

**Modelos de Otimização para Administração de Risco de Crédito baseados nos
conceitos de Basiléia II**

Gedson Oliveira Santos

Trabalho Final de Mestrado Profissional

Modelos de Otimização para Administração de Risco de Crédito baseados nos conceitos de Basiléia II

Gedson Oliveira Santos

Fevereiro de 2005.

Banca Examinadora

- Prof. Dr. Flávio Keidi Miyazawa (orientador)
IC - Instituto de Computação – UNICAMP
- Prof. Dr. Pedro Paulo Schirmer
IME - Instituto de Matemática e Estatística – USP
- Prof. Dr. Orlando Lee
IC - Instituto de Computação – UNICAMP
- Prof. Dr. Ricardo Dahab (Suplente)
IC - Instituto de Computação – UNICAMP

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Santos, Gedson Oliveira

Sa59m Modelos de otimização para administração de risco de crédito baseados nos conceitos de Basiléia II / Gedson Oliveira Santos -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientador : Flávio Keidi Miyazawa

Trabalho final (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação.

1.Otimização. 2. Administração de risco. 3. Programação linear. 4. Programação quadrática. I. Miyazawa, Flávio Keidi. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Computação. III. Título.

Modelos de Otimização para Administração de Risco de Crédito baseados nos conceitos de Basileia II

Este exemplar corresponde à redação final do Trabalho Final devidamente corrigida e defendida por Gedson Oliveira Santos e aprovada pela Banca Examinadora.

Campinas, 28 de Fevereiro de 2005

Prof. Dr. Flávio Keidi Miyazawa (Orientador)

Trabalho Final apresentado ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Computação na Área de Engenharia de Software.

© Gedson Oliveira Santos, 2005.
Todos os direitos reservados

À minha esposa Rachel e ao meu filho Antonio.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter-me concedido a vida e tudo que tenho e sou.

Aos meus pais, Antonio e Maria Rosa, os quais são muito preciosos para mim. Agradeço a eles, pois sempre lutaram, com muito esforço e dedicação, para me dar uma boa educação.

À minha esposa, Rachel, companheira de todas as lutas e que amo muito.

Ao meu filho Antonio, fonte de expiração para conclusão deste trabalho.

Aos meus parentes e amigos que me apoiaram nesta tarefa tão difícil.

Ao meu orientador, Prof. Flávio, o qual teve paciência em escutar minhas propostas para desenvolvimento desta dissertação. Agradeço pela ajuda dispensada durante a redação do texto final.

Ao Prof. Pedro Paulo, pelo enorme apoio na escolha do tema. Agradeço por ajudar-me na estruturação de todos os modelos desenvolvidos.

Aos meus amigos de trabalho, César e Eduardo, pela ajuda em todo o decorrer desta dissertação.

Aos meus superiores, Hollander e Fred, pelas observações pertinentes, as quais tornaram o trabalho mais realista.

Resumo

A administração do risco de crédito requer modelos e técnicas sofisticadas para auxílio nas tomadas de decisões. Área com pouquíssimos trabalhos acadêmicos e vasto campo para estudo tem na *Otimização Contínua* uma excelente alternativa para o seu desenvolvimento.

Baseado nos conceitos de Basiléia II, este trabalho propõe o desenvolvimento de instrumentos de otimização da carteira de crédito, os quais podem efetivamente reestruturá-la na minimização de riscos e concentrações e na maximização de retornos. Para atingirmos nosso objetivo, utilizamos técnicas de Programação Matemática que trabalham com variáveis contínuas, tais como, Programação Linear, Programação Linear Paramétrica e Programação Quadrática Convexo.

Abstract

Credit risk management requires sophisticated models and techniques in the decision making process. It is an area with few academic works, and that makes it a vast field for research. The Continuous Optimization technique offers an excellent opportunity for the development of new approaches.

Based on that technique, and using the concepts of Basel II, this work develops instruments for the optimization of credit portfolios, which can effectively reorganize them, with minimization of risks and concentrations and maximization of returns. To reach our objective, we use Mathematical Programming techniques that work with continuous variables such as Linear Programming, Parametric Linear Programming and Convex Quadratic Programming.

Sumário

Resumo.....	ix
Abstract	x
Sumário	xi
Lista de Tabelas.....	xiii
Lista de Figuras	xv
Lista de Algoritmos	xvi
Introdução	1
1.1 Organização do texto	2
Risco de Crédito	5
2.1 Conceitos e Medidas de Risco de Crédito	5
2.2 Modelos de Mensuração de Risco de Crédito	7
2.2.1 Modelo do Acordo de Capital da Basiléia	8
2.3 Administração de Risco da Carteira de Crédito	14
Modelos de Otimização para Administração do Risco de Crédito	19
3.1 Modelos de Otimização para uso Gerencial.....	20
3.1.1 Otimização da relação Risco/Retorno através do Dano Esperado	20
3.1.2 Otimização da relação Risco/Retorno através do CvaR	21
3.2 Modelos de Otimização baseados nos conceitos de Basiléia II ...	22
3.2.1 Objetivos	22
3.2.2 Restrições	24
3.2.3 Formulação Matemática.....	25
Técnicas	29
4.1 Complexidade Computacional	29
4.2 Programação Linear	32
4.3 Programação Linear Paramétrica	34
4.4 Programação Quadrática	35
Implementação dos Modelos	37
5.1 Estudo de Caso	37
5.2 Visão Geral do Processo	41
5.3 Detalhamento dos Algoritmos.....	42
Resultados Computacionais	47
6.1 Avaliação de Performance.....	47
6.2 Análise dos Resultados	48
6.2.1 Análise dos Resultados da otimização risco/retorno sem Penalização da Concentração	49

6.2.2 Análise dos Resultados da otimização risco/retorno com Penalização da Concentração	52
Conclusões e Trabalhos Futuros	59
Apêndice A - Evolução dos Instrumentos de Análise de Crédito	61
A.1 Introdução.....	61
A.2 Primeira Fase: “Cliente de crédito”	63
A.3 Segunda Fase: “Mercado de crédito”	65
A.4 Terceira Fase: “Carteira de crédito”	68
A.5 Bibliografia	70
Apêndice B - Modelos Gerenciais de Mensuração de Risco de Crédito	73
B.1 Abordagem CreditMetrics®.....	73
B.2 Abordagem KMV®.....	76
B.3 Abordagem Atuarial: CreditRisk+®.....	79
B.4 Bibliografia	80
Referências Bibliográficas.....	81

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 : Variáveis de risco de crédito modelo IRB – Corporações, Governos e Bancos	11
Tabela 2.2: Variáveis de risco de crédito modelo IRB – Varejo	11
Tabela 2.3 : Abordagem para Ações e Debêntures	12
Tabela 2.4 : Fórmulas para cálculo de Capital Regulamentar segundo Basiléia II.....	13
Tabela 2.5 : Complemento das fórmulas para cálculo de Capital Regulamentar segundo Basiléia II	14
Tabela 3.1: Variáveis e parâmetros dos modelos	26
Tabela 4.1: Comparação de tempo de execução	29
Tabela 5.1: Descrição da variável Região.....	37
Tabela 5.2: Descrição da variável Ramo de Atividade	38
Tabela 5.3: Descrição da variável Modalidade de Produto.....	38
Tabela 5.4: Descrição da variável Perfil de cliente	38
Tabela 5.5: Descrição da variável Banda de Exposição	39
Tabela 5.6: Descrição da carteira de crédito Original	39
Tabela 6.1: Tempos de execução das rotinas implementadas	47
Tabela 6.2: Comparação de medidas de risco da carteira de crédito	48
Tabela 6.3: Comparação da carteira de crédito original e a carteira eficiente.....	49
Tabela 6.4 : Índice de concentração marginal por perfil de cliente.....	50

Tabela 6.5: Resultados do problema de otimização com penalização de concentração	52
Tabela 6.6 : Minimização da concentração.....	53
Tabela 6.7 : Índice de concentração marginal por perfil de cliente.....	54
Tabela 6.8 : Índice de concentração marginal por região geográfica	54
Tabela 6.9 : Índice de concentração marginal por ramo de atividade.....	55
Tabela 6.10 : Índice de concentração marginal por modalidade de produto	55
Tabela B.1: Migração do risco de crédito	72
Tabela B.2: Cálculo dos valores segundo migração de estado de crédito	73
Tabela B.3: Equivalência DD e “Rating”	76

Lista de Figuras

Figura 2.1: Medidas de risco de crédito.....	6
Figura 4.1: Possível disposição das Classes de problemas de NP-Completeness.....	31
Figura 5.1 : Fluxo macro do processo de otimização	40
Figura 6.1 : Fronteira Eficiente	49
Figura A.1: Relacionamento entre banco e cliente.....	59
Figura A.2: Relacionamento do sistema bancário.....	60
Figura A.3: Fase “Cliente de crédito”	62
Figura A.4: Fase “Mercado de crédito”	63
Figura A.5: Fase “Carteira de crédito”	67

Lista de Algoritmos

Algoritmo 5.1: Otimização da relação risco/retorno baseado na Perda Máxima sem penalização de concentração	42
Algoritmo 5.2: Otimização da relação risco/retorno baseado na Perda Máxima com penalização de concentração	43

Capítulo 1

Introdução

A administração do risco de crédito requer modelos e técnicas sofisticadas para auxílio nas tomadas de decisões. Área com pouquíssimos trabalhos acadêmicos e vasto campo para estudo tem na *Otimização Contínua* uma excelente alternativa para o seu desenvolvimento.

A otimização da relação risco/retorno de uma carteira de crédito é um dos principais assuntos relacionados à administração de risco de crédito. O objetivo desse problema é reduzir riscos e maximizar retornos. Para tanto, é necessário que a medida de risco utilizada para otimização atenda critérios de ordem de relevância e de tratabilidade.

Consideramos em nossa pesquisa medidas de risco relevantes, aquelas as quais agregam valor à tomada de decisão. Medidas de risco tratáveis podem ser resolvidas por métodos computacionais eficientes, ou seja, são solucionadas por algoritmos de tempos polinomiais.

Tais medidas foram norteadas pelos conceitos preconizados no modelo do Novo Acordo de Basiléia ou Basiléia II [1] (conjunto de regras definidas pelo “Basel Committee on Banking Supervision” para alocação de capital, visando à cobertura dos riscos de crédito, de mercado e operacional).

O modelo de Basiléia II, além de sua relevância no contexto global (será implementado nos países do G-10 e em vários outros, inclusive Brasil), provê métodos de mensuração de riscos de crédito, os quais permitem as instituições financeiras desenvolverem medidas de risco relevantes. Além disso, como as fórmulas de alocação de capital do Novo Acordo de Basiléia (em sua metodologia mais avançada) baseiam-se no modelo de Vasicek [5] (que é linear), possibilita

o desenvolvimento de algoritmos de tempos polinomiais para otimização do risco de crédito, atingindo assim, o critério de tratabilidade.

Neste estudo, desenvolvemos instrumentos de otimização da carteira de crédito, baseados na relação risco/retorno, os quais podem efetivamente reestruturá-la na redução de riscos e maximização de retornos. Além disso, criamos alternativas para pulverização de carteiras de crédito, através da minimização de concentrações. Ilustramos a aplicabilidade desses instrumentos, através de um estudo de caso, partindo de uma carteira de crédito construída empiricamente. A partir desse estudo, executamos várias instâncias e realizamos as avaliações de performance e dos resultados técnicos obtidos.

Para os instrumentos de otimização da carteira de crédito desenvolvidos nesta dissertação, estudamos e aplicamos técnicas de otimização que trabalham com variáveis contínuas.

Essas técnicas são:

- Programação Linear;
- Programação Linear Paramétrica;
- Programação Quadrática convexo

1.1 Organização do texto

No capítulo 2 definimos as medidas e as variáveis de risco e retorno, as quais serão utilizadas na administração do risco de crédito. Exploramos também os modelos de mensuração de risco que as produzem. Além disso, introduzimos os conceitos de administração de risco de crédito.

No capítulo 3 definimos os modelos de otimização de administração de risco de crédito, base para esta dissertação, com seus objetivos, restrições e formulações matemáticas. Também apresentamos trabalhos relacionados a essa área de pesquisa.

No capítulo 4 demonstramos as técnicas de programação matemática, utilizadas para implementação dos modelos desenvolvidos, com as suas complexidades computacionais.

No capítulo 5 apresentamos um estudo de caso, detalhando os modelos escolhidos para implementação, suas variáveis de entrada, fluxogramas e algoritmos.

No capítulo 6 fazemos uma avaliação dos resultados computacionais obtidos. Analisamos a performance dos modelos implementados, bem como os seus resultados técnicos.

No capítulo 7 concluímos sobre o estudo realizado e propomos trabalhos futuros.

A dissertação possui dois apêndices correspondentes aos instrumentos de análise empregados na concessão de crédito e aos modelos gerenciais de mensuração do risco de crédito. Como o processo das atividades de crédito é complexo, desenvolvemos esses apêndices para familiarizar o leitor com a linguagem utilizada nesse campo.

Capítulo 2

Risco de Crédito

Para introduzirmos o assunto relacionado à otimização do risco de crédito, primeiramente apreciaremos seus conceitos, suas medidas e suas formas de mensuração e administração.

2.1 Conceitos e Medidas de Risco de Crédito

O principal conceito de risco de crédito é a probabilidade de inadimplência — também conhecida como probabilidade de “default” — que determina se um tomador (devedor) efetuará ou não a quitação do crédito a ele concedido. Normalmente as instituições financeiras mapeiam essa probabilidade em faixas, para as quais são atribuídos “ratings” (graus).

Podemos acrescentar aqui o conceito de Perda Esperada, extensão do conceito de probabilidade de inadimplência, multiplicando-a pelas recuperações potenciais de crédito.

A Perda Esperada tem como núcleo a probabilidade de inadimplência identificada no cliente. Todavia, esta probabilidade de inadimplência apresenta volatilidade no correr do tempo. Além disso, o fato de uma operação de crédito, com sua Perda Esperada, fazer parte de uma carteira de crédito juntamente com outras operações e respectivas Perdas Esperadas, cria a incerteza quanto ao “timing” dos eventos de crédito. Desses motivos se origina o conceito de Perda Inesperada, que “é a perda associada à incerteza da concessão de crédito. Trata-se da perda maior do que a esperada e advinda da variação da taxa de inadimplência ao longo do tempo, bem como da incerteza quanto à simultaneidade da ocorrência dos “defaults” individuais. Seu cálculo exige hipóteses sobre o comportamento dessa taxa, assim como sua distribuição de probabilidade.”[2]

Agora que definimos os conceitos básicos das variáveis de risco de crédito cabe-nos apresentar medidas mais sofisticadas que permitam obter essas e outras variáveis apresentadas a seguir.

