

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

INVESTIGAÇÃO TEÓRICA E NUMÉRICA  
SOBRE HIDROFÓLIOS DELTA

*Doracy Gumieiro*  
Engenheiro Mecânico

*Prof. Kamal Abdel Radi Ismail (Ph.D.)*  
Orientador

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual de Campinas, Deptº. de Engenharia Térmica e de Fluidos para obtenção do título de Mestre na área de Hidrodinâmica.

- 1975 -

BIBLIOTECA CENTRAL

*Dedico à*

*MARIA HELENA  
que dividiu comigo o  
pêso das horas difíceis*

**UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL**

## AGRADECIMENTOS

Ao CPD da Universidade de Campinas que nos proporcionou facilidades para a obtenção de resultados.

À Srta. TAKA OTA pelo esmero no trabalho datilográfico.

Aos funcionários do Departamento que de alguma forma contribuíram para a execução deste trabalho.

Ao Prof. KAMAL A.R. ISHAIL pela proposição e orientação do trabalho.

Aos meus pais que indiretamente contribuíram para que esse trabalho se realizasse.

## SUMÁRIO

A teoria tridimensional linearizada para um hidrofólio plano operando abaixo da superfície livre é obtida.

A partir da condição de superfície livre, as condições de contorno sobre o fólio e sua esteira e a condição de não propagação de ondas na frente do hidrofólio, consegue-se a expressão do potencial de velocidades total, que permite obter a expressão geral do campo de velocidades induzidas sobre o hidrofólio. A expressão obtida é válida para qualquer geometria, número de Froude e profundidade de imersão, em regime permanente de operação, e torna-se então necessário particularizá-la para um hidrofólio delta. Após várias manipulações matemáticas, consegue-se colocá-la numa forma mais adequada para o tratamento numérico.

Os cálculos numéricos são efetuados usando-se a técnica "Collocation lifting surface", e neste procedimento o hidrofólio é substituído por uma distribuição de doublets tanto na direção da corda como na direção da envergadura.

As integrações numéricas são efetuadas usando-se a fórmula de Gauss para limites arbitrários de integração, com exceção da singularidade de segunda ordem do termo aerodinâmico, que é tratada pelos polinômios de interpolações de Lagrange.

Várias condições de operação (número de Froude, profundidade de imersão e geometria) são analisadas, discutidas e comparadas com trabalhos teóricos e experimentais disponíveis, concluindo-se que os valores para a sustentação e arrasto induzido dos hidrofólios delta podem aumentar ou diminuir dependendo da faixa de números de Froude em utilização, que a influência da superfície livre sobre as características dos hidrofólios diminui com o aumento da profundidade de imersão e que hidrofólios de grande aspect ratio sofrem menos influência da superfície livre, que hidrofólios de baixo aspect ratio.

## SUMMARY

The linearized three-dimensional theory for a flat hydrofoil operating below a free surface is obtained.

By satisfying the free surface boundary condition, the boundary conditions on the foil and its wake and the radiation condition, a general expression for the velocity potential is deduced. This expression is valid for any geometry, Froude number and depth of submergence in steady motion.

After various mathematical manipulations, a suitable expression for the numerical calculation of delta hydrofoils performance is obtained.

The numerical treatment is made using the collocation lifting surface technique, where the hydrofoil is replaced by a doublet distribution, both in chordwise and spanwise directions.

The numerical integration is carry out using the Gauss' Formula of arbitrary integrations limits, except the second order singularity in the aerodynamic term, treated by the Lagrangian interpolating polynomials.

Several operational conditions are analyzed, discussed and compared with theoretical and experimental available work. It is found that the lift and induced drag for delta hydrofoils increase or decrease depending on the range of utilization Froude number, and that the influence of the free surface over the hydrofoil characteristics decrease with increase the depth of submergence. For large aspect ratio hydrofoils the influence of free surface is less than for small aspect ratio hydrofoils.

# Í N D I C E

	Página
SUMÁRIO	
LISTA DE SÍMBOLOS .....	i
LISTA DAS TABELAS E FIGURAS .....	iii
 CAPÍTULO 1	
1.1. INTRODUÇÃO .....	1
 CAPÍTULO 2	
2.1. ANÁLISE BIBLIOGRÁFICA .....	4
 CAPÍTULO 3	
3.1. FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA .....	7
3.2. CASOS LIMITES .....	16
 CAPÍTULO 4	
4.1. EXPRESSÃO DA VELOCIDADE INDUZIDA .....	18
 CAPÍTULO 5	
5.1. EXPRESSÕES PARTICULARES PARA O HIDROFÓLIO DELTA .....	28
5.2. EXPRESSÃO DO ÂNGULO DE ATAQUE INDUZIDO .....	33
 CAPÍTULO 6	
6.1. ANÁLISE NUMÉRICA .....	35
6.1.1. Análise de Alguns Métodos Fundamentais .....	35
6.1.2. Método do MULTHOFF e GARNER .....	36
6.1.3. Método de ZANDEBERGEN .....	36
6.1.4. Método de WATKINS, WOOLSTON e CUNNINGHAM .....	37
6.2. INTEGRAÇÕES NUMÉRICAS .....	37
6.2.1. Esquema de Integração .....	41
6.2.2. Integração na Corda .....	42
6.2.3. Integração na Envergadura .....	43

	Página
6.3. CONSIDERAÇÕES NUMÉRICAS .....	45
6.3.1. Escolha dos Pontos de Controle .....	45
6.3.2. A Integração Singular .....	46
6.3.3. Limitações do Programa .....	47
6.4. FLUXOGRAMA DO PROGRAMA DE COMPUTAÇÃO .....	47
 CAPÍTULO 7	
7.1. CARACTERÍSTICAS DO HIDROFÓLIO .....	65
7.1.1. Expressão da Circulação local .....	65
7.1.2. Coeficiente de Sustentação local e total ....	67
7.1.3. Expressão do Coeficiente e fator de Arrasto Induzido .....	69
7.1.4. Coeficiente de Pressão distribuído na direção da Corda .....	70
 CAPÍTULO 8	
8.1. DISCUSSÃO .....	72
8.1.1. Influência do Número de Froude .....	72
8.1.2. Influência da Profundidade de Imersão.....	76
8.1.3. Influência do Aspect Ratio .....	78
8.2. CONCLUSÕES .....	79
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	80
 APÊNDICE A	
- Condição de Superfície Livre .....	83
 APÊNDICE B	
- Obtenção de $A(K, \theta)$ .....	86
 APÊNDICE C	
- Integração da Expressão (9-a).....	87
 APÊNDICE D	
- Equivalência entre expressões (14) e (15) .....	90
 APÊNDICE E	
- Redução dos Termos da Velocidade Induzida .....	91

## LISTA DE SÍMBOLOS

- U - velocidade do fluxo livre
- $\phi$  - potencial de velocidades perturbador
- h - profundidade de imersão
- $\Delta\phi$  -  $\phi_s - \phi_i$
- $\eta$  - elevação de onda na superfície
- g - aceleração da gravidade
- $K_o$  - número de onda =  $g/U^2$
- V - velocidade induzida perpendicular ao hidrofólio
- $x_{LE}$  - equação da borda de ataque
- $x_{TE}$  - equação da borda de fuga
- $C_o$  - corda na secção de simetria do hidrofólio
- S - envergadura do hidrofólio
- P - pressão sobre a superfície do hidrofólio
- $\Delta P$  -  $(P_s - P_i)$
- F - número de Froude =  $U/\sqrt{gs}$
- $\alpha$  - ângulo de ataque induzido
- $L(\theta_1, \bar{y}_0)$  - função distribuição de carga
- s - intervalo para a integração singular
- MC - número de pontos de controle na semi-envergadura
- NC - número de pontos de controle na corda
- J - ordem do polinômio de interpolação de Lagrange
- $\Gamma$  - circulação local
- $C_{l2}$  - sustentação local
- $C_L$  - sustentação total
- A - área do hidrofólio projetada na direção do escoamento
- AR - aspect ratio =  $S^2/A$



- $C_{Di}$  - coeficiente de arrasto induzido  
 $C_s$  - coeficiente de sucção  
 $\beta$  - ângulo entre a perpendicular ao fluxo e a direção da borda de ataque  
 $K^*$  - fator de arrasto induzido  
 $\Delta C_p$  - coeficiente de pressão,  $(\frac{P_s - P_i}{\frac{1}{2} \rho U^2})$   
 $u, v, w$  - velocidades de perturbação  
 $\infty$  - relativo ao fluxo infinito  
 $s$  - relativo a superfície superior do hidrofólio  
 $i$  - relativo a superfície inferior do hidrofólio

## LISTA DAS TABELAS E FIGURAS

- TABELA 1 - Valores de  $(dCL/d\alpha)_{\infty}$  para fôlio retangular
- TABELA 2 - Valores de  $(dCL/d\alpha)_{\infty}$  para fôlio retangular
- FIG. 1 - Resultados obtidos pelas técnicas lifting line e lifting surface. Fôlio retangular
- FIG. 2 - Resultados teóricos e experimentais para fôlio retangular
- FIG. 3 - Distribuição de carga na envergadura. Fôlio retangular
- FIG. 4 - Efeito da variação da ordem do polinômio de interpolação J. Fôlio retangular
- FIG. 5 - Efeito de  $F$  e  $\bar{h}$  sobre a sustentação. Hidrofôlio delta
- FIG. 6 - Efeito da profundidade de imersão para  $F$  zero; resultados comparativos. Hidrofôlio retangular
- FIG. 7 - Efeito de  $\bar{h}$  sobre a sustentação. Valores comparativos para  $F$  infinito. Hidrofôlio retangular
- FIG. 8 - Efeito de  $F$  sobre  $dCL/d\alpha$  para vários aspect ratios. Hidrofôlio retangular
- FIG. 9 - Efeito de  $F$  sobre a sustentação. Hidrofôlio delta
- FIG. 10 - Variação experimental de  $dCL/d\alpha$  com o número de Froude
- FIG. 11 - Sustentação distribuída na envergadura. Hidrofôlio delta
- FIG. 12 - Distribuição de carga na corda. Hidrofôlio delta
- FIG. 13 - Efeito de  $F$  e  $\bar{h}$  sobre  $dCL/d\alpha$  e  $K^*$ . Hidrofôlio delta
- FIG. 14 - Efeito de  $F$  e  $\bar{h}$  sobre a sustentação e arrasto induzido. Hidrofôlio delta

- FIG. 15 - Efeito de  $F$  e  $\bar{h}$  sobre  $dCL/d\alpha$  e  $K^*$  Hidrofólio delta
- FIG. 16 - Distribuição de carga na corda. Hidrofólio delta
- FIG. 17 - Efeito de  $F$  sobre  $K^*$ . Hidrofólio delta
- FIG. 18 - Distribuição de carga na corda. Hidrofólio delta
- FIG. 19 - Efeito de  $F$  e  $\bar{h}$  sobre a sustentação. Hidrofólio delta
- FIG. 20 - Efeito de  $F$  e  $\bar{h}$  sobre a sustentação. Hidrofólio delta
- FIG. 21 - Sustentação distribuída na envergadura. Hidrofólio delta
- FIG. 22 - Sustentação distribuída na envergadura. Valôres comparativos. Hidrofólio delta
- FIG. 23 - Efeito  $\bar{h}$  sobre  $K^*$ . Hidrofólio delta
- FIG. 24 - Efeito de  $\bar{h}$  e do aspect ratio sobre a sustentação. Hidrofólio delta
- FIG. 25 - Efeito do aspect ratio sobre a sustentação. Valôres comparativos para o hidrofólio delta
- FIG. 26 - Efeito do aspect ratio sobre a sustentação. Hidrofólio delta
- FIG. 27 - Efeito do aspect ratio sobre  $K^*$ . Hidrofólio delta
- FIG. 28 - Distribuição de carga na corda. Hidrofólio delta

## 1.1. INTRODUÇÃO

O estudo das características de hidrofólios tem recentemente despertado grande atenção, tanto do ponto de vista teórico como experimental.

O uso de sistemas de hidrofólios submersos acoplados a vasos de navegação, é uma aplicação que nos possibilita uma redução considerável da força resistente e conseqüentemente um aumento da velocidade para uma mesma potência propulsora.

Este trabalho, objetiva estudar o comportamento de hidrofólios delta com pequenos valores de aspect ratio, navegando a uma distância  $h$  abaixo da superfície livre. Neste estudo, o meio líquido é suposto ser incompressível, não viscoso e de profundidade infinita. A suposição de fluido inviscido pode parecer contraproducente, já que na prática os problemas envolvem ação viscosa implicando na formação de uma camada limite. Entretanto, Prandtl sugeriu que essa camada limite fosse bastante delgada (supondo que o corpo em estudo tivesse a forma de uma linha de corrente, a pequenos ângulos de incidência) de modo que, numa primeira aproximação sua presença pudesse ser ignorada na estimativa do campo de pressões em torno do corpo. Desde que a sustentação é resultado de pressões normais atuando sobre a superfície do hidrofólio, a presença da camada limite pouco influirá sobre o campo de pressões e portanto, torna-se possível desenvolver teorias para a avaliação da sustentação considerando o fluido como sendo inviscido. Para uma análise real, o arrasto induzido obtido pela suposição de fluido não viscoso deverá ser somado ao arrasto devido às tensões de cisalhamento, e para a obtenção deste, uma análise da camada limite deve ser efetuada.

É fato conhecido, que para uma asa movendo-se em um fluxo infinito, podemos desprezar a influência da gravidade e considerar apenas os efeitos de inércia e viscosos. Sob estas condições os coeficientes de sustentação e arrasto dependerão apenas do número de Reynolds e da geometria do corpo. Para um hidrofólio o problema é mais complexo, pois além da possibilidade de existência de cavitação, existe ainda uma formação de ondas,

as quais influenciam decisivamente as características do hidrofólio. Assim, os coeficientes de sustentação e arrasto serão função não somente do número de Reynolds como também do número de Froude e o número de cavitação. Neste estudo, o número de Reynolds (pela suposição de fluido inviscido) assim como o número de cavitação não serão considerados.

Através de estudos feitos anteriormente [ 11 ], mostra-se que o método de aproximação do hidrofólio por uma linha de sustentação (lifting line) nos leva a resultados imprecisos quando o aspect ratio é pequeno ou quando o número de Froude é baixo. Para hidrofólios de pequenos aspect ratio, o método da linha de sustentação não é suficiente para representá-lo e a pequenos valores de número de Froude o efeito da não linearidade é considerável. Uma representação melhor do hidrofólio, pode ser feita substituindo-o por uma distribuição contínua de vorticidade, tanto na direção da corda como na direção da envergadura. Tal método é o chamado lifting surface, que será utilizado neste estudo, no qual o hidrofólio é substituído por uma distribuição de doublets.

Este trabalho consta de uma parte introdutória (capítulo 1), na qual é feita uma análise qualitativa do fenômeno, seguida de uma análise de estudos anteriores (capítulo 2), com o objetivo de se fazer uma comparação entre as várias maneiras de abordar o problema.

No capítulo 3 é formulada a teoria tridimensional linearizada para uma placa de forma arbitrária, baseada nas suposições básicas da teoria de aerofólios delgados, que aproxima o vetor velocidade resultante do fluido à velocidade livre de corrente e permite tratar o aerofólio como uma superfície de espessura infinitesimal. Deste modo define-se um potencial de velocidades que é a combinação do potencial correspondente ao fluxo uniforme com um potencial de perturbações. Através do potencial perturbador para fluxo infinito, obtêm-se a expressão do potencial de velocidades total, satisfazendo as condições de irrotacionalidade e continuidade dadas pela equação de Laplace, condição de regime permanente e fluido não viscoso, condição de superfície livre, condições de contorno sobre o hidrofólio e es-

teira e a condição de radiação que não permite propagação de ondas na frente do hidrofólio. Uma análise dos dois casos particulares correspondentes a números de Froude zero e infinito é efetuada, na qual o primeiro nos leva a condição de contorno sólido e o segundo à condição de contorno livre na superfície.

Obtido o potencial de velocidades total derivou-se a expressão do campo de velocidades induzidas perpendicularmente à placa, considerando-se a condição de Kutta na borda de fuga (capítulo 4). A expressão obtida para o campo de velocidade é geral e válida para qualquer condição de operação, ou seja, qualquer número de Froude, profundidade de imersão e geometria do hidrofólio. Torna-se necessário portanto, particularizá-la para o hidrofólio em estudo, e as várias considerações são encontradas no capítulo 5, juntamente com a obtenção da expressão do ângulo de ataque induzido, já na forma final para o tratamento numérico.

No capítulo 6 são analisados todos os detalhes do tratamento numérico tais como a adoção da expressão de distribuição de pressões sobre o hidrofólio, número de pontos de controle, ordem do polinômio de interpolação para a manipulação da singularidade de segunda ordem do termo aerodinâmico, número de pontos para a integração pela fórmula de Gauss e as limitações do programa de computação elaborado para este estudo.

Os coeficientes da expressão de distribuição de pressões, calculados numericamente, nos permite obter as características de sustentação e arrasto do hidrofólio, cujas expressões matemáticas são tratadas no capítulo 7.

No capítulo 8 são apresentadas, discutidas e analisadas várias condições de operação tendo em vista o número de Froude, profundidade de imersão e aspect ratios, em comparação com resultados obtidos em outros trabalhos.

Finalmente, é apresentado um apêndice para o tratamento de algumas operações matemáticas importantes e que fazem parte do texto principal.

## 2.1. ANÁLISE BIBLIOGRÁFICA

O estudo das características de hidrofólios é ainda uma área pouco desenvolvida teoricamente. A maioria dos resultados disponíveis são de natureza experimentais, vinculados a casos especiais de interesse industrial, e que não possibilitam uma análise detalhada das várias condições de operação. Faz-se necessário portanto, um profundo conhecimento teórico do problema de modo a diminuir a lacuna existente entre aqueles resultados e as explicações dos fenômenos que deste modo poderão ser mais precisas.

Em 1954 Y.T. Wu [ 29 ] formulou a teoria para o estudo das características de hidrofólios usando a técnica da linha de sustentação proposta por Prandtl. Este trabalho é considerado de grande importância no estudo da hidrodinâmica, pois em seu tratamento ele considera precisamente as condições de contorno na superfície livre e sobre o hidrofólio, fato este não muito bem definido em trabalhos anteriores. Neste trabalho, Wu, usando Transformada de Fourier e a condição de contorno sobre uma asa, obtém o potencial de velocidades para um fluxo infinito. Com este potencial básico e com as condições de superfície livre e radiação, ele obtém o potencial de velocidade total para um hidrofólio submerso. A condição de radiação é analisada por ele, estudando as elevações de onda através da condição dinâmica linearizada da superfície livre, e impondo a partir daí um potencial de velocidades, chamado potencial de onda livre tal que as elevações de onda correspondente anule as elevações de onda na frente, duplicando atrás do hidrofólio.

Posteriormente a Wu, outros autores formularam essa teoria usando outros artifícios. Em seu trabalho T. Nishiyama [ 25 ] segue aproximadamente o esquema de Wu, diferindo dele na análise da condição de radiação e no tratamento dado ao desenvolvimento matemático. Para a exigência da não propagação de ondas na frente do hidrofólio, ele impõe um coeficiente de viscosidade fictício chamado de Rayleigh na condição de superfície livre e este coeficiente é colocado igual a zero depois de ser-

vir aos propósitos desejados.

No desenvolvimento matemático Nishiyama não conserva o rigorismo de Wu, introduzindo várias simplificações e colocando as expressões numa forma mais fácil para o uso prático. As características de sustentação e arrasto são analisadas por Nishiyama, em função do número de Froude onde ele usa como dimensões característica a profundidade de imersão.

Entretanto, as formulações usadas por Wu e Nishiyama empregando a técnica da linha de sustentação fornecem resultados pouco precisos quando os valores do aspect ratio, definido como  $(\text{envergadura})^2/\text{Área}$ , forem menores que quatro, e neste caso as características se tornam superestimadas não sendo compatíveis com os valores experimentais.

Este fato pode ser observado claramente no trabalho de K.A.R. Ismail [ 11 ]. Nele o autor analisa as características de hidrofólios verticais pelos métodos da linha de sustentação e superfície de sustentação. A obtenção do potencial de velocidades para fluxo infinito é feita através das funções de Green e a condição da radiação é abordada como no trabalho de Wu, pela imposição do potencial de onda livre. Na Figura (1) são plotados os resultados obtidos para as características aerodinâmicas de uma placa retangular, mostrando os valores superestimados obtidos pelo método da linha de sustentação em comparação com aqueles obtidos pelo método da superfície de sustentação. Para concluir a análise, podemos lembrar que a condição de radiação pode ser satisfeita ainda de outra forma, analisada por K.A.R. Ismail [ 13 ] onde o autor trata o problema, considerando regime não permanente. Obtidos as expressões, e tomando-se o limite para o tempo tendendo a infinito, a condição de radiação é satisfeita automaticamente.

Resta-nos dizer que atualmente, há uma crescente necessidade do conhecimento das características de hidrofólios para aplicações tanto em transportes de alta velocidade, como em aplicações de natureza militares. Além do aumento de velocidades, o uso de hidrofólios possibilita uma maior estabilidade dos vasos de navegação principalmente quando estes estão operando em águas agitadas. Este estudo particular sobre hidrofólios del



ta é importante sob o ponto de vista de aplicações e acrescenta  
rã ao campo da hidrodinâmica resultados que ainda não haviam si  
do obtidos.

3.1. FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA

Consideremos um hidrofólio de perfil arbitrário e forma plana, movendo-se com velocidade constante  $U$ , a uma distância  $h$  abaixo da superfície livre da água, medida a partir da linha média das perturbações. Se escolhermos um sistema de coordenadas fixo em relação ao hidrofólio, então poderemos considerar o fluxo como sendo estacionário, aproximando-se do hidrofólio com velocidade constante  $U$ . Seja  $x$  a direção paralela ao fluxo livre,  $z$  a direção perpendicular a  $x$  orientada para cima e  $y$  a direção perpendicular ao plano  $xz$  (Fig. 3.1). Pela consideração de fluido incompressível e inviscido, a condição de irrotacionalidade e continuidade assegura que o potencial de velocidades perturbador  $\phi$ , deve satisfazer a equação de Laplace.

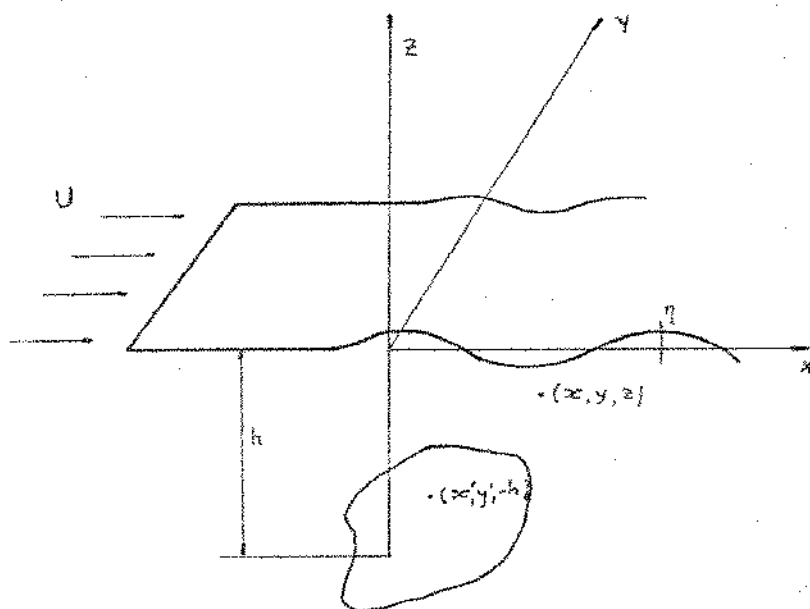


FIG. 3.1

Inicialmente, consideremos uma distribuição de "doublets" com eixo orientado perpendicularmente, ou paralelo à direção  $z$ , em substituição ao hidrofólio. Na ausência de superfície livre (fluxo infinito), teremos:

$$\phi_{\infty} = -\frac{1}{4\pi} \iint \Delta\phi \frac{\delta}{\delta z} \left(\frac{1}{R}\right) dx' dy' \quad (1)$$

onde

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+h)^2}$$

Pela Teoria das integrais de Fourier-Bessel podemos escrever:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-k|z+h|} \cos \left[ k(x-x') \cos\theta \right] \cos \left[ k(y-y') \sin\theta \right] d\theta dk \quad (2)$$

Assim, após a diferenciação com relação a  $z$ , (1) ficará:

$$\phi_{\infty} = \frac{z+h}{|z+h|} \frac{1}{4\pi^2} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k e^{-k|z+h|} \cos \left[ k(x-x') \cos\theta \right] \cdot \cos \left[ k(y-y') \sin\theta \right] d\theta dk \quad (3)$$

Entretanto, devido a presença da superfície livre existem outros termos que devem ser adicionados ao potencial de velocidades para fluido infinito satisfazendo as seguintes condições:

- a)  $\nabla^2 \phi = 0$  equação de Laplace.

b)  $U \left( \frac{\delta \phi}{\delta z} \right)_{z=0} = -\eta g$  que é a condição dinâmica p=cte

linearizada sobre a superfície livre, onde  $\eta$  é a amplitude das oscilações.

c)  $U \frac{\delta \eta}{\delta x} = \frac{\delta \phi}{\delta z}$  para  $z = 0$ , que é a condição cinemática linearizada sobre a superfície livre.

d)  $\frac{\delta \phi}{\delta z} \left[ (z+h)_{+0} \right] = \frac{\delta \phi}{\delta z} \left[ (z+h)_{-0} \right]$  sobre a superfície do hidrofólio e na esteira, onde  $(z+h)_{+0}$  e  $(z+h)_{-0}$  indicam valores sobre os dois lados da superfície do hidrofólio.

e)  $\phi$  e  $\nabla \phi \rightarrow 0$  para  $z \Rightarrow -\infty$

Das condições (b) e (c) obteremos a chamada condição de superfície livre (ver apêndice A).

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + K_0 \frac{\delta \phi}{\delta z} = 0 \quad p/ z=0 \quad (4)$$

onde

$$K_0 = g/U^2$$

Portanto, devemos achar os termos que serão adicionados ao potencial para fluxo infinito, tais que satisfaçam as condições (a), (d), (e) e (4).

