

**O problema da coloração total
em classes de grafos**

Christiane Neme Campos

Tese de Doutorado

O problema da coloração total em classes de grafos

Christiane Neme Campos

abril 2006

Banca Examinadora:

- Profa. Dra. Célia Picinin de Mello (orientadora)
- Profa. Dra. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
- Prof. Dr. Flávio Keidi Miyazawa
Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas
- Prof. Dr. João Meidanis
Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas
- Profa. Dra. Yoshiko Wakabayashi
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo
- Dr. Michel Eduardo Beleza Yamagishi (suplente)
Embrapa Informática Agropecuária

CHAMADA _____
 TIV/UNICAMP
 C157p
 EX _____
 MBO BC/ 69317
 OC. 16-123-06
 C ☐ D ☒
 REÇO 11,00
 ATA 19/07/06
 30-10382578

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
 BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 859

Campos, Christiane Neme

C157p O problema da coloração total em classes de grafos / Christiane Neme
 Campos -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Célia Picinin de Mello

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
 Computação.

1. Teoria dos grafos. 2. Coloração de grafos. 3. Complexidade
 computacional. I. Mello, Célia Picinin de. II. Universidade Estadual de
 Campinas. Instituto de Computação. III. Título.

Título em inglês: The total colouring problem in classes of graphs.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Graph theory. 2. Graph coloring. 3. Computational complexity.

Área de concentração: Teoria dos grafos.

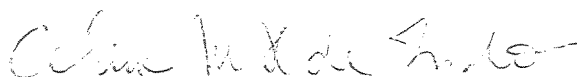
Titulação: Doutorado em Ciência da Computação.

Banca examinadora: Profa. Dra. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo (IM-UFRJ)
 Prof. Dr. Flávio Keidi Miyazawa (IC-UNICAMP)
 Prof. Dr. João Meidanis (IC-UNICAMP)
 Profa. Dra. Yoshiko Wakabayashi (IME-USP)

Data da defesa: 05/04/2006

TERMO DE APROVAÇÃO

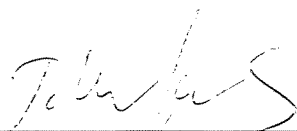
Tese defendida e aprovada em 05 de abril de 2006, pela Banca examinadora composta pelos Professores Doutores:



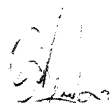
Proa. Dra. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
IM / UFRJ.



Profa. Dra. Yoshiko Wakabayashi
IME / USP.



Prof. Dr. João Meidanis
IC / UNICAMP.



Prof. Dr. Flávio Keidi Miyazawa
IC / UNICAMP.



Profa. Dra. Célia Picinin de Mello
IC / UNICAMP.

O problema da coloração total em classes de grafos

Este exemplar corresponde à redação final da Tese devidamente corrigida e defendida por Christiane Neme Campos e aprovada pela Banca Examinadora.

Campinas, 05 de abril de 2006.



Profa. Dra. Célia Picinin de Mello
(orientadora)

Tese apresentada ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ciência da Computação.

© Christiane Neme Campos, 2006.
Todos os direitos reservados.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Silvio Maia Campos e Mariangela N. Maia Campos.

Deles herdei o espírito universitário e o amor pela ciência.

A eles a minha gratidão e o meu amor.

Agradecimentos

Para mim, um doutoramento frutifica em dois níveis diferentes. Um deles se encontra expresso neste trabalho, o outro, intangível, tem a sua marca no desenvolvimento humano obtido durante a caminhada. Muitas são as pessoas que contribuem nesta trajetória, quer tenhamos consciência ou não, e a todas estas deixo o meu agradecimento.

Agradeço em particular:

★ à Célia, pela orientação e estímulo cujo resultado se encontra eternizado neste trabalho mas também pelo carinho e amizade que se encontram eternizados em mim;

★ aos membros da banca examinadora por terem aceitado participar da avaliação deste trabalho e pelas contribuições que resultaram na melhoria de sua versão final;

★ à Simone, pela oportunidade de trabalhar em um problema diferente, ampliando meus horizontes, e pela amizade compartilhada.

★ à Dra. Rachel por ter me ajudado a manter a chama da esperança acesa;

★ à Islene pelas conversas e apoio em um momento bastante delicado do meu percurso;

★ aos amigos que participaram do meu caminhar, em particular à Aninha, à Daniela, à Gisele, ao Jerônimo e à Patrícia por compreenderem tão bem o significado e as renúncias de uma verdadeira amizade;

★ às minhas irmãs, Viviane e Tatiane, por compreenderem a ausência e à minha sobrinha Gabriela por cobrar a presença;

★ ao Cadão pela cumplicidade e apoio presentes desde o início de minha trajetória mas também, e principalmente, pelo amor partilhado, meu contraponto e guia em tantos momentos difíceis.

★ ao meu filho Francisco por não me deixar esquecer o que tem valor real na vida.

Prefácio

O problema da coloração total foi introduzido por Behzad e Vizing, em trabalhos independentes, por volta de 1965. Este problema consiste em associar cores às arestas e aos vértices de um grafo, utilizando o menor número de cores possível, de maneira que: (i) dois vértices adjacentes tenham cores distintas; (ii) duas arestas adjacentes tenham cores distintas; (iii) cada vértice tenha cor diferente das cores das arestas que nele incidem. Este menor número de cores para o qual um grafo admite uma coloração total é conhecido como *número cromático total*. Determinar o número cromático total foi demonstrado ser NP-difícil mesmo para grafos bipartidos k -regulares, com k fixo e $k \geq 3$. Behzad e Vizing, novamente em trabalhos independentes, questionaram se, dados um grafo simples G e $\Delta(G)$ seu grau máximo, $\Delta(G) + 2$ cores seriam suficientes para conseguir uma coloração total deste grafo. Eles conjecturaram que a resposta a esta pergunta seria positiva. Esta conjectura, conhecida como *Conjectura da Coloração Total*, permanece aberta para grafos em geral. Neste trabalho, abordamos o problema da coloração total para várias classes de grafos. Foi determinado o número cromático total: (i) dos snarks-flor; (ii) das potências de ciclo, C_n^k , com $k = 2$; (iii) das potências de ciclo, C_n^k , tais que $n \equiv 0 \pmod{\Delta(G) + 1}$ e $n \equiv 0 \pmod{k + 1}$, n, k pares; (iv) das grades e de alguns casos particulares de grades parciais; (v) das quase-escadas; (vi) dos cubos k -dimensionais; (vii) e de casos particulares de grafos que são interseção de três cliques maximais. Além disso, a conjectura da coloração total foi verificada para as potências de ciclo, C_n^k com: (i) n par; (ii) $k = 3$; (iii) $k = 4$; (iv) $n \equiv 0 \pmod{k + 1}$; (v) e $n \equiv k \pmod{k + 1}$.

O último capítulo da tese aborda um problema de particionamento dos vértices de um grafo. Neste problema, temos como entrada um grafo G e quatro vértices x^A, x^B, x^C e x^D e queremos saber se existe uma partição do conjunto de vértices de G em quatro conjuntos A, B, C e D tais que $x^A \in A, x^B \in B, x^C \in C, x^D \in D$ e todo vértice de A é adjacente a todo

vértice de B e todo vértice de C é adjacente a todo vértice de D. Este problema é conhecido como *Nonempty Part List H-Partition* com $H = 2K_2$. Mostramos que este problema é NP-completo. Com esta demonstração todos os problemas desta classe estão classificados quanto à sua complexidade, sendo o caso $H = 2K_2$ o único que é NP-completo.

Sumário

Dedicatória	vii
Agradecimentos	viii
Prefácio	ix
1 Introdução	1
1.1 Definições básicas	1
1.2 Exemplos	4
1.3 Organização da tese	12
2 Potências de ciclo	14
2.1 Número cromático total das potências de ciclo com $k = 2$	16
2.1.1 Introdução	16
2.1.2 Coloração total do C_n^2 , $n \neq 7$	18
2.1.3 Coloração total do C_7^2	24
2.2 Verificação da TCC para as potências de ciclo com um número par de vértices	27
2.2.1 Introduction	27
2.2.2 Preliminaries	28
2.2.3 Total colouring of G_P	32
2.2.4 Edge colouring G_I	33
2.2.5 Concluding remarks	45
2.3 Resultados adicionais	48
3 Bipartidos	59
3.1 Número cromático total de alguns grafos bipartidos	61

3.1.1	Introduction	61
3.1.2	Grids and partial grids	62
3.1.3	Near-ladder graphs	67
3.1.4	k -dimensional cube	72
	Acknowledgements	73
4	Grafos 3-cliques	74
4.1	Preliminares	75
4.2	Grafos 3-cliques com grau máximo ímpar	78
5	Outros trabalhos	93
5.1	O problema da $2K_2$ -partição com quatro vértices fixados	94
5.1.1	Introduction	94
5.1.2	Preliminaries	95
5.1.3	The reduction	96
5.1.4	Main Theorem	99
6	Conclusões e trabalhos futuros	101
	Bibliografia	103

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de grafos simples munidos de colorações totais.	2
1.2	Grafo de Petersen munido de uma 4-coloração total. Um grafo tipo 1. . . .	8
1.3	Grafo de Petersen em um desenho apropriado e o grafo F_3	9
1.4	Construção do grafo F_5 a partir do grafo F_3	10
1.5	Coloração total do grafo F_3 com 4 cores.	11
2.1	Os grafos C_7^2 e C_{12}^3 , exemplos de potências de ciclo.	14
2.2	Grafo C_6^2 pertencente à família dos C_n^2 . As arestas cheias são as arestas de E^1 e as arestas tracejadas de E^2	17
2.3	Ilustração da operação de colagem: as arestas tracejadas na primeira figura são removidas (E_{out}) juntamente com os vértices marcados e as arestas tracejadas na segunda figura são introduzidas (E_{in}).	19
2.4	Grafo G após a renomeação dos seus vértices especificada em (2.3) e (2.4).	20
2.5	$(\Delta + 1)$ -coloração total dos grafos básicos.	21
2.6	Coloração total do grafo C_7^2	25
2.7	Vertex v_i (at center) and set $P(v_i)$ (dashed edges).	29
2.8	Dotted and dashed edges form an odd set. The dotted edge is the anchor.	30
2.9	The partition of $V(C_{12}^4)$ in blocks.	32
2.10	A 7-total colouring π_{G_P} of G_P	33
2.11	Subgraph G_I of C_{12}^4 with colouring π	37
2.12	Union of H_1^j and H_1^{j+1} . The degrees of same vertices in the intersection are added resulting in a block with vertices of degree $r - 1$ when k is even, or in a block with vertices of degree r when k is odd.	40
2.13	Degree distribution of H_1	40
2.14	Degree distribution of H_2	41

2.15	Degree distribution of H_3	42
2.16	Degree distribution of $H_1 \cap H_2$	43
2.17	Intersection of H_2 and H_3	44
2.18	Intersection of H_3 and H_1	45
2.19	Grafo G_I esquematizado quando n é ímpar, $k = 4$ e $r = 2$. Neste caso α é par. As arestas tracejadas recebem uma cor em π . O subgrafo induzido pelas arestas cheias é o G_r	52
2.20	Grafo G_I esquematizado quando n é ímpar, $k = 4$ e $r = 3$. Neste caso α é ímpar e maior que 1. As arestas tracejadas recebem uma cor em π . O subgrafo induzido pelas arestas cheias é o G_r	53
2.21	Coloração total com 7 cores.	53
2.22	Coloração total com 7 cores.	54
2.23	Grafo C_{12}^4 parcialmente colorido com 6 cores. As arestas tracejadas ainda não receberam uma cor e induzem um grafo bipartido 3-regular. Os vértices na partição superior possuem índice par, os da partição inferior, índice ímpar. Dentro de cada partição os vértices estão dispostos em ordem crescente de índice.	54
2.24	Grafo C_{14}^4 parcialmente colorido com 7 cores. As arestas tracejadas ainda não receberam uma cor e induzem um grafo bipartido 2-regular. Os vértices na partição superior possuem índice par, os da partição inferior, índice ímpar. Dentro de cada partição os vértices estão dispostos em ordem crescente de índice.	55
2.25	Grafo C_{15}^4 munido de uma 9-coloração total.	55
3.1	Os Grafos B_4 e B_5 , exemplos de quase-escadas.	60
3.2	Each case has exactly two vertices of degree 3 and is type 1.	67
3.3	Graphs B_4 and B_5	67
3.4	Near ladder graphs:(a) k even; (b) k odd.	68
3.5	Glueing of B_4 and B_6 . The dashed edges in B_4 and B_6 are the edges of E_{out} and the dashed edges of B_{10} are edges of E_{in}	70
3.6	4-total colouring of B_4 and B_6	71
3.7	4-total colouring of Q_3	72

4.1	Grafo 3-cliques com vértice universal.	75
4.2	Graph G	76
4.3	Coloração total de G_2 e G_4 atestando que estes grafos são tipo 1.	89
5.1	Example of reduction for instance $(\overline{x_1}, x_2, x_3)(\overline{x_3}, \overline{x_2}, x_1)$	98

Capítulo 1

Introdução

1.1 Definições básicas

Nesta seção, introduzimos alguns conceitos básicos da teoria de grafos. Definições utilizadas ao longo deste trabalho não incluídas no texto podem ser encontradas em referências clássicas da teoria [6, 34].

Um grafo G consiste em um conjunto de *vértices*, $V(G)$, um conjunto de *arestas*, $E(G)$, e uma função de incidência que associa cada aresta $e \in E(G)$ a um par não ordenado de vértices de G . Os vértices deste par não ordenado são denominados *extremos de e* . Uma aresta $e \in E(G)$ tal que u e v são seus extremos é denotada por (u, v) , (v, u) , uv ou vu^* . Se $u = v$ dizemos que a aresta é um *laço*. Se duas arestas distintas possuem os mesmos extremos dizemos que estas arestas são *múltiplas* ou *paralelas*. Na literatura, grafos nos quais são permitidas arestas múltiplas e laços são também denominados de *multigrafos*. Quando um grafo G não possui arestas múltiplas ou laços é denominado de *grafo simples*.

Um *elemento* de G é uma aresta ou um vértice de G . Se $e = uv \in E(G)$ dizemos que e *incide* em u e v . Além disso, u e v são ditos *adjacentes*. Se existe $f = uw \in E(G)$, as arestas e e f são ditas *adjacentes* ou *incidentes*. Duas arestas não adjacentes são ditas *independentes*. A *vizinhança* de um vértice v , denotada por $N(v)$, é o conjunto de todos os vértices de $V(G)$ que são adjacentes a v . Dado um vértice $v \in V(G)$, o número de arestas incidentes em v é o seu *grau*, sendo denotado por $d(v)$. Definimos o *grau máximo*

*Normalmente, as arestas de $E(G)$ são definidas pela descrição de seus extremos e a função de incidência fica implícita.

de um grafo G como $\Delta(G) := \max\{d(v) : v \in V(G)\}$. Analogamente, o *grau mínimo* de G é $\delta(G) := \min\{d(v) : v \in V(G)\}$.

Coloração é um problema tradicional em teoria de grafos. Uma *coloração de vértices* de G é uma associação de cores aos vértices de G de maneira que dois vértices adjacentes tenham sempre cores distintas. Define-se o *número cromático* de um grafo G , $\chi(G)$, como o menor número de cores para o qual G admite uma coloração de vértices. Uma *coloração de arestas* de um grafo G é uma associação de cores às arestas de G de maneira que duas arestas adjacentes tenham sempre cores distintas. Similarmente, define-se o *índice cromático*, $\chi'(G)$, como o menor número de cores para o qual G admite uma coloração de arestas. Vizing [66, 67] e Gupta [40] provaram, em trabalhos independentes, que qualquer grafo simples G possui índice cromático igual a $\Delta(G)$ ou $\Delta(G) + 1$. Os grafos que possuem $\chi'(G) = \Delta(G)$ são denominados *classe 1* e aqueles que possuem $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ são denominados *classe 2*.

Uma *coloração total* de G é uma associação de cores às arestas e aos vértices de G de maneira que cada par de vértices adjacentes e cada par de arestas adjacentes tenham sempre cores distintas e, além disso, cada vértice deve ter cor distinta das cores das arestas que nele incidem. Podemos ver facilmente que qualquer coloração total de um grafo G necessita de pelo menos $\Delta(G) + 1$ cores. A Figura 1.1 exhibe alguns grafos munidos de colorações totais.

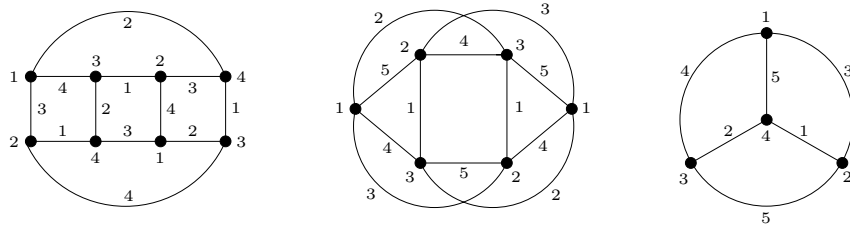


Figura 1.1: Exemplos de grafos simples munidos de colorações totais.

Formalmente, dados um grafo $G = (V(G), E(G))$, um conjunto de cores $\mathcal{C}$ e um conjunto de elementos $S \subseteq V(G) \cup E(G)$, definimos uma *coloração total parcial* de G como um mapeamento $\phi : S \rightarrow \mathcal{C}$ tal que para cada par de elementos $x, y \in S$, adjacentes ou incidentes, tem-se que $\phi(x) \neq \phi(y)$. Se $S = V(G) \cup E(G)$, então ϕ é uma *coloração total*. Se $|\mathcal{C}| = k$, então o mapeamento ϕ é dito uma *k-coloração total (parcial)*. Dado

$x \in S$, se $\phi(x) = c$ ou se existe um elemento $y \in S$ incidente ou adjacente a x tal que $\phi(y) = c$, dizemos que c *ocorre* em x ; caso contrário c *não ocorre ou falta* em x . É fácil ver que a restrição de ϕ às arestas de G é uma coloração de arestas (parcial). Do mesmo modo, a restrição de ϕ aos vértices de G é uma coloração de vértices (parcial).

Naturalmente, com a definição do problema da coloração total, a pergunta que vem à tona é: qual é o menor valor de k para o qual um grafo G admite uma k -coloração total? Em analogia à nomenclatura existente para coloração de vértices e coloração de arestas, este valor é denominado *número cromático total* e denotado por $\chi_T(G)$ (algumas referências usam $\chi''(G)$).

O problema da coloração total foi introduzido por Behzad [2] e Vizing [66, 67] em trabalhos independentes por volta de 1965. Dado um grafo simples G , eles questionaram se $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$. Eles conjecturaram que a resposta a esta pergunta seria afirmativa e esta conjectura é conhecida como *Conjectura da Coloração Total (TCC)*. Esta pergunta não foi respondida para grafos em geral, mas a resposta positiva foi verificada para várias classes de grafos [19, 22, 32, 43, 47, 53]. Considerando que $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$, se a resposta à pergunta de Behzad e Vizing for positiva, então o número cromático total de um grafo G está restrito a $\Delta(G) + 1$ ou $\Delta(G) + 2$. Numa clara analogia à coloração de arestas convencionou-se que se $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$, o grafo G é dito *tipo 1*; e se $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$, o grafo G é dito *tipo 2*.

Em 1989, Sánchez-Arroyo [60] provou que decidir se $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$ é NP-completo. Posteriormente, McDiarmid e Sánchez-Arroyo [55] mostraram que mesmo o problema de determinar o número cromático total para grafos bipartidos k -regulares, para cada $k \geq 3$ fixo é NP-difícil. Apesar destes resultados, a área tem apresentado um aquecimento desde o início da década de 90 com vários artigos publicados [16, 18, 21, 27, 28, 32, 41, 54, 57, 70, 71].

Esta tese aborda apenas grafos simples. Entretanto, Behzad [2] e Vizing [68], novamente em trabalhos independentes, generalizaram a TCC para multigrafos: $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + \mu + 1$, onde μ é a multiplicidade de G . Eles também conjecturaram que a resposta seria positiva.

1.2 Exemplos

Nesta seção exemplificamos o problema da coloração total através da construção de colorações totais ótimas para algumas classes de grafos clássicas. Inicialmente, trabalhamos com os *grafos completos*, K_n , que são grafos simples, conexos, com n vértices e $(n - 1)$ -regulares. Posteriormente, abordamos os *ciclos*, C_n , que são grafos simples, conexos e 2-regulares. Encerramos a seção definindo a família dos *snarks-flor* e determinando o seu número cromático total.

Em 1967, Behzad et al. [3] provaram que os grafos completos com um número par de vértices são tipo 2 e os grafos completos com um número ímpar de vértices são tipo 1. Exibimos a seguir um algoritmo para construir uma coloração total ótima para estes grafos e a denominamos *coloração padrão*.

LEMA 1.1 *Se G é um grafo completo, então a coloração padrão de G é obtida da seguinte maneira:*

- (i) *Faça $n := |V(G)| + (1 - |V(G)| \bmod 2)$.*
- (ii) *Atribua aos vértices de G as cores $1, \dots, |V(G)|$. Rotule os vértices de G com suas cores.*
- (iii) *Para cada aresta $xy \in E(G)$: se $x + y$ for par, então xy recebe a cor $(x + y)/2$; caso contrário, a aresta xy recebe a cor $((x + y + n)/2) \bmod n$.*

Demonstração: Como foi dito anteriormente, os grafos completos com número par de vértices são tipo 2 e aqueles com número ímpar de vértices são tipo 1. O algoritmo acima usa n cores para colorir G . Em (i) o valor de n é ajustado para $|V(G)|$ quando $|V(G)|$ é ímpar e $|V(G)| + 1$ quando $|V(G)|$ é par. A construção da coloração é essencialmente a mesma, independentemente da paridade de n . A coloração do grafo completo com k vértices, k par, pode ser vista como a coloração do grafo completo com $k + 1$ vértices, removendo o vértice colorido com a cor $k + 1$ após a construção da coloração.

Inicialmente, note que a atribuição de cores aos vértices de G em (ii) é, trivialmente, uma coloração de vértices. Precisamos então mostrar que a atribuição de cores às arestas de G é uma coloração de arestas e que esta atribuição não conflita com a coloração de vértices de (ii).

Em (iii), cada aresta recebe uma cor. Esta cor é obtida considerando-se a soma dos rótulos de seus extremos e a paridade desta soma. Considere um vértice colorido com a cor i . Existem $|V(G)| - 1$ arestas incidentes em i e seus vértices adjacentes possuem cores distintas em $\{1, \dots, |V(G)|\} \setminus \{i\}$. Portanto, a soma de i com a cor dos extremos de cada uma de suas arestas incidentes são valores diferentes entre si e pertencentes ao conjunto $\{1 + i, \dots, |V(G)| + i\}$. Ademais, cada vértice possui rótulo menor ou igual a $|V(G)|$ e $n = |V(G)| + (1 - |V(G)| \bmod 2)$. Portanto, podemos concluir que todos as cores obtidas em (iii) são distintas e distintas de i , que seria obtida apenas se houvesse uma aresta cujos extremos fossem ambos coloridos com a cor i . $\square$

COROLÁRIO 1.2 *Seja G um grafo completo com um número par de vértices e π uma coloração padrão para G . Então, para cada vértice colorido com a cor i par, falta a cor $i/2$; e para cada vértice colorido com a cor i ímpar, falta a cor $(|V(G)| + i + 1)/2$.*

Demonstração: O valor de n para $|V(G)|$ par é $|V(G)| + 1$. Em π não existe vértice colorido com esta cor. Portanto, em um vértice colorido com a cor i falta a cor que teria a aresta cujo outro extremo fosse n . $\square$

Um *ciclo*, C_n é um grafo simples, conexo, com n vértices e 2-regular. O Teorema 1.3 determina o número cromático total dos ciclos.

TEOREMA 1.3 (YAP [73], PAG.6) *Seja $G := C_n$. Então,*

$$\chi_T(G) = \begin{cases} 3 & \text{se } n \equiv 0 \bmod 3; \\ 4 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração: Seja $V(G) := \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Suponha inicialmente que $n \equiv 0 \bmod 3$. Seja π a atribuição de cores aos elementos de G definida a seguir:

$$\pi(v_i) := (-i) \bmod 3 \quad \forall v_i \in V(G); \quad (1.1)$$

$$\pi(v_i v_{i+1}) := (\pi(v_i) + 1) \bmod 3 \quad \forall v_i v_{i+1} \in E(G). \quad (1.2)$$

Inicialmente note que, por construção de π , as cores $0, 1, 2, \dots, 0, 1, 2$ são associadas nesta ordem aos elementos $v_0, v_0 v_1, v_1, \dots, v_{n-2} v_{n-1}, v_{n-1}, v_{n-1} v_0$ (lembre que o número de vértices é múltiplo de 3). Assim, por inspeção, concluimos que π é uma coloração total de G que usa 3 cores. Como $\Delta(G) = 2$, concluimos que esta coloração é ótima.

Vamos agora construir uma 4-coloração total para os casos em que $n \equiv 1 \pmod 3$ e $n \equiv 2 \pmod 3$. Inicialmente associe cores aos elementos de G usando π definida acima. Como nestes casos n não é múltiplo de 3, a associação de cores não é uma coloração total. Vamos, alterar π para que obter uma associação de cores que seja uma coloração total para G .

Suponha que $n \equiv 1 \pmod 3$. Por construção de π , temos que $\pi(v_0) = \pi(v_{n-1})$ e $\pi(v_0v_1) = \pi(v_{n-1}v_0)$. Assim, modificamos π da seguinte forma:

$$\pi(v_{n-2}) := 3; \quad \pi(v_{n-2}v_{n-1}) := 1; \quad \pi(v_{n-1}) := 2; \quad \text{e } \pi(v_{n-1}v_0) := 3.$$

Por simples inspeção é possível verificar que a coloração assim obtida é uma 4-coloração total para G . Suponha agora que $n \equiv 2 \pmod 3$. Por construção de π , temos que $\pi(v_0) = \pi(v_{n-1}v_0)$. Assim, para este caso, fazemos $\pi(v_{n-1}v_0) = 3$.

A seguir mostramos que não é possível construir uma 3-coloração total para o C_n quando n não é múltiplo de 3. Este resultado está demonstrado no Teorema 1.5, cuja demonstração faz uso do lema a seguir.

LEMA 1.4 *Seja P um caminho e sejam e_1 e e_2 dois elementos distintos de P , adjacentes ou incidentes, coloridos com duas cores distintas. Então, existe uma única 3-coloração total que preserva as cores de e_1 e e_2 .*

Demonstração: A demonstração é por indução no tamanho de P , medido pelo seu número de arestas. Se $|P| = 1$, então P é isomorfo ao K_2 e basta associar ao (único) elemento que ainda não foi colorido a (única) cor que não foi utilizada.

Suponha agora que $|P| > 1$. Considere dois casos: quando e_1, e_2 são arestas; e quando pelo menos um de e_1, e_2 é um vértice. Seja $P := v_0, v_0v_1, \dots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}$.

Se e_1 e e_2 são arestas, existe um vértice $v_i \in V(P)$ tal que e_1 e e_2 incidem em v_i . Então, como e_1 e e_2 estão coloridas, a cor de v_i tem que ser aquela (única) que ainda não foi utilizada. Ajuste a notação para que $e_1 = v_{i-1}v_i$. Sejam $P_1 := v_0, \dots, v_i$ e $P_2 := v_i, \dots, v_{n-1}$. Em cada P_j , $j = 1, 2$, os elementos e_j e v_i estão coloridos. Por hipótese de indução, existe uma única 3-coloração total π_j de P_j , $j = 1, 2$ que preserva as cores de e_j e v_i . Como a cor de v_i bem como as colorações π_1 e π_2 são unicamente determinadas e, além disso, e_1 e e_2 tem cores fixas, concluímos que a coloração $\pi := \pi_1 \cup \pi_2$ é uma 3-coloração total de P , unicamente determinada e com as propriedades requeridas.

Considere agora o caso em que pelo menos um de e_1, e_2 é um vértice. Ajuste a notação para que $e_1 \notin \{v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}\}$ e $e_2 \notin \{v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}\}$. Seja P' o subgrafo de P obtido pela remoção de $v_{n-2}v_{n-1}$ e v_{n-1} . Pela hipótese de indução, existe uma única 3-coloração total π de P' que preserva as cores de e_1 e e_2 .

Vamos agora mostrar que a expansão de π para P é única e preserva as propriedades requeridas. A aresta $v_{n-2}v_{n-1}$ incide em v_{n-2} e é adjacente a $v_{n-3}v_{n-2}$, ambos coloridos com cores distintas. Portanto, existe apenas uma cor disponível para atribuir a $v_{n-2}v_{n-1}$ que é $\pi(v_{n-3})$. O vértice v_{n-1} é adjacente ao vértice v_{n-2} e possui como aresta incidente a aresta $v_{n-2}v_{n-1}$. Portanto, a única cor disponível para atribuir a este vértice é a cor $\pi(v_{n-3}v_{n-2})$. Assim, a coloração π foi expandida para uma 3-coloração total de P de forma única preservando as cores de e_1 e e_2 . $\square$

TEOREMA 1.5 *Seja $G := C_n$. Então, existe uma 3-coloração total para G se e somente se n é múltiplo de 3.*

Demonstração: Em (1.1) e (1.2) construímos uma 3-coloração total para G quando n é múltiplo de 3. Portanto, para completar a demonstração precisamos mostrar que se n não é múltiplo de 3 não existe uma 3-coloração total para G .

Seja $V(G) := \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Seja P o caminho obtido a partir de G pela remoção da aresta $v_{n-1}v_0$ e seja π uma 3-coloração total para P . Sem perda de generalidade, assumamos que $\pi(v_0) := 0$, $\pi(v_0v_1) := 1$ e $\pi(v_1) := 2$. Pelo Lema 1.4, a coloração π é unicamente determinada a partir da coloração de v_0 , v_0v_1 e v_1 . Assim, por contagem, concluímos que

$$\pi(v_{n-2}v_{n-1}) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \equiv 1 \pmod{3}; \\ 1 & \text{se } n \equiv 2 \pmod{3}; \end{cases}$$

e

$$\pi(v_{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \equiv 1 \pmod{3}; \\ 2 & \text{se } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Em cada caso concluímos que não existe uma 3-coloração total para G pois quando $n \equiv 1 \pmod{3}$ tem-se que $\pi(v_0) = \pi(v_{n-1})$; e quando $n \equiv 2 \pmod{3}$ não há cor disponível para associar à aresta $v_{n-1}v_0$. $\square$

O teorema anterior associado à construção da 4-coloração total para o C_n nos casos em que $n \equiv 1 \pmod{3}$ e $n \equiv 2 \pmod{3}$ provam que o C_n é tipo 2 nestes casos. $\square$

Um *snark* é um grafo 3-regular, com índice cromático 4, com cintura pelo menos 5 e ciclicamente 4-aresta conexo, onde ciclicamente 4-aresta conexo significa que é necessário remover pelo menos 4 arestas para que cada componente conexa possua pelo menos um ciclo. O grafo de Petersen, exibido na Figura 1.2, foi o primeiro snark conhecido e permanece como o mais importante e também o menor.

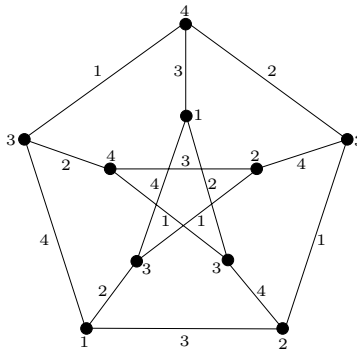


Figura 1.2: Grafo de Petersen munido de uma 4-coloração total. Um grafo tipo 1.

Estes grafos foram estudados inicialmente por Tait [64], que provou a seguinte equivalência:

TEOREMA 1.6 (TAIT 1880) *As faces de um grafo planar 3-regular G podem ser coloridas com 4 cores se e somente se as arestas de G podem ser coloridas com 3 cores.*

Esta equivalência justifica a importância histórica dos snarks e a busca por um grafo planar 3-regular que não fosse 3-aresta colorável. Rapidamente constatou-se a dificuldade em achar grafos que satisfizessem estas propriedades. O grafo de Petersen permaneceu como o único snark conhecido até 1946 quando os snarks de Blanusa [5] foram publicados. O próximo snark, com 210 vértices, foi descoberto por Tutte que, em conjunto com alguns amigos, o publicou sob o codinome B. Descartes [33]. Tutte conjecturou que todos os snarks possuíam o grafo de Petersen como um menor. A demonstração desta conjectura foi anunciada por N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour e R. Thomas [58]. O próximo snark foi descoberto por Szekeres [63]. Em 1975, Isaacs [49] descobriu as duas primeiras famílias infinitas de snarks, que incluíam todos os snarks conhecidos até então, e descobriu um novo snark, chamado de *double star*, não incluído nestas famílias. Em

1976, M. Gardner cunhou o nome snark em seu famoso artigo [38], justificando a sua escolha pela dificuldade em se encontrar tais grafos.

Encerramos esta seção determinando o número cromático total da família infinita dos *snarks* *flor*, uma das famílias descobertas por Isaacs. Sejam $F_3, F_5, \dots, F_{2i+1}$, $i \geq 1$ os membros desta família. O primeiro grafo da família, F_3 , é obtido pela substituição de um vértice do grafo de Petersen por um K_3 . A Figura 1.3 exibe o grafo de Petersen em um desenho apropriado.

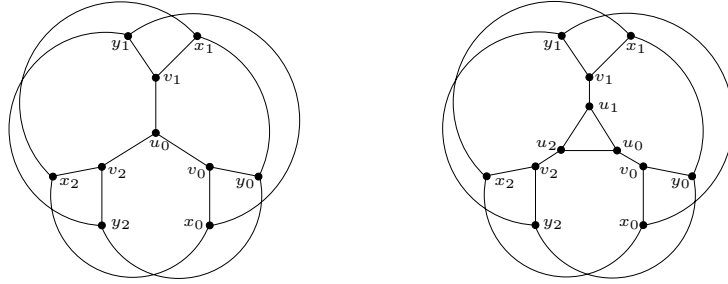


Figura 1.3: Grafo de Petersen em um desenho apropriado e o grafo F_3 .

Formalmente, seja P o grafo de Petersen com

$$\begin{aligned} V(P) &:= \{u_0, v_0, v_1, v_2, x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2\} \text{ e} \\ E(P) &:= \{u_0v_0, u_0v_1, u_0v_2, v_0x_0, v_0y_0, v_1x_1, v_1y_1, v_2x_2, v_2y_2, x_0y_1, y_0x_1, x_1x_2, \\ &\quad y_1y_2, x_2x_0, y_2y_0\}. \end{aligned}$$

O grafo F_3 é obtido, a partir de P , como estabelecido a seguir e também está exibido na Figura 1.3:

$$\begin{aligned} V(F_3) &:= V(P) \cup \{u_1, u_2\}; \text{ e} \\ E(F_3) &:= (E(P) \setminus \{u_0v_1, u_0v_2\}) \cup \{u_0u_1, u_1u_2, u_2u_0, u_1v_1, u_2v_2\}. \end{aligned}$$

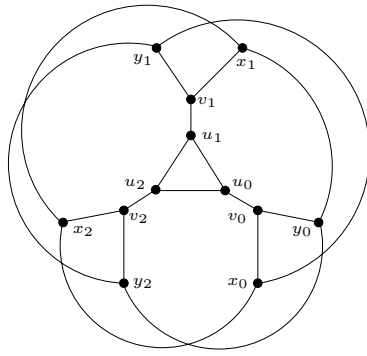
Os demais membros da família podem ser construídos recursivamente. Para isso, vamos definir um grafo auxiliar. Chamamos de *grafo de ligação*, L_i , i ímpar e $i \geq 5$, o grafo com conjunto de vértices

$$\begin{aligned} V(L_i) &:= \{u_{i-2}, u_{i-1}, v_{i-2}, v_{i-1}, x_{i-2}, y_{i-2}, x_{i-1}, y_{i-1}\}, \text{ e conjunto de arestas} \\ E(L_i) &:= \{u_{i-2}u_{i-1}, u_{i-2}v_{i-2}, u_{i-1}v_{i-1}, v_{i-2}x_{i-2}, v_{i-2}y_{i-2}, v_{i-1}x_{i-1}, v_{i-1}y_{i-1}, \\ &\quad x_{i-2}x_{i-1}, y_{i-2}y_{i-1}\}. \end{aligned}$$

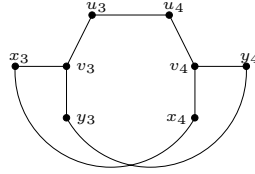
O grafo F_i , i ímpar e $i \geq 5$, é obtido a partir dos grafos F_{i-2} e L_i tomando

$$\begin{aligned} V(F_i) &:= V(F_{i-2}) \cup V(L_i); \text{ e} \\ E(F_i) &:= (E(F_{i-2}) \setminus E_{i-2}^{out}) \cup E_i^{in} \cup E(L_i), \text{ onde} \\ E_{i-2}^{out} &:= \{u_{i-3}u_0, x_{i-3}x_0, y_{i-3}y_0\}; \text{ e} \\ E_i^{in} &:= \{u_{i-3}u_{i-2}, x_{i-3}x_{i-2}, y_{i-3}y_{i-2}, u_{i-1}u_0, x_{i-1}x_0, y_{i-1}y_0\}. \end{aligned}$$

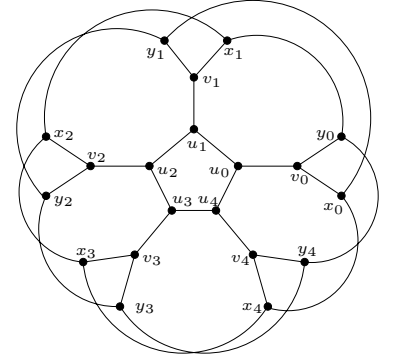
As Figuras 1.4(a), 1.4(b), 1.4(c) exibem F_3 , L_5 and F_5 . O próximo teorema mostra que os snarks flor são tipo 1.



