

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL  
DA TESE DEFENDIDA POR Paulo Sérgio Lima  
Alves E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 20/03/97  
Douglas E. Zampieri  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

# Análise Comparativa do Desempenho de uma Suspensão Veicular Considerando Elementos Passivos e Ativos

Autor: Paulo Sérgio Lima Alves

Orientador: Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri

03/97

AL87a  
31617/BC

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

# **Análise Comparativa do Desempenho de uma Suspensão Veicular Considerando Elementos Passivos e Ativos**

**Autor: Paulo Sérgio Lima Alves**

**Orientador: Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1997  
S.P. - Brasil



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	TIUN CAMP
	AL 87 a
V.	Ex.
TEMPO BC/31617	
PROG.	286/97
C <input type="checkbox"/>	D <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	16/09/97
N.º CPD	

CM-00100421-0

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

AL87a Alves, Paulo Sérgio Lima  
Análise comparativa do desempenho de uma suspensão  
veicular considerando elementos passivos e ativos / Paulo  
Sérgio Lima Alves.--Campinas, SP: [s.n.], 1997.

Orientador: Douglas Eduardo Zampieri.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Veículos - Dinâmica. 2. Riccati, Equação de. 3.  
Teoria do controle. 4. Tratores agrícolas. I. Zampieri,  
Douglas Eduardo. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Análise Comparativa do Desempenho de  
uma Suspensão Veicular Considerando  
Elementos Passivos e Ativos**

Autor: **Paulo Sérgio Lima Alves**

Orientador: **Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri** *te*

*Douglas E. Zampieri*

**Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri**, Presidente  
FEM - UNICAMP

*Eurípedes Nóbrega*

**Prof. Dr. Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega**  
FEM - UNICAMP

*Marcio Luiz de Andrade Netto*

**Prof. Dr. Marcio Luiz de Andrade Netto**  
FEE - UNICAMP

Campinas, 20 de março de 1997

## **Dedicatória:**

Este trabalho é dedicado aos meus pais e aos meus irmãos que sempre estiveram presentes.

## **Agradecimentos**

Para a consecução deste trabalho houve a fundamental colaboração de diversas pessoas. A elas presto o meu agradecimento:

Aos meus pais pelo incansável apoio em mais uma etapa da minha vida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri, pela sua paciência, amizade, compreensão e incentivo.

Ao Prof. Dr. Eurípedes Guilherme Nóbrega, pela sua colaboração e apoio.

Ao Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos pelos ensinamentos recebidos.

Aos colegas Paula, Cristina e Melquisedec pela amizade e apoio.

A todos os professores, funcionários e colegas do DMC, DPM e SIFEM, que de forma direta ou indireta colaboraram na realização deste trabalho.

*Tudo posso Naquele que  
me fortalece.*  
Filipenses 4:13

# Sumário

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>2. REVISÃO DE LITERATURA.....</b>	<b>4</b>
2.1 INTRODUÇÃO.....	4
2.2 DESENVOLVIMENTO.....	5
<b>3. MODELAGEM MATEMÁTICA.....</b>	<b>12</b>
3.1 INTRODUÇÃO.....	12
3.2 TRATOR COM O ÍMPLEMENTO.....	12
3.2.1 <i>Cinemática</i> .....	14
3.2.2 <i>Dinâmica</i> .....	28
3.3 TRATOR SEM O ÍMPLEMENTO.....	51
<b>4. OTIMIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO SISTEMA.....</b>	<b>55</b>
4.1 INTRODUÇÃO.....	55
4.2 SISTEMA COM 4 GDL E DOIS CONTROLADORES ATIVOS.....	56
4.3 SISTEMA COM 4 GDL E UM CONTROLADOR ATIVO.....	71
4.4 SISTEMA COM 3 GDL E UM CONTROLADOR ATIVO.....	74
<b>5. RESULTADOS.....</b>	<b>80</b>
5.1 INTRODUÇÃO.....	80
5.2 TRATOR SEM O ÍMPLEMENTO.....	81
5.2.1 <i>Análise dos Autovalores</i> .....	83
5.2.2 <i>Análise da resposta do sistema</i> .....	89
5.3 TRATOR COM O ÍMPLEMENTO E UM CONTROLADOR ATIVO.....	93
5.3.1 <i>Análise dos Autovalores</i> .....	94
5.3.2 <i>Análise da resposta do sistema</i> .....	101

5.4 TRATOR COM O ÍMPLEMENTO E DOIS CONTROLADORES ATIVOS .....	106
5.4.1 <i>Análise dos Autovalores</i> .....	106
5.4.2 <i>Análise da resposta do sistema</i> .....	113
<b>6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b> .....	<b>120</b>
<b>7. BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>123</b>
<b>8. ANEXO A</b> .....	<b>126</b>

## Resumo

ALVES, Paulo Sérgio Lima, *Análise Comparativa do Desempenho de uma Suspensão Veicular Considerando Elementos Passivos e Ativos*, Campinas, : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. 131 p. Dissertação (Mestrado)

É feito um estudo sobre a dinâmica de um modelo plano de um trator no qual é introduzido um eixo dianteiro. Considerando os modelos com e sem implemento agrícola são introduzidos elementos ativos na suspensão e no elemento de ligação do implemento com o corpo do veículo. Verificando a controlabilidade e observabilidade do sistema e utilizando a teoria de controle ótimo, é aplicada a equação de Riccati para obtenção da lei de controle dos elementos ativos baseada na realimentação dos estados do sistema. As matrizes de ponderação, utilizadas na função custo do tipo integral quadrática, são obtidas a partir de parâmetros que representem o comportamento desejado do sistema. Considerando o conforto e a segurança do veículo, as matrizes de ponderação são obtidas representando-se a aceleração vertical do corpo do trator e as forças de contato dos pneus dianteiro e traseiro. São também consideradas as ponderações do espaço de trabalho da suspensão e o movimento do implemento. A influência destas ponderações sobre os autovalores e autovetores do sistema é, também, analisada. Finalmente, compara-se a resposta do sistema ao degrau considerando-se a suspensão e o elemento de ligação implemento/trator totalmente passivos e totalmente ativos.

### *Palavras Chave*

- Dinâmica veicular, Controlador ativo, Equação de Riccati, Controle ótimo.

## Abstract

ALVES, Paulo Sérgio Lima, *Análise Comparativa do Desempenho de uma Suspensão Veicular Considerando Elementos Passivos e Ativos*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. 131 p. Dissertação (Mestrado)

The dynamics of a two dimensional tractor model with a front axle is studied. Active elements are introduced in the suspension and in the tractor body-implement linking element considering the model with and without implement. Verifying the system controllability and observability and using optimal control theory, Riccati equation is applied in order to obtain the control law of the active elements. The weighting matrices, used in the quadratic integral cost function, are obtained from the parameters that represent the desired behaviour of the system. Considering comfort and safety, the weighting matrices are obtained representing the vertical acceleration of the tractor body and the contact forces of the front and rear tires as a vector multiplied by the state vector. The weighting matrices of the suspension working space and the movement of the implement are also considered. The effect of each weighting matrix on the eigenvalues and eigenvectors of the system is analyzed. The response of the active system to external excitation is compared to that obtained considering passive elements in the suspension and in the tractor body-implement linking element.

### *Key Words*

- Vehicle, Dynamics, Active Controller, Riccati equation, Optimal Control.

## Lista de Figuras

FIGURA 3-1 MODELO PLANO DO TRATOR COM O IMPLEMENTO .....	13
FIGURA 3-2: REPRESENTAÇÃO DOS VETORES DE POSIÇÃO LINEAR E ANGULAR.....	18
FIGURA 3-3 DCL DO IMPLEMENTO.....	29
FIGURA 3-4 DCL DO CORPO PRINCIPAL .....	34
FIGURA 3-5: DCL DO EIXO DIANTEIRO .....	42
FIGURA 5-1 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{f_{dy}}$ PARA O SISTEMA ATIVO COM 3GDL. ....	84
FIGURA 5-2 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{f_{ly}}$ PARA O SISTEMA ATIVO COM 3GDL.....	86
FIGURA 5-3 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{ET}$ PARA O SISTEMA ATIVO COM 3GDL.....	87
FIGURA 5-4 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{y_r}$ PARA O SISTEMA ATIVO COM 3GDL.....	88
FIGURA 5-5 ESPAÇO DE TRABALHO DA SUSPENSÃO PARA O SISTEMA COM 3 GDL. ....	90
FIGURA 5-6 ACELERAÇÃO VERTICAL DO CORPO DO TRATOR PARA O SISTEMA COM 3 GDL. ....	90
FIGURA 5-7 ACELERAÇÃO ANGULAR DO CORPO DO TRATOR PARA O SISTEMA COM 3 GDL. ....	91
FIGURA 5-8 FORÇAS DE CONTATO NO PNEU DIANTEIRO (A) E TRASEIRO (B) PARA O SISTEMA COM 3 GDL. ....	92
FIGURA 5-9 FORÇA DOS CONTROLADORES ATIVO E PASSIVO DA SUSPENSÃO PARA O SISTEMA COM 3 GDL.....	92
FIGURA 5-10 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{f_{dy}}$ PARA O SISTEMA COM 4 GDL E 1 CONTROLADOR ATIVO.....	95
FIGURA 5-11 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{f_{ly}}$ PARA O SISTEMA COM 4 GDL E 1 CONTROLADOR ATIVO.....	97
FIGURA 5-12 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{\beta_r}$ PARA O SISTEMA COM 4 GDL E 1 CONTROLADOR ATIVO.....	98
FIGURA 5-13 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{ET}$ PARA O SISTEMA COM 4 GDL E 1 CONTROLADOR ATIVO.....	99
FIGURA 5-14 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{y_r}$ PARA O SISTEMA COM 4 GDL E 1 CONTROLADOR ATIVO.....	100

FIGURA 5-15 MOVIMENTO DO IMPLEMENTO PARA O SISTEMA COM 4 GDL PASSIVO E COM 1 CONTROLADOR ATIVO. ....	102
FIGURA 5-16 ESPAÇO DE TRABALHO PARA O SISTEMA COM 4 GDL PASSIVO E COM 1 CONTROLADOR ATIVO. ....	103
FIGURA 5-17 ACELERAÇÃO VERTICAL DO CORPO DO TRATOR PARA O SISTEMA COM 4 GDL PASSIVO E COM 1 CONTROLADOR ATIVO. ....	103
FIGURA 5-18 ACELERAÇÃO ANGULAR DO CORPO DO TRATOR PARA O SISTEMA COM 4 GDL PASSIVO E COM 1 CONTROLADOR ATIVO. ....	104
FIGURA 5-19 FORÇAS DE CONTATO NO PNEU DIANTEIRO (A) E TRASEIRO (B) PARA O SISTEMA COM 4 GDL PASSIVO E COM 1 CONTROLADOR ATIVO. ....	105
FIGURA 5-20 FORÇA DOS CONTROLADORES ATIVO E PASSIVO DA SUSPENSÃO PARA O SISTEMA COM 4 GDL. ....	105
FIGURA 5-21 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{f_{dy}}$ PARA O SISTEMA COM 4 GDL E 2 CONTROLADORES ATIVOS. ....	107
FIGURA 5-22 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{f_{dy}}$ PARA O SISTEMA COM 4 GDL E 2 CONTROLADORES ATIVOS. ....	109
FIGURA 5-23 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{\beta_a}$ PARA O SISTEMA COM 4 GDL E 2 CONTROLADORES ATIVOS. ....	110
FIGURA 5-24 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{ET}$ PARA O SISTEMA COM 4 GDL E 2 CONTROLADORES ATIVOS. ....	111
FIGURA 5-25 LUGAR DOS AUTOVALORES VARIANDO $p_{y_f}$ PARA O SISTEMA COM 4 GDL E 2 CONTROLADORES ATIVOS. ....	112
FIGURA 5-26 MOVIMENTO DO IMPLEMENTO PARA O SISTEMA COM 4 GDL PASSIVO E COM 2 CONTROLADORES ATIVOS. ....	114
FIGURA 5-27 ESPAÇO DE TRABALHO PARA O SISTEMA COM 4 GDL PASSIVO E COM 2 CONTROLADORES ATIVOS. ....	115
FIGURA 5-28 ACELERAÇÃO VERTICAL DO CORPO DO TRATOR PARA O SISTEMA COM 4 GDL PASSIVO E COM 2 CONTROLADORES ATIVOS. ....	116
FIGURA 5-29 ACELERAÇÃO ANGULAR DO CORPO DO TRATOR PARA O SISTEMA COM 4 GDL PASSIVO E COM 2 CONTROLADORES ATIVOS. ....	117
FIGURA 5-30 FORÇAS DE CONTATO NO PNEU DIANTEIRO (A) E TRASEIRO (B) PARA O SISTEMA COM 4 GDL PASSIVO E COM 2 CONTROLADORES ATIVOS. ....	118
FIGURA 5-31 FORÇA DOS CONTROLADORES ATIVO E PASSIVO DA SUSPENSÃO PARA O SISTEMA COM 4 GDL E 2 CONTROLADORES ATIVOS. ....	118
FIGURA 5-32 MOMENTO DOS CONTROLADORES ATIVO E PASSIVO DO IMPLEMENTO PARA O SISTEMA COM 4 GDL E 2 CONTROLADORES ATIVOS. ....	119

## Lista de Tabelas

TABELA 5-1 AUTOVALORES E AUTOVETORES PARA O SISTEMA COM 3 GDL. ....	85
TABELA 5-2 AUTOVALORES E AUTOVETORES PARA OS SISTEMAS COM 4 GDL PASSIVO E COM 1 CONTROLADOR ATIVO. ....	96
TABELA 5-3 AUTOVALORES E AUTOVETORES PARA OS SISTEMAS COM 4 GDL PASSIVO E COM 2 CONTROLADORES ATIVOS. ....	108

## Nomenclatura

### Letras Latinas

- ${}_{I}\vec{a}_v$  - vetor de aceleração linear do eixo dianteiro representado na base inercial
- ${}_{I}\vec{a}_f$  - vetor de aceleração do cg do corpo principal representado na base inercial
- ${}_{I}\vec{a}_a$  - vetor de aceleração linear do cg do implemento representado na base inercial
- ${}_{I}\vec{a}_b$  - vetor de aceleração linear absoluta da ligação implemento-corpo do veículo representado na base inercial
- ${}_{I}\vec{a}_{ba}$  - vetor de aceleração do cg do implemento em relação à rótula representado na base inercial
- ${}_{I}\vec{a}_{fb}$  - vetor de aceleração da rótula em relação ao cg do corpo principal representado na base inercial
- A** - matriz do sistema
- B** - matriz que multiplica o vetor dos controladores ativos
- $c_{r1}$  - coeficientes de amortecimento para a roda dianteira
- $c_{r2}$  - coeficientes de amortecimento para a roda traseira
- $c_v$  - coeficientes de amortecimento para a suspensão dianteira
- $c_a$  - coeficientes amortecimento torsional para a ligação do implemento com o corpo do trator
- C** - matriz de amortecimento
- $C_{\ddot{y}_f}$  - vetor utilizado para representação da ponderação de  $\ddot{y}_f$
- ${}_{I}\vec{F}_{E_{imp}}$  - forças externas que atuam no implemento
- $\vec{F}_{E_{corp}}$  - forças externas que atuam no corpo principal
- $\vec{F}_{E_{eixo}}$  - forças externas que atuam no eixo dianteiro
- $f_{cy}$  - força exercida pela suspensão
- $f_{ly}$  - força exercida pelo pneu traseiro
- $f_{dy}$  - força exercida pelo pneu dianteiro
- $f_{dyest}$  - carga estática do pneu dianteiro
- $f_{lyest}$  - carga estática do pneu traseiro
- $f_{cyest}$  - carga estática da suspensão
- $I_a$  - tensor de inércia do implemento em relação ao seu cg
- $I_f$  - tensor de inércia do implemento em relação ao seu cg
- $I_{a_{xx}}, I_{a_{yy}}, I_{a_{zz}}$  - momentos principais de inércia do implemento em relação ao seu cg definido no sistema  $x_2 y_2 z_2$

$I_{f_{xx}}, I_{f_{yy}}, I_{f_{zz}}$  - momentos principais de inércia do corpo principal em relação ao seu cg definido no sistema  $x_1 y_1 z_1$

$g$  - aceleração da gravidade

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - cursores da base inercial

$\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  - cursores da base B1

$\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$  - cursores da base B2

$J_{v_{imp}}$  - jacobiano de translação do implemento

$J_{\omega_{imp}}$  - jacobiano de rotação do implemento

$J_{v_{eixo}}$  - jacobiano de translação do eixo dianteiro

$J_{v_{corp}}$  - jacobiano de translação do corpo principal

$J_{\omega_{corp}}$  - jacobiano de rotação do corpo principal

$J(u)$  - função custo do tipo integral quadrática

$k_{r1}$  - coeficientes de rigidez para a roda dianteira

$k_{r2}$  - coeficientes de rigidez para a roda traseira

$k_v$  - coeficientes de rigidez para a suspensão dianteira

$k_a$  - coeficientes de rigidez torsional para a ligação do implemento com o corpo do trator

$K$  - matriz de rigidez

$\mathbf{K}$  - matriz ou vetor de ganho

$l_{g1}$  - distância entre o cg do corpo principal do trator e a junta de ligação com o implemento definida no sistema de coordenadas  $x_1 y_1 z_1$

$l_{g2}$  - distância entre a junta de ligação do implemento e o seu cg definida no sistema de referência  $x_2 y_2 z_2$

$l_1$  - distância entre o ponto de ligação da suspensão com o corpo principal e o cg do corpo principal definida no sistema  $x_1 y_1 z_1$

$l_2$  - distância entre o cg do corpo principal e o ponto de ligação da roda traseira com o corpo principal definida no sistema  $x_1 y_1 z_1$

$L$  - matriz que multiplica o vetor de excitação

$m_v$  - massa da suspensão

$m_f$  - massa do corpo principal

$m_a$  - massa do implemento

$\vec{M}_b$  - vetor do momento exercido pela rótula

$\vec{M}_{R_{imp}}$  - momentos de reação que atuam no implemento

$\vec{M}_{E_{imp}}$  - momentos externos que atuam no implemento

$\vec{M}_{R_{corp}}$  - momentos de reação que atuam no corpo principal

$\vec{M}_{E_{corp}}$  - momentos externos que atuam no corpo principal

$M$  - matriz de massa

$M_{zest}$  - momento estático da rótula

$M$  - matriz de controlabilidade

$N$  - matriz de ponderação dos elementos cruzados

$\bar{N}$  - matriz de ponderação  $N$  normalizada

$P$  - matriz solução da equação de Riccati  
 $P_{\dot{y}_f}$  - representação da ponderação de  $\dot{y}_f$   
 $p_{\dot{y}_f}$  - coeficiente de peso da ponderação de  $\dot{y}_f$   
 $q$  - vetor das coordenadas generalizadas  
 $Q$  - matriz de ponderação dos estados  
 $\bar{Q}$  - matriz de ponderação  $Q$  normalizada  
 $Q$  - matriz de observabilidade  
 $R$  - matriz de ponderação dos controladores  
 $\bar{R}_{imp}$  - forças de reação que atuam no implemento  
 $\bar{R}_{corp}$  - forças de reação que atuam no corpo principal  
 $\bar{R}_{eixo}$  - forças de reação que atuam no eixo dianteiro  
 $\bar{R}$  - matriz de ponderação  $R$  normalizada  
 ${}_{B2}\bar{s}_{ba}$  - vetor "s" com origem em "b" e extremidade em "a" representado na base B2  
 $T_{\beta_f}$  - matriz de transformação da base inercial para a base móvel B1  
 $T_{\beta_f+\beta_a}$  - matriz de transformação da base inercial para a base móvel B2  
 $u_1$  - controlador ativo introduzido na suspensão  
 $u_2$  - controlador ativo introduzido na ligação do implemento  
 $u$  - vetor dos controladores ativos  
 ${}_i\bar{v}_v$  - vetor de velocidade linear do eixo dianteiro representado na base inercial  
 ${}_i\bar{v}_f$  - vetor de velocidade linear do cg do corpo principal representado na base inercial  
 ${}_i\bar{v}_a$  - vetor de velocidade linear do cg do implemento representado na base inercial  
 ${}_i\bar{v}_b$  - vetor de velocidade linear absoluta do ponto de ligação corpo principal-implemento representado na base inercial  
 ${}_i\bar{v}_{ba}$  - vetor de velocidade relativa do cg do implemento em relação a rótula representado na base inercial.  
 ${}_i\bar{v}_{fb}$  - vetor de velocidade relativa do ponto b em relação ao cg do corpo principal representado na base inercial.  
 $xyz$  - sistema de referência da base inercial  
 $x_1y_1z_1$  - sistema de referência da base B1  
 $x_2y_2z_2$  - sistema de referência da base B2  
 $X$  - vetor de estado  
 $Y$  - vetor de saída  
 $y_v$  - deslocamento vertical do eixo dianteiro  
 $y_f$  - deslocamento vertical do corpo principal

### *Letras Gregas*

$\beta_f$  - ângulo de balanço do corpo principal  
 $\beta_a$  - ângulo de balanço do implemento em relação ao corpo principal  
 $\Delta_{fcv}$  - deflexão da suspensão  
 $\Delta_{ftv}$  - deflexão do pneu traseiro  
 $\Delta_{fdv}$  - deflexão do pneu dianteiro

$\omega$  - vetor de excitação  
 $\omega_2$  - excitação do pneu traseiro  
 $\omega_1$  - excitação do pneu dianteiro  
 $\vec{\omega}_f$  - vetor de velocidade angular do corpo principal  
 $\vec{\omega}_a$  - vetor de velocidade angular do implemento  
 $\vec{\Omega}_{B1}$  - vetor de velocidade angular da base B1  
 $\vec{\Omega}_{B2}$  - vetor de velocidade angular da base B2

### *Superescritos*

T - transposto

### *Subscritos*

I - base inercial  
ET - espaço de trabalho

### *Abreviações*

dcl - diagrama de corpo livre  
gdl - graus de liberdade  
cg - centro de gravidade  
sm - espaço de trabalho máximo da suspensão

## Capítulo 1.

### Introdução

Desde a criação do automóvel concentrou-se esforços para tornar o mesmo mais confortável e seguro. Com o surgimento da teoria de controle moderno e de algoritmos mais eficientes, surgem na década de 70 várias publicações de trabalhos voltados ao assunto (vide revisão bibliográfica), que demonstram que a utilização de suspensões contendo somente molas e amortecedores passivos não permite um incremento no desempenho do sistema devido a esses elementos possuírem características fixas para um determinado projeto.

Desta maneira, tem-se procurado formas alternativas para o aumento desse desempenho através da introdução de atuadores ativos e semi-ativos na suspensão, utilizando-se a teoria de controle ótimo. Além disso, com o desenvolvimento da eletrônica, a realização física de tais suspensões tem-se tornado possível.

Dentro desse contexto, surge a possibilidade de aplicação dessas suspensões em veículos agrícolas. Como o trator geralmente não possui suspensões, a variação dinâmica das forças de contato nas rodas e a sua aceleração vertical são bastantes significativas, comprometendo, assim, a sua segurança e o seu conforto. Associado a isso, há uma tendência em se projetar tratores mais versáteis e que alcancem velocidades superiores a 50 km/h com o objetivo de minimizar o tempo improdutivo.

Neste trabalho, faz-se um estudo da dinâmica de um modelo plano de um trator com eixo dianteiro, no qual são introduzidos elementos ativos na sua suspensão e no elemento de

ligação do implemento com o corpo do veículo. A lei de controle desses atuadores será obtida através da teoria de controle ótimo considerando como parâmetros a serem otimizados o conforto, a segurança e o espaço de trabalho da suspensão. Serão comparados os desempenhos dos sistemas ativos com o sistema considerando elementos passivos otimizados por Zampieri, 1993. Além disso, será feita uma análise dos autovalores e autovetores do sistema variando-se separadamente cada parâmetro a ser otimizado.

Na elaboração deste trabalho, foi feita primeiramente, no capítulo 2, uma revisão dos trabalhos publicados na área de controle ótimo aplicado em suspensões veiculares. Foram considerados desde modelos de um quarto de veículo até modelos mais elaborados tridimensionais, envolvendo o acoplamento entre os seus movimentos.

No capítulo 3, foi obtido o equacionamento dinâmico do modelo plano do trator com e sem o implemento. Para isso foi utilizado o método de Newton-Euler-Jourdain que se baseia no princípio da potência virtual. A razão do uso deste método para o modelo considerado é que além de se obter somente as equações de movimento, caso se considere modelos mais elaborados tridimensionais em trabalhos futuros, o seu equacionamento dinâmico poderá ser obtido estendendo-se a formulação do modelo plano.

No capítulo 4, os atuadores ativos são introduzidos nos modelos com e sem o implemento, substituindo as molas e amortecedores. O equacionamento dinâmico dos sistemas ativo e passivo são então representados na forma de estado. A lei de controle dos atuadores é, então, obtida através da equação de Riccati, considerando-se as restrições impostas ao sistema através das matrizes de ponderação obtidas.

No capítulo 5, é feita primeiramente uma análise do efeito de cada ponderação considerada sobre os autovalores e autovetores do sistema, variando-se os seus coeficientes de peso. Em seguida, a resposta do sistema ativo ao degrau é comparada com a obtida considerando-se apenas elementos passivos.

O capítulo 6, trás as conclusões do trabalho e apresenta sugestões e perspectivas para trabalhos futuros.

No anexo A, é mostrada a obtenção da equação de Riccati utilizada na otimização do sistema.

## Capítulo 2

### Revisão de Literatura

#### 2.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma revisão dos trabalhos na área de controle ativo aplicado em suspensões de veículos, ou seja, suspensões ativas. Os modelos matemáticos envolvidos vão desde um quarto de veículo, composto de duas massas, até o tridimensional, compreendendo a massa total do corpo do veículo e as quatro rodas.

Abaixo são dadas algumas definições para um melhor entendimento dos resultados e contribuições dos autores.

1. Sistemas passivos: contém somente molas e amortecedores.
2. Sistemas ativos: segundo Sharp e Crolla, 1987, podem ser definidos como atuadores que produzem força segundo uma lei de controle que pode conter informações de qualquer parte do sistema. A sua determinação é feita de maneira tal a minimizar uma função custo que represente o comportamento desejado do sistema.
3. Amortecedores ativos: segundo Elmadany e Abduljabbar, 1989, são uma subdivisão das suspensões ativas em que as forças de amortecimento são geradas ativamente e a rigidez da suspensão é mantida passiva. Assim, a lei de controle será função das velocidades da massa suspensa e não suspensa.
4. Amortecedores semi-ativos: segundo Elmadany e Abduljabbar, 1991, geram uma força passiva modulada continuamente segundo uma lei de controle com uma pequena quantidade de energia externa. O amortecedor semi-ativo se comporta como um controlador ativo

quando a ação de controle requer uma dissipação de energia. Caso a ação de controle necessite de um fornecimento de energia, o controlador responde com força nula.

5. Previsão: as informações sobre o perfil da via à frente das rodas são usadas pelo controlador.

## 2.2 Desenvolvimento

Os primeiros trabalhos em suspensão ativa surgiram no início dos anos 70, mostrando um novo modelo de suspensão que pudesse aumentar o desempenho do sistema com relação ao conforto e a segurança dos passageiros. Para isso eles foram expressos na função custo de maneira a poder representar o comportamento que se deseja, tendo como exemplo, o espaço de trabalho da suspensão, a força aplicada aos pneus e a aceleração vertical do veículo.

A quantidade de trabalhos nesta área nos anos 70, não foi tão significativa, devido até mesmo às dificuldades da época. Têm-se porém publicações daquele período que deram grandes contribuições do ponto de vista teórico que são utilizadas como referência por vários pesquisadores na publicação de seus trabalhos.

Em 1973, Thompson publicou um trabalho na área de suspensão veicular para um modelo plano de um veículo com suspensão passiva. Para este sistema, após a obtenção do seu equacionamento dinâmico, foram encontradas as condições para desacoplamento entre os movimentos vertical e de balanço do corpo principal do veículo. Foi visto que o desacoplamento estático resulta em deflexões estáticas iguais nas suspensões dianteiras e traseiras enquanto que o desacoplamento dinâmico equivale à massa do corpo principal substituída por duas situadas verticalmente acima dos eixos. Este acoplamento dinâmico é representado através da razão de acoplamento de inércia definido em função do momento de inércia, da massa e da distância entre as rodas. A suspensão otimizada é então obtida para este sistema através da medida de um índice de desempenho do tipo integral quadrática do balanço, da aceleração do corpo e do espaço de trabalho da suspensão para diferentes razões do acoplamento de inércia definido e considerando excitações aleatórias e determinísticas.

Em 1976, Thompson publicou um trabalho que teve e continua tendo importância significativa para a área. Neste trabalho foi utilizado um modelo de um quarto de veículo com

suspensão ativa otimizada para uma excitação randômica, utilizando, porém, o degrau como excitação, uma vez que a minimização da integral de custo quadrática é equivalente para as duas excitações. Foram consideradas como restrições na função custo a deflexão do pneu, o espaço de trabalho e a força de controle que é proporcional a aceleração, servindo, então, como medida do conforto do veículo. Após a obtenção do equacionamento dinâmico foi feita uma mudança de variável para reduzir o sistema de um caso de rastreador para um problema de regulador. Assim, foi então utilizada a formulação de Riccati para obtenção da lei de controle que minimize a função custo do tipo integral quadrática. O desempenho do sistema ativo obtido foi comparado com a de um sistema passivo convencional. Constatou-se que o controlador ativo possui uma rigidez total 50% superior a suspensão passiva. Neste trabalho foi mostrado também um esquema da realização física desse controlador ativo no modelo do veículo considerado.

Uma desvantagem dessa realização física é que a rigidez da mola incorporada em paralelo com a suspensão ativa depende da solução de Riccati e conseqüentemente dos parâmetros de peso da função custo. Este problema foi solucionado no trabalho de Thompson de 1984, utilizando o mesmo modelo de um quarto de veículo do seu trabalho publicado em 1976, excitado por um ruído brando integrado. No novo esquema da realização física proposto, o valor da rigidez era escolhido arbitrariamente e os valores dos outros parâmetros do sistema eram então obtidos a partir deste primeiro. Neste trabalho de 1984, Thompson fez também um estudo sobre um outro aspecto importante na análise do sistema com controlador ativo: o lugar das raízes. Este estudo foi realizado variando-se os fatores de peso da função custo e obtendo-se o lugar dos pólos do sistema, os quais dependem dos valores dos ganhos obtidos a partir da formulação de Riccati e estes dependem dos parâmetros de peso da função custo.

A estabilidade do sistema de ciclo fechado com realimentação de estado e lei de controle ótimo obtida por Riccati foi abordada por Wilson, Sharp e Hassan em 1986. Foram definidas a controlabilidade e observabilidade do sistema como condições para uso da equação de Riccati e também como garantia da estabilidade do sistema. Foi visto que estas condições são válidas para o caso de realimentação de estado completa, pois uma solução mínima da função custo pode não existir no caso de realimentação de estado limitada, mesmo que o sistema seja controlável e observável.

Um estudo das limitações das suspensões passiva e ativa foi feito por Chalasani em 1987. Na primeira parte deste trabalho foi considerado o modelo de um quarto de veículo sujeito a excitações aleatórias. A teoria de controle ótimo foi utilizada para obtenção da lei de controle do atuador ativo para o caso de realimentação de estado completa. A comparação de desempenho foi feita considerando o isolamento da vibração, o espaço de trabalho da suspensão e a perda de contato roda via. Para representação destes fatores foram utilizados o valor eficaz da aceleração vertical da massa suspensa, da deflexão da suspensão e do pneu, os quais foram obtidos a partir da função transferência. Concluiu-se que a melhoria no isolamento da vibração de suspensões ativas não são tão grandes quando comparadas a uma suspensão passiva de pequena rigidez e amortecimento. Na segunda parte, foi utilizado um modelo tridimensional com 7 gdl sujeito a excitações aleatórias e determinísticas. A lei de controle foi obtida considerando na função custo as acelerações angulares do movimento de balanço e rolamento e o torque que atua na massa suspensa, além de outros fatores como o espaço de trabalho das suspensões e a aceleração vertical do corpo do veículo. As comparações do sistema ativo e passivo mostraram que os resultados estão em concordância com os obtidos na primeira parte. Porém, foi concluído que para a obtenção de um controlador para um veículo é necessário um modelo que considere as interações entre os movimentos de balanço, rolamento, torque e peso e as correlações entre as excitações nas quatro rodas, ou seja, a correlação entre as excitações das rodas esquerda e direita e o tempo de atraso entre as rodas dianteira e traseira.

Um outro aspecto a ser analisado é a incorporação de integradores no sistema, o que possibilita a eliminação do erro estacionário, ou seja, a deflexão estacionária que é ocasionada no sistema devido a uma excitação degrau ou rampa ou devido a forças aplicadas no corpo. Um trabalho sobre esse assunto foi realizado por Thompson e Davis em 1988a para um modelo de um quarto de veículo incorporado uma suspensão ativa sujeita a uma força aplicada no corpo. Para eliminação do erro estacionário devido a essa força, foi feita a mudança de variável adotada por Thompson e Davis em 1976, considerando uma nova força de controle dada pela soma da força do controlador ativo e a força aplicada no corpo. Além disso, foi introduzido um integrador, sendo a sua saída a força do atuador ativo. Logo, a nova força de controle foi então considerada como uma variável de estado. Assim, o novo sistema foi ótimo para a função custo que leva em consideração a nova variável de estado, ou seja,

com restrição derivativa e um pouco pior com relação a função custo sem restrição. Além disso, o sistema terá uma rigidez infinita para cargas aplicadas no corpo e uma pequena rigidez para excitações da via.

Embora o erro estacionário devido a aplicação da força estática no corpo tenha sido eliminado neste estudo com a introdução de um integrador na força de controle, o sistema ainda permanecerá com erro estacionário para uma excitação em rampa, sendo necessário a adição de um segundo integrador. Isto foi feito por Thompson e Davis em 1988b considerando o mesmo modelo de um quarto de veículo e mudança de variável feita em 1988a. Foi introduzida uma nova variável de estado definida como a integral do deslocamento relativo entre o corpo e o eixo. Para este novo sistema foi utilizada a equação de Riccati considerando na função custo esta nova variável de estado. Desta maneira, o erro estacionário foi eliminado não somente para excitação em forma de rampa mas também para as forças aplicadas no corpo. Este trabalho mostrou também um esquema da possível realização física deste sistema.

Em 1989, Thompson e Davis utilizaram uma massa absorvedora de vibração dinâmica junto à roda para mesmo modelo utilizado em 1988. Primeiramente foi considerada a massa absorvedora com elementos passivos e depois com elementos ativos. Nos dois casos, o conjunto roda, pneu e a massa absorvedora se comportaram como um sistema isolado dentro do modelo, tendo a força de realimentação do corpo pouco efeito sobre esse conjunto, permitindo assim o controle independente dos movimentos do eixo. Foi obtido como resultado a redução da largura de banda da resposta do corpo a excitação da via, tendo-se assim uma melhora na resposta em frequência. O melhor desempenho foi obtido com o amortecedor ativo. De modo análogo aos trabalhos anteriores de Thompson e Davis, foi utilizado um integrador para eliminação do erro estacionário devido à aplicação de força no corpo. Foi visto que a ação do integrador na força aplicada ao corpo juntamente com o controle independente dos movimentos do eixo permitiram uma redução na largura de banda da resposta do corpo à excitação da via. A massa absorvedora com elementos ativos mostrou uma melhor resposta na frequência do que o absorvedor de vibração passivo.

O problema do erro estacionário, causado pela excitação da via e pela força aplicada no corpo do veículo, e a utilização de integradores para eliminação desse erro foi considerado

também por Elmadany em 1990. Neste trabalho, inspirado nos trabalhos de Thompson e Davis, 1988a e 1988b, foi apresentada a teoria de controle integral multivariável, na qual é introduzida uma nova variável de estado no sistema definida como a integral do erro estacionário, ou seja, como a diferença entre a saída e o valor de referência a ser adotado. Foi visto que a ação do integrador fará com que a saída siga o valor de referência e consequentemente se tenha o erro estacionário nulo. Foi considerado o modelo de um quarto de veículo com força aplicada no corpo sujeito a excitações aleatórias e determinísticas. Comparações entre suspensões ativas com e sem integradores mostraram que o primeiro possibilita o controle de atitude do veículo pois o erro estacionário devido a força aplicada no corpo nas curvas, na frenagem e na aceleração é eliminado. Assim para uma suspensão com controle integral é removida a incompatibilidade entre o isolamento da vibração e o controle de atitude.

Além dos trabalhos apresentados acima considerando a introdução de uma suspensão ativa no modelo de um veículo e a comparação do seu desempenho com o de uma suspensão passiva, tem-se também a possibilidade de utilizar amortecedor ativo e semi-ativo. Elmadany e Abduljabbar publicaram, em 1989, um estudo comparativo de desempenho entre suspensões passivas, ativas e amortecedores ativos e semi-ativos incorporados em um modelo de um quarto de veículo excitado por um ruído branco. Considerando o conforto, a segurança e as deflexões da suspensão, os resultados mostraram que os amortecedores ativos e semi-ativos apresentam um índice de desempenho superior quando comparado com a suspensão passiva. Porém, um aumento maior do conforto foi obtido considerando a suspensão completamente ativa. Desta maneira foi concluído que os amortecedores semi-ativos possuem um comportamento próximo da suspensão ativa, necessitando porém de uma menor energia.

Um outro estudo comparando o desempenho da suspensão passiva, ativa e semi-ativa também foi feito por Elmadany e Abduljabbar em 1991. Neste trabalho, foi considerado, porém, um modelo plano com 4 gdl de um veículo com excitação aleatória. Considerando o sistema com todas as variáveis de estado disponíveis ou não, ou seja, com realimentação de estado completa ou limitada, obteve-se para ambos os casos as lei de controle ativa e semi-ativa considerando para este último a equação de restrição passiva, ou seja, o elemento ativo só atua quando a energia requerida do atuador for dissipativa. Assim, para a obtenção da lei de controle da suspensão ativa, incorporada primeiramente no modelo foram necessárias

todas as variáveis de estado, considerando-se então o sistema com realimentação de estado completa. Porém, na obtenção da lei de controle para o amortecedor ativo foi necessária somente a obtenção das variáveis de velocidade, considerando-se, então, o sistema com realimentação de estado limitada. Os resultados mostraram que os amortecedores ativos, apresentam um desempenho próximo com o do sistema com suspensão ativa com realimentação de todas as variáveis de estado, necessitando porém de uma fonte de energia menor. Estes resultados estão de acordo com os obtidos por Elmadany e Abduljabbar, 1989, para o sistema de um quarto de veículo.

Em alguns trabalhos apresentados acima, a lei de controle ótimo para o atuador ativo foi obtida considerando na função custo a aceleração da massa suspensa como medida do conforto. Um outro parâmetro também utilizado como medida do conforto é a variação dessa aceleração, também denominada de *jerk*. Um estudo comparativo entre suspensões ativas e passivas para o modelo de um quarto de veículo, considerando o *jerk* na função custo, foi realizado por Tseng e Hrovat em 1990. Neste trabalho, a aceleração da massa suspensa foi então considerada como uma nova variável de estado e o modelo do sistema aumentado de uma ordem. Para obtenção da lei de controle que minimizasse a função custo foi utilizada a equação de Riccati. Os resultados mostraram que a introdução do *jerk* não causou nenhuma diferença na aceleração da massa suspensa e na resposta da suspensão.

