

# Animação Dinâmica de Corpos Rígidos Articulados

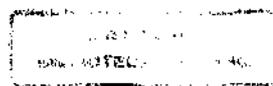
**Edson Bacin**

Janeiro de 1999

**Banca Examinadora:**

- Prof. Dr. Jorge Stolfi (Orientador)
- Prof. Dr. Luiz Henrique de Figueiredo  
Laboratório Nacional de Computação Científica
- Prof. Dr. Neucimar Jerônimo Leite  
Instituto de Computação - Unicamp
- Prof. Dr. Flávio Keidi Miyazawa (Suplente)  
Instituto de Computação - Unicamp

1118066



UNIVERSIDADE	BC
N.º DE MATRÍCULA:	
V.º	F.º
TOMBO BC	37209
PROC.	229199
	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	07/04/99
N.º CPU	

CM-00121877-6

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bacin, Edson

B125a Animação dinâmica de corpos rígidos articulados / Edson Bacin  
-- Campinas, [S.P. :s.n.], 1998.

Orientador : Jorge Stolfi

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Computação.

1. Animação por computador. 2. Dinâmica de corpos rígidos. 3.  
Equações de Lagrange. I. Stolfi, Jorge. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Instituto de Computação. III. Título.

# Animação Dinâmica de Corpos Rígidos Articulados

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação devidamente corrigida e defendida por Edson Bacin e aprovada pela Banca Examinadora.

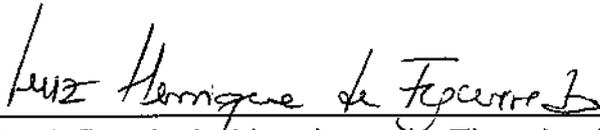
Campinas, 11 de janeiro de 1999.

  
Prof. Dr. Jorge Stolfi (Orientador)

Dissertação apresentada ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

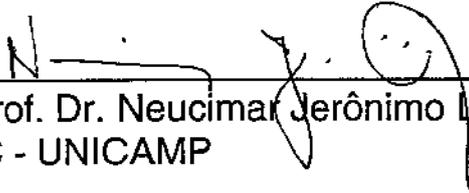
## TERMO DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida e aprovada em 11 de janeiro de 1999, pela  
Banca Examinadora composta pelos Professores Doutores:



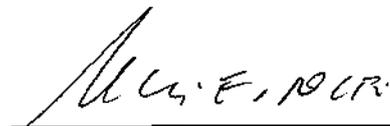
---

Prof. Dr. Luiz Henrique de Figueiredo  
LNCC



---

Prof. Dr. Neucimar Jerônimo Leite  
IC - UNICAMP



---

Prof. Dr. Jorge Stolfi  
IC - UNICAMP

*Aos meus pais.*

*If I can stop one heart from breaking,  
I shall not live in vain;  
If I can ease one life the aching,  
Or cool one pain,  
Or help one fainting robin  
Unto his nest again,  
I shall not live in vain.*

Emily Dickinson

# Resumo

Esta dissertação apresenta um simulador dinâmico de corpos rígidos articulados. Os corpos são descritos por suas características físicas e geométricas e supõe-se que sejam poliedros convexos.

A entrada para o simulador consiste, além da descrição dos corpos, de um estado inicial válido e de um conjunto de forças e torques externos que atuam nos corpos ao longo do tempo. Além disso, especificam-se eventuais articulações entre corpos, as quais representam juntas mecânicas que limitam seu movimento.

Com os dados acima, cria-se um conjunto de equações do movimento, conhecidas como *equações de Lagrange*, que definem a evolução dos corpos ao longo do tempo (elas constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem). Integrando numericamente as equações de Lagrange, produzimos uma trajetória para o sistema de corpos ao longo do tempo que obedece às leis da dinâmica. São tratadas também durante a animação eventuais colisões que ocorrem entre os corpos.

# Abstract

This work presents a dynamic simulator of articulated rigid bodies. The bodies are described by their physical and geometric properties and are assumed to be convex.

The input for the simulator is, in addition to the description of the bodies, an initial valid state and a set of external forces and torques that act on the bodies over the time. Articulations between the bodies, if any, are also specified. They represent mechanical joints that constrain the movement of the system of bodies.

Given the data above, we create a set of equations of movement, known as *Lagrange equations*, which define how the system will evolve over the time (they consist of a system of second-order ordinary differential equations). The trajectory of the system of bodies is created numerically integrating the Lagrange equations. This trajectory obeys the laws of mechanics. Any collisions that eventually occur during the animation are also treated by the simulator.

# Agradecimentos

Ao Prof. Stolfi, por sua serenidade e paciência nestes anos que nem sempre foram fáceis.

Aos professores do IC, em especial ao Dahab, Pedro, Setubal e Rezende, por me mostrarem um “adorável mundo novo” dentro da computação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro sem o qual este trabalho não seria possível.

Ao Jaime e Clevan, pelo seu incentivo e suporte nos primeiros meses em Campinas.

Ao Eduardo, pelo seu companheirismo e amizade nos primeiros dois anos desta jornada.

Aos meus amigos Carlos, João, Andrei e Marco com os quais dividi a casa em Campinas. Em especial ao Carlos, que nestes últimos nove anos tem sido um amigo constante e confiável em todas as horas.

Ao Wesley, por sua singular amizade e apoio, tornando um pouco mais fácil minha vida em Campinas.

Ao Cláudio, pela amizade e pelo seu gosto por pesquisa, que ajudou suscitar em mim o crescimento deste sentimento meio adormecido.

Aos colegas de trabalho, em especial à Regina, Maria, Pinho, Cláudia e Rogério que fizeram com que eu dispusesse do tempo necessário para o esforço final.

Ao Pedro, pelo incentivo durante o curso e pela oportunidade profissional. Porém, principalmente, por sua valiosa amizade e pelo inestimável aprendizado humano trazido pelo convívio durante estes anos.

A todos da Comunidade Católica Vale de Saron, por suas orações. Em especial, à Carolina e à Silvana por serem ouvintes de todas as horas.

À minha mãe, por seu amor.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	vii
<b>Abstract</b>	viii
<b>Agradecimentos</b>	ix
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Definição do problema . . . . .	2
1.2 Trabalhos relacionados . . . . .	3
<b>2 Equações de Lagrange</b>	<b>4</b>
2.1 Introdução . . . . .	4
2.2 Equações de Lagrange . . . . .	4
2.2.1 Exemplo das equações de Lagrange . . . . .	6
<b>3 Corpos Rígidos</b>	<b>8</b>
3.1 Partículas . . . . .	8
3.2 Corpos rígidos . . . . .	8
3.3 Posição de uma partícula do corpo . . . . .	9
3.4 Velocidade de uma partícula do corpo . . . . .	9
3.5 Parâmetros de Euler . . . . .	10
3.6 Posição e orientação de um corpo rígido . . . . .	11
3.7 Energia cinética de um corpo rígido . . . . .	11
3.7.1 Eixos principais de inércia . . . . .	13
3.7.2 Energia cinética via parâmetros de Euler . . . . .	13
3.8 Momentos de inércia de um paralelepípedo . . . . .	14
3.9 Energia potencial gravitacional . . . . .	15
3.10 Forças e torques . . . . .	15
3.10.1 Torques de Euler . . . . .	16

<b>4</b>	<b>Vínculos</b>	<b>17</b>
4.1	Condições definidas por desigualdades . . . . .	18
4.1.1	Restrições advindas de contatos . . . . .	18
4.2	Forças de reação . . . . .	19
4.3	Articulações ou juntas . . . . .	19
4.3.1	Junta plana . . . . .	20
4.3.2	Junta esférica ou universal . . . . .	20
4.3.3	Junta cilíndrica . . . . .	20
4.3.4	Junta prismática . . . . .	21
4.3.5	Junta de revolução . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Formulação Matricial para um Corpo Rígido</b>	<b>24</b>
5.1	Forma matricial para um corpo . . . . .	24
5.2	Resolução do sistema de equações para um corpo . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Formulação Matricial para Corpos Articulados</b>	<b>30</b>
6.1	Forma matricial para corpos articulados . . . . .	30
6.2	Inserindo restrições . . . . .	31
6.3	Resolução do sistema para corpos articulados . . . . .	32
6.3.1	Detalhamento da solução . . . . .	34
6.4	Integração numérica . . . . .	35
6.4.1	Estabilização de vínculos . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Detecção de Colisões</b>	<b>38</b>
7.1	Detecção de colisões . . . . .	38
7.1.1	Detecção eficiente de colisões . . . . .	39
7.2	Detecção de colisões entre pares de poliedros convexos . . . . .	39
7.2.1	Diagrama de Voronói e região de Voronói . . . . .	40
7.2.2	Pré-processamento . . . . .	40
7.3	Aceleração através de caixas envoltórias . . . . .	40
7.4	Tratamento de casos degenerados . . . . .	41
<b>8</b>	<b>Tratamento de Colisões</b>	<b>43</b>
8.1	Introdução . . . . .	43
8.2	Colisão entre corpos rígidos articulados . . . . .	44
8.2.1	Cálculo do impulso máximo . . . . .	46
8.2.2	Cálculo do impulso máximo . . . . .	47
8.2.3	Escolha de $\kappa$ . . . . .	48

<b>9</b>	<b>Resultados Computacionais</b>	<b>49</b>
9.1	Introdução . . . . .	49
9.2	Corpo girando em torno de um eixo principal . . . . .	49
9.3	Corpo girando em torno de um eixo arbitrário . . . . .	50
9.4	Um corpo articulado . . . . .	51
9.5	Colisão entre dois corpos . . . . .	52
9.6	Colisão de um corpo articulado . . . . .	52
<b>10</b>	<b>Conclusão</b>	<b>57</b>
10.1	Possíveis extensões . . . . .	57
<b>A</b>	<b>Descrição dos Arquivos Utilizados pelo Simulador</b>	<b>58</b>
A.1	Arquivos de entrada . . . . .	58
A.1.1	Arquivo de configuração . . . . .	58
A.1.2	Corpos envolvidos na animação . . . . .	59
A.1.3	Descrição do formato dos corpos . . . . .	59
A.1.4	Estado inicial . . . . .	60
A.1.5	Descrição das juntas (opcional) . . . . .	60
A.1.6	Forças e torques (opcional) . . . . .	61
A.2	Arquivos de saída . . . . .	63
A.2.1	Arquivo de faces . . . . .	63
A.2.2	Arquivos de quadros . . . . .	63
	<b>Bibliografia</b>	<b>65</b>

# Lista de Figuras

3.1	Um corpo rígido com seu sistema de coordenadas (origem $r$ , eixos $u, v, w$ ).	9
3.2	Paralelepípedo. . . . .	15
4.1	Exemplo de uma junta cilíndrica. . . . .	21
4.2	Exemplo de uma junta prismática. . . . .	22
4.3	Exemplo de uma junta de revolução. . . . .	22
9.1	Corpo girando em torno de seu eixo $\bar{z}$ . . . . .	50
9.2	Evolução da energia para um corpo girando sobre seu eixo $\bar{z}$ . . . . .	51
9.3	Corpo girando em torno de um eixo arbitrário. . . . .	52
9.4	Evolução da energia para um corpo girando em torno de um eixo arbitrário.	53
9.5	Dois corpos articulados. . . . .	54
9.6	Evolução da energia para um corpo articulado. . . . .	54
9.7	Corpos isolados com colisão. . . . .	55
9.8	Evolução da energia para dois corpos isolados colidindo. . . . .	55
9.9	Corpo articulado com colisões. . . . .	56
9.10	Evolução da energia para a um corpo articulado com colisões. . . . .	56

# Capítulo 1

## Introdução

A animação por computador tem possibilitado a produção de animações limitadas apenas pela criatividade do animador. Pode-se produzir no computador imagens impossíveis de serem criadas no mundo real, realizando efeitos muito populares no campo do entretenimento e publicidade.

Não com menos afincos, porém, têm sido desenvolvidos métodos que permitem a criação de animações que simulam fenômenos do mundo real. Tais animações são úteis em áreas como biomecânica, projeto auxiliado por computador, robótica, química, etc. Em biomecânica, por exemplo, equipamentos precisam ser testados para descobrir se não existem defeitos originados por forças ou torques sendo gerados em pontos prejudiciais; com animação dinâmica, tais problemas podem ser detectados cedo, evitando a construção de protótipos. Ainda na robótica, a animação dinâmica possibilita não apenas o desenvolvimento de protótipos com rapidez, como sistemas de controle de robôs podem fazer uso desta técnica para obter um ambiente de simulação mais bem definido e com *feedbacks* mais precisos. Ao contrário das animações para entretenimento, aqui o que se deseja é que a animação seja o mais realista possível. Para conseguir tal meta, têm sido utilizadas as leis da dinâmica, tratando os objetos da animação não apenas como entes geométricos, mas associando a eles propriedades físicas como distribuição de massa, rugosidade do material, etc. As técnicas utilizadas para a produção de animações fazendo uso de dinâmica são comumente chamadas de *animação dinâmica* e são o escopo deste trabalho. Animações dinâmicas não deixam de ter sua aplicação no campo do entretenimento por permitirem a criação de movimentos realistas, dando ao espectador a sensação de correteude da animação.

Para produzir uma animação dinâmica, parte-se de uma descrição física dos corpos com a qual constrói-se um conjunto de *equações do movimento*, que descrevem o comportamento dos corpos ao longo do tempo (tratadas no capítulo 2). O animador controla o movimento indiretamente, especificando o conjunto de forças e torques sofridos pelos

corpos no decorrer da animação (tal interface impõe certas dificuldades, uma vez que nem sempre é trivial decidir qual conjunto de forças e torques devem ser aplicados ao sistema para produzir o resultado desejado. Existem trabalhos sendo desenvolvidos que visam facilitar tal interface para o animador [Wil87a, AGL86, dMR95]).

O propósito deste trabalho é construir um simulador que possibilite a criação de animações dinâmicas envolvendo *corpos rígidos articulados*. Por *rígidos* queremos dizer que os corpos não são passíveis de qualquer deformação, como definidos na física [Gol80]. O modelo específico de corpos rígidos por nós utilizado será tratado no capítulo 3. Quando usamos o termo *articulados*, nos referimos a corpos ligados por juntas não rígidas, tais como pinos, trilhos, etc. Tais juntas são tratadas no capítulo 4.

O comportamento dos corpos é conseguido a maior parte do tempo, integrando-se o sistema de equações do movimento. Estas equações, entretanto, não impedem que dois objetos passem um por dentro do outro. Para evitar tal fato indesejado, suplementa-se o integrador com um mecanismo de detecção geométrica de interpenetração entre os corpos. Uma vez detectada uma interpenetração geométrica, voltamos novamente à física e tratamos tal evento como uma *colisão* entre corpos rígidos [Bra91]. O efeito da colisão é uma mudança brusca nas velocidades dos corpos, o que permite que o movimento continue sem que haja interpenetração. Esta mudança nas velocidades é determinada através de um sistema de equações do movimento semelhante ao original. A detecção geométrica de colisões será tratada no capítulo 7, e a resposta física para evitar a interpenetração no capítulo 8.

## 1.1 Definição do problema

O propósito desta dissertação é resolver o seguinte problema. São dados:

1. um conjunto de corpos rígidos definidos por suas propriedades físicas (massa, densidade e momentos principais de inércia); e geométricas (vértices e faces);
2. um conjunto de juntas, na forma de restrições que limitam o movimento (relativo ou absoluto) de um ou mais corpos;
3. um conjunto de forças e torques externos ao longo do tempo aos quais o conjunto de corpos estará sujeito;
4. um estado inicial dos corpos representado pelas suas posições e velocidades num instante  $t_0$ .

A partir destes dados, desejamos calcular as posições e velocidades dos corpos num instante dado  $t$ , posterior a  $t_0$ , supondo que o movimento obedece às leis da mecânica, incluindo o tratamento de possíveis colisões.

## 1.2 Trabalhos relacionados

Armstrong [AG85] foi um dos primeiros a propor métodos para a animação de corpo rígidos articulados, bem como de seu controle [AGL86].

Lin [Lin94] propôs o método para detecção de colisões entre poliedros convexos que é o mais eficiente conhecido até o momento.

Infelizmente, não há ainda um modelo físico satisfatório para o tratamento de colisões e contatos entre corpos rígidos articulados na presença de atrito. Apesar do caso bidimensional ser de solução conhecida [WM92, HM94], o mesmo não ocorre para o caso tridimensional. No espaço, carece-se ainda de um modelo que retrate de forma determinística a intrincada interação entre dois corpos articulados com atrito. De fato, não há ainda sequer um modelo de consenso sobre como deve ser tratada a colisão entre dois corpos rígidos isolados no espaço [Cha97]. Ainda recentemente, foi proposto um novo modelo que determina o impulso durante a colisão de dois corpos rígidos isolados no espaço com atrito [Rub98]. Na prática, são utilizados modelos simplificados, em que os parâmetros físicos relevantes desconhecidos do sistema são substituídos por coeficientes “empíricos”, cujo valor é fixado arbitrariamente. Além disso, os algoritmos utilizados, geralmente têm custo exponencial no pior caso ou então encontram apenas uma solução aproximada. (Conforme provado por Baraff [Bar93], se adotarmos o modelo físico tradicional para forças de atrito estático, o problema geral de tratamento de colisões é NP-difícil.)

Wilhelms e Moore [Wil87b] enfocaram o problema do tratamento de colisões e contatos, utilizando molas para simular pontos de contato e um método analítico para resolver colisões. Mais tarde, trataram igualmente do controle da animação [Wil87a].

Baraff desenvolveu um modelo analítico que se aplica a contatos [Bar89, Bar92, Bar93, Bar96], inclusive entre superfícies curvas [Bar90]. Mirtich e Canny [MC94] propuseram um modelo que procura simular o contato entre dois corpos rígidos através da aplicação de múltiplos microimpulsos que evitam a interpenetração.

Recentemente, Trinkle e outros [TPSL95, TP96] apresentaram um modelo mais abrangente para contatos, possibilitando detectar casos onde não há solução, ou então há múltiplas soluções. Foram desenvolvidos tanto um modelo utilizando a lei de atrito de Coulomb, quanto um modelo onde o cone de atrito é aproximado por uma pirâmide multifacetada. O modelo obtido pode ser expresso como um *Problema Complementar Não-Linear* no primeiro caso e por um *Problema Complementar Linear* no segundo.

# Capítulo 2

## Equações de Lagrange

### 2.1 Introdução

O comportamento dos corpos envolvidos numa animação é descrito por um conjunto de *equações de movimento*, a partir das quais obtemos a trajetória de cada corpo. Mais precisamente, as equações de movimento, em nosso caso, formam um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, que definem as relações entre as massas de cada corpo, as forças e torques associadas, e as acelerações resultantes. Na ausência de colisões, podemos determinar a trajetória de cada corpo integrando este sistema.

Existem diversas formulações das equações de movimento. As principais são as equações de Euler [Rod93], de Lagrange [Gol80, Sha89], de Gibbs-Appel [Wil87b], de Hamilton [Gol80] e de Armstrong [AG85]. Todas são semelhantes no que se refere ao resultado; o que varia são as facilidades em modelar determinadas estruturas, se as equações diferenciais obtidas são de primeira ou segunda ordem, e o custo computacional para sua integração.

### 2.2 Equações de Lagrange

Usando apenas as leis de Newton, podemos obter um sistema de equações de movimento em termos das coordenadas cartesianas das partículas envolvidas. No entanto, o número de partículas em qualquer sistema real é astronômico; mas, felizmente, em muitos casos, é possível especificar completamente a posição de todas as suas partículas com número finito e relativamente pequeno de valores. Por exemplo, se o corpo for rígido, a posição de todas as partículas pode ser determinada a partir de seis valores [Gol80]. Mesmo num corpo flexível, as deformações relevantes para animação podem ser aproximadas por funções polinomiais ou séries trigonométricas com poucos termos [Lie97].

