

Representação e Cálculo Eficiente da Iluminação Global na Síntese de Imagem

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação devidamente corrigida e defendida por Danilo Roberto Pereira e aprovada pela Banca Examinadora.

Campinas, 19 de Março de 2009.


Anamaria Gomide (Orientadora)


Jorge Stolfi (Co-orientador)

Dissertação apresentada ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Pereira, Danilo Roberto

P414r Representação e cálculo eficiente da iluminação global na síntese de imagem/Danillo Roberto Pereira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2009.

Orientadores : Anamaria Gomide; Jorge Stolfi

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Computação.

1. Iluminação global. 2. Radiosidade. 3. Método de elementos finito. 4. Funções de bases radiais. I. Gomide, Anamaria. II. Stolfi, Jorge. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Computação. IV. Título.

Título em inglês: Efficient computation of global illumination for image synthesis

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Global illumination. 2. Radiosity. 3. Finite element method. 4. Radial basis function.

Área de concentração: Computação Gráfica

Titulação: Mestre em Ciencia da Computação

Banca examinadora: Profª. Dra. Anamaria Gomide (IC-UNICAMP)
Prof. Dr. João Luiz Dihl Comba (INF-UFRGS)
Prof. Dr. Alexandre Xavier Falcão (IC-UNICAMP)

Data da defesa: 19/03/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Ciencia da Computação

TERMO DE APROVAÇÃO

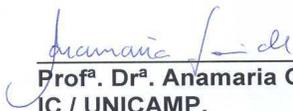
Dissertação Defendida e Aprovada em 19 de março de 2009, pela Banca examinadora composta pelos Professores Doutores:



Prof. Dr. João Luiz Dhl Comba
Instituto de Informática / UFRGS.



Prof. Dr. Alexandre Xavier Falcão
IC / UNICAMP.



Profª. Drª. Anamaria Gomide
IC / UNICAMP.

Representação e Cálculo Eficiente da Iluminação Global na Síntese de Imagem

Danillo Roberto Pereira¹

Maio de 2009

Banca Examinadora:

- Anamaria Gomide (Orientadora)
- João Luiz Dihl Comba
Instituto de Informática - UFRGS
- Alexandre Xavier Falcão
Instituto de Computação - UNICAMP
- Sônia Maria Gomes (Suplente externo)
Departamento de Matemática Aplicada - IMECC - UNICAMP
- Hélio Pedrini (Suplente interno)
Instituto de Computação - UNICAMP

¹Suporte financeiro de: Bolsa CNPq (processo 132038/2007-2) 2007–2009

© Danilo Roberto Pereira, 2009.
Todos os direitos reservados.

Resumo

A geração de imagens fotorrealísticas é um desafio importante em computação gráfica. Um ingrediente crítico para a obtenção do realismo está o modelo de iluminação. Em 1986, Jim Kajiya apresentou uma equação integral que define o fluxo de luz (radiosidade) num ambiente de maneira precisa; contudo, até recentemente, os métodos conhecidos para a resolução dessa equação tinham custo computacional e complexidade de implementação elevados. Em 2008, Jaako Lehtinen desenvolveu uma técnica relativamente simples e eficiente para o cálculo da iluminação global em cenas virtuais, usando elementos finitos definidos por pontos de amostragem. Neste projeto de Mestrado, implementamos esse método, e comparamos o resultado usando três tipos diferentes de bases: uma base radial, uma base radial normalizada e uma base de Shepard. Além da comparação visual, calculamos a radiosidade “exata” para uma cena simples e comparamos quantitativamente esse resultado com os resultados do método de Lehtinen com cada uma das três bases.

Abstract

The generation of realistic images is a major challenge in computer graphics. A critical ingredient for realistic rendering is the lighting model. In 1986, Jim Kajiya presented an integral equation that precisely defines the light flow (radiosity) in a virtual environment; however, until recently, the known methods for solving that equation had high computational cost and implementation complexity. In 2008, Jaako Lehtinen developed a relatively simple and efficient technique for the computation of global illumination in virtual scenes, using finite elements defined by sampling points. In this Masters project, we implemented that method, and compared the results using three different types of bases: a radial basis, a normalized radial basis, and a Shepard basis. Besides visual comparison, we computed the “exact” radiosity for a simple scene and compared quantitatively that result with the results obtained by Lehtinen’s method with each of the three bases.

Agradecimentos

Aos meu maiores ídolos, meu pai (meu héroi) e minha mãe (minha rainha) pela educação, pelo carater, pelo apoio financeiro e psicológico e pelo carinho dado. Não tenho palavras para descrever o quanto amo vocês.

Aos professores Dr^a. Anamaria Gomide e Dr. Jorge Stolfi pela orientação, pela atenção, pelo profissionalismo, pela paciência e confiança oferecida. MUITÍSSIMO obrigado.

Aos professores do Instituto de Computação que contribuíram direta ou indiretamente na minha formação.

Aos professores do curso de ciência da computação da FCT-UNESP; em especial ao prof. Dr. Marco Antônio Piteri, que me orientou durante toda graduação e que deu a oportunidade de conhecer a área acadêmica. Sou muito grato ao Sr.

Aos meus tios Márcia e Adelson e aos meus primos Juliane e Bruno pelo apoio e por me fazer sentir mais perto dos meus pais.

Aos meus amigo de república pelo companherismo e por tornarem os meus dias mais agradáveis. Em especial ao Marco, ao Tiezzi e ao Rubens.

Aos meus dois irmãos Diego e Clóvis, o primeiro de sangue e o segundo de consideração e a minha namorada Amanda, pelo apoio incondicional.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Mesmo sabendo que a ausência só apaga sentimentos pequenos e fortalece os grandes; termino pedindo desculpa aos meus pais e a minha namorada pela minha ausência.

Aos meus pais, Tânia e Carlito.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Agradecimentos	viii
	ix
1 Preliminares	1
1.1 Contextualização e Motivação	1
1.2 Objetivo da dissertação	3
1.3 Organização	3
2 Modelos de Iluminação	4
2.1 Introdução	4
2.1.1 Interação da luz com a superfície	4
2.2 A equação de <i>rendering</i>	6
2.2.1 Forma direcional da equação de <i>rendering</i>	7
2.3 Formulação por operadores funcionais	8
3 Método de Elementos Finitos	10
3.1 Aproximação numérica	10
3.1.1 Bases de aproximação	10
3.2 Aplicações de espaços de aproximação	11
3.2.1 Interpolação	11
3.2.2 Bases interpoladoras	11
3.2.3 Aproximação por quadrados mínimos	11
3.2.4 Bases partição da unidade	12
3.2.5 Método de projeção	12
3.2.6 Metodo de Galerkin	13

3.3	Bases de elementos finitos	14
3.3.1	Base de elementos finitos definidas por pontos	15
3.3.2	Base radial	15
3.3.3	Base radial normalizada	15
3.3.4	Bases de Shepard	16
4	Método de Elementos Finitos para a Radiosidade	19
4.1	Introdução	19
4.1.1	Sítios	19
4.1.2	Distância entre sítios	19
4.2	Base de elementos finitos para radiosidade	20
4.2.1	Modelagem de funções de radiância	20
4.2.2	Elementos finitos sobre sítios da cena	21
4.2.3	Base radial	22
4.2.4	Base radial normalizada	23
4.2.5	Base de Shepard	24
4.2.6	Escolha dos elementos	24
4.2.7	Escolhendo o valor do raio	26
5	Radiosidade pelo método de elementos finitos	27
5.1	Introdução	27
5.2	Computando o operador de transferência	27
5.2.1	Fator de forma	28
5.2.2	Área efetiva	29
5.2.3	Separação do albedo	30
5.2.4	Obtendo a iluminação global por iterações	30
5.3	Computando o operador de <i>rendering</i>	31
6	Resultados	32
6.1	Cena A: Sala com janela lateral	32
6.2	Cena B: Sala fechada com cubos e bolas	32
6.3	Cena C: Sala com duas janelas	33
6.4	Cena D: Sala com janelas quadriculadas	33
7	Validação dos resultados	39
7.1	Solução referência	39
7.1.1	Descrição da cena	39
7.1.2	Equações da radiosidade	39
7.1.3	Radiância direta	41

7.2	Discretização da solução referência	42
7.2.1	Solução obtida	43
7.3	Resolução com nosso <i>software</i>	44
7.3.1	Base radial gaussiana	45
7.3.2	Base radial normalizada	47
7.3.3	Base de Shepard	49
7.4	Considerações	50
8	Conclusões e trabalhos futuros	52
A	Radiometria	54
A.1	Introdução	54
A.2	Fluxo radiante e densidade de fluxo por unidade	54
A.3	Intensidade radiante	54
A.4	Radiância	55
	Bibliografia	57

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Contextualização e Motivação

Um dos grandes desafios da computação gráfica é a geração de imagens fotorrealísticas; ou seja, geração de imagens a qual o observador não consegue distinguir se a imagem é uma fotografia real ou se foi gerada pelo computador. Imagens fotorrealistas tem muitas aplicações práticas, principalmente em arquitetura (projeto e avaliação de iluminação em ambientes internos), na indústria cinematográfica (animações e efeitos especiais) e no desenvolvimento de jogos.

Um dos fatores que mais influenciam na obtenção do realismo é a maneira como a interação da luz com os objetos da cena é simulada. Quanto mais fiel essa simulação maior será o realismo da imagem. No entanto, quanto mais fiel é a simulação mais tempo e desempenho são necessários. A maioria dos programas gráficos interativos usam um modelo bem simples para essa interação, em que cada objeto é iluminado como se fosse o único presente na cena. Neste modelo local os objetos não projetam sombras uns nos outros, ver Figura 1.1.

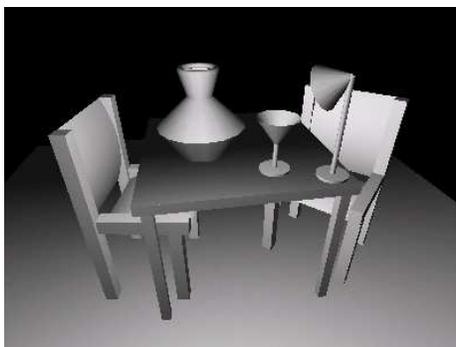


Figura 1.1: Imagem sintética utilizando um modelo simples de iluminação[1].

A técnica de traçado de raios [24] usa um modelo mais elaborado para essa interação da luz com a cena, que permite simular sombras de múltiplas fontes de luz e efeitos como a transparência e reflexão espelhada, como ilustrada na Figura 1.2.

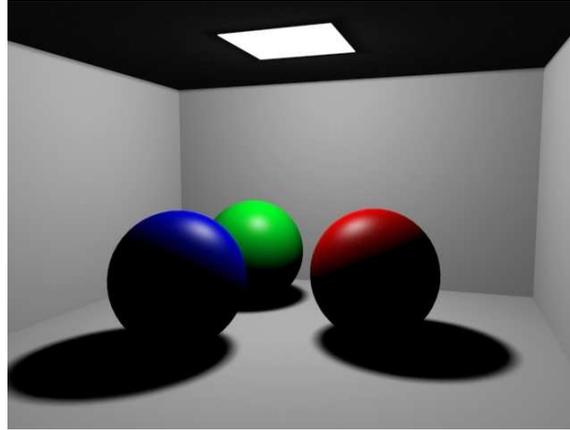


Figura 1.2: Imagem sintética utilizando a técnica de traçado de raios [2].

Imagens ainda mais realistas podem ser obtidas por um modelo de iluminação global, onde a iluminação de cada objeto é influenciada por todos os objetos, como ilustrado na Figura 1.3.



Figura 1.3: Imagem sintética utilizando radiossidade, gerada pelo nosso programa.

Modelos que simulam o fluxo da luz de maneira fiel são quase impraticáveis em tempo real. As três principais dificuldades em simular o transporte da luz em tempo-real são: 1) a complexidade do comportamento das superfícies perante a iluminação; 2) a integração da luz incidente em todas as direções para cada ponto; 3) efeitos de sombreamento, que requer muitos cálculos de intersecção.

Avanços recentes no desempenho de processadores e placas gráficas vem possibilitando o uso de modelos de iluminação global em tempo real. Um exemplo é técnica PRT (*Precomputed Radiance Transfer*) [20, 21, 22, 13, 9, 17], que consegue obter imagens realistas em tempo real por meio de uma pré-computação.

A solução eficiente do problema da iluminação global, e em particular a técnica PRT, envolve uma gama considerável de áreas correlatas, como ótica física, computação gráfica, estruturas de dados, análise numérica e geometria computacional. Neste trabalho exploramos um conjunto significativo de técnicas oriundas destas diferentes áreas, enriquecendo e potencializando o trabalho.

1.2 Objetivo da dissertação

O foco deste trabalho é estudar métodos computacionais para representação e cálculo do fluxo da luz indireta em ambientes com superfícies difusas. Especificamente, o objetivo é comparar diferentes bases, como base radial, base radial normalizada e base de Shepard dentro da metodologia de elementos finitos proposta por [11, 10]. Este é um tema de pesquisa bastante atual [7, 14, 19, 23].

Conforme observamos neste trabalho esta escolha afeta substancialmente a qualidade das imagens e a eficiência do cálculo.

1.3 Organização

Esta dissertação está organizada em oito Capítulos e um Apêndice. O Capítulo 1 faz uma apresentação dos objetivos e justificativas do trabalho. O Capítulo 2 descreve o modelo global de iluminação e a equação de *rendering*. No Capítulo 3 apresentamos a fundamentação teórica do método de elementos finitos. No Capítulo 4 esses conceitos são aplicados à modelagem de funções que surgem no cálculo radiossidade. O Capítulo 5 mostra como utilizar o método de elementos finitos para resolver a equação *rendering*. No Capítulo 6 apresentamos algumas imagens geradas por essa abordagem. No Capítulo 7 comparamos os resultados obtidos pela nossa implementação em uma cena simples com uma solução referência. As conclusões do trabalho e os possíveis tópicos de pesquisas futuras são o tema do Capítulo 8.

No Apêndice A colocamos uma revisão dos conceitos básicos da radiometria, a teoria física que fundamenta a síntese de imagens por radiossidade.

Capítulo 2

Modelos de Iluminação

2.1 Introdução

O principal objetivo de qualquer modelo de iluminação é simular o transporte e a interação da luz com o ambiente. Os modelos de iluminação podem ser classificados em dois grupos: modelos locais [15, 6] e modelos globais[20, 24, 16, 7, 4]. Os modelos de iluminação local consideram cada elemento infinitesimal da cena de modo independente. Cada elemento é iluminado como se fosse o único presente no ambiente, de modo que a sua cor aparente não é influenciada pelos objetos adjacentes. Já os modelos de iluminação global procuram representar outros fenômenos como a reflexão, iluminação indireta e sombras, que dependem da interação entre duas ou mais partes distintas da superfície. Os modelos de iluminação global produzem imagens mais realistas, mas têm maior custo computacional.

2.1.1 Interação da luz com a superfície

Modelos de iluminação realistas devem respeitar as leis básicas da ótica física, como por exemplo a lei da conservação de energia

$$I_i = I_r + I_t + I_a \quad (2.1)$$

onde

I_i : energia luminosa incidente no elemento.

I_r : energia refletida ou espalhada pelo elemento.

I_t : energia transmitida através do elemento.

I_a : energia absorvida pelo elemento.

sendo que essas quantidades não podem ser negativas.

Tanto a luz refletida quanto a luz transmitida pelo elemento podem ter sua direção desviada em varias direções. Para a luz refletida, há dois tipos extremos de superfície: superfície *refletora ideal* e *difusora ideal*. A superfície refletora ideal ou *espelhada* reflete a luz incidente em uma única direção (Figura 2.1.(a)). A superfície difusora ideal ou *Lambertiana* espalha a luz em todas as direções de modo que a superfície aparenta ter a mesma cor vista de qualquer direção (Figura 2.1.(b)). Uma superfície *lustrosa* tem comportamento intermediário, ela espalha a luz em várias direções, mas predominantemente nas direções próximas da direção refletida, como ilustrado na Figura 2.1.(c). Em geral, superfícies reais são uma combinação desses vários tipos: parte da luz é refletida, parte é espalhada de modo lambertiano e parte de modo lustroso. (Figura 2.1.(d)). Considerações análogas valem para luz transmitida.

O comportamento de uma superfície pode ser bastante complexo. Por exemplo, superfícies cheias de cavidades pequenas, como certas rochas porosas e películas de tintas refletoras (conhecidas como “olho de gato”) espalham uma fração maior de luz na direção da fonte luminosa, como pode ser observado na Figura 2.1.(e). A representação precisa do comportamento de superfícies pode exigir modelos bastante complicados como séries de harmônicos esféricos [3, 12].

