

Atílio Gomes Luiz

“Sobre a Coloração Total Semiforte”

*“On the adjacent-vertex-distinguishing-total
colouring of graphs”*

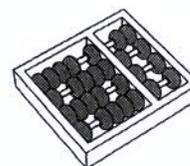
Este exemplar corresponde à redação final da
Tese/Dissertação devidamente corrigida e defendida
por: Atílio Gomes Luiz
e aprovada pela Banca Examinadora.
Campinas, 07 de Agosto de 2014
COORDENADOR DE PÓS-GRADUAÇÃO
CPG-IC

Prof. Dr. Paulo Lício de Geus
Coord. de Pós-Graduação
Instituto de Computação - Unicamp
Matrícula 10.326-8

CAMPINAS
2014

i

ERRATA
Em págs. i, iii, v e vii:
Onde se lê: Atílio Gomes Luiz
Leia-se: Atílio Gomes Luiz
Prof. Paulo Lício de Geus
Coord. de Pós-Graduação
Instituto de Computação - Unicamp
Matrícula 10.326-8



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Computação

Atílio Gomes Luiz

“Sobre a Coloração Total Semiforte”

Orientador(a): Profa. Dra. Célia Picinin de Mello

Coorientador(a): Profa. Dra. Christiane Neme Campos

“On the adjacent-vertex-distinguishing-total colouring of graphs”

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Instituto de Computação da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA POR
ATÍLIO GOMES LUIZ, SOB ORIENTAÇÃO DA
PROFA. DRA. CÉLIA PICININ DE MELLO.

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Célia", written over a horizontal line.

Assinatura do Orientador(a)

CAMPINAS

2014

iii

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

L968s Luiz, Atílio Gomes, 1987-
Sobre a coloração total semiforte / Atílio Gomes Luiz. – Campinas, SP : [s.n.],
2014.

Orientador: Célia Picinin de Mello.
Coorientador: Christiane Neme Campos.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Computação.

1. Teoria dos grafos. 2. Coloração de grafos. 3. Algoritmos em grafos. I. Mello,
Célia Picinin de, 1950-. II. Campos, Christiane Neme, 1972-. III. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: On the adjacent-vertex-distinguishing-total colouring of graphs

Palavras-chave em inglês:

Graph theory

Graph coloring

Algorithms on graphs

Área de concentração: Ciência da Computação

Titulação: Mestre em Ciência da Computação

Banca examinadora:

Célia Picinin de Mello [Orientador]

Sheila Morais de Almeida

Simone Dantas de Souza

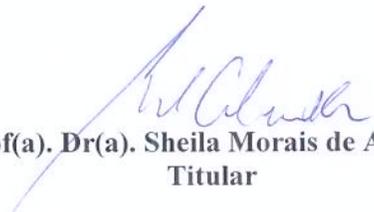
Orlando Lee

Data de defesa: 28-04-2014

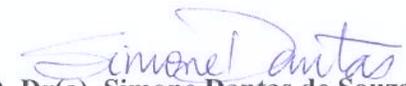
Programa de Pós-Graduação: Ciência da Computação

TERMO DE APROVAÇÃO

Defesa de Dissertação de Mestrado em Ciência da Computação, apresentada pelo(a) Mestrando(a) **Atilio Gomes Luiz**, aprovado(a) em **28 de abril de 2014**, pela Banca examinadora composta pelos Professores Doutores:



Prof(a). Dr(a). **Sheila Moraes de Almeida**
Titular



Prof(a). Dr(a). **Simone Dantas de Souza**
Titular



Prof(a). Dr(a). **Orlando Lee**
Titular



Prof(a). Dr(a). **Célia Picinin de Mello**
Presidente

Sobre a Coloração Total Semiforte

Atílio Gomes Luiz¹

28 de abril de 2014

Banca Examinadora:

- Profa. Dra. Célia Picinin de Mello (Orientadora)
- Profa. Dra. Sheila Morais de Almeida
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
- Profa. Dra. Simone Dantas de Souza
Universidade Federal Fluminense
- Prof. Dr. Orlando Lee
Universidade Estadual de Campinas
- Prof. Dr. João Meidanis
Universidade Estadual de Campinas (Suplente)

¹Apoio financeiro de: FAPESP (processo 12/10562-3) e CNPq (processo 138150/2011-7)

Abstract

The adjacent-vertex-distinguishing-total-colouring (AVD-total-colouring) problem was introduced and studied by Zhang et al. around 2005. This problem consists in associating colours to the vertices and edges of a graph $G = (V(G), E(G))$ using the least number of colours, such that: (i) any two adjacent vertices or adjacent edges receive distinct colours; (ii) each vertex receive a colour different from the colours of its incident edges; and (iii) for any two adjacent vertices $u, v \in V(G)$, the set of colours that color u and its incident edges is distinct from the set of colours that color v and its incident edges. The smallest number of colours for which a graph G admits an AVD-total-colouring is named its AVD-total chromatic number. Zhang et al. determined the AVD-total chromatic number for some classical families of graphs and noted that all of them admit an AVD-total-colouring with no more than $\Delta(G) + 3$ colours. Based on this observation, the authors conjectured that $\Delta(G) + 3$ colours would be sufficient to construct an AVD-total-colouring for any simple graph G . This conjecture is called the AVD-Total-Colouring Conjecture and remains open for arbitrary graphs, having been verified for a few families of graphs.

In this dissertation, we present an overview of the main existing results related to the AVD-total-colouring of graphs. Furthermore, we determine the AVD-total-chromatic number for the following families of graphs: simple graphs with $\Delta(G) = 3$ and without adjacent vertices of maximum degree; flower-snarks; Goldberg snarks; generalized Blanuša snarks; Loupekine snarks; and complete equipartite graphs of even order. We verify that the graphs of these families have AVD-total-chromatic number at most $\Delta(G) + 2$. Additionally, we verify that the AVD-Total-Colouring Conjecture is true for tripartite graphs and complete equipartite graphs of odd order. These results confirm the validity of the AVD-Total-Colouring Conjecture for all the families considered in this dissertation.

Resumo

O problema da coloração total semiforte foi introduzido por Zhang et al. por volta de 2005. Este problema consiste em associar cores às arestas e aos vértices de um grafo $G = (V(G), E(G))$, utilizando o menor número de cores possível, de forma que: (i) quaisquer dois vértices ou duas arestas adjacentes possuam cores distintas; (ii) cada vértice tenha cor diferente das cores das arestas que nele incidem; e, além disso, (iii) para quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$, o conjunto das cores que colorem u e suas arestas incidentes é distinto do conjunto das cores que colorem v e suas arestas incidentes. Denominamos esse menor número de cores para o qual um grafo admite uma coloração total semiforte como *número cromático total semiforte*. Zhang et al. também determinaram o número cromático total semiforte de algumas famílias clássicas de grafos e observaram que todas elas possuem uma coloração total semiforte com no máximo $\Delta(G) + 3$ cores. Com base nesta observação, eles conjecturaram que $\Delta(G) + 3$ cores seriam suficientes para construir uma coloração total semiforte para qualquer grafo simples G . Essa conjectura é denominada *Conjetura da Coloração Total Semiforte* e permanece aberta para grafos arbitrários, tendo sido verificada apenas para algumas famílias de grafos.

Nesta dissertação, apresentamos uma resenha dos principais resultados existentes envolvendo a coloração total semiforte. Além disso, determinamos o número cromático total semiforte para as seguintes famílias: os grafos simples com $\Delta(G) = 3$ e sem vértices adjacentes de grau máximo; os snarks-flor; os snarks de Goldberg; os snarks de Blanuša generalizados; os snarks de Loupekine LP_1 ; e os grafos equipartidos completos de ordem par. Verificamos que os grafos destas famílias possuem número cromático total semiforte menor ou igual a $\Delta(G) + 2$. Investigamos também a coloração total semiforte dos grafos tripartidos e dos grafos equipartidos completos de ordem ímpar e verificamos que os grafos destas famílias possuem número cromático total semiforte menor ou igual a $\Delta(G) + 3$. Os resultados obtidos confirmam a validade da Conjetura da Coloração Total Semiforte para todas as famílias consideradas nesta dissertação.

Aos meus pais, Luiz e Francisca.

Agradecimentos

- ✧ Gostaria de agradecer à Célia e à Chris pela orientação, pela amizade e pelo apoio dados nos momentos em que precisei. Com elas, aprendi lições valiosas que levarei por toda a minha vida!
- ✧ Agradeço aos meus pais, Luiz e Francisca, pelo apoio e incentivo na luta pela concretização dos meus sonhos. Amo vocês!! Agradeço também às minhas irmãs, Gabi e Amanda, e à minha sobrinha Isabel.
- ✧ Agradeço aos membros da banca por terem aceitado participar da avaliação deste trabalho e pelas contribuições dadas à versão final.
- ✧ Agradeço à Karina pela sua companhia, dedicação e paciência!
- ✧ Agradeço ao Andrei por ter me acolhido em Barão Geraldo.
- ✧ Agradeço ao Thiago Arruda, Kaio Karam, André Carvalho, Henrique Vieira, Alex Brandt e ao Davi Tozoni, por tornarem a convivência e o trabalho no LOCo mais divertidos.
- ✧ Agradeço ao Eduardo Miranda e ao Carlos Trujillo por terem acompanhado-me em meus primeiros estudos em Teoria dos Grafos.
- ✧ Agradeço aos amigos peruanos que conheci no IC, em especial à Ricardo Valenzuela, Júnior Fabian, Rommel Romero e Diego Chávez. *Muchas gracias* pela amizade e pelos momentos engraçados que vocês proporcionaram-me.
- ✧ Agradeço às pessoas que moram ou já moraram comigo na moradia da Unicamp, em especial ao Gilberto Valente.
- ✧ Agradeço ao CNPq, que me concedeu uma bolsa de mestrado durante o primeiro ano de pesquisa, e agradeço à FAPESP, que me concedeu uma bolsa de mestrado e uma bolsa de estágio no exterior durante o segundo ano e meio do mestrado. Sem o apoio financeiro destas instituições, essa pesquisa não teria sido realizada.
- ✧ Por fim, agradeço a Deus pela vida.

*“A tarefa não é tanto ver aquilo que
ninguém viu, mas pensar o que
ninguém ainda pensou sobre aquilo que
todo mundo vê.”*

ARTHUR SCHOPENHAUER

*“Que ninguém se engane, só se
consegue a simplicidade através de
muito trabalho.”*

CLARICE LISPECTOR

Sumário

Abstract	ix
Resumo	xi
Dedicatória	xiii
Agradecimentos	xv
Epígrafes	xvii
1 Introdução	1
1.1 Algumas classes de grafos	4
1.2 Operações em grafos	6
1.3 Multiconjuntos	8
1.4 Coloração de Grafos	9
2 Coloração total semiforte	15
2.1 Distinguindo os vértices de um grafo	17
2.2 Resultados preliminares	23
2.3 Famílias clássicas	28
2.4 Grafos com $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 3$	39
3 Grafos com $\Delta(G) = 3$	47
3.1 Breve história dos snarks	53
3.2 Snarks-flor	57
3.3 Snarks de Goldberg	63
3.4 Snarks de Blanuša generalizados	66
3.5 Snarks de Loupekine	70
3.6 Subgrafos de grafos com $\Delta(G) = 3$	76

4 Grafos r-partidos	79
4.1 Grafos equipartidos completos	80
4.2 Grafos tripartidos	96
5 Conclusões	101
Referências Bibliográficas	105
A Artigo publicado no EJC	111

Capítulo 1

Introdução

“The Four Colour Theorem is the tip of the iceberg, the thin end of the wedge and the first cuckoo of spring.”

W. T. TUTTE [66]

Coloração em Grafos é uma área de pesquisa tradicional em Teoria dos Grafos que tem atraído a atenção de inúmeros pesquisadores desde a sua origem. Essa área de pesquisa originou-se a partir do estudo da Conjetura das Quatro Cores, proposta em 1852, que afirmava que qualquer mapa político pode ser colorido com no máximo quatro cores de modo que quaisquer dois países vizinhos recebam cores distintas. Essa conjetura permaneceu aberta por mais de 100 anos. Durante esse tempo, diversas técnicas foram desenvolvidas na tentativa de prová-la, o que levou ao desenvolvimento da Teoria dos Grafos e ao surgimento de inúmeros outros problemas em grafos.

Nesta dissertação, abordamos um problema de coloração específico: o da coloração total semiforte. Aqui, o interesse primordial é determinar o menor número de cores que um grafo necessita para ser colorido com uma coloração total semiforte. Antes de introduzir esta coloração, apresentamos alguns conceitos básicos da Teoria dos Grafos que serão utilizados no desenvolvimento do tema.

Um *grafo* $G = (V(G), E(G))$ é uma estrutura matemática abstrata que consiste em dois conjuntos disjuntos $V(G)$ e $E(G)$ e uma *função de incidência* ψ_G que associa a cada elemento de $E(G)$ um par não ordenado de elementos de $V(G)$, não necessariamente distintos. Denominamos *vértice* cada elemento pertencente a $V(G)$ e, *aresta*, cada elemento pertencente a $E(G)$. Como exemplo, apresentamos o grafo $H = (V(H), E(H))$ formado pelo conjunto de vértices $V(H) = \{u, v, w, x, y\}$, pelo conjunto de arestas $E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ e pela função de incidência ψ_H definida do seguinte modo: $\psi_H(e_1) := \{u, v\}$, $\psi_H(e_2) := \{v, w\}$, $\psi_H(e_3) := \{v, w\}$, $\psi_H(e_4) := \{w, x\}$,

$\psi_H(e_5) := \{w, x\}$ e $\psi_H(e_6) := \{x, y\}$.

Um *elemento* de um grafo é um vértice ou uma aresta do grafo. Um grafo que possui somente um vértice é denominado *grafo trivial*. A *ordem* de um grafo é o seu número de vértices e o *tamanho* de um grafo é o seu número de arestas. Por exemplo, a ordem do grafo H , definido anteriormente, é igual a cinco e o tamanho de H é igual a seis.

Sejam $e \in E(G)$ e $u, v \in V(G)$ tais que $\psi_G(e) = \{u, v\}$. Dizemos que u e v são os *extremos* da aresta e e que a aresta e *liga* os vértices u e v . Dizemos também que a aresta e *incide* nos vértices u e v e vice-versa. Dois vértices que incidem numa mesma aresta são ditos *adjacentes*, assim como duas arestas que incidem em um mesmo vértice. Dois vértices distintos que são adjacentes também são denominados *vizinhos*.

Os grafos podem ser representados graficamente no plano da seguinte maneira: os vértices são pontos representados por pequenos círculos e cada aresta é representada por uma curva ligando os círculos que representam os seus extremos. Referimo-nos a representação gráfica de um grafo como se fosse o próprio grafo. Por exemplo, a Figura 1.1 apresenta o grafo H , definido anteriormente.

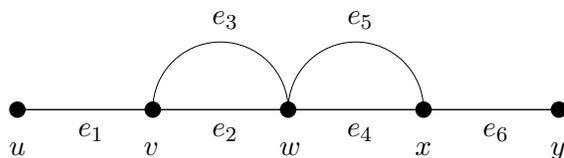


Figura 1.1: Grafo H .

Seja $v \in V(G)$. O *grau* de v é o número de vezes em que v é extremo de uma aresta e é denotado por $d_G(v)$ ou simplesmente $d(v)$ quando não houver dúvida de que v é um vértice de G . Por exemplo, na Figura 1.1, temos que $d(w) = 4$ e $d(y) = 1$. Definimos o *grau máximo* de G como $\Delta(G) := \max\{d(v) : v \in V(G)\}$. Do mesmo modo, o *grau mínimo* de G é definido como $\delta(G) := \min\{d(v) : v \in V(G)\}$. Dizemos que G é *k-regular* quando todo vértice de G possui grau igual a k . O conjunto dos vizinhos de um vértice $v \in V(G)$ é denotado por $N_G(v)$, ou simplesmente $N(v)$ quando não houver dúvida de que v é um vértice de G . Denotamos por $N_k(v)$ o conjunto dos vizinhos de v que possuem grau igual a k .

Seja $e \in E(G)$. Se $\psi(e) = \{u, w\}$ e $u = w$, dizemos que a aresta e é um *laço*. Duas ou mais arestas que possuem o mesmo par de vértices como extremos são denominadas *arestas múltiplas*. Um grafo que não possui laços nem arestas múltiplas é denominado *grafo simples*. Em um grafo simples $G = (V(G), E(G))$, uma aresta $e \in E(G)$, tal que $\psi(e) = \{u, v\}$, também pode ser denotada por uv ou vu . O grafo $G = (V(G), E(G))$ com conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e conjunto de arestas $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1, v_1v_3\}$ é um exemplo de grafo simples e está ilustrado na Figura 1.2. Observe que, em um grafo simples, a função de incidência está

implícita, dado que cada aresta do grafo simples é unicamente determinada pelos seus extremos.

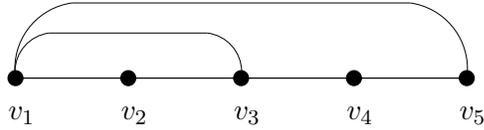


Figura 1.2: O grafo simples G .

Um *emparelhamento* M em um grafo G é um subconjunto de arestas de $E(G)$, duas a duas não adjacentes. Dizemos que um vértice $v \in V(G)$ é *saturado* por M se v é extremo de alguma aresta de M . Um *emparelhamento perfeito* é um emparelhamento que satura todos os vértices do grafo e um *emparelhamento quase-perfeito* é um emparelhamento para o qual um único vértice não é saturado. Seja $S \subset V(G) \cup E(G)$. Dizemos que S é um *conjunto independente* se os seus elementos são dois a dois não adjacentes e não incidentes. Dizemos que S é um *conjunto independente de vértices* (resp. *arestas*) se $S \subseteq V(G)$ (resp. $S \subseteq E(G)$) e seus elementos são dois a dois não adjacentes.

Sejam G e H grafos simples. Dizemos que G e H são *isomorfos*, denotado por $G \cong H$, se existe uma função bijetora $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ que *preserva as adjacências*, isto é, $uv \in E(G)$ se e somente se $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$. A Figura 1.3 exibe dois grafos G e H isomorfos e uma função bijetora $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ que preserva as adjacências.

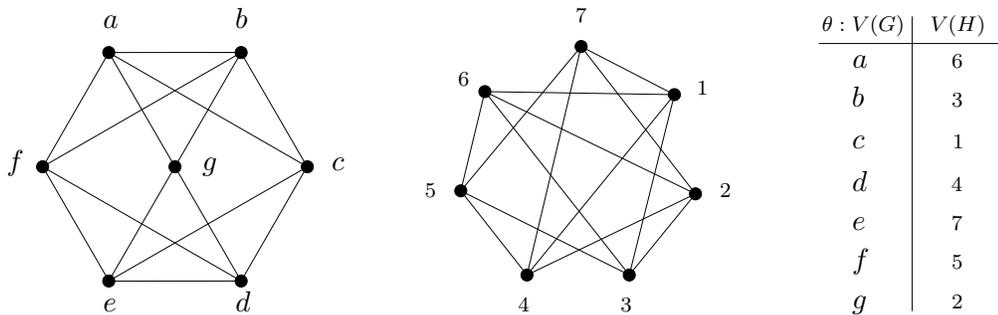


Figura 1.3: Grafos simples G e H isomorfos e a função bijetora θ .

Sejam G e H dois grafos. Dizemos que H é um *subgrafo* de G , denotado por $H \subseteq G$, se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e ψ_H é uma restrição de ψ_G a $E(H)$. Seja $X \subseteq V(G)$. Denota-se por $G[X]$ o subgrafo de G com $V(G[X]) = X$ e $E(G[X])$ formado por todas as arestas de G que possuem ambos os extremos em X . Dizemos que $G[X]$ é o subgrafo de G *induzido* por X .

1.1 Algumas classes de grafos

Muitos problemas de Teoria dos Grafos são difíceis de resolver para grafos arbitrários. Uma das abordagens utilizadas consiste em dividir o grafo original em grafos menores para os quais as soluções são conhecidas e, a partir destas, tentar obter a solução para o problema original. A seguir, definimos algumas famílias de grafos comumente utilizadas nesta abordagem.

Um *grafo completo* é um grafo simples no qual quaisquer dois vértices são adjacentes. Um grafo completo com n vértices, $n \geq 1$, é denotado por K_n . Um grafo G é *bipartido* se o seu conjunto de vértices admite uma partição em dois subconjuntos X e Y tal que toda aresta de G possui um extremo em X e o outro extremo em Y ; tal partição $\{X, Y\}$ é dita uma *bipartição* do grafo G . Se G é um grafo simples bipartido com bipartição $\{X, Y\}$, tal que todo vértice de X é adjacente a todo vértice de Y , então G é denominado um *grafo bipartido completo* e denotado por $K_{r,s}$, tal que $r = |X|$ e $s = |Y|$. Uma *estrela* é um grafo bipartido completo com bipartição $\{X, Y\}$ tal que $|X| = 1$ ou $|Y| = 1$.

Um grafo G é *conexo* se, para qualquer partição de $V(G)$ em dois subconjuntos X e Y , existe uma aresta com um extremo em X e o outro em Y . Uma *componente conexa* de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G .

Um *caminho* é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma sequência linear de modo que dois vértices são adjacentes se e somente se eles forem consecutivos na sequência. Um caminho com n vértices v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , $n \geq 1$, é denotado por $P_n = v_0v_1 \dots v_{n-1}$, ou simplesmente por P_n . De modo semelhante, um *ciclo* com pelo menos três vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma sequência cíclica de modo que dois vértices são adjacentes se e somente se eles são consecutivos na sequência. Um ciclo com n vértices, $n \geq 3$, é denotado por C_n .

Dizemos que um grafo G *contém um ciclo* se existe um subgrafo $H \subseteq G$ tal que H é isomorfo a um ciclo, ou um laço, ou a dois vértices ligados por arestas múltiplas. Caso contrário, dizemos que G é *acíclico*. Denominamos *cintura*, o tamanho de um menor ciclo contido no grafo G . Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico. Em uma árvore, todo vértice de grau um é denominado *folha*. De acordo com as definições acima, cada componente conexa de um grafo acíclico é uma árvore. Por esta razão, grafos acíclicos são usualmente denominados *florestas*.

Um grafo G é *planar* se ele pode ser desenhado no plano de modo que suas arestas se intersectam somente nos seus extremos. Tal desenho de G no plano é denominado *grafo plano*. Se G não possui tal representação no plano, G é dito *não planar*. A Figura 1.4(a) exhibe o grafo planar H e a Figura 1.4(b) exhibe um desenho de H sem cruzamento de arestas.

Dado um grafo plano G , uma *face* de G é uma região maximal do plano na qual quais-

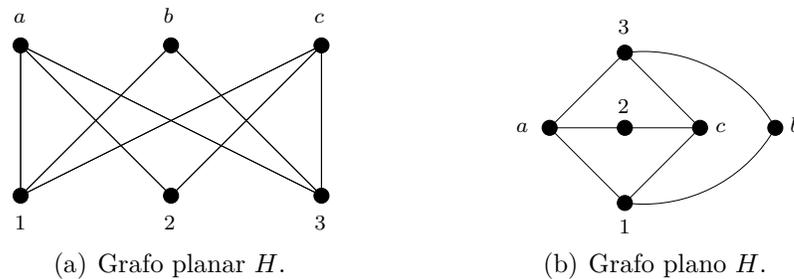


Figura 1.4: Dois desenhos do grafo H no plano.

quer dois pontos podem ser ligados por uma curva que não intersecta nenhum elemento de G . Por exemplo, considere o grafo plano G apresentado na Figura 1.5. Observe que esse grafo divide o plano em 5 faces f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5 . A face f_1 é denominada *face exterior*. Dados dois pontos quaisquer pertencentes a faces distintas, observe que é impossível ligar esses dois pontos no plano por meio de uma curva sem intersectar o grafo G .

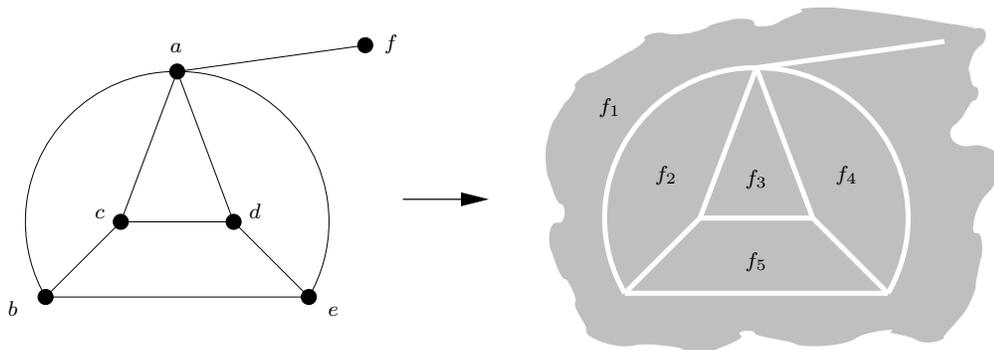


Figura 1.5: Um grafo plano G com 5 faces.

É natural pensar nas faces de um grafo plano como sendo limitadas por arestas e vértices. Por exemplo, considere o grafo plano exibido na Figura 1.5. Observe que os vértices a, c, d e as arestas ac, ad, cd limitam a face f_3 . Dizemos que duas faces são *adjacentes* se existe uma aresta que limita ambas as faces. Na Figura 1.5, a face f_4 é adjacente às faces f_1, f_3 e f_5 . Seja G um grafo plano e seja $F(G) := \{f_1, \dots\}$ o *conjunto das faces* de G . Uma k -*coloração das faces* de G é um mapeamento $\phi: F(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de modo que quaisquer duas faces adjacentes $f_i, f_j \in F(G)$ possuam $\phi(f_i) \neq \phi(f_j)$. A Figura 1.6 exhibe uma 3-coloração das faces de um grafo plano com cores do conjunto $\{1, 2, 3\}$.

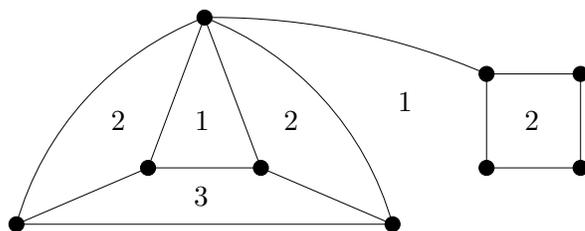


Figura 1.6: Uma 3-coloração das faces de um grafo plano.

1.2 Operações em grafos

Dado um grafo G , podemos estar interessados em obter um subgrafo de G a partir de uma operação bem definida que remova vértices do conjunto $V(G)$ e, conseqüentemente, arestas do conjunto $E(G)$. Outras vezes, podemos apenas estar interessados em remover arestas do conjunto $E(G)$. A necessidade de remoção de um elemento do grafo G pode se fazer necessária, por exemplo, no contexto da demonstração de uma propriedade inerente ao grafo G por meio de indução matemática. Nesta seção, definiremos algumas operações em grafos que nos permitem obter novos grafos a partir de grafos já conhecidos.

Seja G um grafo e sejam $e \in E(G)$ e $v \in V(G)$. O grafo $G - v$, obtido pela *remoção do vértice* v , possui conjunto de vértices $V(G - v) := V(G) \setminus \{v\}$ e conjunto de arestas $E(G - v) := E(G) \setminus \{vw : vw \in E(G)\}$. Similarmente, o grafo $G - e$, obtido pela *remoção da aresta* e , possui $V(G)$ como conjunto de vértices e $E(G) \setminus \{e\}$ como conjunto de arestas. Seja X um subconjunto de elementos de G tal que, ou $X \subseteq V(G)$, ou $X \subseteq E(G)$. Denotamos por $G \setminus X$ o subgrafo formado a partir de G pela remoção sucessiva dos elementos pertencentes ao conjunto X . Dizemos que a aresta e é uma *aresta de corte* se o número de componentes conexas de $G - e$ é maior que o número de componentes conexas de G . Similarmente, dizemos que v é um *vértice de corte* se número de componentes conexas de $G - v$ é maior que o número de componentes conexas de G .

Seja G um grafo e sejam $u, v \in V(G)$ tais que u e v não são adjacentes. O grafo $G + e$ é obtido a partir de G , adicionando a aresta $e = uv$ ao conjunto $E(G)$; isto é, $V(G + e) := V(G)$ e $E(G + e) := E(G) \cup \{e\}$. A operação de obtenção do grafo $G + e$ a partir do grafo G é denominada *adição de aresta*. Seja $w \notin V(G)$. Similarmente ao caso anterior, o grafo $G + w$ é obtido a partir de G , adicionando o vértice w ao conjunto $V(G)$; isto é, $V(G + w) := V(G) \cup \{w\}$ e $E(G + w) := E(G)$. A operação de obtenção do grafo $G + w$ a partir do grafo G é denominada *adição de vértice*. Seja X um conjunto não vazio de elementos, tal que $X \not\subseteq V(G)$ e $X \not\subseteq E(G)$. Denotamos por $G + X$ o grafo formado a partir de G pela adição sucessiva dos elementos pertencentes ao conjunto X .

A *identificação* de dois vértices não adjacentes x e y pertencentes a um grafo G é uma operação realizada em três passos: (i) inicialmente, adicionamos um novo vértice v_{xy} ao

grafo G ; (ii) posteriormente, modificamos a função de incidência ψ_G de modo que, todas as arestas de G que possuem x ou y como extremo, agora possuam o vértice v_{xy} como extremo no lugar de x ou de y ; e (iii) finalmente, removemos os vértices x e y do grafo G . Denotamos por G_{xy} o grafo obtido a partir de G pela identificação dos vértices x e y . De acordo com essa definição, a identificação de dois vértices pode resultar em um grafo com arestas múltiplas. A Figura 1.7(a) ilustra esta operação.

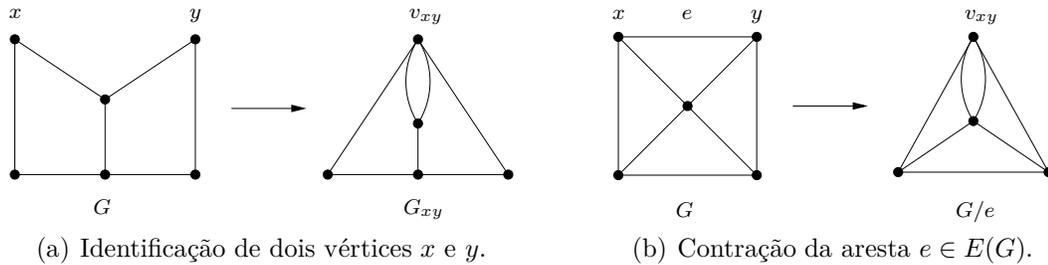


Figura 1.7: Exemplo de identificação de vértices e contração de arestas.

Seja $e \in E(G)$ tal que $\psi_G(e) = \{x, y\}$, com $x, y \in V(G)$. *Contrair* a aresta e é: (i) remover e do grafo G e, (ii) se a aresta e não for um laço, identificar os vértices x e y . Denotamos por G/e o grafo obtido a partir de G pela *contração* da aresta e . A Figura 1.7(b) ilustra a operação de contração de arestas.

Um *menor* de G é um grafo obtido a partir de G por meio de uma sequência de operações que podem ser: remoção de vértices, remoção de arestas, ou contrações de arestas. Por exemplo, a Figura 1.8 mostra que o grafo de Petersen possui o grafo completo K_5 como um menor.

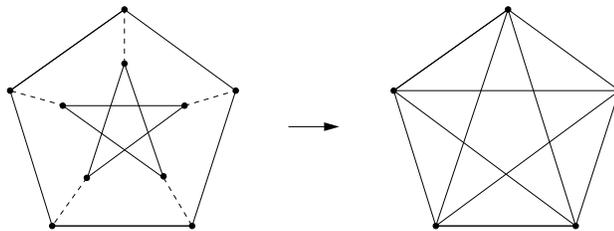


Figura 1.8: Grafo completo K_5 como um menor do grafo de Petersen. Observe que o K_5 foi obtido pela contração das 5 arestas tracejadas no desenho do grafo de Petersen.

Outra operação utilizada para se obter novos grafos a partir de grafos já conhecidos é a *subdivisão de arestas*. Em um grafo G , *subdividir* uma aresta $e \in E(G)$ com extremos $x, y \in V(G)$ significa remover a aresta e do grafo, adicionar um novo vértice w e ligar w aos vértices x e y . Uma *subdivisão de H* é um grafo obtido a partir de um grafo H por meio de sucessivas subdivisões de arestas. Dizemos que um grafo G *possui uma subdivisão* de um grafo H se G possui um subgrafo que é isomorfo a uma subdivisão de H .

Dado um grafo G , o seu *grafo subjacente* é o grafo simples obtido a partir de G pela remoção de todos os laços e arestas múltiplas. A Figura 1.9 apresenta um grafo H e o seu grafo subjacente H' .



Figura 1.9: Um grafo H e seu grafo subjacente H' .

Dois grafos G e H são *disjuntos* se eles não possuem vértices em comum, ou seja, $V(G) \cap V(H) = \emptyset$; e são *disjuntos nas arestas* se não possuem arestas em comum, isto é, $E(G) \cap E(H) = \emptyset$. A *união* de dois grafos simples G e H é o grafo $G \cup H$ com conjunto de vértices $V(G \cup H) := V(G) \cup V(H)$ e conjunto de arestas $E(G \cup H) := E(G) \cup E(H)$. Se G e H são disjuntos, nos referimos à sua união como uma *união disjunta*. Dados dois grafos G e H , disjuntos nos vértices, podemos adicionar arestas ligando cada vértice de G a todos os vértices de H . O grafo resultante desta operação é denominado uma *junção* de G e H , e é denotado por $G \vee H$.

1.3 Multiconjuntos

Um *multiconjunto* C é definido como um par (A, μ) , tal que A é um conjunto qualquer e $\mu : A \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ é a função que associa cada elemento de A a um número natural maior ou igual a 1. A função μ é denominada *função de multiplicidade*. Para cada elemento $a \in A$, definimos a *multiplicidade* de a (ou seja, o número de ocorrências de a no multiconjunto C) como o número $\mu(a)$.

Um multiconjunto $C = (A, \mu)$ é representado com a mesma notação usada para representar conjuntos, com a diferença de que cada elemento $a \in A$ aparece $\mu(a)$ vezes no multiconjunto C . Por exemplo, o multiconjunto $C = (A, \mu)$ tal que $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $\mu(a) = 2$, $\mu(b) = 1$, $\mu(c) = 3$, $\mu(d) = 1$, $\mu(e) = 2$, é representado por $C = \{a, a, b, c, c, c, d, e, e\}$. Em um multiconjunto, a ordem dos elementos não é relevante, mas apenas a multiplicidade dos seus elementos. Por exemplo, os multiconjuntos $C_1 = \{a, b, a, b, c, c, b\}$ e $C_2 = \{a, a, c, c, b, b, b\}$ são iguais.

Multiconjuntos podem ser vistos como uma generalização de conjuntos, isto é, um multiconjunto $C = (A, \mu)$ é um conjunto quando $\mu(a) = 1$ para todo elemento $a \in A$. A *cardinalidade* de um multiconjunto $C = (A, \mu)$ é definida como $\sum_{a \in A} \mu(a)$. O Teorema 1.1 apresenta o número de multiconjuntos de cardinalidade k formado por elementos de um

conjunto finito A de cardinalidade n . Uma demonstração do Teorema 1.1 pode ser encontrada no livro de W. Feller [34, pag.33].

Teorema 1.1. *O número de multiconjuntos de cardinalidade k formado por elementos de um conjunto finito A de cardinalidade n é igual a $A_{k,n} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$. \square*

1.4 Coloração de Grafos

Nesta seção, inicialmente apresentamos os conceitos de coloração de vértices e de coloração de arestas, que são colorações de grafos clássicas cuja origem está intimamente relacionada a Conjetura das Quatro Cores citada no início deste capítulo. Posteriormente, apresentamos o conceito de coloração total e finalizamos o capítulo apresentando a coloração total semiforte, que é o tema desta dissertação.

Seja G um grafo sem laços. Uma *coloração de vértices* (própria) de G é uma atribuição de cores aos vértices de G de modo que quaisquer dois vértices adjacentes possuam cores distintas. Uma coloração de vértices de G é dita *não própria* quando existem vértices adjacentes em G que possuem a mesma cor. Nesta dissertação, quando citarmos coloração de vértices, estaremos nos referindo a colorações próprias. Quando estivermos considerando colorações não próprias, estas serão definidas e referenciadas explicitamente como não próprias.

O menor número de cores para o qual o grafo G admite uma coloração de vértices é denominado *número cromático* de G e denotado por $\chi(G)$. Uma coloração dos vértices de G com k cores é dita uma *k -coloração de vértices* de G . É importante notar que o conjunto de vértices que recebem a mesma cor formam um conjunto independente. Por exemplo, como quaisquer dois vértices do K_n são adjacentes, cada vértice recebe uma cor distinta, isto é, $\chi(K_n) = \Delta(K_n) + 1 = n$

Considere um ciclo ímpar. Note que o grafo C_{2k+1} possui número cromático igual a $\Delta(C_{2k+1}) + 1 = 3$. Não é difícil ver que a cardinalidade de um conjunto independente de vértices de tamanho máximo neste grafo é igual a k . Logo, $\chi(C_{2k+1}) \geq \frac{2k+1}{k} > 2$. Para colorir os vértices do C_{2k+1} com 3 cores, inicialmente atribuímos a cor 3 a um dos vértices do ciclo e, em seguida, colorimos os demais vértices alternadamente com as cores 1 e 2.

Seja G um grafo sem laços, com n vértices, $n \geq 1$. Obtemos facilmente uma coloração dos vértices de G atribuindo uma cor distinta a cada um de seus vértices. A partir desta coloração, obtemos o limite superior $\chi(G) \leq |V(G)|$. Este limite superior é o melhor possível, dado que $\chi(K_n) = |V(K_n)|$. No entanto, o limite é justo apenas no caso dos grafos completos.

Dado um conjunto de cores $\mathcal{C} = \{1, \dots\}$, pode-se também colorir os vértices de G da seguinte maneira: inicialmente, atribuímos uma ordem v_1, \dots, v_n aos vértices de G e,

posteriormente, colorimos os vértices de G de acordo com essa ordem atribuindo a cada vértice v_i a menor cor do conjunto \mathcal{C} que ainda não tenha sido utilizada para colorir seus vizinhos v_j , com $j < i$. A partir deste método de coloração, obtemos que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. De fato, em uma ordenação dos vértices de G , quando um vértice v_i está para ser colorido, o número de vizinhos de v_i que já foram coloridos é menor ou igual a $d(v)$, que, por fim, é menor ou igual a $\Delta(G)$. Deste modo, uma das cores $1, \dots, \Delta(G) + 1$ certamente estará disponível para colorir o vértice v_i .

O limite superior $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, para grafos arbitrários, é o melhor possível, dado que é um limite justo considerando os grafos completos e os ciclos ímpares. Todavia, em 1941, R. L. Brooks [14] demonstrou que este limite superior não é um limite justo para os demais grafos:

Teorema 1.2 (Brooks [14]). *Se G é um grafo conexo tal que G não é um grafo completo nem um ciclo ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.* \square

O Teorema de Brooks é um resultado clássico em coloração de grafos. Generalizações deste teorema foram posteriormente apresentadas por G. A. Dirac [31] e T. Gallai [35].

Seja G um grafo sem laços. Uma *coloração de arestas* (própria) de G é uma atribuição de cores às arestas de G de modo que quaisquer duas arestas adjacentes possuam cores distintas. Uma coloração de arestas de G é dita *não própria* quando existem arestas adjacentes em G coloridas com a mesma cor. Similarmente ao caso da coloração de vértices, nos referimos a colorações de arestas próprias simplesmente como colorações de arestas.

O menor número de cores para o qual o grafo G admite uma coloração de arestas é denominado *índice cromático* de G e é denotado por $\chi'(G)$. Uma coloração de arestas de G com k cores é dita uma *k -coloração de arestas* de G . Seja v um vértice de grau máximo em G . Observe que em qualquer coloração de arestas de G são necessárias pelo menos $\Delta(G)$ cores para colorir as arestas incidentes em v . Logo, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Como um exemplo, observe que o índice cromático de um ciclo par C_{2k} é igual a dois. De fato, temos que $\chi'(C_{2k}) \geq \Delta(C_{2k}) = 2$. Uma 2-coloração de arestas do C_{2k} é obtida colorindo as arestas do ciclo alternadamente com as cores 1 e 2. Por outro lado, é bastante conhecido que o índice cromático de um ciclo ímpar C_{2k+1} é igual a três. Observe que um conjunto independente de arestas de tamanho máximo no grafo C_{2k+1} possui cardinalidade igual a k . Logo, temos que $\chi'(C_{2k+1}) \geq \frac{2k+1}{k} > 2$. Colorimos as arestas do C_{2k+1} com três cores, atribuindo a cor 3 a uma das arestas do C_{2k+1} e colorindo as demais arestas alternadamente com as cores 1 e 2.

Em 1964, V. G. Vizing [69] apresentou o seguinte resultado, que é um dos mais importantes em coloração de grafos:

Teorema 1.3 (Vizing [69]). *Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.* \square

Com base no Teorema 1.3, e lembrando que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, convencionou-se chamar de *classe 1* os grafos que possuem $\chi'(G) = \Delta(G)$ e de *classe 2* os grafos que possuem $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Dado um grafo simples G , decidir se G é classe 1 ou classe 2 é um problema \mathcal{NP} -completo [40]. No entanto, para algumas classes de grafos, o índice cromático encontra-se determinado. Por exemplo, em 1916, König determinou o índice cromático dos grafos simples bipartidos:

Teorema 1.4 (König [50]). *Se G é um grafo simples bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.* \square

O *núcleo* de um grafo G é o subgrafo de G induzido pelos vértices de grau máximo. Em 1992, Chew e Yap [27] determinaram o índice cromático dos grafos simples cujo núcleo é uma floresta:

Lema 1.5 (Chew e Yap [27]). *Seja G um grafo simples. Se o núcleo de G é uma floresta, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.* \square

Uma *coloração total* (própria) de um grafo sem laços G é uma atribuição de cores aos vértices e às arestas de G de modo que quaisquer dois elementos adjacentes ou incidentes possuam cores distintas. Uma coloração total de G é *não própria* se existem dois elementos adjacentes ou incidentes de G com cores idênticas. Nesta dissertação, quando estivermos considerando colorações totais não próprias, estas serão definidas e referenciadas explicitamente como não próprias.

Seja ϕ uma coloração total de um grafo sem laços G . Observe que a restrição de ϕ aos vértices de G , denotada por $\phi|_{V(G)}$, é uma coloração de vértices de G , e que a restrição de ϕ às arestas de G , denotada por $\phi|_{E(G)}$, é uma coloração de arestas de G . A Figura 1.10 exibe colorações totais para dois grafos.

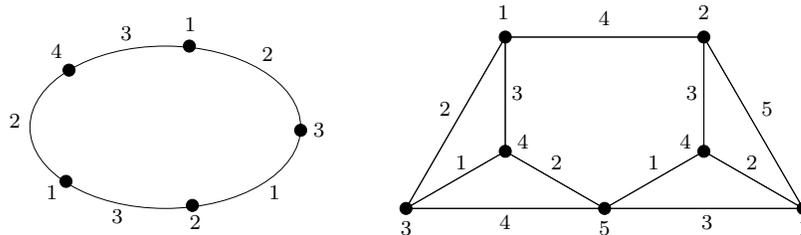


Figura 1.10: Dois grafos simples munidos de uma coloração total.

O menor valor de k para o qual um grafo G admite uma k -coloração total é denominado *número cromático total* de G e é denotado por $\chi''(G)$. Dado um grafo sem laços G e um vértice de grau máximo $v \in V(G)$, são necessárias $\Delta(G)$ cores para colorir as arestas incidentes em v e mais uma cor adicional para o próprio vértice. Logo, $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$.

O conceito de coloração total foi introduzido, de maneira independente, por Behzad [11] e Vizing [70], por volta de 1965. Os autores propuseram a seguinte conjectura, que ficou conhecida como *Conjetura da Coloração Total*:

Conjetura 1.6 (Behzad [11] e Vizing [70]). *Para qualquer grafo simples G , tem-se que $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Apesar da Conjetura da Coloração Total permanecer aberta para grafos arbitrários, ela já foi verificada para algumas classes de grafos como, por exemplo, para os grafos com $\Delta(G) \leq 5$ [52, 53, 77], grafos split [21], grafos multipartidos completos [77], subfamílias de grafos regulares [26] e grafos duplamente cordais [29]. Borodin et al. [13] provaram que os grafos planares com $\Delta(G) \geq 11$ possuem $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$.

Se a Conjetura da Coloração Total for verdadeira, então o número cromático total de um grafo G está restrito a $\Delta(G) + 1$ ou $\Delta(G) + 2$. Esta observação inspirou a seguinte nomenclatura: se o grafo G possui $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$, diz-se que G é *tipo 1*; e se G possui $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$, diz-se que G é *tipo 2*.

Em 1989, Sánchez-Arroyo [6] provou que decidir se $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ é um problema \mathcal{NP} -completo. Em 1994, McDiarmid e Sánchez-Arroyo [55] mostraram que mesmo o problema de determinar o número cromático total para grafos bipartidos k -regulares, para cada $k \geq 3$ fixo, é \mathcal{NP} -difícil.

Seja ϕ uma atribuição de cores aos vértices e às arestas de um grafo sem laços G . Sejam x e y dois elementos adjacentes ou incidentes pertencentes a G . Se $\phi(x) = \phi(y)$ dizemos que a atribuição de cores ϕ *conflita* ou que há um *conflito* entre x e y .

Seja ϕ uma coloração total de G . Para cada vértice $v \in V(G)$, seja $C(v) := \{\phi(v)\} \cup \{\phi(uv) : uv \in E(G)\}$ o *conjunto de cores que ocorrem* no vértice v ; ou seja, $C(v)$ é formado pela cor do vértice v e pelas cores das arestas que nele incidem. Dizemos que a coloração total ϕ é *semiforte* se $C(u) \neq C(v)$ para quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$. O menor número de cores para o qual um grafo simples G admite uma coloração total semiforte é denominado *número cromático total semiforte* de G . A Figura 1.11 exibe um grafo munido de uma coloração total semiforte. Observe que quaisquer dois vértices e arestas adjacentes neste grafo possuem cores distintas; que qualquer vértice possui cor distinta da cor das arestas que nele incidem e que os conjuntos de cores que ocorrem em quaisquer dois vértices adjacentes são distintos.

O conceito de coloração total semiforte foi introduzido por Zhang et al. [80] em 2005. Os autores estudaram essa coloração para algumas famílias clássicas de grafos, tais como: grafos completos, grafos bipartidos completos, árvores e ciclos; e verificaram que todas estas famílias possuem uma coloração total semiforte com não mais que $\Delta(G) + 3$ cores. Com base nestas descobertas, Zhang et al. conjecturaram que qualquer grafo simples G

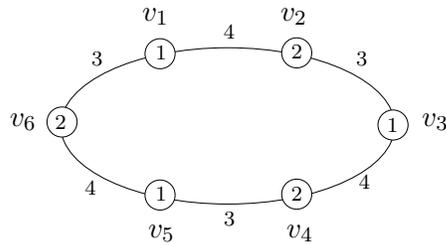


Figura 1.11: Grafo munido de uma coloração total semiforte com 4 cores.

admite uma coloração total semiforte com no máximo $\Delta(G) + 3$ cores. Essa conjectura ficou conhecida como *Conjetura da Coloração Total Semiforte*. Apesar desta conjectura continuar aberta, ela já foi verificada para algumas outras classes de grafos além das famílias já citadas.

Nesta dissertação, determinamos o número cromático total semiforte para as seguintes famílias de grafos:

- grafos simples com $\Delta(G) = 3$ e sem vértices adjacentes de grau máximo;
- snarks-flor;
- snarks de Goldberg;
- snarks de Blanuša generalizados;
- snarks de Loupekine LP_1 ;
- grafos equipartidos completos de ordem par.

As colorações dadas aos grafos destas classes possuem no máximo $\Delta(G) + 2$ cores. Além disso, mostramos que os grafos tripartidos e os grafos equipartidos completos de ordem ímpar possuem uma coloração total semiforte com no máximo $\Delta(G) + 3$ cores. Os resultados obtidos confirmam a validade da Conjetura da Coloração Total Semiforte para todas as famílias consideradas neste trabalho.

O restante da dissertação está dividido em quatro capítulos. O Capítulo 2 apresenta um breve histórico do contexto em que a coloração total semiforte foi introduzida. Em seguida, alguns resultados da literatura são apresentados. O Capítulo 3 trata da coloração total semiforte de algumas famílias de grafos simples com $\Delta(G) = 3$. No Capítulo 4, a Conjetura da Coloração Total Semiforte é verificada para os grafos tripartidos e para os grafos equipartidos completos. Além disso, o número cromático total semiforte dos grafos equipartidos completos de ordem par é determinado. Finalmente, o último capítulo apresenta as conclusões desta dissertação e sugestões de trabalhos futuros.