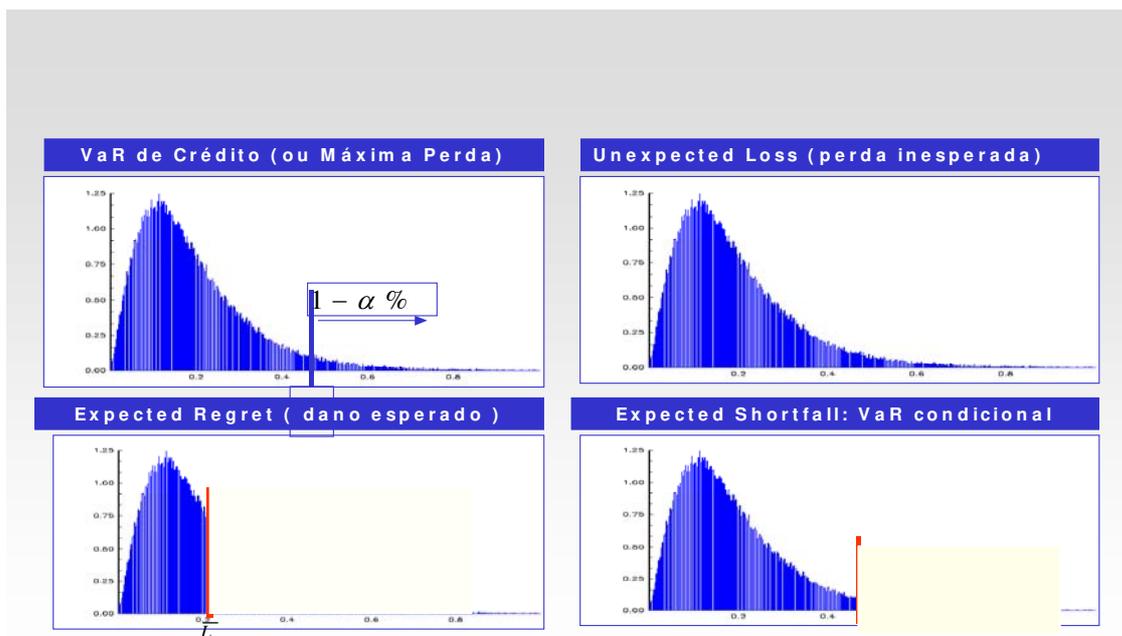


Figura 2.1: Medidas de risco de crédito

A figura acima demonstra uma distribuição de perdas de uma carteira de crédito. Essa distribuição pode ser gerada partindo-se de uma simulação de Monte Carlo [3], por exemplo, utilizando-se a variável de Probabilidade de Inadimplência para obtê-la. A área abaixo da curva no gráfico acumula a frequência percentual de ocorrência de cada nível de perdas, totalizando 100%. Os valores extremos são chamados de caudas e possuem, em geral, baixa probabilidade de ocorrência. A partir disso conseguimos obter medidas de risco como, VaR de crédito, Dano Esperado, VaR Condicional ou CvaR, as quais serão definidas abaixo:

1. VaR (“Value at Risk”) de crédito: a partir da distribuição de perdas da carteira de crédito, a instituição define um percentual de probabilidade de ocorrência conveniente, que não contemple apenas valores extremos de perdas de rara frequência, chamado de intervalo de

confiança ($\alpha\%$). O VaR é o valor máximo de perdas observado com $\alpha\%$ de confiança. Pode ser definido também como o somatório entre as Perdas Esperadas e Inesperadas.

2. Dano Esperado: é uma medida de risco que informa a probabilidade de superarmos a Perda Esperada. É na verdade a distribuição média de todas as Perdas Inesperadas

3. VaR Condicional: Semelhantemente ao dano esperado, o “Expected Shortfall” informa a probabilidade de superarmos o valor de VaR, fornecendo a distribuição média das piores perdas que superam o VaR

Para finalizarmos, destacamos que o conceito de Capital Regulamentar surgiu em 1988, quando o Acordo de Capital de Basiléia instituiu o primeiro padrão mundial em abordagem de risco de crédito, a partir do qual as autoridades monetárias dos principais países passaram a exigir que os bancos reservassem capital em forma de percentual fixo sobre seus ativos, como proteção contra inadimplência. Essa medida evoluiu em suas formas de mensuração através de uma nova metodologia publicada recentemente no Novo Acordo de Basiléia, assunto do próximo tópico.

2.2 Modelos de Mensuração de Risco de Crédito

Os modelos de mensuração de risco de crédito têm a finalidade de produzir as variáveis de risco, as quais servirão como referência à instituição para provisionamentos e alocação de capital de uma carteira de crédito. Embora sua importância crescente para a atividade bancária venha principalmente das exigências de capital regulamentar, têm também utilidade na administração interna, pois permitem avaliar cada operação de crédito em si no contexto de toda a carteira. Existem três principais abordagens gerenciais e uma regulamentar:

1. Abordagens Gerenciais
 - a. Abordagem CreditMetrics®;
 - b. Abordagem KMV®;
 - c. Abordagem CreditRisk+®;
2. Abordagem Regulamentar
 - a. Modelo do Acordo de Capital de Basiléia.

Como este estudo se norteia pela abordagem regulamentar, nos aprofundaremos nesta metodologia. No apêndice B, disponibilizamos um resumo das abordagens gerenciais. Caso o leitor queira obter maiores detalhes dessas abordagens, recomendamos a leitura de [4].

2.2.1 Modelo do Acordo de Capital da Basiléia

Como mencionamos anteriormente foi a partir do Acordo de Capital de Basiléia que surgiu o conceito de Capital Regulamentar. O Novo Acordo de Capital da Basiléia, conhecido também com Basiléia II, foi materializado no documento “International Convergence of Capital Measurements and Capital Standards”, publicado em junho de 2004 pelo Comitê de Basiléia de Supervisão Bancária [1]. Esse mesmo documento, de julho de 1988, dizia em seus primeiros parágrafos pretender:

- Promover a solidez e a estabilidade do sistema bancário internacional, e
- Manter a consistência na aplicação de sua estrutura em diferentes países para diminuir desigualdades competitivas entre bancos internacionais.

O Novo Acordo reitera os mesmos princípios, acrescidos de um terceiro:

- Reforçar a solidez e a estabilidade do sistema bancário internacional;
- Manter consistência na aplicação de sua estrutura em diferentes países para diminuir desigualdades competitivas entre bancos internacionais, e
- Promover a adoção de práticas mais robustas de administração de risco.

O fundamento básico das práticas mais robustas de administração de risco de crédito de Basiléia II está principalmente na diferença do tratamento dos ativos de crédito. Enquanto no Primeiro Acordo de Capital os ativos de crédito são ponderados pelas categorias a que pertencem, aglutinadas em cinco grupos (0%, 10%, 20%, 50% e 100%), o Novo Acordo incentiva a adoção de abordagens avançadas, nas quais o risco individual do titular do instrumento financeiro ou o risco coletivo da modalidade são mensurados pela própria instituição através de modelos internos de “rating”.

A estrutura do acordo deve ser aplicada em base consolidada aos bancos internacionalmente ativos, nos vários países em que estejam instalados. O Banco Central do Brasil provavelmente desenvolverá regulamentação específica para o caso brasileiro.

A mensuração de risco de crédito será feita através de duas metodologias básicas: a padronizada, semelhante à do sistema do primeiro Acordo de Capital e a abordagem de modelos internos, em duas versões diferentes: a fundamental e a avançada:

- Abordagem padronizada;
- Abordagem fundamental de modelos internos de “rating” - (IRB – Foundation);
- Abordagem avançada de modelos internos de “rating” - (IRB – Advanced).

Para desenvolvimento dos modelos internos de “rating”, considera-se inadimplentes devedores com atrasos superiores a 90 dias, ou na ocorrência de elementos indicativos de não cumprimento do pagamento por parte dos tomadores de empréstimos. O risco de crédito é medido através de 4 variáveis, designadas aqui pelos seus acrônimos em inglês:

PD	“Probability of Default”	Probabilidade de inadimplência
LGD	“Loss Given Default”	Perda após inadimplência
EAD	“Exposition at Default”	Exposição à inadimplência
M	“Maturity”	Vencimento ponderado

A modelagem interna implica as três primeiras variáveis, estimadas a partir da experiência histórica da instituição e das evidências empíricas que vier a sistematizar. As definições conceituais do sistema de “rating” devem ser plausíveis e intuitivas. O documento de Basileia II insiste na necessidade de que os modelos quantitativos sejam combinados com considerações julgamentais, subjetivas e pontuais. O sistema de “rating” deve ser documentado por escrito.

Em termos do funcionamento institucional, o sistema de “rating” deve ser utilizado 3 anos antes de ser efetivamente implementado. Precisa ser aprovado pela alta administração, elaborado e acompanhado por unidade independente. Os “ratings” e estimativas internas devem exercer papel essencial na aprovação e administração de crédito.

Os ativos de crédito a terem seus riscos mensurados enquadram-se em cinco categorias. São os créditos concedidos a:

1. Corporações;
2. Governos soberanos;
3. Bancos;
4. Varejo;
5. Ações e debêntures conversíveis (títulos não incluídos entre as operações de tesouraria).

- **Corporações, Governos Soberanos e Bancos (C,S,B)**

Os sistemas internos de “rating” para os clientes destas três categorias deverão ter no mínimo 7 graus adimplentes e um inadimplente, uma vez que corporações e bancos terão PD mínimo de 0,03%.

A LGD será definida de acordo com o tipo de abordagem. No caso da abordagem fundamental, o Acordo propõe a utilização do índice de 45% para dívidas preferenciais e de 75% para dívidas subordinadas. A abordagem avançada utilizará a estimativa interna da instituição financeira (IF).

A EAD, no caso da abordagem fundamental, será definida pela autoridade supervisora (BC), enquanto a abordagem avançada, assim como no caso da LGD, utilizará estimativa interna.

A variável M (vencimento ponderado) seguirá o mesmo esquema da EAD. A tabela seguinte sintetiza as variáveis envolvidas nestas três classes de ativos:

PD (Probabilidade de Default)								LGD			EAD		M	
Rating Interno (número mínimo de graus de classificação)								Fundamental	Avançada		Funda-	Avan-	Funda-	Avanç.
1	2	3	4	5	6	7	Default	Pref.	Subd.	çada	mental	çada	mental	1-5 anos
%*	%	%	%	%	%	%	100%	45%	75%	IF	BC	IF	BC	IF

* Para corporate e bancos: PD mínima de 0,03%

Tabela 2.1 : Variáveis de risco de crédito modelo IRB – Corporações, Governos e Bancos

- **Varejo (V)**

O varejo terá tratamento diferente, pois seu elemento básico não é o cliente classificado pela PD, mas sim a modalidade, que agrupa em um “pool” operações assemelhadas pelas características dos clientes, das garantias e montantes envolvidos. A fórmula é a mesma das três classes anteriores, exceto pela ausência do vencimento ponderado (M), por se tratar de um coletivo de operações.

A probabilidade mínima de inadimplência atribuída a qualquer modalidade é de 0,03%. Ao contrário das três primeiras classes, no Varejo não há diferença de tratamento entre as abordagens fundamental e avançada; tanto numa quanto noutra, a própria instituição financeira estima as três variáveis. A tabela 2.2 busca reproduzir os elementos das abordagens para o varejo:

Abordagens Fundamental e Avançada: PD e LGD		EAD
Por modalidade (“pool” de operações assemelhadas)		
% (IF)*		% (IF)

* PD mínima de 0,03%

Tabela 2.2: Variáveis de risco de crédito modelo IRB – Varejo

O Novo Acordo diferencia três tipos básicos de operações de varejo: as hipotecárias, os créditos rotativos e todas as outras.

- **Ações e Debêntures Conversíveis (A,DC)**

A quinta e última classe de ativo (ações e debêntures conversíveis não incluídas em operações de tesouraria) tem suas abordagens específicas, não identificadas com as abordagens das quatro classes anteriores. Também dividem-se em dois grupos: abordagens de mercado e abordagem PD / LGD. As abordagens de mercado são duas: a ponderação simples, pela qual o título é ponderado a 300%, se for de empresa de capital aberto e a 400%, se for empresa de capital fechado. A abordagem alternativa de mercado utiliza o VaR, e é desenvolvida internamente pelo banco. A abordagem PD / LGD é igual à abordagem fundamental de “rating” interno para a classe de ativos corporativos, apresentada anteriormente.

Abordagem de mercado		Abordagem PD / LGD
Pond. Simples	Modelo interno	= abordagem fundamental para corporate
300%	VaR	

Tabela 2.3 : Abordagem para Ações e Debêntures

Resta agora considerar os ativos fora-de-balanço. Para estes, as abordagens padronizada e fundamental baseadas em “ratings” internos mantêm a sistemática do primeiro Acordo de Capital, pelo qual a instituição utiliza fatores de conversão de crédito para tornar tais ativos equivalentes aos ativos de balanço. Na abordagem avançada baseada em “ratings” internos, os fatores de conversão são calculados pelo próprio banco.

Após as quatro variáveis estudadas acima, terem sido mensuradas e validadas pelo órgão supervisor local, as instituições estarão aptas a utilizar o modelo interno de “rating”, para provisionamento e alocação de capital da carteira de crédito.

O provisionamento será feito pela perda esperada, definida em Basiléia II como o produto das variáveis PD, EAD e LGD.

Para alocação de capital a medida a ser utilizada é o capital regulamentar, definido pelas fórmulas do modelo do Acordo de Basiléia. Essas fórmulas estão baseadas no modelo de 1-fator de Vasicek[5], uma variante do modelo de Merton[6], em que os “scores” de “default”, determinantes do ponto de inadimplência, são obtidos por uma única componente sistêmica e uma componente idiossincrática.

O impacto da componente sistêmica no “score” de “default” é determinado por sua vez, por um coeficiente de correlação linear (ρ), o qual na implementação de Basiléia, é dado através de expressões paramétricas descritas para cada classe de ativo, nas tabelas abaixo.

Segmento (Abordagem IRB Avançada)	Sub-segmento	K (Requisito de Capital)	b (Ajuste de Vencimento)	(ρ) (Correlação)	M (Vencimento)
Corporativo, Soberano, Bancário (Inclui empresas e bancos brasileiros e estrangeiros sediados no País, e governo brasileiro)	Geral	{C,S,B} K	$b = (0,11852 - 0,0547 \times \ln(PD))^2$	{C,S,B}	Ajuste de Vencimento
	Middle	{C,S,B} K	$b = (0,11852 - 0,0547 \times \ln(PD))^2$	{SME}	
	Imóveis Especiais	{C,S,B} K	$b = (0,11852 - 0,0547 \times \ln(PD))^2$	{HVCRE}	Ajuste de Vencimento
Varejo	Geral	{V} K	-	{Vg}	
	Rotativo	{V} K	-	0,04	
	Hipotecário	{V} K	-	0,15	

Tabela 2.4 : Fórmulas para cálculo de Capital Regulamentar segundo Basiléia II

K (Requisito de Capital)	
{C,S,B} K	$k = LGD \times \left[N \left(\frac{N^{-1}(PD) + N^{-1}(0,9999)\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \right) - PD \times LGD \right] \times \left(\frac{1}{1 - 1,5 \times b(PD)} \right) \times (1 + (M - 2,5) \times b(PD))$
{V} K	$k = LGD \times \left[N \left(\frac{N^{-1}(PD) + N^{-1}(0,9999)\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \right) - PD \times LGD \right]$
(ρ) (Correlação)	
{C,S,B}	$\rho = 0,12 \times \frac{(1 - e^{-50PD})}{(1 - e^{-50})} + 0,24 \times \left[1 - \frac{(1 - e^{-50PD})}{(1 - e^{-50})} \right]$
{SME}	$\rho = 0,12 \times \frac{(1 - e^{-50PD})}{(1 - e^{-50})} + 0,24 \times \left[1 - \frac{(1 - e^{-50PD})}{(1 - e^{-50})} \right] - 0,04 \times \left[1 - \frac{(S - 5)}{45} \right]$
{HVCRE}	$\rho = 0,12 \times \frac{(1 - e^{-50PD})}{(1 - e^{-50})} + 0,30 \times \left[1 - \frac{(1 - e^{-50PD})}{(1 - e^{-50})} \right]$
{Vg}	$\rho = 0,03 \times \frac{(1 - e^{-35PD})}{(1 - e^{-35})} + 0,16 \times \left[1 - \frac{(1 - e^{-35PD})}{(1 - e^{-35})} \right]$

Tabela 2.5 : Complemento das fórmulas para cálculo de Capital Regulamentar segundo Basileia II

2.3 Administração de Risco da Carteira de Crédito

O gerenciamento de crédito é feito, na maioria das vezes, sob a óptica individual, ou de forma sistemática, restringindo-se, porém, às questões de concentração e qualidade da carteira. Além da mensuração e monitoração de risco, é importante para os administradores compreenderem as fontes de risco das carteiras e como essas podem ser efetivamente reestruturadas para otimizar a relação risco/retorno.

Para risco já temos as definições. Quanto ao retorno, existem duas conceituações a serem aplicadas:

1. Retorno baseado em conceitos contábeis: é a rentabilidade que se espera obter, líquida de impostos, custos e despesas.
2. Retorno baseado em conceitos financeiros: é a rentabilidade que se espera obter, através do fluxo de caixa descontado da operação, incluindo inicialmente o desembolso ao devedor e eventuais taxas cobradas, seguido por todas as entradas e saídas de caixa incidentes durante o prazo da operação, até sua liquidação integral. O fluxo deve incluir todas as parcelas da operação, custos diretos e indiretos, descontados a uma taxa básica de juros para chegar ao valor presente da operação.

O intercâmbio risco/retorno leva-nos naturalmente à nossa última definição: a fronteira eficiente. Esta consiste no retorno máximo obtido para um dado nível de risco, ou o risco mínimo incorrido para se obter um determinado retorno[7].