(a) Grafo F_3 .



(b) Grafo de ligação L_5



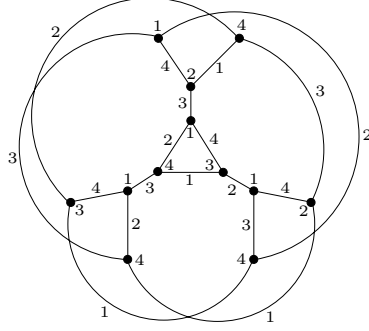
(c) Grafo F_5 obtido a partir do F_3 e L_5

Figura 1.4: Construção do grafo F_5 a partir do grafo F_3 .

TEOREMA 1.7 *Para cada snark flor F_i , i ímpar e $i \geq 3$, existe uma 4-coloração total em que todas as arestas de E_i^{out} têm a mesma cor.*

Demonstração: A prova é indutiva e baseada no procedimento recursivo acima. A Figura 1.5 exhibe uma 4-coloração total do F_3 , o primeiro grafo da família.

Note que as arestas de E_3^{out} têm a cor 1. Seja π uma 4-coloração total para L_i definida como:

Figura 1.5: Coloração total do grafo F_3 com 4 cores.

$$\begin{aligned}
\pi(u_{i-2}) &= 3; & \pi(u_{i-1}) &= 4; & \pi(v_{i-2}) &= 1; & \pi(v_{i-1}) &= 1; \\
\pi(x_{i-2}) &= 4; & \pi(y_{i-2}) &= 2; & \pi(x_{i-1}) &= 2; & \pi(y_{i-1}) &= 3; \\
\pi(u_{i-2}u_{i-1}) &= 2; & \pi(x_{i-2}x_{i-1}) &= 3; & \pi(y_{i-2}y_{i-1}) &= 4; \\
\pi(u_{i-2}v_{i-2}) &= 4; & \pi(v_{i-2}x_{i-2}) &= 2; & \pi(v_{i-2}y_{i-2}) &= 3; \\
\pi(u_{i-1}v_{i-1}) &= 3; & \pi(v_{i-1}x_{i-1}) &= 4; & \pi(v_{i-1}y_{i-1}) &= 2.
\end{aligned}$$

Sabemos que F_i pode ser construído recursivamente a partir de F_{i-2} e L_i . Pela hipótese de indução F_{i-2} possui uma 4-coloração total π_{i-2} onde as arestas de E_{i-2}^{out} possuem a cor 1. Construímos π_i associando a cor 1 a todas as arestas de E_i^{in} , que é um conjunto de arestas independentes, e associando a um elemento de $V(F_i) \cup E(F_i) \setminus E_i^{in}$ a cor de seu elemento equivalente em F_{i-2} ou L_i .

Agora vamos mostrar que π_i é uma 4-coloração total para F_i . Inicialmente, note que a coloração do subgrafo $G[V(F_i) \cap V(F_{i-2})]$ é uma 4-coloração total porque π_{i-2} é uma 4-coloração total para F_{i-2} . O mesmo ocorre para a coloração de $G[V(F_i) \cap V(L_i)]$ que advém de π . Além disso, a coloração das arestas de E_i^{in} não introduz conflito porque as arestas de E_{i-2}^{out} possuem a cor 1 pela hipótese de indução e em L_i apenas os vértices v_{i-2} e v_{i-1} possuem a cor 1 e estes não são extremos de nenhuma aresta de E_i^{in} .

Para completar a prova precisamos mostrar que os extremos das arestas em E_i^{in} possuem cores distintas. Seja S o conjunto destes vértices. As cores dos vértices de $S \cap V(L_i)$ são conhecidas porque a coloração π é fixa. Sabemos também as cores de u_0, x_0, y_0 porque pertencem à base. Assim, resta-nos conhecer as cores dos vértices u_{i-3}, x_{i-3} e y_{i-3} . Para isto devemos observar que para $i = 5$ estes vértices são u_2, x_2 e y_2 , pertencentes à base,

e para $i \geq 7$ estes vértices pertencem L_{i-2} , cuja coloração fixa é π . Portanto, concluímos que:

$$\begin{aligned} \pi_i(u_{i-3}) &= 4 & \text{e } \pi_i(u_{i-2}) &= 3; \\ \pi_i(x_{i-3}) &= 3 \text{ ou } 2 & \text{e } \pi_i(x_{i-2}) &= 4; \\ \pi_i(y_{i-3}) &= 4 \text{ ou } 3 & \text{e } \pi_i(y_{i-2}) &= 2; \\ \pi_i(u_0) &= 3 & \text{e } \pi_i(u_{i-1}) &= 4; \\ \pi_i(x_0) &= 4 & \text{e } \pi_i(x_{i-1}) &= 2; \\ \pi_i(y_0) &= 2 & \text{e } \pi_i(y_{i-1}) &= 3; \end{aligned}$$

e o resultado segue. □

1.3 Organização da tese

Esta tese consiste em seis capítulos.

O Capítulo 2 aborda as potências de ciclo, C_n^k . Inicialmente, é determinado o número cromático total do C_n^2 . Posteriormente, é verificada a TCC para as potências de ciclo com um número par de vértices e para alguns casos particulares independentes da paridade de n : C_n^3 ; C_n^4 ; C_n^k , $n \equiv 0 \pmod{k+1}$ e $n \equiv k \pmod{k+1}$. O número cromático total foi determinado para mais alguns casos particulares e foi proposta uma conjectura para o número cromático total das potências de ciclo em geral. Finalizamos o capítulo determinando o número cromático das potências de ciclo.

O Capítulo 3 determina o número cromático total de algumas subclasses de grafos bipartidos. A saber, das grades, de alguns casos de grades parciais, das quase-escadas e dos cubos k -dimensionais.

O Capítulo 4 estuda o número cromático total dos grafos 3-cliques, que são grafos obtidos pela união de três grafos completos e possuem exatamente três cliques maximais. Este é o nosso atual foco de trabalho e o capítulo exhibe os resultados formalizados até o momento.

O Capítulo 5 trata do problema de particionar os vértices de um grafo em quatro conjuntos não vazios sujeitos a certas restrições. Como o problema não está relacionado com o tema principal desta tese ele será introduzido apenas no capítulo em que aparece. O trabalho deste capítulo nasceu da interação com a Dra. Simone Dantas, pesquisadora

colaboradora voluntária no Instituto de Computação da UNICAMP, de dezembro/2003 a janeiro/2006, durante o seu pós-doutoramento.

Finalmente, o Capítulo 6 encerra a tese com algumas conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Potências de ciclo

Neste capítulo, estudamos o número cromático total das potências de ciclo. Uma *potência de ciclo*, C_n^k , é definida como um grafo (eventualmente não simples) com $V(C_n^k) := \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ e $E(C_n^k) := E^1 \cup \dots \cup E^k$, onde $E^i := \{v_j v_{(j+i) \bmod n} : 0 \leq j \leq n-1\}$.

Nesta tese, abordamos apenas grafos simples. Neste contexto, para $k \geq \lfloor n/2 \rfloor$, o grafo C_n^k é isomorfo ao K_n , cujo número cromático total é conhecido [3]. Além disso, se $k = 1$, o grafo C_n^k é isomorfo ao C_n , também com número cromático total conhecido* [73]. Assim, neste capítulo abordamos as potências de ciclo com $1 < k < \lfloor n/2 \rfloor$.

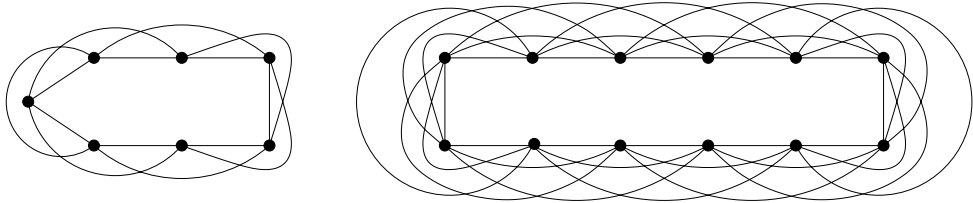


Figura 2.1: Os grafos C_7^2 e C_{12}^3 , exemplos de potências de ciclo.

Meidanis [56] mostrou que as potências de ciclo com um número par de vértices são classe 1 e as potências de ciclo com um número ímpar de vértices são classe 2. Determinar o número cromático total desta classe mostrou-se um problema surpreendentemente intrincado. O fato de que a classe depende de dois parâmetros, n e k , que, embora interrelacionados, crescem arbitrariamente, parece ser uma das características que trazem

*Resultado demonstrado no Teorema 1.3

dificuldades. A classe possui grafos com poucas arestas e grau máximo baixo, quando o valor de k é pequeno em relação ao valor de n , até grafos muito densos como os completos. Muitos dos resultados conhecidos em coloração total tratam grafos com grau máximo alto ou com grau máximo baixo separadamente [18, 22, 35, 44, 53, 59, 65, 75, 74].

Inicialmente determinamos o número cromático total para o C_n^2 : a menos do C_7^2 que é tipo 2, todos os outros grafos nesta classe são tipo 1. Fixar o valor de k permite que as propriedades recursivas da classe sejam melhor aproveitadas. Este resultado foi apresentado no XXV CNMAC, publicado na revista TEMA [13] e está exposto na Seção 2.1.

A técnica utilizada para determinar o número cromático total do C_n^k não pôde ser generalizada para outros valores de k . O trabalho feito a seguir aborda a TCC, demonstrando que as potências de ciclo com um número par de vértices a verificam. Para isto, inicialmente é construída uma $(k + 1 + (n \bmod (k + 1)))$ -coloração total para o subgrafo gerado por $\cup_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} E^{2i}$, denotado por G_P . A seguir, as mesmas cores utilizadas no subgrafo G_P são usadas para colorir algumas arestas de $E(G) \setminus E(G_P)$. A demonstração é finalizada mostrando-se que é possível colorir as arestas que ainda não receberam nenhuma cor utilizando-se exatamente o número de cores disponíveis, isto é, as cores que ainda não foram usadas. Para o caso em que $n \equiv 0 \bmod (k + 1)$, a TCC foi verificada independentemente da paridade de n . Ainda neste trabalho, o número cromático total do C_n^k foi determinado para dois casos particulares: quando $n \equiv 0 \bmod (\Delta(C_n^k) + 1)$ e quando $n \equiv 0 \bmod (k + 1)$, n, k pares. Além disso, foi proposta uma conjectura para o número cromático total das potências de ciclo em geral. Estes resultados, expostos na Seção 2.2, foram apresentados no LACGA'04, *Latin-American Conference on Combinatorics Graphs Applications - 2004* e seu resumo estendido publicado no ENDM dedicado à conferência [14]. A versão completa deste trabalho está submetida para publicação em um periódico.

Encerramos este capítulo com a Seção 2.3, onde exibimos alguns exemplos de potências de ciclo que são tipo 1, bem como demonstramos que os grafos C_n^k , com $n \equiv k \bmod (k + 1)$, C_n^3 e C_n^4 verificam a TCC. Nesta seção, também determinamos o número cromático das potências de ciclo e utilizamos este resultado para mostrar que o caso em que $n \equiv 0 \bmod (\Delta(C_n^k) + 1)$ é um corolário de um resultado de Figueiredo et al. em [32].

2.1 Número cromático total das potências de ciclo com $k = 2$

Coloração total do $C_n^{2\ddagger}$

C. N. Campos

C. P. de Mello

Resumo. O número cromático total é o menor número de cores necessárias para colorir as arestas e os vértices de um grafo de maneira que não haja elementos adjacentes ou incidentes que recebam a mesma cor. Neste artigo mostramos que o número cromático total do C_n^2 , $n \geq 6$ é $\Delta + 1$ se $n \neq 7$ e $\Delta + 2$ se $n = 7$.

2.1.1 Introdução

Seja $G := (V(G), E(G))$ um grafo simples com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$. O grau de um vértice v , $d(v)$, é o número de arestas incidentes neste vértice e $\Delta(G)$ (ou simplesmente Δ quando estiver claro no contexto) denota o grau máximo de G , isto é, $\Delta := \max_{v \in V(G)} \{d(v)\}$. Um *elemento* de G é um vértice ou uma aresta de G .

Seja $S := V(G) \cup E(G)$. Uma *coloração total* de G é um mapeamento $\phi : S \rightarrow \mathcal{C}$, tal que para todo $x, y \in S$ onde x e y são dois elementos adjacentes ou incidentes, tem-se que $\phi(x) \neq \phi(y)$. Quando um mapeamento não satisfaz esta condição, dizemos que há *conflito*. Note que, se $S = V(G)$, temos uma *coloração de vértices* de G e, se $S = E(G)$, temos uma *coloração de arestas* de G .

O conjunto $\mathcal{C}$ é denominado *conjunto de cores*. Uma coloração total para a qual $|\mathcal{C}| = k$ é denominada *k-coloração total*. Seja $c \in \mathcal{C}$. O conjunto $\{x \in V(G) \cup E(G) : \phi(x) = c\}$ é denominado uma *classe de coloração* de G . Assim, ϕ possui k classes de coloração. Dizemos também que ϕ *usa* k cores. Em um elemento x de G *falta* a cor c quando $\phi(x) \neq c$ e nenhum elemento incidente em ou adjacente a x possui a cor c .

O *número cromático total* de G , $\chi_T(G)$, é o menor inteiro k para o qual G admite uma k -coloração total. É fácil mostrar que $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$. Sánchez-Arroyo [60] provou

[†]Trabalho apresentado no XXV CNMAC [13].

que decidir se $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$ para um dado grafo G é um problema **NP**-completo. McDiarmid e Sánchez-Arroyo [55] provaram que mesmo o problema de determinar o número cromático total de um grafo bipartido k -regular é **NP**-difícil para cada k fixo ≥ 3 .

Behzad [2] e Vizing [66, 67] estabeleceram, em trabalhos independentes, a *conjectura da coloração total (TCC)*, que diz que para qualquer grafo simples G , $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$. Se $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$, G é dito *tipo 1* e se $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$, é dito *tipo 2*.

Um grafo é uma *potência de ciclo*, C_n^k , se $V := \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ e $E := E^1 \cup E^2 \cup \dots \cup E^k$, onde

$$E^i := \{(v_j, v_{(j+i) \bmod n}) : 0 \leq j \leq n-1\}.$$

Uma aresta $e \in E^i$ é dita uma aresta de *alcance* i . Neste texto trabalhamos com $k = 2$ (C_n^2). A Figura 2.2 exibe o C_6^2 , um exemplo de grafo nesta família.

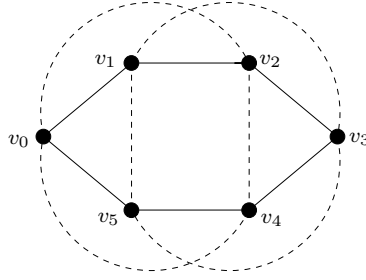


Figura 2.2: Grafo C_6^2 pertencente à família dos C_n^2 . As arestas cheias são as arestas de E^1 e as arestas tracejadas de E^2 .

Behzad et al[‡] [3] provaram que os grafos completos de ordem ímpar são tipo 1 e os de ordem par, tipo 2. Kostochka [52] provou que multigrafos G com $\Delta(G) = 4$ satisfazem a TCC. Zhang et al [76] provaram que os grafos de Halin com $\Delta = 4$ são tipo 1. Resultados mais recentes em coloração total podem ser encontrados em [1, 17, 23, 32, 45, 46, 50, 51, 69], entre outros. Este trabalho determina o número cromático total do C_n^2 , $n \geq 6$, que são grafos simples, não isomorfos ao K_n e 4-regulares. A Seção 2.1.2 determina o número cromático total de C_n^2 , com $n \geq 6$ e $n \neq 7$, mostrando que estes são tipo 1, e a Seção 2.1.3 determina o número cromático total do C_7^2 , que é tipo 2.

[‡]Leia-se: “Behzad et al.”.

2.1.2 Coloração total do C_n^2 , $n \neq 7$

Nesta seção, demonstramos que os grafos C_n^2 , com $n \geq 6$ e $n \neq 7$ são tipo 1. Para isso, exibiremos uma $(\Delta + 1)$ -coloração total para os grafos desta classe.

Sejam G_1 e G_2 dois grafos nesta classe. Seja $\{v_0^i, \dots, v_{n_i-1}^i\}$ o conjunto de vértices de G_i , para $i = 1, 2$. Sejam $v_i^1 \in V(G_1)$ e $v_j^2 \in V(G_2)$ dois vértices quaisquer. O grafo G , resultante da *colagem* de G_1 e G_2 , é definido como:

$$V(G) := (V(G_1) \cup V(G_2)) \setminus \{v_i^1, v_j^2\} \quad (2.1)$$

$$E(G) := (E(G_1) \cup E(G_2) \cup E_{in}) \setminus E_{out} \quad (2.2)$$

onde

$$E_{in} := \{(v_{i-2}^1, v_{j+1}^2), (v_{i-1}^1, v_{j+2}^2), (v_{i-1}^1, v_{j+1}^2), \\ (v_{i+2}^1, v_{j-1}^2), (v_{i+1}^1, v_{j-2}^2), (v_{i+1}^1, v_{j-1}^2)\}$$

e

$$E_{out} := \{(v_{i-2}^1, v_i^1), (v_{i-1}^1, v_i^1), (v_i^1, v_{i+1}^1), (v_i^1, v_{i+2}^1), (v_{i-1}^1, v_{i+1}^1), \\ (v_{j-2}^2, v_j^2), (v_{j-1}^2, v_j^2), (v_j^2, v_{j+1}^2), (v_j^2, v_{j+2}^2), (v_{j-1}^2, v_{j+1}^2)\}.$$

Os grafos G_1 e G_2 são ditos *geradores* e os vértices v_i^1 e v_j^2 são ditos *pivôs* da operação de colagem. Note que o grafo G possui $n_1 + n_2 - 2$ vértices. A Figura 2.3 ilustra a operação de colagem de G_1 e G_2 .

Para facilitar a notação consideraremos que as operações de colagem são feitas tendo como pivôs os vértices v_0^1 e v_0^2 . Ademais, renomearemos os vértices de G da seguinte forma:

$$v_l := v_{l+1}^1 \quad \text{para } l := 0, \dots, n_1 - 2 \quad (2.3)$$

$$v_{l+n_1-1} := v_{l+1}^2 \quad \text{para } l := 0, \dots, n_2 - 2 \quad (2.4)$$

Desta forma, temos que o conjunto de vértices de G é dado por $\{v_0, \dots, v_{n_1+n_2-3}\}$. A Figura 2.4 mostra como ficam os vértices do grafo G após a renomeação.

O lema a seguir estabelece que o grafo obtido pela operação de colagem a partir de dois grafos pertencentes à classe dos C_n^2 é um grafo pertencente a esta classe.

LEMA 2.1 *O grafo G obtido pela colagem de dois grafos, G_1 e G_2 , pertencentes à classe dos C_n^2 , também é um grafo pertencente a esta classe.*

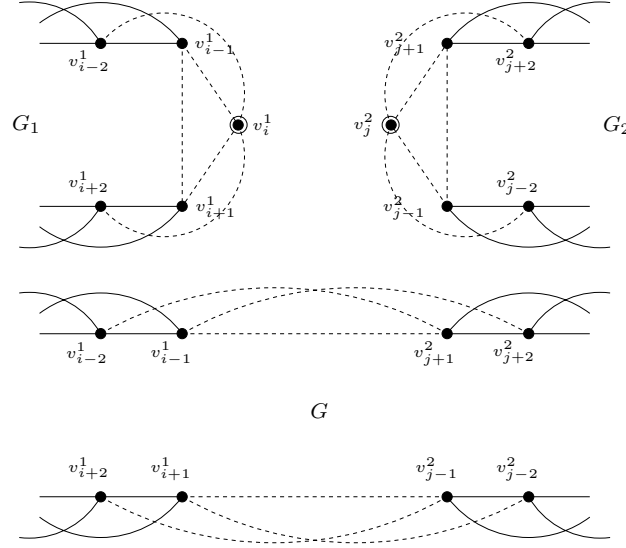


Figura 2.3: Ilustração da operação de colagem: as arestas tracejadas na primeira figura são removidas (E_{out}) juntamente com os vértices marcados e as arestas tracejadas na segunda figura são introduzidas (E_{in}).

Demonstração: Uma simples verificação mostra que o grafo G , obtido pela operação de colagem de G_1 e G_2 , é 4-regular. Ademais, é possível particionar as arestas de G em E^1 e E^2 conforme a definição de potências de ciclo. Uma forma simples de verificar isto é utilizar a renomeação das arestas definida (2.3) e (2.4)[§], observando que as arestas que não foram removidas permanecem com seus alcances inalterados e as arestas acrescidas possuem alcance 1 ou 2. Finalmente, por contagem, concluímos que $|E^1| = |E^2| = |V(G_1)| + |V(G_2)| - 2 = |V(G)|$, concluindo a demonstração. $\square$

O seguinte lema define uma maneira recursiva de construir potências de ciclo utilizando a operação de colagem.

LEMA 2.2 *O grafo C_n^2 pode ser gerado a partir da colagem do C_6^2 e do C_{n-4}^2 para todo $n \geq 10$.*

Demonstração: Pelo Lema 2.1, sabemos que o grafo gerado pela colagem de duas potências de ciclo é uma potência de ciclo. Além disso, a colagem do C_{n-4}^2 com o C_6^2 possui $n - 4 + 6 - 2 = n$ vértices.

[§]Leia-se: “definida em (2.3) e (2.4)”.

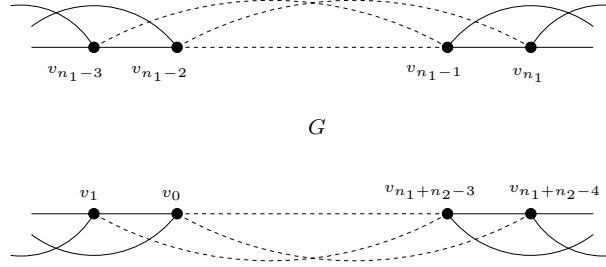


Figura 2.4: Grafo G após a renomeação dos seus vértices especificada em (2.3) e (2.4).

Por outro lado, as potências de ciclo que estamos considerando possuem pelo menos 6 vértices, assim, temos que $n - 4 \geq 6$, logo $n \geq 10$. $\square$

Denominaremos os grafos C_6^2 , C_8^2 , C_9^2 e C_{11}^2 *grafos básicos*. O Teorema 2.3 mostra que todo C_n^2 , $n \geq 6$ e $n \neq 7$ é tipo 1. A demonstração é indutiva e utiliza a colagem do C_6^2 e do C_{n-4}^2 , ambos com uma $(\Delta + 1)$ -coloração total. Os grafos básicos formam a base desta indução. A inclusão do C_{11}^2 na base vem do fato de que teríamos que construí-lo usando o C_7^2 , mas este é o único grafo que não é tipo 1. Uma $(\Delta + 1)$ -coloração total para cada grafo básico é exibida nas Figuras 2.5(a) a 2.5(d).

Seja π uma coloração total do C_n^2 . Um vértice $v_i \in V(C_n^2)$ é dito *especial* quando

$$\pi(v_i) = \pi((v_{(i-1) \bmod n}, v_{(i+1) \bmod n})).$$

O vértice v_i e a aresta $(v_{(i-1) \bmod n}, v_{(i+1) \bmod n})$ são ditos *equivalentes*. Note que a propriedade de um vértice ser especial está relacionada com uma coloração total. Uma coloração total em que todos os vértices são especiais é denominada *coloração total especial*. As colorações totais exibidas nas Figuras 2.5(a), 2.5(b), 2.5(c) e 2.5(d) são especiais.

TEOREMA 2.3 *Todo C_n^2 com $n \geq 6$ e $n \neq 7$ é tipo 1. Ademais, existe uma $(\Delta + 1)$ -coloração total especial para todo grafo nesta classe.*

Demonstração: As Figuras 2.5(a), 2.5(b), 2.5(c) e 2.5(d) exibem uma $(\Delta + 1)$ -coloração total especial para os grafos básicos. Isto é suficiente para mostrar que estes grafos são tipo 1.

A demonstração de que o C_n^2 , $n \geq 10$ e $n \neq 11$, é tipo 1 é indutiva. Suporemos que o grafo C_{n-4}^2 possui uma $(\Delta + 1)$ -coloração total especial. Faremos a colagem do C_6^2

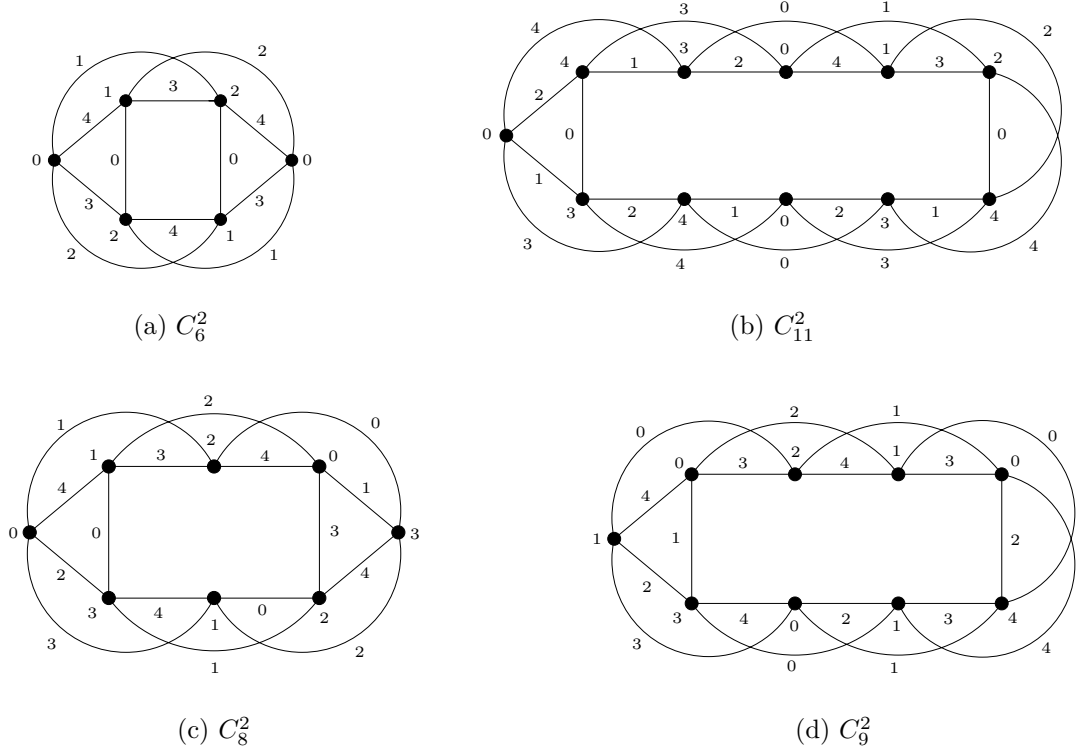


Figura 2.5: $(\Delta + 1)$ -coloração total dos grafos básicos.

com o C_{n-4}^2 , onde o C_6^2 corresponde ao grafo G_1 e o C_{n-4}^2 ao grafo G_2 na Figura 2.3, e mostraremos como estender as colorações originais para uma 5-coloração total especial do C_n^2 .

Seja π_1 a coloração do C_6^2 exibida na Figura 2.5(a). Ajuste a notação para que $\pi_1(v_0) = 0$, $\pi_1(v_1) = 1$ e $\pi_1((v_0, v_1)) = 3$. Seja $\pi_2 : V(C_{n-4}^2) \cup E(C_{n-4}^2) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ uma $(\Delta + 1)$ -coloração total especial para o grafo C_{n-4}^2 . Suponha, sem perda de generalidade, que $\pi_2(v_0) = 0$. Por hipótese, este vértice é especial, então $\pi_2(v_1, v_{n-5}) = 0$. Como o grafo é 4-regular, as cores 1, 2, 3 e 4 incidem em v_0 . Ajuste a notação para que estas cores estejam distribuídas da seguinte forma:

$$\pi_2((v_0, v_1)) = 2, \quad \pi_2((v_0, v_2)) = 4, \quad \pi_2((v_{n-6}, v_0)) = 3, \quad \pi_2((v_{n-5}, v_0)) = 1$$

Como todos os vértices são especiais esta distribuição de cores implica que $\pi_2(v_1) = 4$, $\pi_2(v_{n-5}) = 3$, $\pi_2(v_2) \in \{1, 3\}$ e $\pi_2(v_{n-6}) \in \{2, 4\}$.

Gerar o C_n^2 a partir do C_6^2 e C_{n-4}^2 implica em remover as arestas do conjunto E_{out} em (2.2) juntamente com os pivôs e *colar* os dois grafos geradores sem estas arestas, adicionando as seis novas arestas do conjunto E_{in} de (2.2). Sendo assim, exceto pelos elementos em E_{in} , cada elemento do C_n^2 corresponde a algum elemento (colorido) de um dos seus geradores.

Seja x um elemento de C_n^2 que não pertence a E_{in} . Vamos considerar a cor de x em C_n^2 como sendo a cor que o elemento correspondente a x possui no grafo gerador. Desta forma, os únicos elementos do C_n^2 sem cores atribuídas são as seis arestas de E_{in} , que receberão uma nova cor. Formalmente, definimos π , uma atribuição de cores para o C_n^2 , da seguinte forma:

$$\pi(v_i) := \pi_1(v_{i+1}) \quad \text{para } i := 0, \dots, 4 \quad (2.5)$$

$$\pi(v_{i+5}) := \pi_2(v_{i+1}) \quad \text{para } i := 0, \dots, n-6 \quad (2.6)$$

$$\pi((v_i, v_{i+1})) := \pi_1((v_{i+1}, v_{i+2})) \quad \text{para } i := 0, 1, 2, 3 \quad (2.7)$$

$$\pi((v_{i+5}, v_{i+6})) := \pi_2((v_{i+1}, v_{i+2})) \quad \text{para } i := 0, \dots, n-7 \quad (2.8)$$

$$\pi((v_i, v_{i+2})) := \pi_1(v_{i+1}, v_{i+3})) \quad \text{para } i := 0, 1, 2 \quad (2.9)$$

$$\pi((v_{i+5}, v_{i+7})) := \pi_2(v_{i+1}, v_{i+3})) \quad \text{para } i := 0, \dots, n-8 \quad (2.10)$$

As próximas seis arestas são as arestas de E_{in}

$$\pi((v_3, v_5)) := 2$$

$$\pi((v_4, v_5)) := 0$$

$$\pi((v_4, v_6)) := 4$$

$$\pi((v_{n-2}, v_0)) := 3$$

$$\pi((v_{n-1}, v_0)) := 0$$

$$\pi((v_{n-1}, v_1)) := 1$$

Vamos mostrar que π é uma $(\Delta + 1)$ -coloração total para o C_n^2 . As colorações π_1 e π_2 são $(\Delta + 1)$ -colorações totais para os grafos C_6^2 e C_{n-4}^2 , respectivamente. Os vértices e arestas correspondentes aos vértices e arestas do C_6^2 possuem as mesmas cores de π_1 . Concluimos que $\pi \upharpoonright_{\pi_1}$, isto é (2.5), (2.7) e (2.9), não possui conflito. Analogamente, concluimos que não há conflito em $\pi \upharpoonright_{\pi_2}$.

Por construção de π , os extremos das arestas de E_{in} recebem as cores

$$\begin{array}{ll} \pi(v_0) := \pi_1(v_1) = 1 & \pi(v_5) := \pi_2(v_1) = 4 \\ \pi(v_1) := \pi_1(v_2) = 2 & \pi(v_6) := \pi_2(v_2) \in \{1, 3\} \\ \pi(v_3) := \pi_1(v_4) = 1 & \pi(v_{n-2}) := \pi_2(v_{n-6}) \in \{2, 4\} \\ \pi(v_4) := \pi_1(v_5) = 2 & \pi(v_{n-1}) := \pi_2(v_{n-5}) = 3. \end{array}$$

Portanto, ao adicionarmos as arestas de E_{in} não ligamos dois vértices que possuem a mesma cor. Desta forma, não há conflito em π de (2.5) a (2.10).

Precisamos agora mostrar que as cores atribuídas às arestas de E_{in} não geram conflito. As arestas de E_{out} foram removidas e cada uma delas tinha uma cor atribuída. Logo, esta cor falta nos vértices que são extremos destas arestas no C_n^2 . Então,

em	v_0	faltam as cores	0 e 3,
em	v_1	falta a cor	1,
em	v_3	falta a cor	2,
em	v_4	faltam as cores	0 e 4,
em	v_5	faltam as cores	0 e 2,
em	v_6	falta a cor	4,
em	v_{n-2}	falta a cor	3 e
em	v_{n-1}	faltam as cores	0 e 1.

Portanto, as cores atribuídas às arestas de E_{in} não geram conflito.

Para completar a demonstração precisamos garantir que a coloração total obtida para o C_n^2 é especial. Por construção, as colorações totais dos grafos básicos são especiais. Pela hipótese de indução, a coloração total do C_{n-4}^2 é especial. Como as cores de vértices e arestas fora de E_{in} receberam cores de π_1 e π_2 , que possuem a propriedade de todos os vértices serem especiais, basta analisar as arestas de alcance 2 de E_{in} e os seus vértices equivalentes. Ou seja, basta analisar o conjunto $E^2 \cap E_{in} = \{(v_3, v_5), (v_4, v_6), (v_{n-2}, v_0), (v_{n-1}, v_1)\}$. Por construção, $\pi(v_0) = \pi((v_{n-1}, v_1)) = 1$, $\pi(v_4) = \pi((v_3, v_5)) = 2$, $\pi(v_5) = \pi((v_4, v_6)) = 4$ e $\pi(v_{n-1}) = \pi((v_{n-2}, v_0)) = 3$. Portanto, estes vértices também são especiais. Concluimos que todos os vértices do C_n^2 são especiais e a demonstração está completa. $\square$

2.1.3 Coloração total do C_7^2

Nesta seção, demonstramos que o C_7^2 é tipo 2. Inicialmente, introduzimos algumas definições e resultados existentes que são utilizados para mostrar que não existe uma $(\Delta + 1)$ -coloração total para o C_7^2 .

Definimos a *deficiência de G* , $def(G)$, como

$$def(G) := \sum_{v \in V(G)} (\Delta - d(v)).$$

Seja π uma $(\Delta + 1)$ -coloração dos vértices de G . Seja r o número de classes de coloração de π cujo tamanho tem a mesma paridade de $|V(G)|$. Se

$$def(G) \geq \Delta + 1 - r,$$

dizemos que esta coloração de vértices é *harmônica* [¶]. Se G possui alguma coloração de vértices harmônica, dizemos que G é *harmônico*. O Lema 2.4 foi demonstrado por Chetwynd e Hilton em [20]. O Lema 2.5 segue da definição de grafo harmônico.

LEMA 2.4 *Se G é um grafo tipo 1, então G é harmônico.* $\square$

LEMA 2.5 *Seja G um grafo regular e harmônico. A cardinalidade de cada classe de coloração de uma coloração de vértices harmônica tem a mesma paridade de $|V(G)|$.* $\square$

O lema a seguir é fundamental na determinação do número cromático total do C_7^2 . Note que $k < \lfloor n/2 \rfloor$ implica que o grafo C_n^k é simples e não isomorfo ao K_n .

LEMA 2.6 *Seja $G := C_n^k$ com n ímpar e $k < \lfloor n/2 \rfloor$. Se G é harmônico, então $k \leq n/3 - 1$.*

Demonstração: Se o grafo G é harmônico, possui uma coloração de vértices harmônica π . Ademais, o grafo G é regular. Pelo Lema 2.5, cada classe de coloração de π tem a mesma paridade de $|V(G)|$, que é ímpar. Portanto, concluímos que toda cor de π aparece em pelo menos um vértice.

Por hipótese, $k < \lfloor n/2 \rfloor$ e n é ímpar. Assim, $n > 2k + 1$. Como o grafo G possui $\Delta = 2k$, π usa $2k + 1$ cores. Além disso, a paridade de cada classe de coloração é ímpar. Então, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos uma classe de coloração possui pelo menos três vértices.

[¶]Em inglês o termo é *conformable*.

