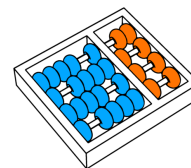


Henrique Vieira e Sousa

“Um estudo sobre conjuntos cliques-dominantes em grafos”

CAMPINAS
2015



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Computação

Henrique Vieira e Sousa

“Um estudo sobre conjuntos cliques-dominantes em grafos”

Orientador(a): **Profa. Dra. Christiane Neme Campos**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Instituto de Computação da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA POR
HENRIQUE VIEIRA E SOUSA, SOB ORIENTAÇÃO DE PROFA. DRA. CHRISTIANE NEME CAMPOS.

Assinatura do Orientador(a)

CAMPINAS

2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

So85e Sousa, Henrique Vieira e, 1989-
Um estudo sobre conjuntos cliques-dominantes em grafos / Henrique Vieira e Sousa. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Christiane Neme Campos.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação.

1. Teoria dos grafos. 2. Conjunto dominante. 3. Conjunto clique-dominante. 4. Partição dominante. 5. Partição clique-dominante. I. Campos, Christiane Neme, 1972-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: A study about dominating clique sets in graphs

Palavras-chave em inglês:

Graph theory

Dominating set

Dominating-clique set

Domatic partition

Clique-domatic partition

Área de concentração: Ciência da Computação

Titulação: Mestre em Ciência da Computação

Banca examinadora:

Christiane Neme Campos [Orientador]

Célia Picinin de Mello

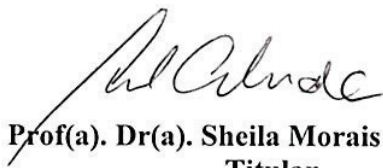
Sheila Moraes de Almeida

Data de defesa: 28-04-2015

Programa de Pós-Graduação: Ciência da Computação

TERMO DE APROVAÇÃO

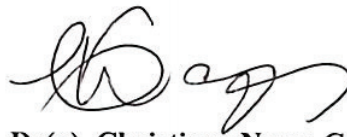
Defesa de Dissertação de Mestrado em Ciência da Computação, apresentada pelo(a) Mestrando(a) **Henrique Viera e Sousa**, aprovado(a) em **28 de abril de 2015**, pela Banca examinadora composta pelos Professores(as) Doutores(as):



Prof(a). Dr(a). Sheila Moraes de Almeida
Titular



Prof(a). Dr(a). Célia Picinin de Mello
Titular



Prof(a). Dr(a). Christiane Neme Campos
Presidente

Um estudo sobre conjuntos cliques-dominantes em grafos

Henrique Vieira e Sousa¹

28 de abril de 2015

Banca Examinadora:

- Profa. Dra. Christiane Neme Campos (Orientadora)
- Profa. Dra. Célia Picinin de Mello
Universidade Estadual de Campinas
- Profa. Dra. Sheila Moraes de Almeida
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
- Prof. Dr. Orlando Lee
Universidade Estadual de Campinas (Suplente)
- Profa. Dra. Raquel de Souza Francisco Bravo
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (Suplente)

¹Apoio financeiro: CAPES e CNPq.

Abstract

A dominating set of a graph $G = (V(G), E(G))$ is a set $S \subseteq V(G)$ such that every vertex of G belongs to S or is adjacent to at least one vertex in S . The *dominating set problem* consists of determining the minimum number of vertices in a dominating set of G . Many real-world applications can be modelled as dominating set problems and some of them led to the appearance of variants of the original problem. A *dominating clique set* is a dominating set that is also a clique. The *dominating clique problem* consists of determining the minimum number of vertices in a dominating clique set of a graph G . In 1977, Cockayne and Hedetniemi [41] defined a *domatic partition* of a graph $G = (V(G), E(G))$ as a partition of $V(G)$ in dominating sets. The *domatic partition problem* consists of determining the maximum number of parts in a domatic partition of a graph. A natural extension of this problem consists of considering partitions of $V(G)$ in dominating sets with additional properties. In particular, a *clique domatic partition* is a partition of $V(G)$ into dominating clique sets; and the *clique domatic partition problem*, the problem of determining the *clique domatic number* of G , $d_{cl}(G) := \max\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ is a clique domatic partition of } G\}$, when G has at least one clique domatic partition.

In this work, we approach the dominating clique problem and the clique domatic partition problem. For the dominating clique problem we review some existing results in the literature and formulate a conjecture, which establishes a sufficient condition for the existence of a dominating clique set in a graph. On the clique domatic partition problem, we obtain results in some classes of graphs. In particular, we characterize the bipartite graphs and powers of cycles which have clique domatic partitions and for these graphs we determine the clique domatic number. Similar results are also obtained for the class of graphs generated by the cartesian product operation and the class of graphs generated by the direct product of complete graphs.

Resumo

Um conjunto dominante em um grafo $G = (V(G), E(G))$ é um conjunto $S \subseteq V(G)$, tal que todo vértice do grafo, ou pertence a S , ou é adjacente a pelo menos um elemento de S . O *problema do conjunto dominante* consiste em determinar a cardinalidade de um conjunto dominante mínimo em um grafo G . Muitas aplicações podem ser modeladas como problemas de conjuntos dominantes e algumas delas levaram ao surgimento de variantes do problema original. O *problema da clique-dominante* consiste em determinar a cardinalidade de um conjunto clique-dominante mínimo em um grafo G . Um *conjunto clique-dominante* é um conjunto dominante que tem a propriedade adicional de ser uma clique. Em 1977, Cockayne e Hedetniemi [41] definiram uma *partição dominante* de um grafo $G = (V(G), E(G))$ como uma partição de $V(G)$ em conjuntos dominantes. O *problema da partição dominante* consiste em determinar a cardinalidade máxima de uma partição dominante. Uma extensão natural deste problema consiste em considerar partições de $V(G)$ em conjuntos dominantes com propriedades adicionais. Em particular, o *problema da partição em cliques-dominantes* consiste em determinar, caso exista, a cardinalidade máxima de uma partição de $V(G)$, tal que cada uma de suas partes seja um conjunto clique-dominante em G . Para um grafo G que possui cliques-dominantes, o seu *número clique-domático* é definido como $d_{cl}(G) := \max\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ é uma partição de } V(G) \text{ em cliques-dominantes}\}$.

Esta dissertação, aborda o problema da clique-dominante e o problema da partição em cliques-dominantes. São estudadas as origens destes dois problemas e alguns dos resultados existentes na literatura. Para o problema da clique-dominante é formulada uma conjectura que estabelece uma condição suficiente para um grafo possuir uma clique-dominante. No problema da partição em cliques-dominantes são exibidos resultados para algumas classes de grafos. Em particular, são caracterizados os grafos bipartidos e as potências de ciclos que possuem partição em cliques-dominantes e para estes grafos o número clique-domático é determinado. Resultados semelhantes também são apresentados para a classe dos grafos obtidos por meio da operação de produto cartesiano e para os grafos obtidos por meio do produto direto de grafos completos.

À minha irmã, Fernanda.

Agradecimentos

- Agradeço à Chris pela excelente orientação, em especial, pela grande dedicação que teve durante todo o trabalho, estando sempre disponível para me ajudar e me apoiar nos momentos em que precisei. Obrigado por ter me incentivado a trabalhar nos meus pontos fracos, isso me fez crescer. Estou muito feliz com o trabalho desenvolvido e gostei muito de ter trabalhado com você, todo o processo valeu muito a pena.
- Agradeço aos membros da banca pela participação na defesa, pelas sugestões dadas e pelo cuidadoso trabalho de revisão que fizeram nesta dissertação.
- Agradeço aos meus pais Fernando e Regina e também ao meu irmão Eduardo pelo apoio em todos os momentos.
- Agradeço a todos os colegas do LOCo que tive contato durante este período. Em particular, agradeço à Alex Brandt, André Carvalho, Atílio Gomes, Davi Tozoni, Lise Rommel, Lucas Melo, Marcelo Galvão, Thiago Arruda e Yulle Glebbyo pela amizade e pela companhia. A convivência com vocês foi extremamente importante para mim.
- Agradeço ao Rafael Schouery pelas sugestões dadas no trabalho.
- Agradeço à CAPES pela bolsa de mestrado no período de 01/08/2012 até 31/03/2014.
- Agradeço à CNPq pela bolsa de mestrado no período de 01/04/2014 até 31/07/2014.

Sumário

Abstract	ix
Resumo	xi
Dedicatória	xiii
Agradecimentos	xv
1 Introdução	1
1.1 Conceitos Básicos	3
1.2 Conjuntos Dominantes	13
2 Problemas de Conjuntos Dominantes	17
2.1 Resultados Clássicos de Conjuntos Dominantes	17
2.2 Variantes de Conjuntos Dominantes	30
2.3 Conjuntos Cliques-Dominantes	36
3 Problemas de Partição Dominante	45
3.1 Resultados Anteriores	46
3.2 Variantes da Partição Dominante	54
4 Resultados	63
5 Conclusão	83
Referências Bibliográficas	85
A Trabalho aceito no LAWCG14	97

Capítulo 1

Introdução

Um grafo é uma abstração matemática utilizada para estudar relações existentes entre elementos de um conjunto. Várias situações do mundo real podem ser representadas por meio de grafos. Em particular, aquelas nas quais temos um grupo de elementos e queremos estudar a relação entre pares de elementos deste grupo, sem nos preocuparmos com o significado dos elementos ou da relação em si. Exemplos de grupos com tais características podem ser tanto um grupo de pessoas para as quais queremos estudar a estrutura formada pelas relações de amizade existentes entre cada par de pessoas, como também um grupo de cidades para as quais queremos estudar as rotas que conectam estas cidades. Foi para resolver um problema em uma situação assim, no qual o foco estava exclusivamente nas conexões entre os elementos, que Leonhard Euler [57] obteve o primeiro resultado em grafos de que se tem conhecimento na literatura, inaugurando a Teoria de Grafos.

O problema resolvido por Euler é conhecido como o Problema das Pontes de Königsberg. A cidade de Königsberg, que foi território da Prússia até 1945 e atualmente se chama Kaliningrado, é cortada pelo rio Prególia e neste rio existe uma ilha que faz parte da cidade. Ao lado desta ilha, o rio se divide em duas partes, deixando mais uma parte da cidade desconectada. Para conectar todas as regiões de terra separadas pelo rio, foram construídas sete pontes. A Figura 1.1 mostra um esquema de como estas regiões e as pontes estão organizadas.

Os habitantes da cidade especulavam se seria possível encontrar um percurso que começasse e terminasse em qualquer ponto da cidade (r_i na Figura 1.1), mas que cruzasse cada uma das sete pontes uma única vez. Em um tal percurso, nenhuma ponte poderia ser parcialmente cruzada e só seria permitido passar de uma região de terra para outra usando as pontes. O *Problema das Pontes de Königsberg* consistia em encontrar um percurso que satisfizesse estas restrições. A dificuldade em resolver este problema estava em analisar o problema e estabelecer se era possível ou não obter tal percurso com rigor matemático.

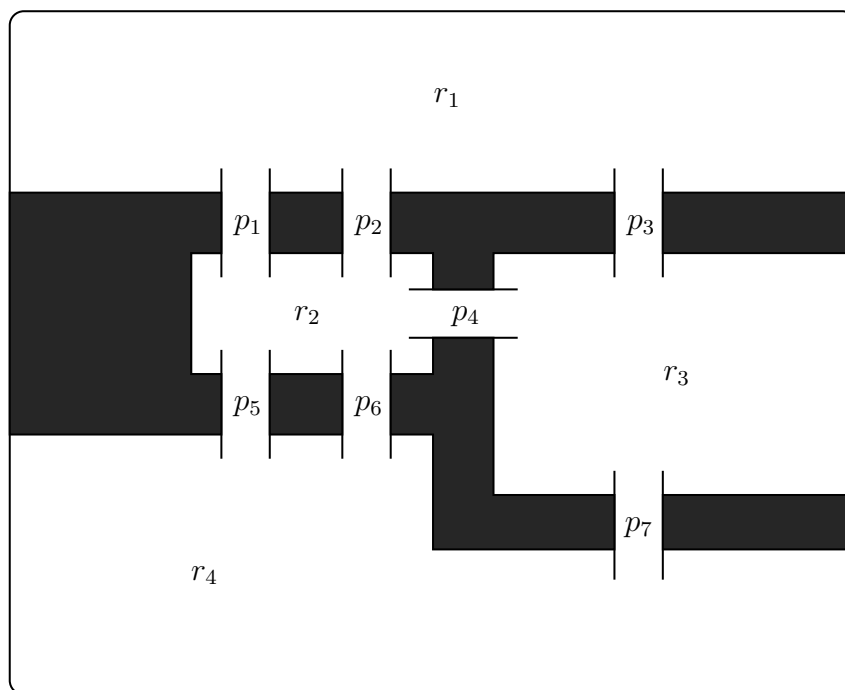


Figura 1.1: Esquema do complexo de pontes construído na cidade de Königsberg. As regiões de terra que fazem parte da cidade estão representadas pelos polígonos com rótulos r_i , $1 \leq i \leq 4$. As pontes que conectavam estas regiões estão rotuladas com p_i , $1 \leq i \leq 7$.

Primeiramente, Euler observou que as rotas escolhidas dentro de cada porção de terra ou durante a travessia de uma ponte eram indiferentes, a única característica importante em um tal percurso era a sequência de regiões de terra e pontes percorridas. Esta constatação o levou a procurar uma representação para o problema que removesse todas as características desnecessárias, como por exemplo, o formato das porções de terra e as distâncias entre os elementos. Com este objetivo em mente, ele abordou o problema como um diagrama, substituindo cada porção de terra por um círculo e cada ponte por um traço conectando os círculos correspondentes às regiões ligadas por esta ponte. A Figura 1.2 exibe a estrutura obtida por Euler. Este é um exemplo do que hoje chamamos de grafo. Os círculos são chamados de *vértices* e os traços são chamados de *arestas*.

Euler reformulou o problema original para o de obter um “percurso” no grafo da Figura 1.2, que passe por cada uma das arestas uma única vez. Como, pelas regras do problema, cada ponte deveria ser completamente cruzada, o percurso não poderia começar ou acabar em uma aresta, ele deveria começar e acabar em vértices. Então, Euler generalizou o problema e chegou a conclusão de que um grafo que tenha um tal percurso deve possuir no máximo dois vértices com um número ímpar de arestas. Como o grafo da Figura 1.2 possui quatro vértices com número ímpar de arestas, ficou provado

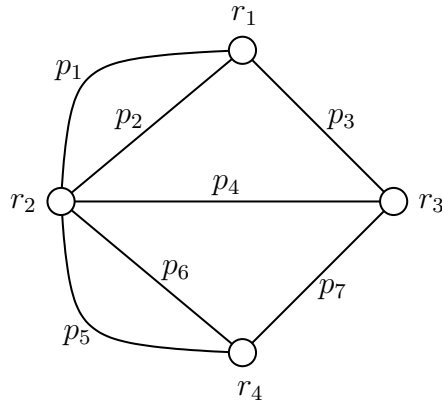


Figura 1.2: Grafo que representa o esquema de pontes de Königsberg desenhado por Euler.

que é impossível obter um percurso respeitando as condições impostas para o Problema das Pontes de Königsberg. Em homenagem ao trabalho que Euler desenvolveu, percursos com tais propriedades são denominados trilhas eulerianas.

Desde o Problema das Pontes de Königsberg, a Teoria de Grafos se expandiu enormemente. Esta expansão foi, e ainda é, motivada, tanto pelos aspectos teóricos interessantes que, naturalmente, surgem à medida que a teoria se desenvolve, como pelas aplicações reais que podem ser modeladas como problemas em grafos.

Esta dissertação aborda problemas relacionados a conjuntos dominantes em grafos, que é um tópico em franco desenvolvimento dentro da teoria. Este capítulo introduz conceitos básicos da Teoria de Grafos, que são necessários para o entendimento dos problemas estudados e estabelece a notação que será adotada ao longo do texto. O capítulo é finalizado com uma breve resenha da origem do problema dos conjuntos dominantes.

1.1 Conceitos Básicos

Um *grafo* G é um par ordenado $(V(G), E(G))$, que consiste em um conjunto não vazio¹ de *vértices*, denotado por $V(G)$, um conjunto de *arestas* $E(G)$, disjunto de $V(G)$, associado a uma *função de incidência* Ψ_G , que relaciona cada aresta de G a dois vértices, não necessariamente distintos, de G . Nesta dissertação, vamos trabalhar com *grafos finitos*, ou seja, grafos que possuem um número finito de vértices e arestas.

Sejam $e \in E(G)$ e $u, v \in V(G)$, tais que $\Psi_G(e) = \{u, v\}$. Então, u e v são denominados *extremidades* de e . Ademais, dizemos que u e v são *incidentes* em e , bem como e é *incidente* em u e em v . Dois vértices incidentes na mesma aresta são ditos *adjacentes*. Analogamente, duas arestas incidentes no mesmo vértice são ditas *adjacentes*. Além

¹Alguns autores admitem um conjunto de vértices vazio.

disto, dizemos que uma aresta *conecta* os vértices nos quais é incidente. Uma aresta com extremidades iguais é chamada de *laço*. Duas arestas distintas que possuem o mesmo par de extremidades são chamadas de *arestas múltiplas*. Um *grafo simples* é um grafo que não possui laços, nem arestas múltiplas.

O *grau* $d_G(v)$ de um vértice v em um grafo G é o número de vezes em que v é extremidade de arestas de G . Um vértice que possui grau igual a zero é chamado de *vértice isolado*. O *grau mínimo* de G , $\delta(G)$, é definido como $\min\{d_G(v) : v \in V(G)\}$. Analogamente, o *grau máximo* de G , $\Delta(G)$, é definido como $\max\{d_G(v) : v \in V(G)\}$. Um grafo é dito *regular* se todos os seus vértices possuem o mesmo grau. Para um inteiro não negativo k , um grafo regular cujos vértices possuem grau k é chamado de *grafo k -regular*. A Figura 1.3 exemplifica estes conceitos.

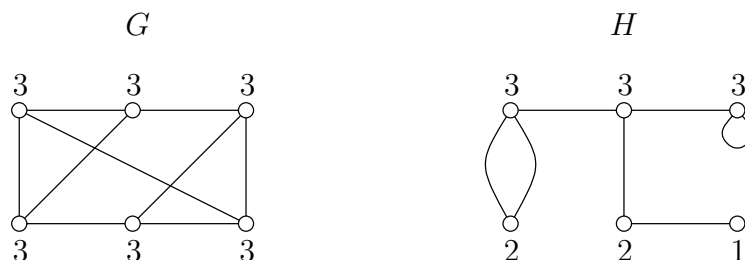


Figura 1.3: Dois grafos para os quais cada um de seus vértices está rotulado com o valor de seu grau. O grafo G é um grafo 3-regular, pois todos os seus vértices possuem grau igual a três. Por outro lado, o grafo H não é um grafo regular, pois possui vértices de grau um, dois e três. Note que $\delta(H) = 1$ e $\Delta(H) = 3$.

A *vizinhança aberta* de um vértice $v \in V(G)$ é definida como $N_G(v) = \{w \in V(G) : \{v, w\} \in E(G)\}$. A *vizinhança fechada* de um vértice $v \in V(G)$ é definida como $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Estendendo o conceito de vizinhança para um conjunto $S \subseteq V(G)$, a *vizinhança aberta* de S é definida como $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$. Analogamente, a *vizinhança fechada* de S é definida como $N_G[S] = N_G(S) \cup S$. Dizemos que um vértice $v \in V(G)$ para o qual $N_G[v] = V(G)$ é um *vértice universal*. Para um conjunto $S \subseteq V(G)$, um vértice $v \in S$ é dito *enclave* em S , se $N_G[v] \subseteq S$; e v é dito *isolado em S* , se $N_G(v) \subseteq V(G) - S$. Além disso, a *vizinhança exclusiva de v em relação a S* é definida como $N_G[v, S] = \{u : (N[u] \cap S) = \{v\}\}$. Os subíndices, como G em $N_G(v)$, podem ser omitidos quando o grafo considerado estiver claro no contexto. A Figura 1.4 exemplifica estes conceitos.

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G , se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, e Ψ_H é a restrição de Ψ_G a H . Seja H um subgrafo de G . Dizemos que G *contém H* , G *possui H* , ou ainda que H *está contido em G* , e denotamos por $H \subseteq G$. O *subgrafo de G induzido por um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$* , denotado por $G[S]$, possui S como conjunto de vértices e conjunto de arestas formado pelas arestas de $E(G)$ que possuem ambas as

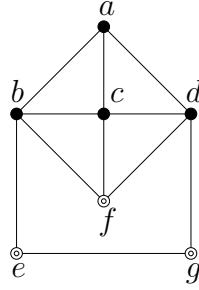


Figura 1.4: Seja $S_1 = \{a, b, c, d\}$ e $S_2 = \{e, f, g\}$. O vértice a é enclave em S_1 , e o vértice f é isolado em S_2 . Além disso, $N[f, S_2] = \{c\}$.

extremidades em S . Estes conceitos estão ilustrados na Figura 1.5.

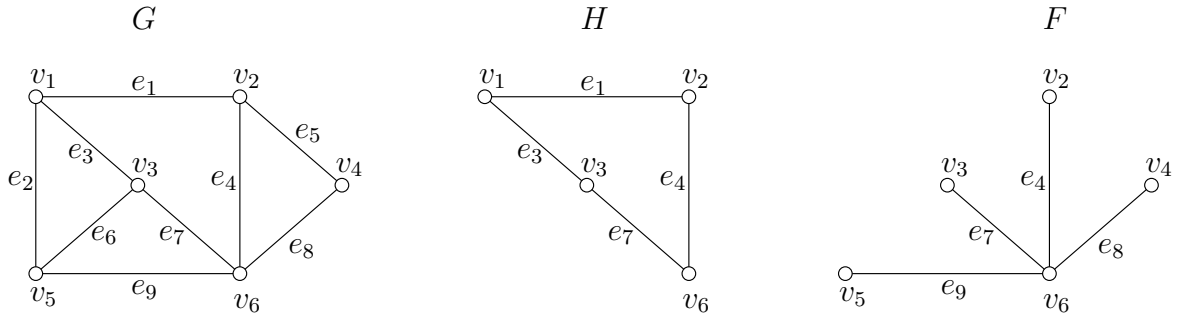


Figura 1.5: Grafo G e seus subgrafos H e F . Note que o subgrafo H é o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $S = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$.

Por simplicidade, vamos denotar o subgrafo $G[V(G) \setminus \{v\}]$ por $G - v$. Para uma aresta $e \in E(G)$ denotamos por $G - e$, o subgrafo de G que possui $V(G)$ como conjunto de vértices e $E(G) \setminus \{e\}$ como conjunto de arestas.

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é dito um *conjunto independente* ou *conjunto estável* se os seus vértices são dois a dois não adjacentes. Um conjunto independente é *máximo*, se não existe outro conjunto independente de cardinalidade maior em G . O *número de estabilidade*, $\alpha(G)$, é definido como a cardinalidade de um conjunto independente máximo, isto é $\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ é um conjunto independente de } G\}$. Um conjunto independente S é *maximal* se não existe nenhum outro conjunto independente S' tal que $S \subset S'$. Em outras palavras, um conjunto S é um conjunto independente maximal se e somente se para todo vértice $u \in V(G) \setminus S$, o conjunto $S \cup \{u\}$ não é independente. A Figura 1.6 ilustra estes conceitos.

Uma *clique* de um grafo G é um conjunto $S \subseteq V(G)$ de vértices dois a dois adjacentes. Uma clique é *máxima*, se não existe outra clique em G de cardinalidade maior. Uma clique S é *maximal* se não existe nenhum vértice em $V(G) \setminus S$ que seja adjacente a todos

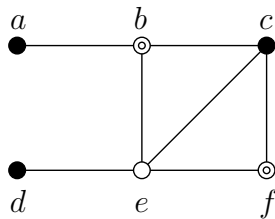


Figura 1.6: Grafo G e seus conjuntos independentes $S_1 = \{a, c, d\}$ e $S_2 = \{b, f\}$. O conjunto S_1 é maximal e máximo. Portanto, $\alpha(G) = |S_1| = 3$. O conjunto S_2 não é maximal, pois $S_2 \cup \{d\}$ é um conjunto independente.

os vértices de S , isto é, se não existe uma outra clique S' tal que $S \subset S'$. O *número clique* de um grafo G , $\omega(G)$, é definido como a cardinalidade de uma clique máxima de G , isto é, $\omega(G) = \max\{|S| : S \text{ é uma clique de } G\}$. Além disso, dizemos que $\underline{\omega}(G)$ é a cardinalidade de uma menor clique maximal de G . Note que todo grafo possui uma clique unitária; e um grafo que possui pelo menos uma aresta sempre contém uma clique de cardinalidade dois. Observando os graus dos vértices de um grafo, concluímos que uma condição necessária para que ele possua uma clique de cardinalidade k é possuir pelo menos k vértices de grau pelo menos $k - 1$. A Figura 1.7 exemplifica esses conceitos.

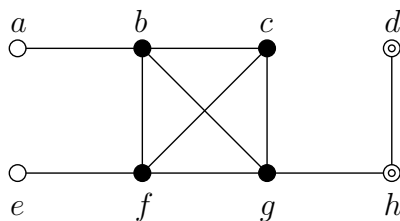


Figura 1.7: Grafo G e suas cliques $C_1 = \{b, c, f, g\}$ e $C_2 = \{d, h\}$ ambas maximais. A clique C_1 é máxima, portanto $\omega(G) = |C_1| = 4$.

Uma *cobertura de vértices por arestas* em um grafo G é um conjunto de arestas $E' \subseteq E(G)$, tal que todo vértice do grafo é incidente em pelo menos uma das arestas de E' . Uma tal cobertura é dita *mínima*, se não existe outra cobertura de vértices por arestas de cardinalidade menor em G . Note que, em um grafo que possui vértices isolados, não existem coberturas de vértices por arestas. Para um grafo G sem vértices isolados, definimos $\beta'(G) = \min\{|E'| : E' \text{ é cobertura de vértices por arestas em } G\}$. A Figura 1.8 mostra exemplos de coberturas de vértices por arestas em um grafo.

Um grafo G com pelo menos dois vértices é *conexo* se, para toda bipartição de $V(G)$ em conjuntos X e Y , existe pelo menos uma aresta com uma extremidade em X e outra em Y . Além disso, um grafo com $|V(G)| = 1$ também é dito conexo. O grafo da Figura 1.9(a) é um exemplo de grafo conexo. Lembrando da idéia de percurso do Problema das Pontes de

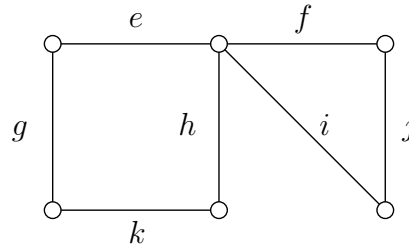


Figura 1.8: Grafo G , com $\beta'(G) = 3$. Ambos os conjuntos $E' = \{e, f, i, k\}$ e $E'' = \{g, h, j\}$ são coberturas de vértices por arestas em G . Porém E'' é uma cobertura mínima.

Königsberg, note que em um grafo conexo, existe pelo menos um percurso entre qualquer par de vértices. De fato, esta é uma definição equivalente de grafos conexos. Utilizando estas definições é simples perceber que o grafo da Figura 1.9(b) não é um grafo conexo. Uma *componente conexa* de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G , ou seja, um subgrafo conexo $H = G[S]$ com $S \subseteq V(G)$, tal que para todo $v \in V(G) \setminus S$ o grafo $G[S \cup \{v\}]$ não é um grafo conexo. O número de componentes conexas de um grafo G é denotado por $c(G)$. Note que um grafo é conexo se e somente se $c(G) = 1$. Na Figura 1.9(b) temos um grafo que possui três componentes conexas.

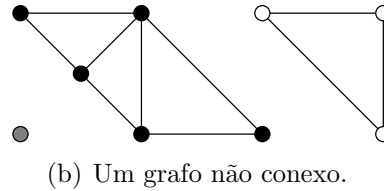
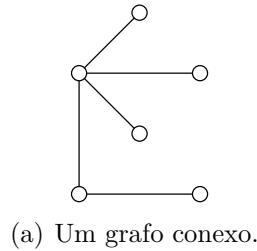


Figura 1.9: O grafo (a) possui $c(G) = 1$, enquanto o grafo (b) possui $c(G) = 3$. Em cada grafo, os vértices que fazem parte da mesma componente conexa possuem cores iguais.

Um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ tal que $c(G[V(G) \setminus S]) > c(G)$ é dito um *corte de vértices*. Em particular, quando este conjunto consiste em um único vértice v dizemos que v é um *vértice de corte*. De forma similar, um conjunto de arestas $E' \in E(G)$ é dito um *corte de arestas* se sua remoção aumenta o número de componentes conexas de G . Se este conjunto consiste em uma única aresta, dizemos que esta aresta é uma *aresta de corte*. Além disto, para um conjunto $S \subseteq V(G)$, o *corte de arestas associado a um conjunto S* , denotado por $\nabla(S)$, consiste no corte de arestas formado pelas arestas de G que possuem uma extremidade em S e a outra em $V(G) \setminus S$. A Figura 1.10 ilustra estes conceitos.

Observe que no grafo da Figura 1.10 não existem vértices de corte, enquanto que no grafo da Figura 1.9(a) existem dois. Além disto, visualmente temos a impressão de que o grafo da Figura 1.10 é o grafo que está melhor conectado entre os dois. Esta intuição está

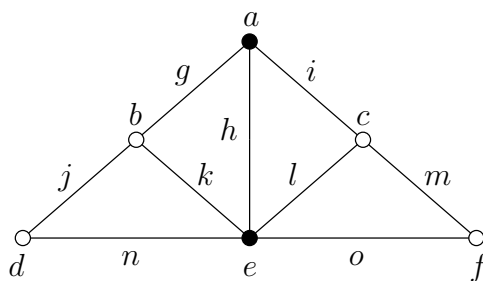


Figura 1.10: Um grafo G e um de seus cortes de vértices, formado pelos vértices pretos. O conjunto $E' = \{g, k, n\}$ é um corte de arestas. Além disto, $\nabla(\{d, e, f\}) = \{h, j, k, l, m\}$.

relacionada com um conceito importante em Teoria de Grafos denominado *conexidade*, que está diretamente ligado ao número de caminhos internamente disjuntos existentes entre os vértices de um grafo. No início deste capítulo falamos brevemente sobre como Euler utilizou percursos em grafos para resolver o Problema das Pontes de Königsberg. Em Teoria de Grafos existem tipos bem específicos de percursos entre os elementos de um grafo. A seguir, vamos definir formalmente estes conceitos.

Um *passeio* em um grafo G é uma sequência alternada de vértices e arestas do grafo $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_l, v_l)$, que começa e termina em vértices, tal que $\Psi_G(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$, $1 \leq i \leq l$. Se o vértice $v_0 = u$ e $v_l = v$ dizemos que P é um *passeio entre u e v* de *comprimento l* . Além disto, dizemos que v_0 e v_l são os *extremos do passeio*, enquanto os vértices $v_1, \dots, v_{l-1}$ são ditos *vértices internos do passeio*. Um *passeio fechado* é um passeio que possui extremos iguais. Uma *trilha* é um passeio no qual nenhuma aresta ocorre mais de uma vez. Enquanto que um *caminho* é um passeio no qual nenhum vértice ocorre mais de uma vez. Note que se uma aresta aparece repetidamente em um passeio, então pelo menos uma de suas extremidades aparece mais de uma vez. Logo, um caminho é também uma trilha. A *distância* entre dois vértices x, y pertencentes a um grafo G , denotada por $d_G(x, y)$, corresponde ao menor comprimento de um caminho entre x e y em G . Caso não exista tal caminho neste grafo, define-se $d_G(x, y) = \infty$. A Figura 1.11 exemplifica estes conceitos.

Dizemos que dois caminhos P_1 e P_2 são *internamente (vértice-)disjuntos* se estes caminhos não possuem vértices internos em comum. Chamamos de *conexidade local* entre dois vértices x e y em um grafo G , e denotamos por $p_G(x, y)$, o número máximo de caminhos internamente disjuntos entre x e y que existem em G . Um grafo G é dito k -conexo se $p(u, v) \geq k$ para todo par de vértices $u, v \in V(G)$, com $u \neq v$. A *conexidade* de um grafo G , denotada por $\kappa(G)$, é definida como o maior valor de k para o qual G é k -conexo. Ou seja, $\kappa(G) = \min\{p(u, v) : u, v \in V(G), u \neq v\}$. A Figura 1.12 mostra um grafo com conexidade igual a três. Note também que o grafo da Figura 1.11 possui conexidade igual a dois.

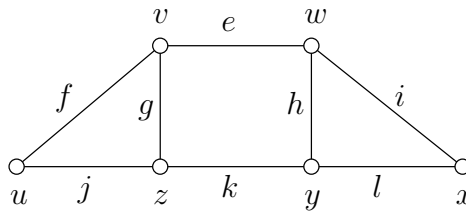


Figura 1.11: Neste grafo $P_1 = (u, f, v, g, z, j, u, f, v)$ é um passeio, $P_2 = (w, i, x, l, y, k, z, g, v, e, w, h, y)$ é uma trilha e $P_3 = (u, f, v, e, w, i, x)$ é um caminho. Como P_3 é um caminho entre u e x com número mínimo de arestas, então $d_G(u, x) = 3$.

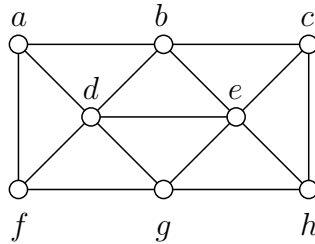


Figura 1.12: Um grafo 3-conexo. Note que $\kappa(G) = \min\{p(u, v) : u, v \in V(G), u \neq v\} = 3$.