Informações sobre o perfil da via também têm sido usadas para a obtenção da lei de controle de suspensões. Em 1992, Sharp et al utilizaram a previsão da via para um modelo plano e de um quarto de veículo. A lei de controle obtida continha então elementos de realimentação e pós-alimentação, sendo a parte correspondente a realimentação, a mesma que a obtida utilizando a teoria do regulador quadrático linear sem a previsão.

Em 1993, Hac e Youn utilizaram as informações da previsão da via e o tempo de atraso entre os pneus dianteiro e traseiro para a obtenção da lei de controle de suspensões ativas e semi-ativas para um modelo plano de um veículo com 4 gdl. O desempenho destes dois sistemas com e sem a previsão foram avaliados no domínio do tempo e da frequência. Os resultados mostraram que a introdução do tempo de atraso entre os pneus dianteiro e traseiro melhora o comportamento dinâmico do eixo traseiro e o controle do movimento de balanço, enquanto que as informações da previsão melhoram a dinâmica da roda dianteira.

Uma análise comparativa de desempenho entre suspensões passiva, ativa com realimentação de estado completa e limitada para veículos utilizados fora da estrada, foi feita por Barbieri em 1995. Foi utilizado um modelo tridimensional de um veículo com 7 gdl para duas condições de carga (carregado e não carregado) e dois tipos de via (asfalto e pavimento). Os melhores resultados foram obtidos utilizando um sistema ativo com realimentação de estado completa.

## **Capítulo 3.**

### **Modelagem Matemática**

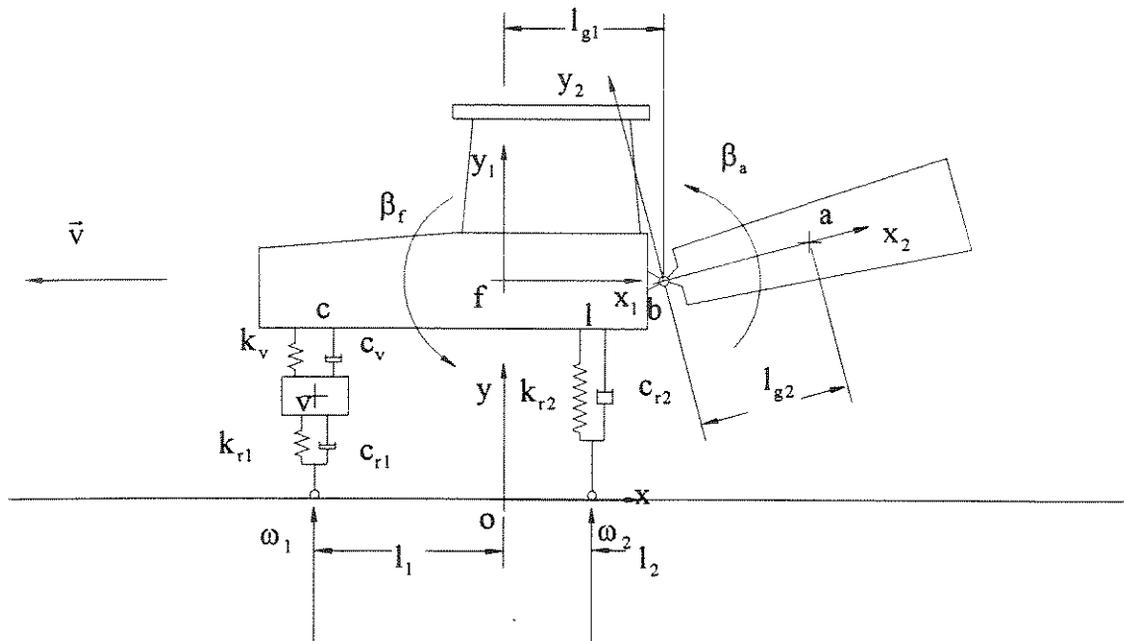
#### **3.1 Introdução**

Neste capítulo serão obtidas as equações de movimento para o modelo do trator com e sem o implemento agrícola. Será feita inicialmente a análise cinemática, definindo-se os sistemas de referência e obtendo-se as matrizes de transformação de coordenadas e os seus vetores de posição, velocidade e aceleração. Em seguida será feita a análise dinâmica, representando-se no diagrama de corpo livre as forças e momentos envolvidos em cada corpo.

Uma vez que não há necessidade de se obter as reações dinâmicas nos apoios, será utilizado o método de Newton-Euler-Jourdain, que se baseia no princípio da potência virtual que estabelece que as forças e momentos de reação não geram potência, permitindo, assim, obter somente as equações de movimento do sistema.

#### **3.2 Trator com o Implemento**

Neste trabalho é considerado inicialmente a obtenção do equacionamento dinâmico do modelo plano do trator com o implemento. A sua representação é mostrada na Figura 3-1, juntamente com os seus graus de liberdade e alguns parâmetros como rigidez e amortecimento dos seus elementos, além das grandezas geométricas.



**Figura 3-1 Modelo plano do trator com o implemento**

Para este sistema tem-se, conforme dito anteriormente, 4 gdl. O eixo dianteiro possui apenas um movimento de translação na direção vertical. O corpo principal possui um movimento de rotação em torno do seu cg e uma translação vertical. Para o implemento tem-se uma rotação relativa definida em relação ao corpo principal.

Obtêm-se as equações de movimento para o sistema mostrado na figura acima através das equações de Newton-Euler-Jourdain, conforme dito anteriormente. Para isso, será adotado o seguinte procedimento, dividido em duas etapas principais:

### 1) Cinemática

- 1.1) Definição dos sistemas de referência a serem adotados;
- 1.2) Obtenção das matrizes de transformação de coordenadas;
- 1.3) Obtenção dos vetores de posição do sistema;
- 1.4) Obtenção dos vetores de velocidade linear e angular absoluta;
- 1.5) Obtenção dos vetores de aceleração linear e angular absoluta.

### 2) Dinâmica

- 2.1) Diagrama de corpo livre;
- 2.2) Representação vetorial das forças envolvidas;
- 2.3) Utilização das equações de Newton-Euler-Jourdain.

## 3.2.1 Cinemática

### 3.2.1.1 Definição dos Sistemas de Coordenadas

Os sistemas de coordenadas adotados para o modelo acima são definidos de modo a facilitar a obtenção do equacionamento dinâmico do trator. Adota-se então sistemas de referência inercial e móvel fixo ao corpo para representação dos movimentos do modelo. Uma vez que os sistemas móveis podem ser divididos em sistema com rotação pura e com translação pura, é possível a composição destes dois movimentos. Isto facilita a formulação do equacionamento, pois os movimentos mais complexos podem ser subdivididos.

O sistema de referência inercial  $xyz$ , representado pelos cursores  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , tem o seu eixo horizontal no mesmo nível da via e o eixo vertical a uma distância igual a  $l_1 \cos(\beta_f)$  da roda dianteira.

Como o corpo do trator possui um movimento de balanço, é definido um sistema de coordenadas móvel  $x_1y_1z_1$ , base B1, representado pelos cursores  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ , solidário a este elemento com origem no seu cg. Logo, tem-se para este sistema uma rotação igual a  $\beta_f$  em torno do seu eixo  $z_1$  com o sentido mostrado na Figura 3-1.

O terceiro sistema de referência definido  $x_2y_2z_2$ , base B2, representado pelos cursores  $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$ , é solidário ao movimento do implemento em relação ao corpo do trator. Assim, tem-se um sistema de coordenadas móvel com rotação igual a  $\beta_a$  em torno do eixo  $z_2$  no sentido indicado na figura e origem no elemento de ligação implemento-corpo principal.

### 3.2.1.2 Obtenção das matrizes de transformação de coordenadas

Com os sistemas de referência definidos, é necessária a obtenção de uma relação entre seus cursores a qual permita a passagem de um sistema para outro. Para isso são obtidas as matrizes de transformação de coordenadas que possibilitem a representação dos vetores em qualquer base.

Como a base B1 é solidária ao corpo do veículo, tem-se então uma rotação igual a  $\beta_f$  em torno do eixo  $z_1$ . Assim a matrix de transformação da base inercial para a base móvel B1 é dada por:

$$[T_{\beta_f}] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\beta_f) & \text{Sen}(\beta_f) & 0 \\ -\text{Sen}(\beta_f) & \text{Cos}(\beta_f) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Logo:

$${}_{B1}\bar{s} = [T_{\beta_f}]_I \bar{s} \quad (3.2)$$

Como as matrizes de transformação de coordenadas são ortogonais, ou seja, a sua inversa é igual a sua transposta, um vetor na base B1 pode ser facilmente representado na base inercial bastando para isso multiplicá-lo pela transposta da matrix de transformação, ou seja:

$${}_I\bar{s} = [T_{\beta_f}]_{B1}^T \bar{s} \quad (3.3)$$

Uma segunda matrix de transformação de coordenadas é obtida para a passagem de vetores da base inercial para a móvel B2. Como esta base é solidária ao movimento do implemento, tem-se para este sistema de referência uma rotação igual a  $\beta_f + \beta_a$  em torno do seu eixo  $z_2$ . Esta matriz é então definida como:

$$[T_{\beta_f + \beta_a}] = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\beta_f + \beta_a) & \text{Sen}(\beta_f + \beta_a) & 0 \\ -\text{Sen}(\beta_f + \beta_a) & \text{Cos}(\beta_f + \beta_a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Assim, tem-se que qualquer vetor na base inercial pode ser representado na base B2. Para isso, basta multiplicá-lo pela matrix  $[T_{\beta_f + \beta_a}]$ , ou seja:

$${}_{B2}\bar{s} = [T_{\beta_f + \beta_a}]_I \bar{s} \quad (3.5)$$

Analogamente ao caso anterior, para fazer a transformação inversa, ou seja, para passar um vetor da base móvel B2 para a base inercial basta multiplicá-lo pela transposta da matriz de transformação de coordenadas:

$${}_I \bar{s} = \left[ T_{\beta_f + \beta_a} \right]_{B2}^T \bar{s} \quad (3.6)$$

Com a obtenção dos sistemas de referência móveis, a representação dos movimentos é feita de uma maneira mais simples, uma vez que vetores que variam no tempo representados na base inercial, passam a ser constantes quando escritos nas bases móveis, caso esses vetores sejam solidários ao movimento dos corpos.

### 3.2.1.3 Obtenção dos vetores de posição do sistema

A seguir são definidos vários vetores de posição do modelo nas bases inercial e móveis B1 e B2, que serão utilizados no equacionamento do trator e na definição das variações dos deslocamentos para obtenção das forças nas molas e amortecedores.

Abaixo são mostrados os vetores de posição do cg dos três corpos principais:

$${}_I \bar{s}_{ov} = \begin{Bmatrix} -l_1 \cos(\beta_f) \\ y_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$${}_I \bar{s}_{of} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

$${}_{B2} \bar{s}_{ba} = \begin{Bmatrix} l_{g2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Os vetores restantes são:

- vetor de posição do ponto de ligação corpo-implemento:

$${}_{B1} \vec{s}_{fb} = \begin{Bmatrix} 1_{g1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

- vetor de posição do ponto de contato da suspensão com o corpo do veículo:

$${}_{B1} \vec{s}_{fc} = \begin{Bmatrix} -1_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

- vetor de posição do ponto de contato da roda traseira com o corpo principal:

$${}_{B1} \vec{s}_{fl} = \begin{Bmatrix} 1_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

- vetor de posição do ponto de contato do pneu traseiro com a via:

$${}_1 \vec{s}_{o\omega_2} = \begin{Bmatrix} 1_2 \cos(\beta_r) \\ \omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

- vetor de posição do ponto de contato do pneu dianteiro com a via:

$${}_1 \vec{s}_{o\omega_1} = \begin{Bmatrix} -1_1 \cos(\beta_r) \\ \omega_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Os vetores de posição angular são dados por:

- vetor de posição angular absoluta do corpo do trator:

$$\vec{\beta}_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_r \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

- vetor de posição angular absoluta do implemento:

$$\bar{\beta}_{fa} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_f + \beta_a \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

A representação dos vetores de posição linear e angular nas suas respectivas bases é mostrada na Figura 3-2 abaixo junto com o modelo do trator:

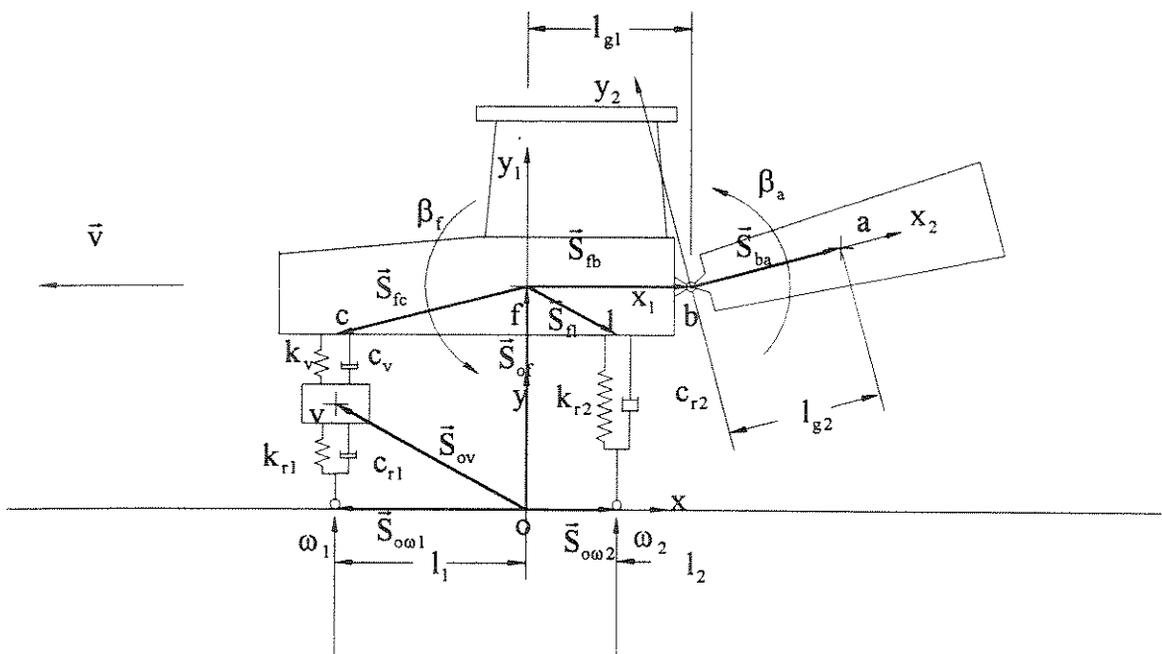


Figura 3-2: Representação dos vetores de posição linear e angular

### 3.2.1.4 Obtenção dos vetores de velocidade angular absoluta

a) Velocidade angular absoluta das bases móveis B1 e B2

Conforme definido anteriormente, o sistema de coordenadas B1 possui uma rotação igual a  $\beta_f$  em torno do seu eixo  $z_1$ , logo o seu vetor de velocidade angular representado na sua base B1 é obtido derivando-se a equação (3.15).

$${}_{B1}\bar{\Omega}_{B1} = \frac{d}{dt}\bar{\beta}_f = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_f \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Como tem-se apenas movimento plano e as rotações são em torno de  $z_1$ , a representação do vetor  $\vec{\Omega}_{B1}$  será a mesma em qualquer dos sistemas de referência considerados no modelo, pois o eixo z de todas as bases são paralelos entre si, logo:

$${}^I\vec{\Omega}_{B1} = {}^{B1}\vec{\Omega}_{B1} = {}^{B2}\vec{\Omega}_{B1} = \vec{\Omega}_{B1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_f \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

A base móvel B2 possui uma velocidade angular absoluta igual a soma da rotação do implemento em relação ao corpo principal com a rotação deste último, logo a sua representação na própria base B2 é obtida derivando-se a equação (3.16):

$${}^{B2}\vec{\Omega}_{B2} = \frac{d}{dt}(\vec{\beta}_{fa}) = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_f + \beta_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_f + \dot{\beta}_a \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Analogamente a base B1, a velocidade angular absoluta da base B2 tem a mesma representação em qualquer das bases consideradas, ou seja:

$${}^I\vec{\Omega}_{B2} = {}^{B1}\vec{\Omega}_{B2} = {}^{B2}\vec{\Omega}_{B2} = \vec{\Omega}_{B2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_f + \dot{\beta}_a \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

#### b) Velocidade angular absoluta do corpo principal e do implemento

Como o corpo principal tem a base B1 solidária ao seu movimento, tem-se que a sua velocidade angular absoluta representada por  $\vec{\omega}_f$  é dada pela equação (3.17):

$$\vec{\omega}_f = \vec{\Omega}_{B1} \quad (3.21)$$

Considerando o mesmo para o implemento e representando sua velocidade angular por  $\vec{\omega}_a$ , tem-se então pela equação (3.19);

$$\vec{\omega}_a = \vec{\Omega}_{B2} \quad (3.22)$$

### 3.2.1.5 Obtenção dos vetores de velocidade linear absoluta

As velocidades lineares absolutas do eixo dianteiro, corpo principal e implemento são obtidas derivando os seus vetores de posição em termos de amplitude e direção.

O eixo dianteiro possui apenas o movimento de translação vertical. A sua velocidade linear é obtida derivando a equação (3.7):

$${}_1\vec{v}_v = \frac{d}{dt}({}_1\vec{s}_{ov}) = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} -l_1 \cos(\beta_f) \\ y_v \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \text{Sen}(\beta_f) \dot{\beta}_f \\ \dot{y}_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Analogamente, a velocidade linear do cg do corpo principal é obtida derivando o seu vetor de posição dado pela equação (3.8):

$${}_1\vec{v}_f = \frac{d}{dt}({}_1\vec{s}_{of}) = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 0 \\ y_f \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{y}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Para a obtenção da velocidade linear do implemento é considerado o seu movimento relativo ao corpo principal, logo tem-se a seguinte expressão:

$${}_1\vec{v}_a = {}_1\vec{v}_b + \vec{\Omega}_{B2} \times {}_1\vec{s}_{ba} + {}_1\vec{v}_{ba} \quad (3.25)$$

onde:

${}_1\vec{v}_b \rightarrow$  velocidade linear absoluta do ponto de ligação corpo principal-implemento.

Este termo é calculado abaixo;

${}_I \vec{v}_{ba} \rightarrow$  velocidade relativa do cg do implemento em relação à rótula. É obtida derivando a equação (3.9) em relação ao tempo. Neste caso como este elemento é modelado como corpo rígido, ou seja,  $l_{g2}$  é constante, tem-se:

$${}_{B2} \vec{v}_{ba} = \frac{d}{dt} ({}_{B2} \vec{s}_{ba}) = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} l_{g2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

$\vec{\Omega}_{B2} \times {}_I \vec{s}_{ba} \rightarrow$  este termo representa a derivada do vetor em termos de direção.

Como todos os vetores acima estão na base inercial, é necessário representar o vetor  ${}_{B2} \vec{s}_{ba}$  também nesta mesma base para que o produto vetorial  $\vec{\Omega}_{B2} \times {}_I \vec{s}_{ba}$  possa ser efetuado. Isto é feito multiplicando este vetor pela transposta da matriz de transformação de coordenadas  $[T_{\beta_f + \beta_a}]$ , ou seja, pela equação (3.6) tem-se:

$${}_I \vec{s}_{ba} = [T_{\beta_f + \beta_a}]^T {}_{B2} \vec{s}_{ba} \quad (3.27)$$

$${}_I \vec{s}_{ba} = \begin{Bmatrix} l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \\ l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Assim, substituindo as equações (3.19) e (3.28) na expressão do produto vetorial, tem-se:

$$\vec{\Omega}_{B2} \times {}_I \vec{s}_{ba} = \begin{Bmatrix} -l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a - l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_f \\ l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a + l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

A velocidade linear absoluta da rótula  ${}_I \vec{v}_b$  é obtida considerando-se o seu movimento em relação ao cg do corpo principal. Assim, de maneira análoga ao caso anterior é usada a seguinte equação:

$${}_I \vec{v}_b = {}_I \vec{v}_f + \vec{\Omega}_{B1} \times {}_I \vec{s}_{fb} + {}_I \vec{v}_{fb} \quad (3.30)$$

onde:

${}_I \vec{v}_f \rightarrow$  velocidade linear do cg do corpo principal dada pela equação (3.24);

${}_I \vec{v}_{fb} \rightarrow$  velocidade relativa do ponto b em relação ao cg do corpo principal. É obtida derivando a equação (3.10) em relação ao tempo, sendo neste caso também nula, pois este corpo é modelado como rígido:

$${}_I \vec{v}_{fb} = \frac{d}{dt} ({}_I \vec{s}_{fb}) = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} l_{g1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

$\vec{\Omega}_{B1} \times {}_I \vec{s}_{fb} \rightarrow$  idêntico ao caso anterior, este termo representa a variação do vetor em termos de direção.

O vetor  ${}_{B1} \vec{s}_{fb}$  é passado da base móvel B1 para a inercial para que todos os vetores estejam na mesma base e possam assim serem somados na equação de  ${}_I \vec{v}_b$ . Fazendo-se a mudança de coordenadas, o vetor  ${}_{B1} \vec{s}_{fb}$  é multiplicado pela transposta da matriz de transformação de coordenadas  $[T_{\beta_f}]$ , ou seja, utilizando a equação (3.3), tem-se

$${}_I \vec{s}_{fb} = [T_{\beta_f}]^T {}_{B1} \vec{s}_{fb} \quad (3.32)$$

$${}_I \vec{s}_{fb} = \begin{Bmatrix} l_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \\ l_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Substituindo-se as equações (3.17) e (3.33) e efetuando o produto vetorial  $\vec{\Omega}_{B1} \times {}_I \vec{s}_{fb}$ :

$$\vec{\Omega}_{B1} \times {}_I \vec{s}_{fb} = \begin{Bmatrix} -l_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \dot{\beta}_f \\ -l_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \dot{\beta}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Escrevendo-se os termos calculados acima na equação (3.30), tem-se:

$${}^I\vec{v}_b = \begin{Bmatrix} -l_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \dot{\beta}_f \\ -l_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \dot{\beta}_f + \dot{y}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Assim, substituindo as equações (3.35), (3.29) e (3.26) em (3.25), tem-se a velocidade linear do implemento dada por:

$${}^I\vec{v}_a = \begin{Bmatrix} -l_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \dot{\beta}_f - l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a - l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_f \\ -l_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \dot{\beta}_f + \dot{y}_f + l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a + l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

### 3.2.1.6 Obtenção dos vetores de aceleração angular absoluta

a) Aceleração angular absoluta das bases móveis B1 e B2

Considerando o movimento de rotação das bases móveis B1 e B2 em torno dos eixos  $z_1$  e  $z_2$ , respectivamente, são calculadas as suas acelerações angulares absolutas, derivando os seus vetores de velocidade angular em relação ao tempo. Considerando primeiramente a base móvel B1, tem-se derivando a equação (3.17):

$${}_{B1}\dot{\vec{\Omega}}_{B1} = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta}_f \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

Analogamente à velocidade angular absoluta, a representação do vetor de aceleração angular será a mesma em qualquer das bases consideradas, pois os eixos de rotação  $z_1$  e  $z_2$  das bases B1 e B2 e o  $z$  da base inercial são paralelos entre si, logo:

$${}^I\dot{\vec{\Omega}}_{B1} = {}_{B1}\dot{\vec{\Omega}}_{B1} = {}_{B2}\dot{\vec{\Omega}}_{B1} = \dot{\vec{\Omega}}_{B1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta}_f \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

A aceleração angular absoluta da base móvel B2 é obtida derivando o vetor de velocidade angular  ${}_{B2}\bar{\Omega}_{B2}$  em relação ao tempo, dado pela equação (3.19).

$${}_{B2}\dot{\bar{\Omega}}_{B2} = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_f + \dot{\beta}_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta}_f + \ddot{\beta}_a \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

De maneira análoga, esta aceleração angular também terá a mesma representação nas bases B1, B2 e inercial, ou seja:

$${}_{I}\dot{\bar{\Omega}}_{B2} = {}_{B1}\dot{\bar{\Omega}}_{B2} = {}_{B2}\dot{\bar{\Omega}}_{B2} = \dot{\bar{\Omega}}_{B2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_f + \dot{\beta}_a \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

#### b) Aceleração angular absoluta do corpo principal e implemento

A aceleração angular absoluta do corpo principal é igual a aceleração angular da base móvel B1, pois esta é solidária ao seu movimento, assim considerando a equação (3.37):

$$\dot{\bar{\omega}}_f = \dot{\bar{\Omega}}_{B1} \quad (3.41)$$

Analogamente, a aceleração angular do implemento é obtida pela equação (3.39):

$$\dot{\bar{\omega}}_a = \dot{\bar{\Omega}}_{B2} \quad (3.42)$$

#### 3.2.1.7 Obtenção dos vetores de aceleração linear absoluta

Considerando-se primeiramente o eixo dianteiro, obtêm-se a sua aceleração linear absoluta derivando o seu vetor de velocidade linear  ${}_{I}\bar{v}_v$  dado pela equação (3.23) em relação ao tempo:

$${}_I \bar{a}_v = \frac{d}{dt} ({}_I \bar{v}_v) = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} l_1 \text{Sen}(\beta_f) \dot{\beta}_f \\ \dot{y}_v \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \text{Cos}(\beta_f) \dot{\beta}_f^2 + l_1 \text{Sen}(\beta_f) \ddot{\beta}_f \\ \ddot{y}_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

A aceleração linear do corpo principal é obtida de modo análogo considerando a equação (3.24), logo:

$${}_I \bar{a}_f = \frac{d}{dt} ({}_I \bar{v}_f) = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{y}_f \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{y}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Para o implemento é considerado o seu movimento relativo ao corpo do veículo. Assim, derivando a sua velocidade linear absoluta dada pela equação (3.25) em relação ao tempo, tem-se:

$${}_I \bar{a}_a = {}_I \bar{a}_b + \bar{\Omega}_{B2} \times (\bar{\Omega}_{B2} \times {}_I \bar{s}_{ba}) + (\dot{\bar{\Omega}}_{B2} \times {}_I \bar{s}_{ba}) + 2\bar{\Omega}_{B2} \times {}_I \bar{v}_{ba} + {}_I \bar{a}_{ba} \quad (3.45)$$

onde:

${}_I \bar{a}_b \rightarrow$  aceleração linear absoluta da ligação implemento-corpo do veículo;

$\bar{\Omega}_{B2} \times (\bar{\Omega}_{B2} \times {}_I \bar{s}_{ba}) \rightarrow$  aceleração normal do implemento. Este termo é responsável pela variação da velocidade em termos de direção. Substituindo as equações (3.19) e (3.28), tem-se:

$$\bar{\Omega}_{B2} \times (\bar{\Omega}_{B2} \times {}_I \bar{s}_{ba}) = \begin{Bmatrix} -l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a^2 - 2l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a \dot{\beta}_f - l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_f^2 \\ -l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a^2 - 2l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a \dot{\beta}_f - l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_f^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

$\dot{\bar{\Omega}}_{B2} \times {}_I \bar{s}_{ba} \rightarrow$  aceleração tangencial do implemento. Substituindo as equações (3.39) e (3.28), tem-se:

$$\dot{\bar{\Omega}}_{B2} \times_I \bar{s}_{ba} = \begin{Bmatrix} -1_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_a - 1_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_f \\ 1_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_a + 1_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

$2\bar{\Omega}_{B2} \times_I \bar{v}_{ba} \rightarrow$  variação da velocidade relativa do cg do implemento em relação a rótula em termos de direção. É a aceleração de Coriolis. Substituindo as equações (3.19) e (3.26):

$$2\bar{\Omega}_{B2} \times_I \bar{v}_{ba} = 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_f + \dot{\beta}_a \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

${}_I \bar{a}_{ba} \rightarrow$  aceleração do cg do implemento em relação ao seu ponto de ligação com o corpo principal. É obtida derivando-se a equação (3.9) duas vezes:

$${}_{B2} \bar{a}_{ba} = \frac{d^2}{dt^2} ({}_{B2} \bar{s}_{ba}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

Como a rótula possui um movimento relativo ao cg do corpo do veículo, a sua aceleração linear absoluta  ${}_I \bar{a}_b$  é obtida através da seguinte expressão:

$${}_I \bar{a}_b = {}_I \bar{a}_f + \bar{\Omega}_{B1} \times (\bar{\Omega}_{B1} \times_I \bar{s}_{fb}) + \left( \dot{\bar{\Omega}}_{B1} \times_I \bar{s}_{fb} \right) + 2\bar{\Omega}_{B1} \times_I \bar{v}_{fb} + {}_I \bar{a}_{fb} \quad (3.50)$$

onde:

${}_I \bar{a}_f \rightarrow$  aceleração linear absoluta do cg do corpo principal dada pela equação (3.44)

$\bar{\Omega}_{B1} \times (\bar{\Omega}_{B1} \times_I \bar{s}_{fb}) \rightarrow$  aceleração normal da rótula. É obtida substituindo as equações (3.17) e (3.33).

$$\bar{\Omega}_{B1} \times (\bar{\Omega}_{B1} \times_I \bar{s}_{fb}) = \begin{Bmatrix} -1_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \dot{\beta}_f^2 \\ -1_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \dot{\beta}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

$\dot{\bar{\Omega}}_{B1} \times_I \bar{s}_{fb}$  → aceleração tangencial da rótula. É obtida substituindo as equações (3.37) e (3.33).

$$\dot{\bar{\Omega}}_{B1} \times_I \bar{s}_{fb} = \begin{Bmatrix} -1_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \ddot{\beta}_f \\ 1_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \ddot{\beta}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

$2\bar{\Omega}_{B1} \times_I \bar{v}_{fb}$  → variação da velocidade relativa da rótula em relação ao cg do corpo principal em termos de direção. É a aceleração de Coriolis. Substituindo as equações (3.17) e (3.31), tem-se:

$$2\bar{\Omega}_{B1} \times_I \bar{v}_{fb} = 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_f \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

${}_I \bar{a}_{fb}$  → aceleração da rótula em relação ao cg do corpo principal. É obtida derivando-se a equação (3.10) duas vezes:

$${}_{B1} \bar{a}_{fb} = \frac{d^2}{dt^2} ({}_{B1} \bar{s}_{fb}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

Substituindo as equações (3.44), (3.51), (3.52), (3.53) e (3.54) na equação (3.50) obtém-se a aceleração linear absoluta  ${}_I \bar{a}_b$ :

$${}_I \bar{a}_b = \begin{Bmatrix} -1_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \dot{\beta}_f^2 - 1_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \ddot{\beta}_f \\ -1_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \dot{\beta}_f + 1_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \ddot{\beta}_f + \ddot{y}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

A aceleração linear absoluta do cg do implemento é obtida substituindo-se as equações (3.55), (3.46), (3.47), (3.48) e (3.49) na equação (3.45)

$${}^1\bar{a}_a = \begin{pmatrix} \{-l_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \dot{\beta}_f^2 - l_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \ddot{\beta}_f - l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a^2 - 2l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a \dot{\beta}_f \\ - l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_f^2 - l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_a + -l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_f \} \\ \{-l_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \dot{\beta}_f + l_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \ddot{\beta}_f + \ddot{y}_f - l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a^2 - 2l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a \dot{\beta}_f + \\ - l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_f^2 + l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_a + l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_f \} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

### 3.2.2 Dinâmica

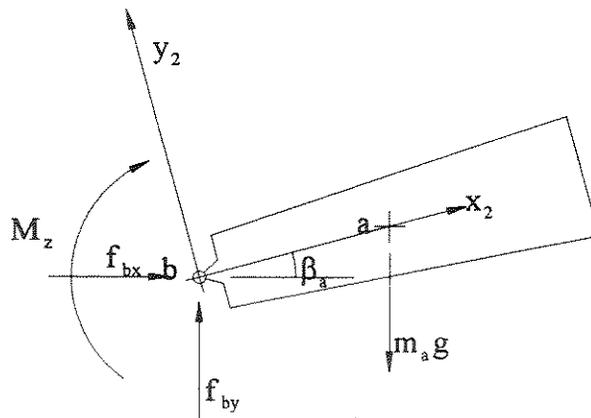
Após a análise cinemática do modelo considerado, com a obtenção dos vetores de posição, velocidade e aceleração lineares e angulares de vários pontos do modelo, parte-se para a segunda etapa para obtenção das equações de movimento: a análise dinâmica.

Como o objetivo é a obtenção apenas das equações de movimento, não sendo necessária a obtenção das expressões das reações dinâmicas, é utilizado o método de Newton-Euler-Jourdain, o qual é baseado no princípio da potência virtual (princípio de Jourdain), cujo enunciado diz que as forças e momentos de reação não geram potência, e no princípio do trabalho virtual que diz que estas forças e momentos não realizam trabalho. É necessário então obter-se vetores de velocidade virtual que só variem nas direções dos graus de liberdade do sistema. Isto é feito derivando os vetores de velocidade em relação aos graus de liberdade do corpo, ou seja, através do jacobiano de translação e rotação. Assim, considerando o sistema com três corpos, tem-se o princípio de Newton-Euler-Jourdain dado por [Santos, 1996]:

$$\sum_{i=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}} \right)^T \left( - \sum_{j=1}^n {}_I \bar{F}_{E_j} + m_{i1} \bar{a}_i \right) + \left( \frac{\partial {}_{B_i} \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}} \right)^T \left( - \sum_{j=1}^n {}_I \bar{M}_{E_j} + I_{O_i} \frac{d {}_{B_i} \bar{\omega}_i}{dt} + {}_{B_i} \bar{\Omega}_i \times (I_{O_i \cdot B_i} \bar{\omega}_i) + m_{i \cdot B_i} \bar{r}_{O_i} \times {}_I \bar{a}_{O_i} \right) \right] = 0 \quad (3.57)$$

Para cada um dos corpos é considerado primeiramente o seu dcl com todas as forças e momentos a que está submetido e em seguida é imposto o seu equilíbrio dinâmico através das equações de Newton-Euler.

