



Ricardo Vendrame Borges

Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Elasticidade Não-Linear

74/2013.

CAMPINAS
2013



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Ricardo Vendrame Borges

Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Elasticidade Não-Linear

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Daros.

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO RI-
CARDO VENDRAME BORGES, E ORIENTADO PELO
PROF. DR. CARLOS HENRIQUE DAROS

.....
ASSINATURA DO(A) ORIENTADOR(A)

CAMPINAS
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

B644a Borges, Ricardo Vendrame, 1986 -
Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Elasticidade Não-Linear
Ricardo Vendrame Borges Borges. – Campinas, SP: [s.n.], 2013.

Orientador: Carlos Henrique Daros.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de
Engenharia Mecânica.

1. Método dos Elementos de Contorno. 2. Elasticidade. 3. Borracha.
- I. Carlos Henrique Daros, 1971
- II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica.
- III. Aplicação do Método de Elementos de Contorno à Elasticidade Não-Linear.

Título em Inglês:	Boundary Element Method Applied to Nonlinear Elasticity
Palavras-chave em Inglês:	Boundary Element Method, Elasticity, Rubber
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação:	Mestre em Engenharia Mecânica
Banca Examinadora:	Prof. Dr. Carlos Henrique Daros [Orientador] Prof. Dr. Humberto Breves Coda, Prof. Dr. Paulo Sollero.
Data da defesa:	29-07-2013
Programa de Pós Graduação:	Engenharia Mecânica.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**Aplicação do Método dos Elementos de Contorno
à Elasticidade Não-Linear**

Autor: Ricardo Vendrame Borges

Orientador: Carlos Henrique Daros

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. Carlos Henrique Daros, Presidente
DMC/FEM/Unicamp - Campinas

Prof. Dr. Humberto Breves Coda
EESC/USP - São Carlos

Prof. Dr. Paulo Sollero
DMC/FEM/Unicamp - Campinas

Campinas, 29 de Julho de 2013.

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos os membros da minha família, em especial ao meu pai Aluisio Aparecido Borges e à minha mãe Daisy Aparecida Vendrame Borges.

Dedico, também, à minha companheira de todas as horas Taís Modesto Basso e ao meu orientador Carlos Henrique Daros.

Agradecimentos

À Deus pela vida.

Aos meus pais, Aluisio Aparecido Borges e Daisy Aparecida Vendrame Borges, pelo incondicional apoio.

À toda minha família pelo, também, apoio.

À minha namorada, companheira e amiga Tais Modesto Basso por todos os momentos, sempre ao meu lado e, também, à toda sua família.

Ao meu orientador Carlos Henrique Daros pela paciência e todo aprendizado passado.

À todos meus amigos do DMC (Departamento de Mecânica Computacional) da Unicamp, pelo companheirismo e bom-humor característicos.

À todos companheiros do meu antigo trabalho, entre eles Maurício Baldi, Oswaldo Bressan Neto, Jean Carlos Gomes Donda e Edivaldo Ribeiro dos Santos.

Aos meus amigos de “república”, por todos momentos juntos.

Aos meus professores e amigos de graduação (Unesp de Ilha solteira) que me deram uma base muito forte para chegar onde cheguei.

Ao Dr. Eduardo Kruger pelo apoio.

Aos órgãos financiadores, Capes e Fapesp pelo apoio financeiro.

“O sucesso é a paz de espírito como resultado direto da sua auto-satisfação ao saber que fez o melhor de que é capaz.”

John Wooden

Resumo

A presente dissertação concentra-se no estudo da elasticidade não-linear através do Método dos Elementos de Contorno. A elasticidade não-linear possui um importante campo de aplicações, da simulação de materiais que se comportam como a borracha a novas aplicações como a simulação de tecidos biológicos. A dissertação apresenta como resultado principal a elaboração de um código computacional em Matlab[®], o qual é capaz de modelar materiais elásticos, não-lineares, sujeitos à deformações não-lineares, incrementais. O programa de elementos de contorno foi utilizado na simulação da resposta quasi-estática em materiais incompressíveis como a borracha, aproximados através do modelo constitutivo de Mooney-Rivlin.

Palavras-chave: Borracha; Método dos Elementos de Contorno; Não-linearidade; Materiais hiperelásticos.

Abstract

The present work focuses on the modelling of non-linear elastic problems via the Boundary Element Method. Non-linear elasticity has several important applications, from the modelling of rubber-like materials to new areas of research such as the study of biological tissues. The work's main result is the construction of a computer code (in Matlab[®]) which can model non-linear elastic materials subjected to incremental non-linear deformations. The code was used within the realm of quasi-static simulations of incompressible rubber-like materials, approximated via the Mooney-Rivlin constitutive model.

Keywords: Rubber; Boundary Element Method; Nonlinearity; Hyperelastic Materials.

Lista de Ilustrações

1.1	Aplicações	1
1.2	Aplicações	2
3.1	Movimento Geral de um Corpo Deformável - (BONET E WOOD, 1997)	9
3.2	Movimento Geral ao Redor de um Ponto - (BONET E WOOD, 1997)	11
3.3	Componente Distorcional de F - (BONET E WOOD, 1997)	16
3.4	Cinemática Linearizada - (BONET E WOOD, 1997)	17
4.1	Vetor Tração - (BONET E WOOD, 1997)	21
6.1	Superfície de contorno Γ_ϵ com Hemisfério Fictício para Propósitos de Integração - Adaptado de Brebbia e Dominguez (1989)	42
6.2	Elemento Linear - Adaptado de Brebbia e Dominguez (1989)	47
7.1	Exemplo de Aplicação	64
8.1	Exemplo: Placa Sobre Flexão - (BREBBIA E DOMINGUEZ, 1989)	82
8.2	Placa Não Deformada	83
8.3	Placa Deformada	83
8.4	Condições de Contorno	84
8.5	Malha - 1	85
8.6	Geometria Deformada - Tensão P_{xx}	86
8.7	Geometria Deformada - Tensão P_{yy}	87
8.8	Geometria Deformada - Tensão P_{xy}	88
8.9	Força (lbf)	89
8.10	90
8.11	Convergência	91
8.12	Condições de Contorno	91
8.13	Malha	93
8.14	Força (lbf)	93
8.15	Geometria Deformada - Tensão P_{xx}	94
8.16	Geometria Deformada - Tensão P_{yy}	95
8.17	Geometria Deformada - Tensão P_{xy}	96

Lista de Tabelas

8.1	Deslocamentos no Ponto A - Comparação	82
8.2	Propriedades do material (Mooney-Rivlin)	84
8.3	Condições de Contorno	85
8.4	Propriedades do material (Mooney-Rivlin)	92
8.5	Condições de Contorno	92

Lista de Abreviaturas e Siglas

F	Tensor de deformação gradiente
C	Tensor direito de deformação Cauchy-Green
B	Tensor esquerdo de deformação Cauchy-Green
E	Tensor deformação de Green (Lagrangeano)
e	Tensor deformação Almansi (Euleriano)
R	Tensor rotação
U	Tensor deformação linear
I	Matriz identidade
J	Jacobiano
\hat{F}	Componente distorcional da deformação
δW_{int}	Potência virtual interna
σ	Tensor de tensão de Cauchy
τ	Tensor de tensão de Kirchhoff
P	Primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff
S	Segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff
tr	Operado <i>traço</i>

Ψ	Potencial elástico
$\hat{\mathbf{C}}$	Componente distorcional do tensor direito de Cauchy-Green
\tilde{p}	Pressão hidrostática
p	Pressão hidrostática (AL-GAHTANI E ALTIERO, 1996)
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$\lambda \ \mu$	Constantes de Lamé
G	Módulo de Cisalhamento
E	Módulo de Elasticidade
ν	Coefficiente de Poisson
\mathcal{K}	Módulo volumétrico
ξ	Ponto fonte
T_{ij}^*	Solução fundamental de tração
U_{ij}^*	Solução fundamental de deslocamento
ν'	Coefficiente de Poisson para o EPT
Ω	Domínio
Γ	Superfície
σ_{ij}	Componente do tensor de tensão

n_k	Componente normal
t_k	Componente de tração
u_k	Componente de deslocamento
b_k	Componente de força de corpo
\mathbf{U}^*	Tensor solução fundamental de deslocamento
\mathbf{T}^*	Tensor solução fundamental de tração
Φ	Matriz de função de interpolação dos pontos do elementos
NE	Número de elementos de contorno
M	Número de células no domínio
μ_{10} e μ_{01}	Constantes materiais de Mooney-Rivlin
I_C, II_C, III_C	Invariantes do tensor \mathbf{C}
ζ	Coordenada isoparamétrica
ρ	Densidade
\mathbf{H}	Matriz de “influência” da aproximação linear do deslocamento
\mathbf{G}	Matriz de “influência” da aproximação linear da tração
\mathbf{f}	Vetor, como força de corpo, da parte não-linear da tensão atuante

B Matriz de “influência” obtida da integral da derivada da solução fundamental de deslocamento

D Matriz de “influência” obtida da integral da derivada da solução fundamental de tração

g Vetor, como força de corpo, da derivada da parte não-linear da tensão atuante

Abreviações

N.I. Notação indicial

EPT Estado plano de tensão

MEC Método dos elementos de contorno

MEF Método dos elementos finitos

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações	xvii
Lista de Tabelas	xix
Lista de Abreviaturas e Siglas	xxi
SUMÁRIO	xxvii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 A Hiperelasticidade e métodos numéricos	2
2 OBJETIVOS	7
2.1 Objetivos	7
2.2 Roteiro da dissertação	7
3 CINEMÁTICA	9
3.1 O movimento	9
3.2 Descrição Material e Espacial	10
3.3 Tensor de Deformação Gradiente	10
3.3.1 Deformação	12
3.4 Decomposição Polar	14
3.5 Mudança de Volume	14
3.6 Componente Distorcional do Tensor de Deformação Gradiente	15
3.7 Cinemática Linear	17
3.7.1 Tensor de Deformação Gradiente Linearizado	17
3.7.2 Deformação Linearizada	18
4 EQUILÍBRIO E TENSÃO	21
4.1 Tensor de Tensão de Cauchy	21
4.1.1 Definição	21
4.1.2 Princípio da Potência Virtual	22

4.2	Potência Conjugada e Medidas de Tensões Alternativas	23
4.2.1	O Tensor de Tensão de Kirchhoff	23
4.2.2	O Primeiro Tensor de Piola-Kirchhoff	23
4.2.3	O Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff	24
4.2.4	Componentes Desviadores e Hidrostáticos	25
5	HIPERELASTICIDADE	27
5.1	Hiperelasticidade	27
5.2	Tensor Constitutivo Elástico	29
5.2.1	Tensor Constitutivo Elástico Lagrangeano ou Material	29
5.3	Hiperelasticidade Isotrópica	30
5.3.1	Descrição Material	30
5.4	Materiais Incompressíveis	31
5.4.1	Elasticidade Incompressível	31
5.4.2	Materiais Neo-Hookeanos Incompressíveis e de Mooney-Rivlin	33
6	ELEMENTOS DE CONTORNO	35
6.1	Abordagem Elastostática	35
6.1.1	Equações Básicas da Elastostática Linear	35
6.1.2	Solução Fundamental	37
6.1.3	Formulação dos Elementos de Contorno	37
6.1.4	Pontos no Contorno	40
6.2	Elementos de Contorno	42
6.2.1	Sistema de Equações	45
6.3	Elementos Lineares	46
6.3.1	Montagem das Matrizes H e G	48
6.4	Pontos Internos	52
7	APLICAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA BORRACHA	55
7.1	Introdução	55
7.1.1	Formulação Básica	55
7.1.2	Formulação para Elementos de Contorno	57
	Tensão Plana	63
7.1.3	Deformação Plana	64
7.1.4	Obtenção das matrizes e vetores do problema discretizado	64
	Matriz H	67

Matriz \mathbf{G}	68
Vetor $\mathbf{f}(\nabla \mathbf{u}, p)$	69
Matriz \mathbf{B}	71
Matriz \mathbf{D}	72
Vetor $\mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, p)$	73
7.1.5 Procedimento Iterativo Incremental	74
A rotina <i>fsolve</i>	77
8 RESULTADOS	81
8.1 Validação e Conclusão	81
8.1.1 Validação linear	81
8.1.2 Validação não-linear (borracha)	83
Alongamento Uniaxial de uma Tira de Borracha	84
Alongamento Uniaxial de uma Tira de Borracha com Furo	91
8.2 Conclusão	93
8.2.1 Trabalhos Futuros	97
REFERÊNCIAS	99

1 Introdução

1.1 Motivação

A elasticidade não-linear é associada geralmente ao comportamento de materiais como a borracha natural. De fato, muito se deve à borracha natural a motivação para o desenvolvimento teórico da elasticidade não-linear. Importantes produtos de engenharia automotiva como pneus e componentes de motores são constituídos de borracha (Figuras 1.2(a) e 1.2(b)). O uso crescente da borracha natural, sintética e outros materiais poliméricos (com comportamento elástico, não-linear) é atualmente verificado na indústria. Entre 1995 e 2008, por exemplo, o consumo mundial de elastômeros (borracha natural e sintética) teve um aumento de 52,3%, passando de 14.870 mil toneladas para 22.656 mil toneladas ((CEPLAC, 2009)). Estudos realizados por Burguer e Smith (1997) projetam para as próximas décadas, por exemplo, uma elevação do preço da borracha natural devido ao aumento do consumo (para 11.000 mil toneladas em 2020, o dobro do consumo medido no início dos anos 90).

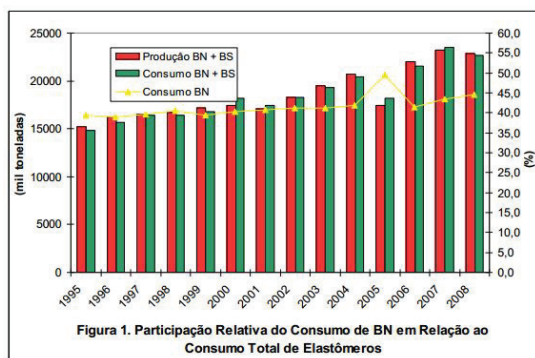


Figura 1. Participação Relativa do Consumo de BN em Relação ao Consumo Total de Elastômeros

(a) Consumo de Borracha - (CEPLAC, 2009)

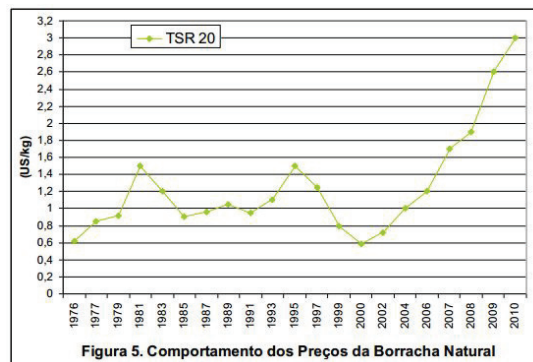


Figura 5. Comportamento dos Preços da Borracha Natural

(b) Preço da Borracha - (CEPLAC, 2009)

Figura 1.1: Aplicações

Entretanto, a elasticidade não-linear não se limita apenas aos materiais tradicionalmente associados à borracha. Ela engloba também materiais capazes de grandes deformações elásticas, e.g. tecido biológico como pele, artérias e o coração (Figura 1.2(c)). As aplicações biomédicas são de grande relevância e o conhecimento da mecânica destes materiais biológicos é de suma importância para tratamentos médicos. Citam-se p. exemplo o estudo de aneurismas e a substituição de tecidos por partes artificiais. Existem ainda aquelas aplicações que não são amplamente difundidas mas

que são de suma importância na engenharia estratégica da infra-estrutura do país. Citam-se, nesse casos, juntas em alicerces de pontes e vedações de grandes colunas d'água como em hidrelétricas por exemplo (Figuras 8.16(a)).

Diversos textos podem ser encontrados, tratando detalhadamente da elasticidade não-linear. Entre alguns citam-se Green e Zerna (1954) e Truesdell e Noll (1965).



(a) Pneu de Avião



(b) Anel Retentor



(c) Órgãos Artificiais



(d) Alicerce - Pontes

Figura 1.2: Aplicações

1.2 A Hiperelasticidade e métodos numéricos

Para aplicações com geometrias e carregamentos complexos torna-se clara a necessidade do uso de métodos numéricos. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um consagrado método numérico para a solução de problemas da mecânica do contínuo. Sua utilização é vasta e seu uso tornou-se um pilar da engenharia moderna.

Um pouco mais recente, O Método dos Elementos de Contorno (MEC) (Brebbia e Domin-

guez (1989), Dominguez (1993), Venturini (1983), Telles (1983)) tornou-se uma alternativa ao MEF, especialmente em algumas aplicações do contínuo, como e.g. domínios ilimitados.

O MEC possui a grande qualidade de permitir a redução da dimensionalidade do problema. Ou seja, um problema tridimensional, por exemplo, é reduzido a um problema bidimensional uma vez que apenas a superfície do elemento estrutural precisa ser discretizada. Adicionalmente o MEC permite uma modelagem contínua do interior do problema em consideração uma vez que não há discretização interna. Atinge-se desta forma um alto grau de precisão para os deslocamentos e tensões internas.

Há um grande número de textos que tratam da elasticidade não-linear via o Método dos Elementos Finitos. Dentre alguns excelentes textos podem-se citar Belytschko e Liu (2000), Bonet e Wood (1997), Simo e Hughes (1998).

Entretanto, o MEF possui dificuldades em relação ao tratamento da condição de incompressibilidade, comum a materiais semelhantes à borracha. Fenômenos conhecidos como travamento foram observados ao se utilizar o MEF (Oden e Carey (1984), Hughes (1987)). Outras dificuldades numéricas como o mau condicionamento da matriz de rigidez e o aparecimento de modos de pressão espúrios são relatadas na literatura do MEF (Chang *et al.* (1991), Sussman e Bathe (1987)). Problemas de travamento de solução tem sido recentemente tratados com sucesso pelo método dos elementos finitos de alta ordem (MEF-AO) Yu *et al.* (2012).

O uso do Método dos Elementos de Contorno para a elasticidade não-linear tem possivelmente seu início ligado ao trabalho de Novati e Brebbia (1982). Nesta e em subsequentes publicações a tensão é decomposta em uma parte linear (Hookeana) e outra não-linear (não-Hookeana). O termo não-Hookeano é tratado como uma pseudo força de corpo. Há, entretanto a necessidade do uso de integrais de domínio adicionalmente às integrais de contorno. Perde-se desta forma uma das vantagens do MEC sobre o MEF, embora os resultados apresentados pelo MEC sejam interessantes para materiais incompressíveis, pois a pressão hidrostática pode ser calculada facilmente dentro do processo de solução. Além disso, a dimensão do sistema matricial só depende da discretização do contorno e não do número de células internas.

Um dos primeiros trabalhos de aplicação do MEC à elasticidade não-linear refere-se a Phan-Thien (1988). Neste o MEC foi utilizado para a resolução de problemas bidimensionais e axi-simétricos em deformação finita de materiais semelhantes à borracha. Em sequência pode-se citar

o artigo de Trang-Cong e Zheng (1990), onde generalizou-se o trabalho de Phan-Thien (1988) para o caso tridimensional, incluindo também o caso compressível. Algumas simulações não-triviais como a análise de anéis retentores de borracha foram apresentadas. Nas formulações de Phan-Thien (1988) e Trang-Cong e Zheng (1990) as equações constitutivas não são colocadas na forma de taxa incrementais, evitando desta forma a necessidade de derivadas temporais objetivas dos tensores conjugados de tensão e deformação.

Uma metodologia diferente foi aplicada por Foerster e Kuhn (1994a), Foerster e Kuhn (1994b), onde utilizou-se uma formulação Lagrangeana Total, com a utilização de configurações intermediárias. Os autores afirmam que o método é altamente eficiente comparado às formulações tradicionais Lagrangeanas baseadas em configurações atualizadas passo a passo. Um interessante trabalho na área MEC não-linear deve-se a Al-Gahtani e Altiero (1996). Neste uma formulação lagrangeana incremental foi aplicada. O gradientes de deformação dentro do domínio, necessários aos cálculos, são calculados diretamente das equações integrais. Os autores analisaram problemas em estados plano de tensão e deformação.

Polizzotto (2000) apresenta uma reformulação para problemas hiperelásticos e incompressíveis através do chamado MEC simétrico de Galerkin, usando soluções fundamentais relacionadas a um material (fictício) homogêneo, isotrópico e linear. Além das integrais de contorno Polizzotto (2000) apresenta integrais de domínio com deformações iniciais fictícias e campos de tensões utilizados para satisfazer certas condições, recuperando a simetria do sistema matricial final e algumas propriedades das operações tensoriais envolvidas.

Já utilizando métodos combinados de MEC/MEF Coda (2001) aborda as formulações não-lineares com efeitos transientes onde células isoparamétricas quadráticas são adotadas para abordar todas as integrais de domínio necessárias. A formulação não-linear de elementos finitos é escrita de forma a facilitar o acoplamento com o método dos elementos de contorno. A matriz com a distribuição das forças nodais relativas é gerada e isso torna possível o acoplamento entre os elementos de viga (MEF) e a formulação de elementos de contorno.

Ainda, na vertente do tamento das integrais de domínio, pode-se citar o interessante trabalho de Albuquerque *et al.* (2006) onde o método de integração radial é usado para obter uma formulação de elementos de contorno sem qualquer integral de domínio para placas anisotrópicas em problemas gerais de flexão. Duas equações integrais são usadas e as variáveis desconhecidas são assumidas como constantes ao longo de cada um dos elementos de contorno. A integral de domínio, que surge

a partir de uma carga aplicada transversalmente é transformada em uma integral de contorno através de uma técnica de integração radial. Cargas uniformes e linearmente distribuídas são consideradas e vários exemplos computacionais são apresentados. Os resultados mostram boa concordância com os resultados analíticos e de elementos finitos disponíveis na literatura.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivos

O objetivo central desta dissertação é o estudo da elasticidade não-linear através do método dos elementos de contorno, bem como o uso de técnicas numéricas utilizadas na solução de problemas não-lineares.

O produto desta dissertação é a elaboração de um programa em elementos de contorno para a análise de deformações em certos meios elásticos não-lineares, incompressíveis. O programa elaborado foi utilizado na simulação da resposta quasi-estática de materiais com comportamento semelhante à borracha.

O modelo do material utilizado nessa dissertação foi o de Mooney-Rivlin amplamente utilizado na simulação de materiais semelhantes à borracha. As simulações abordadas foram relacionadas à hiperelasticidade bidimensional, como por exemplo, o uso de uma tira de borracha em deformação.

Para tanto utilizou-se como ponto de partida códigos de elementos de contorno de Brebbia, Dominguez disponíveis para o caso 2D. Um programa em elementos de contorno foi escrito em *MatLab*[®] tendo como base o programa em Fortran de Brebbia e Dominguez (1989).

2.2 Roteiro da dissertação

A metodologia utilizada nesta dissertação foi a formulação lagrangeana incremental do problema hiperelástico. Apresenta-se inicialmente um estudo aprofundado da elasticidade não-linear. Esta compreende os diversos tensores de deformação e tensão usualmente usados em problemas não lineares, bem como as equações de balanço. Após isto são apresentadas as leis constitutivas para materiais elásticos e hiperelásticos.

A etapa a seguir concentra-se na formulação do MEC e sua ampliação para o tratamento de problemas elásticos não-lineares. A formulação inclui o tratamento das diversas integrais singulares

presentes à formulação do MEC. A validação foi feita através de resultados numéricos disponíveis ou soluções numéricas via o MEF.

3 CINEMÁTICA

3.1 O movimento

A Figura 3.1 mostra o movimento geral de um corpo deformável. O corpo, inicialmente, é representado pelas coordenadas \mathbf{X} , em relação à base cartesiana \mathbf{E}_I no tempo $t = 0$. Já a representação do corpo na sua posição atual é feita pelas coordenadas \mathbf{x} em relação à base cartesiana \mathbf{e}_i no tempo $t = t$. O movimento pode ser matematicamente descrito pela função mapeamento ϕ entre a posição inicial e a posição final.

