

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Crêterios de Falha e Otimiza o de Estruturas  
de Materiais Compósitos Usando  
o Método dos Elementos de Contorno**

Autora: **Adriana dos Reis Gouvêa**

Orientador: **Prof. Dr.  der Lima de Albuquerque**

Co-orientador: **Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa**

14/2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

# Critérios de Falha e Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos Usando o Método dos Elementos de Contorno

**Autora:** Adriana dos Reis Gouvêa

**Orientador:** Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque

**Co-orientador:** Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

**Curso:** Engenharia Mecânica

**Área de concentração:** Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica da  
Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos  
parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2006

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

G745c Gouvêa, Adriana dos Reis  
Critérios de falha e otimização de estruturas de materiais compósitos usando o método dos elementos de contorno / Adriana dos Reis Gouvêa. --Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientadores: Éder Lima de Albuquerque, Alberto Luiz Serpa

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Materiais compostos. 2. Métodos de elementos de contorno. 3. Otimização estrutural. 4. Falha de sistema (Engenharia). I. Albuquerque, Éder Lima de. II. Serpa, Alberto Luiz. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Failure criteria and optimization of composite material structures using the boundary element method

Palavras-chave em Inglês: Composite materials, Boundary element method, Optimization, Failure criteria

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Paulo Sollero, Sérgio Frascino Muller de Almeida

Data da defesa: 22/02/2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

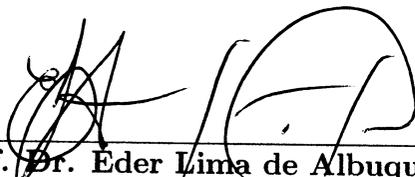
Dissertação de Mestrado

# Critérios de Falha e Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos Usando o Método dos Elementos de Contorno

Autora: Adriana dos Reis Gouvêa

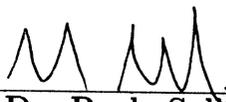
Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque

Co-orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa



---

Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque, Presidente  
FEM/UNICAMP



---

Prof. Dr. Paulo Sollero  
FEM/UNICAMP



---

Prof. Dr. Sérgio Frascino Muller de Almeida  
Divisão de Engenharia Mecânica Aeronáutica/ITA

Campinas, 22 de Fevereiro de 2006.

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho ao Paulo, meu marido.

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer às pessoas e instituições que colaboraram para o sucesso deste trabalho:

- A CAPESP pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao meu orientador, Professor Éder Lima de Albuquerque, pela supervisão, apoio , companheirismo e principalmente pela paciência durante este período que trabalhamos juntos.
- Ao professor Alberto Luiz Serpa pela co-orientação deste trabalho
- Ao Departamento de Projeto Mecânico pela infra-estrutura fornecida durante a realização deste trabalho.
- Aos amigos do Departamento .

## Resumo

Gouvêa, Adriana dos Reis, *Critérios de falha e otimização de estruturas de materiais compósitos usando o método dos elementos de contorno*. Campinas, 2006. Dissertação de mestrado - Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas.

Neste trabalho é apresentada uma análise, através do uso do método dos elementos de contorno, de problemas estáticos em um modelo de estado plano para materiais anisotrópicos. A formulação de elementos de contorno é desenvolvida usando soluções fundamentais para elasto-estática e são utilizados apenas elementos quadráticos contínuos (3 nós por elementos). A formulação desenvolvida é aplicada no cálculo de tensões e deslocamentos de estruturas planas de materiais compósitos laminados submetidos a cargas no plano da estrutura. São estudados também os critérios de falha para materiais compósitos, abordando dois critérios quadráticos: o critério de Tsai-Hill e o critério de Tsai-Wu. São utilizados métodos de otimização para encontrar os valores ótimos dos ângulos de orientação das fibras que maximizem a resistência da estrutura. Para a otimização de problemas de uma variável é usado o método da Seção Áurea e para problemas de várias variáveis é usado o método Simplex Modificado. A função objetivo para os dois casos é o critério de falha. As variáveis de projeto são os ângulos de orientação das fibras nas diversas lâminas do laminado. Os resultados obtidos são comparados com resultados disponíveis na literatura e mostram uma boa concordância.

*Palavras chaves:* Materiais Compósitos, Método dos Elementos de Contorno, Otimização, Critérios de Falha.

## Abstract

Gouvêa, Adriana dos Reis, *Failure criteria and optimization of composite material structures using the boundary element method*. Campinas, 2006. Dissertação de mestrado - Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas.

This work presents an analysis, using the boundary element method, of static problems in a plain state model in anisotropic materials. The boundary element formulation is developed using basic solutions for elasto-statics and only continuous quadratic elements (three nodes per element) are used. The developed formulation is applied to compute the stress and displacements of laminated composite structures plain submitted to loads in the structure plane. It is studied also the failure criteria for composite materials, considering two quadratic criteria: the Tsai-Hill criterion and the Tsai-Wu criterion. Optimization methods are used to find optimum values for the fibres orientation angles that maximize the strength of the structure. For optimization problems of one variable, the Golden Section method is used and for problems of several variables the Modified Simplex method is used. The objective function for both cases is the failure criteria. Design variables are fibres orientation angles of all lamina of the laminate. Results are compared with other results from literature and show a good agreement.

*Key words:* Composite Materials, Boundary Element Method, Optimization, Failure Criteria.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Revisão Bibliográfica . . . . .	1
1.2	Objetivos e hipóteses . . . . .	8
1.3	Descrição do presente trabalho . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Equações Constitutivas e Critérios de Falha para Materiais</b>	
	<b>Compósitos</b>	<b>12</b>
2.1	Equações Constitutivas . . . . .	12
2.1.1	Introdução . . . . .	12
2.2	Elasticidade anisotrópica . . . . .	12
2.3	Equação constitutiva de uma lâmina . . . . .	21
2.4	Laminados simétricos . . . . .	24
2.5	Ensaio para determinação das propriedades elásticas e de falha do material . . . . .	28
2.6	Modos de falha de uma lâmina . . . . .	31
2.6.1	Critério da Máxima Tensão . . . . .	32
2.6.2	Critério de Tsai-Hill . . . . .	32
2.6.3	Critério de Tsai-Wu . . . . .	34
2.7	Critérios de Falha para Materiais Compósitos . . . . .	36

2.8	Comparação entre os critérios de falha . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Método dos elementos de contorno para materiais anisotrópicos</b>	<b>40</b>
3.1	Introdução . . . . .	40
3.2	Formulação integral . . . . .	40
3.3	Soluções fundamentais anisotrópicas . . . . .	43
3.4	Equações integrais singulares . . . . .	48
3.5	Formulação dos elementos de contorno discretizada . . . . .	50
3.6	Integração no Espaço . . . . .	51
3.7	Cálculo dos deslocamentos e densidades de forças em pontos internos . . . . .	55
3.8	Densidade de força no contorno . . . . .	56
3.9	Tensões em cada uma das lâminas . . . . .	59
3.10	Resultados numéricos . . . . .	61
3.10.1	Tensões circunferenciais em uma chapa infinita com furo	61
3.10.2	Crítérios de falha para uma chapa sem furo . . . . .	63
3.10.3	Crítérios de falha para uma lâmina com furo . . . . .	69
3.10.4	Crítério de falha para um Laminado . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos</b>	<b>82</b>
4.1	Aspectos da otimização . . . . .	83
4.1.1	Otimização sem restrições . . . . .	85
4.1.2	Otimização com restrições . . . . .	86
4.1.3	Otimização unidimensional: Método da Seção Áurea . . . . .	86
4.1.4	Otimização multi-dimensional: Método Simplex . . . . .	93
4.2	Otimização de estruturas de materiais compósitos . . . . .	97

4.3	Resultados numéricos . . . . .	99
4.3.1	Para uma lâmina . . . . .	99
4.3.2	Para um Laminado . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>108</b>
5.1	Conclusões finais . . . . .	108
5.2	Proposta para trabalhos futuros . . . . .	109

# Lista de Figuras

1.1	Fluxograma do processo de otimização. . . . .	11
2.1	Lâmina ortotrópica. . . . .	21
2.2	Sistemas de coordenadas da lâmina $(x_1x_2)$ e do laminado $(\bar{x}_1\bar{x}_2)$ . . . . .	25
2.3	Laminado simétrico. . . . .	26
2.4	Laminado com n camadas. . . . .	27
2.5	Corpo de prova para ensaio de tração: 1- carregamento longitudinal; 2- carregamento transversal. . . . .	29
2.6	Corpo de prova para ensaio de compressão. . . . .	30
2.7	Corpo de prova para ensaio de cisalhamento. . . . .	31
2.8	Lâmina quadrada sob tração uniforme. . . . .	37
2.9	Comparação entre os critérios de falha de Tsai-Hill e Tsai-Wu. . . . .	39
3.1	Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular. . . . .	48
3.2	Transformação de coordenadas $x_1 - x_2$ para $\xi$ . . . . .	53
3.3	Tensões no contorno. . . . .	57
3.4	Distribuição de tensões e deformações em um laminado simétrico. . . . .	60
3.5	Furo circular em uma chapa ortotrópica infinita. . . . .	62
3.6	Discretização da chapa ortotrópica infinita. . . . .	64

3.7	Cálculo da tensão circunferencial para $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . . . . .	65
3.8	Discretização da chapa. . . . .	67
3.9	Tensão paralela às fibras ( $\sigma_{11}$ ) para $\theta = 45^\circ$ . . . . .	68
3.10	Tensão que causa a falha da chapa em função do ângulo de orientação das fibras, segundo o critério de Tsai-Hill. . . . .	69
3.11	Lâmina sujeita ao carregamento biaxial. . . . .	71
3.12	Malha usada para o problema (28 elementos de contorno quadráticos descontínuos). . . . .	72
3.13	Valores dos critérios de falha de Tsai-Hill e de Tsai-Wu com $r = 0$ . . . . .	73
3.14	Valores dos critérios de falha de Tsai-Hill e de Tsai-Wu com $r = 0,9$ . . . . .	74
3.15	Chapa com furo central. . . . .	76
3.16	Discretização da chapa laminada com furo. . . . .	77
3.17	Valores do critério de falha de Tsai-Wu para a primeira lâmina ( $\theta = 0^\circ$ e $f_{max} = 0,014$ ). . . . .	78
3.18	Valores do critério de falha de Tsai-Wu para a segunda lâmina ( $\theta = 90^\circ$ e $f_{max} = 0,627$ ). . . . .	79
3.19	Valores do critério de Tsai-Wu. . . . .	80
3.20	Valores do critério de Tsai-Hill. . . . .	81
4.1	Fluxograma para a implementação da seção áurea. . . . .	91
4.2	O método da seção áurea. . . . .	92
4.3	Progresso de um simplex bidimensional em direção ao ótimo. . . . .	95
4.4	Fluxograma para a implementação do simplex modificado. . . . .	98
4.5	Lâmina sob tração uniaxial. . . . .	100

4.6	Discretização da lâmina. . . . .	101
4.7	Tensão máxima que provoca a falha. . . . .	102
4.8	Tensão máxima que provoca a falha. . . . .	103
4.9	Caminho percorrido pelo método de otimização partindo de $\theta_1 = 70^\circ$ e $\theta_2 = 10^\circ$ . . . . .	106
4.10	Caminho percorrido pelo método de otimização partindo de $\theta_1 = -70$ e $\theta_2 = 70$ . . . . .	107

# Lista de Tabelas

4.1	Razão de convergência para o método da seção áurea. . . . .	93
4.2	Comparação entre os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu. . . . .	105

# Símbolos

$\sigma_{11}$  = tensão normal longitudinal (na direção das fibras),

$\sigma_{22}$  = tensão normal transversal (na direção normal às fibras),

$\sigma_{12}$  = tensão de cisalhamento,

$\varepsilon_{11}$  = deformação linear longitudinal,

$\varepsilon_{22}$  = deformação linear transversal,

$\varepsilon_{12}$  = deformação angular,

$\nu_{12}$  = coeficiente de Poisson principal,

$E_{22}$  = módulo de elasticidade transversal,

$E_{11}$  = módulo de elasticidade longitudinal,

$G_{12}$  = módulo de cisalhamento,

$X_c$  = limite de resistência à compressão para cargas paralelas às fibras,

$X_t$  = limite de resistência à tração para cargas paralelas às fibras,

$Y_c$  = limite de resistência à compressão para cargas perpendiculares às fibras,

$Y_t$  = limite de resistência à tração para cargas perpendiculares às fibras,

$S$  = limite de resistência ao cisalhamento,

$\theta$  = ângulo de orientação da fibra,

$f$  = valor do critério de falha,

$\mathbf{Q}$  = matriz de rigidez de uma lâmina,

$\mathbf{A}$  = matriz de extensão do laminado.

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Revisão Bibliográfica

Os materiais estruturais podem ser divididos dentro de quatro categorias básicas: metais, polímeros, cerâmicos e compósitos. Materiais compósitos, os quais consistem de dois ou mais materiais separados, combinados em uma estrutura macroscópica única, são feitos de várias combinações dos outros três materiais. Apesar da dificuldade de saber certamente quando ou onde os primeiros humanos aprenderam sobre os compósitos fibrosos, a natureza nos provê de numerosos exemplos destes materiais (madeiras, ossos,...). O livro do Êxodo no Velho Testamento lembra o que certamente deve ser um dos primeiros exemplos de compósitos fibrosos feito pelo homem, os tijolos de argila reforçados com palha, usados pelos Israelitas. Os nativos primitivos da América do Sul e Central aparentemente usavam fibras de plantas em suas cerâmicas, baseados no desejo de evitar que a argila quebrasse durante a cura. Mais tarde, foram desenvolvidos compósitos estruturais como o concreto reforçado com aço, polímeros reforçados com fibras como o vidro e o grafite, e muitos outros materiais. Pode não existir dúvidas que com as fibras

se obtém a máxima resistência de um material, mas existem desvantagens óbvias do uso de materiais somente na forma de fibras. As fibras sozinhas não podem suportar cargas de compressão longitudinal e suas propriedades mecânicas transversais não são boas como as correspondentes propriedades longitudinais. Assim, as fibras são geralmente inúteis como materiais estruturais senão tiver embebida em uma única estrutura com uma liga ou matriz. As vantagens associadas à utilização dos compósitos tornam-se mais claras quando se levam em conta a rigidez por unidade de volume (rigidez específica) e a resistência por unidade de volume (resistência específica): os valores superiores destas duas propriedades significam a possibilidade de redução do peso dos componentes finais, sendo que a redução de peso significa maior eficiência e menor consumo de energia.

Os plásticos reforçados estão entre os primeiros compósitos estruturais. Os compósitos incorporando vidros ou outras fibras de módulos relativamente baixos são usados em muitas aplicações de grandes volumes, tais como veículos automotivos, pois eles têm um baixo custo, e são, às vezes, referidos como compósitos básicos. Já as fibras de carbono e aramida (Kevlar) são usadas principalmente em aplicações que exigem alta performance como nas estruturas aeroespaciais onde seus altos custos podem ser justificados baseados na melhoria do desempenho. As maiores vantagens são o alto módulo de elasticidade e a alta resistência mecânica aliados com a baixa densidade (Gibson, 1994).

Com o aumento do número de projetos com materiais compósitos surgiu a necessidade de calcular tensões e deformações em estruturas de materiais anisotrópicos (materiais cujas propriedades mecânicas variam com a direção).

Esta tarefa é mais complicada que nos materiais isotrópicos (materiais cujas propriedades mecânicas não variam com a direção), pois a anisotropia aumenta o número de variáveis do problema. Soluções analíticas para problemas anisotrópicos restringem-se a um pequeno número de problemas de domínios simples. No caso de estruturas e componentes mecânicos, o domínio torna-se bastante complexo, sendo que sua análise só é possível através de métodos numéricos ou métodos experimentais. Com a evolução dos computadores os métodos numéricos passaram a ser utilizados para uma faixa bem maior de problemas. Dentre os métodos numéricos que mais se destacaram no tratamento de problemas estruturais estão o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos. Embora a obtenção de uma formulação de elementos de contorno seja matematicamente mais trabalhosa que a de elementos finitos, os elementos de contorno possuem características bastante desejáveis para a modelagem de muitos problemas, tais como: (1) conseguem modelar bem problemas de alto gradiente de tensão e deformação e (2) somente o contorno é discretizado. Recentemente tem aumentado de maneira significativa o número de trabalhos em que o método dos elementos de contorno tem sido usado na análise de problemas envolvendo materiais compósitos e anisotrópicos (Sollero e Aliabadi, 1993, Deb e Banerjee, 1990, Deb, 1996, Albuquerque e Sollero, 1998, Kogl e Gaul, 2000, Albuquerque *et al.* 2002, Albuquerque *et al.* 2003, Albuquerque *et al.* 2003b e Albuquerque *et al.* 2004).

Por serem constituídos de diferentes materiais e apresentarem um maior número de variáveis que podem ser manipuladas durante o projeto (fração volumétrica das fibras, quantidade de lâminas, direção das fibras, etc.) os

materiais compósitos possibilitam um ajuste mais refinado das demandas de projeto quando comparado com os materiais tradicionais. Porém, com este grande número de variáveis torna bastante difícil de se determinar os valores ótimos nos quais a estrutura terá sua melhor performance. Desta forma, é evidente a necessidade de se usar técnicas de otimização em projetos de estruturas de materiais compósitos. A otimização é a busca do melhor resultado de uma dada operação que satisfaça certas restrições (Gurdal et al., 1998).

Os seres humanos, guiados e influenciados por seu ambiente natural, quase instintivamente realizaram todas as funções de uma maneira que economizassem energia ou minimizassem o desconforto e a dor. A motivação é explorar os limites dos recursos utilizáveis de uma maneira que maximize a produção ou os ganhos. Desde as mais primitivas invenções como uma alavanca ou uma polia mecânica, são claramente manifestações do desejo dos homens para maximizar a eficiência mecânica. A importância da minimização do peso de estruturas foi primeiramente reconhecida pelas indústrias aeroespaciais pois nela o projeto estrutural do avião é controlado mais pelo peso que pelo custo. Em outras indústrias, como a civil, a mecânica e a automotiva, os custos são as considerações primárias, apesar de que o peso do sistema afeta os custos e a performance. O crescimento da falta de matéria-prima e um rápido esgotamento das fontes de energia convencionais aumentam a necessidade de estruturas leves, eficientes e de baixo custo. Estas mudanças criam a necessidade dos engenheiros organizarem as técnicas de otimização de peso e custo (Haftka e Gurdal, 1991).

Em geral, problemas de otimização tem uma função objetivo a qual mede

a melhora ou a eficiência do projeto. A maximização da melhora é geralmente feita dentro de alguns limites que restringem a escolha do projeto. Cada limite é chamado de restrição. Finalmente, um problema de otimização possui as variáveis de projeto, as quais os valores são mudados durante o processo. Vários estudos tem sido feito sobre otimização de materiais compósitos, variando o método usado, a função a ser minimizada ou maximizada e as variáveis de projeto.

Um dos primeiros trabalhos sobre a otimização de compósitos laminados foi apresentado por Flanagan e Palazotto (1986) usando técnicas de otimização não-linear. Embora programas sofisticados de otimização fossem disponíveis na época deste trabalho, eles muitas vezes não eram usados em projetos preliminares porque requeriam um computador de grande porte e alguns conhecimentos de operações de programas. Assim, uma alternativa eram os programas especializados em otimização de laminados onde se desenvolvia rotinas compactas e eficientes para microcomputadores. Somente a tensão em um ponto, as cargas no plano-médio e as deflexões eram consideradas. Estes programas eram simples para usar e não requeriam conhecimento de otimização.

Maksimovi (1990) desenvolveu um método eficiente e confiável para análise estrutural e otimização de peso de uma estrutura complexa de compósitos. Ele apresentou um procedimento automático para a minimização do peso de compósitos estruturais sujeito a vários tipos de restrições usando o método dos elementos finitos. Tsau e Liu (1995) realizaram um estudo de otimização da seqüência de empilhamento de compósitos laminados usando dois métodos de otimização: o método simplex e o método de penalidade interior. Walker

*et al.* (1997), usando a teoria de placas de Mindlin em conjunto com rotinas de otimização, fizeram um projeto onde se buscou minimizar a deflexão e o peso de placas de laminados compósitos. Várias condições de contorno foram consideradas e os resultados foram dados para várias razões de aspecto e para diferentes tipos de carregamentos. Eles apresentaram comparações de resultados para minimização de peso e também minimização de deflexão.

Fukunaga e Vanderplaats (1991) usaram as orientações das fibras e a espessura das camadas como variáveis de projeto. Uma técnica é também proposta para desconsiderar as restrições de forças entre camadas de espessura zero. Schmit e Farshi (1973) e Schmit e Farshi (1977) mostraram a importância de se desconsiderar as restrições de força correspondentes as camadas de espessura zero para melhorar as características do laminado. Kim *et al.* (1997) formularam um projeto ótimo, onde a função objetivo é a falha pelo critério de Tsai-Wu. Foram calculadas as orientações ótimas das fibras de um compósito laminado para a maximização das forças aplicadas sob múltiplas condições de carregamento no plano.

Mais tarde, Haftka e Walsh (1992), usando um pacote de software comercial baseado no algoritmo branch-and-bound, apresentaram formulações de programação inteira para o projeto de laminados simétricos balanceados sob compressão biaxial. São buscados a maximização de cargas de deflexão para uma dada espessura e a minimização da espessura sujeito a uma restrição de deflexão.

Sadagopan e Pitchumani (1998), Park *et al.*(2001), Walker e Smith (2003) e Brighenti (2005) usaram algoritmos genéticos para o projeto ótimo de laminados compósitos, sendo que Sadagopan e Pitchumani (1998) apresentaram

um estudo da construção de uma micro-estrutura ótima em conjunto com um modelo de propriedades baseado na relação analítica entre a micro-estrutura e as propriedades do laminado. Os projetos ótimos são relatados para casos de estudos envolvendo propriedades existentes em aplicações práticas selecionadas. A aproximação é comparada com aproximações alternativas baseadas em uma técnica de enrijecimento simulado. Park *et al.*(2001) usaram o método dos elementos finitos considerando a deformação de cisalhamento para analisar laminados simétricos sujeitos a vários carregamentos e condições de contorno. O critério de falha de Tsai-Hill é usado como função objetivo, e o ângulo da orientação das lâminas são as variáveis de projeto. Walker e Smith (2003) usaram o método dos elementos finitos e técnicas de otimização para minimizar o peso e a deflexão de estruturas reforçadas com fibras. O projeto de restrição implementado é baseado no critério de falha de Tsai-Wu. Placas retangulares de compósitos laminados simétricos com oito camadas são usados para demonstrar a técnica. Brighenti (2005) obteve a distribuição ótima das fibras em compósitos reforçados com fibras usando algoritmos genéticos e a busca de valores extremos de uma dada função objetivo. A otimização da distribuição das fibras nos materiais compósitos fibrosos considerou a maximização de algumas propriedades da estrutura, mantendo constante a quantidade de fibras (problema de otimização com restrição). O algoritmo de otimização é implementado em um código de elementos finitos e algumas simulações numéricas são feitas para avaliar a confiabilidade do projeto do material com respeito a algumas performances ótimas esperadas.

Usando um método de otimização multicritério para a minimização de

peso e restrições devido aos critérios de falhas, Kere *et al.*( 2003) transformaram um problema com restrição em uma seqüência de problemas sem restrições e resolveram com um método iterativo de descida.

Em um dos trabalhos mais recentes de otimização de materiais compósitos, Farshi e Herasati (2005) apresentaram um método para otimização do peso de lâminas de materiais compósitos fibrosos sob ação de carregamentos laterais. O objetivo é o projeto de laminados de materiais compósitos de mínima espessura que podem suportar múltiplos carregamentos estáticos aplicados na direção normal à superfície sem que ocorra falhas em nenhuma das camadas, segundo o critério de Tsai-Hill. Nesta investigação, a orientação dos ângulos das fibras é tratada como variáveis discretas, as quais podem variar somente por um aumento pré-designado, enquanto as espessuras das camadas são tratadas como variáveis contínuas. O procedimento de otimização é baseado em uma estratégia de dois estágios: no primeiro somente a orientação dos ângulos das fibras das camadas é tratada como variáveis de projeto, e no segundo, somente a espessura das camadas.

## 1.2 Objetivos e hipóteses

Os objetivos deste trabalho são:

- Apresentar uma análise dos principais critérios de falhas para materiais compósitos usando o método dos elementos de contorno.
- Mostrar a influência da direção das fibras na falha da primeira lâmina em um laminado de materiais compósitos, e no valor da tensão máxima que causa a falha.

- Encontrar a orientação ótima das direções das fibras para um laminado simétrico, que minimizem os critérios de falha de Tsai-Hill e Tsai-Wu.

As hipóteses adotadas são:

- Problemas estáticos em um modelo de estado plano de materiais anisotrópicos.
- As lâminas encontram-se perfeitamente coladas umas às outras, ou seja, não há deslocamento relativo das duas superfícies que compõe a interface entre duas lâminas.
- O laminado é simétrico, o que implica na existência de um plano médio de simetria.

### 1.3 Descrição do presente trabalho

Neste trabalho são desenvolvidas análises de falha e otimização estrutural de materiais compósitos laminados simétricos, utilizando o método dos elementos de contorno e métodos de otimização contínua.

No capítulo 2 são descritas as equações constitutivas e os critérios de falha para materiais compósitos. No capítulo 3 é apresentada a formulação do método dos elementos de contorno para materiais compósitos. É mostrado, também, o cálculo das tensões em cada uma das lâminas do laminado. São apresentados alguns resultados numéricos comparando os dois critérios de falha estudados. No capítulo 4 são abordados alguns métodos de otimização. São mostrados exemplos de otimização para uma lâmina e para laminados. No capítulo 5 são apresentadas as conclusões sobre os métodos abordados e também as propostas para trabalhos futuros.

Resultados parciais deste trabalho foram publicados nos artigos Gouvêa *et al.* (2005a, 2005b).

O fluxograma 1.1 mostra como foi implementado o método de otimização.

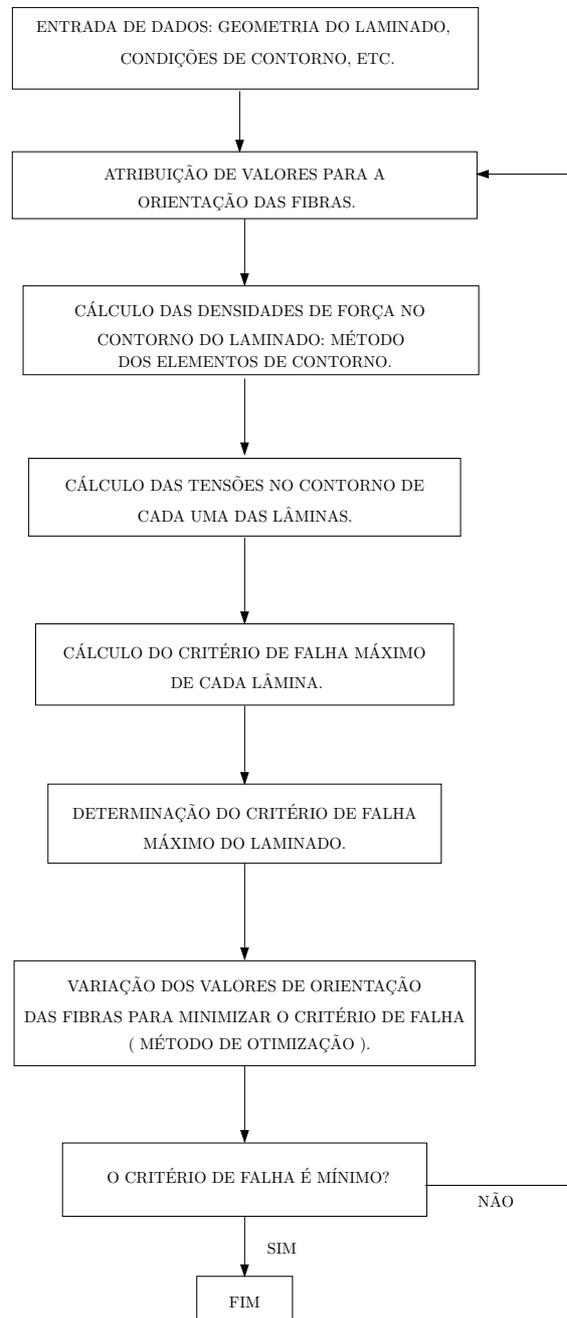


Figura 1.1: Fluxograma do processo de otimização.