Para a região  $0 \leq z < -h$  podemos escrever o potencial de velocidades total como:

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{4\pi^2} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k e^{-k(z+h)} \cos \left[ k(x-x') \cos\theta \right] \\ & \cdot \cos \left[ k(y-y') \operatorname{sen}\theta \right] d\theta dk \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A(k, \theta) e^{kz} \cos \left[ k(x-x') \cos\theta \right] \\ & \cdot \cos \left[ k(y-y') \operatorname{sen}\theta \right] d\theta dk \end{aligned} \quad (5)$$

onde a função  $A(k, \theta)$  deve ser calculada. Pela condição (4) ob-  
teremos (ver apêndice B)

$$A(k, \theta) = \frac{1}{\pi} \left[ 1 + \frac{2K_0}{k \cos^2 \theta - K_0} \right] k e^{-kh} \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5) obteremos:

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{4\pi^2} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k e^{-k(z+h)} \cos \left[ k(x-x') \cos\theta \right] \\ & \cdot \cos \left[ k(y-y') \operatorname{sen}\theta \right] d\theta dk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4\pi^2} \iint \Delta\phi \, dx' dy' \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k e^{k(z-h)} \cos \left[ k(y-y') \cos\theta \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad \cdot \cos \left[ k(y-y') \operatorname{sen}\theta \right] d\theta dk \\
 & - \frac{K_0}{2\pi^2} \iint \Delta\phi \, dx' dy' \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{k e^{k(z-h)}}{k \cdot \cos^2\theta - K_0} \cos \left[ k(x-x') \cos\theta \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad \cdot \cos \left[ k(y-y') \operatorname{sen}\theta \right] d\theta dk \qquad (7)
 \end{aligned}$$

Para que a expressão (7) satisfaça a condição (e) de vemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \phi &= \frac{z+h}{|z+h|} \frac{1}{4\pi^2} \iint \Delta\phi \, dx' dy' \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k e^{-k|z+h|} \cos \left[ k(x-x') \cos\theta \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad \cdot \cos \left[ k(y-y') \operatorname{sen}\theta \right] d\theta dk \\
 & - \frac{1}{4\pi^2} \iint \Delta\phi \, dx' dy' \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k e^{+k(z-h)} \cos \left[ k(x-x') \cos\theta \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad \cdot \cos \left[ k(y-y') \operatorname{sen}\theta \right] d\theta dk
 \end{aligned}$$

$$-\frac{K_0}{2\pi^2} \iint \Delta\phi \, dx' dy' \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{k e^{+k(z-h)}}{k \cos^2\theta - K_0} \cos \left[ k(x-x') \cos\theta \right] \cos \left[ k(y-y') \sin\theta \right] d\theta dk \quad (8)$$

A expressão (8) satisfaz a condição (d), mas não satisfaz a condição de não propagação de ondas na frente do hidrofólio. Para que esta condição seja satisfeita é necessário adicionar à expressão (8) um outro termo que satisfaça também a equação de Laplace e a condição de superfície livre. De acordo com as referências [ 11 ] e [ 29 ], e desde que o perfil de onda é dado por  $\eta = -\frac{U}{g} \left( \frac{\delta\phi}{\delta z} \right)_{z=0}$ , o termo de correção é obtido, achando-se o potencial de onda livre, cujo correspondente valor de  $\eta$  cancele o valor assintótico de  $\eta$  a montante do hidrofólio, calculado a partir da expressão (8). Assim obteremos

$$\eta = -\frac{K_0 U}{2g\pi^2} \iint \Delta\phi \, dx' dy' \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{k^2 \sec\theta}{k - K_0 \sec^2\theta} e^{-k(h)} \sin \left[ k(x-x') \cos\theta \right] \cos \left[ k(y-y') \sin\theta \right] d\theta dk \quad (9)$$

A integração em  $k$  pode ser feita achando-se a parte real da integração complexa e para isso devemos usar diferentes contornos para  $w \lesseqgtr 0$  (ver apêndice C).

Na forma complexa, (9) torna-se:

$$\eta = + \frac{K_0 U i}{2g} \iint \Delta \phi dx' dy' \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec \theta d\theta \int \frac{\pi^2 e^{-m(h)} i m w}{m - K_0 \sec^2 \theta} d m \quad (9.a)$$

onde

$$m = k + ia$$

$$w = (x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta$$

Depois de realizada a integração pelo método dos resí-  
duos obteremos para valor assintótico de  $\eta$  a jusante do hidrofô-  
lio a expressão:

$$\eta = - \frac{UK_0^3}{g\pi} \iint \Delta \phi dx' dy' \int_0^{\pi/2} \sec^5 \theta e^{-K_0 \sec^2 \theta (h)} \cos \left[ K_0 \sec \theta (x-x') \right] \cdot \cos \left[ K_0 \sec^2 \theta \sin \theta (y-y') \right] d\theta \quad (10)$$

e a montante do hidrofôlio:

$$\eta = + \frac{UK_0^3}{g\pi} \iint \Delta \phi dx' dy' \int_0^{\pi/2} \sec^5 \theta e^{-K_0 \sec^2 \theta (h)} \cos \left[ K_0 \sec \theta (x-x') \right] \cdot \cos \left[ K_0 \sec^2 \theta \sin \theta (y-y') \right] d\theta \quad (11)$$



Então, para satisfazer a condição de radiação deve ser adicionada à expressão do potencial de velocidades um outro termo tal que o correspondente valor de  $\eta$  a jusante e a montante do hidrofólio seja:

$$= - \frac{U_0 K_0^3}{g\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{\pi/2} \sec^5\theta e^{-K_0 \sec^2\theta (h)} \cos \left[ K_0 \sec\theta (x-x') \right] \cdot \cos \left[ K_0 \sec^2\theta \operatorname{sen}\theta (y-y') \right] d\theta \quad (12)$$

Assim o termo em (11) será cancelado exatamente enquanto que em (10) será duplicado. O termo adicional em (8) serão então:

$$\phi_4 = + \frac{K_0^2}{\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{\pi/2} \sec^4\theta e^{+K_0 \sec^2\theta (z-h)} \operatorname{sen} \left[ K_0 \sec\theta (x-x') \right] \cdot \cos \left[ K_0 \sec^2\theta \operatorname{sen}\theta (y-y') \right] d\theta \quad (13)$$

Adicionando (13) em (8) obteremos o potencial de velocidades total:

$$\phi = \frac{z+h}{|z+h|} \frac{1}{4\pi^2} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k e^{-k|z+h|} \cos \left[ k(x-x') \cos\theta \right]$$

$$\cdot \cos \left[ k(y-y') \text{sen}\theta \right] d\theta dk$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k e^{+k(z-h)} \cos \left[ k(x-x') \cos\theta \right]$$

$$\cdot \cos \left[ k(y-y') \text{sen}\theta \right] d\theta dk$$

$$- \frac{K_0}{\pi^2} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{k e^{+k(z-h)}}{k \cos^2\theta - K_0} \cos \left[ k(x-x') \cos\theta \right]$$

$$\cdot \cos \left[ k(y-y') \text{sen}\theta \right] d\theta dk$$

$$+ \frac{K_0^2}{\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{\pi/2} \text{sec}^4\theta e^{+K_0 \text{sec}^2\theta (z-h)} \text{en} \left[ K_0 \text{sec}\theta (x-x') \right]$$

$$\cdot \cos \left[ K_0 (y-y') \text{sec}^2\theta \text{sen}\theta \right] d\theta$$

Considerando as expressões (1), (2) e (3) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \phi = & - \frac{1}{4\pi} \iint \Delta\phi \, dx' dy' \frac{\delta}{\delta z} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{4\pi} \iint \Delta\phi \, dx' dy' \frac{\delta}{\delta z} \left( \frac{1}{R} \right) \\ & - \frac{K_0}{\pi^2} \iint \Delta\phi \, dx' dy' \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{k e^{+k(z-h)}}{k - K_0 \sec^2 \theta} \sec^2 \theta \cos \left[ k(x-x') \cos \theta \right] \\ & \quad \cdot \cos \left[ k(y-y') \sin \theta \right] d\theta dk \\ & + \frac{K_0^2}{\pi} \iint \Delta\phi \, dx' dy' \int_0^{\pi/2} \sec^4 \theta e^{+K_0 \sec^2 \theta (z-h)} \sin \left[ K_0 \sec \theta (x-x') \right] \\ & \quad \cdot \cos \left[ K_0 \sec^2 \theta \sin \theta (y-y') \right] d\theta \end{aligned} \quad (15)$$

expressão esta, semelhante àquela obtida em [ 11 ]. De uma maneira geral podemos escrever:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$$

onde  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  e  $\phi_4$  representam os quatro termos da equação (15).

### 3.2. CASOS LIMITES

Dois casos muito importante podem ser obtidos das equações gerais (14) e (15).

a)  $K_0 = 0$

obtemos:

$$\phi = - \frac{1}{4\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \left[ \frac{\delta}{\delta z} \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{\delta}{\delta z} \left( \frac{1}{R^*} \right) \right]$$

Esta é a situação para número de Froude extremamente alto, e o sistema é reduzido ao hidrofólio original e sua imagem simétrica em relação a superfície livre. Neste caso a superfície livre age como um contorno livre (free boundary)

b)  $K_0 = \infty$

Pode ser mostrado que neste caso, obtém-se:

$$\phi = - \frac{1}{4\pi} \iint \Delta\phi dx' dz' \left[ \frac{\delta}{\delta z} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{\delta}{\delta z} \left( \frac{1}{R^*} \right) \right]$$

Quando  $K_0 = \infty$  o número de Froude é zero e o sistema pode ser representado pelo hidrofólio original e sua imagem especular com relação à superfície livre. Neste caso a superfície livre age como um contorno sólido (solid Boundary)

onde

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+h)^2}$$

$$R^* = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (h-z)^2}$$

4.1. EXPRESSÃO DA VELOCIDADE INDUZIDA

A equação (15) representa o potencial de velocidade para um hidrofólio operando abaixo da superfície livre. A contribuição dos dois primeiros termos ao campo de velocidades induzidas (induced downwash velocity) é (ver apêndice E).

$$\begin{aligned}
 V_1 + V_2 &= \left( \frac{\delta\phi_1}{\delta z} \right)_{z=-h} + \left( \frac{\delta\phi_2}{\delta z} \right)_{z=-h} \\
 &= + \frac{1}{4\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \left[ \frac{1}{R_1^3} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \left[ \frac{12h^2}{R_2^5} - \frac{1}{R_2^3} \right]
 \end{aligned} \tag{16}$$

onde

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \\
 R_2 &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + 4h^2}
 \end{aligned}$$

e do quarto termo é:

$$V_4 = \left( \frac{\delta \phi_4}{\delta z} \right)_{z=-h}$$

$$= \frac{K_0^3}{\pi} \iint \Delta \phi dx' dy' \int_0^{\pi/2} \sec^6 \theta e^{-K_0 \sec^2 \theta 2h} \operatorname{sen} \left[ K_0 \sec \theta (x-x') \right]$$

$$\cos \left[ K_0 (y-y') \sec^2 \theta \operatorname{sen} \theta \right] d\theta \quad (17)$$

O terceiro termo requer outras manipulações matemáticas e é tratado a seguir.

Sendo:

$$\phi_3 = - \frac{K_0}{\pi^2} \iint \Delta \phi dx' dy' \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{k e^{-k(h-z)}}{k \cos^2 \theta - K_0} \cos \left[ k(x-x') \cos \theta \right]$$

$$\cos \left[ k(y-y') \operatorname{sen} \theta \right] d\theta dk$$

podemos fazer  $\beta = \theta + \frac{\pi}{2}$  e obteremos

$$\phi_3 = - \frac{K_0}{4\pi^2} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \frac{k e^{-k(h-z)}}{k \text{sen}^2\beta - K_0} \cos \left[ k(x-x') \text{sen}\beta \right] \cos \left[ k(y-y') \text{cos}\beta \right] d\theta dk$$

Derivando em relação a  $z$  e colocando  $z = -h$  obtemos

$$V_3 = - \frac{K_0}{4\pi^2} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \frac{k e^{-2hk}}{\text{sen}^2\beta - \frac{K_0}{k}} \cos \left[ k(x-x') \text{sen}\beta \right] \cos \left[ k(y-y') \text{cos}\beta \right] d\beta dk$$

A integração em  $\beta$  pode ser efetuada pelo método dos resíduos.

Consideremos:

$$I = \int_{-\pi}^\pi \frac{\cos \left[ k(x-x') \text{sen}\beta \right] \cos \left[ k(y-y') \text{cos}\beta \right]}{\text{sen}^2\beta - \frac{K_0}{k}} d\beta$$

Fazendo

$$z = e^{i\beta}$$

$$V_1 = \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)$$

$$d = \frac{dz}{iz}$$

$$V_2 = \operatorname{cos}\beta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

Substituindo na expressão anterior; teremos:

$$I = i \int \frac{4z \operatorname{cos} \left[ k(x-x')V_1 \right] \operatorname{cos} \left[ k(y-y')V_2 \right] dz}{\left[ z^4 - 2z^2 \left( 1 - \frac{2K_0}{k} \right) + 1 \right]}$$

As raízes do denominador são:

$$z_1 = \sqrt{A + B}$$

$$z_2 = -\sqrt{A + B}$$

$$z_3 = \sqrt{A - B}$$

$$z_4 = -\sqrt{A - B}$$

onde

$$A = 1 - \frac{2K_0}{k}$$

$$B = \sqrt{A^2 - 1}$$



Pode ser verificado que para

a)  $k < K_0$   $z_1$  e  $z_2$  são pólos do integrando

Assim

$$I_1 = -2\pi \left[ \operatorname{Res}_{z=z_1} F(z) + \operatorname{Res}_{z=z_2} F(z) \right]$$

Mas

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} F(z) = \frac{4z_1 \cos[k(x-x')V_1(z_1)] \cos[k(y-y')V_2(z_1)]}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}$$

e

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} F(z) = \frac{4z_2 \cos[k(x-x')V_1(z_2)] \cos[k(y-y')V_2(z_2)]}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)}$$

Sendo

$$V_1(z_1) = -V_1(z_2) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(-A-B) + 1}{\sqrt{-A-B}} \right]$$

e

$$V_2(z_1) = -V_2(z_2) = \frac{i}{2} \left[ \frac{(-A - B) - 1}{\sqrt{-A - B}} \right]$$

obteremos

$$I_1 = - \frac{4\pi \cos[k(x-x')V_1(z_1)] \cos[k(y-y')V_2(z_1)]}{B}$$

b)  $k > K_0$   $z_1, z_2, z_3$  e  $z_4$  são polos do integrando

Devemos escrever:

$$z_1 = \sqrt{D + iC}$$

$$z_2 = -\sqrt{D + iC}$$

$$z_3 = \sqrt{D - iC}$$

$$z_4 = -\sqrt{D - iC}$$

onde

$$D = 1 - \frac{2K_0}{k}$$

$$C = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2}$$

Assim

$$I_2 = -\pi \left[ \operatorname{Res}_{z=z_1} F(z) + \operatorname{Res}_{z=z_2} F(z) + \operatorname{Res}_{z=z_3} F(z) + \operatorname{Res}_{z=z_4} F(z) \right]$$

Pode ser provado que

$$\sum \operatorname{Res} F(z) = 0$$

Logo

$$I_2 = 0$$

e

$$I = I_1$$

Assim

$$V_3 = \frac{K_0}{\pi} \iint \Delta \phi \, dx' dy' \int_0^{K_0} \frac{k e^{-2hk}}{8} \cos \left[ k(x-x') V_1(z_1) \right]$$

$$\cos \left[ k(y-y') V_2(z_1) \right] dk \quad (18)$$

As equações (16), (17) e (18) nos dão a expressão completa da velocidade induzida.

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{4\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \left[ \frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3} - \frac{12h^2}{R_2^5} \right] \\
 &+ \frac{K_0^3}{\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{\pi/2} \sec^6\theta e^{-K_0 \sec^2\theta 2h} \\
 &\quad \text{sen} \left[ K_0 \sec (x-x') \right] \cos \left[ K_0 \sec^2\theta \text{sen}\theta (y-y') \right] d\theta \\
 &+ \frac{K_0}{\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{K_0} \frac{k e^{-2hk}}{B} \cos \left[ k(x-x')T_1 \right] \\
 &\quad \cosh \left[ k(y-y')T_2 \right] dk
 \end{aligned} \tag{19}$$

onde

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{(-A-B) + 1}{\sqrt{-A-B}} \right]$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{(-A-B) - 1}{\sqrt{-A-B}} \right]$$

A equação (19) pode ser integrada por partes em relação a  $x'$  considerando as seguintes relações:

$$a) \quad \Delta\phi(x_{LE}, y') = 0$$

$$b) \quad \frac{\delta}{\delta x'} \left[ \Delta\phi(x_{TE}, y') \right] = 0$$

$$c) \quad \Delta\phi(x_{TE}, y') = \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} dx'$$

$$d) \quad \Delta\phi(\infty, y') = \Delta\phi(x_{TE}, y')$$

onde  $x_{TE}$  e  $x_{LE}$  indicam respectivamente as ordenadas da borda de fuga (trailing edge) e da borda de ataque (leading edge). Obteremos depois de algumas transformações matemáticas (ver apêndice E).

$$v = \frac{1}{4\pi} \int \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \frac{1}{(y-y_0)^2} \left[ \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} + 1 \right] dx' dy'$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \left\{ \frac{(y-y')^2 - 4h^2}{[(y-y')^2 + 4h^2]^2} + (x-x') \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{[(x-x')^2+(y-y')^2][(y-y')^2-4h^2]-32h^4}{[(x-x')^2+(y-y')^2+4h^2]^{3/2}[(y-y')^2+4h^2]^2} \right\} \right\} dx' dy'$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2K_0}{\pi} \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \int \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} dx' dy' \int_0^{K_0} \frac{\sqrt{-A-B}}{B[A+B-1]} \\
 & e^{-2kh} \cosh \left[ k(y-y')T_2 \right] \left\{ \operatorname{sen} \left[ kT_1(x-x') \right] + 1 \right\} dk \\
 & + \frac{K_0^2}{\pi} \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \int \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x_0} dx' dy' \int_0^{\pi/2} \sec^5 \theta e^{-K_0 \sec^2 \theta \cdot 2h} \\
 & \cos \left[ K_0 \sec^2 \theta (y-y') \operatorname{sen} \theta \right] \left\{ 1 - \cos \left[ K_0 \sec \theta (x-x') \right] \right\} d\theta
 \end{aligned}$$

(20)

A equação (20) representa a expressão geral do campo de velocidades induzidas perpendicularmente ao hidrofólio.

## 5.1. EXPRESSÕES PARTICULARES PARA O HIDROFÓLIO "DELTA"

Considerando agora o hidrofólio "Delta", podemos particularizar a equação (20) em função da geometria da placa (Fig. 5.1)

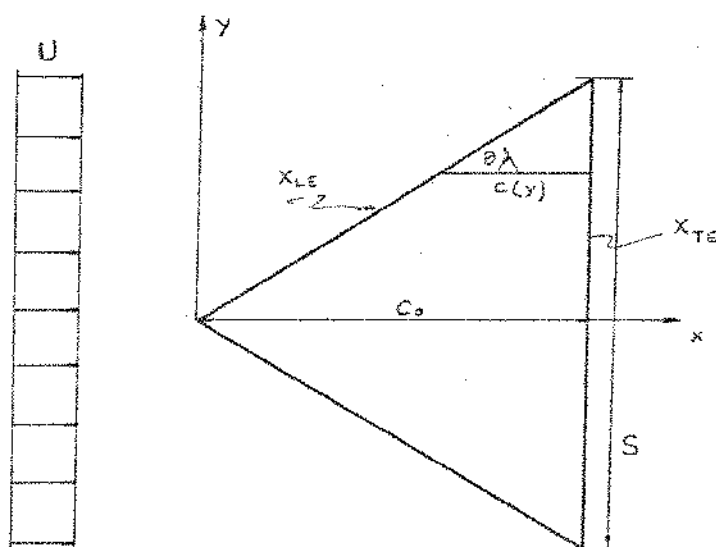


Fig. 5.1

Fazendo  $x' = x_0$  e  $y' = y_0$  na expressão (20) obteremos da Fig. (5.1) as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{LE} = \frac{2|y|c_0}{S} \\ x_{TE} = c_0 \\ x = \frac{1}{2} \left( c_0 + \frac{2|y|c_0}{S} \right) - \frac{1}{2} \left( c_0 - \frac{2|y|c_0}{S} \right) \cos \theta \\ x_0 = \frac{1}{2} \left( c_0 + \frac{2|y_0|c_0}{S} \right) - \frac{1}{2} \left( c_0 - \frac{2|y_0|c_0}{S} \right) \cos \theta_1 \end{array} \right.$$

Considerando as relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_0 = \frac{x_0}{c_0} \\ \bar{x} = \frac{x}{c_0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_0 = \frac{y_0}{S/2} \\ \bar{y} = \frac{y}{S/2} \end{array} \right. \quad (21)$$

obteremos

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_{LE} = \bar{y} \\ \bar{x}_{TE} = 1 \\ \bar{x}_0 = \frac{1}{2} (1 + |\bar{y}_0|) - \frac{1}{2} (1 - |\bar{y}_0|) \cos \theta_1 \end{array} \right. \quad (22)$$

Aplicando-se a equação de Bernoulli entre um ponto acima e outro abaixo da superfície do hidrofólio conclui-se que:

$$\frac{\Delta P}{\rho U} = - \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x_0}$$

ou

$$\frac{L(x_0, y_0)}{\rho U} = - \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x_0} \quad (23)$$



Com as relações (21), (22) e (23) obteremos a expressão adimensionalizada da velocidade induzida:

$$v = - \frac{c(|\bar{y}_0|)c_0}{4\pi\rho US} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \frac{L(\theta_1, \bar{y}_0)}{(\bar{y} - \bar{y}_0)^2} \left[ \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + \left(\frac{s}{2c_0}\right)^2 (\bar{y} - \bar{y}_0)^2}} + 1 \right]$$

$$\cdot \text{sen}\theta_1 d\theta_1 d\bar{y}_0$$

$$- \frac{c(|\bar{y}_0|)c_0}{4\pi\rho US} \int_{-1}^1 \int_0^\pi L(\theta_1, \bar{y}_0) \left\{ \frac{[(\bar{y} - \bar{y}_0)^2 - 4\bar{h}^2]}{[(\bar{y} - \bar{y}_0)^2 + 4\bar{h}^2]^2} + (\bar{x} - \bar{x}_0) \right.$$

$$\left. \frac{\left[ (\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + (s/2c_0)^2 (\bar{y} - \bar{y}_0)^2 \right] [(\bar{y} - \bar{y}_0)^2 - 4\bar{h}^2] - 8\bar{h}^4 (s/c_0)^2}{\left[ (\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + (s/2c_0)^2 (\bar{y} - \bar{y}_0)^2 + \bar{h}^2 (s/c_0)^2 \right]^{3/2} [(\bar{y} - \bar{y}_0)^2 + 4\bar{h}^2]^2} \right\} \text{sen}\theta_1 d\theta_1 d\bar{y}_0$$

$$+ \frac{c(|\bar{y}_0|)c_0}{2\pi\rho US F^4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi L(\theta_1, \bar{y}_0) \text{sen}\theta_1 d\theta_1 d\bar{y}_0$$

$$\cdot \int_0^1 \left[ \frac{\sqrt{-A - B}}{B[A+B-1]} \right] \bar{k} \exp \left[ -\bar{k}\bar{h}/F^2 \right]$$

$$\left\{ 1 + \operatorname{sen} \left[ \frac{\bar{k}(\bar{x} - \bar{x}_0) C_0 T_1(\bar{k})}{SF^2} \right] \right\} \cosh \left[ \frac{\bar{k}(\bar{y} - \bar{y}_0) T_2(\bar{k})}{2F^2} \right] d\bar{k}$$

$$- \frac{C(|\bar{y}|) C_0}{4\pi\rho USF^4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi L(\theta_1, \bar{y}) \operatorname{sen}\theta_1 d\theta_1 d\bar{y}_0$$

$$\int_0^{\pi/2} \sec^5\theta \exp \left[ -\sec^2\theta \bar{h}/F^2 \right]$$

$$\left\{ 1 - \cos \left[ \frac{(\bar{x} - \bar{x}_0) C_0 \sec\theta}{SF^2} \right] \right\} \cos \left[ \frac{(\bar{y} - \bar{y}_0) \sec^2\theta \operatorname{sen}\theta}{2F^2} \right] d\theta \quad (24)$$

onde

$$F^2 = \text{número de Froude} = \frac{1}{K_0 S}$$

$$\bar{k} = \frac{k}{K_0}$$

$$C(|\bar{y}_0|) = (1 - |\bar{y}_0|)$$

$$\bar{h} = \frac{h}{S/2}$$

$$\left[ \frac{\sqrt{-A - B}}{B [A + B - 1]} \right] \bar{k} = \left[ \frac{\sqrt{-\bar{A} - \bar{B}}}{\bar{B} [\bar{A} + \bar{B} - 1]} \right]$$

$$T_1(\bar{k}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(-\bar{A} - \bar{B}) + 1}{\sqrt{-\bar{A} - \bar{B}}} \right]$$

$$T_2(\bar{k}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(-\bar{A} - \bar{B}) - 1}{\sqrt{-\bar{A} - \bar{B}}} \right]$$

$$\bar{A} = 1 - \frac{2}{k}$$

$$\bar{B} = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{k}\right)^2 - 1}$$

5.2. EXPRESSION DO ÂNGULO DE ATAQUE INDUZIDO

O ângulo de ataque induzido é dado pela expressão:

$$\alpha = \frac{v}{U}$$

logo teremos:

$$\alpha = - \frac{c(|\bar{y}_0|)c_o}{4\pi\rho U^2 s} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \frac{L(\theta_1, \bar{y}_0)}{(\bar{y}-\bar{y}_0)^2} \left[ \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\sqrt{(\bar{x}-\bar{x}_0)^2 + (\frac{s}{2c_o})^2 (\bar{y}-\bar{y}_0)^2}} + 1 \right]$$

$$\cdot \text{sen}\theta_1 \, d\theta_1 \, d\bar{y}_0$$

$$- \frac{c(|\bar{y}_0|)c_o}{4\pi\rho U^2 s} \int_{-1}^1 \int_0^\pi L(\theta_1, \bar{y}_0) \left\{ \frac{[(\bar{y}-\bar{y}_0)^2 - 4\bar{h}^2]}{[(\bar{y}-\bar{y}_0)^2 + 4\bar{h}^2]^2} + (\bar{x}-\bar{x}_0) \right.$$

$$\left. \frac{[(\bar{x}-\bar{x}_0)^2 + (s/2c_o)^2 (\bar{y}-\bar{y}_0)^2] [(\bar{y}-\bar{y}_0)^2 - 4\bar{h}^2] - 8\bar{h}^4 (s/c_o)^2}{[(\bar{x}-\bar{x}_0)^2 + (s/2c_o)^2 (\bar{y}-\bar{y}_0)^2 + \bar{h}^2 (s/c_o)^2]^{3/2} [(\bar{y}-\bar{y}_0)^2 + 4\bar{h}^2]^2} \right\} \text{sen}\theta_1 \, d\theta_1 \, d\bar{y}_0$$

$$+ \frac{C(|\bar{y}_0|)C_0}{2\pi\rho U^2 SF^4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi L(\theta_1, \bar{y}_0) \text{sen}\theta_1 d\theta_1 d\bar{y}_0$$

$$\int_0^1 \left[ \frac{\sqrt{-\bar{A}-\bar{B}}}{\bar{B}[\bar{A}+\bar{B}-1]} \right] \exp \left[ -\bar{k}\bar{h}/F^2 \right]$$

$$\left\{ 1 + \text{sen} \left[ \frac{\bar{k}(\bar{x}-\bar{x}_0)C_0 T_1(\bar{k})}{SF^2} \right] \right\} \cosh \left[ \frac{\bar{k}(\bar{y}-\bar{y}_0)T_2(\bar{k})}{2F^2} \right] dk$$

$$- \frac{C(|\bar{y}_0|)C_0}{4\pi\rho U^2 SF^4} \int_{-1}^1 \int_0^\pi L(\theta_1, \bar{y}_0) \text{sen}\theta_1 d\theta_1 d\bar{y}_0$$

$$\int_0^{\pi/2} \sec^5\theta \exp \left[ -\sec^2\theta\bar{h}/F^2 \right]$$

$$\left\{ 1 - \cos \left[ \frac{(\bar{x}-\bar{x}_0)C_0 \sec\theta}{SF^2} \right] \right\} \cos \left[ \frac{(\bar{y}-\bar{y}_0)\sec^2\theta \text{sen}\theta}{2F^2} \right] d\theta$$

## 6.1. ANÁLISE NUMÉRICA

### 6.1.1. Análise de alguns métodos fundamentais

Numerosos trabalhos tem sido publicados, no sentido de se obter uma solução aproximada para a equação integral da superfície de sustentação, tal que forneçam informações sobre as distribuições de carga tanto na direção com corda, como na envergadura, no estudo de aerofólios.

