



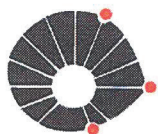
**ANDERSON HENRIQUE RODRIGUES FERREIRA**

# **ANÁLISE ELETROMECCÂNICA DO GIROSCÓPIO MEMS**

72/2013

**CAMPINAS**

**2013**



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANDERSON HENRIQUE RODRIGUES FERREIRA

# ANÁLISE ELETROMECCÂNICA DO GIROSCÓPIO MEMS

Orientador: Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da  
Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica,  
na Área de Mecânica dos Sólidos e Projetos Mecânicos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL  
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO(A) ALUNO(A)  
ANDERSON HENRIQUE RODRIGUES FERREIRA  
E ORIENTADO (A) PELO PROF(A). DR(A)  
JOSÉ MARIA CAMPOS DOS SANTOS

.....  
ASSINATURA DO(A) ORIENTADOR(A)

CAMPINAS

2013

iii

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

F884p Ferreira, Anderson Henrique Rodrigues  
Análise Eletromecânica de um Giroscópio  
MEMS/Anderson Henrique Rodrigues Ferreira–  
Campinas, SP: [s.n.], 2013.

Orientador: José Maria Campos dos Santos  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1.MEMS 2. Métodos dos Elementos Finitos  
3.Giroscópio I.Santos, José Maria Campos dos. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Analysis Eletromechanical of MEMS's Gyroscope

Palavras-chave em Inglês: Gyroscope, Microelectromechanical Systems  
(MEMS), Finite Element Method (FEM).

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projetos Mecânicos

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Luiz Otávio Saraiva Ferreira, Luiz Sandoval Goés

Data da defesa: 23-08-2013

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**ANÁLISE ELETROMECCÂNICA DO  
GIROSCÓPIO MEMS**

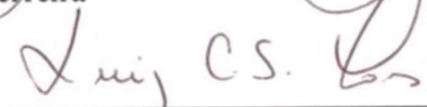
Autor: Anderson Henrique Rodrigues Ferreira

Orientador: José Maria Campos dos Santos

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. José Maria Campos Dos Santos, Presidente**  
DMC/FEM/UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Luiz Otávio Saraiva Ferreira**  
DMC/FEM/UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes**  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

Campinas, 23 de Agosto de 2013.



## **Dedicatória**

Dedico este trabalho a minha família e aos meus amigos que sempre estiveram em todos os momentos da minha vida me incentivando e me apoiando.

## **Agradecimentos**

Gostaria de apresentar meus profundos agradecimentos às pessoas que fizeram parte desta importante jornada:

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos pela orientação acadêmica, dedicação, apoio, confiança no desenvolvimento dessa pesquisa e principalmente pela enorme paciência despendida ao longo de todo o desenvolvimento do trabalho.

Ao Prof. Dr. Mauricio Fabbri pelo apoio e incentivo prestado desde o início do conhecimento do tema dessa pesquisa.

Aos professores de Pós-graduação da FEM (Faculdade de Engenharia Mecânica) pelos ensinamentos transmitidos no decorrer do curso.

A todos os colegas que convivi e que contribuíram para realização desta pesquisa de forma direta ou indiretamente, em especial ao:

- Laboratório DMC (Departamento de Mecânica Computacional)
- Rodrigo que me ajudou com valiosas discussões no início do tema da pesquisa e que esteve presente na minha apresentação inicial no INPE.
- Aos amigos da Moradia Renê, Felipão, Piá e em destaque Daniel pela grande ajuda no desenvolvimento das ilustrações e Mário pelas valiosas sugestões no desenvolvimento da Simulação Analítica do trabalho.
- Aos amigos da República Amazonas e a minha namorada pelo apoio e incentivo essenciais para realização desse trabalho.

A meus pais, por terem me educado para vencer mais esta etapa na vida.

A Capes pelo suporte financeiro.

E a Deus, por iluminar sempre a minha vida.

*“ Os poetas reclamam que a ciência retira a beleza das estrelas. Mas eu posso vê-las de noite no deserto e senti-las. Vejo menos ou mais?”*

Richard Feynman

## Resumo

Este trabalho apresenta uma análise dos problemas físicos associados ao projeto de um sensor inercial giroscópio baseado na tecnologia MEMS (micro-electro-mechanical-system). O dispositivo oferece uma resposta elétrica na forma de uma variação da capacitância devido à força de Coriolis e como consequência obtém-se uma medida da velocidade angular de um sistema. Uma formulação analítica da dinâmica eletromecânica de um giroscópio com dois graus de liberdade é revista e implementada em um programa *MATLAB/Simulink (R2011a)*<sup>®</sup>, onde são obtidas as respostas em deslocamento nos domínios do tempo e da frequência. Para melhorar a capacidade do projeto de sensores inerciais, uma abordagem da análise eletromecânica do giroscópio usando o Método dos Elementos Finitos (MEF) do programa comercial *ANSYS 12.0*<sup>®</sup> é apresentada. Neste contexto, dois projetos de giroscópios MEMS encontrados na literatura (giroscópio de ACAR e de NGUYEN) são analisados. Análises estática, modal e harmônica são realizadas e os resultados comparados com aqueles obtidos com os modelos analíticos. A resposta harmônica para o modelo eletromecânico completo de MEF não foi realizada devido à dificuldade de simular análises harmônicas incluindo os elementos de Atuação e Detecção simultaneamente. Para superar este problema o elemento *Detector* foi substituído por um elemento de mola. Os resultados obtidos no giroscópio de NGUYEN apresentaram boa concordância entre os modelos. Contudo, os resultados com o giroscópio de ACAR apresentaram erros significativos entre os modelos, os quais são oriundos da geometria usada no modelo de MEF que se mostrou flexível em regiões que deveriam ser rígidas. Uma análise estática de diferentes tipos de suspensão elástica para giroscópios MEMS é apresentada no Apêndice B.

**Palavras – chave:** Giroscópio, Sistemas microeletromecânicos (MEMS), Método dos Elementos Finitos.

## Abstract

This paper presents an analysis of the physical problems associated with the design of a gyroscope inertial sensor based on MEMS technology (MicroEletroMechanical System). The device gives a response in the form of an electrical capacitance change due to the Coriolis force and as a result obtains a measure of the angular velocity of a system. Analytical formulation of the electromechanical dynamics of a gyroscope with two degrees of freedom is reviewed and implemented in a *MATLAB/Simulink (R2011a)*® code, where the displacement responses are obtained in time and frequency domains. To improve the capacity of the inertial sensors design, another electromechanical gyroscope analysis approach using the Finite Element Method (FEM) of commercial software ANSYS® 12.0 is presented. In this context, two designs of MEMS gyroscopes from the literature (NGUYEN's and ACAR's gyroscopes) are analyzed. Static, modal and harmonic analysis are performed and the results compared with those obtained with the analytical models. The harmonic response for the complete electromechanical model of MEF was not performed due to the inability to run harmonic analysis including *Actuator* and *Detector* elements simultaneously. To overcome this difficulty, the *Detector* element was replaced by a spring element. The results obtained with NGUYEN's gyroscope showed good agreement between the models. However, the results with the ACAR's gyroscope showed significant errors between the models, which are derived from the geometry used in the FEM model, that was flexible to regions that should be rigid. A static analysis of different types of elastic suspension for MEMS gyroscopes are shown in Appendix B.

**Keywords:** Gyroscope, Microelectromechanical systems (MEMS), Finite Element Method (FEM).

## Lista de Ilustrações

Figura 1-1: Giroscópio de vibração de quartzo da Systron Donner, (BARBOUR e SCHIMIDT, 2001).....	3
Figura 1-2: Primeiro lote de fabricação de um giroscópio microusinado de silício. (BERNSTEIN, DRAPER LAB, <i>et al.</i> , 1993) .....	4
Figura 1-3: a) Esquema de um Giroscópio tipo FOG; b) Esquema de um Giroscópio tipo RLG (BARBOUR e SCHIMIDT, 2001) .....	4
Figura 2-1: Modelo de Giroscópio <i>Massa única</i> (ALPER e AKIN, 2005).....	12
Figura 2-2: Sistema massa mola de 2 graus de liberdade (referencial inercial).....	13
Figura 2-3: Sistema massa mola de 2 graus de liberdade (referencial não inercial) .....	14
Figura 2-4: Força de atuação eletrostática para o modo <i>Atuador</i> .....	18
Figura 2-5: Força de atuação eletrostática para o <i>Detector</i> . .....	19
Figura 2-6: Amplitudes do <i>Atuador</i> e <i>Detector</i> em função da velocidade angular $\Omega_z$ , para a condição $\Omega_z < \xi\omega_0$ .....	25
Figura 2-7: Amplitudes do <i>Atuador</i> e <i>Detector</i> em função da velocidade angular $\Omega_z$ , para a condição $\Omega_z = 4\xi\omega_0$ .....	26
Figura 3-1: Célula Unitária do silício .....	30
Figura 3-2: Planos de Simetria do silício monocristalino .....	30
Figura 3-3: Índices de Miller- Planos e direções.....	31
Figura 3-4: Modelos de exposição de um fotoresiste positivo e negativo.....	36
Figura 3-5: Um exemplo do processo DRIE (GESCHKE, KLANK e TELLEMAN, 2004).....	37
Figura 3-6: Engrenagem que gira outra engrenagem de diâmetro dez vezes maior (SANDIA LABS).....	37
Figura 4-1: Vista em perspectiva do Giroscópio de massa única (ACAR, 2001) .....	39
Figura 4-2: Fluxograma da Simulação com o modelo Analítico do Giroscópio.....	41
Figura 4-3: Diagrama de Bloco do Simulink .....	44
Figura 4-4: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para $\Omega_z = 0$ rad/s. ....	45
Figura 4-5: Curva da Trajetória da Massa do Giroscópio para $\Omega_z = 0$ rad/s .....	46
Figura 4-6: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para $0 \leq \Omega_z \leq 0.1\xi\omega_0$ rad/s .....	47
Figura 4-7: Curva da Trajetória da Massa do Giroscópio para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ rad/s .....	48
Figura 4-8: Amplitude do <i>Atuador</i> e <i>Detector</i> em função da velocidade angular para $0 \leq \Omega_z \leq 0.1\xi\omega_0$ rad/s. ....	48
Figura 4-9: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para $0 \leq \Omega_z \leq 1\xi\omega_0$ rad/s .....	49
Figura 4-10: Curva da Trajetória da Massa do Giroscópio para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s .....	50
Figura 4-11: Amplitude do modo <i>Atuador</i> e <i>Detector</i> em função da velocidade angular para $0 \leq \Omega_z \leq 1\xi\omega_0$ rad/s. ....	50

Figura 4-11: Amplitude do modo <i>Atuador</i> e <i>Detector</i> em função da velocidade angular para $0 \leq \Omega_z \leq 1\xi\omega_0$ rad/s.....	50
Figura 4-12 Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para $0 \leq \Omega_z \leq 10\xi\omega_0$ rad/s.....	51
Figura 4-13: Curva da Trajetória da Massa do Giroscópio para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ rad/s.....	52
Figura 4-14: Amplitude do <i>Atuador</i> e <i>Detector</i> em função da velocidade angular para $0 \leq \Omega_z \leq 10\xi\omega_0$ rad/s.....	52
Figura 4-15: Resposta do Sistema em função da frequência para $\Omega_z = 0$ rad/s.....	53
Figura 4-16: Resposta do Sistema em função da frequência para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ rad/s.....	54
Figura 4-17: Resposta do Sistema em função da frequência para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s.....	55
Figura 4-18: Resposta do Sistema em função da frequência para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ rad/s.....	56
Figura 4-19: Fluxograma da Simulação Numérica do Giroscópio.....	57
Figura 4-20: Vista total da malha mapeada do dispositivo.....	58
Figura 4-21: Vista ampliada da malha do giroscópio de Acar.....	59
Figura 4-22: Condição de contorno aplicado na direção do <i>Atuador</i> (análise linear) incluindo as reações nas ancoras.....	60
Figura 4-23: Condição de contorno aplicado na direção do <i>Detector</i> (análise linear) incluindo as reações nas ancoras.....	60
Figura 4-24: Primeira frequência na direção do <i>Atuador</i> ; $f_x = 18.958$ kHz.....	62
Figura 4-25: Segunda frequência na direção do <i>Detector</i> ; $f_y = 20.501$ kHz.....	62
Figura 4-26: Terceira frequência; $f_3 = 42.766$ kHz.....	63
Figura 4-27: Ajuste de frequência do <i>Detector</i> através do elemento <i>TRANS126</i> ; $f = 18.958$ kHz.....	64
Figura 4-28: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para $\Omega_z = 0$ rad/s.....	66
Figura 4-29: Gráfico comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para $\Omega_z = 0$ rad/s.....	66
Figura 4-30: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ rad/s.....	67
Figura 4-31: Gráfico comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ rad/s.....	68
Figura 4-32: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s.....	69
Figura 4-33: Gráfico comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s.....	69
Figura 4-34: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ rad/s.....	70
Figura 4-35: comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ rad/s.....	70
Figura 5-1: Vista de perspectiva do Giroscópio de massa única, (NGUYEN, 2012)......	72

Figura 5-2: Fluxograma da Simulação Analítica do Giroscópio (NGUYEN, 2012).	75
Figura 5-3: Diagrama de Bloco do Simulink	77
Figura 5-4: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para $\Omega_z = 0$ rad/s	78
Figura 5-5: Curva da Trajetória da Massa da Giroscópio para $\Omega_z = 0$ rad/s	79
Figura 5-6: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para $0 \leq \Omega_z \leq 0.1\xi\omega_0$ rad/s.	79
Figura 5-7: Curva da Trajetória da Massa do Giroscópio para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ rad/s	80
Figura 5-8: Amplitude do <i>Atuador</i> e <i>Detector</i> em função da velocidade angular para $0 \leq \Omega_z \leq 0.1\xi\omega_0$ rad/s.	80
Figura 5-9: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para $0 \leq \Omega_z \leq 1\xi\omega_0$ rad/s.	81
Figura 5-10: Curva da Trajetória da Massa do Giroscópio para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s	82
Figura 5-11: Amplitude do modo <i>Atuador</i> e <i>Detector</i> em função da velocidade angular para $0 \leq \Omega_z \leq 1\xi\omega_0$ rad/s.	82
Figura 5-12: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para $0 \leq \Omega_z \leq 10\xi\omega_0$ rad/s.	83
Figura 5-13: Trajetória da Massa do Giroscópio para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ rad/s.	83
Figura 5-14: Amplitude do <i>Atuador</i> e <i>Detector</i> em função da velocidade angular para $0 \leq \Omega_z \leq 10\xi\omega_0$ rad/s	84
Figura 5-15: Resposta do Sistema em função da frequência para $\Omega_z = 0$ rad/s.	85
Figura 5-16: Resposta do Sistema em função da frequência para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ rad/s.	85
Figura 5-17: Resposta do Sistema em função da frequência para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s.	86
Figura 5-18: Resposta do Sistema em função da frequência para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ .	87
Figura 5-19: Fluxograma da Simulação Numérica do Giroscópio.	88
Figura 5-20: Vista total da malha mapeada do dispositivo.	89
Figura 5-21: Detalhes da malha mapeada entre as flexões do <i>Atuador</i> e <i>Detector</i> .	89
Figura 5-22: Detalhes da malha mapeada sobre o <i>Atuador</i> .	90
Figura 5-23: Condição de contorno aplicado na direção do <i>Atuador</i> (análise linear) incluindo as reações nas ancoras.	91
Figura 5-24: Condição de contorno aplicado na direção do modo <i>Detector</i> (análise linear)	91
Figura 5-25: Primeira frequência de vibração do <i>Atuador</i> ; $f_x = 12.522$ kHz.	92
Figura 5-26: Segunda frequência de vibração do <i>Detector</i> ; $f_y = 14.318$ kHz.	93
Figura 5-27: Terceira frequência de vibração. $f_3 = 31.161$ kHz	93
Figura 5-28: Ajuste de frequência do <i>Detector</i> através do elemento <i>TRANS126</i> .	94
Figura 5-29: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para $\Omega_z = 0$ rad/s	95
Figura 5-30: Comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para $\Omega_z = 0$ rad/s.	96
Figura 5-31: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ rad/s	97



Figura 5-32: Comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ rad/s.....	97
Figura 5-33: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s.....	98
Figura 5-34: Comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s.....	98
Figura 5-35: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ rad/s.....	99
Figura 5-36: Comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ rad/s.....	100
Figura A -1: Experiência do Pêndulo de Foucault, no <i>El Pantéon</i> , de Paris em 1851 (DELIGEORGES, 1990).....	109
Figura A-2: Partícula em um disco girante sob o efeito da força de Coriolis .....	110
Figura B-1: Modelo de flexão guiada de uma viga única de Silício. ....	114
Figura B-2: Área da secção transversal <b>A</b> de uma viga única. ....	116
Figura B-3: Comportamento Linear da rigidez uniaxial. ....	117
Figura B-4: Comportamento Linear da rigidez. ....	118
Figura B-5: Análise numérica não linear para deflexão de uma viga simples. ....	118
Figura B-6: Comparativo dos modelos numérico e analítico de deflexão de uma viga simples. ....	119
Figura B-7: Comparativo entre modelos analíticos e numéricos para grandes deslocamentos... ..	120
Figura B-8: Modelo de Suspensão de uma viga dobrada. ....	121
Figura B-9: Modelo Concentrado de flexão de uma viga dobrada. ....	122
Figura B-10: Análise Numérica não linear da deflexão de uma viga dobrada. ....	123
Figura B-11: Resultado numérico para elementos 2D de uma viga dobrada. ....	124
Figura B-12: Modelo de Flexão de uma viga dupla dobrada .....	124
Figura B-13: Análise Numérica da flexão de uma viga dupla dobrada.....	125
Figura B-14: Resultado numérico para elementos 2D de uma viga dupla dobrada. ....	126
Figura B-15: Modelo físico concentrado de uma viga dupla dobrada. ....	126
Figura B-16: Comparativo dos modelos numérico e analítico de deflexão de uma viga única, viga dupla e viga dupla dobrada.....	127
Figura B-17: Ilustração da distribuição de velocidades ao longo de uma viga única. ....	128

## Lista de Tabelas

Tabela 3-1: Notação dos Índices de Miller para cristais CFC (HOPCROFT, NIX e KENNY, 2010)	30
Tabela 3-4: Constantes Elásticas do Silício, valores para temperatura de 298K (HALL, 1967)	31
Tabela 6.1: Propriedades Mecânicas do silício (ACAR, 2001)	39
Tabela 6.2: Parâmetros da geometria do giroscópio (ACAR, 2001)	40
Tabela 6.3: Parâmetros Arbitrários	40
Tabela 6-4: Resultados obtidos analiticamente	43
Tabela 6-5: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para $\Omega_z = 0$ rad/s.	45
Tabela 6-6: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ rad/s.	47
Tabela 6-7: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s	49
Tabela 6-8: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ rad/s	51
Tabela 6-9: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para $\Omega_z = 0 \xi\omega_0$ rad/s	53
Tabela 6-10: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ rad/s	54
Tabela 6-11: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s	55
Tabela 6-12: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ rad/s	56
Tabela 6-13: Comparativo da rigidez do modelo analítico e numérico.	61
Tabela 6-14: Comparativo dos resultados numérico e analítico da frequência do <i>Atuador</i>	63
Tabela 6-15: Resultados dos parâmetros obtidos através da análise modal	64
Tabela 6-16: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para $\Omega_z = 0$ rad/s	67
Tabela 6-17: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ rad/s	68
Tabela 6-18: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s	69
Tabela 6-19: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ rad/s	70
Tabela 6-20: Comparativo dos resultados Analíticos e Numéricos	71
Tabela 7-1: Propriedades Mecânicas do silício (NGUYEN, 2012)	72
Tabela 7-2: Parâmetros da geometria do giroscópio (NGUYEN, 2012)	73
Tabela 7-3: Parâmetros Arbitrários	74
Tabela 7-4: Resultados obtidos analiticamente	76
Tabela 7-5: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para $\Omega_z = 0$ rad/s.	78
Tabela 7-6: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ rad/s.	80
Tabela 7-7: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s	81
Tabela 7-8: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ rad/s	83
Tabela 7-9: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para $\Omega_z = 0 \xi\omega_0$ rad/s	85
Tabela 7-10: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$	86
Tabela 7-11: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s	86

Tabela 7-12: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ .....	87
Tabela 7-13: Comparativo da rigidez do modelo analítico e numérico. ....	92
Tabela 7-14: Comparativo dos resultados numérico e analítico das frequências do Giroscópio	93
Tabela 7-15: Resultados dos parâmetros obtidos através da análise modal .....	94
Tabela 7-16: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para $\Omega_z = 0$ rad/s .....	96
Tabela 7-17: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ rad/s.....	97
Tabela 7-18: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para $\Omega_z = 1\xi\omega_0$ rad/s.....	99
Tabela 7-19: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ rad/s.....	100
Tabela 7-20: Comparativo dos resultados Analíticos e Numéricos .....	101

## Lista de Abreviaturas e Siglas

$\Omega_z$	- Velocidade angular
$\vec{v}$	- Velocidade radial
$F_C$	- Força de Coriolis
$F_k$	- Força Restauradora
$k$	- Constante elástica
$k_x$	- Constante elástica linear <i>Atuador</i>
$k_y$	- Constante elástica linear <i>Detector</i>
$k_{ey}$	- Rigidez eletrostática do <i>Detector</i>
$\omega$	- Frequência de excitação do <i>Atuador</i>
$\omega_{0x}$	- Frequência natural do <i>Atuador</i>
$\omega_{0y}$	- Frequência natural do <i>Detector</i>
$\xi_x$	- Fator de amortecimento
$Q$	- Fator de qualidade
${}_I r_p(t)$	- Vetor posição
$\Psi$	- Aceleração angular
$\sigma$	- Tensão normal
$\varepsilon$	- Deformação
$\xi$	- Fator de amortecimento
$\tau$	- Tensão tangencial
$X_0$	- Amplitude de deslocamento do <i>Atuador</i>
$Y_0$	- Amplitude de deslocamento do <i>Detector</i>

$a$	- Aceleração
$a_p$	- Aceleração linear
$F_{ext}$	- Força externa
$C$	- Coeficiente de atrito viscoso
$C_{ijkl}$	- Coeficiente tensor de elasticidade
$S_{ijkl}$	- Coeficiente tensor de flexibilidade
$\varepsilon_{ij}$	- Tensor de deformação
$F_N$	- Força normal
$F_T$	- Força tangencial
$T_i$	- Vetores de tensão
$e_i$	- Vetores unitários
$E$	- Módulo de elasticidade
$G$	- Módulo de rigidez
$\nu$	- Relação de Poisson
$I$	- Momento de inércia
$w$	- Largura
$L$	- Comprimento
$t$	- Espessura
$P_{Emáx}$	- Energia Potencial máxima
$K_{Emáx}$	- Energia cinética máxima
$\rho$	- Densidade do material
$\varepsilon_0$	- Constante de permeabilidade no vácuo
$f$	- Frequência
$f_x$	- Frequência natural do <i>Atuador</i>

- $f_y$  - Frequência natural do *Detector*
- $V_{dcs}$  - Tensão elétrica contínua nas placas de Capacitores
- $M_d$  - Massa na direção do *Atuador*
- $M_s$  - Massa na direção do *Detector*
- $M_t$  - Massa total
- $\Delta C$  - Variação da capacitância
- $C_{os}$  - Capacitância estática do *Detector*
- $C_{od}$  - Capacitância estática do *Atuador*
- $L_{bd1}$  - Comprimento da viga de flexão do *Atuador I*
- $L_{bd2}$  - Comprimento da viga de flexão do *Atuador II*
- $w_{bd}$  - Largura da viga de flexão do *Atuador*
- $t_{bd}$  - Espessura da viga de flexão do *Atuador*
- $L_{bs1}$  - Comprimento da viga flexão do *Detector I*
- $L_{bs2}$  - Comprimento da viga de flexão do *Detector II*
- $w_{bs}$  - Largura da viga de flexão do *Detector*
- $L_M$  - Comprimento da massa central
- $L_f$  - Comprimento do dedo do *Atuador*
- $w_f$  - Largura do dedo do *Atuador*
- $t_f$  - Espessura do dedo do *Atuador*
- $N_f$  - Número total de dedos do *Atuador*
- $g_{od}$  - Gap da capacitância do *Atuador*
- $g_{0s1}$  - Gap da capacitância do *Detector I*
- $g_{0s2}$  - Gap da capacitância do *Detector II*

MEMS- Microeletromechanical System

MST - Microssistemas

CI - Circuito Integrado

FOG - Fiber Optic Gyro

RLG - Ring Laser Gyro

NASA - National Agency Spacial American

ASIC - Application Specific Integrated Circuit

INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

UMI - Unidade de Medida Inercial

DRIE - Deep Reactive Ion Etching

MEF - Método de elementos finitos

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 Giroscópio e a tecnologia MEMS.....	2
1.2 Objetivo do Trabalho.....	7
1.3 Metodologia.....	7
1.4 Motivação.....	8
1.5 Revisão Bibliográfica .....	8
1.6 Estruturação do Trabalho.....	10
<b>2. FORMULAÇÃO ANALÍTICA ELETROMECHANICA DO GIROSCÓPIO .....</b>	<b>12</b>
2.1 Dinâmica do Giroscópio.....	12
2.2 Sistemas de Atuação (Atuadores Eletrostáticos).....	17
2.3 Sistema de Detecção (Detecção Capacitiva ) e Rigidez Eletrostática .....	19
2.4 Equação Dinâmica de um Giroscópio Eletromecânico.....	22
<b>3. PROPRIEDADES DO SILÍCIO.....</b>	<b>28</b>
3.1 Processo de Microfabricação.....	34
<b>4. MODELO DO GIROSCÓPIO DE ACAR .....</b>	<b>39</b>
4.1 Simulação com o modelo Analítico .....	40
4.2 Simulação Numérica .....	56
4.3 Comparação dos Resultados .....	71
<b>5. MODELO DO GIROSCÓPIO DE NGUYEN.....</b>	<b>72</b>
5.1 Simulação com o modelo Analítico .....	74
5.2 Simulação Numérica .....	87
5.3 Comparativo dos Resultados.....	100
<b>6. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>102</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS .....</b>	<b>104</b>
<b>APÊNDICE A – FORÇA DE CORIOLIS .....</b>	<b>109</b>
Força de Coriolis .....	109



<b>APÊNDICE B – MODELOS DE SUSPENSÃO DO GIROSCÓPIO.....</b>	<b>114</b>
<b>Flexões da viga engastada-guiada .....</b>	<b>114</b>
<b>Flexão da vigas dobrada e duplamente dobrada .....</b>	<b>121</b>
<b>Massa Efetiva da Viga.....</b>	<b>127</b>

# 1. INTRODUÇÃO

O surgimento da tecnologia microeletrônica iniciou-se em 1947 com a invenção do transistor e posteriormente com o desenvolvimento de circuitos integrados (CI) em 1959, com isto foi possível revolucionar a tecnologia de processamento da informação. Computadores pessoais portáteis (notebook), celulares e tocadores de música, são exemplos claros dessas potencialidades. Devido ao rápido crescimento desta tecnologia foi possível desenvolver técnicas mais elaboradas para miniaturização de componentes eletrônicos e assim ao longo de décadas procurou-se construir componentes micromecânicos que pudessem ser combinados com circuitos eletrônicos, dando origem a dispositivos microeletromecânicos. Tais dispositivos prometem dar continuidade a revolução iniciada pela microeletrônica para áreas onde é fundamental fazer a interface com o mundo externo.

A tecnologia de sistemas microeletromecânicos conhecida atualmente nos Estados Unidos como MEMS (Microelectromechanical systems), na Europa como MST (Microsystems technology) e Micromachines (Micromáquinas) no Japão (SENTURIA, 2001), surgiu nas últimas décadas como uma solução inteligente e eficiente para o desenvolvimento de sensores e dispositivos de alta precisão. O pequeno consumo de potência, diminuição de peso, tamanho reduzido, alta confiabilidade e o baixo custo são as principais características desses sistemas. Um dispositivo que possui a tecnologia MEMS pode ser entendido como um sistema que possui em escala micrométrica uma interface eletrônica e uma interface mecânica. Por exemplo, sensores e dispositivos fabricados através de técnicas de fotolitografia que estejam na dimensão entre a escala do micrômetro e a escala do milímetro podem ser caracterizados como dispositivos MEMS (ACAR & SHKEL, 2009).

Dispositivos microeletromecânicos ou microusinado são feitos através da combinação de processos característicos de fabricação da microeletrônica. Muitas destas técnicas utilizadas para a fabricação de microestruturas foram desenvolvidas anteriormente em construções de circuitos integrados. Técnicas como a deposição, litografia UV e corrosão (*etching*) fazem parte do processo de obtenção destas microestruturas. Devido a estas técnicas de fabricação já

consolidada, pode-se justificar sucesso de fabricação de dispositivos e sensores MEMS (MADOU, 2001).

O mercado de investimentos na tecnologia MEMS no ano de 2011 foi de aproximadamente \$10.3 bilhões e ainda continua em crescimento. Pesquisas de mercado apontam que até o ano de 2017 é esperado investimentos de até \$21.2 bilhões para dispositivos que possuem a tecnologia MEMS. Torna-se importante ressaltar que microssores inerciais representam atualmente, 31% de todos os investimentos mencionados acima. Estima-se ainda, que até o ano de 2017 haverá um crescimento de até 8.1% com relação aos investimentos na área de sensores inerciais (PERLMUTTER e ROBIN, 2012). O grande êxito comercial atingido pelo microacelerômetro se deve principalmente a aplicabilidade em mercados automobilísticos (airbags, sistema de estabilidade do veículo), mercado de telecomunicações (microespelhos para comutação de fibra ótica para internet rápida e antenas inteligentes) e aplicações para entretenimento (Smartphones, Nintendo Wii). Baseado no sucesso comercial do acelerômetro, muitas pesquisas estão direcionadas com o objetivo de alcançar resultados similares no desenvolvimento do giroscópio. Sendo este o objeto de estudo faz-se necessário uma breve discussão deste microssensor.

## **1.1 Giroscópio e a tecnologia MEMS**

O giroscópio é um dispositivo que mede a velocidade ou posição angular de um objeto em torno do seu eixo de rotação (ACAR & SHKEL, 2009). Podemos definir seus ângulos de orientação no sistema de coordenadas global Z, Y e X como guinada, arfagem e rolagem. O nome “giroscópio” foi criado pelo físico francês Jean Bernard Léon Foucault, combinando as palavras gregas “skopeein” e “gyros” que significam respectivamente “ver” e “rotação”. Este aparelho permitiu realizar novas experiências sobre o movimento da terra. No final do século XIX e início do século XX o giroscópio foi utilizado amplamente em navios. Como exemplo, o Alemão Herman Anschütz Kaempfe patenteou o giroscópio para navios em 1904. Em 1909 Elmer Sperry, inventor e empreendedor americano construiu o primeiro piloto automático para aeronaves que utilizavam giroscópios. No ano 1911, Sperry começou a vender bússolas giroscópicas nos EUA e depois na Inglaterra (TURNER, 2004). Já em 1924, apareceram sistemas de navegação inercial integrando três giroscópios e acelerômetros com o objetivo de medir a aceleração da gravidade. O

primeiro sistema de navegação inercial operacional é atribuído ao grupo de Peenemunde na Alemanha e foi empregado nos foguetes V-2 no final da Segunda Guerra Mundial. Após este acontecimento o desenvolvimento de navegadores inerciais passou por um ritmo de desenvolvimento extraordinário no laboratório de instrumentação criado por Charles Stark Draper (MIT), onde foi rebatizado por seu fundador em 1970, e separado do MIT em 1973 para tornar-se uma organização independente sem fins lucrativos com foco em pesquisas espaciais (MAY, 1993). Os primeiros giroscópios utilizando a tecnologia MEMS, foram sensores piezoelétricos feitos de quartzo. Na década de 80 a empresa Systron Donner Inertial foi à pioneira na comercialização dos giroscópios de vibração de quartzo, como mostra a Figura 1-1.

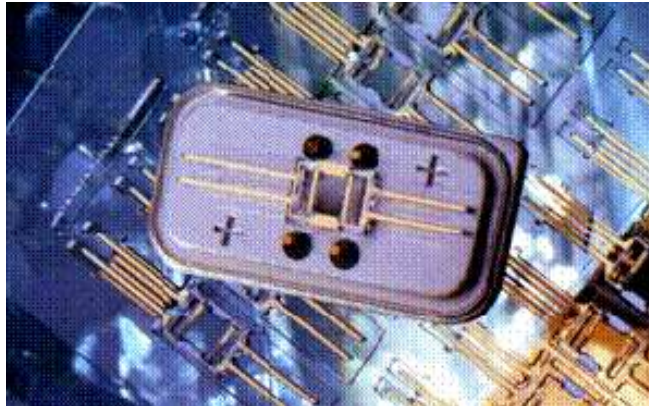


Figura 1-1: Giroscópio de vibração de quartzo da Systron Donner, (BARBOUR e SCHIMIDT, 2001).

O primeiro lote de fabricação de um giroscópio microusinado de silício foi desenvolvido pelo Laboratório Charles Stark Draper em 1991, como pode ser observado na Figura 1-2:

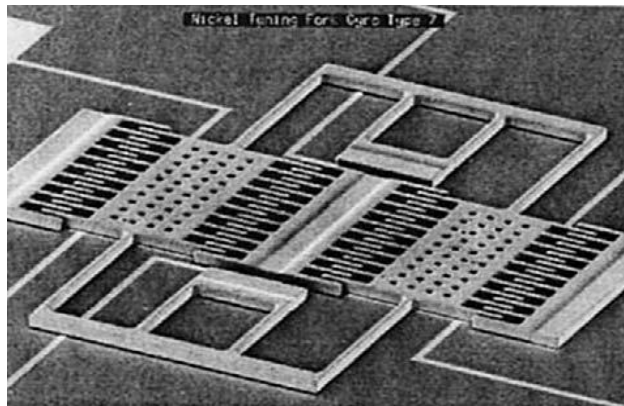


Figura 1-2: Primeiro lote de fabricação de um giroscópio microusinado de silício. (BERNSTEIN, DRAPER LAB, *et al.*, 1993)

Outras empresas americanas como Sperry Gyroscope (atualmente Sperry Marine e Paramax), Honeywell, Singer-Kearfort e Litton entre outras fazem parte das principais companhias no desenvolvimento de sensores inerciais baseado na tecnologia MEMS. Ao longo do século XX, muitas melhorias com relação ao desenvolvimento de novas tecnologias começaram a surgir. Giroscópios baseados em princípios óticos, como o FOG (Fiber Optic Gyro) e o RLG (Ring Laser Gyro) eliminaram todas as limitações mecânicas como sensibilidade ao impacto e o atrito dos rolamentos comumente observados em giroscópios mecânicos. A Figura 1-3 mostra montagem esquemática destes dois giroscópios:

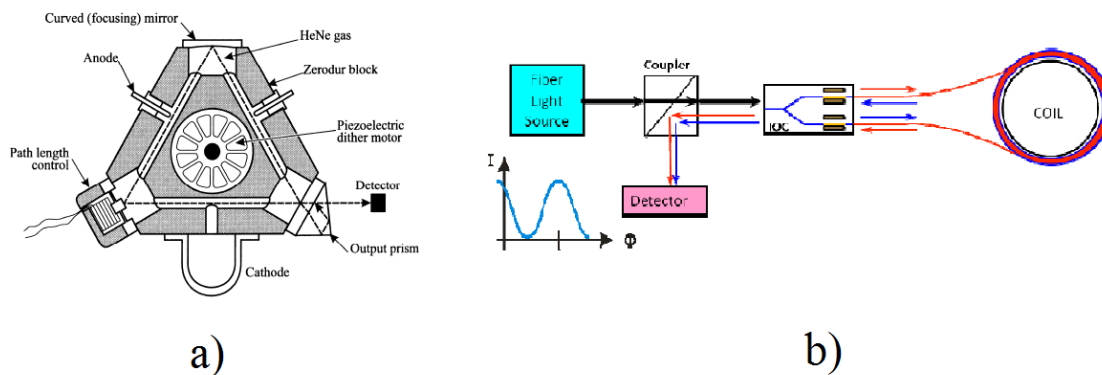


Figura 1-3: a) Esquema de um Giroscópio tipo FOG; b) Esquema de um Giroscópio tipo RLG (BARBOUR e SCHIMIDT, 2001)

Ressalta-se que o desenvolvimento de Giroscópios Óticos (macro sensores) são definidos como aplicações de alto e médio desempenho. Menciona-se que o giroscópio do tipo FOG é mais empregado para usos de baixo e médio desempenho em aplicações militares e comerciais, sendo o intervalo do fator de escala de precisão variando de 0.1 a 1 %. O giroscópio RLG, possui alto desempenho sendo empregado não apenas para fins militares, mas também podendo ser aplicado no uso espacial por possuir um fator de escala de precisão menor que 0.001% mostrando-se assim, um sensor de grande precisão (YAZDI e NAJAFI, 2000). Para diversas aplicações que envolvem giroscópios óticos, observa-se uma considerável diminuição de tamanho e peso comparados aos giroscópios mecânicos. Contudo, o seu uso em aplicações aeroespaciais é considerado ainda altamente dispendioso.

Atualmente, programas espaciais como a NASA (Agência Nacional Espacial Americana) vêm adotando uma nova filosofia para seus projetos espaciais, em que os parâmetros como tamanho, peso e tempo tornaram-se fatores imprescindíveis na redução de custos. Para alcançar os objetivos, tecnologias de miniaturização, melhorias no desempenho e robustez são exigidas para satisfazer os requisitos em suas futuras missões espaciais (TANG, 1998).

Para satisfazer esses tais requisitos emprega-se a tecnologia MEMS em sensores inerciais, pois os mesmos apresentam vantagens na redução do tamanho e peso em relação ao giroscópio mecânico e ótico, logo o giroscópio MEMS, surge como uma alternativa viável por possuir características de baixo consumo de potência, possibilidade de integração com outros circuitos e baixo custo de produção.

Dispositivos que possuem a tecnologia MEMS são compostos basicamente por atuadores e/ou sensores. Estes microdispositivos podem compartilhar muitas funções como aquisição, processamento e controle digital de sinais. Devido ao grande avanço tecnológico da microeletrônica mencionado anteriormente nas últimas décadas e o atual desenvolvimento da tecnologia MEMS, é possível integrar circuitos microeletrônicos e estruturas mecânicas no mesmo chip através da tecnologia ASIC (Application Specific Integrated Circuit). Logo o desafio desta tecnologia está no desenvolvimento de dispositivos que possuam alta confiabilidade, superando problemas no processo de fabricação (anisoelasticidade) e variações do ambiente como temperatura e pressão.

O giroscópio MEMS possui característica básica de um elemento mecânico vibrante (sistema massa mola com dois graus de liberdade), composto por um mecanismo de atuação e detecção. O princípio fundamental de operação deste sistema mecânico é a possibilidade de medir a velocidade angular de um veículo em uma determinada direção ao induzir a força de Coriolis.

Ao longo do seu desenvolvimento, projetos utilizando micro vigas de silício como mola para flexões têm sido utilizados. Molas flexoras possibilitam que o dispositivo possa defletir na direção do modo *Atuador* ou na direção do modo *Detector*. Pode-se afirmar que todos os giroscópios oscilantes que utilizam o processo de microusinagem são divididos em dois tipos. No tipo I, o giroscópio mede o ângulo de orientação do, para o tipo II, que será discutido neste trabalho, o giroscópio mede a velocidade angular.