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t). \quad (3.1)$$

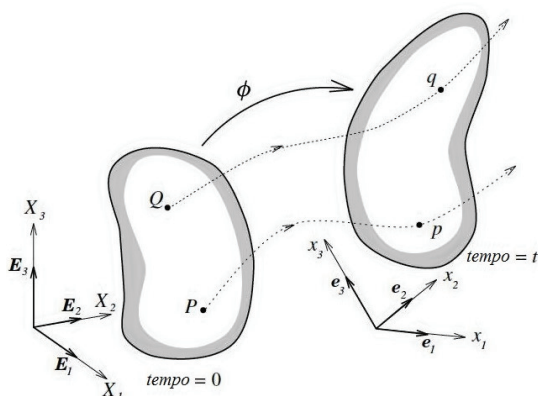


Figura 3.1: Movimento Geral de um Corpo Deformável - (BONET E WOOD, 1997)

Para um valor fixo de t a equação representa o mapeamento entre o corpo deformado e o não deformado. Adicionalmente, para um valor particular de \mathbf{X} a Equação (3.1) descreve o movimento como uma função do tempo. Em uma análise de deformação finita os deslocamentos são tais que não é possível descrevê-lo, depois de deslocado, nas coordenadas iniciais, como por exemplo, em uma deformação plástica. Já em uma deformação infinitesimal o deslocamento é assumido como sendo muito pequeno em relação às dimensões do corpo, assim, as mudanças de geometria são ignoradas.

3.2 Descrição Material e Espacial

Em análises de deformações finitas a escolha do sistema de coordenadas que será usado para descrever o comportamento do corpo deve ser escolhido com cuidado. Quando o sistema de coordenadas for estabelecido com relação ao corpo não deformado a descrição do movimento é chamada de descrição *material* ou *Lagrangeana*. Já quando o sistema de coordenadas é estabelecido com relação ao corpo já deformado, na sua forma atual, a descrição do movimento é chamada de descrição *espacial* ou *Euleriana*. Para entender a diferença entre a descrição material e a descrição espacial tomemos como exemplo um simples caso da descrição da densidade de um material.

1. *Descrição material*: a variação de ρ (densidade) do corpo é descrito em relação às coordenadas iniciais \mathbf{X} no tempo $t = 0$ como

$$\rho = \rho(\mathbf{X}, t). \quad (3.2)$$

2. *Descrição espacial*: ρ é descrito com relação à posição atual do corpo, sendo assim, é descrito segundo \mathbf{x} , onde t é dado pelo tempo atual do corpo $t = t$, assim

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t). \quad (3.3)$$

3.3 Tensor de Deformação Gradiente

A quantia chave em deformações finitas é o tensor de deformação gradiente \mathbf{F} que correlaciona as quantidades antes da deformação com suas correspondentes quantidades depois da deformação. O tensor de deformação gradiente permite, por exemplo, que a posição relativa entre duas partículas vizinhas descritas na posição atual sejam também descritas em termos de posicionamento relativo nas coordenadas iniciais, antes da deformação.

Considere duas partículas materiais Q_1 e Q_2 nas vizinhanças de outra partícula material P (Figura 3.2). A posição de Q_1 e Q_2 relativa a P é dada pelos vetores $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$ como

$$d\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_{Q_1} - \mathbf{X}_P; \quad d\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_{Q_2} - \mathbf{X}_P \quad (3.4)$$

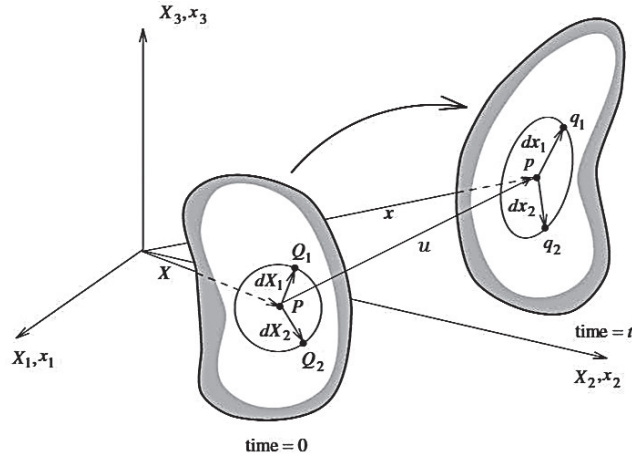


Figura 3.2: Movimento Geral ao Redor de um Ponto - (BONET E WOOD, 1997)

Depois da deformação, as partículas materiais P , Q_1 e Q_2 têm suas posições alteradas pelo mapeamento como

$$\mathbf{x}_p = \phi(\mathbf{X}_P, t); \quad \mathbf{x}_{q_1} = \phi(\mathbf{X}_{Q_1}, t); \quad \mathbf{x}_{q_2} = \phi(\mathbf{X}_{Q_2}, t); \quad (3.5)$$

e, assim, os respectivos vetores $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$ tornam-se

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{q_1} - \mathbf{x}_p = \phi(\mathbf{X}_P + d\mathbf{X}_1, t) - \phi(\mathbf{X}_P, t); \quad (3.6)$$

$$d\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_{q_2} - \mathbf{x}_p = \phi(\mathbf{X}_P + d\mathbf{X}_2, t) - \phi(\mathbf{X}_P, t). \quad (3.7)$$

Definindo o *tensor de deformação gradiente* \mathbf{F} como

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_0 \phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = F_{iI} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_I, \quad (3.8)$$

Note que \mathbf{F} é um tensor misto, onde ∇_0 representa o gradiente com respeito às configurações iniciais. Os vetores $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$ podem ser obtidos em termos de $d\mathbf{X}_1$ e de $d\mathbf{X}_2$ como

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_1; \quad d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_2 \quad (3.9)$$

Igualmente pode-se escrever $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ onde o vetor \mathbf{u} é o vetor deslocamento. Desta forma pode-se obter

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (3.10)$$

3.3.1 Deformação

Uma maneira geral de medir a deformação é considerar a mudança no produto escalar de dois vetores elementares $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$ como mostrado na Figura 3.2 onde suas versões deformadas são dadas por $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$. Essa escolha, pela utilização do produto escalar, irá envolver tanto a mudança do comprimento dos vetores quanto à mudança do ângulo entre os mesmos. Levando-se em consideração a Equação (3.9), tem-se

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{C}d\mathbf{X}_2 \quad (3.11)$$

onde \mathbf{C} é o *tensor direito de deformação absoluta Cauchy-Green* que é dado em termos do tensor de deformação gradiente \mathbf{F} como

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (3.12)$$

Note que na Equação (3.12) o tensor \mathbf{C} opera sobre os vetores materiais \mathbf{X} e consequentemente \mathbf{C} é chamado de um tensor material.

Alternativamente o produto escalar $d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2$ pode ser obtido em termos dos vetores espaciais $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$ através do *tensor esquerdo de deformação absoluta Cauchy-Green* \mathbf{B} como

$$d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{B}d\mathbf{x}_2 \quad (3.13)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T. \quad (3.14)$$

A mudança no produto escalar pode agora ser achada em termos dos vetores materiais $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$ do tensor *Lagrangeano* (ou *tensor deformação relativa de Green*) \mathbf{E} como

$$\frac{1}{2}(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2) = d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{E}d\mathbf{X}_2 \quad (3.15)$$

Onde o tensor material \mathbf{E} é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (3.16)$$

Alternativamente, a mesma mudança no produto escalar pode ser expressa pelos vetores espaciais $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$ e, também, com o *tensor deformação relativa de Almansi* ou *Euleriano* \mathbf{e} como

$$\frac{1}{2}(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2) = d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{e}d\mathbf{x}_2 \quad (3.17)$$

Onde o tensor espacial \mathbf{e} é dado por

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}). \quad (3.18)$$

3.4 Decomposição Polar

O tensor de deformação gradiente \mathbf{F} , apresentado anteriormente, transforma o vetor material $d\mathbf{X}$ em seu correspondente vetor espacial $d\mathbf{x}$. De um ponto de vista puramente matemático o tensor \mathbf{F} pode ser expresso pelo produto de um *tensor rotação* \mathbf{R} por um *tensor deformação linear* \mathbf{U} , definindo a decomposição polar como

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}. \quad (3.19)$$

Assim, reescrevendo o tensor \mathbf{C} tem-se

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U}. \quad (3.20)$$

Dado que \mathbf{R} é um tensor rotação ortogonal, tem-se que $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, e escolhendo \mathbf{U} como sendo um tensor simétrico, tem-se que a definição do *tensor deformação linear* \mathbf{U} em termos de \mathbf{C} é dado por

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{C}. \quad (3.21)$$

3.5 Mudança de Volume

Considere um elemento volumétrico infinitesimal na configuração material com coordenadas de referência paralelas aos eixos cartesianos dadas por $d\mathbf{X}_1 = dX_1 \mathbf{E}_1$, $d\mathbf{X}_2 = dX_2 \mathbf{E}_2$, $d\mathbf{X}_3 = dX_3 \mathbf{E}_3$ onde \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{E}_3 são vetores unitário ortogonais. O volume elementar material dV definido por esses três vetores é claramente dado por

$$dV = dX_1 dX_2 dX_3. \quad (3.22)$$

Para que se possa obter a correspondente deformação volumétrica, dv , deste corpo na configuração espacial, note que primeiro é necessário transformar os vetores espaciais em vetores materiais

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_1 = \frac{\partial \phi}{\partial X_1}dX_1; \quad d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_2 = \frac{\partial \phi}{\partial X_2}dX_2; \quad d\mathbf{x}_3 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_3 = \frac{\partial \phi}{\partial X_3}dX_3 \quad (3.23)$$

O produto triplo desses três vetores levará ao volume deformado como

$$dv = d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3) = \frac{\partial \phi}{\partial X_1} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial X_2} \times \frac{\partial \phi}{\partial X_3} \right) dX_1 dX_2 dX_3. \quad (3.24)$$

Note que o produto triplo acima é o determinante de \mathbf{F} que representa a mudança de volume em termos do jacobiano J como

$$dv = JdV; \quad J = \det \mathbf{F}. \quad (3.25)$$

3.6 Componente Distorcional do Tensor de Deformação Gradiente

Quando tratamos de componentes incompressíveis ou materiais próximos da incompressibilidade é necessário separar a deformação nos seus componentes volumétricos e distorcionais. Assim, como era de se esperar, a componente distorcional da deformação, chamada de $\hat{\mathbf{F}}$ não implica em mudança de volume. Note que o determinante do tensor de deformação gradiente é dado pela taxa de mudança de volume, logo o determinante de $\hat{\mathbf{F}}$ deve satisfazer

$$\det \hat{\mathbf{F}} = 1. \quad (3.26)$$

Essa condição pode ser satisfeita escolhendo $\hat{\mathbf{F}}$ como sendo

$$\hat{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F}. \quad (3.27)$$

O tensor de deformação gradiente, agora, pode ser expresso nos termos dos componentes volumétrico e distorcional, J e $\hat{\mathbf{F}}$ respectivamente como

$$\mathbf{F} = J^{1/3} \hat{\mathbf{F}}. \quad (3.28)$$

Essa decomposição é ilustrada pela Figura 3.3.

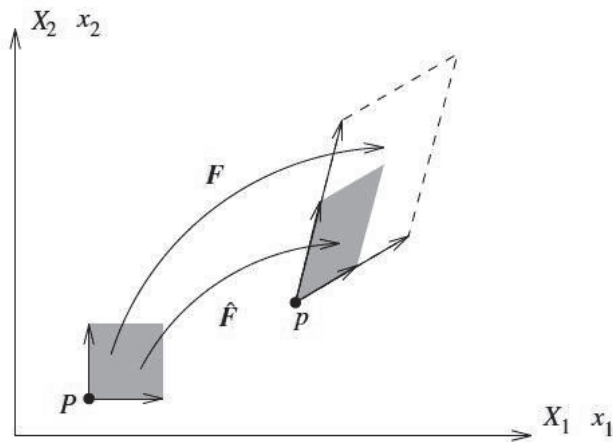


Figura 3.3: Componente Distorcional de \mathbf{F} - (BONET E WOOD, 1997)

Similar decomposição pode ser feita para se obter o tensor de Cauchy-Green \mathbf{C} pela definição da sua componente distorcional dada por

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}}. \quad (3.29)$$

Substituindo $\hat{\mathbf{F}}$ pela relação determinada na Equação (3.27) tem-se uma expressão alternativa para $\hat{\mathbf{C}}$ como

$$\hat{\mathbf{C}} = (\det \mathbf{C})^{-1/3} \mathbf{C}; \quad \det \mathbf{C} = J^2 \quad (3.30)$$

3.7 Cinemática Linear

Em sua grande maioria, as expressões que definem grandes deformações possuem características não-lineares. Estas necessitam ser linearizadas.

3.7.1 Tensor de Deformação Gradiente Linearizado

Considere um pequeno deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ na configuração atual $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X}) = \phi(\mathbf{X}, t)$ como mostrado na Figura 3.4. O tensor de deformação gradiente \mathbf{F} pode ser linearizado na direção de \mathbf{u} , onde D é conhecido como a derivada direcional, como

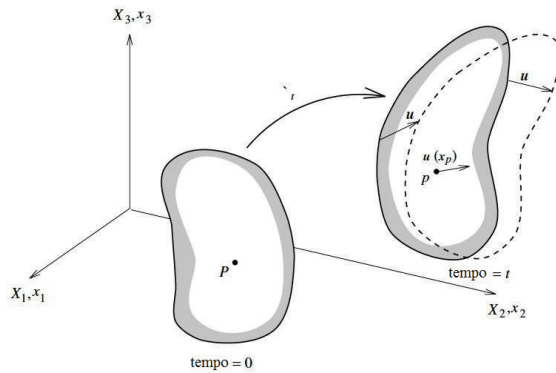


Figura 3.4: Cinemática Linearizada - (BONET E WOOD, 1997)

$$D\mathbf{F}(\phi_t)[\mathbf{u}] = \frac{d}{d\epsilon}_{\epsilon=0} \mathbf{F}(\phi_t + \epsilon\mathbf{u}); \quad (3.31)$$

$$D\mathbf{F}(\phi_t)[\mathbf{u}] = \frac{d}{d\epsilon}_{\epsilon=0} \frac{\partial(\phi_t + \epsilon\mathbf{u})}{\partial\mathbf{X}} \quad (3.32)$$

$$D\mathbf{F}(\phi_t)[\mathbf{u}] = \frac{d}{d\epsilon}_{\epsilon=0} \left(\frac{\partial\phi_t}{\partial\mathbf{X}} + \epsilon \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{X}} \right) \quad (3.33)$$

$$D\mathbf{F}(\phi_t)[\mathbf{u}] = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{F} \quad (3.34)$$

Note que se \mathbf{u} é tido como uma função da posição inicial do corpo, \mathbf{X} , então

$$D\mathbf{F}[\mathbf{u}] = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_0 \mathbf{u}, \quad (3.35)$$

Onde ∇_0 indica o gradiente com referência às coordenadas iniciais.

3.7.2 Deformação Linearizada

Usando a Equação (3.34) a deformação de Green pode ser linearizada na direção de \mathbf{u} como

$$\begin{aligned} D\mathbf{E}[\mathbf{u}] &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T D\mathbf{F}[\mathbf{u}] + D\mathbf{F}^T[\mathbf{u}] \mathbf{F}) \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{F}^T \nabla \mathbf{u} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{F}] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{F}^T [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Assim, podemos separar os termos da Equação (3.36) no tensor deformação atual ϵ e na função de mapeamento do mesmo para o sistema de coordenadas iniciais, ϕ_*^{-1} , como

$$D\mathbf{E}[\mathbf{u}] = \phi_*^{-1}[\epsilon] = \mathbf{F}^T \epsilon \mathbf{F} \quad (3.37)$$

onde

$$\epsilon = \frac{[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]}{2} \quad (3.38)$$

Note que $DE[\mathbf{u}]$ é interpretado como a operação de “puxar para trás” do tensor deformação \mathbf{E} . ϕ_*^{-1} é interpretado como a operação de “puxar para trás”, ou seja, do sistema espacial para o material.

Similarmente os tensores de deformação absoluta de Cauchy-Green no sistema atual podem ser linearizados. Assim:

$$DC[\mathbf{u}] = 2\mathbf{F}^T \epsilon \mathbf{F} \quad (3.39)$$

e

$$DB[\mathbf{u}] = (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{B} + \mathbf{B} (\nabla \mathbf{u})^T. \quad (3.40)$$

4 EQUILÍBRIO E TENSÃO

4.1 Tensor de Tensão de Cauchy

4.1.1 Definição

Considere um corpo deformável na posição atual como mostrado na Figura (4.1). Para que se possa desenvolver o conceito de tensão é necessário observar a ação das forças aplicadas na região R_1 do corpo que está em contato direto com a região R_2 . Para esse propósito considere um elemento de área Δa com normal \mathbf{n} na proximidade de um ponto p mostrado na Figura (4.1). Se a força resultante na área é Δp , o vetor tração correspondente a normal no ponto p é definido como

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta a}, \quad (4.1)$$

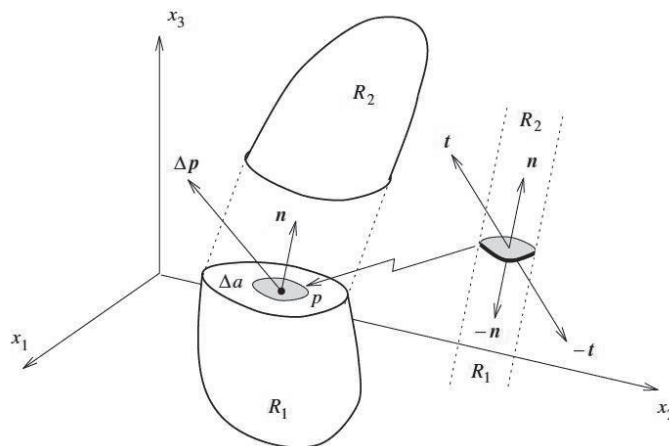


Figura 4.1: Vetor Tração - (BONET E WOOD, 1997)

Onde a relação entre \mathbf{t} e \mathbf{n} deve satisfazer o princípio da ação e reação

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{n}). \quad (4.2)$$

Define-se o *tensor de tensão de Cauchy*, que relaciona o vetor normal ao plano \mathbf{n} com o vetor tração \mathbf{t}

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (4.3)$$

4.1.2 Princípio da Potência Virtual

A potência virtual por unidade de volume produzida por uma força residual \mathbf{r} durante um movimento virtual é $\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{v}$, e para o equilíbrio tem-se

$$\delta w = \mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{v} = 0, \quad (4.4)$$

Sendo a força residual escrita em termos de um tensor de tensão referente a forças de superfície agindo no corpo e em termos, também, de forças de corpo tem-se

$$\delta W = \int_v (\text{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \delta\mathbf{v} \, dv = 0, \quad (4.5)$$

Dado que

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma} \delta\mathbf{v}) = (\text{div}\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla\delta\mathbf{v} \quad (4.6)$$

Sendo, por definição

$$\nabla\delta\mathbf{v} = \delta\mathbf{l}, \quad (4.7)$$

Após alguma álgebra (BONET E WOOD, 1997), tem-se

$$\delta W = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} \, dv - \int_v \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} \, dv - \int_{\delta v} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} \, da = 0. \quad (4.8)$$

4.2 Potência Conjugada e Medidas de Tensões Alternativas

4.2.1 O Tensor de Tensão de Kirchhoff

A potência virtual interna na Equação (4.8) é dado pela expressão:

$$\delta W_{int} = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} \, dv. \quad (4.9)$$

Reescrevendo essa equação nas coordenadas materiais de acordo com o já mostrado na Equação (3.25), tem-se

$$\int_V J \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} \, dV = \int_V \mathbf{f}_0 \cdot \delta \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial V} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{v} \, dA. \quad (4.10)$$

A potência virtual interna expressa do lado esquerdo da Equação (4.10) pode ser expressa em termos do *tensor de tensão de Kirchhoff* ($\boldsymbol{\tau}$) como

$$\delta W_{int} = \int_V \boldsymbol{\tau} : \delta \mathbf{d} \, dV; \quad \boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}. \quad (4.11)$$

4.2.2 O Primeiro Tensor de Piola-Kirchhoff

Apesar das equações anteriormente apresentadas resultarem na potência virtual interna elas ainda não são inteiramente satisfatórias pois estão descritas em termos espaciais. Ou seja $\boldsymbol{\tau}$ e \mathbf{d} são quantidades espaciais. Reescrevendo \mathbf{d} em termos de \mathbf{l} e o mesmo em termos de $\dot{\mathbf{F}}$, tem-se:

$$\delta W_{int} = \int_V J \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{l} dV, \quad (4.12)$$

$$\delta W_{int} = \int_V J \boldsymbol{\sigma} : \left(\delta \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right) dV \quad (4.13)$$

$$\delta W_{int} = \int_V tr \left(J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \delta \dot{\mathbf{F}} \right) dV \quad (4.14)$$

$$\delta W_{int} = \int_V \left(J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \right) : \delta \dot{\mathbf{F}} dV. \quad (4.15)$$

Observa-se que nesta equação o tensor tensão trabalha conjugado com a taxa do tensor de deformação gradiente $\dot{\mathbf{F}}$ e o, agora chamado *Primeiro Tensor de Tensão de Piola-Kirchhoff* é dado por

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}. \quad (4.16)$$

Nota-se que, como \mathbf{F} , \mathbf{P} é um tensor cujas componentes são dadas tanto no referencial material quanto no referencial espacial, assim

$$\mathbf{P} = \sum_{i,I=1}^3 P_{iI} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_I; \quad P_{iI} = \sum_{j=1}^3 J \sigma_{ij} \left(\mathbf{F}^{-1} \right)_{Ij}. \quad (4.17)$$

4.2.3 O Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff

O Primeiro Tensor de Piola-Kirchhoff é um tensor de referencial misto. Sendo descrito parte em um referencial material e parte em um referencial espacial. No entanto é possível escrever um tensor somente em coordenadas materiais. Este tensor é chamado de *Segundo Tensor de Piola-*

Kirchhoff, S. Segue, então, que a taxa de deformação espacial e material se correlacionam por

$$\delta \mathbf{d} = \mathbf{F}^T \delta \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (4.18)$$

Substituindo a equação acima na expressão da potência virtual interno dada pela Equação (4.9), tem-se

$$\delta W_{int} = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} \, dv; \quad (4.19)$$

$$\delta W_{int} = \int_V J \boldsymbol{\sigma} : \left(\mathbf{F}^{-T} \delta \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \right) dV; \quad (4.20)$$

$$\delta W_{int} = \int_V tr \left(\mathbf{F}^{-1} J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \delta \dot{\mathbf{E}} \right) dV; \quad (4.21)$$

$$\delta W_{int} = \int_V \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} dV, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad (4.23)$$

que mostra que \mathbf{S} trabalha conjugado a $\dot{\mathbf{E}}$ e, conseqüentemente, um tensor que trabalha somente no referencial material.

4.2.4 Componentes Desviadores e Hidrostáticos

Em muitas aplicações práticas, como por exemplo na plasticidade de metais, é relevante isolar a componente hidrostática \tilde{p} da componente desviadora (responsável pela mudança de forma). Para o tensor de Cauchy tem-se

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \tilde{p}\mathbf{I}; \quad \tilde{p} = \frac{1}{3}\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}, \quad (4.24)$$

onde o tensor desviador é $\boldsymbol{\sigma}'$.

Decomposição similar pode ser estabelecida tanto para \mathbf{P} quanto para \mathbf{S} . Assim

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \tilde{p}J\mathbf{F}^{-T}; \quad \mathbf{P}' = J\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{F}^{-T}; \quad (4.25)$$

e

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + \tilde{p}J\mathbf{C}^{-1}; \quad \mathbf{S}' = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{F}^{-T}; \quad (4.26)$$

Onde os termos \mathbf{P}' e \mathbf{S}' são as componentes desviadoras dos tensores \mathbf{P} e \mathbf{S} respectivamente.

5 HIPERELASTICIDADE

5.1 Hiperelasticidade

Materiais que se comportam unicamente como função do estado atual de deformação são geralmente conhecidos como *elásticos*. Sob tal consideração, qualquer tensão medida em um ponto \mathbf{X} é função do tensor de deformação gradiente \mathbf{F} associado ao ponto.