A técnica mais usada e mais conhecida no passado foi devido a Falkner, onde era feita uma distribuição discreta de vórtices sobre o aerofólio em estudo, e suas intensidades calculadas aplicando-se a condição de fluxo tangencial em um número de pontos igual ao número de vorticidades a serem determinados.

Com o advento dos computadores de grande velocidade é preferível atacar diretamente a equação, empregando métodos de solução que convergem para resultados precisos de acordo com o refinamento adotado.

O procedimento usual é assumir que a carga seja uma série de funções pré-selecionadas com coeficientes desconhecidos e então determiná-los satisfazendo exatamente a condição da velocidade normal em um conjunto de pontos de colocação ou aproximadamente pela técnica dos mínimos quadrados em um conjunto de pontos de controle. Na seleção das funções, usa-se resultados conhecidos da teoria para fluxo incompressível em duas dimensões e da teoria da linha de sustentação em fluxo permanente.

A parte mais laboriosa e importante do tratamento numérico das equações é a avaliação das integrais de superfície para cada função de carga. É a eficiência do método que praticamente determina a precisão dos resultados finais e do tempo de computação necessário.

Na maioria dos métodos propostos a integração na direção da corda é efetuado primeiramente. Desde que o integrando se

ja uma função regular a menos da singularidade na borda de ataque a integração pode ser efetuada facilmente pela Fôrmula de Gauss para limites arbitrários de integração.

Para a avaliação das integrais na envergadura vários métodos tem sido propostos e os mais comumente usados serão analisados a seguir.

#### 6.1.2. Método de Multhopp e Garner

A idéia básica de Multhopp é aproximar o integrando por uma fórmula de interpolação adequada, após a avaliação da integração na corda. Assim pode se expressar a integral em termos dos valores da função em um conjunto de pontos pré-selecionados, que são os zeros dos polinômios de Tschebycheff. Estes polinômios formam um conjunto ortogonal no intervalo de integração com relação à função peso  $\sqrt{1-y_0^2}$  que leva em conta o comportamento nas extremidades da asa. A quadratura usada por Multhopp apresenta precisão Gaussiana. Garner faz uso da fórmula de interpolação de Lagrange, que é definida em termos do número de coeficientes desconhecidos de Multhopp e deste modo consegue separar, pelo menos em princípio, a convergência na direção da envergadura devido a distribuição de colocação, daquela devido a precisão da quadratura.

#### 6.1.3. Método de Zandebergen

Quando os cálculos são realizados usando o método de Multhopp, os resultados mostram grandes variações com o aumento do número de pontos na corda e envergadura, para os quais a condição de contorno deve ser aplicada. Um novo método devido a Zandebergen foi desenvolvido, onde a representação da distribuição de pressões na envergadura é separada da representação da função Kernel regularizada na direção da envergadura. Isto possibilita a obtenção de integrais precisas para uma dada distribuição de pontos de controle e leva a resultados que mostram um rápido decréscimo da variação, quando o número de pontos na corda, na envergadura

ou ambos são aumentados.

#### 6.1.4. Método de Watkins, Woolston e Cunningham

Após um tratamento cuidadoso da integração na corda usando quadratura de Gauss, Watkins analisa a parte finita da integração na envergadura subdividindo a asa em regiões. Longe da singularidade Watkins usa também a quadratura de Gauss e na região singular faz uso da fórmula de interpolação de Lagrange.

Além destes métodos existem outros, diferindo entre si pelo tratamento matemático, escolha dos pontos de controle e técnicas de integração.

Este trabalho, segue aproximadamente o esquema de Watkins diferindo dele com respeito a integração na corda. Watkins realiza esta integração considerando duas regiões definidas pelo ponto de controle, enquanto que aqui estas duas regiões são subdivididas em intervalos menores e em cada intervalo é escolhido um certo número de pontos para a Fórmula de Gauss.

Convém salientar, que não existe ainda um método padrão a ser utilizado. Cada um deles apresenta vantagens e desvantagens e o critério de adoção deve conciliar os fatores precisão, tempo de computação e capacidade do método para o tratamento de placas de forma mais complexas

## 6.2. INTEGRAÇÕES NUMÉRICAS

Neste parágrafo são analisados os vários aspectos da integração da expressão (25), bem como a adoção da expressão de distribuição de carga sobre o hidrofólio. Como vimos, o procedimento usual é assumir para a distribuição de carga uma série de funções pré-selecionados com coeficientes desconhecidos e determiná-los satisfazendo as condições de contorno.



Esta distribuição pode ter a forma:

$$L(\theta_1, \bar{y}_0) = \frac{4\pi\rho U^2 s}{c(|\bar{y}_0|)c_0} \sum_{n=0} \sum_{m=0} \lambda_n(\theta_1) (\bar{y}_0)^m \sqrt{1-\bar{y}_0^2} A_{nm} \quad (26)$$

onde,  $\underline{n}$  e  $\underline{m}$  são tantos, quantos forem o número de pontos de controle na corda e envergadura respectivamente, e

$$\text{para } \begin{cases} n = 0 & \lambda_n = \cot\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \\ n \geq 1 & \lambda_n = \frac{4}{2^{2n}} \text{sen}(n\theta_1) \end{cases}$$

O fator  $\lambda_n(\theta_1)$  é a função de distribuição de carga na direção da corda que assegura o comportamento do hidrofólio tanto na borda de ataque como na borda de fuga.

O fator  $(\bar{y}_0)^m \sqrt{1-\bar{y}_0^2}$  é a função de distribuição de carga na direção da envergadura, que assegura o comportamento do hidrofólio em suas extremidades. Substituindo (26) em (25) obtemos:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= - \int_1^1 \frac{F(\bar{y}_0)}{(\bar{y}-\bar{y}_0)^2} d\bar{y}_0 - \int_1^1 G_1(\bar{y}_0) d\bar{y}_0 \\
 &+ \frac{2}{F^4} \int_1^1 G_2(\bar{y}_0) d\bar{y}_0 \int_0^1 \left[ \frac{\sqrt{-\bar{A}-\bar{B}}}{B[A+B-1]} \right] \exp \left[ -\bar{k}\bar{h}/F^2 \right] \\
 &\left\{ 1 + \operatorname{sen} \left[ \frac{\bar{k}(\bar{x}-\bar{x}_0) C_0 T_1(\bar{k})}{SF^2} \right] \right\} \cosh \left[ \frac{\bar{k}(\bar{y}-\bar{y}_0) T_2(\bar{k})}{2F^2} \right] d\bar{k} \\
 &- \frac{1}{F^4} \int_1^1 G_2(\bar{y}_0) d\bar{y}_0 \int_0^{\pi/2} \sec^5 \theta \exp \left[ -\sec^2 \theta \bar{h}/F \right] \\
 &\left\{ 1 - \cos \left[ \frac{(\bar{x}-\bar{x}_0) C_0 \sec \theta}{SF} \right] \right\} \cos \left[ \frac{(\bar{y}-\bar{y}_0) \sec^2 \theta \operatorname{sen} \theta}{2F^2} \right] d\theta
 \end{aligned} \tag{27}$$

onde:

$$F(\bar{y}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} (\bar{y}_0)^m \sqrt{1-\bar{y}_0^2} f_n(\bar{y}_0)$$

$$f_n(\bar{y}_0) = \int_0^{\pi} \ell_n(\theta_1) K_1 \operatorname{sen} \theta_1 d\theta_1$$

$$K_1 = 1 + \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + \left(\frac{S}{2C_0}\right)^2 (\bar{y} - \bar{y}_0)^2}}$$

$$G_1(\bar{y}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}(\bar{y}_0)^m \sqrt{1 - \bar{y}_0^2} g_n(\bar{y}_0)$$

$$g_n(\bar{y}_0) = \int_0^{\pi} \ell_n(\theta_1) k_2 \text{sen} \theta_1 d\theta_1$$

$$k_2 = \left\{ \frac{[(\bar{y} - \bar{y}_0)^2 - 4\bar{h}^2]}{[(\bar{y} - \bar{y}_0)^2 + 4\bar{h}^2]^2} + (\bar{x} - \bar{x}_0) \right\}$$

$$\left\{ \frac{[(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + (S/2C_0)^2 (\bar{y} - \bar{y}_0)^2] [(\bar{y} - \bar{y}_0)^2 - 4\bar{h}^2] - 8\bar{h}^4 (S/C_0)^2}{[(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + (S/2C_0)^2 (\bar{y} - \bar{y}_0)^2 + \bar{h}^2 (S/C_0)^2]^{\frac{3}{2}} [(\bar{y} - \bar{y}_0)^2 + 4\bar{h}^2]^2} \right\}$$

$$G_2(\bar{y}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}(\bar{y}_0)^m \sqrt{1 - \bar{y}_0^2} h_n(\bar{y}_0)$$

$$h_n(\bar{y}_0) = \int_0^{\pi} \ell_n(\theta_1) \text{sen} \theta_1 d\theta_1$$

Os coeficientes  $A_{nm}$  da expressão de distribuição de carga, são fatores desconhecidos e devem ser calculados efetuando-se a integração da expressão (27).

Para esta determinação nos selecionamos pontos de controle em número igual ao das incógnitas  $A_{nm}$ . Deste modo obteremos um sistema simultâneo de equações, que pode ser resolvido por simples inversão de matriz.

#### 6.2.1. Esquema de integração

As integrais da expressão (27) são efetuadas pela Fórmula de Gauss para limites arbitrários de integração, com exceção da integral do termo aerodinâmico, cuja singularidade de segunda ordem é avaliada através dos polinômios de interpolação da Lagrange.

A distribuição dos pontos de controle é feita usando-se a forma equiangular na direção da corda e equispaçada na direção da envergadura.

Podemos perceber mediante a equação (26), que quando a distribuição de carga é simétrica, apenas as potências pares de  $\bar{y}_0$  são mantidas na integração, e é suficiente considerar os pontos de controle sobre apenas metade do hidrofólio.

A Fórmula de Gauss para a integração é genericamente:

$$\int_a^b f(y) dy \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f(y_i)$$

onde

$$y_i = \left(\frac{b-a}{2}\right) x_i + \left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$w_i$  = função peso

$x_i$  = abscissas

ambos dependentes da ordem do polinômio escolhido.

### 6.2.2. Integração na corda

De um modo geral a integração na corda é dada por

$$I_c = \int_0^{\pi} \lambda_n(\theta_1) k \operatorname{sen} \theta_1 d\theta_1$$

onde

$\lambda_n(\theta_1)$  e  $k$  são conhecidos

O intervalo de integração de 0 a  $\pi$  é dividido em dois intervalos, pelo ponto de controle, isto é, de 0 a  $\theta$  e de  $\theta$  a  $\pi$ , de acordo com [ 11 ]. Cada um destes intervalos é dividido em um número de intervalos menores, dependendo da localização das ordenadas de integração com relação ao ponto de controle.

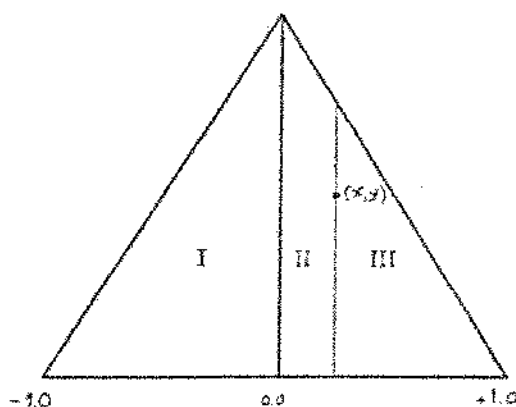
Pelos testes efetuados em [ 11 ] acha-se que para  $|\bar{y} - \bar{y}_0| > 1/8$  um número total de 10 intervalos é suficiente, cinco antes e cinco depois do ponto de controle. Quando  $1/8 < |\bar{y} - \bar{y}_0| < 1.0$  quatro intervalos antes e quatro depois são suficientes, e para  $|\bar{y} - \bar{y}_0| > 1.0$  três inter-

valos antes e três depois dão bons resultados.

Em cada intervalo é usado de 3 a 7 pontos na Fórmula de Gauss, dependendo da localização da ordenada de integração sobre a placa.

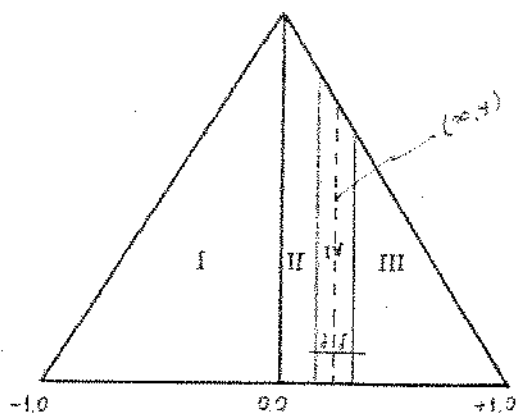
### 6.2.3. Integração na envergadura

Para a integração na envergadura, considerando os termos sem singularidade, o intervalo de integração é dividido em três regiões como mostrado abaixo [ 27 ].



e a integração nessas regiões é efetuada como já foi dito, pela fórmula de Gauss.

Para a integração do termo aerodinâmico a singularidade é tratada usando-se os polinômios de interpolação de Lagrange. Após vários testes, conclui-se que nove pontos são necessários para essa integração singular, e o esquema seguido é o da figura seguinte:



onde a integral singular na região IV é dada pela expressão:

$$\int_{\bar{y}-\delta}^{\bar{y}+\delta} \frac{F(\bar{y}_0)}{(\bar{y}-\bar{y}_0)^2} d\bar{y}_0 = \frac{1}{\delta} \sum_{s=1}^J K_s F(\eta_s)$$

onde  $\eta_s = \bar{y} + \frac{\delta}{J-1} (2s-J-1)$

Para  $J = 9$

e

s	$K_s$
1	0.074346183
2	0.67337868
3	0.25058201
4	7.7477249
5	-19.492063
6	7.7477249
7	0.25058201
8	0.67337868
9	0.074346183

de modo que:

$$I_{\text{singular}} = \frac{1}{\delta} \left[ |F(1) + F(9)| 0.074346183 + \right. \\ \left. + |F(2) + F(8)| 0.67337868 + |F(3) + F(7)| 0.25058201 \right. \\ \left. + |F(4) + F(6)| 7.7477249 - F(5) 19.492063 \right]$$

Deste modo, o valor total da integração será:

$$I = I_{\text{I}} + I_{\text{II}} + I_{\text{III}} + I_{\text{singular}}$$

### 6.3. CONSIDERAÇÕES NUMÉRICAS

Neste parágrafo passaremos a discutir detalhes fundamentais da programação, tais como a escolha dos pontos de controle, intervalo e número de pontos para a integração singular, número de pontos na Fórmula de Gauss para a integração na direção da envergadura e as limitações do programa de computação elaborado.

#### 6.3.1. Escolha dos pontos de controle

A distribuição dos pontos de controle para a programação pode ser feita de forma arbitrária. Neste trabalho a distribuição é feita de forma equiangular na direção da corda e equispçada na direção da envergadura. Vários testes foram executados variando-se o número de pontos MC na envergadura e NC na direção da



corda. Na tabela ( 1 ) são mostrados os valores aerodinâmicos de  $dC_L/d\alpha$  para uma placa retangular com diferentes valores de  $MC$  e  $NC$  para aspect ratios 1.0 e 4.0.

Os resultados obtidos para  $NC=3$  e 5 estão próximos dos valores obtidos por outros autores como pode ser verificado na Figura ( 2 ). Adotaram-se os valores  $NC=3$  e  $MC=4$  por problemas de tempo de operação no computador, pois este tempo aumenta, com o aumento do número de pontos de controle.

Quanto ao número de pontos para a integração pela fórmula de Gauss na direção da envergadura seguiu-se o esquema apresentado por Watkins [ 27 ].

Tendo em vista as figuras do parágrafo (6.2.3) a integração da região I pode ser feita com dez pontos na fórmula de Gauss independente da localização do ponto de controle. A região II é integrada com três a dez pontos, este número aumentando quando o ponto de controle, se move para a extremidade do hidrofólio, na região III usa-se de 5 a 10 pontos aumentando-se este número quando o ponto de controle se move para a secção de simetria do hidrofólio. No presente trabalho, foram usados nove pontos para a integração da região I, cinco a sete pontos na região II e sete pontos na região III.

A precisão do método utilizado, pode também ser verificado pela Fig. ( 3 ), na qual é feita uma comparação entre os valores da sustentação distribuída para uma asa retangular. Nota-se o comportamento de coeficiente angular infinito da curva nas extremidades da asa, fato este que deve ser esperado.

#### 6.3.2. A Integração Singular

A integração singular, como já foi mencionado, é avaliada usando-se os polinômios de interpolação de Lagrange. Alguns testes foram efetuados, para a escolha da ordem do polinômio de interpolação tal que resultasse em valores satisfatórios, comparados com trabalhos de outros autores. Estes testes nos deram vã-

rios resultados, que podem ser vistos na Fig. ( 4. ) e tabela ( 2 ), e que nos proporcionaram o critério de escolha para a avaliação daquela integral. A ordem do polinômio de interpolação escolhida foi  $J=9$  e o intervalo de integração foi  $\delta = 0.1$ .

### 6.3.3. Limitações do programa

O programa de computação foi elaborado de modo a permitir testes dos mais variados, desde que as equações da borda de ataque e da borda de fuga dos hidrofólios não apresentem nenhuma descontinuidade. Assim, é possível analisar, não só hidrofólios retangulares e triangulares, como também hidrofólios de geometria losangular, com enflexamento, com curvatura na borda de fuga, borda de ataque ou ambas, e outras que satisfaçam a condição da não descontinuidade descrita acima.

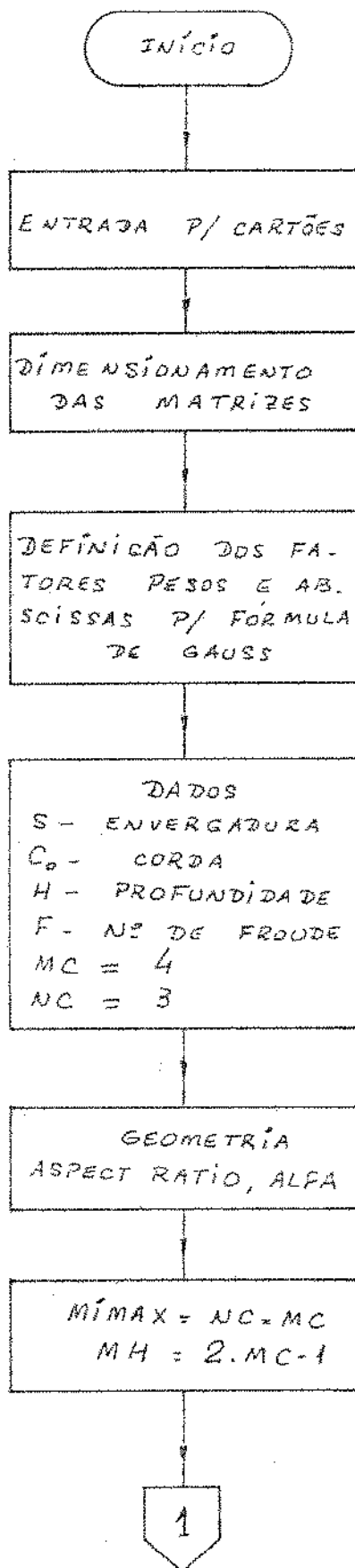
## 6.4 FLUXOGRAMA DO PROGRAMA DE COMPUTAÇÃO

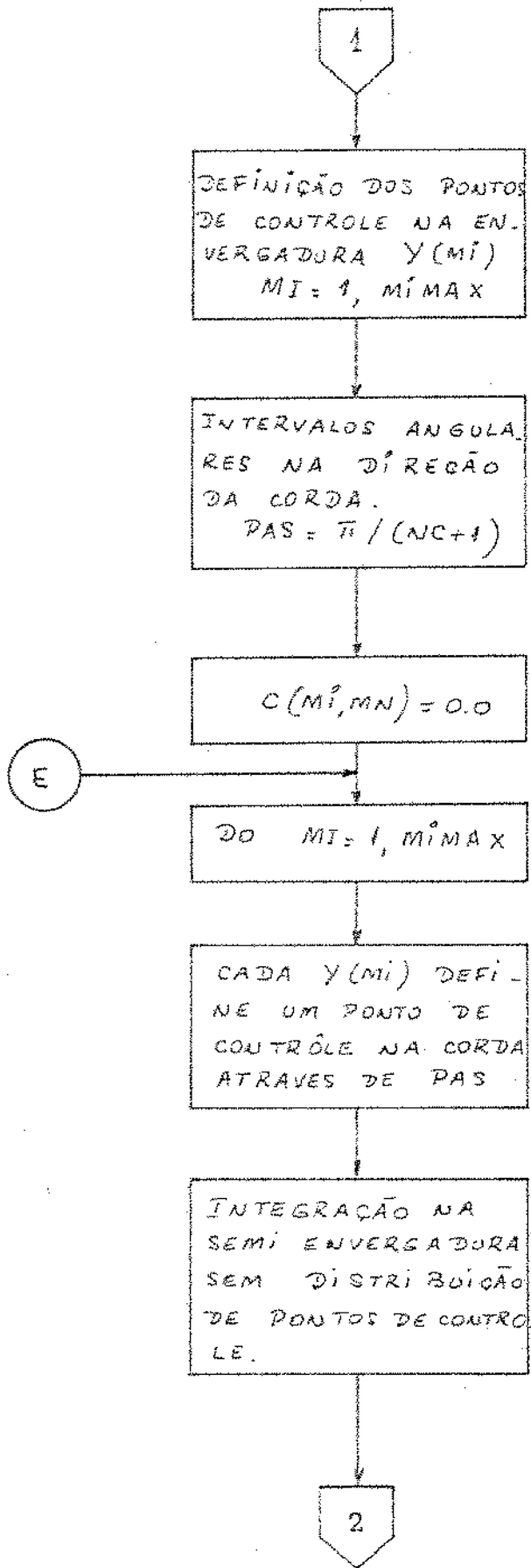
Neste parágrafo é apresentado o fluxograma do programa de computação elaborado para este estudo. O programa total consta de uma parte principal e mais sete subrotinas, que realizam a integração na corda, integração da singularidade de segunda ordem do termo aerodinâmico, integração em  $k$  e  $\theta$  dos dois últimos termos da equação (27) e subrotinas para o cálculo das características dos hidrofólios. No fluxograma foi dado mais ênfase ao programa principal e às duas primeiras subrotinas mencionadas acima, já que as restantes envolvem operações de fáceis manipulações indicadas nas equações (29), (30), (32), (33) e (34). O programa permite calcular as características de aerofólios, que é o caso de fluxo infinito, de características de hidrofólios para os valores limites  $F = 0$  e  $F = \infty$  e várias profundidades de imersão, e características de hidrofólios para números de Froude arbitrário. O tempo de operação envolvido em cada um dos três casos é diferente, pois é possível calcular a contribuição dos quatro termos da equação (27) separadamente, atra-

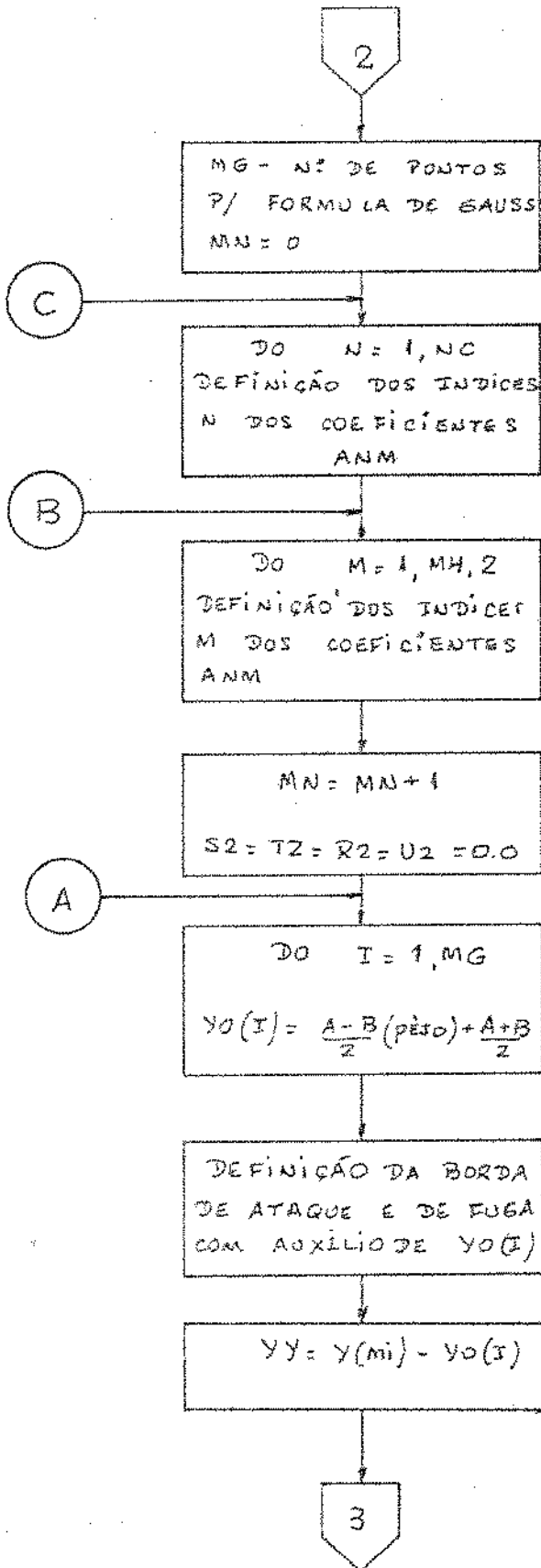
vês de um teste adequado.