Sejam v_i, v_j e v_l três vértices coloridos com a mesma cor. Ajuste a notação para que $i \leq j \leq l$. Por construção de G , cada vértice v_m é adjacente aos vértices $v_{(m\pm 1) \bmod n}, \dots, v_{(m\pm k) \bmod n}$. Assim, como v_i, v_j e v_l são independentes, isto é, não são dois a dois adjacentes, e $i \leq j \leq l$ temos que:

$$\begin{aligned} j - i &\geq k + 1 \\ l - j &\geq k + 1 \\ (n - l) + i &\geq k + 1 \end{aligned}$$

Simplificando o sistema de inequações acima, concluímos que $k \leq \frac{n}{3} - 1$. $\square$

COROLÁRIO 2.7 *Seja $G := C_n^k$, com n ímpar e $k < \lfloor n/2 \rfloor$. Se $k > n/3 - 1$, então G não é tipo 1.*

Demonstração: Suponha que G seja tipo 1. Pelo Lema 2.4, o grafo G é harmônico. Pelo Lema 2.6, $k \leq n/3 - 1$ contrariando a hipótese. $\square$

TEOREMA 2.8 *O grafo C_7^2 é tipo 2.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.7, quando $k = 2$, n ímpar e $5 < n < 9$, G não é tipo 1. Portanto, o C_7^2 não é tipo 1. Para completar a demonstração, a Figura 2.6 exhibe uma $(\Delta + 2)$ -coloração total para o C_7^2 :

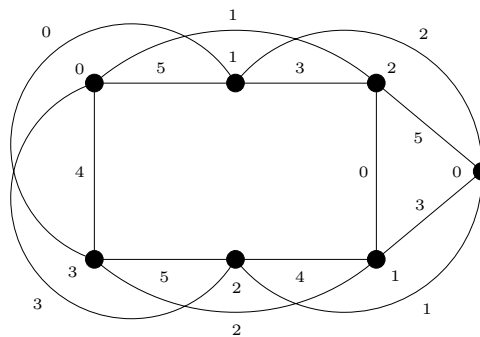


Figura 2.6: Coloração total do grafo C_7^2 .

$\square$

Abstract. The total chromatic number is the least number of colours needed to colour the edges and vertices of a graph so that no adjacent or incident elements of G receive the same colour. In this article we show that the chromatic number^a of C_n^2 , $n \geq 6$, is $\Delta + 1$ if $n \neq 7$ and $\Delta + 2$ if $n = 7$.

^aLeia-se: “total chromatic number”.

2.2 Verificação da TCC para as potências de ciclo com um número par de vértices

A result on the total colouring
of powers of cycles^{||}

C. N. Campos

C. P. de Mello

The total chromatic number, $\chi_T(G)$, is the least number of colours needed to colour the edges and the vertices of a graph such that there do not exist either adjacent or incident elements that receive the same colour. The Total Colouring Conjecture (TCC) states that for every simple graph G , $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of a vertex of G . In this work we verify the TCC for powers of cycles C_n^k , with n even and $2 < k < n/2$, showing that there exists and, can be polynomially constructed, a $(\Delta(G) + 2)$ -total colouring for these graphs.

2.2.1 Introduction

Let $G := (V(G), E(G))$ be a simple graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. An *element* of G is a vertex or an edge of G . A subset of $V(G) \cup E(G)$ is *independent* if its elements are pairwise nonadjacent and nonincident. As usual, we denote by $d(v)$ the *degree* of a vertex $v \in V(G)$, by $\Delta(G)$ and by $\delta(v)$ the maximum and the minimum degrees of G , respectively.

For $S \subseteq V(G) \cup E(G)$, a *partial total colouring* of G is a mapping $\phi : S \rightarrow \mathcal{C}$ such that, for each adjacent or incident elements $x, y \in S$, we have $\phi(x) \neq \phi(y)$. If $S = V(G) \cup E(G)$, then ϕ is a *total colouring*. If $|\mathcal{C}| = k$, then mapping ϕ is called a *k-(partial) total colouring*. For c a colour in $\mathcal{C}$, the set $\{x \in V(G) \cup E(G) : \phi(x) = c\}$ is a *colour class*. If $\phi(x) = c$ or there exists an element y incident with or adjacent to x such that $\phi(y) = c$, then we said that c *occurs* in x . If $S \subseteq E(G)$, then ϕ is a *(partial) edge colouring*.

The *total chromatic number* of G , $\chi_T(G)$, is the least integer k for which G admits a k -total colouring. Clearly, $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$. Sánchez-Arroyo [60] has shown that deciding

^{||}Trabalho apresentado no LACGA 2004[14].

whether $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$ is *NP*-complete. McDiarmid and Sánchez-Arroyo [55] have shown that even the problem of determining the total chromatic number of k -regular bipartite graphs is *NP*-hard, for each fixed $k \geq 3$. The *Total Colouring Conjecture* (TCC), posed independently by Behzad [2] and Vizing [66], states that every simple graph G has $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$. If $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$, then G is a *type 1* graph; if $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$, then G is a *type 2* graph.

A graph is a *power of cycle*, denoted C_n^k , if $V(C_n^k) := \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ and $E(C_n^k) := E^1 \cup E^2 \cup \dots \cup E^k$, where $E^i := \{(v_j, v_{(j+i) \bmod n}) : 0 \leq j \leq n-1\}$. Note that C_n^k is $2k$ -regular and that $k \geq 1$. An edge $e \in E^i$ is said to have *reach* i ; if i is even (odd), then e is an *even* (*odd*) *edge*. We take $(v_0, \dots, v_{n-1})$ to be a *cyclic order* on the vertex set of G , and always perform modular operations on edge indexes.

Here we settle the TCC for C_n^k , n even, $2 < k < n/2$. For $k \geq \lfloor n/2 \rfloor$, C_n^k is isomorphic to the complete graph K_n . Behzad et al. [3] have determined $\chi_T(K_n)$ for all n : K_n is type 1 for n odd and type 2 for n even. For $k = 2$, Campos and Mello [13] have proved that C_n^2 , $n \neq 7$, is type 1 and C_7^2 is type 2. Finally, the total chromatic number of C_n ($k = 1$) is also known (Yap [73]): C_n is type 1 if $n \equiv 0 \pmod{3}$ and type 2 otherwise.

Section 2.2.2 introduces some definitions, notation and preliminary results. Section 2.2.3 exhibits a total colouring for a subgraph of C_n^k , denoted G_P . Section 2.2.4 extends the total colouring of G_P to a total colouring of C_n^k by colouring the edges of $E(C_n^k) \setminus E(G_P)$. Finally, Section 2.2.5 exhibits some subclasses of C_n^k whose total chromatic numbers we know and poses a conjecture about the total chromatic number of C_n^k .

2.2.2 Preliminaries

A *path* in a graph G is an alternating sequence of distinct vertices and edges of G beginning and ending with vertices, in which each edge is incident with the two vertices next to it. The *length* of a path is the number of edges in it. Usually, the distance between two vertices u and v of a graph is the length of a shortest path joining them. Instead, for $u, v \in V(C_n^k)$, we define the *distance* $d(u, v)$ between u and v in C_n^k as the usual distance between u and v in C_n .

Let G_P (G_I) be the maximal subgraph of C_n^k induced by even (odd) edges. Lemma 2.9 shows that G_I is bipartite in case n is even.

LEMMA 2.9 Consider C_n^k , n even. Then G_I is a bipartite graph.

Proof: Let $A := \{v_i \in V(G_I) : i \text{ even}\}$. Let $B := \{v_i \in V(G_I) : i \text{ odd}\}$. Sets A and B form a partition of the vertex set of G_I . Let e be an edge of G_I . Then $e = (v_i, v_j)$ where $j = (i + l) \bmod n$ and l is odd. Since n is even and l is odd, i and j must have distinct parities; so one of v_i and v_j is in A , the other is in B . Therefore G_I is bipartite. $\square$

Let $P(v_i) := \{(v_{i-1}, v_{i+1}), \dots, (v_{i-\lfloor k/2 \rfloor}, v_{i+\lfloor k/2 \rfloor})\}$, $0 \leq i \leq n-1$, be a set of independent even edges with reaches ranging from 2 to $2\lfloor k/2 \rfloor$. Set $P(v_i)$ is called an *even set*. Figure 2.7 shows an example of such an edge set.

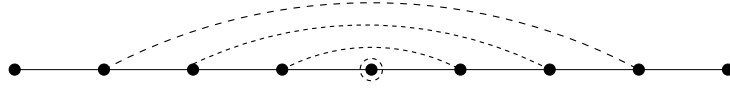


Figure 2.7: Vertex v_i (at center) and set $P(v_i)$ (dashed edges).

Lemma 2.10 shows that $P(v_0), \dots, P(v_{n-1})$ form a partition of $E(G_P)$ and Lemma 2.11 establishes conditions for which two even sets are independent.

LEMMA 2.10 Let C_n^k , with $1 < k < \lfloor n/2 \rfloor$, and let G_P the subgraph of C_n^k induced by its even edges. Then $P(v_0), \dots, P(v_{n-1})$ form a partition of $E(G_P)$.

Proof: In order to show that $P(v_0), \dots, P(v_{n-1})$ form a partition of $E(G_P)$ we prove that: (i) $P(v_i) \cap P(v_j) = \emptyset$ for every $i \neq j$; (ii) $\bigcup_{i=0}^{n-1} P(v_i) = \bigcup_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} E^{2i}$. Note that by definition each $P(v_i) \neq \emptyset$.

Suppose that there exists an edge $e := (u, v)$ such that $e \in P(v_i) \cap P(v_j)$ with $i \neq j$ and u, v_i, v, v_j occur in this order. By definition of even set, $d(u, v_i) = d(v_i, v)$ and $d(v, v_j) = d(v_j, u)$. Thus,

$$d(u, v_i) + d(v_i, v) + d(v, v_j) + d(v_j, u) = n \Rightarrow d(v_i, v) + d(v, v_j) = n/2.$$

(Note that n must be even in this case.) On the other hand, $d(v_i, v) \leq \lfloor k/2 \rfloor$ and $d(v, v_j) \leq \lfloor k/2 \rfloor$. Therefore, $n/2 \leq 2\lfloor k/2 \rfloor \leq k$, a contradiction since we assume $k < \lfloor n/2 \rfloor$.

We will now show that $\bigcup_{i=0}^{n-1} P(v_i) = \bigcup_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} E^{2i}$. By definition,

$$e \in P(v_i) \Leftrightarrow e = (v_{i-l}, v_{i+l}) = (v_j, v_{j+2l}) \Leftrightarrow e \in E^{2l},$$

where $j := i - l$ and $1 \leq l \leq \lfloor k/2 \rfloor$. This concludes the proof. $\square$

LEMMA 2.11 Let v_i and v_j be two vertices of C_n^k such that $0 \leq i < j < n$. Then, set $\{v_i, v_j\} \cup P(v_i) \cup P(v_j)$ is independent if and only if

$$j - i > 2\lfloor k/2 \rfloor \quad \text{and} \quad n - j + i > 2\lfloor k/2 \rfloor.$$

Proof: Let

$$\begin{aligned} V(P(v_i)) &:= \{v_{i-\lfloor k/2 \rfloor}, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{i+\lfloor k/2 \rfloor}\} \quad \text{and} \\ V(P(v_j)) &:= \{v_{j-\lfloor k/2 \rfloor}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{j+\lfloor k/2 \rfloor}\} \end{aligned}$$

be the maximal vertex sets that are ends of edges of $P(v_i)$ and $P(v_j)$, respectively. Thus,

$$\begin{aligned} j - i > 2\lfloor k/2 \rfloor &\Leftrightarrow j - \lfloor k/2 \rfloor > i + \lfloor k/2 \rfloor, \text{ and} \\ n - j + i > 2\lfloor k/2 \rfloor &\Leftrightarrow n + i - \lfloor k/2 \rfloor > j + \lfloor k/2 \rfloor \end{aligned}$$

if and only if $\{v_i, v_j\} \cup P(v_i) \cup P(v_j)$ is an independent set. We add n because we are working with modular operations and $i < j < n$. $\square$

Let $I(v_i, j) := \{(v_i, v_{i+1}), (v_{i-1}, v_{i+2}), \dots, (v_{i-\lfloor j/2 \rfloor}, v_{i+\lfloor j/2 \rfloor})\}$, with j odd, $1 \leq j \leq 2\lfloor k/2 \rfloor - 1$, be a set of independent odd edges with reaches ranging from 1 to j . This set is called an *odd set*. Edge (v_i, v_{i+1}) , of reach 1, is called *anchor* of $I(v_i, j)$. Each vertex in the sequence $v_{i-\lfloor j/2 \rfloor}, \dots, v_{i+\lfloor j/2 \rfloor}$ is an end of some edge of $I(v_i, j)$. We denote by $V(I(v_i, j))$ this set of vertices.

Figure 2.8 exhibits an example of an odd set. Lemma 2.12 and Lemma 2.13 establish some properties of $I(v_i, j)$.

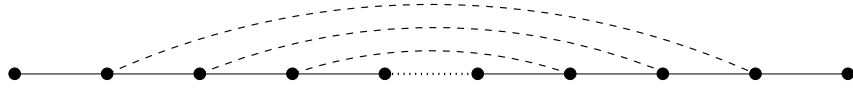


Figure 2.8: Dotted and dashed edges form an odd set. The dotted edge is the anchor.

LEMMA 2.12 Consider C_n^k and let G_1 be the subgraph of C_n^k induced by its odd edges. Then $I(v_0, 2\lfloor k/2 \rfloor - 1), \dots, I(v_{n-1}, 2\lfloor k/2 \rfloor - 1)$ form a partition of $E(G_1)$.

Proof: In order to show that $I(v_0, 2\lceil k/2 \rceil - 1), \dots, I(v_{n-1}, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$ form a partition of $E(G_1)$ we prove that: (i) $I(v_i, 2\lceil k/2 \rceil - 1) \cap I(v_j, 2\lceil k/2 \rceil - 1) = \emptyset$ for every $i \neq j$; (ii) $\bigcup_{i=1}^{\lceil k/2 \rceil} E^{2i-1} = \bigcup_{i=0}^{n-1} I(v_i, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$. Note that, by definition, each $I(v_i, 2\lceil k/2 \rceil - 1) \neq \emptyset$.

Suppose that there exists an edge $e := (u, v)$ such that $e \in I(v_i, 2\lceil k/2 \rceil - 1) \cap I(v_j, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$, with $0 \leq i < j \leq n-1$ and u, v_i, v, v_j occur in this order. By definition of odd set $d(u, v_i) = d(v_{i+1}, v)$ and $d(v, v_j) = d(v_{j+1}, u)$. Since $i \neq j$, $d(u, v_i) + d(v, v_{i+1}) + d(v, v_j) + d(u, v_{j+1}) + 2 = n$. Thus, $d(v_{i+1}, v) + d(v, v_j) = n/2 - 1$. Note that n must be even in this case. On the other hand, $d(v, v_{i+1}) \leq \lceil k/2 \rceil - 1$ and the same holds for $d(v, v_j)$. Thus,

$$n/2 - 1 \leq 2\lceil k/2 \rceil - 2 \Rightarrow n/2 \leq k,$$

a contradiction since we are working with $k < \lfloor n/2 \rfloor$. This proves part (i).

To prove (ii), note that:

$$e \in E^{2m-1} \Leftrightarrow e = (v_j, v_{j+(2m-1)}) \Leftrightarrow e = (v_{i-(m-1)}, v_{i+m}) \Leftrightarrow e \in I(v_i, 2\lceil k/2 \rceil - 1),$$

where $i = j + m - 1$, $i, j \in [0, n-1]$ and $m \in [1, \lceil k/2 \rceil]$. □

LEMMA 2.13 *Let $I(v_i, j)$ and $I(v_l, m)$ be odd sets of C_n^k , with $0 \leq i < l < n$. Then, set $I(v_i, j) \cup I(v_l, m)$ is independent if and only if*

$$\begin{aligned} l - i &> \lceil j/2 \rceil + \lfloor m/2 \rfloor, \text{ and} \\ n - l + i &> \lceil m/2 \rceil + \lfloor j/2 \rfloor. \end{aligned}$$

Proof: By definition,

$$\begin{aligned} V(I(v_i, j)) &:= \{v_{i-\lfloor j/2 \rfloor}, \dots, v_{i+\lceil j/2 \rceil}\}, \quad \text{and} \\ V(I(v_l, m)) &:= \{v_{l-\lfloor m/2 \rfloor}, \dots, v_{l+\lceil m/2 \rceil}\}. \end{aligned}$$

Set $I(v_i, j) \cup I(v_l, m)$ is independent if and only if $V(I(v_i, j)) \cap V(I(v_l, m)) = \emptyset$. Then,

$$\begin{aligned} l - i > \lceil j/2 \rceil + \lfloor m/2 \rfloor &\Leftrightarrow i + \lceil j/2 \rceil < l - \lfloor m/2 \rfloor, \text{ and} \\ n - l + i > \lceil m/2 \rceil + \lfloor j/2 \rfloor &\Leftrightarrow l + \lceil m/2 \rceil < n + i - \lfloor j/2 \rfloor, \end{aligned}$$

if and only if $I(v_i, j) \cup I(v_l, m)$ is an independent set. We add n because we are working with modular operations and $i < l < n$. □

2.2.3 Total colouring of G_P

In this section we construct a $(k + 1 + r)$ -total colouring of G_P , where $r = n \bmod (k + 1)$.

Starting at v_0 , and proceeding in cyclic order, we partition $V(G)$ in α sets, $B^1, \dots, B^\alpha$, each with $k + 1$ consecutive vertices, denoted *alpha blocks* ($\alpha > 1$, since $k < \lfloor n/2 \rfloor$), and one last block, R , with the remaining r vertices, called the *residual block*. That is, $B^j := \{v_{(j-1)(k+1)}, \dots, v_{(j-1)(k+1)+k}\}$ and $R := \{v_{n-r}, \dots, v_{n-1}\}$. We denote by u_i^j the i -th vertex of B^j , which corresponds to vertex $v_{(j-1)(k+1)+i-1}$, and we denote by w_i the i -th vertex of R , which corresponds to vertex $v_{\alpha(k+1)+i-1}$. Figure 2.9 shows an example of $V(C_{12}^4)$ partitioned in blocks.

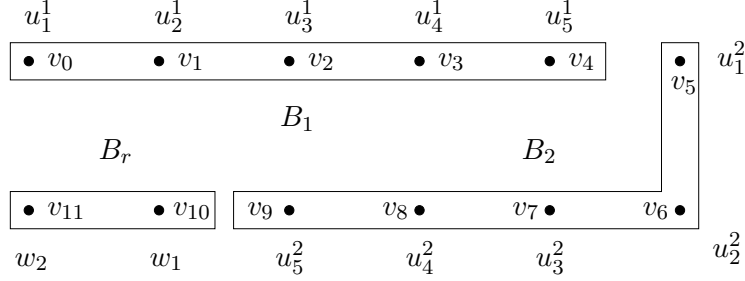


Figure 2.9: The partition of $V(C_{12}^4)$ in blocks.

We first describe a colour assignment π_{G_P} of G_P . Then we show that π_{G_P} is a total colouring of G_P . Let

$$\pi_{G_P}(u_i^j) := i, \quad 1 \leq i \leq k + 1, 1 \leq j \leq \alpha \text{ (alpha colours);} \quad (2.11)$$

$$\pi_{G_P}(w_i) := k + 1 + i, \quad 1 \leq i \leq r \text{ (residual colours);} \quad (2.12)$$

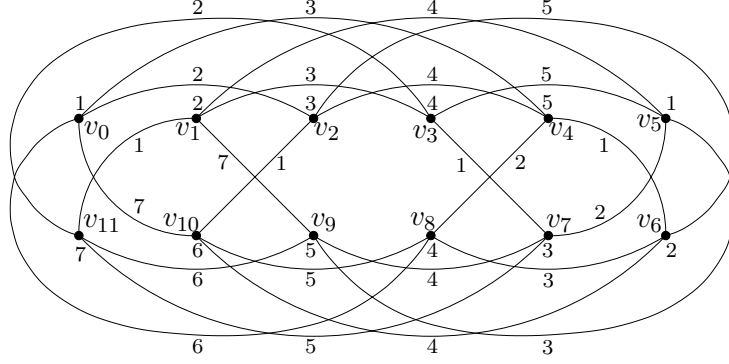
$$\pi_{G_P}(e) := \pi_{G_P}(v_i), \quad \forall e \in P(v_i) \text{ and } 0 \leq i \leq n - 1. \quad (2.13)$$

Figure 2.10 shows the 7-total colouring π_{G_P} for G_P , the subgraph induced by the even edges of C_{12}^4 .

LEMMA 2.14 *The colour assignment π_{G_P} is a total colouring of G_P .*

Proof: Clearly, each vertex of C_n^k receives a colour in (2.11) or (2.12) since each vertex is either in an alpha block, or in a residual block.

By construction of π_{G_P} , vertices in the same block receive different colours. Moreover, the set of vertices that receive colour i , $i \leq k + 1$, is composed by the i -th vertices of each


 Figure 2.10: A 7-total colouring π_{G_P} of G_P .

alpha block. We conclude that this vertex set is independent since $d(u_i^j, u_i^{j+1}) = k + 1$, $j < \alpha$, and the maximum reach of an edge of C_n^k is k . The vertex set that receives colour $k + 1 + i$, $i \leq r$, is $\{w_i\}$, thus trivially independent. Therefore, (2.11) and (2.12) provide a vertex-colouring of G_P .

Let v_i be a vertex of G_P . In (2.13), set $P(v_i)$ receives the same colour of v_i . By definition $P(v_i) \cup \{v_i\}$ is independent. Moreover, by Lemma 2.10, each edge of G_P receives a colour.

By construction, the edge set that receives alpha colour i is $\bigcup_{j=1}^{\alpha} P(u_i^j)$, which is independent by Lemma 2.11. The even set that receives residual colour $k + 1 + i$ is $P(w_i)$, also an independent set. Therefore, there do not exist adjacent edges with the same colour and the result follows. $\square$

Colouring π_{G_P} is a total colouring of G_P which assigns colours to the vertices and even edges of C_n^k ; we now colour the odd edges of C_n^k .

2.2.4 Edge colouring G_I

We have constructed a $(k + 1 + r)$ -total colouring for G_P . In this section we use these colours in some selected edges of G_I . Subsequently, we show that the subgraph of G_I induced by the still uncoloured edges, denoted G_r , is $(k + 1 - r)$ -edge colourable, for n even. The parity of n is important here because the resulting subgraph G_I is bipartite.

This section has two parts. Initially, we treat case $r = 0$, i.e., $n \equiv 0 \pmod{k + 1}$.

Afterwards, we treat case $0 < r \leq k$.

$$\mathbf{n} \equiv \mathbf{0} \bmod (\mathbf{k} + \mathbf{1})$$

In this subsection we show that there exists a $(\Delta + 2)$ -total colouring for C_n^k when n is a multiple of $k + 1$, i.e., when $r = 0$. More specifically, we prove that there exists a $(k + 1)$ -edge colouring for G_I . This colouring, together with π_{G_P} , forms a $(\Delta + 2)$ -total colouring for C_n^k .

The *chromatic index* of a graph G , $\chi'(G)$, is the least number of colours for which G admits an edge colouring. We first recall two classical results on edge colouring. Subsequently, we prove the main lemma of this subsection, Lemma 2.17.

LEMMA 2.15 (VIZING) *Let G be a simple graph. Then, $\chi'(G) \leq \Delta + 1$.* $\square$

LEMMA 2.16 (KÖNIG) *Let G be a simple bipartite graph. Then, $\chi'(G) = \Delta$.* $\square$

LEMMA 2.17 *Let $G := C_n^k$ with $n \equiv 0 \bmod (k + 1)$. Then, $\chi'(G_I) \leq k + 1$.*

Proof: By counting, we conclude that if k is even, then $\Delta(G_I) = k$, otherwise $\Delta(G_I) = k + 1$. Therefore, if k is even the result follows by Lemma 2.15. If k is odd then, since $n \equiv 0 \bmod (k + 1)$, n is even. By Lemma 2.9, graph G_I is bipartite. Therefore, by Lemma 2.16, we conclude that $\chi'(G_I) = k + 1$. $\square$

The next result follows from Lemma 2.17.

THEOREM 2.18 *Let $G := C_n^k$, $n \equiv 0 \bmod (k + 1)$. Then, $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Proof: In Section 2.2.3 the $(k + 1 + r)$ -total colouring π_{G_P} was constructed for G_P . Since $n \equiv 0 \bmod (k + 1)$, π_{G_P} uses $k + 1$ colours. By Lemma 2.17, the edges of graph G_I can be coloured with $k + 1$ colours. By definition, $V(C_n^k) = V(G_P)$ and $E(C_n^k) = E(G_P) \cup E(G_I)$. Therefore, there exists a $2k + 2 = \Delta(G) + 2$ -total colouring of G . $\square$

$$\mathbf{n} \equiv \mathbf{r} \bmod (\mathbf{k} + \mathbf{1}), \quad \mathbf{0} < \mathbf{r} \leq \mathbf{k}$$

In this subsection we choose some special edges of G_I and assign them colours that were used in G_P . This partial edge colouring of G_I is denoted π . Subsequently, we show that

G_r , the subgraph of G_I induced by the still uncoloured edges, is $(k+1-r)$ -edge colourable, for n even.

Let $\pi := \pi_1 \cup \pi_2 \cup \pi_3$. First, let π_1 be a colour assignment defined as follows:

$$\pi_1(e) = k + 1 + i \quad \text{for } e \in \bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(u_{k-r+i}^j, 2\lceil k/2 \rceil - 1)\}, \quad 1 \leq i \leq r.$$

LEMMA 2.19 *Colour assignment $\pi_{G_P} \cup \pi_1$ is a partial total colouring of C_n^k .*

Proof: Lemma 2.14 shows that π_{G_P} is a total colouring of G_P , thus a partial total colouring of C_n^k . In π_1 , only residual colours are used. Thus, in order to show that $\pi_{G_P} \cup \pi_1$ is a partial total colouring of C_n^k , we must prove that π_1 is a partial edge colouring of C_n^k and there do not exist conflicts between π_1 and π_{G_P} .

Let $k + 1 + i$ be a residual colour. By definition of odd set and by Lemma 2.13, we conclude that

$$\bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(u_{k-r+i}^j, 2\lceil k/2 \rceil - 1)\}$$

is an independent set. Therefore, π_1 is a partial edge colouring of C_n^k .

Now, we show that there are no conflicts between π_{G_P} and π_1 . To do this we show that there are no two adjacent edges, one in $\{w_i\} \cup P(w_i)$, and the other in $I(u_{k-r+i}^1, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$ or in $I(u_{k-r+i}^{\alpha-1}, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$, which are, respectively, the first and the last coloured sets in π_1 in cyclic order.

In π_{G_P} , the residual colour $k + 1 + i$ is assigned to the elements of set $\{w_i\} \cup P(w_i)$. Thus, this colour occurs in each of the $\lceil k/2 \rceil$ vertices consecutive to w_i in cyclic order; likewise, this colour occurs in each of the $\lceil k/2 \rceil$ vertices consecutive to w_i , in reverse cyclic order. By definitions of π_1 and of $I(u_{k-r+i}^j, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$, colour $k + 1 + i$ occurs in each of the $\lceil k/2 \rceil - 1$ vertices consecutive to $u_{k-r+i+1}^j$ in cyclic order; likewise this colour occurs in each of the $\lceil k/2 \rceil - 1$ vertices consecutive to u_{k-r+i}^j in reverse cyclic order.

Between w_i and u_{k-r+i}^1 , in cyclic order, there exist $(r - i) + (k - r + i - 1) = k - 1$ vertices. In cyclic order, the first $\lceil k/2 \rceil$ vertices have an incident edge with colour $k + 1 + i$ from π_{G_P} and the last $\lceil k/2 \rceil - 1$ vertices have an incident edge with this colour from π_1 . Since $\lceil k/2 \rceil + \lceil k/2 \rceil - 1 = k - 1$, we conclude that there do not exist two adjacent edges with colour $k + 1 + i$ one belonging to $\{w_i\} \cup P(w_i)$ and the other to $I(u_{k-r+i}^1, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$.

There exist $(r - i) + (k + 1) + (i - 1) = k + r$ vertices between $u_{k-r+i+1}^{\alpha-1}$ and w_i in cyclic order. The first term is the number of vertices of $B^{\alpha-1}$ after $u_{k-r+i+1}^{\alpha-1}$, the second one is

the number of vertices in B^α and the last one is the number of vertices before w_i in the residual block. Because $k + r > k - 1$, by previous arguments, we conclude that there do not exist two adjacent edges one in $\{w_i\} \cup P(w_i)$ and the other in $I(u_{k-r+i}^{\alpha-1}, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$ with colour $k + 1 + i$. $\square$

Let C_n^k endowed with colouring π_{G_P} . By construction, $\pi_{G_P}(u_i^1) = \pi_{G_P}(u_i^\alpha) = i$, an alpha colour. The number of vertices between u_i^α and u_i^1 in which colour i is missing is denoted m . The next lemma establishes the value of m .

LEMMA 2.20 *For C_n^k coloured according to π_{G_P} , the number of vertices between u_i^α and u_i^1 , in cyclic order, in which alpha colour i is missing is $m := r + (k \bmod 2)$.*

Proof: There exist $k + 1 - i$ vertices after u_i^α in B^α , in cyclic order, and there exist $i - 1$ vertices before u_i^1 in B^1 . Moreover, there exists the residual block, with r vertices, between B^α and B^1 . Therefore, between u_i^α and u_i^1 there exist $(k + 1 - i) + r + (i - 1) = r + k$ vertices.

In π_{G_P} , set $u_i^\alpha \cup P(u_i^\alpha)$ has received alpha colour i . Thus, this colour occurs in each of the $\lfloor k/2 \rfloor$ vertices consecutive to u_i^α in cyclic order and in each of the $\lfloor k/2 \rfloor$ vertices consecutive to u_i^α in reverse cyclic order. Therefore, $m = r + k - 2\lfloor k/2 \rfloor = r + (k \bmod 2)$. $\square$

Let $k + 1 + i$ be a residual colour. There exist $\alpha - 1$ odd sets that receive this colour in π_1 . The anchor of the last (in cyclic order) set that receives this colour is edge $(u_{k-r+i}^{\alpha-1}, u_{k-r+i+1}^{\alpha-1})$. In π_{G_P} , set $\{w_i\} \cup P(w_i)$ also receives colour $k + 1 + i$. Lemma 2.21 establishes the value of m' .

LEMMA 2.21 *For C_n^k coloured according to π_{G_P} , the number of vertices between $u_{k-r+i}^{\alpha-1}$ and w_i , in cyclic order, in which residual colour $k + 1 + i$ is missing is $m' = r + 1$.*

Proof: There exist $k + 1 - (k - r + i) = r - i + 1$ vertices after $u_{k-r+i}^{\alpha-1}$ in $B^{\alpha-1}$, in cyclic order, and there exist $i - 1$ vertices before w_i in R . Moreover, there exists block B^α between $B^{\alpha-1}$ and R . Therefore, between $u_{k-r+i}^{\alpha-1}$ and w_i there exist $(r - i + 1) + (k + 1) + (i - 1) = k + r + 1$ vertices.

Following the cyclic order, the last set that receives colour $k + 1 + i$ in π_1 has anchor $(u_{k-r+i}^{\alpha-1}, u_{k-r+i+1}^{\alpha-1})$ and reach $2\lceil k/2 \rceil - 1$. Therefore, this colour occurs in the $\lceil k/2 \rceil$ consecutive vertices after $u_{k-r+i}^{\alpha-1}$. Since set $\pi_{G_P}(w_i) = \pi_{G_P}(P(w_i)) = k + 1 + i$, this colour

occurs in the $\lfloor k/2 \rfloor$ vertices consecutive to w_i , in reverse cyclic order. We conclude that $m = k + r + 1 - \lfloor k/2 \rfloor - \lfloor k/2 \rfloor = r + 1$. $\square$

Let π_2 and π_3 be colour assignments for C_n^k defined as follows:

$$\pi_2(e) := k + 1 + i \quad \text{if } e \in I(v_{s_i + \lfloor m'/2 \rfloor}, 2\lfloor m'/2 \rfloor - 1), \quad \text{with } 1 \leq i \leq r,$$

$$\text{where } s_i := (\alpha - 2)(k + 1) + k - r + i - 1 + \lceil k/2 \rceil;$$

$$\pi_3(e) := i \quad \text{if } e \in I(v_{s_i + \lfloor m/2 \rfloor}, 2\lfloor m/2 \rfloor - 1), \quad \text{with } 1 \leq i \leq k + 1,$$

$$\text{where } s_i := (\alpha - 1)(k + 1) + i - 1 + \lfloor k/2 \rfloor.$$

Figure 2.11 shows subgraph G_1 from C_{12}^4 endowed with colouring $\pi := \pi_1 \cup \pi_2 \cup \pi_3$.

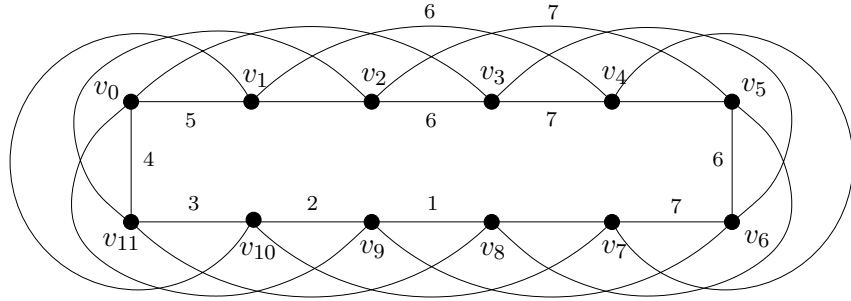


Figure 2.11: Subgraph G_1 of C_{12}^4 with colouring π .

LEMMA 2.22 *Colour assignment $\pi_{G_P} \cup \pi$, where $\pi := \pi_1 \cup \pi_2 \cup \pi_3$, is a partial total colouring of C_n^k .*

Proof: Clearly, $\pi_2 \cup \pi_3$ is a partial edge colouring of C_n^k . Moreover, we have showed that $\pi_{G_P} \cup \pi_1$ is a partial total colouring of C_n^k . Thus, we need to show that $\pi_2 \cup \pi_3$ has no conflicts with $\pi_{G_P} \cup \pi_1$.

Vertex $v_{(\alpha-1)(k+1)+i-1}$ corresponds to vertex u_i^α . In cyclic order, the last vertex that receives alpha colour i in π_{G_P} is vertex u_i^α . Set $P(u_i^\alpha)$ also receives alpha colour i in π_{G_P} . Thus, colour i occurs in $\lfloor k/2 \rfloor$ consecutive vertices after u_i^α , in cyclic order, and v_{s_i} is the last vertex in which colour i occurs. Similarly, considering residual colour $k + 1 + i$ and set $I(u_{k-r+i}^{\alpha-1}, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$ that was coloured in π_1 , we conclude that v_{s_i} is the last vertex in which colour $k + 1 + i$ occurs after $u_{k-r+i}^{\alpha-1}$, in cyclic order.

Parameter m in π_3 represents the number of vertices between u_i^α and u_i^1 in which alpha colour i is missing. The maximum reach of an odd edge among these vertices is $2\lfloor m/2 \rfloor - 1$ and edge $(v_{s_i+\lfloor m/2 \rfloor}, v_{s_i+\lfloor m/2 \rfloor+1})$ is the anchor of the odd set that can be coloured with alpha colour i . Likewise, the maximum reach for m' and colour $k+1+i$ is $2\lfloor m'/2 \rfloor - 1$ and the required anchor is $(v_{s_i+\lfloor m'/2 \rfloor}, v_{s_i+\lfloor m'/2 \rfloor+1})$. We conclude that there do not exist conflicts between $\pi_2 \cup \pi_3$ and $\pi_{G_P} \cup \pi_1$ and the result follows. $\square$

Consider graph C_n^k endowed with $\pi_{G_P} \cup \pi$. We call *residual graph*, the subgraph G_r induced by the still uncoloured edges of C_n^k . Now, we show that G_r has a $(k+1-r)$ -edge colouring when n is even.

LEMMA 2.23 *Let $G := C_n^k$, $2 < k < \lfloor n/2 \rfloor$, endowed with $\pi_{G_P} \cup \pi$. Let G_r be the subgraph of C_n^k induced by the still uncoloured edges. Then $\Delta(G_r) \leq k+1-r$.*

Proof: Consider, initially, the case in which k is even and $r = 1$. Because k is even, $\Delta(G_1) = k$ and, because G_r is a subgraph of G_1 , $\Delta(G_r) \leq k = k+1-r$. Therefore, the result follows in this case and from here on we consider that if $r = 1$, then k is odd.

Colouring π_{G_P} assigns a colour to each element of subgraph G_P . Let H be the subgraph induced by coloured edges in π . Thus, $G_r = G \setminus \{G_P \cup H\} = G_1 \setminus H$. Let δ_H be the minimum degree in H . Thus,

$$\Delta(G_r) = 2k - 2\lfloor k/2 \rfloor - \delta_H = 2\lceil k/2 \rceil - \delta_H.$$

So, to determine $\Delta(G_r)$ we need to know δ_H . We have estimated $d(v)$ in H for each vertex $v \in V(H)$ to determine δ_H .