Descrevendo o comportamento do material com o primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff em função do tensor de deformação gradiente, tem-se

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}), \quad (5.1)$$

onde a dependência direta sobre \mathbf{X} permite a possível não homogeneidade do material.

No caso especial em que o trabalho feito pela tensão durante o processo de deformação é dependente unicamente do estado inicial no tempo t_0 e da configuração final no tempo t , o comportamento do material é dito como “independente do caminho” e o mesmo é chamado de *hiperelástico*. Como consequência do comportamento de “independência do caminho” e retomando a Equação (4.12) onde \mathbf{P} trabalha conjugado com a taxa do tensor de deformação gradiente $\dot{\mathbf{F}}$, a *função de armazenamento de energia de deformação* ou *potencial elástico* por unidade de volume indeformado pode ser estabelecida como o trabalho feito pela tensão desde a configuração inicial até a final,

$$\Psi(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \int_{t_0}^t \mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{F}} dt; \quad (5.2)$$

$$\dot{\Psi} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}. \quad (5.3)$$

Assim, pode-se escrever que:

$$P_{iJ} = \frac{\partial \Psi}{\partial F_{iJ}}. \quad (5.4)$$

Ou então de uma forma mais compacta

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X})}{\partial \mathbf{F}}. \quad (5.5)$$

A Equação (5.5) pode, ainda, ser desenvolvida no sentido da imposição da objetividade. Para tanto, Ψ deve permanecer invariante aos movimentos de rotação de corpo rígido. Isso implica que Ψ com relação à \mathbf{F} depende somente da componente de deformação \mathbf{U} e não da componente de rotação \mathbf{R} . Por conveniência, pode-se expressar Ψ em função de $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ como

$$\Psi(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \Psi(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}). \quad (5.6)$$

Observando que $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{E}}$ trabalha conjugado com o segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} , possibilita uma equação constitutiva totalmente Lagrangeana construída da mesma maneira que a Equação (5.5), assim

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}}; \quad (5.7)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} \quad (5.8)$$

5.2 Tensor Constitutivo Elástico

5.2.1 Tensor Constitutivo Elástico Lagrangeano ou Material

A relação entre \mathbf{S} e \mathbf{C} (ou $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$), será invariavelmente não-linear. Imaginando uma possível solução por Newton-Raphson, essa relação necessita ser linearizada com relação a um incremento \mathbf{u} . Usando a regra da cadeia a relação entre a derivada direcional de \mathbf{S} e a deformação linearizada $D\mathbf{E}[\mathbf{u}]$ pode ser tida (BONET E WOOD, 1997) como:

$$DS_{IJ}[\mathbf{u}] = \sum_{K,L=1}^3 \frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}} DE_{KL}[\mathbf{u}] \quad (5.9)$$

Esta relação entre a derivada direcional de \mathbf{S} e \mathbf{E} é expressa de forma mais compacta por:

$$D\mathbf{S}[\mathbf{u}] = \mathbf{C} : D\mathbf{E}[\mathbf{u}], \quad (5.10)$$

Onde o tensor de quarta ordem \mathbf{C} é dado por:

$$\mathbf{C} = \sum_{I,J,K,L=1}^3 C_{IJKL} \mathbf{E}_I \otimes \mathbf{E}_J \otimes \mathbf{E}_K \otimes \mathbf{E}_L; \quad (5.11)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{4\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (5.12)$$

5.3 Hiperelasticidade Isotrópica

5.3.1 Descrição Material

Isotropia é definida como sendo a invariância do comportamento constitutivo em qualquer direção. Isso implica que a relação entre Ψ e \mathbf{C} deve ser independente do sistema escolhido e, conseqüentemente, Ψ deve ser função de invariantes de \mathbf{C} , assim

$$\Psi(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \Psi(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}, \mathbf{X}) \quad (5.13)$$

onde os invariantes de \mathbf{C} são dados por

$$I_{\mathbf{C}} = \text{tr}(\mathbf{C}) = \mathbf{C} : \mathbf{I}; \quad II_{\mathbf{C}} = \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}) = \mathbf{C} : \mathbf{C}; \quad III_{\mathbf{C}} = \det(\mathbf{C}) = J^2 \quad (5.14)$$

Como consequência da condição de isotropia o segundo tensor de Piola-Kirchhoff pode ser reescrito como

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_{\mathbf{C}}} \frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial II_{\mathbf{C}}} \frac{\partial II_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial III_{\mathbf{C}}} \frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \quad (5.15)$$

Os tensores de segunda ordem formados pela derivação dos três invariantes com respeito a \mathbf{C} podem ser dados por (ver Bonet e Wood (1997))

$$\frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \quad \frac{\partial II_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = 2\mathbf{C} \quad \frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = J^2 \mathbf{C}^{-1} \quad (5.16)$$

Assim, tem-se o segundo tensor de Piola-Kirchhoff dado como

$$\mathbf{S} = 2\Psi_{I_C}\mathbf{I} + 4\Psi_{II_C}\mathbf{C} + 2J^2\Psi_{III_C}\mathbf{C}^{-1} \quad (5.17)$$

5.4 Materiais Incompressíveis

Muitos dos processos reais de deformação acontecem incompressivelmente ou perto da incompressibilidade. Portanto é pertinente a discussão do efeito da incompressibilidade nos processos de deformação. Como estudaremos a borracha, vamos nos ater apenas à descrição de materiais incompressíveis aqui.

5.4.1 Elasticidade Incompressível

Para determinar a equação constitutiva para materiais hiperelástico incompressíveis relembre-se da Equação (5.7) e (5.8), que rearranjando tem-se

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{S} - \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}}\right) : \dot{\mathbf{C}} = 0 \quad (5.18)$$

Se $\dot{\mathbf{C}}$ é arbitrário, tem-se que

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}}, \quad \dot{J} = \frac{1}{2}J\mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{C}} = 0 \quad (5.19)$$

Na incompressibilidade, entretanto não se pode garantir que o termo entre parênteses seja zero pois $\dot{\mathbf{C}}$ não é mais arbitrário. De fato $J = 1$ durante a deformação e, portanto, $\dot{J} = 0$. Assim, tem-se que

$$\frac{1}{2}J\mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{C}} = 0. \quad (5.20)$$

ou seja, $\dot{\mathbf{C}}$ é sujeito à uma restrição.

O fato de que a Equação (5.18) deve ser satisfeita para qualquer $\dot{\mathbf{C}}$ implica que, com a condição imposta pela Equação (5.20), tem-se

$$\frac{1}{2}\mathbf{S} - \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}} = \gamma\frac{J}{2}\mathbf{C}^{-1} \quad (5.21)$$

Onde γ é um escalar desconhecido que irá, sobre certas circunstâncias, coincidir com a pressão hidrostática e irá ser determinado pelo uso da equação adicional dada pela condição de incompressibilidade $J = 1$.

Da Equação (5.21) a equação constitutiva geral para incompressibilidade hiperelástica surge como

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial\Psi(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} + \gamma J\mathbf{C}^{-1} \quad (5.22)$$

O determinante de J na equação acima parece ser desnecessário para o caso da incompressibilidade, afinal $J = 1$. No entanto, em termos práticos, para o caso de análises por elementos finitos, raramente aplica-se $J = 1$ pontualmente. Para o caso da tecnologia de elementos de contorno a presença de incompressibilidade pontual não afeta a análise.

Dada a decomposição do segundo tensor de Piolla-Kirchhoff na componente desviadora e na hidrostática $\mathbf{S} = \mathbf{S}' + \tilde{p}J\mathbf{C}^{-1}$ é conveniente identificar a componente γ dada uma pressão \tilde{p} . Tendo-se isso em mente, a relação entre \tilde{p} e γ pode ser estabelecida por

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \frac{1}{3}J^{-1}\mathbf{S} : \mathbf{C} \\ &= \frac{1}{3}J^{-1} \left[2\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}} + \gamma J\mathbf{C}^{-1} \right] : \mathbf{C} \\ &= \gamma + \frac{2}{3}J^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}} : \mathbf{C}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

que claramente indica que γ e \tilde{p} coincidem se

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} : \mathbf{C} = 0 \quad (5.24)$$

Para materiais incompressíveis $III_C = \det \mathbf{C} = J^2 = 1$. Pode-se, agora, expressar a função de energia Ψ em função da componente distorcional do tensor direito de Cauchy-Green $\hat{\mathbf{C}} = III_C^{-1/3} \mathbf{C}$ resultando em uma função de energia modificada

$$\hat{\Psi}(\mathbf{C}) = \Psi(\hat{\mathbf{C}}). \quad (5.25)$$

Aceitando que para o caso da incompressibilidade Ψ pode ser trocado por $\hat{\Psi}$ a Equação (5.22) torna-se

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} + \tilde{p} J \mathbf{C}^{-1}. \quad (5.26)$$

É importante, agora, identificar a componente desviatória do segundo tensor de Piolla-Kirchhoff por comparação com a equação acima, assim tem-se

$$\mathbf{S}' = 2 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{C}}. \quad (5.27)$$

5.4.2 Materiais Neo-Hookeanos Incompressíveis e de Mooney-Rivlin

Para o caso de incompressibilidade de materiais Neo-Hookeanos, o potencial hiperelástico é dado por

$$\Psi(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \mu (I_C - 3) = \frac{1}{2} \mu (\text{tr } \mathbf{C} - 3) \quad (5.28)$$

onde μ é uma constante do material.

O potencial distorcional homogêneo $\hat{\Psi}$ é estabelecida trocando-se \mathbf{C} por $\hat{\mathbf{C}}$. Assim, tem-se

$$\hat{\Psi}(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\mu \left(\text{tr } \hat{\mathbf{C}} - 3 \right). \quad (5.29)$$

Agora, usando a Equação (5.26), \mathbf{S} é obtido como

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} + \tilde{p} J \mathbf{C}^{-1} = \mu III_C^{-1/3} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_C \mathbf{C}^{-1} \right) + \tilde{p} J \mathbf{C}^{-1}. \quad (5.30)$$

Sabendo-se que $\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S}$ obtem-se

$$\mathbf{P} = \mu \left(\mathbf{F} - \frac{1}{3} I_C \mathbf{F}^{-T} \right) + \tilde{p} \mathbf{F}^{-T} \quad (5.31)$$

pois $III_C = 1$; $J = 1$; $\mu = \mu_0$

Neste trabalho usaremos o material Mooney-Rivlin. A expressão resultante para o material Mooney-Rivlin em termos do primeiro tensor de Piolla-Kirchoff pode ser encontrada de maneira semelhante à obtida na equação 5.31. Entretanto para o presente trabalho usaremos a expressão fornecida por Al-Gahtani e Altiero (1996)

$$\mathbf{P} = 2 [(\mu_{10} + \mu_{01} I_C) \mathbf{F} - \mu_{01} \mathbf{B} \mathbf{F}] - p \mathbf{F}^{-T}; \quad (5.32)$$

com “ p ”, em 5.32 definido de forma ligeiramente diferente do “ \tilde{p} ” definido em 5.26. Em notação indicial tem-se

$$P_{iJ} = 2 [(\mu_{10} + \mu_{01} I_C) F_{iJ} - \mu_{01} B_{ik} F_{kJ}] - p F_{iJ}^{-T} \quad (5.33)$$

6 ELEMENTOS DE CONTORNO

6.1 Abordagem Elastostática

A primeira aplicação direta de elementos de contorno para o estudo da elasticidade linear foi apresentada por Rizzo (1967). A representação integral básica conhecida como identidade Somigliana (LOVE, 1944) foi feita inicialmente para o contorno discretizado em elementos constantes. O que será apresentado referir-se-á a discretização do contorno em elementos lineares. Apesar de não possuir a acuracidade dos elementos quadráticos, cuja tecnologia também já é bem difundida, ele representa um avanço com relação à discretização em elementos constantes sendo, também, de fácil aplicação como a mesma.

6.1.1 Equações Básicas da Elastostática Linear

Faremos aqui uma breve descrição da elasticidade linear em notação indicial, visto que a formulação do MEC para elasticidade linear servirá de base para o caso não-linear a ser tratado.

Tensões são denotadas aqui em N.I. como σ_{ij} e deformações como

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.1)$$

A relação entre tensão e deformação, para o caso linear elástico, pode ser expressa por

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad (6.2)$$

Onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e λ e μ são as constantes de Lamé.

As constantes de Lamé podem ser escritas em termos mais familiares como o Módulo de Cisalhamento G , o Módulo de Elasticidade E , e o coeficiente de Poisson ν , assim

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (6.3)$$

Também define-se o módulo volumétrico

$$\mathcal{K} = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (6.4)$$

e nota-se a incompressibilidade ($\mathcal{K} \rightarrow \infty$) quando $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$.

Então as Equações (6.1) e (6.2) podem ser escritas como

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} \quad (6.5)$$

e

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}\epsilon_{kk} + \epsilon_{ij} \right]. \quad (6.6)$$

Em muitos problemas podem existir estados iniciais de tensão (σ^0) ou deformação (ϵ^0), como por exemplo, deformações induzidas por temperatura. Considerando uma deformação inicial, para o caso linear elástico, as componentes de deformação elástica (ϵ^e) são obtidas subtraindo-se a deformação inicial (ϵ^0) da deformação total sofrida

$$\epsilon_{ij}^e = \epsilon_{ij}^t - \epsilon_{ij}^0. \quad (6.7)$$

Pode-se agora estabelecer estados iniciais de tensão através das equações que correlacionam tensão e deformação, neste caso, para materiais elásticos e lineares. Assim

$$\sigma_{ij} = (\lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk}^t + 2\nu\epsilon_{ij}^t) - (\lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk}^0 + 2\nu\epsilon_{ij}^0) = \sigma_{ij}^t + \sigma_{ij}^0. \quad (6.8)$$

6.1.2 Solução Fundamental

Para a formulação das equações integrais de contorno é necessário o conhecimento da solução do problema de carga concentrada em um domínio infinito. Se a equação de equilíbrio $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$ for escrita em função das deformações pela relação estabelecida na Equação(6.6), tem-se

$$\left(\frac{1}{1 - 2\nu} \right) u_{j,jl} + u_{l,jj} + \frac{1}{\mu} b_l = 0. \quad (6.9)$$

O desenvolvimento da solução fundamental para a equação acima pode ser observado em Brebbia e Dominguez (1989). Para o caso de deformação bidimensional a solução fundamental em termos de deslocamento é dada por

$$U_{lk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{8\pi\mu(1 - \nu)} \left[(3 - 4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right]. \quad (6.10)$$

onde \mathbf{x} e $\boldsymbol{\xi}$ denotam o ponto observador e o ponto fonte respectivamente.

O tensor de tração da solução fundamental é descrito para o caso 2D como:

$$T_{lk}^* = -\frac{1}{4\pi(1 - \nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} [(1 - 2\nu) \delta_{lk} + 2r_{,l} r_{,k}] + (1 - 2\nu) (n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right] \quad (6.11)$$

Note que a solução fundamental é obtida para o estado plano de deformação. Para problemas no estado plano de tensão (EPT) substitui-se ν em (6.10) e (6.11) por $\nu' = \frac{\nu}{(1+\nu)}$, onde ν é o coeficiente de Poisson do problema.

6.1.3 Formulação dos Elementos de Contorno

As equações integrais de governo para o caso elastostático serão deduzidas utilizando o método dos resíduos ponderados. O conceito é muito similar ao utilizado no princípio do trabalho

virtual já deduzido aqui anteriormente.

Considere primeiro a intenção de minimizar, primeiro, o erro envolvido na aproximação numérica das equações de governo elastostática, por exemplo

$$\sigma_{kj,j} + b_k = 0 \quad em \quad \Omega \quad (6.12)$$

Que tem que satisfazer as condições

(i) Condição essencial (deslocamento)

$$u_k = \bar{u}_k \quad em \quad \Gamma_1 \quad (6.13)$$

(ii) Condição natural (tração)

$$t_k = \sigma_{kj}n_j = \bar{t}_k \quad em \quad \Gamma_2 \quad (6.14)$$

Interessados em minimizar o erro da Equação (6.12). Para este fim pode-se ponderar cada uma dessas equações por uma função ponderadora u_k^* e ortogonalizando o produto, por exemplo

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = 0. \quad (6.15)$$

Se aplicarmos a integração por partes no lado esquerdo da equação acima e juntarmos os termos correspondentes, acha-se

$$- \int_{\Omega} \sigma_{kj} \epsilon_{kj}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* = - \int_{\Gamma} t_k u_k^* d\Gamma. \quad (6.16)$$

Quando se integra por partes, acha-se

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj} u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma} t_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} t_k^* u_k d\Gamma. \quad (6.17)$$

Essa expressão é correspondente ao teorema recíproco de Betti que, as vezes, é usado como um ponto inicial para a formulação das equações integrais de contorno.

Note que dois termos do lado direito da equação são integrais na superfície Γ . Considera-se agora que o contorno é dividido em duas partes Γ_1 e Γ_2 e cada uma delas possui uma das condições de contorno representadas na Equações (6.13) e (6.14), assim tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = & - \int_{\Gamma_1} t_1 u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{t}_k u_k^* d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k t_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k t_k^* d\Gamma. \end{aligned} \quad (6.18)$$

As barras representam valores conhecidos de deslocamento (u_k) e tração (t_k). Pode-se agora integrar por partes novamente duas vezes tentando retornar na Equação (6.15), assim tem-se

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (t_k - \bar{t}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) t_k^* d\Gamma. \quad (6.19)$$

Essa expressão é uma representação geral que pode ser usada para estabelecer as equações gerais de contorno. Tendo estabelecido este princípio inicial pode-se agora retornar a equação (6.18) e usar como função de peso a solução fundamental na seção 6.1.2, que foi obtida para uma carga pontual $b_l = \delta^i$ na direção de um vetor e_l . Assim, as soluções fundamentais podem ser escritas como

$$u_k^* = U_{lk}^* e_l; \quad t_k^* = T_{lk}^* e_l \quad (6.20)$$

Onde U_{lk}^* e T_{lk}^* são, respectivamente, componentes de deslocamento e tração em um ponto na direção l . A primeira integral da Equação (6.18), para uma direção particular e_l , torna-se

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj}^* u_k d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{lj,j}^* u_l d\Omega = - \int_{\Omega} \delta^i u_l e_l d\Omega = -u_l^i e_l \quad (6.21)$$

onde $-u_l^i$ representa a componente l do deslocamento em um ponto i de aplicação da carga.

A Equação (6.18) pode agora ser escrita em termos do deslocamento em i ocasionados pela aplicação da carga nas três direções (coordenadas) no ponto i , assim

$$u_l^i + \int_{\Gamma_1} T_{lk}^* \bar{u}_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} T_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma_1} U_{lk}^* t_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_{lk}^* \bar{t}_k d\Gamma + \int_{\Omega} U_{lk}^* b_k d\Omega. \quad (6.22)$$

A Equação (6.22) pode ser escrita em uma forma mais compacta considerando os dois contornos como parte de um só ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$) e aplicando as condições de contorno em uma etapa posterior, assim tem-se

$$u_l^i + \int_{\Gamma} T_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{lk}^* t_k d\Gamma + \int_{\Omega} U_{lk}^* b_k d\Omega \quad (6.23)$$

A equação acima é conhecida como identidade Somigliana e fornece o valor do deslocamento do ponto interno em relação aos valores de deslocamento e trações no contorno. Ela é válida para qualquer ponto particular “ i ” onde as forças sejam aplicadas.

6.1.4 Pontos no Contorno

A identidade Somigliana fornece o deslocamento de um ponto interno a partir dos valores de deslocamento e tração da superfície e, conseqüentemente, quando o problema de desconhecimento desses valores na superfície é resolvido os valores dos pontos internos podem ser calculados. No entanto a Equação (6.23) é válida para todo o o domínio Ω incluindo o contorno Γ .

Quando “ i ” esta no contorno a integral da Equação (6.23) apresenta uma singularidade cujo comportamento necessita ser estudado. Assim, considerando-se que a superfície seja suave para

entendimento do modelo adotado pode-se considerar um hemisfério de centro em “ i ” com um pequeno raio ϵ que tende a zero ($\epsilon \rightarrow 0$), como mostra a Figura 6.1.

Há dois tipos de integrais de contorno na Equação (6.23). Considera-se, primeiramente, a integral do lado direito da equação e a escreve-se em função do contorno Γ_ϵ do hemisfério.

$$\int_{\Gamma} U_{lk}^* t_k d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} \{U_{lk}^* t_k d\Gamma\} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \{U_{lk}^* t_k d\Gamma\} \quad (6.24)$$

A segunda integral da equação pode ser escrita como

$$t_k^i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} U_{lk}^* d\Gamma \right\} \quad (6.25)$$

Note que a solução fundamental possui o termo $1/\epsilon$ e que o elemento diferencial de superfície é de ordem ϵ^2 . Assim pode-se concluir que esse termo tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Do outro lado da Equação (6.23) a integral pode ser escrita como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} T_{lk}^* u_k d\Gamma \right\} = u_k^i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} T_{lk}^* d\Gamma \right\} \quad (6.26)$$

O valor de T_{lk}^* , agora, é da ordem de $1/\epsilon^2$ e não tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$. Substituindo-se, então, o valor de T_{lk}^* encontrado na Equação (6.11), tem-se para o caso do contorno suave

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} T_{lk}^* d\Gamma \right\} = -\frac{1}{2} \delta_{lk} \quad (6.27)$$

Então a integral desse lado da equação passa a ser

$$\int_{\Gamma} T_{lk}^* u_k d\Gamma - \frac{1}{2} \delta_{lk} u_k^i = \int_{\Gamma} T_{lk}^* u_k d\Gamma - \frac{1}{2} u_l^i \quad (6.28)$$

Assim, a Equação (6.23) pode ser escrita de uma forma mais compacta e geral como

$$C_{lk}^i u_k^i + \int_{\Gamma} T_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{lk}^* t_k d\Gamma + \int_{\Omega} U_{lk}^* b_k d\Omega \quad (6.29)$$

Onde C_k^i é função da geometria da superfície, que para superfícies suaves assume o valor de $\frac{1}{2}\delta_{lk}$.

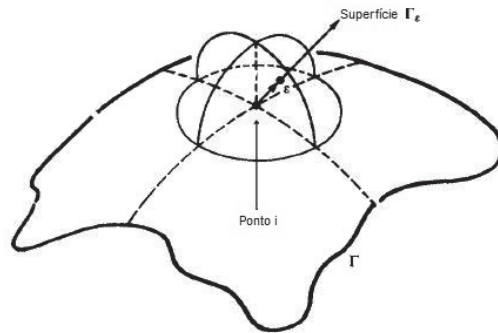


Figura 6.1: Superfície de contorno Γ_ϵ com Hemisfério Fictício para Propósitos de Integração - Adaptado de Brebbia e Dominguez (1989)

6.2 Elementos de Contorno

No intuito de resolver a Equação Integral (6.23) numericamente, o contorno deve ser discretizado em uma série de elementos nos quais os valores de tração e deslocamento serão escritos em função de pontos nodais. As condições de contorno conhecidas serão aplicadas ao sistema para que se possa determinar as condições de contorno desconhecidas e conseqüentemente uma solução aproximada para o mesmo.

