

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESCOAMENTO ENTRE CILINDROS
CONCÊNTRICOS COM PARTE POROSA

063/82

Trabalho apresentado à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia de Campinas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

CAMPINAS, 1982

MAURÍCIO ARAUJO ZANARDI

Eng. Mecânico, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP

ESCOAMENTO ENTRE CILINDROS
CONCÊNTRICOS COM PARTE POROSA

Orientador: Prof. Dr. CHANG-YU LIU

Trabalho apresentado à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia de Campinas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

CAMPINAS, 1982

A meus pais

À minha esposa

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor CHANG-YU LIU, pela incansável orientação e incentivo, sem o que a concretização deste trabalho não seria possível.

Aos colegas professores e amigos da FEG e UNICAMP, que direta ou indiretamente contribuíram para que o mesmo fosse realizado.

À dedicada secretária Sra. Zélia de Araujo Pedran pela inestimável colaboração.

Aos desenhistas Mauro P. Peres e Gilson B. Reis.

Aos meus pais, Hélio e Maria Pureza.

À minha esposa, Cecília.

RESUMO

Este trabalho estuda o escoamento entre dois cilindros concêntricos com parte do espaço entre eles preenchido com meio poroso. Os escoamentos em regime permanente e não permanente são estudados usando-se a equação de Darcy generalizada.

No escoamento em regime permanente é considerado que o cilindro interno gira com velocidade angular constante, ω , e são determinados os perfis de velocidade, pressão e temperatura.

Para o escoamento em regime não permanente, são determinados os perfis de velocidade quando todo o espaço entre os cilindros contém um meio poroso e o cilindro interno é subitamente acelerado e um gradiente de pressão constante é abruptamente aplicado na direção z .

ABSTRACT

This work studies the flow between two concentric cylinders with some part of the space filled with porous medium. Both steady and unsteady cases are considered by using the generalized Darcy equation.

The steady case considers that the inner cylinder rotates with constant angular velocity, ω , and the velocity, pressure and temperature profiles are determined.

In the unsteady case, the velocity profiles are determined when all the space between two concentric cylinders is filled with porous medium and the inner cylinder is suddenly accelerated and a constant pressure gradient is abruptly applied in z-direction.

Í N D I C E

Nomenclatura	viii
Lista de figuras	xiii
CAPÍTULO I - Introdução	1
CAPÍTULO II - As Equações Governantes	4
2.1 Equação da continuidade	9
2.2 Equação da conservação da quantidade de movimento	10
2.3 Equação da conservação da energia	13
CAPÍTULO III - Resolução das equações	18
3.1 Modelo físico	18
3.2 Escoamento em regime permanente	20
3.2.1 Perfis de velocidade	20
3.2.2 Distribuição de pressão	30
3.2.3 Tensão de cisalhamento	32
3.2.4 Distribuição de temperatura	33
A. Descrição do Problema	35
B. Descrição do método	
3.2.5 Transferência de calor	38
3.3 Escoamento em Regime não Permanente	39
CAPÍTULO IV - Análise dos Resultados	49
4.1 Perfis de velocidade e distribuição de pressão	49
4.1.1 Escoamento em regime permanente	49

A. Perfis de velocidade na direção θ	49
B. Perfis de velocidade na direção z	50
C. Distribuição de pressão	55
D. Tensão de cisalhamento e torque resistente	56
4.1.2 Escoamento em regime não permanente	56
4.2 Perfis de temperatura	61
4.3 Transferência de calor	64
CAPÍTULO V - Conclusões	69
APÊNDICE A	70
BIBLIOGRAFIA	76

NOMENCLATURA

A	área
a	raio do cilindro interno
b	raio da interface entre as regiões de fluido puro e porosa
c	calor específico do fluido
c	raio do cilindro externo
E_{ij}	tensor de tensões do fluido
$E_k = \frac{(wa)^2}{C\Delta T}$	nº de Eckert
E_T	energia total
\vec{F}_B	forças de corpo
\vec{F}_D	força de Arrasto de Atrito
$(\vec{F})_S$	força total aplicada sobre o sistema
\vec{F}_s	forças de superfície
g	aceleração gravitacional
h	coeficiente de transmissão de calor por convecção
I_0, I_1	funções de Bessel modificadas de 1ª. espécie e de ordens 0 e 1 respectivamente.
J_0, J_1	funções de Bessel de 1ª. espécie e de ord

	dens 0 e 1 respectivamente.
K	permeabilidade do meio poroso
K_0, K_1	funções de Bessel modificadas de 2a. espécie e de ordens 0 e 1 respectivamente.
k_f, k	condutividade térmica do fluido
k_s	condutividade térmica dos sólidos
k^*	condutividade térmica efetiva do meio poroso
L	comprimento do cilindro interno
\vec{M}	vetor quantidade de movimento
m	massa
N	grandeza associada ao sistema
$Nu = \frac{ha}{k}$	nº de Prandtl no meio poroso
p	pressão
p_{1R}	pressão adimensional na direção radial
p_{1z}	pressão adimensional na direção axial
Q	calor adicionado ao sistema
\dot{q}	fluxo de calor
$R = \frac{r}{a}$	coordenada adimensional
$Re = \frac{\rho Va^2}{\mu L} \frac{dp_{1z}}{dz_1}$	nº de Reynolds