Com essas definições e buscando a boa prática, é importante para termos uma administração eficaz e eficiente do risco de crédito, analisá-lo entendendo como as operações poderiam afetá-lo em termos de concentrações (sob a visão de região geográfica, setor de atividade, moedas, prazos, etc), quais as correlações existentes e como isso tudo implicaria no resultado do banco.

Para promover melhor o nosso entendimento, Mausser e Rosen [8] propõem analisar a administração do risco em três níveis:

1. nível estratégico: o administrador do risco pode querer reestruturar as concentrações em várias classes, como de produtos de crédito, de setores atividades , de segmentos de negócios e de regiões geográficas.

2. nível secundário ou tático: o administrador poderia estar interessado em alocação de capital de risco para cada devedor ou tipo de devedor.
3. nível operacional: o administrador pode escolher quais posições tomar em relação aos instrumentos financeiros disponíveis para “hedgear” otimamente o risco da carteira ou para obter um melhor “trade-off” de risco/retorno.

Existem medidas que auxiliam o administrador a tomar decisões na alocação de recursos, tais como:

1. ROE e ROA, respectivamente, “return on equity” e “return on assets” (retorno sobre patrimônio e retorno sobre ativos)[9]. Essas são definidas por linhas de negócios, mas não abrangem ajustes ao risco de crédito.
2. RAROC (Risk-Adjusted Return On Capital), que pode ser traduzido por “retorno sobre o capital ajustado ao risco”. Foi introduzido pelo Bankers Trust no final da década de 1970. Tal como o define, “o RAROC aloca uma carga de capital a uma transação ou linha de negócios a um valor equivalente à máxima Perda Esperada (a um nível de confiança de 99%, por exemplo), por um ano, com base em dados após impostos.”[10]

Embora as medidas acima sugerem sua adoção na gestão de risco de crédito, o uso dessas medidas é muito mais limitado do que o esperado, uma vez que elas não trazem, em sua essência, o papel da agregação do risco em uma carteira. Uma solução robusta para a administração de risco de crédito, deve se concentrar na otimização do risco agregado.

Enquanto muito esforço acadêmico e administrativo tem sido devotado ao desenvolvimento de metodologias para medir risco de carteira de crédito, o desenvolvimento de ferramentas para administrar e, mais especificamente, otimizar risco de crédito é significativamente menor.

Esse fato é ainda mais crítico no cenário brasileiro, dado que a eficácia dos modelos de mensuração de risco é questionável, embora não tenhamos evidência de tal fato. Douat, comenta que “o atual modelo de mensuração de risco não consegue antecipar-se aos fluxos negativos da economia em termos da inadimplência nas carteiras de empréstimos”[11].

Em busca do objetivo deste trabalho, resta-nos depois dessa explanação, explorarmos modelos robustos que permitam ao administrador diversificar sua carteira de crédito, otimizando a relação risco/retorno e eliminando concentrações, a fim de gerar valor ao acionista.

Capítulo 3

Modelos de Otimização para Administração do Risco de Crédito

Para desenvolvermos modelos de otimização voltados à administração do risco de crédito, primeiramente devemos considerar medidas de risco que atendam critérios de ordem de relevância e de tratabilidade. Mausser e Rosen [12] explanam que medidas relevantes são “as que capturam propriedades fundamentais da distribuição de perda”, como, por exemplo, a Perda Esperada, o VaR e o Dano Esperado, “enquanto as medidas tratáveis podem ser otimizadas usando métodos eficientes de computação tais como programação linear.” Neste capítulo, abordaremos técnicas que atendem tais critérios, tanto em ordem de relevância como de tratabilidade.

O que norteia esta dissertação é a resolução de um dos principais problemas de administração de riscos de crédito: a otimização da relação risco/retorno da carteira de crédito. Além disso, procuramos meios de eliminar efeitos de concentrações.

Mausser e Rosen [12] propõem a seguinte metodologia para resolução desse problema:

minimizar : risco
sujeito a: retorno esperado $\geq R$
restrições de negociação

“As variáveis no problema acima são os tamanhos, ou pesos, das posições na carteira. Uma vez que não é possível entrar em posições de tamanho arbitrário, talvez devido a liquidez de mercado e/ou limitações de orçamento, as restrições de negociação garantem que os tamanhos de posição ótima são de fato razoáveis. Portanto, o problema reestrutura uma carteira, sujeita a restrições de negociação especificadas, de modo a obter um retorno esperado de no mínimo R ao

mesmo tempo em que incorre no menor montante de risco. Note que, como alternativa ao problema, também é possível maximizar o retorno esperado sujeito a não exceder um nível especificado de risco. Para propósitos de otimização, é geralmente preferível usar uma formulação na qual as não-linearidades, se as houver, são contidas na função objetivo.”

É importante destacar que tanto a medida escolhida para risco quanto a medida de retorno, devem sofrer ajustes, como por exemplo, o de maturidade da carteira de crédito, para que correspondam a mesma base evitando assim, vieses nos resultados.

Estudamos modelos que resolvem o problema em destaque e desenvolvemos novos modelos, baseados nos conceitos do Modelo do Novo Acordo de Basileia, com intuito de apoiar o desenvolvimento profissional e acadêmico nessa área de conhecimento. Esses modelos serão apresentados nos tópicos, a seguir.

3.1 Modelos de Otimização para uso Gerencial

Como mencionado no capítulo anterior, existem poucos trabalhos relacionados à otimização do risco de crédito. Seguem abaixo alguns trabalhos que discutem esse problema.

3.1.1 Otimização da relação Risco/Retorno através do Dano Esperado

Neste trabalho, Mausser e Rosen [8] desenvolvem um modelo baseado em simulação de cenários, tendo como objetivo inicial minimizar o risco de crédito, utilizando como medida o conceito de Dano Esperado. Para tanto, eles definem dano “como a expectativa de perdas que excedam algum limiar fixo K ” num dado ponto da distribuição de perdas da carteira de crédito.

Vale destacar que a medida de risco escolhida é relevante, pois pode efetivamente capturar tanto a média quanto à cauda da distribuição de perdas da carteira de crédito, sem necessidade de nenhuma premissa relativa à distribuição.

Naturalmente existe a extensão do problema para otimização do risco/retorno, sendo a solução definida pela minimização do dano esperado, de modo que se obtenha um certo nível de retorno.

Resumidamente, para resolução do problema primeiramente é utilizada a abordagem CreditMetrics com intuito de obter as probabilidades de inadimplência de cada “pool” de ativos da carteira de crédito, neste caso, as exposições dos próprios devedores. Em seguida, são gerados vários cenários, através de simulação de Monte Carlo, permitindo assim a construção da distribuição de perdas desse portfólio. Um limiar fixo, K , é dimensionado pelo administrador.

O modelo, a partir dos cenários que excedem o limiar K , ajusta simultaneamente a posição de cada “pool” para minimizar o risco da carteira, mantendo um dado retorno, sujeito a uma série de restrições, tais como orçamentárias ou de limites sobre as ponderações das exposições.

A formulação matemática desse problema pode ser consultada na referência citada acima, na seção “Anexo”.

Para resolução da otimização do risco/retorno neste caso, é utilizado Programação Linear e Programação Linear Paramétrica, técnicas que abordaremos no próximo capítulo.

3.1.2 Otimização da relação Risco/Retorno através do CvaR

A partir do trabalho de Uryasev e Rockafellar [13], os quais desenvolveram uma nova formulação baseada em Programação Linear, para o problema de minimização do risco de uma carteira de crédito, através da medida do VaR condicional, Mausser e Rosen [12] estendem o problema para otimização da relação risco/retorno.

Basicamente, a modificação feita em relação ao trabalho apresentado anteriormente é a medida para se minimizar risco. Aqui se minimiza efetivamente a expectativa condicional de perdas que atinja ou exceda a uma Perda Máxima. Nas demais variáveis, as formas de resolução

são as mesmas já demonstradas no trabalho de otimização da relação risco/retorno através do Dano Esperado.

Na seção “Anexo”, do trabalho de Mausser e Rosen [12], também está disponível a formulação matemática desse problema, para consulta.

3.2 Modelos de Otimização baseados nos conceitos de Basiléia II

A partir dos conceitos do modelo de Basiléia II, identificamos variáveis de risco de crédito, as quais pudessem servir de parâmetro para o administrador na tomada de decisões. Assim, desenvolvemos modelos que baseados nessas variáveis, otimizam a relação risco/retorno de uma carteira de crédito. Tais modelos são considerados como base de estudo desta dissertação.

Definimos como variáveis relevantes para risco de crédito, as medidas Perda Esperada, Capital Regulamentar e Perda Máxima, sendo essa última o somatório das duas imediatamente anteriores. Além disso, propomos a eliminação de concentrações da carteira, utilizando como variável o índice de Herfindahl[14], uma medida tão maior quanto o nível de concentração.

A metodologia utilizada para otimização da relação risco/retorno está baseada nos trabalhos de Mausser e Rosen [8][12], descritas no início desse capítulo.

Neste tópico, apresentamos os inputs do modelo, tais como restrições e objetivos e as suas formulações matemáticas.

3.2.1 Objetivos

Uma vez conhecidas as variáveis que serão inputs às funções objetivos, apresentamos os modelos de otimização para administração de risco de crédito, em grau progressivo de sofisticação.

- **Otimização do risco/retorno baseado na Perda Esperada**

O modelo minimiza a Perda Esperada para um “pool” de ativos de uma carteira de crédito, sob penalizações de restrições orçamentárias ou de limites de atuação. A minimização da Perda Esperada é relevante e de suma importância numa instituição financeira, uma vez que essa é utilizada para efeitos de aprovisionamento da carteira de crédito impactando diretamente em despesas sobre o patrimônio líquido do Banco. Além disso, sugerimos que um determinado nível de retorno seja mantido, a fim de garantirmos a otimização do risco/retorno.

- **Otimização do risco/retorno baseado no Capital Regulamentar**

Semelhante ao modelo acima, minimizamos a utilização de Capital Regulamentar para um “pool” de ativos de crédito, possibilitando a liberação desse capital e, conseqüentemente, um maior grau de alavancagem à carteira de crédito. Para que se estabeleça a relação otimizada do risco/retorno, também sugerimos que no processo de minimização seja mantido um certo retorno.

- **Otimização do risco/retorno baseado na Perda Máxima**

Neste modelo, aplicamos a minimização conjunta, somando-se as porções em risco referentes a Perdas Esperadas e ao Capital Regulamentar. O resultado a ser obtido é a liberação de despesas com o aprovisionamento ocorrido através da Perda Esperada, mais a liberação de reservas de Capital feita através do Capital Regulamentar, mantendo-se um determinado nível de retorno.

- **Otimização do risco/retorno com Penalização de Concentração**

O modelo utiliza a mesma estrutura dos modelos acima mencionados, porém pretende obter uma carteira de crédito menos concentrada. Para tanto, minimizamos a porção em risco mais um termo de penalização de concentração e sugerimos manter um determinado nível de retorno. A variável de risco a ser escolhida para minimização depende da posição julgada apropriada pelo administrador, para que se estabeleça o nível ótimo de concentração. O resultado esperado neste caso, é a otimização da relação risco/retorno, mais a pulverização das aplicações da carteira de crédito do Banco.

3.2.2 Restrições

Como vimos no decorrer desse capítulo, existem restrições orçamentárias, de limites de atuação e de retorno. Embora nos fixemos em algumas restrições, construímos os modelos de forma a garantir a entrada totalmente flexível dessas.

As restrições que veremos a seguir são aplicáveis a todos os modelos desenvolvidos.

- **Restrições Composição da Carteira**

Neste caso, é sugerida uma restrição que garanta o valor financeiro inicial da carteira de crédito, ou seja, o administrador poderá reestruturar o portfólio sem incrementá-lo ou diminuí-lo em seu valor financeiro total.

- **Restrições de Limites**

Restrições de limites são bastante variadas e dependem muito de fatores relacionados à gestão interna da instituição financeira, bem como à situação macroeconômica. Como exemplo, podemos citar:

1. **Limites Individuais:** O administrador poderá escolher um limite de crescimento, tanto para cima como para baixo, para cada “pool” de ativos de crédito.
2. **Limites Regionais, Setor de Atividade:** Restrições de grande utilidade às instituições que possuem dificuldades em re-alocar a carteira de crédito para determinadas regiões e/ou setores de atividades. Sugerimos para esse caso, a atribuição de limites que reflitam a realidade de crescimento para dada região e/ou setor de atividade .
3. **Limites Perfil de Cliente:** Como vimos, existem classes diferenciadas de clientes, para os quais são atribuídas “ratings”. Clientes que possuem menos risco são altamente concorridos no mercado, enquanto aqueles que possuem mais riscos “sobram”. Intuitivamente, espera-se que um modelo de minimização do risco aloque as exposições em clientes de melhores “rating”, algo em muitas situações, irreal. É

importante a análise por parte dos administradores, da capacidade da instituição em sair de exposições mais arriscadas e entrar em exposições menos arriscadas. Após essa análise, sugerimos a inclusão de uma restrição de Perfil de Cliente, para a obtenção de valores reestruturados que reflitam a realidade do Banco.

4. Limites de Concentrações: Outra restrição de limites relevante é a de concentração, na qual o administrador de risco deve, junto aos comitês executivos, estabelecer políticas de concentração e limitar a exposição, ou “pool” de exposições, a um dado percentual do total de exposições da carteira de crédito.

- **Restrições Retorno**

A restrição de retorno é a que garante a otimização da relação risco/retorno. Através dela podemos especificar um determinado nível de retorno.

3.2.3 Formulação Matemática

Nos próximos parágrafos, formulamos os modelos de otimização, descritos nos subtópicos 3.2.1 e 3.2.2. Primeiramente apresentamos as restrições que são comuns a todos os modelos e em seguida provemos as formulações individuais.

Todas as formulações e restrições são baseadas nas notações sumarizadas na Tabela 3.1. Assumimos que há n “pools” de ativos de crédito indexados por i e m restrições estratégicas indexadas por α .

Variáveis e valores	Descrição	Elemento
e	Valor da exposição de um “pool” de ativos de crédito	e_i
x	Variáveis dos “pools” no problema de otimização	x_i
U	Limite máximo para cada “pool” de ativos da carteira de crédito dentro de um conjunto estratégico	U_α
L	Limite mínimo para cada “pool” da carteira de crédito dentro de um conjunto estratégico	L_α
F	Fator que limita a exposição de um determinado “pool” de crédito	f_α
r	Retorno Inicial	r_i
R	Retorno Esperado para um determinado conjunto estratégico	R_α
Pe	Perda Esperada da Carteira de crédito	pe_i
Cr	Capital Regulamentar da Carteira de crédito. Equivale a variável K de Basiléia II.	cr_i
Pm	Perda Máxima. Igual ao somatório da Perda Esperada mais Capital Regulamentar	pm_i

Tabela 3.1: Variáveis e parâmetros dos modelos

A idéia é trabalhar as restrições de maneira mais flexível. Para isso foram criados conjuntos estratégicos θ_α , em número de k deles:

$$\theta_{\alpha} = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_{m_\alpha}\}$$

Abaixo, as restrições de composição da carteira, de limites e de retorno.

$$\sum_{i=1}^n e_i x_i = \sum_{i=1}^n e_i \quad 3.2.3a$$

$$\left(\sum_{i \in \theta_\alpha} e_i \right) L_\alpha \leq \left(\sum_{i \in \theta_\alpha} e_i x_i \right) \leq \left(\sum_{i \in \theta_\alpha} e_i \right) U_\alpha \quad 3.2.3b$$

$$\left(\sum_{i \in \theta_\alpha} e_i x_i \right) \leq f_\alpha \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) \quad 3.2.3c$$

$$\sum_{i \in \theta_\alpha} e_i (r_i - R_\alpha) x_i \geq 0 \quad 3.2.3d$$

$$x_i \geq 0 \quad 3.2.3e$$

A equação da restrição de composição da carteira 3.2.3a, garante que os valores da carteira original e o da reestruturada serão iguais. A equação 3.2.3b trata os limites de forma flexível, compreendidos nos conjuntos estratégicos. A equação 3.2.3c limita, através de um fator, quanto um determinado “pool” de ativos de crédito pode representar do total da carteira de crédito. A equação 3.2.3d representa um retorno esperado de no mínimo R_α que poderia ser definido, por exemplo, para o total da carteira de crédito ou para um determinada linha de produtos.