## Capítulo 2

# Equações Constitutivas e Critérios de Falha para Materiais Compósitos

### 2.1 Equações Constitutivas

#### 2.1.1 Introdução

Neste Capítulo é feita uma revisão da teoria da elasticidade aplicada a materiais anisotrópicos. Além disso, é mostrada a obtenção das matrizes de rigidez e flexibilidade de compósitos laminados simétricos a partir das propriedades mecânicas das lâminas ortotrópicas constituintes dos laminados. Também são abordados os principais modos e critérios de falha descrito na literatura para laminados compósitos. As formulações matemáticas presentes neste capítulo serão usadas nos capítulos posteriores.

### 2.2 Elasticidade anisotrópica

Considerando um elemento infinitesimal dentro de um domínio  $\Omega$ , o equilíbrio de forças pode ser expresso por

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0. \quad (2.1)$$

Por sua vez, o equilíbrio de momentos é expresso por

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (2.2)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões e  $b_i$  é o vetor de forças de corpo.

O vetor de forças de superfície  $t_i$  em um ponto no contorno  $\Gamma$  de um domínio  $\Omega$  é expresso na forma

$$t_i = \sigma_{ij}n_j, \quad (2.3)$$

onde  $n_j$  é o vetor normal do contorno  $\Gamma$  no ponto.

Em elasticidade linear, o vetor de deslocamentos e suas derivadas são assumidos como infinitesimais. O tensor de deformação, considerando deslocamentos infinitesimais, pode ser escrito como

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (2.4)$$

Para assegurar a unicidade dos deslocamentos, as componentes do tensor de deformações não podem ser designadas arbitrariamente, devendo satisfazer certas condições de compatibilidade e integrabilidade. A equação de compatibilidade é dada por:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (2.5)$$

que no caso bidimensional é reduzida à forma

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = \varepsilon_{12,12}. \quad (2.6)$$

No caso de material elástico linear, a relação entre o tensor de tensões com o tensor de deformações é escrita, na sua forma mais geral, como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (2.7)$$

sendo o coeficiente de linearidade  $C_{ijkl}$  um tensor de quarta ordem (81 elementos) conhecido como tensor de constantes elásticas. Devido as restrições de simetria tem-se que

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (2.8)$$

A condição para a existência de uma função energia de deformação também requer que

$$C_{ijkl} = C_{klji} \quad (2.9)$$

Estas considerações reduzem o número de constantes elásticas de 81 para 21. Como a direção das tensões principais não coincidem necessariamente com a direção das deformações principais, apenas 18, das 21 constantes são independentes (Lekhnitskii, 1963).

Considerando as 21 constantes elásticas, a equação 2.7 pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{2313} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{1312} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

A equação (2.7) também pode ser escrita na forma

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (2.11)$$

onde  $S_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem conhecido como tensor de flexibilidade, que, devido as mesmas razões do tensor de constantes elásticas, possui 21 elementos, dos quais apenas 18 são independentes.

A equação (2.11) pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ 2S_{1123} & 2S_{2223} & 2S_{3323} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1113} & 2S_{2213} & 2S_{3313} & 4S_{2313} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1112} & 2S_{2212} & 2S_{3312} & 4S_{2312} & 4S_{1312} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Usando a notação tensorial reduzida, proposta por Lekhnitskii (1963), a equação (2.12) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

onde

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

e

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Os coeficientes elásticos podem ser expressos em termos de constantes de engenharia como (Lekhnitskii, 1963)

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1 & a_{12} &= \nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2 \\ a_{13} &= -\nu_{31}/E_1 = -\nu_{13}/E_3 & a_{14} &= \eta_{23,1}/E_1 = \eta_{1,23}/G_{23} \\ a_{15} &= \eta_{32,1}/E_1 = \eta_{1,32}/G_{23} & a_{16} &= \eta_{12,1}/E_1 \\ a_{22} &= 1/E_2 & a_{23} &= \nu_{32}/E_2 = -\nu_{23}/E_3 \\ a_{24} &= \eta_{23,1}/E_2 = \nu_{23,3}/G_{23} & a_{25} &= \eta_{31,2}/E_2 = \eta_{2,31}/G_{13} \\ a_{26} &= \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12} & a_{33} &= 1/E_3 \\ a_{34} &= \eta_{23,3}/E_3 = \eta_{3,23}/G_{23} & a_{35} &= \eta_{31,1}/E_3 = \eta_{3,31}/G_{13} \\ a_{36} &= \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12} & a_{44} &= 1/G_{23} \\ a_{45} &= \zeta_{32,23}/G_{23} = \zeta_{23,31}/G_{13} & a_{46} &= \zeta_{12,23}/G_{23} = \zeta_{23,12}/G_{12} \\ a_{55} &= 1/G_{13} & a_{56} &= \zeta_{12,31}/G_{13} = \zeta_{31,12}/G_{12} \\ a_{66} &= 1/G_{12} \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde  $E_k$  são os módulos de elasticidade longitudinais, ou módulos de Young, referindo-se aos eixos  $x_k$ ,  $G_{ij}$  são os módulos de elasticidade transversais, ou módulos de Coulomb, para os planos definidos pelos eixos  $x_i x_j$ . Os coeficientes  $\nu_{ij}$  são chamados coeficientes de Poisson. As constantes  $\eta_{jk,l}$  são denominadas de coeficientes de influência mútua de primeira espécie que caracterizam extensões nas direções dos eixos principais, produzidas por tensões tangenciais agindo nos planos principais. As constantes  $\eta_{l,jk}$  são os coeficientes de influência mútua de segunda espécie, que expressam deformações

tangenciais nos planos principais, causadas pelas tensões normais atuantes nos planos principais. Por fim,  $\zeta_{ij,kl}$  são os coeficientes de Chentsov, que caracterizam as deformações tangenciais em planos paralelos aos planos principais de elasticidade, causadas por tensões tangenciais que atuam em outros planos, paralelos aos planos principais de elasticidade.

Em estado plano de tensão ( $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$ ), um material pode ser descrito usando-se somente seis constantes elásticas independentes. Desta forma, a equação (2.13) pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Substituindo as equações (2.4), (2.7) na equação (2.1), obtém-se a equação de equilíbrio escrita em função dos deslocamentos

$$C_{ijkl}u_{k,jl} + N_i = 0 \quad (2.18)$$

O tensor tensão pode ser escrito em termos de funções  $F(x_1, x_2)$  chamadas funções tensão de Airy (Lekhnitskii, 1963) dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= F_{,22} + \mathcal{U} \\ \sigma_{22} &= F_{,11} + \mathcal{U} \\ \sigma_{12} &= -F_{,12}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde  $\mathcal{U}$  é uma função potencial na qual

$$\mathcal{U}_{,i} = p_i \quad (2.20)$$

Substituindo as equações (2.19) na equação constitutiva (2.17) e então na equação de compatibilidade (2.6), resulta na equação diferencial para funções tensão  $F(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = \\ -(a_{12} + a_{22})\mathcal{U}_{,11} + (a_{16} + a_{26})\mathcal{U}_{,12} - (-a_{11} + a_{12})\mathcal{U}_{,22} \end{aligned} \quad (2.21)$$

No caso da ausência de forças de corpo a equação (2.21) pode ser escrita como

$$a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = 0 \quad (2.22)$$

Criando o operador diferencial

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (2.23)$$

aplicando este operador na função tensão  $F(x_1, x_2)$  na forma

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 F = 0 \quad (2.24)$$

e expandindo a equação (2.24) tem-se

$$\begin{aligned} F_{,2222} - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1222} + (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 \mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 \\ + \mu_3 \mu_4) F_{,1122} - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1112} \\ + (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1111} = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

As equações (2.22) e (2.25) serão idênticas se  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  e  $\mu_4$  forem raízes da equação

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (2.26)$$

As raízes da equação (2.26) são sempre complexas ou imaginárias puras, ocorrendo aos pares ( $\mu_k$  e  $\bar{\mu}_k$ ) conforme mostrado por Lekhnitskii (1968).

Criando-se a variável

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2 \quad k = 1, 2 \quad (2.27)$$

tem-se que

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dz_k} \quad (2.28)$$

Exigindo que a função tensão seja real, tem-se

$$F(x_1, x_2) = 2\text{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (2.29)$$

Introduzindo a notação

$$\frac{dF_k(z_k)}{dz_k} = \Psi_k(z_k), \quad (2.30)$$

onde a convenção de soma não é empregada em  $k$ , e substituindo a equação (2.29) na equação (2.19), obtém-se as componentes de tensão

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= 2\text{Re} \left[ \mu_1^2 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2^2 \Psi_2^{(1)}(z_2) \right] \\
\sigma_{22} &= 2\text{Re} \left[ \Psi_1^{(1)}(z_1) + \Psi_2^{(1)}(z_2) \right] \\
\sigma_{12} &= -2\text{Re} \left[ \mu_1 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2 \Psi_2^{(1)}(z_2) \right]
\end{aligned} \tag{2.31}$$

onde  $\Psi_k^{(1)}$  representa a primeira derivada de  $\Psi_k$ .

Substituindo a equação (2.31) na equação (2.17) e então na equação (2.18), desprezando-se os movimentos de corpos rígidos e integrando, obtém-se

$$\begin{aligned}
u_1 &= 2\text{Re} [q_{11}\Psi_1(z_1) + q_{12}\Psi_2(z_2)] \\
u_2 &= 2\text{Re} [q_{21}\Psi_1(z_1) + q_{22}\Psi_2(z_2)]
\end{aligned} \tag{2.32}$$

onde

$$q_{ik} = \begin{bmatrix} a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \\ a_{12}\mu_k + a_{22}/\mu_k - a_{26} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

é a matriz de parâmetros complexos.

Uma vez que as condições de contorno sejam conhecidas, determina-se a função tensão, dada pelas equações (2.19) com derivadas dadas pela equação (2.30), que satisfaça estas condições, determinando assim os campos de deslocamentos, dados pelas equações (2.32), e tensões, dados pelas equações (2.31).

## 2.3 Equação constitutiva de uma lâmina

Se for considerada apenas uma lâmina, na qual as fibras imersas numa matriz estão alinhadas unidirecionalmente (Figura 2.1), esta lâmina é ortotrópica e sua relação tensão deformação é dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

onde  $Q_{ij}$  são as componentes da matriz de rigidez, ou seja

$$\mathbf{Q} = [Q_{ij}] = [a_{ij}]^{-1} \quad (2.35)$$

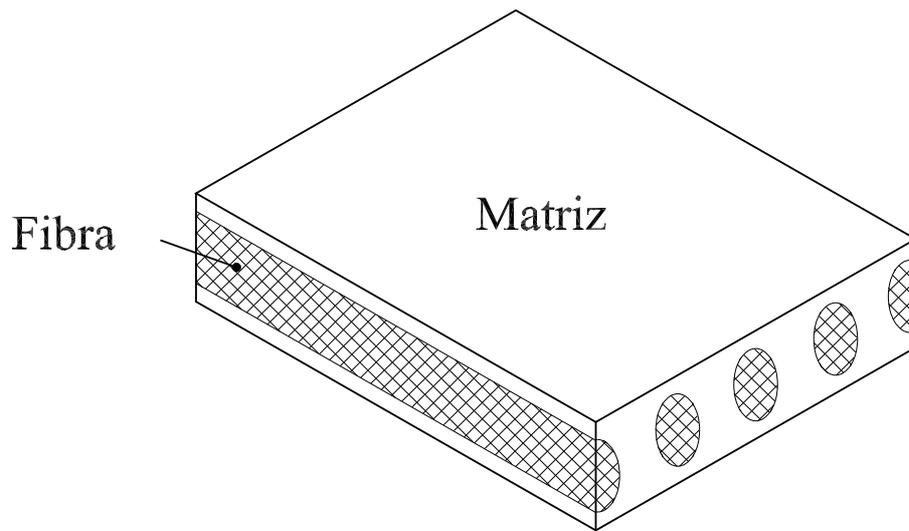


Figura 2.1: Lâmina ortotrópica.

Em termos das constantes de engenharia, as componentes do tensor de

rigidez podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & Q_{22} &= E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
 Q_{66} &= G_{12} & Q_{16} &= Q_{26} = 0 \\
 Q_{12} &= \nu_{21}E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21})
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

Sendo a lâmina ortotrópica, esta fica completamente caracterizada com quatro constantes elásticas: os módulos de elasticidade longitudinais  $E_1$  e  $E_2$  nas direções 1 e 2, respectivamente, o módulo de elasticidade transversal  $G_{12}$  e a razão de Poisson,  $\nu_{12}$ . A quinta constante elástica,  $\nu_{21}$  pode ser determinada pela relação constitutiva, devido a simetria da matriz  $\mathbf{Q}$

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2
 \tag{2.37}$$

Muitas vezes os eixos principais da lâmina ( $x_1x_2$ ) não são coincidentes com os eixos do laminado ( $\bar{x}_1\bar{x}_2$ ). Quando isto ocorre, a relação constitutiva para cada lâmina individual dever ser transformada para o eixo de referência do laminado (Figura 2.2) para então se determinar a relação constitutiva. Para que esta transformação seja feita, basta que os tensores de tensão e deformação sejam multiplicados pela matriz de transformação, ou seja

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}
 \tag{2.38}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}
 \tag{2.39}$$

onde  $\sigma'_{ij}$  e  $\varepsilon'_{ij}$  são tensores de tensão e deformação, respectivamente, escritos no sistema de referência do laminado,  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  os mesmos tensores escritos no sistema de referência da lâmina e  $\mathbf{T}$  a matriz de transformação dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

sendo

$$m = \cos\theta \quad (2.41)$$

$$n = \sin\theta \quad (2.42)$$

Convém observar que a matriz inversa  $\mathbf{T}^{-1}$  pode ser obtida pela substituição do ângulo positivo  $\theta$ , conforme Figura (2.2), pelo ângulo negativo  $-\theta$ . A equação constitutiva pode ser escrita da forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} (\mathbf{T}^{-1})' \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

onde  $(\mathbf{T}^{-1})'$  representa a matriz transposta da matriz inversa de  $\mathbf{T}$  e

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}(-\theta) = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Multiplicando-se as matrizes da equação (2.43), tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

onde

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + Q_{22} \sin^4\theta$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}\text{sen}^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\text{sen}^2\theta\text{cos}^2\theta + Q_{22}\text{cos}^4\theta \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\text{sen}^2\theta\text{cos}^2\theta + Q_{12}(\text{sen}^4\theta + \text{cos}^4\theta) \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\text{sen}^2\theta\text{cos}^2\theta + Q_{66}(\text{sen}^4\theta + \text{cos}^4\theta) \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\text{sen}\theta\text{cos}^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})(\text{sen}^3\theta\text{cos}\theta) \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\text{sen}\theta\text{cos}^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})(\text{sen}\theta\text{cos}^3\theta)
\end{aligned}
\tag{2.46}$$

A matriz  $\bar{Q}$  é completamente preenchida, sendo que das seis constantes elásticas que governam o comportamento da lâmina, duas,  $\bar{Q}_{16}$  e  $\bar{Q}_{26}$ , são combinações das outras quatro. No sistema de coordenadas transformado, a lâmina é dita geralmente ortotrópica, e a matriz  $\bar{Q}$  é parecida com a matriz  $Q$  dos materiais totalmente anisotrópicos ( $\bar{Q}_{16} \neq 0$ ,  $\bar{Q}_{26} \neq 0$ ). Quando se tem  $Q_{16} = Q_{26} = 0$  diz-se que o material é especialmente ortotrópico.

## 2.4 Laminados simétricos

Laminados simétricos são laminados cujas lâminas são montadas de maneira que haja um plano médio em relação ao qual para cada lâmina de um lado deste plano existe uma outra, idêntica em propriedade e orientação, localizada a mesma distância porém do outro lado deste plano médio (Figura 2.3). Por apresentarem uma equação constitutiva mais simples e por não apre-

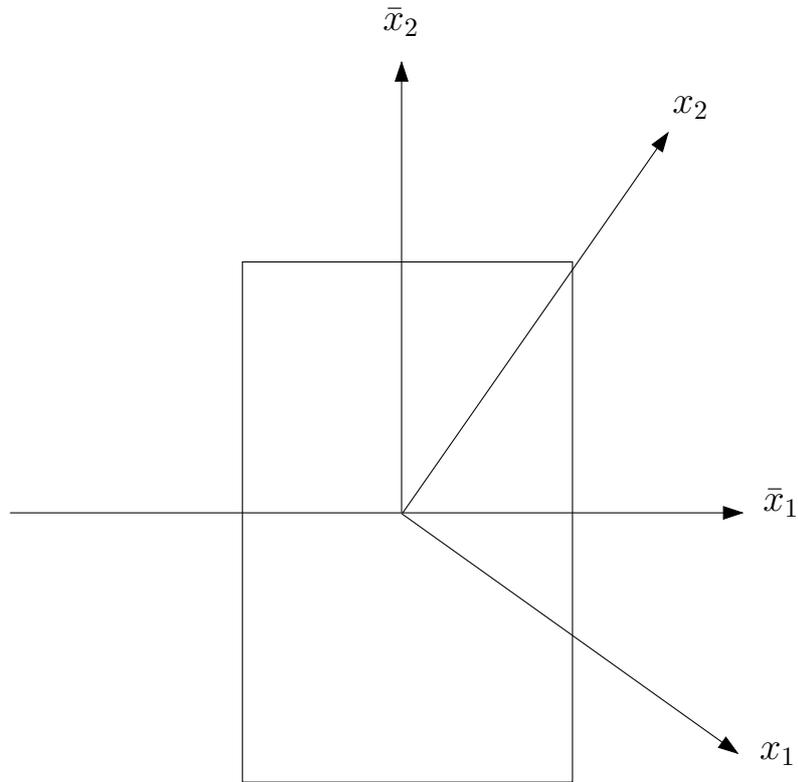


Figura 2.2: Sistemas de coordenadas da lâmina  $(x_1x_2)$  e do laminado  $(\bar{x}_1\bar{x}_2)$ .

sentarem problemas de distorção térmica durante a fabricação, os laminados simétricos são de utilização bastante comum em estruturas.

A não existência de um plano médio implica num laminado no qual não é possível uma análise bidimensional pois, mesmo que o carregamento seja constante em relação ao eixo  $x_3$ , ao longo de toda a espessura do laminado, além das deformações no plano  $x_1x_2$ , haverá também uma flexão em torno do eixo  $x_1$  ou  $x_2$ , aparecendo deformações nos três eixos.

A hipótese inicial sobre a qual os laminados simétricos podem ser tratados pela formulação aqui apresentada é que as deformações em qualquer reta per-

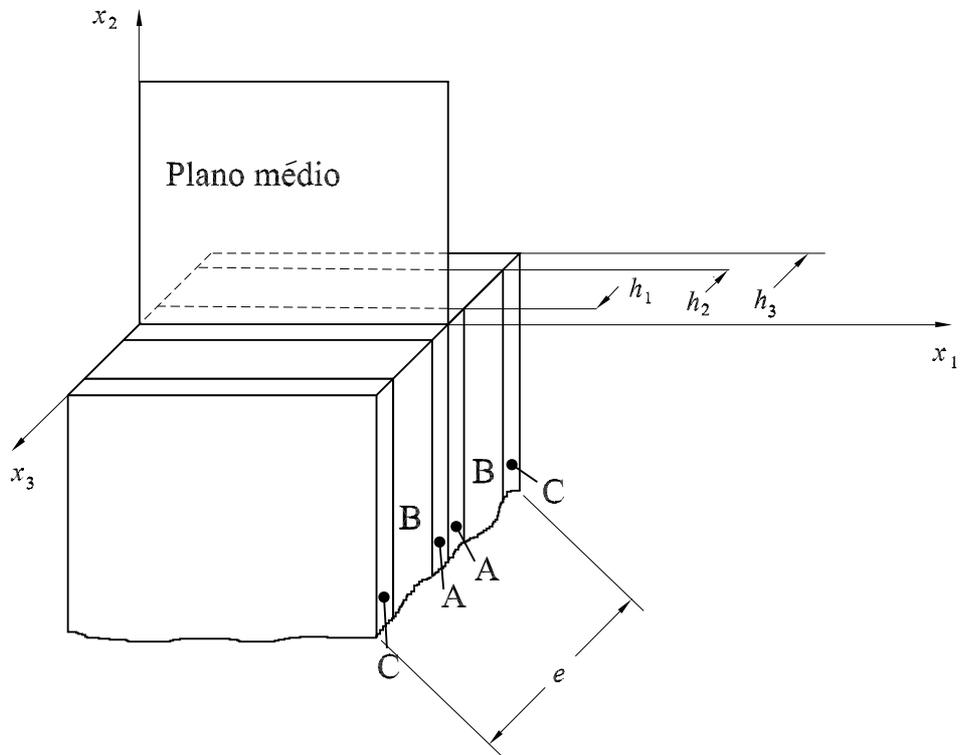


Figura 2.3: Laminado simétrico.

pendicular ao plano  $x_1x_2$  sejam as mesmas em toda a espessura do laminado. Isto equivale a dizer que as lâminas encontram-se perfeitamente coladas (não há escorregamentos entre uma lâmina e outra).

As componentes do vetor de densidades de força num laminado são obtidas integrando as componentes de tensões atuantes em cada lâmina, ao longo de toda a espessura  $h$  do laminado, ou seja

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3 \quad (2.47)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensão atuante em uma lâmina individual e  $N_{ij}$  é o vetor de densidade de força.

Considere o laminado constituído de  $N$  lâminas genericamente ortotrópicas, conforme mostrado na Figura (2.4). As forças atuantes no plano médio deste laminado podem ser obtidas pela substituição da integral contínua pela soma das integrais, representando a contribuição de cada lâmina

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}_k dx_3 \quad (2.48)$$

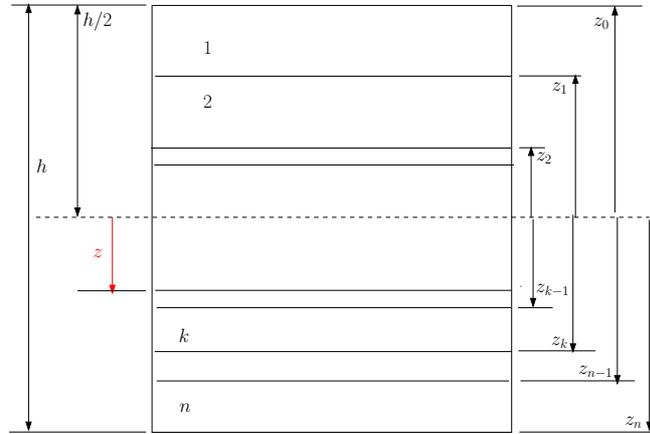


Figura 2.4: Laminado com n camadas.

Substituindo a equação (2.45) na equação (2.48) tem-se

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} dx_3 \right\} \quad (2.49)$$

Convém lembrar que o tensor de deformações  $\varepsilon_{ij}$  é, por hipótese, o mesmo em todas as lâminas.

Sendo a matriz de rigidez  $\bar{\mathbf{Q}}_k$  e o vetor deformação  $\varepsilon_{ij}$  constantes ao longo da espessura da lâmina ( $h_k - h_{k-1}$ ), a equação (2.49) pode ser reescrita como

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \left[ \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k (h_k - h_{k-1}) \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

onde

$$\mathbf{A} = \left[ \sum_{k=1}^N \mathbf{Q}_k (h_k - h_{k-1}) \right] \quad (2.52)$$

é a matriz de extensão.

Integrando-se a equação de equilíbrio (2.1) ao longo da espessura pode-se escrever:

$$N_{ij,j} + b_i = 0. \quad (2.53)$$

onde  $i$  e  $j$  assumem valores 1 e 2.

## 2.5 Ensaios para determinação das propriedades elásticas e de falha do material

Para que se possa dimensionar uma estrutura de material compósito para uma dada carga em problemas onde o crítico é a carga e não a deflexão, é necessário que se conheça os limites de resistência deste material. Estes limites são determinados através de ensaios experimentais destrutivos. Para o caso de uma lâmina com fibras unidirecionais em geral são necessários 5 limites de resistência para caracterizar o material:  $X_t$  (limite de resistência

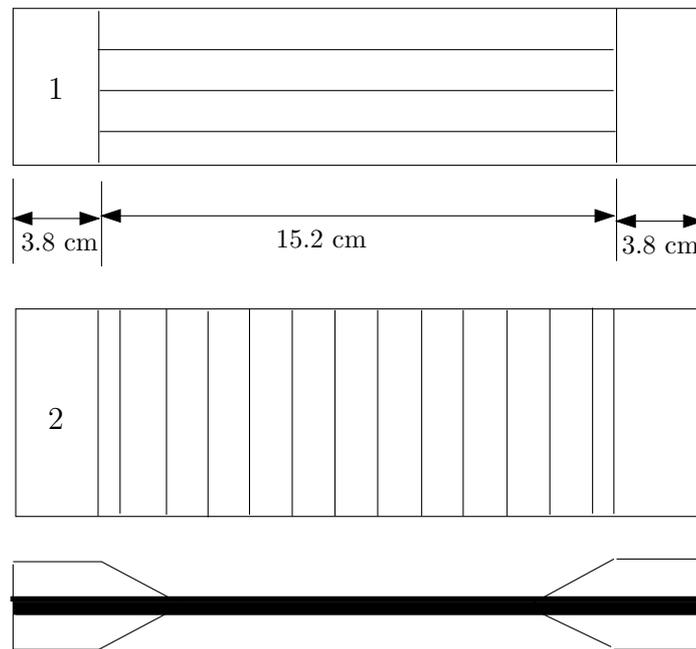


Figura 2.5: Corpo de prova para ensaio de tração: 1- carregamento longitudinal; 2- carregamento transversal.

à tração na direção longitudinal),  $X_c$  (limite de resistência à compressão na direção longitudinal),  $Y_t$  (limite de resistência à tração na direção transversal),  $Y_c$  (limite de resistência à compressão na direção transversal) e  $S$  (limite de cisalhamento). Desta forma, tem-se cinco tipos de corpos de prova que possuem várias lâminas todas com a mesma orientação das fibras e dimensões padronizadas. Os corpos de prova para ensaios de tração usados na determinação de  $X_t$  e  $Y_t$  são lâminas retangulares de seção constante nas quais são coladas lâminas de fixação (Figura 2.5). É medida diretamente a deformação através do uso de sensores, tais como os extensômetros elétricos, colados ao corpo de prova.