Analisando primeiro o implemento (corpo a), tem-se o seu dcl mostrado na Figura 3-3 junto com o sistema de referência B2:



**Figura 3-3 dcl do implemento**

Chamando  $\bar{P}_a$  a força peso do implemento aplicada no seu cg, tem-se

$${}_I \bar{P}_a = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_a g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

A força de reação da ligação do implemento com o corpo do veículo não é levada em consideração, pois é efetuado o somatório somente das forças externas que atuam no corpo. Assim, utilizando a equação de Newton, tem-se:

$$\sum_I \bar{F}_{E_{imp}} + \sum_I \bar{R}_{imp} = m_a {}_I \bar{a}_a \quad (3.59)$$

Resolvendo para  $\sum_I \bar{R}_{imp}$ :

$$\sum_I \bar{R}_{imp} = -\sum_I \bar{F}_{E_{imp}} + m_a {}_I \bar{a}_a \quad (3.60)$$

Efetuando o somatório das forças externas e substituindo o vetor de aceleração  ${}_I \bar{a}_a$  dado pela equação (3.56), tem-se que:

$$\sum_I \bar{R}_{imp} = -\begin{Bmatrix} 0 \\ -m_a \mathbf{g} \\ 0 \end{Bmatrix} + m_a \begin{Bmatrix} \{-1_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \dot{\beta}_f^2 - 1_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \ddot{\beta}_f - 1_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a^2 - 21_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a \dot{\beta}_f \\ - 1_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_f^2 - 1_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_a + -1_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_f\} \\ \{-1_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \dot{\beta}_f + 1_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \ddot{\beta}_f + \ddot{y}_f - 1_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a^2 - 21_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a \dot{\beta}_f + \\ - 1_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_f^2 + 1_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_a + 1_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_f\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

O momento  ${}_I \bar{M}_b$  mostrado na figura é exercido pela rótula:

$${}_I \bar{M}_b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_z \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

De modo análogo ao que foi dito na representação dos vetores de velocidade e aceleração angular, o momento  $\vec{M}_b$  possui a mesma representação em qualquer base:

$${}_I \vec{M}_b = {}_{B1} \vec{M}_b = {}_{B2} \vec{M}_b = \vec{M}_b \quad (3.63)$$

Considerando que a rótula possui uma rigidez e um amortecimento torsionais dados por  $k_a$  e  $c_a$ , a componente z de  $\vec{M}_b$  é dada por:

$$M_z = k_a \beta_a + c_a \dot{\beta}_a \quad (3.64)$$

Para utilização da equação de Euler é considerada a base móvel B2, onde o tensor de inércia permanece constante. Logo, tem-se um equacionamento mais simples, pois a derivada do tensor de inércia é nula:

$$\sum_{B2} \vec{M}_{R_{imp}} + \sum_{B2} \vec{M}_{E_{imp}} = {}_{B2} I_{a\ B2} \dot{\vec{\omega}}_a + {}_{B2} \vec{\Omega}_{B2} \times ({}_{B2} I_{a\ B2} \vec{\omega}_a) + m_{a\ B2} \vec{r}_{a-cm} \times {}_{B2} \vec{a}_a \quad (3.65)$$

Resolvendo para  $\sum_{B2} \vec{M}_{R_{imp}}$ :

$$\sum_{B2} \vec{M}_{R_{imp}} = -\sum_{B2} \vec{M}_{E_{imp}} + {}_{B2} I_{a\ B2} \dot{\vec{\omega}}_a + {}_{B2} \vec{\Omega}_{B2} \times ({}_{B2} I_{a\ B2} \vec{\omega}_a) + m_{a\ B2} \vec{r}_{a-cm} \times {}_{B2} \vec{a}_a \quad (3.66)$$

onde:

$I_a \rightarrow$  tensor de inércia do implemento em relação ao seu cg, sendo dado por:

$$I_a = \begin{bmatrix} I_{a_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{a_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{a_{zz}} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

${}_{B2} \vec{r}_{a-cm} \rightarrow$  vetor que tem origem no ponto “a” e extremidade no cm do corpo. Neste caso como o ponto “a” coincide com o cm, tem-se:

$${}_{B2}\vec{r}_{a-cm} = \vec{0} \quad (3.68)$$

Efetando o somatório de momentos externos em torno do ponto "a" e calculando cada termo da equação de Euler, tem-se:

$$\sum {}_{B2}\vec{M}_{E_{imp}} = \vec{M}_b \quad (3.69)$$

$${}_{B2}I_{aB2}\dot{\vec{\omega}}_a = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{a_{zz}}(\ddot{\beta}_f + \ddot{\beta}_a) \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

Como os vetores  ${}_{B2}\vec{\Omega}_{B2}$  e  ${}_{B2}\vec{\omega}_a$  são iguais, tem-se:

$${}_{B2}\vec{\Omega}_{B2} \times ({}_{B2}I_{aB2}\vec{\omega}_a) = \vec{0} \quad (3.71)$$

Como  ${}_{B2}\vec{r}_{a-cm} = \vec{0}$ , tem-se

$$m_{aB2}\vec{r}_{a-cm} \times {}_{B2}\vec{a}_a = \vec{0} \quad (3.72)$$

Assim, substituindo-se (3.69), (3.70), (3.71) e (3.72) em (3.66):

$$\sum {}_{B2}\vec{M}_{R_{imp}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z + I_{a_{zz}}(\ddot{\beta}_f + \ddot{\beta}_a) \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

Considerando a velocidade linear  ${}_I\vec{v}_a$  do implemento dada pela equação (3.36), obtém-se o jacobiano de translação derivando as componentes dessa velocidade em relação às coordenadas de velocidade do sistema, ou seja,  $\dot{y}_v$ ,  $\dot{y}_f$ ,  $\dot{\beta}_f$  e  $\dot{\beta}_a$ . Assim,

$${}^I J_{v_{imp}} = \frac{\partial {}^I \vec{v}_a}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^I v_{a_x}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial {}^I v_{a_x}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial {}^I v_{a_x}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial {}^I v_{a_x}}{\partial \dot{\beta}_a} \\ \frac{\partial {}^I v_{a_y}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial {}^I v_{a_y}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial {}^I v_{a_y}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial {}^I v_{a_y}}{\partial \dot{\beta}_a} \\ \frac{\partial {}^I v_{a_z}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial {}^I v_{a_z}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial {}^I v_{a_z}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial {}^I v_{a_z}}{\partial \dot{\beta}_a} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$${}^I J_{v_{imp}} = \frac{\partial {}^I \vec{v}_a}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_{g1} \text{Sen}(\beta_f) - l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) & -l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \\ 0 & 1 & l_{g1} \text{Cos}(\beta_f) + l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) & l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

O jacobiano de rotação do implemento é obtido de maneira análoga considerando-se a velocidade angular  $\vec{\omega}_a$  dada pela equação (3.22):

$${}^{B2} J_{\omega_{imp}} = \frac{\partial \vec{\omega}_a}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^I \omega_{a_x}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial {}^I \omega_{a_x}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial {}^I \omega_{a_x}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial {}^I \omega_{a_x}}{\partial \dot{\beta}_a} \\ \frac{\partial {}^I \omega_{a_y}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial {}^I \omega_{a_y}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial {}^I \omega_{a_y}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial {}^I \omega_{a_y}}{\partial \dot{\beta}_a} \\ \frac{\partial {}^I \omega_{a_z}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial {}^I \omega_{a_z}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial {}^I \omega_{a_z}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial {}^I \omega_{a_z}}{\partial \dot{\beta}_a} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$${}^{B2} J_{\omega_{imp}} = \frac{\partial \vec{\omega}_a}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

O próximo elemento considerado é o corpo principal do trator submetido as seguintes forças e momentos conforme dcl mostrado na Figura 3-4:

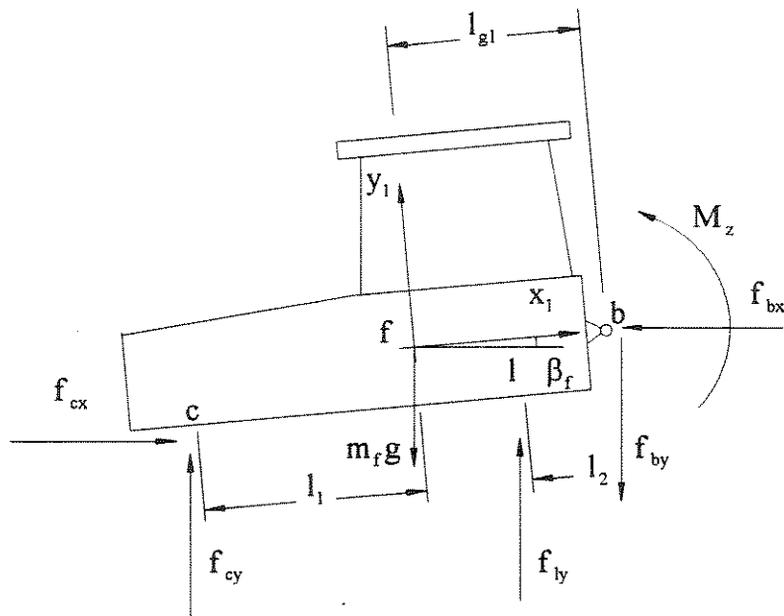


Figura 3-4 dcl do corpo principal

Chamando  ${}_1\bar{P}_f$  a força peso do corpo atuando no seu cg, tem-se:

$${}_1\bar{P}_f = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_f g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

Os vetores  ${}_1\bar{F}_c$  e  ${}_1\bar{F}_l$  são as forças de mola exercida pela suspensão e pelo pneu traseiro, respectivamente, sendo todos representados na base inercial, pois suas componentes são consideradas paralelos ao eixo  $y$  desta base, logo:

$${}_1\bar{F}_c = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{cy} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.79)$$

$${}_1\bar{F}_l = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{ly} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

A componente  $f_{cy}$  é exercida pela suspensão considerando a sua rigidez  $k_v$  e o seu amortecimento  $c_v$ , logo:

$$f_{cy} = k_v \Delta_{fcv} + c_v \dot{\Delta}_{fcv} \quad (3.81)$$

onde  $\Delta_{fcv}$  é a deflexão sofrida pela suspensão e é dada pela diferença entre o vetor de posição do ponto “v” e o vetor de posição do ponto “c”:

$$\Delta_{fcv} = {}_I \vec{s}_{ov} - {}_I \vec{s}_{oc} \quad (3.82)$$

Para obtenção do vetor  ${}_I \vec{s}_{oc}$  é considerado o movimento de balanço e de translação vertical do corpo principal, ou seja:

$${}_I \vec{s}_{oc} = {}_I \vec{s}_{of} + {}_I \vec{s}_{fc} \quad (3.83)$$

Considerando a equação (3.3) o vetor  ${}_I \vec{s}_{fc}$  é obtido multiplicando o vetor  ${}_{B1} \vec{s}_{fc}$  pela transposta da matriz de transformação da base B1:

$${}_I \vec{s}_{oc} = {}_I \vec{s}_{of} + [T_{\beta_f}]^T {}_{B1} \vec{s}_{fc} \quad (3.84)$$

$${}_I \vec{s}_{oc} = \begin{Bmatrix} -l_1 \cos(\beta_f) \\ -l_1 \sin(\beta_f) + y_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.85)$$

Substituindo (3.7) e (3.85) em (3.82), tem-se:

$$\Delta_{fcv} = \begin{Bmatrix} 0 \\ l_1 \sin(\beta_f) - y_f + y_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.86)$$

Derivando-se a equação (3.86), tem-se:

$$\dot{\Delta}_{fcv} = \begin{Bmatrix} 0 \\ l_1 \text{Cos}(\beta_f) \dot{\beta}_f - \dot{y}_f + \dot{y}_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.87)$$

Assim, considerando as equações (3.86) e (3.87) e substituindo a componente  $y$  em (3.81), tem-se a força exercida pela mola:

$$f_{cy} = k_v (l_1 \text{Sen}(\beta_f) - y_f + y_v) + c_v (l_1 \text{Cos}(\beta_f) \dot{\beta}_f - \dot{y}_f + \dot{y}_v) \quad (3.88)$$

De maneira análoga, a componente  $f_{ly}$  é exercida pelo pneu traseiro considerando a sua rigidez  $k_{r2}$  e amortecimento  $c_{r2}$ , ou seja:

$$f_{ly} = k_{r2} \Delta_{fv} + c_{r2} \dot{\Delta}_{fv} \quad (3.89)$$

onde  $\Delta_{fv}$  representa a deflexão do pneu traseiro, a qual é dada pela diferença entre o vetor de posição do ponto de contato do pneu traseiro com a via e o vetor de posição do ponto 1, ambos representados na base inercial:

$$\Delta_{fv} = {}_1\bar{s}_{o\omega_2} - {}_1\bar{s}_{o1} \quad (3.90)$$

O vetor  ${}_1\bar{s}_{o1}$  é obtido considerando o movimento do corpo principal:

$${}_1\bar{s}_{o1} = {}_1\bar{s}_{of} + {}_1\bar{s}_{f1} \quad (3.91)$$

Considerando a equação (3.3) o vetor  ${}_1\bar{s}_{f1}$  é obtido multiplicando o vetor  ${}_{B1}\bar{s}_{f1}$  pela transposta da matrix  $[T_{\beta_f}]$ :

$${}_1\bar{s}_{o1} = {}_1\bar{s}_{of} + [T_{\beta_f}]^T {}_{B1}\bar{s}_{f1} \quad (3.92)$$

$${}_1\bar{s}_{oi} = \begin{Bmatrix} l_2 \text{Cos}(\beta_f) \\ l_2 \text{Sen}(\beta_f) + y_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.93)$$

Substituindo-se a equação (3.13) e (3.93) em (3.90), tem-se:

$$\Delta_{nv} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -l_2 \text{Sen}(\beta_f) + \omega_2 - y_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.94)$$

A sua derivada é então dada por:

$$\dot{\Delta}_{nv} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -l_2 \text{Cos}(\beta_f)\dot{\beta}_f + \dot{\omega}_2 - \dot{y}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.95)$$

Considerando as equações (3.94) e (3.95) e substituindo a componente  $y$  em (3.89), obtém-se a força exercida pelo pneu traseiro:

$$f_{ly} = k_{r2}(-l_2 \text{Sen}(\beta_f) + \omega_2 - y_f) + c_{r2}(-l_2 \text{Cos}(\beta_f)\dot{\beta}_f + \dot{\omega}_2 - \dot{y}_f) \quad (3.96)$$

A força de reação  $f_{cx}$  não é levada em consideração no somatório das forças.

Considerando a massa do corpo principal e sua aceleração linear absoluta, e sabendo-se que este corpo está sujeito a três forças externas aplicadas, tem-se que a equação de Newton é dada por:

$$\sum_I \bar{F}_{E_{corp}} + \sum_I \bar{R}_{corp} = m_f \bar{a}_f \quad (3.97)$$

$$\sum_I \bar{R}_{corp} = -\sum_I \bar{F}_{E_{corp}} + m_f \bar{a}_f \quad (3.98)$$

Efetuando o somatório das três forças, tem-se:

$$\sum_I \vec{R}_{\text{corp}} = -\left({}_I \vec{P}_f + {}_I \vec{F}_c + {}_I \vec{F}_l\right) + m_f {}_I \vec{a}_f \quad (3.99)$$

Substituindo a aceleração  ${}_I \vec{a}_f$  dada pela equação (3.44) e as equações (3.78), (3.79) e (3.80) em (3.99), tem-se:

$$\sum_I \vec{R}_{\text{corp}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -f_{cy} - f_{ly} + m_f g + m_f \ddot{y}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.100)$$

Os momentos gerados por cada uma das forças externas a que o corpo está submetido são calculados em relação ao seu cg. O sistema de referência adotado pode ser qualquer, pois o momento terá a mesma representação em qualquer base. Considerando o sistema B1, tem-se que o momento devido a força de reação  $\vec{F}_c$  é dado por:

$${}_{B1} \vec{M}_{fc} = {}_{B1} \vec{s}_{fc} \times {}_{B1} \vec{F}_c \quad (3.101)$$

Para passar  ${}_I \vec{F}_c$  para a base B1, multiplica-se este vetor pela matriz de transformação de coordenada  $[T_{\beta_f}]$  conforme equação (3.2), logo:

$${}_{B1} \vec{M}_{fc} = {}_{B1} \vec{s}_{fc} \times [T_{\beta_f}]_I \vec{F}_c \quad (3.102)$$

$${}_{B1} \vec{M}_{fc} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -f_{cy} l_1 \text{Cos}(\beta_f) \end{Bmatrix} \quad (3.103)$$

De modo análogo, o momento gerado pela força  $\vec{F}_l$  é dado por:

$${}_{B1} \vec{M}_{fl} = {}_{B1} \vec{s}_{fl} \times {}_{B1} \vec{F}_l \quad (3.104)$$

Passando o vetor  ${}_I \vec{F}_l$  para a base B1 conforme equação (3.2):

$${}_{B1}\vec{M}_f = {}_{B1}\vec{s}_f \times [T_{\beta_f}]_I \vec{F}_f ; \quad (3.105)$$

$${}_{B1}\vec{M}_f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_y I_2 \cos(\beta_f) \end{Bmatrix} \quad (3.106)$$

Como a força peso  ${}_I\vec{P}_f$  atua no cg do corpo, tem-se que o seu momento em relação a este ponto será nulo.

Fazendo a mesma consideração sobre a representação dos momentos aplicados no implemento, tem-se então para o corpo principal que:

$${}_I\vec{M}_{fc} = {}_{B1}\vec{M}_{fc} = {}_{B2}\vec{M}_{fc} = \vec{M}_{fc} \quad (3.107)$$

$${}_I\vec{M}_f = {}_{B1}\vec{M}_f = {}_{B2}\vec{M}_f = \vec{M}_f \quad (3.108)$$

O sistema de referência usado para utilização da equação de Euler será a base móvel B1, pois o tensor de inércia do corpo é independente do tempo quando escrito nesta base. Isto ocorre porque a base B1 é solidária aos movimentos do corpo principal. Logo,

$$\sum_{B1} \vec{M}_{R_{corp}} + \sum_{B1} \vec{M}_{E_{corp}} = {}_{B1}I_f \dot{\vec{\omega}}_f + {}_{B1}\vec{\Omega}_{B1} \times ({}_{B1}I_f \vec{\omega}_f) + m_f {}_{B1}\vec{r}_{f-cm} \times {}_{B1}\vec{a}_f \quad (3.109)$$

Resolvendo para  $\sum_{B1} \vec{M}_{R_{corp}}$  :

$$\sum_{B1} \vec{M}_{R_{corp}} = -\sum_{B1} \vec{M}_{E_{corp}} + {}_{B1}I_f \dot{\vec{\omega}}_f + {}_{B1}\vec{\Omega}_{B1} \times ({}_{B1}I_f \vec{\omega}_f) + m_f {}_{B1}\vec{r}_{f-cm} \times {}_{B1}\vec{a}_f \quad (3.110)$$

onde:

$I_f \rightarrow$  tensor de inércia do corpo principal em relação ao seu cg, sendo dado por:

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{f_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{f_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{f_{zz}} \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

${}_{B1}\vec{r}_{f-cm} \rightarrow$  vetor posição do cg com origem no ponto “f”. Como “f” coincide com o próprio cg, este vetor é nulo:

$${}_{B1}\vec{r}_{f-cm} = \vec{0} \quad (3.112)$$

Efetuada o somatório dos momentos externos e calculando cada um dos termos a serem somados na equação de Euler, tem-se que:

$$\sum {}_{B1}\vec{M}_{E_{corp}} = {}_{B1}\vec{M}_{fc} + {}_{B1}\vec{M}_{fl} - {}_{B1}\vec{M}_b = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -f_{cy}l_1 \text{Cos}(\beta_f) + f_{ly}l_2 \text{Cos}(\beta_f) + M_z \end{array} \right\} \quad (3.113)$$

$${}_{B1}\mathbf{I}_f {}_{B1}\dot{\vec{\omega}}_f = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \mathbf{I}_{f_{zz}} \ddot{\beta}_f \end{array} \right\} \quad (3.114)$$

Como os vetores  ${}_{B1}\vec{\Omega}_{B1}$  e  ${}_{B1}\vec{\omega}_f$  são iguais, tem-se:

$${}_{B1}\vec{\Omega}_{B1} \times ({}_{B1}\mathbf{I}_f {}_{B1}\vec{\omega}_f) = \vec{0} \quad (3.115)$$

Como  $\vec{r}_{f-cm} = \vec{0}$ ,

$$m_f {}_{B1}\vec{r}_{f-cm} \times {}_{B1}\vec{a}_f = \vec{0} \quad (3.116)$$

Substituindo-se as equações (3.113), (3.114), (3.115) e (3.116) em (3.110):

$$\sum {}_{B1}\vec{M}_{R_{corp}} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ f_{cy}l_1 \text{Cos}(\beta_f) - f_{ly}l_2 \text{Cos}(\beta_f) - M_z + \mathbf{I}_{f_{zz}} \ddot{\beta}_f \end{array} \right\} \quad (3.117)$$

O jacobiano de translação é obtido considerando-se a velocidade linear  ${}_I \vec{v}_f$  dada pela equação (3.24). Assim,

$${}_I \mathbf{J}_{v_{corp}} = \frac{\partial {}_I \vec{v}_f}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}_I v_{f_x}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial {}_I v_{f_x}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial {}_I v_{f_x}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial {}_I v_{f_x}}{\partial \dot{\beta}_a} \\ \frac{\partial {}_I v_{f_y}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial {}_I v_{f_y}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial {}_I v_{f_y}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial {}_I v_{f_y}}{\partial \dot{\beta}_a} \\ \frac{\partial {}_I v_{f_z}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial {}_I v_{f_z}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial {}_I v_{f_z}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial {}_I v_{f_z}}{\partial \dot{\beta}_a} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

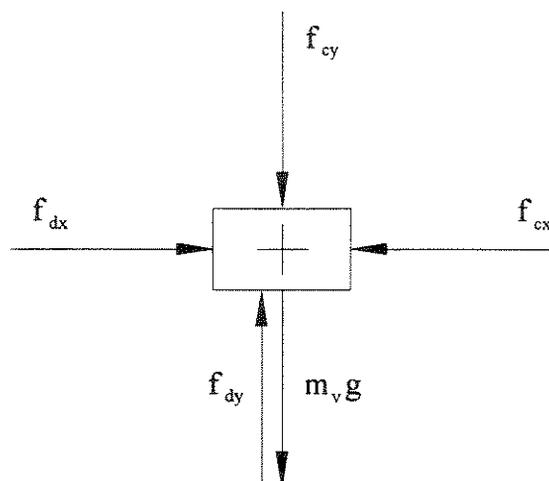
$${}_I \mathbf{J}_{v_{corp}} = \frac{\partial {}_I \vec{v}_f}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

De modo análogo, o jacobiano de rotação do corpo principal é obtido considerando-se a velocidade angular  $\vec{\omega}_f$  dada pela equação (3.21):

$${}_{BI} \mathbf{J}_{\omega_{corp}} = \frac{\partial \vec{\omega}_f}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}_I \omega_{a_x}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial {}_I \omega_{a_x}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial {}_I \omega_{a_x}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial {}_I \omega_{a_x}}{\partial \dot{\beta}_a} \\ \frac{\partial {}_I \omega_{a_y}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial {}_I \omega_{a_y}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial {}_I \omega_{a_y}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial {}_I \omega_{a_y}}{\partial \dot{\beta}_a} \\ \frac{\partial {}_I \omega_{a_z}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial {}_I \omega_{a_z}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial {}_I \omega_{a_z}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial {}_I \omega_{a_z}}{\partial \dot{\beta}_a} \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

$${}_{BI} \mathbf{J}_{\omega_{corp}} = \frac{\partial \vec{\omega}_f}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

O último elemento considerado para obtenção das equações de movimento do trator é o eixo dianteiro. O seu dcl é mostrado na Figura 3-5:



**Figura 3-5: dcl do eixo dianteiro**

Chamando  ${}_1\vec{P}_v$  a força peso do eixo dianteiro, tem-se:

$${}_1\vec{P}_v = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_v g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.122)$$

O vetor  $-{}_1\vec{F}_c$  representa a força exercida pela suspensão. O sinal negativo é devido à inversão no seu sentido em relação a sua representação anterior no dcl do corpo principal:

$$-{}_1\vec{F}_c = \begin{Bmatrix} 0 \\ -f_{cy} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.123)$$

A força  ${}_1\vec{F}_d$  representa a força de reação exercida pelo pneu dianteiro.

$${}_1\vec{F}_d = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{dy} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.124)$$

Considerando a rigidez  $k_{r1}$  e o amortecimento  $c_{r1}$  da roda dianteira, tem-se que a componente  $f_{dy}$  é dada por:

$$f_{dy} = k_{r1} \Delta_{fdv} + c_{r1} \dot{\Delta}_{fdv} \quad (3.125)$$

onde  $\Delta_{fdv}$  representa o deslocamento relativo do eixo dianteiro em relação à via, ou seja, é a diferença entre o vetor de posição do ponto de contato do pneu com a via e o vetor de posição do eixo dianteiro. Representando ambos na base inercial:

$$\Delta_{fdv} = {}_I \bar{s}_{oo_1} - {}_I \bar{s}_{ov} \quad (3.126)$$

Substituindo  ${}_I \bar{s}_{oo_1}$  e  ${}_I \bar{s}_{ov}$  dados pelas equações (3.14) e (3.7) em (3.126):

$$\Delta_{fdv} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 - y_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.127)$$

Derivando a equação (3.127) em relação ao tempo, tem-se:

$$\dot{\Delta}_{fdv} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\omega}_1 - \dot{y}_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.128)$$

Assim, a força da roda dianteira é obtida considerando as equações (3.127) e (3.128) e substituindo a componente  $y$  em (3.125):

$$f_{dy} = k_{r1} (\omega_1 - y_v) + c_{r1} (\dot{\omega}_1 - \dot{y}_v) \quad (3.129)$$

De modo análogo, a força de reação  $f_{dx}$  também não é considerada no somatório das forças.

Sabendo-se que este corpo está submetido a três forças externas e que a sua aceleração linear é representada por  $\vec{a}_v$ , tem-se a equação de Newton:

$$\sum_I \vec{F}_{E_{eixo}} + \sum_I \vec{R}_{eixo} = m_v \vec{a}_v \quad (3.130)$$

Logo,

$$\sum_I \vec{R}_{eixo} = -\sum_I \vec{F}_{E_{eixo}} + m_v \vec{a}_v \quad (3.131)$$

Efetuando o somatório das forças externas, tem-se:

$$\sum_I \vec{R}_{eixo} = -\left( {}_I \vec{P}_v - {}_I \vec{F}_c + {}_I \vec{F}_d \right) + m_v \vec{a}_v \quad (3.132)$$

Substituindo a expressão calculada anteriormente para  $\vec{a}_v$ , dada pela equação (3.43) e as expressões das forças externas dadas pelas equações (3.122), (3.123) e (3.124), tem-se:

$$\sum_I \vec{R}_{eixo} = \begin{Bmatrix} m_v \left( l_1 \cos(\beta_f) \dot{\beta}_f^2 + l_1 \sin(\beta_f) \ddot{\beta}_f \right) \\ f_{cy} - f_{dy} + m_v g + m_v \ddot{y}_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.133)$$

Como o eixo dianteiro possui apenas o movimento de translação na direção vertical, obtém-se então somente o seu jacobiano de translação considerando a sua velocidade linear dada por (3.23):

$${}_I J_{v_{eixo}} = \frac{\partial_I \vec{v}_v}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_I v_{v_x}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial_I v_{v_x}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial_I v_{v_x}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial_I v_{v_x}}{\partial \dot{\beta}_a} \\ \frac{\partial_I v_{v_y}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial_I v_{v_y}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial_I v_{v_y}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial_I v_{v_y}}{\partial \dot{\beta}_a} \\ \frac{\partial_I v_{v_z}}{\partial \dot{y}_v} & \frac{\partial_I v_{v_z}}{\partial \dot{y}_f} & \frac{\partial_I v_{v_z}}{\partial \dot{\beta}_f} & \frac{\partial_I v_{v_z}}{\partial \dot{\beta}_a} \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

$${}_1J_{v_{\text{eixo}}} = \frac{\partial {}_1\vec{v}_v}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_1 \text{Sen}(\beta_f) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

Considerando o somatório das forças e momentos de reação em cada corpo são obtidas duas equações de força para o implemento, devido ao movimento ser plano, e uma equação de momento devido à rotação deste elemento em torno de um eixo perpendicular ao plano, conforme dito anteriormente. Para o corpo principal são obtidas também de maneira análoga duas equações de força e uma de momento. Como o eixo dianteiro possui apenas o movimento na direção vertical, obtém-se apenas duas equações devido ao somatório das forças nas duas direções conforme a expressão mostrada acima.

Considerando para cada corpo o somatório das forças e momentos de reação e os jacobianos de translação e rotação calculados, obtém-se então as equações de movimento do sistema aplicando-se o princípio de Jourdain. Assim, utilizando a equação (3.57) e efetuando o somatório para os três corpos:

$$\begin{aligned} & \left({}_1J_{v_{\text{imp}}}\right)^T \left(\sum {}_1\vec{R}_{\text{imp}}\right) + \left({}_{B2}J_{\omega_{\text{imp}}}\right)^T \left(\sum {}_{B2}\vec{M}_{R_{\text{imp}}}\right) + \left({}_1J_{v_{\text{corp}}}\right)^T \left(\sum {}_1\vec{R}_{\text{corp}}\right) + \\ & + \left({}_{B1}J_{\omega_{\text{corp}}}\right)^T \left(\sum {}_{B1}\vec{M}_{R_{\text{corp}}}\right) + \left({}_1J_{v_{\text{eixo}}}\right)^T \left(\sum {}_1\vec{R}_{\text{eixo}}\right) = 0 \end{aligned} \quad (3.136)$$

Substituindo as equações (3.75), (3.61), (3.77), (3.73), (3.119), (3.100), (3.121), (3.117), (3.135) e (3.133) na equação (3.136) e efetuando os produtos matriciais, tem-se a equação de movimento não linear do sistema:

$$\left. \begin{aligned}
& (f_{cy} - f_{dy} + m_v g + m_v \ddot{y}_v) \\
& (-f_{cy} - f_{ly} + m_a g + m_f g + m_f \ddot{y}_f + m_a (-l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a^2) - 2l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a \dot{\beta}_f + \\
& -l_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \dot{\beta}_f^2 - l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_f^2 + l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_a + l_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \ddot{\beta}_f + \\
& + l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_f + \ddot{y}_f) \\
& (f_{cy} l_1 \text{Cos}(\beta_f) - f_{ly} l_2 \text{Cos}(\beta_f) + m_a g l_{g1} \text{Cos}(\beta_f) + m_a g l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) + \\
& - m_a l_{g1} l_{g2} \text{Sen}(\beta_a) \dot{\beta}_a^2 - 2m_a l_{g1} l_{g2} \text{Sen}(\beta_a) \dot{\beta}_a \dot{\beta}_f + \frac{l_1^2 m_v \text{Sen}(2\beta_f) \dot{\beta}_f^2}{2} + I_{a_{zz}} \ddot{\beta}_a + m_a l_{g2}^2 \ddot{\beta}_a + \\
& + m_a l_{g1} l_{g2} \text{Cos}(\beta_a) \ddot{\beta}_a + I_{a_{zz}} \ddot{\beta}_f + I_{f_{zz}} \ddot{\beta}_f + m_a l_{g1}^2 \ddot{\beta}_f + m_a l_{g2}^2 \ddot{\beta}_f + \frac{l_1^2 m_v \ddot{\beta}_f}{2} + 2m_a l_{g1} l_{g2} \text{Cos}(\beta_a) \ddot{\beta}_f + \\
& - \frac{l_1^2 m_v \text{Cos}(2\beta_f) \ddot{\beta}_f}{2} + m_a l_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \ddot{y}_f + m_a l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{y}_f) \\
& (M_z + m_a g l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) + m_a l_{g1} l_{g2} \text{Sen}(\beta_a) \dot{\beta}_f^2 + I_{a_{zz}} \ddot{\beta}_a + m_a l_{g2}^2 \ddot{\beta}_a + I_{a_{zz}} \ddot{\beta}_f + m_a l_{g2}^2 \ddot{\beta}_f + \\
& + m_a l_{g1} l_{g2} \text{Cos}(\beta_a) \ddot{\beta}_f + m_a l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{y}_f)
\end{aligned} \right\} = \left. \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.137)$$

Substituindo na equação (3.137) as expressões das forças de mola  $f_{cy}$ ,  $f_{ly}$  e  $f_{dy}$  dadas pelas equações (3.88), (3.96) e (3.129) e o momento  $M_z$  exercido pela mola torsional dado pela equação (3.64), tem-se:

$$\left. \begin{aligned}
& (m_v g - k_{r1}(\omega_1 - y_v) + k_v(l_1 \text{Sen}(\beta_f) - y_f + y_v) - c_{r1}(\dot{\omega}_1 - \dot{y}_v) + \\
& + c_v(l_1 \text{Cos}(\beta_f)\dot{\beta}_f - \dot{y}_f + \dot{y}_v) + m_v \ddot{y}_v) \\
& (m_a g + m_f g + k_{r2}(l_2 \text{Sen}(\beta_f) - \omega_2 + y_f) - k_v(l_1 \text{Sen}(\beta_f) - y_f + y_v) + \\
& + c_{r2}(l_2 \text{Cos}(\beta_f)\dot{\beta}_f - \dot{\omega}_2 + \dot{y}_f) - c_v(l_1 \text{Cos}(\beta_f)\dot{\beta}_f - \dot{y}_f + \dot{y}_v) + m_f \ddot{y}_f + \\
& m_a \left( -(l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a^2) - 2l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_a \dot{\beta}_f + \right. \\
& - l_{g1} \text{Sen}(\beta_f) \dot{\beta}_f^2 - l_{g2} \text{Sen}(\beta_a + \beta_f) \dot{\beta}_f^2 + l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_a + l_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \ddot{\beta}_f + \\
& \left. + l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{\beta}_f + \ddot{y}_f \right) \\
& (m_a g l_{g1} \text{Cos}(\beta_f) + m_a g l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) + \frac{k_v l_1^2 \text{Sen}(2\beta_f)}{2} + \frac{k_{r2} l_2^2 \text{Sen}(2\beta_f)}{2} + \\
& - k_{r2} l_2 \text{Cos}(\beta_f) \omega_2 - k_v l_1 \text{Cos}(\beta_f) y_f + k_{r2} l_2 \text{Cos}(\beta_f) y_f + k_v l_1 \text{Cos}(\beta_f) y_v + \\
& - m_a l_{g1} l_{g2} \text{Sen}(\beta_a) \dot{\beta}_a^2 + \frac{c_v l_1^2 \dot{\beta}_f}{2} + \frac{c_{r2} l_2^2 \dot{\beta}_f}{2} + \frac{c_v l_1^2 \text{Cos}(2\beta_f) \dot{\beta}_f}{2} + \frac{c_{r2} l_2^2 \text{Cos}(2\beta_f) \dot{\beta}_f}{2} + \\
& - 2m_a l_{g1} l_{g2} \text{Sen}(\beta_a) \dot{\beta}_a \dot{\beta}_f + \frac{l_1^2 m_v \text{Sen}(2\beta_f) \dot{\beta}_f^2}{2} - c_{r2} l_2 \text{Cos}(\beta_f) \dot{\omega}_2 - c_v l_1 \text{Cos}(\beta_f) \dot{y}_f + \\
& + c_{r2} l_2 \text{Cos}(\beta_f) \dot{y}_f + c_v l_1 \text{Cos}(\beta_f) \dot{y}_v + I_{a_{zz}} \ddot{\beta}_a + m_a l_{g2}^2 \ddot{\beta}_a + m_a l_{g1} l_{g2} \text{Cos}(\beta_a) \ddot{\beta}_a + \\
& + I_{a_{zz}} \ddot{\beta}_f + I_{f_{zz}} \ddot{\beta}_f + m_a l_{g1}^2 \ddot{\beta}_f + m_a l_{g2}^2 \ddot{\beta}_f + \frac{l_1^2 m_v \ddot{\beta}_f}{2} + 2m_a l_{g1} l_{g2} \text{Cos}(\beta_a) \ddot{\beta}_f + \\
& - \frac{l_1^2 m_v \text{Cos}(2\beta_f) \ddot{\beta}_f}{2} + m_a l_{g1} \text{Cos}(\beta_f) \ddot{y}_f + m_a l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{y}_f) \\
& (k_a \beta_a + m_a g l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) + c_a \dot{\beta}_a + m_a l_{g1} l_{g2} \text{Sen}(\beta_a) \dot{\beta}_f^2 + I_{a_{zz}} \ddot{\beta}_a + m_a l_{g2}^2 \ddot{\beta}_a + I_{a_{zz}} \ddot{\beta}_f + m_a l_{g2}^2 \ddot{\beta}_f + \\
& + m_a l_{g1} l_{g2} \text{Cos}(\beta_a) \ddot{\beta}_f + m_a l_{g2} \text{Cos}(\beta_a + \beta_f) \ddot{y}_f)
\end{aligned} \right\} = \left. \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.138)$$

Supondo pequenas amplitudes de movimento do corpo, linearizam-se as equações de movimento obtidas acima. Assim,

$$\left[ \begin{array}{l}
(m_v g + k_v l_1 \beta_f - k_{r1} \omega_1 - k_v y_f + k_{r1} y_v + k_v y_v + c_v l_1 \dot{\beta}_f - c_{r1} \dot{\omega}_1 - c_v \dot{y}_f + c_{r1} \dot{y}_v + \\
+ c_v \dot{y}_v + m_v \ddot{y}_v) \\
(m_a g + m_f g + k_{r2} (l_2 \beta_f - \omega_2 + y_f) - k_v (l_1 \beta_f - y_f + y_v) + c_{r2} (l_2 \dot{\beta}_f - \dot{\omega}_2 + \dot{y}_f) + \\
- c_v (l_1 \dot{\beta}_f - \dot{y}_f + \dot{y}_v) + m_f \ddot{y}_f + m_a (l_{g2} \ddot{\beta}_a + l_{g1} \ddot{\beta}_f + l_{g2} \ddot{\beta}_f + \ddot{y}_f) \\
(m_a g l_{g1} + m_a g l_{g2} + k_v l_1^2 \beta_f + k_{r2} l_2^2 \beta_f - k_{r2} l_2 \omega_2 - k_v l_1 y_f + k_{r2} l_2 y_f + k_v l_1 y_v + \\
+ c_v l_1^2 \dot{\beta}_f + c_{r2} l_2^2 \dot{\beta}_f - c_{r2} l_2 \dot{\omega}_2 - c_v l_1 \dot{y}_f + c_{r2} l_2 \dot{y}_f + c_v l_1 \dot{y}_v + I_{a_{zz}} \ddot{\beta}_a + m_a l_{g1} l_{g2} \ddot{\beta}_a + \\
+ m_a l_{g2}^2 \ddot{\beta}_a + I_{a_{zz}} \ddot{\beta}_f + I_{f_{zz}} \ddot{\beta}_f + m_a l_{g1}^2 \ddot{\beta}_f + 2 m_a l_{g1} l_{g2} \ddot{\beta}_f + m_a l_{g2}^2 \ddot{\beta}_f + m_a l_{g1} \ddot{y}_f \\
+ m_a l_{g2} \ddot{y}_f) \\
(m_a g l_{g2} + k_a \beta_a + c_a \dot{\beta}_a + I_{a_{zz}} \ddot{\beta}_a + m_a l_{g2}^2 \ddot{\beta}_a + I_{a_{zz}} \ddot{\beta}_f + m_a l_{g1} l_{g2} \ddot{\beta}_f + m_a l_{g2}^2 \ddot{\beta}_f + \\
+ m_a l_{g2} \ddot{y}_f)
\end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l}
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array} \right]$$

(3.139)

Para escrever as equações de movimento linearizadas numa forma mais representativa em termos das matrizes de massa  $M$ , rigidez  $K$  e amortecimento  $C$  é definido o vetor  $4 \times 1$  das coordenadas generalizadas, ou seja,

$$q = [y_v \quad y_f \quad \beta_f \quad \beta_a]^T \quad (3.140)$$

Assim essas matrizes  $M$ ,  $C$  e  $K$  são obtidas separando os termos da derivada segunda, primeira e do próprio vetor  $q$ , respectivamente. O vetor excitação  $F$ , a que o sistema está submetido, é formado pelos termos restantes das equações de movimento. Reescrevendo a equação nesta forma e considerando a deflexão estática, tem-se:

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q = [F]\omega \quad (3.141)$$

A matriz de massa contém os parâmetros de massa e momento de inércia dos três corpos que compõe o sistema e que a tornam simétrica. Esta matriz é dada por:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_f + m_a & m_a(l_{g1} + l_{g2}) & m_a l_{g2} \\ 0 & m_a(l_{g1} + l_{g2}) & I_{a_{zz}} + I_{f_{zz}} + m_a(l_{g1} + l_{g2})^2 & I_{a_{zz}} + m_a l_{g2}(l_{g1} + l_{g2}) \\ 0 & m_a l_{g2} & I_{a_{zz}} + m_a l_{g2}(l_{g1} + l_{g2}) & I_{a_{zz}} + m_a l_{g2}^2 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

Como alguns elementos que não estão na diagonal apresentam valores não nulos, tem-se então um acoplamento dinâmico das equações de movimento do sistema. Este acoplamento na matriz de massa ocorre nas variáveis  $\ddot{y}_f$ ,  $\ddot{\beta}_f$  e  $\ddot{\beta}_a$  devido ao implemento, ou seja, devido a sua massa e momento de inércia, sendo eliminado, conforme será visto adiante, no sistema com 3 gdl quando o implemento é retirado do modelo.

A matriz de amortecimento  $C$ , também simétrica, contém os parâmetros de amortecimento da suspensão passiva, do pneu dianteiro e traseiro e do elemento de ligação passivo corpo do trator-implemento. Esta matriz é responsável pelo acoplamento dos termos de velocidade devido ao fato de não ser diagonal. Esta matriz é dada por:

$$[C] = \begin{bmatrix} c_v + c_{r1} & -c_v & c_v l_1 & 0 \\ -c_v & c_v + c_{r2} & -c_v l_1 + c_{r2} l_2 & 0 \\ c_v l_1 & -c_v l_1 + c_{r2} l_2 & c_v l_1^2 + c_{r2} l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_a \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

A matriz de rigidez  $K$  possui aspecto idêntico à matriz de amortecimento  $C$ , sendo que os seus elementos contém os parâmetros de rigidez das várias partes do sistema. Esta matriz  $K$  é responsável pelo acoplamento dos termos de posição devido aos seus elementos não nulos fora da diagonal. Os seus elementos são dados por:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_v + k_{r1} & -k_v & k_v l_1 & 0 \\ -k_v & k_v + k_{r2} & -k_v l_1 + k_{r2} l_2 & 0 \\ k_v l_1 & -k_v l_1 + k_{r2} l_2 & k_v l_1^2 + k_{r2} l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_a \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

O acoplamento das variáveis de velocidade  $\dot{y}_v$ ,  $\dot{y}_f$  e  $\dot{\beta}_f$  e de posição  $y_v$ ,  $y_f$  e  $\beta_f$  ocorre pelos parâmetros de amortecimento e rigidez da suspensão e do pneu traseiro.

A matriz  $F$  representa a excitação e é dada por:

$$[F] = \begin{bmatrix} k_{r1} & 0 & c_{r1} & 0 \\ 0 & k_{r2} & 0 & c_{r2} \\ 0 & k_{r2}l_2 & 0 & c_{r2}l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

O vetor de excitação é dado por:

$$\omega = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.146)$$

As matrizes  $M$ ,  $C$  e  $K$  serão usadas mais adiante para representação das equações de movimento na forma de estado.

