



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Tecnologia



Roberto Roschel Belli

**Esquema de codificação para sistema M-PAM VLC
com escurecimento**

LIMEIRA
2019

Roberto Roschel Belli

**Esquema de codificação para sistema M-PAM VLC com
escurecimento**

Tese apresentada a Faculdade de Tecnologia da
Universidade Estadual de Campinas como
parte dos requisitos para a obtenção do título
de Doutor em Tecnologia, na área de Sistemas
de Informação e Comunicação.

Orientador: Prof. Dr. Cristhof Johann Roosen Runge
Coorientador: Prof. Dr. Jaime Portugheis

Este exemplar corresponde à versão final da
Tese defendida por Roberto Roschel Belli e
orientada pelo Prof. Dr. Cristhof Johann
Roosen Runge.

LIMEIRA
2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Faculdade de Tecnologia
Felipe de Souza Bueno - CRB 8/8577

B417e Belli, Roberto Roschel, 1974-
Esquema de codificação para sistemas M-PAM VLC com escurecimento /
Roberto Roschel Belli. – Limeira, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Cristhof Johann Roosen Runge.
Coorientador: Jaime Portugheis.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de
Tecnologia.

1. Comunicação com luz visível. 2. Comunicações óticas. 3. Capacidade de canal. I. Roosen Runge, Cristhof, 1971-. II. Portugheis, Jaime, 1959-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Tecnologia. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: M-PAM VLC coding scheme with dimming

Palavras-chave em inglês:

Visible light communication

Optical communication

Channel capacity

Área de concentração: Sistemas de Informação e Comunicação

Titulação: Doutor em Tecnologia

Banca examinadora:

Cristhof Johann Roosen Runge [Orientador]

Gustavo Fraidenraich

Manish Sharma

Celso de Almeida

Weiler Alves Finamore

Data de defesa: 31-10-2019

Programa de Pós-Graduação: Tecnologia

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0001-9730-6417>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4636203487884997>

FOLHA DE APROVAÇÃO

Abaixo se apresentam os membros da comissão julgadora da sessão pública de defesa de dissertação para o Título de Doutor em Tecnologia na área de concentração de Sistemas de Informação e Comunicação, a que submeteu o aluno Roberto Roschel Belli, em 31 de outubro de 2019 na Faculdade de Tecnologia- FT/ UNICAMP, em Limeira/SP.

Banca Examinadora:

- **Prof. Dr. Cristhof Johann Roosen Runge**
Presidente da Comissão Julgadora
- **Prof. Dr. Gustavo Fraidenraich**
FEEC/UNICAMP
- **Prof. Dr. Manish Sharma**
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
- **Prof. Dr. Celso de Almeida**
FEEC/UNICAMP
- **Prof. Dr. Weiler Alves Finamore**
Universidade Federal de Juiz de Fora

A ata da defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Limeira, 31 de outubro de 2019

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Cristhof Johann Roosen Runge pela grande ajuda e paciência na realização deste trabalho, com valiosas sugestões e correções.

Ao Professor Dr. Jaime Portugheis que com paciência me ajudou durante o desenvolvimento deste trabalho, com ideias e valiosas sugestões.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Resumo

A utilização de LEDs na iluminação está abrindo espaço para a comunicação devido à grande velocidade de chaveamento possível nestes dispositivos e com isso tivemos o surgimento de um novo campo de estudos chamado de Comunicação com Luz Visível (VLC).

O canal VLC possui restrições que afetam sua capacidade como a necessidade de uma intensidade média constante e também uma possibilidade de ajuste nesta intensidade chamado de escurecimento ("dimming"). Neste trabalho, investigamos inicialmente a capacidade de transmissão de dados no canal VLC, com especial atenção a modulação M-PAM. Fizemos uma otimização dos parâmetros da modulação M-PAM de modo a maximizar a taxa de transmissão da informação e com esta busca encontramos os níveis e probabilidades de envio de cada um dos símbolos M-PAM para diversas condições de ruído e escurecimento.

Numa segunda etapa, desenvolvemos um codificador e decodificador LDPC em que os símbolos M-PAM são gerados com as probabilidades calculadas na otimização, de modo a conseguir um sistema funcional que trabalhe próximo da capacidade do canal. O codificador utiliza um mapeamento entre os bits do codificador LDPC e os símbolos M-PAM. Percebemos no desenvolvimento uma grande influência deste mapeamento na convergência do decodificador. De modo a acelerar a busca pelos melhores mapeamentos, desenvolvemos um método EXIT para o decodificador desenvolvido. Com este método EXIT, conseguimos testar os diversos mapeamentos utilizados de forma mais rápida do que a simulação do sistema completo.

Abstract

The increasing use of LEDs in lighting is making room for communication due to the high switching speed on these devices and with that we had the emergence of a new field of study called Visible Light Communication (VLC).

VLC channel has restrictions that affect its capacity like the need for a constant average intensity and also a possibility of adjustment in this intensity called dimming. In this work, we initially investigated the data transmission capacity on the VLC channel, with special attention to M-PAM modulation. We did an optimization of the M-PAM modulation parameters in order to maximize the transmission rate, and we found the levels and probabilities of sending each of the M-PAM symbols to various noise and dimming conditions.

After that, we developed an LDPC encoder and decoder where M-PAM symbols are generated with the probabilities calculated in previous optimization in order to get a system that works close to the channel capacity. The encoder uses a mapping between encoder LDPC output bits and the M-PAM symbols to generate them with the desired probabilities. We realized a major influence of this mapping on the convergence of the decoder. In order to speed up the search for the best mappings, we developed an EXIT method for the decoder. With this EXIT method, we were able to test several mappings used in a faster way than the complete system simulation.

Lista de Figuras

2.1	Representação dos 4 tipos de canal referentes ao tipo de entrada e saída.	22
2.2	Representação do canal binário simétrico com probabilidade de erro p	22
2.3	O canal Gaussiano de tempo discreto.	23
2.4	Modelo do sistema VLC.	25
2.5	Grafo fator da equação 2.17.	26
2.6	Grafo fator da equação 2.18.	26
2.7	Mensagens entre nó de função e nó de variável.	26
2.8	Diagrama do codificador e decodificador LDPC.	28
2.9	Grafo LDPC referente a Matriz \mathbf{H} referente a equação 2.26.	29
2.10	Grafo fator LDPC referente a função objetivo 2.35.	32
3.1	Exemplo de modulação M-PAM com $M = 4$ níveis.	40
3.2	Função densidade de probabilidade de uma modulação M-PAM equidistantes entre 0 e 1 com $M = 4$ níveis, probabilidades iguais e distintas.	41
3.3	Função densidade de probabilidade de uma modulação M-PAM com parâmetro D-Shift e $\eta = 1$, para fator de escurecimento de 0,25 e 0,75.	42
3.4	Níveis em função de η e do fator de escurecimento ξ com $M = 4$ níveis. O nível de x_1 nos dois gráficos está constantemente em 0.	45
3.5	Resultado da otimização do parâmetro η em função da qualidade do canal em dB para modulações M-PAM de 2 níveis à 6 níveis com fator de escurecimento de $\xi = 0, 2$	46
3.6	Capacidade do canal VLC em função da qualidade do canal S_{dB} com o parâmetro η otimizado com fator de escurecimento de $\xi = 0, 2$	47
3.7	Comparação da capacidade do VLC com otimização do parâmetro η e probabilidades (4-PAM otimizado) com o sistema otimizando apenas probabilidades com $\eta = 0$ (4-PAM igualmente espaçado) com fator de escurecimento de $\xi = 0, 2$	48
3.8	Número de símbolos da modulação M-PAM com otimização $\eta \cdot D_{Shift}$ que maximiza a taxa de transmissão no canal VLC com fator de escurecimento de 0,05.	49
3.9	Número de símbolos da modulação M-PAM com otimização $\eta \cdot D_{Shift}$ que maximiza a taxa de transmissão no canal VLC com fator de escurecimento de 0,2.	49
3.10	Número de símbolos da modulação M-PAM com otimização $\eta \cdot D_{Shift}$ que maximiza a taxa de transmissão no canal VLC com fator de escurecimento de 0,45.	50
3.11	Otimização completa dos níveis e probabilidades. Qualidade do canal de 14 dB e 17 dB. Nos gráficos de níveis e probabilidades, as curvas com mesmo estilo correspondem ao mesmo símbolo M-PAM.	51

3.12	Otimização completa dos níveis e probabilidades. Qualidade do canal de 10 dB e 12 dB. Nos gráficos de níveis e probabilidades, as curvas com mesmo estilo correspondem ao mesmo símbolo M-PAM.	52
3.13	Faixas de qualidade de sinal (S_{dB}) com valores $\eta = 0,05$ e $\eta = 0,95$ resultantes da otimização $\eta \cdot D_{shift}$	53
3.14	Comparação entre os níveis obtidos com $\eta = 1$ (V1) e os níveis obtidos com otimização de níveis e probabilidades (otimização completa) (V2) para qualidade de canal de $S_{dB} = 17 dB$	54
3.15	Comparação entre os níveis obtidos com $\eta = 1$ (V1) e os níveis obtidos com otimização de níveis e probabilidades (V2) para $SNR = 30 dB$	55
3.16	Cenário de qualidade de canal média. Comparação entre os níveis obtidos com otimização ηD_{shift} (traços contínuos) e os níveis obtidos com otimização de níveis e probabilidades (traços pontilhados) para $SNR = 13 dB$ e modulação 4-PAM.	56
3.17	Cenário de qualidade de canal baixa. Comparação entre os níveis obtidos com otimização ηD_{shift} (traços contínuos) e os níveis obtidos com otimização de níveis e probabilidades (traços pontilhados) para $SNR = 10 dB$ e modulação 4-PAM.	57
4.1	Diagrama do codificador utilizado no artigo [12].	58
4.2	Histograma dos pesos das palavras código que saem do codificador Polar. Gráfico retirado do artigo [5].	59
4.3	Histograma dos pesos das palavras código de saída do codificador LDPC. Histograma de 300.000 simulações, com intervalo de 10 bits.	60
4.4	Histograma do número de blocos de saída do codificador para a intensidade média gerada por cada um dos blocos e com fator de escurecimento de $\xi = 0,047$. Na figura da esquerda temos o gráfico em toda a faixa de intensidade luminosa média, de 0 até 1. Na figura da direita fizemos uma ampliação na faixa de intensidade luminosa média de 0,044 até 0,05.	61
4.5	Codificador e mapeador não uniforme.	62
4.6	Sistema completo VLC, com codificador, canal e decodificador.	63
4.7	Grafo do decodificador.	67
4.8	Simulação com vários mapeamentos.	72
4.9	Resultado da simulação dos 3 melhores e 2 piores mapeamentos.	73
5.1	Diagrama com as mensagens do decodificador LDPC.	74
5.2	Troca de informações entre os blocos do decodificador LDPC.	75
5.3	Exemplo de um gráfico EXIT, mostrando convergência do algoritmo.	76
5.4	Grafo do decodificador utilizado com suas mensagens entre os nós.	79
5.5	Diagrama do decodificador utilizado com suas mensagens entre os nós.	80
5.6	Gráfico do valor da função $f_{D \rightarrow B}$ calculado em $I_{B \rightarrow D} = 0,2$ versus o valor de qualidade de canal onde a simulação da taxa de erro cai para menos de 10^{-5} . Cada ponto corresponde a um mapeamento diferente utilizado nas simulações da figura 4.8.	81
5.7	Gráfico do nível em dB do EXIT chart em que as funções f_{Demod} e f_{bits1}^{-1} se tocam versus a qualidade do canal onde a simulação da taxa de erro cai para menos de 10^{-5} . Do mesmo modo que no gráfico 5.6, cada ponto representa um mapeamento.	82

5.8	Mesmo resultado do gráfico da figura 5.7 mas retirando os pontos de não convergência.	83
-----	---	----

Lista de Tabelas

4.1	Distribuição do mapeamento	62
4.2	Um possível mapeamento	63
4.3	Tabela com os 4 melhores e 2 piores mapeamentos simulados.	73

Lista de Símbolos

- $H(X)$: Entropia da variável aleatória discreta X .
- $h(X)$: Entropia diferencial da variável aleatória contínua X .
- $H(X, Y)$: Entropia conjunta entre as variáveis aleatórias X e Y .
- $I(X, Y)$: Informação mútua entre as variáveis aleatórias X e Y .
- Z : ruído aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão σ .
- X : Variável aleatória descrevendo o sinal transmitido por um canal.
- x_i : o nível de um dos M símbolos de uma modulação M-PAM, $i \in 1, \dots, M$
- s_i : Sinal transmitido por um canal no intervalo de tempo i . No caso de modulação M-PAM, o valor de s_i tem que ser um dos valores x_1, \dots, x_m . No caso geral, o valor de s_i tem distribuição da variável aleatória X , sendo uma das suas realizações.
- Y : Variável aleatória descrevendo o sinal recebido de um canal.
- R : Ganho do canal.
- Z : Variável aleatória representando o ruído adicionado ao sinal transmitido.
- C : Capacidade de um canal. Neste trabalho, utilizaremos como unidade bits.
- $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_K\}^T$: Vetor coluna com os K bits a serem transmitidos antes de passarem pelo codificador. K bits antes do codificador serão codificados em N bits.
- $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_N$: Vetor coluna com os N bits na saída do codificador.
- $\mu_{t \rightarrow f_n}(t_i)$: Mensagem de um nó de variável t até um nó de função f_n calculada no valor t_i .
- $\mu_{f_n \rightarrow t}(t_i)$: Mensagem de um nó de função f_n até um nó de variável t calculada no valor t_i .
- ξ : Fator de escurecimento (fator de "Dimming").
- P : Potência máxima do LED.
- P_m : Potência máxima média.
- S_{dB} : Qualidade do canal em dB.
- p_i : Probabilidade de ser enviado o símbolo M-PAM x_i .

- D_{Shift} : Valor de deslocamento dos símbolos M-PAM que deixa os símbolos M-PAM simetricamente distribuídos ao redor do valor do escurecimento ξ desejado.
- η : Peso colocado no parâmetro D_{Shift} , com $\eta = 0$, temos os símbolos M-PAM sempre igualmente distribuídos entre 0 e P . E com $\eta = 1$ temos os símbolos distribuídos com o parâmetro D_{Shift} .
- $[eq]$: Função de Iverson, tem o valor 1 quando eq é verdadeiro, e 0 quando é falso.
- $L(f(b)) = \log\left(\frac{f(0)}{f(1)}\right)$: logaritmo da razão de verossimilhança ("Log-likelihood ratio").

Sumário

1	Introdução	16
2	Conceitos Gerais	20
2.1	Conceitos Básicos de Teoria da Informação	20
2.2	Capacidade de Canal	21
2.3	Canal Gaussiano	23
2.4	Conceitos de Comunicação com Luz Visível	24
2.5	Grafo fatores e o Algoritmo soma produto	25
2.6	Introdução ao codificador e decodificador LDPC	27
2.6.1	Decodificação	30
3	Capacidade do Canal VLC Utilizando Modulações M-PAM	36
3.1	Modelo do Canal VLC	36
3.2	Capacidade do Canal VLC	37
3.2.1	Simetria na Capacidade do Canal VLC em relação ao Fator de Es- curecimento	38
3.2.2	Limitantes na Capacidade do Canal VLC	38
3.3	Modulação M-PAM	40
3.3.1	Capacidade da Modulação M-PAM para um Canal Gaussiano	42
3.4	Otimização da Capacidade do Canal VLC utilizando M-PAM	44
3.4.1	Otimização Utilizando o $\eta \cdot D_{shift}$	44
3.4.2	Otimização completa	45
3.5	Resultados obtidos com as otimizações	45
3.5.1	Otimizações do parâmetro η	45
3.5.2	Otimização completa	50
3.5.3	Comparação da otimização completa com a otimização com parâ- metro η	52
4	Um Esquema de Codificação de Canal para VLC com Escurecimento	58
4.1	Codificador	60
4.2	Dedução do algoritmo do decodificador	63
4.3	Aplicação do algoritmo Soma Produto	66
4.3.1	Atualizações do LDPC	69
4.3.2	Passos do algoritmo de decodificação	70
4.4	Parâmetros da simulação	71
5	Análise EXIT da Implementação do Algoritmo de Decodificação	74
5.1	Introdução ao método EXIT	74
5.2	Aplicação do método EXIT no algoritmo de decodificação	78

6 Conclusão	84
Referências Bibliográficas	86
A Descrição dos Códigos Utilizados na Tese	89

Capítulo 1

Introdução

Os diodos emissores de luz (LEDs) começaram a ser utilizados em grande escala na iluminação devido à sua grande eficiência na conversão de energia elétrica para luz visível e ao seu baixo custo e longa duração [8], [23]. As grandes melhorias obtidas com a tecnologia permitiram que os LEDs usados para iluminação modulassem sua intensidade luminosa em frequências muito altas, possibilitando seu uso para transferência de informação em taxas altas e ao mesmo tempo não atrapalhando a função de iluminação, dado que a modulação de intensidade em frequências altas não é percebida pelo olho humano. O uso da iluminação para transferência de informação é chamado de comunicação com luz visível (VLC, “Visible Light Communication”) [25].

Outra motivação para o uso do VLC é o grande aumento na necessidade de banda que está ocorrendo devido ao grande número de aparelhos sem fio (telefones, tablets) existentes hoje, como, por exemplo, para os serviços de streaming. Esta grande demanda por tráfego leva a um grande uso do espectro de rádio que é limitado, levando a necessidade de novas tecnologias, e a comunicação com luz visível atende estas necessidades [34].

A comunicação por luz visível possui vantagens [11] sobre a tradicional comunicação por rádio frequência como ser de uso não licenciado, podendo assim ser utilizada no lugar da já bastante ocupada frequência de 2.4 GHz. Pelo fato da luz não passar pelas paredes, comunicações em um ambiente não interferem nos ambientes ao lado, permitindo o reuso do espectro de luz, o que é diferente do caso de radiofrequência, quando há interferência. Esta mesma característica de isolamento permite um grande aumento na segurança das comunicações tornando muito difícil espionar comunicações em ambientes fechados. Também permite que a comunicação com luz visível possa ser utilizada em ambientes onde radiofrequências não são toleradas e podem provocar interferências, como hospitais, aviões, etc.

Um sistema que utilize a luz visível para transmissão da informação, não pode afetar a percepção da iluminação, a assim não pode causar alterações no nível luminoso percebido pelos ocupantes do ambiente. De modo a conseguir isso, a modulação utilizada para transmitir dados pela luz, precisa garantir que a potência luminosa média não varie com o tempo e não apresente variações de intensidade com frequências inferiores a aproximadamente 200 Hz. Variações abaixo desta frequência podem ser percebidas pelo olho humano e causar desconforto.

Um recurso muito interessante na iluminação é a possibilidade de poder alterar a in-

intensidade luminosa média ("dimming", fator de escurecimento) [34], permitindo economia de luz em momentos de menor necessidade de iluminação e o inverso, quando mais iluminação é necessária. A necessidade de suportar escurecimento leva a novas restrições associadas ao uso da tecnologia VLC.

Uma outra restrição comum que encontramos é a potência máxima ou intensidade máxima suportada pelo LED [32]. Esta restrição do LED coloca um limite máximo na potência levando a novos resultados.

Diversas modulações foram propostas para sistemas VLC, atendendo às suas restrições. Várias destas modulações, como a VOOK ("Variable On-Off keying") baseada na modulação OOK ("On-Off Keying"), VPPM ("Variable Pulse Position Modulation") e MPPM ("Multiple PPM") apresentadas em [17], [16] sofrem uma redução na capacidade por uso do canal, pois utilizam intervalos de tempo de transmissão apenas para ajuste do fator de escurecimento. Nestes intervalos de tempo é transmitido forçadamente 1 ou 0, de modo a garantir o fator de escurecimento desejado. No caso do MPPM, mesmo com esta requisição, consegue-se ainda uma maior capacidade de uso do canal. Porém esta é de apenas 1 bit por uso de canal com a intensidade média igual a metade da potência máxima instantânea, reduzindo para valores menores quando se muda a intensidade média (dimming) para mais ou para menos. Estes resultados, no entanto, não medem o efeito da relação sinal ruído na capacidade do canal. No artigo [22], um novo esquema é proposto como melhoria ao MPPM, chamado de MPPM-PSM, com o PSM significando modulação por espaçamento de pulso (Pulse Spacing Modulation).

Outra preocupação é quanto a se evitar a percepção da cintilação na iluminação. Alguns estudos e propostas de codificação foram feitas na literatura, como em [5], onde é proposto um sistema utilizando códigos polares livres de cintilação. No artigo [20] é utilizado um algoritmo codificador que garante uma grande redução da cintilação, e permite um ajuste entre o desempenho do codificador e a redução da cintilação. Contudo, ainda neste contexto estes dois artigos estão utilizando modulação do tipo OOK que sofrem limitação de capacidade, conforme comentado, e que poderá ser melhor compreendido quando comparado com modulações M-PAM ("M levels Pulse Amplitude Modulation" ou modulação por amplitude de pulso com M diferentes níveis de intensidade).

Uma pergunta interessante é qual a capacidade máxima que podemos obter em um canal VLC, e como ela seria atingida. No artigo [28], mostra-se que para um canal com restrições de potência máxima a melhor distribuição de probabilidades do transmissor é discreta, considerando alguns níveis discretos de transmissão. O tipo de modulação que atende este requisito é a M-PAM, que possui M níveis de transmissão possíveis. O artigo [15] deduz limites máximos e mínimos para a capacidade de canais com restrição próxima a utilizada no VLC, e como será visto, pode ser utilizado para o caso VLC e com estes resultados podemos verificar o quão próximos estamos do limite máximo da capacidade.

A análise da capacidade de canal com modulações M-PAM deve levar a melhor utilização do canal VLC, pois esta modulação possui níveis discretos e podemos variar a quantidades destes níveis, seus valores e suas probabilidades. Um problema em aberto é descobrir quantos níveis são necessários e o valor destes níveis e das probabilidades de transmissão de cada símbolo que maximizam a taxa, chegando o mais perto possível da capacidade do canal. Os artigos [1], [33], [30], [32] estudaram modos de se definir os

níveis e probabilidades para conseguir uma boa capacidade de transmissão. O primeiro artigo [1] faz a análise da capacidade de canal, utilizando o método de "inverse source code" utilizando modulação OOK e M-PAM. Neste caso é utilizado a modulação M-PAM com os níveis M-PAM igualmente espaçados e variando as probabilidades dos símbolos para se chegar no fator de escurecimento ("Dimming"). Além disso é introduzido o conceito de escurecimento analógico ("Analog Dimming") onde se varia os níveis M-PAM, de modo a se chegar no fator de escurecimento com as probabilidades iguais em todos os símbolos, maximizando a entropia da fonte. No segundo e terceiro artigo ([33] e [30]), o método de escurecimento analógico é também utilizado, e uma variação dele é introduzida, consistindo em uma mistura da modulação com os níveis igualmente espaçados variando de zero até a potência máxima e da modulação com escurecimento analógico, onde o fator de escurecimento é conseguido apenas pela variação dos níveis M-PAM com as probabilidades iguais. No último artigo [32], uma análise similar é feita, mas considerando as não linearidades do diodo emissor de luz.

Nos artigos que analisaram a modulação M-PAM, as otimizações feitas levaram em conta os níveis dos símbolos M-PAM, mas sempre mantendo-os equidistantes, nunca uma otimização variando os níveis M-PAM livremente foi efetuada. No artigo [1] é feita uma otimização considerando apenas a entropia da fonte, e os níveis M-PAM equidistantes. Nestas otimizações, não foram considerados o canal e o ruído existente no canal. Em [33] e [30] é feita uma otimização conjunta entre uma variação dos níveis (mas ainda mantendo eles equidistantes entre si) e a otimização das probabilidades dos símbolos leva em conta apenas a entropia da fonte, e não a informação mútua. No trabalho aqui desenvolvido, fizemos uma otimização completa deixando livres os níveis e as probabilidades e utilizamos um algoritmo de otimização não linear de modo a procurar a capacidade. Comparamos os resultados obtidos com os resultados apresentados na literatura e mostramos que através desta abordagem, é obtido um pequeno ganho de capacidade.

De forma a implementar um sistema utilizando a abordagem proposta, faz-se necessário um método de codificação capaz de gerar símbolos M-PAM com as probabilidades calculadas, e ao mesmo tempo adicionar capacidade de correção de erro. Como segunda parte do trabalho foi proposto um método de codificação utilizando LDPC que consegue gerar uma aproximação das probabilidades necessárias e ainda adicionar capacidade de correção. Simulações seguindo os resultados da capacidade de canal foram feitas e um sistema funcional foi apresentado.

No capítulo 2, apresentamos os conceitos gerais que são utilizados no decorrer da tese, com uma introdução aos conceitos básicos de teoria da informação seguido dos conceitos de capacidade de canal e depois capacidade do canal Gaussiano. Em seguida, teremos uma introdução a comunicação com luz visível e finalizando uma introdução ao codificador e decodificador LDPC. No capítulo 3, apresentamos a teoria do canal VLC, bem como os estudos de capacidade de canal com as limitações impostas pelo VLC. São apresentados os resultados da otimização de taxa para modulações M-PAM, onde é feita uma otimização completa dos níveis e probabilidades dos M símbolos M-PAM. É feita uma definição para cada número M de símbolos do que chamamos de relação sinal ruído alta, baixa e média. E para cada uma destas faixas de relação sinal ruído são descritos os resultados, no capítulo 4, mostramos a implementação de um sistema de codificação e decodificação

para a comunicação sobre um canal VLC, de modo a chegar próximo da taxa conseguida nas otimizações mostradas no capítulo 3. No capítulo 5, é proposto um estudo utilizando o método conhecido como EXIT Charts é proposto para o sistema apresentado no capítulo 4. No capítulo 6, temos a conclusão do trabalho.

Capítulo 2

Conceitos Gerais

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos gerais que serão utilizados nos demais capítulos na apresentação dos resultados obtidos. Iniciaremos com uma breve introdução da teoria da informação para em seguida apresentar os cálculos de capacidade de canal e capacidade de um canal Gaussiano. Finalizaremos o capítulo com uma introdução ao codificador e decodificador LDPC ("Low Density Parity Check").

2.1 Conceitos Básicos de Teoria da Informação

Conforme é apresentado em [7], as duas questões fundamentais respondidas pela teoria da informação são: qual a máxima compressão de dados que se pode conseguir sobre um conjunto de dados, onde a resposta é a sua entropia, e qual a máxima taxa de transmissão de informação que podemos enviar por um canal de comunicação, onde a resposta é a capacidade do canal.

Como primeiro conceito da teoria da informação, temos a entropia de uma variável aleatória. Esta grandeza mede a quantidade de informação presente em uma realização desta variável, ou melhor, a incerteza desta variável aleatória. Quando uma variável aleatória não contém nenhuma incerteza, como por exemplo, jogar um dado onde todos os lados tem o mesmo valor, a entropia é zero. Como unidades comuns temos o bit e o nat. Para uma variável aleatória X discreta com os valores x_1, \dots, x_N a entropia é dada por:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^N p_X(x_i) \cdot \log_b(p_X(x_i)) = E \left[\log_b \left(\frac{1}{p_X(x)} \right) \right] \quad (2.1)$$

onde para $b = 2$ temos a entropia em bits, para $b = e$ em nats. Temos que $p_X(x_i)$ é a probabilidade de x ser igual a x_i . Para uma variável aleatória discreta com N possíveis valores a entropia máxima é alcançada quando as probabilidades de cada um destes valores são idênticas.

Para uma variável continua, não existe uma definição de entropia direta, pois aplicar a fórmula discreta acima, através da técnica de limites, levaria a resultados que tendem ao infinito. Assim definimos, para este caso, a entropia diferencial que tem a seguinte fórmula:

$$h(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot \log_b(f_X(x)) \cdot dx \quad (2.2)$$

onde temos que $f_X(x)$ é a função densidade de probabilidade da variável aleatória X .

Considerando agora um par de variáveis aleatórias podemos definir, utilizando o mesmo conceito, a entropia conjunta e podemos defini-la como:

$$H(X, Y) = - \sum_X \sum_Y p_{X,Y}(x, y) \cdot \log_b(p_{X,Y}(x, y)) = E \left[\log_b \left(\frac{1}{p_{X,Y}(x, y)} \right) \right] \quad (2.3)$$

onde $p_{X,Y}(x, y)$ é a probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y . Podemos definir também a entropia condicional como:

$$H(X|Y) = - \sum_X \sum_Y p_{X,Y}(x, y) \cdot \log_b(p_{X|Y}(x|y)). \quad (2.4)$$

onde $p_{X|Y}(x|y)$ é a probabilidade condicional da variável aleatória X dado que sabemos o valor da variável aleatória Y .

Um outro conceito de fundamental importância, principalmente para o cálculo de capacidade de canal, é a informação mútua. Esta grandeza mede o quanto descobrimos de uma realização da variável aleatória Y quando sabemos o resultado da realização de X . Também pode ser interpretado como a diminuição da incerteza de Y ao saber a realização de X . O valor desta grandeza é zero quando as duas variáveis são independentes. A definição da informação mútua é dada por:

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) = - \sum_X \sum_Y p_{X,Y}(x, y) \cdot \log_b \left(\frac{p_{X|Y}(x|y)}{p_X(x) \cdot p_Y(y)} \right) \quad (2.5)$$

Para o caso de variáveis aleatórias contínuas a definição é dada por:

$$I(X; Y) = \int_X \int_Y f_{X,Y}(x, y) \cdot \log_b \left(\frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x) \cdot f_Y(y)} \right) \quad (2.6)$$

2.2 Capacidade de Canal

Para comunicar informação de um ponto A para um ponto B, precisamos que A envie uma mensagem para B utilizando algum meio, utilizando por exemplo ondas eletromagnéticas para a transmissão, e que B receba este sinal e consiga obter uma boa estimativa do que A transmitiu. Como foi utilizado um meio físico, pode ocorrer que a estimativa feita por B contenha erros devido aos ruídos existentes no meio. Chamaremos este meio de canal de comunicação.

Podemos representar matematicamente este processo de transmissão de mensagens como uma probabilidade condicional, onde a variável aleatória representando o sinal recebido do canal é condicionada a variável aleatória do sinal transmitido. Considerando isso, podemos ter canais nos quais o sinal transmitido é discreto ou contínuo e o sinal recebido é discreto ou contínuo. Na figura 2.1, temos uma representação destes tipos de

canais. Do lado esquerdo de cada um dos 4 canais temos a variável aleatória X representando o alfabeto de símbolos da fonte ou transmissor com as respectivas probabilidades de transmissão de cada símbolo, e do lado direito a variável aleatória Y com o alfabeto dos possíveis valores recebidos do canal. No caso de valores recebidos discretos o canal é representado pela probabilidade condicional $p_{Y|X}(y|x)$ onde para cada sinal x_i transmitido (para o caso contínuo ou discreto) temos que a probabilidade de receber o sinal y é $p_{Y|X}(y|x_i)$. No caso do sinal recebido do canal ser contínuo, ao invés de probabilidades, lidamos com função de densidade de probabilidade $f_{Y|X}(y|x)$.