É mais conveniente, agora, trabalhar com matrizes ao invés de continuarmos com a notação indicial. Para esse efeito define-se “ u ” e “ t ” como funções aplicadas sobre o elemento “ j ”, por exemplo

$$u = \Phi u^j \quad (6.30)$$

e

$$\mathbf{t} = \Phi \mathbf{t}^j. \quad (6.31)$$

Onde u^j e t^j são valores nodais para o deslocamento e força respectivamente, de dimensões $3 \times Q$ para o caso tridimensional e de $2 \times Q$ para o caso bidimensional onde Q é o número de nós por elemento. Já Φ é a matriz da função de interpolação dos pontos do elemento. Dá-se, nesta etapa, a aproximação da geometria do corpo em estudo. Φ é uma matriz que possui dimensão $3 \times 3Q$ (ou $2 \times 2Q$ para o caso bidimensional) cujas linhas representam a função de forma, assim

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \cdots & \phi_n & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & 0 & \phi_n & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \cdots & 0 & 0 & \phi_n \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Note que as forças de corpo “ \mathbf{b} ” podem ser expressas, também, em um vetor função em função das três componentes, assim

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}. \quad (6.33)$$

Os coeficientes da solução fundamental também podem ser escritos como

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* & T_{13}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* & T_{23}^* \\ T_{31}^* & T_{32}^* & T_{33}^* \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{matriz cujos coeficientes } T_{lk}^* \text{ são as} \\ \text{trações na direção “}k\text{” provocadas} \\ \text{por forças em “}i\text{” agindo em uma} \\ \text{direção “}l\text{”} \end{matrix} \quad (6.34)$$

e

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* & U_{13}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* & U_{23}^* \\ U_{31}^* & U_{32}^* & U_{33}^* \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{matriz cujos coeficientes } U_{lk}^* \text{ são os} \\ \text{deslocamentos na direção “}k\text{” pro-} \\ \text{vocadas por forças em “}i\text{” agindo} \\ \text{em uma direção “}l\text{”}. \end{matrix} \quad (6.35)$$

Com essas notações e adotando a \mathbf{C}^i (BREBBIA E DOMINGUEZ, 1989) como um parâmetro que corrige u_i^i segundo a posição do ponto avaliado (na superfície, no interior do domínio etc.), a Equação (6.23) para cada ponto “ i ” pode ser escrita como

$$\mathbf{C}^i \mathbf{u}^i + \int_{\Gamma} \mathbf{T}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^* \mathbf{t} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \mathbf{b} \, d\Omega \quad (6.36)$$

onde $\mathbf{C}^i = \frac{1}{2} \mathbf{I}$ para superfícies suaves.

Note que as coordenadas cartesianas de localização dos elementos que constituem a discretização do contorno também devem ser escritas em função de valores nodais. Assim, descrição da superfície também será feita através de funções de interpolação dos pontos que a descreve. Muitas vezes é mais conveniente, ao fazer a discretização da superfície, fazê-la em outro sistema de coordenadas (um sistema local) para tanto se faz uso do Jacobiano.

Considere, agora, substituir os valores de \mathbf{u} e de \mathbf{t} na Equação (6.36) pelas funções que aproximam a distribuição dos mesmos na superfície tomando-se valores nodais segundo as Equações (6.30) e (6.31). Assim, tem-se

$$\mathbf{C}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{T}^* \Phi \, d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}^* \Phi \, d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j + \sum_{m=1}^M \left\{ \int_{\Omega_m} \mathbf{U}^* \mathbf{b} \, d\Omega \right\}. \quad (6.37)$$

Note que a soma de $j = 1$ a NE indica a soma de todos os NE elementos que discretizam a superfície Γ_j e que \mathbf{u}^j e \mathbf{t}^j são os valores nodais de deslocamento e tração para o elemento j . Nota-se, também, que o domínio é dividido em M células internas sobre as quais a integral das forças de corpo é realizada.

A equação integral (6.37) é resolvida numericamente. As funções de interpolação Φ tendem a ser expressas em um sistema homogêneo local de coordenadas. Essas coordenadas necessitam ser transformadas do sistema de coordenadas locais ζ_i para o sistema de coordenadas global x_I .

Assim, no caso bidimensional do elemento de contorno, tem-se $d\Gamma = |J| d\zeta$, onde ζ esta no sistema de coordenadas adimensional.

6.2.1 Sistema de Equações

A Equação (6.37) corresponde, para um ponto particular “ i ” à equação integral que pode ser escrita como

$$C^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{t}^j + \sum_{m=1}^M \mathbf{b}^{im} \quad (6.38)$$

Onde N é o número de nós, \mathbf{u}^j e \mathbf{t}^j é o deslocamento e tração no nó “ j ”. H e G são denominadas matrizes de influência e são dadas por

$$\hat{H}^{ij} = \sum_t \int_{\Gamma_t} \mathbf{T}^* \Phi d\Gamma \quad (6.39)$$

e

$$\mathbf{G}^{ij} = \sum_t \int_{\Gamma_t} \mathbf{U}^* \Phi d\Gamma. \quad (6.40)$$

Já \mathbf{b} é um vetor onde são somados os efeitos das forças de corpo e que é dado por

$$\mathbf{b}^{is} = \int_{\Omega_s} \mathbf{U}^* \mathbf{b} d\Omega. \quad (6.41)$$

A contribuição de todos os nós “ i ” podem então serem escritas juntas, formando um sistema de equações, que é representado por

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} + \mathbf{b}. \quad (6.42)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{ij} &= \mathbf{H}^{ij} & i = j \\ \mathbf{H}^{ij} &= \mathbf{H}^{ij} + \mathbf{C}^i & i \neq j \end{aligned} \quad (6.43)$$

Note que os elementos \mathbf{C}^i são uma série de submatrizes 2×2 (para o caso bidimensional) que serão alocadas na diagonal de \mathbf{H} , os elementos dessas submatrizes não são simples de ser resolvidos principalmente por serem dependentes das condições de suavidade ou não do contorno. Felizmente essa questão é facilmente resolvida quando empregamos as considerações de movimento de corpo rígido sobre o objeto em estudo.

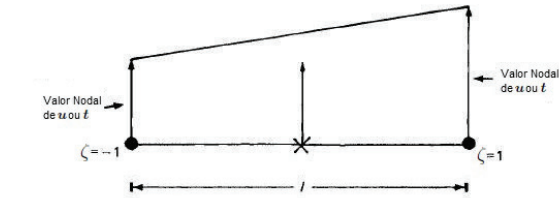
Os vetores \mathbf{u} e \mathbf{t} representam todos os valores do deslocamento e da tração antes da aplicação das condições de contorno. Essas condições podem ser introduzidas rearranjando as colunas \mathbf{H} e \mathbf{G} passando todos os valores desconhecidos para um vetor \mathbf{x} do lado esquerdo. Assim, finalmente tem-se o sistema de equações

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (6.44)$$

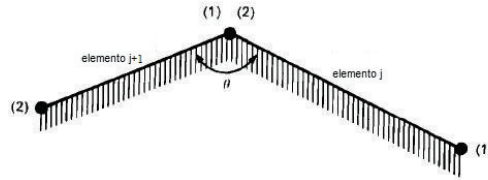
6.3 Elementos Lineares

Vamos considerar agora uma variação linear de \mathbf{u} e \mathbf{t} dentro do elemento e considerar que essa variação será pautada pelos nós que são tomados no final de cada elemento (Figura 6.2). Assim os valores de \mathbf{u} e \mathbf{t} em qualquer ponto do elemento pode ser definido em termos dos seus valores nodais e de duas funções de interpolação linear ϕ_1 e ϕ_2 que são dadas em termos das coordenadas locais ζ , como mostra a Figura 6.2. Assim

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \Phi \mathbf{u}^j. \quad (6.45)$$



(a) Definição de Elemento Linear



(b) Intersecção de Elementos

Figura 6.2: Elemento Linear - Adaptado de Brebbia e Dominguez (1989)

Onde \mathbf{u}^j e \mathbf{t}^j se referem às componentes nodais do elemento \mathfrak{x} . As componentes desses vetores são $u_l^{(k)}$ e $t_l^{(k)}$ onde k representa o nó sobre qual esta sendo avaliado os valores de \mathbf{u} e \mathbf{p} do elemento e l define a componente de deslocamento ou tração na direção l .

As funções Φ_i de interpolação são dadas por:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -\frac{1}{2}(\zeta - 1) \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2}(\zeta + 1) \end{aligned} \quad (6.46)$$

Considerando-se, então, N elementos de contorno as equações integrais tornam-se:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{T}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{t}^j. \quad (6.47)$$

Algumas dessas integrais podem ser resolvidas utilizando-se integração numérica normalmente (por exemplo, com pontos e pesos de Gauss), já outras - com singularidade - podem ser resolvidas analiticamente ou por métodos numéricos especiais.

6.3.1 Montagem das Matrizes H e G

Uma vez entendido como funciona a teoria dos elementos de contorno, o processo de discretização da superfície e, também, entendido como se dará a aproximação do contorno por elementos lineares é preciso compreender como se dá a montagem das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} , mostradas na Equação (6.42), que posteriormente serão reorganizadas para formar o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$. Para tanto separam-se as integrais da equação (6.47) e as reescreve-se de forma menos compacta. Assim, para o caso 2D

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{T}^* \Phi d\Gamma \mathbf{u}^j = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 \end{bmatrix} J d\zeta \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (6.48)$$

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{U}^* \Phi d\Gamma \mathbf{t}^j = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} J d\zeta \begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (6.49)$$

Onde J é o jacobiano da transformação para coordenadas isoparamétricas feitas no elementos.

Assim, isolando-se os valores de contorno (os valores colocados “para fora da integral”) e suprimindo-se as integrais como elementos de uma sub-matriz onde cada elemento representa a integral de uma das combinações de índices da solução fundamental juntamente com alguma das

funções de discretização do contorno (Φ), tem-se que a Equação (6.37), desconsiderando-se as forças de corpo, pode ser reescrita em função das sub-matrizes $[A]$ e $[B]$ como:

$$\sum_{E=1}^{NE} [B]^{(d,E)} \{t\}^{(E)} = \sum_{E=1}^{NE} [A]^{(d,E)} \{u\}^{(E)} + [C] \{u(d)\} \quad (6.50)$$

onde

$$[A]^{(d,E)} = \left\{ \int_{-1}^1 [T^*]^T [\Phi] J d\zeta \right\}^{(E)} ; \quad (6.51)$$

e

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

$$[B]^{(d,E)} = \left\{ \int_{-1}^1 [U^*]^T [\Phi] J d\zeta \right\}^{(E)} ; \quad (6.53)$$

e

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

$$\left(\{u\}^{(E)} \right)^T = \left\{ u_1^{(1)} \quad u_2^{(1)} \quad u_1^{(2)} \quad u_2^{(2)} \right\}^{(E)} \quad (6.55)$$

$$\left(\{t\}^{(E)} \right)^T = \left\{ t_1^{(1)} \quad t_2^{(1)} \quad t_1^{(2)} \quad t_2^{(2)} \right\}^{(E)} \quad (6.56)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

onde para elementos que apresentam contornos suáveis na superfície

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Portanto, as matrizes $[H]$ e $[G]$ que compõem a Equação (6.42) são dadas por:

$$[H] = \sum_{E=1}^{NE} [A]^{(d,E)}; \quad (6.59)$$

$$[G] = \sum_{E=1}^{NE} [B]^{(d,E)}; \quad (6.60)$$

É muito importante lembrar, agora, que dado o modelo de discretização utilizado (elementos lineares contínuos) um mesmo nó é compartilhado por dois elementos. Assim ao montar-se a matriz de influência $[H]$, cada coluna será composta pela soma de duas integrais correspondentes à influência dos elementos vizinhos, assim, para exemplificação e entendimento, segue:

Dada a sub-matriz de influência de um elemento “ E ” qualquer sobre o nó “ d ” $[A]^{d,E}$ e dada uma outra submatriz de influência de um elemento “ $E+I$ ” $[A]^{d,E}$ sobre o mesmo nó. Tem-se que as colunas da matriz global $[H]$ correspondente a esses nós é dado pela soma de parte das matrizes. Assim

$$[H] = \begin{bmatrix} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \begin{pmatrix} \overbrace{a_1^{12}}^E \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \overbrace{a_1^{21}}^E + \overbrace{a_1^{11}}^{E+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \overbrace{a_1^{22}}^E + \overbrace{a_1^{12}}^{E+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \overbrace{a_1^{21}}^{E+1} \end{pmatrix} & \dots \\ \dots & \begin{pmatrix} \overbrace{a_2^{12}}^E \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \overbrace{a_2^{21}}^E + \overbrace{a_2^{11}}^{E+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \overbrace{a_2^{22}}^E + \overbrace{a_2^{12}}^{E+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \overbrace{a_2^{21}}^{E+1} \end{pmatrix} & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

O mesmo não ocorre com a matriz $[G]$ pois mesmo sendo um nó compartilhado por dois elementos diferentes a tração atuante na superfície desses elementos não, necessariamente, necessita ter continuidade entre os elementos. Assim, diferentemente com o que acontece com o deslocamento \mathbf{u} as submatrizes de influência $[B]$ não são somadas para comporem a matriz $[G]$.

Assim, utilizando-se as submatrizes $[A]$ e $[B]$ a lei de formação das matrizes $[H]$ e $[G]$ é mostrado em forma de fluxograma como se segue

```

sendo:
" :" = todos os elementos da coluna ou linha da matriz
n_nos = número total de nós;
n_elem = número total de elementos;
R1 = matriz de dimensão n_nosX4, onde
R1(n,1)={1,3,5,...,2n_nos}; onde n=1,2,3,...,n_nos;
R1(m,2)={2,4,6,...,2n_nos}; onde m=1,2,3,...,n_nos;
R1(p,3)={3,5,7,...,2n_nos}; onde p=3,2,3,...,n_nos-1;
R1(q,4)={4,6,8,...,2n_nos}; onde q=4,2,3,...,n_nos-1;
R1(n_nos,3)=1;
R1(n_nos,4)=2;
Do i = 1 até n_elem;
Do j = 1 até n_nos;
H_coluna(2 j-1:2 j,:) = [A];
G_coluna(2 j-1:2 j,:) = [B];
End_Do j;
H(:,R1(i,:)) = H(:,R1(i,:)) + H_coluna;
G(:,4i-3:4i) = G(:,4i-3:4i) + G_coluna;
End_Do i.

```

6.4 Pontos Internos

A identidade Somigliana nos dá o deslocamento de algum ponto interno em termos dos deslocamentos e trações do contorno. Considerando novamente essa representação, tem-se:

$$\mathbf{u}^i = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{t}^j - \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{T}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j + \sum_{m=1}^M \left\{ \int_{\Omega_m} \mathbf{U}^* \mathbf{b} d\Omega \right\} \quad (6.62)$$

Onde Γ_j corresponde ao contorno do elemento j e “ i ” é agora um ponto interno. Assim o deslocamento dos pontos internos em termos dos deslocamentos e trações dos nós do contorno podem ser escritos como:

$$\mathbf{u}^i = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{t}^j - \sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j + \sum_{m=1}^M \mathbf{b}^{im} \quad (6.63)$$

Os termos \mathbf{H}^{ij} e \mathbf{G}^{ij} já foram amplamente discutidos neste trabalho.

A tensão de um ponto interno para um material isotrópico pode ser obtida introduzindo-se o gradiente de deslocamento dos pontos internos na relação entre tensão e deformação, como por exemplo:

$$\sigma_{ij}^h = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial \xi_l} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right) \quad (6.64)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^h &= \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial U_{ik}^*}{\partial \xi_l} + \mu \left(\frac{\partial U_{ik}^*}{\partial \xi_j} + \frac{\partial U_{jk}^*}{\partial \xi_i} \right) \right\} t_k d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial U_{ik}^*}{\partial \xi_l} + \mu \left(\frac{\partial U_{ik}^*}{\partial \xi_j} + \frac{\partial U_{jk}^*}{\partial \xi_i} \right) \right\} b_k d\Omega \\ &- \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial T_{ik}^*}{\partial \xi_l} + \mu \left(\frac{\partial T_{ik}^*}{\partial \xi_j} + \frac{\partial T_{jk}^*}{\partial \xi_i} \right) \right\} u_k d\Gamma \end{aligned} \quad (6.65)$$

Fazendo as derivadas e reordenando os termos, tem-se:

$$\sigma_{ij}^h = \int_{\Gamma} V_{kij} t_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma + \int_{\Omega} V_{kij} b_k d\Omega \quad (6.66)$$

Onde os tensores de terceira ordem V_{kij} e S_{kij} são

$$V_{kij} = \frac{1}{r} \{ (1-2\nu) \{ \delta_{ki} r_{,i} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k} \} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad (6.67)$$

e

$$\begin{aligned} S_{kij} = & \frac{2\mu}{r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1 - 2\nu) \delta_{ijr,k} + \nu (\delta_{ikr,j} + \delta_{jkr,i}) - 4r_{,ir,jr,k}] + 2\nu (n_{ir,jr,k} + n_{jr,ir,k}) \right. \\ & \left. + (1 - 2\nu) (2n_{kr,ir,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1 - 4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \end{aligned} \quad (6.68)$$

7 APLICAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA BORRACHA

7.1 Introdução

7.1.1 Formulação Básica

Considere um corpo, de borracha, plano que ocupa uma região Ω e possui contorno Γ . O vetor posição da partícula na configuração não deformada (material) é denotado por \mathbf{X} . Posteriormente à deformação, a partícula possui uma nova posição denotada por \mathbf{x} . A formulação que será desenvolvida irá se basear na configuração indeformada (material) e posteriormente todas as funções e operadores diferenciais serão feitos com relação às coordenadas indeformadas \mathbf{X} . O gradiente de deformação \mathbf{F} é dado por

$$F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} \quad (7.1)$$

O tensor de deformação “esquerdo” de Cauchy-Green (*left Cauchy-Green*) \mathbf{B} e o “direito” (*right Cauchy-Green*) \mathbf{C} são definidos em notação indicial

$$B_{ij} = F_{iK}F_{jK}; \quad C_{IJ} = F_{kI}F_{kJ} \quad (7.2)$$

A condição de incompressibilidade pode ser descrita como

$$\det \mathbf{F} = 1 \quad (7.3)$$

As equações de equilíbrio para um corpo com ausência das forças de corpo podem ser escritas como

$$P_{jI,j} = 0 \quad (7.4)$$

Onde P_{iJ} é o tensor de tensão por unidade de área indeformada (conhecido como primeira tensão de Piolla-Kirchoff). Vamos assumir que P_{iJ} pode ser dividido em duas partes.

$$P_{iJ} = P_{iJ}^h + P_{iJ}^n \quad (7.5)$$

onde P_{iJ}^h é a tensão Hookeana e P_{iJ}^n é a parte não Hookeana. Então a equação de equilíbrio torna-se

$$P_{iJ,i}^h + P_{iJ,i}^n = 0 \quad (7.6)$$

onde P_{iJ}^n pode ser tratada como uma força de corpo fictícia e $P_{iJ}^n = P_{iJ} - P_{iJ}^h$.

As condições de contorno em cada ponto no contorno, ou deslocamento ou tração, será especificada como

$$u_i = \bar{u}_i; \quad P_{iJ}N_i = t_J = \bar{t}_J \quad (7.7)$$

onde N é um vetor unitário normal ao contorno na geometria material.

Há muitos modelos de leis constitutivas que podem se aproximar do comportamento de uma borracha. Na presente análise o modelo de Mooney-Rivlin é o adotado. O modelo de Mooney-Rivlin pode ser escrito como

$$P_{iJ} = 2[(\mu_{10} + \mu_{01}I_C) F_{iJ} - \mu_{01}B_{ik}F_{kJ}] - pF_{iJ}^{-T} \quad (7.8)$$

onde F_{iJ} e B_{ij} foram definidas anteriormente, μ_{10} e μ_{01} são constantes materiais de Mooney-Rivlin, I_C é o primeiro invariante de C_{IJ} e p é a pressão hidrostática.

7.1.2 Formulação para Elementos de Contorno

A partir de agora abandonaremos a distinção entre os índices maiúsculos e minúsculos de $P_{i,j}$, compatibilizando a notação com a elasticidade linear infinitesimal via MEC. Da mesma forma abandonaremos a distinção entre a normal \mathbf{N} (indeformado) e \mathbf{n} (deformado).

A formulação dos elementos de contorno irá usar diretamente as Equações de equilíbrio (7.5) e (7.6) e as condições de contorno. O resultado da formulação da equação geral para formulação dos elementos de contorno é

$$\begin{aligned} \alpha_{kj}(\boldsymbol{\xi}) u_k(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} T_{kj}^*(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{X}) = \int_{\Gamma} U_{kj}^*(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) t_k^h(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ + \int_{\Omega} U_{kj}^*(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial P_{mk}^n}{\partial X_m}(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Onde $\alpha_{kj} = \delta_{kj}$ se $\boldsymbol{\xi}$ estiver dentro do domínio Ω , $\alpha_{kj} = \frac{1}{2}\delta_{kj}$ para o ponto em um contorno suave e δ_{kj} é o delta de Kronecker, u_k é o vetor deslocamento do contorno e t_k^h é a parte Hookeana do vetor de tração no contorno, que é dado por

$$t_k^h = P_{ik}^h n_i \quad (7.10)$$

U_{kj}^* é a solução fundamental que representa o deslocamento de um ponto \mathbf{X} na direção k provocado por uma carga aplicada em $\boldsymbol{\xi}$ na direção j , e T_{kj}^* é a tração correspondente. Note que o lado direito da Equação (7.9) envolve somente a parte Hookeana da tração. A parte não-linear, no entanto, pode ser recuperada pela integração por partes para a expressão da integral de domínio. Assim, a partir da Equação (7.9), pode-se tratar a integral de domínio para o caso bidimensional, de forma que:

$$\int_{\Omega} U_{kj} \frac{\partial P_{mk}^n}{\partial X_m} d\Omega = \int \int U_{kj}^* \left(\frac{\partial P_{Xk}}{\partial X} + \frac{\partial P_{Yk}}{\partial Y} \right) dX dY \quad (7.11)$$

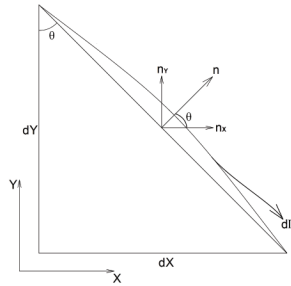
Aplicando a integração por partes em 7.11, tem-se:

$$\begin{aligned} \int \int U_{kj}^* \frac{\partial P_{Xk}^n}{\partial X} dX dY &= \int U_{kj}^* P_{Xk}^n dY - \int \int \frac{\partial U_{kj}^*}{\partial X} P_{Xk}^n dX dY \\ \int U_{kj}^* \frac{\partial P_{Yk}^n}{\partial Y} dX dY &= \int U_{kj}^* P_{Yk}^n dX - \int \int \frac{\partial U_{kj}^*}{\partial Y} P_{Yk}^n dX dY \end{aligned} \quad (7.12)$$

Voltando à Equação (7.11) tem-se:

$$\begin{aligned} \int \int \left(U_{kj}^* \frac{\partial P_{Xk}^n}{\partial X} + U_{kj}^* \frac{\partial P_{Yk}^n}{\partial Y} \right) dX dY &= \int U_{kj}^* P_{Xk}^n dY + \int U_{kj}^* P_{Yk}^n dX \\ &\quad - \int \int \frac{\partial U_{kj}^*}{\partial X} P_{Xk}^n dX dY - \int \int \frac{\partial U_{kj}^*}{\partial Y} P_{Yk}^n dX dY \\ &= \int U_{kj}^* P_{Xk}^n dY + \int U_{kj}^* P_{Yk}^n dX - \int \int \frac{U_{kj,m}^*}{\partial X_m} P_{mk}^n d\Omega \end{aligned} \quad (7.13)$$

Sabendo-se que:



$$\begin{aligned} dY &= d\Gamma \cos \theta = d\Gamma_Y \\ dX &= d\Gamma \sin \theta = d\Gamma_X \end{aligned} \quad (7.14)$$

Assim:

$$\int U_{kj}^* P_{Xk}^n dY + \int U_{kj}^* P_{Yk}^n dX = \int_{\Gamma} U_{kj}^* P_{Xk}^n n_X d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{kj}^* P_{Yk}^n n_Y d\Gamma \quad (7.15)$$

Reescrevendo em notação indicial, tem-se:

$$\int_{\Gamma} U_{kj}^* P_{Xk}^n n_X d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{kj}^* P_{Yk}^n n_Y d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{kj}^* \underbrace{P_{mk}^n n_m}_{t_k^n} d\Gamma \quad (7.16)$$

Retornando, agora, à Equação (7.9) e lembrando que $t_k = t_k^h + t_k^n$ tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha_{kj}(\boldsymbol{\xi}) u_k(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} T_{kj}^*(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) u_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &= \int_{\Gamma} U_{kj}^*(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) t_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ &- \int_{\Omega} \frac{\partial U_{kj}^*}{\partial X_m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) P_{mk}^n(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (7.17)$$

A Equação (7.17), excluindo a integral de domínio, é exatamente a mesma equação integral correspondente para o caso da elasticidade linear sem forças de corpo. A integral de domínio na Equação (7.17) tem o gradiente de deslocamento e a pressão hidrostática, dentro do termo P_{mk}^n , como desconhecidos. O gradiente de deslocamento, no interior do corpo pode ser obtido através da derivada da Equação (7.17), assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_{\alpha}} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial T_{kj}^*}{\partial \xi_{\alpha}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) u_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial U_{kj}^*}{\partial \xi_{\alpha}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) t_k(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \\ &- \int_{\Omega} \frac{\partial^2 U_{kj}^*}{\partial X_m \partial \xi_{\alpha}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) P_{mk}^n(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (7.18)$$

onde os termos $\frac{\partial T_{kj}^*}{\partial \xi_\alpha}$, $\frac{\partial U_{kj}^*}{\partial \xi_\alpha}$ e $\frac{\partial^2 U_{kj}^*}{\partial X_m \partial \xi_\alpha}$ são

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{lk}^*}{\partial \xi_\alpha} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{-r_{,\alpha}}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right] \right. \\ &+ \left[\frac{n_i}{r^2} (\delta_{i\alpha} + r_{,\alpha} r_{,i}) ((1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k}) - \frac{4}{r^2} [2r_{,\alpha} r_{,k} r_{,l} + \delta_{l\alpha} r_{,k} + \delta_{k\alpha} r_{,l}] \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{r^2} [n_k (\delta_{l\alpha} + r_{,\alpha} r_{,l}) - n_l (\delta_{k\alpha} + r_{,\alpha} r_{,k})] \right] \right]; \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial U_{lk}^*}{\partial \xi_\alpha} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} [(-3+4\nu)r_{,\alpha}\delta_{lk} - \delta_{l\alpha}r_{,k} - \delta_{l\alpha}r_{,l} - 2r_{,\alpha}r_{,k}r_{,l}]; \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{lk}^*}{\partial X_m \partial \xi_\alpha} &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu r^2} [-r_{,\alpha} [(-3+4\nu)r_{,m}\delta_{lm} + \delta_{lm}r_{,k} + \delta_{km}r_{,l} \\ &- 2r_{,l}r_{,m}r_{,k}] + [(-3+4\nu)(-\delta_{m\alpha} - r_{,\alpha}r_{,m})\delta_{lk} + \delta_{lm}(-\delta_{k\alpha} - r_{,\alpha}r_{,k}) \\ &+ \delta_{km}(-\delta_{l\alpha} - r_{,\alpha}r_{,l}) + 2(\delta_{l\alpha}r_{,k}r_{,m} + \delta_{m\alpha}r_{,l}r_{,k} \\ &+ \delta_{k\alpha}r_{,m}r_{,l} + 3r_{,\alpha}r_{,m}r_{,k}r_{,l})]. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Usando N elementos de contorno lineares isoparamétricos e M células com interpolação constante para tensão, a discretização da Equação (7.17) leva a

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} + \mathbf{f}(\nabla\mathbf{u}, p) \quad (7.22)$$

Onde \mathbf{u} e \mathbf{t} são valores nodais de deslocamento e tração, respectivamente. \mathbf{H} e \mathbf{G} são as matrizes de coeficientes de tamanhos $2N \times 2N$ e $2N \times 4N$, respectivamente, e \mathbf{f} é um vetor coluna $2N \times 1$ cujos elementos são funções do gradiente de deslocamento e da pressão hidrostática.

