

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA  
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENGENHARIA DE PROCESSOS

ESTUDO HIDRODINÂMICO DE FLUIDOS CONTIDOS  
EM RECIPIENTES CILÍNDRICOS SUBMETIDOS À  
ROTAÇÃO AXIAL.

Por: DAITON DE FREITAS REZENDE  
Orientador: THEO GUENTER KIECKBÜSCH

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA DA  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA QUÍMICA.

ABRIL/1995  
CAMPINAS - SP.

8086056  
9509808

UNICAMP  
R. 339  
C. 100 / 247.88  
P. 433 / 95  
C. 0 | D. 0 | X |  
REC. R\$ 13,00  
DATA 08 / 06 / 95  
\* CPO

CM-00070674-2

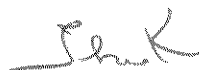
FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R339c Rezende, Daiton de Freitas  
Estudo hidrodinâmico de fluidos contidos em  
recipientes cilíndricos submetidos à rotação axial / Daiton  
de Freitas Rezende. -- Campinas SP: [s.n.], 1995.

Orientador: Theo Guenter Kieckbush.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Química.

1. Dinâmica dos fluidos. 2. Massas girantes de fluidos.  
3. escoamento. I. Kieckbush, Theo Guenter.  
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Química. III. Título.

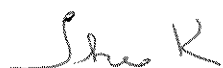
Esta versão corresponde a redação final da tese de mestrado defendida pelo engenheiro Daiton de Freitas Rezende, e aprovada pela comissão julgadora em 07/04/1995.



---

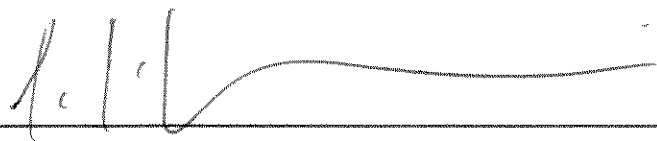
Theo Guenter Kieckbusch

Tese defendida e aprovada em 07 de abril de 1995 pela banca  
examinadora constituída pelos professores:



---

Prof. Dr. Theo Guenter Kieckbusch



---

Prof. Dr. Giulio Massarani



---

Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa

## AGRADECIMENTOS

*É comum, num tempo do capitalismo em apogeu a expressão: prejuízos inestimáveis.*

*Em estando no contexto, desligo-me de uma das cordas que me atam para entender seus filhos com a voracidade que os tipificam, resguardando-me no direito de opor-lhes tanto no pessimismo quanto nas prioridades ao expressar os mais profundos agradecimentos a todos aqueles que foram das minhas relações, durante o período de execução desse trabalho; um tempo que considero de ganhos inestimáveis.*

## PREFÁCIO

Gabriel García Márquez em seu "CEM ANOS DE SOLIDÃO" narra o aparecimento de um ruído, que com o passar dos tempos, por sua persistência, é confundido ou entendido como o próprio silêncio.

A primeira lei de Newton atribui aos corpos a propriedade da inércia, que pressupõe o universo com caminhos preferenciais "retos". A idéia de um mundo "reto", na verdade, não é nova e mostra nada mais que a dimensão dos nossos sentidos diante da criação.

A despeito das referências inquestionáveis e verdades que herdamos de antepassados menos convictos, a história tem mostrado um comportamento sem prumo das civilizações, que reflete, senão, o do próprio homem.

Não restam dúvidas sobre a complexidade das relações do homem consigo e com o mundo que o cerca. Descrevê-lo sob o cárcere dos sentidos que ele próprio nos reservou não tem sido interessante. É tal desalento que faz nascer "devagar e urgentemente" a percepção, prima irmã da sensibilidade.

Aqueles que teimam em dividir as ciências em partes incomunicáveis, ainda não encontraram uma forma eficaz de manifestarem seu intento às incorruptíveis leis naturais, e estas, para serem compreendidas, continuam a exigir o ser humano por inteiro, com todos os seus potenciais e todas as suas contradições.

Quer-se crer que o leitor defrontar-se-á com páginas que se não primam pela percepção que se exalta, também não exalam o desconforto dos que vêem na pós-graduação um refúgio provisório das mazelas de um país, mais do que nunca com o desgoverno que lhe cabe.

## ÍNDICE

Lista de tabelas.....	i
Lista de figuras.....	ii
Nomenclatura.....	v
Resumo.....	x
<b>Capítulo I - Introdução.....</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo II - Revisão da literatura.....</b>	<b>4</b>
II - 1> Introdução.....	4
II - 2> Cilindros completamente cheios.....	4
2 - 1> Introdução.....	4
2 - 2> Uma constatação inicial.....	5
2 - 3> Alguns fenômenos comuns a fluidos sob rotação.....	6
2 - 4> Equacionamento.....	10
2 - 5> Camada limite de Ekman.....	15
2 - 6> "Spin-up" linear.....	20
2 - 7> "Spin-up" não linear.....	25
7 - 1> "Spin-up" num impulso.....	29
7 - 2> "Spin-up" sob aceleração constante.....	31
2 - 8> "Spin-down".....	33
II - 3> Cilindros parcialmente cheios.....	35
3 - 1> Introdução.....	35
3 - 2> Formas do escoamento e influência de propriedades físicas nos escoamentos "coating".....	36
3 - 3> Escoamento "rimming".....	41
3 - 4> Escoamento "rimming" e seu colapso.....	47
4 - 1> Escoamento dominado por forças viscosas.....	47
4 - 2> Escoamento invíscido.....	53
<b>Capítulo III - Materiais e métodos.....</b>	<b>64</b>
III - 1> Equipamento gerador de rotação.....	64
III - 2> Cilindros.....	64

III - 3> Líquidos de trabalho.....	65
III - 4> Medida de rotação.....	67
III - 5> Registro fotográfico.....	67
III - 6> Metodologia.....	67
6 - 1> Cilindros parcialmente cheios....	67
6 - 2> Cilindros completamente cheios..	68
<b>Capítulo IV - Resultados e discussão.....</b>	<b>70</b>
IV - 1> Introdução.....	70
IV - 2> Aspectos qualitativos do escoamento..	70
2 - a> Cilindros parciamente cheios.....	70
2 - b> Cilindros completamente cheios...	79
IV - 3> Aspectos quantitativos do escoamento.	83
3 - a> Cilindros parcialmente cheios....	83
IV - 4> Em busca do elo perdido.....	96
IV - 5> Aplicações ao tratamento térmico de alimentos.....	97
<b>Capítulo V - Conclusões e sugestões.....</b>	<b>100</b>
<b>Apêndice A.....</b>	<b>102</b>
<b>Apêndice B.....</b>	<b>104</b>
<b>Apêndice C.....</b>	<b>113</b>
<b>Apêndice D.....</b>	<b>120</b>
<b>Capítulo VI - Referências Bibliográficas.....</b>	<b>125</b>
<b>"ABSTRACT" .....</b>	<b>128</b>



## LISTA DE TABELAS

TABELA II.1 - Tempo característico de "spin-up", tempo de difusão viscosa e número de Ekman.....	23
TABELA III.1 - Propriedades físicas dos líquidos de trabalho.....	66
TABELA IV.1.A - Velocidades (rpm) das transições entre as fases do escoamento, na função da percentagem volumétrica de água para o cilindro-1.....	84
TABELA IV.1.B - Velocidades (rpm) das transições entre as fases do escoamento, na função da percentagem volumétrica de óleo de silicone com $v = 10$ ctk para o cilindro-1.....	84
TABELA IV.1.C - Velocidades (rpm) das transições entre as fases do escoamento, na função da percentagem volumétrica de óleo de silicone com $v = 50$ ctk para os cilindros 1 e 2...	85
TABELA IV.1.D - Velocidades (rpm) das transições entre as fases do escoamento, na função da percentagem volumétrica de óleo de silicone com $v = 100$ ctk para os cilindros 1 e 2..	86
TABELA IV.2 - Tempos de "spin-up" para alguns dos líquidos aqui utilizados.....	98
TABELA D.1 - Resultado da solução numérica do sistema de equações D.4 (Schlichting, 1960).....	124

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA II-1: Coluna de Taylor-proudman, limitada em baixo pelo obstáculo e em cima pela parede do recipiente cilíndrico (Greenspan, 1968).....	7
FIGURA II-2: Ondas (oscilações inerciais) produzidas pela oscilação de um disco no eixo de rotação do cilindro (Greenspan, 1968).....	8
FIGURA II-3: Acúmulo de partículas de chá, na região central do fundo. Um resultado da circulação secundária que se estabelece.....	9
FIGURA II-4: Velocidade azimutal na camada limite de Ekman em função do tempo. Pode-se ver a aproximação do regime permanente (Greenspan, 1968).....	19
FIGURA II-5: Desenho da circulação secundária presente em cilindros, durante o "spin-up" (Benton & Clark, 1974).....	24
FIGURA II-6: Sucção de Ekman na dependência de $s$ (curva superior) e $\sigma$ (curva inferior) (Weidman, 1976 parte 1).....	27
FIGURA II-7: Efeito da tensão superficial na velocidade de cascadeamento (White & Higgins, 1958).....	37
FIGURA II-8: Efeito da tensão superficial na velocidade "rimming" (White & Higgins, 1958).....	37
FIGURA II-9: Influência da molhabilidade da superfície interna do cilindro na velocidade de cascadeamento (White & Higgins, 1958).....	38
FIGURA II-10: Influência da molhabilidade da superfície interna do cilindro na velocidade "rimming" (White & Higgins, 1958).....	38
FIGURA II-11: Influência da viscosidade na velocidade de cascadeamento (White & Higgins, 1958).....	39

FIGURA II-12: Influência da viscosidade na velocidade "rimming" (White & Higgins, 1958).....	39
FIGURA II-13: Efeito da viscosidade na velocidade de colapso (White & Higgins, 1958).....	40
FIGURA II-14: Situação do escoamento "rimming" em função dos números de Reynolds e Froude (Deiber & Cerro, 1976).....	42
FIGURA II-15: Escoamento na região de soluções descontínuas (transição do tipo I)(Deiber & Cerro, 1976)..	45
FIGURA II-16: Escoamento na região de soluções descontínuas (transição do tipo II)(Deiber & Cerro, 1976).	45
FIGURA II-17: Representação do tipo de escoamento na região de soluções descontínuas (Deiber & Cerro, 1976).....	46
FIGURA II-18: Curva genérica da posição angular contra o inverso da espessura (Johnson, 1988).....	49
FIGURA II-19: Curva da posição angular contra o inverso da espessura onde se mostra o comportamento do filme para configuração com variação gradual na espessura (Johnson, 1988).....	50
FIGURA II-20: Curva da posição angular contra o inverso da espessura onde se mostra o comportamento do filme para uma configuração com brusca variação na espessura (Johnson, 1988).....	51
FIGURA II-21: Escoamento com filme aderido à superfície interna do cilindro (escoamento "rimming")..	55
FIGURA III-1: Equipamento promotor de giros.....	65
FIGURA III-2: Cilindros.....	66
FIGURA IV-1: Escoamento em poça (solução de carboxi-metil-celulose).....	71
FIGURA IV-2: Deformações senoidais na superfície da poça (solução aquosa de carboxi-metil-celulose)...	72
FIGURA IV-3: Sulco no filme que já se adere à superfície interna do cilindro (solução aquosa de carboxi-metil-celulose).....	72
FIGURA IV-4a: Sulcos nas extremidades do cilindro com fina poça recirculante (óleo de silicone - 100 ctk, volume líquido - 12,5%).....	73

FIGURA IV-4b: Sulcos já próximos à região central do cilindro, numa rotação superior à que se apresenta na FIGURA IV-4a.....	74
FIGURA IV-5: A fotografia mostra como os sulcos estão ligados às deformações na superfície da poça e bolhas delineando os vórtices (óleo de silicone - 100 ctk, carga líquida se 25,0%)..	75
FIGURA IV-6: Início do cascadeamento. São visíveis, no lado direito do cilindro, lâminas de líquido que descendem de uma posição angular intermediária entre $\theta = \pi/2$ e $\theta = \pi$ (solução aquosa de carboxi-metil-celulose).....	77
FIGURA IV-7: Escoamento "rimming". Todo o conteúdo líquido está aderido à superfície interna do cilindro (solução aquosa de carboxi-metil-celulose)...	77
FIGURA IV-8: Ondas centrífugas. Elas são, na verdade, oscilatórias, mas em se tratando de um momento único captado pela foto, em nada diferem daquelas estacionárias (óleo de silicone - 100 ctk, volume 50%).....	78
FIGURA IV-9a: Disposição das partículas de poliestireno (traçador) quando o cilindro tem rotação nula.....	80
FIGURA IV-9b: Após a aceleração as partículas de poliestireno são arrastadas pelo fluxo axial no interior invíscido ("spin-up").....	80
FIGURA IV-10a: A introdução de pequenas bolhas, numa das extremidades do cilindro, faz com que as partículas migrem para a outra extremidade.	81
FIGURA IV-10b: A presença de pequenas bolhas em ambas as extremidades do cilindro diminui a concentração das partículas do traçador nas proximidades das superfícies planas.....	81
FIGURA IV-11: Instabilidades centrífugas durante o "spin-down".....	82
FIGURA IV-12: Influência da carga e da viscosidade na velocidade de formação de cascatas.....	87

FIGURA IV-13:	Influência da carga e da viscosidade na velocidade "rimming".....	90
FIGURA IV-14:	Influência da carga e da viscosidade na velocidade de colapso.....	90
FIGURA IV-15:	Ifluência da carga e da viscosidade na histerese do escoamento "rimming".....	91
FIGURA IV-16a:	Velocidade de cascadeamento na dependência da carga, da viscosidade e do comprimento do cilindro, em baixas cargas.....	93
FIGURA IV-16b:	Velocidade de cascadeamento na dependência da carga, da viscosidade e do comprimento do cilindro, em cargas moderadas e elevadas...	93
FIGURA IV-17:	Velocidade "rimming" em função da carga, da viscosidade e do comprimento do cilindro....	94
FIGURA IV-18:	Velocidade de colapso em função da carga, da viscosidade e do comprimento do cilindro...	95
FIGURA B1:	Plano lateral perpendicular ao vetor rotação, onde age a força de Coriolís.....	109
FIGURA B2:	Espiral determinada pela trajetória seguida por uma partícula vista de um sistema rotativo (NCFMC, 1972).....	111
FIGURA C1:	Esquema para a caracterização da rotação de uma partícula de fluido em escoamento (Vieira, 1971).....	114
FIGURA D1:	Componentes do vetor velocidade na camada limite de Ekman (Schlichting, 1960).....	123

## NOMENCLATURA

- a raio interno do cilindro;
- A razão entre o comprimento e o raio do cilindro (secção II - 2);  
constante definida pela expressão de  $\chi(\eta)$  (secção II-3);
- B constante definida pela expressão de  $\chi(\eta)$ ;
- c razão entre o raio da interface e o do cilindro;
- D espessura característica adimensional;
- e espessura do filme;
- e<sub>o</sub> espessura característica do filme;
- E número de Ekman [ $v / (\Omega L^2)$ ];
- f(s) função determinada por Rogger & Lance para o "spin-up";
- F fluxo volumétrico por unidade de comprimento;
- F(z,t) função para a solução transiente da camada limite acima de um disco sob rotação;
- Fr número de Froude ( $\Omega^2 a/g$ );
- $\mathcal{F}$  força de corpo por unidade de massa;
- $\vec{g}$  aceleração gravitacional;
- g( $\sigma$ ) função de Rogger & Lance para o "spin-down";
- h dimensão axial do cilindro;
- H potencial de forças de pressão;
- $\Im m$  parte imaginária de;
- k constante da expressão linear de f(s);
- $\hat{k}$  vetor unitário de rotação coincidente com o eixo do cilindro;
- L comprimento característico do cilindro;

$\hat{n}$	vetor unitário normal á parede;
$p$	pressão reduzida;
$P$	pressão termodinâmica (secção II-2); pressão definida pela eq. II-3-15);
$p_1$	perturbação estacionária na pressão;
$p_2$	perturbação oscilatória da pressão;
$\vec{q}$	vetor velocidade;
$\vec{Q}$	amplitude do vetor velocidade;
$\vec{r}$	vetor posição;
$r$	coordenada radial;
$Re$	número de Reynolds ( $\Omega e^2/\nu$ );
$\Re e$	parte real de;
$\Re$	vorticidade;
$s$	razão entre as velocidades do fluido e da parede a ele conectada;
$t$	tempo;
$t_c$	tempo característico de "spin-up";
$U$	velocidade característica na camada de Ekman;
$u$	velocidade radial em coordenadas cilíndricas;
$v$	velocidade tangencial em coordenadas cilíndricas;
$V$	função velocidade modificada;
$Vol$	volume ;
$w$	velocidade axial em coordenadas cilíndricas;
$w_1$	velocidade característica no interior invíscido;
$x$	coordenada retangular;
$y$	coordenada retangular;
$z$	coordenada retangular e cilíndrica;

## CARACTERES GREGOS

$\alpha$	aceleração na velocidade de rotação do cilindro;
$\gamma$	razão entre as velocidades inicial e final de rotação (Secção II-2); tensão superficial (Secção II-3);
$\Gamma$	circulação;
$\delta$	espessura da camada de Ekman;
$\delta_1$	deslocamento estacionário da superfície livre;
$\delta_2$	deslocamento oscilatório da superfície livre;
$\Delta$	constante para o cálculo do deslocamento estacionário da superfície livre;
$\epsilon$	número de Rossby ( $U/\Omega L$ );
$\zeta$	coordenada axial da camada limite;
$\eta$	raio adimensional;
$\theta$	coordenada tangencial;
$\lambda$	frequência;
$\mu$	viscosidade dinâmica;
$\nu$	viscosidade cinemática;
$\xi$	coordenada axial adimensional;
$\rho$	densidade do líquido;
$\sigma$	razão entre as velocidades de rotação do líquido e da parede;
$\tau$	tempo adimensional;
$\Phi$	amplitude de oscilação da pressão;
$\phi(\eta)$	função definida pela perturbação na velocidade tangencial;
$\chi$	função corrente modificada;



- $\chi(\eta)$  função definida pela perturbação estacionária na velocidade radial;
- $\psi$  função corrente (Secção II-2);  
potencial de forças (Apêndice C);
- $\omega$  velocidade de rotação do líquido;  
 $\bar{\omega}$  rotacionalidade;
- $\Omega$  velocidade de rotação do cilindro com relação a um referencial inercial;

## RESUMO

Um modo alternativo de se incrementar a transferência de calor, durante o tratamento térmico de alimentos fluidos contidos em latas, consiste em fazê-las girar em torno de seu eixo disposto na horizontal ("Spin Cooker Cooler"). Esse procedimento faz com que o espaço vazio interno (cerca de 10% em volume de ar), necessário para acomodar flutuações de pressão durante o aquecimento promova agitação no meio líquido.

Estudos anteriores mostraram um comportamento não correlacionável do coeficiente global de troca térmica ao se variar a proporção do referido espaço vazio, na lata. Com vistas a esclarecer a hidrodinâmica durante a rotação, fez-se um estudo em cilindros isotérmicos completa e parcialmente cheios de líquido.

Os cilindros em acrílico possibilitaram observar e fotografar os escoamentos dos fluidos utilizados.

Nos cilindros completamente cheios confirmou-se a presença de correntes secundárias, sobrepostas ao escoamento principal (azimutal). Estas correntes mostraram sensíveis alterações ao se inserir pequenas bolhas de ar junto às superfícies planas (verticais) do cilindro.

No escoamento em cilindros horizontais parcialmente cheios, as fases de escoamento em poça, em cascatas e "rimming", conhecidas quando a carga líquida é inferior a 10% (espaço vazio superior a 90%), mantiveram-se, satisfatoriamente, inalteradas em cargas de até 95% (espaço vazio de 5%).

**PALAVRAS CHAVES:** Dinâmica de fluidos, Massas girantes de fluidos, Escoamento.

## CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

A indústria de enlatados que realiza tratamento térmico (cozimento, esterilização, etc.) após lacrar o recipiente (lata), tem empregado uma variedade de modos de agitação, visando incrementar a transferência de calor.

Um dos métodos mais simples e tradicionais de agitação, consiste em girar o recipiente em torno de seu eixo longitudinal, ao postá-lo horizontalmente.

Um procedimento geral desta indústria é o de deixar um "espaço vazio" na lata, para que este acomode variações de pressão interna durante o aquecimento. Devido ao posicionamento horizontal do recipiente, o espaço vazio (ar) desloca-se, por ação gravitacional, para a região superior da lata.

O trabalho de Pinto Neto et alli (1992), que a este antecedeu, teve, entre outros, o objetivo de determinar a influência da proporção do referido espaço vazio, no coeficiente global de troca térmica. Concluiu-se que estudos hidrodinâmicos puros seriam ainda necessários para produzir uma interpretação mais racional dos resultados.

Em tal contexto, justifica-se o estudo que aqui se desenvolve. Ao que se constatou, nenhum outro trabalho nesta área alimentícia, interessou-se pela questão dinâmica, isoladamente. Isto fez com que se buscasse, nas mais variadas áreas da mecânica de fluidos, sistemas que, de algum modo, imitassem o que se procura compreender. A maior parte do presente trabalho está voltada à esta "garimpagem".

O Capítulo II compreende a revisão teórica que, em sua secção 2, considera fenômenos transientes que se processam no interior de cilindros completamente cheios (sem espaço vazio), sob rotação axial.

Na Secção II-3 é a vez dos escoamentos permanentes em cilindros parcialmente cheios (com espaço vazio), posicionados na horizontal. Este caso surpreende tanto pela multiplicidade de

regimes possíveis para o escoamento, quanto pelo número de aparatos industriais que se utilizam deste sistema físico. Desde secadores de polpa de papel, passando por moldes de tubos, até medidores de tensão superficial representam o sistema em questão.

No Capítulo III descreve-se os equipamentos que permitiram as análises, sobretudo qualitativas, dos escoamentos, além da metodologia utilizada durante os ensaios.

O Capítulo IV cuida de mostrar, por meio de fotografias e gráficos acompanhados de discussões, questões relativas ao escoamento de fluidos em cilindros cheios e parcialmente cheios.

..." Uma lata existe para conter algo,  
Mas quando o poeta diz lata  
Pode estar querendo dizer o incontível.  
Uma meta existe para ser um alvo,  
Mas quando o poeta diz meta  
Pode estar querendo dizer o inatingível " ...

(Gilberto Gil)

## CAPÍTULO II - REVISÃO DA LITERATURA

### II-1> INTRODUÇÃO

Na Secção II-2 revê-se o comportamento de fluidos em cilindros completamente cheios.

Na Secção II-3 é a vez dos cilindros parcialmente cheios. A literatura é relativamente rica em trabalhos tanto em cilindros verticais quanto horizontais.

O escoamento em cilindros verticais não difere muito daqueles contemplados na Secção II-2, sendo a presença da superfície livre o que os distingue. Todavia, não é esse sistema que se pretende conhecer.

Se a superfície livre estiver, agora, em cilindros horizontais, o escoamento ganha uma variedade impressionante de formas, como será visto.

### II-2> CILINDROS COMPLETAMENTE CHEIOS

#### II-2-1> INTRODUÇÃO

Em cilindros completamente cheios, o regime que interessa é o transiente, pois nele é que há movimentação relativa fluido-cilindro. A tendência natural desses sistemas é a de atingir regime permanente, quando cilindro e fluido giram como um corpo rígido.

O fenômeno básico responsável pelo ajuste de rotação é o que se chama na literatura de língua inglesa de "spin-up". Como se verá, ele é, na verdade, geral, sem restrições de geometria.

Na próxima secção apresenta-se um trabalho pioneiro no qual o autor suspeitou da provável influência das superfícies planas no ajuste de rotação. Depois, são apresentados fenômenos

comumente observados em fluidos submetidos à rotação, estando eles sempre vinculados à presença das denominadas Camadas Limites de Ekman, que se formam sobre essas superfícies.

Considera-se o escoamento laminar no interior do cilindro, podendo ser o ajuste de rotação linear ou não, na dependência de como se altera a velocidade das paredes do recipiente. Ambas as situações são também assuntos das próximas secções.

## II-2-2> UMA CONSTATAÇÃO INICIAL

Um dos primeiros estudos em geometria cilíndrica, sob rotação axial, foi realizado por McLeod (1922). Em sua análise teórica, são excluídos os efeitos da base e da superfície livre do líquido, em um cilindro na posição vertical. Considerou-se o movimento das partículas fluidas, segundo um círculo ao redor do eixo de rotação. Foram descritos os regimes transientes quando a parede cilíndrica era rapidamente posta em rotação, a partir do repouso e quando esta era bruscamente paralizada, após girar uniformemente com o fluido (água).

Através da observação de partículas flutuando na superfície livre foram possíveis determinações da velocidade angular em dependência do raio e do tempo.

As soluções analíticas obtidas, tanto quando do acréscimo na velocidade angular do cilindro, quanto do seu decréscimo, revelaram a influência do número adimensional  $\nu t/a^2$  (onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática,  $t$  é o tempo e  $a$  é o raio do cilindro). Esse adimensional, uma espécie de número de Fourier, implica que o comportamento do líquido, num dado cilindro de raio  $a$ , é idêntico ao comportamento desse mesmo líquido num cilindro com raio  $2.a$ , decorrido um intervalo de tempo quatro vezes maior. Isto significa que vórtices maiores duram mais que vórtices menores. Se nesses mesmos cilindros forem colocados dois líquidos diferentes, o líquido no cilindro maior deverá apresentar uma viscosidade quatro vezes maior, para que se tenha iguais valores de  $\Omega$  (velocidade angular),  $r/a$  e  $t$ .

McLeod traça gráficos relacionando a velocidade de rotação do líquido com os adimensionais  $r/a$  e  $vt/a^2$ , tanto teóricos quanto experimentais. Segundo ele, há grande discrepância entre os dados teóricos e os experimentais, além de uma série de efeitos que não podem ser atribuídos a ação viscosa isolada.

Foram observadas movimentações ondulatórias, fluxos secundários sobrepostos ao escoamento circular, vórtices toroidais, entre outros fenômenos que indicam uma acentuada influência da base do cilindro, na movimentação fluida. Apresenta-se a seguir alguns desses fenômenos.

## II-2-3> ALGUNS FENÔMENOS COMUNS A FLUIDOS SOB ROTAÇÃO.

Parte-se de um cilindro completamente cheio com água, de um sistema mecânico que o faz girar e de um traçador para identificar a movimentação fluida (partículas de alumínio).

Impondo-se uma rotação constante a esse sistema, verifica-se que decorrido um intervalo de tempo, da ordem de minutos, atinge-se um estado tal que fluido e recipiente giram uniformemente como um corpo rígido.

Durante o intervalo de tempo necessário ao ajuste de rotação entre fluido e recipiente, alguns fenômenos são observáveis. São estes fenômenos e sua formulação matemática, objetos de toda uma teoria de fluidos rotativos que se tenta apresentar, de uma forma simplificada, nas próximas páginas.

Imagina-se que sobre um sistema em rotação rígida, impõe-se uma perturbação na velocidade angular, muito pequena, de modo que o líquido desvie-se, levemente, do estado rígido. Se uma protuberância como a da Figura II-1 for colada ao fundo do recipiente, poder-se-á perceber uma coluna fluida aderida à saliência e movendo-se com ela. Essas colunas, denominadas colunas de Taylor-Proudman, foram previstas teoricamente por Proudman em 1916 e observadas por Taylor em 1921 (Greenspan (1968)).



A conclusão importante a ser retirada desse experimento é que pequenas movimentações relativas entre corpos e fluidos sob rotação, geram escoamentos bidimensionais e que estes, em última análise, decorrem de uma propriedade geral, qual seja a de fluidos rotativos exibirem movimentações em forma de ondas.

Acoplado-se ao sistema anterior, um pequeno disco de tal maneira que se possa executar pequenas oscilações, paralelamente ao eixo de rotação, observar-se-á movimentos ondulatórios conforme sejam as relações entre a frequência de oscilações do disco ( $\lambda$ ) e a de rotação do cilindro ( $\Omega$ ). Se o cilindro não gira ( $\Omega=0$ ), o escoamento tem aspecto ordinário, para qualquer frequência de oscilação do disco. Porém, se o cilindro entrar em rotação e o disco oscilar com frequência  $\lambda \leq 2\Omega$  ter-se-á um

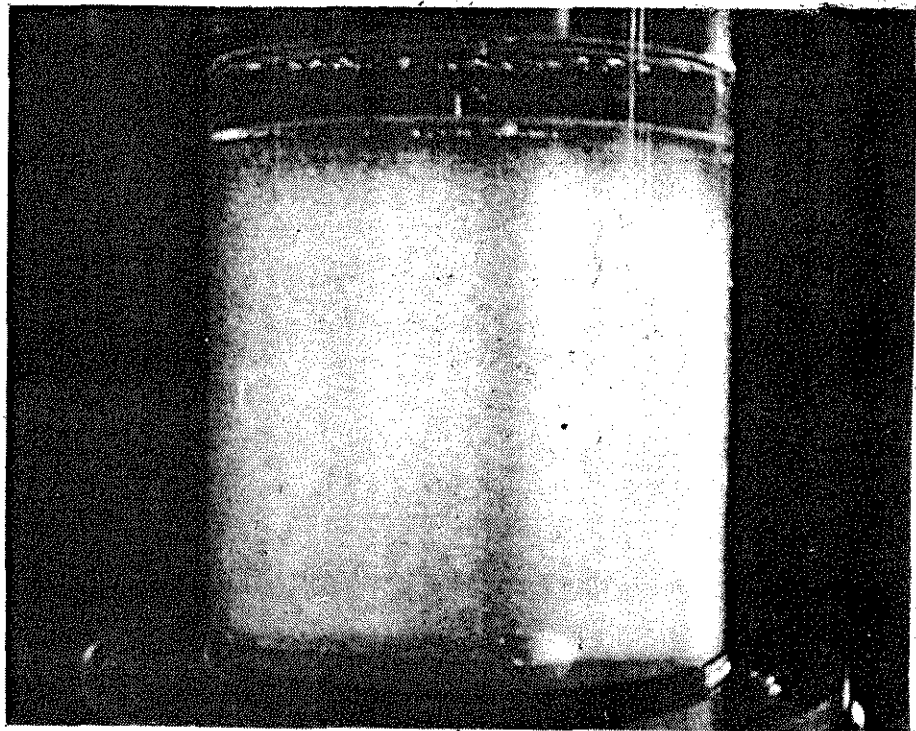


FIGURA II-1: Coluna de Taylor-Proudman, limitada em baixo pelo obstáculo e em cima pela parede do recipiente cilíndrico (Greespan, 1968).

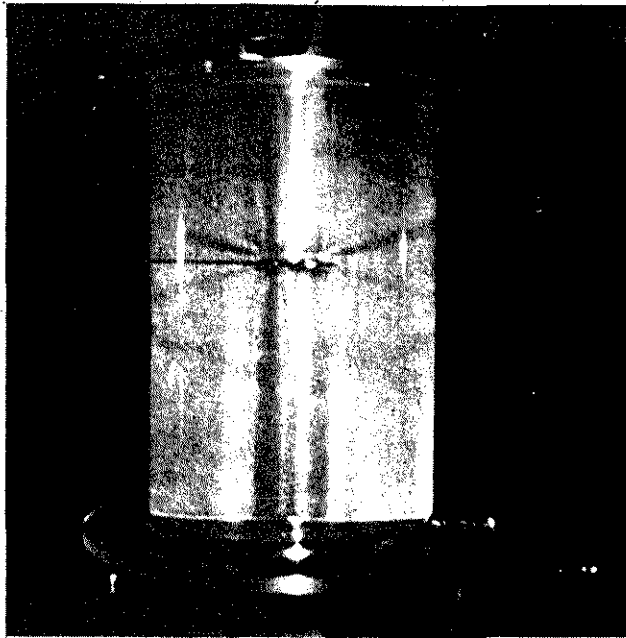


FIGURA II-2: Ondas (oscilações inerciais) produzidas por oscilações de um disco no eixo de rotação do cilindro (Greenspan, 1968).

escoamento com o aspecto daquele mostrado na Figura II-2. O que se observa são camadas livres sob cisalhamento ("free shear layers") visíveis pelo alinhamento de flocos de alumínio. As colunas de Taylor-Proudman, comentadas anteriormente, são superfícies características de frequências nulas de oscilações do disco. Aumentando-se a frequência do disco em direção a  $2.\Omega$ , as superfícies tornam-se cada vez mais horizontais e ao ultrapassar-se o valor limite ( $\lambda=2.\Omega$ ), o escoamento volta a ter o aspecto "ordinário" de fluidos não submetidos à rotação.

Outro fenômeno comum a fluidos em rotação refere-se ao aparecimento de fluxos secundários produzidos pelas camadas limites normais ao eixo de rotação (camadas limites de Ekman), que interferem no escoamento principal via redistribuição de momento angular e vorticidade. É o que se dá, por exemplo, num tornado que se dissipa pelo continente, ou numa xícara de chá deixada atingir o repouso, após agitação.