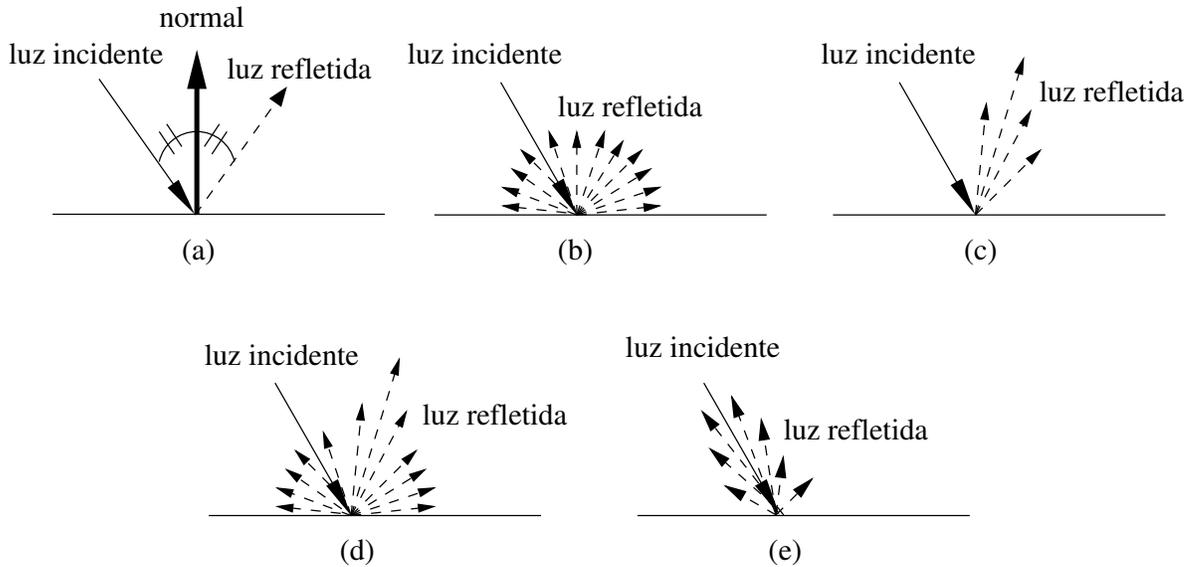


Figura 2.1: Ilustração do comportamento de um raio incidente. (a) Superfície especular ideal (b) Superfície difusora ideal (c) Superfície semi-polida ou lustrosa (d) Combinação das anteriores (e) Superfície “olho de gato”. O comprimento de cada seta tracejada é proporcional à radiância na direção da seta.

2.2 A equação de *rendering*

O transporte da luz no ambiente (fluxo de energia luminosa) em cenas compostas por superfícies de natureza arbitrária é descrito pela *equação de rendering*, formulada em 1986 por J. Kajiya [8]. Ela é uma equação integral

$$L(p, u) = E(p, u) + \int_{\mathbf{C}} \beta(p, p \rightarrow q, u) L(q, p \rightarrow q) V(p, q) G(p, q) dq \quad (2.2)$$

onde

\mathbf{C} é a superfície da cena;

p e q são pontos na superfície da cena, ver Figura 2.2 ;

u é uma direção arbitrária (um vetor unitário do R^3);

$p \rightarrow q$ direção de q para p , e

$L(p, u)$ é a *função de radiância* que fornece a intensidade aparente da luz (própria mais refletida) emitida por um ponto p da superfície quando vista da direção u ;

$E(p, u)$ é a *função de emissão* que fornece intensidade aparente da luz gerada pelo ponto p da superfície e emitida na direção u ;

$\beta(p, p \rightarrow q, u)$ é a *função bidirecional de distribuição de radiância* (FBDR), que diz qual fração da luz incidente no ponto p da cena, vinda da direção $p \rightarrow q$, é re-emitida na direção u ;

$V(p, q)$ é a *função de visibilidade*, que retorna 1 se p é visível a partir de q , e 0 caso contrário.

$G(p, q)$ é o *fator geométrico* entre os elementos de superfície nos pontos p e q .

Na geração de imagens sintéticas, todos os fatores desta equação são conhecidos, exceto a função de radiância L . O objetivo é calcular a função $L(p, u)$ para cada ponto p da cena visível na imagem a ser gerada, onde u é a direção do ponto p para o observador.

Informalmente, a *radiância* de um ponto na superfície de um objeto é a intensidade aparente da luz emitida por uma parte da superfície. A radiância pode variar de acordo com a direção de onde a superfície está sendo observada, e da faixa de comprimento de onda (canal de cor). Uma definição formal de radiância e outros conceitos da radiometria são apresentados no Apêndice A.

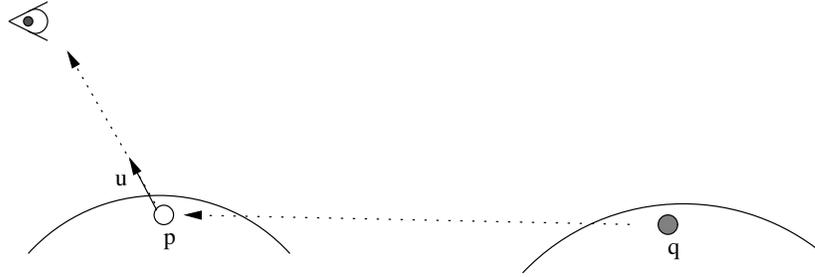


Figura 2.2: Parâmetros da equação de *rendering* na forma superficial.

O fator geométrico $G(p, q)$ consiste do produto de dois fatores $H(p, q)$ e $K(p, q)$. O fator H leva em conta o fato de que a luz que vem da direção $p \rightarrow q$ é distribuída sobre uma área maior ou menor da superfície no ponto p , dependendo da inclinação entre $p \rightarrow q$ e da direção $\vec{n}(p)$ normal à superfície no ponto p , segundo a fórmula

$$H(p, q) = \max\{0, \vec{n}(p) \cdot (p \rightarrow q)\} \quad (2.3)$$

O fator K leva em conta o ângulo sólido aparente do elemento de superfície dq visto de p . O fator K depende da normal $\vec{n}(q)$ no ponto q , da direção $p \rightarrow q$ de q para p e da distância entre os dois pontos; segundo a fórmula

$$K(p, q) = \frac{\max\{0, \vec{n}(q) \cdot (q \rightarrow p)\}}{|p - q|^2} \quad (2.4)$$

Nos dois casos, a normal \vec{n} aponta para fora do objeto.

2.2.1 Forma direcional da equação de *rendering*

A equação (2.2) pode ser chamada de forma “superficial” da equação, pois a integral é feita em relação ao ponto q , sobre toda a superfície \mathbf{C} da cena. Note que a direção $p \rightarrow q$ é função de p e q . Há uma outra forma “direcional” da equação de *rendering*, em que a integral é feita em relação à direção v , sobre a esfera unitária \mathbf{S}^2 (o conjunto de todas as direções).

$$L(p, u) = E(p, u) + \int_{\mathbf{S}^2} \beta(p, v, u) L(p \uparrow v, -v) H(p, p \uparrow v) dv \quad (2.5)$$

Nesta fórmula, o ponto q da fórmula (2.2) passa a ser uma função $p \uparrow v$ do ponto p e da direção v , definido como sendo o primeiro ponto da superfície da cena encontrado por um raio que sai de p na direção v , ver Figura 2.3. Note que, nesta formulação, não existe mais

o fator $V(p, q)$ (que agora está embutido na função $p \uparrow v$). Além disso, esta fórmula não inclui o fator $K(p, q)$, pois a integral é sobre o elemento de ângulo sólido dv (ver apêndice A) e não sobre o elemento de superfície (dq); mas inclui o fator $H(p, p \uparrow v)$.

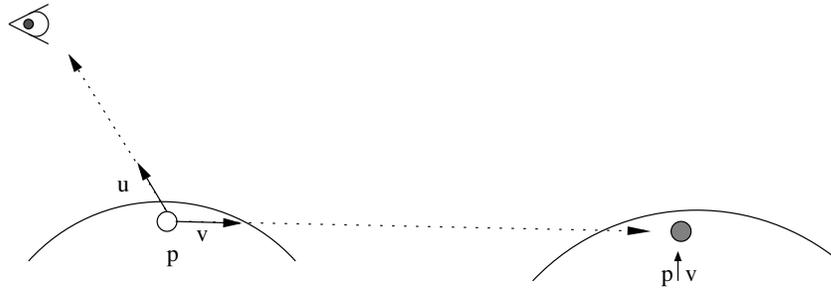


Figura 2.3: Parâmetros da equação de *rendering* na forma direcional.

Nas duas formulações, a equação de *rendering* vale para luz monocromática ou com uma faixa estreita de comprimento de onda, dentro da qual a FBDR de cada ponto pode ser considerada constante. Para luz e/ou superfícies coloridas, a equação se aplica a cada faixa do espectro.

A equação de *rendering* não leva em conta certos fenômenos da ótica, como a difração e interferência, polarização, fluorescência e etc. Felizmente estes fenômenos são inexistentes ou pouco aparentes na maioria das aplicações da síntese de imagens.

2.3 Formulação por operadores funcionais

A equação de *rendering* pode ser escrita como um equação do cálculo funcional

$$L = E + \mathcal{R}L \quad (2.6)$$

onde L e E são as funções de radiância e emissão definidas na Seção 2.2, e \mathcal{R} é o *operador de transferência*, que transforma uma função qualquer F de $\mathbf{C} \times \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ em outra função de $\mathbf{C} \times \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}$; segundo a fórmula

$$(\mathcal{R}F)(p, u) = \int_{\mathcal{S}} \beta(p, v, u) F(p \uparrow v, -v) H(p, v) dv \quad (2.7)$$

na forma direcional, ou

$$(\mathcal{R}F)(p, u) = \int_{\mathcal{C}} \beta(p, p \rightarrow q, u) F(q, p \rightarrow q) V(p, q) G(p, q) dq \quad (2.8)$$

na forma superficial.

A solução da equação (2.6) pode ser escrita

$$L = (\mathcal{I} - \mathcal{R})^{-1}E \quad (2.9)$$

Onde \mathcal{I} é o operador identidade e $(\)^{-1}$ denota o operador inverso. Em condições favoráveis, vale a *fórmula de Neumann*

$$(\mathcal{I} - \mathcal{R})^{-1} = (\mathcal{I} + \mathcal{R} + \mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^3 + \dots) \quad (2.10)$$

No caso da equação de *rendering*, cada termo \mathcal{R}^k da série de Neumann representa a contribuição do fluxo luminoso devida a luz que interagiu k vezes com a superfície da cena antes de ser observada.

Capítulo 3

Método de Elementos Finitos

Antes de considerar o problema específico do cálculo da radiosidade, vamos descrever sucintamente o *Método de Elementos Finitos* (MEF), uma das principais ferramentas numéricas para obter soluções aproximadas de equações funcionais.

Neste capítulo vamos considerar que as funções a serem aproximadas são definidas em algum domínio Γ e tem valores em algum espaço vetorial \mathbf{V} . É fácil ver que o conjunto de tais funções, que denotaremos por $\Gamma \rightarrow \mathbf{V}$ também é um espaço vetorial.

3.1 Aproximação numérica

Se Γ é um conjunto infinito e \mathbf{V} não é trivial, o espaço $\Gamma \rightarrow \mathbf{V}$ tem dimensão infinita, e não é possível representar um elemento genérico desse espaço no computador. Isto também se aplica a muitos sub-espacos interessantes de $\Gamma \rightarrow \mathbf{V}$, como por exemplo funções contínuas, funções diferenciáveis, etc. Portanto, para fins computacionais, temos que substituir uma função genérica F do espaço de interesse $\mathbf{F} \subseteq \Gamma \rightarrow \mathbf{V}$ por uma *aproximação* \tilde{F} escolhida em algum sub-espaco $\mathbf{A} \subseteq \Gamma \rightarrow \mathbf{V}$ com dimensão finita.

A qualidade da aproximação pode ser medida pelo número $\|\tilde{F} - F\|$, onde $\|\cdot\|$ é qualquer norma definida sobre o espaço \mathbf{F} . A função $\tilde{F} - F$ é chamada de *erro de aproximação*.

3.1.1 Bases de aproximação

Lembramos que uma *base* de um espaço vetorial \mathbf{W} é uma lista $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ cujos elementos são linearmente independentes, e tais que todo elemento de $w \in \mathbf{W}$ pode ser obtido por uma combinação linear $\sum_{i=1}^n a_i \phi_i$ com coeficiente reais a_1, a_2, \dots, a_n . Se $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ é uma base de \mathbf{A} , a aproximação \tilde{F} pode ser representada no computador pelo seus n coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n .

3.2 Aplicações de espaços de aproximação

3.2.1 Interpolação

Uma aplicação básica de espaços de aproximação é a *interpolação* de dados discretos. Neste problema, são dados n pontos x_1, x_2, \dots, x_n do domínio Γ e n valores associados y_1, y_2, \dots, y_n do espaço \mathbf{V} . O objetivo é encontrar uma função $B \in \mathbf{A}$ que interpola os pares (x_i, y_i) , tal que:

$$B(x_i) = y_i \quad \text{para todo } i. \quad (3.1)$$

Se \mathbf{A} é descrito por uma base $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$, temos que encontrar a_1, a_2, \dots, a_n tais que $\sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x_j) = y_j$ para todo j . Isto é equivalente a resolver o sistema linear

$$Z a = y \quad (3.2)$$

onde a matriz Z registra a influência de cada elemento ϕ_i no ponto x_j , ou seja

$$Z_{ij} = \phi_i(x_j) \quad (3.3)$$

3.2.2 Bases interpoladoras

Uma base $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ é *interpoladora* para os pontos x_1, x_2, \dots, x_n se e somente se:

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.4)$$

Para essa base, os coeficientes a_i que satisfazem (3.1) são idênticos aos valores y_i associados aos pontos centrais; isto é, a matriz Z é a identidade.

Dada qualquer base de elementos finitos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ e um conjunto de pontos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \Gamma$, podemos em geral definir uma base interpoladora $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_n$ para X , onde cada elemento $\hat{\phi}_i$ é uma combinação linear dos elementos ϕ_i

$$\hat{\phi}_i(x) = \sum_j U_{ij} \phi_j(x) \quad (3.5)$$

onde U é a inversa Z^{-1} da matriz Z da base ϕ .

3.2.3 Aproximação por quadrados mínimos

Quando o número de pontos é maior que o número de valores associados, ou os dados (x_i, y_i) são conflitantes, o problema de interpolação geralmente não tem solução. Neste

caso pode-se usar o método de *aproximação por mínimos quadrados*, que procura encontrar uma função que passa o mais próximo possível dos valores y_i . Mais precisamente, o método encontra uma aproximação \tilde{F} que minimiza a soma dos quadrados das diferenças entre a função aproximada e os valores amostrados.

$$\sum_{i=1}^n \|(F(x_i) - y_i)\|^2 \quad (3.6)$$

Este problema também recai na solução de um sistema de n equações e n incógnitas $V a = b$ onde $V = Z^T Z$ e $b = Z^T y$. A matriz Z é a matriz da fórmula (3.3) e Z^T é sua transposta.

3.2.4 Bases partição da unidade

Dizemos que uma base $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ é uma *partição da unidade* se e somente se

$$\phi_i(x) \geq 0 \quad (3.7)$$

para todo i e todo $x \in \Gamma$

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1 \quad (3.8)$$

para todo $x \in \Gamma$. Esse tipo de base tem a propriedade de *suavização*; para todo $x \in \Gamma$, vale

$$a_{min} \geq \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x) \geq a_{max} \quad (3.9)$$

onde a_{min}, a_{max} são o mínimo e máximo dos coeficientes de a .

Para cada base $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ com $\phi_i(x) \geq 0$, podemos definir uma base partição da unidade $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_n$ associada, pela fórmula

$$\tilde{\phi}_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{\sum_{j=1}^n \phi_j(x)} \quad (3.10)$$

3.2.5 Método de projeção

Discutiremos agora o *método de projeção*, uma técnica geral para resolver equações integrais, tais como a equação (2.2) usando espaços de aproximação. Seja a seguinte equação integral genérica sobre um certo domínio Γ

$$F = B + \mathcal{K}F \quad (3.11)$$

onde $B : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função conhecida, $F : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ é a função desconhecida a determinar, e \mathcal{K} é um operador integral

$$\mathcal{K}F(x) = \int_{\Gamma} K(x, y)F(y)dy \quad (3.12)$$

definido por uma função conhecida K de $\Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ (o *núcleo* do operador). O método de projeção consiste em aproximar a solução exata F da equação (3.11), que pertence ao espaço $\Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ de dimensão infinita substituindo-a por sua *projeção* (aproximação ótima) num sub-espaço de funções $\mathbf{A} \subset \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$.