Diversos mecanismos de atuação podem ser usados para excitar as estruturas vibrantes destes microsensores. Foi utilizado o mecanismo de atuação eletrostática por possui maior vantagem com relação à atuação magnética ou térmica, pois não necessitam de materiais especiais e nem de uma temperatura estável. Esse mecanismo excitará o sistema através de um sinal elétrico que pode ser uma tensão ou corrente, e converterá este sinal em uma resposta mecânica dando origem a uma força atuadora. Para o mecanismo da detecção foi escolhido um sistema capacitivo, pois mostrou-se superior com relação à detecção magnética, óptica e piezoresistiva por oferecer um baixo consumo de potência. Neste mecanismo, o sensor precisará transformar a variação das placas dos capacitores em uma variável elétrica que possa ser detectada a partir de um circuito eletrônico (CHOLLET e LIU, 2012).

Atualmente os conhecimentos da manufatura de dispositivos que possuem a tecnologia MEMS estão avançados, porém apresentam a carência na fase de desenvolvimento de novos projetos. Isso se deve a natureza multidisciplinar do giroscópio que torna seu projeto complexo. Contudo, existem ferramentas computacionais que auxiliam na construção desses dispositivos, fazendo simulações e análises do comportamento eletroestrutural para um melhor modelo do giroscópio. Um dos programas mais utilizados para tais simulações no domínio multifísico é o Ansys, pois apresenta um ajuste fácil de parâmetros.

## 1.2 Objetivo do Trabalho

Esta dissertação teve como objetivo principal desenvolver uma metodologia de análise dinâmica analítica e numérica de giroscópios MEMS incluindo as formulações dos modelos mecânicos e elétricos acoplados. Para a obtenção deste objetivo foram realizadas simulações numéricas e analíticas dos giroscópios de ACAR (2001) e de NGUYEN (2012), as quais geraram os seguintes objetivos específicos:

- Definir as propriedades elétricas dos modelos eletroestruturais
- Comparar e validar através de gráficos os resultados das simulações numérica e analítica dos modelos de flexões do giroscópio.
- Simular analiticamente o comportamento dinâmico linear dos modelos de giroscópios de ACAR e NGUYEN, utilizando a viga simples.
- Simular numericamente o comportamento dinâmico linear dos modelos de giroscópios de ACAR e NGUYEN, utilizando a viga simples.
- Comparar e validar os resultados numéricos e analíticos dos modelos de giroscópios de ACAR e NGUYEN, utilizando a viga simples
- Realizar análise estática linear e não linear das deflexões do giroscópio através das simulações numérica e analítica.

## 1.3 Metodologia

Nesta pesquisa foi utilizado o programa *MATLAB/Simulink* para a simulação analítica e na simulação numérica foi utilizado o programa *ANSYS Multiphysics*. A seguir, descreveremos a metodologia para o cumprimento dos objetivos:

Primeiramente realizou-se a análise estática e dinâmica do modelo do giroscópio de (ACAR, 2001) com o método numérico e analítico, fazendo uso do modelo linear de flexão. Através dos resultados foi mensurada a eficiência do método numérico, baseado no erro relativo entre os métodos. Seguiu-se a mesma metodologia para o modelo do giroscópio (NGUYEN, 2012). Na sequencia elaborou-se uma análise estática linear e não linear das vigas a partir das



simulações numéricas e analíticas, com o objetivo de definir a região em que pode ser utilizado o modelo linear (pequenos deslocamentos) ou um modelo não linear (grandes deslocamentos) verificando os intervalos em que as duas análises apresentam convergência e divergência dos resultados. Para efeito de comparação foram utilizadas as flexões de viga simples, viga dobrada e viga duplamente dobrada.

#### **1.4 Motivação**

A motivação para o estudo dessa pesquisa iniciou-se através da proposta do pesquisador Maurício Fabbri em sua procura por colaboradores que pudessem trabalhar na área de simulação de sensores inerciais MEMS no desenvolvimento de um giroscópio com tecnologia microeletromecânica para o INPE. Devido à relevância do trabalho e sua importância estratégica para a soberania do país, procurou-se adquirir conhecimentos em simulação computacional com a finalidade de propor novos modelos de giroscópios MEMS em futuras pesquisas ou aplicações de engenharia, assim como desenvolver trabalhos de cooperação com institutos de tecnologia voltados a pesquisas espaciais como INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais), ITA (Instituto de Tecnológico da Aeronáutica) entre outros que tenham como interesse comum desenvolver sensores inerciais baseados na tecnologia MEMS para aplicações táticas de alto desempenho em sistemas espaciais.

#### **1.5 Revisão Bibliográfica**

Devido à extensa literatura adquirida em forma de artigos, teses, revistas e livros, serão citados alguns dos trabalhos publicados na área de pesquisa e interesse.

A autora (FORHAN, 2010) apresentou um relatório em que discute e analisa o estado da arte das tecnologias para o desenvolvimento de sensores inerciais MEMS com a finalidade de obter sensores com desempenho adequado para aplicações espaciais.

Os autores (YAZDI, AYAZI e NAJAFI, 1998) publicaram um artigo no qual apresentaram as principais características de acelerômetros e giroscópios de silício microusinado. Foram mostradas diversas estruturas desses dispositivos, desenhos de microsensores, encapsulamentos e questões de interface eletrônica dos sensores inerciais. Através dessas duas publicações foi possível compreender o desenvolvimento histórico da tecnologia MEMS aplicadas a sensores inerciais do acelerômetro e giroscópio, assim como observar suas diversas aplicações.

(ACAR e SHKEL, 2009) Apresentaram um livro no qual descrevem um novo paradigma em projetos de sensores para giroscópios MEMS, fornecendo uma base sólida na teoria fundamental e implementação de um giroscópio vibrante microusinado. Nessa bibliografia foram utilizados conceitos como o efeito da força de Coriolis induzida, o princípio de funcionamento do giroscópio e o desenvolvimento de suas equações dinâmicas.

O autor (SENTURIA, 2001) publicou um livro que descreve as principais áreas envolvidas no desenvolvimento de dispositivos MEMS. Áreas como processo de microfabricação, teoria da elasticidade aplicada às propriedades mecânicas do silício, termodinâmica, eletrônica e sistema dinâmico são descritas de uma maneira detalhada e organizada. Procurou-se extrair desse livro assuntos como o processo de microfabricação e as propriedades mecânicas do silício.

A tese de (ALPER, 2005) relata o desenvolvimento de giroscópios vibrantes microusinados de alto desempenho para medição inercial de grau tático (aplicações espaciais). Em seu trabalho foram propostas três estruturas de giroscópio que apresentam diferentes características entre si, como variações no espaçamento entre as placas de detecção capacitivas de 1,5 ( $\mu\text{m}$ ) até 5,5 ( $\mu\text{m}$ ), na espessura estrutural do dispositivo de 12 ( $\mu\text{m}$ ) até 100 ( $\mu\text{m}$ ) e nos chips fabricados de 1 x 1 ( $\text{mm}^2$ ) até 4,2 x 4,6 ( $\text{mm}^2$ ). No início de sua tese, o autor apresenta o comportamento linear da rigidez de uma viga simples através da relação entre a força aplicada e a deflexão resultante para um determinado intervalo onde é válida a relação de linearidade. Em seguida apresenta um modelo de equação cúbica que descreve o comportamento não linear da rigidez dessa viga. Segundo Alper, é importante manter o deslocamento da rigidez do dispositivo

no regime de linearidade pois essa condição requer uma menor força de atuação para o deslocamento do sistema. A seguir foram apresentados alguns modelos de flexões para giroscópios MEMS que possuem vantagens de comportamento linear para grandes deslocamentos. Nessa tese foram extraídos conceitos sobre o comportamento linear e não linear de flexões e os diferentes modelos que podem ser usados como alternativas para manter a linearidade para grandes deslocamentos de um giroscópio.

Os autores (CHOLLET e LIU, 2012) escreveram um livro sobre tecnologia MEMS onde houve diversas versões ao longo de seis anos até chegar nessa obra detalhada e completa acerca dos dispositivos que usam a tecnologia MEMS. Nessa publicação foram extraídos conceitos sobre a técnica de detecção capacitiva e seus principais parâmetros envolvidos para se medir uma mudança de capacitância. Os autores desenvolveram assuntos nos quais descrevem as principais tecnologias de atuação presentes em dispositivos MEMS assim como as vantagens da utilização de atuadores eletrostáticos e detecção capacitiva com relação a outros métodos apresentados.

## **1.6 Estruturação do Trabalho**

Os capítulos deste trabalho estão estruturados da seguinte maneira:

No capítulo 1 são descritas as linhas gerais desta dissertação, assim como seus objetivos principais, motivações, materiais pesquisados e sua estruturação.

O capítulo 2 apresentará com mais detalhes o princípio de funcionamento de um giroscópio vibrante de massa simples microusinado. Também serão discutidas os principais conceitos e características do modo *Atuador* e do modo *Detector* de um giroscópio. Finalmente, será obtida a equação dinâmica simplificada que levam em conta os mecanismos elétricos de atuação e detecção deste giroscópio, assim como as principais relações entre as amplitudes do modo *Atuador* e do modo *Detector* do Giroscópio e também sua faixa de operação no regime linear.

O capítulo 3 apresenta as principais propriedades mecânicas do silício, como a anisotropia e suas consequências na estrutura mecânica de sensores inerciais que utilizam como material estrutural o silício monocristalino.

Para o capítulo 4 e 5 são apresentadas às simulações dinâmicas de dois giroscópios. Baseados no método numérico e analítico foram obtidos os principais resultados dos giroscópios para validação do método numérico.

No **Apêndice A** será discutido em mais detalhes o conceito da força de Coriolis. Já no **Apêndice B** serão apresentados alguns modelos de flexões comumente utilizados em giroscópios. Para cada modelo de flexão apresentado será obtida sua expressão analítica e uma simulação numérica da análise estática linear (pequenos deslocamentos) e não linear (grandes deslocamentos). será feita para uma posterior comparação entre resultados do modelo analítico e modelo numérico.

## 2. FORMULAÇÃO ANALÍTICA ELETROMECHANICA DO GIROSCÓPIO

Neste capítulo será feita uma introdução sobre a formulação dinâmica da aceleração de um corpo em rotação em um referencial não inercial onde as forças de Coriolis e força centrífuga aparecem devido à rotação. Após a dedução das acelerações obtidas do referencial não inercial, será apresentado o modelo dinâmico de oscilador mecânico linear com dois graus de liberdade que descreve o comportamento de um giroscópio microusinado. A seguir serão discutidos os principais conceitos dos mecanismos elétricos de atuação e detecção de um giroscópio MEMS. Após essa discussão será apresentado o modelo dinâmico de oscilador mecânico linear com dois graus de liberdade com a força de atuação elétrica que descreve o comportamento de um giroscópio microusinado.

### 2.1 Dinâmica do Giroscópio

Grande parte dos microsensors do tipo MEMS que medem a variação da velocidade angular  $\Omega_z$  são caracterizadas por uma massa suspensa sobre molas elásticas ancoradas sobre um substrato. Na Figura 2-1 é apresentado um modelo Massa única (*Single Mass*) de um giroscópio.

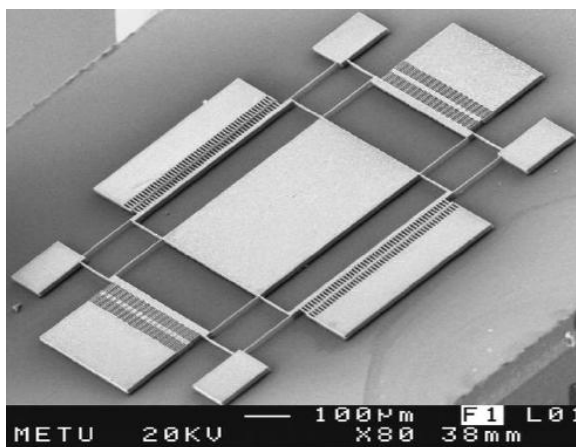


Figura 2-1: Modelo de Giroscópio *Massa única* (ALPER e AKIN, 2005)

A partir do modelo ilustrado na Figura 2-1, um modelo de massa concentrada do sistema dinâmico do Giroscópio é visto na Figura 2-2.

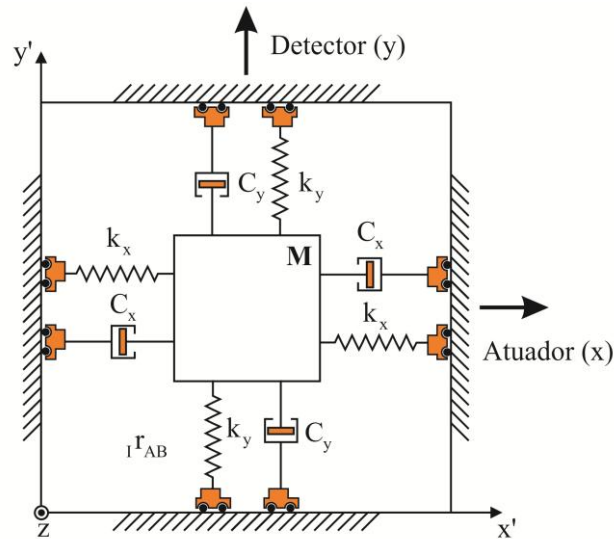


Figura 2-2: Sistema massa mola de 2 graus de liberdade (referencial inercial)

Pela Figura 2-2 verificamos que o modelo do sistema massa mola, possui dois graus de liberdade e que a massa  $\mathbf{M}$  pode oscilar em duas direções perpendiculares entre si, tanto no eixo  $x$  como no eixo  $y$ . O giroscópio vibrante microusinado possui como característica básica elementos mecânicos vibrantes (molas) e através da utilização da vibração deste sistema mecânico é possível medir a velocidade de rotação de um dispositivo ao induzir o efeito da força de Coriolis. Como podemos observar através da Figura 2-1, existe uma massa de prova  $\mathbf{M}$  que é sustentada por molas engastadas no substrato nas extremidades opostas da massa, as quais servem como suspensões entre a massa de prova e o substrato, permitindo que a massa possa oscilar em duas direções ortogonais definidas pelo *Atuador* (direção  $x$ ) e *Detector* (direção  $y$ ). Observa-se que quando um giroscópio está sujeito a uma rotação, a massa oscilante experimentará a força de Coriolis induzida na frequência e na direção perpendicular do *Atuador*. Para descrever as equações que regem o comportamento dinâmico completo de um giroscópio microusinado, será

útil introduzir dois sistemas de coordenadas representados por  $I$  (referencial não inercial) e  $A$  (referencial inercial) como mostrado na Figura 2-3.

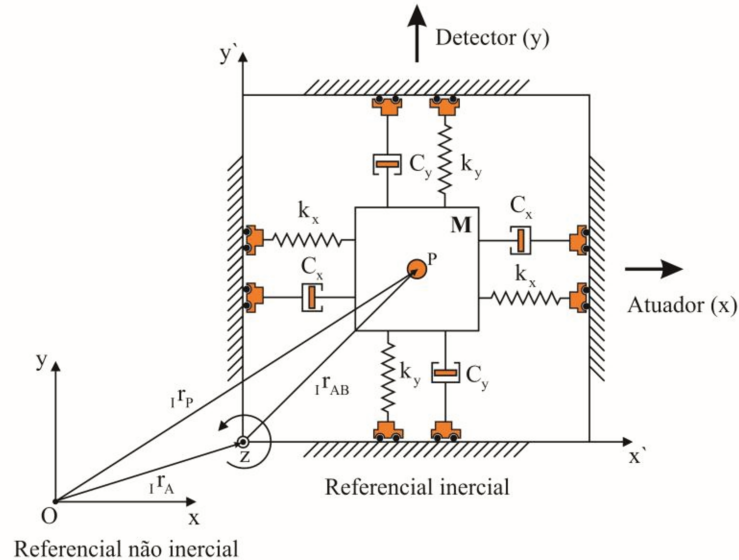


Figura 2-3: Sistema massa mola de 2 graus de liberdade (referencial não inercial)

Ao determinar os referenciais  $I$  e  $A$ , podem-se obter as forças atuantes com relação ao ponto  $P$  (SANTOS, 2001). Através dos sistemas referenciais introduzidos, serão obtidas as seguintes equações dinâmicas para o referencial  $I$  com relação ao ponto  $P$  a ser analisado, logo através da determinação do vetor posição  ${}_I r_P(t)$  teremos :

$${}_I r_P(t) = {}_I r_A(t) + {}_I r_{AB}(t) \quad (2.1)$$

Pela Eq.(2.1) ao derivarmos o vetor posição  ${}_I r_P(t)$  que descreve o comportamento da trajetória da massa oscilante em relação ao tempo, iremos obter o vetor velocidade  ${}_I v_P(t)$  definido por:

$${}_I v_P(t) = {}_I v_A(t) + {}_I v_{AB}(t) + \dot{\theta} \times {}_I v_{AB}(t) \quad (2.2)$$

E finalmente, ao derivarmos novamente no tempo, o vetor velocidade  ${}_I v_p(t)$ , obteremos a aceleração  ${}_I a_p(t)$  total do sistema mecânico do sistema mecânico de dois graus de liberdade representado pela Eq.(2.3).

$${}_I a_p(t) = {}_I a_A(t) + {}_I a_{AB}(t) + 2(\dot{\theta} \times {}_I v_{AB}(t)) + \dot{\theta} \times (\dot{\theta} \times {}_I v_{AB}(t)) + \ddot{\theta} \times {}_I r_{AB}(t) \quad (2.3)$$

Definindo  $\dot{\theta} = \Omega$ ,  $\ddot{\theta} = \Psi$  e que devido a um sistema de controle do dispositivo, a aceleração linear  ${}_I a_p(t)$  pode ser considerada nula, a Eq(2.3) poderá ser reescrita como:

$${}_I a_p(t) = {}_I a_{AB}(t) + 2(\Omega \times {}_I v_{AB}(t)) + \Omega \times (\Omega \times {}_I v_{AB}(t)) + \Psi \times {}_I r_{AB}(t) \quad (2.4)$$

Pela Eq(2.4), poderemos obter a equação que descreve o comportamento dinâmico de um giroscópio vibrante microusinado, ao considerarmos que  $\Omega = \Omega_z \hat{k}$  e que todas as peças são perfeitamente rígidas e imóveis na direção  $\hat{k}$ , estaremos levando em consideração que o movimento do centro de massa de prova **M** está apenas na direção  $\hat{i}$  do modo *Atuador* e na direção  $\hat{j}$  do modo *Detector*. Logo os vetores de posição  ${}_I r_{AB}(t)$ , velocidade  ${}_I v_{AB}(t)$  e aceleração  ${}_I a_{AB}(t)$  serão representados respectivamente por:

$$\begin{aligned} {}_I r_{AB}(t) &= x\hat{i} + y\hat{j} \\ {}_I v_{AB}(t) &= \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \\ {}_I a_{AB}(t) &= \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Utilizando a Eq. (2.4), verifica-se que o seu segundo termo é a definição da aceleração de Coriolis  $\vec{a}_c$ :



$$2(\Omega \times {}_I v_{AB}(t)) = 2(-\dot{y}\Omega_z \hat{i} + \dot{x}\Omega_z \hat{j}) \quad (2.6)$$

O terceiro termo da Eq (2.4) é componente da aceleração centrífuga, que é definida por:

$$\Omega \times (\Omega \times {}_I v_{AB}(t)) = [\Omega_y(y\Omega_x - x\Omega_y) - x\Omega_z^2] \hat{i} + [\Omega_x(x\Omega_y - y\Omega_x) - y\Omega_z^2] \hat{j} \quad (2.7)$$

O último termo está diretamente relacionado com a aceleração tangencial, expressa por:

$$\Psi \times {}_I r_{AB}(t) = (-y\Psi_z \hat{i} + x\Psi_z \hat{j}) \quad (2.8)$$

Ao adotarmos os referenciais inerciais e não inerciais para tratarmos o comportamento dinâmico da massa de prova  $\mathbf{M}$  do sensor, as forças de inércia como mencionado anteriormente são levadas em conta como forças que estarão atuando no sistema dinâmico. Pela segunda lei de Newton, consideraremos  $F_{ext}$  a soma de todas as forças agindo sobre a massa de prova  $\mathbf{M}$  sendo elas a força elástica restauradora, a força viscosa de amortecimento, e as forças de inércia com relação ao referencial não inercial  $I$ , teremos:

$$m_I a_{AB}(t) = F_{ext} \quad (2.9)$$

$$m_I a_{AB}(t) = (k_I r_{AB} - C_I v_{AB}(t)) \quad (2.10)$$

$$m_I a_{AB}(t) + C_I v_{AB}(t) + k_I r_{AB} = 0 \quad (2.11)$$

Utilizando a Eq (2.4) e a Eq (2.10) na Eq (2.9), teremos agora para um sistema de dois graus de liberdade, a equação dinâmica do sistema mecânico de um giroscópio microusinado descrita por :

$$\begin{cases} m_x \ddot{x} + C_x \dot{x} + [m_x(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) + k_x]x + m_x(\Omega_y \Omega_x + \Psi_z) = 2m_y \dot{y} \Omega_z \\ m_y \ddot{y} + C_y \dot{y} + [m_y(\Omega_x^2 + \Omega_z^2) + k_y]y + m_y(\Omega_y \Omega_x + \Psi_z) = -2m_x \dot{x} \Omega_z \end{cases} \quad (2.12)$$

## 2.2 Sistemas de Atuação (Atuadores Eletrostáticos)

Para determinarmos a amplitude  $F_D$  da força de atuação de um giroscópio em função dos parâmetros elétricos, definiremos o conceito de atuador eletrostático. Um atuador eletrostático poder ser caracterizado como um transdutor que irá converter energia elétrica em energia mecânica (força atuadora). Deve ser mencionado que existem vários mecanismos utilizados para a geração da força excitadora de atuação de um giroscópio do tipo MEMS. Como exemplo, podemos citar mecanismos de atuação dos tipos piezoelétrico, piezoresistivo e capacitivo. Para este trabalho, será utilizado o mecanismo de atuação capacitivo que consiste basicamente de eletrodos fixos e eletrodos que se movimentam juntamente com a massa de prova M na direção do modo *Atuador*. A força eletrostática de atuação gerada devido à atuação dos eletrodos das placas paralelas pode ser vista na Eq.(2.15).

$$\vec{F} = \nabla E(V) = \frac{\nabla C(x, y, z)V^2}{2} = \nabla \left( \begin{matrix} x_0 z_0 \\ y_0 \end{matrix} \right) \frac{\varepsilon_0 V^2}{2} \quad (2.15)$$

Nota-se que a expressão da força eletrostática pode ser simplificada tomando-se a derivada com respeito à direção do movimento na qual se quer calcular o módulo da força  $\vec{F}$ . Pode-se exprimir a força de atuação eletrostática para uma direção  $\hat{e}_i$  qualquer, mostrada na Eq.(2.16).

$$\vec{F}_e = \frac{\partial E(V)}{\partial e} = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial e} V^2 \hat{e} \quad (2.16)$$

No caso particular onde a força de atuação eletrostática está na direção  $\hat{x}$  (modo *Atuador*), conforme a Figura 2-4, pode-se definir a força de atuação  $\vec{F}_D$  como visto na Eq.(2.17):

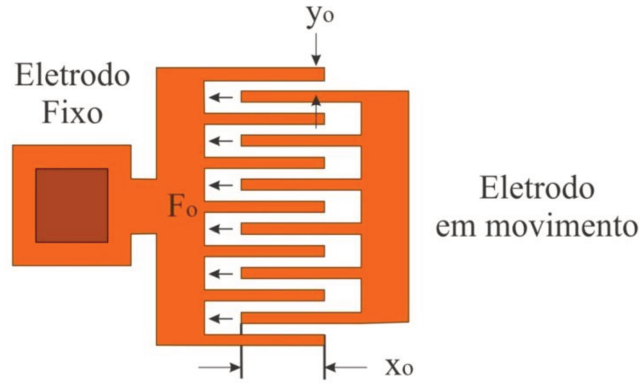


Figura 2-4: Força de atuação eletrostática para o modo *Atuador*.

$$\vec{F}_D = \frac{\partial C}{\partial x} V^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial(x_0 - x)}{\partial x} \frac{\epsilon_0 z_0}{y_0} V^2 \quad (2.17)$$

Então,

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 z_0}{y_0} V^2 \quad (2.18)$$

Através da determinação do módulo da força de atuação eletrostática, pode-se concluir que a mesma independe da sua direção e que a força entre os dedos móveis e os eletrodos fixos é de atração devido ao seu valor negativo. Para um banco contendo  $N$  capacitores nos dois sentidos de atuação, a força excitadora do modo *Atuador* pode ser vista na Eq.( 2.19).

$$\vec{F}_D = -\frac{N}{2} \frac{\epsilon_0 z_0}{y_0} V^2 \quad (2.19)$$

### 2.3 Sistema de Detecção (Detecção Capacitiva ) e Rigidez Eletrostática

O sistema de detecção de giroscópio do tipo MEMS é definido como um transdutor. Verifica-se uma ordem inversa com relação ao transdutor de atuação pois a energia mecânica (força de Coriolis) será convertido em energia elétrica (variação da capacitância). Outra característica fundamental para o sistema de detecção das placas capacitivas é a variação  $y_0$ . Mostrada na Figura 2-5.

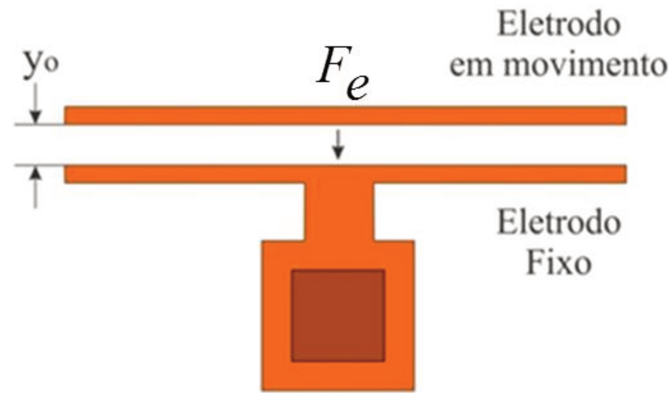


Figura 2-5: Força de atuação eletrostática para o Detector.

A força eletrostática  $\vec{F}_e$  pode ser obtida pela Eq.(2.20).

$$\vec{F}_e = \frac{\partial C}{\partial y} V_c^2 = \varepsilon_0 \frac{1}{2} \frac{\partial(x_0 z_0)}{\partial(y + y_0)} V_c^2 = -\frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_0 x_0 z_0)}{(y + y_0)^2} V_c^2 \quad (2.20)$$

Através da Eq.(2.20) nota-se que a força de atuação do *Detector* também será atrativa. Diferente do que foi visto anteriormente na força atuadora  $\vec{F}_D$ , a força eletrostática  $\vec{F}_E$  é uma função não linear dependente de  $y$ . Com  $y \ll y_0$  faz-se uso da série de Taylor, Sendo assim podemos aproximar a Eq (2.20) por:

$$\vec{F}_e \approx -\frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_0 x_0 z_0)}{y_0^2} + \frac{(\varepsilon_0 x_0 z_0) y}{y_0^3} V_c^2 \quad (2.21)$$

Pode-se verificar que existe um termo não dependente de  $y$  que corresponde à força eletrostática  $\vec{F}_E$ , porém o termo dependente de  $y$  terá influência na frequência natural  $\omega_y$  na direção correspondente ao sistema do modo *Detector*, pois esse termo atuará no sentido contrário a rigidez estrutural na direção desse modo. Através da definição da rigidez eletrostática expressa por:

$$k_{ye} = \frac{1}{2} \frac{d^2 C}{dx^2} V_c^2 \quad (2.22)$$

Ao isolarmos o termo  $V_c$  (tensão no capacitor), poderemos obter a tensão necessária para ajustar a frequência natural do modo *Detector* com modo *Atuador* levando em conta também as possíveis diferenças entre as massas na direção do modo *Atuador* e do *Detector* do Giroscópio, logo pela Eq (2.23):

$$V_c = \sqrt{2 \left| k_y - k_x \left( \frac{m_y}{m_x} \right) \right| \left( \frac{d^2 C}{dy^2} \right)^{-1}} \quad (2.23)$$

O equacionamento da detecção capacitiva diferencial é utilizado com o objetivo de obter uma relação linear entre a mudança de capacitância e o deslocamento  $y_0$  entre as placas dos capacitores.

Para um deslocamento superior (aproximação) das placas dos capacitores do *Detector* teremos um aumento da capacitância definida por  $C_{s+}$  sendo expressar por:

$$C_{s+} = \frac{N\epsilon_0 t l}{y_0 - y} \quad (2.24)$$

E para um deslocamento inferior das placas (afastamento) teremos uma diminuição da capacitância definida por  $C_{s-}$  e expressa por:

$$C_{s-} = \frac{N\epsilon_0 t l}{y_0 + y} \quad (2.25)$$

Sendo a variação da capacitância definida como:

$$\Delta C = C_{s+} - C_{s-}$$

A partir da equação acima, podemos definir a capacitância diferencial como:

$$\Delta C = \frac{2N\epsilon_0 t l}{y_0^2} y \quad (2.26)$$

## 2.4 Equação Dinâmica de um Giroscópio Eletromecânico

Ao supormos que não há aceleração angular no sistema dinâmico do giroscópio microusinado o que implica que  $\Psi = 0$  e supondo também que variações de  $\Omega_x$  e  $\Omega_y$  são muito pequenas com relação à frequência de atuação de uma força atuadora  $F_D \sin(\omega_x t)$  e que existe uma força eletrostática  $F_e$  na direção  $y$ , poderemos simplificar a Eq (2.12) e expressá-la por:

$$\begin{cases} m_x \ddot{x} + C_x \dot{x} + k_x x = 2m_y \dot{y} \Omega_z + F_D \sin(\omega_x t) \\ m_y \ddot{y} + C_y \dot{y} + k_y y = -2m_x \dot{x} \Omega_z + F_e \end{cases}$$

ou expressando  $F_D$  e  $F_e$  em função dos parâmetros elétricos:

$$\begin{cases} m_x \ddot{x} + C_x \dot{x} + k_x x = 2m_y \dot{y} \Omega_z - N \frac{\varepsilon_0 z_0}{y_0} V^2 \sin(\omega_x t) \\ m_y \ddot{y} + C_y \dot{y} + \left( k_y - \frac{\varepsilon_0 x_0 z_0}{y_0^3} V^2 \right) y = -2m_x \dot{x} \Omega_z - \frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_0 x_0 z_0)}{y_0^2} \end{cases} \quad (2.27)$$

Reescrevendo a Eq (2.27) na forma matricial, onde  $(m_x$  e  $m_y)$ ,  $(C_x$  e  $C_y)$  e  $(k_x$  e  $k_y)$  são as matrizes da massa, constante de amortecimento e constante de mola respectivamente;  $F_D$ ,  $F_e$ ,  $2m_y \dot{y} \Omega_z$  e  $-2m_x \dot{x} \Omega_z$  denotam o vetor de força do sistema dinâmico.

$$\begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & \left( k_y - \frac{\varepsilon_0 x_0 z_0}{y_0^3} V^2 \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2m_y \dot{y} \Omega_z - \frac{N \varepsilon_0 z_0}{y_0} V^2 \sin(\omega_x t) \\ -2m_x \dot{x} \Omega_z - \frac{\varepsilon_0 x_0 z_0}{2y_0^2} \end{Bmatrix}$$

Ao isolarmos as massas do modo *Atuador* e do modo *Detector*, assim como utilizando os parâmetros modais  $\omega_{0x}$ ,  $\omega_{0y}$  (frequências naturais) e  $\xi$  (fator de amortecimento) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi\omega_{0x} & \frac{2m_y\Omega_z}{m_x} \\ -\frac{2m_x\Omega_z}{m_y} & 2\xi\omega_{0y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{0x}^2 & 0 \\ 0 & \left(\omega_{0y}^2 - \frac{\varepsilon_0 x_0 z_0}{y_0^3} V^2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N \frac{\varepsilon_0 z_0}{m_x y_0} V^2 \sin(\omega_x t) \\ \frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_0 x_0 z_0)}{m_y y_0^2} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Para a resposta no domínio da frequência da Eq.(2.27) acoplada pela força de Coriolis, utilizando a transformada de Fourier, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \omega_{0x}^2 - \omega + 2j\omega(\xi\omega_{0x}) & 2j\omega \frac{m_x}{m_y} \Omega_z \\ -2j\omega \frac{m_y}{m_x} \Omega_z & \left(\omega_{0y}^2 - \frac{\varepsilon_0 x_0 z_0}{y_0^3} V^2\right) - \omega + 2j\omega(\xi\omega_{0y}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{X}(j\omega) \\ \hat{Y}(j\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N \frac{\varepsilon_0 z_0}{m_x y_0} V^2 \sin(\omega_x t) \\ -\frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_0 x_0 z_0)}{m_y y_0^2} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Para efeitos de simplificação poderemos considerar que tanto as constantes elásticas  $k_x$  e  $k_y$ , assim como massas  $m_x$  e  $m_y$  serão iguais, ao desprezarmos as imperfeições devido aos processos de fabricação bem como simetria dos parâmetros estruturais das molas e da massa de prova M. Inicialmente, as constantes de amortecimento definidas anteriormente por  $C_x$  e  $C_y$  serão substituídas por um coeficiente de atrito viscoso  $C$ , que definirá a dissipação mecânica equivalente do sistema. Logo através destas considerações, obteremos a forma mais simples do modelo dinâmico de um giroscópio, onde agora, estaremos considerando que o sistema dinâmico possui frequências naturais iguais nas duas direções, definidas por  $\omega_0$ , assim como fatores de amortecimento  $\xi$  iguais nas duas direções de movimento do giroscópio. Então o novo sistema dinâmico simplificado, poderá ser descrito como:



$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = F_D \sin(\omega_0t) + 2\dot{y}\Omega_z \\ \ddot{y} + 2\xi\omega_0\dot{y} + \omega_0^2y = -2\dot{x}\Omega_z \end{cases} \quad (2.29)$$

Ao desprezarmos o comportamento do transiente do sistema dinâmico obtido através da equação acima, a solução encontrada para o regime permanente nas duas direções do giroscópio, é dada por:

$$x(t) = X_0 \cos(\omega_0t + \phi_x) \quad (2.30)$$

e:

$$y(t) = Y_0 \cos(\omega_0t + \phi_y) \quad (2.31)$$

Após descrever as equações do movimento de um giroscópio nas duas direções para o regime permanente, utilizando Eq (2.18) e Eq (2.19) poderão ser obtidas importantes relações das amplitudes  $X_0$ (Atuador) e  $Y_0$ (Detector) em função da velocidade angular  $\Omega_z$ . Através de manipulações algébricas, podemos mostrar que a Eq(2.18) e a Eq(2.19) também podem ser representadas por:

$$x(t) = \frac{F_D}{2\omega_0[\Omega_z^2 + (\xi\omega_0)^2]} \cos(\omega_0t + \phi) = X_0 \cos(\omega_0t + \phi_x) \quad (2.32)$$

e:

$$y(t) = \frac{F_D\Omega_z}{2\omega_0[\Omega_z^2 + (\xi\omega_0)^2]} \cos(\omega_0t) = Y_0 \cos(\omega_0t + \phi_y) \quad (2.33)$$

Agora poderemos relacionar as amplitudes  $X_0$  e  $Y_0$  em função da velocidade angular  $\Omega_z$  através das Eq (2.20) e Eq (2.21). Inicialmente, para o modo *Atuador* teremos:

$$X_0 = \frac{F_D}{2m\omega_0[\Omega_z^2 + (\xi\omega_0)^2]} \quad (2.34)$$

Já para o modo *Detector*:

$$Y_0 = \frac{F_D \Omega}{2m\omega_0[\Omega_z^2 + (\xi\omega_0)^2]} \quad (2.35)$$

Pelas relações obtidas na Eq (2.34) e Eq (2.35), poderemos obter os diferentes comportamentos das amplitudes  $X_0$  (*Atuador*) e  $Y_0$  (*Detector*) para a velocidade angular  $\Omega_z$ . Para a primeira condição onde  $\Omega_z \ll \xi\omega_0$  observamos que:

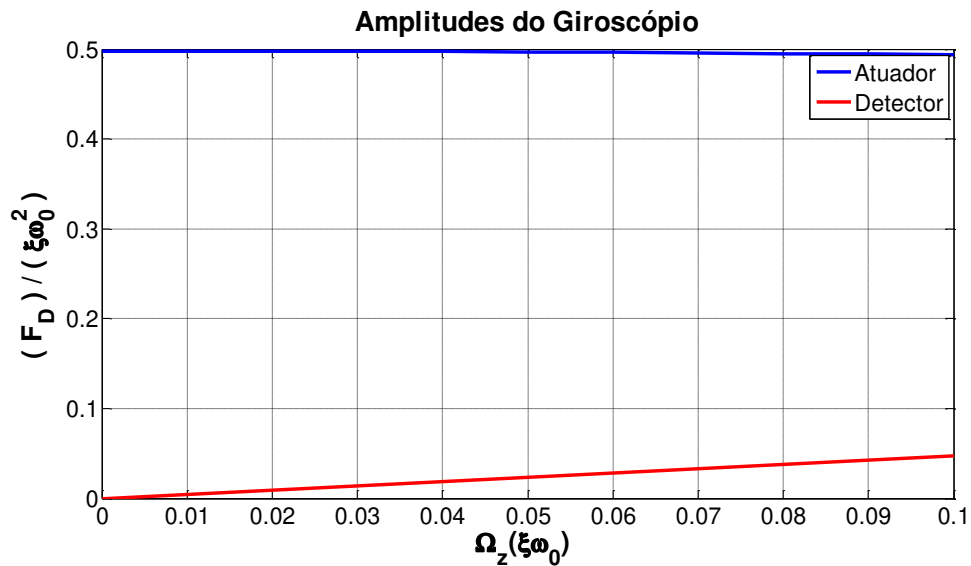


Figura 2-6: Amplitudes do *Atuador* e *Detector* em função da velocidade angular  $\Omega_z$ , para a condição

$$\Omega_z \ll \xi\omega_0$$

Observamos pela Figura 2-6 acima que se  $\Omega_z \ll \xi\omega_0$ , o comportamento da amplitude  $X_0$  do *Atuador* é dito constante e a resposta da amplitude do modo  $Y_0$  do *Detector* é praticamente

nula. Contudo, ao excitarmos o sistema com sua frequência natural  $\omega_0$  para um intervalo  $0 \leq \Omega_z \leq 4\xi\omega_0$  poderemos observar o seguinte comportamento dos modos das amplitudes:

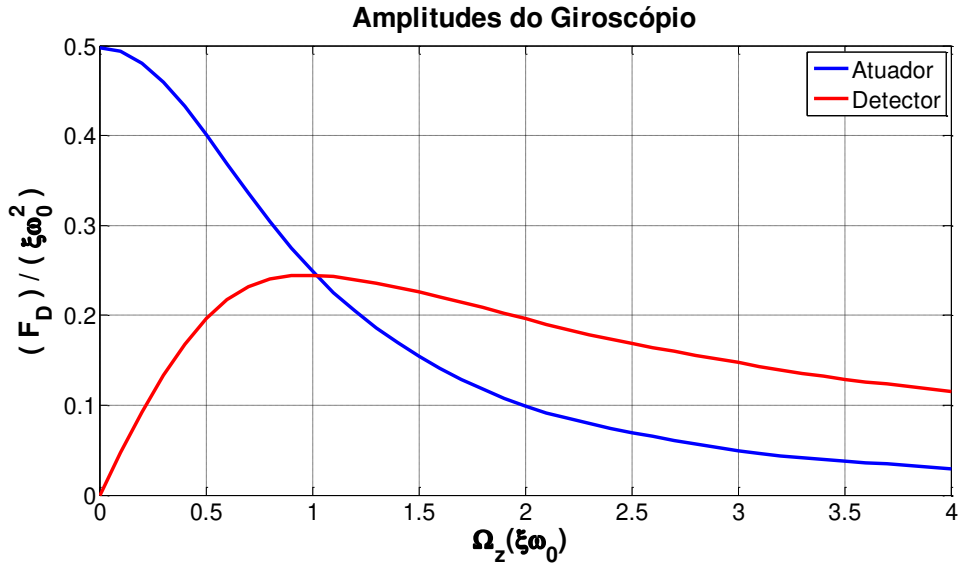


Figura 2-7: Amplitudes do *Atuador* e *Detector* em função da velocidade angular  $\Omega_z$ , para a condição  $\Omega_z=4\xi\omega_0$

Através da Figura 2-7, pode ser observado que há transferência de energia entre os dois modos de vibração do sensor, pois para o intervalo  $0 \leq \xi\omega_0 \leq 1$ , observamos que à medida que a amplitude do modo *Atuador* decai a amplitude do modo *Detector* irá aumentar, até atingir seu máximo, quando  $\Omega_z=1\xi\omega_0$ . Isolando o termo  $F_D$  na Eq (2.34) e substituindo na Eq (2.35), poderemos extrair outra importante relação entre as amplitudes do modo *Atuador* e do modo *Detector*. Definida por:

$$Y_0 = \frac{X_0 \Omega_z}{\omega_0 \xi} = \frac{2X_0 \Omega_z Q}{\omega_0}$$

Ou ainda:

$$\frac{Y_0}{\Omega_z} = \frac{2X_0 Q}{\omega_0} \tag{2.36}$$

Esta relação é conhecida por fornecer a sensibilidade de um giroscópio, onde sua unidade é expressa por  $\frac{nm}{^\circ/s}$ . Verifica-se as relações lineares de proporcionalidade entre a amplitude do modo *Detector*  $Y_0$  com relação à amplitude do modo *Atuador*  $X_0$  e também com relação ao fator de qualidade  $Q$  do sistema. Logo, através destas relações de proporcionalidade, verificamos que a sensibilidade do sistema estará diretamente relacionada à amplitude do modo *Atuador* e/ou ao fator de qualidade  $Q$  do sistema.

