LUCCHESI

O Problema dos Dois Caminhos Disjuntos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sra. Maria Cecília Motta Torres Giglio e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de janeiro de 1991.

C L Lucchesi

Prof. Dr. Cláudio Leonardo Lucchesi

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ciência da Computação.

O problema dos dois caminhos disjuntos [1]

Maria Cecilia Motta Torres Giglio[2]

Departamento de Ciência da Computação
IMECC – UNICAMP

20 de dezembro de 1990

Banca Examinadora

Cláudio L. Lucchesi (Orientador)[3]
Paulo Feofiloff[4]
Pedro J. de Rezende (suplente)[3]
Timothy G. Griffin[3]

[1] Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Unicamp, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

[2] A autora é formada em Matemática, modalidade Bacharelado, pela Unicamp.

[3] Professor do Departamento de Ciência da Computação - IMECC - UNICAMP.

[4] Professor do Departamento de Ciência da Computação - IME - USP

Abstract

The two disjoint paths problem consists in determining, given vertices s_1, s_2, t_1 and t_2 of a graph, whether or not there exist two disjoint paths, P_1 and P_2, joining s_1 to t_1 and s_2 to t_2, respectively. The problem may be considered in four versions, namely, the graph may or may not be directed, and the disjointness requirement on the paths may be on the edges only or on the vertices too.

In all version, the problem admits computationally elementary reductions which provide either a solution or a certificate of its nonexistence. The analysis presents an interesting interconnection between combinatorics, complexity of algorithms and topology.

In the case of direct graphs, it is also required that the graph be acyclic, otherwise the problem becomes NP-hard.

Resumo

O problema dos dois caminhos disjuntos consiste em determinar, dados vértices s_1, s_2, t_1 e t_2 de um grafo, se existem ou não dois caminhos disjuntos, P_1 e P_2, ligando s_1 a t_1 e s_2 a t_2, respectivamente. O problema se manifesta em quatro versões, a saber, o grafo pode ser orientado ou não, e a exigência de disjunção pode ser apenas nas arestas ou também nos vértices.

Nas quatro versões, o problema admite reduções elementares do ponto de vista computacional que levam finalmente à solução ou a uma certidão da sua não existência. Esta análise apresenta uma interconexão interessante entre combinatória, complexidade de algoritmos e topologia.

No caso de grafos orientados, exige-se também que o grafo seja acíclico, pois caso contrário o problema se torna NP-difícil.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Claúdio L. Lucchesi, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

À banca examinadora, em especial ao Prof. Dr. Paulo Feofiloff, pelo grande interesse mostrado, inclusive fazendo importantes observações nos possibilitando novas idéias para trabalhos futuros.

À minha amiga Inês, pelo carinho com que cuidou das minhas filhas, possibilitando-me tranquilidade necessária para completar este trabalho.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Um problema bem conhecido na área de Teoria dos Grafos é o de encontrar caminhos mutuamente disjuntos ligando dois conjuntos dados A e B de vértices. Se nenhuma outra condição adicional for imposta, então o Teorema de Menger [11] fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de tais caminhos. Ademais, um algoritmo de fluxo máximo e corte mínimo (Ford e Fulkerson [4]) pode ser usado para determinar os caminhos em tempo polinomial, se tais caminhos existirem.

Podemos adicionar ao problema acima uma nova condição: os conjuntos A e B são enumerados, respectivamente, $(a_1, \ldots, a_l)$ e $(b_1, \ldots, b_l)$ e exige-se que os caminhos ligando vértices de A a vértices de B não só sejam mutuamente disjuntos mas que tenham como extremos os pares $(a_1, b_1), \ldots, (a_l, b_l)$. Este novo problema é conhecido como o *problema dos l caminhos disjuntos* e surge naturalmente em problemas de controle de comunicação, tráfego em redes e em roteamente de circuitos VLSI. Determinar se tais caminhos existem é NP-completo (Karp [9]), mesmo quando se restringe o problema a grafos planares (Lynch [10]); aparentemente, Knuth, em 1974, deu a primeira demonstração da NP-completude do problema - veja Garey e Johnson [6].

Em trabalho muito recente, Robertson e Seymour [14] obtiveram um algoritmo pseudo polinomial para resolver o problema; isto é, se considerarmos l fixo, o problema admite solução em tempo polinomial.

Este problema, de natureza aparentemente combinatorial e de complexidade de algoritmos, apresenta conexões com topologia. De fato, no caso do grafo ser apresentado já imerso numa superfície fixa, o algoritmo de Robertson e Seymour [14] passa a ser linear.

Outra evidência desta conexão, que veremos com detalhe, é a caracterização da não existência de solução para o caso $l = 2$, em que mostraremos que é possível desenhar o grafo de uma forma "ruim" (Seymour [15], Thomassen [19] e Perl e Shiloach [13]).

Nesta dissertação nos restringimos ao caso $l = 2$. O capítulo 2 apresentará uma demonstração da caracterização acima mencionada (Thomassen [19] e Seymour [15]). Esta demonstração é original, se bem que influenciada por conversações com U. S. R. Murty.

O capítulo 3 apresenta uma variação do problema (ainda com $l = 2$), em que a disjunção exigida dos caminhos é apenas nas arestas. A caracterização apresentada é de Seymour [15], mas a demonstração é novamente original, e apresenta uma redução ao problema resolvido no capítulo anterior.

Nos capítulos 4 e 5 consideramos as versões do problema para grafos orientados e acíclicos, com disjunção nos vértices (capítulo 4) ou apenas nas arestas (capítulo 5). Convém ressaltar que a restrição de aciclicidade é fundamental, pois, mesmo para $l = 2$ o problema, na sua versão para grafos orientados, é, em geral, NP-completo (Fortune, Hopcroft e Wyllie [5]).

A caracterização apresentada no capítulo 4 para a não existência de solução é devida a C. Thomassen [20]. A propósito, encontramos erros neste artigo, no qual o autor apresenta um corolário até certo ponto surpreendente, que não conseguiu provar diretamente: o problema, no caso de grafos orientados e acíclicos pode, sob certas condições fracas, ter as orientações das arestas ignoradas, preservando a existência de solução. A demonstração por nós apresentada neste capítulo é original, é uma demonstração direta deste fato surpreendente e corrige a demonstração de Thomassen .

No capítulo 5, a solução para o problema no caso de disjunção nas arestas, grafos orientados e acíclicos, é original e corresponde a uma redução razoavelmente simples ao problema do capítulo anterior.

Completamos agora este capítulo introdutório apresentando, de forma mais detalhada, as considerações feitas acima, relacionando o problema dos caminhos disjuntos com outros problemas análogos. Na maior parte das vezes nos restringiremos ao caso de disjunção nas arestas, grafos não orientados.

1.1 Fluxos Máximos e Cortes Mínimos

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Seja X um conjunto de vértices de G. Dizemos que X *separa* dois vértices u e v se um dentre u e v pertence a X e o outro a $V - X$.

Vamos denotar $\delta(X)$ o conjunto de arestas com um extremo em X e o outro em $V - X$ (seu complemento). Vamos denotar $W(X)$ o conjunto dos vértices de X que são extremos de arestas de $\delta(X)$.

Chamamos $E' \subseteq E$ de *corte de arestas* se $E' = \delta(X)$ para algum $X \subseteq V$. Chamamos $V' \subseteq V$ de *corte de vértices* se $V' = W(X)$ para algum $X \subseteq V$.

Teorema de Menger Sejam s e t vértices de G e $l \geq 0$ um inteiro. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Existem l caminhos entre s e t, dois a dois disjuntos nas arestas;

(ii) Para cada $X \subseteq V$ com $s \in X - W(X)$, $t \in V - X$ temos $|\delta(X)| \geq l$.

Este teorema foi demonstrado por Menger (1927) [11] sem contudo levar a um algoritmo eficiente. O conjunto de caminhos é freqüentemente chamado de *fluxo*. A versão aqui apresentada exige apenas disjunção nas arestas. Existe uma versão análoga, que exige disjunção também nos vértices; existem também versões análogas para grafos orientados.

O conceito de fluxo pode ser generalizado, admitindo-se *capacidades* nas arestas e/ou vértices, conforme o caso, onde as capacidades são reais não negativos. Neste caso, o fluxo é definido como uma coleção ponderada de caminhos, onde os pesos são reais não negativos, e tais que a soma dos pesos dos caminhos que passam por uma dada aresta ou vértice não excede a capacidade da aresta ou vértice. O *valor do fluxo* é a soma dos pesos dos caminhos. Em contrapartida, o número de arestas ou vértices de um corte é substituído pela sua *capacidade*, isto é, a soma das capacidades de suas arestas ou de seus vértices. O Teorema de Menger passa então a ter a seguinte redação (versão arestas, grafo não orientado):

> Sejam s, t vértices, c uma função *capacidade* que associa a cada aresta um real não negativo. Então o valor do fluxo máximo de s a t é igual à capacidade mínima de corte que separa s e t.

Nos casos em que as capacidades são inteiros, o fluxo máximo é obtenível por um *fluxo inteiro*, isto é, um fluxo cujos pesos são inteiros.

O caso apresentado no início desta seção corresponde ao caso de capacidades unitárias em todas as arestas.

Ford e Fulkerson (1956) [4] desenvolveram um algoritmo para encontrar fluxos máximos e cortes mínimos, e desde então, muitos outros algoritmos foram desenvolvidos.

Em particular, é importante ressaltar o trabalho de Edmonds e Karp [2], no qual exibiram um algoritmo polinomial para determinação de fluxos, quaisquer que sejam as capacidades.

Atualmente existem vários algoritmos eficientes para encontrar um fluxo máximo, o algoritmo de Sleator e Tarjan [18], de tempo $O(|E|.|V|.\log|V|)$, é o melhor (do ponto de vista teórico) dentre os algoritmos conhecidos para grafos em geral.

1.2 Multifluxos

Sejam $s_1, \ldots, s_l$ *vértices origem*, $t_1, \ldots, t_l$ *vértices destino* e $d_1, \ldots, d_l$ *demandas* (inteiros positivos). Admitiremos a possibilidade de $s_1, \ldots, s_l, t_1, \ldots, t_l$ não serem distintos. O problema do *multifluxo* consiste em determinar se existem ou não, para i de 1 a l, d_i caminhos ligando s_i a t_i, e tais que os $d_1 + d_2 + \ldots + d_l$ caminhos sejam disjuntos dois a dois nas arestas. Quando desejamos explicitar o número l de pares, usaremos a expressão *l-fluxo*. Na literatura em inglês são usados os termos *Multicommodity Flow*, *Two-commodity Flow* ($l = 2$) e assim por diante.

Cortes Congestionados

Aplicando-se a teoria dos fluxos vista na seção anterior obtém-se uma condição necessária para a existência do multifluxo AN:

Para todo $X \subseteq V$, $|\delta(X)| \geq \sum d_i$ (*X separa* s_i *e* t_i).

Chamamos de *corte congestionado* um corte que não satisfaz tal condição. Veremos adiante que o *não congestionamento*, isto é, a não existência de cortes congestionados, não é uma condição suficiente para a existência dos multifluxos.

Analogamente ao caso dos fluxos, pode-se dar uma definição de multifluxo que envolva pesos reais.

Admitindo-se então capacidades nas arestas, o multifluxo é um conjunto de fluxos, onde estes por sua vez são coleções ponderadas de caminhos (pesos reais não negativos) e tais que a soma dos pesos de todos os caminhos (dos vários fluxos) que passam por uma dada aresta não excede a capacidade desta.

Quando os pesos dos caminhos são todos inteiros temos o *multifluxo inteiro* e caso contrário o *fracionário*.

1.3 Multifluxos - Casos Particulares

Quando $s_1, \ldots, s_l, t_1, \ldots, t_l$ tomam somente dois valores distintos, pode-se mostrar que a condição de não congestionamento é suficiente e o problema recai no problema de fluxo máximo.

2-Fluxos

No exemplo da figura 1.1 (onde as demandas e as capacidades das arestas são todas unitárias), vemos que a condição de não congestionamento não é suficiente para a existência de um 2-fluxo inteiro. Isto decorre da importância da relação dos caminhos com os pares, isto é, cada caminho liga exatamente um s_i ao t_i correspondente.

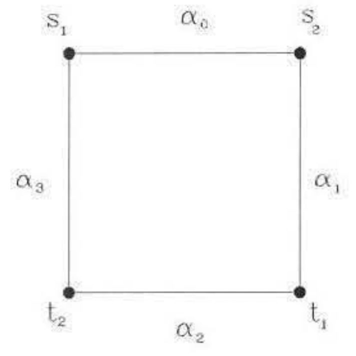

Figura 1.1: A condição de congestionamento não é suficiente

No contexto de multifluxos fracionários o exemplo acima tem solução; por exemplo, se tomarmos $1/2P_1$, $1/2P_2$, $1/2P_3$ e $1/2P_4$, onde:

$P_1 = (s_1, \alpha_0, s_2, \alpha_1, t_1)$;
$P_2 = (s_1, \alpha_3, t_2, \alpha_2, t_1)$;
$P_3 = (s_2, \alpha_0, s_1, \alpha_3, t_2)$ e
$P_4 = (s_2, \alpha_1, t_1, \alpha_2, t_2)$.

Even, Itai e Shamir [3] mostraram que o problema do 2-fluxo é também NP-completo, mas Hu [8] demonstrou que a condição de não congestionamento é suficiente desde que sejam permitidos multifluxos fracionários (para uma prova curta veja Seymour [16]).

Caso Geral

No caso geral a condição de não congestionamento não é suficiente nem mesmo no caso fracionário, como no exemplo da figura 1.2 (onde as demandas e as capacidades das arestas são novamente unitárias).

Neste exemplo, a não existência do multifluxo fracionário segue do fato que cada caminho, unindo um vértice origem com seu respectivo vértice destino, usa

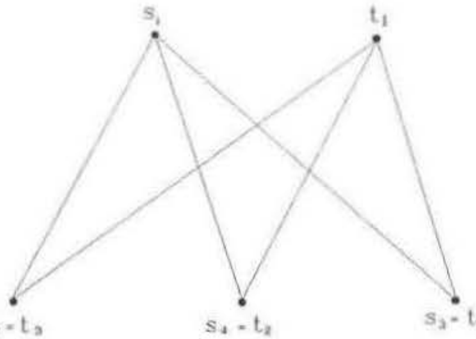

Figura 1.2: A condição de congestionamento não é suficiente

pelo menos duas arestas, dando um total de uso igual a 8 enquanto temos apenas 6 arestas disponíveis.

O problema do multifluxo é NP-completo, mesmo para 2-fluxos (Even, Itai e Shamir [3]). Os mesmos autores demonstraram que a versão orientada do problema é NP-completa. De fato, Fortune, Hopcroft e Wyllie [5] mostraram que o problema do 2-fluxo orientado é NP-completo mesmo quando as demandas são unitárias.

1.4 PDC - Problema dos dois caminhos disjuntos

Um caso bastante particular, mas importante, do problema do multifluxo é o chamado *problema dos l caminhos disjuntos*, em que todas as l demandas $d_1, \ldots, d_l$ são unitárias. Ou seja, temos l *vértices origem* $s_1, \ldots, s_l$, l *vértices destino* $t_1, \ldots, t_l$ e deseja-se determinar se existem ou não l caminhos $P_1, \ldots, P_l$, dois a dois disjuntos nas arestas, e tais que cada P_i liga s_i a t_i. Esta definição corresponde à versão arestas, grafo não orientado; usaremos para ele a abreviatura AN; analogamente, podemos definir o problema dos l caminhos disjuntos versões vértices (V) e/ou grafos orientados (O). Assim, temos quatro problemas, a saber: AN, VN, AO e VO.

O problema VN surge naturalmente em problemas de controle de comunicação, tráfego em redes e em roteamento de circuitos em VLSI. Por exemplo, Mishra [12] mostrou como este problema pode ser usado para simulação eficiente de uma rede de transistores MOS, através da detecção dos transistores que podem operar como dispositivo bilateral.

Estes problemas são extremamente interessantes do ponto de vista teórico, apresentando conexões até certo ponto surpreendentes entre complexidade de algoritmos, combinatória e topologia.

Vários algoritmos têm sido relatados para classes restritas de grafos, mas nenhum algoritmo eficiente é conhecido atualmente para o problema dos l caminhos disjuntos para grafos em geral. De fato, determinar se tais caminhos existem é NP-completo (Karp [9]), mesmo quando se restringe o problema a grafos planares (Lynch [10]); aparentemente, Knuth, em 1974, deu a primeira demonstração da NP-completude do problema - veja Garey e Johnson [6].

Não encontramos nenhuma referência sobre a NP-completude do problema AN.

Os problemas VO e AO são NP-completos mesmo para o caso $l = 2$ (Fortune, Hopcroft e Wyllie [5]).

Em trabalho muito recente Robertson e Seymour [14] obtiveram um algoritmo pseudo-polinomial para os casos VN e AN, ou seja, o índice l faz parte do expoente.

Em particular, consideraremos o caso $l = 2$. O *problema dos dois caminhos disjuntos (PDC)* consiste em encontrar dois caminhos disjuntos nas arestas unindo s_1 a t_1 e s_2 a t_2, respectivamente, ou encontrar uma certidão da não existência destes. Faremos este estudo para os casos VN, AN, VO e AO (os dois últimos no caso de grafos acíclicos).

Thomassen [19] e Seymour [15] obtiveram, independentemente, uma caracterização para o VN e para o AN, respectivamente. Tais caracterizações admitem um algoritmo polinomial para decidir a existência ou não da solução, e produzi-la no caso afirmativo. Shiloach [17] obteve um algoritmo de tempo $O(|E|.|V|)$ para o VN.

Outro trabalho semelhante desenvolvido é a tese de doutorado de Mishra [12] em Carnegie-Mellon; a tese apresenta um algoritmo que, dado um grafo G não orientado com dois vértices distintos, s e t, resolve o problema de encontrar quais arestas são bidirecionais, isto é, para quais arestas $e = [u, v]$ existem pelo menos dois caminhos unindo s a t, tal que cada caminho use a aresta e, atravessando-a de u para v e de v para u, respectivamente. Mishra apresenta um algoritmo para resolver este problema em tempo $O(|E|.|V|)$ e mostra como tal algoritmo pode ser usado para resolver o VN.

Como já menciomanos, o VO e AO são NP-completos [5]. No entanto, se o grafo for acíclico então estes problemas são polinomiais. Por exemplo, Perl e Shiloach [13], apresentaram um algoritmo de tempo $O(|V|.|E|)$ para resolver o VO para grafos acíclicos. Thomassen [20] (encontramos erros), obteve uma caracterização do VO para grafos acíclicos.