Como foi dito anteriormente, muitas situações do mundo real podem ser modeladas como problemas em grafos. O que se observa é que frequentemente é conveniente agrupar grafos que compartilham propriedades estruturais. Estes grafos em conjunto formam o que se denomina *classes de grafos*. Por exemplo, a classe dos grafos 3-regulares, *grafos cúbicos*, fundamental para vários problemas importantes em Teoria de Grafos. A seguir definimos algumas classes de grafos clássicas.

Um *grafo completo* é um grafo simples que possui uma aresta conectando cada par de vértices. Um grafo completo de n vértices é denotado por K_n . A Figura 1.13 mostra um grafo completo com seis vértices.

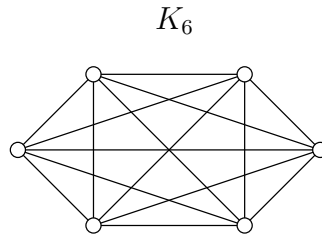


Figura 1.13: Um grafo completo de seis vértices.

Uma outra classe tradicional de grafos são os grafos bipartidos. Um grafo G é um *grafo bipartido*, se existe uma bipartição $\{X, Y\}$ de seu conjunto de vértices, tal que toda

aresta $e \in E(G)$ possui uma extremidade em X e a outra em Y . Um *grafo bipartido completo* é um grafo bipartido que possui bipartição $\{X, Y\}$ e uma aresta conectando cada par de vértices x, y com $x \in X$ e $y \in Y$. Um grafo bipartido completo que possui uma bipartição com partes de cardinalidade m e n é denotado por $K_{m,n}$. A Figura 1.14 mostra um grafo bipartido e um grafo bipartido completo, ambos com três vértices em cada parte de suas bipartições.

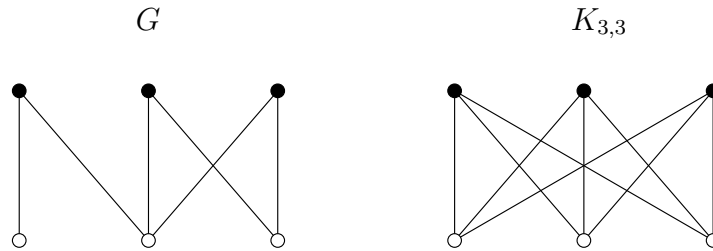


Figura 1.14: Ambos os grafos são bipartidos pois para cada um deles podemos formar uma bipartição $\{X, Y\}$, com X composto pelos vértices pretos e Y pelos vértices brancos. Entretanto, apenas o grafo da direita é um grafo bipartido completo.

Um *grafo caminho* é um grafo simples, cujos vértices podem ser organizados em uma sequência linear, de forma que dois vértices são adjacentes se eles são consecutivos na sequência, e não são adjacentes, caso contrário. Um *grafo ciclo* de três ou mais vértices é um grafo simples, cujos vértices podem ser organizados em uma sequência cíclica, de maneira que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na sequência, e não são adjacentes, caso contrário. Um ciclo de um vértice é um laço, e um ciclo de dois vértices consiste em dois vértices conectados por um par de arestas múltiplas. Um grafo caminho com n vértices é denotado por P_n , enquanto que um grafo ciclo com n vértices é denotado por C_n . O *tamanho* de um ciclo ou de um caminho consiste no seu número de arestas. A Figura 1.15 exhibe exemplos de grafos pertencentes às classes citadas.

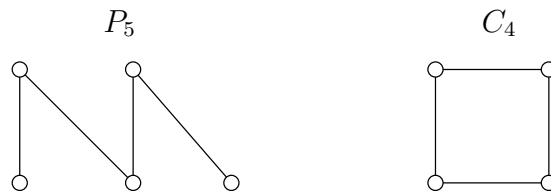


Figura 1.15: Um grafo caminho com cinco vértices e um grafo ciclo de quatro vértices.

Como foi dito acima, as classes de grafos são uma forma de agrupar grafos convenientemente. Existem muitas classes de grafos definidas na literatura [19] e muitas vezes os grafos que pertencem a uma classe de grafos podem ser construídos a partir de certas

operações. Em particular para esta dissertação, duas operações (binárias) em grafos são importantes.

O *produto cartesiano* de dois grafos simples G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \square G_2$, que possui $V(G_1) \times V(G_2)$ como conjunto de vértices, e dois vértices (u, v) e (x, y) adjacentes se e somente se, ou $u = x$ e $\{v, y\} \in E(G_2)$, ou $\{u, x\} \in E(G_1)$ e $v = y$. A Figura 1.16 exemplifica esse produto.

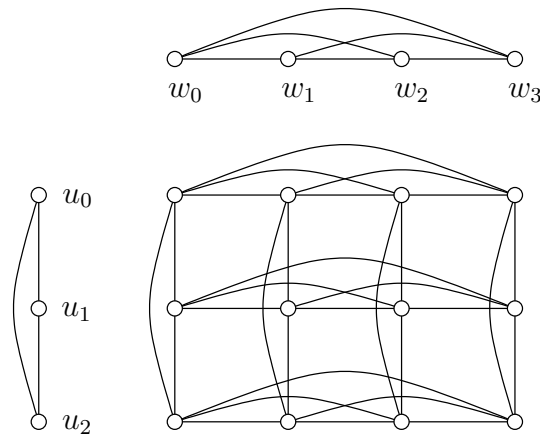


Figura 1.16: Produto cartesiano do K_3 pelo K_4 .

O *produto direto* de dois grafos simples G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \times G_2$, que também possui conjunto de vértices $V(G_1) \times V(G_2)$, com dois vértices (u, v) e (x, y) adjacentes se e somente se $\{u, x\} \in E(G_1)$ e $\{v, y\} \in E(G_2)$. A Figura 1.17 exemplifica este produto para os grafos K_3 e K_4 .

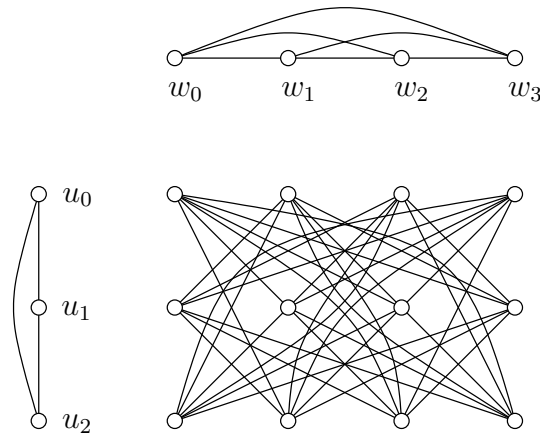


Figura 1.17: Produto direto do K_3 pelo K_4 .

Uma outra operação que ocorre com frequência é a *junção* $G_1 \vee G_2$ entre dois grafos G_1 e G_2 disjuntos. Este grafo possui conjunto de vértices $V(G_1) \cup V(G_2)$ e conjunto de

arestas $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{\{u, v\} : u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$. A Figura 1.18 mostra a junção de um C_4 com um C_3 .

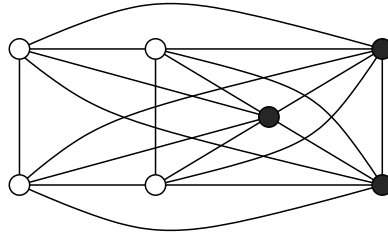


Figura 1.18: Grafo obtido pela junção de um C_4 e um C_3 .

O marco do início da Teoria de Grafos foi o Problema das Pontes de Königsberg em 1736. Entretanto, o grande propulsor do desenvolvimento da área foi um problema de coloração de grafos conhecido como *Problemas das Quatro Cores*. Estabelecido em 1852, em sua versão mais simples, este problema perguntava se quatro cores sempre seriam suficientes para colorir um mapa político, de maneira que países vizinhos (por uma área maior que um ponto) recebessem cores distintas.

Do ponto de vista de grafos, uma k -coloração de um grafo G é uma atribuição de cores aos seus vértices, ou seja, uma função $f : V(G) \rightarrow \mathcal{C}$, na qual o conjunto $\mathcal{C}$ é chamado de *conjunto de cores* e $|\mathcal{C}| = k$. Os vértices associados a uma mesma cor formam uma *classe de cor*. Uma k -coloração é dita *própria*, se não existem dois vértices adjacentes com a mesma cor. O menor valor de k para o qual um grafo G possui uma k -coloração própria é chamado de *número cromático* de G e é denotado por $\chi(G)$. Dizemos que uma coloração própria com $\chi(G)$ cores é uma *coloração ótima* de G . A Figura 1.19 ilustra estes conceitos. Note que obter uma k -coloração própria de um grafo equivale a particionar o seu conjunto de vértices em k conjuntos independentes.

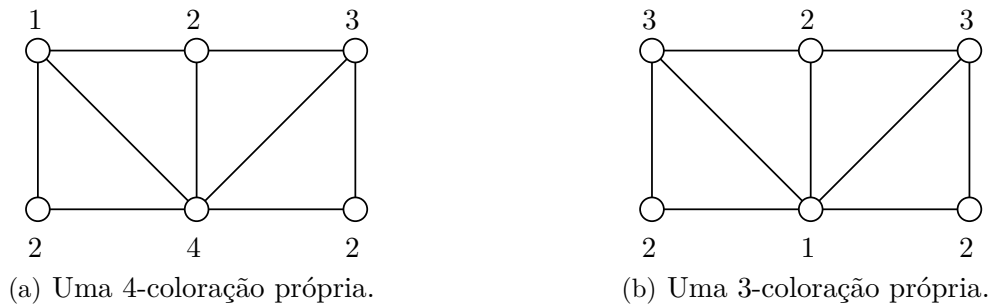


Figura 1.19: Duas colorações próprias para um mesmo grafo G . Note que, a coloração (b) é uma coloração ótima. Logo, $\chi(G) = 3$.

Coloração é um ramo muito importante da Teoria de Grafos. A coloração brevemente descrita no parágrafo anterior atribui cores aos vértices do grafo. De forma mais geral,

problemas de coloração envolvem a atribuição de cores a elementos do grafo (vértices e arestas) sujeita a certas restrições. Qualquer livro-texto de boa qualidade introduz os conceitos fundamentais de coloração [16,17,48,125]. Além disso, existem livros específicos que fazem boas resenhas da área e dos seus problemas relacionados [34,83].

1.2 Conjuntos Dominantes

Nesta seção, introduzimos o conceito de conjuntos dominantes, foco desta dissertação de mestrado. Em um grafo G , um conjunto $S \subseteq V(G)$ é denominado um *conjunto dominante*, se para todo vértice $v \in V(G)$, ou v é um elemento de S , ou v é adjacente a um elemento de S . Isto é, $N[S] = V(G)$. A Figura 1.20 exhibe um grafo e dois de seus conjuntos dominantes.

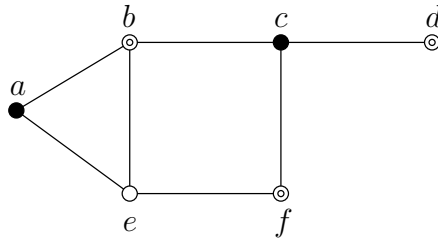


Figura 1.20: Os conjuntos $D_1 = \{a, c\}$ e $D_2 = \{b, d, f\}$ são conjuntos dominantes de G .

Note que $V(G)$ é sempre um conjunto dominante. Desta forma, o desafio está em encontrar um conjunto dominante de cardinalidade menor. Um conjunto dominante é *mínimo*, se não existe outro conjunto dominante de menor cardinalidade em G . O *número de dominação* de G , $\gamma(G)$, é definido como a cardinalidade de um conjunto dominante mínimo de G , isto é $\gamma(G) = \min\{|S| : S \text{ é um conjunto dominante de } G\}$. O conjunto de todos os conjuntos dominantes mínimos de um grafo é denotado por $\mathcal{D}(G)$. No exemplo ilustrado na Figura 1.20, $\gamma(G) = |D_1| = 2$, pois não existe nenhum vértice universal em G . Já na Figura 1.21, $\gamma(G) = 3$ e $\mathcal{D}(G) = \{\{a, c, e\}, \{a, c, f\}, \{a, d, f\}, \{b, c, e\}, \{b, c, f\}, \{b, d, f\}\}$.

Seja S um subconjunto de vértices de G . Dizemos que um vértice $v \in V(G)$ é *dominado* por S , se v ou pertence a S , ou é adjacente a pelo menos um elemento de S . Seja S' tal que $S \subseteq S' \subseteq V(G)$. Note que todos os vértices dominados por S também são dominados por S' . Isto significa que se S é um conjunto dominante, então S' também é um conjunto dominante. Por outro lado, $S'' \subseteq S$ não necessariamente é um conjunto dominante de G , como ilustra a Figura 1.21. Se não existe $S' \subset S$, tal que S' seja um conjunto dominante, então S é um *conjunto dominante minimal*. Na Figura 1.21, o conjunto S é um conjunto dominante minimal de G , pois, para cada vértice $v \in S$, existe um vértice $u \in V(G) \setminus S$, tal que u é dominado somente por v .

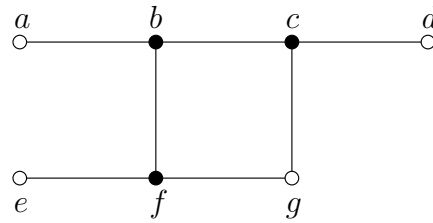


Figura 1.21: Grafo G e um de seus conjuntos dominantes, S , composto pelos vértices pretos. Note que o conjunto $\{c, f\} \subset S$ não é um conjunto dominante.

O estudo formal dos conjuntos dominantes se iniciou por volta de 1960, embora problemas relacionados a eles tenham sido estudados anteriormente. Os relatos mais antigos se originaram em tabuleiros de xadrez, tendo sido analisados por enxadristas em meados do século XIX.

Em um jogo de xadrez, cada peça se movimenta de acordo com uma determinada regra. Com um único movimento, a rainha pode atacar ou ocupar qualquer casa que esteja na mesma linha horizontal, vertical ou diagonal da casa que ela estiver ocupando. A Figura 1.22 mostra as casas que podem ser alcançadas por uma rainha, na regra padrão do xadrez.

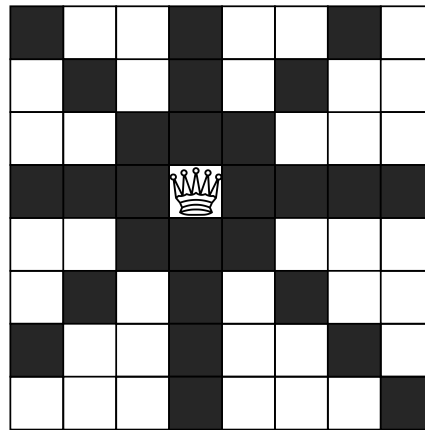


Figura 1.22: As casas hachuradas podem ser atacadas ou ocupadas pela rainha com um único movimento.

Entusiastas europeus do xadrez estudaram o problema de determinar o número mínimo de rainhas a serem colocadas no tabuleiro de xadrez, de modo que todas as casas, ou estejam ocupadas por uma rainha, ou possam ser ocupadas, com um único movimento, por pelo menos uma destas rainhas. Na época, suspeitava-se que cinco era o número mínimo de rainhas para resolver este problema para o tabuleiro padrão do xadrez, que possui oito linhas e oito colunas. A Figura 1.23 exhibe uma forma de atingir o objetivo

posicionando cinco rainhas. Em 1862, C. Jaenisch [46] generalizou o problema, considerando um tabuleiro $n \times n$. Para o caso $n = 8$, cinco, de fato, é o número mínimo de rainhas.

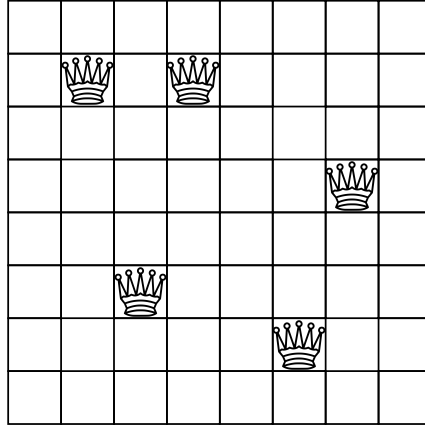


Figura 1.23: Cinco rainhas posicionadas de modo que qualquer casa está ocupada ou pode ser atacada por pelo menos uma rainha.

Este problema é considerado a origem do conceito dos conjuntos dominantes porque, embora ele não tenha sido apresentado diretamente como um problema de conjuntos dominantes, ele pode ser modelado como um problema de conjuntos dominantes em grafos. Para isto, basta definir o grafo G cujos vértices representam as casas do tabuleiro e existem arestas somente entre os pares de vértices u e v para os quais é possível que uma rainha posicionada em u alcance v com apenas um movimento. A Figura 1.24 exibe os vértices adjacentes ao vértice onde a rainha da Figura 1.22 está posicionada.

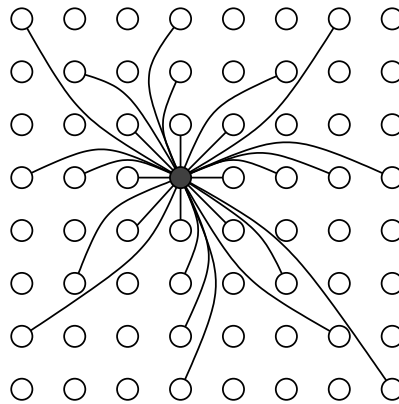


Figura 1.24: Vizinhança do vértice correspondente à casa da rainha exibida na Figura 1.22.

Pela definição do grafo G , em um dado conjunto de vértices S neste grafo, os vértices dominados por este conjunto correspondem às casas que seriam ocupadas ou atacadas se

houvesse uma rainha em cada uma das casas correspondentes aos vértices em S . Portanto, o problema de determinar o menor número de rainhas se traduz diretamente no problema de determinar o número de dominação do grafo G .

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos. No próximo capítulo vamos abordar problemas e resultados clássicos envolvendo conjuntos dominantes. No terceiro capítulo nos concentramos no problema da partição em conjuntos dominantes, exibindo resultados importantes e variações deste problema. No quarto capítulo apresentamos os resultados que obtivemos no problema da partição em cliques-dominantes, que introduzimos no capítulo anterior. O capítulo 5, apresenta as nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

Como última observação deste capítulo, ressaltamos que os resultados existentes na literatura mencionados neste texto são nomeados seguindo a escolha de seus autores. Desta forma, um resultado será apresentado como lema, proposição ou teorema de acordo com a denominação dada no artigo original.

Capítulo 2

Problemas de Conjuntos Dominantes

No capítulo anterior, argumentamos que a origem do problema dos conjuntos dominantes remonta ao século XIX, como diversão de enxadristas. Entretanto, uma abordagem formal e sistemática deste problema teve início somente a partir da década de 1960. Desde então, a área tem atraído a atenção de muitos pesquisadores [37, 41, 77, 78, 124], e ainda se encontra em franca expansão, com novos resultados aparecendo regularmente [49, 56, 95, 116, 129].

O objetivo deste capítulo é fazer uma coletânea de alguns resultados existentes na literatura, à medida que alguns conceitos clássicos e variantes do problema original são apresentados. Considerando a vastidão dos resultados existentes sobre o tópico, é importante ressaltar que esta coletânea é não exaustiva. Para uma resenha da área até 1998, o leitor interessado pode consultar os textos de Haynes et al. [74, 75]. No entanto, para variantes específicas em conjuntos dominantes, existem resenhas mais atualizadas [33, 35, 67, 76, 79].

Este capítulo está dividido em três seções. Na primeira seção, são apresentados resultados sobre o problema de conjuntos dominantes original, ou seja, o problema de determinar a cardinalidade de um conjunto dominante mínimo em um grafo. Na segunda seção, são introduzidas algumas das variantes de conjuntos dominantes. Na última seção, é apresentada a variante que é o foco desta dissertação, as cliques-dominantes.

2.1 Resultados Clássicos de Conjuntos Dominantes

A primeira definição formal do conceito de número de dominação foi feita por C. Berge [11] em seu livro *Theory of Graphs and its Applications*, mas usando o nome de *coeficiente de estabilidade externa*. Somente alguns anos depois, Ø. Ore [104] publicou o livro *Theory of Graphs*, no qual os nomes “conjunto dominante” e “número de dominação” foram usados pela primeira vez. A notação $\gamma(G)$ só foi introduzida em 1977, por E. Cockayne e S. Hedetniemi [41], em um trabalho muito importante para a área. Neste trabalho, os autores fizeram uma resenha dos resultados conhecidos até aquele momento e introduziram

novos problemas em conjuntos dominantes, ajudando a despertar o interesse de outros pesquisadores.

Os primeiros teoremas sobre conjuntos dominantes de que se tem conhecimento na literatura são atribuídos a Ore [104]; alguns deles estão apresentados a seguir.

Teorema 2.1 (Ore [104]). *Um conjunto dominante S é um conjunto dominante minimal se e somente se, para todo vértice $v \in S$, existe pelo menos um vértice $u \in N[v]$ tal que $(N[u] \cap S) = \{v\}$.*

Demonstração. Seja S um conjunto dominante minimal em um grafo G . Suponha que exista um vértice $v \in S$ tal que, para todo $u \in N[v]$, $(N[u] \cap S) \neq \{v\}$. Isto significa que todo vértice em $N[v]$ é dominado por pelo menos um outro vértice de S . Portanto, $N[S \setminus \{v\}] = N[S] = V(G)$. Logo, $S \setminus \{v\}$ é um conjunto dominante de G .

Seja S um conjunto dominante em um grafo G tal que, para todo vértice $v \in S$, existe pelo menos um vértice $u \in N[v]$ com $(N[u] \cap S) = \{v\}$. Tome $v \in S$ e $u \in N[v]$ com $(N[u] \cap S) = \{v\}$. O conjunto $S \setminus \{v\}$ não é um conjunto dominante, pois não domina o vértice u . Logo, S é um conjunto dominante minimal. $\square$

Em outro resultado, Ore observou que em um grafo conexo não trivial existe um conjunto dominante cujo complemento também é um conjunto dominante, conforme explicitado no Teorema 2.2. Note que para obter um par de conjuntos com esta propriedade, basta tomar uma árvore geradora de G enraizada em um vértice v e classificar cada vértice de G de acordo com a paridade de sua distância em relação a v .

Teorema 2.2 (Ore [104]). *Todo grafo conexo G , com $n \geq 2$ vértices, possui um conjunto dominante S cujo complemento $V(G) \setminus S$ também é um conjunto dominante.* $\square$

Observe que se existir um vértice isolado em G , este vértice pertence a todos os conjuntos dominantes de G . Neste caso, não existe nenhum conjunto dominante em G cujo complemento também seja um conjunto dominante. Contudo, caso não existam vértices isolados em G , o complemento de qualquer conjunto dominante minimal também é um conjunto dominante. Isto ocorre porque todo vértice não isolado v pertencente a um conjunto dominante minimal S possui pelo menos um vizinho em $V(G) \setminus S$. Este resultado, que é praticamente um corolário do Teorema 2.1, também foi formalizado por Ore e está expresso no Teorema 2.3.

Teorema 2.3 (Ore [104]). *Se G é um grafo sem vértices isolados, então para todo conjunto dominante minimal S , o seu complemento $V(G) \setminus S$ também é um conjunto dominante.* $\square$

Em geral, quando se estuda um parâmetro em grafos, é interessante determinar em qual intervalo este parâmetro varia, ou seja, obter limitantes superiores e inferiores para o

valor deste parâmetro. Estes limitantes podem se dar em valores numéricos ou em relação a outros parâmetros do grafo. Esta é uma abordagem bastante promissora, em particular, para conjuntos dominantes.

Um limitante superior imediato para o número de dominação de um grafo é o seu número de vértices e este é o melhor limitante superior possível no caso geral, pois $\gamma(\overline{K_n}) = n$. Do mesmo modo, é fácil perceber que o melhor limitante inferior no caso geral é um, já que qualquer grafo G que possua vértices universais possui $\gamma(G) = 1$. Estas observações implicam que, para o caso geral, $1 \leq \gamma(G) \leq |V(G)|$ e isto é o melhor possível. Entretanto, os exemplos em que $\gamma(G) = 1$ e $\gamma(G) = |V(G)|$ são também um certificado de que a avaliação para o caso geral pode ser muito limitada. Desta forma, considerar restrições, frequentemente, leva à obtenção de melhores limitantes. Um dos primeiros resultados nesta direção foi obtido por Ore [104] e é uma consequência direta do Teorema 2.3.

Teorema 2.4 (Ore [104]). *Se G é um grafo sem vértices isolados com n vértices. Então, $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.* $\square$

Os grafos que atingem a igualdade no Teorema 2.4 foram caracterizados, independentemente, por C. Payan e N. H. Xuong [105] e J. F. Fink et al. [61]. Para definir esta classe de grafos é necessário introduzir uma operação binária de grafos chamada *corona*¹. A *corona de dois grafos* G_1 e G_2 consiste no grafo $G_1 \circ G_2$, que é formado por uma cópia do grafo G_1 e $|V(G_1)|$ cópias do grafo G_2 com a adição de arestas entre o i -ésimo vértice de G_1 e todos os vértices da i -ésima cópia de G_2 . A Figura 2.1 exemplifica esta operação.

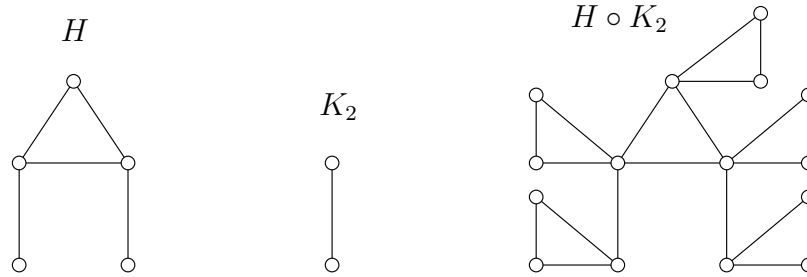


Figura 2.1: O grafo $H \circ K_2$ é o grafo obtido pela corona dos grafos H e K_2 .

A classe de grafos obtida por Payan e Xuong [105] e Fink et al. [61] é formada pelos grafos cujas componentes conexas são isomorfas, ou a um C_4 , ou à corona de um grafo conexo H e um K_1 . Um exemplo pertencente a esta classe está exibido na Figura 2.2.

Em 1989, W. McCuaig e B. Shepherd [97] aprimoraram o limitante superior do Teorema 2.4. Estes autores demonstraram que, com exceção dos grafos que pertencem a família $\mathcal{A}$, exibida na Figura 2.3, todos os outros grafos conexos com grau mínimo maior ou igual a dois possuem $\gamma(G) \leq \frac{2|V(G)|}{5}$. Este resultado está explicitado no Teorema 2.5.

¹A operação corona foi definida por F. Harary e R. Frucht [71].

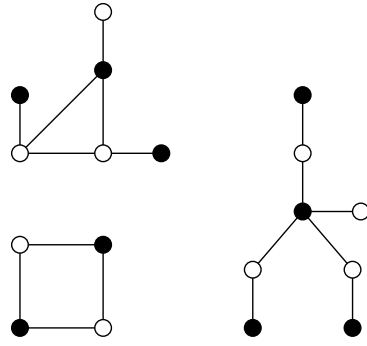


Figura 2.2: Grafo G composto de três componentes conexas: uma delas isomorfa a um C_4 ; outra isomorfa a um $C_3 \circ K_1$; e a terceira isomorfa a um $K_{1,3} \circ K_1$. Os vértices em preto formam um conjunto dominante. Observe que $\gamma(G) = \frac{|V(G)|}{2}$.

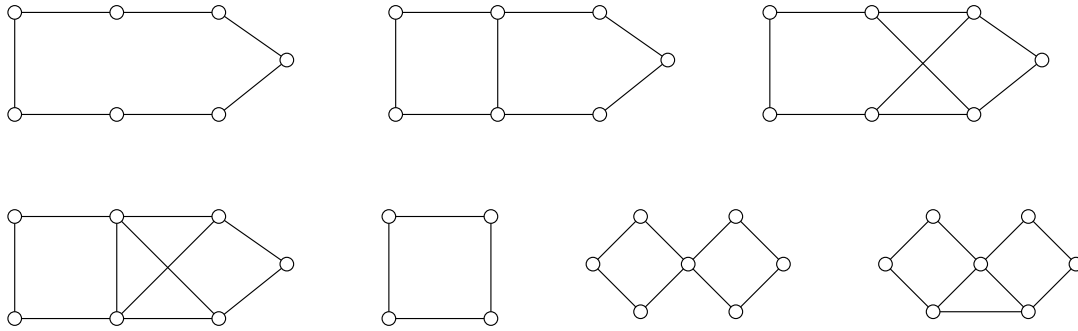


Figura 2.3: Grafos da família $\mathcal{A}$ construída por McCuaig e Shepherd [97].

Teorema 2.5 (McCuaig e Shepherd [97]). *Seja G um grafo conexo com n vértices tal que, $\delta(G) \geq 2$ e $G \notin \mathcal{A}$. Então, $\gamma(G) \leq \frac{2n}{5}$.* $\square$

No mesmo artigo em que estabeleceram o limite do Teorema 2.5, os autores demonstraram que este limitante é justo, ao caracterizar os grafos conexos com $\delta(G) \geq 2$ e $\gamma(G) = \frac{2|V(G)|}{5}$ que possuem número máximo ou número mínimo de arestas. Esta família de grafos, que possui uma definição muito complexa, não será apresentada aqui. Em 1998, Haynes et al. [75] obtiveram uma outra família de grafos que atinge a igualdade no Teorema 2.5. A Figura 2.4 esquematiza a construção desta família.

Em 1996, B. Reed [108] analisou grafos conexos que possuem grau mínimo maior ou igual a três e obteve um limitante superior melhor. Este resultado é apresentado no Teorema 2.6.

Teorema 2.6 (Reed [108]). *Seja G um grafo conexo com n vértices e $\delta(G) \geq 3$. Então, $\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}$.* $\square$

Note que parece existir um padrão na sequência de frações obtidas nos Teoremas 2.4, 2.5

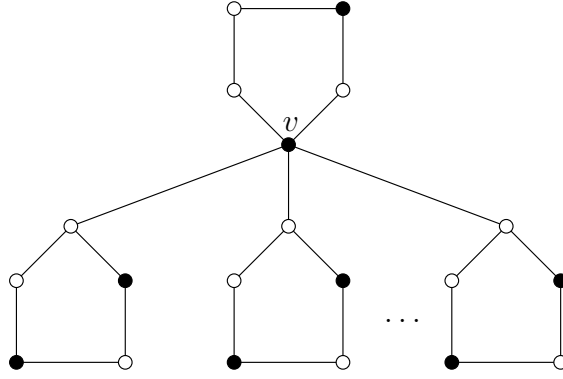


Figura 2.4: Uma família infinita de grafos com $\delta(G) = 2$ e $\gamma(G) = \frac{2|V(G)|}{5}$. Um grafo desta família é construído a partir de um número qualquer de grafos C_5 . Os vértices pretos pertencem a um conjunto dominante mínimo.

e 2.6. Observando tal padrão, Haynes et al. [75] formularam a conjectura para o número de dominação de um grafo em função do seu grau mínimo apresentada a seguir.

Conjetura 2.7 (Haynes et al. [75]). *Todo grafo G com n vértices e $\delta(G) \geq k$ possui $\gamma(G) \leq \frac{kn}{3k-1}$.*

Esta conjectura foi verificada para $k = 4$, por Moo Y. Sohn e Yuan X. [115]; para $k = 5$ por Hua-Ming X. et al. [127]; e para $k = 6$ por Cao J. et al. [29]. Porém, em 1990, Y. Caro e Y. Roditty [30, 31] obtiveram um limitante mais justo para os grafos com $\delta(G) \geq 7$, explicitado no Teorema 2.8.

Teorema 2.8 (Caro e Roditty [30, 31]). *Para todo grafo G com n vértices,*

$$\gamma(G) \leq n \left[1 - \delta(G) \left(\frac{1}{\delta(G) + 1} \right)^{1 + \frac{1}{\delta(G)}} \right].$$

□

Outro limitante em função do grau mínimo foi obtido em 1998 por Clark et al. [37].

Teorema 2.9 (Clark et al. [37]). *Para todo grafo G com n vértices,*

$$\gamma(G) \leq \left(1 - \prod_{i=1}^{\delta(G)+1} \frac{i\delta(G)}{i\delta(G) + 1} \right) n.$$

□

Neste mesmo trabalho, os autores aprimoraram um pouco o resultado anterior ao considerar grafos regulares. Em 2012, C. Biró et al. [14] obtiveram o melhor limitante conhecido para o número de dominação de grafos regulares, com $\delta(G) \geq 6$.

Teorema 2.10 (Biro et al. [14]). *Para um grafo d -regular G com n vértices,*

$$\gamma(G) \leq \left(1 - \frac{d^2 - d + 1}{1 + d \prod_{j=1}^{d-1} \left(1 + \frac{d+1}{jd} \right)} \right) n.$$

□

O que nossa pesquisa bibliográfica revelou é que, em função do grau mínimo, os limitantes do Teorema 2.8 e Teorema 2.9 são os mais precisos. Para alguns casos, o limitante do Teorema 2.9 é o melhor, para outros, o Teorema 2.8 apresenta o melhor resultado.

Os limitantes anteriormente mencionados puderam ser melhorados ao se analisar o grau mínimo do grafo. Outros limitantes foram obtidos ao se analisar o grau máximo do grafo, ou este em conjunto com o grau mínimo, dois dos quais explicitados no Teorema 2.11 e no Teorema 2.12. Note que, por definição, cada vértice domina os vértices de sua vizinhança fechada. Desta forma, o número mínimo de vértices necessários para se obter um conjunto dominante é $\lceil \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1} \rceil$. O primeiro a observar este resultado foi H. B. Walikar [123], em 1979. Não é difícil ver que, este limitante pode se tornar mais preciso se colocado em função dos graus de cada um dos vértices separadamente. Entretanto, este resultado, Teorema 2.11, só apareceu na literatura em 1995.