Posteriormente à aplicação das condições de contorno a Equação (7.22) pode ser rearranjada para que se isolem as incógnitas e assim, tome a forma de

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{f}(\nabla\mathbf{u}, p) \quad (7.23)$$

Onde \mathbf{A} é uma matriz $2N \times 2N$ de coeficientes, \mathbf{f} é um vetor coluna $2N \times 1$, que é função do gradiente de deslocamento e da pressão hidrostática, contem os valores desconhecidos de deslocamento ou tração do contorno e \mathbf{c} é, também, um vetor coluna de valores conhecidos que foram gerados do resultado dos valores prescritos de força ou deslocamento da superfície com seus respectivos coeficientes contidos na matriz \mathbf{H} ou \mathbf{G} . Similarmente, aplicando a Equação (7.18) no centróide das M celular contidas no domínio tem-se $4M$ equações não-lineares para o gradiente do deslocamento

$$\nabla\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{t} + \mathbf{g}(\nabla\mathbf{u}, p) \quad (7.24)$$

Onde \mathbf{B} e \mathbf{D} são $4M \times 2N$ e $4M \times 4M$ matriz de coeficientes, respectivamente, e \mathbf{g} é um vetor coluna de dimesão $4M \times 1$.

Aplicando a Equação (7.3) com M células de domínio, as M equações não lineares que representam a condição de incompressibilidade são

$$\int_{\Omega_m} (\det \mathbf{F} - 1) d\Omega = 0; \quad m = 1, M \quad (7.25)$$

Sendo o tensor de deformação gradiente assumido como constante em cada célula do domínio. a equação acima reduz-se para

$$(\det \mathbf{F}_m) - 1 = 0; \quad m = 1, M \quad (7.26)$$

onde $\det \mathbf{F}$ é o valor do determinante no centróide da célula m .

Antes de tentar resolver a equação acima, note que devido à singularidade natural da solução fundamental alguns componentes das matrizes nas Equações (7.23) e (7.24) são obtidos de integrais singulares. O tipo de tratamento que será dado à essas integrais será discutido a baixo. As integrais regulares serão resolvidas por métodos comuns de resolução como, por exemplo, pesos e pontos de Gauss.

(i) **Integrais Singulares de Contorno**

Essas integrais estão situadas nas submatrizes $2N \times 2N$ na diagonal das matrizes H e G . A determinação desses valores pode ser feito empregando-se a técnica de “Corpo rígido” para H e técnicas de integração especiais para G .

(ii) **Integrais Singulares no Domínio ($\frac{1}{r}$)**

As integrais de domínio envolvendo a singularidade $\frac{1}{r}$ sobre a célula m quando o ponto ξ esta no contorno da célula m são parte do vetor coluna f e possuem a seguinte forma

$$\int_{\Omega_m} \frac{\partial}{\partial X_i} [\ln [r (\mathbf{X}, \xi)]] d\Omega; \quad \xi \in \Gamma_m \quad (7.27)$$

Essas integrais podem ser transformadas em integrais de contorno usando integração por partes

$$\int_{\Omega_m} \frac{\partial}{\partial X_i} [\ln [r (\mathbf{X}, \xi)]] d\Omega = \int_{\Gamma_m} [\ln [r (\mathbf{X}, \xi)]] n_i d\Gamma_m \quad (7.28)$$

onde n_i é a componente i da normal do contorno da célula m .

(iii) **Integrais Singulares de Domínio ($\frac{1}{r^2}$)**

Integrais de domínio envolvendo a singularidade ($\frac{1}{r^2}$) sobre as células quando ξ esta no centróide da célula m . Essa integrais são parte do vetor coluna g e possuem a seguinte forma

$$\int_{\Omega_m} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial \xi_j} [\ln [r (\mathbf{X}, \xi)]] d\Omega; \quad \xi \in \Omega_m \quad (7.29)$$

Similarmente ao executado no ítem anterior, essa integral pode ser transformada em uma integral de contorno ao longo da célula mas, dessa vez, sem a presença da singularidade. Assim, um método simples, como o de ponto e pesos de Gauss pode resolve-la.

$$\int_{\Omega_m} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial \xi_j} [\ln [r (\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})]] d\Omega = \int_{\Gamma_m} \frac{\partial}{\partial \xi_j} [\ln [r (\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})]] n_i d\Gamma_m \quad (7.30)$$

Tensão Plana

Usando o efeito da incompressibilidade, dado na Equação (7.3), o tensor de deformação gradiente para um estado plano de tensão é dado por

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u} \quad (7.32)$$

ou em notação indicial

$$\lambda_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j} \quad (7.33)$$

e o valor de A para satisfazer a incompressibilidade é dado por

$$A = \lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12} \lambda_{21} \quad (7.34)$$

A pressão hidrostática pode ser expressa em termos do tensor de deformação gradiente plano. Assim

$$p = \frac{2}{A^2} [\mu_{10} + \mu_{01} (\lambda_{11}^2 + \lambda_{22}^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{21}^2)] \quad (7.35)$$

7.1.3 Deformação Plana

Para o caso de deformação plana, $\lambda_{33} = 1$. A condição de incompressibilidade torna-se

$$\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21} - 1 = 0 \quad (7.36)$$

Note que para pequenas deformações a restrição acima se reduz para a forma linearizada da restrição de incompressibilidade

$$\lambda_{11} + \lambda_{22} - 2 = 0 \quad (7.37)$$

7.1.4 Obtenção das matrizes e vetores do problema discretizado

Para melhor compreensão da metodologia toma-se como exemplo um objeto simples de dimensões bem reduzidas cujo contorno é descrito por somente 4 elementos e o domínio por 4 células (pode ser observado na Figura (7.1)). Essa adoção se faz necessária devido à dimensão das matrizes envolvidas. Adotando-se um objeto mais simples com poucos elementos e células a exemplificação torna-se mais didática.

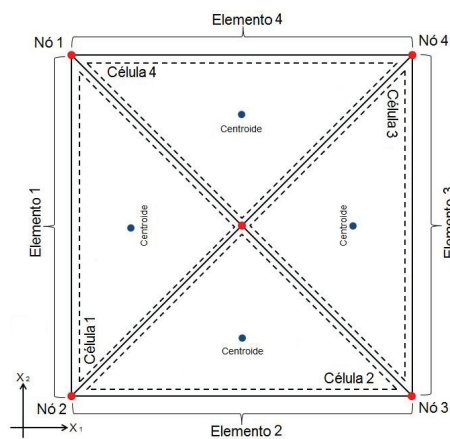


Figura 7.1: Exemplo de Aplicação

Assim, escrevendo matricialmente as Equações (7.22) e (7.24) respectivamente tem-se:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} \\ \alpha_{21}^{(1)} & \alpha_{22}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{11}^{(4)} & \alpha_{12}^{(4)} \\ \alpha_{21}^{(4)} & \alpha_{22}^{(4)} \end{bmatrix}}_H + \underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{17} & H_{18} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{27} & H_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ H_{71} & H_{72} & \cdots & H_{77} & H_{78} \\ H_{81} & H_{82} & \cdots & H_{87} & H_{88} \end{bmatrix}}_H \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{pmatrix}}_u \\
& = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & \cdots & G_{114} & G_{115} & G_{116} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & \cdots & G_{214} & G_{215} & G_{216} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & \cdots & G_{314} & G_{315} & G_{316} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} & \cdots & G_{614} & G_{615} & G_{616} \\ G_{71} & G_{72} & G_{73} & \cdots & G_{714} & G_{715} & G_{716} \\ G_{81} & G_{82} & G_{83} & \cdots & G_{814} & G_{815} & G_{816} \end{bmatrix}}_G \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} t_{11}^{(1)} \\ t_{21}^{(1)} \\ t_{11}^{(2)} \\ \vdots \\ t_{14}^{(4)} \\ t_{14}^{(1)} \\ t_{24}^{(1)} \end{pmatrix}}_t \\
& + \underbrace{\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{114} & f_{115} & f_{116} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{214} & f_{215} & f_{216} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \cdots & f_{314} & f_{315} & f_{316} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & \cdots & f_{614} & f_{615} & f_{616} \\ f_{71} & f_{72} & f_{73} & \cdots & f_{714} & f_{715} & f_{716} \\ f_{81} & f_{82} & f_{83} & \cdots & f_{814} & f_{815} & f_{816} \end{bmatrix}}_{f(\nabla u, p)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} P_{11}^{(1)} \\ P_{12}^{(1)} \\ P_{21}^{(1)} \\ \vdots \\ P_{12}^{(4)} \\ P_{21}^{(4)} \\ P_{22}^{(4)} \end{pmatrix}}_t
\end{aligned} \tag{7.38}$$

e

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla u_{11}^{(1)} \\ \nabla u_{12}^{(1)} \\ \nabla u_{21}^{(1)} \\ \vdots \\ \nabla u_{12}^{(4)} \\ \nabla u_{21}^{(4)} \\ \nabla u_{22}^{(4)} \end{pmatrix}}_{\nabla u} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{17} & B_{18} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{27} & B_{28} \\ B_{31} & B_{32} & \cdots & B_{37} & B_{38} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{141} & B_{142} & \cdots & B_{147} & G_{148} \\ B_{151} & B_{152} & \cdots & B_{157} & G_{158} \\ B_{161} & B_{162} & \cdots & B_{167} & G_{168} \end{bmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ \vdots \\ u_2^{(3)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{pmatrix}}_u \\
& + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & \cdots & D_{114} & D_{115} & D_{116} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & \cdots & D_{214} & D_{215} & D_{216} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & \cdots & D_{314} & D_{315} & D_{316} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{141} & D_{142} & D_{143} & \cdots & D_{1414} & D_{1415} & D_{1416} \\ D_{151} & D_{152} & D_{153} & \cdots & D_{1514} & D_{1515} & D_{1516} \\ D_{161} & D_{162} & D_{163} & \cdots & D_{1614} & D_{1615} & D_{1616} \end{bmatrix}}_D \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} t_{11}^{(1)} \\ t_{21}^{(1)} \\ t_{11}^{(1)} \\ \vdots \\ t_{24}^{(4)} \\ t_{14}^{(1)} \\ t_{24}^{(1)} \end{pmatrix}}_t \\
& + \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{114} & g_{115} & g_{116} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{214} & g_{215} & g_{216} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \cdots & g_{314} & g_{315} & g_{316} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{141} & g_{142} & g_{143} & \cdots & g_{1414} & g_{1415} & g_{1416} \\ g_{151} & g_{152} & g_{153} & \cdots & g_{1514} & g_{1515} & g_{1516} \\ g_{161} & g_{162} & g_{163} & \cdots & g_{1614} & g_{1615} & g_{1616} \end{bmatrix}}_{g(\nabla u, P)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} P_{11}^{(1)} \\ P_{12}^{(1)} \\ P_{21}^{(1)} \\ \vdots \\ P_{12}^{(4)} \\ P_{21}^{(4)} \\ P_{22}^{(4)} \end{pmatrix}}_P
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Detalhando, agora, cada componente das Equações (7.38) e (7.39), tem-se:

Matriz H

A matriz H é formada pela superposição de submatrizes que representam a “influência” da aproximação linear do deslocamento de cada elemento de contorno sobre o ponto-fonte. Como não há descontinuidade do deslocamento, os elementos vizinhos compartilham o deslocamento dos nós que os une. Assim, como mostrado a baixo através da superposição das cores primárias gerando cores secundárias, há superposição das submatrizes para formação da matriz H .

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc} \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} \\ \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc} \text{yellow} & \text{yellow} & \text{yellow} & \text{yellow} \\ \text{yellow} & \text{yellow} & \text{yellow} & \text{yellow} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc} \text{red} & \text{red} & \text{red} & \text{red} \\ \text{red} & \text{red} & \text{red} & \text{red} \end{array} \right] \\
 \underbrace{\hspace{15em}} \\
 \downarrow \\
 \left[\begin{array}{cc} \text{blue} & \text{blue} \\ \text{blue} & \text{blue} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} \text{green} & \text{green} \\ \text{green} & \text{green} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} \text{orange} & \text{orange} \\ \text{orange} & \text{orange} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} \text{red} & \text{red} \\ \text{red} & \text{red} \end{array} \right] \\
 \underbrace{\hspace{2em}} \quad \underbrace{\hspace{2em}} \quad \underbrace{\hspace{2em}} \quad \underbrace{\hspace{2em}} \\
 H_1 \quad H_1+H_2 \quad H_2+H_3 \quad H_3
 \end{array} \tag{7.40}$$

Assim, pode-se perceber que (como também já dito na seção 6.3.1) para a formação de um pedaço genérico da matriz H necessita-se de, no mínimo, outras três submatrizes que aqui foram genericamente chamadas de H_1 , H_2 e H_3 . Onde as mesmas são formadas, resumidamente, da seguinte forma (por exemplo para H_2)

$$\begin{aligned}
 [H_2] &= \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \end{bmatrix} \\
 &= \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \cdot |J| d\zeta
 \end{aligned} \tag{7.41}$$

Onde

$$\phi_1 = -0.5(\zeta - 1) \quad ; \quad \phi_2 = 0.5(\zeta + 1) \quad (7.42)$$

Onde \mathbf{T}^* foi definido em (7.39) e, para o caso de elementos lineares, tem-se

$$r = [(X_1 - \zeta_1)^2 + (X_2 - \zeta_2)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (7.43)$$

$$X_1 = \Phi_1 X_1^1 + \Phi_2 X_1^2 \quad X_2 = \Phi_1 X_2^1 + \Phi_2 X_2^2 \quad (7.44)$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial X_i} = \frac{X_i - \zeta_i}{r} \quad (7.45)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \nabla \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial r}{\partial X_1} n_{X_1} + \frac{\partial r}{\partial X_2} n_{X_2} \quad (7.46)$$

$$n = [J_1 \ J_2] / J \quad (7.47)$$

$$J_1 = \frac{\partial X_2}{\partial \xi} \quad J_2 = \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \quad J = [J_1^2 + J_2^2]^{\frac{1}{2}} \quad (7.48)$$

Matriz \mathbf{G}

A matriz \mathbf{G} , assim como a matriz \mathbf{H} , é formada por submatrizes que representam a “influência” da aproximação linear da tração no contorno. No entanto, diferentemente da matriz \mathbf{H} , não há superposição das submatrizes (como já mostrado na seção 6.3.1). Assim, as submatrizes que compoem a matriz Montagem \mathbf{G} são formadas, genericamente, por:

$$\begin{aligned}
G &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \end{bmatrix} \\
&= \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} |J| d\zeta
\end{aligned} \tag{7.49}$$

Os itens que compõem a solução fundamental U^* são os mesmos que os apresentados nas Equações (7.43) a (7.48).

Vetor $f(\nabla \mathbf{u}, p)$

O vetor $f(\nabla \mathbf{u}, p)$ representa a abordagem, como força de corpo, da parte não linear da tensão atuante. Como já demonstrado anteriormente na Equação (7.18) ele é formado por:

$$f(\nabla \mathbf{u}, p) = - \sum_{m=1}^M \int_{\Omega} \frac{\partial U_{kj}^*}{\partial X_s}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) P_{sk}^{n(m)}(\mathbf{X}) d\Omega_{(m)}(\mathbf{X}) \tag{7.50}$$

Observando o termo $\frac{\partial U_{kj}^*}{\partial X_s}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ percebe-se que, quando o ponto fonte pertencer ao contorno da célula sobre a qual é feita a integração de domínio, haverá singularidade. A fim de se contornar tal problema propõem-se que a integral de domínio seja transformada em uma integral de contorno na célula. Assim rescreve-se a integral de domínio em uma integral de contorno na célula:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\nabla \mathbf{u}, p) &= - \sum_{m=1}^M \int_{\Omega(m)} \frac{\partial U_{kj}^*}{\partial X_s}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) P_{sk}^{n(m)}(\mathbf{X}) d\Omega(m)(\mathbf{X}) \\
&= \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma(m)} -P_{sk}^{n(m)} U_{kj}^*(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) n_s^{(m)} d\Gamma(m)(\mathbf{X}) + \overbrace{\sum_{m=1}^M \int_{\Omega(m)} \frac{\partial P_{sk}^{n(m)}}{\partial X_s} U_{kj}^* d\Omega(m)(\mathbf{X})}^0
\end{aligned} \tag{7.51}$$

Onde $n_s^{(m)}$ é a normal do contorno da célula e $P_{sk}^{n(m)}$ é constante dentro das células.

Escrevendo, agora, de forma matricial a Equação (7.51), tem-se:

$$\mathbf{f}(\nabla \mathbf{u}, p) = \sum_{m=1}^M \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_{11}^{n(m)} \\ P_{12}^{n(m)} \\ P_{21}^{n(m)} \\ P_{22}^{n(m)} \end{Bmatrix} \tag{7.52}$$

Onde os termos da Equação (7.52) são dados por:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma(m)} \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1^{(m)} & 0 & n_2^{(m)} & 0 \\ 0 & n_1^{(m)} & 0 & n_2^{(m)} \end{bmatrix} d\Gamma \tag{7.53}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{11}^{n(m)} \\ P_{12}^{n(m)} \\ P_{21}^{n(m)} \\ P_{22}^{n(m)} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{11}^{(m)} \\ P_{12}^{(m)} \\ P_{21}^{(m)} \\ P_{22}^{(m)} \end{Bmatrix}}_{(A)} - \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{11}^h(m) \\ P_{12}^h(m) \\ P_{21}^h(m) \\ P_{22}^h(m) \end{Bmatrix}}_{(B)} \tag{7.54}$$

Onde os termos (A) e (B) da Equação (7.54) são dados pelas Equações (7.8) e (6.66).

Matriz B

A matriz B representa os “coeficientes de influência” da integral da derivada da solução fundamental de tração sobre o contorno externo do objeto. O tensor de deformação gradiente ($\nabla \mathbf{u}$) é função, dentre outras dependências, dos deslocamento e trações que ocorrem no contorno.

A montagem da matriz B , devido ao fato de estar diretamente relacionada ao deslocamento, ocorre similarmente ao da matriz H , ou seja, também há superposição de submatrizes. No entanto, diferentemente da matriz H , trata-se agora de um tensor de terceira ordem. Para contornar essa dificuldade e facilitar tanto a montagem das matrizes quanto a compreensão do problema pode-se fazer:

$$\begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{cccc} \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} \\ \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} \\ \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} \\ \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} \end{array} \right] & \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{cccc} \text{yellow} & \text{yellow} & \text{yellow} & \text{yellow} \\ \text{yellow} & \text{yellow} & \text{yellow} & \text{yellow} \\ \text{yellow} & \text{yellow} & \text{yellow} & \text{yellow} \\ \text{yellow} & \text{yellow} & \text{yellow} & \text{yellow} \end{array} \right] & \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{cccc} \text{red} & \text{red} & \text{red} & \text{red} \\ \text{red} & \text{red} & \text{red} & \text{red} \\ \text{red} & \text{red} & \text{red} & \text{red} \\ \text{red} & \text{red} & \text{red} & \text{red} \end{array} \right] \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{B_1} & & \underbrace{\hspace{10em}}_{B_2} & & \underbrace{\hspace{10em}}_{B_3} \\
 \downarrow & & & & \\
 \left[\begin{array}{cc} \text{blue} & \text{blue} \\ \text{blue} & \text{blue} \\ \text{blue} & \text{blue} \\ \text{blue} & \text{blue} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cc} \text{green} & \text{green} \\ \text{green} & \text{green} \\ \text{green} & \text{green} \\ \text{green} & \text{green} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cc} \text{orange} & \text{orange} \\ \text{orange} & \text{orange} \\ \text{orange} & \text{orange} \\ \text{orange} & \text{orange} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cc} \text{red} & \text{red} \\ \text{red} & \text{red} \\ \text{red} & \text{red} \\ \text{red} & \text{red} \end{array} \right] \\
 \underbrace{\hspace{2em}}_{B_1} & \underbrace{\hspace{2em}}_{B_1+B_2} & \underbrace{\hspace{2em}}_{B_2+B_3} & \underbrace{\hspace{2em}}_{B_3}
 \end{array} \tag{7.55}$$

Onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \\
&= - \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} T_{11,1}^* & T_{12,1}^* \\ T_{21,1}^* & T_{22,1}^* \\ T_{11,2}^* & T_{12,2}^* \\ T_{21,2}^* & T_{22,2}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} |J| d\zeta
\end{aligned} \tag{7.56}$$

O desenvolvimento da derivada da solução fundamental de tração pode ser encontrado na Equação (7.19).

Matriz D

A matriz D representa, em uma abordagem meramente explicativa, os “coeficientes de influência” da integral da derivada da solução fundamental de deslocamento sobre o contorno externo do objeto. O tensor de deformação gradiente ($\nabla \mathbf{u}$) é função, dentre outras dependências, dos deslocamento e trações que ocorrem no contorno.

