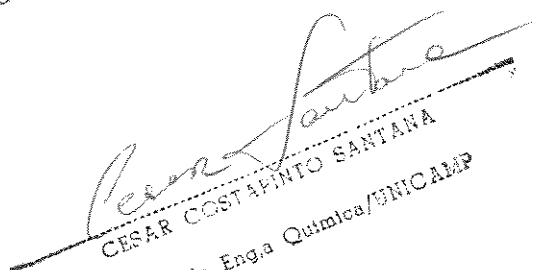


este exemplar
responde à redação
final da tese defendida por
uma blonera Almeida Paiva e apro-
vada pela Comissão Juladora em 22/10/90


CESAR COSTAFINTO SANTANA
Depto de Eng. Química/UNICAMP

Escoamento Anular de Fluidos Não-Newtonianos Utilizando Modelo Reológico a Três Parâmetros

Outubro de 1990
Campinas-SP-Brasil

1278.


Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Química

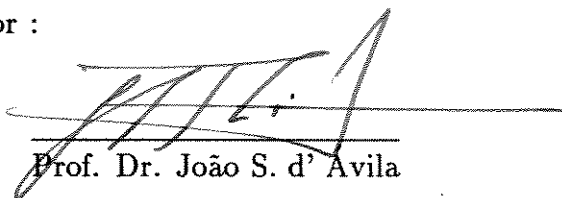
Escoamento Anular de Fluidos Não-Newtonianos Utilizando Modelo Reológico a Três Parâmetros


Autor: Ana Eleonora Almeida Paixão \tilde{n}

Tese submetida à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Química - UNICAMP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Química.

Aprovada por :


Prof. Dr. Sandra C. dos S. Rocha


Prof. Dr. João S. d'Ávila


Orientador: Prof. Dr. Cesar Costapinto Santana \dagger

Campinas-SP-Brasil
Outubro -1990

11700620
59
700-7100320

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A meus pais, Arlete e José Paixão,
que sempre me incentivaram
A meus filhos, Luiz e Luana Paixão Lisboa,
que procurem seguir o exemplo

Agradecimentos

Ao Prof. Cesar C. Santana pela dedicada orientação, pelo apoio na divulgação do trabalho e sobretudo, por sua amizade.

À Universidade Federal de Sergipe e em particular ao Departamento de Engenharia Química.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho.

A todos os meus amigos.

Resumo

A indústria química e também a área de prospecção de petróleo utilizam frequentemente muitas suspensões sólido-líquido de comportamento reológico não-newtoniano com tensão residual, que é um valor crítico abaixo do qual o fluido escoar sem deformação. Essa característica exige o uso de modelos reológicos mais sofisticados para descrever o seu comportamento fluido-dinâmico.

As circunstâncias normalmente verificadas na prática requerem que as correlações usadas para descrição do fenômeno acima citado sejam capazes de prever o comportamento do escoamento abrangendo as condições dos regimes laminar, transição e turbulento.

O presente trabalho apresenta uma formulação matemática que visa obter correlações que atendam as necessidades das aplicações práticas. Para tanto, realizou-se o estudo detalhado da utilização de um modelo reológico a três parâmetros (Modelo de Robertson & Stiff) para a análise do escoamento anular em tubulações, tendo sido elaboradas novas definições de Número de Reynolds e de Número de Hedstrom.

Para o escoamento laminar são apresentadas correlações para o coeficiente de atrito em função do Número de Reynolds de Robertson & Stiff, contendo um parâmetro adicional que considera a influência da tensão residual. Nessas correlações também estão incluídos parâmetros constantes para cada geometria de escoamento.

Na região de escoamento de transição, o trabalho apresenta uma formulação matemática inédita, utilizando o modelo reológico de Robertson & Stiff, que permite a predição do ponto ou da região de transição. Nesse procedimento obteve-se um sistema de equações altamente não lineares cuja solução numérica é apresentada sob a forma de tabela.

Os dados experimentais publicados por Langlinais *et alli* [33], Silva *et alli* [34] e Silva [35], obtidos em duas diferentes unidades piloto com fluidos de perfuração também foram de grande valia no estudo realizado na região de escoamento de transição e turbulento, permitindo inclusive a obtenção de

correlações empíricas em ambas as regiões estudadas.

Desse modo o trabalho atinge o principal objetivo que o motivou, qual seja, realizar um estudo abrangente utilizando o modelo reológico de Robertson & Stiff nas regiões de escoamento laminar, de transição e turbulento, resultando numa formulação matemática inédita que descreve o fluxo de fluidos não newtonianos com tensão residual.

Abstract

Several solid-liquid suspensions frequently encountered in chemical industry and also in oil well drilling operations exhibit a non-Newtonian behavior with an yield stress, a critical value of stress below which they do not flow. This fluid dynamic behavior makes it necessary to use more sophisticated rheological models to describe its laminar flow.

Due to the real conditions usually verified, it is important to master calculations techniques involve the laminar also the transitional and turbulent flow regimes.

This thesis consists of an unpublished work presenting an inedit mathematical formulation in order to propose correlations of practical use. The realized study of the annular flow between concentric pipes was based on Robertson and Stiff's rheological model, which is a three-parameter equation, and on new definitions of Reynolds and Hedstrom numbers.

The proposed correlations to the factor friction related to Robertson and Stiff's Reynolds number in laminar flow involves one additional parameter considering the yield stress effects and a second one including also the flow geometry.

The transitional flow study resulted in an inedit theoretical formulation using Robertson and Stiff's rheological model that enables the transitional point or region prediction. This procedure led to a system of highly non-linear equations and its numerical solution is presented in a table.

By using experimental drilling muds flow data, from two different pilot plants, published by Langlinais *et alli* [33], Silva *et alli* [34] and Silva [35], it was possible to extend the results in order to get empirical equations to predict the transitional and turbulent flow behavior.

The main purpose was reached, i.e., to present an extensive study of laminar, transitional and turbulent flow behavior by using Robertson and Stiff's rheological model leading to an inedit mathematical formulation which describes the yield stress non-Newtonian fluids flow.

Nomenclatura

- a – constante empírica utilizada por Gill & Scher que reflete o início da transição
- A – parâmetro reológico do modelo de Robertson & Stiff
- A^* – parâmetro dado pela equação na seção II.1.3
- A_{Lr} – área lateral do rotor de um reômetro rotatório
- b – constante empírica utilizada por Gill & Scher que reflete o amortecimento viscoso
- B – parâmetro reológico do modelo de Robertson & Stiff
- c – parâmetro dado pela equação (A.3) (reômetro rotatório)
- C – parâmetro reológico do modelo de Robertson & Stiff
- D – diâmetro do tubo
- D_e – diâmetro equivalente no caso de escoamento entre placas paralelas
- D_{eq} – diâmetro equivalente dado pela equação II.3
- D_1 – diâmetro externo do tubo interno, na geometria anular
- D_2 – diâmetro interno do tubo externo, na geometria anular
- E – termo definido pela equação (II.81)
- f – coeficiente de atrito de Fanning, dado pela equação (III.12)
- f_c – coeficiente de atrito de Fanning no ponto crítico

- \mathcal{F} – função dada pela equação (III.55)
- $F_1(t)$ – função dada pela equação (A.9) (reômetro rotatório)
- $F_2(t)$ – função dada pela equação (A.10) (reômetro rotatório)
- $F_3(t)$ – função dada pela equação (A.11) (reômetro rotatório)
- \mathcal{G}_1 – função dada pela equação (III.58)
- \mathcal{G}_2 – função dada pela equação (III.67)
- $\mathbf{G}(\xi, \xi_0, R)$ – expressão dada pela equação (II.80)
- h – meia-distância entre duas placas paralelas
- \mathbf{He}^* – Número de Hedstrom proposto nesse trabalho para escoamento de fluidos de Robertson & Stiff, dado pela equação (III.22)
- \mathbf{He}_{HB} – Número de Hedstrom definido pela equação (II.23) para o modelo de Herschel & Bulkley
- \mathbf{He}_{PB} – Número de Hedstrom definido após a equação (II.56) para o modelo de Plástico de Bingham
- $\mathbf{He}_{\text{PB}_p}$ – Número de Hedstrom para escoamento de Plástico de Bingham dado pela equação (II.88)
- k – parâmetro de consistência para os modelos "Power-Law" e Herschel & Bulkley
- k' – constante referente à expressão do comprimento de mistura de Prandtl
- \mathbf{K} – parâmetro de estabilidade dado pela equação (II.45)
- L – comprimento do tubo ou da placa ou ainda comprimento de mistura de Prandtl
- L_r – leitura no reômetro rotatório
- n – índice do comportamento para os modelos "Power-Law" e Herschel & Bulkley

- N – parâmetro dado pela equação (A.6) (reômetro rotatório)
 $N^{(1)}$ – parâmetro dado pela equação (A.7) (reômetro rotatório)
 $N^{(2)}$ – parâmetro dado pela equação (A.8) (reômetro rotatório)
 q – pseudotaxa de deformação (vazão por unidade de área)
 Q – vazão volumétrica do fluido
 r – coordenada radial
 r_1 – raio externo do tubo interno, na geometria anular
 r_2 – raio interno do tubo externo, na geometria anular
 R – raio do tubo
 R' – parâmetro definido como $R' \equiv Re \sqrt{f}$
 R_1 – raio do rotor (reômetro rotatório)
 R_2 – raio do cilindro (reômetro rotatório)
 R'_c – valor de R' no ponto crítico
 R_i – raio externo do tubo interno, na geometria anular
 R_e – raio interno do tubo externo, na geometria anular
 Re – Número de Reynolds para fluidos newtonianos
 Re^* – Número de Reynolds definido após a equação (II.73)
 Re_c – Número de Reynolds crítico para fluidos newtonianos
 Re_{HB} – Número de Reynolds definido pela equação (II.21) para o modelo de Herschel & Bulkley
 Re_{HB}^* – Número de Reynolds definido pela equação (II.26) para o modelo de Herschel & Bulkley
 Re_{HB1} – Número de Reynolds definido pela equação (II.64) para o modelo de Herschel & Bulkley

Re_{PB} – Número de Reynolds definido após a equação (II.56) para o modelo de Plástico de Bingham

Re_{PBp} – Número de Reynolds para escoamento de Plástico de Bingham dado pela equação (II.87)

Re'_{PL} – Número de Reynolds definido pela equação (II.60) para o modelo "Power-Law"

Re^*_{HB} – Número de Reynolds definido pela equação (II.26) para o modelo de Herschel & Bulkley

Re_{RS} – Número de Reynolds dado pela equação (II.69) para o modelo de Robertson & Stiff

Re^*_{RS} – Número de Reynolds proposto nesse trabalho aplicado a fluidos de Robertson & Stiff, definido pela equação (III.20) para o caso de escoamento em tubos e pela equação (III.38) para escoamento em geometria anular

t – parâmetro dado pela equação (A.5) (reômetro rotatório)

u – velocidade adimensional, dada por: $u = \frac{v}{\langle v \rangle}$

u^* – velocidade de atrito, dada por: $u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$

u_0 – velocidade adimensional e constante do fluido quando a tensão de cisalhamento aplicada é menor ou igual à tensão residual do fluido, dada por: $u_0 = \frac{V}{\langle v \rangle}$

v_z – componente axial da velocidade do fluido

$\langle v \rangle$ – velocidade média de escoamento

V – velocidade constante do fluido quando a tensão de cisalhamento aplicada é menor ou igual à tensão residual do fluido

y – coordenada de posição medida a partir da meia-distância entre as placas ou coordenada de posição medida a partir do contorno do duto

- μ – viscosidade dinâmica
- μ_e – viscosidade efetiva, dada por $\mu_e = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$
- μ_p – viscosidade plástica, para o modelo Plástico de Bingham
- ξ – posição adimensional; para tubos ou geometria anular $\xi = \frac{r}{R}$ e para escoamento entre placas paralelas $\xi = \frac{x}{h}$
- ξ_0 – tensão residual adimensional ($\xi_0 = \frac{\tau_0}{\tau_R}$)
- ξ_c – valor de ξ no ponto crítico
- σ – massa específica do fluido
- σ – parâmetro dado pela equação (II.19)
- τ – tensão de cisalhamento
- $\bar{\tau}$ – tensão de cisalhamento média, dada pela equação (A.13)
- τ_1 – tensão de cisalhamento no cilindro interno (reômetro rotatório)
- $\tau_{ij}^{(t)}$ – tensão de cisalhamento no escoamento turbulento
- τ_{\min} – tensão de cisalhamento mínima
- τ_{\max} – tensão de cisalhamento máxima
- τ_0 – tensão residual
- τ_R – tensão residual na parede da tubulação
- ϕ – parâmetro que reflete a influência do amortecimento viscoso no estudo do escoamento turbulento
- $\phi(n)$ – parâmetro dado após a equação (II.42), válido para fluidos pseudoplásticos
- Φ – variável adimensional definida no escoamento entre placas paralelas e dada por $\Phi = \frac{x}{h}$
- Φ_c – valor de Φ no ponto crítico

y_m – valor máximo de y

\mathcal{Y} – expressão dada pela equação (III.11), para escoamento de fluidos de Robertson & Stiff em tubos

\mathcal{Y}^* – expressão dada pela equação (III.31), para escoamento de fluidos de Robertson & Stiff em geometria anular

Z – critério de estabilidade dado pela equação (II.40)

Z_{\max} – valor máximo do critério de estabilidade Z

Letras Gregas

α – razão entre os raios dos tubos interno e externo, respectivamente, para geometria anular

α_c – parâmetro dado após a equação (II.42), válido para fluidos pseudoplásticos

$\dot{\gamma}$ – taxa de deformação

$\dot{\gamma}_{\text{medio}}$ – taxa de deformação, correspondente, na curva reológica, ao valor de $\bar{\tau}$

$\dot{\gamma}_{\min}$ – taxa de deformação mínima

$\dot{\gamma}_{\max}$ – taxa de deformação máxima

Γ – taxa de deformação adimensional dada por $\Gamma = -\frac{du}{d\xi}$

δ – diferença entre os raios dos tubos externo e interno, em se tratando do escoamento em geometria anular

ΔP – queda de pressão

ϵ – variável adimensional dada por $\epsilon = \frac{\delta}{r_1}$ ou rugosidade do tubo

ζ – variável adimensional, dada por $\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_R}$

λ – posição radial na qual a tensão de cisalhamento aplicada ao fluido se iguala a sua tensão residual ou ainda a razão entre o comprimento de mistura de Prandtl e o raio do tubo

φ_{HB} – parâmetro definido pela equação (II.27)

χ – variável adimensional definida após a equação (II.52)

$\psi(\epsilon)$ – parâmetro dado pela equação (II.50)

φ – parâmetro adimensional proposto nesse trabalho, válido para escoamento de um fluido de Robertson & Stiff num tubo e dado pela equação (III.17)

φ^* – parâmetro adimensional proposto nesse trabalho, válido para escoamento de um fluido de Robertson & Stiff em geometria anular e dado pela equação (III.37)

Ω – velocidade angular (reômetros rotatórios)

Conteúdo

I	Introdução	6
II	Revisão Bibliográfica	12
II.1	Escoamento Laminar em Tubos e Ânulos	12
II.1.1	Plástico de Bingham	13
II.1.2	Fluidos <i>Power-Law</i>	15
II.1.3	Fluidos de Herschel & Bulkley	18
II.1.4	Fluidos de Robertson & Stiff	21
II.2	Transição Laminar-Turbulento	25
II.2.1	Critério de Estabilidade	25
II.2.2	Plástico de Bingham	31
II.2.3	Fluidos <i>Power-Law</i>	33
II.2.4	Fluidos Herschel & Bulkley	34
II.2.5	Fluidos de Robertson & Stiff	37
II.3	Escoamento Turbulento	38
II.3.1	Comprimento de Mistura	38
II.3.2	Plástico de Bingham	41
II.3.3	Fluidos <i>Power-Law</i>	45
II.3.4	Fluidos de Herschel & Bulkley	47
II.3.5	Fluidos de Robertson & Stiff	49
III	Formulação Matemática Adimensional para Escoamento La-	
	minar e de Transição de um Fluido de Robertson & Stiff	52
III.1	Modelo Reológico	52
III.2	Escoamento em Tubos	54
III.2.1	Perfil de Velocidade	54
III.2.2	Velocidade Média	56

III.2.3	Coefficiente de Atrito	57
III.2.4	Número de Reynolds Generalizado	58
III.2.5	Número de Hedstrom Modificado	59
III.3	Escoamento Anular	60
III.3.1	Perfil de Velocidade	60
III.3.2	Velocidade Média	61
III.3.3	Coefficiente de Atrito	62
III.3.4	Número de Reynolds Generalizado	64
III.3.5	Número de Hedstrom Modificado	64
III.4	Parâmetro de Estabilidade Aplicado ao Modelo de Robertson & Stiff	65
III.4.1	Introdução	65
III.4.2	O Parâmetro de Estabilidade aplicado ao Escoamento em Tubos	67
III.4.3	O Parâmetro de Estabilidade aplicado ao Escoamento Anular	70
IV	Apresentação e Discussão dos Resultados para Escoamento Anular	75
IV.1	Introdução	75
IV.2	Gráficos Adimensionais	77
IV.2.1	Escoamento em Regime Laminar	77
IV.2.2	Região de Transição	78
IV.2.3	Escoamento em Regime Turbulento	78
IV.3	Comparação Direta da Queda de Pressão	80
V	Conclusões e Sugestões	103
V.1	Conclusões	103
V.2	Sugestões	105
A	Metodologia para o Cálculo dos Parâmetros Reológicos	106
A.1	Obtenção dos dados reológicos	106
A.1.1	Obtenção da tensão de cisalhamento	106
A.1.2	Obtenção da taxa de deformação	106
A.2	Obtenção dos parâmetros reológicos	108

Lista de Figuras

I.1	Taxas de deformação para fluidos de perfuração	10
I.2	Diagrama Reológico para alguns modelos	11
II.1	Aproximação do espaço anular por placas paralelas	17
IV.1	Coefficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema n ^o 12	81
IV.2	Coefficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema n ^o 8	82
IV.3	Coefficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema n ^o 9	83
IV.4	Coefficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema n ^o 11	84
IV.5	Coefficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema n ^o 13	85
IV.6	Coefficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema n ^o 14	86
IV.7	Coefficiente de Atrito em função do Número de Reynolds proposto, tendo como parâmetro o Número de Hedstrom , para $B = 0,3$	87
IV.8	Número de Reynolds crítico em função do Número de Hedstrom modificado	88

IV.9 Gráfico adimensional para o coeficiente de atrito no escoamento turbulento	89
IV.10 Coeficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema n ^o 3	90
IV.11 Gráfico Generalizado para alguns Sistemas	91
IV.12 Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n ^o 12	92
IV.13 Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n ^o 4	93
IV.14 Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n ^o 6	94
IV.15 Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n ^o 8	95
IV.16 Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n ^o 9	96
IV.17 Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n ^o 11	97
IV.18 Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n ^o 13	98
IV.19 Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n ^o 14	99
IV.20 Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n ^o 15	100
IV.21 Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n ^o 1	101
IV.22 Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n ^o 3	102

Lista de Tabelas

I.1	Parâmetros Reológicos das Suspensões a 28°C	9
III.1	Resultados referentes à predição da Transição	74
IV.1	Descrição dos Sistemas Experimentais	76

Capítulo I

Introdução

O escoamento de suspensões tem sido utilizado há bastante tempo e tem recebido atenção especial na comunidade científica, sendo esta atenção focalizada especialmente para o estudo da fluidodinâmica em dutos circulares.

Sistemas de bombeamento de suspensões ocorrem de várias formas. Dependendo do objetivo de um sistema em particular, pode-se encontrar suspensões diluídas ou concentradas, suspensões com partículas de mesmo tamanho ou tendo uma faixa de distribuição de tamanho da partícula.

Do ponto de vista reológico, a suspensão pode se comportar como um fluido newtoniano, o que não é muito comum, ou pode apresentar características reológicas não newtonianas.

O projeto de um sistema de transporte para fluidos newtonianos está bem estabelecido e descrições do procedimento podem ser encontradas nos manuais de engenharia. Para fluidos não newtonianos, entretanto, o tratamento matemático torna-se mais envolvido devido aos diferentes tipos de comportamento com relação à dependência entre a tensão de cisalhamento τ e a taxa de deformação $\dot{\gamma}$.

Os modelos reológicos mais simples procuram descrever o comportamento do fluido em escoamento através de uma relação entre essas duas variáveis fundamentais, válida para o escoamento laminar.

Os modelos clássicos são os seguintes:

- Plástico de Bingham :

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma} & \tau > \tau_0 \\ 0 &= \dot{\gamma} & \tau \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (I.1)$$

- Modelo *Power-Law*:

$$\tau = k \dot{\gamma}^n \quad (I.2)$$

onde: τ - tensão de cisalhamento aplicada ao fluido
 $\dot{\gamma}$ - taxa de deformação sofrida pelo fluido
 τ_0 - tensão residual
 μ_p - viscosidade plástica
 k - parâmetro de consistência do fluido
 n - índice de comportamento do fluido

Observamos que existem aspectos distintos nos dois modelos supra-citados. No modelo de Bingham, existe uma relação linear entre a tensão de cisalhamento aplicada e a taxa de deformação sofrida pelo fluido; entretanto, nele aparece outro parâmetro, a tensão residual, que é o valor mínimo de tensão necessária para que o fluido escoe. Já no modelo *Power-Law*, não mais existe esta relação linear entre tensão e taxa de deformação; o modelo propõe uma relação potencial, não se aplicando a fluidos que possuam tensão residual.

Analisando dados experimentais, observou-se que muitos fluidos não seguiam rigorosamente nenhum dos dois modelos citados anteriormente, especialmente na faixa de baixos valores de taxa de deformação. Observou-se ainda que o comportamento reológico destes fluidos poderia ser uma junção dos dois, apresentando tensão residual e relação do tipo potencial entre tensão e taxa de deformação. Os modelos que apresentam estas características são os propostos por Herschel & Bulkley [1] e por Robertson & Stiff [2].

- Modelo de Herschel & Bulkley [1]:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + k \dot{\gamma}^n & \tau > \tau_0 \\ 0 &= \dot{\gamma} & \tau \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

que é um modelo reológico a três parâmetros, possuindo portanto uma capacidade maior para o ajuste de resultados experimentais.

- Modelo de Robertson & Stiff [2]:

$$\begin{aligned} \tau &= A (\dot{\gamma} + C)^B & \tau > \tau_0 \\ 0 &= \dot{\gamma} & \tau \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde τ_0 é a tensão residual, sendo igual a AC^B .

Para diversos tipos de fluidos, este modelo se adapta muito bem, havendo desvios médios bem menores que os correspondentes aos apresentados por outros modelos, como podemos observar na Tabela I.1, obtida por Ataíde [3].

Neste trabalho estudaremos o escoamento de um fluido que segue o modelo de Robertson & Stiff numa geometria anular por duas razões principais:

- Dentre os modelos anteriormente citados, o de Robertson & Stiff ainda não foi devidamente estudado, sobretudo no que se refere à transição laminar-turbulento.
- Os fluidos utilizados na perfuração de poços de petróleo devem escoar na região anular, entre a broca de perfuração e o poço, para fazer a remoção contínua de cascalho. Nessa geometria, as taxas de deformação geralmente apresentam valores baixos, na faixa de 10 a 100 s^{-1} , como podemos observar na Figura I.1. É justamente nessa região onde se torna importante analisar o efeito da existência de uma tensão mínima de escoamento.

Num diagrama reológico básico, os modelos anteriormente citados podem ser representados pelas curvas mostradas esquematicamente na Figura I.2.