Chamamos um conjunto de valores que determinam univocamente a posição de todas

as partículas do sistema de *coordenadas generalizadas* do sistema. Vamos considerar as coordenadas generalizadas como sendo um único vetor  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ . Como exemplo, a posição de uma partícula no plano pode ser dada pelas suas coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ ; ou pelas suas coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ . Por definição, para cada partícula  $p$  do sistema, existe uma função  $\hat{p} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $\hat{p}(q)$  é a posição dessa partícula quando as coordenadas generalizadas do sistema são o vetor  $q$ .

Suponha que sejam conhecidas as coordenadas generalizadas  $q$  de um sistema em questão num instante  $t$ . Para determinar qual será o estado deste sistema em um instante  $t + dt$ , onde  $dt$  representa um intervalo infinitesimal de tempo, é preciso que se conheçam também as *velocidades generalizadas* do sistema, denotadas por  $\dot{q}$  (adotaremos a notação de um ponto sobre alguma função como sendo sua derivada em relação ao tempo). Assim, em primeira ordem, o estado do sistema em  $t + dt$  será  $q + \dot{q}dt$  [Gol80].

Em princípio, supondo que se possui um conjunto de coordenadas e velocidades generalizadas para o sistema, as equações que definem seu comportamento consistem da equação de Newton  $F = ma$  para cada partícula, mais as equações que determinam as forças  $F$  e a posição da partícula a partir das coordenadas generalizadas. Entretanto, é em geral mais adequado escrever diretamente o sistema em termos de coordenadas e velocidades generalizadas. Este método foi desenvolvido pelo matemático e físico teórico Joseph Louis Comte Lagrange (1736–1813).

A equação de Lagrange, na sua forma mais simples [Gol80, Sha89] é

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (2.1)$$

Nesta equação,  $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$  é a força externa generalizada, que resume todas as forças externas  $F_p$  aplicadas às partículas  $p$  do sistema, e é definida pela equação

$$Q_i = \sum_p \frac{\partial \hat{p}}{\partial q_i} F_p; \quad i = 1, \dots, n$$

O *Lagrangeano*  $L$  do sistema é definido como

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}) - V(q, t) \quad (2.2)$$

onde  $T$  é a energia cinética e  $V$  é a energia potencial do sistema, ambas expressas em função das coordenadas generalizadas. Detalhes sobre a obtenção desta equação podem ser encontrados em livros de mecânica [Gol80, Sha89].

A equação acima supõe que as coordenadas generalizadas são independentes. Isto é, para qualquer configuração válida do sistema descrita por um vetor  $q$ , e para qualquer variação infinitesimal  $dq$  do mesmo, existe uma única configuração válida do sistema descrita pelo vetor  $q + dq$ . De outro modo, podemos dizer que supõe-se aqui que o número

de coordenadas generalizadas é igual ao número de *graus de liberdade* do sistema. Esta condição será relaxada quando desenvolvermos o modelo de restrições no capítulo 4.

Vemos na equação (2.1) que o termo  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} \right)$ , contido no Lagrangeano  $L = T - V$ , só aparece nos casos em que  $V$  depende da velocidade  $\dot{q}$ . Se não tivermos tal tipo de energia potencial, então podemos considerar as forças advindas de  $V$  como sendo forças externas. Sob estas condições, podemos reescrever as equações de Lagrange como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q - \frac{\partial V}{\partial q} \quad (2.3)$$

Para usar a equação de Lagrange, expandimos as derivadas, obtendo, depois de reorganizar os termos, um conjunto de equações na forma

$$\ddot{q} = \mathcal{F}(q, \dot{q}, t)$$

Os detalhes serão vistos nos capítulos 5 e 6. Este sistema pode ser integrado (analítica ou numericamente) de modo a obter a trajetória  $q(t)$  do sistema.

### 2.2.1 Exemplo das equações de Lagrange

Tomamos, a título de exemplo, um sistema de duas partículas de massa  $m_1$  e  $m_2$ , ligadas por uma mola de constante  $k$  e comprimento nulo.

Como coordenadas generalizadas, podemos tomar as coordenadas cartesianas das duas partículas  $q = (q_1, \dots, q_6) = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ . A energia cinética é, portanto, igual a

$$T = \frac{1}{2} \left[ m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) \right]$$

e a energia potencial é a energia da mola é

$$V = \frac{1}{2} k \left[ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \right]$$

A força externa generalizada é simplesmente a concatenação das forças externas sejam  $f_1$ ,  $f_2$  agindo nas duas partículas

$$Q = (f_{1x}, f_{1y}, f_{1z}, f_{2x}, f_{2y}, f_{2z})$$

Temos, portanto, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = (m_1 \dot{x}_1, m_1 \dot{y}_1, m_1 \dot{z}_1, m_2 \dot{x}_2, m_2 \dot{y}_2, m_2 \dot{z}_2) - (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) &= (m_1 \ddot{x}_1, m_1 \ddot{y}_1, m_1 \ddot{z}_1, m_2 \ddot{x}_2, m_2 \ddot{y}_2, m_2 \ddot{z}_2) \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= \frac{\partial T}{\partial V} - \frac{\partial V}{\partial q} = (0, 0, 0, 0, 0, 0) - k[(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2)] \end{aligned}$$

Logo, as equações de movimento para este sistema são

$$\begin{aligned}m_1\ddot{x}_1 &= f_{1_x} - k[\dot{x}_1(x_1 - x_2)] \\m_1\ddot{y}_1 &= f_{1_y} - k[\dot{y}_1(y_1 - y_2)] \\m_1\ddot{z}_1 &= f_{1_z} - k[\dot{z}_1(z_1 - z_2)] \\m_2\ddot{x}_2 &= f_{2_x} - k[\dot{x}_2(x_1 - x_2)] \\m_2\ddot{y}_2 &= f_{2_y} - k[\dot{y}_2(y_1 - y_2)] \\m_2\ddot{z}_2 &= f_{2_z} - k[\dot{z}_2(z_1 - z_2)]\end{aligned}$$

que podem ser integradas para obtermos a trajetória das duas partículas.

# Capítulo 3

## Corpos Rígidos

### 3.1 Partículas

Quando se estuda o movimento de partículas no espaço, cada partícula é identificada, em geral, como um ponto, especificado por suas coordenadas cartesianas, o que determina completamente sua posição.

Deve-se observar que, como estamos falando de partículas e corpos em movimento, a posição de uma partícula ou a posição e orientação de um corpo são, na verdade, funções que dependem do tempo. A posição de um partícula é, de fato, dada por  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ , três funções que determinam sua posição a cada instante de tempo em relação a um sistema inercial. É preciso ter este fato em mente quando dizemos, por exemplo, que a velocidade de uma partícula é a derivada da sua posição em relação ao tempo.

### 3.2 Corpos rígidos

Um corpo rígido pode ser visto como um conjunto de partículas, no qual a distância entre quaisquer duas partículas permanece constante. Embora não existam no mundo real corpos completamente rígidos, muitas vezes as deformações sofridas por um corpo não são relevantes ou então são desprezíveis, o que autoriza o uso deste modelo.

Mostra-se que, para determinar completamente a posição de todas as partículas de um corpo rígido são necessários seis valores [Gol80]. Assim, uma partícula possui três graus de liberdade e um corpo rígido, seis. (Tecnicamente, o conjunto de todas as posições de um corpo rígido tem a topologia de uma variedade de dimensão seis, considerando-se a distância entre duas posições do corpo como a distância máxima entre as duas posições da mesma partícula do corpo.)

Uma escolha conveniente para os seis valores que determinam a posição de um corpo rígido são as três coordenadas da origem de um sistema ortonormal de referência fixo no

corpo, mais outros três valores que identificam a orientação deste sistema em relação a um outro sistema dito *inercial*, por possuir uma posição estacionária em relação a algum referencial. Em geral, escolhe-se a origem do sistema preso ao corpo no *centro de massa* do corpo, e os eixos do sistema paralelos aos *eixos principais de inércia* do corpo [Gol80]. A razão dessa escolha se deve às simplificações obtidas nas equações, como veremos adiante. (Veja a figura 3.1.)

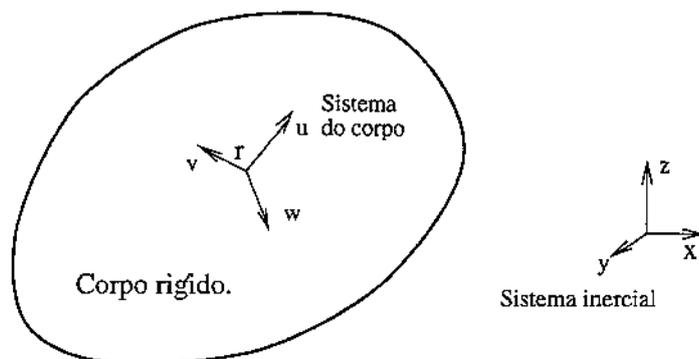


Figura 3.1: Um corpo rígido com seu sistema de coordenadas (origem  $r$ , eixos  $u, v, w$ ).

### 3.3 Posição de uma partícula do corpo

A posição  $p$  de uma partícula qualquer do corpo no sistema inercial é, portanto

$$p = r + A\bar{p} \quad (3.1)$$

onde  $r$  é a origem do sistema do corpo e  $\bar{p}$  são as coordenadas do ponto no sistema do corpo.  $A$  é a matriz de rotação

$$A = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde  $u, v$  e  $w$  são vetores ortonormais fixos no corpo, em relação ao sistema inercial. Note que a hipótese que o corpo é rígido equivale a supor que as coordenadas  $\bar{p}$  são constantes.

### 3.4 Velocidade de uma partícula do corpo

A velocidade de uma partícula pode ser obtida derivando a equação (3.1) em relação ao tempo:

$$\dot{p} = \dot{r} + \dot{A}\bar{p} \quad (3.3)$$

onde  $\dot{r}$  é a velocidade do centro de massa e  $\dot{A}$  é a derivada da matriz de rotação (3.2) em relação ao tempo. Se denotarmos por  $\bar{\omega}$  o vetor velocidade angular relativo ao sistema do corpo, a matriz  $\dot{A}$  pode ser eliminada da equação usando a relação

$$\dot{A}\bar{p} = -A(\bar{p} \times \bar{\omega})$$

Por sua vez, o produto vetorial  $\bar{p} \times \bar{\omega}$  pode ser substituído por um produto matricial  $\bar{p} \times \bar{\omega} = \bar{p}^\times \bar{\omega}$ , onde  $\bar{p}^\times$  é o *tensor antisimétrico* associado a  $\bar{p}$ , dado pela matriz

$$\bar{p}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{p}_z & \bar{p}_y \\ \bar{p}_z & 0 & -\bar{p}_x \\ -\bar{p}_y & \bar{p}_x & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $(\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z)$  são as coordenadas do ponto  $\bar{p}$ .

Podemos agora escrever a equação (3.3) como:

$$\dot{p} = \dot{r} - A\bar{p}^\times \bar{\omega} \quad (3.4)$$

onde foi eliminada a derivada da matriz de rotação.

### 3.5 Parâmetros de Euler

Para que a equação (3.2) represente sempre uma matriz de rotação, as coordenadas dos três vetores que a compõem estão sujeitas a seis equações que obrigam os vetores a serem ortogonais e terem comprimento unitário. Desta forma o movimento do corpo seria descrito por 12 coordenadas generalizadas sujeitas a 6 equações. Uma alternativa de representação mais econômica para a rotação é oferecida pelos *parâmetros de Euler*.

Os parâmetros de Euler são quatro números,  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ , que descrevem a orientação dos eixos do corpo como resultado de uma rotação da base inercial em torno de um eixo que passa pela origem. Essa rotação é determinada pela direção  $v = (v_x, v_y, v_z)$  do eixo (vetor unitário), e do ângulo da rotação  $\alpha$  (medido no sentido da “regra da mão direita”). Os parâmetros de Euler são então definidos como

$$\theta_0 = \cos \frac{\alpha}{2}; \quad \theta_1 = v_x \sin \frac{\alpha}{2}; \quad \theta_2 = v_y \sin \frac{\alpha}{2}; \quad \theta_3 = v_z \sin \frac{\alpha}{2}$$

Vemos, pela definição, que os parâmetros de Euler satisfazem a relação:

$$\sum_{k=0}^3 \theta_k^2 = 1 \quad (3.5)$$

Assim, na verdade, eles representam apenas três graus de liberdade, como era esperado.

A matriz de rotação  $A$  pode ser calculada a partir dos parâmetros de Euler pela fórmula

$$A = 2 \begin{bmatrix} \theta_0^2 + \theta_1^2 - \frac{1}{2} & \theta_1\theta_2 - \theta_0\theta_3 & \theta_1\theta_3 + \theta_0\theta_2 \\ \theta_1\theta_2 + \theta_0\theta_3 & \theta_0^2 + \theta_2^2 - \frac{1}{2} & \theta_2\theta_3 - \theta_0\theta_1 \\ \theta_1\theta_3 - \theta_0\theta_2 & \theta_2\theta_3 + \theta_0\theta_1 & \theta_0^2 + \theta_3^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Pode-se verificar que a matriz é de fato uma matriz de rotação; ou seja, suas linhas (e colunas) são vetores unitários e mutuamente ortogonais. Estas condições podem ser escritas sucintamente por  $A^\top A = I$ , isto é,  $A^{-1} = A^\top$ .

### 3.6 Posição e orientação de um corpo rígido

Em resumo, a posição e orientação de um corpo rígido podem ser determinadas univocamente por sete coordenadas

$$q = (r_x, r_y, r_z, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (3.7)$$

onde  $r = (r_x, r_y, r_z)$  são as coordenadas do centro de massa, e  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  são os parâmetros de Euler. Note que, embora sejam sete valores, eles representam, como esperado, apenas seis graus de liberdade para o corpo, já que os parâmetros de Euler estão sujeitos à restrição (3.5).

### 3.7 Energia cinética de um corpo rígido

A equação de Lagrange exige que a energia cinética  $T$  do sistema seja escrita em função das coordenadas generalizadas  $q$  e suas derivadas  $\dot{q}$ .

A energia cinética de uma partícula de massa  $m$  e velocidade  $v$  é dada por  $\frac{1}{2}mv^2$ . A energia cinética de duas ou mais partículas é simplesmente a soma de suas energias, ou seja,

$$T = \frac{1}{2} \sum_p m_p v_p^2$$

onde  $m_p$  e  $v_p$  são a massa e a velocidade de cada partícula  $p$ , respectivamente.

Na maioria das aplicações, podemos aproximar a distribuição de partículas por uma função contínua  $\sigma(\bar{p})$ , que dá a densidade de massa nas vizinhanças da partícula do corpo cuja posição é  $\bar{p}$  em relação ao sistema local. Neste modelo, a energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p}) |\dot{\bar{p}}|^2 d\bar{p} \quad (3.8)$$

onde  $\dot{\bar{p}}$  é a velocidade da partícula, e  $\mathcal{V}$  é o interior do corpo.

Substituindo a equação de  $\dot{p}$  (3.4) em (3.8) tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p}) |\dot{r} - A\bar{p}^{\times}\bar{\omega}|^2 d\bar{p}$$

Expandindo o quadrado acima pela fórmula  $|v|^2 = v^{\top}v$ , obtemos

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p}) (\dot{r}^{\top}\dot{r} - 2\dot{r}^{\top}A\bar{p}^{\times}\bar{\omega} + \bar{\omega}^{\top}\bar{p}^{\times\top}A^{\top}A\bar{p}^{\times}\bar{\omega}) d\bar{p}$$

que, por sua vez, pode ser separada em três integrais  $T = T_{rr} + T_{r\theta} + T_{\theta\theta}$ , onde

$$T_{rr} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p}) \dot{r}^{\top}\dot{r} d\bar{p} \quad (3.9)$$

$$T_{r\theta} = - \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p}) \dot{r}^{\top}A\bar{p}^{\times}\bar{\omega} d\bar{p} \quad (3.10)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p}) \bar{\omega}^{\top}\bar{p}^{\times\top}\bar{p}^{\times}\bar{\omega} d\bar{p} \quad (3.11)$$

Note que, no termo  $T_{\theta\theta}$  foi usada a ortogonalidade da matriz de rotação  $A$  para eliminá-la da integral, já que  $A^{\top}A = I$ .

Uma vez que a velocidade do centro de massa  $\dot{r}$  não depende da variável de integração, podemos escrever o termo  $T_{rr}$  como

$$T_{rr} = \frac{1}{2} \dot{r}^{\top}\dot{r} \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p}) d\bar{p} = \frac{m}{2} \dot{r}^{\top}\dot{r} \quad (3.12)$$

onde  $m = \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p}) d\bar{p}$  é a massa do corpo. Portanto, este termo equivale à energia cinética que o corpo teria se toda a massa estivesse concentrada na partícula de referência  $r$ .

O termo  $T_{r\theta}$  envolve a rotação e a translação do corpo. Observando que  $\dot{r}$ ,  $A$  e  $\bar{\omega}$  são constantes dentro da integral, podemos escrever este termo como:

$$T_{r\theta} = -\dot{r}^{\top}A \left( \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p})\bar{p}^{\times} d\bar{p} \right) \bar{\omega}$$

Se a partícula de referência (origem do sistema do corpo) for o centro de massa, verifica-se que a integral  $\int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p})\bar{p}^{\times} d\bar{p}$  se anula e portanto o termo  $T_{r\theta}$  é nulo. Ou seja, com esta escolha da origem conseguimos separar a energia cinética numa parte  $T_{rr}$  que depende apenas da translação e uma parte  $T_{\theta\theta}$  que depende apenas de sua rotação.

No caso do termo  $T_{\theta\theta}$ , movendo para fora da integral os fatores que não dependem de  $\bar{p}$ , temos:

$$T_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \bar{\omega}^{\top} \left( \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p})\bar{p}^{\times\top}\bar{p}^{\times} d\bar{p} \right) \bar{\omega} \quad (3.13)$$

A integral que aparece nesta equação é uma matriz  $3 \times 3$   $\bar{J}$  conhecida como *tensor de inércia* do corpo. Levando em conta a definição da matriz  $\bar{p}^{\times}$ , obtemos:

$$\bar{J} = \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p})\bar{p}^{\times\top}\bar{p}^{\times} d\bar{p} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{13} \\ \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} & \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{13} & \bar{J}_{23} & \bar{J}_{33} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{J}_{11} &= \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p})(\bar{p}_y^2 + \bar{p}_z^2) d\bar{p} \\ \bar{J}_{12} = \bar{J}_{21} &= - \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p})\bar{p}_x\bar{p}_y d\bar{p} \\ \bar{J}_{13} = \bar{J}_{31} &= - \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p})\bar{p}_x\bar{p}_z d\bar{p} \\ \bar{J}_{22} &= \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p})(\bar{p}_x^2 + \bar{p}_z^2) d\bar{p} \\ \bar{J}_{23} = \bar{J}_{32} &= - \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p})\bar{p}_y\bar{p}_z d\bar{p} \\ \bar{J}_{33} &= \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p})(\bar{p}_x^2 + \bar{p}_y^2) d\bar{p}\end{aligned}$$

Pode-se notar que  $\bar{J}$  é simétrica. Os elementos  $\bar{J}_{ii}$  são chamados *momentos de inércia* do corpo, e os elementos  $\bar{J}_{ij}$  onde  $i \neq j$  são os *produtos de inércia*. No caso de corpos rígidos, como esses elementos estão representados com relação às coordenadas locais do corpo, eles são sempre constantes.