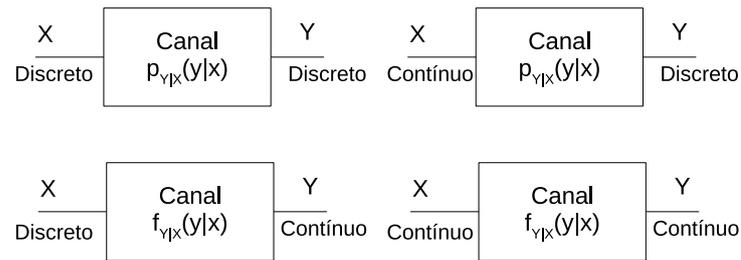


Figura 2.1: Representação dos 4 tipos de canal referentes ao tipo de entrada e saída.

Uma outra definição importante sobre o canal é se ele é com memória ou sem memória. Um canal com memória significa que a sua saída y_i no instante i não só depende do valor presente na entrada do canal mas possui dependência também de valores anteriores a i , enquanto que em um canal sem memória a saída y_i depende apenas da entrada x_i . Existem métodos de processamento de sinal de modo a tirar esta dependência entre diversas entradas em uma saída, assim o mais comum é analisarmos canais sem memória. Assim, daqui por diante falaremos apenas sobre canais sem memória.

A capacidade de um canal é dada pela seguinte equação [7]:

$$C = \max_{p_X(x)} I(X; Y) \quad (2.7)$$

onde o máximo é em relação a todas as distribuições de probabilidades $p_X(x)$ e no caso contínuo consideramos as densidades de probabilidades $f_X(x)$. Estamos, deste modo, maximizando a informação mútua variando a distribuição de probabilidades da entrada. O canal é fixo e não pode ser alterado para maximizar a capacidade.

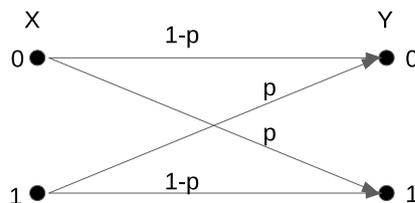


Figura 2.2: Representação do canal binário simétrico com probabilidade de erro p .

Um exemplo de canal discreto pode ser visto na figura 2.2. Este canal é chamado normalmente de canal binário simétrico. Os valores de $x \in \{0, 1\}$ e $y \in \{0, 1\}$. Neste canal, a informação mútua é dada por:

$$I(X; Y) = H(Y) - h(p) \quad (2.8)$$

onde $h(p) = -p \cdot \log_b(p) - (1-p) \cdot \log_b(1-p)$ e $H(Y)$ é a entropia da variável aleatória discreta Y que é máxima quando a distribuição de Y é uniforme, e tem valor máximo de um. Assim podemos escrever que:

$$I(X; Y) = H(Y) - h(p) \leq 1 - h(p) \quad (2.9)$$

e assim, como a capacidade do canal é a máxima informação mútua variando as distribuições de entrada, temos que a capacidade deste canal é dada por:

$$C = 1 - h(p). \quad (2.10)$$

2.3 Canal Gaussiano

O canal aditivo Gaussiano de tempo discreto está representado na figura 2.3. Neste canal, a cada instante i um sinal x_i é transmitido. Ao sinal transmitido é somado um ruído z_i descrito como uma variável aleatória Gaussiana de média nula e variância σ^2 e assim o sinal recebido y_i é definido como:

$$y_i = x_i + z_i. \quad (2.11)$$

Outro ponto importante é que o ruído aleatório z_i é modelado como uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas). Também consideramos comumente uma limitação na potência média do sinal x_i , sendo o mais comum, uma limitação média da potência do sinal que podemos descrever como

$$E[X^2] \leq P. \quad (2.12)$$

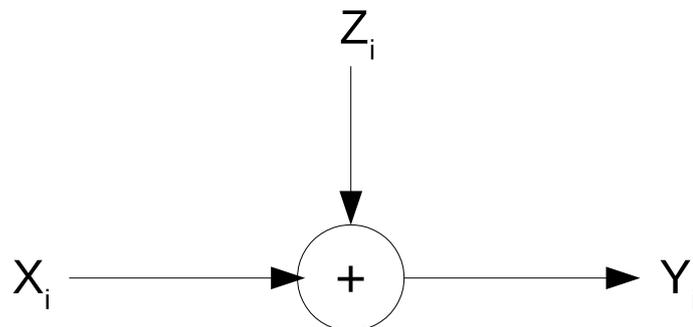


Figura 2.3: O canal Gaussiano de tempo discreto.

Um uso sub-ótimo deste canal pode ser feito transmitindo um sinal binário que contém dois valores possíveis, e podemos transmitir cada um destes valores através dos níveis \sqrt{P} e $-\sqrt{P}$. Considerando estes níveis e na recepção considerando a estimativa do sinal transmitido como sendo o sinal do valor recebido, temos que a probabilidade de erro de um receptor de distância mínima é dada por:

$$P_e = 1 - Q\left(\sqrt{\frac{P}{\sigma^2}}\right) \quad (2.13)$$

$Q(x)$ é a função de probabilidade normal cumulativa dada pela equação:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (2.14)$$

A decisão do receptor de distância mínima transforma o canal aditivo Gaussiano num canal binário simétrico com p igual probabilidade de troca do sinal binário enviado P_e . Mas a questão que fica é qual a capacidade que podemos transmitir em um canal Gaussiano, e neste canal com restrição de potência média, qual seria a distribuição da fonte que chegaria a esta capacidade.

Em [7], é demonstrado que a capacidade de um canal Gaussiano é dada por:

$$C_{Gaussiano} = \max_{E[x^2] \leq P} I(X; Y) = \frac{1}{2} \cdot \log\left(1 + \frac{P}{\sigma^2}\right) \text{ bits por uso do canal} \quad (2.15)$$

e a densidade de probabilidade da fonte que permite esta capacidade de canal é uma Gaussiana com variância $\sigma_X^2 = P$.

Como veremos mais à frente, iremos modelar o canal VLC como sendo um canal Gaussiano com algumas restrições a mais, e estas restrições tornam a capacidade do canal menor quando comparado ao canal Gaussiano aqui apresentado, do mesmo modo que a distribuição que permite esta capacidade não será mais Gaussiana.

2.4 Conceitos de Comunicação com Luz Visível

Podemos definir a comunicação com a luz visível de um modo muito simples como sendo a comunicação entre um transmissor e receptor utilizando a luz no espectro visível ou de comprimento de onda entre 750 nm (400 THz) e 400 nm (750 THz) como meio de transmissão de informação. O primeiro sistema a utilizar a luz visível para a comunicação foi o "photophone"[2] desenvolvido por Alexandre Graham Bell em 1880 que consistia em fazer vibrar com a voz um espelho que refletia a luz solar para um receptor distante onde um cristal de selênio sensível a luz transformava a variação da luz do sol causada pela vibração do espelho em som. Apesar desta invenção antiga, não houve avanços na comunicação com luz visível, até recentemente, com o advento dos LEDs e melhores sensores.

Os sistemas de comunicação óptica com luz visível, propostos atualmente, utilizam como fonte de luz um diodo emissor de luz que permite modular a intensidade da luz transmitida proporcionalmente a corrente elétrica aplicada nele. Diferentemente dos sistemas de rádio frequência (RF), temos que a intensidade (potência) do sinal transmitido é proporcional a corrente elétrica, e não ao quadrado dela como nos sistemas de RF. Podemos modelar este sistema de comunicação como visto na figura 2.4, onde x_i é o sinal transmitido como corrente para o diodo que converterá esta corrente em intensidade

luminosa. Esta intensidade será recebida pelo fotodiodo que converterá o sinal luminoso recebido em sinal elétrico y_i onde teremos também a inclusão de um ruído, que no modelo utilizado é considerado independente do sinal recebido. Matematicamente podemos modelar este sistema como:

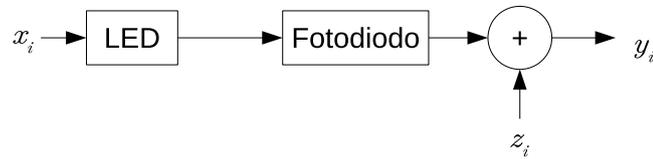


Figura 2.4: Modelo do sistema VLC.

$$y_i = R \cdot x_i + z_i \quad (2.16)$$

onde o z_i é um ruído Gaussiano independente de x_i e R é um valor constante que representa o ganho do sistema LED, fotodiodo e meio de propagação da luz.

O ruído modelado por z_i tem mais de uma origem. As principais fontes deste ruído são o ruído térmico no fotodiodo e o "shot noise" provocado pelas demais fontes de luz presentes no ambiente [13]. O ruído térmico é modelado como um ruído Gaussiano independente do sinal. No caso do "shot-noise" o ruído segue a distribuição de Poisson, mas como a quantidade de fótons por bit transmitido é alta, a distribuição de Poisson tende a uma Gaussiana, e é independente da fonte do sinal. A soma destas duas variáveis aleatórias pode ser modelada como uma variável Gaussiana.

Na equação 2.16, é considerado um ganho fixo R que não varia com a frequência, considera-se este ganho constante no modelo que será usado [13].

2.5 Grafo fatores e o Algoritmo soma produto

No artigo [14], é mostrado a utilização de grafo fatores para representar funções de várias variáveis que podem ser expressas como o produto de várias funções e cada uma dependendo de um subconjunto das variáveis da função original. Também é mostrado neste mesmo artigo uma forma de se calcular o valor da função utilizando o grafo fator, conhecido como algoritmo de soma produto. Iremos aqui mostrar de forma breve como construir o grafo fator em função de uma função geradora. E dado o grafo, como o algoritmo do grafo fator pode ser aplicado para calcular o valor da função.

Podemos considerar uma função $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ e considerarmos que ela pode ser fatorada conforme mostrado abaixo:

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = g_1(x_1, x_2, x_5) \cdot g_2(x_4, x_5) \cdot g_3(x_2, x_3) \quad (2.17)$$

O grafo fator que representaria esta função fatorada seria dado pela figura 2.5.

A construção do grafo fator é feita ligando os nós das variáveis aos nós das funções que dependem desta variável. Assim temos que o nó de função g_1 está ligado aos nós de variáveis $\{x_1, x_2, x_5\}$, g_2 ligados aos nós de variáveis $\{x_4, x_5\}$ e g_3 ligados aos nós de

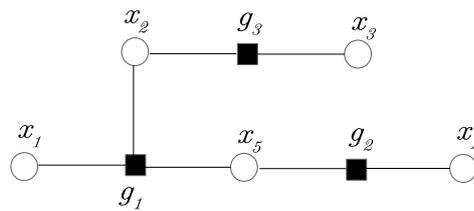


Figura 2.5: Grafo fator da equação 2.17.

variáveis $\{x_2, x_3\}$. Neste caso, podemos ver que o grafo resultante não tem laços, ou caminhos fechados. Na função abaixo, o grafo resultante possui caminhos fechados.

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_1(x_1, x_2) \cdot g_2(x_2, x_3) \cdot g_3(x_3, x_4) \cdot g_4(x_4, x_1) \tag{2.18}$$

O grafo resultante desta função pode ser visto na figura 2.6 onde podemos ver que ele se fecha em um laço. A aplicação do algoritmo soma produto em grafos desta forma, com laços, gera resultados aproximados.

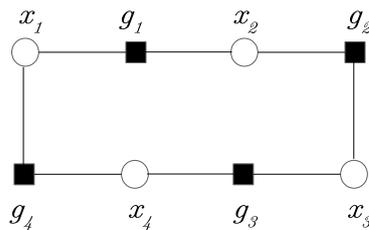


Figura 2.6: Grafo fator da equação 2.18.

A aplicação no grafo fator do algoritmo soma produto pode ser utilizado para calcular uma função marginal, como por exemplo, podemos considerar que a função da equação 2.17 se refere a um problema real e estamos interessados na sua função marginal

$$p(x_1|\mathbf{y}) = \sum_{x_2} \sum_{x_3} \sum_{x_4} \sum_{x_5} g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \tag{2.19}$$

Como mostrado em [14], a aplicação do algoritmo soma produto no grafo da figura 2.5 pode ser utilizado para resolver esse problema.

Em um nó de variável de extremidade, como no caso dos valores y_i na figura 2.7, ele envia uma mensagem para o nó adjacente com o seu valor. Caso o nó de extremidade seja de função, ele envia a sua própria função.

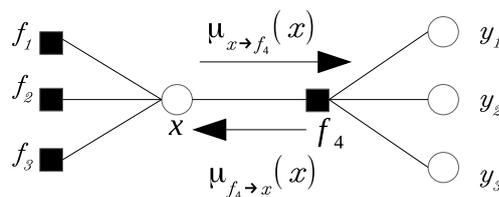


Figura 2.7: Mensagens entre nó de função e nó de variável.

Um nó de variável x_k envia para o nó de função f_j (conectado a ele) o produto das mensagens vindas dos nós conectados a ele, exceto do nó f_j para onde a mensagem será enviada.

Assim temos que:

$$\mu_{x \rightarrow f_n}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f_n\}} \mu_{h \rightarrow x}(x) \quad (2.20)$$

onde $n(x) \setminus \{f_n\}$ indica todos os nós de função ligados ao nó de variável x menos o nó de função f_n . Como exemplo, aplicando esta fórmula para determinar $\mu_{x \rightarrow f_4}(x)$, temos que:

$$\mu_{x \rightarrow f_4}(x) = \prod_{h \in \{f_1, f_2, f_3\}} \mu_{h \rightarrow x}(x) \quad (2.21)$$

Em um nó de função f o cálculo é o seguinte:

1. Calcula-se o produto da função que o nó representa pelas mensagens recebidas dos demais nós conectados, exceto o nó destino.
2. Em seguida, o produto gerado na etapa anterior é submetido ao somatório $\sum_{\sim\{x\}}$ (que significa o somatório para todas as variáveis conectadas a esta função menos a variável x , no caso da figura 2.7 $\{y_1, y_2, y_3\}$) para a obtenção da mensagem final de saída.

Assim podemos escrever:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim\{x\}} \left(f(x, y_1, y_2, \dots) \prod_{y_i \in n(f)} \mu_{y_i \rightarrow f}(y_i) \right) \quad (2.22)$$

Este algoritmo chega a solução exata do problema quando o grafo não apresenta ciclos. No caso do decodificador LDPC, bem como da implementação do decodificador na seção 4.2, podemos ver a existência de ciclos (laços fechados) nos grafos. O projeto destes decodificadores torna-os mais eficientes quando se procura minimizar a existência destes laços [19].

2.6 Introdução ao codificador e decodificador LDPC

Sistemas de comunicação são suscetíveis a erros. De modo a conseguir uma comunicação com menos erros, podemos diminuir a taxa de transmissão aumentando assim a energia por bit transmitido e minimizando a taxa de erro. Deste modo, estaríamos sub-utilizando o canal de comunicação com uma taxa de transmissão muito inferior a capacidade dele. Para aproximar a taxa de transmissão útil do sistema a capacidade do canal, é necessário a utilização de um código corretor de erros.

Em [26], Shannon mostrou que é possível transmitir informação com qualquer taxa R menor que a capacidade do canal C de maneira confiável (com uma taxa de erro tão pequena quanto se queira). Para tanto, é necessário o uso de um código corretor de erros. Os códigos corretores LDPC ("Low Density Parity Checks") [24] e os códigos turbo [4]

são os que atualmente mais chegam perto da capacidade de canal. Uma implementação utilizando um codificador LDPC de código de comprimento 10^7 chegou a $0.0045dB$ do limite de Shannon [6].

Os códigos LDPC fazem parte de um grupo de códigos chamados de códigos lineares de blocos. Neste grupo de códigos, o sinal de entrada é separado em blocos de K bits (considerando códigos binários) que são codificados gerando como resultado uma palavra código de N bits, onde $N > K$. Assim teremos 2^K palavras código geradas a partir de todas as combinações dos blocos de K bits de informação, dentre as 2^N combinações possíveis.

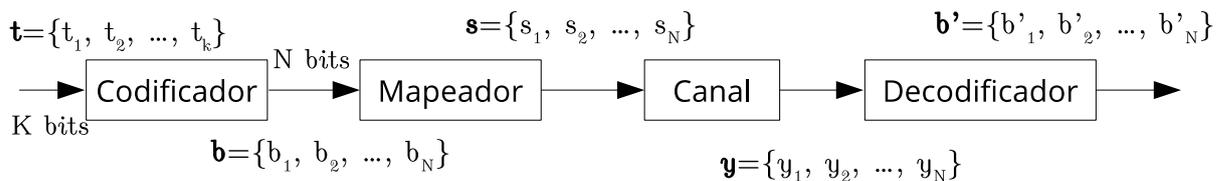


Figura 2.8: Diagrama do codificador e decodificador LDPC.

Na figura 2.8, pode-se ver a representação de um codificador e decodificador linear de blocos. O bloco codificador recebe o vetor \mathbf{t} contendo os K bits de informação e acrescenta $n - k$ bits de redundância formando a palavra \mathbf{b} contendo N bits. Este processo linear pode ser representado pela seguinte equação:

$$\mathbf{b} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{t} \quad (2.23)$$

onde \mathbf{G} é a matriz geradora com dimensão de $K \times N$ e o vetor \mathbf{t} com os bits na entrada do codificador é um vetor coluna $N \times 1$. Pode-se utilizar a matriz \mathbf{G} na sua forma sistemática onde temos $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_K \quad \mathbf{A}_{K,(N-K)}]$ com \mathbf{I}_K sendo uma matriz identidade de tamanho $K \times K$. Com a matriz geradora neste formato, o vetor \mathbf{b} terá os seus primeiros K bits formados pelo próprio vetor \mathbf{t} e os $N - K$ bits finais serão os bits de paridade calculados como $\mathbf{A}_{K,(N-K)} \cdot \mathbf{t}$.

Os dados codificados são mapeados no vetor \mathbf{b} onde cada bit b_i é mapeado em um sinal s_i que será transmitido pelo canal. Quando $b_i = 0$ mapeamos para $s_i = x_1$ e quando $b_i = 1$ mapeamos para $s_i = x_2$, onde por exemplo podemos considerar $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$.

Os valores \mathbf{s} são transmitidos pelo canal e o vetor \mathbf{y} é recebido. O sinal recebido, se considerarmos um canal Gaussiano, será o sinal transmitido acrescido de um ruído. O trabalho do decodificador é, dado o vetor recebido \mathbf{y} , achar o vetor \mathbf{b}' transmitido de maior probabilidade considerando que \mathbf{b}' tem que ser uma das 2^K palavras códigos.

Uma outra matriz importante que permite validar se uma palavra de N bits é uma palavra de código válida é a matriz de paridade \mathbf{H} de tamanho $(N \times N - K)$. Para todas as palavras código \mathbf{b} de N bits válidas temos:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

e para qualquer palavra \mathbf{b} de N bits que não seja uma palavra código válida teremos como resultado um vetor com pelo menos um dos seus valores diferentes de zero.

Podemos relacionar as matrizes \mathbf{G} e a \mathbf{H} através da seguinte relação:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

onde neste caso $\mathbf{0}$ é uma matriz de elementos nulos de dimensão $K \times (N - K)$.

Como estamos tratando aqui de códigos binários, as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} tem em seus elementos os valores 0 ou 1. Consideramos uma matriz \mathbf{H} como sendo de um decodificador LDPC quando o número de 1's presentes na matriz é pequeno, isto é, a matriz possui um número muito maior de zeros. O fato da matriz \mathbf{H} ter poucos 1's permite a dedução de um algoritmo de decodificação sub-ótimo com complexidade computacional que torna seu uso possível em diversas aplicações.

Podemos representar graficamente os dados da matriz \mathbf{H} de uma maneira que auxilia no entendimento do algoritmo de decodificação. Considerando por exemplo a matriz \mathbf{H} definida abaixo:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

da equação 2.24 temos em cada linha da matriz \mathbf{H} uma verificação de paridade. A primeira linha da matriz \mathbf{H} acima implica que $b_3 \oplus b_5 \oplus b_8 \oplus b_9 = 0$. Na segunda linha temos $b_1 \oplus b_2 \oplus b_8 \oplus b_{10} = 0$ e assim sucessivamente. Cada coluna na matriz representa um bit b_i . Podemos então representar esta matriz utilizando um grafo onde cada linha da matriz é um nó de paridade e cada coluna é um nó de bit. Ligamos um nó de paridade p_l a um nó de bit b_n se o elemento (l, n) da matriz \mathbf{H} for 1, caso contrário não há ligação. O grafo da matriz representada em 2.26 pode ser visto na figura 2.9.

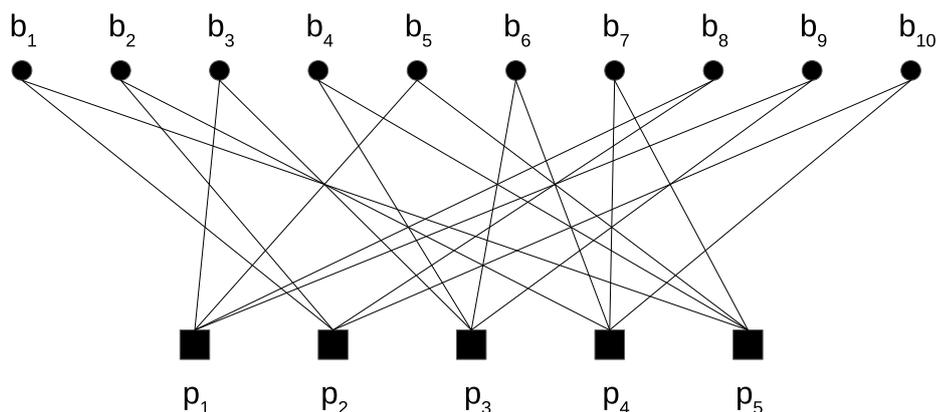


Figura 2.9: Grafo LDPC referente a Matriz \mathbf{H} referente a equação 2.26.

O número de entradas 1 em cada linha indica a quantidade de ligações que temos em cada nó de paridade (p_i na figura), e o número de entradas 1 por linha é a quantidade de ligações por bit (b_i na figura). O código LDPC é considerado regular se o número de 1's por coluna é sempre igual, e o número de 1 por linha também. Caso contrário teremos

um código LDPC irregular.

2.6.1 Decodificação

A decodificação do sinal recebido $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_N]$ consiste em achar os valores $\mathbf{b}'_i = [b'_1, \dots, b'_N]$ transmitidos de modo a maximizar a probabilidade

$$b'_i = \arg \max_{v_i} \left(p_{\mathbf{B}|\mathbf{Y}}(b_i = v_i | \mathbf{y}) \right). \quad (2.27)$$

onde b_i é o i -ésimo bit transmitido e \mathbf{y} é o vetor dos sinais recebidos. Podemos escrever a probabilidade $p_{\mathbf{B}|\mathbf{Y}}(b_i = v_i | \mathbf{y})$ em função da probabilidade condicional $p_{\mathbf{B}|\mathbf{Y}}(\mathbf{b} | \mathbf{y})$ e aplicando a equação 2.27 temos:

$$b'_i = \arg \max_{v_i} \left(\sum_{\mathbf{b}: b_i = v_i} P_{\mathbf{B}|\mathbf{Y}}(\mathbf{b} | \mathbf{y}) \right) \quad (2.28)$$

Para se achar o valor transmitido, teríamos que achar dentre as 2^K palavras código \mathbf{b}' , qual delas que maximiza esta probabilidade. Fazer a busca completa é computacionalmente impossível para valores grandes de K . A ideia para simplificar esta busca é utilizar o algoritmo soma produto.

Como primeiro passo, utilizando o teorema de Bayes podemos reescrever a equação 2.28

$$b'_i = \arg \max_{v_i} \left(\sum_{\mathbf{b}: b_i = v_i} f_{\mathbf{Y}|\mathbf{B}}(\mathbf{y} | \mathbf{b}) \cdot \frac{P(\mathbf{b})}{f(\mathbf{y})} \right) \quad (2.29)$$

Como o valor de $p(\mathbf{y})$ independe de \mathbf{b} e independe de v_i ele não afetará o resultado do argumento máximo, e assim podemos retirá-lo da fórmula. Assim podemos reescrever a equação como:

$$b'_i = \arg \max_{v_i} \left(\sum_{\mathbf{b}: b_i = v_i} f_{\mathbf{Y}|\mathbf{B}}(\mathbf{y} | \mathbf{b}) \cdot P(\mathbf{b}) \right) \quad (2.30)$$

Considerando que todos os valores \mathbf{b} que são palavras códigos (uma das possíveis 2^K palavras código) são equiprováveis, e definindo o termo $I_c(\mathbf{b})$ que é 1 quando \mathbf{b} é uma palavra código e zero caso contrário, temos que $p(\mathbf{b}) = \frac{1}{2^K} \cdot I_c(\mathbf{b})$. Assim podemos escrever que

$$b'_i = \arg \max_{v_i} \left(\sum_{\mathbf{b}: b_i = v_i} f_{\mathbf{Y}|\mathbf{B}}(\mathbf{y} | \mathbf{b}) \cdot \frac{I_c(\mathbf{b})}{2^K} \right) \quad (2.31)$$

O termo 2^K pode ser retirado da equação por ser constante e não influenciar no argumento máximo. Podemos então retirar como função objetivo a função

$$G = f_{\mathbf{Y}|\mathbf{B}}(\mathbf{y} | \mathbf{b}) \cdot I_c(\mathbf{b}) \quad (2.32)$$

Podemos fatorar o termo $f_{\mathbf{Y}|\mathbf{B}}(\mathbf{y} | \mathbf{b})$ considerando que os bits transmitidos são inde-

pendentes entre si (canal sem memória), e com isso podemos escrever que

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{B}}(\mathbf{y}|\mathbf{b}) = \prod_{i=1}^N f_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) \quad (2.33)$$

O termo $I_c(\mathbf{b})$, como visto, é 1 quando o valor de \mathbf{b} é uma palavra código válida, ou quando $\mathbf{H} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Assim, para ser verdade, todos os produtos $\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{b}$ tem que ser zero, onde \mathbf{h}_i é a linha i da matriz de paridade \mathbf{H} . Definindo a função $I(\cdot)$ que é 1 quando o termo interno é verdadeiro, podemos reescrever a condição $I_c(\mathbf{b})$ como

$$I_c(\mathbf{b}) = \prod_{i=1}^K I(\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{b} = 0) \quad (2.34)$$

Com isso a nova função objetivo é dada por

$$G = \prod_{i=1}^N f_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) \cdot \prod_{i=1}^K I(\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{b} = 0) \quad (2.35)$$

Representando esta equação por um grafo chegamos a figura 2.10.

Para deduzir as regras de atualização da decodificação LDPC, iremos utilizar agora o algoritmo soma produto no grafo, iniciando pelos nós de variáveis y_i . Como visto pela regra de um nó de variável na ponta, ele envia como mensagem o valor unitário. Assim a mensagem dos nós y_i para os nós de função $p_{Y_i|B_i}(y_i|b_i)$ é dada por

$$\mu_{y_i \rightarrow f_{Y_i|B_i}(y_i|b_i)} = 1 \quad (2.36)$$

A próxima mensagem a ser calculada é a que sai do nó $p_{Y_i|B_i}(y_i|b_i)$ e vai para o nó b_i . Para isso aplicamos a equação 2.22. Com isso chegamos a seguinte mensagem.

$$\mu_{f_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) \rightarrow b_i}(b_i) = \sum_{y_i} \left(\prod_{y_i} \mu_{y_i \rightarrow f_{Y_i|B_i}(y_i|b_i)} \cdot f_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) \right) \quad (2.37)$$

Como há apenas um termo na somatória (y_i) e o mesmo na produtória, temos então

$$\mu_{p_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) \rightarrow b_i}(b_i) = \mu_{y_i \rightarrow f_{Y_i|B_i}(y_i|b_i)} \cdot f_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) \quad (2.38)$$

e substituindo o valor de $\mu_{y_i \rightarrow p_{Y_i|B_i}(y_i|b_i)}$ da equação 2.36 temos

$$\mu_{p_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) \rightarrow b_i}(b_i) = p_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) \quad (2.39)$$

Na recepção, temos o valor de y_i recebido. Considerando que o canal é Gaussiano com variância σ^2 , a função densidade de probabilidade $p_{Y_i|B_i}(y_i|b_i)$ pode ser calculada para cada valor de $b_i \in \{0, 1\}$ como sendo a função densidade de probabilidade de uma Gaussiana dado por:

$$p_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(y_i - vt(b_i))^2}{\sigma^2}} \quad (2.40)$$

onde $vt(b_i)$ é o nível de sinal utilizado para transmitir o bit $b_i \in \{0, 1\}$.

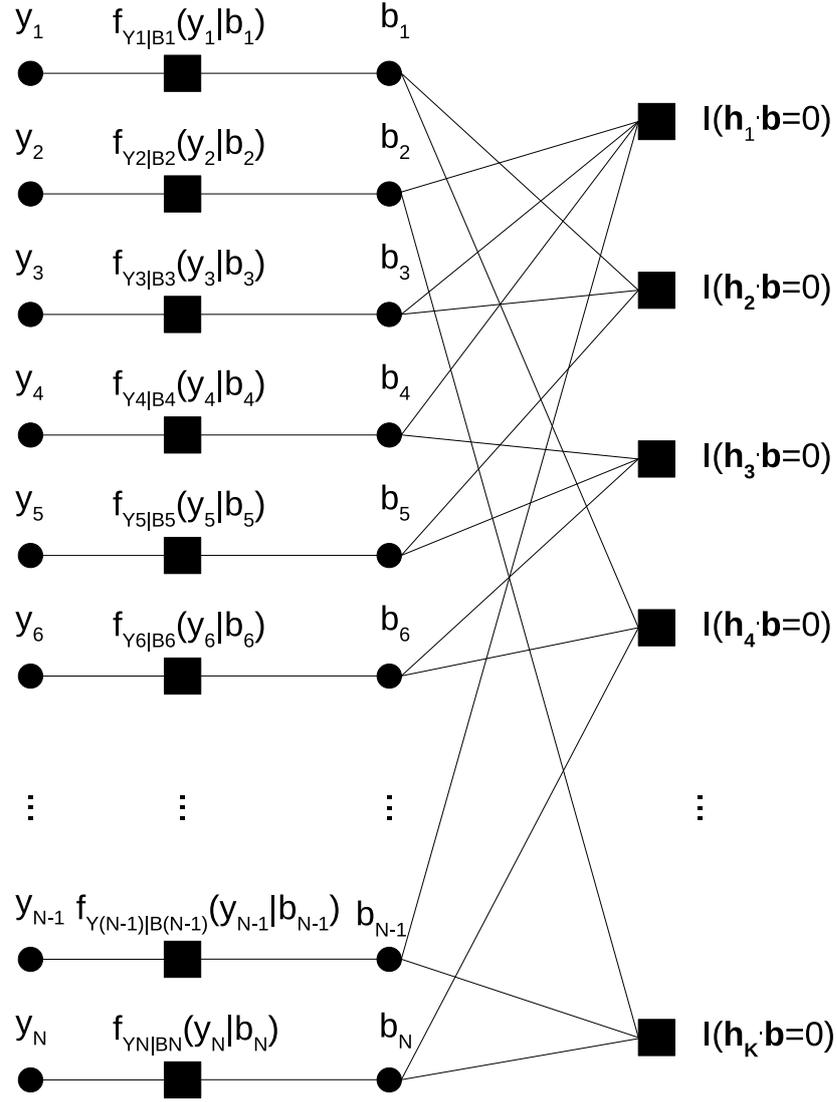


Figura 2.10: Grafo fator LDPC referente a função objetivo 2.35.