Paralelamente a esta pesquisa de mestrado, foi desenvolvida uma pesquisa no Departamento de Otimização e Combinatória da Universidade de Waterloo, Canadá, sob a orientação do professor R. Bruce Richter. Durante esta pesquisa, entre outros problemas, investigou-se uma conjectura proposta por J. Barát e G. Tóth no artigo *Towards the Albertson Conjecture* [9]. Os resultados originais obtidos foram redigidos em um artigo que foi publicado na revista *The Electronic Journal of Combinatorics* [54]. Este artigo encontra-se no Apêndice A desta dissertação.

Capítulo 2

Coloração total semiforte

Seja G um grafo e seja \mathcal{C} um conjunto de rótulos. Uma *rotulação* de G é uma atribuição de rótulos aos vértices e/ou às arestas de G . Seja $\pi : V(G) \rightarrow \mathcal{C}$. Se quaisquer dois vértices de G possuem rótulos distintos, então dizemos que a rotulação π é *forte* ou *irregular*. Neste caso, cada vértice do grafo G é unicamente determinado pelo seu rótulo. Uma rotulação de G na qual quaisquer dois vértices adjacentes possuem rótulos distintos é denominada uma rotulação *semiforte*. Dizemos que dois vértices $u, v \in V(G)$ são *distinguidos* por π quando $\pi(u) \neq \pi(v)$. A Figura 2.1(a) exibe uma rotulação forte de um grafo G com 5 vértices e a Figura 2.1(b) exibe uma rotulação semiforte do mesmo grafo.

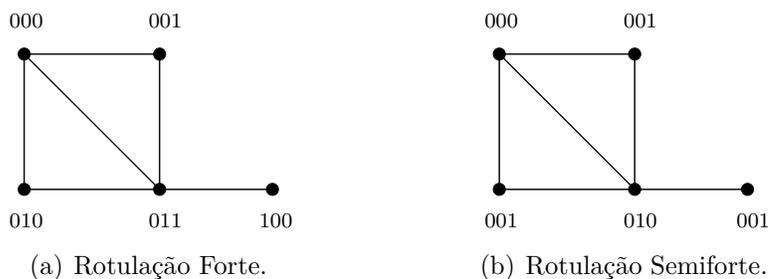


Figura 2.1: Exemplo de rotulação forte e semiforte de um mesmo grafo.

Existem ocasiões em que uma rotulação das arestas de um grafo pode induzir uma rotulação forte ou semiforte dos seus vértices. Por exemplo, em qualquer coloração de arestas própria do K_3 , quaisquer dois vértices são distinguidos pelos conjuntos das cores de suas arestas incidentes. Seja K_3 com conjunto de vértices $V(K_3) := \{v_1, v_2, v_3\}$ munido de uma coloração de arestas ϕ , tal que $\phi(v_1v_2) = 1$, $\phi(v_2v_3) = 2$ e $\phi(v_1v_3) = 3$. Para cada vértice $v_i \in V(K_3)$ definimos $\pi(v_i) := \{\phi(v_iv_j) : v_iv_j \in E(K_3)\}$, o conjunto das cores das arestas incidentes no vértice v_i . Deste modo, temos $\pi(v_1) = \{1, 3\}$, $\pi(v_2) = \{1, 2\}$, $\pi(v_3) = \{2, 3\}$. A rotulação $\pi : V(K_3) \rightarrow \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ é uma rotulação forte.

De modo semelhante, outras colorações de um grafo podem induzir uma rotulação forte ou semiforte dos seus vértices. Por exemplo, na Figura 2.2 exibimos uma 4-coloração total ϕ do ciclo C_5 que induz uma rotulação semiforte π dos seus vértices. Esta rotulação é definida da seguinte maneira: para todo $v_i \in V(C_5)$, $\pi(v_i) := \{\phi(v_i)\} \cup \{\phi(v_i v_j) : v_i v_j \in E(C_5)\}$. Por inspeção, é possível verificar que $\pi(v_i) \neq \pi(v_j)$, para quaisquer dois vértices adjacentes $v_i, v_j \in V(C_5)$. Portanto, a rotulação π é semiforte. Observe também que a rotulação π não é forte, pois $\pi(v_2) = \pi(v_5)$.

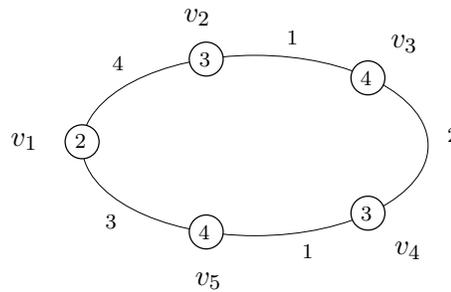


Figura 2.2: Ciclo C_5 munido de uma 4-coloração total ϕ .

Uma coloração de arestas própria ϕ de um grafo G que induz uma rotulação forte π (resp. semiforte) de G é denominada uma *coloração de arestas forte* (resp. *semiforte*) de G . Similarmente, uma coloração total própria ϕ de um grafo G que induz uma rotulação semiforte π de G é denominada uma *coloração total semiforte* de G .

A coloração total semiforte é o tema desta dissertação. Essa coloração faz parte de uma família de colorações (próprias ou não próprias) cuja restrição adicional é distinguir dois vértices quaisquer de um grafo ou apenas vértices adjacentes. O leitor interessado em outras colorações que distinguem vértices pode encontrar mais informações e referências nos artigos de Escudro et al. [33], B. Seamone [61] e também no livro de G. Chartrand e P. Zhang [20, Capítulo 13].

Na Seção 2.1 apresentamos um breve histórico das colorações que distinguem vértices e introduzimos formalmente o conceito de coloração total semiforte. Posteriormente, na Seção 2.2, apresentamos alguns resultados preliminares da literatura de coloração total semiforte. Apresentamos também a Conjetura da Coloração Total Semiforte, que afirma que qualquer grafo simples possui uma coloração total semiforte com no máximo $\Delta(G) + 3$ cores. Na Seção 2.3, apresentamos a coloração total semiforte dos grafos completos, ciclos e grafos bipartidos. Finalizando o capítulo, na Seção 2.4, apresentamos famílias de grafos que necessitam de exatamente $\Delta(G) + 3$ cores para admitir uma coloração total semiforte.

2.1 Distinguindo os vértices de um grafo

Em 1986, Chartrand et al. [19] apresentaram um trabalho na conferência de aniversário dos 250 anos da Teoria dos Grafos em Fort Wayne, Indiana, nos Estados Unidos. No trabalho apresentado, os autores destacaram a importância dos grafos regulares em Teoria dos Grafos, o que pode ser observado pelo grande número de trabalhos e resultados dedicados a esta classe de grafos. Ainda nesta apresentação, eles denominaram de *grafo irregular* o grafo que não possui dois vértices de mesmo grau e observaram que existe apenas um grafo simples que não possui dois vértices de mesmo grau: o K_1 . Este fato é decorrente da seguinte proposição:

Proposição 2.1. *Em qualquer grafo simples com pelo menos dois vértices, devem existir dois vértices que possuem o mesmo grau.*

Demonstração. Considere um grafo simples G com n vértices. Por contradição, suponha que todos os vértices de G possuam graus distintos entre si. Deste modo, os graus dos vértices de G são exatamente $0, 1, \dots, n - 1$. Contudo, observe que é impossível haver no grafo G um vértice de grau 0 e um vértice de grau $n - 1$ simultaneamente. Concluímos que G possui pelo menos dois vértices de mesmo grau. \square

Motivados pela inexistência de grafos simples irregulares não triviais, Chartrand et al. [19] introduziram o problema das redes irregulares. Uma *rede* é um grafo simples G no qual, para cada aresta $e \in E(G)$, é atribuído um *peso* $\omega(e)$ inteiro positivo. Para cada vértice v pertencente à rede, definimos o *peso* do vértice v , $\omega(v)$, como a soma dos pesos das suas arestas incidentes, ou seja, $\omega(v) := \sum_{u \in N(v)} \omega(uv)$. Uma *rede irregular* G é uma rede na qual $\omega(u) \neq \omega(v)$, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$. Note que, em uma rede irregular G , a função $\omega: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ é uma rotulação forte de G . A Figura 2.3 apresenta uma atribuição de pesos às arestas do grafo de Petersen de modo que o grafo resultante seja uma rede irregular.

Observe que não existem redes irregulares de ordem dois. De fato, no caso conexo, é impossível atribuir um peso à aresta do K_2 de modo a obter pesos distintos para os seus dois vértices. Por outro lado, para o caso não conexo, em qualquer coloração de arestas, ambos os vértices possuem peso zero. Estas observações vão ao encontro do resultado de Chartrand et al. apresentado a seguir.

Teorema 2.2 (Chartrand et al. [19]). *Se G é um grafo simples e conexo com $|V(G)| \geq 3$, então existe uma atribuição de pesos às arestas de G que resulta em uma rede irregular.*

Demonstração. Seja G um grafo simples e conexo de ordem maior ou igual a 3. Seja $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Como G é conexo e $|V(G)| \geq 3$, temos que $|E(G)| \geq 2$. Definimos uma atribuição de pesos ω às arestas de G da seguinte maneira: para $1 \leq i \leq m$,

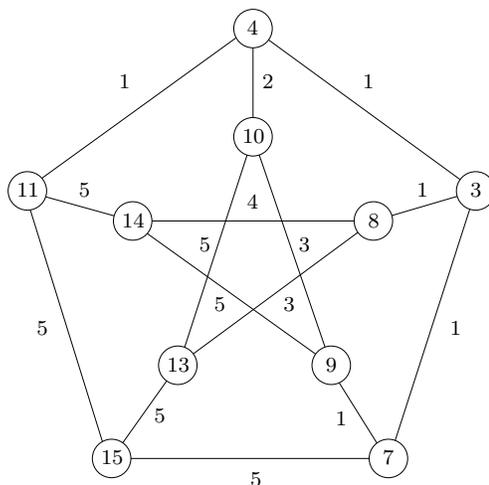


Figura 2.3: Grafo de Petersen como uma rede irregular. Neste exemplo, cada vértice encontra-se rotulado com o valor do seu peso.

$\omega(e_i) := 2^{i-1}$. Observe que cada vértice $v \in V(G)$ pode ter o seu peso $\omega(v)$ expresso como um número binário $a_{m-1} a_{m-2} \dots a_1 a_0$, tal que cada $a_i \in \{0, 1\}$ e $a_i = 1$ se e somente se e_{i+1} é incidente no vértice v . Uma vez que não existem em G dois vértices com o mesmo conjunto de arestas incidentes e como a representação binária de um inteiro positivo é única, temos que quaisquer dois vértices possuem pesos distintos e o resultado segue. \square

Note que, se todas as arestas de uma rede irregular tiverem seus pesos multiplicados por um número inteiro positivo fixo, o grafo ponderado resultante é também uma rede irregular. Por meio desta observação e pelo Teorema 2.2, obtem-se o seguinte corolário:

Corolário 2.3 (Chartrand et al. [19]). *Existe uma atribuição de pesos às arestas de um grafo simples G que resulta em uma rede irregular se e somente se G possui no máximo uma componente conexa isomorfa ao K_1 e não possui componentes conexas isomorfas ao K_2 .* \square

Dizemos que um grafo G é *comportado* se G é simples, não possui componentes conexas isomorfas ao K_2 e possui no máximo uma componente conexa isomorfa ao K_1 . Em seu trabalho, Chartrand et al. [19] estabeleceram o problema de determinar o menor valor de k para o qual um grafo comportado possui uma atribuição de pesos $1, 2, \dots, k$ às suas arestas de modo a torná-lo uma rede irregular. Esse menor valor de k é denominado *grau de irregularidade* do grafo G e é denotado por $s(G)$. Ainda neste trabalho, foram apresentados alguns limites inferiores para $s(G)$. Além disso, os autores determinaram o grau de irregularidade para caminhos, grafos completos e grafos bipartidos completos com partes de mesma cardinalidade.

Outros pesquisadores se interessaram pelo problema das redes irregulares. Por exemplo, em 2000, Nierhoff [57] provou que todo grafo comportado G possui $s(G) \leq |V(G)| - 1$. Em 2011, Kalkowski et al. [48] provaram que $s(G) \leq 6\lceil n/\delta(G) \rceil$, para qualquer grafo comportado G .

Em 1990, Aigner e Triesch [1] propuseram a variante do problema das redes irregulares descrita a seguir. Seja G um grafo simples e seja $\phi : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ uma k -coloração de arestas (não necessariamente própria) do grafo G . Para cada vértice $v \in V(G)$, definimos $C^m(v)$ como o *multiconjunto das cores* das arestas incidentes no vértice v . Por exemplo, se o vértice v possui três arestas incidentes e essas arestas possuem as cores 1, 3 e 3, então $C^m(v) = \{1, 3, 3\}$. Dizemos que a coloração de arestas ϕ é uma *coloração de arestas forte por multiconjunto* se e somente se $C^m(u) \neq C^m(v)$ para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$. A Figura 2.4 apresenta uma coloração de arestas forte por multiconjunto do grafo de Petersen.

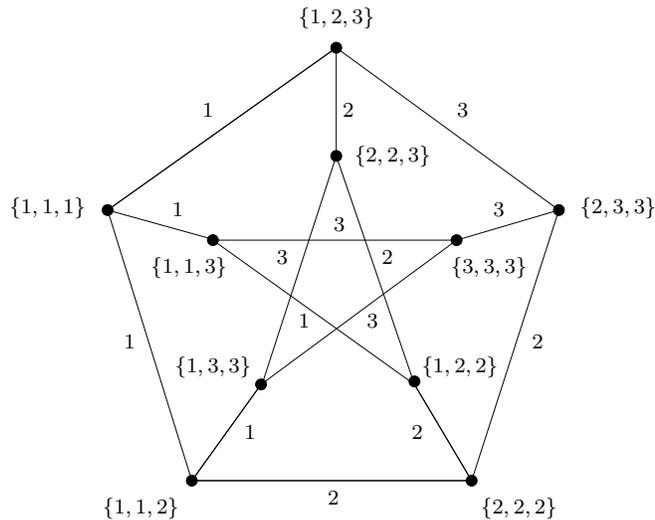


Figura 2.4: Grafo de Petersen P munido de uma coloração de arestas forte por multiconjunto com três cores. Cada vértice $u \in V(P)$ encontra-se rotulado com o seu multiconjunto $C^m(u)$.

O menor número de cores k para o qual um grafo G possui uma k -coloração de arestas forte por multiconjunto é denotado por $\chi'_m(G)$. Observe que o grafo de Petersen possui $\chi'_m(P) = 3$. De fato, pela Figura 2.4, temos que $\chi'_m(P) \leq 3$. Além disso, note que não é possível uma tal coloração do grafo de Petersen com $k = 2$, pois o grafo de Petersen possui 10 vértices e, pelo Teorema 1.1, existem apenas quatro multiconjuntos distintos de três elementos formados com as cores 1 e 2.

Em 1990, Aigner e Triesch [1] provaram que $\chi'_m(K_n) = 3$ para todo grafo completo com $n \geq 3$, e que $\chi'_m(K_{n,n}) = 3$ para qualquer grafo bipartido completo com $n \geq 2$. Os

autores também observaram que $\chi'_m(G) \leq s(G)$. De fato, seja G um grafo comportado e seja ϕ uma ponderação das arestas de G que o torna uma rede irregular. Não é difícil ver que $C_\phi^m(u) \neq C_\phi^m(v)$ para quaisquer $u, v \in V(G)$, pois, se este não fosse o caso, teríamos dois vértices em G com o mesmo peso, uma contradição. Logo, $\chi'_m(G) \leq s(G)$.

Em 1997, Burris e Schelp [15] propuseram o seguinte caso particular da coloração de arestas forte por multiconjuntos. Seja G um grafo comportado e $\phi : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ uma k -coloração de arestas própria de G . Para cada vértice $v \in V(G)$ definimos $C'(v) := \{\phi(uv) : uv \in E(G)\}$, o conjunto das cores das arestas incidentes no vértice v . Dizemos que a coloração de arestas ϕ é uma *coloração de arestas forte* se e somente se, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$, $C'(u) \neq C'(v)$. Essa coloração também foi investigada de maneira independente por Černý, Horňák e Soták [41, 68] sob o nome de *observability of a graph*. A Figura 2.5 apresenta uma coloração de arestas forte do grafo de Petersen com 5 cores.

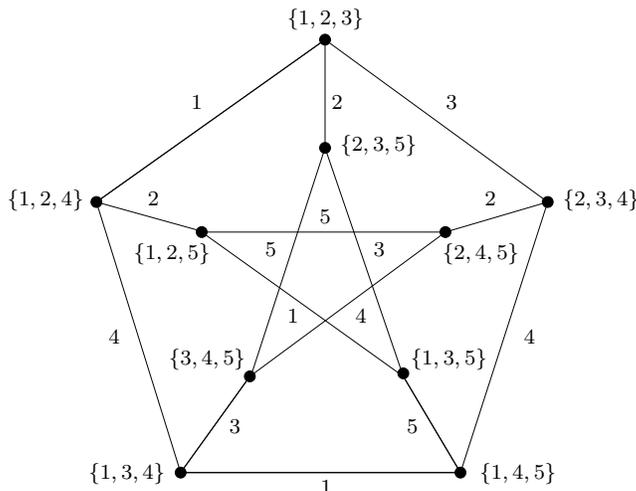


Figura 2.5: Grafo de Petersen munido de uma coloração de arestas forte com 5 cores.

O menor valor de k para o qual um grafo G possui uma k -coloração de arestas forte é denotado por $\chi'_s(G)$ e é denominado *índice cromático forte* de G . Como a coloração de arestas forte é uma coloração própria, imediatamente obtemos que $\chi'_s(G) \geq \Delta(G)$. Como um exemplo, o grafo de Petersen possui $\chi'_s(P) = 5$. De fato, pela Figura 2.5, temos que $\chi'_s(P) \leq 5$. Além disso, note que não é possível uma 4-coloração de arestas forte do grafo de Petersen, pois ele possui 10 vértices e existem apenas $\binom{4}{3} = 4$ conjuntos distintos de três elementos formados com as cores 1, 2, 3 e 4. O parâmetro $\chi'_s(G)$ está determinado para algumas famílias de grafos tais como: caminhos, ciclos, grafos completos, grafos bipartidos completos [15, 68] e grafos multipartidos completos com partes de mesma cardinalidade [41]. Além dos resultados para classes de grafos, alguns limitantes para $\chi'_s(G)$ também foram obtidos para grafos comportados arbitrários. Por exemplo,

Balister et al. [7] investigaram a coloração de arestas forte para grafos com $\Delta(G) = 2$ e Bazgan et al. [10] a investigaram para grafos comportados [10], obtendo os seguintes resultados:

Teorema 2.4 (Balister et al. [7]). *Seja G um grafo comportado com $\Delta(G) = 2$ e seja $n_i(G)$ o número de vértices de grau i em G . Se k é o menor inteiro tal que $n_1(G) \leq k$ e $n_2(G) \leq \binom{k}{2}$, então $k \leq \chi'_s(G) \leq k + 5$. \square*

Teorema 2.5 (Bazgan et al. [10]). *Se G é um grafo comportado, então $\chi'_s(G) \leq |V(G)| + 1$. \square*

Note que $\chi'_s(G)$ é um limite superior para $s(G)$ e para $\chi'_m(G)$. Assim como nas redes irregulares e na coloração de arestas forte por multiconjunto, na coloração de arestas forte de um grafo G exige-se que quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$ sejam distinguíveis pelos conjuntos das cores de suas arestas incidentes. Entretanto, a coloração de arestas forte é uma coloração de arestas própria, enquanto que nas duas colorações anteriores a atribuição de cores ou pesos às arestas do grafo pode resultar em uma coloração de arestas não própria do grafo. Logo, temos que $\chi'_m(G) \leq \chi'_s(G)$ e $s(G) \leq \chi'_s(G)$. Como argumentado anteriormente, sabemos que $\chi'_m(G) \leq s(G)$. Deste modo, obtemos que $\chi'_m(G) \leq s(G) \leq \chi'_s(G)$.

O grafo de Petersen é um exemplo de grafo para o qual temos $\chi'_m(G) < \chi'_s(G)$. As Figuras 2.4 e 2.5 ilustram este caso. O grafo de Petersen também exemplifica o caso em que $s(G) = \chi'_s(G)$, como ilustrado pelas Figuras 2.3 e 2.5. A Figura 2.6 apresenta um caso em que $s(G) = \chi'_m(G)$ e a Figura 2.7 ilustra um caso em que $s(G) < \chi'_s(G)$. Na Figura 2.7, como G possui dois vértices de grau 3, um desses vértices deve possuir pelo menos uma aresta incidente com cor distinta das cores que colorem as arestas incidentes no outro vértice de grau três. Logo, $\chi'_s(G) \geq 4$.

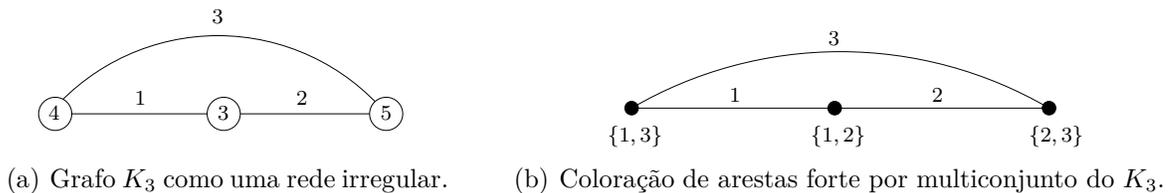


Figura 2.6: Exemplo de um grafo G com $s(G) = 3$ e $\chi'_m(G) = 3$.

Em 2002, Zhang et al. [79] introduziram uma variante da coloração de arestas forte na qual a propriedade de que dois vértices sejam distinguidos é restrita apenas a vértices adjacentes. Dado um grafo simples G , uma *coloração de arestas semiforte* $\phi : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ é uma atribuição de cores às arestas de G tal que $\phi(e) \neq \phi(f)$ para quaisquer duas arestas adjacentes $e, f \in E(G)$ e $C'(u) \neq C'(v)$ para quaisquer dois vértices

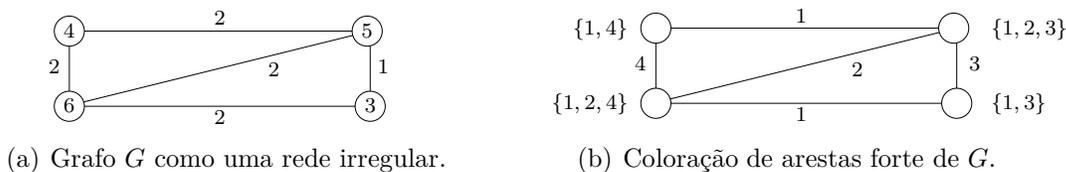


Figura 2.7: Exemplo de um grafo G com $s(G) = 2$ e $\chi'_s(G) = 4$.

adjacentes $u, v \in V(G)$. Lembre que $C'(u) = \{\phi(uv) : uv \in E(G)\}$. A coloração exibida na Figura 2.8 é uma coloração de arestas semiforte do grafo completo K_6 . Observe que quaisquer dois vértices adjacentes possuem conjuntos de cores distintos.

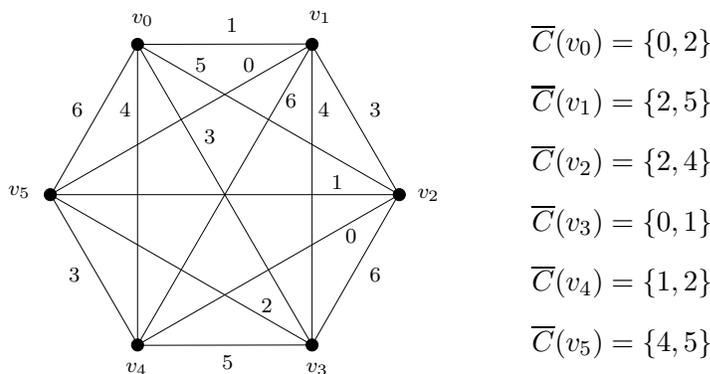


Figura 2.8: Grafo K_6 munido de uma coloração de arestas semiforte com 7 cores.

O menor número k para o qual um grafo simples G admite uma k -coloração de arestas semiforte é denominado o *índice cromático semiforte* e é denotado por $\chi'_{as}(G)$. Como a coloração de arestas semiforte é uma coloração própria, temos que $\chi'_{as}(G) \geq \Delta(G)$. Considere o grafo K_6 . De acordo com a Figura 2.8, temos que $\chi'_{as}(K_6) \leq 7$. Para mostrar que $\chi'_{as}(K_6) \geq 7$, vamos supor que o K_6 possua uma coloração de arestas semiforte com 6 cores. Neste caso, para $0 \leq i \leq 5$, podemos supor que a cor i está ausente em cada vértice v_i , pois o K_6 recebeu uma 6-coloração de arestas semiforte. Entretanto, isto implica que cada um dos cinco vértices restantes possui uma aresta incidente colorida com a cor i . Isto é uma contradição pois na coloração de arestas cada cor ocorre em um número par de vértices. Portanto, $\chi'_{as}(K_6) \geq 7$.

Zhang et al. [79] conjecturaram que se G é um grafo simples, conexo e tal que $G \not\cong K_2$ e $G \not\cong C_5$, então G possui uma coloração de arestas semiforte com no máximo $\Delta(G) + 2$ cores. Essa conjectura é conhecida como a *Conjetura da Coloração de Arestas Semiforte* e foi inicialmente provada para grafos completos, grafos bipartidos [79] e para grafos com $\Delta(G) \leq 3$ [8]. Alguns limitantes superiores para $\chi'_{as}(G)$ também foram determinados. Por exemplo, Balister et al. [8] provaram que se G é um grafo simples e conexo com pelo

menos 3 vértices, então $\chi'_{as}(G) \leq \Delta(G) + O(\log \chi(G))$. Em 2005, Hatami [39] provou que se G é um grafo simples, conexo, com pelo menos três vértices e com $\Delta(G) \geq 10^{20}$, então $\chi'_{as}(G) \leq \Delta(G) + 300$. Em 2006, Edwards et al. [32] provaram que $\chi'_{as}(G) \leq \Delta(G) + 1$ se G é um grafo planar, bipartido e com $\Delta(G) \geq 12$.

Em 2005, Zhang et al. [80] estenderam o conceito de coloração semiforte para o contexto da coloração total tal como descrito a seguir. Seja G um grafo simples e $\phi : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ uma k -coloração total de G . Para cada vértice $v \in V(G)$, definimos o conjunto das cores que *ocorrem* no vértice v como o conjunto $C_\phi(v) := \{\phi(v)\} \cup C'_\phi(v)$. Lembre que $C'_\phi(v) = \{\phi(uv) : uv \in E(G)\}$. Quando estiver claro no contexto a qual coloração $C_\phi(v)$ se refere, $C_\phi(v)$ é escrito simplesmente como $C(v)$. Denotamos por $\overline{C}(v)$ o conjunto das cores que *não ocorrem* no vértice v , ou seja, $\overline{C}(v) := \{1, \dots, k\} \setminus C(v)$. Se quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$ forem distinguidos, então dizemos que ϕ é uma *coloração total semiforte*¹. O *número cromático total semiforte* de G , denotado por $\chi''_a(G)$, é o menor número k de cores para o qual G admite uma k -coloração total semiforte. O *Problema da Coloração Total Semiforte* consiste em determinar o valor de $\chi''_a(G)$ para um grafo simples G . A complexidade de se determinar $\chi''_a(G)$ para um grafo simples G ainda não é conhecida, assim como também não é conhecida a complexidade de se determinar $\chi'_{as}(G)$. A Figura 2.9 exibe uma 5-coloração total semiforte do grafo $K_{3,3}$.

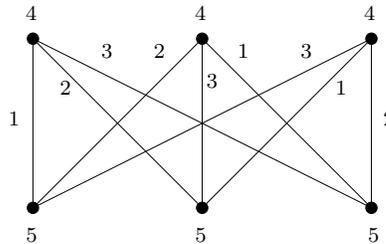


Figura 2.9: Grafo $K_{3,3}$ munido de uma 5-coloração total semiforte.

Na próxima seção, apresentamos alguns resultados básicos envolvendo a coloração total semiforte.

2.2 Resultados preliminares

Uma abordagem natural ao se investigar a coloração total semiforte consiste em estudar suas similaridades e diferenças com relação à coloração total.

Seja G um grafo simples e $v \in V(G)$ um vértice de grau máximo em G . Observe que, assim como na coloração total, em qualquer coloração total semiforte de G são necessárias

¹do Inglês: *adjacent-vertex-distinguishing-total-colouring*.

$\Delta(G)$ cores para colorir as arestas incidentes em v e uma nova cor para colorir o vértice v . Deste modo, obtemos o seguinte limite inferior para $\chi''_a(G)$:

Proposição 2.6. *Se G é um grafo simples, então $\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 1$.* \square

Zhang et al. [80] observaram que se o grafo G possui dois vértices adjacentes de grau máximo, o limite inferior para $\chi''_a(G)$ é maior em uma unidade, tal como estabelecido na proposição a seguir.

Proposição 2.7 (Zhang et al. [80]). *Se G é um grafo simples que possui dois vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 2$.*

Demonstração. Sejam G um grafo simples e $u, v \in V(G)$ dois vértices adjacentes de grau máximo. Para qualquer k -coloração total semiforte de G , tanto $C(u)$ quanto $C(v)$ possuem $\Delta(G) + 1$ elementos. Além disso, como $C(u) \neq C(v)$, pelo menos um elemento de $C(u)$ é distinto dos elementos de $C(v)$. Deste modo, temos que $k \geq \Delta(G) + 2$. \square

Dado um grafo simples G composto por $k \geq 1$ componentes conexas, não é difícil ver que o número cromático total semiforte do grafo G é o maior número cromático total semiforte de suas componentes conexas. Essa observação é explicitada na seguinte proposição:

Proposição 2.8. *Se G é um grafo simples com k componentes conexas G_1, \dots, G_k , então $\chi''_a(G) = \max\{\chi''_a(G_1), \dots, \chi''_a(G_k)\}$.* \square

Pela Proposição 2.8, ao se determinar o parâmetro $\chi''_a(G)$ para um grafo simples G arbitrário, podemos supor G conexo.

Como visto no Capítulo 1, a Conjetura da Coloração Total afirma que, para qualquer grafo simples G , $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$. Um resultado bastante usado para provar esta conjetura para algumas classes de grafos afirma que: se a Conjetura da Coloração Total é válida para todos os grafos k -regulares, então ela é válida para grafos com grau máximo igual a k [78, Capítulo 2]. A propriedade da coloração total que está por trás deste resultado é que uma coloração total de um grafo G quando restrita a algum de seus subgrafos H , permanece como uma coloração total de H , pois quaisquer dois elementos adjacentes ou incidentes de H possuem cores distintas. Desta forma, temos que $\chi''(H) \leq \chi''(G)$. Entretanto, a coloração total semiforte de um grafo G quando restrita a algum de seus subgrafos H , não necessariamente permanece como uma coloração total semiforte de H : é possível que após a remoção de uma ou mais arestas de G , dois vértices adjacentes no grafo resultante H tenham o mesmo conjunto de cores. A Figura 2.10 exhibe um exemplo em que isto acontece. Uma consequência imediata deste fato é que provar que a Conjetura da Coloração Total Semiforte é válida para grafos k -regulares é insuficiente para prová-la para todos os grafos com $\Delta(G) = k$.

Zhang et al. [80] também observaram que é possível que algum subgrafo $H \subset G$ possua $\chi''_a(H) > \chi''_a(G)$. A Figura 2.11 apresenta um grafo G e seu subgrafo H , tal que $\chi''_a(H) > \chi''_a(G)$. Baseados nesta observação, os autores propuseram o seguinte problema:

Problema 2.9. Para quais subgrafos H de G , temos $\chi''_a(H) \leq \chi''_a(G)$?

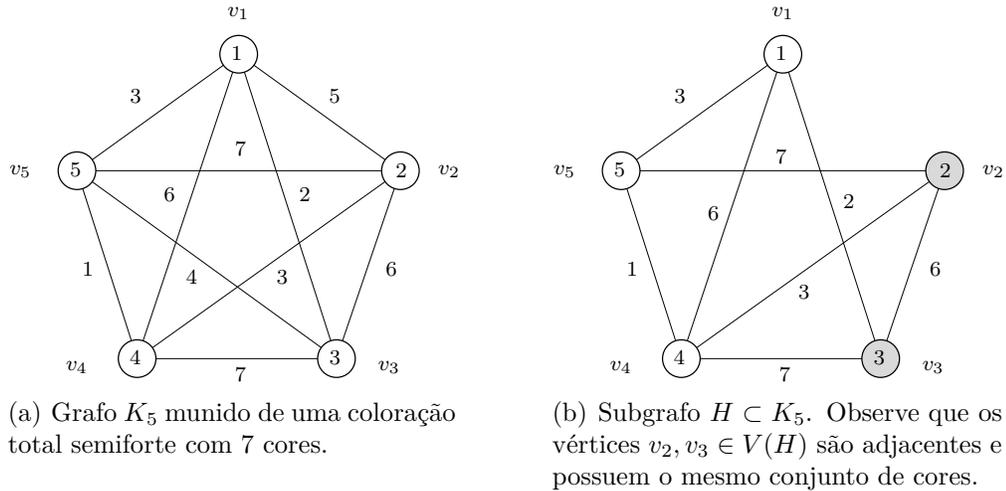


Figura 2.10: A Figura (a) exhibe uma 7-coloração total semiforte do K_5 e a Figura (b) exhibe um subgrafo $H \subset K_5$ cuja coloração total herdada do K_5 não é semiforte.

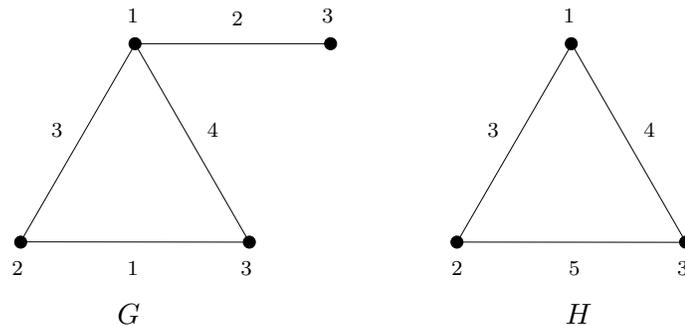


Figura 2.11: Um grafo simples e conexo G com $\Delta(G) = 3$, $\chi''_a(G) = 4$ e um subgrafo $H \subset G$ com $\chi''_a(H) = 5$.

Observe que a Figura 2.11 apresenta um exemplo em que o subgrafo H possui grau máximo estritamente menor que o grau máximo do grafo G . De fato, nós não conhecemos exemplos em que $\Delta(H) = \Delta(G)$ e $\chi''_a(H) > \chi''_a(G)$.

No mesmo artigo em que introduziram o problema da coloração total semiforte, Zhang et al. [80] também determinaram o número cromático total semiforte de algumas classes de grafos, tais como: grafos completos, ciclos, grafos bipartidos completos e árvores. Quase

todas as classes investigadas pelos autores possuem $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$, com exceção apenas dos grafos completos de ordem ímpar, que possuem $\chi_a''(K_{2n+1}) = \Delta(K_{2n+1}) + 3$. Baseados nestes resultados, os autores propuseram a seguinte conjectura:

Conjetura 2.10 (Conjetura da Coloração Total Semiforte). *Se G é um grafo simples, então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

Se a Conjetura da Coloração Total Semiforte for verdadeira, então $\Delta(G) + 1 \leq \chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$. Por outro lado, se G tiver pelo menos dois vértices adjacentes de grau máximo, então $\Delta(G) + 2 \leq \chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$. A Figura 2.12 exibe colorações totais semifortes ótimas para alguns grafos, ilustrando os diferentes valores para $\chi_a''(G)$.

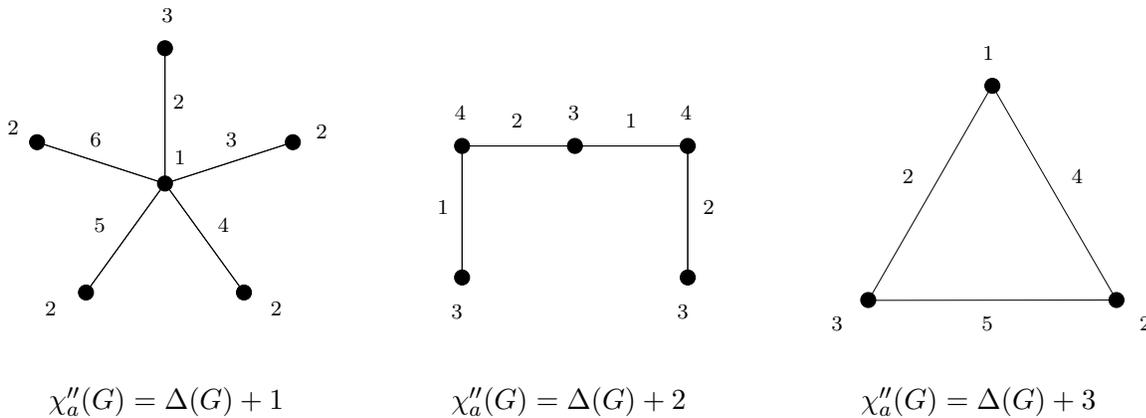


Figura 2.12: Exemplos de grafos com diferentes números cromáticos totais semifortes.

A Conjetura da Coloração Total Semiforte foi verificada para grafos com $\Delta(G) = 3$ [24, 44, 72]. Em 2008, X. Chen e Z. Zhang [25] determinaram o número cromático total semiforte dos grafos de Halin generalizados com $\Delta(G) \geq 6$ [25]. Em 2009, M. Chen e X. Guo [22] determinaram o número cromático total semiforte dos hipercubos. Em 2010, V. Pedrotti e C. P. de Mello verificaram a Conjetura da Coloração Total Semiforte para os grafos indiferença e determinaram o número cromático total semiforte para algumas de suas subclasses [58]. Y. Wang e W. Wang [74] determinaram o número cromático total semiforte dos grafos exoplanares com $\Delta(G) \geq 3$. Em 2012, D. Huang e W. Wang [42] provaram que todo grafo planar com $\Delta(G) \geq 11$ possui $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$. Ainda no mesmo ano, os autores melhoraram este resultado, mostrando que todo grafo planar com $\Delta(G) \geq 13$ possui $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$ [73] e também provaram que se um grafo planar G possui $\Delta(G) \geq 14$ e não possui vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 1$. T. Coker e K. Johannson [28] usaram um método probabilístico para estabelecer um limite superior de $\Delta(G) + c$ para $\chi_a''(G)$, onde $c > 0$ é uma constante.

Apesar da Conjetura da Coloração Total Semiforte permanecer aberta para grafos arbitrários, são conhecidos na literatura alguns limites superiores para o número cromático

total semiforte de um grafo simples G . O seguinte limite superior para $\chi''_a(G)$ pode ser obtido a partir da própria definição de coloração total:

Proposição 2.11. *Se G é um grafo simples, então $\chi''_a(G) \leq \chi(G) + \chi'(G)$.*

Demonstração. Seja ϕ uma $(\chi(G) + \chi'(G))$ -coloração total de G que usa $\chi(G)$ cores nos vértices de G e $\chi'(G)$ cores nas arestas de G de modo que as cores usadas nos vértices sejam disjuntas das cores usadas nas arestas. A coloração total ϕ é semiforte porque, para quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$, $\phi(u) \neq \phi(v)$ e estas cores aparecem somente nos vértices de G . \square

A partir da Proposição 2.11, também podem ser derivados os seguintes limites superiores:

- Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 4$ pelo Teorema das Quatro Cores [3, 4]. Deste modo, $\chi''_a(G) \leq 4 + \Delta(G) + 1 \leq \Delta(G) + 5$.
- Seja G um grafo simples não isomorfo a um grafo completo e nem a um ciclo ímpar. Aplicando o Teorema 1.2 e o Teorema 1.3 à Proposição 2.11, obtemos que $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G) + 1$.

Em 2012, Huang et al. [43] provaram que $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G)$ para qualquer grafo simples G com $\Delta(G) \geq 3$. Este é, atualmente, o melhor limite superior conhecido para $\chi''_a(G)$, considerando grafos arbitrários. A seguir, apresentamos uma nova demonstração deste resultado, mais sucinta que a anterior.

Teorema 2.12 (Huang et al. [43]). *Se G é um grafo simples com $\Delta(G) \geq 3$, então $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G)$.*

Demonstração. Seja G um grafo simples com $\Delta(G) \geq 3$. Como será provado no Teorema 2.15, temos que $\chi''_a(K_n) \leq \Delta(K_n) + 3$. Logo, podemos supor que G não é um grafo completo. Temos também que G não é um ciclo, pois $\Delta(G) \geq 3$. Pelo Teorema 1.3 e pela Proposição 2.11, obtemos que $\chi''_a(G) \leq \chi(G) + \Delta(G) + 1$. Como G não é um grafo completo e nem um ciclo, pelo Teorema 1.2, temos que $\chi(G) \leq \Delta(G)$. Assim, quando $\chi(G) < \Delta(G)$, o resultado segue. Suponha, então, $\chi(G) = \Delta(G)$.

Seja $\{V_1, \dots, V_{\Delta(G)}\}$ uma partição de $V(G)$ em conjuntos independentes. Sejam $S_E := \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$ e $S_V := \{\Delta(G) + 2, \dots, 2\Delta(G)\}$ conjuntos de cores disjuntos. Inicialmente, construímos para o grafo G uma $(2\Delta(G))$ -coloração total $\phi : V(G) \cup E(G) \rightarrow S_E \cup S_V$ tal que $\phi|_{E(G)}$ seja uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de arestas de G com as cores do conjunto S_E . Em seguida, colorimos os vértices de G do seguinte modo: cada $v \in V_i$, $1 \leq i \leq \Delta(G) - 1$, recebe a cor $(\Delta(G) + i + 1) \in S_V$. Note que os vértices de V_i não são

adjacentes entre si. Ademais, $S_E \cap S_V = \emptyset$. Para concluir a coloração total de G , atribua a cada $u \in V_{\Delta(G)}$ uma cor do conjunto $S_E \setminus C'(u)$, onde $C'(u) = \{\phi(uv) : uv \in E(G)\}$. Note que, como o número de arestas incidentes no vértice u é no máximo $\Delta(G)$, existe pelo menos uma cor no conjunto $S_E \setminus C'(u)$ para atribuir ao vértice u . Além disso, observe que todo vértice v adjacente ao vértice u foi colorido com uma cor do conjunto S_V , logo $\phi(v) \neq \phi(u)$.

Para completar a prova, mostramos que $\overline{C}(u) \neq \overline{C}(v)$ para quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$. De acordo com a definição da coloração ϕ , temos:

$$\begin{aligned} (i) \text{ para } u \in V_i, 1 \leq i \leq \Delta(G) - 1, \quad & \overline{C}(u) = (S_V \setminus \{\Delta(G) + i + 1\}) \cup (S_E \setminus C'(u)); \\ (ii) \text{ para } u \in V_{\Delta(G)}, \quad & \overline{C}(u) = S_V \cup (S_E \setminus C(u)). \end{aligned}$$

Seja $u_i u_j \in E(G)$ tal que $u_i \in V_i$ e $u_j \in V_j$. Suponha, sem perda de generalidade, que $i \neq \Delta(G)$. Pelos itens (i) e (ii) concluímos que $\phi(u_i) \in \overline{C}(u_j)$ e $\phi(u_i) \notin \overline{C}(u_i)$. Logo, $\overline{C}(u_i) \neq \overline{C}(u_j)$. \square

2.3 Famílias clássicas

Nesta seção, apresentamos alguns resultados da literatura da Coloração Total Semiforte no que concerne à determinação do número cromático total semiforte dos grafos completos, ciclos, grafos bipartidos completos e árvores.

Recordemos que os grafos completos com n vértices, K_n , são grafos simples, conexos e $(n-1)$ -regulares. Considere $V(K_n) := \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, $n \geq 1$. É bastante conhecido que todo grafo completo K_n com n ímpar e $n \geq 3$ possui $\chi'(K_n) = n$ [51]. De fato, neste grafo, nenhum emparelhamento contém mais do que $(n-1)/2$ arestas, o que implica $\chi'(K_n) \geq \frac{|E(K_n)|}{(n-1)/2}$. Logo, $\chi'(K_n) \geq n$. A seguir, definimos uma coloração de arestas π do grafo completo de ordem ímpar com exatamente n cores. Essa coloração é denominada *coloração de arestas padrão*.

Considere n ímpar e $n \geq 3$. Para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, definimos o conjunto de arestas $M_i := \{v_{i-p}v_{i+p} : 1 \leq p \leq \frac{n-1}{2}\}$, com as operações de adição e subtração nos índices, módulo n . Na Proposição 2.13, provamos que cada conjunto M_i é um emparelhamento e que $\{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}\}$ é uma partição de $E(K_n)$. Desta forma, ao colorir as arestas de cada conjunto M_i com a cor i , obtemos uma n -coloração de arestas do K_n de ordem ímpar.

Proposição 2.13. *Seja K_n um grafo completo com n ímpar e $n \geq 3$. Sejam também os conjuntos de arestas $M_i := \{v_{i-p}v_{i+p} : 1 \leq p \leq \frac{n-1}{2}\}$, para $i \in \{0, \dots, n-1\}$, com $i-p$ e $i+p$ calculados módulo n . Então, cada conjunto $M_i \subset E(K_n)$, $0 \leq i \leq n-1$, é um emparelhamento. Além disso, $\{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}\}$ é uma partição de $E(K_n)$.*

Demonstração. Seja $G := K_n$ com $V(G) := \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, $n \geq 3$ e n ímpar. Seja $M_i \subset E(G)$, com $i \in \{0, \dots, n-1\}$, tal que $M_i := \{v_{i-p}v_{i+p} : 1 \leq p \leq \frac{n-1}{2}\}$, com $i-p$ e $i+p$ calculados módulo n .

Inicialmente, provamos que M_i é um emparelhamento. Por absurdo, suponha que existam em M_i duas arestas distintas $e_1 = v_{i-l}v_{i+l}$, $e_2 = v_{i-k}v_{i+k}$ com uma extremidade em comum. Existem dois casos a considerar: ou $(i-l) \bmod n = (i-k) \bmod n$ ou $(i-l) \bmod n = (i+k) \bmod n$.

Consideremos o caso em que $(i-l) \bmod n = (i-k) \bmod n$. Por definição da operação mod temos que $i-l = \alpha n + r$ e que $i-k = \beta n + r$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Deste modo, temos que $(i-l) - \alpha n = (i-k) - \beta n$. Logo, concluímos que $(i-l) \equiv (i-k) \pmod{n}$. Uma vez que $l, k \leq \frac{n-1}{2} < n-1$, tem-se que $k = l$; uma contradição, pois as arestas e_1 e e_2 são distintas. A demonstração do segundo caso faz uso de raciocínio similar ao utilizado acima. Logo, M_i é um emparelhamento.

A seguir, provamos que quaisquer dois emparelhamentos M_i e M_j são disjuntos. Por absurdo, suponha que exista uma aresta e pertencente tanto a M_i quanto a M_j . Com relação ao emparelhamento M_i , a aresta e pode ser representada como $e = v_{i-k}v_{i+k}$ e, com relação ao emparelhamento M_j , a aresta e pode ser representada como $e = v_{j-l}v_{j+l}$, $k, l \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$. Deste modo, o conjunto dos índices dos extremos da aresta e pode ser descrito como $I = \{(i-k) \bmod n, (i+k) \bmod n\}$ ou como $J = \{(j-l) \bmod n, (j+l) \bmod n\}$. Por definição, os conjuntos I e J são iguais. Logo, temos que:

$$\begin{aligned} (i-k) \bmod n + (i+k) \bmod n &= (j-l) \bmod n + (j+l) \bmod n \\ ((i-k) - \beta n) + ((i+k) - \alpha n) &= ((j-l) - \gamma n) + ((j+l) - \lambda n), \text{ com } \beta, \alpha, \gamma, \lambda \in \mathbb{Z} \\ 2i - (\alpha + \beta)n &= 2j - (\gamma + \lambda)n \\ 2(i-j) &= (\alpha + \beta - \gamma - \lambda)n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Concluímos que $2(i-j)$ é divisível por n . Como n é ímpar e $i, j \leq n-1$, para que $2(i-j)$ seja divisível por n devemos ter $i = j$, o que é uma contradição. Portanto, $M_i \cap M_j = \emptyset$.

Para finalizar a demonstração do teorema, resta provar que $\cup_{i=0}^{n-1} M_i = E(G)$. Pela definição de M_i , $|M_i| = \frac{n-1}{2}$, para $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Logo, temos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} |M_i| = \frac{n(n-1)}{2} = |E(G)|.$$

Este resultado, somado ao fato de que quaisquer dois emparelhamentos M_i e M_j são disjuntos, implica que $\cup_{i=0}^{n-1} M_i = E(G)$. \square

A Figura 2.13(a) apresenta um K_5 munido da sua 5-coloração de arestas padrão. Já a Figura 2.13(b) exhibe uma coloração de arestas padrão do K_6 ilustrando o caso de ordem par, descrito a seguir.