1.5 Algumas Reduções do PDC

Nesta seção, apresentaremos algumas reduções do PDC.

O VO pode ser reduzido ao AO.

Seja $G = (V, E)$ um grafo orientado. Vamos definir $G' := (V', E')$ da seguinte maneira:

$$V' := \cup_{v \in V}\{v', v''\};$$

$$E' := \{v' \to v''; v \in V\} \cup \{u'' \to v'; u \to v \in E\}.$$

Seja $P := (v_1, \ldots, v_m)$ um caminho orientado em G. O caminho P', em G', correspondente é $(v_1', v_1'', v_2', v_2'', \ldots, v_m', v_m'')$.

É claro que o VO tem solução em G se e somente se o AO tem solução em G'. Conseguimos assim, reduzir o VO ao AO.

Esta redução nos permite afirmar que o AO é NP-completo, pois, como já mencionamos, Fortune, Hopcroft e Wyllie [5] mostraram que o VO é NP-completo.

O AO pode ser reduzido ao VO.

Seja $G = (V, E)$ um grafo orientado e s_1, s_2, t_1 e t_2 quatro vértices de G, não necessariamente distintos. Podemos reduzir o AO ao VO da seguinte maneira: adicionamos ao grafo G quatro novos vértices, distintos dois a dois, s_1', s_2', t_1', t_2' e unimos s_1 a s_1', s_2 a s_2', t_1 a t_1' e t_2 a t_2' por novas arestas, obtendo o grafo G'. Em seguida, consideramos H o grafo orientado das arestas ("*directed line graph*") de G', chamando de s_1, s_2, t_1 e t_2 os vértices de H que correspondem às novas arestas de G'. É claro que o AO tem solução em G se e somente se o VO tem solução em H.

O VN pode ser reduzido ao VO.

Basta tomarmos cada aresta não orientada $[u, v]$ e trocarmos pelo par de arestas $u \to v$ e $v \to u$.

O AN pode ser reduzido ao VN.

Podemos reduzir o AN ao VN da seguinte maneira: adicionamos ao grafo G quatro novos vértices, distintos dois a dois, s_1', s_2', t_1', t_2' e unimos s_1 a s_1', s_2 a s_2', t_1 a t_1' e t_2 a t_2' por novas arestas, obtendo o grafo G'. Em seguida, consideramos

H o grafo das arestas ("*line graph*") de G', chamando de s_1, s_2, t_1 e t_2 os vértices de H que correspondem às arestas novas de G', respectivamente. É claro que o AN de G tem solução se e somente se o VN de H tem solução.

Em resumo o AO e o VO são equivale o VN e o AN redutíveis ao AO (e VO). No entanto, como já dissemos o AO é NP-completo e portanto a redução ao AO em nada nos ajuda.

1.6 Uma variante do Teorema de Menger

No transcorrer da tese necessitamos de uma variante do teorema de Menger, que também ocorre em quatro versões. Damos a seguir a versão correspondente a grafos não orientados, com disjunção nos vértices, exceto na origem.

Teorema de Menger (variante) Seja s um vértice de G e T um conjunto de l vértices de G. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Existem l caminhos de s a T, dois a dois disjuntos exceto na origem;

(ii) Para cada $X \subseteq V$ com $s \in X$ temos $|W(X)| \geq |T - X|$.

1.7 Resumo dos demais capítulos

A tese consistirá do estudo detalhado do problema dos dois caminhos disjuntos.

No capítulo 2, apresentaremos o problema dos dois caminhos disjuntos, versão VN. Daremos uma caracterização dos grafos em que o VN não tem solução.

No capítulo 3, apresentamos uma outra redução do AN ao VN, que nos permite caracterizar os grafos em que o AN não tem solução.

Nos capítulos 4 e 5, resolvemos o VO e o AO para grafos orientados acíclicos. No capítulo 4, obtivemos uma demonstração original da redução do VO (para grafos acíclicos) ao VN e conseguimos, assim, também uma caracterização dos grafos acíclicos em que o VO não tem solução.

O capítulo 6 apresenta de forma bastante sucinta algumas considerações para trabalho futuro.

A princípio, nosso objetivo era de estudar apenas o PDC para grafos não orientados e fazer um estudo da complexidade do algoritmo sugerido pela demonstração dos teoremas das caracterizações dos grafos sem solução. No entanto, o trabalho tomou um outro rumo e optamos por aprofundar o estudo do PDC para grafos orientados acíclicos, inclusive obtendo uma demonstração original.

Capítulo 2

Grafos não Orientados Disjunção nos Vértices

Sejam G um grafo não orientado e s_1, s_2, t_1 e t_2 vértices de G, dois a dois distintos. O *Problema dos Dois Caminhos Disjuntos nos Vértices (VN)* consiste em encontrar dois caminhos disjuntos nos vértices, P_1 e P_2, ligando s_1 a t_1 e s_2 a t_2, respectivamente.

Neste capítulo nós resolvemos este problema dando uma caracterização dos grafos não orientados em que o VN não tem solução. Esta caracterização foi obtida independentemente por Thomassen [19] e por Seymour [15]; no caso particular de grafos planares 3-conexos foi também obtida por Perl e Shiloach [13]. Shiloach [17] e Mishra [12] apresentaram algoritmos polinomiais para resolver o problema, sem contudo apresentar uma caracterização. A demonstração aqui apresentada é original e foi influenciada por conversações com U. S. R. Murty.

Usaremos somente o termo *grafo* para grafo não orientado e diremos simplesmente que G *tem solução* caso o VN tenha solução para G. Ademais, chamaremos os vértices s_1, s_2, t_1 e t_2 de *vértices especiais*.

2.1 Desenho Ruim

Um grafo é um *desenho ruim* se admite uma representação planar, dentro de um retângulo, na qual os vértices especiais aparecem nos vértices deste retângulo na seguinte ordem cíclica: s_1, s_2, t_1 e t_2 (figuras 2.1 e 2.2).

O Lema abaixo demonstra que um desenho ruim é uma certidão da não existência de solução.

Lema 2.1 (Certidão) *Se G é um desenho ruim então o VN não tem solução.*

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que exista solução, (P_1, P_2). Como s_1, s_2, t_1 e t_2 aparecem nos vértices do retângulo nesta ordem cíclica, temos que P_1 e P_2 "cruzam". Mas G é planar e portanto os caminhos se interceptam, contradição. □

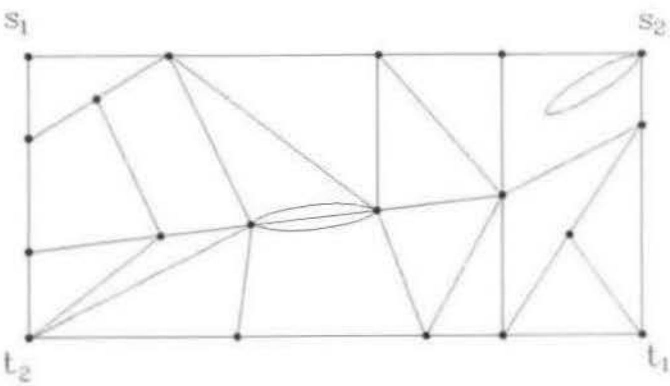

Figura 2.1: Exemplo de Desenho Ruim.

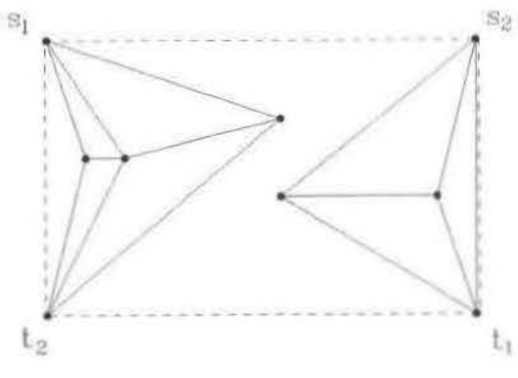

Figura 2.2: Exemplo de um grafo não conexo que é um desenho ruim.

Nem sempre temos um desenho ruim quando não existe solução. Vemos claramente no exemplo da figura 2.3 que não existe solução do VN, no entanto, o grafo não é um desenho ruim, pois não é planar.

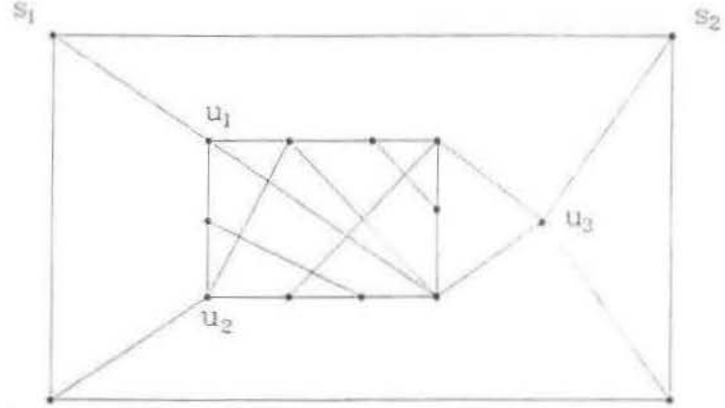

Figura 2.3: Exemplo de um grafo sem solução que não é um desenho ruim.

Veremos, na próxima seção, que neste caso podemos "reduzir" o grafo a um desenho ruim.

2.2 Reduções

Seja R uma parte de VG. Uma componente C de $G - R$ é *interna* com relação a R se C for livre de vértices especiais, ou seja, s_1, s_2, t_1 e t_2 não são vértices de C. Convém ressaltar que não necessariamente R inclui os vértices especiais. A união dos vértices das componentes internas com relação a R forma o *interior* de R.

O conjunto R é um *redutor* de G se tem no máximo três vértices e interior não vazio. A figura 2.4 ilustra um exemplo de um redutor e seu interior.

O grafo G é *irredutível* se for livre de redutores.

Dois vértices de R são *ligados pelo interior* se ambos são adjacentes a vértices de uma mesma componente interna (de $G - R$).

Dado um redutor R, a *redução imediata* de G (*induzida por R*) é o grafo H obtido a partir de G pela remoção do interior e pela adição de arestas que unem cada par de vértices de R ligados pelo interior, mas não adjacentes em G. Na figura 2.5, temos a redução imediata do grafo da figura 2.4, induzida por R.

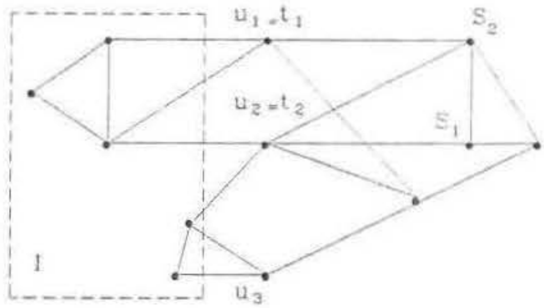

Figura 2.4: O redutor $R := \{u_1, u_2, u_3\}$ e seu interior I.

Dada uma seqüência $H_0 := G, H_1, \ldots, H_r := K$ com $r \geq 0$ e tal que cada H_i é uma redução imediata de H_{i-1} ($1 \leq i \leq r$), dizemos que K é uma *redução* de G e que G é *redutível* a K.

Lema 2.2 (Invariância da solução com redução) *O grafo G admite solução se e somente se toda redução de G admite solução.*

Demonstração. Seja H uma redução de G. Por indução, podemos obviamente supor que H é uma redução imediata de G. Seja R o redutor que induz essa redução, I seu interior.

$\Longrightarrow$ (Redução não destrói solução.)

Suponhamos que G tem solução, (P_1, P_2); vamos provar que H também tem solução.

Como R tem no máximo três vértices e I é livre de vértices especiais, apenas um dos caminhos da solução em G pode passar por vértices de I. Suponhamos, sem perda de generalidade, que P_2 é um caminho em H. Se P_1 for também um caminho em H, então (P_1, P_2) é uma solução de H. Podemos portanto supor que P_1 passa por vértices de I.

Seja Q um trecho de P_1 cujos vértices internos pertencem a I e cuja origem, u, e término, v, pertencem a R; os vértices u e v de R são então ligados por I e portanto u e v são adjacentes em H. Assim, o trecho Q de P_1 pode ser substituído pela aresta que une u e v em H. Desta forma, obtem-se, em H, um caminho P_1', de s_1 a t_1, e disjunto de P_2 (figura 2.6). De fato, H tem solução.

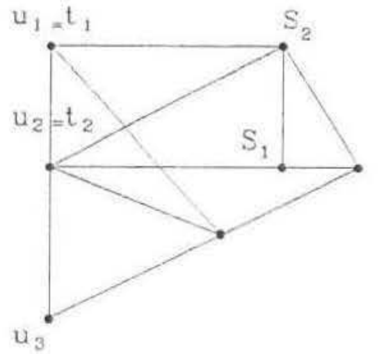

Figura 2.5: A redução imediata do grafo da figura 2.4 (induzida por R).

$\Longleftarrow$ (Redução não cria solução.)

Suponhamos que H tem solução, (P_1, P_2); vamos provar que G tem solução.

Como R tem no máximo três vértices e as arestas adicionadas na redução têm ambos os extremos em R, então apenas um dos caminhos da solução em H pode usar tais arestas, digamos P_1.

Basta então substituirmos cada aresta adicionada usada por P_1, se houver, por um caminho em G que une seus extremos e cujos vértices internos pertencem a I. Obtemos assim um passeio P_1', disjunto de P_2, que une s_1 e t_1. De fato, G tem solução. □

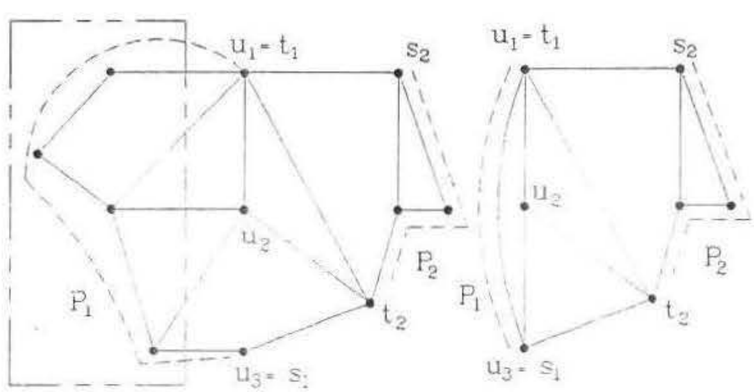

Figura 2.6: Reduções preservam solução.

A título de ilustração, reexaminemos o grafo não planar e sem solução da figura 2.3. O conjunto $R := \{u_1, u_2, u_3\}$ é um redutor e a correspondente redução imediata é um desenho ruim (figura 2.7).

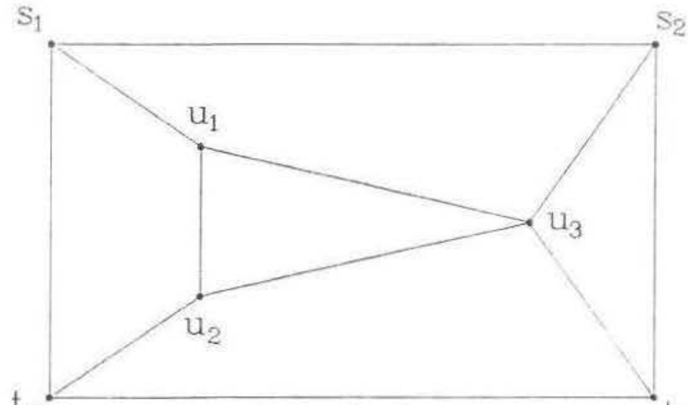

Figura 2.7: Grafo da figura 2.3 reduzido a um desenho ruim.

De fato, podemos caracterizar os grafos que admitem solução:

Teorema 2.3 (Fundamental) *Sejam G um grafo e s_1, s_2, t_1 e t_2 quatro vértices distintos de G. O problema VN não tem solução se e somente se G é redutível a um desenho ruim.*

Na próxima seção enunciaremos uma versão equivalente do teorema, e que será demonstrada nas seções subseqüentes.

2.3 O Teorema Equivalente

Observemos que as arestas $[s_1, s_2]$, $[s_2, t_1]$, $[t_1, t_2]$, e $[t_2, s_1]$ em nada contribuem para a existência de uma solução. Podemos portanto adicionar tais arestas, para maior conveniência. Chamaremos o circuito (s_1, s_2, t_1, t_2), formado por tais arestas, de *quadrilátero especial*.

Além disso, vamos chamar de *desenho ruim especial*, um desenho ruim que contém o quadrilátero especial. Observe que se um grafo é um desenho ruim especial então é planar e o quadrilátero especial é uma de suas faces.

É claro que se um grafo acrescido do quadrilátero especial é um desenho ruim especial, então o grafo é um desenho ruim. Na figura 2.8, vemos o exemplo da figura 2.2 acrescido do quadrilátero especial.

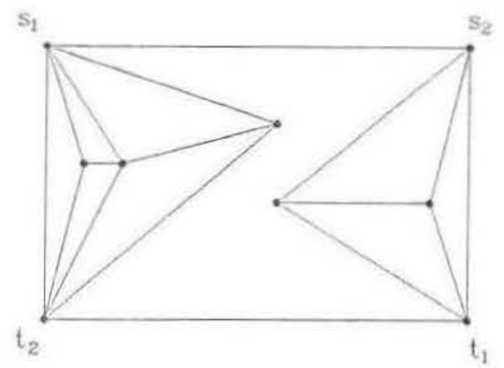

Figura 2.8: Exemplo da figura 2.2 com o quadrilátero especial.

Com estas observações, podemos enunciar um teorema equivalente ao Teorema Fundamental (teorema 2.3):

Teorema Fundamental II *Sejam G um grafo e s_1, s_2, t_1 e t_2 quatro vértices distintos de G. Se G contém o quadrilátero especial então o problema VN não tem solução se e somente se G é redutível a um desenho ruim especial.*

Para simplificar alguns detalhes técnicos, iremos demonstrar o teorema nesta nova versão.

Na seção seguinte demonstraremos dois lemas importantes e na seção subseqüente demonstraremos o Teorema Fundamental II.

2.4 Dois Lemas importantes

Os dois lemas seguintes serão utilizados em diferentes seções do restante do capítulo.

Lema 2.4 *Sejam R um redutor de G com interior maximal, I, e G' a redução imediata de G induzida por R. Se os vértices de R são dois a dois ligados pelo interior então todo redutor de G' é redutor de G, e os seus interiores em G e G' coincidem.*

Demonstração. Seja R' um redutor de G', I' seu interior.