Para especificar \tilde{F} completamente precisamos definir o que é uma aproximação ótima. O mais natural seria minimizar a norma do erro da aproximação $\|F(x) - \tilde{F}(x)\|$. Entretanto este critério não pode ser usado pois F não é conhecida. Por esse motivo, a métrica usada em geral é a “discrepância” observada na equação integral (3.11) quando substituímos F por \tilde{F} . Ou seja, a melhor solução, nesse espaço de função, é definida como sendo aquela que minimiza alguma norma do resíduo

$$r^* = \tilde{F} - (B + \mathcal{K}\tilde{F}) \quad (3.13)$$

3.2.6 Metodo de Galerkin

O resíduo r^* pode ser quantificado de várias maneiras. Na variante conhecida como *método de Galerkin* exigimos que o resíduo r^* seja ortogonal ao espaço de aproximação \mathbf{A} , ou seja, ortogonal a todas funções ϕ_i da base em algum produto escalar $\langle F, G \rangle$ definido sobre \mathbf{F} . Uma escolha comum é

$$\langle F, G \rangle = \int_{\Gamma} F(x)G(x)dx \quad (3.14)$$

A condição de Galerkin pode ser escrita então

$$\langle \phi_i, r^* \rangle = 0 \quad i = 1 \dots n \quad (3.15)$$

Expandindo as definições de r^* , \tilde{F} e \mathcal{K} temos, para todo i em $1 \dots n$

$$\Rightarrow \langle \phi_i, \tilde{F} - \mathcal{K}\tilde{F} - B \rangle = 0 \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow \langle \phi_i, \tilde{F} \rangle - \langle \phi_i, \mathcal{K}\tilde{F} \rangle - \langle \phi_i, B \rangle = 0 \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow \left\langle \phi_i, \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \right\rangle - \left\langle \phi_i, \mathcal{K} \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \right\rangle - \langle \phi_i, B \rangle = 0 \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j \langle \phi_i, \phi_j \rangle - \sum_{j=1}^n a_j \langle \phi_i, \mathcal{K}\phi_j \rangle - \langle \phi_i, B \rangle = 0 \quad (3.19)$$

A equação (3.19) pode ser escrita em forma matricial

$$\sum_{j=1}^n a_j (M_{ij} - K_{ij}) - b_i = 0 \quad (3.20)$$

onde

$$M_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_{\Gamma} \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (3.21)$$

$$N_{ij} = \langle \phi_i, \mathcal{K}\phi_j \rangle = \int_{\Gamma} \phi_i(x) \int_{\Gamma} K(x, y) \phi_j(y) dy dx \quad (3.22)$$

$$b_i = \langle \phi_i, B \rangle = \int_{\Gamma} \phi_i(x) B(x) dx \quad (3.23)$$

Desta forma o problema reduz-se ao sistema de equações lineares:

$$(M - N)a = b \quad (3.24)$$

onde $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$. Em princípio, a solução do sistema (3.24) pode ser escrita

$$a = (M - N)^{-1}b \quad (3.25)$$

Porém, se os elementos ϕ_i da base são ortogonais, ou tem suporte pequenos, a matriz $(M - N)$ é esparsa; enquanto que $(M - N)^{-1}$ geralmente é cheia. Por essa razão, na radiossidade clássica a inversa não é calculada, e o sistema (3.24) é resolvido por métodos iterativos. Portanto, a escolha da base de aproximação ϕ afeta a eficiência deste método.

3.3 Bases de elementos finitos

O *suporte* de uma função F de $\Gamma \rightarrow \mathbf{V}$ denotado por $\text{sup } F$ é o conjunto de pontos x de Γ onde $F(x)$ é diferente de 0.

Uma *base de elementos finitos* é uma base $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ para um espaço de aproximação \mathbf{A} tal que o suporte de cada ϕ_i é um subconjunto pequeno e compacto de Γ . O significado de “pequeno” depende do contexto, mas de modo geral significa que a medida (comprimento, área, volume, etc.) de $\text{sup } \phi_i$ é da ordem de $\frac{1}{n}$ da medida de Γ . Obviamente, a união dos suportes dos elementos da base ϕ deve cobrir todo os pontos de Γ onde a função F pode ser diferente de zero. O uso de bases de elementos finitos em aproximação de funções é chamado de *método de elementos finitos* (MEF).

3.3.1 Base de elementos finitos definidas por pontos

Neste trabalho, usaremos uma classe especial de bases de elementos finitos, as *bases definidas por pontos*. Em uma base ϕ desse tipo, cada elemento finito ϕ_i possui um *ponto central* x_i , que é um ponto localizado aproximadamente no centro do seu suporte; sendo os elementos ϕ_i definidos a partir dos pontos x_i , por uma fórmula geral.

3.3.2 Base radial

Uma *base radial* [5] é uma base $\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n$ formadas a partir de uma única função-mãe Ψ (*mother function*) de \mathbf{R} para \mathbf{R} aplicada à distância do ponto x ao ponto x_i de um conjunto finito de pontos x_1, x_2, \dots, x_n ; ou seja

$$\phi_i(x) = \Psi(|x, x_i|) \quad (3.26)$$

onde $|p, q|$ denota uma medida da distância entre os pontos p e q . Em nosso trabalho utilizamos como função-mãe a função *sino gaussiano*

$$\Psi(r) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right) \quad (3.27)$$

onde r_0 é um parametro que determina o raio efetivo do suporte. Embora $\Psi(r)$ seja matematicamente positiva para todo r , na prática ela pode ser considerada nula para todo $r \geq 4r_0$.

Em geral, bases radiais não são nem interpoladoras e nem partição da unidade. Alguns elementos de base radial podem ser visualizado na Figura 3.1 e uma função interpolada por bases radiais pode ser visualizada na Figura 3.4.(a).

3.3.3 Base radial normalizada

Se aplicarmos a fórmula (3.10) a uma base radial obtemos uma *base radial normalizada*, onde cada elemento ϕ_i é definido pela fórmula

$$\phi_i(x) = \frac{\Psi(|x, x_i|)}{\sum_{j=1}^n \Psi(|x, x_j|)} \quad (3.28)$$

Esse tipo de base não é interpoladora, porém é uma base partição da unidade. Alguns elementos da base radial normalizada podem ser visualizado na Figura 3.2 e uma função interpolada pela base radial normalizada pode ser visualizada na Figura 3.4.(b).

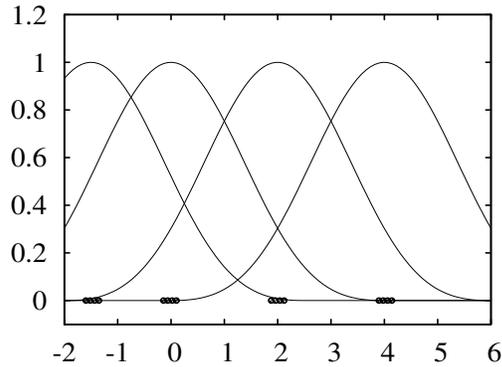


Figura 3.1: Elementos de uma base radial para os pontos x_i indicados no eixo horizontal.

3.3.4 Bases de Shepard

Em uma base de Shepard [18], na sua fórmula mais geral, cada elemento ϕ_i é definido pela fórmula

$$\phi_i(x) = \frac{w(x, x_i)}{\sum_{j=1}^n w(x, x_j)} \quad (3.29)$$

onde w é uma função não-negativa, tal que $w(x, x_i)$ tende ao infinito quando x tende a x_i . Essa propriedade implica que a base de Shepard é interpoladora e partição da unidade. Usualmente, escolhe-se w como sendo uma potência $k \geq 0$ da inversa da distância Euclidiana

$$w(x, x_i) = \frac{1}{|x - x_i|^k} \quad (3.30)$$

A Figura 3.3 mostra alguns elementos de bases de Shepard. A Figura 3.4.(c) ilustra uma função interpolada por uma base de Shepard.

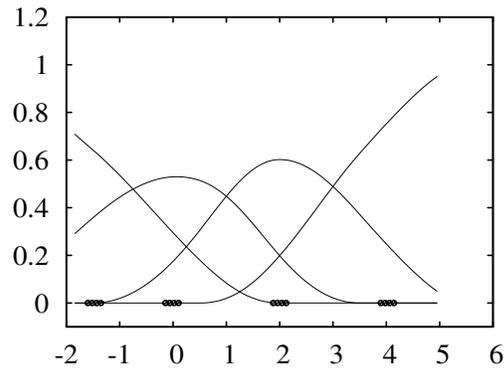


Figura 3.2: Elementos de uma base radial normalizada para os pontos x_i indicados no eixo horizontal.

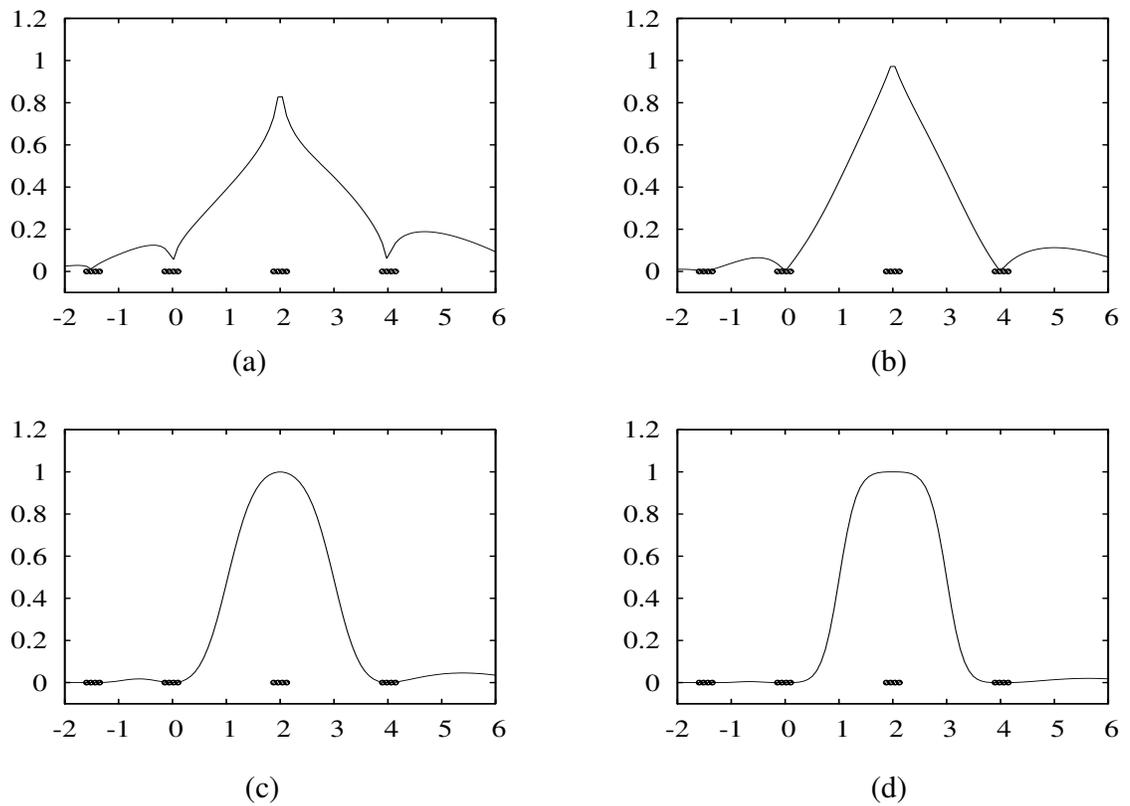


Figura 3.3: Um elemento da base de Shepard com diferentes valores de k para os pontos x_i indicados no eixo horizontal. (a) $k = 0.5$ (b) $k = 1$ (c) $k = 2$ (d) $k = 3$.

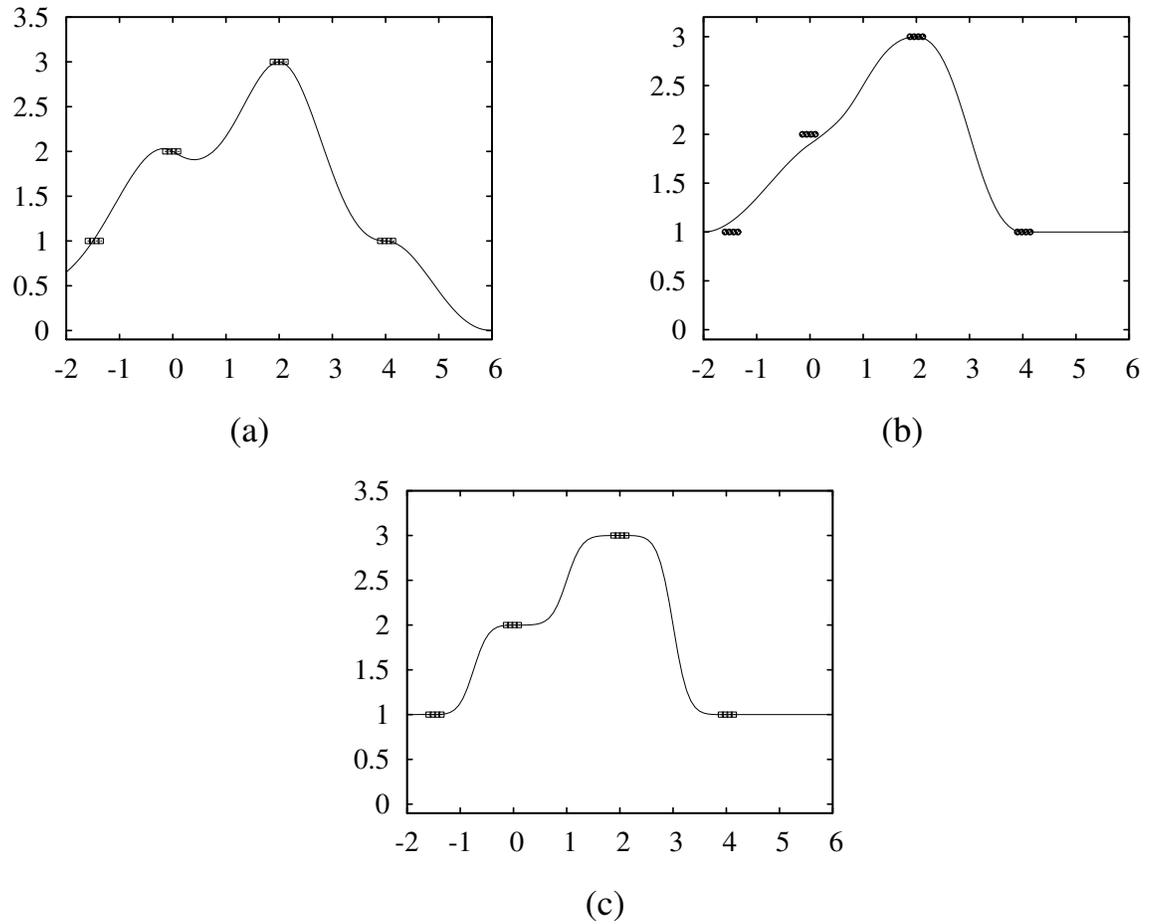


Figura 3.4: Ilustração do resultado da interpolação utilizando (a) base radial gaussiana (b) base radial normalizada e (c) base de Shepard com $k = 2$.

Capítulo 4

Método de Elementos Finitos para a Radiosidade

4.1 Introdução

A equação de rendering (2.9) e a fórmula de Neumann (2.10) podem ser aproximadas por meio do método de elementos finitos. Isso significa representar as funções E , L e o operador \mathcal{R} em termos de uma base de funções apropriada. Para isso, necessitaremos do conceito de *sítio* e de uma função que estime uma distância entre os sítios.

4.1.1 Sítios

Um *sítio* é um par $p = (\dot{p}, \vec{p})$ onde \dot{p} é um ponto do \mathbf{R}^3 e \vec{p} é um vetor unitário do \mathbf{R}^3 . Um sítio p é um *sítio da cena* se \dot{p} está na superfície de algum objeto da cena e \vec{p} é o vetor normal dessa superfície no ponto \dot{p} , apontando para fora do objeto.

4.1.2 Distância entre sítios

Os métodos de interpolação que usaremos neste trabalho dependem de uma medida de distância entre dois sítios p, q . A métrica que usaremos (denotada por $\|p, q\|$) leva em consideração tanto a distância entre as localizações quanto a diferença entre as normais:

$$\|p, q\| = \frac{|\dot{p} - \dot{q}|}{p * q} \quad (4.1)$$

onde $p * q = \max\{0, \vec{p} \cdot \vec{q}\}$ e $\vec{p} \cdot \vec{q}$ é o produto escalar entre as duas normais. A diferença entre a fórmula (4.1) e a distância euclidiana $|\dot{p} - \dot{q}|$ encontra-se ilustrada na Figura 4.1. Vale notar que $\|p, q\|$ não é uma métrica pois não satisfaz a desigualdade triangular

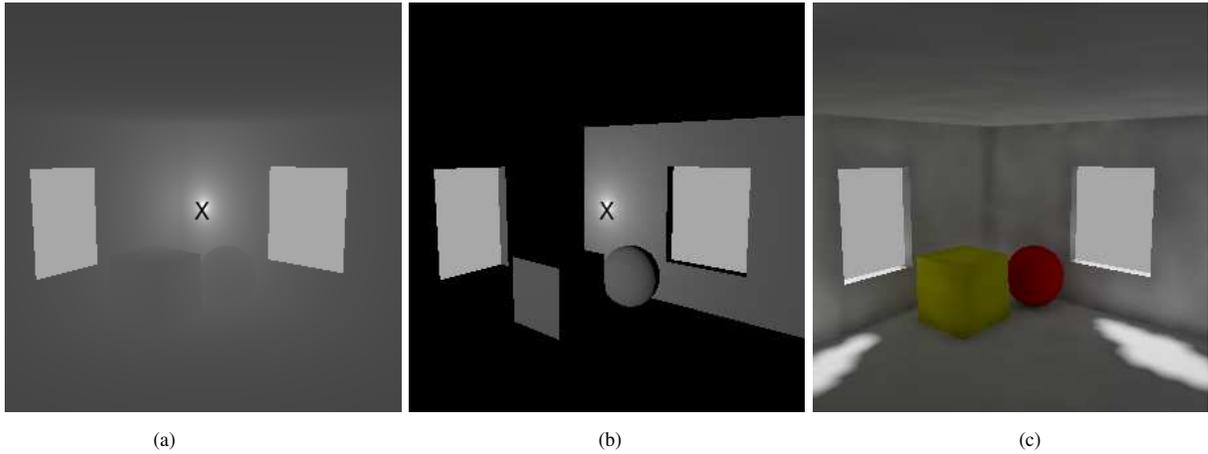


Figura 4.1: Distância euclidiana entre pontos (a) distância entre sítios sensível à normal (b) para uma cena simples (c). A cor da superfície de cada ponto q é obtida por meio da fórmula $1/(1 + |\dot{p} - \dot{q}|)$ na Figura 4.1(a) e $1/(1 + \|p, q\|)$ na 4.1(b), onde p é o sítio marcado com um X .

$$\|p, q\| \leq \|p, r\| + \|r, q\| \quad (4.2)$$

Entretanto, este defeito não impede seu uso na definição das bases de elementos finitos que usamos neste trabalho (Seção 3.3).