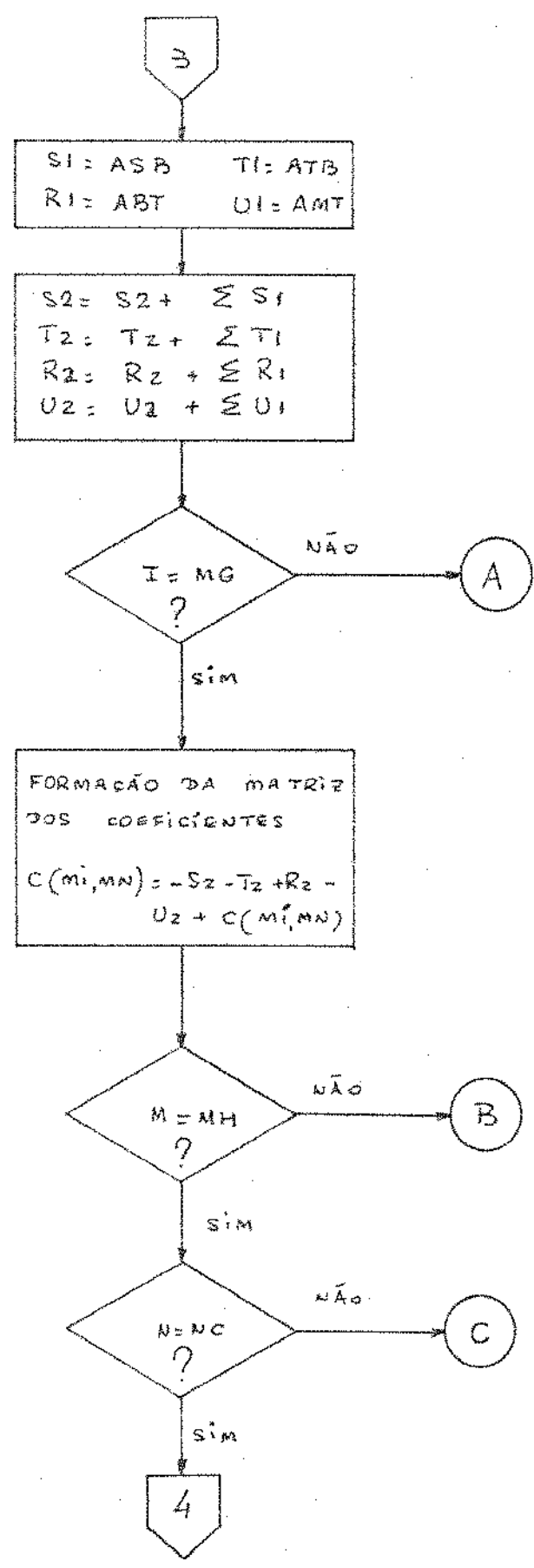
Para o caso aerodinâmico o tempo envolvido, para  $MC=4$  e  $NC=3$  e para um dado aspect ratio, é cerca de 2 minutos no computador PDP-10. Para os casos particulares de número de Froude zero e infinito as operações envolvem o primeiro e segundo termos da equação (27) e o tempo de computação para uma dada condição de operação do hidrofólio é cerca de 4 minutos.

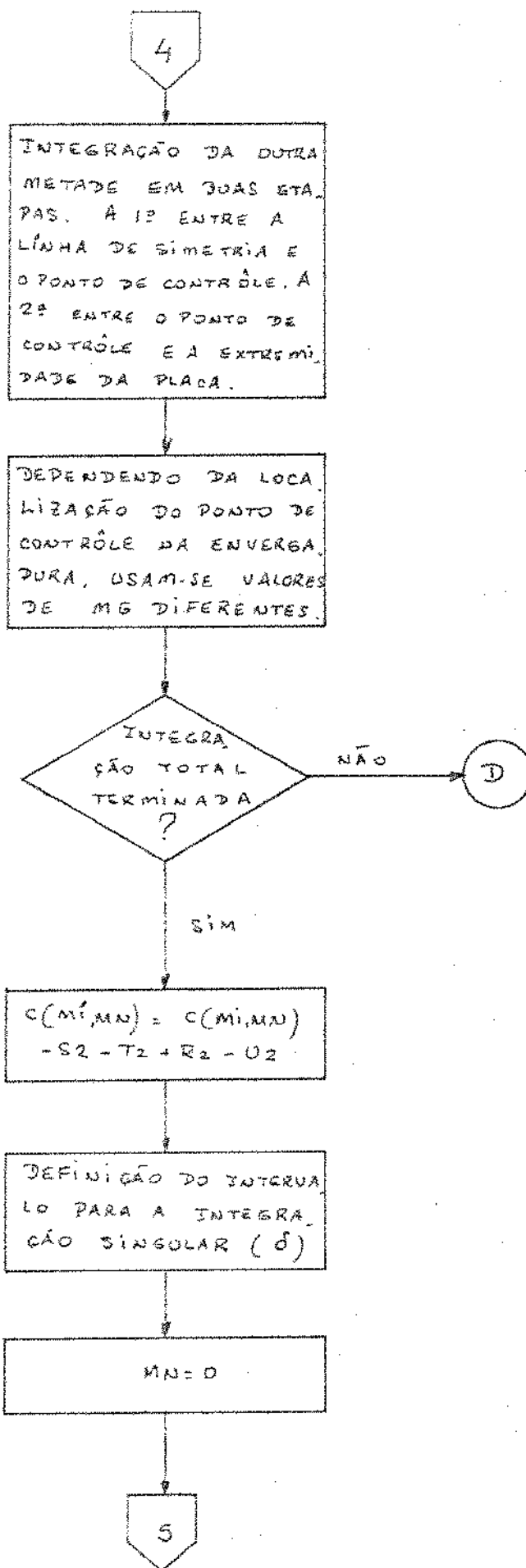
No caso mais geral, isto é, para número de Froude arbitrário o tempo envolvido, para cada condição de operação aumenta bastante e é cerca de 50 minutos, para  $MC=4$  e  $NC=3$ .



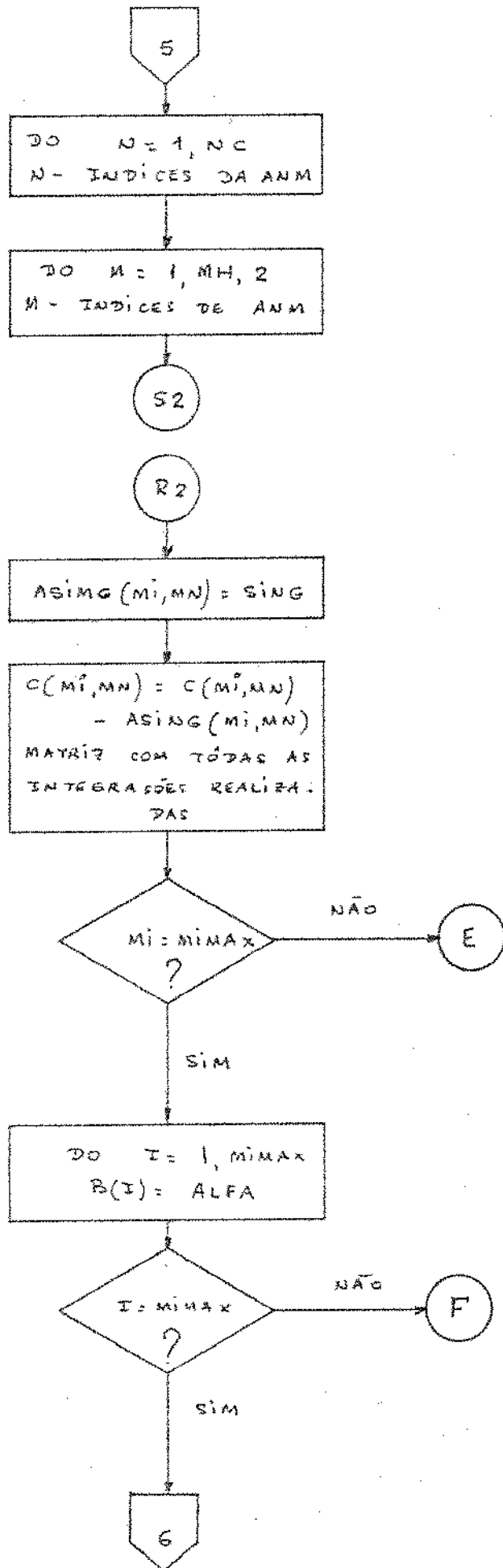


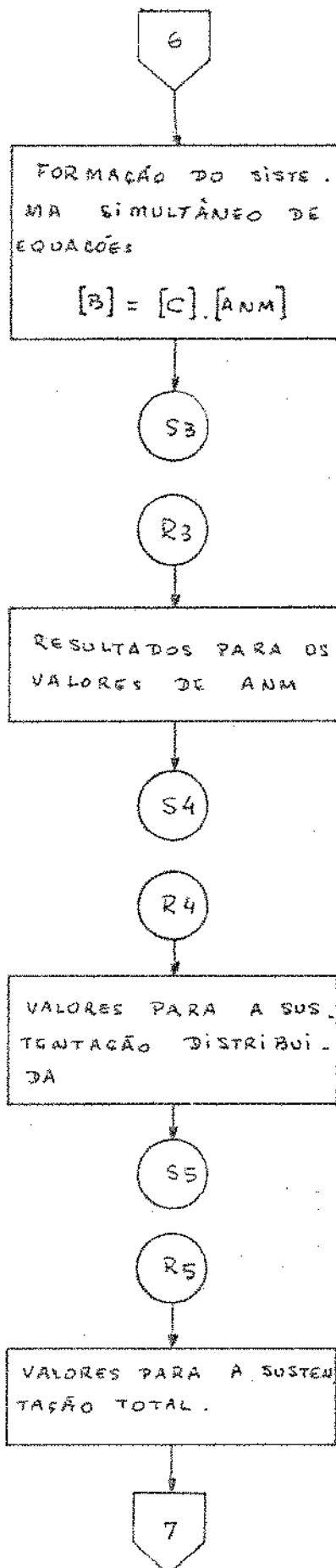


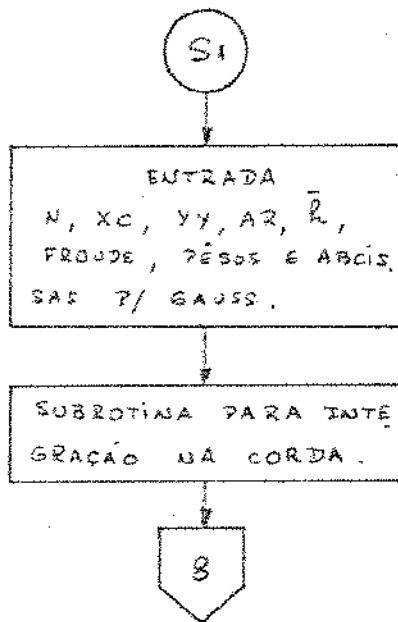
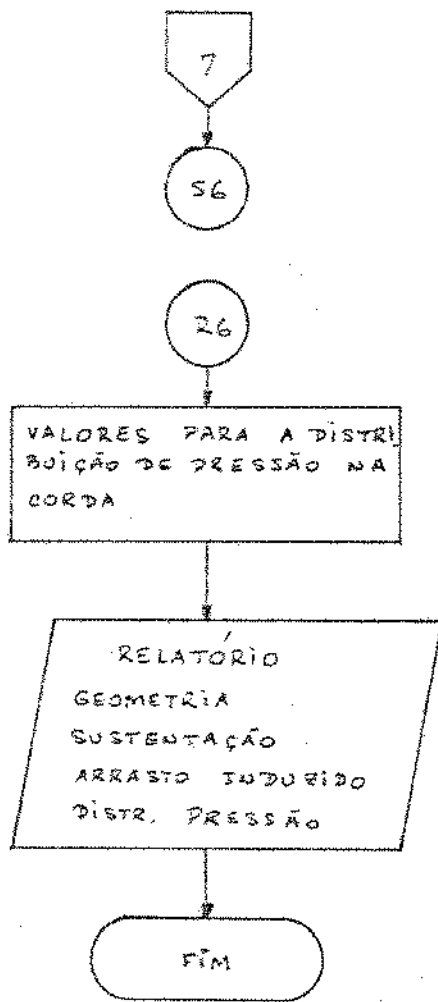


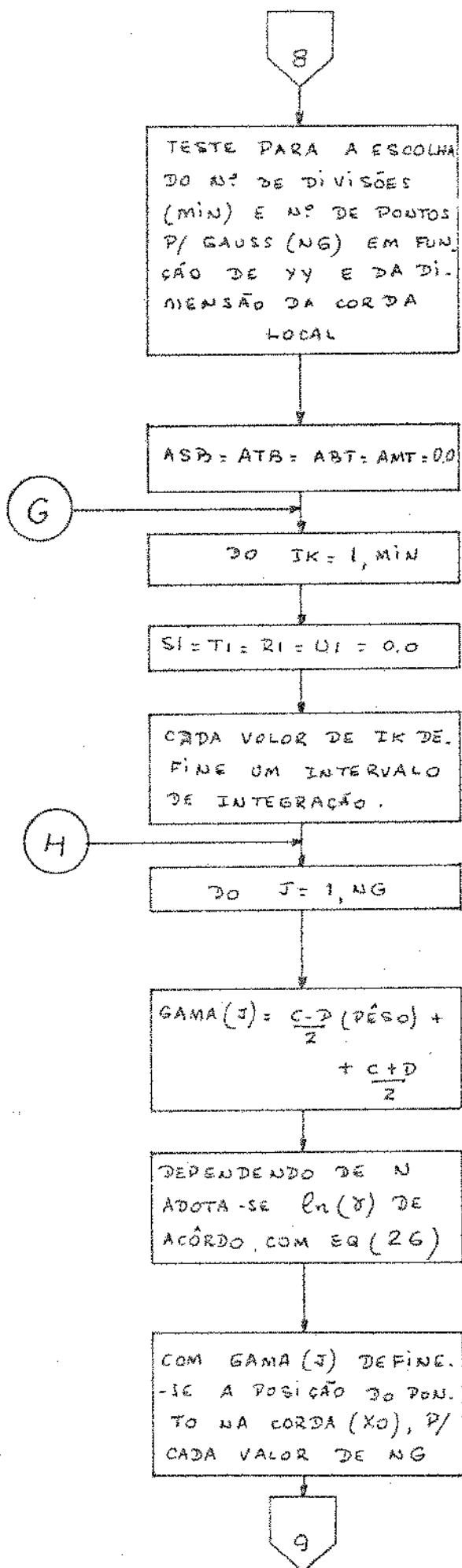


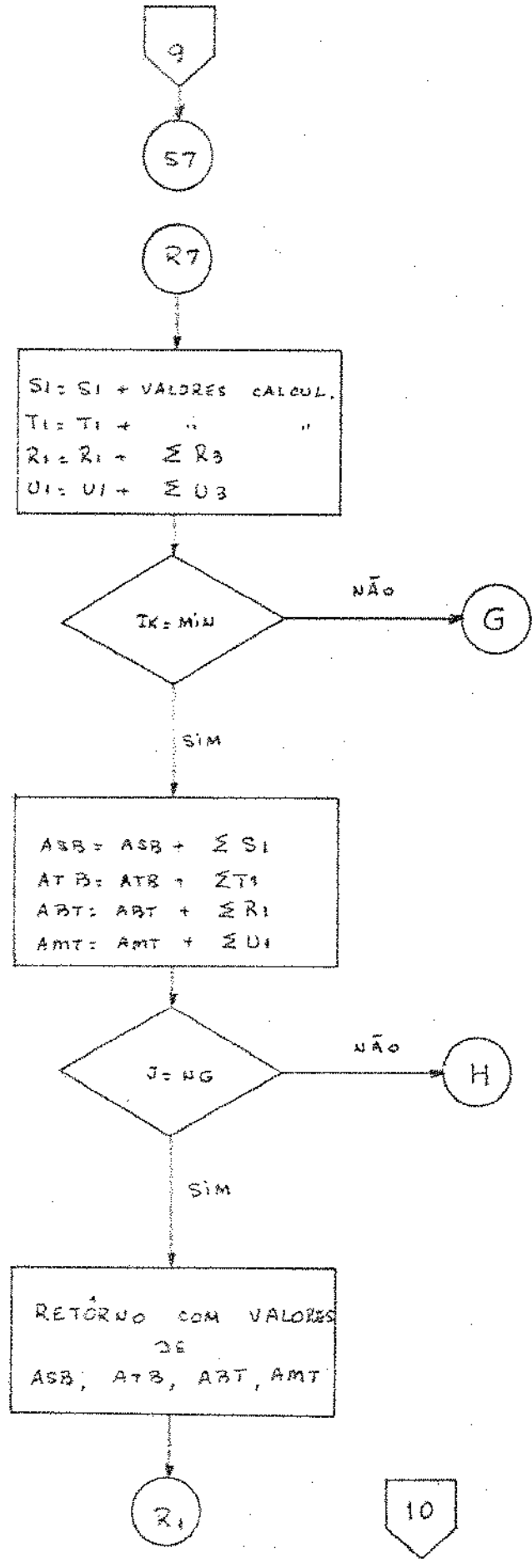


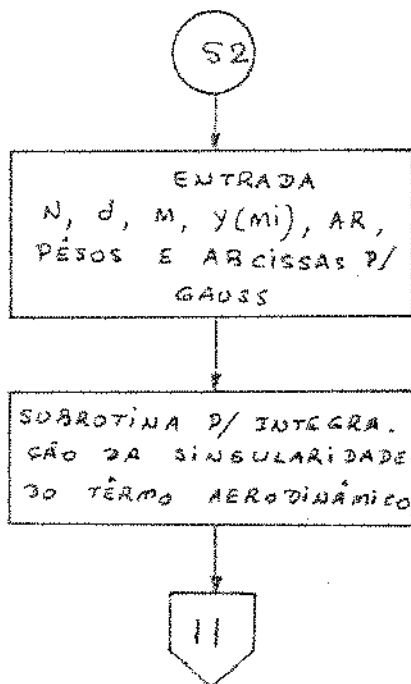
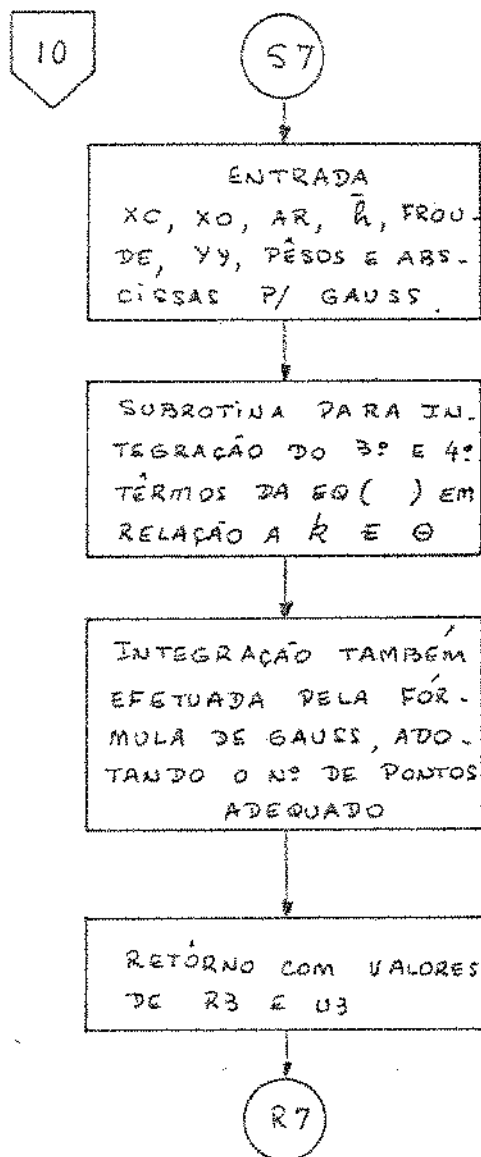


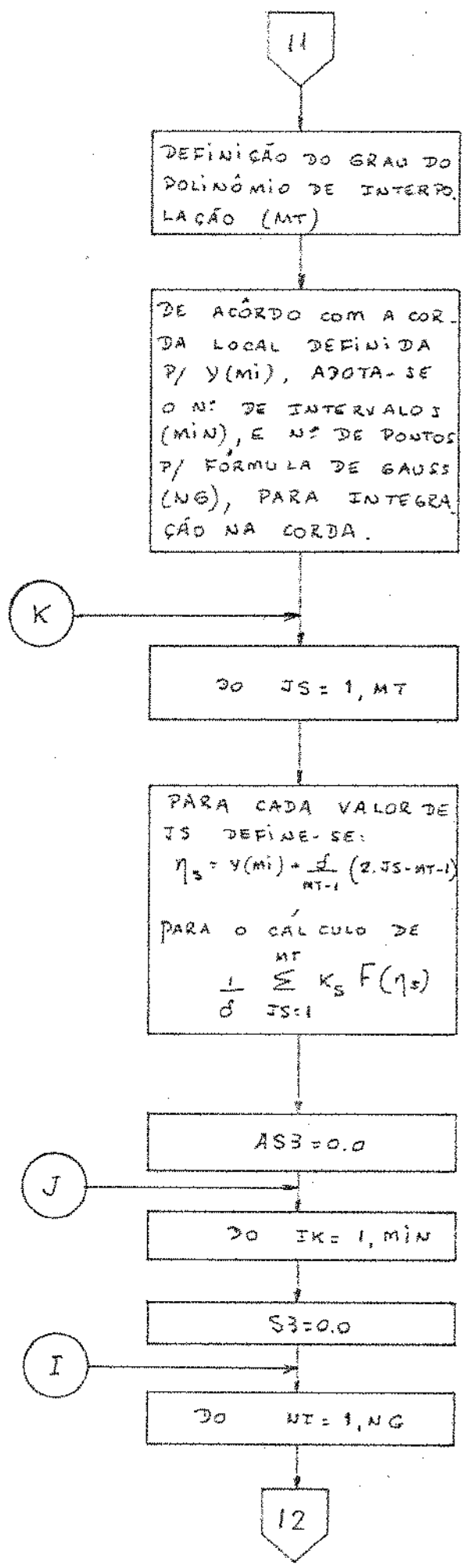


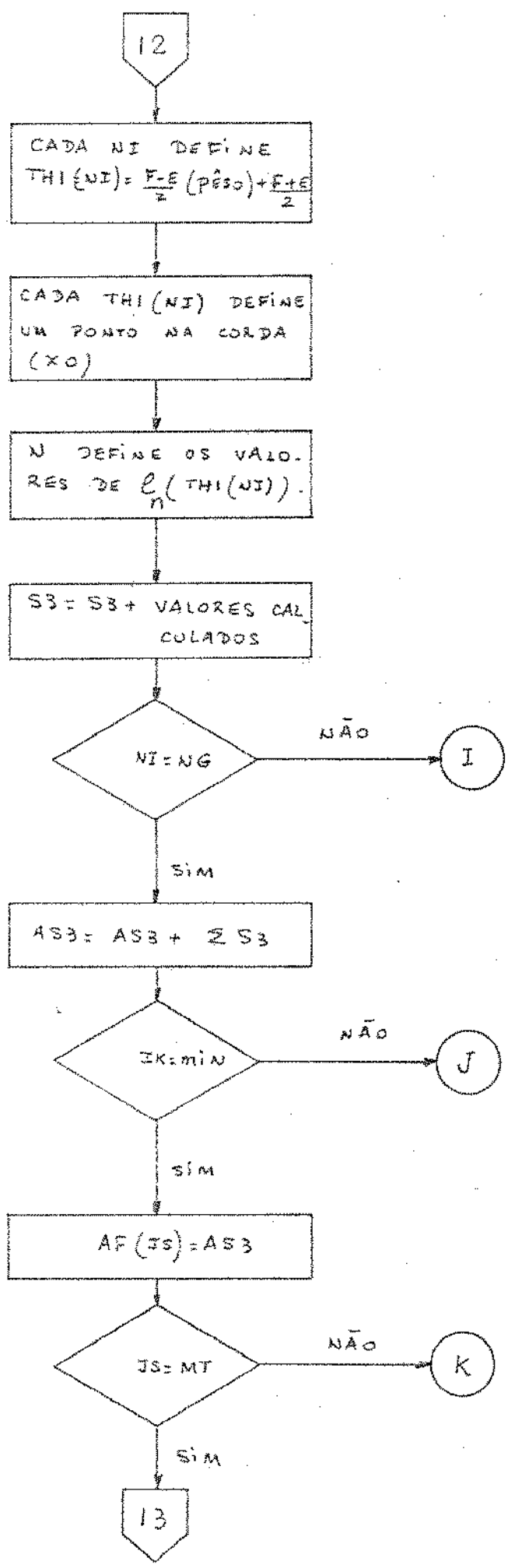




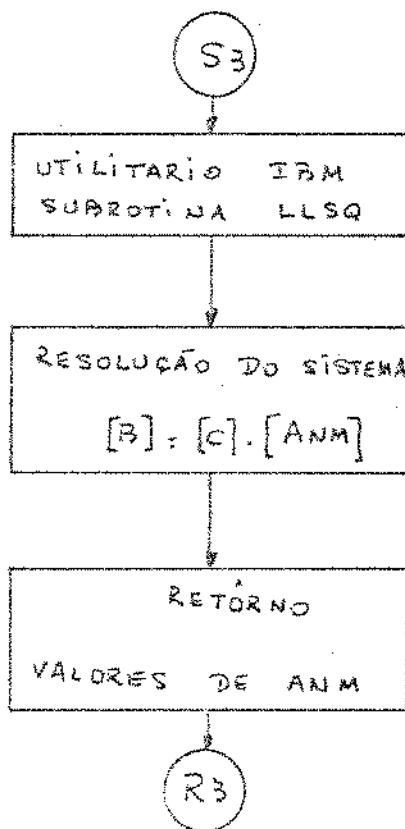
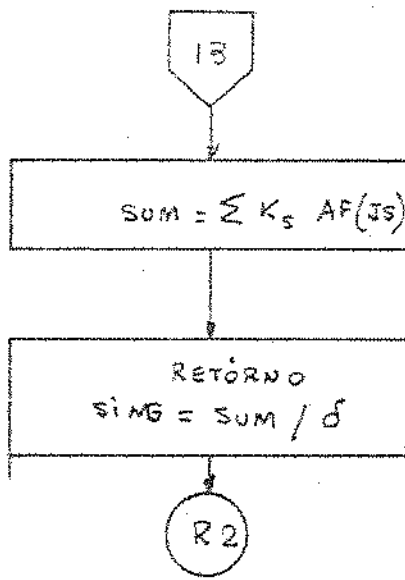












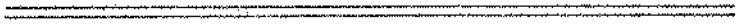
14

S4

SUBROTINA PARA O  
CÁLCULO DA SUSTENTAÇÃO  
DISTRIBUÍDA,  
QUE EFETUA AS OPE-  
RAÇÕES DA EQ ( ).