Finalmente, a equação 3.2.3e estipula que a variável de risco a ser minimizada deve ser não negativa.

- **Modelo de Otimização do risco/retorno baseado na Perda Esperada**

$$\min \sum_{i=1}^n p e_i x_i \quad 3.2.3f$$

A função objetivo, equação 3.2.3f, minimiza a soma das Perdas Esperadas da carteira de crédito.

- **Modelo de Otimização do risco/retorno baseado no Capital Regulamentar**

$$\min \sum_{i=1}^n cr_i x_i \quad 3.2.3g$$

A função objetivo, equação 3.2.3g, minimiza a soma do Capital Regulamentar da carteira de crédito.

- **Modelo de Otimização do risco/retorno baseado na Perda Máxima**

$$\min \sum_{i=1}^n pm_i x_i \quad 3.2.3h$$

A função objetivo, equação 3.2.3h, minimiza a soma das Perdas Máximas da Carteira de crédito.

- **Modelo de Otimização do risco/retorno baseado na Perda Máxima com Penalização de Concentração**

$$\min \sum_{i=1}^n pm_i x_i + \left(\frac{\sum_{i=1}^n e_i^2 x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n e_i x_i \right)^2} \right) \varepsilon \quad 3.2.3i$$

A função objetivo, equação 3.2.3i, minimiza as Perdas Máximas, penalizando as concentrações da carteira de crédito, através do índice de Herfindahl [14].

Como a parte quadrática da função objetivo, dada pelo índice de concentração, domina a parte linear, criamos uma variável ε para equilibrar as minimizações das porções de risco e concentração.

No próximo capítulo explicamos detalhadamente as notações matemáticas expostas neste tópico.

Capítulo 4

Técnicas

Uma vez definido os problemas de otimização, seus objetivos e suas restrições com suas respectivas formulações, precisamos estudar como implementá-los de maneira eficiente. Para tanto, apresentamos neste capítulo, abordagens técnicas e conceitos básicos necessários para definição das resoluções dos problemas base para esta dissertação.

Para apresentação dos tópicos relacionados à Programação Matemática, pressupomos que o leitor possua conhecimento de Álgebra Linear. Nessa direção recomendamos a leitura de [15].

4.1 Complexidade Computacional

Para que possamos resolver um problema de otimização devemos primeiramente, escolher um método computacional que solucione o proposto de forma eficiente. Ocorre que, para determinados problemas, dada sua complexidade, nem sempre há algoritmos eficientes que os resolvam.

Para melhor compreendermos a complexidade de um problema, consideremos a tabela 4.1 que demonstra o tempo computacional necessário para execução de funções de tempo polinomial e exponencial. Suponhamos que o computador utilizado para gerar a tabela abaixo, executa uma instrução em (10^{-6}) segundos.

Funções de Complexidade	Tamanho da Entrada n					
	10	20	30	40	50	60
n	0,00001 Segundos	0,00002 Segundos	0,00003 Segundos	0,00004 Segundos	0,00005 Segundos	0,00006 Segundos
n^2	0,0001 Segundos	0,0004 Segundos	0,0009 Segundos	0,0016 Segundos	0,0025 Segundos	0,0036 Segundos
n^3	0,001 Segundos	0,008 Segundos	0,027 Segundos	0,064 Segundos	0,125 Segundos	0,216 Segundos
n^5	0,1 Segundos	3,2 Segundos	24,3 Segundos	1,7 Minutos	5,2 Minutos	13,0 Minutos
2^n	0,001 Segundos	1,0 Segundos	17,9 Minutos	12,7 Dias	35,7 Anos	366 Séculos
3^n	0,59 Segundos	58 Minutos	6,5 Anos	3855 Séculos	2×10^8 Séculos	$1,3 \times 10^{13}$ Séculos

Tabela 4.1: Comparação de tempo de execução

Podemos considerar um algoritmo eficiente, quando a sua complexidade for polinomial em relação à sua entrada. Partindo dessa definição, dizemos que um problema é tratável se apresenta solução polinomial e intratável se nenhum algoritmo polinomial puder resolvê-lo.

Através da teoria de NP-Compleitude [16] [17] [18], conseguimos visualizar maneiras de identificar a complexidade computacional de um determinado problema. A idéia dessa teoria é repartir os problemas em classes e estudá-los de acordo com a sua complexidade. Esse estudo parte de problemas de decisão, ou seja, aqueles cujas respostas são “Sim” ou “Não” e que apesar de serem simples se relacionam com problemas de otimização.

Podemos resumir essa classificação, como:

- **Classe P (“Deterministic Polynomial Time”)**
Conjunto de todos os problemas de decisão que são resolvíveis por um algoritmo determinístico polinomial.
- **Classe NP (“Non Deterministic Polynomial Time”)**
Conjunto de problemas resolvíveis por um algoritmo não-determinístico polinomial. A classe NP também pode ser definida como a classe de problemas, para

os quais há um certificado (quando a resposta é “Sim”) de tamanho polinomial e que pode ser verificado em tempos polinomiais.

- **Classe NP-Completo (“Non Deterministic Polynomial Time Complete”)**

Consiste nos problemas de “maior dificuldade” entre todos os problemas de NP. Os problemas pertencentes à classe NP-Completo são todos equivalentes entre si. Um problema y pertence à classe NP-Completo se as seguintes condições forem satisfeitas.

- $y \in \text{NP}$,
- todo problema de decisão $y' \in \text{NP}$ se é polinomialmente redutível a y [16].

- **NP-Difícil (“NP-Hard”)**

- São problemas tão difíceis como os problemas da classe NP, mas não pertencem necessariamente a essa classe. Um problema y pertence à classe NP-Difícil se um problema da classe NP-Completo y' é polinomialmente redutível a y [16], não importando se y é ou não NP.

Há questionamentos sobre a determinação da igualdade P e NP, ou seja, se existe ou não um algoritmo polinomial que resolva os problemas da classe NP. A grande maioria dos pesquisadores acredita que há diferenças entre P e NP e que não existem algoritmos de tempos polinomiais para problemas da classe NP-Difícil.

Graficamente, as classes de problemas poderiam possivelmente, ser esquematizadas da seguinte maneira:

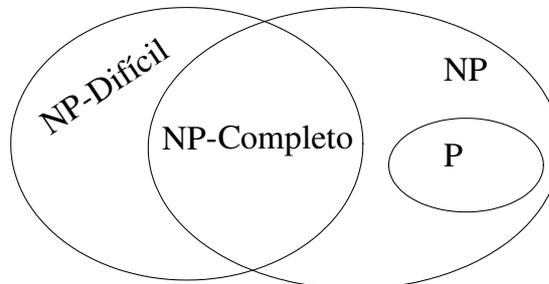


Figura 4.1: Possível disposição das Classes de problemas de NP-Completo

Como vimos no início do capítulo 3, procuramos identificar e trabalhar medidas de risco que nos levassem a problemas de otimização tratáveis. É importante mencionar que os modelos os quais desenvolvemos são solucionados em tempos polinomiais — métodos rápidos e eficientes — que atendem o critério de tratabilidade.

4.2 Programação Linear

Modelo básico de programação matemática [19]. Tem como principal objetivo encontrar a melhor solução para problemas que tenham seus modelos representados por expressões lineares.

A programação linear [20] consiste na minimização ou maximização de uma função linear sobre um conjunto poliédrico, sujeito a um sistema linear de desigualdades ou igualdades, que são as restrições do modelo. Estas determinam uma região definida como o conjunto das soluções viáveis ou admissíveis.

Atualmente, os métodos primais-duais são considerados os mais eficientes. Nesta seção abordaremos dois tipos de métodos de pontos interiores, a saber:

a. Método Primal-Dual

A forma utilizada para desenvolver esse método de pontos interiores consiste na aplicação do método de Newton às condições de otimalidade no problema dual do PPL original. A convergência do método a uma solução é obtida partindo-se de um ponto estritamente positivo, sem nunca permitir que as variáveis de tais pontos se tornem negativas, daí o adjetivo interior do método.

b. Método Preditor-Corretor

Método desenvolvido por Mehrotra [24] no qual dois sistemas lineares determinam as direções. O primeiro sistema linear determina a direção a fim. Sua solução é “input” de um segundo sistema linear com as direções de correção e centragem.

Para a resolução dos problemas de otimização relacionados à obtenção do risco/retorno através das variáveis de Perda Esperada, Capital Regulamentar e Perda Máxima utilizamos a abordagem Programação Linear.

4.3 Programação Linear Paramétrica

Em aplicações práticas de programação linear, freqüentemente ocorrem situações em que os coeficientes da função objetivo, ou de uma determinada restrição, não são conhecidos no início da execução do problema[25]. A Programação Linear Paramétrica estuda o comportamento do modelo de Programação Linear, face às alterações contínuas que ocorrem nessas situações.

Para que isso ocorra, os parâmetros a serem estudados são expressos em função de uma variável independente “ λ ”, por exemplo:

- para um coeficiente “ c_j ” da função objetivo considera-se a reta definida por $\bar{c}_j = c_j + \lambda t$ (onde c_j é uma ordenada na origem, “ λ ” é uma variável independente e “ t ” é o declive).

- Para um membro que componha as restrições “ a_i ” considera-se $\bar{a}_i = a_i + \lambda t$ onde, a “ t ” se atribui um valor prévio qualquer (estudo de um único parâmetro) ou um valor calculado (estudo de mais de um parâmetro simultâneo).

Podemos utilizar a Programação Linear Paramétrica se quisermos executar várias instâncias dos problemas de otimização da relação risco/retorno, a fim de obter pontos de retornos, os quais são desconhecidos no momento de execução.

4.4 Programação Quadrática

A Programação Quadrática [26][27] representa uma classe especial da Programação Não Linear, em que a função objetivo é quadrática e as restrições são lineares.

De forma geral um problema de Programação Quadrática pode ser formulado, como:

Encontrar $X =$

$$\text{que optimize } f(X) = \frac{1}{2} X^T A X + B^T X$$

sujeito a,

$$C X \leq b$$

$$X \geq 0$$

onde $A(m, n)$, $B(m, 1)$, $C(m, n)$, $b(m, 1)$, são matrizes e vetores com entradas constantes.

Nocedal e Wright [28] comentam que “um problema de Programação Quadrática pode ser sempre resolvido através de um número finito de iterações, mas o esforço requerido para encontrar uma solução depende fortemente das características da função objetivo e do número de restrições de desigualdades.”

Se a matriz Hessiana A for positiva semidefinida, dizemos que temos um problema de Programação Quadrática convexo. Nesse caso o problema tem solução com grau de dificuldade semelhante à de um problema linear. Quando a matriz A for indefinida, temos um Problema de Programação Quadrática não convexo, classificado como NP-Difícil. Este, como vimos no início deste capítulo, é considerado um problema com alto grau de dificuldade de resolução.

Empregamos Programação Quadrática no problema de otimização do risco/retorno, baseado na Perda Máxima com penalização de concentração. Neste caso, temos um problema de Programação Quadrática convexo, podendo ser resolvido com grau de dificuldade de um problema linear, permitindo assim, atingirmos o critério de tratabilidade proposto para modelos de otimização na administração do risco de crédito.

Capítulo 5

Implementação dos Modelos

A fim de demonstrarmos as utilidades dos modelos desenvolvidos e apresentados no capítulo 3, implementamos os problemas de otimização da relação risco/retorno baseados na Perda Máxima, sem e com a penalização da concentração.

Nos tópicos a seguir, explanamos sobre o estudo de caso realizado, além de darmos detalhes de todo o processo de implementação, incluindo algoritmos e ferramentas utilizadas.

5.1 Estudo de Caso

A aplicabilidade desses modelos é ilustrada através de um estudo de caso, partindo de uma carteira de crédito construída empiricamente, de forma a refletir o nível estratégico de administração de risco. Para tanto, balanceamos os pesos das exposições, do risco e retorno da carteira, de modo que evitássemos vieses nos resultados. Como exemplo desse balanceamento, podemos citar a condição de quanto maior o risco, maior o retorno e vice-versa.

A carteira de crédito e as restrições criadas para testes foram baseadas no mercado brasileiro, abrangendo empréstimos para grandes empresas.

Os pressupostos para aplicação desse estudo são de que as instituições financeiras possuam os modelos IRB, preconizados por Basileia II, devidamente homologados pelo Banco Central local.

Para facilitar a exposição, optamos em trabalhar o nível estratégico de administração de risco. No entanto, os modelos apresentados podem ser aplicados a qualquer nível.

Nos próximos parágrafos, examinaremos os “inputs” e as restrições utilizadas neste estudo de caso.

- **Dados de Entrada**

Criamos “pools” de ativos de créditos consolidados por região, ramo de atividade, modalidade de produto, perfil de cliente e banda de exposição, nessa ordem. Essa consolidação facilita a visão estratégica do portfólio, provê informações precisas a respeito de cada pool e dá flexibilidade ao administrador de reformular suas políticas. As tabelas, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 apresentam as visões detalhadas de cada variável mencionada para consolidação.

Região	Descrição
01	Região Norte
02	Região Nordeste
03	Região Sudeste
04	Região Sul
05	Região Centro-Oeste

Tabela 5.1: Descrição da variável Região

Ramo de Atividade	Descrição
02	Comércio
03	Financeiros
04	Agricultura
05	Serviços
09	Indústria

Tabela 5.2: Descrição da variável Ramo de Atividade

Modalidade de Produto de crédito	Descrição
17	Capital de Giro
21 e 54	Comprar e Vender
22	Conta Garantida
26	Descontos

Tabela 5.3: Descrição da variável Modalidade de Produto

Perfil de Cliente – “Rating”	Descrição
01	AA
02	A
03	BB
04	B
05	CC

Tabela 5.4: Descrição da variável Perfil de cliente

Os “ratings” da tabela acima correspondem à classificação dada pela agência de rating, Standard & Poor’s [29]. Estes estão classificados em grau de risco dos melhores (01) para os piores (05).

Banda de Exposição	Descrição
07	Exposições entre 100 e 500 mil reais
08	Exposições entre 500 mil e 1 milhão de reais
09	Exposições entre 1 e 5 milhões de reais
10	Exposições acima de 5 milhões de reais

Tabela 5.5: Descrição da variável Banda de Exposição

A carteira possui em seu total 115 “pools” de ativos de crédito. Todos os “pools” são créditos ativos, livres de “default”. A tabela 5.6 demonstra a disposição da carteira.

Carteira crédito	Exposição *	Perda Esperada	Capital Regulamentar	Perda Máxima	Retorno Esperado	Índice de Herfindahl
Original	3.156	0,55%	6,37%	6,92%	9,28%	0,086876

* Em milhões de reais

Tabela 5.6: Descrição da carteira de crédito Original

- **Restrições**

Trabalhamos com restrições de composição da carteira, limites e retorno.

- **Restrições de Composição de Carteira**

Aplicamos a restrição de modo que a carteira original tivesse o mesmo tamanho (exposição) da carteira otimizada.

- **Restrições de limites**

Primeiramente definimos uma restrição de limite individual, na qual cada “pool” de ativos de crédito não pudesse crescer ou diminuir 25% de sua exposição original.

Os “pools” em que o cliente possuísse o melhor perfil (AA) não poderiam crescer mais que 15% de suas exposições originais. Em contrapartida, clientes com pior perfil (CC) não poderiam diminuir mais que 10% de suas exposições originais.

Definimos também, limites de crescimento para região norte e para o produto capital de giro. Para essas visões, o crescimento deveria ser no máximo de 10% e 15%, respectivamente.

Finalmente, quanto a limites macro de concentração, estabelecemos que nenhum “pool” de ativos de crédito poderia ter mais que 27,5% do total do portfólio.

- **Restrições de Retorno**

Definimos restrições variadas para retorno, a fim de obtermos vários resultados.

5.2 Visão Geral do Processo

Conforme esquema da figura 5.1, podemos observar o fluxo macro utilizado na implementação dos modelos.