### 3. PROPRIEDADES DO SILÍCIO

O silício cristalino ainda é considerado um excelente material para aplicações e desenvolvimento de dispositivos MEMS por conter características de grande desempenho mecânico em escala micrométrica. A alta pureza e a perfeição cristalina disponível no silício são características que otimizam as propriedades mecânicas dos microdispositivos feitos com este material semicondutor (PETERSEN, 1982). Propriedades mecânicas estruturais como baixa densidade, limite de escoamento maior que o do aço, elevado grau do módulo de elasticidade (muito próximo do aço) e a grande facilidade de integração entre as estruturas mecânicas e os circuitos eletrônicos de acionamento e controle destes microdispositivos, são algumas das muitas propriedades que fazem do silício uma ótima escolha para o desenvolvimento de microdispositivos. A

Tabela 3-1 apresenta um comparativo entre as propriedades do silício na direção <111> e do aço:

Material	Módulo de Elasticidade [N/μm <sup>2</sup> ]	Densidade [Kg/ μm <sup>3</sup> ]	Condutividade Térmica [fW/ μm K]	Expansão Térmica [10 <sup>-6</sup> K <sup>-1</sup> ]
Aço	1,96 x 10 <sup>5</sup>	7,80 x 10 <sup>-15</sup>	8,00 x 10 <sup>8</sup>	12
Silício	1,88 x 10 <sup>5</sup>	2,33 x 10 <sup>-15</sup>	1,57 x 10 <sup>9</sup>	2,33

Tabela 3-1: Propriedades do silício (PETERSEN, 1982)

Esses exemplos e ainda outras propriedades importantes desempenhadas por este semicondutor, garantem ao silício excelentes propriedades mecânicas para muitas aplicações na fabricação de sensores inerciais em escala micrométrica. Podemos também citar como vantagens, seu custo de fabricação e seu atual estado de avanço de desenvolvimento das tecnologias atuais que abrem fronteiras para o desenvolvimento da integração entre estruturas mecânicas e a eletrônica de processamento para sensores inerciais.

Pode ser mencionado que o silício possui baixa dissipação interna. Novamente, ao compararmos suas propriedades com a do aço, verificou-se que o coeficiente de expansão térmica é aproximadamente cinco vezes menor que a do aço. Em particular esta propriedade é muito importante para aplicações espaciais, onde satélites estarão expostos a níveis de radiação consideráveis e a variações excessivas de temperatura. Um número razoável de trabalhos publicados nos últimos anos encaminha-se para o desenvolvimento de giroscópios com estruturas de silício cristalino.

Uma das vantagens da utilização do silício, é que seu material estrutural pode ser utilizado para integração entre giroscópios e acelerômetros, o que poderia permitir na mesma plataforma dois tipos de microsensores inerciais: o giroscópio e o acelerômetro, que caracteriza uma plataforma UMI (Unidade de Medida Inercial) mencionada anteriormente. A seguir utilizaremos a teoria da elasticidade linear para descrever o comportamento mecânico do silício.

### **3.1 Teoria Mecânica aplicada ao Silício**

As propriedades mecânicas de qualquer material podem ser descritas através do tensor de elasticidade obtido anteriormente. Devido às propriedades estruturais do silício, este material apresenta simplificações para utilização do tensor de elasticidade, descrito anteriormente. O silício caracterizado como um cristal monocristalino é um material constituído por um único cristal em toda a sua extensão e possui sua orientação cristalográfica semelhante a cristais como Ge (Germânio), GaAs (Arseneto de Gálio) ou o Diamante devido a sua estrutura ser do tipo CFC(Cúbica de Face Centrada). Utiliza-se o conceito de célula unitária para representar a simetria de uma determinada estrutura cristalina. Na Figura 3-1 é vista a representação da célula unitária do silício:

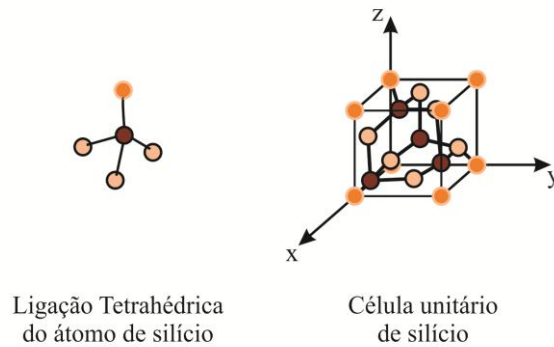


Figura 3-1: Célula Unitária do silício

Estruturas do tipo CFC possuem três planos de simetria, onde os mesmos se relacionam com a organização espacial dos átomos na rede cristalina, impondo que o silício apresente propriedades mecânicas anisotrópicas. Logo as propriedades mecânicas do silício dependerão das orientações destes planos. Na Figura 3-2 podemos observar os três planos de simetria do Silício:

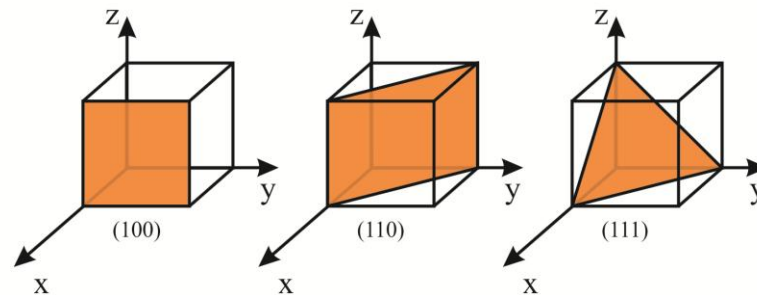


Figura 3-2: Planos de Simetria do silício monocristalino

Para descrever a orientação e direção dos planos cristalográficos, serão utilizados índices de Miller, que são descritos por uma tripla de inteiros (“ $hkl$ ”), correspondente ao sistema de coordenada  $XYZ$  (HOPCROFT, NIX e KENNY, 2010). Abaixo uma tabela mostrará algumas definições sobre a notação do índice de Miller para cristais de estrutura CFC.

Tabela 3-2: Notação dos Índices de Miller para cristais CFC (HOPCROFT, NIX e KENNY, 2010)

Notação	Descrição
$[hkl]$	Direção do vetor dado por $hkl$
$\langle hkl \rangle$	Famílias de direções $hkl$ equivalentes
$(hkl)$	Plano do cristal perpendicular ao vetor $hkl$
$\{hkl\}$	Família de planos equivalentes ao plano do cristal perpendicular ao vetor $hkl$

Podemos representar os índices de Miller em um cristal cúbico, através do exemplo descrito na Figura 3-3:

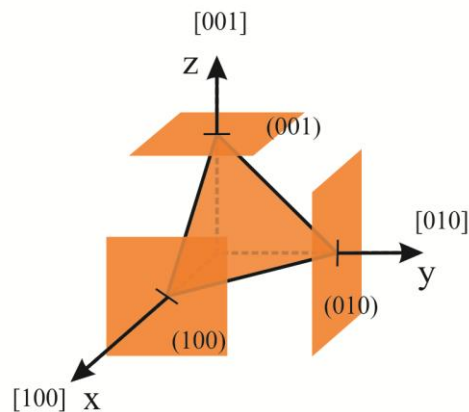


Figura 3-3: Índices de Miller- Planos e direções

Os coeficientes da elasticidade para um cristal podem ser calculados pela teoria quântica, onde seus parâmetros elásticos são deduzidos a partir da energia livre de um cristal. Devido à grande dificuldade de obtenção de seus cálculos, podem-se fornecer resultados de grande precisão, com relação aos coeficientes de elasticidade a partir de medidas de propagação de ondas acústicas no sólido (HOPCROFT, NIX e KENNY, 2010). Pela característica do cristal de Silício com relação aos seus três planos de simetria, poderemos simplificar ainda mais seu tensor de elasticidade, logo dos 21 elementos do tensor de elasticidade anisotrópico, reduziremos a apenas nove elementos. Verificamos também, que se as direções principais da matriz de elasticidade estiverem alinhadas com os eixos de simetria do silício, poderemos reduzir novamente os elementos do tensor de elasticidade para apenas três. Logo os três coeficientes obtidos através do método de propagação acústica, são descritos na tabela abaixo Tabela 3-3.



Tabela 3-3: Constantes Elásticas do Silício, valores para temperatura de 298K (HALL, 1967)

Material	C(Rigidez): $10^9 \text{ Pa}$			S(Flexibilidade): $10^{-12} \text{ Pa}$		
Silício	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{44}$	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{44}$
	165.6	63.9	79.5	7.68	-2.14	12.6

Com base nos três planos de simetria do silício e as direções principais da matriz de elasticidade estarem alinhadas com os eixos de simetria, o tensor de rigidez poderá ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

e também podendo ser expressa através do tensor de flexibilidade:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Através da Tabela 3-3 podem ser calculados os valores do módulo de Young e o coeficiente de Poisson para diferentes orientações da estrutura do cristal. Finalmente para caracterizarmos as propriedades mecânicas de um sólido utilizaremos: Módulo de Young,

coeficiente de Poisson e o Módulo de Rigidez. O módulo de Young, representado pela letra  $E$ , é definido como a relação entre tensão uniaxial e a deformação na mesma direção da tensão aplicada ao corpo para a condição  $i=j$ , teremos:

$$\sigma_{ij} = E\varepsilon_{ij} \quad (3.3)$$

O coeficiente de Poisson  $\nu$  pode ser definido como a razão entre a deformação na direção de uma tensão uniaxial com a deformação normal a essa tensão, Logo:

$$-\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \nu \quad (3.4)$$

Finalmente, para o módulo da rigidez  $G$  que relaciona deformação tangencial com a tensão tangencial, para  $i \neq j$  teremos:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} \quad (3.5)$$

Finalmente o tensor de elasticidade poderá ser expresso pelas quantidades fundamentais da elasticidade expressas pelo módulo de Young, módulo de Rigidez e o coeficiente de Poisson na sua forma matricial, que podemos definir também como elasticidade ortotrópica, então:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & C_{12} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Uma das vantagens da utilização da elasticidade ortotrópica, é que as quantidades elásticas para a orientação de interesse já são fornecidas, logo parâmetros como tensão e deformação podem ser calculados a partir desta matriz.

### 3.2 Processo de Microfabricação

Como mencionado anteriormente, as etapas para processos de microfabricações utilizados em circuitos eletrônicos são amplamente utilizadas em sensores que utilizam a tecnologia MEMS, aproveitando assim os investimentos e esforços anteriormente feitos no desenvolvimento de processos fabricação de circuitos integrados (SENTURIA, 2001). As principais etapas relacionadas aos processos de microfabricação podem ser definidas como, a deposição de filmes finos sobre um substrato, litografia e corrosão (VITTORIO, 2001). Este último processo, de corrosão (*etching*) pode ser definido como um processo de corrosão úmida (reagente líquido) ou processo de corrosão seco (reagente gasoso ou em plasma). Processos como limpeza e ativação de superfícies para solda, metalização e soldagem de contatos utilizados no desenvolvimento de circuitos integrados também estão sendo utilizados para microfabricação de sensores inerciais. A seguir serão discutidas brevemente, as principais etapas relacionadas ao processo de microfabricação de dispositivos que possuem a tecnologia MEMS.

### 3.2.1 Deposição

Inicialmente, a etapa de deposição de filmes pode ser descrito como o processo que tem como objetivo adicionar uma ou mais camadas sobre a superfície de um determinado substrato e obter propriedades físicas que não são encontradas no substrato. Os métodos utilizados para a deposição de filmes poderão ser feitos por meio de deposição física ou deposição química. No presente trabalho, será coberto apenas o processo por meio de deposição química. Para mais detalhes sobre o processo de deposição física obtêm-se informações de (SENTURIA, 2001). A deposição química a vapor (*CVD – Chemical Vapor Deposition*) pode ser definida como a deposição de um filme fino sólido sobre uma superfície aquecida através de uma reação química em fase de vapor (PIERSON, 1999). Podemos ainda classificar a técnica CVD de acordo com os dois tipos existentes de reatores que realizam o processo deposição. O primeiro tipo de reator CVD, é o de pressão atmosférica *APCVD* e o segundo tipo de reator de CVD, o de baixa pressão atmosférica *LPCVD* (TATSCH, 2006). Destaca-se o uso da técnica *LPCVD* por produzir filmes finos de silício policristalino. O filme fino de polisilício apresenta propriedades mecânicas similares ao silício monocristalino e por apresentar baixa tensão residual, este material é amplamente utilizado na fabricação de dispositivos de baixo desempenho MEMS.

### 3.2.2 Litografia

Inicialmente podemos definir o processo de fotolitografia, como uma técnica de transferência de um padrão de imagem (molde) para alguma superfície de um material sólido como uma lâmina de silício (MADOU, 2002). A técnica de fotolitografia é amplamente utilizada no processo de fabricação de microdispositivos MEMS. Esta técnica consiste basicamente na aplicação de um material líquido polimérico fotossensível, sobre a superfície do substrato (lâmina de silício). O material polimérico, conhecido como *fotoresina*, pode ser caracterizado como *fotoresina positiva* ou *fotoresina negativa* que é depositado na lâmina de silício por um processo conhecido como (*spin-coating*). Ao final deste processo, será formada uma camada não muito espessa de uma, ou duas *fotoresinas*. Esta camada estará pronta para o processo de exposição à radiação UV (*Ultra Violeta*) em algumas áreas da superfície do substrato de acordo com o padrão

do desenho da máscara a ser transferido ao substrato (SENTURIA, 2001). Abaixo a Figura 3-4 descreve o processo da técnica fotolitográfica, para dois tipos de fotoresiste:

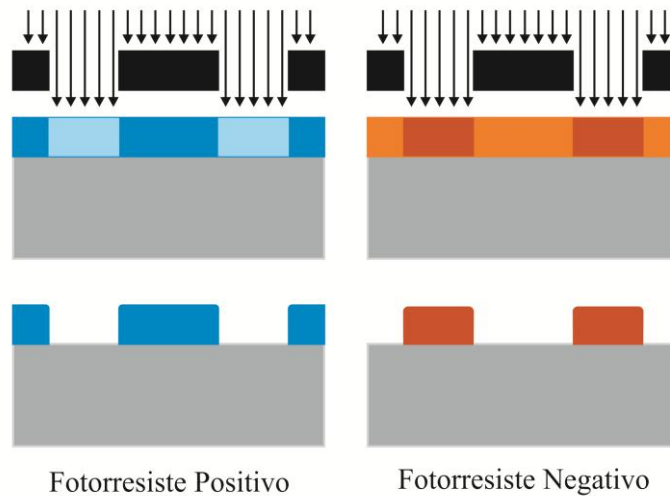


Figura 3-4: Modelos de exposição de um fotoresiste positivo e negativo

### 3.2.3 Corrosão

As tecnologias empregadas no processo de microfabricação que possibilitam a integração entre as estruturas mecânicas (atuadores e detectores) e circuitos microeletrônicos (controle do acionamento e da resposta) são frequentemente definidas com o termo de “microusinagem” e referem-se ao processo de microfabricação de MEMS. Destacam-se duas técnicas principais para o processo de microusinagem. A primeira técnica, é descrita como o processo que é chamado de “microusinagem em volume ou massa” (*bulk micromachining*). A microusinagem em volume é descrita como o processo de corrosão onde o material do substrato é normalmente removido seletivamente, de maneira a definir a estrutura requerida por processos de remoção química. Estruturas projetadas através do processo de “microusinagem em volume” são mais simples de serem desenvolvidas em comparação a outros processos. O processo de microusinagem de volume é mais utilizado quando se quer obter estruturas com espessura maiores que 10 $\mu$ m

(FORHAN, 2010). Na Figura 3-5 uma microestrutura obtida através do processo DRIE (*Deep Reactive Ion Etching*):

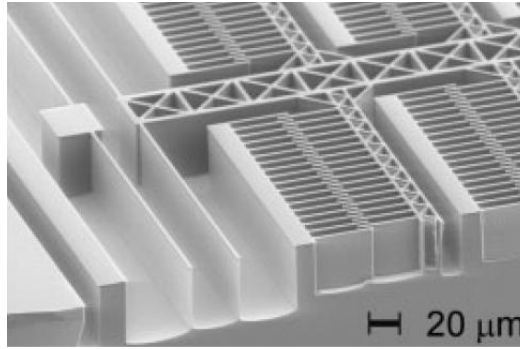


Figura 3-5: Um exemplo do processo DRIE (GESCHKE, KLANK e TELLEMAN, 2004)

Uma das técnicas mais promissoras para o processo de corrosão da “microusinagem de volume” em estruturas anisotrópicas é conhecida por DRIE (*Deep Reactive Ion Etching*). Uma das vantagens que esta técnica pode oferecer com relação ao processo de fabricação é a elevada taxa de corrosão e formação de valas profundas e estreitas como pode se observar na figura acima, para o desenvolvimento de microestruturas (SAUKOSKI, 2008).

O segundo tipo de processo, conhecido por “microusinagem de superfície” (*Surface micromachining*), refere-se ao desenvolvimento e construção de camadas suspensas a partir de um processo químico de remoção ou corrosão de camadas presentes na superfície do substrato (LINDER, PARATTE, *et al.*, 1992). Através deste processo, podem ser criadas estruturas de micromáquinas mais complexas, como mostra a Figura 3-6.

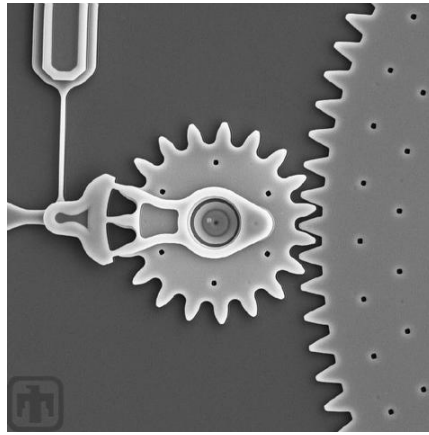


Figura 3-6: Engrenagem que gira outra engrenagem de diâmetro dez vezes maior (SANDIA LABS)

O processo de “microusinagem de superfície” é utilizado geralmente para estruturas com espessuras inferiores a  $10\mu\text{m}$ . Uma das desvantagens com relação a este processo de fabricação é a o desenvolvimento de microestruturas cujas dimensões como espessura e largura podem ser muito pequenas, podendo restringir seu processo a alguns tipos de aplicações de microdispositivos.

É bem conhecido que uma das fontes de erros para construção de giroscópios vibrantes ressonantes e suas estruturas, é caracterizado como o erro de quadratura. Este erro é produzido por imperfeições e assimetrias que alteram o movimento ideal da estrutura. Erros decorrentes do processo de fabricação podem causar um desequilíbrio nas direções das oscilações lineares do modo de atuação *Atuador* e modo de resposta do *Detector*.

Logo para o desenvolvimento do projeto de dispositivos que possuem a tecnologia MEMS, é de extrema importância que se faça estudos detalhados para a escolha do material do processo de fabricação, e do desenho da estruturas de flexões, para que erros como o de quadratura sejam minimizados e não afetem a resposta do dispositivo.

## 4. MODELO DO GIROSCÓPIO DE ACAR

A fim de verificar as implementações dos modelos analíticos e numéricos apresentados no trabalho, escolheu-se na literatura, um giroscópio MEMS de massa simples para as primeiras análises dos métodos. As simulações analítica e numérica do giroscópio de (ACAR, 2001), conforme Figura 4-1, foram realizadas com os valores dos parâmetros geométricos, propriedades dos materiais e parâmetros arbitrários descritos na Tabela 4-1, Tabela 4-2 e Tabela 4-3.

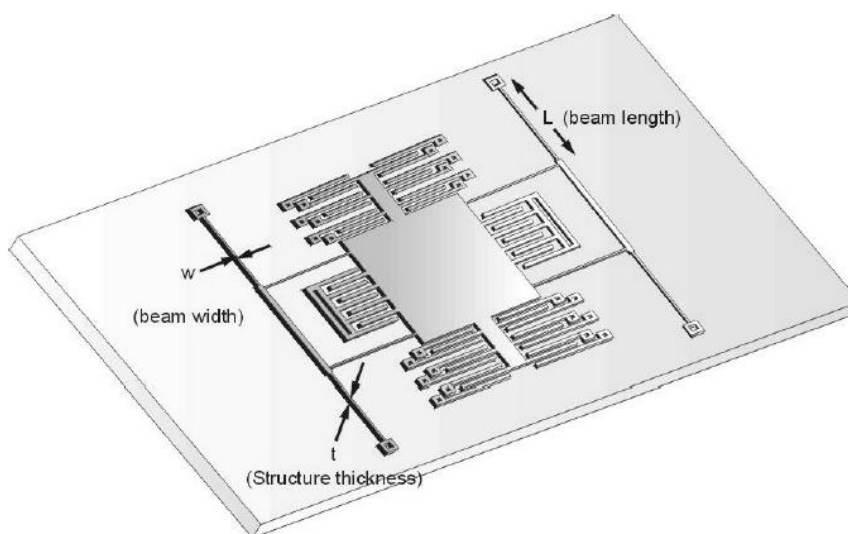


Figura 4-1: Vista em perspectiva do Giroscópio de massa única (ACAR, 2001)

Tabela 4-1: Propriedades Mecânicas do silício (ACAR, 2001)

Material	$\rho$ [ $\text{kg}/\mu\text{m}^3$ ]	$E$ [ $\mu\text{N}/\mu\text{m}^2$ ]	$\nu$
Silício	$2,33 \times 10^{-15}$	$1,69 \times 10^5$	0,2



Tabela 4-2: Parâmetros da geometria do giroscópio (ACAR, 2001)

<b>Parâmetros Geométricos</b>	<b>Valor [<math>\mu\text{m}</math>]</b>
Comprimento da Viga de Flexão do Atuador I - $L_{bd}$	137
Largura da Viga de Flexão do Atuador - $w_{bd}$	2
Espessura da Viga de Flexão do Atuador - $t_{bd}$	2
Comprimento da Viga de Flexão do Detector I - $L_{bs}$	129
Largura da Viga de Flexão do Detector - $w_{bs}$	2
Espessura da Viga de Flexão do Detector - $t_{bs}$	2
Comprimento da Massa central - $L_m$	194
Largura da Massa central - $w_{bdm}$	194
Espessura da Massa central - $t_m$	2
Comprimento do dedo do Atuador - $L_f$	20
Largura do dedo do Atuador - $w_f$	2
Espessura do dedo do Atuador - $t_f$	2
Número total de dedos do Atuador - $N_f$	528
Gap da Capacitância do Atuador - $g_{0d}$	2
Gap da Capacitância do Detector I - $g_{0s}$	2

Tabela 4-3: Parâmetros Arbitrários

Tensão (DC) no Atuador - $V_{dcd}$	2,5V
Tensão (AC) no Atuador - $V_{acd}$	1V
Fator de Qualidade - $Q$	$1 \times 10^3$
Velocidade Angular - $\Omega_z$	$0 \leq \Omega_z \leq 10\xi\omega_0$ rad/s

#### 4.1 Simulação com o modelo Analítico

A simulação analítica do giroscópio do modelo de ACAR foi feita no programa Matlab e as etapas necessárias para obtenção dos resultados são mostradas no fluxograma da Figura 4-2. Neste podem ser observadas as respostas no domínio do tempo e da frequência, sendo a primeira

utilizada para determinar a trajetória do giroscópio e a segunda para comparar com a resposta do modelo numérico.

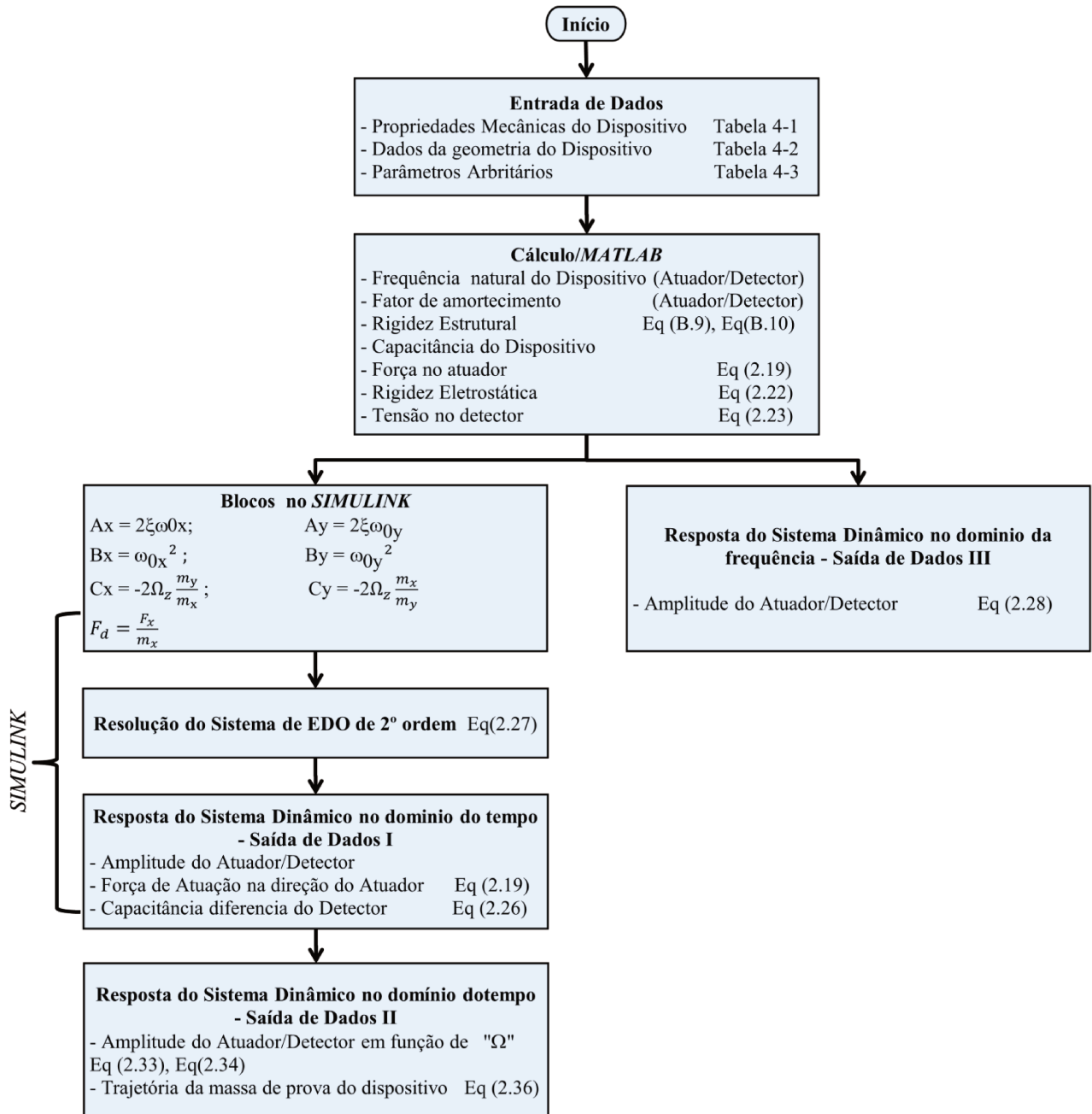


Figura 4-2: Fluxograma da Simulação com o modelo Analítico do Giroscópio.

A primeira etapa da simulação é a **Entrada de Dados**, onde são fornecidas ao programa *MATLAB* todas as propriedades mecânicas e geométricas do giroscópio, como o módulo de elasticidade  $E$ , densidade do material  $\rho$ , coeficiente de Poisson  $\nu$ , comprimento, largura e espessura. Além disso, é necessário estimar uma tensão de entrada para excitar o sistema. Esses parâmetros podem ser visto na Tabela 4-1, Tabela 4-2 e Tabela 4-3.

A segunda etapa da simulação é o **Cálculo** dos parâmetros de entrada para a solução nos domínios do tempo (*Simulink*) e da frequência (*MATLAB*). A partir da Tabela 4-1, Tabela 4-2 e Tabela 4-3 são calculados a capacitância (capacitor de placas paralelas sem efeito de borda), a rigidez Eq(A.9), Eq(A.10), as frequências naturais do modo Atuador e modo Detector, a força de atuação Eq(2.19) e a tensão no detector Eq(2.23) do dispositivo. São mostrados na Tabela 4-4.

Tabela 4-4: Resultados obtidos analiticamente

<b>Resultados de Desempenho</b>	<b>Valores</b>
Força de atuação no Atuador - $F_d$	0,01461 $\mu$ N
Capacitância estática do Detector - $C_{0s}$	187 fF
Capacitância estática do Atuador - $C_{0d}$	70,124 fF
Massa total - $M_t$	$3.538 \times 10^{-9}$ kg
Constante Elástica do modo Atuador - $k_x$	4,206 N/m
Constante Elástica do modo Detector - $k_y$	5,673 N/m
Frequência de ressonância do modo Atuador - $f_x$	17,352 kHz
Frequência de ressonância do modo Detector - $f_x$	20,151 kHz
Frequência de ressonância do modo Detector ajustada - $f_{ey}$	20,151 kHz
Constante da Rigidez Eletrostática - $k_{ey}$	-1,466 N/m
Fator Amortecimento - $\xi$	$5 \times 10^{-5}$
Tensão (DC) na Capacitância do Detector - $V_{dcs}$	5.60V

### 4.1.1 Análise da resposta do dispositivo no domínio do tempo

Para a análise da resposta dinâmica no domínio do tempo será necessário calcular no *Simulink*, dados como a amplitude do *Atuador* e do *Detector*, *Forças de Atuação* na direção do *Atuador* e a variação da capacitância do *Detector*. Com a Eq.(2.27) e os parâmetros da Tabela 4-4 foi montado um sistema acoplado de EDO de 2º ordem no diagrama do *Simulink*, sendo os coeficientes da EDO, os blocos  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $F_d$  mostrado na Figura 4-3.

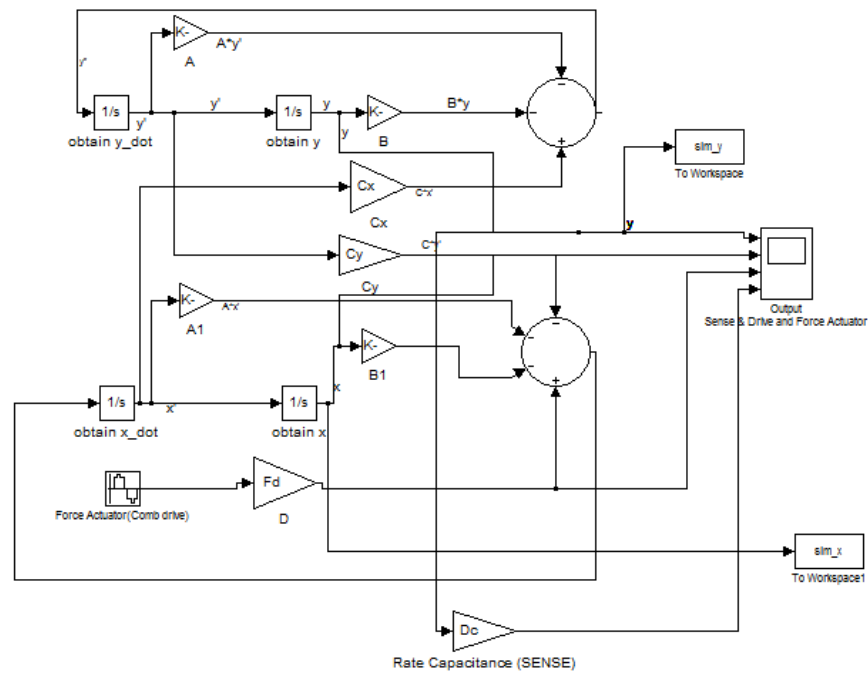


Figura 4-3: Diagrama de Bloco do Simulink

No diagrama de blocos foram simuladas quatro condições para a resposta do sistema dinâmico do *Atuador* e do *Detector*, a partir dos dados das amplitudes de cada condição foi mostrada uma relação *Atuador/Detector* para determinar a trajetória do dispositivo. Para verificar a dependência de cada amplitude do dispositivo foram utilizados os resultados dessas amplitudes e mostrado em função da velocidade angular  $\Omega_z$ . Nessa simulação foi aplicada uma tensão  $V_{des}$  nos capacitores do *Detector* para o casamento das frequências do dispositivo. É importante

comentar que para estas simulações foram obtidos resultados em um intervalo de tempo  $t = 1,4s$  a fim de garantir que o dispositivo estará na região do regime estacionário. Em todos os casos utilizaram-se a tensão aplicada no *Detector*  $V_{dcs} = 5.60V$ , no *Atuador*  $V_{acs} = 1V$  e na frequência de excitação  $f = 20.347kHz$ .

- Para  $\Omega_z = 0 \text{ rad/s}$

A Figura 4-4 mostra as respostas das amplitudes dos deslocamentos ( $X_0, Y_0$ ), da força de excitação ( $F_x/m_x$ ) e da variação da capacitância ( $\Delta C_{(Detector)}$ ) no domínio do tempo. Como esperado, verifica-se que na condição em que a velocidade angular  $\Omega_z$  é zero, não há força de Coriolis induzida na direção do *Detector*, por isso nenhuma resposta da amplitude  $Y_0$  é observada. As amplitudes máximas das variáveis de interesse são mostradas na Tabela 4-5:

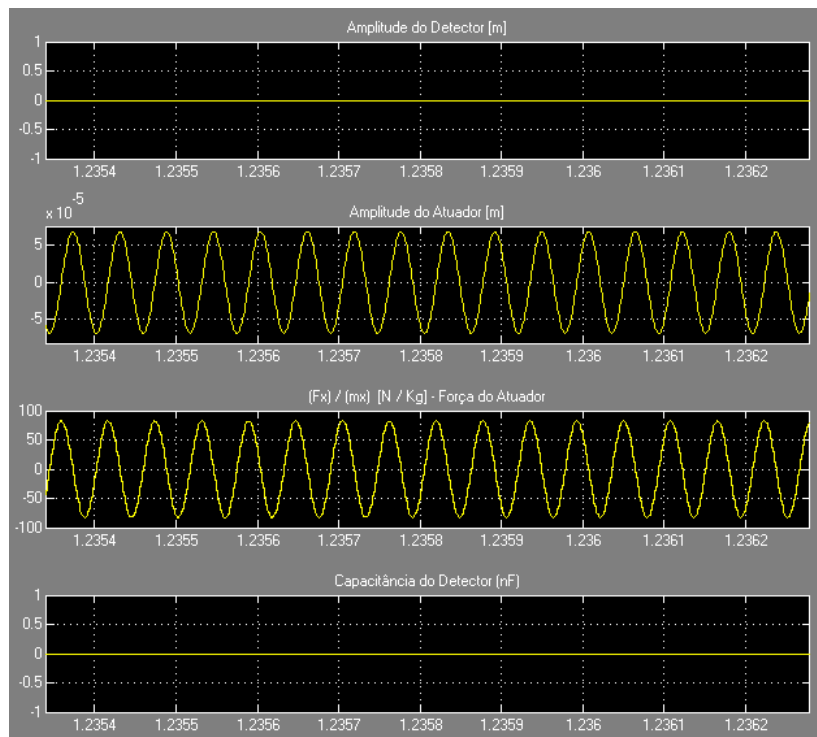


Figura 4-4: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para  $\Omega_z = 0 \text{ rad/s}$ .

Tabela 4-5: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para  $\Omega_z = 0$  rad/s.

Amplitude - $X_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	Amplitude - $Y_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\Delta C_{(Detector)}$ [nF]
69.42	0	0

Da simulação no *Simulink*, foi possível obter a curva da trajetória da massa do giroscópio fazendo uma relação entre os deslocamentos do *Atuador* e o *Detector* conforme mostrado na Figura 4-5. Observa-se que como  $\Omega_z = 0$  rad/s não haverá variação da amplitude do *Detector*.