4.2 Base de elementos finitos para radiosidade

4.2.1 Modelagem de funções de radiância

Neste trabalho usaremos a técnica introduzida por Jaakko Lehtinen et al. [10, 11] para modelar funções de radiância como L e E . Nessa técnica, ambas funções são aproximadas por combinações lineares

$$L(p) \approx \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(p) \quad (4.3)$$

$$E(p) \approx \sum_{i=1}^n \eta_i \phi_i(p) \quad (4.4)$$

onde cada ϕ_i é uma função real definida sobre os sítios da cena, e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são coeficientes reais da função de radiância L e η_1, \dots, η_n são os coeficientes da função de emissão E .

4.2.2 Elementos finitos sobre sítios da cena

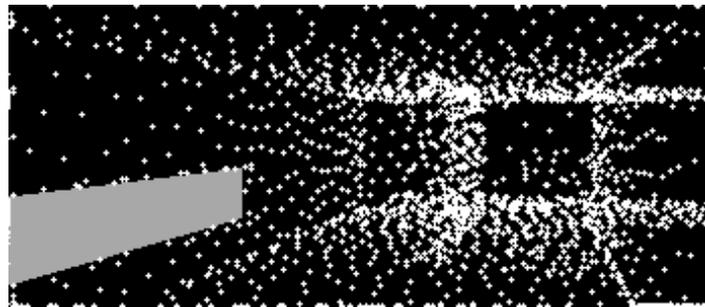
No contexto da radiosidade, um elemento finito é uma função ϕ_i definida sobre os sítios presentes na superfície da cena, que é diferente de zero apenas para um conjunto de sítios de tamanho pequeno. Ou seja, para cada ϕ_i devem existir um sítio p_i e um real r_i , tais que

$$\phi_i(q) = 0 \quad \text{se } \|p_i - q\| \geq r_i \quad (4.5)$$

Com estas observações, os conceitos do Capítulo 3 aplicam-se diretamente a funções de sítios; incluindo o conceito de interpolação. Veja a Figuras 4.2.

Como observado na Seção 3.2.5, o cálculo da função aproximante $L(p)$ pela fórmula (4.3) exige que sejam calculados apenas os elementos ϕ_i cujos suportes incluem p , ou seja, tais que $\|p - p_i\| \leq r_i$. Portanto quanto menores forem os parametros mais eficiente será o cálculo de L .

Por outro lado, como observado na Seção 3.3, os suportes das bases ϕ_i devem cobrir várias vezes toda a superfície da cena.



(a)



(b)

Figura 4.2: Interpolação da função de radiância L pelo método de elementos finitos. (a) centróides p_i dos elementos ϕ_i da base de aproximação (b) interpolação da função de radiância.

Na modelagem baseada em sítios, a base ϕ_i é definida implicitamente pela escolha dos pontos p_i (*centróides*) e pela escolha do raio r_i . Neste trabalho usamos as bases descritas na Seção 3.3 adaptadas para o domínio dos sítios da cena, e utilizando a distância entre sítios em vez da distância euclidiana.

4.2.3 Base radial

A base radial utilizada na radiosidade é a mesma apresentada na Seção 3.3.2

$$\phi_i(p) = \Psi(\|p, p_i\|) \quad (4.6)$$

Como função Ψ usamos o sino gaussiano

$$\Psi(r) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_i}\right)^2\right) \quad (4.7)$$

Esta função vale 1 no ponto p_i e praticamente 0 quando $r > 4r_i$. Um elemento da base radial pode ser visualizado na Figura 4.3.

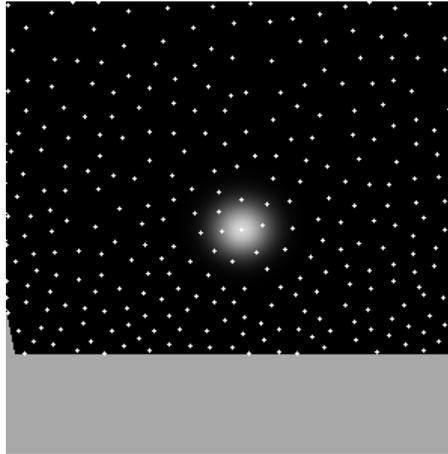


Figura 4.3: Um elemento da base radial.

Para evitar o custo de calcular o $\exp(r)$ a função sino gaussiano pode ser aproximada pela função

$$K_j(r) = K\left(\frac{r}{r_j}\right) \quad K(r) = \begin{cases} 2r^3 - 3r^2 + 1 & \text{se } r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r \geq 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

A Figura 4.4 apresenta o comportamento da função K para sítios sobre um plano.

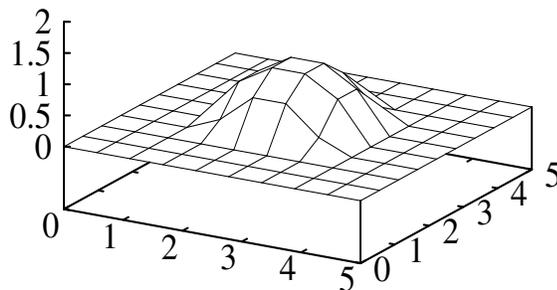


Figura 4.4: Aproximação da função sino gaussiano.

4.2.4 Base radial normalizada

Usamos a base radial normalizada da fórmula (3.10), utilizando como função-mãe

$$\Psi_j(p) = K_j(|\vec{p}, \vec{p}_j|) \max(0, \vec{p} \cdot \vec{p}_j) \quad (4.9)$$

onde K_j é a função da fórmula (4.8). Um elemento dessa base pode ser visualizado na Figura 4.5.

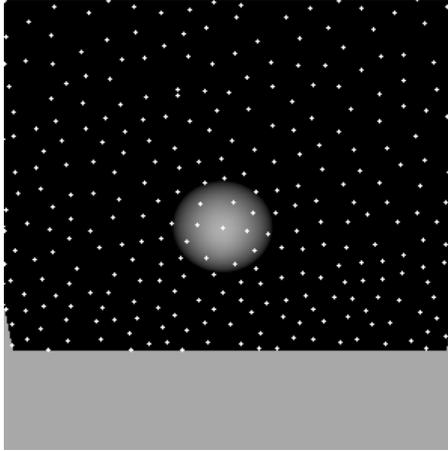


Figura 4.5: Um elemento da base radial normalizada.

4.2.5 Base de Shepard

A base de Shepard para a radiosidade segue a definição da Seção 3.3

$$\phi_i(p) = \frac{\Psi(\|p, p_i\|)}{\sum_{j=1}^n \Psi(\|p, p_j\|)} \quad (4.10)$$

Como função Ψ podemos usar o inverso do quadrado da distância entre sítios.

$$\Psi(\|p, p_i\|) = \frac{1}{\|p, p_i\|^2} \quad (4.11)$$

Um elemento da base de Shepard pode ser visualizado na Figura 4.6.

4.2.6 Escolha dos elementos

Em qualquer destas bases, a qualidade da aproximação requer uma distribuição adequada dos centróides p_i sobre a superfície da cena.

No nosso programa, os centróides são escolhidos por um processo de amostragem que tenta levar em consideração a importância relativa de diferentes partes da cena para a imagem final. Para atingir esse objetivo, geramos inicialmente um conjunto de sítios P traçando raios a partir da posição do observador em direção à cena através de uma grade regular. Em seguida ampliamos este conjunto P gerando raios secundários que simulam o fluxo da luz entre partes da cena. Ou seja, para cada sítio p já amostrado, traçamos um raio pseudo-aleatório saindo de p cuja direção está próxima da normal \vec{p} e adicionamos ao

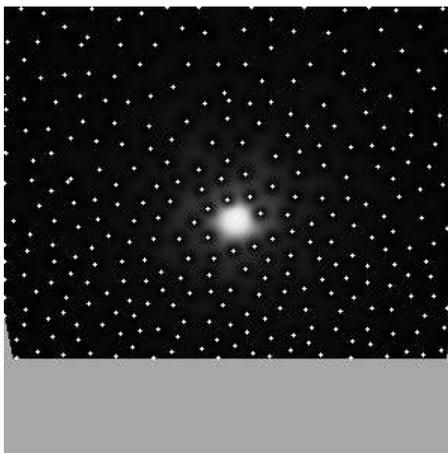
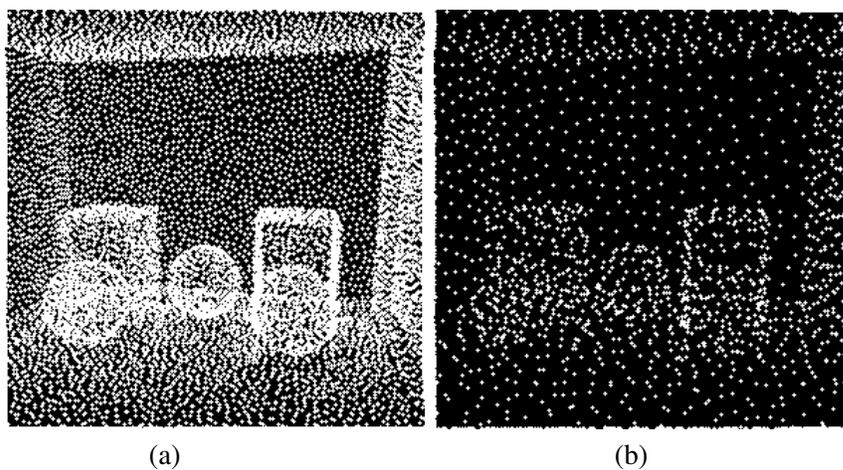


Figura 4.6: Um elemento da base de Shepard.

conjunto P o pontos de intersecção desse raio com a cena, com a sua respectiva normal. Repetimos este processo um número específico de vezes e periodicamente “podamos” o conjunto P eliminando sítios de modo que não existam pares $p, q \in P$ tal que $\|p, q\| < \Delta$; para um dado Δ . Veja a Figura 4.7.

Figura 4.7: Conjunto de sítios gerados. (a) $\Delta = 2$ (b) $\Delta = 5$.

4.2.7 Escolhendo o valor do raio

Uma vez escolhidos os centróides p_i , o próximo passo é escolher o valor do raio r_i . Para cada sítios p_i do conjunto final de sítios, calculamos r_i como sendo o raio da região que contém os m sítios mais próximos de p_i , onde m é outro parametro do algoritmo. Geralmente usamos $m = 10$.

Capítulo 5

Radiosidade pelo método de elementos finitos

5.1 Introdução

Como vimos no Capítulo 4, as funções que ocorrem na equação de *rendering*, como a L e a E , podem ser eficientemente aproximadas por bases de elementos finitos. Neste capítulo consideraremos a discretização dos operadores de transferência \mathcal{R} e de *rendering* $(\mathcal{I} - \mathcal{R})^{-1}$.

5.2 Computando o operador de transferência

A discretização do operador \mathcal{R} produz a *matriz de transferência de radiância* R que deve ser multiplicada pelo vetor de coeficientes λ da função L para produzir os coeficientes da função $\mathcal{R}L$. Cada elemento R_{jk} representa a influência da luz emitida ou espalhada pelo elemento ϕ_k na iluminação do elemento ϕ_j . Desse modo, uma coluna k da matriz R descreve a influência do coeficiente do elemento ϕ_k na radiância indireta de primeira ordem da cena (devida aos fótons que interagiram apenas uma vez com a superfície) discretizada na base ϕ . Veja a Figura 5.1.

Na abordagem proposta por Jaakko Lehtinen et al. [10, 11] a matriz de transferência R pode ser aproximada tomando-se o centróide p_i de cada elemento ϕ_i como um ponto representativo de todo o elemento. Essa abordagem leva a fórmula

$$R_{jk} = \beta(\dot{p}_j) V(\dot{p}_k, \dot{p}_j) F(p_k, p_j) A_k \quad (5.1)$$

onde

$\beta(\dot{p}_j)$ é o albedo da cena no ponto \dot{p}_j (definido na Seção 2.2).

$V(\dot{p}_k, \dot{p}_j)$ é o fator de visibilidade entre \dot{p}_k e \dot{p}_j (1 ou 0; definido na Seção 2.2).

$F(p_k, p_j)$ é o *fator de forma* entre os sítios p_k e p_j (definido na Seção 5.2.1).

A_k é a área efetiva do elemento ϕ_k (definida na Seção 5.2.2).



(a)



(b)

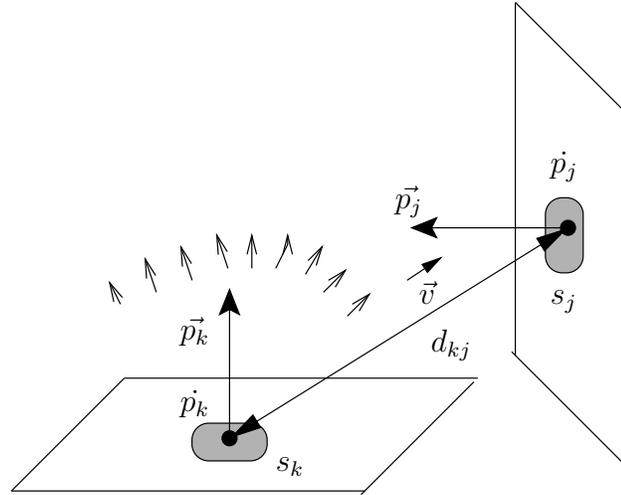
Figura 5.1: Discretização do operador de transferência R . (a) uma cena 3D (b) A influência de um elemento ϕ_j (cujo centro \dot{p}_j está indicado pelo X) na iluminação da cena.

5.2.1 Fator de forma

O *fator de forma* $F(p_k, p_j)$ descreve a eficiência do transporte de luz do sítio p_k para p_j . Sejam s_k e s_j dois elementos infinitesimais da superfície da cena, centrados respectivamente em p_k e p_j (veja a Figura 5.2). O fator de forma é a quantidade de luz emitida ou espalhada por s_k que incide em s_j dividida pelas áreas de s_k e s_j .

Supondo que s_k é lambertiano, o fator de forma é dado pela fórmula

$$F(p_j, p_k) = \frac{(v_{kj} * \vec{p}_k) ((-v_{kj} * \vec{p}_j))}{\pi d_{kj}^2} \quad (5.2)$$

Figura 5.2: Cálculo do fator de forma $F(p_k, p_j)$.

onde

d_{kj} é a distância euclidiana entre p_k e p_j .

v_{kj} é a direção de p_k para p_j .

$u * v$ é o valor máximo entre 0 e $u \cdot v$.

5.2.2 Área efetiva

A contribuição de um termo $\lambda_k \phi_k$ na função radiância aproximada L é o resultado de se fazer cada sítio p emitir luz com radiância $\lambda_k \phi_k(p)$. Supondo que o suporte de ϕ_k é razoavelmente plano e compacto, o efeito desse termo equivale, em primeira ordem, a acender um disco plano com centro p_k , normal \vec{p}_k , e uma certa área A_k .

O parâmetro A_k é a *área efetiva* do elemento ϕ_k , e vale aproximadamente

$$A_k = \int \phi_k(q) dq \quad (5.3)$$

onde a integral é feita sobre todos os sítios da superfície da cena. Supondo que a base ϕ é partição da unidade, devemos ter

$$\sum_{k=1}^n A_k = \int \left(\sum_{k=1}^n \phi_k(q) \right) dq = \int dq \quad (5.4)$$

que é a área total da superfície da cena. A abordagem utilizada aproxima a área efetiva pela fórmula

$$A_k = \frac{\pi h_k^2}{m+1} \quad (5.5)$$

onde h_k é o menor valor tal que existem m elementos ϕ_i com $i \neq k$ e $\|p_i - p_k\| \leq h_k$. Essa aproximação supõe que a superfície é razoavelmente plana dentro desse raio.

5.2.3 Separação do albedo

O custo de calcular R_{jk} pela fórmula (5.1) é dominado pelo custo do termo $V(p_k, p_j)$, pois este exige o exame de todos os objetos da cena. Por esta razão, é interessante fatorar a matriz R como o produto

$$R = Q S \quad (5.6)$$

onde Q é a matriz diagonal definida por $Q_{ii} = \beta(\dot{p}_i)$, e S é a matriz $n \times n$ tal que

$$S_{jk} = V(\dot{p}_k, \dot{p}_j) F(p_k, p_j) A_k \quad (5.7)$$

Note que a matriz S depende apenas da geometria da cena e não do albedo da superfície. Portanto ela pode ser pré-calculada e usada para, por exemplo, estudar o efeito de mudança da cor de paredes ou móveis na iluminação de um ambiente, pois estas mudanças afetam apenas a matriz diagonal Q .