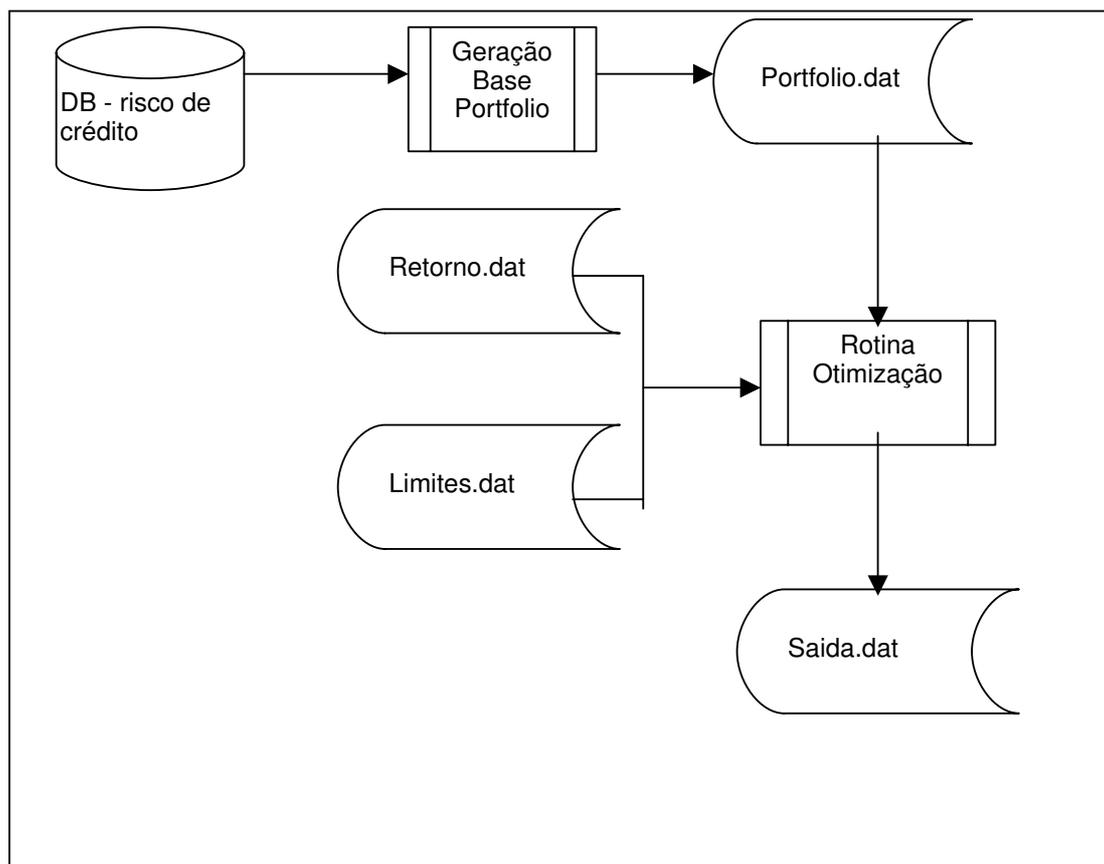


Figura 5.1 : Fluxo macro do processo de otimização

A partir de uma base analítica de uma carteira de crédito (DB – risco de crédito), utilizamos a ferramenta SPSS[30] para construção da carteira consolidada (Portfólio.dat), segundo visão mencionada no tópico anterior. Importa saber que essa ferramenta permite a realização de cálculos complexos, como por exemplo, o do capital regulamentar, segundo a formulação de Basiléia II.

As informações dos arquivos Retorno.dat e Limites.dat são as restrições estratégicas fornecidas pelo administrador de risco.

Em posse dos dados de entrada e restrições, executamos a rotina de otimização responsável por re-estruturar a carteira e gerar o arquivo Saída.dat. Essa rotina foi desenvolvida em linguagem C e o pacote de otimização utilizado para os dois modelos foi o XPRESS-MP[31]. Este possui algoritmos de resolução, baseados nos métodos de Pontos Interiores e Simplex Primal e Dual.

No próximo tópico, detalhamos a rotina de otimização para cada modelo implementado.

5.3 Detalhamento dos Algoritmos

Na implementação das rotinas de otimização, usamos Programação Linear para o problema de otimização do risco/retorno baseado na Perda Máxima, sem penalização da concentração e Programação Quadrática para otimização do risco/retorno baseado na Perda Máxima, com penalização de concentração. Abaixo, expomos os dois algoritmos utilizados na implementação.

- 1 **Inicializa** um problema de otimização
- 2 A partir da base da carteira de crédito consolidada – Portfolio.dat – **Faça**
 - 2.1 **Cria** variáveis de folga - problema de otimização
 - 2.2 **Defina e Insira** dados da Perda Máxima na função objetivo
 - 2.3 **Defina e Insira** restrições de composição da carteira
 - 2.4 **Defina e Insira** restrições de limites individuais
 - 2.5 **Seta** função objetivo
- 3 A partir da base de restrições de Limites – Limites.dat - **Faça**
 - 1.1 **Pesquisa** referência da restrição em carteira de crédito – Portfólio.dat
 - 1.2 **Se achou** referência
 - 1.2.1 **Defina e Insira** restrições de limites
 - 1.3 **Volta** ao passo 3.
- 4 A partir da base de retorno – Retorno.dat - **Faça**
 - 4.1 **Pesquisa** referência da restrição em carteira de crédito – Portfólio.dat
 - 4.2 **Se achou** referência
 - 4.2.1 **Defina e Insira** restrições de retorno
 - 4.3 **Volte** ao passo 4.
- 5 **Indica** o tipo de problema de otimização - Minimização
- 6 **Soluciona** o problema de otimização
- 7 **Captura** os resultados
- 8 **Gera** base com resultados – Saída.dat

Algoritmo 5.1: Otimização da relação risco/retorno baseado na Perda Máxima sem penalização de concentração

- 1 **Inicializa** um problema de otimização
- 2 A partir da base da carteira de crédito consolidada – Portfolio.dat – **Faça**
 - 2.1 **Cria** variáveis de folga do problema de otimização
 - 2.2 **Defina e Insira** dados da Perda Máxima na função objetivo
 - 2.3 **Defina e Insira** restrições de composição da carteira
 - 2.4 **Defina e Insira** restrições de limites individuais
- 3 A partir da base da carteira de crédito consolidada – Portfolio.dat – **Faça**
 - 1.1 **Defina e Insira** dados de Concentração na função objetivo
 - 1.2 **Seta** função objetivo
- 4 A partir da base de restrições de Limites – Limites.dat - **Faça**
 - 4.1 **Pesquisa** referência da restrição em carteira de crédito – Portfólio.dat
 - 4.2 **Se achou** referência
 - 4.2.1 **Defina e Insira** restrições de limites
 - 4.3 **Volta** ao passo 4.
- 5 A partir da base de retorno – Retorno.dat - **Faça**
 - 5.1 **Pesquisa** referência da restrição em carteira de crédito – Portfólio.dat
 - 5.2 **Se achou** referência
 - 5.2.1 **Defina e Insira** restrições de retorno
 - 5.3 **Volta** ao passo 5.
- 6 **Indica** o tipo de problema de otimização - Minimização
- 7 **Soluciona** o problema de otimização
- 8 **Captura** os resultados
- 9 **Gera** base com resultados – Saída.dat

Algoritmo 5.2: Otimização da relação risco/retorno baseado na Perda Máxima com penalização de concentração

Note que a diferença existente entre os dois algoritmos é a parte quadrática em algoritmo 5.2, correspondente ao índice de concentração. As restrições utilizadas foram as mesmas, mas poderiam ser outras, já que as rotinas são flexíveis para tratá-las.

Capítulo 6

Resultados Computacionais

Neste capítulo apresentamos os resultados computacionais obtidos nas implementações discutidas nos capítulos anteriores. Primeiramente demonstramos a avaliação de performance dos testes simulados, em seguida, abordamos os resultados técnicos alcançados.

6.1 Avaliação de Performance

Para efeito de avaliação de performance, todos os testes foram realizados em uma máquina Athlon XP, com processador de 1.2 Ghz e 700 Mb de memória RAM.

Expandimos a carteira de crédito, inicialmente com 115 “pools” de ativos de crédito, para vários tamanhos, a fim de avaliarmos as execuções de várias instâncias.

A tabela 6.1 demonstra os resultados alcançados, em função de tempo de execução. As colunas da tabela têm o seguinte significado:

“Pool” de ativos : Quantidade de “pools” na carteira de crédito.

Tempo – OtmCreditRisk : Tempo de execução do problema de otimização do risco/retorno baseado na Perda Máxima sem penalização de concentração.

Tempo – OtmCreditRiskCon : Tempo de execução do problema de otimização do risco/retorno baseado na Perda Máxima com penalização de concentração.

“Pool” de Ativos	Tempo - OtmCreditRisk	Tempo – OtmCreditRiskCon
1.000	menos de 1 segundo	menos de 1 segundo
10.000	1 segundo	2 segundos
50.000	7 segundos	11 segundos
100.000	17 segundos	26 segundos
300.000	1 minuto e 37 segundos	2 minutos e 5 segundos
450.000	3 minutos e 13 segundos	3 minutos e 46 segundos

Tabela 6.1: Tempos de execução das rotinas implementadas

Antes de avaliarmos os tempos de execução, devemos observar que simulamos os testes de performance com carteiras de crédito, em tamanhos bem superiores ao máximo que poderia ser gerado pelas visões impostas para testes. Essas seriam: 5 regiões multiplicadas por 7 ramos de atividade, multiplicados por 5 modalidades de produtos, multiplicados por 5 perfis de clientes, multiplicados por 4 bandas de exposição, totalizando 3.500 “pools” de ativos de crédito.

Os tempos obtidos foram satisfatórios para todas as instâncias executadas, permitindo ao administrador trabalhar de forma “on-line”, a produção dos resultados.

A diferença de tempos entre as rotinas refere-se, basicamente, ao tipo de Programação Matemática utilizada. Para rotina OtmCreditRisk utilizamos Programação Linear, enquanto para OtmCreditRiskCon utilizamos Programação Quadrática. Apesar da rotina OtmCreditRiskCon possuir um desempenho inferior em relação ao tempo de execução, este não é tão relevante, pois essa rotina é modelada por um problema quadrático convexo e se aproxima bastante de problemas lineares.

6.2 Análise dos Resultados

Voltemos nossa atenção às análises de resultados. Primeiro examinemos o problema de otimização da relação risco/retorno baseado na Perda Máxima, sem o termo penalizador de concentração. Em seguida, avaliamos os resultados produzidos pela otimização da relação risco/retorno baseado na Perda Máxima, com a penalização de concentração.

6.2.1 Análise dos Resultados da otimização risco/retorno sem Penalização da Concentração

Iniciemos nossa análise, pela minimização da Perda Máxima, sem ainda impormos a restrição de retorno. Vamos examinar o impacto causado sobre as medidas de perda.

A Tabela 6.2 compara a carteira original com a otimizada, em relação às várias medidas de risco. A Perda Máxima sofreu minimização de 6,84%. Como consequência dessa minimização, as Perdas Esperadas e o Capital Regulamentar foram reduzidos em 12,04 % e 6,39%, respectivamente.

É evidente que as carteiras otimizadas melhoram significativamente em todas as medidas de risco. Todavia, se o administrador relaxar os limites estratégicos impostos ao problema, os resultados teriam um desempenho geral ainda melhor.

Carteira crédito	Perda Esperada*	Capital Regulamentar*	Perda Máxima*
Original	17,36	201,14	218,50
Otimizado	15,27 (2,09)	188,29 (12,85)	203,56 (14,94)

* Em milhões de reais

Tabela 6.2: Comparação de medidas de risco da carteira de crédito

Voltemos nossa análise para a otimização da relação risco/retorno. Para tanto, computemos uma fronteira eficiente, gerada empiricamente a partir da execução de várias instâncias, alternando apenas as restrições de retorno.

A Figura 6.1 mostra a fronteira eficiente e a posição relativa da carteira original. Notemos que a carteira original é claramente ineficiente se a compararmos com as carteiras *C* e *D*,

otimizadas e na fronteira eficiente. A carteira *C* possui o mesmo nível de retorno que a carteira original e Perda Máxima incorrida substancialmente menor que a Perda Máxima na carteira original. Alternativamente, para o mesmo nível de Perda Máxima da carteira original, o retorno máximo é significativamente maior na carteira *D*. As várias medidas de risco das carteiras indicadas na Figura 6.1 estão sumarizadas na Tabela 6.3.

A carteira *C* obtém o mesmo nível de retorno reduzindo a Perda Máxima em 6,20%. Além disso, há redução significativa de 11,35% nas Perdas Esperadas, gerando resultados imediatos ao acionista, através da diminuição de provisões realizadas na carteira de crédito. O Capital Regulamentar também diminui em 5,76%, permitindo à instituição financeira um maior grau de alavancagem em suas operações de crédito.

Por outro lado, a carteira *D* obtém 27 pontos-base extras de retorno para a mesma Perda Máxima.

Carteira crédito	Retorno	Perda Esperada*	Capital Regulamentar*	Perda Máxima*	Índice de Herfindahl
Original	9,28%	17,36	201,14	218,50	0,086876
C	9,28%	15,39 (1,97)	189,56 (11,58)	204,95 (13,55)	0,116518
D	9,55%	17,36 (0)	201,14 (0)	218,50 (0)	0,094399

* Em milhões de reais

Tabela 6.3: Comparação da carteira de crédito original e a carteira eficiente

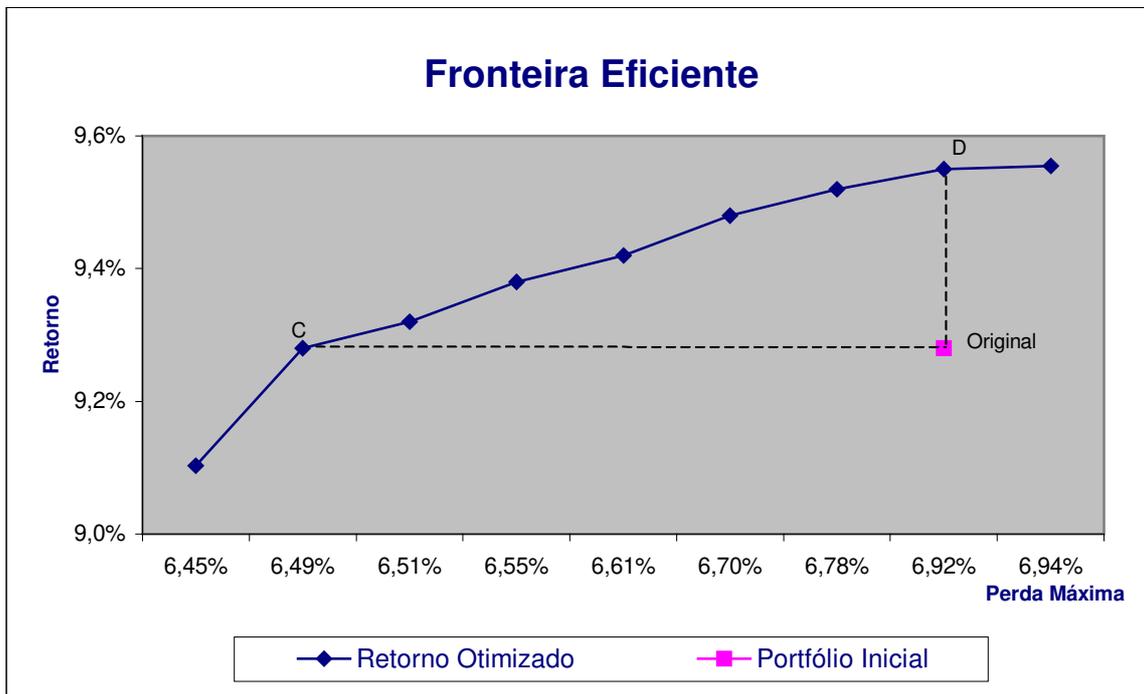


Figura 6.1 : Fronteira Eficiente

Com a finalidade de introduzirmos o assunto do próximo tópico, vejamos as carteiras *C* e *D* como se comportaram em relação ao índice de concentração. Para isso, analisemos a tabela 6.4, a qual oferece-nos uma visão de concentração por perfil de cliente. Como estudamos nos capítulos anteriores, quanto maior for o risco, maior será o retorno e vice-versa, ou seja, fazendo uma analogia, “pools” de ativos com perfis de clientes *AA* oferecem menos risco e conseqüentemente menores retornos. Por outro lado, perfis de clientes *CC* oferecem maiores riscos, mas também maiores retornos.