Para que os elementos passivos da suspensão e da rótula sejam substituídos por atuadores ativos no próximo capítulo, as equações de movimento são então representadas em função das forças de molas  $f_{cy}$ ,  $f_{ly}$  e  $f_{dy}$  e do momento  $M_z$  devido a mola torsional. Assim, linearizando a equação (3.137), tem-se:

$$[M]\ddot{q} = \begin{Bmatrix} -f_{cy} + f_{dy} - m_v g \\ f_{cy} + f_{ly} - (m_a + m_f)g \\ -f_{cy}l_1 + f_{ly}l_2 - m_a g(l_{g1} + l_{g2}) \\ -M_z - m_a g l_{g2} \end{Bmatrix} \quad (3.147)$$

Linearizando-se também as expressões das forças e momentos de mola dados pelas equações (3.88), (3.96) e (3.129), tem-se:

$$f_{cy} = k_v(l_1 \beta_f - y_f + y_v) + c_v(l_1 \dot{\beta}_f - \dot{y}_f + \dot{y}_v) \quad (3.148)$$

$$f_{ly} = k_{r2}(-l_2 \beta_f + \omega_2 - y_f) + c_{r2}(-l_2 \dot{\beta}_f + \dot{\omega}_2 - \dot{y}_f) \quad (3.149)$$

$$f_{dy} = k_{rl}(\omega_1 - y_v) + c_{rl}(\dot{\omega}_1 - \dot{y}_v) \quad (3.150)$$

Uma vez que se levou em conta a aceleração da gravidade na obtenção do equacionamento dinâmico, considera-se o deslocamento nulo para a posição de equilíbrio. Assim, considerando o lado direito da equação (3.147) igual a zero, obtêm-se a carga estática igual a:

$$f_{dyest} = m_v g + \frac{[(m_a + m_f)gl_2 + m_a g(l_{g1} + l_{g2})]}{l_1 + l_2} \quad (3.151)$$

$$f_{lyest} = (m_a + m_f + m_v)g - f_{dyest} \quad (3.152)$$

$$f_{cyest} = f_{dyest} - m_v g \quad (3.153)$$

$$M_{zest} = -m_a gl_{g2} \quad (3.154)$$

### 3.3 Trator sem o Implemento

O segundo sistema a ser considerado corresponde ao modelo plano do trator mostrado na Figura 3-1, porém sem o implemento, possuindo assim 3 gdl. A sua equação de movimento é obtida a partir do equacionamento do sistema com o implemento. Logo, eliminando-se a última linha da equação (3.137), a qual corresponde a coordenada generalizada  $\beta_a$  do implemento e fazendo-se:

$$l_{g2} = k_a = c_a = m_a = I_{a_{xx}} = I_{a_{yy}} = I_{a_{zz}} = 0$$

tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{cy} - f_{dy} + m_v g + m_v \ddot{y}_v \\ -f_{cy} - f_{ly} + m_f g + m_f \ddot{y}_f \\ f_{cy} l_1 \cos(\beta_f) - f_{ly} l_2 \cos(\beta_f) + \frac{l_1^2 m_v \text{Sen}(2\beta_f) \dot{\beta}_f^2}{2} + \\ + I_{f_{zz}} \ddot{\beta}_f + \frac{l_1^2 m_v \ddot{\beta}_f}{2} - \frac{l_1^2 m_v \text{Cos}(2\beta_f) \dot{\beta}_f}{2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.155)$$

Substituindo em (3.155) as equações das forças de mola  $f_{cy}$ ,  $f_{ly}$  e  $f_{dy}$  dadas pelas equações (3.88), (3.96) e (3.129), tem-se:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left( m_v g - k_{r1} (\omega_1 - y_v) + k_v (l_1 \text{Sen}(\beta_f) - y_f + y_v) - c_{r1} (\dot{\omega}_1 - \dot{y}_v) + \right. \\
 & \left. + c_v (l_1 \text{Cos}(\beta_f) \dot{\beta}_f - \dot{y}_f + \dot{y}_v) + m_v \ddot{y}_v \right) \\
 & m_f g + k_{r2} (l_2 \text{Sen}(\beta_f) - \omega_2 + y_f) - k_v (l_1 \text{Sen}(\beta_f) - y_f + y_v) + \\
 & + c_{r2} (l_2 \text{Cos}(\beta_f) \dot{\beta}_f - \dot{\omega}_2 + \dot{y}_f) - c_v (l_1 \text{Cos}(\beta_f) \dot{\beta}_f - \dot{y}_f + \dot{y}_v) + m_f \ddot{y}_f \\
 & \frac{k_v l_1^2 \text{Sen}(2\beta_f)}{2} + \frac{k_{r2} l_2^2 \text{Sen}(2\beta_f)}{2} - k_{r2} l_2 \text{Cos}(\beta_f) \omega_2 + \\
 & - k_v l_1 \text{Cos}(\beta_f) y_f + k_{r2} l_2 \text{Cos}(\beta_f) y_f + k_v l_1 \text{Cos}(\beta_f) y_v + \\
 & + \frac{c_v l_1^2 \dot{\beta}_f}{2} + \frac{c_{r2} l_2^2 \dot{\beta}_f}{2} + \frac{c_v l_1^2 \text{Cos}(2\beta_f) \dot{\beta}_f}{2} + \frac{c_{r2} l_2^2 \text{Cos}(2\beta_f) \dot{\beta}_f}{2} + \\
 & + \frac{l_1^2 m_v \text{Sen}(2\beta_f) \dot{\beta}_f^2}{2} - c_{r2} l_2 \text{Cos}(\beta_f) \dot{\omega}_2 - c_v l_1 \text{Cos}(\beta_f) \dot{y}_f + \\
 & + c_{r2} l_2 \text{Cos}(\beta_f) \dot{y}_f + c_v l_1 \text{Cos}(\beta_f) \dot{y}_v + I_{fz} \ddot{\beta}_f + \frac{l_1^2 m_v \ddot{\beta}_f}{2} + \\
 & - \frac{l_1^2 m_v \text{Cos}(2\beta_f) \ddot{\beta}_f}{2}
 \end{aligned} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \\ \\ 0 \\ \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(3.156)

Linearizando as equações de movimento acima:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_v g + k_v l_1 \beta_f - k_{r1} \omega_1 - k_v y_f + k_{r1} y_v + k_v y_v + \\ + c_v l_1 \dot{\beta}_f - c_{r1} \dot{\omega}_1 - c_v \dot{y}_f + c_{r1} \dot{y}_v + c_v \dot{y}_v + m_v \ddot{y}_v \\ m_f g + k_{r2} (l_2 \beta_f - \omega_2 + y_f) - k_v (l_1 \beta_f - y_f + y_v) + \\ + c_{r2} (l_2 \dot{\beta}_f - \dot{\omega}_2 + \dot{y}_f) - c_v (l_1 \dot{\beta}_f - \dot{y}_f + \dot{y}_v) + m_f \ddot{y}_f \\ k_v l_1^2 \beta_f + k_{r2} l_2^2 \beta_f - k_{r2} l_2 \omega_2 - k_v l_1 y_f + k_{r2} l_2 y_f + k_v l_1 y_v + \\ + c_v l_1^2 \dot{\beta}_f + c_{r2} l_2^2 \dot{\beta}_f - c_{r2} l_2 \dot{\omega}_2 - c_v l_1 \dot{y}_f + c_{r2} l_2 \dot{y}_f + c_v l_1 \dot{y}_v + \\ + I_{fz} \ddot{\beta}_f \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.157)$$

Analogamente ao modelo com o implemento, para representação das equações de movimento em termos das matrizes da massa  $M$ , rigidez  $K$  e amortecimento  $C$  é definido o vetor  $3 \times 1$  das coordenadas generalizadas:

$$q = [y_v \quad y_f \quad \beta_f]^T \quad (3.158)$$

Considerando a equação (3.141), tem-se as matrizes  $M$ ,  $C$ ,  $K$  e  $F$  mostradas abaixo:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_v & 0 & 0 \\ 0 & m_f & 0 \\ 0 & 0 & I_{fz} \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_v + c_{r1} & -c_v & c_v l_1 \\ -c_v & c_v + c_{r2} & -c_v l_1 + c_{r2} l_2 \\ c_v l_1 & -c_v l_1 + c_{r2} l_2 & c_v l_1^2 + c_{r2} l_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_v + k_{r1} & -k_v & k_v l_1 \\ -k_v & k_v + k_{r2} & -k_v l_1 + k_{r2} l_2 \\ k_v l_1 & -k_v l_1 + k_{r2} l_2 & k_v l_1^2 + k_{r2} l_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} k_{r1} & 0 & c_{r1} & 0 \\ 0 & k_{r2} & 0 & c_{r2} \\ 0 & k_{r2} l_2 & 0 & c_{r2} l_2 \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

De modo análogo ao sistema anterior, as equações de movimento são representadas em função das forças de mola  $f_{cy}$ ,  $f_{ly}$  e  $f_{dy}$  de modo que o atuador possa ser substituído na suspensão no próximo capítulo. Logo, linearizando a equação (3.156), tem-se:

$$[M]\ddot{q} = \begin{Bmatrix} -f_{cy} + f_{dy} - m_v g \\ f_{cy} + f_{ly} - m_f g \\ -f_{cy}l_1 + f_{ly}l_2 \end{Bmatrix} \quad (3.163)$$

As cargas estáticas, analogamente ao sistema com 4 gdl, são obtidas considerando o lado direito da equação (3.163) igual a zero. Logo,

$$f_{dyest} = m_v g + \frac{m_f g l_2}{l_1 + l_2} \quad (3.164)$$

$$f_{lyest} = (m_f + m_v)g - f_{dyest} \quad (3.165)$$

$$f_{cyest} = f_{dyest} - m_v g \quad (3.166)$$

## Capítulo 4

### Otimização do Comportamento do Sistema

#### 4.1 Introdução

Para a obtenção do equacionamento dinâmico do modelo plano do trator no capítulo anterior foram considerados apenas os elementos passivos de rigidez e amortecimento nas várias partes do sistema. Neste capítulo será obtido o equacionamento considerando porém somente elementos ativos na suspensão dianteira e no elemento de ligação implemento-corpo principal. Para isso as forças exercidas por estes dois elementos serão substituídas por controladores ativos que atuarão no sistema mediante uma lei de controle baseada na realimentação de estado através de uma matriz de ganho. O sistema deverá ter disponível todas as suas variáveis de estado para que possam ser usadas pelos controladores.

As restrições impostas ao sistema serão expressas através de matrizes que ponderam as variáveis de estado e a força de controle numa função custo do tipo integral quadrática que será minimizada. Estas matrizes serão obtidas a partir de vetores que multiplicados pelas variáveis de estado do sistema representem essas restrições as quais serão utilizadas para obtenção da lei de controle.

A minimização da função custo será feita através da obtenção da matriz de ganho utilizando a equação de Riccati (anexo A). Para isso, as equações de movimento serão escritas na forma de estado, sendo definidas como variáveis de estado as suas coordenadas generalizadas e suas derivadas de primeira ordem.

Para o sistema ativo serão feitas ponderações que resultem no aumento do conforto do motorista, da segurança e na diminuição do espaço de trabalho da suspensão em relação ao sistema passivo.

Será considerada primeiramente a obtenção das matrizes de ponderação e do equacionamento dinâmico e sua representação na forma de estado para o modelo com 4 gdl com elementos ativos na suspensão e na rótula. Em seguida será feito o mesmo para o sistema com 4 gdl e apenas um controlador ativo na suspensão, sendo então obtidas as mesmas matrizes de ponderação do primeiro caso, a menos da ponderação da força de controle pois o número de controladores ativos para os dois sistemas é diferente. De maneira análoga, para o sistema ativo com 3 gdl serão obtidas sua formulação de estado e suas matrizes de ponderação.

## 4.2 Sistema com 4 gdl e dois controladores ativos

Para o modelo do trator com 4 gdl considerado no capítulo anterior são introduzidos dois controladores ativos. O primeiro controlador ativo  $u_1$  é incorporado na suspensão do trator substituindo os elementos passivos de rigidez e amortecimento lineares  $k_v$  e  $c_v$ . De modo análogo, o segundo controlador  $u_2$  é introduzido na ligação implemento-corpo principal substituindo os elementos passivos de rigidez e amortecimento torsionais  $k_a$  e  $c_a$ .

O equacionamento deste sistema ativo é então obtido a partir do modelo passivo tendo-se a força exercida pela suspensão igual a  $u_1$  e o momento exercido pelo elemento de ligação implemento-corpo do trator igual a  $u_2$ . Logo:

$$f_{cy} = u_1 \quad (4.1)$$

$$-M_z = u_2 \quad (4.2)$$

Considerando o equacionamento dinâmico do modelo dado pela equação (3.147) e substituindo  $f_{cy}$  e  $M_z$  dado pelas equações (4.1) e (4.2), tem-se:

$$[M]\ddot{q} = \begin{Bmatrix} -u_1 + f_{dy} - m_v g \\ u_1 + f_{ly} - (m_a + m_r)g \\ -u_1 l_1 + f_{ly} l_2 - m_a g (l_{g1} + l_{g2}) \\ u_2 - m_a g l_{g2} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Definindo-se o vetor dos controladores ativos  $u_1$  e  $u_2$ :

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Substituindo-se do lado direito da equação (4.3), as expressões das forças  $f_{ly}$  e  $f_{dy}$  exercidas pelos pneus traseiro e dianteiro dadas pelas equações (3.149) e (3.150), representa-se a equação de movimento em termos das matrizes de massa, rigidez e amortecimento e das matrizes  $F$  e  $H$  que multiplicam os vetores de excitação,  $\omega$  e dos controladores ativos,  $u$ , respectivamente, ou seja:

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q = [F]\omega + [H]u \quad (4.5)$$

onde:

$$[H] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -l_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

As matrizes de massa  $M$  e de excitação  $F$  são as mesmas do sistema passivo dadas pelas expressões (3.142) e (3.145). Como os dois atuadores ativos atuam sozinhos e não em paralelo com os elementos passivos, as matrizes  $C$  e  $K$  são obtidas a partir de (3.143) e (3.144) fazendo  $k_v$ ,  $c_v$ ,  $k_a$  e  $c_a$  nulos.

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{r1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{r2} & c_{r2}l_2 & 0 \\ 0 & c_{r2}l_2 & c_{r2}l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{r1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{r2} & k_{r2}l_2 & 0 \\ 0 & k_{r2}l_2 & k_{r2}l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Para análise, simulação e otimização deste sistema ativo, a sua equação de movimento é representada na forma de estado, ou seja, o sistema de equação de segunda ordem é reduzido a um sistema de primeira. Para isso, são definidas como novas variáveis, chamadas de variáveis de estado, as coordenadas generalizadas do modelo e suas derivadas de primeira ordem, ou seja, as variáveis de posição e velocidade do sistema. A equação de estado é então dada por:

$$\dot{X} = A * X + B * u + L * \omega \quad (4.9)$$

onde as matrizes A, B e L e o vetor de estado X são dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} * K & -M^{-1} * C \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} * H \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} * F \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$[X] = [y_v \quad y_f \quad \beta_r \quad \beta_a \quad \dot{y}_v \quad \dot{y}_f \quad \dot{\beta}_r \quad \dot{\beta}_a]^T \quad (4.13)$$

Calculando-se a inversa da matriz de massa dada por (3.142) e substituindo-a junto com as matrizes K, C, H e F dadas por (4.8), (4.7), (4.6) e (3.145) nas equações (4.10), (4.11) e (4.12), tem-se as matrizes A, B e L.

De maneira análoga, a equação de movimento do sistema passivo na forma de estado é também obtida para a análise comparativa no capítulo 5. Assim, considerando a equação (4.9) sem a matriz  $B$ , obtêm-se  $A$  e  $L$  substituindo as matrizes  $M$ ,  $C$ ,  $K$  e  $F$  dadas por (3.142), (3.143), (3.144) e (3.145) em (4.10) e (4.12).

Definindo o sistema com realimentação de estado completa, tem-se:

$$Y = [C]X \quad (4.14)$$

onde  $[C]$  é dado pela matriz identidade  $8 \times 8$ .

Considerando a lei de controle para os dois atuadores ativos  $u_1$  e  $u_2$  baseada na realimentação dos estados do sistema através de uma matriz de ganho  $K$ , tem-se:

$$u = -[K]X \quad (4.15)$$

onde

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

O processo de otimização consiste na obtenção dessa lei de controle de modo que uma função custo do tipo integral quadrática seja minimizada:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} (X^T * Q * X + 2 * X^T * N * u + u^T * R * u) dt \quad (4.17)$$

onde a matriz  $Q$  representa a ponderação dos estados, a matriz  $R$  a ponderação da força e do momento dos controladores  $u_1$  e  $u_2$  e a matriz  $N$  a ponderação dos elementos cruzados, ou seja, das variáveis de estado e da força e momento de controle.

Assim, para um aumento no elemento da diagonal da matriz  $Q$  correspondente a uma certa variável de estado, tem-se que essa variável terá seu valor máximo diminuído, ou seja, quanto maior o valor desse elemento da matriz, maior será a ponderação sobre a variável correspondente. Isto se aplica também à matriz de ponderação  $R$  da força de controle. Para os elementos fora da diagonal das matrizes  $Q$  e  $R$  e para os elementos da matriz  $N$ , o efeito da variação dos seus valores não é tão direto pois a ponderação será do produto de duas variáveis de estado ou do produto dos dois controladores ou ainda do cruzamento entre variáveis de estado e força e momento de controle.

Considerando a teoria de controle ótimo, obtêm-se através da seguinte expressão a matriz de ganho  $K$  que minimizará a função custo:

$$K = R^{-1} * (N^T + B^T * P) \quad (4.18)$$

onde  $P$  é uma matriz simétrica positiva definida dada pela solução da equação de Riccati (anexo A):

$$P(A - BR^{-1}N^T) - PBR^{-1}B^TP + Q - NR^{-1}N^T + (A^T - NR^{-1}B^T)P = 0 \quad (4.19)$$

Substituindo a expressão da matriz  $K$  na equação (4.15), tem-se a lei de controle para os dois atuadores ativos:

$$u^*(X) = -R^{-1} * (N^T + B^T * P) * X \quad (4.20)$$

A equação de movimento do sistema escrita na forma de estado é então obtida substituindo a equação (4.15) em (4.9), logo:

$$\dot{X} = (A - B * K) * X + L * \omega \quad (4.21)$$

Fazendo

$$A_K = A - B * K \quad (4.22)$$

tem-se

$$\dot{X} = A_k * X + L * \omega \quad (4.23)$$

Definindo-se um sistema controlável como aquele que pode alterar todos os estados do sistema através da força de controle, tem-se que para o sistema de ciclo fechado com realimentação de estado através da matriz de ganho calculada acima ser estável, é necessário antes de utilizar a equação de Ricatti verificar se o sistema é controlável ou não. Isto se deve ao fato de que caso o sistema seja não controlável, haverá estados que não poderão ser controlados através dos elementos ativos, embora esta força envolva todas as variáveis de estado. Utilizando o teorema que comprove a controlabilidade ou não do sistema através da construção da matriz de controlabilidade  $M$ , definida como função das matrizes  $A$  e  $B$ , tem-se:

$$M = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{(n-1)}B] \quad (4.24)$$

onde  $n$  representa a ordem do sistema. O Sistema é então dito controlável se a matriz  $M$  tiver *rank* igual a ordem do vetor estado.

A segunda condição para estabilidade deste sistema de ciclo fechado é que o mesmo seja observável, isto é, se cada variável de estado puder ser determinada a partir da saída do sistema. Utilizando o teorema que verifique a observabilidade do sistema através da construção de uma matriz de observabilidade  $Q$ , tem-se:

$$Q = [C \quad A^T C \quad (A^T)^2 C \quad \dots \quad (A^T)^{(n-1)} C] \quad (4.25)$$

O sistema é então dito observável se a matriz  $Q$  tiver *rank* igual a ordem do vetor estado.

Para verificar a controlabilidade e observabilidade do sistema, considera-se os dados numéricos do sistema os quais são dados por [Zampieri,1993]:

$$l_{g1}=2m \quad l_{g2}=1,5m \quad l_1=1,4m \quad l_2=1,45m$$

$$\begin{aligned}
k_{r1} &= 1.000.000\text{N/m} & c_{r1} &= 0 \text{ Ns/m} \\
k_{r2} &= 1.500.000\text{N/m} & c_{r2} &= 0 \text{ Ns/m} \\
k_v &= 100.000\text{N/m} & c_v &= 15.000 \text{ Ns/m} \\
k_a &= 300.000\text{N/m} & c_a &= 20.000 \text{ Ns/m} \\
m_v &= 500\text{Kg} & m_f &= 9000\text{Kg} & m_a &= 1000\text{Kg} \\
I_{a_z} &= 5000\text{Kg m}^2 & I_{f_z} &= 60.000\text{Kg m}^2
\end{aligned}$$

Verificando a controlabilidade do sistema considerado tem-se, substituindo as suas matrizes  $A$  e  $B$  e os valores numéricos, o *rank* de  $M$  igual a oito. Logo, o modelo é controlável. Verificando também a observabilidade substituindo as matrizes  $A$  e  $C$  e os valores numéricos na equação (4.25), tem-se o seu *rank* igual a oito. O sistema considerado é então também observável. Logo, todos os estados do sistema são estabilizados através da matriz de ganho obtida pela equação de Ricatti e o sistema pode ser otimizado para as matrizes de ponderação consideradas.

As matrizes de ponderação adotadas são obtidas a partir das restrições impostas ao sistema que devem ser minimizadas de modo a se ter o comportamento desejado. Os parâmetros que servem de medida dessas restrições são então representados através de um vetor que multiplica as variáveis de estado e/ou a força dos controladores ativos. As matrizes de ponderação são então obtidas multiplicando-se a transposta deste vetor por ele próprio, pois a ponderação na função custo é na forma quadrática.

O primeiro fator a ser ponderado é o conforto do motorista. Para isso, é necessário a sua representação através de um parâmetro que lhe sirva de medida. Considerando a aceleração como uma medida indireta do desconforto [Thompson, 1976], tem-se então a aceleração vertical do corpo principal como parâmetro a ser ponderado. Como as variáveis de estado são as coordenadas generalizadas de posição e velocidade, a representação deste parâmetro de ponderação  $\ddot{y}_f$  é feita através de um vetor que multiplica a derivada de primeira ordem do vetor de estado.

$$P_{\ddot{y}_f} = \ddot{y}_f = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ : \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] * \dot{X} \quad (4.26)$$

$$P_{\dot{y}_r} = C_{\dot{y}_r} \dot{X} \quad (4.27)$$

onde

$$[\dot{X}] = [\dot{y}_v \quad \dot{y}_r \quad \dot{\beta}_r \quad \dot{\beta}_a \quad \ddot{y}_v \quad \ddot{y}_r \quad \ddot{\beta}_r \quad \ddot{\beta}_a]^T \quad (4.28)$$

$$C_{\dot{y}_r} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad : \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad (4.29)$$

Conforme a equação (4.17), as ponderações na função custo são na forma quadrática, assim as matrizes são obtidas fazendo-se:

$$P_{\dot{y}_r}^2 = \dot{X}^T * C_{\dot{y}_r}^T * C_{\dot{y}_r} * \dot{X} \quad (4.30)$$

Como as ponderações são entre as variáveis de estado e os controladores ativos, torna-se necessário eliminar a derivada do vetor de estado na equação acima substituindo-se a expressão (4.9) sem o termo de excitação:

$$\dot{X} = A * X + B * u \quad (4.31)$$

Assim,

$$P_{\dot{y}_r}^2 = (A * X + B * u)^T C_{\dot{y}_r}^T * C_{\dot{y}_r} (A * X + B * u) \quad (4.32)$$

Utilizando a propriedade da transposta do produto de matrizes:

$$P_{\dot{y}_r}^2 = (X^T * A^T + u^T * B^T) C_{\dot{y}_r}^T * C_{\dot{y}_r} (A * X + B * u) \quad (4.33)$$

Efetando os produtos:

$$P_{\dot{y}_r}^2 = X^T A^T C_{\dot{y}_r}^T C_{\dot{y}_r} A X + X^T A^T C_{\dot{y}_r}^T C_{\dot{y}_r} B u + u^T B^T C_{\dot{y}_r}^T C_{\dot{y}_r} A X + u^T B^T C_{\dot{y}_r}^T C_{\dot{y}_r} B u \quad (4.34)$$

Fazendo

$$Q_{\ddot{y}_f} = A^T C_{\ddot{y}_f}^T C_{\ddot{y}_f} A \quad (4.35)$$

$$N_{\ddot{y}_f} = A^T C_{\ddot{y}_f}^T C_{\ddot{y}_f} B \quad (4.36)$$

$$R_{\ddot{y}_f} = B^T C_{\ddot{y}_f}^T C_{\ddot{y}_f} B \quad (4.37)$$

Tem-se:

$$P_{\ddot{y}_f}^2 = X^T Q_{\ddot{y}_f} X + X^T N_{\ddot{y}_f} u + u^T N_{\ddot{y}_f}^T X + u^T R_{\ddot{y}_f} u \quad (4.38)$$

As matrizes de ponderação da aceleração vertical do corpo principal são obtidas substituindo-se as matrizes A e B dadas pelas equações (4.10) e (4.11) e o vetor  $C_{\ddot{y}_f}$  dado pela equação (4.29) nas equações (4.35), (4.36) e (4.37).

Com a ponderação da aceleração vertical do corpo principal, a mesma é então minimizada, implicando num aumento do conforto do veículo. Isto ocorre em suspensões com pequena rigidez, pois tem-se grandes deflexões da mola, como é o caso de suspensões de carros de luxo. Porém, considerando somente esta ponderação, a otimização levará a um sistema que possua pequena rigidez e deflexões muito grandes. Para que o processo de otimização não leve a uma solução em que as deflexões da suspensão aumentem indefinidamente, é necessário considerar essas deflexões nas ponderações da função custo. Isto é feito através da ponderação do espaço de trabalho da suspensão. Assim, considerando a componente  $y$  da equação (3.86) linearizada, tem-se a expressão para esta ponderação dada por:

$$P_{ET} = y_v - (y_f - l_1 \beta_f) \quad (4.39)$$

Como esta expressão é função dos estados  $y_v$ ,  $y_f$  e  $\beta_f$ , pode-se então representar esta ponderação através de um vetor que multiplica o vetor de estado, logo:

$$P_{ET} = [1 \quad -1 \quad l_1 \quad 0 \quad \vdots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] * X \quad (4.40)$$



Além dos fatores de conforto do motorista e espaço de trabalho da suspensão, é também necessário levar em consideração a segurança do veículo. Conforme feito anteriormente, este fator deve ser representado através de um parâmetro que lhe sirva de medida para que a sua matriz de ponderação possa ser obtida a partir dele. Este parâmetro é representado pela variação dinâmica das forças de contato dos pneus dianteiro e traseiro com a via [Elmadany, 1992]. A sua ponderação fará com que essas variações sejam minimizadas. Isto forçará o sistema a se tornar mais estável e conseqüentemente mais seguro. Considerando primeiramente a força de contato do pneu dianteiro, obtêm-se a expressão da ponderação a partir de sua equação (3.150) sem o termo de excitação, ou seja, para o sistema não excitado.

$$P_{f_{dy}} = -k_{r1}y_v - c_{r1}\dot{y}_v \quad (4.47)$$

Escrevendo esta expressão como um produto entre um vetor e o vetor de estado, tem-se:

$$P_{f_{dy}} = [-k_{r1} \ 0 \ 0 \ 0 \ : \ -c_{r1} \ 0 \ 0 \ 0] * X \quad (4.48)$$

Chamando o vetor que multiplica as variáveis de estado de  $C_{f_{dy}}$ , ou seja:

$$C_{f_{dy}} = [-k_{r1} \ 0 \ 0 \ 0 \ : \ -c_{r1} \ 0 \ 0 \ 0] \quad (4.49)$$

Tem-se,

$$P_{f_{dy}} = C_{f_{dy}} X \quad (4.50)$$

De modo análogo à obtenção das matrizes de ponderação anteriores, representa-se a equação de ponderação de  $P_{f_{dy}}$  na forma quadrática:

$$P_{f_{dy}}^2 = X^T C_{f_{dy}}^T C_{f_{dy}} X \quad (4.51)$$

A matriz de ponderação é então dada pelo produto entre o transposto do vetor  $C_{f_{dy}}$  e o próprio vetor. Chamando esta matriz de  $Q_{f_{dy}}$  :

$$Q_{f_{dy}} = C_{f_{dy}}^T C_{f_{dy}} \quad (4.52)$$

Assim, substituindo a equação (4.52) em (4.51), tem-se:

$$P_{f_{dy}}^2 = X^T Q_{f_{dy}} X \quad (4.53)$$

Substituindo o vetor  $C_{f_{dy}}$  dado por (4.49) em  $Q_{f_{dy}}$  dado por (4.52), tem-se a matriz de ponderação dada por:

$$Q_{f_{dy}} = \begin{bmatrix} k_{r1}^2 & 0 & 0 & 0 & k_{r1}c_{r1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{r1}c_{r1} & 0 & 0 & 0 & c_{r1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Considerando a força de contato do pneu traseiro, obtêm-se de modo análogo a matriz de ponderação a partir da sua equação (3.149) para o sistema sem excitação.

$$P_{f_{by}} = -k_{r2}(y_f + l_2\beta_f) - c_{r2}(\dot{y}_f + l_2\dot{\beta}_f) \quad (4.55)$$

Escrevendo esta equação na forma de um vetor que multiplica o vetor de estado, tem-se:

$$P_{f_{by}} = [0 \quad -k_{r2} \quad -k_{r2} * l_2 \quad 0 \quad \vdots \quad 0 \quad -c_{r2} \quad -c_{r2} * l_2 \quad 0] * X \quad (4.56)$$

Chamando

$$C_{f_y} = [0 \quad -k_{r2} \quad -k_{r2} * l_2 \quad 0 \quad \vdots \quad 0 \quad -c_{r2} \quad -c_{r2} * l_2 \quad 0] \quad (4.57)$$

tem-se

$$P_{f_y} = C_{f_y} * X \quad (4.58)$$

Considerando novamente que as ponderações na função custo são quadráticas, obtêm-se, então, a matriz de ponderação da força de contato da roda traseira:

$$P_{f_y}^2 = X^T C_{f_y}^T C_{f_y} X \quad (4.59)$$

Fazendo

$$Q_{f_y} = C_{f_y}^T C_{f_y} \quad (4.60)$$

Substituindo a equação (4.60) em (4.59) tem-se

$$P_{f_y}^2 = X^T Q_{f_y} X \quad (4.61)$$

Substituindo o vetor  $C_{f_y}$  dado por (4.57) em  $Q_{f_y}$  dado por (4.60) e efetuando o produto, tem-se a matriz de ponderação dada por:

$$Q_{f_y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{r_2}^2 & k_{r_2}^2 l_2 & 0 & 0 & k_{r_2} c_{r_2} & k_{r_2} c_{r_2} l_2 & 0 \\ 0 & k_{r_2}^2 l_2 & k_{r_2}^2 l_2^2 & 0 & 0 & k_{r_2} c_{r_2} l_2 & k_{r_2} c_{r_2} l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{r_2} c_{r_2} & k_{r_2} c_{r_2} l_2 & 0 & 0 & c_{r_2}^2 & c_{r_2}^2 l_2 & 0 \\ 0 & k_{r_2} c_{r_2} l_2 & k_{r_2} c_{r_2} l_2^2 & 0 & 0 & c_{r_2}^2 l_2 & c_{r_2}^2 l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Embora já tenham sido consideradas as ponderações da aceleração vertical do corpo principal e das variações das forças de contato dos pneus com a via, permitindo um aumento no conforto e segurança do trator, é necessário também considerar o movimento do implemento. Analisando o equacionamento dinâmico do modelo, observa-se que como este elemento está montado junto ao corpo do veículo, o seu movimento está assim acoplado aos movimentos das outras partes do modelo. Conseqüentemente, o movimento do implemento terá influência na aceleração do corpo do trator e nas forças de contato. Assim, para melhoria do conforto e segurança do veículo, é necessária também a ponderação do movimento de balanço do implemento em relação ao corpo do trator. Esta ponderação é então dada pela coordenada generalizada  $\beta_a$ .

$$P_{\beta_a} = \beta_a \quad (4.63)$$

Escrevendo esta ponderação na forma de um vetor que multiplica o vetor de estado, tem-se:

$$P_{\beta_a} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ ; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] * X \quad (4.64)$$

Chamando

$$C_{\beta_a} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ ; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (4.65)$$

tem-se:

$$P_{\beta_a} = C_{\beta_a} * X \quad (4.66)$$

Analogamente às ponderações anteriores, a matriz de ponderação para o movimento do implemento é obtida considerando-se a forma quadrática:

$$P_{\beta_a}^2 = X^T C_{\beta_a}^T C_{\beta_a} X \quad (4.67)$$

A matriz de ponderação é então expressa pelo produto  $C_{\beta_a}^T C_{\beta_a}$ . Chamando esta matriz de  $Q_{\beta_a}$ , tem-se

$$Q_{\beta_a} = C_{\beta_a}^T C_{\beta_a} \quad (4.68)$$

Assim, substituindo (4.68) em (4.67):

$$P_{\beta_a}^2 = X^T Q_{\beta_a} X \quad (4.69)$$

A matriz de ponderação é então obtida substituindo-se o vetor  $C_{\beta_a}$  dado por (4.65) em  $Q_{\beta_a}$  dado por (4.68) e efetuando o produto.

$$Q_{\beta_a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Após a ponderação dos fatores representativos do conforto e da segurança do veículo, falta ainda ponderar a energia dos dois controladores ativos introduzidos no sistema, a qual permitirá a realização do controle. Considerando-se novamente a ponderação quadrática tem-se para  $u_1$  e  $u_2$ :

$$P_u = u_1^2 + u_2^2 \quad (4.71)$$

Representando matricialmente considerando a equação (4.4):

$$P_u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$P_u = u^T R_u u \quad (4.73)$$

logo

$$R_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Para consideração de todas as ponderações simultaneamente, são utilizadas na função custo, matrizes obtidas a partir da soma de todas as matrizes de ponderação dadas acima. Chamando essas matrizes de  $Q_{tot}$ ,  $N_{tot}$  e  $R_{tot}$ , tem-se:

$$Q_{tot} = Q_{\ddot{y}_f} + Q_{ET} + Q_{f_{y_f}} + Q_{f_{y_b}} + Q_{\beta_a} \quad (4.75)$$

$$N_{tot} = N_{\ddot{y}_f} \quad (4.76)$$

$$R_{tot} = R_{\ddot{y}_f} + R_u \quad (4.77)$$

### 4.3 Sistema com 4 gdl e um controlador ativo

De modo análogo ao sistema com dois controladores ativos, o modelamento do sistema com 4 gdl e um elemento ativo é obtido a partir do modelo passivo considerado no capítulo anterior. Neste modelo é introduzido um controlador ativo  $u$  somente na suspensão do veículo, substituindo os elementos passivos  $k_v$  e  $c_v$ . A ligação do implemento com o corpo do veículo continua com seus elementos passivos de rigidez e amortecimento torsionais  $k_a$  e  $c_a$ . Assim, o equacionamento dinâmico é obtido fazendo-se a força da suspensão passiva igual a  $u$ , pois os elementos passivos são eliminados, e conservando a expressão do momento exercido pela ligação trator-implemento com os seus elementos passivos.

$$f_{cy} = u_1 \quad (4.78)$$

$$M_z = k_a \beta_a + c_a \dot{\beta}_a \quad (3.64)$$

Assim, o equacionamento para o sistema com um controlador ativo é obtido substituindo na equação (3.147) as expressões para  $f_{cy}$  e  $M_z$  dadas pelas equações (4.78) e (3.64). Assim,

$$[M]\ddot{q} = \left\{ \begin{array}{l} -u_1 + f_{dy} - m_v g \\ u_1 + f_{ly} - (m_a + m_f)g \\ -u_1 l_1 + f_{ly} l_2 - m_a g (l_{g1} + l_{g2}) \\ -k_a \beta_a - c_a \dot{\beta}_a - m_a g l_{g2} \end{array} \right\} \quad (4.79)$$

As matrizes M e F são as mesmas obtidas anteriormente. As matrizes C, K são obtidas a partir de (3.143) e (3.144) fazendo  $k_v$  e  $c_v$  nulos.

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{r1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{r2} & c_{r2} l_2 & 0 \\ 0 & c_{r2} l_2 & c_{r2} l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_a \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{r1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{r2} & k_{r2} l_2 & 0 \\ 0 & k_{r2} l_2 & k_{r2} l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_a \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

O vetor H é dado pela primeira coluna de (4.6)

$$[H] = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Para representação das equações de movimento na forma de estado, as matrizes  $M$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $H$  e  $F$  dadas por (3.142), (4.80), (4.81), (4.82) e (3.145) são substituídas nas equações (4.10), (4.11) e (4.12).

Como tem-se um elemento ativo, a lei de controle é baseada na realimentação de estado através de um vetor  $\mathbf{K}$ , logo,

$$\mathbf{u} = -[\mathbf{K}]\mathbf{X} \quad (4.15)$$

onde

$$[\mathbf{K}] = [k_{11} \quad k_{12} \quad k_{13} \quad k_{14} \quad k_{15} \quad k_{16} \quad k_{17} \quad k_{18}] \quad (4.83)$$

Porém, conforme dito anteriormente, antes de utilizar a equação de Ricatti é necessário verificar a controlabilidade e observabilidade do modelo para que o sistema de ciclo fechado possa ser estabilizado pela realimentação de estado através do vetor  $\mathbf{K}$ . Assim, substituindo as matrizes  $A$  e  $B$  na matriz de controlabilidade, os valores numéricos e calculando o *rank*, tem-se o seu valor igual a oito. O sistema é então dito controlável.

Verificando a observabilidade substituindo-se as matrizes  $A$  e  $C$  e os valores numéricos, tem-se o *rank* igual a oito. Assim, o sistema considerado é também observável.

Considerando novamente o conforto e a segurança do trator como fatores a serem otimizados, são feitas as mesmas ponderações anteriores do sistema com dois atuadores ativos. Com exceção da aceleração do corpo principal e da força de controle, todas as ponderações consideradas dependem apenas de valores geométricos como  $l_1$  e  $l_2$  e das constantes de rigidez e amortecimento dos pneus dianteiro e traseiro. Assim, as matrizes de ponderação utilizadas na função custo são as mesmas obtidas para o caso anterior. É necessário então, somente a obtenção da matriz de ponderação da aceleração vertical do corpo e da força de controle. Isto se deve ao fato de termos agora apenas um controlador e a matriz de ponderação da aceleração ser função das matrizes  $A$  e  $B$  e conseqüentemente também função das matrizes de rigidez e amortecimento e da matriz que multiplica os elementos ativos as quais foram alteradas neste sistema. Assim as matrizes  $Q_{\dot{y}_r}$ ,  $N_{\dot{y}_r}$  e  $R_{\dot{y}_r}$

são obtidas substituindo as matrizes A e B e o vetor  $C_{y_r}$  nas equações (4.35), (4.36) e (4.37).

Considerando-se apenas um controlador, a sua matriz de ponderação é então dada por:

$$P_u = u_1^2 = u_1 * 1 * u_1 \quad (4.84)$$

$$P_u = u_1 * R_u * u_1 \quad (4.85)$$

onde

$$R_u = 1 \quad (4.86)$$

Analogamente ao caso anterior, as matrizes que representam todas as ponderações juntas são então obtidas somando-se todas as matrizes de ponderação obtidas acima.

#### 4.4 Sistema com 3 gdl e um controlador ativo

A obtenção do equacionamento dinâmico do trator sem o implemento e um controlador ativo na suspensão é feita de modo análogo ao modelo com 4 gdl (com implemento). Assim, considerando a força exercida pela suspensão igual a força do controlador ativo, uma vez que os elementos passivos foram eliminados, tem-se:

$$f_{cy} = u_1 \quad (4.87)$$

Substituindo (4.87) na equação do sistema passivo dado pela equação (3.163):

$$[M]\ddot{q} = \begin{Bmatrix} -u_1 + f_{dy} - m_v g \\ u_1 + f_{ly} - m_f g \\ -u_1 l_1 + f_{ly} l_2 \end{Bmatrix} \quad (4.88)$$

As matrizes M e F são as mesmas obtidas anteriormente. As matrizes C e K são obtidas a partir de (3.160) e (3.161) fazendo  $k_v$  e  $c_v$  nulos.

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{r2} & c_{r2} l_2 \\ 0 & c_{r2} l_2 & c_{r2} l_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & k_{r2} & k_{r2}l_2 \\ 0 & k_{r2}l_2 & k_{r2}l_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

O vetor H é dado por:

$$[H] = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -l_1 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

A forma de estado para as equações de movimento é obtida substituindo M, C, K, H e F dadas pelas equações (3.159), (4.89), (4.90), (4.91) e (3.162) nas equações (4.10), (4.11) e (4.12), onde

$$[X] = [y_v \quad y_f \quad \beta_f \quad \dot{y}_v \quad \dot{y}_f \quad \dot{\beta}_f]^T \quad (4.92)$$

Para o sistema passivo, a forma de estado é obtida de modo análogo ao sistema com 4 gdl substituindo as matrizes M, C, K e F dadas por (3.159), (3.160), (3.161) e (3.162) em (4.10) e (4.12).