Suspensão	Concentração (% peso)	Bingham	DM (%)	<i>Power-Law</i>	DM (%)	Robertson & Stiff	DM (%)
Bentonita ($d_p = 74, 2\mu$)	5,6	$\tau_o = 2,924$ $\mu_p = 0,0503$	6,72	$k = 0,377$ $n = 0,699$	5,53	$A = 0,117$ $B = 0,881$ $C = 32,869$	1,91
	7,3	$\tau_o = 18,925$ $\mu_p = 0,0705$	1,99	$k = 4,301$ $n = 0,443$	13,10	$A = 0,125$ $B = 0,929$ $C = 286,16$	1,73
	8,5	$\tau_o = 31,880$ $\mu_p = 0,0920$	2,89	$k = 8,127$ $n = 0,403$	11,88	$A = 0,411$ $B = 0,811$ $C = 262,49$	1,39
Caulim ($d_p = 62, 6\mu$)	10,9	$\tau_o = 1,624$ $\mu_p = 0,0162$	2,75	$k = 0,086$ $n = 0,770$	3,85	$A = 1,31 \cdot 10^{-7}$ $B = 2,419$ $C = 1332,02$	0,84
	14,7	$\tau_o = 2,492$ $\mu_p = 0,0194$	1,84	$k = 0,130$ $n = 0,744$	2,71	$A = 5,00 \cdot 10^{-6}$ $B = 2,02$ $C = 1009,29$	1,15
	22,7	$\tau_o = 14,365$ $\mu_p = 0,296$	5,72	$k = 3,496$ $n = 0,374$	3,29	$A = 3,496$ $B = 0,373$ $C = -0,00053$	3,29
Bauxita ($d_p = 78, 2\mu$)	10,3	$\tau_o = 1,250$ $\mu_p = 0,0151$	1,59	$k = 0,0366$ $n = 0,888$	1,75	$A = 0,027$ $B = 0,926$ $C = 38,700$	1,65
	19,1	$\tau_o = 3,440$ $\mu_p = 0,0220$	3,26	$k = 0,144$ $n = 0,758$	3,84	$A = 0,308$ $B = 0,655$ $C = -72,12$	4,33
	24,6	$\tau_o = 11,569$ $\mu_p = 0,0231$	3,49	$k = 3,538$ $n = 0,337$	2,44	$A = 1,646$ $B = 0,446$ $C = 79,803$	0,72

Tabela .1: Parâmetros Reológicos das Suspensões a 28°C

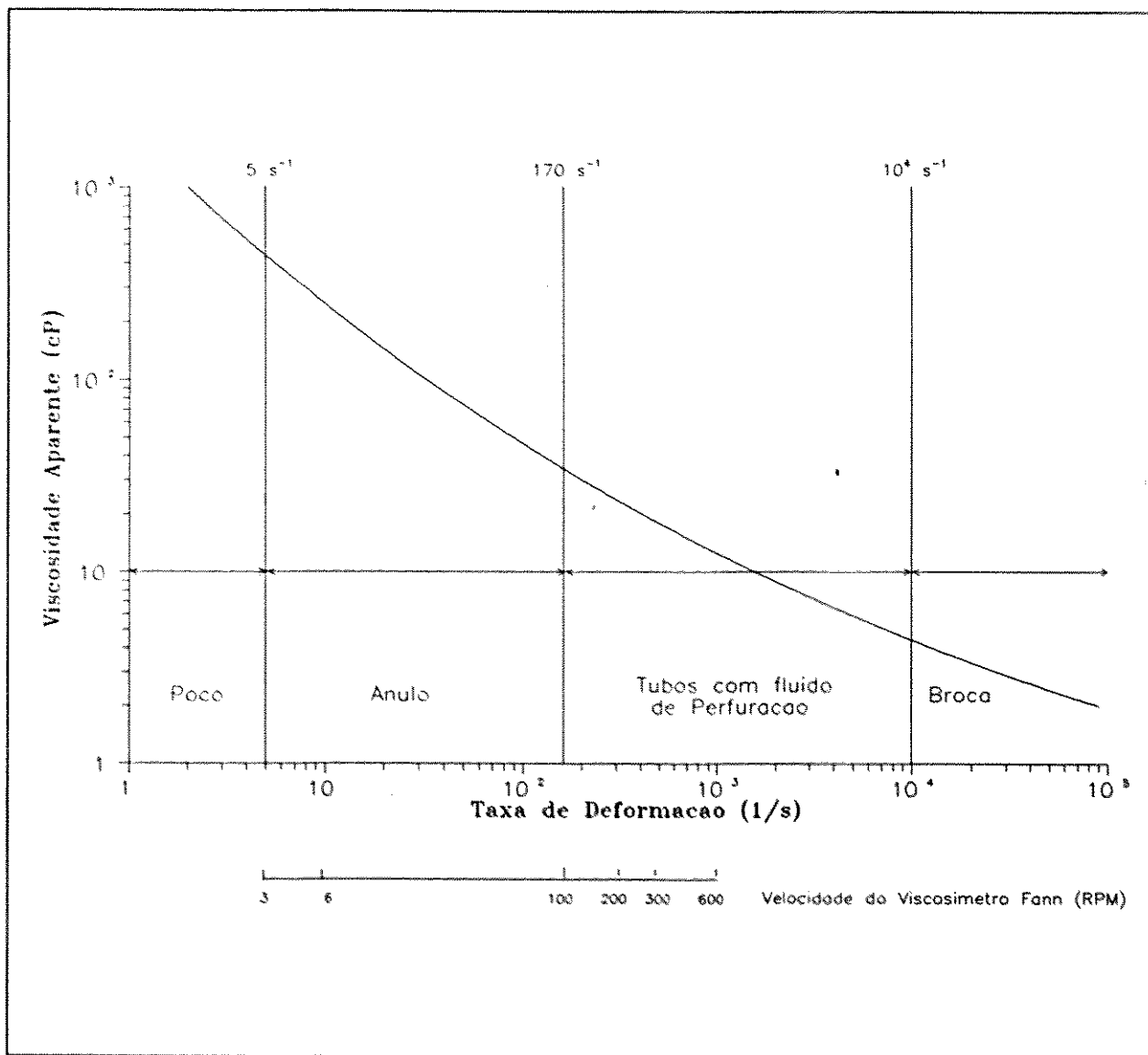


Figura 1.1: Taxas de deformação para fluidos de perfuração

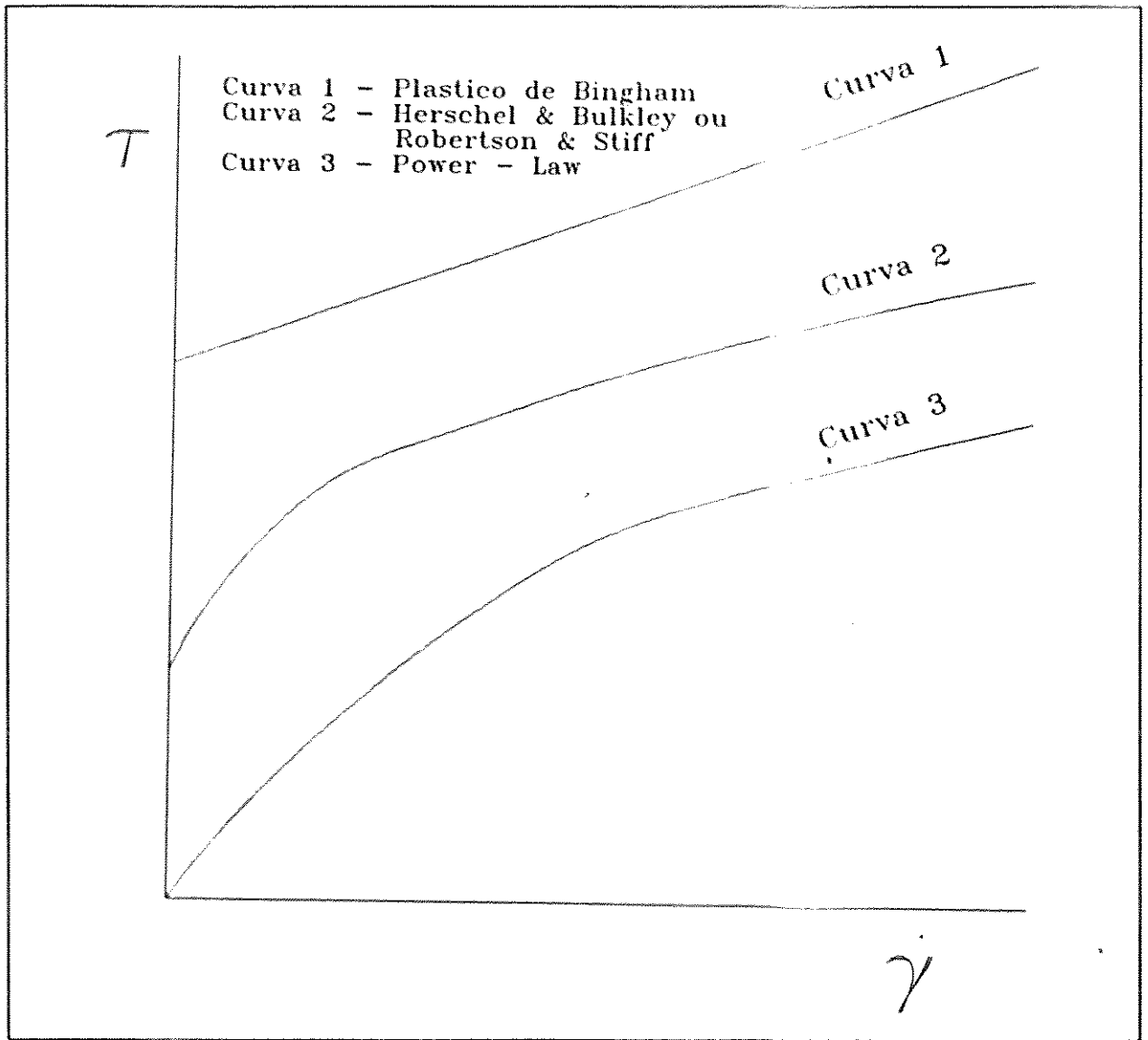


Figura 1.2: Diagrama Reológico para alguns modelos

Capítulo II

Revisão Bibliográfica

II.1 Escoamento Laminar em Tubos e Ânulos

O escoamento de fluidos não newtonianos em regime laminar têm sido bastante estudado, vez que é possível se formular as equações para este tipo de escoamento, acoplando-as ao modelo reológico .

Apresentaremos, a seguir, de maneira sucinta, as equações consideradas aqui como de maior importância para descrever a fluidodinâmica no escoamento laminar de alguns fluidos não newtonianos em tubos e ânulos. Algumas dessas soluções são aproximadas, sendo utilizada a aproximação do escoamento num ânulo pelo escoamento entre duas placas paralelas.

O diâmetro equivalente, quando se procede à aproximação da geometria anular pela geometria de placas paralelas (*"slot approach"*), é obtido igualando-se as expressões dos gradientes de pressão de um fluido newtoniano escoando em geometria anular e entre placas paralelas.

O gradiente de pressão de um fluido newtoniano que escoar no espaço anular [4] é dado por :

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{8 \mu \langle v \rangle}{\left[r_2^2 + r_1^2 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{\ln(r_2/r_1)} \right]} \quad (\text{II.1})$$

O gradiente de pressão de um fluido newtoniano escoando entre placas paralelas [4] é dado por:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{12 \mu \langle v \rangle}{(r_2 - r_1)^2} \quad (\text{II.2})$$

Façamos:

$$D_{\text{eq}}^2 = D_2^2 + D_1^2 - \frac{(D_2^2 - D_1^2)}{\ln(D_2/D_1)} \quad (\text{II.3})$$

onde D_{eq} é o diâmetro equivalente ao ânulo.

Igualando-se as expressões dos gradientes de pressão, dadas pelas equações (II.1) e (II.2) e substituindo a equação do diâmetro equivalente, (II.3), obtém-se:

$$D_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2}{3}} (D_2 - D_1) \quad (\text{II.4})$$

II.1.1 Plástico de Bingham

O modelo de Bingham, de acordo com a equação (I.1), é representado por:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \mu_p \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) & \tau > \tau_0 \\ 0 &= \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) & \tau \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

II.1.1.1 Escoamento em Tubos

A relação entre a vazão volumétrica, Q , e a tensão de cisalhamento na parede, τ_R , para o escoamento laminar de Plástico de Bingham em tubos, é dada pela equação de Buckingham [5].

$$Q = \frac{\pi R^3 \tau_R}{4 \mu_p} \left[1 - \frac{4}{3} \xi_o + \frac{1}{3} \xi_o^4 \right] \quad (\text{II.6})$$

ou

$$\langle v \rangle = \frac{R^2 \Delta P}{8 \mu_p L} \left[1 - \frac{4}{3} \xi_o + \frac{1}{3} \xi_o^4 \right] \quad (\text{II.7})$$

onde:

- R - raio do tubo
- ξ - posição adimensional, dada por:

$$\xi = \frac{r}{R}$$

- ξ_o - tensão residual adimensional, dada por:

$$\xi_o = \frac{\tau_o}{\tau_R}$$

Esse resultado pode ser obtido, por exemplo, através da aplicação da equação de Rabinowitsch [6]:

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_R^3} \int_{\tau_o}^{\tau_R} \tau^2 f(\tau) d\tau \quad (\text{II.8})$$

II.1.1.2 Escoamento Anular (aproximação por placas paralelas)

Hanks [7] desenvolveu a equação para o escoamento laminar de Plástico de Bingham em ânuos, aproximando-o para escoamento entre placas paralelas, obtendo o relacionamento entre a vazão por unidade de área, q , e a tensão de cisalhamento na parede, τ_R :

$$q = \frac{2}{3} \frac{\tau_R}{\mu_p} \left(1 - \frac{3}{2} \xi_o + \frac{1}{2} \xi_o^3 \right) \quad (II.9)$$

ou

$$\langle v \rangle = \frac{h \tau_R}{3 \mu_p} \left(1 - \frac{3}{2} \xi_o + \frac{1}{2} \xi_o^3 \right) \quad (II.10)$$

onde:

q - pseudotaxa de deformação, dada por:

$$q = \frac{2 \langle v \rangle}{h}$$

$2 h$ - distância entre as placas

$\langle v \rangle$ - velocidade média de escoamento

II.1.2 Fluidos *Power-Law*

O modelo *Power-Law*, de acordo com a equação (1.2), é representado por:

$$\tau = k \left(- \frac{dv_z}{dr} \right)^n \quad (II.11)$$

II.1.2.1 Escoamento em Tubos

A integração das equações básicas da conservação da quantidade de movimento (Equação de Cauchy [8]) conduz ao seguinte resultado para o perfil de velocidade.

- Perfil de Velocidade:

$$v = \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\Delta P}{2 k L} \right)^{\frac{1}{n}} \left(R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad (\text{II.12})$$

- Velocidade Média:

$$\langle v \rangle = \left(\frac{n R}{3n+1} \right) \left(\frac{\tau_R}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{II.13})$$

II.1.2.2 Geometria Anular (aproximação por placas paralelas)

O escoamento anular aproximado por placas paralelas, como se pode ver na Figura II.1, de fluidos *power-law* é representado por [9]:

$$\langle v \rangle = \left(\frac{3n}{2n+1} \right) \frac{R_e(1-\alpha)}{6} \left[\frac{\Delta P R_e(1-\alpha)}{2 k L} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (\text{II.14})$$

onde:

- R_e - raio interno do tubo externo
- R_i - raio externo do tubo interno
- α - razão entre os raios dos tubos interno e externo, respectivamente
 $\alpha = \frac{R_i}{R_e}$
- $R_e(1-\alpha)$ - separação entre as placas

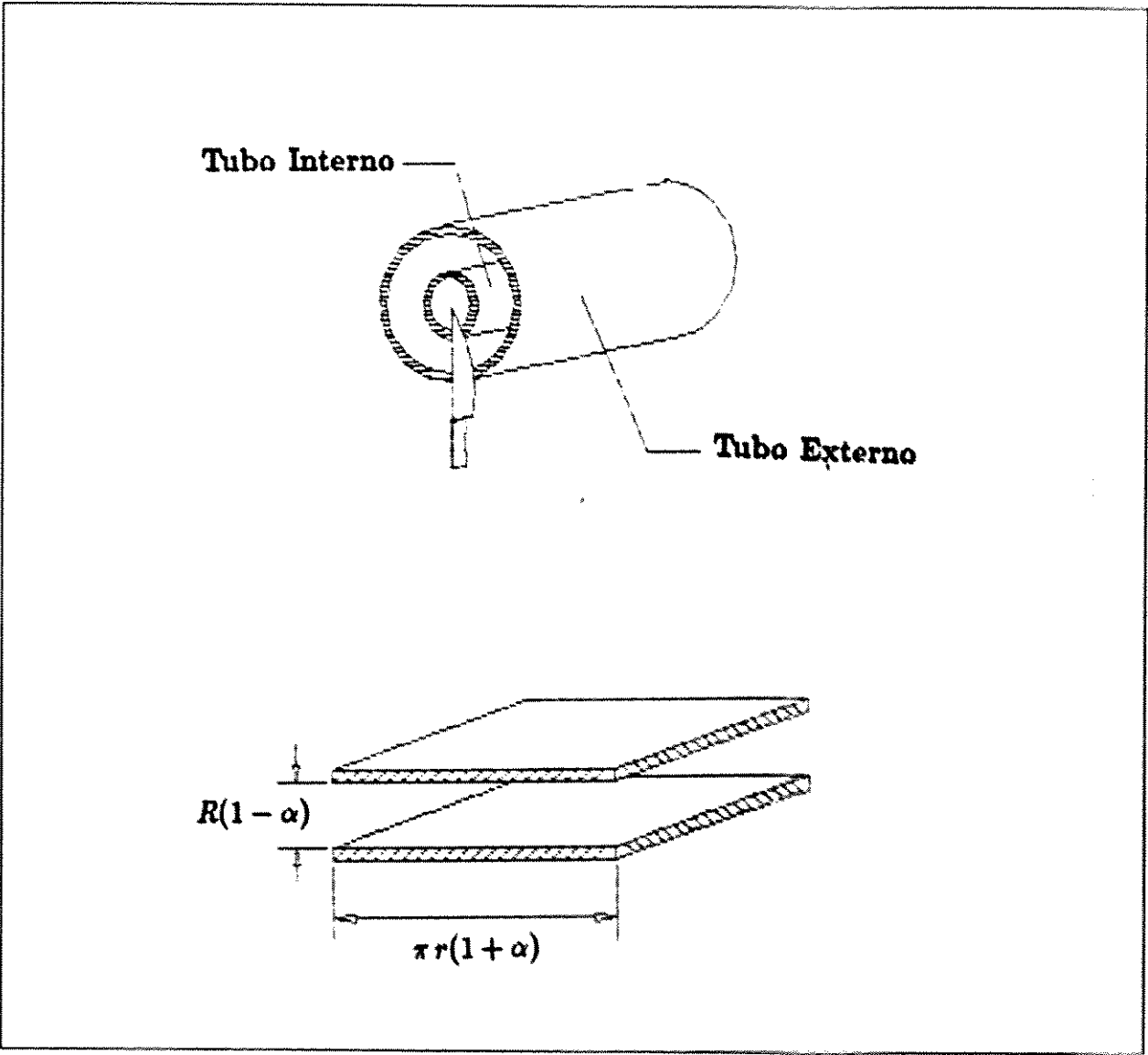


Figura II.1: Aproximação do espaço anular por placas paralelas

II.1.3 Fluidos de Herschel & Bulkley

O modelo de Herschel & Bulkley [1], de acordo com a equação (1.3), é representado por:

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_0 + k \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n & \tau > \tau_0 \\ 0 &= \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) & \tau \leq \tau_0\end{aligned}\quad (\text{II.15})$$

II.1.3.1 Escoamento em Tubos

Hanks & Ricks [10] obtiveram as seguintes equações:

- Perfil de Velocidade Adimensional:

$$u = \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{1}{A^*} \right)^{\frac{1}{n}} \left[(1 - \xi_0)^{\frac{n+1}{n}} - (\xi - \xi_0)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (\text{II.16})$$

$$\xi > \xi_0$$

$$u_0 = \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{1}{A^*} \right)^{\frac{1}{n}} (1 - \xi_0)^{\frac{n+1}{n}} \quad (\text{II.17})$$

$$\xi \leq \xi_0$$

onde:

$$A^* \equiv \frac{k}{\tau_R} \left(\frac{\langle v \rangle}{R} \right)^n$$

- Velocidade Média Adimensional:

$$A = \sigma \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n \quad (\text{II.18})$$

onde:

$$\sigma = (1-\xi_o)^{n+1} \left[(1-\xi_o)^2 + 2 \left(\frac{3n+1}{2n+1} \right) \xi_o (1-\xi_o) + \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \xi_o^2 \right]^n \quad (\text{II.19})$$

- Coeficiente de Atrito:

$$f = \frac{16}{\text{Re}_{\text{HB}}} \quad (\text{II.20})$$

onde:

$$\text{Re}_{\text{HB}} = \frac{8 \rho \langle v \rangle^{(2-n)} R^n \sigma}{\left(\frac{3n+1}{n} \right)^n k} \quad (\text{II.21})$$

- Número de Hedstrom [11] modificado:

$$\text{Re}_{\text{HB}} = 2 \text{He}_{\text{HB}} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \left[\frac{\frac{2}{\sigma n}}{\xi_o^n} \right] \quad (\text{II.22})$$

onde:

$$\text{He}_{\text{HB}} = \frac{\rho D^2}{\tau_o} \left(\frac{\tau_o}{k} \right)^{\frac{2}{n}} \quad (\text{II.23})$$

Hanks [12] desenvolveu as equações para o escoamento laminar do fluido de Herschel & Bulkley em tubos. Relacionamos, a seguir, as equações obtidas pelo autor.

• **Velocidade Média:**

$$\langle v \rangle = n R \left(\frac{\tau_o}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{(1 - \xi_o)^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{1}{\xi_o^n}} \left[\frac{(1 - \xi_o)^2}{3n + 1} + \frac{2\xi_o(1 - \xi_o)}{2n + 1} + \frac{\xi_o^2}{n + 1} \right] \quad (\text{II.24})$$

• **Coefficiente de Atrito:**

$$f = \frac{16}{\varphi_{\text{HB}} \text{Re}_{\text{HB}}^*} \quad (\text{II.25})$$

onde:

$$\text{Re}_{\text{HB}}^* = \frac{8 \rho \langle v \rangle^{(2-n)} R^n}{\left(\frac{3n+1}{n} \right)^n k} \quad (\text{II.26})$$

e :

$$\varphi_{\text{HB}} = (3n+1)^n (1-\xi_0)^{n+1} \left[\frac{(1-\xi_0)^2}{3n+1} + \frac{2\xi_0(1-\xi_0)}{2n+1} + \frac{\xi_0^2}{n+1} \right]^n \quad (\text{II.27})$$

• Número de Hedstrom [11] modificado

$$\text{Re}_{\text{HB}}^* = 2 \text{He}_{\text{HB}} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^2 \left(\frac{\varphi}{\xi_0} \right)^{\frac{2-n}{n}} \quad (\text{II.28})$$

onde:

$$\text{He}_{\text{HB}} = \frac{\rho D^2}{\tau_0} \left(\frac{\tau_0}{k} \right)^{\frac{2-n}{n}} \quad (\text{II.29})$$

II.1.4 Fluidos de Robertson & Stiff

O modelo de Robertson & Stiff [2], de acordo com a equação (I.4), é representado por:

$$\begin{aligned} \tau &= A \left(-\frac{dv_z}{dr} + C \right)^B & \tau > \tau_0 \\ 0 &= \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) & \tau \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

onde:

$$\tau_0 = AC^B \quad \text{- tensão residual}$$

II.1.4.1 Escoamento em Tubos

Beirute & Flumerfelt [13] desenvolveram as equações para escoamento laminar do fluido de Robertson & Stiff [2] num tubo.

- Perfil de Velocidade:

$$v = \left(\frac{B}{B+1} \right) \left[\frac{1}{2A} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \right]^{\frac{1}{B}} \left(R \frac{B+1}{B} - r \frac{B+1}{B} \right) - C (R-r) \quad (\text{II.31})$$

válida para $r > \lambda$

$$V = \left(\frac{B}{B+1} \right) \left[\frac{1}{2A} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \right]^{\frac{1}{B}} \left(R \frac{B+1}{B} - \lambda \frac{B+1}{B} \right) - C (R-\lambda) \quad (\text{II.32})$$

válida para $0 \leq r \leq \lambda$

Nas equações (II.31) e (II.32) acima, λ é a posição radial na qual a tensão de cisalhamento no fluido se iguala a sua tensão residual.

Como:

$$\tau = \frac{r \Delta P}{2 L}$$

então :

$$\lambda = \frac{2 \tau_0}{\left(\frac{\Delta P}{L} \right)}$$

ou ainda, vez que $\tau_0 = AC^B$, tem-se:

$$\lambda = \frac{(AC^B)R}{\tau_R} \quad (11.33)$$

• **Velocidade Média:**

$$\langle v \rangle = \left(\frac{RB}{3B+1} \right) \left(\frac{\tau_R}{A} \right)^{\frac{1}{B}} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{R} \right)^{\frac{3B+1}{B}} \right] - \frac{RC}{3} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{R} \right)^3 \right] \quad (11.34)$$

II.1.4.2 Escoamento Anular

Beirute & Flumerfelt [13] desenvolveram as equações para o escoamento anular em regime laminar de um fluido de Robertson & Stiff .

• **Perfil de Velocidade:**

$$v = \left(\frac{B}{B+1} \right) \left[\frac{1}{A} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \right]^{\frac{1}{B}} \left(R \frac{B+1}{B} - r \frac{B+1}{B} \right) - C(R-r) \quad (11.35)$$

válida para $r > \lambda$

$$V = \left(\frac{B}{B+1} \right) \left[\frac{1}{A} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \right]^{\frac{1}{B}} \left(R \frac{B+1}{B} - \lambda \frac{B+1}{B} \right) - C(R-\lambda) \quad (11.36)$$

válida para $r \leq \lambda$

onde:

$$\lambda = \frac{\tau_o}{\left(\frac{\Delta P}{L}\right)}$$

• Velocidade Média:

$$\langle v \rangle = \left(\frac{RB}{2B+1} \right) \left(\frac{\tau_R}{A} \right)^{\frac{1}{B}} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{R} \right)^{\frac{2B+1}{B}} \right] - \frac{RC}{2} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 \right] \quad (II.37)$$

Mais recentemente, Ohen [14] apresentou um programa para determinação de coeficiente de atrito para escoamento, em tubos e ânuos, de fluidos cujo modelo reológico é o Robertson & Stiff. O método consiste na solução sistemática das equações implícitas resultantes do modelo de Robertson & Stiff para o caso do escoamento laminar. Nessa sistemática de cálculo, o Número de Reynolds generalizado sugerido por Ohen [14], é dado por:

$$Re_{RS_o} = \frac{\rho \langle v \rangle D_{eq}}{\mu_e} \quad (II.38)$$

onde:

- Re_{RS_o} - Número de Reynolds proposto por Ohen
- D_{eq} - diâmetro equivalente, dado pela equação (II.4)
- $\langle v \rangle$ - velocidade média de escoamento
- μ_e - viscosidade efetiva, dada por:

$$\mu_e = \frac{A(\dot{\gamma} + C)^B}{\dot{\gamma}} \quad (II.39)$$

II.2 Transição Laminar–Turbulento

II.2.1 Critério de Estabilidade

O critério padrão para estabilidade de escoamento laminar de fluidos newtonianos em tubos é o valor de 2100 para o Número de Reynolds .

Ryan & Johnson [15] trataram o problema da estabilidade do escoamento laminar em tubos e propuseram um critério mais geral para a estabilidade do escoamento no qual o Número de Reynolds é um caso especial.

Foi sugerido pelos autores que, quando uma corrente de escoamento laminar é suficientemente instável para se tornar turbulenta, o critério de estabilidade apresentará, em algum ponto da seção transversal do tubo, um valor máximo, que para fluidos newtonianos é de 808.

Admitiram, então, que este valor era constante, independente da geometria do sistema e do modelo reológico do fluido.

O critério proposto pelos autores é dado por:

$$Z = - \frac{\rho R v_z}{\tau_R} \frac{dv_z}{dr} \quad (II.40)$$

Para um fluido newtoniano, tem-se:

$$Z_{\max} = \sqrt{\frac{4}{27}} Re_c \quad (II.41)$$

na posição

$$\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Como $Re_c = 2100$, então:

$$Z_{\max} = 808$$

Os autores testaram seu parâmetro para o caso de escoamento de fluidos pseudoplásticos em tubos e mostraram que ele era válido para esses fluidos;

também foram capazes de prever a posição radial na qual ocorre instabilidade máxima.

Para esses fluidos, tem-se:

$$Z_{\max} = \frac{\rho R^2 \alpha_c^2}{(\tau_R)_c} \phi(n) \quad (11.42)$$

na posição:

$$\left(\frac{r}{R}\right) = \left(\frac{1}{n+2}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

onde:

$$\alpha_c = \frac{Q_c}{\pi R^3}$$

e :

$$\phi(n) = \frac{(3n+1)^2}{n} \left(\frac{1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{n+1}}$$

Fazendo $Z_{\max} = 808$, tem-se:

$$(\tau_R)_c = \frac{\rho R^2 \alpha_c^2}{808} \phi(n) \quad (11.43)$$

Utilizando o coeficiente de atrito de Fanning, obtém-se:

$$f_c = \frac{\phi(n)}{404} \quad (11.44)$$

onde f_c é o valor do coeficiente de atrito no ponto crítico.

Hanks & Christiansen [16] estenderam o tratamento de Ryan & Johnson [15] para transição, com o objetivo de incluir o efeito da temperatura no escoamento de líquidos pseudoplásticos em tubos lisos, mostrando que o parâmetro de estabilidade não era função da temperatura. Os autores também mostraram que a técnica de Metzner & Reed [17], quando usada junto com a correlação de Ryan & Johnson [15] para transição leva a previsões grosseiras do coeficiente de atrito para fluidos que possuem tensão residual.

Entretanto, nenhum destes trabalhos estudou a influência da geometria no parâmetro de estabilidade. Como ele pode ser expresso em função do Número de Reynolds crítico e este possui valores diferentes para diferentes geometrias, então pode-se inferir que o parâmetro seja função da geometria do sistema.

Hanks [18] propôs um outro parâmetro de estabilidade, independente da geometria do sistema, proporcional ao Número de Reynolds para fluidos newtonianos e contendo os resultados de Ryan & Johnson para escoamento em tubos como um caso particular.

O parâmetro de estabilidade proposto por Hanks [18] é dado por:

$$K = \frac{1}{2} \rho \frac{|\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}|}{|\vec{F} - \text{grad}P|} \quad (\text{II.45})$$

O autor aplicou esse parâmetro para escoamento de fluidos newtonianos em tubos, ânnulos concêntricos e entre placas paralelas.