O ensaio de compressão, cujos corpos de prova são mostrados na Figura

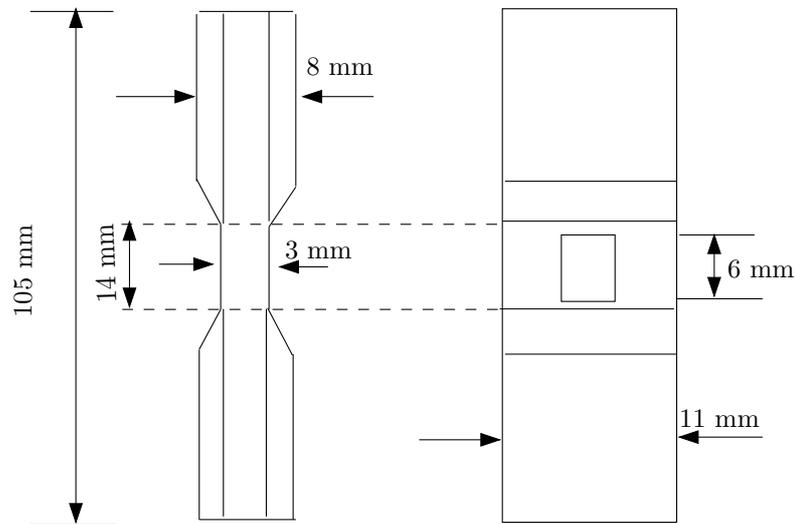


Figura 2.6: Corpo de prova para ensaio de compressão.

2.6, é um dos mais difíceis tipos de teste devido à tendência de falha prematura por flambagem do corpo de prova. Um destes testes é o chamado Celanese, descrito pela norma ASTM D-3410-87 que, após uma modificação no sistema de fixação, ficou também conhecido como IITRI (Daniel e Ishai, 1993).

O método mais comum para se determinar as constantes de cisalhamento é o descrito pela norma ASTM D-3518-76 (1982). Este método utiliza um corpo de prova de 8 camadas e dois extensômetros dispostos a  $90^\circ$  um do outro (Figura 2.7). O corpo de prova é ensaiado em tração. Os procedimentos e corpos de prova para determinar as propriedades de falha por cisalhamento são especificados pela norma ASTM D3039-76.

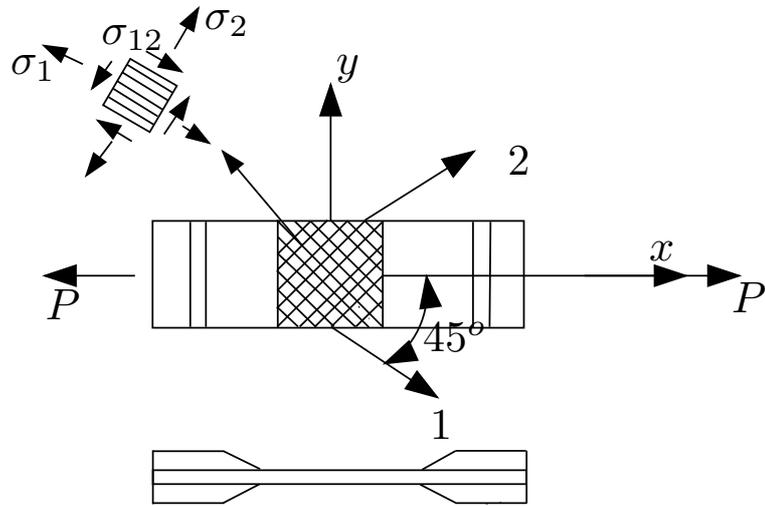


Figura 2.7: Corpo de prova para ensaio de cisalhamento.

## 2.6 Modos de falha de uma lâmina

Devido a sua constituição, um material compósito laminado unidirecional, reforçado com fibras, pode falhar de diversas formas:

- Por trincas na matriz, normalmente decorrente de tensões transversais à direção das fibras, quando a sollicitação da matriz é expressiva.
- Por descolamento interfacial, ou seja, um deslocamento relativo entre a fibra e a matriz, resultante do colapso da interface entre ambas. Uma vez rompida a ligação entre fibra e matriz, a carga não é mais transferida entre esses dois componentes, reduzindo drasticamente a resistência do compósito.
- Descolamento e ruptura das fibras, normalmente decorrente da tensão aplicada na direção das fibras em lâminas cujas fibras são as responsáveis pela resistência do compósito (o carregamento é aplicado na direção das fibras).
- Delaminação, ou seja, a separação entre as lâminas que formam um laminado. É resultado em geral de tensões na direção normal às lâminas.

### 2.6.1 Critério da Máxima Tensão

É o mais simples dos critérios. Considera que a falha ocorre quando qualquer uma das tensões calculadas no eixo principal do material ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{22}$ ) exceder os limites estabelecidos pelos ensaios experimentais. Ou seja, segundo este critério, para que o material não falhe é necessário que:

$$\sigma_{11} < X_t \text{ se } \sigma_{11} > 0;$$

$$|\sigma_{11}| < X_c \text{ se } \sigma_{11} < 0;$$

$$\sigma_{22} > Y_t \text{ se } \sigma_{22} > 0;$$

$$|\sigma_{22}| < Y_c \text{ se } \sigma_{22} < 0;$$

$$\sigma_{12} < S.$$

### 2.6.2 Critério de Tsai-Hill

A grande deficiência do critério da máxima tensão é que ele considera que os componentes de tensões não interagem entre si no mecanismo de falha. Porém, evidências experimentais mostram que estas interações afetam a falha. Desta forma é interessante que se tenha critérios de falha quadráticos, similares ao critério de von Mises, para se levar em conta as interações entre as componentes de tensão.

O critério de Tsai-Hill tem como base o critério de Hill (1948) que propôs um critério de falha similar ao de von Mises para materiais anisotrópicos. O critério de Hill para um estado biaxial é dado por:

$$A\sigma_{11}^2 + B\sigma_{22}^2 + C\sigma_{11}\sigma_{22} + D\sigma_{12}^2 = 1 \quad (2.54)$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são parâmetros característicos do material. Note que se  $A = B = 1/\sigma_y^2$ ,  $C = -1/\sigma_y^2$  e  $D = 0$ , o critério de Hill se iguala ao critério

de von Mises, escrito em função das tensões principais, ou seja:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} = \sigma_y^2 \quad (2.55)$$

onde  $\sigma_y$  é o limite de escoamento do material

Tsai (1968) aplicou o critério de Hill em materiais compósitos relacionando os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  com os limites de falha  $X$ ,  $Y$  e  $S$ . Os coeficientes são determinados a partir das falhas dos corpos de prova, ou seja:

**Falha por tração na direção das fibras :**

Neste caso:  $\sigma_{11} = X_t$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$ .

Daí, da equação (2.54), tem-se:

$$A = 1/X_t^2 \quad (2.56)$$

**Falha por tração na direção transversal às fibras :**

Neste caso:  $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$  e  $\sigma_{22} = Y_t$ , ou seja:

$$B = 1/Y_t^2 \quad (2.57)$$

**Falha por cisalhamento :**

Neste caso  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$  e  $\sigma_{12} = S$ , ou seja:

$$D = 1/S^2 \quad (2.58)$$

O parâmetro  $C$  leva em conta a interação entre as tensões normais nas direções normal e transversal às fibras. Para um caso biaxial em que  $\sigma_{11} = \sigma_{22} \neq 0$ , tem-se que  $\sigma_{12} = 0$  (estado hidrostático biaxial). Assumindo que para este caso o material falhe de acordo com a teoria da máxima tensão,

o material irá falhar quando  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = Y_t$ , pois  $Y_t$  é normalmente muito menor que  $X_t$ . Daí, tem-se:

$$C = -1/X_t^2 \quad (2.59)$$

Desta forma, o critério de Tsai-Hill para um estado biaxial é dado por:

$$\frac{\sigma_{11}^2}{X_t^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X_t^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y_t^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{S^2} = 1 \quad (2.60)$$

Caso  $\sigma_{11}$  ou  $\sigma_{22}$  seja de compressão, deve-se trocar  $X_t$  ou  $Y_t$  por  $X_c$  ou  $Y_c$ , respectivamente.

### 2.6.3 Critério de Tsai-Wu

Uma desvantagem do critério de Tsai-Hill é que não há uma distinção direta entre os limites de resistência à tração e à compressão. Os parâmetros de resistência devem ser especificados de acordo com o estado de tensão. Com o critério de falha de Tsai-Wu procura-se uma melhor correlação com os dados experimentais através do incremento do número de termos na equação de aproximação (melhor ajuste da curva aos dados experimentais). Tsai e Wu (1971) propuseram uma nova expressão para o critério de falha:

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_6\sigma_{12} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{66}\sigma_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} = 1 \quad (2.61)$$

Da mesma forma que para o critério de Tsai-Hill, a determinação dos coeficientes é feita pela substituição dos resultados experimentais na equação (2.61).

Por exemplo, para o caso de tensão somente na direção das fibras, com resistência à compressão e à tração dadas respectivamente por  $X_c$  e  $X_t$  tem-se:

$$F_1X_t + F_{11}X_t^2 = 1$$

$$F_1 X_c + F_{11} X_c^2 = 1 \quad (2.62)$$

A solução do sistema de equações acima resulta em:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} \\ F_{11} &= -\frac{1}{X_t X_c} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Similarmente, considerando tensões na direção transversal às fibras:

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \\ F_{22} &= -\frac{1}{Y_t Y_c} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Para que o critério independa do sinal da tensão de cisalhamento, os termos lineares de  $\sigma_{12}$  devem ser nulos, ou seja:

$$F_6 = F_{16} = F_{26} = 0 \quad (2.65)$$

Para um estado de cisalhamento puro:

$$\sigma_{12} = S$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$$

ou seja,

$$F_{66} = \frac{1}{S^2} \quad (2.66)$$

Para se evitar a necessidade de mais um ensaio experimental, é comum que  $F_{12}$  seja assumido de maneira a fazer o critério de Tsai-Wu concordar com algum critério mais simples. A abordagem mais usada é fazer:  $F_{12} = -1/(2\sqrt{F_{11}F_{22}}) = -1/(2\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c})$  pois, neste caso, se o critério de Tsai-Wu for aplicado em um material como aço de baixo e médio carbono (isotrópicos e dúteis), onde  $X_t = X_c = Y_t =$

$Y_c = S_y$ , sendo  $S_y$  o limite de escoamento, obtém-se o critério de von Mises, ou seja:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} = S_y^2$$

Uma vez que todos os coeficientes foram determinados, o critério de Tsai-Wu é escrito como:

$$\frac{\sigma_{11}^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_{12}^2}{S^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}} + \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}\right)\sigma_{11} + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}\right)\sigma_{22} = 1 \quad (2.67)$$

Observa-se que o critério de Tsai-Wu é mais geral que o critério de Tsai-Hill, já que relaciona mais propriedades mecânicas.

## 2.7 Critérios de Falha para Materiais Compósitos

Os critérios de falha relacionam estados de tensão dos corpos de prova (ensaios experimentais) com estados de tensão de pontos das lâminas do laminado.

A determinação dos limites de resistência do material compósito laminado apresenta muitas dificuldades. A complicação é devido às várias camadas do material terem diferentes orientações e propriedades. As tensões e as resistências podem ser diferentes em diferentes camadas. A tensão em uma lâmina pode atingir o limite de resistência antes que em outras lâminas. Desta forma, é comum assumir que a falha do laminado ocorre quando a primeira lâmina falha (teoria da falha da primeira lâmina) embora existam abordagens que consideram que a falha só ocorre após a falha da última lâmina do laminado (teoria da falha da última lâmina). Neste trabalho o critério de falha é calculado em pontos pré-definidos das lâminas do laminado e, uma vez que uma das lâminas falhe, é assumido a falha do laminado.

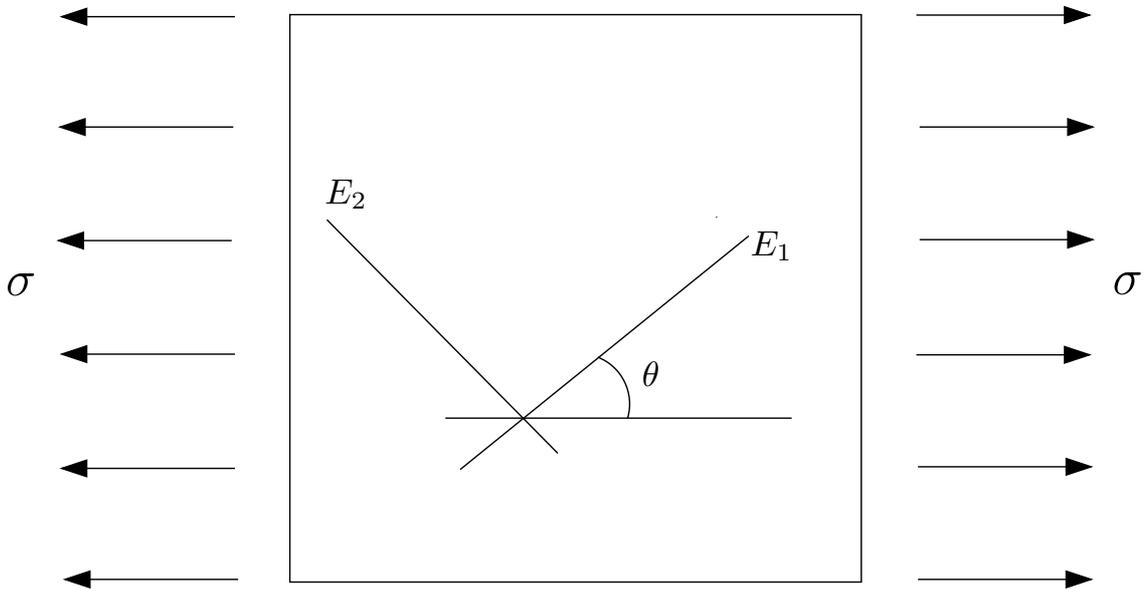


Figura 2.8: Lâmina quadrada sob tração uniforme.

## 2.8 Comparação entre os critérios de falha

Considere uma lâmina de material compósito cujos limites de resistência são dados por:  $X_t = 1260$  MPa,  $Y_t = 61$  MPa,  $S = 101$  MPa,  $X_c = 2500$  MPa,  $Y_c = 202$  MPa. O ângulo entre o sistema de referência do material e a direção horizontal é  $\theta$ . Esta lâmina encontra-se sob tração uniaxial  $\sigma$ , conforme mostrado na Figura 2.8. Neste caso, as tensões escritas no referencial do material, conforme a equação (2.38), são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

A tensão que causa a falha da lâmina segundo o critério de Tsai-Hill é  $\sigma = \sigma_{max}$  para a qual  $f(\theta) = 1$ . Uma vez que o material tem comportamento linear, se a tensão  $\sigma$  variar proporcional a um fator  $k$ , todas as tensões na

lâmina variam proporcionalmente a este fator  $k$ .

Desta forma, para  $f(\theta) = 1$ , tem-se que:

$$1 = \frac{[k\sigma_{11}(\theta)]^2}{X^2} - \frac{k\sigma_{11}(\theta)k\sigma_{22}(\theta)}{X^2} + \frac{[k\sigma_{22}(\theta)]^2}{Y^2} + \frac{[k\sigma_{12}(\theta)]^2}{S^2} \quad (2.69)$$

ou seja:

$$1 = k^2 f(\theta) \quad (2.70)$$

Daí, tem-se:

$$k = \frac{1}{\sqrt{f(\theta)}} \quad (2.71)$$

e

$$\sigma_{max} = k\sigma \quad (2.72)$$

De maneira similar pode-se também calcular a tensão que causa a falha segundo o critério de Tsai-Wu, substituindo a equação (2.68) na equação (2.67).

A Figura 2.9 mostra uma comparação entre os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu. Conforme pode ser notado, há uma boa concordância entre os critérios para este problema. Porém, conforme será mostrado no Capítulo 3, para muitos casos existem discordâncias visíveis entre as curvas dos critérios de falha.

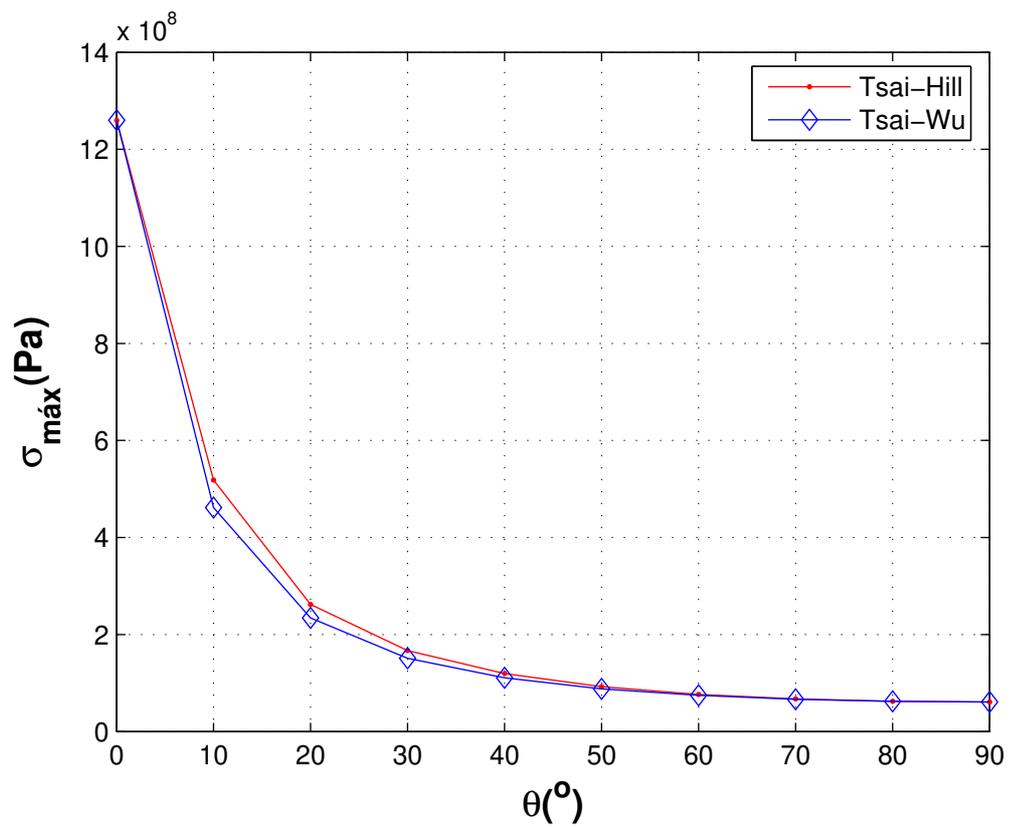


Figura 2.9: Comparação entre os critérios de falha de Tsai-Hill e Tsai-Wu.

# Capítulo 3

## Método dos elementos de contorno para materiais anisotrópicos

### 3.1 Introdução

Neste Capítulo é desenvolvida a formulação dos elementos de contorno para o tratamento de problemas de elasticidade plana em materiais anisotrópicos, considerando a presença de forças de corpo genéricas.

### 3.2 Formulação integral

Assumindo-se uma função vetorial contínua  $u_i^\bullet$ , que representa o deslocamento de um estado elasto-estático definido sobre um domínio  $\Omega$ , como sendo uma função peso residual da equação de equilíbrio (2.53), tem-se:

$$\int_{\Omega} N_{ij,j} u_i^\bullet d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^\bullet d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

Pela regra de derivação do produto de duas funções tem-se:

$$(N_{ij}u_i^\bullet)_{,k} = N_{ij,k}u_i^\bullet + N_{ij}u_{i,k}^\bullet \quad (3.2)$$

Pode-se escrever  $u_{i,j}^\bullet$  como a soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico, da forma

$$u_{i,j}^\bullet = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\bullet + u_{j,i}^\bullet) + \frac{1}{2}(u_{i,j}^\bullet - u_{j,i}^\bullet) = \varepsilon_{ij}^\bullet + \omega_{ij}^\bullet \quad (3.3)$$

sendo que  $\varepsilon_{ij}^\bullet$  e  $\omega_{ij}^\bullet$  representam os tensores deformação (simétrico) e rotação (anti-simétrico), respectivamente, do estado elástico "•".

Substituindo (3.3) em (3.2) tem-se

$$(N_{ij}u_i^\bullet)_{,j} = N_{ij,j}u_i^\bullet + N_{ij}\varepsilon_{ij}^\bullet + N_{ij}\omega_{ij}^\bullet \quad (3.4)$$

sendo  $N_{ij}$  um tensor simétrico. O produto de um tensor simétrico por um anti-simétrico é nulo. Desta forma, a equação (3.4) torna-se

$$N_{ij,j}u_i^\bullet = (N_{ij}u_i^\bullet)_{,j} - N_{ij}\varepsilon_{ij}^\bullet \quad (3.5)$$

Substituindo a equação (3.5) na equação (3.1) tem-se

$$- \int_{\Omega} N_{ij}\varepsilon_{ij}^\bullet d\Omega + \int_{\Omega} (N_{ij}u_i^\bullet)_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^\bullet d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

Pelo teorema de Green tem-se:

$$\int_{\Omega} (N_{ij}u_i^\bullet)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} (N_{ij}u_i^\bullet)n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^\bullet d\Gamma \quad (3.7)$$

onde

$$t_i = N_{ij}n_j \quad (3.8)$$

Substituindo (3.7) em (3.6), tem-se

$$\int_{\Omega} N_{ij} \varepsilon_{ij}^{\bullet} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^{\bullet} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^{\bullet} d\Omega \quad (3.9)$$

Se partirmos da equação (2.1) como sendo a correspondente ao estado  $u_i^{\bullet}$  e a função de interpolação da equação (3.1) como sendo  $u_i$ , obtém-se, de forma análoga a anterior

$$\int_{\Omega} N_{ij}^{\bullet} \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{\bullet} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{\bullet} u_i d\Omega \quad (3.10)$$

Pelo teorema recíproco dois estados de um mesmo material podem ser relacionados por  $N_{ij}^{\bullet} \varepsilon_{ij} = N_{ij} \varepsilon_{ij}^{\bullet}$ . Desta forma, igualando-se as equações (3.10) e (3.9), tem-se

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^{\bullet} d\Gamma + \int_{\Omega} u_i^{\bullet} b_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{\bullet} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_i b_i^{\bullet} d\Omega \quad (3.11)$$

A equação integral (3.11) relaciona dois estados quaisquer de tensões. Para que se possa tratar problemas de elasticidade em meio contínuo, será adotado que um destes estados é conhecido, e o outro se deseja determinar. No caso de elementos de contorno, o estado conhecido é o chamado estado fundamental que corresponde a resposta de um corpo infinito a uma carga concentrada unitária em um ponto  $\mathbf{x}'$ . A representação matemática de uma carga concentrada unitária é dada pelo delta de Dirac que é definido como

$$\begin{cases} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \infty & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega = 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

A razão da escolha do estado fundamental deve-se ao fato que a função delta de Dirac reduz o número de integrais de domínio, pois esta possui a

propriedade

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\Omega = f(\mathbf{x}') \quad (3.13)$$

para um dado ponto  $\mathbf{x}' \in \Omega$ .

Considerando o estado "•" como sendo o estado fundamental de um problema estático livre de forças de corpo ( $b_i^\bullet = 0$ ), a equação (3.11) pode ser escrita como

$$\int_{\Gamma} T_{ik}u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i U_{ik} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i U_{ik} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta_{ik} u_i d\Omega \quad (3.14)$$

onde  $U_{ik}$  e  $T_{ik}$  representam respectivamente deslocamentos e forças de superfície na direção  $k$ , num ponto  $\mathbf{x}$ , devido a uma força concentrada unitária aplicada de forma estática num ponto  $\mathbf{x}'$  numa direção  $i$ . Por serem soluções do estado fundamental,  $U_{ik}$  e  $T_{ik}$  são chamadas soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

Devido a propriedade (3.13), a equação (3.14) pode ser escrita como

$$u_k + \int_{\Gamma} T_{ik}u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik}t_i d\Gamma - \int_{\Omega} b_i U_{ik} d\Omega \quad (3.15)$$

Considerando que as forças de corpo  $b_i$  são nulas, pode-se escrever:

$$u_k + \int_{\Gamma} T_{ik}u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik}t_i d\Gamma \quad (3.16)$$

### 3.3 Soluções fundamentais anisotrópicas

Para se obter as soluções fundamentais estáticas para problemas bidimensionais em materiais anisotrópicos, o domínio  $\Omega$  será mapeado num plano complexo, usando a seguinte mudança de variável

$$\mathbf{z}' = \left\{ \begin{array}{c} z'_1 \\ z'_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x'_1 + \mu_1 x'_2 \\ x'_1 + \mu_2 x'_2 \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

e

$$\mathbf{z} = \left\{ \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x_1 + \mu_1 x_2 \\ x_1 + \mu_2 x_2 \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

onde  $\mu_k$  são raízes complexas da equação (2.26),  $x'_1$  e  $x'_2$  são as coordenadas do ponto fonte (ponto de aplicação da carga concentrada unitária) e  $x_1$  e  $x_2$  são as coordenadas do ponto campo (ponto de obtenção da resposta devido a aplicação da carga unitária).

Se for considerado um contorno fechado  $\Gamma$  ao redor do ponto fonte e se forem usadas as forças de superfície definidas pela equação (2.3) e as tensões definidas pela equação (2.31), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_1 d\Gamma &= 2\text{Re}[[\mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2]], \\ \int_{\Gamma} t_2 d\Gamma &= 2\text{Re}[[\Psi_1 + \Psi_2]] \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde os colchetes duplos representam o salto na função para um contorno fechado ao redor do ponto fonte. Se o contorno  $\Gamma$  engloba  $\mathbf{z}'$ , então o resultado das equações (3.19) serão diferentes de zero.

As soluções fundamentais em um plano anisotrópico infinito podem ser encontradas usando-se a função tensão de Airy resultante das forças de superfície fundamentais, dadas pelas equações (3.19), e a equação de equilíbrio de forças (2.1) considerando forças de corpo e efeitos de inércia nulos.