Definindo o sistema com realimentação de estado completa, tem-se:

$$Y = [C]X \quad (4.14)$$

onde  $[C]$  é dado pela matriz identidade 6x6.

A lei de controle do elemento ativo é então obtida através da realimentação de estado, logo,

$$u = -[K]X \quad (4.15)$$

onde

$$[K] = [k_{11} \quad k_{12} \quad k_{13} \quad k_{14} \quad k_{15} \quad k_{16}] \quad (4.93)$$

Analogamente ao modelo com 4 gdl, antes da utilização da equação de Ricatti são verificadas sua observabilidade e controlabilidade de modo a garantir que o sistema de ciclo fechado seja estabilizado pela realimentação de estado através do vetor  $K$ . Assim, substituindo as matrizes  $A$  e  $B$  e os valores numéricos dos parâmetros na matriz de controlabilidade dada por (4.24), tem-se o *rank* igual a seis. O sistema é então controlável.

Considerando a equação (4.25) para verificação da observabilidade do sistema e substituindo as matrizes  $A$  e  $C$  e os valores numéricos, tem-se o seu *rank* igual a seis. O sistema considerado é então observável.

A lei de controle dada pela equação (4.15) é obtida de modo a minimizar uma função custo do tipo integral quadrática dada por (4.17). Para isso é utilizada a equação de Ricatti dada em (4.19), obtendo-se assim o vetor de ganho dado por (4.18).

As matrizes de ponderação para o modelo com 3 gdl são obtidas analogamente ao caso anterior considerando o conforto e a segurança como fatores a serem otimizados. Assim, para a aceleração vertical do corpo do veículo, tem-se:

$$P_{\ddot{y}_f} = \ddot{y}_f = [0 \quad 0 \quad 0 \quad : \quad 0 \quad 1 \quad 0] * \dot{X} \quad (4.94)$$

$$P_{\ddot{y}_f} = C_{\ddot{y}_f} * \dot{X} \quad (4.27)$$

onde

$$[\dot{X}] = [\dot{y}_v \quad \dot{y}_f \quad \dot{\beta}_f \quad \ddot{y}_v \quad \ddot{\beta}_f \quad \ddot{\beta}_a]^T \quad (4.95)$$

$$C_{\ddot{y}_f} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad : \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad (4.96)$$

Considerando a forma quadrática dada pela equação (4.17):

$$P_{\ddot{y}_f}^2 = \dot{X}^T * C_{\ddot{y}_f}^T * C_{\ddot{y}_f} * \dot{X} \quad (4.30)$$

Eliminando a derivada do vetor de estado tem-se pela equação (4.38):

$$P_{\dot{y}_r}^2 = X^T Q_{\dot{y}_r} X + X^T N_{\dot{y}_r} u + u^T N_{\dot{y}_r}^T X + u^T R_{\dot{y}_r} u \quad (4.38)$$

onde  $Q_{\dot{y}_r}$ ,  $N_{\dot{y}_r}$  e  $R_{\dot{y}_r}$  são dados por (4.35), (4.36) e (4.37).

A matriz de ponderação do espaço de trabalho é obtida considerando a equação (4.39). Representando esta ponderação através de um vetor que multiplica o vetor de estado:

$$P_{ET} = [1 \quad -1 \quad l_1 \quad \vdots \quad 0 \quad 0 \quad 0] * X \quad (4.97)$$

$$P_{ET} = C_{ET} X \quad (4.42)$$

onde

$$C_{ET} = [1 \quad -1 \quad l_1 \quad \vdots \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (4.98)$$

Considerando a forma quadrática dada por (4.43) e (4.45), tem-se  $Q_{ET}$  dado por (4.44):

$$Q_{ET} = C_{ET}^T C_{ET} \quad (4.44)$$

Assim, substituindo-se o vetor  $C_{ET}$  dado por (4.98):

$$Q_{ET} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & l_1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -l_1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & -l_1 & l_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

A matriz de ponderação da força de contato do pneu dianteiro é obtida escrevendo-se a equação (4.47) como um produto entre um vetor e o vetor de estado:

$$P_{f_{dy}} = [-k_{r1} \quad 0 \quad 0 \quad \vdots \quad -c_{r1} \quad 0 \quad 0] * X \quad (4.100)$$

$$P_{f_{dy}} = C_{f_{dy}} * X \quad (4.50)$$

onde

$$C_{f_{dy}} = [-k_{r1} \quad 0 \quad 0 \quad \vdots \quad -c_{r1} \quad 0 \quad 0] \quad (4.101)$$

De forma análoga ao modelo com 4gdl, a matriz de ponderação é obtida tomando-se a forma quadrática. Assim, considerando a equação (4.52) e substituindo (4.101), tem-se:

$$Q_{f_{dy}} = \begin{bmatrix} k_{r1}^2 & 0 & 0 & k_{r1}c_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{r1}c_{r1} & 0 & 0 & c_{r1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Analogamente para obtenção da matriz de ponderação da força de contato do pneu traseiro, a equação (4.55) é escrita na forma de um vetor que multiplica o vetor de estado:

$$P_{f_{ty}} = [0 \quad -k_{r2} \quad -k_{r2} * l_2 \quad \vdots \quad 0 \quad -c_{r2} \quad -c_{r2} * l_2] * X \quad (4.103)$$

$$P_{f_{ty}} = C_{f_{ty}} * X \quad (4.58)$$

onde

$$C_{f_{ty}} = [0 \quad -k_{r2} \quad -k_{r2} * l_2 \quad \vdots \quad 0 \quad -c_{r2} \quad -c_{r2} * l_2] \quad (4.104)$$

A matriz de ponderação é então obtida substituindo (4.104) em (4.60). Assim,

$$Q_{fv} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{r2}^2 & k_{r2}^2 l_2 & 0 & k_{r2} c_{r2} & k_{r2} c_{r2} l_2 \\ 0 & k_{r2}^2 l_2 & k_{r2}^2 l_2^2 & 0 & k_{r2} c_{r2} l_2 & k_{r2} c_{r2} l_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{r2} c_{r2} & k_{r2} c_{r2} l_2 & 0 & c_{r2}^2 & c_{r2}^2 l_2 \\ 0 & k_{r2} c_{r2} l_2 & k_{r2} c_{r2} l_2^2 & 0 & c_{r2}^2 l_2 & c_{r2}^2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

A obtenção da matriz de ponderação do controlador ativo é idêntica a do modelo com 4 gdl e 1 controlador. Assim,

$$P_u = u_1^2 = u_1 * 1 * u_1 \quad (4.84)$$

$$P_u = u_1 * R_u * u_1 \quad (4.85)$$

onde

$$R_u = 1 \quad (4.86)$$

De modo análogo aos sistemas anteriores, as matrizes utilizadas na função custo para otimização do sistema são obtidas a partir da soma de todas as matrizes de ponderação.

## Capítulo 5.

### Resultados

#### 5.1 Introdução

Neste capítulo serão feitas análises comparativas do desempenho dos sistemas passivo e ativo com e sem o implemento. Com esse objetivo estes sistemas serão simulados utilizando as suas equações de movimento escritas na forma de estado. Assim, poderão ser obtidos facilmente os deslocamentos lineares e angulares dos corpos do modelo, além das suas velocidades e acelerações lineares e angulares. Conseqüentemente, os parâmetros a serem utilizados nesta análise comparativa como o balanço do implemento e aceleração vertical do corpo principal serão obtidos diretamente. Os parâmetros restantes como as forças de contato do pneu dianteiro e traseiro, a força e momento dos controladores ativos e o espaço de trabalho da suspensão, serão facilmente obtidos por serem função das variáveis de estado do sistema.

Para obtenção das equações de movimento do sistema ativo e sua simulação será necessário, primeiramente, determinar-se a matriz de ganho que será utilizada na realimentação dos estados. Isto será feito através da resolução da equação de Ricatti utilizada na otimização do sistema.

Devido ao fato de as matrizes de ponderação consideradas no cap. 4 possuírem ordem de grandeza bastante diferentes, todas as matrizes de ponderação serão normalizadas.

A excitação considerada será um degrau com altura e comprimento definidos.

## 5.2 Trator sem o Implemento

Para análise comparativa do comportamento dinâmico dos sistemas ativo e passivo são consideradas as suas equações de movimento escritas na forma de estado. Estas equações permitem a obtenção das respostas dos sistemas quando submetidos a uma excitação externa.

Conforme dito no capítulo 4, a lei de controle do atuador ativo baseada na realimentação dos estados é obtida através da equação de Ricatti dada por (4.19), considerando as ponderações impostas ao sistema através das matrizes  $Q$ ,  $R$  e  $N$ . Assim, considerando o vetor  $K$  dado por (4.18), obtêm-se a matriz do sistema  $A_K$  dada por (4.22) e a sua equação de movimento dada pela equação (4.23).

Considerando para este sistema as suas matrizes de ponderação dos estados dadas por  $Q_{\dot{y}_r}$ ,  $Q_{ET}$ ,  $Q_{f_w}$  e  $Q_{f_b}$ , dos elementos cruzados  $N_{\dot{y}_r}$  e do controlador  $R_{\dot{y}_r}$  e  $R_u$  dadas por (4.35), (4.99), (4.102), (4.105), (4.36), (4.37) e (4.86) e substituindo os valores numéricos, observa-se que a ordem de grandeza dessas matrizes são bastantes diferentes. Especificamente, a matriz de ponderação da aceleração vertical do corpo principal da ordem de  $10^4$  quando somada às matrizes de ponderação das forças de contato dos pneus dianteiro e traseiro,  $Q_{f_w}$  e  $Q_{f_b}$ , da ordem de  $10^{12}$ , será praticamente desprezível.

Para resolver este problema, os vetores representativos das restrições impostas ao sistema utilizados na obtenção das matrizes de ponderação serão normalizados de modo a possuírem, na medida do possível, a mesma ordem de grandeza.

Considerando primeiramente a aceleração vertical do corpo principal utilizada como medida do conforto do veículo, normaliza-se o vetor  $C_{\dot{y}_r}$  dado por (4.96), dividindo-o pela aceleração da gravidade. Assim, substituindo-se este vetor normalizado em  $Q_{\dot{y}_r}$ ,  $N_{\dot{y}_r}$  e  $R_{\dot{y}_r}$  dados por (4.35), (4.36) e (4.37), tem-se:

$$\bar{Q}_{\ddot{y}_f} = \frac{p_{\ddot{y}_f}}{g^2} Q_{\ddot{y}_f}$$

$$\bar{N}_{\ddot{y}_f} = \frac{p_{\ddot{y}_f}}{g^2} N_{\ddot{y}_f}$$

$$\bar{R}_{\ddot{y}_f} = \frac{p_{\ddot{y}_f}}{g^2} R_{\ddot{y}_f}$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade e  $p_{\ddot{y}_f}$  o coeficiente de peso utilizado para variação da ponderação da aceleração  $\ddot{y}_f$  na otimização do sistema.

O vetor  $C_{ET}$  dado por (4.98) é normalizado em relação ao espaço máximo de trabalho da suspensão do veículo (sm). Considerando esse valor máximo igual a 20cm em  $Q_{ET}$  dada por (4.44), tem-se:

$$\bar{Q}_{ET} = \frac{p_{ET}}{\text{sm}^2} Q_{ET}$$

onde  $p_{ET}$  é utilizado para variação da ponderação do espaço de trabalho.

Considerando a variação das forças de contato dos pneus dianteiro e traseiro utilizadas como medida da segurança do veículo, normaliza-se os vetores  $C_{f_{dy}}$  e  $C_{f_{ly}}$ , dados pelas equações (4.101) e (4.104), dividindo-os pelas cargas estáticas  $f_{dyest}$  (eq. (3.164)) e  $f_{lyest}$  (eq. (3.165)), respectivamente. Assim, substituindo-se estes vetores em (4.52) e (4.60), tem-se:

$$\bar{Q}_{f_{dy}} = \frac{p_{f_{dy}}}{f_{dyest}^2} Q_{f_{dy}}$$

$$\bar{Q}_{f_{ly}} = \frac{p_{f_{ly}}}{f_{lyest}^2} Q_{f_{ly}}$$

onde  $p_{f_{dy}}$  e  $p_{f_{ly}}$  são os parâmetros de peso.

Na ponderação da força do controlador é inserido também o seu fator de peso, que representa indiretamente a energia necessária ao funcionamento dele [Thompson, 1976]. Logo:

$$R_u = p_u I$$

Para a análise dos autovalores e da resposta do sistema, os fatores de peso  $p_{\dot{y}_r}$ ,  $p_{ET}$ ,  $p_{f_y}$  e  $p_{f_y}$  serão considerados iguais a um. O fator de peso  $p_u$ , foi escolhido como sendo igual a  $10^{-10}$ .

Este valor leva a níveis de energia e forças geradas pelo controle da mesma ordem de grandeza das inerentes ao sistema passivo. Outra observação importante é que este valor é compatível com aqueles encontrados na literatura [Thompson, 1976].

Considerando todas as ponderações juntas obtêm-se as matrizes  $Q_{tot}$ ,  $N_{tot}$  e  $R_{tot}$  dadas pela soma de todas as matrizes de ponderação conforme as equações (4.75), (4.76) e (4.77).

## 5.2.1 Análise dos Autovalores

Antes da obtenção da resposta dos sistemas ativo e passivo à uma excitação externa é feita uma análise do efeito de cada ponderação sobre os autovalores e autovetores do sistema variando-se os coeficientes de peso de cada matriz de ponderação.

Analisando primeiramente o efeito da ponderação da força de contato do pneu dianteiro, varia-se o seu fator de peso  $p_{f_y}$  e considera-se todos os fatores de peso restantes constantes. Assim, resolvendo a equação de Ricatti (eq. (4.19)) obtêm-se a matriz  $A_k$  (eq. (4.22)), para cada valor de  $p_{f_y}$ . Os autovalores são mostrados na Figura 5-1.

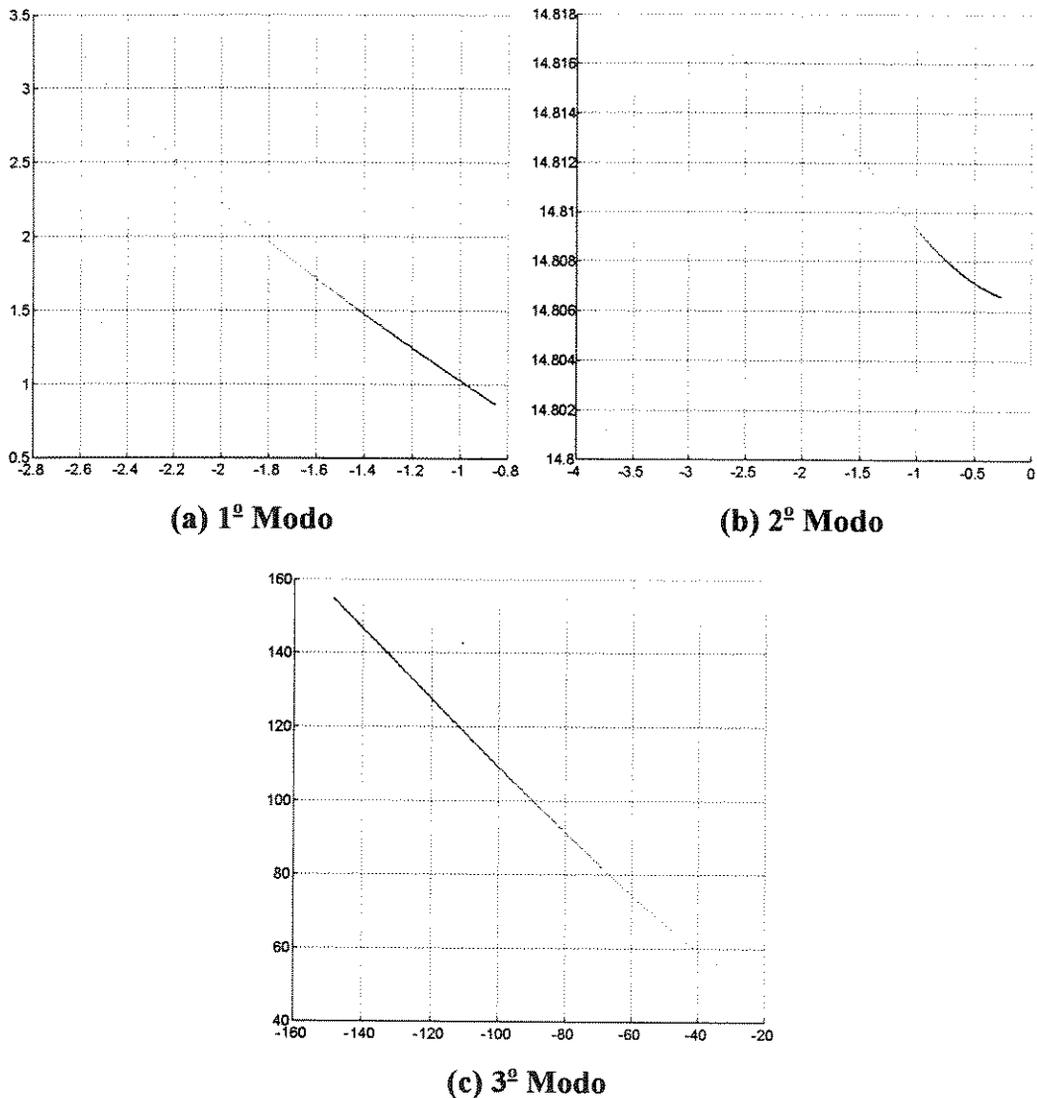


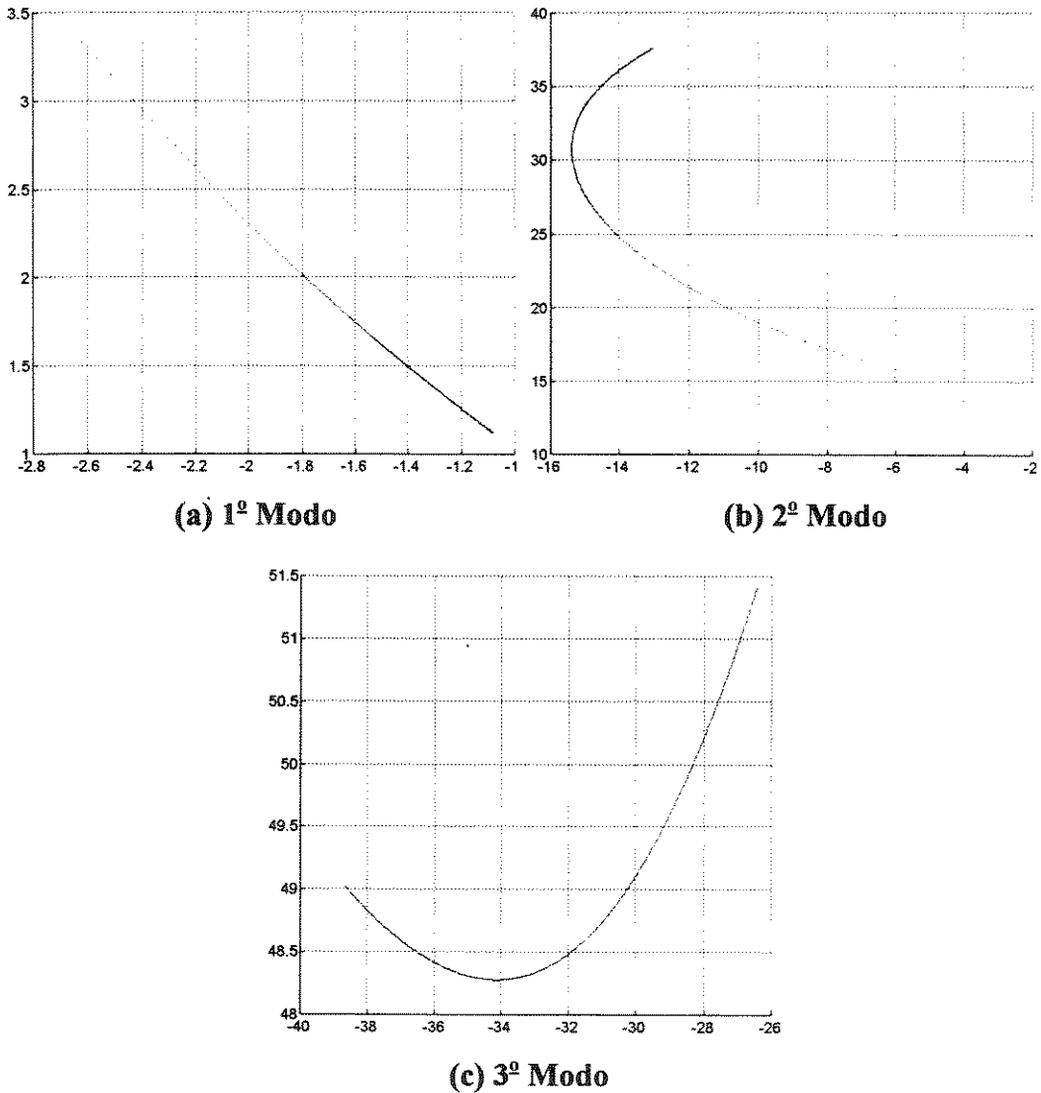
Figura 5-1 Lugar dos autovalores variando  $p_{f_{dy}}$  para o sistema ativo com 3gdl.

Observa-se dos gráficos acima que com o aumento da ponderação da força de contato do pneu dianteiro, a frequência do 1<sup>o</sup> modo diminui e o seu amortecimento também. No 2<sup>o</sup> modo o amortecimento diminui e a frequência aumenta até um certo ponto em que começa a diminuir, enquanto que no 3<sup>o</sup> modo ambos aumentam. Considerando os autovetores e os fatores de amortecimento para  $p_{f_{dy}} = 1$  e 50 mostrados na Tabela 5-1 juntamente com os valores do sistema passivo, observa-se a predominância do movimento vertical do corpo do trator no 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> modos. No 3<sup>o</sup> modo porém, o movimento predominante do eixo dianteiro está em oposição de fase ao movimento vertical do corpo do trator. Conclui-se então que a diminuição da força de contato do pneu dianteiro implica no aumento do movimento vertical do corpo do veículo.

Tabela 5-1 Autovalores e autovetores para o sistema com 3 gdl.

modelo	1º MODO		2º MODO		3º MODO	
	autovalor	autovetor	autovalor	autovetor	autovalor	autovetor
passivo	$-0,6 \pm 2,9i$ $\xi=0,20$	$1 \angle 0^\circ$ $5,3 \angle -24,9^\circ$ $3,8 \angle 156,6^\circ$	$-0,2 \pm 14,9i$ $\xi=0,01$	$1 \angle 0^\circ$ $5,7 \angle -57,2^\circ$ $1,1 \angle -64,9^\circ$	$-15,1 \pm 43,7i$ $\xi=0,32$	$140,8 \angle 0^\circ$ $5,2 \angle -117^\circ$ $1 \angle 67,5^\circ$
ativo	$-2,6 \pm 3,4i$ $\xi=0,61$	$1 \angle 0^\circ$ $2,6 \angle 277,7^\circ$ $1,8 \angle 105,2^\circ$	$-3,7 \pm 14,8i$ $\xi=0,24$	$7,1 \angle 0^\circ$ $4,1 \angle -81,7^\circ$ $1 \angle 191,4$	$-26,4 \pm 51,4i$ $\xi=0,45$	$107,4 \angle 0^\circ$ $4,9 \angle -144,9^\circ$ $1 \angle 38,5^\circ$
ativo $p_{f_y} = 50$	$-1,3 \pm 1,3i$ $\xi=0,69$	$1 \angle 0^\circ$ $14,5 \angle -88,6^\circ$ $10 \angle 92,7^\circ$	$-0,6 \pm 14,8i$ $\xi=0,04$	$1,6 \angle 0^\circ$ $4,5 \angle -87,4^\circ$ $1 \angle -105,3^\circ$	$-92,1 \pm 102i$ $\xi=0,67$	$86,2 \angle 0^\circ$ $4,7 \angle -174,2^\circ$ $1 \angle 6,4^\circ$
ativo $p_{f_y} = 30$	$-1,7 \pm 2i$ $\xi=0,66$	$1 \angle 0^\circ$ $7,2 \angle -85,8^\circ$ $5 \angle 96,9^\circ$	$-12,2 \pm 21,7i$ $\xi=0,49$	$30,8 \angle 0^\circ$ $5,1 \angle -87,8^\circ$ $1 \angle -243,6^\circ$	$-27,2 \pm 50,7$ $\xi=0,47$	$104,4 \angle 0^\circ$ $4,9 \angle -144,7^\circ$ $1 \angle 38,8^\circ$
ativo $p_{f_r} = 90$	$-1,6 \pm 8,3i$ $\xi=0,19$	$2,2 \angle 0^\circ$ $1 \angle -49^\circ$ $1,2 \angle 161,3^\circ$	$-2,1 \pm 16,1i$ $\xi=0,13$	$9,6 \angle 0^\circ$ $7,4 \angle -54,8^\circ$ $1 \angle -120,2^\circ$	$-52,8 \pm 68i$ $\xi=0,61$	$88,7 \angle 0^\circ$ $4,7 \angle -165,2^\circ$ $1 \angle 16,5^\circ$
ativo $p_{f_y} = 90$	$-2 \pm 2,2i$ $\xi=0,68$	$1 \angle 0^\circ$ $5,7 \angle -88,9^\circ$ $3,9 \angle 94,5^\circ$	$-1,6 \pm 10,5i$ $\xi=0,15$	$3,6 \angle 0^\circ$ $1 \angle -99,5^\circ$ $1,4 \angle -189,9^\circ$	$-4 \pm 44,8i$ $\xi=0,08$	$515 \angle 0^\circ$ $5,4 \angle -100,2^\circ$ $1 \angle 81,2^\circ$

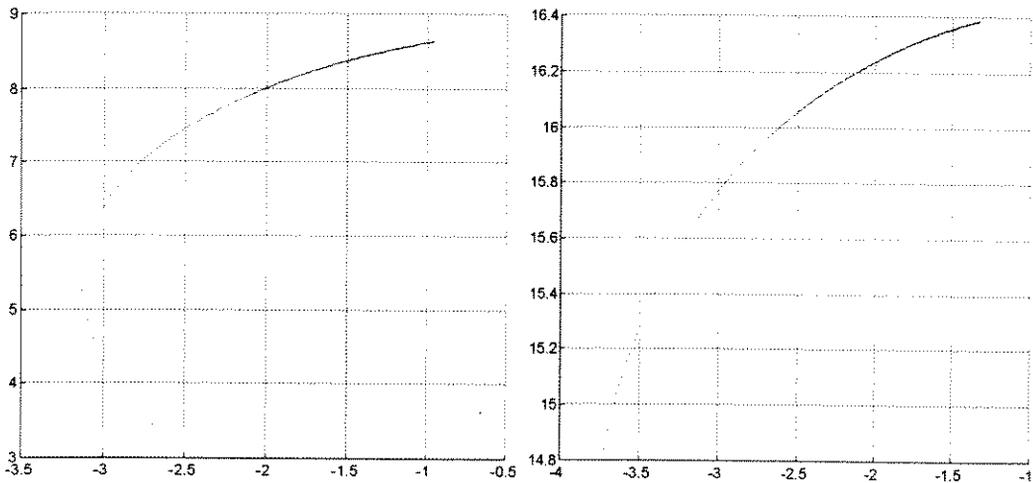
Considerando o efeito da ponderação da força de contato do pneu traseiro, varia-se  $p_{f_y}$  e mantêm-se os valores dos pesos restantes constantes. Os autovalores obtidos para cada valor de  $p_{f_y}$  são mostrados na Figura 5-2.



**Figura 5-2** Lugar dos autovalores variando  $p_{f_y}$  para o sistema ativo com 3gdl.

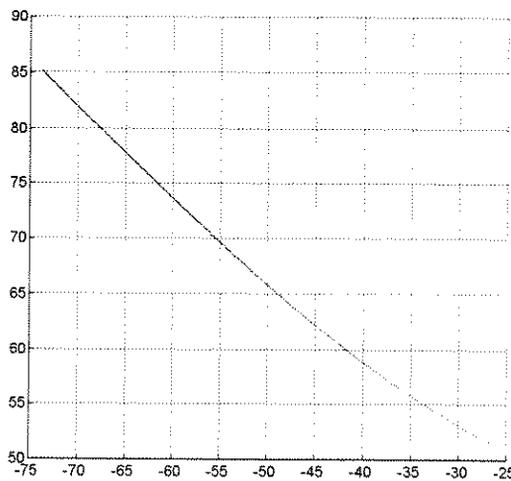
Nota-se que a frequência e o amortecimento do 1º modo varia da mesma maneira que na variação da ponderação de  $p_{f_y}$ . No 2º modo, a frequência aumenta e o amortecimento também, porém só até um certo ponto em que este começa a diminuir. No 3º modo, o amortecimento aumenta e a frequência diminui até um ponto em que começa a aumentar. Os autovetores dados na Tabela 5-1, mostram a predominância do movimento do eixo dianteiro também no 2º modo. Assim, para a minimização da variação da força de contato do pneu traseiro, o eixo dianteiro se comporta como um absorvedor de vibração.

Para a análise do efeito da variação do espaço de trabalho, varia-se o parâmetro de peso  $p_{ET}$ , mantendo-se os pesos restantes constantes. Os autovalores obtidos para cada valor de  $p_{ET}$  são mostrados na Figura 5-3.



(a) 1º Modo

(b) 2º Modo



(c) 3º Modo

**Figura 5-3 Lugar dos autovalores variando  $p_{ET}$  para o sistema ativo com 3gdl.**

Dos resultados acima, observa-se que o efeito do espaço de trabalho da suspensão no 3º modo é o mesmo produzido por  $p_{f_{\phi}}$ . No 2º modo há um aumento na frequência e uma diminuição no amortecimento. No 1º modo, a frequência aumenta e o amortecimento também até um ponto em que começa a diminuir. Da Tabela 5-1, nota-se que o eixo dianteiro tem o movimento predominante em todos os modos. No 3º modo, o movimento do eixo dianteiro

aumenta de fase em relação ao movimento vertical do corpo do trator, semelhante ao que acontece na ponderação de  $p_{f_{dy}}$ .

O efeito da ponderação da aceleração vertical do corpo do veículo é obtido variando-se o parâmetro de peso  $p_{\ddot{y}_r}$  e mantendo os restantes constantes. Os autovalores correspondentes a cada valor de  $p_{\ddot{y}_r}$  são mostrados na Figura 5-4.

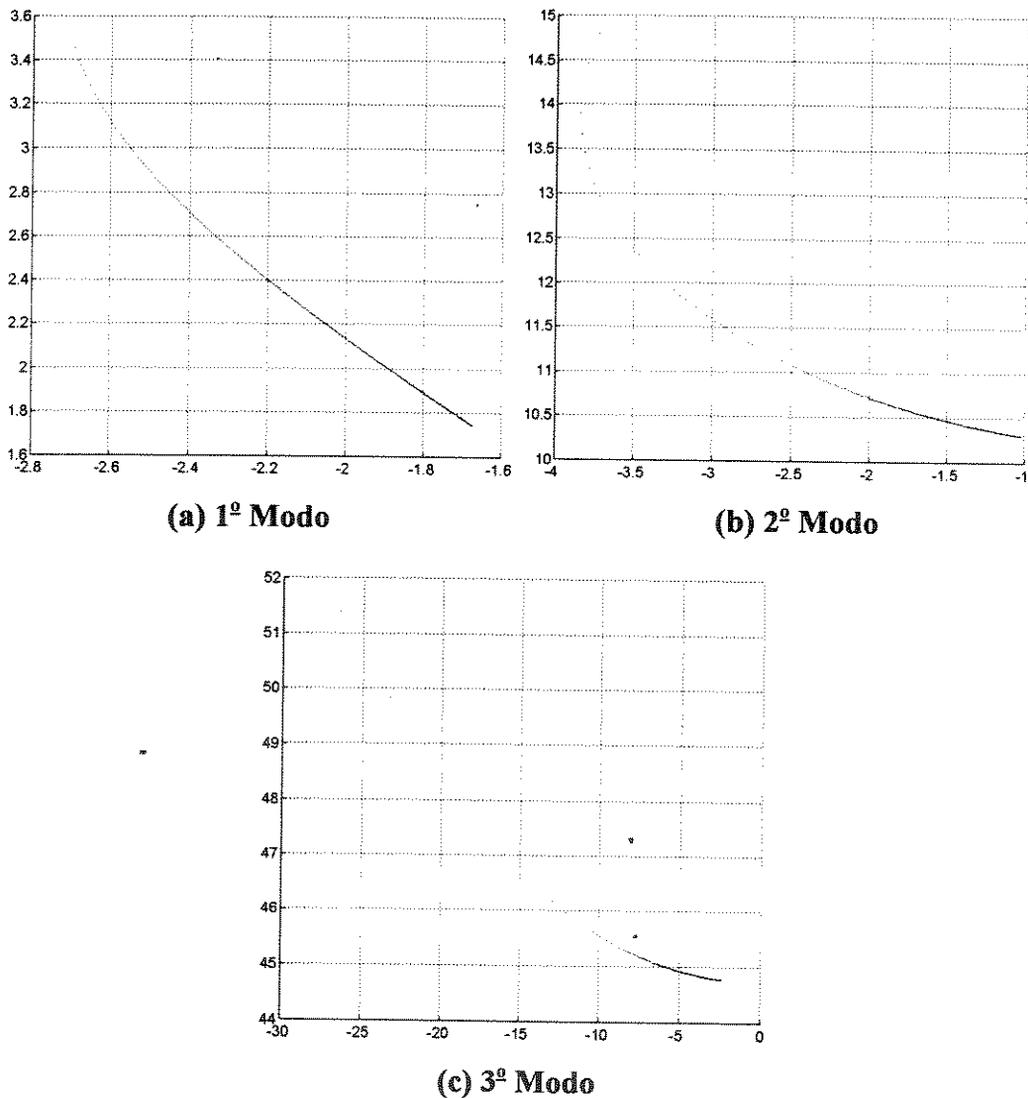


Figura 5-4 Lugar dos autovalores variando  $p_{\ddot{y}_r}$  para o sistema ativo com 3gdl.

Observa-se que no 1º e 3º modos a frequência e o amortecimento diminuem com o aumento da ponderação do conforto. No 2º modo a frequência diminui e o amortecimento aumenta com o aumento da ponderação do conforto até um ponto em que este começa a

diminuir. Nota-se a partir dos autovetores mostrados na Tabela 5-1 que o eixo dianteiro tem o seu movimento aumentado no 3º modo, comportando-se como um absorvedor de vibração.

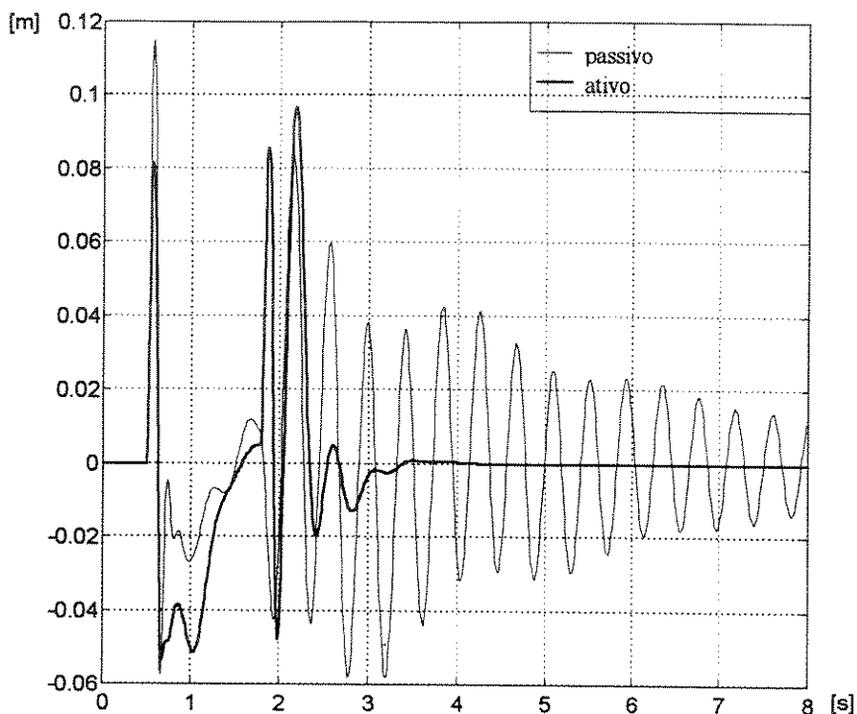
## 5.2.2 Análise da resposta do sistema

Após a análise do efeito das ponderações nos autovalores e autovetores do sistema, é feita nesta seção uma análise comparativa da resposta dos sistemas ativo e passivo quando submetidos à excitação externa. São consideradas todas as ponderações simultaneamente com os seus fatores de peso iguais a um, com exceção do fator de peso da força de controle que é igual a  $10^{-10}$ . Assim, substituindo as matrizes  $A$  e  $B$  do sistema ativo e as matrizes de ponderação na equação de Ricatti e resolvendo-a, obtêm-se o vetor  $K$  de realimentação dos estados. A matriz  $A_k$  da equação de estado é então obtida através da equação (4.22).

Para a análise comparativa do desempenho entre os sistemas passivo e ativo considera-se o veículo a uma velocidade igual a 8km/h submetido a uma excitação em forma de um degrau de 10cm de altura e 20cm de comprimento (a rigor a excitação não é uma função degrau e sim a composição de duas funções, a segunda é o inverso da primeira).

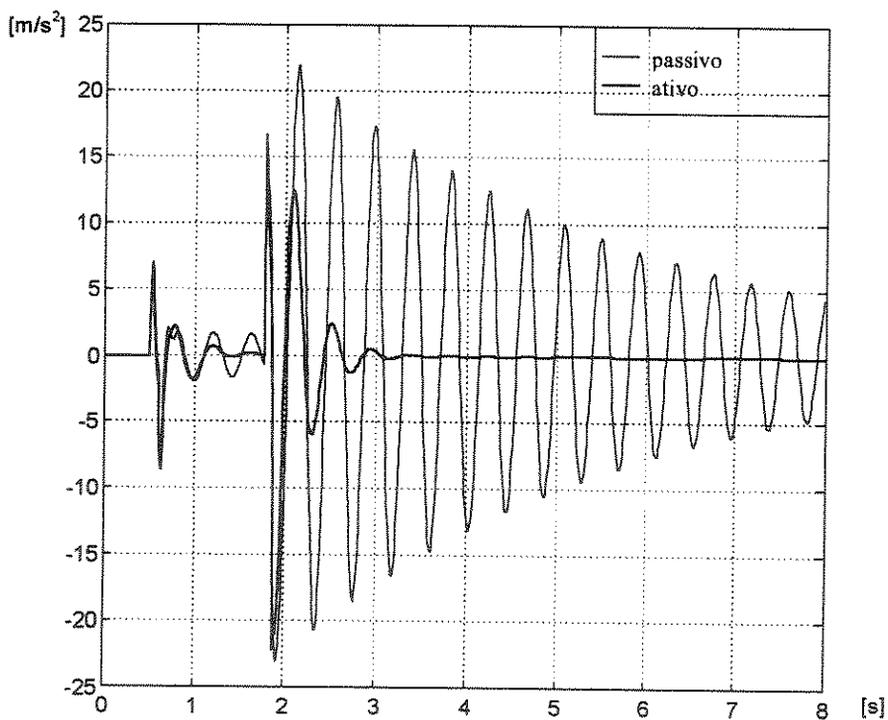
Como parâmetros de comparação são utilizados o espaço de trabalho da suspensão, a aceleração vertical e angular do corpo principal, a força de contato nos pneus dianteiro e traseiro e a força do controlador.