A observação de impurezas (partículas de chá) numa xícara após agitação (Figura II-3), revela que a movimentação fluida

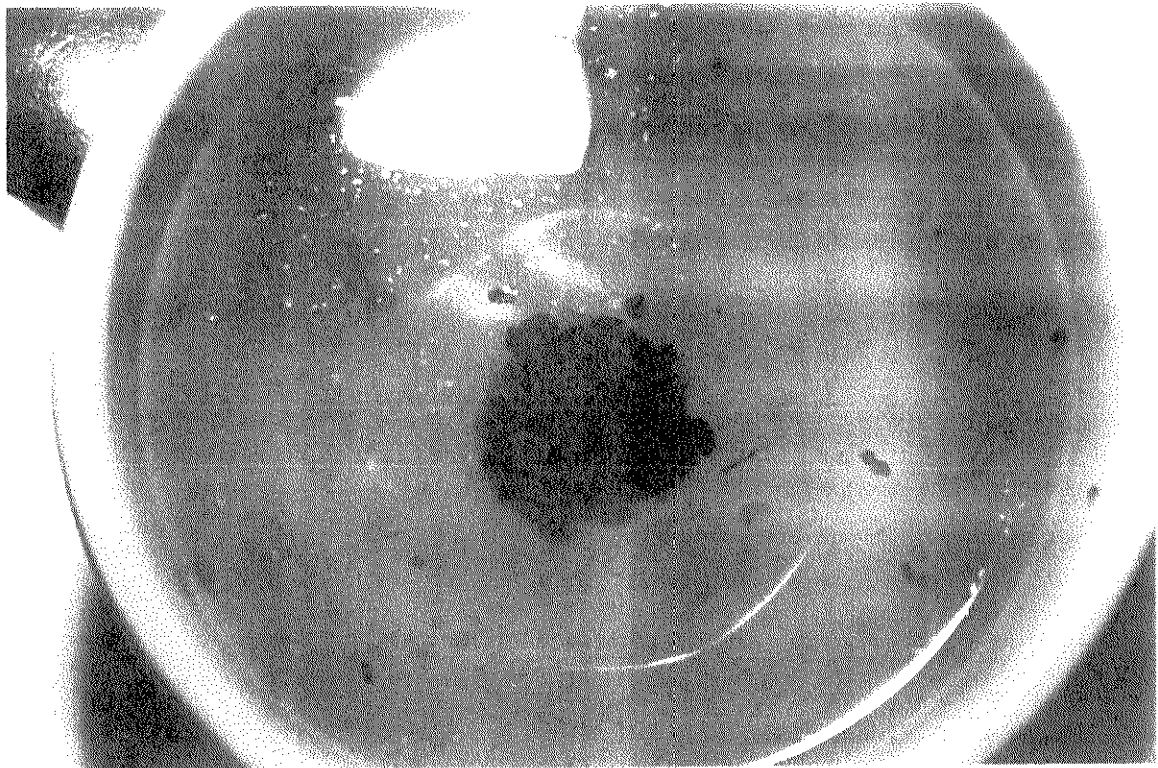


FIGURA II-3: Acúmulo de partículas de chá na região central do fundo da xícara. Um resultado da circulação secundária que se estabelece.

cessa numa escala de tempo bem inferior à de difusão viscosa que é da ordem de  $l^2/\nu$  ( $0 [l^2/\nu]$ ), onde  $l$  é o comprimento característico do recipiente. Além disso, percebe-se um acúmulo de partículas na região central do fundo da xícara. Estes dois fatos conectam-se pelo aparecimento de fluxos secundários, traçados pelas impurezas, e que são responsáveis pela redistribuição de momento angular e vorticidade, provocando um estado de repouso antes mesmo que os efeitos viscosos tenham se difundido.

As inter-relações entre as camadas limites, os fluxos secundários, a vorticidade e o momento angular são fundamentais no processo de ajuste transiente do fluido à perturbações impostas às superfícies do recipiente que o contém. Um bom início para o entendimento destas interrelações é tentar equacionar o problema, como se faz a seguir.

## II-2-4> EQUACIONAMENTO.

Transcreve-se, aqui, o tratamento feito por Greenspan (1968). Nele as equações da continuidade e do movimento para fluido Newtoniano e incompressível têm as formas:

$$\nabla \cdot \vec{q} = 0 \quad (\text{II-2-1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{q} \cdot \vec{q}) + (\nabla \times \vec{q}) \times \vec{q} + 2 \cdot \vec{\Omega} \times \vec{q} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathcal{F} - \nu \cdot \nabla \times (\nabla \times \vec{q}) \end{aligned} \quad (\text{II-2-2})$$

No Apêndice A mostra-se a dedução da equação do movimento e o significado de cada um dos seus termos.

As variáveis são:

$\vec{q}$  → vetor velocidade do fluido medido num sistema que gira com velocidade angular constante  $\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$  (se  $\Omega \neq \text{cte}$ , o termo

$$-\vec{r} \times \frac{d}{dt} \Omega(t)$$

deve ser adicionado ao lado esquerdo da equação II-2-2).

$\vec{r}$  → vetor posição;

$t$  → tempo;

$P$  → pressão;

$\rho$  → densidade;

$\nu$  → viscosidade cinemática;

$\mathcal{F}$  → força de corpo por unidade de massa;

As forças de corpo e centrífuga podem ser somadas à pressão

termodinâmica para formar a chamada pressão reduzida (p):

$$p = P + \rho \cdot \vec{g} - \frac{1}{2} \rho (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (\text{II-2-3})$$

Substituindo-se a equação (II-2-3) na equação (II-2-2) tem-se:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{q} \cdot \nabla \vec{q} + 2\vec{\Omega} \times \vec{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{x} (\nabla \times \vec{q}) \quad (\text{II-2-4})$$

A equação do movimento para um sistema de referência inercial, pode ser obtida fazendo-se  $\vec{\Omega} = 0$  na equação (II-2-4).

A relação entre os vetores velocidade nos sistemas de referência inercial e acelerado (sob rotação) é:

$$\vec{q}_{inerc} = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{q} \quad (\text{II-2-5})$$

Sendo L,  $\Omega^{-1}$  e U, o comprimento, o tempo e a velocidade característicos, tem-se que:

$$\vec{r} = \vec{r}^* \cdot L \quad ; \quad t = \Omega^{-1} \cdot t^* \quad ; \quad \vec{q} = U \cdot \vec{q}^* \quad ; \quad \vec{\Omega} = \Omega \cdot \hat{k}$$

$$p = \rho \Omega U L p^*$$

Essas variáveis se conduzidas às equações (II-2-1) e (II-2-4) reduzem o problema a uma forma adimensional:

$$\nabla \cdot \vec{q}^* = 0 \quad (\text{II-2-6})$$

$$\frac{\partial \vec{q}^*}{\partial t^*} + \epsilon \vec{q}^* \cdot \nabla \vec{q}^* + 2\hat{k} \times \vec{q}^* = -\nabla p^* - E \nabla \mathbf{x} \nabla \times \vec{q}^* \quad (\text{II-2-7})$$

onde  $\hat{k}$  é um vetor unitário na direção do eixo de rotação.

O caracter \* (denotando adimensionalidade) será abolido, no que segue, restando a presença de números adimensionais como indicativo de adimensionalidade.

São dois os números adimensionais que aparecem na equação (II-2-7):

- O número de Ekman:

$$E = \frac{\nu}{\Omega L^2},$$

que mede a importância dos efeitos viscosos relativamente aos de Coriolis. É, em essência, o inverso do número de Reynolds.

- O número de Rossby:

$$\epsilon = \frac{U}{\Omega L},$$

que compara a aceleração convectiva à força de Coriolis, medindo efeitos não-lineares.

O número de Ekman é, em geral, baixo. Valores de  $10^{-5}$  são comuns na prática. O número de Rossby é da ordem da unidade, sendo nas teorias lineares, desprezado.

A equação da vorticidade, num sistema de coordenadas não-inercial, tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} + \nabla_X (\epsilon \cdot \mathfrak{R} + 2 \cdot \hat{k}) \times \vec{q} = -E \cdot \nabla_X \nabla_X \mathfrak{R} \quad (\text{II-2-8})$$

onde:

$$\mathfrak{R} = \nabla_X \vec{q} \quad (\text{II-2-9})$$

A solução trivial desta equação,  $\vec{q}=0$ , representa a condição de rotação rígida vista de um sistema de coordenadas que gira com velocidade angular  $\Omega$ .

O equacionamento apresentado (Greenspan, 1968) é capaz de descrever os fenômenos mencionados na secção anterior. Considerando-se mínimos os efeitos convectivos ( $\epsilon \approx 0$ ), regime

permanente ( $\partial \vec{q} / \partial t = 0$ ) e escoamento invíscido ( $E=0$ ) tem-se pela equação (II-2-7) que:

$$2 \cdot \hat{k} \times \vec{q} = \nabla p \quad (\text{II-2-10})$$

Aplicando-se rotacional ( $\nabla \times$ ) à equação anterior, obtém-se:

$$(\hat{k} \cdot \nabla) \vec{q} = 0 \quad (\text{II-2-11})$$

que diz que:

$$\vec{q} = \vec{q}(x, y) \quad (\text{II-2-12})$$

Esta equação enuncia o Teorema de Taylor-Proudman. Segundo ele, a velocidade do fluido deve independe da coordenada axial ( $z$ ). Surge assim uma coluna fluida, circunscrevendo o obstáculo da Figura (II-1), que gira como um único corpo e que tem comprimento constante, por restrição das superfícies planas.

Retirando-se a condição de regime estacionário, a equação (II-2-7) reduz-se a:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + 2 \cdot \hat{k} \cdot \vec{q} = -\nabla p \quad (\text{II-2-13})$$

A equação (II-2-13) tem soluções com carácter ondulatório:

$$\vec{q} = \vec{Q} e^{i\lambda t} \quad (\text{II-2-14})$$

$$p = \phi e^{i\lambda t} \quad (\text{II-2-15})$$

onde  $Q$  e  $\phi$  são funções que dão conta das amplitudes da velocidade e da pressão, respectivamente.

Substituindo-se as expressões (II-2-14) e (II-2-15) nas equações (II-2-6) e (II-2-7) obtém-se:

$$\nabla \cdot \vec{Q} = 0 \quad (\text{II-2-16})$$

$$i \cdot \lambda \cdot \vec{Q} + 2 \cdot \hat{k} \times \vec{Q} = -\nabla\phi \quad (\text{II-2-17})$$

sob a condição de contorno invíscida na parede do recipiente:

$$\vec{Q} \cdot \hat{n} = 0 \quad (\text{II-18})$$

sendo  $\hat{n}$  um vetor unitário normal à parede.

Em termos da pressão:

$$\nabla^2 \phi - \frac{4}{\lambda^2} (\hat{k} \cdot \nabla)^2 \phi = 0 \quad (\text{II-2-19})$$

com

$$-\lambda^2 \cdot \hat{n} \cdot \nabla\phi + 4 (\vec{n} \cdot \hat{k}) \cdot (\hat{k} \cdot \nabla\phi) + 2i\lambda (\hat{k} \cdot \hat{n}) \cdot \nabla\phi = 0 \quad (\text{II-2-20})$$

na parede.

A equação (II-2-19) é hiperbólica para  $|\lambda| < 2$ , condição na qual esse problema de auto-valor admite soluções. Uma equação hiperbólica indica que o escoamento pode tornar-se descontínuo através de superfícies características que no caso são cones (Greenspan, 1968):

$$(x^2 + y^2)^{1/2} \pm \lambda (4 - \lambda^2)^{-1/2} \cdot z = cte,$$

como aqueles mostrados na Figura (II-2).

O que se quis, até o presente momento, foi mostrar fenômenos pouco conhecidos e típicos de fluidos submetidos à rotação (sem a restrição de geometria cilíndrica), e que alguns desses fenômenos podem ser preditos por um equacionamento simples. A relevância deles, no escoamento do fluido, é matéria dos próximos itens.



## II-2-5> CAMADA LIMITE DE EKMAN

O escoamento laminar de fluidos sob rotação, pode ser subdividido em linear e não-linear, conforme a importância dos efeitos convectivos com relação ao escoamento básico, imposto pela rotação. É o número de Rossby, o responsável por mensurar o grau de linearidade do escoamento.

Muitos sistemas fluidos sob rotação desviam-se pouco do estado rígido sendo, portanto, lineares. Surpreendentemente, tais sistemas são influenciados por efeitos viscosos reinantes nas camadas limites de Ekman, similarmente à movimentação em sistemas não-lineares. Desta forma, o entendimento da dinâmica no interior das referidas camadas limites ganha uma dimensão maior, e é tal entendimento que se procura abaixo.

Em condições lineares, desconsidera-se o número de Rossby ( $\epsilon$ ) na equação (II-2-7), que juntamente com a equação da continuidade (II-2-6) compõe o problema da camada limite:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + 2\hat{k} \times \vec{q} = -\nabla p - E \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{q} \quad (\text{II-2-21})$$

$$\nabla \cdot \vec{q} = 0 \quad (\text{II-2-22})$$

Até o momento, utilizou-se uma notação vetorial para a equação do movimento. Por maior que seja a aversão que ela desperta, tem o poder da generalidade. Ou seja, aplica-se a qualquer geometria, bastando definir os operadores no sistema coordenado com o qual se lida.

Com o espírito da generalidade, as camadas de Ekman formam-se em qualquer sistema fluido sob rotação. Por razões que vão além da simplicidade vai-se defini-la, por hora, nas proximidades de um disco infinito sob rotação.

Considera-se um disco impermeável no plano  $z = 0$ . Num determinado instante, a velocidade do disco é ligeiramente aumentada. As condições de contorno segundo um referencial que gira com velocidade  $\Omega$  são:

$$\vec{q}_{(r,t)} = 0 \quad \text{para} \quad t = 0$$

$$\vec{q} = k \times \vec{r} \quad \text{para} \quad z = 0$$

$$\vec{q} \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad z \rightarrow \infty$$

O escoamento, assim gerado, admite simplificações interessantes se adotado um sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ . A velocidade  $\vec{q}(u, v, w)$  e a pressão são independentes da coordenada azimutal  $(\theta)$ . A componente radial da velocidade pode ser eliminada pela introdução da função corrente  $\psi(r, z, t)$  (ver detalhes em Greenspan, 1968):

$$\vec{q} = -\nabla \times [\psi(r, z, t) \hat{\theta}] + v(r, z, t) \hat{\theta} \quad (\text{II-2-23})$$

A dependência radial pode ser assimilada pelas substituições:

$$\psi(r, z, t) = r \chi(z, t)$$

$$v(r, z, t) = r \cdot V(z, t)$$

Com estas substituições, o problema de camada limite para a função corrente modificada  $(\chi)$  e a "velocidade" azimutal  $V$ , torna-se:

$$\left( E \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) V - 2 \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-2-24})$$

$$\left( E \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - 2 \cdot \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-2-25})$$

com as condições de contorno:

$$V-1 = \chi = \partial\chi/\partial z = 0 \quad \text{para } z = 0$$

$$V = \chi = 0 \quad \text{para } t = 0$$

$$V = \chi = 0 \quad \text{para } z \rightarrow \infty$$

A solução pode ser obtida por transformadas de Laplace (Greenspan, 1968):

$$V = \Re e [EXP(-(2i)^{1/2} E^{-1/2} \cdot z) + F(z, t)] \quad (\text{II-2-26})$$

$$\chi = E^{1/2} \cdot \Im m [(2i)^{-1/2} EXP(-(2i)^{1/2} E^{-1/2} z) - (2i)^{-1/2} \text{erf}(2it)^{1/2} - (2i)^{-1/2} F(z, t)] \quad (\text{II-2-27})$$

onde:

$\Re e$  → parte real de;

$\text{erf}$  → função erro;

$\Im m$  → parte imaginária de;

$$F(z, t) = \frac{1}{2} \left[ EXP((2i)^{1/2} E^{-1/2} \cdot z) \text{erf}\left\{(2i)^{1/2} \cdot t^{1/2} + \frac{1}{2} (Et)^{-1/2} z\right\} - EXP(-(2i)^{1/2} E^{-1/2} \cdot z) \text{erf}\left\{(2i)^{1/2} t^{1/2} - \frac{1}{2} (Et)^{-1/2} z\right\} \right] \quad (\text{II-2-28})$$

Mais simples e não menos aproveitável é a solução para regime permanente\*:

$$\frac{u}{I} = \text{EXP}(-E^{-1/2} \cdot z) \text{ sen}(E^{-1/2} \cdot z) \quad (\text{II-2-29})$$

$$\frac{v}{I} = \text{EXP}(-E^{-1/2} \cdot z) \text{ cos}(E^{-1/2} \cdot z) \quad (\text{II-2-30})$$

$$w = E^{1/2} \cdot [-1 + \text{EXP}(-E^{-1/2} \cdot z) (\text{sen } E^{-1/2} \cdot z + \text{cos } E^{-1/2} \cdot z)] \quad (\text{II-2-31})$$

$$p = -2E \cdot \text{EXP}(-E^{-1/2} \cdot z) \text{ sen}(E^{-1/2} \cdot z) \quad (\text{II-2-32})$$

A solução estacionária exhibe dependência exclusiva para com a variável  $\zeta = E^{-1/2} \cdot z$ . Isto revela que a movimentação é conferida ao fluido através de uma camada com espessura adimensional da ordem de  $E^{1/2}$ . V.W.Ekman em 1905 foi quem primeiro identificou esse tipo de camada, estudando efeitos do vento na superfície do mar (Greenspan, 1968).

Na fina camada de Ekman, a força de Coriolís (ver Apêndice B) equilibra-se com as forças viscosas, permanecendo a pressão constante no valor determinado pelo fluido distante do disco ("fluido interior"). As partículas fluidas mais próximas ao disco, têm seu giro aumentado por ação viscosa. A força de Coriolís, então, supera o gradiente de pressão e o fluido é lançado radialmente para fora. Para repor esse fluxo outro de  $O[E^{1/2}]$  vindo do "interior" invíscido para a camada limite, aparece em sentido normal a esta. Se o disco for a única superfície em contato com o fluido, o fluxo secundário é apenas normal à camada limite e o circuito fecha-se no infinito.

\* Um problema semelhante a este, descrito por equações não-lineares, foi resolvido ainda no início da década de 20 por von Karman. O tratamento por ele feito, muito mais familiar aos Engenheiros Químicos, é apresentado no apêndice D.

A equação para a vorticidade em regime permanente é:

$$-2 \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial z} = E \nabla^2 \vec{q} \quad (\text{II-2-33})$$

Por esta equação, pode-se ver que a camada limite de Ekman estacionária, forma-se porque a difusão de vorticidade é contrabalançada pela distensão de linhas de vórtice (Apêndice C). Na maioria dos problemas fluidos, os processos convectivos, no entanto, é que compensam os difusivos para estabelecerem camadas limites térmicas ou viscosas, estacionárias.

A solução transiente para velocidade tangencial (Equação II-2-26) mostra fraca dependência do tempo, insinuando que a consideração de regime permanente na camada limite, é procedente (ver Figura II-4).

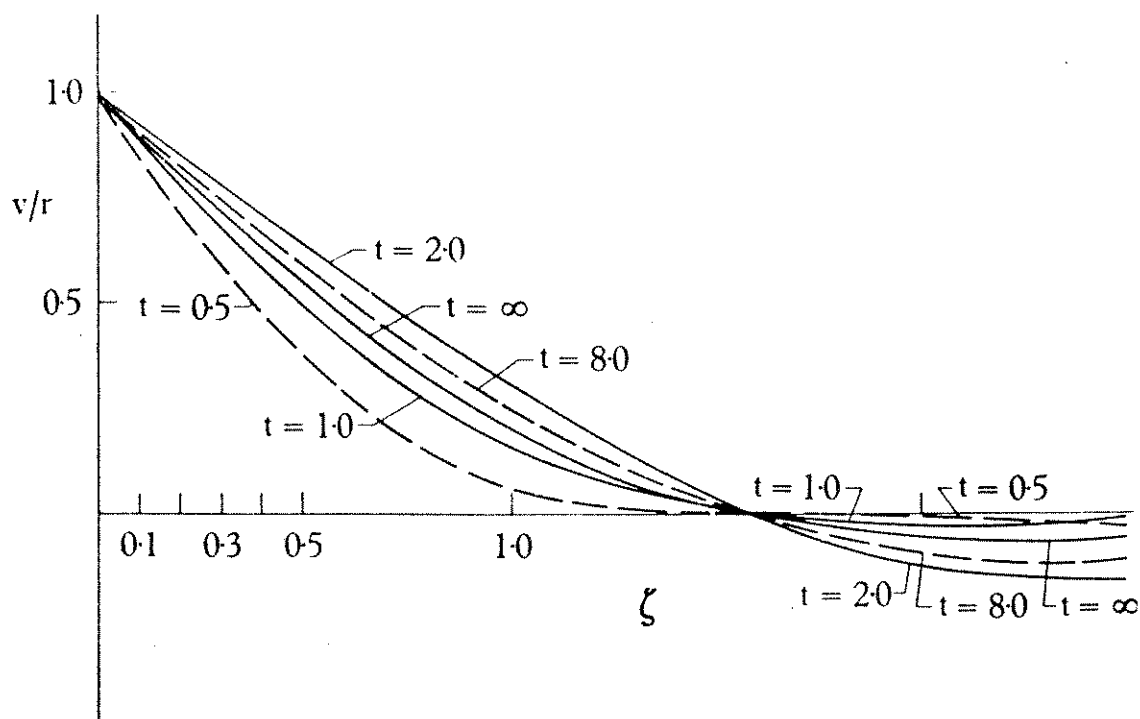


FIGURA II-4: Velocidade azimutal na camada de Ekman em função do tempo, de onde se pode constatar o carácter estacionário destas camadas (Greenspan, 1968).

## II-2-6> "SPIN-UP" LINEAR

Imagine-se uma geometria composta por dois discos coaxiais e infinitamente longos, girando rigidamente com um fluido que preenche o espaço entre eles. É dada uma pequena perturbação, de igual intensidade, na rotação de cada um dos discos. Chama-se "spin-up" ao processo de ajuste do fluido às novas velocidades impostas. Em sendo pequena a perturbação, tem-se "spin-up" Linear.

A formulação matemática para esta geometria consiste nas equações (II-2-24) e (II-2-25) seguidas das condições de contorno:

$$V = \chi = 0 \quad \text{para} \quad t = 0$$

$$V - 1 = \chi = \partial\chi / \partial z = 0 \quad \text{para} \quad z = \pm 1 \quad ,$$

sendo a distância entre os dois discos igual a  $2.L$ , e  $L$  o comprimento característico. Assim, o fluido está contido no intervalo  $|z| \leq 1$ .

Se o número de Ekman for grande, o novo estado de rotação rígida é atingido por difusão viscosa de vorticidade, num tempo adimensional da ordem de  $E^{-1}$ . Por outro lado, se for baixo o número de Ekman, o mecanismo é outro e o estado de rotação rígida é alcançado num tempo da ordem de  $E^{-1/2}$ , como se verá.

Greenspan e Howard (1963) formularam e resolveram esse problema, usando transformadas de Laplace. Os passos desta resolução, tanto quanto a própria, não foram agraciados com o dom da simplicidade e, portanto, não serão aqui reportados. Porém, por meio desta solução, Greenspan & Howard chegaram a importantes conclusões:

- A solução pode ser dividida num termo que decai uniformemente, e que se torna desprezível, numa escala de tempo

da ordem de  $E^{-1/2}$  (esse termo refere-se a presença da camada limite de Ekman) e noutro termo composto por um número infinito de oscilações, com o dobro da frequência de rotação do cilindro, que podem ser entendidas como oscilações inerciais (do tipo daquelas mostradas na Figura II-2). Estas oscilações são excitadas por perturbações na velocidade do cilindro e persistem até tempos da ordem de  $E^{-1}$ .

- Apesar do tempo de duração das oscilações inerciais, elas só têm influência no escoamento durante as primeiras revoluções. Depois deixam de influir em razão da baixa amplitude ( $O[E]$ );

- As camadas limites de Ekman permanecem a maior parte do tempo restritas a uma distância da ordem de  $E^{1/2}$  dos discos. Num tempo da ordem de  $E^{-1/2}$ , os efeitos viscosos fazem-se sentir até uma distância da ordem de  $E^{1/4}$  dos discos. Entretanto, o estado de rotação rígida já é atingido nesse tempo;

- A condição uniforme de velocidade angular (rotação rígida) é atingida num tempo da ordem de  $E^{-1/2}$ , finalizando o fenômeno (ou melhor, o processo) de "spin-up" numa escala de tempo bem inferior à de difusão viscosa ( $O[E^{-1}]$ ). Fica, então, óbvio que a condição de rígida rotação para o fluido, não é obtida por difusão de efeitos viscosos.

Para que se compreenda melhor porque o tempo de "spin-up" é bem inferior ao tempo de difusão viscosa ( $E^{-1/2} \ll E^{-1}$ ), detalha-se as três fases que se sucedem durante o escoamento entre discos: a formação das camadas de Ekman, o "spin-up" e o decaimento viscoso das camadas limites e das oscilações inerciais.

#### FORMAÇÃO DAS CAMADAS DE EKMAN

Imediatamente após a perturbação,  $t \ll 1$ , inicia-se a formação de camadas limites que crescem por difusão viscosa. Há um desequilíbrio entre a força de Coriolís e o gradiente de pressão, mantido constante pelo escoamento geostrófico interior (diz-se geostrófico, do escoamento no qual equilibram-se a força de pressão com a de Coriolís). Num tempo da ordem da unidade ( $t = O(1)$ ), um fluxo radial dirigido para fora aparece nas camadas limites, e induz um outro vindo do interior em direção a

cada uma destas camadas, para fazer valer a continuidade. O escoamento resultante é tridimensional e desenvolve-se numa camada limite de espessura da ordem de  $E^{1/2}$ . Isto ocorre após dois radianos de rotação do sistema, segundo Benton & Clark (1974).

Superpostas aos fluxos nas camadas de Ekman, estão oscilações inerciais com frequência  $2\Omega$  e que inicialmente têm grande amplitude, influenciando, sobremaneira, no fluxo axial. Estas oscilações excitadas pela perturbação em  $\Omega$ , propagam-se pelo interior alimentando-se no efeito de Coriolis. Com o decorrer do tempo, todavia, suas amplitudes decaem.

O "SPIN -UP".

O fluxo normal às camadas limites de Ekman ( $O[E^{1/2}]$ ) é possível, apenas, se um fluxo radial dirigido para o eixo tiver lugar, no escoamento interior, fora das camadas limites.

Durante esta fase do escoamento, anéis fluidos no interior sofrem contração, em virtude do fluxo radial. Nesse ponto, os efeitos viscosos ainda são reduzidos, já que para o tempo de "spin-up" (que corresponde ao final desta fase) as camadas limites viscosas têm espessura da ordem de  $E^{1/4}$ . Assim, cada anel fluido conserva seu momento angular, enquanto sofre contração, provocando aumento na velocidade angular. A rotacionalidade adicional para o fluido interior vem, então, da distensão de linhas de vórtice axiais provocada pelas camadas de Ekman. O processo se desenrola até que o gradiente de velocidade angular entre o fluido interno e as camadas de Ekman torne-se diminuto.

#### DECAIMENTO DAS CAMADAS DE EKMAN

Ao tornar-se diminuto o gradiente de rotação entre o fluido interno e as camadas de Ekman, estas decaem. Tais camadas davam uma contribuição da ordem de  $E^{1/2}$  para o escoamento, durante o "spin up". Numa escala de tempo da ordem de  $E^{-1}$ , as camadas viscosas já cobrem todo o domínio fluido e as oscilações inerciais desaparecem. Contudo, o fluido já alcançara o estado de rotação rígida num tempo, bem inferior, da ordem de  $E^{1/2}$ .

Como se mostrou, três escalas de tempo são importantes: a escala de formação das camadas de Ekman ( $O[1]$ ), a escala de "spin



up" ( $O[E^{-1/2}]$ ), e a escala de difusão viscosa ( $O[E^{-1}]$ ). A escala intermediária, de "spin up", é a média geométrica, entre as outras duas.

Dada uma visão física do problema, é possível chegar-se ao tempo característico de "spin-up", por uma análise simples, envolvendo ordem de magnitude das variáveis pertinentes.

Se uma perturbação na velocidade angular de  $\epsilon.\Omega$  for executada, então,  $U = \epsilon \Omega L$  é a velocidade característica de transporte dentro da camada limite de Ekman de espessura  $\delta \sim (\nu/\Omega)^{1/2}$ . A conservação da massa exige que ocorra um fluxo do interior para a camada com velocidade  $w_i \sim U.\delta/L$ .

Um anel fluido do escoamento interior adquire uma velocidade angular de  $(1+\epsilon)\Omega$  ao mover-se radialmente (em direção a raios decrescentes) uma distância de  $1/2.\epsilon.L$  (sendo  $L$  o comprimento característico). O momento angular é conservado porque o escoamento inteiror é invíscido. O tempo necessário para o anel fluido romper esta distância e atingir a velocidade do novo estado estacionário é:

$$t_c \sim \frac{\epsilon L}{w_i} \sim \left( \frac{L^2}{\nu \Omega} \right)^{1/2} \sim E^{-1/2} . \Omega^{-1} \quad (\text{II-2-34})$$

A Tabela II-1 abaixo, retirada de Greenspan (1968), fornece tempos de "spin-up" e de difusão viscosa, numa situação em que  $L=4\text{cm}$  e  $\Omega=200\pi/\text{s}$ :

**Tabela II.1 - Tempo Característico de "spin-up",  $t_c$ , Tempo de Difusão Viscosa,  $t_v$ , e Número do Ekman,  $E$ .**

SUBSTÂNCIA	$\nu$ ( $\text{cm}^2/\text{s}$ )	$E$	$t_c = E^{-1/2} . \Omega^{-1}$ (s)	$t_v = L^2/\nu$ (s)
Óleo Lubrificante- 40 °c	1,0	$1 \times 10^{-4}$	0,16	16
Água	0,01	$1 \times 10^{-6}$	1,6	1600
Mercúrio	0,001	$1 \times 10^{-7}$	5,05	16000

Para "restaurar" a geometria cilíndrica, a partir de dois discos paralelos e infinitos, basta conhecer o papel da superfície curva do cilindro nos mecanismos de troca de quantidade de movimento entre os camadas limites de Ekman e o fluido interno, agora limitado.

É sabido, por Stewartson (1957), que duas camadas limites (que recebem seu nome) existem nas proximidades da superfície cilíndrica, para ajustar o vetor velocidade ao valor próprio da parede. Ambas as camadas são mais espessas que as de Ekman (presentes nas superfícies planas). Na camada em contato com o fluido interior, cuja espessura é da ordem de  $E^{1/4}$ , as velocidades tangencial e radial do escoamento interno são ajustadas. É também nesta camada que o fluxo radial vindo das camadas de Ekman é direcionado normalmente a elas. A outra camada, com espessura  $O[E^{1/3}]$ , situa-se entre a parede do cilindro e a camada interna e reduz a velocidade axial a zero na parede.

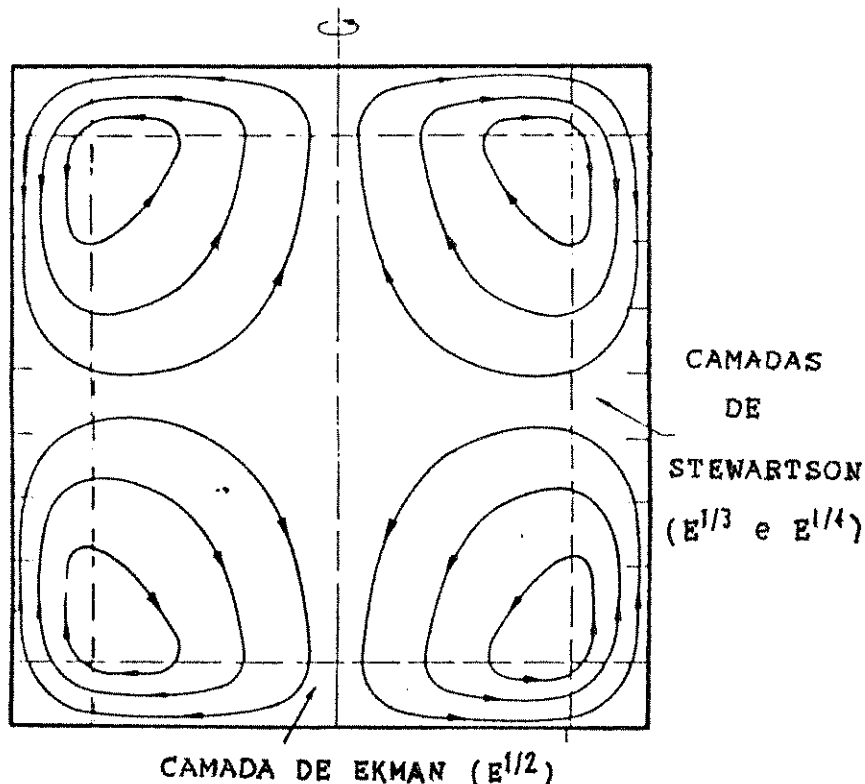


FIGURA II-5: Esquema da circulação secundária presente em cilindros, durante o "spin-up" (Benton & Clark, 1974).

Em razão das camadas de Stewartson, o escoamento interior invíscido não sofre ação direta das paredes, e o processo de "spin-up" dá-se similarmente ao que tem lugar entre dois discos paralelos e infinitos. Na Figura II-5 esquematiza-se a circulação secundária que se estabelece no cilindro.

Em recipientes finitos, como o cilindro, o que se percebe é que o tempo de "spin-up" continua sendo da ordem de  $E^{-1/2}$  e as oscilações inerciais decaem nesse tempo.

O processo inverso ao "spin-up" ("spin-down"), ou seja, a perturbação na velocidade angular, por meio da diminuição do seu valor é, para o caso linear, idêntico ao "spin-up", exceto que os fluxos secundários seguem um caminho oposto.

## II-2-7> "SPIN-UP" NÃO LINEAR

Na Secção II-2-5 definiu-se como linear, o escoamento produzido quando o fluido sofre um leve desvio do estado de rotação rígida. Nesta situação o número de Rossby é pequeno, e os fenômenos observáveis são aqueles já mencionados. Se a perturbação na velocidade angular for, porém, considerável, outros fenômenos acrescidos de instabilidades nas camadas limites podem acontecer. Esse novo quadro de escoamento engloba o "spin-up" em condições não-lineares.

Efeitos não-lineares foram contemplados por pesquisadores como Wedemeyer (1964), Greenspan e Weinbaum (Weidman, 1976), Benton (1973) e Weidman (1976), entre outros. A despeito dos diferentes tratamentos dados, esses autores concordam que as interações não-lineares são pequenas, quando comparadas com o processo viscoso básico e o tempo de "spin-up", por consequência, permanece da ordem de  $E^{-1/2}$ . Mais ainda, demonstram que o "spin-down" não-linear é mais longo no tempo que o "spin-up" sob mesmos valores efetivos de Rossby.

Toda a apresentação que se faz, a seguir, está baseada nos trabalhos de Weidman (1976-Partes I e II), que estende aqueles de

Wedemeyer (1964). Weidman usa um sistema de referência inercial (o que equivale a fazer  $\Omega=0$  na equação II-2-4). O sistema de coordenadas adotado é cilíndrico  $(r, \theta, z)$ , com as respectivas componentes do vetor velocidade  $(u, v, w)$ . As superfícies planas localizam-se em  $z = \pm h/2$  e as curvas em  $r = a$ . A análise restringe-se a baixos números de Ekman ( $E = \nu/\Omega h^2$ ).

A equação do movimento para o fluido interior, segundo a coordenada azimutal  $\theta$  é:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) \right) \quad , \quad (\text{II-2-35})$$

considerando-se fluido newtoniano, incompressível, e que haja simetria axial.