A matriz R tem muitos elementos nulos, pois R_{jk} é zero se $v_{kj} * \vec{p}_k \leq 0$ ou se $v_{kj} * \vec{p}_j \geq 0$, ou se há algum obstáculo entre \dot{p}_k e \dot{p}_j . Vale notar que o fator $1/d_{jk}^2$ no fator de forma gera um grande número de elementos com valores muito pequenos. Entretanto, esses elementos nem sempre são desprezíveis, pois sua soma pode ser bastante significativa para a radiância total.

5.2.4 Obtendo a iluminação global por iterações

Após o cálculo da matriz R e do vetor da iluminação direta η , os coeficientes da iluminação global λ conceitualmente é obtido resolvendo o sistema $(I - R) \lambda = \eta$. A solução direta desse sistema (por exemplo, método de eliminação de Gauss) é bastante custoso $\Theta(n^3)$. Em vez disso, usa-se em geral o método iterativo

$$\text{faça } \lambda \leftarrow \eta \quad (5.8)$$

repita $\lambda \leftarrow \eta + R \lambda$ até convergir

O custo deste método é $\Theta(n^2)$ por iteração. Na maioria dos casos, uma dezena de iterações é mais que suficiente, pois a maioria dos fótons é absorvida antes disso. O custo do método

iterativo é na verdade proporcional ao número de elemento não nulos de R .

5.3 Computando o operador de *rendering*

Uma vez calculada a matriz R , o custo do método iterativo é $\Theta(k n^2)$; onde k é o número de iterações da luz com a cena. Para aplicações de tempo real, este método pode ser lento demais. Nesses casos, uma alternativa mais eficiente é discretizar o operador de *rendering* $\mathcal{T} = (\mathcal{I} - \mathcal{R})^{-1}$. Isto significa pré-calcular a matriz $T = (I - R)^{-1}$ e para cada quadro, calcular o produto $\lambda = T \eta$.

A convergência da iteração (5.8) equivale à convergência da fórmula de Neumann, e é válida para o operador de *rendering* discretizado e portanto podemos calcular T pela fórmula

$$T = (I + R + R^2 + R^3 + \dots) \quad (5.9)$$

onde I é a matriz identidade. Este somatório geralmente pode ser truncado após poucas iterações. O custo deste método é $\Theta(k n^2)$ onde k é o número de iterações. Portanto este método é mais eficiente do que a inversão da matriz $(I - R)$ pelo método de Gauss que tem custo $\Theta(n^3)$. Observe que a matriz T é mais cheia que a matriz R .

Uma vez calculada a matriz de transferência T os coeficientes da iluminação global λ são obtida por meio de uma única multiplicação:

$$\lambda \leftarrow \eta + T \eta$$

Note que a matriz T depende dos albedos e portanto sua pré-computação em cenas que existe mudanças de cores de objetos da cena não é tão vantajosa.

Capítulo 6

Resultados

Apresentamos nesse capítulo alguns dos resultados obtido por meio da nossa implementação. Em cada seção apresentamos a descrição de uma cena simples e imagens geradas pelo nosso programa para as três bases.

6.1 Cena A: Sala com janela lateral

Esta cena consiste de uma sala com 80 unidades de altura, contendo uma esfera vermelha e com uma janela na parede esquerda. A iluminação direta, ilustrada na Figura 6.1, é dada por uma única fonte de luz externa à sala, com elevação aproximada de 40° , no lado esquerdo. Toda a iluminação no interior da sala é devida exclusivamente dessa fonte.

A Figura 6.2 mostra imagens da cena produzida pelo nosso programa, levando em conta a iluminação indireta. Para a geração de cada imagem foram usadas bases com 4358 elementos, efetuadas 100 iterações da recorrência (5.8). Entretanto, em todos os exemplos observamos que a convergência foi obtida em menos de 10 iterações. Na escolha dos elementos foi especificado o espaçamento mínimo $\epsilon = 8$.

6.2 Cena B: Sala fechada com cubos e bolas

Esta cena consiste de uma sala com 80 unidades de altura e 80 de largura, contendo três esferas e dois cubos. Nesta cena, a iluminação direta (Figura 6.3.(a)) é dada por uma única fonte de luz (invisível) interna à sala próxima ao teto e a 10 unidades da parede do fundo. Toda a iluminação da cena provém dessa fonte.

Para a geração de cada imagem foram usados bases com 1812 elementos e efetuadas 100 iterações da recorrência (5.8). Na escolha dos elementos foi especificado $\epsilon = 9$.

6.3 Cena C: Sala com duas janelas

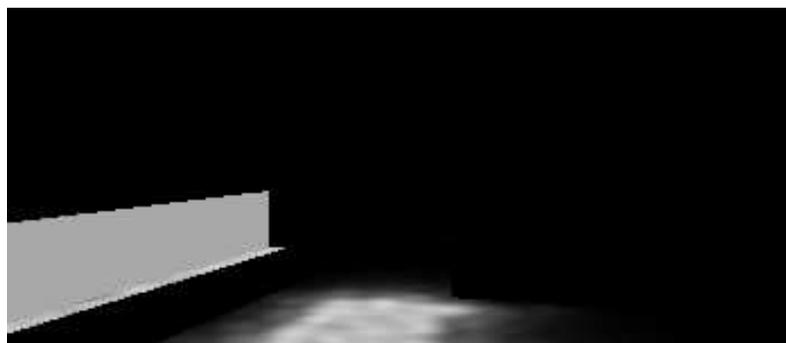
Esta cena consiste de uma sala com 80 unidades de altura com duas janelas, contendo uma esfera e um cubo. Nesta cena, a iluminação direta (Figura 6.4.(a)) é dada por uma única fonte de luz externa à sala entre as duas janelas. Toda a iluminação da cena provem dessa fonte.

Para a geração de cada imagem foram usados bases com 4358 elementos e efetuadas 100 iterações da recorrência (5.8). Na escolha dos elementos foi especificado $\epsilon = 8$.

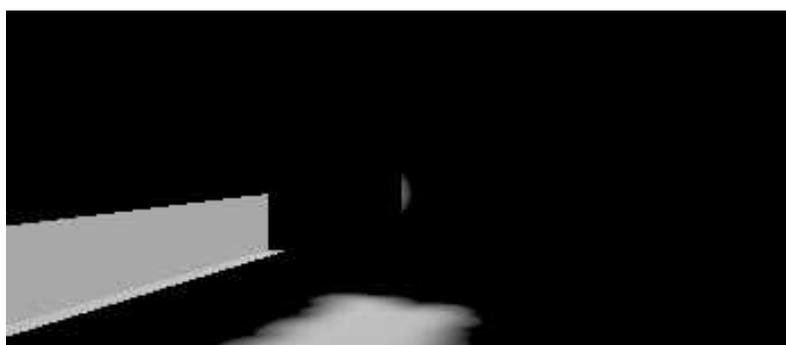
6.4 Cena D: Sala com janelas quadriculadas

Esta cena consiste de uma sala com 120 unidades de largura com quatro janelas quadriculadas, contendo dois cubos. Nesta cena, a iluminação direta (Figura 6.5.(a)) é dada por uma única fonte de luz externa, atrás das paredes do fundo da sala. Toda a iluminação da cena provém dessa fonte.

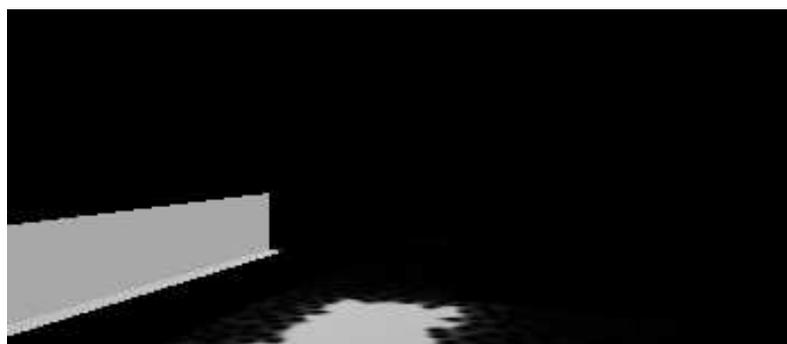
Para a geração de cada imagem foram usados bases com 3812 elementos e efetuadas 100 iterações da recorrência (5.8). Na escolha dos elementos foi especificado $\epsilon = 9$.



(a)

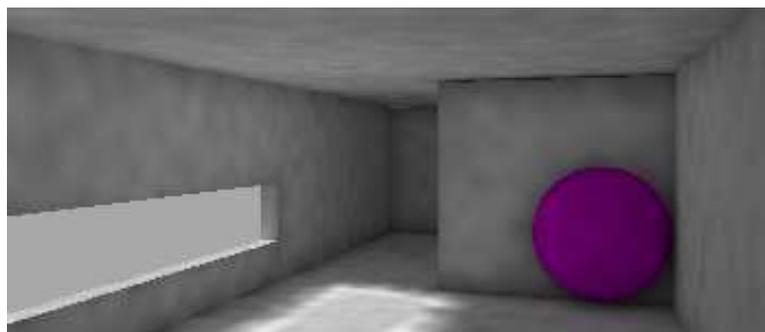


(b)



(c)

Figura 6.1: Aproximação da iluminação direta da cena utilizando (a) base radial (b) base radial normalizada e (c) base de Shepard.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.2: Aproximação da iluminação global da cena utilizando (a) base radial (b) base radial normalizada e (c) base de Shepard.

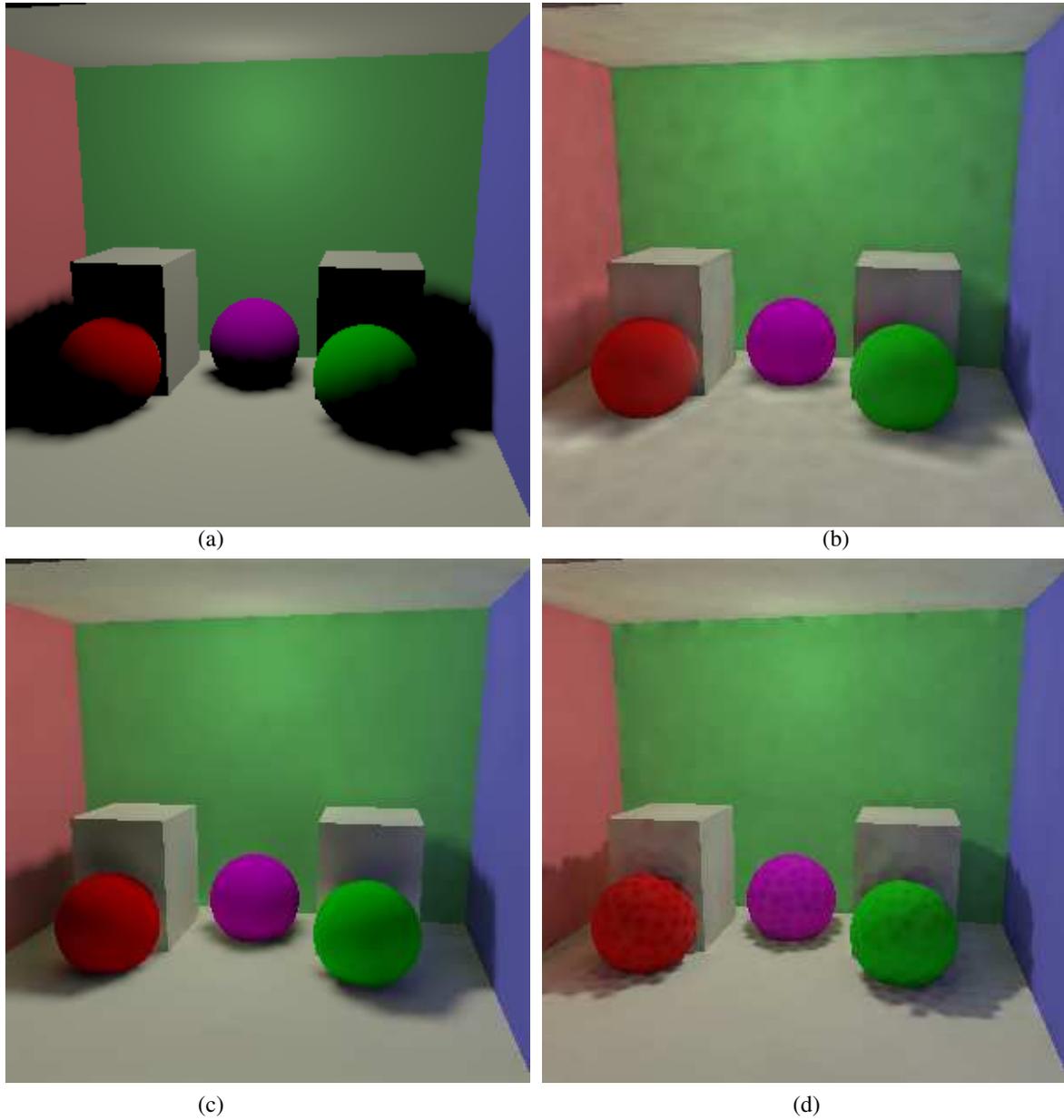


Figura 6.3: Iluminação direta da cena (a) Aproximação da iluminação global da cena utilizando (b) base radial (c) base radial normalizada e (d) base de Shepard.

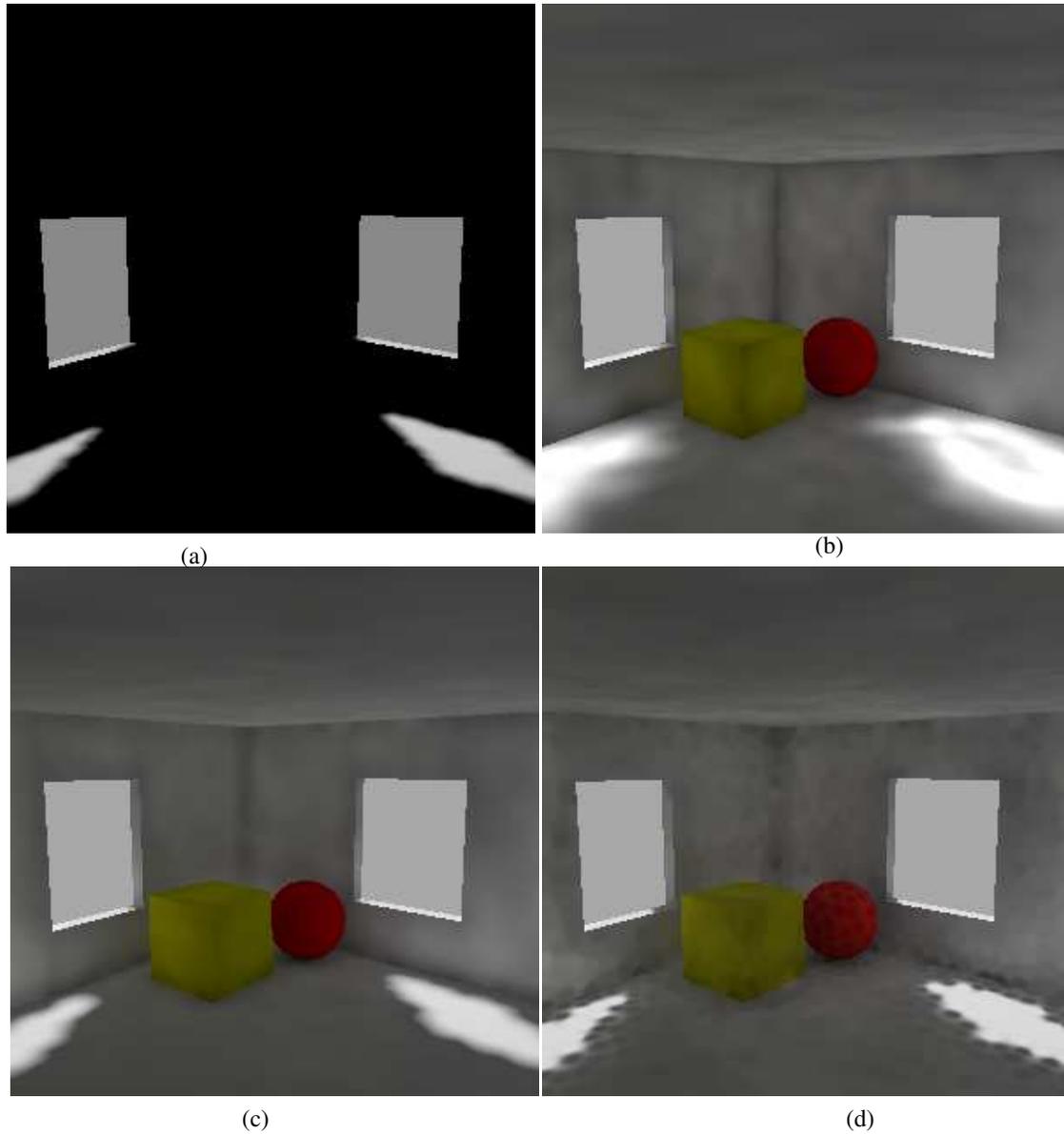


Figura 6.4: Iluminação direta da cena (a) Aproximação da iluminação global da cena utilizando (b) base radial (c) base radial normalizada e (d) base de Shepard.