RETORNO  
VALORES PARA A SUS-  
TENTAÇÃO DISTRIBUÍ-  
DA.

R4



S5

SUBROTINA PARA O  
CÁLCULO DA SUSTEN-  
TAÇÃO TOTAL E  
ARRASTO INDUZIDO  
ATRAVÉS DAS EQS.  
( ) E ( ).

RETORNO  
VALORES DA SUSTEN-  
TAÇÃO TOTAL E AR-  
RASTO INDUZIDO

R5

15

15

56

SUBROTINA PARA O  
CÁLCULO DA DISTRIBUI-  
ÇÃO DE PRESSÃO NA  
CORDA ATRAVÉS DA  
EQ. ( ).

RETORNO  
VALORES DA DISTRIBUI-  
ÇÃO DE PRESSÃO  
NA CORDA.

R6

7.1. CARACTERÍSTICAS DO HIDROFÓLIO7.1.1. Expressão da circulação local

Pela equação (23) temos:

$$\frac{\delta\Delta\phi}{\delta x_0} = - \frac{L(x_0, y_0)}{\rho U}$$

ou

$$\delta\Delta\phi = - \frac{L(x_0, y_0)}{\rho U} dx_0$$

Integrando-se a equação anterior obtemos:

$$\int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \delta\Delta\phi = - \frac{1}{\rho U} \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} L(x_0, y_0) dx_0$$

ou

$$\Gamma(\bar{y}_0) = + \frac{1}{\rho U} \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} L(x_0, y_0) dx_0$$

pois

$$\Delta\phi(x_{LE}, y_0) = 0$$

$$\Delta\phi(x_{TE}, y_0) = \Gamma(y_0)$$

Na forma adimensionalizada:

$$\Gamma(\bar{y}_0) = + \frac{c_0 c(|\bar{y}_0|)}{20U} \int_0^\pi L(\theta_1, \bar{y}_0) \text{sen}\theta_1 d\theta_1$$

Efetuada a integração em  $\theta_1$  da expressão anterior mostra-se que podemos escrever:

$$\Gamma(\bar{y}_0) = + 2\pi^2 SU \sqrt{1-\bar{y}_0^2} \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{y}_0)^m \left[ A_{0m} + \frac{1}{2} A_{1m} \right]$$

(28)

onde para índice  $n > 1$  nos leva a integrais de funções ortogonais que são nulas no intervalo  $0 - \pi$

7.1.2. Coefficiente de sustentação local e total

Sabendo-se que o coeficiente local de sustentação é dado por:

$$C_{\ell} = \frac{\rho U \Gamma}{\frac{1}{2} \rho U^2 C_{\text{sec}}(|\bar{y}_0|)}$$

onde

$$C_{\text{sec}}(|\bar{y}_0|) = (C_0 - |\bar{y}_0| C_0)$$

chamada corda seccional dimensionalizada. Assim obteremos:

$$C_{\ell} = + \frac{4\pi^2 S}{C_{\text{sec}}(|\bar{y}_0|)} \sqrt{1 - \bar{y}_0^2} \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{y}_0)^m \left[ A_{0m} + \frac{1}{2} A_{1m} \right]$$

(29)

O coeficiente total de sustentação é escrito como:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 A}$$

onde

L = sustentação total

A = área do hidrofólio projetada na direção do escoamento.

Logo

$$C_L = \frac{\int_{-s/2}^{s/2} \rho U^2 dy_o}{\frac{1}{2} \rho U^2 \frac{s}{2} C_D}$$

e

$$C_L = \frac{4\pi^2 s}{C_D} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\bar{y}_o^2} \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{y}_o)^m \left[ A_{0m} + \frac{1}{2} A_{1m} \right] d\bar{y}_o \quad (30)$$

### 7.1.3. Expressão do coeficiente e fator de arrasto induzido

O coeficiente de arrasto induzido será analisado pela avaliação da força de sucção na borda de ataque através da expressão [ 11 ]:

$$C_{Di} = C_L \alpha - C_s \quad (31)$$

onde

$C_s$  - coeficiente de sucção

$C_{Di}$  - coeficiente de arrasto induzido

$C_L$  - coeficiente de sustentação total

A avaliação  $C_s$  é feita através da teoria bidimensional, que envolve somente o termo em  $\cot(\theta_1/2)$  na expressão para a carga na direção da corda e é dada pela equação:

$$\frac{1}{2} \rho U^2 C_{\text{sec}}(|\vec{y}_o|) \frac{ds}{dy_o} = \frac{C_L^2}{2\pi \cos \beta}$$

onde

$C_L$  - sustentação distribuída calculada somente com o termo em  $\cot(\theta_1/2)$

$\beta$  - ângulo entre a perpendicular ao fluxo e a borda de ataque.



S - Força de sucção da borda de ataque.

Tendo em vista os resultados obtidos para a sustentação distribuída obteremos:

$$C_s = \frac{4\pi^3 S AR}{\cos\beta} \int_{-1}^1 \frac{(1-\bar{y}_0^2)}{C_{sec}(|\bar{y}_0|)} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{y}_0)^m A_{0m} \right]^2 d\bar{y}_0 \quad (32)$$

Calculado  $C_s$ , podemos obter diretamente o valor de  $C_{Di}$  e o valor do fator de arrasto induzido dado pela expressão (31)

$$K^* = \pi AR \frac{C_{Di}}{C_L^2} \quad (33)$$

#### 7.1.4. Coefficiente de pressão distribuído na direção da corda

A expressão do coeficiente de pressão distribuído na direção da corda pode ser deduzida através da eq. (26) onde  $L(\theta_1, \bar{y}_0)$  é a diferença das pressões entre as superfícies inferior e superior do hidrofólio.

Assim

$$\Delta C_p = \frac{L(\theta_1, \bar{y}_0)}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

que pode ser escrito na forma final

$$\Delta C_p = \frac{8 \pi S}{c(|\bar{y}_0|)c_0} \sum_{n=0} \sum_{m=0} \lambda_n(\theta_1) (\bar{y}_0)^m \sqrt{1-\bar{y}_0^2} A_{nm} \quad (34)$$

## 8.1 DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados e analisados os vários resultados obtidos, e quando possível comparados com resultados anteriores, levando em conta as influências do número de Froude, profundidade de imersão e aspect ratios dos hidrofólios.

### 8.1.1. Influência do número de Froude

O número de Froude é um fator de grande influência nas características dos hidrofólios e será analisado detalhadamente.

A Fig. (5) mostra a variação de  $dC_L/dh$  em função da profundidade de imersão, para vários valores do número de Froude, podendo-se notar que para  $\bar{h} = 1.0$  os valores dos coeficientes de sustentação não apresentam grandes variações e para  $\bar{h}$  menores as variações começam a ser consideráveis.

Analisando os casos limites de números de Froude zero e infinito, chegaremos as condições respectivamente de contorno sólido e livre na superfície, discutidas em 3.2. Nota-se que para número de Froude zero a pequenas profundidades de imersão, os valores do coeficiente de sustentação aumentam bastante. Este fato é explicado pela consideração de contorno sólido na superfície e neste caso o sistema pode ser representado pelo hidrofólio original e sua imagem especular com relação à superfície livre. Assim, haverá um aumento das velocidades tangenciais entre o contorno sólido e a superfície do hidrofólio, que possibilitará a formação de uma região de baixa pressão, implicando na obtenção de coeficientes de sustentação maiores. No caso de número de Froude infinito ocorre um comportamento inverso, ou seja, os coeficientes de sustentação diminuem a pequenas profundidades de imersão. Este fato é explicado pela consideração de contorno livre na superfície e o sistema pode ser representado pelo hidrofólio original e sua imagem simétrica em relação à superfície. Neste caso haverá uma diminuição das velocidades tangenciais entre o contorno livre e a superfície de hidrofólio acarretando na formação de uma região de al

ta pressão e portanto na obtenção de valores dos coeficientes de sustentação menores.

Para números de Froude arbitrário, o sistema pode ser representado pelo hidrofólio original, sua imagem simétrica em relação a superfície e uma distribuição de vorticidade sobre a superfície livre, dada pelo terceiro e quarto termos da equação (15).

O valor de  $K_0$  está relacionado diretamente com: o número de Froude através da equação  $F^2 = 1/K_0$ , com a amplitude das ondas formadas na superfície através da equação (10) e com o comprimento de onda das ondas através da relação  $\lambda = 2\pi/K_0$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda.

A medida que o número de Froude aumenta, o valor de  $K_0$  diminui, diminuindo em consequência, os valores das amplitudes e aumentando o comprimento de onda das ondas formadas na superfície. Além disso, a intensidade das vorticidades sobre a superfície livre serão diminuídas de modo que a interação de vorticidades será principalmente entre a imagem simétrica definida acima, com o hidrofólio original. Deste modo, a variação dos coeficientes de sustentação terá comportamento semelhante ao caso de número de Froude infinito, que pode ser visto na Fig. (5) para  $F = 1.0$  e  $F = 1.5$ .

Quando o número de Froude diminui as amplitudes das ondas aumentam, diminuindo seus comprimentos, e aumentando a intensidade das vorticidades na superfície. Assim dependendo da profundidade de imersão, e da formação de ondas sobre o hidrofólio, a interação entre as vorticidades poderá ser maior ou menor, aumentando ou diminuindo os valores dos coeficientes de sustentação. Este fato pode ser visto na Fig. (5) para o caso de  $F = 0.8$ .

Os resultados obtidos para hidrofólios retangulares no caso do número de Froude zero são comparados com valores experimentais na Fig. (6) e podem ser considerados razoáveis, desde que a diferença entre eles é pequena. Notarse também na Fig. (6), que o comportamento real, dado pelos resultados experimentais, coincide com o comportamento analisado teoricamente pela condição de contorno sólido na superfície livre. Na Fig. (7),

são mostrados os coeficientes de sustentação para um hidrofólio retangular, tendo como referência os valores aerodinâmicos, para o caso de número de Froude infinito, em comparação com valores experimentais. Nota-se que para  $\bar{h}$  aumentando a partir de  $\bar{h} \approx 0.5$  os valores são subestimados em comparação com os experimentais, e quando  $\bar{h}$  diminui a partir de  $\bar{h} \approx 0.5$  obtemos valores superestimados.

As Figs. (8) e (9) mostram os valores dos coeficientes de sustentação em função do número de Froude para diferentes aspect ratios e  $\bar{h} = 0.7$  e  $\bar{h} = 0.5$  respectivamente. Nota-se que a medida que o número de Froude diminui há um aumento de valores da sustentação e no caso de  $AR = 1.0$  da Fig. (8) este aumento chega a um máximo, diminuindo em seguida. É de se esperar que o comportamento seja o mesmo para todos os aspect ratios e várias profundidades de imersão. Resultados obtidos experimentalmente por K.A.R. Ismail [ 11 ] e Breslin [ 5 ] no estudo de hidrofólios verticais aflorando a superfície livre, mostram comportamentos semelhantes que podem ser vistos na Fig. (10). Baseando-se na Fig. (8), o comportamento das curvas, pode ser explicado pelo estudo das formações de ondas na superfície, próximas ao hidrofólio.

Para número de Froude grande como já foi visto, anteriormente, a interação ocorrerá praticamente, só entre as vorticidades da imagem simétrica com aquelas sobre o hidrofólio original, pois as vorticidades sobre a superfície são de pequenas intensidades. Assim os valores dos coeficientes de sustentação serão menores. A medida que o número de Froude diminui, a amplitude das ondas aumentam, diminuindo seu comprimento, possibilitando uma maior interação entre as várias vorticidades envolvidas que atuarão no sentido de aumentar as velocidades tangenciais entre o hidrofólio e a superfície livre, aumentando portanto os coeficientes de sustentação. Este aumento dos coeficientes de sustentação, com a diminuição do número de Froude, alcançará um máximo, numa determinada condição de operação que propiciará a maior interação entre as vorticidades no sentido de aumentar as velocidades tangenciais.

A partir deste ponto a interação começará a agir no

sentido de diminuir as velocidades tangenciais, diminuindo em consequência os valores dos coeficientes de sustentação. No caso limite de número de Froude zero, a interação das vorticidades sobre a superfície com aquelas da imagem simétrica do hidrofólio original, resultará na obtenção de vorticidades que equivalerá a se considerar o sistema como sendo formado pelo hidrofólio original e sua imagem especular em relação à superfície, levando-nos portanto à condição de contorno sólido discutida anteriormente. As características de sustentação totais discutidas na Fig. (8), é consequência das características de sustentação distribuída na envergadura e da distribuição de pressões na direção da corda. Portanto, tanto os coeficientes de sustentação distribuídos na envergadura como a distribuição de pressões na corda deverão obedecer o mesmo comportamento que a Fig. (8). Assim, são mostrados na Fig. (11) os valores da sustentação distribuída na envergadura, indicando valores maiores à medida que se aumenta o número de Froude, e na Fig. (12) a distribuição de pressões na corda indicando comportamentos semelhantes.

Nas Figs. (13), (14) e (15) são mostrados os valores do fator de arrasto induzido  $K^*$  em função da profundidade de imersão para número de Froude zero e infinito e valores de aspect ratios um, quatro e dois respectivamente. Nota-se que para número de Froude zero, os fatores de arrasto induzido aumentam com a profundidade de imersão, e que para número de Froude infinito os valores de  $K^*$  diminuem com o aumento de  $\bar{h}$ .

No caso de número de Froude zero, apesar dos coeficientes de sustentação serem maiores à pequenas profundidades, o coeficiente de sucção dado pela distribuição de pressões próxima à borda de ataque também são maiores, Fig. (16), de modo a não permitir um grande aumento no coeficiente de arrasto induzido, dado pela expressão  $C_{Di} = C_L \alpha - C_s$ , levando-nos portanto a valores de  $K^* = \pi AR \frac{C_{Di}}{C_L^2}$  menores. No caso de número de Froude infinito, ambos coeficientes de sustentação e coeficientes de sucção são menores à pequenas profundidades, de modo que os valores de  $K^*$  se tornam maiores.

Na Fig. (17) são mostrados os valores de  $K^*$  em fun-

ção do número de Froude para  $\bar{h} = 0.7$ , para vários valores do aspect ratio. Nota-se que as curvas de  $K^*$  se comportam de maneira inversa às curvas de  $dC_L/d\alpha$  analisadas na Fig. (8), apresentando uma diminuição de  $K^*$  quando o número de Froude diminui. Para os valores de número de Froude indicados na Fig. (17) os coeficientes de sustentação da Fig. (8), aumentam com a diminuição do número de Froude. Entretanto, os coeficientes de sucção dados pela distribuição de pressão próxima a borda de ataque também aumentam com a diminuição do número de Froude tendendo a diminuir os valores de  $K^*$ . O aumento dos coeficientes de sucção com o número de Froude pode ser visto na Fig. (18) para aspect ratio 4.0 e  $\bar{h} = 0.7$ .

Nota-se ainda na Fig. (17), que  $K^*$  pode assumir valores negativos. Isto implica na obtenção de coeficientes de sucção na borda de ataque, maiores que os valores dos coeficientes de sustentação, de modo a se obter valores do coeficiente de arrasto induzido  $C_{D_i} = C_L \alpha - C_s$ , negativos. Isto é razoável no caso de hidrofólios delta, já que o coeficiente de sucção neste caso é função do inverso do cosseno do ângulo entre a normal à direção do fluxo e a equação da borda de ataque.

### 8.1.2. Influência da profundidade de imersão

Como já foi dito anteriormente, para números de Froude arbitrários o sistema pode ser representado pelo hidrofólio original, sua imagem simétrica em relação à superfície livre e uma distribuição de vorticidades sobre a superfície livre. As Figs. (19) e (20) mostram a influência da profundidade de imersão sobre os valores dos coeficientes de sustentação, para aspect ratios 2,0 e 2,5 respectivamente. Nota-se que para pequenas profundidades a variação dos coeficientes de sustentação em relação aos valores aerodinâmicos é grande dependendo apenas do número de Froude para um dado aspect ratio. Esta variação em relação ao caso aerodinâmico vai diminuindo à medida que a profundidade de imersão aumenta, e quando esta profundidade se torna suficientemente grande, os valores dos coeficientes de sustentação, tendem

aos valores aerodinâmicos independente do número de Froude.

Isto é explicado pelo fato de que, quando a profundidade aumenta muito, a interação das vorticidades distribuídas na superfície e da imagem simétrica sobre as vorticidades do hidrofólio original começam a ser desprezíveis e os valores do coeficiente de sustentação serão apenas devido ao primeiro termo da equação (15).

Este fato pode ser verificado também pela Fig. (21) onde são mostrados os valores dos coeficientes de sustentação, distribuídos na envergadura para números de Froude zero e infinito, várias profundidades de imersão e aspect ratio 1.0 em comparação com os valores aerodinâmicos. Nota-se que à medida que  $h$  aumenta, tanto a distribuição para Froude zero como para Froude infinito, tendem à distribuição aerodinâmica. Os valores obtidos para os coeficientes de sustentação distribuídos na envergadura para o caso aerodinâmico são comparados na Fig. (22) com valores experimentais obtidos por outros autores para várias condições de operação e nota-se uma boa concordância entre eles.

Um fato importante a se considerar é que, foram obtidos alguns resultados para os coeficientes de sustentação para profundidades muito pequenas, que fugiram totalmente do comportamento normal a profundidades moderadas. Isto se deve ao fato de que quando a profundidade de imersão diminui muito, o segundo termo da equação (25), começará a apresentar também uma singularidade de segunda ordem  $1/(\bar{y} - \bar{y}_0)^2$ , que não foi levada em conta na computação numérica, desde que o objetivo deste trabalho é estudar hidrofólios submersos a profundidades moderadas. A influência da profundidade de imersão sobre o valor de  $K^*$  em função do aspect ratio para várias profundidades de imersão e para número de Froude zero e infinito são mostrados na Fig. (23). Nota-se que a medida que a profundidade aumenta, os valores de  $K^*$  tendem aos valores para o caso aerodinâmico. Isto se deve ao fato de que tanto os coeficientes de sustentação dados pelas Figs. (19) e (20), como os coeficientes de sucção dados pela Fig. (16), tendem aos valores aerodinâmicos quando a profundidade aumenta.



### 8.1.3. Influência do aspect ratio

Na Fig. (24) são mostrados os valores de  $dC_L/d\alpha$ , em função do aspect ratio para números de Froude zero e infinito e para várias profundidades de imersão indicando, como no caso aerodinâmico que os coeficientes de sustentação aumentam com o aumento do aspect ratio.

Na Fig. (25) são mostrados os valores dos coeficientes de sustentação em função do aspect ratio para o caso aerodinâmico de uma asa triangular, em comparação com resultados teóricos e experimentais obtidos por outros autores, notando-se uma boa concordância entre os valores obtidos.

Na Fig. (26), estão plotados os valores de  $dC_L/d\alpha$  em função da profundidade de imersão para vários aspect ratios, tendo como referência os coeficientes de sustentação para o caso aerodinâmico. Nota-se que quando o aspect ratio aumenta, a relação  $(dC_L/d\alpha)/(dC_L/d\alpha)_\infty$  tende à unidade independente da profundidade de imersão. Isto significa que a influência da superfície livre tende a diminuir, a medida que o aspect ratio aumenta e no caso de aspect ratio infinito os valores da sustentação tenderiam àqueles obtidos pela teoria bidimensional. Este fato está relacionado com as velocidades induzidas por todas as vorticidades em consideração. Quando o aspect ratio aumenta, a influência das vorticidades da esteira de vórtices da imagem do hidrofólio original, sobre o campo de velocidades induzidas sobre o hidrofólio se concentra praticamente sobre a parte intermediária do hidrofólio, desaparecendo quando se caminha em direção as suas extremidades. Deste modo, uma parte do hidrofólio estará sujeita a grandes perturbações devido à existência da superfície livre, enquanto que sobre o resto do hidrofólio e suas extremidades a influência principal será da esteira de vórtices do hidrofólio original.

Os valores do fator de arrasto induzido  $K^*$  em função do inverso do aspect ratio, para número de Froude zero e infinito e várias profundidades de imersão são mostrados na Fig. (27) indicando que  $K^*$  decresce com o aumento do aspect ratio. Isto é explicado pelo fato de que tanto o coeficiente de sustentação,

como o coeficiente de sucção dado pela distribuição de pressões próxima da borda de ataque são maiores, quanto maior o valor do aspect ratio. Assim o valor do coeficiente de arrasto induzido calculado pela expressão  $C_{Di} = CL \cdot \alpha - C_s$  não sofrerá grandes variações fazendo com que  $K^* = \pi AR \frac{C_{Di}}{CL^2}$  decresça com o aumento do aspect ratio. O efeito da distribuição de pressões neste caso, pode ser visto na Fig. (28), que mostra os coeficientes de pressão distribuídos na corda para aspect ratios um e quatro.

## 8.2 CONCLUSÕES

As conclusões mais importantes que podem ser deduzidas das discussões anteriores são:

- i - O aumento do número de Froude a partir de Froude zero, acarretará num aumento dos valores de sustentação até um máximo e numa diminuição dos fatores de arrasto induzido até um mínimo. A partir deste ponto os valores da sustentação decrescem, e os valores do fator de arrasto induzido aumentam até o valor limite de número de Froude infinito.
- ii - O aumento da profundidade de imersão, nos leva a resultados para a sustentação e fator de arrasto induzido, convergentes para os valores aerodinâmicos, independente do número de Froude, indicando uma diminuição da influência da superfície livre.
- iii - Hidrofólios de grandes aspect ratios são menos afetados pela influência da superfície livre do que hidrofólios de baixo aspect ratios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ABRAMOWITZ, Milton /and/ STEGUN, Irene A. Handbook of mathematical functions. New York, Dover Publications, 1965. 1046p.
2. ASHLEY, H. /and/ LANDAHL, M. Aerodynamics of wings and bodies. New York, Addison-Wesley, 1965.
3. ASHLEY, Holt; WINDALL, Sheila; LANDAHL, Marten T. New directions in lifting surface theory. AIAA Journal, 3(1):3-16 1965.
4. BERNDT, S.B. Three component measurement and flow investigation of plane delta wings at low speeds and zero yaw. Stockholm, Roy. Inst. Technol., 1948.
5. BRESLIN, J.P. The hydrodynamic characteristics of several surface piercing struts. (Stevens Institute of technology Report, 597, 1956).
6. DE YOUNG, J. /and/ HARPER, C.W. Theoretical symmetric span loading at subsonic speeds for wings having arbitrary plan form. (NACA Rept., 921, 1948).
7. DURAND, William Frederick. Aerodynamic theory. New York, Dover Publications, 1963. 6v., v.2, 367p.
8. FALKNER, V.M. Calculated loading due to incidence of a number of straight and swept back wings. (Aeronaut. Research Council Repts. and Mem., 2596, 1948).
9. GOODMAN, A. /and/ BREWER, J.D. Investigation at low speeds of aspect ratio and sweep on static and yawing stability derivatives of untapered wings. (NACA Tech. Note, 1969, 1948).
10. HOLME, O.A.M. Measurement of the pressure distribution on rectangular wings of different aspect ratio. Stockholm -Elsvunda, 1950.
11. ISHAIL, Kamal A.R. A critical evaluation of computational methods applied to hydrofoils. Campinas, UNICAMP. (Reunião Anual da SBPC, 26ª, Recife, 1974).

12. ISMAIL, Kamal A.R. Theoretical and numerical study on surface piercing hydrofoils. Campinas, UNICAMP. (Reunião-Anual da SBPC, 26º, Recife, 1974).
13. ISMAIL, Kamal A.R. /and/ AL-SHALIK-ALI, K. Unsteady three dimensional source below a free surface. Mosul University, 1973.
14. ISMAIL, Kamal A.R. /e/ GUMIEIRO, Doracy. Evaluation of the Hydrodynamic forces operating on delta hydrofoils. Campinas, UNICAMP. (Reunião COPIMERA, 4º, São Paulo, 1975).
15. ISMAIL, Kamal A.R. /e/ GUMIEIRO, Doracy. Hidrofólio delta operando abaixo da superfície livre com número de Froude - arbitrário. Campinas, UNICAMP. 23p. ilus. (Seminário de Hidrodinâmica Computacional, Pôrto Alegre, 1975).
16. ISMAIL, Kamal A.R. /e/ GUMIEIRO, Doracy. Small aspect ratio flat hydrofoils of various configurations operating at zero and infinite Froude numbers. Campinas, UNICAMP. (Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 3º, Rio de Janeiro, 1975).
17. JONES, Robert R. /and/ COHEN, Doris. High speed wing theory. New Jersey, Princeton University Press, 1960.
18. KUCHMANN, D. A simple method for calculating the span and chordwise loadings on thin swept wings. Farnborough, - Royal Aircraft Establishment. (Report Aero, 2392, 1950).
19. LANDAHL, Marten T. Numerical lifting surface theory-problems and progress. AIAA Journal, 6(11):2049-2060, 1968.
20. LANGE /and/ WACKE. Pruefbericht über 3-und 6-Komponenter-messungen an der Zuspitzungsreiche von Fluegeln Kleiner Streckung. Berlin, Berlin Adlershof, 1943. (NACA Tech. Mem., 1176, 1948).
21. MUTHOPP, H. Methods for calculating the lift distribution of wings (subsonic lifting surface theory). (Reports and memoranda, 2884, 1950, p.609-704).
22. MUTTERPERL, W. The calculation of span load distributions on swept-back wings. (NACA Tech. Note, 834, 1941).