Ao invés de enviar a mensagem com o valor para $b_i = 0$ e $b_i = 1$, podemos utilizar o que se chama de logaritmo da razão de verossimilhança que definimos por

$$\begin{aligned}
 L\left(\mu_{\mathcal{P}_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) \rightarrow b_i}\right) &= \log_e \left(\frac{\mu_{\mathcal{P}_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) \rightarrow b_i}(0)}{\mu_{\mathcal{P}_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) \rightarrow b_i}(1)} \right) = \log_e \left(\frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(y-vt(0))^2}{\sigma^2}}}{e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(y-vt(1))^2}{\sigma^2}}} \right) \\
 &= \frac{(y-vt(1))^2 - (y-vt(0))^2}{2 \cdot \sigma^2}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

As próximas mensagens a serem calculadas são dos bits b_i para os nós de paridade $\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b} = 0$. Para este cálculo, utilizamos a equação da mensagem de um nó de variável para um nó de função dado em 2.20. Assim, aplicando neste caso, temos a seguinte equação:

$$\mu_{b_i \rightarrow I(\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b} = 0)}(b_i) = \mu_{\mathcal{P}_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) \rightarrow b_i}(b_i) \cdot \prod_{j \neq k} \mu_{I(\mathbf{h}_j \cdot \mathbf{b} = 0) \rightarrow b_i}(b_i) \tag{2.42}$$

Podemos aplicar o logaritmo da verossimilhança dos dois lados da equação. Com as simplificações chegamos ao seguinte resultado:

$$L\left(\mu_{b_i \rightarrow I(\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b}=0)}\right) = L\left(\mu_{p_{Y_i|B_i}(y_i|b_i) \rightarrow b_i}\right) + \sum_{j \neq k} L\left(\mu_{I(\mathbf{h}_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}\right) \quad (2.43)$$

As últimas mensagens que necessitam ser calculadas são as mensagens dos nós de função $\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b} = 0$ para os bits b_i , e para calculá-las utilizaremos a equação 2.22. Aplicando esta equação para a mensagem $\mu_{\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b}=0 \rightarrow b_i}$, temos

$$\mu_{I(\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(b_i) = \sum_{\sim b_i} \left(\text{Eq}(\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b} = 0) \cdot \prod_{j \neq i, j \in H_k} \mu_{b_j \rightarrow I(\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b}=0)}(b_j) \right) \quad (2.44)$$

onde a função Eq é 1 quando a igualdade é confirmada, e 0 caso contrário. H_k é o conjunto de valor j nos quais os nós de bits b_j estão conectados ao nó de função $\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b} = 0$, ou as posições j em \mathbf{h}_k que tem valores 1. O vetor \mathbf{h}_k , por definição, tem 1's apenas na posição dos bits b_j que estão ligados ao nó de função $\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b} = 0$. Assim, o valor de $\text{Eq}(\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b} = 0)$ é 1 apenas quando o número de bits b_j ligados ao nó de função $\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b} = 0$ com valor 1 seja par, caso contrário o valor é zero. Definindo a função $\text{bitspar}_k(\mathbf{b}) = \text{Eq}(\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b} = 0)$, podemos reescrever a equação como:

$$\mu_{I(\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(b_i) = \sum_{b_i} \left(\text{bitspar}_k(\mathbf{b}) \cdot \prod_{j \neq i} \mu_{I(\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_j}(b_j) \right) \quad (2.45)$$

Esta equação calculada em $b_i = 0$ nos dá a probabilidade da quantidade dos demais bits em 1 ser par. E em $b_i = 1$ a probabilidade da quantidade dos demais bits em 1 ser ímpar. Dado que sabemos as probabilidades dos demais bits, pois temos as suas mensagens, podemos reescrever a função como mostrado em [24] da seguinte maneira

$$\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \left(1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1) \right) \quad (2.46)$$

e o valor em $b_i = 1$ é dado em

$$\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \left(1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1) \right) \quad (2.47)$$

Como próximo passo, calcularemos o logaritmo de verossimilhança desta mensagem, fazendo isso temos

$$\begin{aligned} L\left(\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}\right) &= \log\left(\frac{\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(0)}{\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(1)}\right) \\ &= \log\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \left(1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1) \right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \left(1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1) \right)}\right) \\ &= \log\left(\frac{1 + \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \left(1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1) \right)}{1 - \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \left(1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1) \right)}\right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Considerando o fato que

$$\tanh\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-p}{p}\right)\right) = 1 - 2 \cdot p \quad (2.49)$$

Aplicando esta relação aos termos $1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1)$ da equação 2.48, podemos reescrevê-lo como

$$1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1) = \tanh\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1 - \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1)}{\mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1)}\right)\right) \quad (2.50)$$

Podemos ver na equação acima que o termo do logaritmo é o logaritmo da verossimilhança da mensagem $\mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}$ e podemos simplificar a relação para

$$1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1) = \tanh\left(\frac{1}{2}L\left(\mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}\right)\right) \quad (2.51)$$

Aplicando esta simplificação na equação 2.48, obtemos

$$L\left(\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}\right) = \log\left(\frac{1 + \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \tanh\left(\frac{1}{2}L\left(\mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}\right)\right)}{1 - \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \tanh\left(\frac{1}{2}L\left(\mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}\right)\right)}\right) \quad (2.52)$$

Uma outra relação que podemos aplicar com tangente hiperbólica é a

$$2 \cdot \tanh^{-1}(p) = \log\left(\frac{1+p}{1-p}\right) \quad (2.53)$$

e aplicando a equação 2.52 temos

$$L\left(\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}\right) = 2 \cdot \tanh^{-1}\left(\prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \tanh\left(\frac{1}{2}L\left(\mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}\right)\right)\right) \quad (2.54)$$

Com isso, temos todas as equações necessárias para calcular as mensagens entre os nós representados na figura 2.10.

O que falta definir é em que ordem os cálculos serão feitos, quando parar o algoritmo e como inicializar os valores das mensagens. A inicialização dos valores das mensagens $L\left(\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}\right)$ e $L\left(\mu_{b_i \rightarrow \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b}=0}\right)$ são feitas com o valor 0 que indica igual probabilidade de $b_i = 0$ ou $b_i = 1$ dado que não temos ainda nenhum conhecimento prévio. As mensagens $L\left(\mu_{\text{PY}_i | \mathcal{B}_i}(y_i | b_i) \rightarrow b_i}\right)$ são calculadas uma vez e seu valor não muda durante as iterações do algoritmo.

As mensagens $L\left(\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}\right)$ e $L\left(\mu_{b_i \rightarrow \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{b}=0}\right)$ serão calculadas de forma iterativa. Em cada iteração, calculamos as novas mensagens dos nós de bits para os nós de paridade, em função das mensagens anteriores dos nós de paridade para os nós de bits, e depois calculamos as novas mensagens dos nós de paridade para os nós de bits em função das mensagens calculadas. Após cada iteração, podemos somar as mensagens que chegam aos bits. Se a soma for positiva consideraremos o bit $b_i = 0$, se a soma for negativa $b_i = 1$ (definição do logaritmo da verossimilhança). Verificamos se a estimativa dos bits está correta verificando se ela é uma palavra código válida pela equação 2.24. Se for uma palavra código válida, o algoritmo é parado e considerado a decodificação feita com sucesso.

Caso a palavra não seja válida uma nova iteração é feita e assim sucessivamente, até um número pré definido de iterações passar, e neste caso, consideramos que o decodificador não convergiu para a solução.

Capítulo 3

Capacidade do Canal VLC Utilizando Modulações M-PAM

Neste capítulo, veremos o modelo do canal VLC, que será o modelo de canal aqui estudado. Como a determinação da capacidade do canal VLC é um problema em aberto, apresentaremos um limitante mínimo e máximo para esta capacidade. Introduziremos a modulação M-PAM que será a utilizada aqui nos cálculos de otimização. Em seguida, trataremos da questão da otimização dos parâmetros da modulação M-PAM de modo a maximizar a taxa de transmissão e os resultados destas otimizações serão mostrados.

3.1 Modelo do Canal VLC

Em um sistema VLC, um sinal de informação de entrada modula a intensidade ótica de um emissor de luz, normalmente um LED, isto é, a potência luminosa é proporcional ao sinal de entrada. Na recepção um fotodetector transforma a potência luminosa recebida em um sinal elétrico proporcional. Considerando X o sinal transmitido, Y o sinal recebido, podemos escrever [31], [9]:

$$Y = R \cdot X + Z, \quad (3.1)$$

onde Z representa o ruído adicionado ao sistema devido ao ruído térmico e o ruído de luz ambiente [32], e R é uma constante representando o ganho do sistema do sistema LED, fotodiodo e propagação de luz, como visto na figura 2.4.

Como o sinal transmitido é uma potência luminosa os valores não podem ser negativos, assim temos [30]:

$$X \geq 0 \quad (3.2)$$

Os sistemas de iluminação necessitam manter a intensidade luminosa constante dentro das características de percepção da visão humana para não causar desconforto. A visão humana percebe variações na iluminação de frequências até 200 Hz. Variações acima disso não são percebidas e podem ser utilizadas para transferir informação. Outro ponto é poder variar a intensidade luminosa com a necessidade de iluminação. Este ajuste

de nível chamamos de escurecimento ("dimming"). Em sistemas VLC, a necessidade de manter a intensidade luminosa constante e o escurecimento podem ser modelados através da seguinte equação:

$$E[X] = \xi \cdot \mathcal{P}, \quad (3.3)$$

onde ξ é o fator de escurecimento que dá a intensidade luminosa média desejada e \mathcal{P} é a potência máxima do LED definida abaixo.

Quando levamos em consideração a análise para sistemas reais [9] que limitam a potência instantânea do sinal a um valor máximo devido a limitações dos LEDs, a seguinte restrição precisa ser adicionada:

$$X \leq \mathcal{P}, \quad (3.4)$$

onde \mathcal{P} é a potência máxima do LED. Esta mesma potência é utilizada para calcular o fator de escurecimento ξ dado na equação 3.3.

Existem estudos, no entanto, que não utilizam esta restrição de potência e sim limitam a potência média máxima [32]

$$E[X] \leq \mathcal{P}_m, \quad (3.5)$$

onde neste caso \mathcal{P}_m é a máxima potência média permitida, e este valor também é utilizado para se definir o fator de escurecimento ξ (3.3). Esta limitação, como pode ser facilmente vista, não é necessária, pois ela é mais fraca do que a limitação dada pela equação 3.3.

Neste trabalho, utilizaremos como modelo do canal, a equação 3.1, considerando o ruído Z como Gaussiano, de média nula e variância σ^2 . Para simplificação, utilizaremos os valores de $R = 1$ e $\mathcal{P} = 1$ sem perda de generalidade. Considerando um canal $Y' = R' \cdot X' + Z'$, $E[X'] \leq \mathcal{P}'$ e $E[Z'^2] = \sigma'^2$, este canal poderá ser estudado com os mesmos resultados se utilizado um canal com $R = 1$ e $\mathcal{P} = 1$, modificando o valor da variância do ruído para $\sigma^2 = \left(\frac{\sigma'}{r'P'}\right)^2$.

Definimos também o termo qualidade do canal como sendo o valor

$$\mathcal{S}_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\mathcal{P}}{\sigma} \right) \quad (3.6)$$

neste caso, como em [9], [30], [31], o valor de σ é utilizado com relação a potência \mathcal{P} , pois a potência de um sinal óptico é proporcional a corrente aplicada. Este termo em [31] é chamado de "optical peak SNR", ou razão sinal ruído óptica de pico.

3.2 Capacidade do Canal VLC

Nesta seção mostraremos que a capacidade de canal é simétrica em função do fator de escurecimento ("dimming") ξ , mais especificamente para o valor $\xi = 0, 5$. Na sequência, serão apresentados limitantes da capacidade do canal VLC.

3.2.1 Simetria na Capacidade do Canal VLC em relação ao Fator de Escurecimento

A capacidade de um canal de comunicação com ruído Z é dada por:

$$\mathcal{C}(\mathcal{P}; \xi) = \sup_X I(X; Y) = \sup_X I(X; X + Z), \quad (3.7)$$

onde $I(\cdot; \cdot)$ é a informação mútua. Temos que:

$$I(X; X + Z) = I(X; \mathcal{P} - (X + Z)) = I(X; \mathcal{P} - X - Z) \quad (3.8)$$

que vem do fato de $I(X; Y) = I(X; g(Y))$ onde $g(\cdot)$ é uma função injetora ("one-to-one") [15]. Considerando que Z tem distribuição simétrica (Gaussiana), podemos escrever que:

$$I(X; \mathcal{P} - X - Z) = I(X; \mathcal{P} - X + Z), \quad (3.9)$$

e utilizando a mesma regra utilizada na equação 3.8, temos que

$$I(X; \mathcal{P} - X + Z) = I(\mathcal{P} - X; \mathcal{P} - X + Z). \quad (3.10)$$

Fazendo uma mudança de variável $\bar{X} = \mathcal{P} - X$, obtemos

$$I(\mathcal{P} - X; \mathcal{P} - X + Z) = I(\bar{X}; \bar{X} + Z). \quad (3.11)$$

Para qualquer X ou para qualquer $\bar{X} = \mathcal{P} - X$, podemos escrever que

$$I(X; X + Z) = I(\bar{X}; \bar{X} + Z) \quad (3.12)$$

e tirando o superior de cada lado, temos que:

$$\mathcal{C}(\mathcal{P}; \xi) = \sup_X I(X; X + Z) = \sup_{\bar{X}} I(\bar{X}; \bar{X} + Z) = \mathcal{C}(\mathcal{P}; 1 - \xi) \quad (3.13)$$

pois temos que $\bar{X} = \mathcal{P} - X$ e assim $E[\bar{X}] = \mathcal{P} - E[X] = (1 - \xi)\mathcal{P}$. Assim, temos que a capacidade do canal VLC com restrição de potência máxima \mathcal{P} , i.e. $P[X > \mathcal{P}] = 0$ é simétrica em relação ao "dimming" em $\xi = 0,5$. Assim, por exemplo, a capacidade de canal de um sistema VLC com dimming $\xi = 0,2$ é a mesma que com dimming $\xi = 0,8$.

3.2.2 Limitantes na Capacidade do Canal VLC

Em [15] e [10] foram deduzidos limitantes superiores e inferiores para a capacidade de canal para um sistema de comunicação óptica em espaço livre. O modelamento do canal de [10] não apresenta restrição de potência máxima. No caso de [15], o modelo utilizado é muito similar ao do canal VLC, com a diferença na restrição da equação 3.3 que em [15] é dada por

$$E[X] \leq \mathcal{P}_m \quad (3.14)$$

e é definida a razão entre a potência máxima \mathcal{P} e o limite da potência média \mathcal{P}_m como

$$\alpha = \frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}} \quad (3.15)$$

que pode variar de 0 até 1. O fator α neste caso pode ser comparado ao fator de escurecimento da equação 3.3 através da seguinte equação

$$\xi = \frac{E[X]}{\mathcal{P}} \leq \frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}} = \alpha. \quad (3.16)$$

Pela equação, podemos ver que o valor de α é um limitante superior do valor do fator de escurecimento ξ . Temos que a capacidade máxima do canal VLC é atingido com $\xi = \frac{1}{2}$ e vai reduzindo quando reduzimos o valor de ξ . Assim, como o artigo [15] busca os limitantes da capacidade do canal, iremos considerar aqui a igualdade com $\alpha = \xi$ para $\alpha < \frac{1}{2}$.

Para $\xi > 0.5$, utilizamos a equação 3.13 e utilizamos o limite de $(1 - \xi)$. Abaixo estão as fórmulas dos 2 limitantes superiores (equações 3.18 e 3.19) e do limitante inferior (equação 3.17) deduzidos em [15]. As capacidades abaixo são dadas em nats por uso do canal. Para transformar em bits basta multiplicar o resultado por $\log_2(e)$.

$$C(P, \xi \cdot P) \geq \frac{1}{2} \cdot \log \left(1 + P^2 \frac{e^{2 \cdot \xi \cdot \mu^*}}{2 \cdot \pi \cdot e \cdot \sigma^2} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\mu^*}}{\mu^*} \right)^2 \right) \quad (3.17)$$

$$C(P, \xi \cdot P) \leq \frac{1}{2} \log \left(1 + \xi \cdot (1 - \xi) \cdot \frac{P^2}{\sigma^2} \right) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} C(P, \xi \cdot P) \leq & \left(1 - \mathcal{Q} \left(\frac{\delta + \xi \cdot P}{\sigma} \right) - \mathcal{Q} \left(\frac{\delta + (1 - \xi) \cdot P}{\sigma} \right) \right) \cdot \\ & \log \left(\frac{P}{\sigma} \cdot \frac{e^{\frac{\mu \delta}{P}} - e^{-\mu(1 + \frac{\delta}{P})}}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \mu \cdot (1 - 2 \cdot \mathcal{Q}(\frac{\delta}{\sigma}))} \right) \\ & - \frac{1}{2} + \mathcal{Q} \left(\frac{\delta}{\sigma} \right) + \frac{\delta}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{2 \cdot \sigma^2}} + \\ & \frac{\sigma}{P} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(e^{-\frac{\delta^2}{2 \cdot \sigma^2}} - e^{-\frac{(P + \delta)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \right) \\ & + \mu \cdot P \cdot \left(1 - 2 \mathcal{Q} \left(\frac{\delta + \frac{P}{2}}{\sigma} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde o valor de μ^* é a solução da equação

$$\xi = \frac{1}{\mu^*} - \frac{e^{-\mu^*}}{1 - e^{-\mu^*}} \quad (3.20)$$

e $\mu > 0$ e $\delta > 0$ são parâmetros livres de modo a minimizar os limitantes superiores. Um valor sub-ótimo para μ e para δ , mas usual, são dados abaixo

$$\delta = \sigma \cdot \log \left(1 + \frac{P}{\sigma} \right) \quad (3.21)$$

$$\mu = \mu^* \cdot \left(1 - e^{-\xi \cdot \frac{\delta^2}{2\sigma^2}}\right) \quad (3.22)$$

3.3 Modulação M-PAM

A modulação M-PAM (Modulação por Amplitude de Pulso com M níveis ou cardinalidade M) é um tipo de modulação que a cada uso do canal, um nível de sinal dentre M níveis possíveis é enviado [30]. A intensidade de cada nível é dada por x_m , $m \in 1, \dots, M$ e a probabilidade de transmissão do nível x_m é dada por p_m . Na figura 3.1, temos o exemplo de uma modulação 4 PAM. Em cada uso do canal, um dos 4 símbolos possíveis x_1, x_2, x_3, x_4 é enviado.

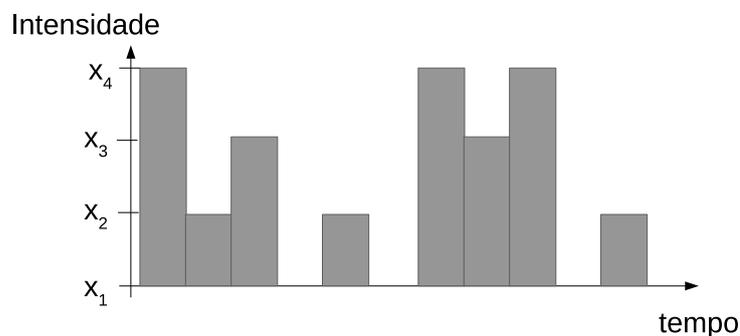


Figura 3.1: Exemplo de modulação M-PAM com $M = 4$ níveis.

Considerando as restrições das equações 3.2 e 3.4, temos que $x_m \geq 0$ e $x_m \leq \mathcal{P}$ (Eqs 3.2 e 3.4) para qualquer valor de $m \in \{1, 2, \dots, M\}$. A restrição do escurecimento da equação 3.3 pode ser reescrita para o caso da modulação M-PAM como:

$$\xi \cdot \mathcal{P} = \sum_{m=1}^M p_m \cdot x_m, \quad (3.23)$$

Considerando que a soma de todas as probabilidades de se transmitir todos os níveis M-PAM deve ser 1, podemos escrever que:

$$\sum_{m=1}^M p_m = 1. \quad (3.24)$$

O modo mais usual do M-PAM é ter os níveis equidistantes no intervalo 0 até \mathcal{P} , ou seja $x_m = \frac{m-1}{M-1} \cdot \mathcal{P}$. A densidade de probabilidade da modulação M-PAM, igualmente espaçada entre 0 e 1 (considerando $\mathcal{P} = 1$), é mostrada na figura 3.2. Na figura 3.2 gráfico (a), temos todas as probabilidades iguais (representadas por impulsos de Dirac) e assim o fator de escurecimento resultante será $\xi = 0,5$ como pode ser visto aplicando a equação 3.23. Mantendo os mesmos níveis, o modo que temos para alterar o fator de escurecimento é mudando as probabilidades de se enviar cada um dos símbolos M-PAM, como pode ser visto na figura 3.2 gráfico (b).

Em [9], fez-se um estudo mantendo os níveis equidistantes e maximizando a taxa de transmissão de canal mudando apenas as probabilidades de enviar cada um dos símbo-

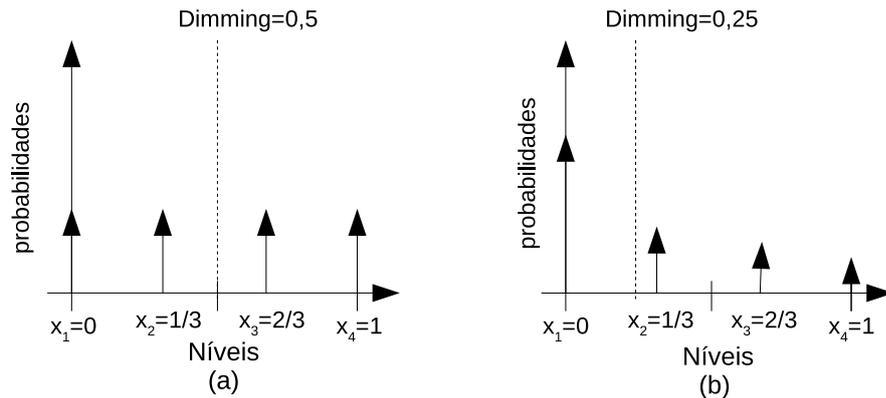


Figura 3.2: Função densidade de probabilidade de uma modulação M-PAM equidistantes entre 0 e 1 com $M = 4$ níveis, probabilidades iguais e distintas.

los. O artigo não é diretamente relacionado a VLC e escurecimento ("Dimming"), mas considerando $\rho = \frac{1}{\xi}$ em [9] para $\xi < 0.5$, podemos utilizar os seus resultados.

Porém, a maior taxa de transmissão no canal não é atingida sempre com os níveis equidistantes cobrindo toda a faixa entre 0 e P . O artigo [31] introduz a ideia de um deslocamento dos níveis através do termo

$$D_{shift} = \mathcal{P} \cdot |1 - 2 \cdot \xi|, \quad (3.25)$$

mas mantém os níveis ainda equidistantes entre si. Assim os níveis passam a ser dados pela seguinte equação:

$$x_n = \begin{cases} (n-1) \frac{P - \eta D_{shift}}{n-1} & 0 \leq \xi \leq 0.5 \\ (n-1) \frac{P - \eta D_{shift}}{n-1} + \eta D_{shift} & 0.5 \leq \xi \leq 1 \end{cases}. \quad (3.26)$$

Esta equação, para $\eta = 1$, é a que maximiza a capacidade de canal para um sistema sem ruído pois neste caso as probabilidades de envio de cada um dos níveis é igual, isto é $p_m = \frac{1}{M}$, maximizando a entropia da fonte. Na figura 3.3, podemos ver um exemplo de níveis M-PAM para $\eta = 1$ e fator de escurecimento $\xi = 0,25$. Neste caso, diferente do visto na figura 3.2, as probabilidades continuam iguais para o fator de escurecimento de 0,25. Veremos mais a frente que este é o melhor caso para níveis de ruído baixos e não só para caso de sistemas sem ruído.

Em [31], ao invés de se fixar o valor de $\eta = 1$ se procurou otimizar o melhor η e os melhores valores das probabilidades p_n que maximizam a taxa do canal. Os resultados são interessantes, e como conclusão é dito que o D_{shift} não causa ganho de capacidade. Isso contradiz o caso de um sistema sem ruído quando se utiliza $\eta = 1$ para se maximizar a entropia da fonte, pois neste caso podemos utilizar os símbolos equiprováveis. Qualquer outro valor de η fará os símbolos não serem equiprováveis diminuindo a entropia da fonte e assim a capacidade do canal. Uma abordagem de otimização dos níveis e das probabilidades é feita no artigo [18] mas focada na otimização considerando efeitos de saturação não linear nos LEDs. Uma análise mais profunda destas otimizações e a verificação do quão distantes estes resultados estão da capacidade máxima do canal é de grande interesse

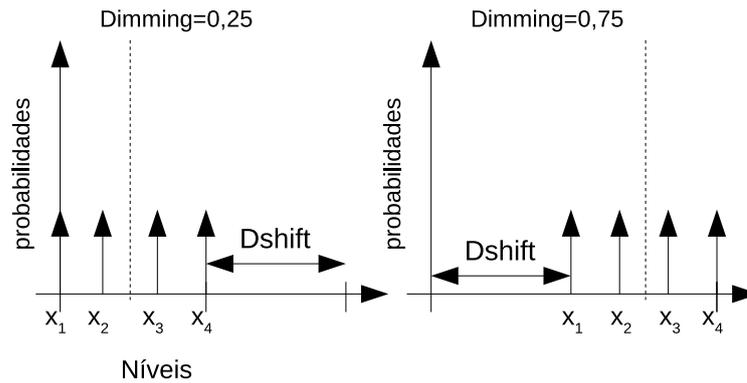


Figura 3.3: Função densidade de probabilidade de uma modulação M-PAM com parâmetro D-Shift e $\eta = 1$, para fator de escurecimento de 0,25 e 0,75.

e ainda não foi feita, sendo um dos temas de estudo deste trabalho.

3.3.1 Capacidade da Modulação M-PAM para um Canal Gaussiano

Na modulação M-PAM, temos que a distribuição de probabilidade na fonte é dada por

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^M \delta(x - x_i) \cdot p_{x_i}, \quad (3.27)$$

onde x_i é o nível do i -ésimo símbolo M-PAM, p_{x_i} a sua probabilidade e $\delta(x)$ a função impulso de Dirac.

Iremos utilizar o modelo de canal dado pela equação 3.1 com $R = 1$. Considerando esta simplificação, o modelo do canal a ser utilizado será:

$$Y = X + Z \quad (3.28)$$

onde Z é um ruído Gaussiano de variância σ^2 , média nula, independente do sinal X e com amostras independentes entre si. A função densidade de probabilidade do sinal recebido y dado que o sinal x foi transmitido é dado por

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Z(y - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.29)$$

Com esta densidade de probabilidade condicional, calculamos a densidade de probabilidade conjunta como

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} \cdot \sum_{i=1}^M \delta(x - x_i) \cdot p_{x_i}, \quad (3.30)$$

e integrando em X , temos a densidade de probabilidade do sinal recebido y

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \cdot dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} \cdot \sum_{i=1}^M \delta(x-x_i) \cdot p_{x_i} dx \\
 &= \sum_{i=1}^M p_{x_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_i)^2}{2\sigma^2}}.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

A densidade de probabilidades do sinal recebido é uma sobreposição de Gaussianas, cada uma com média x_i , $i \in \{1, \dots, M\}$ e variância igual a variância do ruído Z .

Podemos reescrever a equação 2.6, considerando apenas modulações M-PAM como

$$\begin{aligned}
 I(X,Y) &= \int_X \int_Y f_{X,Y}(x,y) \log_2 \left(\frac{f_{Y|X}(y/x)}{f_Y(y)} \right) dy dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} \cdot \\
 &\quad \sum_{i=1}^M \delta(x-x_i) \cdot p_{x_i} \cdot \log_2 \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}}{\sum_{k=1}^M p_{x_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_k)^2}{2\sigma^2}}} \right) dx dy \\
 &= \sum_{i=1}^M p_{x_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_i)^2}{2\sigma^2}} \cdot \\
 &\quad \log_2 \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_i)^2}{2\sigma^2}}}{\sum_{k=1}^M p_{x_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_k)^2}{2\sigma^2}}} \right) dy \\
 &= \sum_{i=1}^M p_{x_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_i)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_i)^2}{2\sigma^2}} \right) dy - \\
 &\quad \sum_{i=1}^M p_{x_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_i)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log_2 \left(\sum_{k=1}^M p_{x_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_k)^2}{2\sigma^2}} \right) dy
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

A entropia de uma variável Gaussiana é dada por [7]:

$$\begin{aligned}
 H(Y) &= -E[\log_2(p_Y(\mathbf{Y}))] = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-M)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-M)^2}{2\sigma^2}} \right) \\
 &= \log_2(\sigma\sqrt{2 \cdot \pi \cdot e})
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Substituindo a entropia da Gaussiana na equação (3.33 em 3.32), podemos escrever

$$\begin{aligned}
I(X, Y) &= -\log_2(\sigma\sqrt{2 \cdot \pi \cdot e}) - \\
&\sum_{i=1}^M p_{x_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_i)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log_2 \left(\sum_{k=1}^M p_{x_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_k)^2}{2\sigma^2}} \right) dy \\
&= -\log_2(\sigma\sqrt{2 \cdot \pi \cdot e}) - \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^M p_{x_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_i)^2}{2\sigma^2}} \right) \cdot \log_2 \left(\sum_{k=1}^M p_{x_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_k)^2}{2\sigma^2}} \right) dy \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Não há ainda um método conhecido para calcular os valores de x_i e p_{x_i} em função da variância do ruído σ^2 e do fator de escurecimento ξ que maximizam a taxa de transmissão (informação mútua), dada pela equação 3.34 de forma algébrica com as limitações do canal VLC (potência máxima, potência média). Nem há um método algébrico para simplificar o cálculo da equação 3.34. Utilizaremos métodos numéricos nos cálculos da taxa de transmissão e na sua otimização.

3.4 Otimização da Capacidade do Canal VLC utilizando M-PAM

Descreveremos nesta seção os dois modos de otimização que usamos com os parâmetros da modulação M-PAM para maximizar a taxa de transmissão no canal VLC. Na seção 3.5, os resultados obtidos aplicando os tipos de otimização aqui descritos serão mostrados.