Como mostra a tabela 6.4, a concentração na carteira *C* é maior em perfis de clientes *AA*, comparado com a carteira original, uma vez que, o processo de otimização incorreu em estruturar a carteira *C* com menos riscos, mantendo-se o mesmo retorno da carteira original. Por outro lado, como o retorno da carteira *D* foi maior que o da carteira original, incorrendo em maiores riscos, a concentração aumentou a partir de perfis de clientes do tipo *BB*.

Perfil de cliente	Carteira Original	Carteira C	Carteira D
AA	0,097778	0,119206	0,086440
A	0,005554	0,005331	0,005966
BB	0,001015	0,000571	0,001465
B	0,000448	0,000252	0,000445
CC	0,000081	0,000069	0,000083

Tabela 6.4 : Índice de concentração marginal por perfil de cliente

6.2.2 Análise dos Resultados da otimização risco/retorno com Penalização da Concentração

Iniciemos a análise deste problema, verificando os efeitos causados pela variável ε nas porções de risco e concentração. A tabela 6.5 apresenta as execuções de várias instâncias, alternando-se apenas ε .

Carteira crédito	Retorno	Perda Esperada*	Capital Regulamentar*	Perda Máxima*	Índice de Herfindahl
Original	9,28%	17,36	201,14	218,50	0,086876
Otimizada $\varepsilon = 0$	9,28%	15,39 (1,97)	189,56 (11,58)	204,95 (13,55)	0,116518
Otimizada $\varepsilon = 10^{-27}$	9,28%	15,39 (1,97)	189,56 (11,58)	204,95 (13,55)	0,116518
Otimizada $\varepsilon = 10^{-25}$	9,28%	15,39 (1,97)	189,56 (11,58)	204,95 (13,55)	0,108840
Otimizada $\varepsilon = 10^{-20}$	9,28%	15,39 (1,97)	189,56 (11,58)	204,95 (13,55)	0,108611
Otimizada $\varepsilon = 10^{-15}$	9,28%	15,39 (1,97)	189,56 (11,58)	204,95 (13,55)	0,102232
Otimizada $\varepsilon = 10^{-12}$	9,28%	15,40 (1,96)	189,57 (11,57)	204,97 (13,53)	0,099787
Otimizada :	9,28%	15,47 (1,89)	190,30 (10,84)	205,76 (12,74)	0,086876
Otimizada $\varepsilon = 10^{-11}$	9,28%	15,49 (1,87)	190,69 (10,45)	206,19 (12,31)	0,081996
Otimizada $\varepsilon = 10^{-10}$	9,28%	15,94 (1,42)	195,12 (6,02)	211,06 (7,44)	0,065936
Otimizada $\varepsilon = 10^{-8}$	9,33%	17,80 (-0,44)	203,45 (-2,31)	221,25 (-2,75)	0,063589
Otimizada $\varepsilon = 10^{-5}$	9,34%	17,97 (-0,61)	204,07 (-2,93)	222,04 (-3,54)	0,063583
Otimizada $\varepsilon = 1$	9,34%	17,97 (-0,61)	204,07 (-2,93)	222,04 (-3,54)	0,063583

* Em milhões de reais

Tabela 6.5: Resultados do problema de otimização com penalização de concentração

Podemos perceber pelos resultados obtidos, que quanto menor o valor ε , menores são os valores alcançados nas medidas de perda e vice-versa. Enquanto para a concentração, a leitura é exatamente contrária às medidas de perda.

Quando ε é igual a zero, a parte de minimização de concentração da função objetivo é nula, e obviamente, o problema fica equivalente ao da otimização da relação risco/retorno baseado na Perda Máxima, sem penalização de concentração.

Para ε variando de $\varepsilon = 10^{-15}$ a $\varepsilon = 10^{-27}$, obtivemos os mesmos valores de perdas e retorno que o problema sem penalização da concentração, mas com significativa redução no índice de concentração (12,26%). Nota-se que a partir de $\varepsilon = 10^{-27}$ já se anula a minimização de concentração.

Outro resultado importante é a ocorrência da minimização conjunta das porções de perda e concentração. Essas são alcançadas para $\varepsilon = 10^{-11}$ e $\varepsilon = 10^{-10}$.

Percebemos que atinge a mínima perda, para o mesmo índice de concentração da carteira original.

A partir de $\varepsilon = 10^{-8}$ a influência da parte de minimização de concentração passa ser dominante a minimização da perda. Nesse caso, ocorre aumento nas medidas de perda e redução da concentração. A relação risco/retorno é mantida, porque apesar do aumento da perda, alcançamos maior retorno.

Provemos uma análise específica com $\varepsilon = 1$, para casos em que o administrador esteja interessado em obter resultados mais expressivos na redução da concentração. A tabela 6.6 retrata os valores obtidos entre a carteira original e duas carteiras E e F , otimizadas. Como vemos, o índice de concentração foi minimizado em 26,81% e 26,49% nas carteiras E e F , respectivamente.

A redução da concentração, como previsto anteriormente, provocou aumento nas medidas de risco. Por exemplo, a Perda Máxima sofreu acréscimo de 1,62% na carteira *E* e de 2,60% na carteira *F*.

A condição da relação risco/retorno foi mantida, conforme mostra a tabela 6.6. A carteira *E*, que apresenta retorno inferior ao da carteira *F*, obteve risco menor ao carteira *F* e vice-versa. Como nosso objetivo é minimizar concentração, não geramos a fronteira eficiente nesse caso.

Carteira crédito	Retorno	Perda Esperada*	Capital Regulamentar*	Perda Máxima*	Índice de Herfindahl
Original	9,28%	17,36	201,14	218,50	0,086876
E	9,34%	17,97 (-0,61)	204,07 (-2,93)	222,04 (-3,54)	0,063583
F	9,38%	18,43 (-1,07)	205,76 (-4,62)	224,19 (-5,69)	0,063859

* Em milhões de reais

Tabela 6.6 : Minimização da concentração

Voltemos nossa análise à tabela 6.7. Devido o retorno exigido para carteira *E* ser menor que o exigido para a *F*, a redução de concentração naquela foi maior em níveis de clientes piores, enquanto essa apresentou maior redução em cliente com perfis melhores.

De acordo as tabelas 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10, a carteira original apresenta alta concentração em perfis de clientes *AA*, no sudeste, na indústria e nos produtos Compror, Vendor e Conta Garantida. Para todas essas visões, tivemos diminuição dos índices de concentração, tanto na carteira *E*, quanto na carteira *F*.

Perfil de cliente	Carteira Original	Carteira E	Carteira F
AA	0,079777	0,058117	0,057877
A	0,005554	0,003714	0,003755
BB	0,001015	0,001201	0,001485
B	0,000448	0,000468	0,000658
CC	0,000081	0,000083	0,000083

Tabela 6.7 : Índice de concentração marginal por perfil de cliente

Região	Carteira Original	Carteira E	Carteira F
Norte	0,000009	0,000012	0,000012
Nordeste	0,000961	0,001502	0,001500
Sudeste	0,083521	0,058535	0,058762
Sul	0,002024	0,002972	0,003024
Centro-Oeste	0,000360	0,000562	0,000561

Tabela 6.8 : Índice de concentração marginal por região geográfica

Ramo de Atividade	Carteira Original	Carteira E	Carteira F
Comercio	0,000251	0,000392	0,000392
Financeiros	0,000223	0,000348	0,000341
Agricultura	0,000615	0,000962	0,000950
Serviços	0,000376	0,000552	0,000546
Indústria	0,085411	0,061330	0,061629

Tabela 6.9 : Índice de concentração marginal por ramo de atividade

Modalidade de Produto	Carteira Original	Carteira E	Carteira F
Capital de Giro	0,005384	0,005569	0,005705
Comprar e Vender	0,033309	0,023437	0,025277
Conta Garantida	0,048174	0,034565	0,032864
Descontos	0,000008	0,000012	0,000013

Tabela 6.10 : Índice de concentração marginal por modalidade de produto

Capítulo 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

Atualmente, a prática de otimização para administração de risco de crédito apresenta um grande desafio. Estruturar o problema com medidas de risco relevantes e tratáveis é uma forma eficiente para resolvê-lo.

Neste estudo desenvolvemos instrumentos de otimização, visando o apoio ao processo de tomada de decisão na administração do risco de crédito. Tais instrumentos foram baseados na otimização da relação risco/retorno e na minimização de concentração de uma carteira de crédito.

Trabalhamos com as medidas de risco recomendadas em Basiléia II. Essas medidas são relevantes e nos permitiram modelar o problema de maneira tratável. Para alcançar nossos objetivos, aplicamos Programação Linear e Programação Quadrática convexo no desenvolvimento dos modelos. Tais técnicas possuem métodos que proporcionam algoritmos de resolução em tempo polinomial (por isso os problemas são solucionados de forma rápida e eficiente).

Em nosso estudo de caso, implementamos modelos para otimização do risco/retorno sem e com penalização de concentração. Executamos várias instâncias de cada um dos modelos. Os resultados obtidos nos permitem algumas conclusões.

Com relação ao teste de performance, atingimos resultados que nos satisfizeram. Os modelos poderiam ser utilizados praticamente em tempo real.

A construção de uma fronteira eficiente empírica reflete o bom resultado alcançado através da implementação do modelo de otimização da relação risco/retorno sem penalização da

concentração. Nessa fronteira, destacamos quanto a carteira de crédito poderia ser melhorada se aplicássemos a otimização, uma vez que esta nos permitiu alcançar o retorno máximo para um dado nível de risco, ou o risco mínimo incorrido para um determinado retorno.

Para o outro modelo, obtivemos resultados esperados. Com intuito de chegar a estes resultados, desenvolvemos uma variável de peso para o equilíbrio na minimização das porções de perda e concentração, o que acarretou na diminuição da perda e na pulverização da carteira de crédito. Além disso, analisamos o impacto da minimização da concentração sem o uso da variável de peso. Para este caso, todas as instâncias executadas apresentaram redução no índice de Herfindahl.

Como sugestão de trabalhos futuros poderíamos, por exemplo, estender:

- as restrições dos modelos propostos nesta dissertação, como por exemplo, contemplar o índice de Herfindahl. Isso nos levaria a um problema de otimização não-linear.
- os modelos desenvolvidos por Mausser e Rosen [8] [12] considerando as variáveis de correlação de mercado, com o intuito de termos modelos mais realistas.

Apêndice A - Evolução dos Instrumentos de Análise de Crédito

A.1 Introdução

Para visualizarmos o relacionamento entre um banco e seus clientes, no processo de crédito, apresentamos a figura abaixo:

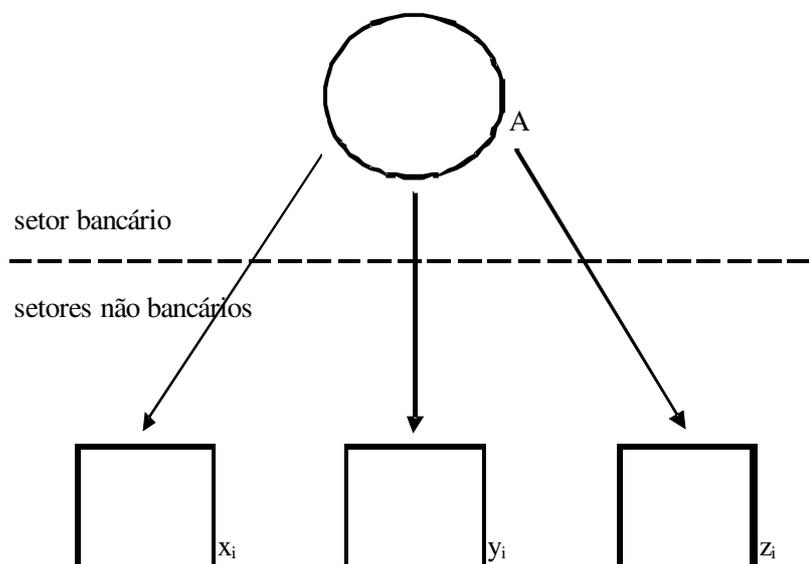


Figura A.1: Relacionamento entre banco e cliente.

As setas da ilustração representam a concessão de crédito. O Banco A é representado por um círculo, diferentemente de seus clientes, representados por retângulos, devido ao fato da natureza econômico-financeira dos bancos ser bastante diferente das empresas de outros setores ou mesmo de clientes pessoas físicas. As variáveis x , y e z representam não apenas setores econômicos, mas qualquer forma de segmentação da clientela de um banco. Assim, enquanto o Banco A ou qualquer banco tem muitos clientes, distribuídos entre muitos setores ou segmentos,

um cliente bancário, seja empresa ou pessoa física, de qualquer setor ou segmento, trabalha com relativamente poucos bancos.

A segmentação da clientela de um banco pode ser realizada a partir de características dos próprios clientes, tais como setores de atividade, áreas geográficas, porte econômico-financeiro, ou de características das operações em que se materializam a concessão de crédito, como prazos, garantias, moedas, etc.

Se multiplicarmos a figura acima por três, poderemos representar o sistema bancário como um todo: muitos bancos, concedendo empréstimos para muitíssimos clientes, distribuídos entre muitos setores e segmentos:

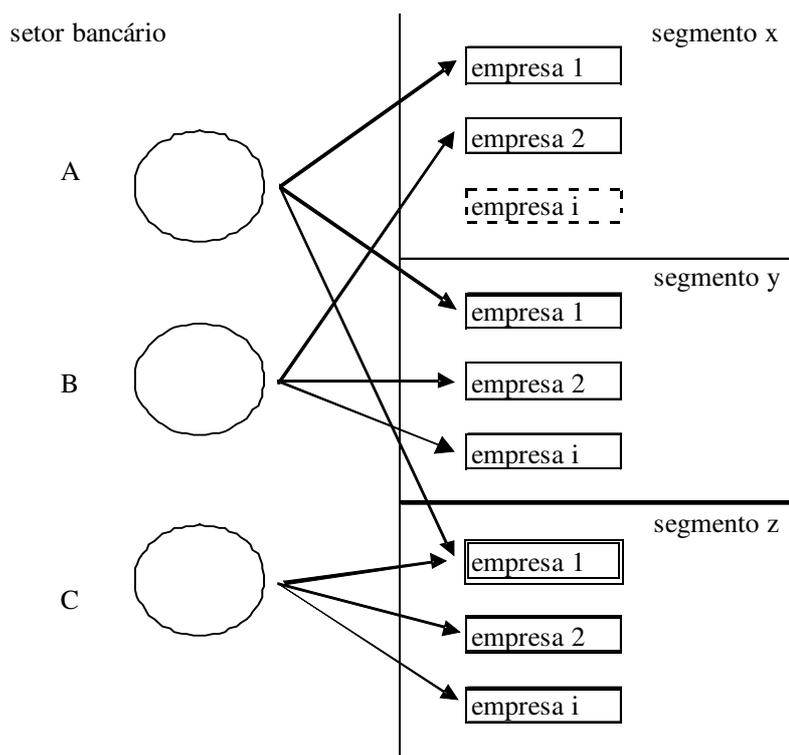


Figura A.2: Relacionamento do sistema bancário.

Temos então, o Banco A com muitos clientes bem distribuídos entre muitos segmentos; o Banco B com muitos clientes e certo grau de concentração no segmento y; e o Banco C, bastante

concentrado no segmento z . Entre os clientes, nota-se que o i -ésimo cliente do segmento x é sub-bancarizado, enquanto a empresa 1 do segmento z é superbancarizada.

Agora que conhecemos o relacionamento entre banco e cliente, no processo de crédito, caracterizaremos três épocas em sua história, segundo o ponto de vista de seus instrumentos analíticos e gerenciais. Apenas como recurso expositivo, designaremos tais épocas da seguinte maneira:

1. Cliente de crédito
2. Mercado de crédito
3. Carteira de crédito

Estas épocas apresentam uma sucessão cronológica, embora exista uma sucessão temporal, em que uma serve de suporte a outra. Assim, os instrumentos e capacidades desenvolvidos em uma época, não são necessariamente “extintos” pela época seguinte; pelo contrário, alguns vêm a constituir a base sobre a qual são construídos os próximos instrumentos.