O escoamento interior, com magnitude da ordem da unidade, satisfaz o Teorema de Taylor - Proudman, de tal forma que  $u = u(r, t)$  e  $v = v(r, t)$ , apenas.

A equação (II-2-35) para ser resolvida necessita de uma relação entre  $u$  e  $v$ . Weidman, assim como fez Wedemeyer (1964), usa os cálculos, em regime permanente, de Rogers e Lance (1960) para fluido girando com velocidade angular  $\omega$ , acima de um disco infinito com rotação  $\Omega$ , buscando determinar a sucção das camadas de Ekman sob condições transientes.

Chama-se a atenção para o parágrafo acima. Vai-se utilizar os cálculos de camada limite estacionária, feitos por Rogers e Lance (1960) para resolver a equação II-2-35, que descreve o escoamento interior em condições transientes.

Rogers e Lance resolvem numericamente o problema de camada limite na faixa de  $s = w/\Omega$  e  $\sigma = \Omega/w$ , variando de zero a um, sendo  $s$  aplicado ao "spin-up" enquanto  $\sigma$  ao "spin-down". Os resultados para a sucção de Ekman podem ser expressos por:

$$\begin{aligned} w_w(t) &= -\nu^{1/2} \cdot \Omega^{1/2} \cdot f(s), \quad \text{para } 0 \leq s \leq 1 \\ &= -\nu^{1/2} \cdot \Omega^{1/2} \cdot g(\sigma), \quad \text{para } 0 \leq \sigma \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{II-2-36})$$

As funções  $f(s)$  e  $g(\sigma)$  são determinadas pela solução numérica de Rogers e Lance, e apresentadas sob a forma gráfica na

Figura II-6. A componente axial da velocidade,  $w$ , é escrita como função do tempo já que se aplica ao caso transiente.

São feitas as seguintes considerações ao se aplicar os cálculos da camada limite estacionária sobre um disco, ao "spin-up" e ao "spin-down" num recipiente cilíndrico:

1 - O escoamento é quase estacionário ("quasi-steady flow");

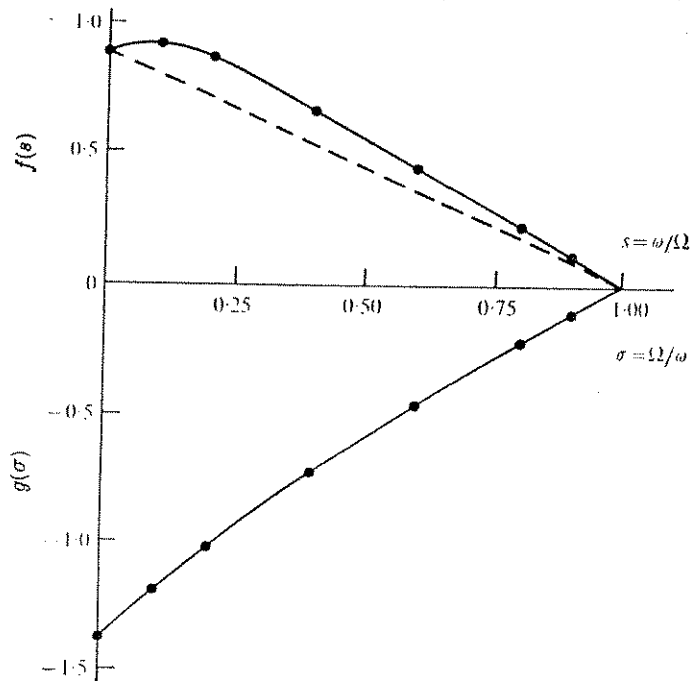


FIGURA II-16: Sucção de Ekman na dependência de "s" (curva superior) e de "σ" (curva inferior). A curva tracejada corresponde à solução de Wedemeyer. (Weidman, 1976 - Parte 1).

2 - A geometria finita não interfere nos escoamentos da camada limite;

3 - O fluido está, localmente, em estado estacionário.

A consideração (1) é adequada, pois em acordo com Benton (Weidman, 1976), mesmo em condições não-lineares, as camadas de Ekman formam-se num tempo bem inferior ao de "spin-up". Na consideração (2) supõe-se que as paredes do cilindro não afetam a sucção (ou recalque) das camadas de Ekman. Conforme dito na secção anterior, a influência direta das paredes está restrita a

uma fina camada ( $O[E^{1/4}]$ ), nas proximidades das paredes curvas. Embora elas possam influenciar indiretamente, quando da aparição de instabilidades.

A condição (3) é a mais restritiva. Ela equivale a dizer que o fluxo através das superfícies planas, é o resultado de gradientes de rotacionalidade através das camadas de Ekman, apenas. Desprezam-se os gradientes axiais de rotacionalidade.

A equação da continuidade aplicada a um contorno cilíndrico que varre as superfícies planas fornece:

$$u(r, t) = \left(\frac{r}{h}\right) w_{\infty}(t) \quad (\text{II-2-37})$$

Esta equação juntamente com a (II-2-36) dá a relação entre  $u(r, t)$  e  $v(r, t)$  que se desejava encontrar.

A eliminação de  $u(r, t)$  na equação (II-2-35) faz com que esta apresente-se sob a forma:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{v^{1/2}}{h} \cdot \Omega^{1/2} f(s) \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r, v) = v \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r, v) \right) \quad (\text{II-2-38})$$

Lembrando-se que  $\Omega^{1/2} \cdot f(s)$  aplica-se ao "spin-up" e  $\omega^{1/2} g(\sigma)$  ao "spin-down". Os parâmetros adimensionais  $s$  e  $\sigma$ , e consequentemente as funções  $f(s)$  e  $g(\sigma)$ , serão funções de  $v$  e  $r$  para acelerações impulsivas do cilindro e dependerão também do tempo quando o cilindro acelerar a uma taxa constante.

Determinada a velocidade azimutal interior,  $v$ , pode-se determinar  $u$  a partir da equação (II-2-37). A velocidade axial obtem-se da equação da continuidade:

$$w(r, z, t) = -\frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \quad (\text{II-2-39})$$

Enfatiza-se que o sistema coordenado de Weidman têm a origem no centro do cilindro.

Esse método separa o escoamento da camada limite com o do interior geostrófico, restando a sucção das camadas de Ekman como o único elo. São perdidos detalhes como as oscilações inerciais,

mas o método é aplicável mesmo em situações altamente não-lineares, desde que  $E \rightarrow 0$ .

## II-2-7-1> "SPIN-UP" NUM IMPULSO.

Parte-se de uma situação em que o cilindro e o fluido giram rigidamente com velocidade  $\Omega_i$  e num dado instante o cilindro tem sua velocidade angular aumentada para  $\Omega_f$ . Assim, a porção invíscida da equação (II-2-38) é escrita como:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{v^{1/2}}{h} \cdot \Omega_f^{1/2} \cdot r \cdot f\left(\frac{v}{r\Omega_f}\right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right) = 0 \quad (\text{II-2-40})$$

A adimensionalização é realizada com o auxílio de valores característicos de velocidade,  $a \cdot \Omega_f$ , de comprimento,  $a$ , e de tempo,  $\Omega_f^{-1}$ .

Em termos de circulação,  $\Gamma = r \cdot v$  (Apêndice C), a equação adimensional torna-se:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - E^{1/2} \cdot r \cdot f\left(\frac{\Gamma}{r^2}\right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = 0 \quad (\text{II-2-41})$$

onde, novamente, o carácter adimensional é identificado pela presença de parâmetros adimensionais. As condições de contorno são as seguintes:

$$\Gamma(r, 0) = r^2 \gamma \quad , \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$\Gamma(1, t) = 1 \quad , \quad t > 0$$

sendo  $E = v/h^2\Omega_f$  e  $\gamma = \Omega_i/\Omega_f$ .

A equação (II-2-41) mostra que a circulação é conservada ao longo de caminhos característicos definidos por:

$$\frac{dr}{dt} = -E^{1/2} \cdot r \cdot f(\Gamma_0/r^2) \quad (\text{II-2-42})$$

e  $\Gamma_0$  é o valor constante de circulação.

Weidman propõe polinômios que descrevem com precisão a curva  $f(s)$  x  $s$ . Porém uma aproximação menos rigorosa pode ser feita por meio de  $f(s) = k(1-s)$ , que submetida à equação (II-2-41) produz por solução as seguintes expressões:

$$\Gamma(r, t) = \gamma \cdot r^2 / (r_0(t))^2 \quad (\text{II-2-43}),$$

na região (I) onde  $r \leq r_0(t)$ .

$$\Gamma(r, t) = [r^2 - \exp(-2\beta_1 t)] / [1 - \exp(-2\beta_1 t)] \quad (\text{II-2-44})$$

na região (II) onde  $r \geq r_0(t)$

sendo:

$$\beta_1 = k \cdot E^{1/2}$$

$$r_0(t) = [\gamma + (1-\gamma) \text{EXP}(-2 \cdot \beta_1 \cdot t)]^{1/2} \quad (\text{II-2-45})$$

A equação (II-2-45) determina a posição de uma "frente de onda" cilíndrica que se propaga da parede até a posição:  $(r_0)_f = \gamma^{1/2}$ . O fluido além da frente ( $r \leq r_0(t)$ ) gira como um corpo rígido, conservando o momento angular. Embora a velocidade angular seja contínua através de  $r_0(t)$  sua derivada não o é. Daí, a frente de onda deve ser caracterizada por uma descontinuidade na tensão. A velocidade radial também deve ser contínua através da frente, mas a velocidade axial é descontínua e, na verdade, muda de sinal na frente de onda. Essa mudança de sinal em  $w$  mostra que para  $r < r_0(t)$ , as camadas de Ekman succionam fluido, enquanto que para  $r > r_0(t)$ , recalcam.

Se o termo viscoso ( $O(E)$ ) for considerado, a equação do



movimento, para "spin-up" fornece:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - E^{1/2} \cdot r \cdot f \left( \frac{\Gamma}{r^2} \right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = A^2 \cdot E \cdot \left[ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right] \quad (\text{II-2-46})$$

onde  $A = h/a$

Considerando que  $A \times E^{1/4} \ll 1$ , Venezian (1970) encontrou uma solução para a equação (II-2-46), que elimina a descontinuidade na tensão, por meio de uma camada cuja espessura é da ordem de  $E^{1/4}$ . Esta camada de transição espessa-se por processos difusivos e convectivos com o decorrer do tempo. O vetor velocidade tem suas componentes variando continuamente pela camada de transição.

Stewartson (1957) mostrou que existem camadas duplas com espessuras proporcionais a  $E^{1/4}$  e  $E^{1/3}$ , conforme já se comentou aqui, para o caso de "spin-up" linear. O que parece ocorrer é que para o caso não-linear, a camada com espessura da ordem de  $E^{1/4}$  propaga-se pelo interior ao longo da frente de onda, enquanto a outra camada, com espessura da ordem de  $E^{1/3}$ , permanece fixa na parede do cilindro e reduz, ali, a zero a componente axial do vetor velocidade. Em outras palavras, a quebra da linearidade leva à separação da estrutura dupla das camadas presentes no caso linear!

## II-2-7-2 > "SPIN-UP" SOB ACELERAÇÃO CONSTANTE.

Considera-se, agora, uma situação na qual o cilindro acelera a uma taxa constante,  $\alpha$ , entre as velocidades inicial e final. Durante a aceleração  $s = \omega / (\Omega_1 + \alpha t)$ . Adimensionalizando-se, a porção invíscida da equação (II-2-38), com as quantidades características  $\alpha^{1/2} a$ ,  $a$  e  $\alpha^{-1/2}$ , chega-se à seguinte equação para a circulação:

sendo:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} - 2 \cdot E_{\alpha}^{1/2} \cdot r \cdot \tau^2 \cdot f\left(\frac{\Gamma}{r^2 \cdot \tau^2}\right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = 0 \quad (\text{II-2-47})$$

$$\tau = (t + t_i)^{1/2}, \quad t_i = \Omega_i / \alpha^{1/2}$$

$$E_{\alpha} = \nu / h^2 \cdot \alpha^{1/2}$$

com as condições de contorno:

$$\tau(r, t_i^{1/2}) = r^2 \cdot t_i \quad \text{para } 0 \leq r \leq 1$$

$$\tau(1, \tau) = \tau \quad \text{para } \tau > t_i^{1/2}$$

Como quando em "spin-up" impulsivo, a circulação conserva-se ao longo de trajetórias características dados por:

$$\frac{dr}{d\tau} = -2 \cdot E_{\alpha}^{1/2} \cdot r \cdot \tau^2 \cdot f(\Gamma_0 / r^2 \cdot \tau^2)$$

Weidman resolve esta equação usando a aproximação linear para  $f(s)$ . Os resultados são bons mesmo para números de Rossby consideráveis como  $\epsilon = 1 - s = 0,8$ . A utilização de polinômios não-lineares para  $f(s)$  fornece resultados qualitativamente similares aos da aproximação linear, exceto que uma descontinuidade na tensão é substituída por uma na velocidade. Mais detalhes são dados por Weidman (1976 - Parte I).

Weidman realiza ensaios nos quais determina perfis de velocidade no interior do cilindro em rotação. Os valores experimentais são comparados aos calculados pelas equações (II-2-41) e (II-2-47). A concordância é muito boa, segundo esse pesquisador, que atribui as pequenas discrepâncias a efeitos de instabilidades e turbulência nas camadas de Ekman, julgadas operando em regime laminar. Outra provável fonte de erro está na desconsideração do termo viscoso.

## II-2-8> "SPIN-DOWN"

Considera-se, agora, o escoamento transiente gerado por uma diminuição na velocidade angular do cilindro, a partir de um estado rígido de rotação. A equação (II-2-38) juntamente com a função  $g(\sigma)$  descrevem o fenômeno.

Apenas dois fatos novos ocorrem para o "spin-down". Um deles refere-se ao deslocamento de uma das camadas de Stewartson, observado no "spin-up", o outro fato diz respeito ao aparecimento de instabilidades centrífugas.

A equação equivalente à (II-2-41) define curvas características que caminham em direção a raios crescentes. Assim, a camada de Stewartson com espessura proporcional a  $E^{1/4}$ , tende a caminhar além de  $r = 1$ . Como isto é impossível, fisicamente, ela fica junto à superfície do cilindro!

Weidman resolve a equação (II-2-38), considerando o termo difusivo (viscoso) e compara os resultados obtidos a dados experimentais "coletados" nas proximidades das camadas de Stewartson. A concordância é boa até que instabilidades sejam visualizadas. São as instabilidades centrífugas observadas por Taylor (1921), em cilindros coaxiais, para o caso em que o interno gira mais rapidamente que o externo. Vai-se falar mais delas.

## INSTABILIDADES CENTRÍFUGAS

Greenspan (1968) expõe o assunto de maneira simples e precisa. O que se escreve abaixo, está baseado nesta exposição.

Supõe-se uma perturbação com simetria axial, numa região onde o escoamento é invíscido e equilibram-se o gradiente de pressão e as forças centrífugas. Supõe-se, ainda, que a referida perturbação faz com que partículas fluidas em  $r_0$  e  $r_1$  ( $r_0 > r_1$ ) permutem suas posições. O escoamento é dito estável se o campo de forças tende a mover as partículas em direção a suas posições originais. Caso contrário o escoamento instabiliza-se. Como numa região invíscida, o momento angular é conservado, uma partícula

fluida na posição  $r_1$  com velocidade  $v_1$  atinge a velocidade  $(r_1/r_0) \cdot v_1$  ao deslocar-se até  $r_0$ . A força centrífuga sobre esse elemento fluido é  $(r_1 v_1)^2/r_0^3$  e opõe-se ao campo de pressão que exerce uma força da ordem de  $v_0^2/r_0$ . Assim, se

$$\frac{v_0^2}{r_0} > \frac{r_1^2 \cdot v_1^2}{r_0^3},$$

a resultante das forças que atuam na partícula está no sentido de recolocá-la na sua posição original, estabilizando o escoamento. Porém, se

$$(r_0 v_0)^2 < (r_1 v_1)^2,$$

o escoamento torna-se instável.

A equação anterior constitui o chamado critério de estabilidade de Rayleigh, que reza:

*"Um escoamento laminar estacionário será instável se o quadrado da circulação absoluta, sobre o eixo de rotação, diminuir com o crescimento do raio."*

Quanto aos efeitos da viscosidade, é sabido que tendem a estabilizar o escoamento.

## II-3 > CILINDROS HORIZONTAIS PARCIALMENTE CHEIOS

### II-3-1 > INTRODUÇÃO

Dentre as configurações possíveis para um líquido que enche parcialmente um cilindro sob rotação axial, postado horizontalmente, enquadram-se os "rimming flows" (escoamentos em bordas circulares). Neles, um filme adere-se às paredes do recipiente deixando em seu interior uma região "vazia" em forma cilíndrica.

Os "rimming flows" estão presentes em separadores de creme, desgaseificadores de líquidos, em processos de cobertura de tubos, na moldagem sob rotação de plásticos, cimentos e metais fundidos e mesmo na secagem de pós finos em fornos rotativos (Ruschak e Scriven, 1976).

São os "rimming flows" uma classe específica dentro dos chamados Escoamentos de recobrimento, ou "Coating flows", sendo que nestes últimos não se impõe a condição de cobertura completa da superfície do cilíndrico, pelo líquido contido.

Na secção anterior, tratou-se do escoamento em cilindros completamente cheios. Um dos alvos que norteiam a revisão bibliográfica que se faz, é a busca de efeitos provocados por um meio gasoso no interior de um cilindro horizontal em rotação. Nesse sentido, os escoamentos de recobrimento, constituem-se num belo ponto de partida.

Entende-se que a literatura que lida com cilindros parcialmente cheios está, em sua maioria absoluta, interessada nos escoamentos "rimming" em baixos percentuais líquidos e em saber sobre seu colapso. Não há a preocupação com o que acontece até que esse escoamento seja alcançado.

Assim sendo, excetuando-se os trabalhos de White e Higgins (1958), que se apresenta na Secção (II-3-2), ninguém se preocupou em compreender, de uma forma geral, os "Coating Flows" (escoamentos de recobrimento). Por via de consequência, os secções por vir dão privilégio aos escoamentos "rimming" e à instabilidades que levam ao seu colapso.

## II-3-2 > FORMAS DO ESCOAMENTO E INFLUÊNCIA DE PROPRIEDADES FÍSICAS NOS "COATING FLOWS".

Um dos primeiros a estudar os "Coating Flows" foi Robert E. White em 1956 (White & Higgins, 1958). O intuito foi o de determinar as formas de escoamento do condensado, num secador rotativo de polpa de papel. Observou-se que uma dada massa fluida passa pelas fases de escoamento em poça, escoamento em cascatas e escoamento "rimming", respectivamente, assim que a rotação for aumentada.

Em rotações baixas, o aspecto físico do escoamento é o de uma poça que se mantém no fundo do cilindro. Aumentando-se a rotação, o sistema forma cortinas transversais de líquido que caem como que numa cascata. Um novo aumento de rotação provoca a adesão do líquido às paredes, por efeito centrífugo, constituindo os "rimming flows". A partir deste estado, a redução nos giros leva ao colapso do escoamento "rimming" numa velocidade (velocidade de colapso) bem inferior àquela de formação deste aspecto de escoamento.

Num trabalho posterior, White e Higgins (1958) estudaram as influências de propriedades como a viscosidade, a densidade, a tensão superficial e a molhabilidade, nas velocidades de formação de cascatas, do escoamento "rimming" e do colapso.

A tensão superficial pareceu não afetar as velocidades "rimming" e de cascatas, na faixa de volumes estudados (inferiores a 10% de volume líquido), como atestam as Figuras II-7 e II-8.

As forças interfaciais líquido-parede são traduzidas pela molhabilidade da superfície pelo líquido. A expectativa é de que as interações líquido-parede sejam afetadas se este molha ou não a superfície.

São apresentados nas Figuras II-9 e II-10, gráficos construídos por meio de dados experimentais para a água quando esta molha a superfície do cilindro e quando, em razão do tratamento com substâncias apropriadas, não a molha.

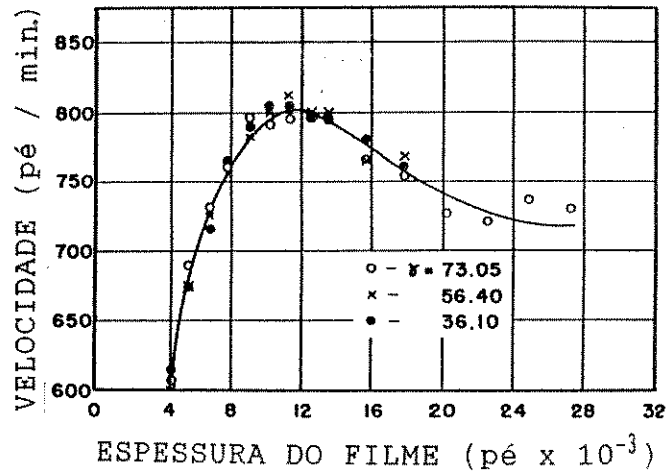


FIGURA II-7: Efeito da tensão superficial na velocidade de aparecimento de cascatas (White & Higgins, 1958).

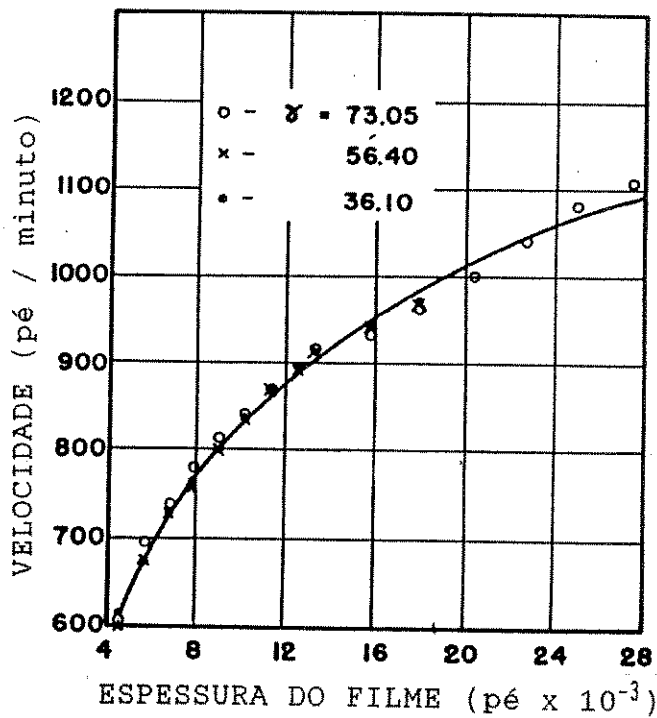


FIGURA II-8: Efeito da tensão superficial na velocidade "rimming" (White & Higgins, 1958).

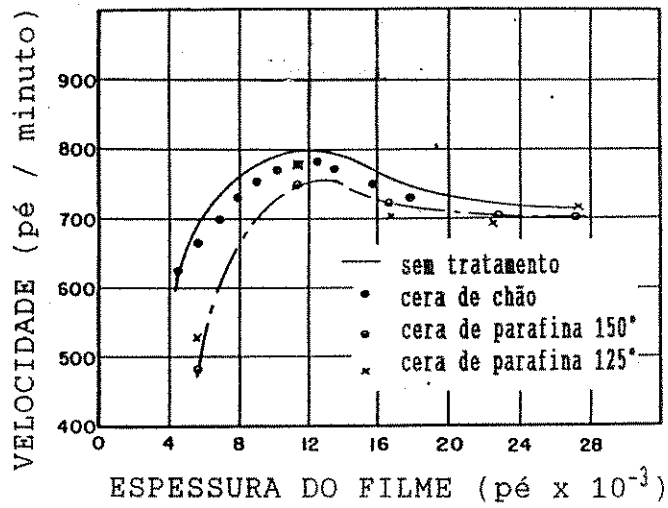


FIGURA II-9: Influência do tratamento da superfície interna do cilindro, na velocidade para formação de cascatas (White & Higgins, 1958).

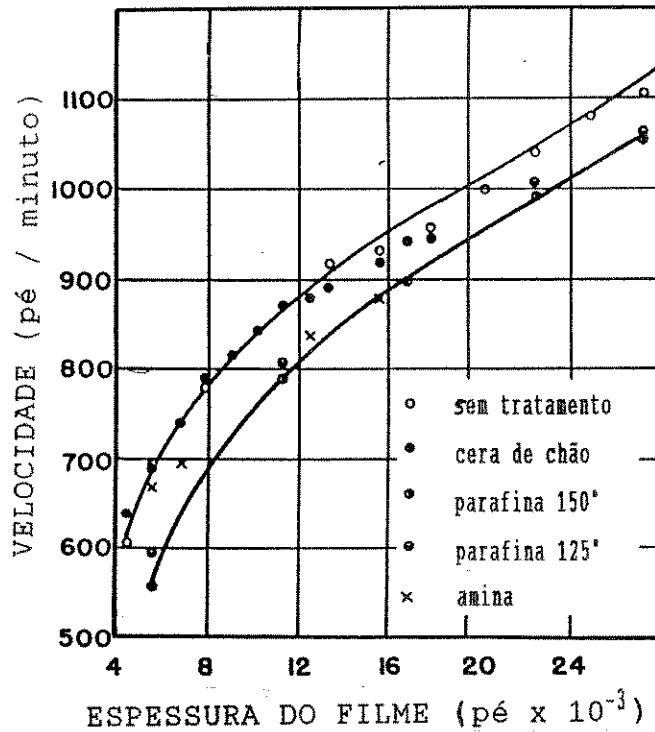


FIGURA II-10: Influência do tratamento da superfície interna do cilindro na velocidade "rimming" (White & Higgins, 1958).



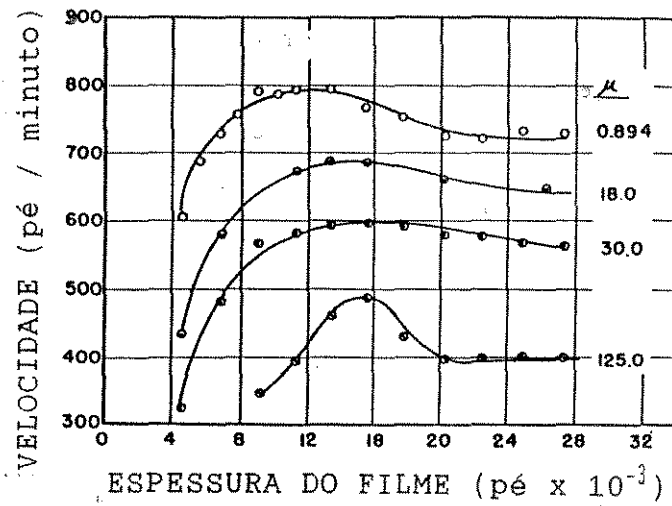


FIGURA II-11: Efeito da viscosidade na velocidade de formação de cascatas (White & Higgins, 1958).

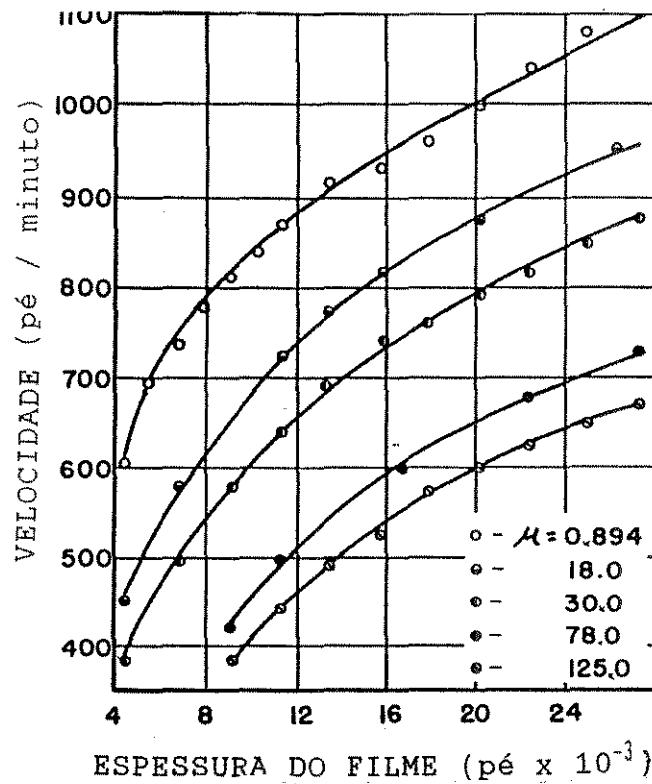


FIGURA II-12: Efeito da viscosidade na velocidade "rimming" (White & Higgins, 1958).

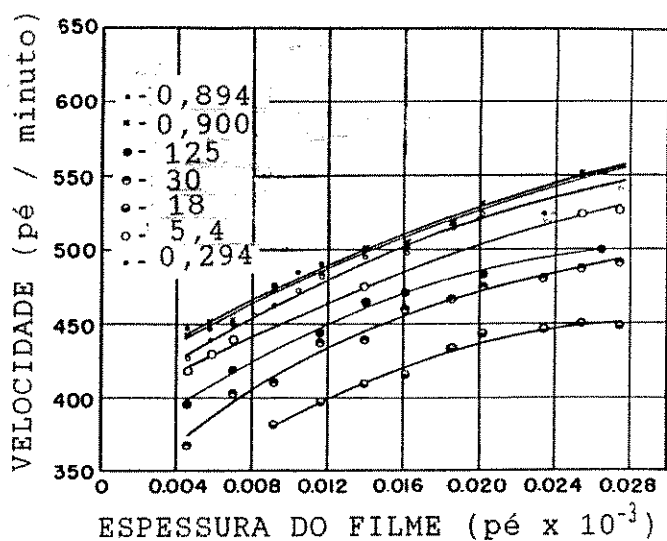


FIGURA II-13: Efeito da viscosidade na velocidade de colapso (White & Higgins, 1958).

Apesar dos extremos de molhabilidade, as alterações nas velocidades de cascata e "rimming" são mínimas. Porém, White e Higgins notaram alterações significativas no aspecto do escoamento abaixo da velocidade de escoamento "rimming" quando, o líquido não molha toda a superfície do cilindro.

A viscosidade foi a propriedade que mais influenciou no comportamento do condensado e nas velocidades de transição. Nas Figuras II-11, II-12 e II-13 esse efeito é mostrado.

Verificou-se um decréscimo nas velocidades de formação de cascatas, de "rimming flow" e de colapso com o aumento da viscosidade.

A densidade influi pouco na velocidade para a formação de cascatas, aumenta a velocidade para escoamento "rimming" e não altera a velocidade de colapso.

Considerando a velocidade de obtenção do aspecto de "rimming flow", dependendo da viscosidade e da densidade do líquido, além da quantidade de líquido presente (expressa em espessura média de filme), White e Higgins propuseram a seguinte equação adimensional:

$$\frac{v}{(e.g)^{1/2}} = c_1 \left( \frac{\mu}{\rho.e^{3/2}.g^{1/2}} \right)^{c_2} \cdot \left( \frac{a}{e} \right)^{c_3} \quad (\text{II-3-1})$$

onde:

v → velocidade tangencial do recipiente para o alcance do estado "rimming";

a → raio interno do cilindro;

e → espessura do filme;

$\mu$  → viscosidade dinâmica do líquido;

$\rho$  → densidade do líquido;

g → aceleração gravitacional;

$c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  → parâmetros de ajuste;

Submetendo os dados experimentais de que dispunham à equação (II-3-1), White e Higgins encontraram desvios de no máximo 5% dos valores calculados relativamente aos experimentais.

### II-3-3 > ESCOAMENTO "RIMMING"

Deiber e Cerro (1976) realizaram um interessante estudo dos escoamentos "rimming", indentificando "regiões" caracterizadas através dos números de Reynolds ( $\Omega.e^2/\nu$ ) e Froude ( $a.\Omega^2/g$ ), que foram chamadas de região de rotação rígida, região de camada limite oscilatória, região de filme descendente e região de soluções descontínuas. Efeitos de tensão superficial não foram incluídos.

A região de rotação rígida corresponde ao lado superior esquerdo da Figura II-14, onde são elevados os números de Froude e baixos os de Reynolds. Outras combinações destes números adimensionais conduzem às demais regiões mencionadas, que são a seguir detalhadas.

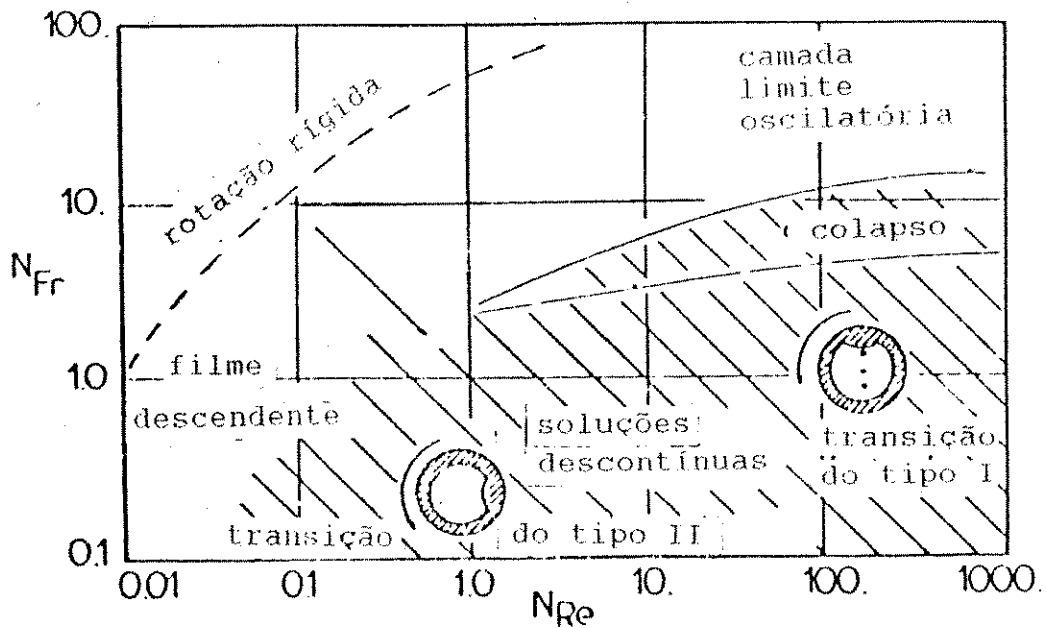


FIGURA II-14: Condições do escoamento "rimming" em função dos números de Reynolds e Froude (Deiber & Cerro, 1976).