Teorema 2.11 (Slater [114]). *Seja G um grafo com n vértices tal que, os graus de seus vértices formam uma sequência $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$, com $d(v_i) \geq d(v_{i+1})$. Então,*

$$\gamma(G) \geq \min\{k : k + (d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_k)) \geq n\}.$$

□

Teorema 2.12 (Flach e Volkmann [62]). *Para todo grafo G com n vértices,*

$$\gamma(G) \leq \left(n + 1 - (\delta(G) - 1) \frac{\Delta(G)}{\delta(G)} \right) / 2.$$

□

Os limitantes que consideram o número de vértices e seus graus tentam, de certa forma, capturar a distribuição das arestas no grafo para obter informações sobre a cardinalidade de um conjunto dominante mínimo. Berge [11], em seu trabalho seminal na área, foi o primeiro a analisar simultaneamente $|V(G)|$ e $|E(G)|$ para limitar $\gamma(G)$. Seu resultado está explicitado no Teorema 2.13.

Teorema 2.13 (Berge [11]). *Seja G um grafo com n vértices e m arestas, então*

$$n - m \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G).$$

□

Um limitante mais sofisticado foi obtido por V. G. Vizing [122] em 1981:

Teorema 2.14 (Vizing [122]). *Seja G um grafo com n vértices, m arestas e $\gamma(G) \geq 2$. Então,*

$$m \leq \left\lfloor \frac{1}{2} (n - \gamma(G)) (n - \gamma(G) + 2) \right\rfloor.$$

□

Neste mesmo trabalho, Vizing ainda caracterizou a família $\mathcal{B}$, composta pelos grafos cujo número de dominação atinge a igualdade no Teorema 2.14. Os grafos desta família são construídos a partir de um grafo $G \cong H \vee \overline{K_2}$. O grafo H é formado por um grafo completo K_t , removendo-se as arestas de uma cobertura mínima de vértices por arestas. Os grafos pertencentes à família $\mathcal{B}$ são os grafos que podem ser obtidos pela adição de zero ou mais vértices isolados ao grafo G . A Figura 2.5 mostra um exemplo de grafo pertencente a esta família.

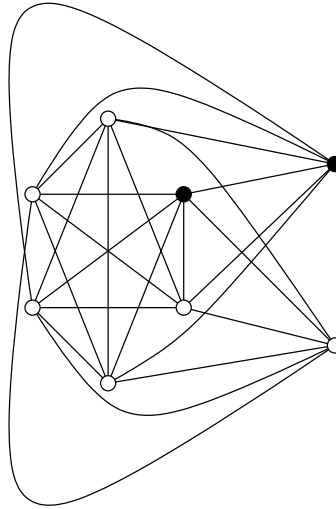


Figura 2.5: Exemplo de grafo pertencente à família $\mathcal{B}$, construída por Vizing [122].

Note que, $\beta'(K_t) = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$. Portanto, H possui $\frac{t(t-1)}{2} - \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ arestas. Como na junção são adicionadas exatamente $2t$ arestas, o grafo G possui exatamente $\frac{t(t-1)}{2} - \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + 2t$ arestas. Note que $\gamma(G) = 2$, pois não existem vértices universais em G e G pode ser dominado pelas extremidades de qualquer uma das arestas adicionadas na junção. Sendo

$n = |V(G)| = t + 2$ e $m = |E(G)|$, temos que $m = \frac{(n-2)(n-3)}{2} - \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil + 2(n-2) = \left\lfloor \frac{1}{2}(n-2)n \right\rfloor$, obtendo a igualdade no Teorema 2.14.

O caso descrito anteriormente exemplifica os grafos $G \in \mathcal{B}$ tais que $G \cong H \vee \overline{K_2}$. Como argumentado no parágrafo anterior, estes grafos possuem $\gamma(G) = 2$. Considere agora $G' \in \mathcal{B}$ tal que G' possui uma componente conexa isomorfa a G e vértices isolados. Observe, inicialmente, que G e G' possuem o mesmo número de arestas. Além disso, cada vértice isolado aumenta em uma unidade o número de vértices e também o número de dominação. Logo, o fator $(n - \gamma(G))$ se mantém constante. Portanto, para o grafo G' também vale a igualdade no Teorema 2.14. Observe ainda, que os grafos da família $\mathcal{B}$ também alcançam o limitante superior obtido por Berge no Teorema 2.13, ou seja, possuem $\gamma(G) = n - \Delta(G)$.

Como todos os grafos que possuem $\gamma(G) > 2$ pertencentes à família $\mathcal{B}$ possuem vértices isolados, L. A. Sanchis [111] decidiu considerar grafos sem vértices isolados e com $\gamma(G) > 2$. O seu trabalho resultou em um aprimoramento do limitante obtido por Vizing e está explicitado no Teorema 2.15. Sanchis também mostrou que este limitante é justo caracterizando os grafos que atingem a igualdade.

Teorema 2.15 (Sanchis [111]). *Seja G um grafo sem vértices isolados, com n vértices e m arestas. Se $3 \leq \gamma(G) \leq \frac{n}{2}$, então $m \leq \frac{1}{2}(n - \gamma(G))(n - \gamma(G) + 1)$.* $\square$

Muitos limitantes para o número de dominação são analisados considerando outros parâmetros do grafo. De particular interesse para as variantes do problema de conjuntos dominantes abordadas nesta dissertação é avaliar o diâmetro dos grafos considerados.

Em 1988, Brigham et al. [24] estabeleceram uma relação interessante entre o diâmetro de um grafo e o número de dominação de seu complemento. Este resultado é apresentado no Teorema 2.16.

Teorema 2.16 (Brigham et al. [24]). *Seja G um grafo tal que $\gamma(\overline{G}) \geq 3$, então*

$$\text{diam}(G) \leq 2.$$

$\square$

Posteriormente, Haynes et al [75] forneceram o seguinte limitante inferior.

Teorema 2.17 (Haynes et al. [75]). *Para todo grafo conexo G ,*

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\text{diam}(G) + 1}{3} \right\rceil.$$

$\square$

Grafos com diâmetro pequeno possuem propriedades estruturais que auxiliam na determinação do número de dominação. Um resultado imediato, que analisa grafos com diâmetro dois, é fornecido na resenha de Haynes et al. [75] e está apresentado no Teorema 2.18.

Teorema 2.18 (Haynes et al. [75]). *Se G é um grafo tal que $\text{diam}(G) = 2$, então $\gamma(G) \leq \delta(G)$.*

Demonstração. Seja G um grafo de diâmetro igual a dois. Seja $v \in V(G)$ tal que $d(v) = \delta(G)$. Suponha que $N(v)$ não seja um conjunto dominante. Logo, existe um vértice $u \in V(G) \setminus N[v]$ que não é adjacente a nenhum vértice de $N(v)$. Logo, $d(v, u) \geq 3$. Contradizendo o fato de que $\text{diam}(G) = 2$. $\square$

Em 2006, A. Hellwig e L. Volkmann obtiveram outro limitante para o número de dominação de um grafo com diâmetro dois. Este novo limitante, apresentado a seguir, é melhor que o anterior quando $\delta(G) > \lfloor n/4 \rfloor + 1$.

Teorema 2.19 (Hellwig e Volkmann [78]). *Se G é um grafo com n vértices e diâmetro dois, então $\gamma(G) \leq \lfloor n/4 \rfloor + 1$.* $\square$

Uma classe de grafos que também foi estudada considerando o diâmetro é a dos grafos planares¹. Em 1996, G. MacGillivray e K. Seyffarth [96] obtiveram dois resultados interessantes, considerando grafos planares de diâmetro dois e três, os quais estão expressos nos Teoremas 2.20 e 2.21. Além disso, eles mostraram que grafos planares de diâmetro quatro podem possuir um número de dominação tão grande quanto se queira.

Teorema 2.20 (MacGillivray e Seyffarth [96]). *Se G é um grafo planar com $\text{diam}(G) = 2$, então $\gamma(G) \leq 3$.* $\square$

Teorema 2.21 (MacGillivray e Seyffarth [96]). *Se G é um grafo planar com $\text{diam}(G) = 3$, então $\gamma(G) \leq 10$.* $\square$

Os autores observaram a discrepância dos resultados acima e afirmaram ter procurado, sem sucesso, grafos planares de diâmetro três com $\gamma(G) = 10$. Eles acreditavam que o limitante do Teorema 2.21 não era justo. Em 2002, W. Goddard e M. A. Henning [66] deram continuidade a este estudo. Em particular, eles provaram que o grafo G , exibido na Figura 2.6, é o único grafo planar que possui diâmetro dois e $\gamma(G) = 3$. Portanto, desconsiderando este grafo, todos os grafos planares de diâmetro igual a dois possuem número de dominação menor ou igual a dois.

¹*Grafos planares* são grafos que podem ser desenhados no plano de forma que suas arestas se cruzem apenas em suas extremidades.

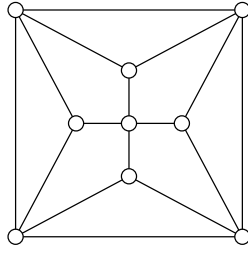


Figura 2.6: Único grafo planar com diâmetro igual a dois e número de dominação igual a três.

Em 2006, M. Dorfling et al. [50] confirmaram as suspeitas de MacGillivray e Seyffarth sobre o Teorema 2.21, ao provar o resultado expresso no Teorema 2.22. No entanto, os autores não apresentaram argumentos de que este limitante seja justo. Esta é uma questão que permanece em aberto.

Teorema 2.22 (Dorfling et al. [50]). *Se G é um grafo planar com $\text{diam}(G) = 3$, então $\gamma(G) \leq 9$.* $\square$

Uma outra linha de estudo interessante é analisar a variação do número de dominação após operações de adição ou remoção de elementos do grafo. Estudos nesta direção foram inaugurados em 1983, pelos trabalhos de D. Bauer et al. [10] e D. P. Sumner e P. Blitch [118].

Dizemos que um vértice $v \in V(G)$ é um *vértice dominante-crítico* em um grafo G , se $\gamma(G - v) < \gamma(G)$. Observe que $\gamma(G) - 1 \leq \gamma(G - v) \leq |V(G)| - 1$. O limitante superior é evidente, pois $|V(G - v)| = |V(G)| - 1$. Já o limitante inferior decorre do fato de que se existisse em $G - v$, um conjunto dominante S' com $|S'| \leq \gamma(G) - 2$, então o conjunto $S = S' \cup \{v\}$ seria um conjunto dominante com menos de $\gamma(G)$ vértices. Bauer et al. [10] buscaram identificar condições necessárias e suficientes para que cada um dos três casos a seguir ocorram: $\gamma(G - v) < \gamma(G)$; $\gamma(G - v) = \gamma(G)$; e $\gamma(G - v) > \gamma(G)$. A Proposição 2.23 fornece uma condição necessária e suficiente para o caso em que $\gamma(G - v) < \gamma(G)$.

Proposição 2.23 (D. Bauer et al. [10]). *Seja G um grafo qualquer e v um vértice de G . Então, v é um vértice dominante-crítico se e somente se existe $S \in \mathcal{D}(G)$ ¹, tal que $v \in S$ e $N_G[v, S]^2 = \{v\}$.*

Demonstração. Seja G um grafo e $v \in V(G)$ um vértice para o qual $\gamma(G - v) = \gamma(G) - 1$. Seja $S' \in \mathcal{D}(G - v)$. O conjunto $S = S' \cup \{v\}$ é um conjunto dominante mínimo em G . Todos os vértices de $N_G(v)$ são dominados em G por algum vértice em S' , pois S'

¹A notação $\mathcal{D}(G)$ foi definida na Página 13.

²A notação $N[v, S]$ foi definida na Página 4.

é um conjunto dominante em $G - v$. Apenas o vértice v não é dominado em G por nenhum dos vértices de S' . Pois caso fosse, S' seria um conjunto dominante em G . Logo, $N_G[v, S] = \{v\}$. Por outro lado, considere $S \in \mathcal{D}(G)$, tal que $v \in S$ e $N_G[v, S] = \{v\}$. Então, $S \setminus \{v\}$ é um conjunto dominante em $G - v$ que possui $\gamma(G) - 1$ vértices. Como $\gamma(G) - 1 \leq \gamma(G)$, então $\gamma(G - v) = \gamma(G) - 1$. $\square$

Se a condição da Proposição 2.23 não ocorre, ou seja, não existe $S \in \mathcal{D}(G)$, tal que $v \in S$ e $N_G[v, S] = \{v\}$. Então, sabemos que $\gamma(G - v) \geq \gamma(G)$. Porém, se, além disso, existir um conjunto dominante mínimo S em G que não possui o vértice v , então S é um conjunto dominante de cardinalidade $\gamma(G)$ em $G - v$. Logo, $\gamma(G - v) = \gamma(G)$.

Bauer et al. [10] também obtiveram uma condição necessária e suficiente para o caso em que $\gamma(G - v) > \gamma(G)$. A Proposição 2.24 explicita este resultado.

Proposição 2.24 (D. Bauer et al. [10]). *Para um vértice v em um grafo G , $\gamma(G - v) > \gamma(G)$ se e somente se:*

- (i) v não é um vértice isolado e pertence a todo conjunto $S \in \mathcal{D}(G)$; e
- (ii) não existe $S' \in \mathcal{D}(G - N[v])$ tal que $|S'| = \gamma(G)$ e S' domina $N(v)$ em G . $\square$

Bauer et al. [10] construíram dois grafos que ilustram que nem (i) nem (ii), isoladamente, são condições suficientes para que $\gamma(G - v) > \gamma(G)$. A Figura 2.7 exhibe estes grafos. Nesta figura, o grafo G é um grafo para o qual a condição (i) vale para o vértice v , mas $\gamma(G) = \gamma(G - v)$. Já o grafo H é um grafo para o qual a condição (ii) se verifica para o vértice w , porém $\gamma(H) = \gamma(H - w)$.

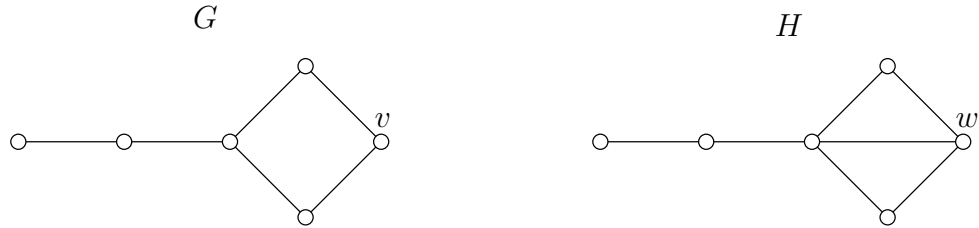


Figura 2.7: Dois grafos G e H , ambos com número de dominação igual a dois. Note que $\gamma(G - v) = \gamma(H - w) = 2$.

Note que, em um grafo G , um vértice $v \in V(G)$ com $N_G(v) = \{w\}$ não pertence a todos os conjuntos dominantes mínimos do grafo, pois se existe $S \in \mathcal{D}(G)$ tal que $v \in S$, então o conjunto $(S \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ também é um conjunto dominante mínimo em G . Portanto, nas árvores sempre existem vértices que não aumentam o número de dominação do grafo ao serem removidos. Na verdade, para as árvores a Proposição 2.24 pode ser simplificada como segue.

Proposição 2.25 (Bauer et al. [10]). *Seja T uma árvore com três ou mais vértices e $v \in V(T)$. Então $\gamma(T - v) > \gamma(T)$ se e somente se v pertence a todo conjunto $S \in \mathcal{D}(G)$. $\square$*

Um grafo G é dito *grafo dominante-crítico por vértices* se todos os seus vértices são vertices dominantes-críticos. A Figura 2.8 mostra um grafo dominante-crítico por vértices.

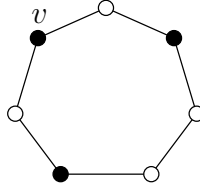


Figura 2.8: Exemplo de grafo dominante-crítico por vértices com $\gamma(G) = 3$.

Os grafos dominantes-críticos por vértices com $\gamma(G) = 2$ foram caracterizados como sendo os grafos completos K_{2n} retirando-se as arestas de um emparelhamento perfeito. Esta caracterização foi obtida primeiramente por Brigham et al. [24], em 1988. Neste trabalho, os autores deram várias contribuições e sugeriram alguns problemas em aberto. Um resultado simples, porém interessante, está explicitado no Lema 2.26.

Lema 2.26 (Brigham et al. [24]). *Seja G um grafo e v um vértice de G , tal que $N(v)$ é uma clique. Então, G não é um grafo dominante-crítico por vértices.*

Demonstração. Seja G um grafo que possui um vértice $v \in V(G)$ com $N(v)$ uma clique. Seja $u \in N(v)$. Note que um conjunto dominante mínimo S no grafo $G - u$ deve possuir pelo menos um vértice de $N[v] \setminus \{u\}$ para dominar o vértice v . Portanto, S também é um conjunto dominante de G . Logo, $\gamma(G - u) \geq \gamma(G)$ e u não é um vértice dominante-crítico. $\square$

Brigham et al. [24] também obtiveram limitantes relacionando parâmetros de grafos que possuem pelo menos um vértice dominante-crítico:

Teorema 2.27 (Brigham et al. [24]). *Se G é um grafo com n vértices que possui vértices dominantes-críticos, então $n \leq (\Delta(G) + 1)(\gamma(G) - 1) + 1$.*

Teorema 2.28 (Brigham et al. [24]). *Se G é um grafo dominante-crítico por vértices com n vértices e m arestas, então $n \leq (2m + 3\gamma(G) - \Delta(G))/3$.*

O Teorema 2.27 é um resultado justo, pois os autores mostraram uma família infinita de grafos que atinge a igualdade. Já no caso do Teorema 2.28 esta questão ficou em aberto. Em seu trabalho, Brigham et al. [24] contam que fizeram tentativas frustradas de caracterizar os grafos dominantes-críticos por vértices. Contudo, eles mostraram que não existe uma caracterização destes grafos por meio de subgrafos proibidos. Este resultado está expresso no Teorema 2.29.

Teorema 2.29 (Brigham et al. [24]). *Para todo grafo G , existe um grafo dominante-crítico por vértices H , tal que G é um subgrafo induzido de H .* $\square$

O problema de encontrar uma caracterização para os grafos dominantes-críticos por vértices é uma questão interessante. Em um trabalho anterior [23], os mesmos autores já haviam caracterizado os grafos dominantes-críticos por vértices com número mínimo de vértices. Nestes dois trabalhos, os autores propuseram as quatro questões a seguir.

Questão 2.30 (Brigham et al. [23]). *Todo grafo dominante-crítico por vértices G com $(\Delta(G) + 1)(\gamma(G) + 1) + 1$ vértices é regular?*

Questão 2.31 (Brigham et al. [24]). *Seja G um grafo dominante-crítico por vértices. É verdade que $\text{diam}(G) \leq 2(\gamma(G) - 1)$?*

Questão 2.32 (Brigham et al. [24]). *Seja G um grafo dominante-crítico por vértices. É verdade que $|V(G)| \geq (\delta(G) + 1)(\gamma(G) - 1) + 1$?*

Questão 2.33 (Brigham et al. [24]). *Todo grafo dominante-crítico por vértices possui um conjunto dominante mínimo que também é um conjunto independente?*

Todas estas questões foram respondidas em 1995, por J. Fulman et al. [64]. Os Problemas 2.30 e 2.31 foram respondidos afirmativamente, enquanto os Problemas 2.32 e 2.33 foram respondidos negativamente.

Estudar condições críticas em conjuntos dominantes tem sido bastante frutífero. D. P. Sumner e P. Blitch [118], definiram um conceito correlato ao de grafo dominante-crítico por vértices. Um grafo é *dominante-crítico por arestas* ¹ se para toda aresta $e \notin E(G)$, $\gamma(G + e) < \gamma(G)$. Estes autores caracterizaram os grafos dominantes-críticos por arestas que possuem $\gamma(G) = 2$ e também estudaram várias propriedades de grafos dominantes-críticos por arestas com $\gamma(G) = 3$. Este trabalho despertou grande interesse, gerando muitos resultados posteriores [4, 9, 27, 60, 81].

Uma das razões da abundância de resultados relacionados aos conjuntos dominantes é o fato de que muitas aplicações reais podem ser modeladas em termos de conjuntos dominantes. Considere, por exemplo, o caso de um sistema distribuído no qual temos o problema de alocar r cópias de um recurso qualquer entre os n nós do sistema. Por uma questão de custo ou de disponibilidade não podemos alocar uma cópia em cada máquina, temos $r < n$. Como este sistema é crítico, as máquinas que não possuem o recurso alocado precisam ter acesso a pelo menos uma das máquinas que possuem cópias do recurso de forma direta, ou seja, uma requisição de acesso não pode passar por nenhuma outra máquina intermediária. Este problema pode ser modelado diretamente como um

¹Este conceito foi originalmente definido com o nome de “domination critical graph”, exatamente o mesmo nome utilizado por Bauer et al. [10] na definição dos grafos dominantes-críticos por vértices.

problema de encontrar um conjunto dominante de cardinalidade $k \leq r$ no grafo que corresponde à topologia de rede desse sistema.

Existem vários tipos de aplicações reais que podem ser modeladas como problemas de conjuntos dominantes [43, 75, 87, 113]. Estes problemas vão se tornando cada vez mais complexos à medida que novos tipos de restrições vão aparecendo. Voltando ao exemplo anterior, podemos relaxar a restrição de que uma requisição de acesso aos recursos não possa passar por nenhuma máquina intermediária, permitindo que a comunicação passe por no máximo $d \geq 1$ máquinas intermediárias. Então, a solução em termos de grafos é buscar um conjunto dominante mínimo considerando que um vértice v domina todos os vértices w para os quais $d(v, w) \leq d + 1$. Este exemplo demonstra que também é interessante considerar problemas de conjuntos dominantes adicionando-se algumas propriedades estruturais. Na próxima seção, vamos apresentar algumas das variantes de conjuntos dominantes que surgiram desta forma.

2.2 Variantes de Conjuntos Dominantes

Variantes de conjuntos dominantes surgiram como um desdobramento natural da teoria. Por um lado, aplicações reais muitas vezes requerem que propriedades sejam adicionadas à condição de ser um conjunto dominante. Como exemplo, considere novamente o problema das cinco rainhas em um tabuleiro de xadrez impondo a restrição de que as rainhas não possam se atacar mutuamente. Isto implica que o conjunto procurado precisa ser, além de dominante, independente. Por outro lado, em 1979, foi demonstrado por M. Garey e D. Johnson [65] que, dado um inteiro k e um grafo G , o problema de decidir se existe um conjunto dominante S em G , tal que $|S| \leq k$, é NP-completo. Este fato também encorajou os pesquisadores a estudar como o número de dominação de um grafo se comporta impondo restrições adicionais aos conjuntos.

Nesta seção, apresentamos três variantes do problema dos conjuntos dominantes: conjunto dominante total; conjunto dominante independente; e conjunto dominante conexo. Para cada uma delas, existe um grande número de resultados na literatura, apenas alguns deles são apresentados, com o objetivo de exemplificar abordagens de pesquisa nestes problemas.

Conjunto Dominante Total

Esta variante pode ser ilustrada considerando novamente o problema das rainhas em um tabuleiro de xadrez, impondo a restrição adicional de que cada rainha esteja protegida por uma outra rainha do conjunto. Em 1980, E. J. Cockayne et al. [39] observaram que existem soluções de tamanho cinco para este problema que possuem esta propriedade,

como a exibida na Figura 2.9. Motivados por esta idéia, eles formularam o conceito de conjunto dominante total.

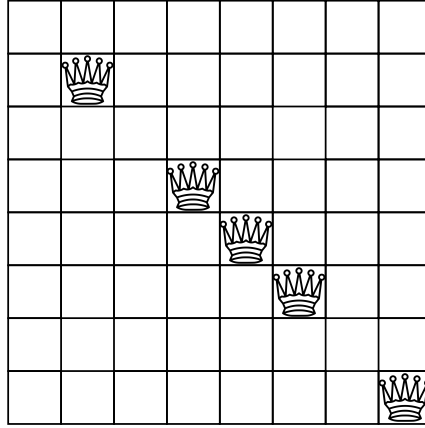
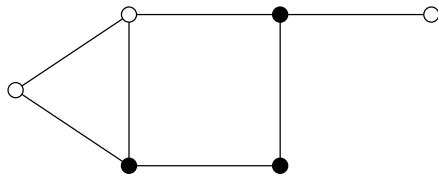
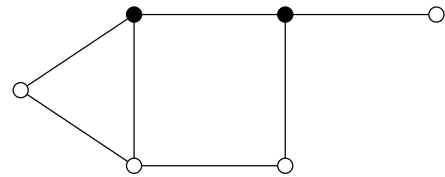


Figura 2.9: Cinco rainhas posicionadas no tabuleiro de modo que qualquer casa pode ser atacada por pelo menos uma rainha e cada rainha está protegida por outra rainha.

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto dominante total*, se para todo vértice $v \in V(G)$, $v \in N(S)$. Isto é, $N(S) = V(G)$. Note que se v é um vértice isolado, então para qualquer conjunto $S \subseteq V(G)$, $v \notin N(S)$. Logo, grafos com vértices isolados não possuem conjuntos dominantes totais. Por outro lado, um grafo sem vértices isolados sempre possui pelo menos um conjunto dominante total: o próprio $V(G)$. Para um grafo G que não possui vértices isolados, o *número de dominação total* de G , é definido como $\gamma_t(G) = \min\{|S| : S \text{ é um conjunto dominante total de } G\}$. A Figura 2.10 exemplifica estes conceitos.



(a) Um conjunto dominante total.



(b) Um conjunto dominante total mínimo.

Figura 2.10: Dois conjuntos dominantes totais em um grafo G , com $\gamma_t(G) = 2$.

Observe que existem casos em que o conjunto $V(G)$ é o único conjunto dominante total existente, como é o caso do grafo da Figura 2.11. Além disso, um grafo com um único vértice e um laço possui $\gamma_t(G) = 1$. Desta forma, é imediato que $1 \leq \gamma_t(G) \leq |V(G)|$. Entretanto, Cockayne et al. [39] perceberam que poderiam obter um limitante muito melhor considerando apenas grafos conexos.

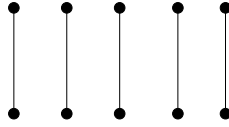


Figura 2.11: Grafo cujo único conjunto dominante total é formado por todos os seus vértices.

Teorema 2.34 (Cockayne et al. [39]). *Seja G um grafo conexo com $n \geq 3$ vértices, então $\gamma_t(G) \leq 2n/3$.* $\square$

No mesmo trabalho, estes pesquisadores estudaram a relação de $\gamma_t(G)$ com o grau máximo do grafo e obtiveram os resultados apresentados no Teorema 2.35. Para um grafo G sem vértices isolados, observe que o item (i) decorre do fato de que para qualquer par de vértices $v, u \in V(G)$ com $d_G(v) = \Delta(G)$ e $u \in N(v)$, $S = V(G) \setminus (N(v) \setminus \{u\})$ é um conjunto dominante total.

Teorema 2.35 (Cockayne et al. [39]). *Seja G um grafo simples com n vértices.*

(i) *Se G é um grafo sem vértices isolados, então $\gamma_t(G) \leq n - \Delta(G) + 1$.*

(ii) *Se G é conexo e $\Delta(G) < n - 1$, então $\gamma_t(G) \leq n - \Delta(G)$.* $\square$

Denote mK_2 o grafo formado pela união disjunta de m cópias do grafo K_2 . O resultado do Teorema 2.36, também obtido por Cockayne et al. [39], fornece um limitante justo para a soma do número de dominação total de um grafo com o número de dominação total de seu grafo complementar, caracterizando os grafos que atingem a igualdade.

Teorema 2.36 (Cockayne et al. [39]). *Seja G um grafo com n vértices, sem vértices isolados e $\Delta(G) < n - 1$. Então, $\gamma_t(G) + \gamma_t(\overline{G}) \leq n + 2$, com igualdade se somente se $G \cong mK_2$ ou $\overline{G} \cong mK_2$.* $\square$

Finalizamos esta subseção apresentando uma interessante relação entre o número de dominação de um grafo e seu número de dominação total, obtida por R. B. Allan et al. [3].

Teorema 2.37 (Allan et al. [3]). *Para todo grafo conexo G com $n \geq 2$ vértices, $\gamma(G) + \gamma_t(G) \leq n$.* $\square$

Conjunto Dominante Independente

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto dominante independente*, se S é um conjunto dominante e um conjunto independente simultaneamente. A Figura 2.12 ilustra este conceito.

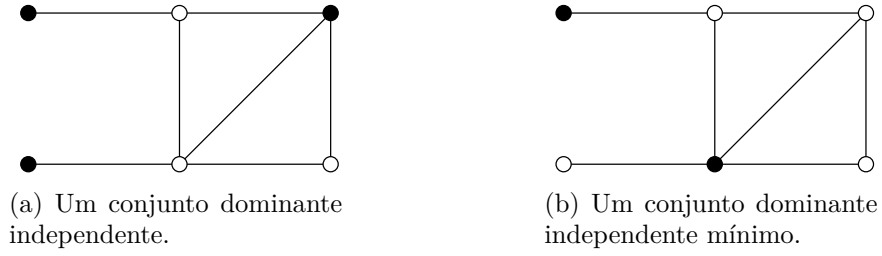


Figura 2.12: Dois conjuntos dominantes independentes em um grafo.

Em 1962, C. Berge [11] observou que todo conjunto independente maximal é também um conjunto dominante. Isto ocorre porque em um conjunto independente maximal S , todo vértice $v \in V(G) \setminus S$ é adjacente a pelo menos um vértice de S . Por outro lado, a recíproca também é verdadeira, pois todo conjunto dominante independente também é um conjunto independente maximal. Destas considerações, segue que todo grafo possui conjuntos dominantes independentes. Definimos o *número de dominação independente* de G como $i(G) = \min\{|S| : S \text{ é um conjunto dominante independente de } G\}$. O grafo G da Figura 2.12 possui $i(G) = 2$.

Em 1979, Bollobás e Cockayne [15] obtiveram um dos primeiros limitantes para o número de dominação independente, expresso no Teorema 2.38.

Teorema 2.38 (Bollobás e Cockayne [15]). *Se G é um grafo sem vértices isolados com n vértices, então $i(G) \leq n - \gamma(G) + 1 - \lceil (n - \gamma(G)) / \gamma(G) \rceil$.* $\square$

Após este resultado inicial, vários pesquisadores forneceram limitantes superiores melhores [40, 59, 73, 109]. Dentre estes, citamos o resultado de Liang S. e Jianfang W. [109], que, em 1998, provaram uma conjectura proposta por O. Favaron [59] em 1988.

Teorema 2.39 (Liang e Jianfang [109]). *Para todo grafo G com n vértices,*

$$i(G) \leq n + 2\delta(G) - 2\sqrt{n\delta(G)}.$$

$\square$

Um conceito interessante relacionado ao número de dominação independente foi introduzido em 1979, por D. Sumner e J. I. Moore [119]. Estes autores definiram um *grafo perfeito em relação à dominação* como um grafo G , para o qual $\gamma(H) = i(H)$, para todo subgrafo induzido $H \subseteq G$. No mesmo trabalho em que introduziram esta classe de grafos, Sumner e Moore obtiveram um resultado interessante, que estabelece que para determinar se um grafo é perfeito em relação à dominação não é necessário checar todos os seus subgrafos induzidos.

Teorema 2.40 (Sumner e Moore [119]). *Um grafo G é perfeito em relação à dominação se e somente se $\gamma(H) = i(H)$ para todo subgrafo induzido $H \subseteq G$ com $\gamma(H) = 2$.* $\square$

Um ano antes dos resultados de Sumner e Moore, R. B. Allan e R. Laskar [2] obtiveram um resultado importante ao caracterizar uma classe de grafos perfeitos em relação à dominação por meio de subgrafos proibidos. A classe obtida por estes autores é definida em função do grafo bipartido $K_{1,3}$, exibido na Figura 2.13. O Teorema 2.41 explicita o resultado obtido por Allan e Laskar.

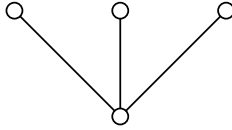


Figura 2.13: Grafo $K_{1,3}$.

Teorema 2.41 (Allan e Laskar [2]). *Se G é um grafo que não possui nenhum subgrafo induzido que seja isomorfo ao $K_{1,3}$, então $\gamma(G) = i(G)$.* $\square$

Em 1979, B. Bollobás e E. J. Cockayne [15] generalizaram o Teorema 2.41, conforme explicitado no Teorema 2.42, e para cada valor de $p \geq 2$, os autores caracterizaram os grafos que atingem a igualdade.

Teorema 2.42 (Bollobás e Cockayne [15]). *Se G é um grafo que não possui subgrafos induzidos isomorfos ao $K_{1,p+1}$, com $p \geq 2$, então $i(G) \leq \gamma(G)(p-1) - (p-2)$.*

Em 1991, I. E. Zverovich e V. E. Zverovich [138] publicaram um trabalho no qual afirmaram ter obtido uma caracterização para os grafos perfeitos em relação à dominação por meio de subgrafos induzidos. Porém, J. Fulman [63] mostrou que esta caracterização não estava correta, exibindo um contraexemplo. Apesar disto, Fulman conseguiu aproveitar as idéias de Zverovich e Zverovich [138] para obter novas famílias de grafos perfeitos em relação à dominação. Finalmente em 1995, Zverovich e Zverovich [140] obtiveram uma caracterização para os grafos perfeitos em relação à dominação com um número finito de subgrafos proibidos. A lista de grafos proibidos nesta caracterização é composta por 17 grafos e não será apresentada neste texto.