A montagem da matriz D , devido ao fato de estar diretamente relacionada à tração, ocorre similarmente ao da matriz G , ou seja, também não há superposição de submatrizes. No entanto, diferentemente da matriz G , trata-se agora de um tensor de terceira ordem. Para contornar essa dificuldade e facilitar tanto a montagem das matrizes quando a compressão do problema pode-se fazer:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_2 &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \\
&= \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} U_{11,1}^* & U_{12,1}^* \\ U_{21,1}^* & U_{22,1}^* \\ U_{11,2}^* & U_{12,2}^* \\ U_{21,2}^* & U_{22,2}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} |J| d\zeta
\end{aligned} \tag{7.57}$$

Onde o desenvolvimento da derivada da solução fundamental de deslocamento pode ser encontrado na Equação (7.20)

Vetor $\mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, p)$

A maioria das considerações feitas com respeito ao vetor $\mathbf{f}(\nabla \mathbf{u}, p)$ também podem ser feitas com relação ao vetor $\mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, p)$. Assim, como o ponto-fonte será o centróide da célula haverá singularidade ao se executar a integral de domínio que originalmente há na determinação do vetor $\mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, p)$.

$$\mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, p) = \sum_{m=1}^M \int_{\Omega(m)} \frac{\partial^2 U_{kj}^*}{\partial X_s \partial \xi_\alpha} P_{sk}^{n(m)} d\Omega(m) \tag{7.58}$$

Logo, para contornar todas as complicações que execução de tal integral pode gerar, similar à determinação do vetor $\mathbf{f}(\nabla \mathbf{u}, p)$, transforma-se a integral de domínio das células em uma integral de contorno no contorno de cada célula, assumindo $P_{sk}^{n(m)}$ constante na célula. Assim:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, p) &= \sum_{m=1}^M \int_{\Omega^{(m)}} \frac{\partial^2 U_{kj}^*}{\partial X_s \partial \xi_\alpha} P_{sk}^{n(m)} d\Omega^{(m)} \\
&= \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma^{(m)}} \frac{\partial U_{kj}^*}{\partial \xi_\alpha} n_s^{(m)} P_{sk}^{n(m)} d\Gamma^{(m)} = \sum_{m=1}^M P_{sk}^{n(m)} \int_{\Gamma^{(m)}} \frac{\partial U_{kj}^*}{\partial \xi_\alpha} n_s^{(m)} d\Gamma^{(m)}
\end{aligned} \tag{7.59}$$

Reescrevendo de forma matricial, tem-se:

$$\mathbf{g}(\nabla u, p) = - \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{11,1}^* & U_{12,1}^* \\ U_{21,1}^* & U_{22,1}^* \\ U_{11,2}^* & U_{12,2}^* \\ U_{21,2}^* & U_{22,2}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1^{(m)} & 0 & n_2^{(m)} & 0 \\ 0 & n_1^{(m)} & 0 & n_2^{(m)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{11}^{n(m)} \\ P_{12}^{n(m)} \\ P_{21}^{n(m)} \\ P_{22}^{n(m)} \end{bmatrix} d\Gamma^{(m)} \tag{7.60}$$

Onde o desenvolvimento da derivada da solução fundamental de deslocamento pode ser encontrado na Equação (7.20).

Entendido, agora, todos os componentes que compoem os sistemas de equações que regem o comportamento do material parte-se para o entendimento do processo de realização dos cálculos. O processo, iterativo, é explicado para um caso genérico na seção 7.1.5. O processo que será exemplificado a baixo tem como referência o objeto da Figura (7.1).

Assim, seguindo a ordem de execução orientada pelo fluxograma da Figura 7.2 faz-se:

7.1.5 Procedimento Iterativo Incremental

1. Obtenção de \mathbf{u}^1 e t^1

De posse das condições de contorno (aplicadas no passo) do problema e com as coordenadas

dos nós que compoem o objeto 2D monta-se o sistema:

$$\mathbf{H}_{8 \times 8} \mathbf{u}_{8 \times 1}^1 = \mathbf{G}_{8 \times 16} \mathbf{t}_{16 \times 1}^1 + \underbrace{\mathbf{f}(\nabla \mathbf{u}, p)}_0_{8 \times 1} \quad (7.61)$$

Uma vez montado o sistema obtem-se os primeiros valores aproximados de \mathbf{u}^1 e \mathbf{t}^1 desconhecidos (através da elasticidade linear).

2. Obtenção de $\nabla \mathbf{u}^1$

De posse dos valores de \mathbf{u}^1 e \mathbf{t}^1 monta-se o sistema

$$\nabla \mathbf{u}_{16 \times 1}^1 = \mathbf{B}_{16 \times 8} \mathbf{u}_{8 \times 1}^1 + \mathbf{D}_{16 \times 16} \mathbf{t}_{16 \times 1}^1 + \underbrace{\mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}, p)}_0_{16 \times 1} \quad (7.62)$$

Uma vez montado o sistema obtem-se os primeiros valores aproximados de $\nabla \mathbf{u}^1$ através da elasticidade linear.

3. Obtenções das primeiras aproximações da pressão hidrostática (p^1)

De posse dos valores de $\nabla \mathbf{u}^1$ acha-se p^1 através das equações (7.35) ou (7.36).

4. Obtenção de \mathbf{u}^2 e \mathbf{t}^2

Sabendo-se p^1 , \mathbf{u}^1 , \mathbf{t}^1 e $\nabla \mathbf{u}^1$ encontra-se $\mathbf{P}^n(\nabla \mathbf{u}^1, p^1) = \mathbf{P}(\nabla \mathbf{u}^1, p^1) - \mathbf{P}^h(\nabla \mathbf{u}^1)$. Acha-se, então, $\mathbf{f}(\nabla \mathbf{u}^1, p^1)$ e $\mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}^1, p^1)$. Com $\mathbf{f}(\nabla \mathbf{u}^1, p^1)$, acha-se, \mathbf{u}^2 e \mathbf{t}^2 através de

$$\mathbf{A} \mathbf{y}^2 = \mathbf{c} + \mathbf{f}(\nabla \mathbf{u}^1, p^1) \quad (7.63)$$

5. Determinação de $\nabla \mathbf{u}^2$

Sabendo-se \mathbf{u}^2 e \mathbf{t}^2 escreve-se $\nabla \mathbf{u}^2 = \mathbf{B} \mathbf{u}^2 + \mathbf{D} \mathbf{t}^2 + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}^1, p)$, onde agora, p é a variável a ser encontrada.

6. Determinação das pressões hidrostáticas de cada célula

Com a obtenção de $\nabla \mathbf{u}^2$ em função de p para cada célula aplica-se, então, a condição de incompressibilidade nas mesmas. Dado que a condição de incompressibilidade pode ser expressa como sendo $\det F_{ij} = 1$ e F_{ij} é função direta de $\nabla \mathbf{u}$ pode-se obter, através do determinante de F_{ij} , uma equação para cada célula.

O sistema não-linear de equações formado pelo determinante de cada célula, para o caso simples exemplificado de 4 células internas, possui a forma:

$$\begin{aligned}
\frac{(A_1 p_1 + B_1 p_2 + C_1 p_3 + D_1 p_4) \cdot \sqrt{p_1}}{E_1 p_1^2 + F_1 p_2^2 + G_1 p_3^2 + H_1 p_4^2 + I_1 p_1 p_2 + J_1 p_1 p_3 + K_1 p_1 p_4 + L_1 p_2 p_3 + M_1 p_2 p_4 + N_1 p_3 p_4} - 1 &= 0 \\
\frac{(A_2 p_1 + B_2 p_2 + C_2 p_3 + D_2 p_4) \cdot \sqrt{p_2}}{E_2 p_1^2 + F_2 p_2^2 + G_2 p_3^2 + H_2 p_4^2 + I_2 p_1 p_2 + J_2 p_1 p_3 + K_2 p_1 p_4 + L_2 p_2 p_3 + M_2 p_2 p_4 + N_2 p_3 p_4} - 1 &= 0 \\
\frac{(A_3 p_1 + B_3 p_2 + C_3 p_3 + D_3 p_4) \cdot \sqrt{p_3}}{E_3 p_1^2 + F_3 p_2^2 + G_3 p_3^2 + H_3 p_4^2 + I_3 p_1 p_2 + J_3 p_1 p_3 + K_3 p_1 p_4 + L_3 p_2 p_3 + M_3 p_2 p_4 + N_3 p_3 p_4} - 1 &= 0 \\
\frac{(A_4 p_1 + B_4 p_2 + C_4 p_3 + D_4 p_4) \cdot \sqrt{p_4}}{E_4 p_1^2 + F_4 p_2^2 + G_4 p_3^2 + H_4 p_4^2 + I_4 p_1 p_2 + J_4 p_1 p_3 + K_4 p_1 p_4 + L_4 p_2 p_3 + M_4 p_2 p_4 + N_4 p_3 p_4} - 1 &= 0
\end{aligned} \tag{7.64}$$

Onde p_1 p_2 p_3 p_4 são as pressões hidrostáticas de cada célula e as constantes $A_1 \dots N_4$ são conhecidas.

7. Resolvendo o sistema não-linear

Como o número de equações será o mesmo que o número de células e conseqüentemente de incógnitas ($p_{hid.}$), teremos um sistema de, para esse caso, 4 incógnitas e 4 equações não-lineares.

Para a resolução do sistema de equações, dado que o programa foi escrito em linguagem MatLab[®], foi utilizado a subrotina *fsolve* (MatLab[®]). Uma boa aproximação para os valores iniciais do processo iterativo de resolução do sistema de equação são os valores para a pressão hidrostática obtidos linearmente (com \mathbf{u}^1 , \mathbf{t}^1 e $\nabla \mathbf{u}^1$). Assim, resolvendo o sistema não-linear acha-se, então, p^2 .

8. Atualização da malha

Uma vez obtidos os valores das pressões hidrostáticas com a resolução do sistema recompõe-se todos os valores a partir da mesma. Logo, obtem-se os valores finais (para esse incremento de condição de contorno) de \mathbf{u} , \mathbf{t} e $\nabla \mathbf{u}$ a partir de p^2 . Com os valores finais obtidos, calcula-se a tensão residual que será utilizada no incremento seguinte. Obtidos os valores finais, atualiza-se a malha e com excessão do primeiro incremento de carga, passa-se a considerar nos cálculos os efeitos das tensões residuais do ultimo incremento de carga como efeito de pré-tensão para o incremento posterior.

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} + \mathbf{f}(\nabla\mathbf{u}, p) + \underbrace{\mathbf{b}_0}_{\text{pré-tensão}}$$

$$\nabla\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{t} + \mathbf{e}_0 + \mathbf{g}(\nabla\mathbf{u}, p)$$

$$\text{onde, } \mathbf{b}_0 = - \int_{\Omega} \frac{\partial U_{kj}^*}{\partial X_m} P_{mk}^0 d\Omega \quad (7.65)$$

$$\mathbf{e}_0 = - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 U_{kj}^*}{\partial X_m \partial \xi_{\alpha}} P_{mk}^0 d\Omega$$

Os incrementos de condições de contorno seguem até que as mesmas sejam atingidas por completo.

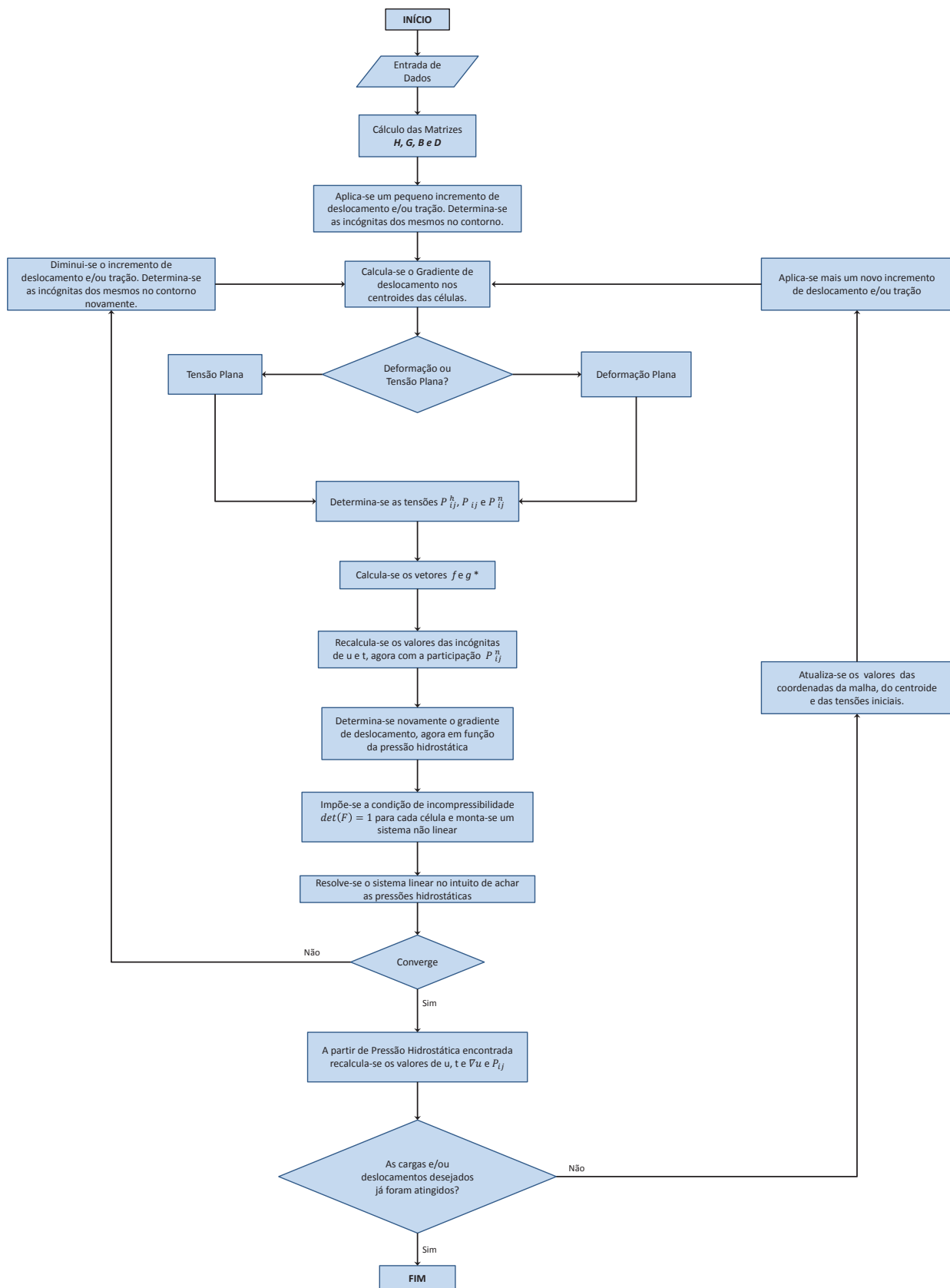
Ao observarmos a construção das equações que regem o comportamento do material (7.24 e 7.22) podemos perceber a interdependência dos termos que levam à não linearidade na solução do problema.

Essa interdependência pode ser escrita em termos da pressão hidrostática que está diretamente relacionada com a mudança volumétrica. No caso em estudo, devido ao caráter involumétrico da borracha $\nu = 0.5$, a mudança volumétrica será nula e utilizar-se-á dessa prerrogativa como um caminho para determinar as tensões de caráter não-linear presentes.

Assim, o fluxograma genérico para execução de tal metodologia pode ser observado na Figura 7.2.

A rotina *fsolve*

Um sistema de equações não-lineares é qualquer problema em que as equações a serem resolvidas não podem ser escritas como uma combinação linear das variáveis desconhecidas. Problemas não-lineares são de interesse para engenheiros, físicos e matemáticos, pois a maioria dos sistemas reais (físicos) são inerentemente não-lineares na natureza. O problema de grandes deformações em materiais hiperelásticos não foge a esse caso. Como todo algoritmo foi desenvolvido em linguagem



MatLab[®] e a intenção principal do trabalho não é o estudo de métodos numéricos para resolução de sistemas não-lineares, optou-se pelo uso de subrotinas já amplamente aplicadas e testadas oferecidas pela própria linguagem. Assim, pode-se obter melhor desempenho de processamento do que se teria desenvolvendo uma rotina original.

A subrotina utilizada para resolução dos sistemas não-lineares, como já dito anteriormente, foi a *fsolve*. Dentro das possibilidades de abordagens para solução do sistema de equações oferecidas pela função *fsolve* optou-se pela utilização do método *Trust-Region Dogleg Method* (Matlab User Guide). Resumidamente, diferente do método de *Newton* comumente conhecido, este método através de funções de minimização estabelece “regiões de confiança” ao redor do ponto atual de solução e a partir destas testa o passo seguinte. Caso o passo seguinte conduza a solução à direções que estejam dentro da região de confiança estabelecida, o mesmo está apto a ser usado como passo na solução do sistema não-linear.

Neste método, como em qualquer outro método iterativo para solução de sistemas, o passo inicial é muito importante tanto na convergência da solução quanto no tempo computacional gasto. Assim, adotou-se como primeira estimativa a pressão hidrostática p obtida da primeira iteração de cada incremento da condição de contorno imposta. Ou seja, o p utilizado na primeira iteração de cada incremento da condição de contorno imposta é o p obtido da aproximação linear do sistema. Os incrementos internos utilizados na solução dos sistemas foram obtidos de forma automática pela rotina. Assim, priorizou-se a agilidade na solução uma vez que os incrementos de condição de contorno já eram impostos manualmente.

A forma de leitura dos dados realizada pela função é simples. As equações, como as apresentadas em (7.64), devem estar adensadas e escritas em forma de uma função cujas variáveis são as pressões hidrostáticas. Essas equações estarão contidas em um vetor cujas linhas sejam cada uma das equações escritas em função das pressões hidrostáticas. Assim “alimenta-se” a função *fsolve* com a função que contém as equações e, também, com os valores iniciais propostos para as pressões hidrostáticas. Por padrão o erro admitido na solução é de 10^{-6} tomado individualmente mas, o mesmo pode ser alterado pelo usuário inserindo o valor do mesmo nos dados de entrada. Como saída podem ser programadas várias opções mas, como o interesse aqui é unicamente obter as pressões, ative-se unicamente em obter o vetor com os valores das pressões hidrostáticas de cada célula.

8 RESULTADOS

Dando sequência no trabalho desenvolvido o programa para simulação bi-dimensional do caso elastostático foi validado. O programa foi desenvolvido tomando-se como base os programas existentes em Brebbia e Dominguez (1989). No entanto, foi completamente remodelado e reescrito, no software MatLab[®] para que atendesse às nossas necessidades.

O elemento linear foi usado pois facilita a obtenção das integrais singulares analiticamente e torna as integrações do domínio fáceis de serem obtidas.

8.1 Validação e Conclusão

Para verificar se, tanto o modelamento, quando a aplicação da metodologia estão de acordo com o comportamento esperado é necessário validar o programa montado. Nesse sentido foi testado o programa montado com exemplos de aplicação e posteriormente comparados os resultados.

8.1.1 Validação linear

Inicialmente, a fim de testar o programa, validou-se somente a parte linear do mesmo. O problema utilizado para avaliação do elemento linear é o mesmo apresentado no exemplo 4.3 do capítulo 4 do livro *Boundary Elements An Introductory Course* (BREBBIA E DOMINGUEZ, 1989). Assim os resultados obtidos foram comparados com os resultados analíticos e também com os resultados numéricos fornecidos no livro.

O problema trata (Figura 8.1) de uma placa retangular com uma distribuição linear de tração na direção horizontal, que representa um momento aplicado. A placa é considerada como estando sobre um estado plano de tensão, o seu módulo de cisalhamento como sendo de $\mu = G = 80,00$ MPa e o coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$. O contorno, para o caso dos elementos lineares foi discretizado em 20 elementos lineares.

Para efeito de comparação com os resultados já consolidados no livro Brebbia e Dominguez

(1989) será comparado o mesmo ponto que o livro toma como referência, sendo assim, o ponto A.

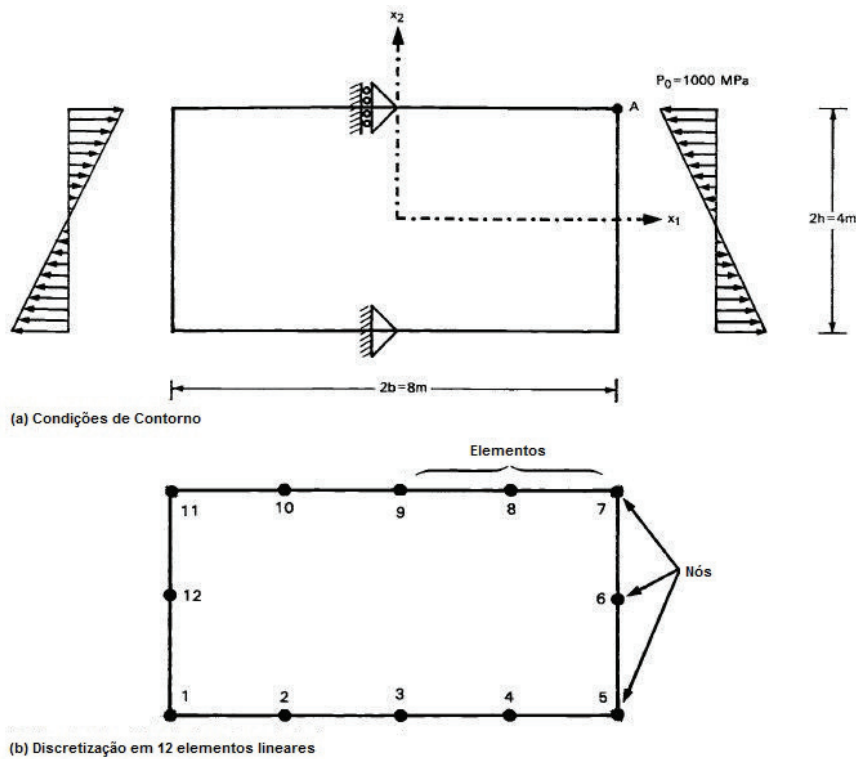


Figura 8.1: Exemplo: Placa Sobre Flexão - (BREBBIA E DOMINGUEZ, 1989)

Os resultados podem ser observados na Figura 8.3. A comparação dos mesmos com os valores analíticos e os valores obtidos por outros graus de aproximação do elemento são apresentados na tabela a baixo. Como discutido em Brebbia e Dominguez (1989), o elemento constante é inadequado para o problema de flexão.

Tabela 8.1: Deslocamentos no Ponto A - Comparação

Desloc.	Solução Analítica	6 Elementos Quadráticos		50 Elementos Constantes		20 Elementos Lineares	
		Valor	Erro (%)	Valor	Erro (%)	Valor	Erro (%)
u_1	-0.02	-0.02	0	-0.0157	21.5	-0.0201	0.5
u_2	0.02	0.02	0	0.0165	17.5	0.0198	1.0

Assim, observando os resultados atingidos pode-se concluir que o programa esta simulando corretamente o comportamento elástico linear.

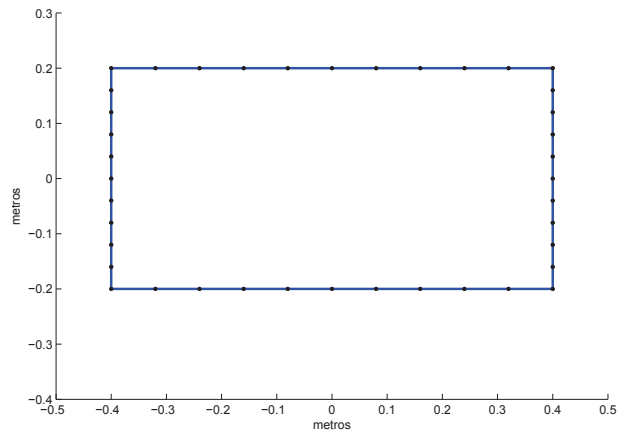


Figura 8.2: Placa Não Deformada

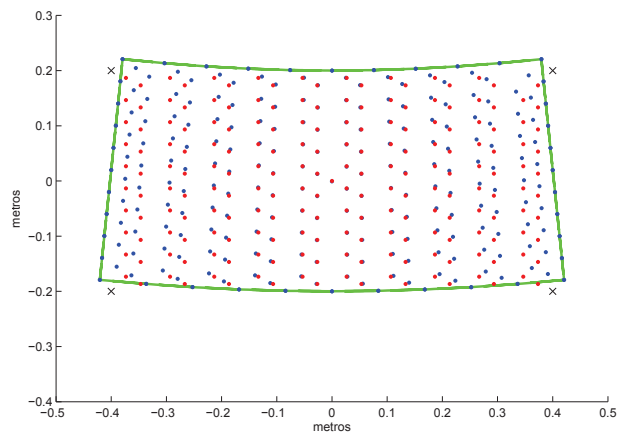


Figura 8.3: Placa Deformada

8.1.2 Validação não-linear (borracha)

No intuito, agora, de avaliar o programa para o caso hiperelástico, fez-se o estudo de dois problemas apresentados em Al-Gahtani e Altiero (1996).