$z_1 = \frac{z}{L}$	coordenada adimensional
α_n	raízes do polinômio
	$J_d(\alpha) Y_d(\frac{c}{a} \alpha) - J_d(\frac{c}{a} \alpha) Y_d(\alpha) = 0$ quando $d = 1$
γ_n	raízes do polinômio acima quando $d = 0$
$\Delta T = T_2 - T_0$	diferença de temperatura entre o cilindro externo e a temperatura de referência
Δt	intervalo de tempo
ϵ	porosidade do meio poroso
η	grandeza específica associada ao sistema
θ	temperatura adimensional na região de fluido puro
θ^*	temperatura adimensional no meio poroso
μ	viscosidade dinâmica do fluido
ν	viscosidade cinemática do fluido
ρ_f, ρ	densidade do fluido
ρ_s	densidade do sólido
ρC	capacidade térmica do fluido
$(\rho C)^*$	capacidade térmica do meio poroso
ϕ	função de dissipação
$\sigma = \frac{a^2}{K}$	fator de permeabilidade

T_f, T	temperatura do fluido
T_s	temperatura do sólido
T_p	temperatura no meio poroso
T_0	temperatura de referência
T_1	torque resistente no cilindro interno
T_2	temperatura no cilindro externo
t	tempo
U	velocidade adimensional na direção θ no interior do meio poroso
u	velocidade adimensional na direção θ na região de fluido puro
V	volume do sistema
\vec{V}_f, \vec{V}	vetor velocidade do fluido
\vec{V}_s	vetor velocidade dos sólidos
v_r, v_θ, v_z	componentes da velocidade do fluido nas direções r, θ, z .
$v_{rp}, v_{\theta p}, v_{zp}$	componentes da velocidade do fluido no interior do meio poroso nas direções r, θ e z .
w	velocidade adimensional na direção z no interior do meio poroso
ω	velocidade adimensional na direção z na região de fluido puro

$\tau_{r\theta}$

tensão de cisalhamento

ω

velocidade angular do cilindro interno

LISTA DE FIGURAS

2.1	Sistema e volume de controle	4
3.1	Esquema do modelo físico	18
4.1	Perfis de velocidade na direção θ	51
4.2.a	Perfis de velocidade na direção z	52
4.2.b	Perfis de velocidade na direção z	53
4.3	Distribuição de pressão na direção radial	55
4.4	Tensão de cisalhamento em função de σ	57
4.6	Perfis de velocidade em regime não permanente na direção θ	59
4.7	Perfis de velocidade em regime não permanente na direção z	60
4.8	Influência do parâmetro σ na distribuição de tempe- ratura	62
4.9	Influência do parâmetro $P_n \times E_k$ na distribuição de temperatura	
4.10	Influência de relação k/k_1^* na distribuição de tem- peratura	66
4.11	Variação da temperatura do cilindro interno com o valor de σ	67
4.12	Variação do número de Nusselt com o parâmetro σ .	68

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Escoamentos em meios porosos têm importantes aplicações em hidrologia, prospecção de petróleo, engenharia agrícola, hidrodinâmica da lubrificação, etc.

Escoamentos de diferentes fluidos em vários tipos de meios porosos são estudados utilizando-se a lei clássica de Darcy, que declara que a velocidade do fluido no meio poroso é proporcional ao gradiente de pressão. Esta lei, entretanto, falha ao explicar o fenômeno que ocorre em meios altamente porosos nos quais a tensão viscosa é capaz de produzir escoamento perto da superfície mesmo na ausência de gradiente de pressão. Para estes casos, deve-se usar a lei de Darcy generalizada proposta por Brinkman [1] e que leva em consideração os efeitos da tensão viscosa. Tam [2] demonstrou analiticamente esta lei quando estudou o escoamento, com baixo número de Reynolds, passando através de um aglomerado de esferas mas, devido à imposição de serem baixas velocidades, não foram incluídos os termos de inércia.

Yamamoto e Yoshida [3] analisaram o escoamento através de corpos porosos, Narasimhacharyulu e Ramacharyulu [4] determinaram o perfil de velocidade para o escoamento permanente entre cilindros concêntricos com baixa rotação e com o espaço entre eles totalmente preenchido com meio poroso, e Dev Sarma [5] determinou o perfil de velocidade em um escoamento sobre um ci

lindro horizontal circundado por meio poroso; todos eles usando a lei de Darcy generalizada.

Uma solução exata, para o escoamento não permanente de um fluido viscoso em um anel poroso, foi apresentada por Padmabham [6] sendo que, para determinação desta solução, foram usadas as equações de Navier-Stokes sem, entretanto, ser levado em consideração o termo de Darcy, impondo somente a injeção e sucção de fluido através das paredes do anel.

Górla [7] estudou a distribuição de temperatura em mancais porosos de escora, considerando o calor gerado, internamente ao mancal, pela rotação do eixo e injeção de fluido mas considerou a camada porosa muito delgada e não incluiu seus efeitos neste estudo.

Neste trabalho, são feitas as deduções das equações de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia térmica para o escoamento em meios porosos. Estas deduções foram incluídas por não terem sido encontradas em nenhum dos artigos pesquisados e pela existência de artigos que trazem a equação de quantidade de movimento escrita de formas diferentes. Após as deduções são feitas as comparações entre as equações encontradas e as equações destes artigos.