Considerando inicialmente o espaço de trabalho da suspensão a partir da Figura 5-5, observa-se que o valor máximo para o sistema passivo sofre uma redução no sistema ativo possibilitando uma suspensão mais compacta. Além disso, para o sistema ativo a oscilação é também bem menor, possuindo então um maior amortecimento.



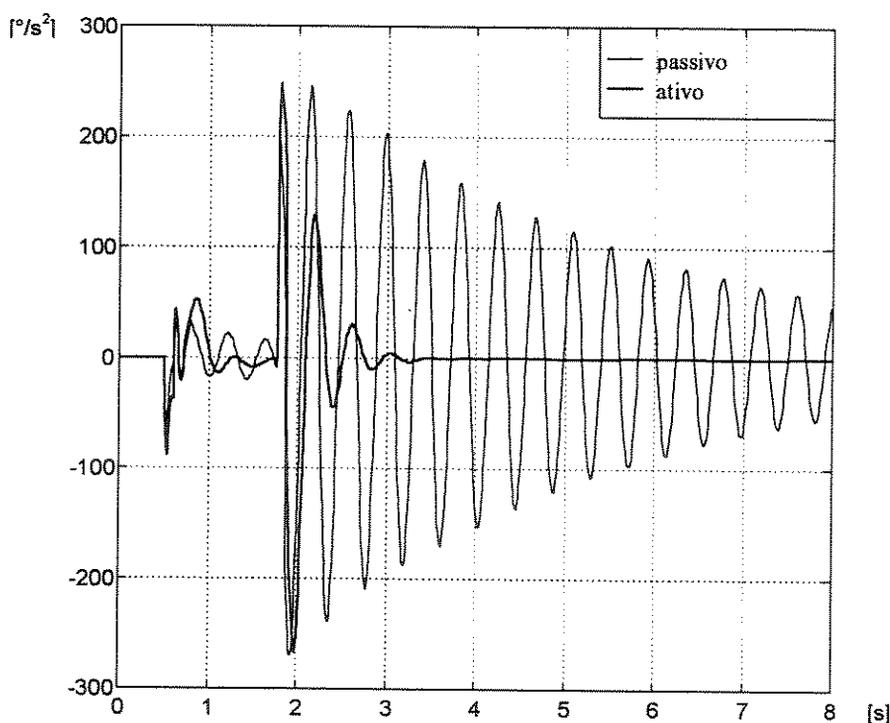
**Figura 5-5 Espaço de trabalho da suspensão para o sistema com 3 gdl.**

Embora o espaço de trabalho tenha sido reduzido, a aceleração vertical do corpo do trator, utilizada como medida do conforto, apresenta valores inferiores ao do sistema passivo após o pneu traseiro passar pelo degrau conforme pode ser visto na Figura 5-6. Nota-se também que a mesma é amortecida mais rapidamente.



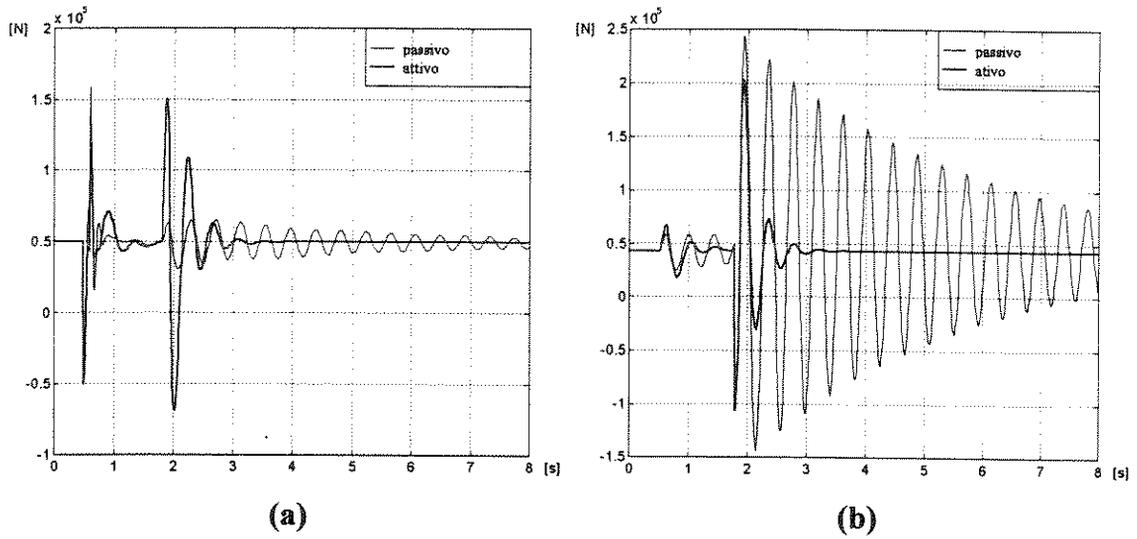
**Figura 5-6 Aceleração vertical do corpo do trator para o sistema com 3 gdl.**

Considerando que o motorista possa não estar no cg do corpo do trator, o mesmo ficará também submetido à aceleração angular, devendo então, esta aceleração, também ser levada em consideração. A Figura 5-7 mostra o seu comportamento para os sistemas ativo e passivo, podendo-se aplicar as mesmas observações feitas acima para a aceleração vertical.



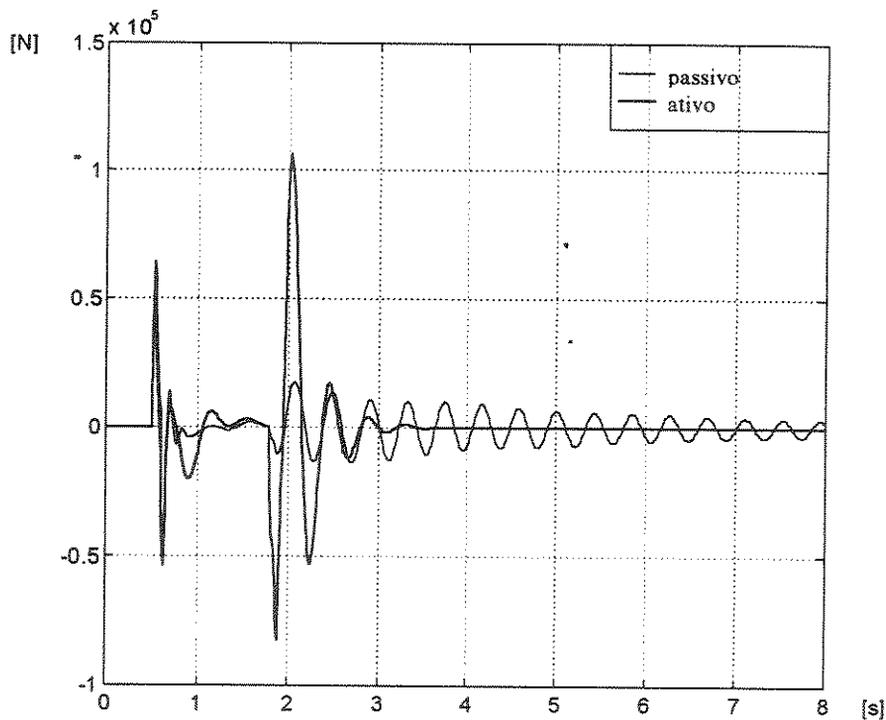
**Figura 5-7** Aceleração angular do corpo do trator para o sistema com 3 gdl.

Na obtenção das forças de contato dos pneus, utilizadas como parâmetros de medida da segurança do veículo, os seus valores são subtraídos das forças estáticas  $f_{dyest}$  e  $f_{lyest}$ , tendo-se assim a força resultante. A análise do comportamento dessas forças possibilita a previsão da perda de contato roda-via através da análise dos seus sinais. Isto é feito sabendo-se que a perda de contato ocorre quando tais forças possuem sinais negativos, indicando que houve inversão no seu sentido de atuação. As Figura 5-8a e b mostram o comportamento da força resultante no pneu dianteiro e traseiro, respectivamente. Observa-se que a força de contato do pneu dianteiro para o sistema ativo assume valores elevados quando cada roda é excitada, enquanto no sistema passivo esta força tem valores elevados somente quando a roda dianteira é excitada. Para o pneu traseiro, a força de contato apresenta valores menores e é amortecido mais rapidamente no sistema ativo após a segunda excitação.



**Figura 5-8** Forças de contato no pneu dianteiro (a) e traseiro (b) para o sistema com 3 gdl.

Os gráficos do comportamento das forças de controle necessárias considerando atuadores ativo e passivo são mostradas na Figura 5-9. Observa-se que a força do atuador ativo é da mesma ordem de grandeza da força da suspensão passiva, tornando-se assim perfeitamente factível.



**Figura 5-9** Força dos controladores ativo e passivo da suspensão para o sistema com 3 gdl.

### 5.3 Trator com o Implemento e um controlador ativo

Analogamente ao que foi feito para o modelo sem o implemento, o desempenho dos sistemas ativo e passivo serão comparados e uma análise do comportamento dos autovalores será feita variando-se os fatores de ponderação.

Devido ao fato de que as matrizes de ponderação consideradas na otimização do sistema serem de ordem de grandeza bastante diferentes, os vetores utilizados na obtenção dessas matrizes serão normalizados da mesma maneira feita anteriormente. Assim, considerando inicialmente a aceleração vertical do corpo do trator, o vetor  $C_{\ddot{y}_r}$  dado por (4.29) é normalizado de modo análogo ao sistema sem o implemento, ou seja, em relação à aceleração da gravidade:

$$\bar{Q}_{\ddot{y}_r} = \frac{p_{\ddot{y}_r}}{g^2} Q_{\ddot{y}_r}$$

$$\bar{N}_{\ddot{y}_r} = \frac{p_{\ddot{y}_r}}{g^2} N_{\ddot{y}_r}$$

$$\bar{R}_{\ddot{y}_r} = \frac{p_{\ddot{y}_r}}{g^2} R_{\ddot{y}_r}$$

onde  $p_{\ddot{y}_r}$  é o coeficiente de peso.

Da mesma maneira que o sistema anterior, o vetor  $C_{ET}$  dado por (4.41) é normalizado considerando o espaço máximo de trabalho da suspensão igual a 20 cm. Logo,

$$\bar{Q}_{ET} = \frac{p_{ET}}{sm^2} Q_{ET}$$

onde  $p_{ET}$  é o coeficiente de peso.

As forças de contato dos pneus dianteiro e traseiro são novamente normalizadas em relação aos seus valores estáticos. Assim, dividindo os vetores  $C_{f_{dy}}$  (eq. 4.49) e  $C_{f_{ty}}$

(eq.(4.57)) por  $f_{dyest}$  e  $f_{lyest}$  dados por (3.151) e (3.152), obtém-se as matrizes  $Q_{f_{dy}}$  e  $Q_{f_{ly}}$  através das equações (4.52) e (4.60).

$$\bar{Q}_{f_{dy}} = \frac{p_{f_{dy}}}{f_{dyest}^2} Q_{f_{dy}}$$

$$\bar{Q}_{f_{ly}} = \frac{p_{f_{ly}}}{f_{lyest}^2} Q_{f_{ly}}$$

onde  $p_{f_{dy}}$  e  $p_{f_{ly}}$  são os parâmetros de peso.

Na ponderação do movimento do implemento, o vetor  $C_{\beta_s}$  é normalizado em relação ao deslocamento angular máximo do implemento considerado igual a  $5^\circ$ . Logo, considerando a equação (4.68), tem-se:

$$\bar{Q}_{\beta_s} = \frac{p_{\beta_s}}{(5\pi/180)^2} Q_{\beta_s}$$

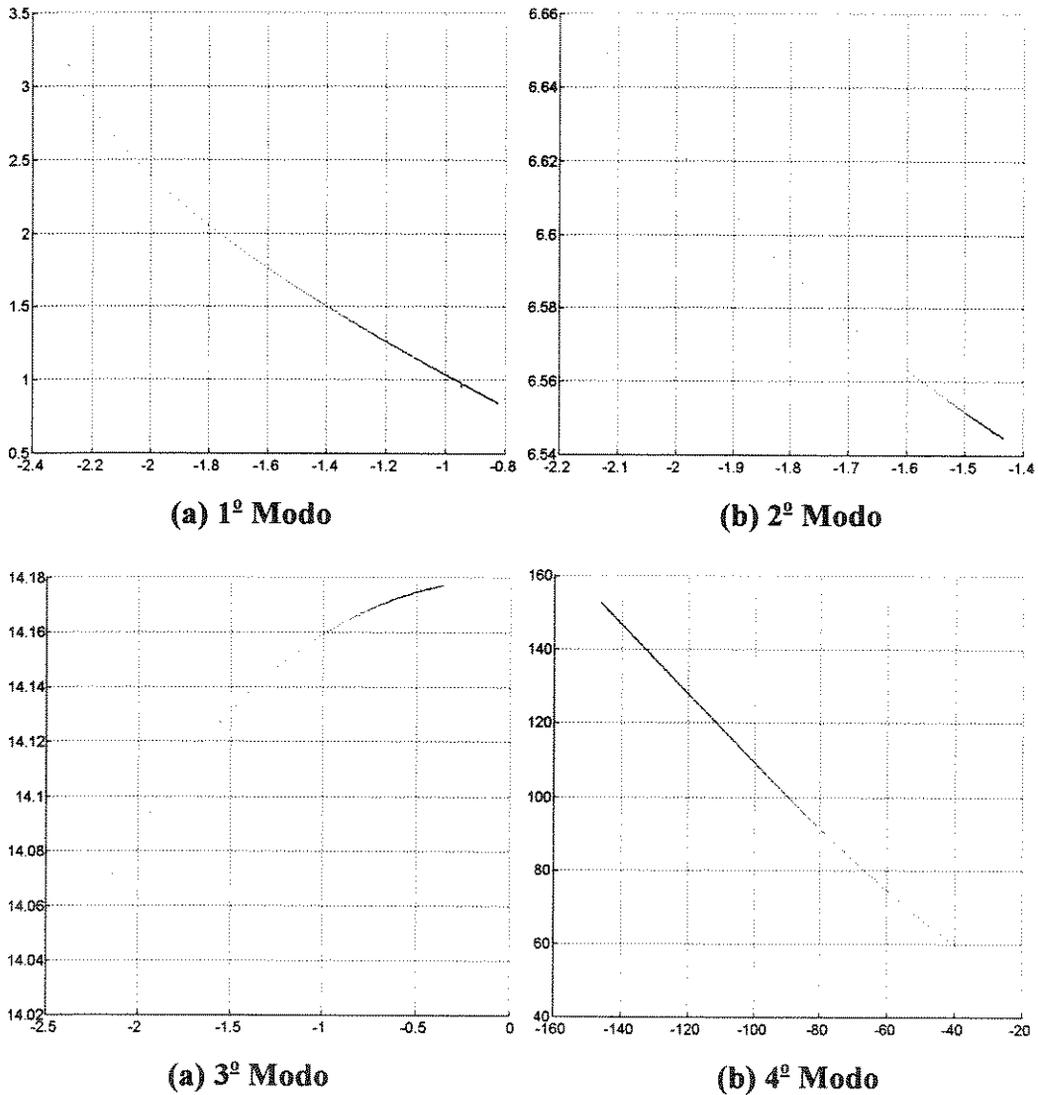
onde  $p_{\beta_s}$  é o coeficiente de peso.

Para a otimização do sistema serão então consideradas todas as ponderações conforme as equações (4.75), (4.76) e (4.77).

### 5.3.1 Análise dos Autovalores

De modo análogo ao que foi feito anteriormente, os coeficientes de peso,  $p_{\dot{y}_t}$ ,  $p_{PET}$ ,  $p_{f_{dy}}$ ,  $p_{f_{ly}}$  e  $p_{\beta_s}$ , serão todos considerados iguais a um com exceção do coeficiente  $p_u$  que será novamente igual a  $10^{-10}$ . A análise do efeito de cada ponderação sobre os autovalores do sistema será feita variando-se o coeficiente de peso em questão.

Considerando inicialmente o efeito da ponderação da força de contato do pneu dianteiro, varia-se o seu coeficiente de peso  $p_{f_y}$ . Os autovalores da matriz  $A_k$  para cada valor de  $p_{f_y}$  são mostrados na Figura 5-10.



**Figura 5-10** Lugar dos autovalores variando  $p_{f_y}$  para o sistema com 4 gdl e 1 controlador ativo.

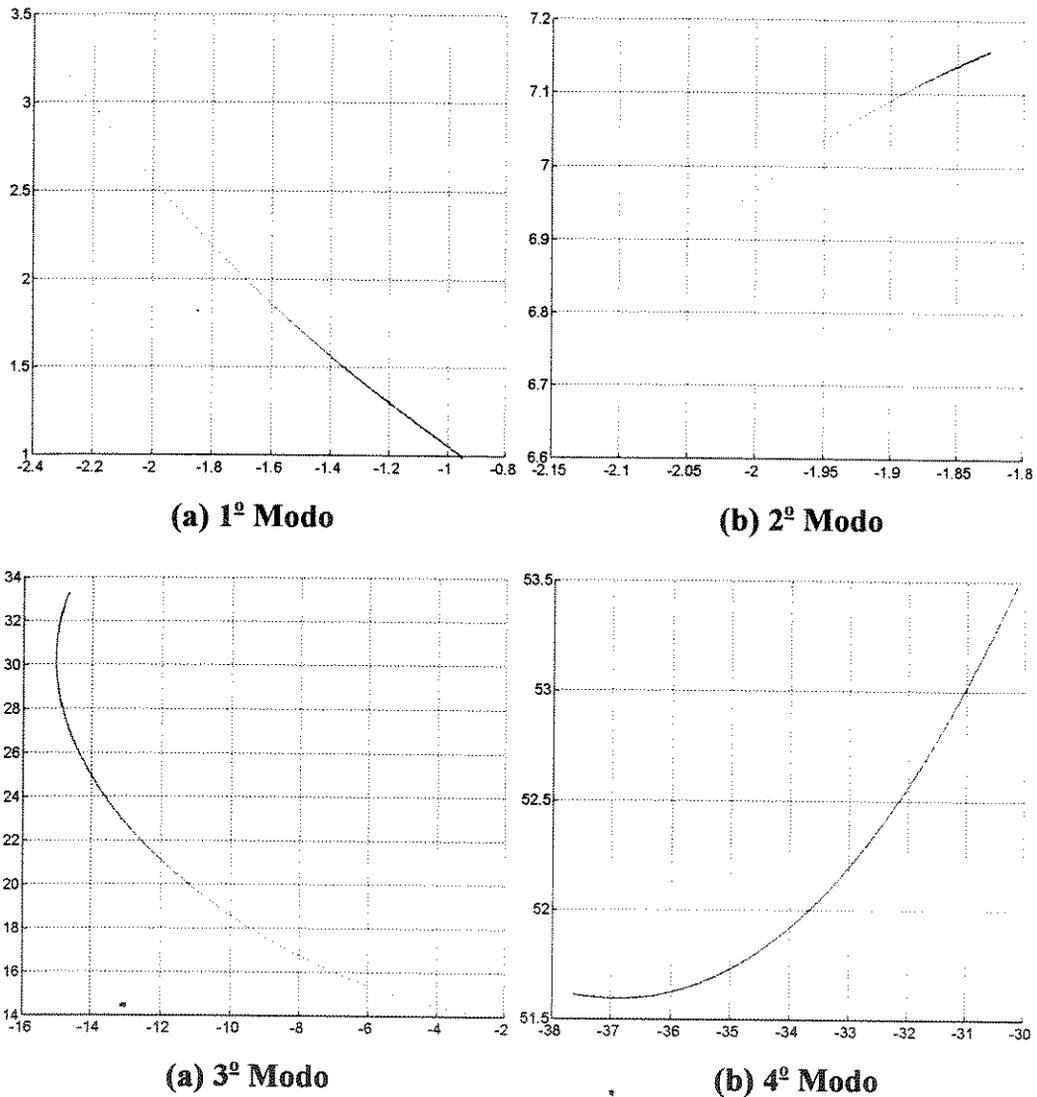
Dos resultados mostrados acima, observa-se que a frequência e o amortecimento do sistema diminuem com o aumento da ponderação da força de contato do pneu dianteiro no 1º e 2º modos, analogamente ao que ocorre no 1º modo do sistema com 3 gdl. No 4º modo, o comportamento do autovalor é análogo ao do 3º modo do modelo sem o implemento (Figura

(5.1)). No 3º modo, observa-se um aumento na frequência e uma diminuição no amortecimento. Da Tabela 5-2, nota-se a predominância do movimento vertical do corpo do trator no 1º e 3º modos. No 2º modo há um aumento da amplitude do movimento do implemento, funcionando como um amortecedor de vibração. Analogamente ao que aconteceu no 3º modo do modelo sem implemento, o movimento do eixo dianteiro fica em fase oposta ao movimento vertical do corpo do trator no 4º modo.

**Tabela 5-2 Autovalores e autovetores para os sistemas com 4 gdl passivo e com 1 controlador ativo.**

	1º MODO		2º MODO		3º MODO		4º MODO	
modelo	autovalor	autovetor	autovalor	autovetor	autovalor	autovetor	autovalor	autovetor
passivo	$-0,52 \pm 2,79i$ $\xi=0,18$	$1 \angle 0^\circ$ $5,2 \angle -23,3^\circ$ $3,9 \angle -201^\circ$ $1,1 \angle -188^\circ$	$-1,56 \pm 6,62i$ $\xi=0,23$	$1 \angle 0^\circ$ $5,1 \angle -44,9^\circ$ $2,3 \angle -231^\circ$ $21,6 \angle -57^\circ$	$-0,51 \pm 14,3i$ $\xi=0,03$	$1 \angle 0^\circ$ $6 \angle -55,9^\circ$ $1,2 \angle -58,6^\circ$ $3,62 \angle 135^\circ$	$-15,1 \pm 43,7i$ $\xi=0,32$	$275 \angle 0^\circ$ $9,7 \angle -116^\circ$ $2 \angle -292^\circ$ $1 \angle -102^\circ$
ativo	$-2,2 \pm 3,14i$ $\xi=0,58$	$1 \angle 0^\circ$ $3 \angle -81,9^\circ$ $2,1 \angle 106^\circ$ $1,1 \angle 190^\circ$	$-2,1 \pm 6,64i$ $\xi=0,3$	$1,01 \angle 0^\circ$ $1,7 \angle -61^\circ$ $1 \angle 128^\circ$ $4,8 \angle -79^\circ$	$-2,43 \pm 14i$ $\xi=14,2$	$4,5 \angle 0^\circ$ $3,7 \angle -87^\circ$ $1 \angle -149^\circ$ $2,4 \angle 60^\circ$	$-30,1 \pm 53,4i$ $\xi=61,3$	$185 \angle 0^\circ$ $8 \angle -149^\circ$ $1,9 \angle -326^\circ$ $1 \angle -139^\circ$
ativo $P_{f_y} =$ 50	$-1,15 \pm 1,2i$ $\xi=0,69$	$1,05 \angle 0^\circ$ $17,9 \angle -89^\circ$ $12,3 \angle -267^\circ$ $1 \angle 180^\circ$	$-1,4 \pm 6,5i$ $\xi=0,22$	$1 \angle 0^\circ$ $31 \angle -68^\circ$ $12,5 \angle 97^\circ$ $149 \angle -81^\circ$	$-0,49 \pm 14,1i$ $\xi=0,03$	$1 \angle 0^\circ$ $8,4 \angle 263,9^\circ$ $1,8 \angle 263,4^\circ$ $5,4 \angle 95,8^\circ$	$-101 \pm 110i$ $\xi=0,68$	$154 \angle 0^\circ$ $8 \angle -175^\circ$ $1,9 \angle -354^\circ$ $1 \angle -172^\circ$
ativo $P_{f_y} =$ 50	$-1,77 \pm 2,02i$ $\xi=0,64$	$1 \angle 0^\circ$ $6,6 \angle -84,5^\circ$ $4,6 \angle 99^\circ$ $1,01 \angle 182^\circ$	$-1,89 \pm 7i$ $\xi=0,25$	$1 \angle 0^\circ$ $1,5 \angle -35^\circ$ $1 \angle 146^\circ$ $4,6 \angle -37,5^\circ$	$-9 \pm 17,6i$ $\xi=0,45$	$18,6 \angle 0^\circ$ $4,8 \angle -81,4^\circ$ $1,07 \angle -227^\circ$ $1 \angle -5,8^\circ$	$-30,4 \pm 53i$ $\xi=0,49$	$184 \angle 0^\circ$ $8,5 \angle 210^\circ$ $1,9 \angle 33^\circ$ $1 \angle 220^\circ$
ativo $P_{\beta_a} =$ 50	$-1,51 \pm 1,8i$ $\xi=0,62$	$1 \angle 0^\circ$ $7,9 \angle -81^\circ$ $5,4 \angle 101^\circ$ $1 \angle 181^\circ$	$-6,8 \pm 7,84i$ $\xi=0,65$	$3,1 \angle 0^\circ$ $1,9 \angle 253^\circ$ $1 \angle 101^\circ$ $1,3 \angle 279^\circ$	$-2,7 \pm 15i$ $\xi=0,17$	$7,7 \angle 0^\circ$ $5,6 \angle -67^\circ$ $1 \angle -142^\circ$ $2,5 \angle 79^\circ$	$-30,1 \pm 53,4i$ $\xi=0,49$	$185,8 \angle 0^\circ$ $8,5 \angle 210,6^\circ$ $1,9 \angle 33,4^\circ$ $1 \angle -139,6^\circ$
ativo $P_{\beta_T} =$ 90	$-1,02 \pm 5,8i$ $\xi=0,17$	$4,2 \angle 0^\circ$ $1 \angle 280,6^\circ$ $2,6 \angle 167,2^\circ$ $18 \angle 153,7^\circ$	$-1,84 \pm 8,9i$ $\xi=0,2$	$2,3 \angle 0^\circ$ $1 \angle -34,3^\circ$ $1,2 \angle -197^\circ$ $3,3 \angle -3,4^\circ$	$-1,7 \pm 15,3i$ $\xi=0,11$	$7,8 \angle 0^\circ$ $7,5 \angle -53^\circ$ $1 \angle -106,6^\circ$ $3 \angle -248,7^\circ$	$-54,3 \pm 69,2i$ $\xi=0,61$	$158,6 \angle 0^\circ$ $8,2 \angle 194,2^\circ$ $1,8 \angle 15,7^\circ$ $1 \angle 199,4^\circ$
ativo $P_{y_r} =$ 90	$-1,9 \pm 2,1i$ $\xi=0,67$	$1 \angle 0^\circ$ $5,4 \angle 269,7^\circ$ $3,7 \angle 94,2^\circ$ $1,02 \angle 184^\circ$	$-1,4 \pm 6,08i$ $\xi=0,22$	$2,5 \angle 0^\circ$ $3 \angle 230,9^\circ$ $1 \angle 114,7^\circ$ $19 \angle 183,3^\circ$	$-1,4 \pm 10,7i$ $\xi=0,13$	$5,9 \angle 0^\circ$ $1 \angle -107,2^\circ$ $2 \angle -186,6^\circ$ $5,5 \angle 10,6^\circ$	$-4,8 \pm 44,9$ $\xi=0,10$	$903,2 \angle 0^\circ$ $10,8 \angle -102^\circ$ $2,2 \angle 79,2^\circ$ $1 \angle -93,5^\circ$

Para análise do efeito da ponderação da força de contato do pneu traseiro, varia-se o fator de peso  $p_{f_y}$ . Os autovalores obtidos são mostrados na Figura 5-11:

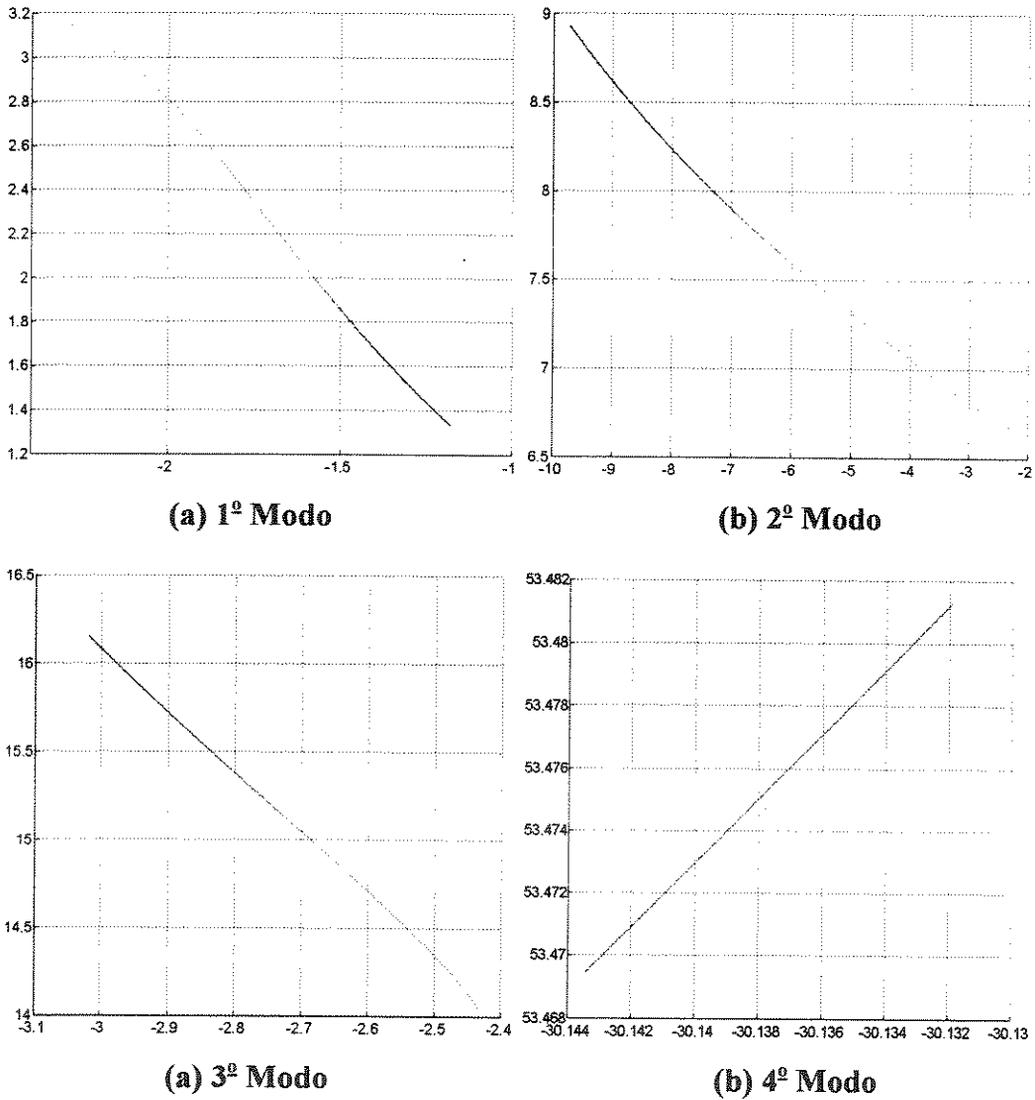


**Figura 5-11** Lugar dos autovalores variando  $p_{f_y}$  para o sistema com 4 gdl e 1 controlador ativo.

Da figura acima, observa-se que no 1º modo os autovalores variam analogamente ao 1º modo do sistema sem implemento (Figura (5.2)). No 3º modo o amortecimento aumenta até um certo ponto em que começa a diminuir e a frequência tem um aumento contínuo, de modo análogo ao que acontece no 2º modo do sistema com 3 gdl. A variação dos autovalores no 4º modo é semelhante ao 3º modo do sistema anterior. No 2º modo há um aumento da frequência e uma diminuição do amortecimento do sistema. Os autovetores dados na Tabela 5-2, mostram

um aumento do movimento do eixo dianteiro também no 3º modo, passando assim a se comportar como um absorvedor de vibração.

O efeito da ponderação do movimento do implemento sobre os autovalores do sistema é obtido variando o fator de peso  $p_{\beta_1}$ . Os resultados obtidos são mostrados na Figura 5-12.

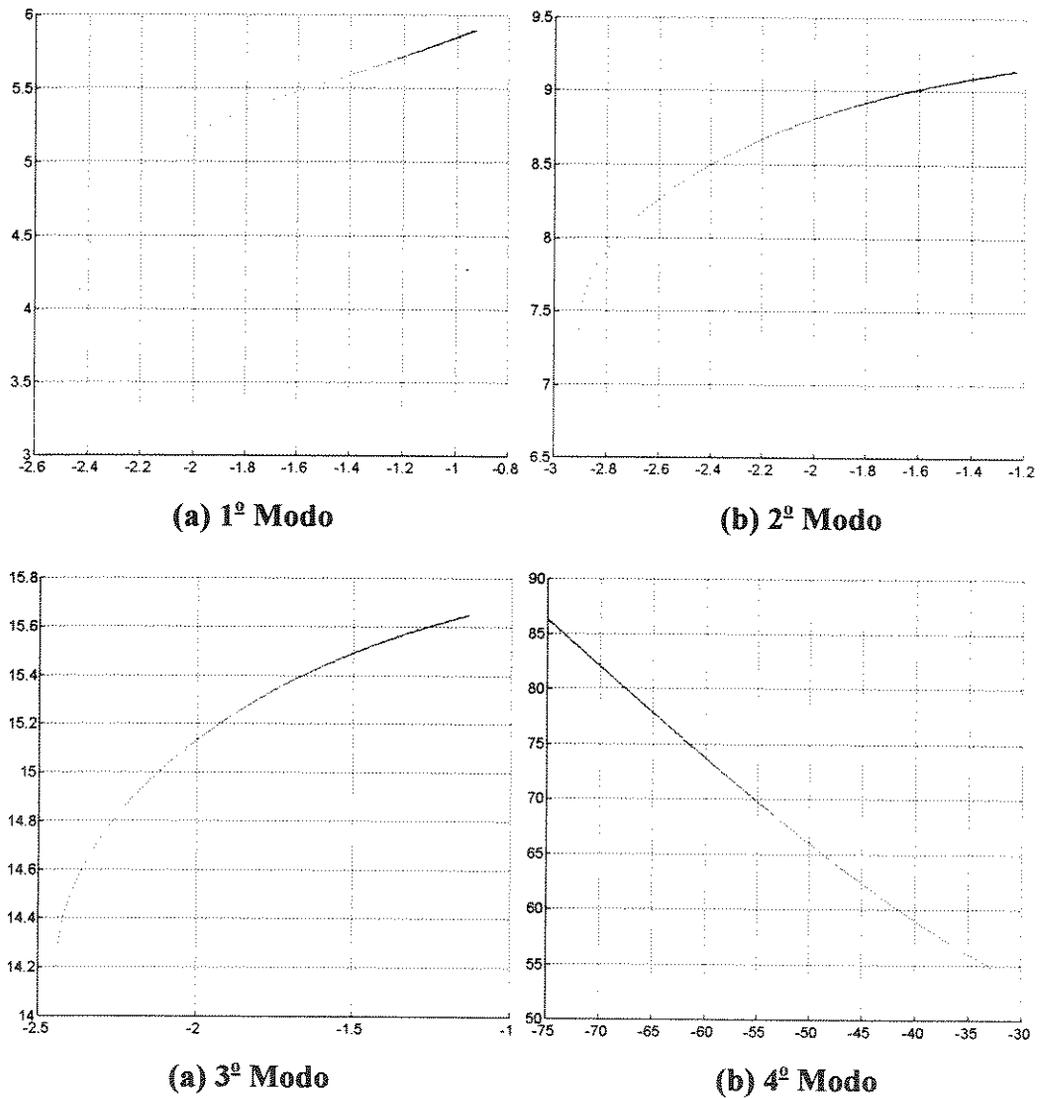


**Figura 5-12** Lugar dos autovalores variando  $p_{\beta_1}$  para o sistema com 4 gdl e 1 controlador ativo.

A partir da figura acima, percebe-se um aumento no amortecimento e na frequência do sistema no 2º e 3º modos. No 1º modo, porém, o comportamento é invertido, ou seja, há uma

diminuição na frequência e no amortecimento. No 4º modo as variações são muito pequenas, mas mesmo assim, nota-se uma diminuição na frequência e um aumento no amortecimento.

Considerando o efeito do espaço de trabalho nos autovalores do sistema, varia-se o fator de peso  $p_{ET}$ . A Figura 5-13 mostra os resultados obtidos.

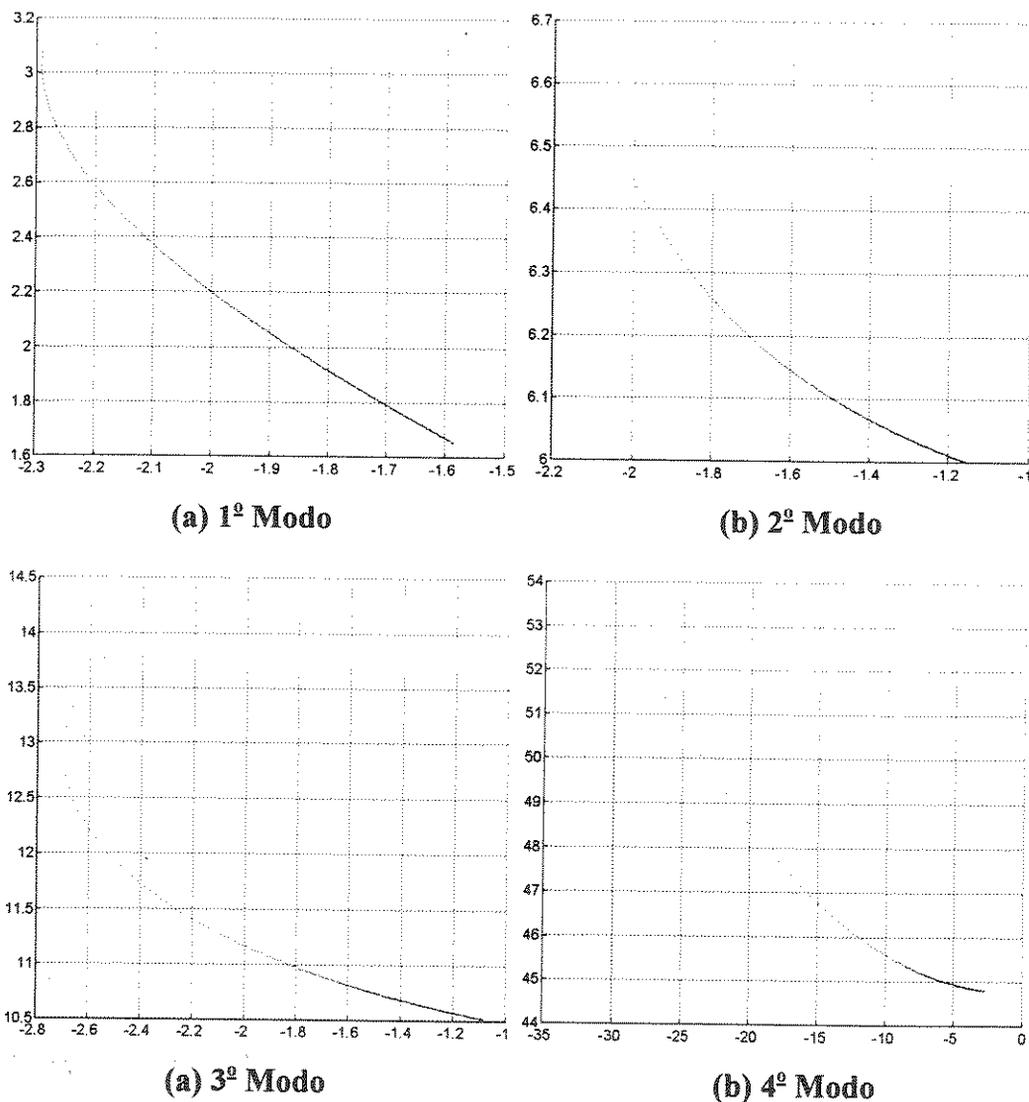


**Figura 5-13** Lugar dos autovalores variando  $p_{ET}$  para o sistema com 4 gdl e 1 controlador ativo.

Observa-se que no 1º modo a frequência aumenta e o amortecimento também, porém, até um certo ponto onde começa a diminuir. No 2º, 3º e 4º modos, os autovalores variam de

maneira análoga aos 1º, 2º e 3º modos do sistema sem o implemento (Figura.(5.3)), respectivamente. Percebe-se, assim, que a influência do espaço de trabalho sobre o sistema permanece praticamente a mesma. Os autovetores dados na Tabela 5-2 mostram o aumento do movimento do implemento no 2º modo da mesma maneira ao que aconteceu na ponderação da força de contato do pneu dianteiro. Vê-se, então, que o implemento junto com o eixo dianteiro se comportam como absorvedores de vibração.