A função tensão de Airy para um ponto carregado na direção  $x_i$  pode ser representada por  $\Psi_{ik}$ . Como as equações integrais de contorno (3.19) possuem

sinais opostos à carga aplicada, ela pode ser expressa para um ponto fonte como

$$2\text{Re}[[\mu_1\Psi_{i1} + \mu_2\Psi_{i2}]] = -\delta_{i1},$$

$$2\text{Re}[[\Psi_{i1} + \Psi_{i2}]] = \delta_{i2}. \quad (3.20)$$

As equações (3.20) podem ser satisfeitas para qualquer contorno fechado  $\mathbf{z}'$ , tomando

$$\Psi_{ik} = A_{ik} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \quad (3.21)$$

onde  $A_{ik}$  são constantes complexas. Usando propriedades de funções complexas, pode ser mostrado que para qualquer contorno fechando o ponto  $\mathbf{z}'$

$$\ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}') = 2\pi i. \quad (3.22)$$

Usando as equações (3.20), (3.21) e (3.22), podem ser obtidas duas equações para as constantes desconhecidas  $A_{ik}$

$$A_{i1} - \bar{A}_{i1} + A_{i2} - \bar{A}_{i2} = \delta_{i2}/(2\pi i)$$

$$\mu_1 A_{i1} - \bar{\mu}_1 \bar{A}_{i1} + \mu_2 A_{i2} - \bar{\mu}_2 \bar{A}_{i2} = -\delta_{i1}/(2\pi i) \quad (3.23)$$

As duas outras equações necessárias para se determinar  $A_{ik}$  resultam da exigência que os deslocamentos tenham valores únicos, ou seja

$$[[u_i]] = 0 \quad (3.24)$$

Usando as equações de deslocamentos (2.32), a equação (3.21) e a equação (3.22), a equação (3.24) pode ser expandida como

$$q_{11}A_{i1} - \bar{q}_{11}\bar{A}_{i1} + q_{12}A_{12} - \bar{q}_{12}\bar{A}_{i2} = 0$$

$$q_{21}A_{i1} - \bar{q}_{21}\bar{A}_{i1} + q_{22}A_{12} - \bar{q}_{22}\bar{A}_{i2} = 0 \quad (3.25)$$

Escrevendo as equações (3.23) e (3.25) na forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ q_{11} & -\bar{q}_{11} & q_{12} & -\bar{q}_{12} \\ q_{21} & -\bar{q}_{21} & q_{22} & -\bar{q}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{j1} \\ \bar{A}_{j1} \\ A_{j2} \\ \bar{A}_{j2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{j2}/(2\pi i) \\ -\delta_{j1}/(2\pi i) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

que é suficiente se para encontrar as constantes complexas  $A_{ik}$ . No caso de materiais isotrópicos a equação característica (2.26) se torna biquadrada com duas raízes iguais a  $i$  e duas iguais a  $-i$ . Estes valores tornam o sistema de equações (3.26) singular. Por causa disso não é possível o uso de materiais isotrópicos para comparar esta formulação com a formulação isotrópica que utiliza a solução fundamental de Kelvin (Dominguez, 1993) e (Partridge et al., 1992). Para fazer esta comparação serão usados materiais quase-isotrópicos, ou seja

$$E_2 = E_1 + \epsilon \cong E \quad (3.27)$$

sendo que

$$\epsilon \leq 10^{-2} E_1 \quad (3.28)$$

e

$$G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})} \quad (3.29)$$

As soluções fundamentais para deslocamentos são obtidas inserindo a função tensão dada pela equação (3.21) nas equações de deslocamentos (2.32). Desta forma, tem-se

$$U_{ji}(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\text{Re}[q_{i1}A_{j1} \ln(z_1 - z'_1) + q_{i2}A_{j2} \ln(z_2 - z'_2)]. \quad (3.30)$$

Similarmente, as soluções fundamentais para forças de superfície são obtida pela substituição da equação (3.21) nas equações de tensão (2.31) e usando a equação (2.3)

$$T_{ij}(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\text{Re} \left[ \frac{1}{(z_1 - z'_1)} g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)} g_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2} \right] \quad (3.31)$$

onde

$$[g_{ji}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

e  $n_k$  são as componentes do vetor normal externo.

Note que tanto a solução fundamental de deslocamentos quanto a de forças de superfície são singulares quando o ponto fonte tende ao ponto campo. No caso da solução fundamental de deslocamentos a singularidade é fraca ( $\ln r$ ). Já no caso da solução fundamental de forças de superfície tem-se

uma singularidade forte ( $1/r$ ). As formas como estas singularidades serão tratadas é mostrada na seção 3.6.

### 3.4 Equações integrais singulares

A equação integral (3.16) foi escrita para um ponto do interior do domínio. Uma vez que o ponto fonte é interno, a equação contém apenas integrandos regulares. Considere agora o limite da transição quando o ponto fonte tende ao contorno. Esta operação pode ser implementada colocando o ponto fonte no contorno e diminuindo o domínio do problema por uma região semi-circular, com contorno  $\Gamma_\epsilon^*$  e raio  $\epsilon$ , centrado no ponto fonte, conforme mostrado na Figura 3.1. Com esta configuração, o contorno completo é dividido em duas partes, na forma

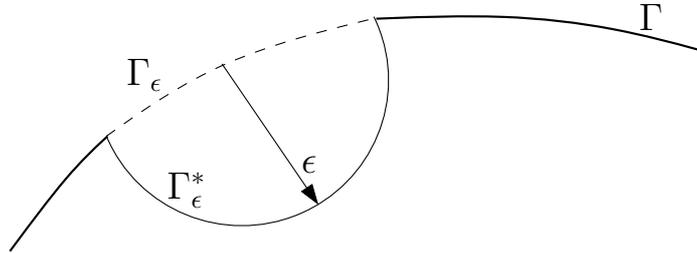


Figura 3.1: Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular.

$$\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*) \quad (3.33)$$

onde  $\epsilon$  é o raio do semi-círculo de centro no ponto fonte, pertencendo ao contorno  $\Gamma$  (Figura 3.1). A equação (3.16) é, então, reescrita como:

$$u_l + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} U_{li} t_i d\Gamma \quad (3.34)$$

A integral do lado direito da equação (3.34) contém um integrando de singularidade fraca da ordem  $\ln(1/r)$  e é integrável como uma integral imprópria. A integral do lado esquerdo tem uma singularidade forte, de ordem  $1/r$ , que pode ser regularizada com o primeiro termo da expansão de Taylor em torno do ponto fonte, ou seja

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} [u_i(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z}')] d\Gamma + \\ &u_i(\mathbf{z}') \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} d\Gamma + \\ &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.35)$$

Assumindo que os deslocamentos são contínuos no ponto fonte, o primeiro termo do lado direito da equação (3.35) é integrável e desaparece no processo de limite. O segundo termo da equação representa um salto nos deslocamentos dado por  $A_{ij}(\mathbf{z}')u_j(\mathbf{z}')$ , no qual  $A_{ij}(\mathbf{z}')$  é uma constante que depende da geometria local e das constantes elásticas. Finalmente, o terceiro termo do lado direito da equação resulta numa integral imprópria que é calculada no sentido do valor principal de Cauchy. Portanto, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , o ponto fonte tende ao contorno e, no limite, a equação (3.34) pode ser escrita na forma

$$c_{li}u_i + \not\int T_{li}u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{li}t_i d\Gamma \quad (3.36)$$

onde  $\not\int$  representa integral no sentido do valor principal de Cauchy e o

coeficiente  $c_{ii}(\mathbf{z}')$  é dado por  $\delta_{ij} + A_{ij}(\mathbf{z}')$ , no qual  $\delta_{ij}$  representa o delta de Kronecker.

### 3.5 Formulação dos elementos de contorno discretizada

Para se obter a solução do problema elasto-estático, o contorno é dividido em elementos de contorno. Nesta etapa do trabalho, serão utilizados apenas elementos quadráticos (3 nós por elementos) contínuos (elementos cujos nós da extremidades são compartilhados com os elementos vizinhos).

Nesta formulação será mais conveniente trabalhar com vetores que usar notação indicial. Desta forma tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \phi \mathbf{u}^{(i)} \\ \mathbf{t} &= \phi \mathbf{t}^{(i)}\end{aligned}\tag{3.37}$$

sendo que as variáveis em negrito representam vetores de dimensões  $2N$ , onde  $N$  é o número de nós,  $\mathbf{u}^{(i)}$  e  $\mathbf{t}^{(i)}$  representam os valores nodais dos deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente,  $\phi$  é o vetor de funções de forma,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  representam os deslocamentos e tensões ao longo do elemento, respectivamente.

Considere que o domínio tenha sido dividido em  $NE$  elementos de contorno. Substituindo as equações (3.37) na equação (3.36), tem-se

$$\mathbf{c}^l \mathbf{u}^l + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{T} \phi \mathbf{d}\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U} \phi \mathbf{d}\Omega \right\} \mathbf{t}^j\tag{3.38}$$

Chamando

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U} \phi d\Gamma = \mathbf{G} \quad (3.39)$$

e

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{T} \phi d\Gamma = \mathbf{H} \quad (3.40)$$

tem-se

$$\sum_{j=1}^N H^{lj} u^j = \sum_{j=1}^N G^{lj} t^j \quad (3.41)$$

ou, na forma matricial

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{t} \quad (3.42)$$

### 3.6 Integração no Espaço

As funções de interpolação no espaço utilizada neste trabalho (funções de forma) são as funções de forma quadráticas. Funções de forma quadrática permitem o modelamento de elementos curvos e são especialmente indicadas para problemas onde se tem altos gradientes.

Os deslocamentos e as forças de superfícies são representados em um elemento quadrático padrão como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{u}^{(n)} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ t_1^{(3)} \\ t_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{t}^{(n)} \quad (3.44)$$

onde  $u_i^{(n)}$  e  $t_i^{(n)}$  são os valores nodais de deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente, e  $\phi^{(i)}$  são as funções de forma quadráticas definidas por:

$$\phi^{(1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (3.45)$$

$$\phi^{(2)} = 1 - \xi^2 \quad (3.46)$$

$$\phi^{(3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (3.47)$$

onde  $\xi$  representa uma coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura 3.2).

A geometria do elemento pode também ser considerada quadrática (elementos isoparamétricos) e, neste caso, ser representada pelas coordenadas

nodais e as funções de forma  $\phi^{(i)}$ , ou seja (Figura 3.2):

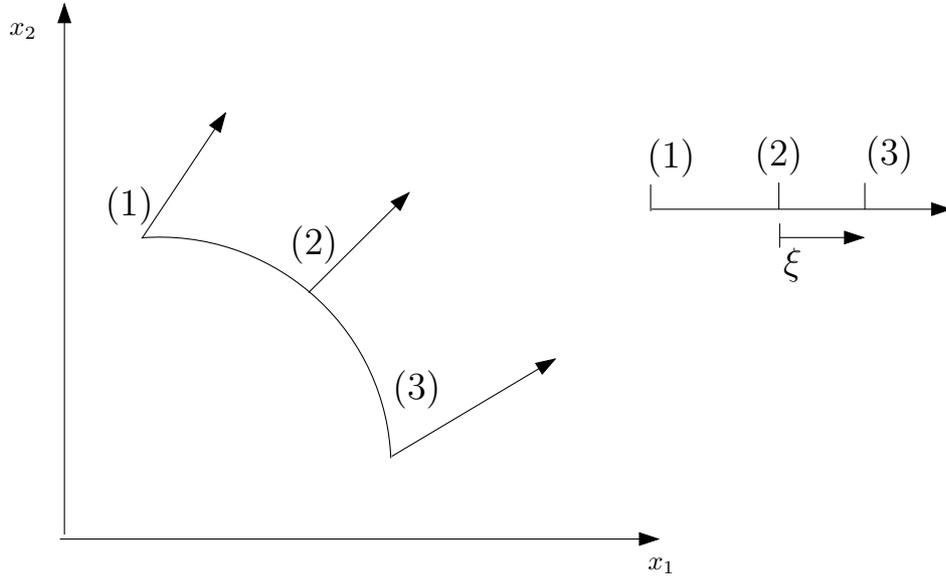


Figura 3.2: Transformação de coordenadas  $x_1 - x_2$  para  $\xi$ .

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{x}^{(n)} \quad (3.48)$$

Desta forma, as integrais de contorno podem ser escritas como:

$$H^{(j)} = \oint_{\Gamma_j} T_{lk} \phi^{(j)} d\Gamma = \int_{-1}^1 T_{lk} \phi^{(j)} |J| d\xi \quad (3.49)$$

$$G^{(j)} = \int_{\Gamma_j} U_{lk} \phi^{(j)} d\Gamma = \int_{-1}^1 U_{lk} \phi^{(j)} |J| d\xi \quad (3.50)$$

onde  $|J|$  representa o módulo do Jacobiano da transformação  $(x_1, x_2) \rightarrow \xi$ , e é dado por (Brebbia e Dominguez, 1989) e (Kane, 1993):

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \left\{ \left( \frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (3.51)$$

onde  $dx_1/d\xi$  e  $dx_2/d\xi$  são obtidos derivando-se as equações (3.48) em relação a  $\xi$ .

Integrais singulares da ordem  $0(\ln r)$  podem ser avaliadas eficientemente pela quadratura de Gauss com uma transformação de variáveis cúbica, conforme proposto por Telles (1987), que cancela exatamente a singularidade logarítmica. Uma outra possibilidade é o uso da quadratura logarítmica de Gauss, apresentada por Stroud e Secrest (1966). De acordo com este método, os termos incluindo singularidades logarítmicas podem ser integrados por

$$I = \int_0^1 \ln \left( \frac{1}{\xi} \right) f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^N w_i f(\xi_i), \quad (3.52)$$

onde  $N$  é o número de pontos de Gauss. A coordenada do ponto de integração  $\xi_i$  e o fator peso  $w_i$  podem ser encontrados na literatura (Stroud e Secrest, 1966) e (Brebbia e Dominguez, 1989).

Neste trabalho, os termos não singulares das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  são integrados utilizando-se quadratura de Gauss padrão com 10 pontos de integração. Os termos singulares de  $\mathbf{G}$  são do tipo  $\ln(r)$  sendo integrados usando quadratura logarítmica de Gauss com 10 pontos de integração. Já os termos singulares de  $\mathbf{H}$  são do tipo  $1/r$  e precisam ser calculados no sentido do valor principal de Cauchy. Uma maneira bastante simples de se tratar esta singularidade é através de considerações de corpos rígidos (Brebbia e Dominguez, 1989). Assumindo que um corpo rígido tenha todos os seus pontos do con-

torno deslocados de um valor unitário e que não existam forças de corpo ( $b_i = 0$ ) na direção de um dos eixos de coordenadas, as forças de superfície em qualquer ponto do contorno deste corpo deve ser zero. Desta forma, a equação (3.42) torna-se

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^q = 0 \quad (3.53)$$

onde  $\mathbf{v}^q$  é um vetor que para todos os nós tem deslocamentos unitários ao longo da direção  $q$  e zero na outra direção. Para satisfazer a equação (3.53) tem-se

$$H_{ii} = - \sum_{j=1}^N H_{ij} \quad j \neq i \quad (3.54)$$

sendo  $j$  par ou ímpar.

O termo da diagonal da matriz  $\mathbf{H}$  é igual a soma de todos os outros termos fora da diagonal correspondentes ao grau de liberdade em consideração.

### 3.7 Cálculo dos deslocamentos e densidades de forças em pontos internos

O tensor de tensões para um ponto no interior do domínio  $\Omega$ , obtido derivando-se a equação (3.15) neste ponto e aplicando-se a lei de Hooke, pode ser escrito como

$$N_{ik} + \int_{\Gamma} S_{jik} u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{jik} t_j d\Gamma \quad (3.55)$$

onde  $S_{kij}$  e  $D_{kij}$  são combinações lineares das derivadas de  $T_{ij}$  e  $U_{ij}$ , respectivamente.

O tensor  $S_{kij}$  é dado por

$$\begin{Bmatrix} S_{11j} \\ S_{22j} \\ S_{21j} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{1j,1} \\ T_{2j,2} \\ \frac{1}{2} (T_{1j,2} + T_{2j,1}) \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

onde  $j = 1, 2$ . As derivadas de  $T_{ij}$  são obtidas pela equação

$$T_{ij,k} = -2\text{Re} \left[ \frac{1}{(z_1 - z'_1)^2} R_{k1} q_{j1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{i1} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)^2} R_{k2} q_{j2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{i2} \right] \quad (3.57)$$

onde

$$R_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Da mesma forma  $D_{kij}$  pode ser calculado como

$$\begin{Bmatrix} D_{11j} \\ D_{22j} \\ D_{21j} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1j,1} \\ U_{2j,2} \\ \frac{1}{2} (U_{1j,2} + U_{2j,1}) \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

sendo que as derivadas de  $U_{ij}$  são dadas por

$$U_{ij,k} = 2\text{Re} \left[ \frac{1}{z_1 - z'_1} R_{k1} q_{j1} A_{i1} + \frac{1}{z_2 - z'_2} R_{k2} q_{j2} A_{i2} \right] \quad (3.60)$$

### 3.8 Densidade de força no contorno

Para se calcular o tensor de tensões em um dado nó do contorno, considere um nó em que as direções dos vetores tangente e normal ao contorno não

coincidam com as direções dos eixos geométricos (Figura 3.3). Neste nó é criado um novo sistema de referência  $x'_1x'_2$  possuindo direções que coincidam com os vetores tangente e normal ao contorno neste nó. Escrevendo os deslocamentos e as forças de superfícies neste sistema local tem-se

$$\begin{aligned} u'_i &= l_{ij}u_j \\ t'_i &= l_{ij}t_j \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde  $l_{ij}$  são os cossenos diretores.

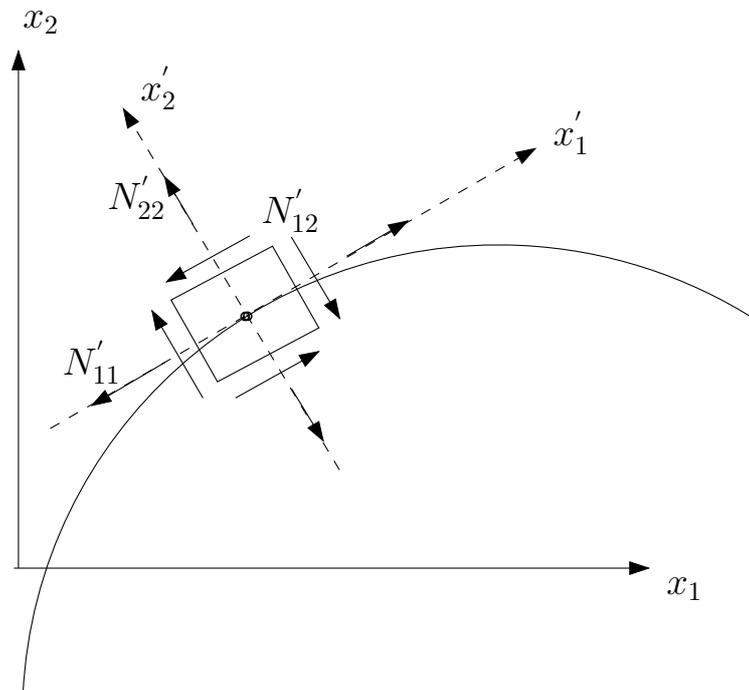


Figura 3.3: Tensões no contorno.

No sistema local tem-se a seguinte relação

$$\begin{aligned}
N'_{22} &= t'_2 \\
N'_{12} &= t'_1
\end{aligned}
\tag{3.62}$$

A deformação  $\varepsilon'_{11}$  pode ser calculada, sabendo que

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_{11} &= \frac{1}{2}(u'_{1,1} + u'_{1,1}) = u'_{1,1} \\
u'_{1,1} &= \frac{du'_1}{dx'_1} = \frac{du'_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx'_1}
\end{aligned}
\tag{3.63}$$

Usando geometria diferencial na equação (3.63), pode-se notar que a direção local  $x'_1$  é tangente ao comprimento infinitesimal de arco  $ds$  dado por

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{dx'^2_1 + dx'^2_2} = \sqrt{\left(\frac{dx'_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{d\xi}\right)^2} d\xi \\
\frac{ds}{d\xi} &= J
\end{aligned}
\tag{3.64}$$

Um pequeno movimento ao longo de  $s$  corresponde a um pequeno movimento em  $x'_1$ . Isto permite com que  $x'_1$  na equação (3.63) seja substituído pela equação (3.64), ou seja,

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_{11} &= \frac{du'_1}{d\xi} \frac{d\xi}{ds} \\
\varepsilon'_{11} &= \frac{du'_1}{d\xi} J^{-1}
\end{aligned}
\tag{3.65}$$

Sendo

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{i=1}^3 \phi^{(i)} u_1^{(i)} \\
\frac{du_1}{d\xi} &= \sum_{n=1}^3 \frac{d\phi^{(i)}}{d\xi} u_1^{(i)}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

onde  $\phi^{(i)}$  são as funções de forma. Pode-se então obter a deformação

$$\varepsilon'_{11} = \sum_{n=1}^3 \frac{d\phi^{(i)}}{d\xi} u_1^{(i)} J^{-1} \tag{3.67}$$

Da relação tensão deformação, tem-se

$$\begin{Bmatrix} N'_{11} \\ N'_{22} \\ N'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{16} \\ A'_{12} & A'_{22} & A'_{26} \\ A'_{16} & A'_{26} & A'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.68}$$

onde  $A'_{ij}$  são as componentes do tensor de rigidez escritas no referencial local.

Na equação (3.68) tem-se três incógnitas  $N'_{11}, \varepsilon'_{22}, \varepsilon'_{12}$ , que agora podem então ser calculadas.

Por último, as densidades de força tem que ser escritas no referencial global  $x_1 x_2$ , ou seja

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} N'_{11} \\ N'_{22} \\ N'_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.69}$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação de coordenadas.

### 3.9 Tensões em cada uma das lâminas

Quando várias camadas são empilhadas, é necessário adicionar um conjunto de hipóteses para derivar as equações que governam o comportamento consti-

tutivo do laminado. Assumindo que as lâminas encontram-se perfeitamente coladas e a seção plana permanece plana após a deformação, as deformações são constantes e sem descontinuidades ao longo da espessura do laminado. As tensões, entretanto, apresentam descontinuidades devido as descontinuidades das propriedades de lâmina para lâmina (Figura 3.4). As deformações do

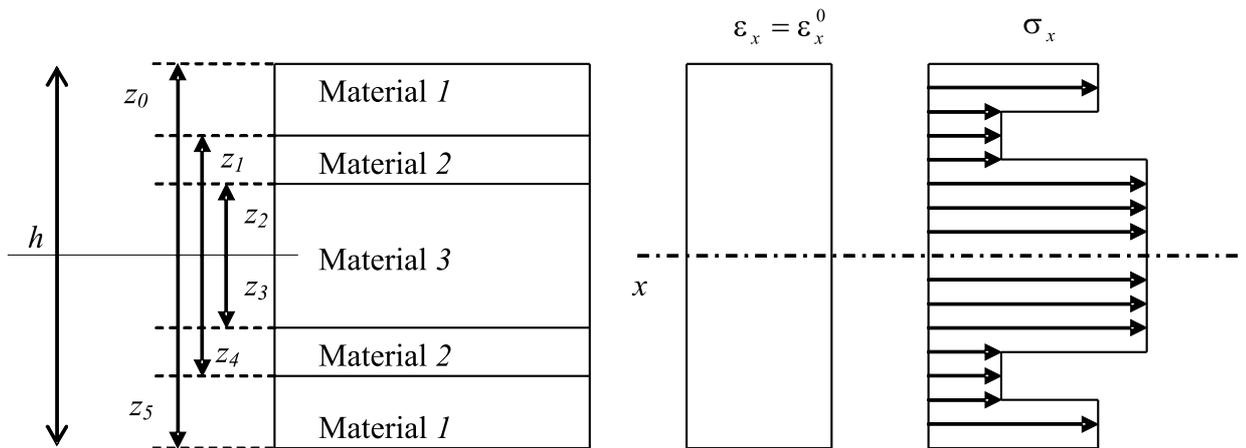


Figura 3.4: Distribuição de tensões e deformações em um laminado simétrico.

laminado poderão ser caracterizadas pela deformação de uma única camada, a camada do plano médio que é representada por  $\varepsilon^o$ , como é mostrado na Figura 3.4.

As deformações são calculadas a partir da equação (3.68) da forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

Embora as tensões sejam constantes dentro de cada lâmina, elas variam de uma camada para a outra (Figura 3.4) dependendo da rigidez das lâminas individuais, as quais são assumidas ortotrópicas. Usando a relação da tensão deformação tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}_k = [\mathbf{Q}]_{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^o \\ \varepsilon_{22}^o \\ \varepsilon_{12}^o \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

onde  $k$  é o número da camada.

## 3.10 Resultados numéricos

### 3.10.1 Tensões circunferenciais em uma chapa infinita com furo

Para comparar os valores obtidos para as tensões com os dados da literatura foi escolhida uma chapa infinita com um furo circular (Figura 3.5). Uma solução analítica para esse problema foi apresentada por Lekhnitskii (1963).

A Figura 3.5 mostra uma seção de uma chapa ortotrópica infinita com um furo circular, sujeita a cargas de tração aplicada na direção do menor módulo de elasticidade  $E_2$ . A distribuição de tensão circunferencial ao longo do furo é dada por:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma \frac{E_\theta}{E_1} \operatorname{Re} \left\{ \mu_1 \mu_2 [\mu_1 \mu_2 + i(\mu_1 \mu_2) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] \right\} \quad (3.72)$$

onde  $\theta$  é o ângulo polar medido no eixo  $x_1$  e  $E_\theta$  é o módulo de Young na direção tangente ao contorno no furo que é dado por:

$$E_\theta = \left[ \frac{\sin^4 \theta}{E_1} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\cos^4 \theta}{E_2} \right]^{-1} \quad (3.73)$$

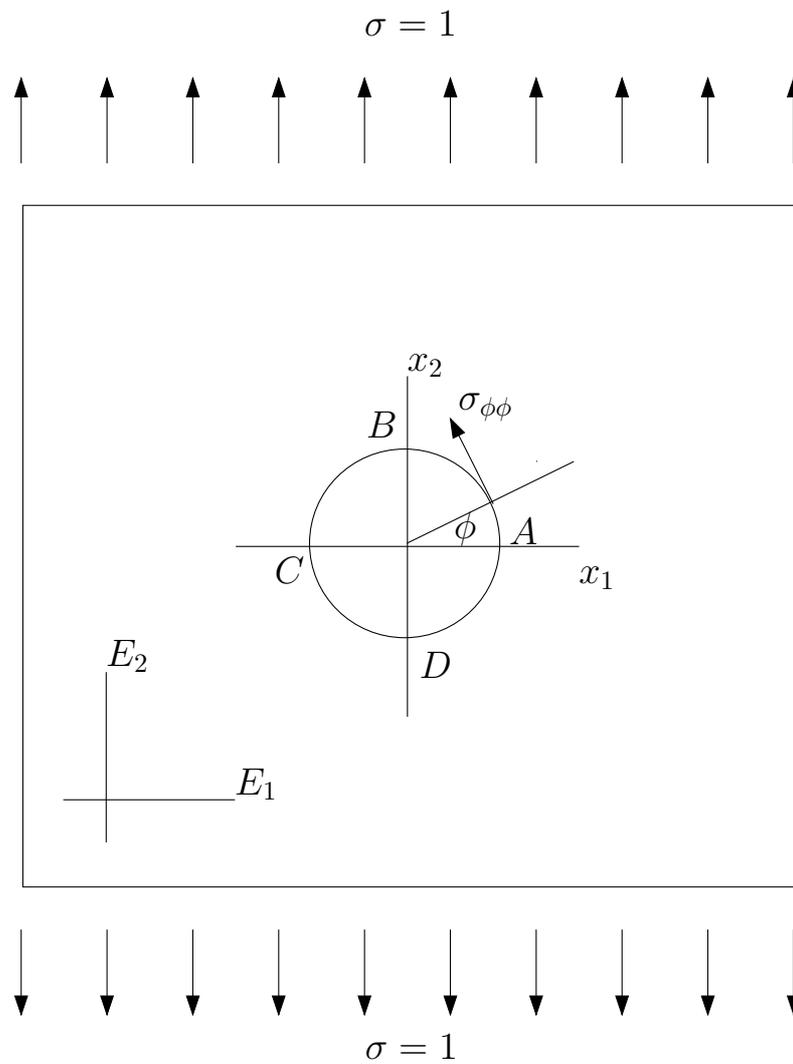


Figura 3.5: Furo circular em uma chapa ortotrópica infinita.