Proposição 2.5 *Os conjuntos R e I' são disjuntos.*

Demonstração. Suponhamos que, pelo contrário, $R \cap I'$ contém um vértice, digamos, v.

Como os vértices de R são ligados dois a dois pelo interior, então, em G', tais vértices são dois a dois adjacentes. Mas, v, um vértice de R, pertence pela hipótese de absurdo a I'. Assim, $R \subseteq I' \cup R'$ e portanto R' é um redutor de G cujo interior é $I \cup I'$, uma contradição à maximalidade de I. □

Pela proposição anterior, cada vértice de I' é um vértice de $VG - R$. É fácil ver que cada vértice de G' em $VG - R$ tem o mesmo conjunto de adjacentes em G e em G'. Assim, R' é um redutor de G com interior I' e temos o resultado. □

Lema 2.6 *Seja G um desenho ruim. Cada triângulo em G é uma face ou um redutor.*

Demonstração. Seja $\{u, v, w\}$ um triângulo em G. Dado que G é um desenho ruim, todo vértice especial pertence à região externa (ilimitada) ao triângulo. Se este não for uma face, os vértices de $G - \{u, v, w\}$ que pertencem à região interna ao triângulo constituem uma parte do interior do redutor $\{u, v, w\}$. □

2.5 Demonstração do Teorema Fundamental II

Antes de iniciarmos a demonstração do Teorema Fundamental II vamos fazer um comentário a respeito dos lemas 2.4 e 2.6. Num certo sentido, o lema 2.4 indica que a ordem em que as reduções são efetuadas é irrelevante. O lema 2.6 indica

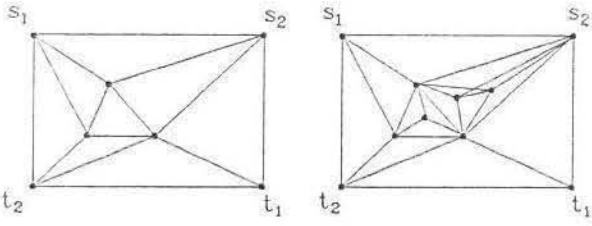

Figura 2.9: Exemplo de uma teia e a correspondente teia inicial.

que não há triângulos separadores. De fato, o enunciado do Teorema segundo a versão de Thomassen [19], por exemplo, fica claramente equivalente ao aqui apresentado, à luz dos lemas 2.4 e 2.6 (e do lema da Invariância 2.2):

Teorema 2.7 (Thomassen [19]) *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *o problema VN não tem solução e a adição de qualquer aresta resulta em solução ou*

(ii) *o grafo é uma teia.*

Uma *teia inicial* é um desenho ruim especial em que todas as faces, exceto o quadrilátero especial, são triangulares e não existem triângulos separadores. A partir de uma teia inicial obtém-se uma *teia* mediante a adição, para cada face, de um grafo completo K_r ($r \geq 0$), em que todos os seus vértices são ligados a todos os três vértices da face (veja exemplo na figura 2.9).

Feito este comentário sobre os lemas 2.4 e 2.6, passamos agora á demonstração do Teorema Fundamental II.

Teorema Fundamental II *Sejam G um grafo e s_1, s_2, t_1 e t_2 quatro vértices distintos de G. Se G contém o quadrilátero especial então o problema VN não tem solução se e somente se G é redutível a um desenho ruim especial.*

Demonstração. Por indução em $|VG| + |EG|$. Pelos lemas 2.2 (Invariância) e 2.1 (Certidão), temos que se G for redutível a um desenho ruim então não existe solução do VN. Precisamos mostrar que a recíproca vale.

Vamos supor que o VN não tem solução em G e provaremos que G é redutível a um desenho ruim especial. Sem perda de generalidade, podemos supor que G é simples.

Consideraremos inicialmente o caso em que G é redutível.

Seja H uma redução imediata de G. Pelo lema 2.2 (Invariância), segue que o VN não tem solução em H. Logo, por hipótese de indução, H é redutível a um desenho ruim especial e portanto G também o é.

Podemos então supor que o grafo G é irredutível.

Vamos considerar em seguida o caso em que $Adj(s_1) \subseteq \{s_2, t_2, t_1\}$. Como G é irredutível, então $H := G - \{s_2, t_1, t_2\}$ tem apenas uma componente. Mas s_1 é isolado em H e portanto $|VG| = 4$. Como G contém o quadrilátero especial e não tem solução, então G é o C_4, ou $K_4 - [s_2, t_2]$ ou $K_4 - [s_1, t_1]$, todos desenhos ruins especiais (figura 2.10).

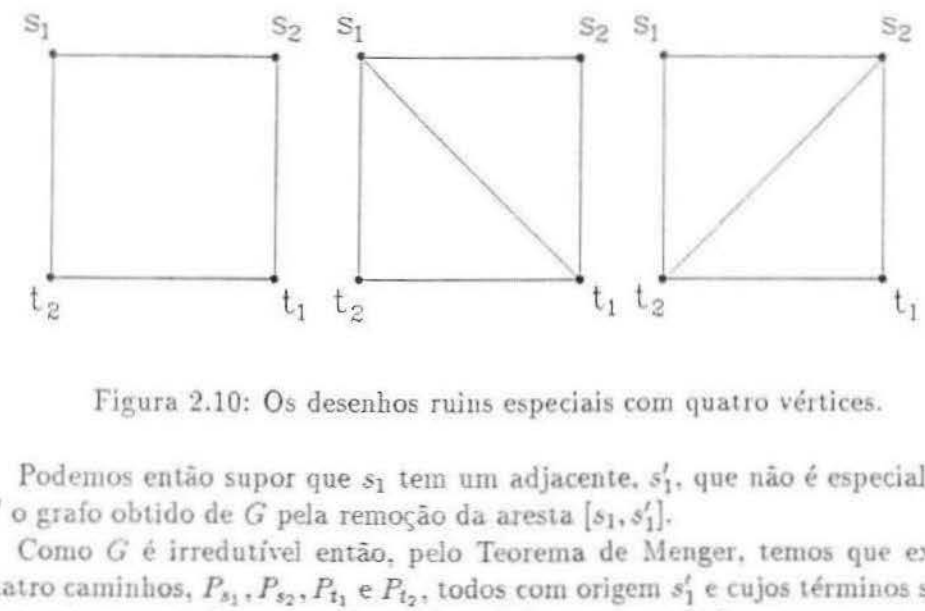

Figura 2.10: Os desenhos ruins especiais com quatro vértices.

Podemos então supor que s_1 tem um adjacente, s_1', que não é especial. Seja G' o grafo obtido de G pela remoção da aresta $[s_1, s_1']$.

Como G é irredutível então, pelo Teorema de Menger, temos que existem quatro caminhos, $P_{s_1}, P_{s_2}, P_{t_1}$ e P_{t_2}, todos com origem s_1' e cujos términos são s_1, s_2, t_1 e t_2, respectivamente, dois a dois disjuntos nos vértices, exceto na origem. É claro que podemos tomar $P_{s_1} = (s_1', s_1)$. Considere o circuito $C := P_{s_2} \circ (s_2, s_1, t_2) \circ P_{t_2}^{-1}$ (figura 2.11).

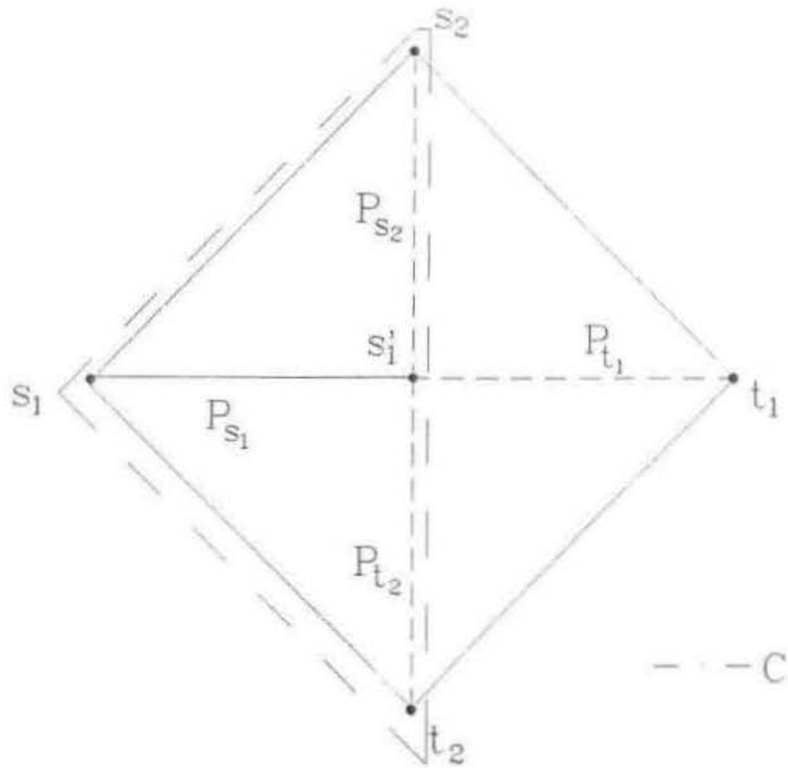

Figura 2.11: Os quatro caminhos P_{s_1}, P_{s_2}, P_{t_1} e P_{t_2} e o circuito C.

Neste ponto necessitamos da definição de ponte e da definição de cruzamentos de pontes. Dado um grafo G e um subgrafo H de G, um vértice de H é de *ligação* em G se nele incide, em G, uma aresta que não pertence a H. Uma *ponte* com relação a C é um subgrafo de G mas não de C, minimal, cujos vértices de ligação em G pertencem todos a C.

Duas pontes P_1 e P_2 de G com relação a C *cruzam* se uma das seguintes propriedades for verdadeira:

(i) quatro vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 ocorrem em C nesta ordem cíclica, v_1 e v_3 pertencem a P_1, v_2 e v_4 pertencem a P_2 ou

(ii) três vértices v_1, v_2 e v_3 de C pertencem tanto a P_1 quanto a P_2.

Sejam as pontes B_s e B_t, em relação ao circuito C, onde B_s é o grafo-aresta de vértices s_1 e s_1' e B_t é a ponte que contém t_1 (e portanto todo P_{t_1}).

A asserção do Teorema segue das seguintes afirmações:

(A) A única ponte de C que "cruza" com B_s é B_t.

(B) O grafo G' é um desenho ruim especial.

De fato, suponha que G' é um desenho ruim especial; seja R a região do plano delimitada por C e que não contém t_1 (figura 2.12).

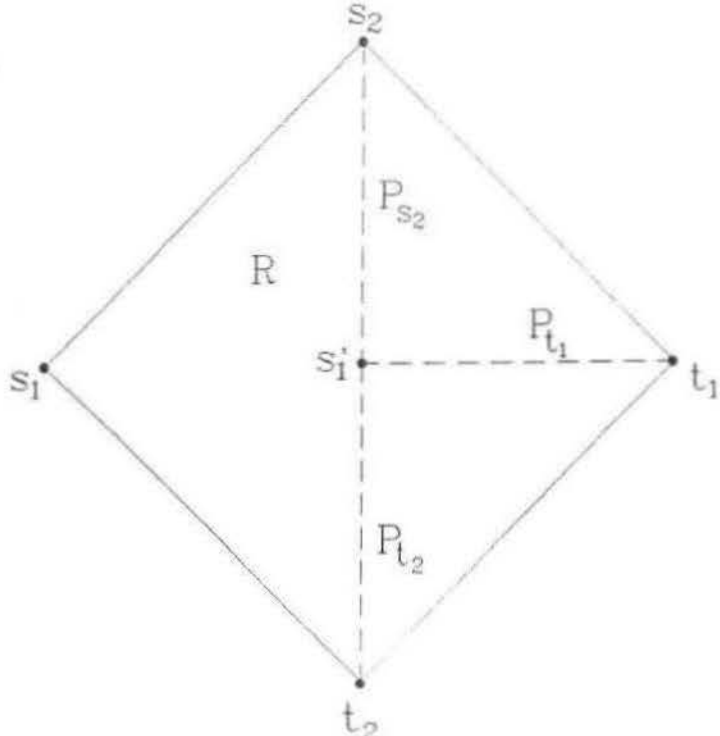

Figura 2.12: O grafo G' e a região R.

Pela afirmação (A), podemos adicionar a G' a aresta $[s_1, s_1']$ desenhando-a em R e mantendo a planaridade (Auslander e Parter [1]). Ademais, o quadrilátero especial continua uma face, pois s_1 é um de seus vértices e s_1' não é. Portanto, G é um desenho ruim especial e temos o resultado.

Resta mostrar a validade das afirmações (A) e (B).

Demonstração de (A). Suponha o contrário. Seja B uma outra ponte que cruza B_s. Então existem vértices de ligação de B em $VP_{s_2} - s_1'$ e $VP_{t_2} - s_1'$, digamos, x e y, respectivamente. Logo existe em B um caminho P de x a y (disjunto internamente de P_{s_2} e de P_{t_2}, e disjunto de P_{t_1}). Sejam P_s o trecho de $P_{s_2}^{-1}$ de s_2 a x e P_t o trecho de P_{t_2} de y a t_2, respectivamente (figura 2.13). Os caminhos $P_1 := P_{s_1}^{-1} \circ P_{t_1}$ e $P_2 := P_s \circ P \circ P_t$ formam uma solução do VN, contradição. □

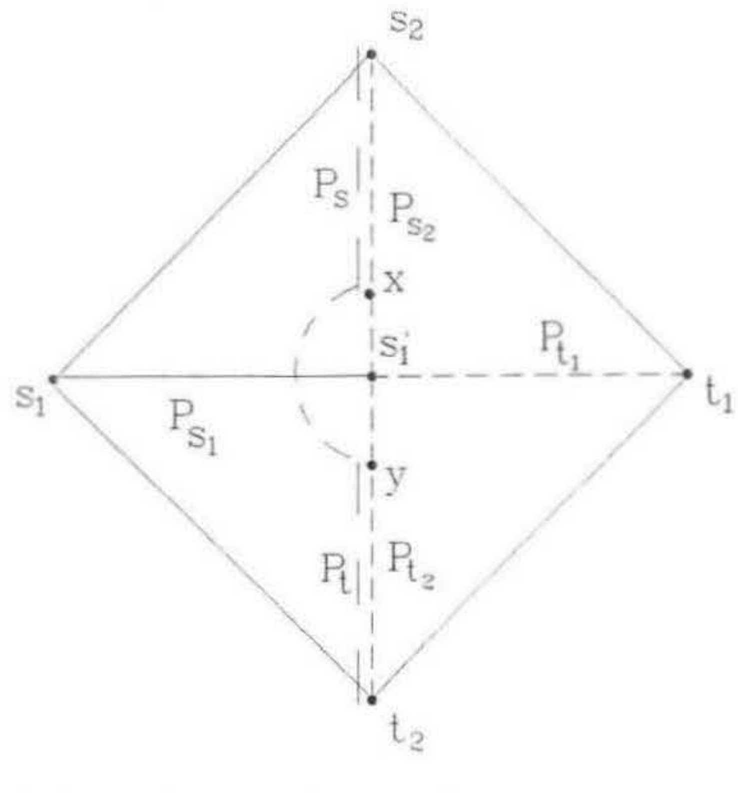

Figura 2.13: Os caminhos $P_{s_1}^{-1} \circ P_{t_1}$ e $P_s \circ P \circ P_t$ formam uma solução em G se (A) não valer.

A demonstração de (B), a seguir, completará a demonstração do Teorema Fundamental II.

Demonstração de (B). É claro que G' tem quadrilátero especial e o VN não tem solução em G'. Portanto se G' for irredutível o resultado segue por hipótese de indução.

Resta então considerar o caso em que G' é redutível.

Proposição 2.8 *Seja R' um redutor de G', I seu interior. Então $s_1 \notin R'$, $s_1' \in I$, $|R'| = 3$ e os vértices de R' são dois a dois ligados pelo interior.*

Demonstração. Seja $R := Adj_G(I) - I$. Como G é irredutível e R' é um redutor de G' temos $|R| > 3$ e $|R'| \leq 3$. Mas $R \subseteq R' \cup \{s_1\}$, com igualdade somente se $s_1 \notin R'$ e $s_1' \in I$. Assim, $s_1 \notin R'$, $s_1' \in I$ e $|R'| = 3$.

Para demonstrar que os vértices de R' são dois a dois ligados pelo interior, basta observar que P_{t_1}, P_{s_2} e P_{t_2} têm origem em I e término em t_1, s_2 e t_2, respectivamente, e portanto passam por R'. □

Seja R um redutor de G' com interior I maximal. Sejam s_2', t_2' e t_1' os vértices de R que pertencem a P_{s_2}, P_{t_2} e P_{t_1}, respectivamente (existem pois R separa s_1' de s_2, t_2 e t_1). Sejam P'_{s_2}, P'_{t_2} e P'_{t_1} os trechos de $P_{s_2}^{-1}$, P_{t_2} e P_{t_1} limitados por s_2 e s_2', t_2 e t_2' e t_1 e t_1', respectivamente (figura 2.14).

Sejam G'' a redução imediata de G' induzida por R e $\triangle R$ o triângulo de G'' gerado por R (figura 2.15).

Seja também H o subgrafo (próprio) de G gerado por $I \cup R$. Vamos considerar o VN em H com s_1', s_2', t_1' e t_2' no lugar de s_1, s_2, t_1 e t_2, respectivamente, e H acrescido do quadrilátero especial.

Para completar a demonstração do Teorema Fundamental II, iremos mostrar que G'' e H são ambos desenhos ruins especiais. De fato, se G'' é um desenho ruim especial, pelo lema 2.6, $\triangle R$ é uma face de G''. Assim se subdividirmos a aresta $[s_2', t_2']$ do triângulo, adicionando o vértice s_1', e então "grudarmos" o desenho ruim especial H no interior do quadrilátero obtido, conseguimos um supergrafo de G', planar e com o quadrilátero especial uma de suas faces (figura 2.16). Logo G' é um desenho ruim especial.

O restante desta seção será dedicado à demonstração de que G'' e H são desenhos ruins especiais. Iremos demonstrar aplicando a hipótese de indução para os grafos G'' e H.