12. ISMAIL, Kamal A.R. Theoretical and numerical study on surface piercing hydrofoils. Campinas, UNICAMP. (Reunião-Anual da SBPC, 26º, Recife, 1974).
13. ISMAIL, Kamal A.R. /and/ AL-SHALIK-ALI, K. Unsteady three dimensional source below a free surface. Mosul University, 1973.
14. ISMAIL, Kamal A.R. /e/ GUMIEIRO, Doracy. Evaluation of the Hydrodynamic forces operating on delta hydrofoils. Campinas, UNICAMP. (Reunião COPIMERA, 4º, São Paulo, 1975).
15. ISMAIL, Kamal A.R. /e/ GUMIEIRO, Doracy. Hidrofólio delta operando abaixo da superfície livre com número de Froude - arbitrário. Campinas, UNICAMP. 23p. ilus. (Seminário de Hidrodinâmica Computacional, Pôrto Alegre, 1975).
16. ISMAIL, Kamal A.R. /e/ GUMIEIRO, Doracy. Small aspect ratio flat hydrofoils of various configurations operating at zero and infinite Froude numbers. Campinas, UNICAMP. (Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 3º, Rio de Janeiro, 1975).
17. JONES, Robert R. /and/ COHEN, Doris. High speed wing theory. New Jersey, Princeton University Press, 1960.
18. KUCHMANN, D. A simple method for calculating the span and chordwise loadings on thin swept wings. Farnborough, - Royal Aircraft Establishment. (Report Aero, 2392, 1950).
19. LANDAHL, Marten T. Numerical lifting surface theory-problems and progress. AIAA Journal, 6(11):2049-2060, 1968.
20. LANGE /and/ WACKE. Pruefbericht Uber 3-und 6- Komponenter - messungem au der Zuspctzungsreiche von Fluegeln Kleiner Streckung. Berlin, Berlin Adlershof, 1943. (NACA Tech. Mem., 1176, 1948).
21. MULTHOPP, H. Methods for calculating the lift distribution of wings (subsonic lifting surface theory). (Reports an memoranda, 2884, 1950, p.609-704).
22. MUTTERPERL, W. The calculation of span load distributions on swept-back wings. (NACA Tech. Note, 834, 1941).

- 23 . ORLICK, K. /and/ HUCKEMANN, H. Experimental determination of pressure distributions and transition lines of plane delta wings at low speeds and zero yaw. (Swedish Technical Note KTH-Aero, 3, 1949).
- 24 . STAFF OF NAVY AERODYNAMICAL LABORATORY. Air force and moment for gliding wing. (Department of Aeronautics Rept., 677, 1943).
- 25 . T. Nischiyama. Lifting-line theory of the submerged hydro foils of finite span. A.S.N.E. Journal, Aug.:511-519, - 1959.
- 26 . WAKLIN, Kenneth L.; RAMSEN, John A.; VAUGHAN Jr., Victor, L. The hydrodynamic characteristics of modified rectangular flat plates having aspect ratios of 1.00, 0.25 and 0.125 and operation near a free water surface. (National Advisory Committee for Aeronautics Report, 1246, 1954).
27. WATKINS, Charles E.; WOOLSTON, Donald S.; CUNNINGHAM, Herbert J. A systematic kernel function procedure for determining forces on oscillating or steady finite wings at subsonic speeds. Langley Field, Langley Research Center, National Aeronautics and Space Administration, 1959. 21p.
28. WICK, B.H. Chordwise and spanwise loadings measured at low speed on a triangular wing having an aspect ratio of two and an NACA 0012 airfoil section. (NACA Tech. Note Rept. 677, 1943).
29. Y.T. Wu. A theory for hydrofoils of finite span. Jour. of Math. and Phys., 33(3):207-248, 1954.
30. ZIMMERMAN, C.H. Characteristics of clark Y airfoils of small aspect ratios. (NACA Rept., 431, 1932).

A P E N D I C E A  
CONDIÇÃO DE SUPERFÍCIE LIVRE

O campo de velocidade total do fluxo pode ser escrito como

$$\vec{Q} = U\vec{i} + \vec{q}$$

onde  $\vec{q} = \text{grad}\phi$ , onde  $\phi$  é o potencial de velocidade perturbador.

Adicionalmente, a equação de Bernoulli pode ser escrita:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{Q} \cdot \vec{Q} + gz = \text{cte}$$

Pela teoria de aerofólios delgados podemos considerar:

$$U^2 \gg \phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2$$

e a equação de Bernoulli fica linearizada na seguinte forma:

$$\frac{P}{\rho} + U\phi_x + gz = \text{cte}$$

Entre um ponto ao longe e outro sobre a superfície livre perturbada obteremos:

$$U \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)_{z=0} = -\eta g$$

onde  $\eta$  é a elevação da superfície livre.

Supondo uma função  $\Delta$  que defina a superfície livre, teremos:

$$\Delta(x, y, z) = 0$$

ou

$$u \frac{\delta \Delta}{\delta x} + v \frac{\delta \Delta}{\delta y} + w \frac{\delta \Delta}{\delta z} = 0$$

onde

$$\begin{cases} u = U + \phi_x \\ v = \phi_y \\ w = \phi_z \end{cases}$$

Podemos ainda escrever

$$\Delta = z - \eta(x, y) = 0$$

de modo que se obtenha:

$$(U + \phi_x)\eta_x + \phi_y \eta_y - \phi_z = 0$$

onde  $\phi_x \eta_x$  e  $\phi_y \eta_y$  são de ordem superior.



Assim obteremos:

$$U \frac{\delta \eta}{\delta x} = \frac{\delta \phi}{\delta z} \text{ para } z = 0 \quad \text{A.2}$$

As expressões A.1 e A.2 nos dão a condição de superfície livre equação (4).

A P Ê N D I C E B

OBTENÇÃO DA A(k, θ)

A equação (5) satisfazendo a condição (4) nos dá:

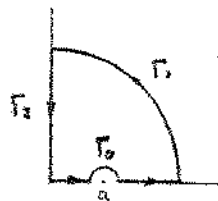
$$\frac{1}{4\pi} \iint \Delta \phi dx' dy' \left\{ \int_0^{\infty} \int_{\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{1}{\pi} \left[ -k^2 \cos^2 \theta - K_0 k \right] (k e^{-kh}) \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ A(k, \theta) \right] \left[ -k^2 \cos^2 \theta + K_0 k \right] \right\} \cos \left[ k(x-x') \cos \theta \right] \\ \cos \left[ k(y-y') \sin \theta \right] d\theta dk = 0 \quad \text{B.1}$$

O valor zero para o integrando satisfaz (B.1). Logo:

$$A(k, \theta) = -\frac{1}{\pi} \left[ 1 + \frac{2K_0}{k \cos^2 \theta - K_0} \right] (k e^{-kh}) \quad \text{B.2}$$

A P E N D I C E C  
INTEGRAÇÃO DA EXPRESSÃO (3-a)

Para  $w > 0$  teremos o contorno:



onde  $a = K_0 \sec^2 \theta$

Pelo Teorema dos Resíduos temos:

$$\int_{\Gamma_1} F(y) e^{iyw} dy + \int_{\Gamma_2} F(y) e^{iyw} dy + \int_0^{a-\epsilon} F(k) e^{ikw} dk$$

$$+ \int_{a+\epsilon}^{\infty} F(k) e^{ikw} dk + \int_{\Gamma_0} F(y) e^{iyw} dy = 0$$

onde  $y = R e^{i\beta}$

Fazendo-se  $R \rightarrow \infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$  obteremos:

$$VP \left[ \int_0^{\infty} \frac{k^2 e^{-k(h)} e^{ikw}}{k - K_0 \sec^2 \theta} dk \right] = \pi i \left[ \text{Res}_{y=a} F(y) \right]$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{a^2 e^{-ia(h)} e^{-aw}}{ia - K_0 \sec^2 \theta} i da$$

pois 
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} F(y) e^{iyw} dy = 0$$

ou

$$\text{Real VP} \left[ \int_0^{\infty} \frac{i k^2 e^{-k|h|} e^{ikw}}{k - K_0 \sec^2 \theta} dk \right]$$

$$= -\pi K_0^2 \sec^4 \theta e^{-K_0 \sec^2 \theta (h)} \cos \left[ K_0 \sec^2 \theta w \right]$$

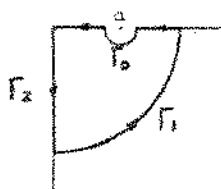
$$- \int_0^{\infty} \frac{a^2 \left[ a \operatorname{sen} a (h) + K_0 \sec^2 \theta \operatorname{cosec} a (h) \right] e^{-aw}}{a^2 - K_0^2 \sec^4 \theta} da$$

Assim, o valor assintótico de  $\eta$  para  $x \rightarrow +\infty$  será:

$$\eta = \frac{U K_0^3}{g\pi} \iint \Delta \phi dx' dy' \int_0^{\pi/2} \sec^5 \theta e^{-K_0 \sec^2 \theta (h)} \cos \left[ K_0 \sec \theta (x-x') \right]$$

$$\cos \left[ K_0 (y-y') \sec^2 \theta \operatorname{sen} \theta \right] d\theta$$

Para  $w < 0$  teremos o contorno



Analogamente teremos:

$$- VP \left[ \int_0^{\infty} \frac{k^2 e^{-kh} e^{ikw}}{k - K_0 \sec^2 \theta} dk \right] = \pi i \operatorname{Res}_{y=a} \left[ F(y) \right]$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{a^2 e^{ia h} e^{aw}}{ia + K_0 \sec^2 \theta} i da$$

e o valor assintótico de  $\eta$  para  $x \rightarrow -\infty$  será

$$\eta = - \frac{U K_0^3}{g\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{\pi/2} \sec^5 \theta e^{-K_0 \sec^2 \theta h} \cos \left[ K_0 \sec \theta (x-x') \right]$$

$$\cos \left[ K_0 (y-y') \sec^2 \theta \operatorname{sen} \theta \right] d\theta$$

A P Ê N D I C E D

EQUIVALÊNCIA ENTRE EXPRESSÕES (14) e (15)

De acordo com | 13 | e | 29 |

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k e^{-k|z+h|} \cos \left[ k(x-x') \cos \theta \right] \cos \left[ k(y-y') \sin \theta \right] d\theta dk$$

$$= \int_0^{\infty} k e^{-k|z+h|} J_0(k\rho) dk$$

$$= \frac{|z+h|}{\left[ \rho^2 + (z+h)^2 \right]^{3/2}}$$

onde  $J_0(k\rho)$  = Função de Bessel de primeira espécie de ordem zero

e  $\rho = (x-x')^2 + (y-y')^2$

Assim

$$\frac{z+h}{|z+z|} \frac{1}{4\pi^2} \iint \Delta\phi dx' dy' \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k e^{-k|z+h|} \cos \left[ k(x-x') \cos \theta \right]$$

$$\cos \left[ k(y-y') \sin \theta \right] d\theta dk$$

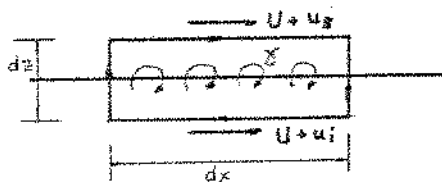
$$= \frac{1}{4\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \left[ \frac{(z+h)}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+h)^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \frac{\delta}{\delta z} \left( \frac{1}{R} \right)$$

A P E N D I C E E

REDUÇÃO DOS TERMOS DA VELOCIDADE INDUZIDA

Aplicando-se Teorema de Bernoulli entre um ponto acima e outro abaixo da superfície do hidrofólio teremos de acordo com a figura abaixo



$$\frac{P_s - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = - \frac{2 u_s}{U}$$

$$\frac{P_i - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{2 u_i}{U}$$

Logo teremos:

$$\frac{P_s - P_i}{\frac{1}{2} \rho U^2} = - \frac{4 u_s}{U} \quad \text{onde} \quad u_s = - u_i$$

Considerando-se o conceito de circulação conclui-se pela figura acima que

$$u_s = \frac{1}{2} \gamma \quad \text{onde } \gamma \text{ é a circulação por unidade de comprimento.}$$

Podemos escrever ainda:

$$\gamma = u_s - u_i$$

ou

$$\gamma = \frac{\delta}{\delta x'} (\phi_s - \phi_i) = \frac{\delta}{\delta x'} \Delta\phi \quad \text{E.1}$$

Logo

$$\frac{P_s - P_i}{\frac{1}{2} \rho U^2} = - \frac{2}{U} \frac{\delta \Delta\phi}{\delta x'}$$

ou

$$\frac{P_s - P_i}{\rho U} = - \frac{\delta \Delta\phi}{\delta x'}$$

A condição de Kutta requer que na esteira não haja descontinuidade de velocidade, e portanto de pressão.

Assim pela expressão anterior:

$$\frac{\delta \Delta\phi}{\delta x'} = 0$$



Logo conclui-se que

$$\frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left[ (x_{TE}, y') \right] = \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left[ (\infty, y') \right] = 0 \quad E.2$$

e

$$\Delta \phi \left[ (x_{TE}, y') \right] = \Delta \phi \left[ (\infty, y') \right] \quad E.3$$

Integrando a relação E.1 teremos

$$\int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \delta \Delta \phi = \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \gamma dx'$$

Pela condição de não existência de vorticidade a montante da borda de ataque:

$$\Delta \phi \left[ (x_{LE}, y') \right] = 0 \quad E.4$$

e portanto  $\Delta \phi \left[ (x_{TE}, y') \right] = \Gamma(y')$  (circulação total)

ou  $\Delta \phi \left[ (x_{TE}, y') \right] = \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} dx'$  E.5

Consideremos agora o primeiro termo da expressão (16)

$$V_1 = \frac{1}{4\pi} \iint \Delta\phi dx' dy' \left[ \frac{1}{R_1^3} \right]$$

onde

$$R_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

Integrando por partes em relação a  $x'$  obteremos:

$$\int_{x_{LE}}^{\infty} \frac{\Delta\phi dx'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\Delta\phi}{(y-y')^2} \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \Big|_{x_{LE}}^{\infty}$$

$$+ \int_{x_{LE}}^{\infty} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} dx' \frac{1}{(y-y')^2} \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}$$

Pelos condições E 2.3.4 e 5 e efetuando-se os limites de integração obtemos:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi} \int \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \frac{1}{(y-y')} \left[ \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} + 1 \right] dx' dy'$$

que é o primeiro termo da expressão (20)

A integração do segundo termo de (16) é análoga a anterior e obtêm-se finalmente

$$V_2 = \frac{1}{4\pi} \iint_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \left\{ \frac{[(y-y')^2 - 4h^2]}{[(y-y')^2 + 4h^2]^2} + (x-x') \right. \\ \left. \left\{ \frac{[(x-x')^2 + (y-y')^2] [(y-y')^2 + 4h^2] - 32h^4}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + 4h^2]^{\frac{3}{2}} [(y-y')^2 + 4h^2]^2} \right\} \right\} dx' dy'$$

A expressão de  $V_3$  na equação (18) pode ser escrita como:

$$V_3 = \frac{K_0}{\pi} \iint \Delta\phi dx' (dy' \int_0^{K_0} \frac{k e^{-2hk}}{B} \cos \left[ k(x-x')T_1 \right] \\ \cosh \left[ k(y-y')T_2 \right] dk$$

e pode ser integrada por partes em relação a  $x'$ .

Consideremos

$$I = \int_{x_{LE}}^{\infty} \Delta\phi \cos \left[ k(x-x')T_1 \right] dx' \\ = \int_{x_{LE}}^{\infty} \Delta\phi \cos \left[ M(x-x') \right] dx'$$

onde

$$M = kT_1$$

Efetuada-se a integração por partes em  $x'$  obteremos

$$I = \Delta\phi \int_{x_{LE}}^{x'} \cos \left[ M(x-x'_0) \right] dx'_0 \Big|_{x_{LE}}^{\infty}$$

$$- \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} dx' \int_{x_{LE}}^{x'} \cos \left[ M(x-x'_0) \right] dx'_0$$

Após algumas mudanças de variáveis e introduzindo a relação.

$$\Delta\phi_{TE} = \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} dx' \quad \text{obteremos}$$

$$I = \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \frac{dx'}{M} \int_0^{\infty} \cos(P) dP$$

$$+ \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \frac{dx'}{M} \operatorname{sen} \left[ M(x-x') \right]$$

Substituindo

$$\cos p = J_0(P) - 2J_2(P) + 2J_4(P) - 2J_6(P)$$

obteremos:

$$\int_0^{\infty} \cos P \, dP = 1$$

Assim

$$I = \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \frac{dx'}{M} + \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \frac{dx'}{M} \cdot \text{sen} \left[ M(x-x') \right]$$

Deste modo obtemos:

$$V_3 = - \frac{2K_0}{\pi} \int \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} dx' \int_0^{K_0} \frac{\sqrt{-A-B}}{B[A+B-1]} dk$$

$$e^{-2kh} \cosh \left[ k(y-y')T_2 \right] \left\{ \text{sen} \left[ kT_1(x-x') \right] + 1 \right\} dk$$

Analogamente obteremos depois da integração por partes:

$$V_4 = \frac{K_0^2}{\pi} \int_{x_{LE}}^{x_{TE}} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} dx' dy' \int_0^{\pi/2} \sec^5 \theta$$

$$e^{-K_0 \sec^2 \theta \cdot 2h} \cos \left[ K_0 \sec^2 \theta (y-y') \sin \theta \right]$$

$$\left\{ 1 - \cos \left[ K_0 \sec \theta (x-x') \right] \right\} d\theta$$

AR=1.0				
NC \ MC	2	3	4	5
3	1,412	1,471	1,456	1,463
4	1,412	1,472	1,456	1,463
5	1,412	1,471	1,455	1,462
AR=4.0				
NC \ MC	2	3	4	5
3	3,618	3,683	3,659	3,697
4	3,618	3,684	3,659	3,698
5	3,616	3,683	3,658	3,696

TABELA 1

VALORES DE  $(d_{CL}/d_{\infty})_P$  P/ FÓLIO RETANGULAR

J \ AR	3	7	9
1.0	1,431	1,473	1,472
2.0	2,572	2,503	2,495
2.5	3,008	2,886	2,872
4.0	4,062	3,724	3,684

TABELA 2

VALORES DE  $(d_{CL}/d_{\infty})_P$  P/ FÓLIO RETANGULAR

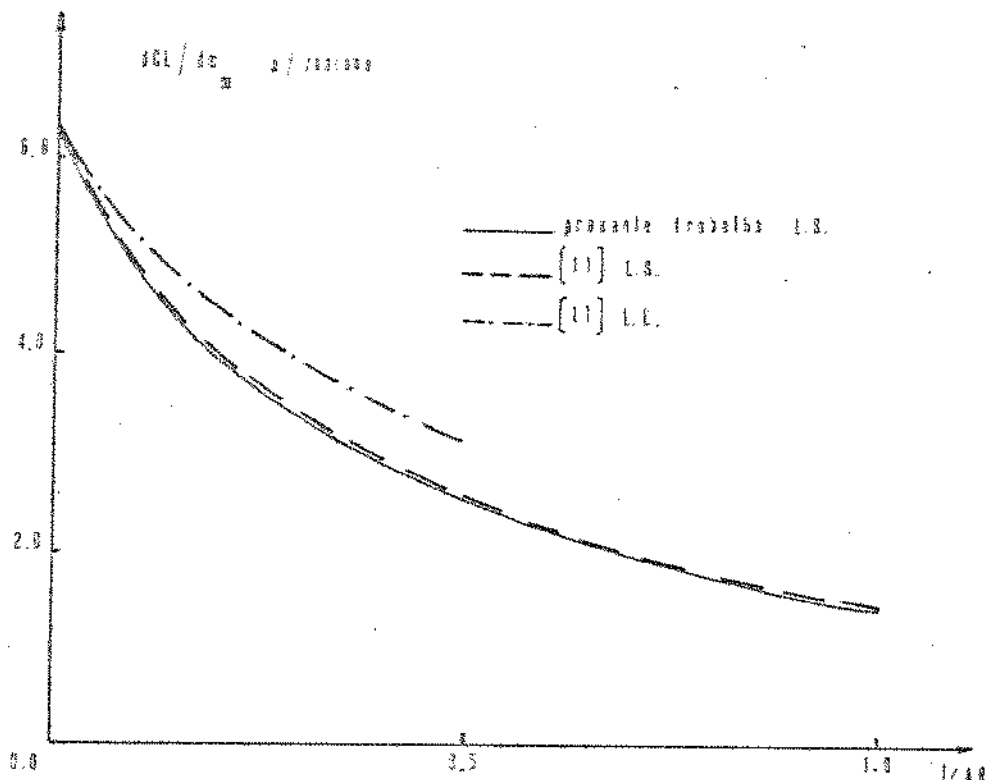


Fig. 1 Resultados obtidos pelas técnicas Lifting Line e Lifting Surface  
 pelo presente trabalho

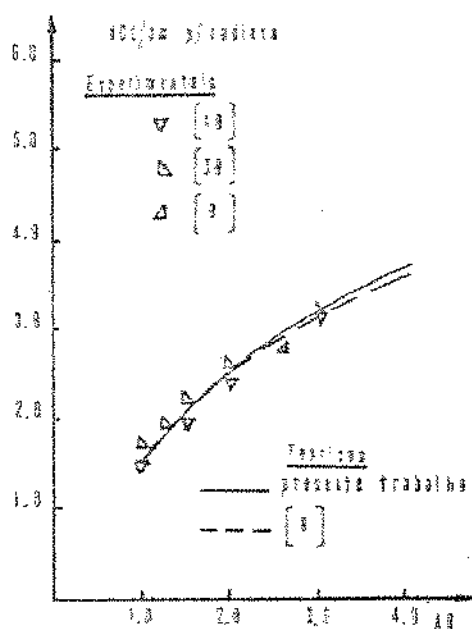


Fig. 2 Resultados teóricos e experimentais para as duas técnicas



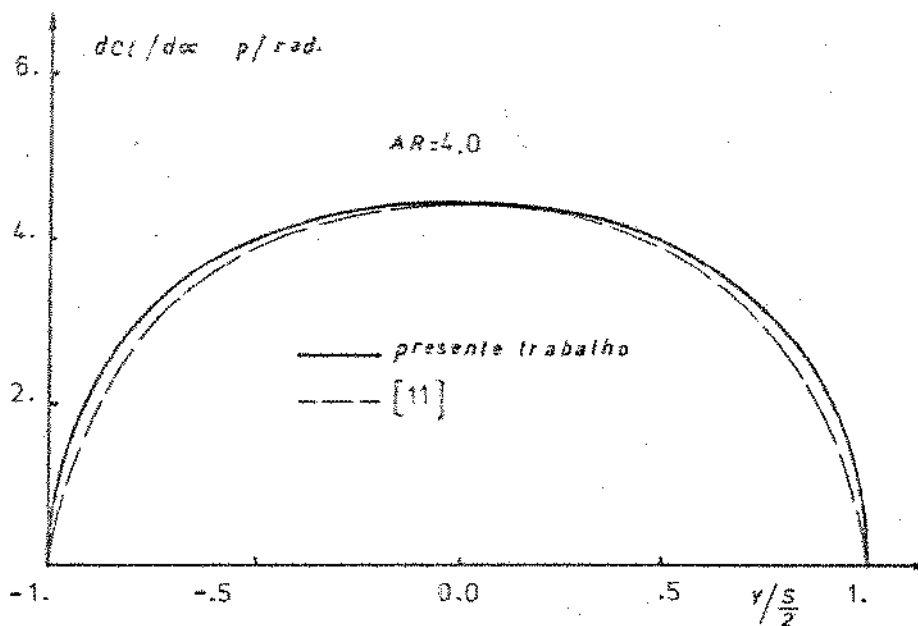


Fig.3 Distribuição de carga na envergadura folio retangular

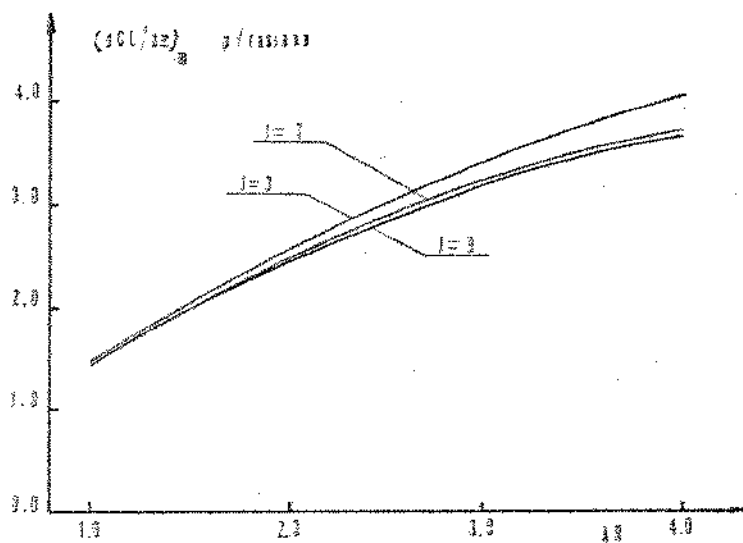


Fig.4 Efeito da variação de ordem de interpolação J

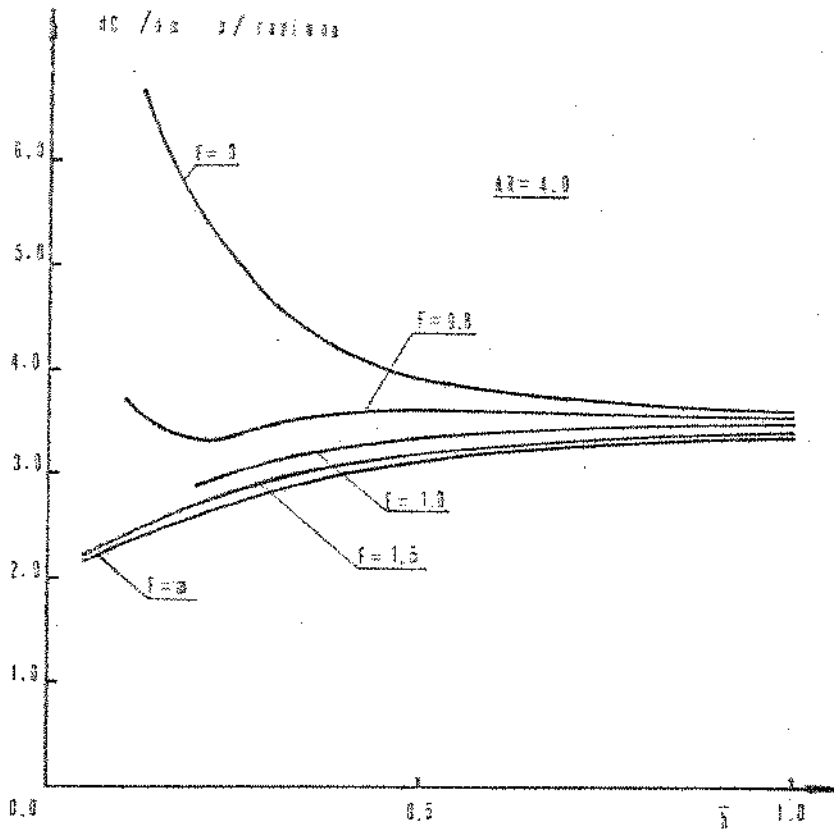


Fig. 5 Efeito de  $f$  e  $\alpha$  sobre a concentração, hidrofóbia delta

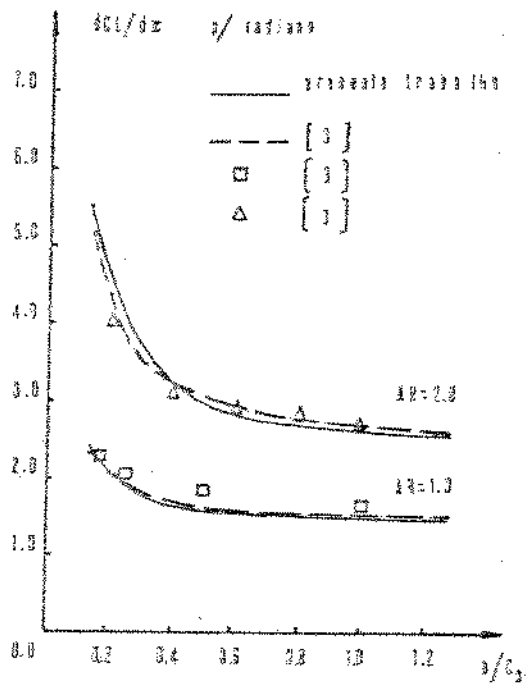


Fig. 6 Efeito da profundidade de imersão para  $f$  variável; resultados comparativos, hidrofóbia retangular