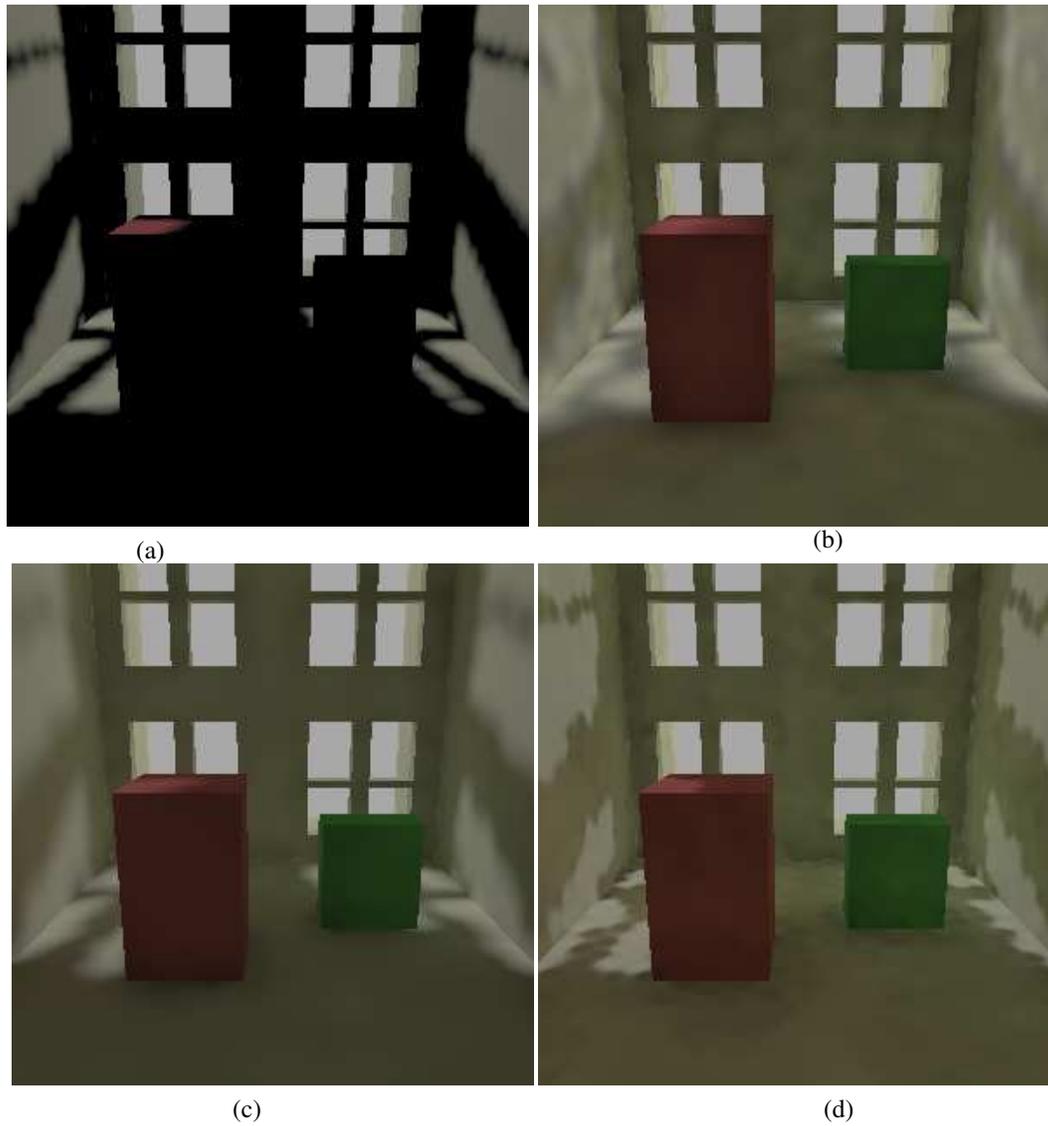


Figura 6.5: Iluminação direta da cena (a) Aproximação da iluminação global da cena utilizando (b) base radial (c) base radial normalizada e (d) base de Shepard.

Capítulo 7

Validação dos resultados

7.1 Solução referência

A fim de verificar e validar a corretude da nossa implementação, comparamos os resultados obtidos pela mesma com uma solução independente das equações da radiosidade para uma cena específica.

Uma vez que a resolução analítica da equação de *rendering* é muito complexa, mesmo para cenas simples, é necessário calcular a solução referência também por métodos numéricos. Portanto, a comparação só tem sentido se o cálculo da solução referência usar algoritmos mais simples e confiáveis.

7.1.1 Descrição da cena

A cena que usamos para gerar a solução de referência consiste de uma esfera de raio r e um disco de raio R , posicionados como indicado na Figura 7.1, ficando o centro da bola a distância h do topo do disco. Atribuímos acabamento lambertiano aos dois objetos.

7.1.2 Equações da radiosidade

Vamos denotar por $B(\theta, \alpha)$ a radiância (cor aparente) do ponto $p(\theta, \alpha)$ na superfície da bola com longitude θ e latitude α e por $D(\phi, u)$ a radiância do ponto $q(\phi, u)$ sobre a superfície do cilindro a uma distância u do centro e com azimute ϕ . Os parâmetros estão ilustrados na Figura 7.2. As radiâncias diretas da esfera e do disco (devidas ao espalhamento dos fótons vindos diretamente da fonte de luz) serão denotadas por $B^*(\theta, \alpha)$ e $D^*(\phi, u)$, respectivamente. Desse modo as equações da radiosidade passam a ser

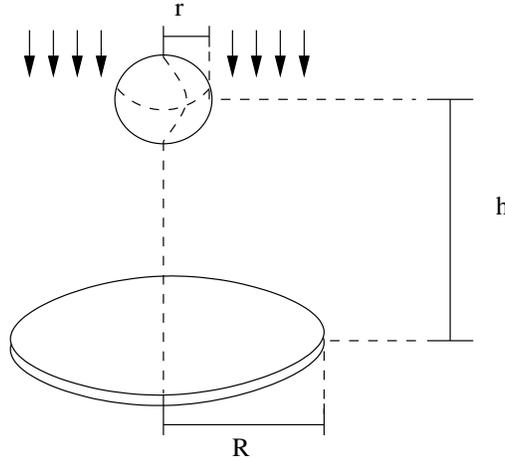


Figura 7.1: Configuração e posicionamento da cena referência.

$$B(\theta, \alpha) = B^*(\theta, \alpha) + \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D(\phi, u) \beta(p(\theta, \alpha)) F(p(\theta, \alpha), q(\phi, u)) u d\phi du \quad (7.1)$$

$$D(\phi, u) = D^*(\phi, u) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} B(p(\theta, \alpha)) \beta(q(\phi, u)) F(q(\phi, u), p(\theta, \alpha)) r \cos(\alpha) d\theta d\alpha \quad (7.2)$$

Verifica-se que o fator de visibilidade V é 0 apenas quando a normal da bola no ponto $p(\theta, \alpha)$ faz um ângulo obtuso com a direção desse ponto para o ponto $q(\phi, u)$; mas nesse caso o fator de forma também é 0 e portanto podemos ignorar V .

Graças à simetria da cena em torno do eixo vertical, podemos concluir *a priori* que a função de radiância L também será simétrica. Ou seja, as funções $B(\theta, \alpha)$, $B^*(\theta, \alpha)$, $D(\phi, u)$ e $D^*(\phi, u)$ não dependem de θ e ϕ , de modo que podemos escrever apenas $B(\alpha)$, $B^*(\alpha)$, $D(u)$ e $D^*(u)$. Além disso, $F(p(\theta, \alpha), q(\phi, u)) = F(p(0, \alpha), q(\phi - \theta, u))$. Portanto, denotando $\phi - \theta$ por τ , a equação (7.1) pode ser simplificada para

$$B(\alpha) = B^*(\alpha) + \int_0^R D(u) \int_0^{2\pi} \beta(p(\alpha)) F(p(0, \alpha), q(\tau, u)) u d\tau du \quad (7.3)$$

Analogamente, $F(q(\phi, u), p(\theta, \alpha)) = F(q(0, u), q(\theta - \phi, \alpha))$. Denotando $\theta - \phi$ por τ a equação (7.2) fica reduzida a

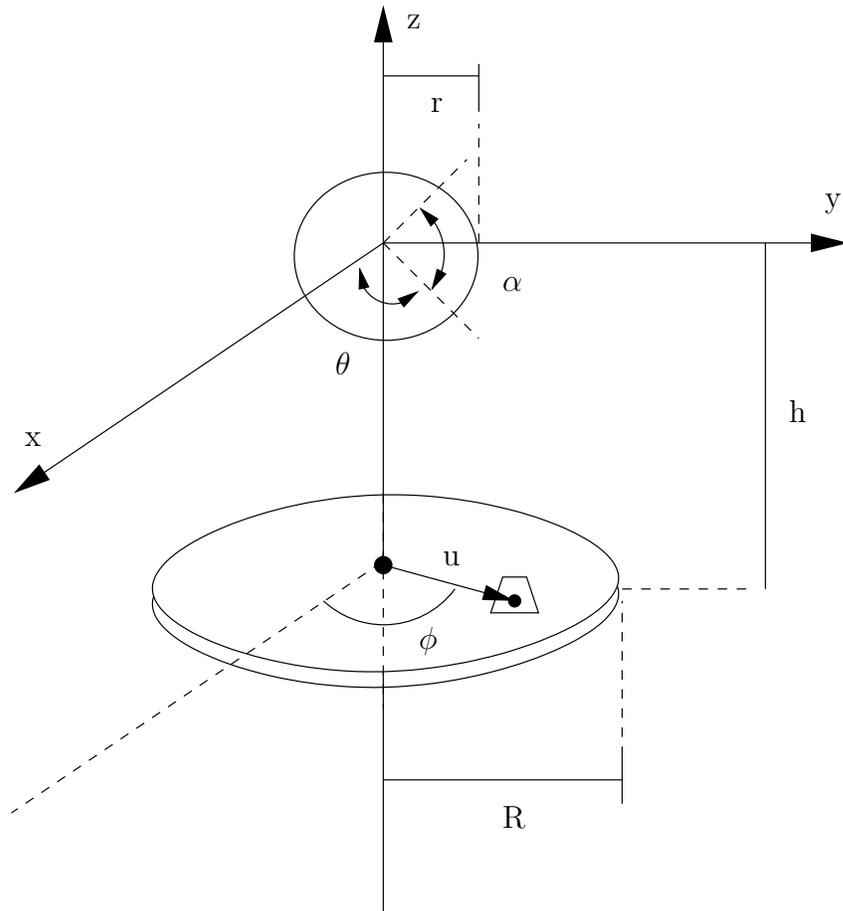


Figura 7.2: Configuração e posicionamento da cena de referência.

$$D(u) = D^*(u) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B(\alpha) \int_0^{2\pi} F(q(0, u), p(\tau, \alpha)) r \cos(\alpha) d\tau d\alpha \quad (7.4)$$

7.1.3 Radiância direta

Supondo que a iluminação direta é devida a uma única fonte de luz no eixo vertical, à uma distância muito grande, as radiâncias direta da bola e do disco são

$$B^*(\alpha) = \max(0, \beta \mu \sin(\alpha)) \quad (7.5)$$

$$D^*(u) \begin{cases} \delta \mu & \text{se } r \leq u \leq R \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (7.6)$$

onde β é o albedo da bola, δ é o albedo do disco e μ é um fator que depende da intensidade da fonte de luz.

7.2 Discretização da solução referência

Para discretizar essas equações, dividimos o intervalo de variação $[-\phi/2, \phi/2]$ de α em m passos, o intervalo $[0, R]$ de u em n passos, o intervalo $[0, 2\pi]$ de τ em k passos, e substituímos as integrais (7.3) e (7.4) pelos somatórios (7.7) e (7.8).

$$B(\alpha_i) = B^*(\alpha_i) + \sum_{j=1}^n D(u_j) \sum_{s=1}^k \beta F(p(0, \alpha_i), q(\tau_s, u_j)) u_j \sigma_\tau \sigma_u \quad (7.7)$$

$$D(u_j) = D^*(u_j) + \sum_{i=1}^m B(\alpha_i) \sum_{s=1}^k \delta F(p(0, u_j), q(\tau_s, \alpha_i)) r \cos(\alpha_i) \sigma_\alpha \sigma_\tau \quad (7.8)$$

onde $\sigma_u = R/n$, $\sigma_\alpha = \pi/m$, $\sigma_\tau = 2\pi/k$, $\alpha_i = (i - 0.5)\sigma_\alpha - \pi/2$, $\tau_s = (i - 0.5)\sigma_\tau$, $u_j = (j - 0.5)\sigma_u$. Podemos escrever as equações (7.7) e (7.8) na forma matricial $\lambda \leftarrow \eta + R\lambda$, onde

$$\eta = \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_m^* \\ d_1^* \\ \vdots \\ d_n^* \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & M_{n1} & \dots & M_{nm} \\ N_{11} & \dots & N_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{m1} & \dots & N_{mn} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

Nesta equação, como no Capítulo 5, o vetor η representa a radiância direta, o vetor λ representa a iluminação global e a matriz R representa a transferência de energia luminosa pela cena. Cada elemento b_i^* de η representa a radiância direta da esfera na latitude α_i , e cada elemento d_j^* representa a radiância direta no disco a uma distância u_j do centro do disco. Os elementos N_{ij} e M_{ij} denotam respectivamente

$$N_{ji} = \beta \sum_{s=1}^k F(p(0, \alpha_i), q(\tau_s, u_j)) \quad (7.10)$$

$$M_{ij} = \delta \sum_{s=1}^l F(q(0, u_j), p(\tau_s, \alpha_i)) \quad (7.11)$$

Cada elemento N_{ji} da matriz representa influência do anel j do disco em cada ponto do anel i da esfera. Analogamente, M_{ij} representa a influência do anel i da esfera em cada

ponto do anel j do disco.

Uma vez computada a matriz R e o vetor η , a iluminação global pode ser calculada através da iteração (5.8) até convergir.

7.2.1 Solução obtida

A solução de referência das equações (7.7) e (7.8) que usamos para validar nosso programa está ilustrada na Figura 7.3. Os parâmetros utilizados foram $R = 40$, $r = 5$, $h = 20$, $\beta = \delta = 0.9$, $\mu = 0.9$, $n = m = k = 100$. Os valores de b_i e d_i foram obtidos com 100 iterações da recorrência (5.8).

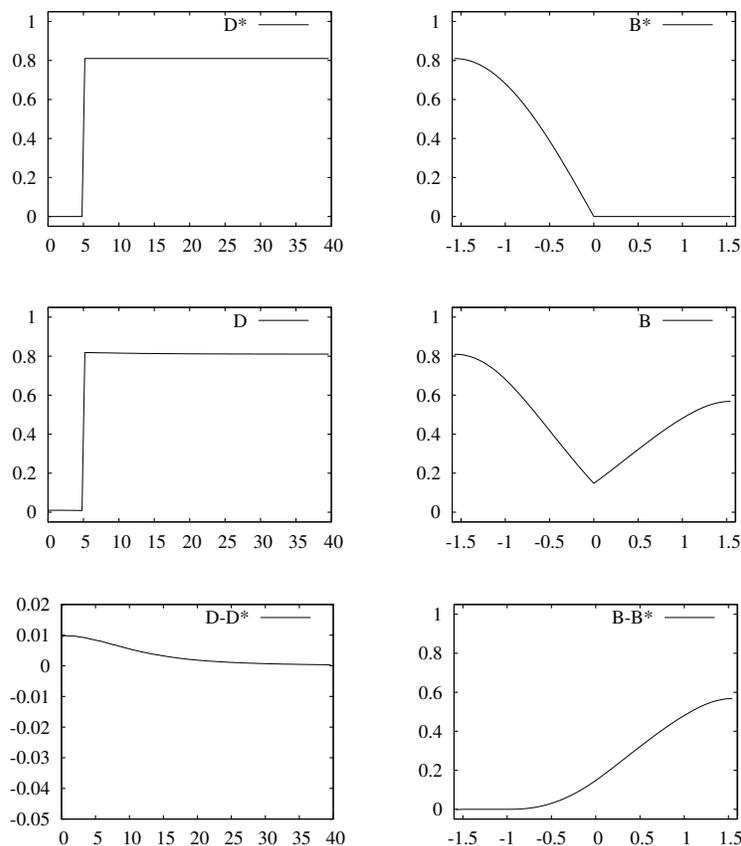


Figura 7.3: Os gráficos à esquerda referem-se aos pontos $q(\phi, u)$ no disco, em função da distância u do centro. Os gráficos à direita referem-se aos ponto $p(\theta, \alpha)$ na esfera, em função da latitude α . Os gráficos mostram a radiância direta (no alto) a radiância total (centro) e a radiância indireta (em baixo).