Em seguida, usando as equações de conservação da massa e da quantidade de movimento deduzidas, combinadas com as equações de Navier-Stokes, é determinada uma solução exata para o perfil de velocidades do escoamento, em regime permanente, entre cilindros concêntricos, com parte do espaço entre eles preenchida com meio poroso quando o cilindro interno gira com velocidade angular, ω , constante. Esta solução satisfaz as

condições de não deslizamento nas paredes sólidas e de continuidade da velocidade na interface entre as regiões onde só há fluido e a porosa.

De posse da solução do perfil de velocidades, encontramos a distribuição de pressões na direção radial e analisamos os efeitos da permeabilidade do meio poroso nas soluções encontradas.

O trabalho apresenta, também, os perfis de velocidade para o escoamento em regime não permanente, quando toda a região entre os cilindros está preenchida com meio poroso ou quando a região não porosa é muito pequena e seus efeitos possam ser desconsiderados.

Através de uma solução numérica da equação da energia térmica, utilizando o método das diferenças finitas, obtemos a distribuição radial de temperaturas devido à geração calor pela dissipação viscosa. Esta solução satisfaz a condição de continuidade do fluxo de calor na interface entre a região onde só há fluido e a região porosa, sendo considerada conhecida a temperatura no cilindro externo e que não há fluxo de calor do fluido para o cilindro interno.

Com todas as soluções obtidas, podemos examinar a influência dos diversos parâmetros que surgem no processo de adimensionalização das equações envolvidas e que determinam o comportamento destas soluções.

Os resultados aqui encontrados, podem ser aplicados no estudo da hidrodinâmica da lubrificação de mancais porosos.

CAPÍTULO II

AS EQUAÇÕES GOVERNANTES

Vamos considerar, no instante t , uma certa massa de fluido contida no sistema cuja fronteira está indicada pela linha tracejada na figura (2.1). Consideremos também, um volume de controle fixo em relação ao sistema de eixos de referência, que coincide com o sistema no instante t . No instante $t + \Delta t$, o sistema terá se deslocado um pouco pois cada partícula move-se com velocidade associada à sua direção.

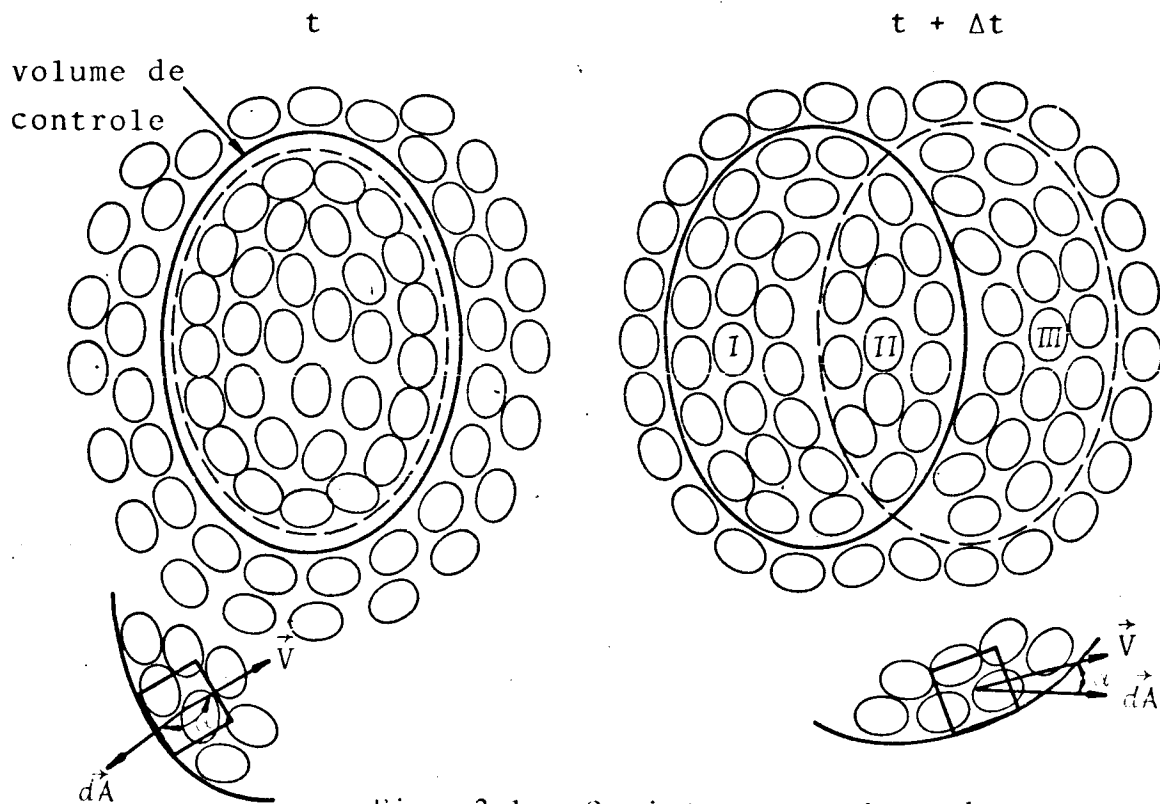


Fig. 2.1 O sistema e volume de controle

Seja N o valor de alguma grandeza associada ao sistema no instante t e η o valor desta grandeza por unidade de massa. A definição de η , que é a propriedade geral intensiva, será:

$$\eta = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta m} = \frac{dN}{dm}$$

e então, a propriedade N será:

$$N = \int_S \eta \, dm$$

onde S é o sistema.