• Escoamento de Fluidos Newtonianos em Tubos:

Em se tratando do escoamento de um fluido newtoniano num tubo, o parâmetro de estabilidade proposto por Hanks [18] é escrito na seguinte forma:

$$K = \frac{1}{2} \rho \frac{d(v^2)/dr}{dP/dz} \quad (\text{II.46})$$

Substituindo o perfil de velocidade para um fluido newtoniano que escoou num tubo [8], tem-se:

$$K = \frac{1}{2} \text{Re} \xi (1 - \xi^2) \quad (\text{II.47})$$

onde:

$$\xi = \frac{r}{R}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu}$$

No ponto crítico:

$$\xi_c = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$K_{\text{max}} = \sqrt{\frac{1}{27}} \text{Re}_c$$

Como $\text{Re}_c = 2100$, então:

$$K_{\text{max}} = 404$$

• **Escoamento de Fluidos Newtonianos entre Placas Paralelas:**

Em se tratando do escoamento de um fluido newtoniano entre placas paralelas, o parâmetro de estabilidade proposto por Hanks [18] é escrito na seguinte forma:

$$K = \frac{1}{2} \rho \frac{d(v^2)/dy}{dP/dz} \quad (\text{II.48})$$

onde y é a distância entre as placas, medida a partir da linha de centro entre as mesmas.

Substituindo o perfil de velocidade para um fluido newtoniano que escoo entre placas paralelas [8], tem-se:

$$K = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} \text{Re} \Phi (1 - \Phi^2) \quad (\text{II.49})$$

onde:

$$\Phi = \frac{y}{h}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho \langle v \rangle D_e}{\mu}$$

sendo:

- 2h - distância entre as placas
- D_e - diâmetro equivalente, dado por:

$$D_e = \delta \sqrt{8 \psi(\epsilon)}$$

$$\delta = r_2 - r_1$$

- r_1 - raio do tubo interno
- r_2 - raio do tubo externo

e

$$\psi(\epsilon) = \frac{[1 + (1 + \epsilon)^2] \ln(1 + \epsilon) + 1 - (1 + \epsilon)^2}{2 \epsilon^2 \ln(1 + \epsilon)} \quad (\text{II.50})$$

onde:

$$\epsilon = \frac{\delta}{r_1}$$

No ponto crítico, tem-se:

$$\Phi_c = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (II.51)$$

$$Re_c = 2288$$

A partir dos dados experimentais de Davies & White [19] tem-se que:

$$Re_c = 2285$$

• **Escoamento Anular:**

$$K = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\delta} \frac{d(v^2)/d\chi}{dP/dz} \quad (II.52)$$

$$\chi = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}$$

Usando o perfil de velocidade, tem-se:

$$K = - \frac{Re}{8 \sqrt{2} \psi(\epsilon)} \frac{\left[\frac{\epsilon(2+\epsilon)}{\ln(1+\epsilon)} \ln(1+\epsilon\chi) + 1 - (1+\epsilon\chi)^2 \right]}{\epsilon^3 \psi(\epsilon) (1+\epsilon\chi)} \left[\frac{\epsilon(2+\epsilon)}{\ln(1+\epsilon)} - 2(1+\epsilon\chi)^2 \right] \quad (II.53)$$

No ponto crítico, tem-se:

$$\frac{1}{\epsilon^2(1+\epsilon\chi_c)^2} \left[\frac{\epsilon(2+\epsilon)}{\ln(1+\epsilon)} - 2(1+\epsilon\chi_c)^2 \right]^2 - \frac{1}{\epsilon^2(1+\epsilon\chi_c)^2} \left[\frac{\epsilon(2+\epsilon)}{\ln(1+\epsilon)} + 2(1+\epsilon\chi_c)^2 \right] \left[\frac{\epsilon(2+\epsilon)}{\ln(1+\epsilon)} \ln(1+\epsilon\chi_c) + 1 - (1+\epsilon\chi_c)^2 \right] = 0 \quad (II.54)$$

Resolvendo a equação , tem-se:

$$Re_c = 2462 , \quad \text{para } \sigma \simeq 0,15$$

onde:

$$\sigma = \frac{r_1}{r_2}$$

Posteriormente, Hanks [20] realizou uma análise da estabilidade do escoamento laminar, apresentando a teoria fenomenológica na qual se fundamenta o parâmetro de estabilidade, considerando que este representa a ligação entre a taxa de quantidade de movimento angular do elemento de fluido que se deforma e a taxa de perda dessa mesma variável no fenômeno de arraste.

O autor observou que, para um certo valor crítico do parâmetro, o elemento de fluido se torna instável a distúrbios rotacionais. Se tais distúrbios estão presentes, a não-linearidade básica do processo de transferência de quantidade de movimento origina o rápido desenvolvimento de turbilhões.

II.2.2 Plástico de Bingham

Hanks & Pratt [21] estudaram escoamento para Plástico de Bingham em tubos e entre placas paralelas na região de transição .

O que se faz, usualmente, é utilizar o método de aproximação linear de Caldwell & Babbitt [22] que despreza o termo à quarta potência da equação que relaciona vazão com a tensão de cisalhamento na parede.

Neste trabalho, os autores utilizaram a equação completa, não linear e concluíram que para o Número de Hedstrom , $He = \frac{\rho D^2}{\mu_p^2} > 10^4$, o método de aproximação linear de Caldwell & Babbitt [22], não é válido.

Este trabalho consegue prever com precisão as condições críticas de escoamento na qual ocorre a transição laminar-turbulento, para os dados disponíveis na literatura.

Hanks [7] determinou a expressão do Número de Reynolds crítico para escoamento de Plástico de Bingham em tubos e entre placas paralelas.

II.2.2.1 Escoamento em Tubos

As equações para a transição de um Plástico de Bingham escoando num tubo são mostradas a seguir:

$$(\text{Re}_{\text{PB}})_c = \frac{\text{He}_{\text{PB}}}{8\xi_{o_c}} \left(1 - \frac{4}{3}\xi_{o_c} + \frac{1}{3}\xi_{o_c}^4 \right) \quad (\text{II.55})$$

$$\frac{\xi_{o_c}}{(1 - \xi_{o_c})^3} = \frac{\text{He}_{\text{PB}}}{16800} \quad (\text{II.56})$$

Nessas equações ξ_{o_c} é o valor de ξ_o na transição laminar-turbulento, onde:

$$\xi_o = \frac{\tau_o}{\tau_R}$$

$$\text{Re}_{\text{PB}} = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu_p}$$

$$\text{He}_{\text{PB}} = \frac{\rho D^2 \tau_o}{\mu_p}$$

II.2.2.2 Escoamento entre Placas Paralelas

As equações para a transição de um Plástico de Bingham escoando entre placas paralelas são mostradas a seguir:

$$(\text{Re}_{\text{PB}})_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\text{He}_{\text{PB}}}{8\xi_{o_c}} \left(1 - \frac{3}{2}\xi_{o_c} + \frac{1}{2}\xi_{o_c}^3 \right) \quad (\text{II.57})$$

$$\frac{\xi_{oc}}{(1 - \xi_{oc})^3} = \frac{He_{PB}}{22400} \quad (II.58)$$

Nas equações (II.57) e (II.58), as variáveis possuem o mesmo significado que no caso anterior, exceto o diâmetro, que neste caso é $D = 4 b \sqrt{2/3}$, onde

$2b$ é a distância entre as placas.

Hanks & Valia [23] realizaram análise teórica similar a de Hanks & Dadia [24] para escoamento de Plástico de Bingham entre placas paralelas.

II.2.3 Fluidos *Power-Law*

II.2.3.1 Escoamento em Tubos

Hanks & Ricks [25] aplicaram a teoria de Hanks [20] a escoamento de fluidos *power-law* em tubos e determinaram a expressão do Número de Reynolds na transição:

$$(\text{Re}'_{\text{PL}})_c = \frac{6464n}{(3n+1)^2} (n+2)^{\frac{n+2}{n+1}} \quad (\text{II.59})$$

onde:

$$\text{Re}'_{\text{PL}} = \frac{8 \rho R^n \langle v \rangle^{(2-n)}}{\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n k} \quad (\text{II.60})$$

II.2.4 Fluidos Herschel & Bulkley

II.2.4.1 Escoamento em Tubos

Hanks & Ricks [10] realizaram um estudo sobre a transição no escoamento de fluidos de Herschel & Bulkley, utilizando, para determinação do Número de Reynolds crítico, o método desenvolvido por Hanks [20].

A análise revela que ocorre uma considerável interação entre o parâmetro reológico n , índice de comportamento do fluido, e a tensão residual e também a sensibilidade da transição na presença de pequenas tensões residuais.

As equações deduzidas pelos autores para o ponto crítico são:

$$(\text{Re}_{\text{HB}_1})_c = \frac{6464n}{(3n+1)^2} (n+2)^{\frac{n+2}{n+1}} \frac{\sigma_c^{(2/n)}}{(1-\xi_{oc})^{\frac{n+2}{n}}} \quad (\text{II.61})$$

$$\frac{\frac{2-n}{\xi_{o_c}^n}}{(1-\xi_{o_c})^{\frac{n+2}{n}}} = \frac{n\text{He}_{\text{HB}}}{3232} \left(\frac{1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{n+1}} \quad (\text{II.62})$$

onde σ_c é o valor de σ no ponto crítico, sendo σ dado por:

$$\sigma = (1-\xi_o)^{n+1} \left[(1-\xi_o)^2 + 2\xi_o(1-\xi_o) \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right) + \xi_o^2 \left(\frac{3n+1}{n+1}\right) \right]^n \quad (\text{II.63})$$

$$\text{Re}_{\text{HB}_1} = \frac{8 \rho R^n \langle v \rangle^{(2-n)} \sigma}{\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n k} \quad (\text{II.64})$$

$$\text{He}_{\text{HB}} = \frac{\rho D^2}{\tau_o} \left(\frac{\tau_o}{k}\right)^{\frac{2}{n}} \quad (\text{II.65})$$

Hanks [12] apresentou uma teoria consistente, baseada na teoria de comprimento de mistura modificada, acoplada ao modelo reológico, para levar em conta os efeitos não newtonianos. Neste estudo, foi utilizado o modelo de Herschel & Bulkley e as equações apresentadas recaem nas de fluidos pseudoplásticos [25], ao se eliminar a tensão residual, e nas equações de Plástico de Bingham [24] fazendo-se o índice de comportamento do fluido igual à unidade.

As equações referentes à transição obtidas pelo autor são:

$$(\text{Re}_{\text{HB}}^*)_C = \frac{6464n}{(3n+1)^n} (n+2)^{\frac{n+2}{n+1}} \left(\frac{1}{1-\xi_{oC}} \right)^n \quad (1)$$

$$\left[\frac{(1-\xi_{oC})^2}{3n+1} + \frac{2\xi_{oC}(1-\xi_{oC})}{2n+1} + \frac{\xi_{oC}^2}{n+1} \right]^{(2-n)}$$

$$\text{He}_{\text{HB}} = \frac{3232}{n} (n+2)^{\frac{n+2}{n+1}} \left[\frac{\xi_{oC}}{(1-\xi_{oC})^{n+1}} \right]^{\frac{2-n}{n}} \left(\frac{1}{1-\xi_{oC}} \right)^n \quad (\text{II.67})$$

onde:

- ξ - coordenada radial adimensional
- ξ_o - tensão residual adimensional
- ξ_{oC} - valor de ξ_o na transição

$$\xi_o = \frac{\tau_o}{\tau_R}$$

$$\xi = \frac{r}{R}$$

$$\text{Re}_{\text{HB}}^* = \frac{8 \rho R^n \langle v \rangle^{(2-n)}}{\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n k} \quad (\text{II.26})$$

$$\text{He}_{\text{HB}} = \frac{\rho D^2}{k} \left(\frac{\tau_0}{k}\right)^{\frac{2-n}{n}} \quad (\text{II.68})$$

II.2.5 Fluidos de Robertson & Stiff

II.2.5.1 Escoamento em Tubos

Ataíde [3] utilizou o modelo de Robertson & Stiff [2] para escoamento em tubos de suspensões de bauxita, bentonita e caulim a diversas concentrações. O autor, baseado no trabalho de D'Ávila [26], analisou seus resultados através de um Número de Reynolds adequado ao modelo reológico e apresentado na forma:

$$\text{Re}_{\text{RS}} = \frac{8 \rho \langle v \rangle^2}{A \left[\left(\frac{3B+1}{4B}\right) \frac{8 \langle v \rangle}{D} + \frac{4C}{3} \right]^B} \quad (\text{II.69})$$

Para determinar a velocidade crítica, na qual ocorre a transição laminar-turbulento, o autor igualou o Número de Reynolds modificado a 2100, obtendo a seguinte equação implícita:

$$\langle v \rangle_c = \sqrt{\frac{2100A}{8 \rho} \left[\left(\frac{3B+1}{4B}\right) \frac{8 \langle v \rangle_c}{D} + \frac{4C}{3} \right]^B} \quad (\text{II.70})$$

II.3 Escoamento Turbulento

II.3.1 Comprimento de Mistura

Desde a introdução do conceito de comprimento de mistura por Prandtl [27], vários pesquisadores tentaram desenvolver expressões analíticas para o perfil de velocidade para fluidos newtonianos no escoamento propriamente turbulento em tubos. No seu trabalho, Prandtl [27] desprezou a variação da tensão de cisalhamento com a posição, o fluxo de momentum molecular e o efeito de amortecimento viscoso da parede nas propriedades dos vórtices no fluxo perto da parede.

Segundo Prandtl [27] :

$$\tau_{ij}^{(t)} = \rho L^2 \left(- \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad (\text{II.71})$$

onde:

- $\tau_{ij}^{(t)}$ - tensão de cisalhamento no escoamento turbulento (tensor de Reynolds)
- L - comprimento de mistura de Prandtl, dado por:
 $L = k' y$
- k' - constante do comprimento de mistura de Prandtl
- y - distância medida a partir do contorno do duto

Van Driest [28] introduziu um fator exponencial na expressão do comprimento de mistura para considerar a influencia do amortecimento dos vórtices na parede e incluir o fluxo molecular.

Segundo Van Driest [28] :

$$L = k' y \left[1 - \exp \left(- \phi \frac{y}{y_m} \right) \right] \quad (\text{II.72})$$

onde:

- ϕ - parâmetro que reflete a influencia do amortecimento viscoso
- y_m - valor máximo de y

Gill & Scher [29] modificaram o termo de amortecimento viscoso de Van Driest [28] e introduziram o termo de tensão de cisalhamento ao longo do duto. Além da vantagem de uma expressão contínua para o perfil de velocidade, tal como a desenvolvida por Van Driest [28], a modificação de Gill & Scher [29] descreve a suavidade do gradiente de velocidade à medida que se aproxima do centro do duto, sendo este um aspecto de distinção em relação aos resultados de outros pesquisadores.

Segundo Gill & Scher [29]:

$$\phi = \frac{Re^* - a}{b} \quad (II.73)$$

sendo:

$$Re^* = \frac{\rho u^* y_m}{\mu}$$

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_R}{\rho}}$$

onde u^* é a velocidade de atrito.

Gill & Scher [29] utilizaram no seu trabalho duas constantes empíricas: uma delas reflete o início da transição laminar-turbulento e a outra, o amortecimento viscoso, atribuindo-lhes os valores $a = 60$ e $b = 22$.

Entretanto, os autores utilizaram estas duas constantes, sem qualquer modificação, tanto para o escoamento em tubos quanto para o escoamento entre placas paralelas, sem considerar a variação na geometria do sistema.

Posteriormente, Hanks [30] melhorou a modificação devida a Gill & Scher [29], substituindo uma das constantes empíricas por um parâmetro calculado teoricamente, obtendo representações precisas do coeficiente de atrito e do perfil de velocidades nas regiões de transição e turbulenta. O autor realizou este estudo para escoamento de fluidos newtonianos em tubos e entre placas paralelas.

- **Escoamento em Tubos:**

$$Re^* = \frac{R' \sqrt{2}}{4} \quad (II.74)$$

$$\phi = \frac{R' - R'_c}{2 b \sqrt{2}} \quad (II.75)$$

onde:

$$R' \equiv Re \sqrt{f}$$

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu}$$

Para fluidos newtonianos $Re_c = 2100$, portanto:

$$R'_c = 183,303$$

Utilizando $a = 60$ (Gill & Scher [29]), obtém-se:

$$R'_c = 169,705$$

o que corresponde a $Re_c = 1800$.

- **Escoamento entre Placas Paralelas:**

$$\phi = \frac{R' - R'_c}{4 b \sqrt{2}} \quad (II.76)$$

sendo:

$$Re = \frac{4 \rho \langle v \rangle h}{\mu}$$

e $2h$ a distância entre as placas.

Para fluidos newtonianos $Re_c = 2800$. Como:

$$f = \frac{24}{Re}$$

então:

$$R'_c = 259,230$$

Utilizando $a = 60$ (Gill & Scher [29]), obtém-se:

$$R'_c = 339,410$$

o que corresponde a $Re_c = 4800$, valor bem diferente de 2800.

II.3.2 Plástico de Bingham

II.3.2.1 Escoamento em Tubos

Hanks & Dadia [24] combinaram a análise da transição laminar-turbulento, efetuada por Hanks & Pratt [21], e a análise teórica de Hanks [30] da transição e do escoamento turbulento de fluidos newtonianos em tubos.

Os autores utilizaram o comprimento de mistura de Prandtl [27] modificado por Van Driest [28] na expressão do tensor de Reynolds e o termo de amortecimento viscoso de Hanks [30], como podemos inferir das equações abaixo:

$$L = k' (R - r) \left\{ 1 - \exp \left[- \phi \frac{(R - r)}{R} \right] \right\} \quad (II.77)$$

$$\phi = \frac{R' - R'_c}{2 b \sqrt{2}} \quad (\text{II.78})$$

onde R é o raio do tubo.

Os autores obtiveram as seguintes expressões:

$$\text{Re}_{\text{PB}} = \frac{1}{2} (R')^2 \int_{\xi_0}^1 \xi^2 G(\xi, \xi_0, R) d\xi \quad (\text{II.79})$$

onde:

$$G(\xi, \xi_0, R) = \frac{\xi - \xi_0}{1 + \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)(k')^2 (R')^2 (\xi - \xi_0)(1 - \xi)^2 (1 - E)^2 \right\}^{1/2}} \quad (\text{II.80})$$

$$E = \exp[-\phi(1 - \xi)] \quad (\text{II.81})$$

e

$$(R')^2 = 2 \frac{\text{Re}_{\text{PB}}}{\xi_0} \quad (\text{II.82})$$

• Procedimento :

- Para um determinado sistema fluido-tubo, calcula-se o número de Hedstrom e a partir deste e das equações para transição de Plástico de Bingham em tubos, calcula-se o número de Reynolds crítico e ξ_{0c} (posição adimensional no ponto crítico).
- R'_c é calculado a partir de:

$$(R'_c)^2 = 2 \frac{He_{PB}}{\xi_{0c}}$$

- Para uma série de valores de $R > R_c$, calcula-se Re e ξ_0 a partir das equações (II.79) e (II.82). Dessa maneira, gera-se uma curva completa de R^2 versus Re_{PB} e portanto de f versus Re_{PB} .

Para efetuar esses cálculos, necessita-se dos valores de k' e de b nas equações (II.77) e (II.78). Os autores utilizaram $k' = 0,36$, valor correspondente a fluidos newtonianos .

Para o valor de b , obtiveram a seguinte correlação:

$$b = \frac{157,5}{(He_{PB})^{0,151}}$$

válida para $10^3 \leq He_{PB} \leq 2 \cdot 10^9$.

II.3.2.2 Escoamento entre Placas Paralelas

Hanks & Valia [23] realizaram uma análise teórica para escoamento turbulento de Plástico de Bingham entre placas paralelas, similar à efetuada por Hanks & Dadia [24] para tubos. Os autores utilizaram o comprimento de mistura modificado por Van Driest [28] na expressão do tensor de Reynolds e o termo de amortecimento viscoso de Hanks [30] .

$$L = k' (h - y) \left\{ 1 - \exp \left[- \phi \frac{(h - y)}{h} \right] \right\} \quad (II.83)$$

$$\phi = \frac{R' - R'_c}{4 b \sqrt{2}} \quad (\text{II.84})$$

onde:

- y - coordenada de posição medida a partir da meia distância entre as placas
- 2h - distância entre as placas

Os autores obtiveram as seguintes expressões:

$$\text{Re}_{\text{PBp}} = \frac{1}{4} (R')^2 \int_{\xi_0}^1 \xi g(\xi, \xi_0, R) d\xi \quad (\text{II.85})$$

$$(R')^2 \equiv f \text{Re}_{\text{PBp}}^2 \quad (\text{II.86})$$

ou ainda:

$$(R')^2 = 2 \frac{\text{He}_{\text{PBp}}}{\xi_0}$$

onde:

- Re_{PBp} - número de Reynolds para escoamento de Plástico de Bingham entre placas paralelas, definido por:

$$\text{Re}_{\text{PBp}} = \frac{4 h \rho \langle v \rangle}{\mu_p} \quad (\text{II.87})$$

He_{PBp} - Número de Hedstrom para escoamento de Plástico de Bingham entre placas paralelas, definido por:

$$He_{PBp} = 16 h^2 \frac{\rho \tau_0}{\mu_p^2} \quad (II.88)$$

ξ - posição adimensional, dada por:

$$\xi = \frac{y}{h}$$

O procedimento utilizado para elaboração da curva f versus Re_{PBp} é análoga ao desenvolvido no item anterior, para escoamento turbulento de Plástico de Bingham em tubos.

Os autores utilizaram $k' = 0,36$, valor correspondente a fluidos newtonianos.

Para o valor de b , obtiveram a seguinte correlação:

$$b = \frac{552}{(He_{PBp})^{0,259}} \quad (II.89)$$

válida para $1,2 \cdot 10^9 \leq He_{PBp} \leq 2,5 \cdot 10^8$.

II.3.3 Fluidos *Power-Law*

II.3.3.1 Escoamento em Tubos

Hanks & Ricks [25] apresentaram um modelo de comprimento de mistura que permitiu prever com precisão o coeficiente de atrito para escoamento de fluidos pseudoplásticos em tubos para os regimes de transição e turbulento.

O modelo apresentado pelos autores foi uma modificação do utilizado para escoamento turbulento de fluidos newtonianos [30] e Plástico de Bingham [24].

Os autores concluíram que a generalização de Dodge-Metzner-Reed para escoamento turbulento não é um método geral de correlação satisfatório, sobretudo quando se trata de fluidos que apresentam tensão residual. Portanto, a formulação apropriada do modelo reológico é muito importante nas regiões de transição e turbulenta.

Os autores obtiveram as seguintes equações:

$$\text{Re}'_{\text{PL}} = \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n (R')^2 \left[\int_0^1 \xi^2 \zeta(\xi) d\xi \right]^{(2-n)} \quad (\text{II.90})$$

$$R' = \left(\frac{3n+1}{n} \right) \left[\text{Re}'_{\text{PL}} \left(\frac{f}{16} \right)^{\frac{2-n}{2}} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (\text{II.91})$$

onde:

$$\text{Re}'_{\text{PL}} = \frac{8 \rho R^n \langle v \rangle^{(2-n)}}{\left(\frac{3n+1}{n} \right)^n k} \quad (\text{II.92})$$

$\zeta(\xi)$ - determinado a partir da equação:

$$\xi = \zeta^n + \frac{1}{8} (R')^2 L^2 \zeta^2 \quad (\text{II.93})$$

Os autores utilizaram, para a constante de comprimento de mistura de Prandtl, o valor $k' = 0,36$. Análogo ao procedimento de Hanks & Dadia [24], obtiveram a seguinte correlação para b , no termo de amortecimento viscoso:

$$b = \frac{22,4}{n^{0,894}} \quad (\text{II.94})$$

O procedimento para determinação da curva de f versus Re'_{PL} é análogo ao efetuado por Hanks & Dadia [24] para escoamento turbulento de Plástico de Bingham em tubos.

II.3.4 Fluidos de Herschel & Bulkley

II.3.4.1 Escoamento em Tubos

Hanks [12] utilizou uma modificação do modelo de comprimento de mistura de Prandtl–Van Driest como foi feito por Hanks & Dadia [24] para Plástico de Bingham .

A tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau = \tau_0 + k \dot{\gamma}^n + \rho L^2 \dot{\gamma}^2 \quad (II.95)$$

onde L , o comprimento de mistura modificado, é dado por:

$$L = k' (R - r) \{1 - \exp[-\phi(1 - \xi)]\} \quad (II.96)$$

$$\phi = \frac{R' - R'_c}{\sqrt{8} b}$$

$$R' = \left(\frac{3n+1}{n}\right) \left[Re_{HB}^* \left(\frac{f}{16}\right)^{\frac{2-n}{n}} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (II.97)$$

Definindo-se:

$$\zeta = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_R}$$

onde $\dot{\gamma}_R$ é a taxa de deformação na parede, isto é, em $\xi = 1$.

Pode-se escrever a equação (II.95) na forma adimensional:

$$\xi = \xi_o + (1 + \xi_o) \zeta^n + \frac{1}{8} (R')^2 (1 - \xi_o)^{\frac{2}{n}} \lambda^2 \zeta^2 \quad (\text{II.98})$$

onde:

$$\lambda = \frac{L}{R}$$

A equação (II.98) define ζ como uma função implícita de ξ .
O autor obteve as seguintes expressões:

$$\text{Re}_{\text{HB}}^* = (1 - \xi_o)^{\frac{2-n}{n}} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n (R')^2 \left[\int_0^1 \xi^2 \zeta(\xi, \xi_o, R) d\xi \right]^{(2-n)} \quad (\text{II.99})$$

onde $\zeta(\xi, \xi_o, R)$ é obtido a partir da equação (II.98).

$$(R')^2 = 2 \frac{\text{He}_{\text{PB}}}{\left(\frac{2-n}{\xi_o^n} \right)}$$

O autor utilizou $k' = 0,36$, valor correspondente a fluidos newtonianos.
O autor propôs a seguinte relação para $b(\text{He}_{\text{HB}}, n)$:

$$b = \frac{22}{n} \left[1 + \frac{0,00352 \text{ He}_{\text{HB}}}{(1 + 0,000504 \text{ He}_{\text{HB}})^2} \right] \quad (\text{II.100})$$

O procedimento para determinação da curva f versus Re_{HB}^* é análogo ao de Hanks & Dadia [24] para escoamento de Plástico de Bingham em tubos.

Vale ressaltar que o autor definiu Re_{HB}^* , tal que:

$$f = \frac{16}{\varphi_{HB} Re_{HB}^*} \quad (II.101)$$

onde Re_{HB}^* é dado pela equação (II.26) e φ_{HB} pela equação (II.27), mostradas a seguir.

$$Re_{HB}^* = \frac{8 \rho \langle v \rangle^{(2-n)} R^n}{\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n k} \quad (II.26)$$

e:

$$\varphi_{HB} = (3n+1)^n (1-\xi_o)^{n+1} \left[\frac{(1-\xi_o)^2}{3n+1} + \frac{2\xi_o(1-\xi_o)}{2n+1} + \frac{\xi_o^2}{n+1} \right]^n \quad (II.27)$$

II.3.5 Fluidos de Robertson & Stiff

II.3.5.1 Escoamento em Tubos

Ataíde [3] obteve, para escoamento de fluidos de Robertson & Stiff, correlações do tipo Blasius:

$$f = \frac{0,262}{(Re_{RS})^{0,148}} \quad (II.102)$$

válida para $D = 2,16$ cm e $D = 3,58$ cm

e:

$$f = \frac{0,280}{(Re_{RS})^{0,184}} \quad (II.103)$$

válida para $D = 5,38$ cm.

onde Re_{RS} é dado por:

$$Re_{RS} = \frac{8 \rho \langle v \rangle^2}{A \left[\left(\frac{3B+1}{4B} \right) \frac{8 \langle v \rangle}{D} + \frac{4C}{3} \right]^B} \quad (II.104)$$

II.3.5.2 Escoamento Anular

Recentemente, Ohen [14] propôs, para cálculo do coeficiente de atrito tanto para escoamento em tubos quanto para escoamento anular, uma correlação do tipo Colebrook & White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,74 - 0,8686 \ln \left[\frac{\epsilon}{R} + \frac{18,7}{Re_{RS_0} \sqrt{f}} \right] \quad (II.105)$$

onde:

Re_{RS_0} - número de Reynolds proposto por Ohen,
dado por:

$$Re_{RS_0} = \frac{\rho \langle v \rangle D_h}{\mu_e} \quad (II.106)$$

D_h - diâmetro hidráulico
 ϵ - rugosidade do tubo
 μ_e - viscosidade efetiva, dada por:

$$\mu_e = \frac{A(\dot{\gamma} + C)^B}{\dot{\gamma}} \quad (II.107)$$

Considerando-se os resultados apresentados nessa Revisão da Literatura, observamos que o estudo do escoamento anular de fluidos cuja reologia possa ser descrita com um modelo a três parâmetros, como é o caso do fluido de Robertson & Stiff, merece ainda uma atenção especial, visto que o tratamento conhecido é de natureza empírica.