Para análise do efeito da ponderação da aceleração vertical do corpo do trator varia-se o seu fator de peso  $p_{y_r}$ . Os autovalores obtidos são mostrados na Figura 5-14.



**Figura 5-14** Lugar dos autovalores variando  $p_{y_r}$  para o sistema com 4 gdl e 1 controlador ativo.

Nota-se no 1º modo uma diminuição da frequência e um pequeno aumento no amortecimento até um ponto em que este começa a diminuir. No 2º, 3º e 4º modos, as variações nos autovalores ocorrem de modo semelhante aos 1º, 2º e 3º modos do sistema sem o implemento (Figura (5.4)). Isto mostra que o efeito da ponderação da aceleração vertical do corpo do trator permanece aproximadamente o mesmo. Além disso, percebe-se a partir dos autovetores mostrados na Tabela 5-2, que analogamente ao que aconteceu no 3º modo do modelo anterior com 3 gdl, há um grande aumento no movimento do eixo dianteiro no 4º modo. Conclui-se então que para o aumento do conforto do veículo este corpo passa a funcionar como um absorvedor de vibração.

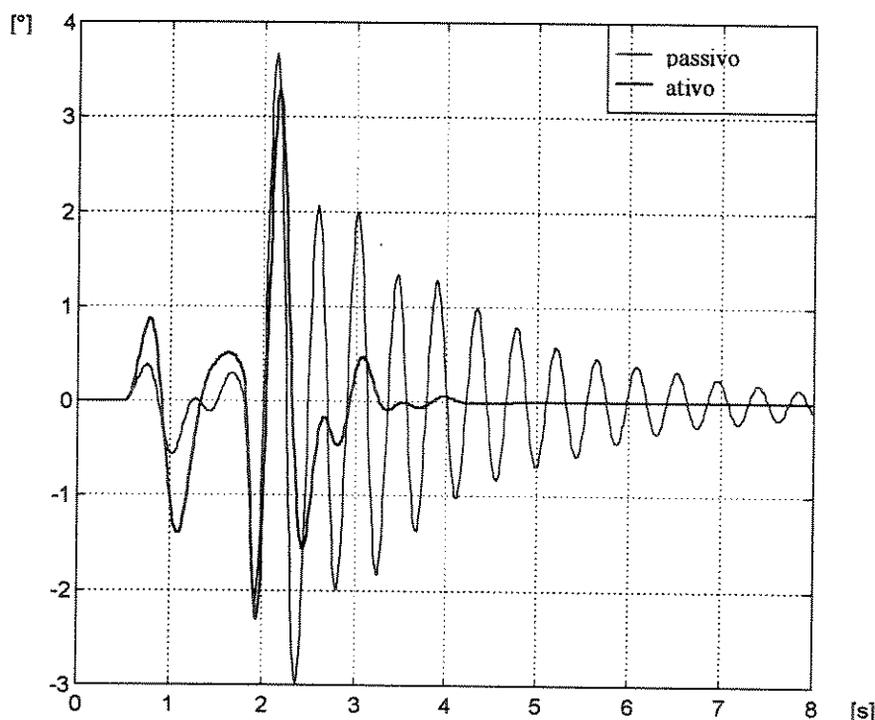
### 5.3.2 Análise da resposta do sistema

Para a análise comparativa da resposta dos sistemas ativo e passivo, será considerado novamente o veículo a uma velocidade de 8 km/h submetido a uma excitação externa em forma de um degrau de 10 cm de altura e 20 cm de comprimento.

A lei de controle do sistema ativo será obtida considerando todas as ponderações simultaneamente com seus fatores de peso iguais a um, com exceção do fator de peso da força de controle  $p_u$  que será igual a  $10^{-10}$ . O vetor de realimentação dos estados é obtido substituindo estas matrizes de ponderação juntamente com as matrizes  $A$  e  $B$  na equação de Riccati e considerando a equação (4.18). A matriz  $A_k$  da equação de estado é então obtida substituindo o vetor  $K$  na equação (4.22).

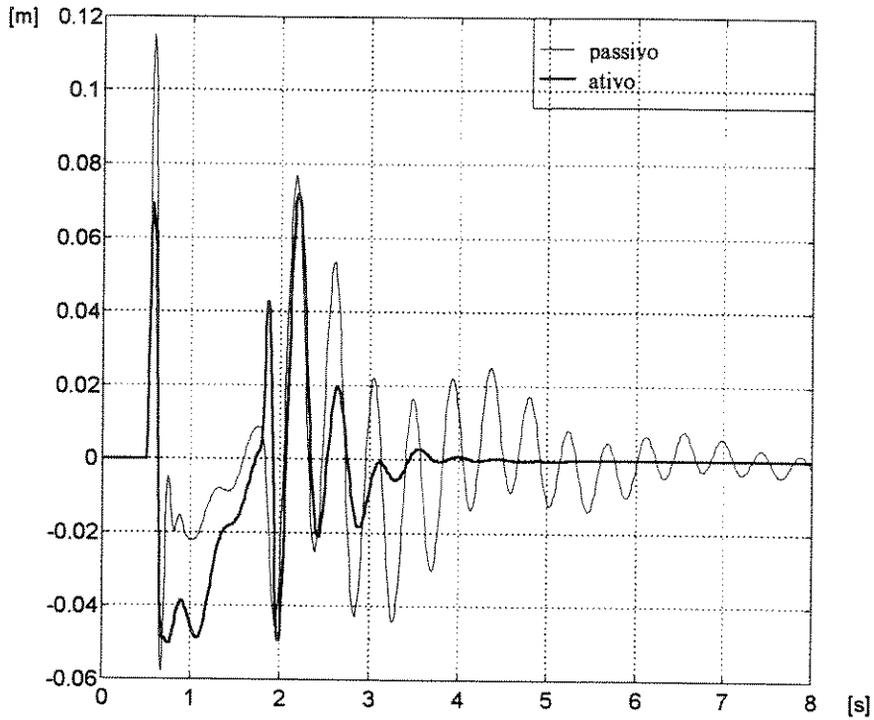
Os parâmetros utilizados nesta análise comparativa são os mesmos considerados para o sistema sem implemento, ou seja, o espaço de trabalho, as acelerações vertical e angular do corpo do trator, as forças de contato dos pneus, a força do controlador, além do movimento do implemento.

Analisando primeiramente o movimento do implemento, a partir da Figura 5-15, observa-se que entre as excitações nas duas rodas, o sistema ativo apresenta amplitudes maiores que o passivo. Porém, após a excitação na roda traseira o movimento é amortecido mais rapidamente. Isto também pode ser observado a partir da Tabela 5-2 em que o fator de amortecimento para o modo associado ao movimento do implemento aumenta de 0,23 para o sistema passivo para 0,30 para o sistema ativo.



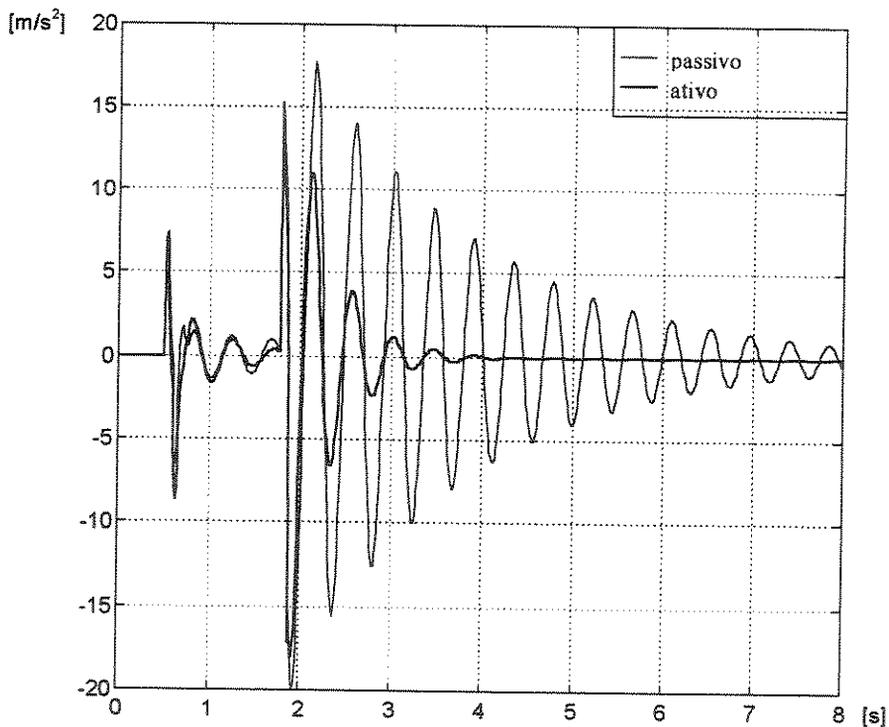
**Figura 5-15 Movimento do implemento para o sistema com 4 gdl passivo e com 1 controlador ativo.**

O espaço de trabalho para os sistemas ativo e passivo é mostrado na Figura 5-16. Observa-se que, analogamente ao sistema sem o implemento, o movimento é amortecido mais rapidamente no sistema ativo e o valor máximo é reduzido possibilitando uma suspensão mais compacta.



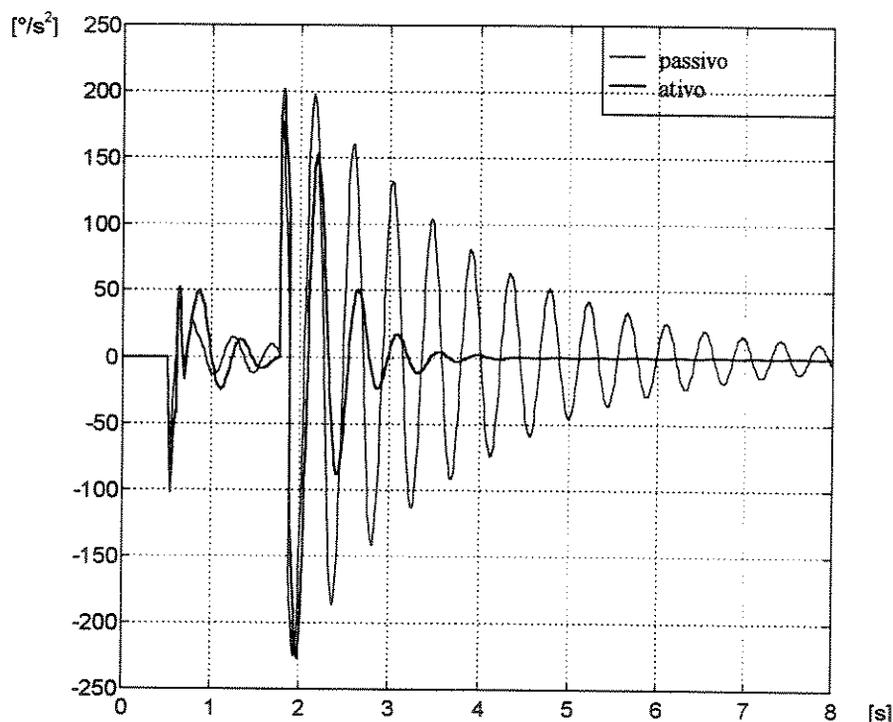
**Figura 5-16 Espaço de trabalho para o sistema com 4 gdl passivo e com 1 controlador ativo.**

Considerando a aceleração vertical do corpo do trator mostrada na Figura 5-17, observa-se a sua redução no sistema ativo após a excitação na roda traseira. Além disso, nota-se que esta aceleração é amortecida mais rapidamente.



**Figura 5-17 Aceleração vertical do corpo do trator para o sistema com 4 gdl passivo e com 1 controlador ativo.**

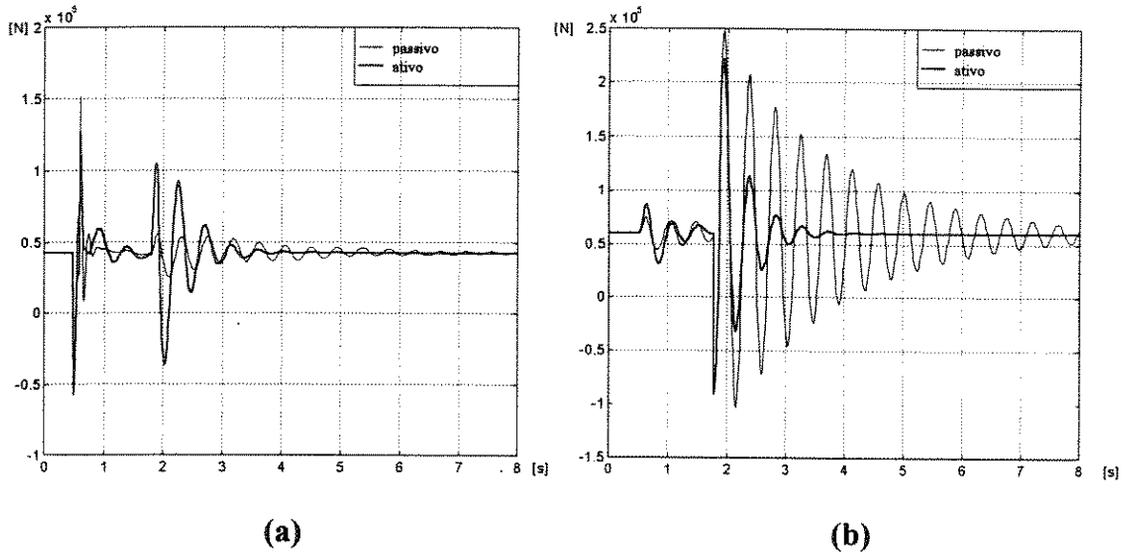
Considerando novamente que o motorista possa não estar no cg do corpo do trator , a aceleração angular  $\ddot{\beta}_r$  é também levada em consideração como parâmetro de comparação. Uma análise do seu comportamento mostrado na Figura 5-18, permite-se considerar as mesmas observações feitas para a aceleração vertical.



**Figura 5-18 Aceleração angular do corpo do trator para o sistema com 4 gdl passivo e com 1 controlador ativo.**

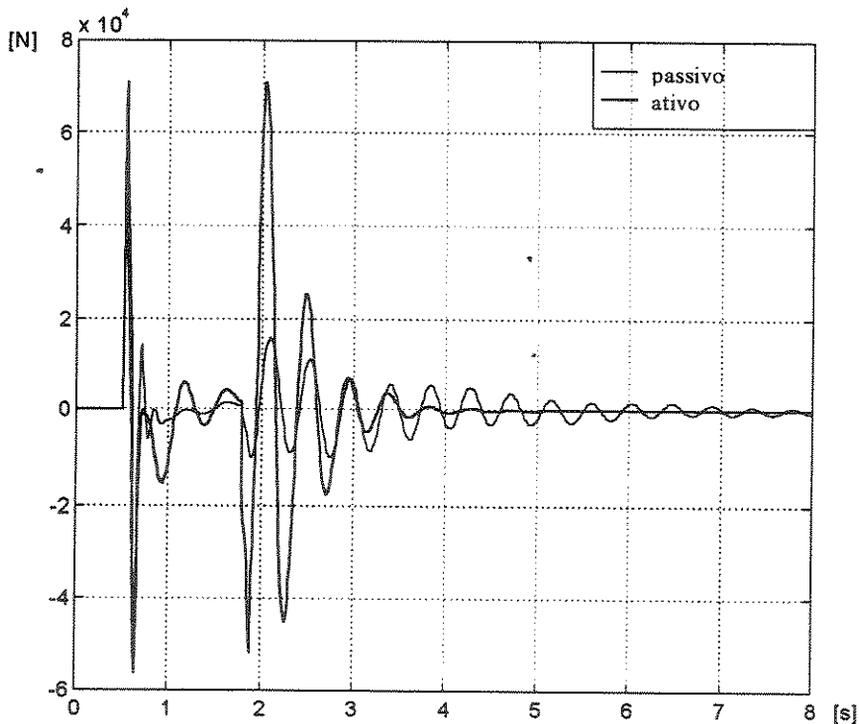
Analogamente ao que foi feito no modelo sem implemento, serão analisadas as forças de contato resultantes obtidas a partir das forças de contato dos pneus subtraídas de seus valores estáticos permitindo assim a previsão da perda de contato roda-via. A partir da Figura 5-19a observa-se que no sistema ativo a força resultante no pneu dianteiro assume valores elevados nas duas excitações, analogamente ao que aconteceu no sistema sem o implemento, ocasionando a perda de contato. Porém, observa-se que na excitação do pneu traseiro a magnitude desta força é menor do que a do modelo com 3 gdl devido ao aumento do movimento do implemento. Isto pode ser visto a partir da Tabela 5-2, considerando um aumento do fator de peso  $p_{f_{\theta}}$ .

Nota-se partir da Figura 5-19b que a força resultante no pneu traseiro é menor e amortecida mais rapidamente no sistema ativo. Além disso, o número de vezes em que o pneu perde contato é também reduzido.



**Figura 5-19** Forças de contato no pneu dianteiro (a) e traseiro (b) para o sistema com 4 gdl passivo e com 1 controlador ativo.

As forças de controle considerando suspensões ativa e com elementos passivos são mostradas na Figura 5-20. Nota-se novamente que a força do atuador ativo é da mesma ordem de grandeza da força da suspensão passiva, sendo assim factível.



**Figura 5-20** Força dos controladores ativo e passivo da suspensão para o sistema com 4gdl.

## 5.4 Trator com o Implemento e dois controladores ativos

Para o modelo com 4 gdl e dois controladores ativos, sendo um na suspensão e o outro na ligação do implemento com o corpo do trator, serão feitas análises análogas a dos modelos anteriores do desempenho dos sistemas ativo e passivo e da influência de cada ponderação nos autovalores do sistema ativo.

As matrizes de ponderação serão as mesmas já normalizadas na seção anterior para o modelo com 4 gdl. Porém, diferentemente das outras matrizes de ponderação, as matrizes  $Q_{\dot{y}_f}$ ,  $N_{\dot{y}_f}$  e  $R_{\dot{y}_f}$  serão diferentes por serem função das matrizes A e B.

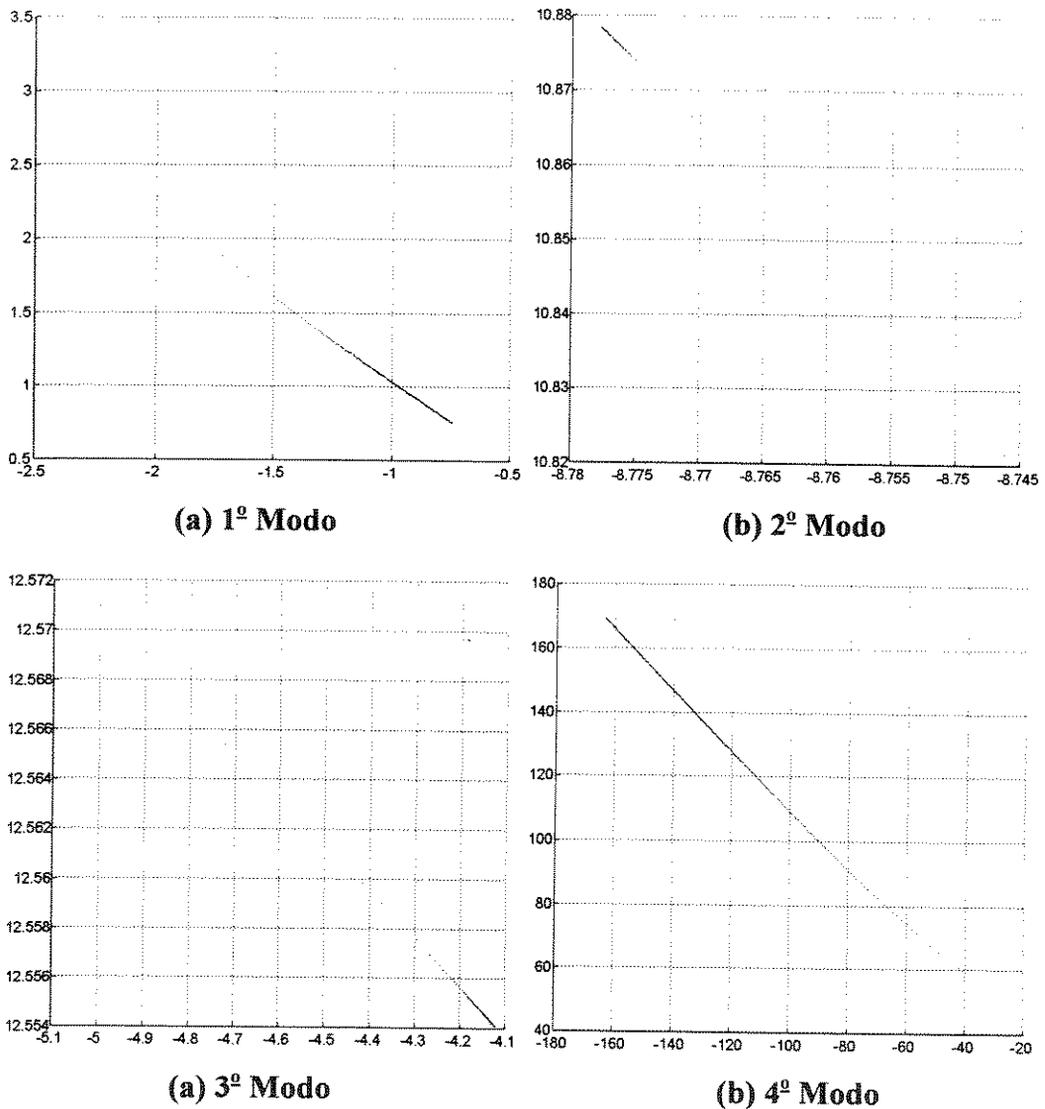
Para obtenção do controlador ótimo substitui-se as matrizes de ponderação  $Q_{tot}$ ,  $N_{tot}$  e  $R_{tot}$  dadas pela soma de todas as matrizes de ponderação, segundo as equações (4.75), (4.76) e (4.77), e as matrizes A e B na equação de Riccati. Como tem-se dois controladores, obtêm-se a matriz  $K$  e não mais um vetor, a partir da equação (4.18).

A matriz  $A_k$  da equação de estado é então obtida substituindo a matriz  $K$  na equação (4.22).

### 5.4.1 Análise dos Autovalores

A análise da influência de cada ponderação sobre os autovalores do sistema ativo é feita de modo análogo aos sistemas anteriores variando-se os fatores de peso  $p_{\dot{y}_f}$ ,  $p_{ET}$ ,  $p_{f_{dy}}$ ,  $p_{f_{by}}$  e  $p_{p_u}$ . Considera-se inicialmente todos iguais a um e  $p_u$  igual a  $10^{-10}$  e varia-se somente o fator de peso da ponderação que está sendo analisada.

Variando-se inicialmente a ponderação da força de contato do pneu dianteiro através do seu fator de peso  $p_{f_{dy}}$ , obtêm-se os autovalores mostrados na Figura 5-21.



**Figura 5-21** Lugar dos autovalores variando  $p_{f_{dy}}$  para o sistema com 4 gdl e 2 controladores ativos.

Dos resultados acima, observa-se que no 3º modo tanto a frequência quanto o amortecimento diminuem com o aumento de  $p_{f_{dy}}$ . No 2º modo, o autovalor varia de maneira inversa ao 2º modo do sistema anterior, enquanto que no 1º e 4º modos essas variações ocorrem na mesma direção dos modos correspondentes daquele sistema. Comparando os resultados da Tabela 5-3 e 5.2, observa-se o aumento do movimento do implemento no 2º e 3º modos, pois tem-se agora um controlador no implemento, fazendo com que este corpo passe a funcionar como um absorvedor de vibração juntamente com o eixo dianteiro.

**Tabela 5-3 Autovalores e autovetores para os sistemas com 4 gdl passivo e com 2 controladores ativos.**

	1º MODO		2º MODO		3º MODO		4º MODO	
	autovalor	autovetor	autovalor	autovetor	autovalor	autovetor	autovalor	autovetor
passivo	-0,52±2,79i ξ=0,18	1∠0° 5,2∠-23,3° 3,9∠-201° 1,1∠-188°	-1,56±6,62i ξ=0,23	1∠0° 5,1∠-44,9° 2,3∠-231° 21,6∠-57°	-0,51±14,3i ξ=0,03	1∠0° 6∠-55,9° 1,2∠-58,6° 3,62∠135°	-15,1±43,7i ξ=0,32	275∠0° 9,7∠-116° 2∠-292° 1∠-102°
ativo	-2,4±3,1i ξ=0,61	2,8∠0° 8,1∠-83,7° 5,7∠104,9° 1∠92,1°	-8,7±10,8i ξ=0,62	1∠0° 3,2∠-80,9° 2,1∠4,6° 19∠-167,6°	-5±12,5i ξ=0,37	3,5∠0° 5,6∠-95,5° 1∠-36,3° 12,4∠-190°	-30,3±53,6i ξ=0,49	80,4∠0° 3,5∠210,8° 1∠31,6° 1,6∠208,2°
ativo P <sub>f<sub>y</sub></sub> = 50	-1,1±1,2i ξ=0,69	1∠0° 16,8∠-89° 11,5∠92,4° 1,6∠90,6°	-8,7±10,8i ξ=0,63	1∠0° 115∠-77,7° 89,7∠-0,2° 783∠-169°	-4,1±12,5i ξ=0,31	1∠0° 45,8∠262° 12∠327,5° 125∠174°	-101±111i ξ=0,68	69,2∠0° 3,5∠-175° 1∠5° 1,6∠-175°
ativo P <sub>f<sub>y</sub></sub> = 30	-1,7±1,9i ξ=0,66	1∠0° 6,5∠274,1° 4,5∠98° 1,3∠89,7°	-6,7±7,6i ξ=0,65	1,7∠0° 1,5∠274,4° 1∠89° 5∠264,7°	-17,1±22i ξ=0,61	6,8∠0° 2∠-99,3° 1∠-66,3° 9,1∠113°	-30,5±53,4i ξ=0,49	81,2∠0° 3,6∠211,1° 1∠30,1° 1,5∠200,6°
ativo P <sub>p<sub>a</sub></sub> = 50	-2,4±3,1i ξ=0,61	142,1∠0° 412∠-83,6° 288,6∠104° 1∠92,4°	-26,1±26,5i ξ=0,70	4,1∠0° 1∠-249,7° 1,5∠-253,3° 11,7∠-68,9°	-2,8±13i ξ=0,21	12,7∠0° 11,2∠-84,4° 2∠-166,5° 1∠-166,3°	-30,3±53,6i ξ=0,49	79,3∠0° 3,5∠-149° 1∠33,1° 1,7∠-144°
ativo P <sub>ET</sub> = 90	-2,1±6,9i ξ=0,30	4,5∠0° 1∠-44,3° 2,7∠-194,8° 10,2∠-276°	-9,4±11i ξ=0,64	1,5∠0° 1∠-282,2° 1,5∠-216,1° 12∠-20,7°	-3,6±14,7i ξ=0,23	2,4∠0° 3,7∠-11,5° 1∠-297,5° 7,4∠-106,7°	-54,6±69,5i ξ=0,61	70,5∠0° 3,5∠-165° 1∠14,8° 1,6∠-166°
ativo P <sub>y<sub>r</sub></sub> = 90	-2±2,1i ξ=0,67	5,4∠0° 29∠-89,6° 20,1∠94,9° 1∠94,6°	-10,6±10,6i ξ=0,70	24,3∠0° 1∠108,6° 12,6∠131° 90,6∠-30°	-2,9±7,6i ξ=0,35	2,5∠0° 1∠-172,7° 1,06∠-182° 8,3∠98,9°	-10,7±46,3i ξ=0,22	215,2∠0° 1∠-112,4° 5,6∠-297° 35,3∠-116°

O efeito da ponderação da força de contato do pneu traseiro sobre os autovalores é obtido variando  $p_{f_y}$ . Os resultados são mostrados na Figura 5-22.

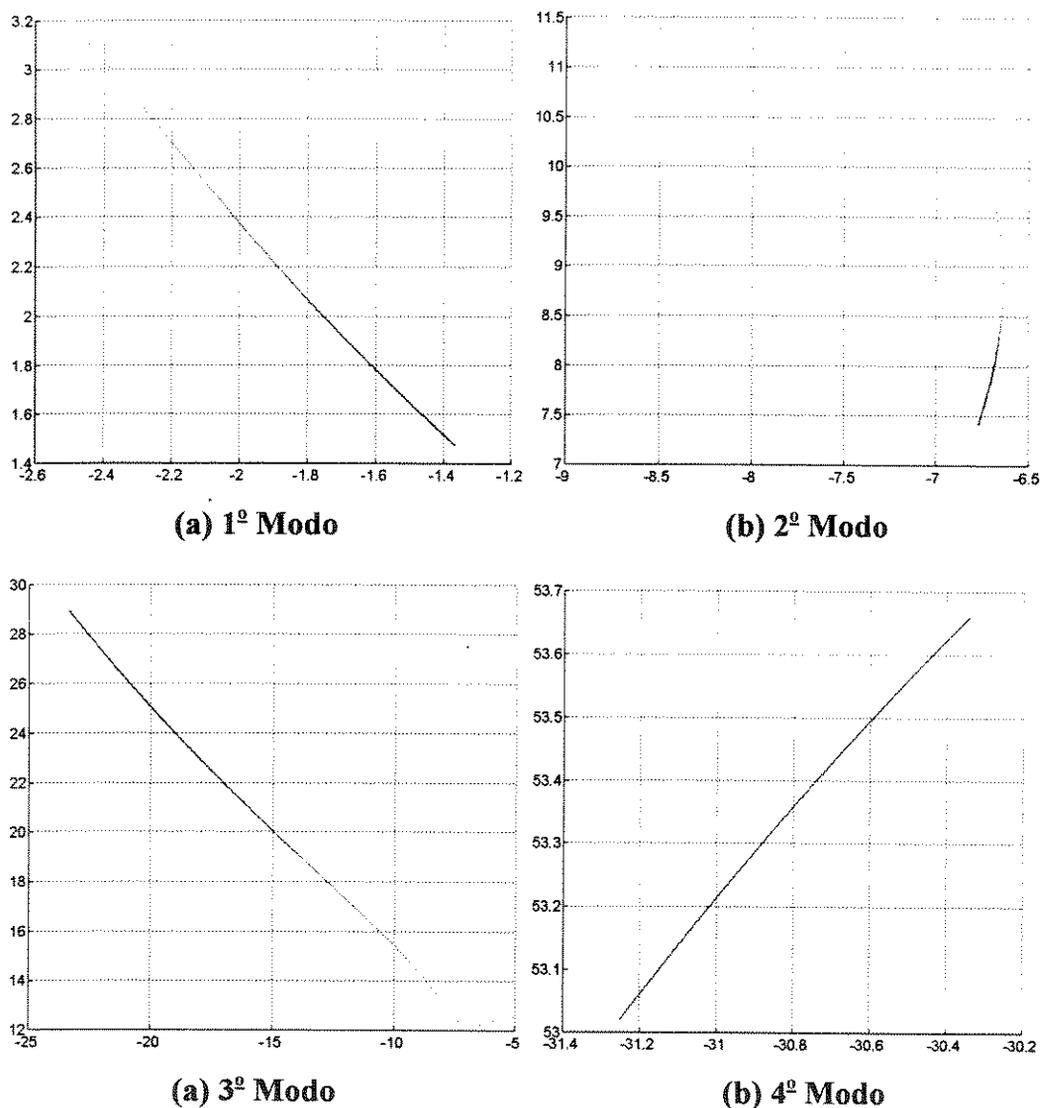
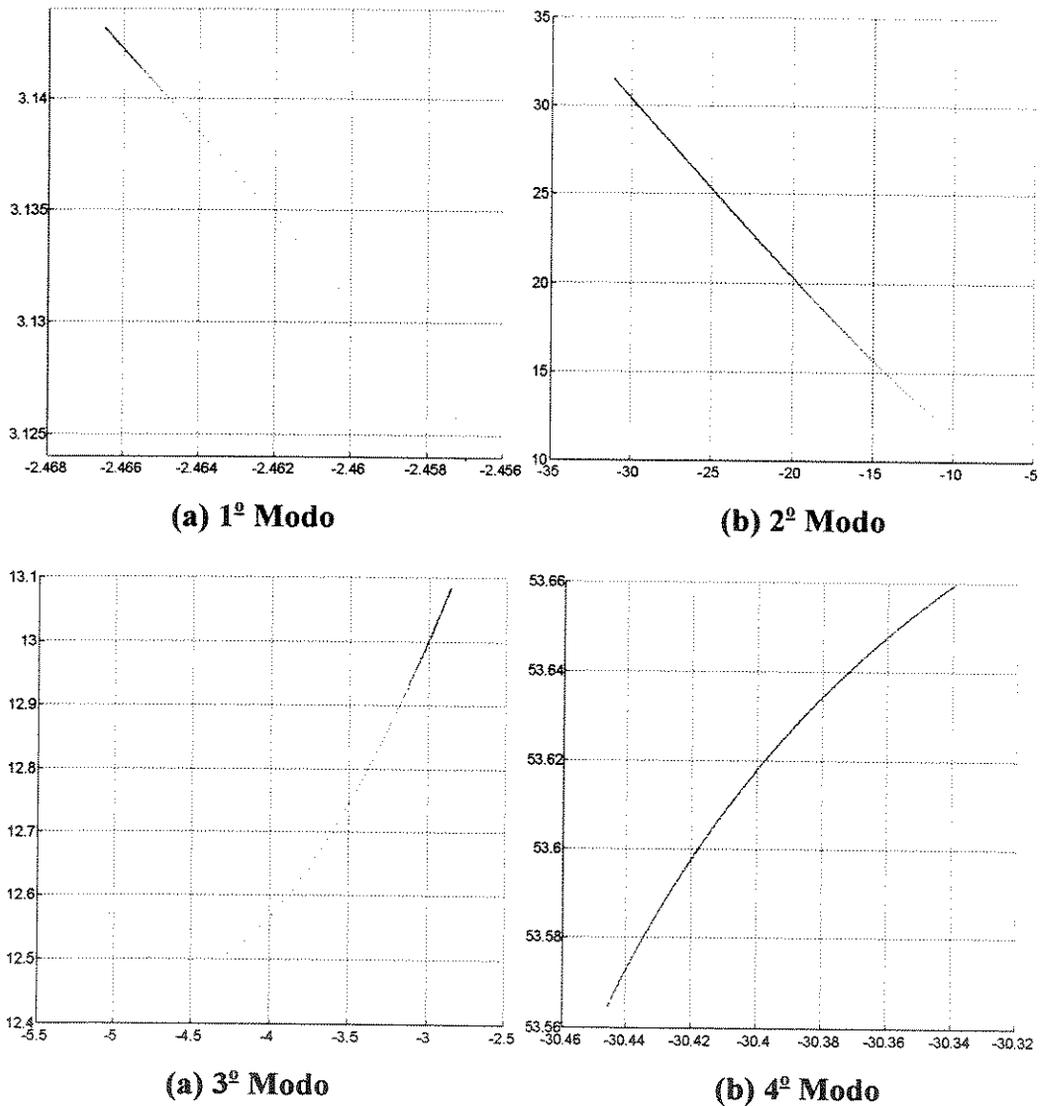


Figura 5-22 Lugar dos autovalores variando  $p_{f_y}$  para o sistema com 4 gdl e 2 controladores ativos.

Nota-se que no 4<sup>o</sup> modo há uma pequena diminuição da frequência e um aumento do amortecimento. No 3<sup>o</sup> modo observa-se uma pequena diminuição da frequência e um aumento do amortecimento, seguido de um aumento de ambos. No 2<sup>o</sup> modo, a frequência aumenta e depois diminui, enquanto que o amortecimento diminui até um ponto em que começa a aumentar. No 1<sup>o</sup> modo há uma diminuição tanto da frequência quanto do amortecimento. Observa-se, a partir da Tabela 5-3, que o movimento predominante do implemento no 2<sup>o</sup> e 3<sup>o</sup> modos foi reduzido.

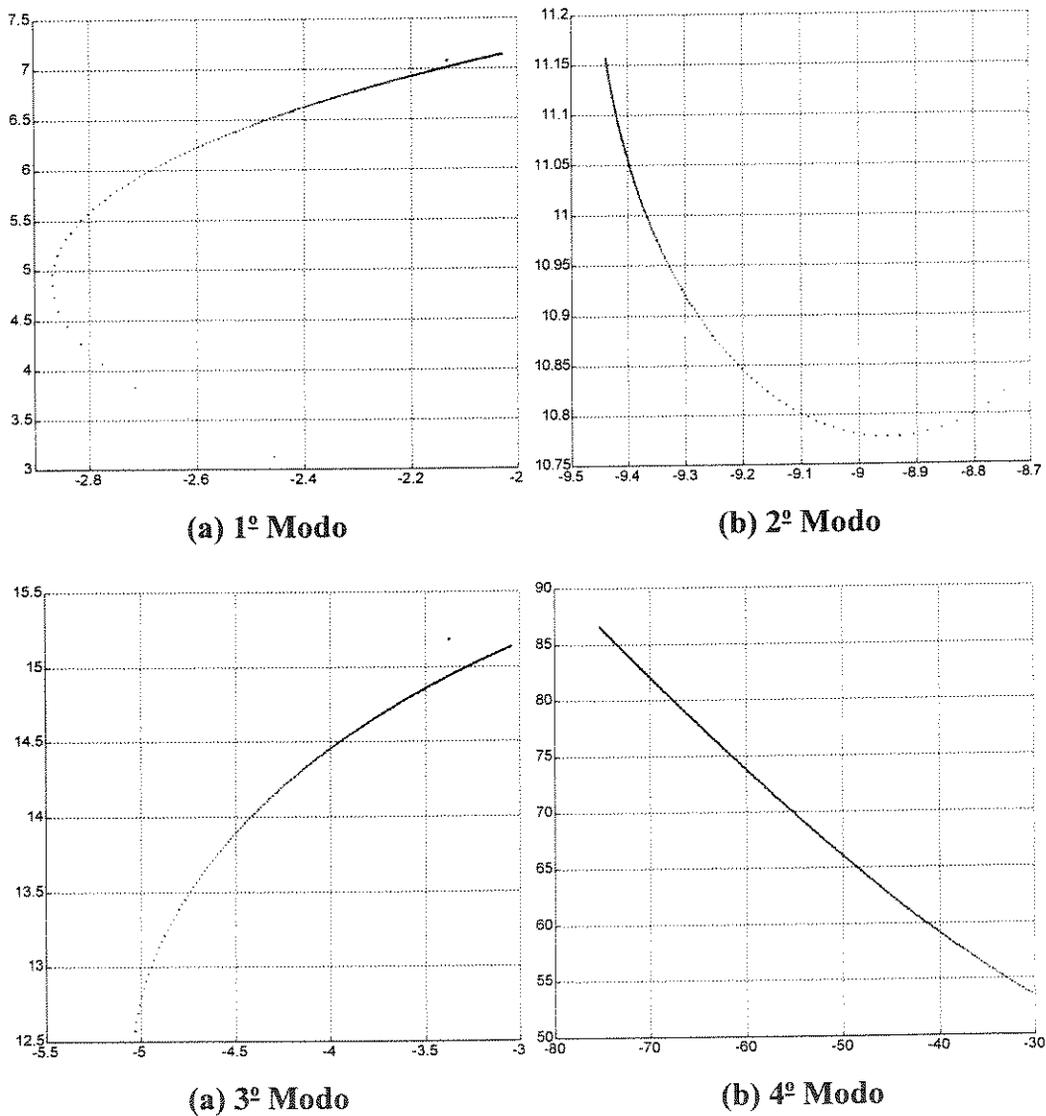
Considerando o efeito da ponderação do movimento do implemento, varia-se  $p_{\beta}$ . Os resultados são mostrados na Figura 5-23.