Como a densidade, ρ , é definida por $\rho = \frac{dm}{dV}$,

$$N = \int_V \eta \rho \, dV \quad (1)$$

onde V é o volume do sistema. Devido à existência de partículas sólidas, o fluido não ocupa sozinho todo o volume do sistema por isso, temos que modificar a equação (1) e escrevê-la na forma:

$$N = \int_V [\eta_f \epsilon \rho_f + (1 - \epsilon) \rho_s \eta_s] \, dV \quad (2)$$

onde ρ_f e ρ_s são as densidades do fluido e do sólido respectivamente, η_s é a propriedade intensiva associada ao sólido, η_f é esta propriedade associada ao fluido e ϵ é a porosidade do meio definida como sendo a razão entre o volume de vazios e o volume total.

No instante $t+\Delta t$, o sistema constitui-se dos volumes II e III enquanto que no instante t , ocupava os volumes I e II. A variação da grandeza N do sistema com o tempo, será dada por:

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{N_{t+\Delta t} - N_t}{\Delta t} \right\}_S$$

Visto que

$$(N_{t+\Delta t})_S = (N_{II} + N_{III})_{t+\Delta t} \quad e$$

$(N_t)_S = (N_I + N_{II})_t$, usando a equação (2) escrevemos :

$$(N_{t+\Delta t})_S = \left\{ \iiint_{II} [\eta_\delta \epsilon \rho_\delta + \eta_\delta (1-\epsilon) \rho_\delta] dV + \iiint_{III} [\eta_\delta \epsilon \rho_\delta + (1-\epsilon) \rho_\delta \eta_\delta] dV \right\}_{t+\Delta t} \quad e$$

$$(N_t)_S = \left\{ \iiint_I [\eta_\delta \epsilon \rho_\delta + (1-\epsilon) \rho_\delta \eta_\delta] dV + \iiint_{II} [\eta_\delta \epsilon \rho_\delta + (1-\epsilon) \rho_\delta \eta_\delta] dV \right\}_t$$

Então

$$\left(\frac{dN}{dt} \right)_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left\{ \iiint_{II} [\eta_\delta \epsilon \rho_\delta + (1-\epsilon) \eta_\delta \rho_\delta] dV \right\}_{t+\Delta t} - \left\{ \iiint_{II} [\eta_\delta \epsilon \rho_\delta + (1-\epsilon) \eta_\delta \rho_\delta] dV \right\}_t}{\Delta t} \quad +$$

$$+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left\{ \iiint_{III} [\eta_\delta \rho_\delta \epsilon + (1-\epsilon) \eta_\delta \rho_\delta] dV \right\}_{t+\Delta t}}{\Delta t} -$$

$$- \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left\{ \iiint_I [\eta_\delta \rho_\delta \epsilon + (1-\epsilon) \eta_\delta \rho_\delta] dV \right\}_t}{\Delta t} \quad (3)$$

Já que no limite, quando $\Delta t \rightarrow 0$, o volume do sistema coincide com o volume de controle, o primeiro termo à direita da equação (3) é a taxa de variação da quantidade N no volume de controle e que será:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V [\epsilon \rho_\delta \eta_\delta + (1-\epsilon) \rho_s \eta_s] dV$$

O termo seguinte é o fluxo de saída de N do volume de controle, assim:

$$\iiint \left\{ [\epsilon \eta_\delta \rho_\delta + (1-\epsilon) \rho_s \eta_s] dV_{III} \right\}_{t+\Delta t} = (\Delta N_{III})_{t+\Delta t}$$

ou

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint [\epsilon \eta_\delta \rho_\delta + (1-\epsilon) \rho_s \eta_s]_{t+\Delta t} dV}{\Delta t} = \left(\frac{dN}{dt} \right)_d$$

Mas $dN = \eta dm$, então:

$$\left(\frac{dN}{dt} \right)_s = (\eta \dot{m})_s = \eta_\delta \rho_\delta V_\delta \cos \alpha \cdot \epsilon dA + \eta_s \rho_s V_s \cos \alpha (1-\epsilon) dA$$

ou

$$\int_{A_s} \left(\frac{dN}{dt} \right)_d = \int_{A_s} \eta_\delta \epsilon \vec{V}_\delta \cdot d\vec{A} + \int_{A_s} (1-\epsilon) \rho_s \eta_s \vec{V}_s \cdot d\vec{A}$$

onde A_s é a área de saída.

O último termo corresponde ao fluxo de N que entra no volume de controle. Analogamente ao que foi feito para o

fluxo de saída, o fluxo de entrada será:

$$\int_{A_e} \left(\frac{dN}{dt}\right)_e = - \int_{A_e} \eta_f \rho_f \epsilon \vec{V}_f \cdot d\vec{A} - \int_{A_e} \eta_s \rho_s (1-\epsilon) \vec{V}_s \cdot d\vec{A}$$

onde A_e é a área de entrada. O sinal negativo é porque α é sempre maior que 90° e portanto $\cos\alpha$ é negativo e então

$$dm_e = (\epsilon \rho_f V_f \cos\alpha + (1-\epsilon) \rho_s V_s \cos\alpha) dA = -\rho_f V_f \cdot dA - \rho_s (1-\epsilon) V_s \cdot dA$$

combinando os fluxos de entrada e saída, obtemos:

$$\int_{A_s} \left(\frac{dN}{dt}\right)_s - \int_{A_e} \left(\frac{dN}{dt}\right)_e = \int_A \eta_f \rho_f \epsilon \vec{V}_f \cdot d\vec{A} + \int_A \eta_s \rho_s (1-\epsilon) \vec{V}_s \cdot d\vec{A}$$

onde A é a área da superfície de controle.