Conjunto Dominante Conexo

Em 1979, E. Sampathkumar e H. B. Walikar [110] definiram um *conjunto dominante conexo* em um grafo G como um conjunto $S \subseteq V(G)$, tal que S é um conjunto dominante e $G[S]$ é um grafo conexo. Note que não existem conjuntos dominantes conexos em

grafos não conexos. Entretanto, se G é um grafo conexo, o conjunto $V(G)$ é um conjunto dominante conexo. Para um grafo conexo G , definimos o *número de dominação conexo* de G , como $\gamma_c(G) = \min\{|S| : S \text{ é um conjunto dominante conexo de } G\}$. A Figura 2.14 exemplifica estes conceitos.

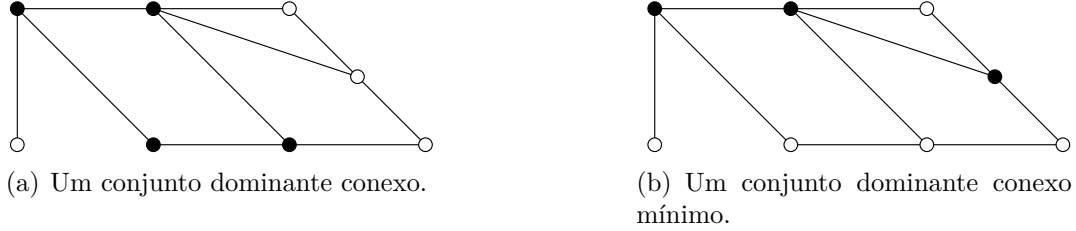


Figura 2.14: Dois conjuntos dominantes conexos em um grafo.

Observe que todo conjunto dominante conexo que possui mais de um vértice também é um conjunto dominante total. Além disso, só existem conjuntos dominantes conexos com um único vértice em grafos que possuem pelo menos um vértice universal. Logo, para todo grafo conexo G com $\Delta(G) < n - 1$, $\gamma_t(G) \leq \gamma_c(G)$. Uma outra observação imediata é que se H é uma árvore geradora de um grafo conexo G , qualquer conjunto dominante conexo de H também é um conjunto dominante conexo de G . Logo, $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(H)$. Esta última observação foi feita por Sampathkumar e Walikar [110] no trabalho em que introduziram a variante. Neste trabalho, os autores também determinaram o número de dominação conexo para algumas classes tradicionais de grafos:

- $\gamma_c(K_n) = 1$;
- $\gamma_c(K_n \vee G) = 1$, para qualquer grafo G ;
- $\gamma_c(K_{n,m}) = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 1 \text{ ou } n = 1; \\ 2, & \text{se } m, n \geq 2; \end{cases}$
- $\gamma_c(C_n) = n - 2$;
- Para qualquer árvore T com $n \geq 3$ e l folhas, $\gamma_c(T) = n - l$.

Sampathkumar e Walikar [110] ainda obtiveram um limitante superior e um limitante inferior para $\gamma_c(G)$, ambos justos. Este resultado é apresentado no Teorema 2.43. A igualdade no limitante inferior ocorre se e somente se $\Delta(G) = n - 1$; a do limitante superior se e somente se $G \cong P_n$.

Teorema 2.43 (Sampathkumar e Walikar [110]). *Se G é um grafo conexo com n vértices e m arestas, então $\frac{n}{\Delta(G)+1} \leq \gamma_c(G) \leq 2m - n$.* $\square$

Desde que foi formulada, esta variante tem sido extensivamente estudada [25, 77, 86, 112, 128]. Os resultados publicados abordam tanto aspectos teóricos do problema [47, 51, 77, 112] como focam em soluções algorítmicas [44, 55, 88, 101].

O grande interesse nesta variante é devido ao grande número de aplicações reais que podem ser modeladas como problemas de conjuntos dominantes conexos. Considere, por exemplo, uma rede de computadores. Por uma questão de custos, não é conveniente conectar todo par de nós que pertencem ao sistema. Uma solução é criar uma subrede que tem o papel de *núcleo do sistema*. Desta forma, a comunicação entre dois nós que estão muito distantes para se comunicar diretamente, se dá por meio do núcleo do sistema. Neste tipo de abordagem qualquer nó que não faça parte do núcleo deve estar conectado a pelo menos um nó do núcleo. Além disto, deve existir um caminho para tráfego de informações entre quaisquer nós que integram o núcleo. Portanto, em linguagem de Teoria de Grafos, isto significa que no grafo que modela a topologia de rede desse sistema, os vértices que correspondem ao núcleo devem formar um conjunto dominante conexo. Nesta abordagem de comunicação, o ideal é obter um conjunto dominante conexo que possua um pequeno valor de diâmetro, para obter uma comunicação de baixa latência no ponto crítico do sistema, que é o núcleo.

Neste contexto, o trabalho de A. Buchanan et al. [25] aborda o problema de determinar a existência de um conjunto dominante conexo cujo subgrafo induzido possui diâmetro especificado. Note que um resultado possível é obter um conjunto dominante conexo que induz um grafo completo em G . Na verdade, este tipo de conjunto dominante constitui a variante de conjunto clique-dominante, que será apresentada na próxima seção.

2.3 Conjuntos Cliques-Dominantes

Em 1990, M. B. Cozzens e L. L. Kelleher [42] definiram um *conjunto clique-dominante*¹ em um grafo G como um conjunto $S \subseteq V(G)$, tal que S é um conjunto dominante e uma clique. Um conjunto clique-dominante $S \subseteq V(G)$ é *mínimo* se não existe outro conjunto clique-dominante em G de cardinalidade menor. Ao longo deste texto, conjuntos cliques-dominantes também são denominados cliques-dominantes. A Figura 2.15 exhibe duas cliques-dominantes em um mesmo grafo.

Observe que existem grafos que não possuem cliques-dominantes, como por exemplo o grafo C_5 , mostrado na Figura 2.16. Não é difícil ver que todo C_n , com $n \geq 5$, não possui cliques-dominantes. Um grafo que possui pelo menos uma clique-dominante é dito *clique-dominado*. Dado um grafo clique-dominado G , definimos o *número de clique-dominação* de G como $\gamma_{cl}(G) = \min\{|S| : S \text{ é um conjunto clique-dominante de } G\}$.

¹Apesar de existirem trabalhos anteriores relacionados a cliques-dominantes, a definição formal deste conceito como uma variante de conjunto dominante é creditada a Cozzens e Kelleher.

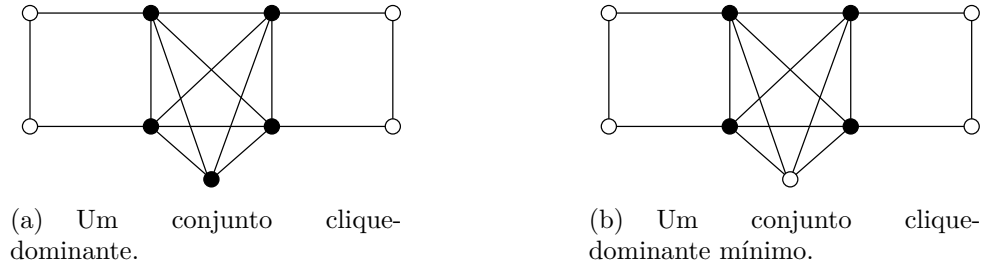


Figura 2.15: Dois conjuntos cliques-dominantes em um grafo com $\gamma_{cl}(G) = 4$.

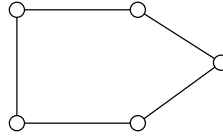


Figura 2.16: Grafo C_5 . Este grafo não possui um vértice universal e toda clique de cardinalidade dois domina apenas quatro vértices.

Observe que um conjunto clique-dominante é um conjunto dominante conexo. Então, uma condição necessária para que um grafo seja clique-dominado é ser conexo. Além disto, nos grafos cliques-dominados temos $\gamma(G) \leq \gamma_c(G) \leq \gamma_{cl}(G)$. Note também, que $\gamma_{cl}(G) \leq \omega(G) \leq \Delta(G) + 1$. Então, $1 \leq \gamma_{cl}(G) \leq \Delta(G) + 1$. Ademais, um grafo simples G possui uma clique-dominante composta por um único vértice se e somente se $\Delta(G) = n - 1$. Em 1965, E. Wolk [126] apresentou uma condição suficiente, por meio de subgrafos proibidos, para um grafo possuir uma clique-dominante de cardinalidade unitária. Este resultado é apresentado no Teorema 2.44.

Teorema 2.44 (Wolk [126]). *Se G é um grafo conexo que não contém P_4 ou C_4 como subgrafos induzidos, então G possui um vértice universal.*

Demonstração. Indução em n , número de vértices de G .

A proposição é imediatamente verdadeira para $n \leq 2$. Seja G um grafo como definido na hipótese. Seja v um vértice de grau um em uma árvore geradora de G . Note que v não é um vértice de corte. Portanto, o grafo $G' = G - v$ é um grafo conexo. Além disso, para qualquer subconjunto $S \subseteq V(G')$, $G'[S] = G[S]$. Logo, G' não possui P_4 ou C_4 induzidos. Pela hipótese de indução, existe um vértice universal u em G' . Se $\{u, v\} \in E(G)$, então u é um vértice universal em G e o resultado segue. Caso contrário, pelo fato de G ser conexo, existe $w \in V(G)$ tal que $\{v, w\} \in E(G)$. Se w é um vértice universal, então o resultado segue. Caso contrário, existe $x \in V(G)$ tal que $x \notin N_G(w)$. Como u é um vértice universal em G' , $\{u, x\} \in E(G)$. Considere a aresta $e = \{v, x\}$. Se $e \in E(G)$, então $G[\{v, w, u, x\}] \cong C_4$; caso contrário, então $G[\{v, w, u, x\}] \cong P_4$. Em ambos os casos, temos uma contradição. $\square$

Note que a condição apresentada no teorema anterior não é necessária. O grafo da Figura 2.17, por exemplo, tem um P_4 induzido pelo conjunto de vértices $S = \{u, v, w, x\}$, e possui um vértice universal.

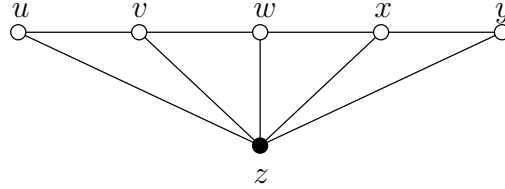


Figura 2.17: Um grafo com $\gamma_{cl}(G) = 1$.

No trabalho em que formularam o conceito de cliques-dominantes, Cozzens e Keller [42] obtiveram vários resultados interessantes, alguns dos quais apresentados a seguir.

Teorema 2.45 (Cozzens e Kelleher [42]). *Se G é um grafo conexo que não possui nenhum P_5 ou C_5 como subgrafo induzido, então G possui uma clique-dominante.*

Demonstração. Indução em n , número de vértices de G .

Por inspeção, o resultado segue quando $n \leq 4$. Seja G um grafo conexo com $n \geq 5$, que não possui um subgrafo induzido isomorfo ao P_5 ou C_5 . Seja v um vértice de grau um em uma árvore geradora de G . Note que v não é um vértice de corte. Portanto, o grafo $G' = G - v$ é um grafo conexo que não possui P_5 ou C_5 como subgrafo induzido.

Pela hipótese de indução, existe uma clique-dominante $S' \subseteq V(G')$. Se $N_G(v) \cap S' \neq \emptyset$, então S' é uma clique-dominante de G e o resultado segue. Caso contrário, pelo fato de G ser conexo, existe $w \in V(G)$ tal que $\{v, w\} \in E(G)$. Como S' é uma clique-dominante em G' , existe pelo menos um vértice $x \in S'$ tal que $\{w, x\} \in E(G')$. Tome $S = S' \cap N_{G'}(w)$. Se $S \cup \{w\}$ é uma clique-dominante de G , então o resultado segue. Suponha que exista pelo menos um vértice $z \in V(G')$ tal que $z \notin (N_{G'}[S \cup \{w\}])$. Note que $z \notin S'$. No entanto, como S' é uma clique-dominante em G' , existe pelo menos um vértice $y \in S' \setminus S$ tal que $\{y, z\} \in E(G')$. Observe que $\{x, y\} \in E(G)$, $\{y, w\}$, $\{y, v\} \notin E(G)$. Considere a aresta $e = \{v, z\}$. Se $e \in E(G)$, então $G[\{v, w, u, x, z\}] \cong C_5$. Caso contrário, então $G[\{v, w, u, x, z\}] \cong P_5$. Em ambos os casos, temos uma contradição. $\square$

Como no caso do Teorema 2.44, a recíproca deste último resultado também não é verdadeira. O grafo da Figura 2.17 é um exemplo de grafo que possui um P_5 induzido pelo conjunto $\{u, v, w, x, y\}$ e possui clique-dominante. O grafo da Figura 2.18 é um outro contraexemplo para a recíproca do Teorema 2.45, pois possui um C_5 induzido pelos vértices $\{t, u, v, w, x\}$ e também possui clique-dominante.

Um outro resultado interessante do trabalho de Cozzens e Kelleher [42] estabelece uma condição suficiente para existência de uma clique-dominante com cardinalidade menor ou

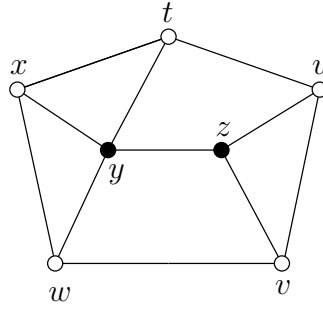


Figura 2.18: Um grafo clique-dominado com $\gamma_{cl}(G) = 2$.

igual a um valor l em um grafo conexo. Esta condição foi obtida adicionando uma família de grafos ao conjunto dos subgrafos proibidos do Teorema 2.45. Esta família de grafos é formada pelos grafos que podem ser obtidos pela corona¹ de um grafo completo K_n e de um K_1 . A Figura 2.19 exibe um grafo pertencente a esta família.

Teorema 2.46 (Cozzens e Kelleher [42]). *Seja G um grafo conexo que não possui P_5 , C_5 ou $K_{l+1} \circ K_1$, com $l \geq 2$, como subgrafos induzidos. Então, G possui uma clique-dominante de cardinalidade no máximo l .* $\square$

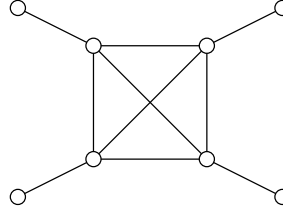


Figura 2.19: Grafo $K_4 \circ K_1$.

O Corolário 2.47 é obtido restringindo-se o teorema anterior ao caso dos grafos bipartidos.

Corolário 2.47 (Cozzens e Kelleher [42]). *Seja G um grafo conexo bipartido que não possui P_5 como subgrafo induzido. Então, G possui uma clique-dominante S , com $|S| = 2$.*

No mesmo ano em que Cozzens e Kelleher [42] publicaram seu trabalho sobre cliques-dominantes, G. Bacsó e Z. Tuza [8] também publicaram, independentemente, um artigo sobre o tema. Neste trabalho, foram obtidos alguns resultados interessantes relacionados a cliques-dominantes, alguns deles similares aos obtidos por Cozzens e Kelleher [42].

¹A operação corona foi definida na Pagina 19.

Teorema 2.48 (Bacsó e Tuza [8]). *Todo subgrafo conexo de um grafo G possui pelo menos uma clique-dominante se e somente se G é um grafo que não possui nenhum C_5 ou P_5 como subgrafo induzido.*

Teorema 2.49 (Bacsó e Tuza [8]). *Se G é grafo conexo que não possui P_5 como subgrafo induzido e que possui um vértice de corte, então G contém uma clique-dominante.*

Teorema 2.50 (Bacsó e Tuza [8]). *Em um grafo conexo G que não possui P_5 como subgrafo induzido existe um conjunto dominante $S \subseteq V(G)$ tal que S é uma clique ou $G[S] \cong P_3$.*

O Teorema 2.50 é uma generalização de um resultado de M. El-Zahar e P. Erdős [54], de 1985, apresentado no teorema a seguir.

Teorema 2.51 (El-Zahar e Erdős [54]). *Seja G um grafo conexo que não contém $2K_2^1$ como subgrafo induzido. Então, G possui um conjunto dominante S tal que, ou S é uma clique, ou $G[S] \cong P_3$.* $\square$

Considere o Teorema 2.50 e o Teorema 2.51 e observe que o grafo P_5 possui um grafo $2K_2$ como subgrafo induzido. Logo, todo grafo que não satisfaz a hipótese do Teorema 2.50 também não satisfaz a hipótese do Teorema 2.51. Porém, a recíproca não é verdadeira. A Figura 2.20 mostra um grafo que não satisfaz a hipótese do Teorema 2.51, mas satisfaz a hipótese do Teorema 2.50.

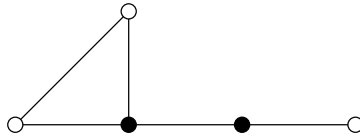


Figura 2.20: Um grafo que satisfaz a hipótese do Teorema 2.50, mas não a do Teorema 2.51.

Também motivados pelo trabalho de El-Zahar e Erdős [54], Chung et al. [36] estudaram os grafos conexos que não possuem grafos $2K_2$ como subgrafos induzidos e obtiveram o resultado apresentado no Teorema 2.52.

Teorema 2.52 (Chung et al. [36]). *Seja G um grafo conexo que não contém $2K_2$ como subgrafo induzido, com $\omega(G) \geq 3$. Então, G possui um conjunto clique-dominante de cardinalidade $\omega(G)$.* $\square$

¹ A definição do grafo $2K_2$ encontra-se na página 32.

Observe que a maioria dos resultados apresentados nesta seção são estabelecidos proibindo subgrafos induzidos isomorfos a alguns dos seguintes dos grafos: P_4 , P_5 , C_5 e $2K_2$. Então, para analisar as relações entre os resultados apresentados nesta seção, tome as seguintes classes de grafos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{G \text{ conexo: } G \text{ não possui } P_4 \text{ como subgrafo induzido}\}; \\ \mathcal{B} &= \{G \text{ conexo: } G \text{ não possui } 2K_2 \text{ como subgrafo induzido e } \omega(G) \geq 3\}; \\ \mathcal{C} &= \{G \text{ conexo: } G \text{ não possui } 2K_2 \text{ como subgrafo induzido}\}; \\ \mathcal{D} &= \{G \text{ conexo: } G \text{ não possui } P_5 \text{ como subgrafo induzido}\}; \\ \mathcal{E} &= \{G \text{ conexo: } G \text{ não possui } C_5 \text{ como subgrafo induzido}\};\end{aligned}$$

Claramente, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Além disto, como foi dito anteriormente, todo grafo que possui um P_5 como subgrafo induzido também possui um $2K_2$ como subgrafo induzido. Logo, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Note ainda que o grafo P_4 é um subgrafo induzido do grafo P_5 e do grafo C_5 . Portanto, $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{D} \cap \mathcal{E})$. A Figura 2.21 esquematiza as relações de inclusão entre as classes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ que foram explicitadas, e exhibe alguns grafos nas interseções destas classes.

Um conjunto clique-dominante exige que os vértices do grafo não estejam muito distantes entre si. Desta forma, pensar o problema dos conjuntos cliques-dominantes levando em consideração o diâmetro do grafo é um desdobramento natural.

Note que o diâmetro de um grafo que possui pelo menos uma clique-dominante é no máximo três. Considere um grafo G que possui pelo menos uma clique-dominante S . Tome $u, v \in V(G)$. Se $u \in S$ e $v \in S$, então $d_G(u, v) \leq 1$. Caso $u \in S$ e $v \notin S$, então $d_G(u, v) \leq 2$. Se $u \notin S$ e $v \notin S$, então $d_G(u, v) \leq 3$. No Teorema 2.53, apresentamos um resultado que relaciona a existência de cliques-dominantes em um grafo com o diâmetro de seu grafo complementar.

Teorema 2.53. *Seja G um grafo tal que $\text{diam}(\overline{G}) > 2$. Então, G possui cliques-dominantes.*

Demonstração. Seja G um grafo que não possui cliques-dominantes. Isto significa que, para toda clique S de G , existe um vértice $v \in V(G) \setminus S$ tal que $N_G(v) \cap S = \emptyset$. Então, para todo conjunto independente S' de $\overline{G}$, existe um vértice $u \in V(G) \setminus S'$ tal que $S' \subseteq N_{\overline{G}}(u)$. Logo, $\text{diam}(\overline{G}) \leq 2$. $\square$

Nosso objetivo foi estabelecer uma condição suficiente que usasse explicitamente a informação sobre o diâmetro do grafo. A partir destas tentativas, formulamos a seguinte conjectura:

Conjetura 2.54. *Seja G um grafo tal que $\text{diam}(G) = 2$. Se G não possui o grafo C_5 como subgrafo induzido, então G possui uma clique-dominante.* $\square$

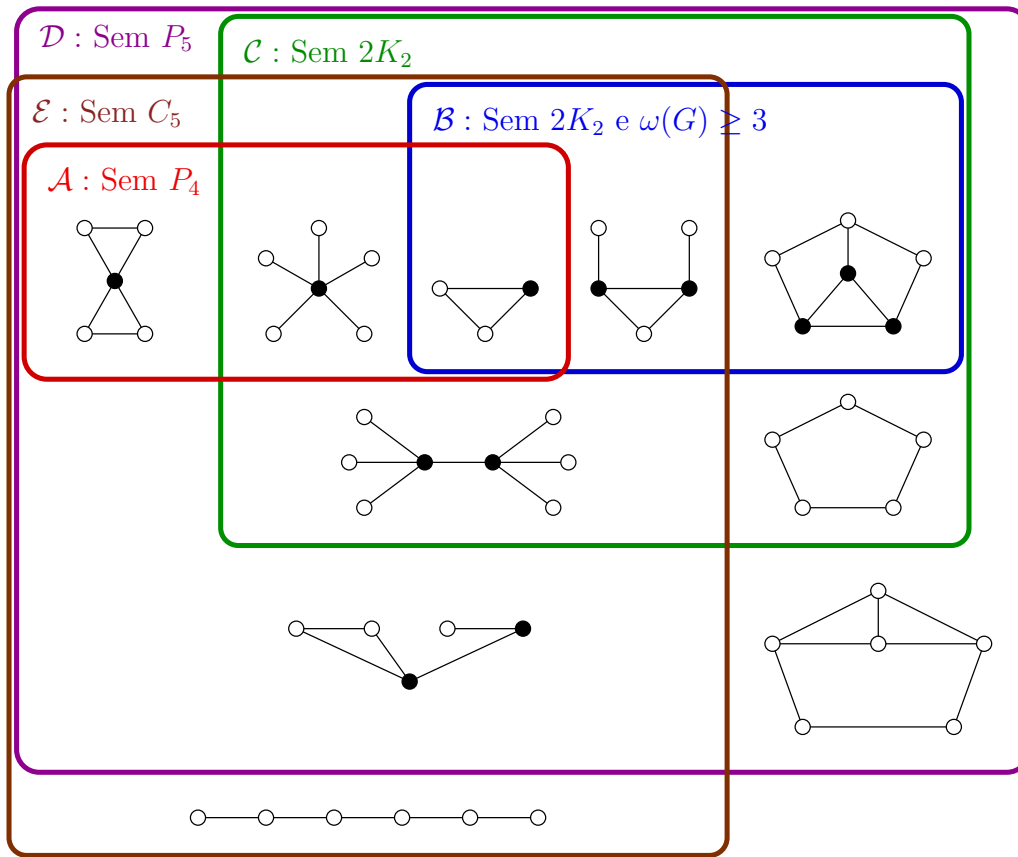


Figura 2.21: Esquema que representa as relações de inclusão entre as classes de grafos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$. Pelos Teoremas 2.46 e 2.52, existem grafos clique-dominados em $(\mathcal{D} \cap \mathcal{E}) \cup \mathcal{B}$. Todas as outras classes possuem grafos que não são clique-dominados.

Para grafos com poucos vértices, é fácil verificar esta conjectura por inspeção. No entanto, não parece tão fácil obter um contraexemplo ou uma demonstração para esta conjectura. A dificuldade para obter um contraexemplo está em manter a restrição do diâmetro sem introduzir cliques-dominantes. Um fator que dificulta a demonstração é o fato de que a remoção de vértices ou arestas pode modificar o diâmetro do grafo. Na verdade, existem grafos para os quais este fato ocorre na remoção de qualquer vértice ou aresta do grafo.

Se a Conjectura 2.54 for verdadeira a classe dos grafos clique-dominados, conhecida é ampliada. Note que, o grafo da Figura 2.22 satisfaz a condição da Conjectura 2.54 e não satisfaz as condições dos teoremas anteriores.

A. Brandstädt e D. Kratsch [20] mostraram que o problema decidir se um grafo possui pelo menos uma clique-dominante é NP-Completo. Além disto, estes pesquisadores projetaram um algoritmo linear no número de vértices, para o problema de encontrar uma

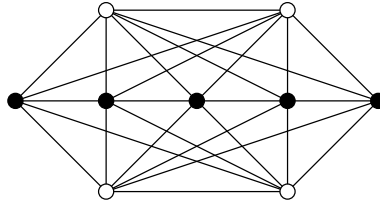


Figura 2.22: Um grafo de diâmetro igual a dois que não possui C_5 como subgrafo induzido. Note que, neste grafo os vértices pretos induzem um P_5 e os vértices brancos induzem um $2K_2$. Além disto, qualquer conjunto formado por um vértice preto e um vértice branco é uma clique-dominante.

clique-dominante mínima em um grafo de permutação. Em um trabalho posterior [21], estes mesmos autores também obtiveram um algoritmo polinomial que encontra uma clique dominante em grafos de comparabilidade. No entanto, eles também provaram que o problema de determinar a existência de cliques-dominantes na classe dos grafos fracamente triangulados, formada pelos grafos que não possuem subgrafos induzidos isomorfos ao C_k ou ao $\overline{C_k}$ com $k > 4$, é NP-Difícil.

Encerramos esta seção apresentando dois problemas que consideramos de particular interesse.

Problema 2.55. *Determinar o número máximo de arestas em um grafo simples que não possui cliques-dominantes.*

Problema 2.56. *Determinar o número máximo de arestas em um grafo simples que não possui cliques-dominantes de cardinalidade k .*

Capítulo 3

Problemas de Partição Dominante

Como foi dito anteriormente, o estudo formal da teoria de conjuntos dominantes iniciou-se na década de 1960. Desde então, a área tem atraído diversos pesquisadores, o que levou a progressos significativos [1, 22, 28, 80, 84].

Apesar do interesse despertado, nos primeiros 15 anos após a formalização dos conceitos, ainda existiam poucos trabalhos na literatura relacionados a este tópico, tal fato surpreendeu os pesquisadores E. J. Cockayne e S. T. Hedetniemi, pois já eram conhecidas diversas aplicações relacionadas com dominância [12, 13, 53, 85, 104]. Com o objetivo de encorajar o desenvolvimento da Teoria de Conjuntos Dominantes, eles escreveram o artigo intitulado *Towards a Theory of Domination in Graphs* [41] em 1977. Neste trabalho, eles fizeram uma breve resenha sobre aplicações de conjuntos dominantes. Além disso, deram um novo impulso à teoria, ao pensar em abordar o problema dos conjuntos dominantes sob a ótica de um problema de partição do conjunto de vértices do grafo.

Cockayne e Hedetniemi [41] definiram uma *partição dominante* de G como uma partição de $V(G)$ em conjuntos dominantes. A Figura 3.1 exibe exemplos de partições dominantes.

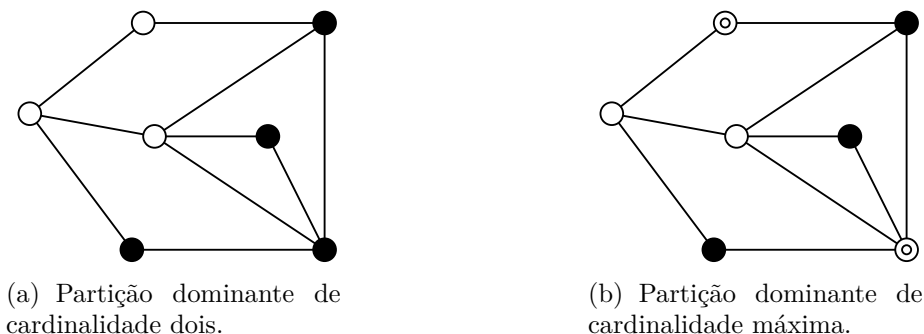


Figura 3.1: Partições dominantes distintas em um mesmo grafo. Vértices preenchidos com o mesmo padrão estão na mesma parte.

Note que todo grafo possui uma partição dominante com uma única parte, que é o próprio $V(G)$. Desta forma, fica claro que o grande desafio é maximizar o número de partes da partição. Com isto em mente, Cockayne e Hedetniemi definiram, para um dado grafo G , $d(G) = \max\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ é partição dominante de } G\}$. O valor $d(G)$ é denominado *número domático*¹ de G . Dado um grafo G , determinar o valor de $d(G)$ é conhecido como o *problema da partição dominante*. O grafo da Figura 3.1 possui número domático igual a três.

Este capítulo está organizado em duas seções. A Seção 3.1 faz uma breve resenha de alguns resultados sobre o problema da partição dominante. A Seção 3.2 apresenta algumas variantes deste problema e apresenta alguns resultados que apareceram na literatura. A Seção 3.2 é encerrada introduzindo o problema da partição em cliques-dominantes. Este é o problema para o qual obtivemos resultados em classes de grafos e que estão descritos no próximo capítulo.

3.1 Resultados Anteriores

Nesta seção, vamos considerar o problema da partição dominante proposto por Cockayne e Hedetniemi. Inicialmente, apresentamos alguns limitantes para o problema. Em seguida, são apresentados alguns resultados obtidos para classes de grafos. Encerramos a seção apresentando resultados acerca da criticidade do número domático.

Em analogia ao problema de coloração de vértices, que atribui cores aos vértices de um grafo, uma partição dominante de k partes pode ser vista como uma atribuição de k cores aos vértices de G , de tal forma que cada vértice de uma determinada cor seja adjacente a pelo menos um vértice de cada uma das outras $k - 1$ cores. Esta interpretação torna evidente a relação de $d(G)$ com $\delta(G)$, levando a obtenção do limitante expresso na proposição a seguir.

Proposição 3.1 (Cockayne e Hedetniemi [41]). *Para todo grafo G , $d(G) \leq \delta(G) + 1$. $\square$*

Quando a igualdade é verificada na Proposição 3.1, dizemos que G é *domaticamente cheio*. A Figura 3.2 exibe um grafo com esta propriedade. Em 1983, B. Zelinka [133] mostrou que é possível construir grafos que possuem número domático igual a dois e grau mínimo arbitrariamente grandes, o que significa que existem grafos para os quais a diferença entre $d(G)$ e $\delta(G)$ pode ser tão grande quanto se queira.

No mesmo trabalho em que introduziram o problema, Cockayne e Hedetniemi investigaram a relação entre o número domático de um grafo e do seu grafo complementar.

¹Em inglês, este conceito é denominado *domatic number*. O termo parece ter origem em uma justaposição do prefixo de dominating e o sufixo de chromatic, devido as relações entre estes conceitos, explicitadas na seção a seguir.

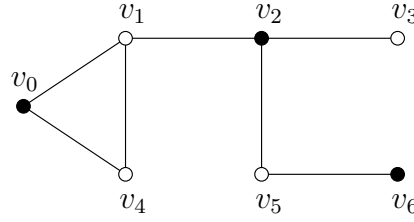


Figura 3.2: Um grafo domaticamente cheio, com uma partição dominante de cardinalidade dois indicada pelas cores dos vértices.

Usando o limitante da Proposição 3.1, eles apresentaram o limitante superior para $d(G)$ apresentado na Proposição 3.2.

Proposição 3.2 (Cockayne e Hedetniemi [41]). *Para todo grafo G com n vértices, $d(G) + d(\overline{G}) \leq n + 1$.*

Demonstração. Seja G um grafo com n vértices e $\overline{G}$ o seu grafo complementar. Pela Proposição 3.1, $d(G) + d(\overline{G}) \leq \delta(G) + 1 + \delta(\overline{G}) + 1$. Pela definição de grafo complementar, $\delta(\overline{G}) = n - 1 - \Delta(G)$. Então, $\delta(G) + 1 + \delta(\overline{G}) + 1 = \delta(G) + 1 + (n - 1 - \Delta(G)) + 1 = n + 1 + \delta(G) - \Delta(G)$. Como $\delta(G) \leq \Delta(G)$, então $n + 1 + \delta(G) - \Delta(G) \leq n + 1$. $\square$

Ainda sob a perspectiva da Proposição 3.2, os autores concluíram que só existem dois grafos para os quais a igualdade é verificada. O teorema a seguir exhibe este resultado.

Teorema 3.3 (Cockayne e Hedetniemi [41]). *Seja G um grafo com n vértices, então $d(G) + d(\overline{G}) = n + 1$ se e somente se $G \cong K_n$ ou $G \cong \overline{K}_n$.* $\square$

O problema da partição dominante tem sido estudado com diferentes abordagens. Alguns autores obtiveram limitantes para o número domático [38, 45, 58, 82, 133]. Em particular, Zelinka demonstrou o simples, mas interessante, limitante apresentado no teorema a seguir.