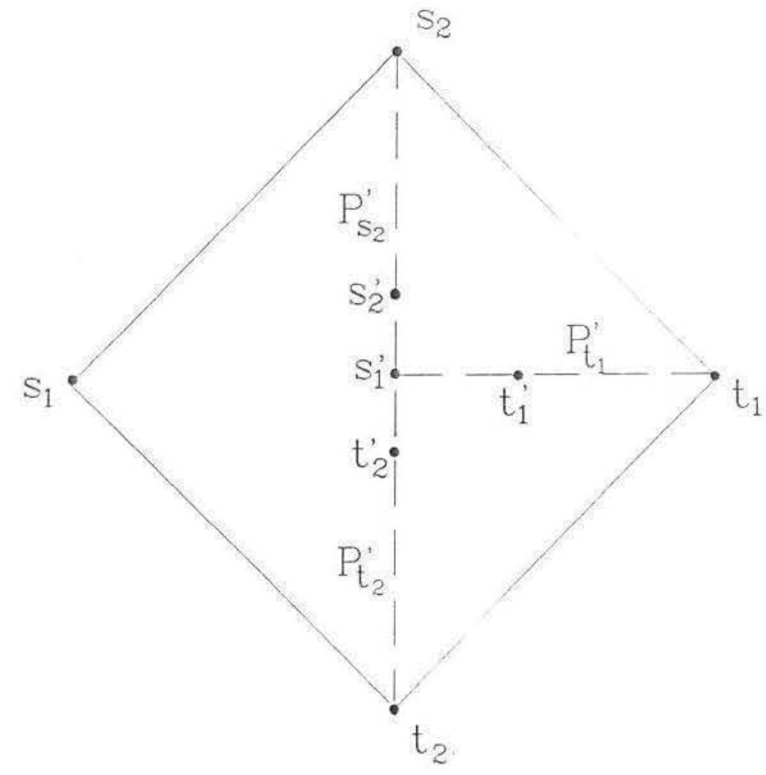

Figura 2.14: O grafo G' e seu redutor $R := \{s'_2, t'_1, t'_2\}$.

Proposição 2.9 *O grafo G'' é um desenho ruim especial.*

Demonstração. O grafo G'' tem quadrilátero especial e o VN não tem solução, pois G'' é redução imediata de G'.

Ademais, o grafo G'' é irredutível, pois pelo lema 2.4, todo redutor de G'' é redutor de G' e com mesmo interior, que pelo lema 2.8, contém s'_1, um vértice que não pertence a G''.

Portanto, por indução, G'' é um desenho ruim especial. □

Proposição 2.10 *O grafo H é um desenho ruim especial.*

Demonstração. A irredutibilidade de H segue imediatamente do fato que G é irredutível e que os vértices do problema VN de ligação de H, em G, são os vértices especiais do VN em H.

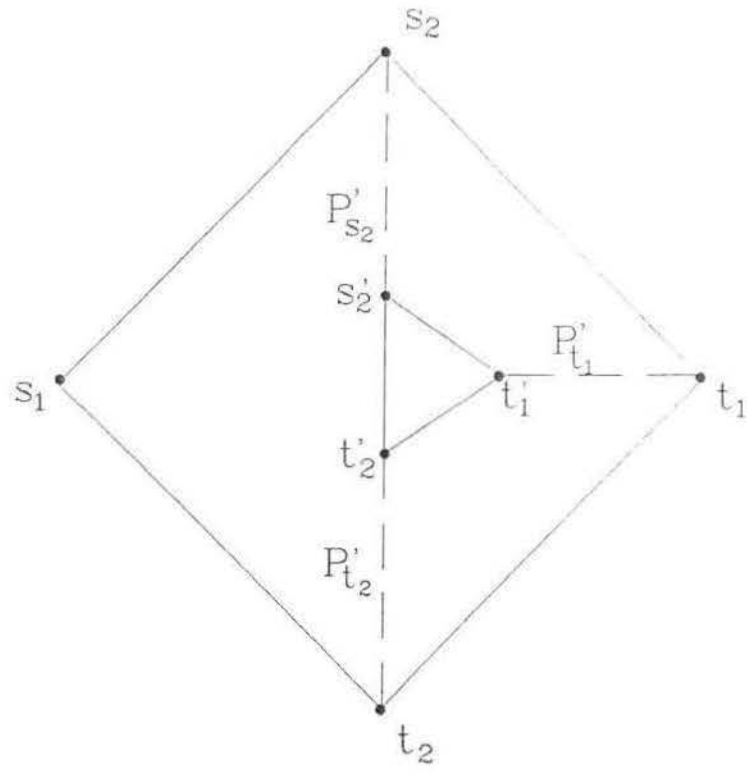

Figura 2.15: A redução imediata G'' de G' induzida por $R := \{s'_2, t'_1, t'_2\}$ e o triângulo $\triangle R$.

Para provar que não há solução, suponha o contrário. Seja (Q_1, Q_2) uma solução. Então $P_1 := P_{s_1} \circ Q_1 \circ P'_{t_1}$ e $P_2 := P'_{s_2} \circ Q_2 \circ P'_{t_2}$ formam uma solução do VN em G, uma contradição.

De fato, H é irredutível e sem solução. Aplicando a hipótese de indução em H temos o resultado. □

Terminamos assim a demonstração da afirmação (B) e conseqüentemente a do Teorema Fundamental II. □ □

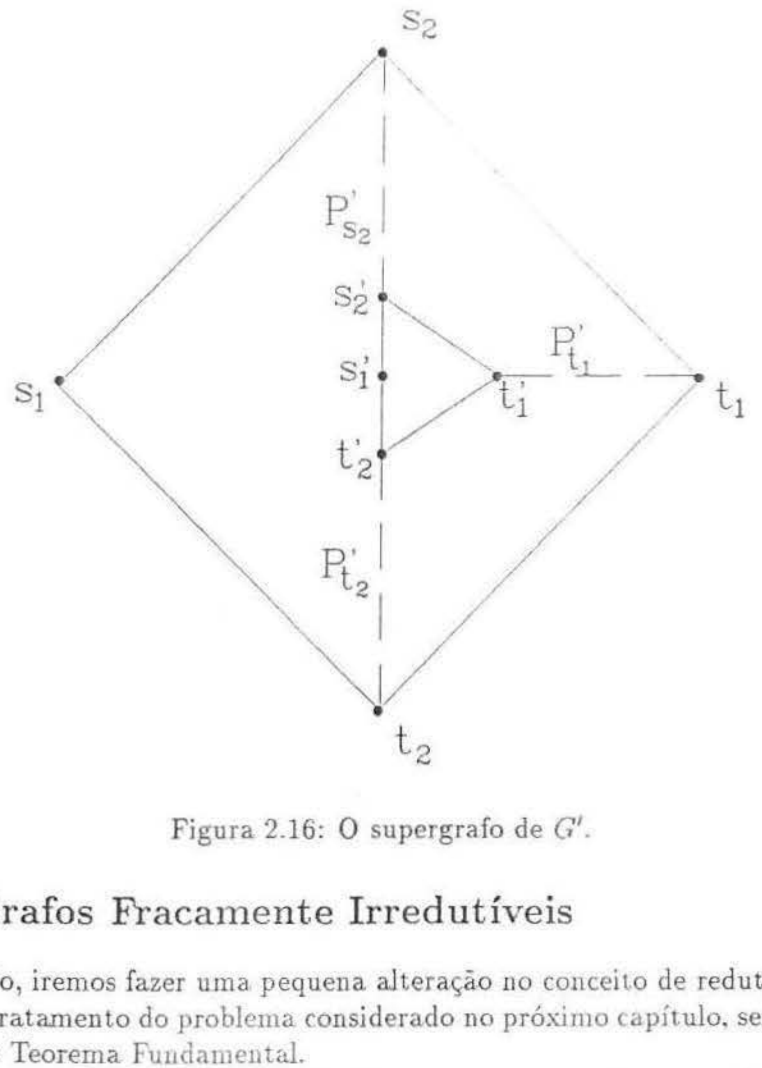

Figura 2.16: O supergrafo de G'.

2.6 Grafos Fracamente Irredutíveis

Nesta seção, iremos fazer uma pequena alteração no conceito de redutor, que facilitará o tratamento do problema considerado no próximo capítulo, sem contudo invalidar o Teorema Fundamental.

Seja v um vértice não especial de G com grau menor do que ou igual a três. Observemos que $R := Adj(v)$ é um redutor de G. Veremos nesta seção que se o interior de R consiste unicamente do vértice v então a redução induzida por R é desnecessária para se obter um grafo planar.

Dizemos que um grafo G é *fracamente irredutível* se os únicos redutores de G têm interior unitário.

É claro que se G é irredutível então G é fracamente irredutível.

Teorema 2.11 *Seja G um grafo fracamente irredutível. Se G é redutível a um desenho ruim então G é um desenho ruim.*

Demonstração. Seja então $G := K_0, K_1, \ldots, K_r := K$ $(r \geq 0)$ uma seqüência de reduções imediatas que leva G a um desenho ruim K. Vamos demonstrar por indução em r que G é um desenho ruim.

Seja R o redutor de G, que induz a redução K_1, I seu interior. Como G é fracamente irredutível, então I consiste de um único vértice, digamos, v. Sem perda de generalidade, podemos supor que $R = Adj(v)$; de fato, $Adj(v) \subseteq R$ e se tomarmos $Adj(v)$ no lugar de R a redução obtida será o próprio K_1. Assim, os vértices de R são dois a dois ligados pelo interior. Ademais, o interior I é maximal, pois caso contrário G não seria fracamente irredutível. Pelo lema 2.4, todo redutor de K_1 é redutor de G, e com o mesmo interior. Assim, K_1 é fracamente irredutível. Por indução, K_1 é um desenho ruim.

Se $|R| \leq 2$ temos trivialmente que G é um desenho ruim. Podemos supor então que $|R| = 3$. Seja $\triangle R$ o triângulo em K_1 obtido pela redução de R.

Observe que R não mais é redutor de K_1. Pelo lema 2.6, temos que $\triangle R$ é uma face de K_1. Podemos portanto adicionar a K_1 o vértice v, ligando-o aos vértices de R, obtendo assim um supergrafo L de G que é um desenho ruim. Ora G pode ser obtido de L pela remoção de arestas. Logo G é um desenho ruim. A demonstração do teorema está completa. □

Nas figuras 2.17 e 2.18, temos um exemplo de um grafo G fracamente irredutivel, sua redução H e o seu supergrafo L obtido através do processo descrito acima.

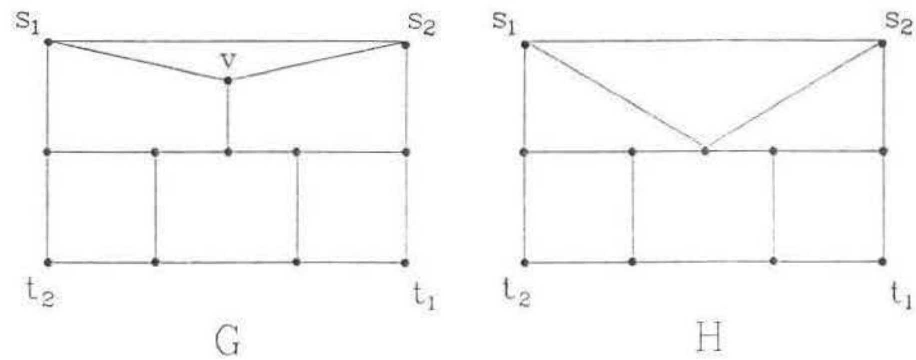

Figura 2.17: O grafo fracamente irredutível G e sua redução imediata H.

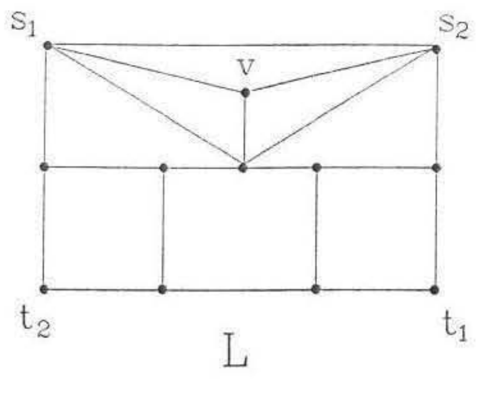

Figura 2.18: O supergrafo L de G.

Capítulo 3

Grafos não Orientados Disjunção nas Arestas

Sejam G um grafo não orientado e s_1, s_2, t_1 e t_2 vértices de G, não necessariamente distintos. O *Problema dos Dois Caminhos Disjuntos nas Arestas (AN)* consiste em encontrar dois caminhos, disjuntos nas arestas, ligando s_1 a t_1 e s_2 a t_2, respectivamente.

Usaremos somente o termo *grafo* para grafo não orientado e diremos simplesmente que G *tem solução* caso o AN tenha solução em G. Além disso, chamaremos os vértices s_1, s_2, t_1 e t_2 de vértices *especiais*.

Obviamente, podemos reduzir este problema ao VN da seguinte maneira: adicionamos ao grafo G quatro novos vértices, distintos dois a dois, s'_1, s'_2, t'_1, t'_2 e unimos s_1 a s'_1, s_2 a s'_2, t_1 a t'_1 e t_2 a t'_2 por novas arestas, obtendo o grafo G'. Em seguida, consideramos H o grafo das arestas ("*line graph*") de G', chamando de s_1, s_2, t_1 e t_2 os vértices de H que correspondem às arestas novas de G', respectivamente. É claro que o AN de G tem solução se e somente se o VN de H tem solução.

Apresentaremos aqui uma outra solução do problema.

Consideraremos inicialmente alguns casos triviais, em que a existência ou não de solução é imediata.

Se os vértices s_1 e t_1 pertencem a componentes distintas de G, o problema obviamente não tem solução. Assim, podemos supor que s_1 e t_1 pertencem à mesma componente, H_1, de G. Analogamente, suporemos que s_2 e t_2 pertencem a uma mesma componente, H_2, de G.

Se $H_1 \neq H_2$ então o problema obviamente tem solução. Podemos portanto supor que os quatro vértices especiais pertencem à mesma componente de G.

Evidentemente, podemos então supor que G é conexo.

Neste capítulo, resolvemos este problema dando uma caracterização dos grafos conexos em que o AN não tem solução. Tal caracterização é devida a Seymour [15].

3.1 Desenho Ruim

Um grafo G é um *desenho ruim* (AN) se G é um desenho ruim VN, os vértices especiais têm no máximo grau 2 e os demais vértices têm no máximo grau 3.

Consideraremos também como desenho ruim o grafo com dois vértices em que $s_1 = s_2, t_1 = t_2$ (ou $s_1 = t_2, t_1 = s_2$), e uma única aresta ligando os dois vértices; denominaremos este desenho ruim de *trivial*. Na figura 3.1 vemos exemplos de desenhos ruins.

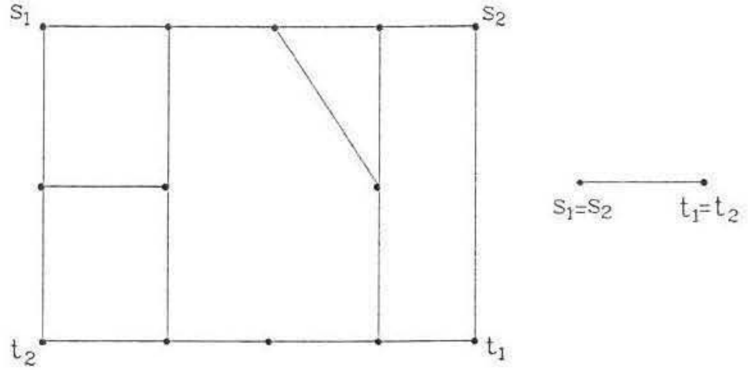

Figura 3.1: Exemplos de Desenhos Ruins.

Lema 3.1 (Certidão) *Se G é um desenho ruim então o AN não tem solução.*

Demonstração. Se G for o desenho ruim trivial, obviamente a afirmação é verdadeira. Suporemos então que $G \neq K_2$.

Vamos supor, por absurdo, que exista solução, (P_1, P_2). Como s_1, s_2, t_1 e t_2 têm no máximo grau 2 (e são distintos) então P_1 não passa nem por s_2 nem por t_2 e P_2 não passa nem por s_1 nem por t_1. Logo P_1 e P_2 "cruzam". Mas G é planar e portanto P_1 e P_2 têm um vértice comum v, não especial, contradição, pois v tem no máximo grau 3. □

3.2 Contrações

A *contração de uma aresta* e consiste na sua remoção e identificação dos seus extremos.

Uma *contração de um grafo* G é um grafo obtido a partir de G pela contração de um conjunto de suas arestas. Denotaremos G/Z o grafo obtido a partir de G pela contração do conjunto de arestas Z.

Lema 3.2 *Se G tem solução, então toda contração de G tem solução.*

Demonstração. Seja $G' := G/Z$ uma contração de G.

Sejam P_1 e P_2 os caminhos em G que formam a solução. É fácil ver que obtemos, a partir de P_1 e P_2, passeios P_1' e P_2' em G', disjuntos nas arestas, simplesmente omitindo em P_1 e em P_2 as arestas que pertencem a Z. Portanto G' admite solução (veja o exemplo na figura 3.2). □

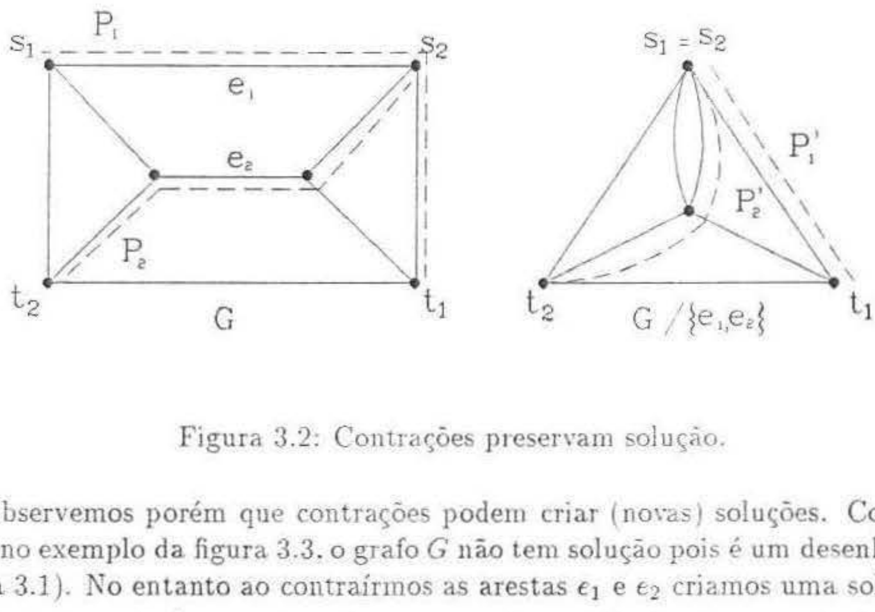

Figura 3.2: Contrações preservam solução.