Substituindo estes termos na equação (3), teremos:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_s = \int_V \frac{\partial}{\partial t} [\eta_f \rho_f \epsilon + \eta_s \rho_s (1-\epsilon)] dV + \int_A \epsilon \eta_f \rho_f \vec{V}_f \cdot d\vec{A} + \int_A (1-\epsilon) \eta_s \rho_s \vec{V}_s \cdot d\vec{A}$$

Aplicando o teorema de Gauss, transformamos a equação acima em:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_s = \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon \eta_f \rho_f + (1-\epsilon) \eta_s \rho_s] + \nabla \cdot (\eta_f \rho_f \epsilon \vec{V}_f) + \nabla \cdot [\eta_s \rho_s (1-\epsilon) \vec{V}_s] \right\} dV \quad (4)$$

Quando $\vec{V}_s = 0$, fazendo $\vec{V}_f = \vec{V}$, ficamos com:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_S = \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon \eta_f \rho_f + (1-\epsilon) \eta_s \rho_s] + \nabla \eta_f \rho_f \epsilon \vec{V} \right\} dV \quad (4a)$$

A equação (4) é a equação geral da conservação da quantidade N . A partir desta equação podemos obter as equações da continuidade, da conservação da quantidade de movimento e da conservação da energia térmica para o escoamento de fluidos em meios porosos.

2.1 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Considerando a massa total do sistema como sendo a propriedade extensiva N , temos $\eta=1$. Como o sistema, por definição, possui uma quantidade fixa de massa

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dm}{dt} = 0$$

Substituindo na equação (4a) ficamos com:

$$\int_V \left[\epsilon \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + (1-\epsilon) \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \epsilon \rho_f \vec{V} \right] dV = 0$$

Como o volume de controle é arbitrário, temos que satisfazer:

$$\epsilon \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + (1-\epsilon) \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \epsilon \rho_f \vec{V} = 0$$

ou quando a densidade do sólido é constante,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{V} = 0 \quad (5)$$

A equação (5) é a equação da conservação da massa pa

ra escoamento em meios porosos. Ela possui a mesma forma da equação da continuidade para fluidos.

Para fluidos incompressíveis, a equação (5) torna-se:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (5a)$$

2.2 EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A 2a. lei de Newton nos diz que

$$(\vec{F})_S = \left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_S$$

onde $(\vec{F})_S$ é a força total aplicada sobre o sistema e \vec{M} é a quantidade de movimento total do sistema. Fazendo $N = \vec{M}$, teremos $\eta = \vec{V}$ e então a equação (4a) torna-se:

$$(\vec{F})_S = \left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_S = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \epsilon \rho \vec{V} + \nabla \epsilon \rho \vec{V} \cdot \vec{V} \right) dV$$

onde ρ e \vec{V} são a densidade e a velocidade do fluido respectivamente.

A força resultante, \vec{F} , inclui todas as forças de superfície \vec{F}_s e de corpo \vec{F}_B que agem sobre o sistema. Nas forças de corpo estão incluídas as forças volumétricas gravitacionais e elétricas.

Considerando apenas as forças volumétricas gravitacionais, \vec{F}_B pode ser expressa na forma

$$\vec{F}_B = \int_V \epsilon \rho \vec{g} dV$$

onde \vec{g} é a aceleração gravitacional.

As forças de superfície têm componentes normais e de cisalhamento e podem ser escritas como:

$$F_{\Delta} = \int_S \epsilon E_{ij} dA_i$$

onde E_{ij} é o tensor de tensões e representa as tensões na direção i que atuam em um elemento de superfície dA_j cuja normal está na direção j .

No escoamento em meios porosos, existe ainda a força de arrasto de atrito devido à existência de partículas sólidas no volume de controle. Como a distribuição de partículas é aleatória, é praticamente impossível se obter uma expressão analítica para esta força. Um método mais conveniente é utilizar a expressão obtida empiricamente por Darcy a qual, para o regime laminar, é dada por:

$$F_{Di} = - \int_V \frac{\mu}{K} \epsilon V_i dV$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido, K é a permeabilidade do meio poroso e F_{Di} é a força de arrasto na direção i . O sinal negativo é porque esta força tem sempre a direção contrária a \vec{V} .

Assim, para uma direção i do escoamento, podemos escrever:

$$\int_S \epsilon E_{ij} dA_j + \int_V \epsilon \rho g_i dV - \int_V \epsilon \frac{\mu}{K} V_i dV = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \epsilon \rho V_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon \rho V_i V_j \right) dV$$

ou, aplicando o teorema de Gauss

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \epsilon \rho V_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon \rho V_i V_j - \epsilon \rho g_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon E_{ij} + \frac{\mu}{K} \epsilon V_i \right] dV = 0$$

Como o volume de controle é arbitrário, temos que satisfazer:

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon \rho V_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon \rho V_i V_j - \epsilon \rho g_i - \frac{\partial \epsilon E_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\mu}{K} \epsilon V_i = 0$$

De forma mais geral, substituindo o tensor E_{ij} para fluido Newtoniano incompressível:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} + \rho \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} - \frac{\mu}{K} \vec{V} \quad (6)$$

onde \vec{V} é o vetor velocidade média no interior do meio poroso.