### 3.7.1 Eixos principais de inércia

É importante observar que a matriz  $\bar{J}$  depende da escolha do sistema do corpo. Entretanto, prova-se que em todo corpo rígido existem três eixos particulares, chamados *eixos principais de inércia*, que, quando tomados como os eixos do sistema do corpo, com origem no centro de massa, fazem com que os produtos de inércia se anulem. A matriz  $\bar{J}$  é, neste caso, diagonal

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{J}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J}_3 \end{bmatrix}$$

Os elementos da diagonal são conhecidos como *momentos principais de inércia* do corpo <sup>1</sup>.

$$\bar{J}_1 = \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p})(\bar{p}_y^2 + \bar{p}_z^2) d\bar{p} \quad (3.14)$$

$$\bar{J}_2 = \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p})(\bar{p}_x^2 + \bar{p}_z^2) d\bar{p} \quad (3.15)$$

$$\bar{J}_3 = \int_{\mathcal{V}} \sigma(\bar{p})(\bar{p}_x^2 + \bar{p}_y^2) d\bar{p} \quad (3.16)$$

### 3.7.2 Energia cinética via parâmetros de Euler

Note que o termo  $T_{rr}$  da equação da energia cinética (3.12) já está expresso em termos de coordenadas generalizadas. Vamos agora fazer o mesmo com o termo  $T_{\theta\theta}$ . Para isso,

<sup>1</sup>Chamaremos, sem ambigüidade, os momentos principais de inércia apenas de *momentos de inércia*.

verifica-se que a velocidade angular  $\bar{\omega}$  relativa ao sistema do corpo é dada por

$$\bar{\omega} = \bar{G}\dot{\theta} \quad (3.17)$$

onde  $\dot{\theta}$  são as derivadas dos parâmetros de Euler em relação ao tempo, e  $\bar{G}$  é a matriz

$$\bar{G} = 2 \begin{bmatrix} -\theta_1 & \theta_0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_2 & -\theta_3 & \theta_0 & \theta_1 \\ -\theta_3 & \theta_2 & -\theta_1 & \theta_0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Portanto, a equação (3.13) fica

$$T_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^\top \bar{G}^\top \bar{J} \bar{G} \dot{\theta}$$

Vamos agora introduzir a matriz

$$M_\theta = \bar{G}^\top \bar{J} \bar{G} \quad (3.19)$$

que permite escrever o termo na forma

$$T_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^\top M_\theta \dot{\theta} \quad (3.20)$$

Expressando a energia cinética total como a soma dos dois termos que restaram (equações (3.12) e (3.20)) temos:

$$T = \frac{1}{2} \dot{r}^\top M_R \dot{r} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^\top M_\theta \dot{\theta} \quad (3.21)$$

onde o primeiro termo envolve apenas a velocidade do centro de massa e o segundo apenas as derivadas dos parâmetros de Euler.

A matriz  $M_R$ , introduzida para homogeneizar a fórmula, trata-se de uma matriz diagonal

$$M_R = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

onde  $m$  é a massa do corpo. Esta matriz será usada no capítulo 6.

### 3.8 Momentos de inércia de um paralelepípedo

A título de exemplo, vamos calcular a matriz de momentos de inércia  $\bar{J}$  para um paralelepípedo regular de densidade uniforme (figura 3.2), cujas dimensões são  $2a$ ,  $2b$  e  $2c$  em cada um dos eixos  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$ , respectivamente.

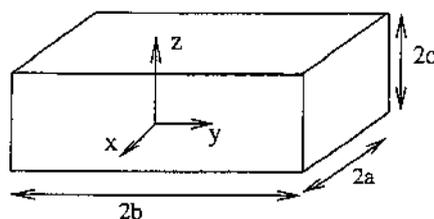


Figura 3.2: Paralelepípedo.

Pela equação (3.14), o valor de  $\bar{J}_1$  é

$$\begin{aligned}\bar{J}_1 &= \int_{-c}^c \int_{-b}^b \int_{-a}^a \sigma(\bar{p})(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} \\ &= \frac{1}{3}m(b^2 + c^2)\end{aligned}$$

Note que foi usada a relação  $\sigma(\bar{p}) = m/V$ , onde  $m$  é a massa do corpo e  $V = 8abc$  é o volume. Temos, analogamente

$$\begin{aligned}\bar{J}_2 &= \frac{1}{3}m(a^2 + c^2) \\ \bar{J}_3 &= \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)\end{aligned}$$

### 3.9 Energia potencial gravitacional

A energia potencial de um corpo, assim como a energia cinética, é a soma das energias de todas as suas partículas. A forma de energia potencial mais comumente encontrada em animação dinâmica é a gravitacional.

Em geral, a aceleração da gravidade  $g$  é uniforme no espaço e constante no tempo, e com direção oposta ao eixo  $z$ . Nesse caso, a energia potencial de uma partícula de massa  $m$  na posição  $(x, y, z)$  é simplesmente  $mz|g|$ . Demonstra-se em física elementar que, nessas condições, a energia potencial de um corpo pode ser calculada supondo-se que toda a massa está concentrada no seu centro de gravidade, ou seja

$$V = m|g|r_z \quad (3.23)$$

onde  $r_z$  é a coordenada  $z$  do centro de massa, no sistema inercial.

### 3.10 Forças e torques

Seja  $f$  uma força aplicada numa partícula  $p$  do corpo com coordenadas  $\bar{p}$  relativas ao sistema do corpo. Verifica-se que essa força equivale a uma força  $f$  aplicada na origem do sistema do corpo  $r$ , mais um torque  $f \times (A\bar{p})$  também aplicado na origem.

Reciprocamente, um torque  $\tau$  aplicado à partícula  $p$ , equivale a um torque  $\tau$  aplicado à origem  $r$ , mais uma força  $(A\bar{p}) \times \tau$  também aplicada a  $r$ .

Usando estas fórmulas, podemos sempre reduzir qualquer combinação de forças e torques aplicados a partículas do corpo a uma única força e um único torque aplicados à origem  $r$ .

### 3.10.1 Torques de Euler

As forças generalizadas que agem no corpo combinam os efeitos da força total  $f$  e do torque total  $\tau$  agindo na origem  $r$ . Para nossa escolha de coordenadas generalizadas, as forças generalizadas consistem de sete componentes. As três primeiras,  $Q_r = (Q_{r_x}, Q_{r_y}, Q_{r_z})$ , são simplesmente as componentes da força  $f = (f_x, f_y, f_z)$  no sistema inercial. As outras quatro são os *torques de Euler*  $Q_\theta = (Q_{\theta_0}, Q_{\theta_1}, Q_{\theta_2}, Q_{\theta_3})$ . Pela definição de forças generalizadas (seção 2.2) e as fórmulas de equivalência entre forças e torques, verifica-se que

$$Q_\theta = GA\tau$$

onde  $\tau$  é o torque total aplicado à origem do corpo.

# Capítulo 4

## Vínculos

Sistemas de interesse prático geralmente consistem de um ou mais corpos rígidos, ligados entre si por articulações. Além disso, podemos ter corpos sujeitos a descrever uma dada trajetória, ou presos num determinado ponto do espaço; ou então corpos deslizando sobre outros corpos. Todos estes comportamentos podem ser conseguidos através do uso de *vínculos*.

Formalmente, definimos um vínculo como um conjunto de *restrições*, ou seja, equações impostas sobre as posições e velocidades dos corpos. Estas equações podem sempre ser descritas em termos das coordenadas e velocidades generalizadas  $q$  e  $\dot{q}$ , e do tempo, tendo a seguinte forma:

$$C(q(t), \dot{q}(t), t) = 0 \quad (4.1)$$

onde  $C$  é uma função analítica real.

As restrições que não dependem de  $\dot{q}$  são ditas *holonômicas*. Teoricamente, se as restrições forem todas holonômicas, é possível eliminar graus de liberdade do sistema, de modo a obter as equações de Lagrange apenas em função de variáveis independentes, pelo menos num intervalo limitado de tempo. Na prática, porém, pode não ser trivial encontrar tal conjunto de variáveis independentes [Bar96, Gol80, Sha89].

O exemplo canônico de uma restrição holonômica é uma articulação universal que une dois corpos rígidos. Neste caso, a restrição diz que a distância entre as partículas  $r$  e  $s$  dos dois corpos que estão unidas pela articulação deve ser igual a zero, e pode ser expressa por três equações:

$$\hat{r}_x(q(t)) - \hat{s}_x(q(t)) = 0 \quad (4.2)$$

$$\hat{r}_y(q(t)) - \hat{s}_y(q(t)) = 0 \quad (4.3)$$

$$\hat{r}_z(q(t)) - \hat{s}_z(q(t)) = 0 \quad (4.4)$$

Restrições *não-holonômicas* (que envolvem derivadas  $\dot{q}$  das coordenadas e não podem ser reduzidas analiticamente a equações da forma (4.2)–(4.4)) naturalmente não podem

ser usadas para diminuir graus de liberdade. Por este motivo, restrições não-holonômicas exigem o uso de variáveis dependentes, e o tratamento explícito das restrições na equação de Lagrange.

## 4.1 Condições definidas por desigualdades

Além das restrições que podem ser descritas por equações da forma (4.1), sistemas de interesse em animação geralmente devem obedecer a um certo número de *condições* descritas por desigualdades da forma

$$D(q(t), t) \leq 0$$

Como exemplo de uma condição deste tipo, podemos ter uma partícula movendo-se no interior de uma esfera rígida e oca. A partícula pode tanto estar em contato com a esfera, quanto movendo-se no interior da mesma. Neste caso a condição é que a distância da partícula ao centro da esfera seja menor ou igual ao raio da esfera.

### 4.1.1 Restrições advindas de contatos

Quando dois corpos entram em contato, é necessário impor a eles uma restrição para que estes não venham a se interpenetrar, produzindo um resultado irreal. Para o tratamento de tal evento, um dos primeiros métodos propostos faz uso de molas [MW88], que são inseridas nos pontos de contato ao detectar-se um possível caso de interpenetração. Este método, no entanto, acarreta equações diferenciais difíceis de integrar e não produz resultados físicos apurados.

Para modelar corretamente este tipo de contato, precisaríamos utilizar vínculos condicionais da forma

$$C(q(t), t) = 0 \text{ desde que } D(q(t), t) \leq 0$$

Por exemplo, para descrever um corpo com um vértice  $v$  deslizando sobre o plano  $z = 0$  usaríamos um vínculo condicional

$$[\hat{v}(q)]_z = 0 \text{ desde que } [F_v]_z \leq 0$$

onde  $[\hat{v}(q)]_z$  denota a coordenada  $z$  do vértice  $v$  em relação ao sistema inercial; e  $[F_v]_z$  é a força de reação aplicada a  $v$  pelo plano na direção  $z$ , que mantém o vínculo  $[\hat{v}(q)]_z = 0$ .

Supondo este modelo, o vínculo  $[\hat{v}(q)]_z = 0$  deve ser considerado ou não no cálculo das acelerações conforme a condição  $[F_v]_z \leq 0$  seja ou não satisfeita. Entretanto, a implementação deste tipo de vínculo é complexa e exige métodos de programação não-linear, ou então aproximações lineares [TPSL95, TP96]. Infelizmente, o simples uso de equações diferenciais algébricas, tal como é feito neste trabalho, pode levar a situações onde o problema não tem solução ou então possui diversas soluções distintas [ST95, Bar93].

## 4.2 Forças de reação

Impor uma restrição ao movimento do sistema implica introduzir uma *força de reação* que é responsável por obrigar o sistema a seguir uma trajetória que satisfaça essa restrição.

Se um sistema está sujeito a  $\ell$  restrições independentes, as forças de reação devem ter no total  $\ell$  graus de liberdade, para garantir que todas as restrições serão obedecidas. As equações de Lagrange tem neste caso a forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_e + Q_c$$

onde  $Q_e$  são as forças de origem externa ao sistema e  $Q_c$  são as forças de reação.

Estas equações não podem ser utilizadas diretamente, pois as forças de reação  $Q_c$  dependem de maneira complexa das forças externas e do estado do sistema. Felizmente, para a grande maioria dos vínculos encontrados em situações reais, as *direções* das forças de reação correspondentes são determinadas de maneira simples a partir das posições e velocidades dos corpos.

Por exemplo, suponha que um vértice  $v$  de um corpo  $A$  está deslizando sobre uma face plana  $\Pi$  de outro corpo  $B$ , sem atrito. A restrição que  $A$  não deve penetrar  $B$  pode ser descrita neste caso pela equação que diz que  $\hat{v}(q(t))$  está sobre o plano  $\hat{\Pi}(q(t))$  de  $B$ .

A força de reação responsável por garantir esta restrição é perpendicular ao plano  $\Pi$ . Mais geralmente, se a força de reação responsável por garantir uma restrição  $C_i(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$  é passiva (não acrescenta energia ao sistema), não dissipativa (não retira energia) e independente da velocidade dos corpos, então sua direção é a do gradiente da restrição  $C$ , isto é

$$Q_j = -\lambda_j \frac{\partial C}{\partial q_j}(q, \dot{q}, t); \quad j = 1, \dots, n$$

para algum escalar  $\lambda_i$  a determinar, o *multiplicador de Lagrange* associado a esta restrição. Nesse caso, as equações de Lagrange podem ser escritas na forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \lambda \frac{\partial C}{\partial q} = Q_e \quad (4.5)$$

onde  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$  é um vetor que representa os multiplicadores de Lagrange.

## 4.3 Articulações ou juntas

Um caso particular e importante de vínculos formados por restrições holonômicas são as *articulações*, também chamadas *juntas*, em que existe uma relação geométrica entre as posições relativas de dois corpos. Este conceito inclui tanto articulações no sentido usual

em mecânica quanto contatos temporários entre corpos, como um corpo deslizando sobre outro.

As juntas podem ser classificadas de acordo com o número e tipo de restrições que impõem aos corpos conectados.

### 4.3.1 Junta plana

A *junta plana* ou *de deslizamento* estabelece que uma dada partícula  $p$  de um corpo 1 está restrita a se mover sobre um plano dado  $\Pi$ , fixo no espaço ou num outro corpo 2.

A equação que determina a junta neste caso é a equação de pertinência de um ponto a um plano,  $\Pi : ap_x + bp_y + cp_z + d = 0$ , onde  $a, b, c$  e  $d$  são os coeficientes do plano  $\Pi$  e  $(p_x, p_y, p_z)$  são as coordenadas de  $p$ .

Se  $\Pi$  é fixo no espaço, os coeficientes  $a, b, c$  e  $d$  são constantes. Se  $\Pi$  é fixo num corpo, os coeficientes são funções do tempo. A equação fica sendo então

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{bmatrix} A^T \left( \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \right) + \bar{d} = 0$$

onde  $\bar{a}\bar{p}_x + \bar{b}\bar{p}_y + \bar{c}\bar{p}_z + \bar{d} = 0$  é a equação do  $\Pi$  no sistema de coordenadas do corpo, e  $(A, r)$  é o sistema de referência (seção 3.3).

### 4.3.2 Junta esférica ou universal

A *junta esférica* ou *universal* mantém uma determinada partícula de um corpo 1 fixa numa determinada partícula de outro corpo 2, permitindo rotação em qualquer eixo. São necessárias então três restrições para impedir a translação entre os corpos. A junta pode ser expressa por

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2$$

ou

$$A_1\bar{p}_1 + r_1 = A_2\bar{p}_2 + r_2$$

onde  $\bar{p}_1$  e  $\bar{p}_2$  são as posições da junta nos sistemas dos corpos.

### 4.3.3 Junta cilíndrica

A *junta cilíndrica* permite tanto a rotação quanto a translação de um corpo 2 em torno de um eixo  $w_1$  fixo em outro corpo 1. Na figura 4.1 temos a representação de uma junta deste tipo.

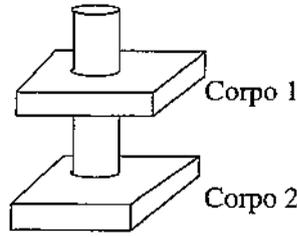


Figura 4.1: Exemplo de uma junta cilíndrica.

Para criar a junta, fazemos uso de quatro restrições, duas que impedem a rotação do corpo 2 em torno de outros eixos que não  $w_1$ , e duas que fazem a mesma coisa quanto à translação.

Para escrevermos equações de uma junta cilíndrica, tomamos como base um sistema ortogonal com origem  $p_1$  e eixos  $u_1, v_1, w_1$  fixos no corpo 1, e outro sistema com origem  $p_2$  e eixos  $u_2, v_2, w_2$  fixos no corpo 2. As restrições que representam a junta cilíndrica podem ser expressas na forma:

$$\begin{aligned}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \cdot \hat{u}_1 &= 0 \\(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \cdot \hat{v}_1 &= 0 \\ \hat{w}_2 \cdot \hat{u}_1 &= 0 \\ \hat{w}_2 \cdot \hat{v}_1 &= 0\end{aligned}$$

Outra maneira de equacionar a junta cilíndrica é substituí-la por quatro juntas planas. Para isso escolhemos dois planos não paralelos  $\Pi_1$  e  $\Sigma_1$  fixos no corpo 1 cuja intersecção define o eixo da junta. Tomam-se a seguir dois pontos  $r_2$  e  $s_2$  pertencentes ao corpo 2 e faz-se com que ambos estejam na intersecção dos planos.

#### 4.3.4 Junta prismática

Uma *junta prismática* ou *translacional* permite apenas translação relativa de um corpo 2 numa direção fixa ao longo de um eixo fixo no corpo 1. Veja a figura 4.2.

São necessárias cinco restrições para permitir apenas o movimento ao longo do eixo da junta. Sejam  $(u_1, v_1, w_1)$  e  $(u_2, v_2, w_2)$  bases ortogonais fixas nos corpos 1 e 2, respectivamente. Sejam também dois pontos  $p_1$  e  $p_2$  pertencentes aos corpos 1 e 2, respectivamente, e localizados sobre o eixo da junta prismática.

As restrições podem ser escritas como

$$\begin{aligned}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \cdot \hat{u}_1 &= 0 \\(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \cdot \hat{v}_1 &= 0 \\ \hat{w}_2 \cdot \hat{u}_1 &= 0\end{aligned}$$

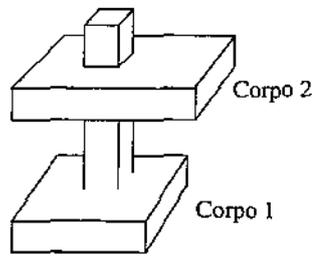


Figura 4.2: Exemplo de uma junta prismática.

$$\hat{w}_2 \cdot \hat{v}_1 = 0$$

$$\hat{u}_2 \cdot \hat{v}_2 = 0$$

Note que as primeiras quatro restrições são as mesmas utilizadas para se conseguir a junta cilíndrica e a quinta restrição impede a rotação em torno do eixo da junta.

Uma formulação equivalente é obtida pela composição de juntas planas. Neste caso, utilizam-se as mesmas juntas planas da junta cilíndrica, mais uma quinta junta plana na qual um ponto não pertencente ao eixo formado pelos dois planos é restrito a pertencer a um destes planos, impedindo-se assim a rotação do corpo em torno do eixo da junta.

### 4.3.5 Junta de revolução

A *junta de revolução*, por sua vez, permite apenas a rotação de um corpo em torno de um *eixo de revolução* fixo em outro corpo (figura 4.3), sem translação. Novamente aqui temos cinco restrições, três que impedem a translação e duas que limitam a rotação.

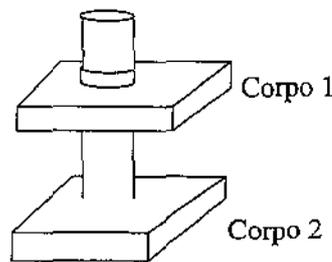


Figura 4.3: Exemplo de uma junta de revolução.

Sejam bases ortogonais  $(u_1, v_1, w_1)$  e  $(u_2, v_2, w_2)$  fixas nos dois corpos, e partículas  $p_1$  e  $p_2$  coincidentes, uma em cada corpo, sobre o eixo de revolução. As restrições da junta ficam então

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \cdot \hat{u}_1 = 0$$

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \cdot \hat{v}_1 = 0$$

$$\begin{aligned}\hat{w}_2 \cdot \hat{u}_1 &= 0 \\ \hat{w}_2 \cdot \hat{v}_1 &= 0 \\ (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \cdot \hat{w} &= 0\end{aligned}$$

Note que as primeiras quatro restrições são idênticas às da junta cilíndrica e a quinta impede a translação ao longo do eixo  $\hat{w}_1 = \hat{w}_2$ .