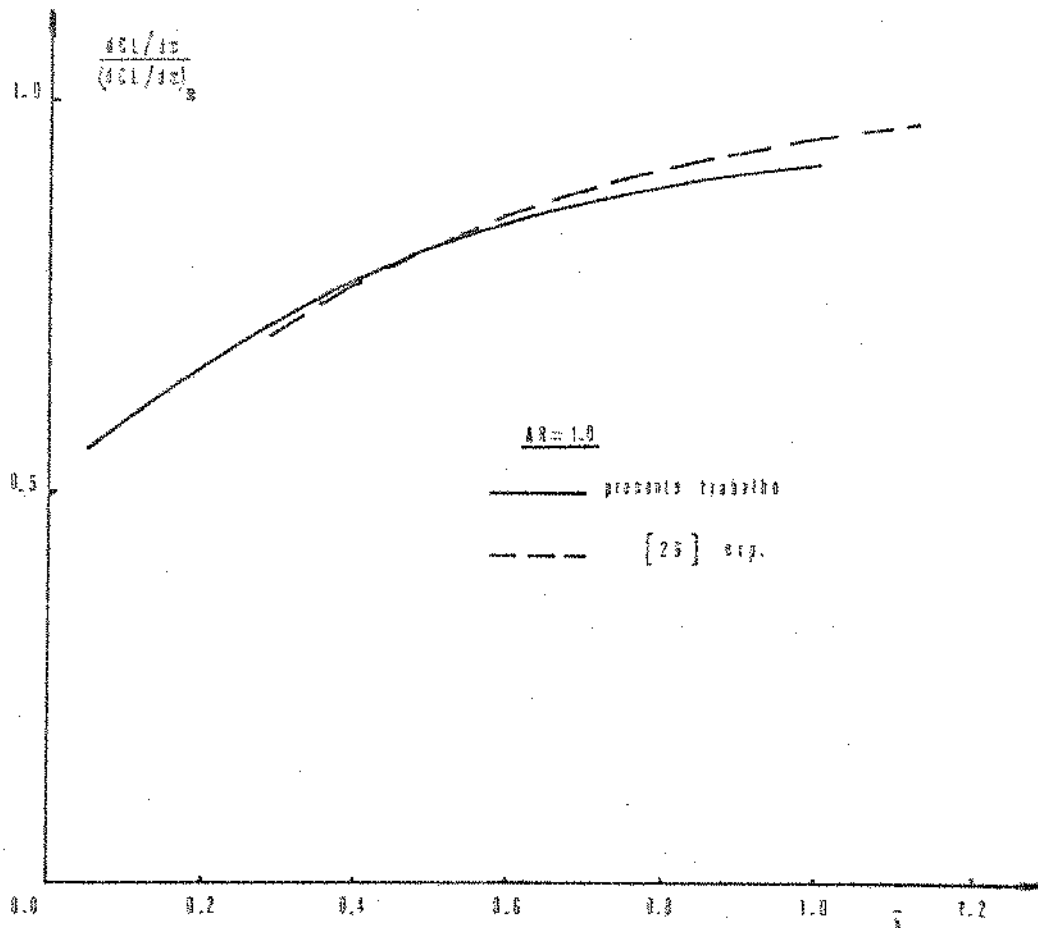


Fig. 7 Efeito de  $\bar{h}$  sobre a sustentação. Valores comparativos  $u/F$  infinito distribuição retangular

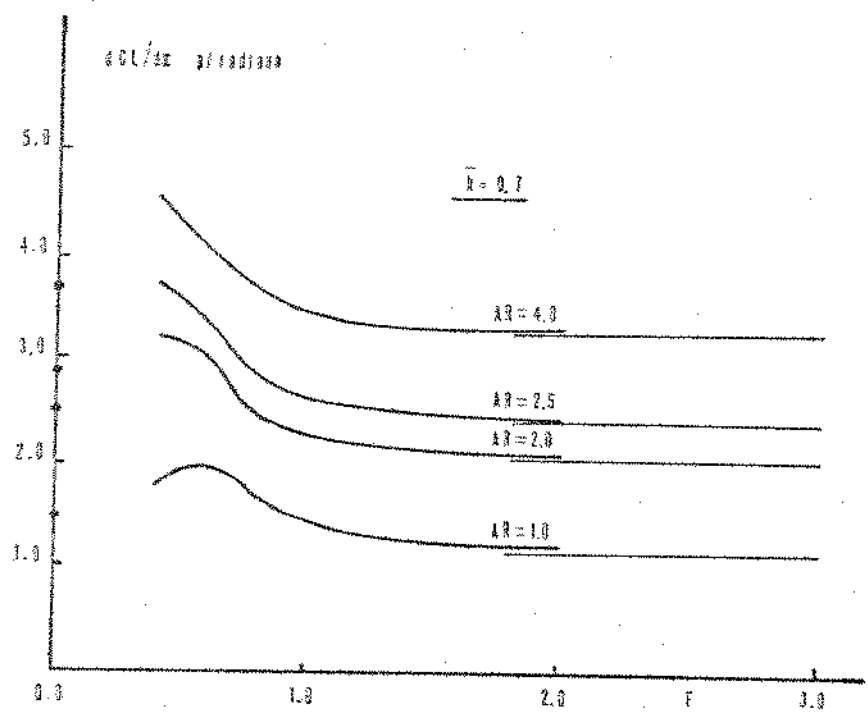


Fig. 8 Efeito de  $F$  sobre  $u(z)/u_s$  para varias aspect ratio, hidrodinâmico delta

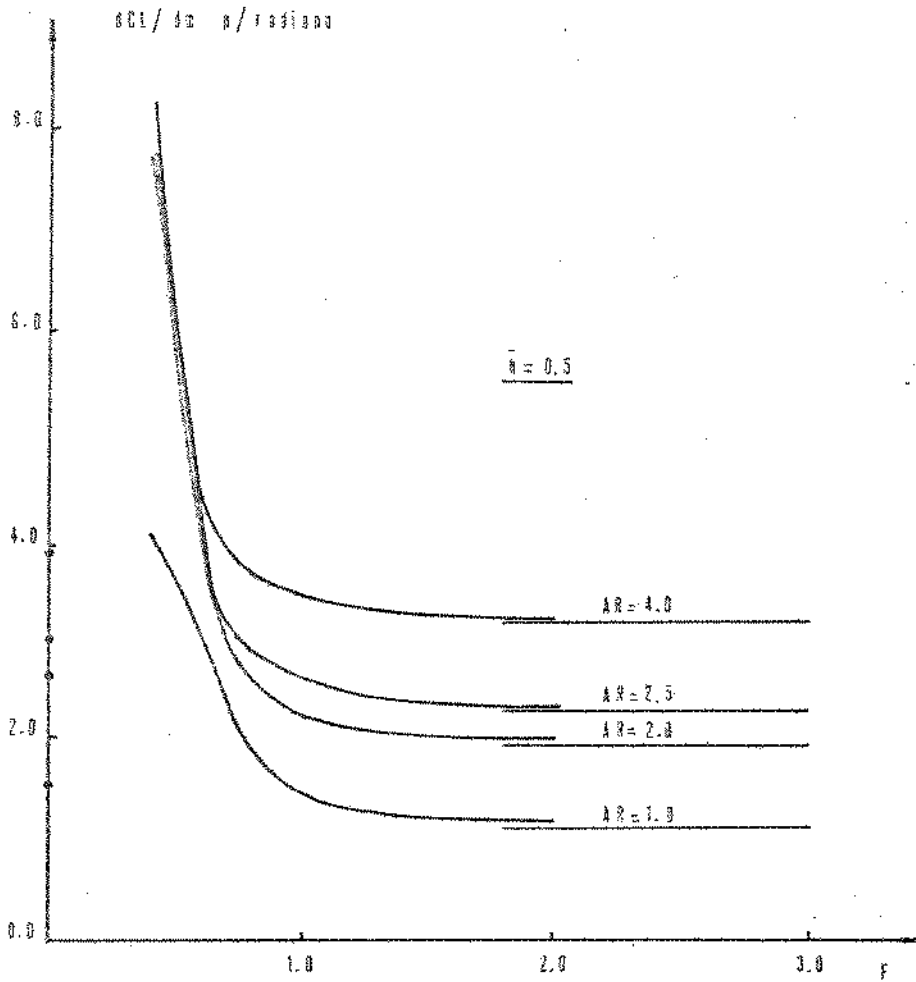


Fig. 9 Efeito de  $F$  sobre a sustentação, bicatolite delta

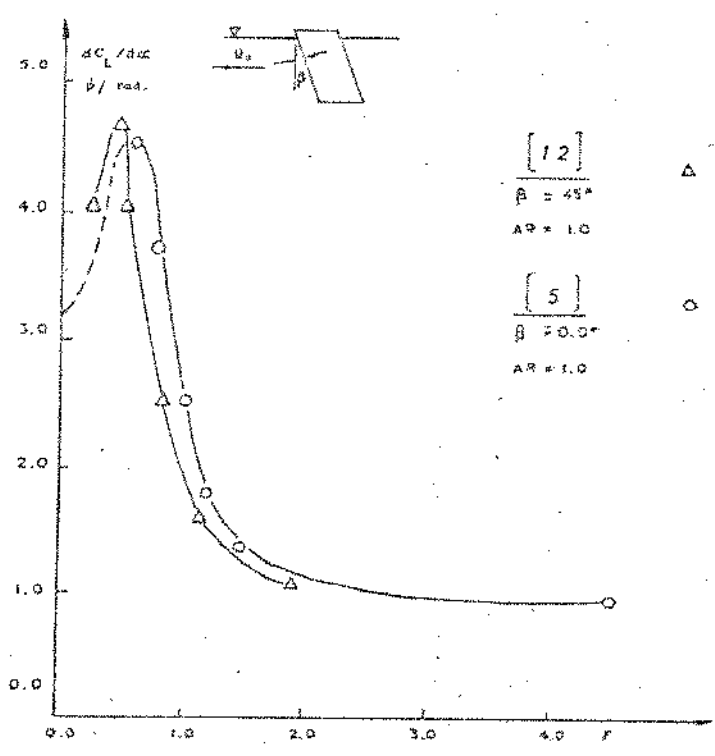


Fig. 10 Variação experimental de  $dC_l / d\alpha$  com a Frenda

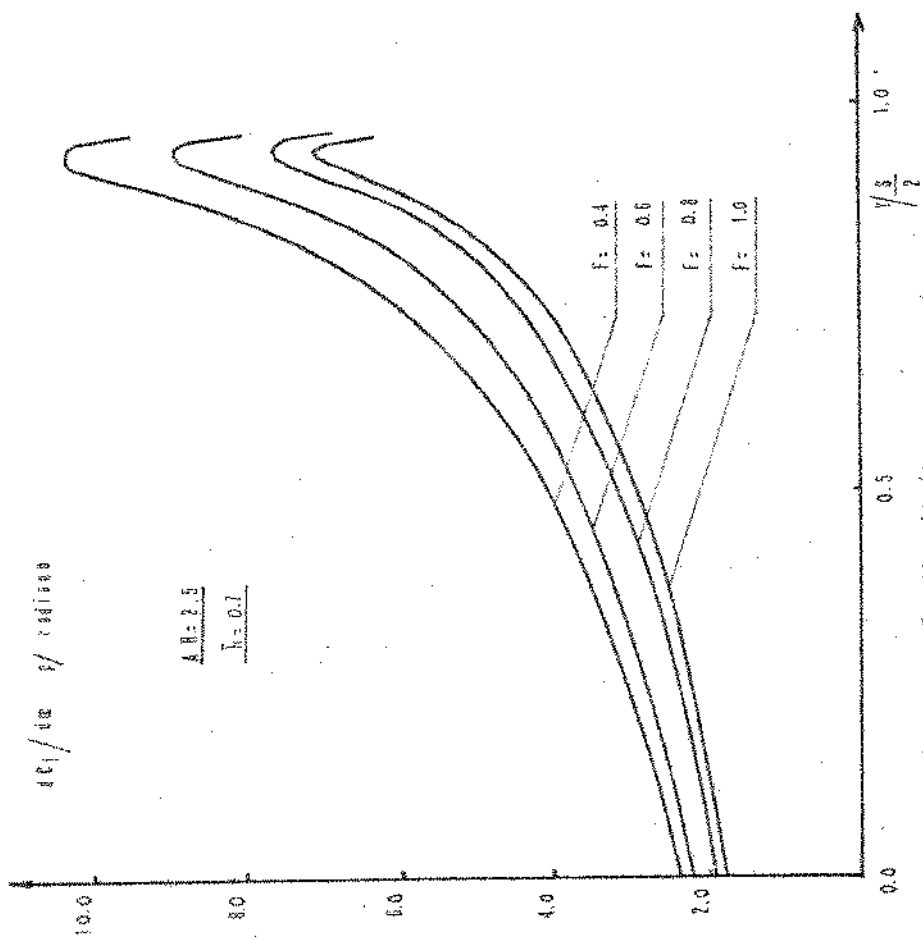


Fig.11 Distribuição de velocidade hidrodinâmica

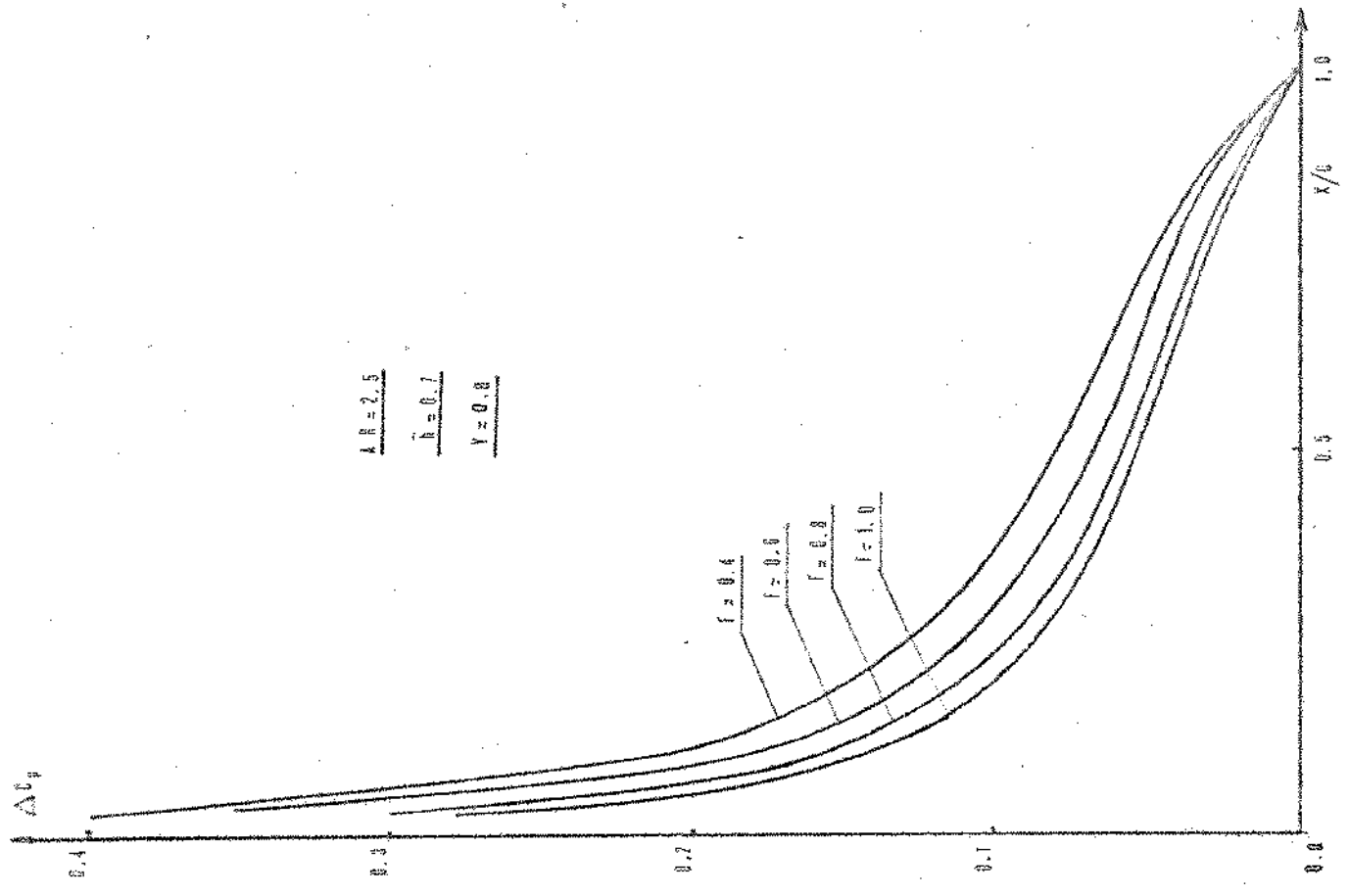


Fig.12 Distribuição de velocidade hidrodinâmica

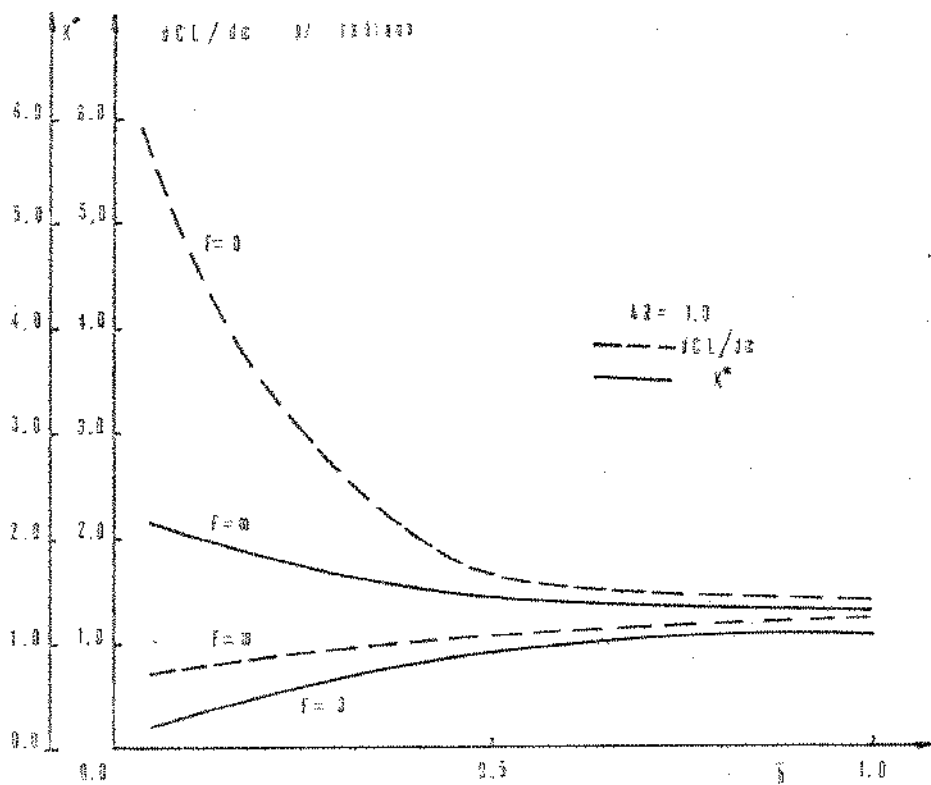


Fig.13 Efeito de  $F$  e  $\delta$  sobre  $\frac{dCL}{d\alpha}$  e  $K^*$   
hidroaerodinâmica

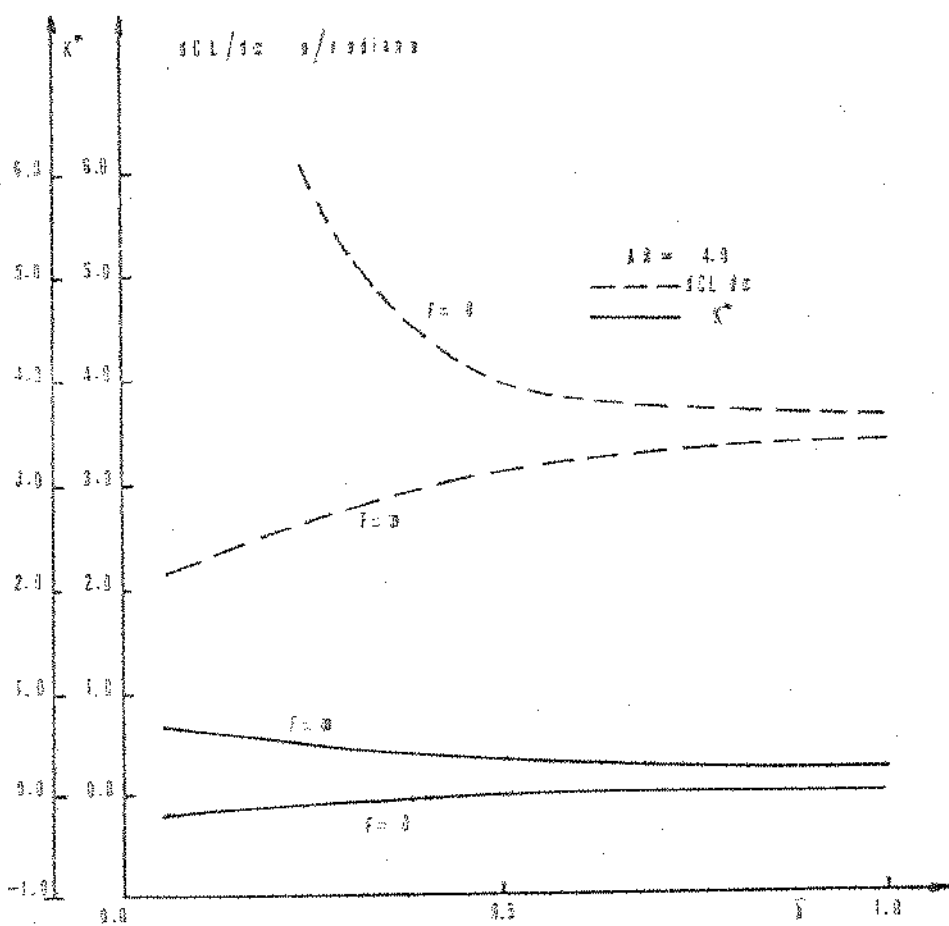


Fig.14 Efeito de  $F$  e  $\delta$  sobre a sustentação e arrasto induzido  
hidroaerodinâmica

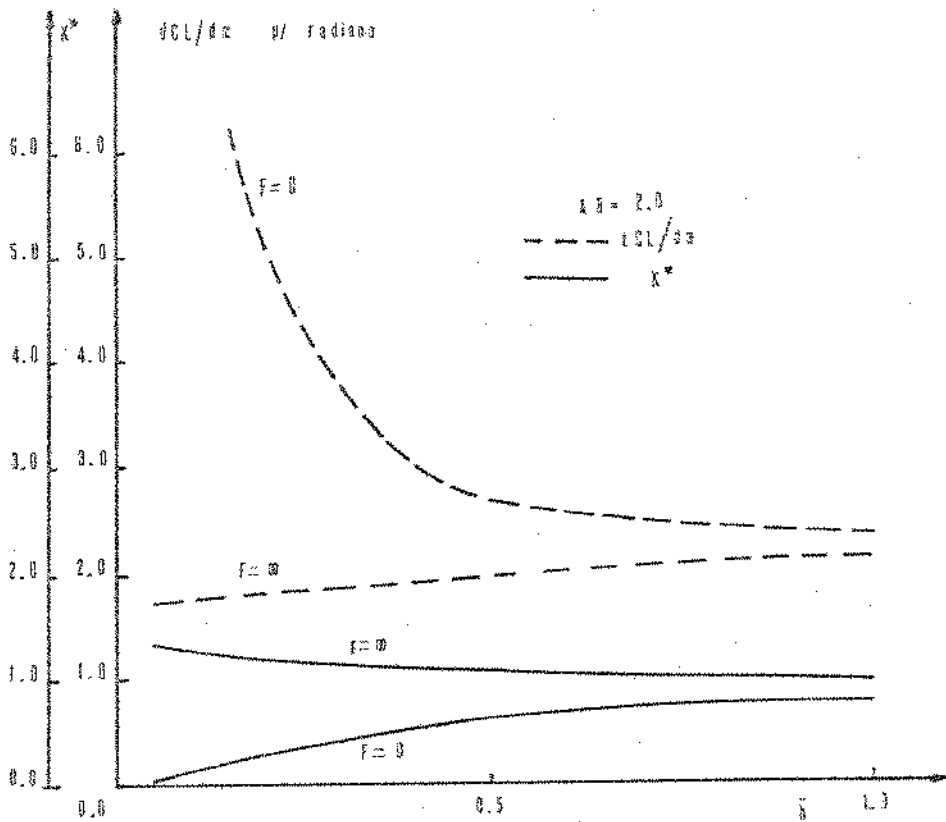


Fig.15 Estado de  $F$  a  $\bar{h}$  sobre  $tCL/3a$  e  $K^*$   
hidrofolia delta