A distribuição de tensão dada pela equação (3.72) é simétrica no eixo das direções principais e a máxima tensão ocorre nos pontos  $A$  e  $C$  da Figura 3.5 e são dados por:

$$\sigma_{\theta\theta}^A = \sigma_{\theta\theta}^C = \sigma \operatorname{Re} \left[ 1 + i \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \right] \quad (3.74)$$

A mínima tensão ocorre nos pontos  $B$  e  $D$  da Figura 3.5 e são dadas por:

$$\sigma_{\theta\theta}^B = \sigma_{\theta\theta}^D = \sigma \operatorname{Re}[\mu_1 \mu_2] \quad (3.75)$$

Este problema foi modelado usando a formulação de elementos de contorno apresentada neste capítulo e os resultados foram comparados com a solução analítica. Na modelagem, foi considerada como aproximação para a lâmina infinita, uma lâmina quadrada com furo, sendo que a aresta da lâmina tem 9 vezes o tamanho do raio do furo. Foram usados 46 elementos de contorno quadráticos contínuos, sendo 28 no contorno externo e 18 no furo, conforme mostrado na Figura 3.6. As propriedades do material foram as seguintes:  $E_1 = 11,8$  GPa,  $E_2 = 5,89$  GPa,  $G_{12} = 0,69$  GPa e  $\nu_{12} = 0,071$ .

A figura 3.7 mostra as tensões circunferenciais calculadas pelo método dos elementos de contorno, comparada com a solução analítica, dada pela equação (3.72). Conforme pode ser notado há uma perfeita concordância entre os resultados.

### 3.10.2 Critérios de falha para uma chapa sem furo

Considere uma lâmina quadrada de largura  $a = 1$  m e espessura  $t = 1$  mm de um material ortotrópico que encontra-se sob tração  $\sigma = 10$  MPa, conforme mostrado na Figura 2.8. As propriedades do material são:  $E_1 = 240$  GPa,  $E_2 = 18,5$  GPa,  $G_{12} = 5,59$  GPa,  $\nu_{12} = 0,23$ . O eixo principal do material

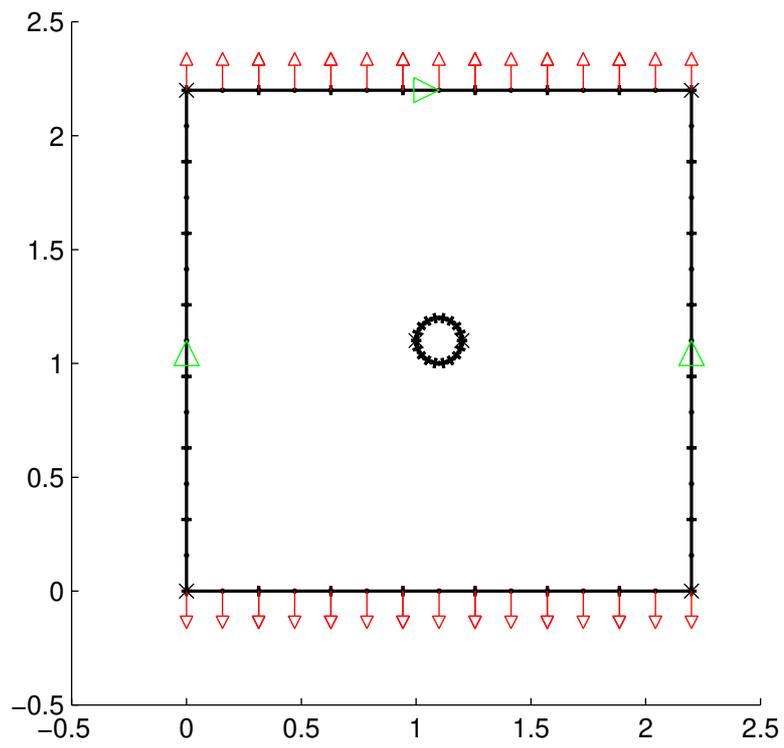


Figura 3.6: Discretização da chapa ortotrópica infinita.

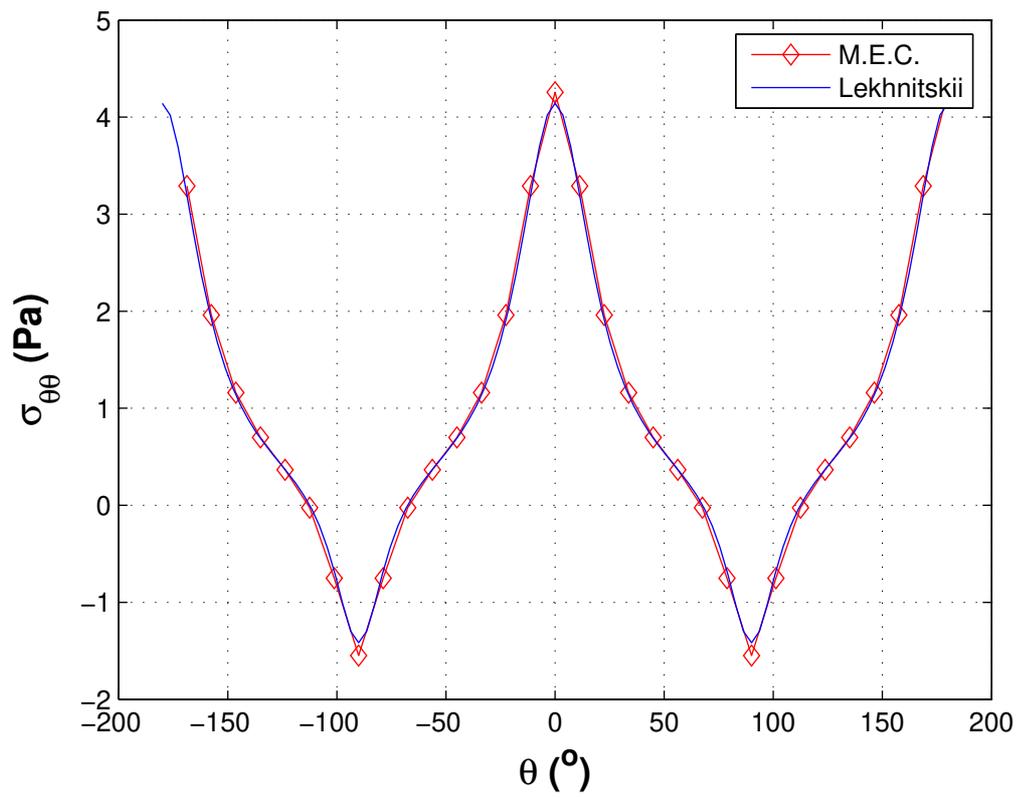


Figura 3.7: Cálculo da tensão circunferencial para  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ .

é orientado de um ângulo  $\theta$  em relação a horizontal. As propriedades de resistência do material são  $X_t = 1260$  MPa,  $Y_t = 61$  MPa e  $S = 67$  MPa.

Conforme a equação (2.38), as tensões escritas no referencial principal do material quando  $\theta = 45^\circ$  são iguais a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}(\theta = 45^\circ)^{-1} \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{Bmatrix} \text{MPa} \quad (3.77)$$

Esta chapa foi discretizada usando-se 4 elementos de contorno quadráticos contínuos, conforme mostrado na Figura 3.8. A falha pelo critério de Tsai-Hill foi analisada em todos os nós do contorno e em um ponto interno no centro da lâmina e os resultados são mostrados na Figura 3.9. Conforme pode ser visto, os resultados numéricos mostraram que a tensão  $\sigma_{11}$  para  $\theta = 45^\circ$  em todos os pontos do contorno e no ponto interno apresentam aproximadamente o mesmo valor, com erros menores que 0,01%, quando comparados com a solução analítica. É possível notar também na Figura 3.9 que a lâmina apresenta deformações de cisalhamento. Isto se deve a inclinação da carga em relação ao referencial principal do material.

Visando avaliar diferentes configurações do material, variou-se o ângulo desde zero até  $90^\circ$  e calculou-se a tensão que causa a falha como descrito na Seção 2.8. Os resultados obtidos neste trabalho foram comparados com os resultados analíticos apresentados por Gurdal *et al.*(1998). Conforme pode ser notado na Figura 3.10, há uma perfeita concordância entre os resultados numéricos obtidos neste trabalho e os resultados analíticos da literatura.

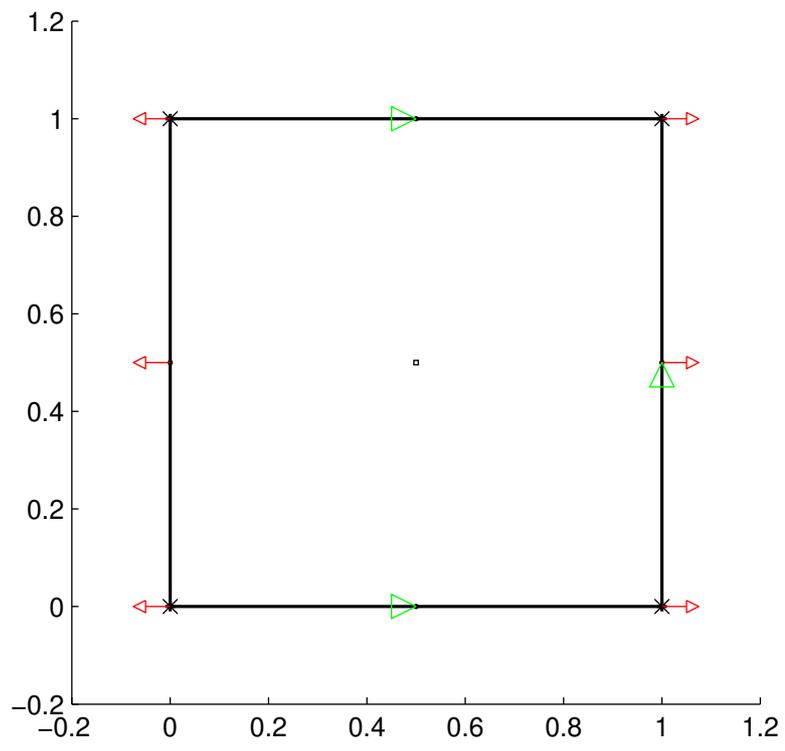


Figura 3.8: Discretização da chapa.

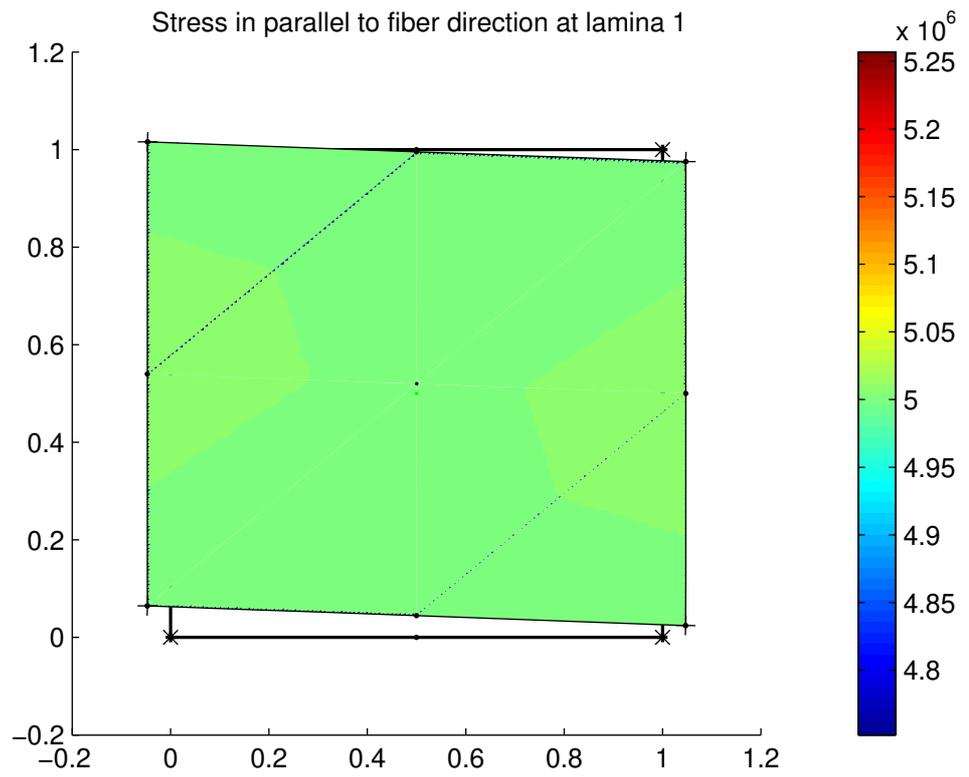


Figura 3.9: Tensão paralela às fibras ( $\sigma_{11}$ ) para  $\theta = 45^\circ$ .

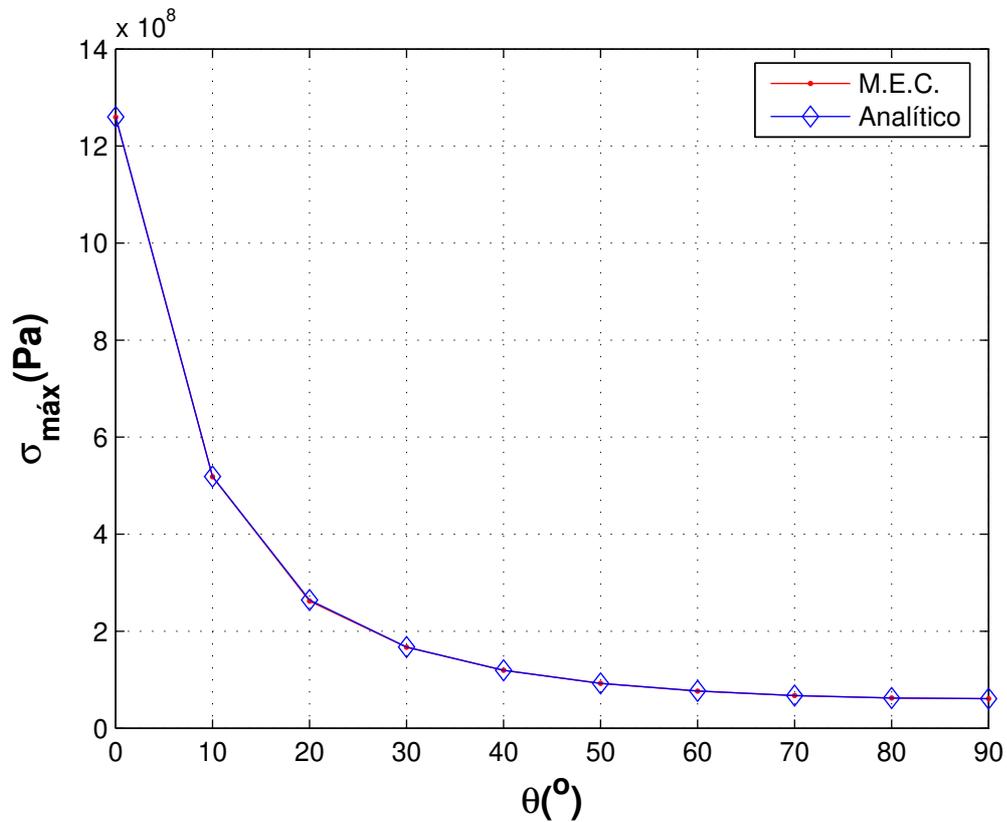


Figura 3.10: Tensão que causa a falha da chapa em função do ângulo de orientação das fibras, segundo o critério de Tsai-Hill.

### 3.10.3 Critérios de falha para uma lâmina com furo

Considere uma lâmina quadrada de largura  $a = 1$  m de um material ortotrópico que possui um furo de raio 0,25 m e encontra-se sob tração biaxial, conforme mostrado na Figura 3.11. As propriedades do material são:  $E_1 = 14$  GPa,  $E_2 = 3,5$  GPa,  $G_{12} = 4,2$  GPa,  $\nu_{12} = 0,043$ . O eixo principal do material é orientado de um ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $x$ . As propriedades de resistência do material são  $X_t = 1260$  MPa,  $Y_t = 61$  MPa,  $X_c = 500$  MPa,

$Y_c = 102$  MPa e  $S = 167$  MPa. Na discretização desta lâmina foram usados 46 elementos de contorno quadrático contínuos, sendo 28 elementos de iguais tamanho nas arestas externas da lâmina e 18 elementos no furo (Figura 3.12). Foi calculada a tensão  $\sigma_{max}$  para a qual a lâmina falha considerando tanto o critério de Tsai-Hill quanto o critério de Tsai-Wu. As Figuras 3.13 e 3.14 mostram a tensão  $\sigma_{max}$  que causa a falha da lâmina para  $r = 0$  e  $r = 0,9$ , respectivamente. Os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu são comparados. Pode ser notado que existe uma boa concordância quanto ao ângulo de maior resistência (valor mínimo para  $f$ ). Porém, há uma discordância nas demais regiões que em alguns pontos é maior que 10%.

### 3.10.4 Critério de falha para um Laminado

Considere uma lâmina quadrada de largura  $a = 1$  m com um furo central de raio  $r = 0,25$  m e espessura  $t = 4$  mm de 4 camadas de um material ortotrópico que encontra-se sob carregamento biaxial, conforme mostrado na Figura 3.15. Todas as camadas são iguais e possuem espessuras de 1 mm. A seqüência de empilhamento das camadas é  $[\theta_1/\theta_2]_S$ . As propriedades elásticas do material são:  $E_1 = 14$  GPa,  $E_2 = 3,5$  GPa,  $G_{12} = 4,2$  GPa,  $\nu_{12} = 0,043$ . As propriedades de resistência do material são  $X_t = 1260$  MPa,  $Y_t = 61$  MPa,  $X_c = 500$  MPa,  $Y_c = 102$  MPa e  $S = 167$  MPa. Esta chapa foi discretizada usando-se 46 elementos de contorno quadráticos contínuos, sendo 28 nas arestas e 18 no furo, conforme mostrado na Figura 3.16. As Figuras 3.17 e 3.18 mostram os valores do critério de falha de Tsai-Hill considerando  $\theta_1 = 0^0$  e  $\theta_2 = 90^0$ , respectivamente. Para produzir a interpolação de cores, os valores dos critérios de falha também foram calculados em alguns pontos

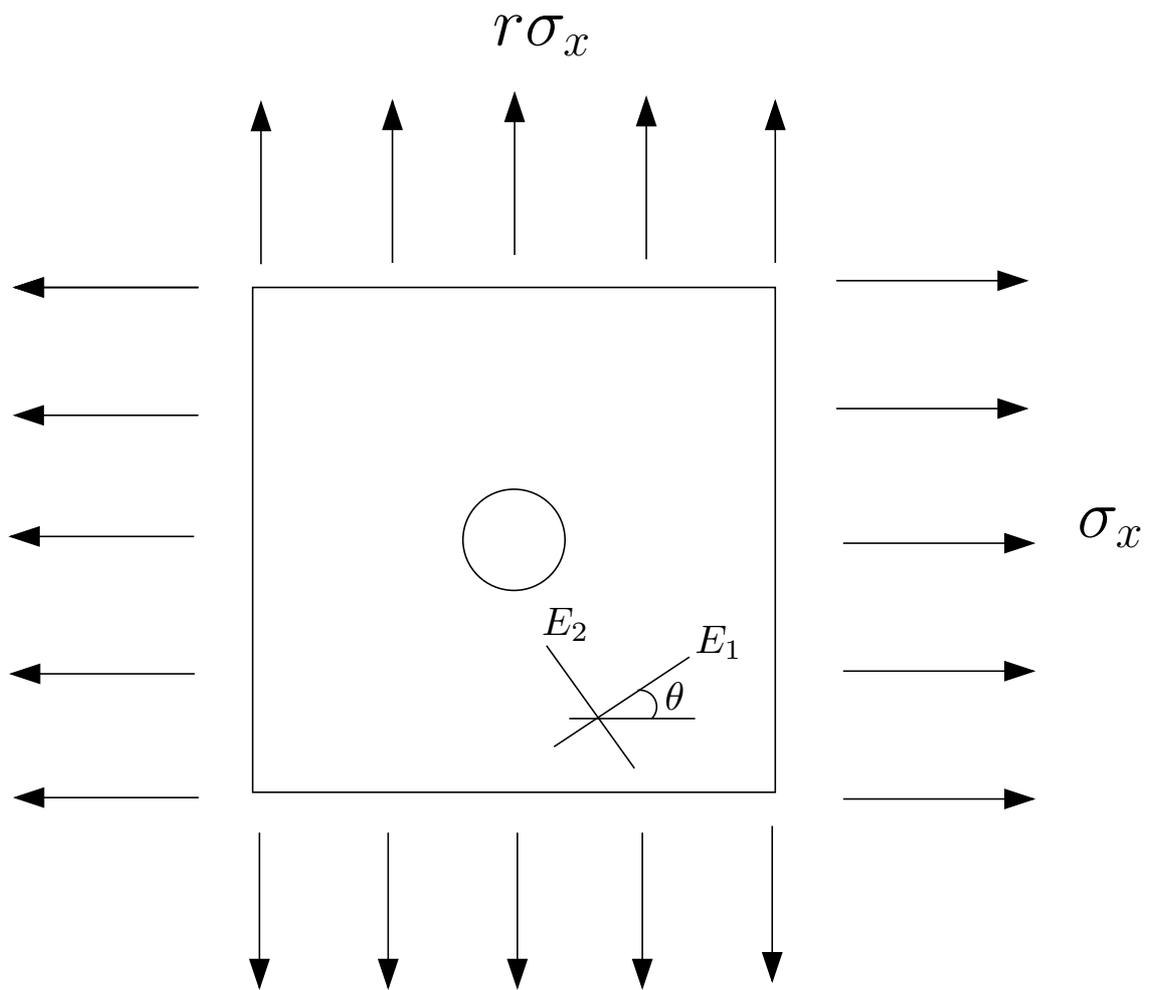


Figura 3.11: Lâmina sujeita ao carregamento biaxial.

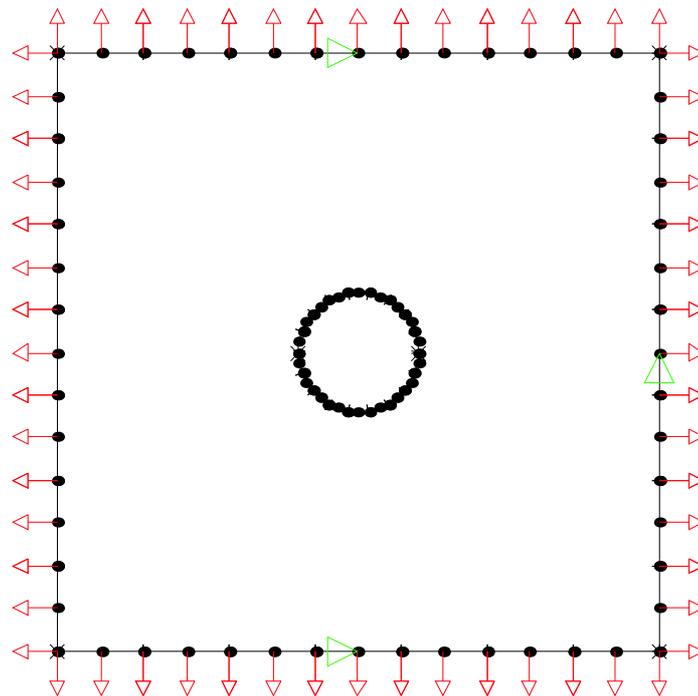


Figura 3.12: Malha usada para o problema (28 elementos de contorno quadráticos descontínuos).

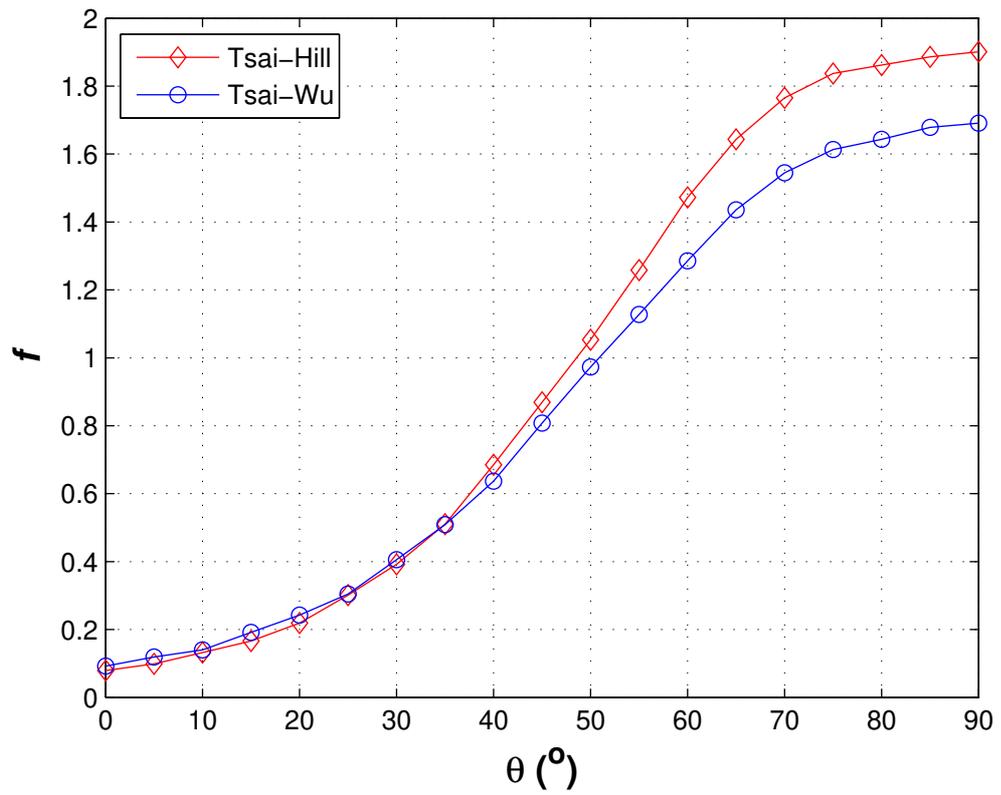


Figura 3.13: Valores dos critérios de falha de Tsai-Hill e de Tsai-Wu com  $r = 0$ .

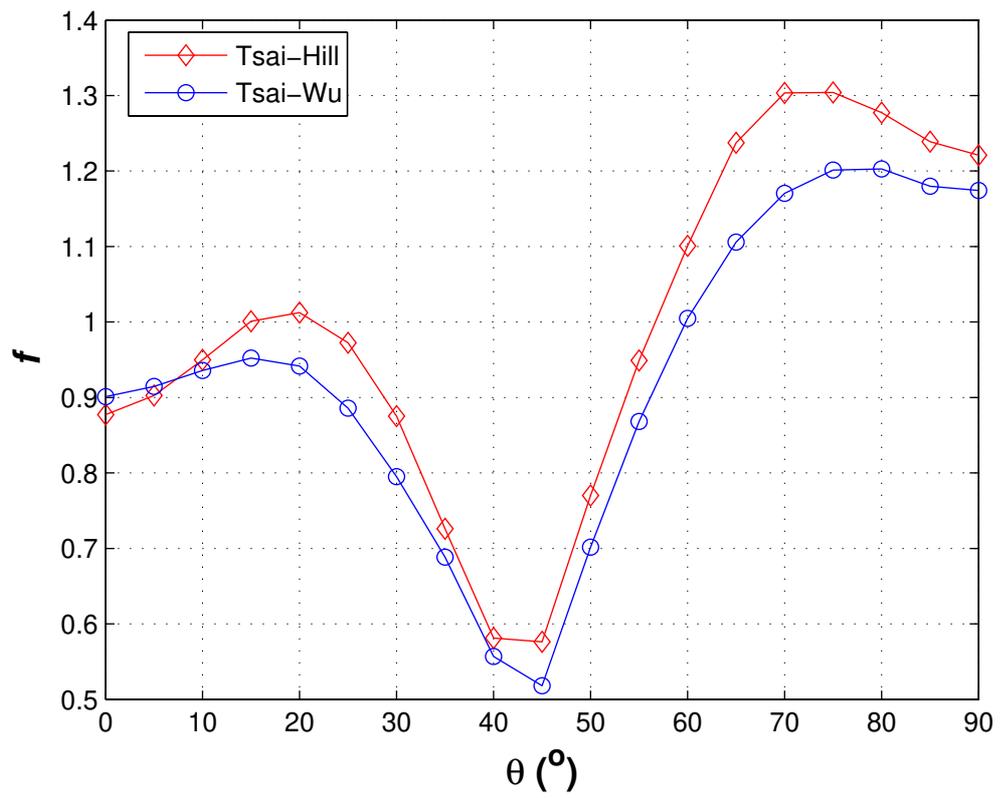


Figura 3.14: Valores dos critérios de falha de Tsai-Hill e de Tsai-Wu com  $r = 0,9$ .

internos. Como pode ser notado, as camadas apresentam valores diferentes para o critério de falha quando as orientações das fibras são diferentes. Neste exemplo, o valor máximo de  $f(\theta)$  para a camada 1 ( $\theta_1 = 0^0$ ) é  $f_1 = 0,014$  e para a camada 2 ( $\theta_2 = 90^0$ ) é  $f_2 = 0,627$ . O valor do critério de falha do laminado é  $f = \max(f_1, f_2) = 0,627$ . Também é notado que o critério de falha máximo ocorre no contorno, o que confirma a não necessidade de se calcular os critérios de falha nos pontos internos pois estes não serão críticos.