Observemos porém que contrações podem criar (novas) soluções. Como vemos, no exemplo da figura 3.3, o grafo G não tem solução pois é um desenho ruim (lema 3.1). No entanto ao contraírmos as arestas e_1 e e_2 criamos uma solução.

Portanto, o interessante seria que quando o AN não tivesse solução em G conseguíssemos obter contrações que nos levassem a um desenho ruim, ou seja, que tais contrações não "criassem" soluções. Veremos na próxima seção que existem certos conjuntos que ao serem contraídos preservam a existência e a não existência de soluções. Na seção subseqüente o problema será resolvido com a demonstração do seguinte teorema:

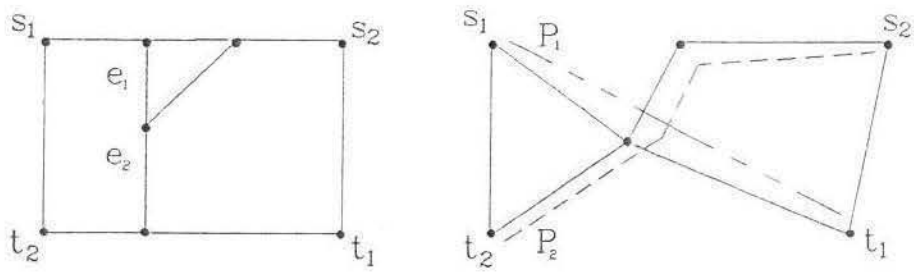

Figura 3.3: Contrações criam solução.

Teorema Fundamental *Sejam G um grafo conexo e s_1, s_2, t_1 e t_2 quatro vértices de G, não necessariamente distintos. O AN não tem solução se e somente se G pode ser contraído a um desenho ruim.*

3.3 Conjuntos Fracamente Ligados

Para $Z \subseteq VG$ vamos denotar o número de vértices especiais em Z por $\alpha(Z)$, isto é, $\alpha(Z)$ conta o número de vértices especiais em Z levando em conta suas multiplicidades. Assim, $\alpha(Z) := |\{s_1\} \cap Z| + |\{s_2\} \cap Z| + |\{t_1\} \cap Z| + |\{t_2\} \cap Z|$.

Vamos definir $\beta(Z)$, o *grau de ligação* de Z em G, da seguinte maneira:
$\beta(Z) := |\delta(Z)| + \alpha(Z)$.

Dizemos que $\emptyset \subset Z \subset VG$ é um *conjunto fracamente ligado em G* se o grau de ligação de Z é menor do que ou igual a 3 e $EG[Z]$ não vazio.

Dizemos que G é *forte* se G for livre de conjuntos fracamente ligados.

Lema 3.3 *Seja X um conjunto fracamente ligado em G. Se G não tem solução então a contração $G' := G/EG[X]$ também não tem solução.*

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que existe solução em G'. Sejam P_1' e P_2' caminhos, em G', ligando s_1 a t_1 e s_2 a t_2, respectivamente.

É fácil ver que podemos estender P_1' e P_2' a caminhos P_1 e P_2 em G, de s_1 a t_1 e de s_2 a t_2, respectivamente, e tais que $aP_1 \cap aP_2 \subseteq EG[X]$. Como G não tem solução, então os caminhos P_1 e P_2 não são disjuntos nas arestas e portanto ambos passam por arestas de $EG[X]$.

O caminho P_1 passa por pelo menos uma aresta de $\delta(X)$, se apenas um entre s_1 e t_1 pertence a $\overline{X}$; o caminho P_1 passa por pelo menos duas arestas de $\delta(X)$ se s_1 e t_1 pertencem, ambos, a $\overline{X}$. Assim,

$|\delta(X) \cap aP_1| + |\{s_1\} \cap X| + |\{t_1\} \cap X| \geq 2.$

Analogamente,

$|\delta(X) \cap aP_2| + |\{s_2\} \cap X| + |\{t_2\} \cap X| \geq 2.$

Como os dois caminhos são disjuntos nas arestas não pertencentes a $EG[X]$, então, somando as duas desigualdades, temos que $\beta(X) = |\delta(X)| + \alpha(X) \geq 4$, contradição. □

A seguir, demonstraremos uma propriedade importante de um grafo forte e sem solução, que será usada na seção seguinte, onde demonstraremos o Teorema Fundamental.

Proposição 3.4 *Se G é forte e sem solução, então $\beta(v) \leq 3$ para todo vértice v de G.*

Demonstração. Se existem quatro caminhos, dois a dois disjuntos nas arestas, unindo v a s_1, s_2, t_1 e t_2, respectivamente, então o AN tem solução (basta compor os caminhos de s_1 a v e v a t_1, e os de s_2 a v e v a t_2), contradição.

Sabemos então que os quatro caminhos não existem. Pelo Teorema de Menger, temos que $\exists X \subseteq VG$, $v \in X$, tal que $|\delta(X)| < \alpha(\overline{X})$. Portanto,

$$\beta(X) = |\delta(X)| + \alpha(X) < \alpha(\overline{X}) + \alpha(X) = 4.$$

Assim, $\beta(X) \leq 3$.

Como G é forte, segue que $EG[X]$ é vazio. Portanto, $\beta(v) \leq \beta(X) \leq 3$. □

3.4 O Teorema

Teorema Fundamental *Sejam G um grafo conexo e s_1, s_2, t_1 e t_2 quatro vértices de G, não necessariamente distintos. O AN não tem solução se e somente se G pode ser contraído a um desenho ruim.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que G possa ser contraído a um desenho ruim, G'. Pelo lema 3.1, G' não tem solução. Pelo lema 3.2, G também não tem solução. Assim, se G pode ser contraído a um desenho ruim então G não tem solução.

Resta mostrar que a recíproca vale. Suponhamos que G não tem solução. Vamos demonstrar por indução, que G pode ser contraído a um desenho ruim.

Vamos inicialmente considerar o caso em que G contém um conjunto X fracamente ligado. Seja $G' := G/EG[X]$. Pelo lema 3.3, G' não tem solução. Por indução, G' pode ser contraído a um desenho ruim, e portanto G também.

Podemos então supor que G é forte.

Veremos na proposição seguinte, que se os vértices especiais não são dois a dois distintos, então G é o desenho ruim trivial.

Proposição 3.5 *Se G é forte, sem solução e os quatro vértices especiais não são distintos dois a dois, então G é um desenho ruim trivial.*

Demonstração. Suponhamos que s_1 coincide com algum outro vértice especial. Se $s_1 = t_1$ então, pela conexidade de G, o AN tem solução, contradição. Logo, $s_1 \neq t_1$ e portanto $s_1 \in \{s_2, t_2\}$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $s_1 = s_2$. Pela conexidade de G, $\delta(s_1) \neq \emptyset$ pois $s_1 \neq t_1$. Mas $s_1 = s_2$ e portanto $\beta(s_1) \geq 3$. Pela proposição 3.4, temos que $\beta(s_1) = 3$; logo, o conjunto $\delta(s_1)$ é unitário e $s_1 \neq t_2$. Portanto, $\beta(\overline{s_1}) = 3$. Como G é forte, $G[\overline{s_1}]$ é sem arestas. Pela conexidade de G, $G(\overline{s_1})$ é um grafo vértice. Assim, G é um desenho ruim trivial, com $s_1 = s_2$ e $t_1 = t_2$. □

Podemos então supor que os vértices especiais são dois a dois distintos. Ademais, pela proposição 3.4 temos que o grau dos vértices especiais é no máximo dois e dos demais vértices é no máximo três. Para completar a demonstração, basta então mostrar que G é um desenho ruim VN.

É evidente que o VN não tem solução em G, pois uma solução disjunta nos vértices é disjunta nas arestas. Portanto pelo Teorema Fundamental do capítulo anterior (teorema 2.3), temos que G pode ser reduzido a um desenho ruim VN. Veremos na proposição seguinte que G é fracamente irredutível VN e conseqüentemente, que G é um desenho ruim VN (teorema 2.11). Assim G é um desenho ruim (AN).

Proposição 3.6 *Se G é forte, sem solução e os quatro vértices especiais são dois a dois distintos, então G é fracamente irredutível VN.*

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que G não é fracamente irredutível. Dentre os redutores de interior não unitário, escolha um, R, cujo interior I seja maximal. Seja R' o conjunto dos vértices de R que são adjacentes a pelo menos dois vértices de I.

Vamos inicialmente mostrar que todos os vértices de R' são especiais. Seja v um vértice não especial de R'. Como v é adjacente a pelo menos dois vértices de I e $\beta(v) \leq 3$ (proposição 3.4), temos que o conjunto $R - \{v\} \cup (Adj(v) - I)$ é um redutor, com interior contendo $I \cup \{v\}$, contradizendo a maximalidade de I. De fato, R' é constituído somente de especias.

Iremos em seguida mostrar que R' é vazio. De fato, como os vértices de R' são todos especiais e $\beta(v) \leq 3 \forall v \in VG$, então todos os adjacentes de R' pertencem a I. Logo, $|\delta(I \cup R')| \leq |R - R'|$ e $\alpha(I \cup R') = |R'|$, portanto $\beta(I \cup R') \leq |R| \leq 3$. Como G é forte então $EG[I \cup R']$ é vazio. Conseqüentemente, R' é vazio.

Se R' é vazio temos que todos os vértices de R têm no máximo um adjacente em I. Assim, $\beta(I) = |\delta(I)| \leq |R| \leq 3$. Como G é forte, temos $EG[I] = \emptyset$. Mas I é não unitário e G é conexo; conseqüentemente existe um vértice v em I com grau 1. Tome $I' := \{v\} \cup Adj(v)$. É claro que $\beta(I') \leq 2$ e $EG[I'] \neq \emptyset$. Logo I' é fracamente ligado em G, contradição. De fato, G é fracamente irredutível VN. □

Terminamos assim a demonstração do Teorema Fundamental. □

Capítulo 4

Grafos Orientados Acíclicos Disjunção nos Vértices

Neste capítulo vamos estudar um problema análogo ao Problema dos Dois Caminhos Disjuntos nos Vértices (VN) (capítulo 2), para grafos orientados.

Sejam D um grafo orientado e s_1, s_2, t_1 e t_2 vértices de D, dois a dois distintos. O *Problema dos Dois Caminhos Orientados Disjuntos nos Vértices (VO)* consiste em encontrar dois caminhos orientados e disjuntos, de s_1 a t_1 e de s_2 a t_2, respectivamente. Diremos simplesmente que D *tem solução* caso o VO tenha solução em D e chamaremos os vértices s_1, s_2, t_1 e t_2 de *vértices especiais*.

Como vimos no capítulo 1, o VO é NP-completo para grafos em geral. No entanto, neste capítulo, nós resolvemos este problema para grafos acíclicos, reduzindo-o, a menos de casos particulares, ao problema VN, o que permitirá "desprezar" a orientação das arestas. Deste modo, conseguiremos uma caracterização dos grafos acíclicos em que o VO não tem solução.

A caracterização é devida a Thomassen [20], que apresentou uma demonstração direta, sem redução ao caso não orientado: esta demonstração contém erros mas apresenta como corolário o fato de que se pode "desprezar" a orientação das arestas em certas condições. No artigo o próprio Thomassen menciona que outro caminho possível seria o de provar diretamente a propriedade da remoção de orientações e a conseqüente redução ao VN. Convém mencionar também o trabalho de Shiloach [17], que apresenta um algoritmo polinomial para resolver o problema sem apresentar contudo uma caracterização.

A demonstração aqui apresentada é original.

Consideraremos inicialmente algumas operações ou verificações triviais, em que podemos reduzir o nosso problema à classe dos grafos normais. O grafo D é *normal* se, além de acíclico, tiver somente s_1 e s_2 como fontes e somente t_1 e t_2 como sorvedouros.

Observe que arestas que entram em s_1 em nada contribuem para a solução do problema e portanto podem ser removidas. Podemos então supor que s_1 é fonte. Analogamente, podemos supor que s_2 é fonte e que t_1 e t_2 são sorvedouros.

Por outro lado, se s_1 for sorvedouro é claro que o VO não tem solução. Assim, podemos supor que s_1 não é sorvedouro. Analogamente, podemos supor que s_2 não é sorvedouro e que t_1 e t_2 não são fontes.

Além disso, se um vértice não especial é fonte (ou sorvedouro), obviamente, podemos removê-lo do grafo, mantendo a invariância da existência de solução.

Podemos então supor que s_1 e s_2 são as únicas fontes de D e que t_1 e t_2 são os únicos sorvedouros de D. Ou seja, podemos supor que D é normal.

Neste capítulo, resolvemos este problema dando uma caracterização dos grafos normais em que o VO não tem solução.

4.1 Reduções

Para Z uma parte de VD, vamos denotar por $\alpha^+(Z)$ o conjunto de vértices de $\{s_1, s_2\}$ que pertencem a Z e por $\alpha^-(Z)$ o conjunto de vértices de $\{t_1, t_2\}$ que pertencem a Z.

Vamos definir o *conjunto de ligação para fora* $\beta^+(Z)$ *de* Z por $\beta^+(Z) := W^+(Z) \cup \alpha^-(Z)$. Analogamente, definimos o *conjunto de ligação para dentro* $\beta^-(Z)$ *de* Z por $\beta^-(Z) := W^-(Z) \cup \alpha^+(Z)$.

Proposição 4.1 *Se D é normal então, para toda parte não vazia, Z, de D, $D[Z]$ é acíclico e o conjunto de sorvedouros de $D[Z]$ é uma parte não vazia de $\beta^+(Z)$.*

Demonstração. O subgrafo $D[Z]$ de D é orientado, acíclico e não vazio. Logo, $D[Z]$ contém pelo menos um sorvedouro. Além disso, todo sorvedouro de $D[Z] \in \beta^+(Z)$, pois t_1 e t_2 são os únicos sorvedouros de D. □

Um conjunto Z de vértices é um redutor de D *para fora* se $\{s_1, s_2\} \cap Z = \emptyset$, $|Z| \geq 2$ e $|\beta^+(Z)| = 1$. Analogamente, um conjunto Z de vértices é um redutor de D *para dentro* se $\{t_1, t_2\} \cap Z = \emptyset$, $|Z| \geq 2$ e $|\beta^-(Z)| = 1$.

A figura 4.1 ilustra um exemplo de um redutor para fora.

Dizemos que o conjunto Z é um *redutor* se Z é um redutor para dentro ou um redutor para fora. O grafo D é *irredutível* se D é livre de redutores.

Dado um redutor Z, a *redução imediata* de D (*induzida* por Z) é o grafo H obtido, a partir de D, pela contração das arestas de $D[Z]$.

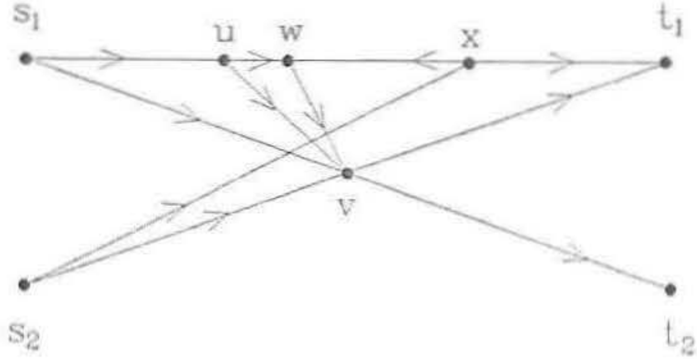

Figura 4.1: O redutor para fora $\{u, v, w\}$.

É importante ressaltar que Z contém no máximo um vértice especial. Assim, s_1, s_2, t_1 e t_2 continuam a ser quatro vértices em H, distintos dois a dois.

Na figura 4.2, temos a redução imediata do grafo da figura 4.1 induzida por $\{u, v, w\}$. Note que nesta definição de redutor, ao contrário do capítulo 2, todo o conjunto a ser reduzido é o redutor.

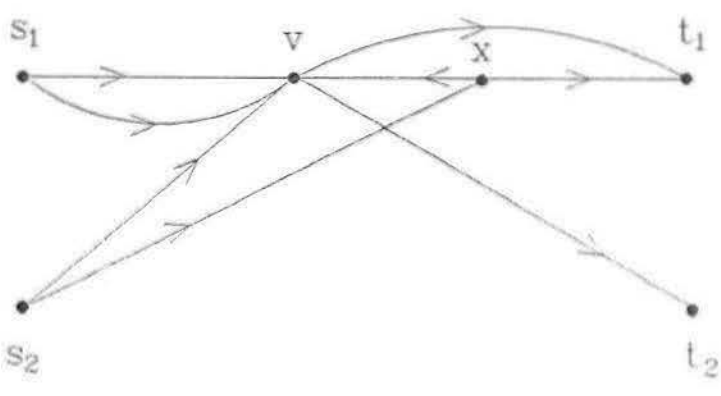

Figura 4.2: Redução imediata do grafo da figura 4.1 (induzida por $\{u, v, w\}$).

Veremos, na proposição a seguir, uma propriedade importante de redutores, que nos permitirá mostrar que a redução imediata de um grafo normal também é normal.

Proposição 4.2 *Se D é normal e Z é um redutor para fora, então $D[Z]$ é conexo. Ademais, para todo vértice v' em Z existe em $D[Z]$ um caminho orientado de v' ao único vértice de $\beta^+(Z)$.*

Demonstração. Pela proposição 4.1, $D[Z]$ é um grafo acíclico e o único vértice de $\beta^+(Z)$ é seu único sorvedouro; conseqüentemente temos o resultado. □

Lema 4.3 (Normalidade) *Seja D normal. Toda redução imediata de D é normal.*

Demonstração. Seja H uma redução imediata de D, induzida por Z. Podemos supor, sem perda de generalidade, que Z é um redutor para fora.

Pela proposição 4.2, $D[Z]$ é conexo e portanto o conjunto Z é substituído em H por um único vértice, digamos v_0, que identificaremos com o vértice de $\beta^+(Z)$.

Para provar que H é acíclico, suponhamos, por absurdo, que H tem um ciclo C. Seja α a aresta de C que, em H, entra em v_0 e seja v' o vértice que é a cabeça, em D, da aresta α. Pela proposição 4.2, temos que existe um caminho orientado P de v' a v_0. Logo, C pode ser estendido a um ciclo em D, contradição.

Para continuarmos a demonstração da normalidade de H, observemos que um vértice $v \notin Z$ é uma fonte (sorvedouro) em D se e somente se v é fonte (sorvedouro) em H.