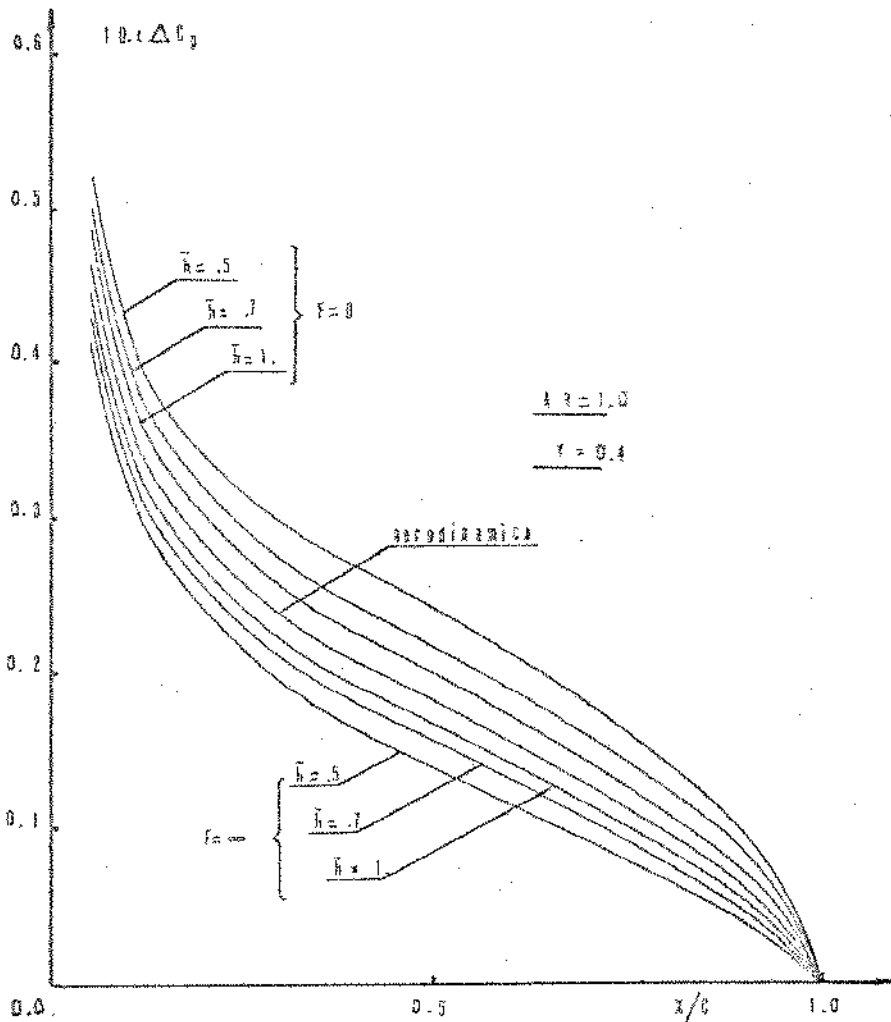


Fig.16 Distribuição de carga na corda, hidrofolia delta

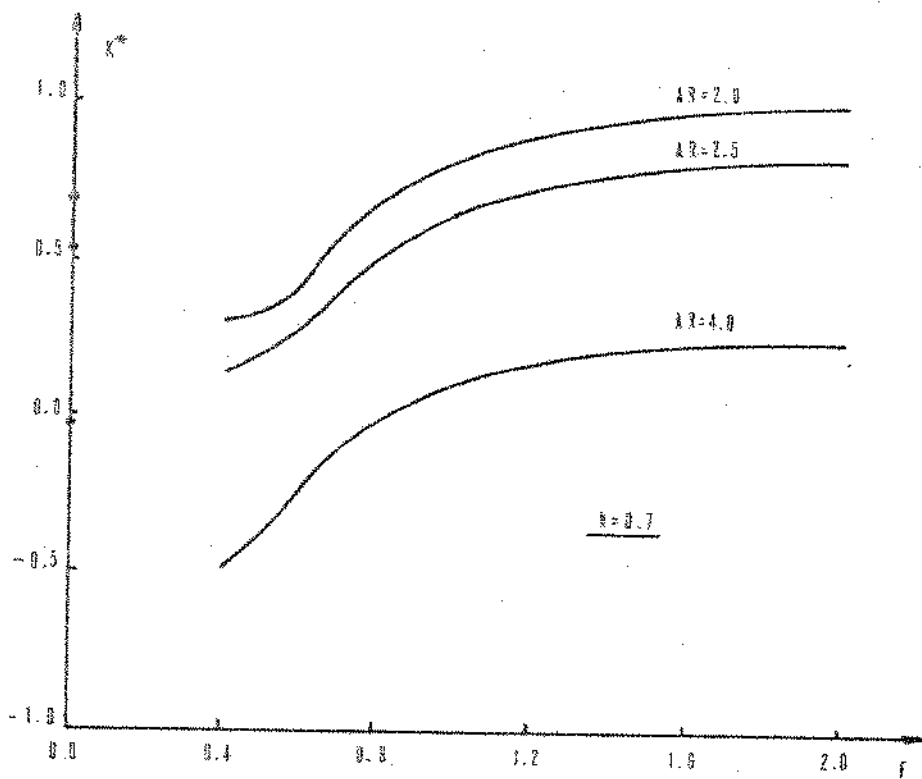


Fig. 17 Efeito de  $f$  sobre  $K^*$ , hidrofólio delta

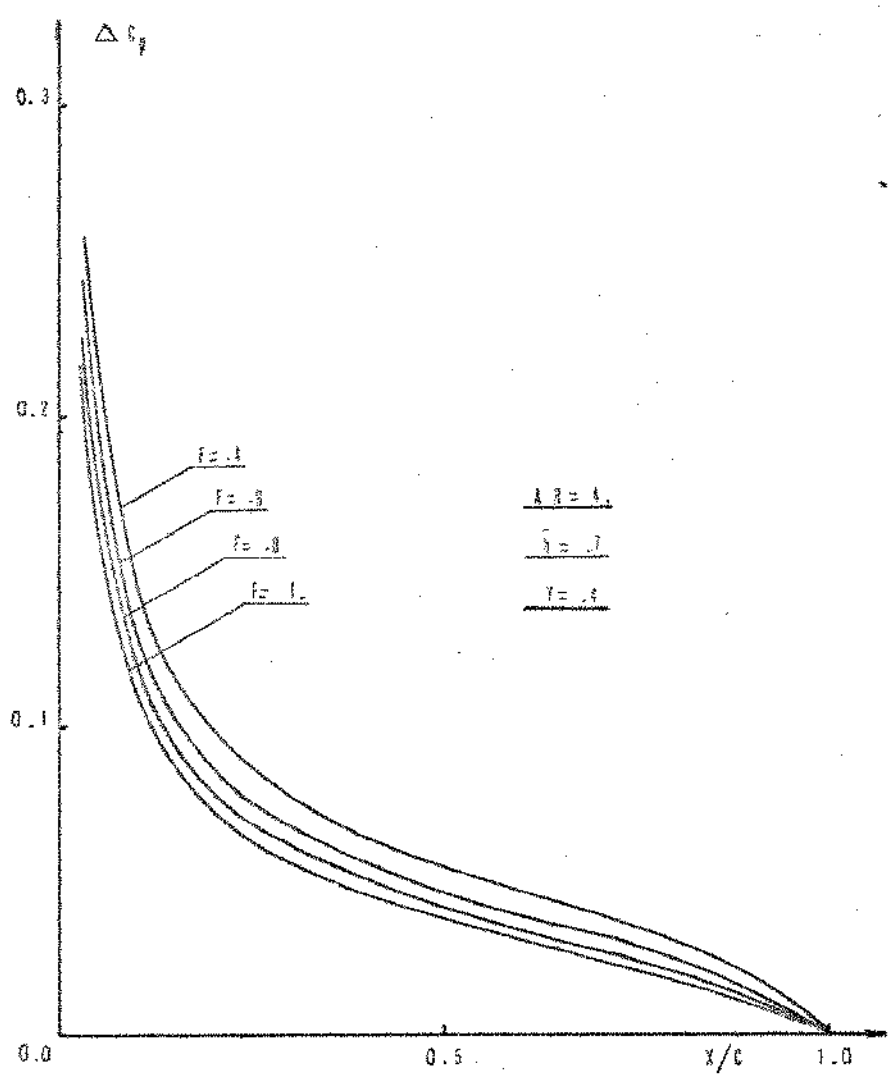
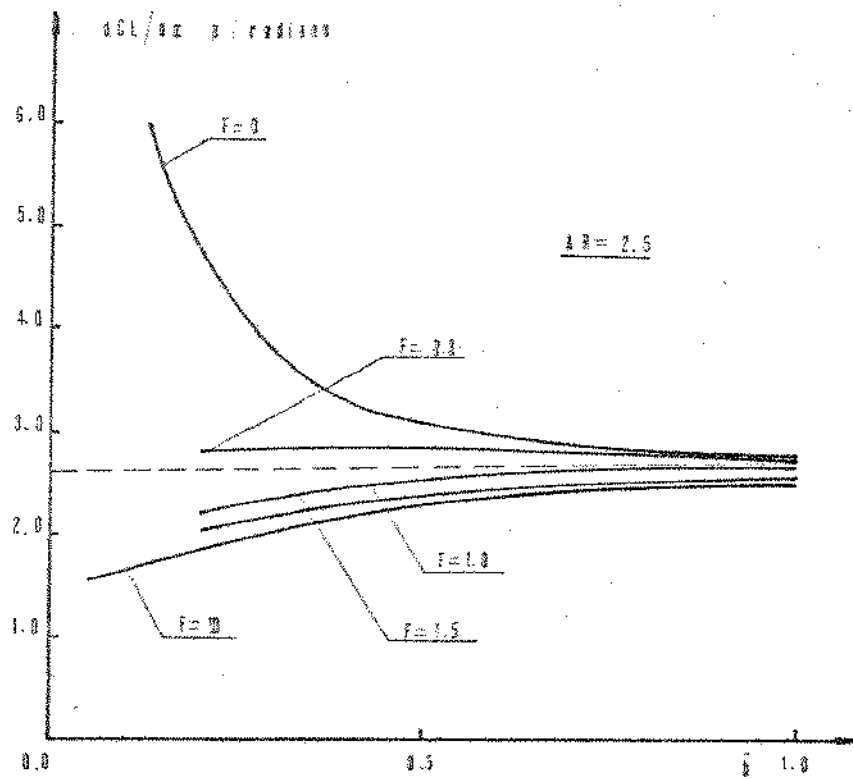
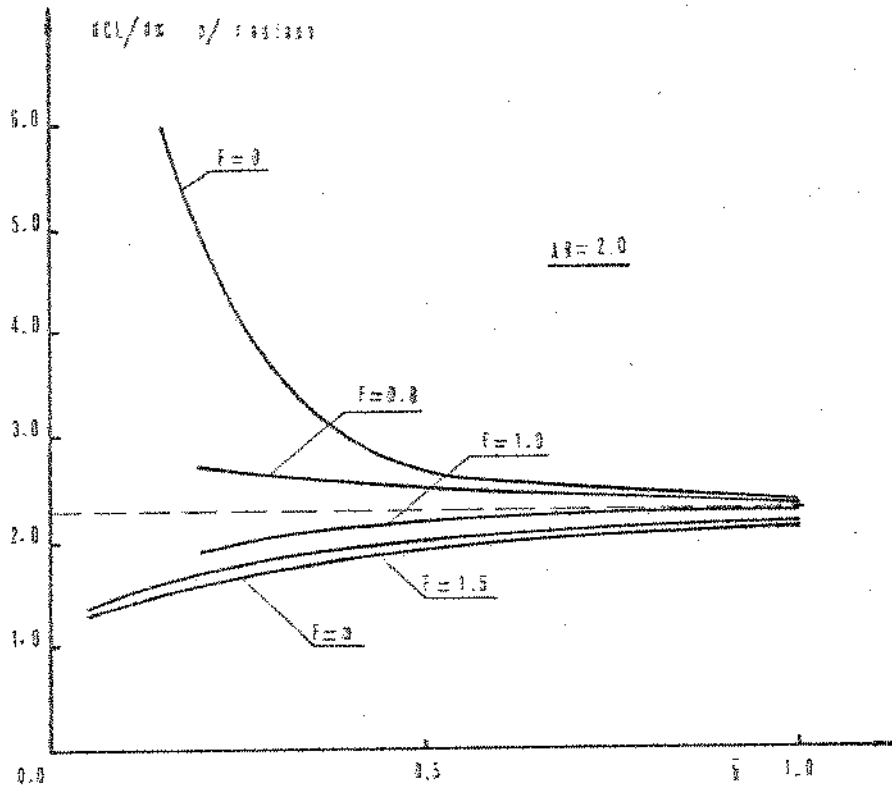


Fig. 18 Distribuição de carga na corda, hidrofólio delta





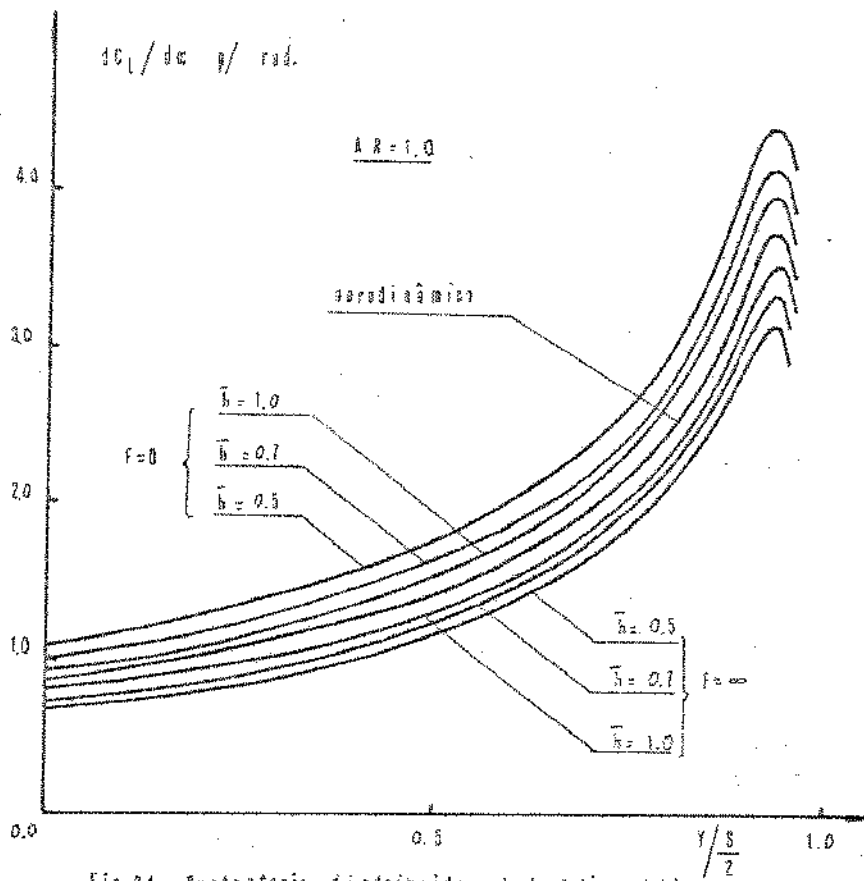


Fig.21 Sustentação distribuída. hidrazão delta

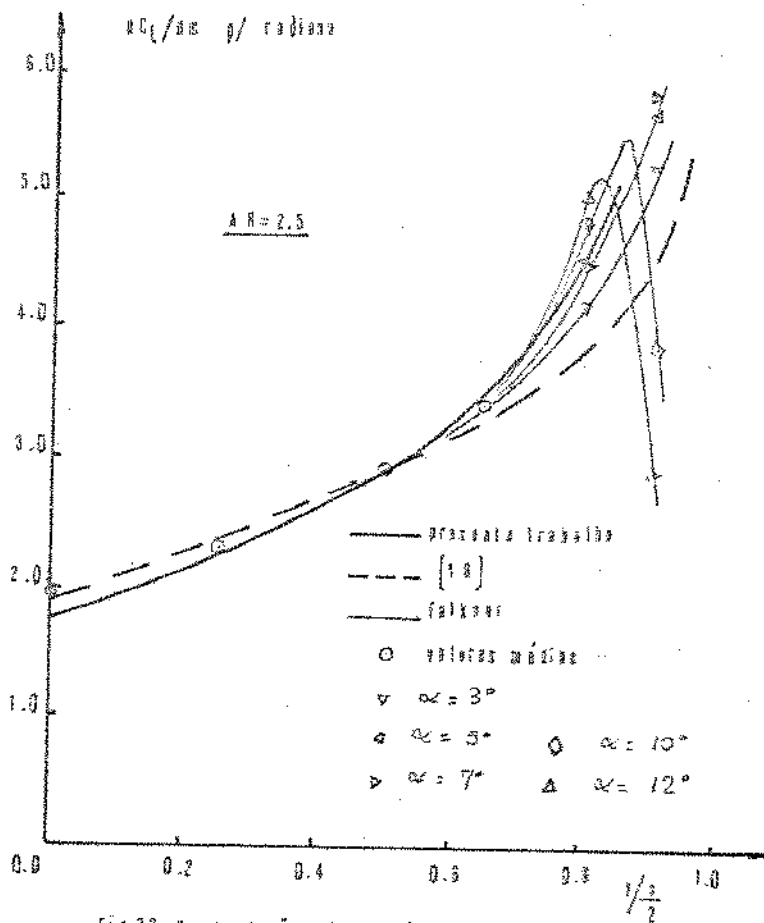


Fig.22 Sustentação distribuída. hiarsfalta delta

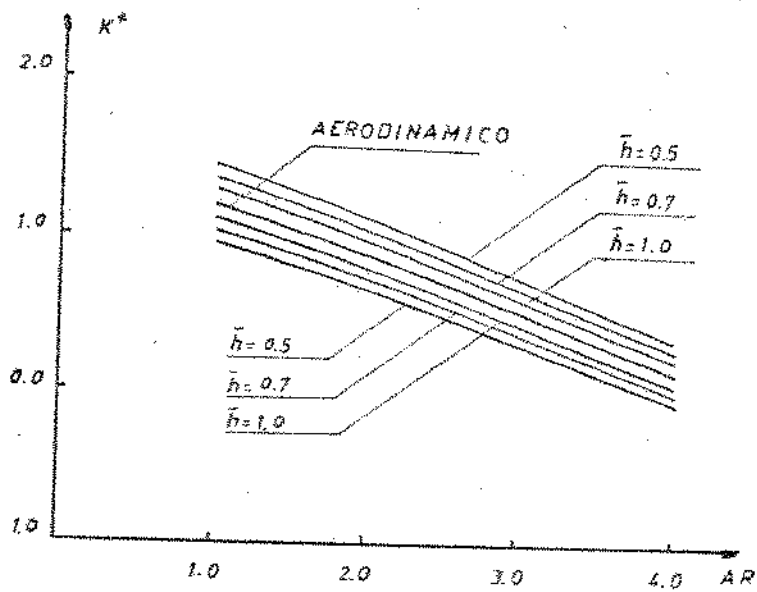


Fig. 23 Efeito de  $\bar{h}$  sobre  $K^*$  (delta)

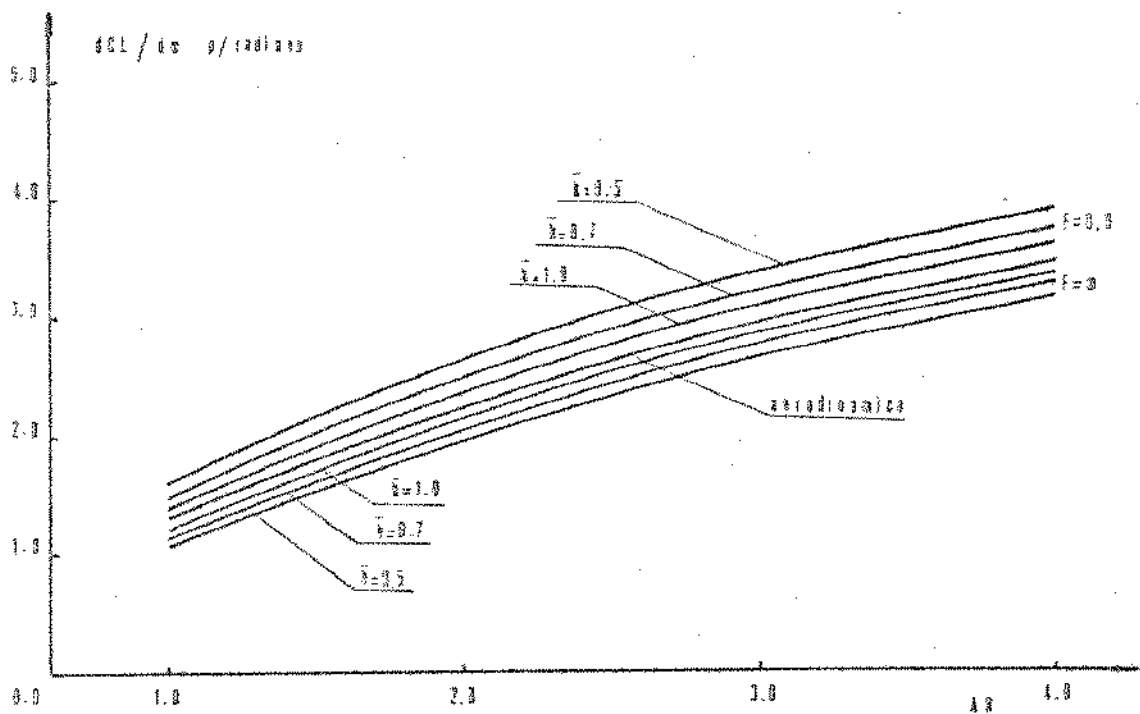


Fig. 24 Efeito de  $\bar{h}$  e de  $\delta$  sobre a sustentação bidimensional

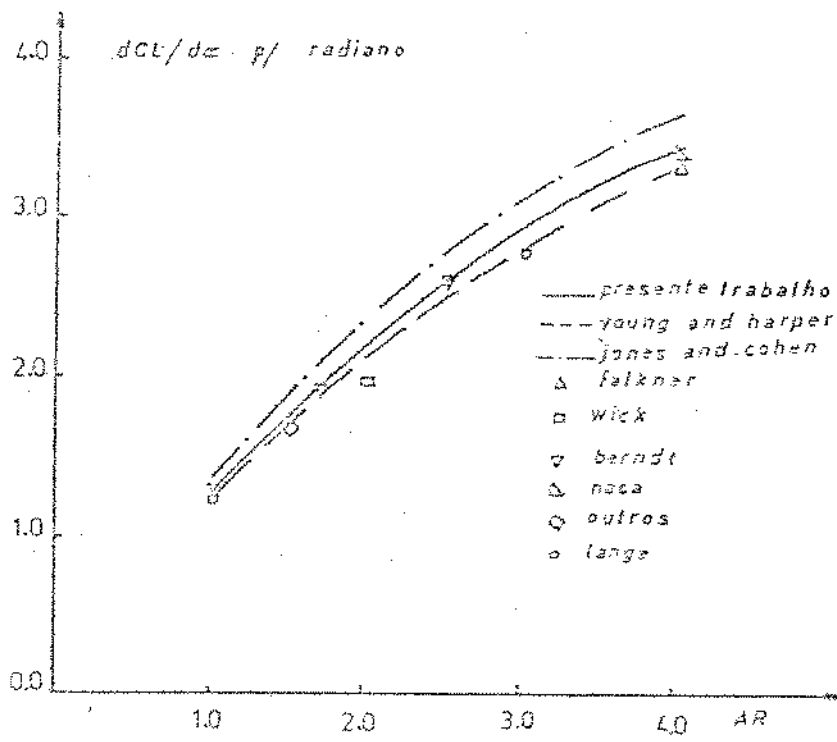


Fig. 25 Efeito do aspect ratio. Valores comparativos p/ fôlio triangular

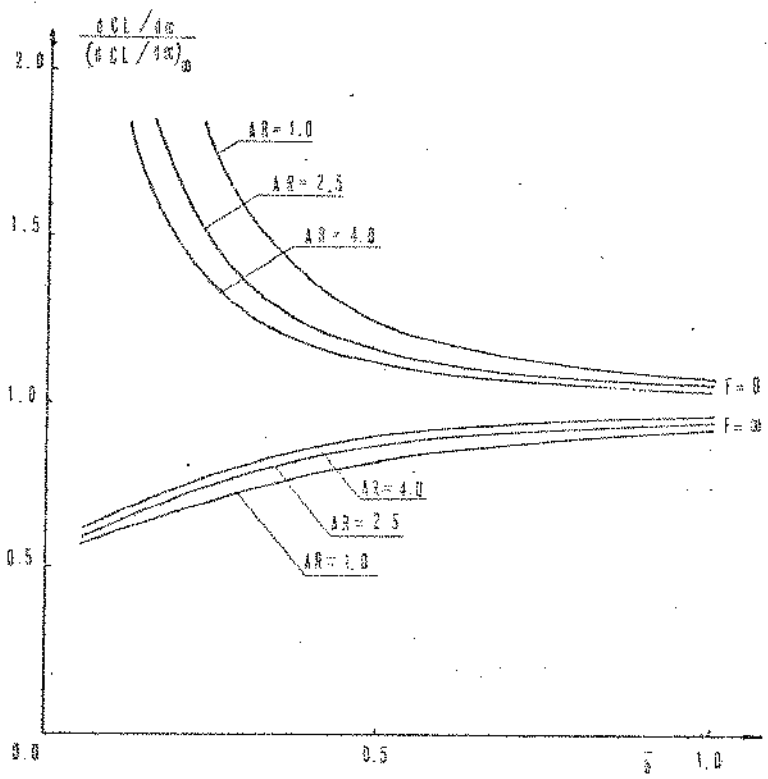


Fig. 26 Efeito do Aspect Ratio sobre a distribuição hidrodinâmica da tração