Nesse sentido, serão examinados nos próximos capítulos alguns aspectos considerados importantes quanto à determinação da queda de pressão nos diversos regimes de escoamento, bem como a previsão da velocidade de transição laminar-turbulento.

Capítulo III

Formulação Matemática Adimensional para Escoamento Laminar e de Transição de um Fluido de Robertson & Stiff

Nesse capítulo, realizaremos uma formulação matemática introduzindo variáveis adimensionais nas equações que descrevem o escoamento de um fluido de Robertson & Stiff em regime laminar, possibilitando o surgimento de grupos adimensionais importantes.

Esses grupos adimensionais são apresentados pela primeira vez na literatura, ensejando uma análise mais aprofundada da influência dos parâmetros reológicos para modelos que usam três desses parâmetros.

III.1 Modelo Reológico

O modelo reológico para um fluido de Robertson & Stiff [2], como já foi visto na seção (II.1.4), é dado por:

$$0 = \left(- \frac{dv_z}{dr} \right) \quad \tau \leq \tau_0$$

Procuremos definir algumas variáveis adimensionais relacionadas com o escoamento em dutos de geometria cilíndrica:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r}{R} \\ \xi_0 &= \frac{\tau_0}{\tau_R} \\ u &= \frac{v}{\langle v \rangle} \\ \Gamma &= - \frac{du}{d\xi} \end{aligned} \tag{III.2}$$

Introduzindo as variáveis adimensionais no modelo reológico , tem-se:

$$\xi = \frac{A}{\tau_R} \left(\frac{\langle v \rangle}{R} \Gamma + C \right)^B \tag{III.3}$$

ou ainda:

$$\xi = \xi_0 \left(\frac{\langle v \rangle}{RC} \Gamma + 1 \right)^B \tag{III.4}$$

III.2 Escoamento em Tubos

III.2.1 Perfil de Velocidade

O perfil de velocidade para escoamento laminar de um fluido de Robertson & Stiff num tubo, expresso em termos da tensão de cisalhamento na parede, é dado por:

$$v = \left(\frac{B}{B+1} \right) \left(\frac{\tau_R}{AR} \right)^{\frac{1}{B}} \left(R \frac{B+1}{B} - r \frac{B+1}{B} \right) - C(R-r) \quad (III.5)$$

$r > \lambda$

$$V = \left(\frac{B}{B+1} \right) \left(\frac{\tau_R}{AR} \right)^{\frac{1}{B}} \left(R \frac{B+1}{B} - \lambda \frac{B+1}{B} \right) - C(R-\lambda) \quad (III.6)$$

$r \leq \lambda$

onde λ é a posição radial na qual a tensão de cisalhamento no fluido se iguala a sua tensão residual.

Introduzindo as variáveis adimensionais, tem-se:

$$u = \left(\frac{B}{B+1} \right) \frac{RC}{\langle v \rangle} \left(\frac{1}{\xi_0} \right)^{\frac{1}{B}} \left[1 - \xi \frac{B+1}{B} - \left(\frac{B+1}{B} \right) \xi_0^{\frac{1}{B}} (1-\xi) \right] \quad (III.7)$$

$\xi > \xi_0$

$$u_0 = \left(\frac{B}{B+1} \right) \frac{RC}{\langle v \rangle} \left(\frac{1}{\xi_0} \right)^{\frac{1}{B}} \left[1 - \xi_0 \frac{B+1}{B} - \left(\frac{B+1}{B} \right) \xi_0^{\frac{1}{B}} (1-\xi_0) \right] \quad (III.8)$$

$\xi \leq \xi_0$

onde:

$$u_o = \frac{V}{\langle v \rangle} \quad (III.9)$$

III.2.2 Velocidade Média

A expressão da velocidade média, como já foi visto, (II.34), é dada por:

$$\langle v \rangle = \left(\frac{B}{3B+1} \right) R \left(\frac{\tau_R}{A} \right)^{\frac{1}{B}} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{R} \right)^{\frac{3B+1}{B}} \right] - \frac{RC}{3} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{R} \right)^3 \right] \quad (II.34)$$

ou ainda:

$$\langle v \rangle = \left(\frac{B}{3B+1} \right) R \left(\frac{\tau_R}{A} \right)^{\frac{1}{B}} \mathcal{Y} \quad (III.10)$$

sendo:

$$\mathcal{Y} = \left[1 - \xi_o^{\frac{3B+1}{B}} - \left(\frac{3B+1}{3B} \right) \xi_o^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_o^3) \right] \quad (III.11)$$

III.2.3 Coeficiente de Atrito

Utilizando a definição do coeficiente de atrito de Fanning:

$$f = \frac{\tau_R}{\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2} \quad (\text{III.12})$$

Fazendo:

$$f = \frac{16}{\varphi \text{Re}_{RS}^*} \quad (\text{III.13})$$

Igualando as duas expressões, tem-se:

$$\varphi \text{Re}_{RS}^* = \frac{8 \rho \langle v \rangle^2}{\tau_R} \quad (\text{III.14})$$

A partir da equação (III.10), tem-se:

$$\tau_R = A \left[\left(\frac{3B+1}{B} \right) \frac{\langle v \rangle}{R\gamma} \right]^B \quad (\text{III.15})$$

Substituindo τ_R na equação (III.14), obtém-se:

$$\varphi \text{Re}_{RS}^* = \frac{2^{(3-B)} \rho \langle v \rangle^{(2-B)} D^B}{\left(\frac{3B+1}{B} \right)^B A} \gamma^B \quad (\text{III.16})$$

Fazendo-se:

$$\varphi = \gamma^B$$

isto é,

$$\varphi = \left[1 - \xi_o \frac{3B+1}{B} - \left(\frac{3B+1}{3B} \right) \xi_o^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_o^3) \right]^B \quad (\text{III.17})$$

φ é função dos parâmetros reológicos B e τ_o e da tensão de cisalhamento na parede τ_R , isto é, $\varphi = \varphi(\xi_o, B)$. Os dois valores limites de φ são:

$$\lim_{B \rightarrow 1} \varphi = 1 - \frac{4}{3} \xi_o + \frac{1}{3} \xi_o^4 \quad (\text{III.18})$$

$$\lim_{\xi_o \rightarrow 0} \varphi = 1 \quad (\text{III.19})$$

Para $B = 1$, o modelo de Robertson & Stiff reproduz o Plástico de Bingham, sendo a tensão residual igual a $\tau_o = AC$ e viscosidade plástica igual a $\mu_p = A$.

Para $\xi_o = 0$, o modelo de Robertson & Stiff reproduz o *Power-Law*, sendo o índice de consistência do fluido, k , igual a $k = A$ e o índice de comportamento do fluido, n , igual a $n = B$.

III.2.4 Número de Reynolds Generalizado

A obtenção de um Número de Reynolds generalizado, que permita o correlacionamento de dados referentes ao escoamento de fluidos que se ajustem ao modelo de Robertson & Stiff, pode ser obtido através da combinação das equações (III.16) e (III.17), obtendo-se:

$$\text{Re}_{\text{RS}}^* = \frac{2(3-B) \rho \langle v \rangle (2-B) \mu^B}{\left(\frac{3B+1}{B} \right)^B A} \quad (\text{III.20})$$

III.2.5 Número de Hedstrom Modificado

Substituindo a velocidade média, dada pela equação (III.11), na expressão do Número de Reynolds proposto, dado pela equação (III.20) e efetuando um rearranjo, obtém-se:

$$\text{Re}_{\text{RS}}^* = \frac{\rho D^2}{\tau_o} \left(\frac{\tau_o}{A} \right)^{\frac{2}{B}} \left[2 \left(\frac{B}{3B+1} \right)^2 \left(\frac{\varphi}{\xi_o} \right)^{\left(\frac{2-B}{B} \right)} \right] \quad (\text{III.21})$$

Fazendo-se:

$$\text{He}^* = \frac{\rho D^2}{\tau_o} \left(\frac{\tau_o}{A} \right)^{\frac{2}{B}} \quad (\text{III.22})$$

Como $\tau_o = A C^B$, então:

$$\text{He}^* = \frac{\rho D^2}{A} C^{(2-B)} \quad (\text{III.23})$$

Obtém-se finalmente:

$$\text{Re}_{\text{RS}}^* = 2 \text{He}^* \left(\frac{B}{3B+1} \right)^2 \left(\frac{\varphi}{\xi_o} \right)^{\left(\frac{2-B}{B} \right)} \quad (\text{III.24})$$

A equação (III.22) é uma generalização do Número de Hedstrom, relativo ao modelo de Robertson & Stiff. O Número de Hedstrom depende dos parâmetros reológicos do fluido **A**, **B** e **C**, da sua massa específica ρ e

do diâmetro do tubo, D . Para um dado sistema fluido-tubo, o Número de Hedstrom é portanto constante.

A equação (III.24) define o Número de Reynolds como uma função explícita do Número de Hedstrom e de ξ_o . Também define ξ_o como uma função implícita do Número de Reynolds e do Número de Hedstrom.

III.3 Escoamento Anular

III.3.1 Perfil de Velocidade

O perfil de velocidade para escoamento anular, em regime laminar, de um fluido de Robertson & Stiff, é dado por:

$$v = \left(\frac{B}{B+1} \right) R \left(\frac{\tau_R}{A} \right)^{\frac{1}{B}} \left[1 - \xi \frac{B+1}{B} - \left(\frac{B+1}{B} \right) \xi_o^{\frac{1}{B}} (1 - \xi) \right] \quad r > \lambda \quad (III.25)$$

$$V = \left(\frac{B}{B+1} \right) R \left(\frac{\tau_R}{A} \right)^{\frac{1}{B}} \left[1 - \xi_o \frac{B+1}{B} - \left(\frac{B+1}{B} \right) \xi_o^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_o) \right] \quad r \leq \lambda \quad (III.26)$$

Adimensionalizando, tem-se:

$$u = \left(\frac{B}{B+1} \right) \frac{RC}{\langle v \rangle} \left(\frac{1}{\xi_o} \right)^{\frac{1}{B}} \left[1 - \xi \frac{B+1}{B} - \left(\frac{B+1}{B} \right) \xi_o^{\frac{1}{B}} (1 - \xi) \right] \quad \xi > \xi_o \quad (III.27)$$

$$u_o = \left(\frac{B}{B+1} \right) \frac{RC}{\langle v \rangle} \left(\frac{1}{\xi_o} \right)^{\frac{1}{B}} \quad (III.28)$$

$$\left[1 - \frac{B+1}{\xi_o^B} - \left(\frac{B+1}{B} \right) \frac{1}{\xi_o^B} (1 - \xi_o) \right] \quad \xi \leq \xi_o$$

onde u_o é dado pela equação (III.9).

III.3.2 Velocidade Média

A expressão da velocidade média para escoamento anular de um fluido de Robertson & Stiff, equação (II.37), é dada por:

$$\langle v \rangle = \left(\frac{B}{2B+1} \right) R \left(\frac{\tau_R}{A} \right)^{\frac{1}{B}} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{R} \right)^{\frac{2B+1}{B}} \right] - \frac{RC}{2} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 \right] \quad (III.29)$$

Introduzindo as variáveis adimensionais previamente definidas, tem-se:

$$\langle v \rangle = \left(\frac{B}{2B+1} \right) R \left(\frac{\tau_R}{A} \right)^{\frac{1}{B}} \mathcal{Y}^* \quad (III.30)$$

$$\mathcal{Y}^* = \left[1 - \frac{2B+1}{\xi_o^B} - \left(\frac{2B+1}{B} \right) \frac{1}{\xi_o^B} (1 - \xi_o^2) \right] \quad (III.31)$$

III.3.3 Coeficiente de Atrito

Utilizando a definição do coeficiente de atrito de Fanning:

$$f = \frac{\tau_R}{\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2}$$

Fazendo:

$$f = \frac{24}{\varphi^* \text{Re}_{\text{RS}}^*} \quad (\text{III.32})$$

Igualando as duas expressões, tem-se:

$$\varphi^* \text{Re}_{\text{RS}}^* = \frac{12 \rho \langle v \rangle^2}{\tau_R} \quad (\text{III.33})$$

A partir da equação da velocidade média, tem-se:

$$\tau_R = A \left[\left(\frac{2B+1}{B} \right) \frac{\langle v \rangle}{R \mathcal{Y}^*} \right]^B \quad (\text{III.34})$$

Substituindo τ_R na equação (III.33), obtém-se:

$$\varphi^* \text{Re}_{\text{RS}}^* = \frac{12 \rho \langle v \rangle^{(2-B)} R^B}{\left(\frac{2B+1}{B} \right)^B A} (\mathcal{Y}^*)^B \quad (\text{III.35})$$

Como

$$R = \frac{D_{\text{eq}}}{4}$$

então:

$$\varphi^* \text{Re}_{\text{RS}}^* = \frac{12^{(1-B)} \rho \langle v \rangle^{(2-B)} D_{\text{eq}}^B}{\left(\frac{2B+1}{3B}\right)^B A} (\mathcal{Y}^*)^B \quad (\text{III.36})$$

Fazendo-se:

$$\varphi^* = (\mathcal{Y}^*)^B$$

tem-se:

$$\varphi^* = \left[1 - \xi_o \frac{2B+1}{B} - \left(\frac{2B+1}{B}\right) \xi_o^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_o^2) \right]^B \quad (\text{III.37})$$

III.3.4 Número de Reynolds Generalizado

A obtenção de um Número de Reynolds generalizado, que permita o correlacionamento de dados referentes ao escoamento de fluidos que se ajustem ao modelo de Robertson & Stiff, pode ser obtido através da combinação das equações (III.36) e (III.37), obtendo-se:

$$\text{Re}_{\text{RS}}^* = \frac{12^{(1-B)} \rho \langle v \rangle^{(2-B)} D_{\text{eq}}^B}{\left(\frac{2B+1}{3B}\right)^B A} \quad (\text{III.38})$$

III.3.5 Número de Hedstrom Modificado

Substituindo a velocidade média, dada pela equação (III.30) na expressão do Número de Reynolds proposto dado pela equação(III.38) e efetuando procedimentos algébricos, obtém-se:

$$\text{Re}_{\text{RS}}^* = \frac{\rho D_{\text{eq}}^2}{\tau_o} \left(\frac{\tau_o}{A} \right)^{\frac{2}{B}} \left[\frac{1}{12} \left(\frac{3B}{2B+1} \right)^2 \left(\frac{\varphi^*}{\xi_o} \right)^{\left(\frac{2-B}{B} \right)} \right] \quad (\text{III.39})$$

Fazendo-se:

$$\text{He}^* = \frac{\rho D_{\text{eq}}^2}{\tau_o} \left(\frac{\tau_o}{A} \right)^{\frac{2}{B}} \quad (\text{III.40})$$

Obtém-se finalmente:

$$\text{Re}_{\text{RS}}^* = \frac{1}{12} \text{He}^* \left(\frac{3B}{2B+1} \right)^2 \left(\frac{\varphi^*}{\xi_o} \right)^{\left(\frac{2-B}{B} \right)} \quad (\text{III.41})$$

A equação (III.40) é uma generalização do Número de Hedstrom, relativo ao modelo de Robertson & Stiff. O Número de Hedstrom depende dos parâmetros reológicos do fluido A , B e C , da sua massa específica ρ e do diâmetro equivalente ao anulo, D_{eq} . Para um dado sistema fluido-ânulo, o Número de Hedstrom é portanto constante.

A equação (III.41) define o Número de Reynolds como uma função explícita do Número de Hedstrom e de ξ_o . Também define ξ_o como uma função implícita do Número de Reynolds e do Número de Hedstrom.

Os principais resultados apresentados na Seção III.3, que acabamos de apresentar, foram publicados pela autora da presente tese em 1988 [31] e 1990 [32].

III.4 Parâmetro de Estabilidade Aplicado ao Modelo de Robertson & Stiff

III.4.1 Introdução

A transição entre os regimes de escoamento laminar e turbulento é analisada empiricamente através da observação de gráficos adimensionais, relacionando o coeficiente de atrito com números de Reynolds generalizados. Com o objetivo de procurar contribuir com um tratamento mais aprofundado dessa questão, efetuaremos no presente parágrafo, um desenvolvimento com base no parâmetro de estabilidade proposto por Hanks [18] e dado por:

$$K = \frac{|\rho \vec{v} \times \vec{w}|}{|\nabla \cdot \vec{\tau}|} \quad (\text{III.42})$$

Em coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$|\rho \vec{v} \times \vec{w}| = \rho v_z \frac{dv_z}{dr} \quad (\text{III.43})$$

$$|\nabla \cdot \vec{\tau}| = \frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr}$$

Substituindo na equação (III.42), tem-se:

$$K = \frac{\rho r v_z \left(\frac{dv_z}{dr} \right)}{\left[\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} \right]} \quad (\text{III.44})$$

Definindo as variáveis adimensionais:

$$\xi = \frac{r}{R}$$

$$u = \frac{v}{\langle v \rangle}$$

$$\Gamma = - \frac{du}{d\xi}$$

Utilizando as variáveis adimensionais na expressão do parâmetro de estabilidade, tem-se:

$$K = \frac{\rho \langle v \rangle^2 u \Gamma}{2 \tau_R} \quad (\text{III.45})$$

Como:

$$f = \frac{\tau_R}{\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2}$$

então:

$$K = \frac{u \Gamma}{f} \quad (\text{III.46})$$

Para determinar o ponto crítico, no qual ocorre a transição laminar-turbulento, obtém-se a derivada do parâmetro de estabilidade com relação à posição, igualando-se a derivada a zero; isto porque no ponto crítico, o parâmetro de estabilidade atinge o valor máximo, ou seja:

$$\frac{dK}{d\xi} = 0 \quad (\text{III.47})$$

No ponto crítico, tem-se que: $\xi = \xi_c$ e $\xi_o = \xi_{oc}$. Além disso, considerar-se-á o valor do parâmetro de estabilidade nesse ponto como sendo dado por [18] :

$$K_c = 404 \quad (\text{III.48})$$

o que corresponde à transição de um fluido newtoniano.

III.4.2 O Parâmetro de Estabilidade aplicado ao Escoamento em Tubos

No escoamento de um fluido de Robertson & Stiff num tubo foi proposto, conforme as seções (III.2.3) e (III.2.4), o Número de Reynolds generalizado, tal que:

$$f = \frac{16}{\varphi \text{Re}_{\text{RS}}^*} \quad (\text{III.13})$$

onde f é o coeficiente de atrito de Fanning, φ e Re_{RS}^* são dados por:

$$\varphi = \left[1 - \xi_0 \frac{3B+1}{B} - \left(\frac{3B+1}{3B} \right) \xi_0^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_0^3) \right]^B \quad (\text{III.17})$$

$$\text{Re}_{\text{RS}}^* = \frac{2^{(3-B)} \rho \langle v \rangle^{(2-B)} D^B}{\left(\frac{3B+1}{B} \right)^B A} \quad (\text{III.20})$$

Substituindo a equação (III.13) em (III.46), tem-se:

$$K = \frac{\varphi \text{Re}_{\text{RS}}^*}{16} u \Gamma \quad (\text{III.49})$$

As funções envolvidas na equação (III.49) são dadas a seguir:

$$u = \left(\frac{B}{B+1} \right) \frac{RC}{\langle v \rangle} \left(\frac{1}{\xi_0} \right)^{\frac{1}{B}} \left[1 - \xi \frac{B+1}{B} - \left(\frac{B+1}{B} \right) \xi_0^{\frac{1}{B}} (1 - \xi) \right] \quad \xi > \xi_0 \quad (\text{III.50})$$

$$\Gamma = \frac{RC}{\langle v \rangle} \left[\left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\frac{1}{B}} - 1 \right] \quad (III.51)$$

$$\langle v \rangle = \left(\frac{B}{3B+1} \right) RC \left(\frac{1}{\xi_0} \right)^{\frac{1}{B}} \left[1 - \frac{3B+1}{\xi_0^{\frac{1}{B}}} - \left(\frac{3B+1}{3B} \right) \xi_0^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_0^3) \right] \quad (III.52)$$

Examinando-se a equação (III.49), verifica-se, uma vez que φ e Re_{RS}^* não são funções de ξ , que a equação (III.47) é satisfeita com a seguinte condição:

$$\frac{d(u\Gamma)}{d\xi} = 0 \quad (III.53)$$

Substituindo as funções dadas pelas equações (III.50) e (III.51) na equação (III.53), obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{1}{B} \left(\frac{\xi_c}{\xi_{0c}} \right)^{\frac{1}{B}} \frac{1}{\xi_c} \left[1 - \frac{B+1}{\xi_c^{\frac{1}{B}}} - \left(\frac{B+1}{B} \right) \xi_{0c}^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_c) \right] - \left(\frac{B+1}{B} \right) \xi_{0c}^{\frac{1}{B}} \left[\left(\frac{\xi_c}{\xi_{0c}} \right)^{\frac{1}{B}} - 1 \right]^2 = 0 \quad (III.54)$$

Pode-se representar essa função por:

$$\mathcal{F}(\xi_c, \xi_{0c}) = 0 \quad (III.55)$$

Substituindo o valor de \mathbf{K} no ponto crítico, dado pela equação (III.48) na equação (III.49), obtém-se:

$$\varphi_c (\text{Re}_{RS}^*)_c u_c \Gamma_c = 6464 \quad (\text{III.56})$$

Substituindo as expressões concernentes aos termos da equação (III.56), tem-se:

$$\frac{B-1}{\xi_{oc}^B} \left[1 - \xi_c \frac{B+1}{B} - \left(\frac{B+1}{B} \right) \xi_{oc}^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_c) \right] \left[\left(\frac{\xi_c}{\xi_{oc}} \right)^{\frac{1}{B}} - 1 \right] - \frac{6464 A}{2^{B-1} \rho D^2 C^{2-B}} \left(\frac{B+1}{B} \right) = 0 \quad (\text{III.57})$$

A expressão acima pode ser representada por:

$$\mathcal{G}_1(\xi_c, \xi_{oc}) = 0 \quad (\text{III.58})$$

Para se determinar o ponto crítico e, portanto, a transição laminar-turbulento, se faz necessária a solução do sistema de equações:

$$\mathcal{F}(\xi_c, \xi_{oc}) = 0 \quad (\text{III.55})$$

$$\mathcal{G}_1(\xi_c, \xi_{oc}) = 0 \quad (\text{III.58})$$

III.4.3 O Parâmetro de Estabilidade aplicado ao Escoamento Anular

No escoamento anular de um fluido de Robertson & Stiff foi proposto, conforme as seções (III.3.3) e (III.3.4) o Número de Reynolds generalizado, tal que:

$$f = \frac{24}{\varphi^* \text{Re}_{\text{RS}}^*} \quad (\text{III.32})$$

onde f é o coeficiente de atrito de Fanning, φ^* e Re_{RS}^* são dados por:

$$\varphi^* = \left[1 - \xi_0 \frac{2B+1}{B} - \left(\frac{2B+1}{B} \right) \xi_0^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_0^2) \right]^B \quad (\text{III.37})$$

$$\text{Re}_{\text{RS}}^* = \frac{12(1-B) \rho \langle v \rangle (2-B) D_{\text{eq}}^B}{\left(\frac{2B+1}{3B} \right)^B A} \quad (\text{III.38})$$

Substituindo a equação (III.38) em (III.46), tem-se:

$$K = \frac{\varphi^* \text{Re}_{\text{RS}}^*}{24} u \Gamma \quad (\text{III.59})$$

As funções envolvidas na equação (III.59) são dadas a seguir:

$$u = \left(\frac{B}{B+1} \right) \frac{RC}{\langle v \rangle} \left(\frac{1}{\xi_0} \right)^{\frac{1}{B}} \quad (\text{III.60})$$

$$\left[1 - \xi \frac{B+1}{B} - \left(\frac{B+1}{B} \right) \xi^{\frac{1}{B}} (1 - \xi) \right] \quad \xi > \xi_0$$

$$\Gamma = \frac{RC}{\langle v \rangle} \left[\left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\frac{1}{B}} - 1 \right] \quad (\text{III.61})$$

$$\langle v \rangle = \left(\frac{B}{2B+1} \right) R C \left(\frac{1}{\xi_o} \right)^{\frac{1}{B}} \left[1 - \frac{2B+1}{\xi_o^B} - \left(\frac{2B+1}{B} \right) \xi_o^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_o^2) \right] \quad (\text{III.62})$$

Examinando-se a equação (III.59), verifica-se, uma vez que φ^* e Re_{RS}^* não são funções de ξ , que a equação (III.47) é satisfeita com a seguinte condição:

$$\frac{d(u\Gamma)}{d\xi} = 0 \quad (\text{III.63})$$

Substituindo as funções dadas pelas equações (III.60) e (III.61) na equação (III.63), obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{1}{B} \left(\frac{\xi_c}{\xi_{oc}} \right)^{\frac{1}{B}} \frac{1}{\xi_c} \left[1 - \frac{B+1}{\xi_c^B} - \left(\frac{B+1}{B} \right) \xi_{oc}^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_c) \right] - \left(\frac{B+1}{B} \right) \xi_{oc}^{\frac{1}{B}} \left[\left(\frac{\xi_c}{\xi_{oc}} \right)^{\frac{1}{B}} - 1 \right]^2 = 0 \quad (\text{III.64})$$

Pode-se representar essa função por:

$$\mathcal{F}(\xi_c, \xi_{oc}) = 0 \quad (\text{III.55})$$

Substituindo o valor de \mathbf{K} no ponto crítico, dado pela equação (III.48) na equação (III.59), obtém-se:

$$(\varphi^*)_c (\text{Re}_{\text{RS}}^*)_c u_c \Gamma_c = 9696 \quad (\text{III.65})$$

Substituindo as expressões concernentes aos termos da equação (III.65), tem-se:

$$\frac{B-1}{\xi_{oc}^B} \left[1 - \xi_c \frac{B+1}{B} - \left(\frac{B+1}{B} \right) \xi_{oc}^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_c) \right] \left[\left(\frac{\xi_c}{\xi_{oc}} \right)^{\frac{1}{B}} - 1 \right] - \frac{12928 A}{\rho D_{eq}^2 C^2 - B} \left(\frac{B+1}{B} \right) = 0 \quad (III.66)$$

A expressão acima pode ser representada por:

$$\mathcal{G}_2(\xi_c, \xi_{oc}) = 0 \quad (III.67)$$

Para se determinar o ponto crítico e, portanto, a transição laminar-turbulento, se faz necessária a solução do sistema de equações:

$$\mathcal{F}(\xi_c, \xi_{oc}) = 0 \quad (III.55)$$

$$\mathcal{G}_2(\xi_c, \xi_{oc}) = 0 \quad (III.67)$$

Algumas tentativas foram feitas no presente trabalho para a solução dos sistemas formados pelas equações (III.55) e (III.58), para o caso de escoamento em tubos, e também para aquele sistema que reúne as equações (III.55) e (III.67), no caso de escoamento anular.