#### REGIÃO DE CAMADA LIMITE OSCILATÓRIA.

Esta região situa-se no lado superior direito da Figura II-14 onde são altos os números de Reynolds e Froude. Nela, a velocidade tangencial da superfície livre sai de um máximo no fundo, para um mínimo no topo onde são proporcionalmente mais elevados os efeitos gravitacionais.

Em regime permanente, o fluxo em qualquer posição angular através do filme, deve ser o mesmo. Assim, onde for maior a velocidade azimutal média, menor será a espessura do filme, o que ocorre no fundo e onde for menor a velocidade, maior será a espessura do filme; para este caso no topo.

Decorre, então, que a velocidade angular da superfície livre oscila com período  $2\pi$  ao redor de um valor médio que aproxima-se da velocidade de rotação do cilindro. Isto mostra que as camadas próximas à superfície livre executam um escoamento empistonado, enquanto os efeitos viscosos ficam restritos a uma região próxima à parede do cilindro. Pode-se, portanto, dividir

o campo de escoamento em duas regiões:

1) Uma na qual os efeitos viscosos são desprezíveis e onde as variações de velocidade acontecem em virtude da ação gravitacional;

2) Outra região, próxima à parede, onde uma camada limite é formada em razão do gradiente de velocidade entre o cilindro e a corrente principal.

Sob um ponto de vista Lagrangiano, onde os eixos coordenados giram com o líquido, a superfície livre permanece em repouso enquanto o cilindro oscila. Esta situação, equivalente ao segundo problema de Stokes para o movimento oscilatório de uma superfície sólida num meio líquido em repouso, é que dá nome ao escoamento nesta região.

Se o número de Reynolds for grande mas o de Froude não, o aspecto circular das linhas de corrente se desfaz. Quando a transição for realizada a partir da região de camada limite oscilatória, para a região de soluções descontínuas, pela redução do número de Froude, tem-se o que Deiber e Cerro chamaram de transição do tipo I. Este tipo de transição ocorre quando as forças gravitacionais, agindo transversalmente à direção do escoamento, provocam o desprendimento do filme da parede do cilindro. Nesse ponto, o líquido goteja do topo para o fundo do cilindro. Outro fenômeno comumente observado é o de queda em forma de cascata (White e Higgins, 1958) onde a quebra do aspecto laminar ("rimming flow") ocorre numa posição intermediária do segundo quadrante ( $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ ), supondo-se  $\theta = 0$  rad no fundo do cilindro, orientando-se no sentido da rotação.

Um aumento do número de Froude causa a diminuição na amplitude das oscilações da camada em contato com a superfície livre, o que conduz o escoamento à região de velocidade angular rígida (rotação rígida).

#### REGIÃO DE FILME DESCENDENTE

Nessa região são baixos os números de Reynolds e de Froude, sendo as forças inerciais mínimas, quando comparadas às viscosas e gravitacionais. A posição, na qual é maior a espessura do filme (e menor a velocidade de rotação), é próxima de  $\pi/2$  rad,

diferenciando-se da região de camada limite oscilatória onde a referida posição angular é próxima de  $\theta=\pi$  (topo do cilindro).

O perfil de velocidades é tal que variações graduais ocorrem desde a parede até a superfície livre.

Aumentando-se o número de Reynolds, mantido o de Froude, pode-se chegar a região de soluções descontínuas. Na prática, esse aumento de Reynolds pode ser conseguido com o acréscimo da massa fluida. O aumento da massa torna mais espesso o filme, na região próxima a  $\theta=\pi/2$ , até um limite no qual o filme não mais se sustenta e forma uma poça. Esse tipo de transição de uma região de escoamento em lâminas cilíndricas (laminar) para escoamento "descontínuo" foi chamada por Deiber e Cerro de transição do tipo II, substancialmente distinta daquela do tipo I.

#### REGIÃO DE SOLUÇÕES DESCONTÍNUAS

A região de soluções descontínuas posta-se no lado inferior direito da Figura (II-14). Nela, como já se escreveu, o caráter circular das linhas de corrente é desfeito, havendo pelo menos uma zona de fluido com velocidade azimutal em sentido contrário ao da rotação do cilindro. O nome, soluções descontínuas, decorre da falha do modelo adotado por Deiber & Cerro para descrever o escoamento.

Dois tipos de transições de regiões laminares para a de soluções descontínuas foram detectadas. Um exemplo de transição do tipo I é mostrado na Figura II-15. Água foi o líquido no cilindro;  $R_0 = 39$  e  $F_r = 2,3$ . Nem todo o líquido consegue acompanhar o movimento do cilindro, desenvolvendo-se uma zona altamente turbulenta na região ascendente. Fora desta zona, o escoamento ocorre em lâminas quase circulares.

Seguindo-se as fases do escoamento observadas por White (White e Higgins, 1958) passa-se de uma poça a baixas rotações para escoamento laminar, quando alcançada a velocidade "rimming". Nesse ponto pode-se diminuir a velocidade até uma rotação bem abaixo da de obtenção do escoamento "rimming", e ainda se manter o aspecto laminar, para o escoamento. Há uma certa histerese. Diminuindo-se os giros até o escoamento descontínuo (Como o da Figura II-15) tem-se a chamada velocidade de colapso. Deiber e

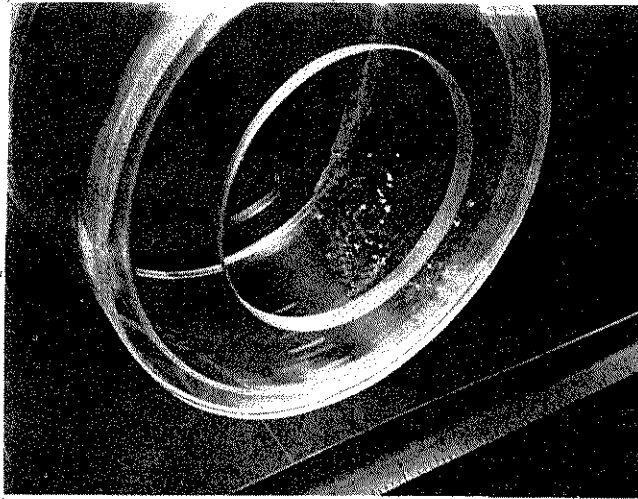


FIGURA II-15: Escoamento na região de soluções descontínuas gerado por transição do tipo I (Deiber & Cerro, 1976).

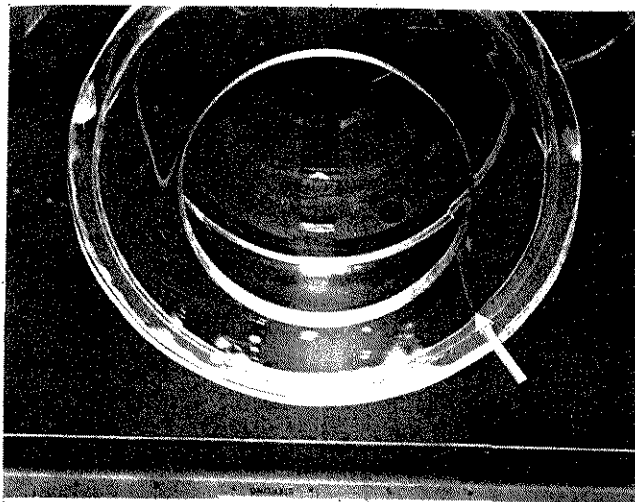


FIGURA II-16: Escoamento na região de soluções descontínuas gerado por transição do tipo II (Deiber & Cerro, 1976).

Cerro verificaram que as velocidades de colapso, determinadas experimentalmente por White e Higgins, coincidem muito bem com a definição de região descontínua.

Deiber e Cerro notaram também, que a distância entre as curvas de velocidade "rimming" e de colapso, que é significativa para altos valores de Reynolds e de Froude, na região de camada limite oscilatória, tende a diminuir quando a região de filme descendente é atingida. Isto significa que a histerese encontrada na transição do tipo I não ocorre naquela do tipo II.

Um exemplo de escoamento gerado pela transição do Tipo II é mostrado na Figura II-16. Óleo de silicone foi utilizado;  $R_e=0,59$  e  $F_r=0,34$ . Observando através do movimento de bolhas de ar, Deiber & Cerro perceberam um escoamento do tipo daquele mostrado na Figura II-17. Há uma porção fluida (líquida) que recircula enquanto o resto do fluido escoava segundo linhas circulares ao longo do cilindro. Esta situação é atingida quando a espessura no lado ascendente torna-se alta demais e, então, o filme cai para o quadrante inferior e entra em recirculação.

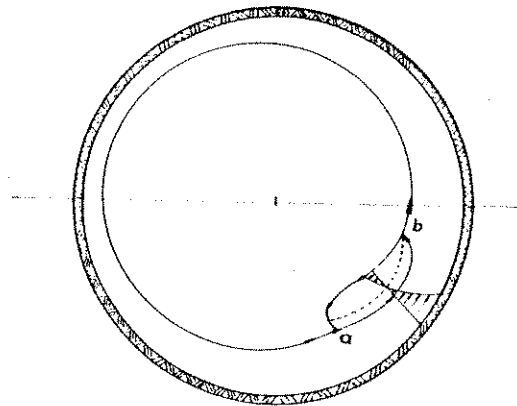


FIGURA II-17: Representação esquemática do escoamento na situação descontínua (Deiber & Cerro, 1976).



## II-3-4 > ESCOAMENTO "RIMMING" E SEU COLAPSO

### II-3-4-1> ESCOAMENTO DOMINADO POR FORÇAS VISCOSAS

Johnson (1988) usou a teoria da lubrificação, que desconsidera o termo convectivo e as tensões extras longitudinais, na equação do movimento, para chegar às seguintes equações da velocidade tangencial ( $v$ ) e do fluxo volumétrico por comprimento ( $F$ ), num sistema inercial de referência.

$$v = 1 - D \cdot n \cdot \Lambda \left\{ \left( \text{sen } \theta + D \cdot \frac{de}{d\theta} \cos \theta \right) \cdot n \cdot \left( e - \frac{1}{2} n \right) - D \cdot n \left( \frac{3}{2} e^2 - n \cdot e + \frac{n^2}{3} \right) \text{sen } \theta \right\} \quad (\text{II-3-2})$$

$$F = e - \frac{1}{2} \cdot D \cdot e^2 - \frac{1}{3} \cdot \Lambda \cdot e \left[ \text{sen } \theta + D \cdot \frac{de}{d\theta} \cdot \cos \theta - \frac{3}{2} \cdot D \cdot e \cdot \text{sen } \theta \right] \quad , \quad (\text{II-3-3})$$

onde:

$v$  → velocidade tangencial do líquido adimensionalizada por  $\Omega \cdot R$ ;

$\Omega$  → velocidade de rotação do cilindro;

$D$  → espessura característica adimensional dada por  $e_0/a$ ;

$e_0$  → espessura característica;

$E$  → número de Ekman dado por  $(\nu/(\Omega e_0^2))$ ;

$Fr$  → número de Froude dado por  $(\Omega^2 \cdot a/g)$ ;

$g$  → aceleração gravitacional;

$\Lambda$  → produto entre o número de Ekman e o de Froude;

$n$  → coordenada radial (adimensionalizada por  $e_0$ ) medida a partir da parede interna;

$$F = \int_0^{e(\theta)} v \cdot dn = cte. \quad (\text{II-3-4})$$

Se forem desprezados os termos da ordem de D:

$$F = e - \frac{1}{3}\Lambda \cdot e^3 \operatorname{sen} \theta = cte = e(0) \quad (\text{II-3-5})$$

É conveniente escolher-se  $e_0$  (espessura característica) tal que:

$$\frac{1}{3}\Lambda = 1$$

Desse modo,

$$e_0 = (3\nu\Omega/g \cdot a)^{1/2} \cdot a$$

O perfil  $e(\theta)$ , agora, é obtido por:

$$e - e^3 \cdot \operatorname{sen} \theta = e(0) \quad (\text{II-3-6})$$

que também pode ser escrita sob a forma:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{e^2} [1 - e(0)/e] = H(e^{-1}) \quad (\text{II-3-7})$$

Na Figura II-18 grafica-se  $H(e^{-1})$  contra  $e^{-1}$ . Quando o ângulo  $\theta$  varia de 0 a  $2\pi$ , a função  $H(e^{-1}) = \operatorname{sen} \theta$  está entre -1 e +1. Então, para que se tenha uma solução real e positiva para  $e(\theta)$  em todo o  $\theta$  entre 0 e  $2\pi$ , implicando num filme contínuo,  $H(e^{-1})$  deverá estender-se de -1 a +1.

Como a função  $H(e^{-1})$  tem um valor máximo [ $H_{\max} = 4/(27 e^2(0))$ ] em  $e = 3 e(0)/2$  um filme contínuo só será possível se  $H_{\max} \geq 1$ , ou  $e(0) \leq 2/3^{1,5}$ . Se isto não ocorrer, não haverá uma solução real positiva para  $e(\theta)$ , nas proximidades de  $\theta = \pi/2$ . Quando  $e(0) \leq 2/3^{1,5}$  ( $H_{\max} > 1$ ) vê-se da Figura (II-18) que  $e(\theta)$  tem duas soluções reais e positivas para  $0 \leq \theta \leq \pi$  ( $0 \leq H \leq 1$ ) e apenas uma solução real positiva para  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$  ( $-1 \leq H \leq 0$ ). Por consequência, a equação (II-3-6) prediz duas configurações

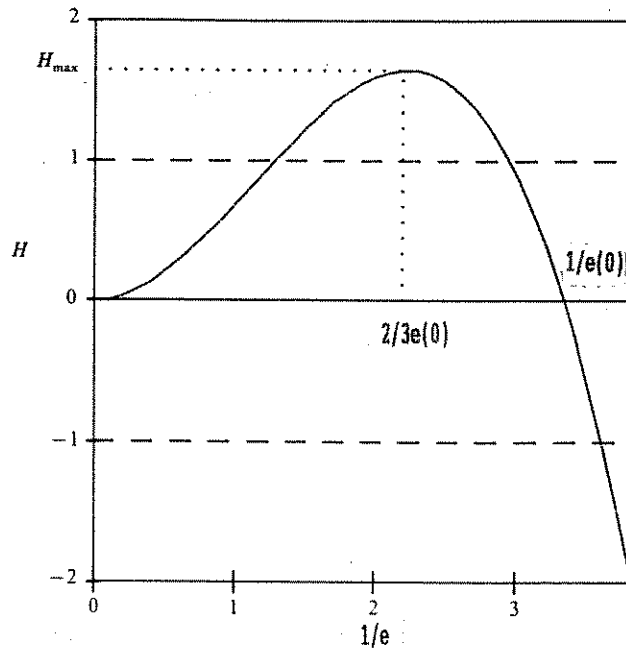


FIGURA II-18: Aspecto de uma curva geral relacionando a função  $H = \text{sen}\theta$  com o inverso da espessura ( $1/e$ ) (Johnson, 1988).

distintas para filme contínuo, em regime permanente, no lado em que o fluido (líquido) ascende ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).

A primeira das configurações consiste num filme com variação gradual na espessura e pode ser entendida, seguindo-se o sentido indicado pelas setas na Figura II-19. Partindo-se do ponto "a" onde a curva  $H(e^{-1})$  cruza o eixo  $1/e$  em  $\theta=0$  ( $H=0$ ) e  $e=e(0)$ , caminhando-se em direção ao ponto "b",  $\theta$  aumenta e o filme ganha espessura ( $1/e$  diminui), atingindo um valor máximo no ponto "b", onde  $\theta=\pi/2$  ( $H=1$ ). Do ponto "b" para "c", o filme afina-se enquanto  $\theta$  aumenta e em "c" tem-se  $\theta=3\pi/2$  ( $H=-1$ ) e  $e(\theta)$  é mínimo. Do ponto "c" ao ponto "a" ( $\theta = 3\pi/2$  para  $\theta = 2\pi$ ) o filme retoma sua espessura original  $e(0)$ . Maiores  $e(0)$  produzem maiores variações em  $e(\theta)$  devido a maior influência gravitacional. O filme mais espesso correspondente a  $e(0)_{\text{max}} = 2/3^{1,5} \approx 0,385$ .

A partir da configuração de filme contínuo com variação gradual na espessura, se se diminuir a velocidade de rotação do cilindro, ou se mais líquido for adicionado, chega-se a uma situação limite na qual  $e(0) = e(0)_{\text{max}}$  e um filme com salto repentino de espessura é obtido.

A outra configuração de filme contínuo prevista pela equação (II-3-6) corresponde a situação limite, descrita no parágrafo acima. Suas características podem ser entendidas, seguindo-se o caminho indicado pelas setas, na Figura II-20. Há um aumento gradual de espessura desde  $\theta=0$  (em  $a$ ) até um salto repentino em " $b$ ". Depois do salto de espessura, o filme afina-se gradativamente (de  $c$  para  $d'$ ) até  $\theta = 3\pi/2$ , a partir de onde volta a espessar-se, retornando ao valor inicial de espessura em  $\theta=2\pi$ .

É oportuno relacionar os escoamentos com saltos abruptos na espessura do filme com aqueles da região de soluções descontínuas detectada por Deiber e Cerro (1976). A espessa região próxima a  $\theta=\pi/2$  é uma zona de recirculação abaixo da qual passa líquido aderido às paredes do cilindro.

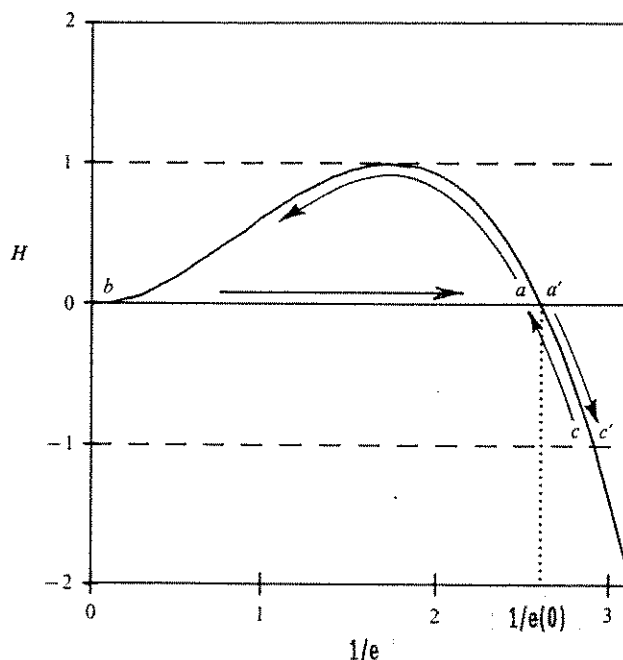


FIGURA II-19: Esquema representativo de uma configuração com filme variando gradualmente em espessura (Johnson, 1988).

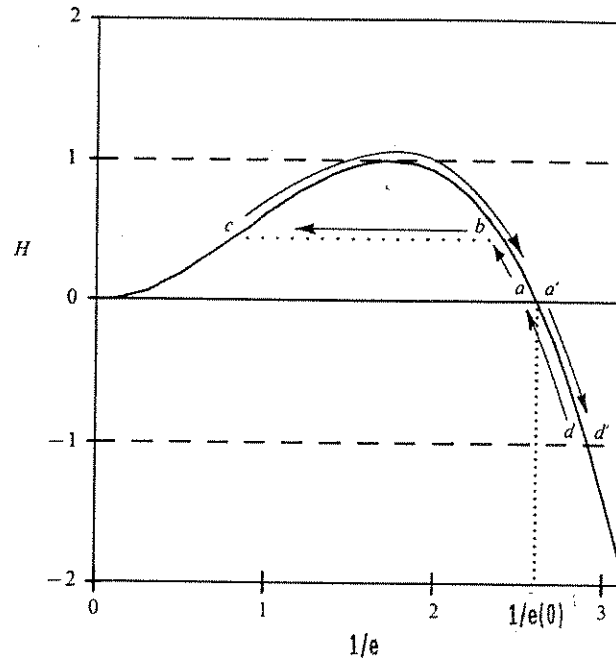


FIGURA II-20: Esquema de um filme com variação abrupta na espessura (Johnson, 1988).

As zonas de recirculação podem ser identificadas através da equação (II-3-2), pela presença de pontos de estagnação na superfície  $e(\theta)$ . Após o descarte de termos da ordem de "D" e fazer-se:

$$\frac{1}{3} \Lambda = 1,$$

tem-se:

$$v(n=e(\theta)) = 0 = 1 - \frac{3}{2} \text{sen } \theta \cdot e^2 \quad (\text{II-3-8})$$

A equação anterior só é satisfeita para  $0 \leq \theta \leq \pi$  e os pontos de estagnação,  $\theta = \theta_s$ , são dados por:

$$e(\theta_s) \cdot \theta_s = 2/3 \quad (\text{II-3-9})$$

Combinando-se as equações (II-3-6) e (II-3-9) vem que:

$$e(\theta_s) = 3 e(0) \quad (\text{II-3-10})$$

e a posição angular do ponto de estagnação é dada por:

$$\text{sen } \theta_s = \frac{2}{27 \cdot e^2(0)} \quad (\text{II-3-11})$$

Quando

$$e(0) > \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{3}},$$

a equação (II-3-11) prevê duas zonas de recirculação simétricas à  $\pi/2$ .

Nesta altura, alguns esclarecimentos fazem-se necessários:

- O que se chama, aqui, de saltos de transições abruptas não ocorre de forma descontínua, como se apresenta na Figura II-20. Urge que se lembre que o termo "de/d $\theta$ " foi descartado na equação (II-3-2), para se chegar à (II-3-7) e, certamente, este termo é considerável, nas transições (ver Johnson, 1988).

- A equação (II-3-11) é capaz de identificar (ou localizar) possíveis regiões de máximo na espessura, onde o líquido tende a recircular. Quantas serão as zonas de recirculação e se ainda restará líquido aderindo a toda a superfície do cilindro, são questões ainda não respondidas.

Segundo Johnson resta muito o que se aprender sobre a estabilidade dos escoamentos "rimming". Na próxima secção vai-se apresentar os trabalhos de Phillips (1959), que são, talvez, os primeiros na área, não mantendo estes, nenhuma relação de continuidade com os de Johnson (1988).

## II-3-4-2> ESCOAMENTO INVÍSCIDO

O escoamento de um líquido, na região de rotação rígida, (Secção II-3-3) pode instabilizar-se, ou pela diminuição na velocidade angular do cilindro, ou pelo acréscimo de líquido.

As instabilidades, aqui tratadas, fazem-se sentir por meio de movimentos ondulatórios na superfície livre que se forma no interior do cilindro, as quais Phillips (1959) denominou ondas centrífugas.

A existência de um campo gravitacional, atuando perpendicularmente ao eixo e a presença de uma superfície livre impõem uma perturbação estacionária (independente do tempo) à rotação rígida, o que ocasiona, para certas combinações de velocidade angular, espessura do filme e comprimento do cilindro, uma variedade de formas de ondas, na interface líquido-ar.

Procedendo-se a aumentos na espessura do filme, por acréscimo de líquido, observa-se a aparição e o desaparecimento dos vários modos ondulatórios, até que numa dada espessura crítica, o escoamento torna-se instável e colapsa rapidamente.

A seguir apresenta-se um equacionamento que descreve os vários quadros que podem ocorrer. Convém salientar que alguns desses fenômenos foram, primeiramente observados L. Schoof e R. Drake (Phillips - 1959).

### EQUACIONAMENTO

Considera-se um cilindro de raio "a" (Figura II-21), girando com velocidade angular,  $\Omega$ , suficientemente elevada para garantir um estado rígido de rotação no filme.

A equação do movimento, a partir de uma referência inercial, para um líquido invíscido tem as seguintes componentes em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} + g \cdot \cos \theta \quad (\text{II-3-12.a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u \cdot v}{r} = -\frac{1}{\rho \cdot r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} + g \cdot \text{sen } \theta \quad (\text{II-3-12.b})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (\text{II-3-12.c})$$

As equações (II-3-12) compõem o problema juntamente com a da continuidade:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-3-13})$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as componentes do vetor velocidade nas direções  $r$ ,  $\theta$  e  $z$ , respectivamente.

Na ausência de campo gravitacional, o escoamento seria em rotação rígida com:

$$u = 0 \quad ; \quad v = \Omega \cdot r \quad ; \quad w = 0$$

$$P = \frac{1}{2} \rho \cdot \Omega^2 \cdot (r^2 - c^2 \cdot a^2) \quad ,$$

sendo " $c \cdot a$ " o raio da superfície livre.

Quando sob ação gravitacional, em adição à perturbação estacionária, sobre o estado de rotação rígida, podem haver perturbações oscilatórias. Assim, fazendo-se  $\eta = r/a$ , escreve-se:

$$u = \Omega a (u_1 + u_2) \quad (\text{II-3-14.a})$$

$$v = \Omega a (\eta + v_1 + v_2) \quad (\text{II-3-14.b})$$

$$w = \Omega a (w_2) \quad (\text{II-3-14.c})$$



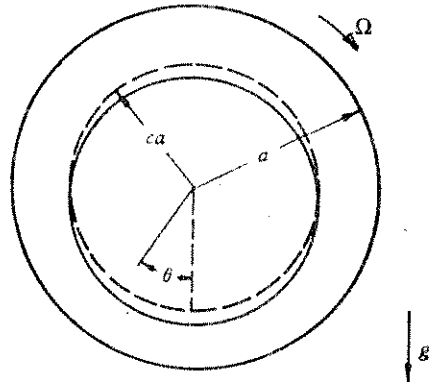


FIGURA II-21: O escoamento "rimming".

onde  $u_1$  e  $v_1$  representam perturbações estacionárias, e  $u_2$ ,  $v_2$  e  $w_2$  perturbações oscilantes, com média nula no tempo.

A equação do perfil de pressão é modificada por uma contribuição hidrostática e pelo deslocamento da superfície livre, ao longo da qual a pressão é constante. Define-se, desta forma,  $p_1$  e  $p_2$  por:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Omega^2 a^2 \{ (\eta^2 - c^2) + p_1 + p_2 \} + \rho \cdot g \cdot a \cdot \eta \cdot \cos \theta \quad (\text{II-3-15})$$

sendo  $p_1$  independente do tempo e  $p_2$  com média temporal nula.

Se as perturbações  $u_1$ ,  $u_2, \dots, w_2$  forem pequenas quando comparadas a  $\eta$ , seus produtos ou quadráticos podem ser desprezados nas equações II-3-12, para se ter:

$$\frac{\partial u_2}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \theta} (u_1 + u_2) - 2(v_1 + v_2) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (p_1 + p_2) \quad (\text{II-3-16.a})$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \tau} + 2(u_1 + u_2) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v_1 + v_2) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial \theta} (p_1 + p_2) \quad (\text{II-3-16.b})$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau} + \frac{\partial w_2}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (p_1 + p_2) \quad (\text{II-3-16.c})$$

$$\frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \{ \eta (u_1 + u_2) \} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (v_1 + v_2) + \frac{\partial w_2}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{II-3-17})$$

sendo que:  $\tau = \Omega t$  e  $\xi = z/a$ .

As equações que descrevem as perturbações estacionárias sobre o escoamento rígido são obtidas tomando-se a média temporal das equações (II-3-16) e (II-3-17).

$$\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - 2 v_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \quad (\text{II-3-18.a})$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + 2 u_1 = -\frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \quad (\text{II-3-18.b})$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{II-3-18.c})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \cdot u_1) + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{II-3-19})$$

As equações que descrevem a movimentação ondulatória são encontradas fazendo-se a subtração entre as "gerais" (II-3-16) e as estacionárias (II-3-18):

$$\frac{\partial u_2}{\partial \tau} + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - 2 \cdot v_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial p_2}{\partial \eta} \quad (\text{II-3-20.a})$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \tau} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} - 2 \cdot u_2 = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p_2}{\partial \theta} \quad (\text{II-3-20.b})$$

$$\frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \cdot u_2) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial w_2}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{II-3-21})$$

As condições de contorno para as equações (II-3-18) a (II-3-21) são:

1)  $u_1 = u_2 = 0$  em  $\eta = 1$  (na parede)

2)  $\eta = c + \delta_1(\theta) + \delta_2(\theta, \xi, \tau)$  (na superfície livre, onde a pressão é constante).

$\delta_1$  e  $\delta_2$  são respectivamente os deslocamentos estacionário e oscilatório, pequenos em relação a "c".

Substituindo-se a condição de contorno (2) em (II-3-15) tem-se:

$$2 \cdot c \cdot \frac{g}{\Omega^2 \cdot a} \cos \theta + 2 \cdot c (\delta_1 + \delta_2) + p_1 + p_2 = 0 \quad , \quad (\text{II-3-22})$$

onde se considerou nula a pressão, na interface, quando  $\eta = c$ .

A equação (II-3-22) pode ser subdividida em termos estacionários:

$$p_1 + 2c \cdot \delta_1 = -2c \frac{g}{\Omega^2 \cdot a} \cos \theta \quad (\text{II-3-23})$$

e oscilatórios:

$$p_2 + 2c \cdot \delta_2 = 0 \quad (\text{II-3-14})$$

Por fim, tem-se a condição de contorno cinemática:

$$3) u = \frac{D\delta_i}{Dt} \text{ em } \eta = c ;$$

e sendo

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Omega r}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad ,$$

tem-se que:

$$u_1 = \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta}$$

$$u_2 = \frac{\partial \delta_2}{\partial \tau} + \frac{2 \cdot \delta_2}{\partial \theta}, \text{ em } \eta = c.$$

e

### PERTURBAÇÃO ESTACIONÁRIA

As equações (II-3-18) a (II-3-19) descrevem a perturbação estacionária sobre o movimento de rotação rígida, seguidas das condições de contorno:

$$1) u_1 = 0 \text{ em } \eta = 1$$

$$2) p_1 + 2c \delta_1 = -2c \frac{g}{\Omega^2 a} \cos \theta \text{ em } \eta = c$$

$$3) u_1 = \frac{\partial \delta_1}{\partial \theta} \text{ em } \eta = c$$

Phillips sugere perturbações do tipo:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \Delta \cos \theta \\ p_1 &= P(\eta) \cos \theta \\ u_1 &= \chi(\eta) \operatorname{sen} \theta \\ v_1 &= \phi(\eta) \cos \theta \end{aligned} \tag{II-3-25}$$

Substituindo-se as expressões (II-3-25) nas equações para a perturbação estacionária, tem-se que:

$$\chi(\eta) - 2\phi(\eta) = -\frac{1}{2} P'(\eta)$$

$$-\phi(\eta) + 2\chi(\eta) = \frac{1}{2\eta} P(\eta)$$

(II-3-26)

$$\chi(\eta) + \eta\chi'(\eta) - \phi(\eta) = 0$$

Com as condições de contorno:

1)  $\chi(\eta) = 0$  para  $\eta = 1$

2)  $P(\eta) + 2 \cdot c \cdot \Delta = -2c \cdot \frac{q}{\Omega^2 \cdot a}$  em  $\eta=c$

3)  $\chi(\eta) + \Delta = 0$  para  $\eta = 0$

Isolando-se  $\phi(\eta)$  da terceira equação do grupo (II-3-26), e substituindo-se nas outras duas:

$$-\chi(\eta) - 2\eta \cdot \chi'(\eta) = \frac{1}{2} P'(\eta)$$

$$\eta\chi(\eta) + \eta^2\chi'(\eta) = \frac{1}{2} P(\eta)$$

Eliminado-se  $P(\eta)$ :

$$\eta^2 - \chi''(\eta) + 3\eta\chi(\eta) = 0$$

A solução para a função  $\chi(\eta)$  é do tipo:

$$\chi(\eta) = \frac{A}{\eta^2} + B$$

Da condição de contorno  $\chi(\eta)=0$  em  $\eta=1$ :

Assim:

$$0 = \frac{A}{1^2} + B \Rightarrow A = -B$$

$$\chi(\eta) = A \left( \frac{1}{\eta^2} - 1 \right) \quad (\text{II-3-27})$$

$$\phi(\eta) = -A \left( \frac{1}{\eta^2} + 1 \right) \quad (\text{II-3-28})$$

$$P(\eta) = 2 \cdot A \cdot \eta \left( \frac{3}{\eta^2} - 1 \right) \quad (\text{II-3-29})$$

As condições de contorno em  $\eta = c$  possibilitam o cálculo da constante "A" e do deslocamento da superfície livre,  $\Delta$ :

$$A = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{g}{\Omega^2 \cdot a}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} (1 - c^2) \frac{g}{\Omega^2 \cdot a}$$

A perturbação gravitacional estacionária pode ser expressa pelo conjunto de equações:

$$u_1 = -\frac{c^2}{2} \cdot \frac{g}{\Omega^2 \cdot a} \left( \frac{1}{\eta^2} - 1 \right) \text{sen } \theta$$

$$v_1 = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{g}{\Omega^2 \cdot a} \cdot \left( \frac{1}{\eta^2} + 1 \right) \text{cos } \theta$$

$$p_1 = -c^2 \cdot \frac{g}{\Omega^2 \cdot a} \cdot \eta \left( \frac{3}{\eta^2} - 1 \right) \text{cos } \theta \quad (\text{II-3-30})$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \frac{g}{\Omega^2 \cdot a} (1 - c^2) \text{cos } \theta$$

A vorticidade dessa perturbação é nula, já que o escoamento

principal tem vorticidade constante.

Uma propriedade destas soluções, curiosa à primeira vista, é que o cilindro de ar, central, situa-se abaixo do eixo de rotação. Isto porque ao sair de  $\theta=0$  ("Fundo"), o líquido adquire energia potencial às custas da cinética, até  $\theta=\pi$  ("Topo"). Em consequência, a velocidade tangencial será menor em  $\theta=\pi$  e o filme mais espesso, pela continuidade.

O leitor atento deve se lembrar que na Secção (II-3-3), já se falou sobre estas características do filme, na região de camada limite oscilatória, onde são altos os números de Reynolds e Froude!

As soluções (II-3-30) mostram que para  $\eta=1$  (na parede do cilindro), a perturbação na velocidade tangencial é  $v_1=c^2.g.\cos\theta/\Omega^2.a$ . Se a viscosidade do líquido for  $\nu$ , forma-se uma camada limite de espessura  $(2\nu/\Omega)^{1/2}$ , já que  $\Omega$  é a frequência desta perturbação, num ponto fixo do cilindro em rotação (Phillips, 1959).