**Figura 5-23** Lugar dos autovalores variando  $p_{\beta}$  para o sistema com 4 gdl e 2 controladores ativos.

No 1º modo ocorre um aumento da frequência e do amortecimento. No 3º modo, o amortecimento diminui enquanto que a frequência diminui até um ponto em que começa a aumentar. Observa-se que a variação dos autovalores no 2º e 4º modos ocorrem de maneira análoga aos mesmos modos do sistema anterior. Os autovetores dados na Tabela 5-3 mostram o movimento predominante do eixo dianteiro no 3º e 4º modos, fazendo com que este corpo absorva as vibrações do sistema, uma vez que o movimento do implemento foi reduzido.

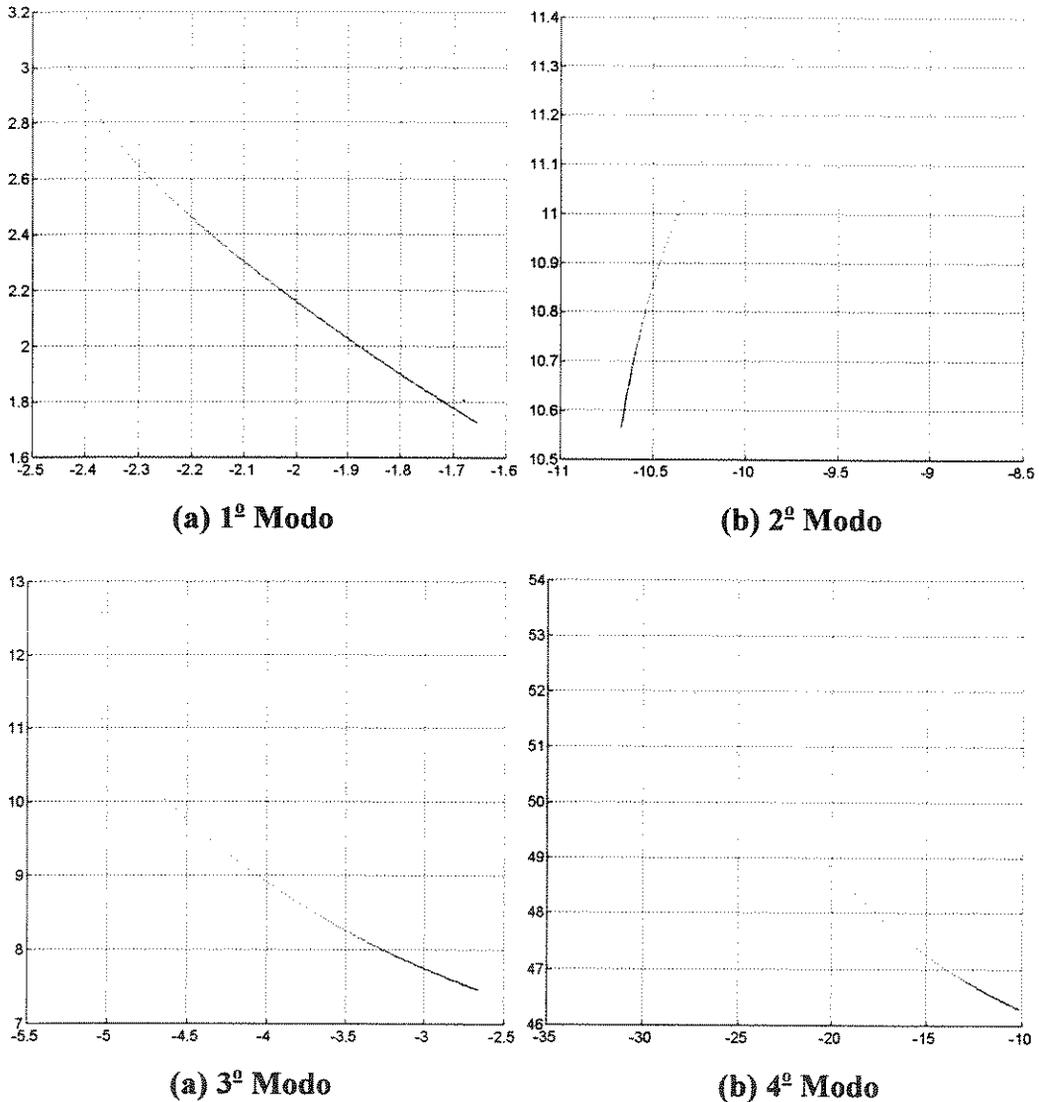
A influência do espaço de trabalho sobre os autovalores do sistema é obtida variando-se  $p_{ET}$ . Os resultados são mostrados na Figura 5-24.



**Figura 5-24** Lugar dos autovalores variando  $p_{ET}$  para o sistema com 4 gdl e 2 controladores ativos.

Observa-se que no 2º modo há um aumento no amortecimento do sistema e uma diminuição da frequência até um ponto em que começa a aumentar. No 1º, 3º e 4º modos, os autovalores variam de maneira semelhante aos modos correspondentes do sistema anterior (Figura 5-13). Observa-se a predominância do movimento do implemento no 1º, 2º e 3º modos, atuando, assim, juntamente com o eixo dianteiro como um absorvedor de vibração.

Considerando o efeito da ponderação da aceleração vertical do corpo do trator, varia-se o fator de peso  $p_{\ddot{y}_r}$ . Os autovalores obtidos são mostrados na Figura 5-25.



**Figura 5-25** Lugar dos autovalores variando  $p_{\ddot{y}_r}$  para o sistema com 4 gdl e 2 controladores ativos.

Vê-se que no 1º modo há uma diminuição da frequência e do amortecimento do sistema. No 2º modo, a frequência aumenta até um ponto em que começa a diminuir, enquanto que o amortecimento aumenta. No 3º e 4º modos, os autovalores variam de maneira análoga aos modos correspondentes do sistema anterior. Observa-se, a partir dos autovetores mostrados na Tabela 5-3, o aumento do movimento do implemento no 2º modo. Diferentemente do sistema

anterior, o movimento do eixo dianteiro não é aumentado na mesma magnitude no 4º modo, pois agora o implemento passa a funcionar também como um absorvedor de vibração.

### 5.4.2 Análise da resposta do sistema

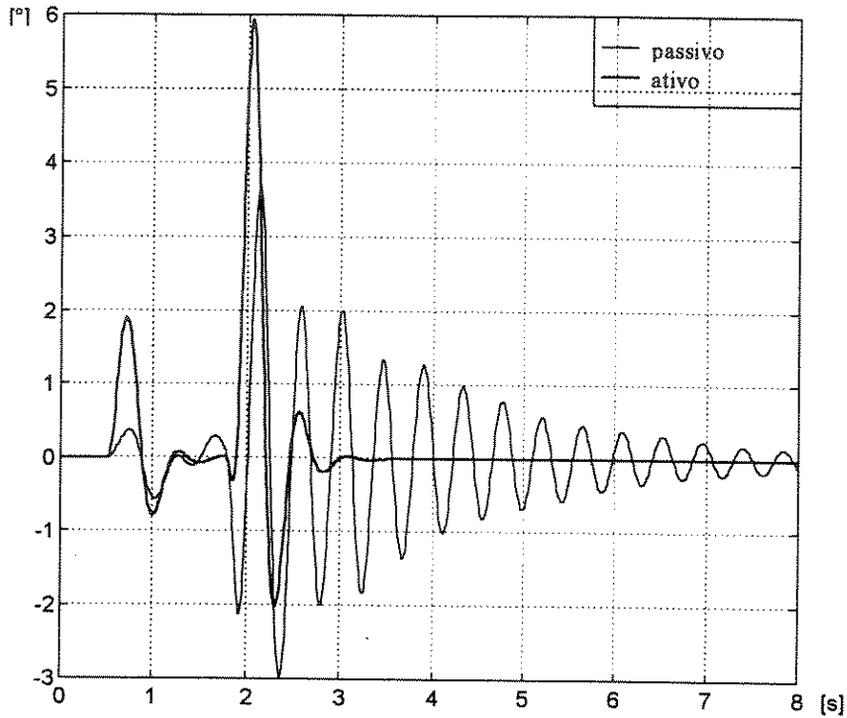
Analogamente aos sistemas anteriores, será feita uma análise da resposta dos sistemas ativo e passivo, considerando novamente o veículo a uma velocidade de 8 km/h submetido a uma excitação em forma de um degrau de 10 cm de altura e 20 cm de comprimento.

Para a obtenção das leis de controle dos dois atuadores ativos, são consideradas todas as ponderações através das equações (4.75), (4.76) e (4.77). Assim, substituindo estas matrizes juntamente com  $A$  e  $B$  na equação de Riccati e resolvendo-a, obtêm-se a matriz de realimentação dos estados através da equação (4.18).

A equação de movimento na forma de estado é dada por (4.23), onde a matriz  $A_k$  é obtida substituindo a matriz  $K$  em (4.22).

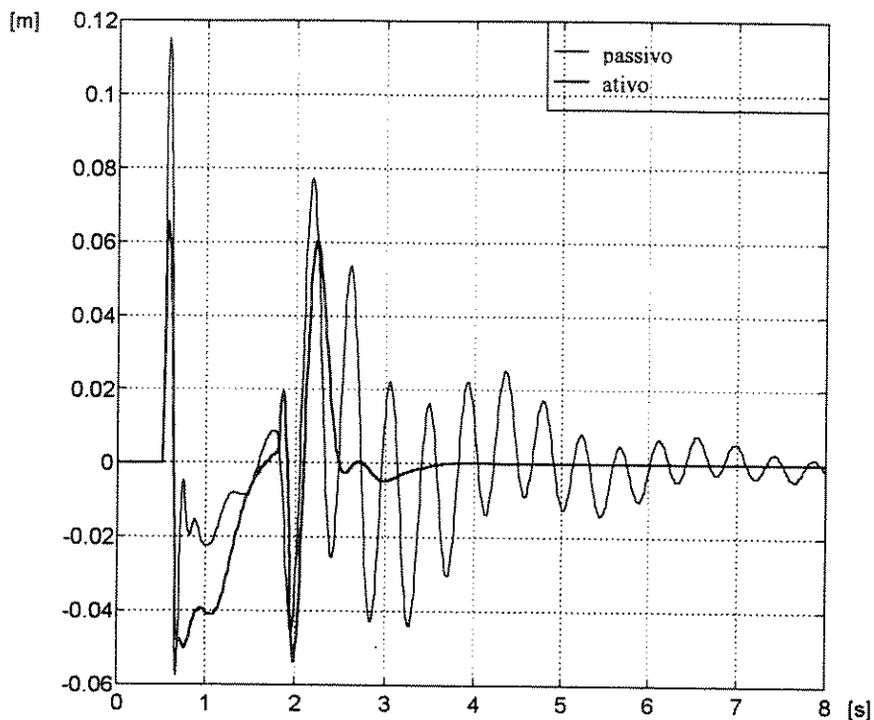
Nesta análise comparativa são utilizados novamente o espaço de trabalho, a aceleração vertical e angular do corpo do trator, a força de contato dos pneus, a força do atuador da suspensão, além do momento do atuador do implemento, pois agora tem-se dois elementos ativos.

Considerando inicialmente o movimento do implemento, observa-se, comparando as Figura 5-26 e 5-15, o aumento da sua amplitude no sistema com dois atuadores ativos. Isto se deve ao fato de que o elemento ativo do implemento faz com que este corpo se comporte como um absorvedor de vibração, aumentando assim a amplitude do seu movimento. Este resultado também pode ser visto através dos autovetores mostrados na Tabela 5-3 e 5-2.



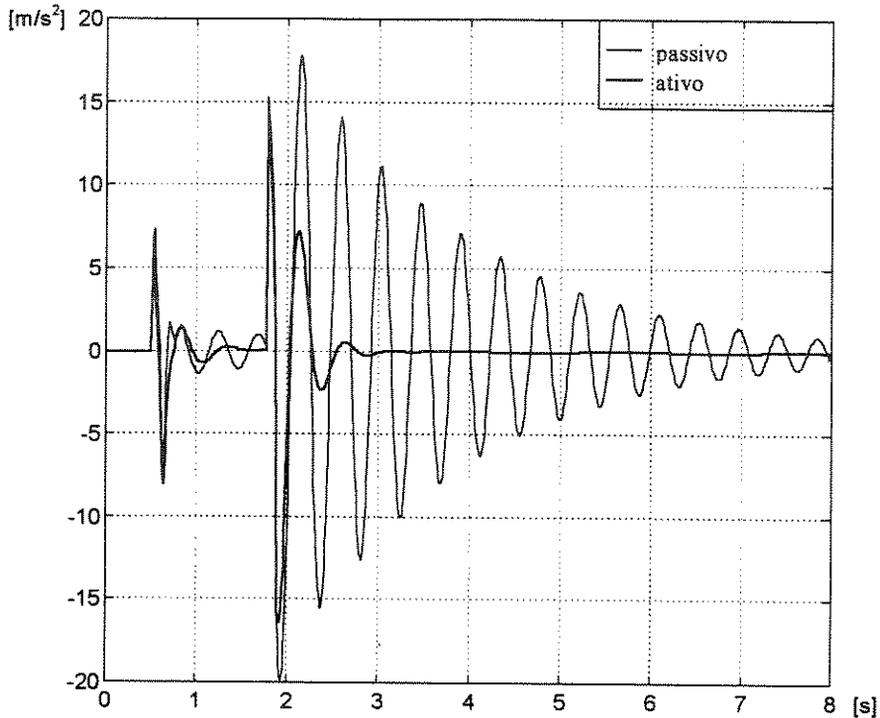
**Figura 5-26 Movimento do implemento para o sistema com 4 gdl passivo e com 2 controladores ativos.**

Analisando-se o espaço de trabalho, observa-se a partir da Figura 5-27 e 5-16, uma menor oscilação na sua resposta para o sistema com dois atuadores ativos comparativamente à obtida para o sistema com um atuador ativo. Em ambos os casos, há uma redução no seu valor máximo em relação ao sistema passivo.



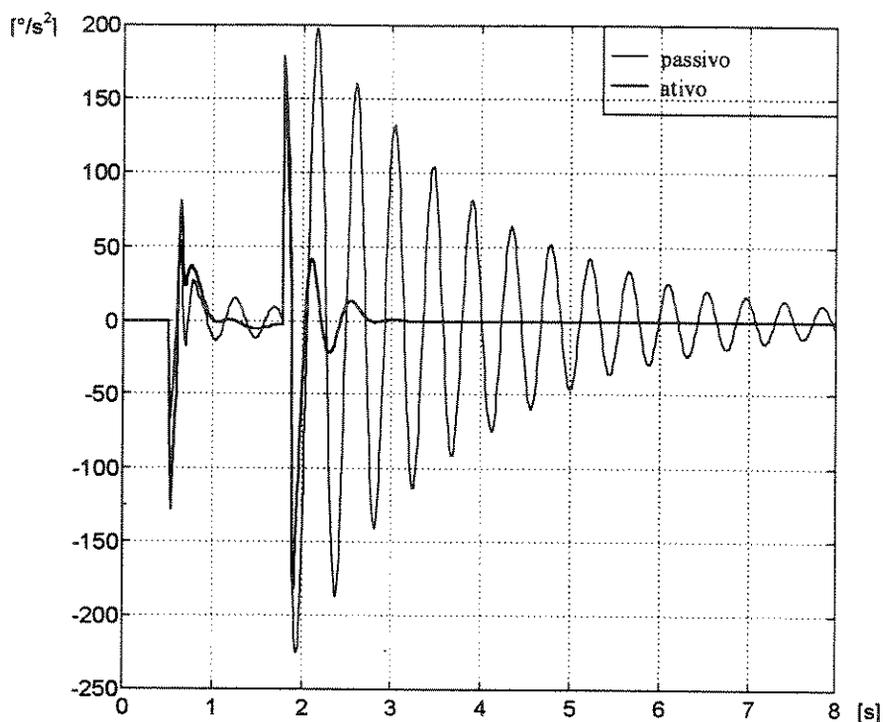
**Figura 5-27 Espaço de trabalho para o sistema com 4 gdl passivo e com 2 controladores ativos.**

A aceleração vertical do corpo para os sistemas ativo e passivo é mostrada na Figura 5-28. Comparando este resultado com o obtido para o sistema com 4 gdl e apenas um controlador ativo na Figura 5-17, observa-se a sua diminuição no sistema com dois elementos ativos implicando assim na melhoria do conforto do veículo.



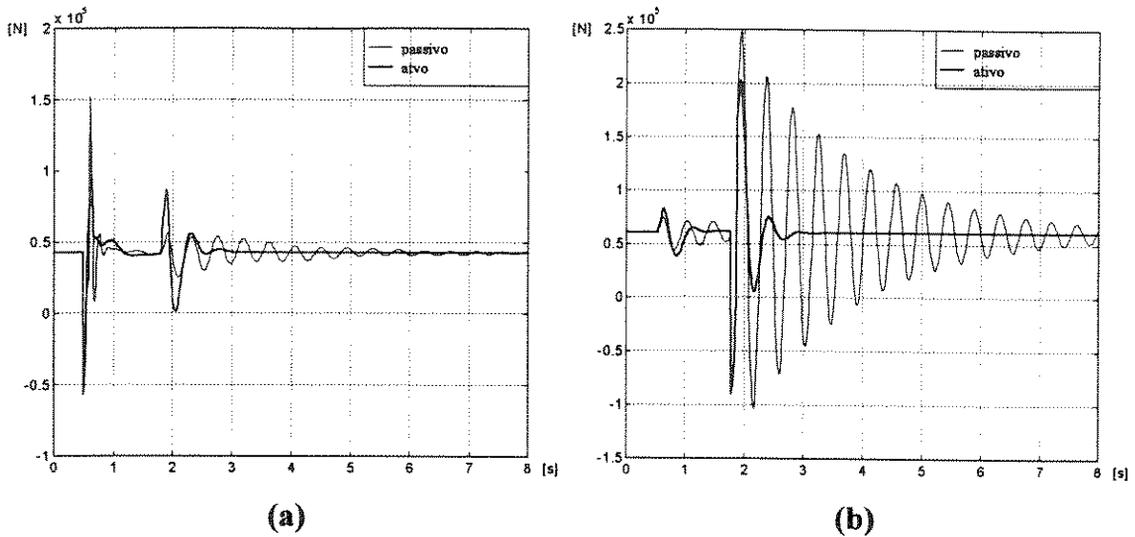
**Figura 5-28** Aceleração vertical do corpo do trator para o sistema com 4 gdl passivo e com 2 controladores ativos.

Supondo novamente que o motorista possa não estar no cg do corpo do trator, a aceleração angular é também levada em consideração. Os resultados obtidos para o sistema ativo e passivo são mostrados na Figura 5-29. Observa-se que de modo análogo ao que aconteceu na aceleração vertical do corpo do trator, há uma diminuição na aceleração angular para o sistema com dois atuadores ativos em relação ao sistema com um atuador ativo (Figura 5-18).



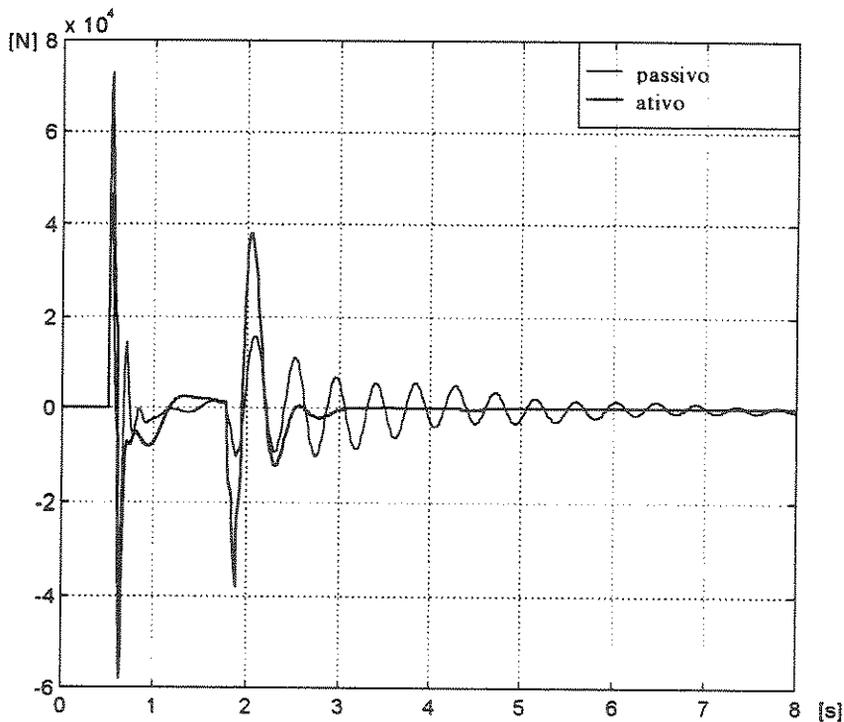
**Figura 5-29** Aceleração angular do corpo do trator para o sistema com 4 gdl passivo e com 2 controladores ativos.

As forças de contato resultantes obtidas subtraindo a força de contato dos pneus dos seus valores estáticos são mostradas na Figura 5-30. Comparando estes resultados com os obtidos para o sistema com 4 gdl e um elemento ativo na Figura 5-19, observa-se a redução da força de contato resultante do pneu dianteiro e traseiro para o sistema com dois atuadores ativos e uma menor variação, sendo amortecido mais rapidamente. Além disso, nota-se que o pneu dianteiro perde contato somente uma vez quando passa pelo degrau e não mais duas vezes quando cada pneu era excitado. O mesmo acontece com o pneu traseiro, que no sistema com 4 gdl e um atuador ativo, perdia contato duas vezes quando era excitado e agora perde contato somente uma vez.

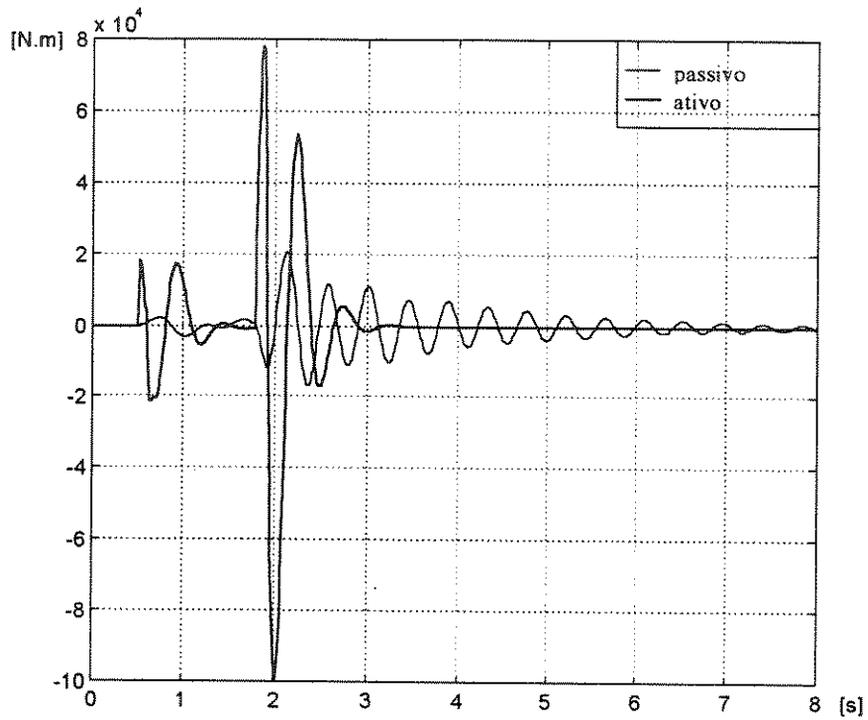


**Figura 5-30** Forças de contato no pneu dianteiro (a) e traseiro (b) para o sistema com 4 gdl passivo e com 2 controladores ativos.

Comparando a força do controlador ativo da suspensão mostrada na Figura 5-31 com a obtida para o sistema anterior na Figura 5-20, observa-se a sua redução no sistema com dois atuadores ativos. O momento dos controladores ativo e passivo do implemento é mostrado na Figura 5-32. Nota-se que o momento exercido pelo elemento ativo é da mesma ordem de grandeza do passivo, o que o torna factível.



**Figura 5-31** Força dos controladores ativo e passivo da suspensão para o sistema com 4 gdl e 2 controladores ativos.



**Figura 5-32** Momento dos controladores ativo e passivo do implemento para o sistema com 4 gdl e 2 controladores ativos.

## Capítulo 6

### Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste trabalho foi feito um estudo da dinâmica de um modelo plano de um trator com uma suspensão dianteira. Considerando-se inicialmente este modelo sem o implemento, foi introduzido um elemento ativo na sua suspensão. Utilizando a teoria de controle ótimo, foi obtida a lei de controle desse elemento ativo baseada na realimentação dos estados através da equação de Riccati. As matrizes de ponderação, utilizadas no funcional de custo do tipo integral quadrática, foram obtidas a partir de parâmetros representativos do comportamento desejado do sistema. Assim, considerando o conforto e a segurança do veículo, foram obtidas as matrizes de ponderação representando-se a aceleração vertical do corpo do trator e as forças de contato dos pneus dianteiro e traseiro através de um vetor que multiplica o vetor de estado. Além disso, considerou-se também a ponderação do espaço de trabalho da suspensão.

O efeito de cada ponderação sobre os autovalores do sistema foi obtido variando-se os seus coeficientes de peso. Uma análise destes resultados permitiu a previsão do que acontece com o amortecimento e a frequência de cada modo, quando o peso de cada ponderação é variado. Além disso, foi feita uma análise comparativa da resposta do sistema ativo a uma excitação externa com a obtida considerando-se elementos passivos na suspensão. Os resultados mostraram uma melhora no conforto e na segurança utilizando elementos ativos, cuja força de controle é da mesma ordem de grandeza da obtida com elementos passivos.

Considerando o modelo do trator com o implemento, foram utilizadas, além da ponderação do movimento do implemento, as mesmas matrizes de ponderação anteriores para a obtenção da lei de controle do elemento ativo introduzido na suspensão. Foram feitas

novamente análises do efeito de cada ponderação sobre os autovalores do sistema variando os coeficientes de peso. De modo análogo ao que aconteceu no sistema sem o implemento, a amplitude do movimento do eixo dianteiro é aumentada quando há um aumento na ponderação do conforto, fazendo com que este corpo passe a funcionar como um absorvedor de vibração. Analisando-se a resposta do sistema a uma excitação externa com a obtida considerando-se uma suspensão passiva, concluiu-se que houve uma melhora no conforto e na segurança do veículo e uma redução no espaço de trabalho da suspensão através da força de controle ativa da mesma ordem de grandeza da passiva.

Por último, foi considerado o modelo plano do trator com elementos ativos na suspensão dianteira e no elemento de ligação do implemento com o corpo do veículo. Considerando-se as mesmas ponderações feitas anteriormente, com exceção da ponderação da força de controle, pois, agora, têm-se dois elementos ativos, foi feita novamente uma análise do efeito de cada ponderação sobre os autovalores do sistema ativo, variando-se os coeficientes de peso. Comparando os resultados obtidos com o do sistema anterior com implemento e um elemento ativo, observou-se que os autovalores referente a cada modo, não necessariamente variam na mesma direção. Analisando os autovetores, notou-se uma diminuição na amplitude do movimento do eixo dianteiro no modo em que este corpo possui uma grande amplitude. Isto se deve ao fato de que, agora, o implemento passa a funcionar, também, como um absorvedor de vibração.

A resposta deste sistema com dois atuadores ativos a uma excitação externa foi também comparada com a obtida pelo sistema com um controlador ativo e com o passivo. Observou-se um aumento no movimento do implemento em relação ao sistema anterior com apenas um controlador ativo, confirmando-se o fato de que, no sistema com dois atuadores ativos, este corpo passa a atuar, juntamente com o eixo dianteiro, como um absorvedor de vibração. Além disso, concluiu-se que houve uma diminuição na variação da força de contato dos pneus e da aceleração vertical do corpo do trator em relação ao sistema com um elemento ativo na suspensão, implicando, assim, no aumento do conforto e da segurança. A força do atuador ativo da suspensão foi também reduzida em relação ao sistema com um elemento ativo, pois, agora, este elemento atua junto com o atuador ativo do implemento. Observou-se também que o momento exercido pelo elemento ativo do implemento é da mesma ordem de grandeza considerando elementos passivos, o que o torna factível.

Uma vez que a lei de controle dos elementos ativos foi obtida considerando-se o comportamento próprio do sistema, coloca-se como sugestão para próximos trabalhos, a consideração da excitação da via na obtenção da lei de controle. Além disso, propõe-se também um estudo através de um modelo tridimensional do trator, de modo que o acoplamento entre os movimentos de balanço, rolagem e *yaw* sejam levados em consideração. Outro aspecto a ser também considerado é a correlação entre as excitações das rodas do lado esquerdo e direito.

## **Bibliografia**

- BARBIERI, N., The Optimal Active Suspension Systems for an off-road vehicle. **International Journal of Vehicle Design**, v. 16, Nos 2/3, p. 219-228, 1995.
- CHALASANI, R.M., Ride Performance Potential of Active Suspension Systems-Part I: Simplified Analysis Based on A Quarter-Car Model, **ASME, AMD**. v. 80, p. 187-204, 1987.
- CHALASANI, R.M., Ride Performance Potential of Active Suspension Systems-Part II: Comprehensive Analysis Based on A Full-Car Model, **ASME, AMD**. v. 80, p. 205-234, 1987.
- DAVIS, B.R., THOMPSON, A.G., Optimal Linear Active Suspensions with Derivative Constraints and Output Feedback Control. **Vehicle System Dynamics**, v. 17, p.179-192, 1988a.
- DAVIS, B.R., THOMPSON, A.G., Optimal Linear Active Suspensions with Integral Constraint. **Vehicle System Dynamics**, v. 17, p.357-366, 1988b.
- DAVIS, B.R., THOMPSON, A.G., Optimal Linear Active Suspensions with Vibration Absorbers and Integral Output Feedback Control. **Vehicle System Dynamics**, v. 18, p.321-344, 1989.

- ELMADANY, M.M. ABDULJABBAR, Z., Alternative Control Laws for Active and Semi-Active Automotive Suspensions-A comparative Study. **Computers and Structures**, v. 39, n.6, p.623-629, 1991.
- ELMADANY, M.M. ABDULJABBAR, Z., On the Statistical Performance of Active and Semi-Active Car Suspension Systems. **Computers and Structures**, v. 33, n.3, p.785-790, 1989.
- ELMADANY, M.M., Integral and State Variable Feedback Controllers for Improved Performance in Automotive Vehicles. **Computers and Structures**, v. 42, n.2, p.237-244, 1992.
- ELMADANY, M.M., Optimal Linear Active Suspensions with Multivariable Integral Control. **Vehicle System Dynamics**, v. 19, p.313-329, 1990.
- HAC, A., YOUN, I., Optimal Design of Active and Semi-Active Suspensions Including Time Delays and Preview. **Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME**, v. 115, n.4, p. 498-508, October 1993.
- LOUAM, N., WILSON, D.A., SHARP, R.S., Optimization and Performance Enhancement of Active Suspensions for Automobiles under Preview of the Road. **Vehicle System Dynamics**, v. 21, p.39-63, 1992.
- ROWLAND, J.R., **Linear Control Systems: Modeling, Analysis, and Design**. John Wiley & Sons, 1986.
- SANTOS, I.F., **Cinemática e Dinâmica de Sistemas Mecânicos. Notas de aula**. 1996.
- SHARP, R.S., CROLLA, D.A. Road Vehicle Suspension System Design - a review. **Vehicle System Dynamics**, v.16, p.167-192, 1987.

- THOMPSON, A.G., An active Suspension with Optimal Linear State Feedback. **Vehicle System Dynamics**, v. 5, p.187-203, 1976.
- THOMPSON, A.G., Optimal and Suboptimal Linear Suspensions for Road Vehicles. **Vehicle System Dynamics**, v. 13, p.61-72, 1984.
- THOMPSON, A.G., Quadratic Performance Indices and Optimum Suspension Design. **Proceedings of the Automobile Engineering**, v. 187 3, p. 129- 139, 1973.
- TSENG, T., HROVAT, D., Some characteristics Of Optimal Vehicle Suspensions Based On Quarter-Car models. **Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control**, Honolulu, Hawaii, p.2232-2237, December 1990.
- WILSON, D.A., SHARP, R.S., HASSAN, S.A., The application of Linear Optimal Control Theory to the Design of Active Automotive Suspensions. **Vehicle System Dynamics**, v. 15, p.105-118, 1986.
- ZAMPIERI, D.E, RILL, G., Otimização do Conforto e da Segurança de um trator. **RBCM - J. of The Braz. Soc. Mechanical Science**, v. XV, n. 4, p. 318-323, 1993.

## Anexo A

### Equação de Riccati

Existe uma vasta bibliografia sobre o assunto, cada autor abordando o tema com maior ou menor nível de detalhamento. Neste trabalho optou-se por uma dedução mais sucinta, baseada em Rowland, 1986.

#### 1. Formulação do Problema

Para a obtenção das condições necessárias para o problema de otimização, considera-se o índice de desempenho dado por:

$$J(u) = \int_0^{\infty} g(x, u, t) dt \quad (1)$$

onde a planta é descrita por:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2)$$

com as condições limites conhecidas  $x(0)$ .

O problema de otimização consiste em minimizar o índice de desempenho  $J(u)$  em (1), sujeito à equação da planta em (2) e às condições limites.

#### 2. Equações de Euler-Lagrange

Como passo preliminar na solução deste problema de controle ótimo, considera-se o índice de desempenho dado por:

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_f} g(y, \dot{y}, t) dt \quad (3)$$

onde  $y$  é uma função escalar de  $t$  no intervalo  $[t_0, t_f]$ . Sendo  $y^*(t)$  uma solução ótima e  $\eta(t)$  uma variação sobre esta solução, tem-se:

$$y(t) = y^*(t) + \varepsilon \eta(t) \quad (4)$$

onde  $\varepsilon$  é um escalar.

As condições limites são então dadas por:

$$y^*(t_0) = y(t_0) \quad (5)$$

$$y^*(t_f) = y(t_f) \quad (6)$$

$$\eta(t_f) = \eta(t_0) \quad (7)$$

Substituindo (4) em (3), tem-se:

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_f} g(y^* + \varepsilon \eta, \dot{y}^* + \varepsilon \dot{\eta}, t) dt \quad (8)$$

A derivada de  $J(y)$  com relação a  $\varepsilon$ , é então dada por:

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial g}{\partial y} \eta + \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} \dot{\eta} \right] dt \quad (9)$$

Integrando (9) por partes, obtêm-se:

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial g}{\partial y} \eta \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} \right) \right] \eta dt \quad (10)$$

onde o primeiro termo é zero pois  $\eta(t_0) = \eta(t_f) = 0$ .

Como condição necessária para a minimização de  $J(y)$  em (3), a derivada em (10) e a constante  $\varepsilon$  são iguados a zero, forçando a solução  $y(t)$  ser a solução ótima  $y^*(t)$ . Como esta condição deve ser satisfeita para qualquer variação  $\eta(t)$ , tem-se:

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} \right) \right]_{y=y^*} = 0 \quad (11)$$

a qual é chamada de equação de Euler-Lagrange.

Voltando-se à resolução do problema de controle ótimo formulado em (1) e (2), define-se uma função  $L$  como:

$$L(x, \lambda, u, t) = g(x, u, t) + \lambda^T [f(x, u, t) - \dot{x}] \quad (12)$$

onde  $\lambda$  são os multiplicadores de Lagrange, as quais servem como restrições diferenciais associadas com as  $n$  equações da planta em (2).

Considere o índice de desempenho dado por:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \lambda, u, t) dt \quad (13)$$

Sabe-se que a minimização de (1) com as restrições adicionais em (2) é equivalente a minimização de (13) sem restrições adicionais.

Utilizando a função  $L$  dada por (12) na equação de Euler-Lagrange dada em (11), tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = \frac{\partial L}{\partial u} \quad (16)$$

Substituindo (12) em (14), (15) e (16), obtêm-se:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial g}{\partial x} - \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]^T \lambda \quad (17)$$

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (18)$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial u} + \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]^T \lambda \quad (19)$$

### 3. O Problema do Controle Linear Quadrático

A equação da planta linear é dada por:

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (20)$$

com condições iniciais  $x(t_0) = x_0$ .

O índice de desempenho linear quadrático é dado por:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} (X^T Q X + 2X^T N u + u^T R u) dt \quad (21)$$

onde a matriz  $Q$  é positiva semi-definida e a matriz  $R$  é simétrica positiva definida.

Identificando  $g$  e  $f$  em (20) e (21), e substituindo em (17), (18) e (19):

$$\dot{\lambda} = -2QX - Nu - Nu - A^T\lambda \quad (22)$$

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (23)$$

$$0 = 2Ru + N^T X + N^T X + B^T\lambda \quad (24)$$

Resolvendo (24) em u:

$$u = -\frac{1}{2}R^{-1}(2N^T X + B^T\lambda) \quad (25)$$

Para determinar a lei de controle ótimo  $u(X)$ , supõe-se que existe uma matriz  $P$  simétrica positiva definida que satisfaça:

$$\lambda = 2PX \quad (26)$$

A lei de controle é, então, obtida substituindo (26) em (25)

$$u = -R^{-1}(N^T + B^T P)X \quad (27)$$

Logo, substituindo (27) em (23)

$$\dot{X} = AX - BR^{-1}(N^T + B^T P)X \quad (28)$$

Substituindo (26) em (22), tem-se:

$$\dot{\lambda} = -2QX - 2Nu - 2A^T PX \quad (29)$$

Derivando (26) e substituindo em (28):

$$2\dot{P}X + 2P\dot{X} = -2QX - Nu - 2A^T PX \quad (30)$$

Substituindo (27) e (28) em (30)

$$\dot{P} + P(A - BR^{-1}N^T) - PBR^{-1}B^T P + Q - NR^{-1}N^T + (A^T - NR^{-1}B^T)P = 0 \quad (31)$$

a qual é conhecida como a equação de Riccati.

Para sistema invariante no tempo e  $t \rightarrow \infty$ , a equação se reduz a sua forma mais conhecida:

$$P\bar{A} + \bar{A}^T P - PBR^{-1}B^T P = -\bar{Q} \quad (32)$$

onde

$$\bar{A} = A - BR^{-1}N^T \quad (33)$$

$$\bar{Q} = Q - NR^{-1}N^T \quad (34)$$