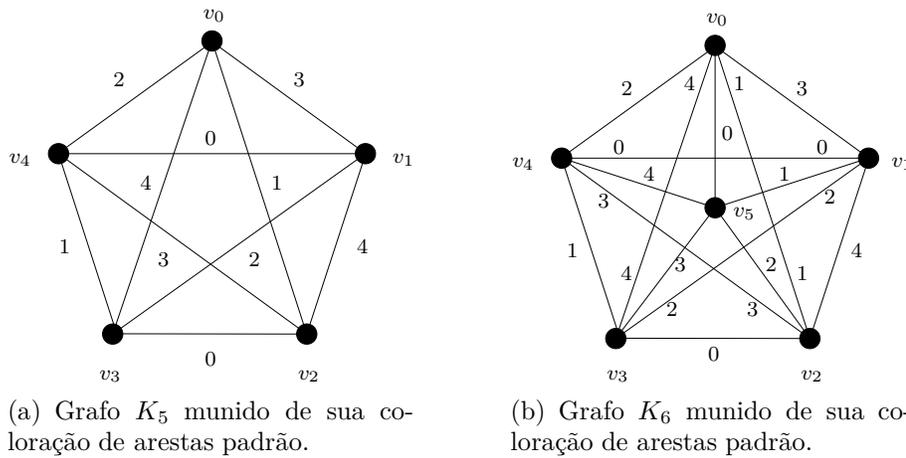


Figura 2.13: Coloração de arestas padrão de dois grafos completos.

É bastante conhecido que todo grafo completo K_n com n par possui $\chi'(K_n) = n-1$ [51]. A *coloração de arestas padrão* do K_n de ordem par é obtida a partir da coloração de arestas padrão do K_{n-1} , do seguinte modo: inicialmente, construímos uma $(n-1)$ -coloração de arestas padrão para o grafo $K_n \setminus v_{n-1}$. Por definição, a cor i está ausente no vértice v_i , para $0 \leq i \leq n-2$. Deste modo, para $0 \leq i \leq n-2$, é suficiente colorir a aresta $v_i v_{n-1}$ com a cor i .

Em 2005, Zhang et al. [80] determinaram o número cromático total semiforte dos grafos completos. Uma demonstração mais concisa do mesmo resultado foi apresentada por A. Gyárfás e J. Hulgán [44] e será apresentada no Teorema 2.15. O Lema 2.14 a seguir apresenta uma propriedade geral sobre a coloração total semiforte dos grafos completos de ordem par que será utilizada no Teorema 2.15.

Lema 2.14. *Seja π uma $(n+1)$ -coloração total semiforte de um grafo completo K_n , com $n \geq 2$. Então, n é par e existe uma cor que induz um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Seja K_n um grafo completo, com $n \geq 2$, munido de uma $(n+1)$ -coloração total semiforte. Por definição da coloração total semiforte, todos os vértices do K_n devem receber cores distintas. Logo, existe uma cor i que colore apenas arestas do K_n . Observe que a cor i deve ocorrer em todo vértice do K_n , pois se este não for o caso, haverá dois vértices $u, v \in V(K_n)$ tais que $C(u) = C(v)$. No entanto, quando $n \equiv 1 \pmod{2}$, isto é impossível, considerando que existe um número ímpar de vértices. Portanto, n é par. Como visto acima, existe uma cor que induz um emparelhamento perfeito. \square

Teorema 2.15 (Zhang et al. [80], Gyárfás e Hulgán [44]). *Para $n \geq 2$,*

$$\chi_a''(K_n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \text{ é par;} \\ n+2, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. Inicialmente, note que $\chi''_a(K_2) = 3$. Considere, então, n um inteiro positivo maior ou igual a 2. Uma coloração total semiforte ótima para os grafos completos K_{2n-1} e K_{2n} pode ser obtida a partir da coloração de arestas padrão do K_{2n+1} , como descrito a seguir.

Primeiramente, atribua uma coloração de arestas padrão ao grafo K_{2n+1} . Sabemos que, para todo vértice $v_i \in V(K_{2n+1})$ com $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$, a cor i não ocorre nas arestas incidentes em v_i . Logo, colorimos cada vértice v_i com a cor i , obtendo assim uma $(2n + 1)$ -coloração total do grafo K_{2n+1} . Note que todo vértice do grafo K_{2n+1} possui o mesmo conjunto de cores.

Observe que, se removermos um vértice qualquer do grafo K_{2n+1} , obtemos um grafo K_{2n} munido de uma $(2n + 1)$ -coloração total. Seja v_i o vértice removido do grafo K_{2n+1} . Observe que todas as arestas incidentes em v_i possuíam cores distintas e que v_i era adjacente a todos os demais vértices do K_{2n+1} . Logo, como todo vértice do grafo K_{2n+1} possuía o mesmo conjunto de cores, após a remoção de v_i , em cada vértice restante falta exatamente uma cor e estas são distintas entre si. Portanto, a coloração assim obtida para o grafo K_{2n} é uma coloração total semiforte com $2n + 1$ cores.

Afirmamos que se removermos um segundo vértice, obtemos uma coloração total semiforte do K_{2n-1} com $2n + 1$ cores. Isso é verdade pelo seguinte fato: dado um K_{2n+1} , munido da coloração total definida acima, este grafo não possui subgrafo isomorfo a um ciclo de tamanho quatro, cujas arestas sejam coloridas com apenas duas cores. Esta condição é suficiente para a existência da coloração total semiforte. Note que se houver dois vértices do K_{2n-1} com o mesmo conjunto de cores, então as duas arestas removidas destes vértices possuem a mesma cor, o que implica na existência do C_4 supracitado.

A seguir, provamos que não existe um ciclo de tamanho quatro no grafo K_{2n+1} com arestas coloridas com somente duas cores. Por contradição, suponha que exista um C_4 no grafo K_{2n+1} com arestas coloridas com as cores a e b . Pela definição da coloração de arestas padrão, o conjunto de arestas que recebe uma dada cor c é dado por $M_c = \{v_{c-p}v_{c+p} : 1 \leq p \leq n\}$, com $c - p$ e $c + p$ calculados módulo $2n + 1$. Logo, o conjunto dos índices dos vértices do C_4 pode ser descrito como $A = \{(a-i) \bmod (2n + 1), (a+i) \bmod (2n + 1), (a-j) \bmod (2n + 1), (a+j) \bmod (2n + 1)\}$ ou como $B = \{(b-k) \bmod (2n + 1), (b+k) \bmod (2n + 1), (b-l) \bmod (2n + 1), (b+l) \bmod (2n + 1)\}$, para $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Por definição, os conjuntos A e B são iguais. Logo, temos:

$$\sum_{x \in A} x = \sum_{y \in B} y$$

$$4a - \gamma(2n + 1) = 4b - \beta(2n + 1), \text{ com } \gamma, \beta \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

Pela equivalência 2.2, temos que $4(a - b)$ é divisível por $2n + 1$. Como $a, b \leq 2n$, temos que $a = b$, uma contradição. Logo, não existe um C_4 no grafo K_{2n+1} com arestas coloridas com somente duas cores.

Concluimos a demonstração observando que, pelo Lema 2.14, não existe uma $2n$ -coloração total semiforte do K_{2n-1} . \square

A seguir, definimos uma $\chi''_a(K_n)$ -coloração total semiforte π dos grafos completos, denominada *Coloração Total Semiforte Canônica do K_n* . A demonstração de que a coloração π é uma coloração total semiforte é decorrente de um conjunto de lemas e corolários exibidos a seguir e consolidados no Teorema 2.21.

Seja $V(K_n) := \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ e seja k o total de cores usadas pela coloração total semiforte π . Inicialmente, definimos o valor de k : se n é par, então $k := n + 1$; se n é ímpar, então $k := n + 2$. Agora, atribuímos uma coloração aos vértices do K_n tal que, para todo $v_i \in V(K_n)$, $\pi(v_i) := i$. Para finalizar a coloração π , atribuímos uma coloração às arestas do K_n da seguinte maneira: para cada aresta $v_i v_j \in E(K_n)$, se $i + j$ é par, então $\pi(v_i v_j) := \frac{i+j}{2}$; caso contrário $\pi(v_i v_j) := \frac{i+j+k}{2} \bmod k$. A Figura 2.14 exhibe as colorações totais semifortes canônicas do K_5 e do K_6 .

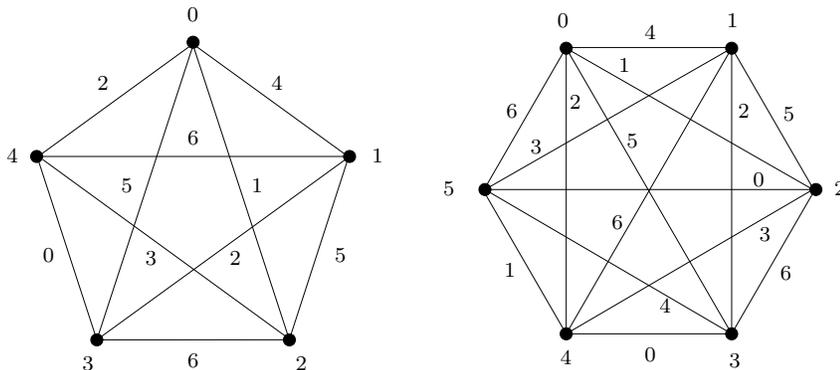


Figura 2.14: Colorações totais semifortes canônicas do K_5 e do K_6 , ambas com sete cores.

Lema 2.16. *A coloração π é uma coloração total do K_n , com $n \geq 2$.*

Demonstração. Seja $G := K_n$ um grafo completo com $n \geq 2$ munido da coloração π . Essa coloração usa $k := n + 1$ cores, se n é par, ou $k := n + 2$ cores, se n é ímpar. Inicialmente, observe que a atribuição de cores aos vértices de G é uma coloração de vértices, pois cada vértice recebe uma cor distinta. Precisamos, então, mostrar que a atribuição de cores às arestas de G é uma coloração de arestas e que cada vértice de G possui cor diferente das cores de suas arestas incidentes.

Considere um vértice v_i , colorido com a cor i , e sejam $v_i v_j, v_i v_p \in E(G)$ duas de suas arestas incidentes. Observe que $j \neq p$ e que $j, p \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{i\}$. Inicialmente, queremos provar que $\pi(v_i v_j) \neq \pi(v_i v_p)$. Por contradição, suponha que $\pi(v_i v_j) = \pi(v_i v_p)$. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: $j \equiv p \pmod{2}$.

Neste caso, se $i + j$ e $i + p$ forem números pares, temos que $\frac{i+j}{2} = \frac{i+p}{2}$; caso contrário, temos que $\frac{i+j+k}{2} \bmod k = \frac{i+p+k}{2} \bmod k$. Em ambos os casos, obtemos que $j = p$, uma contradição.

Caso 2: $j \not\equiv p \pmod{2}$.

Sem perda de generalidade, seja $i + j \equiv 0 \pmod{2}$ e $i + p \equiv 1 \pmod{2}$. Como $\pi(v_i v_j) = \pi(v_i v_p)$, pela definição da coloração π , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{i+j}{2} &= \frac{i+p+k}{2} \bmod k \\ \frac{i+j}{2} &= \frac{i+p+k}{2} + \alpha k, \text{ com } \alpha \in \mathbb{Z} \\ (2\alpha + 1)k &= j - p \end{aligned}$$

Logo, obtemos que $j - p$ é múltiplo de k . Como $j, p < k$ e $k > 0$, para que $j - p$ seja múltiplo de k , devemos ter $p = j$, uma contradição. Logo, para quaisquer duas arestas adjacentes $v_i v_j$ e $v_i v_p$, temos que $\pi(v_i v_j) \neq \pi(v_i v_p)$.

Agora, provamos que as arestas incidentes no vértice v_i possuem cores distintas da cor i . Considere uma aresta $v_i v_j \in E(G)$. Primeiramente, suponha $i + j$ par. Neste caso, a cor i seria obtida apenas se o vértice j fosse colorido com a cor i , o que é impossível. Agora, suponha $i + j$ ímpar. Neste caso, para que a cor i seja atribuída a aresta $v_i v_j$, devemos ter

$$\begin{aligned} \frac{i+j+k}{2} \bmod k &= i \\ \frac{i+j+k}{2} + \alpha k &= i, \alpha \in \mathbb{Z} \\ (2\alpha + 1)k &= i - j \end{aligned}$$

Logo, obtemos que $i - j$ é um múltiplo de k . Como $i, j < k$ e $k > 0$, então para que $i - j$ seja um múltiplo de k , devemos ter $i = j$, uma contradição, completando a demonstração. \square

Lema 2.17. *Seja $G := K_n$ um grafo completo com número par de vértices, munido da coloração total π . Então, para cada vértice v_i com i par, $\overline{C}_\pi(v_i) = \{\frac{i+n}{2}\}$; e para cada vértice v_i com i ímpar, $\overline{C}_\pi(v_i) = \{\frac{i-1}{2}\}$.*

Demonstração. Seja $G := K_n$ com $V(G) := \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Quando n é par, a coloração π usa um total de $n + 1$ cores no conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$. No grafo G munido da coloração π , não existe vértice colorido com a cor n . Portanto, em um vértice colorido com a cor i não ocorre a cor que teria a aresta $v_i v_n$. Deste modo, se i é ímpar, então $i + n$ é ímpar. Logo, a cor que não ocorre em v_i é $\overline{C}(v_i) = \{\frac{i+n+(n+1)}{2} \bmod (n+1)\} = \{\frac{i-1}{2}\}$. Agora, se i é par, então $i + n$ é par. Logo, $\overline{C}(v_i) = \{\frac{i+n}{2}\}$. \square

Corolário 2.18. *Seja $G := K_n$ um grafo completo com número par de vértices, munido da coloração total π . Então, para qualquer aresta $v_i v_j \in E(G)$, temos $\overline{C}_\pi(v_i) \neq \overline{C}_\pi(v_j)$.*

Demonstração. Por absurdo, suponha que exista $v_i v_j \in E(G)$ tal que $\overline{C}(v_i) = \overline{C}(v_j)$. Temos dois casos a considerar: $i \equiv j \pmod{2}$ e $i \not\equiv j \pmod{2}$. Inicialmente, considere $i \not\equiv j \pmod{2}$. Pelo Lema 2.17, temos que $\frac{i+n}{2} = \frac{j-1}{2}$, o que implica que $n+1 = j-i \leq n-1$, uma contradição. Agora, considere $i \equiv j \pmod{2}$. Pelo Lema 2.17, temos $\frac{i+n}{2} = \frac{j+n}{2}$ ou $\frac{i-1}{2} = \frac{j-1}{2}$; em ambos os casos obtemos $i = j$, uma contradição. Portanto, temos que $\overline{C}(v_i) \neq \overline{C}(v_j)$ para qualquer aresta $v_i v_j \in E(G)$. \square

Lema 2.19. *Seja $G := K_n$ um grafo completo de ordem ímpar, munido da coloração total π . Então, para cada vértice v_i com i par, $\overline{C}(v_i) = \{\frac{i-2}{2}, \frac{n+i+1}{2}\}$; e para cada vértice v_i com i ímpar, $\overline{C}(v_i) = \{\frac{i-1}{2}, \frac{n+i}{2}\}$.*

Demonstração. Seja $G := K_n$ um grafo completo de ordem ímpar munido da coloração total π . Neste caso, $k = n+2$. Pela definição de π , o grafo G não possui vértices coloridos com as cores n e $n+1$. Portanto, $\overline{C}(v_i)$ é composto pelas cores que teriam as arestas $v_i v_n$ e $v_i v_{n+1}$, cujos valores podem ser determinados a partir da definição da coloração π .

Considere i ímpar. Neste caso, uma das cores que faltam no vértice v_i é a cor da aresta $v_i v_{n+1}$. Essa cor é igual a

$$\frac{i + (n+1) + (n+2)}{2} \pmod{n+2} = \left[n+2 + \frac{i-1}{2} \right] \pmod{n+2} = \frac{i-1}{2}.$$

Ainda no caso em que i é ímpar, a outra cor que falta no vértice v_i é a cor da aresta $v_i v_n$. Essa cor é igual a $\frac{i+n}{2}$. Logo, quando i é ímpar, temos que $\overline{C}(v_i) = \{\frac{i-1}{2}, \frac{i+n}{2}\}$.

Agora, considere i par. Neste caso, uma das cores que faltam no vértice v_i é a cor da aresta $v_i v_{n+1}$. Essa cor é igual a $\frac{i+(n+1)}{2}$. A outra cor que falta no vértice v_i é a cor que teria a aresta $v_i v_n$. Essa cor é igual a

$$\frac{i + n + (n+2)}{2} \pmod{n+2} = \left[\frac{i-2}{2} + n+2 \right] \pmod{n+2} = \frac{i-2}{2}.$$

Logo, quando i é par, temos que $\overline{C}(v_i) = \{\frac{i-2}{2}, \frac{i+n+1}{2}\}$. \square

Corolário 2.20. *Seja $G := K_n$ um grafo completo com número ímpar de vértices, munido da coloração total π . Então, para qualquer aresta $v_i v_j \in E(G)$, temos $\overline{C}(v_i) \neq \overline{C}(v_j)$.*

Demonstração. Por absurdo, suponha que exista $v_i v_j \in E(G)$ tal que $\overline{C}(v_i) = \overline{C}(v_j)$. Temos dois casos a considerar: $i \not\equiv j \pmod{2}$ e $i \equiv j \pmod{2}$. Inicialmente, considere $i \not\equiv j \pmod{2}$. Pelo Lema 2.19, temos que $\overline{C}(v_i) = \{\frac{i-2}{2}, \frac{n+i+1}{2}\}$ e $\overline{C}(v_j) = \{\frac{j-1}{2}, \frac{n+j}{2}\}$. Analisando as combinações possíveis, temos: (i) $\frac{i-2}{2} = \frac{j-1}{2}$ e $\frac{n+i+1}{2} = \frac{n+j}{2}$; ou (ii) $\frac{i-2}{2} = \frac{n+j}{2}$ e $\frac{n+i+1}{2} = \frac{j-1}{2}$. Resolvendo as equações do item (i) obtemos $i-j = 1 = j-i$, uma

contradição; e resolvendo as equações do item (ii) obtemos que $i - j = n + 2 = j - i$, também uma contradição.

O caso em que $i \equiv j \pmod{2}$ é análogo. Portanto, para quaisquer dois vértices adjacentes $v_i, v_j \in V(G)$, $\overline{C}(v_i) \neq \overline{C}(v_j)$. \square

Teorema 2.21. *A coloração π é uma $\chi''_a(K_n)$ -coloração total semiforte do K_n , $n \geq 2$.*

Demonstração. Consequência do Lema 2.16, do Corolário 2.18 e do Corolário 2.20. \square

A seguir, tratamos da coloração total semiforte dos ciclos. Observe que $C_3 \cong K_3$. Logo, pelo Teorema 2.15, temos que $\chi''_a(C_3) = 5$. De fato, C_3 é o único ciclo que necessita de pelo menos cinco cores para admitir uma coloração total semiforte. O Teorema 2.22 determina o número cromático total semiforte dos demais ciclos e foi originalmente provado por Zhang et al. [80]. Nesta dissertação, apresentamos a demonstração mais sucinta de J. Hulgan [44].

Teorema 2.22 (Zhang et al. [80], Hulgan [44]). *Para todo $n \geq 4$, $\chi''_a(C_n) = 4$.*

Demonstração. Seja C_n um ciclo com $V(C_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Suponha n par. Definimos um mapeamento $\pi : V(C_n) \cup E(C_n) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ tal que: (i) para cada vértice $v_i \in V(C_n)$, $\pi(v_i) = 1$ se i é par, e $\pi(v_i) = 2$ se i é ímpar; (ii) para cada aresta $v_i v_{i+1} \in E(C_n)$, $\pi(v_i v_{i+1}) = 3$ se i é par, e $\pi(v_i v_{i+1}) = 4$ se i é ímpar. Observe que π é uma coloração total pois as cores usadas nos vértices são disjuntas das cores usadas nas arestas. Além disso, quaisquer dois vértices adjacentes e quaisquer duas arestas adjacentes possuem cores distintas, pois a construção de π é baseada na paridade dos índices. A coloração total π é também semiforte pois, para qualquer aresta $v_i v_j \in E(C_n)$, temos $\overline{C}(v_i) = \{1\} \neq \{2\} = \overline{C}(v_j)$.

Agora, suponha n ímpar. Inicialmente, colorimos o subgrafo $H := G[\{v_0, v_1, \dots, v_{n-2}\}]$ com a mesma coloração π do caso anterior. Em seguida, estendemos a coloração π colorindo os elementos restantes do grafo C_n da seguinte forma: v_{n-1} recebe a cor 4, $v_{n-2}v_{n-1}$ recebe a cor 1 e $v_{n-1}v_0$ recebe a cor 2. A coloração do subgrafo H é uma coloração total semiforte pela mesma argumentação do caso anterior, com a ressalva de que, como os vértices v_0 e v_{n-2} possuem grau 1 no grafo H e como seus vizinhos possuem grau 2, os vértices v_0 e v_{n-2} distinguem-se dos seus vizinhos pela cardinalidade dos seus conjuntos de cores. Observe também que a cor da aresta $v_{n-1}v_0$ é distinta da cor da aresta v_0v_1 e a cor da aresta $v_{n-2}v_{n-1}$ é distinta da cor da aresta $v_{n-3}v_{n-2}$. Já o vértice v_{n-1} distingue-se dos seus vizinhos porque $\pi(v_{n-1}) = 4$ e a cor 4 não ocorre em v_0 nem em v_{n-2} . Note também que $\overline{C}(v_0) = \{4\} \neq \{1\} = \overline{C}(v_1)$ e $\overline{C}(v_{n-2}) = \{4\} \neq \{2\} = \overline{C}(v_{n-3})$. Portanto, π é uma 4-coloração total semiforte dos ciclos com pelo menos quatro vértices. \square

Em 2008, Chen [24] observou que qualquer grafo bipartido possui uma coloração total semiforte com no máximo $\Delta(G) + 2$ cores. Zhang et al. [80] determinaram o número cromático total semiforte dos grafos bipartidos completos e das árvores. A seguir, apresentamos estes resultados.

Proposição 2.23 (Chen [24]). *Se G é um grafo simples bipartido, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.11, temos que $\chi''_a(G) \leq \chi(G) + \chi'(G)$. Como G é bipartido, temos que $\chi(G) = 2$ e, pelo Teorema de König, $\chi'(G) = \Delta(G)$. Logo, $\chi''_a(G) \leq \chi(G) + \chi'(G) = \Delta(G) + 2$. \square

Corolário 2.24. *Se G é um grafo bipartido k -regular, então $\chi''_a(G) = k + 2$.*

Demonstração. Consequência imediata da Proposição 2.7 e da Proposição 2.23. \square

Corolário 2.25. *Seja $G \not\cong K_3$ um grafo simples com $\Delta(G) = 2$. Então $\chi''_a(G) \leq 4$.*

Demonstração. Consequência imediata da Proposição 2.8, do Teorema 2.22 e da Proposição 2.23. \square

Teorema 2.26 (Zhang et al. [80]). *Seja $G := K_{r,s}$ um grafo bipartido completo, com $1 \leq r \leq s$. Então,*

$$\chi''_a(G) = \begin{cases} s + 1, & \text{se } s > r; \\ s + 2, & \text{se } s = r. \end{cases}$$

Demonstração. Seja G um grafo bipartido completo com bipartição $\{V_1, V_2\}$, tal que $V_1 = \{x_1, \dots, x_r\}$ e $V_2 = \{y_1, \dots, y_s\}$. Suponha $s = r$. Neste caso, G é um grafo bipartido s -regular. Logo, pelo Corolário 2.24, $\chi''_a(G) = s + 2$.

Agora, suponha $s > r$. Neste caso, qualquer coloração total de G é também uma coloração total semiforte. De fato, como quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$ possuem conjuntos de cores de cardinalidades distintas, temos $C(u) \neq C(v)$.

A seguir, definimos uma coloração total ϕ do grafo G com as cores $1, 2, \dots, s + 1$. Pelo Teorema 1.4, $\chi'(G) \leq \Delta(G) = s$. Então, seja $\phi|_{E(G)}$ uma s -coloração de arestas de G com as cores $1, 2, \dots, s$. Colorimos os vértices de G da seguinte maneira: se $u \in V_1$, então $\phi(u) := s + 1$; se $u \in V_2$, então u recebe uma cor do conjunto $\{1, \dots, s\} \setminus C'(u)$. Lembre que $C'(u) = \{\phi(uv) : uv \in E(G)\}$. Observe que, como $d(u) = r < s$, existe pelo menos uma cor no conjunto $\{1, \dots, s\} \setminus C'(u)$.

A seguir, provamos que ϕ é uma coloração total. Inicialmente, observe que quaisquer duas arestas adjacentes possuem cores distintas pois $\phi|_{E(G)}$ é uma coloração de arestas de G com as cores $1, 2, \dots, s$. Como todos os vértices da parte V_1 recebem a cor $s + 1$ e todos os vértices da parte V_2 recebem uma cor do conjunto $\{1, 2, \dots, s\}$, quaisquer dois

vértices adjacentes possuem cores distintas. Além disso, os vértices da parte V_1 possuem a cor $s + 1$ que é distinta das cores de suas arestas incidentes. Por definição da coloração ϕ , para todo vértice $u \in V_2$, $\phi(u) \in \{1, 2, \dots, s\}$ e $\phi(u) \notin C'(u)$. Logo, os vértices da parte V_2 possuem cores distintas das cores de suas arestas incidentes. Portanto, ϕ é uma coloração total de G . \square

Agora, consideramos o problema da coloração total semiforte em árvores. É bem conhecido que uma árvore é também um grafo bipartido. Se uma árvore G possui pelo menos dois vértices adjacentes de grau máximo, então, pela Proposição 2.7 e pela Proposição 2.23, temos que $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$. Zhang et al. [80] provaram que as árvores que não possuem vértices adjacentes de grau máximo possuem $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 1$. No Teorema 2.28 apresentamos uma nova demonstração deste resultado, que usa o Lema 2.27 como resultado auxiliar. Lembre que $N_k(v)$ é o conjunto formado pelos vizinhos de v que possuem grau igual a k .

Lema 2.27. *Seja G uma árvore com pelo menos três vértices e seja $S(G) := \{u \in V(G) : d(u) \geq 2 \text{ e } |N_1(u)| \geq d(u) - 1\}$. Então, G é uma estrela se e somente se $|S(G)| = 1$.*

Demonstração. Seja G uma árvore com pelo menos três vértices. Se G é uma estrela, então $|S(G)| = 1$ e o resultado segue. Suponha, então, que G não seja uma estrela. Isto implica que existem pelo menos dois vértices adjacentes que não são folhas.

Seja P um caminho maximal em G composto apenas por vértices que não são folhas. Tal caminho possui pelo menos uma aresta porque existem vértices de grau pelo menos dois que são adjacentes. Vamos mostrar que os extremos deste caminho pertencem a $S(G)$. Seja u um dos extremos de P . Seja $w \in N(u) \cap V(P)$. Então, $d(w) \geq 2$. Observe que $N(u) \setminus \{w\} \neq \emptyset$, pois $d(u) \geq 2$. Seja $v \in N(u) \setminus \{w\}$. O vértice $v \notin V(P)$ pois $v \neq w$ e G é uma árvore. Como P é maximal, concluímos que $d(v) = 1$. Assim, $|N_1(u)| = d(u) - 1$. Consequentemente, $u \in S(G)$. A demonstração de que o outro extremo de P pertence a $S(G)$ é análoga. Logo, $|S(G)| \geq 2$ e o resultado segue. \square

Teorema 2.28 (Zhang et al. [80]). *Seja G uma árvore com pelo menos três vértices. Se G não possui vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 1$.*

Demonstração. Seja G uma árvore com pelo menos três vértices. A demonstração é por indução no número n de vértices da árvore.

Se $n = 3$, então $G \cong P_3 \cong K_{1,2}$ e o resultado segue pelo Teorema 2.26. Suponha, então, que G seja uma árvore com $n > 3$ vértices.

Seja $S(G) := \{u \in V(G) : d(u) \geq 2 \text{ e } |N_1(u)| \geq d(u) - 1\}$. Pelo Lema 2.27, se $|S(G)| = 1$, então G é uma estrela, isto é, $G \cong K_{1,n-1}$. Logo, o resultado segue pelo Teorema 2.26. Podemos supor que $|S(G)| \geq 2$.

Seja $u \in S(G)$, tal que $d(u) = \min\{d(x) : x \in S(G)\}$. Pela definição do conjunto $S(G)$, o vértice u possui pelo menos dois vizinhos e pelo menos um deles é um vértice folha. Seja v esse vértice. Logo, $d(v) = 1$. Como $|S(G)| \geq 2$, pelo Lema 2.27, G não é uma estrela. Logo, o vértice u possui pelo menos um vizinho w tal que $d(w) \geq 2$. Seja $H := G \setminus v$. Temos que $|V(H)| = n - 1$.

A seguir, provamos dois fatos: que H não possui vértices adjacentes de grau máximo e que $\Delta(H) = \Delta(G)$. Temos dois casos a considerar. O primeiro caso é quando o vértice u não é um vértice de grau máximo em G . Neste caso, os vértices de grau máximo em G permanecem com o mesmo grau em H . Logo, $\Delta(H) = \Delta(G)$. Ademais, como G não possui vértices adjacentes de grau máximo, temos que H também não possui vértices adjacentes de grau máximo. O segundo caso é quando o vértice u é um vértice de grau máximo em G . Pela escolha de u e pelo fato de que $|S(G)| \geq 2$, temos que todos os vértices pertencentes a $S(G) \setminus \{u\}$ possuem grau máximo em G e, portanto, em H também. Pela definição de H e pelo fato de que G não possui vértices adjacentes de grau máximo, temos que $\Delta(H) = \Delta(G)$ e que H não possui vértices adjacentes de grau máximo.

Pela hipótese de indução, existe uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total semiforte ϕ' da árvore H . A seguir, estendemos a coloração ϕ' do grafo H para uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total semiforte ϕ da árvore G . Para todo elemento $x \in (V(G) \cup E(G)) \setminus \{v, uv\}$: $\phi(x) := \phi'(x)$. Deste modo, restam apenas dois elementos para colorir: o vértice v e a aresta uv . Primeiramente, colorimos o vértice v com a cor da aresta uv , isto é, $\phi(v) := \phi(uv)$. Desta forma, $\phi(v) \neq \phi(u)$, pois $\phi(u) \neq \phi(uv)$. Logo, quaisquer dois vértices adjacentes possuem cores distintas. Agora, resta colorir a aresta uv . Existem dois casos a considerar.

Caso 1: $d_H(w) = d_H(u) + 1$.

Neste caso, colorimos a aresta uv da seguinte forma: se $C_{\phi'}(u) \subset C_{\phi'}(w)$, então a aresta uv recebe uma cor do conjunto $\{1, \dots, \Delta(G) + 1\} \setminus C_{\phi'}(w)$. Se $C_{\phi'}(u) \not\subset C_{\phi'}(w)$, então a aresta uv recebe uma cor do conjunto $\{1, \dots, \Delta(G) + 1\} \setminus C_{\phi'}(u)$. Observe que, em ambos os casos, a cor da aresta uv é distinta da cor de todas as suas arestas adjacentes e a cor do vértice u é distinta da cor da aresta uv . Como $\phi(v) = \phi(uv)$, então $\phi(v) \neq \phi(uv)$. Deste modo, quaisquer vértices e arestas incidentes possuem cores distintas. Logo, ϕ é uma coloração total.

Agora, provamos que a coloração total ϕ é também semiforte. Como os vértices u e v possuem graus distintos, temos que $C_{\phi}(u) \neq C_{\phi}(v)$. Resta analisar os vértices u e w . No caso em que $C_{\phi'}(u) \not\subset C_{\phi'}(w)$, os vértices u e w possuem conjuntos de cores distintos porque $C_{\phi'}(u)$ possui uma cor que não ocorre em w . Já no caso em que $C_{\phi'}(u) \subset C_{\phi'}(w)$, a escolha da cor $\phi(uv)$ como uma cor que não ocorre no vértice w , garante que $C_{\phi}(u) \neq C_{\phi}(w)$. Portanto, a coloração total ϕ é também semiforte.

Caso 2: $d_H(w) \neq d_H(u) + 1$.

Neste caso a aresta uv recebe uma cor $c \in \{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\} \setminus C_{\phi'}(u)$. De acordo

com a escolha da cor c , temos que $\phi(uv) \neq \phi(uw) = \phi(v)$ e $\phi(uv) \neq \phi(u)$. Ademais, a cor da aresta uv é distinta da cor de todas as demais arestas incidentes em u . Logo, ϕ é uma coloração total. Resta mostrar que a coloração total ϕ é também semiforte. Este fato é consequência de que ϕ' é semiforte, $d_G(u) \neq d_G(v)$ e $d_G(u) \neq d_G(w)$. \square

Como citado no Capítulo 1, McDiarmid e Sánchez-Arroyo [6] mostraram que determinar o número cromático total de grafos bipartidos k -regulares, para cada k fixo, é um problema \mathcal{NP} -difícil. Por outro lado, o número cromático total semiforte desta família de grafos está determinado pelo Corolário 2.24. Mais que isso, se um grafo simples bipartido G possui dois vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$. Todavia, para grafos bipartidos que não possuem vértices adjacentes de grau máximo, o número cromático total semiforte está determinado para poucas subclasses. Por exemplo, pelos Teoremas 2.26 e 2.28, sabemos que árvores e grafos bipartidos completos que não possuem vértices adjacentes de grau máximo, possuem $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 1$. Ademais, no Capítulo 3, provamos que todos os grafos simples com $\Delta(G) = 3$ que não possuem vértices adjacentes de grau máximo também possuem $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 1$. Observe que este caso inclui os grafos bipartidos com $\Delta(G) = 3$ que não possuem vértices adjacentes de grau máximo. Portanto, baseados nestes exemplos, propomos a seguinte conjectura:

Conjetura 2.29. *Se G é um grafo bipartido que não possui vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi_a''(G) = \chi''(G) = \Delta(G) + 1$.*

2.4 Grafos com $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 3$

A Conjetura da Coloração Total Semiforte estabelece que $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$ para qualquer grafo simples G . Todavia, são conhecidas poucas famílias de grafos com número cromático total semiforte que atinge esse limite. Por exemplo, o Teorema 2.15 demonstra que os grafos completos de ordem ímpar possuem $\chi_a''(K_{2n+1}) = \Delta(K_{2n+1}) + 3$. Nesta seção, apresentamos outras três famílias de grafos que possuem $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 3$.

Por volta de 2004, Chen [23] investigou a coloração total semiforte dos grafos completos de ordem ímpar e verificou que, para quase todos estes grafos, o subgrafo G obtido a partir do K_{2n+1} pela remoção das arestas de um P_3 ou de um K_3 possui $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 3$. Mais especificamente, Chen provou que, para $n \geq 7$, $\chi_a''(K_{2n+1} \setminus E(P_3)) = \Delta(K_{2n+1} \setminus E(P_3)) + 3$; e para $n \geq 9$, $\chi_a''(K_{2n+1} \setminus E(K_3)) = \Delta(K_{2n+1} \setminus E(K_3)) + 3$. Este resultado é apresentado no Teorema 2.30.

Chen [23] também provou que, para $2 \leq n \leq 6$, $\chi_a''(K_{2n+1} \setminus E(P_3)) = \Delta(K_{2n+1} \setminus E(P_3)) + 2 = 2n + 2$; e, para $2 \leq n \leq 6$, $\chi_a''(K_{2n+1} \setminus E(K_3)) = \Delta(K_{2n+1} \setminus E(K_3)) + 2 = 2n + 2$. Para cada um destes grafos, o autor construiu uma $(2n + 2)$ -coloração total semiforte. O autor também conjecturou que, para $n \in \{7, 8\}$, o grafo $K_{2n+1} \setminus E(K_3)$ possui número cromático

total semiforte igual a $2n+2$. As $(2n+2)$ -colorações totais semifortes não são apresentadas nessa dissertação. Como exemplo, a Figura 2.15 exibe uma 6-coloração total semiforte do $K_5 \setminus E(P_3)$ e uma 8-coloração total semiforte do $K_7 \setminus E(P_3)$.

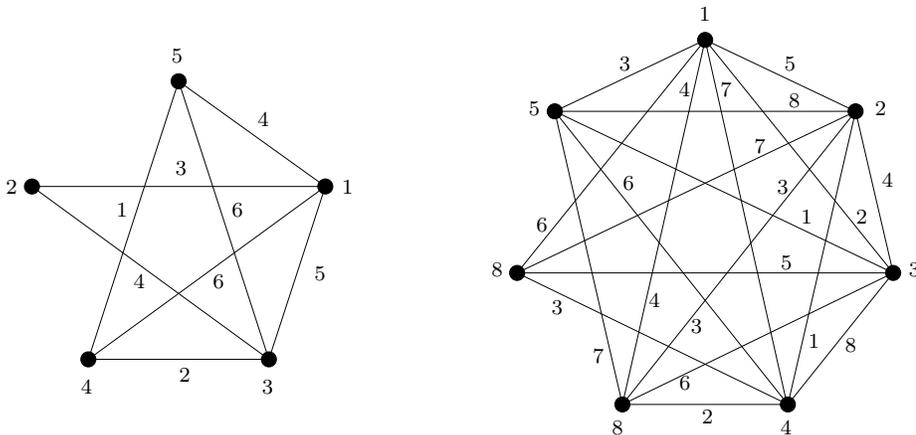


Figura 2.15: Colorações totais semiforte ótimas do $K_5 \setminus E(P_3)$ e do $K_7 \setminus E(P_3)$.

Teorema 2.30 (Chen [23]). *Para $n \geq 7$ e $P_3 \subset K_{2n+1}$, tem-se que $\chi''_a(K_{2n+1} \setminus E(P_3)) = 2n+3$. Adicionalmente, para $n \geq 9$ e $K_3 \subset K_{2n+1}$, tem-se que $\chi''_a(K_{2n+1} \setminus E(K_3)) = 2n+3$.*

Demonstração. Considere um grafo completo K_{2n+1} com conjunto de vértices $V(K_{2n+1}) := \{v_0, \dots, v_{2n}\}$. Considere um caminho de ordem três e um grafo completo de ordem três, contidos no K_{2n+1} , tais que $P_3 := v_{2n-2}v_{2n-1}v_{2n}$ e $V(K_3) := \{v_{2n-2}, v_{2n-1}, v_{2n}\}$.

Sejam $G_1 := K_{2n+1} \setminus E(P_3)$ e $G_2 := K_{2n+1} \setminus E(K_3)$. Note que, tanto G_1 quanto G_2 possuem pelo menos dois vértices adjacentes de grau igual a $2n$. Logo, $\chi''_a(G_i) \geq 2n+2$, para $1 \leq i \leq 2$.

Inicialmente, provamos que G_i não possui coloração total semiforte com $2n+2$ cores. Por contradição, suponha que G_i possua uma $(2n+2)$ -coloração total semiforte ϕ com cores do conjunto $\mathcal{C} := \{1, \dots, 2n+2\}$. Seja S_p o conjunto das cores que não ocorrem em pelo menos um vértice de G_i e seja S_t o conjunto das cores que ocorrem em todos os vértices de G_i . Por definição, os conjuntos S_p e S_t são disjuntos e, sendo ϕ uma $|\mathcal{C}|$ -coloração total semiforte, temos que $S_p \cup S_t = \mathcal{C}$. Logo, $|S_p| + |S_t| = |\mathcal{C}| = 2n+2$. Essa igualdade nos levará a uma contradição.

A ideia da demonstração é determinar um limitante inferior para a cardinalidade dos conjuntos S_p e S_t . Primeiramente, determinamos um limitante inferior para $|S_p|$. Note que o subgrafo $H \subset G_i$ induzido pelo conjunto de vértices $\{v_0, \dots, v_{2n-3}\}$ é um grafo completo e que cada um desses vértices possui grau $2n$ em G_i . Como ϕ é uma coloração total semiforte de G_i que usa $2n+2$ cores, temos que em cada um dos vértices de H falta exatamente uma cor. Como os vértices v_0, \dots, v_{2n-3} possuem grau $2n$ e são dois a dois

adjacentes e ϕ é uma coloração total semiforte, concluímos que as cores que faltam nos vértices de H são distintas entre si. Logo, existem pelo menos $2n-2$ cores que não ocorrem em pelo menos um vértice de G_i . Portanto, para G_1 e G_2 , temos que $|S_p| \geq 2n - 2$.

Agora, determinamos um limitante inferior para $|S_t|$. Para cada $j, j \in \{1, \dots, 2n+2\}$, seja $E_j := \{e \in E(G_i) : \phi(e) = j\}$. Como cada E_j é um emparelhamento, $|E_j| \leq n$. Vamos mostrar que $|E_j| \geq n - 2$. Por contradição, suponha que exista algum $c \in \{1, \dots, 2n+2\}$ tal que $|E_c| \leq n-3$. Neste caso, existem no máximo $2(n-3)$ vértices incidentes em arestas de cor c . Isto implica que existem em G_i pelo menos sete vértices que não possuem arestas incidentes com esta cor. Seja $H \subset G_i$, como definido anteriormente. Existem pelo menos quatro vértices em H nos quais a cor c não ocorre em suas arestas incidentes. Observe que, como no máximo um desses vértices pode estar colorido com a cor c , pelo menos três vértices do subgrafo H possuem o mesmo conjunto de cores. Isto é uma contradição, pois ϕ é uma coloração total semiforte. Deste modo, temos que $n - 2 \leq |E_j| \leq n$.

Considerando os possíveis valores de $|E_j|$, definimos os conjuntos $C_{n-l} := \{j : |E_j| = n - l\}$, $0 \leq l \leq 2$. Ou seja, C_{n-l} é o conjunto das cores que induzem um emparelhamento de cardinalidade $n - l$ no grafo G_i . Pela definição dos conjuntos C_{n-l} , obtemos que $\{C_n, C_{n-1}, C_{n-2}\}$ é uma partição do conjunto \mathcal{C} . Deste modo,

$$|C_n| + |C_{n-1}| + |C_{n-2}| = |\mathcal{C}| = 2n + 2. \quad (2.3)$$

Por definição, o conjunto C_n é o conjunto das cores que induzem um emparelhamento de cardinalidade n em G_i . Isso implica que, para $c \in C_n$, existem exatamente $2n$ vértices incidentes em arestas de cor c . Logo, para cada cor $c \in C_n$, existe exatamente um vértice $v \in V(G_i)$ que não possui arestas incidentes de cor c , pois $|V(G_i)| = 2n + 1$.

Neste ponto, dividimos a demonstração em dois casos, de acordo com o grafo G_i considerado. Em ambos os casos, determinamos um limitante inferior para $|S_t|$ e finalizamos a demonstração de que os grafos G_1 e G_2 não admitem uma $(2n + 2)$ -coloração total semiforte.

Caso 1. Considere o grafo G_1 .

Suponha $n \geq 7$. Note que o subgrafo de G_1 induzido pelo conjunto de vértices $V(G_1) \setminus \{v_{2n-1}\}$ é um grafo completo de ordem igual a $2n$. Logo, todas as cores $\phi(v_0), \dots, \phi(v_{2n-2}), \phi(v_{2n})$ são distintas entre si. Isso implica que pelo menos $2n$ cores são utilizadas para colorir vértices de G_1 . Como $|\mathcal{C}| = 2n + 2$, existem no máximo duas cores que não colorem vértices de G_1 . Estas cores podem pertencer ao conjunto C_n . Logo, existem pelo menos $|C_n| - 2$ cores no conjunto C_n que colorem vértices de G_1 e, portanto, ocorrem em todos os vértices de G_1 . Portanto, o número de cores que ocorrem em todos os vértices de G_1 é maior ou igual a $|C_n| - 2$; ou seja, $|S_t| \geq |C_n| - 2$.

Pela definição dos conjuntos C_n, C_{n-1} e C_{n-2} , obtemos que

$$n|C_n| + (n-1)|C_{n-1}| + (n-2)|C_{n-2}| = |E(G_1)| = 2n^2 + n - 2. \quad (2.4)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.3) e (2.4), concluímos que

$$|C_n| = n + |C_{n-2}|. \quad (2.5)$$

Logo, $|S_t| \geq |C_n| - 2 = n + |C_{n-2}| - 2$. Isso implica que $(2n-2) + (n + |C_{n-2}| - 2) \leq |S_p| + |S_t| = |\mathcal{C}| = 2n + 2$. Resolvendo esta inequação, obtemos $n \leq 6 - |C_{n-2}|$. Isso contradiz o fato de que $n \geq 7$. Portanto, o grafo G_1 não possui uma $(2n+2)$ -coloração total semiforte.

Caso 2. Considere o grafo G_2 .

Suponha $n \geq 9$. O subgrafo $G_2 \setminus \{v_{2n-1}, v_{2n}\}$ é um grafo completo de ordem $2n-1$. Logo, as cores $\phi(v_0), \dots, \phi(v_{2n-2})$ são distintas entre si. Isso implica que, pelo menos $2n-1$ cores são utilizadas para colorir vértices de G_2 . Como $|\mathcal{C}| = 2n+2$, existem no máximo três cores que não colorem vértices de G_2 . Estas cores podem pertencer ao conjunto C_n . Logo, existem pelo menos $|C_n| - 3$ cores no conjunto C_n que colorem vértices de G_2 e, portanto, ocorrem em todos os vértices de G_2 . Deste modo, o número de cores que ocorrem em todos os vértices de G_2 é maior ou igual a $|C_n| - 3$; ou seja, $|S_t| \geq |C_n| - 3$.

Pela definição dos conjuntos C_n, C_{n-1} e C_{n-2} , obtemos

$$n|C_n| + (n-1)|C_{n-1}| + (n-2)|C_{n-2}| = |E(G_2)| = 2n^2 + n - 3. \quad (2.6)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.3) e (2.6), concluímos que

$$|C_n| = n + |C_{n-2}| - 1. \quad (2.7)$$

Logo, $|S_t| \geq |C_n| - 3 = n + |C_{n-2}| - 4$. Isso implica que $(2n-2) + (n + |C_{n-2}| - 4) \leq |S_p| + |S_t| = |\mathcal{C}| = 2n + 2$. Resolvendo esta inequação, obtemos $n \leq 8 - |C_{n-2}|$. Isso contradiz o fato de que $n \geq 9$. Portanto, o grafo G_2 não possui uma $(2n+2)$ -coloração total semiforte. Este caso conclui a demonstração de que os grafos G_1 e G_2 não admitem uma $(2n+2)$ -coloração total semiforte.

Agora, vamos construir uma $(2n+3)$ -coloração total semiforte para G_i . Seja π uma $(2n+3)$ -coloração total semiforte canônica do K_{2n+1} tal como definida na Seção 2.3 e seja ϕ uma restrição de π aos elementos do subgrafo G_i . Os vértices $v_0, v_1, \dots, v_{2n-3}$ são todos vértices de grau máximo em G_i e são distinguidos pela coloração total semiforte ϕ herdada do K_{2n+1} . Como o vértice v_{2n-1} possui grau $2n-2$ no grafo G_i e como todos os seus vizinhos possuem grau $2n$, então seu conjunto de cores é distinto do conjunto de cores dos seus vizinhos. Resta analisarmos os conjuntos de cores dos vértices v_{2n-2} e v_{2n} .