Para que as soluções propostas sejam válidas é necessário que:

$$(2\nu/\Omega)^{1/2} < a(1-c) \quad (\text{II-3-31})$$

isto é,

$$\frac{\Omega a^2(1-c)^2}{\nu} > 2 \quad (\text{II-3-32})$$

ou que o número de Reynolds para o filme seja elevado. Se  $(1-c)$  for muito baixo, o número de Reynolds também será, e o líquido se restringirá a uma fina película junto à parede, onde os efeitos viscosos invalidam as considerações feitas.

No plano  $\theta=\pi$  os gradientes de pressão gravitacionais e centrífugo têm sinais opostos, e a condição de estabilidade é que o gradiente total seja positivo. Na ausência de perturbações oscilatórias, tem-se de (II-3-15) e de (II-3-30) que:

A condição de estabilidade exige que:

$$\begin{aligned}
P_{\theta=\pi} &= \frac{1}{2} \rho \Omega^2 a^2 \left\{ (\eta^2 - c^2) + \frac{g}{\Omega^2 \cdot a} c^2 \left( \frac{3}{\eta} - \eta \right) \right\} - \rho g a \eta \\
&= \frac{1}{2} \rho \Omega^2 a^2 \left\{ (\eta^2 - c^2) + \frac{g}{\Omega^2 \cdot a} \left[ \frac{3c^2}{\eta} - (2 + c^2) \eta \right] \right\} \\
\left( \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_{\theta=\pi} &= \frac{1}{2} \rho \Omega^2 a^2 \left\{ 2\eta - \frac{g}{\Omega^2 \cdot a} \left[ \frac{3c^2}{\eta^2} + (2 + c^2) \right] \right\} > 0 \quad (\text{II-3-33})
\end{aligned}$$

para  $c + \delta \leq \eta \leq 1$ . Esta condição é crítica quando:

$$\eta = c + \delta_1 = c - \frac{1}{2} \frac{g}{\Omega^2 \cdot a} (1 - c^2)$$

Fazendo-se  $\eta = c + \delta_1$  na equação (II-3-33), chega-se a seguinte expressão, aproximada:

$$\frac{\Omega^2 \cdot a}{g} > \frac{3}{c} \quad , \quad (\text{II-3-34})$$

que diz que o número de Froude deve ser superior a  $3/c$  para que o escoamento seja estável.

Não se pode esquecer, no entanto, das perturbações oscilatórias. Se suas amplitudes forem elevadas, o escoamento pode se instabilizar, momentaneamente, e colapsar, mesmo se a condição (II-3-34) for obedecida. Posto isto, vê-se que há uma certa região, na qual duas configurações distintas para o líquido são possíveis: numa delas ele está aderido às paredes (escoamento "rimming") e na outra, permanece no fundo do cilindro e move-se num vórtice fechado, com uma superfície livre quase plana.

#### O MOVIMENTO EM ONDAS

Phillips resolve as equações (II-3-20) a (II-3-21) para as perturbações oscilatórias e prevê formas de ondas iguais às que ele observou com seu aparato experimental.

Dos vários modos possíveis de oscilações, um dos mais interessantes ocorre quando a superfície livre é estacionária com relação a um observador, num sistema fixo na Terra, apresentando-



se como um cilindro flexionado senoidalmente, no interior do cilindro em rotação. Esses modos são excitados apenas quando o comprimento de onda for um submúltiplo do comprimento do cilindro.

Outro modo possível move-se numa direção circunferencial, estando as cristas paralelas ao eixo do cilindro.

## CAPÍTULO III - MATERIAIS E MÉTODOS

### III-1> EQUIPAMENTO GERADOR DE ROTAÇÃO

O equipamento básico constituiu-se em uma bancada construída para permitir a rotação de cilindros sobre dois roletes horizontais, conforme a Figura III-1.

Os roletes torneados de tarugo de P.V.C (40 cm de comprimento e 10 cm de diâmetro) foram perfurados de maneira a ajustarem eixos maciços de aço com diâmetros de 1 polegada (2,54 cm) e comprimento de 54 cm. Os eixos são fixos em mancais presos a uma estrutura cúbica soldada, de cantoneiras de aço (dimensão de 50 cm x 43,5 cm), a qual também serve de suporte a um motor Asten (c.c) de 1 c.v. de potência.

Ao eixo do motor prendeu-se uma polia ligada por correia à outra, usinada num dos roletes. Esse rolete conta com outra polia encarregada de transmitir rotação ao segundo rolete, por meio de uma outra correia que os interliga.

A alteração na rotação dos roletes é controlada por um variador ASTEN que permite uma velocidade máxima, em torno de 1100 r.p.m.

### III-2> CILINDROS

Os experimentos foram conduzidos em dois cilindros acrílicos de modo a se poder observar e fotografar os escoamentos nos seus interiores (Figura III-2).

As faces planas do cilindro são discos também acrílicos de diâmetro maior que o mesmo. Numa delas foi feito um ressalto circular concêntrico que se ajustou posteriormente no interior do cilindro e se fixou com clorofórmio.

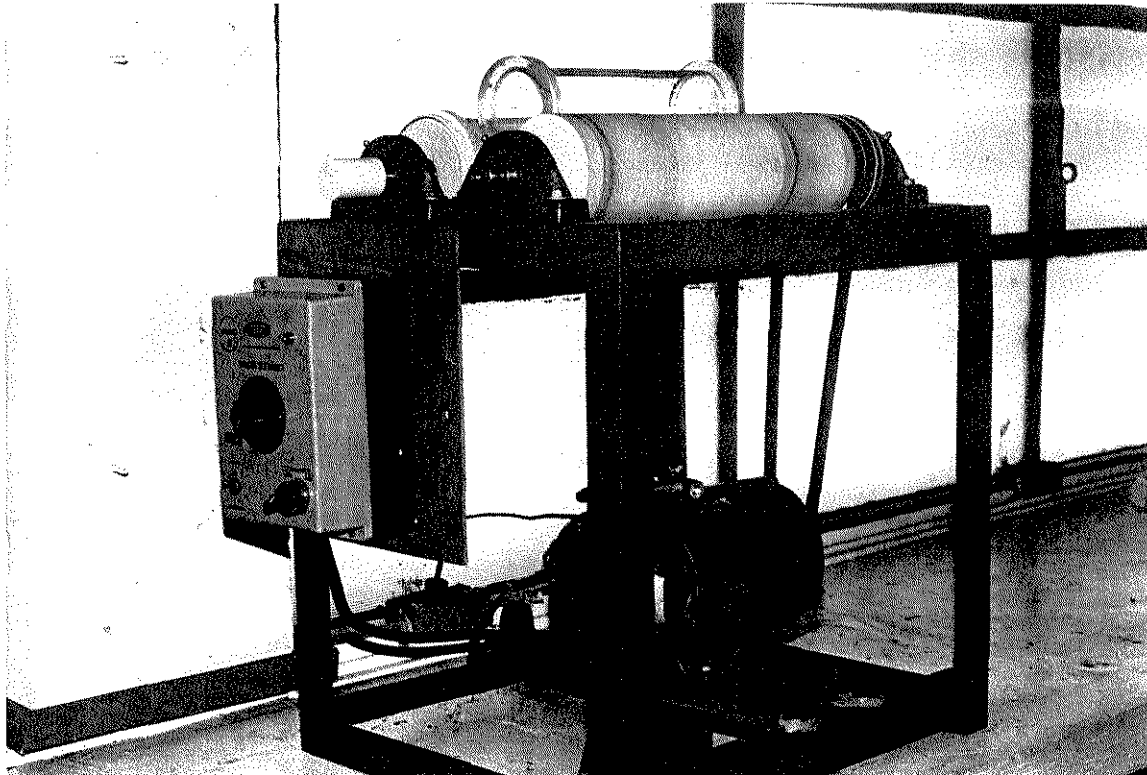


FIGURA III-1: Equipamento sobre o qual giram os cilindros.

Na outra extremidade, dos cilindros, foi feita uma flange com quatro orifícios, pelos quais se pode fixar uma tampa que permite a introdução e retirada de líquido.

O maior dos cilindros (cilindro-1) tem diâmetro interno de 6,30 cm e volume, medido com água, de 713,81 cm<sup>3</sup>, o que lhe dá um comprimento útil de 22,90 cm. O menor dos cilindros (cilindro-2) tem o mesmo diâmetro interno (6,30) e volume de 183,29 cm<sup>3</sup>, conferindo-lhe um comprimento útil de 5,88 cm.

O anel da flange, a tampa e o disco da base têm diâmetros iguais a 9,05 cm, nos dois cilindros. São apenas essas partes do cilindro, que entram em contato com os roletes.

### III-3> LÍQUIDOS DE TRABALHO

A Tabela III-1 mostra os líquidos utilizados nos ensaios e suas propriedades físicas relevantes a 25°C, temperatura do ambiente no qual se realizou os ensaios.

Para a melhor visualização de alguns quadros de escoamento, utilizou-se uma solução aquosa de carboxi-metil-celulose colorida

com azul de metileno.

Tabela III-1. Propriedades físicas dos líquidos de trabalho.

Líquido	Densidade (g/cm <sup>3</sup> )	viscosidade (cStks)
água	1,00	1
Dow corning 200 (1)	0,93	10
Dow corning 200 (2)	0,96	50
Dow corning 200 (3)	0,96	100

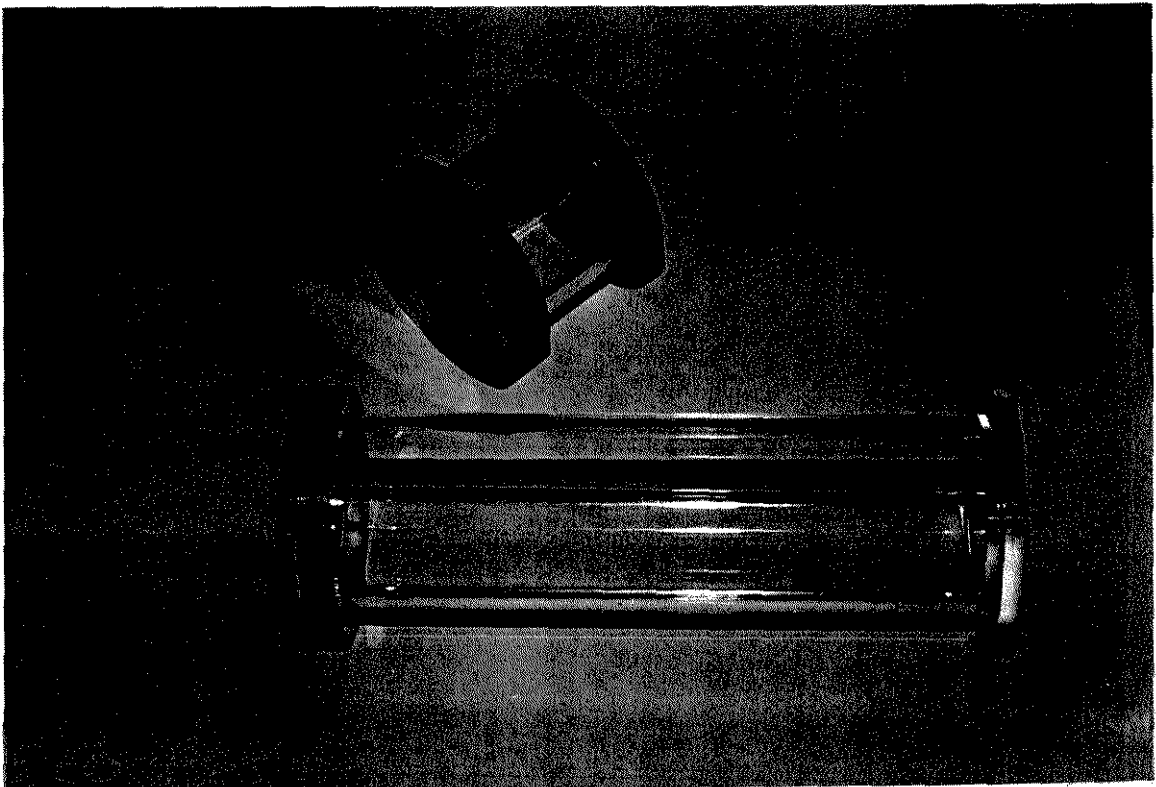


FIGURA III-2: Cilindros utilizados nos ensaios.

### III- 4> MEDIDA DE ROTAÇÃO

A velocidade angular dos roletes é medida por meio de um tacômetro digital (MICROTEST) acoplado ao eixo de um deles. A rotação do cilindro é obtida multiplicando-se o valor lido no tacômetro, em r.p.m, pela relação entre os diâmetros do rolete e dos discos (10 cm/9,05 cm) presos às extremidades do cilindro.

### III-5> REGISTRO FOTOGRÁFICO

Fotografou-se com uma câmera ASAHI PENTAX com objetivas refllex de 28 mm, 55 mm e 200 mm, utilizando-se filme Kodak colorido, 100 ASA.

O "flash" foi posicionado, na maior parte dos ensaios, por baixo dos roletes, iluminando os cilindros através da fresta entre eles e formando um ângulo de mais ou menos 90° com a câmera. O intuito é o de minimizar os reflexos das superfícies acrílicas e, ao mesmo tempo, iluminar igualmente, todo o comprimento do cilindro.

### III-6-> METODOLOGIA

#### III-6-1> CILINDROS PARCIALMENTE CHEIOS

Foram realizados experimentos com volumes percentuais líquidos de 12,5, 25,0, 50,0, 75,0, 80,0, 85,0, 90,0 e 95,0%, para os três óleos de silicone, sendo que para a água também se fez experimentos com cargas de 5%.

Para um dado volume líquido, partia-se do repouso ( $\Omega=0$ ) e aumentava-se a rotação lentamente e com pausas até que, pelo

menos, uma cascata cortando toda a secção transversal (vazia) do cilindro fosse observada. Esta rotação era registrada como a velocidade de formação de cascatas.

Procedia-se a subseqüentes aumentos nos giros (lentamente e com pausas), até a observação de uma única bolha cilíndrica, no eixo de rotação. Essa velocidade era tomada como a velocidade de obtenção do escoamento "rimming". A partir desse estado, a rotação era diminuída (sem grandes precauções) até a visualização de movimentos ondulatórios na interface, que poderiam levar ao colapso. A rotação era então diminuída lentamente e com pausas, até que se observasse a formação de poça com ou sem cascatas. Esta rotação era marcada como a velocidade de colapso.

Percebia-se que mesmo mantendo-se fixo o variador de velocidades, ocorriam alterações na velocidade de rotação lida no tacômetro. Esse efeito pode ser atribuído tanto à inércia do equipamento, quanto à oscilações na corrente elétrica. Estas oscilações, em geral, não excediam 3 r.p.m em torno de um valor médio, na maioria dos ensaios. Porém, foram possíveis ensaios com valores de rotações que se alteravam de maneira desprezível.

Quando na presença de oscilações, assumia-se para as velocidades de cascatas e escoamento "rimming", o menor valor lido e para o colapso, o maior valor.

### III-6-2> CILINDROS COMPLETAMENTE CHEIOS

O único líquido utilizado foi água destilada, acrescida de cloreto de sódio para ajustar sua densidade à das partículas de poliestireno, quando usadas como traçador. Em sendo, o traçador, pó de alumínio, nenhum produto foi adicionado à água.

Para a observação de correntes secundárias, durante o "spin-up", partiu-se de velocidade angular nula e acelerou-se o cilindro, num impulso.

Para a visualização das instabilidades centrífugas desacelerou-se, também instantaneamente, o cilindro, após submetê-lo a uma dada rotação.

As inserções de bolhas de ar foram feitas através de um orifício, com 1mm de diâmetro, no centro de cada uma das bases do cilindro-1.

## CAPÍTULO IV - RESULTADOS E DISCUSSÃO

### IV-1> INTRODUÇÃO

Na Secção IV-2 são abordadas as características visuais do escoamento em cilindros cheios e parcialmente cheios. Na secção IV-3 essas características são associadas à rotação, à geometria e às propriedades físicas do líquido, quando o cilindro está com carga parcial.

As possíveis interferências da hidrodinâmica no coeficiente de troca de calor, durante o tratamento térmico de alimentos fluidos, é matéria da Secção IV-4.

A Secção IV-5 procura associar fenômenos transientes que ocorrem nos cilindros cheios aos escoamentos em cilindros parcialmente cheios.

### IV-2> ASPECTOS QUALITATIVOS DO ESCOAMENTO

#### IV-2-a> CILINDROS PARCIALMENTE CHEIOS

Quando um cilindro, parcialmente cheio, é feito girar axialmente, na posição horizontal, é percebida uma série de quadros, intercalando as três fases descritas por White como de escoamento em poça, cascadeamento e escoamento "rimming" (Secção II-3-2). Tanto as fases quanto os quadros, que as intercalam, têm lugar em função de propriedades físicas do fluido, das dimensões do cilindro e da percentagem volumétrica de líquido.

A identificação das referidas fases e de fenômenos ocorrentes, em cada uma delas, é objetivo central desse trabalho, e é questão à qual se passa a seguir.

#### FASE DE ESCOAMENTO EM POÇA

A poça consiste numa porção líquida, que se mantém no fundo



do cilindro, abaixo da qual passa líquido aderido à parede cilíndrica (Figura IV-1).

Sob baixas rotações, o que se verifica é a movimentação do líquido da poça, em vórtices quase planos, nas proximidades da interface líquido-ar. Com o aumento da rotação, no entanto, o escoamento apresenta-se em diferenciadas formas.

Sob determinadas condições, melhor especificadas adiante, verifica-se a deformação da interface ar-líquido da poça, segundo superfícies, que em contato com a parede cilíndrica, apresentam-se como linhas senoidais. É o que se observa na Figura IV-2.

A transição da fase de escoamento em poça à de escoamento em cascatas ocorre após a formação de sulcos, no filme líquido aderido à superfície cilíndrica, na posição superior do cilindro (por volta de  $\theta=\pi$ ). Estes sulcos, apresentados na Figura IV-3, podem ser entendidos como "projetos de cascatas", já que é a partir deles que estas são formadas em rotações maiores. Nos sulcos é que o filme líquido ascendido pelo movimento de rotação, está na eminência de queda.

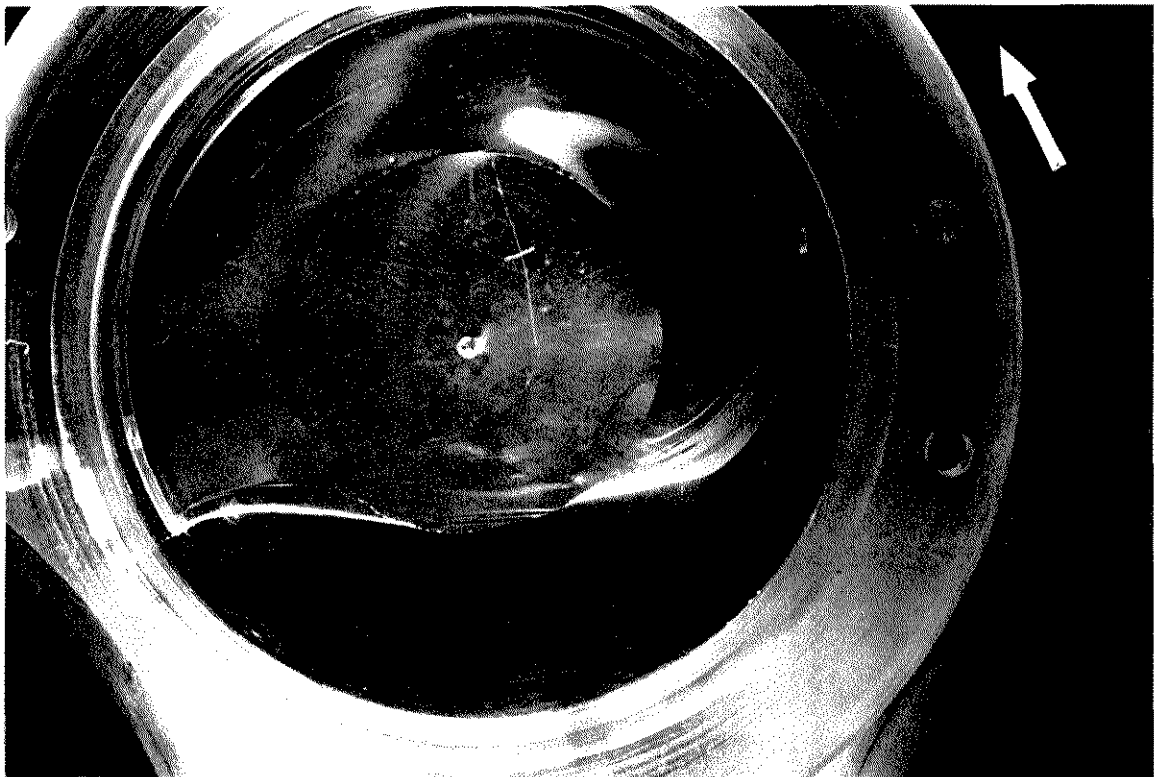


FIGURA IV-1: Escoamento em poça (solução aquosa de carboximetil-celulose).

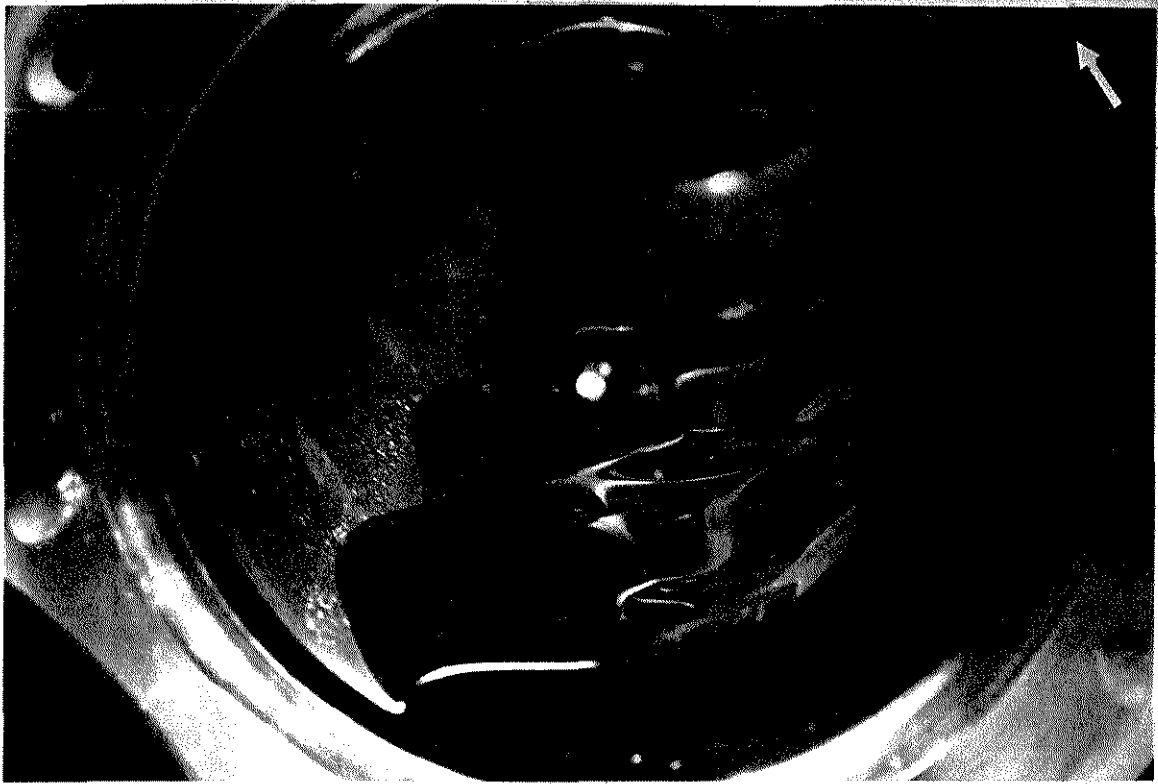


FIGURA IV-2: Deformações na superfície da poça (solução aquosa de carboxi-metil-celulose).

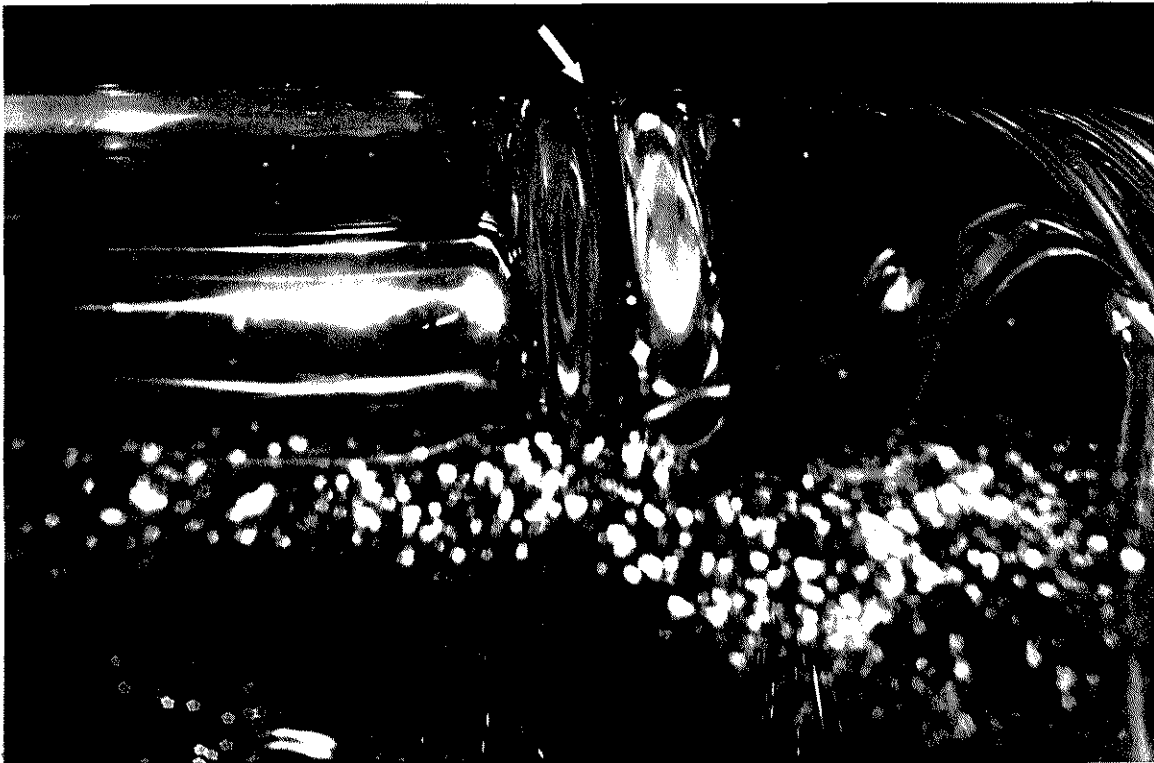


FIGURA IV-3: Detalhe de um sulco no filme aderido à superfície superior do cilindro (solução aquosa de carboxi-metil-celulose).

Com os óleos de silicone (viscosidades de 50 e 100 cStks), no menor volume percentual líquido (12,5%), percebeu-se que os projetos de cascatas (sulcos no filme) aparecem apenas junto às extremidades do cilindro. Das extremidades até cada sulco, há um filme líquido que adere a superfície cilíndrica sem que remanesça poça. Entre os sulcos, porém, ocorre recirculação de fluido numa fina poça, conforme está na Figura IV-4a.

Aumentando-se a velocidade de rotação, mais líquido é aderido à superfície cilíndrica, de tal forma que os projetos de cascatas deslocam-se, ambos, em direção ao meio do cilindro, tornando cada vez menor a poça recirculante, como aparece na Figura IV-4b.

Com óleo de silicone (viscosidade de 10 cStks) a partir do volume de 12,5% e com os óleos de silicone (viscosidades de 50 e 100 cStks), desde o volume de 25%, são visíveis as deformações na superfície da poça.

As deformações têm um carácter ondulatório, como sugere a linha de contato cilindro-líquido-ar, em forma senoidal.

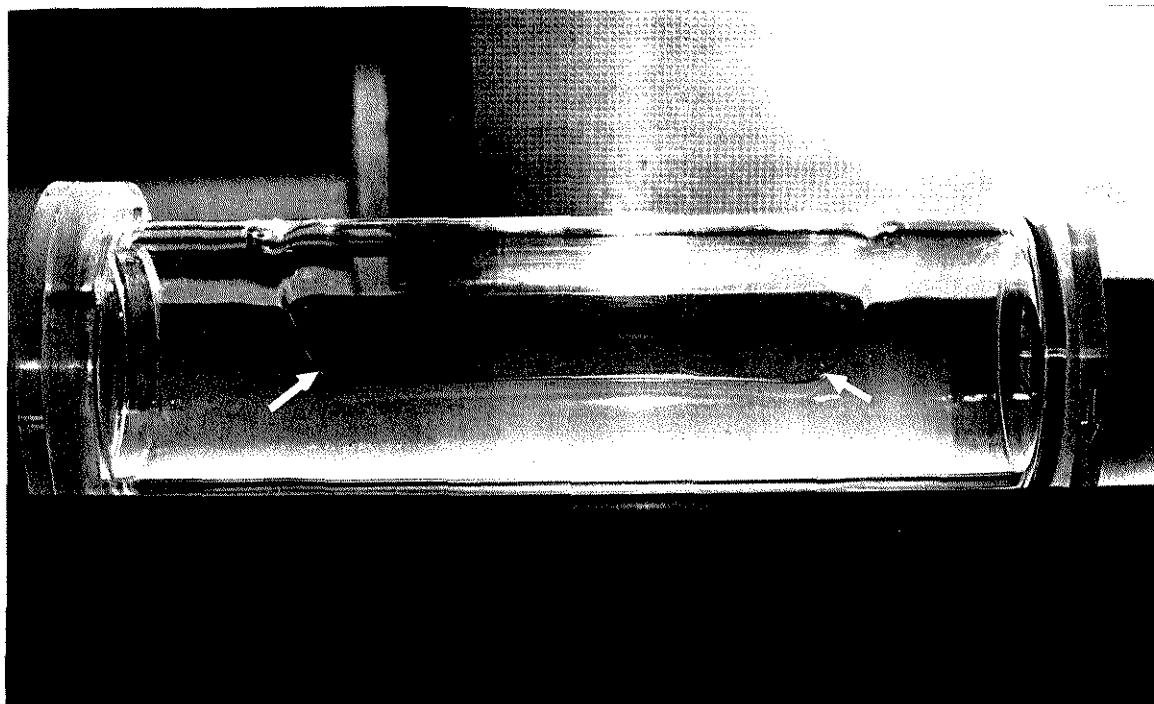


FIGURA IV-4a: Sulcos nas extremidades do cilindro com fina poça recirculante (óleo de silicone - 100 cStks, volume líquido - 12,5%).

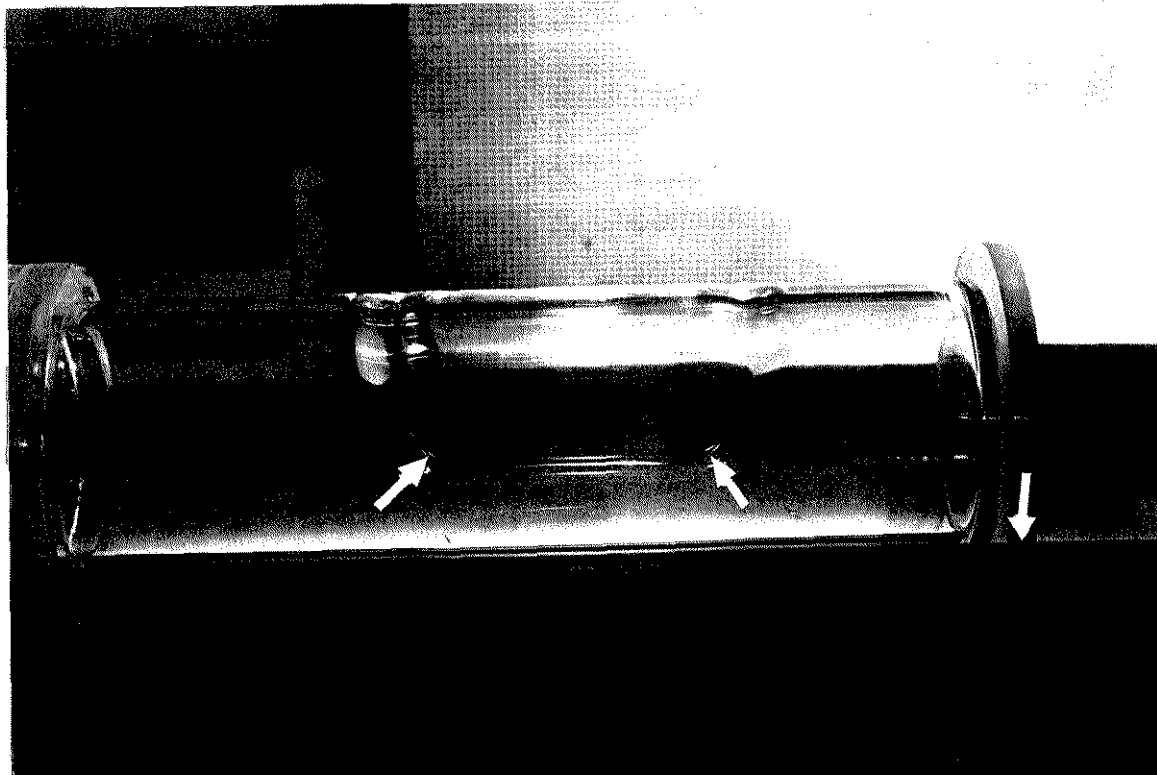


FIGURA IV-4b: Sulcos deslocados para a região central do cilindro, numa rotação superior à do escoamento apresentado na Figura IV-4a.

O aumento da velocidade de rotação provoca aumento do número de ondas. Já o aumento de volume causa redução desse número.

A Figura IV-5 mostra que os sulcos, no filme líquido aderido à superfície cilíndrica, relacionam-se às deformações da interface poça-ar.

Pode-se ver, por meio da movimentação das bolhas, regiões da poça onde o líquido recircula em vórtices, que são os virtuais causadores das ondulações na interface líquido-ar.

As bolhas visualizadas (na Figura IV-5) aparecem de forma intensa em volumes líquidos inferiores a 50%, para os óleos de 50 e 100 ctk. Elas resultam do arraste, no lado descendente do escoamento, de uma película de ar que se entrepõe ao líquido da poça e ao filme aderido à parede. No interior da poça, essa película se dispersa e ascende em forma de bolhas que passam a recircular, juntamente com o líquido da poça.