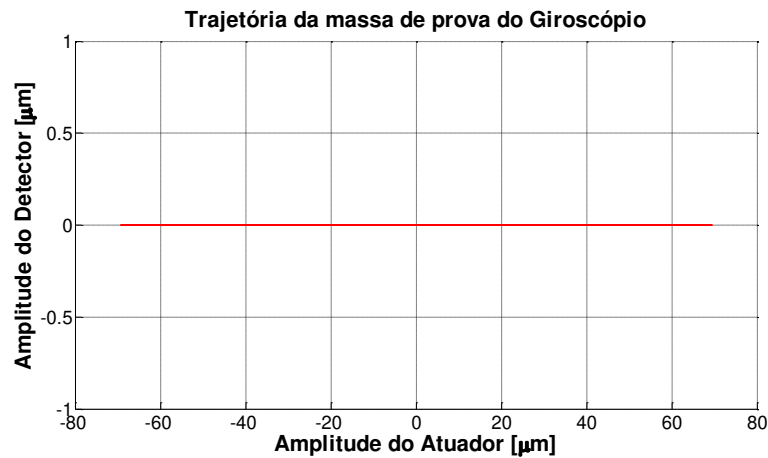


Figura 4-5: Curva da Trajetória da Massa do Giroscópio para  $\Omega_z = 0$  rad/s

- Para  $0 \leq \Omega_z \leq 0.1 \xi \omega_0$  rad/s

Verifica-se que nessa condição haverá uma pequena resposta da força de Coriolis induzida na direção do *Detector*. Na Figura 4-6 são mostradas três curvas que representam diferentes respostas para as velocidades angulares  $\Omega_z = 0$ ;  $0,05$  e  $0,1 \xi \omega_0$  rad/s, linhas amarela, roxa e azul, respectivamente. Da Figura 4-6 observa-se o crescimento da amplitude da resposta em deslocamento com o aumento da velocidade angular, o qual representa o comportamento esperado nestas condições. A Tabela 4-5 mostra os resultados das amplitudes máximas dos parâmetros do detector para a  $\Omega_z = 0.1 \xi \omega_0$  rad/s.

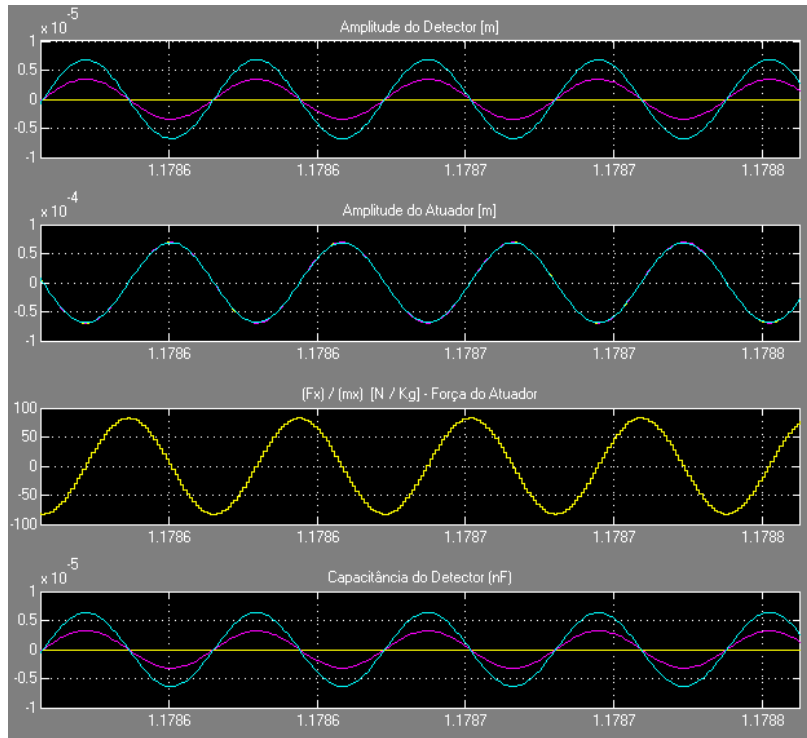


Figura 4-6: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para  $0 \leq \Omega_z \leq 0.1\xi\omega_0$  rad/s

Tabela 4-6: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s.

Amplitude - $X_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	Amplitude - $Y_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\Delta C_{(Detector)}$ [nF]
68.77	6.87	6870

A Figura 4-8 mostra a curva da trajetória da massa do giroscópio para a condição de  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s. O aumento da amplitude do deslocamento do *Detector* é observado devido à ação da força de Coriolis, gerando uma forma linear da relação entre as amplitudes do *Atuador* e *Detector*.

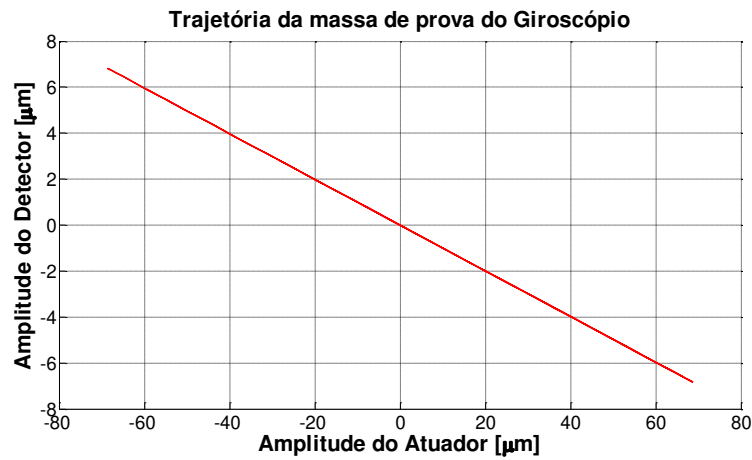


Figura 4-7: Curva da Trajetória da Massa do Giroscópio para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s

Na Figura 4-8 para o intervalo  $0 \leq \Omega_z \leq 0.1\xi\omega_0$  rad/s foi possível observar uma variação perceptível apenas na amplitude do *Detector*.

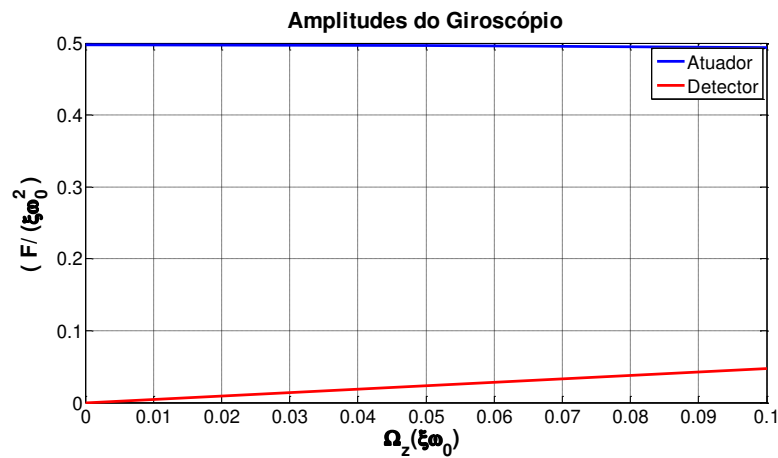


Figura 4-8: Amplitude do *Atuador* e *Detector* em função da velocidade angular para  $0 \leq \Omega_z \leq 0.1\xi\omega_0$  rad/s.

- Para  $0 \leq \Omega_z \leq 1\xi\omega_0$  rad/s



Na condição em que a velocidade angular  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s, verifica-se na Figura 4-9 e na Figura 4-10 que a magnitude das amplitudes do *Atuador* e do *Detector* são iguais. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 4-7:

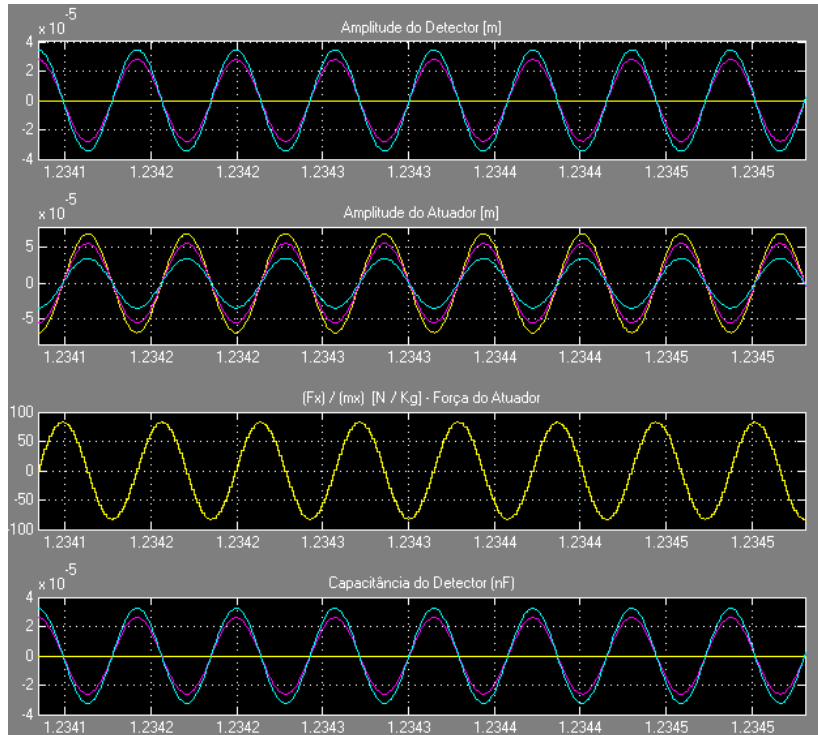


Figura 4-9: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para  $0 \leq \Omega_z \leq 1\xi\omega_0$  rad/s

Tabela 4-7: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s

<b>Amplitude – <math>X_0</math> [<math>\mu\text{m}</math>]</b>	<b>Amplitude - <math>Y_0</math> [<math>\mu\text{m}</math>]</b>	<b><math>\Delta C_{(Detector)}</math> [nF]</b>
34.73	34.73	3473

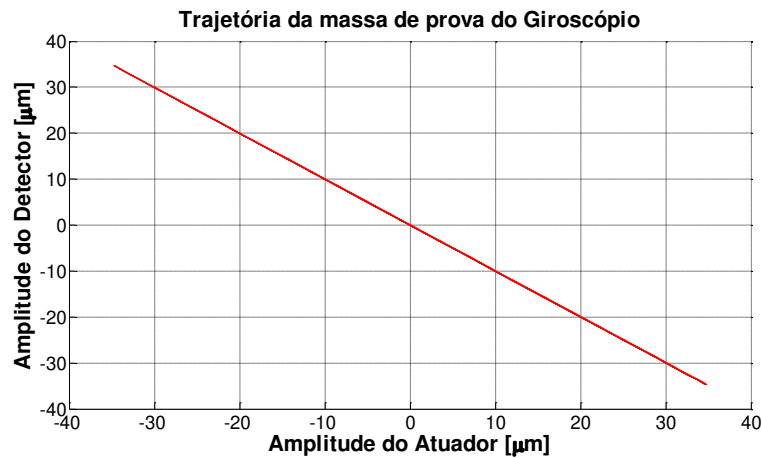


Figura 4-10: Curva da Trajetória da Massa do Giroscópio para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s

Na Figura 4-11 pode-se observar que à medida que a velocidade angular  $\Omega_z$  está variando, a amplitude na direção do *Atuador* está diminuindo e amplitude do *Detector* está aumentando, sendo iguais quando a velocidade angular é igual a  $1\xi\omega_0$  rad/s.

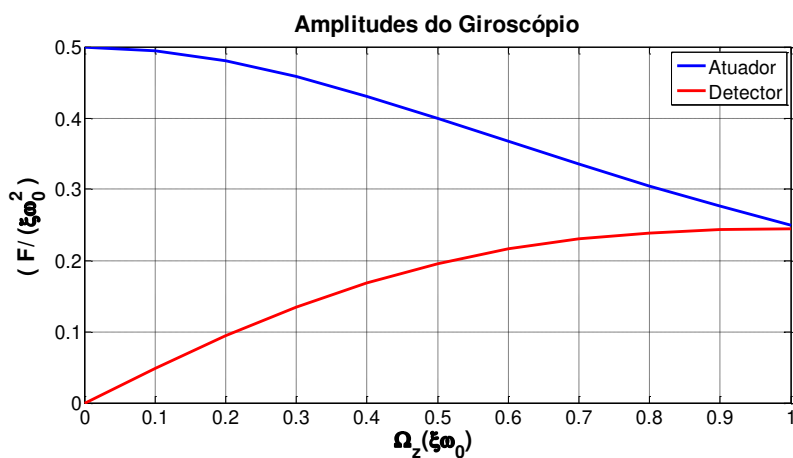


Figura 4-11: Amplitude do modo *Atuador* e *Detector* em função da velocidade angular para  $0 \leq \Omega_z \leq 1\xi\omega_0$  rad/s.

- Para a  $0 \leq \Omega_z \leq 10\xi\omega_0$  rad/s

Como visto na Figura 4-11, pode-se observar na Figura 4-12, Figura 4-13 e Figura 4-14 que o comportamento da amplitude do *Atuador* decai conforme a velocidade angular aumenta, já

o comportamento da amplitude do *Detector* irá aumentar quando o intervalo da velocidade for  $0 \leq \Omega_z \leq 1\xi\omega_0$  rad/s, para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s a amplitude é igual a do *Atuador* e acima desse intervalo a amplitude do *Detector* diminui gradativamente. Os resultados obtidos na Figura 4-12 para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s são mostrados na Tabela 4-8.

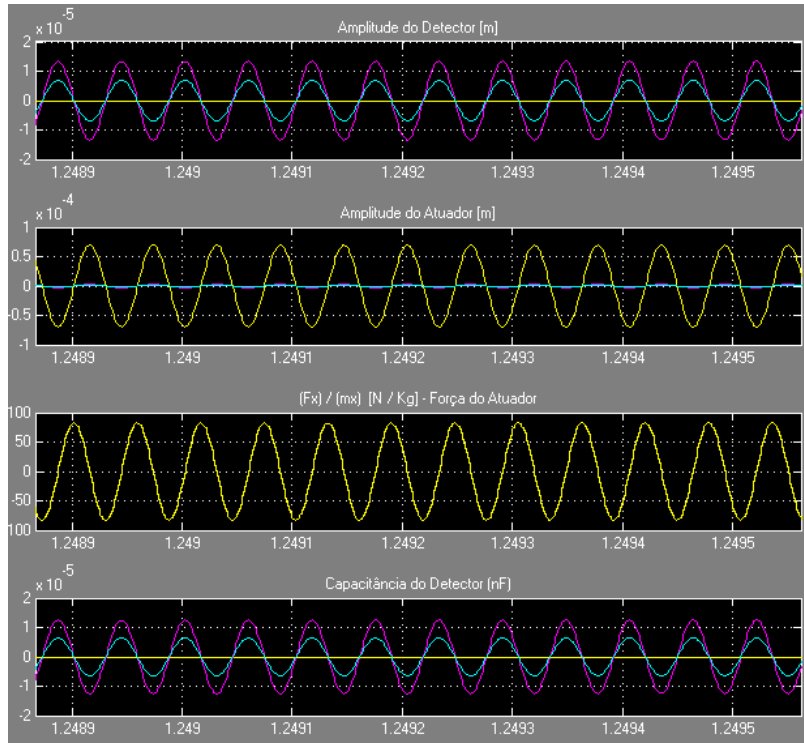


Figura 4-12 Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para  $0 \leq \Omega_z \leq 10\xi\omega_0$  rad/s.

Tabela 4-8: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s

Amplitude - $X_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	Amplitude - $Y_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\Delta C_{(Detector)}$ [nF]
0.687	6.87	6870

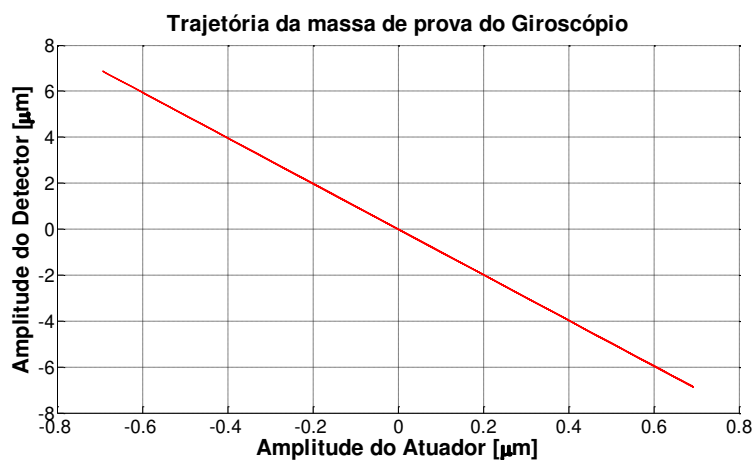


Figura 4-13: Curva da Trajetória da Massa do Giroscópio para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s.

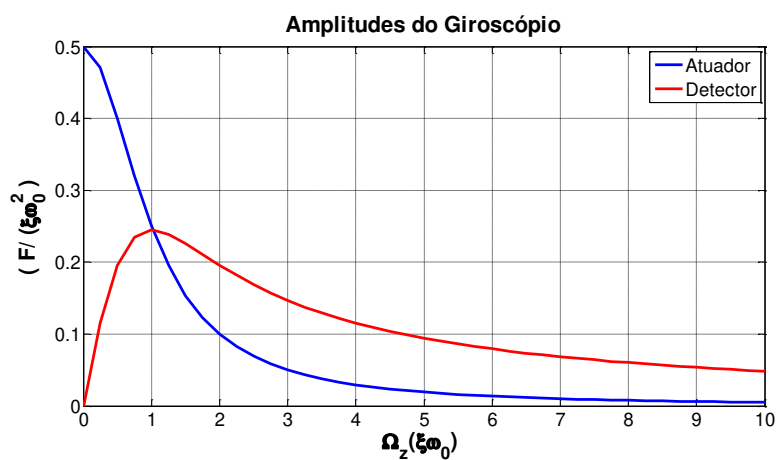


Figura 4-14: Amplitude do *Atuador* e *Detector* em função da velocidade angular para  $0 \leq \Omega_z \leq 10\xi\omega_0$  rad/s

#### 4.1.2 Análise da resposta do dispositivo no domínio da frequência

A análise da resposta dinâmica no domínio da frequência é obtida aplicando-se a transformada de Fourier no sistema de EDO de segunda ordem no domínio do tempo (Eq. 2.27) obtendo-se a Eq.(2.28). Usando os parâmetros da Tabela 4-4, foram simuladas as quatro condições já descritas na seção 4.1.1 para obter a resposta em deslocamento do sistema dinâmico

no domínio da frequência. Em todos os casos utilizaram-se a tensão aplicada no *Detector*  $V_{dcs} = 5.60V$ , no *Atuador*  $V_{acs} = 1V$  e na frequência de excitação  $f = 20.347kHz$

- Para  $\Omega_z = 0$  rad/s.

A Figura 4-15 mostra as respostas em deslocamento do *Atuador* e *Detector* em função da frequência de excitação do *Atuador*. Como esperado observa-se que para a velocidade angular  $\Omega_z = 0$  rad/s a resposta do deslocamento do *Detector* é nula, enquanto a resposta do *Atuador* apresentou um pico na sua frequência natural. As amplitudes máximas dos deslocamentos e das frequências naturais do *Detector* e *Atuador* são mostradas na Tabela 4-9.

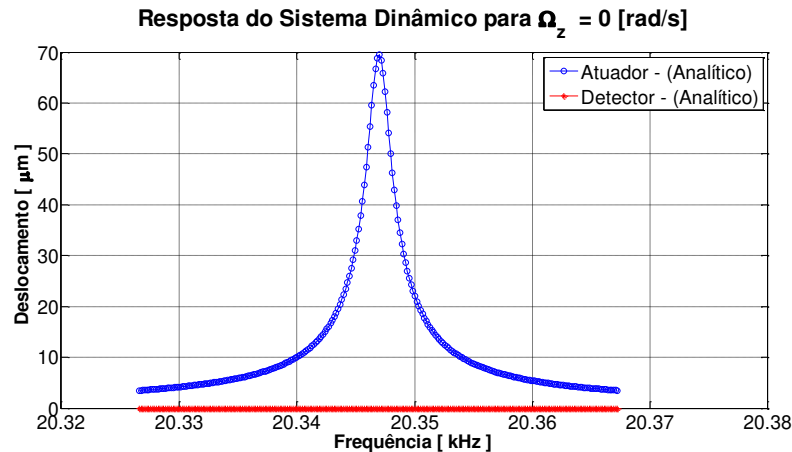


Figura 4-15: Resposta do Sistema em função da frequência para  $\Omega_z = 0$  rad/s.

Tabela 4-9: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para  $\Omega_z = 0 \xi\omega_0$  rad/s

Amplitude - $X_0$ [ $\mu m$ ]	Amplitude - $Y_0$ [ $\mu m$ ]	$f_x=f_y$ [kHz]
69.46	0	20.347

- Para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s

A Tabela 4-10 mostra as respostas em deslocamento do *Atuador* e *Detector* para a velocidade angular  $\Omega_z = 0,1$  rad/s, onde a resposta do deslocamento do *Detector* apresenta um pequeno aumento da amplitude na sua frequência natural devido à força de Coriolis gerada pela velocidade angular diferente de zero.

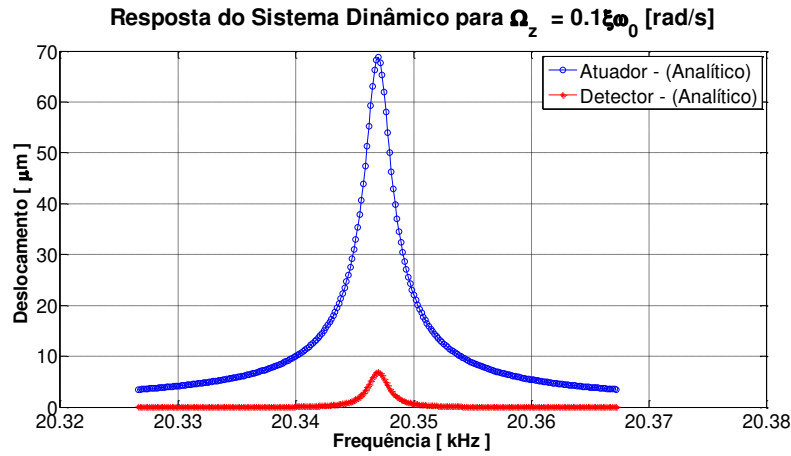


Figura 4-16: Resposta do Sistema em função da frequência para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s.

Tabela 4-10: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s

Amplitude - $X_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	Amplitude - $Y_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	$f_x=f_y$ [kHz]
68.774	6.877	20.347

- Para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s

A Figura 4-17 mostra as respostas em deslocamento do *Atuador* e *Detector* para a velocidade angular  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s. Nesse caso observa-se a abertura da frequência natural do *Atuador* em duas outras frequências naturais. Fenômeno similar é observado na dinâmica de rotores incluindo efeito giroscópico (LALANNE e FERRARIS, 1998). Este efeito, o qual pode ser observado experimentalmente, mostra que para um sistema rotativo sujeito ao efeito das forças de Coriolis o aumento da velocidade angular do sistema gerará o surgimento de duas frequências naturais conhecidas como frequências naturais de precessão direta e retrógrada, cuja distância entre elas aumenta com a velocidade angular. Considerando que a dinâmica de um sistema rotativo é similar à dinâmica de um giroscópio MEMS como o aqui mostrado, podemos concluir que o aparecimento dessas frequências naturais é compatível com o comportamento do sistema físico analisado. As amplitudes máximas dos deslocamentos e das frequências naturais do *Detector* e *Atuador* são mostradas na Tabela 4-11.

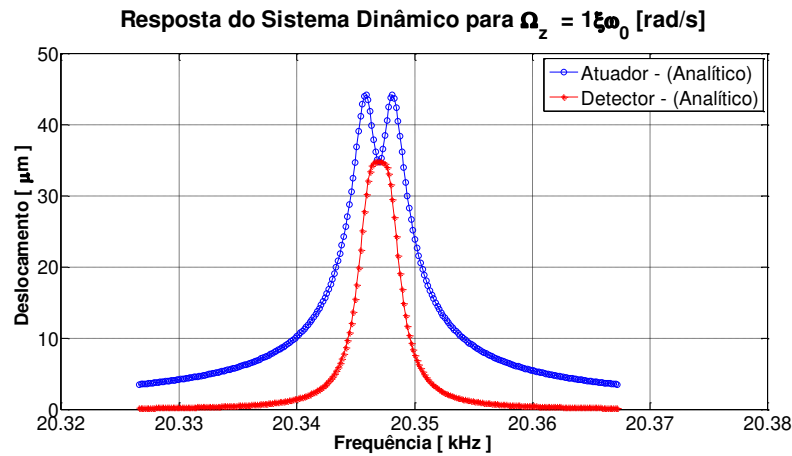


Figura 4-17: Resposta do Sistema em função da frequência para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s.

Tabela 4-11: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s

Amplitude - $X_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	Amplitude - $Y_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	$f_x=f_y$ [kHz]
34.731	34.731	20.347

- Para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s

A Figura 4-18 mostra as respostas em deslocamento do *Atuador* e *Detector* para a velocidade angular  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s. neste caso observam-se a abertura da frequência natural tanto do *Atuador* como do *Detector* em duas outras frequências naturais. Neste caso o efeito observado coincide com aquele do sistema rotativo. As amplitudes máximas dos deslocamentos e das frequências naturais do *Detector* e *Atuador* são mostradas na Tabela 4-12

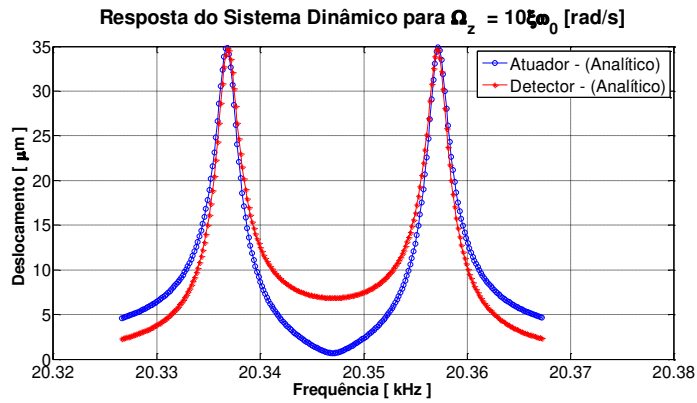


Figura 4-18: Resposta do Sistema em função da frequência para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s.

Tabela 4-12: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s

Amplitude - $X_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	Amplitude - $Y_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	$f_x=f_y$ [kHz]
0.687	6.877	20.347

## 4.2 Simulação Numérica

Na simulação numérica do Giroscópio de ACAR construiu-se um modelo eletroestrutural no programa ANSYS/Mutlphysics, onde a massa de prova e as molas do giroscópio são elementos estruturais, e os comb-drivers e capacitores são os elementos elétricos. Esse programa computacional permite análises de sistemas em multidomínios físicos utilizando o Método de Elementos Finitos (MEF). Um fluxograma descrevendo as etapas realizadas na simulação do ANSYS é mostrado na Figura 4-19 onde serão simulados três tipos de análises do giroscópio: estática, modal e harmônica.



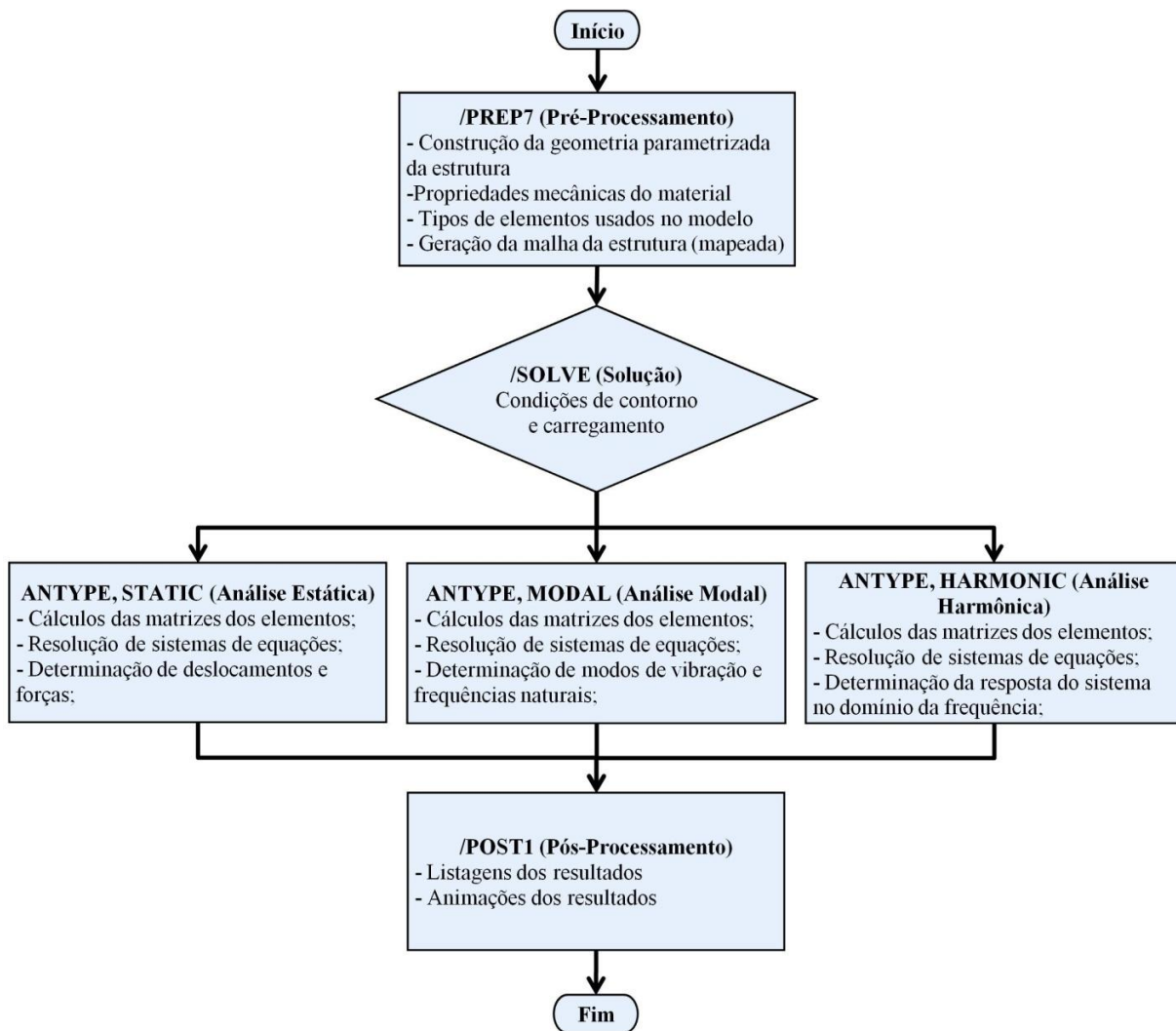


Figura 4-19: Fluxograma da Simulação Numérica do Giroscópio.

#### 4.2.1 Pré-Processamento

Diferente do modelo analítico simulado através do *MATLAB*, no *ANSYS* é necessário a construção geométrica da estrutura do giroscópio para simulação numérica, essa etapa é realizada no pré-processamento onde é usado o comando */PREP7* para carregar os dados da Tabela 4-1 e Tabela 4-2. No pré-processamento também são definidos os tipo de elementos que serão utilizados na simulação e a escolha da malha. Para controlar a precisão dos resultados do dispositivo, construiu-se uma malha mapeada parametrizada.

A modelagem estrutural foi realizada usando elementos de placa de tensão plana bidimensional (PLANE183) que possui 8 nós com 2 graus de liberdade de deslocamento por nó. Na modelagem do acoplamento eletroestrutural o programa utiliza o acoplamento mecânico de forças produzidas por um campo eletrostático através de um elemento transdutor unidimensional (TRANS126). Esse elemento é um modelo de ordem reduzida o que implica que as características eletrostáticas desse dispositivo eletromecânico serão capturadas em termos de capacitância do dispositivo durante um intervalo de deslocamento entre as placas dos capacitores. Para a simulação do atuador eletrostático, substituíram-se os conjuntos de atuadores (comb-drive) por um único elemento (TRANS126) que inclui os parâmetros tais como, número de dedos do atuador, distância entre as placas dos capacitores e área de atuação entre os dedos.

Nestas simulações a parte estrutural do modelo utilizou uma malha mapeada com 9376 elementos tipo PLANE183 e 30215 nós. Nas simulações incluindo os elementos eletrostáticos (TRANS126), estes são incluídos como um único elemento de 2 nós nas direções do *Atuador* e *Detector*, substituindo os dispositivos físicos dos comb-drives e capacitores, respectivamente.

A Figura 4-20 mostra o desenho da malha da parte estrutural construída no ANSYS, a qual é a mesma representação simplificada do modelo físico real (Figura 4-1) mostrado no trabalho de ACAR, 2001.

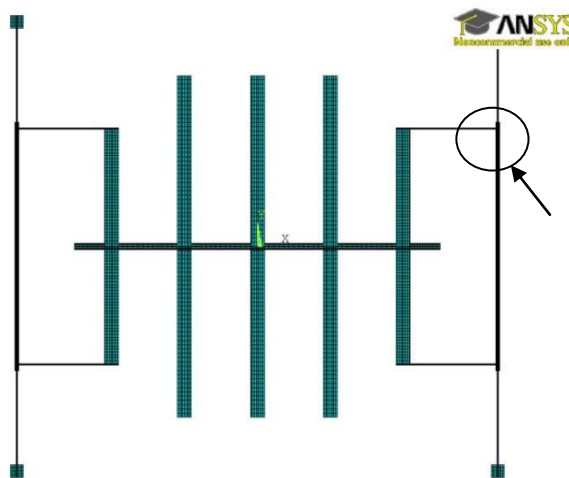


Figura 4-20: Vista total da malha mapeada do dispositivo

Um detalhamento das malhas obtidas para flexões do *Atuador* e do *Detector* é mostrado na Figura 4-21.

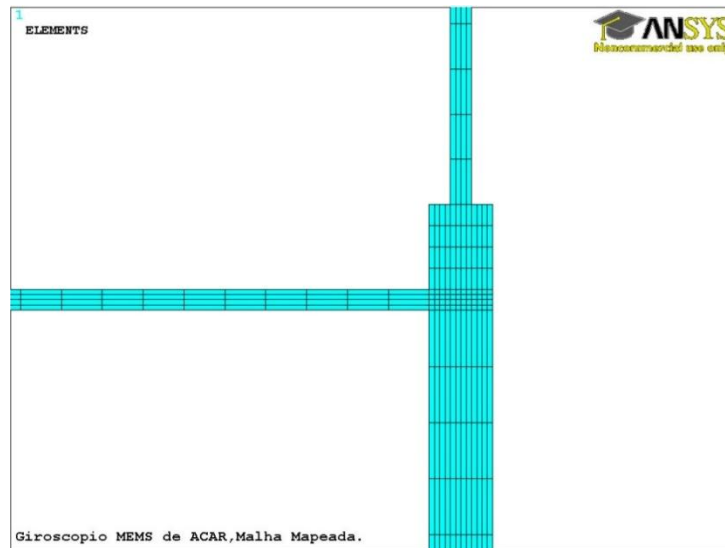


Figura 4-21: Vista ampliada da malha do giroscópio de Acar

#### 4.2.2 Análise Estática

A análise estática linear calcula os deslocamentos, tensões e as forças de reações causadas pela carga estática, ignorando os efeitos como a inércia, amortecimento e forças variando no tempo. Para essa análise é usado a função *ANTYPE, STATIC* no *ANSYS*.

O objetivo da análise estática neste trabalho foi obter os valores de deslocamento com a finalidade de determinar a rigidez linear na direção do *Atuador* e na direção do *Detector*. Foi aplicada uma força de  $1\mu\text{N}$  no nó 15230 na direção  $x$  (*Atuador*) e obteve-se um deslocamento no mesmo nó  $x = 0.313\ \mu\text{m}$ . Usando a Eq. (4.8) obtém-se a rigidez  $k_x = 3.199\ \mu\text{N}/\mu\text{m}$ . A Figura 4-22 mostra o deslocamento global da estrutura na direção de atuação.

Para a determinação da rigidez  $k_y$  aplicou-se uma força de  $1\mu\text{m}$  no nó 8558 e obteve-se um deslocamento no mesmo nó  $y = 0.309\ \mu\text{m}$ , a partir dos quais obteve-se a rigidez  $k_y = 3.241\mu\text{N}/\mu\text{m}$  na direção de detecção. A Figura 4-23 mostra o deslocamento global da estrutura na direção  $y$ .

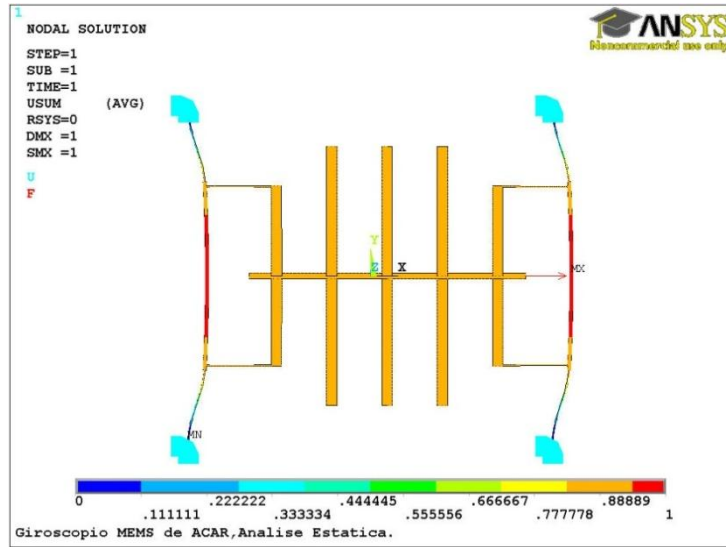


Figura 4-22: Condição de contorno aplicado na direção do Atuador (análise linear) incluindo as reações nas ancoras.

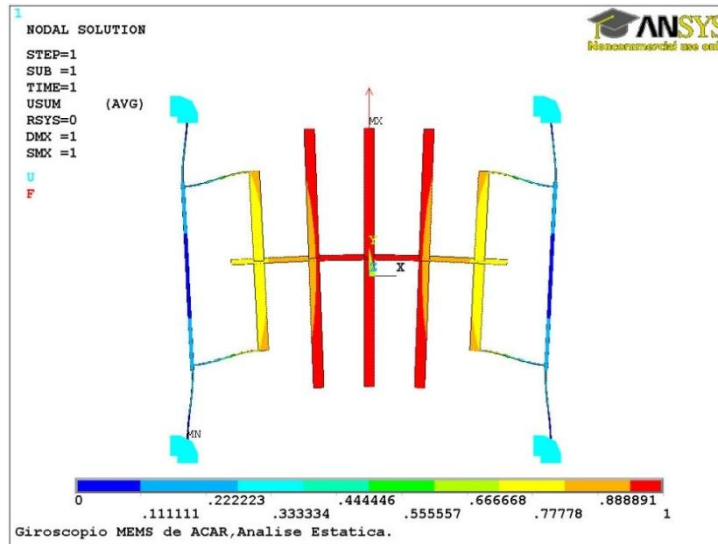


Figura 4-23: Condição de contorno aplicado na direção do *Detector* (análise linear) incluindo as reações nas ancoras.

Na Tabela 4-13 é mostrada uma comparação dos resultados de rigidez do modelo analítico com o modelo numérico. Os resultados da Tabela 4-13 mostram que os modelos analíticos e numéricos apresentam erros bastante altos (maiores que 20%) indicando que esses não

representam o mesmo modelo físico. Os valores de rigidez mostram que o modelo analítico é mais rígido do que o numérico. Isto é uma consequência da geometria usada na representação simplificada do modelo físico real, a qual é formada de placas com largura muito pequenas quando comparadas com a largura das molas. Essa configuração não reproduz a mesma condição de rigidez infinita do modelo analítico na região fora das molas gerando uma flexibilidade maior do que aqueles do modelo analítico. Uma observação mais cuidadosa da Figura 4-22 e da Figura 4-23 mostra que as placas nas regiões de interligação das molas (direção  $x$ ) e de representação da massa de prova (direção  $y$ ), apresentam valores de deslocamentos devido à flexão significativos quando deveriam permanecer rígidas, ou seja, sem nenhuma flexão.