Em coordenadas cilíndricas, a equação (6) será:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{DV_r}{Dt} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) &= \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2\partial V_\theta}{r^2 \partial \theta} \right) - \frac{\mu}{K} V_r \\ \rho \left(\frac{DV_\theta}{Dt} - \frac{V_r V_\theta}{r} \right) &= \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) - \frac{\mu}{K} V_\theta \\ \rho \left(\frac{DV_z}{Dt} \right) &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 V_z - \frac{\mu}{K} V_z \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

onde

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$e \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2.3 EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Da primeira lei da termodinâmica, temos:

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$$

onde $\frac{dQ}{dt}$ é o fluxo de calor adicionado ao sistema e $\frac{dW}{dt}$ é o trabalho realizado pelo sistema no intervalo de tempo dt , e

$\frac{dE_T}{dt}$ é o acréscimo da energia total no intervalo de tempo dt .

A energia por unidade de massa será indicada por e e portanto, $N=E$ e $\eta=e$. Substituindo na equação (4a) obtemos:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon \rho_f e_f + (1-\epsilon) \rho_s e_s] + \nabla \epsilon \rho_f e_f \vec{V} \right\} dV \quad (7)$$

onde os índices f e s indicam propriedades do fluido e do sólido respectivamente e \vec{V} é o vetor velocidade do fluido.

Negligenciando a transferência de calor por radiação quando ocorrer transferência por condução, escrevemos:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_A \epsilon k_f \nabla T_f dA + \int_A (1-\epsilon) k_s \nabla T_s dA$$

Considerando $T_s = T_f = T$

$$\frac{dQ}{dt} = \int_A k^* \nabla T \cdot dA$$

onde $k^* = (1-\epsilon)k_s + \epsilon k_f$ que é chamado de condutividade térmica efetiva do meio poroso.

O termo $\frac{dW}{dt}$, na direção i , pode ser expresso por:

$$\frac{dW}{dt} = - \int_A \epsilon E_{ij} V_i dA_j - \int_V \epsilon \rho g V_i dV + \int_V \epsilon \frac{\mu}{K} V_i V_i dV$$

onde o primeiro termo à direita representa o trabalho das forças devido às tensões normais e tangenciais, o segundo é o trabalho das forças de corpo quando se considera somente as forças volumétricas gravitacionais e o terceiro termo é o trabalho da força de arrasto devido à existência de partículas sólidas. O sinal negativo é porque o trabalho adicionado ao sistema é negativo, de acordo com a convenção adotada quando se escreve a equação (7).

A energia total por unidade de massa é igual a

$$c_{Vf} T_f + \frac{1}{2} V_{if} V_{if} \quad \text{para o fluido e}$$

$$c_{Vs} T_s + \frac{1}{2} V_{is} V_{is} \quad \text{para o sólido onde}$$

$c_V T$ é a energia térmica e $\frac{1}{2} V_i V_i$ é a energia cinética. Para o caso em que temos $V_s = 0$, $V_f = V$, $T_s = T_f = T$, ficamos com:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_s e_s (1-\epsilon) + \epsilon \rho_f e_f] = \frac{\partial}{\partial t} [(\rho C_V)^* T + \frac{1}{2} \rho \vec{V} \cdot \vec{V}]$$

onde $(\rho C_V)^*$ é a capacidade térmica efetiva do meio poroso expressa por:

$$(\rho C_V)^* = \epsilon (\rho C_V)_f + (1-\epsilon) (\rho C_V)_s$$

Substituindo as expressões obtidas e aplicando o teorema de Gauss, na equação (7) chegamos a

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [(\rho C_V)^* T + \frac{1}{2} \epsilon \rho V_i V_i] + \frac{\partial}{\partial x_j} [\epsilon (\rho C_V)_f T + \frac{1}{2} \rho V_i V_i] V_j - \frac{\partial}{\partial x_j} k^* \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon E_{ij} V_i - \epsilon \rho g V_i + \frac{\mu}{K} V_i V_i \right\} dV = 0$$

Como o volume é arbitrário, o integrando deve ser nulo. Desenvolvendo as derivadas, eliminando os termos que combinados são idênticos às equações da continuidade e conservação da quantidade de movimento, obtemos:

$$(\rho C_V)^* \frac{\partial T}{\partial t} + \epsilon (\rho C_V)_f V_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} k^* \frac{\partial T}{\partial x_j} + \epsilon E_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

Substituindo o tensor de tensões E_{ij} , para fluidos Newtonianos e incompressíveis, na equação anterior, e sabendo-se que para fluido incompressível $C_V = C_p = C$ e que $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, chegamos a:

$$(\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} + \epsilon(\rho C) \delta V_i \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (k^* \frac{\partial T}{\partial x_j}) + \mu \epsilon \Phi$$

onde Φ é a função dissipação.

Podemos, então, escrever a equação anterior na forma:

$$(\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} + \epsilon(\rho C) \delta \vec{V} \cdot \nabla T = \nabla (k^* \nabla T) + \mu \epsilon \Phi \quad (8)$$

Em coordenadas cilíndricas, a equação (8) será escrita como segue:

$$\left. \begin{aligned} k^* \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \mu \epsilon \Phi = \\ = (\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} + \epsilon(\rho C) \delta \left(V_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

e V_r , V_θ e V_z são as componentes das velocidades nas direções r , θ e z respectivamente.