Os resultados obtidos para alguns casos típicos são mostrados na Tabela III.1, verificando-se que, embora promissora, a formulação aqui apresentada ainda não conseguiu atingir a generalização buscada na previsão da região de transição.

Sistema n ^o	ξ_{oc}	ξ_c	$(Re_{rs}^*)_c$
1	0,0796	0,6185	5450,4
2	0,0936	0,6408	5369,0
3	0,0710	0,6275	5675,6
4	0,0290	0,6352	5628,9
5	0,0615	0,6431	5520,0
6	0,0082	0,6286	5674,8
7	0,0182	0,6305	5653,7
8	0,0724	0,6760	5511,2
9	0,1398	0,6253	5285,3
10	$1,8 \cdot 10^{-5}$	0,4606	5213,6
11	0,0026	0,5486	5527,5
12	0,0131	0,6475	5682,8
13	0,0035	0,5158	5463,5
14	0,0191	0,4952	5951,3
15	0,0007	0,4657	5296,7

Tabela III.1: Resultados referentes à predição da Transição

Capítulo IV

Apresentação e Discussão dos Resultados para Escoamento Anular

IV.1 Introdução

Nesse capítulo, efetuaremos a apresentação dos resultados obtidos através da análise formulada no Capítulo III comparada com dados experimentais existentes na literatura. Será apresentada também a comparação com a metodologia proposta por Ohen [14], de modo a analisarmos o cálculo do coeficiente de atrito nos diversos regimes de escoamento, para os diversos Número de Reynolds Generalizados previamente definidos.

Apresentamos, a seguir, a Tabela IV.1 que mostra os sistemas fluidos utilizados na análise à qual se refere o Capítulo III.

A utilização, no presente trabalho, do modelo de Robertson & Stiff exigiu o conhecimento de métodos que permitam a determinação dos parâmetros **A**, **B** e **C** a partir de medidas reológicas em aparelhos do tipo Couette (cilindros rotatórios) e em reômetros tubulares.

No Apêndice A são delineados as duas metodologias empregadas para o cálculo dos parâmetros reológicos que estão mostrados na Tabela IV.1.

A seguir, discutiremos cada regime de escoamento separadamente.

Sistema n ^o	ρ (g/cm ³)	Parâmetros Reológicos			Geometria Anular		Planta Piloto (Ref. n ^o)
		A (dyn/cm ²)	B (-)	C (s ⁻¹)	D ₁ (cm)	D ₂ (cm)	
1	1,030	0,0713	0,9563	58,39	3,34	6,20	[33]
2	1,054	0,3819	0,8627	49,32	7,30	12,42	[33]
3	1,054	0,2996	0,8210	2,84	3,34	6,20	[33]
4	1,054	0,5592	0,8089	23,87	3,34	6,20	[33]
5	1,054	0,5592	0,8089	23,87	7,30	12,42	[33]
6	1,060	0,5430	0,8178	5,30	3,34	6,20	[33]
7	1,060	0,5430	0,8178	5,30	7,30	12,42	[33]
8	1,220	0,9410	0,6913	31,43	4,82	7,75	[34]
9	1,220	0,0421	1,0946	752,54	6,10	7,75	[34]
10	1,190	0,0269	1,5662	176,03	4,82	7,75	[34]
11	1,000	0,1643	1,1274	27,05	4,82	7,75	[35]
12	1,000	5,4207	0,7564	28,57	4,82	7,75	[35]
13	1,000	0,0332	1,2942	241,92	6,10	7,75	[35]
14	1,000	0,0036	1,5571	305,54	4,82	7,75	[35]
15	1,000	0,0036	1,5571	305,54	6,10	7,75	[35]

Tabela IV.1: Descrição dos Sistemas Experimentais

IV.2 Gráficos Adimensionais

A construção de diagramas adimensionais é esclarecedora para o estudo da queda de pressão no escoamento de fluidos. Esse tipo de gráfico permite a identificação das faixas de escoamento e torna-se um padrão importante para comparação com resultados experimentais.

Nas Figuras IV.1 a IV.6 são apresentados este tipo de gráfico, contendo resultados englobando os vários regimes de escoamento.

Os dados experimentais mostrados nesses gráficos foram obtidos por Langlinais *et alli* [33], Silva *et alli* [34] e Silva [35] em dois diferentes tipos de Unidades Piloto, construídas especificamente para o escoamento anular de suspensões.

É importante observar que são relativamente raros na literatura do escoamento de suspensões dados experimentais em geometrias anulares que contenham informações completas sobre a reologia, de modo a possibilitar a análise pela formulação aqui apresentada.

Na Figura IV.8 está construído um gráfico que relaciona o Número de Reynolds e o Número de Hedstrom definidos pelas equações (III.38) e (III.39), respectivamente. Os Números de Reynolds que constam da ordenada atendem especificamente a um ponto definido como de transição laminar-turbulento, sendo determinados através da interseção das linhas retas obtidas para as regiões laminar e completamente turbulenta nos gráficos de gradiente de pressão em função da vazão.

IV.2.1 Escoamento em Regime Laminar

Na Capítulo III, Seção III.3, foi proposto o coeficiente de atrito para o regime laminar, dado pela Equação (III.32), tal que o Número de Reynolds para o modelo de Robertson & Stiff fôsse dado pela Equação (III.38).

Ns gráficos das Figuras IV.1 a IV.6 são mostrados, além dos resultados experimentais, também os valores calculados pela formulação aqui desenvolvida para o regime laminar (Equação III.32). Observa-se nesses gráficos que os desvios máximos entre os resultados experimentais e calculados são da ordem de 30%, obtendo-se em alguns casos (Fig. IV.6) uma concordância muito boa, com desvios sempre inferiores a 10%.

Com a formulação do escoamento laminar aqui apresentada, é possível, por exemplo, fixado o valor do parâmetro reológico \mathbf{B} , elaborar gráficos adimensionais generalizados, relacionando o coeficiente de atrito f com o Número de Reynolds, Re_{rs}^* , tendo como parâmetro o Número de Hedstrom. Um gráfico desse tipo é apresentado na Figura IV.7

IV.2.2 Região de Transição

Foi desenvolvida, no Capítulo III, Seção III.4.3, uma formulação analítica visando prever a região de transição para um fluido de Robertson & Stiff. Entretanto, como foi possível verificar na Tabela III.1, a resolução numérica do sistema formado pelas equações (III.55) e (III.67) obtida não foi satisfatória, vez que não se conseguiu atingir a generalização buscada na previsão da região de transição. De modo a suprir essa lacuna, buscou-se uma correlação dos dados experimentais, como se pode inferir do Gráfico IV.8, que apresenta o Número de Reynolds crítico em função do Número de Hedstrom modificado, ambos propostos nesse trabalho. A correlação obtida pode ser escrita na forma:

$$(Re_{rs}^*)_c = 2365,4 (He^*)^{0,014} \quad (IV.1)$$

Os resultados apresentados para a predição do Número de Reynolds, Re_{rs}^* , no ponto de transição são apenas razoáveis, pois verificamos em algumas situações desvios elevados, da ordem de até 100 %. Atribuímos essa pequena precisão à dificuldade de identificação de um critério mais científico para a predição da transição laminar-turbulenta.

IV.2.3 Escoamento em Regime Turbulento

Correlacionou-se os dados experimentais obtidos por Langlinais *et alli* [33], Silva *et alli* [34] e Silva [35] para a região de escoamento completamente turbulento, com os resultados sendo apresentados no gráfico da Figura IV.9. Esses resultados podem ser representados por uma equação do tipo Blasius na forma:

$$f = \frac{0,0822}{(Re_{rs}^*)^{0,2921}} \quad (IV.2)$$

A correlação obtida está também apresentada sob a forma de uma reta tracejada nos gráficos das Figuras IV.2 a IV.6 e IV.10.

A dispersão dos dados experimentais relativa à correlação apresentada para o escoamento turbulento, acarreta desvios até da ordem de 25 %, não permitindo ainda uma generalização para quaisquer diâmetro equivalente e Número de Hedstrom . Portanto, esses resultados indicam que no escoamento completamente turbulento, o coeficiente de atrito passa a ser uma função apenas do Re_{rs}^* , embora ocorram as dispersões já indicadas.

A correlação aqui proposta para o regime completamente turbulento consegue reunir um conjunto limitado de dados experimentais, servindo como uma boa estimativa para o cálculo da queda de pressão nesse regime.

O gráfico da Figura IV.11 mostra o Coeficiente de Atrito em função do Número de Reynolds , Re_{rs}^* , para alguns sistemas.

IV.3 Comparação Direta da Queda de Pressão

Nesse parágrafo serão apresentados os resultados já discutidos numa forma mais direta de comparação, envolvendo o gradiente de pressão em função da vazão para os diversos sistemas físicos e regimes de escoamento.

O presente método de comparação serve também como um teste de correlacionamento para os resultados obtidos na forma adimensional.

As Figuras IV.12 a IV.20 contêm as diversas comparações de resultados experimentais com as metodologias de cálculo apresentadas por Ohen [14] e pelo presente trabalho, para os regimes de escoamento laminar e turbulento.

Estão mostrados também, em cada gráfico, o valor considerado como vazão experimental no ponto de transição , que pode ser comparado com as interseções das retas calculadas que definem os dois regimes.

Observa-se, dos resultados apresentados, que, como decorrência do trabalho desenvolvido, é possível efetuar uma previsão consistente do gradiente de pressão em anulares, sendo conhecida a vazão do fluido e a curva reológica do mesmo.

Os desvios obtidos pela formulação da presente tese são geralmente menores que os da formulação de Ohen [14], com valores compatíveis com os do cálculo de queda de pressão para misturas complexas em outras geometrias mais simples, como é o caso de tubos

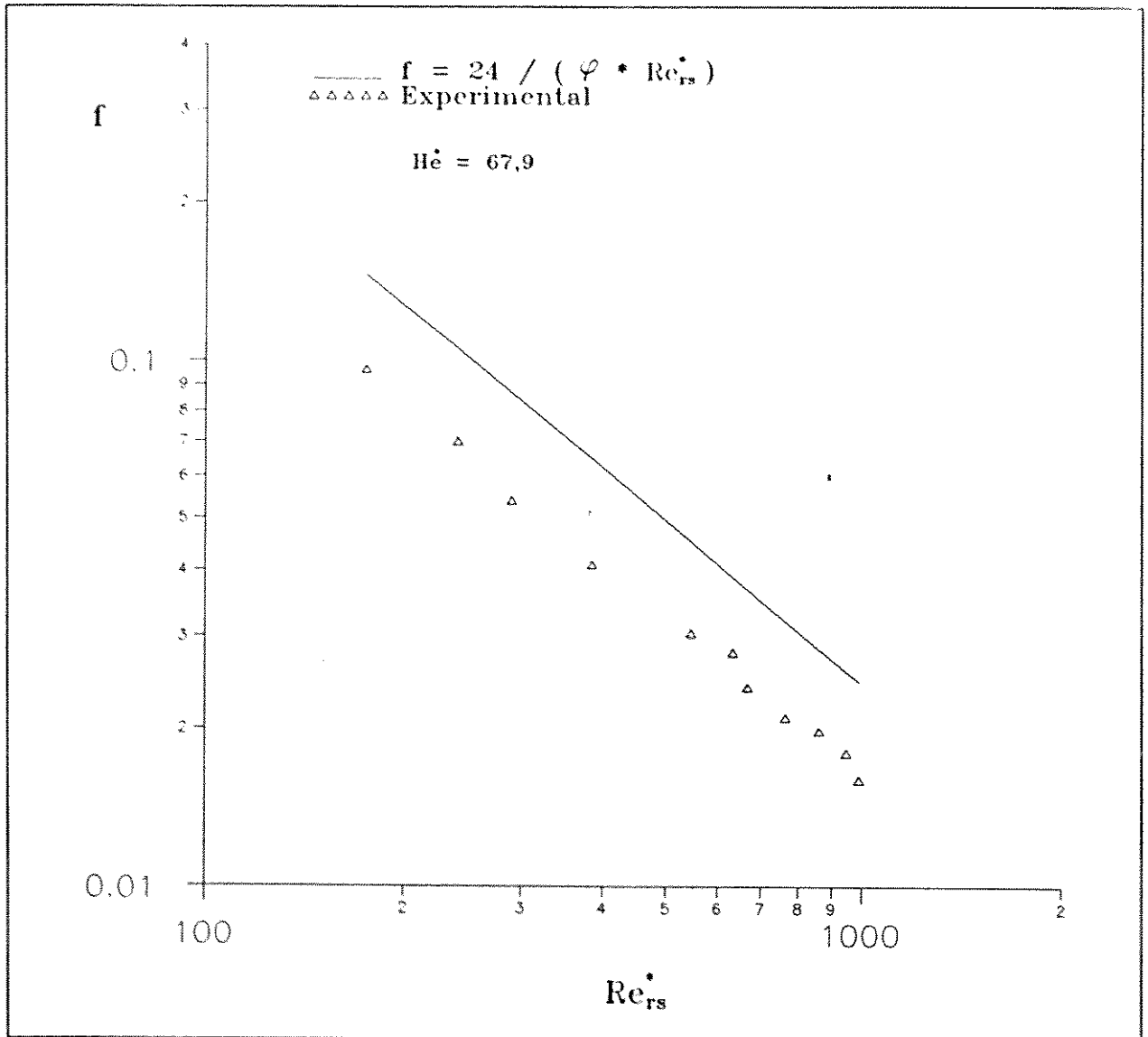


Figura IV.1: Coeficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema n^o 12

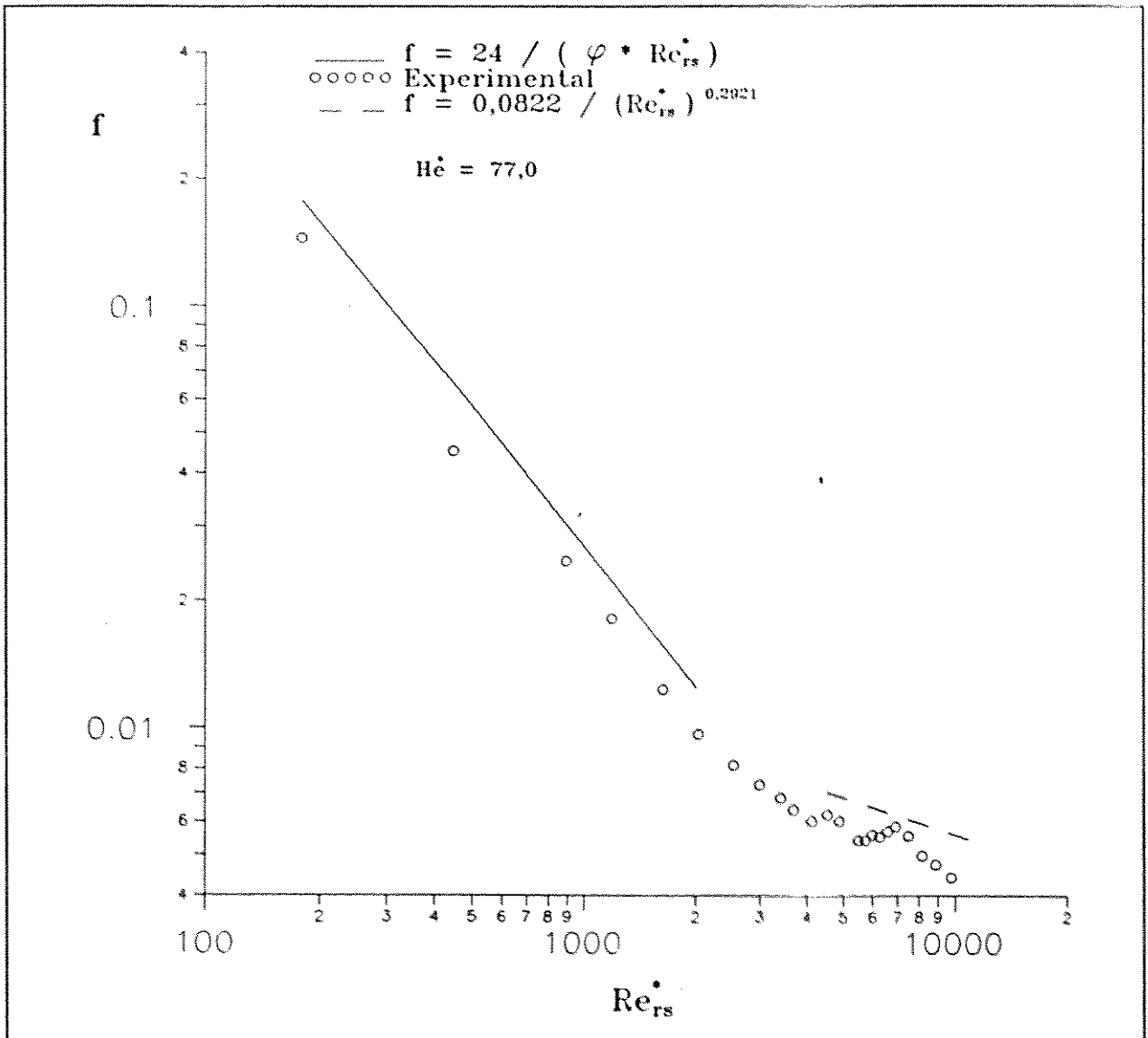


Figura IV.2: Coeficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema nº 8

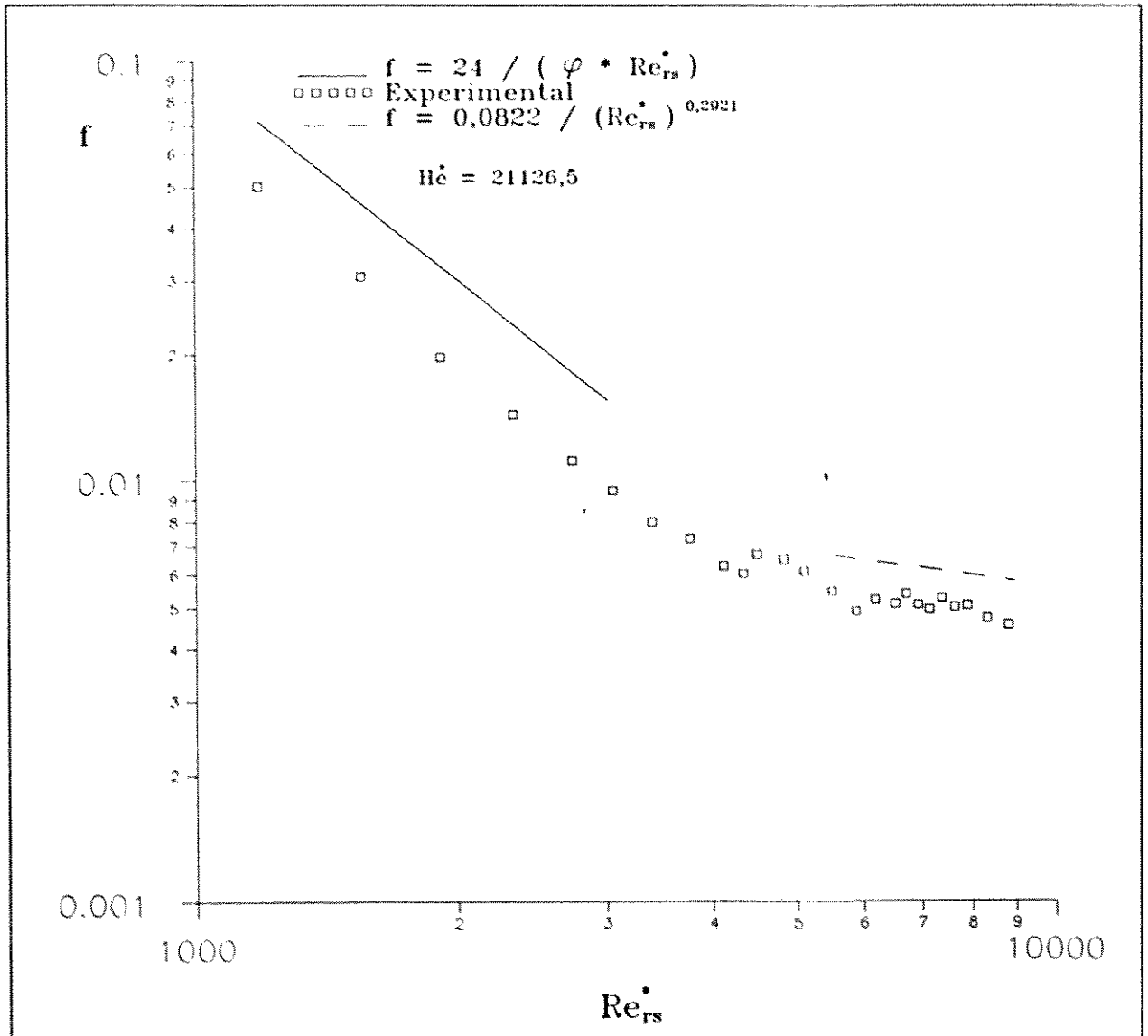


Figura IV.3: Coeficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema nº 9

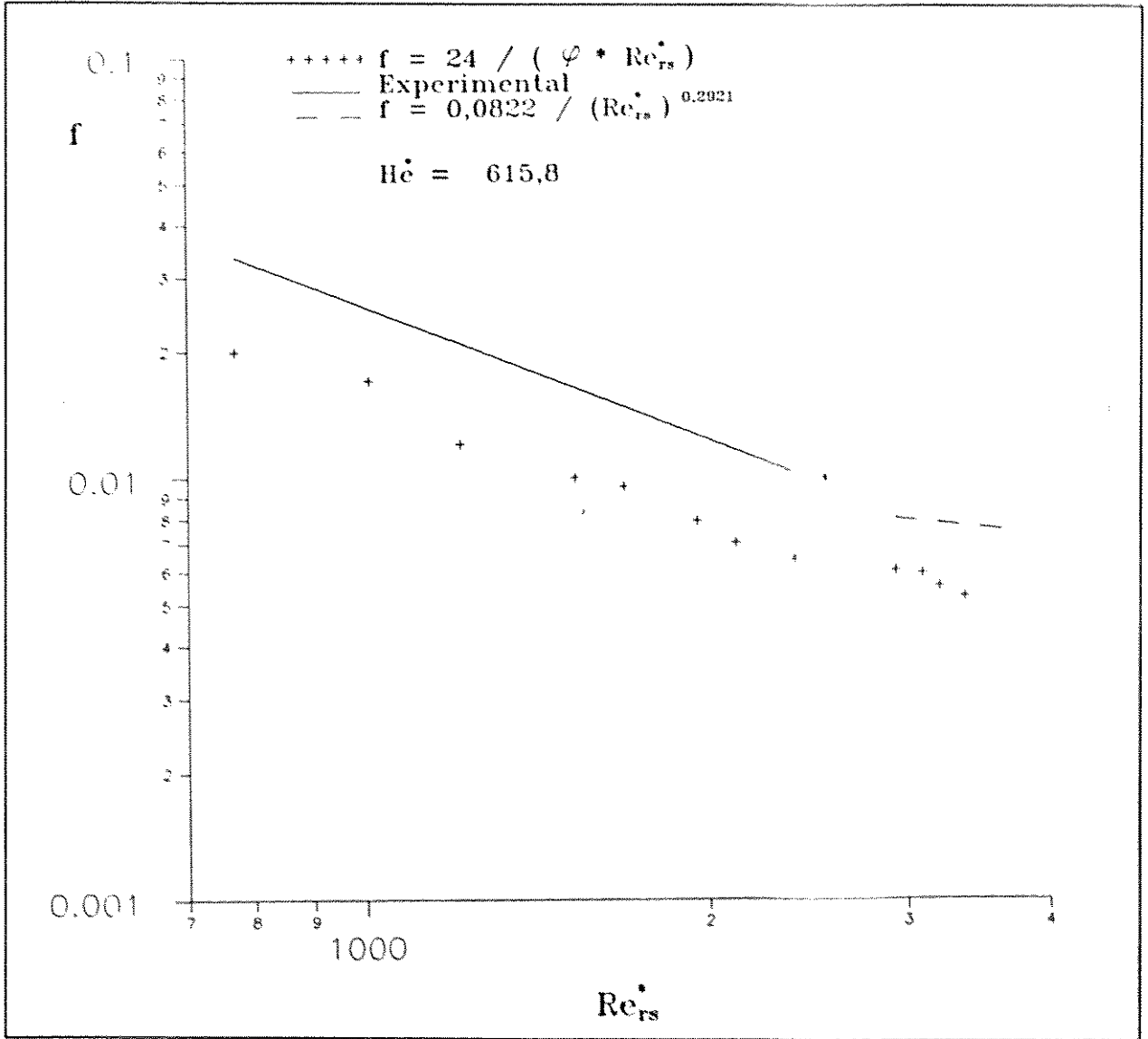


Figura IV.4: Coeficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema n^o 11

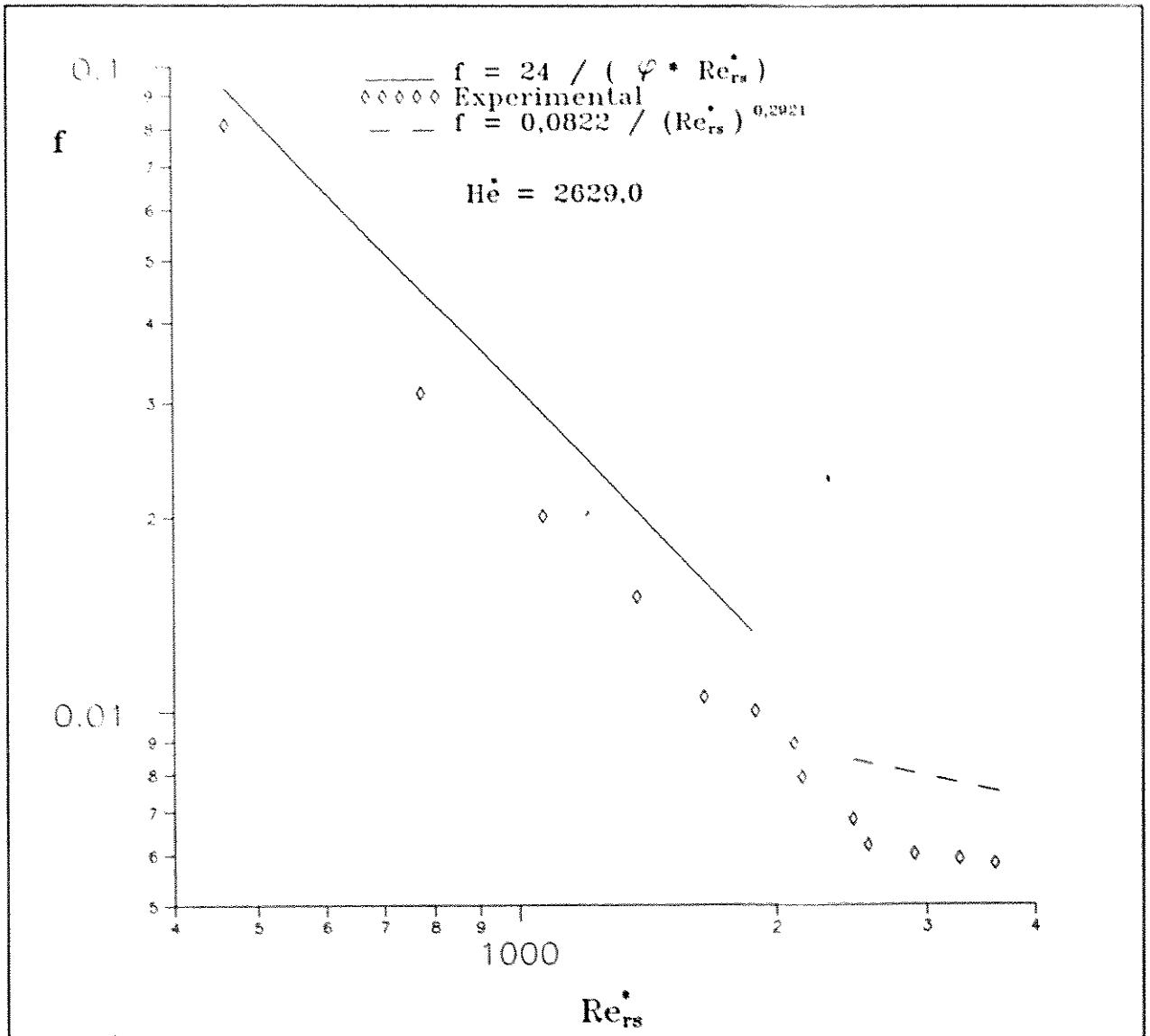


Figura IV.5: Coeficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema nº 13