Let H_1 , H_2 and H_3 be the subgraphs induced by edges that receive a colour in π_1 , π_2 and π_3 , respectively. Clearly, $V(H) = V(H_1) \cup V(H_2) \cup V(H_3)$ and $E(H) = E(H_1) \cup E(H_2) \cup E(H_3)$. Moreover, $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$, when $i \neq j$ and $i, j \in \{1, 2, 3\}$. In order to estimate $d(v)$ in H we estimate $d(v)$ in each H_i .

Consider H_1 . Colouring π_1 assigns colour $k+1+i$ to $\alpha-1$ odd sets, each one with reach $2\lceil k/2 \rceil - 1$ and anchor $(u_{k-r+i}^j, u_{k-r+i+1}^j)$, $1 \leq j \leq \alpha-1$. Let H_1^j be the subgraph induced by edges of $\bigcup_{i=1}^r I(u_{k-r+i}^j, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$. That is, H_1^j is the subgraph induced by the r odd sets whose anchors belong to B^j . Note that

$$V(H_1) = \bigcup_{j=1}^{\alpha-1} V(H_1^j)$$

and that $E(H_1^i) \cap E(H_1^j) = \emptyset$ when $i \neq j$ and $1 \leq i, j \leq \alpha - 1$.

We know that odd sets are independent and their vertex sets are composed by consecutive vertices in cyclic order. Moreover, the anchors of odd sets that belong to H_1^j are also consecutive. Therefore, by counting, the *degree distribution* of H_1^j is:

$$\boxed{1 \longrightarrow r-1} \boxed{r} \boxed{r-1 \longrightarrow 1}$$

The first block means that the degree of the first $r-1$ vertices range from 1 to $r-1$. The second block means that there exists a sequence of vertices with degree r . Third block represents $r-1$ consecutive vertices with degrees ranging from $r-1$ to 1. To determine the degree distribution of H_1 we determine $|V(H_1^j) \cap V(H_1^{j+1})|$, $1 \leq j \leq \alpha - 2$ and add the degree of (same) vertices in each intersection.

By definition, for each residual colour $k+1+i$ and block B^j , $1 \leq j \leq \alpha - 1$, edge $(u_{k-r+i}^j, u_{k-r+i+1}^j)$ is the anchor of the odd set that receives this colour in π_1 . This edge corresponds to edge

$$(v_{(j-1)(k+1)+k-r+i-1}, v_{(j-1)(k+1)+k-r+i}).$$

Thus, for the last residual colour $k+1+r$, the anchor corresponds to edge

$$(v_{(j-1)(k+1)+k-1}, v_{(j-1)(k+1)+k}).$$

Considering the reach of this set, we conclude that the index of the last vertex, in cyclic order, in which this colour occurs is

$$(j-1)(k+1) + k + \lceil k/2 \rceil - 1. \quad (2.14)$$

Analogously, considering block B^{j+1} , $0 \leq j \leq \alpha - 2$, and the first residual colour, $k+2$, the anchor of this set is edge $(v_{j(k+1)+k-r}, v_{j(k+1)+k-r+1})$. Therefore, the index of the first vertex in which this colour occurs is

$$j(k+1) + k - r - (\lceil k/2 \rceil - 1) = j(k+1) + \lfloor k/2 \rfloor - r + 1. \quad (2.15)$$

Therefore, the cardinality of the intersection of graphs H_1^j and H_1^{j+1} is

$$(j-1)(k+1) + k + \lceil k/2 \rceil - 1 - (j(k+1) + \lfloor k/2 \rfloor - r + 1) + 1 = r + \lceil k/2 \rceil - \lfloor k/2 \rfloor - 2.$$

The above expression results in $r-2$ when k is even, and in $r-1$ when k is odd. Figure 2.12 sketches the degree distribution in $H_1^j \cup H_1^{j+1}$.

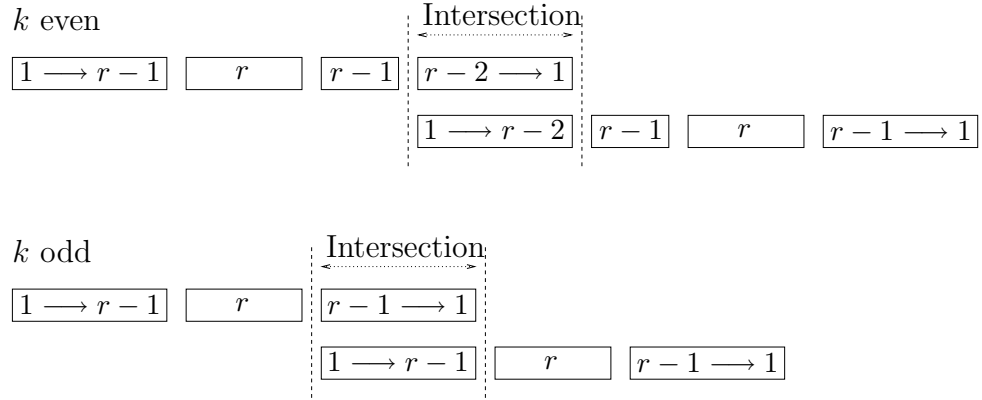


Figure 2.12: Union of H_1^j and H_1^{j+1} . The degrees of same vertices in the intersection are added resulting in a block with vertices of degree $r - 1$ when k is even, or in a block with vertices of degree r when k is odd.

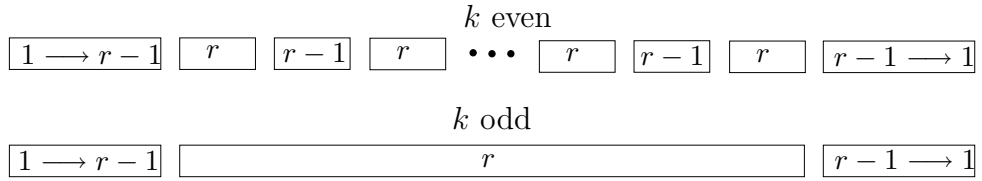


Figure 2.13: Degree distribution of H_1 .

Extending this result for each H_1^j e H_1^{j+1} , by counting, we obtain the degree distribution in H_1 , sketched in Figure 2.13.

Let ME_i be the least index and MA_i be the greatest index, in cyclic order, of a vertex of H_i . We use these parameters to calculate $|H_1 \cap H_2|$, $|H_2 \cap H_3|$ and $|H_3 \cap H_1|$, that are used to estimate the degree distribution of H from degree distributions of H_1 , H_2 and H_3 , in the same way as above.

Expression (2.15) represents the index of the first vertex, in cyclic order, in which colour $k + 2$ occurs. Colour $k + 2$ is the first residual colour whose anchor is in block B^{j+1} . Making $j = 0$ we have ME_1 . Analogously, expression (2.14) represents the index of the last vertex, in cyclic order, in which colour $k + 1 + r$, the last residual colour whose anchor is in block B^j , occurs. Making $j = \alpha - 1$ in this expression we have MA_1 . That

is,

$$ME_1 = \lfloor k/2 \rfloor - r + 1 \equiv n + \lfloor k/2 \rfloor - r + 1 \pmod{n} \text{ and}$$

$$MA_1 = (\alpha - 2)(k + 1) + k + \lceil k/2 \rceil - 1.$$

Now, we analyse H_2 . Colouring π_2 assigns each residual colour $k + 1 + i$ to one odd set with reach $2\lfloor m'/2 \rfloor - 1$. The anchors of each of these sets are consecutive edges in cyclic order. Thus, by counting, we conclude that H_2 is comprised by $2r - 1$ vertices if r is even and $2r$ vertices if r is odd. Again by counting, we determine the degree distribution showed in Figure 2.14.

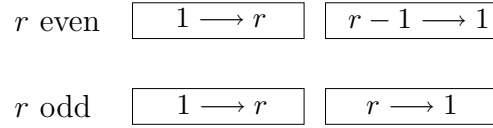


Figure 2.14: Degree distribution of H_2 .

In order to calculate ME_2 and MA_2 , we consider the anchor of the odd set that receives residual colour $k + 1 + i$; that is, edge

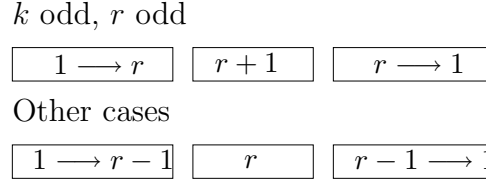
$$(v_{(\alpha-2)(k+1)+k-r+i-1+\lceil k/2 \rceil+\lfloor m'/2 \rfloor}, v_{(\alpha-2)(k+1)+k-r+i-1+\lceil k/2 \rceil+\lfloor m'/2 \rfloor+1}).$$

Parameter ME_2 is obtained by subtraction of $\lfloor m'/2 \rfloor - 1$ from the first end of the above edge, considering the first residual colour $i = 1$. Parameter MA_2 is obtained by adding up $\lfloor m'/2 \rfloor - 1$ to the second end of the above edge, considering the last residual colour, $i = r$. Thus, we conclude that

$$ME_2 = (\alpha - 2)(k + 1) + k - r + \lceil k/2 \rceil + 1 \text{ and}$$

$$MA_2 = (\alpha - 2)(k + 1) + k + \lceil k/2 \rceil + 2\lfloor m'/2 \rfloor - 1.$$

Finally, we consider H_3 . In π_3 each alpha colour is assigned to an odd set of reach $2\lfloor m/2 \rfloor - 1$. By Lemma 2.20, $m = r$ when k is even and $m = r + 1$ when k is odd. Recalling case $r = 1$ and k even, previously considered, we conclude, by counting, that H_3 is composed of $k + 2\lfloor m/2 \rfloor$ vertices. By analogy with previous cases, we conclude that the degree distribution of H_3 is that shown in Figure 2.15.

Figure 2.15: Degree distribution of H_3 .

We determine ME_3 and MA_3 in the same way as previous cases, making adjustments to H_3 and its alpha colours. Thus, we conclude that

$$ME_3 = (\alpha - 1)(k + 1) + \lfloor k/2 \rfloor + 1 \text{ and}$$

$$MA_3 = (\alpha - 1)(k + 1) + k + \lfloor k/2 \rfloor + 2\lfloor m/2 \rfloor.$$

Now, we use the degree distribution of H_1 , H_2 and H_3 to determine the degree distribution of H . We calculate $|H_1 \cap H_2|$, $|H_2 \cap H_3|$ and $|H_3 \cap H_1|$, which are the only possible nonempty intersections between these graphs, using formula $MA_i - ME_j + 1$, with $i \neq j$ and $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

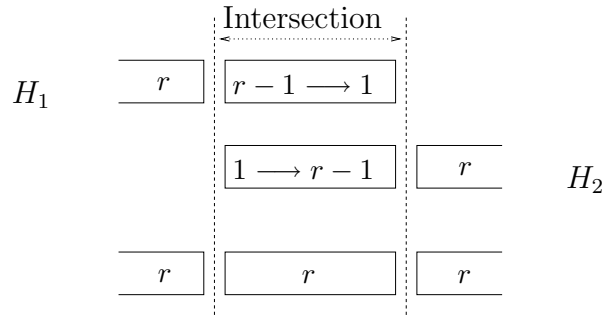
CASE 1 *Intersection of H_1 and H_2*

$$\begin{aligned} |H_1 \cap H_2| &= MA_1 - ME_2 + 1 \\ &= (\alpha - 2)(k + 1) + k + \lceil k/2 \rceil - 1 - ((\alpha - 2)(k + 1) + k - r + \lceil k/2 \rceil + 1) + 1 \\ &= r - 1. \end{aligned}$$

Figure 2.16 sketches the degree distribution in $H_1 \cap H_2$.

CASE 2 *Intersection of H_2 and H_3*

$$\begin{aligned} |H_2 \cap H_3| &= MA_2 - ME_3 + 1 \\ &= (\alpha - 2)(k + 1) + k + \lceil k/2 \rceil + 2\lfloor m'/2 \rfloor - 1 - ((\alpha - 1)(k + 1) + \lfloor k/2 \rfloor + 1) + 1 \\ &= \lceil k/2 \rceil - \lfloor k/2 \rfloor + 2\lfloor m'/2 \rfloor - 2. \end{aligned}$$


 Figure 2.16: Degree distribution of $H_1 \cap H_2$.

The above expression depends on the parities of k and r ($m' = r + 1$). Thus, we have the following cases:

$$|H_2 \cap H_3| = \begin{cases} r - 2 & \text{if } k \text{ even, } r \text{ even;} \\ r - 1 & \text{if } k \text{ even, } r \text{ odd;} \\ r - 1 & \text{if } k \text{ odd, } r \text{ even;} \\ r & \text{if } k \text{ odd, } r \text{ odd.} \end{cases}$$

Figures 2.17(a) to 2.17(d) sketch each case of the degree distribution in $H_1 \cap H_2$.

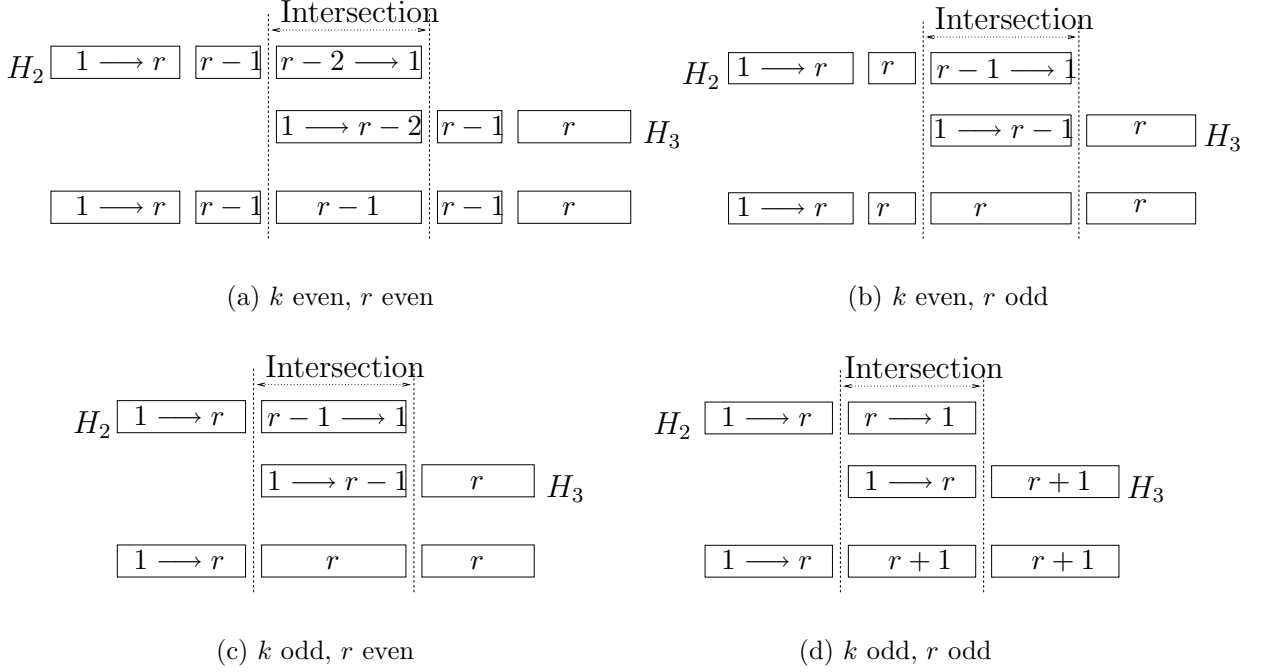
CASE 3 *Intersection of H_3 and H_1*

$$\begin{aligned} |H_3 \cap H_1| &= MA_3 - ME_1 + 1 \\ &= (\alpha - 1)(k + 1) + k + \lfloor k/2 \rfloor + 2\lfloor m/2 \rfloor - (n + \lfloor k/2 \rfloor - r + 1) + 1 \\ &= 2\lfloor m/2 \rfloor - 1. \end{aligned}$$

Again, analysing the parity of k and r we have that

$$|H_3 \cap H_1| = \begin{cases} r - 1 & \text{if } k \text{ even, } r \text{ even;} \\ r - 2 & \text{if } k \text{ even, } r \text{ odd;} \\ r - 1 & \text{if } k \text{ odd, } r \text{ even;} \\ r & \text{if } k \text{ odd, } r \text{ odd.} \end{cases}$$

Figures 2.18(a) to 2.18(c) sketch the degree distribution in $H_3 \cap H_1$.

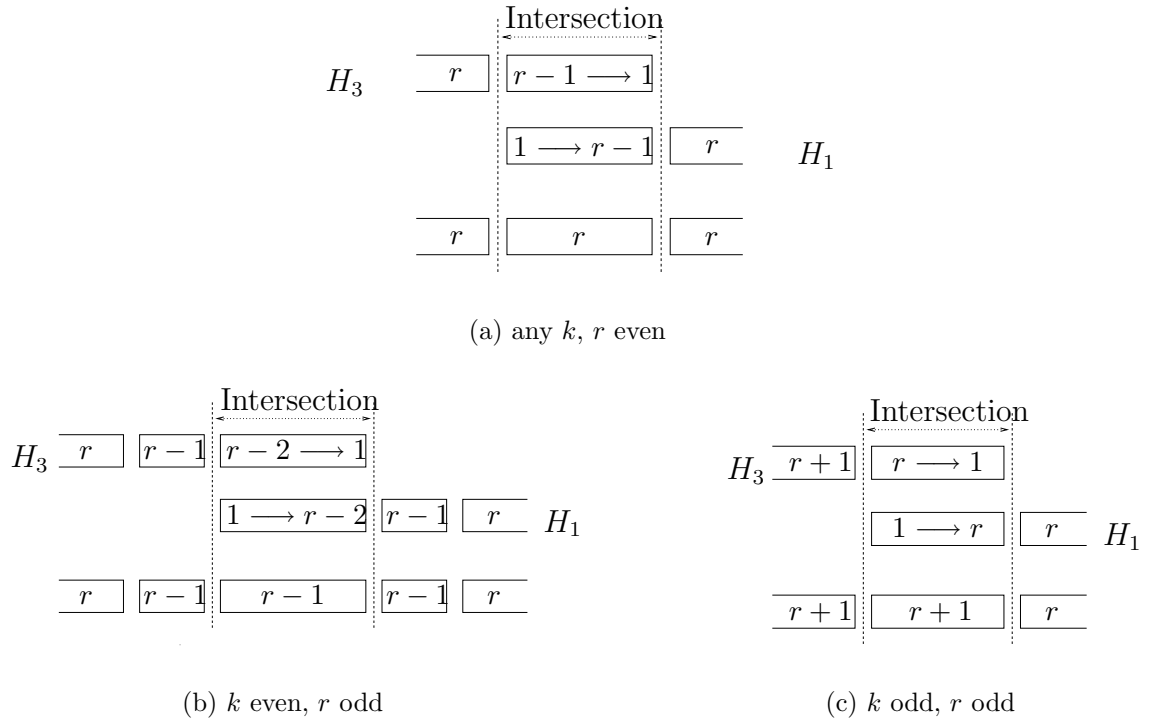

 Figure 2.17: Intersection of H_2 and H_3 .

By definition, graph $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. Figures 2.13, 2.14 and 2.15 sketch the degrees of H_1 , H_2 and H_3 , respectively. Figures 2.16, from 2.17(a) to 2.17(d) and from 2.18(a) to 2.18(c) sketch possible intersections between H_1 , H_2 and H_3 . The analysis of these figures reveals that $\delta_H \geq r - 1$ if k is even, and $\delta_H \geq r$ if k is odd. $\square$

Our main result in this section is a corollary of the previous lemma and is stated below.

THEOREM 2.24 *The graph C_n^k , $n \equiv r \pmod{k+1}$, with n even and $r \neq 0$, has a $(\Delta + 2)$ -total colouring.*

Proof: Graph C_n^k is $(2k)$ -regular. By the definition of G_r and by Lemma 2.22, $\pi_{G_r} \cup \pi$ is a total colouring of subgraph $C_n^k \setminus G_r$ with $k + 1 + r$ colours. By Lemma 2.23, $\Delta(G_r) \leq k + 1 - r$. Moreover, G_r is bipartite, because it is a subgraph of G_1 that is bipartite when n is even. Thus, by Lemma 2.16, G_r is $(k + 1 - r)$ -edge colourable. Therefore, we can construct a total colouring for C_n^k with $(k + 1 - r) + (k + 1 + r) = 2k + 2 = \Delta + 2$ colours.


 Figure 2.18: Intersection of H_3 and H_1 .

□

2.2.5 Concluding remarks

We now show some cases for which $\chi_T(C_n^k)$ has been determined. We close this section proposing a conjecture on the total chromatic number of C_n^k .

Let G be C_n^k . In the following two cases we have type 1 graphs:

- $n \equiv 0 \pmod{\Delta + 1}$ ^{**}. In this case we consider powers of cycles with n multiple of $2k + 1$. Let π be a colour assignment for G defined as follows:

$$\begin{aligned} \pi(v_i) &:= (2i) \pmod{\Delta + 1} && \text{for each } v_i \in V(G); \\ \pi(e) &:= \pi(v_i) && \text{for each } e \in P(v_i); \\ \pi(e) &:= (2i + 1) \pmod{\Delta + 1} && \text{for each } e \in I(v_i, 2\lceil k/2 \rceil - 1), v_i \in V(G). \end{aligned}$$

^{**}Este caso é um corolário de um resultado de Figueiredo et al. [32]. Veja Corolário 2.35.

LEMMA 2.25 *Let G be C_n^k with $n \equiv 0 \pmod{\Delta + 1}$. The colour assignment π is a $(2k + 1)$ -total colouring of G .*

Proof: First note that each element of G receives a colour. Thus, we need to show that π has no conflicts.

Let v_i and v_j be two vertices of G such that $\pi(v_i) = \pi(v_j)$. By construction of π , $j = i + m(2k + 1)$, $m \geq 1$. Therefore, by Lemma 2.11, $\{v_i, v_j\} \cup P(v_i) \cup P(v_j)$ is independent. Analogously, let $e = (v_i, v_{i+1})$ and $f = (v_j, v_{j+1})$ be the anchors of two odd sets such that $\pi(e) = \pi(f)$. By construction of π and by Lemma 2.13, we conclude that $I(v_i, 2\lceil k/2 \rceil - 1) \cup I(v_j, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$ is independent.

Now, let v_i be a vertex. By construction, the colour of each edge of $P(v_i)$ is $\pi(v_i)$, that is, in each vertex of $V(P(v_i)) \cup \{v_i\}$ colour $\pi(v_i)$ occurs. Let e and f be the two anchors nearest to v_i in cyclic order and in reverse cyclic order respectively, such that $\pi(e) = \pi(f) = \pi(v_i)$. Then, $e = (v_{(i+k) \bmod n}, v_{(i+k+1) \bmod n})$ and $f = (v_{(i-(k+1)) \bmod n}, v_{(i-k) \bmod n})$. By construction, odd sets $I(v_{(i+k) \bmod n}, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$ and $I(v_{(i-(k+1)) \bmod n}, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$ have received colour $\pi(v_i)$. Thus, in each vertex of $V(I(v_{(i+k) \bmod n}, 2\lceil k/2 \rceil - 1) \cup V(I(v_{(i-(k+1)) \bmod n}, 2\lceil k/2 \rceil - 1))$ $\pi(v_i)$ occurs. Finally, since

$$\{V(P(v_i)) \cup \{v_i\}\} \cap \{V(I(v_{(i+k) \bmod n}, 2\lceil k/2 \rceil - 1) \cup V(I(v_{(i-(k+1)) \bmod n}, 2\lceil k/2 \rceil - 1))\} = \emptyset,$$

we conclude that π is a $(2k + 1)$ -total colouring of G . $\square$

- $n \equiv 0 \pmod{k + 1}$, n, k even. Consider π_{G_P} previously defined. It is a $(k + 1)$ -total colouring of G_P . Moreover, G_I is bipartite and k -regular. By König's Theorem, there exists a k -edge colouring of G_I . Thus, we can construct a $(2k + 1)$ -total colouring for G .

We also know a few type 2 graphs. In [13] we have determined the total chromatic number of C_n^2 , namely that C_n^2 is type 1 when $n \neq 7$, and C_7^2 is type 2. In the same work, we proved the following lemma.

LEMMA 2.26 *Let $G := C_n^k$, with n odd and $n/3 - 1 < k < \lfloor n/2 \rfloor$. Then G is not type 1.*

We have proved that C_n^3 satisfies the TCC. Together with Lemma 2.26 it implies that C_9^3 and C_{11}^3 are type 2 graphs. Moreover, we know that C_8^3 , C_{10}^3 , C_{12}^3 and C_{13}^3 are type 1 graphs. Considering $k = 4$ we have similar results: the TCC is satisfied, which together with the previous lemma give us that C_{11}^4 , C_{13}^4 are type 2; C_{10}^4 , C_{12}^4 , C_{14}^4 , and C_{15}^4 are all type 1 graphs. These observations led us to formulate the following conjecture.

CONJECTURE 2.27 *Let $G := C_n^k$, with $2 \leq k < \lfloor n/2 \rfloor$. Then,*

$$\chi_T(G) := \begin{cases} \Delta + 2 & \text{if } k > n/3 - 1 \text{ and } n \text{ odd;} \\ \Delta + 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Note that C_n^2 verifies the conjecture. Moreover, C_n^3 for $n \leq 13$ and C_n^4 for $n \leq 15$ verify the conjecture.

2.3 Resultados adicionais

Para concluir este capítulo gostaríamos de explicitar e demonstrar afirmações feitas na Seção 2.2.5. O próximo teorema estuda o caso em que $n \equiv k \pmod{k+1}$ e é usado como lema na verificação da TCC para o C_n^3 e C_n^4 .

TEOREMA 2.28 *Se $G := C_n^k$ possui $n \equiv k \pmod{k+1}$, então G verifica a TCC.*

Demonstração: Considere G munido das colorações π_{G_P} e π definidas nas seções anteriores e G_r o grafo residual, gerado pelas arestas que ainda não receberam nenhuma cor. Pelo Lema 2.23, $\Delta(G_r) \leq k+1-r$. Neste caso $r = k$. Portanto, $\Delta(G_r) \leq 1$. Isto é, G_r é composto por um conjunto de arestas independentes. Logo, uma cor é suficiente para colorir todas as suas arestas. Assim, construímos uma coloração total de G que usa

$$k+1+r+1 = k+1+k+1 = 2k+2 = \Delta(G) + 2 \text{ cores}$$

e o resultado segue. □

TEOREMA 2.29 *O grafo C_n^3 possui uma coloração total com 8 cores.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.24, o resultado é verdadeiro para n par. Podemos assumir então que n é ímpar. Para $k = 3$ e n ímpar, $r \in \{1, 3\}$. Pelo Teorema 2.28, o resultado segue para $r = 3$. Resta considerar o caso em que $r = 1$. Considere a seguinte associação de cores às arestas de G_1 :

$$\tau(e) := 6 \text{ para } e \in \bigcup_{j=0}^{\alpha-2} I(v_{1+4j}, 3); \quad (2.16)$$

$$\tau(e) := 7 \text{ para } e \in \bigcup_{j=0}^{\alpha-2} I(v_{3+4j}, 3); \quad (2.17)$$

$$\tau(e) := 8 \text{ para } e \in \bigcup_{j=0}^{\alpha-2} I(v_{4+4j}, 3); \quad (2.18)$$

$$\tau((v_{n-5}, v_{n-2})) := \tau((v_{n-4}, v_{n-1})) := 6; \quad (2.19)$$

$$\tau((v_{n-3}, v_0)) := \tau((v_{n-2}, v_1)) := 7; \quad (2.20)$$

$$\tau((v_{n-1}, v_2)) := 8. \quad (2.21)$$

Inicialmente note que por construção (2.16), $\dots$, (2.21) são, separadamente, conjuntos independentes. Além disso, temos que $(v_{n-5}, v_{n-2}) \in I(v_{n-4}, 3)$, $(v_{n-4}, v_{n-1}) \in I(v_{n-3}, 3)$, $(v_{n-3}, v_0) \in I(v_{n-2}, 3)$, e a aresta $(v_{n-2}, v_1) \in I(v_0, 3)$. Assim, pelo Lema 2.13, temos que (2.16) e (2.19), (2.17) e (2.20), (2.18) e (2.21) não conflitam. Logo, τ é uma coloração de arestas parcial para o G_I .

Para concluir que os grafos C_n^3 verificam a TCC, precisamos mostrar que $\tau \cup \pi$, onde $\pi := \pi_1 \cup \pi_2 \cup \pi_3$ foi estabelecida na Seção 2.2.4, é uma coloração de arestas para o G_I . A coloração π_1 associa a cor 5 ao conjunto $\bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(u_3^j, 3)\}$. Por construção,

$$\bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(u_3^j, 3)\} = \bigcup_{j=0}^{\alpha-2} \{I(v_{2+4j}, 3)\}.$$

Portanto, concluímos que $\pi_1 \cup (2.16) \cup (2.17) \cup (2.18)$ é uma coloração de arestas do conjunto:

$$\bigcup_{j=0}^{\alpha-2} \bigcup_{i=1}^4 \{I(v_{i+4j}, 3)\} = \bigcup_{i=1}^{n-3} \{I(v_i, 3)\}.$$

O lado direito da igualdade acima é obtido após um ajuste de notação.

Consideremos agora π_2 e π_3 . A coloração π_2 associa a cor 5 à aresta (v_{n-4}, v_{n-3}) , que juntamente com (v_{n-5}, v_{n-2}) , colorida em (2.19), formam o conjunto $I(v_{n-4}, 3)$. A coloração π_3 associa as cores 1, 2, 3, e 4 às arestas (v_{n-3}, v_{n-2}) , (v_{n-2}, v_{n-1}) , (v_{n-1}, v_0) , (v_0, v_1) , respectivamente. Assim, adicionando as arestas coloridas em (2.19), (2.20), e (2.21), todas as arestas dos conjuntos $I(v_{n-3}, 3)$, $I(v_{n-2}, 3)$, $I(v_{n-1}, 3)$, $I(v_0, 3)$, receberam uma cor e estas cores não conflitam entre si. Concluímos então que todas as arestas de $\bigcup_{i=0}^{n-1} \{I(v_i, 3)\}$ receberam um cor. Pelo Lema 2.12, estes conjuntos particionam as arestas de G_I . Logo, $\pi \cup \tau$ é uma coloração de arestas para o G_I que usa 8 cores. Ademais, esta coloração não tem conflitos com a 5-coloração total do G_P , definida na Seção 2.2.3. Concluímos portanto que $\pi_{G_P} \cup \pi \cup \tau$ é uma coloração total para o C_n^3 com 8 cores. $\square$

TEOREMA 2.30 *O grafo C_n^4 possui uma coloração total que usa 10 cores.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.24, o resultado é verdadeiro quando n é par. Para o caso $k = 4$ e n ímpar, temos que $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Se $r = 0$ ou $r = 4$, então o resultado segue pelos Teoremas 2.18 e 2.28. Portanto, podemos assumir que $r \in \{1, 2, 3\}$.

Suponhamos inicialmente que $r = 1$. Considere a seguinte atribuição de cores, τ , às arestas do G_I :

$$\tau(e) := 7 \quad \text{se } e \in \bigcup_{j=2}^{\alpha-1} \{I(u_1^j, 3)\} \cup I(u_5^{\alpha-1}, 3); \quad (2.22)$$

$$\tau(e) := 8 \quad \text{se } e \in \bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(u_2^j, 3)\} \cup I(u_1^\alpha, 3); \quad (2.23)$$

$$\tau(e) := 9 \quad \text{se } e \in \bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(u_3^j, 3)\} \cup \{(u_1^\alpha, u_4^\alpha), (u_2^\alpha, u_5^\alpha), (u_3^\alpha, w_1)\}; \quad (2.24)$$

$$\tau(e) := 10 \quad \text{se } e \in \bigcup_{j=1}^{\alpha-2} \{I(u_5^j, 3)\} \cup \{(u_4^\alpha, v_0), (u_5^\alpha, v_1), (w_1, v_2)\}; \quad (2.25)$$

Por construção, τ é uma coloração de arestas parcial de G_I . Considere π definida na Seção 2.2.4, vamos mostrar que $\pi \cup \tau$ é uma coloração de arestas de G_I . As quatro cores usadas em τ são diferentes das seis cores usadas em π . Assim, para mostrar que $\pi \cup \tau$ é uma coloração de arestas para o G_I precisamos mostrar que todas as arestas do G_I recebem uma cor. A coloração π para $k = 4$ e $r = 1$ é:

$$\pi(e) := 6 \quad \text{se } e \in \bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(u_4^j, 3)\} \cup \{(u_2^\alpha, u_3^\alpha)\} \quad (2.26)$$

$$\pi((u_3^\alpha, u_4^\alpha)) := 1 \quad (2.27)$$

$$\pi((u_4^\alpha, u_5^\alpha)) := 2 \quad (2.28)$$

$$\pi((u_5^\alpha, w_1)) := 3 \quad (2.29)$$

$$\pi((w_1, v_0)) := 4 \quad (2.30)$$

$$\pi((v_0, v_1)) := 5 \quad (2.31)$$

Primeiro, note que o conjunto de arestas a que τ atribui uma cor é disjunto do conjunto de arestas coloridas por π . Ademais, os conjuntos ímpares que recebem as cores 6, 7, 8, 9, 10, em (2.26), (2.22), (2.23), (2.24) e (2.25), respectivamente, colorem todas as arestas de $\bigcup_{j=1}^{n-6} I(v_i, 3)$. A aresta (v_0, v_1) , colorida em (2.31), juntamente com a aresta $(w_1, v_2) = (v_{n-1}, v_2)$, colorida em (2.25), formam o conjunto ímpar $I(v_0, 3)$. Analoga-

mente, concluimos que

$$\begin{aligned}
\{(u_2^\alpha, u_3^\alpha), (u_1^\alpha, u_4^\alpha)\} &= I(v_{n-5}, 3); \\
\{(u_3^\alpha, u_4^\alpha), (u_2^\alpha, u_5^\alpha)\} &= I(v_{n-4}, 3); \\
\{(u_4^\alpha, u_5^\alpha), (u_3^\alpha, w_1)\} &= I(v_{n-3}, 3); \\
\{(u_5^\alpha, w_1), (u_4^\alpha, v_0)\} &= I(v_{n-2}, 3); \\
\{(w_1, v_0), (u_5^\alpha, v_1)\} &= I(v_{n-1}, 3);
\end{aligned}$$

Portanto, todos os conjuntos ímpares de G_1 foram coloridos. Pelo Lema 2.12, estes conjuntos particionam as arestas de G_1 . Logo, $\pi \cup \tau$ é uma coloração de arestas para o G_1 que usa 10 cores. Considere π_{G_P} definida na Seção 2.2.3. Como π_{G_P} é uma coloração total do G_P e $\pi_{G_P} \cup \pi$ é uma coloração total parcial de G que usa seis cores, podemos concluir que $\pi_{G_P} \cup \pi \cup \tau$ é uma coloração total para G que usa 10 cores e o resultado segue para $r = 1$.

Para os casos em que $r \in \{2, 3\}$ provamos que o grafo G_r é classe 1. Pelo Lema 2.23, $\Delta(G_r) \leq k + 1 - r$. Assim, se G_r é classe 1 podemos colorir suas arestas com $k + 1 - r$ cores. Logo, é possível construir uma coloração total para G com $(k + 1 + r) + (k + 1 - r) = 2k + 2 = 10$ cores e o resultado segue. O Lema 2.31, demonstrado em [37], é usado para provar que o G_r é classe 1.

LEMA 2.31 *Seja G um grafo simples. Seja H o subgrafo de G gerado pelos vértices de grau máximo. Se H é uma floresta, então G é classe 1.* $\square$

Seja $r = 2$. Consideremos G munido de $\pi_{G_P} \cup \pi$, que é uma coloração total parcial de G e usa $k + 1 + r = 7$ cores. Por construção, π_{G_P} é uma coloração total do G_P . O grafo G_1 é um grafo 4-regular. A coloração π , considerando $r = 2$ e $k = 4$ é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\pi(e) &:= 6 && \text{para } e \in \bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(u_3^j, 3)\} \cup \{(u_1^\alpha, u_2^\alpha)\}; \\
\pi(e) &:= 7 && \text{para } e \in \bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(u_4^j, 3)\} \cup \{(u_2^\alpha, u_3^\alpha)\}; \\
\pi(e) &:= i && \text{para } e = (v_{n-5+i}, v_{n-4+i}), 1 \leq i \leq 5.
\end{aligned}$$

As duas primeiras atribuições foram obtidas de $\pi_1 \cup \pi_2$, e a última foi obtida de π_3 . A Figura 2.19 esquematiza o grafo G_I munido de π .