O primeiro trata de um problema usualmente caracterizado em testes para determinação de propriedades da borracha, a tração simples de uma tira de borracha. Já o segundo representa um problema aparentemente similar mas que, no entanto não possui solução analítica, o de uma tira de borracha com um furo no centro.

Alongamento Uniaxial de uma Tira de Borracha

O problema trata de uma tira quadrada de borracha com 8 in de lado e com 0.05 in de espessura sobre a qual é imposto um deslocamento nas suas bordas como pode ser observado na Figura (8.5(a)). Como mostrado em Oden e Carey (1984) esse problema corresponde ao teste comumente usado para caracterizar as propriedades de materiais como borracha ou polímeros. O material adotado como sendo o constituindo da tira será abordado com um modelo de material do tipo Mooney-Rivlin. Assim, as propriedades do material adotadas na simulação são apresentadas na Tabela (8.2)

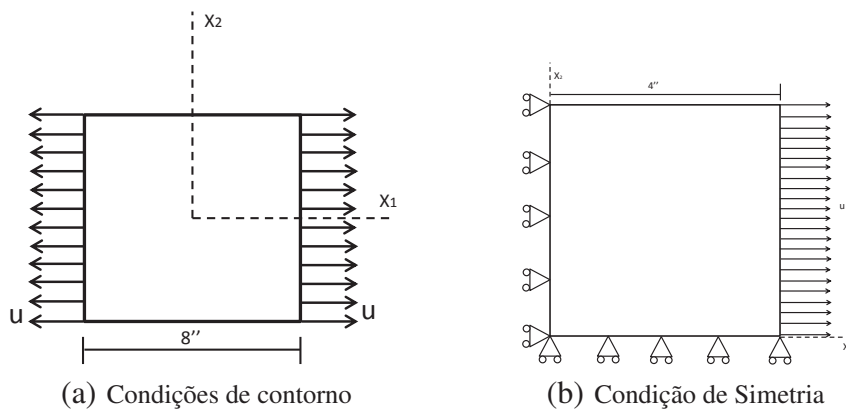
Propriedades do Material	
μ_{01}	24.00 psi
μ_{10}	1.50 psi
ν	0.5
μ	$2(\mu_{01} + \mu_{10})$ psi

Tabela 8.2: Propriedades do material (Mooney-Rivlin)

O valor $\nu = 0,5$ denota a incompressibilidade do material elástico. $\mu = 2(\mu_{01} + \mu_{10})$ pode ser obtido do processo de linearização de P_{ij} no caso infinitesimal. Ver Bonet e Wood (1997)

Devido às características de simetria presentes no problema o mesmo foi abordado levando-se em consideração apenas um quarto do todo. Assim, as condições de contorno adotadas no problema são as mostradas na Figura (8.5(b)).

Figura 8.4: Condições de Contorno



O deslocamento imposto à tira é de 3 vezes o seu tamanho. Ou seja, para o caso mostrado

Condições de Contorno		
$X_1 = \pm 4$	$u_{x_1} = 4(\lambda - 1)$	$u_{x_2} = 0$
$X_2 = \pm 4$	$t_{x_1} = 0$	$t_{x_2} = 0$

$\lambda =$ razão de extensão

Tabela 8.3: Condições de Contorno

na Figura (8.5(b)) o deslocamento final será de $u = 12$ in. Como trata-se de um processo iterativo e gradual de aplicação das condições de contorno, as mesmas foram aplicadas em sequenciais 24 passos, ou seja, cada incremento de deslocamento correspondeu a $u = 0.5$ in.

O domínio do 1/4 de tira foi dividido em 32 células como pode ser observado na Figura (8.5).

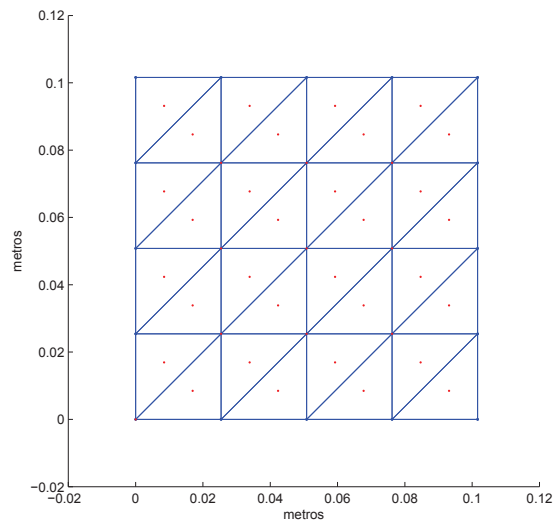


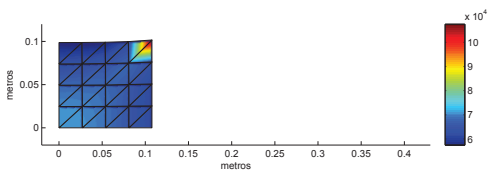
Figura 8.5: Malha - 1

Assim, após executado o programa, obtiveram-se os resultados de deslocamento e tensão apresentados nas Figuras (8.6), (8.7) e (8.8).

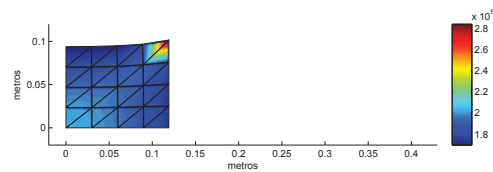
Da mesma forma que em Al-Gahtani e Altiero (1996), faz-se a medida da força total atuante na superfície onde se aplica o deslocamento integrando-se o campo de tração ao longo da linha. Para efeito de validação do modelo criado fez-se a mesma medida no modelo. A descrição da variação da força com o incremento de deslocamento pode ser observado na Figura (8.9).

Como se pode observar no gráfico mostrado na Figura (8.9) a força total exercida na super-

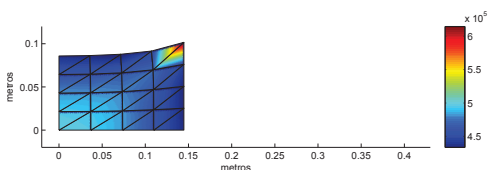
Figura 8.6: Geometria Deformada - Tensão P_{xx}



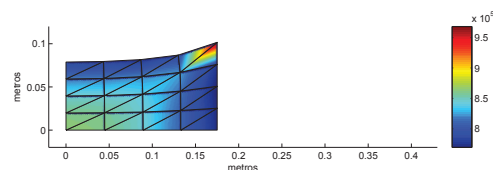
(a) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 1.0''$



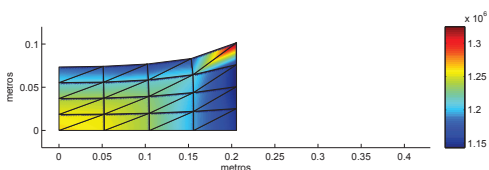
(b) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 2.0''$



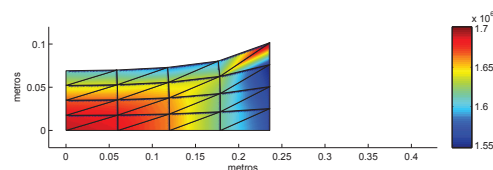
(c) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 3.0''$



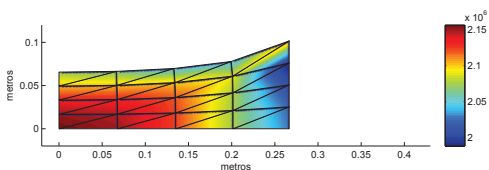
(d) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 4.0''$



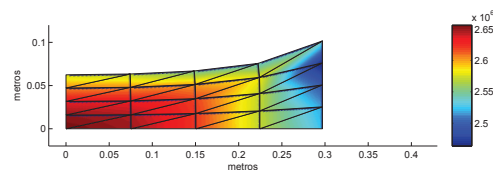
(e) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 5.0''$



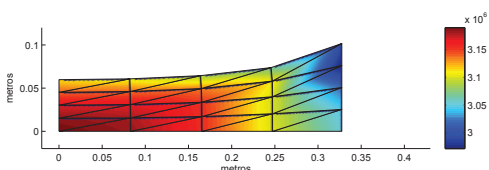
(f) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 6.0''$



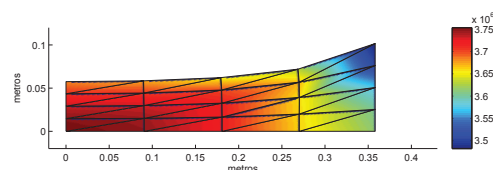
(g) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 7.0''$



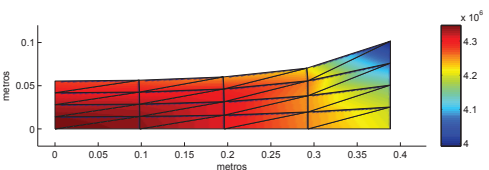
(h) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 8.0''$



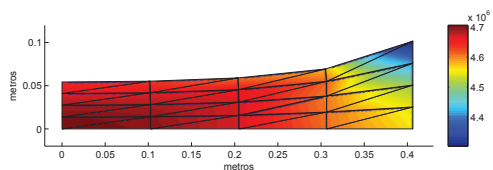
(i) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 9.0''$



(j) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 10.0''$

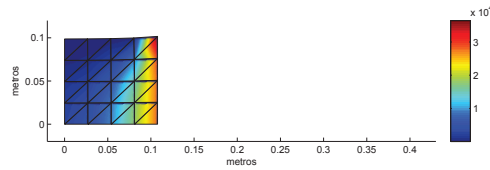


(k) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 11.0''$

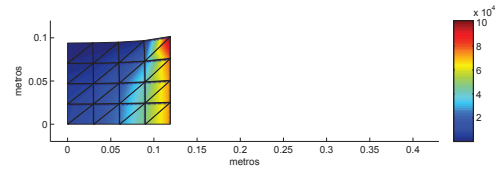


(l) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 12.0''$

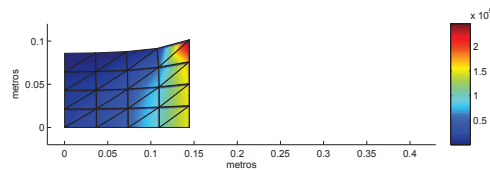
Figura 8.7: Geometria Deformada - Tensão P_{yy}



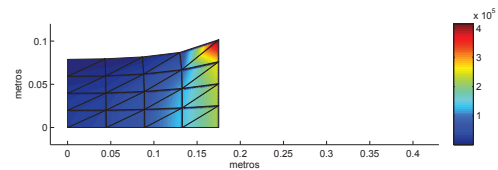
(a) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 1.0''$



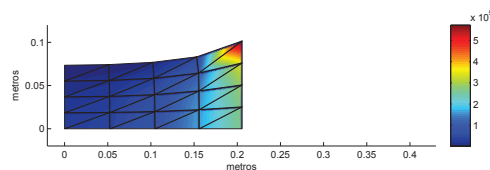
(b) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 2.0''$



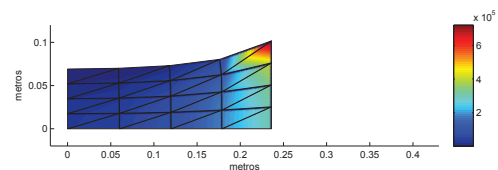
(c) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 3.0''$



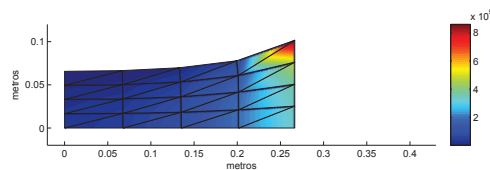
(d) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 4.0''$



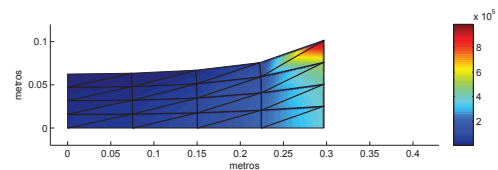
(e) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 5.0''$



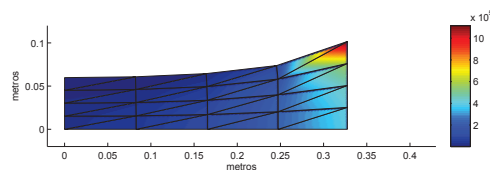
(f) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 6.0''$



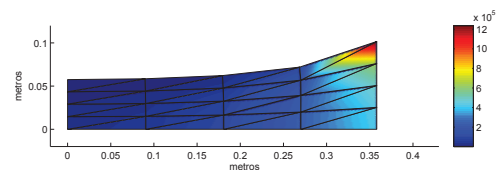
(g) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 7.0''$



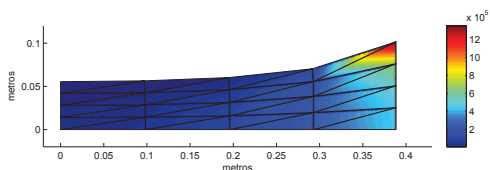
(h) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 8.0''$



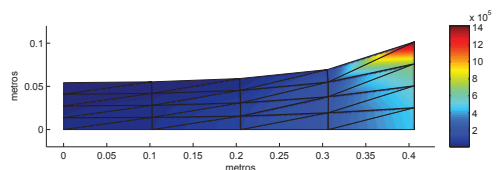
(i) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 9.0''$



(j) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 10.0''$

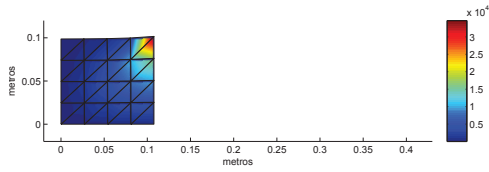


(k) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 11.0''$

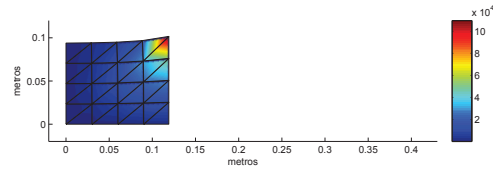


(l) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 12.0''$

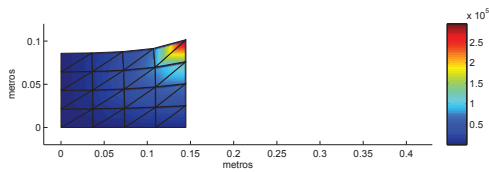
Figura 8.8: Geometria Deformada - Tensão P_{xy}



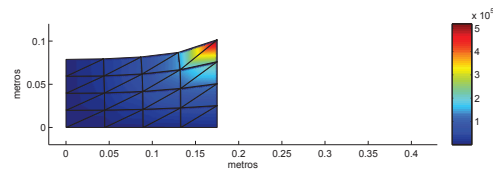
(a) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 1.0''$



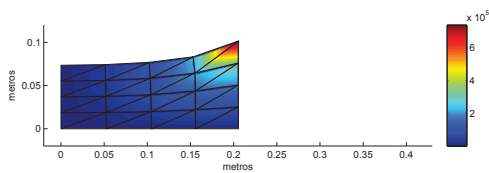
(b) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 2.0''$



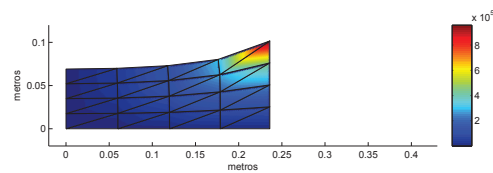
(c) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 3.0''$



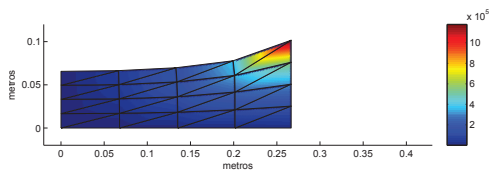
(d) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 4.0''$



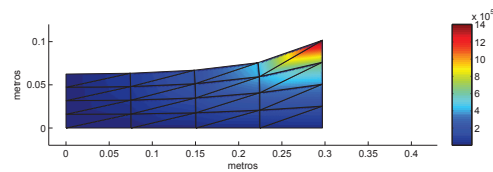
(e) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 5.0''$



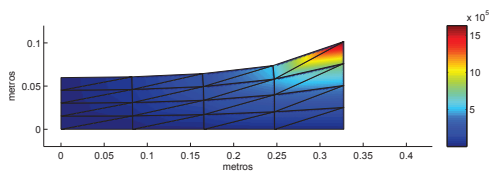
(f) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 6.0''$



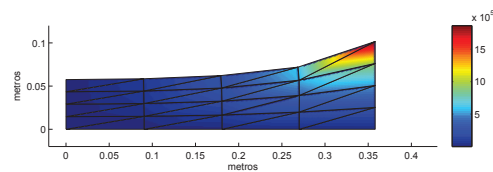
(g) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 7.0''$



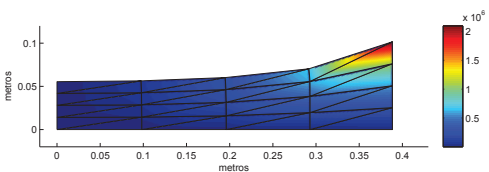
(h) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 8.0''$



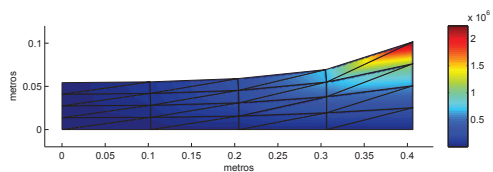
(i) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 9.0''$



(j) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 10.0''$



(k) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 11.0''$



(l) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 12.0''$

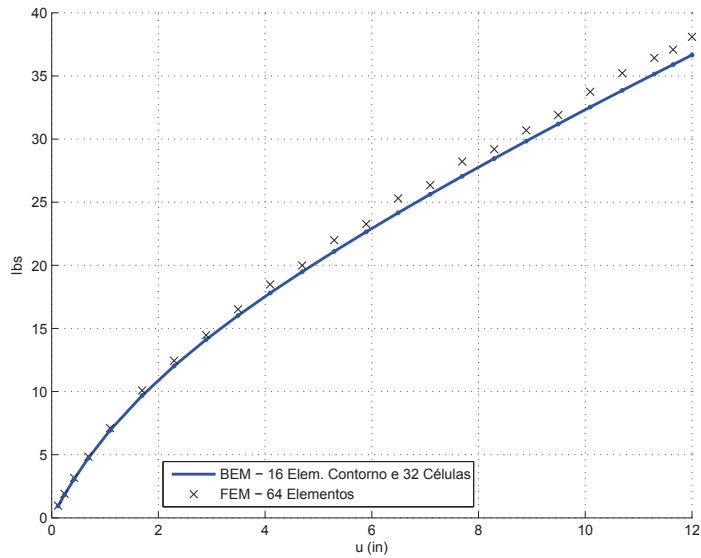
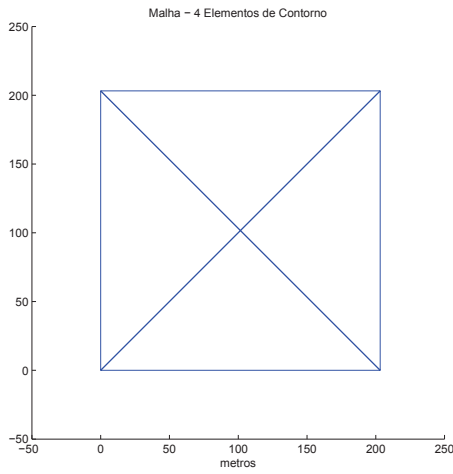


Figura 8.9: Força (lbf)

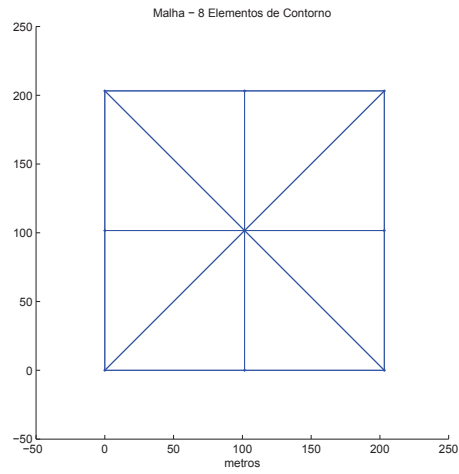
fície que sofre o deslocamento tem, claramente, uma característica não-linear. Ou seja, ela não se comporta linearmente com o incremento de deslocamento como uma mola, por exemplo. A força total obtida, que gera um deslocamento de 4 vezes o tamanho inicial, foi de aproximadamente 36.60 lb. Os valores obtidos em Al-Gahtani e Altiero (1996), com o método de elementos de contorno, e em Oden e Carey (1984), com a utilização do método de elementos finitos, foram de 35.9 lb e 36.03 lb respectivamente.

Ainda, aproveitando esse exemplo, é interessante fazer uma análise da influência da malha sobre o resultado final e, por consequência, da estabilidade da rotina para com o número de elementos. Assim, tomando como base a medida da força para ocasionar o deslocamento prescrito, pode-se avaliar a influência da malha como mostrado nas Figuras 8.12 e 8.11.