Assim, os vértices de $\{s_1, s_2\}$, um conjunto disjunto de Z, são as únicas fontes de H em $VH - v_0$. Além disso, os vértices de $\{t_1, t_2\} - Z$ são os únicos sorvedouros de H em $VH - v_0$.

Para completar a demonstração da normalidade de Z resta portanto mostrar que (i) v_0 não é fonte em H e que (ii) v_0 é sorvedouro em H se e somente se $v_0 \in \{t_1, t_2\}$.

Para provar que v_0 não é fonte em H, suponhamos o contrário. Nesse caso $W^-(Z) = \emptyset$, o que implica que Z contém uma fonte de D, em contradição à disjunção de $\{s_1, s_2\}$ e Z.

Para provar que v_0 é sorvedouro em H se e somente se $v_0 \in \{t_1, t_2\}$, observemos que v_0 é sorvedouro em H se e somente se $W^+(Z) = \emptyset$, o que equivale dizer que v_0, o único vértice de $\beta^+(Z)$, pertence a $\{t_1, t_2\}$. De fato, H é normal. □

Dada uma seqüência $H_0 := D, H_1, \ldots, H_r := K$ com $r \geq 0$ e tal que cada H_i é uma redução imediata de H_{i-1} $(1 \leq i \leq r)$, dizemos que K é uma *redução* de D e que D é *redutível* a K.

Lema 4.4 (Invariância da solução com redução) *O grafo D, normal, admite solução se e somente se toda redução de D admite solução.*

Demonstração. Seja H uma redução de D. Por indução, podemos obviamente supor que H é uma redução imediata de D; seja Z o redutor que induz essa redução. Podemos supor, sem perda de generalidade, que Z é um redutor para fora.

Pela proposição 4.2, $D[Z]$ é conexo e portanto o conjunto Z pode ser substituído em H por um único vértice, digamos v_0, que identificaremos com o vértice de $\beta^+(Z)$.

$\Longrightarrow$ (Redução não destrói solução.)

Suponhamos que D tem solução, (P_1, P_2); vamos provar que H também tem solução.

Como $\beta^+(Z)$ é unitário, então apenas um dos caminhos da solução em D pode passar por vértices de Z. Suponhamos, sem perda de generalidade, que P_2 não passa por vértices de Z e é, portanto, um caminho em H. Se P_1 for também um caminho em H, então (P_1, P_2) é uma solução de H. Podemos portanto supor que P_1 passa por vértices de Z.

Vamos definir P_1', um caminho em H, a partir do caminho P_1, omitindo-se as arestas pertencentes a $D[Z]$ e identificando os seus extremos.

É claro que o novo par (P_1', P_2) forma uma solução do VO para H e segue o resultado.

$\Longleftarrow$ (Redução não cria solução.)

Suponhamos que H tem solução, (P_1, P_2); vamos provar que D tem solução. Basta verificarmos o caso em que um dos caminhos usa o vértice v_0, digamos, P_1.

Seja α a aresta de P_1 que, em H, entra em v_0 e seja v' o vértice que é a cabeça, em D, da aresta α. Pela proposição 4.2, temos que existe um caminho orientado, P, em $D[Z]$, de v' a v_0. Assim, o caminho P_1', em D, de s_1 a t_1, obtido a partir do caminho P_1, substituindo-se o vértice v_0 pelo caminho P, é orientado e disjunto de P_2. O resultado segue com o par (P_1', P_2). □

Veremos a seguir uma propriedade importante dos grafos irredutíveis, que chamaremos de *propriedade* X.

Proposição 4.5 (Propriedade X) *Para todo vértice v, não especial, de um grafo normal e irredutível D, temos que existem dois caminhos orientados com origem v e término t_1 e t_2, respectivamente, e disjuntos exceto no vértice v.*

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que não existam os dois caminhos. Pelo Teorema de Menger, existe um conjunto X de vértices tal que

$$|W^+(X)| < |\bar{X} \cap \{t_1, t_2\}| \text{ e } v \in X - W^+(X). \tag{4.1}$$

Como s_1 e s_2 são fontes podemos supor que nenhum deles pertence a X (removendo-os de X, se necessário).

Somando $|X \cap \{t_1, t_2\}|$ a ambos os lados da desigualdade (4.1) obtemos

$$|\beta^+(X)| = |W^+(X)| + |X \cap \{t_1, t_2\}| \leq 1. \tag{4.2}$$

O vértice $v \in X$ e portanto $X \neq \emptyset$. Pela proposição 4.1, $\beta^+(X) \neq \emptyset$, logo vale a igualdade em (4.2). Mas $v \notin W^+(X) \cup \{t_1, t_2\}$. Logo, $|X| \geq 2$ e portanto X é um redutor, contradizendo a irredutibilidade de D. □

Com estas definições podemos caracterizar os grafos que não admitem solução:

Teorema 4.6 (Teorema Fundamental) *Seja D um grafo normal. O problema VO não tem solução se e somente se D é redutível a um desenho ruim (VN).*

Observe que a definição de desenho ruim aqui utilizada é aquela dada no capítulo 2 (VN). A figura 4.3 apresenta um grafo normal, sem solução e irredutível, e portanto um desenho ruim (VN).

Veremos na seção seguinte que se um grafo D é irredutível então podemos ignorar a orientação das arestas, ou seja, o seguinte resultado é verdadeiro:

Teorema da Irrelevância da Orientação *Se D é normal e irredutível então o VO tem solução se e somente se o VN tem solução.*

Considerando válido o teorema anterior podemos então demonstrar o Teorema Fundamental.

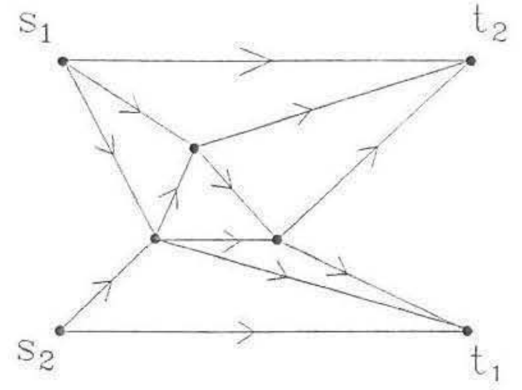

Figura 4.3: Um grafo normal, sem solução e irredutível.

Demonstração do Teorema Fundamental.. Suponhamos inicialmente que D é redutível a um desenho ruim, D'. Pelo lema da Certidão do capítulo 2 (lema 2.1), o VN não tem solução em D' e conseqüentemente o VO também não tem solução em D'. Pelo lema 4.4 (Invariância), D também não tem solução. Assim, se D é redutível a um desenho ruim então D não tem solução.

Resta mostrar que a recíproca vale. Suponhamos que D não tem solução. Vamos demonstrar por indução, que D é redutível a um desenho ruim.

Consideraremos inicialmente o caso em que D é redutível.

Seja H uma redução imediata de D. Pelo lema 4.4 (Invariância), segue que o VO não tem solução em H. Ademais, pelo lema 4.3, H é normal. Logo, por hipótese de indução, H é redutível a um desenho ruim e portanto D também o é.

Podemos então supor que D é irredutível.

Pelo teorema da Irrelevância, segue que o VN não tem solução. Logo, pelo Teorema Fundamental do capítulo 2 (teorema 2.3), temos que D pode ser reduzido (VN) a um desenho ruim.

Iremos mostrar que D é irredutível (VN), completando assim a demonstração. Seja X uma parte de VD que contém um vértice não especial, digamos v. Pela proposição 4.5, temos que existem dois caminhos orientados com origem v e término t_1 e t_2, respectivamente, disjuntos exceto em v. Analogamente, existem dois caminhos orientados, de origem s_1 e s_2, respectivamente, e término v, disjuntos exceto em v. Ora D é acíclico e portanto os quatros caminhos são disjuntos dois a dois, exceto no vértice v. Logo $|\beta^+(X)| + |\beta^-(X)| \geq 4$. Assim, para toda parte R de VD com interior (VN) não vazio, temos $|R| \geq 4$. De fato D é irredutível (VN). □

4.2 Irrelevância da orientação para grafos irredutíveis

Veremos nesta seção como obter uma solução para um grafo D normal e irredutível a partir da solução do VN, ou seja, ignorando a orientação das arestas.

Vamos inicialmente dar algumas definições e notações necessárias.

Como o grafo D é acíclico, podemos definir uma ordem $\leq$, tal que $u \leq v$ se e somente se existe um caminho orientado de u para v.

Seja P um caminho. Sejam u e v vértices pelos quais P passa, nesta ordem.

Denotaremos o trecho de P de u a v por $P[u, v]$ e denotaremos o reverso $(P[u, v])^R$ por $P[v, u]$.

Seja $[x, y]$ uma aresta de P. Dizemos que a aresta $[x, y]$ é *reversa* se P a percorre no sentido contrário de sua orientação, ou seja, de y para x. Caso contrário, dizemos que $[x, y]$ é *direta*.

Dizemos que um vértice z é uma *alternância* de P se z é interno a P e uma das arestas de P que incidem em z é reversa e a outra direta. Além disso, se a aresta seguinte de z é direta (respectivamente, reversa) dizemos que o vértice é uma *alternância direta* (respectivamente, *alternância reversa*).

Vamos denotar $A(P)$ o conjunto de alternâncias de um caminho P, ou seja, $A(P) := \{v\ ;\ v \text{ é uma alternância de } P\}$.

Feitas estas definições podemos resolver o nosso problema através do seguinte teorema:

Teorema da Irrelevância da Orientação *Se D é normal e irredutível então o VO tem solução se e somente se o VN tem solução.*

Demonstração. É óbvio que se o VO tem solução então o VN tem solução, seja D irredutível ou não. Resta mostrar que a recíproca vale. Suponha que o VN tem solução.

Dentre os pares (P_1, P_2), que formam uma solução do VN, escolha um par com o número de alternâncias mínimo.

Vamos mostrar que este par também forma uma solução do VO em D, ou seja, P_1 e P_2 são ambos orientados.

Vamos supor, por absurdo, que (P_1, P_2) não são ambos orientados.

Seja u_0 um elemento de $A(P_1) \cup A(P_2)$ minimal com relação à ordem $\leq$. Seja v_0 um elemento maximal de $\{v;\ u_0 \leq v, v \in A(P_1) \cup A(P_2)\}$. É claro que v_0 é maximal em $A(P_1) \cup A(P_2)$.

Pela propriedade X (proposição 4.5) e seu dual temos que existem dois caminhos orientados, R_1 e R_2, com origem v_0 e término t_1 e t_2, respectivamente, disjuntos exceto em v_0; e existem dois caminhos orientados, Q_1 e Q_2, de s_1 a u_0 e s_2 a u_0, respectivamente, tal que o único vértice em comum é o u_0.

Vamos denotar por r_i ($i \in \{1,2\}$) o vértice de $R_1 \cup R_2$ mais baixo de P_i, isto é: indo em P_i na direção de s_i a t_i, r_i é o primeiro vértice que pertence a algum R_j. Analogamente, vamos denotar por q_i ($i \in \{1,2\}$) o vértice de $Q_1 \cup Q_2$ mais alto de P_i, isto é, indo na direção de s_i a t_i é o último vértice que pertence a algum Q_j.

Convém observar que os resultados que se seguem são todos verdadeiros se fizermos as seguintes trocas: v_0 por u_0, r_i por q_i, R_i por Q_i, t_i por s_i, "alternância direta" por "alternância reversa" e "precede" por "sucede". Ou seja, essas trocas correspondem a considerarmos o dual direcional de D.

Proposição 4.7 *O vértice u_0 é uma alternância direta.*

Demonstração. Seja w uma alternância reversa em $A(P_1) \cup A(P_2)$, digamos, em $A(P_1)$. O término t_1 de P_1 é um sorvedouro. Logo, existe em $P_1[w, t_1]$ uma alternância direta. Seja então x a primeira alternância direta de $P_1[w, t_1]$. Assim $P_1[x, w]$ é orientado e portanto $x < w$.

Portanto, nenhuma alternância reversa é minimal. Logo, u_0 é direta. □

Corolário 4.7.1 *Os vértices u_0 e v_0 são distintos.*

Demonstração. Pela proposição 4.7 e sua dual, v_0 é uma alternância direta e u_0 é uma alternância reversa. □

Proposição 4.8 *O conjunto $VQ_i \cap VR_j = \emptyset$, $1 \leq i, j \leq 2$.*

Demonstração. Segue da aciclicidade de D e de $u_0 < v_0$. □

Proposição 4.9 *Seja $x \in VR_j \cap VP_i - v_0$. Então o trecho $P_i[x, t_i]$ é orientado e seus vértices disjuntos de $VQ_k \cup \{v_0\}$, $1 \leq i, j, k \leq 2$.*

Demonstração. Vamos inicialmente mostrar que $P_i[x, t_i]$ é orientado. Suponha o contrário. Seja então v_0' a primeira alternância reversa de $P_i[x, t_i]$. Assim, $x \leq v_0'$.

Como $x \in VR_j$ temos então $v_0 < x \leq v_0'$ (como vemos na figura 4.4), contradizendo a maximalidade de v_0.

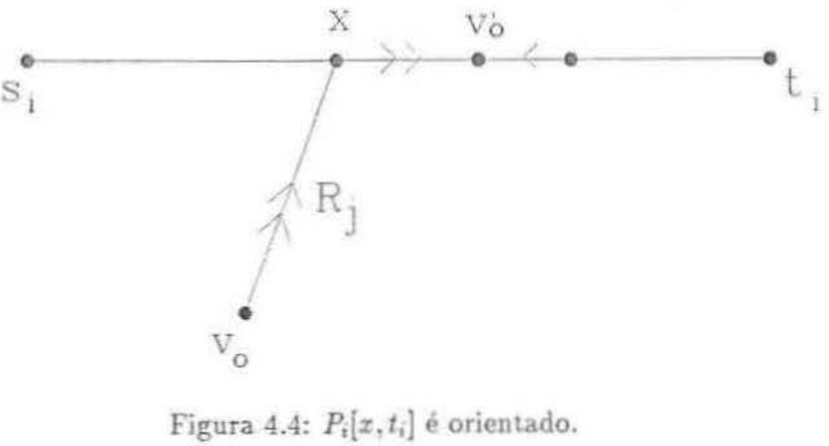

Figura 4.4: $P_i[x, t_i]$ é orientado.

Finalmente, vamos mostrar a disjunção do trecho em questão. Seja $y \in VP_i[x, t_i]$. Como o trecho é orientado, então $x \leq y$. Por outro lado, $\forall z \in VQ_k$, temos $z \leq u_0$. Assim, $z \leq u_0 < v_0 < x \leq y$ e temos o resultado. □

Corolário 4.9.2 *Se $v_0 \in VP_i$ ($i \in \{1, 2\}$) então $v_0 = r_i$.*

Demonstração. De fato, se $r_i \neq v_0$ então, pela proposição 4.9, $v_0 \notin P_i[r_i, t_i]$. Pela definição de r_i, $v_0 \notin P_i[s_i, r_i]$ e conseqüentemente $v_0 \notin VP_i$. □

Corolário 4.9.3 *Se $r_i \notin VR_i$ ($i \in \{1, 2\}$) então $r_1 \in VR_2$ e $r_2 \in VR_1$.*

Demonstração. Suponhamos que $r_1 \notin VR_1$. Por definição de r_1, $r_1 \in VR_2$.

Por outro lado, $v_0 \in VR_1 \cap VR_2$. Logo, $r_1 \neq v_0$. Pelo corolário 4.9.2, $v_0 \notin VP_1$. Logo, $v_0 \in VP_2$. Pelo corolário 4.9.2, $v_0 = r_2$. Assim, $r_2 \in VR_1$.

Analogamente, se $r_2 \notin VR_2$ então também podemos concluir que $r_1 \in VR_2$ e $r_2 \in VR_1$. □

Corolário 4.9.4 *Se r_i precede q_i em P_i, então $q_i = u_0$ e $r_i = v_0$.*

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que $r_i \neq v_0$. Pela proposição 4.9, temos que $P_i[r_i, t_i]$ é disjunto de $VQ_k(1 \leq k \leq 2)$, contradição pois $q_i \in VQ_1 \cup VQ_2$. Portanto $r_i = v_0$. Analogamente, temos $q_i = u_0$. □

Corolário 4.9.5 *O subcaminho $P_i[q_i, r_i]$ é internamente disjunto de R_k para $1 \leq i, k \leq 2$.*

Demonstração. Se q_i precede r_i então o resultado segue da própria definição de q_i e de r_i.

Suponhamos então que r_i precede q_i. Pelo corolário anterior, $q_i = u_0$ e $r_i = v_0$. Seja x interno ao trecho em questão. Vamos supor, por absurdo, que $x \in VR_k$. Como $x \neq v_0$ temos, pela proposição 4.9, que $P_i[x, t_i]$ é orientado e portanto u_0 não é uma alternância reversa, contradição à proposição 4.7. Portanto $x \notin VR_k$. □

Proposição 4.10 *A aresta que precede r_i em P_i é direta ($i \in \{1, 2\}$).*

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que a aresta que precede r_i é reversa. Como s_i é uma fonte, existe em $P_i[s_i, r_i]$ uma alternância reversa. Seja então v a última alternância reversa de $P_i[s_i, r_i]$. Então $P_i[r_i, v]$ é orientado e portanto $r_i < v$. Por outro lado, como r_i é um vértice de $R_1 \cup R_2$ temos $v_0 \leq r_i$. Assim, $v_0 \leq ri < v$, contradizendo a maximalidade de v_0. □

Proposição 4.11 *Se $r_1 \in VR_1$ e $r_2 \in VR_2$ então conseguimos uma solução do VN com número de alternâncias menor.*

Demonstração. Vamos considerar os seguintes caminhos:

$P'_i := P_i[s_i, r_i] \circ R_i[r_i, t_i]$, $1 \leq i \leq 2$ (veja um exemplo na figura 4.5).

Temos $VP'_1 \cap VP'_2 = \emptyset$. De fato, como r_i é o vértice de $R_1 \cup R_2$ mais baixo de P_i então o trecho $P_i[s_i, r_i]$ é internamente disjunto do trecho $R_j[r_j, t_j](j \in \{1, 2\})$. A disjunção para os demais trechos é trivial.