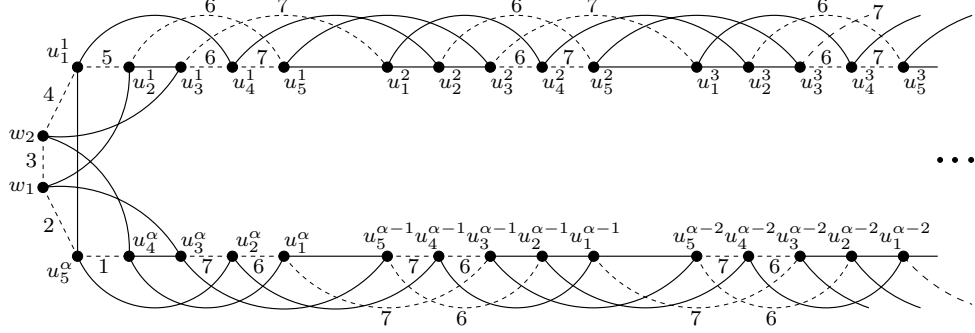


Figura 2.19: Grafo G_I esquematizado quando n é ímpar, $k = 4$ e $r = 2$. Neste caso α é par. As arestas tracejadas recebem uma cor em π . O subgrafo induzido pelas arestas cheias é o G_r

Os vértices de grau máximo em G_r são os vértices que, considerando G_I munido de π , possuem menos arestas incidentes coloridas por π . Por contagem, concluímos que os vértices u_1^j, u_2^j , para $2 \leq j \leq \alpha - 1$ e u_3^α, u_4^α , são os únicos vértices que possuem apenas uma aresta incidente colorida por π . Ademais, todos os vértices possuem pelo menos uma aresta incidente colorida por π . Concluímos portanto, que estes são exatamente os vértices de grau máximo de G_r . Como o alcance máximo de uma aresta do G_I é 3, temos que o subgrafo de G_r gerado por estes vértices é uma floresta. Assim, pelo Lema 2.31, o grafo G_r é classe 1 e o resultado segue.

Resta-nos analisar o último caso, quando $r = 3$. Vamos usar o mesmo tipo de argumento usado no caso $r = 2$. Considere G_I munido de π , definida como:

$$\begin{aligned} \pi(e) &:= 6 && \text{para } e \in \bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(u_2^j, 3)\} \cup I(u_1^\alpha, 3); \\ \pi(e) &:= 7 && \text{para } e \in \bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(u_3^j, 3)\} \cup I(u_2^\alpha, 3); \\ \pi(e) &:= 8 && \text{para } e \in \bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(u_4^j, 3)\} \cup I(u_3^\alpha, 3); \\ \pi(e) &:= i && \text{para } e = (v_{n-6+i}, v_{n-5+i}), 1 \leq i \leq 5. \end{aligned}$$

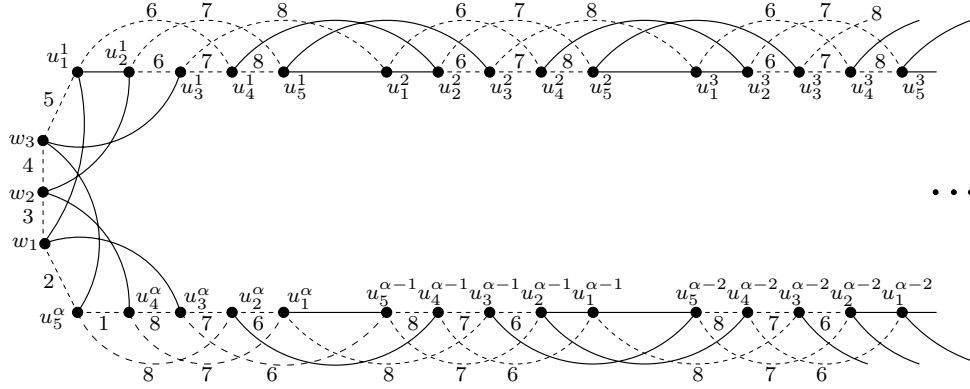


Figura 2.20: Grafo G_I esquematizado quando n é ímpar, $k = 4$ e $r = 3$. Neste caso α é ímpar e maior que 1. As arestas tracejadas recebem uma cor em π . O subgrafo induzido pelas arestas cheias é o G_r .

A Figura 2.20 esquematiza o grafo G_I munido de π . Por contagem, concluímos que os vértices de grau máximo são: u_1^j, u_2^j, u_5^j para $1 \leq j \leq \alpha - 2$, $u_1^{\alpha-1}, u_2^{\alpha-1}$ e w_i , para $i = 1, 2, 3$. Considerando que as arestas (u_2^j, u_5^j) , $1 \leq j \leq \alpha - 2$, (w_1, w_2) , (w_2, w_3) , e (w_3, v_0) foram coloridas por π e que $u_2^{\alpha-1}$ não é adjacente a w_1 , podemos concluir que o core do G_r é uma floresta e o resultado segue. $\square$

Na Seção 2.2.5 afirmamos que os grafos $C_8^3, C_{10}^3, C_{12}^3, C_{13}^3, C_{10}^4, C_{12}^4, C_{14}^4$, e C_{15}^4 são tipo 1. A seguir, exibimos colorações totais para estes grafos que ilustram esta propriedade. O grafo C_{10}^4 foi excluído porque ele se encaixa no caso $n \equiv 0 \pmod{k+1}$, com n e k pares, demonstrado na Seção 2.2.5.

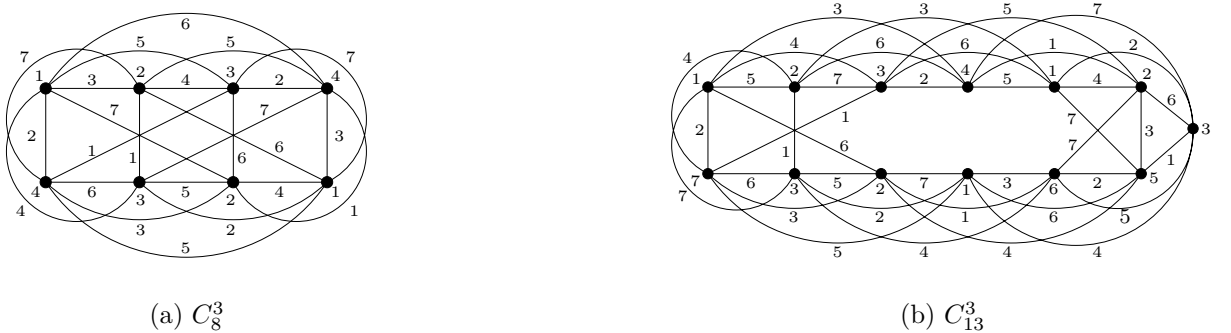


Figura 2.21: Coloração total com 7 cores.

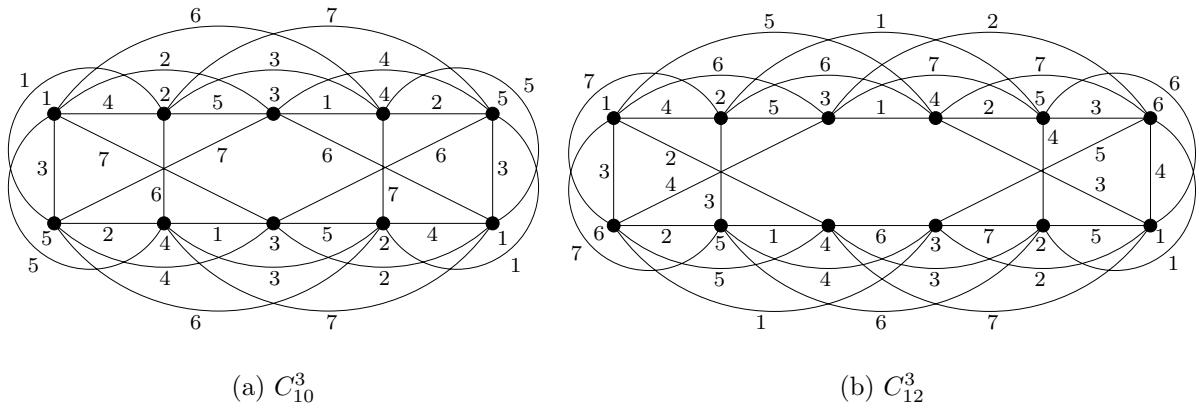


Figura 2.22: Coloração total com 7 cores.

A Figura 2.23 exibe o C_{12}^4 , em um desenho alternativo, parcialmente colorido com 6 cores. As arestas tracejadas ainda não receberam uma cor e induzem um grafo bipartido 3-regular. Logo, bastam mais três cores para completar sua coloração total com 9 cores.

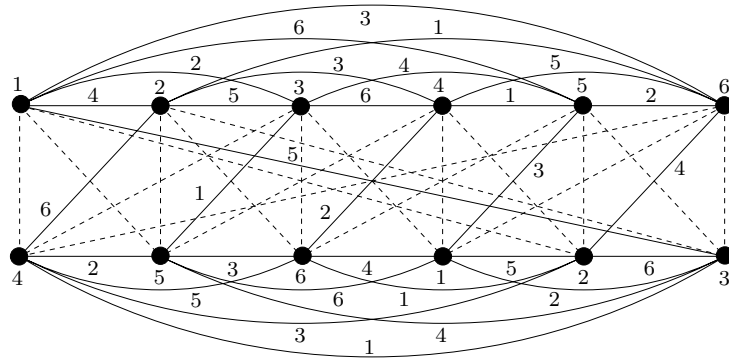


Figura 2.23: Grafo C_{12}^4 parcialmente colorido com 6 cores. As arestas tracejadas ainda não receberam uma cor e induzem um grafo bipartido 3-regular. Os vértices na partição superior possuem índice par, os da partição inferior, índice ímpar. Dentro de cada partição os vértices estão dispostos em ordem crescente de índice.

Para colorir o C_{14}^4 foi usada a mesma técnica utilizada no C_{12}^4 . A Figura 2.24 exibe o C_{14}^4 parcialmente colorido com 7 cores. As arestas tracejadas não estão coloridas e induzem um grafo bipartido 2-regular. Portanto, duas cores novas são suficientes para completar sua coloração total tipo 1.

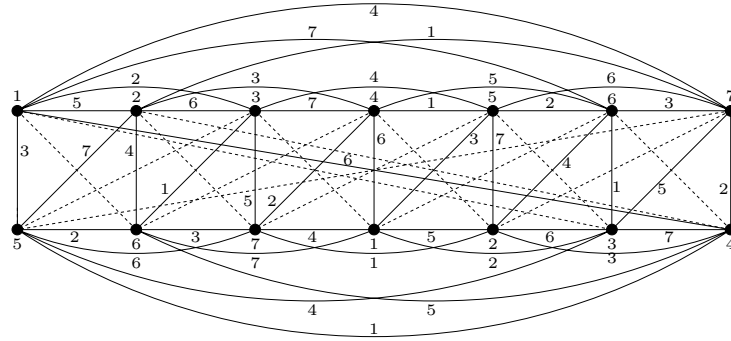


Figura 2.24: Grafo C_{14}^4 parcialmente colorido com 7 cores. As arestas tracejadas ainda não receberam uma cor e induzem um grafo bipartido 2-regular. Os vértices na partição superior possuem índice par, os da partição inferior, índice ímpar. Dentro de cada partição os vértices estão dispostos em ordem crescente de índice.

Finalmente, a Figura 2.25 exibe uma 9-coloração total do C_{15}^4 .

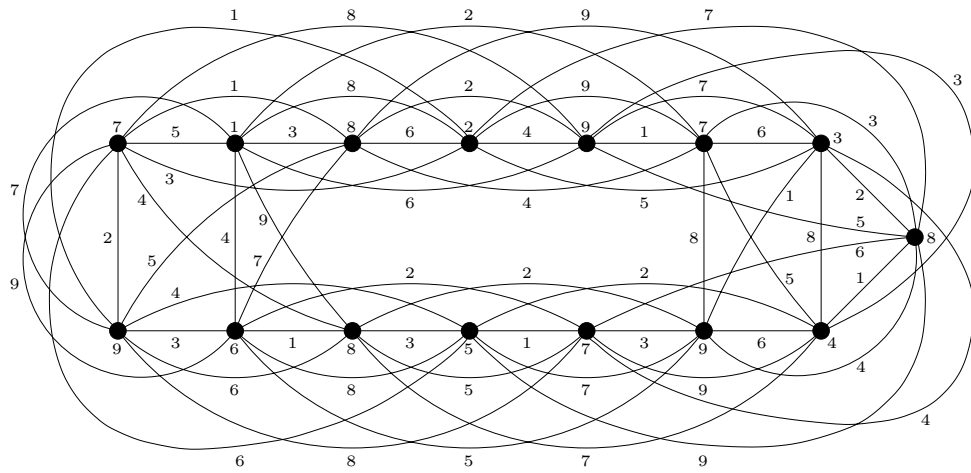


Figura 2.25: Grafo C_{15}^4 munido de uma 9-coloração total.

Seja G um grafo simples, define-se o grafo G^2 com $V(G^2) := V(G)$ e $E(G^2) := \{uv : d(u, v) \leq 2 \text{ em } G\}$, onde $d(u, v)$ é a distância, no sentido usual, entre os vértices u e v . Não é difícil mostrar que se $G := C_n^k$, então $G^2 = C_n^{2k}$. Figueiredo et al. [32] mostraram o seguinte resultado:

TEOREMA 2.32 *Se $\chi(G^2) = \Delta(G) + 1$, então*

- (i) $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$;
- (ii) se $\Delta(G)$ é par, então G é tipo 1;
- (iii) se $\Delta(G)$ é ímpar, então G é classe 1.

Este resultado não resolve o problema da coloração total em potências de ciclo. O Teorema 2.33 mostra a existência de potências de ciclo G com $\chi(G^2) \neq \Delta(G) + 1$.

TEOREMA 2.33 *Seja $G := C_n^k$ com $n = \alpha(k+1) + r$, $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ e $0 \leq r \leq k$. Então,*

$$\chi(G) = k + 1 + \lceil r/\alpha \rceil.$$

Demonstração: Inicialmente vamos mostrar que $\chi(G) \leq k + 1 + \lceil r/\alpha \rceil$ exibindo uma coloração de vértices que usa $k + 1 + \lceil r/\alpha \rceil$ cores.

Suponha que $r = 0$. Considere a associação de cores descrita na Seção 2.2.3, em (2.11):

$$\pi(u_i^j) := i \quad \text{para } 1 \leq j \leq \alpha, \quad 1 \leq i \leq k + 1.$$

Inicialmente, note que, considerando $r = 0$, nenhum vértice recebe cores em (2.12). Logo, em (2.11), todos os vértices de $V(G)$ recebem uma cor. O Lema 2.14 mostra que esta associação de cores é uma coloração de vértices de G .

Assuma agora que $0 < r \leq \alpha$. Analogamente à partição de $V(G)$ feita para colorir G_P na Seção 2.2.3, vamos particionar os vértices de G em r blocos de $k + 2$ vértices e $\alpha - r$ blocos de $k + 1$ vértices, iniciando a partição em v_0 e seguindo a ordem cíclica. Assim, denotamos por u_i^j o i -ésimo vértice do j -ésimo bloco.

Seja π a seguinte atribuição de cores aos vértices de $V(G)$:

$$\begin{aligned} \pi(u_i^j) &:= i && \text{para } 1 \leq i \leq k + 2, \quad 1 \leq j \leq r; \\ \pi(u_i^j) &:= i && \text{para } 1 \leq i \leq k + 1, \quad r + 1 \leq j \leq \alpha. \end{aligned}$$

Note inicialmente que π usa $k + 2$ cores. Ademais, os vértices que possuem as mesmas cores têm as mesmas posições relativas dentro dos blocos. Por contagem, concluímos que entre dois vértices com a mesma cor existem pelo menos k vértices. Como o maior alcance de uma aresta em G é k , concluímos que estes vértices não são adjacentes. Portanto, π é uma coloração de vértices.

Agora, suponhamos que $r > \alpha$. Seja $r := x\alpha + y$, onde $0 \leq y \leq \alpha - 1$. Analogamente ao caso anterior, vamos particionar os vértices de G em y blocos de $k + 1 + \lceil r/\alpha \rceil$ vértices e $\alpha - y$ blocos de $k + 1 + \lfloor r/\alpha \rfloor$ vértices, iniciando a partição em v_0 e seguindo a ordem cíclica.

Seja π a seguinte atribuição de cores aos vértices de $V(G)$:

$$\begin{aligned} \pi(u_i^j) &:= i && \text{para } 1 \leq i \leq k + 1 + \lceil k/\alpha \rceil, \quad 1 \leq j \leq y; \\ \pi(u_i^j) &:= i && \text{para } 1 \leq i \leq k + 1 + \lfloor k/\alpha \rfloor, \quad y + 1 \leq j \leq \alpha; \end{aligned}$$

Inicialmente, note que são usadas $k + 1 + \lceil r/\alpha \rceil$ cores. Analogamente ao caso em que $r < \alpha$, concluímos que entre dois vértices que possuem a mesma cor existem pelo menos $k + \lfloor r/\alpha \rfloor$ vértices. Logo, também neste caso π é uma coloração de vértices.

Concluímos então que $\chi(G) \leq k + 1 + \lceil r/\alpha \rceil$. O próximo lema, mostra que o tamanho de um maior conjunto independente de vértices de G é α .

LEMA 2.34 *Seja $G := C_n^k$ com $n = \alpha(k + 1) + r$, com $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ e $0 \leq r \leq k$. Então o tamanho de um maior conjunto independente de vértices em G é α .*

Demonstração: Seja $V(G) := \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Suponha que G possua um conjunto independente de vértices I com $\alpha + 1$ elementos. Ordene os vértices de I por ordem crescente de índice de seus rótulos. Se v_i e v_j são dois vértices pertencentes a I sucessivos na ordem, dizemos que estes vértices são *vizinhos*. Além disso, considerando as propriedades cíclicas das potências de ciclo, definimos o último vértice na ordem vizinho ao primeiro vértice da ordem.

Como em G o alcance máximo de uma aresta é k , entre cada par de vértices vizinhos existem pelo menos k vértices. Por contagem, concluímos que G possui pelo menos $(\alpha + 1)k + \alpha + 1$ vértices. Isto é:

$$n \geq (\alpha + 1)k + \alpha + 1 = \alpha(k + 1) + k + 1,$$

o que é uma contradição pois $n = \alpha(k + 1) + r$ e $1 \leq r \leq k$. Concluímos que $|I| \leq \alpha$.

Finalizamos a demonstração observando que as classes de coloração das cores alfa, exibidas em (2.11), possuem α elementos. $\square$

A seguir, vamos mostrar que $\chi(G) \geq k + 1 + \lceil r/\alpha \rceil$. Como já vimos que $\chi(G) \leq k + 1 + \lceil r/\alpha \rceil$, isto é suficiente para mostrar que a igualdade vale.

Suponha que $\chi(G) = k + \lceil r/\alpha \rceil$. Como existem $n = \alpha(k+1) + r$ vértices em G , podemos concluir que existe pelo menos uma classe de coloração com $\alpha + 1$ vértices. Pelo Lema 2.34, isto é uma contradição e o resultado segue. $\square$

Concluimos este capítulo usando o Teorema 2.32 para provar que as potências de ciclo com n múltiplo de $\Delta(G) + 1$ são tipo 1. Uma $(2k+1)$ -coloração total para este caso está exibida na Seção 2.2.5.

COROLÁRIO 2.35 *O grafo C_n^k , com n múltiplo de $2k+1$ é tipo 1.*

Demonstração: Seja $G^2 := C_n^{2k}$. Pelo Teorema 2.32, se

$$\chi(G^2) = \chi(C_n^{2k}) = \Delta(G) + 1 = 2k + 1,$$

então G é tipo 1. Pelo Teorema 2.33, se $\chi(C_n^j) = j + 1$, então n é múltiplo de $j + 1$. Fazendo $j = 2k$ temos que $\chi(C_n^{2k}) = 2k + 1$ quando n é múltiplo de $2k + 1$. $\square$

Capítulo 3

Bipartidos

Neste capítulo, estudamos o número cromático total de algumas subclasses de grafos bipartidos. Lembramos que McDiarmid e Sánchez-Arroyo [55] mostraram que determinar o número cromático total de grafos bipartidos k -regulares é NP -difícil para cada $k \geq 3$ fixo.

Inicialmente, determinamos o número cromático total das grades $m \times n$ *. Uma *grade* $m \times n$, $G_{m \times n}$, é um grafo simples com conjunto de vértices definido pelo produto cartesiano de $\{1, \dots, m\}$ e $\{1, \dots, n\}$, ou seja,

$$V(G_{m \times n}) := \{(i, j), \text{ onde } i \in \{1, \dots, m\} \text{ e } j \in \{1, \dots, n\}\},$$

e conjunto de arestas definido por

$$E(G_{m \times n}) := \{(i, j)(k, l) : |i - k| + |j - l| = 1, (i, j), (k, l) \in V(G_{m \times n})\}.$$

Posteriormente, abordamos as grades parciais. Dizemos que um grafo simples é uma *grade parcial* quando é um subgrafo arbitrário de uma grade $m \times n$. Conhece-se muito pouco a respeito de grades parciais, mesmo o seu reconhecimento é um problema aberto [9]. Para as grades parciais determinamos o número cromático total de alguns casos particulares. Os casos em que $\Delta(G_{m \times n}) \in \{0, 1, 2, 4\}$ são determinados usando-se resultados previamente conhecidos. Para os casos em que $\Delta(G_{m \times n}) = 3$ os resultados obtidos estão sumarizados no teorema abaixo.

* $m \times n$ grid

TEOREMA 3.1 *Seja $G := G_{m \times n}$, com $m, n \geq 2$ e diferente do C_4 . Se G possui no máximo três vértices de grau 3, ou se o maior ciclo induzido em G tem tamanho 4, então G é tipo 1.*

A próxima classe considerada é uma subclasse dos grafos bipartidos 3-regulares. Uma *quase-escada*[†], B_k , é um grafo bipartido 3-regular com uma bipartição (X_k, Y_k) , $X_k := \{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ e $Y_k := \{y_0, \dots, y_{k-1}\}$, tais que

$$\forall x_i \in X_k, \quad N(x_i) := \{y_i, y_{(i+1) \bmod k}, y_{(i+2) \bmod k}\}.$$

A Figura 3.1 mostra alguns exemplos nesta classe. Os mesmos grafos estão representados na Figura 3.3, em um desenho que justifica o nome escolhido para a classe.

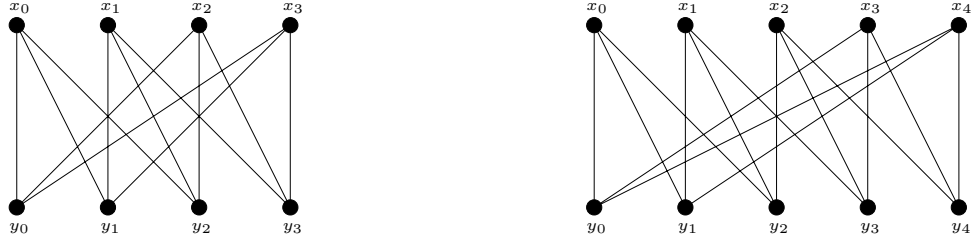


Figura 3.1: Os Grafos B_4 e B_5 , exemplos de quase-escadas.

O nosso estudo da coloração total desta classe mostrou que B_k , com k par, é tipo 1 e B_k , com k ímpar, é tipo 2. A propriedade fundamental que impede a construção de uma coloração total tipo 1 para o B_k , k ímpar, é o fato de que estes grafos não são planares.

Finalmente, a última classe considerada foi a dos cubos k -dimensionais. Um grafo Q_k é um *cubo k -dimensional*, $k \geq 1$, quando seu conjunto de vértices pode ser codificado como k -tuplas de 0's e 1's de forma que $e \in E(Q_k)$ se e somente se seus extremos diferem em exatamente uma coordenada. Mostramos que Q_k com $k \geq 3$ é tipo 1. Note que Q_2 é isomorfo ao C_4 , tipo 2; e Q_1 é composto de um único vértice, logo tipo 1.

Este trabalho foi aceito para apresentação no *International Colloquium on Graph Theory - 2005*, ICGT'05, e seu resumo estendido foi publicado no ENDM [15] dedicado ao colóquio. Sua versão completa foi aceita para publicação na revista *Ars Combinatoria* [12].

[†]near-ladder

3.1 Número cromático total de alguns grafos bipartidos

The total chromatic number
of some bipartite graphs

C. N. Campos

C. P. de Mello

The total chromatic number $\chi_T(G)$ is the least number of colours needed to colour the vertices and edges of a graph G such that no incident or adjacent elements (vertices or edges) receive the same colour. This work determines the total chromatic number of grids, particular cases of partial grids, near-ladders, and of k -dimensional cubes.

3.1.1 Introduction

Let $G := (V(G), E(G))$ be a simple graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. An *element* of G is a vertex or an edge of G . An edge $\{u, v\}$ is denoted by uv or vu . For a vertex $v \in V(G)$, $N(v)$ is the set of vertices of G that are adjacent to v .

For $S \subseteq V(G) \cup E(G)$ and $\mathcal{C}$ a set of colours, a *partial total colouring* of G is a mapping $\phi : S \rightarrow \mathcal{C}$ such that, for each pair of adjacent or incident elements $x, y \in S$, we have $\phi(x) \neq \phi(y)$. If $S = V(G) \cup E(G)$, then ϕ is a *total colouring*. If $|\mathcal{C}| = k$, then the mapping ϕ is called a *(partial) k -total colouring*. If $\phi(x) = c$ or there exists an element y incident with or adjacent to x such that $\phi(y) = c$, then we say that c *occurs* in x ; otherwise c *is missing* in x . If $S \subseteq E(G)$, then ϕ is a *(partial) edge colouring* and if $S \subseteq V(G)$, then ϕ is a *(partial) vertex colouring*.

The *total chromatic number* of G , $\chi_T(G)$, is the least integer k for which G admits a k -total colouring. Clearly, $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$. Sánchez-Arroyo [60] showed that deciding whether $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$ is *NP*-complete. McDiarmid and Sánchez-Arroyo [55] showed that even the problem of determining the total chromatic number of k -regular bipartite graphs is *NP*-hard, for each fixed $k \geq 3$. The *Total Colouring Conjecture (TCC)*, posed independently by Behzad [2] and Vizing [66], states that every simple graph G has $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$. If $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$, then G is a *type 1* graph; if $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$, then G is a *type 2* graph.

In this work we study the total chromatic number of some subclasses of bipartite graphs. Behzad et. al.[‡] [3] determined the total chromatic number of complete graphs, including the bipartite case. A *k-partite graph* is a generalization of bipartite graphs in which the vertex set is partitioned into k sets. A *complete k-partite graph* is a k -partite graph where every vertex of one part is adjacent to every vertex of all other parts and a *balanced k-partite graph* is a k -partite graph with all parts of the same size. Bermond [4] determined the total chromatic number of all balanced complete k -partite graphs. Yap [72] extended a previous result of Rosenfeld [59] showing that every complete k -partite graph verifies the TCC. Chew and Yap [24] and Hoffman and Rodger [48] showed that every complete k -partite graph having odd number of vertices is type 1.

Almost all graphs analysed in this work are planar graphs. The TCC was verified for planar graphs with maximum degree 7 in [61]; the total chromatic number was determined for planar graphs with large girth in [8]; and with maximum degree greater than 11 in [7]. Moreover, Zhang et. al.[§] [77] showed that outerplanar graphs with maximum degree greater than or equal to 3 are type 1.

Section 3.1.2 determines the total chromatic number of grids and of some particular cases of partial grids. Section 3.1.3 shows that near-ladder graphs with $|V(G)/2|^{\P}$ even are type 1; otherwise are type 2. Section 3.1.4 shows that Q_k , the k -dimensional cube, is type 1.

3.1.2 Grids and partial grids

A simple graph $G_{m \times n}$, with vertex set the cartesian product of $\{1, \dots, m\}$ and $\{1, \dots, n\}$, that is $V(G_{m \times n}) := \{(i, j), \text{ where } i \in \{1, \dots, m\} \text{ and } j \in \{1, \dots, n\}\}$, and edge set $E(G_{m \times n}) := \{(i, j)(k, l) : |i - k| + |j - l| = 1, (i, j), (k, l) \in V(G_{m \times n})\}$, is called an $m \times n$ *grid*. In fact, $G_{m \times n}$ is a cartesian product of P_m and P_n , path graphs on m and n vertices respectively. It is easy to see that grids are planar and bipartite. A *partial grid* is an arbitrary subgraph of a grid. We consider only connected partial grids.

In this section we prove that $G_{m \times n}$, with $m, n \geq 2$ and different from C_4 , is type 1 and determine $\chi_T(G)$ for some particular cases of partial grids. Partial grids are harder

[‡]Leia-se: “Behzad et al.”.

[§]Leia-se: “Zhang et al.”.

^{\P}Leia-se: “ $|V(G)|/2$ ”.

to work with than grids; for instance, recognition of grids is polynomial, but is an open problem for partial grids ([9]).

THEOREM 3.2 *Each graph $G_{m \times n}$, with $m, n \geq 2$ and different from C_4 , is type 1.*

Proof: First we consider the case when $m > 2$ and $n > 2$. Let $G := G_{m \times n}$ be a grid. Let π be a colour assignment for G that uses 5 colours defined as:

$$\pi((i, j)) := (2j + i - 2) \bmod 3; \quad (3.1)$$

$$\pi((i, j)(i, j + 1)) := (2j + i - 1) \bmod 3; \quad (3.2)$$

$$\pi((i, j)(i + 1, j)) := 4 - (i \bmod 2). \quad (3.3)$$

Now, we prove that π is a total colouring for G . In order to do this we show that the colour of each element of G is different from the colours of each of its adjacent and incident elements.

We start by considering edges $(i, j)(i + 1, j)$, coloured in (3.3). By construction, these edges have colours 3 or 4 and these colours do not occur in (3.1) or (3.2). Moreover, adjacent edges coloured in (3.3) have colours with different parities. We conclude that (3.3) is an edge colouring for the subgraph of G induced by these edges.

Now, we analyse the vertices of G . Let (i, j) be a vertex of G . By construction, $\pi((i, j)) = (2j + i - 2) \bmod 3$. First, we consider the vertices of G that are adjacent to (i, j) . These are, when they exist, $(i, j - 1)$, $(i, j + 1)$, $(i - 1, j)$, and $(i + 1, j)$, which have colours $(2j + i - 1) \bmod 3$, $(2j + i) \bmod 3$, $(2j + i) \bmod 3$, and $(2j + i - 1) \bmod 3$, respectively. Note that each colour is of the form $(a - b) \bmod 3$, where $a = 2j + i$ and $b \in \{0, 1\}$. Moreover, vertex (i, j) has $b = 2$, differing from the others by at least 1 unit and at most 2 units. Therefore, the colours of its adjacent vertices are different from $\pi((i, j))$.

Consider now the edges incident with (i, j) , that are, when they exist, edges $(i, j - 1)(i, j)$, $(i, j)(i, j + 1)$, $(i - 1, j)(i, j)$, and $(i, j)(i + 1, j)$, which have colours $(2j + i) \bmod 3$, $(2j + i - 1) \bmod 3$, $4 - (i - 1) \bmod 2$, and $4 - i \bmod 2$, respectively. The colours of the first two edges differ from the colour of (i, j) by the same reasons of the previous case and the last two use colours 3 and 4, which are not used in the vertices of G .

In order to finish the proof of this case we have to show that two adjacent edges whose colour was^{||} given by (3.2) have different colours. To see this, consider an edge

^{||}Leia-se: “colours were”.

$(i, j)(i, j+1)$ and its two adjacent edges $(i, j-1)(i, j)$ and $(i, j+1)(i, j+2)$ whose colours are $(2j+i-1) \bmod 3$, $(2j+i) \bmod 3$, and $(2j+i+1) \bmod 3$, respectively. Again, these three colours are different and we are done.

Now, we assume that one of $\{m, n\}$ is 2. By symmetry, we can assume that $m = 2$. These graphs have maximum degree 3 because $n > 2$ and their colourings can be obtained directly from the previous colouring π . Note that all edges whose colour was** assigned in (3.3) have the same colour. We conclude that only four colours are used and the result follows. $\square$

Let G be a connected partial grid. If $\Delta(G) = 0$ then G is composed by only one vertex, a type 1 graph. If $\Delta(G) = 1$, then $G \cong K_2$, a type 2 graph. If $\Delta(G) = 2$, then it is a path of length at least 2, a type 1 graph, or a cycle that is type 1 when $|V(G)| \equiv 0 \bmod 3$, and type 2 otherwise ([73]). If $\Delta(G) = 4$, then G is type 1 since it is a subgraph of a $G_{m \times n}$ with $m, n > 2$ that preserves the maximum degree and those grids are type 1. Therefore, the remaining case is $\Delta(G) = 3$. For these graphs we determine the total chromatic number of some cases.

THEOREM 3.3 *Let G be a connected partial grid with maximum degree 3. If the length of the largest induced cycle of G is 4, then G is type 1.*

Proof: First, we need an additional definition and two auxiliary results stated in Lemma 3.4 and Lemma 3.5. We define a *ladder graph*, L_n , as a $G_{2 \times n}$, $n \geq 2$, and call its four vertices of degree 2 *corners*.

LEMMA 3.4 *Every tree is type 1, except for K_2 that is type 2.*

Proof: Let T be a tree. If T has no edges, then T is type 1. If T is K_2 , then T is type 2. Suppose now that $\Delta(T) \geq 2$.

Let $u \in V(T)$ be a vertex of degree 1. Let $T' := T - u$. If T' is K_2 , then it is type 2 and we can easily extend any 3-total colouring of T' to T without adding new colours. Now, we can assume that T' is not isomorphic to K_2 . By induction hypothesis, there exists a $(\Delta(T') + 1)$ -total colouring for T' .

Let v be the vertex of T adjacent to u . If $\Delta(T') = \Delta(T)$, then v is not a vertex of maximum degree in T' . Therefore, there exists a colour missing in v . Thus, assign this

**Leia-se: “colours were”.

missing colour to edge uv . If $\Delta(T') = \Delta(T) - 1$, then v is a vertex of maximum degree in T' . Therefore, we assign a new colour to edge uv . Finally, in both cases, we assign to vertex u a colour different from the colours of uv and v . $\square$

LEMMA 3.5 *If G is a connected partial grid with maximum degree 3 having largest induced cycle with length 4, then G can be decomposed in connected subgraphs each of which is isomorphic to a ladder or a tree. Moreover, there exists an ordering of these subgraphs $G_1, \dots, G_k$, where, for each G_i , $i > 1$, there exists exactly one G_j , such that $j < i$ and $V(G_i) \cap V(G_j) \neq \emptyset$. In particular, $|V(G_i) \cap V(G_j)| = 1$.*

Proof: Let F be the subgraph induced by the edges of G that do not belong to ladders. Note that F is a forest since a largest induced cycle has length 4. Let G^* be the intersection graph of the maximal ladders of G and the connected components of F . Two maximal ladders are always vertex disjoint because $\Delta(G) = 3$. Therefore, if two vertices of G^* are adjacent, then one of them represents a maximal ladder and the other a connected component of F . Clearly G^* is connected. Moreover, we claim that it is a tree; otherwise there would exist in G a cycle of length greater than 4 or a vertex of degree greater than 3.

Now, choosing a vertex to be the root, we perform a depth-first-search in G^* labeling the vertices $1, \dots, k$ in the order that they are visited. The subgraph represented by vertex i is called G_i .

By construction, G_i and G_j , $i \neq j$, have at most one vertex in common. Moreover, for each G_i there exists only one G_j such that $V(G_i) \cap V(G_j) \neq \emptyset$ that is the father of i in the depth-first tree. Therefore, $j < i$. $\square$

Let G be a graph as stated in the hypothesis. Let $G_1, \dots, G_k$ be the ordering of the connected subgraphs of G stated in Lemma 3.5. Note that each connected subgraph G_i has a 4-total colouring, either by Lemma 3.4, or by Theorem 3.2. Let π_i be such a 4-total colouring for G_i .

Starting from π_2 and following the order, we adjust the colours of π_i as follows to ensure that $\cup_{i=1}^k \pi_i$ is a total colouring for G . Let G_i be the next graph in the ordering. By Lemma 3.5, there exists only one G_j , with $j < i$, such that $V(G_i) \cap V(G_j) \neq \emptyset$ and, in particular, $|V(G_i) \cap V(G_j)| = 1$. Adjust the colours of π_i so that: (i) $v \in V(G_i) \cap V(G_j)$

has the same colour in π_i as in π_j ; (ii) the edges of G_i that are incident with v have colours missing in v in G_j . Note that by Lemma 3.5 and because the maximum degree of v in G is 3, these adjustments of colours are always possible. $\square$

THEOREM 3.6 *Let G be a connected partial grid with maximum degree 3. If G has at most three vertices of degree 3, then G is type 1.*

Proof: We consider three cases depending on the number of vertices of degree 3.

CASE 1 *Graph G has exactly one vertex of degree 3.*

We prove the assertion by induction. Since there exists a vertex of degree 3, graph G has at least 4 vertices. Moreover, there exists only one vertex of degree 3; thus, we conclude that there exists at least one vertex of degree 1. If $|V(G)| = 4$, then G is isomorphic to $K_{1,3}$, a type 1 graph.

Let G be a graph as in the hypothesis and let v be a vertex of degree 1. Let $G' := G - v$. If $\Delta(G') = 2$, then G' is a path or a cycle. So, there exists a 4-total colouring π' for G' . If $\Delta(G') = 3$, then G' has a 4-total colouring π' by induction hypothesis.

We construct π , a 4-total colouring for G , from π' . Let u be the vertex adjacent to v . The degree of u in G' is at most 2. Therefore, there exists a colour that can be assigned to edge uv . Moreover, vertex v is adjacent only to u and it is incident only with uv . Therefore, there exist two colours that can be assigned to v and the result follows.