Primeiramente, considere o grafo G_1 . Note que v_{2n-2} e v_{2n} são os únicos vértices de G_1 que possuem grau $2n - 1$. Pelo Lemma 2.19, temos que $|\overline{C}_\pi(v_{2n-2})| = |\overline{C}_\pi(v_{2n})| = 2$ e $\overline{C}_\pi(v_{2n-2}) \cap \overline{C}_\pi(v_{2n}) = \emptyset$. Isso implica que $\overline{C}_\phi(v_{2n-2})$ possui pelo menos um elemento diferente dos elementos de $\overline{C}_\phi(v_{2n})$, e vice-versa. Deste modo, $\overline{C}_\phi(v_{2n-2}) \neq \overline{C}_\phi(v_{2n})$ e, portanto, ϕ é uma $(2n + 3)$ -coloração total semiforte de G_1 . Agora, considere o grafo G_2 . Como os vértices v_{2n-2} e v_{2n} formam um conjunto independente no grafo G_2 e como eles possuem grau distinto dos graus de todos os seus vizinhos, tem-se que os seus conjuntos de cores também são distintos dos conjuntos de cores dos seus vizinhos. Portanto, ϕ é uma $(2n + 3)$ -coloração total semiforte do subgrafo G_2 . \square

Agora, considere a família dos grafos $sP_3 \vee K_t$ formada pela junção dos grafos sP_3 e K_t , tal que sP_3 é a união disjunta de s caminhos $u_i v_i w_i$ ($1 \leq i \leq s$) e K_t é o grafo completo com t vértices, tal que $V(K_t) := \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$. Em 2008, Chen [24] provou que a Conjetura da Coloração Total Semiforte é verdadeira para todos os grafos desta família:

Teorema 2.31 (Chen [24]). *Sejam s e t inteiros positivos e seja $G := sP_3 \vee K_t$. Então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

Demonstração. Seja $G := sP_3 \vee K_t$, com $s \geq 1$ e $t \geq 1$. A partir do grafo G , construímos um novo grafo $G' := G \vee K_1$, tal que $V(K_1) := \{y\}$. O grafo G' possui $3s + t + 1$ vértices. Pelo Teorema 2.5, o grafo G' possui uma coloração de arestas forte ϕ com no máximo $|V(G')| + 1 = 3s + t + 2$ cores. Para cada vértice $z \in V(G)$, atribuímos ao vértice z a cor $\phi(yz)$ da aresta $yz \in E(G')$. Deste modo, obtemos uma coloração total forte de G com $3s + t + 2$ cores. Claramente, essa coloração é também uma coloração total semiforte de G . Portanto, $\chi_a''(G) \leq 3s + t + 2 = \Delta(G) + 3$. \square

No mesmo artigo, Chen [24] provou que os grafos $G := sP_3 \vee K_t$ com s inteiro positivo par, t inteiro ímpar e $t \geq 9s^2 + 2s - 1$ possuem número cromático total semiforte igual a $\Delta(G) + 3$. No entanto, o número cromático total semiforte dos demais grafos desta família ainda não foi determinado. No próximo teorema, apresentamos o resultado demonstrado por Chen.

Teorema 2.32 (Chen [24]). *Seja $G := sP_3 \vee K_t$. Se s é um inteiro positivo par, t é um inteiro positivo ímpar e $t \geq 9s^2 + 2s - 1$, então $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 3$.*

Demonstração. Para s um inteiro positivo par e t um inteiro ímpar tal que $t \geq 9s^2 + 2s - 1$, seja $G := sP_3 \vee K_t$ tal que sP_3 é a união disjunta de s caminhos $u_i v_i w_i$ ($1 \leq i \leq s$) e K_t é o grafo completo com conjunto de vértices $V(K_t) := \{x_1, \dots, x_t\}$. Observe que os vértices de grau máximo em G pertencem a K_t e que $\Delta(G) = 3s + t - 1$. Como K_t possui pelo menos dois vértices, temos que $\chi_a''(G) \geq \Delta(G) + 2 = 3s + t + 1$.

Pelo Teorema 2.31, temos que $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$. Logo, para provar o teorema, basta mostrarmos que G não possui uma $(3s + t + 1)$ -coloração total semiforte.

Por contradição, suponha que G possua uma $(3s + t + 1)$ -coloração total semiforte ϕ com cores do conjunto $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, 3s + t + 1\}$. Seja S_p o conjunto das cores que não ocorrem em pelo menos um vértice de G e seja S_t o conjunto das cores que ocorrem em todos os vértices de G . Por definição, os conjuntos S_p e S_t são disjuntos e $S_p \cup S_t = \mathcal{C}$. Logo, $|S_p| + |S_t| = |\mathcal{C}| = 3s + t + 1$.

Para cada cor $i \in \mathcal{C}$, definimos o conjunto $E_i := \{e \in E(G) : \phi(e) = i\}$. Como cada E_i é um emparelhamento, temos que $|E_i| \leq (3s + t - 1)/2$, pois $|V(G)| = 3s + t$ e é ímpar. Agora, vamos mostrar que $|E_i| \geq (t - 1)/2$. Suponha que exista alguma cor $j \in \mathcal{C}$ tal que $|E_j| \leq (t - 3)/2$. Neste caso, existem no máximo $t - 3$ vértices pertencentes ao subgrafo K_t que são incidentes em arestas de cor j e no máximo mais um vértice do subgrafo K_t pode ter recebido a cor j . Logo, a cor j ocorrerá no máximo em $t - 2$ vértices do K_t . Como os vértices do subgrafo K_t possuem grau $\Delta(G)$ e ϕ é uma coloração total de G com $\Delta(G) + 2$ cores, existem pelo menos dois vértices em $V(K_t)$ que possuem o mesmo conjunto de cores, uma contradição. Deste modo, concluímos que $(t - 1)/2 \leq |E_i| \leq (3s + t - 1)/2$.

Considerando os possíveis valores de $|E_i|$, definimos os conjuntos

$$C_l := \left\{ i : |E_i| = \frac{t-3}{2} + l \right\}, \text{ para } 1 \leq l \leq \frac{3s+2}{2}.$$

Deste modo, C_l é o conjunto das cores que são atribuídas a exatamente $\frac{t-3}{2} + l$ arestas, para $1 \leq l \leq \frac{3s+2}{2}$. Pela definição dos conjuntos C_l , temos que $\{C_1, \dots, C_{(3s+2)/2}\}$ é uma partição do conjunto \mathcal{C} . Logo, obtemos as seguintes equações:

$$|C_1| + |C_2| + \dots + |C_{3s/2}| + |C_{(3s+2)/2}| = |\mathcal{C}| = 3s + t + 1. \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{t-1}{2}|C_1| + \frac{t+1}{2}|C_2| + \dots + \frac{3s+t-3}{2}|C_{3s/2}| + \frac{3s+t-1}{2}|C_{(3s+2)/2}| &= |E(G)| = \\ &= 2s + \frac{t(t-1)}{2} + 3st. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Isolando $|C_{3s/2}|$ na equação (2.8) e substituindo na equação (2.9), obtemos:

$$\begin{aligned} |C_{(3s+2)/2}| &= 2s + \frac{t(t-1)}{2} + 3st - \frac{3s+t-3}{2}(3s+t+1) + \frac{3s-2}{2}|C_1| + \dots + |C_{(3s-2)/2}| = \\ &= -\frac{9}{2}s^2 + 5s + \frac{t}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3s-2}{2}|C_1| + \dots + |C_{(3s-2)/2}|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

A seguir, vamos determinar um limite inferior para $|S_t|$. Primeiramente, observe que o subgrafo induzido pelo conjunto $\{v_1, u_1, x_1, x_2, \dots, x_t\}$ é um grafo completo de ordem $t + 2$. Logo, são necessárias pelo menos $t + 2$ cores para serem atribuídas aos vértices de G . Isto implica que, das $3s + t + 1$ cores que foram utilizadas na coloração total semiforte do grafo G , pelo menos $t + 2$ cores são utilizadas para colorir vértices. Logo, existem no máximo $3s - 1$ cores que não colorem vértices de G . Note que estas cores podem pertencer ao conjunto $C_{(3s+2)/2}$. Isto implica que, no máximo $3s - 1$ cores do conjunto $C_{(3s+2)/2}$ não colorem vértices de G . Deste modo, existem pelo menos $|C_{(3s+2)/2}| - 3s + 1$ cores no conjunto $C_{(3s+2)/2}$ que colorem vértices de G . Observe que o conjunto $C_{(3s+2)/2}$ é o conjunto das cores que induzem um emparelhamento de cardinalidade $\frac{3s+t-1}{2}$. Isto implica que existem exatamente $3s + t - 1$ vértices incidentes em arestas de cor i , $i \in C_{(3s+2)/2}$. Logo, para cada cor $i \in C_{(3s+2)/2}$, existe exatamente um vértice $v \in V(G)$ que não possui arestas incidentes de cor i .

Uma vez que cada cor de $C_{(3s+2)/2}$ colore arestas incidentes em exatamente $3s + t - 1$ vértices e como pelo menos $|C_{(3s+2)/2}| - 3s + 1$ destas cores também colorem vértices, concluímos que pelo menos $|C_{(3s+2)/2}| - 3s + 1$ cores ocorrem em todos os vértices de G , isto é, $|S_t| \geq |C_{(3s+2)/2}| - 3s + 1$.

Agora, vamos determinar um limite inferior para $|S_p|$. Sabemos que K_t é o subgrafo de G induzido pelo conjunto de vértices $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$. Como o subgrafo K_t é um grafo completo e os seus vértices possuem grau máximo em G , então em cada vértice do K_t falta exatamente uma cor e todas essas t cores que faltam nos vértices do K_t são distintas entre si. Logo, existem pelo menos t cores que não ocorrem em pelo menos um vértice de G ; ou seja, $|S_p| \geq t$.

Provamos que $|S_p| \geq t$ e $|S_t| \geq |C_{(3s+2)/2}| - 3s + 1$. Isso implica que $t + |C_{(3s+2)/2}| - 3s + 1 \leq |S_p| + |S_t| = |C| = 3s + t + 1$. Resolvendo esta inequação, obtemos que $|C_{(3s+2)/2}| \leq 6s$. Substituindo este resultado na equação (2.10), obtemos:

$$\frac{9}{2}s^2 + s - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} \geq \frac{3s-2}{2}|C_1| + \frac{3s-4}{2}|C_2| + \dots + 2|C_{(3s-4)/2}| + |C_{(3s-2)/2}| \geq 0. \quad (2.11)$$

Simplificando a inequação (2.11), obtemos que $t \leq 9s^2 + 2s - 3$, uma contradição. Portanto, temos que $\chi_a''(G) > 3s + t + 1$. \square

Capítulo 3

Grafos com $\Delta(G) = 3$

Neste capítulo, demonstramos que a Conjetura da Coloração Total Semiforte é verdadeira para grafos com $\Delta(G) = 3$. Apesar de existirem outras demonstrações deste resultado, a demonstração aqui apresentada possui uma abordagem diferente das anteriores e é mais concisa. Posteriormente, provamos que todo grafo G com $\Delta(G) = 3$ e que não possui vértices adjacentes de grau máximo possui uma coloração total semiforte com $\Delta(G) + 1$ cores. Apresentamos também algumas famílias de grafos 3-regulares e provamos que elas possuem uma coloração total semiforte com $\Delta(G) + 2$ cores. Finalizando o capítulo, estudamos limites superiores para o número cromático total semiforte de subgrafos com $\Delta(G) \leq 3$, resolvendo o Problema 2.9 para alguns casos.

Em 2007, H. Wang [72] provou a Conjetura da Coloração Total Semiforte para grafos simples com $\Delta(G) = 3$. A demonstração apresentada por este autor é extensa e baseia-se na análise de diversos casos. Posteriormente, demonstrações mais concisas do mesmo resultado foram apresentadas por X. Chen [24] e por J. Hulgan [44].

A demonstração apresentada por X. Chen [24] usa indução no número de arestas do grafo. Como parte desta demonstração, o autor prova que a Conjetura da Coloração Total Semiforte é verdadeira para dois subcasos específicos: grafos hamiltonianos 3-regulares e grafos 3-regulares, não-hamiltonianos e que contêm um emparelhamento perfeito. Por outro lado, a demonstração apresentada por J. Hulgan [44] mostra que todo grafo G com $\Delta(G) = 3$, com exceção do K_4 , possui uma coloração total semiforte com seis cores em que apenas uma das cores aparece tanto nas arestas, quanto nos vértices de G . Essa abordagem, aliada ao uso do Teorema de Brooks (Teorema 1.2) e do Teorema de König (Teorema 1.4), possibilitou a Hulgan construir uma demonstração mais simples. No Teorema 3.1, apresentamos uma nova demonstração de que todo grafo simples G , com $\Delta(G) = 3$, possui $\chi''_a(G) \leq 6$. Esta demonstração utiliza teoremas apresentados nos capítulos anteriores e um resultado do Capítulo 4 sobre a coloração total semiforte de grafos tripartidos.

Teorema 3.1 (Wang [72], Chen [24], Hulgan [44]). *Se G é um grafo simples com $\Delta(G) = 3$, então $\chi''_a(G) \leq 6$.*

Demonstração. Seja G um grafo simples com $\Delta(G) = 3$. Pelo Teorema 2.15, $\chi''_a(K_4) = 5$. Portanto, suponha $G \not\cong K_4$. Como $\Delta(G) = 3$, temos que G não é um ciclo. Logo, pelo Teorema 1.2, temos que $\chi(G) \leq 3$. Se $\chi(G) = 2$, então G é um grafo bipartido. Neste caso, pelo Teorema 2.23, temos que $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2 = 5$. Por outro lado, se $\chi(G) = 3$, então G é um grafo tripartido, pois cada classe de cor induz um conjunto independente. Neste caso, pelo Teorema 4.4, temos que $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3 = 6$. \square

Seja n um inteiro maior ou igual a 3. Seja $G_1 \cong C_n$ com $V(G_1) := \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ e $G_2 \cong C_n$ com $V(G_2) := \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$. Seja também π uma permutação do conjunto $\{0, \dots, n-1\}$. Um grafo é uma *permutação de ciclo* se ele pode ser obtido a partir da união disjunta dos grafos G_1 e G_2 , juntamente com uma aresta ligando o vértice $v_i \in V(G_1)$ ao vértice $u_{\pi(i)} \in V(G_2)$, para $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Por definição, as permutações de ciclo são grafos 3- regulares. A Figura 3.1 exibe uma permutação de ciclo com $G_1 \cong G_2 \cong C_7$, tal que a permutação π é definida da seguinte maneira: $\pi(0) = 3, \pi(1) = 0, \pi(2) = 6, \pi(3) = 5, \pi(4) = 1, \pi(5) = 4$ e $\pi(6) = 2$.

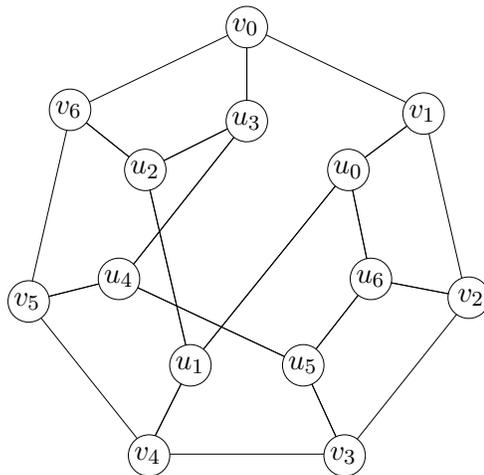


Figura 3.1: Uma permutação de ciclo.

Em sua tese de doutorado, J. Hulgan [45] provou que os grafos pertencentes à família das permutações de ciclo possuem número cromático total semiforte igual a 5. O autor também comenta que ao examinar alguns grafos com $\Delta(G) = 3$, como por exemplo o $K_{3,3}$ e o grafo de Petersen, verificou que todos eles possuem $\chi''_a(G) = 5$. Baseado nestes resultados, propôs a seguinte conjectura:

Conjetura 3.2 (Hulgan [45]). *Se G é um grafo simples com $\Delta(G) = 3$, então $\chi''_a(G) \leq 5$.*

Ao estudar os trabalhos deste autor [44, 45], observamos que todos os grafos com $\Delta(G) = 3$ citados são grafos 3-regulares. Assim, decidimos investigar algumas famílias de grafos com grau máximo igual a 3 e não regulares, no intuito de verificar a validade da Conjetura 3.2 para as famílias consideradas. A seguir, determinamos o número cromático total semiforte para estas famílias.

Um grafo G é *subcúbico* se $\Delta(G) = 3$ e G não é 3-regular. Seja \mathcal{F} uma família de grafos cujos membros são os grafos subcúbicos G tais que, para toda aresta $uv \in E(G)$, $d(u) = 3$ e $d(v) \in \{1, 2\}$. A Figura 3.2 exibe um grafo G pertencente à família \mathcal{F} . A Proposição 3.3 mostra que os grafos desta família são bipartidos.

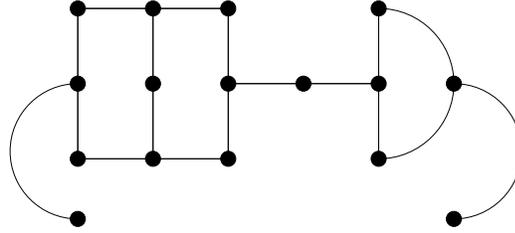


Figura 3.2: Grafo G pertencente à família \mathcal{F} .

Proposição 3.3. *Se G é um grafo pertencente à família \mathcal{F} , então G é bipartido.*

Demonstração. Seja $G \in \mathcal{F}$. Podemos particionar $V(G)$ em dois subconjuntos X e Y , tais que $X := \{u \in V(G) : d(u) = 3\}$ e $Y := V(G) \setminus X$. Pela definição dos conjuntos X e Y , temos que $X \cap Y = \emptyset$. Além disso, pela definição da família \mathcal{F} , para toda aresta $uv \in E(G)$, $u \in X$ e $v \in Y$. \square

Pela Proposição 2.23 e pela Proposição 3.3, concluímos que os grafos da família \mathcal{F} possuem uma coloração total semiforte com no máximo $\Delta(G) + 2$ cores. De fato, os membros desta família admitem uma coloração total semiforte com apenas $\Delta(G) + 1$ cores, como demonstrado no teorema a seguir.

Teorema 3.4. *Se G é um grafo pertencente a família \mathcal{F} , então $\chi''_a(G) = 4$.*

Demonstração. Seja $G \in \mathcal{F}$. Pela Proposição 2.6, $\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 1$. Então, é suficiente exibir uma 4-coloração total semiforte π para G .

Pela Proposição 3.3, G é bipartido. Como $\Delta(G) = 3$, pelo Teorema 1.4, $\chi'(G) = 3$. Seja $\pi_E : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ uma coloração de arestas do grafo G . Seja $\{X, Y\}$ uma bipartição de $V(G)$ tal que $X := \{v \in V(G) : d(v) = 3\}$. Defina

$$\pi_V(v) := \begin{cases} 4 & \text{se } v \in X, \\ c \text{ tal que } c \in \{1, 2, 3\} \setminus \{\pi_E(uv) : uv \in E(G)\} & \text{se } v \in Y. \end{cases}$$

Defina π tal que $\pi|_{E(G)} = \pi_E$ e $\pi|_{V(G)} = \pi_V$. Vamos mostrar que π é uma coloração total semiforte. Como $\pi|_{E(G)}$ é uma 3-coloração de arestas de G , quaisquer duas arestas adjacentes de G possuem cores distintas. Pela definição de $\pi|_{V(G)}$, todos os vértices da parte X recebem a cor 4 e cada vértice da parte Y recebe uma cor do conjunto $\{1, 2, 3\}$ que não ocorre em suas arestas incidentes. Logo, quaisquer dois elementos adjacentes ou incidentes possuem cores distintas.

Resta mostrar que a coloração total π é também semiforte. Por definição da coloração π , para todo $v \in X$, temos $\overline{C}_\pi(v) = \emptyset$ e para todo $u \in Y$, temos $\overline{C}_\pi(u) \neq \emptyset$. Portanto $\overline{C}_\pi(u) \neq \overline{C}_\pi(v)$, para quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$. \square

Observe que os grafos da família \mathcal{F} pertencem a uma classe de grafos maior: a classe dos grafos simples com $\Delta(G) = 3$ e que não possuem vértices adjacentes de grau máximo. A seguir, consideramos esta família de grafos.

Seja G um grafo simples, conexo, com $\Delta(G) = 3$ e que não possui vértices adjacentes de grau máximo. Definimos a *decomposição canônica* $[\mathcal{K}, \mathcal{P}]$ do grafo G como a união dos grafos \mathcal{K} e \mathcal{P} , disjuntos nas arestas, tal que:

- (i) \mathcal{P} é o subgrafo de G induzido pelas arestas $uv \in E(G)$, com $d_G(u) = 2$ e $d_G(v) \in \{1, 2\}$.
- (ii) \mathcal{K} é o subgrafo de G induzido pelas arestas $uv \in E(G)$, com $d_G(u) = 3$ e $d_G(v) \in \{1, 2\}$.

Observe que se $G \in \mathcal{F}$, então $V(\mathcal{P}) = \emptyset$, $E(\mathcal{P}) = \emptyset$ e \mathcal{K} é isomorfo a G . Além disso, como $\Delta(G) = 3$, $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Por outro lado, se $G \notin \mathcal{F}$, os subgrafos \mathcal{P} e \mathcal{K} podem ser não conexos e possuem as seguintes propriedades:

- (i) cada componente conexa $K_i \subseteq \mathcal{K}$ pertence a \mathcal{F} ;
- (ii) cada componente conexa $P_i \subseteq \mathcal{P}$ é um caminho, pois, para todo $uv \in E(P_i)$, $d_G(u) = 2$ e $d_G(v) \in \{1, 2\}$;
- (iii) para cada componente conexa $P_i \subseteq \mathcal{P}$, $P_i = u_1 \dots u_j$, temos que $\{u_1, u_j\} \cap V(\mathcal{K}) \neq \emptyset$.

A definição da decomposição canônica $[\mathcal{K}, \mathcal{P}]$ do grafo G implica que $G \cong (\mathcal{K} \cup \mathcal{P})$. A Figura 3.3 ilustra a decomposição descrita acima. A seguir, usamos a decomposição canônica para provar que todo grafo simples, conexo, com grau máximo três e que não possui vértices adjacentes de grau máximo possui $\chi_a''(G) = 4$.

Teorema 3.5. *Se G é um grafo simples, conexo, com $\Delta(G) = 3$ e sem vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi_a''(G) = 4$.*

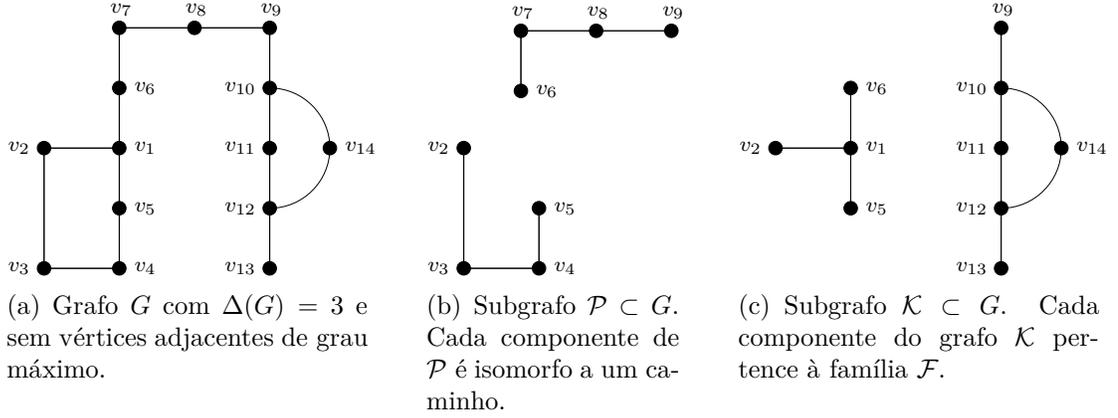


Figura 3.3: Decomposição canônica $[\mathcal{K}, \mathcal{P}]$ do grafo G em subgrafos disjuntos nas arestas.

Demonstração. Seja G um grafo simples, conexo, com $\Delta(G) = 3$ e sem vértices adjacentes de grau máximo. Pela Proposição 2.6, $\chi_a''(G) \geq \Delta(G) + 1 = 4$. Se $G \in \mathcal{F}$, então pelo Teorema 3.4, temos que $\chi_a''(G) = 4$ e o resultado segue. Portanto, podemos supor que $G \notin \mathcal{F}$.

Seja $[\mathcal{K}, \mathcal{P}]$ uma decomposição canônica de G . A seguir, construímos uma 4-coloração total semiforte π para G . Para isso, inicialmente construímos uma 4-coloração total semiforte ϕ para o grafo $\mathcal{K} \subset G$ e, depois, construímos uma 4-coloração total semiforte φ para o grafo $\mathcal{P} \subset G$. A coloração π é definida de modo que ϕ seja uma restrição de π aos elementos de \mathcal{K} , e φ seja uma restrição de π aos elementos de \mathcal{P} . Os vértices $v \in V(G)$ tal que $v \in V(\mathcal{K}) \cap V(\mathcal{P})$ terão suas cores determinadas pela coloração φ , ou seja, $\pi(v) := \varphi(v)$.

Primeiramente, construímos a 4-coloração total semiforte ϕ para o grafo \mathcal{K} . Seja $K_i \subseteq \mathcal{K}$. Como $K_i \in \mathcal{F}$, pelo Teorema 3.4, $\chi_a''(K_i) = 4$. Portanto, para todo $K_i \subseteq \mathcal{K}$, seja ϕ^i uma 4-coloração total semiforte de K_i com as cores 1, 2, 3, 4, tal como definida na demonstração do Teorema 3.4. Relembre que, de acordo com essa coloração, todos os vértices de grau 3 de K_i recebem a cor 4. A coloração $\phi : V(\mathcal{K}) \cup E(\mathcal{K}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é definida como:

$$\begin{aligned} \phi(u) &:= \phi^i(u) && \text{se } u \in V(K_i), \text{ para todo } K_i \subset \mathcal{K}; \\ \phi(uv) &:= \phi^i(uv) && \text{se } uv \in E(K_i), \text{ para todo } K_i \subset \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Note que ϕ é uma 4-coloração total semiforte de \mathcal{K} , pois cada K_i é uma componente conexa distinta de \mathcal{K} .

Agora, construímos uma 4-coloração total semiforte φ para o grafo \mathcal{P} . Como cada componente $P_k \subset \mathcal{P}$ é um caminho, pela Proposição 2.23, $\chi_a''(P_k) = 4$. Seja $P_k \subseteq \mathcal{P}$, tal que $P_k := u_1 u_2 \dots u_j$. Por definição da decomposição canônica de G , pelo menos um dos vértices u_1 e u_j também pertence ao subgrafo \mathcal{K} , ou seja, $\{u_1, u_j\} \cap V(\mathcal{K}) \neq \emptyset$. Se $u_i \in V(\mathcal{K})$, $i \in \{1, j\}$, então u_i é adjacente a um vértice $w \in V(\mathcal{K})$ de grau 3.

Além disso, a aresta $u_i w \in E(\mathcal{K})$ foi colorida pela coloração ϕ com uma cor do conjunto $\{1, 2, 3\}$. Tomando estes fatos em consideração, definimos uma 4-coloração total semiforte φ_k restrita aos elementos da componente conexa P_k .

Definimos a coloração φ_k considerando que ambos os vértices u_1 e u_j pertencem ao conjunto $V(\mathcal{K}) \cap V(\mathcal{P})$. Sejam $u_1 w, u_j v \in E(\mathcal{K})$ tal que $d_G(w) = d_G(v) = 3$. Sejam $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$, valores distintos; e sejam também $\phi(u_1 w) \in \{a, b\}$ e $\phi(u_j v) = a$. Para todo $i \in \{1, \dots, j-1\}$,

$$\varphi_k(u_i) := \begin{cases} c & \text{se } i \text{ é ímpar,} \\ a & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases} \quad \varphi_k(u_i u_{i+1}) := \begin{cases} 4 & \text{se } i \text{ é ímpar,} \\ b & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

Para finalizar a coloração φ_k , fazemos $\varphi_k(u_j) := b$ se j é par; e $\varphi_k(u_j) := c$, caso contrário.

Vamos mostrar que φ_k é uma coloração total de P_k . Pela definição de φ_k quaisquer dois vértices adjacentes de P_k possuem cores distintas a e c ou b e c . Além disso, quaisquer duas arestas adjacentes possuem cores distintas 4 e b . Observe que apenas o vértice u_j pode ter cor b e que, neste caso, a aresta $u_{j-1} u_j$ possui cor 4 . Logo, quaisquer vértice e aresta incidentes possuem cores distintas.

Agora, provamos que a coloração total φ_k é também semiforte. Pela definição de φ_k , para $i \in \{2, \dots, j-1\}$, temos que $\overline{\mathcal{C}}_{\varphi_k}(u_i) = \{c\}$ se i é par; e $\overline{\mathcal{C}}_{\varphi_k}(u_i) = \{a\}$ se i é ímpar. Logo, $\overline{\mathcal{C}}_{\varphi_k}(u_i) \neq \overline{\mathcal{C}}_{\varphi_k}(u_{i+1})$, para $i \in \{2, \dots, j-1\}$. Além disso, quando $\phi(u_1 w) = \phi(u_j v)$, temos que $\overline{\mathcal{C}}_{\varphi_k}(u_1) = \{b\}$; e quando $\phi(u_1 w) \neq \phi(u_j v)$, temos que $\overline{\mathcal{C}}_{\varphi_k}(u_1) = \{a\}$. Logo, $\overline{\mathcal{C}}_{\varphi_k}(u_1) \neq \overline{\mathcal{C}}_{\varphi_k}(u_2)$. Considere $u_j \in V(\mathcal{K}) \cap V(\mathcal{P})$. Por inspeção, é possível verificar que, quando j é par, $\overline{\mathcal{C}}_{\varphi_k}(u_j) = \{c\}$; e quando j é ímpar, $\overline{\mathcal{C}}_{\varphi_k}(u_j) = \{4\}$. Logo, $\overline{\mathcal{C}}_{\varphi_k}(u_j) \neq \overline{\mathcal{C}}_{\varphi_k}(u_{j-1})$. Portanto, a coloração total φ_k é também semiforte. Note que, se apenas o vértice u_1 pertencer ao conjunto $V(\mathcal{K}) \cap V(\mathcal{P})$, a coloração φ_k permanece como uma coloração total semiforte de P_k , pois, neste caso, $\overline{\mathcal{C}}(u_j)$ e $\overline{\mathcal{C}}(u_{j-1})$ são distintos pelas suas cardinalidades.

Como demonstrado acima, para cada componente conexa $P_k \subseteq \mathcal{P}$, temos que φ_k é uma 4-coloração total semiforte de P_k . Deste modo, definimos a coloração $\varphi: V(\mathcal{P}) \cup E(\mathcal{P}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &:= \varphi_k(u) && \text{se } u \in V(P_k), \text{ para todo } P_k \subseteq \mathcal{P}; \\ \varphi(uv) &:= \varphi_k(uv) && \text{se } uv \in E(P_k), \text{ para todo } P_k \subseteq \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Note que φ é uma 4-coloração total semiforte de \mathcal{P} , pois cada P_k é uma componente conexa distinta de \mathcal{P} .

A seguir, provamos que π é uma 4-coloração total semiforte do grafo G . Como demonstrado acima, π é uma 4-coloração total semiforte quando restrita aos subgrafos \mathcal{P} e \mathcal{K} . Deste modo, precisamos apenas checar a coloração dos elementos adjacentes e incidentes nos vértices $u_i \in V(\mathcal{P}) \cap V(\mathcal{K})$.

Considere um vértice $u_i \in V(\mathcal{P}) \cap V(\mathcal{K})$. Sabemos que u_i é adjacente a um vértice $x \in V(\mathcal{K})$, tal que $d_G(x) = 3$. Pela definição de ϕ , temos $\phi(x) = 4$ e, pela definição de φ , temos $\varphi(u_i) \neq 4$. Logo, $\pi(x) \neq \pi(u_i)$. Por inspeção, é possível verificar que as duas arestas incidentes no vértice u_i são coloridas com uma das três possibilidades seguintes: são coloridas com as cores a e 4 , com as cores b e 4 , ou com as cores b e a . Dessas três possibilidades, concluímos que as arestas incidentes no vértice u_i recebem cores distintas.

Além disso, pela definição da coloração π , temos que $\overline{C}_\pi(x) = \emptyset$ e $\overline{C}_\pi(u_i) \neq \emptyset$. Logo, $\overline{C}_\pi(x) \neq \overline{C}_\pi(u_i)$. Portanto, π é uma 4-coloração total semiforte de G . \square

De acordo com o Teorema 3.5, grafos simples, conexos, com grau máximo três e que não possuem vértices adjacentes de grau máximo possuem número cromático total semiforte igual a 4. Este resultado confirma a validade da Conjetura 3.2 para esta classe de grafos. No entanto, para grafos simples arbitrários, com grau máximo três e que possuem vértices adjacentes de grau máximo, essa conjetura continua aberta.

Nas próximas seções, apresentamos algumas famílias de grafos 3- regulares e provamos que os membros destas famílias possuem número cromático total semiforte igual a 5. Estes resultados também fortalecem a Conjetura 3.2.

3.1 Breve história dos snarks

Um *snark* é um grafo 3-regular, sem arestas de corte e que não admite uma 3-coloração de arestas. Esta classe de grafos se originou no contexto do Problema das Quatro Cores, cuja história é brevemente contada a seguir.

O *Problema das Quatro Cores* ou *Conjetura das Quatro Cores* foi uma das questões mais famosas da Matemática e impulsionou o desenvolvimento da Teoria dos Grafos. De acordo com a Conjetura das Quatro Cores todo grafo plano e sem arestas de corte possui uma coloração de faces com no máximo quatro cores, de modo que quaisquer duas faces adjacentes possuam cores distintas. O problema era decidir se tal coloração era possível.

Esse problema apareceu pela primeira vez na literatura no ano de 1852 em uma carta de Augustus De Morgan, professor da Universidade de Londres, direcionada ao seu amigo W. R. Hamilton, um famoso matemático irlandês. Esse problema havia sido sugerido a De Morgan por um de seus alunos, Frederick Guthrie, em nome de seu irmão mais velho, Francis Guthrie [76]. Contrastando com o interesse de De Morgan, Hamilton não achou o problema interessante e respondeu quatro dias mais tarde dizendo que tão cedo não pensava em se dedicar à questão.

Foi somente em 1879 que o problema tornou-se amplamente conhecido. Neste ano, Arthur Cayley indagou, na seção de Matemática da *London Mathematical Society*, se alguém já havia encontrado uma solução para o problema. Embora alguns matemáticos

tivessem se interessado, nenhum deles havia alcançado um progresso significativo. O próprio Cayley publicou uma pequena análise do problema nos *Proceedings of the Royal Geographical Society*, em 1879 [76]. Ainda neste mesmo ano, A. B. Kempe publicou uma suposta solução para o problema. No entanto, em 1890, P. J. Heawood encontrou uma falha na solução proposta por Kempe, mas usou a técnica introduzida por ele para provar que todo grafo plano e sem arestas de corte pode ser colorido com 5 cores. Este resultado ficou conhecido como o *Teorema das Cinco Cores*.

Em 1880, na tentativa de provar a Conjetura das Quatro Cores, P. G. Tait [63] introduziu o conceito de coloração de arestas e provou a seguinte equivalência:

Teorema 3.6 (Tait [63]). *Todo grafo plano, 3-regular e sem arestas de corte possui uma 4-coloração de faces se e somente se ele admite uma 3-coloração de arestas.*

De acordo com o Teorema 3.6, uma alternativa equivalente a colorir faces de grafos planos e sem arestas de corte, é abordar o Problema das Quatro Cores a partir da coloração de arestas de grafos planares 3-regulares e sem arestas de corte. A equivalência provada por Tait deu origem a uma nova abordagem para a investigação da Conjetura das Quatro Cores, pois transformou o problema de coloração de faces de um grafo plano e sem arestas de corte em um problema equivalente de coloração das arestas do grafo, portanto, removendo a obrigatoriedade do grafo estar imerso no plano. Uma consequência imediata dessa abordagem é que a busca por um contraexemplo para a Conjetura das Quatro Cores é, de fato, a busca por um grafo planar, 3-regular, sem arestas de corte e com índice cromático 4. Foi a partir deste contexto que iniciou-se a busca por snarks planares e que deu origem ao estudo desta classe de grafos.

No ano de 1977, o Problema das Quatro Cores foi resolvido por K. Appel e W. Haken [3, 5]. A demonstração apresentada por Appel e Haken, foi inspirada no trabalho desenvolvido por diversos outros matemáticos que os precederam. As ideias lançadas por A. B. Kempe, H. Heesche e por G. D. Birkhoff foram decisivas para a solução deste problema. Apesar do importante resultado obtido por Appel e Haken, a demonstração fornecida por eles causou grande controvérsia entre os matemáticos da época, entre outras razões, por fazer extenso uso de computadores. Appel e Haken, trabalhando juntamente com J. A. Koch, melhoraram heurísticas desenvolvidas por Heesch e definiram um conjunto finito de 1936 configurações que deveriam ser verificadas por computador. Usando um computador da época (IBM-360 e IBM-370), eles conseguiram verificar a validade da Conjetura das Quatro Cores usando aproximadamente 1200 horas de computação. Em 1989, Appel e Haken [4] lançaram um livro com 741 páginas apresentando sua solução e, na época, o número de configurações já havia sido reduzido para 1476.

Por volta de 1993, os matemáticos N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour e R. Thomas decidiram redemonstrar o Teorema das Quatro Cores e encontrar uma outra solução, mas

usando uma abordagem semelhante à usada por Appel e Haken. A demonstração desenvolvida pelos autores possui diversas melhorias. Por exemplo, o número de configurações foi reduzido para 638. Além disso, o algoritmo desenvolvido pelos autores possui complexidade de tempo $O(n^2)$, o que é um grande avanço quando comparado ao algoritmo de tempo $O(n^4)$ desenvolvido por Appel e Haken. Em maio de 1995, os autores lançaram um artigo [60] de 43 páginas contendo a nova demonstração.

Pelo Teorema das Quatro Cores e pela equivalência provada por Tait (Teorema 3.6), pode-se concluir que todo grafo planar 3-regular e sem arestas de corte admite uma coloração de arestas com 3 cores. Isto implica que não existem snarks planares.

O nome snark foi sugerido por Martin Gardner, aparecendo pela primeira vez em 1976, na seção *Mathematical Games* da revista *Scientific American* [36]. O autor se inspirou em um poema de Lewis Carroll, chamado *The Hunting of the Snark* [18], que conta a história de uma tripulação de caçadores que partem em busca de uma criatura fictícia, chamada snark. O autor justificou o uso do nome snark para a classe de grafos 3-regulares, sem arestas de corte e com índice cromático 4, devido à dificuldade de se encontrar grafos com estas propriedades.

O primeiro snark foi descoberto em 1898 por J. Petersen [59] e está exibido na Figura 3.4. Petersen também provou que este é o menor snark. Dado um conjunto $S = \{1, \dots, 5\}$ com 5 elementos, o grafo de Petersen, P , é o grafo cujos vértices são os subconjuntos de S com 2 elementos, tais que dois vértices são adjacentes se e somente se os subconjuntos que os definem são disjuntos. A Figura 3.4(a) exhibe o grafo de Petersen P com os vértices rotulados tal como definido acima e a Figura 3.4(b) exhibe uma 5-coloração total semiforte de P . A 5-coloração total semiforte apresentada na Figura 3.4(b) é obtida a partir da rotulação dos vértices apresentada na Figura 3.4(a): cada aresta recebe a cor que não aparece nos rótulos dos seus extremos e cada vértice recebe uma das cores presentes no seu rótulo.

Demonstrações sucintas de que o grafo de Petersen não é 3-colorável podem ser encontradas nos artigos de R. Naserasr et al. [56] e L. Volkmann [71].

O grafo de Petersen permaneceu, durante mais de 40 anos, como o único snark conhecido. Em 1946, D. Blanuša [12] descobriu um novo snark, com 18 vértices e 27 arestas que ficou conhecido como o primeiro snark de Blanuša¹. Em 1948, R. L. Brooks, A. H. Stone, C. Smith e W. T. Tutte descobriram um novo snark com 210 vértices. Este snark ficou conhecido como snark de Descartes devido ao fato dos autores terem publicado este resultado usando o pseudônimo Blanche Descartes [30]. Em 1973, G. Szekeres [62] descobriu um novo snark com 50 vértices. A Figura 3.5 exhibe uma 5-coloração total semiforte do snark de Szekeres.

¹Alguns anos mais tarde, surgiu na literatura um outro snark com 18 vértices e 27 arestas que ficou conhecido como o segundo snark de Blanuša [46].

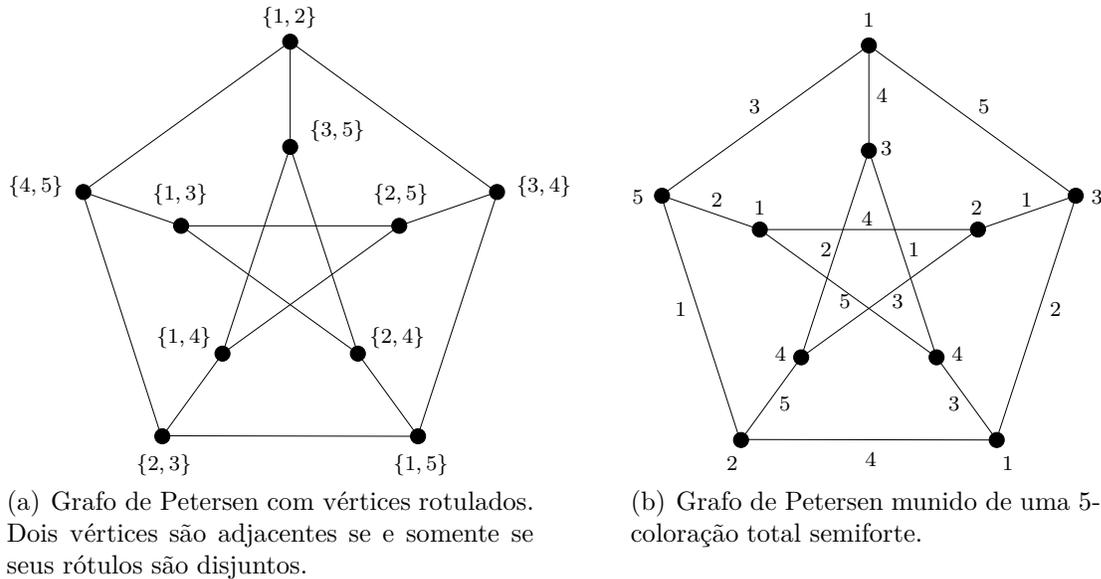


Figura 3.4: Grafo de Petersen P .

Até o ano de 1975, apenas os snarks citados acima eram conhecidos, porém, uma importante descoberta mudaria a forma como os snarks vinham sendo investigados: em 1975, R. Isaacs [46] publicou o primeiro método de construção de novos snarks a partir de snarks já conhecidos. A partir deste método, Isaacs descobriu as duas primeiras famílias infinitas de snarks, que incluíam todos os snarks conhecidos até então: a família dos *snarks-BDS* e dos *snarks-flor*. Além destas famílias, Isaacs descobriu um novo snark, denominado *double-star*, não incluído nestas famílias. A Figura 3.6 exibe uma 5-coloração total semiforte do snark *double-star*.

Em 1976, Isaacs [47] apresentou um outro método para geração de famílias infinitas de snarks desenvolvido por F. Loupekine. Os snarks construídos a partir deste método são chamados *snarks de Loupekine*. Mais recentemente, novos métodos de geração de snarks foram desenvolvidos, entre outros, por M. Kochol [49] e por J. Hägglund [38].

Em 1967, W. T. Tutte [65] conjecturou que todos os snarks possuem o grafo de Petersen como um menor. Em 1999, a demonstração desta conjectura foi anunciada por N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour e R. Thomas [64].

Nas próximas seções, determinamos o número cromático total semiforte de quatro famílias de snarks: os *snarks-flor*, os snarks de Goldberg, os snarks de Blanuša generalizados e os *snarks-LP₁*, que são uma subfamília dos snarks de Loupekine. Observe que, como snarks são grafos 3- regulares, são necessárias pelo menos 5 cores para obter uma coloração total semiforte destes grafos. Para cada uma das famílias citadas acima, construímos uma 5-coloração total semiforte, provando que o número cromático total semiforte destas famílias é igual a 5.

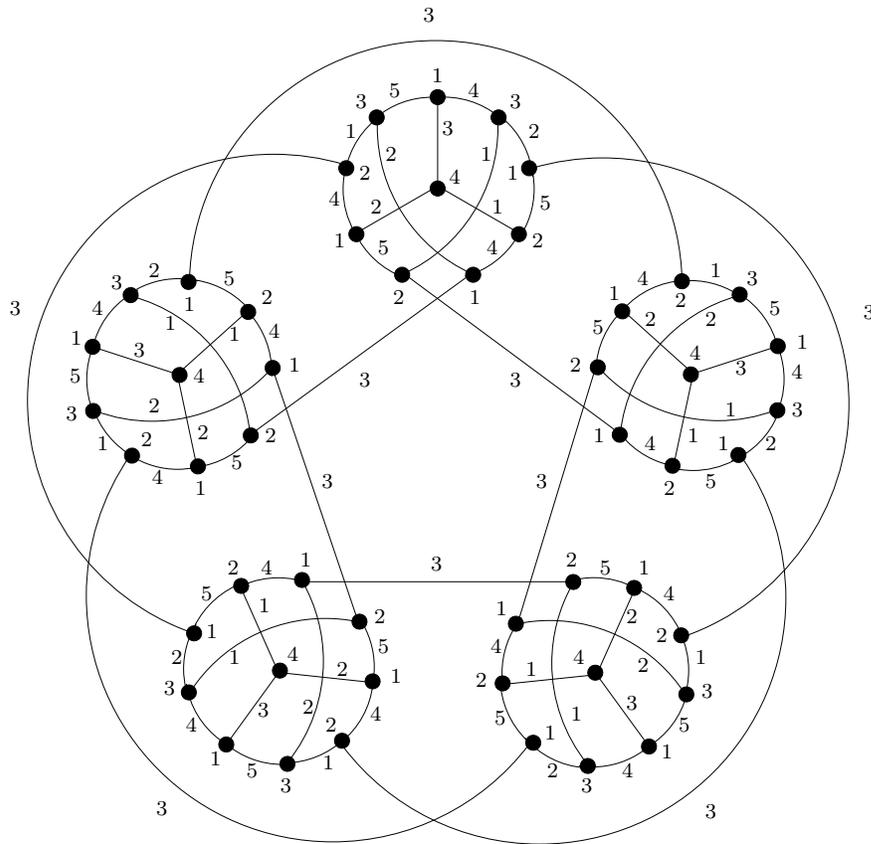


Figura 3.5: Snark de Szekeres munido de uma 5-coloração total semiforte.

A menos dos snarks de Loupekine, todas as colorações apresentadas fazem uso da mesma técnica que é baseada na definição recursiva destas famílias. Devido a isso, as demonstrações dos teoremas são bastante similares.

3.2 Snarks-flor

A família dos snarks-flor foi descoberta em 1974 por R. Isaacs [46]. Esta família é formada pelos grafos $F_3, F_5, \dots, F_{2i+1}$, $i \geq 1$, tal que cada grafo F_{2i+1} possui $4(2i + 1)$ vértices. Todos os grafos desta família possuem uma propriedade em comum: eles podem ser construídos a partir da união disjunta de alguns subgrafos especiais denominados *blocos básicos*. A seguir, os blocos básicos são definidos, assim como os membros da família snark-flor. Posteriormente, é provado que todo snark-flor possui uma 5-coloração total semiforte.

Seja o *bloco básico* B_i , o grafo com conjunto de vértices $V(B_i) = \{u_i, v_i, x_i, y_i\}$ e conjunto de arestas $E(B_i) = \{u_i v_i, x_i v_i, y_i v_i\}$. A Figura 3.7 apresenta o bloco B_i .

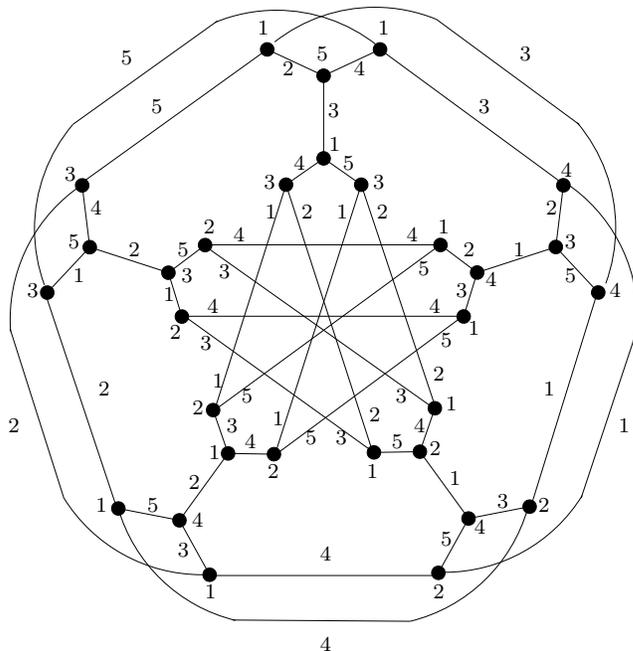


Figura 3.6: Double star munido de uma 5-coloração total semiforte.

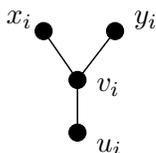


Figura 3.7: Bloco B_i .

Dois blocos B_k e B_j são conectados por meio de *arestas de ligação* $E_{k,j} = \{u_k u_j, x_k x_j, y_k y_j\}$. O *grafo de ligação* L_i é o grafo com conjunto de vértices $V(L_i) := V(B_{i-1}) \cup V(B_i)$ e conjunto de arestas $E(L_i) := E(B_{i-1}) \cup E(B_i) \cup E_{(i-1),i}$. A Figura 3.8 mostra o grafo de ligação L_i .

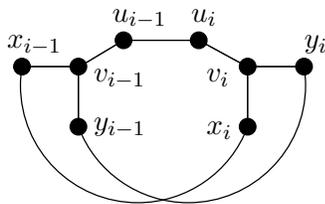


Figura 3.8: Grafo de ligação L_i .