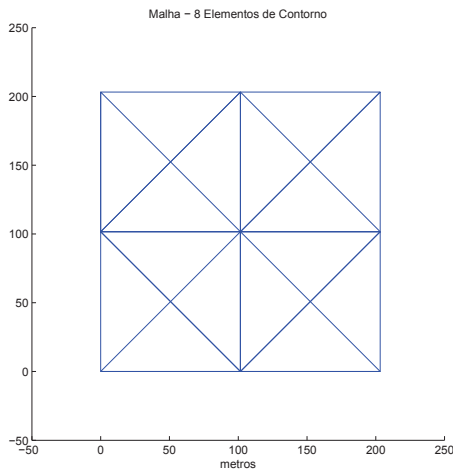
Figura 8.10:



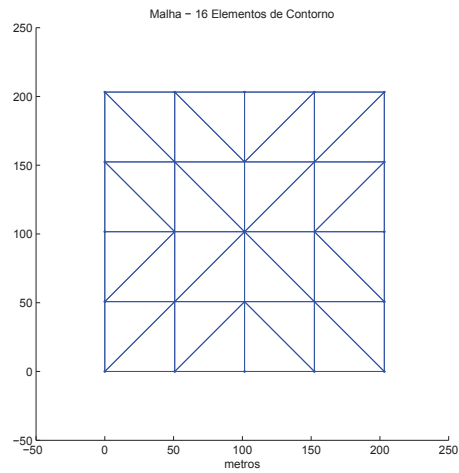
(a) Malha - 4 células



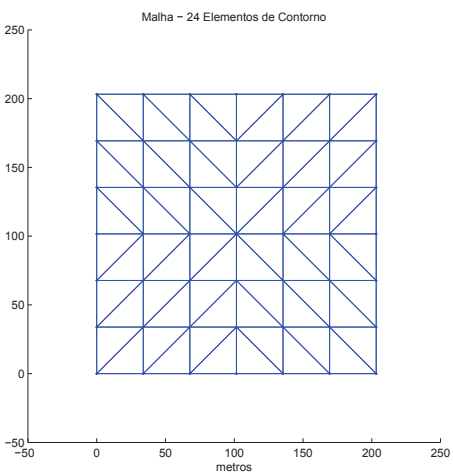
(b) Malha - 8 células



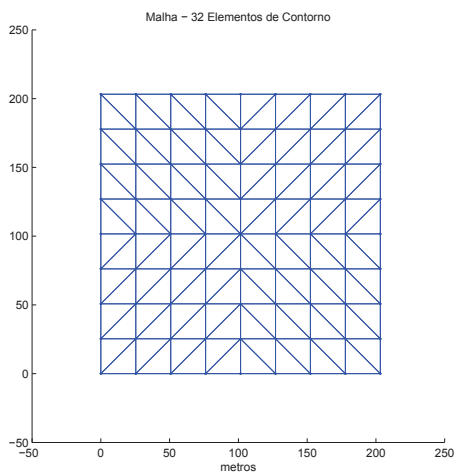
(c) Malha - 16 células



(d) Malha - 32 células



(e) Malha - 144 células



(f) Malha - 256 células

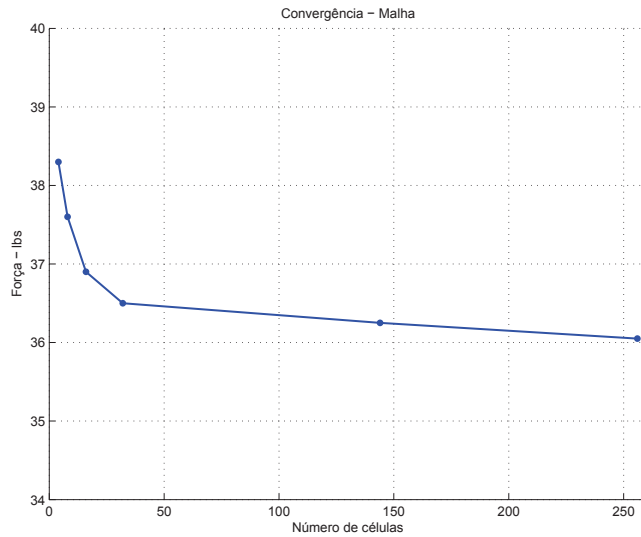
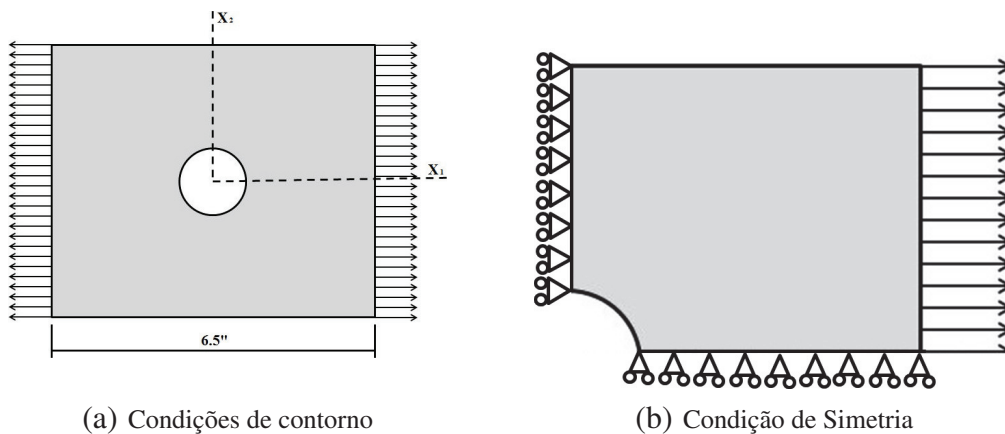


Figura 8.11: Convergência

Alongamento Uniaxial de uma Tira de Borracha com Furo

O problema trata de uma tira quadrada de borracha com 6.5 in (0.1651 m) de lado, com 0.079 in (0,002 m) de espessura e com um furo de 0.5 in (0.0127 m) de diâmetro no centro. Sobre a mesma é imposto um deslocamento nas suas bordas como pode ser observado na Figura (8.13(a)). O material adotado como sendo o constituinte da tira será o do tipo Mooney-Rivlin. Assim, as propriedades do material adotadas na simulação são apresentadas na Tabela (8.4).

Figura 8.12: Condições de Contorno



Propriedades do Material	
μ_{01}	27.02 psi
μ_{10}	1.42 psi
ν	0.5
μ	$2(\mu_{01} + \mu_{10})$ psi

Tabela 8.4: Propriedades do material (Mooney-Rivlin)

Dada a simetria do problema, iremos considerar apenas $\frac{1}{4}$ da tira levando-se em consideração os efeitos de simetria nos eixos X_1 e X_2 . Esse e as demais condições de contorno impostas à tira, podem ser observadas na Figura 8.13(b) e na Tabela 8.5.

Condições de Contorno		
$X_1 = \pm 3.25$	$u_{x_1} = 3.25(\lambda - 1)$	$u_{x_2} = 0$
$X_2 = \pm 3.25$	$t_{x_1} = 0$	$u_{x_2} = 0$

$\lambda =$ razão de extensão

Tabela 8.5: Condições de Contorno

O deslocamento imposto à tira é de 2 vezes o seu tamanho. Assim, para esse caso o deslocamento final será de $u = 6.5$ in para a meia tira. Como trata-se de um processo iterativo e gradual de aplicação das condições de contorno as mesmas foram aplicadas em, sequenciais 20 passos.

O contorno foi discretizado com 28 elementos lineares e o domínio com 132 células triangulares constantes como mostrado na Figura 8.13. Também, pode-se observar, que na região próxima ao furo ha uma maior densidade de elementos. Esse fenômeno foi propositalmente escolhido dado a característica de concentrador de tensão do furo.

Assim, após executado o programa, obtiveram-se os resultados de deslocamento e tensão apresentados nas Figuras (8.15), (8.16) e (8.17).

Por fim, seguindo a mesma linha de análise apresentada no exemplo anterior, faz-se a medida da força necessária para ocasionar o deslocamento imposto às laterais da tira. Assim, observando o gráfico na Figura 8.14, percebe-se tanto o comportamento não linear da força para com o deslocamento imposto (como já esperado) quanto a grande proximidade dos resultados obtidos pelo modelo aos obtidos por Al-Gahtani e Altiero (1996). Com a abodagem utilizada neste exemplo o resultado de da força final incrementada gradualmente para se obter um deslocamento de 6.5 in foi de 86.84 lbf. Os resultados obtidos por Al-Gahtani e Altiero (1996) em um exemplo identico a este

foram, observando-se graficamente, de 86 lbf.

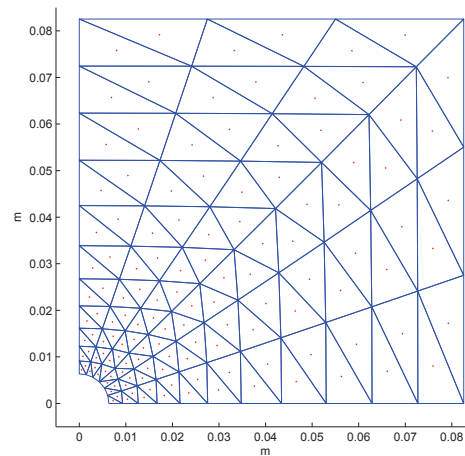


Figura 8.13: Malha

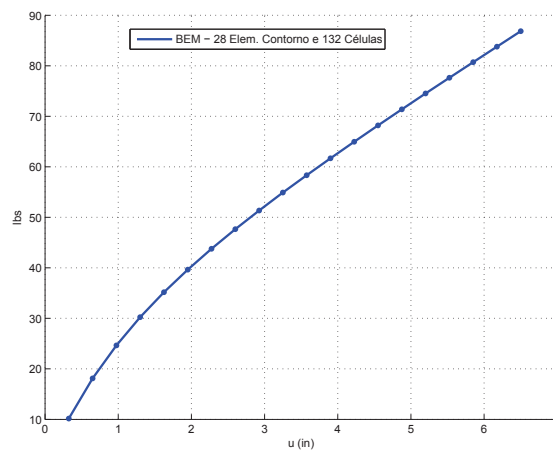
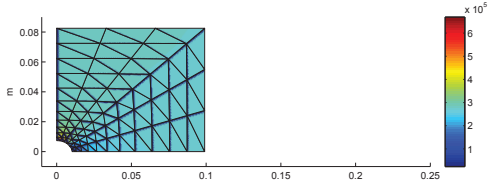


Figura 8.14: Força (lbf)

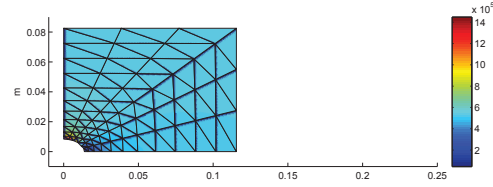
8.2 Conclusão

Observados os resultados obtidos e os comparando com os resultados já apresentados na literatura pode-se concluir que a metodologia utilizada para abordar materiais hiperelásticos incompressíveis é totalmente satisfatória. Em ambos os testes não-lineares, de alongamento uniaxial de uma tira sem e com furo, os resultados obtidos foram muito próximos aos já descritos na literatura e, também, aos obtidos quando tal situação é simulada em softwares comerciais. Tal fato da credibilidade à técnica adotada a tratar o comportamento não-linear de tais materiais sobre carregamentos com a característica dos já testados e comprova a eficiência da técnica.

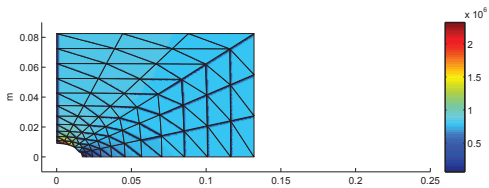
Figura 8.15: Geometria Deformada - Tensão P_{xx}



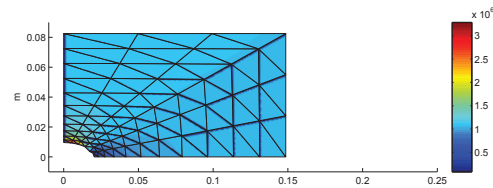
(a) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 0.65''$



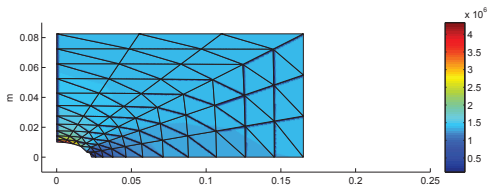
(b) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 1.30''$



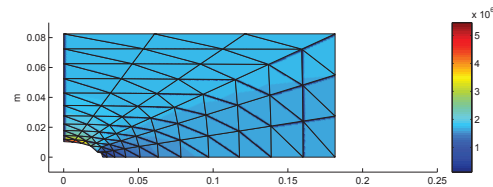
(c) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 1.95''$



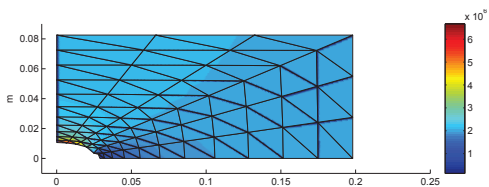
(d) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 2.60''$



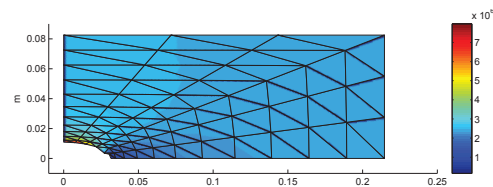
(e) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 3.25''$



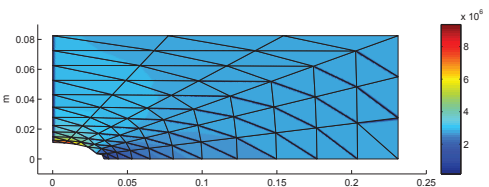
(f) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 3.90''$



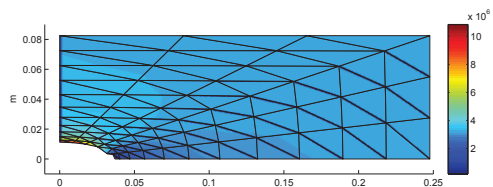
(g) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 4.55''$



(h) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 5.20''$

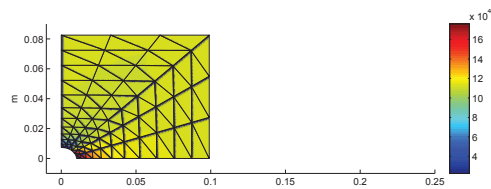


(i) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 5.85''$

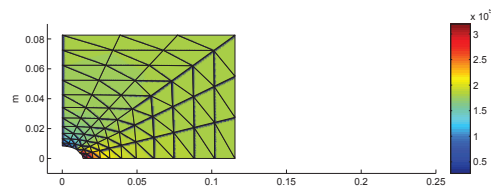


(j) Malha - P_{xx} [Pa] - $u = 6.5''$

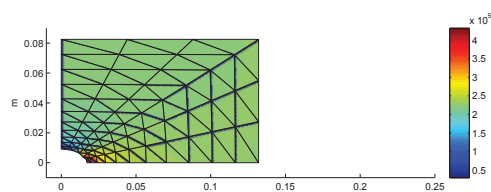
Figura 8.16: Geometria Deformada - Tensão P_{yy}



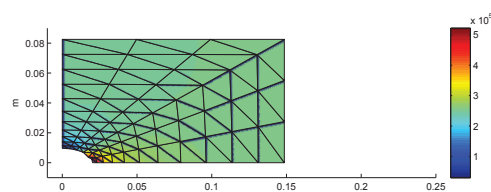
(a) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 0.65''$



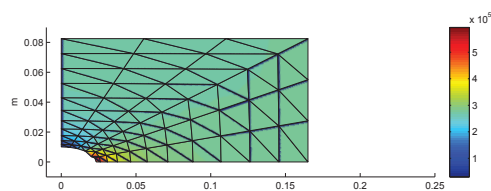
(b) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 1.30''$



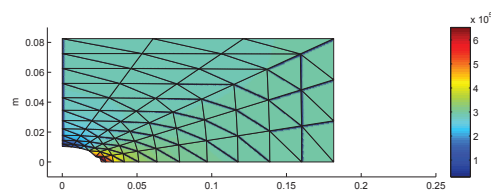
(c) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 1.95''$



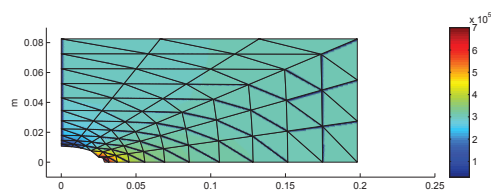
(d) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 2.60''$



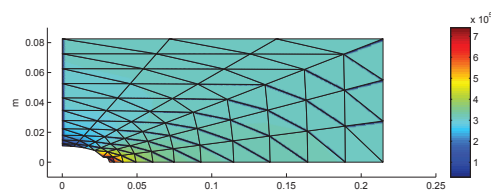
(e) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 3.25''$



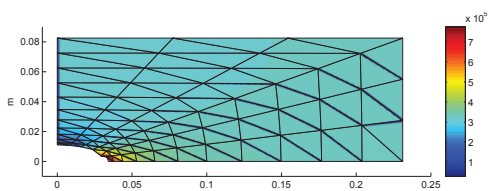
(f) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 3.9''$



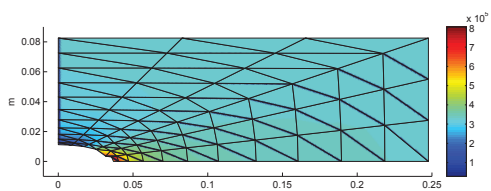
(g) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 4.55''$



(h) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 5.20''$

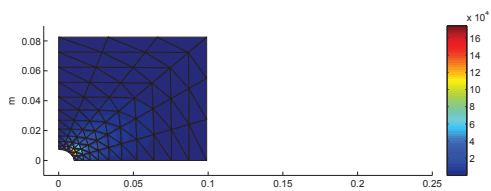


(i) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 5.85''$

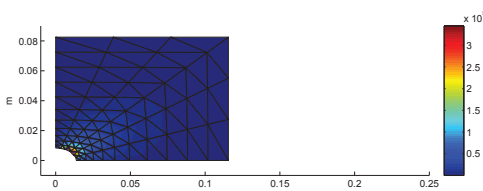


(j) Malha - P_{yy} [Pa] - $u = 6.50''$

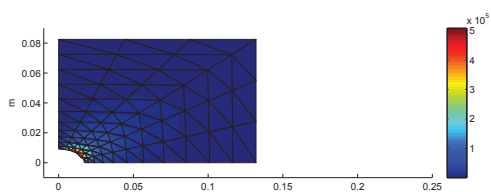
Figura 8.17: Geometria Deformada - Tensão P_{xy}



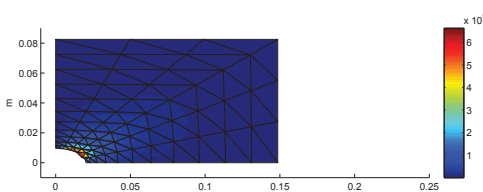
(a) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 0.65''$



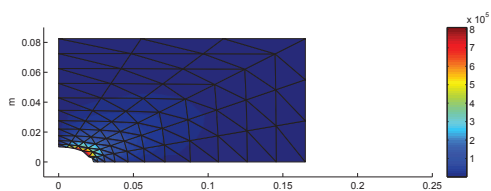
(b) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 1.30''$



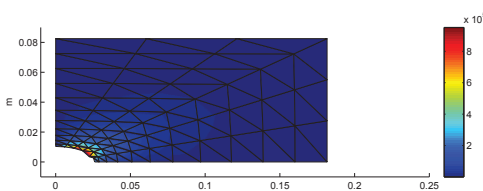
(c) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 1.95''$



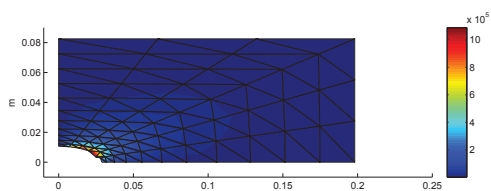
(d) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 2.60''$



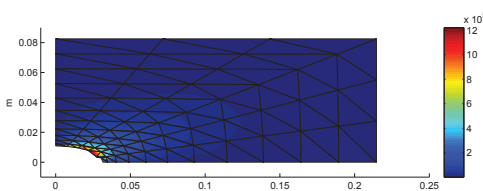
(e) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 3.25''$



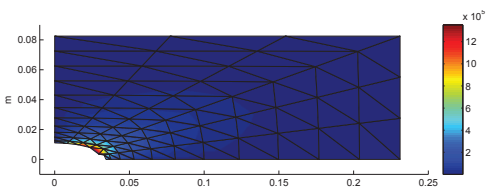
(f) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 3.9''$



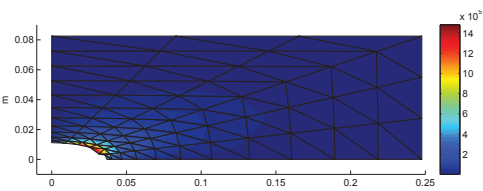
(g) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 4.55''$



(h) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 5.20''$



(i) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 5.85''$



(j) Malha - P_{xy} [Pa] - $u = 6.50''$

No entanto, devido à complexidade de se resolver sistemas não-lineares de alta ordem, o tempo de processamento foi alto para os casos apresentados. Como a grandeza do sistema não-linear esta diretamente relacionada ao número de células internas, quanto maior for a discretização interna maior será o tempo de processamento. Sendo que como o nível de discretização esta também relacionado à precisão do método, existe ai um balanço que deve ser estabelecido para se obter o nível desejado de precisão com o menor “custo computacional”.

8.2.1 Trabalhos Futuros

Importantes avanços, ainda dentro da técnica aplicada, podem ser feitos. A utilização de métodos numéricos mais robustos e avançados para resolução dos sistemas não-lineares assim como a utilização de linguagens computacionais mas robustas são exemplos de melhorias que poderiam ser feitas para que haja um avanço no que tange à necessidade de melhoria da eficiência computacional.

Por fim, como proposta para trabalhos futuros sugere-se a ampliação desta técnica para o caso 3D. Outro importante avanço seria aumentar o grau de interpolação tanto dos elementos de contorno quanto, principalmente, das células internas. Ainda, tanto em modelamentos similares à este quanto nas sugestões para trabalhos futuros poderiam ser experimentados outros modelos de materiais hiperelásticos como o de Ogden, por exemplo. Por fim, o uso de técnicas recentes para transformação das integrais de domínio em integrais de contorno traria importantes avanços.

REFERÊNCIAS

AL-GAHTANI, H.J. e ALTIERO, N.J. **Application of the boundary element method to rubber-like elasticity**. Appl. Math. Modelling 20, 654-661, 1996.

ALBUQUERQUE, E.; SOLLERO, P.; VENTURINI, W. e ALIABADI, M. **Boundary element analysis of anisotropic Kirchhoff plates**. International Journal of Solids and Structures 43, 4029-4046, 2006.

BELYTSCHKO, T. e LIU, W.; MORAN, B. **Nonlinear finite elements for continua and structures**. John Wiley and Sons, NY, 2000.

BONET, J. e WOOD, R. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. Cambridge University Press, United Kingdom., 1997.

BREBBIA, C.A. e DOMINGUEZ, J. **Boundary elements An introductory course**. McGraw-Hill, 1989.

BURGUER, K. e SMITH, H.P. **The Natural Rubber Market. Review, analyses, policies and outlook**, 1997.

CEPLAC. **A cadeia produtiva da borracha natural**. Comissão Executiva da Lavoura Cacaueira, 2009.

URL: *http://www.ceplac.gov.br*

CHANG, T.; SALLES, A. e LI, G. **Large strain analysis of rubber-like materials based on a perturbed lagrangian variational principle**. Comput. Mech. 8, 221-233, 1991.

CODA, H.B. Dynamic and static non-linear analysis of reinforced media: a BEM/FEM coupling approach. Computers and Structures 79, 2751-2765, 2001.

DOMINGUEZ, J. Boundary elements in dynamics. Computational Mechanics Publications. Elsevier Applied Science, London, New York, 1993.

FOERSTER, A. e KUHN, G. Die Behandlung von grossen deformationen hyperelastischer materialien mit der randelementmethode. Zamm, T508-511, 1994a.

FOERSTER, A. e KUHN, G. A field boundary element formulation for material nonlinear problems at finite strains. Int. J. Solids Struct. 31, 1777-1792, 1994b.

GREEN, A. e ZERNA, W. Theoretical Elasticity. Oxford University Press., 1954.

HUGHES, J. The finite element method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

LOVE, A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover, NY, 1944.

NOVATI, G. e BREBBIA, C.A. Boundary element formulation for geometrically nonlinear elastostatics. Appl. Math. Modelling 6, 131-138, 1982.

ODEN, J. e CAREY, G. Finite elements, Spacial problems in solid mechanics. Vol. V. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1984.

PHAN-THIEN, N. Rubber-like elasticity by boundary element method: finite deformation of a circular elastic base. Rheol Acta 27, 230-240, 1988.

POLIZZOTTO, C. A symmetric galerkin boundary/domain element method for finite elastic deforamtions. comput. Methods Appl. Mech. Eng. 189, 48-514, 2000.

RIZZO, F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastosta-

tic. Quarterly of Applied Mathematics 25, 83-95, 1967.

SIMO, J. e HUGHES, T. **Computational inelasticity**. Springer-Verlag, NY, 1998.

SUSSMAN, T. e BATHE, K. **A finite element formulation for nonlinear incompressibility elastic and inelastic analysis**. Comp. Struct. 26, 357-409, 1987.

TELLES, J. **The boundary element method applied to inelastic problems**. Springer, Berlin, 1983.

TRANG-CONG, T. e ZHENG, R.; PHAN-THIEN, N. **Boundary element method for finite elasticity**. Comput. Mechanics 6, 210-219, 1990.

TRUESDELL, C. e NOLL, W. **The non linear field of mechanics**. Flugge's Handbuch der Physik Vol III/3, Springer, Berlin/Heidelberg, 1965.

VENTURINI, W. **Boundary element method in geomechanics**. Springer, Berlin, 1983.

YU, T.; BEAK, H.; BITENCOURT, M.L. e KARNIADASKIS, G.F. **Mixed spectral/hp element formulation for nonlinear elasticity**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v 231-216, 42-57, 2012.