A equação (6) é a mesma apresentada por Chawla e Singh [8] e Rudraiah [9].

Chan [10] usou a equação da conservação da quantidade de movimento que segue:

$$\frac{\rho}{\epsilon} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\rho}{\epsilon^2} \vec{V} (\nabla \cdot \vec{V}) = -\nabla P + \rho \vec{g} - \frac{\mu}{K} \vec{V}$$

A equação acima não inclui os termos viscosos e a diferença entre ela e a equação deduzida neste capítulo pode estar no tratamento do meio poroso.

A equação (8) é idêntica à equação da energia obtida por Sisson [11] quando estudou a equação da energia para um leito fixo.

CAPÍTULO III

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

3.1 O MODELO FÍSICO

É mostrado na figura (3.1) um esquema do modelo físico. O sistema é constituído de dois cilindros concêntricos de raios a e c ($c > a$) sendo que o espaçamento $b-c$ ($a < b < c$) está totalmente preenchido com meio poroso de permeabilidade K , porosi

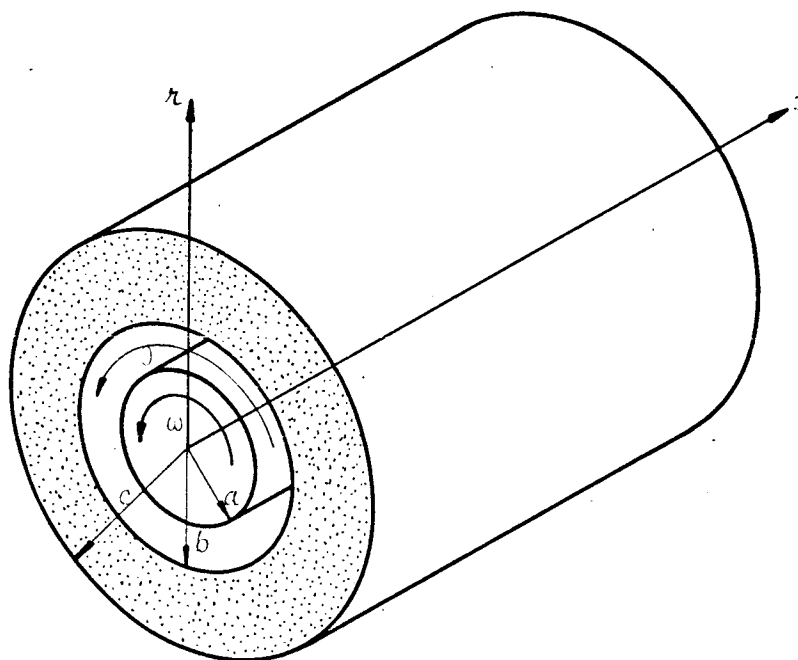


Fig. 3.1 O Modelo Físico

dade e está saturado com um fluido Newtoniano, incompressível com viscosidade dinâmica μ , e o espaço restante, a-b, contém o mesmo fluido. O cilindro interno possui uma velocidade angular, ω , constante enquanto que o externo permanece estacionário.

É escolhido o sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , mostrado na figura (3.1), sendo v_r, v_θ, v_z as componentes da velocidade nas respectivas direções.

As equações que governam os fenômenos neste modelo são:

- continuidade

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0$$

- conservação da quantidade de movimento:

A. Na região de fluido puro; de acordo com Schlichting [12]

$$r: \rho \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \rho F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (9a)$$

$$\theta: \rho \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \rho F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (9b)$$

$$z: \rho \left(\frac{Dv_z}{Dt} \right) = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z \quad (9c)$$

B. Na região porosa

$$r: \rho \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \rho F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{\mu}{K} v_r \quad (9d)$$

$$\theta: \rho \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \rho F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) - \frac{\mu}{K} v_\theta \quad (9e)$$

$$z: \rho \left(\frac{Dv_z}{Dt} \right) = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z - \frac{\mu}{K} v_z \quad (9f)$$

- conservação da energia

A. Na região de fluido puro |12|

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C \vec{V} \nabla T = \nabla (k \nabla T) + \mu \Phi \quad (9g)$$

B. Na região porosa

$$(\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} + \epsilon (\rho C) \vec{V} \nabla T = \nabla (k^* \nabla T) + \mu \epsilon \Phi \quad (9h)$$

3.2 ESCOAMENTO EM REGIME PERMANENTE

3.2.1 Perfis de velocidades

Para a região de fluido puro, a equação da continuidade é

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_r}{r} = 0 \quad (10)$$

Admitindo que o escoamento seja completamente desenvolvido, temos as relações:

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

e então a equação (10) torna-se:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} = 0$$

ou

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_r \right) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right] = 0$$

Integrando, obtemos:

$$rV_r = cte \quad \Rightarrow \quad V_r = \frac{cte}{r}$$

Mas em $r = a$, $V_r = 0$ pois não há injeção nem sucção de fluido pelas paredes dos cilindros. Isto faz com que a constante seja nula e conseqüentemente $V_r = 0$.