7.3 Resolução com nosso *software*

No teste do nosso programa usamos bases de três tipos (radial, radial normalizada e Shepard), com sítios escolhidos como descrito na Seção 4.2.2. Usamos duas bases de cada tipo (*esparsa* e *densa*), geradas com espaçamento $\epsilon = 3$ e $\epsilon = 1$, respectivamente. Veja a Figura 7.4.

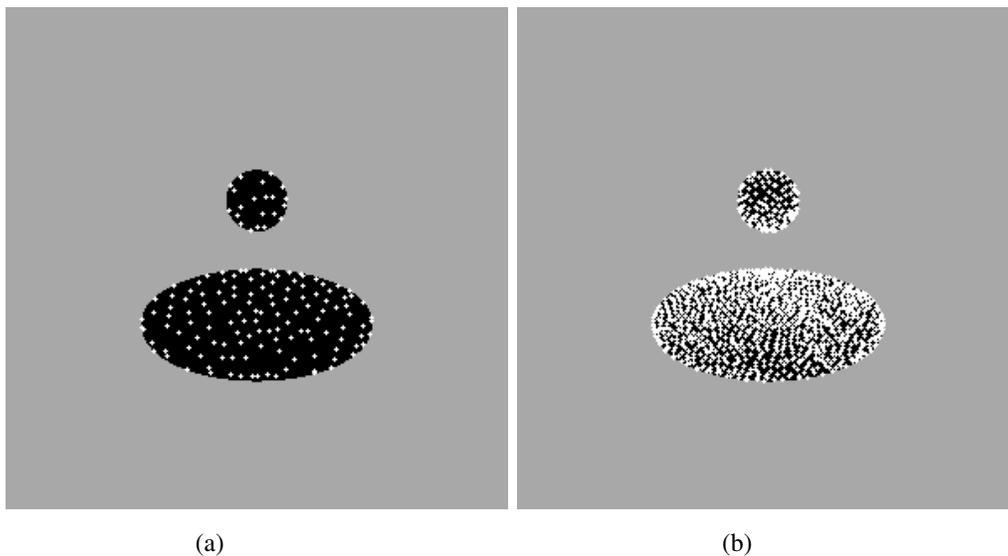


Figura 7.4: Centróides dos elementos (a) conjunto esparso (b) conjunto denso.

Os gráficos a seguir mostram as radiâncias calculadas pelo nosso programa. Calculamos com o nosso programa a radiância direta e a iluminação global utilizando bases de três tipos: base radial, base radial normalizada e base de Shepard; com os centróides acima. Após o cálculo da radiância como combinação da base, interpolamos a mesma nos $n \times k$ pontos do disco e nos $m \times k$ pontos da bola, e calculamos por fim as médias das radiâncias nos pontos do disco para cada raio u_j e para cada ponto da bola segundo a latitude α_i .

As linhas grossas representam a estas médias. A linha fina representa a radiância ao longo de um único meridiano $\theta = 0$ na bola e ao longo de um único raio com azimute $\phi = 0$ no disco. Os gráficos à esquerda se referem ao disco e os gráficos à direita se referem a bola.

7.3.1 Base radial gaussiana

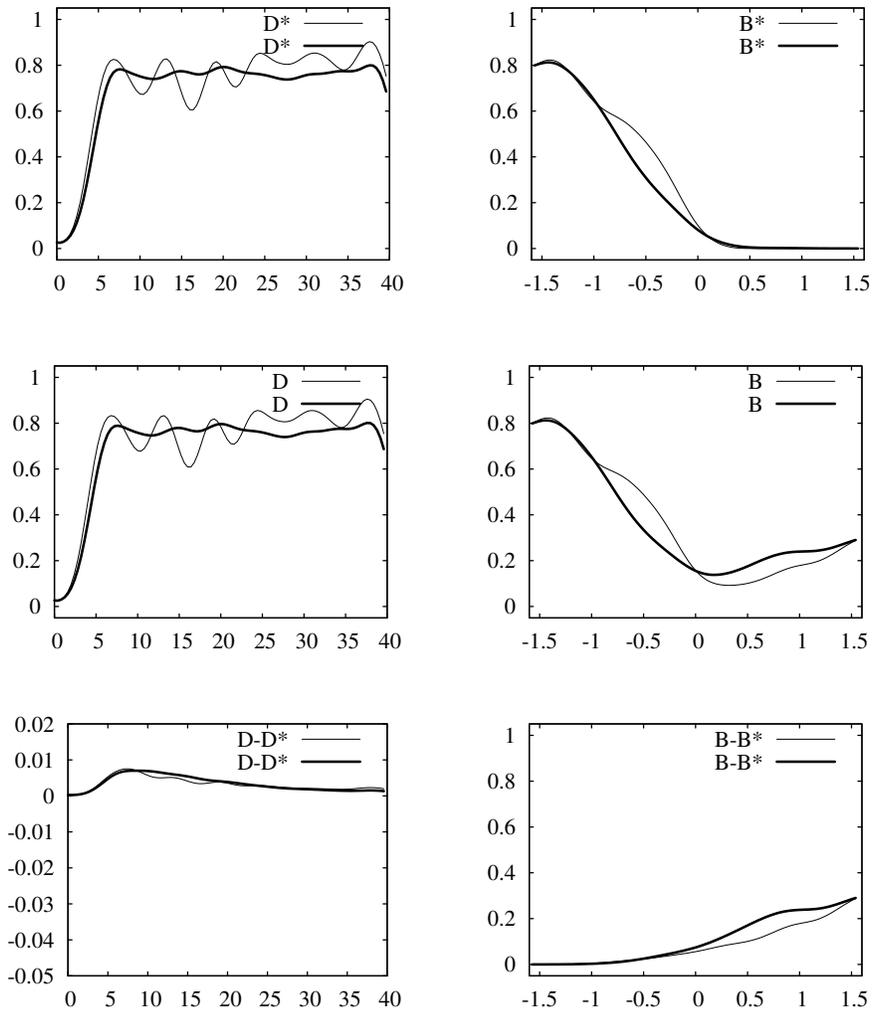


Figura 7.5: Radiosidade da cena da Figura 7.1 calculada pelo nosso programa, usando uma base radial com baixa densidade de sítios.

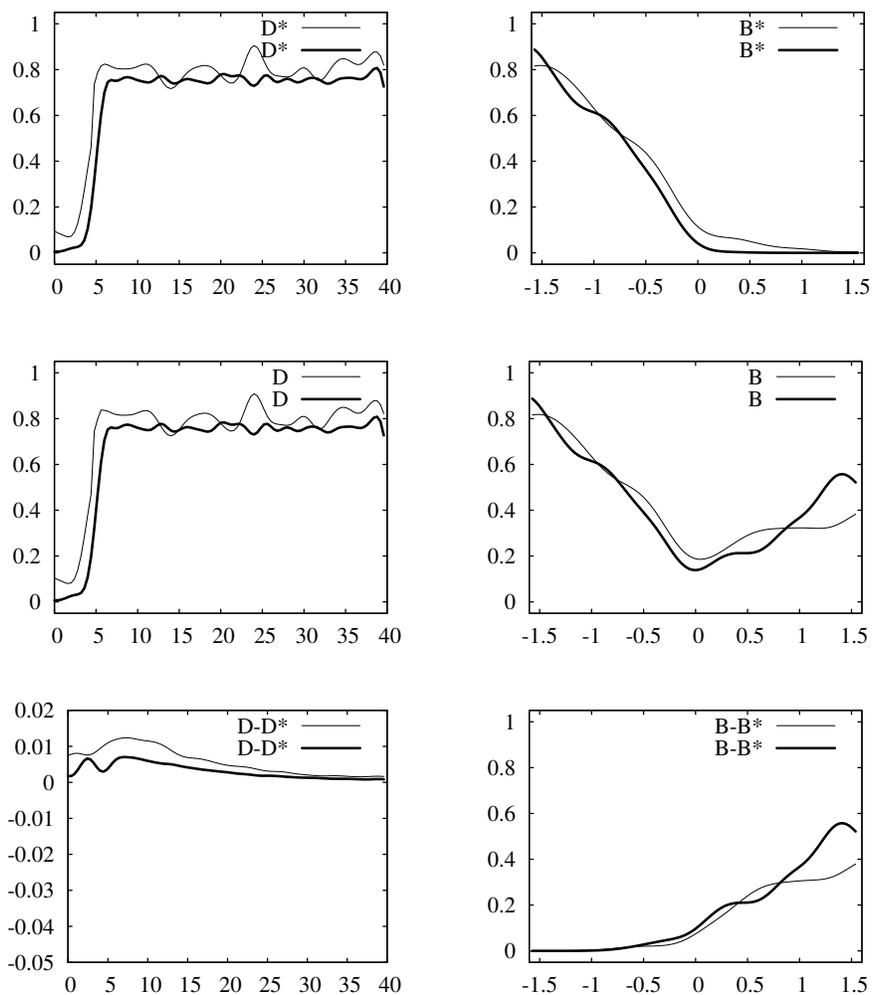


Figura 7.6: Radiosidade da cena da Figura 7.1 calculada pelo nosso programa, usando uma base radial com alta densidade de sítios.

7.3.2 Base radial normalizada

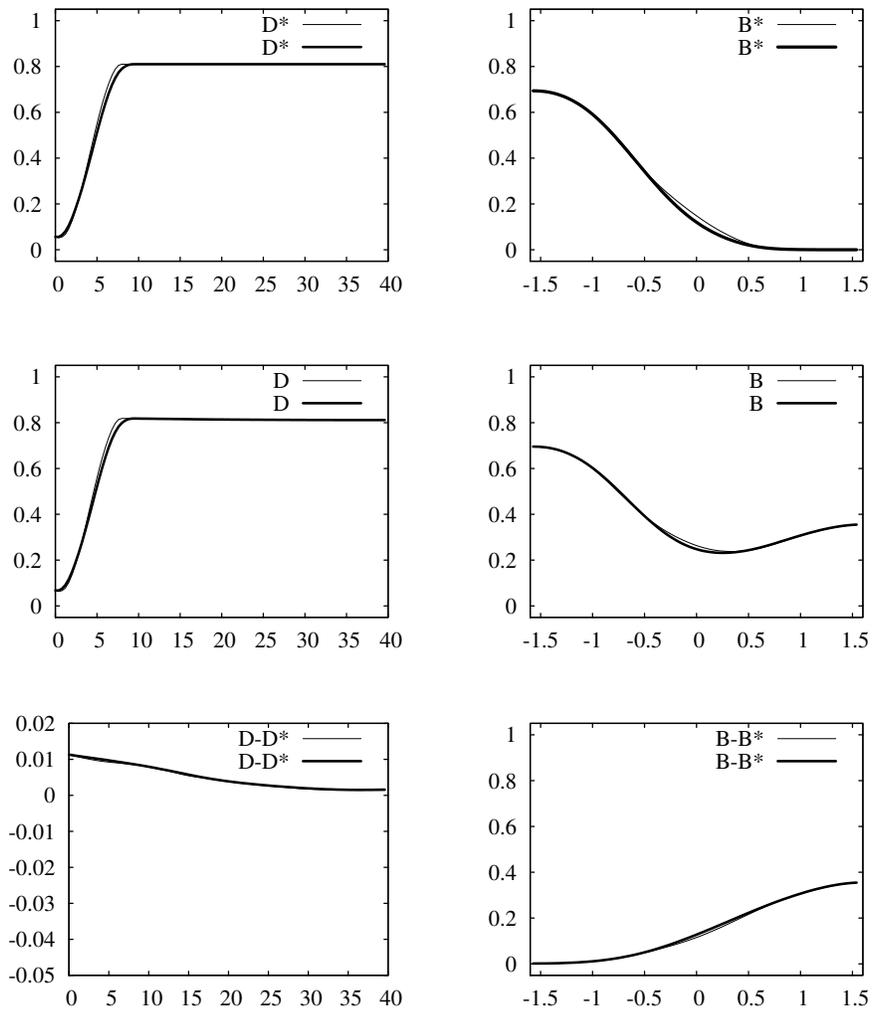


Figura 7.7: Radiosidade da cena da Figura 7.1 calculada pelo nosso programa, usando uma base radial normalizada com baixa densidade de sítios.

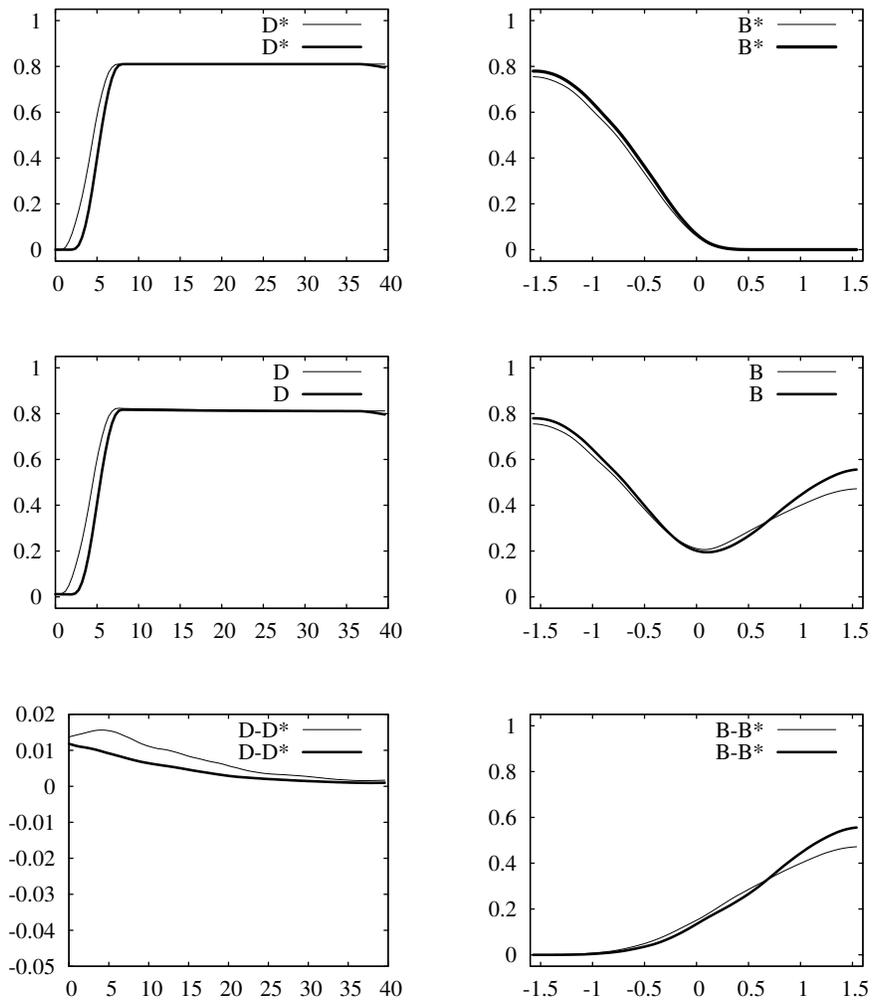


Figura 7.8: Radiosidade da cena da Figura 7.1 calculada pelo nosso programa, usando uma base radial normalizada com alta densidade de sítios.

7.3.3 Base de Shepard

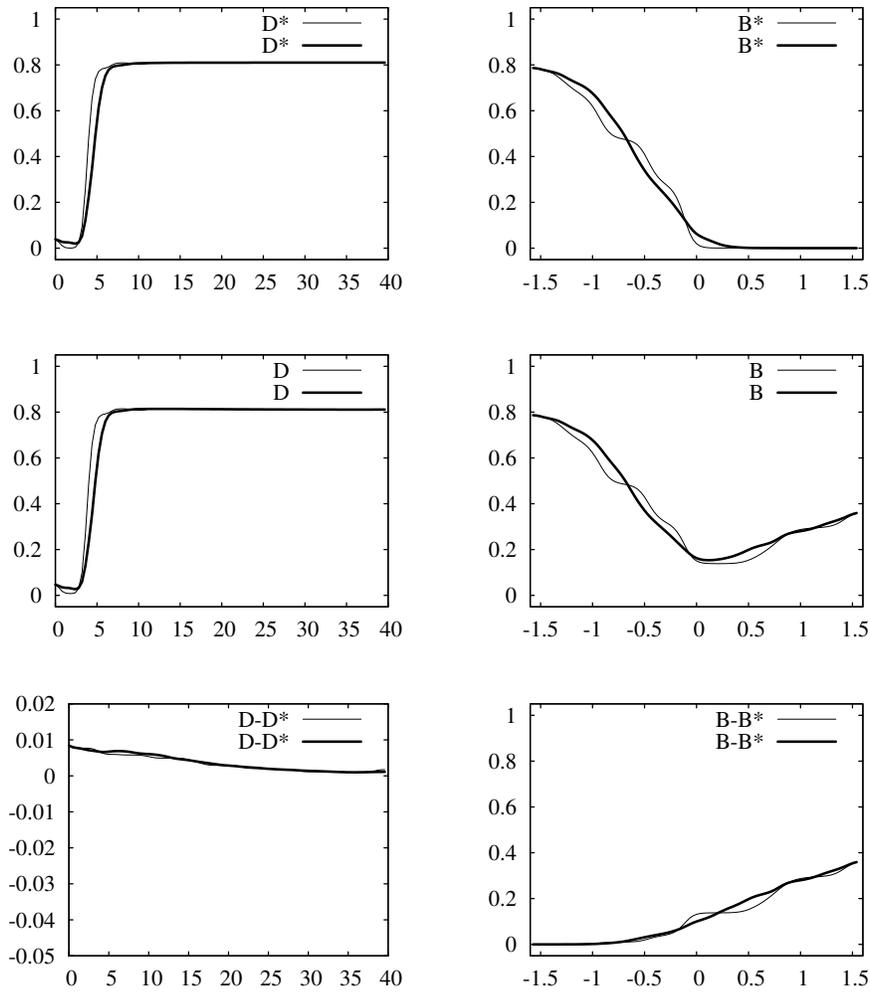


Figura 7.9: Radiosidade da cena da Figura 7.1 calculada pelo nosso programa, usando a base de Shepard com baixa densidade de sítios.