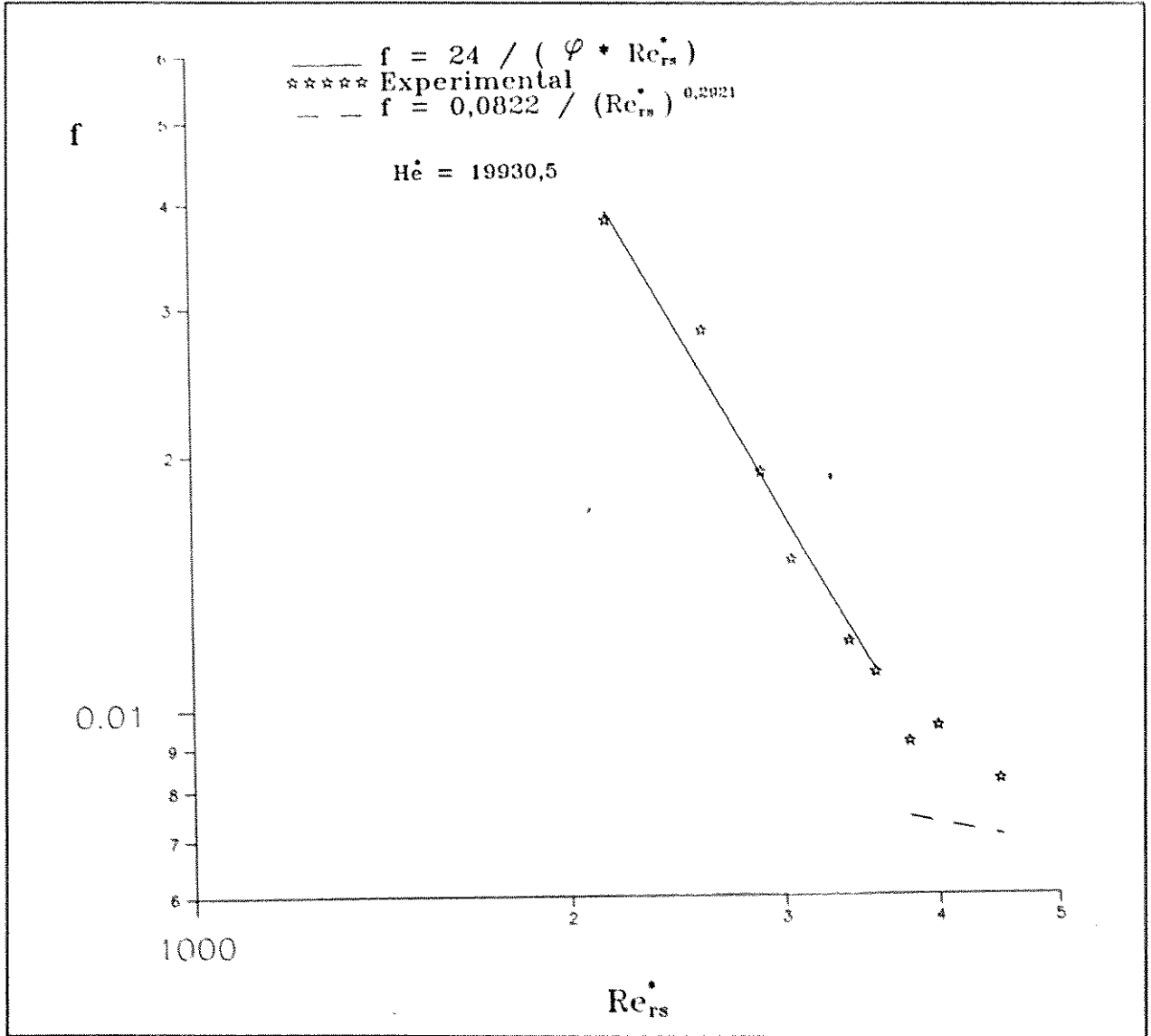


Figura IV.6: Coeficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema n° 14

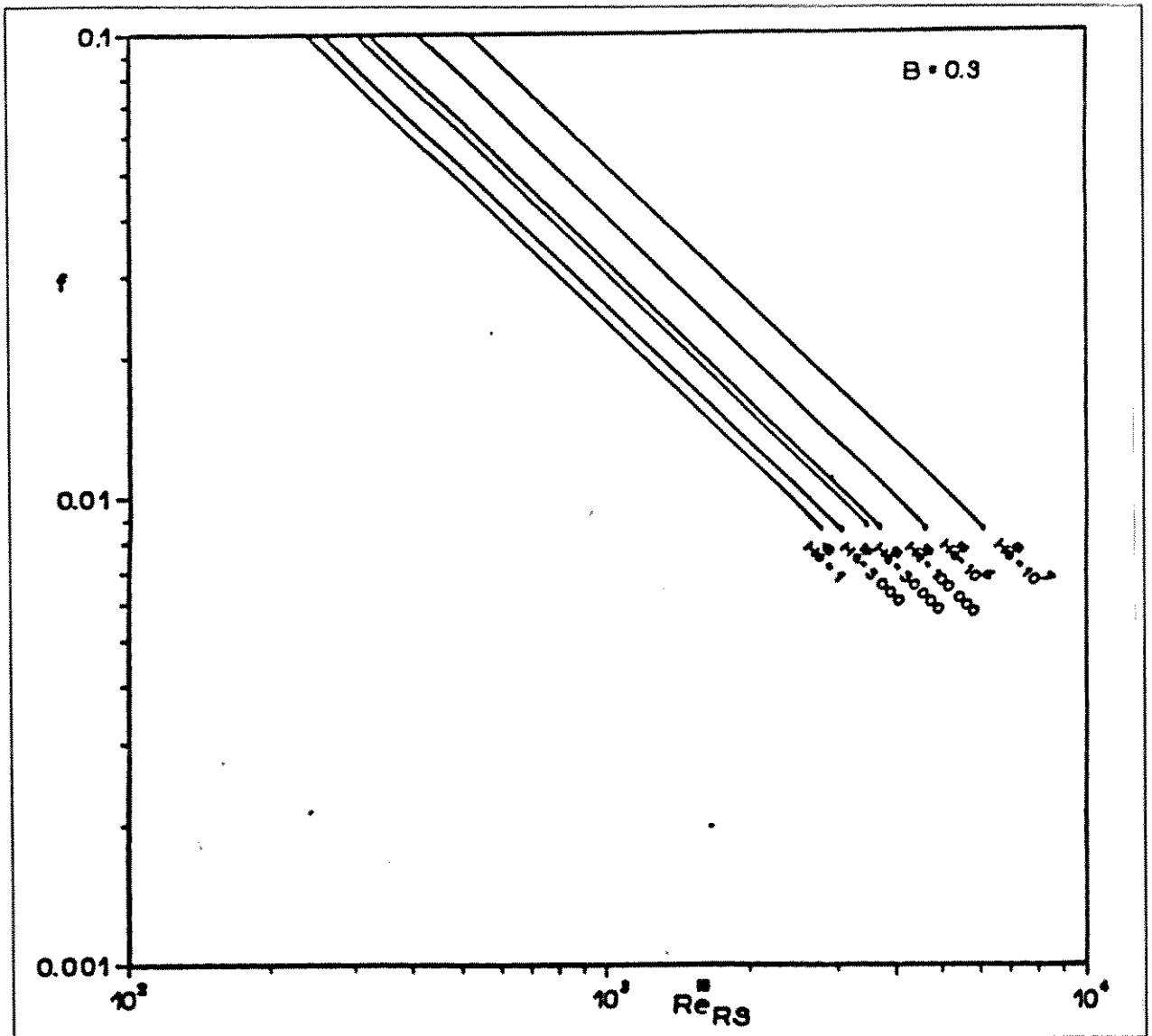


Figura IV.7: Coeficiente de Atrito em função do Número de Reynolds proposto, tendo como parâmetro o Número de Hedstrom, para $B = 0,3$

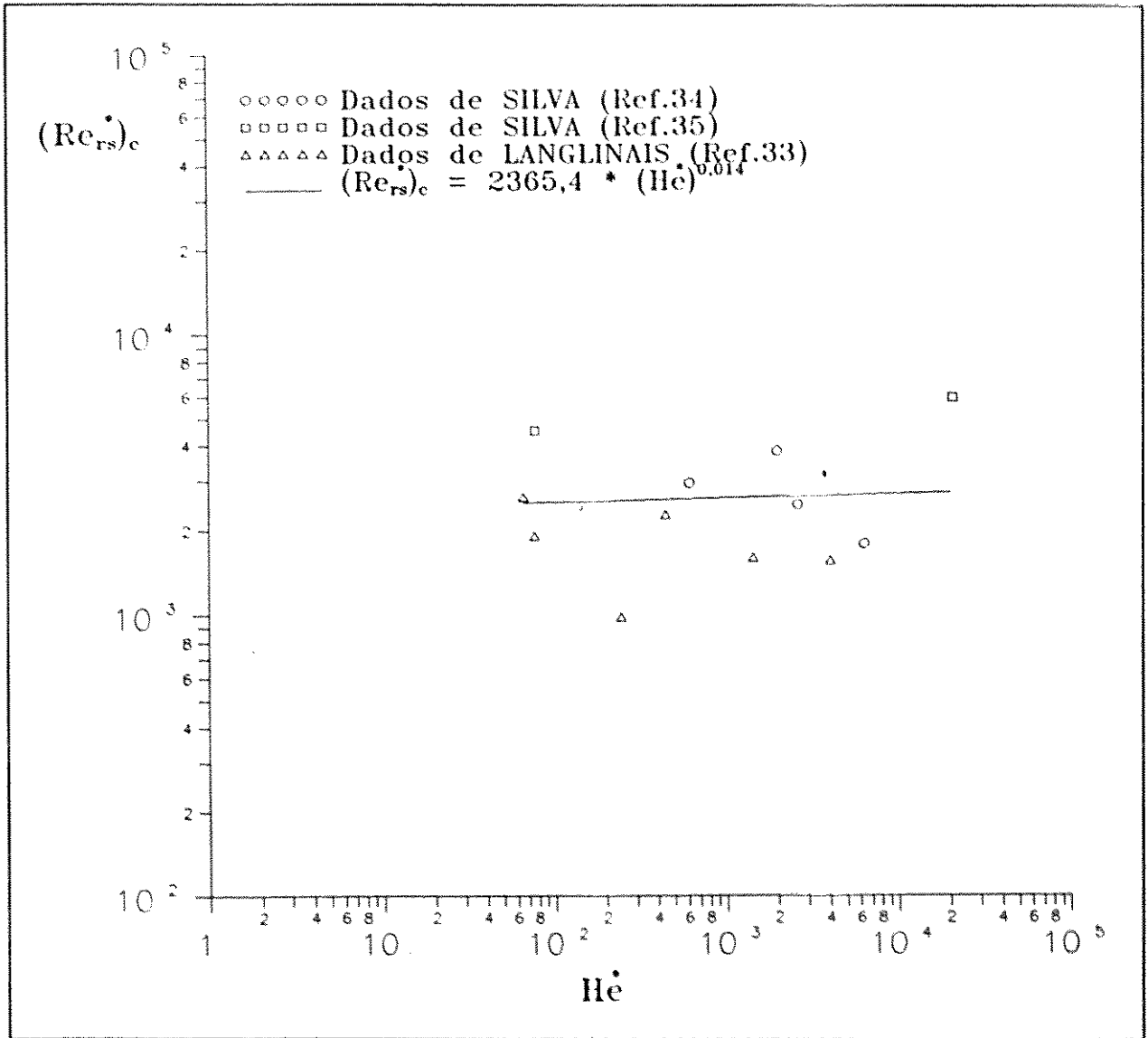


Figura IV.8: Número de Reynolds crítico em função do Número de Hedstrom modificado

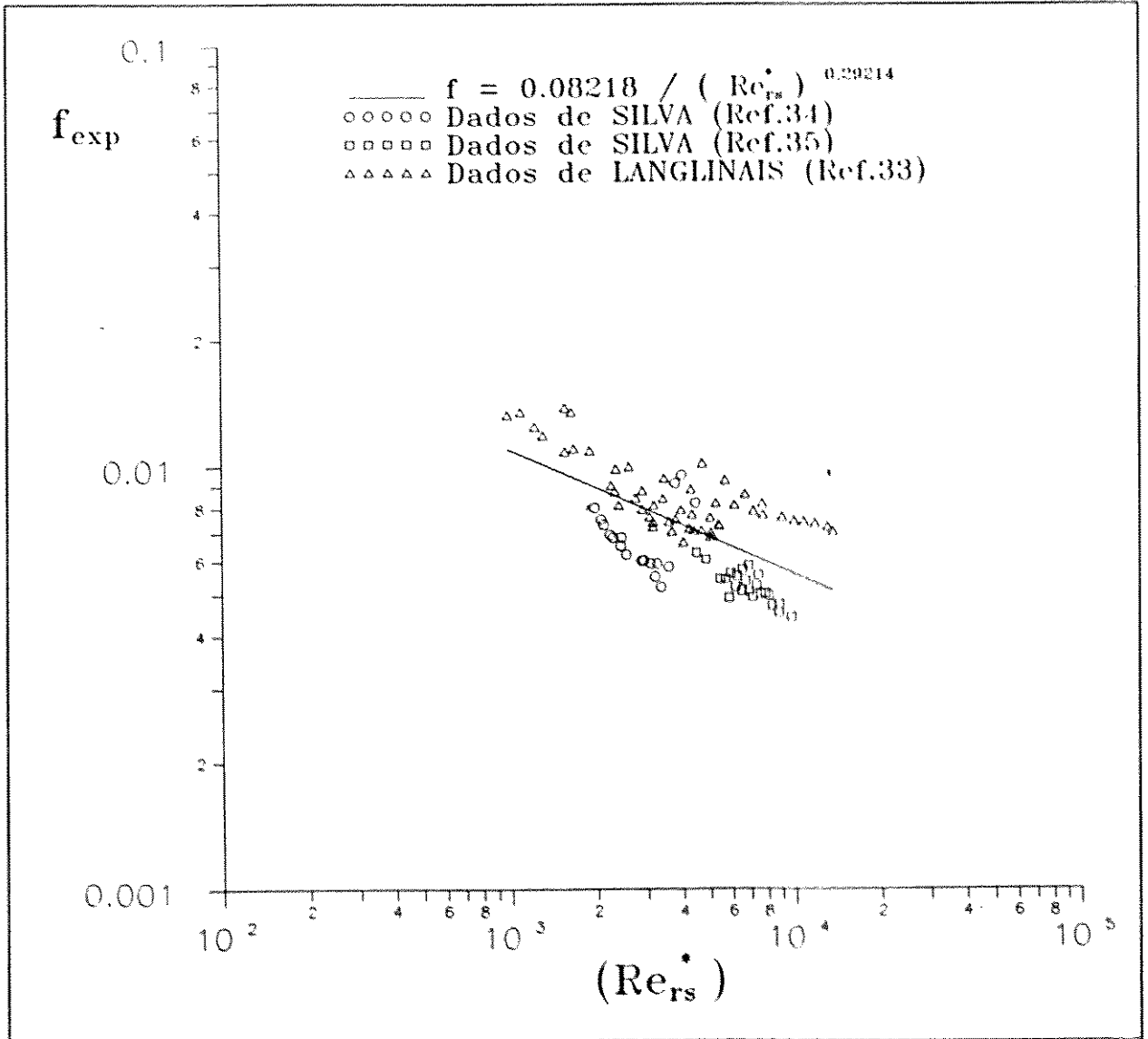


Figura IV.9: Gráfico adimensional para o coeficiente de atrito no escoamento turbulento

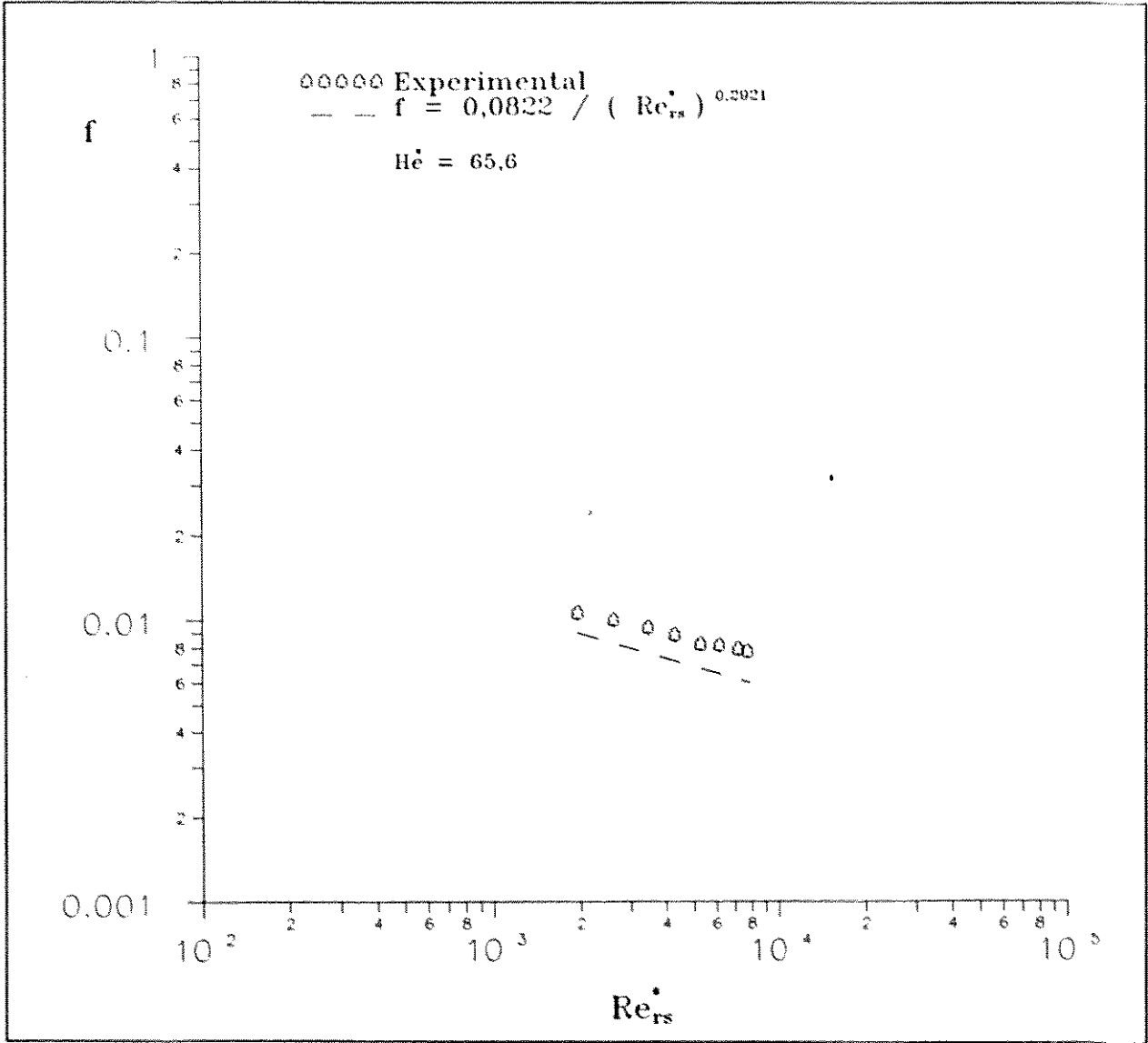


Figura IV.10: Coeficientes de Atrito Experimental e Calculado nesse Trabalho em função do Número de Reynolds proposto para o Sistema nº 3