3.4.1 Otimização Utilizando o $\eta \cdot D_{shift}$

O problema de otimização que estamos endereçando consiste em achar os níveis x_i e probabilidades p_{x_i} que maximizam a taxa de transmissão de dados, chegando o mais próximo possível da capacidade do canal VLC. Uma simplificação que pode ser utilizada é o emprego de ηD_{shift} introduzido na seção 3.3. Neste método, os valores dos níveis são dados pela equação 3.26 e 3.25, de modo que o problema passa a ser calcular o valor de η e os valores das probabilidades p_{x_i} que maximizam a taxa de transmissão. Uma diminuição da complexidade do problema de otimização pela redução do número de variáveis a serem otimizadas em relação a otimização completa de níveis e probabilidades. Neste caso, queremos mostrar que diferente do dito no artigo [31], o valor de η que maximiza a capacidade nem sempre é 0, podendo estar em algum valor entre 0 e 1. Ele é 0 para níveis de ruído altos e tende a 1 quando se diminui o nível de ruído. Na figura 3.4, mostra-se o valor dos níveis em função do valor de η variando de 0 até 1 considerando valores de fator de escurecimento de $\xi = 0, 1$ e $\xi = 0, 3$ com uma modulação M-PAM de $M = 4$ níveis. Com $\eta = 0$, tem-se valores equidistantes variando de 0 até 1, e com $\eta = 1$, quando $\xi < 0, 5$, tem-se valores equidistantes variando de 0 até $2 \cdot \xi$ e, quando $\xi > 0, 5$, valores variando de $(2 \cdot \xi - 1)$ até 1.

Para calcular a capacidade do canal, utilizamos um código em *C++* e a biblioteca GSL (GNU Scientific Library) para a integração numérica. Para a otimização, foi utilizada a

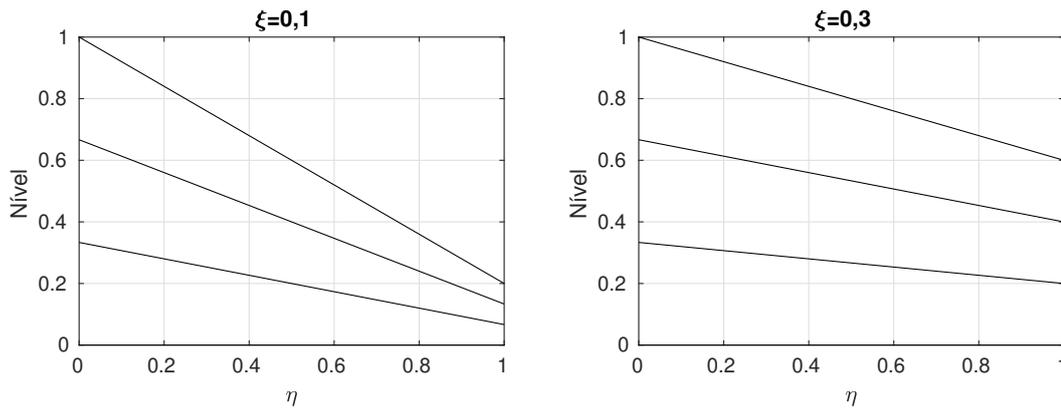


Figura 3.4: Níveis em função de η e do fator de escurecimento ξ com $M = 4$ níveis. O nível de x_1 nos dois gráficos está constantemente em 0.

função `fmincom` do Matlab. No apêndice A, temos a descrição dos códigos utilizados e um link para eles.

3.4.2 Otimização completa

Além da otimização utilizando a simplificação do $\eta \cdot D_{shift}$, iremos fazer a otimização completa dos níveis x_i e probabilidades p_{x_i} de forma a tentar encontrar os níveis e probabilidades que maximizam a equação 3.34, dado um fator de escurecimento ξ e uma qualidade de canal S_{dB} . Esta equação é não-linear e quando as variáveis de otimização são os níveis e probabilidades, não há garantia de uma convergência para a solução ótima. Para maximizar a possibilidade de se chegar ao máximo global, utilizamos como partida das otimizações o resultado da otimização $\eta \cdot D_{shift}$.

3.5 Resultados obtidos com as otimizações

Mostraremos aqui os resultados das otimizações com parâmetro η , em seguida as otimizações completas e, finalizando, uma comparação entre estas duas otimizações e a definição de 3 faixas de ruído dependentes do número de níveis da modulação M-PAM e do fator de escurecimento.

3.5.1 Otimizações do parâmetro η

Aqui mostraremos os resultados da otimização do parâmetro η e das probabilidades dos níveis do M-PAM em função do fator de escurecimento ξ e da qualidade do canal, como descrito na seção 3.4.1.

Uma outra restrição que fizemos foi com relação as probabilidades. Se a otimização é feita livremente, há casos em que temos probabilidades com valor 0 ou muito baixa, mostrando que na verdade a otimização esta sendo feita com menos níveis que o proposto. Fizemos então aqui uma restrição de que a probabilidade de qualquer nível tem que ser crescente ou igual, do menor ao maior nível, i.e $p_i \leq p_j$ para $i < j$, no caso de fator de escurecimento menor que 0,5. Na figura 3.2 (b), temos um exemplo das probabilidades.

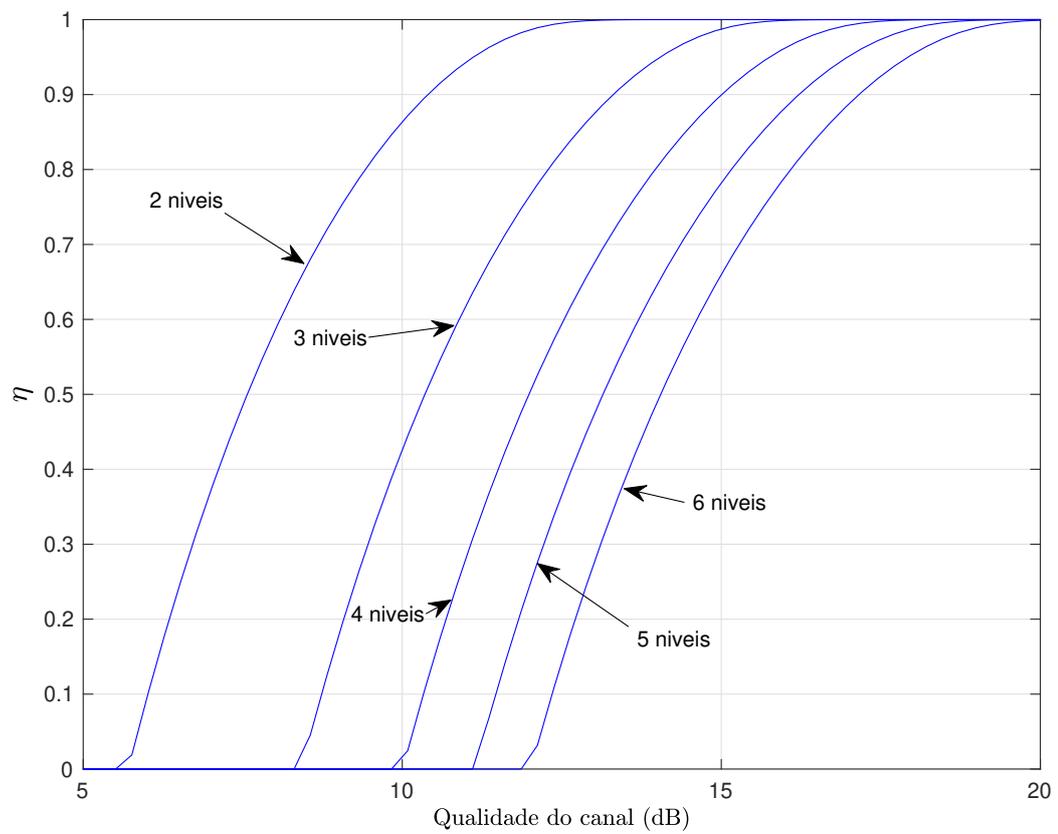


Figura 3.5: Resultado da otimização do parâmetro η em função da qualidade do canal em dB para modulações M-PAM de 2 níveis à 6 níveis com fator de escurecimento de $\xi = 0,2$.

Na figura 3.5, temos os valores de otimização para o parâmetro η em função da qualidade do canal para M-PAM de 2 até 6 níveis com fator de escurecimento de $\xi = 0,2$. Quando o valor de η está próximo de zero, temos o caso do M-PAM igualmente espaçado no intervalo 0 até \mathcal{P} , e quando o valor de η está em 1 indica que os níveis da modulação M-PAM estão simetricamente distribuídos ao redor do valor $\xi \cdot \mathcal{P}$ ou apenas ξ , considerando por simplificação que $\mathcal{P} = 1$. Podemos ver que para um nível de ruído em que a qualidade do canal $S_{dB} < 6$ dB, temos que o valor de η é zero para 2-PAM e a partir de 6 dB começa a subir até atingir $\eta = 1$ na SNR = 12,5 dB. No caso de modulações maiores, o η começa a sair do zero só com uma qualidade de canal maior, como era de se esperar, pois com mais níveis, temos a distância entre estes níveis menores, e assim o ruído afeta mais o sinal.

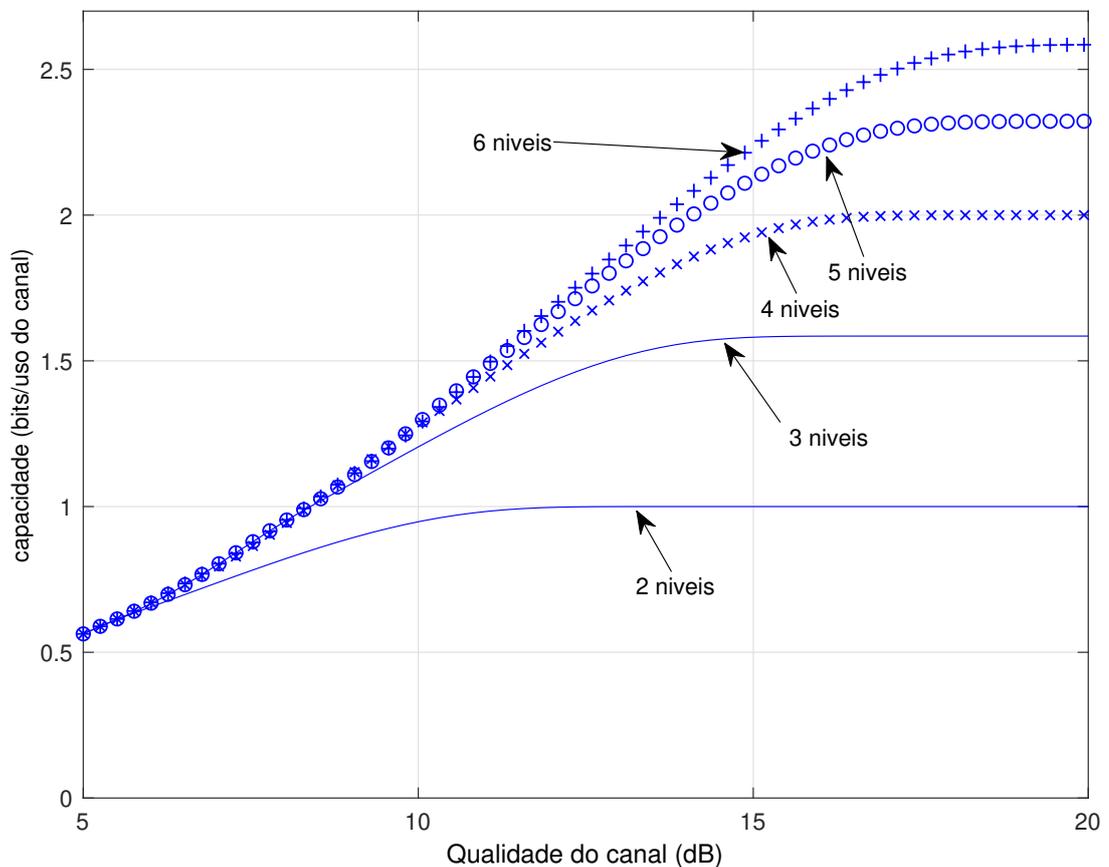


Figura 3.6: Capacidade do canal VLC em função da qualidade do canal S_{dB} com o parâmetro η otimizado com fator de escurecimento de $\xi = 0,2$.

A capacidade do VLC para cada modulação M-PAM com M de 2 até 6 níveis com a otimização do parâmetro η é mostrado na figura 3.6. Pode-se ver que o limite de capacidade de cada modulação quando a qualidade de canal sobe é de $\log_2(M)$. Como pode-se notar, quanto maior o valor de M maior deve ser a qualidade do canal S_{dB} para a máxima taxa ser atingida.

Na figura 3.7, temos a comparação da taxa de transmissão para o caso 4-PAM com

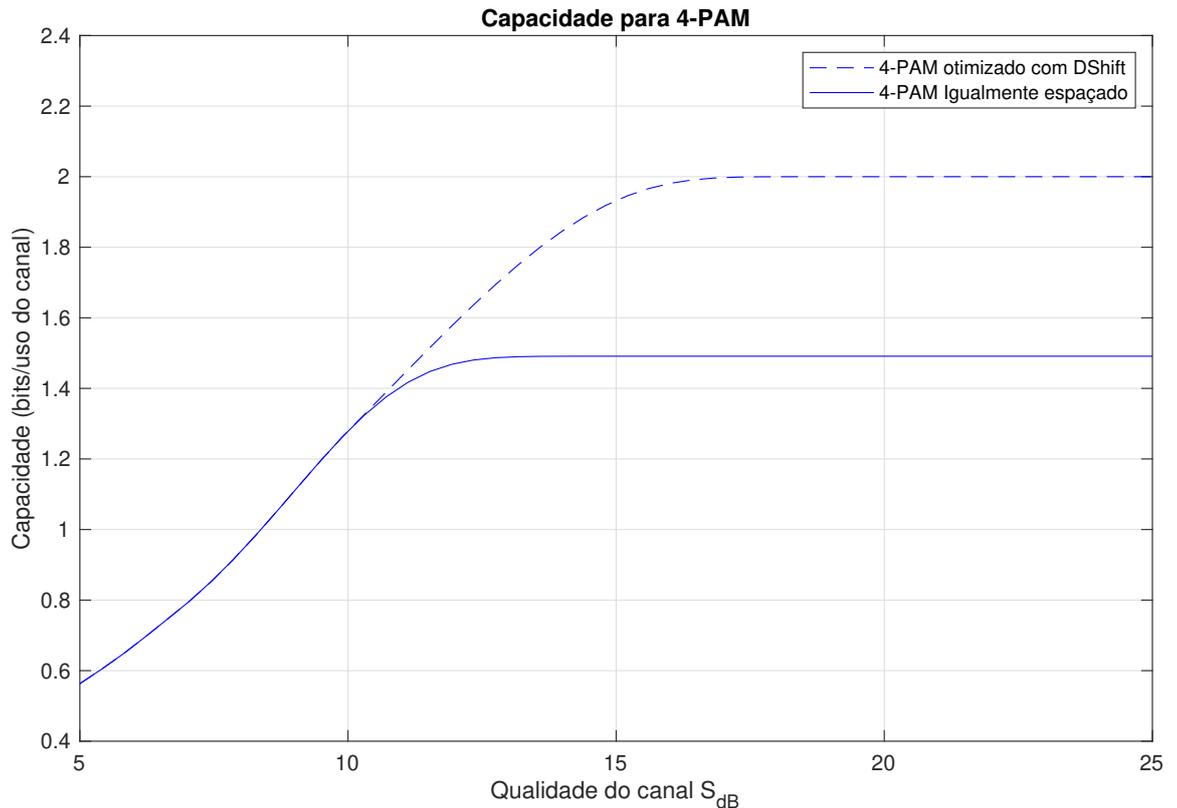


Figura 3.7: Comparação da capacidade do VLC com otimização do parâmetro η e probabilidades (4-PAM otimizado) com o sistema otimizando apenas probabilidades com $\eta = 0$ (4-PAM igualmente espaçado) com fator de escurecimento de $\xi = 0,2$.

fator de escurecimento de $\xi = 0,2$ com e sem otimização do parâmetro η . O caso sem otimização considera o 4-PAM igualmente espaçado entre o intervalo 0 até \mathcal{P} , ou seja, $\eta = 0$. Podemos ver que sem otimização, a máxima taxa obtida é de aproximadamente 1,5 bits/uso do canal contra uma taxa máxima de 2 bits/uso do canal para o caso otimizado. A taxa máxima é atingida quando a qualidade do canal é maior que 18 dB e o valor de $\eta = 1$.

Uma outra análise interessante é saber, utilizando a otimização do parâmetro η , qual o melhor número de níveis M da modulação M-PAM para cada qualidade de canal. Fizemos esta análise para 3 valores de fator de escurecimento diferentes. O primeiro valor do fator de escurecimento foi $\epsilon = 0,05$, devido a simetria, o resultado é o mesmo para $\epsilon = 0,95$. O resultado se apresenta na figura 3.8. Podemos ver que o valor do η da otimização sai do valor zero antes da transição do valor M de 2 pra 3 perto da qualidade de canal em $6dB$. O mesmo ocorre para o valor de η para as demais transições. Este resultado não foi visto com valores de fator de escurecimento mais próximos de 0,5.

Na figura 3.9, temos o resultado para o valor de fator de escurecimento de $\epsilon = 0,2$. Verificamos neste caso que o valor do parâmetro η praticamente não sai do valor zero, tendo apenas uma pequena elevação na transição de M de 2 para 3. Esta transição ocorreu perto de $S = 6dB$, antes do valor de $S = 7dB$, no caso do fator de escurecimento de 0,05. A figura 3.10 tem o resultado bem parecido ao resultado obtido com o fator de

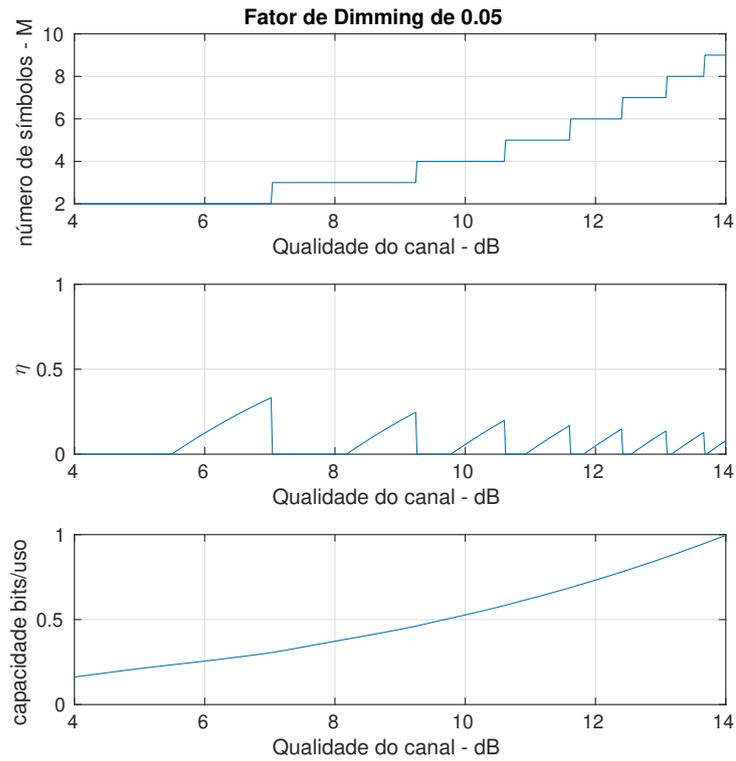


Figura 3.8: Número de símbolos da modulação M-PAM com otimização $\eta \cdot D_{Shift}$ que maximiza a taxa de transmissão no canal VLC com fator de escurecimento de 0,05.

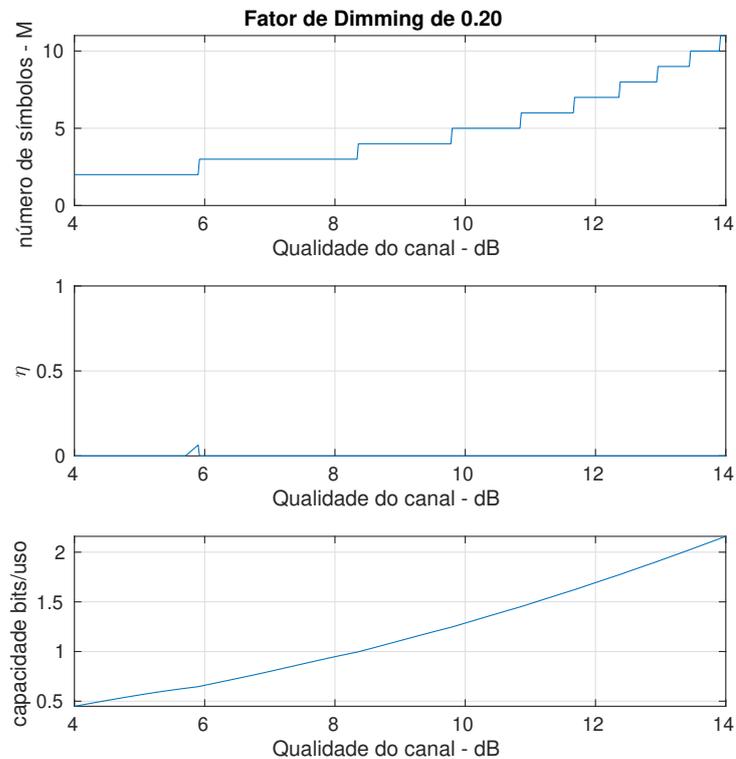


Figura 3.9: Número de símbolos da modulação M-PAM com otimização $\eta \cdot D_{Shift}$ que maximiza a taxa de transmissão no canal VLC com fator de escurecimento de 0,2.

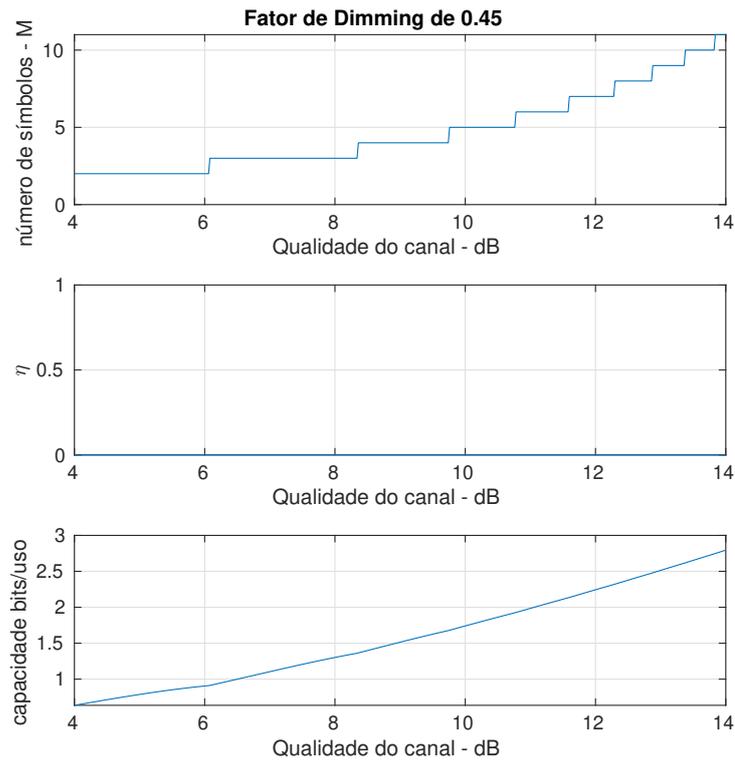


Figura 3.10: Número de símbolos da modulação M-PAM com otimização $\eta \cdot D_{Shift}$ que maximiza a taxa de transmissão no canal VLC com fator de escurecimento de 0,45.

escurecimento de 0,02. Com um fator de escurecimento mais próximo ao valor de 0,5, como na figura 3.10 e mesmo na figura 3.9, vemos que não há mais variações no valor de η como ocorrem na figura 3.8 antes dos pontos onde o número de símbolos M ótimos variam.

3.5.2 Otimização completa

Como inicialização da otimização completa, utilizamos o resultado da otimização pelo resultado da otimização por $\eta \cdot D_{Shift}$. Mostramos aqui os resultados da otimização com modulação 4-PAM variando o fator de escurecimento de 0,05 até 0,95. Nos gráficos, adicionamos os limites superior e inferior da capacidade do canal VLC, conforme mostrado em 3.2.2. O valor real da capacidade máxima do canal VLC estará em algum ponto entre os limites. E foi adicionado também o resultado da otimização da taxa de uma modulação M-PAM também de 4 níveis, mas com seus níveis igualmente espaçados de 0 até 1, onde apenas se varia as probabilidades destes níveis.

Podemos ver na figura 3.11 os resultados da otimização para as qualidades de canal de 14 dB e 17 dB que possuem níveis de ruído mais baixo. Temos para cada otimização 3 gráficos. O primeiro mostra os níveis resultantes da otimização. Para as qualidades de canal de 14 dB e 17 dB, podemos ver que uma parte do fator de escurecimento é buscada pela variação dos níveis e não pelas probabilidades. Em 14 dB, entre os fatores de escurecimento de 0,4 e 0,6, não há variação de probabilidades e a taxa fica em 2 bits por uso de canal, que é o máximo que pode ser atingido pela modulação 4-PAM. O mesmo

ocorre para a qualidade de canal de 17 dB, entre os fatores de escurecimento de 0,2 até 0,8. Com os fatores de escurecimento menores que 0,2 ou maiores que 0,8, a otimização leva a mudanças de probabilidades e não apenas mudanças nos níveis, pois os níveis começam a ficar muito próximos, considerando o nível de ruído, começando a interferir muito na taxa de transmissão. Neste caso, a otimização que maximiza a taxa necessita mexer nas probabilidades para não aproximar tanto os níveis. Alterar as probabilidades dos símbolos e não nos níveis, reduz a entropia da transmissão dos dados, mas impede um aumento na taxa de erros provocada por uma aproximação maior dos níveis M-PAM, dado o nível de ruído. Pode-se ver que para níveis de ruído mais alto (menor a qualidade do canal), haverá mudanças das probabilidades com fatores de escurecimento mais próximos de 0,5 e os níveis M-PAM não se aproximarão tanto como nos casos de menor ruído (maior qualidade de canal).

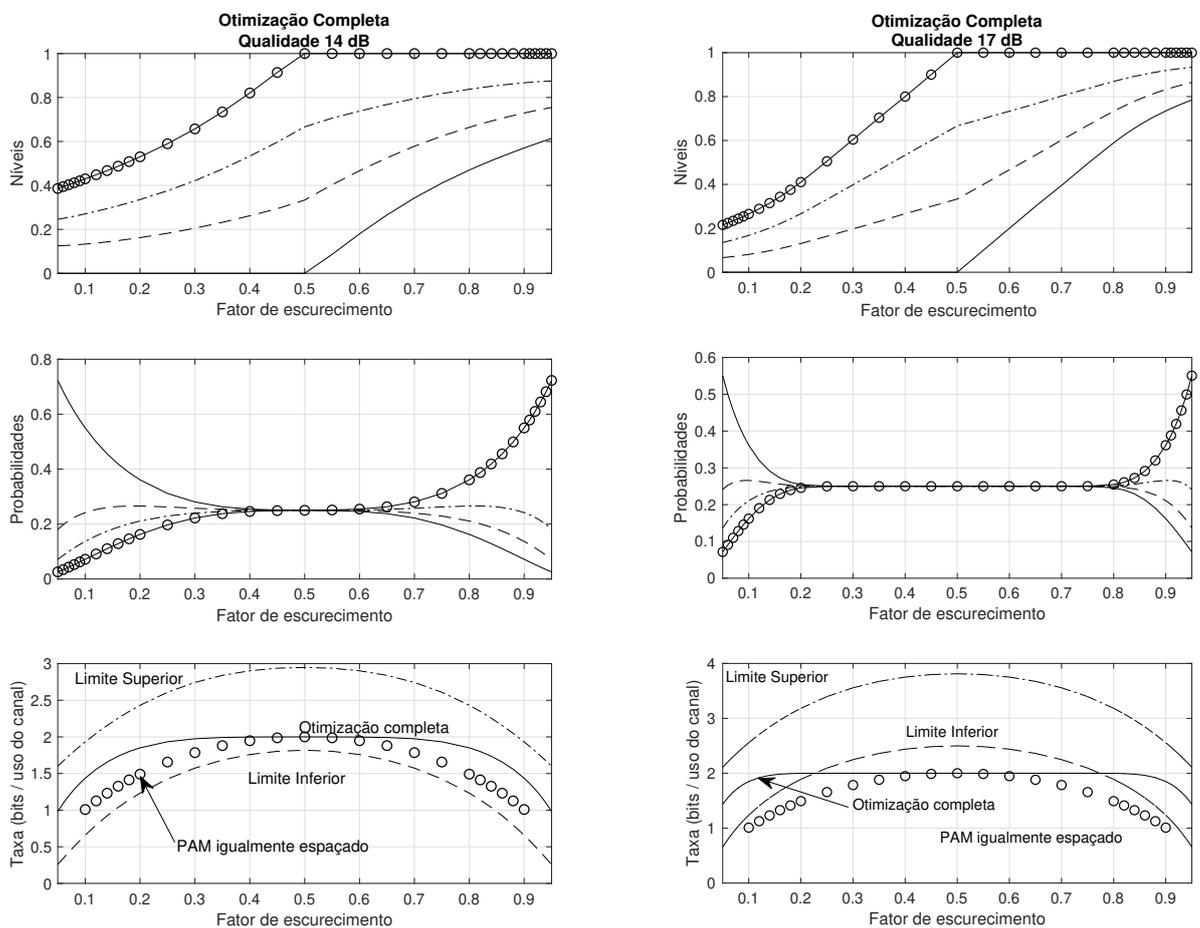


Figura 3.11: Otimização completa dos níveis e probabilidades. Qualidade do canal de 14 dB e 17 dB. Nos gráficos de níveis e probabilidades, as curvas com mesmo estilo correspondem ao mesmo símbolo M-PAM.

Na figura 3.12, são apresentados os resultados de otimização para qualidade de canal de 10dB e 12dB. A capacidade do canal VLC vai se reduzindo, conforme esperado, quando aumentamos o nível de ruído. Nos gráficos, podemos ver que a menor capacidade ocorre

no caso de 10dB e notamos também que o resultado da otimização é com certeza mais próximo da capacidade de canal quando o ruído é maior. Nos casos de qualidade de canal de 14dB e 17dB, para chegar mais próximo da capacidade, deveríamos aumentar o número de níveis M-PAM. Quanto maior o ruído, vemos que a otimização muda mais as probabilidades e tende a mexer menos ainda nos níveis. No caso de 10dB, vemos que os níveis sofrem modificações mais significativas apenas nos fatores de escurecimento próximos de 0,1 e 0,9.