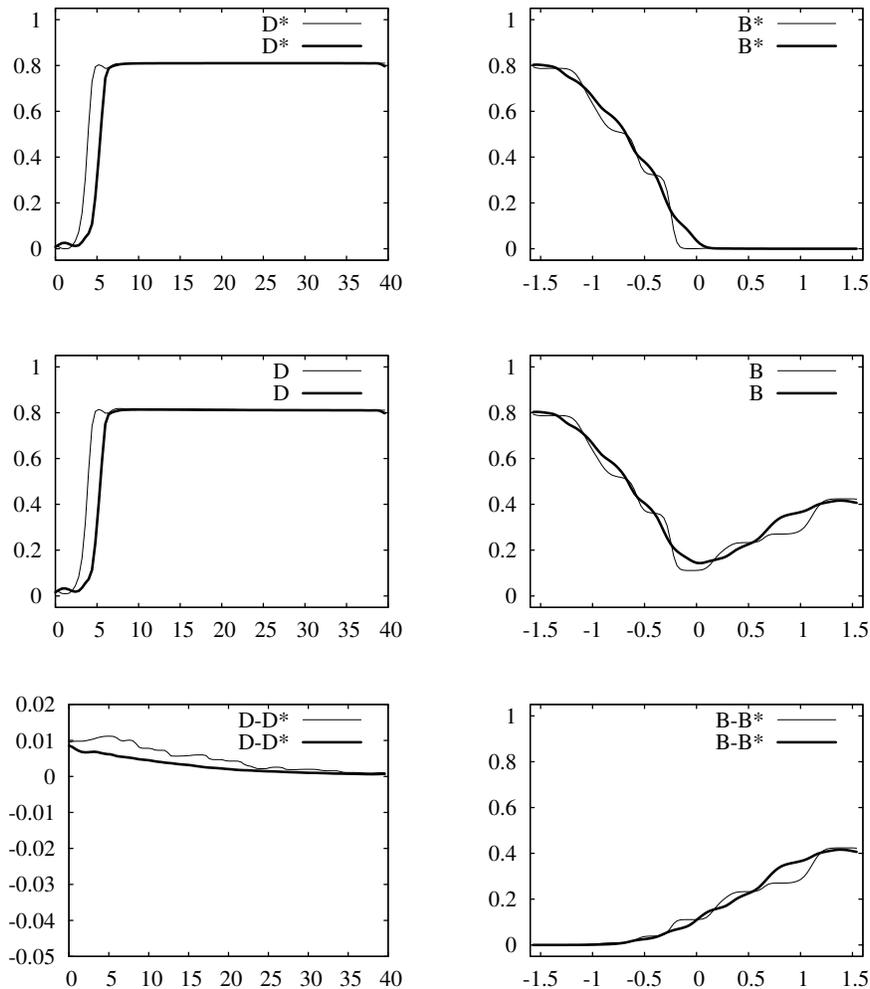


Figura 7.10: Radiosidade da cena da Figura 7.1 calculada pelo nosso programa, usando a base de Shepard com alta densidade de sítios.

7.4 Considerações

Conforme podemos observar nos gráficos, as três bases fornecem aproximações razoavelmente precisas da radiância “correta” do disco e da bola. Nos três casos, a qualidade de aproximação aumenta conforme a densidade dos elementos aumenta. No entanto, existe uma diferença significativa quanto a qualidade.

Bases radiais proporcionam aproximações com erro relativamente baixo (Figura 7.6) mas a solução apresenta pequenas oscilações que são visualmente perceptíveis. A base de Shepard também aproxima razoavelmente a função de radiância (Figura 7.10), porém

possui oscilações mais pronunciadas com formato característico de degraus. A base radial normalizada apresenta os melhores resultados - mais precisos e com menos oscilações. Como vimos no Capítulo 6, esta base de aproximação também é a que produz imagens de melhor qualidade visual.

Capítulo 8

Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho estudamos e implementamos um método eficiente de aproximação para a solução da equação de *rendering* utilizando o método de elemento finitos. Neste capítulo resumimos as principais conclusões, apresentamos algumas contribuições e apontamos possíveis direções para trabalhos futuros.

Eficiência: A eficiência do método deve-se a separação dos cálculos referentes à geometria e dos cálculos referentes à iluminação direta, de modo que apenas estes devem ser refeitos quando a iluminação da cena é alterada.

Complexidade: O cálculo dos fatores de visibilidade na equação (5.7) leva tempo $\Theta(sn^2)$. A pré-computação da matriz T leva tempo $\Theta(kn^3)$, onde k é o número de iterações do fluxo de luz, n é o número de sítios e s é o número de objetos que compõem a cena. Uma vez obtida a matriz T da cena, o custo para produzir cada imagem é $\Theta(n^2)$ para multiplicar a matriz T pelo vetor η e $\Theta(mn)$ para calcular a radiância dos m pixels da imagem.

Comparação entre bases: Comparando as soluções obtidas com as três bases : a base radial, a base radial normalizada e a base de Shepard com uma solução “exata”, concluímos que, embora as três bases produza o resultado correto quando o número de elementos n tende para ∞ , a base radial normalizada produz uma solução de melhor qualidade visual (Capítulo 6) e mais precisa (Capítulo 7) para um mesmo n finito.

Dentre as principais contribuições deste trabalho, temos:

Comparação: Este trabalho confirma que a base radial normalizada proposta por [11] sem justificativa é a melhor alternativa. A comparação entre bases de elementos finitos aplicada na radiosidade é uma das principais contribuições desse trabalho; pois observamos que não há na literatura nenhum trabalho que compara bases de elementos finitos para a radiosidade utilizando o método proposto.

Validação: A estratégia de validação proposta no Capítulo 7 é uma contribuição interessante; pois esta pode ser utilizada para a validação de outros algoritmos de iluminação global.

Quanto às possibilidades de extensão desta pesquisa, podemos citar:

Combinação com o traçado de raios: Na abordagem adotada neste trabalho aproximamos a iluminação direta e indireta por meio do método dos elementos finitos. Uma possível melhoria poderia ser obtida se a iluminação direta não fosse representada pelo MEF, mas sim pelo algoritmo de traçado de raios. Somente a iluminação indireta seria aproximada pelo MEF, e somada à imagem gerada pelo traçado de raios.

Superfícies não lambertianas: Conforme já discutido, o nosso programa trabalha somente com superfícies difusas. Essa limitação se deve ao uso de bases espaciais que não conseguem representar a variação da iluminação em função da direção. Uma possível solução para esse impasse seria representar o fluxo de luz na cena por bases de elementos $\phi(p, d)$ que depende tanto da posição p quanto da direção d , e possuem suporte limitado tanto em p quanto em d . Para esse fim podemos combinar os elementos descritos neste trabalho com os harmônicos esféricos ou bases radiais na esfera. Essa abordagem permitiria o uso de superfícies especulares e/ou lustrosas.

Apêndice A

Radiometria

A.1 Introdução

A *radiometria* é o campo da ciência que estuda a radiação eletromagnética (incluindo a luz visível) utilizando o modelo de partículas. Neste modelo a luz é imaginada como um fluxo de infinitas partículas (fótons) infinitamente pequenas, cada qual carregando uma quantidade fixa de energia, que é medida em joules. Neste apêndice apresentaremos os conceitos da radiometria relevantes para este trabalho.

A.2 Fluxo radiante e densidade de fluxo por unidade

O *fluxo radiante* é uma quantidade de energia que transita por unidade de tempo, é medido em joules por segundos (J/s) ou simplesmente em watts. Neste modelo a velocidade da luz é infinita e o fluxo de fótons é estacionário (não varia com o tempo).

A *densidade do fluxo radiante* é definida como fluxo radiante por unidade de área, e pode ser medido em watts por metro quadrado (W/m^2). A densidade do fluxo que chega em um dado ponto da superfície de um objeto sólido é denominado de *irradiância* e o fluxo que sai é chamado de *radiosidade*. Veja a Figura A.1

A.3 Intensidade radiante

A *intensidade radiante* mede a densidade do fluxo radiante em uma determinada direção.

Mais precisamente, seja p um ponto em uma superfície e d uma direção. Seja A um disco infinitesimal paralelo à superfície logo acima do ponto p e D uma densidade do fluxo radiante (irradiância ou radiosidade) que atravessa A nas vizinhanças do ponto p . Seja D' a parte desse fluxo que consiste de fótons cujas direções estão dentro do cone C

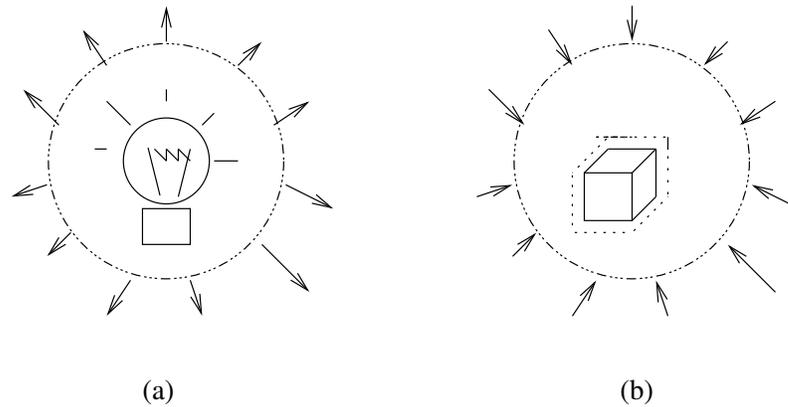


Figura A.1: (a) Radiosidade (b) Irradiância.

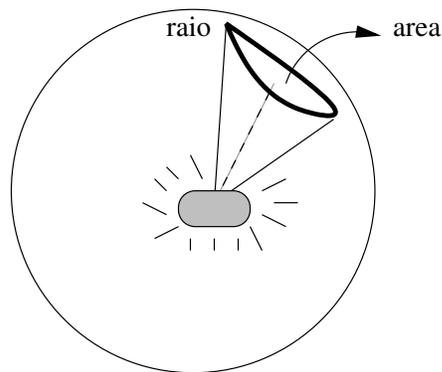


Figura A.2: Ilustração do conceito de ângulo sólido.

na esfera S^2 cujo eixo é a direção d . A *intensidade radiante* no ponto p e direção w é o fluxo radiante D' dividido pela área de A e pelo ângulo sólido de C . Lembramos que a medida de ângulo sólido, em estereorradianos é a área definida pela intersecção do cone C com a esfera S^2 (Figura A.2.(b)). A intensidade radiante é medida em watts por metros quadrados por estereorradianos ou simplesmente por watts por metros quadrado (W/m^2).

A.4 Radiância

A *radiância* em um ponto p da superfície e na direção d é definida da mesma forma que a densidade do fluxo radiante, mas dividida pela área de A projetada na direção do fluxo, em vez da área real de A . Ver Figura A.3. Se θ é o ângulo entre a direção d e a normal

de A , então a radiância é a intensidade radiante dividida por $\cos(\theta)$.

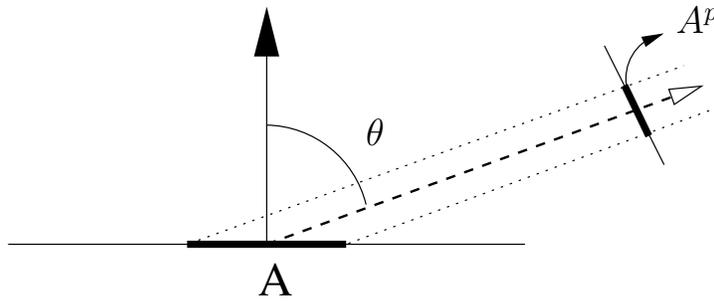


Figura A.3: Ilustração do conceito de área projetada

A radiância, assim como a densidade do fluxo radiante, é geralmente medida watts por metro quadrado por esterradianos ($\text{W}/\text{m}^2/\text{sr}$) ou simplesmente (W/m^2).

Referências Bibliográficas

- [1] Electronic site at http://www.dca.fee.unicamp.br/courses/EA978/1s2003/proj/Projetos/proj1_9d.png.
- [2] Electronic site at <http://www.cescg.org/CESCG-2002/GVass/image93.jpg>.
- [3] Thomas Annen, Jan Kautz, Fred o Durand, and Hans-Peter Seidel. Spherical harmonic gradients for mid-range illumination. In Alexander Keller and Henrik Wann Jensen, editors, *Rendering Techniques 2004 : Eurographics Symposium on Rendering*, pages 331–336, Norrköping, Sweden, June 2004. Eurographics Association.
- [4] M. F. Cohen and J. R. Wallace. *Radiosity and Realistic Image Synthesis*. Academic Press, 1993.
- [5] M. Floater and A. Iske. Multistep scattered data interpolation using compactly supported radial basis functions, 1996.
- [6] H. Gouraud. *Computer Display of Curved Surfaces*. Outstanding Dissertations in the Computer Sciences. Garland Publishing, 1971.
- [7] R. Green. Spherical harmonic lighting: The gritty details. *Archives of the Game Developers Conference*, March 2003.
- [8] J. T. Kajiya. The rendering equation. In *Proceedings of SIGGRAPH 1986*, volume 20(4), pages 143–150, 1986.
- [9] Jan Kautz, Peter-Pike Sloan, and Jaakko Lehtinen. Precomputed radiance transfer: theory and practice. In *SIGGRAPH '05: ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, page 1. ACM, 2005.
- [10] Jaakko Lehtinen, Matthias Zwicker, Janne Kontkanen, Emmanuel Turquin, François Sillion, and Timo Aila. Meshless finite elements for hierarchical global illumination. Technical Report TML-B7, Helsinki University of Technology, May 2007.

- [11] Jaakko Lehtinen, Matthias Zwicker, Emmanuel Turquin, Janne Kontkanen, Frédo Durand, François Sillion, and Timo Aila. A meshless hierarchical representation for light transport. *ACM Trans. Graph.*, 27(3), 2008.
- [12] Ian G. Lisle and S.-L. Tracy Huang. Algorithms for spherical harmonic lighting. In *GRAPHITE '07: Proceedings of the 5th international conference on Computer graphics and interactive techniques in Australia and Southeast Asia*, pages 235–238. ACM Press, 2007.
- [13] Xinguo Liu, Peter-Pike J. Sloan, Heung-Yeung Shum, and John Snyder. All-frequency precomputed radiance transfer for glossy objects. In *Rendering Techniques*, pages 337–344, 2004.
- [14] R. Ng, R. Ramamoorthi, and P. Hanrahan. All-frequency shadows using non-linear wavelet lighting approximation. *ACM Transactions on Graphics*, 22(3):376–381, July 2003.
- [15] B. T. Phong. Illumination for computer generated pictures. *Communications of the ACM*, 18(6):311–317, June 1975.
- [16] R. Ramamoorthi and P. Hanrahan. An efficient representation for irradiance environment maps. In *SIGGRAPH '01: Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 497–500, New York, NY, USA, 2001. ACM Press.
- [17] Zhong Ren, Rui Wang, John Snyder, Kun Zhou, Xinguo Liu, Bo Sun, Peter-Pike J. Sloan, Hujun Bao, Qunsheng Peng, and Baining Guo. Real-time soft shadows in dynamic scenes using spherical harmonic exponentiation. *ACM Trans. Graph.*, 25(3):977–986, 2006.
- [18] D. Shepard. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In *Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference*, pages 517–524. ACM Press, 1968.
- [19] P. P. Sloan. Normal mapping for precomputed radiance transfer. In *SI3D '06: Proceedings of the 2006 symposium on Interactive 3D graphics and games*, pages 23–26. ACM Press, 2006.
- [20] P. P. Sloan, J. Kautz, and J. Snyder. Precomputed radiance transfer for real-time rendering in dynamic, low-frequency lighting environments. In Eugene Fiume, editor, *Proceedings of ACM SIGGRAPH 2002*, volume 21 of *acm Transactions on Graphics*,

pages 527–536, San Antonio, July 2002. Association of Computing Machinery (ACM), ACM Press.

- [21] P. P. Sloan, B. Luna, and J. Snyder. Local, deformable precomputed radiance transfer. *ACM Trans. Graph.*, 24(3):1216–1224, July 2005.
- [22] Peter-Pike J. Sloan. Precomputed radiance transfer: A step towards interactive global illumination. In *VMV*, page 317, 2003.
- [23] M. P. B. Slomp, M. M. Oliveira, and D. I. Patrício. A gentle introduction to pre-computed radiance transfer. *RITA*, 13(2):131–160, 2006.
- [24] T. Whitted. An improved illumination model for shaded display. *Communications of the ACM*, 23(6):343–349, June 1980.