A família dos snarks-flor é composta pelos grafos $F_3, F_5, \dots, F_{2i+1}, i \geq 1$. O primeiro grafo desta família, F_3 , é o grafo com conjunto de vértices $V(F_3) := V(B_1) \cup V(B_2) \cup V(B_3)$ e conjunto de arestas $E(F_3) := E(B_1) \cup E(B_2) \cup E(B_3) \cup E_{2,3} \cup E_{3,1} \cup \{u_1 u_2, x_1 y_2, y_1 x_2\}$.

A Figura 3.9(b) ilustra o grafo F_3 . Uma observação importante é que o snark-flor F_3 pode ser obtido a partir do grafo de Petersen aplicando a operação descrita a seguir.

Seja P o grafo de Petersen. Para qualquer vértice $v \in V(P)$, escolhamos duas de suas arestas incidentes $vx, vy \in E(P)$ e subdividimos essas arestas criando dois novos vértices u_2 e u_3 . Para concluir a construção, adicionamos uma nova aresta u_2u_3 ligando os dois novos vértices. A Figura 3.9(a) apresenta o grafo de Petersen e a Figura 3.9(b) apresenta o grafo F_3 formado a partir do grafo de Petersen como descrito acima, com $v = u_1, x = v_2$ e $y = v_3$.

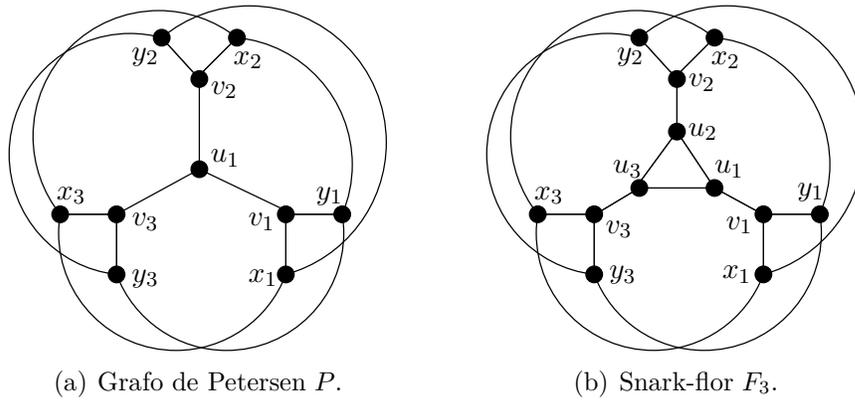


Figura 3.9: Grafo de Petersen P em um desenho apropriado e o grafo F_3 gerado a partir do grafo P usando a operação descrita anteriormente.

Para cada i ímpar e $i \geq 5$, o grafo F_i é obtido a partir dos grafos F_{i-2} e L_i da seguinte forma:

- (i) $V(F_i) := V(F_{i-2}) \cup V(L_i)$; e
- (ii) $E(F_i) := (E(F_{i-2}) \setminus E_{i-2}^{out}) \cup E_i^{in} \cup E(L_i)$, tal que
 - $E_{i-2}^{out} := E_{(i-2),1}$ e
 - $E_i^{in} := E_{(i-2),(i-1)} \cup E_{i,1}$.

A Figura 3.10 exibe os grafos F_3 , L_5 e F_5 , evidenciando a construção recursiva. Essa definição recursiva da família snark-flor é usada para demonstrar que todo grafo F_i possui uma 5-coloração total semiforte.

Teorema 3.7. *Todo snark-flor F_i , i ímpar e $i \geq 3$, possui $\chi_a''(F_i) = 5$.*

Demonstração. Seja F_i um snark-flor, i ímpar e $i \geq 3$. Como F_i é 3-regular, $\chi_a''(F_i) \geq 5$. A seguir, construímos uma 5-coloração total semiforte para F_i . A prova é por indução em i e baseada na construção recursiva da família. A Figura 3.11 exibe uma 5-coloração

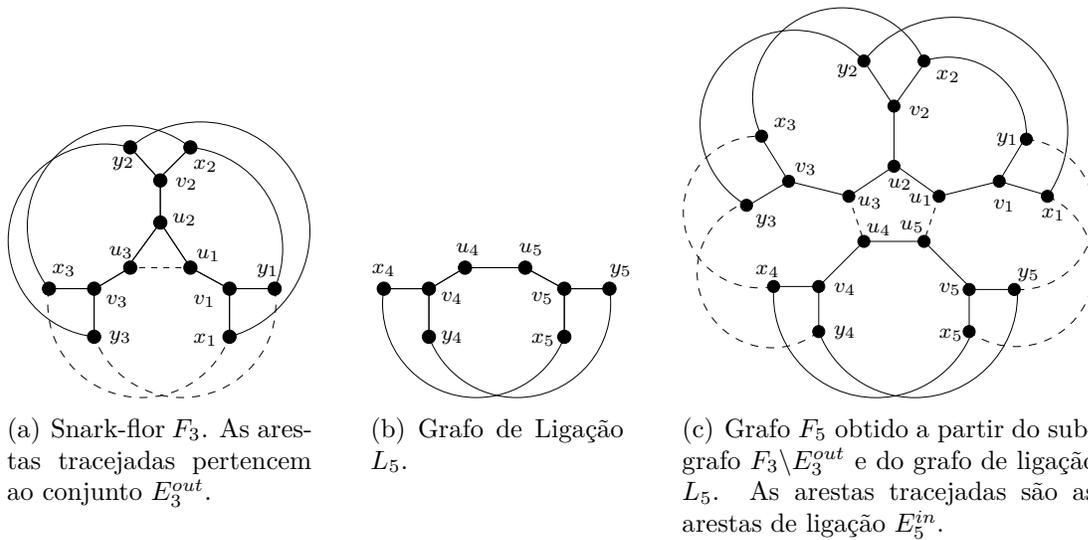


Figura 3.10: Construção do grafo F_5 a partir do subgrafo $F_3 \setminus E_3^{out}$ e do grafo L_5 .

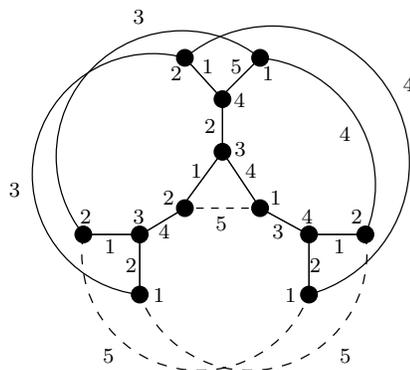
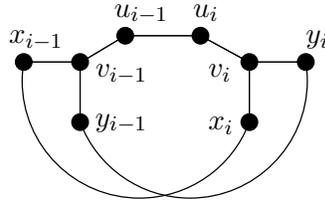


Figura 3.11: Coloração total semiforte do grafo F_3 com 5 cores. As arestas tracejadas pertencem ao conjunto E_3^{out} .

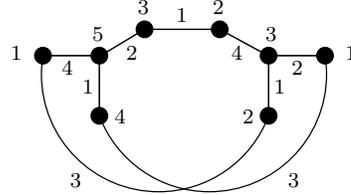
total semiforte ϕ_3 do snark-flor F_3 . Note que as arestas de E_3^{out} possuem a cor cinco. Esta coloração de F_3 é a base da indução.

Seja i ímpar e $i > 3$. Sabemos que F_i pode ser construído recursivamente a partir de F_{i-2} e L_i . Pela hipótese de indução, F_{i-2} possui uma 5-coloração total semiforte ϕ_{i-2} na qual as arestas de E_{i-2}^{out} possuem a cor cinco. Ademais, a Figura 3.12(b) exhibe o grafo de ligação L_i munido de uma 5-coloração total semiforte fixa ϕ . Formalmente, a 5-coloração total semiforte ϕ do grafo de ligação L_i é definida como:

$$\begin{aligned}
 \phi(u_{i-1}) &= 3; & \phi(u_i) &= 2; & \phi(v_{i-1}) &= 5; & \phi(v_i) &= 3; \\
 \phi(x_{i-1}) &= 1; & \phi(x_i) &= 2; & \phi(y_{i-1}) &= 4; & \phi(y_i) &= 1; \\
 \phi(u_{i-1}u_i) &= 1; & \phi(x_{i-1}x_i) &= 3; & \phi(y_{i-1}y_i) &= 3; & \phi(u_iv_i) &= 4; \\
 \phi(u_{i-1}v_{i-1}) &= 2; & \phi(x_{i-1}v_{i-1}) &= 4; & \phi(y_{i-1}v_{i-1}) &= 1; & \phi(x_iv_i) &= 1; \\
 \phi(y_iv_i) &= 2.
 \end{aligned}$$



(a) Grafo de ligação L_i com vértices rotulados.



(b) Grafo de ligação L_i munido de uma 5-coloração total semiforte.

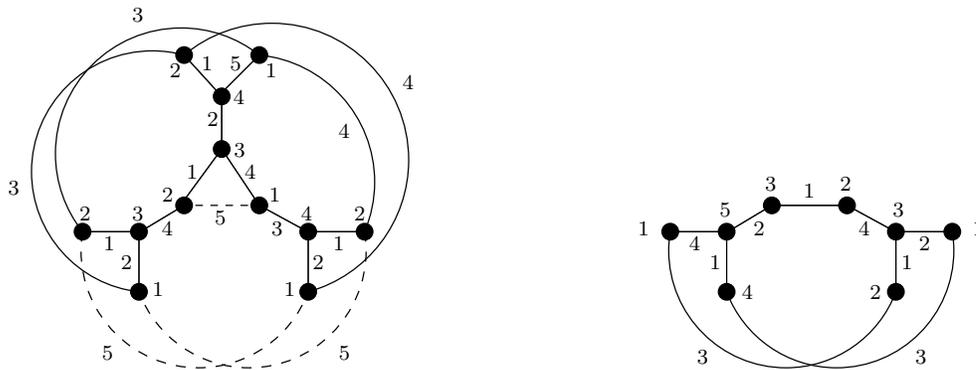
Figura 3.12: 5-coloração total semiforte do grafo de ligação L_i .

Seja ϕ_i uma atribuição de cores aos elementos de F_i , definida como a seguir. As arestas de E_i^{in} recebem a cor cinco. Observe que não há conflito entres estas arestas, pois formam um conjunto independente. Para completar a coloração, atribua aos elementos de $V(F_i) \cup E(F_i) \setminus E_i^{in}$ as mesmas cores que estes elementos possuem em F_{i-2} ou L_i . A Figura 3.13 ilustra a construção da coloração do grafo F_5 .

Vamos provar que ϕ_i é uma 5-coloração total semiforte do grafo F_i . Por hipótese de indução, ϕ_{i-2} é uma 5-coloração total semiforte para F_{i-2} . Além disso, os vértices de grau dois em $F_{i-2} \setminus E_{i-2}^{out}$ são não adjacentes. Isto implica que quaisquer dois vértices adjacentes em $F_{i-2} \setminus E_{i-2}^{out}$ preservam a propriedade de que seus conjuntos de cores sejam distintos. Ademais, ϕ é uma 5-coloração total semiforte fixa para o grafo de ligação L_i . Concluimos, portanto, que a coloração ϕ_i restrita aos elementos de $F_i \setminus E_i^{in}$ é uma 5-coloração total semiforte para $F_i \setminus E_i^{in}$.

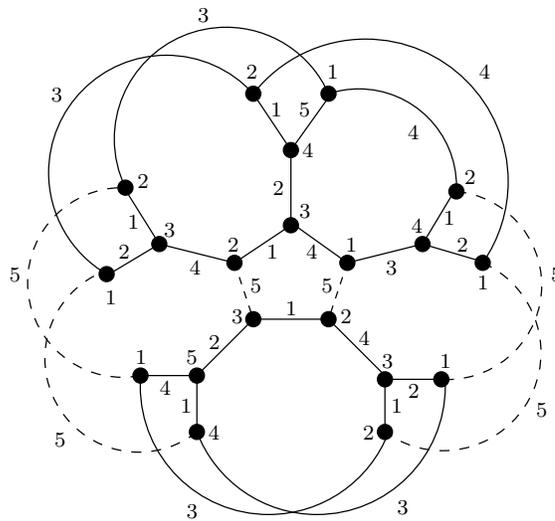
Agora, analisamos a coloração das arestas do conjunto E_i^{in} . Por construção, as arestas de E_i^{in} recebem a cor cinco. Pela hipótese de indução, as arestas de E_{i-2}^{out} também possuem a cor cinco. Além disso, em L_i , apenas o vértice v_{i-1} possui a cor 5 e v_{i-1} não é extremo de nenhuma aresta de E_i^{in} . Logo, concluímos que a atribuição da cor cinco às arestas do conjunto E_i^{in} não introduz conflito.

Para completar a prova, resta-nos mostrar que, para qualquer aresta $uv \in E_i^{in}$, $\phi_i(u) \neq \phi_i(v)$ e $\overline{C}(u) \neq \overline{C}(v)$. Seja S o conjunto de vértices formado pelos extremos das arestas de E_i^{in} . As cores dos vértices de $S \cap V(L_i)$ são conhecidas porque ϕ é uma coloração fixa. Também são conhecidas as cores dos vértices u_1, x_1, y_1 , pois esses vértices pertencem à base F_3 . Resta determinar as cores dos vértices u_{i-2}, x_{i-2} e y_{i-2} que pertencem ao grafo F_{i-2} . Para $i = 5$, estes vértices são u_3, x_3 e y_3 , e pertencem à base F_3 . No caso de $i \geq 7$,



(a) Grafo F_3 com as arestas do conjunto E_3^{out} tracejadas.

(b) Grafo de ligação L_5 munido de uma 5-coloração total semiforte.



(c) Grafo F_5 com as arestas do conjunto E_5^{in} tracejadas. Estas arestas conectam os subgrafos $F_3 \setminus E_3^{out}$ e L_5 .

Figura 3.13: 5-coloração total semiforte do grafo F_5 construída a partir das colorações dos grafos F_3 e L_5 . Observe que todas as arestas do conjunto E_5^{in} recebem a cor 5.

os vértices u_{i-2}, x_{i-2} e y_{i-2} pertencem ao grafo de ligação L_{i-2} , cuja coloração ϕ é fixa. Portanto, concluímos que as cores dos extremos das arestas do conjunto E_i^{in} são:

$$\begin{aligned} \phi_i(u_{i-2}) = 2 \quad \text{e} \quad \phi_i(u_{i-1}) = 3; \quad \phi_i(u_1) = 1 \quad \text{e} \quad \phi_i(u_i) = 2; \\ \phi_i(x_{i-2}) = 2 \quad \text{e} \quad \phi_i(x_{i-1}) = 1; \quad \phi_i(x_1) = 1 \quad \text{e} \quad \phi_i(x_i) = 2; \\ \phi_i(y_{i-2}) = 1 \quad \text{e} \quad \phi_i(y_{i-1}) = 4; \quad \phi_i(y_1) = 2 \quad \text{e} \quad \phi_i(y_i) = 1. \end{aligned}$$

Por inspeção, é possível determinar que os conjuntos das cores que não ocorrem nos extremos das arestas do conjunto E_i^{in} são tais que:

$$\begin{aligned} \overline{C}(u_{i-2}) = \{3\} & \text{ e } \overline{C}(u_{i-1}) = \{4\}; & \overline{C}(u_1) = \{2\} & \text{ e } \overline{C}(u_i) = \{3\}; \\ \overline{C}(x_{i-2}) = \{4\} & \text{ e } \overline{C}(x_{i-1}) = \{2\}; & \overline{C}(x_1) = \{3\} & \text{ e } \overline{C}(x_i) = \{4\}; \\ \overline{C}(y_{i-2}) = \{4\} & \text{ e } \overline{C}(y_{i-1}) = \{2\}; & \overline{C}(y_1) = \{3\} & \text{ e } \overline{C}(y_i) = \{4\}; \end{aligned}$$

e o resultado segue. □

3.3 Snarks de Goldberg

Em 1981, M. K. Goldberg [37] descreveu um método de construção de grafos classe 2 com grau máximo três. Usando o método de Goldberg, também é possível construir famílias infinitas de snarks. Como um exemplo, Goldberg construiu a família dos snarks-flor.

Nesta seção, apresentamos a construção da família conhecida como snarks de Goldberg, que é construída usando o método descrito pelo autor. Assim como na família dos snarks-flor, os snarks de Goldberg são formados a partir de subgrafos fixos denominados blocos de construção e estão definidos a seguir.

O *bloco de construção* B_i é o grafo com conjunto de vértices $V(B_i) := \{t_i, s_i, w_i, v_i, z_i, y_i, x_i, u_i\}$ e conjunto de arestas $E(B_i) := \{t_i s_i, t_i z_i, s_i w_i, w_i v_i, v_i z_i, v_i u_i, w_i y_i, z_i x_i, y_i x_i\}$ e está exibido na Figura 3.14. O conjunto de *arestas de ligação* é dado por $E_{k,j} := \{s_k t_j, x_k y_j, u_k u_j\}$. O *grafo de ligação* L_i é o grafo com conjunto de vértices $V(L_i) := V(B_{i-1}) \cup V(B_i)$ e conjunto de arestas $E(L_i) := E(B_{i-1}) \cup E(B_i) \cup E_{(i-1),i}$. A Figura 3.15 exibe o grafo de ligação L_i .

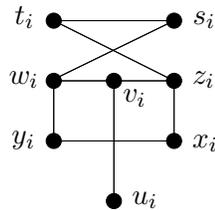


Figura 3.14: Bloco B_i .

Seja $\{G_3, G_5, G_7, \dots\}$ a família infinita dos snarks de Goldberg. O primeiro membro desta família, G_3 , é o grafo com conjunto de vértices $V(G_3) := V(B_1) \cup V(B_2) \cup V(B_3)$ e conjunto de arestas $E(G_3) := E(B_1) \cup E(B_2) \cup E(B_3) \cup E_{1,2} \cup E_{2,3} \cup E_{3,1}$. A Figura 3.16 exibe o snark G_3 .

Para i ímpar e $i \geq 5$, o grafo G_i é obtido a partir dos grafos G_{i-2} e L_i da seguinte forma:

- (i) $V(G_i) := V(G_{i-2}) \cup V(L_i)$; e

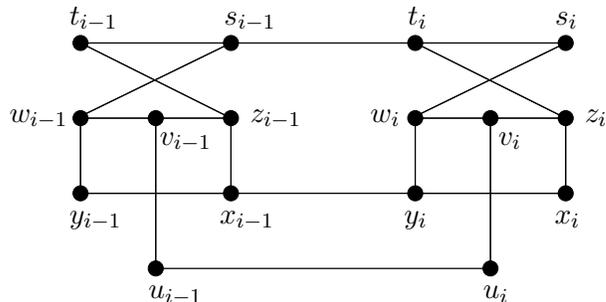


Figura 3.15: Grafo de ligação L_i .

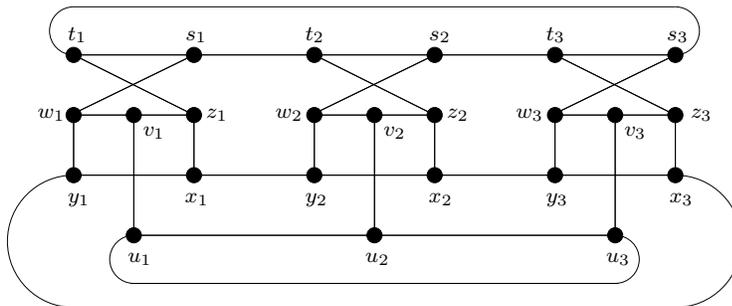


Figura 3.16: Grafo G_3 com vértices rotulados.

- (ii) $E(G_i) := (E(G_{i-2}) \setminus E_{i-2}^{out}) \cup E_i^{in} \cup E(L_i)$, onde
- $E_{i-2}^{out} := E_{(i-2),1}$ e
 - $E_i^{in} := E_{(i-2),(i-1)} \cup E_{i,1}$.

No próximo teorema, usamos esta definição recursiva dos snarks de Goldberg para demonstrar que todo grafo G_i , com i ímpar e $i \geq 3$, admite uma 5-coloração total semiforte.

Teorema 3.8. *Se G é um snark de Goldberg, então $\chi_a''(G) = 5$.*

Demonstração. Seja G_i um snark de Goldberg, i ímpar e $i \geq 3$. Como G_i é 3-regular, $\chi_a''(G_i) \geq 5$. A seguir, provamos que G_i admite uma 5-coloração total semiforte.

A prova é por indução em i e baseada na construção recursiva da família. Inicialmente, construímos 5-colorações totais semifortes ϕ_3 e π para os grafos G_3 e L_i , como exibido nas Figuras 3.17 e 3.18, respectivamente.

Para i ímpar e $i \geq 5$, construímos uma 5-coloração total semiforte ϕ_i , para o grafo G_i , a partir das colorações ϕ_{i-2} e π , usando a definição recursiva dos snarks de Goldberg. Para construir ϕ_i , primeiramente atribuímos a cada elemento de $V(G_i) \cup E(G_i) \setminus E_i^{in}$ as mesmas cores que estes elementos possuem em G_{i-2} ou L_i . Finalmente, atribuímos a cor 3 a todas as arestas do conjunto E_i^{in} . A Figura 3.19 exhibe a 5-coloração total semiforte ϕ_5 do grafo G_5 construída a partir das 5-colorações totais semifortes do subgrafo $G_3 \setminus E_3^{out}$ e do grafo de ligação L_5 .

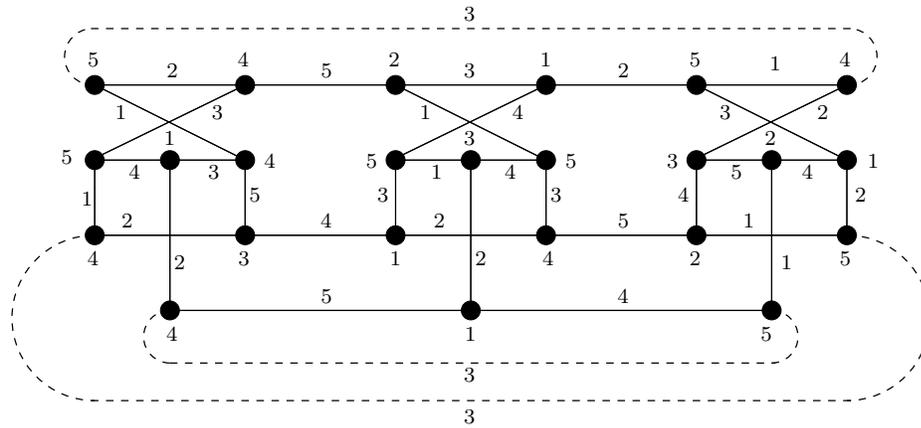


Figura 3.17: 5-coloração total semiforte ϕ_3 do grafo G_3 . As arestas tracejadas pertencem ao conjunto E_3^{out} . O grafo G_3 com vértices rotulados é exibido na Figura 3.16.

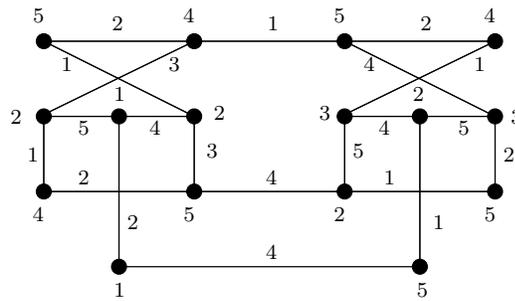


Figura 3.18: 5-coloração total semiforte π do grafo de ligação L_i .

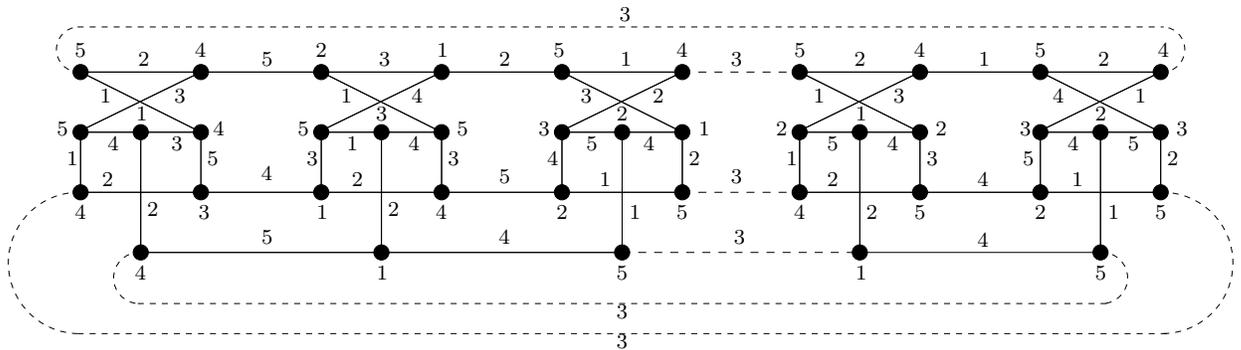


Figura 3.19: 5-coloração total semiforte do grafo G_5 . As arestas tracejadas pertencem ao conjunto E_5^{in} e conectam o subgrafo $G_3 \setminus E_3^{in}$ ao grafo de ligação L_5 .

A seguir, provamos que ϕ_i é uma 5-coloração total semiforte do grafo G_i . Como ϕ_{i-2} e π são 5-colorações totais semifortes para G_{i-2} e L_i , respectivamente, e como os vértices de grau dois em $G_i \setminus E_i^{in}$ não são adjacentes, concluímos que a restrição de ϕ_i aos elementos

do subgrafo $G_i \setminus E_i^{in}$ é uma 5-coloração total semiforte para esse subgrafo.

Por definição de ϕ_i , as arestas de E_i^{in} recebem a cor três. Pela hipótese de indução, as arestas de E_{i-2}^{out} também possuem esta cor. Além disso, em L_i , a cor três não ocorre nos vértices incidentes à arestas do conjunto E_i^{in} . Logo, a atribuição da cor três às arestas de E_i^{in} não introduz conflito.

Para completar a prova, mostramos que, para qualquer aresta $uv \in E_i^{in}$, $\phi_i(u) \neq \phi_i(v)$ e $\overline{C}(u) \neq \overline{C}(v)$. Seja S o conjunto de vértices formado pelos extremos das arestas de E_i^{in} . As cores dos vértices de $S \cap V(L_i)$ são conhecidas porque π é uma coloração fixa. Também são conhecidas as cores dos vértices t_1, y_1 e u_1 , pois esses vértices pertencem à base G_3 . Resta determinar as cores dos vértices s_{i-2}, x_{i-2} e u_{i-2} que pertencem ao grafo G_{i-2} . Para $i = 5$, estes vértices são s_3, x_3 e u_3 , e pertencem à base G_3 . No caso $i \geq 7$, os vértices s_{i-2}, x_{i-2} e u_{i-2} pertencem ao grafo de ligação L_{i-2} , cuja coloração ϕ é fixa. Portanto, concluímos que as cores dos extremos das arestas do conjunto E_i^{in} são:

$$\begin{aligned} \phi_i(s_{i-2}) = 4 \quad & \text{e} \quad \phi_i(t_{i-1}) = 5; & \phi_i(s_i) = 4 \quad & \text{e} \quad \phi_i(t_1) = 5; \\ \phi_i(x_{i-2}) = 5 \quad & \text{e} \quad \phi_i(y_{i-1}) = 4; & \phi_i(x_i) = 5 \quad & \text{e} \quad \phi_i(y_1) = 4; \\ \phi_i(u_{i-2}) = 5 \quad & \text{e} \quad \phi_i(u_{i-1}) = 1; & \phi_i(u_i) = 5 \quad & \text{e} \quad \phi_i(u_1) = 4; \end{aligned}$$

Por inspeção, podemos verificar as cores que não ocorrem nos extremos das arestas do conjunto E_i^{in} e determinar que essas cores são:

$$\begin{aligned} \overline{C}(s_{i-2}) = \{5\} \quad & \text{e} \quad \overline{C}(t_{i-1}) = \{4\}; & \overline{C}(s_i) = \{5\} \quad & \text{e} \quad \overline{C}(t_1) = \{4\}; \\ \overline{C}(x_{i-2}) = \{4\} \quad & \text{e} \quad \overline{C}(y_{i-1}) = \{5\}; & \overline{C}(x_i) = \{4\} \quad & \text{e} \quad \overline{C}(y_1) = \{5\}; \\ \overline{C}(u_{i-2}) = \{2\} \quad & \text{e} \quad \overline{C}(u_{i-1}) = \{5\}; & \overline{C}(u_i) = \{2\} \quad & \text{e} \quad \overline{C}(u_1) = \{1\}; \end{aligned}$$

e o teorema está provado. □

3.4 Snarks de Blanuša generalizados

Como dito anteriormente, o primeiro snark de Blanuša possui 18 vértices e 27 arestas e foi descoberto em 1946 por D. Blanuša [12]. Este snark está exibido na Figura 3.21(a). Quando o primeiro snark de Blanuša foi descoberto, o grafo de Petersen ainda era o único snark conhecido. Anos depois, com o advento de técnicas para se obter novos snarks a partir de snarks já conhecidos, surgiu na literatura um outro snark com 18 vértices e 27 arestas que é uma pequena modificação do primeiro snark de Blanuša. Este snark ficou conhecido como o segundo snark de Blanuša [46] e está exibido na Figura 3.22(a).

Em 1983, J. Watkins [75] construiu duas famílias de snarks que são generalizações dos snarks de Blanuša. De fato, os snarks de Blanuša são os menores membros destas famílias. Assim como na família dos snarks-flor e dos snarks de Goldberg, os snarks de Blanuša generalizados são formados a partir de subgrafos fixos denominados blocos de construção.

Os blocos de construção dos snarks de Blanuša são denominados por A_1 , A_2 e L_i e estão exibidos na Figura 3.20. Os vértices s, t, w, z pertencentes aos blocos A_1 e A_2 , e os vértices a_i, b_i, x_i, y_i pertencentes ao bloco L_i , $i \geq 1$, são denominados *vértices de ligação*.

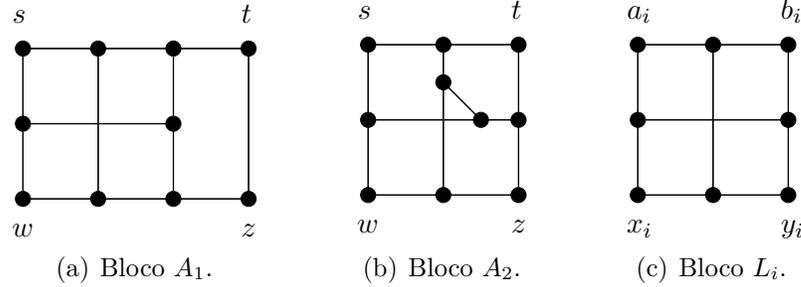


Figura 3.20: Blocos de construção dos snarks de Blanuša.

Seja $\mathcal{B}^1 := \{B_1^1, B_2^1, B_3^1, \dots\}$ e $\mathcal{B}^2 := \{B_1^2, B_2^2, B_3^2, \dots\}$ a primeira e a segunda família de snarks de Blanuša generalizados, respectivamente. O primeiro membro da família \mathcal{B}^1 , o snark B_1^1 , é o primeiro snark de Blanuša e possui conjunto de vértices $V(B_1^1) := V(A_1) \cup V(L_1)$, conjunto de arestas $E(B_1^1) := E(A_1) \cup E(L_1) \cup \{tx_1, za_1, b_1w, y_1s\}$ e está exibido na Figura 3.21(a). Já o primeiro membro da família \mathcal{B}^2 , o snark B_1^2 , é o segundo snark de Blanuša e possui conjunto de vértices $V(B_1^2) := V(A_2) \cup V(L_1)$, conjunto de arestas $E(B_1^2) := E(A_2) \cup E(L_1) \cup \{tx_1, za_1, b_1w, y_1s\}$ e está exibido na Figura 3.22(a).

Seja $k \in \{1, 2\}$. Para cada i , $i \geq 2$, o grafo B_i^k é obtido a partir do snark B_{i-1}^k e do bloco L_i da seguinte forma:

- (i) $V(B_i^k) := V(B_{i-1}^k) \cup V(L_i)$; e
- (ii) $E(B_i^k) := (E(B_{i-1}^k) \setminus E_{i-1}^{out}) \cup E_i^{in} \cup E(L_i)$, tal que:
 - $E_{i-1}^{out} := \{wb_{i-1}, sy_{i-1}\}$ e
 - $E_i^{in} := \{y_{i-1}a_i, b_{i-1}x_i, wb_i, sy_i\}$.

A Figura 3.21(b) exhibe o snark B_2^1 e a Figura 3.22(b) exhibe o snark B_2^2 .

No Teorema 3.9, provamos que todo grafo B_i^k , $i \geq 1$, possui uma 5-coloração total semiforte. A técnica utilizada nesta seção é a mesma que foi utilizada nas seções precedentes.

Teorema 3.9. *Todo snark de Blanuša generalizado possui número cromático total semiforte igual a 5.*

Demonstração. Considere um snark de Blanuša generalizado B_i^k , $i \geq 1$ e $k \in \{1, 2\}$. Como B_i^k é 3-regular, $\chi_a''(B_i^k) \geq 5$. Vamos provar que B_i^k admite uma 5-coloração total semiforte.

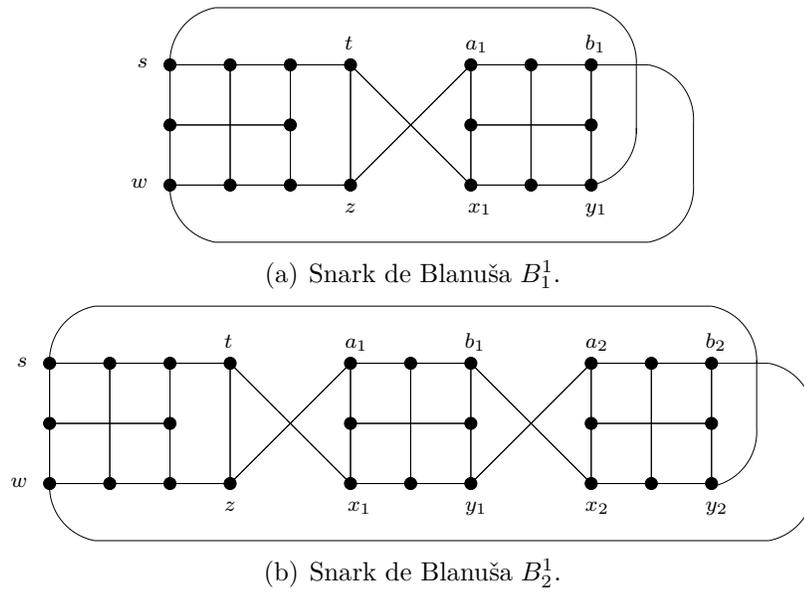


Figura 3.21: Os dois primeiros membros da família \mathcal{B}^1 .

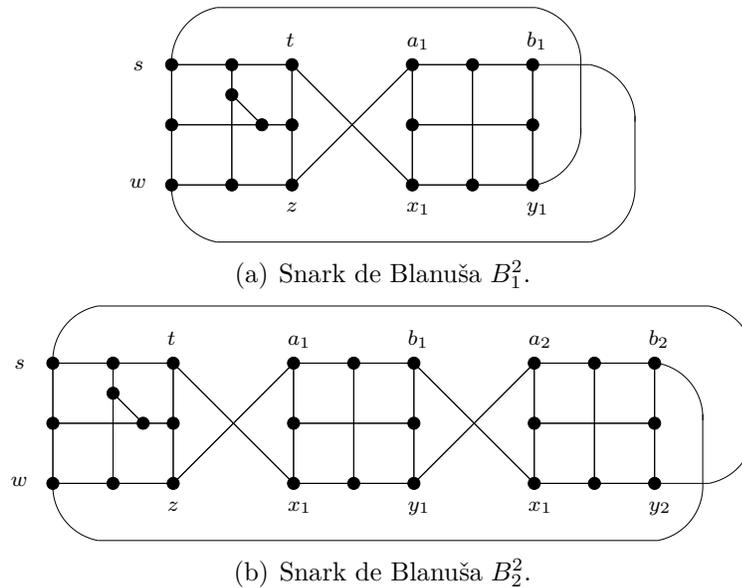


Figura 3.22: Os dois primeiros membros da família \mathcal{B}^2 .

A prova é por indução em i e baseada na construção recursiva da família. Construímos 5-colorações totais semifortes ϕ_1^1 e ϕ_1^2 para os grafos B_1^1 e B_1^2 , como exibido nas Figuras 3.23(a) e 3.24, respectivamente. Também construímos uma 5-coloração total semiforte π para o bloco L_i , como exibido na Figura 3.23(b).

Seja $k \in \{1, 2\}$. Para cada $i, i \geq 2$, uma 5-coloração total semiforte ϕ_i^k de B_i^k é

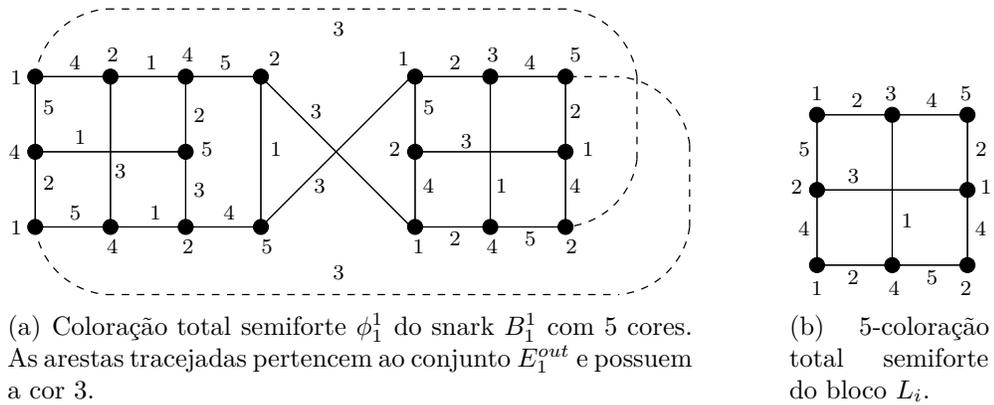


Figura 3.23: 5-coloração total semiforte do snark B_1^1 e do bloco L_i .

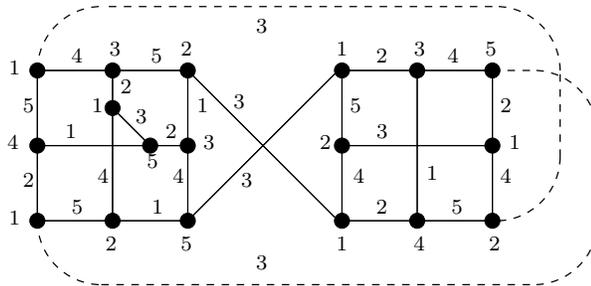


Figura 3.24: 5-Coloração total semiforte do snark B_1^2 . As arestas tracejadas pertencem ao conjunto E_1^{out} e possuem a cor 3.

obtida a partir de colorações ϕ_{i-1}^k e π usando a definição recursiva dos snarks de Blanuša generalizados. A fim de construir a coloração ϕ_i^k , atribuímos aos elementos de $V(B_i^k) \cup E(B_i^k) \setminus E_i^{in}$ as mesmas cores que estes elementos possuem em B_{i-1}^k ou L_i . Por fim, as arestas de E_i^{in} recebem a cor 3.

Agora, provamos que ϕ_i^k é uma 5-coloração total semiforte do snark B_i^k . Por hipótese de indução, ϕ_{i-1}^k e π são 5-colorações totais semifortes para B_{i-1}^k e L_i , respectivamente. Note que os vértices de grau dois em $B_i^k \setminus E_i^{in}$ não são adjacentes, logo a coloração de $B_i^k \setminus E_i^{in}$ preserva a propriedade de que quaisquer dois vértices adjacentes possuem conjuntos de cores distintos. Logo, a coloração ϕ_i restrita aos elementos de $B_i^k \setminus E_i^{in}$ é uma 5-coloração total semiforte. Ademais, pelos mesmos argumentos usados na demonstração dos Teoremas 3.7 e 3.8, concluímos que a coloração das arestas de E_i^{in} não introduz conflito.

Para completar a prova, mostramos que, para qualquer aresta $uv \in E_i^{in}$, $\phi_i(u) \neq \phi_i(v)$ e $\overline{C}(u) \neq \overline{C}(v)$. Seja S o conjunto dos vértices que são extremos das arestas de E_i^{in} , ou seja, $S := \{a_i, x_i, b_{i-1}, y_{i-1}, b_i, y_i, s, w\}$. As cores dos vértices de $S \cap V(L_i)$ são conhecidas porque ϕ é uma coloração fixa. As cores dos vértices s e w também são conhecidas, pois

esses vértices pertencem à base B_1^k . Resta determinar as cores dos vértices b_{i-1} e y_{i-1} que pertencem ao grafo B_{i-1}^k . Para $i \geq 2$, os vértices b_{i-1} e y_{i-1} pertencem ao bloco L_{i-1} , cuja coloração ϕ é fixa. Portanto, concluímos que:

$$\begin{aligned} \phi_i(a_i) = 1 \quad \text{e} \quad \phi_i(y_{i-1}) = 2; \quad \phi_i(x_i) = 1 \quad \text{e} \quad \phi_i(b_{i-1}) = 5; \\ \phi_i(b_i) = 5 \quad \text{e} \quad \phi_i(w) = 1; \quad \phi_i(y_i) = 2 \quad \text{e} \quad \phi_i(s) = 1; \end{aligned}$$

Por inspeção, também podemos verificar as cores que não ocorrem nos vértices do conjunto S e determinar que essas cores são:

$$\begin{aligned} \overline{C}(a_i) = \{4\} \quad \text{e} \quad \overline{C}(y_{i-1}) = \{1\}; \quad \overline{C}(b_i) = \{1\} \quad \text{e} \quad \overline{C}(w) = \{4\}; \\ \overline{C}(x_i) = \{5\} \quad \text{e} \quad \overline{C}(b_{i-1}) = \{1\}; \quad \overline{C}(y_i) = \{1\} \quad \text{e} \quad \overline{C}(s) = \{2\}; \end{aligned}$$

e o resultado segue. □

3.5 Snarks de Loupekin

Em 1976, F. Loupekin propôs um outro método de construção de famílias infinitas de snarks. Este método foi originalmente descrito por R. Isaacs [47]. Nesta seção, apresentamos a construção de uma família infinita de snarks que utiliza o método proposto por Loupekin.

Seja G o grafo de Petersen e seja P_3 um caminho de três vértices contido em G . Denominamos *bloco* $B(G)$, o subgrafo obtido a partir de G pela remoção dos vértices do caminho P_3 . A Figura 3.25 ilustra essa construção. Como a cintura do grafo de Petersen é igual a cinco, o grafo $B(G)$ possui exatamente cinco vértices de grau dois, nomeados u, v, w, x, y de acordo com a Figura 3.25(b). Esses vértices são denominados *vértices de borda*.

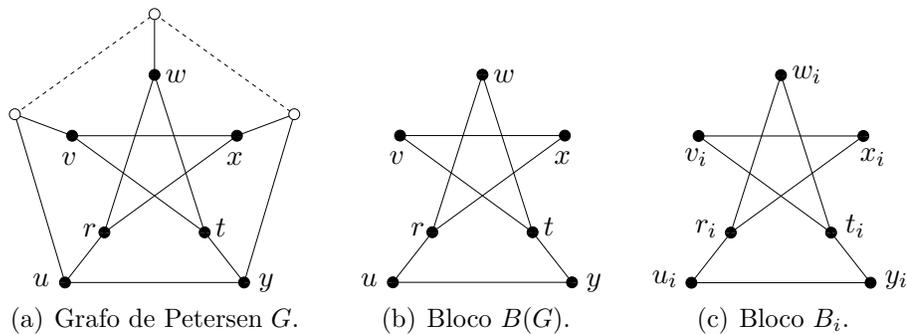


Figura 3.25: Construção de um bloco a partir do grafo de Petersen.

Sejam G_0, \dots, G_{k-1} , $k \geq 3$, grafos isomorfos ao grafo de Petersen. A seguir, construímos um grafo subcúbico G_B usando blocos $B(G_i)$, $0 \leq i \leq k-1$. Denotamos cada bloco $B(G_i)$ por B_i e, por conveniência de notação, anexamos o subíndice i aos rótulos dos vértices do bloco B_i , como mostra a Figura 3.25(c).

Para cada i , $i \in \{0, \dots, k-1\}$, conecte os blocos B_i e B_{i+1} por meio das *arestas de ligação* $\{x_i u_{i+1}, y_i v_{i+1}\}$ ou $\{x_i v_{i+1}, y_i u_{i+1}\}$ (índices módulo k), como ilustrado na Figura 3.26. Observe que as arestas de ligação conectam cada vértice de borda x_i, y_i do bloco B_i a exatamente um vértice de borda u_{i+1}, v_{i+1} do bloco B_{i+1} e vice-versa. O grafo resultante é denominado *grafo de blocos* e é denotado por G_B . O grafo G_B possui exatamente k vértices de grau dois, w_0, w_1, \dots, w_{k-1} , conforme pode ser observado nos exemplos exibidos na Figura 3.27.

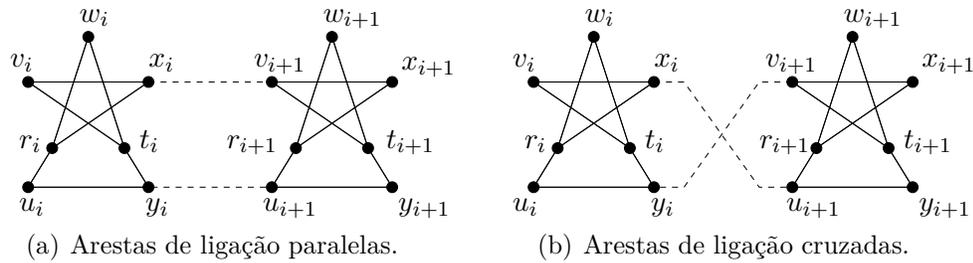


Figura 3.26: Esquema mostrando os possíveis pares de arestas de ligação entre dois blocos indexados B_i e B_{i+1} . As arestas de ligação estão representadas por linhas tracejadas.

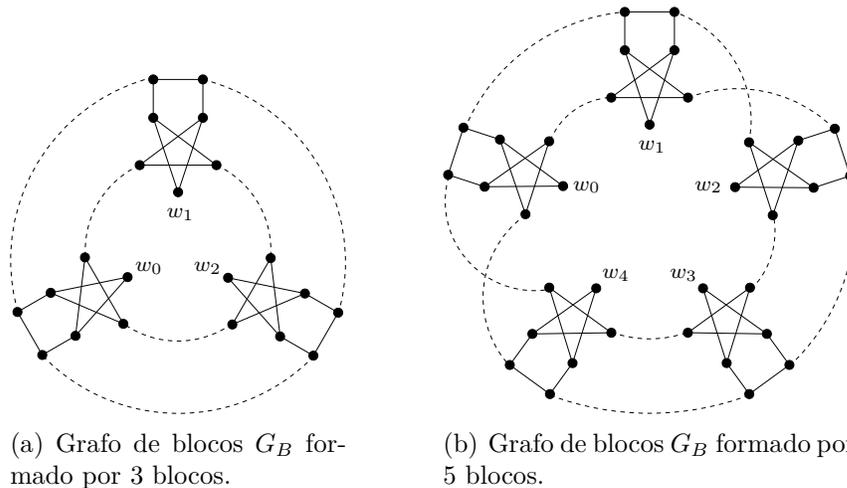


Figura 3.27: Grafos de blocos. As arestas tracejadas são arestas de ligação. Os vértices de borda w_0, w_1, \dots, w_{k-1} possuem grau 2.

Seja G_C um grafo com k vértices de grau um, tal que cada uma de suas componentes conexas é isomorfa a um grafo completo K_2 ou a um grafo estrela com 4 vértices. Para o

grafo G_C , denote z_0, \dots, z_{k-1} , os vértices de grau um e e_0, \dots, e_{k-1} , as arestas incidentes nestes vértices. O grafo G_C é denominado *grafo central*. Exemplos de grafos centrais são apresentados na Figura 3.28.