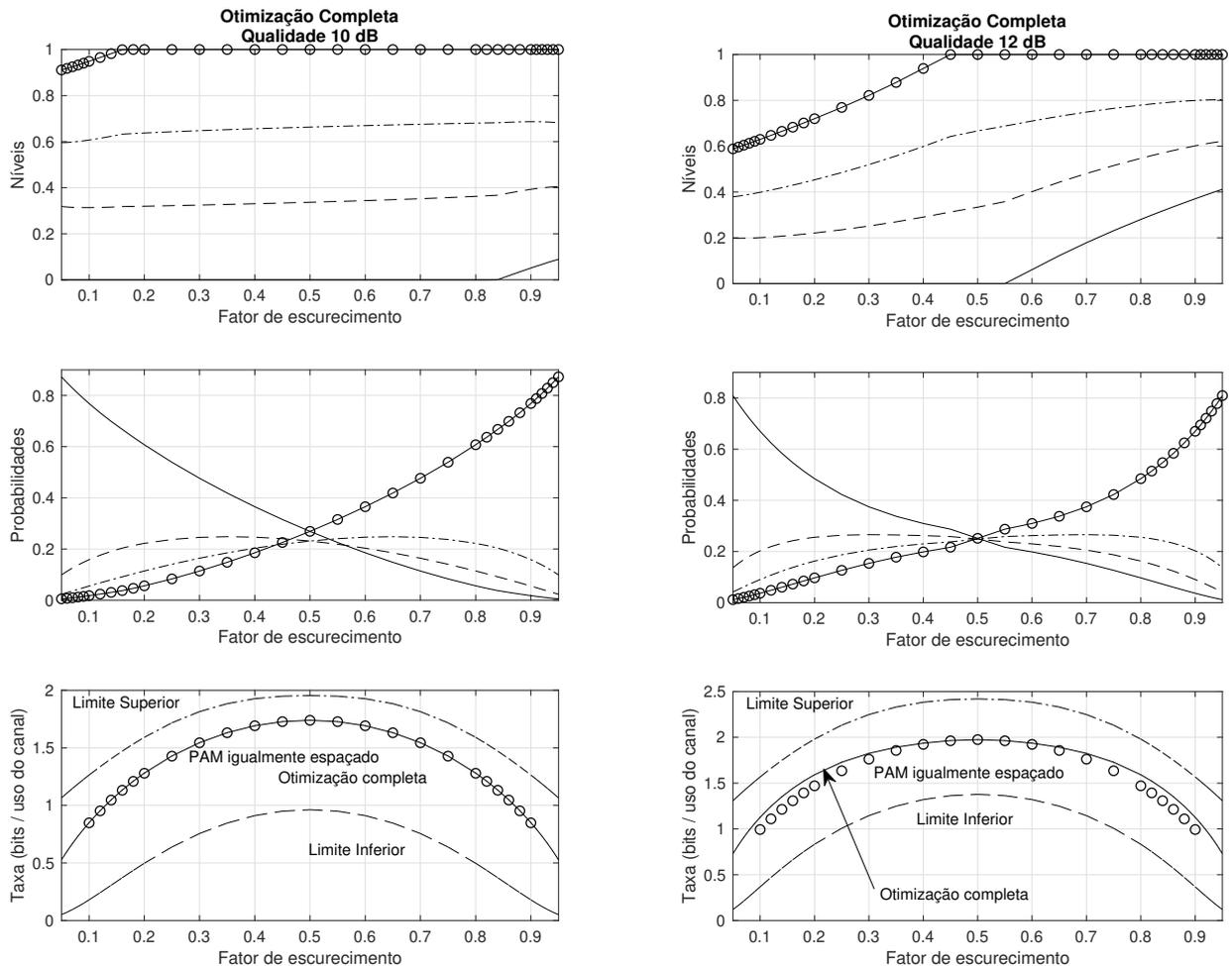


Figura 3.12: Otimização completa dos níveis e probabilidades. Qualidade do canal de 10 dB e 12 dB. Nos gráficos de níveis e probabilidades, as curvas com mesmo estilo correspondem ao mesmo símbolo M-PAM.

3.5.3 Comparação da otimização completa com a otimização com parâmetro η

Quando a qualidade do canal é alta (baixo nível de ruído quando comparado ao nível do sinal) as otimizações completas e otimização do parâmetro η chegam a um mesmo

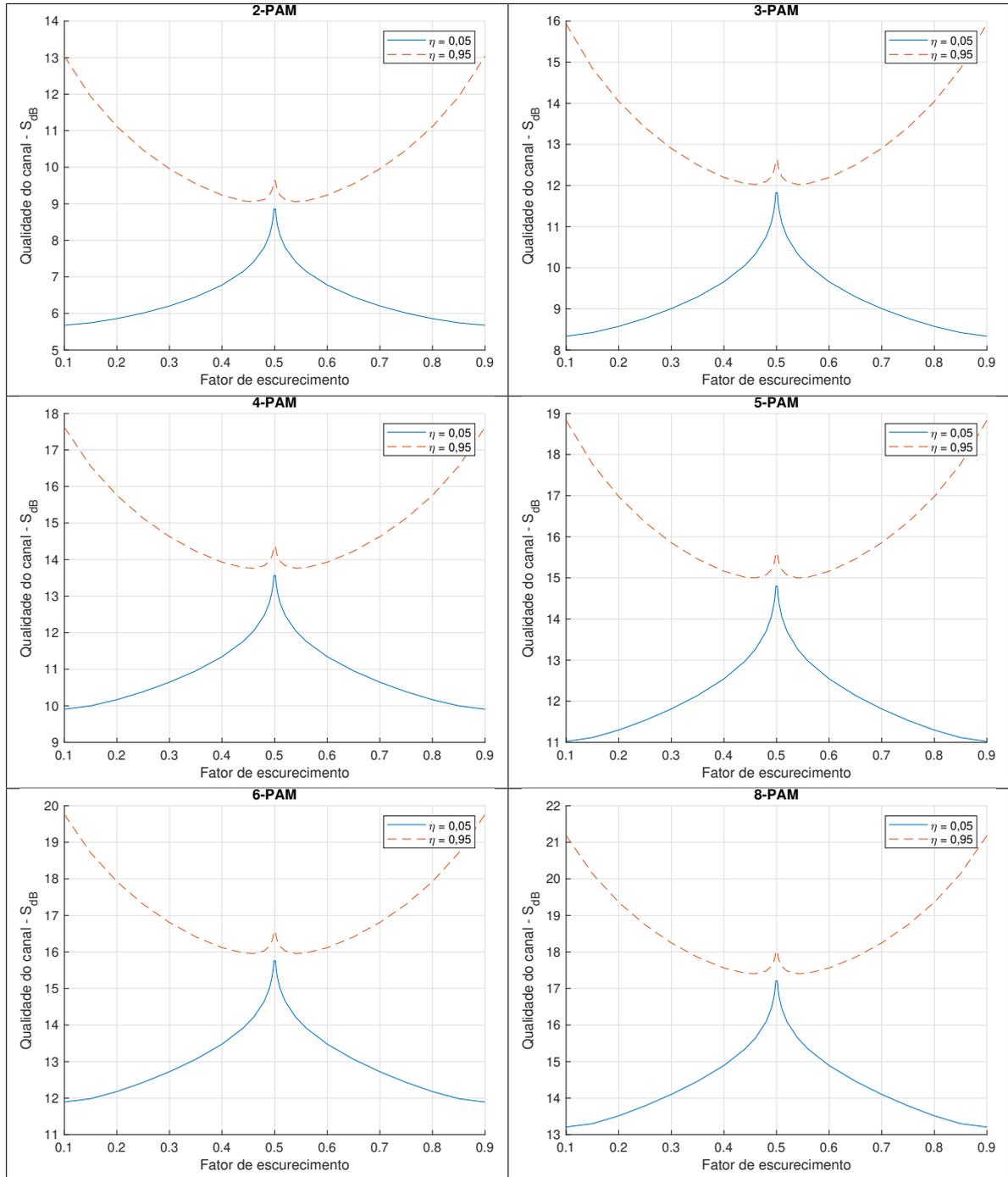


Figura 3.13: Faixas de qualidade de sinal (S_{dB}) com valores $\eta = 0,05$ e $\eta = 0,95$ resultantes da otimização $\eta \cdot D_{shift}$.

resultado. Iremos comparar os resultados das duas otimizações para os casos de qualidade de canal média e qualidade de canal baixa (alto nível de ruído quando comparado ao nível do sinal). Chamamos aqui de alta qualidade de canal quando a otimização do parâmetro η leva ao valor $\eta \geq 0,95$ acima da curva pontilhada dos gráficos na figura 3.13, de média qualidade para o caso de $0,05 < \eta < 0,95$ no meio das curvas e de baixa qualidade de canal quando $\eta \leq 0,05$ abaixo da curva contínua. Nesta definição, o valor das qualidades de canal que definem cada um destas faixas são dependentes do número de níveis M da modulação M-PAM.

a) Cenário de Alta Qualidade de Canal

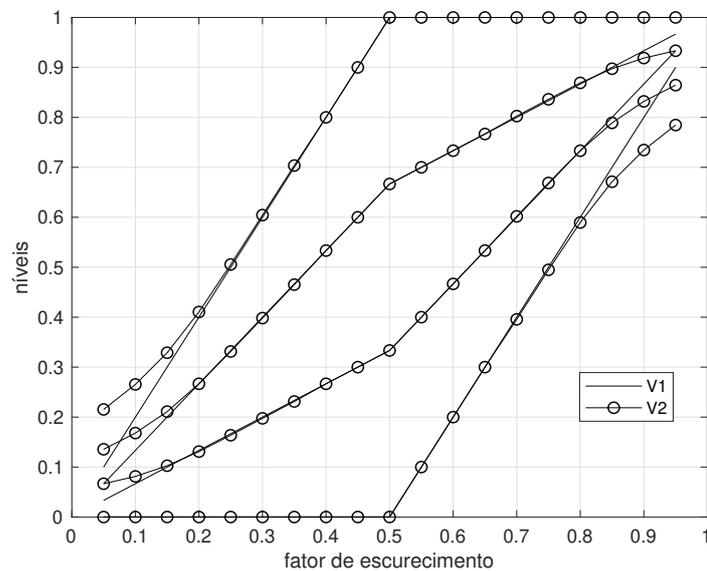


Figura 3.14: Comparação entre os níveis obtidos com $\eta = 1$ (V1) e os níveis obtidos com otimização de níveis e probabilidades (otimização completa) (V2) para qualidade de canal de $S_{dB} = 17 dB$.

No caso de qualidade de canal alta para determinada modulação e um determinado fator de escurecimento, podemos ver que a melhor solução é quando as probabilidades de se emitir cada nível são iguais e os níveis são os obtidos com o parâmetro $\eta = 1$. Na figura 3.14, temos os níveis da modulação 4-PAM em função do fator de escurecimento para uma qualidade de canal de $S = 17 dB$. Em V1, temos os níveis calculados utilizando a equação 3.26 com $\eta = 1$ e em V2, temos o resultado da otimização completa de níveis e probabilidades descrita na seção 3.4.2. Podemos ver, que para valores de escurecimento $0,3 \leq \xi \leq 0,7$, os níveis de V1 e V2 são coincidentes, e assim consideramos que neste intervalo temos um cenário de baixo ruído, em que a melhor solução da otimização completa de níveis e probabilidades cai na solução da equação 3.26 com $\eta = 1$ e probabilidades dos níveis iguais. Mostrando que a otimização completa tende a otimização com parâmetro $\eta = 1$ para o cenário de baixo ruído.

Para uma razão sinal ruído maior, como visto na figura 3.15, temos agora, que para

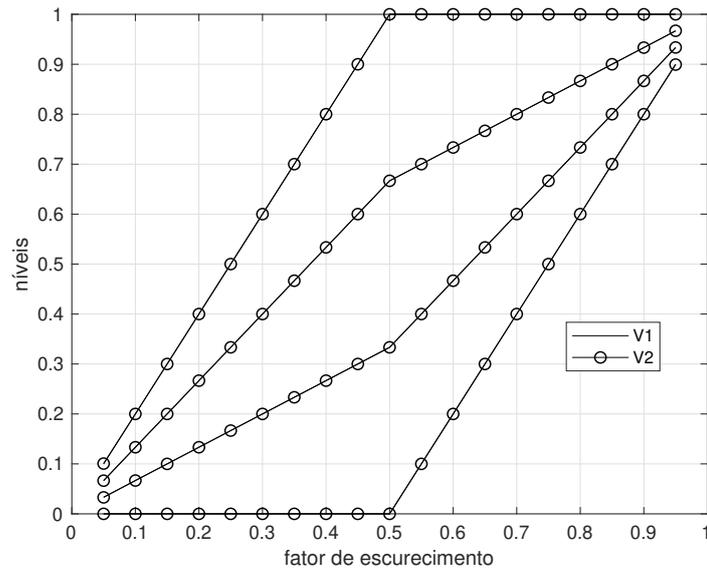


Figura 3.15: Comparação entre os níveis obtidos com $\eta = 1$ (V1) e os níveis obtidos com otimização de níveis e probabilidades (V2) para $SNR = 30 dB$.

todo o intervalo do gráfico $0,05 \leq \xi \leq 0,95$, os níveis de V1 e V2 são coincidentes. E assim podemos dizer que para todo este intervalo, temos um cenário de alta qualidade de canal.

b) Cenário de Qualidade de Canal Média

Definimos a qualidade de canal média quando o valor de η , na otimização ηD_{Shift} , fica entre 0,05 e 0,95. Não temos um nível de ruído baixo o suficiente para a melhor otimização garantir o valor de $\eta = 1$ e assim as probabilidades dos símbolos da modulação M-PAM iguais, nem tão alto para fazer com que o valor de η vá para zero fazendo com que os níveis fiquem equidistantes entre 0 e 1, e o ajuste de escurecimento seja feito exclusivamente pelas probabilidades dos símbolos.

Podemos ver na figura 3.16 o resultado da otimização completa (linhas pontilhadas) e otimização por $\eta \cdot D_{Shift}$. Os resultados ficam muito próximos, mas não iguais. Há um pequeno ganho de taxa com a otimização completa, com fator de escurecimento de 0,2 temos a taxa de 1,7325 bits por uso de canal para a otimização completa e 1,7276 bits por uso de canal para a otimização por $\eta \cdot D_{Shift}$.

c) Cenário de Qualidade de Canal Baixa

O caso de qualidade de canal baixa (ruído alto quando comparado ao nível do sinal) é definido quando o resultado da otimização ηD_{Shift} leva ao valor de $\eta < 0,05$, e assim os níveis da modulação M-PAM que maximizam a taxa ficam igualmente distribuídos de 0 até 1. Neste caso as probabilidades dos símbolos que definem o fator de escurecimento. Com a otimização completa, há uma pequena variação dos níveis quando comparado com a otimização por $\eta \cdot D_{Shift}$. Na figura 3.17, temos os resultados da otimização. A curva

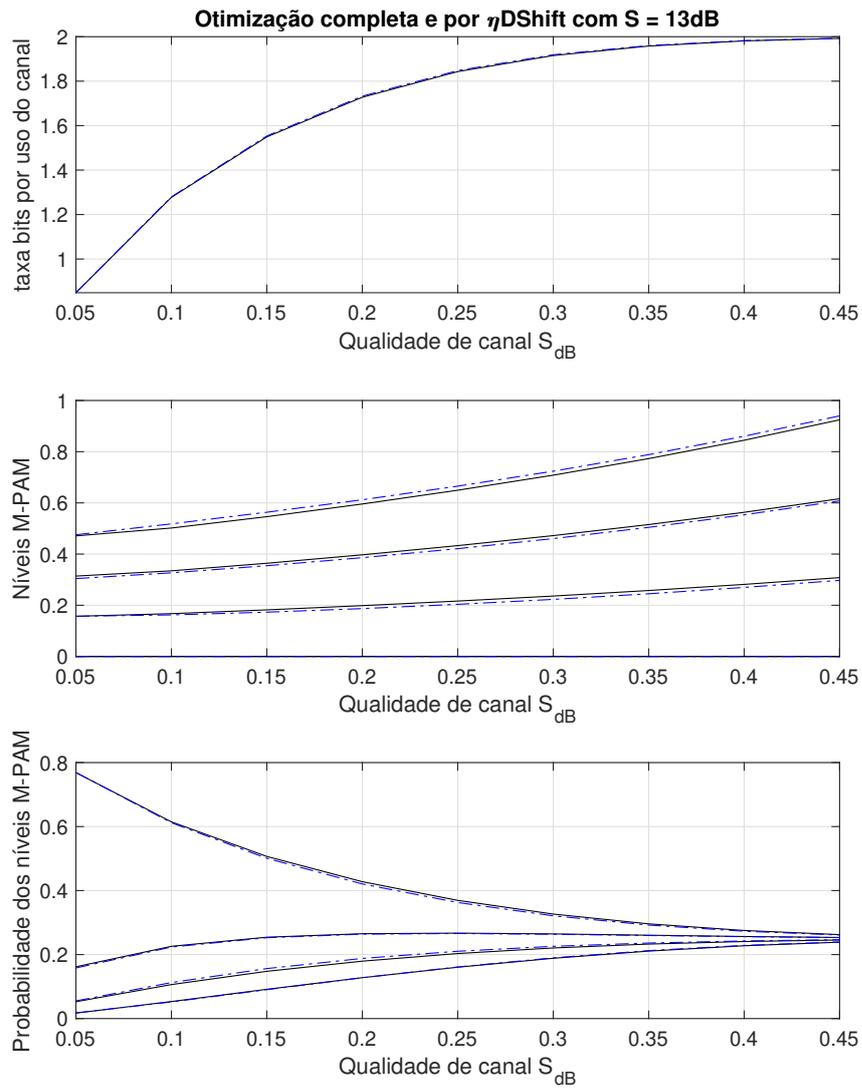


Figura 3.16: Cenário de qualidade de canal média. Comparação entre os níveis obtidos com otimização η Dshift (traços contínuos) e os níveis obtidos com otimização de níveis e probabilidades (traços pontilhados) para $SNR = 13\text{ dB}$ e modulação 4-PAM.

tracejada é a otimização completa e a curva contínua a otimização por $\eta \cdot D_{Shift}$. No fator de escurecimento de 0,2, temos a taxa de 1,2805 bits por uso de canal na otimização completa e a taxa de 1,2789 bits por uso de canal na otimização $\eta \cdot D_{Shift}$. Uma diferença não significativa também.

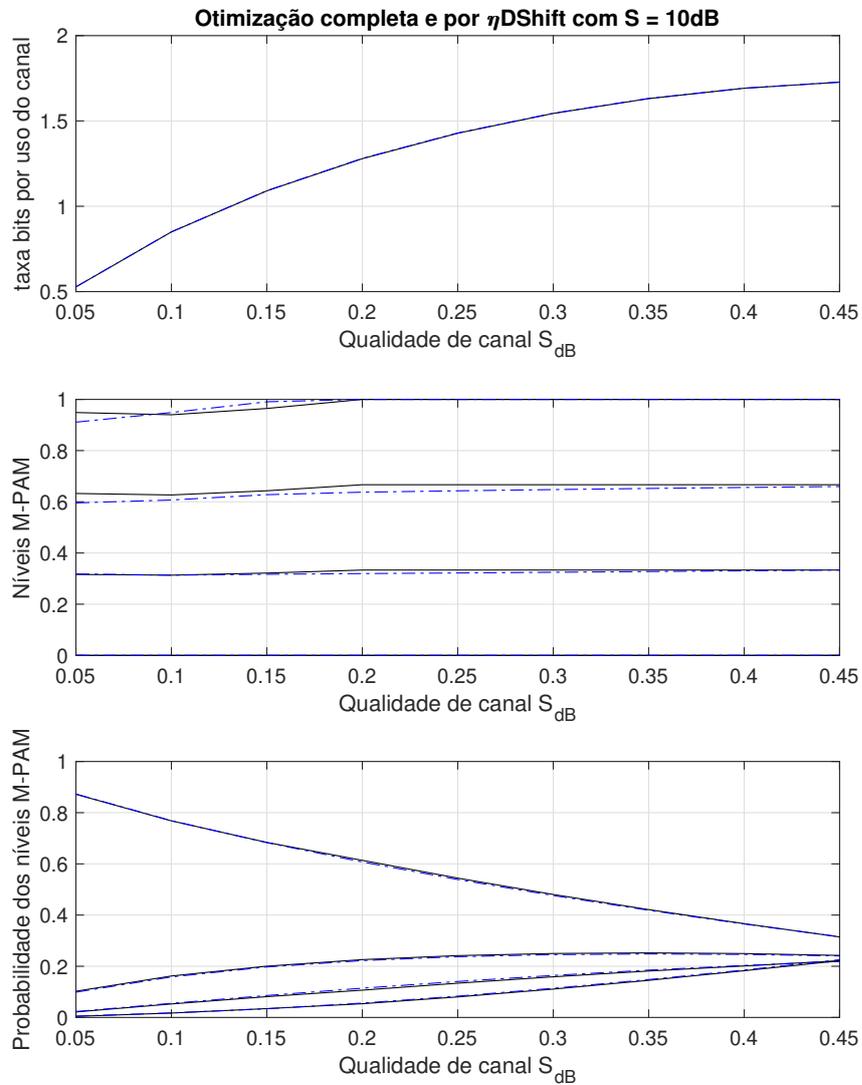


Figura 3.17: Cenário de qualidade de canal baixa. Comparação entre os níveis obtidos com otimização ηD_{Shift} (traços contínuos) e os níveis obtidos com otimização de níveis e probabilidades (traços pontilhados) para $SNR = 10 dB$ e modulação 4-PAM.

Capítulo 4

Um Esquema de Codificação de Canal para VLC com Escurecimento

A necessidade de se manter um escurecimento ("dimming") e impedir a cintilação ("flickering") são importantes para a comunicação por VLC [8]. Alguns artigos lidam exatamente com esta necessidade como em [12], [5] e [20].

No artigo [12], é proposta uma implementação de codificação chamado de RCPC ("Rate-compatible punctured convolutional") que pode ser vista simplificada na figura 4.1. No primeiro bloco é utilizado um codificador convolucional com taxa de codificação $R < 2 \cdot \xi$ (para $\xi < 0.5$). No bloco seguinte, no puncionador ("puncture"), é definido os bits que serão trocados por 0 ou 1 de modo a atingir o fator de escurecimento específico. Em seguida, os dados são embaralhados no embaralhador ("interleaver") e depois modulados na modulação OOK. Podemos perceber que para atingir fatores de escurecimento pequenos, i.e. próximos de zero, é necessário usar códigos com taxas bem baixas de modo a permitir que um grande número de bits possa ser puncionado ("punctured") e trocado por bits 0. O mesmo é necessário para fatores de escurecimento próximos de 1. Este método transmite assim, diversos bits que não carregam informação e são apenas utilizados para ajuste do escurecimento.

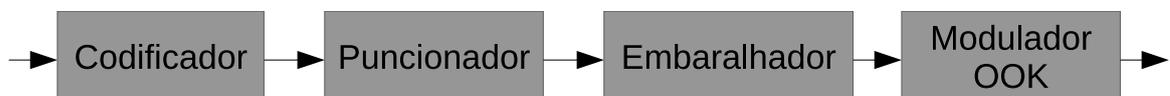


Figura 4.1: Diagrama do codificador utilizado no artigo [12].

No artigo [5], é proposto uma nova implementação de codificação para VLC utilizando um codificador Polar. Inicialmente é feita uma análise da distribuição dos pesos (número de 1's) das palavras código na saída do codificador polar. Se esta distribuição ficar concentrada na média, teremos que o código polar não causaria problemas de cintilação (variação na intensidade luminosa). Assim não seria necessário fazer uma correção adicionando 0's ou 1's de modo a corrigir problemas de cintilação. No resultado apresentado no artigo, vemos que há uma grande concentração no histograma de pesos próximos da média, como podemos ver na figura 4.2 retirada do artigo [5]. Com este histograma, vemos que para conseguir um fator de escurecimento de 0,5 nada é necessário pois a distribuição de pesos

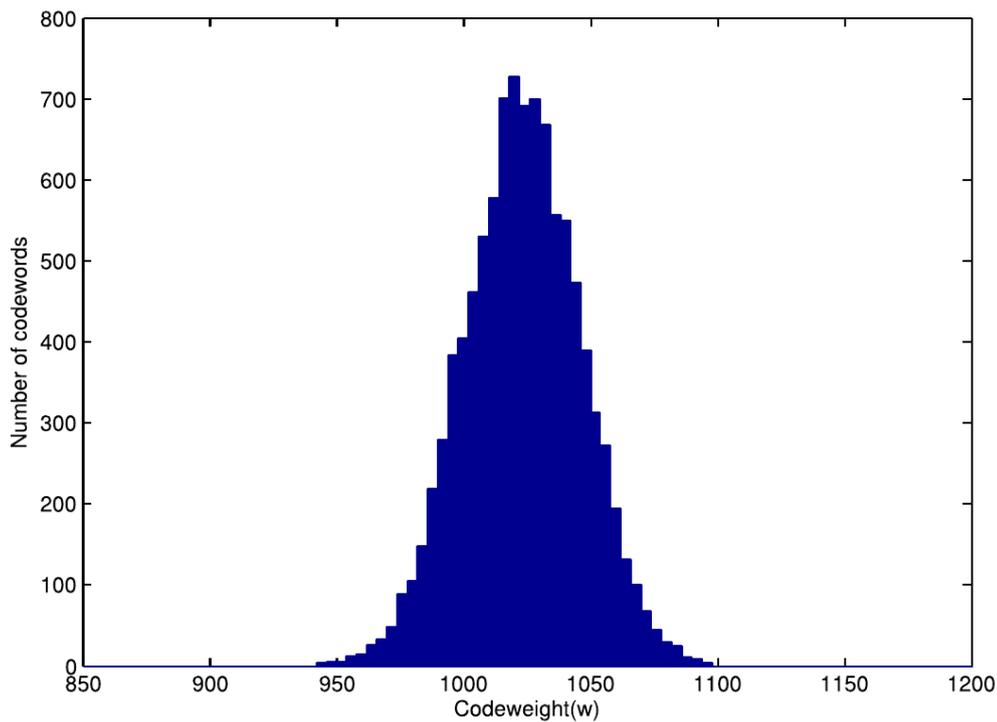


Figura 4.2: Histograma dos pesos das palavras código que saem do codificador Polar. Gráfico retirado do artigo [5].

está bem concentrada na metade do tamanho da palavra código. Para outros fatores de escurecimento, o artigo propõe acrescentar 0's e ou 1's de modo que temos novamente a transmissão de bits sem informação.

Em [20], um método para redução da cintilação também é proposto utilizando um código baseado em máquinas de estado, mas não é mencionado ajustes do fator de escurecimento diferentes de 0,5 o que requereria inserção de 0's ou 1's, conforme os outros artigos.

Considerando os resultados das otimizações que fizemos no capítulo 3, propomos um método para conseguir gerar os símbolos M-PAM diretamente com as probabilidades resultantes da otimização.

Utilizamos um codificador LDPC e na saída dele um mapeador dos bits gerados pelo codificador para os símbolos M-PAM. Fizemos um estudo similar ao do artigo [5] para as palavras código geradas pelo codificador LDPC que utilizamos e que será descrito neste capítulo. O resultado do histograma dos pesos das palavras código estão na figura 4.3. Para gerar este histograma, geramos aleatoriamente 300.000 entradas de 20.000 bits cada no codificador e para cada saída de 70.000 bits do codificador determinamos o seu peso (número de 1's) e fizemos o histograma que pode ser visto na figura 4.3.

Uma limitação do histograma da figura 4.3 é que ele leva em conta o número de 1's que para modulação OOK é diretamente proporcional a intensidade luminosa. No nosso caso, utilizamos a modulação M-PAM e assim a intensidade depende do mapeamento dos bits para os símbolos e dos níveis dos símbolos M-PAM. Desta forma, fizemos uma nova simulação considerando estes fatores utilizando o mapeamento dado pela tabela 4.2, os níveis M-PAM da tabela 4.1 e o novo fator de escurecimento calculado de $\xi = 0,047$ e

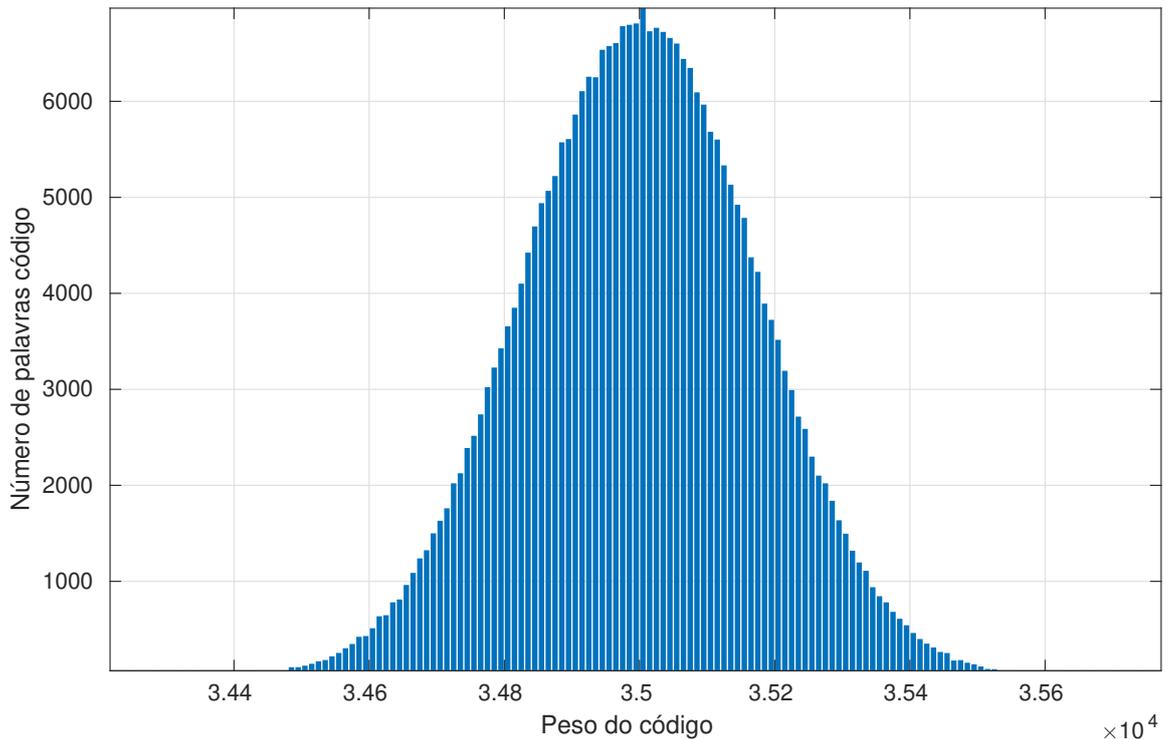


Figura 4.3: Histograma dos pesos das palavras código de saída do codificador LDPC. Histograma de 300.000 simulações, com intervalo de 10 bits.

chegamos ao resultado da figura 4.4. Podemos ver no histograma uma grande concentração dos eventos com uma pequena variação da intensidade.

A seguir mostramos à dedução de um codificador e decodificador para se utilizar na comunicação VLC com modulação M-PAM de modo a respeitar as restrições impostas como escurecimento e potência máxima. Estas restrições levam, como visto, a símbolos com probabilidades distintas, tornando necessário a implementação de um codificador e decodificador que levem estas restrições em conta.