A.2 Primeira Fase: “Cliente de crédito”

A primeira época, “cliente de crédito”, caracteriza-se pelo fato de que o instrumento analítico e gerencial básico é a análise do cliente em si: antes de conceder o crédito, o banco analisa sua qualidade em termos de ser um bom ou um mau tomador de crédito, ou de que expectativa tem o banco sobre sua disposição e capacidade em liquidar o crédito pretendido no prazo a ser contratado. Na figura A.3, a seguir, esta fase está representada – no contexto do sistema bancário – pela seta graficamente destacada da primeira concessão pela ordem visual: o Banco A concede crédito ao cliente x_1 por considerá-lo bom risco:

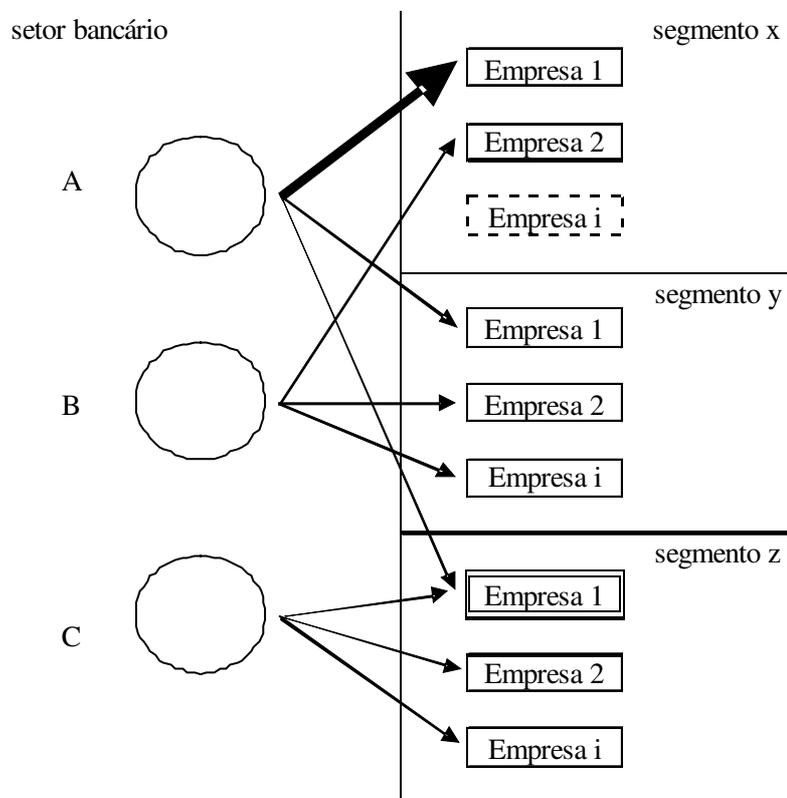


Figura A.3: Fase “Cliente de crédito”.

Historicamente, poderíamos dizer que esta fase existe desde o surgimento de qualquer atividade social que se assemelhe à concessão de crédito. Entretanto, se quisermos delimitar um horizonte temporal, podemos apontar a Renascença italiana (séculos XV e XVI), quando se consolidaram tanto os bancos no formato moderno em que os conhecemos (alguns bancos fundados nessa época existem até hoje), quanto a moderna contabilidade empresarial de partidas dobradas.

O instrumento gerencial básico desta fase pode ser sintetizado na seguinte frase: “a análise clássica de crédito é um sistema especializado que depende, acima de tudo, do julgamento subjetivo de profissionais treinados”[1]. Contudo, é importante fixar que, mesmo que esta fase e este tipo de análise e gestão tenham sido superados por fases e instrumentos mais desenvolvidos, uma importante característica sobrevive e sobreviverá nos instrumentos sucessores: o julgamento

subjetivo do cliente (mais exatamente, do cliente de natureza complexa, como grandes companhias e outros).

A.3 Segunda Fase: “Mercado de crédito”

A segunda fase, “mercado de crédito”, baseia-se em avaliações de clientes sendo realizadas de forma comparativa, isto é, a instituição bancária não julga apenas o cliente em si, mas sua posição relativa aos outros clientes de crédito. A figura A.4 ilustra esta nova perspectiva da seguinte maneira:

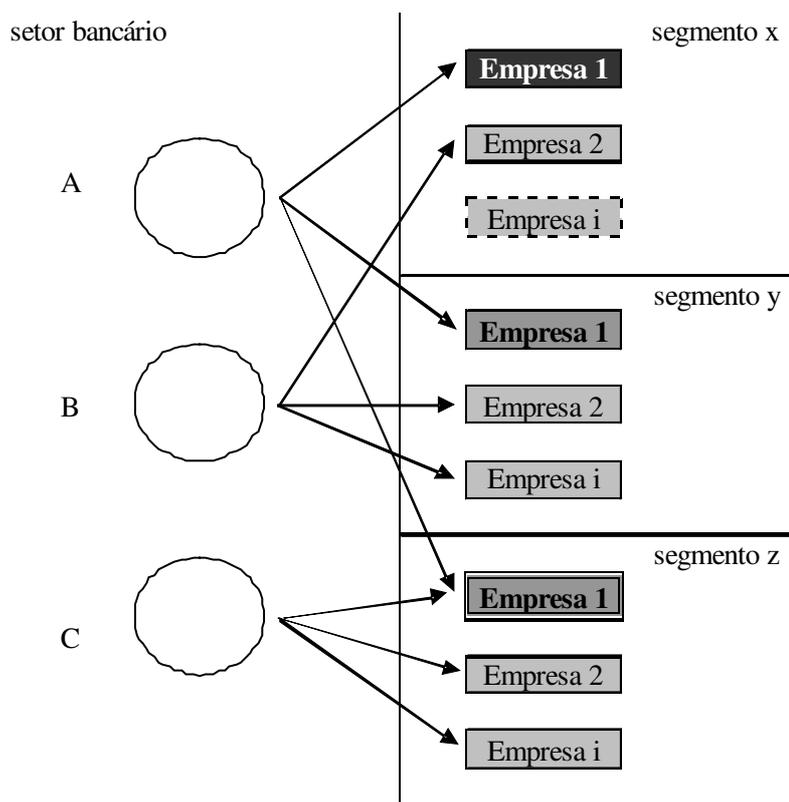


Figura A.4: Fase “Mercado de crédito”.

Vejamos o que pretende representar a figura: o Banco A, ao conceder crédito à Empresa 1 do segmento x, leva em conta sua experiência com seus outros clientes (Empresas 1 dos

segmentos y e z) e também não é indiferente aos dados que porventura possa obter sobre as experiências de outros bancos com outros clientes (ou, como veremos adiante, experiências de outros tipos de administradores e analistas de ativos de crédito e capital). “Levar em conta” significa julgar a qualidade do cliente dentro do quadro referencial de um sistema de classificação. Por sua vez, “o cerne de um sistema de classificação de clientes é o comportamento passado desses clientes. Para desenvolver um sistema de classificação, admitimos a seguinte hipótese: o comportamento passado dos clientes irá repetir-se no futuro. Isso significa: para identificarmos perfis de risco no futuro, voltamos ao passado, no qual estudamos indicadores que sejam eficientes ao distinguir distintos níveis de risco. Tendo sucesso nessa tarefa, utilizaremos esses mesmos indicadores para fazer previsões.”[2]

Devemos notar que, na análise clássica, o conhecimento do comportamento passado dos clientes faz parte do treinamento dos profissionais especializados os quais exercerão seu julgamento subjetivo em relação aos tomadores de crédito. Portanto, trata-se de um conhecimento não formalizado, exercido de maneira intuitiva canalizado para uma decisão de caráter binário: conceder ou não conceder o crédito.

Já na fase “mercado de crédito”, a experiência passada é formalizada em algum tipo de métrica, que não apenas norteia a decisão binária, como também permite um aprimoramento da análise dos clientes, possibilitando graduá-los em vários níveis. Como ilustração, mencionemos aqui a clássica escala americana de classificação de clientes corporativos: AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, C, em que os quatro primeiros graus definem, em ordem descendente de qualidade, os clientes do chamado “grau de investimento” e as cinco últimas categorias, também em ordem descendente, os clientes de grau especulativo.

O julgamento intuitivo da primeira fase poderia até conseguir classificar clientes de crédito em uma escala de poucos graus, mas é praticamente impossível que consiga fazê-lo – de forma coerente – em uma escala mais diversificada.

A segunda fase tem suas origens na segunda metade do século XIX no mercado americano e podemos considerá-la instalada na segunda década do século seguinte, no mesmo

país. Segundo o *website* da agência de classificação de corporações e títulos de dívida Moody's: "John Moody retornou ao mercado financeiro em 1909 com uma nova idéia: em vez de simplesmente coletar informação sobre os ativos, capitalização e administração das companhias, passou a oferecer aos investidores uma análise de títulos e valores mobiliários. Sua companhia publicou um livro que analisava as ferrovias e seus títulos em circulação no mercado. O livro continha conclusões concisas sobre suas qualidades relativas de investimento. Ele expressou suas conclusões usando letras símbolos de classificação copiadas dos sistemas de classificação mercantil e de crédito que vinham sendo usadas pelas firmas de análise de crédito desde as últimas décadas do século XIX." [3]

Por sua vez, a agência de classificação Standard & Poor's identifica o ano de 1860 como seu momento inicial: nesse ano, Henry Poor, o fundador da agência, publicou sua História das Ferrovias e Canais dos Estados Unidos. [4] Aponta ainda como anos marcantes 1906, quando foi formado o Escritório de Estatísticas-Padrão ("Standard Statistics Bureau"), com o fim de prover informações financeiras diferenciadas sobre companhias americanas, e 1916, quando o Escritório começou a classificar títulos corporativos por "ratings" (em 1941, o Escritório e a Editora Poor's se fundiram, criando a Standard & Poor's Corporation).

Vemos então que o julgamento comparativo de clientes – classificando-os através de letras símbolos – começa no sistema bancário e mercantil nas últimas décadas do século XIX, podendo assinalar 1909 e 1916 como referências em julgamento comparativo *sistemático*. Assim, a inovação pode ser atribuída mais aos mercados primário e secundário de capitais, de emissão e negociação de títulos e valores mobiliários, que ao mercado de crédito propriamente dito, com seus empréstimos e financiamentos. Com as ressalvas de que são mercados contíguos ou mesmo superpostos, e de que as companhias de porte corporativo são apenas um dos segmentos atendidos pelo setor bancário. Entretanto, o próprio setor bancário veio a desenvolver técnicas originais de avaliação comparativa baseadas em comportamentos passados, tanto para corporações quanto para outros tipos de clientes, como pequenas e médias empresas, consumidores pessoas físicas, ou para tipos diferenciados de operações, como empréstimos imobiliários. Tais técnicas podem ser agrupadas pela expressão "credit score" [5].

Especificamente para grandes corporações, o potencial para maior uso de “scoring” de crédito, por causa de dados melhores, é, de certa forma, contrabalançado pela maior importância que têm, nessas corporações, dados qualitativos sobre o meio ambiente econômico, institucional e jurídico, e as decisões administrativas de caráter estratégico. [6]

Finalmente, das faixas de “score” são mapeados os “ratings” dos tomadores de crédito, que refletirão sua probabilidade de inadimplência.

A.4 Terceira Fase: “Carteira de crédito”

A segunda fase na história do crédito teve sua origem identificada no mercado americano de títulos, através das técnicas desenvolvidas pelas agências de “rating”. A terceira fase também surge a partir do mercado de capitais, ou, mais exatamente, de um desenvolvimento acadêmico relativo a este mercado, a chamada teoria moderna de carteiras de investimento, cujo ponto de partida foi a obra de Markowitz [7]. A idéia por trás da teoria de Markowitz é que o risco do retorno de um título pode ser caracterizado por sua *variância*. Esta variância, combinada ao comovimento ou covariância de um grupo de títulos, determina o retorno da carteira composta por esses títulos.[8] Para se determinar qual a carteira com o maior retorno para um dado nível de risco, ou a carteira com menor risco para um dado nível de retorno, utiliza-se a matriz histórica variância-covariância de retorno dos títulos da carteira. Aplicando os conceitos da teoria de carteira ao crédito bancário, temos que o conjunto das operações de crédito de um banco, isto é, sua carteira de crédito, é mais do que a simples soma das operações que a compõem, o que buscamos representar com mais uma variação das figuras anteriores:

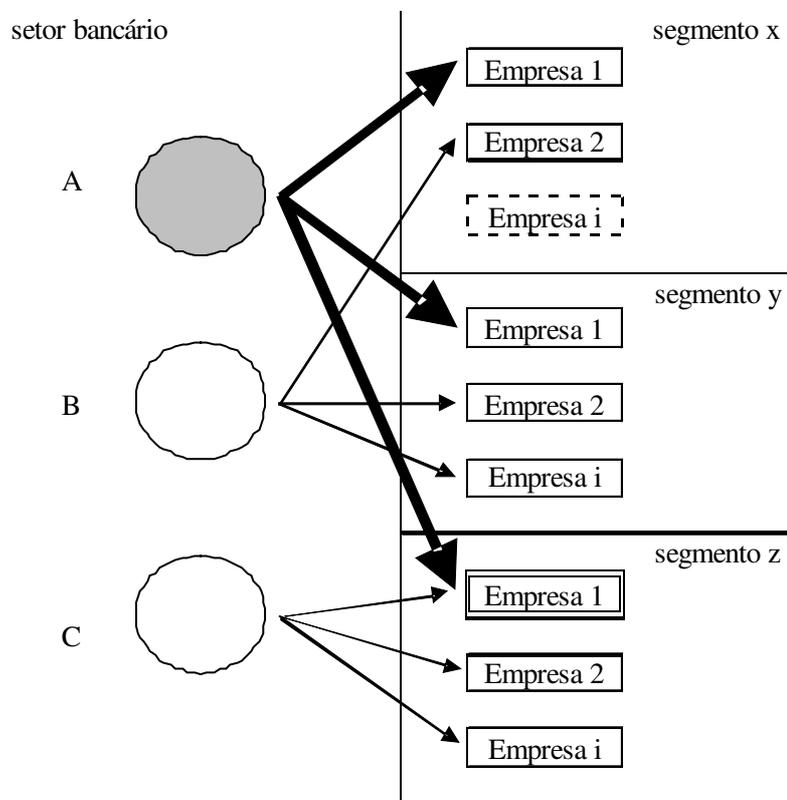


Figura A.5: Fase “Carteira de crédito”

Na Figura A.5, o Banco A poderia ter, em tese, a melhor administração, diversificando suas operações em muitos segmentos negativamente correlacionados entre si, minimizando a variabilidade ou o risco de seus retornos.

As duas fases anteriores, “cliente de crédito” e “mercado de crédito”, foram caracterizadas em termos de seus instrumentos de análise dos clientes, que buscam estimar a capacidade destes em honrar os créditos recebidos.

Modelos relacionados a fase Carteira de crédito, como KMV® e outros, serão demonstrados no apêndice B.

Convém reafirmar que, embora os “ratings” tenham praticamente um século de existência e a moderna teoria de carteira tenha meio século de idade, eles são instrumentos do mercado de capitais, cujas técnicas só recentemente vêm sendo absorvidas pelos bancos. Mesmo o “credit score”, que é uma técnica eminentemente bancária, é bastante recente e sua adoção pela maioria dos bancos tem menos de 20 anos [9]. Assim, a chamada primeira fase, tanto no mundo como no Brasil, pode ser ainda a realidade em muitos bancos e em outros, a adoção dos instrumentos e modelos das duas fases seguintes pode ser fenômeno ainda em fase de assimilação, podendo ocorrer até de forma simultânea (é bom também lembrar que estes conceitos de “fase” são apenas um recurso expositivo deste trabalho). Finalmente, a adoção de novos modelos tem sido mais motivada, por regulamentação de autoridades supervisoras do que por iniciativa espontânea dos bancos.

A.5 Bibliografia

[1] Caouette, John B. , Altman, Edward I. , e Narayanan, Paul, Gestão de risco de crédito – O Próximo Grande Desafio Financeiro, Qualitymark/Serasa, 2000, pg. 93.