As Figuras 3.19 e 3.20 mostram os critérios de falha de Tsai-Wu e Tsai-Hill, respectivamente, para  $\theta_1$  e  $\theta_2$  variando entre  $-90^0$  e  $90^0$ . Pode-se notar que as superfícies que representam os critérios de falha apresentam diferenças significativas. Além disso, ambas as superfícies apresentam mínimos locais cujos valores não são identificáveis a menos que se use algum método de otimização. Esta dificuldade em se identificar o valor dos pontos de mínimo do critério de falha é maior quanto maior for o número de lâminas que possam ter orientações diferentes. A identificação destes pontos de mínimo será realizada no capítulo 4, onde são abordados os métodos de otimização.

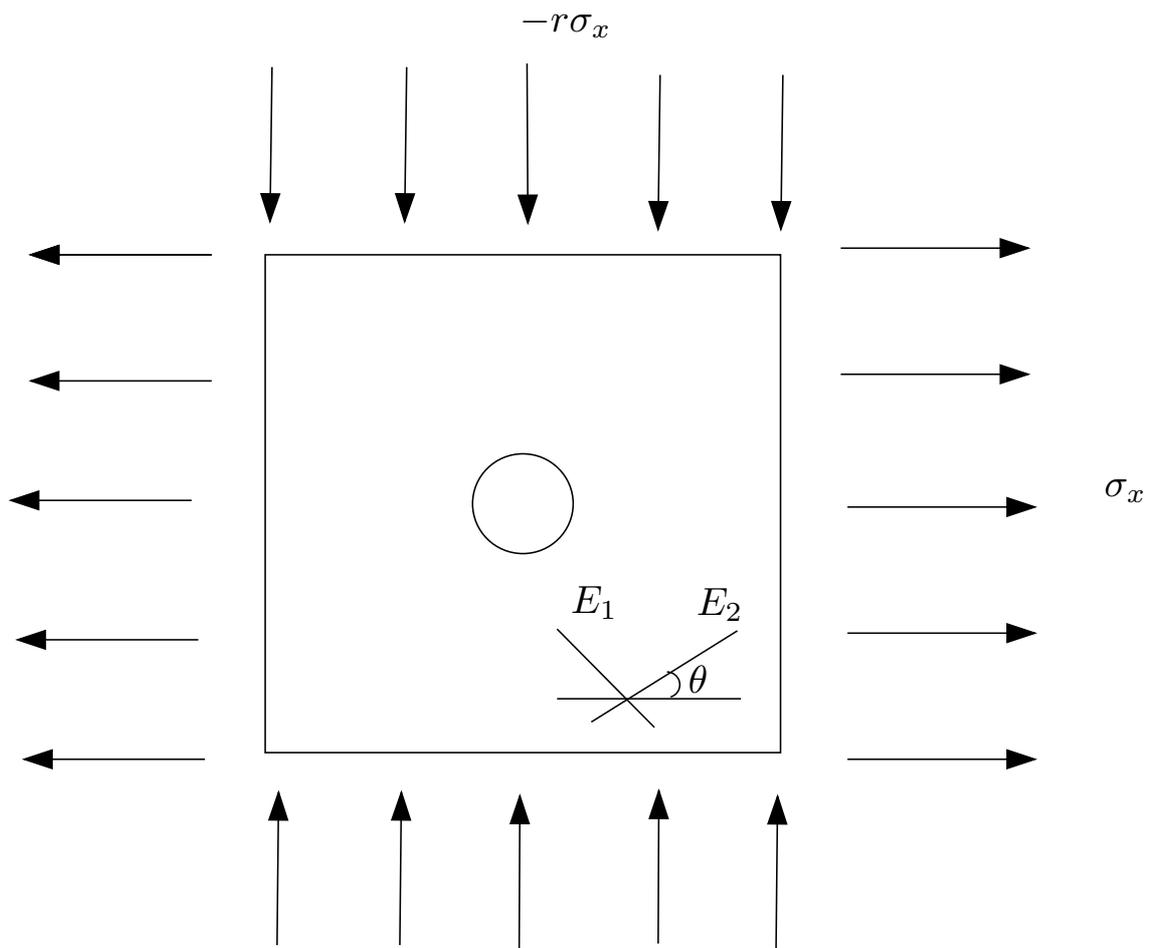


Figura 3.15: Chapa com furo central.

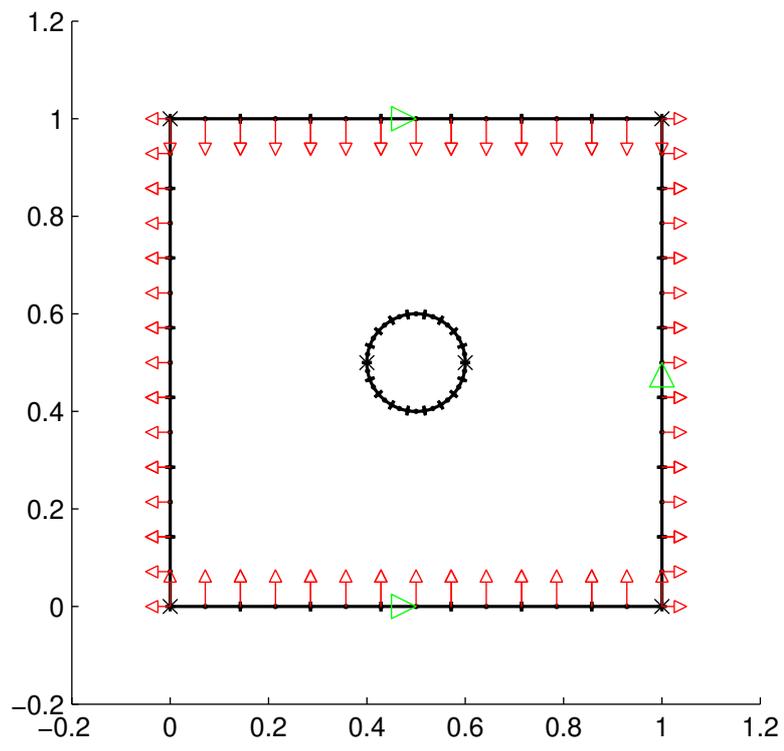


Figura 3.16: Discretização da chapa laminada com furo.

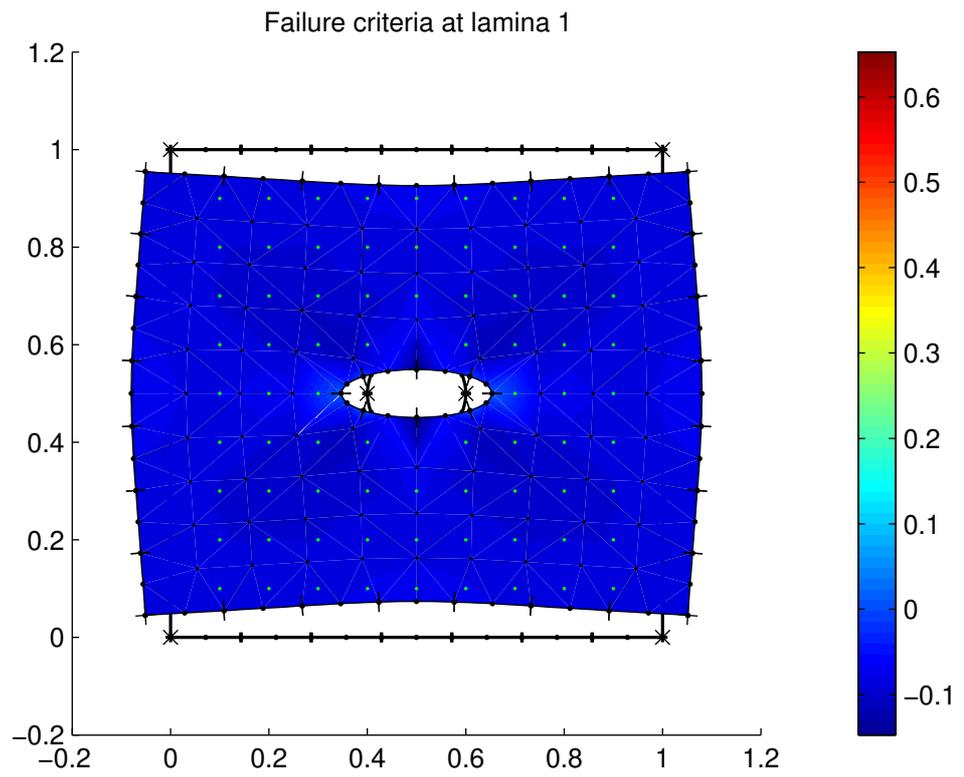


Figura 3.17: Valores do critério de falha de Tsai-Wu para a primeira lâmina ( $\theta = 0^\circ$  e  $f_{max} = 0,014$ ).

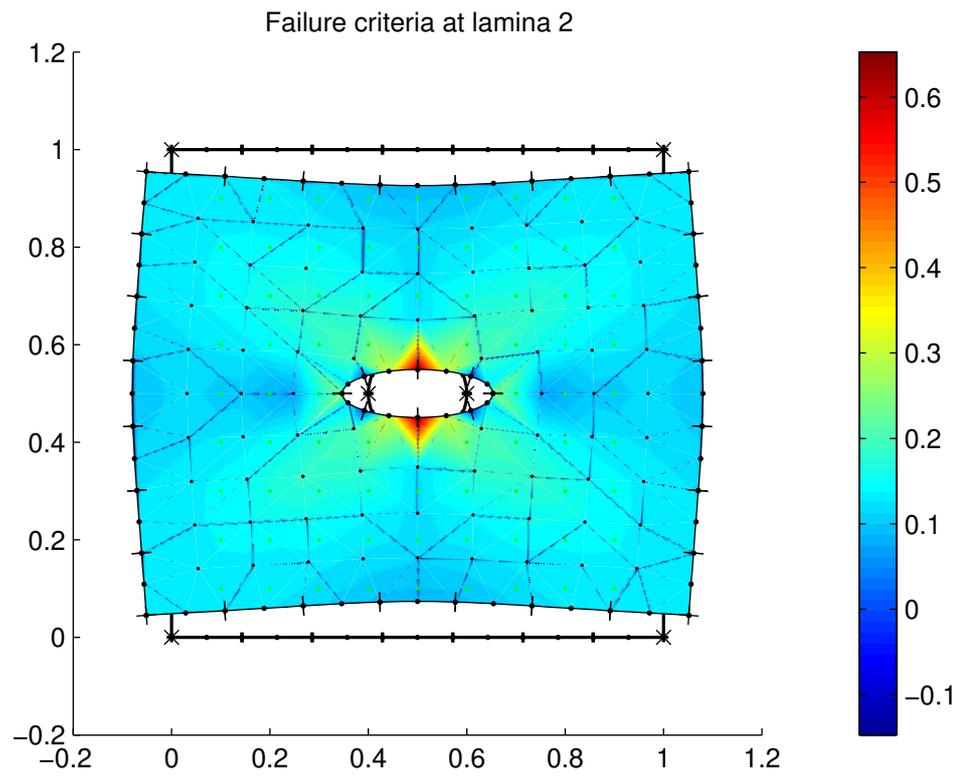


Figura 3.18: Valores do critério de falha de Tsai-Wu para a segunda lâmina ( $\theta = 90^\circ$  e  $f_{max} = 0,627$ ).

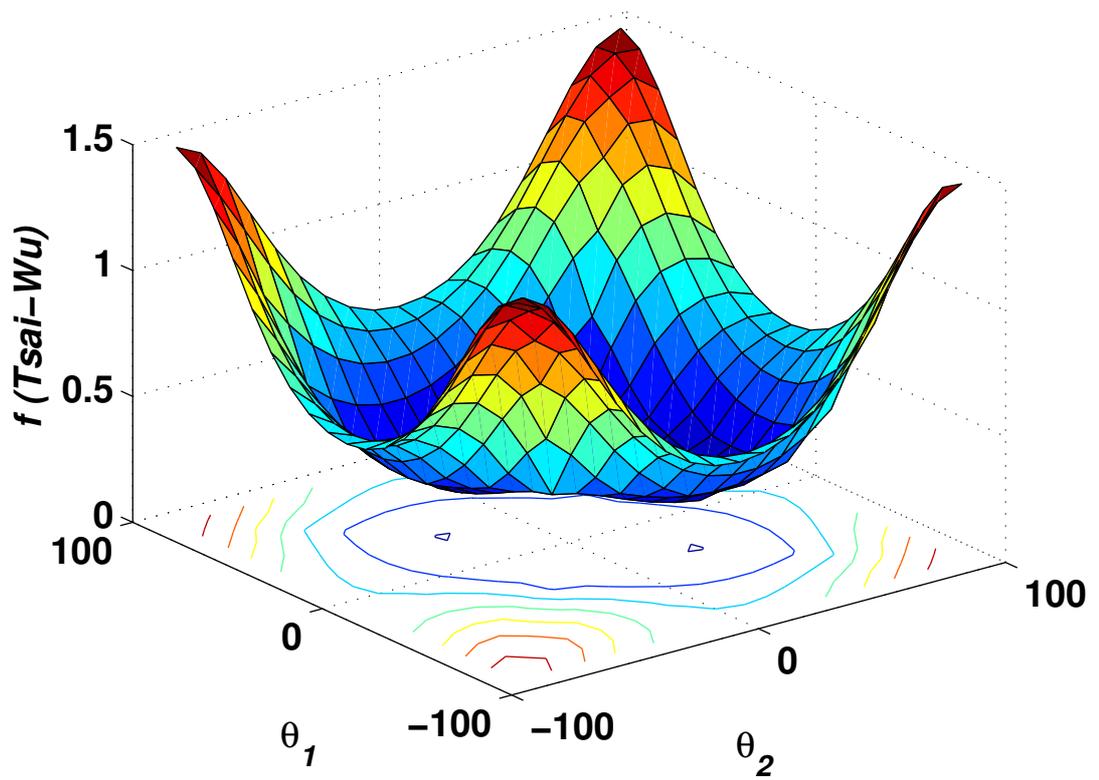


Figura 3.19: Valores do critério de Tsai-Wu.

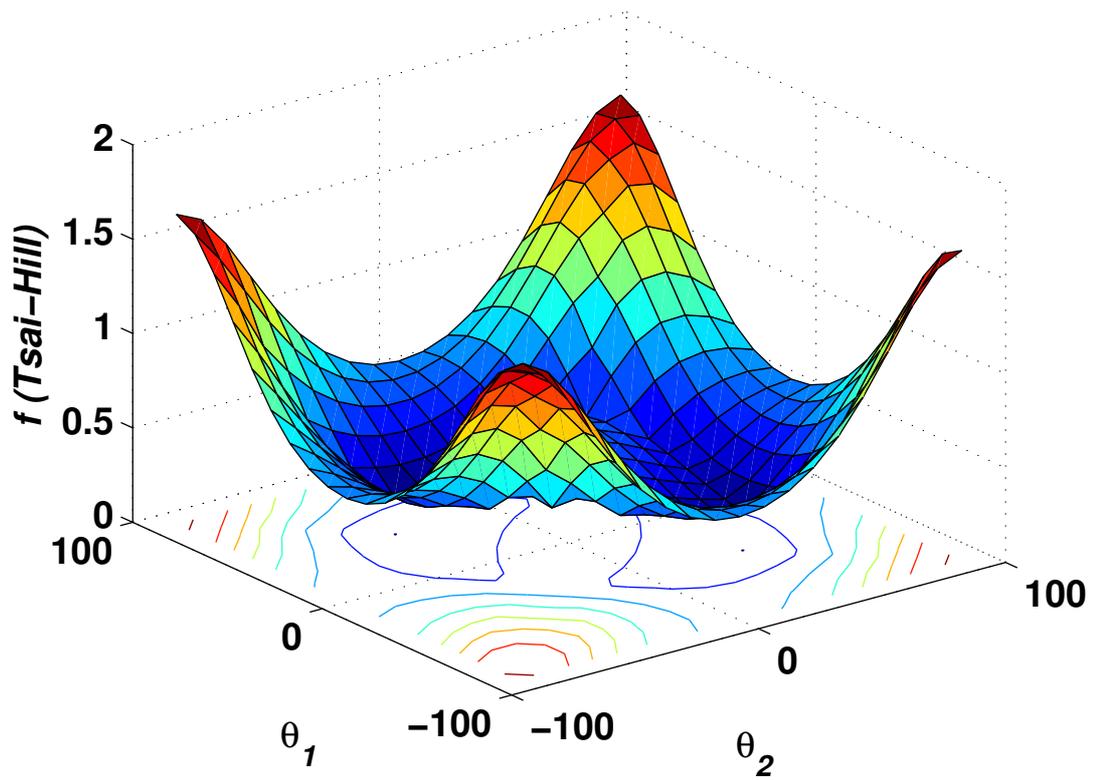


Figura 3.20: Valores do critério de Tsai-Hill.

## Capítulo 4

# Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos

O desejo de correr mais rápido, vencer um debate ou aumentar os lucros, significa o desejo de fazer ou ser o melhor de alguma forma. Em engenharia, deseja-se produzir a “melhor qualidade de vida possível com os recursos disponíveis.” Assim, deve-se usar ferramentas as quais proporcione o resultado desejado de forma rápida e econômica. A otimização é uma das ferramentas disponíveis. O propósito da otimização é auxiliar a procura pelo melhor projeto que se quer ou se precisa (Vanderplaats, 1999).

Antes da computação de alta velocidade, a maioria das soluções para problemas de análise estrutural eram baseadas no uso de equações diferenciais. Estas eram resolvidas analiticamente, na maioria das vezes usando séries infinitas, as quais precisavam usar métodos numéricos para finalizar o processo do cálculo. As funções definidas em um contínuo eram desconhecidas (representando deslocamentos, tensões, etc,...).

No final dos anos 50, início dos anos 60, com o aparecimento dos computadores de alta velocidade, houve grandes modificações nos procedimentos das

soluções de análise estrutural. Surgiram técnicas apropriadas para a implementação computacional, em particular o método dos elementos finitos. As equações diferenciais que eram resolvidas analiticamente foram substituídas por sistemas de equações algébricas para as variáveis que descreviam o sistema discretizado. A mesma transformação aconteceu com a otimização estrutural (Haftka e Gurdal, 1991). Os métodos iterativos se desenvolveram rapidamente, aproveitando a capacidade dos computadores em trabalhar com seus algoritmos. Muitas das técnicas numéricas foram acopladas a métodos de otimização, aumentando as possibilidades de aplicação do método.

## 4.1 Aspectos da otimização

As técnicas de otimização são usadas para encontrar um conjunto de valores ótimos para os parâmetros que podem ser alterados durante o projeto. Estes parâmetros são chamados variáveis de projetos e são denotados por um vetor  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . As variáveis de projetos podem ser o peso, o tamanho, a espessura das camadas, a direção das fibras, etc. Essas variáveis de projeto podem ser contínuas ou discretas. Variáveis contínuas tem uma faixa de variação e podem assumir qualquer valor dentro desta faixa. As variáveis discretas podem ter somente valores isolados, tipicamente de uma lista de valores permitidos. A escolha das variáveis de projeto poderá ser decisiva para o sucesso do projeto. Em particular, é importante ter a certeza de que a escolha das variáveis é consistente com o modelo a ser analisado.

A idéia de otimização implica na existência de alguma função  $f(x)$  ou funções  $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$  que podem ser melhoradas e podem ser usadas como medidas para a eficiência do projeto. Essas funções são

chamadas de *funções objetivo*. A otimização com mais de uma função objetivo é chamada de otimização de multicritério. Para problemas de otimização estrutural, peso, deslocamentos, tensões, frequência de vibrações, custos ou uma combinação destes podem ser usados como função objetivo (Haftka e Gurdal, 1991).

As variáveis de projeto podem estar sujeitas a restrições na forma de equações de restrições,  $G_i(x) = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ); inequações de restrições  $G_i(x) \leq 0$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ) e ou parâmetros de limites,  $x_l, x_u$ .

A descrição de um problema geral é descrito como

minimize  $f(x)$  ou

minimize  $-f(x)$  (quando se quer a maximização)

com  $x \in \mathfrak{R}^n$

sujeito a

$$G_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$G_i(x) \leq 0, \quad i = m + 1, \dots, n$$

$$x_l \leq x \leq x_u$$

onde  $x$  é o vetor dos parâmetros de projeto ( $x \in \mathfrak{R}^n$ ),  $f(x)$  é a função objetivo que retorna valores escalares ( $f(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ ), e a função  $G(x)$  retorna valores das equações e inequações das restrições avaliadas em  $x$  ( $G(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ ). Uma solução eficiente e exata para estes problemas depende não somente do tamanho do problema em termos dos números de restrições e variáveis de projeto, mas também da característica da função objetivo e das restrições. Quando ambos, função objetivo e restrições, são funções lineares da variável de projeto, o problema é conhecido como problema de Programação Linear (LP). A Programação Quadrática (QP) consiste na minimização ou maxi-

mização de uma função objetivo quadrática que é linearmente restrita. Já os problemas nos quais a função objetivo ou as restrições são funções não lineares das variáveis de projeto são chamados de problemas de Programação Não-Linear (NP). A solução dos problemas de NP geralmente requer um procedimento iterativo para estabilizar uma direção de procura a cada conjunto de iterações. Este é geralmente realizado por soluções de uma LP, uma QP, ou um subproblema sem restrições (Optimization Toolbox, 1990).

Um método iterativo consiste de uma seqüência de instruções que são executadas “passo a passo”, algumas das quais são repetidas em ciclos. A execução de um ciclo recebe o nome de iteração. Cada iteração utiliza resultados das iterações anteriores e efetua determinados testes que permitem verificar se foi atingido um resultado “próximo o suficiente” do resultado esperado. Esses métodos fornecem apenas uma aproximação para a solução, enquanto os métodos diretos, teoricamente, obtêm a solução exata da equação. Métodos diretos são aqueles que, a menos de erros de arredondamento, fornecem a solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações aritméticas, por exemplo a Regra de Cramer (Ruggiero e Lopes, 1988).

#### **4.1.1 Otimização sem restrições**

Os métodos para otimização sem restrições podem ser divididos em dois tipos: os que necessitam e os que não necessitam do cálculo dos gradientes da função objetivo. Os métodos de busca que usam somente a avaliação da função, como o Método Simplex de Busca de Nelder e Mead (Lagarias, 1998), são mais apropriados para problemas que tem um grande número de

descontinuidades. Os métodos que usam o gradiente são geralmente mais eficientes quando a função a ser minimizada é contínua na primeira derivada. Vários outros métodos, como o método de Newton, são somente apropriados quando a segunda derivada é facilmente calculada.

### **4.1.2 Otimização com restrições**

Na otimização com restrições, o objetivo geral é transformar o problema em um conjunto de subproblemas que podem ser resolvidos usando um processo iterativo. Uma grande parte dos métodos transformam um problema com restrições em um problema sem restrições. Nestes casos o problema com restrições é resolvido usando uma seqüência de otimização sem restrições parametrizadas, a qual, no limite, converge para um problema com restrições. Atualmente estes métodos são considerados relativamente ineficientes e tem sido trocados por métodos que estão focados em soluções de equações de Kuhn-Tucker (KT). As equações de KT são condições necessárias para otimizar problemas com restrição. A solução das equações de KT forma a base para muitos algoritmos de programação não-linear. Estes algoritmos esforçam-se para calcular os Multiplicadores de Lagrange diretamente.

### **4.1.3 Otimização unidimensional: Método da Seção Áurea**

O método da Seção Áurea estima o máximo, mínimo ou zero de uma função de uma variável. É uma técnica popular por várias razões: primeiro, se a função assumida for unimodal, ou seja, possui somente um ponto de máximo ou de mínimo no intervalo de busca, esta não precisa ter derivadas contínuas (Bazarra et al., 1993). Segundo, ao contrário das técnicas polinomiais ou

outras baseadas no ajuste de curvas, a razão de convergência para o método da seção áurea é conhecida.

Para ilustrar os fundamentos do método, considere como problema determinar o mínimo de uma função  $f$ , sendo  $f$  uma função de uma variável independente  $x$ . Assumindo que os limites maior e menor de  $x$  são  $x_l$  e  $x_u$ , respectivamente, e as funções calculadas em cada um dos limites são, respectivamente  $f_l$  e  $f_u$  (Figura 4.2), escolhe-se dois pontos intermediários  $x_1$  e  $x_2$ , sendo  $x_1 < x_2$ , e avalia-se as funções nestes pontos, dadas como  $f_1$  e  $f_2$ , respectivamente.

Como foi assumido que a função é unimodal,  $x_1$  ou  $x_2$  são os novos limites. Neste caso,  $f_1$  é maior que  $f_2$ . Então, como foi assumido que só existe um mínimo no intervalo, este não estará entre  $x_l$  e  $x_1$ . Deste modo,  $x_1$  forma o novo limite menor e tem-se um novo intervalo limitado por  $x_1$  e  $x_u$ .

Como próximo passo, precisa-se escolher um ponto adicional,  $x_3$ , no qual é avaliado  $f_3$ . No nosso exemplo, comparando  $f_2$  e  $f_3$ , pode-se ver que  $f_3$  é maior, e então  $x_3$  é trocado por  $x_u$  como o limite maior. Repete-se este processo até encontrar a tolerância desejada.