4.1 Codificador

Como visto nos resultados anteriores, uma codificação com probabilidades de símbolos não iguais é necessária para chegar mais próximo da capacidade de canal para o sistema de comunicação por luz visível. Fazendo a otimização completa de níveis e probabilidades, conforme descrito na seção 3.4.2, considerando $M = 4$ símbolos, um fator de escurecimento $\xi = 0,05$ e uma qualidade de canal $\mathcal{S}_{dB} = 17$ dB, temos como resultado da simulação que maximiza a taxa do canal com estas restrições, os níveis dos símbolos M-PAM de $\mathbf{x} = \{0, 0; 0, 0666; 0, 1355; 0, 2153\}$, e as probabilidades de cada um destes símbolos sendo $\mathbf{p} = \{0, 5505; 0, 2415; 0, 1366; 0, 0715\}$ e uma taxa calculada de $C = 1,4343 \cdot \text{bits/uso do canal}$.

Um modo para conseguir os símbolos M-PAM com probabilidades diferentes, considerando que os bits a serem transmitidos são equiprováveis, é utilizar um codificador e na

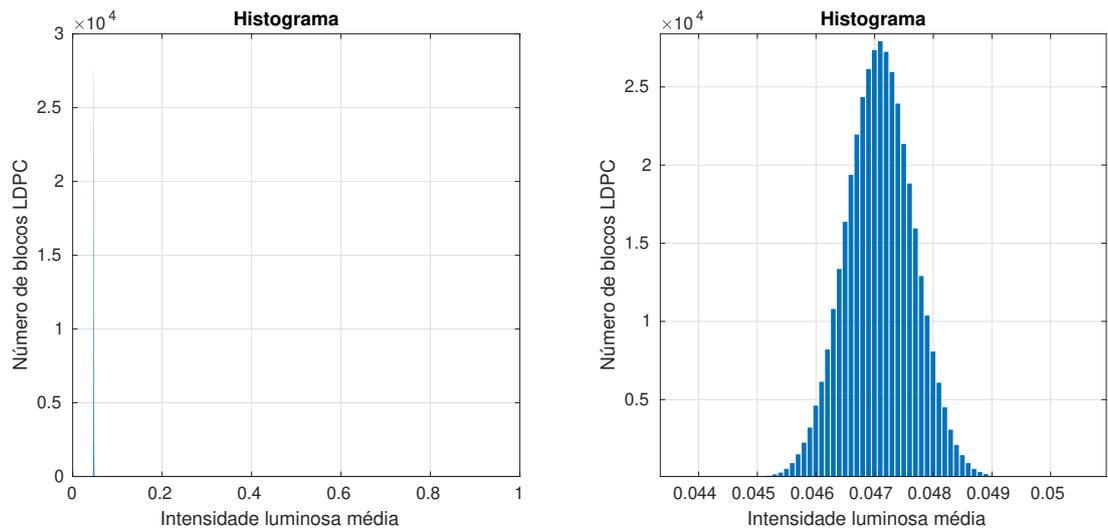


Figura 4.4: Histograma do número de blocos de saída do codificador para a intensidade média gerada por cada um dos blocos e com fator de escurecimento de $\xi = 0,047$. Na figura da esquerda temos o gráfico em toda a faixa de intensidade luminosa média, de 0 até 1. Na figura da direita fizemos uma ampliação na faixa de intensidade luminosa média de 0,044 até 0,05.

saída do codificador fazer um mapeamento para os símbolos de modo não uniforme. Na Figura 4.5, temos o diagrama de blocos do que seria este codificador com o mapeador não uniforme, onde o codificador recebe K bits e a partir deles gera $N > K$ bits codificados. Os N bits codificados entram no mapeador não uniforme e dele saem N_s símbolos prontos para serem transmitidos pelo canal VLC. Assim temos, que os K bits de informação a serem transmitidos são mapeados para N_s símbolos, cada símbolo estando em um dos M níveis disponíveis, com uma taxa de bits de informação por símbolo de K/N_s que deve ser menor que a capacidade do canal. Os parâmetros necessários para projetar este codificador são a taxa de codificação (do codificador LDPC) com o valor dado por $R = K/N$ e quantos bits são mapeados para cada símbolo sendo $N_b = N/N_s$.

Com N_b bits mapeados para cada símbolo, temos 2^{N_b} entradas para serem mapeadas para cada um dos M símbolos disponíveis. Podemos agora gerar uma especificação de mapeamento para os valores da otimização acima. Assim podemos considerar que:

$$M = 4, \quad (4.1)$$

$$\frac{K}{N_s} = R \cdot N_b < C \quad (4.2)$$

Utilizaremos $N_b = 4$ e assim temos $R < \frac{1,4343}{4} \approx 0,358$. Utilizaremos um codificador LDPC com $K = 20000$ e $N = 70000$, onde temos $R = \frac{2}{7} \approx 0,286 < 0,358$.

A matriz \mathbf{H} de dimensão $(N - K) \times N$ foi gerada aleatoriamente contendo metade das colunas com 2 elementos com valores diferentes de 0 e metade das colunas com 3 elementos diferentes de 0. Como resultado da geração aleatória, poderemos ter ciclos de ordem baixa na matriz \mathbf{H} e rodamos um algoritmo para remover os ciclos de ordem 2 [19].

A matriz utilizada pode ser baixada, ver apêndice A, bem como os programas utilizados para gerá-la, baseados nos programas de Radford M. Neal em [21].

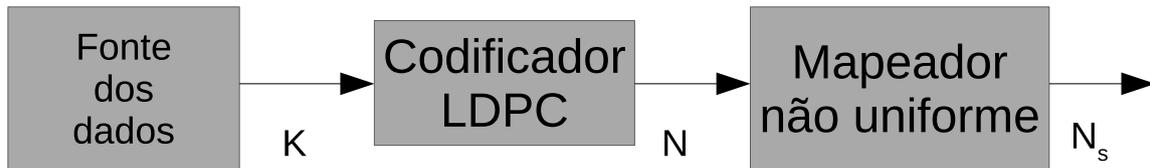


Figura 4.5: Codificador e mapeador não uniforme.

Precisamos agora definir como será o mapeamento para chegar o mais próximo possível das probabilidades $\mathbf{p} = \{0,5505; 0,2415; 0,1366; 0,0715\}$. Estamos utilizando $N_b = 4$ bits, o que corresponde à 16 valores a serem mapeados, e temos que definir quanto destes valores serão mapeados para cada nível x_i para chegar o mais próximo possível da probabilidade p_i . Um bom mapeamento que pode ser utilizado é o dado na tabela 4.1, onde N_{l_i} é o número de valores mapeados para o símbolo x_i .

Nível M-PAM	Valores mapeados	Total	Probabilidade Final
$x_1 = 0$	$N_{l_1} = 9$	16	$p_1 = \frac{9}{16} = 0,5625 \approx 0,5505$
$x_2 = 0,0666$	$N_{l_2} = 4$	16	$p_2 = \frac{4}{16} = 0,25 \approx 0,2415$
$x_3 = 0,1355$	$N_{l_3} = 2$	16	$p_3 = \frac{2}{16} = 0,125 \approx 0,1366$
$x_4 = 0,2153$	$N_{l_4} = 1$	16	$p_4 = \frac{1}{16} = 0,0625 \approx 0,0715$

Tabela 4.1: Distribuição do mapeamento

Definindo este novo mapeamento, podemos calcular a nova capacidade de canal, conforme equação 3.34 e obtemos o valor de $C = 1,3925$ e o novo fator de escurecimento de $\xi = 0,0471$.

O mapeamento mostrado na tabela 4.1 define quantos valores são mapeados para cada nível M-PAM, mas ainda é possível definir diversos mapeamentos. Neste exemplo, o número de mapeamentos diferentes possíveis é de

$$\frac{16!}{9! \cdot 4! \cdot 2!} = 1201200 \quad (4.3)$$

combinações. A primeira pergunta que fica é se a escolha do mapeamento influencia o resultado. Isso será visto mais à frente. Como próximo passo, temos que deduzir o algoritmo de decodificação / demodulação do sinal recebido. Mas primeiro é necessário equacionar melhor o mapeador.

Como visto, o mapeador recebe N bits e gera na sua saída N_s símbolos. Assim cada $N_b = N/N_s$ bits é codificado em cada um dos N_s símbolos. Podemos definir a função V :

$$s_i = V(\mathbf{b}_i) \quad (4.4)$$

que faz o mapeamento dos bits $\mathbf{b}_i = \{b_{(i-1) \cdot N_b + 1}, b_{(i-1) \cdot N_b + 2}, \dots, b_{i \cdot N_b}\}$ no símbolo $s_i \in \{x_1, \dots, x_M\}$. A função V pode ser representada por uma tabela, como mostrado por exemplo na tabela 4.2, que mostra um dos possíveis 1201200 mapeamentos seguindo a distribuição da tabela 4.1.

\mathbf{b}_i	s_i
0000	x_1
0001	x_1
0010	x_1
0011	x_1
0100	x_1
0101	x_1
0110	x_1
0111	x_1
1000	x_1
1001	x_2
1010	x_2
1011	x_2
1100	x_2
1101	x_3
1110	x_3
1111	x_4

Tabela 4.2: Um possível mapeamento

4.2 Dedução do algoritmo do decodificador

Na determinação do algoritmo para fazer a decodificação do sinal recebido, utilizaremos o algoritmo de grafo fatores de [14]. Na Figura 4.6, podemos observar o bloco do decodificador, o canal de comunicação VLC e o decodificador com os nomes dos sinais em cada bloco. Os K bits do vetor \mathbf{t} são codificados em N bits do vetor \mathbf{b} pelo codificador LDPC. Os bits na saída do decodificador são mapeados em $N_s = N/N_b$ símbolos do vetor $\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_{N_s}\}$ de modo a gerá-los com as probabilidades desejadas através do bloco mapeador. Cada sinal s_i será um dos símbolos da modulação M-PAM $\{x_1, \dots, x_M\}$, gerados com as probabilidades $\{p_1, \dots, p_M\}$. Os símbolos gerados são então transmitidos pelo canal VLC e recebidos com um ruído Gaussiano \mathbf{z} com média nula e variância σ^2 . O sinal recebido é representado pelo vetor $\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{z}$. O vetor \mathbf{y} é então processado pelo decodificador que tem como objetivo encontrar os bits \mathbf{b} que maximizam a probabilidade $p(\mathbf{b}|\mathbf{y})$.

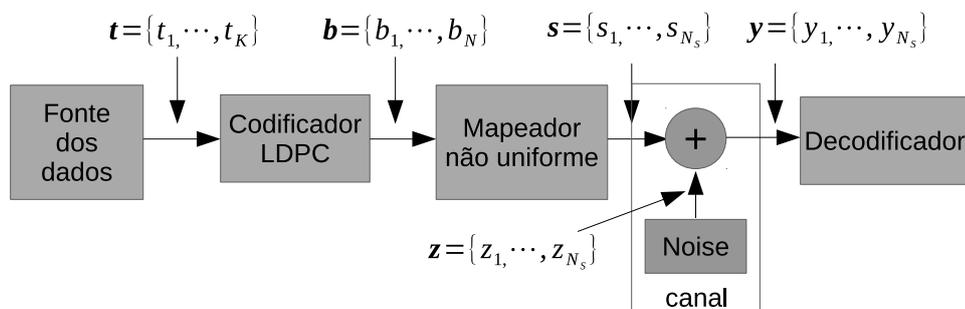


Figura 4.6: Sistema completo VLC, com codificador, canal e decodificador.

Para fazer a decodificação, utilizaremos a regra de maximizar a probabilidade a poste-

riori ("MAP"). Desta forma, para decodificar os símbolos transmitidos, temos que calcular o valor de v_i que maximiza a probabilidade do sinal transmitido $b_i = v_i$, dado que o decodificador recebeu \mathbf{y} como abaixo:

$$\hat{b}_i = \arg \max_{v_i} p(b_i = v_i | \mathbf{y}) \quad (4.5)$$

onde b_i é o i -ésimo bit transmitido (antes do mapeamento) e \mathbf{y} são os símbolos recebidos pelo decodificador. Podemos reescrever a probabilidade $p(b_i = v_i | \mathbf{y})$ utilizando a probabilidade conjunta $p(\mathbf{b} = \mathbf{v} | \mathbf{y})$ como

$$p(b_i = v_i | \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{b}: b_i = v_i} p(\mathbf{b} | \mathbf{y}). \quad (4.6)$$

onde a somatória $\sum_{\mathbf{b}: b_i = v_i}$ é em todos os N bits \mathbf{b} menos no bit b_i no qual se está calculando a probabilidade. Aplicando à equação 4.6 na equação 4.5, resulta em

$$\hat{b}_i = \operatorname{argmax}_{v_i} \sum_{\mathbf{b}: b_i = v_i} p(\mathbf{b} | \mathbf{y}). \quad (4.7)$$

Agora precisamos quebrar esta equação em mais produtos de modo a montar um grafo fator que possa ser implementado para determinar os valores de \hat{b}_i . Desta maneira, podemos inicialmente utilizar o teorema de Bayes e reescrever a equação como

$$\hat{b}_i = \operatorname{argmax}_{v_i} \sum_{\mathbf{b}: b_i = v_i} p(\mathbf{y} | \mathbf{b}) \cdot \frac{p(\mathbf{b})}{p(\mathbf{y})}. \quad (4.8)$$

O termo $p(\mathbf{y})$ independe de v_i e é constante com a somatória de \mathbf{b} e podemos tirá-lo para fora da somatória, e como é uma constante, não influenciaria no cálculo do b_i que maximiza a equação, por conseguinte podemos retirá-lo da equação. Assim,

$$\hat{b}_i = \operatorname{argmax}_{v_i} \sum_{\mathbf{b}: b_i = v_i} p(\mathbf{y} | \mathbf{b}) \cdot p(\mathbf{b}). \quad (4.9)$$

Agora um outro passo seria colocar os símbolos transmitidos \mathbf{s} na equação, seguindo a ordem do codificador, que recebe os bits \mathbf{b} e gera os símbolos \mathbf{s} . Pelo teorema da probabilidade total, podemos escrever

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{b}) = \sum_{\mathbf{s}} p(\mathbf{y} | \mathbf{b} \cap \mathbf{s}) \cdot p(\mathbf{s} | \mathbf{b}) = \sum_{\mathbf{s}} p(\mathbf{y} | \mathbf{b}) \cdot p(\mathbf{s} | \mathbf{b}). \quad (4.10)$$

A segunda simplificação em que se retira a intersecção com \mathbf{s} se dá pelo fato de \mathbf{y} depender diretamente de \mathbf{s} e este por sua vez depender de \mathbf{b} , como visto no diagrama da Figura 4.6. Então podemos reescrever a equação 4.9 utilizando a equação 4.10 como

$$\hat{b}_i = \operatorname{argmax}_{v_i} \sum_{\mathbf{b}: b_i = v_i} \sum_{\mathbf{s}} p(\mathbf{y} | \mathbf{s}) \cdot p(\mathbf{s} | \mathbf{b}) \cdot p(\mathbf{b}). \quad (4.11)$$

Considerando a função de mapeamento dada na equação 4.4 podemos criar uma nova função chamada \mathbf{V} (em negrito) que é a aplicação da função V em todos os N_s grupos de

bits \mathbf{b}_i gerando os N_s símbolos s_i , conforme abaixo

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{b}) &= \left\{ V(b_1, \dots, b_{Nb}), V(b_{Nb+1}, \dots, b_{2 \cdot Nb}), \dots, V(b_{(Ns-1) \cdot Nb+1}, \dots, b_{Ns \cdot Nb}) \right\} \\ &= \{s_1, s_2, \dots, s_{Ns}\} = \mathbf{s} \end{aligned} \quad (4.12)$$

e deste modo, podemos escrever que a probabilidade $p(\mathbf{s}|\mathbf{b})$ é dada por

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{b}) = [\mathbf{V}(\mathbf{b}) = \mathbf{s}] \quad (4.13)$$

onde a função $[\cdot]$ é a função de Iverson que é 1 apenas quando a igualdade interna a ela é verdadeira, e tendo o valor 0 caso contrário. Com isso, reescrevemos a equação 4.11 da seguinte forma

$$\hat{b}_i = \operatorname{argmax}_{v_i} \sum_{\mathbf{b}:b_i=v_i} \sum_{\mathbf{s}} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}) \cdot [\mathbf{V}(\mathbf{b}) = \mathbf{s}] \cdot p(\mathbf{b}). \quad (4.14)$$

Consideramos que os bits transmitidos são equiprováveis e independentes, assim a probabilidade $p(\mathbf{b})$ é constante e igual para todos os valores de \mathbf{b} que são palavras-códigos válidas geradas pelo codificador LDPC (sendo seu valor o inverso do número de palavras-códigos válidas que é $\frac{1}{2^K}$). Como a probabilidade é constante, podemos multiplicar o termo da equação 4.14, dentro do argmax por esta probabilidade que não modificará o ponto máximo dela, e assim levará ao mesmo \hat{b}_i . Assim, podemos definir a função $I_c(\mathbf{b})$ que é 1 quando \mathbf{b} é uma palavra-código válida e 0 quando não é. Temos assim que

$$I_c(\mathbf{b}) = 2^K \cdot p(\mathbf{b}). \quad (4.15)$$

Definindo a função $\mathbf{VC}(\mathbf{b}, \mathbf{s})$ como

$$\mathbf{VC}(\mathbf{b}, \mathbf{s}) = \operatorname{Eq}(\mathbf{V}(\mathbf{b}) = \mathbf{s}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{V}(\mathbf{b}) = \mathbf{s} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.16)$$

e substituindo as equações 4.15 e 4.16 em 4.14, podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{b}_i &= \operatorname{argmax}_{v_i} \frac{1}{2^K} \cdot \sum_{\mathbf{b}:b_i=v_i} \sum_{\mathbf{s}} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}) \cdot \mathbf{VC}(\mathbf{b}, \mathbf{s}) \cdot I_c(\mathbf{b}) \\ &= \operatorname{argmax}_{v_i} \sum_{\mathbf{b}:b_i=v_i} \sum_{\mathbf{s}} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}) \cdot \mathbf{VC}(\mathbf{b}, \mathbf{s}) \cdot I_c(\mathbf{b}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

A função objetivo pode ser então retirada da função acima, como sendo:

$$G(\mathbf{b}) = p(\mathbf{y}|\mathbf{s}) \cdot \mathbf{VC}(\mathbf{b}, \mathbf{s}) \cdot I_c(\mathbf{b}) \quad (4.18)$$

Cada símbolo transmitido e recebido é independente dos outros e assim temos que

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^{N_s} p(y_i|s_i) \quad (4.19)$$

o mesmo para os conjuntos de bits \mathbf{b}_i e os símbolos s_i e assim temos

$$\mathbf{VC}(\mathbf{b}, \mathbf{s}) = \prod_{i=1}^{N_s} VC'(\mathbf{b}_i, s_i). \quad (4.20)$$

O termo $I_c(\mathbf{b})$ é 1 quando $\mathbf{H} \cdot \mathbf{b}' = \mathbf{0}$, ou para todos os i o produto $\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{b}' = 0$, e definindo a função

$$I\{\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{b} = 0\} = \begin{cases} 1 & \text{quando } \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{b} = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.21)$$

e podemos escrever

$$I_c(\mathbf{b}) = \prod_{i=0}^m I\{\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{b} = 0\}. \quad (4.22)$$

E assim, utilizando 4.19, 4.20 e 4.22 em 4.18.

$$G(\mathbf{b}) = \prod_{i=1}^{N_s} p(y_i|s_i) \cdot \prod_{i=1}^{N_s} VC'(\mathbf{b}_i, s_i) \cdot \prod_{t=1}^m I\{\mathbf{h}_t \cdot \mathbf{b} = 0\} \quad (4.23)$$

E podemos desenhar o grafo que representa a equação acima na Figura 4.7.

4.3 Aplicação do algoritmo Soma Produto

Na seção 2.5, foi apresentado rapidamente o algoritmo soma produto descrito em mais detalhes em [14]. Iremos aplicar este algoritmo agora na solução do grafo da figura 4.7 de modo a calcularmos as equações que iremos empregar no decodificador iterativo.

Vamos iniciar o equacionamento das mensagens entre os nós do grafo pelos nós y_i . A mensagem do nó de variável y_i para o nó de função $p(y_i|s_i)$ aqui chamado de $\mu_{y_i \rightarrow p(y_i|s_i)}$ tem o valor de

$$\mu_{y_i \rightarrow p(y_i|s_i)}(y_i) = 1 \quad (4.24)$$

pois é a mensagem de um nó de variável de ponta para um nó de função. A próxima mensagem a ser calculada é a $\mu_{p(y_i|s_i) \rightarrow s_i}(s_i)$ e para isso, inicialmente, precisamos do valor da função $p(y_i|s_i)$ que possui o seguinte valor:

$$p(y_i|s_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{y_i-s_i}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}. \quad (4.25)$$

Aplicando a equação 2.22 para determinação desta mensagem, temos que:

$$\mu_{p(y_i|s_i) \rightarrow s_i}(s_i) = \sum_{\sim\{s_i\}} \left(\prod_{y_i \in n(f)} \mu_{y_i \rightarrow p(y_i|s_i)}(y_i) p(y_i|s_i) \right) \quad (4.26)$$

onde a produtória é sobre apenas um valor, o valor y_i recebido de $\mu_{y_i \rightarrow p(y_i|s_i)} = 1$, e a somatória tem apenas um termo, pois não há mais valores a não ser o próprio s_i . Assim, esta mensagem pode ser escrita como:

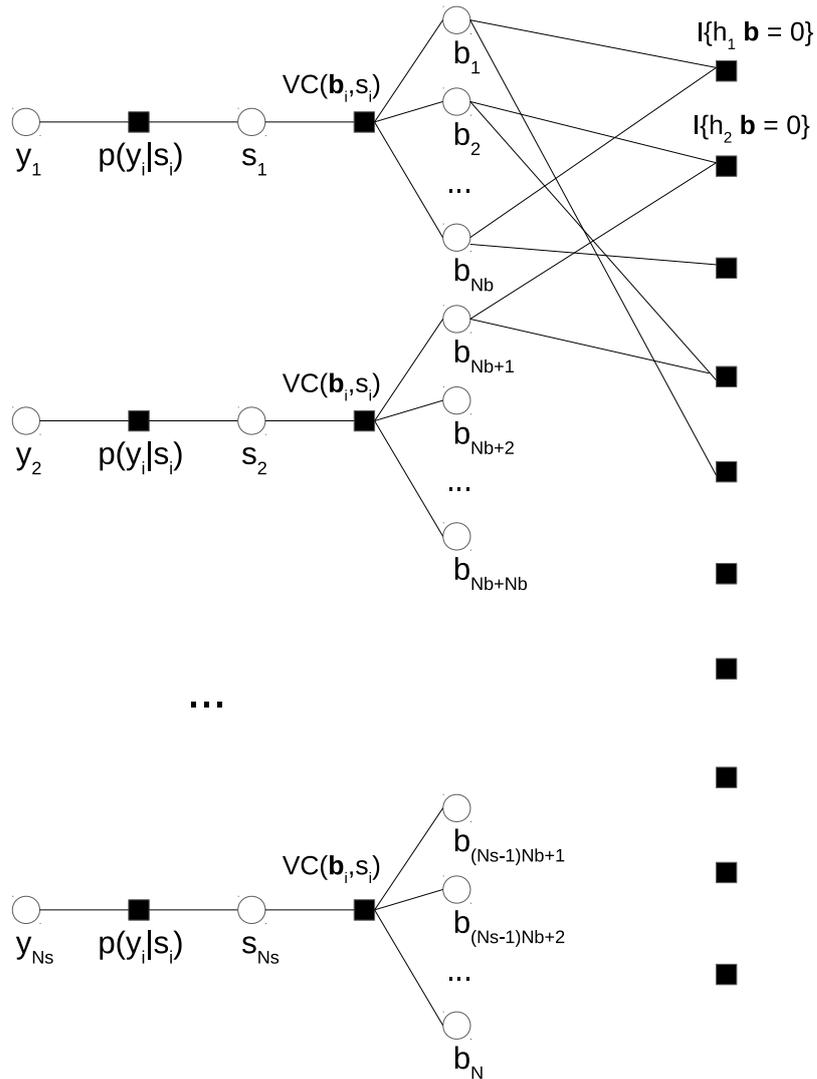


Figura 4.7: Grafo do decodificador.

$$\mu_{p(y_i|s_i) \rightarrow s_i}(s_i) = p(y_i|s_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{y_i-s_i}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}. \quad (4.27)$$

A próxima mensagem a ser calculada é a $\mu_{s_i \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}(s_i)$ que aplicando a equação 2.20, temos

$$\mu_{s_i \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}(s_i) = \prod_{h \in n(s_i) \setminus \{VC(\mathbf{b}_i, s_i)\}} \mu_{h \rightarrow s_i}(s_i) = \mu_{p(y_i|s_i) \rightarrow s_i}(s_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{y_i-s_i}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} \quad (4.28)$$

pois apenas uma mensagem chega ao nó s_i , tirando a mensagem do nó de função $VC(\mathbf{b}_i, s_i)$. Continuamos agora para a mensagem $\mu_{VC(\mathbf{b}_i, s_i) \rightarrow b_j}(b_j)$ que aplicando a equação 2.22, podemos escrever como

$$\begin{aligned} \mu_{VC(\mathbf{b}_i, s_i) \rightarrow b_j}(b_j) &= \sum_{s_i \in \{x_1 \dots x_M\}} \sum_{\sim \{b_j\}} \left(\prod_{y \in n(VC(\mathbf{b}_i, s_i))} \mu_{y \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}(y) VC(\mathbf{b}_i, s_i) \right) = \\ &= \sum_{s_i \in \{x_1 \dots x_M\}} \sum_{\sim \{b_j\}} \left(\mu_{s_i \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}(s_i) \cdot \prod_{k \neq j, k=(i-1) \cdot N_b + 1}^{i \cdot N_b} \mu_{b_k \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}(b_k) VC(\mathbf{b}_i, s_i) \right) \quad (4.29) \end{aligned}$$

Podemos considerar que para cada conjunto de bits \mathbf{b}_i , temos apenas um valor de s_i no qual $VC(\mathbf{b}_i, s_i)$ é 1, sendo 0 para todos os outros valores de \mathbf{b}_i . Este valor é $s_i = V'(\mathbf{b}_i)$ e podemos assim tirar a somatória de s_i e substituir os valores de s_i por $V'(\mathbf{b}_i)$ e reescrever a equação como

$$\begin{aligned} \mu_{VC(\mathbf{b}_i, s_i) \rightarrow b_j}(b_j) &= \sum_{\sim \{b_j\}} \left(\mu_{s_i \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}(V'(\mathbf{b}_i)) \cdot \prod_{k \neq j, k=(i-1) \cdot N_b + 1}^{i \cdot N_b} \mu_{b_k \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}(b_k) \right) \\ &= \sum_{\sim \{b_j\}} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{y_i - V'(\mathbf{b}_i)}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} \cdot \prod_{k \neq j, k=(i-1) \cdot N_b + 1}^{i \cdot N_b} \mu_{b_k \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}(b_k) \right) \quad (4.30) \end{aligned}$$

Todos os valores acima são conhecidos. Na primeira iteração ainda não teríamos as mensagens $\mu_{b_k \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}(b_k)$. Podemos considerar como uma função com valor 0,5 para as entradas 0 e 1, isto é: $\mu_{b_k \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}(b_k) = 0,5$ para $b_k \in \{0, 1\}$. Nas próximas iterações o valor de $\mu_{b_k \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}(b_k)$ é calculado como o produto de todas as mensagens que chegam à variável b_k .

As outras mensagens trocadas são as normalmente trocadas na implementação do decodificador LDPC. Neste caso, a função $\mu_{VC(\mathbf{b}_i, s_i) \rightarrow b_j}(b_j)$ pode ser recalculada como o log-likelihood que é utilizado no decodificador do LDPC. Assim teríamos $L(\mu_{VC(\mathbf{b}_i, s_i) \rightarrow b_j}) = \log\left(\frac{\mu_{VC(\mathbf{b}_i, s_i) \rightarrow b_j}(0)}{\mu_{VC(\mathbf{b}_i, s_i) \rightarrow b_j}(1)}\right)$.

No caso da função $\mu_{s_i \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}(s_i)$, podemos pré calcular o valor dela para todos os $s_i \in \{x_1, \dots, x_M\}$ valores possíveis.

As mensagens $\mu_{b_i \rightarrow VC(\mathbf{b}_t, s_t)}$ são calculadas utilizando a equação 2.20, conforme fórmula

abaixo:

$$\mu_{b_i \rightarrow VC(\mathbf{b}_t, s_t)}(b_i) = \prod_{k \in \mathbf{H}'_i} \mu_{I(h_k \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(b_i) \quad (4.31)$$

ou utilizando o L.L.R., temos que:

$$L\left(\mu_{b_i \rightarrow VC(\mathbf{b}_t, s_t)}\right) = \sum_{k \in \mathbf{H}'_i} L\left(\mu_{I(h_k \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}\right) \quad (4.32)$$

4.3.1 Atualizações do LDPC

As atualizações do LDPC são as mensagens $\mu_{b_i \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(b_i)$ e $\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(b_i)$. Começando pela primeira mensagem que é de um nó de variável para um nó de função e utilizando a equação 2.20, temos

$$\mu_{b_i \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(b_i) = \left(\prod_{k \in \mathbf{H}'_i, k \neq j} \mu_{I(h_k \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(b_i) \right) \cdot \mu_{VC(\mathbf{b}_t, s_t) \rightarrow b_i}(b_i). \quad (4.33)$$

Podemos aplicar nesta mensagem o log-likelihood, e assim, como mostrado na dedução do algoritmo iterativo LDPC, temos:

$$L\left(\mu_{b_i \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}\right) = \left(\sum_{k \in \mathbf{H}'_i, k \neq j} L\left(\mu_{I(h_k \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}\right) \right) + L\left(\mu_{VC(\mathbf{b}_t, s_t) \rightarrow b_i}\right) \quad (4.34)$$

A próxima mensagem $\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(b_i)$ é deduzida utilizando a equação 2.22 e por conseguinte, temos

$$\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(b_i) = \sum_{\sim b_i} \left[\left(\prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(b_k) \right) \cdot I(h_j \cdot \mathbf{b} = 0) \right] \quad (4.35)$$

Esta equação nos dá, dado o valor de b_i , qual a probabilidade de termos um número par de bits b_k , $k \in \mathbf{H}_j$, com valor $b_k = 1$, isto é, um número par de bits em 1. E pode-se mostrar [24] que esta equação pode ser simplificada para:

$$\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} (1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1)) \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} L\left(\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}\right) &= \log\left(\frac{\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(0)}{\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}(1)}\right) = \log\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} (1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1))}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} (1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1))}\right) \\ &= \log\left(\frac{1 + \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} (1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1))}{1 - \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} (1 - 2 \cdot \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1))}\right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Podemos aplicar a seguinte relação:

$$\tanh\left(\frac{1}{2} \log\left(\frac{1-p}{p}\right)\right) = 1 - 2 \cdot p \quad (4.38)$$

na equação 4.37 e considerando que:

$$L(\mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}) = \log \left(\frac{1 - \mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1)}{\mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}(1)} \right) \quad (4.39)$$

temos:

$$L(\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}) = \log \left(\frac{1 + \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \tanh \left(L(\mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)})/2 \right)}{1 - \prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \tanh \left(L(\mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)})/2 \right)} \right) \quad (4.40)$$

E considerando que:

$$2 \cdot \tanh^{-1}(p) = \log \left(\frac{1+p}{1-p} \right) \quad (4.41)$$

podemos chegar a equação da mensagem $L(\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i})$, que é

$$L(\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}) = 2 \cdot \tanh^{-1} \left(\prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \tanh \left(L(\mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)})/2 \right) \right) \quad (4.42)$$

E assim, as equações das mensagens para atualização do LDPC são:

$$\begin{aligned} L(\mu_{b_i \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}) &= \sum_{k \in \mathbf{H}'_j, k \neq j} L(\mu_{I(h_k \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}) + L(\mu_{VC(\mathbf{b}_t, s_t) \rightarrow b_i}) \\ L(\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}) &= 2 \cdot \tanh^{-1} \left(\prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \tanh \left(L(\mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)})/2 \right) \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Estas mensagens foram deduzidas na seção 2.6.1 tirando o termo a mais na primeira equação $L(\mu_{VC(\mathbf{b}_t, s_t) \rightarrow b_i})$ que vem do nó $VC(\mathbf{b}_t, s_t)$ que é um caso particular no nosso problema.