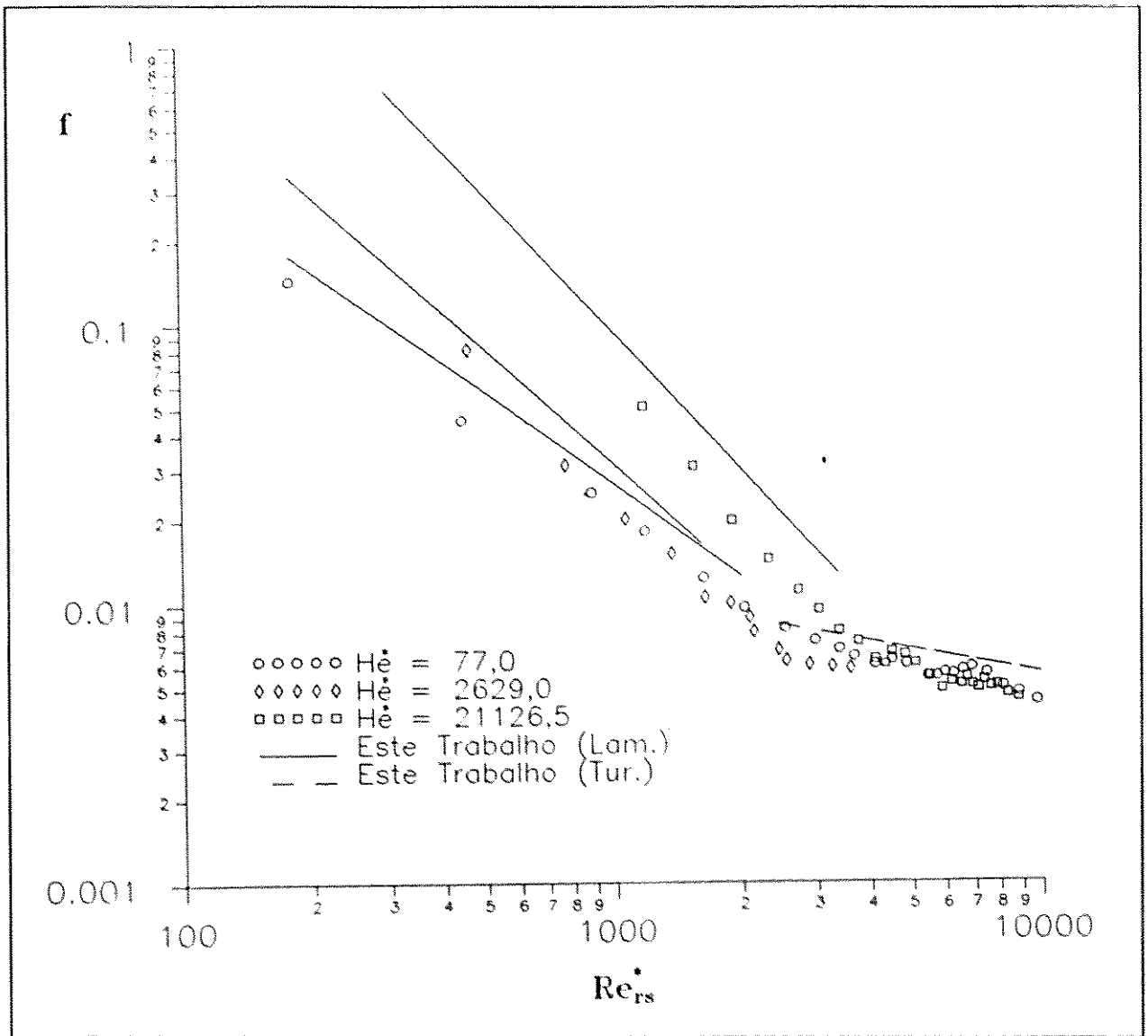


Figura IV.11: Gráfico Generalizado para alguns Sistemas

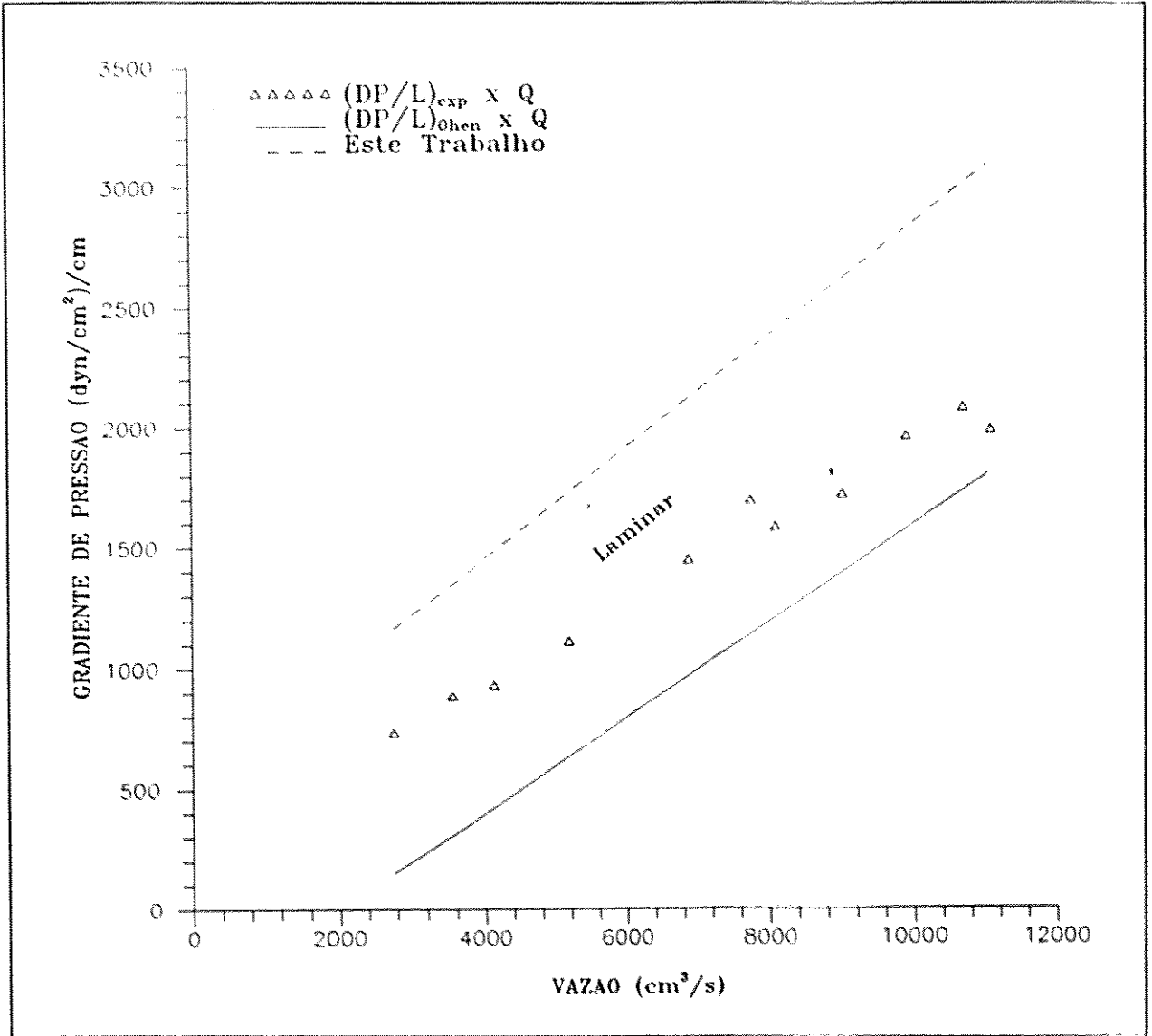


Figura IV.12: Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n° 12

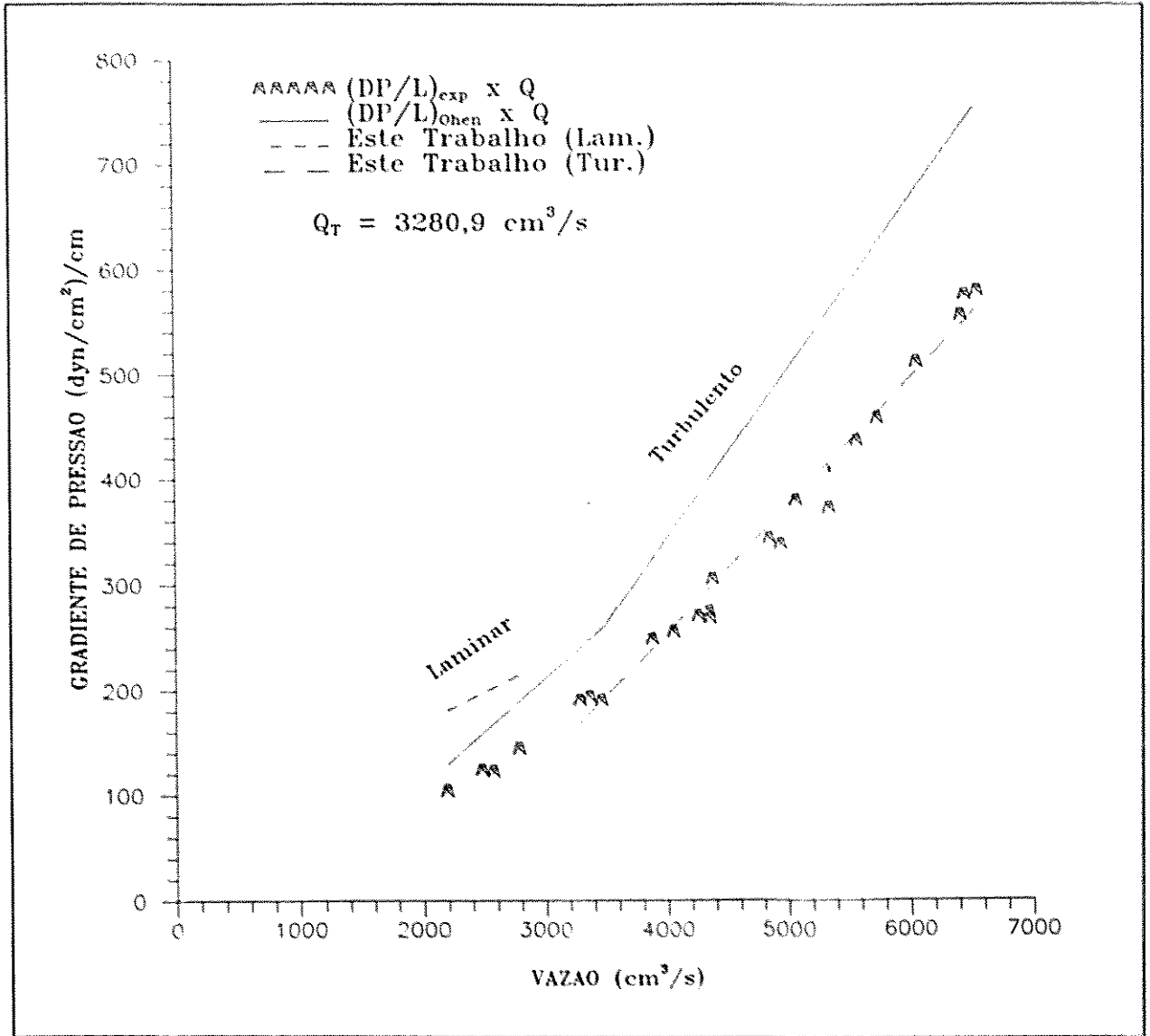


Figura IV.13: Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n° 4

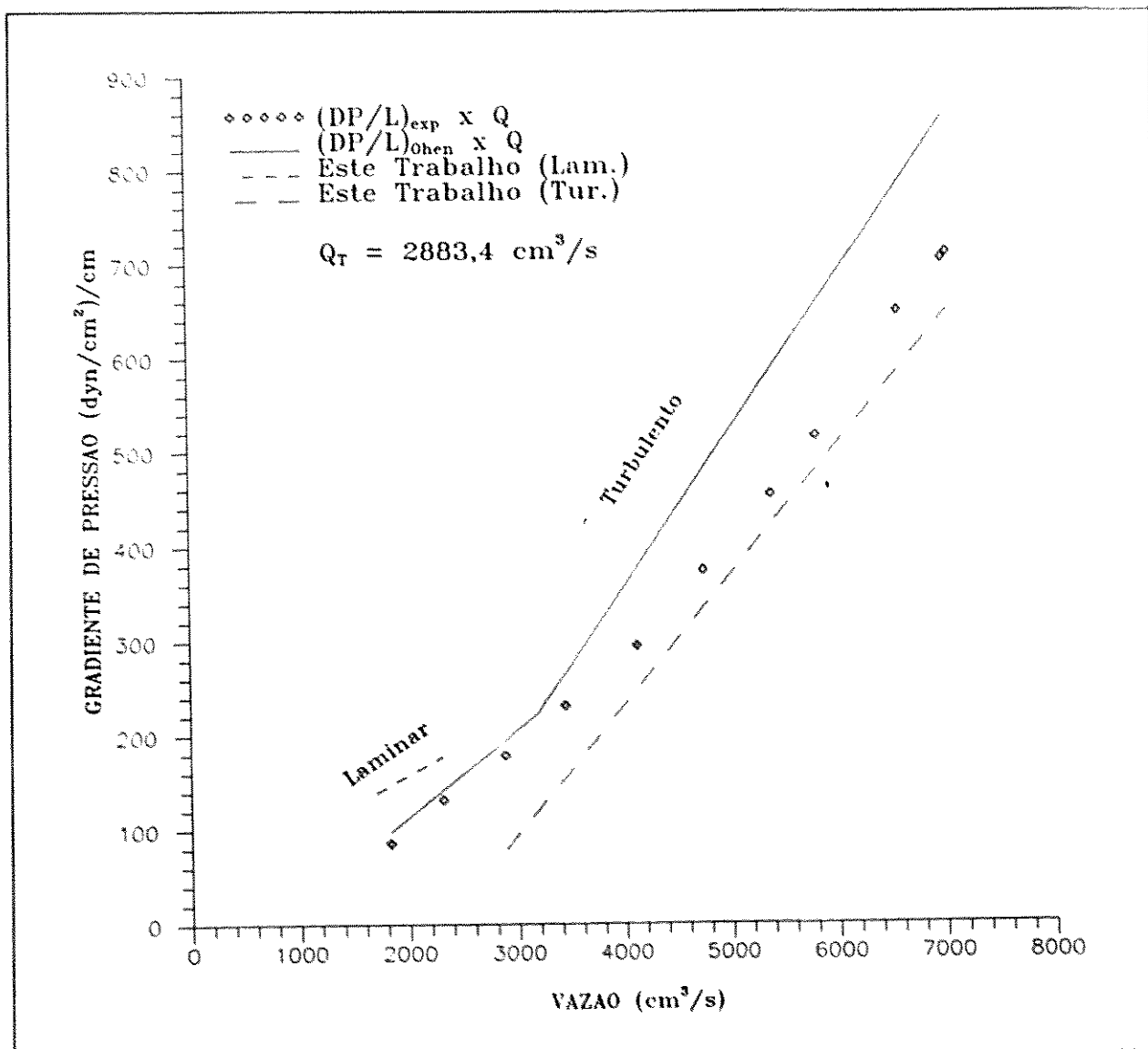


Figura IV.14: Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema nº 6

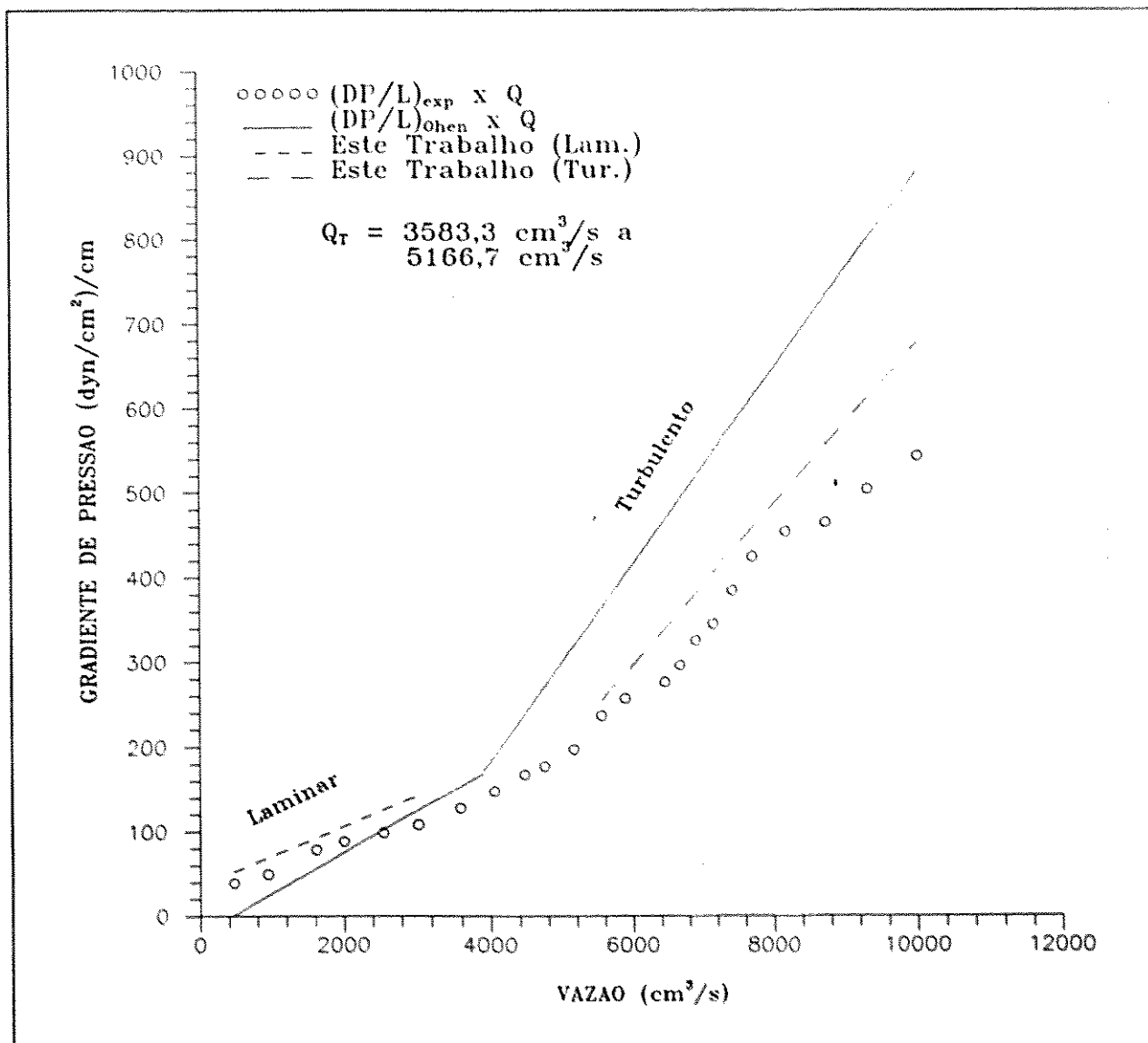


Figura IV.15: Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n^o 8

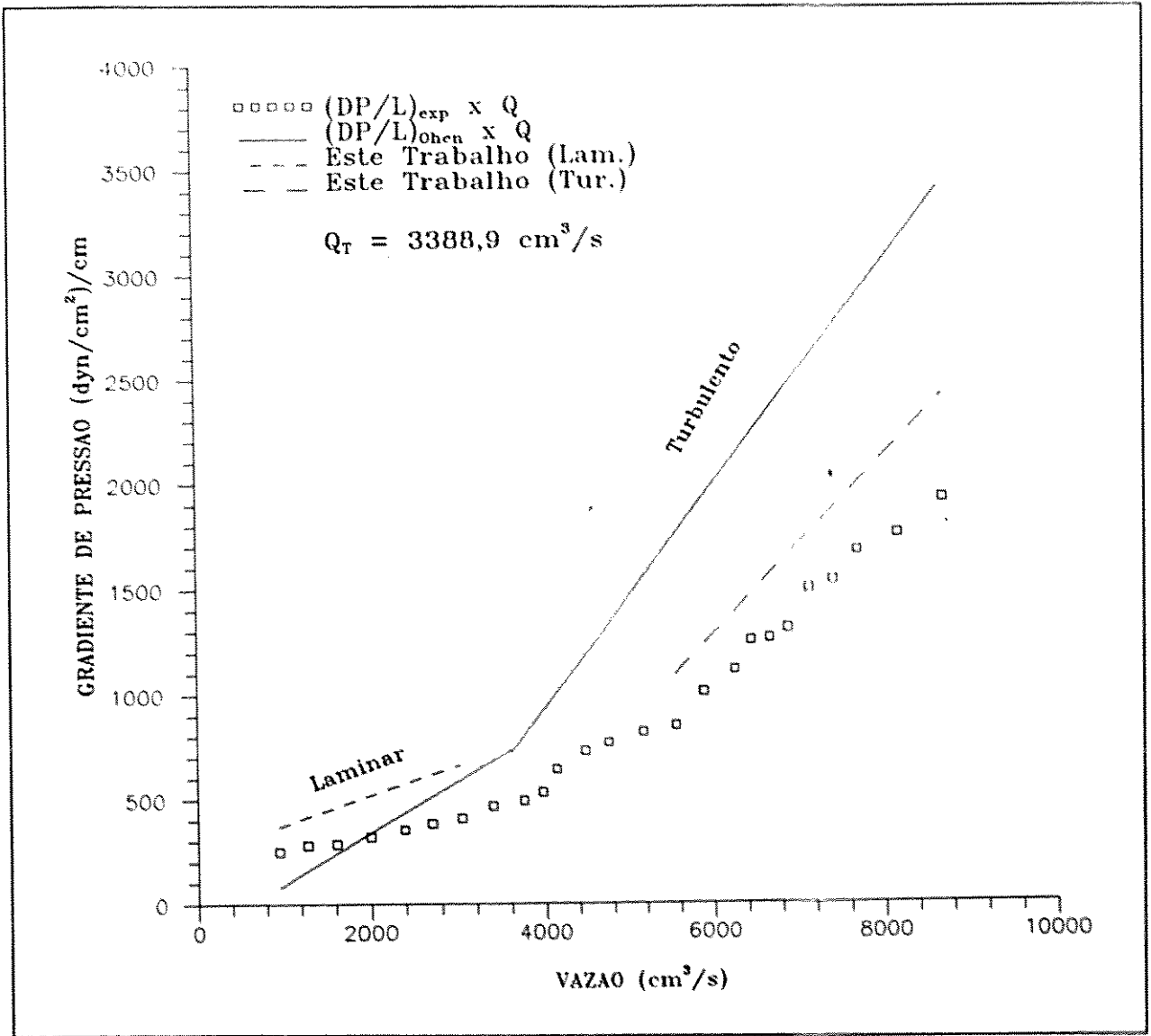


Figura IV.16: Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n^o 9

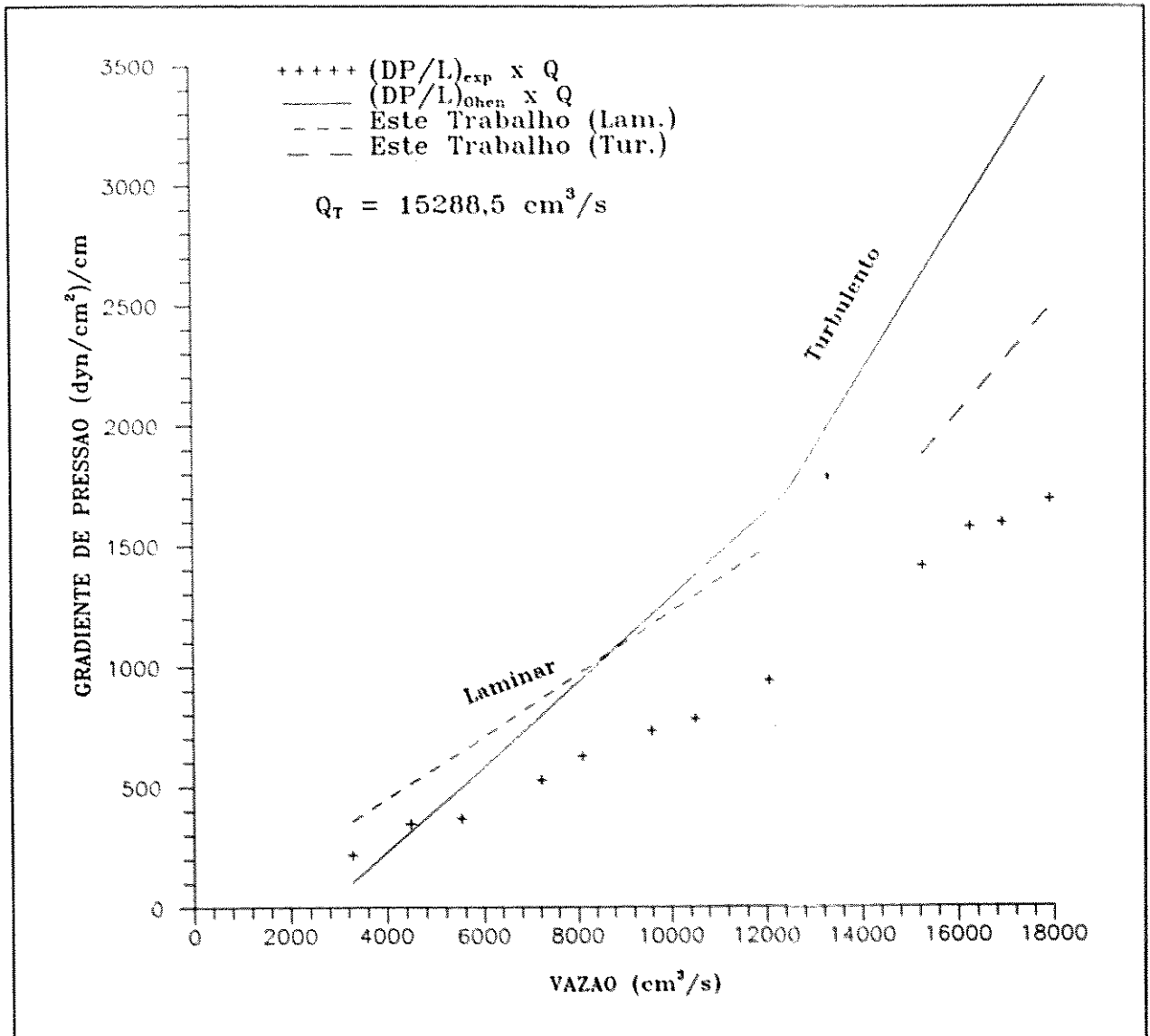


Figura IV.17: Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n° 11

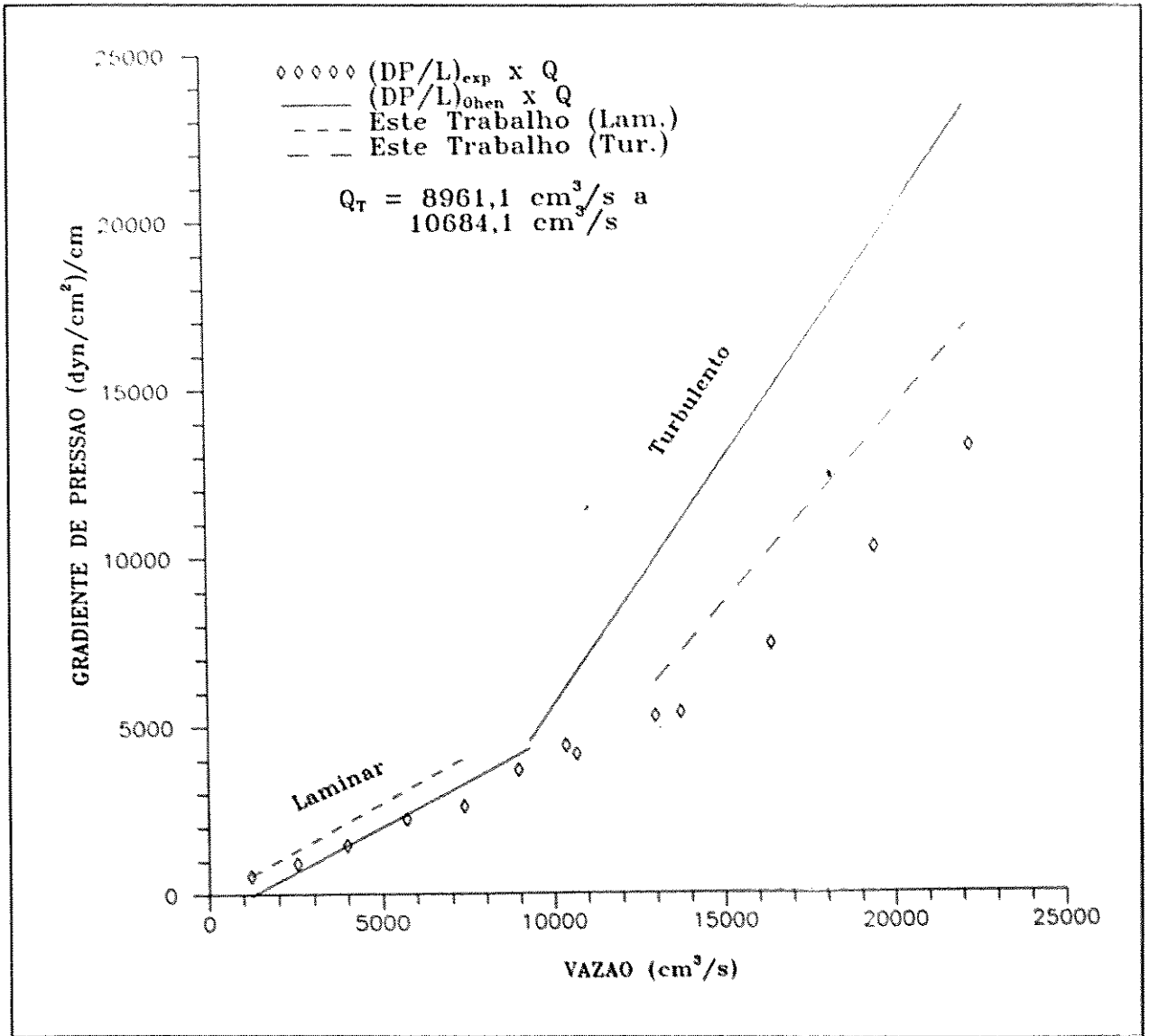


Figura IV.18: Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n° 13

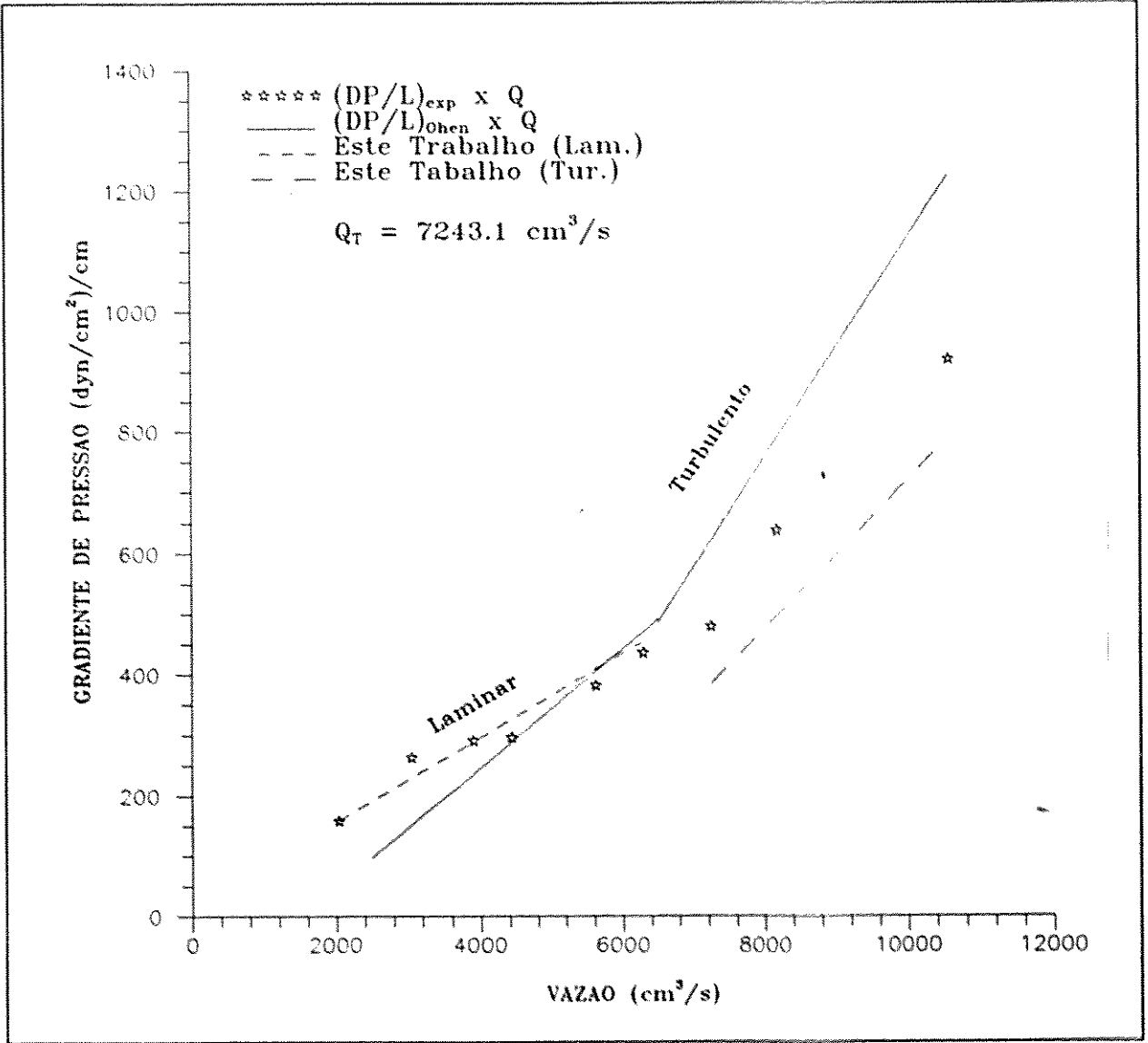


Figura IV.19: Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n° 14

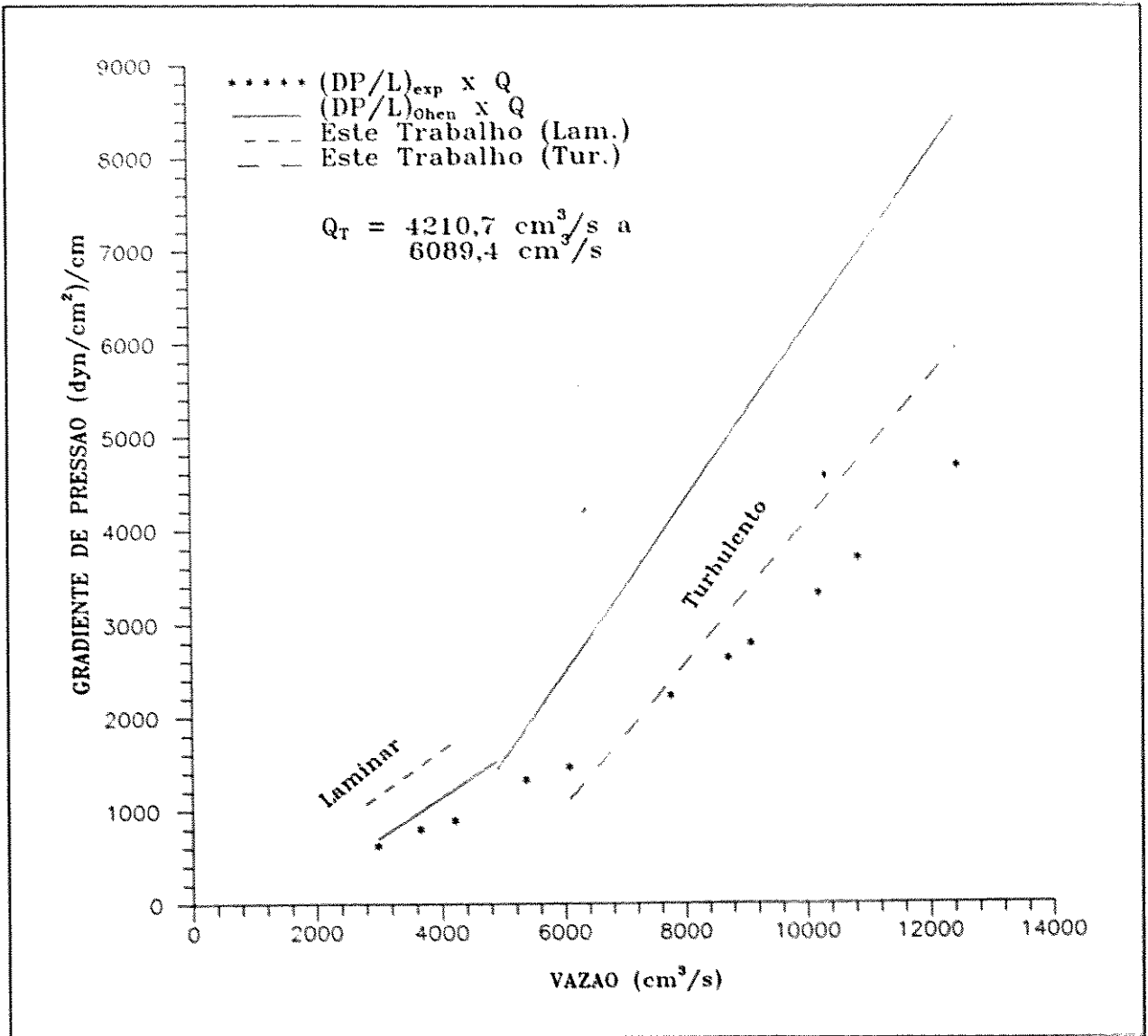


Figura IV.20: Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n°
 15

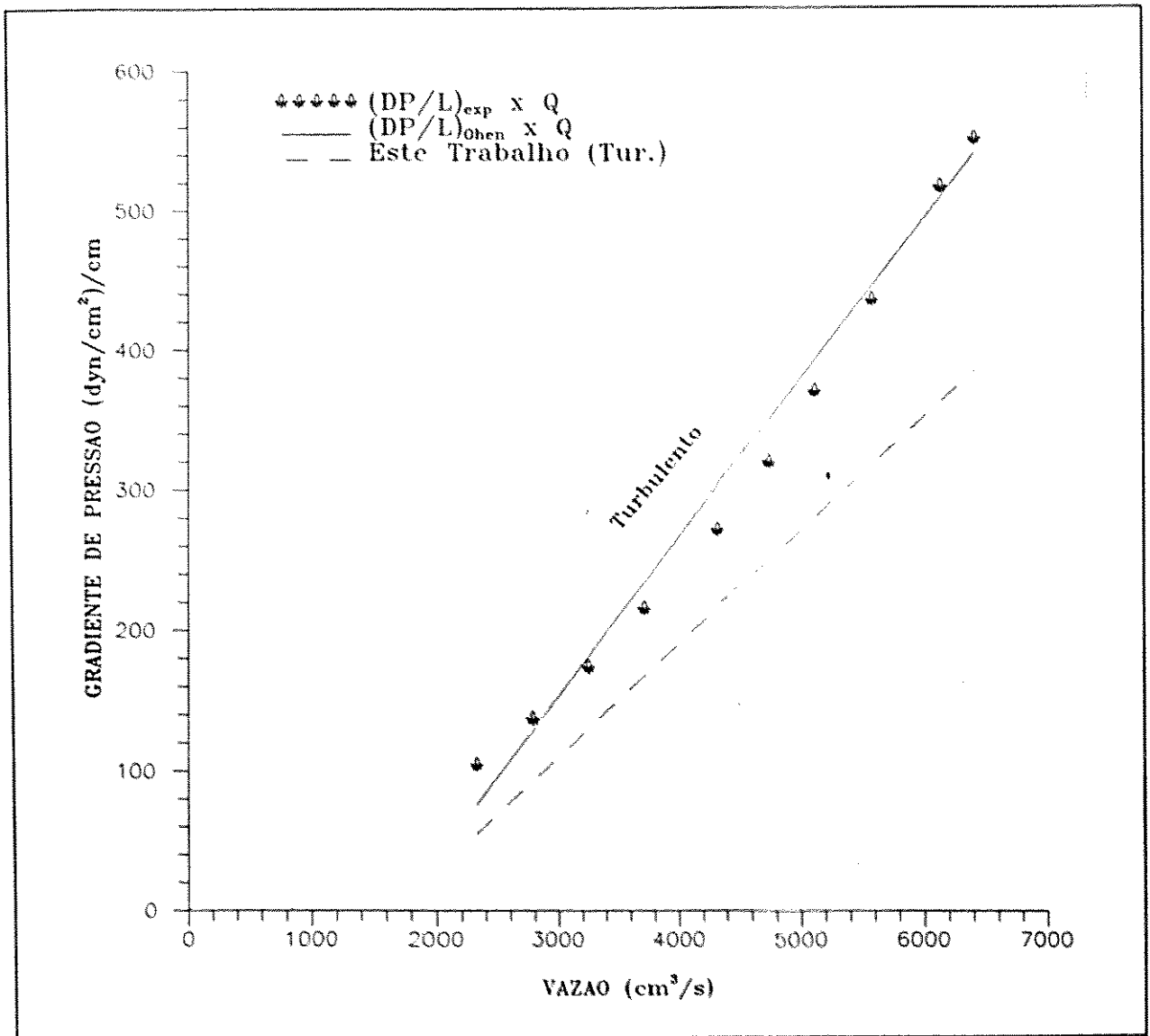


Figura IV.21: Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n^o 1

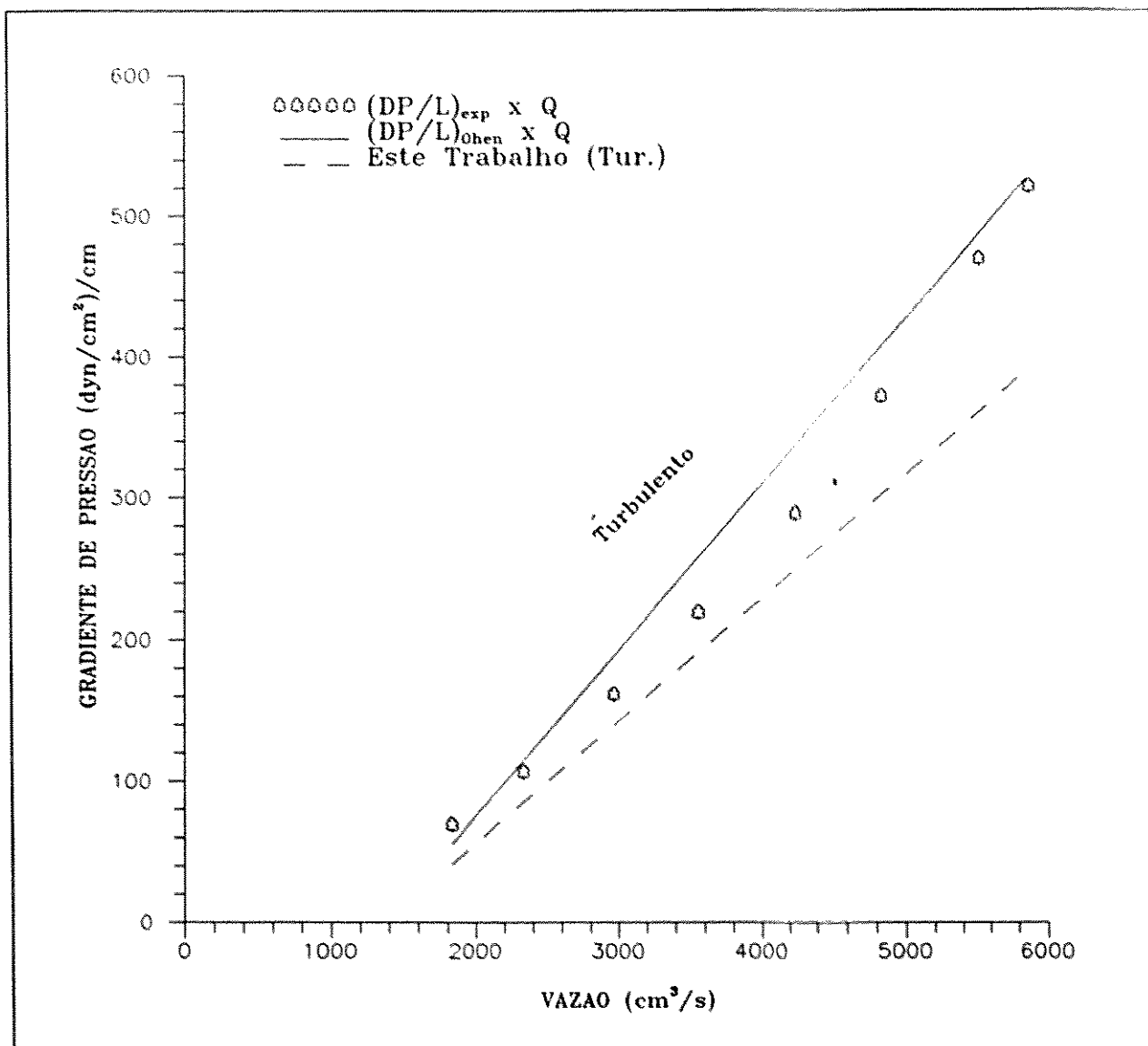


Figura IV.22: Gradiente de Pressão em função da Vazão para o Sistema n° 3

Capítulo V

Conclusões e Sugestões

V.1 Conclusões

O presente trabalho contém um estudo detalhado da utilização de um modelo reológico a três parâmetros (modelo de Robertson & Stiff) para a análise do escoamento anular em tubulações. Alguns resultados aqui apresentados são reportados pela primeira vez na literatura concernente a esses sistemas, destacando-se novas definições de Números de Reynolds e de Números de Hedstrom. Por outro lado, efetuou-se comparações com a metodologia proposta recentemente por Ohen [14], em 1989.

A formulação matemática desenvolvida no presente trabalho é válida tanto para o escoamento anular como para o caso mais simples de escoamento no interior de dutos circulares. Os estudos em dutos circulares são mais abundantes na literatura (Ataíde [3]) e é considerado aqui apenas como um caso particular, sendo direcionados esforços para escoamento de fluidos não newtonianos em geometria anular, que possui importância destacada, por exemplo, na operação de poços petrolíferos.

Em se tratando de fluidos de perfuração, um conjunto de consistente de dados reológicos obtidos por diversos autores (d'Ávila [26], Ataíde [3], Beirute & Flumerfelt [13]) indica que uma boa representação dos mesmos é fornecida pelo modelo de Robertson & Stiff.

Para o escoamento laminar, foram aqui propostas as seguintes expressões para o cálculo do coeficiente de atrito:

- Tubos:

$$f = \frac{16}{\varphi \text{Re}_{\text{RS}}^*} \quad (\text{III.13})$$

- Geometria Anular:

$$f = \frac{24}{\varphi^* \text{Re}_{\text{RS}}^*} \quad (\text{III.32})$$

onde:

$$\varphi = \left[1 - \xi_o \frac{3B+1}{B} - \left(\frac{3B+1}{3B} \right) \xi_o^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_o^3) \right]^B \quad (\text{III.17})$$

$$\varphi^* = \left[1 - \xi_o \frac{2B+1}{B} - \left(\frac{2B+1}{B} \right) \xi_o^{\frac{1}{B}} (1 - \xi_o^2) \right]^B \quad (\text{III.37})$$

Nas expressões anteriormente citadas, φ e φ^* contêm a influência da tensão residual, $\tau_o = AC^B$, na determinação da queda de pressão.

Objetivando prever o ponto ou a região de transição laminar-turbulento, foi realizado no presente trabalho um equacionamento baseado em aspectos físicos e também em considerações de natureza matemática.

Esse equacionamento foi realizado pela primeira vez para o modelo de Robertson & Stiff, sendo consistente, tanto do ponto de vista físico como matemático. Sendo o sistema de equações obtido altamente não linear, sua solução numérica necessita ainda de melhor estudo, para maior confiabilidade na predição de resultados.

De modo a suprir a lacuna para a previsão da transição laminar-turbulento, buscou-se correlacionar os dados experimentais para a região de transição, sendo obtida a seguinte correlação:

$$(Re_{rs}^*)_c = 2365,4 (He^*)^{0,014} \quad (IV.1)$$

Finalmente, para a região de escoamento turbulento, foram analisados diversos dados da literatura para a obtenção de uma correlação empírica para o coeficiente de atrito, na forma de uma equação do tipo Blasius:

$$f = \frac{0,0822}{(Re_{rs}^*)^{0,2921}} \quad (IV.2)$$

O conjunto de resultados acima apresentados, permite, portanto, efetuarmos cálculos básicos concernentes à fluidodinâmica de misturas complexas, como é o caso de suspensões em geometrias de interesse. A contribuição aqui delineada possibilitará, por exemplo, a determinação de variáveis tal como o diâmetro ótimo de tubulações, desde que efetuada uma análise de custos relacionados aos parâmetros do escoamento.

V.2 Sugestões

Alguns aspectos relacionados com o trabalho apresentado carecem ainda de um estudo mais detalhado, visando esclarecer alguns pontos da formulação. A seguir, são listados alguns desses pontos:

1. Realizar o estudo matemático visando a solução numérica dos sistemas formados pelas equações (III.55) e (III.58) para escoamento no interior de tubos e pelas equações (III.55) e (III.67) para escoamento em geometria anular, possibilitando a predição do ponto ou região de transição
2. A partir das soluções apresentadas, construir gráficos generalizados para a solução de outros problemas básicos de dinâmica de fluidos, quais sejam:
 - O cálculo da vazão, sendo conhecidas a perda de carga e o diâmetro equivalente
 - O cálculo do diâmetro equivalente, conhecidas a perda de carga e a vazão

Apêndice A

Metodologia para o Cálculo dos Parâmetros Reológicos

A.1 Obtenção dos dados reológicos

A.1.1 Obtenção da tensão de cisalhamento

A tensão de cisalhamento é obtida a partir da equação abaixo:

$$\tau = \frac{\text{const } L_r}{A_{Lr}} \quad (\text{A.1})$$

onde:

- const - Constante da cabeça de medida
- L_r - Leitura no reômetro
- A_{Lr} - Área lateral do rotor

A.1.2 Obtenção da taxa de deformação

Quando um fluido não newtoniano é cisalhado entre cilindros coaxiais, a taxa de deformação é calculada através de métodos aproximados. O método utilizado neste trabalho é um dos apresentados por Yang & Krieger [37], que se baseia em solução na forma de séries da equação:

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_{c\tau_1}^{\tau_1} \tau^{-1} \dot{\gamma}(\tau) d\tau \quad (\text{A.2})$$

onde:

- τ_1 - Tensão de cisalhamento no cilindro interno
- R_1 - Raio do rotor
- R_2 - Raio do cilindro

$$c = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

Ω - Velocidade angular

A solução utilizada é a única válida para fluidos que possuam tensão residual, ou seja:

$$\dot{\gamma}(\tau_1) = \dot{\gamma}_1(\tau_1) \left[1 + N^{-2}N^{(1)}F_1(t) + 3N^{-4}(N^{(1)})^2F_3(t) + N^{-3}N^{(2)}F_2(t) \right] \quad (\text{A.3})$$

onde:

$$t = -N \ln c \quad (\text{A.4})$$

$$N = \frac{d \log \Omega}{d \log \tau_1} \quad (\text{A.5})$$

$$N^{(1)} = \frac{dN}{d \ln \tau_1} \quad (\text{A.6})$$

$$N^{(2)} = \frac{d^2 N}{d(\ln \tau_1)^2} \quad (\text{A.7})$$

$$F_1(t) = \frac{1}{2}t(e^t - 1)^{-2}(te^t - 2e^t + t + 2) \quad (\text{A.8})$$

$$F_2(t) = \frac{1}{6}t^2(e^t - 1)^{-3}(-te^{2t} + 3e^{2t} - 4te^t - t - 3) \quad (\text{A.9})$$