Teorema 3.4 (Zelinka [133]). *Para todo grafo simples G com n vértices,*

$$d(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{n - \delta(G)} \right\rfloor.$$

$\square$

Este limitante decorre do fato de que, em um grafo simples G com n vértices, qualquer conjunto $S \subseteq V(G)$ com $|S| \geq n - \delta(G)$ é um conjunto dominante. Isto ocorre porque todo vértice $v \in V(G) \setminus S$ tem no mínimo $\delta(G)$ vizinhos em G . Logo, pelo menos um deles pertence a S . Como consequência, qualquer partição cujas partes possuam pelo

menos $n - \delta(G)$ vértices é uma partição dominante. De fato, sempre é possível obter uma partição em conjuntos dominantes que possua $\lfloor \frac{n}{n-\delta(G)} \rfloor$ partes. Para isto, basta particionar $V(G)$ em $\lfloor \frac{n}{n-\delta(G)} \rfloor - 1$ partes de cardinalidade $n - \delta(G)$ e uma parte com $n - \delta(G) + n \bmod (n - \delta(G))$ vértices. A existência desta partição certifica o limitante apresentado no Teorema 3.4.

Como era esperado, em 1974, M. R. Garey e D. S. Johnson [65] provaram que o problema de decidir se um grafo arbitrário G possui uma partição dominante de cardinalidade k é NP-Completo. Este fato fortalece a abordagem do problema para classes de grafos. De fato, quando introduziu o problema, Cockayne e Hedetniemi determinaram o número domático de algumas classes de grafos. A lista a seguir resume os resultados que eles obtiveram.

- $d(K_n \vee G) = n + d(G)$;
- $d(K_n) = n$, $d(\overline{K_n}) = 1$;
- Para qualquer árvore T com dois ou mais vértices, $d(T) = 2$;
- Para qualquer inteiro positivo n , $d(C_{3n}) = 3$ e $d(C_{3n+1}) = d(C_{3n+2}) = 2$;
- Para $2 \leq m \leq n$, $d(K_{m,n}) = m$;
- Se G é um grafo exoplanar maximal, então $d(G) = 3$.

Dos exemplos supracitados, vamos explicitar a demonstração do resultado para árvores porque os autores preferiram omitir a prova deste resultado em seu artigo.

Proposição 3.5 (Cockayne e Hedetniemi [41]). *Se T é uma árvore com $|V(T)| \geq 2$, então $d(T) = 2$.*

Demonstração. Só existe uma árvore de dois vértices, o grafo P_2 , para o qual claramente $d(T) = 2$. Suponha que para um inteiro $n \geq 3$, todas as árvores com $n - 1$ vértices possuam número domático igual a dois.

Seja T uma árvore com n vértices. Seja v uma folha de T . O grafo $T' = T - v$ é uma árvore de $n - 1$ vértices. Pela hipótese de indução, T' possui uma partição dominante $D' = V'_1 \cup V'_2$. Seja w o único vizinho de v . Note que $w \in V(T')$. Suponha, sem perda de generalidade, que $w \in V'_1$. Então, V'_1 é um conjunto dominante de T . Além disso, $V_2 = V'_2 \cup \{w\}$ também é um conjunto dominante de T . Portanto, $D = V'_1 \cup V_2$ é uma partição dominante de T de cardinalidade dois. Pela Proposição 3.1, $d(T) = 2$. $\square$

Depois destes resultados iniciais, outras classes de grafos tiveram seus números domáticos estabelecidos [32,92,107,131]. Em particular, G. J. Chang [32] resolveu o problema da partição dominante para as *grades*, que são os grafos obtidos pelo produto cartesiano de caminhos. Esta é uma classe de grafos importante, frequente em diversas aplicações, cuja estrutura é particularmente interessante em problemas de particionamento. O resultado demonstrado por Chang está apresentado no Teorema 3.6 e ilustrado na Figura 3.3.

Teorema 3.6 (Chang [32]). *Seja $G = P_p \square P_q$, $p \geq 2$, $q \geq 2$. Então,*

$$d(G) = \begin{cases} 2, & \text{se } (p = 2 \text{ e } q \in \{2, 4\}) \text{ ou } (p = 4 \text{ e } q = 2); \\ 3, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

□

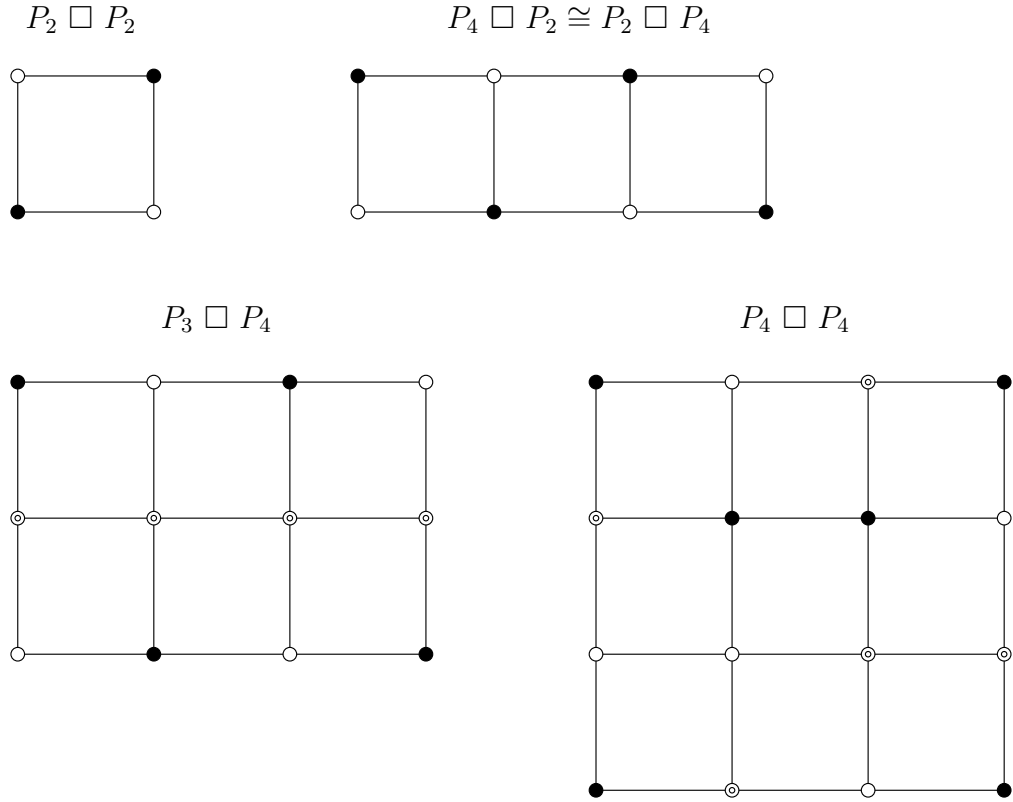


Figura 3.3: Alguns exemplos de partições dominantes máximas em grades.

Por construção, $\delta(P_p \square P_q) = 2$. Portanto, pela Proposição 3.1, concluímos que $d(P_p \square P_q) \leq 3$. Os grafos $P_2 \square P_2$ e $P_2 \square P_4$ não possuem partição dominante de cardinalidade três, mas possuem partições dominantes com duas partes exibidas na Figura 3.3.

Os autores obtiveram um método para construir partições dominantes para todos os casos em que $d(G) = 3$. A Figura 3.3 exibe os casos $P_3 \square P_4$ e $P_4 \square P_4$, nos quais as partições são obtidas por meio de padrões diferentes.

Um grafo G é *domaticamente crítico* se para toda aresta $e \in E(G)$, $d(G - e) < d(G)$. A Figura 3.4 exibe um grafo com esta propriedade. Este conceito foi introduzido por Cockayne [38], em uma resenha na qual ele apresenta alguns problemas em aberto relacionados a partições dominantes. Entre eles, estava o problema de caracterizar a classe dos grafos domaticamente críticos.

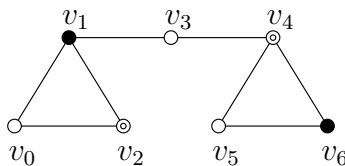


Figura 3.4: Um grafo domaticamente crítico, com uma partição dominante máxima indicada pelo preenchimento dos vértices. Note que para qualquer aresta $e \in E(G)$, $\delta(G - e) = 1$. Logo, $d(G - e) \leq 2 < d(G)$.

Zelinka [130] se interessou por este problema e descreveu a estrutura dos grafos domaticamente críticos. Em 1980, ele provou que um grafo domaticamente crítico deve ser a união de $d(G)$ conjuntos independentes que induzem, dois a dois, grafos cujas componentes conexas são isomorfas a grafos estrela. O Teorema 3.7 detalha este resultado.

Teorema 3.7 (Zelinka [130]). *Seja G um grafo domaticamente crítico com número domático $d(G) = d$. Então, seu conjunto de vértices pode ser particionado em d conjuntos independentes $V_1, \dots, V_d$, com a propriedade de que, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, d\}$, o subgrafo $G_{ij} = G[V_i \cup V_j]$ é um grafo bipartido cujas componentes conexas são grafos estrelas.* $\square$

Apesar de esta condição ser necessária para que um grafo seja domaticamente crítico, Zelinka não soube dizer se ela era suficiente e lançou esta questão como uma conjectura. Esta pergunta foi respondida negativamente, independentemente, por I. E. Zverovich e V. E. Zverovich [139] e D. F. Rall [106]. Ambos os trabalhos mostram que esta afirmação é verdadeira apenas para grafos com número domático menor ou igual a dois, e que é possível construir contraexemplos com qualquer número domático maior ou igual a três. A demonstração do Teorema 3.8, de Zverovich e Zverovich, é construtiva.

Teorema 3.8 (Zverovich e Zverovich [139]). *Para todo inteiro $d \geq 3$, existe um grafo G com $d(G) = d$ que não é domaticamente crítico, cujos vértices podem ser particionados em conjuntos independentes $V_1, \dots, V_d$, que possuem a propriedade de que, para quaisquer*

$i, j \in \{1, \dots, d\}$, o subgrafo $G_{ij} = G[V_i \cup V_j]$ é um grafo bipartido cujas componentes conexas são grafos estrelas. $\square$

Além de responder à conjectura de Zelinka, Rall também caracterizou os grafos domaticamente críticos de acordo com o seu número domático. Este resultado está expresso no Lema 3.9. Ele denominou os grafos domaticamente críticos que possuem número domático igual a k de grafos *domaticamente k -críticos*.

Lema 3.9 (Rall [106]). *Seja G um grafo com $d(G) = k$. Então, G é domaticamente k -crítico se e somente se $G \vee K_n$ é domaticamente $(k+n)$ -crítico para todo inteiro positivo n .* $\square$

Neste mesmo trabalho, Rall também investigou a relação entre grafos domaticamente críticos e domaticamente cheios. Ele provou que todo grafo domaticamente k -crítico com $k \leq 3$ também é domaticamente cheio. Entretanto, para todo $k \geq 4$ existem grafos domaticamente k -críticos que não são domaticamente cheios. Para $k \leq 2$, este resultado pode ser verificado pelo Teorema 3.7; para os outros casos, o Teorema 3.10 estabelece o resultado.

Teorema 3.10 (Rall [106]). *Todo grafo domaticamente 3-crítico é domaticamente cheio. No entanto, para todo $n \geq 4$ existe um grafo que é domaticamente n -crítico mas não é domaticamente cheio.* $\square$

De fato, a relação entre os grafos domaticamente críticos e domaticamente cheios já havia sido estudada no mesmo artigo em que Zelinka lançou a conjectura citada anteriormente. O resultado que ele obteve está apresentado a seguir.

Teorema 3.11 (Zelinka [130]). *Existe um grafo regular domaticamente cheio com n vértices e número domático d se e somente se d divide n . Tal grafo também é domaticamente crítico.* $\square$

Ao trabalhar com grafos domaticamente críticos, Zelinka [134] considerou o problema inverso, ou seja, adicionar arestas ao invés de removê-las. Um grafo G é chamado de *domaticamente cocrítico* se, para toda aresta $e \in E(\overline{G})$, o grafo $G' = (V(G), E(G) \cup \{e\})$ possui $d(G') > d(G)$. A Figura 3.5 exhibe um grafo com esta propriedade.

No seu trabalho, Zelinka caracterizou os grafos domaticamente cocríticos que também são domaticamente cheios. Este resultado está explicitado no Teorema 3.12.

Teorema 3.12 (Zelinka [134]). *Seja G um grafo simples não isomorfo a um grafo completo. Então, as seguintes proposições são equivalentes:*

- (i) G é simultaneamente domaticamente cheio e domaticamente cocrítico e $d(G) = d$;

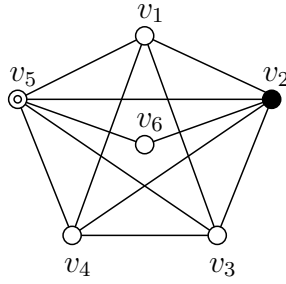


Figura 3.5: Um grafo domaticamente cocrítico com $d(G) = 3$ e uma partição dominante especificada pelo preenchimento de cada vértice. Observe que, se adicionarmos uma aresta de $E(\overline{G}) = \{\{v_1, v_6\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_6\}\}$ neste grafo, teremos $d(G) = 4$.

- (ii) G é obtido de um grafo completo K_n , com $n \geq d$, pela adição de um novo vértice adjacente a exatamente $d - 1$ vértices do K_n . $\square$

Zelinka também caracterizou os grafos que são simultaneamente domaticamente críticos e domaticamente cocríticos. Este resultado é apresentado no Teorema 3.13.

Teorema 3.13 (Zelinka [134]). *Seja G um grafo simples não isomorfo a um grafo completo. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) G é simultaneamente domaticamente crítico e domaticamente cocrítico;
- (ii) G é obtido de um grafo completo K_n , com $n \geq 3$, pela remoção de uma aresta. $\square$

Além dos resultados aqui apresentados, Zelinka estudou a classe dos complementos de florestas e caracterizou os grafos domaticamente cocríticos para os quais $d(G) \in \{n, n - 1, n - 2, n - 3, n - 4\}$. Um resultado especialmente interessante estabelecido por Zelinka é apresentado a seguir.

Proposição 3.14 (Zelinka [134]). *Seja G um grafo cujo complemento $\overline{G}$ consiste em duas componentes com o mesmo número de vértices, sendo este número maior que dois. Então, G não é domaticamente cocrítico.* $\square$

No Teorema 3.12, Zelinka mostrou que para todo par de inteiros n e d , com $n \geq d$, existem grafos domaticamente cocríticos com n vértices e número domático igual a d cujos grafos complementares possuem exatamente $n - d$ arestas. Além disto, ele afirmou que este é o menor número de arestas que podem existir no complemento de um grafo nestas condições e sugeriu o problema de encontrar um grafo domaticamente cocrítico com n vértices que possua mais do que $n - d$ arestas. Este grafo foi encontrado por I. E. Zverovich e V. E. Zverovich [139], em 1991. Eles mostraram que, para qualquer inteiro positivo k , existe um grafo cocrítico com $6k + 3$ vértices cujo grafo complementar possui

exatamente $n - d + k$ arestas. Este grafo é o complemento do grafo formado pela união disjunta de $2k + 1$ caminhos com três vértices. A Figura 3.6 mostra o grafo e seu grafo complementar para o caso em que $k = 1$. O resultado de Zverovich e Zverovich está apresentado no Teorema 3.15.

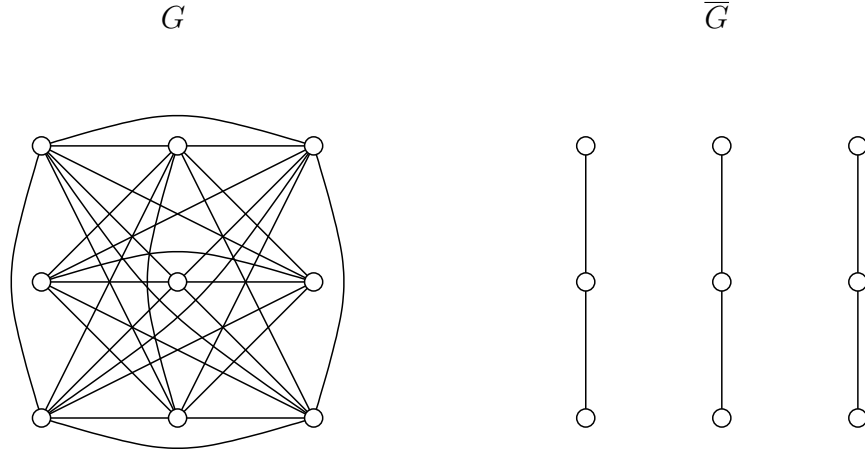


Figura 3.6: Grafo obtido por Zverovich no Teorema 3.15 caso k seja igual a um.

Teorema 3.15 (Zverovich e Zverovich [139]). *Para todo inteiro positivo k existe um grafo domaticamente cocrítico G para o qual $|E(\overline{G})| = k + n - d(G)$.* $\square$

A estrutura da família de grafos construída por Zverovich e Zverovich [139] no Teorema 3.15 é muito interessante. Convidamos o leitor interessado a demonstrar que estes grafos são, de fato, domaticamente cocríticos.

Resultados recentes relacionados aos grafos domaticamente cocríticos têm aparecido na literatura. Em 2013, H. B. Walikar et al. [124] demonstraram a afirmação de Zelinka de que o menor número de arestas no complemento de um grafo domaticamente cocrítico é $|V(G)| - d(G)$. Eles também mostraram que existem grafos domaticamente cocríticos com qualquer número de componentes conexas no grafo complementar. Além destes avanços, eles generalizaram alguns resultados anteriores, entre estes a Proposição 3.14. Este último resultado está explicitado no Teorema 3.16.

Teorema 3.16 (Walikar et al. [124]). *Seja G um grafo cujo complemento $\overline{G}$ consiste em um número par de componentes, todas com o mesmo número de vértices, sendo este número maior que dois. Então, G não é domaticamente cocrítico.* $\square$

O problema da partição dominante é fascinante. A comunidade científica que trabalha neste problema e em problemas relacionados tem se expandido ano a ano. Várias contribuições têm aparecido e muitos problemas novos têm sido propostos. Finalizamos esta seção apresentando dois problemas propostos por Walikar et al. [124] em 2013.

Problema 3.17. *Encontrar um grafo domaticamente cocrítico G , com $d(G) \geq 2$ e $\overline{G}$ conexo.*

Problema 3.18. *Seja G um grafo domaticamente cocrítico. Provar que cada componente de $\overline{G}$ possui diâmetro no máximo dois.*

3.2 Variantes da Partição Dominante

O problema da partição em conjuntos dominantes também é abordado considerando as diversas variantes de conjuntos dominantes existentes. Nesta seção, vamos definir variantes do problema da partição dominante e apresentar alguns dos resultados existentes na literatura. Existem outras variações deste problema sendo estudadas [69, 91, 93, 99].

Partição Dominante Total

Em 1980, Cockayne et al. [39] introduziram uma nova variante do problema da partição dominante. Uma *partição dominante total* de um grafo G é uma partição de $V(G)$ em conjuntos dominantes totais. A Figura 3.7 exhibe exemplos de partições deste tipo.

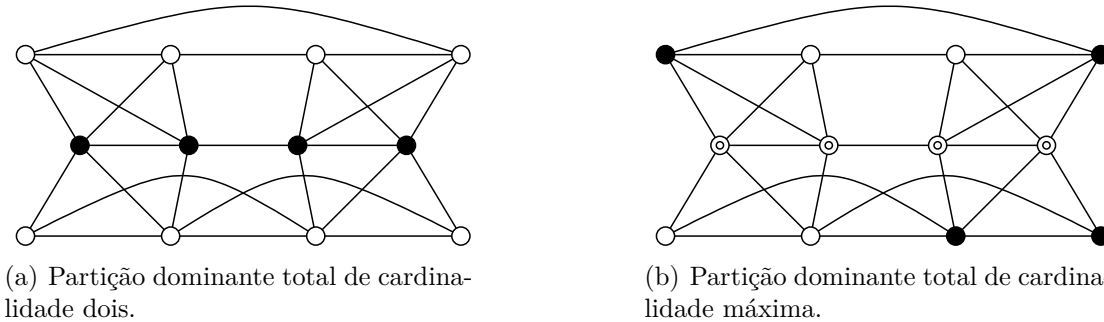


Figura 3.7: Partições dominantes totais distintas em um mesmo grafo. Vértices preenchidos com o mesmo padrão estão na mesma parte.

Note que para esta variante não é garantida a existência de uma partição para qualquer grafo, pois não existem conjuntos dominantes totais nos grafos que possuem vértices isolados. Por outro lado, um grafo sem vértices isolados possui uma partição dominante total cuja única parte é o próprio $V(G)$. Desta forma, dado um grafo G sem vértices isolados, $d_t(G) = \max\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ é partição dominante total de } G\}$. O valor $d_t(G)$ é denominado *número domático total* de G . Dado um grafo G , determinar o valor de $d_t(G)$ é conhecido como o *problema da partição dominante total*. O grafo da Figura 3.7(b) possui número domático total igual a três.

Para o problema da partição dominante total, também podemos fazer uma analogia com o problema de coloração de vértices. Em uma partição dominante total, todo vértice do grafo deve ser dominado por pelo menos um vértice em cada parte, incluindo sua própria parte. Portanto, temos que $d_t(G) \leq \delta(G)$. Um outro limitante imediato é $d_t(G) \leq \lfloor |V(G)|/\gamma_t(G) \rfloor$. Combinando ambos os limitantes, temos $d_t(G) \leq \min\{\delta(G), \lfloor |V(G)|/\gamma_t(G) \rfloor\}$.

No mesmo trabalho em que introduziram a partição dominante total, Cockayne et al. [39] mostraram uma relação entre $\gamma_t(G)$ e $d_t(G)$, apresentada no Teorema 3.19.

Teorema 3.19 (Cockayne et al. [39]). *Seja G um grafo com n vértices e sem vértices isolados.*

- (i) *Então, $\gamma_t(G) + d_t(G) \leq n + 1$, com igualdade se e somente se $G \cong mK_2$.*
- (ii) *Se G é conexo e possui $n \geq 3$ vértices, então $\gamma_t(G) + d_t(G) \leq n$, com igualdade se e somente se $G \in \{K_{1,2}, K_3, C_4, K_4 - e, K_4\}$.* □

Ainda neste trabalho, os pesquisadores mostraram uma relação entre o número domático total de um grafo e o número domático total de seu complemento. Esta relação está expressa no Teorema 3.20.

Teorema 3.20 (Cockayne et al. [39]). *Seja G um grafo com n vértices, sem vértices isolados e com $\Delta(G) < n - 1$. Então, $d_t(G) + d_t(\overline{G}) \leq n - 1$, com igualdade se e somente se $G \cong C_4$ ou $\overline{G} \cong C_4$.* □

Além do estudo de limitantes para o número domático total, Cockayne et al. [39] estudaram o problema para algumas classes tradicionais de grafos: $d_t(K_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $d_t(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$; e $d_t(C_{4n}) = 2$.

Desde que foi proposta, esta variante do problema da partição dominante tem atraído a atenção de pesquisadores [5, 6, 26, 98, 136, 137]. Zelinka foi um dos primeiros pesquisadores a estudar este problema. Em 1989, ele demonstrou os resultados apresentados no Teorema 3.21 e no Teorema 3.22.

Teorema 3.21 (Zelinka [136]). *Para cada cardinal c diferente de zero, existe um grafo simples G , tal que cada um de seus vértices possui grau pelo menos c , cujo número domático total é um. Se c é finito, então existe um grafo finito e um grafo infinito com esta propriedade.* □

Teorema 3.22 (Zelinka [136]). *Seja G um grafo simples com n vértices. Então, $d_t(G) \geq \lfloor n/(n - \delta(G) + 1) \rfloor$ e cada subconjunto de $V(G)$ com $n - \delta(G) + 1$ vértices é um conjunto dominante total em G .* □

O último resultado decorre do fato de que, em um grafo simples G com n vértices, um conjunto $S \subseteq V(G)$ contendo $n - \delta(G) + 1$ vértices é um conjunto dominante total, pois todo vértice do grafo possui pelo menos um vizinho em S . Isto nos permite construir uma partição dominante total, com $\lfloor \frac{n}{n-\delta(G)+1} \rfloor$ partes, de forma análoga à apresentada no Teorema 3.4. Se $n \geq 2$, cada conjunto dominante total possui pelo menos dois vértices. Então, $d_t(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Considerando este limitante, cinco anos depois, Zelinka [137] determinou o número mínimo de arestas que um grafo deve possuir para que a igualdade ocorra. O Teorema 3.23 exhibe este resultado.

Teorema 3.23 (Zelinka [137]). *Seja G um grafo com n vértices e sem vértices isolados. Então, $d_t(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$. O número mínimo de arestas no grafo G para que a igualdade ocorra é $\frac{n^2}{4}$ para n par e $\frac{(n-1)^2}{4}$ para n ímpar.* $\square$

Além disto, ele relacionou o número domático e o número domático total, conforme expresso no Teorema 3.24.

Teorema 3.24 (Zelinka [137]). *Para todo grafo G sem vértices isolados,*

$$\lfloor d(G)/2 \rfloor \leq d_t(G) \leq d(G).$$

$\square$

Recentemente, em 2012, H. Aram et al. [5] obtiveram um limitante para o número domático total de um grafo em função do seu número de vértices, grau mínimo e grau máximo. O Teorema 3.25¹ exhibe este resultado.

Teorema 3.25 (Aram et al. [5]). *Seja G um grafo com n vértices. Seja k um inteiro não negativo. Se $e(\Delta(G)^2 + 1)k(1 - \frac{1}{k})^{\delta(G)} < 1$, então $d_t(G) \geq k$.* $\square$

Um caso interessante do Teorema 3.25 ocorre quando o grafo é regular. Com esta restrição, o limitante se reduz ao valor apresentado no corolário a seguir.

Corolário 3.26 (Aram et al. [5]). *Seja G um grafo r -regular, com $r \geq 3$. Então,*

$$d_t(G) \geq \frac{r}{3 \ln r}.$$

$\square$

¹Neste teorema, a letra e denota o número de Euler ou constante de Napier.

Partição Dominante Independente

No mesmo trabalho em que Cockayne e Hedetniemi iniciaram o estudo da partição dominante [41], eles também definiram a *partição dominante independente (PDI)* de um grafo como uma partição de seu conjunto de vértices em conjuntos dominantes independentes. Note que uma tal partição nem sempre existe. Um exemplo de grafo que não possui uma partição deste tipo é o C_5 . Para os grafos que possuem pelo menos uma PDI, o *número domático independente* é definido como $id(G) = \max\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ é partição dominante independente de } G\}$. A Figura 3.8 mostra um grafo com $id(G) = 4$ e exibe duas de suas partições dominantes independentes distintas.

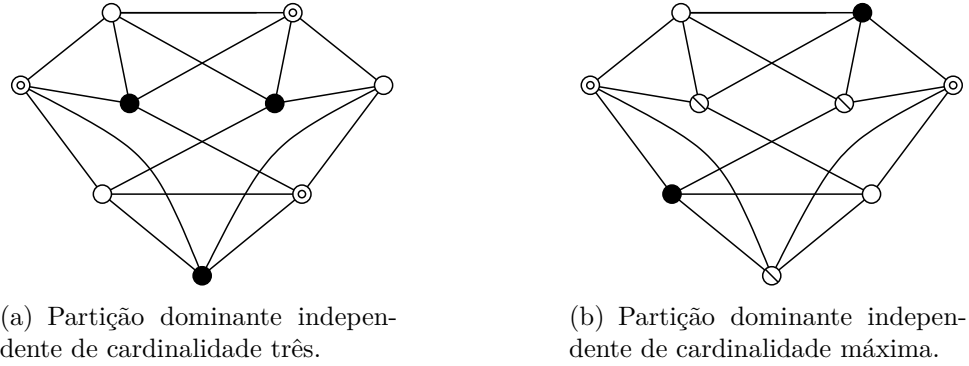


Figura 3.8: Partições dominantes independentes distintas em um mesmo grafo. Vértices preenchidos com o mesmo padrão estão na mesma parte.

Note que se formarmos uma classe de cor com cada parte de uma partição dominante independente, teremos uma coloração de vértices para o grafo em questão. Portanto, toda partição dominante independente é uma coloração. Logo, $\chi(G) \leq id(G)$. É bem conhecido que $\omega(G) \leq \chi(G)$. Concluimos que $\omega(G) \leq id(G)$. Esta desigualdade foi primeiro observada por Cockayne e Hedetniemi [41].

Seja G um grafo que possui pelo menos uma PDI, $\mathcal{P} = V_1 \cup \dots \cup V_k$. Observe que um conjunto dominante independente em G também é um conjunto independente maximal em G . Portanto, uma clique maximal em $\overline{G}$. Logo, todas as partes de $\mathcal{P}$ são cliques maximais em $\overline{G}$. Seja $\omega(G)$ o menor número de vértices em uma clique maximal de G . Então, $\omega(\overline{G}) \leq \min\{|V_i| : 1 \leq i \leq k\}$. Além disto, um conjunto formado por um vértice de cada parte de $\mathcal{P}$ é um conjunto dominante em $\overline{G}$. Desta forma, podemos formar uma partição dominante em $\overline{G}$ de cardinalidade $\min\{|V_i| : 1 \leq i \leq k\}$. Logo, $\min\{|V_i| : 1 \leq i \leq k\} \leq d(\overline{G})$. Então, $\omega(\overline{G}) \leq d(\overline{G})$. Este resultado foi apresentado por Cockayne e Hedetniemi [41] e está expresso na Proposição 3.27.

Proposição 3.27 (Cockayne e Hedetniemi [41]). *Dado um grafo G , se o seu complemento $\overline{G}$ possui pelo menos uma PDI, então, $\omega(G) \leq d(G)$.* $\square$

Como toda partição dominante independente é uma partição dominante, temos que $id(G) \leq d(G)$. Em 1983, Zelinka [132] mostrou que para qualquer par de inteiros $2 \leq i \leq j$, é possível construir um grafo com número domático independente i e número domático j . Portanto, a diferença entre $id(G)$ e $d(G)$ pode ser tão grande quanto se queira.

O problema da partição dominante independente também foi abordado para classes de grafos [52, 89, 120]. Em 2000, J. E. Dunbar et al. [52] estudaram este problema para classes de grafos obtidas por operações de produto. Para os produtos cartesianos de caminhos, os autores determinaram que só existem partições dominantes independentes de cardinalidade dois. Para os produtos cartesianos de ciclos por caminhos, foram caracterizados os grafos que possuem PDIs de cardinalidade 2 e também os grafos que possuem PDIs de cardinalidade 3. Estes dois últimos resultados estão expressos nos Teoremas 3.28 e 3.29.

Teorema 3.28 (Dunbar et al. [52]). *Seja $G \cong C_m \square P_n$. O grafo G possui uma partição dominante independente de cardinalidade 2 se e somente se m é par e $m \geq 4$.* $\square$

Teorema 3.29 (Dunbar et al. [52]). *Seja $G \cong C_m \square P_n$. O grafo G possui uma partição dominante independente de cardinalidade 3 se e somente se $m \equiv 0 \pmod{3}$.* $\square$

Como $\delta(C_n \square C_m) = 4$ e $\omega(C_n \square C_m) \geq 2$, considerando os limitantes discutidos anteriormente para $id(G)$ e a Proposição 3.1, os grafos nesta classe só podem possuir PDIs de cardinalidade 2, 3, 4 ou 5. Dunbar et al. [52] caracterizaram os grafos nesta classe que possuem PDIs com cardinalidade 2, os grafos que possuem PDIs de cardinalidade 3 e também os que possuem PDIs de cardinalidade 5. Além disso, eles deram uma condição suficiente para um produto cartesiano de dois ciclos possuir uma PDI de cardinalidade 4. Ainda neste trabalho, os autores obtiveram uma caracterização das partições dominantes independentes dos produtos diretos de dois grafos completos, e, consequentemente, determinaram o número domático independente destes grafos. Este último resultado é exibido no Teorema 3.30.

Teorema 3.30 (Dunbar et al. [52]). *Sejam $n_1 \geq 2$ e $n_2 \geq 2$ dois inteiros. Então, o grafo $K_{n_1} \times K_{n_2}$ possui exatamente duas partições dominantes independentes, uma de cardinalidade n_1 e outra de cardinalidade n_2 .*

Dunbar et al. [52] também discutiram sobre alguns problemas em aberto. Em particular, esses autores sugeriram o problema de caracterizar as partições dominantes independentes dos produtos diretos de três grafos completos. Esta questão foi resolvida por M. Valencia-Pabon [120], em 2010. Este último resultado está explicitado no Teorema 3.31.

Teorema 3.31 (Valencia-Pabon [120]). *Seja $G = K_{n_0} \times K_{n_1} \times K_{n_2}$, com n_0, n_1, n_2 , inteiros maiores ou iguais a dois. Seja $t = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Então:*

- (i) *Se n_i é ímpar para todo $i \in \{0, 1, 2\}$, então $id(G) = t$;*

(ii) Se n_i é par e $n_j \leq n_k$ são ímpares, com i, j, k dois a dois distintos, e $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$, então $id(G) = \max\{t, \frac{n_i n_j (n_k - 1)}{4} + 1\}$;

(iii) Se n_i e n_j são pares, com $i, j \in \{0, 1, 2\}$ e $i \neq j$, então $id(G) = \frac{n_i n_j n_k}{4}$. $\square$

Em 2013, A. R. Oliveira e C. N. Campos [103] estudaram o problema da partição dominante independente para os produtos diretos de ciclos. Eles obtiveram o número domático independente para o produto de um C_4 por um ciclo qualquer. Este resultado é apresentado no Teorema 3.32.