Há que se diferenciar dois processos que conduzem ao desaparecimento da fase de poça:

1) Um no qual as deformações na superfície da poça (e os sulcos a elas relacionados) distribuem-se ao longo de todo o comprimento do cilindro;

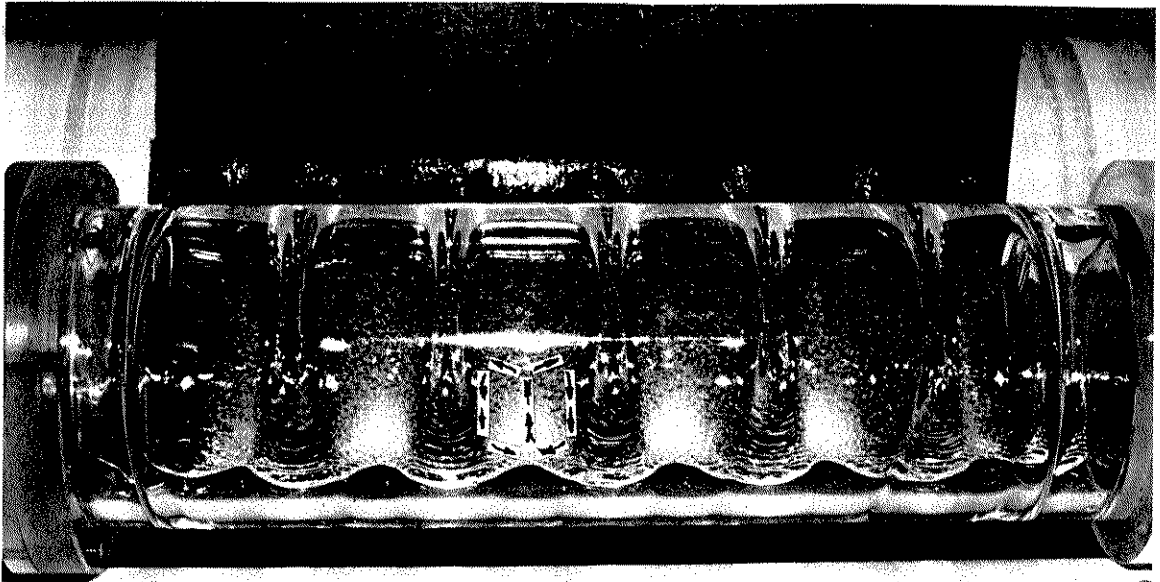


FIGURA IV-5: A fotografia mostra como os sulcos estão ligados às deformações na superfície da poça e bolhas delineando os vórtices ( óleo de silicone - 100 ctk, carga líquida de 25%).

2) Outro, onde as deformações na superfície da poça e os sulcos a elas relacionados, distribuem-se ao longo de todo o comprimento do cilindro;

#### FASE DE ESCOAMENTO EM CASCATAS

Pelas observações realizadas, as cascatas constituem-se numa evolução dos sulcos formados no filme líquido aderido à parede cilíndrica, na parte superior do cilindro, quando estes transformam-se numa lâmina livre de líquido, cortando toda a secção transversal acima da poça, como mostra a Figura IV-6.

As cascatas separam a região de ar em células que nada mais são que bolhas.

Há um jogo de forças, não compreendido, que causa por vezes aumento e por vezes diminuição do número de bolhas, com o

incremento da rotação do cilindro. Seja como for, elas migram rumo ao eixo de rotação, até formarem a estrutura "rimming".

Na qualidade de evolução dos sulcos, as cascatas são também formadas a partir de dois processos distintos:

1 - Quando o filme líquido, aderido às paredes do cilindro, está nas condições da região de camada limite oscilatória (Secção II-3-3), o máximo na espessura (e o mínimo de velocidade) ocorre na posição  $\theta \approx \pi$  (Topo do cilindro). Aumentos da velocidade de rotação tornam o filme cada vez mais espesso até que, numa condição crítica, ele cai, formando cascatas ao longo de todo o comprimento do cilindro.

2 - Quando o filme líquido aderido está nas condições da região de filme descendente, sua espessura máxima (e o mínimo na velocidade) situa-se nos arredores de  $\theta = \pi/2$ . Então, não se deveria esperar cascadeamento. No entanto, nas junções das superfícies planas com a cilíndrica, o arraste é suficiente para deformar o escoamento ascendente de tal forma que o máximo localize-se em  $\theta \approx \pi$ , numa velocidade de rotação suficientemente elevada. Alcançada esta rotação, forma-se um filme sem poça aderindo a superfície cilíndrica, nas proximidades das superfícies planas. A uma distância crítica destas superfícies, aparecem sulcos (ou mesmo cascatas), que marcam os limites da poça. Aumentando-se mais a rotação, os sulcos (ou as cascatas) caminham rumo ao meio do cilindro, onde encontram-se, formando um única cascata, que em geral desaparece rapidamente, dando lugar ao escoamento "rimming".

#### FASE DE ESCOAMENTO "RIMMING"

A fase de escoamento "rimming" é atingida quando o filme aderido contém todo o líquido do cilindro, deslocando o ar para uma única "bolha" cilíndrica, em torno do eixo de rotação (Figura IV-7).

Aumentos nos giros, após obtida esta fase, não causam nenhuma alteração visual no escoamento. Ao se diminuir, porém, a rotação, identifica-se um fenômeno de histerese. Para valores de rotação bem abaixo daqueles de obtenção da fase "rimming",

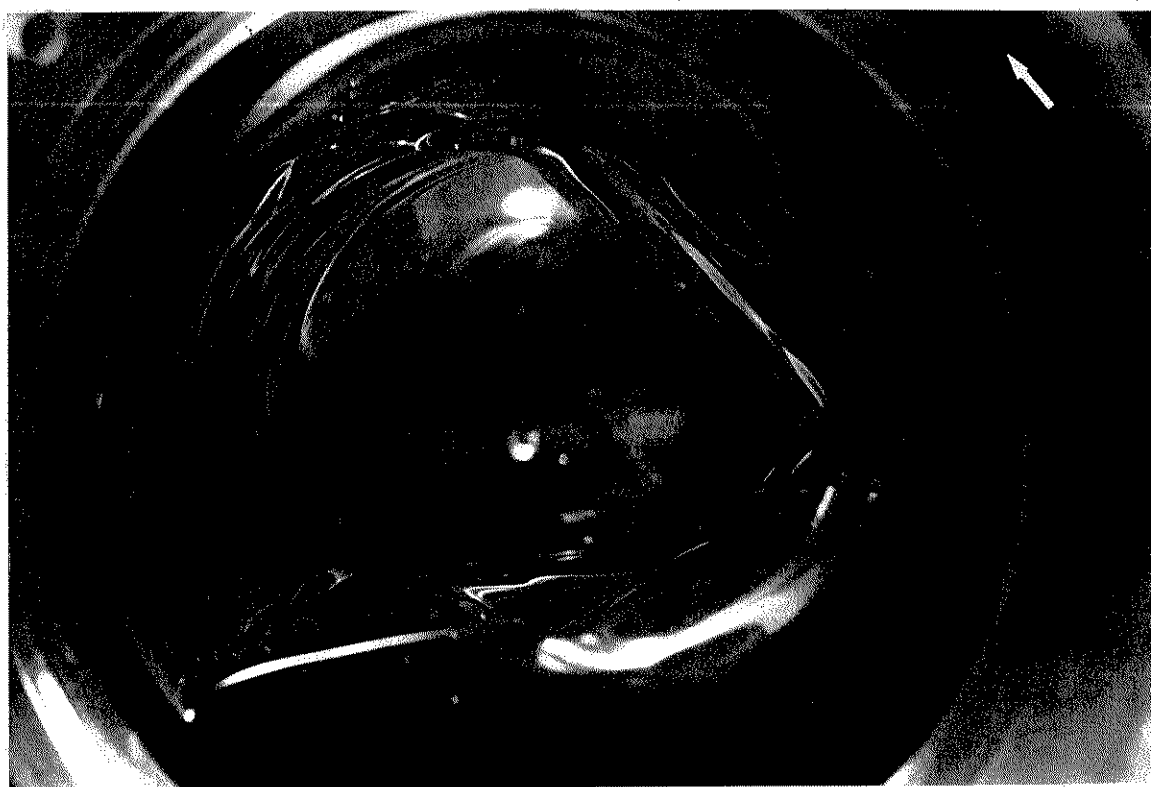


FIGURA IV-6: Ao longo do comprimento do cilindro, são discerníveis regiões onde uma lâmina líquida já "corta" parte da secção transversal do cilindro (solução aquosa de carboxi-metil-celulose).



FIGURA IV-7: Escoamento "rimming" (solução aquosa de carboxi-metil-celulose).

continua-se com o escoamento em lâminas cilíndricas até que ondulações, na interface ar-líquido, sejam observadas. São as ondas centrífugas (Secção II-3-4-2) definidas por Phillips e apresentadas nas Figuras IV-8.

As ondas centrífugas podem ser estacionárias com relação a um observador num referencial fixo no solo (inercial). Aquelas mostradas na Figura IV-8, porém, oscilam com relação ao mesmo observador e, numa dada amplitude crítica, desestabilizam o escoamento, causando seu colapso. Após o colapso, o escoamento apresenta-se, novamente, na fase em poça ou em cascatas.

A aparição de ondas centrífugas, no processo de desaceleração do cilindro, tem seu similar nas deformações ondulatorias na superfície da poça, durante o processo de aceleração, sendo, ambas, instabilidades de seus escoamentos.



FIGURA IV-8: Ondas centrífugas oscilantes. Os "sulcos" na superfície ar-líquido oscilam, alterando seus posicionamentos periodicamente ao longo do comprimento do cilindro (óleo se silicone - 50 cStks, volume de 75%).



A semelhança nos comprimentos destas ondas sugere que elas tenham origens comuns. Todavia, estas instabilidades requerem mais estudo!

#### IV-2-b> CILINDROS COMPLETAMENTE CHEIOS

Alguns fenômenos que ocorrem em cilindros completamente cheios, como as oscilações inerciais e as colunas de Taylor-Proudman, não são facilmente reproduzidas em laboratório. Embora tenham sido conceitos muito utilizados na revisão bibliográfica, não se propôs, aqui, em face dos equipamentos disponíveis, observá-los.

Outros fenômenos, no entanto, não menos típicos, como as instabilidades centrífugas (que não devem ser confundidas com as ondas centrífugas de Phillips) são facilmente vistos, sendo eles matéria das linhas por vir.

#### ENSAIOS QUE UTILIZAM POLIESTIRENO COMO TRAÇADOR

Quando o cilindro é acelerado bruscamente ("spin-up" num impulso → Secção II-2-7-1), nota-se um fluxo de partículas do traçador em direção ao eixo de rotação e às superfícies planas do cilindro. A Figura IV-9a mostra a disposição das partículas no estado de repouso e a Figura IV-9b mostra esta disposição, algum tempo após a aceleração.

O fluxo de traçador rumo às superfícies planas é uma forte evidência da presença de correntes secundárias induzidas pelas camadas de Ekman. O fluxo em direção ao eixo deve-se ao efeito não-linear de deslocamento da camada de Stewartson.

A introdução de pequenas bolhas, numa das extremidades do cilindro, faz com que a maior parte das partículas migrem para a outra extremidade, como se pode ver pela Figura IV-10a.

Há, provavelmente, queda no poder de sucção da camada de Ekman, no lado onde se introduziu as pequenas bolhas de ar. Se as bolhas forem, agora, introduzidas em ambas as extremidades, os efeitos de sucção das camadas de Ekman passam a se equivaler e as partículas de traçador voltam a ocupar as duas extremidades.

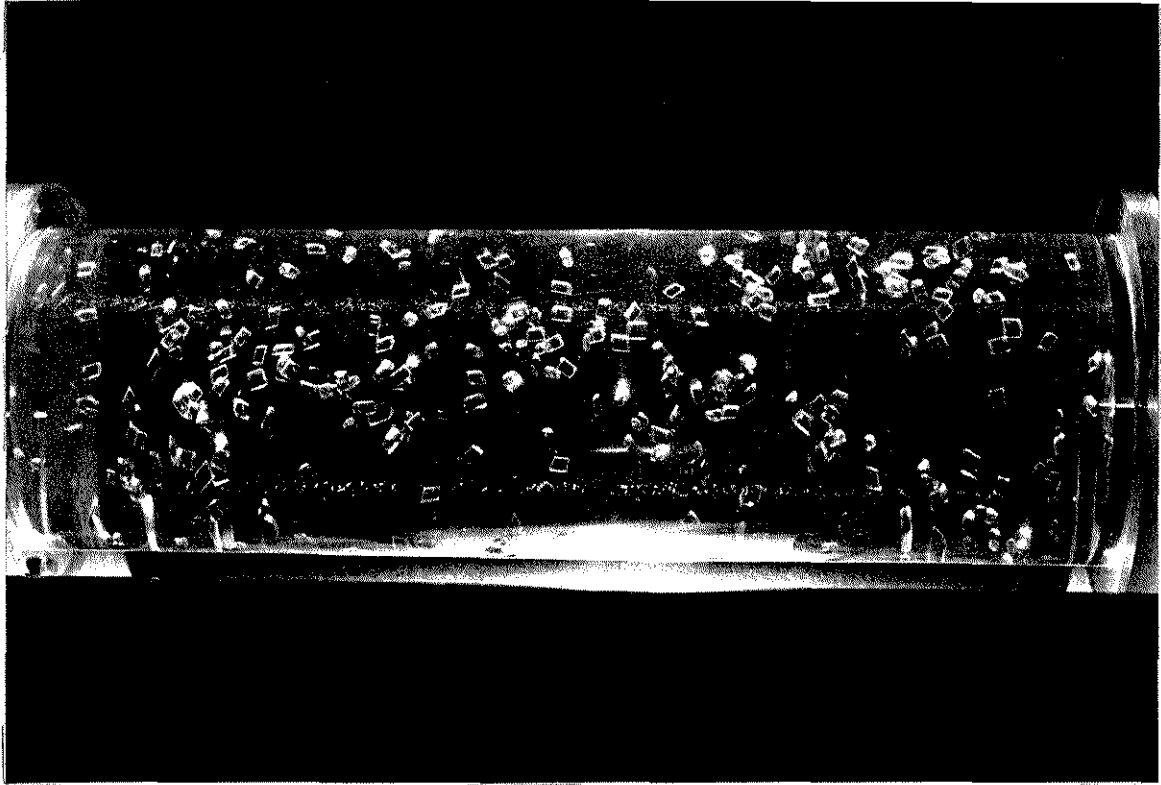


FIGURA IV-9a: Disposição das partículas do traçador poliestireno, quando a rotação é nula.

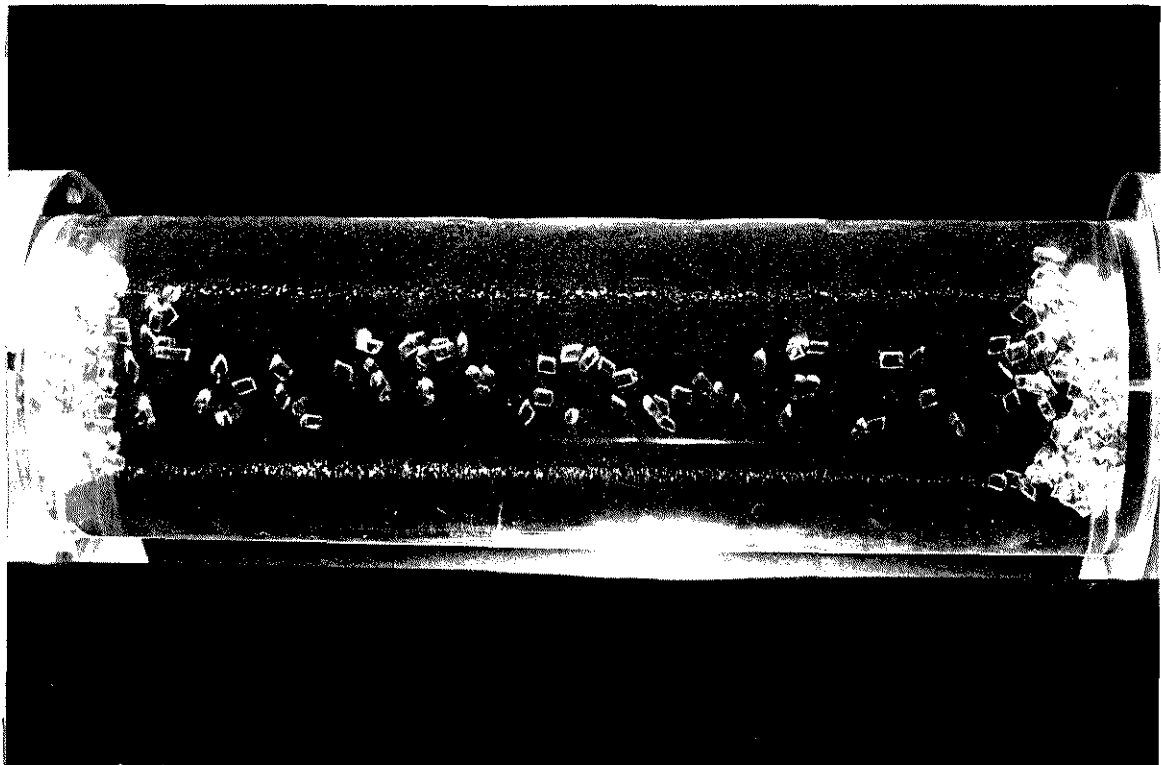


FIGURA IV-9b: Disposição das partículas de poliestireno, 18 segundos após acelerar o cilindro de 0 a 380 rpm.

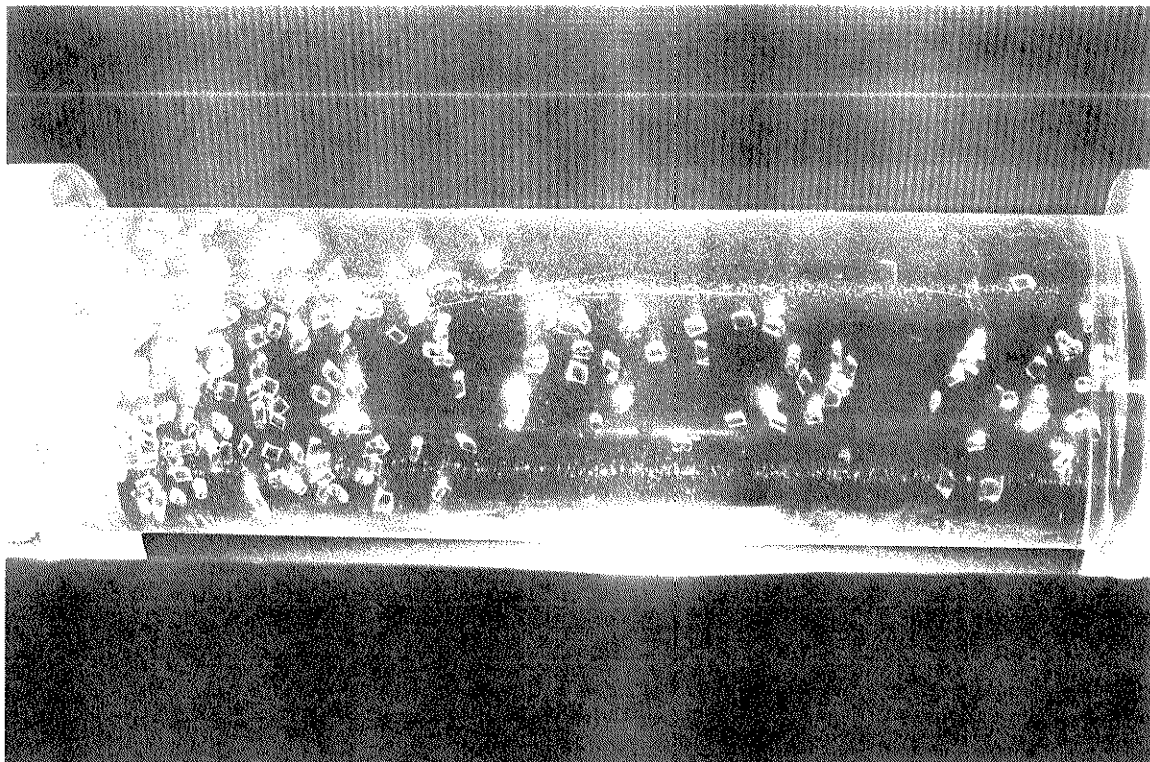


FIGURA IV-10a: Distribuição das partículas do traçador 18 segundos após acelerar o cilindro de zero a 380 rpm, ao se introduzir pequenas bolhas, na extremidade direita do cilindro.

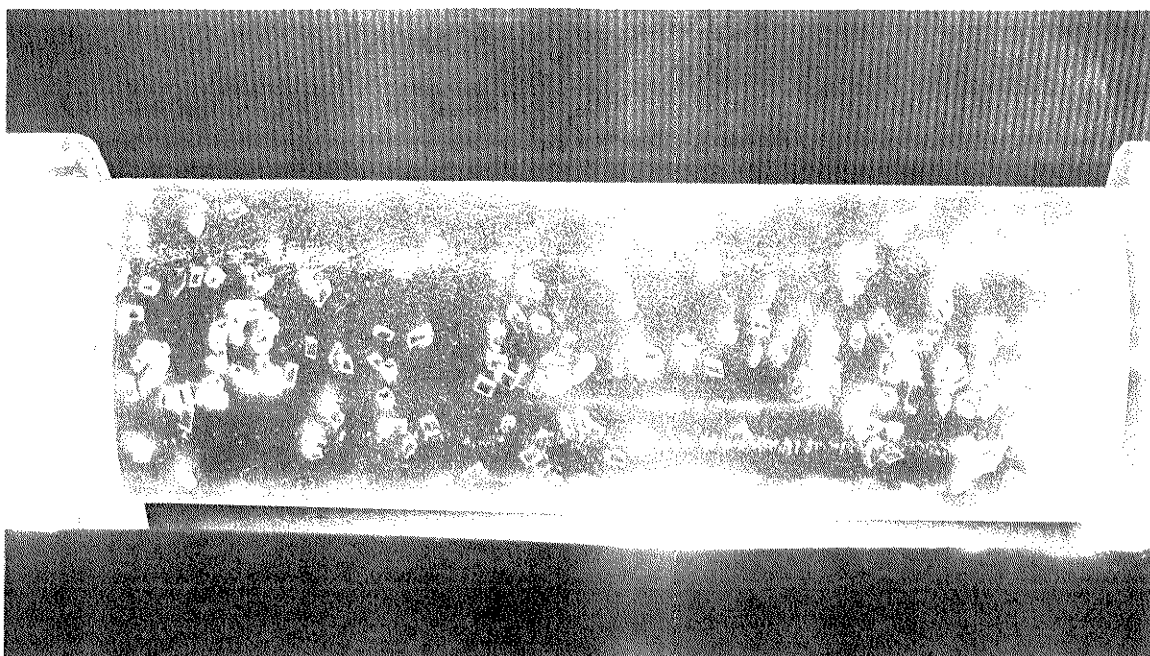


FIGURA IV-10b: Arranjo das partículas do traçador 18 segundos após acelerar o cilindro de zero a 380 rpm, na presença de bolhas em ambas as suas extremidades.

Ocorre, porém, uma sensível diminuição na intensidade das correntes secundárias, como se pode deduzir da Figura IV-10b, pela melhor distribuição das partículas do traçador no interior do cilindro.

#### PÓ DE ALUMÍNIO COMO TRAÇADOR

Quando o cilindro cheio sofre repentina desaceleração ("spin-down" num impulso) são vistos, junto à superfície cilíndrica, anéis que se alternam ao longo do comprimento do cilindro em regiões providas e desprovidas de partículas do traçador, como se vê na Figura IV-11.

Os anéis, compostos pelas regiões desprovidas do traçador, são instabilidades centrífugas (Secção II-2-7-1), da mesma natureza das que são produzidas no escoamento tangencial, entre dois cilindros concêntricos, onde o interno (de menor raio) gira mais rapidamente que o externo (Taylor, 1923).

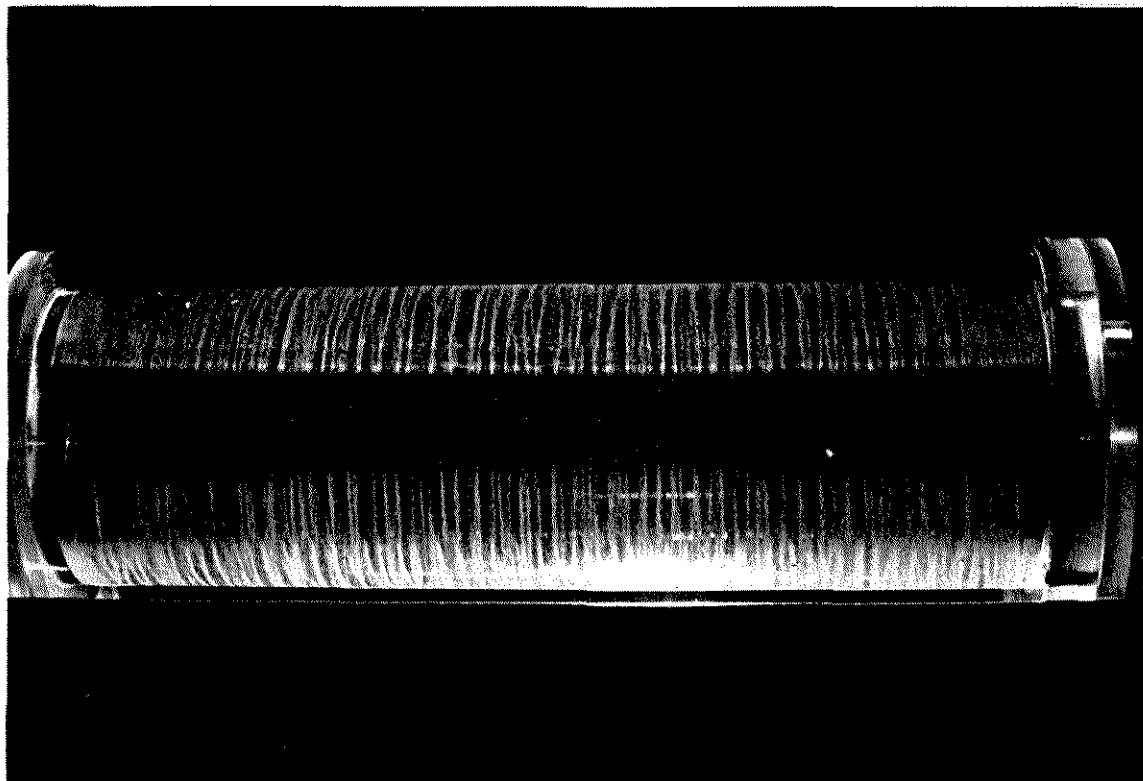


FIGURA IV-11: Instabilidades centrífugas ocorrentes durante o "spin-down" (o cilindro foi desacelerado de 256 para 190 rpm).

É preciso que se compreenda que o "spin-down" gera um escoamento, como o que ocorre entre dois cilindros concêntricos. O líquido próximo às paredes tem a rotação diminuída, imediatamente após a desaceleração. Contudo, o líquido distante, em escoamento geostrópico, ainda conserva a antiga rotação mais elevada. Em consequência, as instabilidades podem surgir obedecendo ao Teorema de Rayleigh (Secção II-2-8).

#### IV-3> ASPECTOS QUANTITATIVOS.

Não se dispõe, aqui, de aparato experimental para a determinação de perfis de velocidade, no interior do cilindro em rotação. São esses perfis, dependentes do tempo, o que se poderia pretender levantar em experimentos com fluidos, escoando em cilindro cheios. Portanto, esse tipo de escoamento não é contemplado neste capítulo.

Ao contrário do escoamento em cilindros cheios, o que se dá em cilindros parcialmente cheios pode ser caracterizado por medidas simples, como rotação e geometria do cilindro, além do conhecimento de propriedades físicas do líquido, escoando em regime permanente. É desse último escoamento que trata a secção seguinte.

#### IV-3-a> CILINDROS PARCIALMENTE CHEIOS

Registrou-se as rotações que caracterizam as transições das fases do escoamento. Em alguns dos ensaios, o levantamento de dados foi repetido quatro vezes. A grande parte dos dados foi colhida utilizando-se o cilindro de maior comprimento.

Na Tabela IV-1 são apresentadas as velocidades críticas das transições entre as fases de poça e de cascadeamento, cacateamento e escoamento "rimming" e com decréscimo da rotação, o colapso desse escoamento.

TABELA IV-1-A: Velocidades (r.p.m.) das transições entre as fases do escoamento, na função da percentagem volumétrica de água, para o cilindro-1.

CARGA(%)	5	12,5	25	50	75	80	85	90	95
CASCATAS	541	799	1056	757	470	424	342	234	170
"RIMMING"	541	799	1072	--	--	--	--	--	--
COLAPSO	302	359	456	--	--	--	--	--	--

TABELA IV-1-B: Velocidades (r.p.m.) das transições, entre as fase do escoamento, para o óleo de silicone com  $v=10$  cStks, no cilindro-1.

CARGA(%)		12,5	25	50	75	80	85	90	95
CASCATAS	1	473	404	301	214	189	166	141	86
CASCATAS	2	473	403	301	209	186	166	139	100
CASCATAS	M	473	404	301	212	188	166	140	93
"RIMMING"	1	559	762	1150	--	--	--	--	--
"RIMMING"	2	559	776	1158	--	--	--	--	--
"RIMMING"	M	559	769	1154	--	--	--	--	--
COLAPSO	1	328	381	521	--	--	--	--	--
COLAPSO	2	328	381	521	--	--	--	--	--
COLAPSO	M	328	381	521	--	--	--	--	--

OBS: Na segunda coluna, os caracteres: 1,2,M indicam, respectivamente, o primeiro ensaio, o segundo ensaio e valor médio entre os ensaios.

Os quadros vazios (--) correspondem a ensaios cuja realização foi impossibilitada por necessitarem rotações superiores às possíveis com o equipamento disponível.

TABELA IV-1-C: Velocidades (em r.p.m.) das transições entre as fases do escoamento para óleo de silicone com  $v = 50$  cStks, nos cilindros-1 e 2.

CARGA(%)		12,5	25	50	75	80	85	90	95
CASCATAS	1	402	331	244	167	144	126	111	82
CASCATAS	2	378	334	246	167	144	132	110	82
CASCATAS	3	...	...	...	159	144	122	108	79
CASCATAS	4	386	330	243	167	150	131	110	82
CASCATAS	M	389	332	244	165	146	128	110	81
CASCATAS	C <sub>2</sub>	357	339	243	170	157	146	116	90
"RIMMING"	1	402	489	631	800	822	821	880	894
"RIMMING"	2	378	484	631	789	822	832	872	892
"RIMMING"	3	...	...	...	774	796	826	862	878
"RIMMING"	4	386	479	624	777	804	831	866	874
"RIMMING"	M	389	484	629	785	811	826	870	885
"RIMMING"	C <sub>2</sub>	357	448	528	597	621	670	723	768
COLAPSO	1	279	339	406	382	398	513	628	690
COLAPSO	2	272	339	404	381	413	511	637	644
COLAPSO	3	...	...	...	383	396	501	664	706
COLAPSO	4	269	337	400	389	403	516	664	728
COLAPSO	M	273	338	403	384	403	510	648	692
COLAPSO	C <sub>2</sub>	265	333	323	368	381	396	431	467

OBS: Os caracteres da segunda coluna: 1,2,3,4,M dizem respeito ao cilindro-1, enquanto a indicação C<sub>2</sub> refere-se ao cilindro-2.

TABELA IV-1-D: Velocidades (r.p.m.) das transições entre as fases do escoamento, em função da percentagem volumétrica de óleo de silicone com  $v = 100$  cStks, escoando no interior dos cilindros "1" e "2".

CARGA(%)		12,5	25	50	75	80	85	90	95
COLAPSO	1	261	313	264	162	141	119	99	70
COLAPSO	2	267	316	264	158	140	119	101	74
COLAPSO	3	...	313	265	159	142	121	99	70
COLAPSO	M	264	314	265	160	141	120	100	71
COLAPSO	C <sub>2</sub>	221	317	255	166	143	126	107	107
"RIMMING"	1	261	413	522	620	639	656	667	659
"RIMMING"	2	267	418	510	621	640	654	661	661
"RIMMING"	3	...	...	...	611	622	642	663	659
"RIMMING"	M	264	416	516	617	634	651	664	660
"RIMMING"	C <sub>2</sub>	221	381	447	523	552	585	594	600
COLAPSO	1	229	288	323	368	378	421	548	584
COLAPSO	2	232	286	337	368	380	424	539	573
COLAPSO	3	...	...	...	367	378	430	542	578
COLAPSO	M	231	287	330	368	379	425	543	578
COLAPSO	C <sub>2</sub>	212	273	322	331	359	378	387	414

OBS: Os caracteres da segunda coluna: 1,2,3,M referem-se ao cilindro-1 e C<sub>2</sub> refere-se ao cilindro-2.



## TRANSIÇÃO POÇA-CASCATAS

A Figura IV-12 mostra curvas relacionando o volume percentual líquido com a média das velocidades de aparecimento de cascatas, nas replicatas. É evidente a queda desse valor médio com o aumento da viscosidade até 50 cStks.

O ganho de viscosidade diminui o gradiente de rotação no filme e mais líquido tem velocidade suficiente para vencer a ação gravitacional. Assim, o filme torna-se mais espesso, favorecendo o cascadeamento.

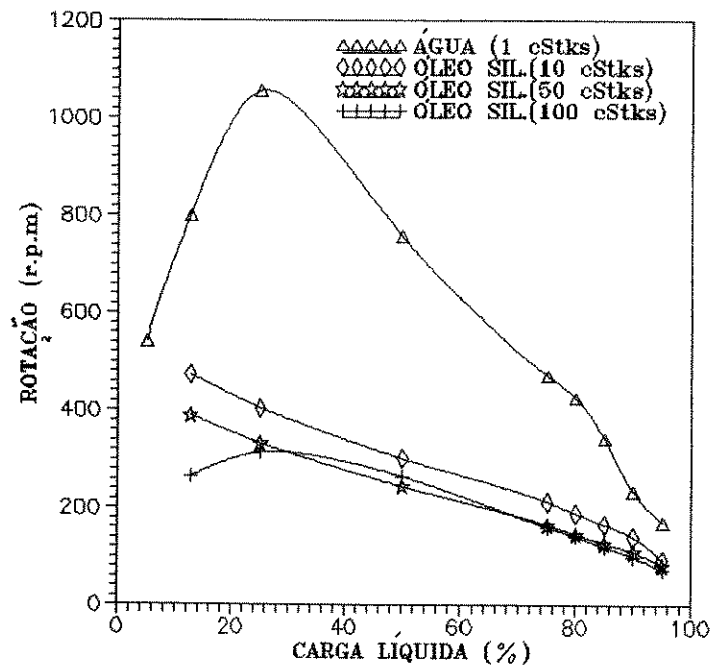


FIGURA IV-12: Influência da carga e da viscosidade na velocidade para formação de cascatas.