Precisa-se determinar um método para escolher os pontos interiores  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , para reduzir o limite rapidamente. Como, depois da escolha inicial  $x_l, x_u$  e  $x_1$  a função é avaliada em cada iteração, é mais eficiente um algoritmo que reduza os limites a uma mesma razão em cada iteração. É preciso escolher cada  $x_1$  que será o novo limite menor ou  $x_2$  que será o novo limite maior para que estes valores sejam simétricos sobre o centro do intervalo, assim:

$$x_u - x_2 = x_1 - x_l \tag{4.1}$$

Assumindo que a razão:

$$r = \frac{x_2 - x_1}{x_u - x_l} \quad (4.2)$$

é constante ao longo das iterações, tem-se, substituindo (4.1) em (4.2):

$$r = \frac{x_2 - x_1}{x_u - x_l} = \frac{x_u + x_l - 2x_1}{x_u - x_l} \quad (4.3)$$

Na próxima iteração, se  $x_1$  se tornar o novo limite menor  $x_l$ , então  $x_2$  se tornará  $x_1$  e a razão (4.3) se torna:

$$r = \frac{x_u + x_1 - 2x_2}{x_u - x_1} \quad (4.4)$$

Igualando-se (4.3) e (4.4), tem-se:

$$\frac{x_u + x_l - 2x_1}{x_u - x_l} = \frac{x_u + x_1 - 2x_2}{x_u - x_1} \quad (4.5)$$

Após algumas manipulações algébricas, tem-se:

$$\frac{x_1 - x_l}{x_u - x_l} = \frac{x_2 - x_1}{x_u - x_1} \quad (4.6)$$

Por conveniência, assuma que:  $x_l = 0$ , e  $x_u = 1$ . Agora  $x_2 = 1 - x_1$  e a equação (4.2) é escrita como:

$$x_1 = \frac{1 - 2x_1}{1 - x_1} \quad (4.7)$$

Simplificando:

$$x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0 \quad (4.8)$$

Da equação (4.8), tem-se duas raízes:

$$x_1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.38197 \\ x_1 = 2.61803 \end{cases} \quad (4.9)$$

Ignora-se a segunda raiz porque neste caso  $x_1$  é maior que o limite maior. Desta forma, tem-se, finalmente:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.38197 \quad (4.10)$$

$$x_2 = 1 - x_1 = 0.61803 \quad (4.11)$$

A razão destas soluções é o número conhecido como Seção Dourada:

$$\frac{x_2}{x_1} = 1.61803 \quad (4.12)$$

que é empregado desde a idade antiga em construções e desenhos. Daí o nome do método.

A seção dourada proporciona uma seqüência ideal para dividir o intervalo e encontrar o valor mínimo de  $f$ . Pode-se definir os pontos interiores  $x_1$  e  $x_2$  em termos de  $x_l$ ,  $x_u$  e  $\tau$ , onde:

$$\tau = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.38197 = x_1 \quad (4.13)$$

$$x_1 = (1 - \tau)x_l + \tau x_u \quad (4.14)$$

$$x_2 = \tau x_l + (1 - \tau)x_u \quad (4.15)$$

O método da secção áurea se baseia na técnica de limitação da busca a um intervalo, isto é, consiste em reduzir os limites do universo da busca até que o intervalo formado pelos limites seja menor que um erro admissível (Vanderplaats, 1999).

Como em um processo iterativo, precisa-se definir um critério para a identificar quando o processo converge para a solução aceitável. Assumindo

um intervalo inicial de incerteza,  $x_u - x_l$ , deseja-se reduzir o intervalo para algum  $\varepsilon$  do intervalo inicial, chamado de tolerância relativa, ou para algum  $\Delta x$  que é uma tolerância absoluta. O valor de  $\varepsilon$  será encontrado da seguinte forma:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_u - x_l} \quad (4.16)$$

Pode-se converter a tolerância relativa  $\varepsilon$  para o número máximo de funções avaliadas. Assim, requer-se três funções para serem avaliadas:  $f_l$ ,  $f_1$  e  $f_u$ , para que o intervalo seja reduzido de  $\tau$  (38%) em cada iteração. A tolerância específica  $\varepsilon$  será:

$$\varepsilon = (1 - \tau)^{N-3} \quad (4.17)$$

onde  $N$  é o número total de funções a serem avaliadas, incluindo as três iniciais,  $f_l$ ,  $f_1$  e  $f_u$ . Da equação (4.17) tem-se:

$$N = \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(1 - \tau)} + 3 = -2.078 \ln(\varepsilon) + 3 \quad (4.18)$$

Por exemplo, se desejar reduzir o intervalo para 1% do intervalo inicial,  $\varepsilon = 0.01$ . De (4.18) tem-se:

$$N = 9.6 + 3 = 12.6 = 13 \quad (4.19)$$

ou seja, 13 é o número de funções avaliadas.

Pode-se usar  $N$  como critério de convergência para terminar o processo de iteração. A tabela (4.1) mostra a tolerância relativa para o número de funções  $N$  avaliadas.

O fluxograma 4.1 mostra como o algoritmo da seção áurea deve ser implementado.

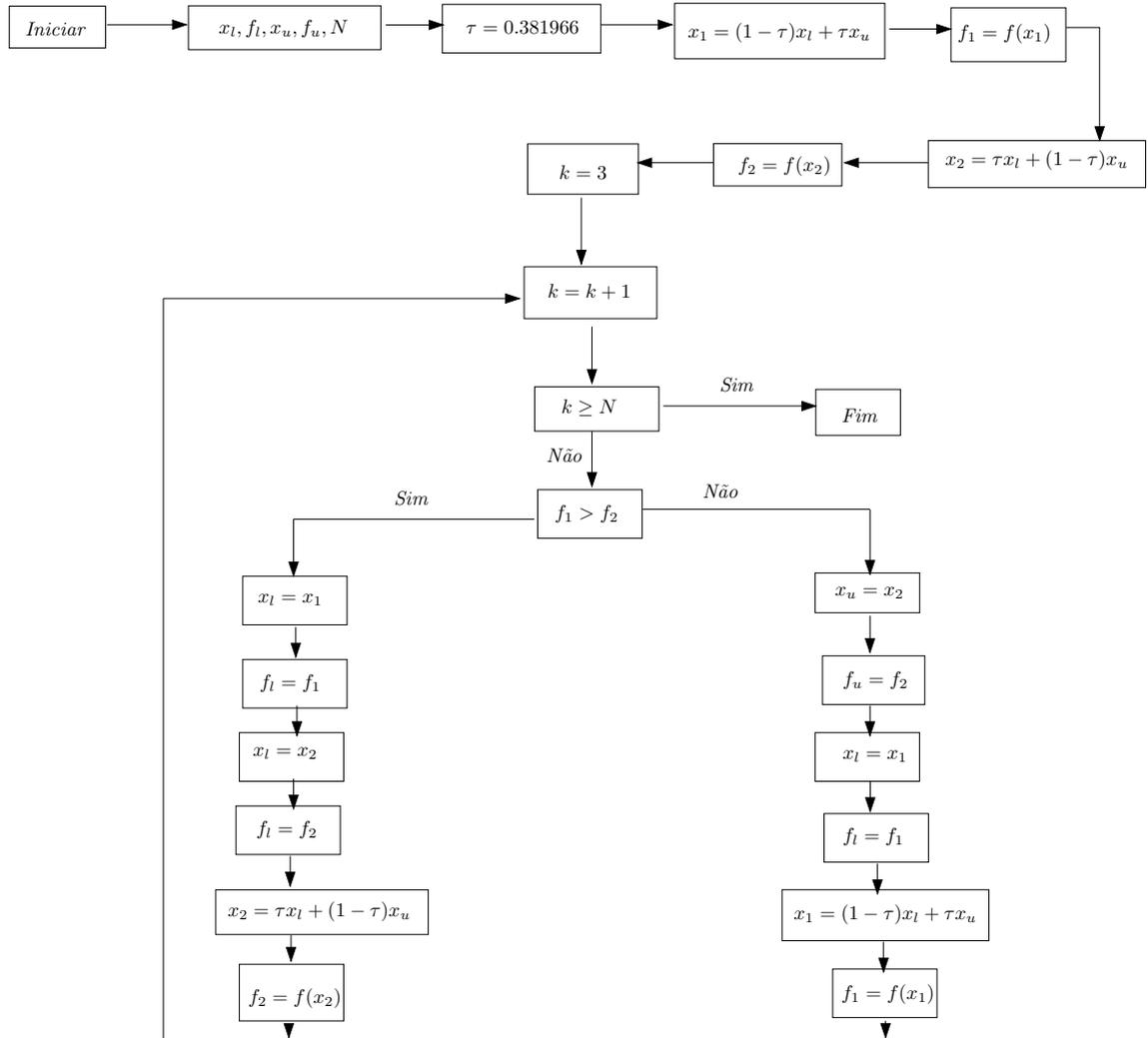


Figura 4.1: Fluxograma para a implementação da seção áurea.

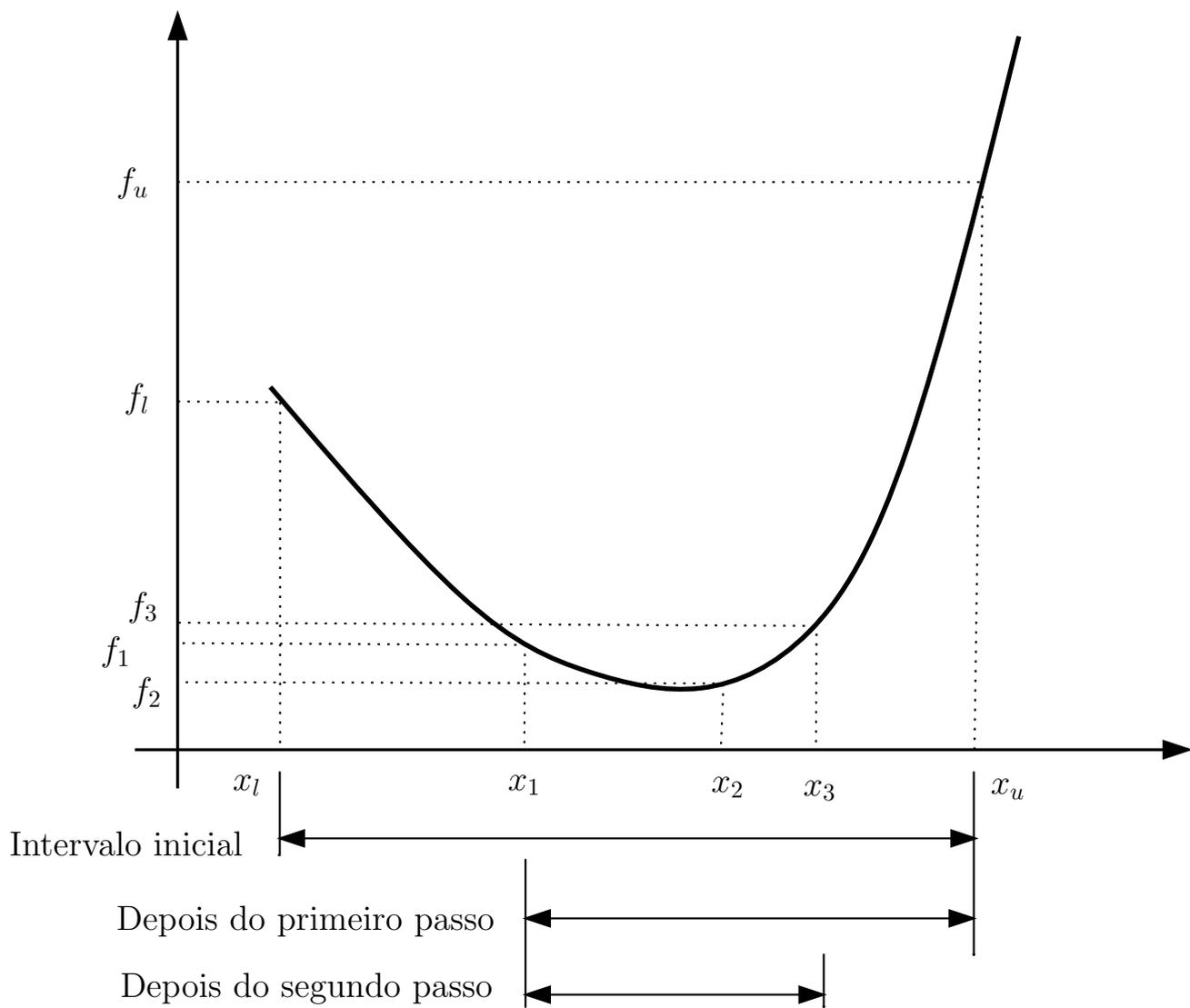


Figura 4.2: O método da seção áurea.

$N$	$\varepsilon$	$N$	$\varepsilon$	$N$	$\varepsilon$
3	1	9	0.05573	15	0.00311
4	0.61803	10	0.03444	16	0.00192
5	0.38197	11	0.02129	17	0.00119
6	0.23607	12	0.01316	18	0.00073
7	0.14590	13	0.00813	19	0.00045
8	0.09017	14	0.00503	20	0.00028

Tabela 4.1: Razão de convergência para o método da seção áurea.

#### 4.1.4 Otimização multi-dimensional: Método Simplex

##### 1. O método simplex básico

O método Simplex (Spendley et al., 1962) é um método seqüencial de otimização que pode ser empregado tanto para maximizar como minimizar uma resposta. Um simplex é uma figura geométrica em  $n$  dimensões, constituído de  $n + 1$  pontos. Cada dimensão corresponde a uma variável a ser otimizada. Um simplex em duas dimensões é um triângulo, em três dimensões é um tetraedro, e assim sucessivamente. O método pode ser estendido para maiores dimensões, mas não será fácil a visualização do simplex. Apesar disto, o método Simplex pode ser aplicado, teoricamente, para a otimização de qualquer número de variáveis.

O procedimento de otimização, no método Simplex, começa pela escolha dos  $n + 1$  pontos onde será feita a avaliação da resposta. Na Figura 4.3 temos um exemplo do processo para o qual a otimização começa com os pontos  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$ . Esses formam um triângulo e através da análise da figura, o ponto  $P_0$  mostra ter a pior resposta dos três. Uma conclusão lógica é que a melhor resposta está na direção oposta a este ponto. Portanto, o simplex é refletido de modo que o ponto  $P_3$ , oposto ao ponto  $P_0$ , seja obtido. Os pontos  $P_1$ ,

$P_2$  e  $P_3$  juntos formam um novo simplex. O procedimento é repetido sucessivamente, descartando-se a pior resposta. Portanto, o objetivo do método sequencial Simplex é forçar o simplex a mover-se para a região de resposta ótima. As decisões requeridas para que isso aconteça constituem as chamadas “regras” do procedimento simplex.

## 2. O método simplex modificado

Em 1965, Nelder e Mead propuseram modificações no procedimento original de movimentação do simplex básico, que permitiu obter um ponto ótimo estacionário com suficiente precisão e clareza, além de permitir um desenvolvimento mais rápido do simplex em direção ao ótimo, originando o denominado Método Simplex Modificado (MSM). A principal diferença do Método Simplex Modificado em relação ao método que lhe deu origem é que podem ser alterados o tamanho e a forma do simplex. As regras de movimentação do método Simplex básico são válidas e a estas foram acrescentadas, por Nelder e Mead, outras que caracterizam o método simplex modificado.

Considera-se inicialmente, a minimização de uma função de  $n$  variáveis, sem restrições.  $P_0, P_1, \dots, P_n$  são os  $(n+1)$  pontos no espaço de  $n$  dimensões definindo o simplex.

Escreve-se  $y_i$  para o valor da função em  $P_i$ , e define-se:

$$y_h = \max(y_i)$$

$$y_l = \min(y_i)$$

A seguir, é definido  $\bar{P}$  como sendo o centróide dos pontos com  $i \neq h$ , e escrevemos  $[P_i P_j]$  como sendo a distância de  $P_i$  até  $P_j$ . A cada estágio do

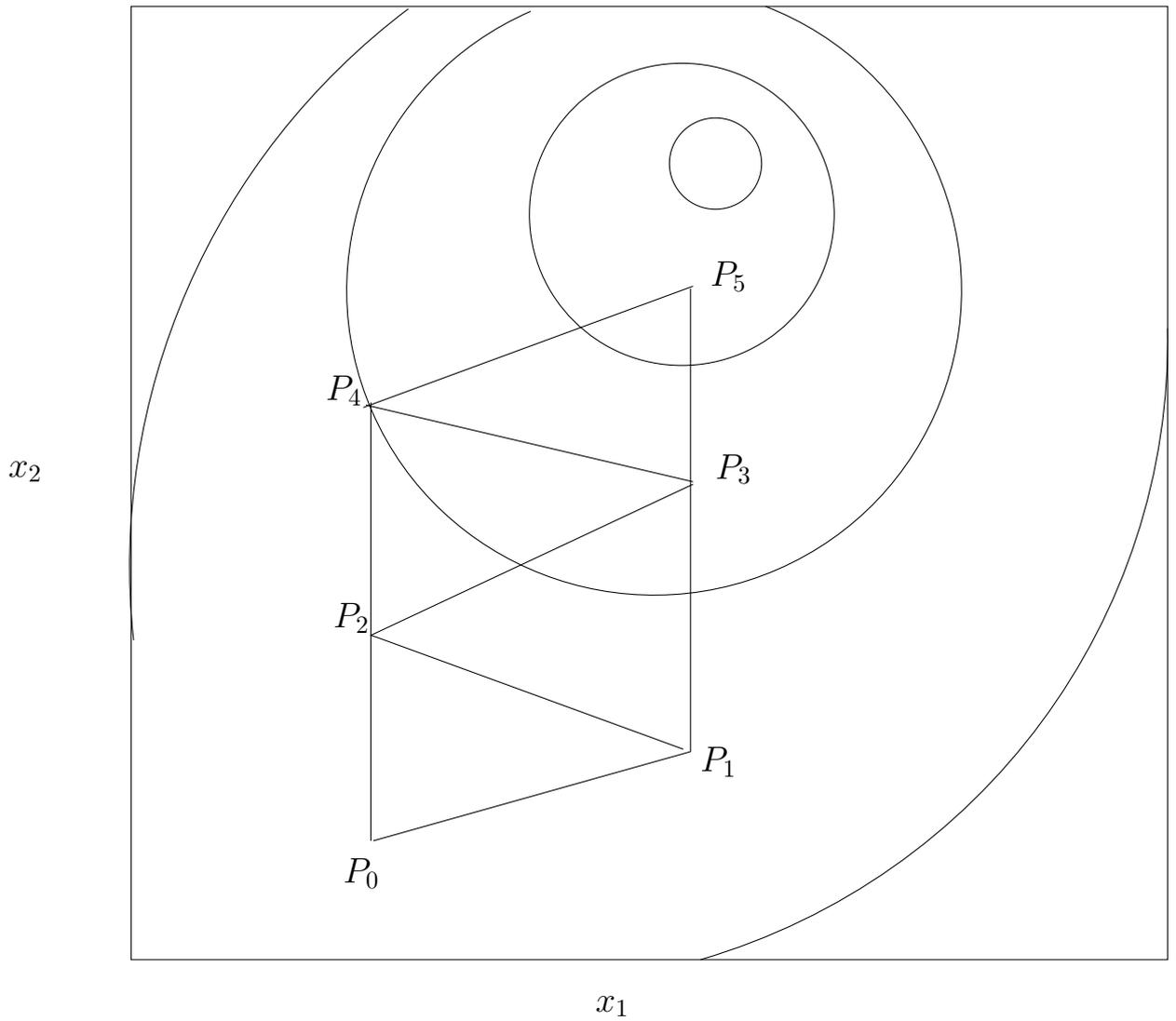


Figura 4.3: Progresso de um simplex bidimensional em direção ao ótimo.

processo  $P_h$  é trocado por um novo ponto, onde são usadas três operações: reflexão, contração e expansão.

A reflexão de  $P_h$  é denotada por  $P^*$ , e suas coordenadas são definidas pela relação:

$$P^* = (1 + \alpha)\bar{P} - \alpha P_h \quad (4.20)$$

onde  $\alpha$  é uma constante positiva chamada de coeficiente de reflexão, de forma que:

$$[P^*\bar{P}] = \alpha[P_h P] \quad (4.21)$$

Se  $y^*$  está entre  $y_h$  e  $y_l$ , então  $P_h$  é trocado por  $P^*$  e começa novamente com um novo simplex.

Se  $y^* < y_l$ , isto é, se a reflexão definiu um novo mínimo, então expande-se  $P^*$  para  $P^{**}$  através da relação:

$$P^{**} = \gamma P^* + (1 - \gamma)\bar{P} \quad (4.22)$$

onde  $\gamma$  é o coeficiente de expansão, o qual é maior que 1, e é a razão entre as distâncias  $[P^{**} P]$  e  $[P^* \bar{P}]$ .

Se  $y^{**} < y_l$ , troca-se  $P_h$  por  $P^{**}$  e reinicia-se o processo. Mas se  $y^{**} > y_l$ , então tem-se uma falha de expansão, e troca-se  $P_h$  por  $P^*$  antes de reiniciar.

Se na reflexão de  $P$  para  $P^*$  encontrar  $y^* > y_i$  para todo  $i \neq h$ , ou seja, se trocando  $P$  por  $P^*$  tornou  $y^*$  o ponto de máximo, então, define-se um novo  $P_h$  no lugar do antigo  $P_h$  ou de  $P^*$ , qual dos dois tiver o valor menor de  $y$ . Em seguida calcula-se  $P^{**}$  a partir da equação:

$$P^{**} = \beta P_h + (1 - \beta)\bar{P} \quad (4.23)$$

onde  $\beta$  é o coeficiente de contração que está entre 0 e 1 e representa a razão entre as distâncias  $[P^{**}\bar{P}]$  e  $[P\bar{P}]$ . Aceita-se  $P^{**}$  no lugar de  $P_h$  e reinicia, a não ser que  $y^{**} > \min(y_h, y^*)$ , ou seja, o ponto contraído é pior que o melhor entre  $P_h$  e  $P^*$ . Para tal falha de contração, troca-se todos os  $P_i$  por  $(P_i + P_l)/2$  e reinicia o processo (Nelder e Mead, 1965).

Como critério de parada, tem-se a restrição

$$\sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2 / n} < \varepsilon \quad (4.24)$$

onde  $\varepsilon$  é um valor pequeno, maior que zero, previamente definido.

O método completo é dado no fluxograma (4.4).

## 4.2 Otimização de estruturas de materiais compósitos

Neste trabalho são usados dois critérios de falha como função objetivo, o critério de Tsai-Hill e o critério de Tsai-Wu. O ângulo da orientação das fibras são as variáveis de projeto para a maximização das forças aplicadas. Usando o programa comercial MatLab, é usado a função `fminbnd` para o caso de otimização unidimensional, onde a variável de projeto é o ângulo  $\theta$  e a função objetivo é o critério de falha de Tsai-Hill e para o caso multi-dimensional é usado a função `fminsearch`, onde as variáveis são os ângulos das direções das fibras  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  para um laminado simétrico e a função objetivo são, ora o critério de Tsai-Hill, ora o critério de Tsai-Wu para efeito de comparação.

A descrição do problema é:

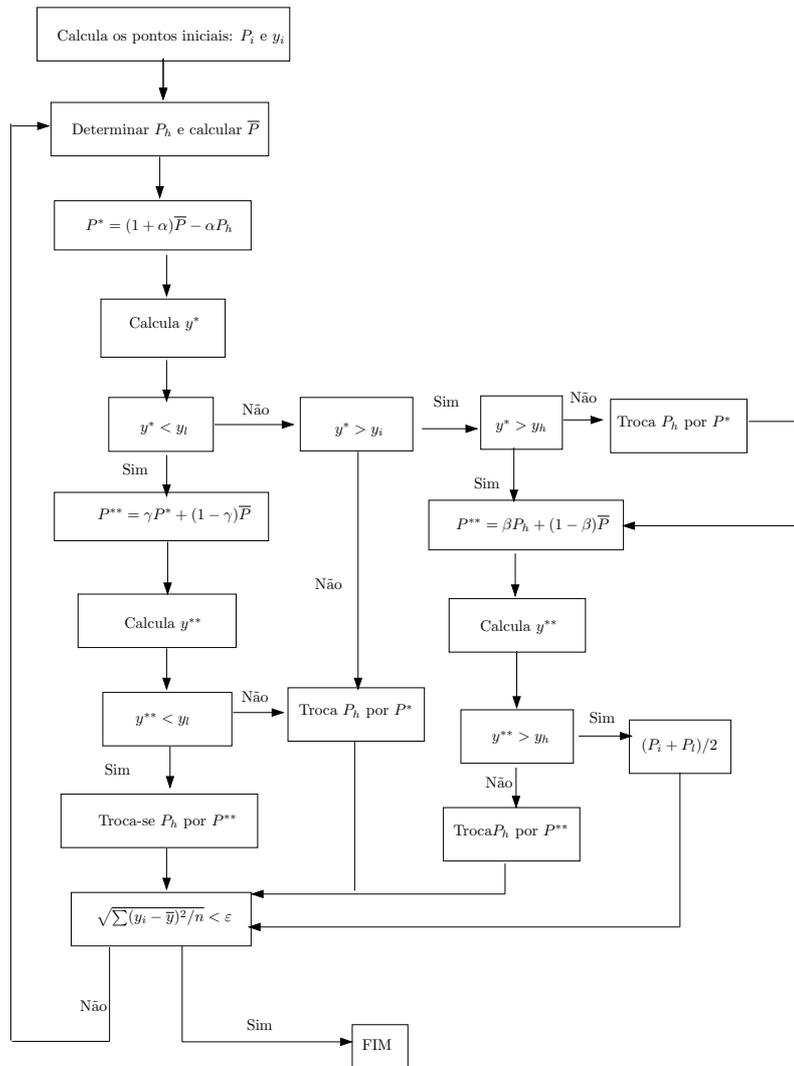


Figura 4.4: Fluxograma para a implementação do simplex modificado.

Minimizar

$$f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \max[f(\theta_1)_{\max}, f(\theta_2)_{\max}, \dots, f(\theta_n)_{\max}] \quad (4.25)$$

onde  $n$  = número de lâminas.

## 4.3 Resultados numéricos

### 4.3.1 Para uma lâmina

Para que se possa avaliar a eficiência do método da seção áurea na otimização da direção das fibras em uma lâmina com fibras dispostas unidirecionalmente serão avaliados dois casos. O primeiro caso é uma lâmina com furo sob tração uniaxial (Figura 4.5) e o segundo caso é uma lâmina com furo sob tração biaxial (Figura 3.11), ambos com os mesmos dados da Seção 3.10.3 e usando o critério de Tsai-Hill. O método de otimização utilizado nestes dois casos é o método da *Seção Áurea* que encontra-se implementado na função *fminbnd* do programa comercial MatLab (Optimization Toolbox, 1990). Os valores iniciais foram  $\theta_l = 0^\circ$  e  $\theta_u = 90^\circ$ . Obteve-se a convergência para o caso 1 após 14 iterações e encontrou-se como orientação ótima das fibras o ângulo  $\theta = 0.0660^\circ$  (Figura 4.7). Para o caso 2 teve a convergência após 13 iterações e encontrou como orientação ótima o ângulo  $\theta = 42.6065^\circ$  (Figura 4.8).