Tabela 4-13: Comparativo da rigidez do modelo analítico e numérico.

Método	Analítico	Numérico	Erro [%]
Rigidez do Atuador - $k_x$ [ $\mu\text{N}/\mu\text{m}$ ]	4.206	3.199	23.94
Rigidez do Detector - $k_x$ [ $\mu\text{N}/\mu\text{m}$ ]	5.173	3.241	37.35

### 4.2.3 Análise Modal

A análise modal é utilizada para determinar as frequências naturais e os modos de vibração de uma estrutura, pois são parâmetros importantes no projeto do giroscópio. Para a determinação dos modos de vibração foi utilizado o método de extração de autovalores e autovetores do tipo *Unsymmetric* devido à formulação do acoplamento eletroestrutural resultar em matrizes assimétricas. Para essa análise é usado a função *ANTYPE, MODAL* no *ANSYS*.

Da simulação numérica foram extraídas as três primeiras frequências naturais do dispositivo:  $f_x = 18.958$  kHz,  $f_y = 20.501$  kHz e  $f_z = 42.766$  kHz. As correspondentes formas dos modos de vibrar da estrutura estão apresentadas nas Figura 4-24, Figura 4-25 e Figura 4-26, respectivamente. Considerando que os modos de interesse no projeto do giroscópio são os dois primeiros, deste ponto em diante nos referiremos apenas a esses modos.

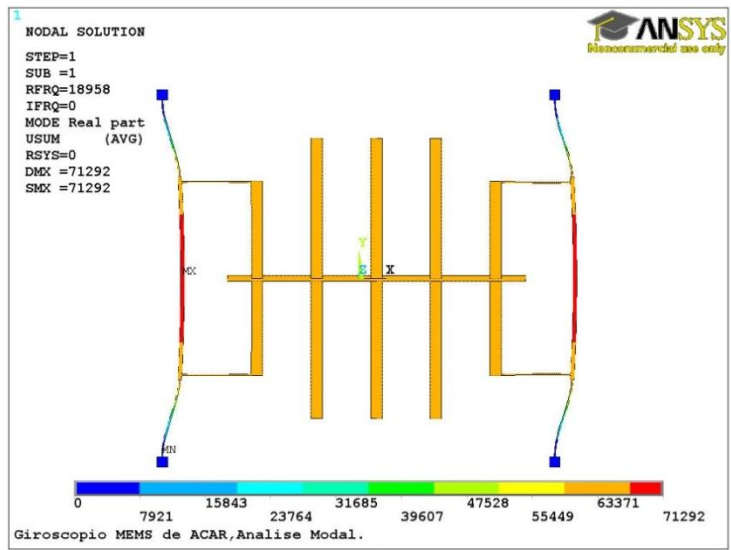


Figura 4-24: Primeira frequência na direção do *Atuador*;  $f_x = 18.958$  kHz.

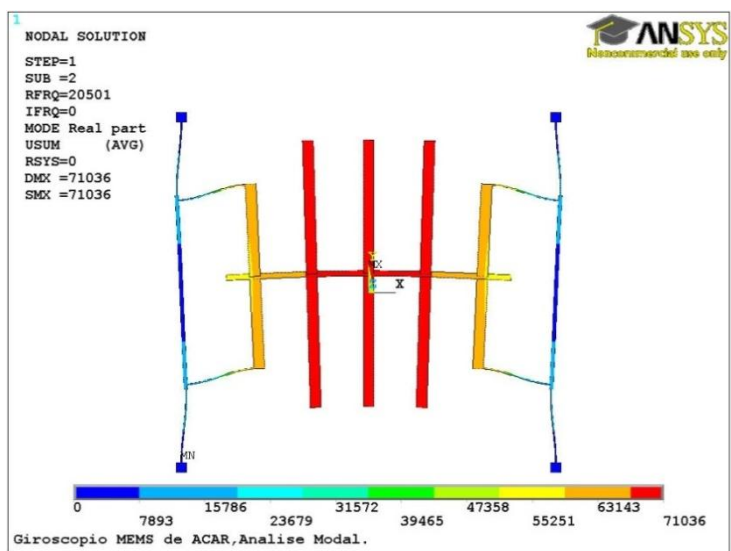


Figura 4-25: Segunda frequência na direção do *Detector*;  $f_y = 20.501$  kHz

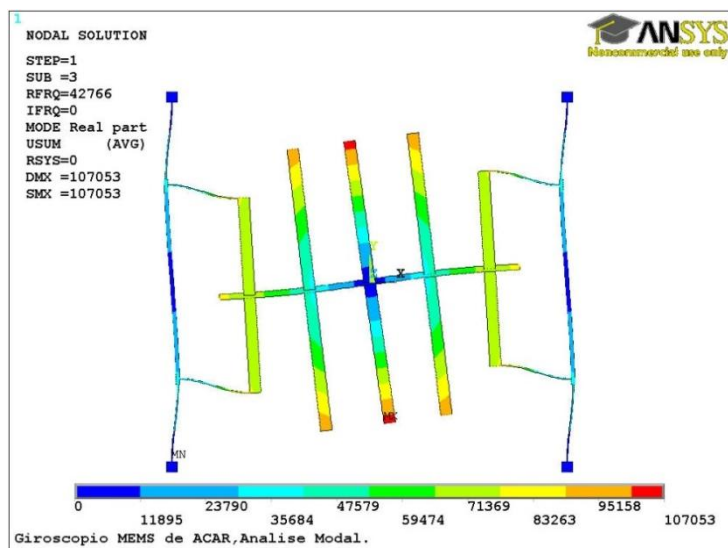


Figura 4-26: Terceira frequência;  $f_3 = 42.766$  kHz

Uma comparação das frequências  $f_x$  e  $f_y$  dos modelos analítico e numérico são mostradas na Tabela 4-14. Observa-se um erro bastante grande entre os modelos analítico e numérico o qual pode ser atribuído a propagação do erro da rigidez, tendo em vista que uma verificação das massas totais desses modelos apresentam um erro inferior a 1,02 %.

Tabela 4-14: Comparativo dos resultados numérico e analítico da frequência do *Atuador*

Método	Analítico	Numérico	Erro [%]
Frequência do Atuador - $f_x$ [kHz]	20.347	18.958	6.83
Frequência do Detector - $f_y$ [kHz]	23.629	20.501	13.23

Devido ao processo de fabricação dos dispositivos MEMS envolverem imprecisões na obtenção das geometrias finais, os giroscópios MEMS são construídos deliberadamente com as rigidezes diferentes. Para obter um maior deslocamento na direção do *Detector* é necessário que as rigidezes do *Atuador* e *Detector* sejam iguais, pois assim obtém-se as frequências naturais iguais. Da análise modal do giroscópio de ACAR (Tabela 4-14) observa-se que as frequências são diferentes, para igualar essas frequências é necessário fazer um ajuste na rigidez do *Detector*. Para tal foram feitas mais duas análises modais com o objetivo de igualar essas frequências. Na expectativa de analisar o problema do giroscópio no contexto multifísico (eletromecânico) uma

primeira análise modal foi realizada inserindo o elemento TRANS126 (Figura 4-27), o qual permite acrescentar uma rigidez eletrostática na direção do *Detector* em função de uma tensão elétrica contínua aplicada no elemento. Através de um processo de tentativa e erro convergiu-se para um valor de frequências naturais iguais do Atuador e Detector, com uma tensão elétrica contínua  $V_{dcs} = 2.87$  V. Os resultados das frequências naturais obtidos pela análise modal são mostrados na Tabela 4-15.

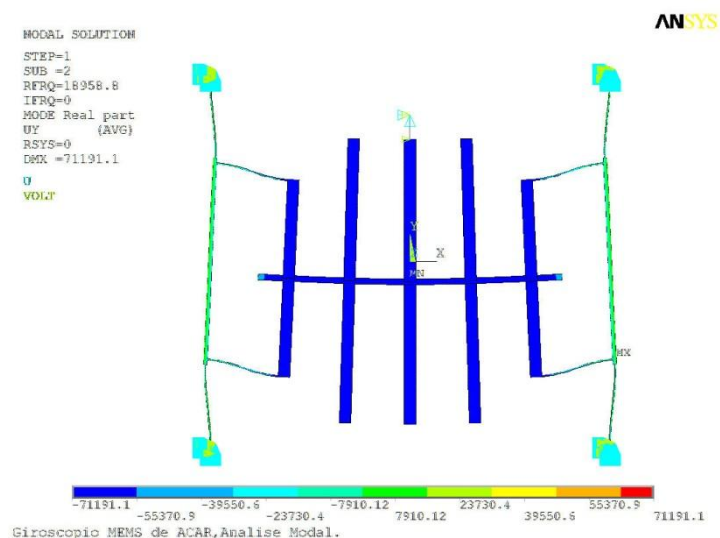


Figura 4-27: Ajuste de frequência do *Detector* através do elemento *TRANS126*;  $f = 18.958$  kHz

Tabela 4-15: Resultados dos parâmetros obtidos através da análise modal

Elemento	Rigidez - $k_{ye}$ [ $\mu\text{N}/\mu\text{m}$ ]	Frequência do Atuador - $f_x$ [kHz]	Frequência do Detector - $f_y$ [kHz]
TRANS126	-0.4750	18.958	18.958

#### 4.2.4 Análise Harmônica

Esta técnica de análise numérica calcula apenas as vibrações forçadas no estado estacionário de uma estrutura, onde todas as cargas da resposta variam senoidalmente com a mesma frequência embora não necessariamente com a mesma fase. Vibrações transitórias que



ocorrem no início da excitação não são consideradas. O objetivo da análise harmônica linear é calcular a resposta da estrutura em função da frequência.

Na implementação do programa ANSYS o método *Full* foi o escolhido para calcular resposta harmônica, no controle de amortecimento do sistema foi utilizado o comando *Beta Damping* ou *Constant Damping Ratio* (fator de amortecimento  $\xi$ ) que especifica o amortecimento estrutural de todo o dispositivo.

Para analisar o problema do giroscópio de ACAR no contexto multifísico (eletromecânico) a primeira análise harmônica foi realizada inserindo o elemento TRANS126 na direção do *Atuador* e do *Detector*. Uma tensão elétrica contínua  $V_{dcs} = 2,87V$  foi aplicada no elemento do *Detector* para inclusão da rigidez eletrostática e uma tensão elétrica contínua ( $V_{dcd} = 2,5V$ ) foi aplicada no *Atuador* para excitar o sistema com uma força harmônica. Contudo, observou-se que neste tipo de análise o programa ANSYS não entende que a excitação harmônica deve ser aplicada apenas no *Atuador*, e aplica em ambos os elementos. Infelizmente não foi possível investigar mais profundamente as causas deste problema, mas acredita-se que exista a possibilidade de contorná-lo pois algumas referências da literatura e do próprio manual do programa ANSYS afirmam que o dispositivo pode ser usado como atuador ou detector. É possível que o problema esteja relacionado apenas com o tipo de análise que foi realizada.

Para que o sistema não fosse excitado harmonicamente na direção do *Detector* foi necessário inserir um elemento passivo (não gera força) que fornecesse a mesma rigidez na direção do *Detector* obtida na Tabela 4-15. Para tal, um elemento de mola mecânico com a mesma rigidez foi usado, o qual no programa ANSYS é o elemento COMBIN14.

As análises harmônicas do dispositivo foram simuladas para as mesmas condições de velocidades angulares realizada na Seção 4.1.1. Para  $\Omega_z = 0$  rad/s

A Figura 4-28 mostra as respostas em deslocamento ( $X_0, Y_0$ ) no domínio da frequência. Como esperado, verifica-se que na condição em que a velocidade angular  $\Omega_z$  é zero, não há força de Coriolis induzida na direção do *Detector*, por isso nenhuma resposta da amplitude  $Y_0$  é observada. A Figura 4-29, Figura 4-31 e a Figura 4-33 mostram uma comparação entre a resposta em frequência dos modelos analítico (Seção 4.1.2) e numérico. Observa-se que existe uma

diferença entre as frequências naturais do Detector e Atuador calculados por modelos diferentes, a qual é a mesma já mostrada na Seção 0. Este erro, já apontado como consequência das rigidezes diferentes nos modelos analítico e numérico, se propaga resultando em diferenças na amplitude máxima dos deslocamentos da resposta harmônica como mostrado nas Tabela 4-16, Tabela 4-17, Tabela 4-18 e Tabela 4-19.

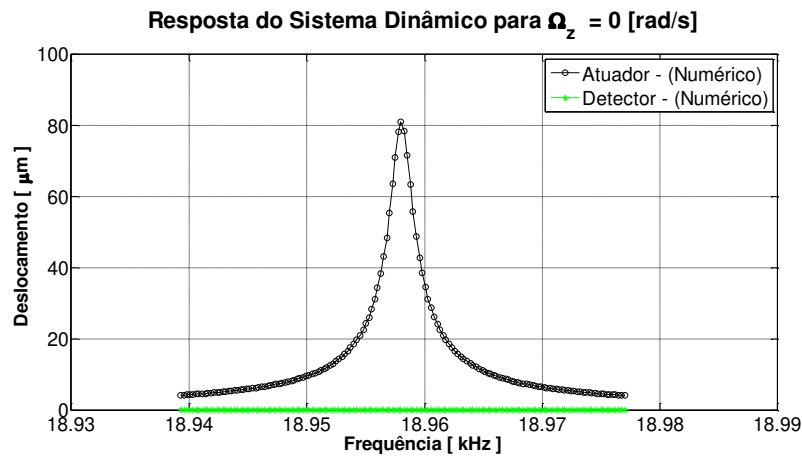


Figura 4-28: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para  $\Omega_z = 0$  rad/s

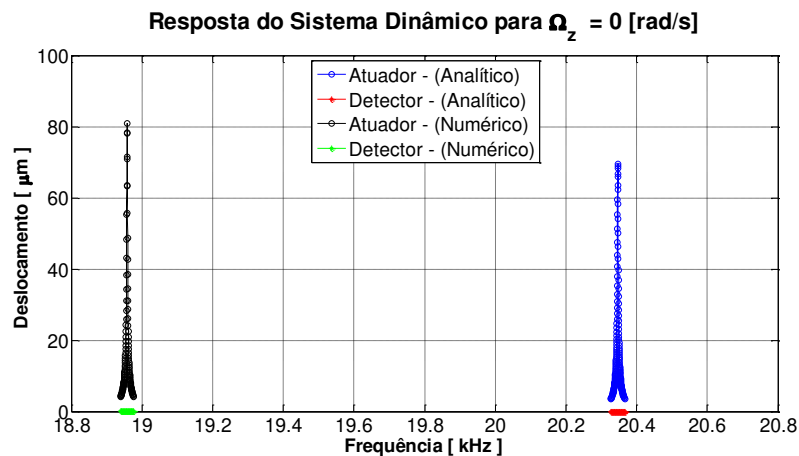


Figura 4-29: Gráfico comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para  $\Omega_z = 0$  rad/s

Tabela 4-16: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para  $\Omega_z = 0 \text{ rad/s}$

Método	Analítico	Numérico	Erro [%]
Deslocamento do Atuador [ $\mu\text{m}$ ]	69.462	80.993	16.60
Deslocamento do Detector [ $\mu\text{m}$ ]	0	0	0

- Para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$ .

Como esperado na Figura 4-30, para a velocidade angular  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0 \text{ rad/s}$ , existe a força de Coriolis induzida na direção do *Detector*, por isso apresenta um pequeno aumento da amplitude na sua frequência natural.

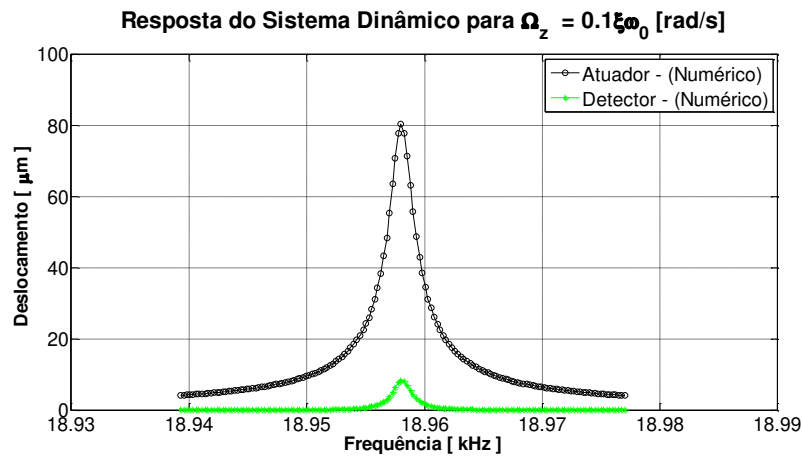


Figura 4-30: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0 \text{ rad/s}$

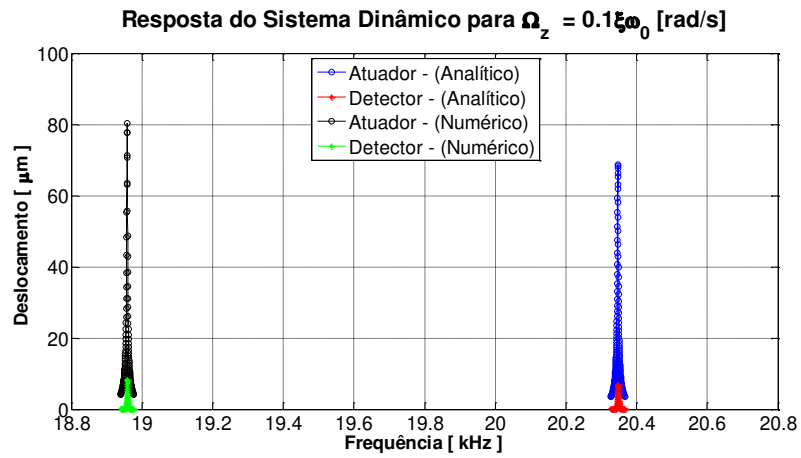


Figura 4-31: Gráfico comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s

Tabela 4-17: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s

Método	Analítico	Numérico	Erro [%]
Deslocamento do Atuador [ $\mu\text{m}$ ]	68.774	80.312	16.78
Deslocamento do Detector [ $\mu\text{m}$ ]	6.877	8.388	21.97

- Para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s.

Como esperado observa-se na Figura 4-32 a abertura na frequência natural em outras duas frequências, pois o mesmo efeito foi visto na simulação analítica descrito na Seção 4.1.2 através da Figura 4-17.

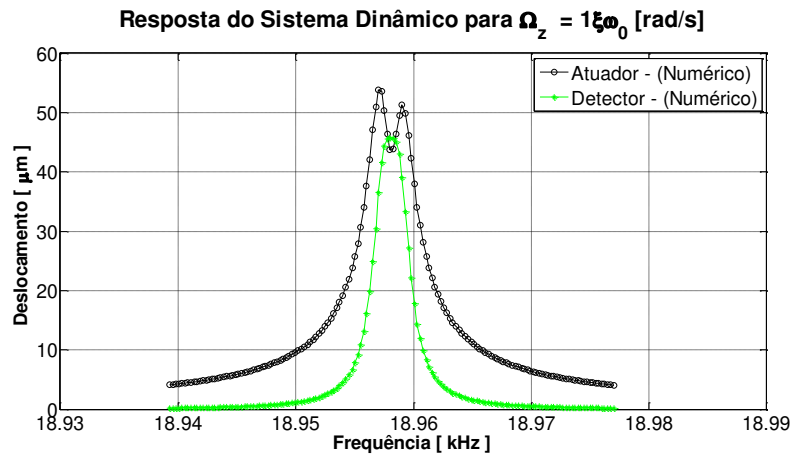


Figura 4-32: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s

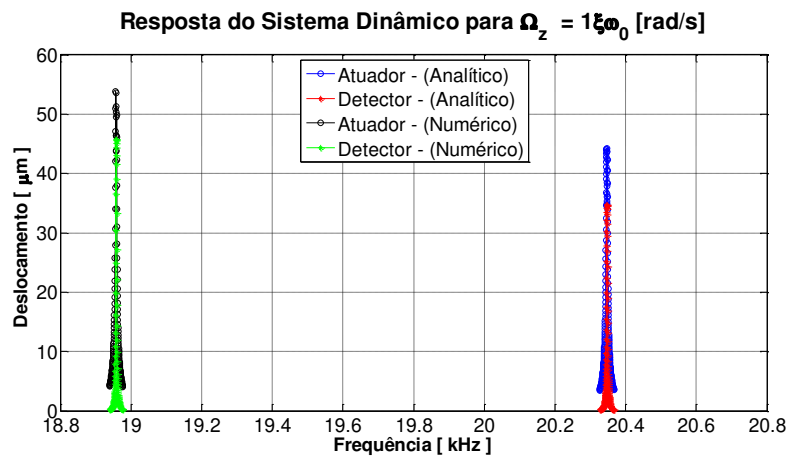


Figura 4-33: Gráfico comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s

Tabela 4-18: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s

Método	Analítico	Numérico	Erro [%]
Deslocamento do Atuador – pico 1 [ $\mu\text{m}$ ]	53.79	44.15	17.92
Deslocamento do Atuador – pico 2 [ $\mu\text{m}$ ]	51.26	44.17	13.83
Deslocamento do Detector [ $\mu\text{m}$ ]	34.731	45.735	31.68

- Para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ .

Na Figura 4-34 observa-se abertura das frequências naturais do *Atuador* e do *Detector* em outras duas frequências naturais. O resultado obtido apresenta o mesmo comportamento da Simulação com o modelo Analítico para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s

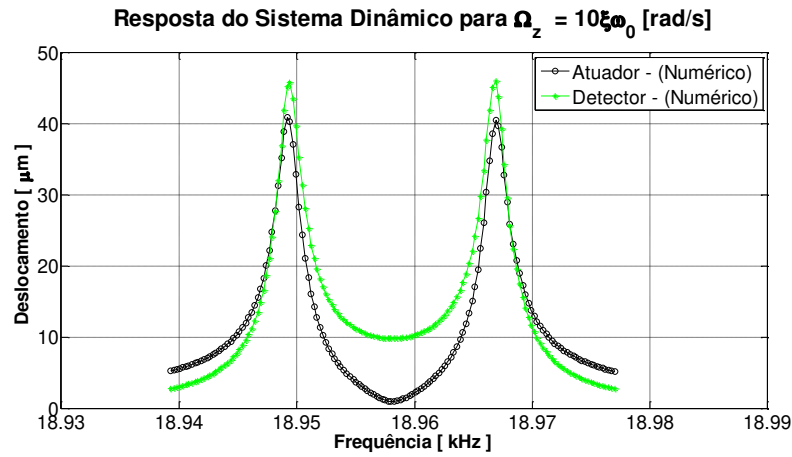


Figura 4-34: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s

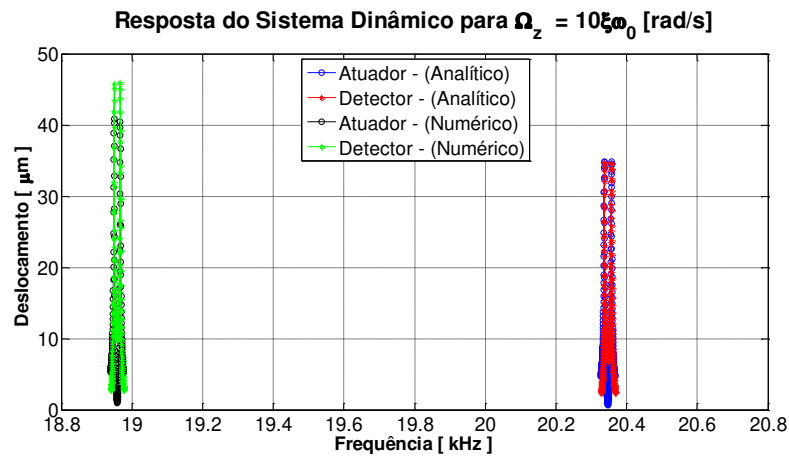


Figura 4-35: comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de ACAR para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s

Tabela 4-19: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s

Método	Analítico	Numérico	Erro [%]
Deslocamento do Atuador – pico 1[ $\mu\text{m}$ ]	34.86	40.81	17.06
Deslocamento do Atuador – pico 2[ $\mu\text{m}$ ]	34.88	40.46	15.99
Deslocamento do Detector – pico 1 [ $\mu\text{m}$ ]	34.72	45.78	42.98
Deslocamento do Detector – pico 2 [ $\mu\text{m}$ ]	34.63	45.91	32.57

### Comparação dos Resultados

Abaixo uma tabela comparativa com resultados obtidos pela simulação numérica via *Ansys* e pela simulação analítica via *Matlab*.

Tabela 4-20: Comparativo dos resultados Analíticos e Numéricos

Parâmetros de Desempenho	Analítico	Numérico	Erro relativo [%]
Massa Total - $M_t$	$2,574 \times 10^{-10}$ kg	$2,600 \times 10^{-10}$ kg	1,03
Rigidez do modo Atuador (linear) - $k_x$	4,21 N/m	3,199 N/m	24,01
Rigidez do modo Detector (linear) - $k_x$	5.67N/m	3,241 N/m	42,84
Rigidez Eletrostática do modo Detector - $k_{ey}$ Comparativo (TRANS126)	-1.46N/m	-0,4750 N/m	67,53
Rigidez Eletrostática do modo Detector - $k_y$ Comparativo (COMBIN14)	-1.46N/m	-0,4752 N/m	67,45
Frequência de Ressonância (Atuador) - $f_x$	20,347 kHz	18,958 kHz	6.83
Frequência de Ressonância (Detector) - $f_y$ Sem ajuste eletrônico de rigidez	23,629 kHz	20,501 kHz	13,23
Frequência de Ressonância (Detector) - $f_y$ Ajuste eletrônico de rigidez Comparativo(COMBIN14)	20,347kHz	18,901 kHz	67,66
Frequência de Ressonância (Detector) - $f_y$ Ajuste eletrônico de rigidez Comparativo(TRANS126)	20,347kHz	18,958 kHz	67,63

## 5. MODELO DO GIROSCÓPIO DE NGUYEN

As simulações analítica e numérica do giroscópio de (NGUYEN, 2012), conforme Figura 5-1 foram realizadas com os valores dos parâmetros geométricos, propriedades dos materiais e parâmetros arbitrários descritos na Tabela 5-1, Tabela 5-2 e Tabela 5-3. Neste capítulo serão mostradas as etapas e os resultados da modelagem do giroscópio (NGUYEN, 2012) sem muitos comentários, uma vez que já foram discutidas no capítulo anterior.

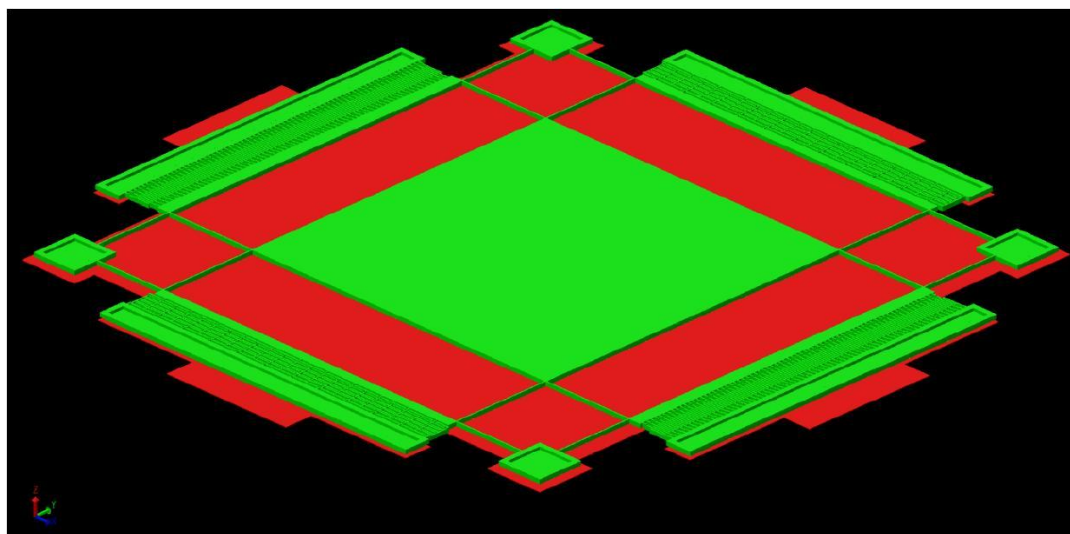


Figura 5-1: Vista de perspectiva do Giroscópio de massa única, (NGUYEN, 2012).

Tabela 5-1: Propriedades Mecânicas do silício (NGUYEN, 2012).

Material	$\rho$ [ $\text{kg}/\mu\text{m}^3$ ]	E [ $\mu\text{N}/\mu\text{m}^2$ ]	$\nu$
Polisilício	$2,33 \times 10^{-15}$	$1,50 \times 10^5$	0,2



Tabela 5-2: Parâmetros da geometria do giroscópio (NGUYEN, 2012).

<b>Parâmetros Geométricos</b>	<b>Valor [<math>\mu\text{m}</math>]</b>
Comprimento da Viga de Flexão do Atuador I - $L_{bd1}$	150
Comprimento da Viga de Flexão do Atuador II - $L_{bd2}$	120
Largura da Viga de Flexão do Atuador - $W_{bd}$	2
Espessura da Viga de Flexão do Atuador - $t_{bd}$	3
Comprimento da Viga de Flexão do Detector I - $L_{bs1}$	140
Comprimento da Viga de Flexão do Detector II - $L_{bs2}$	110
Largura da Viga de Flexão do Detector - $W_{bs}$	2
Espessura da Viga de Flexão do Detector - $t_{bs}$	3
Comprimento da Massa central - $L_m$	500
Largura da Massa central - $W_m$	500
Espessura da Massa central - $t_m$	3
Comprimento do dedo do Atuador - $L_f$	40
Largura do dedo do Atuador - $W_f$	2
Espessura do dedo do Atuador - $t_f$	3
Número total de dedos do Atuador - $N_f$	142
Gap da Capacitância do Atuador - $g_{0d}$	1.5
Gap da Capacitância do Detector I - $g_{0s1}$	1
Gap da Capacitância do Detector II - $g_{0s2}$	3

Tabela 5-3: Parâmetros Arbitrários

Tensão (DC) no Atuador - $V_{dcd}$	2.5V
Tensão (AC) no Atuador - $V_{AC}$	1V
Fator de Qualidade - $Q$	$1 \times 10^4$
Velocidade Angular - $\Omega_z$	$0 \leq \Omega_z \leq 10\xi\omega_0$ rad/s

### 5.1 Simulação com o modelo Analítico

As etapas da simulação analítica do giroscópio do modelo de NGUYEN estão exemplificadas no fluxograma visto na Figura 5-2. Nesse modelo foram calculadas as resposta no domínio do tempo e no domínio da frequência para efeito de comparação com a resposta do modelo numérico.

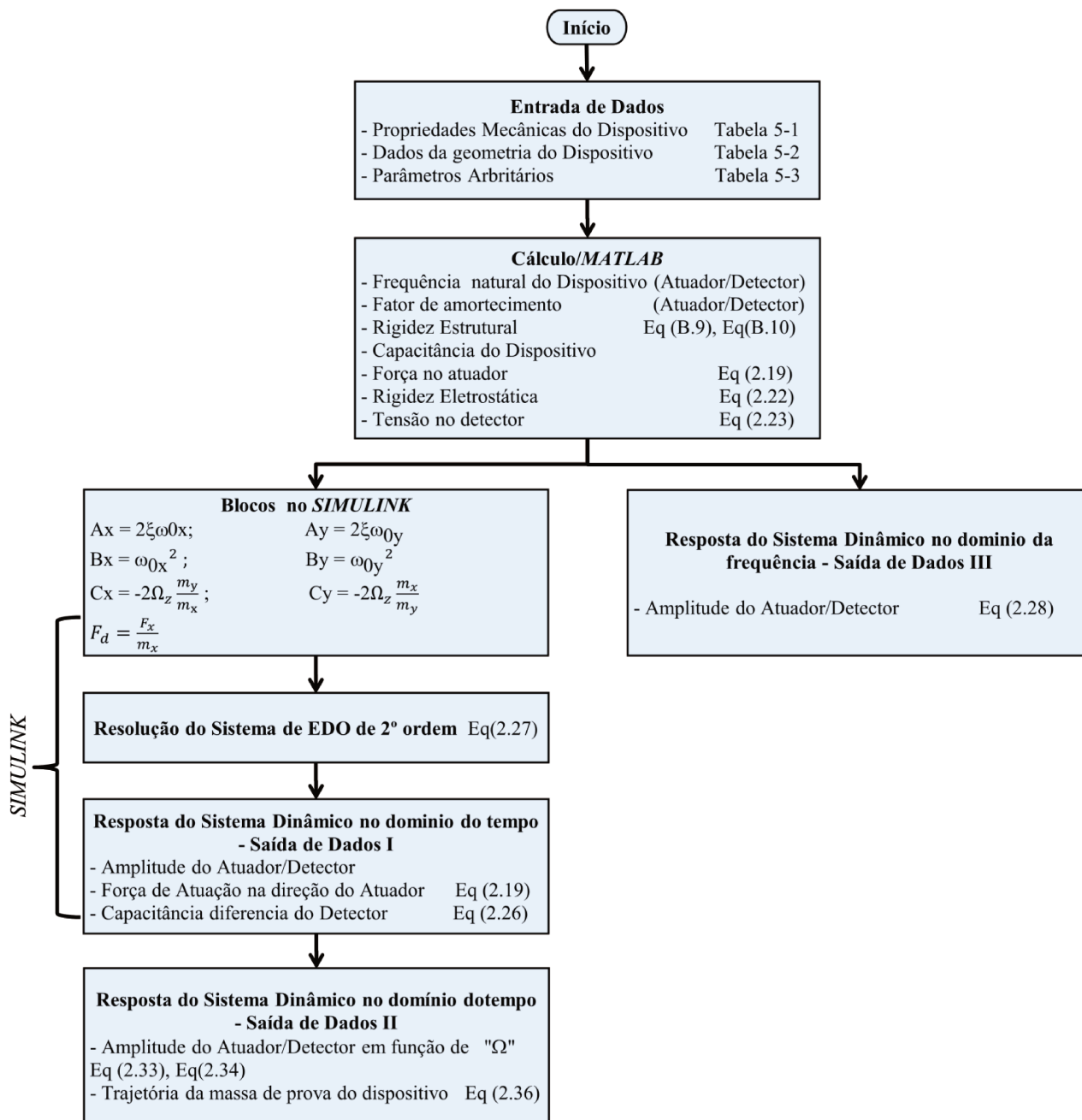


Figura 5-2: Fluxograma da Simulação Analítica do Giroscópio (NGUYEN, 2012).

Na **Entrada de Dados** serão fornecidas ao *MATLAB*, através da Tabela 5-1, Tabela 5-2 e

Tabela 5-3, todas as propriedades mecânicas e geométricas do giroscópio e uma tensão de entrada para excitar o sistema. O **Cálculo** dos parâmetros de entrada para o domínio no tempo (*Simulink*) e para o domínio da frequência (*MATLAB*) são obtidos a partir da Tabela 5-1, Tabela 5-2 e Tabela 5-3. Os resultados são mostrados na Tabela 5-4.

Tabela 5-4: Resultados obtidos analiticamente

<b>Resultados de Desempenho</b>	<b>Valores</b>
Força de atuação no Atuador - $F_d$	$0.0079 \mu N$
Capacitância estática do Detector - $C_{0s}$	$62.86 fF$
Capacitância estática do Atuador - $C_{0d}$	$89.79 fF$
Massa na direção do Atuador - $M_d$	$1.954 \times 10^{-9} kg$
Massa na direção do Detector - $M_s$	$1.915 \times 10^{-9} kg$
Massa total - $M_t$	$2.144 \times 10^{-9} kg$
Constante Elástica do Atuador - $k_x$	$12.6 N / m$
Constante Elástica do Detector - $k_y$	$16.06 N / m$
Frequência de ressonância do Atuador - $f_x$	$12.778 kHz$
Frequência de ressonância do Detector - $f_y$	$14.579 kHz$
Constante da Rigidez Eletrostática - $k_{ey}$	$3.723 N / m$
Tensão (DC) na Capacitância do Detector - $V_{dcs}$	$8.01 V$

### 5.1.1 Análise da resposta do dispositivo no domínio do tempo

Com a Eq.(2.27) e os parâmetros da Tabela 5-4 foi montado um sistema acoplado de EDO de 2º no diagrama no *Simulink*, sendo os coeficientes da EDO, os blocos  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $F_d$  mostrado na Figura 5-3.

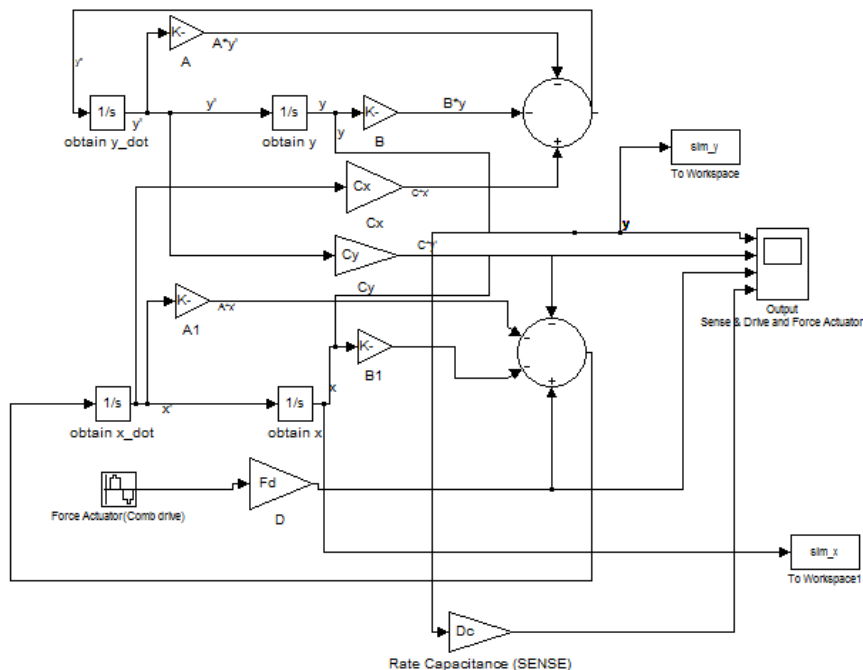


Figura 5-3: Diagrama de Bloco do Simulink

No diagrama de blocos foram simuladas quatro condições para a resposta do sistema dinâmico, para determinar a trajetória do dispositivo foi mostrada uma relação *Atuador/Detector* a partir dos dados das amplitudes. Para verificar a dependência da amplitude do dispositivo foram mostradas as amplitudes em função da velocidade angular  $\Omega_z$ . Para as simulações foram obtidos resultados em um intervalo de tempo  $t = 1,4s$ . Em todos os casos utilizaram-se a tensão aplicada no *Detector*  $V_{dcs} = 8.01V$ , no *Atuador*  $V_{acs} = 1V$  e na frequência de excitação  $f = 12.778 \text{ kHz}$

- Para  $\Omega_z = 0 \text{ rad/s}$

As respostas das amplitudes dos deslocamentos  $(X_0, Y_0)$ , da força de excitação  $(F_x/m_x)$  e da variação da capacitância  $(\Delta C_{(Detector)})$  no domínio do tempo são mostrados na Figura 5-4. Como esperado não há resposta da amplitude  $Y_0$ . Os resultados são mostrados na Tabela 5-5:

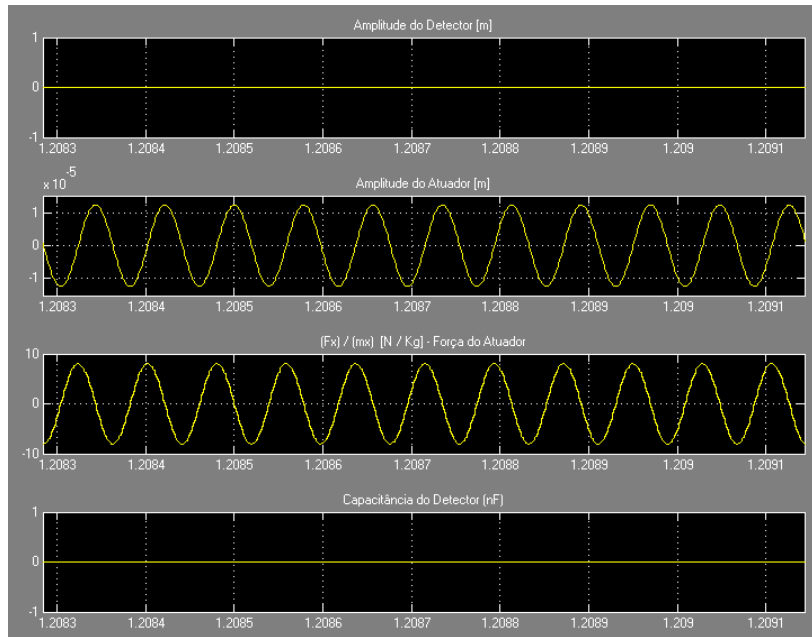


Figura 5-4: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para  $\Omega_z = 0$  rad/s

Tabela 5-5: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para  $\Omega_z = 0$  rad/s.