Tal como as juntas anteriores, esta pode ser representada por cinco juntas planas. As quatro primeiras juntas planas são as mesmas da junta cilíndrica. Para impedir a translação ao longo do eixo de revolução, tomamos um terceiro plano  $\Xi_1$  ortogonal aos outros dois planos  $\Pi_1$  e  $\Sigma_1$ , fixos o corpo 1; e fazemos com que uma partícula  $p$  pertencente ao corpo fique restrita a este plano.

# Capítulo 5

## Formulação Matricial para um Corpo Rígido

O objetivo deste capítulo é, a partir dos conceitos apresentados nos capítulos 2, 3 e 4, obter um sistema de equações para um corpo. Este sistema possibilitará, dado um estado inicial (composto de posições, orientações e velocidades); mais forças e torques externos em função do tempo, obter as acelerações. Isto, por sua vez, possibilita determinar qual será a trajetória do corpo.

### 5.1 Forma matricial para um corpo

Como vimos no capítulo 3, o estado de um corpo é determinado pela sua posição e velocidade  $(q, \dot{q})$ , sendo  $q = (r, \theta)$  e  $\dot{q} = (\dot{r}, \dot{\theta})$ .

Convém representar a posição do centro de massa  $r$  como sendo uma matriz com três linhas e uma coluna, cujos elementos são as coordenadas cartesianas de  $r$ , ou seja:

$$R = [r_x \ r_y \ r_z]^T \quad (5.1)$$

Da mesma forma, representamos os parâmetros de Euler, que dão a orientação do sistema fixo no corpo pela matriz:

$$\theta = [\theta_0 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T \quad (5.2)$$

Assim, o estado (posição e velocidade) de um corpo será representado por dois vetores coluna de sete elementos

$$q = \begin{bmatrix} R \\ \theta \end{bmatrix}; \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{R} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Vamos construir uma forma matricial das equações de Lagrange na forma de um sistema de equações lineares, onde as incógnitas serão as acelerações. Conforme vimos na

seção 3.7, a energia cinética de um corpo rígido é dada pela equação (3.21):

$$T = \frac{1}{2} \dot{R}^\top M_R \dot{R} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^\top M_\theta \dot{\theta} \quad (5.3)$$

ou, equivalentemente,

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{R}^\top & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_R & 0 \\ 0 & M_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

onde

$$M_R = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}; \quad M_\theta = \bar{G}^\top \bar{J} \bar{G}$$

(Vide seção 3.7.2.) Da mesma forma, as forças e torques externos generalizados podem ser expressos por um vetor coluna

$$Q_e = \begin{bmatrix} Q_R^\top \\ Q_\theta^\top \end{bmatrix}$$

onde  $(Q_R^\top)_{3 \times 1}$  são as forças externas e  $(Q_\theta^\top)_{4 \times 1}$  são os torques de Euler externos, ambos aplicadas no centro de massa do corpo.

O primeiro termo da equação de Lagrange (4.5) é  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right)$ . Para obtê-lo, primeiro derivamos a equação (5.4) em relação a  $\dot{q}$  para obter

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \dot{R}^\top M_R & \dot{\theta}^\top M_\theta \end{bmatrix}$$

que, derivando em relação ao tempo (lembrando que  $M_R$  é constante), fica:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \begin{bmatrix} \ddot{R}^\top M_R & (\ddot{\theta}^\top M_\theta + \dot{\theta}^\top \dot{M}_\theta) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Lembrando ainda que  $M_\theta = \bar{G}^\top \bar{J} \bar{G}$  (equação (3.17)), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^\top \dot{M}_\theta &= \dot{\theta}^\top \frac{d}{dt} (\bar{G}^\top \bar{J} \bar{G}) \\ &= \dot{\theta}^\top \dot{\bar{G}}^\top \bar{J} \bar{G} + \dot{\theta}^\top \bar{G}^\top \bar{J} \dot{\bar{G}} \end{aligned}$$

Não há um termo envolvendo a derivada de  $\bar{J}$ , pois  $\bar{J}$  é constante. Além disso, pode-se mostrar que  $\dot{\theta}^\top \dot{\bar{G}}^\top = \dot{\bar{G}} \dot{\theta} = 0$ . Ficamos então apenas com o segundo termo  $\dot{\theta}^\top \dot{M}_\theta = \dot{\theta}^\top \bar{G}^\top \bar{J} \dot{\bar{G}}$ . Observando que  $\dot{\theta}^\top \bar{G}^\top = (\bar{G} \dot{\theta})^\top = \bar{\omega}^\top$  temos que

$$\dot{\theta}^\top \dot{M}_\theta = \bar{\omega}^\top \bar{J} \dot{\bar{G}}$$

que, substituindo em (5.5) fica:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \left[ \ddot{R}^\top M_R \quad (\ddot{\theta}^\top M_\theta + \dot{\omega}^\top \bar{J} \dot{\bar{G}}) \right] \quad (5.6)$$

Este é o primeiro termo da equação de Lagrange (4.5). O segundo termo é

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \left[ 0_3^\top \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\theta}^\top M_\theta \dot{\theta}) \right]$$

onde  $0_3^\top$  é uma matriz linha de zeros com três elementos. Note que, como o primeiro termo da fórmula (5.3) não envolve elementos de  $q$ , sua derivação resultou na matriz  $0_3^\top$ ; já no segundo termo, como este não contém elementos de  $R$ , expressamos a derivada apenas em função de  $\theta$ . Usando a relação  $M_\theta = \bar{G}^\top \bar{J} \bar{G}$  (equação (3.19)), temos:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \left[ 0_3^\top \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\theta}^\top \bar{G}^\top \bar{J} \bar{G} \dot{\theta}) \right]$$

Mostra-se que  $\bar{G} \dot{\theta} = -\dot{\bar{G}} \theta$ , onde

$$\dot{\bar{G}} = 2 \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_0 & \dot{\theta}_3 & -\dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_2 & -\dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_0 & \dot{\theta}_1 \\ -\dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_2 & -\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}$$

Logo, como  $\dot{\bar{G}}$  não depende de  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q} &= \left[ 0_3^\top \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\theta}^\top \dot{\bar{G}}^\top \bar{J} \dot{\bar{G}} \theta) \right] \\ &= \left[ 0_3^\top \quad \dot{\theta}^\top \dot{\bar{G}}^\top \bar{J} \dot{\bar{G}} \right] \end{aligned}$$

Usando a relação  $\dot{\theta}^\top \dot{\bar{G}}^\top = \dot{\bar{G}} \theta = -\dot{\bar{G}} \dot{\theta} = -\dot{\omega}$ , temos então o segundo termo da equação de Lagrange:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \left[ 0_3^\top \quad -\dot{\omega}^\top \bar{J} \dot{\bar{G}} \right] \quad (5.7)$$

Agora que temos (5.6) e (5.7) calculados, podemos substituí-los na equação de Lagrange (4.5), que fica, já na forma matricial:

$$\left[ \ddot{R}^\top M_R \quad (\ddot{\theta} M_\theta + \dot{\omega}^\top \bar{J} \dot{\bar{G}}) \right] - \left[ 0_3^\top \quad -\dot{\omega}^\top \bar{J} \dot{\bar{G}} \right] = \left[ Q_R^\top \quad Q_\theta^\top \right]$$

ou seja

$$\left[ \ddot{R}^\top M_R \quad (\ddot{\theta} M_\theta + 2\dot{\omega}^\top \bar{J} \dot{\bar{G}}) \right] = \left[ Q_R^\top \quad Q_\theta^\top \right]$$

como no segundo termo  $2\bar{\omega}^\top \bar{J} \dot{\bar{G}}$  não depende das acelerações, podemos passá-lo para o outro lado da equação. Este termo é conhecido como *vetor quadrático da velocidade*. A equação fica então:

$$\begin{bmatrix} \ddot{R}^\top M_R & \ddot{\theta}^\top M_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_R^\top & Q_\theta^\top - 2\bar{\omega}^\top \bar{J} \dot{\bar{G}} \end{bmatrix}$$

colocando agora na forma de um sistema de equações lineares onde as incógnitas são as acelerações:

$$\begin{bmatrix} M_R & 0 \\ 0 & M_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{R} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_R \\ Q_\theta - 2\bar{\omega}^\top \bar{J} \dot{\bar{G}} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

O sistema acima, porém, ainda não está completo, pois verifica-se que a matriz  $M_\theta$  é singular. Mais precisamente, verifica-se que  $M_\theta \cdot \dot{\theta} = 0$ . Portanto, se  $(\ddot{R}, \ddot{\theta})$  é uma solução do sistema (5.8), então  $\ddot{R}, \ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta}$  (onde  $\alpha$  é um escalar real qualquer) também o é. Isto significa que a restrição (3.5),

$$\sum_{i=0}^3 (\theta_i)^2 = 1$$

não é automaticamente mantida pelo sistema de equações (5.8); precisamos complementar as equações com a restrição acima.

Como o sistema (5.8) é um sistema cujas incógnitas são as acelerações generalizadas, enquanto que a restrição dos parâmetros de Euler é sobre o vetor  $\theta$ , vamos diferenciá-la duas vezes em relação ao tempo para obtermos uma equação sobre as derivadas segundas de  $\theta$ , que pode então ser acrescida no sistema acima, ou seja,

$$\sum_{i=0}^3 [(\dot{\theta}_i)^2 + \theta_i \ddot{\theta}_i] = 0$$

Deixando do lado esquerdo apenas os termos que envolvem as acelerações, temos:

$$\sum_{i=0}^3 \theta_i \ddot{\theta}_i = -\sum_{i=0}^3 (\dot{\theta}_i)^2$$

ou, na forma matricial,

$$\theta^\top \ddot{\theta} = -\dot{\theta}^2 \quad (5.9)$$

Por outro lado, para garantir que a restrição seja satisfeita, é preciso acrescentar aos torques de Euler externos uma força generalizada  $Q'_\theta$  de reação que impeça a mudança no módulo do vetor  $\theta$ . Para que esta força não acrescente nem retire energia do sistema, ela deve ser colinear ao vetor  $\theta$ , ou seja, deve ter a forma  $Q'_\theta = -\lambda_\theta \theta$ , onde a nova incógnita  $\lambda_\theta$  é o multiplicador de Lagrange que dá a magnitude da força de reação responsável por

manter esta restrição. O sistema de equações é, portanto

$$\begin{aligned} M_R \ddot{R} &= Q_R \\ M_\theta \ddot{\theta} &= Q_\theta - 2\bar{\omega}^\top \bar{J} \dot{G} - \lambda_\theta \theta \\ \theta^\top \ddot{\theta} &= -\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Passando o termo desconhecido  $\lambda_\theta \theta$  para o lado esquerdo, e colocando na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} M_R & 0 & 0 \\ 0 & M_\theta & \theta^\top \\ 0 & \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{R} \\ \ddot{\theta} \\ \lambda_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_R \\ Q_\theta - 2\bar{\omega}^\top \bar{J} \dot{G} \\ -\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Com este sistema de equações, podemos obter as acelerações generalizadas  $\ddot{q} = (\ddot{R}, \ddot{\theta})$  para um corpo rígido, dadas as forças e torques generalizados aplicados neste corpo.

## 5.2 Resolução do sistema de equações para um corpo

Podemos observar que o sistema (5.10) é um sistema esparso; esta propriedade pode ser explorada para tornar mais eficiente sua resolução. Assim, o sistema pode ser separado em dois sistemas independentes

$$M_R \ddot{R} = Q_R \quad (5.11)$$

$$\begin{bmatrix} M_\theta & \theta^\top \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \lambda_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_\theta - 2\bar{\omega}^\top \bar{J} \dot{G} \\ -\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Lembrando que  $M_R$  é uma matriz diagonal, o sistema (5.11) é resolvido diretamente. Para resolver o segundo sistema calculamos matrizes  $L$  e  $U$  tais que

$$LU = \begin{bmatrix} M_\theta & \theta^\top \\ \theta & 0 \end{bmatrix}$$

O algoritmo detalhado, supondo que a decomposição LU já foi efetuada, é o seguinte:

---

---

**Algoritmo 5.1: Cálculo das acelerações para um corpo.**

Entrada: As matrizes  $L$ ,  $U$ , e o vetor de forças generalizadas  $Q$ .

Saída: O vetor de aceleração  $\ddot{q} = (\ddot{R}, \ddot{\theta})$ .

(1) Para cada linha  $k \leftarrow 1$  até 3 faça:

(2)  $\ddot{R}_k \leftarrow Q_R / (M_R)_{kk}$

(3) Resolva  $L \begin{bmatrix} y \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_\theta \\ Q_\lambda \end{bmatrix}$

(4) Resolva  $U \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \lambda_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \sigma \end{bmatrix}$

(7) Retorne  $(\ddot{R}, \ddot{\theta})$ .

---

---

O sistema resolvido pela decomposição LU acima tem sempre tamanho constante  $5 \times 5$ . Assim o algoritmo 5.1, bem como a decomposição LU efetuada antes dele, tem custo  $\Theta(1)$ .

# Capítulo 6

## Formulação Matricial para Corpos Articulados

Neste capítulo estendemos a formulação matricial do capítulo anterior para contemplar um conjunto de corpos sujeitos a um certo número de restrições.

### 6.1 Forma matricial para corpos articulados

Tendo as equações de Lagrange na forma matricial (equação (5.8)) sua extensão para um sistema de vários corpos é imediata. Vamos denotar por  $M^i$  a matriz de massa do corpo  $i$ , isto é:

$$M^i = \begin{bmatrix} M_R^i & 0 & 0 \\ 0 & M_\theta^i & \theta^{i\top} \\ 0 & \theta^i & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

onde  $M_R^i$ ,  $M_\theta^i$  e  $\theta^i$  são dadas pelas equações (3.22), (3.19) e (5.2), e se referem ao corpo  $i$ . Vamos denotar também por  $\tilde{q}$  o conjunto de acelerações generalizadas do corpo  $i$ , conjunto este formado pelas acelerações lineares  $\tilde{R}^i$  e angulares  $\tilde{\theta}^i$ ; e por  $\lambda_\theta^i$ , o multiplicador de Lagrange devido à restrição (3.5) sobre o corpo  $i$ , ou seja:

$$\tilde{q}^i = \begin{bmatrix} \tilde{R}^i \\ \tilde{\theta}^i \\ \lambda_\theta^i \end{bmatrix}$$

Fazendo o mesmo com as forças e torques externos ao corpo, temos:

$$Q_e^i = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \\ -\theta^2 \end{bmatrix}$$

onde as forças  $Q_R^i$  e torques  $Q_\theta^i$  externos estão agrupadas na matriz  $Q_e^i$  para cada corpo  $i$ . O termo  $-\dot{\theta}^2$  representa a força de reação devida à restrição sobre os parâmetros de Euler. Por último, representando o vetor quadrático da velocidade temos

$$Q_v^i = \begin{bmatrix} 0_3 \\ -2\bar{\omega}^{iT} \bar{J}^i \dot{G}^i \end{bmatrix}$$

Para criar agora um sistema de equações para um conjunto de  $n$  corpos rígidos independentes, agrupamos as matrizes que correspondem a cada corpo como submatrizes do sistema com todos os corpos:

$$M = \begin{bmatrix} M^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M^n \end{bmatrix}; \quad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}^1 \\ \vdots \\ \ddot{q}^n \end{bmatrix}; \quad Q_e = \begin{bmatrix} Q_e^1 \\ \vdots \\ Q_e^n \end{bmatrix}; \quad Q_v = \begin{bmatrix} Q_v^1 \\ \vdots \\ Q_v^n \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

o que faz com que o sistema para  $n$  corpos tenha a seguinte forma:

$$M\ddot{q} = Q_e + Q_v \quad (6.3)$$

Ou seja, um sistema de equações lineares nas acelerações.

## 6.2 Inserindo restrições

Quando há restrições sobre o sistema (incluindo aquelas originárias do uso dos parâmetros de Euler) elas pressupõem a existência de um conjunto de forças internas  $Q_c$  que obrigam o sistema a satisfazer as restrições.

Como discutimos no capítulo 4, a natureza física das restrições geralmente determina a direção da força interna correspondente. Se supusermos um conjunto de  $\ell$  restrições na forma

$$C_k(q(t), t) = 0; \quad k = 1, \dots, \ell$$

sabemos que as forças de reação têm a direção do gradiente; e que sua magnitude é dada por um multiplicador de Lagrange  $\lambda_k$ .

Observemos, entretanto, que temos até aqui um sistema sobre as acelerações (6.3), o qual, quando acrescido das restrições, possui mais  $\ell$  incógnitas representadas pelos multiplicadores de Lagrange  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ . Para conseguirmos mais  $\ell$  equações sobre as acelerações, vamos derivar duas vezes as restrições  $C_k$  de modo a transformá-las num sistema de equações diferenciais de segunda ordem lineares sobre as acelerações. Fazendo então esta diferenciação para a equação na forma matricial

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_\ell \end{bmatrix} = 0$$

temos, derivando uma vez em relação a  $t$ :

$$\frac{\partial C}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

a qual, derivando novamente resulta:

$$\frac{\partial C}{\partial q \partial q} \dot{q} + 2 \frac{\partial C}{\partial q \partial t} \dot{q} + \frac{\partial C}{\partial q} \ddot{q} + \frac{\partial C}{\partial t \partial t} = 0$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial C}{\partial q} \dot{q} \right) \dot{q} + 2 \frac{\partial C}{\partial q \partial t} \dot{q} + \frac{\partial C}{\partial q} \ddot{q} + \frac{\partial C}{\partial t \partial t} &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial q} \ddot{q} &= - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial C}{\partial q} \dot{q} \right) \dot{q} - 2 \frac{\partial C}{\partial q \partial t} \dot{q} - \frac{\partial C}{\partial t \partial t} \end{aligned}$$

Observe que no lado esquerdo ficamos com a matriz Jacobiana de  $C$  multiplicando as acelerações  $\ddot{q}$ . Chamando o lado direito da equação de  $Q_c$ , podemos escrever de uma forma mais compacta

$$H \ddot{q} = Q_c \quad (6.4)$$

onde a Jacobiana foi denotada por  $H$ .

Este conjunto de equações, que possui também as acelerações como incógnitas, pode ser combinado com a equação (6.3), para obter então o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} M & H^T \\ H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_e + Q_v \\ Q_c \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

o que nos dá um sistema com  $n + \ell$  incógnitas e  $n + \ell$  equações que se aplica a um conjunto de corpos articulados.

(Note que restringimos as restrições consideradas a restrições *holonômicas*. A razão disto se deve ao método utilizado para estabilizar os erros nos vínculos advindos da integração numérica (que será discutido na seção 6.4.1) e que só se aplica a este tipo de restrição. Se tal correção não for utilizada, podemos tratar tanto restrições holonômicas quanto não-holonômicas.)

## 6.3 Resolução do sistema para corpos articulados

Embora o sistema (6.5) possa ser resolvido diretamente utilizando métodos gerais de resolução de sistemas lineares, podemos obter uma solução mais eficiente levando em conta que se trata de um sistema esparso. Note que a sub-matriz  $M$  consiste de  $n$  blocos

$8 \times 8$  da forma (6.1) ao longo da diagonal, e portanto tem apenas  $27n$  elementos ao invés de  $64n^2$ . A matriz  $H$  também é geralmente esparsa, embora tenha uma estrutura irregular.

Primeiro, vamos separar o cálculo dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ . Para isso, realizamos a multiplicação em blocos, obtendo assim duas equações:

$$M\ddot{q} + H^T \lambda = Q_e + Q_v \quad (6.6)$$

$$H\ddot{q} = Q_c \quad (6.7)$$

Multiplicando a equação (6.6) por  $M^{-1}$ , temos

$$\ddot{q} + M^{-1}H^T \lambda = M^{-1}(Q_e + Q_v)$$

que, multiplicada por  $H$  fica

$$H\ddot{q} + HM^{-1}H^T \lambda = HM^{-1}(Q_e + Q_v)$$

Usando a equação (6.7), obtemos

$$Q_c + HM^{-1}H^T \lambda = HM^{-1}(Q_e + Q_v)$$

ou seja

$$HM^{-1}H^T \lambda = HM^{-1}(Q_e + Q_v) - Q_c \quad (6.8)$$

Note que a matriz  $HM^{-1}H^T$  tem dimensão  $\ell \times \ell$ , onde  $\ell$  é o número de restrições.