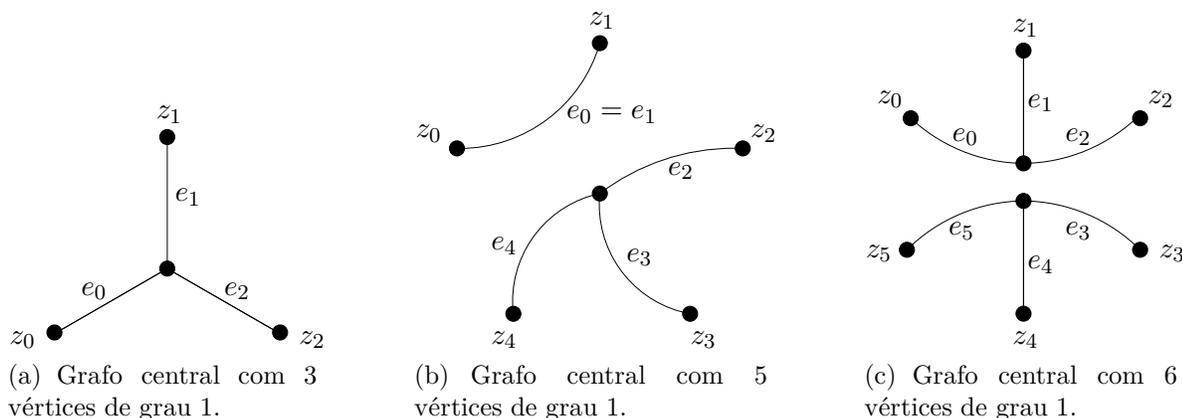


Figura 3.28: Exemplos de grafos centrais.

Seja G_B um grafo de blocos formado por k blocos e seja G_C um grafo central com k vértices de grau um, tais como definidos acima. Para cada i , $i \in \{0, \dots, k-1\}$, identifique o vértice $w_i \in V(G_B)$ com o vértice $z_i \in V(G_C)$. O grafo resultante desta operação é denominado *grafo G_L* . Por construção, todo grafo G_L é 3-regular. A Figura 3.29 exhibe um grafo G_L juntamente com o seu subgrafo de blocos e o seu subgrafo central.

Seja H , pertencente a família dos grafos G_L , formado por k blocos, $k \geq 3$. Isaacs [47] provou que, se k é ímpar com $k \geq 3$, então H é um snark. O autor também mostrou que, quando k é par, com $k \geq 6$, é necessário adicionar uma restrição ao subgrafo central G_C para que o grafo H seja um snark. Para k par e $k \geq 6$, se o subgrafo central G_C admitir uma 3-coloração de arestas π tal que $\pi(e_i) = \pi(e_{i+1})$ para todo i ímpar ($0 \leq i \leq k-1$), ou para todo i par ($0 \leq i \leq k-1$), então o grafo H , que possui G_C como subgrafo central, não é um snark. Um exemplo de subgrafo central G_C que não admite tal coloração é aquele que possui três vértices z_i, z_{i+1}, z_{i+2} adjacentes a um vértice comum. Em qualquer 3-coloração de arestas deste grafo, as arestas e_i, e_{i+1}, e_{i+2} possuem cores distintas. A Figura 3.28(c) e a Figura 3.30 apresentam exemplos de subgrafos centrais que não admitem a coloração de arestas descrita por Isaacs.

Isaacs mostrou que, usando a construção definida acima, não é possível obter um snark formado por 4 blocos $B(G)$.

Denominamos *snarks LP_1* os grafos G_L composto por k blocos $B(G)$, com k ímpar e $k \geq 3$ ou k par, $k \geq 6$ e tal que o subgrafo central G_C não admite a 3-coloração de arestas descrita anteriormente².

²O nome snark LP_1 , dado a esta família, foi baseado no trabalho de L. Vaux [67]

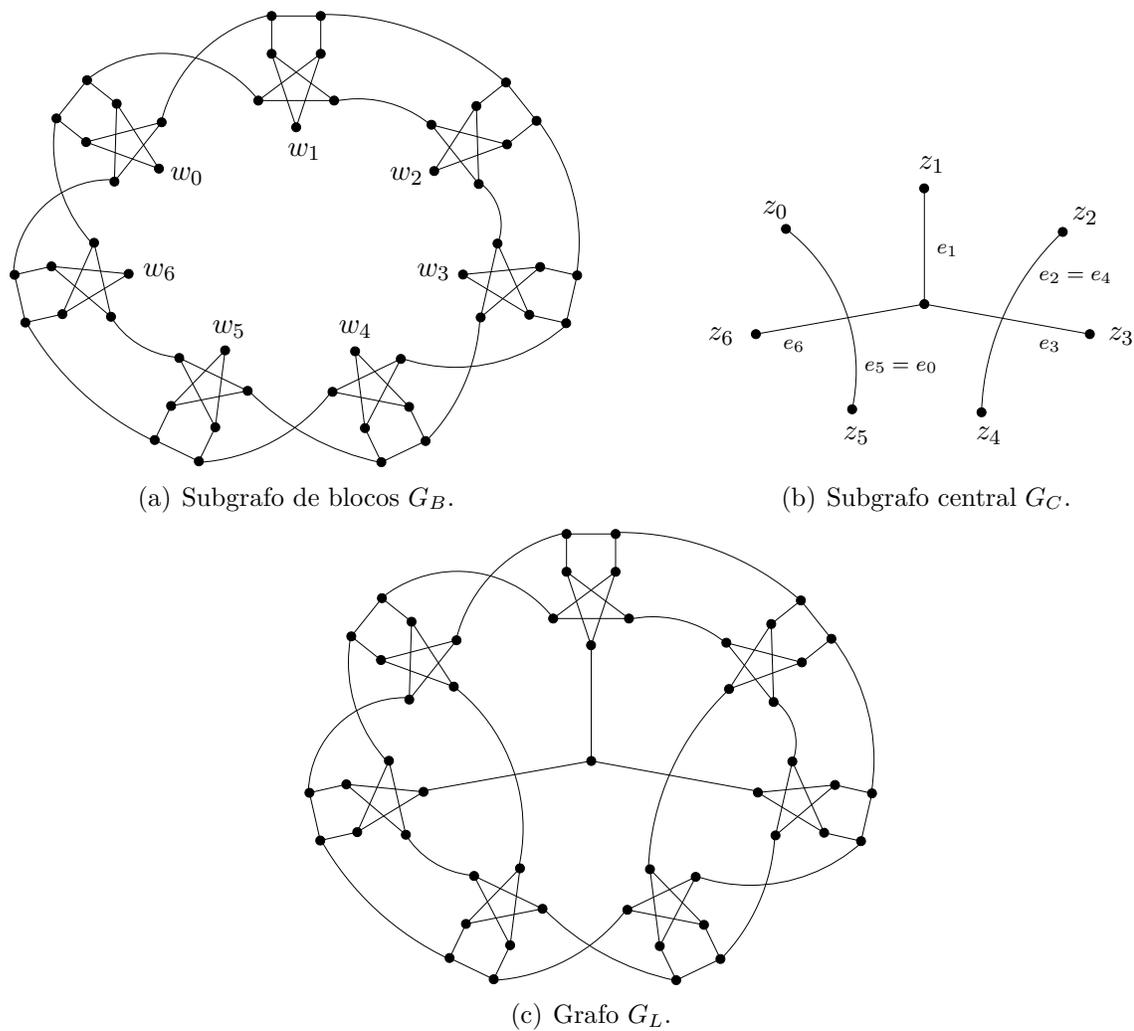


Figura 3.29: Um grafo G_L e seus subgrafos G_B e G_C .

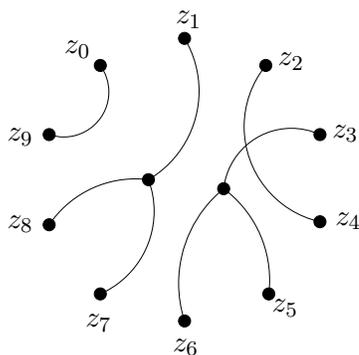
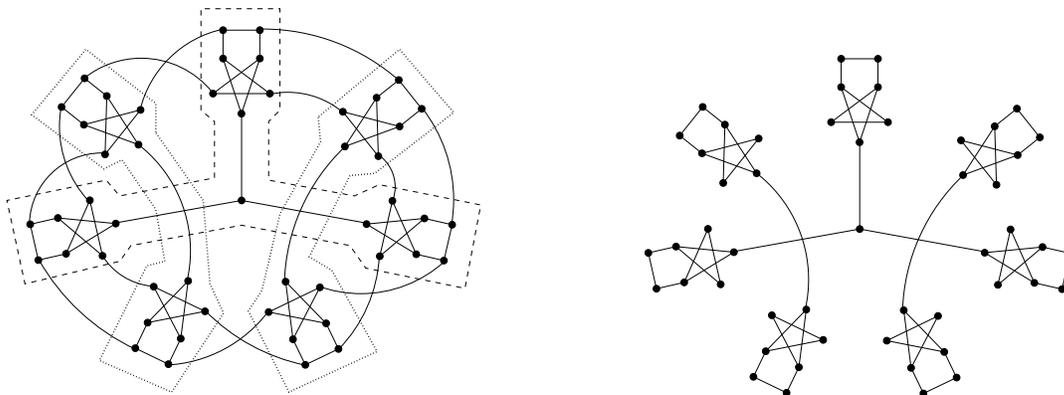


Figura 3.30: Exemplo de subgrafo central com 10 vértices de grau um.

Seja G um snark LP_1 . Um *gadget duplo* de G , denotado por G_d , é um subgrafo de G que possui $V(G_d) := V(B_i) \cup V(B_j)$ e $E(G_d) := E(B_i) \cup E(B_j) \cup \{w_i w_j\}$. Um *gadget triplo* de G , denotado por G_t , é um subgrafo de G com $V(G_t) := V(B_i) \cup V(B_k) \cup V(B_j) \cup \{s\}$ e $E(G_t) := E(B_i) \cup E(B_k) \cup E(B_j) \cup \{w_i s, w_k s, w_j s\}$. A Figura 3.31 apresenta o esquema de um snark LP_1 e seus gadgets. Pela definição de gadgets, quaisquer dois gadgets distintos pertencentes a G são subgrafos disjuntos.



(a) Snark LP_1 composto por dois gadgets duplos e um gadget triplo. Os dois gadgets duplos estão delimitados por linhas pontilhadas e o gadget triplo está delimitado por linhas tracejadas.

(b) Exemplo mostrando apenas os gadgets duplos e triplos do snark LP_1 composto por 7 blocos.

Figura 3.31: Esquema exibindo um snark LP_1 e seus gadgets.

A seguir, determinamos o número cromático total semiforte dos snarks LP_1 .

Teorema 3.10. *Se G é um snark LP_1 , então $\chi_a''(G) = 5$.*

Demonstração. Seja G um snark LP_1 formado por k blocos, $k \geq 3$ e $k \neq 4$. Lembre que, para $0 \leq i \leq k-1$, dois blocos B_i e B_{i+1} são conectados por meio de arestas de ligação $\{x_i u_{i+1}, y_i v_{i+1}\}$ ou $\{x_i v_{i+1}, y_i u_{i+1}\}$ (índices módulo k). Lembre também que o snark G é composto por r gadgets G_1, \dots, G_r , $r \geq 1$. Por definição, cada gadget $G_i \subset G$ é isomorfo ou ao grafo da Figura 3.32(a), ou ao grafo da Figura 3.33(a).

A seguir, definimos um mapeamento $\phi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, \dots, 5\}$. A Figura 3.32(b) exhibe uma 5-coloração total semiforte fixa π_1 para gadgets duplos e a Figura 3.33(b) exhibe uma 5-coloração total semiforte fixa π_2 para gadgets triplos. Para $1 \leq i \leq r$, seja $G_i \subset G$, um gadget de G . Para todo elemento $x \in V(G_i) \cup E(G_i)$, fazemos:

$$\phi(x) := \begin{cases} \pi_1(x), & \text{se } G_i \text{ é um gadget duplo;} \\ \pi_2(x), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para concluir a coloração ϕ do snark G , atribuímos a cor 2 a todas as arestas de ligação de G .

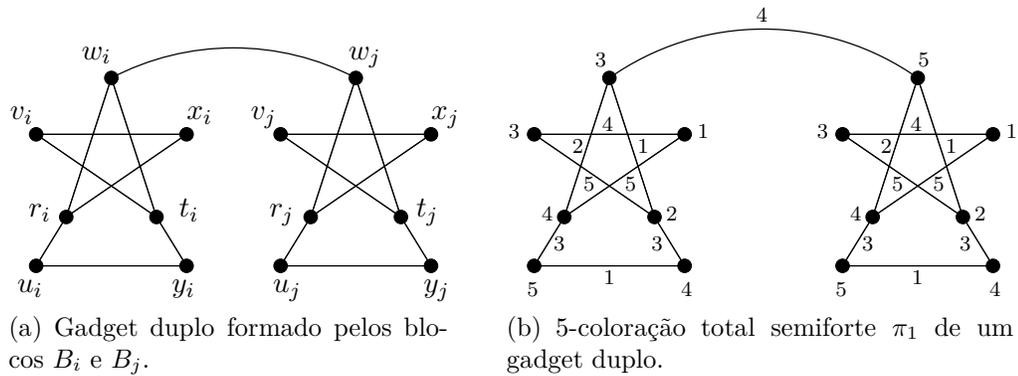


Figura 3.32: 5-coloração total semiforte π_1 de um gadget duplo.

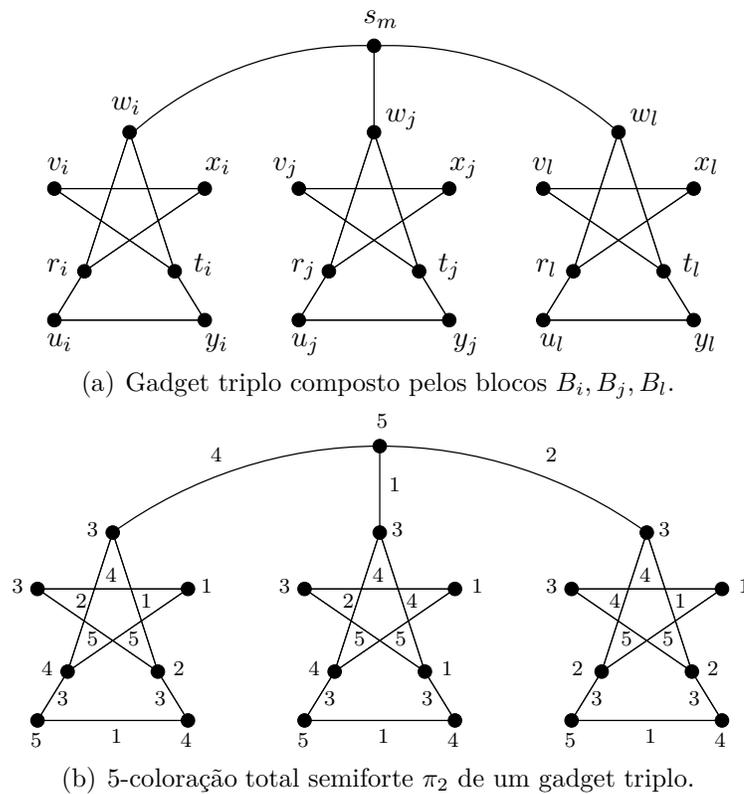


Figura 3.33: 5-coloração total semiforte π_2 de um gadget triplo.

A seguir, provamos que ϕ é uma 5-coloração total semiforte de G . Pela definição de ϕ , cada gadget duplo recebe a coloração π_1 da Figura 3.32(b) e cada gadget triplo recebe a coloração π_2 da Figura 3.33(b). Por inspeção, pode ser verificado que essas duas colorações são 5-colorações totais semifortes para os gadgets duplos e triplos de G . Dados dois gadgets distintos $G_i, G_j \subset G$, sabemos que $V(G_i) \cap V(G_j) = \emptyset$ e que $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$. Desta forma, o subgrafo de G formado pela união disjunta dos

gadgets G_i possui uma 5-coloração total semiforte. Para concluir a demonstração, resta mostrar que, para toda aresta de ligação $uv \in E(G)$, $\phi(u) \neq \phi(v)$ e $\overline{C}(u) \neq \overline{C}(v)$. Para isso, observe que, para todo bloco $B_i \subset G$, os vértices de borda $v_i, u_i, x_i, y_i \in V(B_i)$ possuem o seguinte invariante:

$$\begin{aligned} \overline{C}(v_i) = \{1, 2\} \quad \text{e} \quad \overline{C}(x_i) = \{2, 3\}; \quad \phi(v_i) = 3 \quad \text{e} \quad \phi(x_i) = 1; \\ \overline{C}(u_i) = \{2, 4\} \quad \text{e} \quad \overline{C}(y_i) = \{2, 5\}; \quad \phi(u_i) = 5 \quad \text{e} \quad \phi(y_i) = 4; \end{aligned}$$

Logo, a atribuição da cor 2 às arestas de ligação não introduz conflito, dado que a cor 2 não ocorre nos vértices de borda u_i, v_i, x_i, y_i dos blocos B_i . Além disso, os conjuntos de cores dos vértices de borda u_i, v_i, x_i, y_i são dois a dois disjuntos. Observe também que as cores dos vértices u_i e v_i são distintas das cores dos vértices x_i e y_i . Deste modo, concluímos que ϕ é uma 5-coloração total semiforte de G . \square

3.6 Subgrafos de grafos com $\Delta(G) = 3$

Seja G um grafo simples, conexo e com $\Delta(G) = 3$. Seja também H um subgrafo conexo de G . De acordo com a questão proposta pelo Problema 2.9, é possível ter $\chi_a''(H) > \chi_a''(G)$. A Figura 3.34 exhibe um exemplo em que isto ocorre.

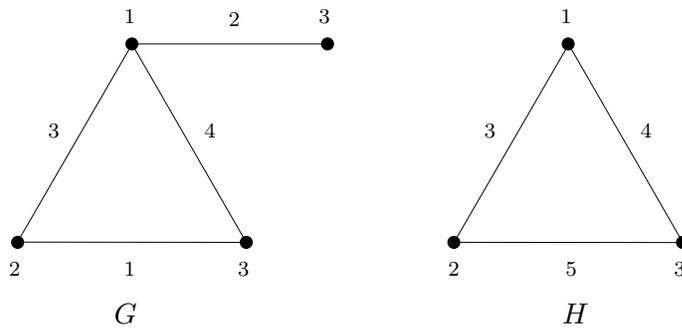


Figura 3.34: Um grafo simples e conexo G com $\Delta(G) = 3$, $\chi_a''(G) = 4$ e um subgrafo $H \subset G$ com $\chi_a''(H) = 5$.

Se o grafo G possui vértices adjacentes de grau máximo, a solução do Problema 2.9 (pág. 25) está relacionada à solução da Conjetura 3.2 (pág. 48). Se esta conjetura for verdadeira, então, para todo subgrafo $H \subseteq G$, teremos que $\chi_a''(H) \leq \chi_a''(G)$.

No Teorema 3.11 a seguir, solucionamos o Problema 2.9 para o caso em que o subgrafo $H \subset G$ possui $\chi_a''(H) \leq 2$; já no Teorema 3.12 solucionamos o Problema 2.9 para o caso em que o subgrafo $H \subseteq G$ possui $\Delta(H) = 3$ e não possui vértices adjacentes de grau máximo. Desta forma, considerando G como definido acima, o Problema 2.9 continua aberto apenas para o caso em que $\Delta(H) = 3$ e H possui vértices adjacentes de grau máximo.

Teorema 3.11. *Seja G um grafo simples, conexo e com $\Delta(G) = 3$. Seja $H \subset G$ um subgrafo conexo tal que $\Delta(H) \leq 2$. Então, $\chi''_a(H) > \chi''_a(G)$ se e somente se $H \cong K_3$ e G não possui vértices adjacentes de grau máximo.*

Demonstração. Seja G um grafo simples, conexo e com $\Delta(G) = 3$. Seja $H \subset G$ um subgrafo conexo tal que $\Delta(H) \leq 2$. Suponha que G não possua vértices adjacentes de grau máximo e que $H \cong K_3$. Pelo Teorema 3.5, $\chi''_a(G) = 4$ e, pelo Teorema 2.15, $\chi''_a(H) = 5$. Logo, $\chi''_a(H) = 5 > 4 = \chi''_a(G)$, e o resultado segue.

Agora, suponha que G possua vértices adjacentes de grau máximo. Pela Proposição 2.7, temos que $\chi''_a(G) \geq 5$. Se $\Delta(H) \in \{0, 1\}$, então $\chi''_a(H) \leq 3$ e o resultado segue. Se $\Delta(H) = 2$ e $H \not\cong K_3$, o resultado segue pelo Corolário 2.25. Se $\Delta(H) = 2$ e $H \cong K_3$, então, pelo Teorema 2.15, $\chi''_a(H) = 5$. Neste caso, $\chi''_a(H) = 5 = \chi''_a(G)$ e o resultado segue. Suponha que G não possua vértices adjacentes de grau máximo. Então, $H \not\cong K_3$. Pelo Corolário 2.25, temos que $\chi''_a(H) \leq 4 = \chi''_a(G)$, e o resultado segue. \square

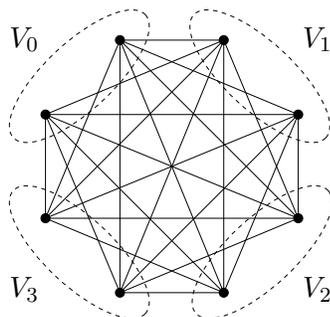
Teorema 3.12. *Seja G um grafo simples, conexo e com $\Delta(G) = 3$. Seja $H \subseteq G$ um subgrafo conexo tal que $\Delta(H) = 3$. Se H não possui vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) \geq \chi''_a(H)$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.6, $\chi''_a(G) \geq 4$. Pelo Teorema 3.5, $\chi''_a(H) = 4$. Logo, $\chi''_a(G) \geq 4 = \chi''_a(H)$. \square

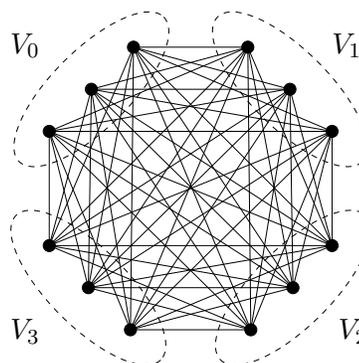
Capítulo 4

Grafos r-partidos

Sejam r e n inteiros positivos. Um grafo r -partido é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em r conjuntos independentes. Um grafo 3-partido é também denominado *tripartido*. Dizemos que um grafo G é r -partido completo quando o seu conjunto de vértices pode ser particionado em r conjuntos independentes V_0, V_1, \dots, V_{r-1} e, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$, pertencentes a partes distintas, temos $uv \in E(G)$. Um grafo r -partido completo no qual todas as suas partes possuem cardinalidade n é denominado um *grafo equipartido completo* e é denotado por $K_{r(n)}$. A Figura 4.1 apresenta dois exemplos de grafos equipartidos completos.



(a) Grafo $K_{4(2)}$. Cada parte deste grafo possui exatamente dois vértices.



(b) Grafo $K_{4(3)}$. Cada uma das quatro partes deste grafo possui exatamente três vértices.

Figura 4.1: Exemplos de grafos equipartidos completos.

Na Seção 4.1, provamos que a Conjetura da Coloração Total Semiforte é verdadeira para os grafos equipartidos completos. Além disso, provamos que os grafos equipartidos completos G de ordem par possuem $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$, determinando o seu número cromático total semiforte. Posteriormente, na Seção 4.2, provamos que a Conjetura da

Coloração Total Semiforte é verdadeira para os grafos tripartidos e apresentamos duas famílias de grafos tripartidos completos que possuem $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

4.1 Grafos equipartidos completos

Nesta seção, estudamos o problema da coloração total semiforte nos grafos equipartidos completos. Somente consideramos grafos $K_{r(n)}$ com $r \geq 2$ e $n \geq 2$, pois o número cromático total semiforte do $K_{r(n)}$ com $r < 2$ ou $n < 2$ já é conhecido. De fato, quando $n = 1$, o grafo $K_{r(n)}$ é isomorfo ao grafo completo K_r , cujo número cromático total semiforte é conhecido (Teorema 2.15). Quando $r = 1$, $V(K_{1(n)})$ é um conjunto independente. Neste caso, como cada vértice pode ser colorido com a mesma cor, $\chi_a''(K_{1(n)}) = 1$.

A abordagem deste capítulo é baseada na construção de colorações para o grafo $K_{r(n)}$. Para auxiliar esta construção, definimos uma decomposição dos grafos equipartidos completos. Uma *rotulação canônica* do $K_{r(n)}$ é uma rotulação dos vértices do $K_{r(n)}$, definida da seguinte maneira: para $0 \leq j \leq r - 1$, cada vértice na parte V_j recebe um rótulo u_j^i distinto, com $0 \leq i \leq n - 1$. A Figura 4.2 exibe uma rotulação canônica do $K_{4(2)}$.

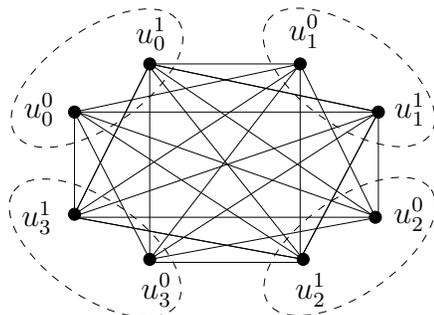


Figura 4.2: $K_{4(2)}$ munido de uma rotulação canônica.

Considere o grafo $K_{r(n)}$ munido de uma rotulação canônica. Definimos os subgrafos $K_r^i := G[\{u_0^i, u_1^i, \dots, u_{r-1}^i\}]$, $0 \leq i \leq n - 1$. Observe que cada subgrafo K_r^i é isomorfo ao grafo completo K_r . Deste modo, $K_{r(n)}$ possui n subgrafos induzidos disjuntos que são isomorfos ao K_r . A Figura 4.3 exibe o grafo $K_{4(2)}$ munido de uma rotulação canônica e os seus subgrafos induzidos K_4^0 e K_4^1 .

Definimos o subgrafo B_{ij} como o grafo bipartido com partes $V(K_r^i)$ e $V(K_r^j)$, $0 \leq i < j \leq n - 1$, tal que B_{ij} é o subgrafo do $K_{r(n)}$ induzido pelas arestas que ligam os vértices do K_r^i aos vértices do K_r^j . Note que B_{ij} é um grafo $(r - 1)$ -regular. De fato, as arestas $u_k^i u_k^j$ ($0 \leq k \leq r - 1$) não existem dado que os vértices u_k^i e u_k^j pertencem a uma mesma parte V_k no grafo $K_{r(n)}$. A Figura 4.4 exibe o grafo $K_{4(2)}$ munido de uma rotulação canônica

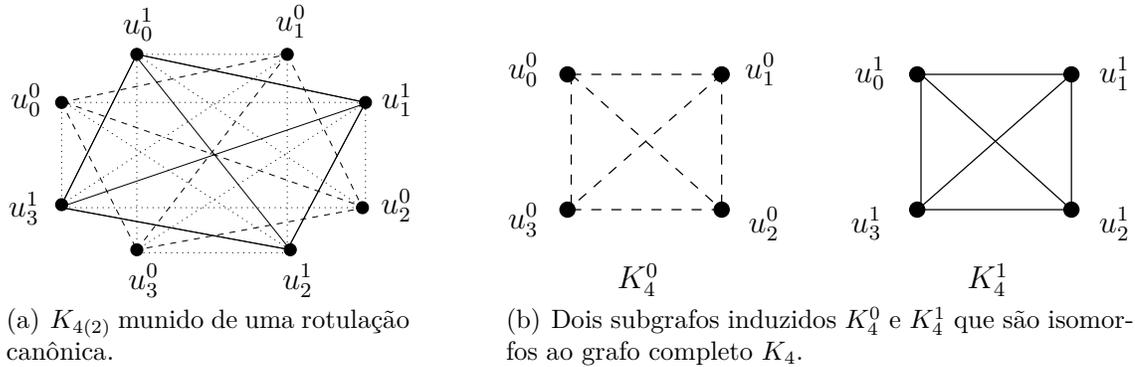


Figura 4.3: $K_{4(2)}$ e os seus subgrafos induzidos K_4^0 e K_4^1 .

e o seu subgrafo bipartido, B_{01} , induzido pelas arestas que ligam os vértices do subgrafo K_4^0 aos vértices do subgrafo K_4^1 .

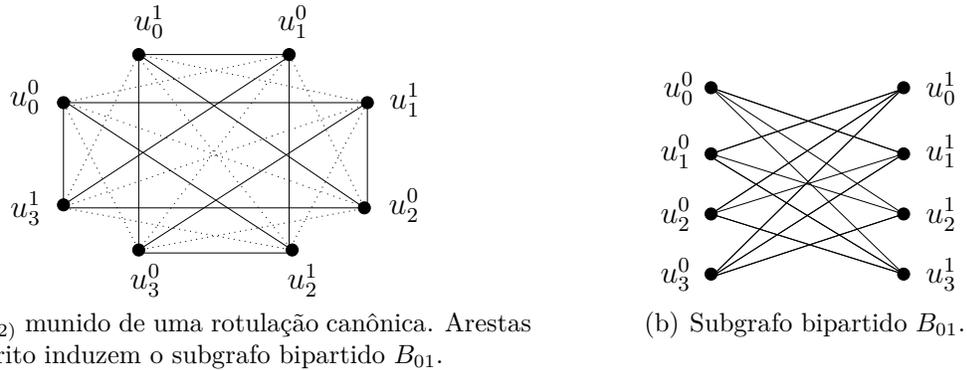


Figura 4.4: $K_{4(2)}$ munido de uma rotação canônica e seu subgrafo bipartido B_{01} .

Usando a notação acima, definimos a *decomposição canônica* $[\mathcal{K}, \mathcal{B}]$ do $K_{r(n)}$ como a união dos subgrafos \mathcal{K} e \mathcal{B} , disjuntos nas arestas, tais que:

$$\mathcal{K} := \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} K_r^i, \quad \text{e} \quad \mathcal{B} := \bigcup_{0 \leq i < j \leq n-1} B_{ij}.$$

Assim, $K_{r(n)} \cong (\mathcal{K} \cup \mathcal{B})$. Observe que, para $n \geq 2$, \mathcal{K} é um grafo não conexo composto pelas componentes conexas K_r^i , $0 \leq i \leq n-1$.

Dois vértices $u_i^l, u_p^j \in V(K_{r(n)})$ são denominados *vértices correspondentes* se $l = p$ e $i \neq j$; ou seja, dois vértices são correspondentes se e somente se eles são distintos e pertencem à mesma parte no grafo $K_{r(n)}$. Por exemplo, na Figura 4.3(b), os vértices u_0^0 e u_1^0 são correspondentes. Duas arestas $u_i^l u_p^l, u_s^j u_t^j \in E(K_{r(n)})$ são *arestas correspondentes* se $l = s, p = t$ e $i \neq j$. Por exemplo, as arestas $u_1^0 u_2^0$ e $u_1^1 u_2^1$ são arestas correspondentes

no $K_{4(2)}$; observe na Figura 4.3(b) que estas arestas pertencem aos subgrafos K_4^0 e K_4^1 , respectivamente.

Seja G_R o grafo simples subjacente, obtido a partir de $[\mathcal{K}, \mathcal{B}]$ pela contração de cada subgrafo K_r^i a um vértice v_i . O grafo G_R é denominado o *grafo representante* do $K_{r(n)}$. A decomposição canônica do $K_{r(n)}$ pode ser representada pelo grafo G_R da seguinte maneira: cada vértice $v_i \in V(G_R)$ corresponde a um subgrafo $K_r^i \subset \mathcal{K}$ e cada aresta $v_i v_j \in E(G_R)$ corresponde ao grafo bipartido $B_{ij} \subseteq \mathcal{B}$. Observe que $G_R \cong K_n$. Por exemplo, o grafo representante do $K_{4(2)}$ é isomorfo ao grafo completo K_2 . A Figura 4.5 ilustra a decomposição canônica do $K_{4(3)}$ e apresenta o seu grafo representante.

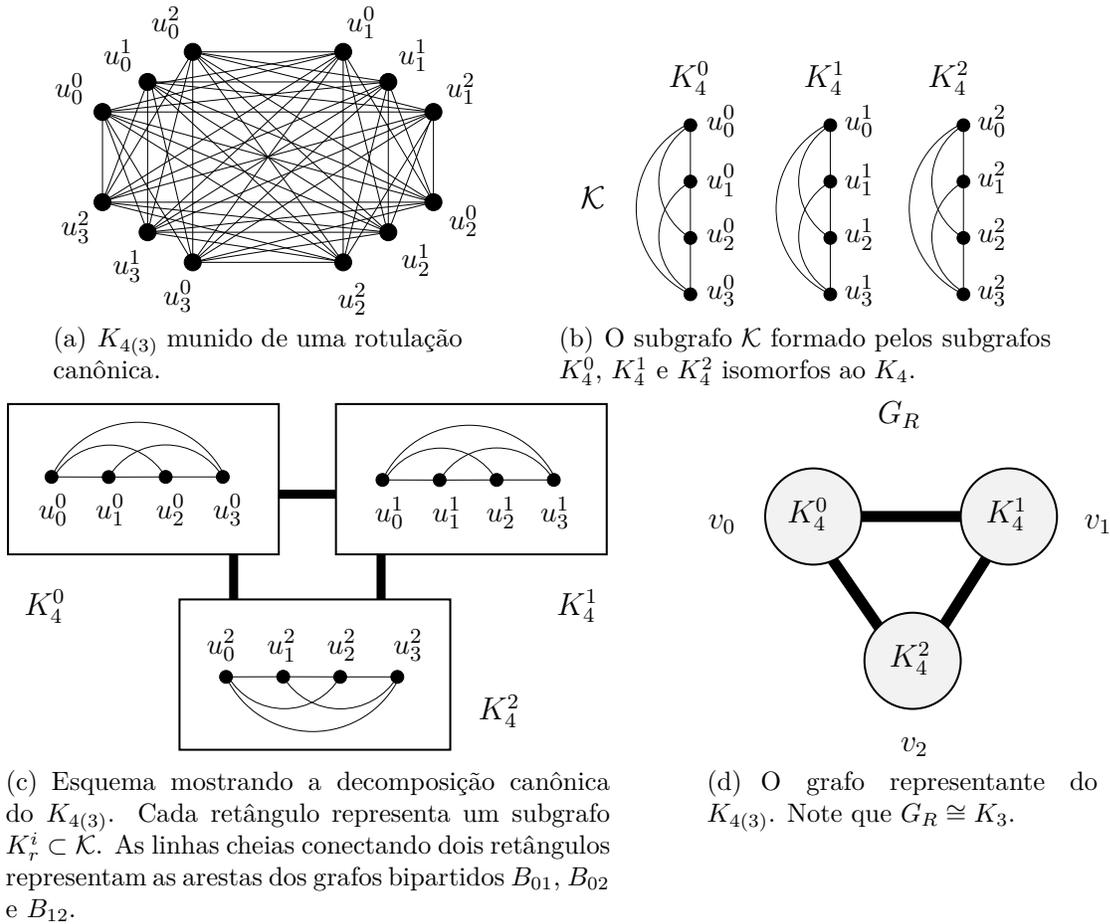


Figura 4.5: Decomposição canônica do $K_{4(3)}$ e o seu grafo representante G_R .

A seguir apresentamos um resultado que é utilizado na demonstração do Teorema 4.2.

Lema 4.1. *Seja r um inteiro positivo ímpar e seja G um grafo bipartido $(r - 1)$ -regular com partes $X := \{x_0, \dots, x_{r-1}\}$ e $Y := \{y_0, \dots, y_{r-1}\}$ tal que $x_i y_i \notin E(G)$, para $i \in \{0, \dots, r - 1\}$. Então, existe uma r -coloração de arestas $\pi : E(G) \rightarrow \{0, \dots, r - 1\}$ tal*

que $\pi(x_i y_j) \notin \{i, j\}$.

Demonstração. Seja r um inteiro positivo ímpar e seja $H \cong K_{r,r}$ com partes $X := \{x_0, \dots, x_{r-1}\}$ e $Y := \{y_0, \dots, y_{r-1}\}$. Pelo Teorema 1.4, $\chi'(H) = r$. Seja ϕ uma r -coloração de arestas de H definida da seguinte maneira: para $0 \leq i \leq r-1$ e $0 \leq p \leq r-1$,

$$\phi(x_i y_{(i+p) \bmod r}) := (i + 2p) \bmod r.$$

A Figura 4.6 exibe um grafo bipartido $H \cong K_{5,5}$ munido de uma 5-coloração de arestas ϕ tal como definida acima.

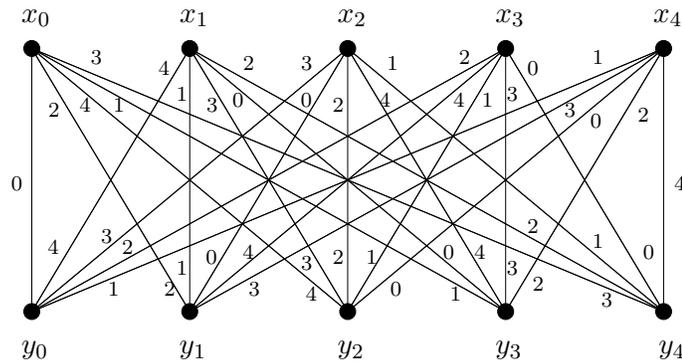


Figura 4.6: Grafo bipartido completo $H \cong K_{5,5}$ munido de uma 5-coloração de arestas ϕ . Observe que, para $0 \leq i \leq 4$, $\phi(x_i y_i) = i$.

A coloração ϕ usa r cores e $\phi(x_i y_i) = i$, para $0 \leq i \leq r-1$. Inicialmente, provamos que $\phi(x_i y_j) \neq \phi(x_i y_s)$ para quaisquer duas arestas distintas $x_i y_j, x_i y_s \in E(H)$. Considere $j = (i + p_1) \bmod r$ e $s = (i + p_2) \bmod r$. Como $j \neq s$, concluímos que $p_1 \neq p_2$. Deste modo, $i + 2p_1$ e $i + 2p_2$ pertencem a classes de congruência módulo r distintas. Portanto, as arestas $x_i y_j$ e $x_i y_s$ recebem cores distintas.

Agora, provamos que $\phi(x_j y_t) \neq \phi(x_s y_t)$, para quaisquer duas arestas distintas $x_j y_t$ e $x_s y_t$ pertencentes a $E(H)$. Considere $t = (j + p_1) \bmod r = (s + p_2) \bmod r$. Como $j \neq s$, temos que $p_1 \neq p_2$. Deste modo, $(t + 2p_1) \bmod r$ e $(t + 2p_2) \bmod r$ pertencem a classes de congruência módulo r distintas. Portanto, $\phi(x_j y_t) \neq \phi(x_s y_t)$ e ϕ é uma r -coloração de arestas de H com a propriedade de que $\phi(x_i y_i) = i$, para $0 \leq i \leq r-1$.

Seja G um grafo bipartido $(r-1)$ -regular com partes $X := \{x_0, \dots, x_{r-1}\}$ e $Y := \{y_0, \dots, y_{r-1}\}$ tal que $x_i y_i \notin E(G)$, $0 \leq i \leq r-1$. Então, $G \subset H$. Desta forma, seja π a restrição da coloração ϕ aos elementos do subgrafo G , ou seja,

$$\pi(x_i y_j) := \phi(x_i y_j) \quad \text{para } 0 \leq i, j \leq r-1 \text{ e } i \neq j.$$

Como $\phi(x_i y_i) = i$, concluímos que $\pi(x_i y_j) \notin \{i, j\}$. □

A seguir provamos que a Conjetura da Coloração Total Semiforte é verdadeira para os grafos equipartidos completos. Além disso, determinamos o número cromático total semiforte do $K_{r(n)}$ de ordem par.

Teorema 4.2. *Seja $G := K_{r(n)}$ um grafo equipartido completo com $r \geq 2$ e $n \geq 2$. Se G possui ordem par, então $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$; caso contrário, $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

Demonstração. Seja $G := K_{r(n)}$, $r \geq 2$ e $n \geq 2$, um grafo equipartido completo munido de uma rotulação canônica e seja $[\mathcal{K}, \mathcal{B}]$ uma decomposição canônica de G . Para cada i , $0 \leq i \leq n-1$, ajuste a notação de modo que $V(K_r^i) = \{u_0^i, u_1^i, \dots, u_{r-1}^i\}$. Pela Proposição 2.7, $\chi_a''(G) \geq \Delta(G) + 2 = n(r-1) + 2$.

Na demonstração deste teorema, consideramos quatro casos de acordo com a paridade de n e r . Para cada caso, construímos uma coloração total semiforte π para G com $\Delta(G) + 2$ cores, se G possui ordem par, ou com $\Delta(G) + 3$ cores, se G possui ordem ímpar. A fim de obtermos a coloração π , primeiramente construímos uma coloração total semiforte ϕ para o subgrafo \mathcal{K} e, posteriormente, construímos uma coloração de arestas λ para o subgrafo \mathcal{B} . A coloração π é definida de modo que ϕ seja uma restrição de π aos elementos de \mathcal{K} , e λ seja uma restrição de π às arestas de \mathcal{B} .

Caso 1. $r \equiv 0 \pmod{2}$ e $n \equiv 0 \pmod{2}$.

Neste caso, primeiro construímos a coloração ϕ usando $r+1$ cores e, posteriormente, construímos λ com $(n-1)(r-1)$ novas cores. Deste modo, a coloração π usa $n(r-1) + 2 = \Delta(G) + 2$ cores.

Pelo Teorema 2.15, temos que $\chi_a''(K_r^i) = r+1$. Então, seja ϕ^i uma $(r+1)$ -coloração total semiforte canônica do K_r^i tal que, para quaisquer ϕ^i e ϕ^j , $i \neq j$, vértices correspondentes e arestas correspondentes de G recebam a mesma cor. Deste modo, a coloração ϕ é formalmente definida a seguir.

$$\begin{aligned} \phi(u_j^i) &:= \phi^i(u_j^i), & u_j^i &\in V(K_r^i), \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } j \in \{0, \dots, r-1\}; \\ \phi(u_j^i u_k^i) &:= \phi^i(u_j^i u_k^i), & u_j^i u_k^i &\in E(K_r^i), \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } j, k \in \{0, \dots, r-1\}. \end{aligned}$$

Observe que as colorações totais semifortes ϕ^i determinam uma coloração total semiforte ϕ para \mathcal{K} dado que dois vértices de \mathcal{K} são adjacentes se e somente se pertencem a um mesmo subgrafo K_r^i . A Figura 4.7 ilustra a coloração ϕ do subgrafo $\mathcal{K} \subset K_{4(4)}$. Observe que a coloração ϕ usa 5 cores e que quaisquer dois vértices correspondentes e quaisquer duas arestas correspondentes possuem cores idênticas.

Para concluir a coloração π , resta colorir as arestas do subgrafo \mathcal{B} . Cada $B_{ij} \subseteq \mathcal{B}$ é um grafo bipartido $(r-1)$ -regular. Pelo Teorema 1.4, B_{ij} admite uma coloração de arestas com $r-1$ cores. Observe que, para quaisquer dois subgrafos B_{ij} e B_{kl} disjuntos nos vértices, as $r-1$ cores utilizadas para colorir as arestas de B_{ij} também podem

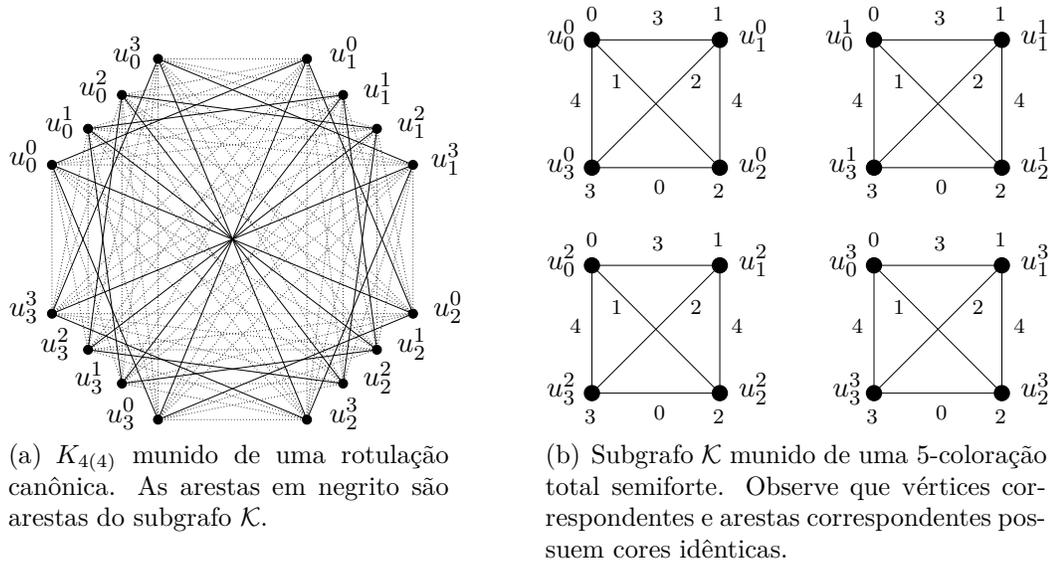


Figura 4.7: $K_{4(4)}$ e seu subgrafo \mathcal{K} munido de uma 5-coloração total semiforte.

ser reutilizadas para colorir as arestas de B_{kl} . A fim de determinar os subgrafos B_{ij} disjuntos nos vértices, utilizamos o grafo representante G_R do $K_{r(n)}$. Considere as classes de cores de uma $\chi'(G_R)$ -coloração de arestas do grafo representante G_R . Observe que nesta coloração cada classe de cor é um emparelhamento perfeito de G_R , pois $G_R \cong K_n$ e n é par. Além disso, lembramos que a aresta $v_i v_j \in E(G_R)$ representa o grafo bipartido $B_{ij} \subseteq \mathcal{B}$. Portanto, para cada emparelhamento perfeito M_k de G_R , existe uma família $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{B}$ tal que $v_i v_j \in M_k$ se e somente se $B_{ij} \in \mathcal{F}_k$, $1 \leq k \leq \chi'(G_R)$. Os grafos bipartidos pertencentes a \mathcal{F}_k são dois a dois disjuntos nos vértices, para $1 \leq k \leq \chi'(G_R)$. Em uma mesma família \mathcal{F}_k , podemos usar as mesmas $r - 1$ para colorir cada grafo bipartido. A partir destas observações concluímos que, para cada família \mathcal{F}_k , são necessárias um total de $r - 1$ cores para colorir as arestas dos grafos que a compõem. Como $\chi'(G_R) = n - 1$, existem exatamente $n - 1$ famílias \mathcal{F}_k . Isto implica que são usadas um total de $(n - 1)(r - 1)$ novas cores para colorir as arestas de \mathcal{B} .

Seja λ uma coloração de arestas de \mathcal{B} como descrita acima. A Figura 4.8 apresenta o grafo representante G_R do $K_{4(4)}$. Observe que cada vértice $v_i \in V(G_R)$ corresponde a um subgrafo $K_r^i \subset \mathcal{K}$ e cada aresta $v_i v_j \in E(G_R)$ corresponde a um grafo bipartido $B_{ij} \subseteq \mathcal{B}$. Como G_R , neste caso, possui uma 3-coloração de arestas, temos que existem três emparelhamentos perfeitos M_1, M_2, M_3 em G_R . Isso implica que existem três famílias de subgrafos bipartidos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ contidas em \mathcal{B} . A Figura 4.9 apresenta uma coloração λ do subgrafo $\mathcal{B} \subset K_{4(4)}$.

A seguir, provamos que π é uma coloração total. Pela definição de π , dois vértices recebem a mesma cor quando eles pertencem a uma mesma parte. Deste modo, vértices

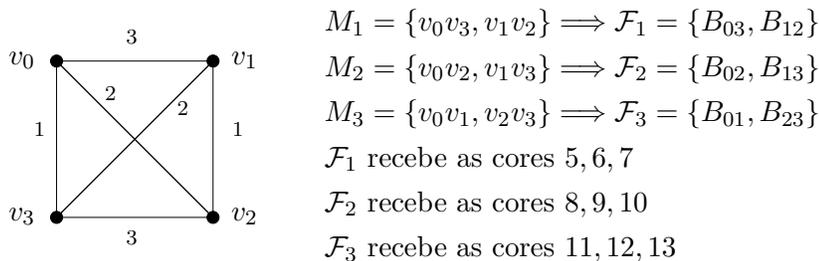
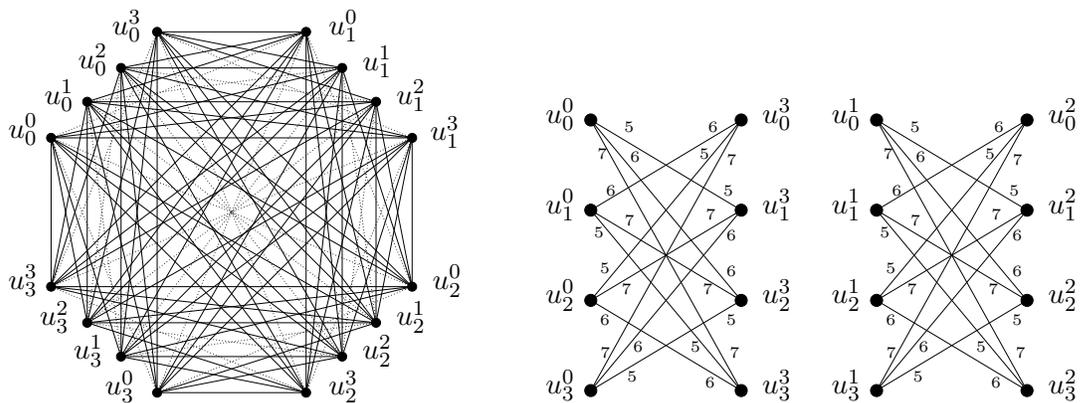
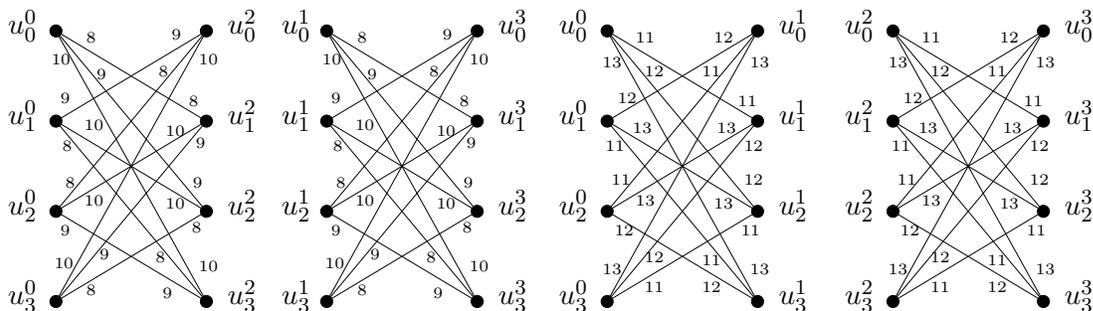


Figura 4.8: Grafo representante do $K_{4(4)}$ munido de uma 3-coloração de arestas.