CASE 2 *Graph G has exactly two vertices of degree 3.*

Let u and v be the two vertices of degree 3. Suppose first that there exists a vertex w of degree 1 adjacent to one of $\{u, v\}$. Let $G' := G - w$. Graph G' has exactly one vertex of degree 3. By Case 1, G' has a 4-total colouring π' , which can be easily expanded to a 4-total-colouring of G as described there.

Thus, we can assume that every vertex adjacent to u or v has degree at least two. Suppose first that there exists an induced path $P := (x_1, x_2, x_3, x_4)$, such that $x_1 \in \{u, v\}$, $x_2, x_3 \notin \{u, v\}$, and, if possible, $x_4 \notin \{u, v\}$. Let $G' := G - \{x_2, x_3\}$. Graph G' has at most one vertex of degree 3. Therefore, by previous cases, G' has a 4-total colouring π' . It is easy to see that π' can be expanded to a 4-total colouring of G , with perhaps a few minor colour adjustments.

Finally, if the previous cases do not apply, we claim that G is isomorphic to one of the type 1 graphs exhibited in Figure 3.2.

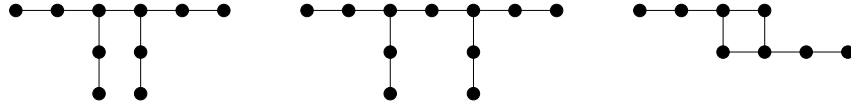


Figure 3.2: Each case has exactly two vertices of degree 3 and is type 1.

CASE 3 *Graph G has exactly three vertices of degree 3.*

We prove this case by induction. Since G has three vertices of degree 3, $|V(G)| \geq 7$. If $|V(G)| = 7$, then G is not a tree and the size of a largest induced cycle is 4. Therefore, by Theorem 3.3, G is type 1.

Graph G has at least one vertex of degree 1, say v . Let $G' := G - v$. Graph G' has two or three vertices of degree 3 depending on the degree of the vertex adjacent to v . If G' has two vertices of degree 3, then there exists a 4-total colouring π' for G' by Case 2. If G' has three vertices of degree 3, then there exists a 4-total colouring π' for G' by induction hypothesis. For each case we construct a 4-total colouring for G from π' as it was done in Case 1. $\square$

3.1.3 Near-ladder graphs

The *near-ladder graph*, B_k , is a 3-regular bipartite connected graph with bipartition (X_k, Y_k) , $X_k := \{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ and $Y_k := \{y_0, \dots, y_{k-1}\}$, such that for each $x_i \in X_k$, $N(x_i) := \{y_i, y_{(i+1) \bmod k}, y_{(i+2) \bmod k}\}$.

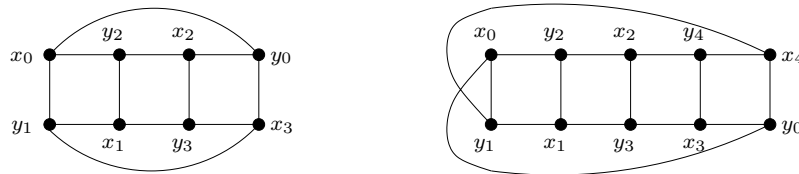


Figure 3.3: Graphs B_4 and B_5 .

Near-ladders have several automorphisms. We remark two of them: (i) the σ -automorphism, in which graph B_k is rotated once along the vertical axis, is defined as $\sigma(x_i) := y_{i+2}$ and $\sigma(y_i) := x_i$; (ii) the τ -automorphism, in which graph B_k is flipped along the horizontal axis, is defined as $\tau(x_i) := y_{i+1}$ and $\tau(y_i) := x_{i-1}$. All operations on indexes are modular.

Near-ladders with k of different parities have important differences in their structures. Graphs B_k , k even, are planar graphs (yet not outerplanar) and B_k , k odd, are not. Figure 3.4 shows drawings that manifest this property.

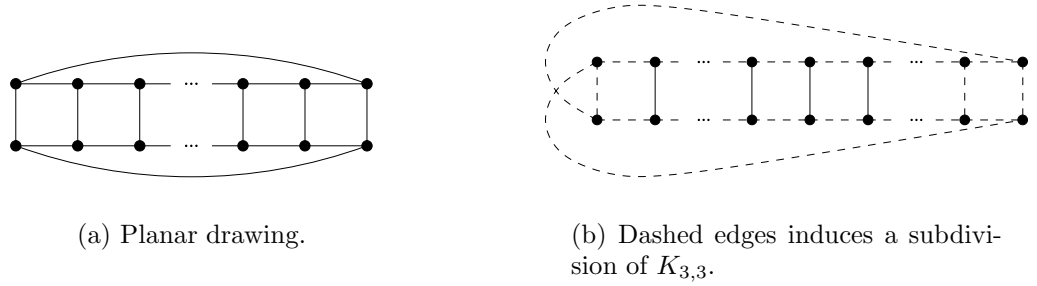


Figure 3.4: Near ladder graphs: (a) k even; (b) k odd.

For B_k and elements $x_i, y_{i+1}, x_i y_{i+2}, y_{i+1} x_{i+1}$, the pairs $x_i, y_{i+1} x_{i+1}$ and $y_{i+1}, x_i y_{i+2}$ are called *equivalent pairs*. The edges of an equivalent pair are called a *parallel pair*.

LEMMA 3.7 *Let $G := B_k$ and let π be a 4-total colouring for the subgraph $G_{2 \times k}$ obtained by removing exactly one parallel pair from G . Then, for each remaining equivalent pairs $x_i, y_{i+1} x_{i+1}$ and $y_{i+1}, x_i y_{i+2}$: (i) the edges of parallel pair $x_i y_{i+2}$ and $y_{i+1} x_{i+1}$ have different colours; (ii) either $\pi(x_i) = \pi(y_{i+1} x_{i+1})$ or $\pi(y_{i+1}) = \pi(x_i y_{i+2})$, but not both.*

Proof: In order to prove (i) item, suppose that $\pi(x_i y_{i+2}) = \pi(y_{i+1} x_{i+1})$. Elements y_{i+2}, x_{i+1} , and $x_{i+1} y_{i+2}$ have distinct colours and different from $\pi(x_i y_{i+2})$. Moreover, $\pi(x_{i+1}) = \pi(y_{i+2} x_{i+2})$ and $\pi(y_{i+2}) = \pi(x_{i+1} y_{i+3})$. Therefore, elements x_{i+2}, y_{i+3} , and $x_{i+2} y_{i+3}$ have only two colours assigned: $\pi(x_i y_{i+2})$ and $\pi(x_{i+1} y_{i+2})$, a contradiction. We conclude that $\pi(x_i y_{i+2}) \neq \pi(y_{i+1} x_{i+1})$.

Now, we prove (ii) item. First note that $\pi(x_i) \neq \pi(y_{i+1})$, $\pi(x_i) \neq \pi(x_i y_{i+2})$, and $\pi(y_{i+1}) \neq \pi(y_{i+1} x_{i+1})$ because they are adjacent or incident. Moreover, we have already proved that $\pi(x_i y_{i+2}) \neq \pi(y_{i+1} x_{i+1})$. Suppose that $\pi(x_i) \neq \pi(y_{i+1} x_{i+1})$ and

$\pi(y_{i+1}) \neq \pi(x_i y_{i+2})$. We conclude that $\pi(x_i)$, $\pi(y_{i+1})$, $\pi(y_{i+1} x_{i+1})$, and $\pi(x_i y_{i+2})$ are pairwise distinct. Edge $x_i y_{i+1}$ is incident with or adjacent to all these four elements. Therefore, $\pi(x_i y_{i+1})$ must be different from each one, contradiction. We conclude that either $\pi(x_i) = \pi(y_{i+1} x_{i+1})$ or $\pi(y_{i+1}) = \pi(x_i y_{i+2})$.

Suppose now that $\pi(x_i) = \pi(y_{i+1} x_{i+1})$ and $\pi(y_{i+1}) = \pi(x_i y_{i+2})$. Then, $\pi(x_{i+1})$, $\pi(y_{i+2})$, and $\pi(x_{i+1} y_{i+2})$ are different from $\pi(x_i)$ and $\pi(y_{i+1})$, a contradiction since only four colours are allowed and x_{i+1} , y_{i+2} , $x_{i+1} y_{i+2}$ are adjacent to or incident with each other. $\square$

Let π be a partial 4-total colouring for B_k . Consider the equivalent pairs x_i , $y_{i+1} x_{i+1}$ and y_{i+1} , $x_i y_{i+2}$. If $\pi(x_i) = \pi(y_{i+1} x_{i+1})$, then we say that for these equivalent pairs the *anchor* is x_i ; otherwise y_{i+1} is said to be the anchor.

LEMMA 3.8 *Let $G := B_k$ and let π be a 4-total colouring for the subgraph $G_{2 \times k}$ obtained by removing exactly one parallel pair from G . If x_i is an anchor, then y_i and y_{i+2} are the anchors of their respective equivalent pairs. Otherwise, that is if y_{i+1} is the anchor, x_{i-1} and x_{i+1} are the anchors of their respective equivalent pairs.*

Proof: Suppose that x_i is an anchor; then $\pi(x_i) = \pi(y_{i+1} x_{i+1})$. We first prove that y_{i+2} is an anchor. By Lemma 3.7, either $\pi(y_{i+2}) = \pi(x_{i+1} y_{i+3})$ or $\pi(x_{i+1}) = \pi(y_{i+2} x_{i+2})$. Suppose that $\pi(x_{i+1}) = \pi(y_{i+2} x_{i+2})$. Since x_{i+1} is incident with $y_{i+1} x_{i+1}$, $\pi(x_{i+1}) \neq \pi(y_{i+1} x_{i+1})$. Therefore, $\pi(x_i y_{i+2})$, $\pi(y_{i+2})$, and $\pi(x_{i+1} y_{i+2})$ are different from $\pi(x_i)$ and $\pi(x_{i+1})$. We conclude that there exist only two colours in $\{\pi(x_i y_{i+2}), \pi(y_{i+2}), \pi(x_{i+1} y_{i+2})\}$, a contradiction since these elements are adjacent to and incident with each other. If y_i is not an anchor, then x_{i-1} is an anchor by Lemma 3.7. Then, y_{i+1} is an anchor by our previous argument, but this contradicts Lemma 3.7 since x_i is an anchor. Now, the case in which y_{i+1} is an anchor follows from τ -simmetry. $\square$

THEOREM 3.9 *Let $G := B_k$, k odd. Then, G is type 2.*

Proof: We first prove that G is not type 1. Suppose the contrary and let π be a 4-total colouring for G . By τ -automorphism, we assume that $\pi(x_0) = \pi(y_1 x_1)$. Applying Lemma 3.8 successively, we have that all vertices x_i , y_i with i even are anchors. Therefore, x_{k-1} and y_0 are anchors, which implies that $\pi(x_{k-1}) = \pi(y_0 x_0)$ and $\pi(y_0) = \pi(x_{k-1} y_1)$, contradicting Lemma 3.7. We conclude that there is no 4-total colouring for B_k , with

k odd. Moreover, Rosenfeld [59] and Vijayaditya [65] proved that $\chi_T(G) \leq 5$ for cubic graphs. Therefore, $\chi_T(B_k) = 5$, a type 2 graph. $\square$

Let $B_k := (X_k, Y_k)$ and $B_\ell := (X_\ell, Y_\ell)$ be two near-ladder graphs. It is easy to check that the *glueing operation*, defined below, generates $B_{k+\ell} = (X_{k+\ell}, Y_{k+\ell})$ from B_k and B_ℓ .

- (i) relabel the vertices of $X_\ell \cup (Y_\ell \setminus \{y_0\})$ adding k in each of its indexes, that is $X_\ell := \{x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+\ell-1}\}$ and $Y_\ell := \{y_0, y_{k+1}, \dots, y_{k+\ell-1}\}$;
- (ii) relabel vertex $y_0 \in Y_k$ with y_k ;
- (iii) let $X_{k+\ell} := X_k \cup X_\ell$, $Y_{k+\ell} := Y_k \cup Y_\ell$, and $E(B_{k+\ell}) := (E(B_k) \cup E(B_\ell) \cup E_{in}) \setminus E_{out}$, where $E_{in} := \{x_0 y_0, y_k x_k, y_1 x_{k+1}, x_{k-1} y_{k+1}\}$ and $E_{out} := \{x_0 y_k, y_1 x_{k-1}, x_k y_0, y_{k+1} x_{k+1}\}$.

Figure 3.5 shows an example of the glueing operation.

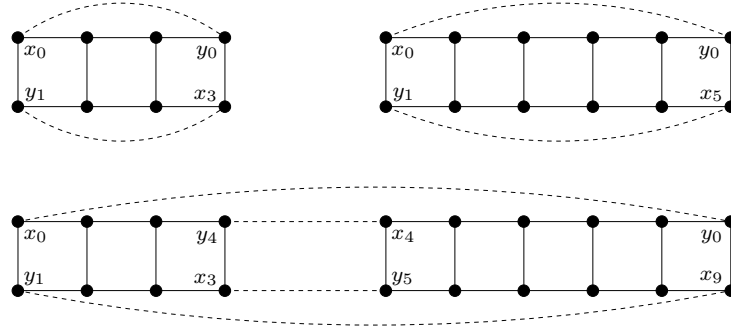
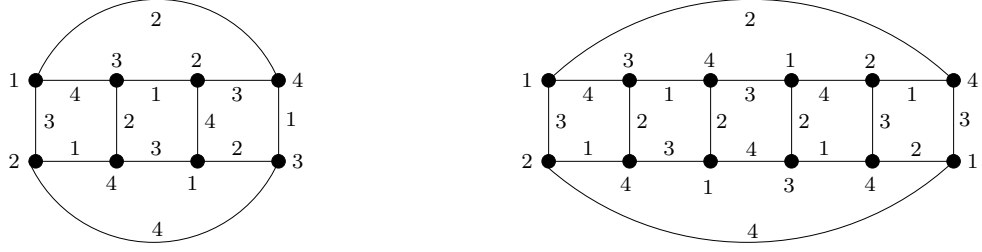


Figure 3.5: Glueing of B_4 and B_6 . The dashed edges in B_4 and B_6 are the edges of E_{out} and the dashed edges of B_{10} are edges of E_{in} .

THEOREM 3.10 *Each B_k with k even is type 1.*

Proof: The proof is by induction. For the basis case we construct 4-total colourings π_4 and π_6 for B_4 and B_6 , respectively, shown in Figure 3.6.

By induction hypothesis, there exists a 4-total colouring for B_{k-4} , $k \geq 8$. Adjust π_{k-4} so that x_0 is the anchor of equivalent pairs $x_0, y_1 x_1$ and $y_1, x_0 y_2$, and so that $\pi_{k-4}(x_0) = \pi_4(x_0)$, $\pi_{k-4}(x_0 y_0) = \pi_4(x_0 y_0)$, $\pi_{k-4}(x_0 y_1) = \pi_4(x_0 y_1)$, and $\pi_{k-4}(x_0 y_2) =$

Figure 3.6: 4-total colouring of B_4 and B_6 .

$\pi_4(x_0y_2)$. Note that, by Lemma 3.7, these adjustments imply that $\pi_{k-4}(y_1) = \pi_4(y_1)$ and $\pi_{k-4}(y_1x_{k-5}) = \pi_4(y_1x_3)$.

Graph B_k , k even and $k \geq 8$, can be obtained by glueing B_4 and B_{k-4} . A 4-colour assignment π for B_k can be constructed from π_4 and π_{k-4} as follows.

- (i) if e is an element of B_k corresponding to an element of $B_i \setminus E_{out}$, $i = 4, k - 4$, then $\pi(e) := \pi_i(e)$;
- (ii) colour edges of E_{in} as follows: $\pi(x_0y_0) := \pi_4(x_0y_0)$, $\pi(y_4x_4) := \pi_4(x_0y_0)$, $\pi(x_3y_5) := \pi_4(y_1x_3)$, and $\pi(y_1x_{k-1}) := \pi_4(y_1x_3)$.

Now, we show that π is a total colouring for B_k . By construction of π , each element of B_k received a colour. Colourings of the two subgraphs induced by $S := \{x_0, \dots, x_3, y_1, \dots, y_4\}$ and by $V(B_k) \setminus S$ are partial total colourings of B_k since the colours of their elements came from π_4 and π_{k-4} . Since π_4 is a total colouring, $\pi(x_0) \neq \pi(y_4)$ (remember that $y_4 \in V(B_k)$ corresponds to vertex $y_0 \in V(B_4)$) and $\pi(y_1) \neq \pi(x_3)$. Analogously, since π_{k-4} is a total colouring, $\pi(x_4) \neq \pi(y_0)$ and $\pi(y_5) \neq \pi(x_{k-1})$. By previous adjustments in π_{k-4} , $\pi(x_0) = \pi(x_4)$ and $\pi(y_1) = \pi(y_5)$. We conclude that $\pi(x_0) \neq \pi(y_0)$, $\pi(y_4) \neq \pi(x_4)$, $\pi(y_1) \neq \pi(x_{k-1})$, and $\pi(x_3) \neq \pi(y_5)$.

In order to conclude the proof, we have to analyse the edges of E_{in} . Let uv be an edge of E_{in} . Without loss of generality, by the glueing operation, u is a vertex from B_4 , v from B_{k-4} and there exist exactly two edges in E_{out} , uw_1 and w_2v corresponding to edges of B_4 and B_{k-4} that do not exist in B_k . By the adjustments done in π_{k-4} we conclude that these three edges have the same colour and the result follows. $\square$

3.1.4 k -dimensional cube

In this section we show that k -dimensional cubes are type 1 graphs. A k -dimensional cube Q_k , $k \geq 1$, or k -cube for short, is a graph whose set of vertices is comprised by the ordered k -tuples of 0's and 1's, two vertices being joined if and only if they differ in exactly one coordinate. For a vertex v of Q_k we denote v by $(b_1 b_2 \dots b_k)$, where $b_i \in \{0, 1\}$ and $(b_1 b_2 \dots b_k)$ is its ordered k -tuple. It is not difficult to see that the k -cube is bipartite, k -regular, with 2^k vertices and $k2^{k-1}$ edges.

It is well known that Q_k can be recursively constructed. Let G_0 and G_1 be two graphs isomorphic to Q_k . Then, Q_{k+1} can be obtained from G_0 and G_1 in the following way: (i) for each vertex $v \in V(G_i)$ that corresponds to vertex $(b_1 \dots b_k)$ of Q_k , denote v by $(b_1 \dots b_k i)$ ($(b_1 \dots b_k 0)$ and $(b_1 \dots b_k 1)$ are called a *corresponding pair*); (ii) $V(Q_{k+1}) := V(G_0) \cup V(G_1)$ and $E(Q_{k+1}) := E(G_0) \cup E(G_1) \cup M$, where $M := \{uv : u \in V(G_0), v \in V(G_1) \text{ and } u, v \text{ is a corresponding pair}\}$.

We show that $\chi_T(Q_k) = \Delta(Q_k) + 1$, for each $k \geq 3$. Note that Q_1 is isomorphic to K_2 and Q_2 is isomorphic to C_2 , that are both type 2 graphs.

THEOREM 3.11 *For Q_k , $k \geq 3$, there exists a $(k+1)$ -total colouring of Q_k such that only four colours occur in its vertex set.*

Proof: We prove the assertion by induction. For the basis case we construct an explicit 4-total colouring for the 3-cube, shown in Figure 3.1.4. We call these four colours *base colours*.

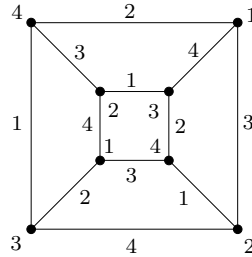


Figure 3.7: 4-total colouring of Q_3 .

We construct π , a colour assignment for Q_{k+1} that uses $k+2$ colours, from two previously coloured copies of Q_k . The following algorithm describes the construction

procedure:

- (i) Let G_0 and G_1 be two copies of Q_k . By induction hypothesis there exists a $(k+1)$ -total colouring π_i for G_i , $i = 0, 1$ such that only four colours occur in its vertex set. Let $1, \dots, k+1$ be the used colours and let $1, \dots, 4$ be the base colours. Adjust the colours so that corresponding pairs have the same colours.
- (ii) For G_1 , exchange colours $1 \leftrightarrow 4$ and $2 \leftrightarrow 3$.
- (iii) Construct Q_{k+1} from G_0 and G_1 , by using the previous recursive procedure.
- (iv) Assign colour $k+2$ to the edges of perfect matching M that join the two copies.

We show that π is a $(k+2)$ -total colouring of $G := Q_{k+1}$. Clearly, π uses $k+2$ colours and each element of Q_{k+1} received a colour. Moreover, the colouring of each subgraph H_i induced by vertices $\{v : v = (b_1 \dots b_k, i)\}$, $i = \{0, 1\}$, is a partial $(k+1)$ -total colouring. Note that there do not exist incident edges e_0 and e_1 such that $e_i \in H_i$. Moreover, the edges of (iv) received a new colour.

In order to finish the proof we have to show that the ends of edges coloured in (iv) have different colours. These edges join the corresponding pairs in H_0 and H_1 . Let v_0, v_1 be a corresponding pair, where $v_i = (b_1 \dots b_k, i)$. From (i), $\pi(v_0) = \pi(v_1)$ and from (ii) $\pi(v_1) \neq \pi(v_0)$ and the result follows. $\square$

Acknowledgements

We are grateful to Professor Ricardo Dahab for his careful reading which helped to improve earlier versions of this work. We also wish to acknowledge the anonymous referee's careful contributions.

Capítulo 4

Grafos 3-cliques

Neste capítulo está exposto o estudo inicial do número cromático total dos grafos que são obtidos pela união de três grafos completos e possuem exatamente três cliques maximais. A determinação do número cromático total destes grafos é o nosso foco atual de trabalho e este capítulo reflete a forma como o problema tem sido abordado e o que foi formalizado até o momento.

Dado um grafo G , dizemos que $S \subseteq V(G)$ é uma *clique* se $G[S]$ é um grafo completo. Dados dois grafos G_1 e G_2 , o grafo G tal que $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ é dito a *união* de G_1 e G_2 .

Um grafo G , conexo, é um *grafo 2-cliques* se e somente se G é a união de $G[A]$ e $G[B]$, onde A e B são duas cliques maximais distintas. Um grafo G , conexo, é um *grafo 3-cliques* se e somente se G possui exatamente três cliques maximais distintas A , B , e C e, além disso, G é a união de $G[A]$, $G[B]$ e $G[C]$. Por definição, pelo menos um de $(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)$, $(A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$ e $(B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$ é vazio pois $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ não pode ser uma clique maximal distinta de A , B , C . Vamos supor que $(A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C) = \emptyset$. A Figura 4.1 exibe um grafo nesta classe.

Inicialmente, determinamos o número cromático total para os grafos 3-cliques que possuem vértice universal, isto é, com $\Delta(G) = |V(G)| - 1$, como é o caso do grafo da figura anterior. Os grafos 3-cliques que não possuem vértice universal são grafos indiferença, podendo ser representados como na Figura 4.2, e seu número cromático total é conhecido para o caso em que o grau máximo é par [32]. Estes resultados, bem como a determinação do número cromático total dos grafos 2-cliques estão expostos na Seção 4.1.

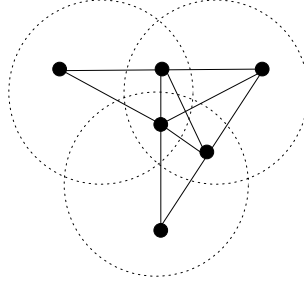


Figura 4.1: Grafo 3-cliques com vértice universal.

Na Seção 4.2 estão exibidos os resultados formalizados até o momento para o caso em que o grau máximo é ímpar.

4.1 Preliminares

Em 1967, Behzad et al. [3] provaram que os grafos completos com um número par de vértices são tipo 2 e os grafos completos com um número ímpar de vértices são tipo 1. Na Seção 1.2 exibimos uma coloração total ótima para os grafos completos e a denominamos coloração padrão. Esta coloração será muito utilizada ao longo desta seção.

O seguinte teorema estabelece o número cromático total dos grafos com um número par de vértices e que possuem vértice universal. Este resultado foi provado por Hilton [42] e tem um papel importante neste capítulo.

TEOREMA 4.1 (HILTON 1989) *Seja G um grafo com $|V(G)| = 2n$ e $\Delta(G) = 2n - 1$. O grafo G é tipo 1 se e somente se $|E(\overline{G})| + \alpha'(\overline{G}) \geq |V(G)|/2$, onde $\alpha'(\overline{G})$ é o tamanho do maior conjunto de arestas independentes em $\overline{G}$.*

Os grafos que possuem um número par de vértices com $\Delta(G) = |V(G)| - 1$ verificam a TCC pois são subgrafos de um $K_{|V(G)|}$ (com o mesmo grau máximo), que são tipo 2. Assim, o Teorema 4.1 pode ser reescrito da seguinte forma:

TEOREMA 4.2 *Seja G um grafo com $|V(G)| = 2n$ e $\Delta(G) = 2n - 1$. Então, considerando*

$\alpha'(\overline{G})$ o tamanho do maior conjunto de arestas independentes em $\overline{G}$, temos que

$$\chi_T(G) = \begin{cases} \Delta(G) + 1 & \text{se } |E(\overline{G})| + \alpha'(\overline{G}) \geq |V(G)|/2; \\ \Delta(G) + 2 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O próximo resultado estabelece o número cromático total dos grafos 2-cliques e dos grafos 3-cliques com vértice universal, isto é, aqueles onde $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

TEOREMA 4.3 *Se G é um grafo 2-cliques ou G é um grafo 3-cliques com $\Delta(G) = |V(G)| - 1$, então*

$$\chi_T(G) := \begin{cases} \Delta(G) + 2 & \text{se } |V(G)| \text{ é par e } |E(\overline{G})| + \alpha'(\overline{G}) < |V(G)|/2; \\ \Delta(G) + 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração: Suponha inicialmente que $|V(G)|$ seja ímpar. Neste caso, G é um subgrafo de $K_{|V(G)|}$, grafo completo com um número ímpar de vértices, com o mesmo grau máximo. Como estes grafos são tipo 1, isto é suficiente para mostrar que G também o é. Suponha agora que $|V(G)|$ seja par. Como $\Delta(G) = |V(G)| - 1$, o resultado segue diretamente do Teorema 4.2. $\square$

Pelo Teorema 4.3, podemos assumir que G é um grafo 3-cliques com $A \cap B \cap C = \emptyset$. Para simplificar a notação, os conjuntos $A \cap B \cap C$, $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ serão denotados ABC , AB , AC e BC , respectivamente. Além disso, definimos $A' := A \setminus AB$, $B' := B \setminus (AB \cup BC)$, e $C' := C \setminus BC$. A Figura 4.2 exibe o grafo G esquematizado.

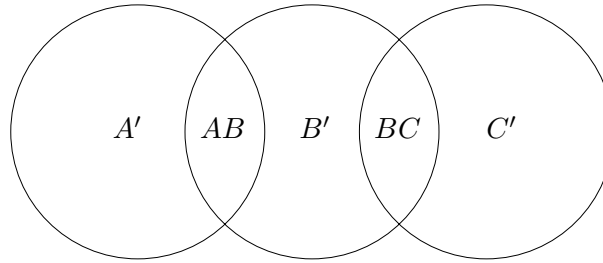


Figura 4.2: Graph G .

Por contagem, concluímos que os vértices de grau máximo estão, ou em AB , ou em BC , dependendo da relação de tamanho entre os conjuntos A' e C' . Assim, vamos assumir

que $|A'| \geq |C'|$ e portanto os vértices de grau máximo estão em AB quando $|A'| > |C'|$; e em $AB \cup BC$ quando $|A'| = |C'|$.

Note que neste caso o grafo G é um grafo indiferença. Figueiredo et al. [32] provaram que este grafos são tipo 1 quando $\Delta(G)$ é par. A seguir, exibimos o *algoritmo espelhado*, que constrói uma coloração total com $\Delta(G) + 1$ cores para G quando $\Delta(G)$ é par, e uma coloração total com $\Delta(G) + 2$ cores quando $\Delta(G)$ é ímpar. O algoritmo espelhado é basicamente o algoritmo *pullback* criado por Figueiredo et al. [32]. Concluimos esta seção com a demonstração de que a coloração obtida através do algoritmo espelhado possui as propriedades citadas.

ALGORITMO ESPELHADO

- (i) Seja $G' := G[A \cup B]$. Seja π_K a coloração padrão de $K_{|V(G')|}$ e π a restrição da coloração π_K aos elementos de G' .
- (ii) Seja f uma correspondência injetora dos vértices de C' nos vértices de A' . Para cada $v \in C'$ faça: $\pi(v) := \pi(u)$ onde $u \in A'$ e $f(v) = u$.
- (iii) Associe cores às arestas que possuem pelo menos um extremo em C' usando a coloração padrão considerando $n = |V(G')| + (1 - |V(G')| \bmod 2)$.

TEOREMA 4.4 *Seja G um grafo 3-cliques com $ABC = \emptyset$ e $|A'| \geq |C'|$. Então, o algoritmo espelhado constrói uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total para G quando $\Delta(G)$ é par e uma $(\Delta(G) + 2)$ -coloração total para G quando $\Delta(G)$ é ímpar.*

Demonstração: Inicialmente note que o algoritmo espelhado atribui cores a todos os elementos de G . No caso de $\Delta(G)$ par, o grafo $K_{|V(G')|}$ possui um número ímpar de vértices. Portanto, a coloração obtida usa $|V(G')| = \Delta(G') + 1 = \Delta(G) + 1$ cores. No caso de $\Delta(G)$ ímpar, $K_{|V(G')|}$ tem um número par de vértices e é usada uma cor a mais pois os grafos completos com um número par de vértices são tipo 2. Vamos agora mostrar que a atribuição de cores é uma coloração total para G .

A coloração π construída em (i) é uma coloração total para G' , portanto uma coloração total parcial para G . Por construção de π , todos os vértices de G' possuem cores distintas,

logo os vértices de C' possuem cores distintas dos vértices de BC . Além disso, os vértices de C' não são adjacentes aos vértices de A' . Portanto, após (ii), temos uma coloração de vértices para G . A atribuição de cores fornecida em (iii) é uma coloração de arestas para $G[C]$. As cores das arestas que possuem ambos os extremos em C' não conflitam com as cores das arestas coloridas em (i) porque as arestas destes dois conjuntos não são adjacentes. Por outro lado, as arestas que possuem exatamente um extremo em C' também não geram conflitos porque dada uma aresta uv , $u \in BC$ e $v \in C'$, colorida com a cor c , não existe em G a aresta uw , tal que $w \in A'$ e $f(v) = w$, que é a aresta que recebe a cor c em π_K . Portanto, o algoritmo espelhado fornece uma coloração de arestas para G . Concluimos a demonstração lembrando que todo vértice possui uma cor diferente das cores de suas arestas incidentes porque a coloração foi obtida a partir da coloração padrão de grafos completos. $\square$

4.2 Grafos 3-cliques com grau máximo ímpar

Esta seção estuda o número cromático total de alguns casos particulares de grafos 3-cliques com grau máximo ímpar e $ABC = \emptyset$. O primeiro teorema mostra uma condição suficiente para que estes grafos sejam tipo 2. Até o momento, estes são os únicos grafos tipo 2 encontrados nesta classe.

TEOREMA 4.5 *Seja G um grafo 3-cliques com $\Delta(G)$ ímpar, $ABC = \emptyset$ e $|A'| \geq |C'|$. Se*

$$|A'|(|B'| + |BC|) + \min\{|A'|, |B'| + |BC|\} < \frac{|A'| + |AB| + |B'| + |BC|}{2},$$

então G é tipo 2.

Demonstração: Seja $G' := G[A \cup B]$. Como $\Delta(G') = \Delta(G)$ é ímpar, temos que $|V(G')|$ é par. Pelo Teorema 4.2, temos que G' é tipo 1 se e somente se

$$|E(\overline{G'})| + \alpha'(\overline{G'}) \geq \frac{|V(G')|}{2}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |E(\overline{G'})| &= |A'|(|B'| + |BC|), \\ \alpha'(\overline{G'}) &= \min\{|A'|, |B'| + |BC|\}, \text{ e} \\ |V(G')| &= |A'| + |AB| + |B'| + |BC|. \end{aligned}$$

Portanto, se

$$|A'|(|B'| + |BC|) + \min\{|A'|, |B'| + |BC|\} < \frac{|A'| + |AB| + |B'| + |BC|}{2},$$

então G' é tipo 2. Pelo Teorema 4.4, o grafo G satisfaz a TCC. Então,

$$\Delta(G) + 2 = \Delta(G') + 2 = \chi_T(G') \leq \chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2,$$

e o resultado segue. $\square$

Conjecturamos que os únicos casos de grafos 3-cliques que são tipo 2 são aqueles determinados pelas condições do Teorema 4.5. Assim, denominamos um grafo G *Hilton-Tipo2* se e somente se G é um grafo 3-cliques com $ABC = \emptyset$, $\Delta(G)$ ímpar, $|A'| \geq |C'|$ e

$$|A'|(|B'| + |BC|) + \min\{|A'|, |B'| + |BC|\} < \frac{|A'| + |AB| + |B'| + |BC|}{2}.$$

Os próximos teoremas estabelecem algumas condições suficientes para que grafos 3-cliques com grau máximo ímpar, $ABC = \emptyset$ e $|A'| \geq |C'|$ sejam tipo 1. Estes teoremas exemplificam algumas técnicas que têm sido utilizadas para construção de uma $(\Delta(G)+1)$ -coloração total para os grafos desta classe.

TEOREMA 4.6 *Seja G um grafo 3-cliques com $\Delta(G)$ ímpar, $ABC = \emptyset$ e $|A'| \geq |C'|$. Se*

$$|A'| |B'| + \min\{|A'|, |B'|\} \geq \frac{|A'| + |AB| + |B'| + |BC|}{2},$$

então G é tipo 1.

Demonstração: Seja $G' := (V(G'), E(G'))$ com $V(G') := A \cup B$ e $E(G') := E(G[A \cup B]) \cup E'$ onde $E' := \{uv : \forall u \in A' \text{ e } \forall v \in BC\}$. Por construção, $\Delta(G') = \Delta(G)$, ímpar. Portanto, $|V(G')|$ é par. Pelo Teorema 4.2, o grafo G' é tipo 1 se e somente se $|E(\overline{G'})| + \alpha'(\overline{G'}) \geq |V(G')|/2$. Considerando que $|E(\overline{G'})| = |A'| |B'|$, $\alpha'(\overline{G'}) = \min\{|A'|, |B'|\}$ e $|V(\overline{G'})| = |A'| + |AB| + |B'| + |BC|$, temos que G' é tipo 1 se e somente se

$$|A'| |B'| + \min\{|A'|, |B'|\} \geq \frac{|A'| + |AB| + |B'| + |BC|}{2}.$$

Suponha que G' seja tipo 1 e seja π' uma coloração total ótima para G' . Vamos estender π' a uma coloração total π para G usando a mesma técnica do algoritmo espelhado.

Seja f uma correspondência injetora de C' em A' . Para cada vértice $v \in C'$ faça: $\pi(v) := \pi(u)$, onde $f(v) = u$. Seja uv tal que $u, v \in C'$. Então, faça: $\pi(uv) := \pi(xy)$, onde $f(u) = x$ e $f(v) = y$. Finalmente, seja uv tal que exatamente um de $\{u, v\}$ pertence a C' , digamos v . Neste caso, faça $\pi(uv) := \pi(uw)$, onde $f(v) = w$.

A validade de π vem da validade de π' e do fato de que as arestas uv com $u \in A'$ e $v \in BC$ não pertencem a $E(G)$. As colorações π e π' usam $\Delta(G') + 1$ cores, como $\Delta(G') = \Delta(G)$ o resultado segue. $\square$

TEOREMA 4.7 *Seja G um grafo 3-cliques com $\Delta(G)$ ímpar, $ABC = \emptyset$ e $|A'| \geq |C'|$. Se $|BC| = 1$ e*

$$|A'|(|B'| + |BC|) + \min\{|A'|, |B'| + |BC|\} \geq \frac{|A'| + |AB| + |B'| + |BC|}{2},$$

então G é tipo 1.

Demonstração: Seja π_C uma coloração total ótima para $G[C]$. Esta coloração usa $|C| + (|C'| \bmod 2)$ cores. Como vimos na demonstração do Teorema 4.5, se

$$|A'|(|B'| + |BC|) + \min\{|A'|, |B'| + |BC|\} \geq \frac{|A'| + |AB| + |B'| + |BC|}{2},$$

então $G' := G[A \cup B]$ é tipo 1. Seja π' uma $(\Delta(G') + 1)$ -coloração total para G' . Como $\Delta(G') = \Delta(G)$, π' usa $|A'| + |AB| + |B'| + 1$ cores. Vamos agora construir π uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total para G a partir de π' e π_C .