Na Figura IV-12 as curvas que representam a água e o óleo de silicone (100 cStks), exibem um ponto de máximo.

Conforme mencionado na Secção IV-2-a dois processos distintos fazem surgir as cascatas: um a partir da região de filme descendente, outro a partir da região de camada limite oscilatória.

Enquanto o volume de líquido for insuficiente para produzir filmes com as características da região de camada limite oscilatória, as cascatas serão produzidas, apenas, nas proximidades das superfícies planas. E quanto maior for o volume da poça, maior será a rotação necessária para conduzir o máximo de espessura à posição  $\theta=\pi$ .

Ao se produzir filmes com características cada vez mais próximas às da região de camada limite oscilatória (o que ocorre em volumes percentuais líquidos maiores), as cascatas começam a aparecer também fora das extremidades porque o filme, como um todo, tem máximo de espessura nas proximidades de  $\theta=\pi$ . Sendo assim, não se precisa mais de energia para elevar o máximo de  $\theta=\pi/2$  para  $\theta=\pi$ , nas extremidades. Como consequência, a velocidade de cascadeamento começa a cair com o aumento do volume percentual líquido.

O efeito de diminuição da velocidade de formação de cascatas, com aumento da carga líquida, é incrementado pela redução da altura necessária para se elevar líquido aderido ao cilindro, no lado ascendente.

Deve-se ter em mente, que os pontos experimentais da Figura IV-12, para os óleos, têm como menor carga líquida 12,5%. Em cargas ainda menores, que coloquem o filme líquido dos óleos de 10 e 50 cStks na região de filme descendente, é bem provável que os máximos aconteçam.

White & Higgins também graficaram a velocidade de formação de cascatas contra a carga (Figura II-11). Nas curvas por eles apresentadas vê-se, igualmente, um ponto de máximo para a velocidade de rotação. Os autores, entretanto, não fizeram nenhum comentário sobre este máximo.

White & Higgins detectaram uma certa constância na velocidade de formação de cascatas, a partir de uma determinada

carga. Um comportamento diferenciado do que se percebeu aqui. Não se pode, contudo, confrontar de modo rígido estas constatações posto que as condições definidas para caracterizar o escoamento em cascatas diferem. White e & Higgins adotaram um quadro similar ao de um relógio marcando 10:30 para o cascadeamento. Aqui, impõe-se como condição necessária para definir o cascadeamento a existência de um filme cortando toda a secção transversal, acima da poça.

#### TRANSIÇÃO CASCATAS - "RIMMING"

Na Figura IV-13 traça-se curvas do volume percentual líquido contra a velocidade de aparição do aspecto "rimming". Percebe-se que esta velocidade crítica aumenta com a carga de líquido.

Pode-se ver também, na Figura IV-13, que como regra geral, a velocidade para escoamento "rimming" aumenta com a queda da viscosidade.

É sabido que quanto maior a viscosidade maior é a tendência do líquido para se fixar às paredes do cilindro.

#### COLAPSO DO ESCOAMENTO "RIMMING"

Plota-se na Figura IV-14 velocidades de colapso contra a carga líquida para os diferentes líquidos de trabalho. A velocidade de colapso é tanto maior quanto menor for a viscosidade, como White e Higgins (1958) já haviam verificado (Secção II-3-2).

As curvas da Figura IV-14 também mostram que a velocidade aumenta com a carga líquida, um comportamento já observado por White e Higgins. Quando a carga chega a cerca de 75%, no entanto, esse comportamento é, em muito, intensificado, pelo menos para os óleos de viscosidades 50 e 100 cStks. Este fato white e Higgins não puderam constatar, pois realizaram

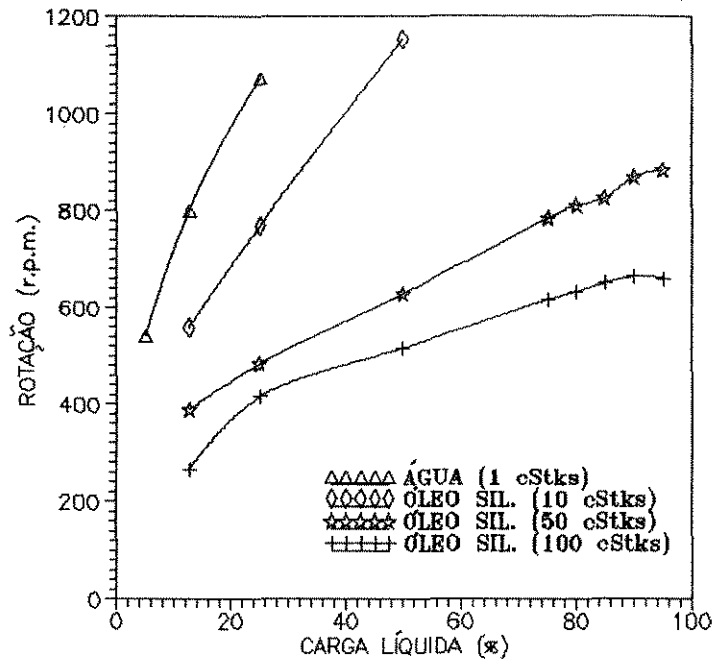


FIGURA IV-13: Influência da carga e da viscosidade na velocidade para escoamento "rimming".

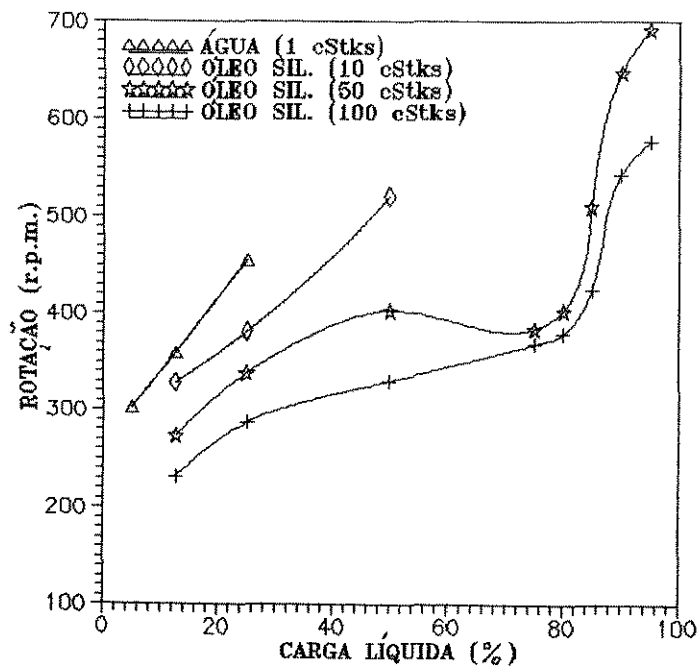


FIGURA IV-14: Influência da carga e da viscosidade na velocidade de colapso do escoamento "rimming".

experimentos até cargas de no máximo 10%.

O aumento na velocidade de colapso com a queda da viscosidade, decorre deste afinamento do líquido implicar na saída da região de filme descendente, para a de camada limite oscilatória, onde o aspecto "rimming" só é possível em altas rotações. Argumentos semelhantes explicam o aumento da rotação com a carga líquida, até cerca de 75%.

O pronunciado aumento da velocidade de colapso com a carga líquida associa-se à presença de ondas centrífugas, não-estacionárias, mais proeminentes quando o escoamento tende à região de camada limite oscilatória.

#### HISTERESE DO ESCOAMENTO "RIMMING"

Curvas da diferença entre as velocidades "rimming" e de colapso ( $\Delta\Omega$ ) contra a carga líquida são apresentadas na Figura IV-15. As curvas completas (para os óleos com viscosidades de 50

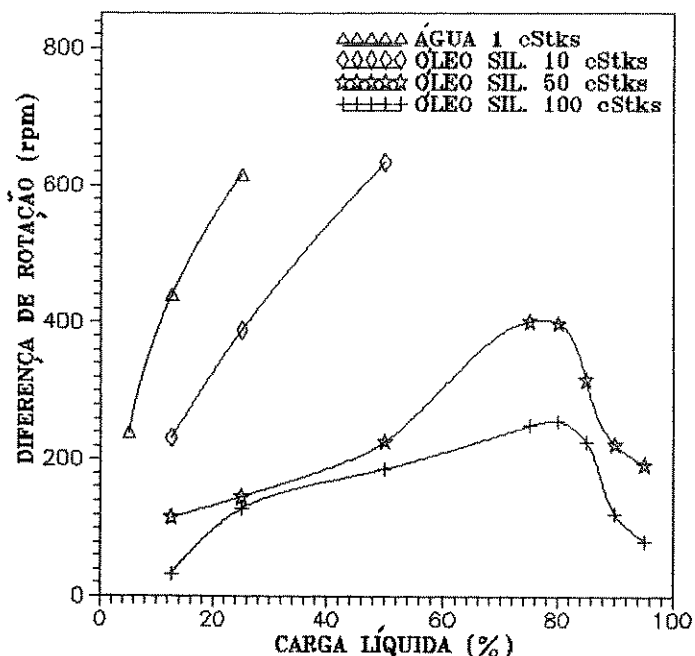


FIGURA IV-15: Histerese do escoamento "rimming" na dependência da carga e da viscosidade.

e 100 cStks) permitem dizer que o valor de  $\Delta\Omega$  é pequeno quando a carga é baixa, aumenta até cerca de 75-80% de carga líquida quando atinge um máximo e inverte seu comportamento, diminuindo com a carga.

Quando a carga líquida é pequena, a poça também o é, sendo que a maior parte do momento conferido ao líquido, pelo cilindro, concentra-se no filme aderido às paredes. Assim, pouca energia diferente da necessária ao escoamento "rimming" é armazenada.

Aumentando-se a carga líquida, a poça começa a absorver energia, recirculando líquido através de instabilidades ou mesmo consumindo-a em turbulência.

Atingida a fase de escoamento em cascatas mais energia é absorvida. Então, quando o escoamento "rimming" é alcançado, há energia em excesso, de tal maneira que esse tipo de escoamento ainda se mantém, mesmo após reduções consideráveis na velocidade de rotação do cilindro.

Em contraposição ao processo de estocagem de energia, durante as fases de escoamento em poça e cascatas, aparecem as ondas centrífugas que desestabilizam a estrutura "rimming" de escoamento. A partir de cargas de 75-80% estas ondas se tornam mais proeminentes, diminuindo  $\Delta\Omega$  com a carga líquida.

#### INFLUÊNCIA DO COMPRIMENTO DO CILINDRO

Os experimentos, até agora descritos, foram realizados em um cilindro com 22,90 cm de comprimento (cilindro-1). Alguns ensaios complementares foram feitos com um cilindro menor de 5,88 cm de comprimento (cilindro-2).

As Figuras IV-16a e b comparam as velocidades de formação de cascatas dos dois cilindros. Na região de baixos volumes percentuais líquidos (Figura IV-16a), vê-se que o cilindro menor forma cascatas em velocidades menores que o cilindro-1.

Com o aumento do volume de líquido, o que pode ser visto nas Figuras IV-16-b, o comportamento inverte-se de maneira que o cilindro maior passa a formar cascatas em rotações menores que o cilindro-2.

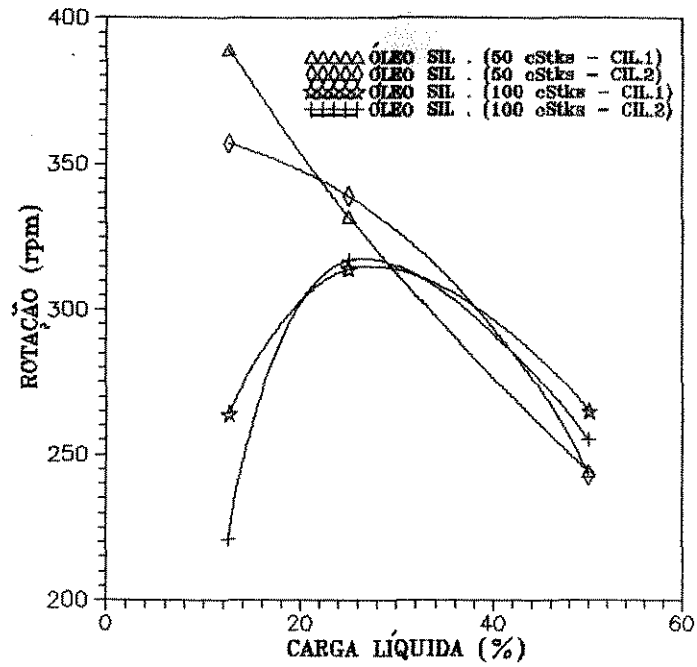


FIGURA IV-16a: Influência do comprimento do cilindro na velocidade para formação de cascatas (baixas cargas).

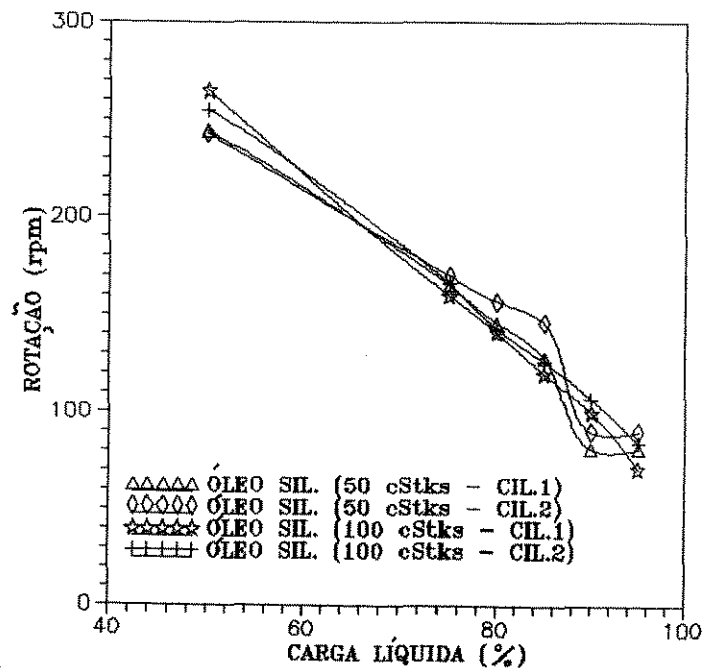


FIGURA IV-16b: Influência do comprimento do cilindro na velocidade para formação de cascatas (cargas moderadas e altas).

Evoca-se, novamente, os processos que fazem surgir as cascatas. O escoamento na região de filme descendente, como se supõe aqueles em cargas pequenas, formam cascatas graças à influência das superfícies planas, que literalmente vertem a poça sobre si mesma. Por outro lado, os escoamentos na região de camada limite oscilatória, representados por aqueles em cargas líquidas maiores, formam cascatas a partir do topo do cilindro.

Em acordo com os dois processos, quando a carga é pequena, as superfícies planas elevam melhor o filme no menor cilindro, que deve formar cascatas primeiramente. Em cargas maiores, o espesso filme na região  $\theta \approx \pi$  é mais instável ("pesado"), no cilindro maior (onde as superfícies planas estão mais distantes) e as cascatas são vistas primeiro neste cilindro.

As Figuras IV-17 e IV-18 mostram respectivamente curvas de velocidade de obtenção do escoamento "rimming" e velocidades de colapso, contra carga líquida, para ambos os cilindros. De uma forma geral, o comportamento no cilindro-2 segue aquele do

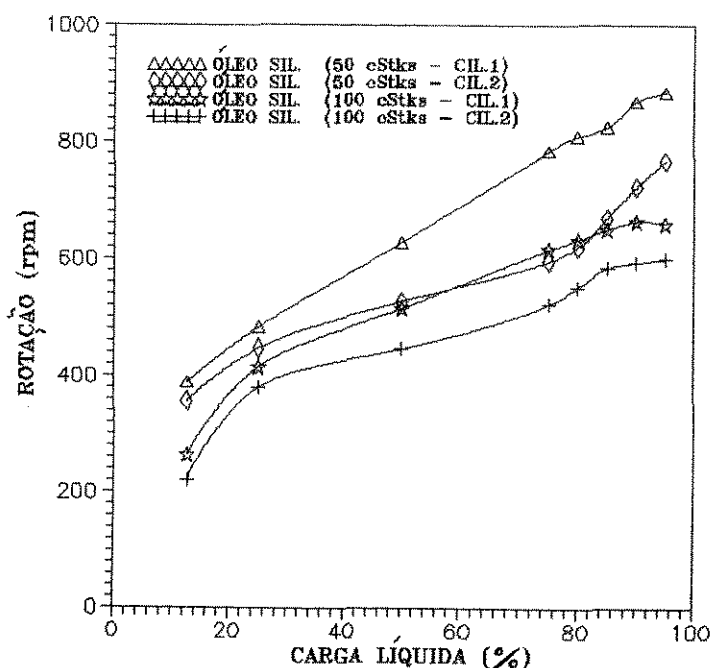


FIGURA IV-17: Velocidade de obtenção do aspecto "rimming" nos cilindros - 1 e 2, em função da carga e da viscosidade.



cilindro-1, já comentado. Há, contudo, redução tanto na velocidade para escoamento "rimming", quanto na de colapso, ao se reduzir o comprimento do cilindro. É, outra vez, uma consequência do arraste nas extremidades, mais eficaz com o aumento de proporção entre as áreas das superfícies planas e a da superfície cilíndrica.

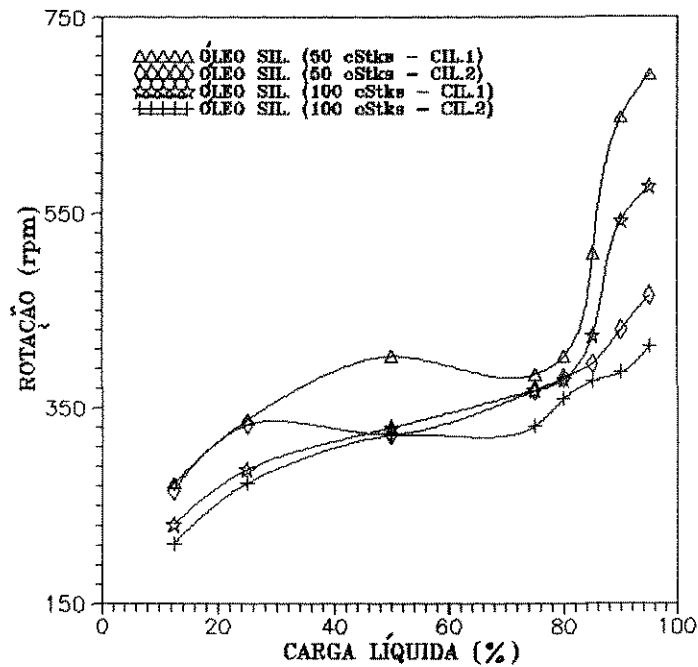


FIGURA IV-18: Velocidade de colapso do escoamento "rimming" nos cilindros - 1 e 2, em função da carga e da viscosidade.

#### IV-4> EM BUSCA DO ELO PERDIDO

Os escoamentos em cilindros cheios são relevantes enquanto transientes. Os que ocorrem em cilindros parcialmente cheios foram tratados como estando em regime permanente, e, certamente, assim estiveram, durante os ensaios realizados.

Resta saber sobre a influência do fator tempo na forma do fluido escoar em cilindros parcialmente cheios e como alguns dos fenômenos transientes detectados em cilindros cheios podem ser extrapolados para os cilindros parcialmente cheios.

Esta secção visa conectar as informações sobre os escoamentos nas situações cheia e parcialmente cheia do recipiente.

Ao se realizar ensaios para o volume de 12,5 %, percebeu-se que se o cilindro fosse submetido à bruscas alterações na rotação, os sulcos e as cascatas não apareciam e o escoamento "rimming" era alcançado numa velocidade inferior aquela que se obtinha, procedendo-se a lentas variações em  $\Omega$ . Isto reflete uma clara influência do tempo no escoamento.

A questão fundamental, contudo, diz respeito à aproximação dos escoamentos em cilindros não cheios ao regime permanente. Haveriam camadas de Ekman e escoamentos secundários semelhantes aos que ocorrem em cilindros cheios?

Para especular acerca de respostas à esta pergunta vai-se considerar, separadamente, as fases de escoamento em poça e em cascatas.

O escoamento em poça apresenta vórtices onde líquido é recirculado. É de se esperar que a produção destes vórtices seja o meio pelo qual o escoamento torna-se permanente e que, pelo menos, durante o período transiente, ocorram camadas de Ekman e correntes secundárias.

O escoamento em cascatas requer mais vagar. Para grandes cargas (> 50%), enquanto a poça for discernível, isto é, enquanto o filme aderido tem espessura bem inferior à da poça, a palavra cascadeamento parece bem empregada. Mas, à medida que a rotação é aumentada e mais líquido vai se aderindo à parede cilíndrica, o escoamento pode ser melhor definido como escoamento em bolhas,

embora, seja arriscado diferenciá-lo, aqui, qualitativamente do cascadeamento. A proposta de mudança de nome retrata, por enquanto, uma mera alteração na proporção de líquido que já se encontra em escoamento "rimming", com relação ao que escoar na poça.

Os comentários anteriores objetivam "transformar" o cascadeamento em escoamento em bolhas porque abaixo vai-se, brevemente, comentar sobre a presença destas num meio líquido em rotação.

As bolhas posicionam-se pouco acima do eixo de rotação do cilindro, um efeito da ação gravitacional. Abbott & Walters (ver Currie & Nieuwkoop, 1982) constataram que camadas de Ekman aparecem junto às interfaces da bolha, perpendiculares ao eixo de rotação. Estas camadas têm origem distinta das que surgem por gradientes de rotação, aqui comentadas. Aparecem também, como se poderia esperar, colunas de Taylor ligadas às superfícies verticais da bolha. No interior destas colunas, ocorrem escoamentos secundários bem parecidos com aqueles que se descreveu na Secção II-2.

Os experimentos nos quais se introduziu pequenas bolhas, no cilindro, mostraram alterações nas correntes secundárias que se formam junto às superfícies planas. Estas alterações podem, pelo menos, em parte, ser causadas pelas correntes secundárias induzidas nas superfícies verticais das bolhas.

Abre-se, nesta altura, a possibilidade de coexistirem, no interior do cilindro, camadas de Ekman e escoamentos secundários de origens distintas, durante escoamentos transientes na fase de bolhas.

#### IV-5> APLICAÇÕES AO TRATAMENTO TÉRMICO DE ALIMENTOS.

Tendo em vista o carácter inicial desse trabalho, os assuntos expostos nem sempre parecem diretamente relevantes para a indústria de enlatados. Cumprem, no entanto, seu papel na medida em que esclarecem pontos do comportamento geral de fluidos sob rotação.

Nesta secção, procura-se levantar quais desses pontos

teriam influência, durante o tratamento térmico de alimentos.

→ Nos cilindros horizontais completamente cheios é a movimentação relativa cilindro-líquido, durante o "spin-up" e o "spin-down", com suas transferências de momento que mostra indícios de agitação. Conseqüentemente, espera-se que rotações intermitentes intensifiquem a penetração de calor. A Tabela IV-2 apresenta tempos característicos de "spin-up" (teóricos) para alguns dos líquidos aqui utilizados, quando em escoamento num recipiente com comprimento de 10 cm ( $L/2 = 5$  cm) (um valor comum na indústria de alimentos) e submetidos a um  $\Delta\Omega = 100$  r.p.m..

TABELA IV-2: Tempos característicos de "spin-up" para alguns dos líquidos aqui utilizados.

SUBSTÂNCIA	TEMPO CARACTERÍSTICO DE "SPIN-UP"
ÁGUA ( $\nu = 0.01$ cm <sup>2</sup> /s)	$E = 3,8$ E-05 $t_c = 15$ s
ÓLEO DE SILICONE ( $\nu = 0.1$ cm <sup>2</sup> /s)	$E = 3,8$ E-04 $t_c = 5$ s

Os ensaios revelaram que a introdução de pequenas bolhas de ar afeta as correntes secundárias induzidas pelas camadas de Ekman. Isto indica que mesmo em espaços livres muito pequenos (<1%), essas correntes secundárias deixam de ser o único meio de movimentação do líquido interior.

→ Nos cilindros horizontais, parcialmente cheios, detectou-se fases pelas quais passa o escoamento, que na ampla faixa de volume percentual líquido, aqui estudada, não diferem muito daquelas indentificadas por White para pequenas cargas. No decorrer destas fases, o espaço-livre (bolha de ar) sofre alterações que são determinantes do nível de agitação, no meio líquido. Sobre tais fases pode-se dizer que:

• A fase de poça mostra instabilidades (deformações na superfície da poça) e sinais de turbulência (quando o líquido é água), que são indícios de um melhor nível de agitação, que os que seriam propiciados, caso a poça se mantivesse num movimento

único, que seguisse a simples rotação da parede cilíndrica do recipiente.

. A fase de cascatas é caracterizada pela divisão do espaço-vazio em células separadas por lâminas líquidas transversais (as cascatas) que devem contribuir para o aumento no nível de agitação e conseqüentemente, para o de transferência de calor.

Os dados experimentais de Neto et alli (1992) foram obtidos num recipiente cujas dimensões são muito próximas daquelas do cilindro-2 (de menor comprimento), aqui utilizado. As rotações impostas não excederam 120 r.p.m, um valor que de acordo com as observações aqui feitas poderia, no máximo, representar o início do cascadeamento para as cargas e os líquidos utilizados por Pinto Neto. Em conseqüência, as possíveis alterações no coeficiente global de troca térmica advindas do nível de agitação do meio líquido, numa hipotética situação isotérmica, estão amarradas a fenômenos ocorrentes, sobretudo, na fase de poça.

Na fase de cascatas, um jogo delicado se estabelece entre estas e a poça remanescente. O entendimento minucioso das deformações na superfície da poça e suas relações com as cascatas, é ainda necessário para a compreensão desse jogo.

. Atingida a condição "rimming" de escoamento, é certo que cai o nível de agitação do líquido.

Mostrou-se que líquidos viscosos têm uma tendência especial aos escoamentos "rimming". E é justamente com eles que se poderia tentar melhores coeficientes de troca térmica, pelo aumento da rotação. Um procedimento que pode causar efeito oposto, caso se atinja esse tipo de escoamento, tipicamente laminar.

## CAPÍTULO V - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### CILINDROS COMPLETAMENTE CHEIOS

As correntes secundárias que aparecem durante os processos de "spin-up" e "spin-down", em cilindros completamente cheios, indicam que um melhor nível de agitação e de transferência de calor devem ser alcançados invertendo-se, periodicamente, o sentido da rotação do recipiente.

Pequenas bolhas, nas proximidades das superfícies planas do cilindro, são suficientes para alterar significativamente os efeitos de sucção das camadas de Ekman, durante o "spin-up", mesmo que estas bolhas ocupem menos que 1% do volume do recipiente. É preciso verificar como se dá esta alteração e seus reflexos no grau de agitação do líquido. Os trabalhos de Currie & Nieuwkoop (1982) são um ponto de partida.

### CILINDROS PARCIALMENTE CHEIOS

A velocidade para o início do cascadeamento depende fortemente das características do filme líquido aderido às paredes internas do cilindro, durante a fase de poça. As características, por sua vez, são determinadas pelos números de Reynolds e de Froude. As demais velocidades de transição diminuem com o aumento da viscosidade e tendem a aumentar, incrementando-se a carga líquida.

O comprimento do cilindro também influi nas velocidades de transição, entre as diversas fases de escoamento, na medida em que altera a proporção entre as áreas planas e cilíndrica. O aumento de tal proporção faz diminuir as velocidades "rimming" e de colapso, muito embora atue favorecendo o cascadeamento sob baixas cargas e desfavorecendo-o sob cargas moderadas e altas. A  
As instabilidades do escoamento em poça, que aparecem através de vórtices, recirculando líquido, assim como o cascadeamento constituem-se em formas alternativas de absorção de momento que

promovem agitação do líquido. Atingido o escoamento "rimming", a energia que outrora agitava o meio passa a ser consumida para manter o líquido num filme aderido ao cilindro.

Como a fase de escoamento "rimming" é rapidamente alcançada por líquidos muito viscosos, a velocidade de rotação deve permanecer em baixos valores para manter o escoamento desses líquidos nas fases de poça ou cascatas.

Pode-se dizer que as fases de escoamento propostas por White em 1956 mantêm-se, razoavelmente, inalteradas em amplas faixas de rotação e carga líquida. Há, entretanto, a necessidade de se estudar as instabilidades que antecedem ao desaparecimento da fase de poça para saber o quanto elas contribuem para a agitação do meio líquido. Também é preciso que se tente distinguir escoamento em cascatas de escoamento com bolhas.

## APÊNDICE A

### EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

A equação do movimento, segundo um sistema inercial de referência, quando aplicada ao escoamento de um fluido newtoniano e incompressível, tem a seguinte forma:

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{q} + \rho \vec{g} \quad (\text{A.1})$$

O termo da esquerda representa o acúmulo de momento linear, no sistema fixando-se os eixos coordenados numa partícula, movendo-se no interior do fluido (coordenadas Lagrangianas). O termo de acúmulo também se pode expressar ao fixar os eixos coordenados no espaço (coordenadas Eulerianas), o que permite a igualdade:

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = \rho \left[ \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + (\vec{q} \cdot \nabla) \vec{q} \right] \quad (\text{A.2})$$

O primeiro termo do lado direito da equação (A.1) dá a taxa de variação de momento linear devido às forças de pressão. O segundo mede a taxa de variação de momento linear causada pela ação viscosa. O terceiro termo contempla a aceleração gravitacional.

A equação (A.1) é definida segundo um referencial inercial. Querendo-se expressá-la a partir de um referencial rotativo (acelerado) faz-se necessária a adição das acelerações centrífuga e de Coriolís. Assim, o termo de acúmulo num sistema inercial está, como abaixo, relacionado ao termo de acúmulo, num referencial rotativo.

$$\left( \frac{D\vec{q}}{Dt} \right)_I = \left( \frac{D\vec{q}}{Dt} \right)_R + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{q}_R \quad (\text{A.3})$$



Fazendo-se as substituições de (A.3) em (A.2) e a do resultado desta em (A.1), vem que:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + (\vec{q} \cdot \nabla \vec{q}) + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{q} = - \frac{\nabla P}{\rho} + v \nabla^2 \vec{q} + \vec{g} \quad (\text{A.4})$$

onde  $\vec{q}$  passa a ser o vetor velocidade segundo um referencial rotativo, abolido o subscripto "R".

Os segundo termos de ambos os membros de (A.4) podem ser reescritos por suas identidades (Bird et alli, 1977):

$$\vec{q} \cdot \nabla \vec{q} = \frac{1}{2} \nabla (\vec{q} \cdot \vec{q}) - [\vec{q} \times (\nabla \times \vec{q})] \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla^2 \vec{q} = \nabla (\nabla \cdot \vec{q}) - [\nabla \times (\nabla \times \vec{q})] \quad (\text{A.6})$$

O primeiro termo de (A.6) é nulo pela continuidade. Daí, a equação (A.4) ganha o aspecto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{q} \cdot \vec{q}) + (\nabla \times \vec{q}) \times \vec{q} + 2 \vec{\Omega} \times \vec{q} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ = - \frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} - v \nabla \times (\nabla \times \vec{q}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Os significados do quarto e do quinto termos de (A.7), respectivamente, as acelerações de Coriolis e centrífuga, são dados no Apêndice B.

## APÊNDICE B

De início, as forças fictícias, como a de Coriolís, são definidas segundo a dinâmica dos corpos rígidos, estando a abordagem, aqui realizada, baseada na de Halliday e Resnick (1983). Numa segunda parte, associa-se às forças fictícias propriedades do escoamento de fluidos rotativos, tomando-se como referência os compêndios de Tritton (1988) e Batchelor (1967).

### FORÇAS REAIS E FICTÍCIAS

Todas as forças que identificamos na natureza podem ser agrupadas em três categorias segundo suas intensidades relativas:

- 1) Forças gravitacionais (muito fracas);
- 2) Forças eletromagnéticas (intensidade intermediária);
- 3) Forças nucleares que podem ser as que ligam prótons a neutrons (extremamente elevadas) ou as responsáveis pelo decaimento  $\beta$  (fracas);

Estas forças podem ser atribuídas a corpos das vizinhanças e, portanto, são ditas reais. Forças como a tensão num fio, o atrito sobre uma superfície, a que se faz durante a compressão de uma parede ou de uma mola são eletromagnéticas. Não passam de manifestações macroscópicas de atrações e repulsões (eletromagnéticas) entre átomos.

As forças "reais" surgem da análise de um problema físico a partir de referenciais inerciais.

Lembra-se, aqui, que a terra pode ser considerada um sistema inercial de referência para fenômenos nos quais é lícito desprezar os efeitos de sua rotação e translação. Assim, parece-nos natural enunciar as leis da mecânica clássica, segundo referenciais inerciais, onde a idéia de forças "reais" nos parece bem contundente.

Essas leis clássicas, porém, podem ser aplicadas a referenciais acelerados (não inerciais), se forem adicionadas às forças reais, as chamadas forças "fictícias" ou forças de

inércia. Enquadram-se, nesta última categoria, forças como a centrífuga e a de Coriolis, que não podem ser atribuídas a corpos das vizinhanças. Tais forças desaparecem ao se utilizar um referencial inercial.

Para que sejam melhor entendidas, as forças fictícias, imagina-se uma partícula movendo-se livremente num plano que executa movimentação circular ao redor de um eixo a ele perpendicular. Em coordenadas polares:

$$\vec{r} = r \cdot \hat{r} \quad (B1)$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor posição ;

$$r = |\vec{r}|;$$

$$|\hat{r}| = 1$$

Obtém-se a velocidade por diferenciação da equação (B1) com relação ao tempo:

$$\vec{q} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{r} \frac{dr}{dt} + r \frac{d\hat{r}}{dt} \quad (B2)$$

sendo  $dr/dt = u$ , a componente radial da velocidade e

$d\hat{r}/dt = \hat{\theta} \cdot \omega = v$ , a componente tangencial (ver consideração 1, abaixo).