(a) $K_{4(4)}$ munido de uma rotulação canônica. As arestas em negrito são arestas do subgrafo \mathcal{B} .

(b) Subgrafos B_{03} e B_{12} munidos de uma 3-coloração de arestas com as cores 5, 6 e 7.



(c) Subgrafos B_{02} e B_{13} munidos de uma 3-coloração de arestas com as cores 8, 9 e 10.

(d) Subgrafo B_{01} e B_{23} munidos de uma 3-coloração de arestas com as cores 11, 12 e 13.

Figura 4.9: $K_{4(4)}$ e seu subgrafo \mathcal{B} munido de uma 9-coloração de arestas λ .

adjacentes possuem cores distintas. Quaisquer elementos adjacentes ou incidentes pertencentes ao subgrafo \mathcal{K} possuem cores distintas porque \mathcal{K} recebeu uma coloração total semiforte. Além disso, quaisquer duas arestas adjacentes de \mathcal{B} possuem cores distintas, pois \mathcal{B} recebeu uma coloração de arestas. Como todas as cores usadas na coloração total semiforte de \mathcal{K} são distintas das cores usadas na coloração de arestas de \mathcal{B} , temos

que cada vértice e aresta incidentes possuem cores distintas, assim como quaisquer duas arestas adjacentes. Portanto, π é uma coloração total de G .

Agora, provamos que a coloração total π é também semiforte. Observe que, para todo vértice $u_l^i \in V(G)$, $C_\pi(u_l^i) = C_\phi(u_l^i) \cup C_\lambda(u_l^i)$. Para concluir a demonstração deste caso, devemos provar que $C_\pi(u_l^i) \neq C_\pi(u_p^j)$ para quaisquer dois vértices adjacentes $u_l^i, u_p^j \in V(G)$, com $l \neq p$. Se $j = i$, os vértices u_l^i, u_p^j pertencem ao mesmo subgrafo $K_r^i \subset \mathcal{K}$, e o resultado segue a partir da construção da coloração ϕ e do fato de que as cores de λ são disjuntas das cores de ϕ . Suponha que $i \neq j$. Pela construção da coloração ϕ , $C_\phi(u_l^i) \neq C_\phi(u_p^j)$, pois u_l^i, u_p^j não são vértices correspondentes e as suas arestas incidentes também não o são. Além disso, todas as cores usadas para colorir as arestas de \mathcal{B} são disjuntas das cores usadas pela coloração ϕ .

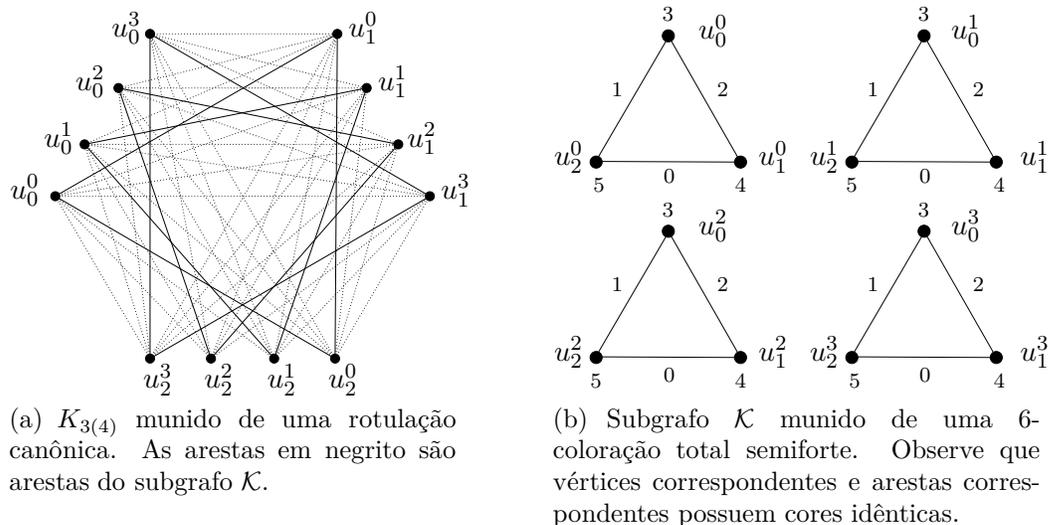
Caso 2. $r \equiv 1 \pmod{2}$ e $n \equiv 0 \pmod{2}$.

Neste caso, inicialmente construímos ϕ usando $2r$ cores e, posteriormente, construímos λ com $(n-2)(r-1) + r$ cores, de modo que r dessas cores são também usadas em ϕ . Deste modo, a coloração π resultante usa $n(r-1) + 2 = \Delta(G) + 2$ cores.

Como r é ímpar, $\chi'(K_r^i) = r$. Para cada K_r^i , construímos uma $2r$ -coloração total semiforte ϕ^i da seguinte maneira: (i) as arestas de K_r^i recebem uma r -coloração de arestas padrão com cores do conjunto $\{0, \dots, r-1\}$ (Lembre que a coloração de arestas padrão do K_n foi definida na Seção 2.3, Capítulo 2); (ii) $\phi^i(u_j^i) := r + j$, $0 \leq j \leq r-1$. Vamos mostrar que ϕ^i é uma coloração total semiforte. Note que os vértices de K_r^i receberam cores distintas e K_r^i recebeu uma coloração de arestas padrão. Além disso, como o conjunto das cores utilizadas nos vértices é disjunto do conjunto das cores utilizadas nas arestas, quaisquer vértice e aresta incidentes possuem cores distintas e quaisquer dois vértices adjacentes são distinguidos pela cor que receberam. Portanto ϕ^i é uma $2r$ -coloração total semiforte para K_r^i e a coloração total semiforte ϕ do subgrafo \mathcal{K} é definida como no caso anterior. A Figura 4.10 ilustra a coloração ϕ do subgrafo $\mathcal{K} \subset K_{3(4)}$. Observe que a coloração ϕ usa seis cores e que quaisquer dois vértices correspondentes e quaisquer duas arestas correspondentes possuem cores idênticas.

Agora, resta colorir as arestas do subgrafo \mathcal{B} . Sabemos que as arestas dos subgrafos B_{ij} podem ser coloridas com $r-1$ cores. Como n é par, sabemos também que o grafo representante G_R possui $n-1$ emparelhamentos perfeitos. Para $n-2$ destes emparelhamentos perfeitos, aplicamos a mesma estratégia utilizada no Caso 1, usando $(n-2)(r-1)$ novas cores para colorir as arestas dos grafos dos conjuntos \mathcal{F}_k , $1 \leq k \leq n-2$.

Seja M_{n-1} o emparelhamento perfeito restante do subgrafo G_R . Para cada aresta $v_i v_j \in M_{n-1}$, existe um grafo bipartido $(r-1)$ -regular $B_{ij} \in \mathcal{F}_{n-1}$. Como quaisquer dois subgrafos bipartidos pertencentes a \mathcal{F}_{n-1} são disjuntos, podemos usar $r-1$ cores para colorir as arestas destes subgrafos. Deste modo, para cada $B_{ij} \in \mathcal{F}_{n-1}$, seja $\lambda^{ij} :$



(a) $K_{3(4)}$ munido de uma rotulação canônica. As arestas em negrito são arestas do subgrafo \mathcal{K} .

(b) Subgrafo \mathcal{K} munido de uma 6-coloração total semiforte. Observe que vértices correspondentes e arestas correspondentes possuem cores idênticas.

Figura 4.10: $K_{3(4)}$ e seu subgrafo \mathcal{K} munido de uma 6-coloração total semiforte.

$E(B_{ij}) \rightarrow \{r, \dots, 2r - 1\}$ uma r -coloração de arestas obtida a partir do Lema 4.1, tal que $\lambda^{ij}(u_l^i u_p^j) \notin \{r + l, r + p\}$. Pela definição da coloração ϕ , o vértice u_l^i recebeu a cor $r + l$ e o vértice u_p^j recebeu a cor $r + p$. Logo, a coloração de arestas λ^{ij} do subgrafo B_{ij} não conflita com a coloração dos vértices. Portanto, as arestas de \mathcal{B} são coloridas com $(n - 2)(r - 1) + r$ cores, tal que r destas cores também são utilizadas na coloração dos vértices de \mathcal{K} . A Figura 4.11 apresenta uma coloração λ do subgrafo $\mathcal{B} \subset K_{3(4)}$.

A seguir, provamos que π é uma coloração total de G . Por construção, ϕ é uma coloração total semiforte para \mathcal{K} e λ é uma coloração de arestas para \mathcal{B} . Lembre que, nenhuma das cores usadas nos vértices de G foram atribuídas às arestas de \mathcal{K} . Para colorir as arestas de \mathcal{B} , usamos $(n - 2)(r - 1)$ novas cores e reusamos r cores que foram atribuídas aos vértices de G . Logo, concluímos que quaisquer duas arestas adjacentes possuem cores distintas. Pela definição de ϕ , vértices que pertencem a um mesmo $K_r^i \subset \mathcal{K}$ possuem cores distintas. Também pela definição de ϕ , dois vértices pertencentes a subgrafos K_r^i e K_r^j distintos recebem a mesma cor se e somente se eles são vértices correspondentes. Logo, concluímos que quaisquer dois vértices adjacentes possuem cores distintas. Por construção de ϕ e λ , e pelo Lema 4.1, concluímos que não existe aresta em \mathcal{B} que seja incidente em um vértice de mesma cor. Portanto, a coloração π é uma coloração total.

Agora, provamos que a coloração total π é também semiforte. Observe que quaisquer dois vértices pertencentes a um mesmo subgrafo K_r^i possuem conjuntos de cores distintos, o que é garantido pela coloração total semiforte dada para o subgrafo \mathcal{K} . Como as cores usadas para colorir as arestas de \mathcal{B} ocorrem em cada vértice de G , quaisquer dois vértices adjacentes u e v tais que $u \in V(K_r^i)$ e $v \in V(K_r^j)$, com $i \neq j$, são também distinguidos pela coloração total semiforte dada para \mathcal{K} . De fato, cada subgrafo $K_r^i \subset \mathcal{K}$ recebeu uma

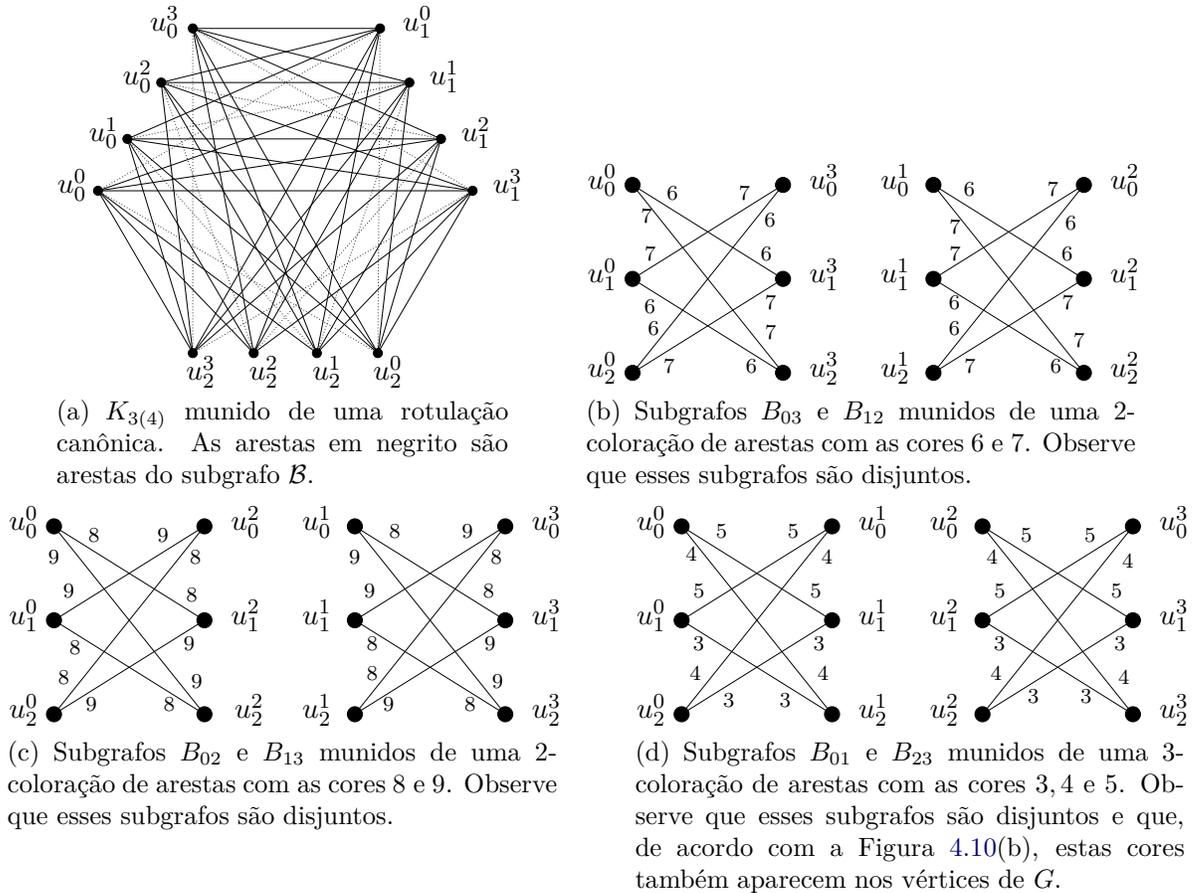


Figura 4.11: $K_{3(4)}$ e uma 6-coloração de arestas λ de seu subgrafo \mathcal{B} .

coloração de arestas padrão com cores do conjunto $\{0, \dots, r - 1\}$ e, de acordo com essa coloração de arestas, temos que em cada vértice u_i^j a cor l está ausente. Esta propriedade permanece válida para a coloração π , pois as cores utilizadas na coloração de arestas padrão do subgrafo \mathcal{K} não foram reutilizadas na coloração de arestas do subgrafo \mathcal{B} . Deste modo, para todo vértice u_i^j pertencente à parte V_i temos que $\overline{C}_\pi(u_i^j) = \{i\}$, $0 \leq i \leq r - 1$. Logo, $\overline{C}_\pi(u) \neq \overline{C}_\pi(v)$ para quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$. Portanto, π é uma $(\Delta(G) + 2)$ -coloração total semiforte de G .

Caso 3. $r \equiv 0 \pmod{2}$ e $n \equiv 1 \pmod{2}$.

Neste caso, inicialmente construímos a coloração λ usando $n(r - 1)$ cores, e então construímos ϕ com $r + 1$ cores, usando somente duas cores novas. Portanto, a coloração π resultante usa $n(r - 1) + 2 = \Delta(G) + 2$ cores.

Como n é ímpar, temos que $\chi'(G_R) = n$. Considere uma n -coloração de arestas padrão do grafo representante G_R . Aplicando o mesmo método dos casos anteriores, obtemos uma

$n(r-1)$ coloração de arestas λ para o subgrafo \mathcal{B} a partir da coloração de arestas padrão do grafo G_R . Pela construção da coloração de arestas padrão de G_R , para cada $0 \leq i \leq n-1$, a cor i não ocorre no vértice $v_i \in V(G_R)$. Isto implica que, para $0 \leq i \leq n-1$, existe um conjunto de $r-1$ cores de λ que não ocorrem nos vértices da componente K_r^i . Seja S_i este conjunto de cores tal que $S_i := \{c_0^i, c_1^i, \dots, c_{r-2}^i\}$. A Figura 4.12 apresenta uma 9-coloração de arestas λ para o subgrafo $\mathcal{B} \subset K_{4(3)}$. Neste exemplo, os conjuntos de cores S_i são: $S_0 = \{0, 1, 2\}$, $S_1 = \{3, 4, 5\}$ e $S_2 = \{6, 7, 8\}$.

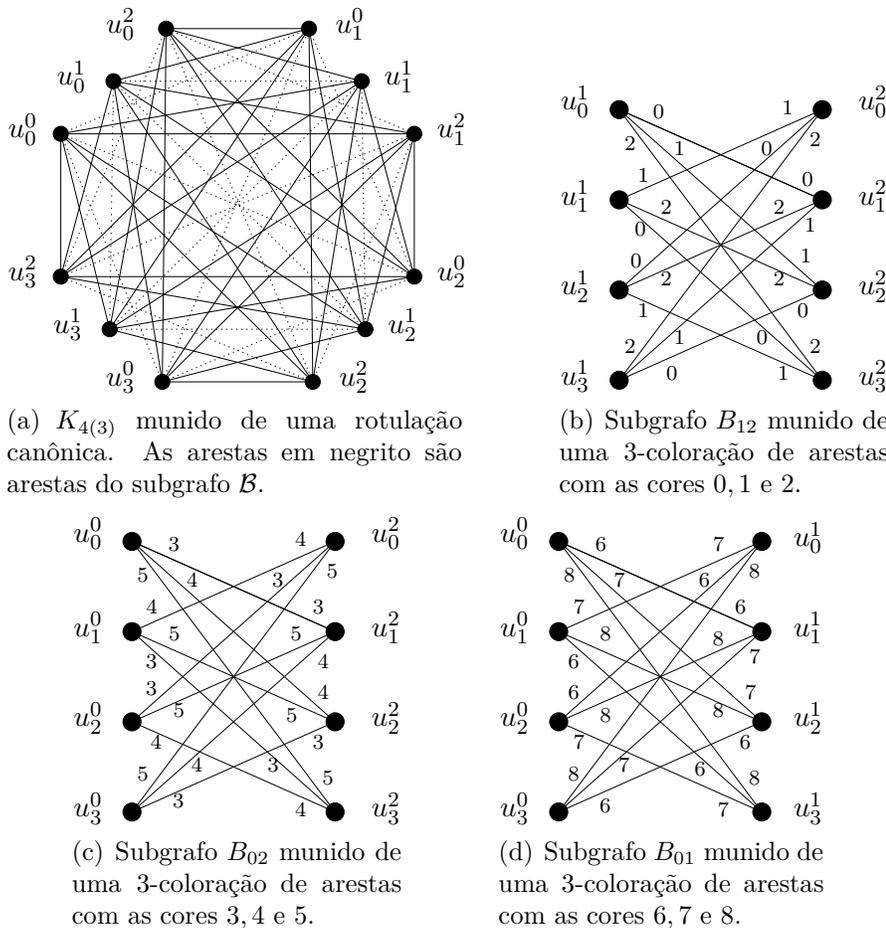
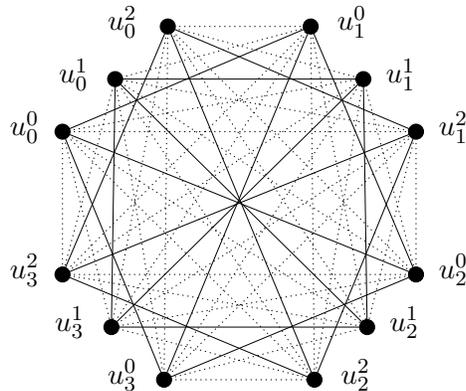


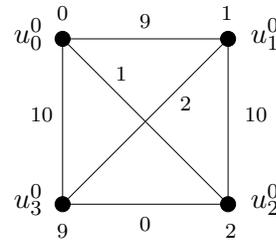
Figura 4.12: $K_{4(3)}$ e uma 9-coloração de arestas λ de seu subgrafo \mathcal{B} .

Agora, construímos uma $(r+1)$ -coloração total semiforte ϕ para o subgrafo \mathcal{K} . Para isso, definimos uma $(r+1)$ -coloração total semiforte canônica ϕ^i para cada subgrafo K_r^i usando as cores $S_i \cup \{x, y\}$, $0 \leq i \leq n-1$, tal que x e y são duas cores novas. De acordo com o Lema 2.14, em qualquer $(r+1)$ -coloração total semiforte canônica de um grafo completo K_r de ordem par, existe uma cor que induz um emparelhamento perfeito. Para cada K_r^i ajuste a notação tal que: (i) a cor y induza um emparelhamento perfeito

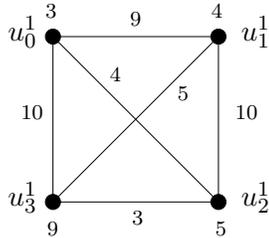
em K_r^i ; (ii) $\phi^i(u_{r-1}^i) = x$; e (iii) $\phi^i(u_j^i) = c_j^i$, $0 \leq j \leq r - 2$. Observe que os vértices coloridos com a cor x pertencem a mesma parte V_{r-1} e, portanto, não são adjacentes. A Figura 4.13 apresenta uma coloração total semiforte do grafo $\mathcal{K} \subset K_{4(3)}$ que usa onze cores; nove destas cores foram usadas na coloração de arestas do subgrafo $\mathcal{B} \subset K_{4(3)}$, enquanto as cores 9 e 10 são cores novas. A cor 10 induz um emparelhamento perfeito em cada subgrafo K_r^i e todos os vértices coloridos com a cor 9 pertencem a uma mesma parte.



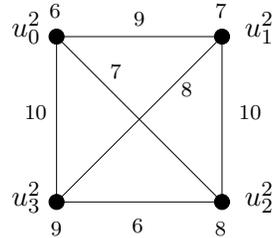
(a) $K_{4(3)}$ munido de uma rotulação canônica. As arestas em negrito são arestas do subgrafo \mathcal{K} .



(b) Subgrafo K_4^0 munido de uma 5-coloração total semiforte com as cores 0, 1, 2, 9 e 10.



(c) Subgrafo K_4^1 munido de uma 5-coloração total semiforte com as cores 3, 4, 5, 9 e 10.



(d) Subgrafo K_4^2 munido de uma 5-coloração total semiforte com as cores 6, 7, 8, 9 e 10.

Figura 4.13: Subgrafo $\mathcal{K} \subset K_{4(3)}$ munido de uma coloração total semiforte com 11 cores.

A fim de concluir este caso, provamos que a coloração resultante π , como previamente definida, é uma $(\Delta(G) + 2)$ -coloração total semiforte de G .

Inicialmente, provamos que π é uma coloração total. Observe que a coloração total semiforte atribuída ao subgrafo \mathcal{K} garante que quaisquer dois elementos adjacentes ou incidentes pertencentes a um mesmo subgrafo K_r^i possuam cores distintas. Além disso, quaisquer duas arestas adjacentes pertencentes ao subgrafo \mathcal{B} recebem cores distintas, porque λ é uma coloração de arestas. De acordo com a definição do conjunto de cores S_i ,

temos que as cores de S_i não ocorrem nas arestas dos grafos bipartidos B_{ip} , $0 \leq p \leq n-1$, $p \neq i$. Além disso, $\pi(u_k^i) \in S_i \cup \{x\}$ e x não é usado para colorir as arestas de \mathcal{B} . Deste modo, quaisquer duas arestas adjacentes possuem cores distintas e cada vértice e aresta incidentes possuem cores distintas. Resta analisar dois vértices adjacentes $u_k^i, u_l^j \in V(G)$, $i \neq j$. Observe que $\pi(u_k^i) \in S_i \cup \{x\}$ e $\pi(u_l^j) \in S_j \cup \{x\}$. Por construção, S_i e S_j são disjuntos e no máximo um dos vértices u_k^i e u_l^j recebeu a cor x , pois esses vértices são adjacentes. Portanto, concluímos que π é uma coloração total.

A seguir, provamos que a coloração total π é também semiforte. Lembre que, para todo vértice $u_l^i \in V(G)$, $C_\pi(u_l^i) = C_\phi(u_l^i) \cup C_\lambda(u_l^i)$. Considere u_k^i e u_l^i dois vértices adjacentes pertencentes ao subgrafo K_r^i . Pela definição da coloração λ , temos que $C_\lambda(u_k^i) = C_\lambda(u_l^i)$. No entanto, lembre que a coloração ϕ restrita ao subgrafo K_r^i é uma coloração total semiforte. Desde que $l \neq k$, pela definição de ϕ temos que $C_\phi(u_l^i) \neq C_\phi(u_k^i)$. Deste modo, obtemos que $C_\pi(u_l^i) \neq C_\pi(u_k^i)$.

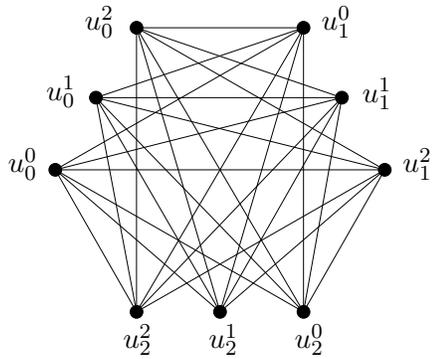
Agora, considere dois vértices adjacentes u_l^i e u_k^j pertencentes a subgrafos distintos K_r^i e K_r^j , respectivamente. Note que u_l^i e u_k^j não são vértices correspondentes, pois $l \neq k$. Considere também o vértice u_l^j , correspondente ao vértice u_l^i . Para cada conjunto $S_i \cup \{x\}$, $0 \leq i \leq n-1$, definimos $(c_0^i, \dots, c_{r-2}^i, x)$ como uma ordenação deste conjunto. Considere os vértices correspondentes u_k^i e u_k^j . Pela definição de π , temos que $\overline{C}_\pi(u_k^i) \subset S_i \cup \{x\}$ e $\overline{C}_\pi(u_k^j) \subset S_j \cup \{x\}$. Além disso, $\overline{C}_\pi(u_k^i)$ e $\overline{C}_\pi(u_k^j)$ possuem a mesma posição na ordenação previamente definida. Por outro lado, $\overline{C}_\pi(u_l^i) \subset S_i \cup \{x\}$ e $\overline{C}_\pi(u_l^i) \neq \overline{C}_\pi(u_k^i)$. Concluímos, então, que $\overline{C}_\pi(u_l^i) \neq \overline{C}_\pi(u_k^j)$.

Caso 4. $r \equiv 1 \pmod{2}$ e $n \equiv 1 \pmod{2}$.

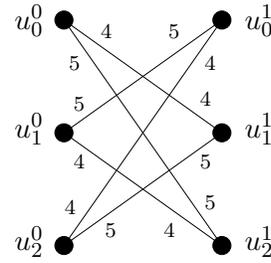
Neste caso, inicialmente construímos a coloração de arestas λ para o subgrafo \mathcal{B} usando $n(r-1)$ cores e, posteriormente, construímos a coloração total semiforte ϕ do subgrafo \mathcal{K} com $r+2$ cores usando apenas três cores novas. Portanto, a coloração π resultante usa $n(r-1) + 3 = \Delta(G) + 3$ cores.

Como n é ímpar, temos que $\chi'(G_R) = n$. Considere uma n -coloração de arestas padrão do grafo representante G_R . Aplicando o mesmo método dos casos anteriores, obtemos uma $n(r-1)$ coloração de arestas λ para o subgrafo \mathcal{B} . Pela construção da coloração de arestas padrão de G_R , para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, a cor i não ocorre no vértice $v_i \in V(G_R)$. Isto implica que, para $i \in \{0, \dots, n-1\}$, existe um conjunto de cores S_i com $r-1$ cores de λ que não ocorrem nos vértices da componente K_r^i . Defina $S_i := \{c_0^i, c_1^i, \dots, c_{r-2}^i\}$. A Figura 4.14 apresenta uma 6-coloração de arestas λ para o subgrafo $\mathcal{B} \subset K_{3(3)}$. Neste exemplo, os conjuntos de cores S_i são $S_0 = \{0, 1\}$, $S_1 = \{2, 3\}$ e $S_2 = \{4, 5\}$.

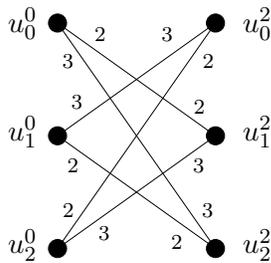
Cada subgrafo K_r^i é um grafo completo de ordem ímpar. Logo, construímos uma $(r+2)$ -coloração total semiforte ϕ para o subgrafo \mathcal{K} . Para isso, definimos uma $(r+2)$ -coloração total semiforte canônica ϕ^i para K_r^i usando as cores $S_i \cup \{x, y, z\}$, $0 \leq i \leq n-1$.



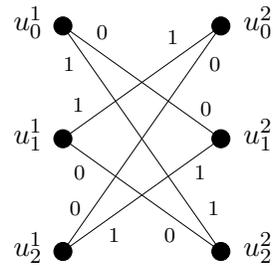
(a) $K_{3(3)}$ munido de uma rotulação canônica.



(b) Subgrafo B_{01} munido de uma coloração de arestas com as cores 4 e 5.



(c) Subgrafo B_{02} munido de uma coloração de arestas com as cores 2 e 3.



(d) Subgrafo B_{12} munido de uma coloração de arestas com as cores 0 e 1.

Figura 4.14: Uma 6-coloração de arestas λ do subgrafo $\mathcal{B} \subset K_{3(3)}$.

Para cada K_r^i , ajuste a notação de modo que $\phi^i(u_j^i) = c_j^i$, $0 \leq j \leq r-2$ e $\phi^i(u_{r-1}^i) = x$. As cores y e z colorem apenas arestas do K_r^i . Observe que os vértices coloridos com a cor x não são adjacentes pois eles pertencem a mesma parte V_{r-1} no grafo G . A Figura 4.15 exhibe uma 9-coloração total semiforte do subgrafo $\mathcal{K} \subset K_{3(3)}$. Observe que as cores 7 e 8 aparecem somente nas arestas e que os únicos vértices em que a cor 6 aparece são os vértices da parte V_2 .

Embora a demonstração de que π é uma coloração total semiforte seja essencialmente a mesma do caso anterior, seus detalhes são descritos a seguir.

Observe que a coloração total semiforte atribuída ao subgrafo \mathcal{K} garante que quaisquer dois elementos adjacentes ou incidentes pertencentes a um mesmo subgrafo K_r^i possuam cores distintas. Além disso, quaisquer duas arestas adjacentes do subgrafo \mathcal{B} recebem cores distintas, porque λ é uma coloração de arestas. De acordo com a definição do conjunto de cores S_i , temos que as cores de S_i não ocorrem nas arestas dos grafos bipartidos B_{ip} , $0 \leq p \leq n-1$, $p \neq i$. Além disso, $\pi(u_k^i) \in S_i \cup \{x\}$ e x não é usado para colorir as arestas de \mathcal{B} . Deste modo, quaisquer duas arestas adjacentes possuem cores distintas e cada vértice e aresta incidentes possuem cores distintas. Resta analisar dois vértices

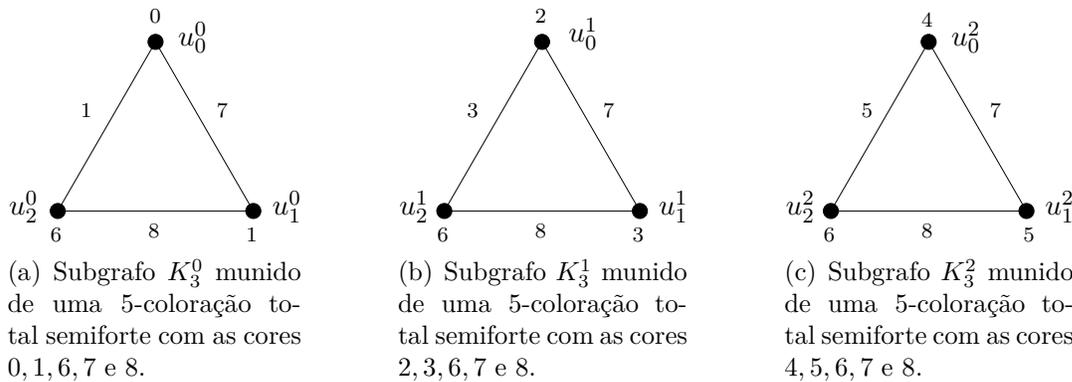


Figura 4.15: Subgrafo $\mathcal{K} \subset K_{3(3)}$ munido de uma coloração total semiforte com 9 cores.

adjacentes $u_k^i, u_l^j \in V(G)$, $i \neq j$. Observe que $\pi(u_k^i) \in S_i \cup \{x\}$ e $\pi(u_l^j) \in S_j \cup \{x\}$. Por construção, S_i e S_j são disjuntos e no máximo um dos vértices u_k^i e u_l^j recebeu a cor x , pois esses vértices são adjacentes. Portanto, concluímos que π é uma coloração total.

Agora, provamos que a coloração total π é também semiforte. Lembre que, para todo vértice $u_i^i \in V(G)$, $C_\pi(u_i^i) = C_\phi(u_i^i) \cup C_\lambda(u_i^i)$. Considere u_k^i e u_l^i dois vértices adjacentes pertencentes ao subgrafo K_r^i . Pela definição da coloração λ , temos que $C_\lambda(u_k^i) = C_\lambda(u_l^i)$. No entanto, lembre que a coloração ϕ restrita ao subgrafo K_r^i é uma coloração total semiforte. Logo, $C_\phi(u_k^i) \neq C_\phi(u_l^i)$, pois $k \neq l$. Deste modo, obtemos que $C_\pi(u_k^i) \neq C_\pi(u_l^i)$.

Agora, considere dois vértices adjacentes u_k^i e u_l^j pertencentes a subgrafos distintos K_r^i e K_r^j , respectivamente. Para cada conjunto $S_i \cup \{x, y, z\}$, $0 \leq i \leq n-1$, definimos $(c_0^i, c_1^i, \dots, c_{r-2}^i, x, y, z)$ como uma ordenação deste conjunto. Agora, considere os vértices correspondentes u_k^i e u_l^j de G . Pela definição de π , temos que $\overline{C}_\pi(u_k^i) = \{c, d\}$, tal que $c, d \in S_i \cup \{x, y, z\}$, $c \neq d$; e $\overline{C}_\pi(u_l^j) = \{c', d'\}$, $c', d' \in S_j \cup \{x, y, z\}$, $c' \neq d'$. Além disso, c e c' possuem a mesma posição na ordenação previamente definida de $S_i \cup \{x, y, z\}$ e $S_j \cup \{x, y, z\}$, assim como d e d' . Pela definição de ϕ^i , $\overline{C}_\pi(u_k^i) \neq \overline{C}_\pi(u_l^j)$. Como $S_i \cap S_j = \emptyset$ e $k \neq l$, concluímos que $\overline{C}_\pi(u_k^i) \neq \overline{C}_\pi(u_l^j)$. \square

De acordo com o Teorema 4.2, todo grafo equipartido completo G de ordem ímpar admite uma coloração total semiforte com no máximo $\Delta(G) + 3$ cores. No entanto, a Figura 4.16 exhibe uma $(\Delta(K_{3(3)}) + 2)$ -coloração total semiforte do $K_{3(3)}$ e a Figura 4.17 exhibe uma $(\Delta(K_{3(5)}) + 2)$ -coloração total semiforte do $K_{3(5)}$. Além destes exemplos, também encontramos $(\Delta(G) + 2)$ -colorações totais semifortes para outros grafos equipartidos completos de ordem ímpar, como o $K_{5(3)}$ e o $K_{7(3)}$. Logo, acreditamos que a seguinte conjectura seja verdadeira:

Conjetura 4.3. *Se $K_{r(n)}$ possui ordem ímpar, então $\chi_a''(K_{r(n)}) = \Delta(K_{r(n)}) + 2$.*

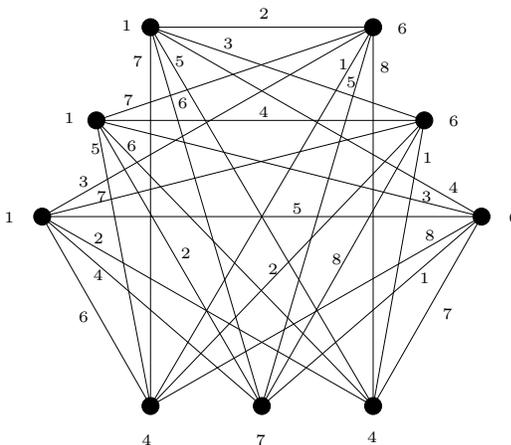


Figura 4.16: Grafo $K_{3(3)}$ munido de uma 8-coloração total semiforte.

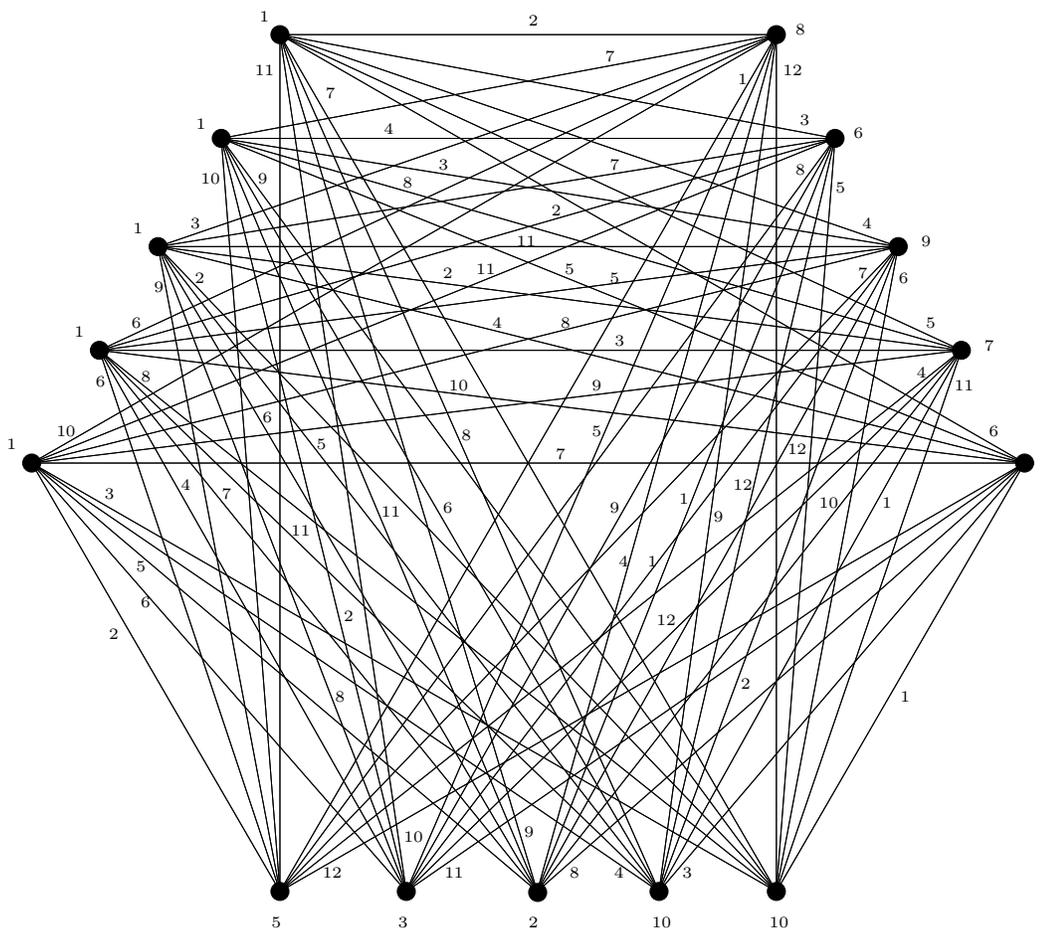


Figura 4.17: Grafo $K_{3(5)}$ munido de uma coloração total semiforte com 12 cores.

4.2 Grafos tripartidos

A seguir, provamos que a Conjetura da Coloração Total Semiforte é verdadeira para os grafos tripartidos.

Teorema 4.4. *Se G é um grafo tripartido, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

Demonstração. Seja G um grafo tripartido com tripartição $\{V_1, V_2, V_3\}$. Sejam $S_E = \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$ e $S_V = \{\Delta(G) + 2, \Delta(G) + 3\}$ dois conjuntos de cores disjuntos. A seguir definimos um mapeamento $\phi: V(G) \cup E(G) \rightarrow S_V \cup S_E$ e provamos que ϕ é uma $(\Delta(G) + 3)$ -coloração total semiforte de G .

Pelo Teorema 1.3, $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Então, seja π_E uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de arestas de G com as cores do conjunto S_E . Seja π_V uma coloração dos vértices de G definida da seguinte maneira: se $u \in V_1$, então $\pi_V(u) := \Delta(G) + 2$; se $u \in V_2$, então $\pi_V(u) := \Delta(G) + 3$; se $u \in V_3$, então o vértice u recebe uma cor do conjunto $S_E \setminus C'_{\pi_E}(u)$. Lembre que $C'_{\pi_E}(u) = \{\pi_E(uv) : uv \in E(G)\}$. Observe que, como o número de arestas incidentes no vértice u é no máximo $\Delta(G)$, existe pelo menos uma cor no conjunto $S_E \setminus C'_{\pi_E}(u)$ para atribuir ao vértice u .

Defina ϕ tal que $\phi|_{V(G)} = \pi_V$ e $\phi|_{E(G)} = \pi_E$. Vamos mostrar que ϕ é uma coloração total semiforte. Pela definição de ϕ , quaisquer duas arestas adjacentes possuem cores distintas e quaisquer dois vértices pertencentes a partes distintas possuem cores diferentes. Além disso, para qualquer vértice $u \in V(G)$, temos que $\phi(u) \notin C'_\phi(u)$. Logo, ϕ é uma coloração total de G . Para completar a prova, mostramos que, para qualquer aresta $uv \in E(G)$, $\overline{C}_\phi(u) \neq \overline{C}_\phi(v)$. De acordo com a definição da coloração ϕ , temos:

- (i) se $u \in V_1$, $\overline{C}_\phi(u) = \{\Delta(G) + 3\} \cup (S_E \setminus C'_\phi(u))$;
- (ii) se $u \in V_2$, $\overline{C}_\phi(u) = \{\Delta(G) + 2\} \cup (S_E \setminus C'_\phi(u))$;
- (iii) se $u \in V_3$, $\overline{C}_\phi(u) = \{\Delta(G) + 2, \Delta(G) + 3\} \cup (S_E \setminus C'_\phi(u))$.

Seja $uv \in E(G)$. Se $u \in V_1$ e $v \in V_2$, então por definição de ϕ temos que $\phi(u) \notin \overline{C}_\phi(u)$ e $\phi(u) \in \overline{C}_\phi(v)$. Logo, temos que $\overline{C}_\phi(u) \neq \overline{C}_\phi(v)$. Se $u \in V_3$ e $v \in V_i$, $1 \leq i \leq 2$, então temos que $\phi(v) \notin \overline{C}_\phi(v)$ e $\phi(v) \in \overline{C}_\phi(u)$. Logo, $\overline{C}_\phi(u) \neq \overline{C}_\phi(v)$. Portanto, ϕ é uma coloração total semiforte de G . \square

Pelo Teorema 4.4, todo grafo tripartido possui uma coloração total semiforte com no máximo $\Delta(G) + 3$ cores. No entanto, é possível que o limitante superior para $\chi''_a(G)$ possa ser melhorado para os grafos tripartidos. Por exemplo, nos Teoremas 4.5 e 4.6, apresentamos $(\Delta(G) + 2)$ -colorações totais semifortes para algumas famílias de grafos tripartidos completos.

Teorema 4.5. *Seja G um grafo tripartido completo tal que G não possui vértices adjacentes de grau máximo. Então, $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Demonstração. Seja G um grafo tripartido completo com tripartição $\{V_1, V_2, V_3\}$. Como G não possui vértices adjacentes de grau máximo, podemos supor $|V_1| < |V_2| \leq |V_3|$. A seguir, definimos um mapeamento $\phi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, \dots, \Delta(G) + 2\}$ e provamos que ϕ é uma coloração total semiforte.

Observe que o núcleo de G é o subgrafo induzido pelo conjunto independente V_1 , ou seja, o núcleo de G é uma floresta. Pelo Lema 1.5, temos que $\chi'(G) = \Delta(G)$. Deste modo, seja π_E uma coloração de arestas de G com as cores $1, 2, \dots, \Delta(G)$. Defina $\phi|_{E(G)} = \pi_E$. Para concluir a coloração ϕ , atribuímos as seguintes cores aos vértices de G :

- (i) se $v \in V_1$, então $\phi(v) := \Delta(G) + 1$;
- (ii) se $v \in V_2$, então $\phi(v) := \Delta(G) + 2$;
- (iii) se $v \in V_3$, então $\phi(v) := c$, para $c \in \{1, \dots, \Delta(G)\} \setminus C'_\phi(v)$.

Concluimos que ϕ é uma coloração total semiforte pelos mesmos argumentos usados na demonstração do Teorema 4.4. \square

No Teorema a seguir, determinamos o número cromático total semiforte para uma família de grafos tripartidos completos com vértices adjacentes de grau máximo.

Teorema 4.6. *Seja G um grafo tripartido completo com tripartição $\{V_1, V_2, V_3\}$ tal que $|V_1| = |V_2| = p$, $|V_3| \geq 2p$ e p é um inteiro positivo. Então, $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$.*

Demonstração. Seja p um inteiro positivo. Seja G um grafo tripartido completo com tripartição $\{V_1, V_2, V_3\}$, tal que $|V_1| = |V_2| = p$ e $|V_3| \geq 2p$. O grafo G possui pelo menos dois vértices adjacentes de grau máximo. Logo, $\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 2$. Para provar o teorema, construímos uma $(\Delta(G) + 2)$ -coloração total semiforte para G .

Seja M um emparelhamento máximo em $G[V_2 \cup V_3]$ e seja $H := G \setminus M$. Observe que $\Delta(H) = \Delta(G)$ e que o núcleo de H é o subgrafo induzido pelo conjunto independente V_1 . Logo, pelo Lema 1.5, o subgrafo H possui uma coloração de arestas π com as cores $1, 2, \dots, \Delta(G)$. Estendemos a coloração π para uma $(\Delta(G) + 2)$ -coloração total semiforte de G da seguinte maneira:

- (i) se $v \in V_1$, então $\pi(v) := \Delta(G) + 1$;
- (ii) se $x \in M \cup \{y: y \in V_3 \setminus V(G[M])\}$, então $\pi(x) := \Delta(G) + 2$;
- (iii) $v \in V_2$, então v recebe a cor do conjunto $\{1, 2, \dots, \Delta(G)\} \setminus C'(v)$;

(iv) se $v \in V_3$ e v é extremidade de uma aresta $e \in M$, então v recebe uma cor $c \in \{1, 2, \dots, \Delta(G)\} \setminus (C'_\pi(v) \cup \{\pi(u) : u \in V_2\})$.

Inicialmente, vamos mostrar que π é uma coloração total. Os elementos coloridos no item (i) formam um conjunto independente e são os únicos coloridos com a cor $\Delta(G)+1$. O mesmo vale para os elementos coloridos no item (ii). Já no item (iii), o resultado segue do fato de que as cores usadas não ocorrem nos vértices e de que $|\{1, \dots, \Delta(G)\} \setminus C'_\pi(v)| = 1$. Resta, então, mostrar que $\{1, 2, \dots, \Delta(G)\} \setminus (C'_\pi(v) \cup \{\pi(u) : u \in V_2\})$ é não vazio.

Considere um vértice v colorido no item (iv). Por construção, $d(v) = 2p$ e $\Delta(G) \geq 3p$. Além disso, uma das arestas incidentes em v foi colorida com a cor $\Delta(G) + 2$. Logo, $|\{1, \dots, \Delta(G)\} \setminus C'_\pi(v)| \geq p + 1$. Como $|V_2| = p$, temos que $|\{1, 2, \dots, \Delta(G)\} \setminus (C'_\pi(v) \cup \{\pi(u) : u \in V_2\})| \geq 1$.