Pela proposição 4.10, temos que as arestas que precedem r_1 e r_2 são diretas. Além disso, R_1 e R_2 são orientados e portanto $A(P'_1) \cup A(P'_2) \subseteq A(P_1) \cup A(P_2) - \{r_1, r_2\}$. Como v_0, que pertence a $\{r_1, r_2\}$ pelo corolário 4.9.2, é uma alternância, então o par (P'_1, P'_2) forma uma solução do VN com número de alternâncias menor do que o do par (P_1, P_2). □

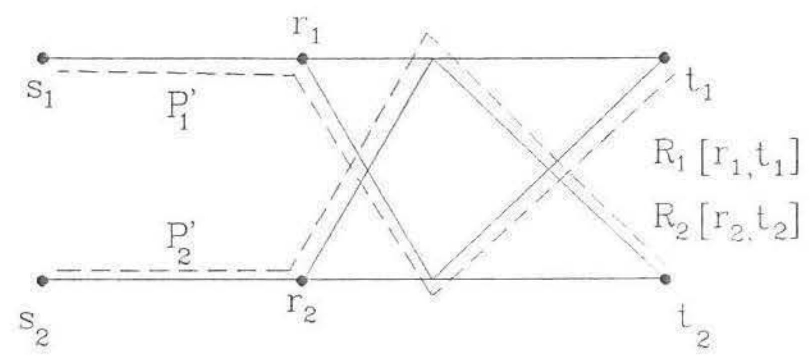

Figura 4.5: Novo par (P_1', P_2').

Proposição 4.12 *Se $r_1 \in VR_2$, $r_2 \in VR_1$, $q_1 \in VQ_2$ e $q_2 \in VQ_1$ então conseguimos uma solução do VN com número de alternâncias menor.*

Demonstração. Vamos considerar os seguintes caminhos:
$P_1' := Q_1[s_1, q_2] \circ P_2[q_2, r_2] \circ R_1[r_2, t_1]$
$P_2' := Q_2[s_2, q_1] \circ P_1[q_1, r_1] \circ R_2[r_1, t_2]$
(veja exemplos nas figuras 4.6 e 4.7).

Pelo corolário 4.9.5 temos que os trechos $P_i[q_i, r_i]$ são internamente disjuntos de $VQ_j \cup VR_k (1 \leq i, j, k \leq 2)$. Os trechos de Q_j e de R_k são disjuntos, pela proposição 4.8. Os demais trechos são trivialmente disjuntos. Portanto P_1' e P_2' são disjuntos.

Vamos agora mostrar que o número de alternâncias do par (P_1', P_2') é menor do que o do par (P_1, P_2).

Proposição 4.12.1 *O vértice r_2 não é uma alternância de P_1'.*

Demonstração. Sejam α e β as arestas de P_1' que precede e sucede r_2, respectivamente. É claro que β é direta pois R_1 é orientado. Resta mostrar que α também é direta.

Se q_2 precede r_2 em P_2 então α é a aresta que precede r_2 em P_2, que é direta, pela proposição 4.10 (como vemos na figura 4.6).

Caso contrário, temos $q_2 = u_0$ e $r_2 = v_0$ (corolário 4.9.4). Neste caso a aresta α é o reverso da aresta que sucede v_0 em P_2, que por sua vez é reversa, pelo dual da proposição 4.7. Portanto α é direta, como vemos no exemplo da figura 4.7.

Logo r_2 não é uma alternância de P_1'. □

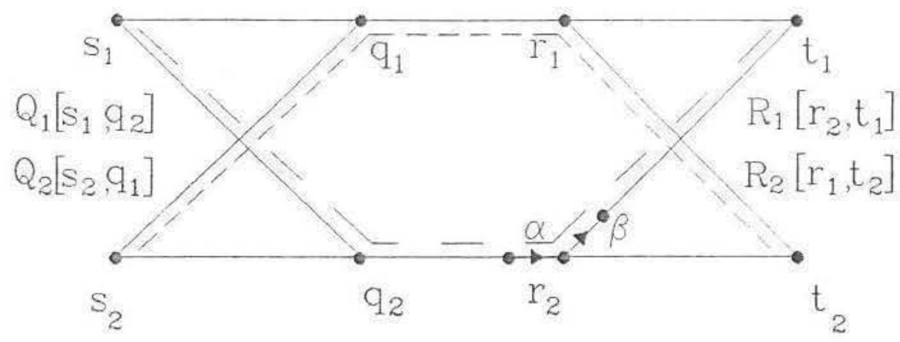

Figura 4.6: Novo par (P_1', P_2'), no caso em que q_i precede r_i ($i \in \{1, 2\}$).

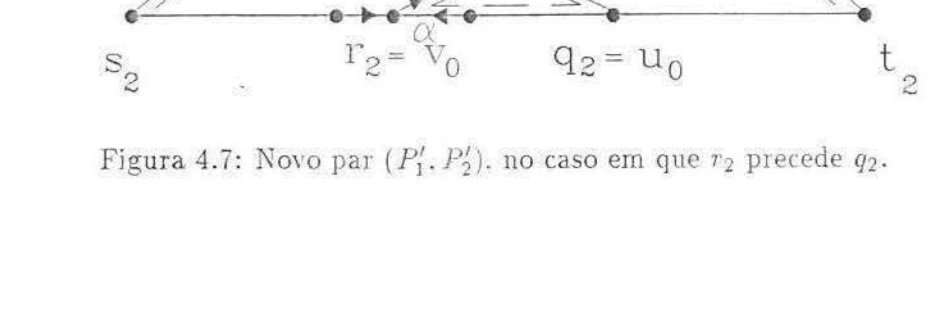

Figura 4.7: Novo par (P_1', P_2'), no caso em que r_2 precede q_2.

Analogamente à proposição anterior, temos que q_2 não é uma alternância de P_1' e que r_1 e q_1 não são alternâncias de P_2'.

Assim $A(P_1') \cup A(P_2') \subseteq A(P_1) \cup A(P_2) - \{q_1, q_2, r_1, r_2\}$.

Por outro lado, pelo corolário 4.9.2 e seu dual, $u_0 \in \{q_1, q_2\} \cap A(P_1 \cup P_2)$ e $v_0 \in \{r_1, r_2\} \cap A(P_1 \cup P_2)$ e temos o resultado. □

Continuando a demonstração do Teorema 1, como o número de alternâncias de (P_1, P_2) é mínimo temos que $r_1 \notin VR_1$ ou $r_2 \notin VR_2$ (proposição 4.11).

Pelo corolário 4.9.3, $r_1 \in VR_2$ e $r_2 \in VR_1$. Analogamente, temos $q_1 \in VQ_2$ e $q_2 \in VQ_1$. Portanto pela proposição 4.12, conseguimos uma solução com número de alternâncias menor do que o do par (P_1, P_2), contradição. Em todos os casos chegamos a uma contradição. Logo P_1 e P_2 são ambos orientados e temos o resultado. A demonstração do Teorema da Irrelevância completa a demonstração do Teorema Fundamental. □

4.3 Grafos Fracamente Irredutíveis

Nesta seção, iremos fazer uma pequena alteração no conceito de redutor, que facilitará o tratamento considerado no próximo capítulo, sem contudo invalidar o Teorema Fundamental.

Seja Z um redutor de D. Dizemos que Z é um redutor *fraco* se Z consiste de apenas dois vértices, digamos u e v, e $\beta^-(Z) = \{u\}$ e $\beta^+(Z) = \{v\}$ (veja figura 4.8).

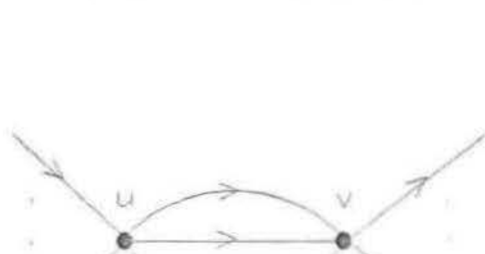

Figura 4.8: Um redutor fraco.

Dizemos que um grafo D é *fracamente irredutível* se todos redutores de D são fracos.

É claro que se D é irredutível então D é fracamente irredutível.

Teorema 4.13 *Seja D um grafo normal e fracamente irredutível. Se D é redutível a um desenho ruim então D é um desenho ruim.*

Demonstração. Seja então $D := K_0, K_1, \ldots, K_r := K$ $(r \geq 0)$ uma seqüência de reduções imediatas que leva D a um desenho ruim K. Vamos demonstrar por indução em r que D é um desenho ruim.

Seja Z o redutor de D, que induz a redução imediata K_1. Como D é fracamente irredutível, então Z é fraco. Sejam u e v os únicos vértices de Z e tais que $\beta^-(Z) = \{u\}$ e $\beta^+(Z) = \{v\}$.

Proposição 4.14 *O grafo K_1 é fracamente irredutível.*

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que K_1 não é fracamente irredutível. Seja X um redutor de K_1 não fraco. Sem perda de generalidade, podemos supor que X é um redutor para fora.

Podemos supor que $u = v \in \beta^+_{k_1}(X)$, pois caso contrário, X é um redutor de D não fraco, contradição.

Mas todas as arestas que saem de u, em D, entram em v e portanto $|\beta^+_D(X)| = |\{v\}| = 1$; logo X é um redutor não fraco de D, contradição. □

Pela proposição anterior, temos que K_1 é fracamente irredutível. Além disso, pelo lema 4.3 (Normalidade), temos que K_1 é normal. Logo, por hipótese de indução, K_1 é um desenho ruim.

Lema 4.15 *Sejam α_1, α_2, α_3 e α_4 quatro arestas do desenho ruim K_1 que incidem no vértice $u = v$, nesta ordem cíclica. Se α_1 e α_3 entram no (saem do) vértice e α_2 sai do (entra no) vértice, então α_4 entra no (sai do) vértice.*

Demonstração. Suponha o contrário. Sejam α_1 e α_2 arestas que entram em $u = v$ e β_1 e β_2 arestas que saem de $u = v$ tais que $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ e β_2 aparecem nesta ordem cíclica na incidência no vértice $u = v$.

Sejam u_1, u_2, v_1 e v_2 os extremos não comuns de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2, respectivamente (figura 4.9). Como s_1 e s_2 são as únicas fontes de D, então existem caminhos orientados P_1 e P_2, não necessariamente disjuntos, com origem em $\{s_1, s_2\}$ e término u_1 e u_2, respectivamente. Analogamente, existem caminhos orientados Q_1 e Q_2 com origem v_1 e v_2, respectivamente, e término em $\{t_1, t_2\}$.

Como K_1 é um desenho ruim, então pelo menos um dos caminhos dentre Q_1 e Q_2 interceptam com P_1 ou P_2, digamos P_2 e Q_1. Seja $w \in VP_2 \cap VQ_1$ (figura 4.9). Ora o subcaminho orientado de P_2 de w a u_2, mais as arestas α_2 e β_1 e o subcaminho orientado de Q_1 de v_1 a w formam um ciclo, contradição pois K_1 é acíclico (lema 4.3). □

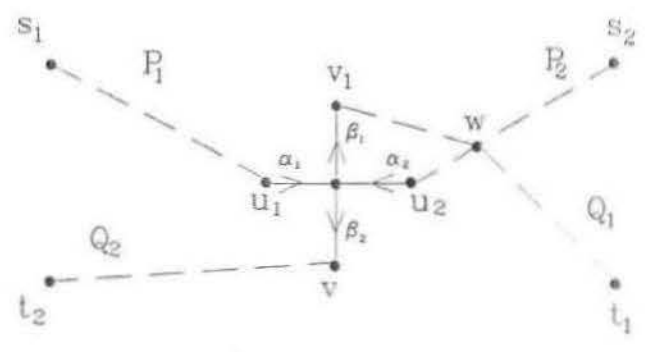

Figura 4.9: Exemplo de arestas alternadas em $u = v$.

Pela proposição anterior, temos que as arestas em D que entram em u não são intercaladas no desenho ruim K_1 com as arestas em D que saem de v. Portanto podemos separar os vértices u e v, mantendo a planaridade (figura 4.8). Assim, D é um desenho ruim. □

Capítulo 5

Grafos Orientados Acíclicos Disjunção nas Arestas

Neste capítulo vamos estudar um problema análogo ao Problema dos Dois Caminhos Disjuntos nos Arestas (AN) (capítulo 3), para grafos orientados.

Sejam D um grafo orientado acíclico e s_1, s_2, t_1 e t_2 vértices de D, não necessariamente distintos. O *Problema dos Dois Caminhos Orientados Disjuntos nas Arestas (AO)* consiste em encontrar dois caminhos orientados e disjuntos nas arestas, de s_1 a t_1 e de s_2 a t_2, respectivamente. Diremos simplesmente que D *tem solução* caso o AO tenha solução em D e chamaremos os vértices s_1, s_2, t_1 e t_2 de *vértices especiais*.

Como vimos no capítulo 1, o AO é NP-completo para grafos em geral. No entanto, neste capítulo, nós resolvemos este problema para grafos acíclicos.

Novamente aqui, podemos reduzir este problema ao VO da seguinte maneira: adicionamos ao grafo D quatro novos vértices, distintos dois a dois, s'_1, s'_2, t'_1, t'_2 e unimos s_1 a s'_1, s_2 a s'_2, t_1 a t'_1 e t_2 a t'_2 por novas arestas, obtendo o grafo D'. Em seguida, consideramos H o grafo orientado das arestas ("*directed line graph*") de D', chamando de s_1, s_2, t_1 e t_2 os vértices de H que correspondem às novas arestas de D'. É claro que o AO tem solução em D se e somente se o VO tem solução em H.

Apresentaremos neste capítulo uma outra solução, também reduzindo o problema ao VO, mas dando uma caracterização dos grafos acíclicos em que o AO não tem solução.

Não encontramos referências a respeito deste problema, mas Perl e Shiloach [13] mostraram que é equivalente ao VO, acíclico, conforme mostramos no capítulo 1.

5.1 Desenho Ruim

Um grafo D é um *desenho ruim* se satisfizer as seguintes propriedades:

(i) D é um desenho ruim VN;

(ii) s_1 e s_2 são fontes;

(iii) t_1 e t_2 são sorvedouros

(iv) para todo vértice v não especial temos $min\{g^-(v), g^+(v)\} = 1$;

Consideraremos também como desenho ruim o grafo com dois vértices em que $s_1 = s_2$, $t_1 = t_2$, e uma única aresta de $s_1 = s_2$ a $t_1 = t_2$; e também o grafo somente com vértices especiais, sem arestas, com $s_1 \neq t_1$ ou $s_2 \neq t_2$. Denominaremos estes desenhos ruins de *triviais*. Na figuras 5.1 e 5.2, vemos exemplos de desenhos ruins.

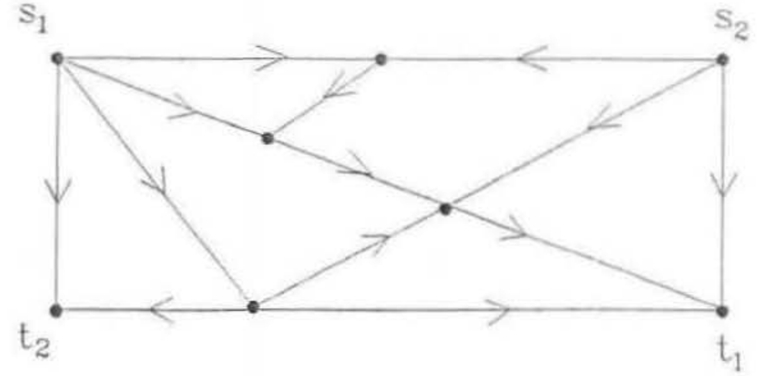

Figura 5.1: Exemplo de um Desenho Ruim.

Lema 5.1 (Certidão) *Se D é um desenho ruim então não tem solução.*

Demonstração. Se D for um desenho ruim trivial, obviamente a afirmação é verdadeira. Suporemos então que D é não trivial.

Vamos supor, por absurdo, que exista solução, (P_1, P_2). Como D é um desenho ruim VN então os quatro vértices especiais são distintos dois a dois. Como s_1 e s_2 são fontes, t_1 e t_2 são sorvedouros então P_1 não passa nem por s_2 nem por t_2 e P_2 não passa nem por s_1 nem por t_1. Logo P_1 e P_2 "cruzam". Mas D é planar e portanto P_1 e P_2 têm um vértice comum v, não especial, contradição, pois v tem apenas uma aresta entrando ou apenas uma aresta saindo. □

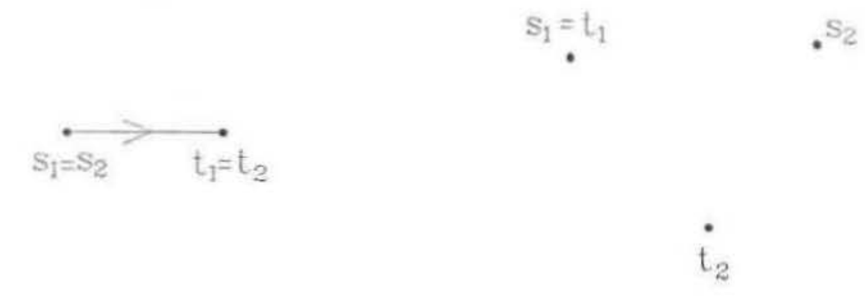

Figura 5.2: Exemplos de Desenhos Ruins Triviais.

5.2 Reduções

Dizemos que um vértice v de D é *bloqueado* se v for um vértice não especial fonte ou sorvedouro.

Para Z uma parte de VD, vamos denotar por $\alpha^+(Z)$ o número de vértices de $\{s_1, s_2\}$ que pertencem a Z, levando em conta suas multiplicidades, ou seja, $\alpha^+(Z) := |\{s_1\} \cap Z| + |\{s_2\} \cap Z|$. Analogamente, vamos denotar por $\alpha^-(Z)$ o número de vértices de $\{t_1, t_2\}$ que pertencem a Z, ou seja, $\alpha^-(Z) := |\{t_1\} \cap Z| + |\{t_2\} \cap Z|$.

Vamos também definir $\beta^+(Z)$, o *grau de ligação para fora* de Z em D, da seguinte maneira:

$$\beta^+(Z) = |\delta^+(Z)| + \alpha^-(Z).$$

Analogamente, vamos definir o *grau de ligação para dentro* de D, como sendo:

$$\beta^-(Z) = |\delta^-(Z)| + \alpha^+(Z).$$

Consideraremos como *reduções imediatas triviais* de D o grafo H obtido, a partir de D, através de uma das seguintes operações:

- remoção de um vértice bloqueado;
- remoção das arestas que entram em s_1 se $\beta^+(s_1) \leq 1$ ou remoção das arestas que entram em s_2 se $\beta^+(s_2) \leq 1$ e
- remoção das arestas que saem de t_1 se $\beta^-(t_1) \leq 1$ ou de t_2 se $\beta^-(t_2) \leq 1$.

Dizemos que uma parte Z não vazia de VD é um *conjunto fracamente ligado para fora* de D se o grau de ligação para fora de Z for igual a 1 e $ED[Z]$ não vazio.