O sistema (6.8) permite calcular  $\lambda$ . Para resolvê-lo calculamos a matriz  $X^T = M^{-1}H^T$ , o que é equivalente a resolver  $MX^T = H^T$ . De forma semelhante, calculamos  $y = M^{-1}(Q_e + Q_v)$  resolvendo o sistema  $My = Q_e + Q_v$ . Substituindo  $X^T$  e  $y$  em (6.8) temos

$$(HX^T)\lambda = Hy - Q_c$$

de onde tiramos  $\lambda$ . Uma vez calculado,  $\lambda$  pode ser substituído no sistema (6.6), que fica

$$M\ddot{q} = Q_e + Q_v - H^T \lambda \quad (6.9)$$

Resolvendo este sistema, obtemos as acelerações  $\ddot{q}$ .

Observe que  $MX^T = H^T$  é um conjunto de  $\ell$  sistemas lineares, já que  $H^T$  e  $X^T$  são matrizes com  $\ell$  colunas. Felizmente, neste conjunto de sistemas o que muda é apenas a coluna da matriz  $H^T$  usada como lado direito da equação e, é claro a coluna da matriz  $X^T$  que é a solução. Por causa disto, torna-se vantajoso utilizar um método de resolução de sistemas como a decomposição LU, onde podemos mudar o lado direito do sistema sem precisar resolvê-lo inteiramente de novo. Supondo que a matriz  $H^T$  possua  $\ell$  colunas, resolvemos  $\ell$  sistemas da forma  $MX_k = H_k$  para  $k = 1, \dots, \ell$ , onde o índice  $k$  denota a linha  $k$  da matriz.

Dos passos descritos acima, podemos descrever um procedimento geral que se aplica a um sistema na forma

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

que é o seguinte:

---



---

**Algoritmo 6.1: Resolução do sistema (6.10).**

Entrada: As matrizes  $A$ ,  $B$  e os vetores  $c$  e  $d$ .

Saída: Os vetores solução  $x$  e  $y$ .

Para  $k \leftarrow 1$  até o número de linhas de  $B$ :

    Resolva o sistema  $AX_k = B_k$  para obter  $X_k$ ,

    Resolva o sistema  $Au = c$  para obter  $u$ .

    Resolva  $(BX^T)y = Bu - c$  para ter o valor de  $y$ .

    Finalmente, resolva  $Ax = c - B^T y$  para ter o valor de  $x$ .

    Retorne  $(x, y)$ .

---



---

Este método já explora os zeros na parte inferior direita da matriz. Entretanto, lembramos que, em nosso caso, a própria matriz  $A$  é uma matriz esparsa, na verdade uma matriz de banda onde os elementos próximos da diagonal são dados pelas matrizes de cada corpo (equação 6.2). Podemos criar um método ainda mais eficiente se levarmos isso em consideração, já que, devido ao formato da matriz  $M$  de cada corpo, podemos resolver em separado o sistema do corpo.

### 6.3.1 Detalhamento da solução

Vamos mostrar aqui como ficou a solução do sistema para um conjunto de  $n$  corpos sujeitos a  $\ell$  restrições. Dado um sistema na forma

$$\begin{bmatrix} M & H^T \\ H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_e + Q_v \\ Q_c \end{bmatrix}$$

utilizamos o seguinte algoritmo para resolvê-lo:

**Algoritmo 6.2: Sistema para  $n$  corpos articulados.**

Entrada: As matrizes  $M$ ,  $H$ ,  $Q_e$ ,  $Q_v$  e  $Q_c$ .

Saída: As acelerações  $\ddot{q}$ .

- 
- 
- { Resolução de  $MX^T = H^T$  e de  $Mu = Q_e + Q_v$  }
- (1) Para cada corpo  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça:
  - (2)     Calcule a decomposição  $L^i U^i$  do corpo  $i$ .
  - (3) Para cada corpo  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça:
  - (4)     Para cada linha  $k \leftarrow 1$  até  $\ell$  faça:
  - (5)         Resolva o sistema  $L^i U^i X_k^i = H_k^i$  para ter o valor de  $(X_k^i)^T$ .
  - (6)         Resolva o sistema  $L^i U^i u^i = Q_e^i + Q_v^i$  para ter o valor de  $u^i$ .
  - (7)         Resolva o sistema  $(HX^T)\lambda = Hu - Q_c$  para ter o valor de  $\lambda$ .
  - { Resolução de  $M\ddot{q} = Q_e + Q_v - H^T \lambda$  }
  - (8) Para cada corpo  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça:
  - (9)     Resolva o sistema  $L^i U^i \ddot{q}^i = Q_e^i + Q_v^i - (H^i)^T \lambda^i$  para ter o valor de  $\ddot{q}^i$ .
  - (10) Retorne  $\ddot{q} = (q_1, \dots, q_n)$ .
- 
- 

Os passos (1) e (2) preparam a decomposição LU que será utilizada ao longo do algoritmo. Estes tem custo  $\Theta(n)$ , já que temos  $n$  corpos onde a decomposição é feita apenas para uma submatriz de dimensão  $5 \times 5$  constante (conforme visto no capítulo 5).

Os passos (5),(6) e (9) do algoritmo acima envolvem a resolução do sistema do corpo  $i$ . Como a decomposição LU já foi efetuada, a solução deste sistema pode ser obtida utilizando-se o algoritmo 5.1, em  $\Theta(1)$  operações. As iterações dos passos (3) e (4) fazem com que o algoritmo 5.1 seja executado  $\Theta(n \cdot \ell)$  vezes no passo (5) mais  $\Theta(n)$  vezes no passo (6). Portanto os passos de (3) a (6) tem custo  $\Theta(n \cdot \ell + n)$ . No passo (7) temos a multiplicação de duas matrizes  $H$  e  $X^T$  de dimensões  $\ell \times n$  e  $n \times \ell$ , respectivamente, que tem custo  $\Theta(n \cdot \ell^2)$ ; mais a resolução do sistema, que tem custo  $\Theta(\ell^3)$ . A iteração do passo (8) realiza  $n$  chamadas para a resolução do sistema de um corpo, tendo, portanto custo  $O(n)$ . No total, o algoritmo 6.1 efetua  $\Theta(n \cdot \ell + n + \ell^3)$  operações.

## 6.4 Integração numérica

Temos até agora um sistema de equações lineares onde, dadas as posições, velocidades, forças e torques generalizados, obtemos as acelerações. Este sistema representa um con-

junto de equações diferenciais de segunda ordem

$$\ddot{q} = \mathcal{F}(q, \dot{q}, t)$$

que pode ser integrado para obtermos a trajetória do sistema.

Especificamente, utilizamos o método de Runge-Kutta-Fehlberg com passo adaptativo para realizar a integração. Dado um intervalo  $[t_i, t_f]$ , um estado inicial  $s_i$  em  $t = t_i$ , e estipulando uma tolerância  $\varepsilon$ , o método procura determinar o estado do sistema em  $t = t_f$  com um erro menor do que  $\varepsilon$ , ajustando automaticamente o passo de integração  $\delta$  entre limites dados  $\delta_{\min}$  e  $\delta_{\max}$ .

### 6.4.1 Estabilização de vínculos

A utilização de um método de integração numérica traz consigo alguns problemas devido a erros de truncamento. Após um certo número de iterações estes erros podem fazer com que as restrições dos vínculos não estejam mais satisfeitas.

Para corrigir o problema acima é necessário fazer o que chamaremos de *estabilização de vínculos*. Sempre que o vínculo se tornar violado por um valor maior que uma certa tolerância, devido a erros de integração, o estado dos vínculos é corrigido para que o erro desapareça.

Num instante  $t$  qualquer durante a integração, consideramos que um dado estado calculado  $(\tilde{q}, \tilde{\dot{q}})$  do sistema satisfaz todos os vínculos se o seguinte critério for satisfeito

$$\max_{j=1, \dots, \ell} |C_j(\tilde{q}, t)| < \varepsilon \quad (6.11)$$

no qual  $\ell$  é o número de restrições de vínculos e  $C_j(\tilde{q}, t)$  é o valor do vínculo  $j$  para o estado  $\tilde{q}$  e instante  $t$ . Note que o estado foi escrito como  $\tilde{q}$ , onde o til evidencia tratar-se de um estado aproximado, obtido por integração numérica. O valor de  $\varepsilon$  representa uma tolerância dada. Para escolha da tolerância  $\varepsilon$ , deve-se levar em conta que o desvio esperado nas restrições (lado esquerdo de (6.11)) devido a erro de truncamento do integrador é  $O(\delta^k)$ , onde  $\delta$  é o passo de integração e  $k$  é a ordem do integrador numérico ( $k = 5$  no caso do método de Runge-Kutta-Fehlberg).

Quando o critério (6.11) é violado, aplicamos uma correção nas posições e velocidades, como descrito a seguir.

#### Correção das posições

As posições corrigidas, chamadas de  $\tilde{q}^c$ , podem ser obtidas fazendo-se

$$\tilde{q}^c = \tilde{q} + Hu \quad (6.12)$$

na qual  $H$  é a matriz Jacobiana dos vínculos (definida na seção 6.1) calculada para o estado  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ , e  $u$  é solução do seguinte sistema de equações

$$H^T H u = -C_j(\tilde{q}, t)$$

As novas posições substituem as anteriores e prossegue-se com a correção das velocidades.

### Correção das velocidades

Uma vez corrigidas as posições, temos que corrigir as velocidades para garantir que o movimento do sistema a partir da posição atual continuará satisfazendo os vínculos pelo menos em primeira ordem. Matematicamente, esta condição pode ser expressa pela equação

$$\frac{\partial C}{\partial t} + H^T \dot{q} = 0$$

Assim, através de um procedimento análogo àquele usado para corrigir as posições, tem-se a seguinte equação

$$\dot{\tilde{q}}^c = \dot{\tilde{q}} + H^c v \quad (6.13)$$

onde  $v$  é a solução do sistema

$$(H^c)^T H^c v = -\frac{\partial C}{\partial t} - (H^c)^T \dot{\tilde{q}}$$

O sobrescrito  $c$  em  $H^c$  assinala que a Jacobiana  $H$  é calculada utilizando as posições corrigidas em (6.12).

Mais detalhes sobre o método utilizado podem ser encontradas em [RPP94].

# Capítulo 7

## Detecção de Colisões

A partir do estado inicial dos objetos, e utilizando integração numérica, conseguimos calcular a posição dos objetos a cada instante de tempo. Isto, porém, não basta para se obter uma simulação. A integração numérica simplesmente calcula as posições dos objetos levando em conta forças externas aplicadas, e supõe que a função que descreve o estado dos objetos é contínua. No entanto, durante a simulação tenta-se fazer com que os objetos se comportem como se estivessem em um mundo real, e pode acontecer que dois objetos venham a colidir.

Neste capítulo consideramos o problema de detectar quando dois objetos entram em contato. O cálculo de um novo estado válido para o sistema após a colisão será tratado no capítulo 8.

### 7.1 Detecção de colisões

Diremos que dois corpos  $A$  e  $B$  estão em *contato* no instante  $t$  se  $A \cap B$  é não vazia, mas  $(A_{interior}) \cap (B_{interior})$  é vazia. Definimos então que há *colisão* entre dois corpos  $A$  e  $B$  no instante  $t$  se  $A$  e  $B$  estão em contato no instante  $t$ , mas não no instante  $t - \varepsilon$  para qualquer  $\varepsilon > 0$ .

Na prática, não é possível detectar exatamente o instante da colisão; e como os cálculos geométricos necessários para detecção de colisões ficam muito mais complicados se permitirmos que os interiores dos objetos se interceptem é necessário tratar as colisões *antes* dos objetos realmente colidirem. Ou seja, supõe-se que ocorreu uma colisão no instante  $t_i$  se a distância entre os corpos for menor que uma tolerância dada, e a derivada desta distância for negativa.

### 7.1.1 Detecção eficiente de colisões

Quando temos  $n$  objetos envolvidos numa simulação, podemos ter, em princípio, até  $\Theta(n^2)$  colisões ocorrendo simultaneamente. Felizmente, na prática o número de colisões no mesmo instante  $t_i$  é bem menor, por isso é importante evitar ao máximo fazer o teste de colisões para todos os pares de objetos a cada passo.

Numa animação, temos uma seqüência de configurações calculadas, separadas por um intervalo de tempo  $\delta$  entre elas. Se o intervalo  $\delta$  entre as configurações for suficientemente pequeno, podemos supor que haverá pouca mudança entre as posições dos objetos; chamamos este fenômeno de *coerência temporal*. A coerência temporal implica que as posições relativas entre os objetos não se alteram significativamente. Isso acarreta *coerência geométrica* entre configurações sucessivas, ou seja, a maioria dos testes efetuados para verificar a existência de colisões podem ser reaproveitados. Podemos assim utilizar a informação do quadro anterior para tornar mais rápida a detecção de colisões no quadro atual.

## 7.2 Detecção de colisões entre pares de poliedros convexos

O algoritmo de detecção que utilizamos é uma modificação do método desenvolvido por Lin [Lin94]. Este algoritmo utiliza-se de coerência temporal e geométrica para calcular de forma eficiente quais são os pares de objetos mais próximos a cada passo. Embora a complexidade do método seja  $\Theta(n^2)$  no pior caso, o tempo médio em casos reais de animação se revelou aproximadamente linear em  $n$  [Lin94]. Para facilitar a descrição do algoritmo vamos chamar os vértices, arestas ou faces de *elementos*. O algoritmo calcula e mantém o par de elementos mais próximos entre certos pares de poliedros. Devido à coerência geométrica, quando os pares de elementos mais próximos se alteram, o novo par é, em geral, composto de elementos vizinhos aos anteriores.

O algoritmo começa com um par de elementos candidatos  $e_A$  e  $e_B$  em objetos  $A$  e  $B$ , e verifica se a distância mínima entre  $A$  e  $B$  é realizada por pontos nesses dois elementos. Como os objetos são convexos, esta verificação é feita com um teste local, que envolve apenas os elementos vizinhos a  $e_A$  e  $e_B$ .

Se  $e_A$  ou  $e_B$  falham no teste, um dos elementos é substituído por um de seus vizinhos de modo que o novo par  $(e'_A, e'_B)$  seja garantidamente mais próximo que o anterior. Quando os objetos estão se movendo devagar, em geral esta troca ocorre no máximo uma vez. Mesmo quando os objetos sofrem mudanças bruscas de posição, o algoritmo leva tempo proporcional ao número de elementos trocados neste processo; que é uma função da velocidade relativa entre os poliedros, e no máximo  $O(m_A \cdot m_B)$ , onde  $m_A$  e  $m_B$  são o

número de elementos dos dois objetos  $A$  e  $B$ , respectivamente.

### 7.2.1 Diagrama de Voronói e região de Voronói

O *diagrama de Voronói* de um conjunto de pontos  $\mathcal{S}$  é uma coleção de polígonos  $\{R_p : p \in \mathcal{S}\}$ , cada um associado a um ponto  $p \in \mathcal{S}$ , tal que  $R_p$  é o conjunto dos pontos mais próximos ao ponto  $p$  do que a qualquer outro ponto de  $\mathcal{S}$  [PS86]. Para implementar o teste de validade do par mais próximo, Lin usa uma extensão do diagrama de Voronói onde o conjunto  $\mathcal{S}$  de pontos é substituído pelo conjunto de elementos de um poliedro  $\mathcal{P}$ . Esta extensão é chamada de *diagrama de Voronói generalizado* de  $\mathcal{P}$ . Define-se neste diagrama a *região de Voronói* de um elemento  $e \in \mathcal{P}$ , como sendo o conjunto  $R_e$  de pontos exteriores ao poliedro  $\mathcal{P}$  que são mais próximos a  $e$  do que a qualquer outro elemento de  $\mathcal{P}$ . Em geral, as regiões  $R_e$  são delimitadas por superfícies quadráticas; no entanto, se o poliedro for convexo, elas tem apenas superfícies planas.

O algoritmo de Lin mantém informações da vizinhança dos elementos, bem como as regiões de Voronói. Quando o teste de pertinência de um ponto  $p$  na região  $R(e)$  falha, isso significa que o ponto  $p$  viola um ou mais planos delimitadores daquela região. Neste caso, o elemento  $e'$  vizinho de  $e$  tal que  $R_e$  e  $R_{e'}$  compartilham um plano violado certamente está mais próximo do ponto  $p$  do que  $e$ . Sempre que isto ocorre, escolhe-se como próximo elemento aquele que compartilha o plano para o qual ocorreu a maior violação. Este fato é estabelecido com apenas  $k$  testes, onde  $k$  é o número de elementos vizinhos de  $e$  no poliedro.

### 7.2.2 Pré-processamento

As regiões de Voronói das arestas têm sempre tamanho constante. Para garantir tal propriedade também para as regiões de Voronói das faces e vértices, aplica-se, em tempo de pré-processamento, um algoritmo que subdivide estas regiões para as faces ou vértices com mais de um certo número pré-estabelecido de elementos como vizinhos. A subdivisão torna possível a verificação da pertinência de um ponto a uma região de Voronói em tempo constante, para qualquer combinação de elementos.

Quando há dois elementos com distância próxima, há o perigo do algoritmo entrar em repetição infinita devido a erros de arredondamento. Para evitar este caso, as regiões de Voronói são aumentadas ligeiramente para que se sobreponham.

## 7.3 Aceleração através de caixas envoltórias

O algoritmo, como apresentado até agora, continuaria fazendo o teste de interpenetração entre cada par de objetos. Em um ambiente com  $n$  objetos se movendo e  $m$  objetos estacionários, isto implicaria em monitorar o comportamento de  $\binom{n}{2} + nm$  pares de objetos a cada passo, e seria demasiado lento para  $n$  grande. A solução é tentar reduzir o número de pares testados. Para isso, o algoritmo coloca cada poliedro dentro de uma *caixa envoltória* (um paralelepípedo alinhado com os eixos do sistema inercial). As caixas envoltórias, por sua vez, são ordenadas, de acordo com cada um dos eixos, o que faz com que os únicos pares de poliedros que demandam teste sejam aqueles cujas caixas envoltórias se interceptam nos três eixos.

Neste trabalho fizemos uso de uma implementação deste algoritmo disponível publicamente [CLMP95] a qual atendeu a nossos propósitos (depois de corrigidos alguns erros conceituais e de implementação).

## 7.4 Tratamento de casos degenerados

Cada elemento pode ser um vértice, uma aresta ou uma face. Assim, há seis casos possíveis de pares mais próximos: (1) um par de vértices, (2) um vértice e uma aresta, (3) um vértice e uma face, (4) um par de arestas, (5) uma aresta e uma face e (6) duas faces.

Qualquer um dos casos acima pode ser retornado pelo algoritmo original desenvolvido por Lin [Lin94]. No entanto, consideramos os casos (1), (2), (5), (6) como degenerados, uma vez que sua probabilidade de ocorrência é zero quando os objetos estão em posições e orientações aleatórias. Assim, quando o algoritmo de Lin retorna como par mais próximo algum destes casos degenerados, aplicamos um algoritmo de pós-processamento para transformá-lo num caso não degenerado. Note que os pares válidos são aqueles em que a soma das dimensões dos elementos é igual a dois.

Sejam dois poliedros  $A$  e  $B$ , e seja  $(a, b)$  o par de elementos mais próximos entre  $A$  e  $B$ . Pode-se provar que se  $(a, b)$  é um par degenerado, então existe um par  $(a', b')$  não degenerado vizinho de  $(a, b)$  com distância igual ao par original. O algoritmo a seguir encontra este par.

---

---

**Algoritmo 7.1: Normaliza par mais próximo.****Entrada:**

Um par de elementos  $(a, b)$  com distância menor ou igual a um dado  $\epsilon$  pertencentes aos poliedros  $A$  e  $B$ , respectivamente.