Resta provar que a coloração total π é também semiforte. Pela construção de π ,

- (1) se $v \in V_1$, $\overline{C}_\pi(v) = \{\Delta(G) + 2\}$;
- (2) se $v \in V_2$, $\overline{C}_\pi(v) = \{\Delta(G) + 1\}$;
- (3) se $v \in V_3$, $\overline{C}_\pi(v) = \{\Delta(G) + 1\} \cup \{1, \dots, \Delta(G)\} \setminus C_\pi(v)$.

Como argumentado anteriormente, para todo vértice $v \in V_3$, o conjunto $\{1, 2, \dots, \Delta(G)\} \setminus C_\pi(v)$ é não vazio. Como, para qualquer aresta $uv \in E(G)$, temos que seus extremos pertencem a partes distintas de G , concluímos que $\overline{C}_\pi(u) \neq \overline{C}_\pi(v)$. \square

Seja p um inteiro positivo e G um grafo tripartido completo com tripartição $\{V_1, V_2, V_3\}$. Pelo Teorema 4.5, se G não possui vértices adjacentes de grau máximo, então G admite uma coloração total semiforte com no máximo $\Delta(G) + 2$ cores. Já o caso em que G possui vértices adjacentes de grau máximo, tal que $|V_1| = |V_2| = p$ e $|V_3| \geq 2p$, foi considerado no Teorema 4.6. Neste caso, G possui $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$. Observe que, se o grafo tripartido completo G for tal que $|V_1| = |V_2| = p$ e $|V_3| < p$, então G não possui vértices adjacentes de grau máximo e, portanto, este caso também já foi considerado no Teorema 4.5. Deste modo, nos resta considerar o caso em que o grafo tripartido completo G possui $|V_1| = |V_2| = p$ e $p \leq |V_3| < 2p$.

Pelo Teorema 4.2, se $|V_1| = |V_2| = |V_3| = p$, com p par, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$. Ademais, a Figura 4.18 exibe três grafos tripartidos completos com $|V_1| = |V_2| = p$ e $p \leq |V_3| < 2p$, munidos de uma $(\Delta(G) + 2)$ -coloração total semiforte. Baseados nestas observações, propomos a seguinte conjectura:

Conjetura 4.7. *Seja G um grafo tripartido completo com tripartição $\{V_1, V_2, V_3\}$ tal que $|V_1| = |V_2| = p$, $p \leq |V_3| < 2p$ e $p \geq 1$ é um inteiro. Então, $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$.*

Se a Conjetura 4.7 for verdadeira, então, juntamente com o Teorema 4.5 e o Teorema 4.6 obtemos que todo grafo tripartido completo admite uma coloração total semiforte com no máximo $\Delta(G) + 2$ cores.

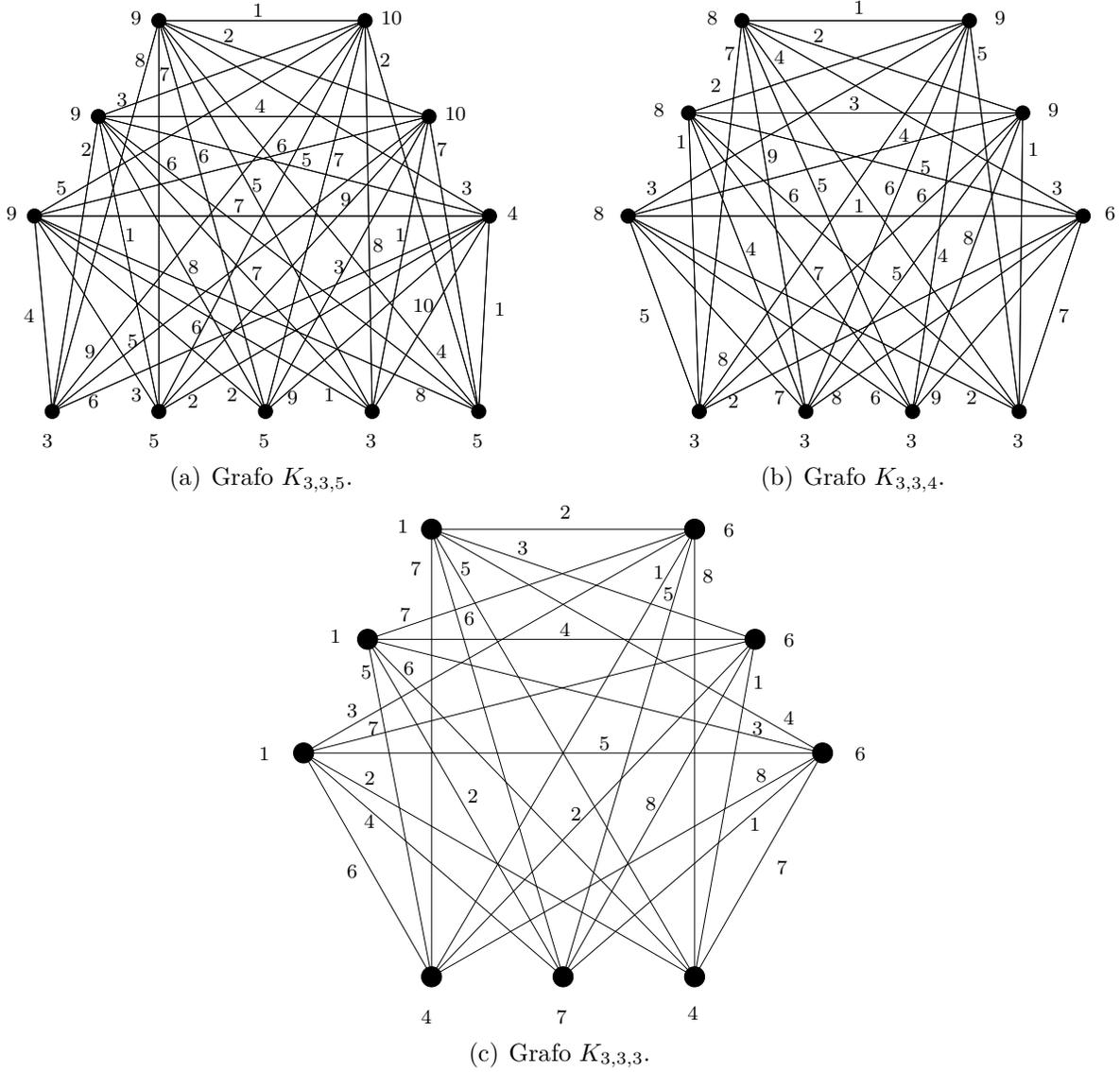


Figura 4.18: Grafos tripartidos completos com $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$.

Capítulo 5

Conclusões

A Conjetura da Coloração Total Semiforte afirma que todo grafo simples G possui uma coloração total semiforte com no máximo $\Delta(G) + 3$ cores. Essa conjectura foi proposta em 2005 por Zhang et al [80] e, apesar de já ter sido verificada para algumas classes de grafos, continua aberta para grafos arbitrários. A Conjetura da Coloração Total Semiforte está relacionada com outra mais antiga, a Conjetura da Coloração Total, segundo a qual qualquer grafo simples G possui uma coloração total com no máximo $\Delta(G) + 2$ cores. Esta conjectura está aberta por mais de 40 anos, sendo considerada um problema clássico em Teoria dos Grafos.

O objetivo central desta pesquisa de mestrado foi verificar a Conjetura da Coloração Total Semiforte para algumas classes de grafos e, quando possível, determinar o número cromático total semiforte para as classes consideradas.

Na primeira parte deste trabalho (Capítulos 1, 2 e início do Capítulo 3), introduzimos alguns conceitos básicos de Teoria dos Grafos e, posteriormente, mostramos os principais resultados da literatura relacionados a coloração total semiforte. No Capítulo 2, apresentamos um breve histórico do contexto em que essa coloração foi introduzida e, em seguida, mostramos colorações totais semifortes ótimas para algumas famílias clássicas de grafos. Nesta parte do trabalho, também apresentamos demonstrações mais sucintas para alguns dos teoremas existentes na literatura. Exemplos de resultados que ganharam novas demonstrações neste trabalho foram: o Teorema 2.12, Teorema 2.28 e o Teorema 3.1.

Já no Capítulo 3, investigamos a coloração total semiforte dos grafos simples com grau máximo igual a três. Existem diversas demonstrações de que estes grafos admitem uma coloração total semiforte com no máximo seis cores [24, 44, 45, 72]. Todavia, J. Hulan [45] conjecturou que todo grafo simples com $\Delta(G) = 3$ admite uma coloração total semiforte com no máximo cinco cores. Na tentativa de verificar a validade desta conjectura, estudamos a coloração total semiforte para algumas famílias de grafos com grau máximo três e obtivemos os seguintes resultados: no Teorema 3.5, provamos que

todo grafo simples, conexo, com grau máximo igual a três e sem vértices adjacentes de grau máximo possui $\chi''_a(G) = 4$. Provamos, também, que as seguintes famílias de snarks admitem uma coloração total semiforte com cinco cores: os snarks-flor (Teorema 3.7); os snarks de Goldberg (Teorema 3.8); os snarks de Blanuša generalizados (Teorema 3.9); e os snarks de Loupekinine LP_1 (Teorema 3.10). Os resultados obtidos para estas classes serão submetidos a um periódico da área.

No Capítulo 4 tratamos da coloração total semiforte de algumas famílias de grafos r -partidos. No Teorema 4.2, provamos que todo grafo equipartido completo G de ordem par possui $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$ e que todo grafo equipartido completo G de ordem ímpar possui $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$. Este resultado foi apresentado no *V Latin American Workshop on Cliques in Graphs* (LAWCG)¹, que ocorreu em 2012, na Argentina. Um resumo estendido foi aceito para publicação na revista *Matemática Contemporânea*². Além disso, um artigo completo foi submetido para um periódico especializado.

No Teorema 4.4, provamos que a Conjetura da Coloração Total Semiforte é verdadeira para os grafos tripartidos. Adicionalmente, melhoramos este limitante para algumas famílias de grafos tripartidos completos. Por exemplo, no Teorema 4.5, provamos que todo grafo tripartido completo G sem vértices adjacentes de grau máximo possui $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Algumas das técnicas utilizadas nesta dissertação podem ser úteis na determinação do número cromático total semiforte para outras classes de grafos. Por exemplo, nos Teoremas 3.5 e 4.2, foi utilizada a técnica de decomposição. Nesta técnica, o grafo original é decomposto em dois ou mais subgrafos disjuntos nas arestas e, posteriormente, esses subgrafos são coloridos de modo que a coloração final do grafo original seja uma coloração total semiforte. Uma segunda técnica foi utilizada na coloração total semiforte de algumas famílias infinitas de snarks. Para cada uma das famílias analisadas, constatou-se que seus membros eram compostos de uma subestrutura fixa e que havia uma construção recursiva que gerava cada membro da família. A construção da coloração total semiforte para os membros das famílias de snarks consideradas envolveu indução e utilizou a definição recursiva das famílias.

Como possíveis extensões deste trabalho, podemos citar:

- (1) O estudo da Conjetura 2.29 que afirma que todo grafo bipartido G sem vértices adjacentes de grau máximo possui $\chi''_a(G) = \chi''(G) = \Delta(G) + 1$;
- (2) A investigação da Conjetura de Hulgan (Conjetura 3.2) para outras classes de grafos com grau máximo três e que possuem vértices adjacentes de grau máximo;

¹LAWCG: <http://www-2.dc.uba.ar/congresos/lawcg2012>.

²Matemática Contemporânea: <http://mc.sbm.org.br/pt/>.

- (3) A investigação da Conjetura 4.7. Se essa conjetura for verdadeira, é possível provar juntamente com o Teorema 4.5 e o Teorema 4.6 que todo grafo tripartido completo possui uma coloração total semiforte com no máximo $\Delta(G) + 2$ cores;
- (4) A investigação da Conjetura 4.3 que afirma que todo grafo equipartido completo G de ordem ímpar possui $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$.

Além das conjeturas citadas acima, existem ainda dois problemas interessantes envolvendo a Coloração Total Semiforte:

- (a) O primeiro problema é a investigação de condições necessárias e/ou suficientes para que um grafo simples G não admita uma coloração total semiforte com $\Delta(G) + 2$ cores. São poucas as famílias de grafos conhecidas que possuem número cromático total semiforte maior que $\Delta(G) + 2$. Uma destas famílias são os grafos completos de ordem ímpar. Conforme apresentado na Seção 2.4, Chen [23, 24] descobriu outras três famílias de grafos que possuem $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 3$. É possível que o método utilizado por Chen para provar que essas famílias possuem $\chi_a''(G) > \Delta(G) + 2$ possa ser generalizado para auxiliar na descoberta de novas famílias.
- (b) O segundo problema é a investigação do Problema 2.9, proposto por Zhang et al. [80]: para quais subgrafos H de G , tem-se $\chi_a''(H) \leq \chi_a''(G)$? No caso em que o grafo simples G possui $\Delta(G) = 3$, esse problema encontra-se quase resolvido. De fato, no Teorema 3.11 resolvemos essa questão para os subgrafos $H \subset G$ com $\Delta(H) \leq 2$; e no Teorema 3.12 resolvemos para os subgrafos $H \subset G$ com $\Delta(H) = 3$ e sem vértices adjacentes de grau máximo. Resta analisar os subgrafos $H \subset G$ com grau máximo igual a três e que possuem vértices adjacentes de grau máximo.

Juntamente com a Conjetura da Coloração Total Semiforte, os problemas citados acima evidenciam a existência de diversas questões abertas envolvendo a coloração total semiforte. Muito pouco ainda se sabe sobre a validade da Conjetura da Coloração Total Semiforte para grafos arbitrários. A dificuldade em se trabalhar neste problema fica ainda mais evidente quando consideramos que a Conjetura da Coloração Total continua aberta por mais de 40 anos, apesar de diversos artigos sobre esta conjetura terem sido publicados.

Apesar da dificuldade em abordar o problema da coloração total semiforte para grafos arbitrários, uma abordagem alternativa é considerá-lo para classes de grafos, como foi feito nesta dissertação. Devido ao curto tempo do mestrado, não tivemos a oportunidade de trabalhar em outras classes de grafos, tais como: as potências de ciclo e os grafos split-indiferença. Devido ao fato da coloração total de alguns casos destas famílias terem sido tratados na literatura [16, 17], acreditamos que o estudo da Conjetura da Coloração Total Semiforte para essas classes de grafos seja promissor.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Aigner and E. Triesch. *Topics in Combinatorics and Graph Theory*, chapter Irregular assignments and two problems à la Ringel, pages 29–36. Physica Verlag Heidelberg, 1990.
- [2] M. O. Albertson, D. W. Cranston, and J. Fox. Crossings, colorings and cliques. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 16:R45, 2009.
- [3] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four-colorable, Part I: Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3):429–490, 1977.
- [4] K. Appel and W. Haken. *Every planar map is four colorable*, volume 98 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, 1989.
- [5] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every planar map is four-colorable, Part II: Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21:491–567, 1977.
- [6] A. S. Arroyo and C. J. H. McDiarmid. Determining the total colouring number is NP-hard. *Discrete Mathematics*, 124:155–162, 1994.
- [7] P. Balister, B. Bollobás, and R. Schelp. Vertex distinguishing colourings of graphs with $\Delta(G) = 2$. *Discrete Mathematics*, 252(2):17–29, 2002.
- [8] P. N. Balister, E. Györi, J. Lehel, and R. H. Schelp. Adjacent vertex distinguishing edge-colorings. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 21(1):237–250, 2007.
- [9] J. Barát and G. Tóth. Towards the Albertson conjecture. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 17:R73, 2010.
- [10] C. Bazgan, A. Harkat-Benhamdine, H. Li, and M. Woźniak. On the vertex-distinguishing proper edge-colouring of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 75(2):288–301, 1999.
- [11] M. Behzad. *Graphs and their chromatic numbers*. PhD thesis, Michigan State University, 1965.

- [12] D. Blanuša. Problem četiriju boja. *Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser. II*, 1:31–42, 1946.
- [13] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, and D. R. Woodall. Total colorings of planar graphs with large maximum degree. *Journal of Graph Theory*, 26(1):53–59, September 1997.
- [14] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 37(2):194–197, 1941.
- [15] A. C. Burriss and R. H. Schelp. Vertex-distinguishing proper edge colourings. *Journal of Graph Theory*, 26(2):73–82, 1997.
- [16] C. N. Campos, C. H. de Figueiredo, R. Machado, and C. P. de Mello. The total chromatic number of split-indifference graphs. *Discrete Mathematics*, 312(17):2690–2693, 2012.
- [17] C. N. Campos and C. P. de Mello. A result on the total colouring of powers of cycles. *Discrete Applied Mathematics*, 155(5):585–597, 2007.
- [18] L. Carroll. *The hunting of the snark*. Macmillan, 1876.
- [19] G. Chartrand, M. Jacobson, J. Lehel, O. Oellerman, S. Ruiz, and F. Saba. Irregular networks. *Congressus Numerantium*, 64:197–210, 1988.
- [20] G. Chartrand and P. Zhang. *Chromatic Graph Theory*. Discrete Mathematics and Its Applications. Kenneth H. Rosen, CRC Press/Chapman & Hall, 2009.
- [21] B. L. Chen, H. L. Fu, and M. T. Ko. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 17:137–146, 1995.
- [22] M. Chen and X. Guo. Adjacent vertex-distinguishing edge and total chromatic numbers of hypercubes. *Information Processing Letters*, 109:599–602, 2009.
- [23] X. Chen. Adjacent-vertex-distinguishing total chromatic numbers on $K_{2n+1} - E(P_3)$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(1):19–27, 2004.
- [24] X. Chen. On the adjacent vertex distinguishing total coloring numbers of graphs with $\Delta = 3$. *Discrete Mathematics*, 308:4003–4007, 2008.
- [25] X. Chen and Z. Zhang. Avdte numbers of generalized Halin graphs with maximum degree at least 6. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 24(1):55–58, 2008.

- [26] K. H. Chew. Total chromatic number of regular graphs of odd order and high degree. *Discrete Mathematics*, 154:41–51, 1996.
- [27] K. H. Chew and H. P. Yap. Total chromatic number of complete r-partite graphs. *Journal of Graph Theory*, 16(6):629–634, 1992.
- [28] T. Coker and K. Johannson. The adjacent vertex distinguishing total chromatic number. *Discrete Mathematics*, 312:2741–2750, 2012.
- [29] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. *Information Processing Letters*, 70:147–152, 1999.
- [30] B. Descartes. Network-colourings. *Mathematical Gazette*, 32:67–69, 1948.
- [31] G. A. Dirac. A theorem of R. L. Brooks and a conjecture of Hadwiger. *Proceedings of London Mathematical Society*, 7(3):161–195, 1957.
- [32] K. Edwards, M. Woźniak, and M. Horňák. On the neighbour-distinguishing index of a graph. *Graphs and Combinatorics*, 22:341–350, 2006.
- [33] H. Escudro, F. Okamoto, and P. Zhang. Vertex-distinguishing colorings of graphs: a survey of recent developments. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 4(3):277–299, 2007.
- [34] W. Feller. *Introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações, Parte I - Espaços amostrais discretos*. Editora Edgard Blücher Ltda., 1976.
- [35] T. Gallai. Kritische Graphen I. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 8:165–192, 1963.
- [36] M. Gardner. Mathematical games: Snarks, boojums and other conjectures related to the four-color-map theorem. *Scientific American*, 234(4):126–130, 1976.
- [37] M. K. Goldberg. Construction of class 2 graphs with maximum vertex degree 3. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 31:282–291, 1981.
- [38] J. Hägglund. On snarks that are far from being 3-edge colorable. Available at: <http://arxiv.org/abs/1203.2015>, March 2012.
- [39] H. Hatami. $\Delta + 300$ is a bound on the adjacent vertex distinguishing edge chromatic number. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 95(2):246–256, 2005.

- [40] I. Holyer. The NP-completeness of edge-colouring. *SIAM Journal of Computing*, 10(1981):718–720, 1981.
- [41] M. Horňák and R. Soták. Observability of complete multipartite graphs with equipotent parts. *Ars Combinatoria*, 41:289–301, 1995.
- [42] D. Huang and W. Wang. Adjacent vertex distinguishing total coloring of planar graphs with large maximum degree. *Scientia Sinica Mathematica*, 42:151–164, 2012.
- [43] D. Huang, W. Wang, and C. Yan. A note on the adjacent vertex distinguishing total chromatic number of graphs. *Discrete Mathematics*, 312:3544–3546, 2012.
- [44] J. Hulgan. Concise proofs for adjacent vertex-distinguishing total colourings. *Discrete Mathematics*, 309:2548–2550, 2009.
- [45] J. Hulgan. *Graph coloring with constraints*. PhD thesis, Mathematical Sciences, University of Memphis, May 2010.
- [46] R. Isaacs. Infinite families of non-trivial trivalent graphs which are not Tait colorable. *The American Mathematical Monthly*, 82(3):221–239, 1975.
- [47] R. Isaacs. Loupekine’s snarks: a bifamily of non-Tait-colorable graphs. Technical Report 263, Department of Mathematical Science, The John Hopkins University, Maryland, U.S.A., 1976.
- [48] M. Kalkowski, M. Karoński, and F. Pfender. A new upper bound for the irregularity strength of graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 25(3):1319–1321, 2011.
- [49] M. Kochol. Snarks without small cycles. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 67:34–47, 1996.
- [50] D. König. Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 77:453–465, 1916.
- [51] D. König. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1936.
- [52] A. V. Kostochka. The total coloring of a multigraph with maximal degree 4. *Discrete Mathematics*, 17:161–163, 1977.
- [53] A. V. Kostochka. The total chromatic number of any multigraph with maximum degree five is at most seven. *Discrete Mathematics*, 162:199–214, 1996.

- [54] A. G. Luiz and R. Bruce Richter. Remarks on a conjecture of Barát and Tóth. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 21(1):P1.57, 2014.
- [55] C. J. H. McDiarmid and A. Sanchez-Arroyo. Total colouring regular bipartite graphs is NP-hard. *Discrete Mathematics*, 124:155–162, 1994.
- [56] R. Naserasr and R. Škrekoski. The Petersen graph is not 3-edge-colorable - a new proof. *Discrete Mathematics*, 268:325–326, 2003.
- [57] T. Nierhoff. A tight bound on the irregularity strength of graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 13(3):313–323, 2000.
- [58] V. Pedrotti and C. P. de Mello. Adjacent-vertex-distinguishing total colouring of indifference graphs. *Matemática Contemporânea*, 39:101–110, 2010.
- [59] J. Petersen. Sur le théorème de tait. *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, 5:225–227, 1898.
- [60] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour, and R. Thomas. The four-color theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 70(1):2–44, 1997.
- [61] B. Seamone. The 1-2-3 conjecture and related problems: a survey. Available at: <http://arxiv.org/abs/1211.5122>. Accessed 02-October-2013, November 2012.
- [62] G. Szekeres. Polyhedral decompositions of cubic graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 8:367–387, 1973.
- [63] P. G. Tait. Remarks on the colouring of maps. In *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, volume 10, pages 501–503, 1880.
- [64] R. Thomas. Recent excluded minor theorems for graphs. *Surveys in Combinatorics, Cambridge University Press*, pages 201–222, 1999.
- [65] W. T. Tutte. A geometrical version of the four color problem. In R. C. Bose and T. A. Dowling, editors, *Combinatorial Mathematics and its Applications*. University of North Carolina Press, 1967.
- [66] W. T. Tutte. Colouring problems. *Mathematical Intelligencer*, 1:72–75, 1978.
- [67] L. Vaux. Théorie des graphes: flots circulaire. Technical report, ÉNS Lyon, Université Lyon 1, 2002.
- [68] R. Černý, M. Horňák, and R. Soták. Observability of a graph. *Mathematica Slovaca*, 46(1):21–31, 1996.

- [69] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz.*, 3:25–30, 1964.
- [70] V. G. Vizing. Some unsolved problems in Graph Theory. (in Russian). *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 23(6(144)):117–134, 1968.
- [71] L. Volkmann. The Petersen graph is not 1-factorable: postscript to ‘the Petersen graph is not 3-edge-colorable - a new proof’ [Discrete Math. 268 (2003) 325–326]. *Discrete Mathematics*, 287:193–194, 2004.
- [72] H. Wang. On the adjacent vertex-distinguishing total chromatic number of the graphs with $\Delta(G) = 3$. *Journal of Combinatorial Optimization*, 14:87–109, 2007.
- [73] W. Wang and D. Huang. The adjacent vertex distinguishing total coloring of planar graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, pages 1–18, 2012.
- [74] Y. Wang and W. Wang. Adjacent vertex distinguishing total colourings of outerplanar graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 19:123–133, 2010.
- [75] J. J. Watkins. On the construction of snarks. *Ars Combinatoria*, 16B:111–123, 1983.
- [76] R. Wilson. *Four colors suffice: How the map problem was solved*. Princeton University Press, 2002.
- [77] H. P. Yap. Total colourings of graphs. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 21(2):159–163, 1989.
- [78] H. P. Yap. *Total Colourings of Graphs*, volume 1623 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG, 1996.
- [79] Z. Zhang, L. Liu, and J. Wang. Adjacent strong edge colouring of graphs. *Applied Mathematics Letters*, 15:623–626, 2002.
- [80] Z. Zhang, C. Xiang, L. Jingwen, Y. Bing, L. Xinzhong, and W. Jianfang. On adjacent-vertex-distinguishing total colouring of graphs. *Science in China Series A: Mathematics*, 48(3):289–299, 2005.

Apêndice A

Artigo publicado no EJC

Entre os meses de outubro de 2012 e março de 2013 desenvolvi um projeto de estágio em pesquisa no exterior, no Departamento de Otimização e Combinatória da Universidade de Waterloo, no Canadá. Esse projeto de pesquisa foi financiado pela FAPESP através da bolsa BEPE¹ e está vinculado ao meu projeto de pesquisa regular de mestrado.

Sob a orientação do professor R. Bruce Richter, iniciei um estudo sobre a Conjetura de Albertson [2] e, posteriormente, a pesquisa se concentrou na investigação de uma conjectura proposta por J. Barát e G. Tóth [9]. Através do desenvolvimento desse projeto de pesquisa, tive a oportunidade de estudar um novo tópico na Teoria dos Grafos, que é o problema do número de cruzamentos de um grafo e a sua relação com o número cromático de um grafo. O estudo e a investigação destas conjecturas me proporcionaram uma maior abrangência em relação aos meus conhecimentos na área de Coloração em Grafos, que é o tema central da minha pesquisa de mestrado. Além disso, o desenvolvimento do projeto de pesquisa no exterior foi importante não apenas em termos acadêmicos, mas também contribuiu para o meu aprendizado pessoal.

Um resumo dos assuntos estudados durante o intercâmbio pode ser encontrado na seção de relatórios técnicos do Instituto de Computação da UNICAMP². Além disso, o trabalho realizado em conjunto com o professor R. Bruce Richter culminou com a publicação de um artigo [54] no periódico *The Electronic Journal of Combinatorics*. Este artigo é apresentado a seguir.

¹BEPE: Bolsa Estágio de Pesquisa no Exterior

²Relatório técnico: <http://www.ic.unicamp.br/~reltech/2013/13-18.pdf>

Remarks on a conjecture of Barát and Tóth

Atílio G. Luiz*

Institute of Computing
University of Campinas
Campinas, São Paulo, Brazil
gomes.atilio@gmail.com

R. Bruce Richter†

Combinatorics & Optimization
University of Waterloo
Waterloo, Ontario, Canada
brichter@uwaterloo.ca

Submitted: May 20, 2013; Accepted: Mar 5, 2014; Published: Mar 17, 2014
Mathematics Subject Classifications: 05C15, 05C10

Abstract

In 2010, Barát and Tóth verified that any r -critical graph with at most $r + 4$ vertices has a subdivision of K_r . Based in this result, the authors conjectured that, for every positive integer c , there exists a bound $r(c)$ such that for any r , where $r \geq r(c)$, any r -critical graph on $r + c$ vertices has a subdivision of K_r . In this note, we verify the validity of this conjecture for $c = 5$, and show counterexamples for all $c \geq 6$.

Keywords: colour-critical graphs; Hajós conjecture; Albertson conjecture

1 Introduction

In this note, we discuss a few points arising from the interesting paper of Barát and Tóth [2]. Their motivation is Albertson's Conjecture that if the chromatic number $\chi(G)$ of a graph G is r , then the crossing number $\text{cr}(G)$ of G is at least that of K_r . In other words, among all graphs with chromatic number at least r , the one with smallest crossing number is K_r . This is trivial for $r \leq 4$ and follows from the Four Colour Theorem for $r = 5$. It was proved by Albertson, Cranston, and Fox [1] for $r \leq 12$ (precisely the values of r for which $\text{cr}(K_r)$ is currently known). Barát and Tóth extended this to $r \leq 16$ by using their new lower bound on crossing numbers to show that every r -chromatic graph other than K_r has crossing number at least the conjectured value of $\text{cr}(K_r)$.

Albertson's Conjecture is related to Hajós' Conjecture that every r -chromatic graph contains a subdivision of K_r . The Hajós Conjecture obviously implies the Albertson

*Supported by FAPESP grant 12/16418-1.

†Supported by NSERC.

Conjecture. Unfortunately, the Hajós Conjecture is false for $r \geq 7$ [3] and remains open for $r = 5, 6$. There is more detailed information to be found in [8].

Barát and Tóth were interested in graphs that satisfy the Hajós Conjecture. Recall that a graph G is r -critical if $\chi(G) = r$ but, for every edge e of G , $\chi(G-e) < r$. Dirac [5, 7] proved that no r -critical graph has $r + 1$ vertices and that $C_5 \vee K_{r-3}$ is the only r -critical graph with $r + 2$ vertices. (Here $G \vee H$ is the *join* of G and H ; it is the graph obtained from the disjoint union of G and H by adding all edges having one end in G and one end in H .) Gallai [9] extended this by showing that, for $r \geq 4$, there are only two r -critical graphs with $r + 3$ vertices.

An observation of Barát and Tóth is that, for $r \geq 6$, there are precisely 22 r -critical graphs with $r + 4$ vertices. In the next section, we prove the following, a straightforward generalization of Barát and Tóth's observation.

Theorem 1. *Let c be a positive integer. There are numbers $n(c)$ and $r(c)$ so that, for any $r \geq r(c)$, there are precisely $n(c)$ r -critical graphs with $r + c$ vertices.*

In particular, $r(5) = 7$ and $n(5) = 395$. Moreover, every r -critical graph with $r + 5$ vertices has a subdivision of K_r .

Barát and Tóth also proposed the following conjecture.

Conjecture 2. For every positive integer c , there is a number $r(c)$ so that, if $r \geq r(c)$, then any r -critical graph with $r + c$ vertices has a subdivision of K_r .

Theorem 1 shows this conjecture is true for $c = 5$. We shall see in the next section that the methods used to prove Theorem 1 combine with some standard examples to demonstrate that this conjecture is not true for any $c \geq 6$.

The note concludes with some remarks on the assertion of Barát and Tóth that the Catlin examples satisfy the Albertson Conjecture. We explain why their proof is not valid, and so it is still open whether the Catlin examples satisfy the Albertson Conjecture.

2 Results

This section contains the proof of Theorem 1 and the proof of Conjecture 2 for $c = 5$, along with its refutation for every $c \geq 6$. The main theoretical tool is the following result of Gallai [9]. A vertex v in a graph G is *universal* if v is adjacent to every other vertex in G .

Theorem 3 (Gallai [9]). *Let G be an r -critical, n -vertex graph with $r \geq 3$. Then G contains at least $\lceil \frac{3}{2}(\frac{5}{3}r - n) \rceil$ universal vertices. In particular, if $r > \frac{3}{2}c$, then any r -critical graph with $r + c$ vertices has a universal vertex.*

We are now ready for the proof of Theorem 1.

Proof of Theorem 1. Theorem 3 implies that, for $r > (3c)/2$, an r -critical graph with $r + c$ vertices has a universal vertex. Since it is well-known that $G \vee v$ is $(r + 1)$ -critical

if and only if G is r -critical, for $r > (3c)/2$, the number of r -critical graphs with $r + c$ vertices is the same as the number of $(r - 1)$ -critical graphs with $(r - 1) + c$ vertices; thus, $r(c) \leq \lfloor (3c)/2 \rfloor$ and $n(c)$ is the number of $(\lfloor (3c)/2 \rfloor)$ -critical graphs with $\lfloor (3c)/2 \rfloor + c$ vertices. In particular, $r(5) \leq 7$.

For the second part of Theorem 1, we consider the special case $c = 5$. To see that $n(5) = 395$, Royle's table [13] of small critical graphs shows there are exactly the following graphs that are, for some r , r -critical, with $r + 5$ vertices, and have no universal vertex:

- (i) twenty-one 4-critical graphs on 9 vertices;
- (ii) one hundred and forty-one 5-critical graphs on 10 vertices;
- (iii) two hundred and thirty-one 6-critical graphs on 11 vertices; and
- (iv) two 7-critical graphs on 12 vertices.

Because $r(5) \leq 7$, the two 7-critical graphs in this list show $r(5) = 7$. For $r \geq 8$, every r -critical graph with $r + 5$ vertices has a universal vertex and so is the join of some K_s with one of the 395 listed graphs. That is, $n(5) = 395$.

Moreover, it suffices to show that each one of the 395 graphs in the list has a subdivision of the appropriate K_r . Dirac [6] proved the Hajós Conjecture for $r = 4$, so each one of the twenty-one 4-critical graphs of the list has a subdivision of K_4 . For $r = 5$, Mader's Theorem [11] that any graph with n vertices and at least $3n - 5$ edges has a subdivision of K_5 is helpful. For each one of the one hundred and forty-one 5-critical graphs of the list we counted its edges from the adjacency list provided by Royle's table. We checked by hand those graphs with fewer than $3n - 5$ edges; every one had a subdivision of K_5 . Finally, all the two hundred and thirty-one 6-critical graphs were checked by hand, and for each one a K_6 -subdivision was found. Most of the 6-critical graphs have approximately the same structure, which made them less difficult to verify. A typical example is shown in Figure 1. This is Graph 391 in the table. (Royle (personal communication) independently verified by computer program that these 395 graphs satisfy the Hajós Conjecture.) ■

We now turn our attention to showing that Conjecture 2 is false for every $c \geq 6$. In order to do this, we use the following subgraphs of Catlin's graphs $L(kC_5)$ [3].

Family F_c . For $c \geq 6$, let F_c be the graph whose vertex set consists of five non-empty pairwise disjoint sets A_1, A_2, C_1, C_2 , and C_3 where $|C_1| = |C_2| = |C_3| = 3$ and $|A_1| = |A_2| = c - 4$, such that these sets induce cliques in F_c . The sets A_1, A_2, C_1, C_2 , and C_3 are joined in the following way: $A_1 \vee C_1, A_1 \vee C_2, C_1 \vee A_2, A_2 \vee C_3$, and $C_2 \vee C_3$. Figure 2 shows a scheme of the graphs F_c .

In the following, we prove that, for $c \geq 6$, F_c is a $(c + 1)$ -critical graph that does not contain a subdivision of $K_{(c+1)}$. Since F_c has $2c + 1$ vertices and is $(c + 1)$ -critical, the join $F_c \vee K_t$ has $2c + t + 1$ vertices, is $(c + t + 1)$ -critical, and does not contain a subdivision of $K_{(c+t+1)}$. Thus, Conjecture 2 is false for every $c \geq 6$.

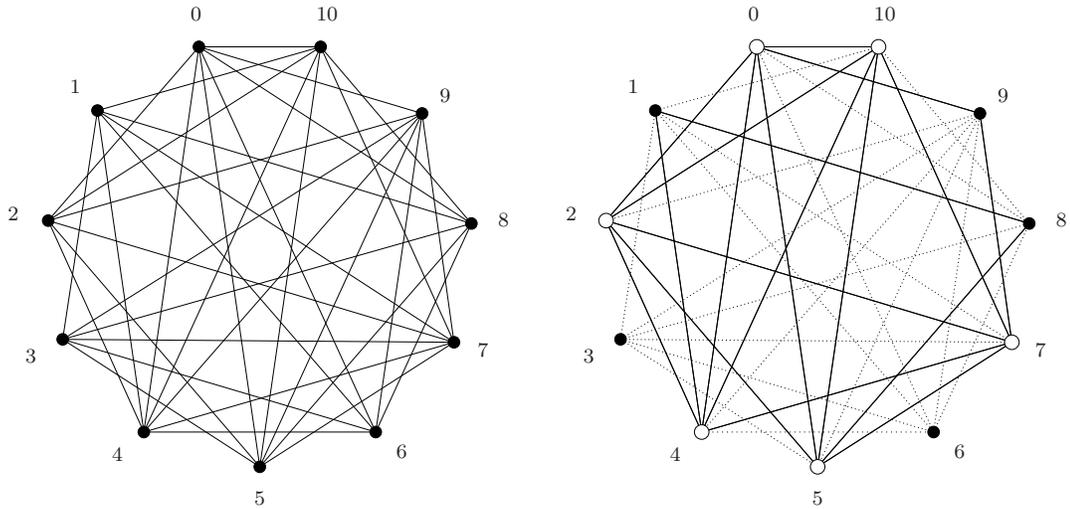


Figure 1: A 6-critical graph and a subdivision of K_6 in it.

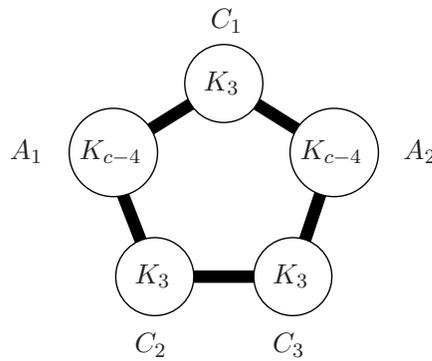


Figure 2: Scheme of a graph F_c . Heavy edges indicate that every vertex in one set is adjacent to every vertex in the other.

Proposition 4. For $c \geq 6$, $\chi(F_c) = c + 1$.

Proof. Since every independent set in F_c has at most two vertices, we see that

$$\chi(F_c) \geq \frac{|V(F_c)|}{2} = \frac{2c + 1}{2} = c + \frac{1}{2}.$$

For $c \geq 6$, the graph F_c can be assigned a $(c + 1)$ -coloring such that the vertices in the sets A_1, A_2, C_1, C_2 , and C_3 receive the following colors: $C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{1, 4, 5\}$, $C_3 = \{2, 6, 7\}$, $A_1 = \{6, 7, 8, 9, \dots, c + 1\}$, and $A_2 = \{4, 5, 8, 9, \dots, c + 1\}$. ■

Proposition 5. For $c \geq 6$, F_c is $(c + 1)$ -critical.

Proof. For $c \geq 6$, we show that, after the removal of an arbitrary edge e , the graph $F_c - e$ is c -colorable. There are 6 different cases to consider.

Case 1. $e \in E(C_1)$.

For $c \geq 6$, the vertex subsets of $F_c - e$ can be assigned the following colors: $C_1 = \{1, 2\}$, $C_2 = \{1, 6, 7\}$, $C_3 = \{2, 4, 5\}$, $A_1 = \{4, 5, 8, \dots, c + 1\}$, and $A_2 = \{6, 7, 8, \dots, c + 1\}$. Observe that the color 3 does not appear in this coloring. Therefore, $F_c - e$ is colorable with c colors.

Case 2. Edge e has one endpoint in the set C_1 and the other endpoint in the set A_1 .

For $c \geq 6$, the vertex subsets of $F_c - e$ can be assigned the following colors: $C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{2, 6, 7\}$, $C_3 = \{1, 3, 5\}$, $A_1 = \{1, 5, 8, \dots, c + 1\}$, and $A_2 = \{6, 7, 8, \dots, c + 1\}$. Observe that the color 4 does not appear in this coloring. Therefore, $F_c - e$ is colorable with c colors.

The remaining cases, listed below, are treated analogously.

Case 3. $e \in E(A_1)$.

Case 4. Edge e has one endpoint in the set A_1 and the other endpoint in the set C_2 .

Case 5. $e \in E(C_2)$.

Case 6. Edge e has one endpoint in the set C_2 and the other endpoint in the set C_3 . ■

The next proposition completes our analysis of the graph F_c .

Proposition 6. For $c \geq 6$, F_c does not contain a subdivision of $K_{(c+1)}$.

Proof. Catlin [3] showed that the graphs F_6 and F_7 do not have a subdivision of K_7 and K_8 , respectively. Thus, we may suppose $c \geq 8$ and F_c has a subdivision of K_{c+1} . Let W be the set of vertices with degree c in a subdivision of K_{c+1} . Within the subdivision, any two vertices of W are joined by c pairwise internally-disjoint paths.

Only if $c = 8$ does $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ have enough vertices to contain W . In this case, $W = V(C_1 \cup C_2 \cup C_3)$ and there must be nine disjoint paths through A_1 representing the edges from C_1 to C_2 . Since A_1 has only four vertices, this is impossible.

Thus, in all cases, at least one vertex of W is in $A_1 \cup A_2$. Since $V(C_1 \cup C_2)$ is a cut-set in F_c of size $6 < c$, there cannot be vertices of W in both $V(A_1)$ and $V(A_2)$. Therefore, we may assume $W \cap V(A_1) \neq \emptyset$ and $W \cap V(A_2) = \emptyset$.

Since $V(C_1 \cup C_2)$ also separates A_1 from C_3 , we deduce that $W \cap V(C_3) = \emptyset$. Therefore, $W \subseteq V(C_1 \cup A_1 \cup C_2)$.

Since $|W| = c + 1$ and $|V(C_1 \cup A_1 \cup C_2)| = c + 2$, exactly one vertex v in $C_1 \cup A_1 \cup C_2$ is not in W . It follows that there are at least 6 (5 is enough) internally-disjoint $C_1 C_2$ -paths in K_{c+1} representing the edges from $W \cap V(C_1)$ to $W \cap V(C_2)$. Since at most one vertex of A_1 is not in W , at most one of the 6 $C_1 C_2$ -paths can go through A_1 . In the other direction, at most three can go through C_3 . Thus there are too few paths for F_c to have a subdivision of K_{c+1} .

To conclude the proof, there is a subdivision of K_c consisting of the $c - 4$ vertices in A_1 , three vertices in C_1 , and one vertex in C_2 . This uses only three internally disjoint $C_1 C_2$ -paths through $C_3 \cup A_2$. ■

3 Catlin graphs and Albertson's Conjecture

In their paper, Barát and Tóth claim (Lemma 16) that Catlin's graphs satisfy Albertson's Conjecture. In the proof, they use (asymptotic versions of) the not-yet proved conjectures on the values of the crossing numbers of K_{2k} , K_k , and $K_{k,k}$. We prove the following, without any assumption about the crossing number of K_k and $K_{k,k}$.

Theorem 7. *The graph F_c has crossing number at least that of K_{c+1} .*

Proof. We have already exhibited a subdivision of K_c in F_c . This subdivision uses three internally disjoint C_2C_1 -paths through A_2 , but is otherwise disjoint from A_2 . It is known [10, 12] that the crossing number of K_c , denoted $\text{cr}(K_c)$, is at most

$$f(c) = \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{c-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{c-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{c-3}{2} \right\rfloor.$$

Since, $\text{cr}(K_c) \leq f(c)$, there is a vertex v of K_c so that the edges incident with v are involved in at most $\lfloor 4f(c)/c \rfloor$ crossings.

Let D be a drawing of K_c with at most $f(c)$ crossings. We obtain a drawing D' of K_{c+1} by adding a new vertex v' close to v and joined to v with no crossings. For each other vertex w of K_c , we add the edge $v'w$ alongside vw . These latter edges cross the same number of edges to $K_c - v$ as those incident with v do, which is to say at most $\lfloor 4f(c)/c \rfloor$ crossings. In addition, Woodall [14] observes that the edges at v' can be drawn so as to cross the edges incident with v at most $\lfloor (c-1)/2 \rfloor \lfloor (c-2)/2 \rfloor$ times. Thus,

$$\text{cr}(K_{c+1}) \leq \text{cr}(K_c) + \left\lfloor \frac{4f(c)}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{c-2}{2} \right\rfloor.$$

On the other hand, the crossing number of K_k is known [4] to be at least $0.8594 f(k)$. The three internally disjoint paths through A_2 are all incident with a common node of the subdivision of K_c , so no crossing between two of them is counted in the crossings of this K_c . Therefore, all the crossings in the K_{c-1} induced by $A_2 \cup C_3$ are additional. We deduce that the crossing number of F_c is at least $\text{cr}(K_c) + 0.8594 f(c-1)$.

It follows that, if

$$.8594 f(c-1) \geq \left\lfloor \frac{4f(c)}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{c-2}{2} \right\rfloor,$$

then the crossing number of F_c is at least that of K_{c+1} . We note that, since the left side is degree 4 in c while the right is degree 3 in c ($f(c)$ is degree 4 in c), this certainly is true for c large enough. In fact, this holds for $c \geq 12$. For $c < 12$, already [1] shows that Albertson's Conjecture is true, so in these cases also, $\text{cr}(F_c) \geq \text{cr}(K_{c+1})$. ■

Unfortunately, a straightforward analogue of this argument does not show that the Catlin graphs satisfy the Albertson Conjecture.

Acknowledgments

We are grateful to Gordon Royle for his insights and computer skills. We also appreciate the suggestions from the referees to improve the presentation.

References

- [1] M. O. Albertson, D. W. Cranston, and J. Fox. Crossings, colorings, and cliques. *Electronic Journal of Combinatorics*, 16:#R45, 2009.
- [2] J. Barát and G. Tóth. Towards the Albertson conjecture. *Electronic Journal of Combinatorics*, 17:#R73, 2010.
- [3] P. A. Catlin. Hajós’ graph-coloring conjecture: variations and counterexamples. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 26:268–274, 1979.
- [4] E. de Klerk, D. V. Pasechnik, and A. Schrijver. Reduction of symmetric semidefinite programs using the regular $*$ -representation. *Mathematical Programming: Series B*, 109(2):613–624, 2007.
- [5] G. A. Dirac. Map colour theorems. *Canadian Journal of Mathematics*, 4:480–490, 1952.
- [6] G. A. Dirac. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, 27:85–92, 1952.
- [7] G. A. Dirac. Map colour theorems related to the Heawood colour formula. *Journal of the London Mathematical Society*, 31:460–471, 1956.
- [8] P. Erdős and S. Fajtlowicz. On the conjecture of Hajós. *Combinatorica*, 1:141–143, 1981.
- [9] T. Gallai. Kritische Graphen. II. (German). *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutat Int. Közl*, (8):373–395, 1963.
- [10] R. K. Guy. Crossing numbers of graphs, in *Graph Theory and Applications*, Lecture Notes in Mathematics, 303:111–124, 1972.
- [11] W. Mader. $3n - 5$ edges do force a subdivision of K_5 . *Combinatorica*, 18(4):569–595, 1998.
- [12] R. B. Richter and C. Thomassen. Relations between crossing numbers of complete and complete bipartite graphs. *The American Mathematical Monthly*, 104(2):131–137, 1997.
- [13] G. Royle. Small graphs.
<http://school.maths.uwa.edu.au/~gordon/remote/graphs/>.
- [14] D. R. Woodall. Cyclic-order graphs and Zarankiewicz’s crossing-number conjecture. *Journal of Graph Theory*, 17(6):657–671, 1993.

Índice Remissivo

- índice cromático, 10
 - semiforte, 22
- árvore, 4, 37
- aresta de corte, 6
- caminho, 4
- ciclo, 4
- cintura, 4, 70
- coloração
 - de arestas, 10
 - semiforte, 21
 - de vértices, 9
 - total, 11
 - total semiforte, 12
- componente conexa, 4
- conflito, 12
- contração de aresta, 7
- emparelhamento, 3, 28
 - perfeito, 3
 - quase-perfeito, 3
- extremos, 2
- floresta, 4
- grafo
 - acíclico, 4
 - bipartido, 4
 - bipartido completo, 4, 36
 - classe 1, 11
 - classe 2, 11
 - completo, 4
 - comportado, 18–20
 - conexo, 4
 - disjunto, 8
 - disjunto nas arestas, 8
 - equipartido completo, 79
 - estrela, 4, 71
 - k-regular, 2
 - planar, 4, 23, 26, 27
 - plano, 4
 - r-partido completo, 79
 - subcúbico, 49, 70
 - subjacente, 8
 - tripartido, 79, 96
 - trivial, 2
- grau, 2
 - mínimo, 2
 - máximo, 2
- identificação, 6
- isomorfismo, 3
- junção, 8, 43
- laço, 2, 7, 9
- menor, 7, 56
- multiconjunto, 8, 19, 20
- núcleo, 11, 97
- número cromático, 9
 - total, 11
 - total semiforte, 12
- rede irregular, 17

- snark, 53
 - de Blanusa generalizados, 66
 - de Goldberg, 63
 - de Loupekine, 70
 - de Petersen, 55
 - flor, 57
- subdivisão de aresta, 7
- subgrafo, 3
 - induzido, 3
- união, 8
- união disjunta, 8
- vértice de corte, 6

“A journey of a thousand miles
begins with a single step.”

LAO TZU
Tao Te Ching, Chapter 64