se mostra interessante e de

[15]Isso, não elimina o problema de como determinar se uma fórmula é consistente ou não, porém parece nos fornecer um tipo de requisito das fórmulas consistentes: comportar-se classicamente.

ampla aplicação.

Uma estratégia adaptativa explicita a forma de lidar com aplicações de regras de inferências baseadas no conjunto de anormalidades, neste caso, inconsistências. Se a lógica limítrofe inferior for estendida com o requerimento de que nenhuma anormalidade é logicamente possível[16], então obteríamos a lógica limítrofe superior[17]. A lógica limítrofe superior, assim, essencialmente contém as regras de inferência e axiomas da limítrofe inferior além de regras e/ou axiomas suplementares que podem ser aplicados na ausência de anormalidades.

Se adotarmos uma estratégia de confiabilidade para uma lógica assim, talvez seja possível distinguir os membros confiáveis do conjunto de conjunto de premissas com o auxílio do operador de consistência $\circ$. Assim, apenas fórmulas explicitamente inconsistentes (expressadas pelo operador de inconsistência $\bullet$) e fórmulas α tais que $\circ\alpha$ não são teoremas seriam interpretadas como inconfiáveis. Algo similar ocorre se adotarmos uma estratégia de anormalidade minimal: poderíamos, assim, recorrer à expressividade dos operadores $\circ$ e $\bullet$ para distinguir fórmulas que se comportam normalmente daquelas que se comportam anormalmente. Resta a ser realizada, assim, a investigação mais técnica de estratégias adaptativas[18] aplicáveis a uma Lógica Adaptativa de Inconsistência com lógica limítrofe inferior **mbC** e conjunto de anormalidades composto por inconsistências, sejam elas já previstas na literatura como estratégias adaptativas comumente utilizadas ou, ainda, novas estratégias possíveis.

6.2 Considerações Finais

Este trabalho visou investigar de forma intuitiva dois caminhos possíveis para lidar com a não-monotonicidade dentro de um âmbito paraconsistente: no aspecto da dinâmica externa, parece possível desenvolver uma nova relação de consequência não-monotônica baseada nas Lógicas de Inconsistência Formal, em especial **mbC**; no aspecto da dinâmica interna, por sua vez, parece plausível desenvolver uma Lógica Adaptativa de Inconsistências com a lógica **mbC** como lógica limítrofe inferior e a Lógica Default como lógica limítrofe superior.

Como vimos, o estudo das Lógicas Não-Monotônicas tem despertado grande interesse pela sua aplicabilidade em Inteligência Artificial [1]. A não-monotonicidade é um campo de estudos complexo e extenso: muitas questões concernantes aos fundamentos das Lógicas Não-Monotônicas, assim como a

[16]No caso de **mbC**, se estendermos o conjunto de axiomas com o seguinte teorema, para toda α em **For**, $\vdash_{mbC} \circ\alpha$.

[17]No caso, uma Lógica Default que, como vimos anteriormente, é explosiva e trivializa sob contradições.

[18]A adaptabilidade dos defaults a distintos contextos e âmbitos de discurso, por exemplo, nos inclina a pensar que é possível desenvolver estratégias adaptativas alternativas a uma Lógica Adaptativa que contenha a Lógica Default.

relação entre os conceitos trabalhados nos distintos sistemas formais não-monotônicos dificultam muitos avanços técnicos relativos a esses sistemas. Diversos tópicos relacionados às Lógicas Não-Monotônicas tais como teorias das provas em sistemas formais não-monotônicos, a relação existente entre distintos formalismos, resultados complexos, tratamento de casos especiais de raciocínio não-monotônico, técnicas para formalizar novos sistemas baseados em Lógicas Não-Monotônicas, entre outras, têm sido estudados no âmbito da Inteligência Artificial [29].

Parte deste interesse vem motivado por situações cotidianas como o pensamento *default*. Talvez por esse intuito de formalizar raciocínio cotidiano, a abordagem não-monotônica apresentada por Reiter tenha sido tão reproduzida e estudada desde sua primeira formulação. Por outro lado, é evidente que quando obtemos novas informações que contradizem nossas crenças até aquele instante, devemos revisar essas crenças de forma coerente [30].

Ainda há muito o que ser investigado no âmbito das Lógicas Não-Monotônicas, assim como no âmbito das Lógicas Paraconsistentes (em especial, as LIFs): com quais outras lógicas esses formalismos poderiam interagir?; como solucionar as críticas que certos formalismos receberam, do ponto de vista técnico?; que novas estratégias adaptativas podem ser desenvolvidas?; qual é o impacto de se resgatar a classicalidade em sistemas não-clássicos?. Diversas questões ainda se mantêm sem resposta enquantos outras perguntas sequer foram levantadas. Esta breve investigação levanta hipóteses possíveis que podem guiar o desenvolvimento de trabalhos futuros tanto do ponto de vista filosófico (principalmente no campo da Epistemologia) quanto do ponto de vista técnico.

Referências Bibliográficas

[1] ANTONELLI, A. Non-monotonic logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Z. E. N., Ed. 2010. http://plato.stanford.edu/entries/logic-nonmonotonic/.