[2] Prado, Eduardo A., Gestão de risco de crédito em bancos de varejo, Duarte Jr., Antonio M., e Varga, Gyorgy, organizadores, em Gestão de risco no Brasil, Financial Consultoria, 2003, pg. 347.

[3] *Website* da Moody’s: www.moodys.com, em Moody’s History, 2004.

[4] *Website* da Standard & Poor’s: www.standardandpoors.com, em Standard & Poor’s History, 2004.

[5] Barth, Nelson e Lerner, Nobel, Inadimplência – Construção de Modelos de Previsão, São Paulo, 2004.

[6] Securato, José Roberto, coordenador, Sain Paul, crédito – Análise e Avaliação do risco – Pessoas Físicas e Jurídicas, São Paulo, 2002, capítulo 4.

[7] Markowitz, H.M., “Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments”, John Wiley, USA, 1959.

[8] Medindo o risco de crédito, Saunders, Anthony, Qualitymark/Serasa, 2000.

[9] Caouette, John B.; Altman, Edward I.; e Narayanan, Paul, Gestão de risco de crédito – O Próximo Grande Desafio Financeiro, Qualitymark/Serasa, 2000, pg. 127.

Apêndice B - Modelos Gerenciais de Mensuração de Risco de Crédito

B.1 Abordagem CreditMetrics®

O modelo CreditMetrics foi desenvolvido pelo J.P. Morgan em conjunto com outros patrocinadores, entre eles a KMV Corporation (criadora do próximo modelo exposto neste apêndice). Foi publicado pela primeira vez em 1997. O modelo é baseado em 5 elementos, além do instrumental matemático e estatístico que os compõe. Destes elementos, os três primeiros resultam do trabalho analítico de agências de classificação (“ratings”) de emissores e títulos. O quarto e o quinto, por sua vez, são oriundos do mercado de títulos e do mercado de ações, respectivamente. Segue abaixo, os cinco elementos dos quais falamos acima:

1. “Ratings” de empresas
2. Matrizes de migração de “ratings”
3. Taxas de recuperação de títulos e empréstimos inadimplidos
4. Spreads de juros por categoria de “ratings”
5. Valor de empresas em mercado de ações

A classificação de “rating” de uma empresa significa basicamente a probabilidade de que ela entre em inadimplência no prazo de um ano e as matrizes de migração indicam as probabilidades de mudança para os outros estados classificatórios possíveis. Utilizando a tabela do próprio CreditMetrics[1], temos que uma empresa classificada como BBB pode, no decorrer de um ano, evoluir para 8 estados com as seguinte probabilidades:

Empresa de “Rating” BBB	Ano 1
AAA	0,02%
AA	0,33%
A	5,95%
BBB	86,93%
BB	5,30%
B	1,17%
CCC	0,12%
Inadimplência	0,18%

Tabela B.1: Migração do risco de crédito

Sabemos que títulos e empréstimos inadimplidos têm, conforme suas preferências contratuais e garantias, taxas de recuperação, observadas pelas agências de classificação e departamentos técnicos de bancos. Sabemos ainda, que o mercado de títulos atribui spreads de juros diferenciados para cada nível de classificação. Assim, considerando um título de 5 anos da empresa acima de valor \$100, podemos estimar seus valores possíveis, no prazo de um ano, descontados pelos spreads observados (no caso de inadimplência, o valor é a recuperação esperada), ponderá-los pelas respectivas probabilidades e calcular a diferença dos valores possíveis em relação ao valor esperado:

“Rating” ao final do ano	Probabilidade dos Estados futuros de “Ratings” de crédito	Valores do Título	Valores Ponderados pela Probabilidade	Diferença em Relação à Média
AAA	0,02%	\$109,37	\$0,02	\$2,28
AA	0,33%	\$109,19	\$0,36	\$2,10
A	5,95%	\$108,66	\$6,47	\$1,57
BBB	86,93%	\$107,55	\$93,49	\$0,46
BB	5,30%	\$102,02	\$5,41	-\$5,07
B	1,17%	\$98,10	\$1,15	-\$8,99
CCC	0,12%	\$83,64	\$0,10	-\$23,45
Inadimplência	0,18%	\$51,13	\$0,09	-\$55,96
Valor Esperado			\$107,09	

Tabela B.2: Cálculo dos valores segundo migração de estado de crédito

As variações do valor da ação da empresa servem como “proxy” dos efeitos das variáveis macro e microeconômicas sobre o valor dos ativos da empresa. Como tais variações estão distribuídas em uma curva normal, podemos estabelecer, nesta curva, limites correspondentes aos observados na curva de retornos esperados.

Os procedimentos matemáticos e estatísticos, para cálculo do capital econômico e do VaR, são os seguintes: “o CreditMetrics implementa uma simulação de Monte Carlo para gerar a distribuição completa dos valores da carteira no prazo de um ano”[2]. São desenvolvidas as seguintes etapas:

1. Delimitação de faixas de retorno de ativos para cada nível de “rating”.
2. Estimação da correlação entre cada par de retorno de ativos dos emissores de títulos/tomadores de crédito.

3. Geração de cenários de retorno de ativos, segundo sua distribuição normal conjunta. Cada cenário é caracterizado por n retornos padronizados de ativos, um para cada um dos n emissores de títulos/tomadores de empréstimos da carteira.
4. Para cada cenário, e para cada emissor/tomador, mapeia-se o retorno padronizado de ativo, de acordo com as faixas derivadas na primeira etapa.
5. Dadas as curvas de spread, aplicadas a cada nível de classificação, a carteira é reavaliada.
6. Pela repetição do procedimento em grande número de vezes, assinala-se a distribuição dos valores da carteira em um gráfico.
7. Deste gráfico são derivados os percentis de distribuição dos valores esperados da carteira.

B.2 Abordagem KMV®

O modelo parte das inúmeras avaliações da empresa pelos investidores, subjacentes às cotações de suas ações em bolsas de valores. Combinando o valor de mercado da empresa com outros fatores, prescreve então uma determinada situação em que a inadimplência é altamente provável. Além do instrumental matemático e estatístico, o modelo trabalha, basicamente, com cinco fatores:

1. Valor de mercado do patrimônio da empresa
2. Volatilidade do valor de mercado
3. Estrutura de capital, ou montante de dívida no balanço da empresa
4. Juros pagos sobre a dívida, decompostos em taxa de juros livre de risco e cupom pago pela empresa
5. Tabela desenvolvida empiricamente pela KMV sobre o conceito de “distance to default” (DD)

A primeira operação do modelo é o cálculo do valor dos ativos da empresa, que utiliza os primeiros fatores acima. São feitas hipóteses simplificadoras: a estrutura de capital da empresa é composta apenas de patrimônio, dívida de curto prazo (tratada como equivalente de caixa), e dívida de longo prazo. Os juros pagos pela empresa sobre os empréstimos de longo prazo são simplificados em uma taxa média, decomposta em um cupom, dada a taxa livre de risco.

Nessa abordagem, assume-se que, o valor dos ativos da empresa é modelado através de uma distribuição de probabilidade log-normal, o que é uma hipótese robusta, segundo estudos empíricos da KMV [2].

O valor dos ativos é então:

$$V = h (S, \sigma, LR, c, r)$$

- onde
- V*: valor dos ativos da empresa;
 - h*: Expressão analítica que caracteriza o valor da empresa como uma opção de compra.
 - S*: valor de mercado do patrimônio da empresa;
 - σ : volatilidade do valor de mercado da empresa;
 - LR*: índice de endividamento (“leverage ratio”)
 - c*: cupom pago pela empresa
 - r*: taxa de juros de curto prazo;

A etapa seguinte é o cálculo do índice DD (“distance to default”), que será utilizado em conjugação com o último fator da lista inicial de 5 (tabela empírica de DD). A KMV observou que as empresas que entram em inadimplência, geralmente o fazem quando o valor de seus ativos atinge um nível entre o valor total das exigibilidades e o valor da dívida de curto prazo. Por isso, propõe-se a existência de um “ponto de inadimplência”, definido como DPT, que é uma média ponderada das dívidas de curto e longo prazo.

Estimado tal ponto, o modelo calcula o índice DD, expresso em termos de desvios-padrões de retornos dos ativos, pela seguinte fórmula:

$$DD = E(V_I) - DPT / \sigma$$

onde $E(V_I)$: valor esperado dos ativos em um ano.

A última fase do modelo – antes do cálculo das correlações e do VaR de crédito – consiste no mapeamento do índice DD nas probabilidades efetivas de “default”, denominadas EDF (“expected default frequencies”) pela KMV. Através de análise empírica, a KMV determinou probabilidades de inadimplência associadas aos índices DD, que, por sua vez, guardam equivalência com tabelas de “rating” mais conhecidas, como, por exemplo, a da Standard & Poor’s:

EDF*	Standard & Poor’s
2 a 4 pb	>=AA
4 a 10 pb	AA / A
10 a 19 pb	A / BBB+
19 a 40 pb	BBB+ / BBB-
40 a 72 pb	BBB- / BB
72 a 101 pb	BB / BB-
101 a 143 pb	BB- / B+
143 a 202 pb	B+ / B
202 a 345 pb	B / B-

*Expressa em pontos-base

Tabela B.3: Equivalência DD e “Rating”

Resta a acrescentar, nesta apresentação sumária do modelo, que a correlação dos eventos de crédito é igual à do CreditMetrics, medida em termos de retornos sobre ativos com distribuição normal multivariada. Por outro lado, não permite simulações como o CreditMetrics, restringindo-se à abordagem numérica analítica.

B.3 Abordagem Atuarial: CreditRisk+®

O modelo CreditRiskPlus®, criado pelo Credit Suisse Financial Products em 1996, é o mais simples dos três modelos, no sentido de que utiliza menos tipos de dados que os outros e os utiliza de forma simplificada e independente. Por exemplo, trabalha com o risco de inadimplência, mas não considera o risco de mudança de classificação. A inadimplência é tratada de forma atuarial, como nos riscos de seguros: o evento ocorre ou não ocorre. Assim, um tomador de crédito ou está inadimplente com a probabilidade P , ou está adimplente com a probabilidade $1-P$.

Em termos de conceitos estatísticos, cumpre notar que o modelo difere-se dos outros por utilizar a distribuição de Poisson para representar a probabilidade do evento de crédito (inadimplência) no período analisado. Há ainda outra diferença relevante no tratamento das exposições dos clientes: seus valores serão expressos em unidades arredondadas de exposição e as exposições que tenham um mesmo número de unidades serão consideradas como pertencentes a uma mesma carteira. Suponhamos que um cliente A tenha exposição de R\$ 180, o cliente B, R\$ 210, e o cliente C, R\$ 260. Se a unidade de exposição for determinada como R\$ 100, os clientes A e B serão incluído na faixa (subcarteira) de 2 unidades de exposição e o cliente C, na faixa 3.

São três os fatores utilizados pelo modelo para cálculo do VaR:

1. Taxas de inadimplência
2. Volatilidades das taxas de inadimplências
3. Taxas de recuperação de créditos inadimplidos

O modelo não considera possíveis relações causais entre os eventos de inadimplência. Cada faixa de exposição tem sua distribuição de eventos de inadimplência modelada por uma distribuição Poisson.

A utilização apenas das taxas de inadimplência produz distribuição de menor representatividade, pois existem fatores que afetam tais taxas de forma semelhante. Por esta razão, o modelo incorpora volatilidades das taxas de inadimplências.

No evento de inadimplência, a instituição incorre em perda fixa, determinada pela sua exposição ajustada pela taxa de recuperação antecipada.

B.4 Bibliografia

[1] Saunders, Anthony, Medindo o risco de crédito, QualityMark/Serasa, Rio de Janeiro, 2000, pg. 35.

[2] Crouhy, Michel; Galai, Dan; e Mark, Robert, “Risk Management”, McGraw-Hill, 2001.

Referências Bibliográficas

[1] *Website* do BIS (“Bank International Settlements”): www.bis.org - Documento “International Convergence of Capital Measurements and Capital Standards”, “June 2004”.

[2] Souza, Enio Bonafé M. de, e Aragão, César, Uma proposta de uso de modelos de simulação para alocação de capital em bancos de atacado, Duarte Jr., Antonio M., e Varga, Gyorgy, organizadores, *em Gestão de risco no Brasil*, Financial Consultoria, 2003, pg. 400.

[3] Fishman, G.S., "Monte Carlo - Concepts, Algorithms and Applications". Springer, 1996

[4] Crouhy, Michel; Galai, Dan; e Mark, Robert, “Risk Management”, McGraw-Hill, 2001.

[5] Vasicek, O., “Credit valuation”, KMV Corporation, “Working Paper”
, 1984.

[6] Merton, R.C. “On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates” “Journal Finance” 29, 1974, 449-470.

[7] Markowitz, H.M., “Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments”, John Wiley, USA, 1959.

[8] Mausser, H. and D. Rosen, “Applying scenario optimization to portfolio credit risk,” *Algo Research Quarterly* 2(2):, 1999, pg. 19–33.

[9] Caouette, John B.; Altman, Edward I.; e Narayanan, Paul, *Gestão de risco de crédito – O Próximo Grande Desafio Financeiro*, Qualitymark/Serasa, 2000, pg. 286.

- [10] Caouette, John B.; Altman, Edward I.; e Narayanan, Paul, Gestão de risco de crédito – O Próximo Grande Desafio Financeiro, Qualitymark/Serasa, 2000, pg. 291.
- [11] Douat, João C., Bases para reflexão sobre a evolução da gestão de risco de crédito no Brasil, Duarte Jr., Antonio M., e Varga, Gyorgy, organizadores, em Gestão de risco no Brasil, Financial Consultoria, 2003, pg. 298.
- [12] Mausser, H. and D. Rosen, “Efficient Risk/Return Frontiers for Credit Risk,” *Algo Research Quarterly* 2(4):,1999, pg.35–48.
- [13] Uryasev, S. and R. Rockafellar, “Optimization of conditional Value-at-Risk,” *Research Report #99-4*, “Center for applied Optimization, University of Florida”,1999.
- [14] Herfindahl, O. C. ,”Concentration in the Steel Industry”, Tese de Doutorado,1950.
- [15] Strang, G. , “Linear Algebra and its Applications, 3rd ed.” Philadelphia, PA: Saunders, 1988.
- [16] Cormen, Thomas H., Clifford, S., Leiserson, Charler E. and Rivest, Ronald L., “Introduction to Algorithms - second edition”. ,MIT Press, 2001.
- [17] Manber, U.,“ Introduction to Algorithms, A Creative Approach”, Addison-Wesley, “Chapter 11”, 1989.
- [18] Garey, M e D, S. Johnson, ”Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness” W.H.Freeman and Company, 1979.
- [19] Goldberg, Marco C. e Luna, Henrique P. L., Otimização Combinatória e Programação Linear, Ed. Campos, 2000, Capítulo 2.
- [20] Chvátal, V. , “Linear Programming” W.H.Freeman and Company, 1983.

- [21] Dantzig, G. B. , “Linear Programming and Extensions” Princeton, New Jersey,1963.
- [22] Perin, C., Introdução a Programação Linear,Unicamp, Coleção IMECC,2001.
- [23] Karmarkar, N. “A new polynomial time algorithm for linear programming”,
Combinatorica 4, 1984, 373-395.
- [24] Mehrotra, S., “On the implementation of a primal-dual interior point method”, SIAM
“Journal on Optimization”, 2, 1992, 575-601.
- [25] Murty, Katta G.,“ Linear Programming”, “The University of Michigan”, “Chapter 8 –
Parametric Linear Programs”, 1983.
- [26]Stern, J. M., Pereira, C. A. B., Ribeiro, C. O., Dunder, C., Nakano, F. e Lauretto, M.
Otimização e Processos Estocásticos Aplicados à Economia e Finanças. IME-USP
- [27] Bazaraa, Mokhtar S., sherali, Hanif D. and Shetty, C. M., “ Nonlinear Programming –
Theory and Algorithms – Second Edition”, John Wiley & Sons, Inc., “ Chapter – 11”,1993.
- [28] Nocedal, J., Wright, Stephen J., “ Numerical Optimization”, Springer, “Chapter – 16”,1999.
- [29] *Website* da Standard & Poor’s: www.standardandpoors.com.
- [30] SPSS: “Profissional Statistics 7.5”, Chicago : SPSS Inc., 1997.
- [31] Dashe Optmization - XPRESS – MP, Realise 14, 2004.