**Saída:**

Um par não degenerado de elementos  $(a', b')$  com distância menor ou igual a  $\epsilon$  pertencentes aos poliedros  $A$  e  $B$ , respectivamente.

- (1) Se a soma das dimensões de  $(a, b)$  é igual a 2, então retorne o par  $(a, b)$ .
  - (2) Para todo elemento  $a'$  vizinho de  $a$ , mais o próprio  $a$
  - (3) Para todo elemento  $b'$  vizinho de  $b$ , mais o próprio  $b$
  - (4) Se a soma das dimensões do par  $(a', b')$  for igual a 2 e a distância entre  $(a', b')$  for menor ou igual a  $\epsilon$ , então
  - (5) Se existir um plano  $\Pi$ , determinado por  $(a', b')$ , que separa  $A$  e  $B$ , então retorne  $(a', b')$ .
- 
- 

O plano  $\Pi$  (passo (5)) determinado pelo par de elementos  $(a', b')$  é facilmente obtido já que o par pode ser composto apenas de um vértice e uma face ou então duas arestas. No caso de arestas paralelas, tal par é ignorado, uma vez que o plano  $\Pi$  se torna indefinido.

O algoritmo acima tem tempo de execução proporcional ao número de elementos vizinhos, que, como mencionado anteriormente, é sempre constante. O único passo que poderia aumentar a complexidade é o passo onde verifica-se se o plano  $\Pi$  separa os poliedros. No entanto, lembrando que os poliedros são convexos, este teste percorre apenas os elementos vizinhos (que são em número constante), o que torna o algoritmo acima de tempo  $O(g)$ , onde  $g$  é o maior número de vizinhos de uma elemento do poliedro.

# Capítulo 8

## Tratamento de Colisões

### 8.1 Introdução

No capítulo anterior, tratamos da detecção de colisões. Recordando, consideramos que dois corpos estão colidindo se estes estão a uma distância menor do que uma dada tolerância e a derivada dessa distância é negativa. Nestas circunstância, é preciso suspender a integração numérica das equações de movimento e adotar medidas adicionais para evitar a interpenetração.

O efeito da colisão entre corpos rígidos é o de introduzir uma alteração instantânea nas suas velocidades (supomos aqui que a colisão ocorre durante um intervalo de tempo infinitesimal) tal que as posições permaneçam as mesmas, mas a derivada da distância passe a ser maior que zero. A colisão é, portanto, um ponto de descontinuidade na integração.

A alteração instantânea de velocidade não pode ser obtida controlando as forças e torques nas equações de movimento, pois as mesmas implicam que a aceleração é finita e portanto a velocidade é contínua. Por isso, precisaríamos calcular durante a colisão forças e torques de magnitude infinita e duração nula, ou *impulsos*.

Quando dois objetos reais colidem, diversos fenômenos ocorrem simultaneamente. Dependendo do material, os corpos em colisão deformam-se num intervalo pequeno mas não nulo de tempo, podendo permanecer deformados após a colisão. O contato entre os corpos não é um ponto, mas uma região de área não nula. No decorrer da colisão surgem forças grandes (mas não infinitas) devidas principalmente ao atrito e às deformações sofridas pelos objetos na região do contato. O formato dos objetos, a rugosidade das superfícies em contato e as velocidades iniciais determinam a magnitude e direção destas forças no decorrer da colisão. Neste processo, parte da energia é transformada em ondas de choque que se propagam no interior do corpo e são responsáveis por transmitir os efeitos da colisão ao longo do corpo e aos corpos a ele ligados (note, no caso de corpos articulados,

que a manutenção dos vínculos exige que se alterem não só as velocidades dos corpos que colidiram, mas também as dos corpos a eles ligados). Outra parte da energia cinética do sistema é dissipada em formas não mecânicas de energia (térmica, sonora, etc).

Construir um modelo que retrate tais fenômenos com precisão não é tarefa fácil. Esta complexidade justifica o uso do modelo ideal de *colisão rígida*, em que a colisão é instantânea e a velocidade varia de modo descontínuo. As propriedades que determinam a magnitude da força, a dissipação de energia e a transmissão das ondas de choque são substituídas por *coeficientes* estimados ou obtidos empiricamente.

## 8.2 Colisão entre corpos rígidos articulados

O objetivo do tratamento de colisões para corpos rígidos articulados é a obtenção de novas velocidades que evitem a interpenetração. Como observado acima, os vínculos devem ser levados em conta uma vez que as novas velocidades devem ser tais que os corpos conectados não se separem após a colisão. Isso significa que a colisão, além de dar origem a impulsos no ponto de contato, gera impulsos secundários nas juntas.

Suponha que a posição e orientação dos objetos é descrita por um conjunto de coordenadas generalizadas  $q$  de tamanho  $n$  (como visto no capítulo 3) que expressa a posição do sistema de corpos e seja  $\dot{q}$  a velocidade generalizada deste sistema imediatamente antes da colisão. Deseja-se obter um vetor  $\Delta\dot{q}$  que, quando somado a  $\dot{q}$ , resulte em novas velocidades que evitem a interpenetração e satisfaçam os vínculos em primeira ordem.

Para calcular  $\Delta\dot{q}$  é necessário obter o impulso no ponto de contato, bem como os impulsos nas juntas. Para simplificar o cálculo destes impulsos vamos supor que:

1. O impacto é instantâneo e é sentido simultaneamente em todos os corpos. Esta premissa permite que se calculem todos os impulsos de uma só vez.
2. Em cada instante há, no máximo, dois corpos colidindo num único ponto. Assim, em simulações que envolvem múltiplas colisões, assume-se que elas ocorrem separadas por um intervalo de tempo não nulo e podem assim ser tratadas em separado.
3. Os corpos não sofrem deformação resultante do impacto (são infinitamente rígidos, mesmo durante a colisão).
4. Não há contatos duradouros (vide seção 4.1.1).
5. Não há atrito nos vínculos. Isto faz com que o impulso em cada vínculo tenha a direção do gradiente da equação do vínculo.

6. Não há atrito no ponto de colisão. Aqui também a premissa faz com que o impulso real gerado pela colisão tenha uma direção definida, igual à direção da normal ao plano de colisão (obtido através do algoritmo 7.1).

Sejam  $p_A$  e  $p_B$  as duas partículas envolvidas na colisão. O efeito da colisão é aplicar à partícula  $p_A$  um impulso da forma  $\kappa \vec{n}$ , onde  $\kappa$  é a magnitude do impulso e  $\vec{n}$  a direção normal ao plano de colisão. Um impulso de mesma magnitude, porém de direção oposta, é aplicado à partícula  $p_B$ . Em coordenadas generalizadas, estes dois impulsos equivalem ao impulso

$$\kappa I_c = \kappa \vec{n}(R_A - R_B) \quad (8.1)$$

onde  $R_A$  e  $R_B$  são as matrizes mudança de base que transformam as forças reais aplicadas nas partículas em contato de  $A$  e  $B$  em uma força generalizada.

Os impulsos nos vínculos, seguindo-se a premissa 5 e supondo-se a existência de  $\ell$  restrições da forma  $C(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$ , podem ser escritos como

$$I_j = \lambda_j \frac{\partial C_j}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) = \lambda_j H(q(t), \dot{q}(t), t); \quad j = 1, \dots, \ell \quad (8.2)$$

onde  $I_j$  é a componente do impulso generalizado necessária para manter a restrição  $C_j$ , e  $\lambda_j$  é a incógnita que determina a magnitude desse impulso.

Com as premissas acima, tem-se definida a direção para todos os impulsos considerados no sistema, restando como incógnitas as magnitudes, representadas pelos multiplicadores de Lagrange  $\lambda_j$  e por  $\kappa$ . O problema é calcular valores para estes parâmetros tais que a variação de velocidade generalizada  $\Delta \dot{q}$  satisfaça às restrições dos vínculos e evite a interpenetração.

Se o impulso no ponto de colisão fosse conhecido, os impulsos de reação nos vínculos e a variação de velocidade poderiam ser calculadas por um sistema de equações bastante similar àquele usado para calcular as acelerações (equação 6.5):

$$\begin{bmatrix} M & H^\top \\ H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

no qual as matrizes  $M$  e  $H$  são as mesmas do capítulo 6. O impulso  $I$  representa um impulso arbitrário, em coordenadas generalizadas, aplicado no sistema. Estas equações permitem calcular o variação  $\Delta \dot{q}$  resultante deste impulso. O vetor  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$  representa as magnitudes desconhecidas dos impulsos nas juntas, que surgem em reação ao impulso  $I$ , e que são necessários para manter os vínculos satisfeitos em primeira ordem. Mais precisamente, estes impulsos são dados por  $H^\top \lambda$ .

O sistema acima pode ser escrito como

$$M \Delta \dot{q} + H^\top \lambda = I \quad (8.4)$$

$$H \Delta \dot{q} = 0 \quad (8.5)$$

Multiplicando a equação (8.4) por  $HM^{-1}$ , tem-se

$$H\Delta\dot{q} + HM^{-1}H^T\lambda = HM^{-1}I$$

Usando a equação (8.5) temos

$$\lambda = (HM^{-1}H^T)^{-1}HM^{-1}I$$

Substituindo  $\lambda$  na equação (8.4) temos

$$M\Delta\dot{q} = [1 - H^T(HM^{-1}H^T)^{-1}HM^{-1}]I \quad (8.6)$$

No caso particular da colisão, o impulso resultante  $I$  tem a forma  $\kappa I_c$ , onde  $I_c$  é o impulso generalizado equivalente a um par de impulsos reais iguais e opostos, de magnitude arbitrária, aplicados nos pontos de colisão, com as direções conhecidas; e  $\kappa$  é um multiplicador (desconhecido) que determina a magnitude do impulso realmente aplicado em decorrência da colisão. Assim, a equação (8.6) pode ser reescrita como

$$M\Delta\dot{q} = \kappa[1 - H^T(HM^{-1}H^T)^{-1}HM^{-1}]I_c \quad (8.7)$$

Todo o termo do lado direito da equação que é multiplicado por  $\kappa$  será chamado de  $\Theta$ , ou seja

$$\Theta = [1 - H^T(HM^{-1}H^T)^{-1}HM^{-1}]I_c \quad (8.8)$$

Este termo representa a variação do momento generalizado do sistema para o impulso generalizado de referência  $I_c$  aplicado nos pontos de colisão.

O sistema (8.3) tem uma incógnita a mais do que o número de equações; portanto há um conjunto unidimensional de impulsos (dependendo da escolha de  $\kappa$ ) que satisfaz todas estas equações.

### 8.2.1 Cálculo do impulso máximo

As eventuais soluções do sistema (8.3) devem satisfazer duas condições: evitar a interpenetração (isto é, a velocidade relativa das partículas que colidiram deve ser não negativa após a colisão) e a energia total do sistema não deve aumentar, já que os mecanismos que dão origem às forças de reação nas juntas e na colisão não inserem energia, só a dissipam. (Note que, como os corpos não mudam de posição, as forças externas também não realizam trabalho durante a colisão.)

Cada uma destas condições determina uma equação que estabelece um valor extremo para a magnitude  $\kappa$  do impulso na colisão. Seja então  $\kappa_{\text{inf}}$  a magnitude mínima do impulso, que faz com que a velocidade relativa entre os corpos seja nula após a colisão, e seja  $\kappa_{\text{sup}}$  a magnitude máxima, que conserva toda a energia cinética do sistema.

Para se obter o valor máximo de  $\kappa = \kappa_{\text{sup}}$ , de tal forma que não ocorra perda de energia cinética, igualamos o valor da energia cinética após a colisão, na qual a velocidade é  $\dot{q} + \Delta\dot{q}$ , com a equação da energia cinética antes da colisão, na qual a velocidade é  $\dot{q}$ . Esta equação completa o número necessário de equações para que o sistema seja determinado e, neste caso, não sofra perda de energia:

$$\begin{aligned} T(\dot{q} + \Delta\dot{q}) &= T(\dot{q}) \\ 2\dot{q}^\top M \Delta\dot{q} + \Delta\dot{q}^\top M \Delta\dot{q} &= 0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Substituindo o valor de  $\Delta\dot{q}$  obtido na equação (8.7) temos

$$(2\dot{q}^\top + \Delta\dot{q}^\top)\Theta\kappa_{\text{sup}} = 0$$

que pode ser escrita como

$$[2\dot{q}^\top + (M^{-1}\Theta)\kappa_{\text{sup}}]\Theta\kappa_{\text{sup}} = 0$$

Esta equação tem uma solução trivial  $\kappa_{\text{sup}} = 0$ , que significa não alterar o movimento ( $\Delta\dot{q} = 0$ ), o que vai resultar em interpenetração e, portanto, não interessa. Ficamos assim com uma equação linear em  $\kappa_{\text{sup}}$

$$2\dot{q}^\top + (M^{-1}\Theta)\kappa_{\text{sup}} = 0$$

Isolando  $\kappa_{\text{sup}}$  temos a equação final

$$\kappa_{\text{sup}} = \frac{-2\dot{q}^\top\Theta}{(M^{-1}\Theta)^\top\Theta} \quad (8.10)$$

### 8.2.2 Cálculo do impulso máximo

Para calcular o valor mínimo  $\kappa_{\text{inf}}$  de  $\kappa$ , substitui-se a equação de conservação da energia cinética (8.9) pela equação que determina que a velocidade relativa das partículas colidentes, na direção normal ao plano de colisão, seja nula após a colisão. Supondo que as partículas são  $a$  e  $b$ , pertencentes aos corpos  $i$  e  $j$ , respectivamente, temos:

$$\vec{n} \cdot [(\nabla P_a(q))(\dot{q} + \Delta\dot{q}) - (\nabla P_b(q))(\dot{q} + \Delta\dot{q})] = 0 \quad (8.11)$$

onde:

$\vec{n}$  : normal ao plano de colisão;

$P_a(q)$  e  $P_b(q)$  : funções que dão as coordenadas reais das partículas  $a$  e  $b$ , respectivamente, a partir das coordenadas generalizadas do sistema;

$\nabla P_a$  e  $\nabla P_b$  : matrizes Jacobianas de  $P_a$  e  $P_b$ , definidas como  $\frac{\partial P_a}{\partial \dot{q}}(q)$  e  $\frac{\partial P_b}{\partial \dot{q}}(q)$ , respectivamente.

Fazendo as multiplicações  $N_a = \vec{n} \cdot (\nabla P_a(q))$  e  $N_b = \vec{n} \cdot (\nabla P_b(q))$  para os dois corpos, pode-se escrever a equação de uma forma mais simples

$$N_a(\dot{q} + \Delta\dot{q}) - N_b(\dot{q} + \Delta\dot{q}) = 0 \quad (8.12)$$

na qual os vetores  $N_a$  e  $N_b$  transformam as velocidades generalizadas diretamente para velocidades reais na direção normal ao plano de colisão.

Substituindo-se na equação acima o valor de  $\Delta\dot{q}$  da equação (8.7) e usando a também a equação (8.8) temos, após colocado em evidência  $\kappa$  aqui chamado de  $\kappa_{\text{inf}}$ ,

$$\kappa_{\text{inf}} = \frac{(N_b - N_a)\dot{q}}{(N_a - N_b)M^{-1}\Theta} \quad (8.13)$$

### 8.2.3 Escolha de $\kappa$

O valor correto para a magnitude do impulso  $\kappa$  pertence ao intervalo  $[\kappa_{\text{inf}}, \kappa_{\text{sup}}]$ . A escolha depende do comportamento que se deseja para a colisão e pode ser expressa com um *coeficiente de restituição* que varia entre 0 e 1, representando os possíveis valores do intervalo da magnitude.

Infelizmente, não há ainda modelos completos para cálculo do valor de  $\kappa$  dentro do modelo de corpos rígidos [Rub98].

# Capítulo 9

## Resultados Computacionais

### 9.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas algumas animações geradas com o simulador desenvolvido neste trabalho. O simulador consiste de 26714 linhas de código em Modula-3 escritas especialmente para esta tese; mais a biblioteca de detecção de colisões LCOLLIDE [CLMP95] que foi integrada ao código, a qual consiste de 16280 linhas de código escrito em linguagem C.

A descrição dos corpos, articulações, forças externas, e estado inicial são fornecidos via arquivos texto descritos no apêndice A.

Na maioria dos testes, cada corpo é um paralelepípedo com centro na origem do sistema de referência do corpo e lados paralelos aos eixos.

Para verificar a precisão com que as equações foram integradas, mostramos após cada animação o gráfico das energias mecânica, cinética e potencial gravitacional do sistema. Através do gráfico podemos verificar se a energia mecânica é conservada.

Todos os tempos de simulação foram obtidos numa Sun SPARCstation 4 com clock de 110 MHz.

### 9.2 Corpo girando em torno de um eixo principal

Nesta primeira animação temos um corpo rígido solto no espaço isento da força da gravidade e girando em torno de seu eixo principal  $\bar{z}$  (dirigido para dentro da tela).

O corpo sendo modelado é uma barra retangular com dimensões  $10 \times 4 \times 2$  com massa igual a 10 kg e momentos principais de inércia iguais a  $\bar{J}_x = 1,66$ ,  $\bar{J}_y = 9,66$  e  $\bar{J}_z = 8,66$  kgm. As coordenadas generalizadas  $q = (q_1, \dots, q_7)$  contêm, nas posições de 1 a 3 a posição do centro de massa, e nas posições de 4 a 7 os valores do parâmetros de Euler do corpo.

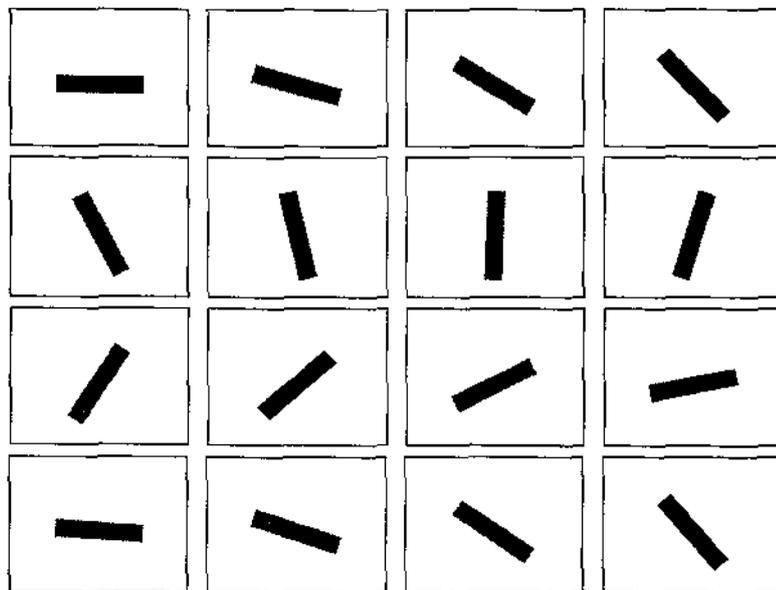


Figura 9.1: Corpo girando em torno de seu eixo  $\vec{z}$ .

O estado inicial do corpo é dado por  $q = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$  e  $\dot{q} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,2)$ . Note que, no estado inicial, a restrição dos parâmetros de Euler (3.5) está satisfeita e suas derivadas são ortogonais a eles, o que significa que a restrição está satisfeita também em primeira ordem.

Foram gerados 10 segundos de animação com 30 quadros para cada segundo. Na figura 9.1 estão quadros em intervalos uniformes de 20 quadros. A tolerância estabelecida para o integrador foi de  $10^{-4}$ . O tempo de simulação foi de 14 segundos.

O gráfico da figura 9.2 mostra como evoluiu a energia durante a simulação. O desvio padrão sofrido pela energia mecânica durante a animação foi de  $2,03 \times 10^{-7}$  J.

### 9.3 Corpo girando em torno de um eixo arbitrário

Temos aqui também um corpo isolado girando, desta vez sobre um eixo arbitrário. Novamente não consideramos aqui a força da gravidade. O corpo é o mesmo do exemplo acima, desta vez com estado inicial igual a  $q = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$  e  $\dot{q} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,20 \ 0,32 \ 0,23)$ .