Assim, tem-se que:

$$\vec{q} = \hat{r} \frac{dr}{dt} + \hat{\theta} \omega r = \hat{r} u + \hat{\theta} v \quad (B3)$$

Diferenciando-se esta equação com relação ao tempo, tem-se a expressão para a aceleração da partícula, considerada:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{q}}{dt} = \hat{r} \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\hat{r}}{dt} + \left( \omega \frac{dr}{dt} + r \cdot \frac{d\omega}{dt} \right) \hat{\theta} + \omega \cdot r \cdot \frac{d\hat{\theta}}{dt} \quad (B4)$$

Rearranjando-se pode-se escrever:

$$\vec{a} = \hat{r} \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr}{dt} \cdot \omega \cdot \hat{\theta} + \hat{\theta} \cdot \omega \cdot \frac{dr}{dt} + \hat{\theta} \cdot r \frac{d\omega}{dt} - \omega^2 r \cdot \hat{r} \quad (\text{B5})$$

As seguintes considerações fazem-se necessárias:

1) O módulo de  $\Delta r$  é :

$$\|\Delta \hat{r}\| = \|\hat{r}\| \Delta \theta = \Delta \theta$$

Quando  $\Delta \theta \rightarrow 0$ , os vetores radiais unitários no instante "t" e "t +  $\Delta t$ " são praticamente paralelos, sendo a soma destes a eles perpendicular, isto é, com a direção de  $\hat{\theta}$ . Daí,

$$\Delta \hat{r} = \Delta \theta \hat{\theta}$$

Dividindo-se por  $dt$  e tomando-se o limite quando  $\Delta \theta \rightarrow 0$ , tem-se:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} = \omega \hat{\theta}$$

2) O módulo de  $\Delta \hat{\theta}$  é:

$$\|\Delta \hat{\theta}\| = \Delta \theta \|\hat{\theta}\| = \Delta \theta$$

Quando  $\Delta \theta \rightarrow 0$ , os vetores unitários tangenciais tornam-se paralelos e a diferença entre eles tem a mesma direção, porém o sentido contrário ao do vetor  $\hat{r}$ . Daí,

$$\Delta \hat{\theta} = - \Delta \theta \hat{r}$$

Dividindo-se por  $\Delta t$  e tomando-se o limite, tem-se:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\hat{r}}{dt} \hat{r} = -\omega \hat{r}$$

Justificadas, as substituições, faz-se novo rearranjo para se chegar a:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left( \frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r \right) \hat{r} + \left( r \frac{d\omega}{dt} + 2\omega \frac{dr}{dt} \right) \hat{\theta} \quad (B6)$$

Detalha-se, agora, cada um dos termos da equação anterior:  $\rightarrow d^2r/dt^2$  é a aceleração linear radial da partícula considerada;

$\rightarrow \omega^2 r$  é a aceleração centrípeta responsável pelo movimento circular;

$\rightarrow r d\omega/dt$  refere-se à aceleração angular;

$\rightarrow 2\omega dr/dt$  é a chamada aceleração de Coriolis e merece mais atenção. Nas equações (B4) e (B5) pode-se ver que a metade dela advém da alteração na direção do vetor deslocamento e a outra metade, da alteração no módulo deste vetor. Se  $dr/dt$  for igual a zero, o termo de Coriolis é anulado, assim como se  $\omega = 0$ . Evidencia-se, então, que a aceleração de Coriolis só existe quando, sob o ponto de vista de um referencial inercial, ocorrem juntamente movimentos nos quais  $dr/dt$  e  $\omega$  são distintos de zero!

Para tornar mais claro, o conceito, supõe-se uma pessoa caminhando com velocidade constante,  $u = dr/dt$ , ao longo de uma linha radial de um plano sob rotação. Observando-se a partir de um referencial ligado ao plano (portanto acelerado), diz-se que a pessoa está em equilíbrio, pois não possui aceleração. Porém, o plano exerce uma força sob os pés da pessoa. Esta força (de atrito) pode ser decomposta em uma componente radial,  $F_r \hat{r}$ , dirigida para o centro e uma componente tangencial,  $F_\theta \hat{\theta}$ , segundo o ângulo  $\theta$  (sentido da rotação). Do ponto de vista de um referencial inercial tais forças são compreensíveis e até mesmo necessárias.  $F_r$  é a aceleração centrípeta ( $\omega^2 r$ ) e  $F_\theta$  associa-se

com a aceleração de Coriolis ( $2\omega u$ ). Para o observador no plano em rotação, a pessoa está em equilíbrio não recebendo nenhuma destas acelerações. Mas é sabido que a força real de atrito atua sobre os pés da pessoa, que deve se inclinar para não cair.

Há um impasse entre as duas observações, que pode ser resolvido se o observador, no referencial girante, "perceber" a ação de duas forças "fictícias". Uma delas chamada força centrífuga de módulo  $F_c$ , dirige-se radialmente para fora. A outra, denominada força de Coriolis, tem módulo  $F_c$  e dirige-se segundo ângulos negativos, ou seja, contrariamente à rotação.

*A introdução das forças fictícias permite que um observador aplique as leis da mecânica clássica a partir de um referencial rotativo, mesmo que nenhum corpo da vizinhança seja responsabilizado pela ação de tais forças.*

Vai-se agora analisar os efeitos das forças de Coriolis e centrífuga num meio fluido em rotação.

## FORÇAS FICTÍCIAS NUM MEIO FLUIDO

Quando um escoamento tem como referência um sistema de eixos que gira com velocidade constante, juntamente com o fluido, urge que se adicione as forças de Coriolis e centrífuga, como já o sabe, o leitor.

Na maior parte dos problemas físicos, a força centrífuga não tem importância. Isto porque ela pode ser expressa em termos do gradiente de um escalar,

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\nabla\left(\frac{1}{2}\Omega^2 r'^2\right)$$

sendo  $r'$  a distância do eixo de rotação.

A substituição da pressão por:

$$P - \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r'^2$$

é equivalente à pressão piezométrica, onde se exclui a carga hidrostática.

A força centrífuga equilibra-se com o gradiente de pressão

radial que existe na presença e na ausência de qualquer movimento relativo ao referencial rotativo, não interagindo com tal movimento. Para que este procedimento não incorra em erros, a pressão não deve aparecer explicitamente nas condições de contorno e a densidade deve ser constante.

A força de Coriolís, por outro lado, faz surgirem, no meio fluido, fenômenos novos como, por exemplo, a "elasticidade" que é responsável pela produção de movimentos ondulatórios.

A simpática força fictícia, em questão, é uma força deflectiva que não realiza trabalho. Apenas a componente ( $u$ ), num plano normal à rotação (que se vai chamar de plano lateral) está envolvida (ver Figura B1). A força de Coriolís tende a alterar a direção desta componente. Se o sentido da rotação, no plano lateral for anti-horário, o sentido da força de Coriolís contrariará o do movimento dos eixos, sendo, portanto, horário.

Outra característica desta força é que ela é linear na velocidade, tendendo a alterar a direção da componente  $u$ , no plano lateral, à taxas constantes, independentemente da magnitude e da direção desta componente.

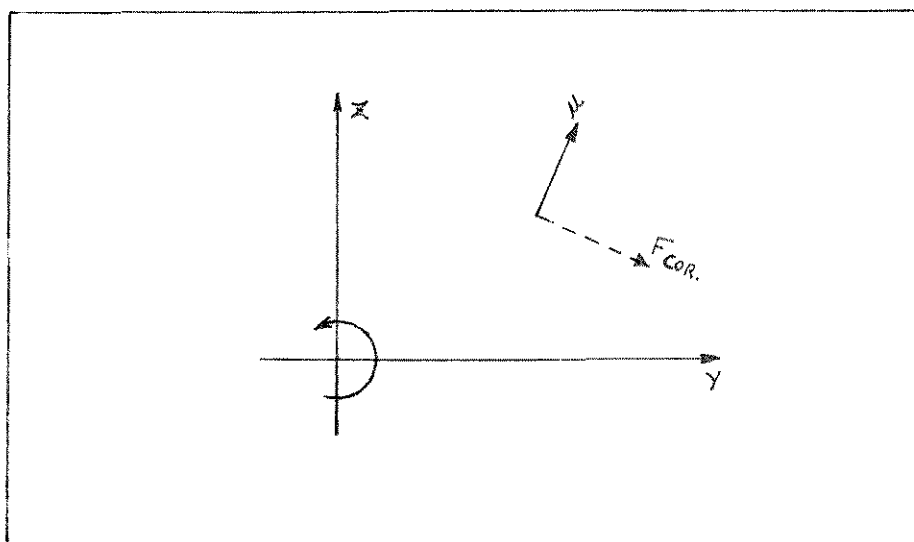


FIGURA B1: Plano lateral mostrando como atua a força de Coriolís.

Imagina-se, inicialmente, uma partícula fluida num escoamento dominado pela força de Coriolís (baixos números de Ekman e Rossby). Supõe-se que esta partícula mova-se radialmente para fora, no plano lateral considerado, com velocidade  $u$ . Esse movimento será, então, acompanhado pela força de Coriolís que deve orientar-se tangencialmente para a direita (com relação à rotação anti-horária). Gera-se, por consequência, um movimento que tende a ser perpendicular ao anterior (radial). Alterada a direção de  $u$ , altera-se a da força de Coriolís que agora orienta-se radialmente para dentro. Assim, pode-se escrever para uma partícula de massa unitária:

$$\frac{u^2}{r} = 2\Omega u$$

$$u = 2\Omega r$$

A partícula fluida completa um ciclo completo num tempo,

$$t = \frac{2\pi r}{u} = \frac{2\pi r}{2\Omega r} = \frac{\pi}{\Omega}$$

Um período que independe de  $u$  e que é duas vezes menor (frequência duas vezes maior) que o período de oscilação dos eixos rotativos,  $2\pi/\Omega$ .

A força de Coriolís tende, ante as evidências, a recolocar a partícula fluida na sua posição original, no plano lateral como indica o movimento espiralado da Figura B2.

Considera-se, agora, o efeito coletivo da força de Coriolís, em diferentes elementos materiais fluidos.

Supõe-se que relativamente aos eixos de rotação ocorra um movimento que conduza a uma taxa de expansão positiva, no plano lateral, isto é,

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_x}{\partial x}$$

numa certa região do fluido. A área determinada pela projeção de uma "curva material" fechada, nesta região, é consequentemente aumentada.



O efeito da força de Coriolís que acompanha esse movimento de expansão da projeção da curva é de gerar um movimento

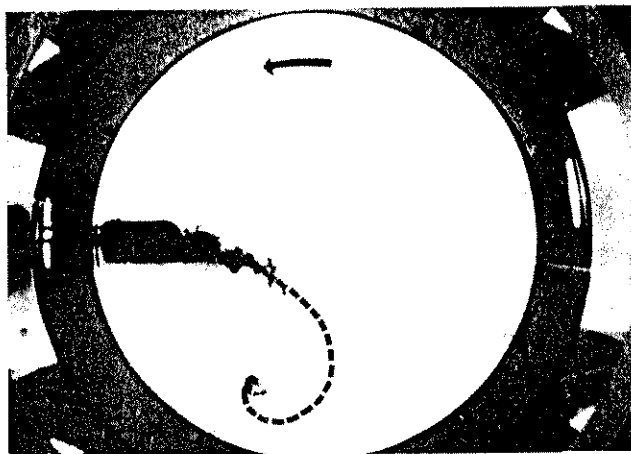


FIGURA B2: Rastro deixado por uma partícula lançada diametralmente. O caminho em espiral é resultado da ação da força de Coriolís (NCFMC, 1972).

tangencial da mesma, o qual contribui negativamente para a circulação (Apêndice C) ao longo de tal curva. Essa mudança na circulação do escoamento com relação aos eixos rotativos é não mais que a alteração necessária para manter constante a circulação absoluta (relativa a um sistema inercial), durante a expansão da área projetada no plano lateral.

O novo movimento tangencial gerado leva a uma nova direção para a força de Coriolís, que, agora, passa a ser normal à curva. Como o novo movimento tangencial deve obrigatoriamente levar a uma contribuição total negativa para a circulação, a força de Coriolís associada dirige-se a maior parte do tempo contrariamente à expansão, tendendo a reduzir a área projetada da curva material. De outra maneira pode-se dizer que em locais onde ocorrem expansões positivas, a força de Coriolís está no sentido de torná-las negativas e vice-versa.

Conclui-se, então, que o efeito "líquido" da força de

Coriolís é o de opor-se a deslocamentos fluidos, que de forma coletiva tendem a alterar a área da projeção de uma curva material, no plano lateral. É o que se pode chamar de elasticidade, que traduz a propriedade dos fluidos rotativos de se auto-estabilizarem.

A elasticidade é que dá origem às manifestações ondulatórias que se mostra na Secção II-2-2.

## APÊNDICE C

### CONCEITOS BÁSICOS

Neste apêndice são introduzidos alguns conceitos básicos concernentes aos fluidos rotativos. O texto que se apresenta teve como referências Vieira (1971) e Batchelor (1967).

#### LINHA DE TEMPO

Linha de tempo num instante  $t$  é o lugar geométrico determinado por partículas de fluido individualizadas no instante  $t_0$ . Este conceito é que permite saber sobre a rotação e a deformação ocorrentes num fluido em escoamento, além da visualização de perfis de velocidade.

#### LINHA DE CORRENTE

Define-se com linha de corrente o lugar geométrico que tem como tangente em cada ponto o vetor velocidade no ponto, num dado instante.

#### TUBO DE CORRENTE

Dá-se o nome de tubo de corrente ao conjunto de linhas de corrente tangentes a uma curva fechada, contida numa massa fluida em escoamento.

#### ROTACIONALIDADE

A rotação de uma partícula fluida é consequência da atuação de forças tangenciais e de momentos sobre esta partícula.

Referenciando-se tal partícula a um sistema de eixos triortogonais, é possível encontrar sua rotação em cada um dos três planos coordenados. Por exemplo, no plano  $Oxy$ , tem-se num instante  $t$  a posição da partícula caracterizada pelos segmentos ortogonais  $dx$  e  $dy$ , que após um intervalo de tempo elementar ocupam nova posição devido à rotação e a translação sofridas (Figura C1).

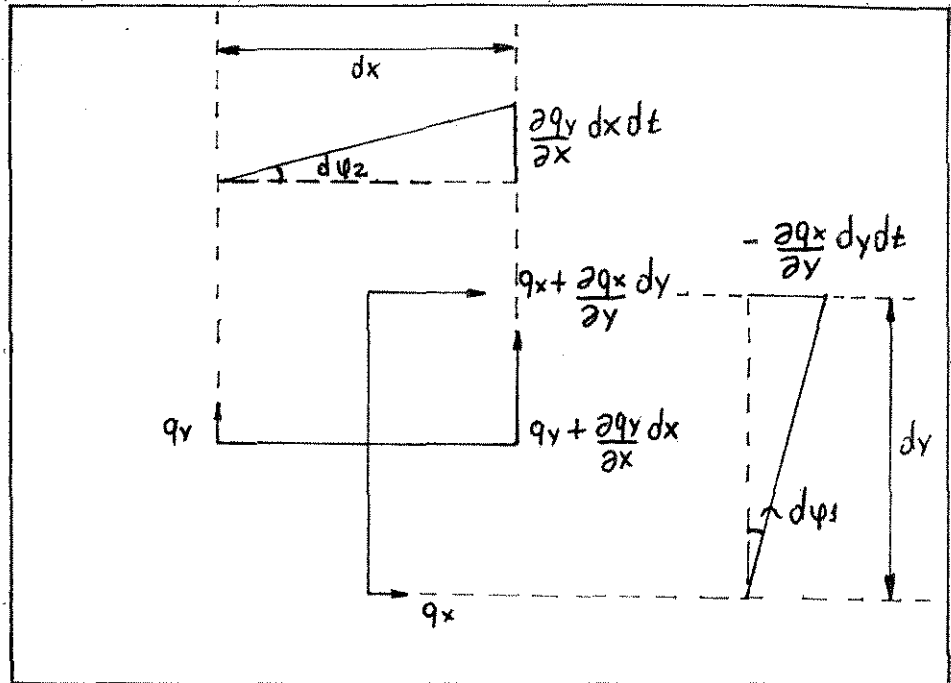


FIGURA C1: Esquema para a caracterização da rotação de uma partícula de fluido em escoamento.

A rotação da partícula se obtém do cálculo da rotação de cada um dos segmentos, individualizados como linhas de tempo, nos instantes  $t$  e  $t + dt$ .

Avaliando-se os espaços percorridos pelas extremidades dos segmentos  $dx$  e  $dy$  calcula-se os ângulos de rotação  $d\phi_1$  e  $d\phi_2$ :

$$d\phi_1 = \frac{-\frac{\partial q_x}{\partial y} dy dt}{dy} = -\frac{\partial q_x}{\partial y} dt$$

$$d\phi_2 = \frac{\frac{\partial q_y}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial q_y}{\partial x} dt$$

Dividindo-se os ângulos elementares pelo intervalo de tempo  $dt$ , tem-se:

$$\omega_1 = -\frac{\partial q_x}{\partial y}$$

$$\omega_2 = \frac{\partial q_y}{\partial x}$$

Definindo-se a velocidade de rotação da partícula fluida no plano Oxy como a semi-soma de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ :

$$\omega_z = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial q_y}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial y} \right)$$

De maneira análoga pode-se mostrar que:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z} \right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial q_x}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial x} \right)$$

A rotação total, ou seja, a rotacionalidade, é dada por:

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{q}$$

Em coordenadas cilíndricas, as componentes da rotacionalidade são dadas por:

$$\omega_r = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial r}{\partial z} \right)$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

Sabendo-se que uma partícula só entra em rotação quando forças tangenciais ou momentos atuam sobre ela, a expressão  $\nabla \times \vec{q}$ , que indica não haver rotação da partícula, indica também a ausência de momentos atuando sobre esta, em escoamento. Relembrando-se que momentos se fazem sentir através de forças de

atrito, de forças não conservativas como a de Coriolis, ou ainda em condições não barotrópicas de escoamento.

### CIRCULAÇÃO

Uma vez caracterizada a rotação das partículas de um fluido, pode-se obter sua rotação considerando-o como um todo, mediante integração das rotações extendidas à região do espaço ocupada pelo fluido. Define-se com tal objetivo a circulação  $\Gamma$  dada por:

$$\Gamma = \int_A \nabla \times \vec{q} \cdot d\vec{A}$$

Se o escoamento for irrotacional, isto é,  $\nabla \times \vec{q} = 0$ , a circulação será nula.

Em regiões nas quais  $\nabla \times \vec{q} \neq 0$ , a circulação será diferente de zero, exceto quando houver simetria do escoamento ao longo da área A.

Por meio do teorema de Stokes é possível relacionar a circulação,  $\Gamma$  (uma integral na área), com a integral de linha correspondente, determinada ao longo da curva que delimita a área de integração. Assim,

$$\Gamma = \int_A \nabla \times \vec{q} \cdot d\vec{A} = \oint \vec{q} \cdot d\vec{l}$$

### VORTICIDADE

A vorticidade é dada pelo dobro da rotacionalidade:

$$\mathfrak{R} = 2 \vec{\omega} = \nabla \times \vec{q}$$

### FILAMENTO DE VÓRTICE

Em analogia com a definição de linha de corrente, define-se o filamento de vórtice como a linha cuja tangente fornece o vetor rotação, num dado instante. Matematicamente:

$$d\mathbf{l} \times \mathfrak{K} = 0$$

Como as linhas de corrente, os filamentos de vórtice devem ter início e fim sobre paredes sólidas ou superfícies livres, ou então fecharem-se sobre si mesmos.

#### TUBO VORTICOSO

Define-se um tubo vorticoso como o conjunto dos filamentos de vórtice tangentes a uma curva fechada, contida numa massa fluida em escoamento.

Nos tubos vorticosos tem-se que:

$$\nabla \cdot \mathfrak{K} = 0$$

Comparando-se com a equação da continuidade, nota-se que o vetor  $\mathfrak{K}$  assemelha-se ao vetor velocidade para fluido incompressível e regime permanente. Em consequência, os filamentos de vórtice são análogos às linhas de corrente e os tubos vorticosos análogos aos tubos de corrente.

#### DINÂMICA DE VORTICIDADE

Em alguns casos é mais interessante a descrição do escoamento em termos da distribuição de vorticidade. Isto porque ela não pode ser criada ou destruída, no interior de um fluido homogêneo em escoamento sob condições normais. É produzida apenas nas extremidades das paredes conectadas ao fluido.

A equação da vorticidade é obtida tomando-se o rotacional da equação do movimento. Assim, se esta última for da forma:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} - \vec{q} \times \mathfrak{K} = F - \nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \|\vec{q}\|^2 \right) + \nu \nabla^2 \vec{q}$$

e se  $F$  for do tipo  $-\nabla \times \psi$ , pode-se escrever que:

$$\nabla H = \vec{q} \times \mathfrak{K} + \nu \nabla^2 \vec{q}$$

onde H é dado por

$$H = \frac{1}{2} \|\vec{q}\|^2 + \psi + \frac{P}{\rho}$$

Após tomado o rotacional a equação da vorticidade ganha o aspecto:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{q} \times \mathfrak{H}) + \nu \nabla^2 \omega$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = - \vec{q} \cdot \nabla \mathfrak{H} + \mathfrak{H} \cdot \nabla \vec{q} + \nu \nabla^2 \mathfrak{H}$$

onde se fez uso das relações:

$$\nabla \cdot \vec{q} = 0 \quad e \quad \nabla \cdot \mathfrak{H} = 0$$

Analisa-se, agora, as contribuições de cada um dos termos da equação anterior, na taxa de variação da vorticidade.

O termo  $\nu \nabla^2 \mathfrak{H}$  representa a taxa de mudança na vorticidade por difusão, como o termo  $\nu \nabla^2 \vec{q}$  representa a aceleração por difusão de velocidade (ou quantidade de movimento).

O termo  $\mathfrak{H} \cdot \nabla \vec{q}$  não tem seu equivalente na equação do movimento e é o que diferencia a equação da vorticidade. Seu significado pode ser melhor entendido ao reescrevê-lo, como abaixo:

$$\mathfrak{H} \cdot \nabla \vec{q} = \|\mathfrak{H}\| \cdot \lim_{PQ \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{q}}{PQ}$$

sendo P e Q dois pontos vizinhos num filamento de vórtice e  $\delta \vec{q}$  é a velocidade do fluido em Q relativamente à P.

A variação fracionária da vorticidade, isto é,



$$\frac{1}{\|\mathfrak{R}\|} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t}$$

é idêntica à variação fracionária da linha vetorial PQ.

É como se  $\mathfrak{R}$  fosse o elemento de uma linha material que coincide instantaneamente com uma porção do filamento de vórtice. Parte da mudança em  $\mathfrak{R}$  vem da rotação rígida desse elemento (em razão da componente do vetor velocidade normal à rotacionalidade) e parte vem da mudança em  $\mathfrak{R}$  devido à distensão ou contração do elemento de linha material (em razão da componente do vetor velocidade paralela à vorticidade).

## APÊNDICE D

### CAMADA LIMITE DE EKMAN

Procura-se neste apêndice dar um tratamento mais convencional ao problema de camada limite acima de um disco rotativo, resolvendo-se o sistema de equações pertinentes numericamente. O desenvolvimento que aqui se mostra é uma síntese do apresentado por Schlichting (1960).

As equações de Navier-Stokes são mais adequadamente escritas em coordenadas cilíndricas:

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (D1.A)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{v}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (D1.B)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (D1.C)$$

A equação da continuidade é:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (D1.D)$$

A condição de aderência no disco fornece:

$$z = 0 \quad u = 0 \quad v = \Omega r \quad w = 0$$

Para o fluido distante do disco tem-se:

$$z \rightarrow \infty \quad u = 0 \quad v = 0$$

Estima-se a seguir a espessura da camada de fluido que sofre a ação do disco.

A força centrífuga por volume que atua numa partícula girando a uma distância  $r$  do eixo é dada por:

$$\frac{F_c}{Vol.} = \rho r \Omega^2$$

Se  $Vol. = dr \cdot dS \cdot \delta$  (sendo  $dS$  a área elementar e  $\delta$  a espessura da camada) tem-se:

$$F_c = \rho r \Omega^2 \delta \cdot dr \cdot dS$$

Contrapondo-se à ação centrífuga ocorre uma viscosa, devido a tensão,  $\tau_w$ , na direção do deslocamento do fluido e formando um ângulo  $\theta'$  com a velocidade tangencial. A condição de equilíbrio exige que:

$$\tau_w \cdot \text{sen} \theta' \cdot dr \cdot dS = \rho \cdot r \cdot \Omega^2 \delta \cdot dr \cdot dS$$

daí,

$$\tau_w = \frac{\rho r \Omega^2 \delta}{\text{sen} \theta'} \quad (D2)$$

A componente tangencial da tensão viscosa deve ser proporcional ao gradiente de velocidade tangencial na parede. Assim,

$$\tau_w \cdot \text{cos} \theta' \sim \mu \frac{\partial v}{\partial z} \sim \mu \frac{\Omega r}{\delta} \quad (D3)$$

Eliminando-se a tensão das duas últimas equações vem que:

$$\delta^2 \sim \frac{v}{\Omega} \text{Tg} \theta'$$

Se se considerar que a direção do escoamento, nas proximidades da parede, independe do raio,

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}$$

Para se integrar o sistema de equações (D1) é conveniente que se introduza a distância axial adimensional  $\zeta \sim z/\delta$ , ou:

$$\zeta = z\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}$$

São assumidas as seguintes formas para as componentes do vetor velocidade e para a pressão:

$$u = r.\Omega.F(\zeta) \quad ; \quad v = r.\Omega.G(\zeta)$$

$$w = \sqrt{\nu.\Omega} H(\zeta) \quad ; \quad p = p(z) = \rho.\nu.\Omega.P(\zeta)$$

Substituindo-se estas expressões no sistema de equações (D1):

$$2F + H' = 0 \tag{D4.A}$$

$$F^2 = F'H - G^2 - F'' = 0 \tag{D4.B}$$

$$2FG + HG' - G'' = 0 \tag{D4.C}$$

$$P' + HH' - H'' = 0 \tag{D4.D}$$

Com as novas condições de contorno:

$$\zeta = 0 : \quad F = 0 , \quad G = 0 , \quad H = 0 , \quad P = 0$$

$$\zeta = \infty : \quad F = 0 , \quad G = 0$$

A Tabela D1 apresenta os resultados da solução numérica das equações (D4) e na Figura D1 tais resultados são apresentados na forma gráfica.

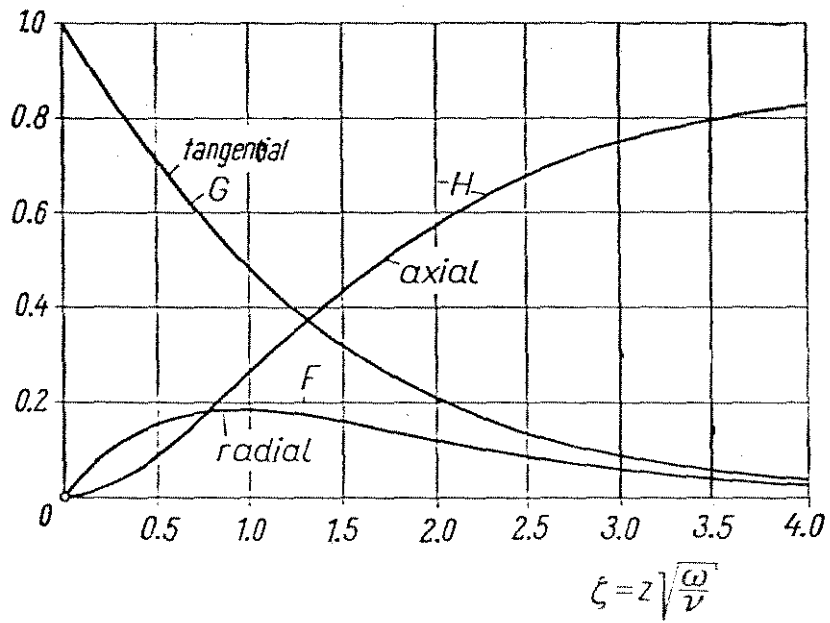


FIGURA D1: Componentes do vetor velocidade na camada limite de Ekman (Schlichting, 1960).

TABELA D1: Resultado da resolução numérica do sistema de equações D4 (Schlichting, 1960).

$\zeta = z/\Omega/\nu$	F	G	-H	P	F'	-G'
0	0	1.0	0	0	0,510	0,616
0,2	0,084	0,878	0,018	0,167	0,334	0,599
0,4	0,136	0,762	0,063	0,275	0,200	0,558
0,6	0,166	0,656	0,124	0,340	0,102	0,505
0,8	0,179	0,561	0,193	0,377	0,032	0,448
1,0	0,180	0,468	0,266	0,395	-0,016	0,391
1,2	0,173	0,404	0,336	0,403	-0,046	0,338
1,4	0,162	0,341	0,404	0,406	-0,064	0,290
1,6	0,148	0,288	0,466	0,405	-0,073	0,247
2,0	0,118	0,203	0,572	0,401	-0,074	0,177
2,4	0,091	0,143	0,656	0,396	-0,065	0,126
2,8	0,068	0,101	0,721	0,395	-0,052	0,089
3,2	0,050	0,071	0,768	0,395	-0,040	0,063
3,6	0,036	0,050	0,802	0,394	-0,030	0,044
4,2	0,022	0,029	0,836	0,393	-0,019	0,026
$\infty$	0	0	0,886	0,393	0	0

## CAPÍTULO VI - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATCHELOR, G.K. *An Introduction to Fluid Mechanics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1967, 615.
- BENTON, E.R. Non-linear hydrodynamic and hydromagnetic spin-up driven by Ekman-Hartmann boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 57: 337-360, 1973.
- BENTON, E.R. & CLARK, A. Spin-up, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 6: 257-280, 1974.
- BIRD, R. B. & ARMSTRONG, R. C. & CURTIS, C. F. *Dinamics of polimeric liquids*, 2ª edição, Volume 1, John Wiley & Sons, 1977, 649.
- CURRIE, P.K. & NIEUWKOOP, J. Buoyancy effects in the spinning-drop interfacial tensiometer. *Journal of Colloid and Interface Science*, 87(2): 301-316, 1982.
- HALLIDAY, D. & RESNICK, R. *Fisica I*, Livros técnicos e científicos, 4ª edição, 1983, 348.
- DEIBER, J.A. & CERRO, R.L. Viscous flow with a free surface inside a horizontal rotating drum. I - Hydrodynamics. *Industrial Engng Chem. Fundam.*, 15: 102-110, 1976.
- GREENSPAN, H.P. *The theory of rotating fluids*, Cambridge, Cambridge University Press, 1968, 328.
- GREENSPAN, H.P. & HOWARD, L.N. On the time dependent motion of a rotating fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 17: 385-404, 1963.
- JOHNSON, R.E. Steady-state coating flows inside a rotating horizontal cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 190: 321-342, 1988.
- MCLEOD, A.R. The unsteady motion produced in a uniformly rotating cylinder of water by a sudden change in the angular velocity of the boundary. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 44(259): 1-14, 1922.
- NCFMC (National Committee for Fluid Mechanics Films). *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics*, Halliday Lithograph, 1972, 251.
- PHILLIPS, O.M. Centrifugal Waves. *Journal of Fluid*

- Mechanics*, 7: 340-352, 1960.
- PINTO NETO, M. & VITALI, A. A. & KIECKBUSCH, T. G. Transferência de calor no aquecimento de soluções contendo partículas sólidas em latas cilíndricas sob rotação axial, *Anais do xix Encontro Nacional sobre Escoamento em Meios Porosos*, Campinas, vol. II, pg. 834-844, 1992.
- ROGERS, M.H. & LANCE, G.N. The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disk. *Journal of Fluid Mechanics*, 7: 617-631, 1960.
- RUSCHAK, K.J. & SCRIVEN, L.E. Rimming flow of liquid in a rotating horizontal cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 76: 113-125, 1976.
- SCHLICHTING, H. *Boundary layer theory*, McGraw-Hill, 4ª edição, 1960, 747.
- STEWARTSON, K. On the almost rigid motions. *Journal of Fluid Mechanics*, 3: 17-26, 1957.
- TAYLOR, G.I. Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 223: 289-343, 1923.
- TRITTON, D.J. *Physical fluid dynamics*, Oxford, Clarendon Press, 2ª edição, 1988, 519.
- VENEZIAN, G. Non-linear spin-up. *Topics in Ocean. Engng*, 2:87-96, 1970.
- VIEIRA, R.C.C. *Atlas de mecânica de fluidos - Cinemática*, Editora Edigar Blücker, 1971, 130.
- WEDEMEYER, E.H. The unsteady flow within a spinning cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 20: 383-399, 1964.
- WEIDMAN, P.D. On the spin-up and spin-down of rotating fluid. Part 1. *Journal of Fluid Mechanics*, 77: 685-708.
- WEIDMAN, P.D. On the spin-up and spin-down of rotating fluid. Part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, 77: 709-735.
- WHITE, R. E. & HIGGINS, T. W. Effect of Fluid Properties on



Condensate Behavior, *TAPPI*, 41(2): 71-76, 1958.

## "ABSTRACT"

An alternative and simple way of improving the heat transfer, during thermal treatment of canned foods consists in rotating it horizontally around its axis in a spin cooker cooler. This procedure causes the head space (at about 10% of the total volume in order necessary to accommodate pressure oscillations) agitate and mix the liquid medium.

Previous studies showed an unexpected behavior of the overall heat transfer coefficient as function of the head space volume inside the can. Seeking the comprehension of the hydrodynamic in the flow under rotation, a study using isothermal full and partially filled cylinders was carried out.

Acrylic cylinders were used, allowing visual observations and photographs of the fluids, while flowing.

In completely filled cylinders, secondary streams overlapping the main azimuthal flow were detected, according to references in the literature. This secondary streams damped out after the insertion of small bubbles remained near the vertical flat surfaces.

In partially filled horizontal cylinders, the flow phases well characterized as ponding, cascading and rimming observed when the liquid volume is less than 10%, maintained the same basic structures until charges of 95%.

KEY WORDS: Fluid dynamics, Rotating masses of fluids, Fluid flowing.