4.3.2 Passos do algoritmo de decodificação

As mensagens que serão necessárias no algoritmo de decodificação, acima deduzidas, são listadas abaixo.

$$\begin{aligned} \mu_{VC(\mathbf{b}_i, s_i) \rightarrow b_j}(b_j) &= \sum_{\sim b_j} \left(\left(\prod_{t=1, t \neq j}^{N_b} \mu_{b_t + N_b \cdot i \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}(b_{t + N_b \cdot i}) \right) \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{y_i - V'(\mathbf{b}_i)}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2} \right) \\ L(\mu_{b_i \rightarrow VC(\mathbf{b}_t, s_t)}) &= \sum_{k \in \mathbf{H}'_i} L(\mu_{I(h_k \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}) \\ L(\mu_{b_i \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)}) &= \sum_{k \in \mathbf{H}'_j, k \neq j} L(\mu_{I(h_k \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}) + L(\mu_{VC(\mathbf{b}_t, s_t) \rightarrow b_i}) \\ L(\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i}) &= 2 \cdot \tanh^{-1} \left(\prod_{k \in \mathbf{H}_j, k \neq i} \tanh \left(L(\mu_{b_k \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)})/2 \right) \right) \end{aligned}$$

Para fazer a decodificação, listamos abaixo os passos necessários, com as inicializações e a ordem das atualizações.

1. Inicializar as mensagens $L(\mu_{b_i \rightarrow VC(\mathbf{b}_t, s_t)})$, $L(\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i})$ com o valor 0.
2. Pré-calcular para todos os valores de $s_i \in \{x_1, \dots, x_M\}$, os valores de $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{y_i - s_i}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$
3. Calcular as mensagens $\mu_{VC(\mathbf{b}_i, s_i) \rightarrow b_j}(b_j)$ para $b_j = 0$ e $b_j = 1$, e calcular o log-likelihood $L(\mu_{VC(\mathbf{b}_i, s_i) \rightarrow b_j}) = \log\left(\frac{\mu_{VC(\mathbf{b}_i, s_i) \rightarrow b_j(0)}}{\mu_{VC(\mathbf{b}_i, s_i) \rightarrow b_j(1)}}\right)$
4. Calcular as mensagens $L(\mu_{b_i \rightarrow I(h_j \cdot \mathbf{b}=0)})$
5. Calcular as mensagens $L(\mu_{I(h_j \cdot \mathbf{b}=0) \rightarrow b_i})$
6. Calcular as mensagens $L(\mu_{b_i \rightarrow VC(\mathbf{b}_t, s_t)})$
7. Calcular a estimativa atual da decodificação com $\hat{b}_i = \text{signal}\left(L(\mu_{b_i \rightarrow VC(\mathbf{b}_t, s_t)})\right)$ onde a função **signal** tem o valor -1 se o valor interno é negativo e $+1$ caso o valor interno seja positivo ou zero.
8. Verificar se o produto $\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{b}}$ resulta no vetor formado por 0 indicando que $\hat{\mathbf{b}}$ é um código válido e assim a decodificação está terminada, considerando o valor transmitido $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}$. Finalizar o algoritmo.
9. Caso o resultado do produto acima não seja um vetor de zeros, somar um ao número de iterações e voltar ao passo número 3. Caso o número de iterações chegue ao limite configurado, parar o algoritmo e considerar $\hat{\mathbf{b}}$ como a melhor estimativa.

4.4 Parâmetros da simulação

Para testar o método de codificação e o algoritmo de decodificação proposto, utilizaremos um resultado obtido na otimização completa, considerando a modulação 4-PAM (4 níveis), um dimming de $\xi = 0.05$ e uma qualidade de sinal de 17 dB. Os parâmetros resultantes da otimização e os demais parâmetros do codificador LDPC como K e N se encontram na seção 4.1.

Vimos que o número possível de mapeamentos utilizando modulação 4-PAM e mapeando 4 bits para estes 4 símbolos, mantendo as probabilidades necessárias, é de 1.201.200 mapeamentos. Este número torna praticamente impossível avaliar todas as opções por simulação. Fizemos as simulações com 170 diferentes mapeamentos gerados aleatoriamente, e em cada mapeamento, simulamos o sistema com qualidade de sinal de 16,2 dB até 20,8 dB ou sua convergência, em intervalos de 0,1 dB. Na Figura 4.8, plotamos os gráficos da taxa de erro em relação ao nível de ruído para todos os 170 mapeamentos feitos. Podemos ver nos resultados que há mapeamentos onde não ocorre convergência, e mapeamentos em que a convergência ocorre com uma qualidade de sinal melhor. O melhor mapeamento encontrado teve a taxa de erro indo para zero com a qualidade de

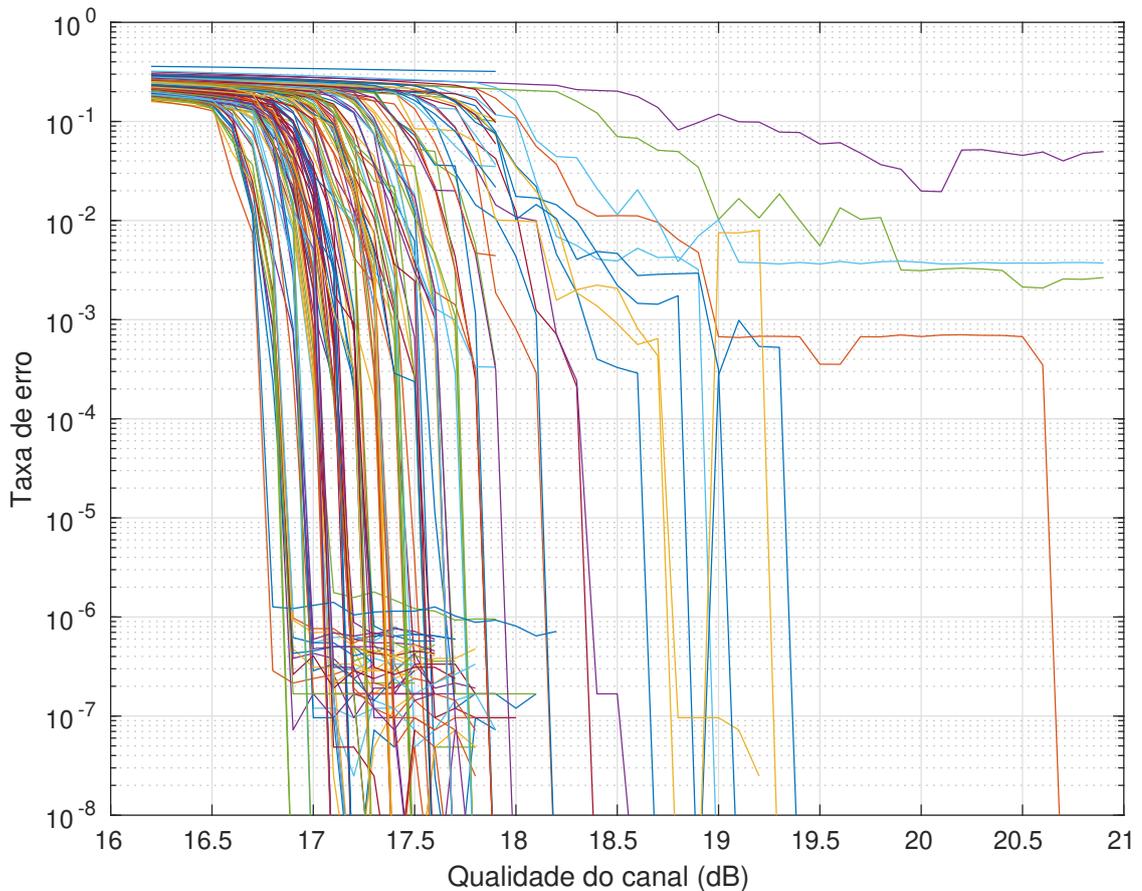


Figura 4.8: Simulação com vários mapeamentos.

sinal de 16,9dB ou até 16,8dB, considerando convergência com “floor level” de taxa de erro de 10^{-6} .

Os 4 melhores mapeamentos simulados e os 2 piores estão na figura 4.9. E os respectivos mapeamentos se encontram na tabela 4.3. Observando o gráfico, podemos ver que os 4 melhores mapeamentos tem resultado muito próximos, apesar dos mapeamentos, olhando a tabela 4.3, serem bem diferentes, não dando para perceber na nossa análise nenhuma regra que gere mapeamentos melhores que os outros. Comparando os melhores mapeamentos com os piores, também não encontramos regras que nos ajudem a identificar pelo mapeamento como será o comportamento na simulação.

Ficou claro, analisando os resultados, a grande dependência da convergência com o mapeamento escolhido, tornando necessária a escolha do melhor mapeamento. Um método a ser utilizado é simular para vários mapeamentos e escolher o melhor, mas a simulação completa do sistema é computacionalmente muito complexa, o que levaria muito tempo tornando necessário algum método mais rápido para testarmos os mapeamentos. No próximo capítulo testaremos a utilização do método de EXIT Chart na determinação do melhor mapeamento. Mas mesmo com métodos mais rápidos, testar todas as 1201200 combinações pode ser computacionalmente impossível, assim conseguiremos testar apenas um sub conjunto destes mapeamentos.

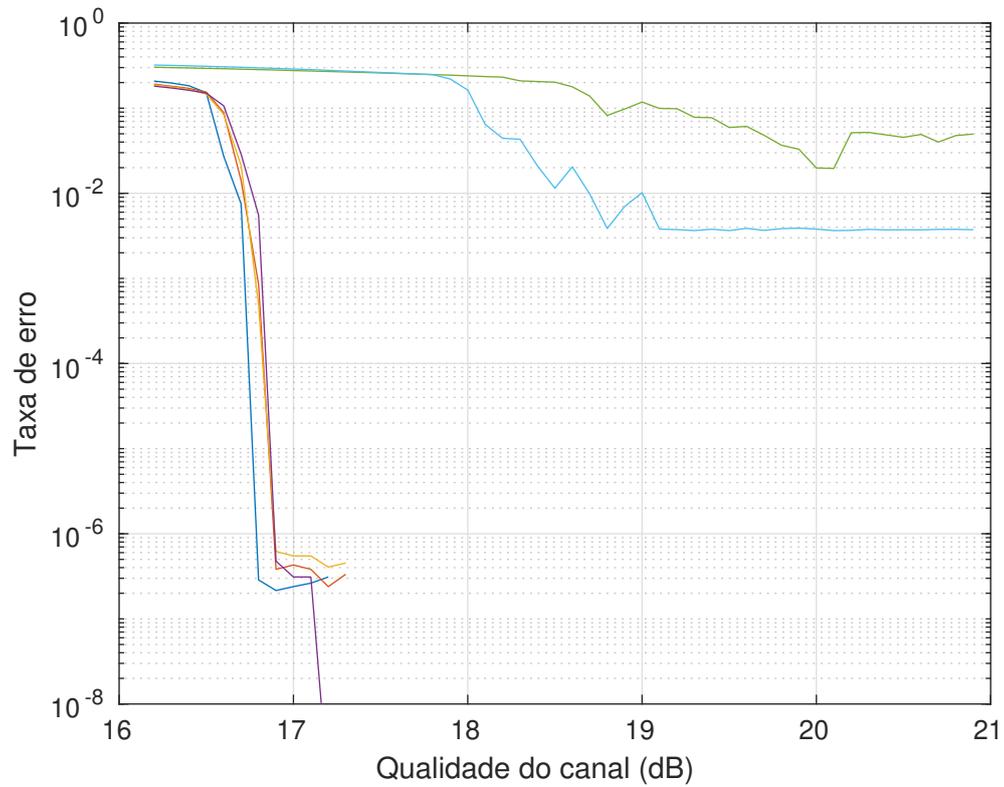


Figura 4.9: Resultado da simulação dos 3 melhores e 2 piores mapeamentos.

Símbolo	Melhores Mapeamentos				Piores Mapeamentos	
x_1	0010	0000	0000	0010	0011	0010
	0100	0001	0001	0110	0100	0100
	0101	0110	0011	0111	0101	0101
	0110	1000	0101	1000	0111	0110
	1000	1010	0111	1001	1000	1000
	1001	1011	1000	1010	1001	1001
	1100	1100	1011	1101	1010	1010
	1110	1110	1101	1110	1011	1100
	1111	1111	1110	1111	1100	1110
x_2	0001	0010	0010	0000	0000	0001
	0111	0011	0110	0011	0001	0011
	1011	0111	1001	0100	1110	0111
	1101	1101	1100	1100	1111	1101
x_3	0000	0101	0100	0001	0010	0000
	0011	1001	1010	0101	0110	1111
x_4	1010	0100	1111	1011	1101	1011

Tabela 4.3: Tabela com os 4 melhores e 2 piores mapeamentos simulados.

Capítulo 5

Análise EXIT da Implementação do Algoritmo de Decodificação

Neste capítulo, introduzimos o método do EXIT CHART que auxilia na determinação da convergência do algoritmo de decodificação. Após a introdução, mostramos a aplicação deste método na determinação do melhor mapeamento a ser utilizado.

5.1 Introdução ao método EXIT

Em [27], temos uma introdução ao conceito dos gráficos de EXIT Chart que procuram mostrar a transferência da informação extrínseca entre os blocos do decodificador. A informação extrínseca seria o ganho de informação de decodificação conseguido por cada iteração de um decodificador ou bloco dele.

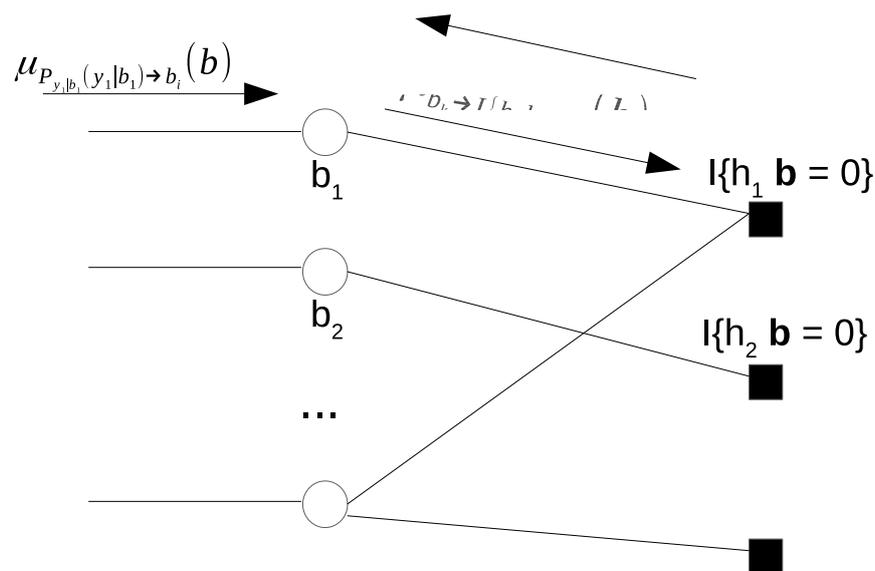


Figura 5.1: Diagrama com as mensagens do decodificador LDPC.

Na Figura 5.1, temos o diagrama de um decodificador LDPC com suas respectivas mensagens μ_{\dots} , onde a mensagem μ_{\dots} é a probabilidade do bit ser -1 ou 1 dependendo

do parâmetro b da função. Para simplificar a análise, trabalharemos com o logaritmo da razão de verossimilhança que é definido como sendo:

$$L_{\dots} = \log \frac{\mu_{\dots}(-1)}{\mu_{\dots}(1)} \quad (5.1)$$

com μ_{\dots} sendo qualquer uma das mensagens definidas na figura 5.1.

Para calcular a informação mútua entre as mensagens L_{\dots} e os bits transmitidos, temos que saber em cada iteração a distribuição de probabilidades das mensagens L_{\dots} considerando como bit transmitido $b_k = -1$ ou $b_k = 1$. Considerando a distribuição de probabilidades das mensagens como sendo $f_{L_{\dots}}(L|b_k)$, podemos calcular a informação mútua entre a mensagem L_{\dots} e o bit correspondente como sendo:

$$\begin{aligned} I(L_{\dots}, b_k) &= \sum_{b_k \in \{-1, 1\}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{L_{\dots}}(L|b_k) \cdot p(b_k) \cdot \log_2 \left(\frac{f_{L_{\dots}}(L|b_k)}{f_{L_{\dots}}(L) \cdot p(b_k)} \right) dL \\ &= \sum_{i \in \{-1, 1\}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(L|b=i) \cdot \log_2 \left(\frac{2 \cdot f(L|b=i)}{f(L|b=1) + f(L|b=-1)} \right) dL \end{aligned} \quad (5.2)$$

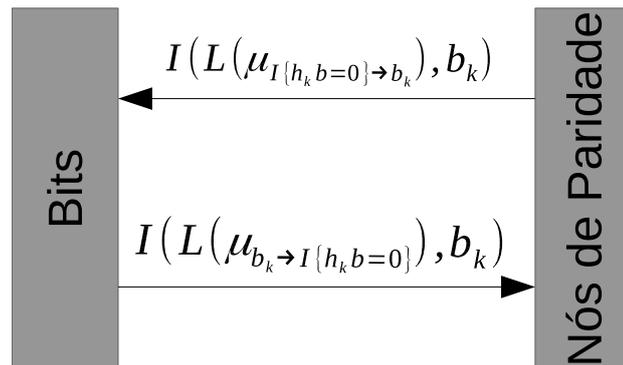


Figura 5.2: Troca de informações entre os blocos do decodificador LDPC.

A ideia do EXIT chart é calcular a informação mútua de saída de um bloco em função da informação mútua de entrada, por exemplo, na Figura 5.2, temos a informação mútua $I(L_{b_k \rightarrow I\{h_k b=0\}}, b_k)$ e com ela podemos encontrar uma distribuição de probabilidades de $L_{b_k \rightarrow I\{h_k b=0\}}$ dada por $f_{L_{b_k \rightarrow I\{h_k b=0\}}}(L, b_k)$ que tenha a informação mútua desejada. E assim, aplicando a fórmula para cálculo de $L_{I\{h_k b=0\} \rightarrow b_k}$ em função de $L_{b_k \rightarrow I\{h_k b=0\}}$, podemos calcular a distribuição que teria as mensagens de saída do bloco Nós de Paridade (“Check Nodes”), $(L_{I\{h_k b=0\} \rightarrow b_k})$ dado que sabemos a distribuição das mensagens que chegam ao bloco. Com a distribuição das mensagens de saída do bloco, conseguimos calcular sua informação mútua pela equação 5.2. E assim, dado a informação mútua de entrada no bloco, calculamos a informação mútua de saída. Se fizermos isso para todos os valores de informação mútua de entrada, variando de 0 até 1, podemos montar um gráfico com a informação mútua de entrada versus a informação mútua de saída. Este mesmo cálculo pode ser feito para o bloco “Bits” e a mesma curva pode ser levantada.

Com as duas curvas levantadas, podemos traçá-las em um mesmo gráfico onde o $I(L_{b_k \rightarrow I\{h_k b=0\}}, b_k)$ fica no eixo X e o $I(L_{I\{h_k b=0\} \rightarrow b_k}, b_k)$ ficaria no eixo Y. Plotaríamos

as duas funções e assim, no gráfico, poderíamos fazer a análise do ganho de informação mútua com as iterações das mensagens. Na figura 5.3, temos um exemplo deste ganho de informação mútua. Se pudermos verificar um ganho de informação mútua até chegarmos ao valor 1, iria indicar que nestas condições o algoritmo converge, como podemos ver no gráfico da figura 5.3. No caso que as curvas se tocam esta convergência não ocorre conforme podemos ver na figura 5.3. Assim, de um modo rápido, podemos analisar a convergência do decodificador.

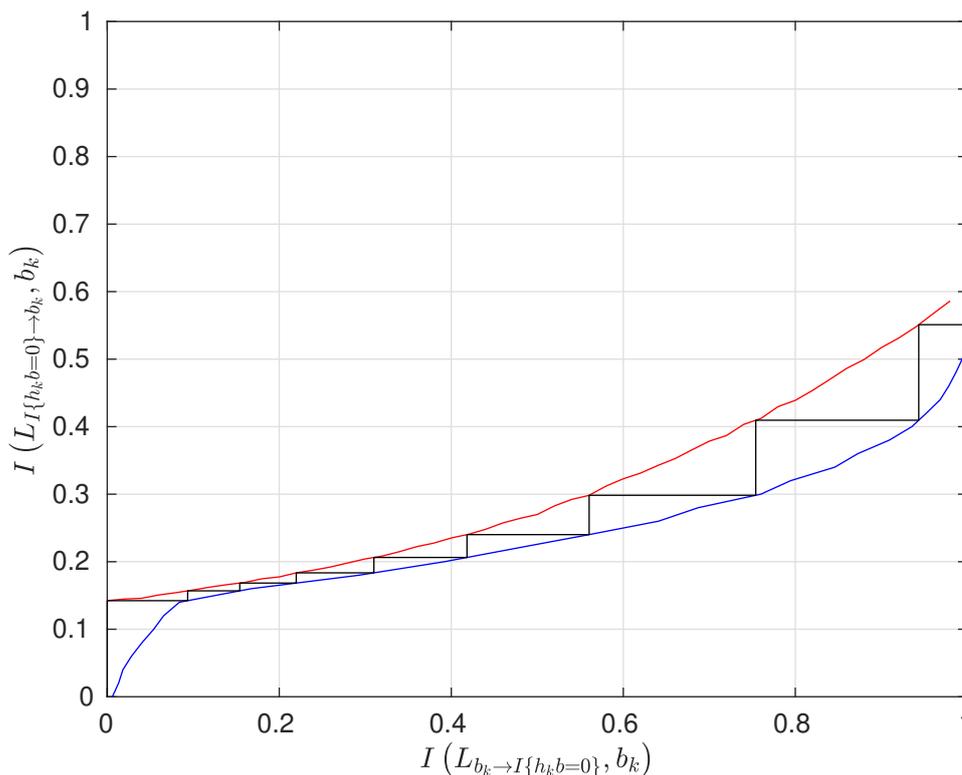


Figura 5.3: Exemplo de um gráfico EXIT, mostrando convergência do algoritmo.

O problema no método do cálculo do ganho de informação mútua é que dado uma informação mútua de entrada, teremos infinitas diferentes funções de densidade de probabilidade de $f_{L_{\dots}|b_k}(L|b_k)$ que atendem esta informação mútua, assim precisamos definir dentre este conjunto de distribuições de probabilidade uma que iremos utilizar.

Para escolher uma distribuição e sabendo que as mensagens L_{\dots} são o log likelihood das mensagens $\mu_{\dots}(b_k)$ que são uma estimativa das probabilidades de b_k , vamos considerar um bit b_k codificado nos níveis $b = \{-1, 1\}$ passando por um canal com ruído Gaussiano Z de média nula e variância σ_Z^2 . Teremos que a distribuição de probabilidades do sinal recebido $y = b + z$ será:

$$f(y|b) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{-\frac{(y-b)^2}{2 \cdot \sigma^2}}. \quad (5.3)$$

Podemos calcular então o valor de L_{\dots} como sendo

$$\begin{aligned}
L_{\dots} &= \log \frac{P(b=1|y)}{P(b=-1|y)} = \log \frac{\frac{f(y|b=1) \cdot P(b=1)}{f(y)}}{\frac{f(y|b=-1) \cdot P(b=-1)}{f(y)}} \\
&= \log \frac{f(y|b=1) \cdot P(b=1)}{f(y|b=-1) \cdot P(b=-1)}. \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Considerando que a probabilidade de $b=1$ é a mesma de $b=-1$ e substituindo a equação 5.3 em 5.4, temos

$$\begin{aligned}
L_{\dots} &= \log \frac{\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{-\frac{(y-1)^2}{2 \cdot \sigma_n^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{-\frac{(y+1)^2}{2 \cdot \sigma_n^2}}} = \log \left(e^{-\frac{(y-1)^2}{2 \cdot \sigma_n^2} + \frac{(y+1)^2}{2 \cdot \sigma_n^2}} \right) \\
&= \frac{-y^2 + 2 \cdot y - 1 + y^2 + 2 \cdot y + 1}{2 \cdot \sigma_n^2} = \frac{2 \cdot y}{\sigma_n^2}. \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Chegamos então ao resultado que L_{\dots} seria a variável aleatória y , que é Gaussiana multiplicada pelo fator $\frac{2}{\sigma_n^2}$, tendo assim também uma distribuição Gaussiana com média e variância:

$$m_{L|b} = \frac{2}{\sigma_n^2} \cdot b, \tag{5.6}$$

$$\sigma_L^2 = \sigma_n^2 \cdot \left(\frac{2}{\sigma_n^2} \right)^2 = \frac{4}{\sigma_n^2}. \tag{5.7}$$

Podemos ver que a distribuição das mensagens L_{\dots} é completamente definida pelo valor de b transmitido e a variância do ruído σ_L^2 , tendo sua variância σ_L^2 como o dobro do valor absoluto da sua média, i.e.:

$$\sigma_L^2 = 2 \cdot |m_{\mu|b}| \tag{5.8}$$

Iremos considerar esta distribuição para as mensagens L e assim temos apenas que definir o valor σ_L^2 , e com este valor podemos definir a média como $m_{L|b} = \frac{\sigma_L^2}{2} \cdot b$.

A distribuição de probabilidade de L é então dada por:

$$f(L|b) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_L}} \cdot \exp \left(-\frac{\left(L - \frac{\sigma_L^2}{2} \cdot b \right)^2}{2\sigma_L} \right) \tag{5.9}$$

A informação mútua então é dada por:

$$I(L, b) = \sum_{i \in \{-1, 1\}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(L|b=i) \cdot \log_2 \left(\frac{2 \cdot f(L|b=i)}{f(L|b=1) + f(L|b=-1)} \right) = J(\sigma_L). \tag{5.10}$$

É necessário resolver numericamente a equação para o cálculo da informação mútua em

função de σ_L . De modo a simplificar este cálculo uma aproximação é proposta em [29] e podemos aproximar a função $J(\sigma_L)$:

$$J(\sigma_L) = \begin{cases} a_{J,1} \cdot \sigma^3 + b_{J,1} \cdot \sigma^2 + c_{J,1} \cdot \sigma & 0 \leq \sigma \leq \sigma^* \\ 1 - \exp(a_{J,2} \cdot \sigma^3 + b_{J,2} \cdot \sigma^2 + c_{J,2} \cdot \sigma + d_{J,2}) & \sigma^* < \sigma \leq 10 \\ 1 & 10 \leq \sigma \end{cases} \quad (5.11)$$

onde os parâmetros são:

$$\begin{aligned} a_{J,1} &= -0,0421061, & b_{J,1} &= 0,209252 \\ c_{J,1} &= -0,00640081, \\ \sigma^* &= 1,6363, \\ a_{J,2} &= 0,00181491, & b_{J,2} &= -0,142675, \\ c_{J,2} &= -0,0822054, & d_{J,2} &= 0,0549508. \end{aligned} \quad (5.12)$$

A função inversa $\sigma_L = J^{-1}(I)$ é aproximada por:

$$J^{-1}(I) = \begin{cases} a_{\sigma,1} \cdot I^2 + b_{\sigma,1} \cdot I + c_{\sigma,1} \cdot \sqrt{I} & 0 \leq I \leq I^* \\ -a_{\sigma,2} \ln(b_{\sigma,2}(1-I)) - c_{\sigma,2} \cdot I & I^* < I < 1 \end{cases} \quad (5.13)$$

onde os parâmetros são:

$$\begin{aligned} a_{\sigma,1} &= 1,09542 & b_{\sigma,1} &= 0,214217 \\ c_{\sigma,1} &= 2,33727 & I^* &= 0,3646 \\ a_{\sigma,2} &= 0,706692 & b_{\sigma,2} &= 0,386013 \\ c_{\sigma,2} &= -1,75017 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Com a função $J^{-1}(I)$, conseguimos calcular a distribuição das mensagens L_{\dots} e assim podemos gerar aleatoriamente diversas variáveis destas e simular uma iteração do algoritmo do bloco que queremos calcular.

5.2 Aplicação do método EXIT no algoritmo de decodificação

Na seção anterior mostramos os cálculos necessários para determinação das informações mútuas entre as mensagens e os bits transmitidos, iremos agora aplicar isso as mensagens utilizadas no algoritmo de decodificação deduzido na seção 4.2. Na figura 5.4 apresentamos o diagrama deste decodificador com as mensagens que são trocadas entre os blocos.