Foram gerados novamente 300 quadros para um período de 10 segundos de animação. Na figura 9.3 estão quadros a cada 20 quadros da animação original. A tolerância estabelecida para o integrador foi de  $10^{-4}$ . O tempo de simulação foi de 18 segundos.

No gráfico da figura 9.4 temos um comportamento idêntico ao do gráfico da figura 9.2,

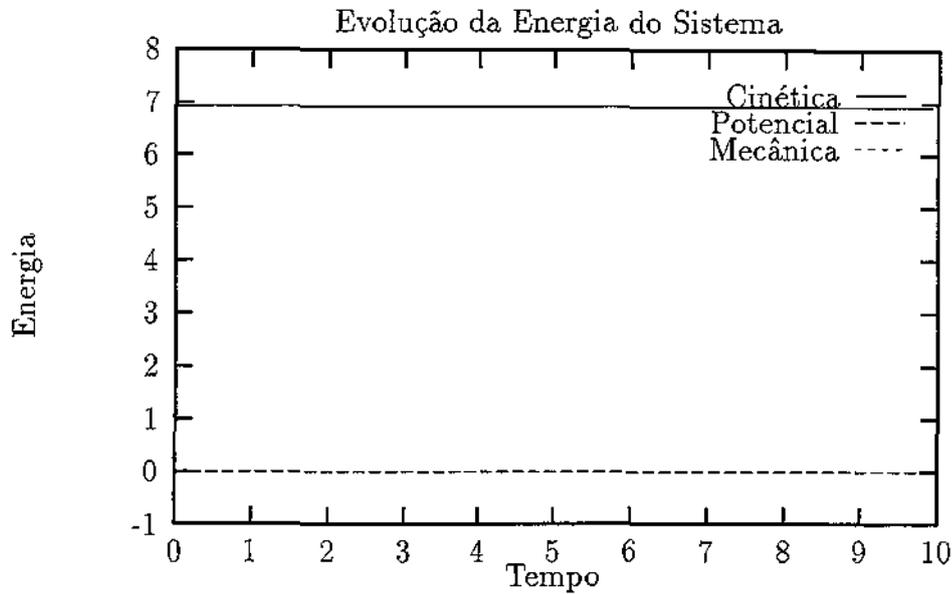


Figura 9.2: Evolução da energia para um corpo girando sobre seu eixo  $\bar{z}$ .

já que temos novamente apenas rotação em torno de um eixo. O desvio padrão da energia mecânica neste caso foi de  $2,23 \times 10^{-7}$  J.

## 9.4 Um corpo articulado

Temos nesta seção uma animação de um corpo articulado sujeito à ação da gravidade. Este é formado por barras de massa 10 kg e dimensões  $10 \times 2 \times 2$ , com um bico piramidal de altura 1 em cada extremo. Os dois corpos estão ligados por uma junta universal, e mais outra junta universal mantém uma ponta da barra 1 fixa num ponto do espaço.

O estado inicial do sistema é dado por  $q_1 = (0 \ 0 \ 19 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ,  $\dot{q}_1 = (0 \ 0 \ 0 \ 0,71 \ 0 \ 0 \ 0,71)$ ,  $q_2 = (6 \ 0 \ 13 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$  e  $\dot{q}_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ , onde 1 denota o corpo inicialmente na vertical e 2 denota o corpo inicialmente na horizontal.

Os momentos de inércia das duas barras são  $\bar{J}_x = 1,71$ ,  $\bar{J}_y = 31,71$  e  $\bar{J}_z = 31,71$  kgm.

Nesta animação foram gerados 15 segundos com 30 quadros por segundo. Temos na figura 9.5 amostras desta animação a cada 30 quadros. A tolerância estabelecida para o integrador foi de  $10^{-4}$ . O tempo de simulação foi de 90 segundos.

No gráfico da figura 9.6 vemos a evolução da energia do sistema neste caso. O desvio padrão da variação da energia mecânica foi de  $1,32 \times 10^{-4}$  J neste exemplo.

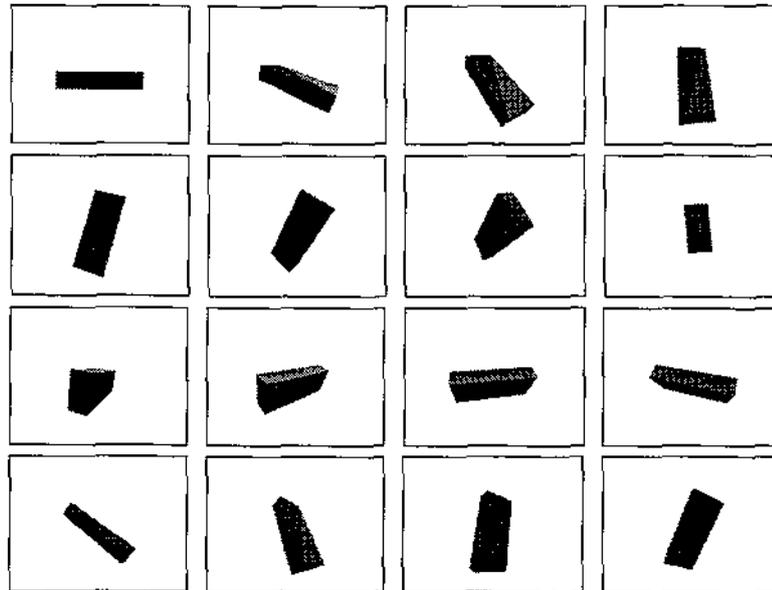


Figura 9.3: Corpo girando em torno de um eixo arbitrário.

## 9.5 Colisão entre dois corpos

Temos aqui uma animação onde um corpo isolado, no caso um tetraedro, cai sobre um outro corpo completamente fixo (ou seja, com restrições que fazem com que ele permaneça imóvel).

O tetraedro tem raio 2, massa igual a 1,5 kg e momentos de inércia  $\bar{J}_x = 0,75$ ,  $\bar{J}_y = 0,75$  e  $\bar{J}_z = 0,46$  kgm; e está inclinado por um ângulo e direção arbitrários. A massa e momentos de inércia do corpo fixo são irrelevantes. O estado inicial do sistema é  $q_{tetra} = (0 \ 3 \ 4 \ 0,97 \ 0,11 \ 0,11 \ 0,21)$ ,  $\dot{q}_{tetra} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ ,  $q_{fixo} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$  e  $\dot{q}_{fixo} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ .

Foram gerados aqui 3,3 segundos de animação num total de 100 quadros. O tempo de simulação foi de 18 segundos. A figura 9.7 contém amostras a cada 5 quadros. O integrador foi executado com tolerância  $10^{-4}$ .

O gráfico da figura 9.8 mostra a energia do sistema ao longo da animação. O desvio padrão sofrido pela energia mecânica foi de  $7,81 \times 10^{-7}$  J.

## 9.6 Colisão de um corpo articulado

Temos aqui a animação de um corpo articulado, composto de duas barras ligadas por uma junta universal, que cai sobre um outro corpo totalmente fixo no espaço. (As barras

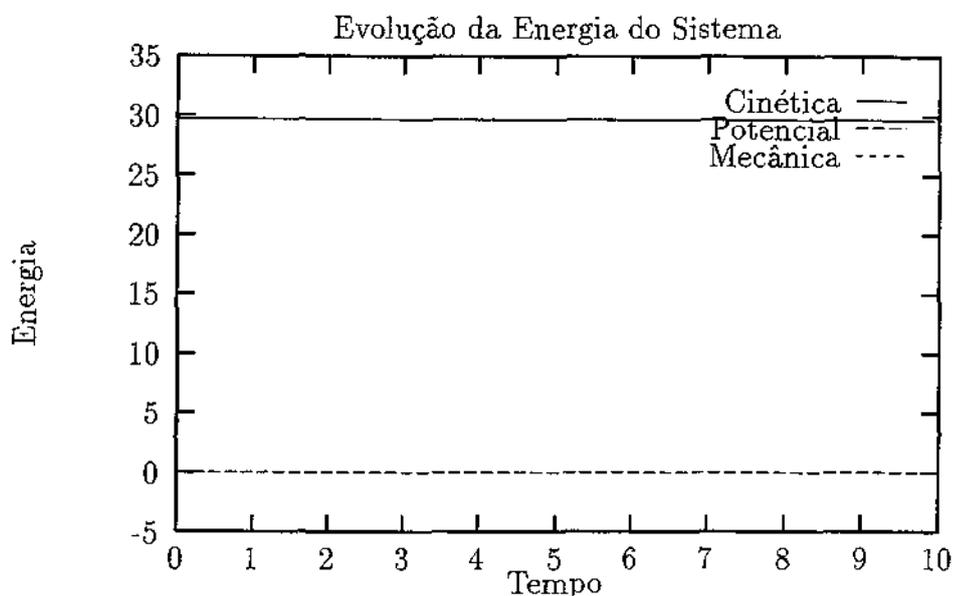


Figura 9.4: Evolução da energia para um corpo girando em torno de um eixo arbitrário.

têm a mesma forma e propriedades das do exemplo 9.4.) O corpo fixo é idêntico ao do exemplo 9.5.

O estado do sistema é dado por  $q_1 = (-4 \ 0 \ 11,5 \ 0,92 \ 0,38 \ 0 \ 0)$ ,  $\dot{q}_1 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ ,  $q_2 = (7,28 \ 0 \ 8,45 \ 0,87 \ 0 \ -0,5 \ 0)$ ,  $\dot{q}_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ ,  $q_{fixo} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$  e  $\dot{q}_{fixo} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ . A barra 1 está na horizontal, rodada de  $45^\circ$  em torno do eixo  $\vec{x}$ ; e a barra 2 está inclinada  $30^\circ$  em torno do eixo  $\vec{z}$ .

Foram gerados 10 segundos de animação num total de 300 quadros. Na figura 9.9 temos amostras a cada 15 quadros. O tempo de simulação foi de 127 segundos. O desvio padrão no valor da energia mecânica (figura 9.10) foi de  $1,41 \times 10^{-3}$  J.

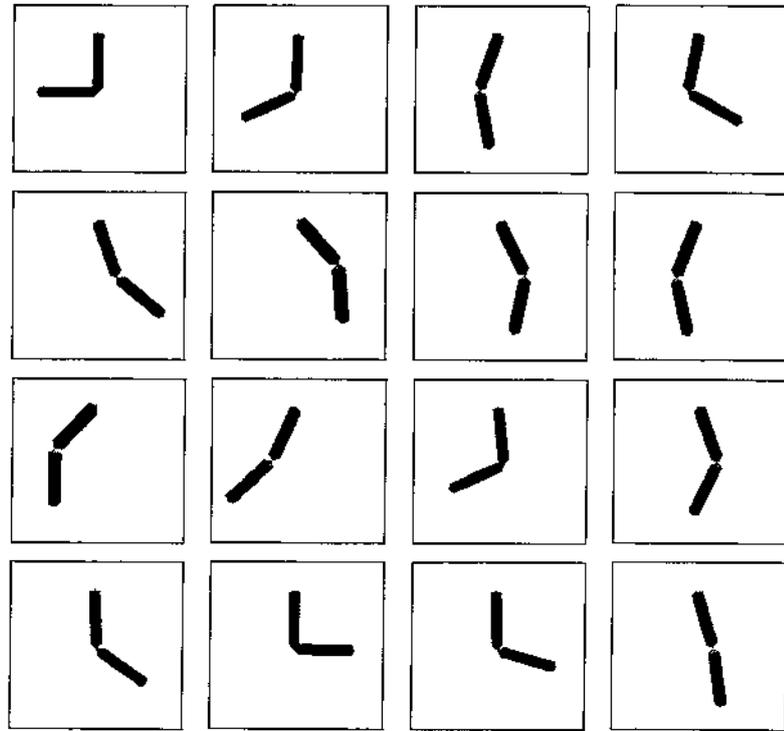


Figura 9.5: Dois corpos articulados.

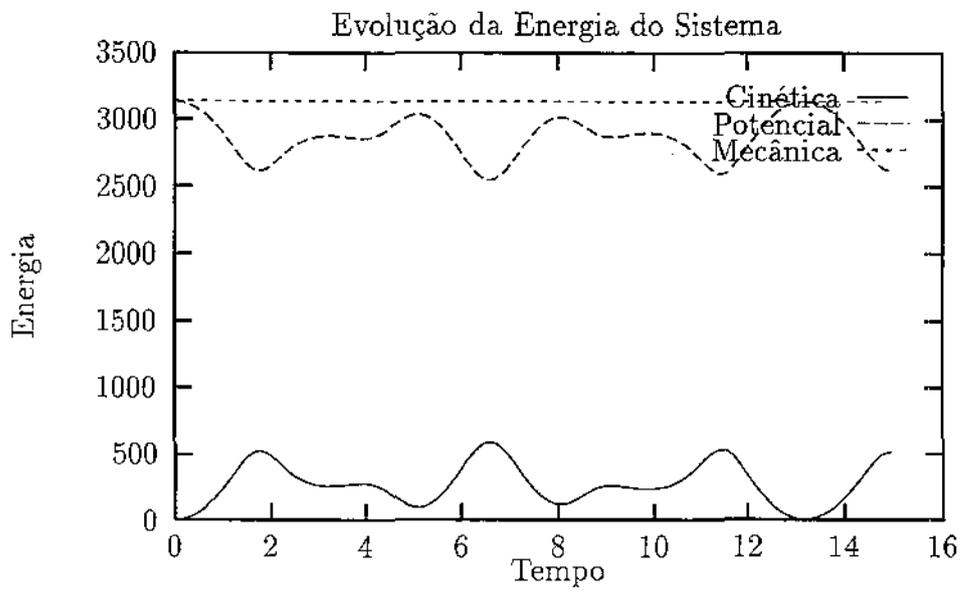


Figura 9.6: Evolução da energia para um corpo articulado.

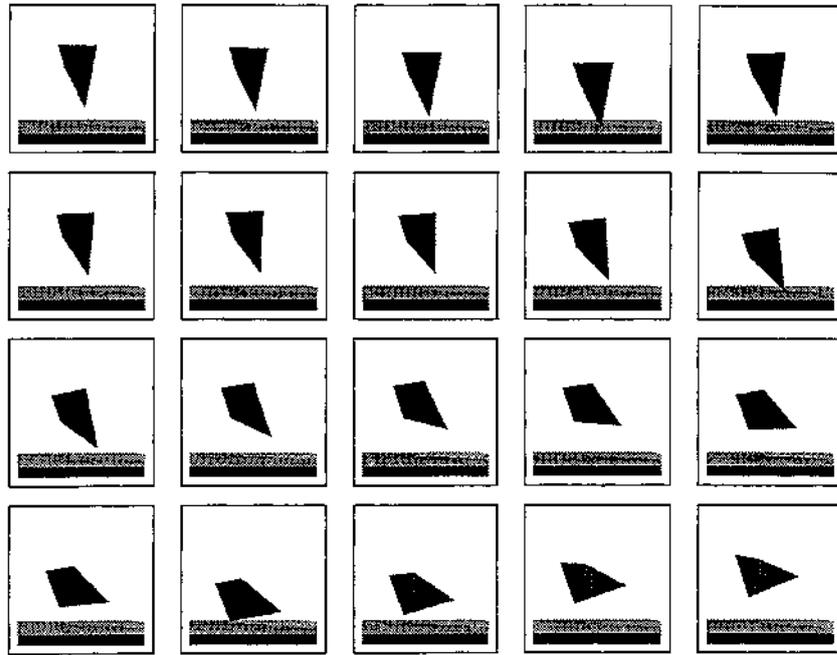


Figura 9.7: Corpos isolados com colisão.

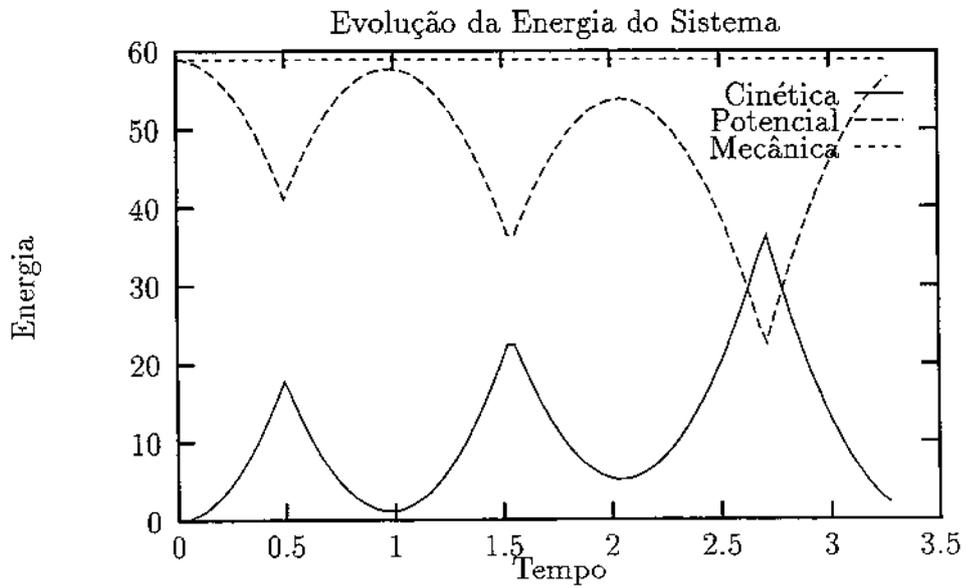


Figura 9.8: Evolução da energia para dois corpos isolados colidindo.

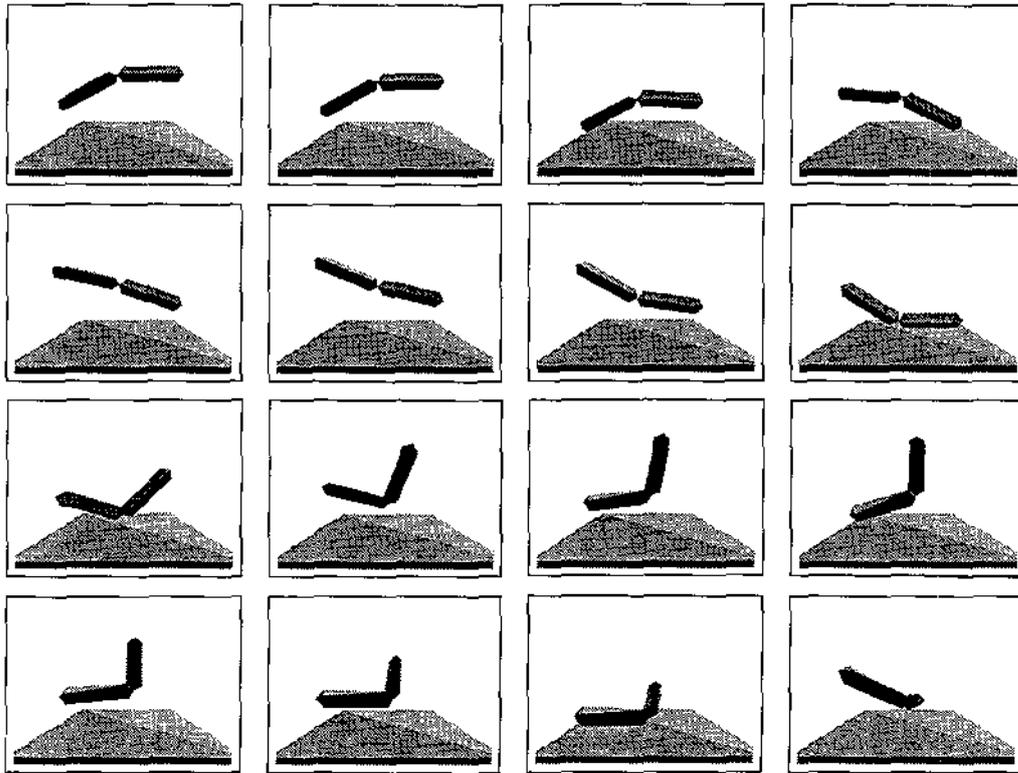


Figura 9.9: Corpo articulado com colisões.