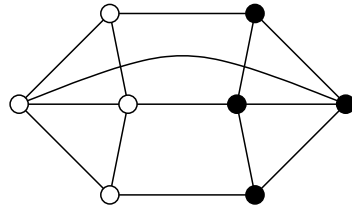
Teorema 3.32 (Oliveira e Campos [103]). *Seja $G \cong C_4 \times C_n$, $n \geq 3$. Então,*

$$id(G) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{3}; \\ 2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

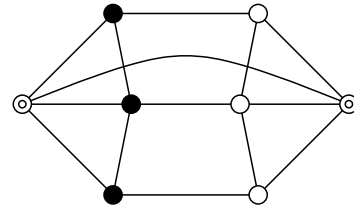
$\square$

Partição Dominante Conexa

Uma *partição dominante conexa* de um grafo G é uma partição de $V(G)$ em conjuntos dominantes conexos. Como já foi dito no Capítulo 2, não existem conjuntos dominantes conexos em grafos não conexos. Logo, não existem partições dominantes conexas em tais grafos. Por outro lado, um grafo conexo sempre possui uma partição dominante conexa cuja única parte é $V(G)$. Para um grafo conexo G , o maior número de partes em uma partição dominante conexa de G é denominado *número domático conexo* de G e denotado por $d_c(G)$. A Figura 3.9 mostra dois exemplos de partições dominantes conexas.



(a) Partição dominante conexa de cardinalidade dois.



(b) Partição dominante conexa de cardinalidade máxima.

Figura 3.9: Partições dominantes conexas distintas em um mesmo grafo. Vértices preenchidos com o mesmo padrão estão na mesma parte.

Partições dominantes conexas foram definidas por R. Laskar e S. T. Hedetniemi [94] em 1983. Em 1986, Zelinka [135] demonstrou que a conexidade de vértices de um grafo é um limitante superior para o seu número domático conexo, conforme especifica o Teorema 3.33.

Teorema 3.33 (Zelinka [135]). *Seja G um grafo conexo não isomorfo a um grafo completo. Então, $d_c(G) \leq \kappa(G)$.* $\square$

Como fez para algumas das outras variantes, Zelinka também demonstrou que é possível obter grafos que possuem número domático conexo arbitrariamente grande. Além disso, ele demonstrou que, para grafos com $n \geq 3$ vértices, é possível construir um grafo com $d_c(G)$ igual a quase todo inteiro positivo não excedendo n . O Teorema 3.34 apresenta este resultado.

Teorema 3.34 (Zelinka [135]). *Seja $n \geq 3$ um inteiro. Para todo inteiro k tal que $1 \leq k \leq n - 2$ ou $k = n$, existe um grafo G com n vértices tal que $d_c(G) = k$. Para $k = n - 1$, tal grafo não existe.* $\square$

Em 2001, B. L. Hartnell e D. F. Rall [72] estabeleceram um limitante inferior para o número de arestas de um grafo em função de seu número de vértices e seu número domático conexo. Este limitante estabelece que um grafo conexo com n vértices e número domático conexo k possui pelo menos $\frac{k+1}{2}(n - k)$ arestas. Neste trabalho, eles provaram que o número domático conexo de um grafo planar é no máximo quatro conforme explicita o Teorema 3.35.

Teorema 3.35 (Hartnell e Rall [72]). *Seja G um grafo planar. Então, $d_c(G) \leq 4$. Além disso, $d_c(G) = 4$ se e somente se $G \cong K_4$.* $\square$

Ainda neste trabalho, os pesquisadores caracterizaram os grafos planares que possuem $d_c(G) = 3$. O Teorema 3.36 explicita esta caracterização.

Teorema 3.36 (Hartnell e Rall [72]). *Seja G um grafo planar tal que $d_c(G) = 3$. Seja $\{D_1 \cup D_2 \cup D_3\}$ uma partição dominante conexa de G . Então, cada um dos subgrafos $G[D_1]$, $G[D_2]$ e $G[D_3]$ é isomorfo a um caminho.* $\square$

Esta é uma das variantes mais estudadas, tendo em vista que conexidade é uma restrição frequente em uma série de aplicações. Recentemente, têm aparecido muitos resultados na literatura relacionados a algoritmos para obter partições dominantes conexas, bem como relacionados às suas aplicações [55, 100, 101]. Existem até mesmo estudos sobre variantes da partição dominante conexa [7].

Partição Dominante Indivisível

Nesta subseção, apresentamos uma variante do problema de partição em conjuntos dominantes, definida por B. Zelinka [132], que é de natureza diferente das variantes definidas anteriormente. Nas variantes até então apresentadas, os problemas eram de maximização e aqui temos um problema de minimização

Em um grafo G , dizemos que um conjunto dominante $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto dominante indivisível* se e somente se não existe conjunto $S' \subseteq S$, tal que ambos S' e $S \setminus S'$ são conjuntos dominantes. Uma *partição dominante indivisível* de um grafo G é uma partição de $V(G)$ em conjuntos dominantes indivisíveis. O menor número de partes em uma partição dominante indivisível de G é denominado *número adomático* de G e denotado por $ad(G)$. A Figura 3.10 mostra duas partições dominantes indivisíveis para um grafo, repare que apenas uma delas é mínima.

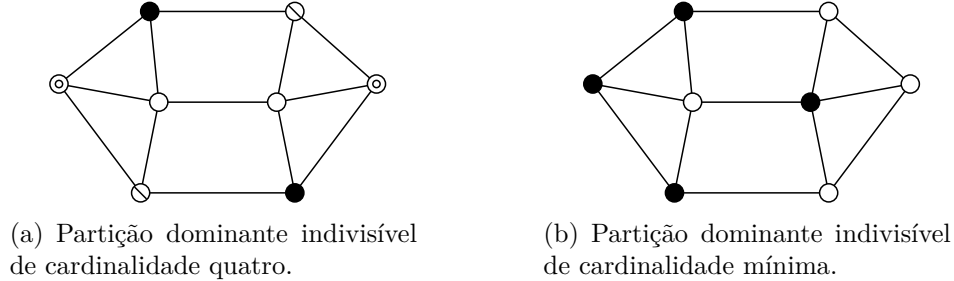


Figura 3.10: Partição dominantes indivisíveis distintas em um mesmo grafo. Vértices preenchidos com o mesmo padrão estão na mesma parte.

Para os grafos não conexos sem vértices isolados e os grafos conexos com diâmetro pelo menos três, Zelinka [132] determinou que uma partição dominante indivisível possui pelo menos duas partes. Esses resultados estão especificados nos Teoremas 3.37 e 3.38.

Teorema 3.37 (Zelinka [132]). *Seja G um grafo não conexo sem vértices isolados. Então, $ad(G) = 2$.* $\square$

Teorema 3.38 (Zelinka [132]). *Seja G um grafo conexo cujo diâmetro é pelo menos três. Então, $ad(G) = 2$.* $\square$

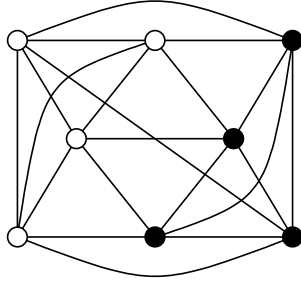
Note que, como em um conjunto dominante independente S não existe aresta entre nenhum par de vértices, este conjunto não pode ser particionado em dois conjuntos dominantes. Portanto, todo conjunto dominante independente é também um conjunto dominante indivisível. Observando este fato, Zelinka obteve os limitantes exibidos no Teorema 3.39.

Teorema 3.39 (Zelinka [132]). *Seja G um grafo que possui pelo menos uma partição dominante independente. Então, $ad(G) \leq id(G) \leq d(G)$.* $\square$

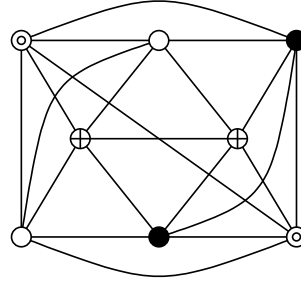
Partição em Cliques-Dominantes

Encerramos este capítulo formulando a variante que denominamos problema da partição em cliques-dominantes. Uma *partição em cliques-dominantes* (PCD) de um grafo G con-

siste em uma partição de $V(G)$, tal que cada uma de suas partes seja uma clique-dominante em G . A Figura 3.11 apresenta um grafo e duas de suas partições em cliques-dominantes.



(a) Uma partição de cardinalidade dois.



(b) Uma partição de cardinalidade máxima.

Figura 3.11: Partições em cliques-dominantes distintas em um mesmo grafo. Vértices preenchidos com o mesmo padrão estão na mesma parte.

É importante ressaltar que, diferentemente de algumas variações apresentadas, nem sempre é possível particionar o conjunto de vértices do grafo em cliques-dominantes. Este é o caso, por exemplo, do grafo C_5 . Além disso, a caracterização da existência de tal partição nem sempre é tão imediata, como no caso do problema da partição dominante total.

Se o conjunto de vértices de G admite uma partição em cliques-dominantes, dizemos que o grafo G possui uma partição em cliques-dominantes (PCD). Para os grafos que possuem uma PCD, definimos o *número clique-domático* como $d_{cl}(G) = \max\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ é uma partição em cliques dominantes}\}$. Dado um grafo G , que possui pelo menos uma partição em cliques-dominantes, o problema de determinar o valor de $d(G)$ é conhecido como o *problema da partição em cliques-dominantes*.

Nesta dissertação de mestrado, abordamos o problema da partição em cliques-dominantes para algumas classes de grafos. O próximo capítulo apresenta os resultados que obtivemos neste problema.

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo apresentamos os resultados que obtivemos abordando o problema da partição em cliques-dominantes para classes de grafos. Decidimos apresentar os resultados sem dividir o capítulo em seções porque as relações entre as classes consideradas ficam melhor conectadas.

É uma observação simples, o fato de que um grafo completo com n vértices, K_n , possui uma PCD com n partes unitárias. Logo, $d_{cl}(K_n) = n$. Já para um grafo bipartido completo, $K_{m,n}$, cujas partes possuem cardinalidade m e n , uma partição em cliques-dominantes nem sempre existe. Por exemplo, o grafo $K_{2,3}$ não possui uma partição em cliques-dominantes. O teorema a seguir caracteriza os grafos bipartidos que possuem uma PCD.

Teorema 4.1. *Seja G um grafo bipartido. O grafo G possui uma PCD se e somente se $G \cong K_{n,n}$. Ademais, $d_{cl}(K_{n,n}) = n$, para $n \geq 2$.*

Demonstração. Seja G um grafo bipartido e seja $\{X, Y\}$ uma bipartição de $V(G)$ tal que $|X| = m$ e $|Y| = n$. Suponha que $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ seja uma PCD de G . Considerando que vértices pertencentes a uma mesma parte de $\{X, Y\}$ não podem pertencer a uma mesma clique-dominante, temos $|V_i| \leq 2$, $1 \leq i \leq k$.

Vamos mostrar, inicialmente, que $G \cong K_{m,n}$. Suponha que existam $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $\{x, y\} \notin E(G)$. Seja V_x a parte de $\mathcal{P}$ que contém x . Neste caso, $|V_x| = 2$, pois $x \in V_x$ e $\{x, y\} \notin E(G)$. Seja $u \in V_x \setminus \{x\}$. Como V_x é uma clique, $u \in Y$; logo $\{u, y\} \notin E(G)$. Isto implica que não existe vértice em V_x que domine y , contrariando o fato de que V_x é uma clique-dominante. Logo, $G \cong K_{m,n}$.

Suponha que exista $V_i \in \mathcal{P}$ tal que $V_i = \{x\}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x \in X$. Isto implica que $X = \{x\}$, pois se existisse outro vértice $x' \in X$, $x' \neq x$, o conjunto $V_i = \{x\}$ não poderia dominar x' . Dado que $X = V_i = \{x\}$, então para $j \neq i$, $V_j \subseteq Y$. Este fato associado ao fato de que os vértices de Y são dois a dois não

adjacentes implicam que $|Y| = 1$. Portanto, supondo $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$, concluímos que $\mathcal{P} = \{\{x\}, \{y\}\}$.

Para concluir esta parte da demonstração, resta analisar o caso em que $|V_i| = 2$, $1 \leq i \leq k$. Como cada V_i é uma clique, então um de seus vértices pertence a X e o outro a Y . Logo, $|X| = |Y| = k$.

Seja $G \cong K_{n,n}$. Seja $\{X, Y\}$ uma bipartição de $V(G)$ tal que $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$. Seja $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_n\}$ uma partição de $V(G)$ tal que $V_i = \{x_i, y_i\}$, $1 \leq i \leq n$. Por definição, cada $V_i \in \mathcal{P}$ é uma clique-dominante, pois: $G[V_i] \cong K_2$; todo $x \in X$ é adjacente a y_i ; e todo $y \in Y$ é adjacente a x_i . Logo, $\mathcal{P}$ é uma PCD de G .

Para finalizar a demonstração, resta mostrar que $d_{cl}(K_{n,n}) = n$, para $n \geq 2$. Este resultado segue do fato de que o $K_{n,n}$ possui uma PCD cujas partes possuem cardinalidade dois, que é a menor cardinalidade de um conjunto clique-dominante do $K_{n,n}$, $n \geq 2$. $\square$

Muitos resultados na literatura analisam a variação de certos parâmetros dos grafos após operações de produtos entre eles [18, 68, 70, 90, 102, 120]. Como exemplo, podemos citar uma conjectura estabelecida por V. G. Vizing [121] em 1963 e que permanece como um dos problemas mais desafiadores em conjuntos dominantes e produtos de grafos. Esta conjectura afirma que para dois grafos G e H , $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$.

Sejam G_1 e G_2 dois grafos simples com $V(G_1) = \{u_0, \dots, u_{(p-1)}\}$ e $V(G_2) = \{w_0, \dots, w_{(q-1)}\}$. Neste trabalho, representamos o grafo G , obtido por uma operação de produto entre G_1 e G_2 , por meio de uma grade formada por pq vértices definida da seguinte forma:

- A numeração das linhas vai de 0 até $p - 1$;
- A numeração das colunas vai de 0 até $q - 1$;
- O vértice (u_i, w_j) está na posição (i, j) da grade e é denotado como v_{ij} , $0 \leq i < p$ e $0 \leq j < q$;
- Um vértice qualquer na linha i é denotado por $v_{i\bullet}$; o conjunto de todos os vértices na linha i é denotado por $V_{i\bullet}$;
- Um vértice qualquer na coluna j é denotado por $v_{\bullet j}$; o conjunto de todos os vértices na coluna j é denotado por $V_{\bullet j}$;
- A *diagonal* do vértice v_{ij} é definida como

$$diag(v_{ij}) = \{v_{(i+k)(j+k)} : -\min\{i, j\} \leq k < \min\{p-i, q-j\}\};$$

Esta representação do produto de G_1 e G_2 é denominada *representação matricial*. A Figura 4.1(b) ilustra esta representação para o grafo exibido na Figura 4.1(a).

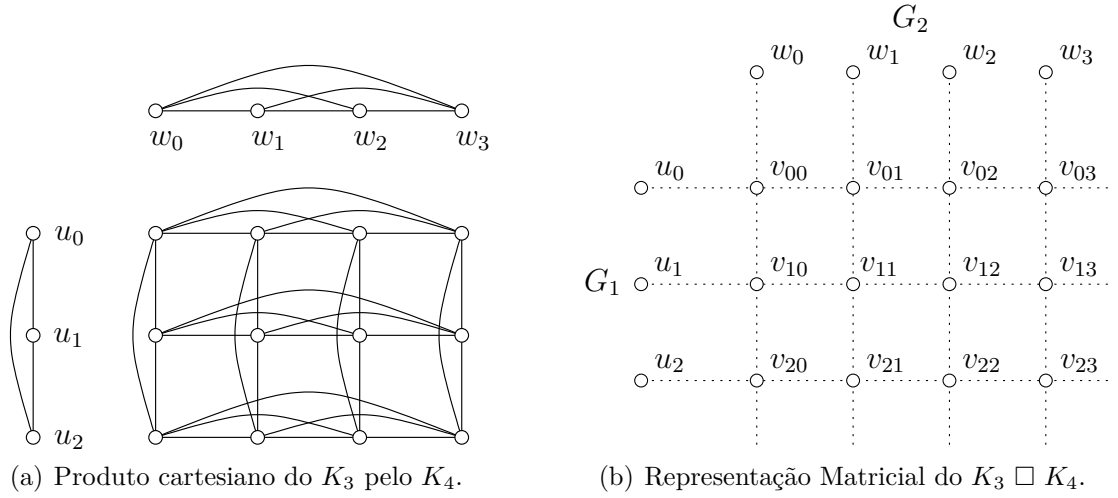


Figura 4.1: Exemplo de um produto cartesiano e sua representação matricial.

As propriedades a seguir são simples consequências da definição do produto cartesiano¹ e da notação matricial. Estas propriedades são usadas extensivamente ao longo deste capítulo.

Proposição 4.2. *Sejam G_1 e G_2 dois grafos arbitrários e $G = G_1 \square G_2$. Seja $e \in E(G)$. Então, na representação matricial de G , as extremidades de e , ou estão na mesma linha, ou estão na mesma coluna.* $\square$

Proposição 4.3. *Seja G o grafo obtido pelo produto cartesiano dos grafos G_1 e G_2 , com $V(G_1) = n_1$ e $V(G_2) = n_2$. Seja S uma clique de G . Então, na representação matricial de G , ou $S \subseteq V_{i\bullet}$, ou $S \subseteq V_{\bullet j}$, $0 \leq i < n_1$ e $0 \leq j < n_2$. Ademais, para S uma clique-dominante de G :*

(i) *se $S \subseteq V_{i\bullet}$ e $n_1 \geq 2$, então $S = V_{i\bullet}$;*

(ii) *se $S \subseteq V_{\bullet j}$ e $n_2 \geq 2$, então $S = V_{\bullet j}$;*

Demonstração. Sejam G_1, G_2, G e S definidos como na hipótese. Se $S = \{v_{ij}\}$, então $S \subseteq V_{i\bullet}$ e $S \subseteq V_{\bullet j}$. Se S é dominante, então, pela Proposição 4.2, concluímos que, ou $n_1 = 1$, ou $n_2 = 1$. Em ambos os casos, o resultado segue.

Suponha $|S| \geq 2$. Sejam $v_{ij}, v_{kl} \in S$, $v_{ij} \neq v_{kl}$. Como S é uma clique, v_{ij} e v_{kl} são adjacentes. Pela Proposição 4.2, $i = k$ ou $j = l$. Como esta propriedade é válida para quaisquer dois vértices distintos de S , concluímos que $S \subseteq V_{i\bullet}$ ou $S \subseteq V_{\bullet j}$.

Suponha agora que S seja uma clique-dominante. Suponha que $S \subset V_{i\bullet}$ e $n_1 \geq 2$. Seja $v_{ij} \in V_{i\bullet} \setminus S$. Seja $v_{kj} \in V(G)$ tal que $k \neq i$. Sabemos que este vértice existe porque

¹O produto cartesiano foi definido na Página 11.

$n_1 \geq 2$. Pela Proposição 4.2, nenhum vértice de S domina v_{kj} , contrariando a hipótese de que S seja uma clique-dominante. O caso no qual $S \subset V_{\bullet j}$ é análogo. $\square$

Os grafos obtidos pelo produto cartesiano de dois grafos possuem uma estrutura bem comportada. Associando esta estrutura com as exigências de uma partição em conjuntos cliques-dominantes foi possível obter uma caracterização dos grafos resultantes de produtos cartesianos que admitem uma PCD. Esta caracterização está apresentada no Teorema 4.4.

Teorema 4.4. *Seja G o grafo obtido pelo produto cartesiano dos grafos G_1 e G_2 , com $|V(G_1)| \geq 2$ e $|V(G_2)| \geq 2$. O grafo G possui uma partição em cliques-dominantes se e somente se $G_1 \cong K_p$ e $G_2 \cong K_q$. Ademais, $d_{cl}(K_p \square K_q) = \max\{p, q\}$.*

Demonstração. Sejam $V(G_1) = \{u_0, \dots, u_{(p-1)}\}$, $p \geq 2$, e $V(G_2) = \{w_0, \dots, w_{(q-1)}\}$, $q \geq 2$. Seja $G = G_1 \square G_2$. Considere G na sua representação matricial.

Suponha que G possua uma PCD. Pela Proposição 4.3, para toda clique-dominante S do grafo G , ou $S = V_{i\bullet}$, ou $S = V_{\bullet j}$. Logo, cada uma das partes de uma PCD de G é composta, ou por vértices de uma linha de G , ou por vértices de uma coluna de G . Além disso, como $V_{i\bullet} \cap V_{\bullet j} = \{v_{ij}\} \neq \emptyset$, nenhuma PCD de G possui uma parte $V_{i\bullet}$ e outra parte $V_{\bullet j}$, simultaneamente. Como a PCD particiona $V(G)$, estes fatos juntos permitem concluir que só existem duas PCDs possíveis em G , $\mathcal{P}_1 = \{V_{i\bullet} : 0 \leq i < p\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{V_{\bullet j} : 0 \leq j < q\}$.

Suponha $G_1 \not\cong K_p$. Como $G[V_{\bullet j}] \cong G_1$, então as partes de $\mathcal{P}_2$ não são cliques. Sejam $u_i, u_k \in V(G_1)$, tais que $\{u_i, u_k\} \notin E(G_1)$ e $i \neq k$. Pela definição de produto cartesiano $\{v_{i\bullet}, v_{k\bullet}\} \notin E(G)$. Este fato, em conjunto com a Proposição 4.3, implica que $V_{i\bullet}, V_{k\bullet}$, pertencentes a $\mathcal{P}_1$, não são conjuntos dominantes de G . Logo, G não possui PCD. O caso em que $G_2 \not\cong K_q$ é análogo.

Suponha $G_1 \cong K_p$ e $G_2 \cong K_q$. Nesse caso, as partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são PCDs de G . Ademais, considerando a Proposição 4.3, $d_{cl}(G) = \max\{p, q\}$. $\square$

Note que, uma clique-dominante maximal em um grafo G é um conjunto dominante independente em $\overline{G}$. Seja $G \cong K_n \square K_m$, com $n \geq 2$ e $m \geq 2$. No teorema anterior as duas PCDs mostradas para G são compostas apenas por cliques maximais. O que significa que estas PCDs são PDIs no grafo $\overline{G}$. Como $\overline{G} \cong K_n \times K_m^1$, então o Teorema 4.4 implica o Teorema 3.30. Observe ainda que um conjunto dominante independente $S \subseteq V(G)$ tal que não existe $v \in V(G) \setminus S$ com $S \subseteq N[v]$ é uma clique-dominante em $\overline{G}$. Note que esta propriedade vale para qualquer conjunto dominante independente em $K_n \times K_m$, com $n \geq 2$ e $m \geq 2$. Então, o Teorema 3.30 implica que $d_{cl}(K_n \square K_m) = \max\{p, q\}$,

¹O grafo $\overline{G}$ é o produto direto do K_n pelo K_m . O produto direto foi definido na Página 11.

contido no Teorema 4.4. Apesar de intimamente relacionados, os resultados contidos no Teorema 4.4 e no Teorema 3.30 foram obtidos independentemente.

Vamos agora analisar o problema da partição em cliques-dominantes para os grafos resultantes do produto direto de grafos. A Proposição 4.5 e o Corolário 4.6 são consequências diretas da definição de produto direto e da notação matricial.

Proposição 4.5. *Sejam G_1 e G_2 dois grafos simples. Seja $G = G_1 \times G_2$ e $e \in E(G)$. Então, na representação matricial de G , as duas extremidades de e estão em linhas e colunas diferentes.*

Demonstração. Decorre da definição do produto direto e do fato de que os grafos são simples. $\square$

Corolário 4.6. *Se G_1 e G_2 são grafos completos, então na representação matricial de $G = G_1 \times G_2$ existe aresta entre quaisquer dois vértices em linhas e colunas diferentes.* $\square$

O Teorema 4.7 estabelece uma condição que deve ser respeitada por dois grafos para que seu produto direto possua uma clique-dominante.

Teorema 4.7. *Sejam G e H dois grafos tais que G não possui clique-dominante. Então, o grafo $G \times H$ também não possui clique dominante.*

Demonstração. Sejam os grafos G e H definidos como na hipótese. Sejam $V(G) = \{u_1, \dots, u_p\}$ e $V(H) = \{w_1, \dots, w_q\}$. Considere o produto $G \times H$ em sua representação matricial.

Suponha que exista uma clique-dominante S em $G \times H$. Seja $S_G = \{u_i : v_{ij} \in S\}$. Vamos mostrar que S_G é uma clique-dominante de G . Como S é uma clique, quaisquer dois vértices $v_{ij}, v_{kl} \in S$ são adjacentes. Da definição de produto direto, u_i e u_k são adjacentes em G . Então, S_G é uma clique de G .

Considere agora $u_r \notin S_G$. Como S é um conjunto dominante, para todo $v_{rp} \in V(G \times H) \setminus S$ existe $v_{kl} \in S$ tal que $\{v_{rp}, v_{kl}\} \in E(G \times H)$. Pela definição de produto direto, u_r e u_k são adjacentes em G . Por construção, $u_k \in S_G$. Logo, u_r é dominado por S_G . Concluimos que S_G é um conjunto dominante. $\square$

Esta condição apesar de ser necessária, não é suficiente para garantir a existência de uma clique-dominante em um grafo obtido pelo produto direto. Esse fato é demonstrado no Teorema 4.8.

Teorema 4.8. *O grafo $K_{p,p} \times K_q$, $p \geq 2$, não possui clique-dominante.*

Demonstração. Seja $G_1 \cong K_{p,p}$ com $V(G_1) = \{u_0, \dots, u_{(2p-1)}\}$ e seja $\{X, Y\}$ uma bipartição de G_1 . Seja $G_2 \cong K_q$ com $V(G_2) = \{w_0, \dots, w_{(q-1)}\}$. Seja $G = G_1 \times G_2$. Considere G na sua representação matricial.

Seja S uma clique de G . Se $q = 1$, então $E(G) = \emptyset$, $|S| = 1$. Como $|V(G)| = pq \geq 2$, S não é dominante. Suponha $q \geq 2$. Seja $S = \{v_{ij}\}$ com $0 \leq i < 2p$ e $0 \leq j < q$. Pela Proposição 4.5, todo vértice v_{kj} com $k \neq i$ não é adjacente a v_{ij} . Portanto, não existe clique-dominante de cardinalidade um em G . Seja $S = \{v_{ij}, v_{rs}\}$. Por um raciocínio similar ao caso anterior, o vértice v_{is} não é dominado por S . Logo, também não existe clique-dominante de cardinalidade dois em G . Suponha $|S| \geq 3$. Sejam $v_{ij}, v_{rs}, v_{xy} \in S$. Como S é uma clique, pela Proposição 4.5, $i \neq r$, $i \neq x$, $r \neq x$. Pela definição de produto direto, $\{u_i, u_r, u_x\}$ é uma clique em G_1 . Isto implica que $K_{p,p}$ possui um ciclo ímpar contrariando o fato de que este grafo é bipartido. $\square$

Para os produtos diretos de grafos completos, o Teorema 4.9 estabelece que os grafos que possuem PCD são os produtos entre grafos com três ou mais vértices. Para esses grafos, o teorema também estabelece o número clique-domático.

Teorema 4.9. *Seja $G \cong K_p \times K_q$, $p \geq 3$, $q \geq 3$. Então, $d_{cl}(G) = \lfloor \frac{pq}{3} \rfloor$.*

Demonstração. Seja $G_1 \cong K_p$ e $G_2 \cong K_q$ com $V(G_1) = \{u_0, \dots, u_{p-1}\}$ e $V(G_2) = \{w_0, \dots, w_{q-1}\}$. Vamos mostrar inicialmente que uma clique-dominante em G precisa ter cardinalidade pelo menos três.

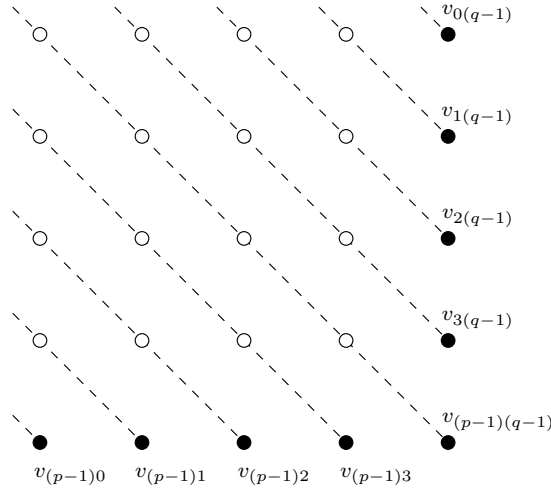
Seja $S = \{v_{ij}\}$. Por hipótese, $q \geq 3$. Logo, $V_{i\bullet} \setminus \{v_{ij}\} \neq \emptyset$. Pela Proposição 4.5, v_{ij} não é adjacente a nenhum elemento de $V_{i\bullet}$. Concluimos que S não é um conjunto dominante. Seja $S = \{v_{ij}, v_{rs}\}$ uma clique de G . Da definição de produto direto e do fato de S ser clique, $i \neq r$ e $j \neq s$. Pelos mesmos argumentos usados no caso anterior, concluimos que v_{is} não é dominado por S , isto é, S não é um conjunto dominante.

Agora, vamos mostrar que toda clique de G com cardinalidade maior ou igual a três é dominante. Seja S uma clique de G com $|S| \geq 3$. Suponha, por contradição, que exista um vértice v_{ij} que não seja dominado por S . Como os grafos G_1 e G_2 são grafos completos, qualquer par de vértices de G em linhas e colunas diferentes deve ser adjacente. Isto significa que apenas os vértices de $V_{i\bullet} \cup V_{\bullet j}$ não são adjacentes a v_{ij} . Pela Proposição 4.5, S pode possuir no máximo um vértice em $V_{i\bullet}$ e no máximo um vértice em $V_{\bullet j}$. Como S possui pelo menos três vértices, então $S \setminus (V_{i\bullet} \cup V_{\bullet j}) \neq \emptyset$. Logo, existe vértice em S que domina v_{ij} .

Como toda clique-dominante de G possui cardinalidade pelo menos três, concluimos que, se existir uma PCD em G , $d_{cl}(G) \leq \lfloor \frac{pq}{3} \rfloor$. Para concluir a demonstração, vamos construir uma PCD $\mathcal{P} := \{P_1, \dots, P_{\lfloor \frac{pq}{3} \rfloor}\}$, isto é, uma partição de cardinalidade $\lfloor \frac{pq}{3} \rfloor$. Para explicitar esta construção, os vértices de $V(G)$ serão rotulados de acordo com os passos a seguir:

- (i) Considere $(v_{(p-1)0}, \dots, v_{(p-1)(q-1)}, v_{(p-2)(q-1)}, \dots, v_{0(q-1)})$, uma ordem dos vértices do conjunto $V_{(p-1)\bullet} \cup V_{\bullet(q-1)}$. Esta ordem será chamada de *ordem canônica* e está ilustrada na Figura 4.2(a).

- (ii) Considerando os vértices de $V_{(p-1)\bullet} \cup V_{\bullet(q-1)}$ na ordem canônica, rotule os vértices das suas diagonais em ordem crescente de linha, a partir do rótulo 1. A Figura 4.2(b) exemplifica esta rotulação.
- (iii) Troque o rótulo dos vértices 1 e pq . A rotulação obtida é denominada *rotulação canônica* e está exemplificada na Figura 4.2(c).



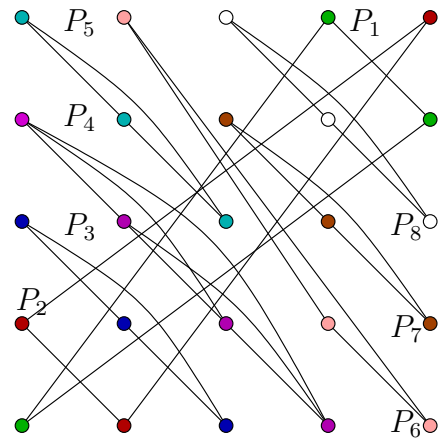
(a) Os vértices em negrito são os vértices considerados no item (i). As arestas tracejadas conectam os vértices pertencentes à mesma diagonal.

11 ○	16 ○	20 ○	23 ○	25 ○
7 ○	12 ○	17 ○	21 ○	24 ○
4 ○	8 ○	13 ○	18 ○	22 ○
2 ○	5 ○	9 ○	14 ○	19 ○
1 ○	3 ○	6 ○	10 ○	15 ○

(b) Rotulação dos vértices explicitada no item (ii).

11 ○	16 ○	20 ○	23 ○	1 ○
7 ○	12 ○	17 ○	21 ○	24 ○
4 ○	8 ○	13 ○	18 ○	22 ○
2 ○	5 ○	9 ○	14 ○	19 ○
25 ○	3 ○	6 ○	10 ○	15 ○

(c) Rotulação canônica.



(d) Partição em cliques-dominantes.

Figura 4.2: Construção de uma PCD no $K_5 \times K_5$.

A rotulação canônica e o conceito de diagonal de um vértice possuem algumas propriedades que são usadas na construção da partição $\mathcal{P}$.

Proposição 4.10. *Considere os vértices de $V_{(p-1)\bullet} \cup V_{\bullet(q-1)}$ na ordem canônica. Então, a cardinalidade das diagonais dos vértices deste conjunto, na ordem, formam a sequência a seguir, esquematizada em três blocos:*

$$\boxed{1, 2, \dots, \min\{p, q\} - 1} \quad \boxed{\min\{p, q\}, \dots, \min\{p, q\}} \quad \boxed{\min\{p, q\} - 1, \dots, 1}$$

Além disso, no bloco do meio, o número de termos da sequência é $|p - q| + 1$.

Demonstração. Por definição, $\text{diag}(v_{ij}) = \{v_{(i+k)(j+k)} : -\min\{i, j\} \leq k < \min\{p - i, q - j\}\}$. Isto implica que $|\text{diag}(v_{ij})| = \min\{i, j\} + \min\{p - i, q - j\}$. O resultado segue da definição de diagonal, observando que $\min\{p - i, q - j\} = 1$, para $v_{ij} \in V_{(p-1)\bullet} \cup V_{\bullet(q-1)}$. $\square$

Vamos agora explicitar a construção de $\mathcal{P}$. São analisados três casos, dependendo do valor de pq .