Inicialmente, para cada elemento e de G' , faça $\pi(e) := \pi'(e)$. Seja v o (único) vértice de BC . Então, para cada elemento e de $G[C]$ tal que $\pi_C(e) = \pi_C(v)$, faça $\pi(e) := \pi(v)$. Seja S o conjunto de cores de π que não ocorrem em v (note que $|S| = |A'|$) e seja $E_C := \{vu \in E(G) : v \in BC, u \in C\}$. Então, lembrando que $|S| = |A'| \geq |C'|$, enquanto $E_C \neq \emptyset$, faça:

- (i) Seja $s \in S$ e $vu \in E_C$, faça $\pi(vu) := s$.
- (ii) Para todo elemento $e \in G[C]$ tal que $\pi_C(e) = \pi_C(vu)$ faça $\pi(e) = s$;
- (iii) $S := S \setminus \{s\}$ e $E_C := E_C \setminus \{vu\}$.

Suponha que $|C|$ seja ímpar. Neste caso, $G[C]$ é tipo 1 e em uma coloração total ótima, todas as cores ocorrem em todos os vértices. Isto nos garante que neste momento todos os elementos do grafo G foram coloridos e o resultado segue.

Assuma agora que $|C|$ seja par. Então, existe um conjunto de elementos de $G[C]$ que possui uma cor $c \in \pi_C$ que não ocorre em v . Portanto, não existe nenhuma cor de π associada a estes elementos. Denotemos este conjunto de elementos S_c . Observe que este conjunto é independente.

Em $G[C]$, o grau de $v \in BC$ é $|C'|$. Portanto, existem $|C'| + 1$ cores de π associadas aos elementos já coloridos de $G[C]$ (elementos de $(V(G[C]) \cup E(G[C])) \setminus S_c$). Como π usa $|A'| + |AB| + |B'| + 1$ cores e $|A'| \geq |C'|$, existem

$$|A'| + |AB| + |B'| + 1 - |C'| - 1 \geq |AB| + |B'| \geq 1$$

cores disponíveis para associar aos elementos de S_c e o resultado segue. $\square$

O estudo dos grafos 3-cliques com grau máximo ímpar tem indicado que a relação de tamanho entre os conjuntos A' , BC , B' , AB e C' é muito importante na escolha de uma técnica para construir a coloração total destes grafos. Os próximos dois teoremas exemplificam este fato.

TEOREMA 4.8 *Seja G um grafo 3-cliques com $\Delta(G)$ ímpar, $ABC = \emptyset$ e $|A'| \geq |C'|$. Se $|A'| \leq |B'| + |BC|$, $|C'| \leq |AB| + |B'|$, $|A'| \geq |AB|$, $|C'| \geq |BC|$ e $|B|$ ímpar, então G é tipo 1.*

Demonstração: Vamos construir uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total para G , isto é uma $(|B| + |A'|)$ -coloração total. Como $|B|$ é ímpar, $G[B]$ é tipo 1. Construa uma coloração padrão π para $G[B]$. Esta coloração usa $|B|$ cores.

Seja f^a uma função injetora de A' em $B' \cup BC$ e seja f^c uma função injetora de C' em $AB \cup B'$. Para cada vértice de $u \in A' \cup C'$ faça $\pi(u) := \pi(v)$, onde ou $f^a(u) = v$, ou $f^c(u) = v$. Note que esta atribuição de cores aos vértices de G é uma coloração de vértices pois os vértices de A' não são adjacentes aos vértices de $B' \cup BC$ e os vértices de C' não são adjacentes aos vértices de $AB \cup B'$. Associe cores às arestas de $G[A']$ e às arestas de $G[C']$ de acordo com a coloração padrão, usando $n = |B|$. Note que a validade da coloração recém-construída vem da validade da coloração padrão de $G[B]$ e do fato de

que as arestas de $G[A']$ não são adjacentes às arestas de $G[B' \cup BC]$ e as arestas de $G[C']$ não são adjacentes às arestas de $G[AB \cup B']$.

Para finalizar a construção devemos colorir as arestas uv tais que $u \in A'$ e $v \in AB$ e as arestas uv tais que $u \in BC$ e $v \in C'$. O subgrafo gerado pelas arestas do primeiro conjunto é um grafo bipartido com grau máximo $|A'|$ e o subgrafo gerado pelas arestas do segundo conjunto é um grafo bipartido com grau máximo $|C'|$. Ademais, as arestas do primeiro e segundo conjuntos não são adjacentes. Sendo assim, como $|A'| \geq |C'|$, é possível colorir estas arestas com $|A'|$ cores novas. $\square$

TEOREMA 4.9 *Seja G um grafo 3-cliques com $\Delta(G)$ ímpar, $ABC = \emptyset$ e $|A'| \geq |C'|$. Se $|A'| \leq |B'| + |BC|$, $|C'| \leq |AB| + |B'|$, $|A'| \geq |AB|$, $|C'| \geq |BC|$ e $|B|$ par, então G é tipo 1.*

Demonstração: Vamos construir uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total para G de forma similar à construção descrita na demonstração do Teorema 4.8.

Construa uma coloração padrão para $G[B]$, de maneira que os vértices de AB recebam as cores $1, \dots, |AB|$, os vértices de B' recebam as cores $|AB| + 1, \dots, |AB| + |B'|$ e os vértices de BC recebam as cores $|AB| + |B'| + 1, \dots, |AB| + |B'| + |BC|$. Esta coloração usa $|AB| + |B'| + |BC| + 1$ cores pois $G[B]$ é uma clique par. Pelo Corolário 1.2, em cada vértice de B falta uma cor: a cor que receberia a aresta que ligaria este vértice ao vértice colorido com a cor $|AB| + |B'| + |BC| + 1$, caso este vértice existisse em B .

Associe cores os vértices de A' usando as cores $|AB| + |B'| + |BC| - |A'| + 2, \dots, |AB| + |B'| + |BC| + 1$. Associe cores às arestas de $G[A']$ seguindo a coloração padrão, usando $n = |AB| + |B'| + |BC| + 1$. Note que esta coloração total de $G[A']$, adicionada à coloração total de $G[B]$, é uma coloração total parcial para G . Porque $|A'| \leq |B'| + |BC|$, as cores usadas nos vértices de A' possuem índices superiores a $|AB| + 1$. Em particular, nenhum vértice de A' foi colorido com a cor $|AB| + 1$. Logo, no vértice de A' colorido com a cor $|AB| + |B'| + |BC| + 1 - j$, $j \in [0, |A'| - 1]$ falta a cor que receberia a aresta que ligaria este vértice a um vértice colorido com a cor $|AB| + 1$.

Seja $M_{A'} \subset \{uv : u \in A', v \in AB\}$ um conjunto com $|AB| - 1$ arestas independentes, tal que se $uv \in M_{A'}$ então a cor de $u \in A'$ é $|AB| + |B'| + |BC| - j$, a cor de $v \in AB$ é $|AB| - j$ e $0 \leq j \leq |AB| - 2$. Como em $G[A']$ não existe um vértice colorido com a cor $|AB| + 1$, em u , falta a cor determinada pela paridade de $2|AB| + |B'| + |BC| + 1 - j$,

de acordo com a coloração padrão. Além disso, em v falta a cor da aresta que o ligaria ao vértice colorido com a cor $|A'| + |AB| + |B'| + |BC| + 1$, isto é, seguindo a coloração padrão, a cor determinada pela paridade de $2|AB| + |B'| + |BC| + 1 - j$. Portanto, existe uma cor que falta simultaneamente em ambos u e v e podemos associar à aresta uv esta cor. Seja uv uma aresta com $u \in A'$ e $v \in AB$, tal que a cor de u é $|AB| + |B'| + |BC| + 1$ e a cor de v é 1. Seja c a cor da aresta cujos extremos possuem as cores de u e de v de acordo com a coloração padrão considerando $n = |AB| + |B'| + |BC| + 1$. Para ver que c falta simultaneamente em u e v note que em A' nenhum vértice recebeu a cor 1 e em B nenhum vértice recebeu a cor n . Portanto, podemos colorir uv com c . Ademais, $M := M_{A'} \cup \{uv\}$ é um conjunto de $|AB|$ arestas independentes.

Para completar a coloração de $G[A \cup B]$ precisamos colorir as arestas do subgrafo gerado pelas arestas de $\{uv : u \in A', v \in AB\} \setminus M$. Como este grafo é bipartido com grau máximo $|A'| - 1$, pois $|A'| \geq |AB|$, bastam $|A'| - 1$ cores novas para colori-lo. Assim, construímos uma coloração total para $G[A \cup B]$ que usa $|A'| + |AB| + |B'| + |BC|$ cores.

Vamos agora colorir $G[C']$ e, posteriormente, as arestas que ligam os vértices de BC aos vértices de C' com o mesmo tipo de raciocínio usado acima. Associe cores aos vértices de C' usando as cores $1, \dots, |C'| - 1$ e $|AB| + |B'| + |BC| + 1$. Associe cores às arestas de $G[C']$ usando a coloração padrão com $n = |AB| + |B'| + |BC| + 1$. É fácil ver que esta coloração não conflita com a coloração construída até então.

Seja $M_{C'} \subset \{uv : u \in BC, v \in C'\}$ um conjunto com $|BC| - 1$ arestas independentes, tal que se $uv \in M_{C'}$ então a cor de $u \in BC$ é $|AB| + |B'| + j$, a cor de $v \in C'$ é j e $1 \leq j \leq |BC| - 1$. Em u falta a cor da aresta que ligaria u a um vértice colorido com a cor n , onde $n = |AB| + |B'| + |BC| + 1$. Se $|AB| + |B'| + j$ for par, como n é ímpar, $|AB| + |B'| + j + n$ é ímpar e, pela coloração padrão, a cor desta aresta seria $(|AB| + |B'| + j)/2$. Se $|AB| + |B'| + j$ for ímpar, como n é ímpar, $|AB| + |B'| + j + n$ é par e a cor desta aresta seria $(|AB| + |B'| + j + n)/2$. Em $G[C']$ não existe um vértice colorido com a cor $|AB| + |B'|$. Portanto, falta em v a cor determinada pela paridade de $|AB| + |B'| + j$, de acordo com a coloração padrão. Isto é, se $|AB| + |B'| + j$ for par, então a cor é $(|AB| + |B'| + j)/2$; caso contrário a cor é $(|AB| + |B'| + j + n)/2 \pmod{n}$. Como $|AB| + |B'| + j < n$, então $(|AB| + |B'| + j + n)/2 \pmod{n} = (|AB| + |B'| + j + n)/2$. Concluímos que existe uma cor que falta simultaneamente em ambos u e v e podemos associar esta cor à aresta uv .

Seja uv uma aresta com $u \in BC$ e $v \in C'$, tal que a cor de u é $|AB| + |B'| + |BC|$ e a cor de v é $|AB| + |B'| + |BC| + 1$. Seja c a cor da aresta cujos extremos possuem as cores de u e de v de acordo com a coloração padrão considerando $n = |AB| + |B'| + |BC| + 1$. Para ver que c falta simultaneamente em u e v note que em B nenhum vértice recebeu a cor n e em C' nenhum vértice recebeu a cor $|AB| + |B'| + |BC|$. Portanto, podemos colorir uv com c . Ademais, $M := M_{C'} \cup \{uv\}$ é um conjunto de $|BC|$ arestas independentes.

Para completar a coloração total de G precisamos colorir as arestas do subgrafo gerado pelas arestas de $\{uv : u \in BC, v \in C'\} \setminus M$. Note que este grafo é bipartido com grau máximo $|C'| - 1$, pois $|C'| \geq |BC|$. Portanto, bastam $|C'| - 1$ cores para colori-lo. Como estas arestas não são adjacentes às arestas que foram coloridas com as $|A'| - 1$ cores novas e $|A'| \geq |C'|$ podemos usar $|C'| - 1$ destas cores para colorir as arestas que ainda não foram coloridas e o resultado segue. $\square$

O índice cromático dos grafos 3-cliques foi determinado por Figueiredo et al. [31]. Naquele trabalho, foi demonstrado que, para resolver o problema, era possível restringir-se aos casos em que $|B'| = 0$. Inspirado nesta idéia e na nossa conjectura de que os únicos grafos tipo 2 desta classe são os Hilton-tipo2, o Lemma 4.10 mostra que também para coloração total podemos nos restringir ao caso em que $|B'| = 0$.

LEMA 4.10 *Seja G um grafo 3-cliques com $ABC = \emptyset$ e $\Delta(G)$ ímpar. Seja G_0 , com $V(G_0) := V(G)$, $E(G_0) := E(G) \cup E_0$ onde $E_0 := \{uv : \forall u \in B', \forall v \in C'\}$. Então:*

- (i) *O grafo G_0 é um grafo 3-cliques sem vértice universal e com o mesmo grau máximo;*
- (ii) *Se G_0 é tipo 1, então G é tipo 1;*
- (iii) *O grafo G é Hilton-tipo2 se e somente se o grafo G_0 é Hilton-tipo2.*

Proof: Inicialmente, note que G_0 é o grafo obtido a partir de G colocando-se todos os vértices de B' em BC . Por construção de G_0 e analogia aos conjuntos que formam a partição de $V(G)$, definimos: $A'_0 := A'$, $A_0B_0 := AB$, $B'_0 := \emptyset$, $B_0C_0 := B' \cup BC$, e $C'_0 := C'$. Por inspeção simples das propriedades da definição dos grafos 3-cliques, concluímos que G_0 é um grafo 3-cliques. Por contagem, concluímos que $\Delta(G_0) = \Delta(G)$. Ademais, como G não possui vértices universais, G_0 também não os possui.

Vamos agora mostrar que se G_0 é tipo 1, então G é tipo 1. Suponha que G seja tipo 2. O grafo G é subgrafo de G_0 com o mesmo grau máximo. Além disso, a TCC é verificada para esta classe. Portanto, o grafo G_0 é tipo 2, contradição.

Resta-nos agora mostrar que G é Hilton-tipo2 se e somente se G_0 é Hilton-tipo2. Os grafos G e G_0 são grafos 3-cliques sem vértices universais e com grau máximo ímpar. Por definição, G é Hilton-tipo2 se e somente se $|A'| \geq |C'|$ e

$$|A'|(|B'| + |BC|) + \min\{|A'|, |B'| + |BC|\} < \frac{|A'| + |AB| + |B'| + |BC|}{2}.$$

Reescrevendo a desigualdade acima temos que,

$$|A'_0| |B_0 C_0| + \min\{|A'_0|, |B_0 C_0|\} < \frac{|A'_0| + |A_0 B_0| + |B_0 C_0|}{2}$$

e $|A'_0| \geq |C'_0|$ se e somente se G_0 é Hilton-tipo2 e o resultado segue. $\square$

Os resultados a seguir consideram $|B'| = 0$. O Corolário 4.11 foi obtido a partir do Teorema 4.9. O Teorema 4.12 impõe algumas condições entre as cardinalidades de A' , AB , BC e C' . Estas condições formam uma partição do domínio, que é o nosso enfoque atual para abordar a coloração total dos casos ainda não determinados.

COROLÁRIO 4.11 *Seja G um grafo 3-cliques com $\Delta(G)$ ímpar, $ABC = \emptyset$ e $|A'| \geq |C'|$. Se $|B'| = 0$ e $|A'| = |AB| = |BC|$, então G é tipo 1.* $\square$

TEOREMA 4.12 *Seja G um grafo 3-cliques com $\Delta(G)$ ímpar, $ABC = \emptyset$ e $|A'| \geq |C'|$. Se $|B'| = 0$, $|A| \geq |C|$, $|A'| \geq |BC|$ e $|AB| \leq |BC|$, então G é tipo 1.*

Demonstração: Construa uma coloração padrão π para $G[A]$ com $n := |A| + (1 - |A| \bmod 2)$, tal que os vértices de A' recebam as cores $1, \dots, |A'|$. Vamos dividir a demonstração em casos.

CASO 1 $|A|$ é ímpar.

Neste caso $n = |A|$ e π usa $|A|$ cores. Seja f uma função injetora de BC em A' e g uma função injetora de C' em $A \setminus \{\text{Im}(f)\}$, onde $\text{Im}(f)$ é o conjunto dos vértices que pertencem à imagem de f . Sejam $u \in C$ e $v \in A$ tais que $u \in C$, ou $f(u) = v$, ou $g(u) = v$, então faça $\pi(u) := \pi(v)$. Associe cores às arestas de $G[C]$ seguindo a coloração padrão considerando $n = |A|$. A atribuição de cores π é uma coloração total parcial para G pois: (i) foi obtida

a partir da coloração padrão de $G[A]$; (ii) os vértices de BC receberam cores diferentes das cores dos vértices de AB ; (iii) e as arestas de $G[A]$ e de $G[C]$ são não adjacentes.

Resta colorir o grafo bipartido gerado pelas arestas que possuem um extremo em AB e um extremo em BC . Como $|BC| \geq |AB|$, este grafo possui grau máximo $|BC|$, portanto bastam $|BC|$ cores novas. Assim, a coloração total de G usa $|A| + |BC| = \Delta(G) + 1$ cores.

CASO 2 $|A|$ é par e $|AB| = |BC|$.

Se $|A'| = |BC|$ o resultado segue pelo Corolário 4.11. Podemos assumir que $|A'| > |BC|$. Associe cores aos vértices de BC usando as cores $1, \dots, |BC|$ e aos vértices de C' usando as cores de $\{|BC| + 1, \dots, n\} \setminus \{|A'|\}$. Como $|A'| > |BC|$, não existe em C um vértice colorido com $|A'|$. Associe cores às arestas de $G[C]$ de acordo com a coloração padrão usando n definido acima. Esta atribuição de cores é uma coloração total parcial de G pois os vértices AB possuem cores distintas dos vértices de BC e as arestas foram coloridas seguindo a coloração padrão. Ademais, as arestas de $G[A]$ não são adjacentes às arestas de $G[C]$.

Seja $M := \{uv : u \in AB, v \in BC\}$ um conjunto com $|AB|$ arestas independentes, tal que se $uv \in M$ então a cor de $u \in AB$ é $|A'| + j$, a cor de $v \in BC$ é j e $1 \leq j \leq |AB|$. Como em $G[A]$ não existe um vértice colorido com a cor n , em u , falta a cor que a coloração padrão atribuiria à aresta cujos extremos fossem u e um vértice com cor n . Isto é, considerando que n é ímpar, se $|A'| + j$ for par, a cor que falta é $(|A'| + j)/2$, se $|A'| + j$ for ímpar a cor é $(|A'| + j + n)/2$. Por outro lado, em v falta a cor da aresta que o ligaria ao vértice colorido com a cor $|A'|$. Seguindo a coloração padrão, esta cor é determinada pela paridade de $|A'| + j$, isto é, se $|A'| + j$ for par, falta a cor $(|A'| + j)/2$; caso contrário, falta a cor $(|A'| + j + n)/2 \pmod{n}$. Como $|A'| + j < n$, então $(|A'| + j + n)/2 \pmod{n} = (|A'| + j + n)/2$. Concluimos que existe uma cor que falta simultaneamente em ambos u e v e podemos associar à aresta uv esta cor.

Para completar a coloração total de G devemos colorir as arestas do grafo bipartido gerado pelas arestas $\{uv : u \in AB, v \in BC\} \setminus M$. Como $|AB| = |BC|$ e M é um conjunto de $|AB|$ arestas independentes, concluimos que o grau máximo destes grafo é $|BC| - 1$. Portanto bastam $|BC| - 1$ cores novas para colori-lo. Assim, a coloração total de G construída usa $|A| + 1 + |BC| - 1 = |A'| + |AB| + |BC|$ cores e o resultado segue.

CASO 3 $|A|$ é par e $|AB| < |BC|$.

Associe cores aos vértices de BC de maneira que possuam as cores $1, \dots, |BC| - 1$ e n . Associe cores aos vértices de C' usando as cores pertencentes ao conjunto $1, \dots, |A|$ que não foram usadas em BC e diferentes de $|A'|$. Como $|A'| \geq |BC|$ e $|A| \geq |C|$, temos uma coloração de vértices para G . Ademais, não existe vértice colorido com a cor $|A'|$ em C . Associe cores às arestas de $G[C]$ seguindo a coloração padrão e usando n definido acima. Novamente, temos uma coloração total parcial para G que usa $|A| + 1$ cores.

Construa e atribua cores a M exatamente como no caso anterior. Observe que M é um conjunto de $|AB|$ arestas independentes e $|AB| < |BC|$. Para completar a coloração total de G devemos colorir as arestas do grafo bipartido gerado pelas arestas $\{uv : u \in AB, v \in BC\} \setminus M$. Como $|AB| < |BC|$ e M é um conjunto de $|AB|$ arestas independentes, concluímos que o grau máximo deste grafo é $|BC| - 1$. Portanto bastam $|BC| - 1$ cores novas para colori-lo. Assim, a coloração total de G construída usa $|A| + 1 + |BC| - 1 = |A'| + |AB| + |BC|$ cores e o resultado segue. $\square$

As condições impostas pelo Teorema 4.12 particionam o domínio nos seguintes casos:

$$|AB| \leq |BC| \quad |A| \geq |C| \quad |A'| \geq |BC|; \quad (4.1)$$

$$|AB| \leq |BC| \quad |A| \geq |C| \quad |A'| < |BC|; \quad (4.2)$$

$$|AB| \leq |BC| \quad |A| < |C| \quad |A'| \geq |BC|; \quad (4.3)$$

$$|AB| \leq |BC| \quad |A| < |C| \quad |A'| < |BC|; \quad (4.4)$$

$$|AB| > |BC| \quad |A| \geq |C| \quad |A'| \geq |BC|; \quad (4.5)$$

$$|AB| > |BC| \quad |A| \geq |C| \quad |A'| < |BC|; \quad (4.6)$$

$$|AB| > |BC| \quad |A| < |C| \quad |A'| \geq |BC|; \quad (4.7)$$

$$|AB| > |BC| \quad |A| < |C| \quad |A'| < |BC|. \quad (4.8)$$

Note que o Teorema 4.12 resolve o caso (4.1). As hipóteses de que $|A'| \geq |C'|$ e $ABC = \emptyset$ são consideradas verdadeiras sempre. Uma análise simples nos mostra que o conjunto de relações $|AB| > |BC|$, $|A| < |C|$, e $|A'| \geq |C'|$ não podem ocorrer simultaneamente. Isto implica que podemos excluir os casos (4.7) e (4.8).

Considerando nossa conjectura de que os únicos grafos tipo 2 desta classe são os grafos Hilton-tipo2, o próximo lema mostra que $|B'| = 0$ e $|BC| \geq |AB|$ implicam que $|A'| |BC| + \min\{|A'|, |BC|\} \geq (|A'| + |AB| + |BC|)/2$. Portanto, não existem grafos Hilton-tipo2 nos casos (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4).

LEMA 4.13 *Seja G um grafo 3-cliques com $\Delta(G)$ ímpar, $ABC = \emptyset$ e $|A'| \geq |C'|$. Se $|B'| = 0$ e $|AB| \leq |BC|$, então*

$$|A'| |BC| + \min\{|A'|, |BC|\} \geq \frac{|A'| + |AB| + |BC|}{2}. \quad (4.9)$$

Demonstração: Reescrevendo o lado esquerdo de (4.9) temos:

$$\begin{aligned} |A'| |BC| + \min\{|A'|, |BC|\} &= |A'| \left(\frac{|BC|}{2} + \frac{|BC|}{2} \right) + \min\{|A'|, |BC|\} \\ &\geq |A'| \frac{|AB|}{2} + |A'| \frac{|BC|}{2} + \min\{|A'|, |BC|\} \end{aligned}$$

A última desigualdade segue do fato de $|AB| \leq |BC|$. Suponha que $\min\{|A'|, |BC|\} = |A'|$. Então, lembrando que $|A'| \geq 1$, temos que:

$$|A'| \frac{|AB|}{2} + |A'| \frac{|BC|}{2} + |A'| \geq \frac{|AB|}{2} + \frac{|BC|}{2} + \frac{|A'|}{2},$$

Suponha que $\min\{|A'|, |BC|\} = |BC|$. Então, como BC também é não vazio, concluímos que:

$$|A'| \frac{|AB|}{2} + |A'| \frac{|BC|}{2} + |BC| \geq \frac{|AB|}{2} + \frac{|A'|}{2} + \frac{|BC|}{2},$$

e o resultado segue. $\square$

Os exemplos a seguir ilustram que os casos (4.5) e (4.6) incluem grafos que são Hilton-tipo2. Sejam G_1 , G_2 , G_3 e G_4 , grafos 3-cliques com $ABC = \emptyset$, tais que:

$$\begin{aligned} G_1 &\text{ possui } |A'| = 2; \quad |AB| = 10; \quad |B'| = 0; \quad |BC| = 2; \quad \text{e} \quad |C'| = 2; \\ G_2 &\text{ possui } |A'| = 3; \quad |AB| = 3; \quad |B'| = 0; \quad |BC| = 2; \quad \text{e} \quad |C'| = 2; \\ G_3 &\text{ possui } |A'| = 2; \quad |AB| = 13; \quad |B'| = 0; \quad |BC| = 3; \quad \text{e} \quad |C'| = 2; \\ G_4 &\text{ possui } |A'| = 2; \quad |AB| = 5; \quad |B'| = 0; \quad |BC| = 3; \quad \text{e} \quad |C'| = 2; \end{aligned}$$

Os grafos G_1 e G_2 são exemplos pertencentes ao caso (4.5) e os grafos G_3 e G_4 são exemplos pertencentes ao caso (4.6). Os grafos G_1 e G_3 são Hilton-tipo2 e as Figuras 4.3(a) e 4.3(b) mostram que os grafos G_2 e G_4 são tipo 1. Para estes casos, imporemos que $|A'| |BC| + \min\{|A'|, |BC|\} \geq (|A'| + |AB| + |B'| + |BC|)/2$. Desta, forma excluimos os grafos que são Hilton-tipo2.

Os próximos dois teoremas estudam o caso (4.2). No Teorema 4.14 é excluído o caso em que $|AB| = |BC|$ e no Teorema 4.16 este caso é analisado quando $|AB|$ é ímpar.

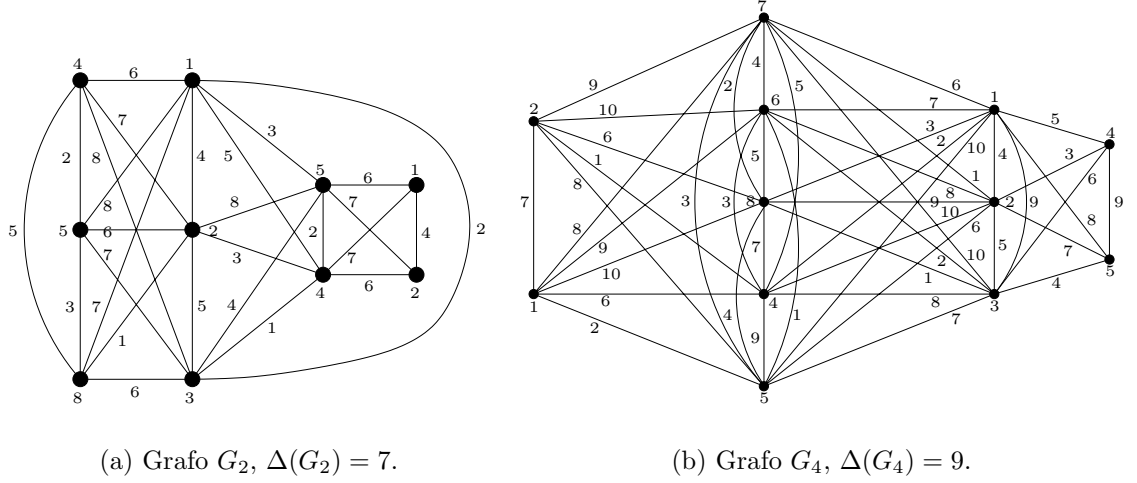


Figura 4.3: Coloração total de G_2 e G_4 atestando que estes grafos são tipo 1.

TEOREMA 4.14 *Seja G um grafo 3-cliques com $\Delta(G)$ ímpar, $ABC = \emptyset$ e $|A'| \geq |C'|$. Se $|B'| = 0$, $|AB| < |BC|$, $|A| \geq |C|$ e $|A'| < |BC|$, então G é tipo 1.*

Demonstração: Construa uma coloração padrão π_A para $G[A]$ de maneira que os vértices de A' recebam as cores $1, \dots, |A'|$. Seja $n = |A| + (1 - |A| \bmod 2)$. Vamos dividir em dois casos dependendo da paridade de $|A|$.

CASO 1 $|A|$ é ímpar.

Construa uma coloração padrão π_C para $G[C]$, usando n definido acima, de maneira que os vértices de BC recebam as cores $1, \dots, |BC|$. Como $|A| \geq |C|$, então π_C é uma coloração total de $G[C]$. Ademais, como $|A|$ é ímpar, em $\pi_A \cup \pi_C$ são usadas $|A'| + |AB|$ cores. Note que $\pi_A \cup \pi_C$ é uma coloração de arestas parcial para G pois as arestas de $G[A]$ não são adjacentes às arestas de $G[C]$. Entretanto, $\pi_A \cup \pi_C$ não é uma coloração de vértices para G pois $|A'| < |BC|$, então existem vértices coloridos com as cores $|A'| + 1, \dots, |BC|$ em AB e em BC . Sejam $v_{|A'|+1}, \dots, v_{|BC|}$ tais que $v_i \in BC$ e i é a cor de v_i .

Considere o grafo bipartido G' , com bipartição (S, BC) onde

$$S := AB \cup \{u\};$$

$$E(G') := \{xy : \forall x \in AB, \forall y \in BC\} \cup \{uv_i : u \in S, v_i \in BC, |A'| + 1 \leq i \leq |BC|\}.$$

Como $|AB| < |BC|$, o grafo G' possui grau máximo $|BC|$. Logo, são necessárias $|BC|$ cores para colorir suas arestas. Seja π' uma $|BC|$ -coloração de arestas para G' . Seja π_B a restrição de π' às arestas de G .

Por construção de π_B , para todo $v_i \in BC$, $|A'| + 1 \leq i \leq |BC|$, falta a cor da aresta que em G' o liga ao vértice u . Note que todas estas arestas possuem cores distintas pois incidem em u . Altere π_C para que v_i receba esta cor. Note que, agora, $\pi_A \cup \pi_C$ é uma coloração de vértices para G . Ademais, $\pi_B \cup \pi_C$ é uma coloração total parcial para G pois a alteração feita em π_C respeita a coloração π_B . Finalmente, como associamos uma cor a cada elemento de G , concluímos que $\pi := \pi_A \cup \pi_B \cup \pi_C$ é uma coloração total para G que usa $|A'| + |AB| + |BC|$ cores. Como $|A'| + |AB| + |BC| = \Delta(G) + 1$, o resultado segue.

CASO 2 $|A|$ é par.

Inicialmente, observe que como $|A|$ é par, em A não existe um vértice colorido com a cor n . Construa uma coloração padrão π_C para $G[C]$, usando n definido acima, de maneira que os vértices de BC recebam as cores $|A| - |BC| + 1, \dots, |A|$ e de maneira que em $G[C]$ não exista um vértice colorido com a cor n . Rotule com u_i (v_i) os vértices pertencentes a AB (BC), onde i é a cor de u_i (v_i). Neste caso, os vértices que foram coloridos com as mesmas cores são u_i, v_i , tais que $u_i \in AB$, $v_i \in BC$ e $|A'| + 1 \leq i \leq |A'| + |AB|$.

Seja $M := \{u_i v_i : u_i \in AB, v_i \in BC, |A'| + 1 \leq i \leq |A'| + |AB|\}$. Por construção os extremos de M possuem as mesmas cores. Ademais, em A e em C não existem vértices coloridos com a cor n . Como a coloração π_A é a coloração padrão de uma clique par e π_C foi construída a partir de π_A , concluímos que em ambos os extremos das arestas de M falta a mesma cor, definida no Corolário 1.2. Assim, é possível colorir as arestas de M usando as cores utilizadas em $\pi_A \cup \pi_C$.

Considere o grafo bipartido G' , com bipartição (S, BC) onde

$$S := AB \cup \{u\};$$

$$E(G') := (\{xy : \forall x \in AB, \forall y \in BC\} \setminus M) \cup \{uv_i : u \in S, v_i \in BC, |A'| + 1 \leq i \leq |A|\}.$$

Como $|AB| < |BC|$ e os vértices de BC que são adjacentes a $u \in S$ são também extremos das arestas de M , concluímos que o grafo G' possui grau máximo $|BC| - 1$. Logo, são necessárias $|BC| - 1$ cores para colorir suas arestas. Seja π' uma $(|BC| - 1)$ -coloração de arestas para G' . Seja π_B a restrição de π' às arestas de G .

Por construção de π_B , para todo $v_i \in BC$, $|A'| + 1 \leq i \leq |A'| + |AB|$, falta a cor da aresta que em G' o liga ao vértice u . Note que todas estas arestas possuem cores distintas pois incidem em u . Altere π_C para que v_i receba esta cor. Note que, agora, $\pi_A \cup \pi_C$ é uma coloração de vértices para G . Ademais, $\pi_B \cup \pi_C$ é uma coloração total parcial para G pois a alteração feita em π_C respeita a coloração π_B . Finalmente, como associamos uma cor a cada elemento de G , concluímos que $\pi := \pi_A \cup \pi_B \cup \pi_C$ é uma coloração total para G que usa $|A'| + |AB| + |BC|$ cores e o resultado segue. $\square$

O Lema 4.15 tem um papel importante na demonstração do Teorema 4.16, que encerra os resultados deste capítulo.

LEMA 4.15 *Seja G um grafo bipartido completo k -regular, k ímpar, e seja M um emparelhamento perfeito de G . Então, existe uma k -coloração de arestas de G tal que suas k cores ocorrem em M .*

Demonstração: Seja (A, B) uma bipartição de G , com $A := \{a_1, \dots, a_k\}$ e $B := \{b_1, \dots, b_k\}$. Ajuste a notação para que $M := \{a_i b_i : 1 \leq i \leq k\}$.

Construa a seguinte atribuição de cores às arestas de G :

$$\pi(a_i b_j) := (i + j - 1) \bmod k, \text{ para } 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k.$$

Note que π é uma coloração de arestas, pois as arestas incidentes em a_i recebem as cores $i, (i + 1) \bmod k, \dots, (i + k - 1) \bmod k$, que são todas diferentes entre si. A análise para os vértices de B é análoga. Por construção as arestas de M recebem as cores $\{(2i - 1) \bmod k : 1 \leq i \leq k\}$. Como k é ímpar, estas cores são diferentes e o resultado segue. $\square$

TEOREMA 4.16 *Seja G um grafo 3-cliques com $\Delta(G)$ ímpar, $ABC = \emptyset$ e $|A'| \geq |C'|$. Se $|B'| = 0$, $|AB| = |BC|$ ímpar, $|A| \geq |C|$ e $|A'| < |BC|$, então G é tipo 1.*

Demonstração: Inicialmente observe que, como $|AB| = |BC|$ e $\Delta(G)$ é ímpar, então $|A'|$ é par. Como $|AB|$ é ímpar, então $|A|$ é ímpar. Construa uma coloração padrão π_A para A de maneira que os vértices de A' tenham as cores $1, \dots, |A'|$. Seja $v \in A'$ tal que $\pi_A(v) = |A'|$ e $E_v := \{vx : x \in AB\}$. Construa uma coloração padrão π_C para C , com $n = |A|$, de maneira que a cor dos vértices de BC sejam as cores das arestas de E_v . Note que há vértices em AB que possuem as mesmas cores de vértices em BC .

A coloração $\pi_A \cup \pi_C$ é uma coloração de arestas parcial para G . Para completar a coloração de arestas de G precisamos colorir as arestas que possuem um extremo em AB e outro em BC . Seja G' o grafo bipartido gerado por estas arestas. Como $|AB| = |BC|$ este grafo é um grafo bipartido $|AB|$ -regular. Portanto, $|AB|$ cores novas são suficientes para colorir suas arestas. Concluimos que é possível associar cores a todos os elementos de G usando $|A'| + 2|AB| = \Delta(G) + 1$ cores.

Considere o seguinte emparelhamento perfeito de G' :

$$M := \{xy : x \in AB, y \in BC, vx \in E_v, \pi_A(vx) = \pi_C(y)\}.$$

Pelo Lema 4.15, é possível construir uma coloração de arestas π' para G' tal que as arestas de M possuam cores distintas.

Vamos alterar π_A , π_C e π' , sem alterar o número de cores utilizado, de maneira que $\pi := \pi_A \cup \pi_C \cup \pi'$ seja uma coloração total para G . Desta forma, como usamos $\Delta(G) + 1$ cores o resultado segue.

Para cada uma das $|AB|$ triplas (vx, xy, y) onde $vx \in E_v$, $xy \in M$, $\pi_A(vx) = \pi_C(y)$, faça as seguintes alterações em π :

$$\begin{aligned}\pi(vx) &:= \pi'(xy); \\ \pi(xy) &:= \pi_A(vx); \\ \pi(y) &:= \pi'(xy).\end{aligned}$$

Inicialmente, vamos analisar a alteração feita em cada tripla separadamente. Observe que as cores de π' são distintas das cores de π_A e π_C . Portanto, ao associar a cor de xy à aresta vx e ao vértice y não é introduzido nenhum conflito. Além disso, ao trocarmos as cores das arestas vx e xy não é introduzido nenhum conflito no vértice x que mantém o conjunto de cores que ocorrem em suas arestas incidentes inalterado. Por outro lado, a nova cor que a aresta xy recebe é a antiga cor de y em π_C . Portanto, como o vértice y recebeu a cor da aresta xy , após as alterações acima, o conjunto de cores que ocorrem em y permanece inalterado.