<b>Amplitude – <math>X_0</math> [<math>\mu\text{m}</math>]</b>	<b>Amplitude - <math>Y_0</math> [<math>\mu\text{m}</math>]</b>	<b><math>\Delta C_{(Detector)}</math> [nF]</b>
12.47	0	0

Com os resultados do *Simulink* conforme a Tabela 5-5, é mostrado a trajetória do dispositivo fazendo uma relação entre o *Atuador* e o *Detector* na Figura 5-5. Não foi possível verificar a relação entre as amplitudes do *Atuador* e do *Detector*, pois não haverá variação da amplitude do *Detector*.

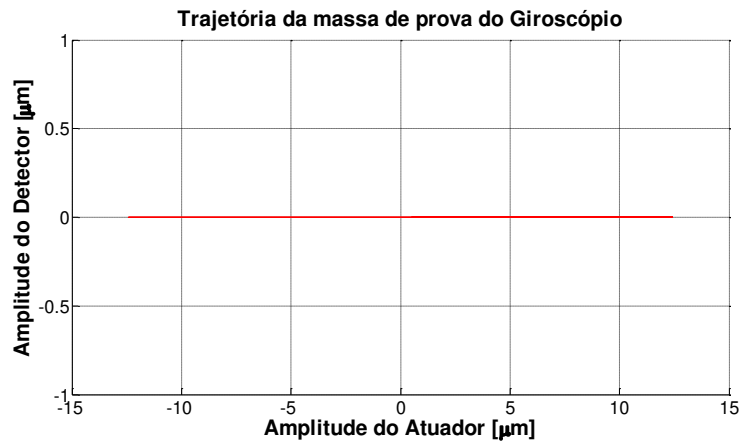


Figura 5-5: Curva da Trajetória da Massa da Giroscópio para  $\Omega_z = 0$  rad/s

- Para  $0 \leq \Omega_z \leq 0.1\xi\omega_0$  rad/s

Na Figura 5-6 são mostradas três curvas que representam diferentes respostas para velocidade angular  $\Omega_z$ . Através da linha azul pode ser observada a resposta da amplitude do detector para a  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 5-6.

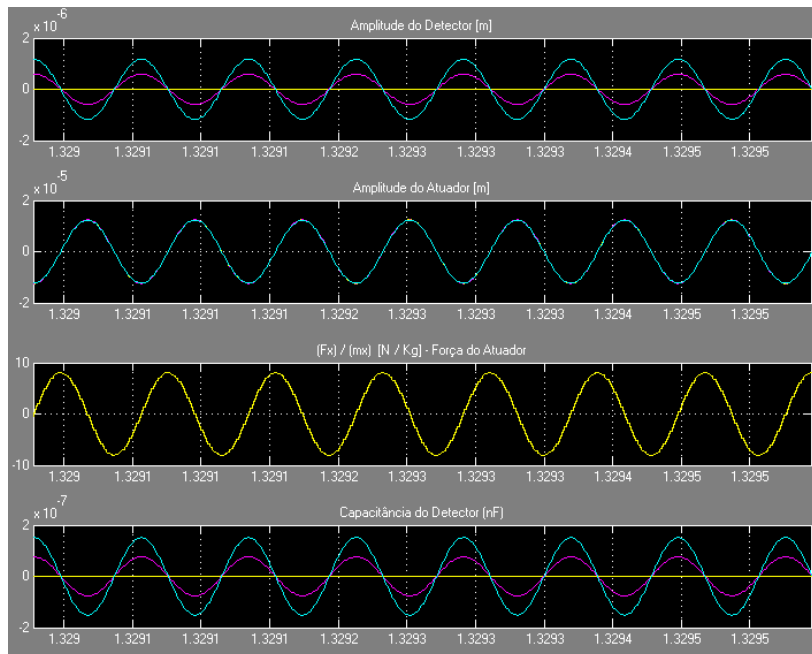


Figura 5-6: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para  $0 \leq \Omega_z \leq 0.1\xi\omega_0$  rad/s.

Tabela 5-6: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s.

Amplitude - $X_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	Amplitude - $Y_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\Delta C_{(Detector)}$ [nF]
12.34	1.234	1234

Observa-se na Figura 5-7 o aumento da amplitude do deslocamento do *Detector* devido à ação da força de Coriolis, gerando uma forma linear da relação entre as amplitudes do *Atuador* e *Detector* devido a velocidade angular  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s.

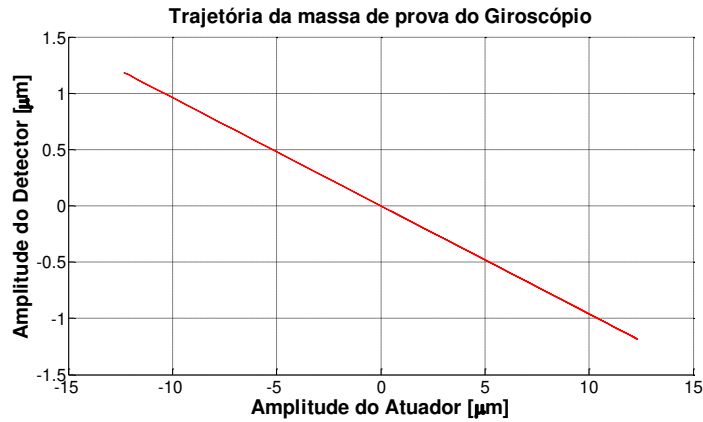


Figura 5-7: Curva da Trajetória da Massa do Giroscópio para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s

Na Figura 5-8 foi possível observar uma variação apenas na amplitude do *Detector*.

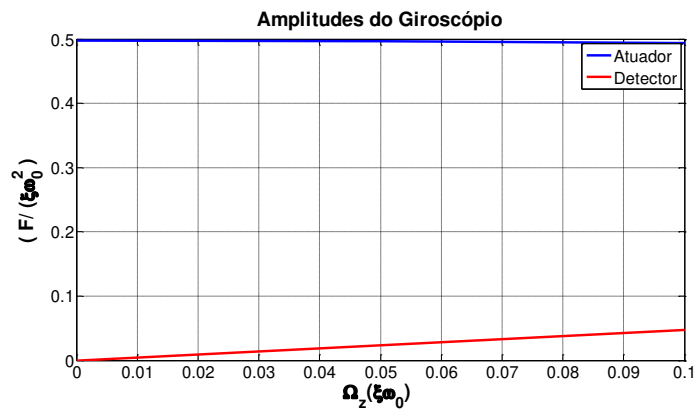


Figura 5-8: Amplitude do *Atuador* e *Detector* em função da velocidade angular para  $0 \leq \Omega_z \leq 0.1\xi\omega_0$  rad/s.

- Para  $0 \leq \Omega_z \leq 1\xi\omega_0$  rad/s



Na condição  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s, observa-se na Figura 5-9 e na Figura 5-10 que a magnitude das amplitudes do *Atuador* e do *Detector* são iguais. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 5-7.

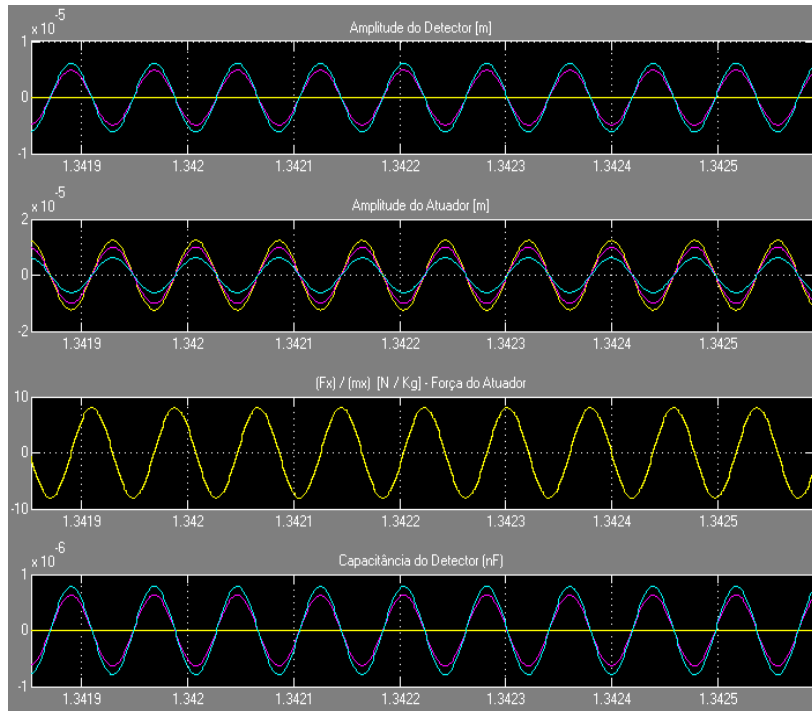


Figura 5-9: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para  $0 \leq \Omega_z \leq 1\xi\omega_0$  rad/s.

Tabela 5-7: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s.

<b>Amplitude – <math>X_0</math> [<math>\mu\text{m}</math>]</b>	<b>Amplitude - <math>Y_0</math> [<math>\mu\text{m}</math>]</b>	<b><math>\Delta C_{(Detector)}</math> [nF]</b>
6.2364	6.2364	6236



Figura 5-10: Curva da Trajetória da Massa do Giroscópio para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s

Devido ao aumento da velocidade angular  $\Omega_z$ , a amplitude na direção do Atuador irá diminuir e amplitude do Detector irá aumentar, chegando a mesma amplitude quando a velocidade angular é igual a  $1\xi\omega_0$ .

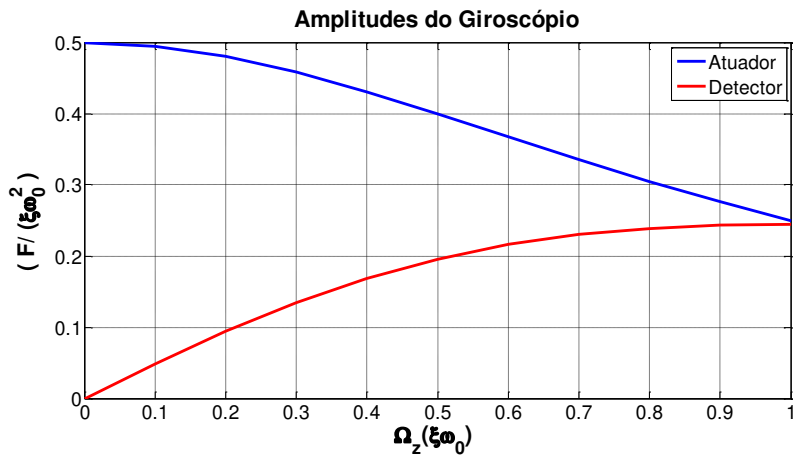


Figura 5-11: Amplitude do modo *Atuador* e *Detector* em função da velocidade angular para  $0 \leq \Omega_z \leq 1\xi\omega_0$  rad/s.

- Para  $0 \leq \Omega_z \leq 10\xi\omega_0$  rad/s

Pode-se observar na Figura 5-12, Figura 5-13 e Figura 5-14 que o comportamento da amplitude do *Atuador* decai à medida que a velocidade angular aumenta, enquanto o

comportamento da amplitude do *Detector* aumenta quando o intervalo da velocidade for  $0 \leq \Omega_z \leq 10\xi\omega_0$  e acima desse intervalo decai gradativamente. Os resultados para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s são mostrados na Tabela 5-8:

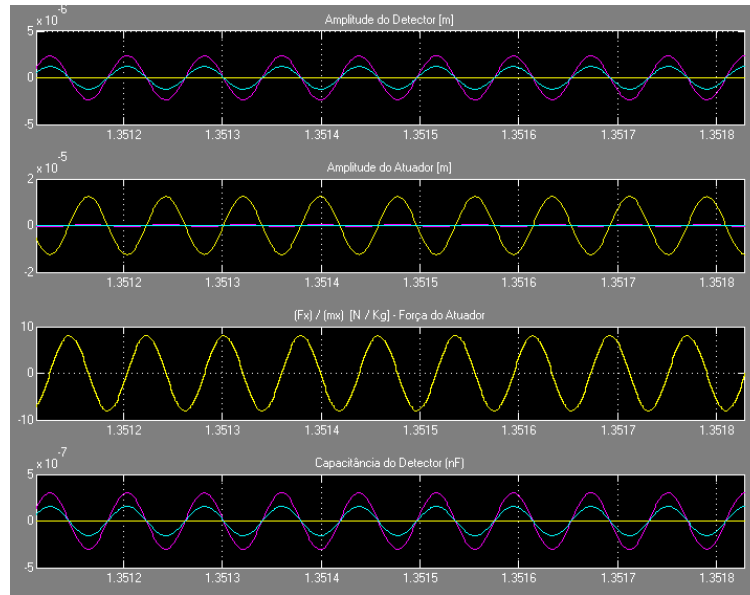


Figura 5-12: Resposta no Tempo de Deslocamento, Força e Capacitância para  $0 \leq \Omega_z \leq 10\xi\omega_0$  rad/s.

Tabela 5-8: Resultado da Resposta no domínio do tempo obtida para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s

Amplitude - $X_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	Amplitude - $Y_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\Delta C_{(Detector)}$ [nF]
0.1235	1.2349	1234.9



Figura 5-13: Trajetória da Massa do Giroscópio para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s.

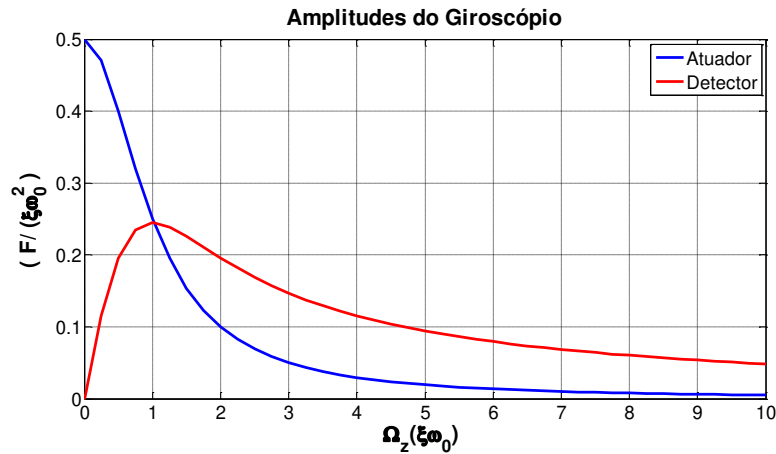


Figura 5-14: Amplitude do *Atuador* e *Detector* em função da velocidade angular para  $0 \leq \Omega_z \leq 10\xi\omega_0$  rad/s

### 5.1.2 Análise da resposta do dispositivo no domínio da frequência

Para a análise da resposta dinâmica no domínio da frequência utilizou-se o procedimento descrito na seção 4.1.2. Usando os parâmetros da Tabela 5-4, foram simuladas as quatro condições simuladas na seção 5.1.1 para obter a resposta em deslocamento do sistema dinâmico no domínio da frequência. Em todos os casos utilizaram-se uma tensão contínua nas placas dos capacitores do *Detector*  $V_{dcs} = 8.011V$ , tensão alternada no *Atuador*  $V_{acs} = 1V$  na frequência de excitação  $f = 12.778$  kHz

- Para  $\Omega_z = 0$  rad/s.

A Figura 5-15 mostra as respostas em deslocamento do *Atuador* e *Detector* em função da frequência de excitação do *Atuador*. Pode-se observar que na condição  $\Omega_z = 0$  rad/s a resposta do deslocamento do *Detector* é nula, enquanto a resposta do *Atuador* apresentou um pico na sua frequência natural visto na Tabela 5-9.

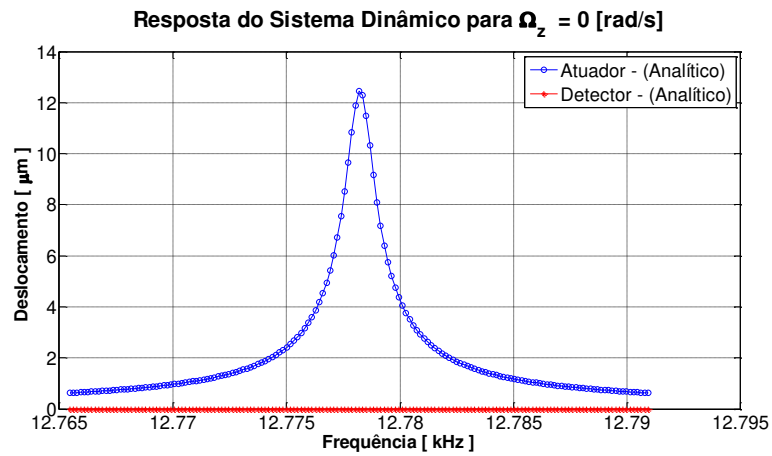


Figura 5-15: Resposta do Sistema em função da frequência para  $\Omega_z = 0$  rad/s.

Tabela 5-9: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para  $\Omega_z = 0 \xi\omega_0$  rad/s

Amplitude - $X_0$ [μm]	Amplitude - $Y_0$ [μm]	$f_x=f_y$ [kHz]
12.47	0	12.778

- Para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s

Na Figura 5-16 onde  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s pode-se observar que o comportamento da resposta do *Detector* deixou de ser nula e apresentou um pequeno aumento da amplitude na sua frequência natural devido à força de Coriolis gerada pela velocidade angular diferente de zero. o pico de resposta do *Atuador* diminuiu conforme Tabela 5-10.

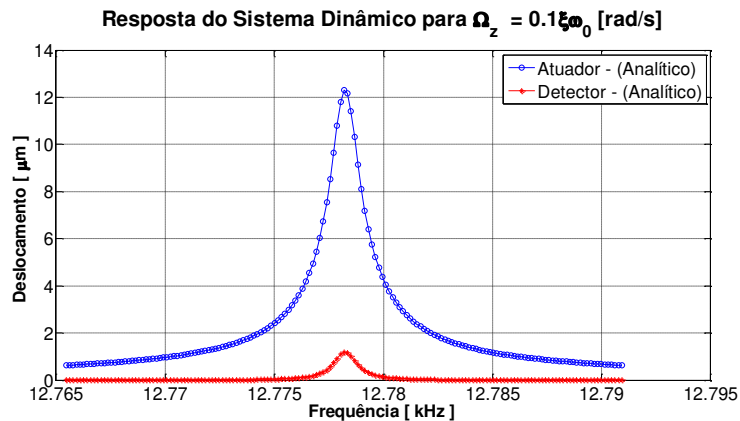


Figura 5-16: Resposta do Sistema em função da frequência para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s.

Tabela 5-10: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$

Amplitude - $X_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	Amplitude - $Y_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	$f_x=f_y$ [kHz]
12.34	1.2349	12.778

Os detalhes do comportamento das respostas observadas nas Figura 5-17 e Figura 5-18 nas condições  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s e  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s respectivamente, foram comentadas em detalhes na seção 4.1.2.

- Para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s

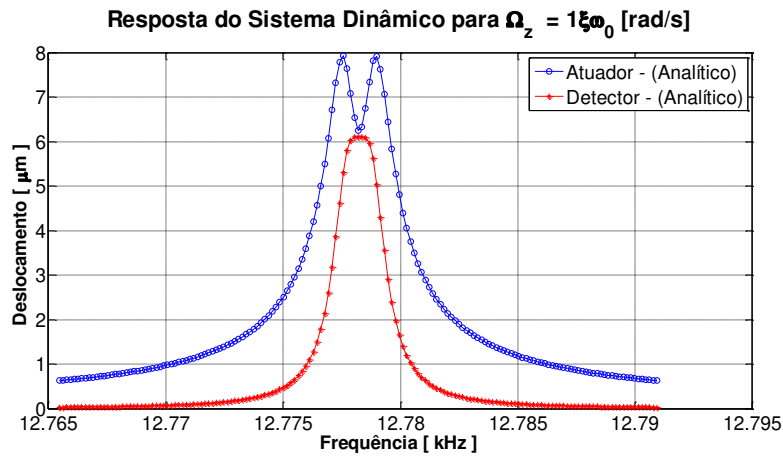


Figura 5-17: Resposta do Sistema em função da frequência para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s.

Tabela 5-11: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s.

Amplitude - $X_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	Amplitude - $Y_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	$f_x=f_y$ [kHz]
6.2364	6.2364	12.778

- Para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s

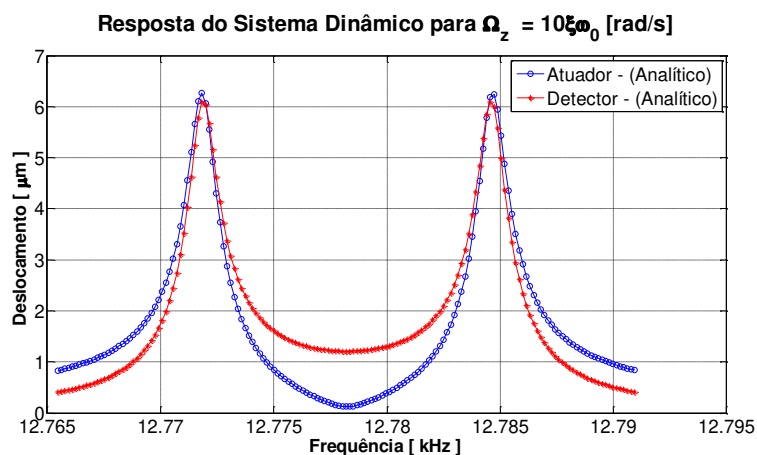


Figura 5-18: Resposta do Sistema em função da frequência para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ .

Tabela 5-12: Resultado da Resposta no domínio da frequência obtida para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$

Amplitude - $X_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	Amplitude - $Y_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	$f_x=f_y$ [kHz]
0.1235	1.2349	12.776

## 5.2 Simulação Numérica

Na simulação numérica do Giroscópio de NGUYEN construiu-se um modelo eletroestrutural no programa ANSYS, onde a massa de prova e as molas do giroscópio são elementos estruturais, e os comb-drivers e capacitores são os elementos elétricos. Um fluxograma descrevendo as etapas realizadas na simulação do ANSYS é mostrado na Figura 5-19 onde serão simulados três tipos de análises do giroscópio: estática, modal e harmônica.

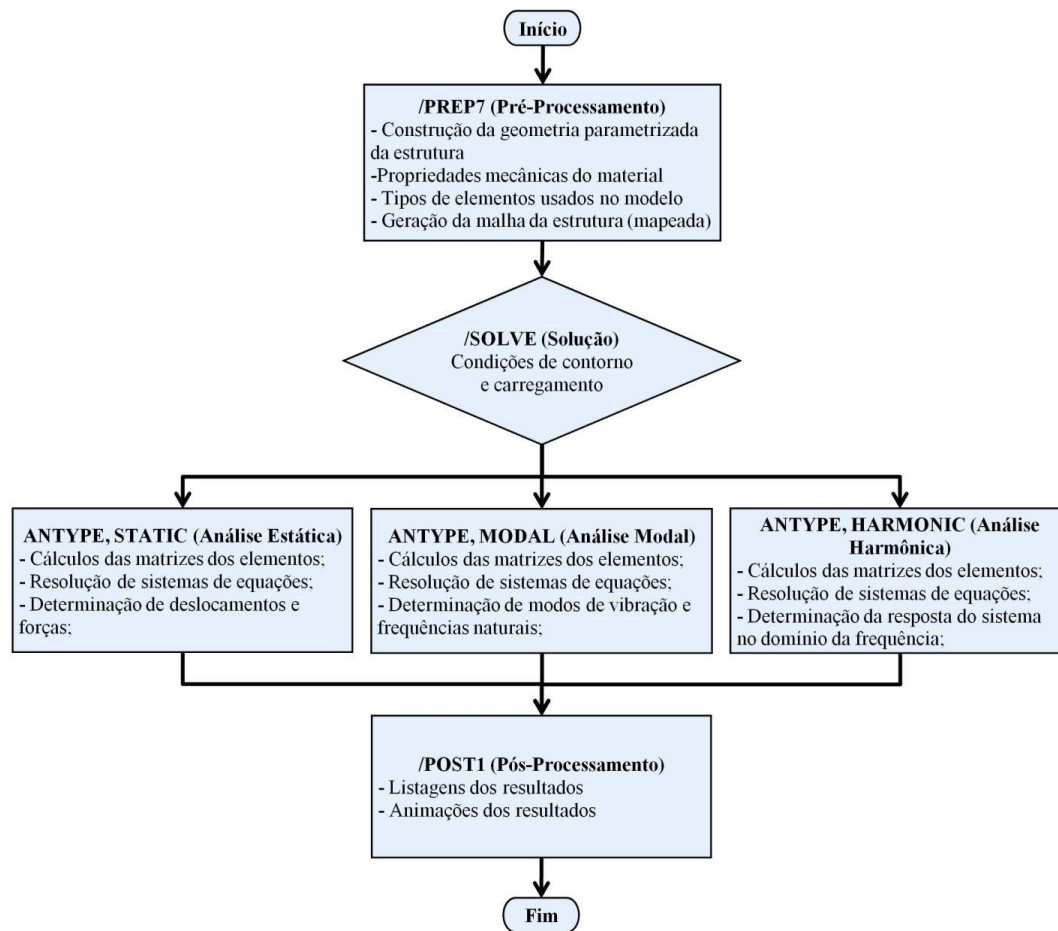


Figura 5-19: Fluxograma da Simulação Numérica do Giroscópio.

### 5.2.1 Pré-Processamento

Na simulação numérica do Giroscópio (NGUYEN, 2012), foi usado elementos de placa de tensão plana bidimensional (PLANE183) que possui 8 nós com 2 graus de liberdade de deslocamento por nó.. Para a malha do dispositivo foi feito um mapeamento de malha parametrizada. A parte estrutural do modelo utilizou uma malha mapeada com 13.244 elementos tipo PLANE183 e 46.385 nós. Nas simulações incluindo os elementos eletrostáticos (TRANS126), estes são incluídos como um único elemento de 2 nós nas direções do *Atuador* e *Detector*, substituindo os dispositivos físicos dos comb-drives e capacitores, respectivamente.. A Figura 5-20, Figura 5-21 e Figura 5-22 mostram o desenho da malha da parte estrutural



construída no ANSYS, a qual é uma representação simplificada do modelo físico real (Figura 5-1) mostrado no trabalho de NGUYEN.

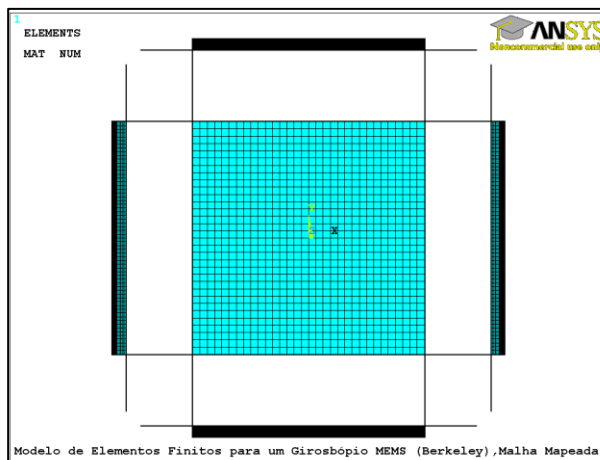


Figura 5-20: Vista total da malha mapeada do dispositivo.

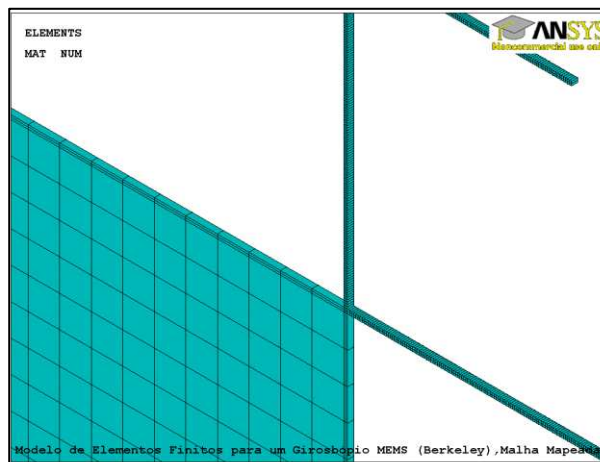


Figura 5-21: Detalhes da malha mapeada entre as flexões do *Atuador* e *Detector*.

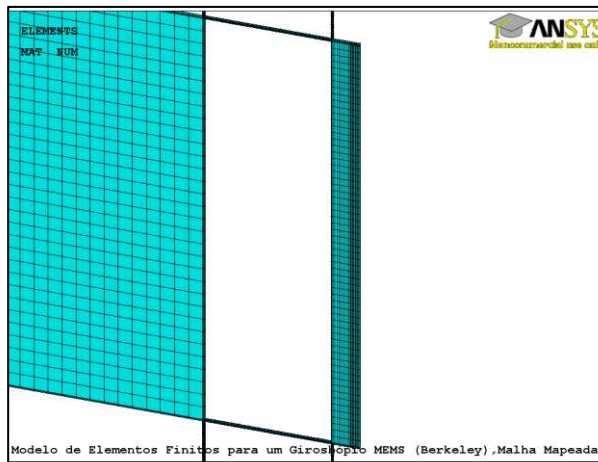


Figura 5-22: Detalhes da malha mapeada sobre o *Atuador*.

### 5.2.2 Análise Estática

O objetivo da análise estática neste trabalho foi obter os valores de deslocamento com a finalidade de determinar a rigidez linear na direção do *Atuador* e na direção do *Detector*. Foi aplicada uma força de  $1\mu\text{N}$  no nó na direção  $x$  (*Atuador*) e obteve-se um deslocamento no mesmo nó  $x = 0.084\ \mu\text{m}$ . Usando a Eq. (B.8) obtém-se a rigidez  $k_x = 11.90\ \mu\text{N}/\mu\text{m}$ . A Figura 5-23 mostra o deslocamento global da estrutura na direção de atuação.

Para a determinação da rigidez  $k_y$  aplicou-se uma força de  $1\mu\text{m}$  no nó e obteve-se um deslocamento no mesmo nó  $y = 0.068\ \mu\text{m}$ , a partir dos quais obteve-se a rigidez  $k_y = 14.65\ \mu\text{N}/\mu\text{m}$  na direção de detecção. A Figura 5-24 mostra o deslocamento global da estrutura na direção de detecção.

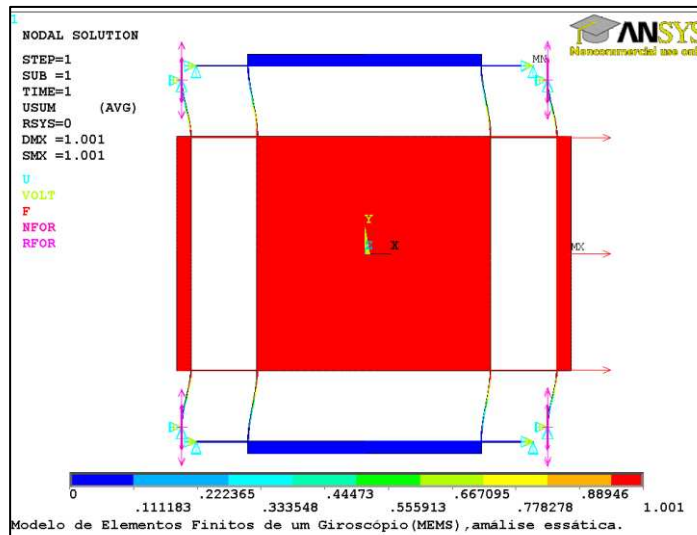


Figura 5-23: Condição de contorno aplicado na direção do Atuador (análise linear) incluindo as reações nas ancoras.

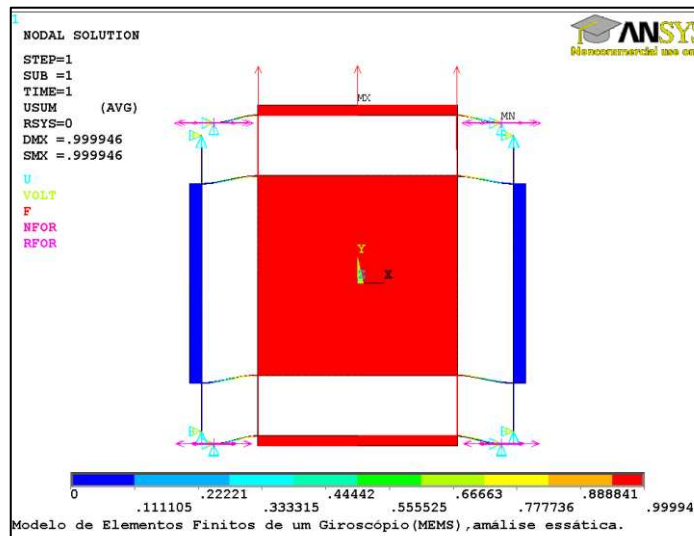


Figura 5-24: Condição de contorno aplicado na direção do modo *Detector* (análise linear)

Na Tabela 5-13 é mostrada uma comparação dos resultados de rigidez do modelo analítico com o modelo numérico onde foi apresentado erros menores que 9% indicando que as rigidezes dos modelo numérico e analítico representam o mesmo modelo físico. Os valores de rigidezes obtidos através do modelo analítico apresentam grande proximidade com os resultados do

modelo numérico . Pois como pode ser observado na Figura 5-23 e Figura 5-24 há flexão somente nas molas, assemelhando-se ao modelo analítico de massa concentrada .

Tabela 5-13: Comparativo da rigidez do modelo analítico e numérico.

Método	Analítico	Numérico	Erro [%]
Rigidez do Atuador - $k_x$ [ $\mu\text{N}/\mu\text{m}$ ]	12.60	11.97	5.00
Rigidez do Detector - $k_y$ [ $\mu\text{N}/\mu\text{m}$ ]	16.07	14.65	8.83

### 5.2.3 Análise Modal

Da simulação numérica foram extraídas as três primeiras frequências naturais do dispositivo:  $f_x = 12.522$  kHz,  $f_y = 14.318$  kHz e  $f_z = 31.161$  kHz. As correspondentes formas dos modos de vibrar da estrutura estão apresentadas nas Figura 5-25, Figura 5-26 e Figura 5-27 respectivamente. Considerando que os modos de interesse no projeto do giroscópio são os dois primeiros, deste em ponto em diante nos referiremos apenas a esses modos.

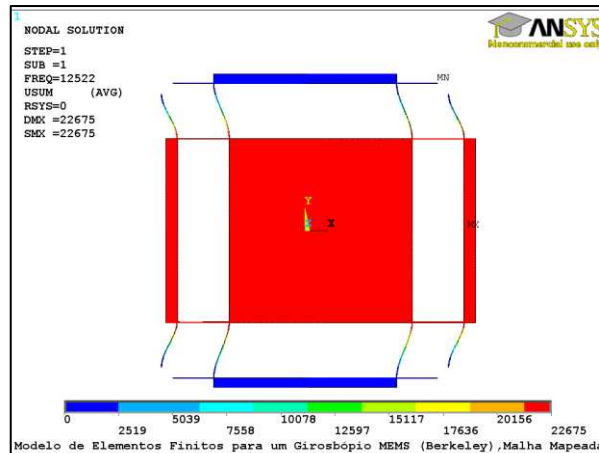


Figura 5-25: Primeira frequência de vibração do Atuador;  $f_x = 12.522$  kHz.

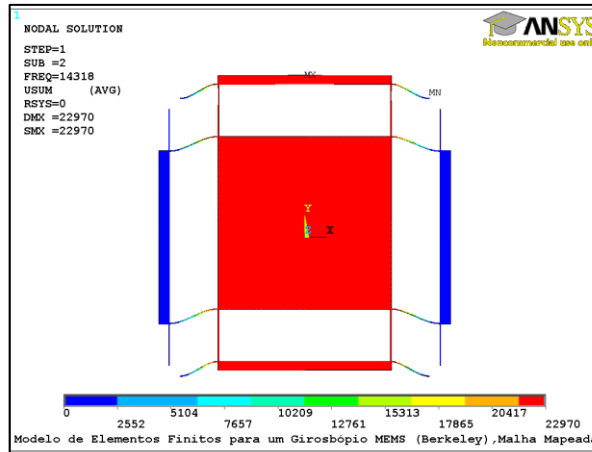


Figura 5-26: Segunda frequência de vibração do *Detector*;  $f_y = 14.318$  kHz

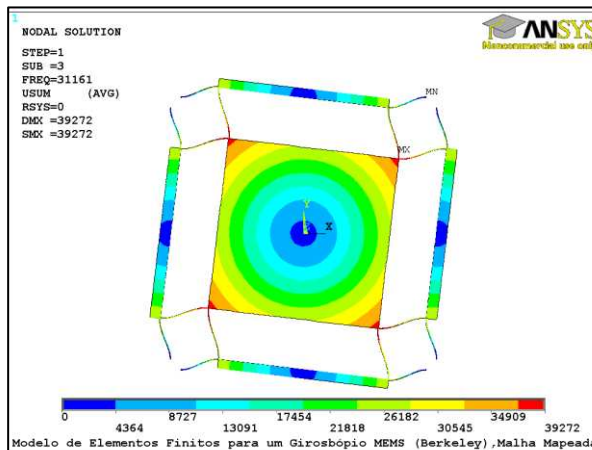


Figura 5-27: Terceira frequência de vibração.  $f_3 = 31.161$  kHz

Uma comparação das frequências  $f_x$  e  $f_y$  dos modelos analítico e numérico são mostradas na Tabela 5-14. Observa-se um erro muito pequeno entre os modelos analítico e numérico devido à proximidade das rigidezes encontradas na Tabela 5-13, tendo em vista que as massas totais desses modelos apresentam um erro inferior a 1,02 %.