[2] ANTONIOU, G. *Nonmonotonic Reasoning*. The MIT Press, Londres, 1997.

[3] AVRON, A., AND ARIELI, O. *Nonmonotonic and Paraconsistent Reasoning: From Basic Entailmens to Plausible Relations*. http://www2.mta.ac.il/ oarieli/Papers/ecsqaru99.ps.

[4] AYDA IGNEZ, A. *N.A. Vasiliev e a Lógica Paraconsistente*. CLE-UNICAMP, 1990. Coleção CLE - Volume 7.

[5] BATENS, D. *Adaptive Logics*. http://logica.ugent.be/adlog/albib.html.

[6] BATENS, D. *Adaptive Logics and Dynamix Proofs: Mastering the Dynamics of Reasoning, with Special Attention to Handling Inconsistency*. 2010. http://logica.ugent.be/adlog/albib.html.

[7] BATENS, D. *Some Adaptive Contributions to Logics of Formal Inconsistency*. 2014. http://logica.ugent.be/centrum/preprints/kolkataLFI.pdf.

[8] BREWKA, G., DIX, J., AND KONOLIGE, K. *Nonmonotonic Reasoning: an Overview*. CSLI Publications, 1997.

[9] CARNIELLI, W., BIANCONI, R., AND CONIGLIO, M. *Lógica e Aplicações: Matemática, Ciência da Computação e Filosofia (Versão Preliminar - Capítulos 1 a 5)*. 2006. http://www.cle.unicamp.br/prof/carnielli/teaching.html.

[10] CARNIELLI, W., CONIGLIO, M., AND MARCOS, J. Logics of formal inconsistency. In *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 14. Springer, 2007, pp. 1 –94.

[11] CARNIELLI, W., AND GRÁCIO, M. *Modulated Logics and Uncertain Reasoning*. http://wydawnictwoumk.pl/czasopisma/index.php/LLP/article/view/1338.

[12] CARNIELLI, W., AND GRÁCIO, M. Modulated logics and flexible reasoning. In *Logic and Logical Philosophy*, vol. 17. 2008, pp. 211 – 249. http://wydawnictwoumk.pl/czasopisma/index.php/LLP/article/view/1338.

[13] CORBALÁN, M. *Conectivos de Restauração Local*. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas. 2012.

[14] GONZÁLES, L., AND OLMEDO-GARCÍA, C. Can paraconsistency replace non-monotonicity? *CEUR Workshop Proceedings 533* (2009), 217–224.

[15] GÄRDENFORS, P. Belief revision: An introduction. In *Cognitive Science, Department of Philosophy, Lund University, S-223 50 Lund, Sweden*. http://www.fil.lu.se/person/PeterGardenfors.

[16] HAACK, S. *Filosofia das Lógicas*. Editora UNESP, 2002.

[17] MAKINSON, D. How to go nonmonotonic. In *Handbook of Philosophical Logic, Second Edition, Volume 12*. Springer, 2005, pp. 175 – 278.

[18] MARCOS, J. *Logics of Formal Inconsistency*. Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas. 2004.

[19] MARCOS, J. Nearly every normal modal logic is paranormal. In *Logique et Analyse*.

[20] MARTINS, A., MARCELINO, AND PEQUENO, T. *Well-Behaved IDL Theories*. Laboratório de Inteligência Aritificial - Departamento de Computação - Universidade Federal do Ceará. http://www.lia.ufc.br/ marcel/.

[21] MARTINS, A., PEQUENO, M., AND PEQUENO, T. A multiple worlds semantics for a paraconsistent nonmonotonic logic. In *Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent*, W. Carnielli, M. Coniglio, and I. D'Otaviano, Eds., vol. 1. Marcel Dekker, 2002, pp. 187–211.

[22] MCDERMOTT, D. Nonmonotonic logic ii: Nonmonotonic modal theories. In *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 29. No. 1. 1982.

[23] POOLE, D. Default logic. In *Handbook of logic in AI and logic programming*, vol. 3. Clarendon Press, 1994.

[24] REITER, R. A logic for default reasoning. In *Artificial Inteliggence 13*. North-Holland Publishing Company, 1980, pp. 81 – 132.

[25] ROTT, H. *Change, choice and inference: A study of belief revision and nonmonotonic reasoning*. Oxford University Press, 2001.

[26] SILVESTRE, R. An inductive modal approach for the logic of epistemic inconsistency. In *ABSTRACTA 6 : 1*. 2010, pp. 136 – 155.

[27] SMULLYAN, R. *First-Order Logic*. Dover Publications, 1995.

[28] TARSKI, A. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Hackett Publishing Company, 1983.

[29] THOMASON, R. Logic and artificial intelligence. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Z. E. N., Ed. 2013. http://plato.stanford.edu/entries/logic-ai/.

[30] VAN BENTHEM, J. *Logic and Reasoning: Do The Facts Matter?* 2007. http://staff.science.uva.nl/ johan.

[31] VELOSO, P., AND CARNIELLI, W. Logics for qualitative reasoning. In *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, vol. 1. Kluwer Academic Publishers, 2004, p. 487–526.

[32] WITTGENSTEIN, L. *Da Certeza*. Edições 70, 2000. Biblioteca de Filosofia Contemporânea.