Para concluir que π é uma coloração total para G devemos mostrar que os vértices de AB possuem cores distintas dos vértices de BC . Pelas alterações feitas nas triplas acima, cada vértice de BC recebe uma cor de π' . Como as cores que ocorrem em π_A são distintas das cores que ocorrem em π' , o resultado segue. $\square$

Capítulo 5

Outros trabalhos

Neste capítulo mostramos que o problema de decisão *Nonempty Part List $2K_2$ -Partition* (NPL2K2) é NP-completo. Para evitar que esta introdução se torne uma repetição enfadonha da Seção 5.1.1, postergamos a definição e contextualização deste problema para a referida seção. Com a classificação do NPL2K2, todos os problemas Nonempty Part List H -partition foram classificados quanto à sua complexidade, sendo este, onde $H = 2K_2$, o único que é NP-completo.

Este trabalho originou-se da interação com Simone Dantas, durante seu pós-doutoramento realizado no Instituto de Computação de dezembro de 2003 a janeiro de 2006, e contou também com as colaborações de Luerbio Faria e Sylvain Gravier. Foi aceito para apresentação no ICGT'05, *International Colloquium on Graph Theory - 2005*, e seu resumo estendido publicado no ENDM [11] dedicado ao colóquio. Neste capítulo apresentamos uma versão completa do artigo publicado no ENDM. Uma versão expandida deste trabalho, que inclui resultados de NP-dificuldade e aproximabilidade, está submetida a um periódico.

5.1 O problema da $2K_2$ -partição com quatro vértices fixados

On the $2K_2$ -Partition Problem

C. N. Campos S. Dantas L. Faria S. Gravier

A $2K_2$ -partition of the vertex set of a graph $G = (V(G), E(G))$ is a partition of $V(G)$ in four nonempty parts A, B, C, D such that every vertex of A is adjacent to every vertex of B, and every vertex of C is adjacent to every vertex of D. The decision problem *Nonempty-Part List $2K_2$ -Partition Problem* (NPL2K2) takes as input a graph G and four vertices x^A, x^B, x^C, x^D of $V(G)$, and decides whether there exists a $2K_2$ -partition of $V(G)$, with $x^A \in A, x^B \in B, x^C \in C$ and $x^D \in D$. In this work, NPL2K2 is shown NP-complete. This result completes the complexity classification of all Nonempty Part List H -Partition Problems. Moreover, the Nonempty Part List $2K_2$ -Partition Problem is the only NP-complete problem in this classification.

5.1.1 Introduction

The *Skew Partition Problem* was defined by Chvátal [26] as that of finding a partition of the vertex set of a given graph in four nonempty parts A, B, C, D such that every vertex of A is adjacent to every vertex of B, and every vertex of C is non-adjacent to every vertex of D. The Skew Partition Problem was defined in the context of perfect graphs and plays a key role in the celebrated recent proof of the Strong Perfect Graph Conjecture [25]. Figueiredo et al. [30] have presented a polynomial-time algorithm for solving the Skew Partition Problem.

Similar partition problems have been considered since the Skew Partition Problem was posed [10, 36]. Consider a finite, simple and undirected graph $G = (V(G), E(G))$ and the problem of finding a partition of $V(G)$ in subsets satisfying certain constraints, *internal* and/or *external*. An internal constraint imposes properties within the parts, such as it be a clique, an independent set, sparse, dense, etc. An external constraint imposes properties on different parts, as in the case of the Skew Partition Problem.

An H -partition of a graph G is a partition of its vertex set in four nonempty parts A, B, C, D subject to external constraints given by a *model graph* H . The model graph H is a complete graph with four vertices, each vertex of $V(H) := \{a, b, c, d\}$ is assigned to one of the parts A, B, C, D, and each edge $xy \in E(H)$ represents an external constraint that can be *completely adjacent*, where every vertex of X is adjacent to every vertex of Y, *completely independent*, where every vertex of X is non-adjacent to every vertex of Y, or with no restrictions. The H -Partition Problem asks, given a graph G , whether G admits an H -partition and it was posed by Dantas et al. [29]. A *list* $L(v) \subseteq \{A, B, C, D\}$, $v \in V(G)$, is the set of parts in which v is allowed to be placed. A *List H -Partition*, relative to lists $\{L(v) : v \in V(G)\}$, is an H -partition in which each $v \in V(G)$ is placed into a set in $L(v)$.

A *Nonempty Part List H -Partition Problem* (NPL2K2) is an H -Partition Problem with the additional constraints $L(x^a) = \{A\}$, $L(x^b) = \{B\}$, $L(x^c) = \{C\}$, $L(x^d) = \{D\}$, for distinct vertices x^a, x^b, x^c, x^d of G and $L(v) = \{A, B, C, D\}$ for all remaining vertices of G . Dantas et al. [29] have shown that all but two cases of the Nonempty Part List H -Partition Problem are polynomial and can be used to yield low complexity polynomial algorithms for their corresponding H -partition problems. The two remaining cases are the Skew-Partition Problem, which is polynomial [30], and the $2K_2$ -partition problem. In this paper we show that the Nonempty Part List $2K_2$ -Partition Problem is NP-complete, and, consequently, cannot be used to prove that $2K_2$ -partition is polynomial. In fact, NPL2K2 is the only NP-complete Nonempty Part List H -Partition Problem.

This paper is structured in the following sections. Section 5.1.2 introduces the NPL2K2 and the preliminaries needed for proving that this problem is NP-complete. Section 5.1.3 constructs a particular instance of NPL2K2 from a generic instance of a *Not-All-Equal 3-Satisfiability*. Finally, Section 5.1.4 proves that the reduction works.

5.1.2 Preliminaries

Let $G := (V(G), E(G))$ be a simple graph and let $\overline{G}(V(G), \overline{E}(G))$ be its complement, with $\overline{E}(G)$ defined as usual. All edges of $\overline{E}(G)$ are called *non-edges* of G .

A $2K_2$ -partition is a partition of the vertex set of a graph G in four (nonempty) parts A, B, C, D such that for each pair of vertices $u \in A$ and $v \in B$, or $u \in C$ and $v \in D$, then $uv \in E(G)$. We define the *Nonempty Part List $2K_2$ -Partition Problem* as follows:

NONEMPTY PART LIST $2K_2$ -PARTITION PROBLEM (NPL2K2)

Instance: a graph $G = (V(G), E(G))$, four vertices x^a, x^b, x^c, x^d of $V(G)$, and for each $v \in V(G)$ a subset $L(v) \subseteq \{A, B, C, D\}$ such that $L(x^a) := \{A\}$, $L(x^b) := \{B\}$, $L(x^c) := \{C\}$, $L(x^d) := \{D\}$, and $L(x) := \{A, B, C, D\}$, for all remaining $x \in V(G) \setminus \{x^a, x^b, x^c, x^d\}$.

Question: Is there a $2K_2$ -partition A, B, C, D of $V(G)$ such that each v is contained in some part of $L(v)$?

We restrict $L(x^a), L(x^b), L(x^c)$, and $L(x^d)$, for ensuring that A, B, C , and D be nonempty. Sets A and B , as well C and D , are called *adjacent sets*. Let P and Q be two adjacent sets. A vertex $x \in P$ is *well positioned* if there exists $xy \in E(G)$ for every $y \in Q$. If all vertices of G are well positioned, then G admits a $2K_2$ -partition. Next property is extensively used in this paper.

PROPERTY 5.1 *Let u, v be two non-adjacent vertices of G and let P and Q be two adjacent sets of $\{A, B, C, D\}$. If $u \in P$ and u is well-positioned, then v cannot be placed in set Q .*

In this paper, we prove that NPL2K2 is NP-complete by reduction from NOT-ALL-EQUAL 3-SATISFIABILITY, a problem whose NP-completeness was shown in [62]. The decision problem NOT-ALL-EQUAL 3-SATISFIABILITY is defined as follows:

NOT-ALL-EQUAL 3-SATISFIABILITY (NAE3SAT)

Instance: Set $X := \{x_1, \dots, x_n\}$ of variables, collection $\mathcal{C} := \{c_1, \dots, c_m\}$ of clauses over X such that each clause $c_i \in \mathcal{C}$ has $|c_i| = 3$.

Question: Is there a truth assignment for X such that each clause in $\mathcal{C}$ has at least one true literal and at least one false literal?

Following the notation in [39], a *truth assignment* for X is a function $t : X \rightarrow \{T, F\}$ and a *satisfying truth assignment* is a truth assignment that has at least one true literal and one false literal in each clause.

5.1.3 The reduction

This section describes a transformation from a generic instance of NAE3SAT into a particular instance of NPL2K2.

Let $(X, \mathcal{C})$ be a generic instance of NAE3SAT. Let $X := \{x_1, \dots, x_n\}$ and $\mathcal{C} := \{c_1, \dots, c_m\}$, where $|c_i| = 3$. We denote $c_i := (c_i^{\text{AD}}, c_i^{\text{DB}}, c_i^{\text{BA}})$, where c_i^{AD} , c_i^{DB} , and c_i^{BA} represent the literals in the first, second and third positions of clause c_i , respectively. We describe the construction of graph $G^* := (V(G^*), E(G^*))$, a particular instance of NPL2K2. Since G^* is a dense graph, we only describe $\overline{E}(G^*)$.

First, we show how to construct some basic structures that will be replicated in G^* . A *gadget* $\mathcal{G}(k, \text{PQ})$, $\text{PQ} \in \{\text{AD}, \text{DB}, \text{BA}\}$, related to the occurrence of the literals x_k or $\overline{x}_k$ in position PQ of some clause, is a subgraph with vertex set and edge set defined by:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{G}(k, \text{AD})) &:= \{x_k^{\text{AD}}, y_k^{\text{CB}}, y_k^{\text{BD}}, x_k^{\text{DA}}, y_k^{\text{BC}}, y_k^{\text{CA}}\}; \\ \overline{E}(\mathcal{G}(k, \text{AD})) &:= \{x_k^{\text{AD}} y_k^{\text{CB}}, y_k^{\text{CB}} y_k^{\text{BD}}, y_k^{\text{BD}} x_k^{\text{DA}}, x_k^{\text{DA}} y_k^{\text{BC}}, y_k^{\text{BC}} y_k^{\text{CA}}, y_k^{\text{CA}} x_k^{\text{AD}}\} \\ V(\mathcal{G}(k, \text{DB})) &:= \{x_k^{\text{DB}}, y_k^{\text{AC}}, y_k^{\text{CB}}, x_k^{\text{BD}}, y_k^{\text{CA}}, y_k^{\text{AD}}\}; \\ \overline{E}(\mathcal{G}(k, \text{DB})) &:= \{x_k^{\text{DB}} y_k^{\text{AC}}, y_k^{\text{AC}} y_k^{\text{CB}}, y_k^{\text{CB}} x_k^{\text{BD}}, x_k^{\text{BD}} y_k^{\text{CA}}, y_k^{\text{CA}} y_k^{\text{AD}}, y_k^{\text{AD}} x_k^{\text{DB}}\} \\ V(\mathcal{G}(k, \text{BA})) &:= \{x_k^{\text{BA}}, y_k^{\text{CA}}, y_k^{\text{AD}}, x_k^{\text{AB}}, y_k^{\text{DB}}, y_k^{\text{BC}}\}; \\ \overline{E}(\mathcal{G}(k, \text{BA})) &:= \{x_k^{\text{BA}} y_k^{\text{CA}}, y_k^{\text{CA}} y_k^{\text{AD}}, y_k^{\text{AD}} x_k^{\text{AB}}, x_k^{\text{AB}} y_k^{\text{DB}}, y_k^{\text{DB}} y_k^{\text{BC}}, y_k^{\text{BC}} x_k^{\text{BA}}\} \end{aligned}$$

For $k \in \{1, \dots, n\}$ and $\text{P}, \text{Q} \in \{\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}\}$, vertex x_k^{PQ} is called *variable vertex* and vertex y_k^{PQ} is called *auxiliary vertex*. We define the *clockwise order* as the order of vertices presented in the gadgets above; and the *counter clockwise order* the reverse order.

Now, we describe the vertex set and edge set of G^* . Set $V(G^*)$ is formed by: four vertices $x^{\text{A}}, x^{\text{B}}, x^{\text{C}}, x^{\text{D}}$; a vertex c^i for each clause c_i ; and $V(\mathcal{G}(k, \text{PQ}))$ corresponding with the occurrence of the literals x_k or $\overline{x}_k$ in position PQ, $\text{PQ} \in \{\text{AD}, \text{DB}, \text{BA}\}$, of some clause.

Set $\overline{E}(G^*)$ is formed by: edge $x^c c^i$ for each clause c_i ; edge $c^i x_k^{\text{PQ}}$, if literal x_k occurs in position PQ of clause c_i ; edge $c^i x_k^{\text{QP}}$, if literal $\overline{x}_k$ occurs in position PQ of clause c_i ; edges $v_k^{\text{PQ}} x^{\text{P}}, v_k^{\text{PQ}} x^{\text{Q}}$, for each $v_k^{\text{PQ}}, v \in \{x, y\}$ and $\text{PQ} \neq \text{AB}, \text{BA}$; edges $v_k^{\text{PQ}} x^{\text{C}}, v_k^{\text{PQ}} x^{\text{D}}$, for each $v_k^{\text{PQ}}, v \in \{x, y\}$ and $\text{PQ} = \text{AB}, \text{BA}$; and $\overline{E}(\mathcal{G}(k, \text{PQ}))$ corresponding with the occurrence of the literals x_k or $\overline{x}_k$ in position PQ of some clause. Figure 5.1(a) shows an example of G^* and Figure 5.1(b) exhibits a possible solution for it.

Next, we remark some properties of G^* . The first one is a consequence of the construction of the gadgets.

PROPERTY 5.2 *Given a gadget, for each pair of vertices v_k^{PQ} and v_k^{RS} taken in clockwise order, P and S are adjacent sets.*

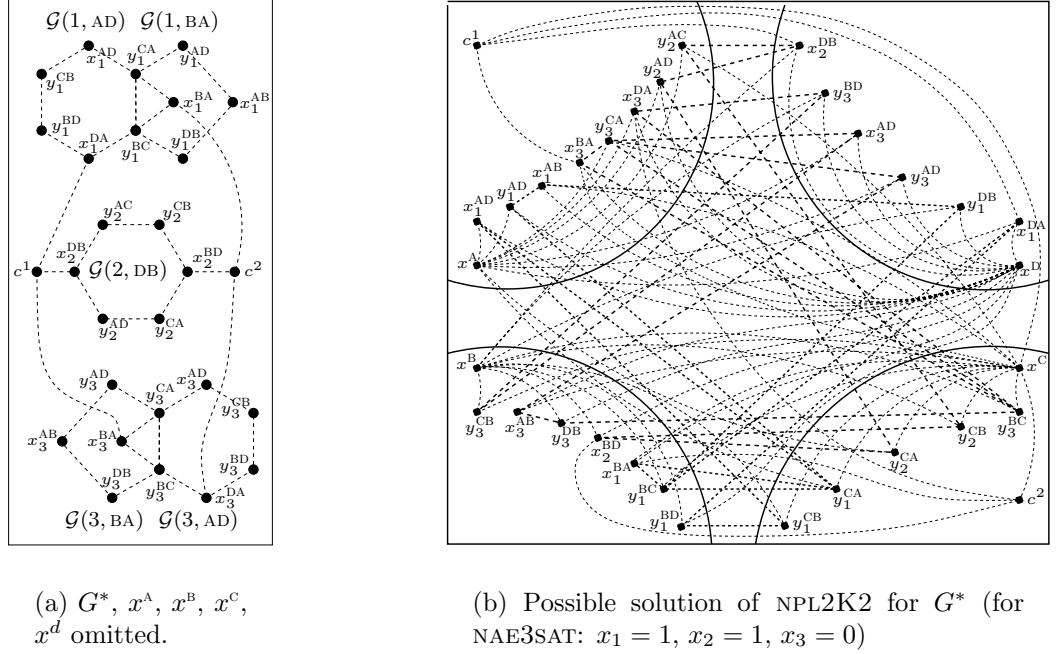


Figura 5.1: Example of reduction for instance $(\overline{x_1}, x_2, x_3)(\overline{x_3}, \overline{x_2}, x_1)$.

Next property follows by Property 5.1 and by construction of G^* .

PROPERTY 5.3 Let $x_k^{PQ}, y_k^{PQ}, k \in \{1, \dots, n\}$, and $P, Q \in \{A, B, C, D\}$. These vertices cannot be placed in $\{A, B, C, D\} \setminus \{P, Q\}$.

For each variable and auxiliary vertex of G^* , we consider an ordering from left to right in the sets of its superscript. That is, for a vertex with a superscript PQ , P is the *left set* and Q is the *right set*. A gadget $\mathcal{G}(k, PQ)$ for which every vertex is placed in its left (right) set is called a *left (right) gadget*.

LEMMA 5.4 Let $\mathcal{G}(k, PQ), k \in \{1, \dots, n\}$ and $PQ \in \{AD, DB, BA\}$. If the vertices of $\mathcal{G}(k, PQ)$ are well positioned, then either $\mathcal{G}(k, PQ)$ is a left gadget, or a right gadget.

Proof: Let $v^{rs} \in \mathcal{G}(k, PQ)$. Consider v^{rs} placed into set R . Following clockwise order, select the next vertex, v^{tu} , of $\mathcal{G}(k, PQ)$. By Property 5.2, R and U are adjacent sets. Since v^{PQ} and v^{rs} are non-adjacent, by Property 5.1, v^{tu} can only be placed in set T . Continuing this reasoning we return to vertex v^{rs} placing all vertices in their left set.

In the same way, considering v^{rs} in right set S and following counter-clockwise order, we place all vertices in their right set. $\square$

COROLLARY 5.5 *Let $\mathcal{G}(k, \text{PQ})$ and $\mathcal{G}(k, \text{RS})$, with $\text{PQ}, \text{RS} \in \{\text{AD}, \text{DB}, \text{BA}\}$, be two existent gadgets of G^* . Then, either $\mathcal{G}(k, \text{PQ})$ and $\mathcal{G}(k, \text{RS})$ are both left gadgets, or they are both right gadgets.*

Proof: By Lemma 5.4, we assume without loss of generality that $\mathcal{G}(k, \text{PQ})$ is a left gadget. By construction, $V(\mathcal{G}(k, \text{PQ})) \cap V(\mathcal{G}(k, \text{RS})) \neq \emptyset$. Therefore, by Lemma 5.4, $\mathcal{G}(k, \text{RS})$ is a left gadget. $\square$

5.1.4 Main Theorem

In the previous section we showed how to construct G^* . It is easy to see that this construction can be done in polynomial time. In order to complete the proof that NPL2K2 is NP-complete, it remains to show that $\mathcal{C}$ is satisfiable if and only if G^* has a $2K_2$ -partition.

THEOREM 5.6 *Let G^* be the particular instance of NPL2K2 constructed from $(X, \mathcal{C})$ a generic instance of NAE3SAT. Then, $\mathcal{C}$ is satisfiable if and only if G^* has a $2K_2$ -partition.*

Proof: Suppose that $t : X \rightarrow \{T, F\}$ is a satisfying truth assignment for $\mathcal{C}$. Construct a $2K_2$ -partition for G^* as follows: if $t(x_k) = T$, then each gadget $\mathcal{G}(k, \text{PQ})$ is a left gadget; otherwise each gadget $\mathcal{G}(k, \text{PQ})$ is a right gadget. By Lemma 5.4, Corollary 5.5 and the fact that for $i \neq j$, each vertex of $\mathcal{G}(i, \text{PQ})$ is adjacent to each vertex of $\mathcal{G}(j, \text{RS})$, we conclude that the variable and auxiliary vertices are well-positioned.

So as to complete the construction of $2K_2$ -partition, we have to show that vertices $c^1, \dots, c^m$ can be placed in at least one of the sets $\{A, B, C, D\}$. By construction of G^* , vertex c^i represents clause $(c_i^{\text{AD}}, c_i^{\text{DB}}, c_i^{\text{BA}})$. Moreover, there exists edge $c^i x^c \in \overline{E}(G^*)$. By Property 5.1, c^i cannot be placed in set D . Also by construction of G^* , there exist three non-edges incident with c^i : $c^i x^{\text{AD}}$ or $c^i x^{\text{DA}}$; $c^i x^{\text{DB}}$ or $c^i x^{\text{BD}}$; and $c^i x^{\text{BA}}$ or $c^i x^{\text{AB}}$ (the subscripts are omitted for simplicity).

By construction of the $2K_2$ -partition, if $t(x_k) = T$, then x_k^{PQ} and x_k^{QP} are in left set; otherwise, they are in right set. Since t is a satisfying truth assignment for NAE3SAT, the

three variables vertices that represent c_i^{AD} , c_i^{DB} , and c_i^{BA} cannot be all in the left set, or all in the right set. Therefore, the three non-edges incident with c^i , lie in the sets:

- (i) $\{A, B\}$ and in this case c^i can be placed in set C; or
- (ii) $\{A, D\}$ and in this case c^i can be placed in set A; or
- (iii) $\{B, D\}$ and in this case c^i can be placed in set B.

We conclude that all vertices of G^* are well-positioned and we are done.

Consider now that we have a $2K_2$ -partition for G^* in sets $\{A, B, C, D\}$. By Lemma 5.4, gadget $\mathcal{G}(k, PQ)$ is either a left gadget, or a right gadget. By Corollary 5.5, two gadgets $\mathcal{G}(k, PQ)$ and $\mathcal{G}(k, RS)$ with $PQ \neq RS$ are both left gadgets, or both right gadgets. Thus, for each x_k , we assign $t(x_k) = T$ if gadget $\mathcal{G}(k, PQ)$ is a left gadget; otherwise $t(x_k) = F$.

Suppose that t is not a satisfying truth assignment. Thus, there exists at least one clause $c_i := (c_i^{AD}, c_i^{DB}, c_i^{BA})$ with $c_i = (T, T, T)$ or $c_i = (F, F, F)$. In the first case the vertex c^i is non-adjacent to vertices in sets A, D and B. We conclude that c^i can only be placed in set D. Nevertheless, by construction of G^* , vertex c^i is non-adjacent with x^c , contradicting the hypothesis that $\{A, B, C, D\}$ is a $2K_2$ -partition of G^* . The case $c_i = (F, F, F)$ is analogous. $\square$

COROLLARY 5.7 *The Nonempty Part List $2K_2$ -Partition Problem is NP-complete.*

Proof: It follows by Theorem 5.6 and the fact that NPL2K2 belongs to NP. $\square$

Capítulo 6

Conclusões e trabalhos futuros

Esta tese abordou o problema da coloração total em algumas classes de grafos. Como era esperado, nossa experiência com este problema comprovou que a coloração total herda as dificuldades da coloração de arestas e da coloração de vértices. Ademais, mesmo que as colorações de arestas e vértices sejam simples, isto não implica que sua coloração total seja simples. Basta observar que o problema é NP-difícil para os grafos bipartidos regulares.

Embora o estudo restrito a classes de grafos gere técnicas *ad hoc*, muitas das técnicas desenvolvidas podem ser úteis em outras classes de grafos desde que as características intrínsecas destas classes sejam respeitadas. Neste trabalho, destacamos a técnica da colagem que foi utilizada para os snarks, para o C_n^2 e para o B_k , k par. Esta técnica pode ser descrita como a identificação de uma sub-estrutura nos grafos da classe analisada, coloração desta estrutura e sua utilização para construção da coloração dos grafos desta classe, em geral usando recursividade. Nos casos em que a técnica da colagem foi utilizada, a construção esteve dentro de uma indução. Devido a isso, esta técnica somente pôde ser utilizada em casos em que não havia alteração do grau máximo.

Uma outra abordagem interessante é usar o resultado de Chetwynd e Hilton [20], que diz que se um grafo G é tipo 1, então G é harmônico*, para provar que um grafo é tipo 2. Nesta tese, este resultado foi usado no contexto de grafos regulares e nos trouxe boas informações sobre as potências de ciclo, que terminaram por gerar as condições de contorno da Conjectura 2.27.

Como já dissemos antes, o nosso foco atual de trabalho é a coloração total dos grafos

*veja Seção 2.1.3

3-cliques. Os casos que trazem maiores dificuldades são aqueles em que o grafo 3-cliques G pode ser esquematizado como na Figura 4.2 (pag. 76). Note que neste caso o grafo $K(G)$, obtido a partir de G aplicando o operador clique, é um caminho com três vértices. Uma extensão deste trabalho é considerar os grafos G , obtidos a partir da união de n grafos completos e com exatamente n cliques maximais, cujo $K(G)$ sejam isomorfos a um caminho com n vértices. Note que, nesta extensão, o grafo G é um grafo indiferença, então $\chi_T(G)$ quando $\Delta(G)$ é par é conhecido [32], restando a análise dos casos em que $\Delta(G)$ é ímpar.

Considerando as outras classes de grafos que foram abordadas nesta tese, os resultados expostos deixam abertura para outras extensões, como por exemplo:

No que concerne às potências de ciclo temos a possibilidade de verificar a TCC para as potências de ciclo com um número ímpar de vértices. Podemos ainda trabalhar na determinação do número cromático total abordando a Conjectura 2.27 diretamente, ou restringindo o valor de k .

No que concerne aos grafos bipartidos podemos avançar a coloração total das grades parciais, bem como generalizar a classe das quase-escadas para k -regulares, $k \geq 4$, e abordar o problema para esta generalização.

Além dessas extensões naturais, esta tese não abordou o problema da coloração por listas, um campo vasto e que tem produzido resultados muito interessantes nos últimos anos. O estudo da coloração total por listas é certamente um tópico muito importante a ser considerado.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Akbari. Two conjectures on uniquely totally colorable graphs. *Discrete Mathematics*, 266:41–45, 2003.
- [2] M. Behzad. *Graphs and their chromatic numbers*. PhD thesis, Michigan State University, 1965.
- [3] M. Behzad, G. Chartrand, and J. K. Cooper Jr. The colour numbers of complete graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, 42:226–228, 1967.
- [4] J. C. Bermond. Nombre chromatique total du graphe r -parti complet. *Journal of the London Mathematical Society*, 9(2):279–285, 1972.
- [5] D. Blanusa. Problem cetiriju boja. *Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser. II*, 1:31–42, 1946.
- [6] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with applications*. North Holland, 1976.
- [7] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, and D. R. Woodall. Total colorings of planar graphs with large maximum degree. *Journal of Graph Theory*, 26:53–59, 1997.
- [8] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, and D. R. Woodall. Total colourings of planar graphs with large girth. *European Journal of Combinatorics*, 19:19–24, 1998.
- [9] A. Brandstädt, V. B. Le, T. Szymczak, F. Siegemund, H. N. de Ridder, S. Knorr, M. Rzehak, M. Mowitz, N. Ryabova, and U. Nagel. Information system on graph class inclusions. WWW document at http://www.teo.informatik.uni-rostock.de/isgci/classes/gc_440.html, 2002. Last visited 05/05/2005.

- [10] K. Cameron, E. M. Eschen, C. T. Hoàng, and R. Sritharan. The list partition problem for graphs. In *Proceedings of the ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms - SODA 2004*, pages 384–392. SIAM, 2004.
- [11] C. N. Campos, S. Dantas, L. Faria, and S. Gravier. $2K_2$ -partition problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 22:217–221, 2005.
- [12] C. N. Campos and C. P. de Mello. The total chromatic number of some bipartite graphs. to appear in *Ars Combinatoria*.
- [13] C. N. Campos and C. P. de Mello. Coloração total do C_n^2 . *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 4(3):177–186, 2003.
- [14] C. N. Campos and C. P. de Mello. A result on the total colouring of powers of cycles. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 18:47–52, 2004.
- [15] C. N. Campos and C. P. de Mello. The total chromatic number of some bipartite graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 22:557–561, 2005.
- [16] B. L. Chen, C. K. Cheng, H. L. Fu, and K. C. Huang. A study of the total chromatic number of equibipartite graphs. *Discrete Mathematics*, 184:49–60, 1998.
- [17] B. L. Chen, L. Dong, Q. Z. Liu, and K. C. Huang. Total colorings of equibipartite graphs. *Discrete Mathematics*, 194:59–65, 1999.
- [18] B. L. Chen and H. L. Fu. Total colorings of graphs of order $2n$ having maximum degree $2n - 2$. *Graphs and Combinatorics*, 8:119–123, 1992.
- [19] B. L. Chen, H. L. Fu, and M. T. Ko. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 17:137–146, 1995.
- [20] A. G. Chetwynd and A. J. W. Hilton. Some refinements of the chromatic number conjecture. *Congressus Numerantium*, 66:195–215, 1988.
- [21] A. G. Chetwynd, A. J. W. Hilton, and Z. Cheng. The total chromatic number of graphs of high minimum degree. *Journal of the London Mathematical Society*, 44(2):193–202, 1991.

- [22] K. H. Chew. Total chromatic number of regular graphs of odd order and high degree. *Discrete Mathematics*, 154:41–51, 1996.
- [23] K. H. Chew. Total chromatic number of graphs of odd order and high degree. *Discrete Mathematics*, 205:39–46, 1999.
- [24] K. H. Chew and H. P Yap. Total chromatic number and chromatic index of complete r -partite graphs. *Journal of Graph Theory*, 16:629–634, 1992.
- [25] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. Strong perfect graph theorem. Perfect Graph Conjecture workshop, 2002. American Institute of Mathematics.
- [26] V. Chvátal. Star-cutsets and perfect graphs. *Journal of Combinatorial Theory - Series B*, 39:189–199, 1985.
- [27] P. I. Cowling. Total colouring of hypergraphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 19:151–160, 1995.
- [28] P. I. Cowling. On the total chromatic number of Steiner systems. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 35:51–64, 2000.
- [29] S. Dantas, C. M. H. de Figueiredo, S. Gravier, and S. Klein. Finding H -partitions efficiently. *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications*, 39:133–144, 2005.
- [30] C. M. H. de Figueiredo, S. Klein, Y. Kohayakawa, and B. Reed. Finding skew partitions efficiently. *Journal of Algorithms*, 37:505–521, 2000.
- [31] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. On edge-colouring indifference graphs. *Theoretical Computer Science*, 181:91–106, 1997.
- [32] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. *Information Processing Letters*, 70:147–152, 1999.
- [33] B. Descartes. Network-colourings. *Mathematical Gazette*, 32:67–69, 1948.
- [34] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Number 173 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.

- [35] J. K. Dugdale and A. J. W. Hilton. The total chromatic number of regular graphs of order $2n$ and degree $2n - 3$. *Journal of Combinatorics Information and System Sciences*, 15:103–110, 1990.
- [36] T. Feder, P. Hell, S. Klein, and R. Motwani. List partitions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 16(3):449–478, 2003.
- [37] J. C. Fournier. Colorations des arêtes d'un graphe. *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle*, 15:311–314, 1973.
- [38] M. Gardner. Mathematical games. *Scientific American*, 234:126–130, 1976.
- [39] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, 1979.
- [40] R. P. Gupta. The chromatic index and the degree of a graph. *Notices of the American Mathematical Society*, 13:abstract 66T–429, 1966.
- [41] G. M. Hamilton, A. J. W. Hilton, and H. R. F. Hind. Graphs of order at most 10 which are critical with respect to the total chromatic number. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 24:97–113, 1997.
- [42] A. J. W. Hilton. A total chromatic number analogue of Plantholt's theorem. *Discrete Mathematics*, 79:169–175, 1989/90.
- [43] A. J. W. Hilton and J. K. Dugdale. The total chromatic number of regular graphs whose complement is bipartite. *Discrete Mathematics*, 126:87–98, 1994.
- [44] A. J. W. Hilton and G. M. Hamilton. Graphs of maximum degree 3 and order at most 16 which are critical with respect to the total chromatic number. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 10:129–149, 1991.
- [45] A. J. W. Hilton and H. R. Hind. Non-conformable subgraphs of non-conformable graphs. *Discrete Mathematics*, 256:203–224, 2002.
- [46] A. J. W. Hilton, F. C. Holroyd, and C. Zhao. The overfull conjecture and the conformability conjecture. *Discrete Mathematics*, 241:343–361, 2001.

- [47] A. J. W. Hilton, J. Liu, and C. Zhao. The total chromatic numbers of joins of sparse graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 28:93, Sep 2003.
- [48] D. G. Hoffman and C. A. Rodger. The chromatic index of complete multipartite graphs. *Journal of Graph Theory*, 16:159–164, 1992.
- [49] R. Isaacs. Infinite families of non-trivial trivalent graphs which are not Tait-colorable. *American Mathematical Monthly*, 82:221–239, 1975.
- [50] S. Isobe, X. Zhou, and T. Nishizeki. A polynomial-time algorithm for finding total colorings of partial k -trees. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 10:171–194, 1999.
- [51] S. Isobe, X. Zhou, and T. Nishizeki. Total colorings of degenerated graphs. In *Lecture Notes in Computer Science*, volume 2076, pages 506–517, 2001.
- [52] A. V. Kostochka. The total coloring of a multigraph with maximal degree 4. *Discrete Mathematics*, 17:161–163, 1977.
- [53] A. V. Kostochka. The total chromatic number of any multigraph with maximum degree five is at most seven. *Discrete Mathematics*, 162:199–214, 1996.
- [54] C. J. H. McDiarmid and A. Sánchez-Arroyo. An upper bound for total colouring of graphs. *Discrete Mathematics*, 111:389–392, 1993.
- [55] C. J. H. McDiarmid and A. Sánchez-Arroyo. Total colouring regular bipartite graphs is NP-hard. *Discrete Mathematics*, 124:155–162, 1994.
- [56] J. Meidanis. Edge coloring of cycle powers is easy. Available at <http://www.ic.unicamp.br/~meidanis/research/edge/>. Last visited 07/10/2005.
- [57] M. Molloy and B. Reed. A bound on the total chromatic number. *Combinatorica*, 18(2):241–280, 1998.
- [58] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour, and R. Thomas. WWW document at <http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/generalize.html>, 2003. Last visited 02/01/2006.

- [59] M. Rosenfeld. On the total coloring of certain graphs. *Israel Journal of Mathematics*, 9:396–402, 1971.
- [60] A. Sánchez-Arroyo. Determining the total colouring number is NP-hard. *Discrete Mathematics*, 78:315–319, 1989.
- [61] D. P. Sanders. On total 9-coloring planar graphs of maximum degree seven. *Journal of Graph Theory*, 31:67–73, 1999.
- [62] T. J. Schaefer. The complexity of satisfiability problems. In *Proceedings of the 10th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 216–226. Association for Computing Machinery, New York, 1978.
- [63] G. Szekeres. Polyhedral decompositions of cubic graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 8:367–387, 1973.
- [64] P. G. Tait. Remarks on the colouring of maps. In *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, volume 10, pages 501–503, 1880.
- [65] N. Vijayaditya. On total chromatic number of a graph. *Journal of the London Mathematical Society*, 3(2):405–408, 1971.
- [66] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p -graph. *Metody Diskret. Analiz.*, 3:25–30, 1964. In Russian.
- [67] V. G. Vizing. The chromatic class of a multigraph. *Kibernetika (Kiev)*, 3:29–39, 1965. In Russian. English version in *Cybernetics* 1: 32–41.
- [68] V. G. Vizing. Some unsolved problems in graph theory. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 23:117–134, 1968. In Russian. English version in *Russian Math. Surveys* 23: 125–141.
- [69] W. F. Wang. Equitable total coloring of graphs with maximum degree. *Graphs and Combinatorics*, 18(3):677–685, 2002.
- [70] D. Xie and Z. He. The total chromatic number of regular graphs of even order and high degree. *Discrete Mathematics*, 300:196–212, 2005.
- [71] D. Xie and W. Yang. The total chromatic number of graphs of even order and high degree. *Discrete Mathematics*, 271:295–302, 2003.

- [72] H. P. Yap. Total colourings of graphs. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 21:159–163, 1989.
- [73] H. P. Yap. Total colourings of graphs. In *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1623. Springer, Berlin, 1996.
- [74] H. P. Yap and K. H. Chew. Total chromatic number of graphs of high degree II. *Journal of the Australian Mathematical Society Ser. A*, 53:219–228, 1992.
- [75] H. P. Yap, J. F. Wang, and Z. F. Zhang. Total chromatic number of graphs of high degree. *Journal of the Australian Mathematical Society Ser. A*, 47:445–452, 1989.
- [76] Z. F. Zhang, L. Z. Liu, J. F. Wang, and H. X. Li. A note on the total chromatic number of Halin graphs with maximum degree 4. *Applied Mathematics Letters*, 11(5):23–27, 1998.
- [77] Z. F. Zhang, J. X. Zhang, and J. F. Wang. The total chromatic number of some graphs. *Scientia Sinica Series A*, pages 1434–1441, 1988.

EVOLUÇÃO

O que me impressiona, à vista de um macaco, não é que ele tenha sido nosso passado: é este pressentimento de que ele venha a ser nosso futuro.

Mario Quintana - Caderno H