Caso 1. $pq \equiv 0 \pmod{3}$

Neste caso, cada parte de $\mathcal{P}$ será formada por três vértices consecutivos na rotulação canônica, iniciando no vértice de rótulo 1. Ou seja,

$$P_i = \{3(i - 1) + 1, 3(i - 1) + 2, 3i\}, 1 \leq i \leq \lfloor pq/3 \rfloor.$$

Como demonstrado anteriormente, cada clique de G de cardinalidade pelo menos três é um conjunto dominante. Logo, é suficiente provar que cada parte de $\mathcal{P}$ é uma clique.

Pela Proposição 4.10, as diagonais referentes aos dois primeiros e aos dois últimos vértices da ordem canônica são as únicas que possuem menos de três elementos. Por construção de $\mathcal{P}$, estes elementos são distribuídos em $P_1 = \{v_{0(q-1)}, v_{(p-2)0}, v_{(p-1)1}\}$ e $P_{\lfloor \frac{pq}{3} \rfloor} = \{v_{0(q-2)}, v_{1(q-1)}, v_{(p-1)0}\}$. Lembrando que $p \geq 3$ e $q \geq 3$, pelo Corolário 4.6, concluímos que P_1 e $P_{\lfloor \frac{pq}{3} \rfloor}$ são cliques.

Seja P_i , $1 < i < \lfloor \frac{pq}{3} \rfloor$. Se todos os vértices de P_i pertencem à mesma diagonal, então, pelo Corolário 4.6, P_i é uma clique de G . Logo, para concluir a demonstração é suficiente analisar os casos em que P_i possui vértices pertencentes a diagonais distintas. Por construção, os vértices de P_2 e $P_{\lfloor \frac{pq}{3} \rfloor - 1}$ pertencem a uma mesma diagonal. Logo, vamos considerar P_i , $2 < i < \lfloor \frac{pq}{3} \rfloor - 1$ e contendo vértices de diagonais distintas. Isto implica que para $v_{kl} \in P_i$, $|\text{diag}(v_{kl})| \geq 4$.

Já que os vértices de uma mesma diagonal são consecutivos na rotulação canônica, P_i deve possuir vértices de apenas duas diagonais diferentes, pois $|P_i| = 3$ e as diagonais possuem pelo menos 4 elementos. Da rotulação canônica e também do fato de que $|P_i| = 3$,

concluimos que P_i possui um único vértice em $V_{(p-1)\bullet} \cup V_{\bullet(q-1)}$. Seja v_{kl} este vértice e v_{rs} seu sucessor na rotulação canônica. Note que v_{kl} é o vértice de maior rótulo entre os vértices de $\text{diag}(v_{kl})$, logo $v_{rs} \notin \text{diag}(v_{kl})$. Como P_i possui vértices consecutivos na rotulação canônica, então $v_{rs} \in P_i$. Logo, ou $P_i = \{v_{kl}, v_{rs}, v_{(r+1)(s+1)}\}$, ou $P_i = \{v_{(k-1)(l-1)}, v_{kl}, v_{rs}\}$.

Resta mostrar que $\{v_{kl}, v_{rs}, v_{(r+1)(s+1)}\}$ e $\{v_{(k-1)(l-1)}, v_{kl}, v_{rs}\}$ são cliques. Como v_{kl} e v_{rs} são consecutivos na rotulação canônica e pertencem a diagonais distintas, concluimos que v_{rs} é o vértice de menor rótulo em $\text{diag}(v_{rs})$, portanto é também o vértice na linha de menor índice neste conjunto. Além disso, uma de duas possibilidades ocorre: ou $v_{rs} \in \text{diag}(v_{k(l+1)})$, ou $v_{rs} \in \text{diag}(v_{(k-1)l})$. Em cada um destes casos, convém observar as submatrizes formadas entre os vértices v_{kl} e v_{rs} na representação matricial, esquematizadas nas Figuras 4.3(a) e 4.3(b). No caso em que $v_{rs} \in \text{diag}(v_{k(l+1)})$, como $|\text{diag}(v_{rs})| \geq 4$, temos que $l - s \geq 2$ e $k - r \geq 3$. Concluimos que $l \neq s$, $l \neq s + 1$, $k \neq r$, $k \neq r + 1$. Logo, pelo Corolário 4.6, $\{v_{kl}, v_{rs}, v_{(r+1)(s+1)}\}$ e $\{v_{(k-1)(l-1)}, v_{kl}, v_{rs}\}$ são cliques. O caso em que $v_{rs} \in \text{diag}(v_{(k-1)l})$ é análogo.

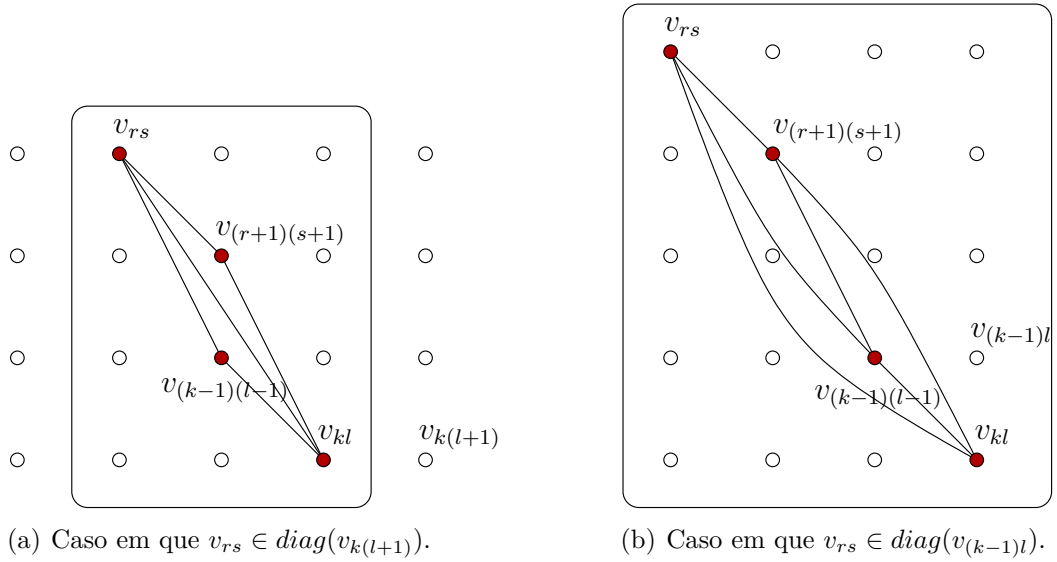


Figura 4.3: Ilustração das arestas existentes entre os vértices $v_{(k-1)(l-1)}$, v_{kl} , v_{rs} e $v_{(r+1)(s+1)}$.

Caso 2. $pq \equiv 1 \pmod{3}$

Neste caso, as partes de $\mathcal{P}$ continuam sendo formadas com vértices consecutivos na rotulação canônica. Entretanto, como $pq \equiv 1 \pmod{3}$, uma das partes será composta por quatro vértices. Assim, define-se P_i como segue.

$$P_i = \begin{cases} \{3(i-1)+1, 3(i-1)+2, 3i\}, & \text{se } i < 3; \\ \{3(i-1)+1, 3(i-1)+2, 3i, 3i+1\}, & \text{se } i = 3; \\ \{3(i-1)+2, 3i, 3i+1\}, & \text{se } i > 3. \end{cases}$$

Como $pq \equiv 1 \pmod{3}$, então $p \neq 3$ e $q \neq 3$. Logo, $\min\{p, q\} \geq 4$ e, pela Proposição 4.10, existe pelo menos uma diagonal de cardinalidade quatro. Por definição, a diagonal $\text{diag}(v_{(p-1)(3)})$, cujos vértices estão atribuídos à parte P_3 , possui cardinalidade quatro. Pelo Corolário 4.6, e pela definição de diagonal, P_3 é uma clique. As outras partes são formadas de forma similar ao caso em que $pq \equiv 0 \pmod{3}$. Portanto, a demonstração de que estas partes são cliques é análoga. A Figura 4.2(d) ilustra esta construção para o caso em que $p = q = 5$.

Caso 3. $pq \equiv 2 \pmod{3}$

Como nos casos anteriores as partes de $\mathcal{P}$ são formadas com vértices consecutivos na rotulação canônica. Entretanto, como $pq \equiv 2 \pmod{3}$, existem duas partes compostas por quatro vértices. As partes de $\mathcal{P}$ estão definidas a seguir.

$$P_i = \begin{cases} \{3(i-1)+1, 3(i-1)+2, 3i\}, & \text{se } i < 3; \\ \{3(i-1)+1, 3(i-1)+2, 3i, 3i+1\}, & \text{se } i = 3; \\ \{3(i-1)+2, 3i, 3i+1\}, & \text{se } 3 < i < \left\lfloor \frac{pq}{3} \right\rfloor - 2; \\ \{3(i-1)+2, 3i, 3i+1, 3i+2\}, & \text{se } i = \left\lfloor \frac{pq}{3} \right\rfloor - 2; \\ \{3i, 3i+1, 3i+2\}, & \text{se } i > \left\lfloor \frac{pq}{3} \right\rfloor - 2. \end{cases}$$

Neste caso, como $pq \equiv 2 \pmod{3}$, então $p \equiv 1 \pmod{3}$ e $q \equiv 2 \pmod{3}$ ou $p \equiv 2 \pmod{3}$ e $q \equiv 1 \pmod{3}$. Lembrando que $p \geq 3$ e $q \geq 3$, concluímos que $\min\{p, q\} \geq 4$ e $|p-q|+1 \geq 2$. Isto significa que, pela Proposição 4.10, existem pelo menos duas diagonais de cardinalidade quatro. Duas destas diagonais são $\text{diag}(v_{(p-1)(3)})$ e $\text{diag}(v_{(3)(q-1)})$, as quais têm os seus quatro vértices atribuídos às partes P_3 e $P_{\left\lfloor \frac{pq}{3} \right\rfloor - 2}$, respectivamente. Pela definição de diagonal e o Corolário 4.6, estas partes são cliques. As outras partes de $\mathcal{P}$ são formadas seguindo um critério similar ao caso em que $pq \equiv 0 \pmod{3}$, logo a demonstração de que estas partes são cliques é análoga. $\square$

No que segue, vamos abordar o problema da partição em cliques-dominantes para a classe das potências de ciclos. Seja C_n um grafo ciclo com $V(C_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Para $v_i, v_j \in V(C_n)$ definimos $d_{C_n}(v_i, v_j)$ como o menor número de arestas em um caminho entre v_i e v_j no C_n . A k -ésima potência do C_n é o grafo C_n^k , com conjunto de vértices $V(C_n^k) = V(C_n)$ e conjunto de arestas $E(G) = E^1 \cup \dots \cup E^k$, tal que $E^l = \{\{v_i, v_j\} : d_{C_n}(v_i, v_j) = l\}$. Note que $k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Dizemos que uma aresta $e \in E^l$ possui *alcance* l . A Figura 4 mostra um grafo nesta classe.

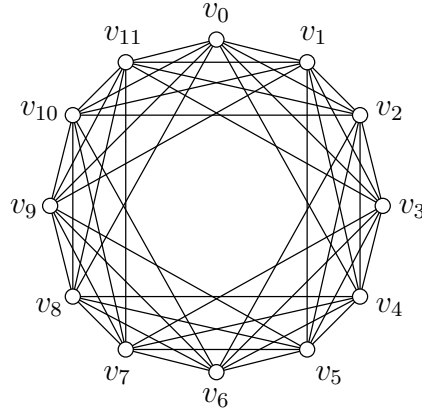


Figura 4.4: O grafo C_{12}^4 .

Observe que considerando esta definição de potências de ciclos, os grafos desta classe são sempre simples. Além disso, quando $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $C_n^k \cong K_n$ e $d_{cl}(K_n) = n$.

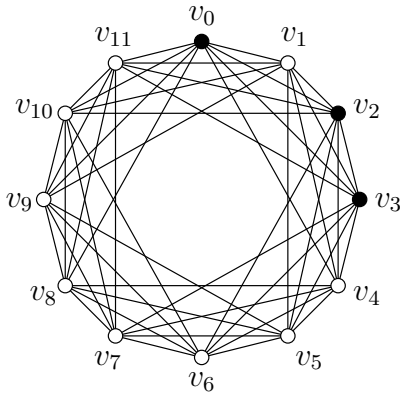
Na classe das potências de ciclos existem grafos extremamente densos. Quanto maior o valor de k , mais denso o grafo se torna e, como consequência, mais cliques este grafo possui. Para estudar o problema da partição em cliques-dominantes nesta classe, vamos primeiramente classificar as suas cliques em duas categorias: as cliques internas e as cliques externas.

Seja $G \cong C_n^k$ com $V(G) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Definimos $(v_0, \dots, v_{n-1})$ uma *ordem cíclica* de $V(G)$. Para $v_i \in V(G)$, $N^+(v_i) = \{v_{i+j \pmod n} : 1 \leq j \leq k\}$ e $N^-(v_i) = \{v_{i-j \pmod n} : 1 \leq j \leq k\}$. Além disso, $N^+[v_i] = N^+(v_i) \cup \{v_i\}$ e $N^-[v_i] = N^-(v_i) \cup \{v_i\}$. Seja $S \subseteq V(G)$ uma clique de G . Dizemos que S é uma *clique interna* de G se e somente se existe $v_i \in S$ tal que $S \subseteq N^+[v_i]$; caso contrário S é uma *clique externa* de G . Estes dois tipos de cliques estão exemplificados na Figura 4.5.

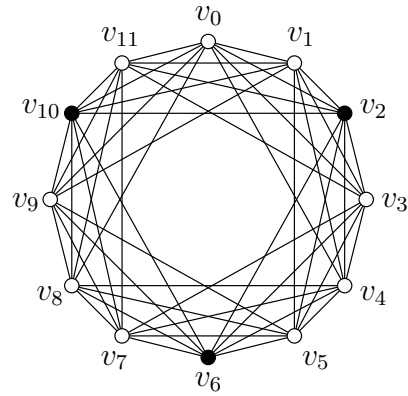
Dentre as potências de ciclos, alguns grafos não possuem partições em cliques-dominantes como, por exemplo, o C_5 . Com o objetivo de caracterizar quais grafos desta classe possuem pelo menos uma PCD, estudamos condições necessárias para a existência de cliques-dominantes em potências de ciclos.

Lema 4.11. *Seja $G \cong C_n^k$. Se G possui cliques externas, então $n \leq 3k$.*

Demonstração. Seja $G \cong C_n^k$, com $V(G) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Seja S uma clique de G . Suponha que S seja uma clique externa. Então, $|S| \geq 3$. Além disso, existem $v_i, v_j, v_l \in S$, $0 \leq i < j < l < n$, tais que $v_j \in N^+(v_i)$ e $v_l \notin N^+(v_i)$. Como o alcance máximo de uma aresta no C_n^k é k , concluímos que:



(a) Os vértices em negrito formam uma clique interna, pois $S \subseteq N^+[v_0]$.



(b) Os vértices em negrito formam uma clique externa, pois não existe $v_i \in S$ tal que $S \subseteq N^+[v_i]$.

Figura 4.5: Exemplos dos tipos de cliques no C_{12}^4 .

$$\begin{aligned} j - i &\leq k \\ l - j &\leq k \\ n - l + i &\leq k \end{aligned}$$

Logo, $(j - i) + (l - j) + (n - l + i) \leq 3k$; isto implica $n \leq 3k$, e o resultado segue. $\square$

Nem toda clique interna é uma clique-dominante. No lema a seguir, estabelecemos uma condição necessária para a existência de cliques internas que sejam cliques-dominantes.

Lema 4.12. *Seja S uma clique interna do C_n^k . Se S é um conjunto dominante, então $n \leq 3k + 1$.*

Demonstração. Seja $G \cong C_n^k$, com $V(G) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Seja S uma clique interna de G . Suponha que S seja um conjunto dominante.

Suponha $S = \{v_i\}$. Como $d(v) \leq 2k$, o número máximo de vértices dominados por v_i é $2k + 1$. Logo, $n \leq 3k + 1$.

Suponha $|S| \geq 2$. Seja $v_i \in S$ tal que $S \subseteq N^+(v_i)$. Ajuste a notação para que $i = 0$. Seja $v_j \in S$ tal que j seja máximo. Note que $j \leq k$. Seja $D = N^-(v_0) \cup \{v_0, \dots, v_j\} \cup N^+(v_j)$. O conjunto D corresponde exatamente aos vértices dominados por S . Isso se deve ao fato de que para todo $v \in S$, $N^-(v) \subseteq N[v_0]$ e $N^+(v) \subseteq N[v_j]$. Além disso, $|D| \leq |N^-(v_0)| + j + 1 + |N^+(v_j)| \leq k + k + 1 + k = 3k + 1$. Como S é um conjunto dominante de G , $|D| = n$ e o resultado segue. $\square$

Um caminho para determinar o número clique-domático das potências de ciclos é estabelecer condições suficientes para que um determinado conjunto de vértices seja uma clique-dominante. Uma abordagem natural é tentar particionar seu conjunto de vértices em cliques-dominantes de menor cardinalidade possível. No Lema 4.13, apresentamos uma condição suficiente para um conjunto de dois vértices em uma potência de ciclo ser uma clique-dominante.

Lema 4.13. *Seja $G \cong C_n^k$, com $n \leq 3k+1$, $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $d = 3k+1-n$. Então, $S = \{v_i, v_{i+l}\}$ com $k-d \leq l \leq k$ é uma clique-dominante em G .*

Demonstração. Seja $G \cong C_n^k$, com $V(G) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ e $n \leq 3k+1$. Seja $S = \{v_i, v_{(i+l) \bmod n}\}$ com $k-d \leq l \leq k$ e $d = 3k+1-n$. Como $l \leq k$, v_i e $v_{(i+l) \bmod n}$ são adjacentes. Resta mostrar que S é um conjunto dominante em G .

Suponha que S não seja dominante, isto significa que $|N[S]| < n$. Seja $v_j \in V(G)$ um vértice não dominado por S . Então, $v_j \notin N[v_i] \cup N[v_{(i+l) \bmod n}]$. Seja $C = \{v_i, \dots, v_{(i+l) \bmod n}\}$. Note que, $|C| = l+1$. Além disso, como $C \subseteq N[v_i] \cap N[v_{(i+l) \bmod n}]$, então $v_j \notin C$. Ademais, $N^-(v_i) \cap N^+(v_{(i+l) \bmod n}) = \emptyset$. A Figura 4.6 esquematiza esta situação.

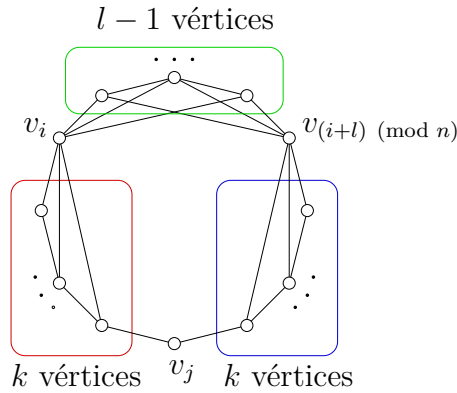


Figura 4.6: Ilustração de uma potência de ciclo para a qual $S = \{v_i, v_{(i+k) \bmod n}\}$ não é dominante.

Como os conjuntos C , $N^-(v_i)$ e $N^+(v_{(i+l) \bmod n})$ são dois a dois disjuntos e estão contidos em $N[S]$, concluímos que $|N[S]| \geq |C| + |N^-(v_i)| + |N^+(v_{(i+l) \bmod n})| = l+1+k+k$. Como $k-d \leq l \leq k$, então $|N[S]| \geq 3k+1-d$. Como $d = 3k+1-n$, $|N[S]| \geq n$, contrariando a hipótese de que $|N[S]| < n$. $\square$

O Teorema 4.14 caracteriza as potências de ciclos que possuem uma PCD e estabelece o valor de $d_{cl}(C_n^k)$ para estes casos.

Teorema 4.14. *Seja $G \cong C_n^k$. O grafo G possui pelo menos uma PCD se e somente se $k \geq \frac{n-1}{3}$. Ademais, $d_{cl}(C_n^k) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, para $\frac{n-1}{3} \leq k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Demonstração. Seja $G \cong C_n^k$ com $V(G) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Suponha $k < \frac{n-1}{3}$. Então, $n > 3k + 1$. Pelo Lema 4.11, não existem cliques externas em G . Além disso, pelo Lema 4.12, não existem em G cliques internas que sejam dominantes. Como toda clique de G é uma clique interna ou uma clique externa, concluimos que não existem cliques dominantes em G . Logo, não existe PCD em G .

Se $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então G é isomorfo a um grafo completo e o resultado segue. Suponha $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Nas potências de ciclos, $\Delta(G) = 2k$. Caso n seja par, temos $k \leq \frac{n}{2} - 1$; então, $\Delta(G) \leq n - 2$. Caso n seja ímpar, temos $k \leq \frac{n-1}{2} - 1$; então, $\Delta(G) \leq n - 3$. Em ambos os casos não temos vértices universais em G . Logo, uma clique dominante em G possui pelo menos dois vértices. Isto implica, $d_{cl}(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Vamos construir uma PCD, $\mathcal{P}$, com este número de partes.

Por hipótese, $\frac{n-1}{3} \leq k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Isto implica que $2k + 2 \leq n \leq 3k + 1$. Particione $V(G)$ em três blocos, B^1, B^2, B^3 , tais que $B^1 = \{v_0, \dots, v_{k-1}\}$, $B^2 = \{v_k, \dots, v_{2k-1}\}$ e $B^3 = \{v_{2k}, \dots, v_{n-1}\}$. Note que, $|B^1| = |B^2| = k$ e $2 \leq |B^3| \leq k + 1$.

Denote u_j^i o j -ésimo vértice do i -ésimo bloco. Dizemos que u_j^i é um *vértice ímpar (par)* se j é ímpar (par). Além disso, u_j^i e u_l^k são *vértices correspondentes* sempre que $j = l$. A Figura 4.7 exemplifica estes conceitos.

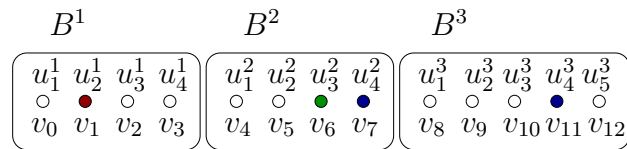


Figura 4.7: Partição em blocos do C_{13}^4 . Nesta partição, o vértice $v_1 = u_2^1$ é um vértice par e o vértice $v_6 = u_3^2$ é um vértice ímpar. Os vértices v_7 e v_{11} são vértices correspondentes.

A construção de $\mathcal{P}$ prossegue em casos, dependendo da cardinalidade de B^3 .

Caso 1. $|B^3| = k + 1$.

Neste caso, $\mathcal{P} = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$, tais que:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\{u_i^1, u_i^2\} : 1 \leq i \leq k \text{ e } i \text{ ímpar}\}; \\ P_2 &= \{\{u_i^2, u_i^3\} : 2 \leq i \leq 2 \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor \text{ e } i \text{ par}\}; \\ P_3 &= \{\{u_i^1, u_{i+1}^3\} : 2 \leq i \leq k \text{ e } i \text{ par}\}; \\ P_4 &= \begin{cases} \{\{u_{k-1}^2, u_{k-1}^3\}, \{u_1^3, u_{k+1}^3\}\}, & \text{se } k \text{ é ímpar;} \\ \{\{u_k^2, u_k^3, u_1^3\}\}, & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases} \end{aligned}$$

As Figuras 4.8 e 4.9 exemplificam $\mathcal{P}$ com diferentes paridades de k .

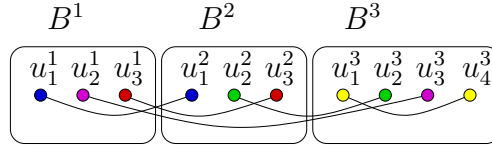


Figura 4.8: Grafo C^3_{10} . Partição $\mathcal{P} = \{\{u_1^1, u_1^2\}, \{u_2^1, u_3^3\}, \{u_3^1, u_3^2\}, \{u_2^2, u_2^3\}, \{u_1^3, u_4^3\}\}$ exemplificando o caso em que k é ímpar.

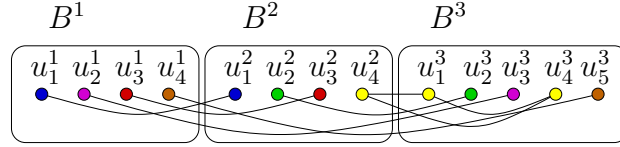


Figura 4.9: Grafo C^4_{13} . Partição $\mathcal{P} = \{\{u_1^1, u_1^2\}, \{u_2^1, u_3^3\}, \{u_3^1, u_3^2\}, \{u_4^1, u_5^3\}, \{u_2^2, u_2^3\}, \{u_4^2, u_1^3, u_4^3\}\}$ exemplificando o caso em que k é par.

Pelo Lema 4.13, os elementos de P_1 , P_2 , P_3 e P_4 (no caso em que k é ímpar) são cliques-dominantes de G . Note que o alcance das arestas nestas cliques é sempre k^1 . Considere P_4 com k par. Pelo Lema 4.13, $\{u_k^2, u_k^3\}$ é clique-dominante em G . Além disso, u_1^3 é adjacente a ambos u_k^2 e u_k^3 . Portanto, $\{u_k^2, u_k^3, u_1^3\}$ é clique-dominante em G .

Resta mostrar que $\mathcal{P}$ é uma partição de $V(G)$. Todos os vértices de $\mathcal{P}$ são vértices de $V(G)$. Logo, é suficiente mostrar que cada vértice de $V(G)$ pertence exatamente a um elemento de $\mathcal{P}$. Para esta análise, consideramos a partição de $V(G)$ nos blocos B^1 , B^2 e B^3 .

Vértices de B^1

Cada vértice ímpar de B^1 pertence a um único elemento de P_1 e cada vértice par pertence a exatamente um elemento de P_3 .

Vértices de B^2

Cada vértice ímpar de B^2 pertence a exatamente um elemento de P_1 . O último vértice par deste bloco pertence a P_4 . Os demais vértices pares de B^2 pertencem, cada um, a uma única parte de P_2 .

Vértices de B^3

O vértice u_1^3 pertence a um único elemento de P_4 . Cada um dos outros vértices ímpares pertencem a um único elemento de P_3 . Resta analisar os vértices pares de B^3 . Caso k seja ímpar, o vértice u_{k-1}^3 pertence a uma única parte de P_4 e o mesmo ocorre com o vértice u_{k+1}^3 . Caso k seja par, o vértice u_k^3 pertence a uma parte de P_4 . Os demais vértices pares

¹Usaremos a expressão “aresta de P_i ” para nos referirmos à aresta do subgrafo induzido por P_i .

de B^3 estão em P_2 , cada um deles associado a uma única parte.

Caso 2. $|B^3| = k$.

Neste caso, $\mathcal{P} = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$, tais que:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\{u_i^1, u_i^2\} : 2 \leq i \leq 2 \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor \text{ e } i \text{ par}\}; \\ P_2 &= \{\{u_i^2, u_i^3\} : 1 \leq i \leq k \text{ e } i \text{ ímpar}\}; \\ P_3 &= \{\{u_{i-1}^1, u_i^3\} : 2 \leq i \leq k \text{ e } i \text{ par}\}; \\ P_4 &= \begin{cases} \{\{u_{k-1}^1, u_k^1, u_{k-1}^2\}\}, & \text{se } k \text{ é ímpar;} \\ \{\{u_k^1, u_k^2\}\}, & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases} \end{aligned}$$

As Figuras 4.10 e 4.11 exemplificam $\mathcal{P}$ para diferentes paridades de k .

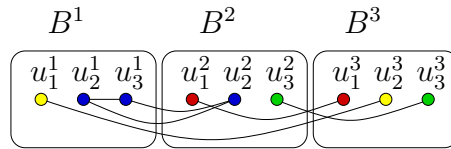


Figura 4.10: Grafo C_9^3 . Partição $\mathcal{P} = \{\{u_1^1, u_2^3\}, \{u_2^1, u_3^1, u_2^2\}, \{u_1^2, u_3^1\}, \{u_3^2, u_3^3\}\}$ exemplificando o caso em que k é ímpar.

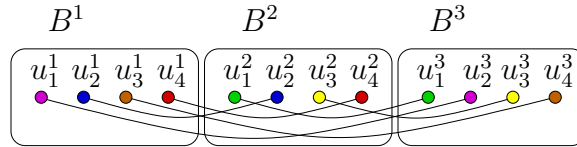


Figura 4.11: Grafo C_{12}^4 . Partição $\mathcal{P} = \{\{u_1^1, u_2^3\}, \{u_2^1, u_2^2\}, \{u_3^1, u_4^1\}, \{u_4^1, u_4^2\}, \{u_1^2, u_3^1\}, \{u_3^2, u_3^3\}\}$ exemplificando o caso em que k é par.

Pelo Lema 4.13, os elementos de P_1 , P_2 , P_3 e P_4 (no caso em que k é par) são cliques dominantes de G . Como no caso anterior, o alcance das arestas nas cliques de P_1 e P_2 é sempre k . Para as cliques de P_3 e de P_4 no caso par, o alcance é $k - 1$. Considere P_4 , com k ímpar. Pelo Lema 4.13, $\{u_{k-1}^1, u_{k-1}^2\}$ é clique-dominante em G . Além disso, u_k^1 é adjacente a ambos u_{k-1}^1 e u_{k-1}^2 . Portanto, $\{u_{k-1}^1, u_k^1, u_{k-1}^2\}$ é clique-dominante em G .

Como no caso anterior, vamos mostrar que $\mathcal{P}$ é uma partição de $V(G)$.

Vértices de B^1

O vértice u_k^1 pertence a um único elemento de P_4 . Se k for ímpar, então u_{k-1}^1 também

pertence ao único conjunto de P_4 . Os demais vértices pares de B^1 estão em elementos de P_1 , cada um deles pertencendo a um único conjunto. Similarmente, os elementos ímpares, excetuando-se u_k^1 , k ímpar, pertencem a conjuntos de P_3 .

Vértices de B^2

Cada vértice ímpar de B^2 pertence a um único elemento de P_2 . No caso em que k é par, o vértice u_k^2 pertence a apenas um elemento de P_4 e cada um dos demais vértices pares pertence a apenas uma parte de P_1 . Caso k seja ímpar, o vértice u_{k-1}^2 é um elemento da única parte de P_4 e cada um dos vértices pares restantes pertence a uma única parte de P_1 .

Vértices de B^3

Cada vértice ímpar de B^3 pertence a um único elemento de P_2 e cada vértice par de B^3 pertence a um único elemento de P_3 .

Caso 3. $|B^3| = k - d$, $1 \leq d \leq k - 1$.

Neste caso, $\mathcal{P} = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5$, tais que:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\{u_i^1, u_i^2\} : k - d < i \leq k\}; \\ P_2 &= \{\{u_i^1, u_i^2\} : 2 \leq i \leq 2 \lfloor \frac{k-d-2}{2} \rfloor \text{ e } i \text{ par}\}; \\ P_3 &= \{\{u_i^2, u_i^3\} : 1 \leq i \leq k - d \text{ e } i \text{ ímpar}\}; \\ P_4 &= \{\{u_{i-1}^1, u_i^3\} : 2 \leq i \leq k - d \text{ e } i \text{ par}\}; \\ P_5 &= \begin{cases} \{\{u_{k-d-1}^1, u_{k-d}^1, u_{k-d-1}^2\}\}, & \text{se } k - d \text{ é ímpar;} \\ \{\{u_{k-d}^1, u_{k-d}^2\}\}, & \text{se } k - d \text{ é par.} \end{cases} \end{aligned}$$

As Figuras 4.12 e 4.13 exemplificam $\mathcal{P}$ para diferentes paridades de $k - d$.

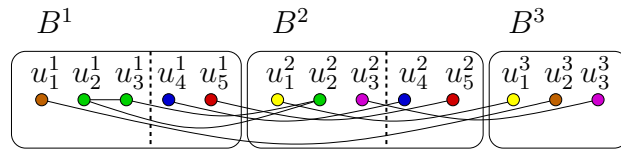


Figura 4.12: Grafo C_{13}^5 . Partição $\mathcal{P} = \{\{u_1^1, u_2^3\}, \{u_2^1, u_3^1, u_2^2\}, \{u_4^1, u_4^2\}, \{u_5^1, u_5^2\}, \{u_1^2, u_1^3\}, \{u_3^2, u_3^3\}\}$ exemplificando o caso em que $k - d$ é ímpar.

Pelo Lema 4.13, os elementos de P_1 , P_2 , P_3 e P_4 são cliques-dominantes. Note que o alcance das arestas dos elementos de P_1 , P_2 e P_3 é exatamente k , enquanto o alcance das arestas dos elementos de P_4 é exatamente $k - d - 1$. Suponha que $k - d$ seja par, então o alcance das arestas de P_5 é k . Novamente, pelo Lema 4.13, estes elementos são cliques-

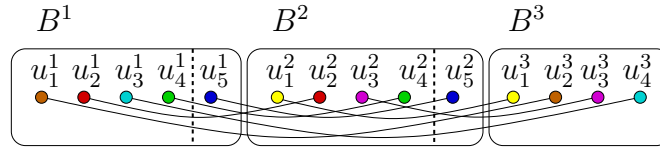


Figura 4.13: Grafo C_{14}^5 . Partição $\mathcal{P} = \{\{u_1^1, u_2^3\}, \{u_2^1, u_2^2\}, \{u_3^1, u_4^3\}, \{u_4^1, u_4^2\}, \{u_5^1, u_5^2\}, \{u_1^2, u_1^3\}\}$ exemplificando o caso em que $k - d$ é par.