$$F_3(t) = \frac{1}{24}t^3(e^t - 1)^{-4}(te^{3t} - 4e^{3t} + 11te^{2t} - 12e^{2t} + 11te^t + 12e^t + t + 4) \quad (\text{A.10})$$

$$\dot{\gamma}_1(\tau_1) = \frac{2N\Omega}{1 - c^N} \quad (\text{A.11})$$

A.2 Obtenção dos parâmetros reológicos

Os dados experimentais de tensão de cisalhamento e taxa de deformação, permitem obter as constantes **A**, **B** e **C** referentes ao modelo reológico de Robertson & Still [2], através da metodologia de cálculo descrita a seguir [2]. Inicialmente, calcula-se o valor da tensão de cisalhamento média, dada pela

$$\bar{\tau} = \sqrt{\tau_{min} \tau_{max}} \quad (A.12)$$

A partir da curva reológica do fluido, obtém-se o valor da taxa de deformação média correspondente à tensão de cisalhamento média calculada.

Assim, a constante **C** do modelo reológico em questão [2], é obtida pela seguinte relação:

$$C = \frac{\dot{\gamma}_{min} \dot{\gamma}_{max} - \dot{\gamma}_{medio}^2}{2\dot{\gamma}_{medio} - \dot{\gamma}_{min} \dot{\gamma}_{max}} \quad (A.13)$$

Linearizando-se o modelo reológico de Robertson & Stiff, tem-se que:

$$\ln \tau = \ln A + B \ln(\dot{\gamma} + C) \quad (A.14)$$

Desta forma, de posse dos dados reológicos de tensão de cisalhamento e de taxa de deformação do fluido, e do valor calculado da constante **C**, pode-se ajustar $\ln(\dot{\gamma} + C)$ versus $\ln \tau$, obtendo-se os valores das constantes **A** e **B**.

Foi realizado, por Vieira e Rosa [38] uma rotina computacional para efetuar a metodologia anteriormente descrita para cálculo dos parâmetros reológicos.

Bibliografia

- [1] **Herschel, W.H. ; Bulkley, R.** - Measurement of Consistency as Applied to Rubber-Benzene Solutions; Proc. A.S.T.M., vol 26, Part II, pp. 621-633, 1926
- [2] **Robertson, R.E. ; Stiff Jr., H.A.** - An Improved Mathematical Models for Relating Shear Stress to Shear Rate in Drilling Fluids and Cement Slurries; SPE Journal, vol. 16(1), pp. 31-36, 1976
- [3] **Ataíde, C.H.** - Escoamento em Tubos de Suspensões com Comportamento Não-Newtoniano; Tese de Mestrado, UNICAMP, 1985
- [4] **Bourgoyne Jr., A.T. ; Millheim, K.K. ; Chenevert, M.E. ; Young Jr., F.S.** - Applied Drilling Engineering; SPE Textbook Series, Vol. 2, 1986
- [5] **Buckingham, E.** Proc. Am. Soc. Testing Materials, vol 21, pp. 1154, 1921
- [6] **Rabinowitsch, B.** - Über die Viskosität und Elastizität von Solen, Z. Phys. Chem. A 145, pp. 01-26, 1929
- [7] **Hanks, R.W.**, A.I.Ch.E. Journal, vol.9, p.306, 1963
- [8] **Bird, R.B. ; Stewart, W.E. ; Lightfoot, E.N.** - Fenómenos de Transporte; Editorial Reverté, S.A., 1982
- [9] **Whittaker, Alun ed.** - Theory and Application of Drilling Fluids Hydraulics, D. Riedel Pub. Co., 1985
- [10] **Hanks, R.W. ; Ricks, B.L.** - Laminar-Turbulent Transition in Flow of Pseudoplastic Fluids with Yield Stresses; J. Hydronautics, vol. 8, nº 4, pp. 163-166, 1974

- [11] **Hedstrom, B.O.A.** - Flow of Plastics Materials in Pipes; *Ind. & Eng. Chemistry*, vol. 44, n^o 3, pp. 651-656, 1952
- [12] **Hanks, R.W.** - Low Reynolds Number Turbulent Pipeline Flow of Pseudohomogeneous Slurries; *Hydrotransport 5*, Fifth International Conference on the Hydraulic Transport of Solid in Pipes, pp. C2-23-C2-24, 1978
- [13] **Beirute, R.M. ; Flumerfelt, R.W.** - An Evaluation of the Robertson-Stiff Model Describing Rheological Properties of Drilling Fluid and Cement Slurries; *SPE Journal*, vol. 14(2), pp. 97-100, 1977
- [14] **Ohen, H.A.** - Program Helps Friction Factor for Non-Newtonian Fluid Flow; *Oil & Gas Journal*, pp. 44-47, 1989
- [15] **Ryan, N.W. ; Johnson, M.M.** - Transition from Laminar to Turbulent Flow in Pipes; *A.I.Ch.E. Journal*, vol. 5, n^o 4, pp. 433-435, 1959
- [16] **Hanks, R.W. ; Christiansen, E.B.** - The Laminar-Turbulent Transition in Nonisothermal Flow of Pseudoplastic Fluids in Tubes; *A.I.Ch.E. Journal*, vol. 8, n^o 4, pp. 467-471, 1962
- [17] **Metzner, A.B. ; Reed, J.C.** - Flow of Non-Newtonian Fluids-Correlation of the Laminar, Transition and Turbulent Flow Regions; *A.I.Ch.E. Journal*, Vol. 1, n^o 4, pp. 434-440, 1955
- [18] **Hanks, R.W.** - The Laminar-Turbulent Transition for Flow in Pipes, Concentric Annuli, and Parallel Plates; *A.I.Ch.E. Journal*, vol. 9, n^o 1, pp. 45-48, 1963
- [19] **Davies, S.J.; White, C.M.**, *Proc. Roy. Soc.*, vol. 119A, n^o 92, 1928
- [20] **Hanks, R.W.** - A Theory of Laminar Flow Stability; *A.I.Ch.E. Journal*, vol. 15, n^o 1, pp. 25-28, 1969
- [21] **Hanks, R.W. ; Pratt, D.R.** - On the Flow of Bingham Plastic Slurries in Pipes and Between Parallel Plates; *S.P.E. Journal*, vol. 7, pp. 342-346, 1967

- [22] **Caldwell, D.H. ; Babbitt, H.E.**, Trans. A.I.Ch.E., vol. 37, n^o 237, 1941
- [23] **Hanks, R.W. ; Valia, M.P.** - A theory of Transitional and Turbulent Flow of Non-Newtonian Slurries Between Parallel Plates; SPE Journal, paper n^o 2834, pp. 52-56, 1971
- [24] **Hanks, R.W. ; Dadia, B.H.** - Theoretical Analysis of the Turbulent Flow of Non-Newtonian Slurries in Pipes; A.I.Ch.E. journal, vol. 17, n^o 3, pp. 554-557, 1971
- [25] **Hanks, R.W. ; Ricks, B.L.** - Transitional and Turbulent Pipeflow of Pseudoplastic Fluids; J. Hydraulics, vol. 9, n^o 1, pp. 39-44, 1975
- [26] **d'Ávila, J.S.** - Reologia de Suspensões - Fluidos de Perfuração; Anais do X Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos, São Carlos (SP), pp. 19, 1982
- [27] **Prandtl, L.** - Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung, Zeitschrift Verein Deutscher Ingenieure, vol. 77, pp. 105, 1933
- [28] **Van Driest, E.R.** - On Turbulent Flow Near a Wall, J. Aeronaut. Sci., vol. 23, n^o 11, pp. 1007-1011, 1956
- [29] **Gill, W.N. ; Scher, M.** - A.I.Ch.E. Journal, vol. 7, n^o 61, 1961
- [30] **Hanks, R.W.** - On the Theoretical Calculation of Friction Factors for Laminar, Transitional, and Turbulent Flow of Newtonian Fluids in Pipes and Between Parallel Plane Walls; A.I.Ch.E. Journal, vol. 14, n^o 5, pp. 691-695, 1968
- [31] **Santana, C.C. ; Cremasco, M.A. ; Paixão, A.E.** - Generalização de n^o de Reynolds para o Escoamento Anular com Modelo Reológico a Três Parâmetros; Anais do XVI Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos, Petrópolis (RJ), pp. 438-456, 1988
- [32] **Paixão, A.E. ; Santana, C.C.** - Annular Flow of Viscoplastic Suspensions, Proceedings of the 40th. Canadian Chemical Engineering Conference, pp. 768, 1990

- [33] **Langlinais, J.P. ; Bourgoyne Jr., A.T. ; Holden, W.R.** - Frictional Pressure Losses for the Flow of Drilling Mud and Mud/Gas Mixture; SPE Journal, Paper nº 11993, pp. 1-10, 1983
- [34] **Silva, M.G.P. ; Martins, A.L. ; Oliveira, A.A.J.** - Avaliação do Comportamento Reológico de Fluidos de Perfuração no Escoamento Anular; 1ª Mesa Redonda sobre Fluidos de Perfuração, Publicação PETROBRÁS, pp 03-16, 1988
- [35] **Silva, M.G.P.** - Simulador de Fluxo Vertical, Inclinado e Horizontal, 1ª Mesa Redonda sobre Fluidos de Perfuração, Publicação PETROBRÁS, pp. 79-93 , 1988
- [36] **Silva, M.G.P.** - Avaliação do Regime de Escoamento de Fluidos de Perfuração em Seções Anulares; Petrobrás/Cenpes/Diplot, II Seminário de Fluidos de Perfuração, pp. 01-10, 1989
- [37] **Yang, T.M.T.; Krieger, I.M.** - Comparison of Methods for Calculating Shear Rates in Coaxial Viscometers, Journal of Rheology, vol. 22, nº 4, pp. 413-421, 1978
- [38] **Vieira e Rosa, P.T.** - Comunicação Pessoal, 1989