As mensagens representadas na figura 5.4 podem ser substituídas pela suas razões de verossimilhança e com elas podemos calcular as informações mútuas entre as razões de verossimilhança conforme mostrado na seção anterior e com isso podemos representar as trocas de informação entre os blocos do decodificados como na figura 5.5. Chamamos os nós de função $VC(\mathbf{b}_i, s_i)$ de nós do demodulador e representamos na figura 5.5 no bloco

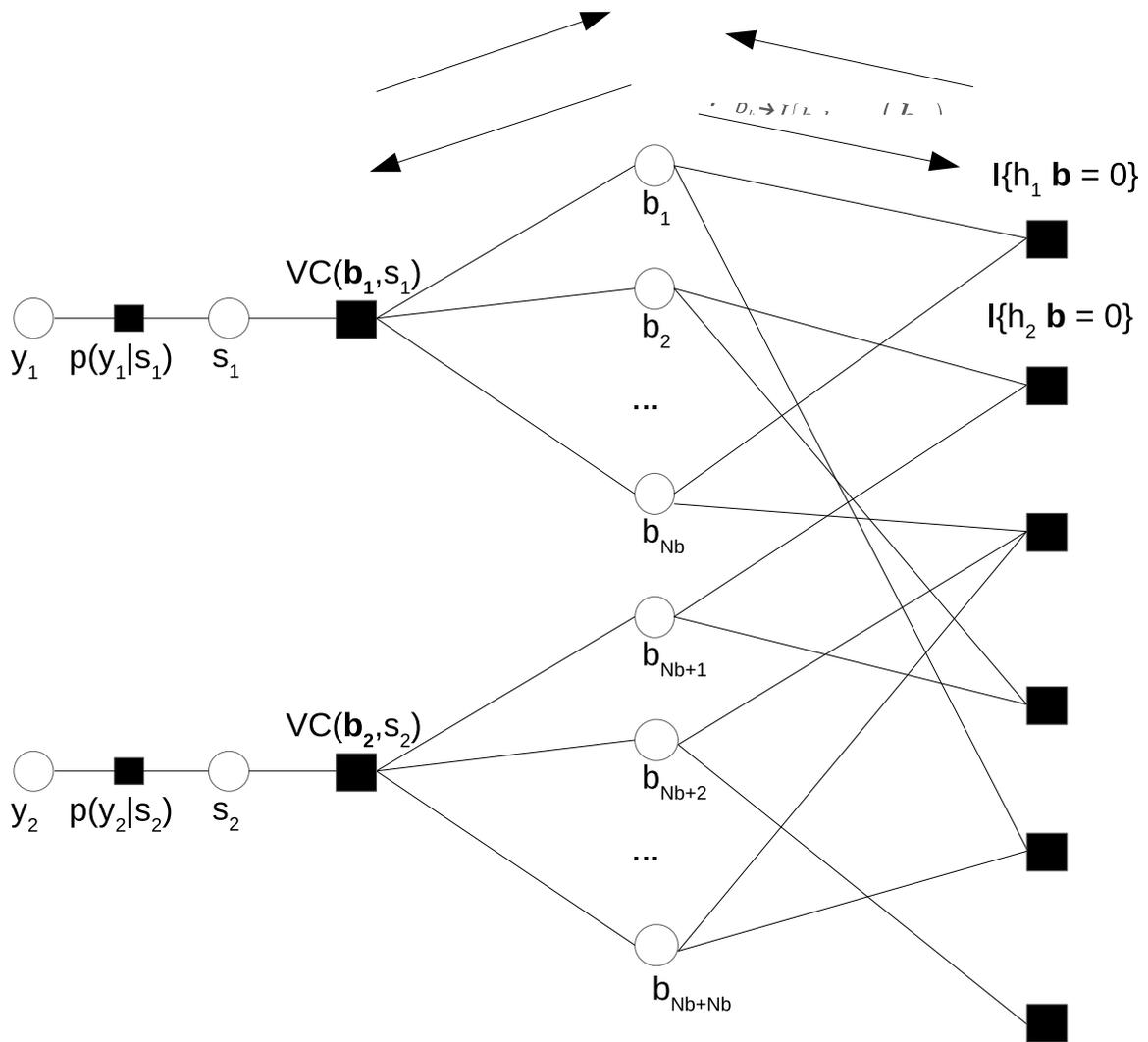


Figura 5.4: Grafo do decodificador utilizado com suas mensagens entre os nós.

"Demodulador". Os nós de bits b_k chamamos de "Bits" e o último bloco contém os nós de paridade.

Para simplificar a nomenclatura das informações mútuas entre as mensagens e os bits transmitidos iremos chamar as informações mútuas simplificadamente de:

$$I_{D \rightarrow B} = I\left(L^{\mu_{b_k \rightarrow VC(\mathbf{b}_i, s_i)}}, b_k\right) \quad (5.15)$$

$$I_{B \rightarrow D} = I\left(L^{\mu_{VC(\mathbf{b}_i, s_i) \rightarrow b_k}}, b_k\right) \quad (5.16)$$

$$I_{B \rightarrow C} = I\left(L^{\mu_{b_k \rightarrow I\{h_k b=0\}}}, b_k\right) \quad (5.17)$$

$$I_{C \rightarrow B} = I\left(L^{\mu_{I\{h_k b=0\} \rightarrow b_k}}, b_k\right) \quad (5.18)$$

onde a letra D é referência ao Demodulador, a letra B aos Bits e a letra C aos nós de paridade ("Check Nodes" em inglês). A informação mútua $I_{D \rightarrow B}$ depende do canal e da

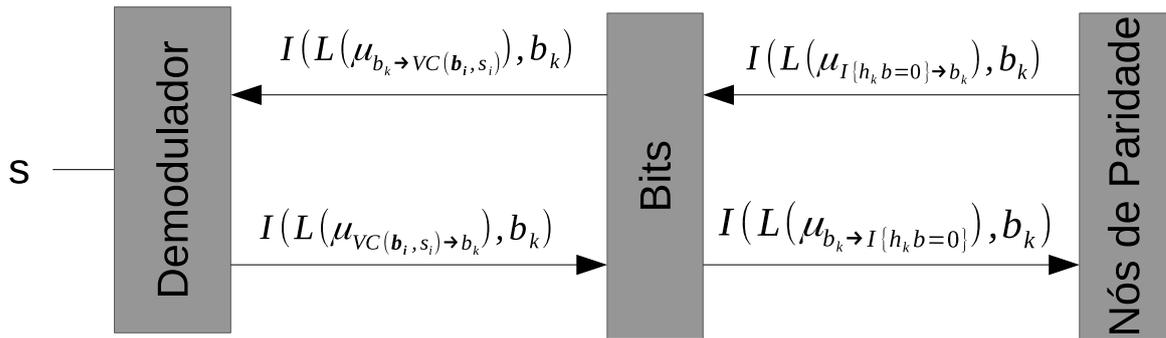


Figura 5.5: Diagrama do decodificador utilizado com suas mensagens entre os nós.

informação mútua $I_{B \rightarrow D}$. Assim podemos escrever definindo a função f_{Demod} que:

$$I_{D \rightarrow B} = f_{Demod}(I_{B \rightarrow D}) \quad (5.19)$$

O valor de $I_{B \rightarrow D}$ depende apenas do valor de $I_{C \rightarrow B}$, conforme podemos ver na equação 4.32. Assim definindo a função f_{bits1} , podemos escrever:

$$I_{B \rightarrow D} = f_{bits1}(I_{C \rightarrow B}) \quad (5.20)$$

Analisando a equação 4.34, podemos verificar que o valor de $I_{B \rightarrow C}$ depende dos valores de $I_{D \rightarrow B}$ e $I_{C \rightarrow B}$ e definindo a função f_{bits2} , podemos escrever que:

$$I_{B \rightarrow C} = f_{bits2}(I_{D \rightarrow B}, I_{C \rightarrow B}) \quad (5.21)$$

E, finalmente, analisando a equação 4.43 o valor de $I_{C \rightarrow B}$ que depende somente do valor de $I_{B \rightarrow C}$ e definindo a função $f_{paridade}$ temos:

$$I_{C \rightarrow B} = f_{paridade}(I_{B \rightarrow C}) \quad (5.22)$$

A função f_{Demod} depende do mapeamento e da qualidade do canal. Quanto maior o valor desta função mais informação estamos ganhando na iteração do bloco demodulador do decodificador, e como esta função depende do mapeamento, espera-se que, melhores mapeamentos que levem a melhores resultados façam que esta função retorne maiores valores. A figura 5.6 mostra o gráfico do valor de $I_{D \rightarrow B} = f_{Demod}(0, 2)$ para cada mapeamento versus o valor da qualidade de canal quando a simulação mostrada na figura 5.6 converge para valor de taxa de erro menor que 10^{-4} .

Analisando o gráfico percebemos uma correlação entre o valor da função e a qualidade de canal na convergência. Mas a correlação não é suficiente para, a partir do valor da função, determinar o mapeamento que leva a convergência com um menor qualidade de canal. Como próximo passo para a análise vamos trabalhar com um par de funções EXIT.

Para levantar os gráficos do EXIT code devemos calcular um dos pares de funções acima de acordo com o ponto de corte que escolhermos para a análise ser feita. Podemos fazer a análise usando as funções f_{Demod} e f_{bits1} e traçar as duas funções num gráfico com o $I_{D \rightarrow B}$ no eixo X e $I_{B \rightarrow D}$ no eixo Y. Ou fazer a análise com as funções f_{bits2} e $f_{paridade}$ e traçar estas duas funções com o $I_{B \rightarrow C}$ no eixo X e o $I_{C \rightarrow B}$ no eixo Y.

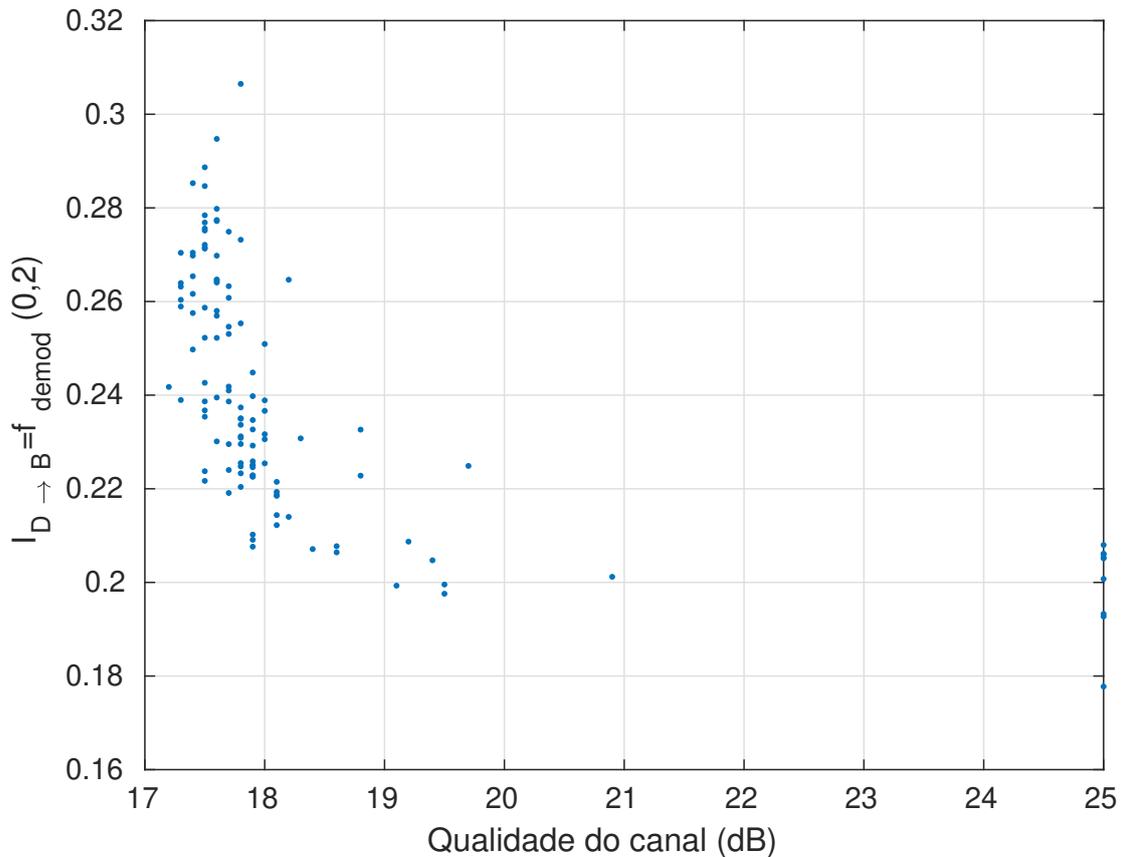


Figura 5.6: Gráfico do valor da função $f_{D \rightarrow B}$ calculado em $I_{B \rightarrow D} = 0,2$ versus o valor de qualidade de canal onde a simulação da taxa de erro cai para menos de 10^{-5} . Cada ponto corresponde a um mapeamento diferente utilizado nas simulações da figura 4.8.

Escolhemos fazer a análise nas mensagens $I_{D \rightarrow B}$ e $I_{B \rightarrow D}$. Com isso, é necessário traçar o gráfico da função f_{Demod} e f_{bits1} . Para traçar o gráfico da função f_{Demod} precisamos calcular a função f_{demod} para vários valores de $I_{B \rightarrow D}$ de 0 até 1, que é a faixa de variação possível deste valor. Para cada valor de $I_{B \rightarrow D}$ calculamos o valor de $\sigma_\mu = J^{-1}(I_{B \rightarrow D})$ e com isso temos a média $m_{L_{I_{B \rightarrow D}}} = b_k \cdot 2 \cdot \sigma_\mu$ e variância σ_μ^2 . Podemos então gerar várias amostras das mensagens $L(\mu_{b_k \rightarrow VC(b_k, s_i)})$ e aplicando as regras da equação 4.30, conseguimos os valores de $L(\mu_{VC(b_i, s_i) \rightarrow b_j}(b_j))$. Com vários destes valores podemos estimar o valor de $I_{D \rightarrow B}$. O mesmo pode ser feito para a função f_{bits1} .

Aplicando este procedimento, podemos gerar o gráfico da figura 5.7. No eixo X, do mesmo modo que no gráfico da figura 5.6, temos a qualidade de canal onde com cada um dos mapeamentos ocorre a convergência da taxa de erro para menos que 10^{-5} . No eixo Y está a qualidade de canal em dB no qual os gráficos das funções do EXIT chart f_{Demod} e f_{bits1}^{-1} se tocam, indicando que pela simulação EXIT seria o ponto de convergência da taxa de erro. Os pontos que caem no eixo X com qualidade de canal de 25 dB indicam os mapeamentos que não apresentam convergência na simulação da figura 4.8. Ampliamos este mesmo gráfico, retirando estes pontos na figura 5.8, onde podemos ver todos os modelamentos onde ocorre a convergência da taxa de erros e fica mais claro ver

a correlação existente.

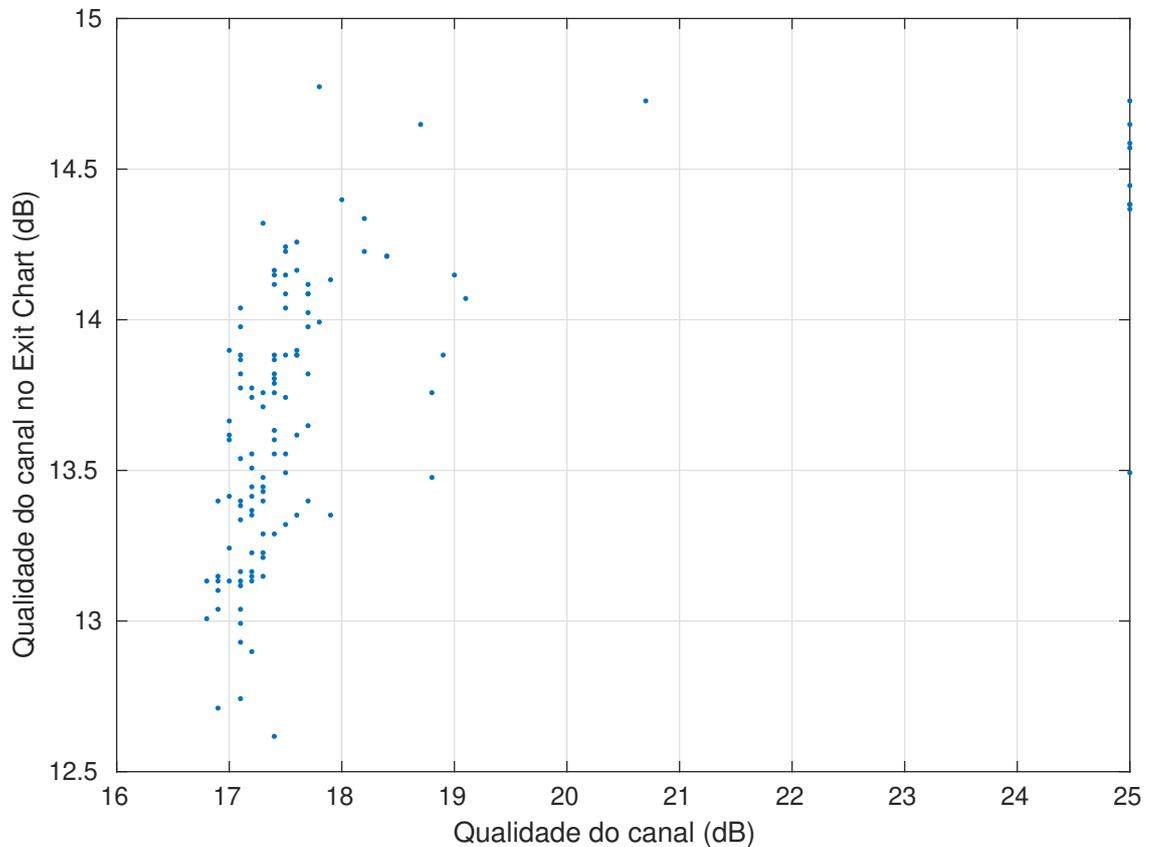


Figura 5.7: Gráfico do nível em dB do EXIT chart em que as funções f_{Demod} e f_{bits1}^{-1} se tocam versus a qualidade do canal onde a simulação da taxa de erro cai para menos de 10^{-5} . Do mesmo modo que no gráfico 5.6, cada ponto representa um mapeamento.

Com uma simulação EXIT perfeitamente modelada, teríamos que ver uma grande correlação neste gráfico entre os valores de Y e X. Idealmente os pontos deveriam estar na reta $y = x$ mostrando que com a análise EXIT conseguiríamos estimar perfeitamente a qualidade de canal de convergência. No gráfico, conseguimos perceber uma correlação, porém não suficiente para estimar perfeitamente, com o resultado do EXIT, o comportamento na simulação da figura 4.8. Os problemas no modelamento EXIT que utilizamos, que podem estar levando a esta imprecisão nos resultados, podem ter como causa a suposição de distribuição Gaussiana nas mensagens $I_{D \rightarrow B}$ e $I_{B \rightarrow D}$. Analisando estas mensagens das simulações da decodificação LDPC, nos parece não ser Gaussiana. Uma continuação possível deste trabalho, seria estudar estas distribuições e ver se elas são capazes de melhorar o resultado do modelamento EXIT aqui utilizado. Apesar dos resultados não terem mostrado uma grande correlação, ele nos mostrou que é possível tirar conclusões da análise EXIT.

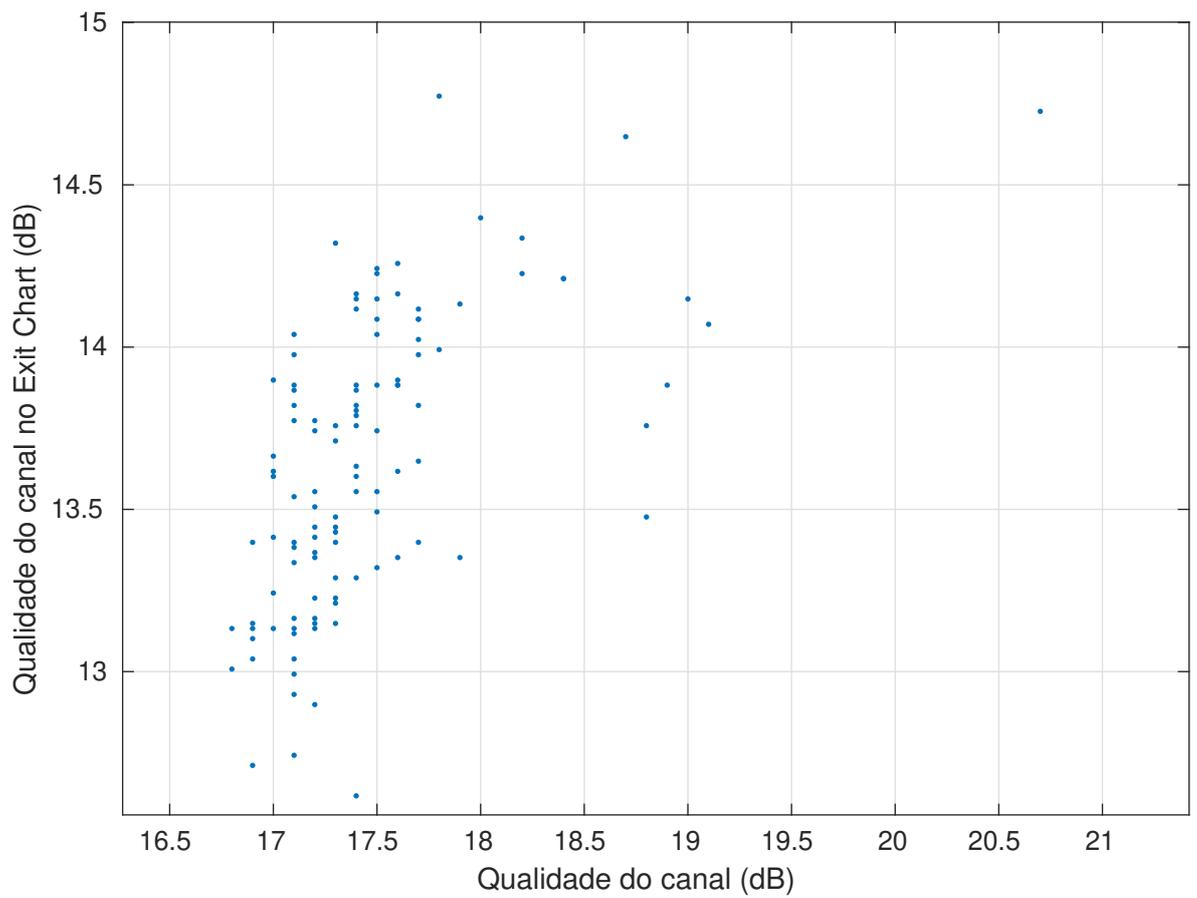


Figura 5.8: Mesmo resultado do gráfico da figura 5.7 mas retirando os pontos de não convergência.

Capítulo 6

Conclusão

Iniciamos este trabalho buscando encontrar a máxima taxa possível de um canal VLC e qual seria o melhor tipo de modulação a ser utilizado. Analisando o artigo [28], podemos ver que a resposta está em uma distribuição de probabilidades da fonte discreta, e que podemos obtê-la utilizando uma modulação M-PAM que utiliza M níveis discretos. Uma busca pelos melhores parâmetros da modulação M-PAM, tendo em vista a maximização da taxa de transmissão, foi feita e comparando com os limites teóricos, conseguimos resultados bem satisfatórios. A otimização completa de níveis e probabilidades é um problema de otimização com máximos locais, assim, na nossa análise, apesar de resultados próximos a capacidade de canal como podemos ver comparando com outros tipos de otimização não temos como saber se é a melhor otimização. Um problema em aberto seria uma melhor compreensão desta otimização e verificar se há melhores resultados possíveis.

A otimização normalmente leva a probabilidades diferentes de envio de cada um dos símbolos M-PAM, levando a necessidade de se pesquisar um método de codificação e decodificação que leve em conta estas características e consiga assim atingir uma taxa próxima a taxa maximizada. Desenvolvemos um sistema utilizando um codificador e decodificador LDPC com mapeamento não uniforme para cada um dos símbolos. Utilizando o algoritmo soma produto apresentado na seção 2.5, desenvolvemos o decodificador e mostramos o seu funcionamento utilizando um sistema simulado onde os parâmetros da modulação foram obtidos das otimizações feitas. Nestas simulações, percebemos uma grande dependência do mapeamento dos bits para os símbolos M-PAM na convergência do decodificador, tornando necessário desenvolver um método para buscar os melhores mapeamentos a serem utilizados.

De modo a facilitar esta busca dos melhores mapeamentos, utilizamos o método EXIT por ser mais rápido de se calcular do que uma simulação completa do codificador e decodificador. Conseguimos resultados que mostram que a utilização deste método é promissora, mas o resultado não mostrou uma correlação forte o suficiente para poder ser utilizado no lugar da simulação completa do sistema. Uma continuação do estudo do modelamento EXIT do problema aqui feito pode levar a melhores resultados, principalmente na análise das distribuição de probabilidades das mensagens, na qual usamos a distribuição Gaussiana, que pode não ser a melhor escolha.

Outro estudo interessante a ser feito é ao invés de utilizar o LDPC binário, implementar

o codificador e decodificador utilizando o LDPC não binários. Isso pode resultar em um sistema que não seja dependente do tipo de mapeamento utilizado.

Referências Bibliográficas

- [1] Kang-Il Ahn and Jae Kyun Kwon. Capacity Analysis of M-PAM Inverse Source Coding in Visible Light Communications. *Lightwave Technology, Journal of*, 30(10):1399–1404, 2012.
- [2] A. G. Bell. On the production and reproduction of sound by light. *American Journal of Sciences*, XX(118):305–324, 1880.
- [3] Roberto Roschel Belli. https://github.com/rbelligit/c-digos_tese.
- [4] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima. Near shannon limit error-correction coding and decoding: Turbo codes. In *Proc. IEEE International Conf. Commun. Geneva Technical Program*, volume 2, pages 1064–1070, 1993.
- [5] Zhen Che, Zoe Lin Jiang, Junbin Fang, Zhen Che, Zoe Lin Jiang, Xiaolong Yu, Siu-ming Yiu, Kui Ren, Xiaoqing Tan, and Zhe Chen. An Efficient Flicker-Free FEC Coding Scheme for Dimmable Visible Light Communication An Efficient Flicker-Free FEC Coding Scheme for Dimmable Visible Light Communication Based on Polar Codes. *IEEE Photonics Journal*, 9(3):1–10, 2017.
- [6] S. Y. Chung, G. D. Forney Jr., T. J. Richardson, and R. L. Urbanke. On the design of low-density parity-check codes within 0.0045 db of the shannon limit. *IEEE Commun. Lett.*, 5:58–60, Feb. 2001.
- [7] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, Inc, 1991.
- [8] Ozgur Ergul, Ergin Dinc, and Ozgur B Akan. Communicate to illuminate: State-of-the-art and research challenges for visible light communications. *Physical Communication*, 17:72–85, 2015.
- [9] a. a. Farid and S. Hranilovic. Capacity of Optical Intensity Channels with Peak and Average Power Constraints. *2009 IEEE International Conference on Communications*, (1):1–5, 2009.
- [10] Ahmed Farid and Steve Hranilovic. Capacity bounds for wireless optical intensity channels with Gaussian noise. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 56(12):6066–6077, 2010.
- [11] Aleksandar Jovicic, Junyi Li, and Tom Richardson. Visible light communication: Opportunities, challenges and the path to market. *IEEE Communications Magazine*, 51(12):26–32, 2013.

- [12] Jinwoo Kim and Hyuncheol Park. A coding scheme for visible light communication with wide dimming range. *IEEE Photonics Technology Letters*, 26(5):465–468, 2014.
- [13] Toshihiko Komine. *Visible Light Wireless Communications and its Fundamental Study*. PhD thesis, Keio University, 2005.
- [14] Hans-Andrea Loeliger Kschischang, Frank R., Brendan J. Frey. Factor Graphs and the Sum-Product Algorithm. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(2):498–519, 2001.
- [15] Amos Lapidoth, Stefan M. Moser, and Michèle Wigger. On the capacity of free-space optical intensity channels. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 55(10):4449–4461, 2009.
- [16] Kwonhyung Lee and Hyuncheol Park. Channel model and modulation schemes for visible light communications. In *Circuits and Systems (MWSCAS), 2011 IEEE 54th International Midwest Symposium on*, volume 00, pages 1–4, 2011.
- [17] Kwonhyung Lee and Hyuncheol Park. Modulations for Visible Light Communications With Dimming Control. *IEEE Photon. Technology Lett.*, 23(16):1136–1138, 2011.
- [18] Sang Hyun Lee, Il-Kyu Park, and Jae Kyun Kwon. Convex Optimization Approach to Multi-Level Modulation for Dimmable Visible Light Communications under LED Efficiency Droop. *Journal of the Optical Society of Korea*, 20(1):29–35, 2016.
- [19] B. Li, G. Wang, and H. Yang. A new method of detecting cycles in tanner graph of ldpc codes. In *2009 International Conference on Wireless Communications Signal Processing*, pages 1–3, Nov 2009.
- [20] Carlos E. Mejia, Costas N. Georghiadis, Mohamed M. Abdallah, and Yazan H. Al-Badarneh. Code Design for Flicker Mitigation in Visible Light Communications Using Finite State Machines. *IEEE Transactions on Communications*, 65(5):2091–2100, 2017.
- [21] Radford M. Neal. <https://github.com/radfordneal/LDPC-codes>.
- [22] Takayoshi Numata and Hiromasa Habuchi. An Optical MPPM-PSM Scheme for Increasing Data Transmission Rate. In *Information, Communications and Signal Processing (ICICSP) 2011 8th International Conference on*, number 2011, pages 1–5, 2011.
- [23] P H Pathak, X Feng, P Hu, and P Mohapatra. Visible Light Communication, Networking, and Sensing: A Survey, Potential and Challenges. *IEEE Communications Surveys Tutorials*, 17(4):2047–2077, 2015.
- [24] R.G.Gallager. Low-density parity check codes. *IRE Trans. on Information Theory*, pages 21–28, Jan 1962.
- [25] Richard D Roberts. IEEE 802 . 15 . 7 Visible Light Communication : Modulation Schemes and Dimming Support. *IEEE Commun. Mag.*, 50(March):72–82, 2012.

- [26] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical J.*, 27:379–423, 1948.
- [27] Manish Sharma. *Receptores Iterativos para Canais de Acesso Múltiplo Ruidosos com N Frequências e T Usuários*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2010.
- [28] Joel G. Smith. The Information Capacity of Amplitude and Variance-Constrained Scalar Gaussian Channels. *Information and control*, 219:203–219, 1971.
- [29] S. ten Brink and G. Kramer. Design of repeat-accumulate codes for iterative detection and decoding. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 11(51):2764–2772, 2003.
- [30] Jin-Yuan Wang, Jun-Bo Wang, Ming Chen, and Xiaoyu Song. Dimming scheme analysis for pulse amplitude modulated visible light communications. In *Wireless Communications Signal Processing (WCSP), 2013 International Conference on*, pages 1–6, 2013.
- [31] Jin-Yuan Wang, Jun-Bo Wang, Nuo Huang, and Ming Chen. Capacity analysis for pulse amplitude modulated visible light communications with dimming control. *J. Opt. Society of America*, 31(3):561–568, mar 2014.
- [32] Jun-Bo Wang, Qing-Song Hu, Jiangzhou Wang, Ming Chen, and Jin-Yuan Wang. Tight Bounds on Channel Capacity for Dimmable Visible Light Communications. *IEEE J. Lightw. Technology*, 31(23):3771–3779, 2013.
- [33] Jun Bo Wang, Qing Song Hu, Jiangzhou Wang, Yu Hua Huang, and Jin Yuan Wang. Channel capacity for dimmable visible light communications. *GLOBECOM - IEEE Global Telecommun. Conf.*, 31(23):2424–2429, 2013.
- [34] F Zafar, D Karunatilaka, and R Parthiban. Dimming schemes for visible light communication: the state of research. *Wireless Communications, IEEE*, 22(2):29–35, 2015.

Apêndice A

Descrição dos Códigos Utilizados na Tese

Os códigos utilizados nas simulações feitas nesta tese se encontram no repositório git em [3]. Os códigos para otimização da taxa de transmissão, da otimização completa como a do parâmetro $\eta \cdot D_{shift}$ com os resultados apresentados no capítulo 3. Os códigos para a simulação do codificador e decodificador apresentados no capítulo 4. E os códigos para os cálculos do EXIT chart apresentados no capítulo 5.