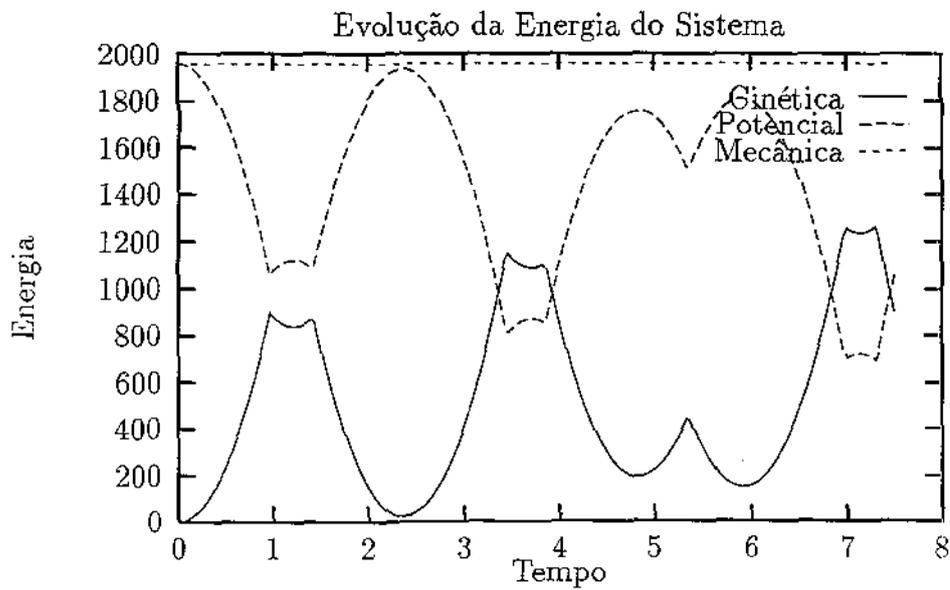


Figura 9.10: Evolução da energia para a um corpo articulado com colisões.

# Capítulo 10

## Conclusão

Apresentamos nesta dissertação, um simulador de corpos rígidos articulados que possibilita calcular a evolução ao longo do tempo, de um sistema de corpos rígidos ligados por juntas mecânicas. Para o controle do movimento dos corpos, é possível especificar um conjunto de forças e torques externos dependentes do estado dos corpos e do tempo.

A animação produzida respeita princípios da dinâmica como a conservação da energia mecânica. Os corpos são impedidos de sofrerem interpenetração através da aplicação de impulsos nos pontos onde ocorrem eventuais colisões.

### 10.1 Possíveis extensões

Este trabalho poderia ser estendido adicionando-se ao simulador a capacidade de tratar contatos permanentes (capítulo 8), bem como simultâneos. Modelos aceitáveis para o tratamento de tais casos tornaram-se disponíveis recentemente [TPSL95, TP96] e poderiam ser incorporados.

A produção de uma animação usando um simulador dinâmico, apesar de automaticamente resolver certos problemas enfrentados por outros métodos de animação, não é ainda suficientemente amigável para o animador especificar o que deseja. Uma interface gráfica para construção dos modelos e estados iniciais seria uma extensão natural deste trabalho.

Uma direção extremamente interessante para o desenvolvimento futuro é a implementação de mecanismos de controle externos ou autônomos que permitiriam fazer uso deste simulador como ferramenta de animações mais complexas. Assim, a integração de mecanismos de controle com realimentação [vF93] ao simulador seria outra via natural para conseguir realizar estudos interessantes.

# Apêndice A

## Descrição dos Arquivos Utilizados pelo Simulador

### A.1 Arquivos de entrada

Os dados de entrada para a criação de uma animação compreendem uma série de arquivos onde estão descritos os corpos, os possíveis vínculos, o estado inicial do sistema, forças e torques que atuam no sistema e os parâmetros de integração. Descrevemos aqui sucintamente o formato de cada um dos arquivos de entrada.

#### A.1.1 Arquivo de configuração

O arquivo de configuração (extensão “.cfg”) é o primeiro arquivo lido pelo simulador. Neste arquivo estão os parâmetros da animação (tal como duração e número de quadros); e os parâmetros do integrador (como os passos mínimo e máximo e a tolerância).

O formato do arquivo de configuração é o seguinte:

```
begin animation (format of 95-01-09)
  duration = <segundos>
  frames = <número de quadros>
  tolerance = <tolerância para o integrador>
  min_step = <passo mínimo do integrador>
  max_step = <passo máximo do integrador>
end animation
```

Além dos parâmetros acima, que são obrigatórios, existem ainda outros que podem ou não aparecer neste arquivo; são eles:

- `collision_test = <on/off>`: liga/desliga o teste de colisões entre os objetos (*default = on*).
- `gravity = <on/off>`: liga/desliga a força da gravidade (*default = on*).
- `correct_link_violation = <on/off>`: liga/desliga a estabilização automática de restrições (*default = on*).

### A.1.2 Corpos envolvidos na animação

Para descrever os corpos, é preciso fornecer informação sobre seu formato geométrico e características físicas. O arquivo de corpos (extensão “.bds”) tem o seguinte formato:

```
begin bodies (format of 95-01-09)
bodies = <número de corpos(N)>
<nome corpo 1> <arquivo descritivo 1>
                <escala em x> <escala em y> <escala em z> <densidade>
<nome corpo 2> <arquivo descritivo 2>
                <escala em x> <escala em y> <escala em z> <densidade>
:
<nome corpo N> <arquivo descritivo N>
                <escala em x> <escala em y> <escala em z> <densidade>
end bodies
```

O arquivo descritivo de cada corpo é tratado a seguir; a extensão do arquivo deve ser omitida ao referenciá-lo no arquivo de corpos.

### A.1.3 Descrição do formato dos corpos

O arquivo descritivo (com extensão “.shp”) contém a descrição geométrica e física de um corpo, seu formato é o seguinte:

```
begin shape (format of 95-01-09)
mass = <massa>
moments = < $\bar{J}_x$ > < $\bar{J}_y$ > < $\bar{J}_z$ >
vertices = <N>
faces = <M>
<nome vértice 1> < $x_1$ > < $y_1$ > < $z_1$ >
<nome vértice 2> < $x_2$ > < $y_2$ > < $z_2$ >
:
```

```

<nome vértice N>   < xN > < yN > < zN >
<nome face 1>     < v11 > < v21 > < v31 >
<nome face 2>     < v12 > < v22 > < v32 >
:
<nome face M>     < v1M > < v2M > < v3M >
end shape

```

onde  $(\bar{J}_x, \bar{J}_y, \bar{J}_z)$  são os momentos principais de inércia do corpo. Observe que as posições dos vértices devem ser tal que o corpo esteja com seu centro de massa na origem e com orientação tal que os eixos do sistema inercial sejam seus eixos principais de inércia. Alterações na posição ou orientação dos corpos devem ser especificadas no arquivo de estado inicial, tratado a seguir.

#### A.1.4 Estado inicial

O arquivo de estado inicial determina quais são as posições e velocidades dos corpos no início da animação (extensão “.ste”) e possui o seguinte formato:

```

begin state (format of 95-01-09)
bodies = <número de corpos(N)>
time = <tempo inicial>
<nome corpo 1> < rx1 ry1 rz1 > < θ01 θ11 θ21 θ31 >
                <  $\dot{R}_{x1}$   $\dot{R}_{y1}$   $\dot{R}_{z1}$  > <  $\dot{\theta}_{01}$   $\dot{\theta}_{11}$   $\dot{\theta}_{21}$   $\dot{\theta}_{31}$  >
<nome corpo 2> < rx2 ry2 rz2 > < θ02 θ12 θ22 θ32 >
                <  $\dot{R}_{x2}$   $\dot{R}_{y2}$   $\dot{R}_{z2}$  > <  $\dot{\theta}_{02}$   $\dot{\theta}_{12}$   $\dot{\theta}_{22}$   $\dot{\theta}_{32}$  >
:
<nome corpo N> < rxN ryN rzN > < θ0N θ1N θ2N θ3N >
                <  $\dot{R}_{xN}$   $\dot{R}_{yN}$   $\dot{R}_{zN}$  > <  $\dot{\theta}_{0N}$   $\dot{\theta}_{1N}$   $\dot{\theta}_{2N}$   $\dot{\theta}_{3N}$  >
end state

```

Note que os valores dos parâmetros de Euler devem satisfazer à restrição imposta pela equação (3.5). Além disso, as posições iniciais  $r$  e  $\theta$  dos corpos devem satisfazer às restrições das juntas e que suas derivadas  $\dot{r}$  e  $\dot{\theta}$  devem satisfazê-las em primeira ordem.

#### A.1.5 Descrição das juntas (opcional)

Este arquivo (extensão “.ctr”) contém a descrição das juntas que ligam os corpos entre si ou com o meio, cada junta tem seus próprios parâmetros de acordo com a sua natureza. O formato geral do arquivo é o seguinte:

```

begin constraints (format of 95-01-09)
constraints = <número de juntas(N)>
<nome da junta 1> <tipo da junta 1>
                <parâmetros da junta 1>
<nome da junta 2> <tipo da junta 2>
                <parâmetros da junta 2>
:
<nome da junta N> <tipo da junta N>
                <parâmetros da junta N>
end constraints

```

Os dados referentes aos parâmetros da junta variam de acordo com a natureza da junta, descrevemos abaixo estes parâmetros para alguns tipos de junta:

- Junta universal: neste caso o tipo da junta deve ser `Universal` e os parâmetros são:

```

<nome corpo 1> <  $x_1 y_1 z_1$  >
<nome corpo 2> <  $x_2 y_2 z_2$  >

```

onde o nome do corpo deve ser o definido no arquivo de descrição dos corpos (.bds) e os pontos  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$  são a posição da junta em coordenadas locais de cada corpo.

- Ponto fixo no espaço: neste caso o tipo da junta deve ser `Fixed` e os parâmetros são:

```

<nome corpo> <  $x y z$  >

```

onde o nome do corpo deve ser o definido no arquivo de descrição dos corpos (.bds) e o ponto  $(x, y, z)$  é a posição da junta em coordenadas locais do corpo.

### A.1.6 Forças e torques (opcional)

Este arquivo também é opcional; nele são descritas as forças e torques externos que atuam no sistema. O formato geral do arquivo é (sua extensão deve ser “.for”):

```

begin forces (format of 95-01-09)
forces = <número de forças(N)>
<nome da força 1> <tipo da força 1>
                <parâmetros da força 1>

```

```

<nome da força 2> <tipo da força 2>
                    <parâmetros da força 2>
:
<nome da força N> <tipo da força N>
                    <parâmetros da força N>
end forces

```

O tipo da força determina, tal qual ocorre com as juntas, quais são os parâmetros esperados. Alguns exemplos de forças são:

- Mola: esta força cria uma mola entre dois corpos, seu tipo deve ser Spring e seus parâmetros devem ter a seguinte forma:

```

<coeficiente da mola> <comprimento de repouso>
<nome corpo 1> < x1 y1 z1 >
<nome corpo 2> < x2 y2 z2 >

```

O coeficiente da mola determina sua rigidez; e os dois corpos com os pontos específicos, em coordenadas locais de cada corpo, onde a mola está presa.

- Força/Torque interpolado: com este tipo de força é possível especificar qual deve ser a força e/ou torque atuando em um corpo em determinados instantes de tempo. A força/torque atuando a cada instante é então calculada com base nestas amostras como sendo a interpolação destas amostras dentro do intervalo. A força/torque é considerada nula se estiver fora do intervalo dado. O tipo de força deve ser Interpolated e o seus parâmetros são:

```

<nome corpo> < x y z >
<número de amostras(N)>
< t1 > < Fx1 Fy1 Fz1 > < Tx1 Ty1 Tz1 >
< t2 > < Fx2 Fy2 Fz2 > < Tx2 Ty2 Tz2 >
:
< tN > < FxN FyN FzN > < TxN TyN TzN >

```

onde o nome do corpo e o ponto  $(x, y, z)$  em coordenadas locais do corpo informam, respectivamente, sobre qual corpo a força interpolada deve atuar e o seu ponto de aplicação neste corpo, dado em coordenadas locais. Os valores  $t_1$  a  $t_N$  devem ser instantes de tempo crescentes e determinam o intervalo onde a força estará ativa. Cada uma das tuplas  $\{(F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}), (T_{x_i}, T_{y_i}, T_{z_i})\}$  especifica a força e torque, respectivamente, no instante  $t_i$  em coordenadas inerciais. O método de interpolação

utilizado é o de Bezier, o que não garante que as forças e torques serão exatamente os da amostra para todas elas, com exceção da primeira e última. Porém com o método de Bezier garantimos que as forças e torques estarão dentro da *envoltória convexa* formada pelas amostras, o que torna este tipo de força mais controlável. Outros métodos de interpolação como splines e Lagrangiana poderiam ser utilizados.

## A.2 Arquivos de saída

São gerados arquivos de saída contendo a descrição dos corpos bem como as posições e velocidades a cada quadro. Todos os arquivos de saída possuem o mesmo nome do arquivo de configuração, cada um com sua própria extensão.

### A.2.1 Arquivo de faces

Este arquivo (extensão “.sur”) é gerado no início da execução, e contém todas as faces componentes dos corpos. Seu formato é:

```
begin surface (format of 95-09-14)
faces = <número de faces(N)>
< v1,1 v2,1 v3,1 >
< v1,2 v2,2 v3,2 >
:
< v1,N v2,N v3,N >
```

no qual  $(v_{1,i}, v_{2,i}, v_{3,i})$  são os índices dos vértices da  $i$ -ésima face, correspondentes a estes vértices nos arquivos de quadros, tratados a seguir.

### A.2.2 Arquivos de quadros

Para cada quadro da animação, o simulador gera um arquivo descrevendo aquele quadro. Estes arquivos possuem nomes no formato <prefixo><número do frame>.ste, no qual o prefixo é o nome dado ao arquivo de configuração. O formato do arquivo é o seguinte:

```
begin state (format of 95-06-03)
vertices = <número de vértices(N)>
t = <tempo>
0: < vx0 vy0 vz0 > <  $\dot{v}_{x0}$   $\dot{v}_{y0}$   $\dot{v}_{z0}$  >
1: < vx1 vy1 vz1 > <  $\dot{v}_{x1}$   $\dot{v}_{y1}$   $\dot{v}_{z1}$  >
:
N: < vxN vyN vzN > <  $\dot{v}_{xN}$   $\dot{v}_{yN}$   $\dot{v}_{zN}$  >
```

no qual  $(v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i})$  e  $(\dot{v}_{x_i}, \dot{v}_{y_i}, \dot{v}_{z_i})$  são as posições e velocidades do vértice  $i$  no instante  $t$ .

# Bibliografia

- [AG85] W. W. Armstrong and M. W. Green. The dynamics of articulated rigid bodies for purposes of animation. In *Graphics Interface*, pages 407–415, 1985.
- [AGL86] W. W. Armstrong, M. Green, and R. Lake. Near-real-time control of human figure models. In *Graphics Interface*, pages 147–151, 1986.
- [Bar89] David Baraff. Analytical methods for dynamic simulation of non-penetrating rigid bodies. In *Computer Graphics*, volume 23(3), pages 223–231. SIGGRAPH, 1989.
- [Bar90] David Baraff. Curved surfaces and coherence for non-penetrating rigid body simulation. In *Computer Graphics*, volume 24(4), pages 19–28. SIGGRAPH, 1990.
- [Bar92] David Baraff. *Dynamic Simulation of Non-Penetrating Rigid Bodies*. PhD thesis, Cornell University, Ithaca, New York, Março 1992.
- [Bar93] David Baraff. Issues in computing contact forces for non-penetrating rigid bodies. *Algorithmica*, 10:292–352, 1993.
- [Bar96] David Baraff. Linear-time dynamics using lagrange multipliers. Technical Report CMU-RI-TR-95-44, Carnegie Mellon University, Janeiro 1996.
- [Bra91] Raymond M. Brach. *Mechanical Impact Dynamics: Rigid Body Collisions*. John Wiley & Sons, 1991.
- [Cha97] A. Chatterjee. *Rigid body collisions: Some general considerations, new collision laws, and some experimental data*. PhD thesis, Cornell University, Ithaca, New York, 1997.
- [CLMP95] Jonathan D. Cohen, Ming C. Lin, Dinesh Manocha, and Madhav K. Ponamgi. I-COLLIDE: An interactive and exact collision detection system for large-scale environments. In *Proceeding of ACM Interactive 3D Graphics Conference*, pages 293–304, 1995.

- [dMR95] José Francisco Franco de Camargo, Léo Pini Magalhães, and Alberto Barbosa Raposo. Local and global control in computer animation. In *Anais do VIII Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens*, São Carlos, 1995.
- [Gol80] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 2<sup>nd</sup> edition, 1980.
- [HM94] Yildirim Hurmuzlu and Dan B. Marghitu. Rigid body collisions of planar kinematic chains with multiple contact points. *The International Journal of Robotics Research*, 13(5):82–92, Fevereiro 1994.
- [Lie97] Rogério Luís Walter Liensenfeld. Animação dinâmica de corpos elásticos. Master's thesis, Instituto de Computação – Unicamp, Março 1997.
- [Lin94] Ming Chieh Lin. *Efficient Collision Detection for Animation and Robotics*. PhD thesis, Electronics Research Laboratory, University of California at Berkeley, 1994.
- [MC94] Brian Mirtich and John Canny. Impulse-based dynamic simulation. Technical Report CSO-TR 94-815, University of California at Berkeley, Junho 1994.
- [MW88] Maththew Moore and Jane Wilhelms. Collision detection and response for computer animation. In *Computer Graphics*, volume 22(4), pages 289–298. SIGGRAPH, 1988.
- [PS86] Franco P. Preparata and Michael Ian Shamos. *Computational Geometry: An Introduction*. Springer-Verlag - New York, 1986.
- [Rod93] Andréia Formico Rodrigues. ANIMADO: Um protótipo de um sistema de animação modelada por dinâmica. Master's thesis, UNICAMP, Agosto 1993.
- [RPP94] Peder Thusgaard Ruhoff, Eigil Præstgaard, and John W. Perram. Efficient algorithms for simulating complex mechanical systems using constraint dynamics. IMADA preprint, Dezembro 1994.
- [Rub98] M. B. Rubin. Physical restrictions on the impulse acting during three-dimensional impact of two “rigid” bodies. *Journal of Applied Mechanics*, 65(2):464–469, Junho 1998.
- [Sha89] Ahmed A. Shabana. *Dynamics of Multibody Systems*. John Wiley & Sons, 1989.

- [ST95] D. E. Stewart and J. C. Trinkle. Dynamics friction and complementarity problems. In *International Conference on Complementarity Problems*, Johns Hopkins University, Baltimore, 1995.
- [TP96] Jeff Trinkle and Jong-Shi Pan. Complementarity formulations and existence of solutions of dynamic multi-rigid-body contact problems with coulomb friction. *Mathematical Programming*, 73(2):199–226, 1996.
- [TPSL95] Jeff Trinkle, Jong-Shi Pang, Sandra Sudarsky, and Grace Lo. On dynamic multi-rigid-body contact problems with coulomb friction. Technical Report 95-003, Texas A&M University, 1995.
- [vF93] Michiel van de Panne and Eugene Fiume. Sensor-actuator networks. In *Computer Graphics*, volume 27, pages 335–342, Agosto 1993.
- [Wil87a] Jane Wilhelms. Toward automatic motion control. *IEEE Computer Graphics & Applications*, 7(6):11–22, Abril 1987.
- [Wil87b] Jane Wilhelms. Using dynamic analysis for realistic animation of articulated bodies. *IEEE Computer Graphics & Applications*, 7(4):12–27, Junho 1987.
- [WM92] Yu Wang and Matthew T. Mason. Two-dimensional rigid-body collisions with friction. *Journal of Applied Mechanics*, 59(3):635–642, Setembro 1992.