### 4.3.2 Para um Laminado

Considere o laminado mostrado na Figura 3.15, com os mesmos dados e a mesma malha de elementos de contorno da Seção 3.10.4. Com o objetivo de analisar a convergência do método Simplex modificado, implementado

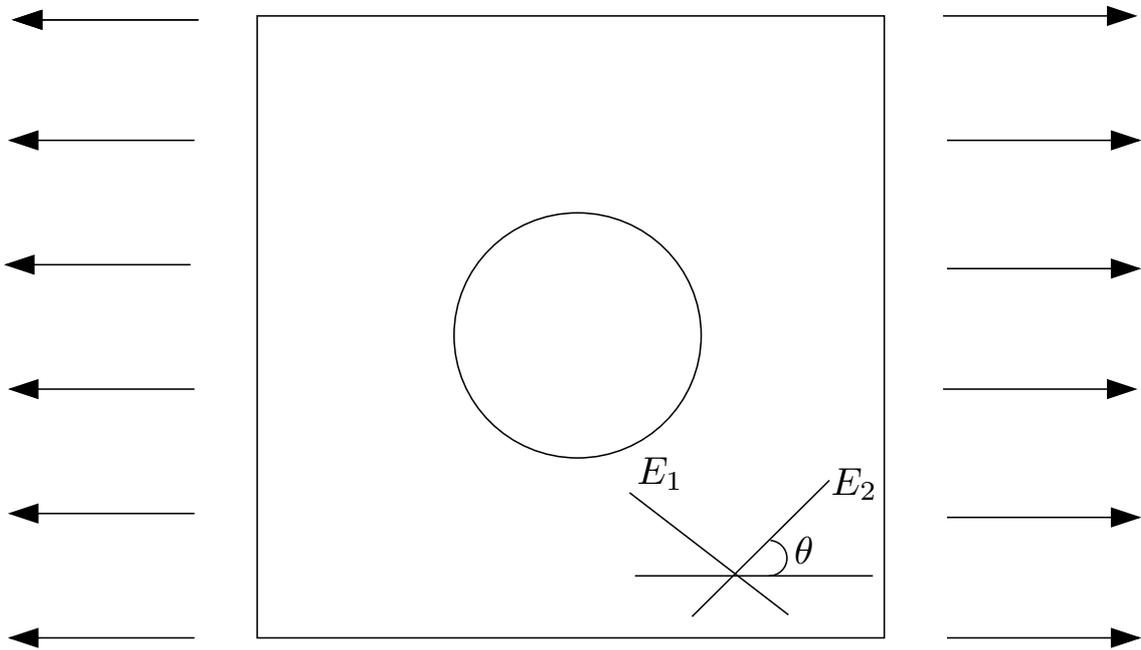


Figura 4.5: Lâmina sob tração uniaxial.

na função `fminsearch` do MatLab (Optimization Toolbox, 1990), os valores ótimos dos ângulos de orientação das fibras foram calculados considerando-se 7 casos (Tabela 4.2). No caso 1 tanto a tolerância de  $x$  quanto a tolerância do valor da função (veja apêndice A) possuem valores pequenos, o que proporciona uma convergência para o mínimo após um número elevado de iterações (55 e 53 para os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu, respectivamente). No caso 2 a tolerância de  $x$  foi aumentada, o que não surtiu efeito no número de iterações, uma vez que a tolerância da função continuou baixa. Aumentando a tolerância da função, no caso 3 e 4, houve uma boa diminuição no número de iterações. Para o caso 5 variou-se a posição do ponto inicial e a convergência para o mínimo se deu após o menor número de iterações (16 e 18 para os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu, respectivamente). No caso 6

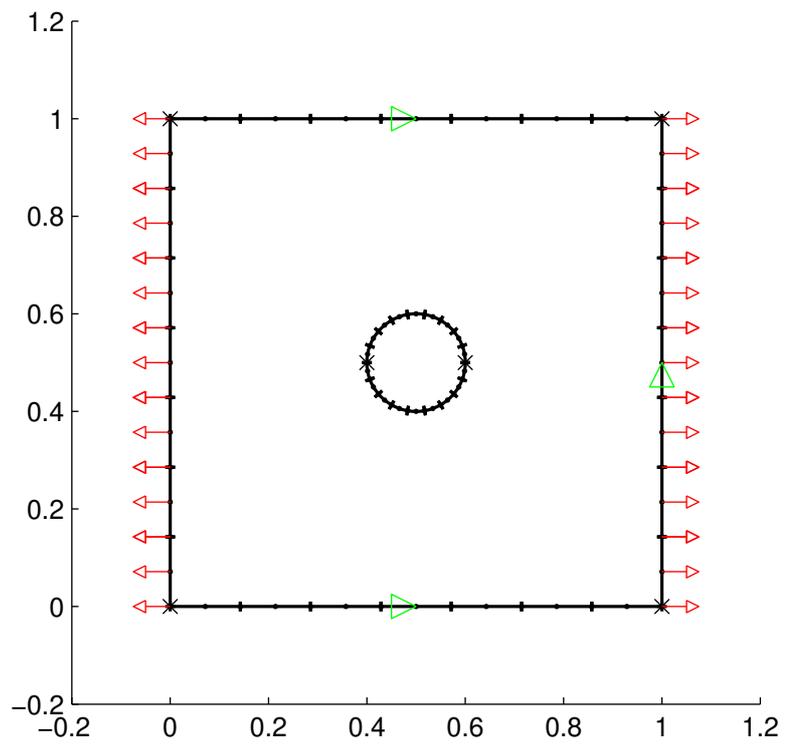


Figura 4.6: Discretização da lâmina.

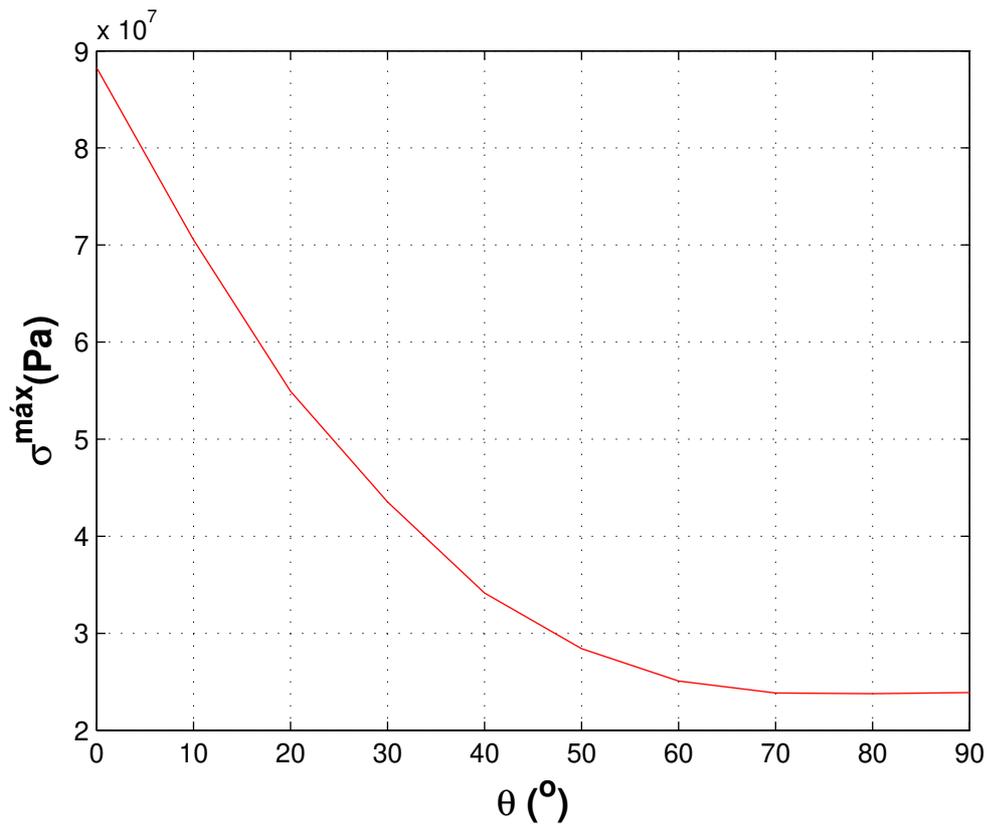


Figura 4.7: Tensão máxima que provoca a falha.

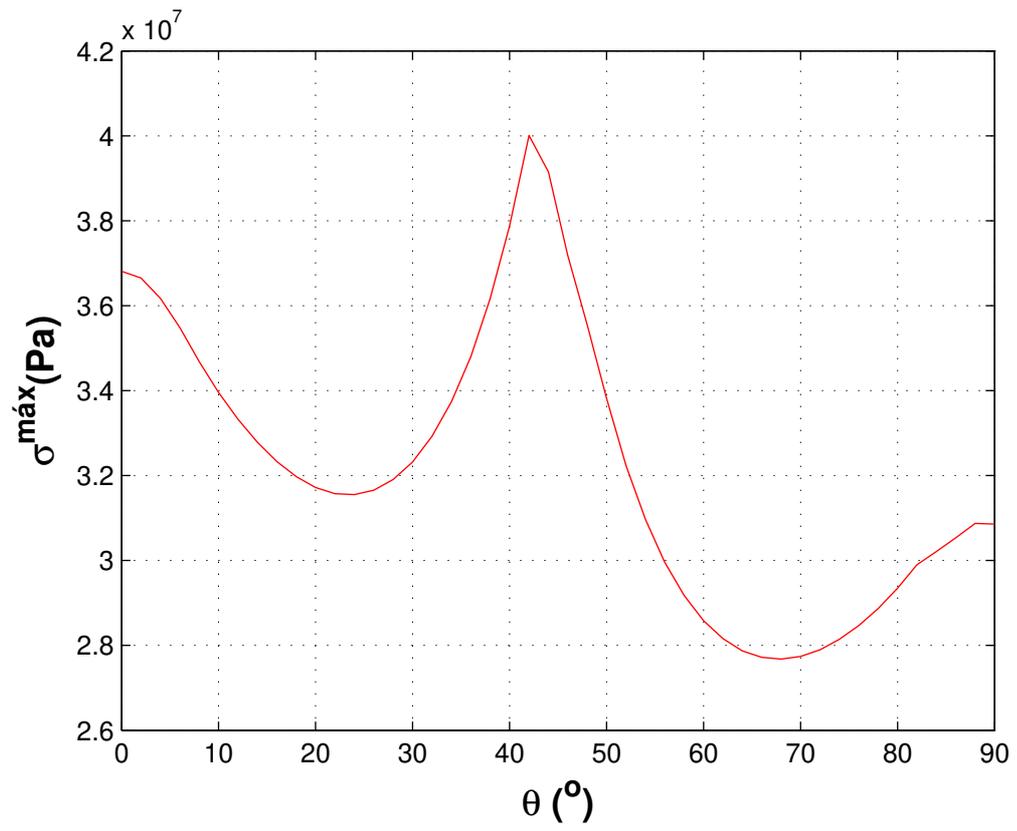


Figura 4.8: Tensão máxima que provoca a falha.

com os valores dos ângulos iniciando em  $\theta_1 = -70$  e  $\theta_2 = 10$  não convergiu para o valor correto porém, se for diminuído o valor da tolerância da função a convergência ocorre, conforme mostrado no caso 7.

Da análise do parágrafo anterior conclui-se que o número de iterações é fortemente dependente das tolerâncias e também da posição do ponto inicial. Entretanto, tolerâncias excessivamente grandes podem conduzir a valores errados de mínimos. Pelos resultados obtidos neste problema, sugere-se que os valores máximos para as variáveis TolX e TolFun sejam 1 e  $10^{-3}$ , respectivamente. Estes valores apresentaram resultados satisfatórios também para outros laminados cujos resultados não são mostrados neste trabalho.

As Figuras 4.9 e 4.10 mostram os caminhos percorridos pelo método de otimização para os casos 1 e 5, respectivamente, utilizando o critério de Tsai-Wu.

Caso	Valores de entrada				Tsai-Hill			Tsai-Wu		
	$\theta_1^o$	$\theta_2^o$	TolX	TolFun	Número de iterações	$\theta_1^o$	$\theta_2^o$	Número de iterações	$\theta_1^o$	$\theta_2^o$
1	70	10	$10^{-1}$	$10^{-5}$	55	46,7	-46,7	53	44,4	-44,4
2	70	10	1	$10^{-5}$	55	46,7	-46,7	53	44,4	-44,4
3	70	10	1	$10^{-3}$	40	46,9	-46,5	32	44,5	-44,5
4	70	10	1	$10^{-1}$	35	46,4	-47,0	31	44,1	-43,6
5	-70	70	1	$10^{-1}$	16	-46,7	46,8	18	-44,5	43,8
6	-70	10	1	$10^{-1}$	10	-61,18	11,50	11	-55,1	12,6
7	-70	10	1	$10^{-3}$	44	-46,8	46,4	40	-44,2	44,4

Tabela 4.2: Comparação entre os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu.

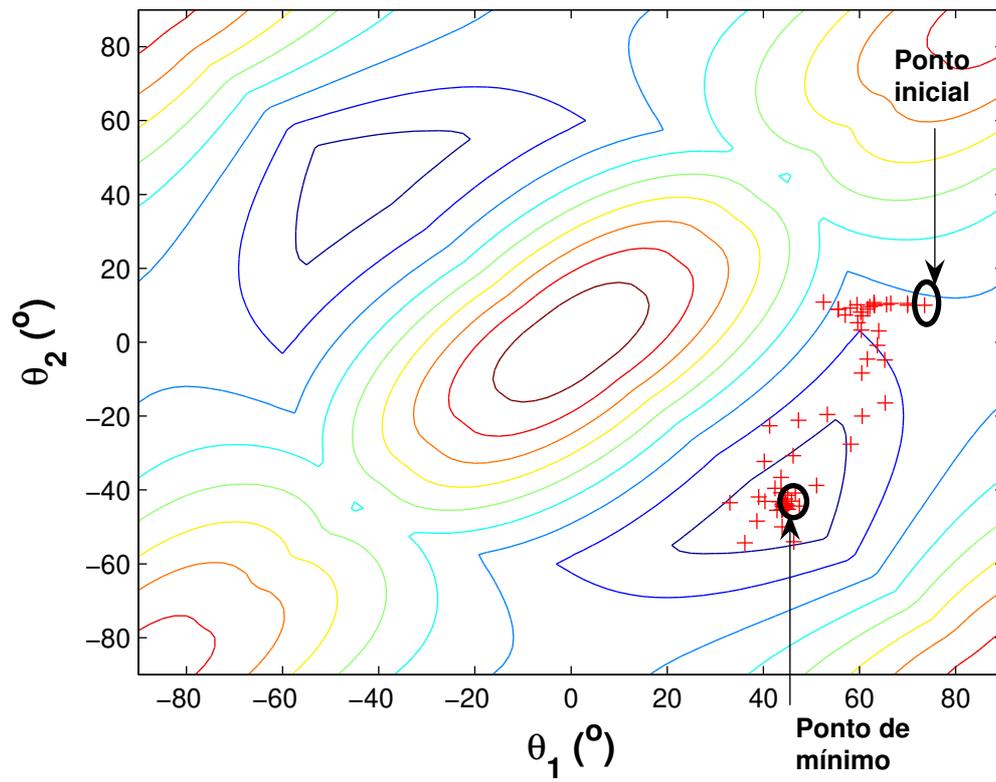


Figura 4.9: Caminho percorrido pelo método de otimização partindo de  $\theta_1 = 70^\circ$  e  $\theta_2 = 10^\circ$ .

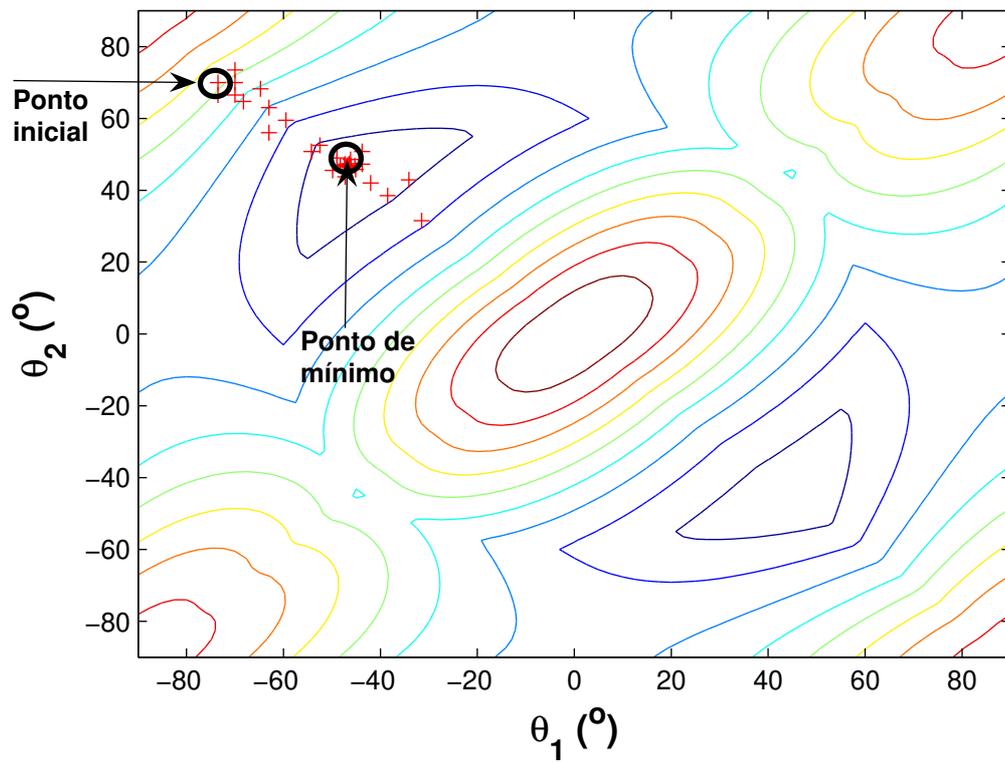


Figura 4.10: Caminho percorrido pelo método de otimização partindo de  $\theta_1 = -70$  e  $\theta_2 = 70$ .

# Capítulo 5

## Conclusões

### 5.1 Conclusões finais

Neste trabalho foi apresentada uma formulação do método dos elementos de contorno para a análise de critérios de falha em materiais anisotrópicos submetidos a esforços no plano. Foram usados elementos de contorno quadráticos contínuos na discretização das lâminas.

Os valores dos critérios de falha foram calculados em todos os pontos do contorno em cada uma das lâminas que constitui o laminado. Como o valor crítico dos critérios de falha ocorre no contorno, se torna desnecessário o uso de pontos internos. Foi mostrado que os principais critérios de falha (Tsai-Hill e Tsai-Wu) apresentam pequenas discordâncias quanto a valores, dependendo das propriedades dos materiais e das condições de contorno, mas em todos os casos analisados houve uma boa concordância entre os critérios quanto aos ângulos ótimos para o laminado.

Os métodos de otimização utilizados, que não exigem o cálculo de gradientes, se mostraram adequados para a busca dos ângulos ótimos, convergindo após poucas iterações. A função objetivo foi dada pelo valor máximo do

critério de falha, considerando todas as lâminas.

## 5.2 Proposta para trabalhos futuros

Ficam como proposta para trabalhos futuros:

- Otimização da espessura das lâminas e, com isso, a minimização do peso da estrutura.
- Usar métodos de otimização que necessitam do cálculo dos gradientes.
- Otimização inteira, com variáveis discretas, por exemplo, método do Algoritmo Genético e Branch and Bound .
- Estender a formulação para placas e outros tipos de estruturas.

# Referências

- Agarwal, B. D. e Broutman, L. J. (1990). *Analysis of performance of fiber composites*. John Wiley and Sons Inc., New York.
- Albuquerque, E. L. e Sollero, P. (1998). The boundary element method applied to transient dynamic anisotropic problems. In Kassab, A. J., Brebbia, C. A., e Chopra, M., editors, *Proc. Boundary Element Method XX*, pages 617–624, Orlando - USA.
- Albuquerque, E. L., Sollero, P., e Aliabadi, M. H. (2002). The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials. *International Journal of Solids and Structure*, 39:1405-1422.
- Albuquerque, E. L., Sollero, P., Fedelink, P. (2003). Dual reciprocity boundary element method in Laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems. *Computers and Structures*, 81: 1707-1713.
- Albuquerque, E. L., Sollero, P., e Fedelink, P. (2003). Free vibration analysis of anisotropic material structures using the boundary element method. *Engineering Analysis with boundary element*, 27: 977-985.
- Albuquerque, E. L., Sollero, P., e Aliabadi, M. H. (2004). Dual boundary ele-

- ment method for anisotropic dynamic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59: 1187-1205.
- Bazarra, M.S, Sherali, H.D e Shetty, C.M. (1993). *Nonlinear Programming - theory and algorithms*. John Wiley and Sons Inc., New York.
- Brebbia, C. e Dominguez, J. (1989). *Boundary Element an Introductory Course*. Computation Mechanics Publications, Southampton, Boston, second edition.
- Brighenti, R. (2005). Fibre distribution optimisation in fibre-reinforced composites by a genetic algorithm. *Composite Structures*, 71:1–15.
- Daniel, I.M e Ishai, O. (1993). *Engineering mechanics of composite material*. Oxford University Press, New York.
- Deb, A. (1996). Boundary elements analysis of anisotropic bodies under thermo mechanical body force loadings. *Computers and Structures*, 58:715–726.
- Dominguez, J. (1993). *Boundary elements in dynamics*. Computational Mechanics Publication, Southampton, Boston.
- Farshi, B. e Herasati, S. (2005). Optimum weight design of fiber composite plates in flexure based on a two level strategy. *Composites Science and Technology*, 58: 571–589.
- Flanagan, G. e Palazotto, A.N. (1986). Composite laminate optimization program suitable for microcomputers. *Composite Structures*, 22: 995-1009.

- Fukunaga, H. e Vanderplaats, G.N. (1991). Strength optimization of laminated composites with respect to layer thickness and/or layer orientation angle. *Composite Structures*, 40:1429–1439.
- Gibson, R.F. (1994). *Principles of composite material mechanics*. McGraw-Hill, New York.
- Gouvêa, A. R., Albuquerque, E. L. e Serpa, A.L. (2005). *Otimização da direção das fibras em materiais compósitos unidirecionais*. In: Dincon (4o Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações), Bauru, Brasil.
- Gouvêa, A. R., Albuquerque, E. L. e Serpa, A.L. (2005). *Otimização estrutural de compósitos laminados simétricos*. In: Cilamce (Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering), Guarapari, Brasil.
- Gurdal, Z. , Haftka, R. T. e Hajela, P. (1998). *Design and optimization of laminated composite materials*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1998.
- Haftka, R. T e Gurdal, Z. (1991). *Elements of structural optimization*. Dordrech, Kluwer, third edition.
- Haftka, R. T e Walsh, J.L. (1992). Stacking-sequence optimization for buckling of laminated plates by integer programming. *AIAA Journal*, vol.30, nº3.
- Hill, R. (1948). A theory of the Yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society*, 193: 281–297.

- Kane, J. H. (1993). *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice Hall, New Jersey.
- Kere, P., Lylyb, M. e Koskia, J. (2003). Using multicriterion optimization for strength design of composite laminates. *Composite Structures*, 62:329-333.
- Kim, C. W., Hwang, W., Park H. C., e Han, K. S.(1997). Stacking sequence optimization of laminated plates. *Composite Structures*, 39:283-288.
- Kogl, M. e Gaul, L. (2000). A boundary element method for transient piezoelectric analysis. *Engn. Anal. with Boundary Elements*, 24:591–598.
- Lagarias, J.C., Reeds, J. A. , Wright,M. H. e Wright, P. E.(1998). Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, 9:112–147.
- Lekhnitskii, S. G. (1963). *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Holden-Day, San Francisco.
- Lekhnitskii, S. G. (1968). *Anisotropic plates*. Gordon and Breach, New York.
- Maksimovi, S. (1990). Some computational and experimental aspects of optimal design process of composite structures. *Composite Structures*, 16:237-258.
- Nelder, J.A.; Mead,D.R. (1965). A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7: 308–312.
- Optimization Toolbox User's Guide* (1990 - 2004). MathWorks, Inc.

- Park, J. H., Hwang, J. H., Lee, C. S. e Hwang, W. (2001). Stacking sequence design of composite laminates for maximum strength using genetic algorithms. *Composite Structures*, 52:217-231.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A., e Wrobel, L. C. (1992). *The dual reciprocity boundary element method*. Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston.
- Ruggiero, M.A.G. e Lopes, V.L.R. (1988). *Cálculo numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. McGraw-Hill, São Paulo.
- Sadagopan, D. e Pitchumani, R. (1998). Application of genetic algorithms to optimal tailoring of composite materials. *Composites Science and Technology*, 58:571–589.
- Schmit, L.A. e Farshi, B. (1973). Optimum laminate design for strength and stiffness. *J. Numerics Methods Engenering*, 7: 519–536.
- Schmit, L.A. e Farshi, B. (1977). Optimum design of laminated fibre composite plates. *J. Numerics Methods Engenering*, 11: 623–640.
- Sollero, P. e Aliabadi, M. H. (1993). Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method. *Int. J. of Fracture*, 64:269–284.
- Splendey, W.; Hext, G. R.; Himsworth, F. R. (1962). Sequential application of simplex designs in optimization and evolutionary operation. *Technometrics*, 4: 441–461.

- Stroud, A. H. e Secrest, D. (1966). *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey edition.
- Telles, J. C. F. (1987). A self adaptative coordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *Int. J. for Numerical Methods in Engn.*, 24:959–973.
- Tsau, L. e Liu, C.(1995). A comparison between two optimization methods on the stacking sequence of fiber-reinforced composite laminate. *Computers and Structures*, 55: 515–525.
- Tsai, S. W. (1968). Strength theories of filamentary structures, in fundamental aspects of fiber reinforced plastic composites. Conference Proceedings, R.T. Schwartz y H.S. Schwarz (Editors), Dayton, Ohio, 24-26 May 1966, Wyle Interscience, New York, 1968, pp. 3-11.
- Tsai, S.W., Wu, E.M. (1971). A general theory of strength test for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, pages 246-256.
- Vanderplaats, G.N. (1999). *Numerical optimization techniques for engineering desing*. Vanderplaats Research and Development, Colorado Springs, 3<sup>rd</sup> edition.
- Walker, M.e Smith, R. E. (2003). A technique for the multiobjective optimisation of laminated composite structures using genetic algorithms and finite element analysis. *Composite Structures*, 62:123-128.
- Walker, M., Reiss, T. e Adali, S. (1997). Optimal design of symmetrically laminated plates for minimum deflection and weight. *Composite Structures*, 39:337-346.

# Apêndice - A

## A.1 - Descrição do fminbnd

Encontra o mínimo de uma função  $f(\mathbf{x})$  de uma variável em um intervalo fixo, onde  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  são escalares e  $f(\mathbf{x})$  é uma função que retorna um escalar. Somente dá soluções locais e usa somente variáveis reais. A função fminbnd é baseada no *Método da Seção Áurea*.

## A.2 - Descrição do fminsearch

Fminsearch encontra um mínimo de uma função  $f(\mathbf{x})$  multivariável sem restrições, ou seja:

$$\min f(x)$$

onde  $\mathbf{x}$  é um vetor,  $\mathbf{x}_0$  pode ser um escalar, vetor ou matriz e  $f(\mathbf{x})$  é uma função que retorna um escalar.

A busca inicia no ponto  $\mathbf{x}_0$  e encontra um mínimo local. Pode somente dar soluções locais e somente minimiza funções reais. A função fminsearch usa o *Método Simplex de Procura*.

## A.3 - Sintaxe

`x=fminsearch('myfun',x0, options)`

onde “myfun” é o nome da função a ser minimizada ou maximizada,  $\mathbf{x}_0$  é o ponto inicial,.

## A.4 - Argumentos de saída:

*Exitflag:*

Número inteiro que descreve as condições de saída:

$> 0$  a função converge para a solução  $x$ .

$= 0$  o número máximo de funções avaliadas ou iterações estão excedidos.

$< 0$  a função não converge para a solução.

*Output*: Estrutura de dados heterogênea que contém informação sobre a otimização. Os campos da estrutura são:

*Iterations*: número inteiro de iterações.

*FunCunt*: número de funções avaliadas.

*Algorithm*: nome do algoritmo utilizado.

## **A.5 - Parâmetros que podem ser variados:**

*Display*: “off” sem display na saída; “iter” mostra display a cada iteração; “final” mostra display somente no final; “notify” (default) mostra somente se a função não converge.

*TolX*: determina a tolerância de  $\mathbf{x}$ .

*MaxIter*: número máximo de iterações permitida.

*TolFun*: tolerância do valor da função (Optimization Toolbox, 1990).