Analogamente, dizemos que uma parte Z, não vazia, de VD é um *conjunto fracamente ligado para dentro* de D se o grau de ligação para dentro de Z for igual a 1 e $ED[Z]$ não vazio.

Iremos chamar de conjunto *fracamente ligado* um conjunto que é fracamente ligado para fora ou fracamente ligado para dentro.

Dado um conjunto Z fracamente ligado, se D for livre de reduções imediatas triviais, a *redução imediata* de D (induzida por Z) é o grafo H obtido, a partir de D, pela contração das arestas de $D[Z]$. Convém enfatizar que a contração das arestas do subgrafo gerado por um conjunto fracamente ligado só é efetuada na ausência de reduções imediatas triviais.

Dizemos que o grafo D é *irredutível* se não for possível obter uma redução imediata de D, trivial ou não.

Proposição 5.2 *Seja D livre de reduções imediatas triviais, Z um conjunto fracamente ligado para fora em D. Então, a menos de vértices isolados em D, $D[Z]$ consiste de precisamente uma componente conexa, que, por sua vez, contém precisamente um sorvedouro.*

Demonstração. Seja v um sorvedouro de $D[Z]$. Então ou v é um sorvedouro em D ou $v \in W^+(Z)$. No primeiro caso, v é especial, pois D é livre de vértices bloqueados. Assim, em ambos os casos, $v \in \{s_1, s_2, t_1, t_2\} \cup W^+(Z)$.

Suponha ainda que $v \notin \{t_1, t_2\} \cup W^+(Z)$. Nesse caso, $v \in \{s_1, s_2\}$ e, como $g^+(v) = 0$, segue que $\beta^+(v) = 0$ e portanto v é isolado em D, pois D é livre de reduções imediatas.

Conclui-se que todo sorvedouro de $D[Z]$ ou é isolado em D ou pertence a $\{t_1, t_2\} \cup W^+(Z)$. Mas $\beta^+(Z) = 1$, portanto no máximo um sorvedouro de $D(Z)$ não é isolado em D. Finalmente, $D[Z]$ contém arestas. Portanto, precisamente um sorvedouro de $D[Z]$ não é isolado em D. □

Lema 5.3 *Se D é um grafo acíclico, então toda redução imediata de D é acíclica.*

Demonstração. Seja H uma redução imediata de D. O resultado é trivialmente obtido se H é uma redução trivial.

Podemos então supor que D é livre de reduções imediatas triviais. Seja o conjunto fracamente ligado Z que induz a redução imediata H. Sem perda de generalidade, podemos supor que Z é fracamente ligado para fora.

Pela proposição anterior, temos que a única componente conexa não trivial de $D[Z]$ é substituída em H por um único vértice, v_0, que identificaremos com o único sorvedouro de $D[Z]$ que não é isolado em D.

Vamos supor, por absurdo, que H tem um ciclo C. Se v_0 não é um vértice deste ciclo então C é um ciclo em D, contradição pois D é acíclico.

Podemos então supor que v_0 é um vértice de C. Seja a a aresta de C que, em H, entra em v_0 e seja v' o vértice que é a cabeça, em D, da aresta a. Pela proposição 5.2, temos que existe um caminho orientado P de v' a v_0 em $D[Z]$. Logo, C pode ser estendido a um ciclo em D, contradição. □

Dada uma seqüência $H_0 := D, H_1, \ldots, H_r := K$ com $r \geq 0$ e tal que cada H_i é uma redução imediata de H_{i-1} $(1 \leq i \leq r)$, dizemos que K é uma *redução* de D e que D é *redutível* a K.

Lema 5.4 (Invariância da solução com redução) *O grafo acíclico D admite solução se e somente se toda redução de D admite solução.*

Demonstração. Seja H uma redução de D. Por indução, podemos obviamente supor que H é uma redução imediata de D.

Se H é uma redução imediata trivial obviamente temos o resultado. Podemos então supor que D é livre de reduções imediatas triviais e que H é obtido de D pela contração das arestas de $D[Z]$, onde Z é um conjunto fracamente ligado. Sem perda de generalidade, podemos supor que Z é fracamente ligado para fora.

Pela proposição 5.2, a única componente conexa não trivial de $D[Z]$ pode ser substituída em H por um único vértice, digamos v_0, que identificaremos com seu único sorvedouro.

$\Longrightarrow$ (Redução não destrói solução.)

Suponhamos que D tem solução, (P_1, P_2); vamos provar que H também tem solução.

Como $\beta^+(Z) = 1$, então apenas um dos caminhos da solução em D pode passar por arestas de $D[Z]$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que P_2 é um caminho em H. Se P_1 for também um caminho em H, então (P_1, P_2) é uma solução de H. Podemos portanto supor que P_1 passa por arestas de $D[Z]$.

Vamos definir P_1', um caminho em H, a partir do caminho P_1, omitindo-se as arestas pertencentes a $D[Z]$ e identificando os seus extremos.

É claro que o novo par (P_1', P_2) forma uma solução do AO para H e segue o resultado.

$\Longleftarrow$ (Redução não cria solução.)

Suponhamos que H tem solução, (P_1, P_2); vamos provar que D tem solução. Observe que $\beta^+_H(v_0) = 1$ e portanto no máximo um dos caminhos P_1 e P_2 passa por v_0. Basta verificarmos o caso em que um dos caminhos usa o vértice v_0, digamos, P_1.

Se v_0 for a origem de P_1 em H então seja $v' := s_1$; se v_0 não for a origem de P_1 em H então seja a a aresta de P_1 que, em H, entra em v_0 e v' a cabeça de a em D.

Pela proposição 5.2, existe em $D[Z]$ um caminho orientado P de v' a v_0. Assim, o caminho P_1', em D, de s_1 a t_1, obtido a partir do caminho P_1, substituindo-se o vértice v_0 pelo caminho P, é orientado e disjunto de P_2 nas arestas e temos o resultado com o par (P_1', P_2). □

A seguir, demonstraremos algumas propriedades importantes de um grafo irredutível e sem solução.

Proposição 5.5 *Se D é irredutível e sem solução, então $min\{\beta^-(v), \beta^+(v)\} \leq 1$ para todo vértice v de D, com igualdade se v não é especial.*

Demonstração. Se existem quatro caminhos orientados, dois a dois disjuntos nas arestas, de s_1 a v, s_2 a v, v a t_1 e v a t_2, respectivamente, então o AO tem solução (basta compor os caminhos de s_1 a v e v a t_1, e os de s_2 a v e v a t_2), contradição.

Sabemos então que os quatro caminhos não existem. Pela aciclidade de D, concluímos que ou não existem dois caminhos orientados e disjuntos nas arestas de s_1 e s_2, respectivamente, a v, ou não existem dois caminhos orientados e disjuntos nas arestas de v a t_1 e t_2, respectivamente. Podemos supor, sem perda de generalidade, que não existem os caminhos de v a t_1 e de v a t_2, respectivamente. Pelo Teorema de Menger, temos que $\exists X \subseteq VD$, $v \in X$, tal que $|\delta^+(X)| < \alpha^-(\overline{X})$. Somando $\alpha^-(X)$ a ambos os lados da desigualdade, temos que

$$\beta^+(X) = |\delta^+(X)| + \alpha^-(X) < \alpha^-(\overline{X}) + \alpha^-(X) = 2.$$

Assim, $\beta^+(X) \leq 1$. Como D é irredutível, segue que $ED[X]$ é vazio. Portanto, $\beta^+(v) \leq \beta^+(X) \leq 1$.

Se v não for especial, então v não é bloqueado e portanto $\beta^+(v) = 1$. □

Proposição 5.6 *Se D é irredutível e sem solução então s_1 e s_2 são fontes de D e t_1 e t_2 são sorvedouros de D.*

Demonstração. Vamos demonstrar que s_1 é fonte. Por definição de β^-, $\beta^-(s_1) \geq 1$. Se $\beta^-(s_1) = 1$ certamente temos o resultado. Suponhamos então que $\beta^-(s_1) \geq 2$. Pela proposição 5.5, temos que $\beta^+(s_1) \leq 1$. Então, pela irredutibilidade de D, segue que nenhuma aresta entra em s_1. De fato, s_1 é uma fonte. Analogamente, temos s_2 fonte e t_1 e t_2 sorvedouros. □

Proposição 5.7 *Se D é irredutível, conexo e sem solução então s_1 e s_2 são fontes mas não sorvedouros e t_1 e t_2 são sorvedouros mas não fontes.*

Demonstração. Pela proposição 5.6, s_1 é fonte. Se s_1 for sorvedouro, então s_1 é isolado. Pela conexidade, $|VD| = 1$. Logo existe solução. contradição. □

5.3 O Teorema Fundamental

Teorema 5.8 (Fundamental) *Sejam D um grafo acíclico e s_1, s_2, t_1 e t_2 vértices de D, não necessariamente distintos. O problema AO não tem solução se e somente se D é redutível a um desenho ruim.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que D é redutível a um desenho ruim, H. Pelo lema 5.1 (Certidão), H não tem solução. Pelo lema 5.4 (Invariância), D também não tem solução. Assim, se D pode ser reduzido a um desenho ruim então D não tem solução.

Resta mostrar que a recíproca vale. Suponhamos que D não tem solução. Vamos demonstrar por indução, que D pode ser reduzido a um desenho ruim.

Vamos inicialmente considerar o caso em que D é redutível. Seja H uma redução imediata de D. Pelo lema 5.4 (Invariância), H não tem solução. Ademais, pelo lema 5.3, H é acíclico. Portanto, por indução, H é redutível a um desenho ruim, e portanto D também é.

Podemos então supor que D é irredutível.

Veremos na proposição seguinte, que se D é desconexo, então D é um desenho ruim trivial.

Proposição 5.9 *Se D é irredutível, desconexo e sem solução, então D é um desenho ruim trivial.*

Demonstração. Seja K uma componente conexa de D. Como D é acíclico temos que K tem pelo menos um sorvedouro. Seja v um sorvedouro de K. Como D é livre de bloqueados, então v é especial. Concluímos que para toda componente conexa K de D temos $min\{\beta^+(VK), \beta^-(VK)\} \leq 1$. Como D é irredutível segue que D é sem arestas e somente com vértices especiais. Mas D não tem solução e portanto $s_1 \neq t_1$ ou $s_2 \neq t_2$ e temos o resultado. □

Podemos então supor que D é conexo.

Veremos na proposição seguinte, que se os vértices especiais não são dois a dois distintos, então D também é um desenho ruim trivial.

Proposição 5.10 *Se D é irredutível, conexo, sem solução e os quatro vértices especiais não são distintos dois a dois, então D é um desenho ruim trivial.*

Demonstração. Suponhamos que s_1 coincide com algum outro vértice especial. Pela proposição 5.7, temos que $\{s_1, s_2\}$ e $\{t_1, t_2\}$ são disjuntos. Logo $s_1 = s_2$. Então $\beta^-(s_1) \geq \alpha^+(s_1) = 2$. Pela proposição 5.5, temos que $\beta^+(s_1) \leq 1$. Pela proposição 5.7, temos que s_1 não é sorvedouro e portanto $\delta^+(s_1) \neq \emptyset$ e temos $\beta^+(s_1) = |\delta^+(s_1)| = 1$. Portanto, $\beta^-(\overline{s_1}) = 1$. Como D é irredutível, $D[\overline{s_1}]$ é sem arestas. Como D é conexo segue que $D(\overline{s_1})$ é o grafo vértice $t_1 = t_2$. Assim, D é um desenho ruim trivial. □

Podemos então supor que os vértices especiais são dois a dois distintos.

É evidente que o VO não tem solução em D, pois uma solução disjunta nos vértices é disjunta nas arestas. Por outro lado, pela proposição 5.7, temos que s_1 e s_2 são as únicas fontes de D e que t_1 e t_2 são os únicos sorvedouros de D. Assim, D é normal (VO). Além disso, pela proposição 5.5, temos que $min\{g^-(v), g^+(v)\} = 1$ para todo vértice v não especial. Para completar a demonstração, basta então mostrar que D é fracamente irredutível VO, o que será feito na proposição 5.11, a seguir. De fato, pelo Teorema Fundamental do capítulo 4 (teorema 4.6) D é redutível a um desenho ruim VN e conseqüentemente D é um desenho ruim VN (teorema 4.13). Assim D é um desenho ruim (AO).

Proposição 5.11 *Se D é irredutível, conexo, sem solução e os quatro vértices especiais são dois a dois distintos, então D é fracamente irredutível VO.*

Demonstração. Seja Z um redutor (VO) de D. Sem perda de generalidade, podemos supor que Z é um redutor para fora. Logo $Z \cap \{s_1, s_2\} = \emptyset$, $|Z| \geq 2$ e $|\beta^+_{VO}(Z)| = 1$. Pela proposição 4.2, $D[Z]$ é conexo e conseqüentemente $D[Z]$ tem arestas. Mas Z não é fracamente ligado para fora e portanto $\beta^+_{AO}(Z) > 1$.

Vamos agora demonstrar que Z é livre de vértices especiais. Já sabemos que Z e $\{s_1, s_2\}$ são disjuntos. Suponha, por absurdo, que $\{t_1, t_2\}$ e Z têm um elemento em comum, disgamos t_1. Dado que $|\beta^+_{VO}(Z)| = 1$, segue que $W^+(Z) = \emptyset$ e $t_2 \notin Z$. Logo $\beta^+_{AO}(Z) = 1$, contradição. De fato, Z é livre de especiais.

Novamente, dado que $|\beta^+_{VO}(Z)| = 1$, segue que $|W^+(Z)| = 1$. Seja v_0 o único vértice de $W^+(Z)$. Como D é irredutível (AO) então $g^+(v) > 1$. Portanto, pela proposição 5.5, $g^-(v_0) = 1$. Assim, o conjunto $Y := Z - v_0$ tem $\beta^+_{AO}(Y) = 1$. Novamente como D é irredutível (AO), temos que $D[Y]$ é sem arestas; além disso, D é conexo e os vértices especiais são distintos dois a dois e portanto D é livre de vértices isolados. Logo, Y é unitário, pela proposição 5.2. Seja u o seu único vértice. Assim, Z é composto de dois vértices u e v_0 com $W^-(Z) = \{u\}$ e $W^+(Z) = \{v_0\}$. Logo Z é fraco. De fato, D é fracamente irredutível (VO). □

Terminamos assim a demonstração do Teorema Fundamental. □

Capítulo 6

Duas Questões

6.1 Primeira Questão

A demonstração apresentada no capítulo 2 induz um algoritmo, cuja complexidade é $O(|E|.|V|^3)$. No entanto, Shiloach [17] e Mishra [12] apresentaram um algoritmo de complexidade $O(|E|.|V|)$. Tal observação sugere as seguintes perguntas:

- é possível baixar a complexidade, mantendo a estrutura da nossa demonstração ?
- o problema admite um algoritmo com complexidade menor do que as apresentadas ? Ou linear (talvez ao estilo de Tarjan [7]) ?

6.2 Segunda questão

Como verificamos, o problema dos l caminhos disjuntos, para $l = 2$, apresenta uma bonita caracterização dos grafos que não admitem solução, através da idéia de desenho ruim.

- É possível, para os casos de $l > 2$, ter também definições de redutores e de desenho ruim ?
- Qual o grau de dificuldade que o problema dos 3 caminhos disjuntos apresenta em relação ao dos 2 caminhos disjuntos ?

Bibliografia

[1] L. AUSLANDER and S. V. PARTER, On embedding graphs in the plane, *J. Math. and Mech.*, **10** (May 1961), 517 - 523.

[2] J. EDMONDS and R. M. KARP , Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *J. Assoc. Comput. Mach.*, **19** (1972), 248 - 64.

[3] S. EVEN, A. ITAI and SHAMIR, On The Complexity of Time-table and Multicommodity Flow Problems, *SIAM J. Computing*, **5** (1976), 691 - 703.

[4] L. R. FORD and D. R. FULKERSON, Maximum Flow Through a Network, *Canadian J. Math.*, **8** (1956), 399 - 404.

[5] S. FORTUNE, J. HOPCROFT AND J. WYLLIE, The Directed Subgraph Homeomorphism Problem, TR-78-342, Computer Science Dept., Cornell U., Ithaca, N.Y. (1978).

[6] M. R. GAREY and D. S. JOHNSON, Computers and Intractability: A guide of the Theory of NP-completeness, *W. H. Freeman and company*, 217 (1979).

[7] J.HOPCROFT and R. TARJAN, Efficient Planarity Testing, *Journal JACM*, volume **21, 4** (1974), 549 -568.

[8] T. C. HU, Multicommodity Network Flows, *Operation Res.*, **11** (1963), 344 - 360.

[9] R. M. KARP, On The Computational Complexity of Combinatorial Problems, *Networks*, **5** (1975), 45 - 68.

[10] J. F. LYNCH, The Equivalence of Theorem Proving and The Interconnection Problem, *ACM SIGDA Newsletter*, **5** (1975), 31 - 65.

[11] K. MENGER, Zur Allgemeinen Kurventheorie, *Fund. Math.*, **10** (1927), 96 - 115

[12] B. MISHRA, Some Graph Theoretic Issues in VLSI Design, Ph. D. Thesis, Carnegie-Mellon University, (1985).

[13] Y. PERL and Y. SHILOACH, Finding Two Disjoint Paths Between Two Pairs of Vertices in a Graph, *Journal of Association for Computing Machinery*, **25**-1, January 1978, 1 - 9.

[14] N. ROBERTSON and P. D SEYMOUR, Graph Minors XIII, submetido para publicação no *J. Combinatorial Theory*.

[15] P. D. SEYMOUR, Disjoint Paths in Graphs, *Discrete Math.*, **29** (1980), 293 - 309.

[16] P. D. SEYMOUR, A Short Proof of the Two-Commodity Flow Theorem, *J. Combinatorial Theory Ser.*, B **26** (1979), 370 - 371.

[17] Y. SHILOACH, A Polynomial Solution to the Undirected Two Paths Problem, *JACM*, **3** (1980), 445 - 456.

[18] D. D. SLEATOR and R. E. TARJAN, A Data Struture for Dynamic Trees, *J. Comput. System Sci.*, **26** (1983), 362 - 390.

[19] C. THOMASSEN, 2-Linked Graphs, *Europ. J. Combinatorics*, **1** (1980), 371 - 378.

[20] C. THOMASSEN, The 2-Linkage Problem for Acyclic Digraphs, *Discrete Mathematics*, **55** (1985), 73 - 87.

[21] W. T. TUTLE, Connectivity in Graphs, *University of Toronto Press*, pg. 11 (1966).