-dominantes de G . Suponha agora que $k - d$ seja ímpar. Pelo Lema 4.13, $\{u_{k-d-1}^1, u_{k-d-1}^3\}$ é clique-dominante em G , pois possui alcance k . Além disso, u_{k-d}^1 é adjacente a ambos u_{k-d-1}^1 e u_{k-d-1}^3 . Portanto, $\{u_{k-d-1}^1, u_{k-d}^1, u_{k-d-1}^3\}$ é clique-dominante em G .

Como nos casos anteriores, vamos mostrar que $\mathcal{P}$ é uma partição de $V(G)$.

Vértices de B^1

Cada vértice u_i^1 com $i > k - d$ pertence a um único elemento de P_1 . O vértice u_{k-d}^1 pertence à única parte de P_5 . Caso $k - d$ seja ímpar, o vértice u_{k-d-1}^1 também pertence ao elemento de P_5 . Cada um dos demais vértices pares de B^1 pertence a uma única parte de P_2 . Já os vértices ímpares restantes em B^1 pertencem, cada um deles, a uma única parte de P_4 .

Vértices de B^2

Cada vértice u_i^2 com $i > k - d$ está em uma única parte de P_1 . Se $k - d$ for par, o vértice u_{k-d}^2 é um elemento da única parte de P_5 . Caso $k - d$ seja ímpar, o vértice u_{k-d-1}^2 pertence apenas a um elemento de P_5 . Os vértices pares de B^2 ainda não considerados pertencem, cada um deles, a uma única parte de P_2 . Cada um dos demais vértices de B^2 está associado a uma única parte de P_3 .

Vértices de B^3

Cada vértice ímpar de B^3 pertence a uma única parte de P_3 e cada vértice par de B^3 está associado a apenas um elemento de P_4 . $\square$

Neste capítulo, resolvemos o problema da partição em cliques-dominantes para algumas classes de grafos. Em particular, o teorema anterior estabelece o resultado para as potências de ciclos. Uma extensão natural deste trabalho é considerar este problema para a classe das potências de caminhos.

Seja P_n um caminho com $V(P_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Para $v_i, v_j \in V(P_n)$ definimos $d_{P_n}(v_i, v_j)$ como o menor número de arestas no caminho entre v_i e v_j no P_n . A k -ésima potência do P_n é o grafo P_n^k , com conjunto de vértices $V(P_n^k) = V(P_n)$ e conjunto de arestas $E(G) = E^1 \cup \dots \cup E^k$, tal que $E^l = \{\{v_i, v_j\} : d_{P_n}(v_i, v_j) = l\}$. Note que $k \leq n - 1$. A Figura 4.14 mostra um grafo que pertence a esta classe.

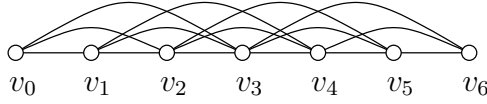


Figura 4.14: Grafo P_7^3 .

Note que esta definição de potências de caminhos admite $k = n - 1$. Mas, neste caso, temos $P_n^k \cong K_n$; um grafo para o qual o problema da partição em cliques-dominantes é trivial. Portanto, vamos considerar apenas potências de caminhos com $k < n - 1$.

Seja $G = P_n^k$, com $k < n - 1$. Note que, os vértices v_0 e v_{n-1} possuem grau exatamente k . Portanto, estes vértices só são vértices universais no caso em que $k = n - 1$. Vamos considerar, sem perda de generalidade, o vértice v_0 . Como temos $k < n - 1$, este vértice precisa formar uma clique-dominante com alguns dos vértices de sua vizinhança. Utilizando um raciocínio similar ao apresentado na prova do Lema 4.12, observamos que o conjunto de vértices dominados por toda a vizinhança de v_0 é o mesmo conjunto dominado pelo conjunto $S = \{v_0, v_k\}$. Ou seja, $N[N[v_0]] = N[S]$. Isto significa que a adição de qualquer outro vértice em S , ou quebra a propriedade de S ser clique, ou não aumenta o número de vértices dominados por S . Então, concluímos que se S não é uma clique-dominante em G , não existem cliques-dominantes em G que possuam v_0 , e consequentemente não existem PCDs em G . Como $N[S] \leq 2k + 1$, concluímos que $n \leq 2k + 1$ é uma condição necessária para que exista pelo menos uma PCD em G . Observe que no grafo da Figura 4.14, o conjunto $\{v_0, v_k\}$ é uma clique-dominante, enquanto no grafo da Figura 4.15 não existem cliques-dominantes com o vértice v_0 .

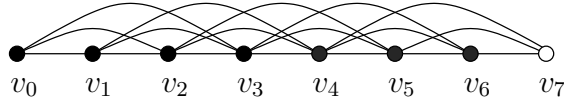


Figura 4.15: Grafo P_8^3 . Neste grafo o vértice v_0 não pertence a nenhuma clique-dominante, pois o vértice v_7 não pertence ao conjunto dos vértices dominados por $N[v_0]$.

Apesar de necessária, esta condição não é suficiente. Tome o caso em que $n = 2k + 1$, por exemplo. Todas as cliques-dominantes que possuem v_0 precisam possuir o vértice v_k para dominar o vértice v_{2k} , já que este é o único vértice na vizinhança fechada de v_0 que domina v_{2k} . Além disso o inverso também ocorre para o vértice v_{2k} , este vértice precisa estar associado ao vértice $v_{2k-k} = v_k$ para pertencer a uma clique que domina o vértice v_0 . Mas os vértices v_0 e v_{2k} não são adjacentes, portanto não podem fazer parte de uma mesma clique; eles devem pertencer a cliques diferentes. Como em uma partição nenhum vértice pode pertencer a duas partes, o vértice v_{k+1} só pode estar associado a uma delas. Logo, também não existe PCD no caso em que $n = 2k + 1$, como é o caso do grafo exibido

na Figura 4.14.

Suponha, então, que $n \leq 2k$. Do fato de G não ser completo, temos $k < n - 1$. Então, $k + 2 \leq n \leq 2k$. Observe que todos os conjuntos da forma $\{v_i, v_{i+k}\}$ são cliques-dominantes. Além disso, os vértices v_i para os quais $n - 1 - k \leq i \leq k$ são vértices universais. Usando estas observações, pudemos obter um método para a construção de uma partição em cliques-dominantes de cardinalidade k . Este resultado está em fase de consolidação e, por isso, será apresentado como uma conjectura.

Conjetura 4.15. *Seja $G \cong P_n^k$. O grafo G possui pelo menos uma PCD se e somente se $n \leq 2k$. Ademais, $d_{cl}(G) = k$.*

Embora nem todas as classes de grafos possuam partições em cliques-dominantes, ou mesmo cliques-dominantes, identificar para quais classes elas existem e podem ser caracterizadas é um problema instigante. Uma outra classe de grafos interessante para este problema, sugerida independentemente pela Profa. Célia P. de Mello e pela Profa. Raquel de S. F. Bravo, é a classe dos cografos. Abordar o problema da partição em cliques-dominantes para esta classe é uma continuidade natural do trabalho aqui desenvolvido.

Capítulo 5

Conclusão

Esta dissertação de mestrado aborda dois problemas: o de determinar a cardinalidade de um menor conjunto clique-dominante em um grafo; e o de determinar a cardinalidade máxima de uma partição do conjunto de vértices de um grafo em conjuntos cliques-dominantes.

A primeira parte deste trabalho, concentrada no Capítulo 2, trata do problema de determinar a cardinalidade de um menor conjunto dominante em um dado grafo. Nesse capítulo, são apresentados resultados clássicos da literatura e algumas questões em aberto, como a mencionada a seguir:

Problema 5.1 (Sumner [117]). *Verificar se todo grafo conexo dominante-crítico por arestas G possui $\gamma(G) = i(G)$.*

Ainda no Capítulo 2 são apresentadas variantes do problema original. Dentre elas, a que é foco da primeira parte do trabalho desenvolvido nesta pesquisa: o problema do conjunto clique-dominante. Na Seção 2.3, apresentamos uma breve resenha do desenvolvimento deste problema, que se mostrou particularmente complexo devido às conexões com o diâmetro do grafo e resultados em Teoria de Grafos Extremal, e mencionamos alguns problemas em aberto. Os dois problemas a seguir são de particular interesse.

Problema 5.2. *Determinar condições suficientes para que um grafo de diâmetro menor ou igual a três possua pelo menos uma clique-dominante.*

Problema 5.3. *Determinar o número máximo de arestas em um grafo simples que não possui cliques-dominantes.*

Além disso, formulamos a seguinte conjectura:

Conjetura 5.4. *Seja G um grafo com diâmetro igual a dois. Se G não possui um subgrafo induzido isomorfo ao C_5 , então G possui uma clique-dominante.*

O trabalho desenvolvido em conjuntos cliques-dominantes nos levou naturalmente a formular o problema da partição em conjuntos cliques-dominantes, definido no final do Capítulo 3. Esse capítulo também apresenta uma breve resenha dos problemas de partição em conjuntos dominantes existentes e cita algumas questões em aberto, em particular, os dois problemas abaixo.

Problema 5.5 (Walikar et al. [124]). *Encontrar um grafo domaticamente cocrítico G , com $d(G) \geq 2$ e $\overline{G}$ conexo.*

Problema 5.6 (Walikar et al. [124]). *Seja G um grafo domaticamente cocrítico. Provar que cada componente de $\overline{G}$ possui diâmetro no máximo dois.*

No Capítulo 4, apresentamos os resultados que obtivemos para o problema da partição em cliques-dominantes. No Teorema 4.1, são caracterizados os grafos bipartidos que possuem pelo menos uma PCD e para estes grafos é determinado o valor do número clique-domático. No Teorema 4.14 apresentamos um resultado similar para a classe das potências de ciclos. Uma continuidade natural do trabalho desenvolvido para esta classe é abordar as potências de caminhos. Resultados preliminares nesta direção são mencionados no final do Capítulo 4 e encontram-se em fase de consolidação. O Teorema 4.4 e o Teorema 4.9 abordam o problema para grafos resultantes de operações do produto cartesiano de dois grafos e do produto direto de grafos completos, respectivamente. Em ambos os teoremas, partições ótimas, quando existem, são explicitamente construídas. Alguns dos resultados expostos nesse capítulo foram apresentados no Workshop Latino-Americano de Cliques em Grafos - LAWCG14, que ocorreu de 09/11/2014 até 12/11/2014, na cidade de Pirenópolis, Goiás. O resumo aceito neste evento encontra-se no Apêndice A.

O problema da partição em cliques-dominantes é fascinante e os resultados obtidos são construtivos, tendo enfoque claramente algorítmico. A estrutura imposta a um conjunto para que ele seja uma clique-dominante é forte e algumas classes de grafos, especialmente as densas, são particularmente promissoras. Dentre estas, citamos novamente a classe dos cografos sugerida pelas pesquisadoras Célia P. de Mello e Raquel de S. F. Bravo.

Referências Bibliográficas

- [1] M. H. Akhbari, R. Hasni, O. Favaron, H. Karami, and S. M. Sheikholeslami. On the outer-connected domination in graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 26(1):10–18, 2013.
- [2] R. B. Allan and R. Laskar. On domination and independent domination numbers of a graph. *Discrete Mathematics*, 23:73–76, 1978.
- [3] R. B. Allan, R. Laskar, and S. Hedetniemi. A note on total domination. *Discrete Mathematics*, 49:7–13, 1984.
- [4] N. Ananchuen, W. Ananchuen, and M. D. Plummer. Matching properties in connected domination critical graphs. *Discrete Mathematics*, 308(7):1260–1267, 2008.
- [5] H. Aram, S. M. Sheikholeslami, and L. Volkmann. On the total domatic number of regular graphs. *Transactions on Combinatorics*, 1(1):45–51, 2012.
- [6] H. Aram, S. M. Sheikholeslami, and L. Volkmann. On the total k -domination and total k -domatic number of graphs. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 36(1):39–47, 2012.
- [7] S. Arumugam and C. Sivagnanam. Neighborhood connected domatic number of a graph. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 75:239–249, 2010.
- [8] G. Bacsó and Z. Tuza. Dominating cliques in P_5 -free graphs. *Periodica Mathematica Hungarica*, 21(4):303–308, 1990.
- [9] C. Balbuena and A. Hansberg. New results on 3-domination critical graphs. *Aequationes mathematicae*, 83(3):257–269, 2012.
- [10] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen, and C. L. Suffel. Domination alteration sets in graphs. *Discrete Mathematics*, 47(0):153 – 161, 1983.
- [11] C. Berge. *Theory of Graphs and its Applications*. Methuen, London, UK, 1962.

- [12] C. Berge. *Graphs and Hypergraphs*. Elsevier Science Ltd., Oxford, UK, 1985.
- [13] L. J. Billera. On the composition and decomposition of clutters. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 11(3):234–245, 1971.
- [14] C. Biro, P. Dankelmann É. Czabarka, and L. Székely. Remarks on the domination number of graphs. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 64:73 – 83, 2012.
- [15] B. Bollobás and E. J. Cockayne. Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance. *Journal of Graph Theory*, 3:241–249, 1979.
- [16] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London, UK, 1978.
- [17] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory*. Graduate texts in mathematics. Springer, New York, US, 2008.
- [18] M. Borowiecki, S. Jendrol’, D. Král’, and J. Miškuf. List coloring of cartesian products of graphs. *Discrete Mathematics*, 306(16):1955–1958, 2006.
- [19] A. Brandstädt, Van Bang L., and J. P. Spinrad. *Graph Classes: A Survey*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, US, 1999.
- [20] A. Brandstädt and D. Kratsch. On the restriction of some NP-complete graph problems to permutation graphs. In L. Budach, editor, *Fundamentals of Computation Theory*, volume 199 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 53–62. Springer Berlin Heidelberg, 1985.
- [21] A. Brandstädt and D. Kratsch. On domination problems for permutation and other graphs. *Theoretical Computer Science*, 54(2-3):181 – 198, 1987.
- [22] A. Brandstädt and Van Bang L. A note on efficient domination in a superclass of P5-free graphs. *Information Processing Letters*, 114(7):357–359, 2014.
- [23] R. C. Brigham, P. Z. Chinn, and R. D. Dutton. A study of vertex domination critical graphs. Technical report, Department of Mathematics Technical Report M-2, University of Central Florida, 1984.
- [24] R. C. Brigham, P. Z. Chinn, and R. D. Dutton. Vertex domination-critical graphs. *Networks*, 18:173–179, 1988.

- [25] A. Buchanan, J. S. Sung, V. Boginski, and S. Butenko. On connected dominating sets of restricted diameter. *European Journal of Operational Research*, 236(2):410 – 418, 2014.
- [26] Jing C., Xinmin H., and Ning L. The total k -domatic number of wheels and complete graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 24(3):162–175, 2012.
- [27] Xue-Gang C., Liang S., and De-Xiang M. Connected domination critical graphs. *Applied Mathematics Letters*, 17(5):503–507, 2004.
- [28] E. Camby and O. Schaudt. The price of connectivity for dominating set: Upper bounds and complexity. *Discrete Applied Mathematics*, 177(0):53–59, 2014.
- [29] Moo Y. Sohn Cao J., Shi M. and Yuan X. Domination in graphs with minimum degree six. *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, 26:1085–1100, 2008.
- [30] Y. Caro and Y. Roditty. On the vertex-independence number and star decomposition of graphs. *Ars Combinatoria*, 20:167–180, 1985.
- [31] Y. Caro and Y. Roditty. A note on the k -domination number of a graph. *International Journal of Mathematical Sciences*, 13:205–206, 1990.
- [32] G. J. Chang. The domatic number problem. *Discrete Mathematics*, 125(1–3):115–122, 1994.
- [33] G. J. Chang. Algorithmic aspects of domination in graphs. In P. M. Pardalos, Ding-Zhu D., and R. L. Graham, editors, *Handbook of Combinatorial Optimization*, pages 221–282. Springer, New York, US, 2013.
- [34] G. Chartrand and P. Zhang. *Chromatic Graph Theory*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, US, 2009.
- [35] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg, and L. Volkmann. k -domination and k -independence in graphs: A survey. *Graphs and Combinatorics*, 28(1):1–55, 2012.
- [36] F. R. K. Chung, A. Gyárfás, Z. Tuza, and W. T. Trotter. The maximum number of edges in $2k-2$ -free graphs of bounded degree. *Discrete Mathematics*, 81(2):129 – 135, 1990.
- [37] W. E. Clark, B. Shekhtman, S. Suen, and D. C. Fisher. Upper bounds for the domination number of a graph. *Congressus Numerantium*, 131:99 – 123, 1998.

- [38] E. J. Cockayne. Domination of undirected graphs — a survey. In Y. Alavi and D. R. Lick, editors, *Theory and Applications of Graphs*, volume 642 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 141–147. Springer Berlin Heidelberg, 1978.
- [39] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, and S. T. Hedetniemi. Total domination in graphs. *Networks*, 10:211–219, 1980.
- [40] E. J. Cockayne, O. Favaron, C. Payan, and A. G. Thomason. Contributions to the theory of domination, independence and irredundance in graphs. *Discrete Mathematics*, 33(3):249 – 258, 1981.
- [41] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi. Towards a theory of domination in graphs. *Networks*, 7:247–261, 1977.
- [42] M. B. Cozzens and L. L. Kelleher. Dominating cliques in graphs. *Discrete Mathematics*, 86:101–116, 1990.
- [43] Ding-Zhu D. and Peng-Jun W. *Connected Dominating Set: Theory and Applications*. Springer Publishing Company, Incorporated, New York, US, 2012.
- [44] Hongwei D., Qiang Y., Jioafei Z., Yuexuan W., Wonjun L., and Haesun P. Polynomial-time approximation scheme for minimum connected dominating set under routing cost constraint in wireless sensor networks. *Theoretical Computer Science*, 447(0):38–43, 2012.
- [45] P. Dankelmann and N. J. Calkin. The domatic number of regular graphs. *Ars Comb.*, 73, 2004.
- [46] C. F. de Jaenisch. *Applications de l’Analyse mathématique an Jen des Echechs*. Petrograd, Saint Petersburg, RU, 1862.
- [47] W. J. Desormeaux, T. W. Haynes, and M. A. Henning. Bounds on the connected domination number of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 161(18):2925 – 2931, 2013.
- [48] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, New York, US, 1997.
- [49] P. Dorbec, M. A. Henning, M. Montassier, and J. Southey. Independent domination in cubic graphs. *Journal of Graph Theory*, 2015.
- [50] M. Dorfling, W. Goddard, and M. A. Henning. Domination in planar graphs with small diameter ii. *Ars Combinatoria*, 78:237–255, 2006.

- [51] P. Duchet and H. Meyniel. On hadwiger's number and the stability number. *Annals of Discrete Mathematics*, 13:71–74, 1982.
- [52] J. E. Dunbar, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, D. P. Jacobs, J. Knisely, R. C. Laskar, and D. F. Rall. Fall colorings of graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 33:257–273, 2000.
- [53] J. Edmonds and D. R. Fulkerson. Bottleneck extrema. *Journal of Combinatorial Theory*, 8(3):299–306, 1970.
- [54] M. El-Zahar and P. Erdős. On the existence of two non-neighboring subgraphs in a graph. *Combinatorica*, 5(4):295–300, 1985.
- [55] A. Ene, N. Korula, and A. Vakilian. Improved approximation algorithms for connected domatic partitions and related problems. *CoRR*, abs/1305.4308, 2013.
- [56] Er-fang S. and Yancai Z. Signed mixed dominating functions in complete bipartite graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 92(4):712–721, 2015.
- [57] L. Euler. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 8:128–140, 1736.
- [58] M. Farber. Domination, independent domination, and duality in strongly chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 7(2):115–130, 1984.
- [59] O. Favaron. Two relations between the parameters of independence and irredundance. *Discrete Mathematics*, 70(1):17–20, 1988.
- [60] O. Favaron, D. P. Sumner, and E. Wojcicka. The diameter of domination k-critical graphs. *Journal of Graph Theory*, 18(7):723–734, 1994.
- [61] J. F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch, and J. Roberts. On graphs having domination number half their order. *Periodica Mathematica Hungarica*, 16:287–293, 1985.
- [62] P. Flach and L. Volkmann. Estimations for the domination number of a graph. *Discrete Mathematics*, 80:145–151, 1990.
- [63] J. Fulman. A note on the characterization of domination perfect graphs. *Journal of Graph Theory*, 17(1):47–51, 1993.
- [64] J. Fulman, D. Hanson, and G. Macgillivray. Vertex domination-critical graphs. *Networks*, 25(2):41–43, 1995.

- [65] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, New York, US, 1979.
- [66] W. Goddard and M. A. Henning. Domination in planar graphs with small diameter. *Journal of Graph Theory*, 40(1):1–25, 2002.
- [67] W. Goddard and M. A. Henning. Independent domination in graphs: A survey and recent results. *Discrete Mathematics*, 313(7):839–854, 2013.
- [68] J. Govorčin and R. Škrekovski. On the connectivity of cartesian product of graphs. *Ars Mathematica Contemporanea*, 7(2):293–297, 2014.
- [69] Shiow-Fen H. and G. J. Chang. Edge domatic numbers of complete n -partite graphs. *Graphs and Combinatorics*, 10(2-4):241–248, 1994.
- [70] Xinmin H. and You L. On the k -domination number of cartesian products of graphs. *Discrete Mathematics*, 309(10):3413–3419, 2009.
- [71] F. Harary and R. Frucht. On the corona of two graphs. *Aequationes mathematicae*, 4:322–325, 1970.
- [72] B. L. Hartnell and D. F. Rall. Connected domatic number in planar graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 51(1):173–179, 2001.
- [73] J. Haviland. On minimum maximal independent sets of a graph. *Discrete Mathematics*, 94(2):95 – 101, 1991.
- [74] T. W. Haynes, S. Hedetniemi, and P. Slater. *Domination in Graphs: Volume 2: Advanced Topics*. CRC Press, Boca Raton, US, 1998.
- [75] T. W. Haynes, S. Hedetniemi, and P. Slater. *Fundamentals of domination in graphs*. Marcel Dekker, New York, US, 1998.
- [76] T. W. Haynes, M. A. Henning, and P. Zhang. A survey of stratified domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 309(19):5806–5819, 2009.
- [77] S. T. Hedetniemi and R. C. Laskar. Connected domination in graphs. In B. Bollobás, editor, *Graph Theory and Combinatorics*, pages 209–218. Academic Press, London, UK, 1984.
- [78] A. Hellwig and L. Volkmann. Some upper bounds for the domination number. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 57:187–209, 2006.

- [79] M. A. Henning. A survey of selected recent results on total domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 309(1):32–63, 2009.
- [80] M. A. Henning, J. McCoy, and J. Southey. Graphs with maximum size and given paired-domination number. *Discrete Applied Mathematics*, 170(0):72–82, 2014.
- [81] M. A. Henning and L. C. van der Merwe. Properties of total domination edge-critical graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 158(2):147–153, 2010.
- [82] F. Jaeger and C. Payan. Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d’absorption d’un graphe simple. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 274:A728–A730, 1972.
- [83] T. R. Jensen and B. Toft. *Graph Coloring Problems*. John Wiley and Sons, Hoboken, US, 1994.
- [84] Young S. K. and Jaeun L. Perfect domination sets in cayley graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 162(0):259–263, 2014.
- [85] J. G. Kalbfleisch, R. G. Stanton, and J. D. Horton. On covering sets and error-correcting codes. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 11(3):233 – 250, 1971.
- [86] S. Kamei and H. Kakugawa. A self-stabilizing 6-approximation for the minimum connected dominating set with safe convergence in unit disk graphs. *Theoretical Computer Science*, 428(0):80–90, 2012.
- [87] A. H. Karbasi and R. E. Atani. Application of dominating sets in wireless sensor networks. *International Journal of Security and Its Applications*, 7(4):185–202, 2013.
- [88] J. Mark Keil and D. Pradhan. Computing a minimum outer-connected dominating set for the class of chordal graphs. *Information Processing Letters*, 113(14-16):552–561, 2013.
- [89] S. Klavžar and G. Mekiš. On idomatic partitions of direct products of complete graphs. *Graphs and Combinatorics*, 27(5):713–726, 2011.
- [90] S. Klavžar and Zehui S. Local colourings of cartesian product graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 92(4):694–699, 2015.
- [91] K. Kämmerling and L. Volkmann. The k -domatic number of a graph. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 59(2):539–550, 2009.

- [92] Tung-Lin L., Pei-Hsin H., and G. J. Chang. The domatic number problem in interval graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3(4):531–536, 1990.
- [93] Xiang-Jun L. and Jun-Ming X. The signed edge-domatic number of a graph. *Graphs and Combinatorics*, 29(6):1881–1890, 2013.
- [94] R. Laskar and S. Hedetniemi. Connected domination in graphs. *Technical Report*, No. 414, 1983.
- [95] V. Lozin, R. Mosca, and C. Purcell. Independent domination in finitely defined classes of graphs: Polynomial algorithms. *Discrete Applied Mathematics*, 182:2–14, 2015.
- [96] G. MacGillivray and K. Seyffarth. Domination numbers of planar graphs. *Journal of Graph Theory*, 22:213–229, 1996.
- [97] W. McCuaig and B. Shepherd. Domination in graphs with minimum degree two. *Journal of Graph Theory*, 13:749–762, 1989.
- [98] Mei G. and Er-fang S. Signed total domatic number of a graph. *Journal of Shanghai University*, 12(1):31–34, 2008.
- [99] D. Meierling, L. Volkmann, and S. Zitzen. The signed domatic number of some regular graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 157(8):1905–1912, 2009.
- [100] R. Misra and C. Mandal. Rotation of cds via connected domatic partition in ad hoc sensor networks. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 8(4):488–499, 2009.
- [101] M. Mito and S. Fujita. Maximum connected domatic partition of directed path graphs with single junction. *Lecture Notes in Computer Science*, 5092 LNCS:425–433, 2008.
- [102] R. J. Nowakowski and D. F. Rall. Associative graph products and their independence, domination and coloring numbers. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 16(1):53–79, 1996.
- [103] A. R. Oliveira and C. N. Campos. Conjuntos dominantes e produto direto de ciclos. *Technical Report*, 13-14, 2013. [Online; acessado em 12 de Fevereiro de 2015].
- [104] O. Ore. *Theory of Graphs*. American Mathematical Society, Providence, US, 1962.
- [105] C. Payan and N. H. Xuong. Domination-balanced graphs. *Journal of Graph Theory*, 6:23–32, 1982.

- [106] D. F. Rall. Domatically critical and domatically full graphs. *Discrete Mathematics*, 86(1–3):81–87, 1990.
- [107] D. Rautenbach and L. Volkmann. The domatic number of block-cactus graphs. *Discrete Mathematics*, 187(1–3):185–193, 1998.
- [108] B. Reed. Paths, stars and the number three. *Combinatorics, Probability and Computing*, 5:277–295, 9 1996.
- [109] Liang S. and Jianfang W. An upper bound for the independent domination number. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 76(2):240 – 246, 1999.
- [110] E. Sampathkumar and H. B. Walikar. The connected domination number of a graph. *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, 13:607 – 613, 1999.
- [111] L. A. Sanchis. Maximum number of edges in connected graphs with a given domination number. *Discrete Mathematics*, 87:65–72, 1991.
- [112] L. A. Sanchis. On the number of edges in graphs with a given connected domination number. *Discrete Mathematics*, 214(1–3):193–210, 2000.
- [113] A. Sasireka and A. H. Nandhu Kishore. Applications of dominating set of graph in computer networks. *International journal of engineering sciences and research technology*, 3:170–173, 2014.
- [114] P. J. Slater. Locating dominating sets and locating-dominating sets. *Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proceedings of the Seventh Quadrennial International Conference on the Theory and Applications of Graphs*, 2:1073–1079, 1995.
- [115] Moo Y. Sohn and Yuan X. Domination in graphs of minimum degree four. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 46:759–773, 2009.
- [116] S. Stephen, B. Rajan, C. Grigorious, and A. William. Resolving-power dominating sets. *Applied Mathematics and Computation*, 256:778–785, 2015.
- [117] D. P. Sumner. Critical concepts in domination. *Discrete Mathematics*, 86(1–3):33 – 46, 1990.
- [118] D. P. Sumner and P. Blitch. Domination critical graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 34(1):65 – 76, 1983.
- [119] D. P. Sumner and J. I. Moore. Domination perfect graphs. *Notices of the American Mathematical Society*, 26:A–569, 1979.

- [120] M. Valencia-Pabon. Idomatic partitions of direct products of complete graphs. *Discrete Mathematics*, 310(5):1118–1122, 2010.
- [121] V. G. Vizing. The cartesian product of graphs. *Vyčisl. Sistemy*, 9:30–43, 1963.
- [122] V. G. Vizing. A bound on the external stability number of a graph. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 164:729–731, 1965.
- [123] H. B. Walikar, B. D. Acharya, and E. Sampathkumar. *Recent Developments in the Theory of Domination in Graphs and Its Applications*. MRI Lecture Notes in mathematics. Mehta Research Institute, Allahabad, IN, 1979.
- [124] H. B. Walikar, L. S. Reddy, and S. B. Basapur. Few more results in domatically co-critical graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 05(01):1350002, 2013.
- [125] D. B. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, US, 1996.
- [126] E. S. Wolk. A note on "the comparability graph of a tree". *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16:17–20, 1965.
- [127] Hua-Ming X., Liang S., and Xue-Gang C. Domination in graphs of minimum degree five. *Graphs and Combinatorics*, 22(1):127–143, 2006.
- [128] Jiguo Y., Nannan W., and Guanghui W. Constructing minimum extended weakly-connected dominating sets for clustering in ad hoc networks. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 72(1):35 – 47, 2012.
- [129] Xiaojing Y. and Baoyindureng W. $[1, 2]$ -domination in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 175:79–86, 2014.
- [130] B. Zelinka. Domatically critical graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 30(3):486–489, 1980.
- [131] B. Zelinka. Domatic numbers of cube graphs. *Mathematica Slovaca*, 32(2):117–119, 1982.
- [132] B. Zelinka. Adomatic and idomatic numbers of graphs. *Mathematica Slovaca*, 33:99–103, 1983.
- [133] B. Zelinka. Domatic number and degrees of vertices of a graph. *Mathematica Slovaca*, 33:145–147, 1983.

- [134] B. Zelinka. Domatically cocritical graphs. *Časopis pro pěstování matematiky*, 108:82–88, 1983.
- [135] B. Zelinka. Connected domatic number of a graph. *Math. Slovaca*, 36:387–391, 1986.
- [136] B. Zelinka. Total domatic number and degrees of vertices of a graph. *Mathematica Slovaca*, 39(1):7–11, 1989.
- [137] B. Zelinka. Total domatic number of a graph. *Proc Math. Liberec*, 1994.
- [138] I. E. Zverovich and V. E. Zverovich. A characterization of domination perfect graphs. *Journal of Graph Theory*, 15(2):109–114, 1991.
- [139] I. E. Zverovich and V. E. Zverovich. A note on domatically critical and cocritical graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 41:278–281, 1991.
- [140] I. E. Zverovich and V. E. Zverovich. An induced subgraph characterization of domination perfect graphs. *Journal of Graph Theory*, 20(3):375–395, 1995.

Apêndice A

Trabalho aceito no LAWCG14

O PROBLEMA DA PARTIÇÃO EM CLIQUES DOMINANTES*

H. V. Sousa C. N. Campos

Instituto de Computação, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil†

Dado um grafo $G = (V(G), E(G))$, um conjunto $S \subseteq V(G)$ é denominado um *conjunto dominante* de G , se para todo vértice $v \in V(G)$, ou v é um elemento de S , ou v é adjacente a um elemento de S . O *número de dominação* de G , $\gamma(G)$, é a cardinalidade de um menor conjunto dominante de G . O *problema do conjunto dominante mínimo* consiste em determinar $\gamma(G)$ para um grafo G arbitrário e foi demonstrado ser NP-difícil em 1979, por M. Garey e D. Johnson. Este é um problema de grande importância teórica. Muitas aplicações podem ser modeladas como problemas de conjuntos dominantes e algumas delas levaram à definição de variantes do problema original. Uma destas variantes, consiste em adicionar a restrição de que o conjunto dominante seja uma clique, definindo desta forma uma *clique dominante*.

Em 1977, E. J. Cockayne e S. T. Hedetniemi [1] introduziram uma nova variante do problema original que tem atraído a atenção de vários pesquisadores. Uma *partição em conjuntos dominantes* de um grafo G é uma partição de $V(G)$ tal que cada uma de suas partes seja um conjunto dominante de G . O *problema da partição em conjuntos dominantes* consiste em determinar a cardinalidade máxima de uma tal partição. Uma extensão natural deste problema consiste em considerar partições em conjuntos dominantes de G com restrições adicionais. Em particular, o *problema da partição em cliques dominantes* consiste em determinar, caso exista, uma partição em conjuntos dominantes de G , de cardinalidade máxima, tal que cada uma de suas partes seja também uma clique. O *número clique dominativo* é definido como $d_{cl}(G) := \max\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ é partição em cliques dominantes de } G\}$.

Este trabalho aborda o problema da partição em cliques dominantes para algumas classes de grafos. Em particular, foram caracterizados os grafos bipartidos e as potências de ciclos que possuem partição em cliques dominantes, determinando os seus números clique dominativos, quando existem. Ainda neste trabalho, foram consideradas as operações de produto cartesiano e produto direto de grafos. Para o primeiro produto, foi demonstrado que apenas os grafos G obtidos pelo produto cartesiano de dois grafos completos K_p e K_q possuem partição em cliques dominantes e que $d_{cl}(G) = \max\{p, q\}$. Já para o segundo, foi demonstrado que o número clique dominativo do produto direto de dois grafos completos K_p e K_q é $\lfloor \frac{pq}{3} \rfloor$, $p, q \geq 3$.

Referências

- [1] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks, Vol 7, 247-261, 1977.

*Parcialmente financiado por CAPES/CNPq.

†E-mails: ra142690@students.ic.unicamp.br, campos@ic.unicamp.br.