Tabela 5-14: Comparativo dos resultados numérico e analítico das frequências do Giroscópio

Método	Analítico	Numérico	Erro [%]
Frequência do Atuador - $f_x$ [kHz]	12.778	12.522	1.77
Frequência do Detector - $f_y$ [kHz]	14.578	14.318	1.79

Como visto na seção 5.2.3, após obter as três frequências tornou-se necessário uma análise modal isolada do *Detector* para o casamento das frequências entre o *Atuador* e o *Detector*. Essa análise foi realizada com a inserção do elemento eletroestrutural *TRANS126* (Figura 5-28).

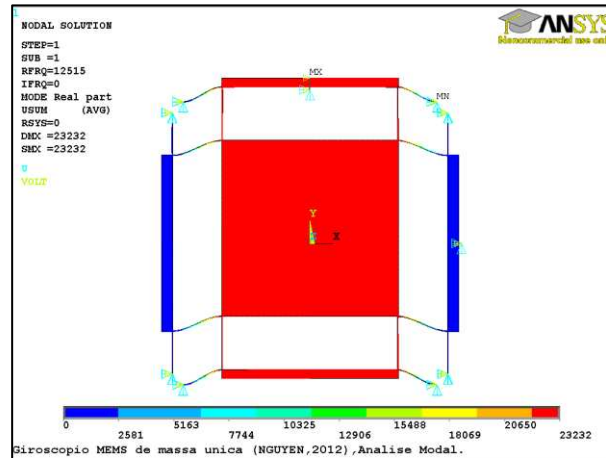


Figura 5-28: Ajuste de frequência do *Detector* através do elemento *TRANS126*.

Após a simulação pode ser visto na Figura 5-28 o casamento entre as frequências do *Atuador* com o *Detector*. O resultado obtido pela análise modal é mostrado na Tabela 5-15.

Tabela 5-15: Resultados dos parâmetros obtidos através da análise modal

Elemento	Rigidez Electrostática - $k_{ye}$ [ $\mu\text{N}/\mu\text{m}$ ]	Frequência do Atuador- $f_x$ [kHz]	Frequência do Detector - $f_y$ [kHz]
TRANS126	-3.5311	12.51	12.51

### 5.1.3 Análise Harmônica

Para analisar o problema do giroscópio de NGUYEN no contexto multifísico (eletromecânico) a primeira análise harmônica foi realizada inserindo o elemento TRANS126 na direção do *Atuador* e do *Detector*. Uma tensão elétrica contínua ( $V_{dcs} = 7,20\text{V}$ ) foi aplicada no elemento do *Detector* para inclusão da rigidez eletrostática e uma tensão elétrica contínua ( $V_{ded} = 2,5\text{V}$ ) foi aplicada no *Atuador* para excitar o sistema com uma força harmônica.

As análises harmônicas do giroscópio de NGUYEN foram simuladas para as mesmas condições de velocidades angulares realizada na Seção 0.

- Para  $\Omega_z = 0$  rad/s

A Figura 5-29 mostram as respostas em deslocamento ( $X_0, Y_0$ ) no domínio da frequência. Como esperado, verifica-se que na condição em que a velocidade angular  $\Omega_z$  é zero, não há força de Coriolis induzida na direção do *Detector*, por isso nenhuma resposta da amplitude  $Y_0$  é observada. A Figura 5-30, Figura 5-32 e a Figura 5-34 mostram uma comparação entre a resposta em frequência dos modelos analítico e numérico. Para o modelo do giroscópio de NGUYEN nota-se uma pequena diferença entre as frequências naturais do *Detector* e *Atuador* calculados por modelos diferentes devido a grande proximidade entre as rigidezes e as massas obtidas nos modelos analítico e numérico. Como esperado, as amplitudes máximas dos deslocamentos dos modelos analíticos e numéricos apresentaram boa concordância de resultados na primeira condição da velocidade angular  $\Omega_z$  como mostrados na Tabela 5-16, Tabela 5-17 , Tabela 5-18 e Tabela 5-19.

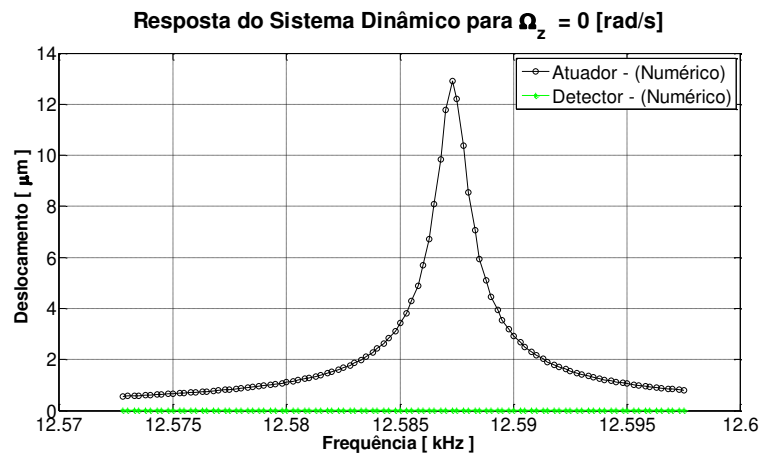


Figura 5-29: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para  $\Omega_z = 0$  rad/s

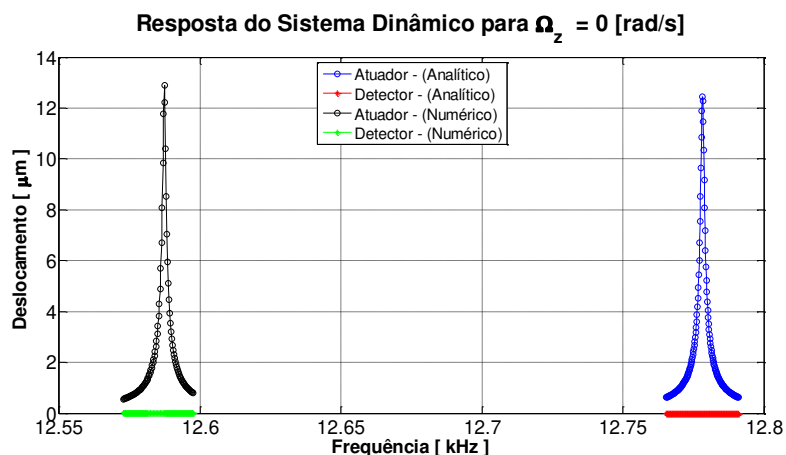


Figura 5-30: Comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para  $\Omega_z = 0$  rad/s

Tabela 5-16: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para  $\Omega_z = 0$  rad/s

Método	Analítico	Numérico	Erro [%]
Deslocamento do Atuador [ $\mu\text{m}$ ]	12.472	12.895	3.39
Deslocamento do Detector [ $\mu\text{m}$ ]	0	0	0

- Para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s.

Como esperado na Figura 5-31, para a velocidade angular  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s, existe a força de Coriolis induzida na direção do *Detector*, por isso apresenta um pequeno aumento da amplitude na sua frequência natural. A Tabela 5-17 mostra os resultados de deslocamentos para o *Atuador* e para o *Detector* onde os resultados das respostas numéricas e analíticas apresentam boa proximidade entre si.



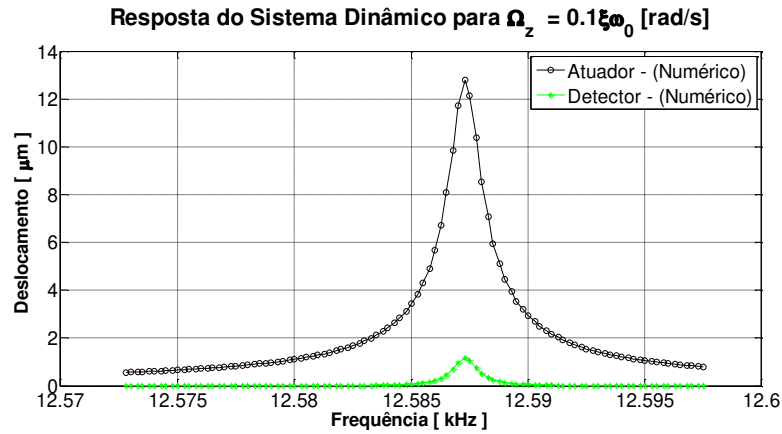


Figura 5-31: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s

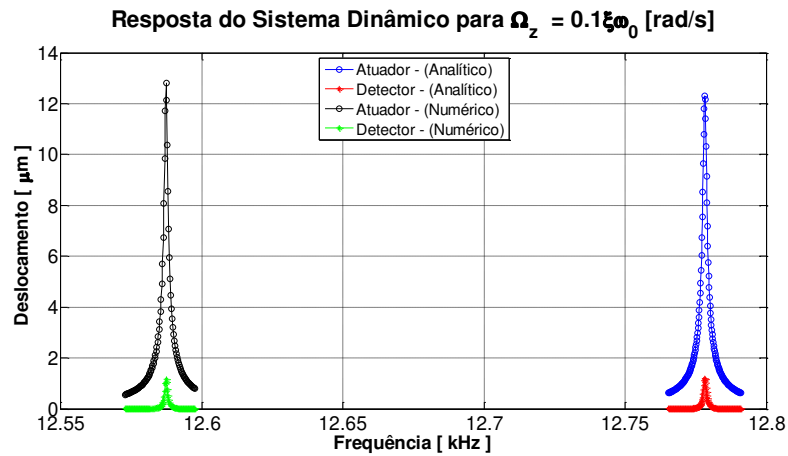


Figura 5-32: Comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s

Tabela 5-17: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para  $\Omega_z = 0.1\xi\omega_0$  rad/s

Método	Analítico	Numérico	Erro [%]
Deslocamento do Atuador [ $\mu\text{m}$ ]	12.349	12.793	3.62
Deslocamento do Detector [ $\mu\text{m}$ ]	1.234	1.172	5.02

- Para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s

Como esperado observa-se na Figura 5-33 a abertura na frequência natural em outras duas frequências, pois o mesmo efeito foi visto na simulação analítica descrito na Seção 4.1.2 através da Figura 5-17.

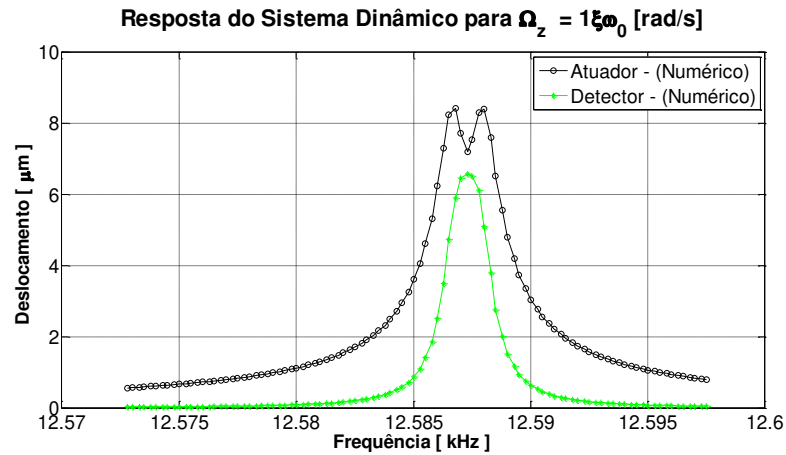


Figura 5-33: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s

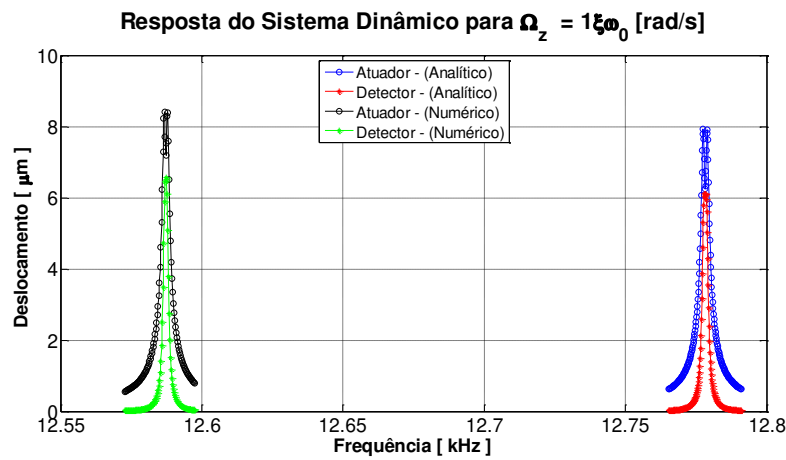


Figura 5-34: Comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s

Tabela 5-18: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para  $\Omega_z = 1\xi\omega_0$  rad/s

Método	Analítico	Numérico	Erro [%]
Deslocamento do Atuador pico 1 [ $\mu\text{m}$ ]	7.931	8.410	6.03
Deslocamento do Atuador pico 2 [ $\mu\text{m}$ ]	7.932	8.418	6.13
Deslocamento do Detector [ $\mu\text{m}$ ]	6.236	6.577	5.47

- para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$ .

Na Figura 5-35 observa-se abertura das frequências naturais do *Atuador* e do *Detector* em outras duas frequências naturais. O resultado obtido apresenta o mesmo comportamento da simulação analítica para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s

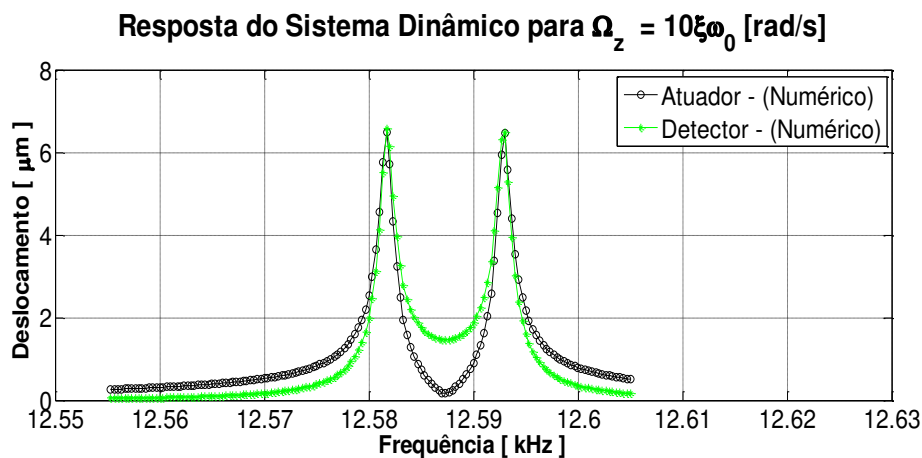


Figura 5-35: Resposta no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s

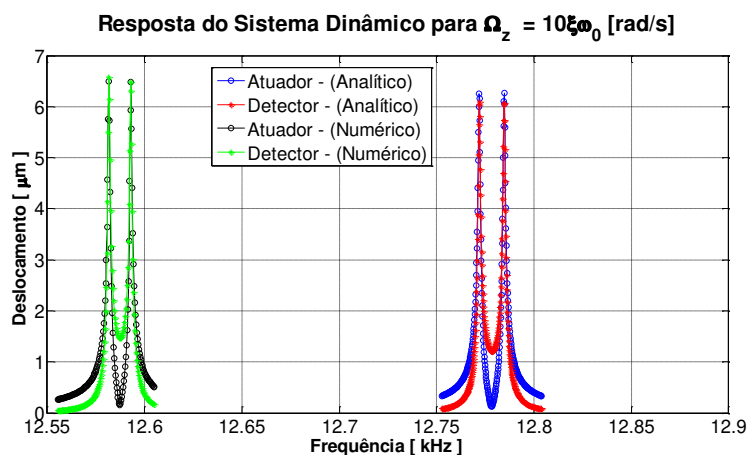


Figura 5-36: Comparativo das respostas no domínio da frequência em função das Amplitudes do Giroscópio de NGUYEN para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s

Tabela 5-19: Comparativo dos resultados da resposta do sistema dinâmico entre o método analítico e o método numérico para  $\Omega_z = 10\xi\omega_0$  rad/s

Método	Analítico	Numérico	Erro [%]
Deslocamento do Atuador pico 1 [ $\mu\text{m}$ ]	6.259	6.497	3.80
Deslocamento do Atuador pico 2 [ $\mu\text{m}$ ]	6.263	6.476	3.40
Deslocamento do Detector pico 1 [ $\mu\text{m}$ ]	6.089	6.570	7.89
Deslocamento do Detector pico 2 [ $\mu\text{m}$ ]	6.064	6.487	6.97

### 5.3 Comparativo dos Resultados

Abaixo uma tabela comparativa com os resultados obtidos pela simulação numérica e pela simulação analítica.

Tabela 5-20: Comparativo dos resultados Analíticos e Numéricos

<b>Parâmetros de Desempenho</b>	<i>Analítico</i>	<i>Numérico</i>	<b>Erro relativo(%)</b>
Massa na direção do Atuador $-M_d$	$1,954 \times 10^{-9} \text{ kg}$	$1,936 \times 10^{-9} \text{ kg}$	0,92
Massa na direção do Detector $-M_s$	$1,915 \times 10^{-9} \text{ kg}$	$1,866 \times 10^{-9} \text{ kg}$	2,55
Massa Total $-M_t$	$2,144 \times 10^{-9} \text{ kg}$	$2,146 \times 10^{-9} \text{ kg}$	0,12
Rigidez do Atuador (linear) $-k_x$	$12,6 \text{ N/m}$	$11,97 \text{ N/m}$	5,00
Rigidez do Detector (linear) $-k_y$	$16,07 \text{ N/m}$	$14,65 \text{ N/m}$	8,83
Rigidez Eletrostática do Detector $-k_{ye}$ Comparativo (TRANS126)	$-3,72 \text{ N/m}$	$-3,53 \text{ N/m}$	5,17
Rigidez Eletrostática do Detector $-k_y$ Comparativo (COMBIN14)	$-3,72 \text{ N/m}$	$-3,57 \text{ N/m}$	4,18
Frequência de Ressonância (Atuador) $-f_x$	$12,778 \text{ kHz}$	$12,519 \text{ kHz}$	2,02
Frequência de Ressonância (Detector) $-f_y$ Sem ajuste eletrônico de rigidez	$14,579 \text{ kHz}$	$14,317 \text{ kHz}$	1,79
Frequência de Ressonância (Detector) $-f_y$ Ajuste eletrônico de rigidez Comparativo(COMBIN14)	$12,778 \text{ kHz}$	$12521,80 \text{ kHz}$	2,08
Frequência de Ressonância (Detector) $-f_y$ Ajuste eletrônico de rigidez Comparativo(TRANS126)	$12,778 \text{ kHz}$	$12515,41 \text{ kHz}$	1,93

## 6. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Uma análise estática de diferentes tipos de suspensão elástica para giroscópios MEMS é apresentada e simulada no programa *MATLAB* e *ANSYS* e os seus resultados em termos de rigidez e deslocamento são comparados. Neste contexto foram analisados os comportamentos lineares e não lineares de molas na forma de uma viga simples, dobrada e duplamente dobrada. Os resultados obtidos confirmam aqueles já reportados por (ALPER, 2005), os quais demonstram que os modelos na forma de viga dobrada e duplamente dobrada, diferentemente da viga simples, apresentam capacidade de grandes deslocamentos mantendo a rigidez com comportamento linear. Na simulação do modelo analítico e numérico dos giroscópios encontrados nas literaturas de ACAR e NGUYEN foram utilizadas molas de vigas simples. A partir das simulações dos modelos de molas pode-se concluir que para o desenvolvimento de novos projetos de giroscópio, melhores respostas poderão ser obtidas com a inclusão de molas de viga dobrada e duplamente dobrada.

Na simulação analítica dinâmica eletromecânica de um giroscópio com dois graus de liberdade implementada em um programa *MATLAB/Simulink* foram obtidas as respostas em deslocamento nos domínios do tempo e da frequência. Em geral, os resultados obtidos apresentaram comportamento e valores similares àqueles encontrados na literatura (NGUYEN, 2012) e (ACAR, 2001). Contudo, para as velocidades angulares  $\Omega_z > 1\xi\omega_0$  rad/s, observou-se um comportamento de abertura da frequência natural do *Atuador* e *Detector* em duas outras frequências naturais. Este fenômeno não foi relatado em nenhuma das literaturas revistas sobre o assunto. Talvez em virtude dos giroscópios MEMS serem construídos para operar em velocidades angulares bem baixas (FABBRI, 2012). Este fenômeno é observado também na dinâmica de rotores incluindo efeito giroscópio (LALANNE e FERRARIS, 1998), e mostra que para um sistema rotativo sujeito ao efeito das forças de Coriolis o aumento da velocidade angular do sistema gerará o surgimento de duas frequências naturais denominadas frequência natural de precessão direta e retrógrada, cuja distância entre elas aumenta com a velocidade angular.

Uma abordagem da análise eletromecânica do giroscópio usando o Método dos Elementos Finitos (MEF) do programa comercial *ANSYS* é apresentada. Neste contexto, os giroscópios de (ACAR, 2001) e de (NGUYEN, 2012) são analisados. Análises estática, modal e harmônica são

realizadas e os resultados comparados com aqueles obtidos com os modelos analíticos. A resposta harmônica para o modelo eletromecânico completo de MEF não foi realizada devido à impossibilidade de rodar análises harmônicas incluindo os elementos de Atuação e Detecção simultaneamente. Para superar esta dificuldade o elemento Detector foi substituído por um elemento passivo (uma mola).

Os resultados obtidos no giroscópio de NGUYEN apresentaram boa concordância entre os modelos. Contudo, os resultados com o giroscópio de ACAR apresentaram erros significativos entre os modelos. Uma observação mais profunda dos resultados demonstraram que a geometria usada no modelo de MEF a qual é mesma do trabalho de ACAR, apresenta flexibilidades em regiões que deveriam ser rígidas. Este fato leva os dois modelos a apresentarem rigidezes bastante diferentes comprometendo todos os outros resultados obtidos nas análises. Acredita-se que uma modificação da geometria que evite tais flexibilidades minimizará os erros levando a resultados mais próximos entre os modelos.

Como sugestão de trabalhos futuros sugere-se:

- Necessidade de explorar no modelo de MEF, o dispositivo de Detecção para uma simulação completa eletromecânica;
- Considerando que os giroscópios MEMS são dispositivos em escala reduzida e que estão sujeitos a influencia da viscosidade do ar, seria interessante avaliar a influencia deste na análise dinâmica no domínio eltrofluidoestrutura.
- Desenvolvimento de um modelo físico real de um giroscópio para aplicações espaciais incluindo molas do tipo dobrada, duplamente dobrada e comparação do desempenho com os modelos simulados para efeito de validação/correção dos mesmos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACAR, C. **Four Degrees of Freedom Micromachined Gyroscope**. Mechanical and Aerospace Engineering, University of California. Irvine, p. 62. 2001. Dissertação(Mestrado).

ACAR, C.; SHKEL, A. An Approach for Increasing Drive-Mode Bandwidth of MEMS Vibratory Gyroscopes. **Solid state Sensor and Actuator Workshop**, Junho 2004.

ACAR, C.; SHKEL, A. Inherently Robust Micromachined Gyroscope with 2-DOF Sense-Mode Oscillator. **Journal of Microelectromechanical Systems**, v. 15, n. 2, p. 380-387, 2005.

ACAR, C.; SHKEL, A. **MEMS Vibratory Gyroscopes Structural Approaches to Improve Robustness**. 1ª. ed. [S.l.]: Springer, 2009.

ALPER, S. E. **MEMS Gyroscopes for tactical-grade inertial measurement applications**. The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University, Middle East Technical University. [S.l.], p. 331. 2005. Tese de Doutorado.

ALPER, S. E.; AKIN, T. A Single-Crystal Silicon Symmetrical and Decoupled MEMS Gyroscope on an Insulating Substrate. **Journal of Microelectromechanical Systems**, v. 14, n. 4, p. 707-717, Agosto 2005.

BARBOUR, ; SCHIMIDT, G. Inertial Sensor Technology Trends. **IEEE Sensors Journal**, v. I, n. 4, p. 332, Dezembro 2001.

BERNSTEIN, J. et al. A Micromachined Comb-Drive Tuning Fork Rate Gyroscope. **Proc.IEEE Microelectromechanical Systems**, Fort Lauderdale,Florida, p. 143-148, Fevereiro 1993.

BITTENCOURT, M. L. **Fundamentos e ilustrações usando o programa MATLAB**. [S.l.]: Unicamp, 2009.

CARVALHO, G. D. **Influência da Modelagem dos Componentes de BIAS instabilidade dos sensores inerciais no desempenho do navegador integrado SNI/GPS**. Departamento de Engenharia Elétrica, Instituto Militar de Engenharia. [S.l.], p. 146. 2011. Tese de Mestrado.

CHOLLET, F.; LIU, H. **A (not so) short introduction to MEMS**. Versão 5.0. ed. [S.l.]: Creative Commons, 2012.

CHONG, K. P.; BORESI, A. P. **Elasticity in engineering mechanics**. 2ª. ed. New York: NY:John Wiley, 2000. 615 p.

CONLIN, M. F. The Popular and Scientific Reception of the Foucault Pendulum in the United States. **Chicago Journals, History of Science Society**, Chicago, v. 90, n. 2, p. 181-204, Junho 1999.

DAMRONGSAK, B. **Development of Micromachined Electrostatically Suspended Gyroscope**. Faculty of Engineering, Science and Mathematics School of Electronics and Computer Science;University of Southampton. [S.l.], p. 253. 2009. Tese de Doutorado.



DELIGEORGES, S. **Foucault et ses Pendules**. [S.l.]: Éditions Carré, 1990. 55 p.

DRAPER, L. **Explorations: Engineering Solutions to Problems of National Significance**. Washington, p. 16. 2007.

EDU, I. R.; OBREJA, R.; GRIGORIE, T. L. Current technologies and trends in the development of gyros used in navigation applications: a review. **CIT'11 Proceedings of the 5th WSEAS international conference on Communications and information technology**, Wisconsin, p. 63-68, 2011. ISSN 978-1-61804-018-3.

EINWOEGERER, W. **Mecanização de central de navegação inercial com dados a partir da integração de IMU MEMS e receptor GPS**. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, p. 145. 2009. Dissertação de Mestrado.

EMINOGLU, B. **Control Eletronics for MEMS Gyroscopes ans its implementation in a CMOS Technology**. The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University, Electrical and Electronics Engineering, Middle East Technical University. 129. 2011. Tese de Mestrado.

FABBRI, M. **Modelo Dinâmico e Oitimizção de um Giroscópio MEMS Tipo Diapasão**. [S.l.]. 2012.

FEDDER, G. K. **Simulation of Microeletromechanical Systems**. Engineering Electrical and Computer Science, University of California. Berkeley, p. 319. 1994. Tese de Doutorado.

FEDDER, G. K.; XIE, . Integrated Microeletromechanical Gyroscopes. **Journal of Aerospace Engineering**, 16, Abril 2003. 65-75.

FORHAN, N. E. A. **Giroscópios MEMS**. INPE(Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais). São José dos Campos, p. 84. 2010. (INPE-16671-RPQ/848).

GEORGE, T. Overview of MEMS/NEMS technology development for space applications at NASA/JPL. **Proceedings of SPIE**, v. 5116, p. 136, 2003.

GESCHKE, O.; KLANK, H.; TELLEMAN, P. **Microsystem Engineering of Lab-on-a-Chip Devices**. [S.l.]: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004. ISBN 9783527307333.

GREWAL, M. S. **Global posiotining systems, inertial navigation, and integration**. 2ª. ed. New Jersey: Wiley Interscience, v. I, 2007. 525 p.

HALL, J. J. Electronics effects in the constants of n-type silicon. **Physical Review**, v. 161, n. 3, p. 756-761, Setembro 1967.

HOPCROFT, M. A.; NIX, W. D.; KENNY, T. W. What is the Young's Modulus of Silicon. **Journal of Microeletromechanical Systems**, v. 19, n. 2, Abril 2010.

HOROWITZ, R.; PARK, S. Adaptive Control for Z-axis MEMS Gyroscopes. **Proceedings of the American Control Conference**, Arlington, Junho 2001.

HSIEH, J.; CHEN, W.-C.; FANG, W. Toward the Micromachined Vibrating Gyroscope using(111) Silicon Wafer Process. **Proceedings of SPIE**, v. 4557, 2001.

- JONGPAL, K.; CHO, D.-I.; MULLER, S. Why is(111) Silicon a better mechanical material for MEMS? **Digest Transducers'01**, p. 662, 2001.
- KREMPL, E.; RUBIN, D.; LAI, W. M. **Introduction to continuum mechanics**. 4ª. ed. [S.l.]: [s.n.], 2010. 520 p.
- LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotor Dynamics Prediction in Engineering**. 2ª. ed. [S.l.]: Wiley, 1998. 266 p.
- LINDER, C. et al. Surface Micromachining. **Journal of Microelectronics and Microengineering**, v. 2, n. 3, p. 122-132, Setembro 1992. ISSN 0960-1317.
- MADOU, M. **Fundamentals of Microfabrication: the science of miniaturization**. 2ª. ed. [S.l.]: Boca Raton, 2002. 723 p.
- MAY, M. B. Inertial Navigation and GPS. **GPS WORLD**, p. 56-57, September 1993.
- NGUYEN, C. <http://inst.eecs.berkeley.edu/~ee245/fa12/index.html>. **Berkeley, University of California**, 2012. Disponível em: <<http://inst.eecs.berkeley.edu/~ee245/fa12/homework/hw6.ee245.v5.pdf>>. Acesso em: Fevereiro 2013.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 1: Mecânica**. 4ª. ed. [S.l.]: Edgar Blücher, v. I, 2002.
- OSIANDER, ; DARRIN, M. A. G.; CHAMPION, L. **MEMS and Microstructures in Aerospace Applications**. [S.l.]: CRC Taylor & Francis, 2006. ISBN 0-8247-2637-5.
- PERLMUTTER, M.; ROBIN, L. High-Performance, Low cost Inertial MEMS: a Market in motion! **Position Location and Navigation Symposium(PLANS), IEEE/ION**, p. 225-229, Abril 2012. ISSN 978-1-4673-0385-9.
- PERSSON, A. How do we understand the Coriolis Force? **Bulletin of the American Meteorological Society**, v. 79, n. 7, p. 1373-1385, Julho 1998.
- PETERSEN, K. E. Silicon as a Mechanical Material. **Proceeding of the IEEE**, v. 70, n. 5, p. 420-457, Maio 1982.
- PHANI, A. S. et al. Modal Coupling in Micromechanical Vibratory Rate Gyroscope. **IEEE Sensors Journal**, 6, n. 5, Outubro 2006. 1144-1152.
- PIERSON, H. O. **Handbook of Chemical Vapor Deposition(CVD)**. 2ª. ed. New York: Noyes Publications / William Andrew Publishing, LLC, 1999. 436 p. ISBN 0-8155-1432-8.
- PRIKHODKO, I. P. et al. Foucault pendulum on a chip: Rate integrating silicon MEMS gyroscope. **Sensor and Actuators A: Physical**, 177, 2012. 67-68.
- RAO, S. S. **Vibration of Continuous Systems**. New Jersey: Wiley, 2007. 720 p. ISBN 0470117869.

- RODRIGUES, J. R. **Modelagem e Simulação de Microacelerômetro Capacitivo**. Área de Sistemas Aeroespaciais e Mecatrônica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica. São José dos Campos, p. 219. 2011. Tese de Mestrado.
- SANDIA LABS, N. Sandia National Laboratories. **http:**  
//mems.sandia.gov/gallery/images\_microengines.html. Disponível em:  
<[http://mems.sandia.gov/gallery/images\\_microengines.html](http://mems.sandia.gov/gallery/images_microengines.html)>. Acesso em: 15 Fevereiro 2013.
- SANTOS, I. F. **Dinâmica de Sistemas Mecânicos**: modelagem, simulação, visualização, verificação. [S.l.]: Makron, 2001. 272 p.
- SAUKOSKI, . **System and Circuit Design for a Capacitive MEMS Gyroscope**. Department of Micro and Nanosciences, Helsinki University of Technology. Helsinki, p. 279. 2008. Tese de Doutorado.
- SENTURIA, S. D. **Microsystem Design**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 689 p.
- SESHIA, A. **Integrated Mechanical Resonant Sensor for Inertial Measurement Systems**. Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley. [S.l.], p. 140. 2002. Tese de Doutorado.
- SHEA, R. Reliability of MEMS for space applications. **Proc of SPIE**, v. 6111, 2006.
- SHKEL, A. M. Type I and Type II Micromachined Vibratory Gyroscopes. **Position, Location and Navigation Symposium 2006 IEEE/ION**, p. 586-593, Abril 2006.
- SOCIETY, T. R. **The Royal Society**, 2013. Disponível em: <<http://royalsociety.org/awards/copley-medal/>>. Acesso em: 24 Fevereiro 2013.
- TANG, C. Micromechanical Devices at JPL for Space Exploration. **Aerospace Conference IEEE**, v. I, p. 461-470, Março 1998.
- TANG, W. C. **Electrostatic comb drive for resonant sensor and actuator applications**. Dept. of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley, Berkeley, California, p. 229. 1990. Tese de Doutorado.
- TATSCH, P. J. **Oficina de Microfabricação (Construção de CI's MOS) - Capítulo 11**. Campinas: Unicamp, 2006.
- VITTORIO, S. A. MicroElectromechanical Systems (MEMS). **ProQuest Information and Learning and CSA**, 2001. Disponível em: <<http://www.csa.com/discoveryguides/mems/overview.php>>. Acesso em: 24 Abril 2013.
- WONG, W. C.; AZID, I. A.; MAJLIS, B. Y. Theoretical Analysis of Stiffness Constant and Effective Mass for a Round-Folded Beam in MEMS Accelerometer. **Journal of Mechanical Engineering**, v. 6, n. 57, p. 517-525, Março 2011.
- WORTMAN, J. J.; EVANS, R. A. Young's modulus, shear modulus, and Poisson's ratio in silicon and germanium". **Journal Applied Physics**, v. 36, p. 153-156, Janeiro 1965.

YAZDI, ; AYAZI, F.; NAJAFI, K. Micromachined Inertial Sensors. **Proc.IEEE**, v. 86, n. 8, p. 1640-1659, Agosto 1998.

YOUNG, W. C.; BUDYNAS, R. G. **Roark's Formulas for Stress and Strain**. 7<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2001. 854 p. ISBN 0-07-072542-X.

# APÊNDICE A – FORÇA DE CORIOLIS

## A.1 - Força de Coriolis

Forças devidas ao efeito de rotação são conhecidas como forças fictícias e são popularmente conhecidas no meio acadêmico como força centrífuga e força de Coriolis. Esta última, nomeada pelo matemático francês Gaspard Gustave de Coriolis (1792-1843) que a descreveu através da transformação de coordenadas utilizando como base para sua formulação as equações de Newton. Em 1835, Coriolis publicou em seu artigo intitulado “*Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*” a primeira descrição matemática sobre estudos envolvendo a força de Coriolis (PERSSON, 1998). Esta força fictícia parece atuar sobre um objeto somente quando o movimento é observado em um referencial não inercial de rotação. O efeito da força de Coriolis foi notado experimentalmente pelo físico e astrônomo Jean Leonard Léon Foucault através do objeto chamado de “Pêndulo de Foucault”, constituído basicamente por uma esfera metálica e um fio extenso. O físico francês conseguiu demonstrar experimentalmente em 1851 o efeito da rotação da Terra (CONLIN, 1999). Na Figura A -1 uma ilustração do experimento realizado por Foucault.

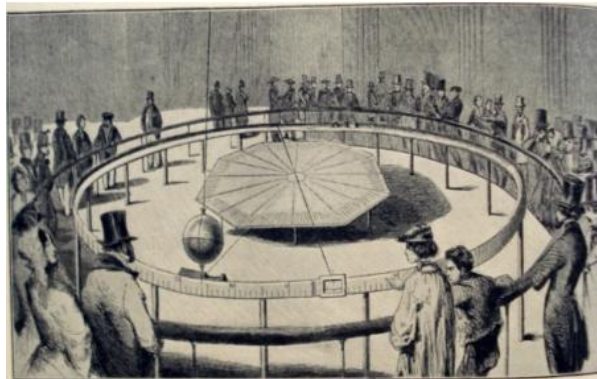


Figura A -1: Experiência do Pêndulo de Foucault, no *El Pantéon*, de Paris em 1851 (DELIGEORGES, 1990)

Definindo  $\Omega_z$  como a velocidade angular, representaremos na Figura A-2 o efeito da trajetória de uma partícula devido o efeito da força de Coriolis

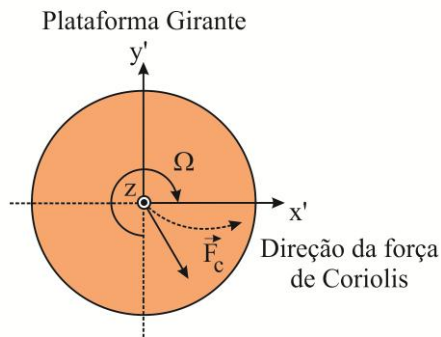


Figura A-2: Partícula em um disco girante sob o efeito da força de Coriolis

Baseado no conceito da força de Coriolis extraído da referência (NUSSENZVEIG, 2002) poderá ser compreendido o efeito dessa força. Inicialmente considera-se a condição em que uma partícula esteja sobre a plataforma girante e que essa plataforma possua uma velocidade angular  $\omega$  constante. Será assumido que a partícula que está sobre a plataforma girante poderá ter dois tipos de velocidades lineares constantes, essas velocidades são expressas pela velocidade total tangencial ou velocidade total radial. A partir dessas velocidades será verificado o efeito da Força de Coriolis nesses dois casos no referencial não inercial **A**. Para tal verificação, serão introduzidos os vetores unitários  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  nas direções radial e tangencial respectivamente para os referenciais inerciais e não inerciais.

### A.1.1 Velocidade Radial

Para uma partícula com velocidade puramente radial no referencial inercial **I** dada por:  $\mathbf{v}' = v_r' \mathbf{x}$  verifica-se que embora no referencial **I** o movimento seja puramente radial, esta partícula terá componentes tangenciais quando visto no referencial **A** como mostra a Figura A-3.

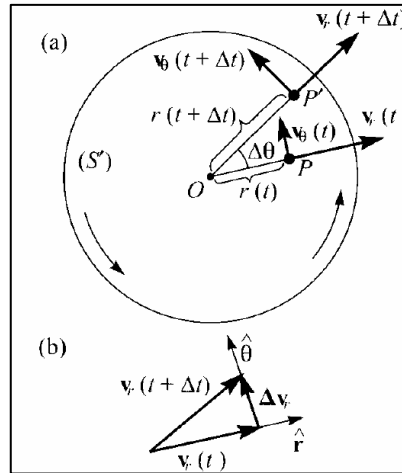


Figura A-3: Componentes das velocidades no disco girante. (NUSSENZVEIG, 2002)

Logo, além da aceleração centrípeta (radial), haverá no referencial **A** uma aceleração tangencial  $a_t$  associada a esse movimento. Uma vez que a partícula percorre o raio do disco girante, caminhando para a periferia do disco, sua velocidade tangencial de arrastamento  $v_t = \omega r$  irá aumentar. Para um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a distância ao centro aumenta de  $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$  e  $\Delta v_t = \omega(r + \Delta r) - \omega r = \omega \Delta r$ . Dividindo ambos os lados por  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta v_t}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (\text{A.1})$$

Tomando o limite ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) da Eq(A.1) acima:

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \omega \frac{dr}{dt} = \omega v_r \quad (\text{A.2})$$

Em um intervalo  $\Delta t$  a plataforma girante irá possuir uma variação angular expressa por  $\Delta\theta = \omega\Delta t$  mudando a direção de  $v_r$ . Conforme a Figura A-3 mostra,  $\Delta v_r = v_r(t + \Delta t) - v_r(t)$  é um vetor com direção  $x'$  e de intensidade  $\Delta v_r = v_r\Delta\theta$  o que dá uma contribuição adicional expressa por :

$$\frac{\Delta v_r}{\Delta t} = v_r \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega v_r \quad (\text{A.3})$$

Somando as duas contribuições, obtemos a aceleração tangencial, expressa por:

$$a_t = 2 \omega v_r = \omega v_r' \quad (\text{A.4})$$

O movimento radial uniforme em  $S'$  com velocidade  $v_r'$  transforma-se, portanto visto de  $S$ , em um movimento acelerado, com aceleração:

$$a = -\omega^2 r x' + 2\omega v_r' y \quad (\text{A.5})$$

### A.1.1 Velocidade Tangencial

Para o caso onde a velocidade tangencial é total, temos que para o referencial **I** essa velocidade é definida por  $v_t'$ , contudo para o referencial **A**, sua velocidade tangencial será expressa por:

$$v_t = v_t' + \omega r \quad (\text{A.6})$$

devida à velocidade  $\omega$  de rotação da plataforma girante. Ao definirmos a massa da partícula  $m$ , a força centrípeta dessa partícula no referencial **A** será expressa por:



$$F = -\frac{mv_t^2}{r}x \quad (\text{A.7})$$

Substituindo a Eq(A.6) na Eq(A.7) , teremos:

$$F = -m \left[ \frac{(v_t' + \omega r)^2}{r} \right] x \quad (\text{A.8})$$

Expandindo os termos da Eq(A.8) acima teremos:

$$F = -m \left[ \frac{v_t'^2}{r} + 2\omega v_t' + \omega^2 r \right] x \quad (\text{A.9})$$

Tomando:

$$F' = ma' = -m \frac{v_t'^2}{r} \quad (\text{A.10})$$

e expressando:

$$F'' = (2\omega v_t' + \omega^2 r)x \quad (\text{A.11})$$

Logo para Eq(A.9), teremos:

$$F = F' + F''$$

Onde  $F''$  representa a soma da força Centrífuga definida por  $\omega^2 r$  e da força de Coriolis dada por  $2\omega v_t'$ .

Através da força de Coriolis obtida tanto pela velocidade radial  $v_r$ , como pela velocidade tangencial  $v_t$  podemos concluir que, a força de Coriolis é independente da posição da partícula sobre o disco girante, sua força é diretamente proporcional á velocidade da partícula e a velocidade angular  $\omega$  do disco girante.

## APÊNDICE B – MODELOS DE SUSPENSÃO DO GIROSCÓPIO

Para a medição da velocidade angular é necessário obter respostas da variação das placas dos capacitores e essa variação é fornecida através da resposta da amplitude  $Y_0$  do detector. Com base na Eq (2.24) obteve-se a relação linear entre as amplitudes  $Y_0$  e  $X_0$  onde verificou-se que para grandes deslocamentos na direção do *Atuador* haverá maiores deslocamentos na direção do *Detector*. Através desse capítulo será feito um estudo mais detalhado para maiores amplitudes das flexões na direção do modo *Atuador*.

### B.1 Flexões da viga engastada-guiada

Para o giroscópio vibrante linear microusinado, o sistema de flexões caracterizado por vigas simples de silício, são geralmente projetadas para serem flexíveis na direção do deslocamento desejado, entretanto para outras direções, o módulo da constante elástica  $k$ , deverá apresentar maior rigidez. Como exemplo de viga simples utilizada para flexões na direção  $x$  (modo *Atuador*) e direção  $y$  (modo *Detector*) do giroscópio de massa única, conforme a Figura B-1 temos como condição de contorno imposta para a flexão desta viga.

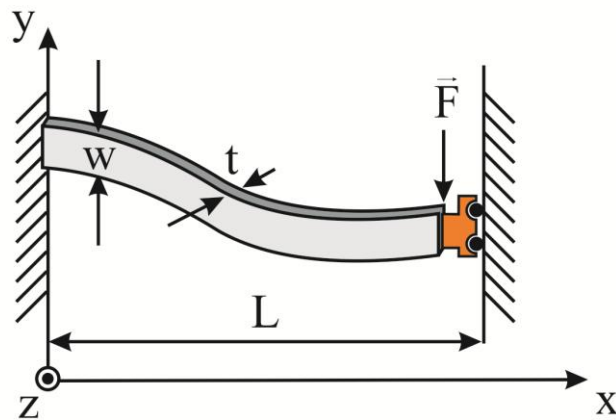


Figura B-1: Modelo de flexão guiada de uma viga única de Silício.

Dada a ilustração das condições de contorno para o deslocamento da extremidade de uma viga simples guiada na direção  $y$ , as condições iniciais impostas pelo problema são dadas pela Eq. (B.1):

$$\begin{cases} y(0) = 0; y(L) = Y_0 \\ \frac{dy}{dx}(0) = \frac{dy}{dx}(L) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Através das condições de contorno da Eq.(4.1), expressamos a função do deslocamento da extremidade livre da viga simples, como:

$$y(x) = \frac{F_y}{12(EI_y)} (3Lx^2 - 2x^3) \quad (\text{B.2})$$

Utilizando a condição de contorno  $y(L) = Y_0$ , substituindo na Eq. (B.2):

$$Y_0 = \frac{F_y L^3}{12(EI_y)} \quad (\text{B.3})$$

Rearranjando os termos da equação acima:

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{12EI_y}{L^3} Y_0 \\ k_y &= \frac{12EI_y}{L^3} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Logo para a condição de contorno representada na Figura B-1, definiremos  $L$  (comprimento) de uma viga única na direção  $x$ ,  $w$ (largura) na direção  $y$  e finalmente  $h$ (espessura) na direção  $z$ , então o momento de inércia  $I_y$  e  $I_z$  da área da secção transversal da viga representado na Figura B-2:

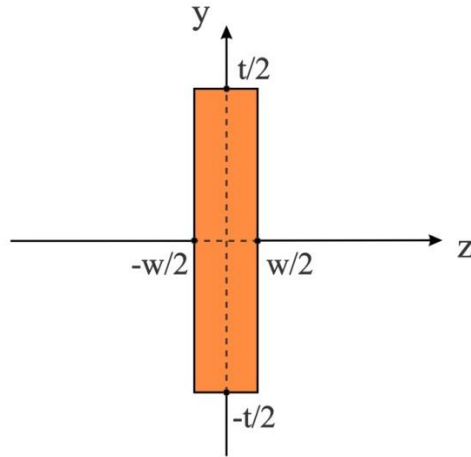


Figura B-2: Área da secção transversal A de uma viga única.

Poderão ser definidos por:

$$I_y = \frac{tw^3}{12} \quad (\text{B.5})$$

$$I_z = \frac{wt^3}{12} \quad (\text{B.6})$$

Consequentemente a rigidez translacional para o movimento na direção  $y$  ou na direção  $z$  da viga única será dada por:

$$k_{y,z} = \frac{12EI_{y,z}}{L^3} \quad (\text{B.7})$$

O deslocamento axial é encontrado diretamente da lei de Hooke da Eq. (B.8):

$$F_x = k_x x \Rightarrow k_x = \frac{Etw}{L} \quad (\text{B.8})$$

Substituindo as Eq. (B.5) e Eq. (B.6) na Eq. (B.7), a rigidez para o deslocamento na direção  $y$  ou na direção  $z$ , poderá ser expressa através das equações Eq. (B.9) e Eq. (B.10):

$$k_y = Et \left( \frac{w}{L} \right)^3 \quad (\text{B.9})$$

$$k_z = Ew \left( \frac{t}{L} \right)^3 \quad (\text{B.10})$$

A partir dos resultados das equações analíticas para a rigidez estrutural do modelo de uma viga única, podemos obter as razões da rigidez  $\frac{k_z}{k_y} = \left( \frac{t}{w} \right)^2$ ,  $\frac{k_x}{k_y} = \left( \frac{L}{w} \right)^2$  na direção do modo *Detector*, assim como poderemos também verificar as razões  $\frac{k_z}{k_x} = \left( \frac{t}{w} \right)^2$ ,  $\frac{k_y}{k_x} = \left( \frac{L}{w} \right)^2$  na direção do modo *Atuador*. Logo para um modelo de flexão de uma viga única na direção  $x$  (modo *Atuador*), ao variarmos somente o parâmetro da largura desta viga, podemos observar na Figura B-3 e na Figura B-4 os seguintes valores, com relação às três direções da microviga:

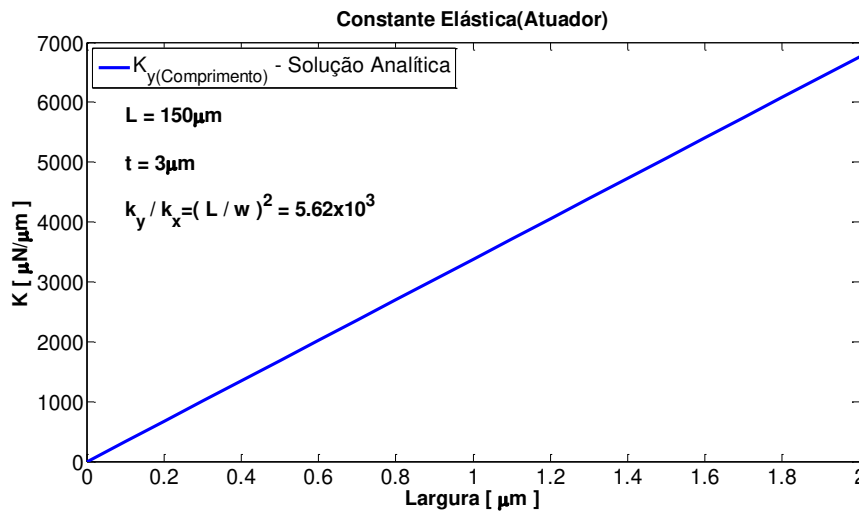


Figura B-3: Comportamento Linear da rigidez uniaxial.

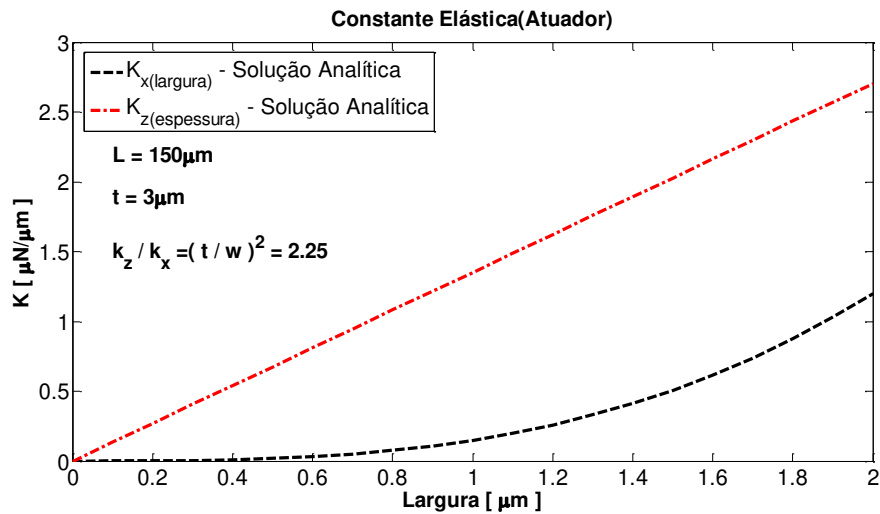


Figura B-4: Comportamento Linear da rigidez.

Como podemos observar através Figura B-4, devido a ordem de grandeza dos parâmetros geométricos  $L$  e  $t$ , observa-se a forte influência destes parâmetros geométricos com relação a rigidez estrutural para o modo *Atuador* do microsensor inercial.

Para análise das flexões de uma viga simples, deve ser verificado o comportamento linear das deflexões (pequenos deslocamentos), assim como o comportamento não linear (grandes deslocamentos) destas microestruturas, e verificar qual será o regime de deflexão mais apropriado para o modelo a ser simulado. Na Figura B-5 verifica-se a primeira análise numérica para uma viga simples.

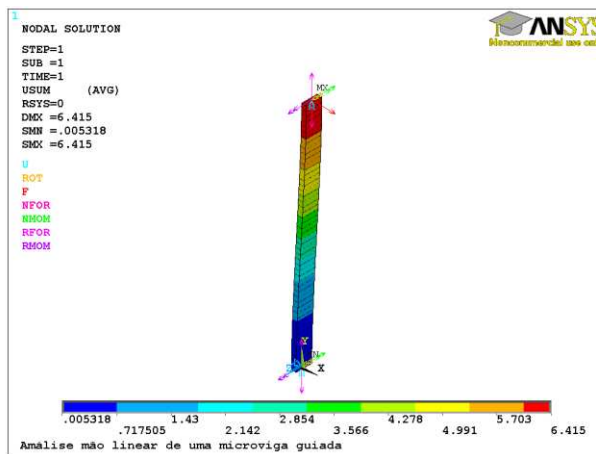


Figura B-5: Análise numérica não linear para deflexão de uma viga simples.

Pela análise estática numérica pelo método de Elementos Finitos, foi comparado os resultados analíticos e numéricos, para pequenos e grandes deslocamentos de uma viga simples como mostra a Figura B-5. Na Figura B-6 os resultados são mostrados.

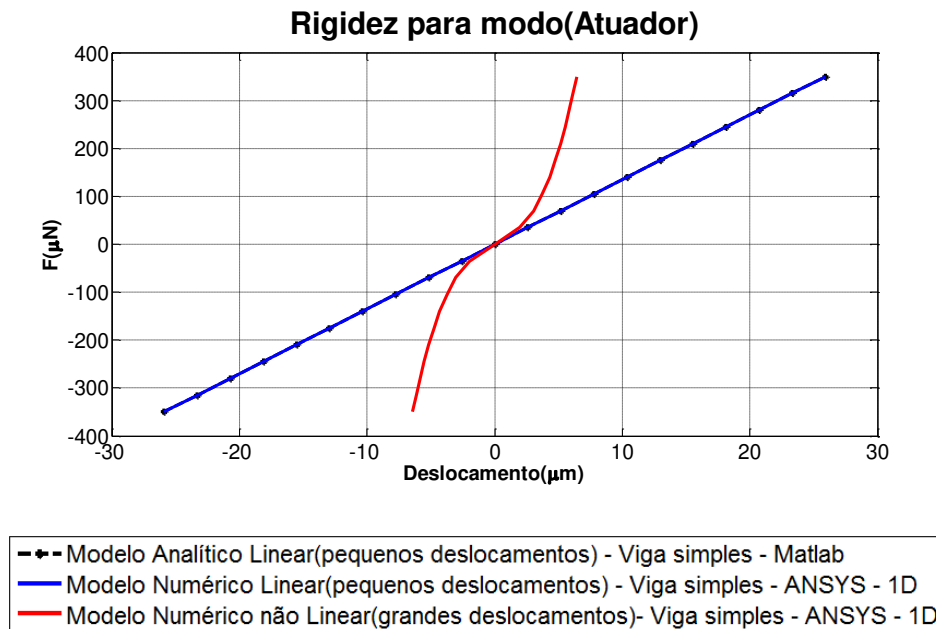


Figura B-6: Comparativo dos modelos numérico e analítico de deflexão de uma viga simples.

Para o modelo de flexão de uma viga simples descrito acima, verificamos que para grandes deslocamentos, o resultado do comportamento das deflexões de uma viga simples guiada é caracterizado por um comportamento não linear. Para o regime não linear o comportamento da deflexão é descrito por uma curva não linear. A força em função do deslocamento, considerando o efeito não linear, da rigidez, pode ser expressa pela equação não linear definida por :

$$F_x = k_{1x}x + k_{3x}x^3 \quad (B.11)$$

Sendo o termo  $k_{1x} = k_x$ , expressaremos o termo cúbico da rigidez não linear por:



$$k_{3(\text{cúbico})} = \frac{3E(tw^3)}{5L^3} \quad \text{Eq. (4.12)} \quad (\text{B.12})$$

Se  $k_{3(\text{cúbico})} = k_{3x}$ , poderemos expressar a Eq. (4.11), em função dos parâmetros da viga, dada por:

$$F_x = \frac{Etw^3}{L^3}x + \left[ \frac{3E(tw^3)}{5L^3} \right]x^3 \quad (\text{B.13})$$

ou:

$$F_x = \frac{Etw^3}{L^3} \left( x + \frac{3}{5}x^3 \right) \quad (\text{B.14})$$

Através do resultado obtido na Eq. (B.14), é possível fazer um comparativo entre os comportamentos não linear das curvas analítica e numérica da força em função da deflexão, vista na Figura B-7:

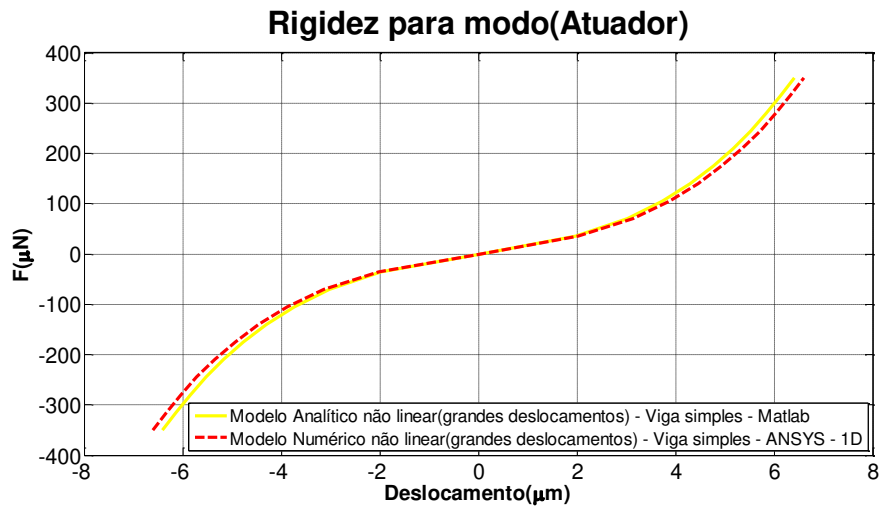


Figura B-7: Comparativo entre modelos analíticos e numéricos para grandes deslocamentos.

Para contornar problemas devido ao efeito da não linearidade outros modelos de flexões foram propostos, e os mesmos serão apresentados.

## B.2 Flexão da vigas dobrada e duplamente dobrada

Para eliminar problemas de não linearidade, outros modelos de flexões têm sido propostos, um exemplo deste é o modelo de uma viga dobrada (*Folded Flexure*), mostrado na Figura B-8:

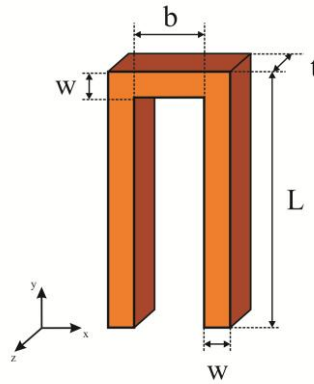


Figura B-8: Modelo de Suspensão de uma viga dobrada.

Esse modelo representa uma alternativa para flexões em grandes deslocamentos. Inicialmente, levando em conta as condições de carregamento representadas pela Figura B-1, poderemos obter a rigidez de uma viga dobrada  $k_{(Dobrada)}$  como feito anteriormente para determinação da rigidez para o modelo de uma viga única  $k$ . Logo, através da Eq. (B.15):

$$x(y) = \frac{F_x}{12(EI_x)} (3Ly^2 - 2y^3) \quad (\text{B.15})$$

Impondo uma nova condição de contorno, dada por  $x(L) = \frac{X_0}{2}$ , substituindo-a na Eq. (B.15) teremos a Eq. (B.16).

$$\frac{X_0}{2} = \frac{F_x L^3}{12(EI_x)} \quad (\text{B.16})$$

Seguindo os mesmos passos da viga  $k$  referenciada na Eq. (4.4) iremos obter:

$$k_{x(Dobrada)} = \frac{12EI_x}{2L^3} = \frac{k_x}{2} \quad (\text{B.17})$$

Pode-se representar o modelo de flexão de viga dobrada descrito acima, através de um modelo concentrado representado na Figura B-9:

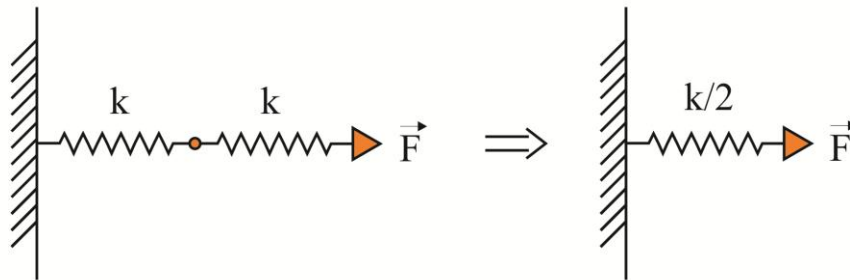


Figura B-9: Modelo Concentrado de flexão de uma viga dobrada.

Por este modelo concentrado de flexão, pode-se determinar a rigidez resultante do modelo de flexão (viga dobrada), sabendo-se que a associação em série de flexões é expressa por:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{1}{k_{(Dobrado)}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (\text{B.19})$$

$$k_{(Dobrado)} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (\text{B.20})$$

Sendo  $k_1$  e  $k_2$  iguais pela Eq. (B.20), teremos:

$$k_{(Dobrado)} = \frac{k^2}{2k} = \frac{k}{2} \quad (\text{B.21})$$

Utilizando análise numérica de elementos bidimensionais e com base nas equações do modelo de flexão de uma viga dobrada deduzida acima, verifica-se que a rigidez da viga dobrada será a metade do valor da rigidez  $k$  de uma viga simples.

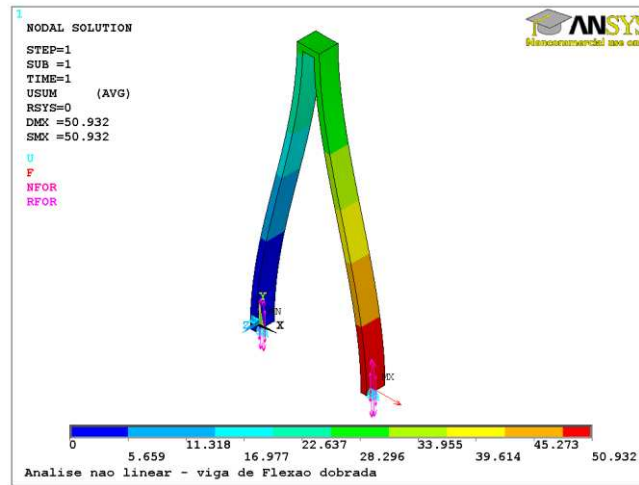


Figura B-10: Análise Numérica não linear da deflexão de uma viga dobrada.

Na Figura B-10 são observados os resultados numéricos para pequenos e grandes deslocamentos utilizando elemento bidimensional.

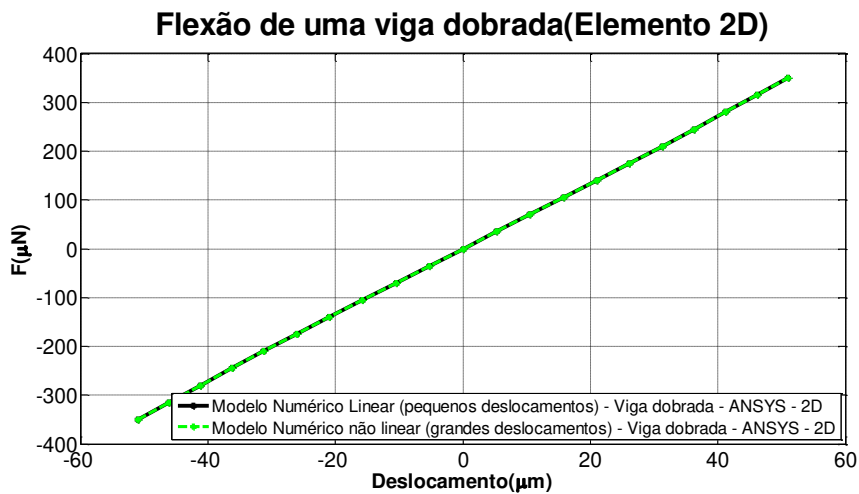


Figura B-11: Resultado numérico para elementos 2D de uma viga dobrada.

Na Figura B-11, tem-se um comparativo contendo os resultados obtidos com relação à análise linear e não linear do modelo de viga dobrada, verifica-se que a viga dobrada apresenta uma maior eficiência do que a viga simples, pois entre grandes e pequenos deslocamentos apresentam um comportamento linear. Entretanto, como observado através da Eq.(B.15), a rigidez deste tipo de flexão possui apenas a metade do módulo da rigidez de uma viga simples. Outro modelo de flexão, chamado de flexão de uma viga duplamente dobrada (*Double Folded Flexure*) foi proposta em muitos trabalhos como o de (ALPER, 2005) e mostrado na Figura B-12:

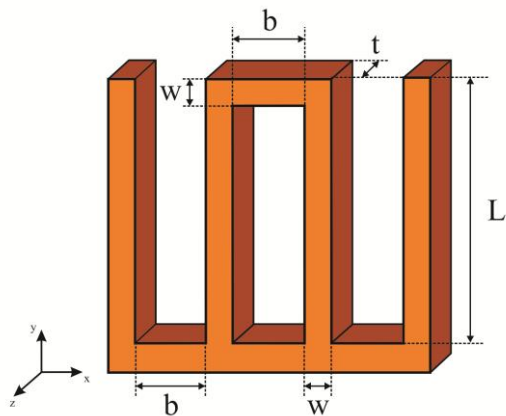


Figura B-12: Modelo de Flexão de uma viga dupla dobrada

Nesse modelo, será feito novamente uma análise numérica para o comportamento linear e não linear dos deslocamentos. Na Figura B-13 pode ser observado a simulação numérica utilizando elemento bidimensional.

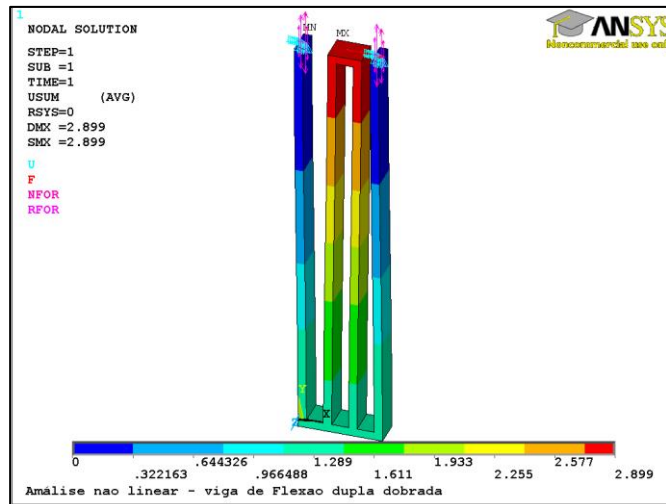


Figura B-13: Análise Numérica da flexão de uma viga dupla dobrada.

Fazendo uso da simulação numérica e utilizando um elemento bidimensional, temos o modelo linear e não linear, como mostrado na Figura B-14:

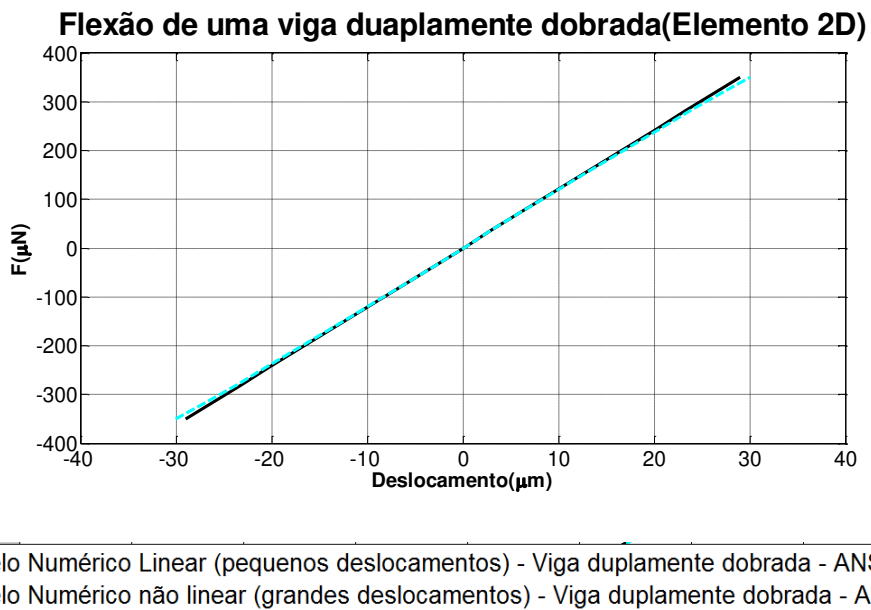


Figura B-14: Resultado numérico para elementos 2D de uma viga dupla dobrada.

Com os resultados obtidos acima, verifica-se que para grandes deformações o comportamento de uma viga duplamente dobrada também será linear. Também pode ser obtido o modelo físico concentrado para a flexão de uma viga duplamente dobrada, visto na Figura B-15.

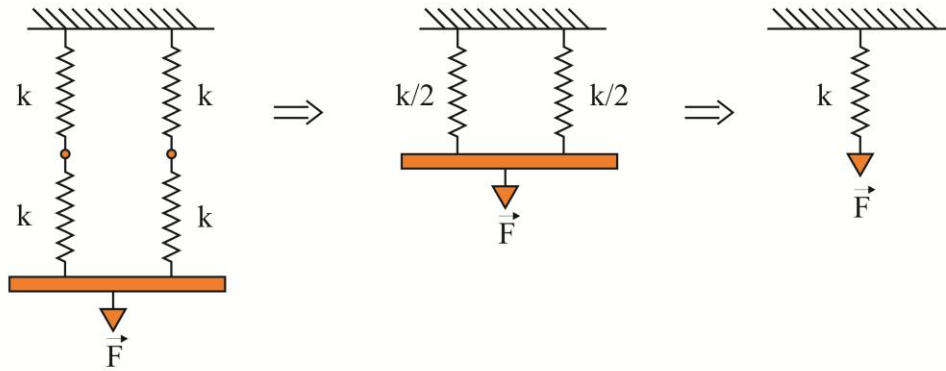


Figura B-15: Modelo físico concentrado de uma viga dupla dobrada.

Pelo modelo físico de flexão de uma viga dupla dobrada, podemos expressar a resultante da rigidez por:

$$F = k_{1i}x + k_{2i}x = (k_{1i} + k_{2i})x \quad (\text{B.22})$$

$$k_{(\text{Dupla-dobrada})} = \left( \frac{1}{k_{11}} + \frac{1}{k_{12}} \right) + \left( \frac{1}{k_{21}} + \frac{1}{k_{22}} \right) \quad (\text{B.23})$$

Sendo  $k_{ij} = k$ , para  $i = 1, 2$  teremos:

$$k_{(\text{Dupla-dobrada})} = \left( \frac{1}{2k} \right) + \left( \frac{1}{2k} \right) = k \quad (\text{B.24})$$

Feita as análises numéricas dos três modelos de flexões, pode-se fazer um comparativo entre todos os resultados obtidos, ilustrado na Figura B-16:

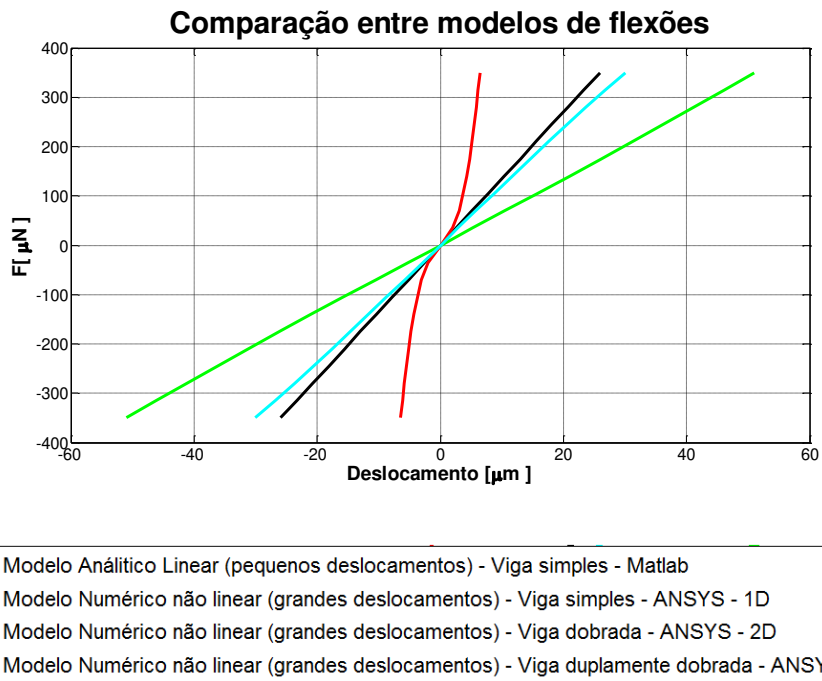


Figura B-16: Comparativo dos modelos numérico e analítico de deflexão de uma viga única, viga dupla e viga dupla dobrada.

O que pode ser observado na Figura B-16 é que para grandes deslocamentos, os modelos de flexões da viga dobrada e viga dupla dobrada são os mais adequados devidos aos seus comportamentos lineares para o desenvolvimento de giroscópios que necessitam de maior amplitude  $X_0$  na direção do *Atuador* para uma maior resposta da amplitude  $Y_0$  na direção do *Detector*.

### B.3 Massa Efetiva da Viga

Vigas simples suspensas em dispositivos MEMS que se movem em altas velocidades possuem uma distribuição de velocidades  $v$  entre os seus extremos, como ilustra a Figura B-17.



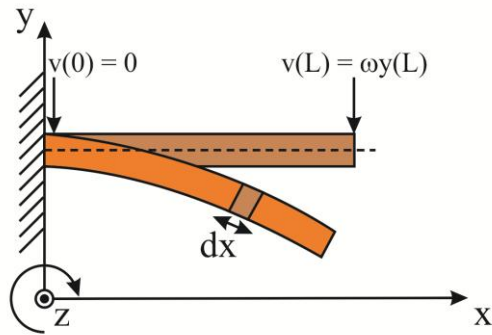


Figura B-17: Ilustração da distribuição de velocidades ao longo de uma viga única.

Assumindo que o movimento destas flexões ao longo da viga única, seja sinusoidal, pode expressar seu deslocamento pela Eq.(B.25):

$$y(x,t) = y(x) \sin(\omega t) \quad (\text{B.25})$$

A distribuição de velocidades  $v$  pode ser vista como uma distribuição de energia cinética ao longo desta viga única. O efeito da distribuição da energia cinética para estruturas com baixas velocidades implica em uma redução da massa, comparada a um movimento com maiores velocidades. Então, a massa aparente de uma parte da viga única é chamada de massa efetiva.

### B.3.1 Cálculo da massa efetiva da viga

O cálculo da massa efetiva pode ser obtido através do método da energia de Rayleigh. Assume-se que para uma viga única com energia potencial elástica armazenada no seu máximo deslocamento será igual à energia cinética da estrutura inteira, quando está se movendo com máxima velocidade. Logo:

$$K_{Em\acute{x}} = P_{Em\acute{x}} \quad (\text{B.26})$$

Então para uma viga única com  $L$  (comprimento),  $w$  (largura),  $t$  (espessura),  $\rho$  (densidade) e constante de flexão  $k_y$ , a máxima energia potencial  $P_{Emáx}$  será dada pela Eq.(4.27):

$$P_{Emáx} = \int_0^{y(l)_{máx}} k_y dy = \frac{1}{2} k_y (y(l))^2 \quad (\text{B.27})$$

A máxima energia cinética  $K_{Emáx}$  é obtida integrando a energia cinética dos elementos da massa diferencial ao longo do comprimento  $L$  da viga única, logo:

$$K_{Emáx} = \int_0^l \frac{1}{2} \rho w t (v(x))^2 dx = \int_0^l \frac{1}{2} \rho w t (\omega y(x))^2 dx \quad (\text{B.28})$$

Esta função de forma  $y(x)$  da viga única dependerá das condições de contorno imposta nas flexões. Em geral tem-se:

$$K_{Emáx} = \frac{1}{2} \rho w t \omega^2 \int_0^l (y(x))^2 dx \quad (\text{B.29})$$

Aplicando o método de Rayleigh, tem-se a Eq.(4.30):

$$\frac{1}{2} k_y (y(l))^2 = \frac{1}{2} \rho w t \omega^2 \int_0^l (y(x))^2 dx \quad (\text{B.30})$$

A Eq.(B.30) pode ser rearranjada para a expressão de frequência natural  $\omega_0$  da viga única obtendo a Eq.(B.31).

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_y (y(l)_{máx})^2}{\rho w t \int_0^l (y(x))^2 dx}} = \sqrt{\frac{k_y}{m_{eff}}} \quad (\text{B.31})$$

E finalmente a massa efetiva  $m_{eff}$  poderá ser definida pela Eq.(B.32):

$$m_{eff} = \rho w t \int_0^l \left( \frac{y(x)}{y(l)_{máx}} \right)^2 dx \quad (\text{B.32})$$

### B.3.2 Massa efetiva da viga engastada-guiada

A função do deslocamento de uma viga simples de extremidade guiada com uma força  $F$ , aplicada em seu extremo é dada pela Eq.(4.33):

$$y(x) = \frac{F}{EI} \left( -\frac{x^3}{6} + \frac{lx^2}{4} \right) \quad (\text{B.33})$$

O deslocamento livre máximo no extremo da viga simples pode ser expresso na Eq.(4.34):

$$y(l) = \frac{Fl^3}{12EI} \quad (\text{B.34})$$

Então:

$$\frac{y(x)}{y(l)_{\text{máx}}} = -2 \left( \frac{x}{l} \right)^3 + 3 \left( \frac{x}{l} \right)^2 \quad (\text{B.35})$$

Substituindo a Eq.(B.35) na Eq.(B.32) obtêm a massa efetiva de uma viga simples  $m_{\text{eff}}$ , mostrada na Eq.(B.36).

$$m_{\text{eff}} = \rho wt \int_0^l \left( 4 \frac{x^6}{l} - 12 \frac{x^5}{l} + 9 \frac{x^4}{l} \right) dx = \left( \frac{39}{105} \right) m \quad (\text{B.36})$$