Devido à simetria cilíndrica, não há variação das quantidades físicas em relação às variáveis θ e z , isto é, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ e $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ e, sendo o escoamento em regime permanente, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Com todas estas simplificações, as equações (9a), (9b) e (9c) podem ser escritas na seguinte forma:

$$r: \rho \frac{V_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (11a)$$

$$\theta: \mu \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) = 0 \quad (11b)$$

$$z: \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (11c)$$

De modo análogo, as equações (9d), (9e) e (9f), que governam o escoamento no meio poroso tornam-se:

$$r: \rho \frac{V_{\theta p}}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (12a)$$

$$\theta: \mu \left(\frac{\partial^2 V_{\theta p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\theta p}}{\partial r} - \frac{V_{\theta p}}{r^2} \right) - \frac{\mu}{K_\theta} V_{\theta p} = 0 \quad (12b)$$

$$z: \mu \left(\frac{\partial^2 V_{z p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{z p}}{\partial r} \right) - \frac{\mu}{K_z} V_{z p} = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (12c)$$

onde K_θ e K_z são as permeabilidades do meio poroso nas direções θ e z respectivamente e $V_{\theta p}$ e V_{zp} são as componentes da velocidade na região porosa. Como admitimos que o meio poroso é homogêneo, $K_\theta = K_z = K$.

As condições de contorno para o escoamento proposto são:

$$\begin{aligned}
 r = a & \quad V_\theta = \omega a & \quad V_z = 0 \\
 r = c & \quad V_{\theta p} = 0 & \quad V_{zp} = 0 \\
 r = b & \quad \frac{\partial V_\theta}{\partial r} = \frac{\partial V_{\theta p}}{\partial r} & \quad \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{\partial V_{zp}}{\partial r} \\
 r = b & \quad V_\theta = V_{\theta p} & \quad V_z = V_{zp}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Fazendo as transformações dimensionais

$$\begin{aligned}
 u = \frac{V_\theta}{\omega a} \quad , \quad U = \frac{V_{\theta p}}{\omega a} \quad , \quad w = \frac{V_z}{V} \quad , \quad w = \frac{V_{zp}}{V} \quad , \quad R = \frac{r}{a} \\
 z_1 = \frac{z}{L} \quad , \quad p_{1r} = \frac{p}{\rho(\omega a)^2} \quad , \quad p_{1z} = \frac{p}{\rho V^2}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Na equação (11), ficamos com:

$$\frac{u^2}{R} = \frac{\partial p_{1r}}{\partial r} \tag{15a}$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R^2} \right) = 0 \tag{15b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial R} = R_e \quad (15c)$$

e na equação (12), obtemos:

$$\frac{U^2}{R} = \frac{\partial p_1 r}{\partial R} \quad (16a)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2} \right) - \mu \sigma^2 U = 0 \quad (16b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial R} - \sigma^2 w = R_e \quad (16c)$$

onde

$$R_e = \frac{\rho V a^2}{\mu L} \frac{\partial p_1 z}{\partial z_1} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{a^2}{K}$$

O termo $\frac{\partial p_1 z}{\partial z}$ tem que ser constante pois, somente neste caso as equações (11c) e (12c) são válidas.

As equações (15) e (16) são as equações adimensionais que descrevem o movimento nas regiões onde só há fluido e porosa respectivamente. Estas equações dependem unicamente da variável R e, por esse motivo, podemos substituir as derivadas parciais por derivadas totais. Assim escrevemos:

- na região de fluido puro

$$\frac{u^2}{R} = \frac{dp_1 r}{dR} \quad (17a)$$

$$\frac{d^2 u}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dR} - \frac{u}{R^2} = 0 \quad (17b)$$

$$\frac{d^2 w}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dw}{dR} = R_e \quad (17c)$$

e na região porosa

$$\frac{U^2}{R} = \frac{dp_1}{dR} \quad (18a)$$

$$\frac{d^2U}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} - \frac{U}{R^2} - \sigma^2 U = 0 \quad (18b)$$

$$\frac{d^2W}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} - \sigma^2 W = R_e \quad (18c)$$

As condições de contorno (13) com as transformações adimensionais (14) são:

$$\left. \begin{array}{lll} R = 1 & u = 1 & w = 0 \\ R = \frac{c}{a} & U = 0 & W = 0 \\ R = \frac{b}{a} & \frac{du}{dR} = \frac{dU}{dR} & \frac{dw}{dR} = \frac{dW}{dR} \\ R = \frac{b}{a} & u = U & w = W \end{array} \right\} \quad (19)$$

Podemos notar que as equações (17b), (18b) e (17c), (18c) são independentes entre si e então podemos resolvê-las se paradamente e a partir dos resultados obtidos, usando as equações (17a) e (18a), encontramos a distribuição de pressões na direção radial.

Vamos resolver primeiramente as equações (17b) e (18b). A equação (17b) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{d}{dR} \left(\frac{u}{R} \right) = 0 \quad (20)$$

Integrando a equação (20) chegamos a:

$$\frac{du}{dR} + \frac{u}{R} = B$$

ou

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR}(Ru) = B \quad (21)$$

Integrando agora a equação (21) temos:

$$u = B_1 R + B_2 \frac{1}{R} \quad (22)$$

onde B_1 e B_2 são constantes de integração

A equação (17b) pode ser expressa como:

$$\frac{d^2U}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} - (\sigma^2 + \frac{1}{R^2})U = 0 \quad (23)$$

Fazendo a mudança de variáveis $\alpha = \sigma R$, temos:

$$\alpha^2 \frac{d^2U}{d\alpha^2} + \alpha \frac{dU}{d\alpha} - (\alpha^2 + 1)U = 0 \quad (24)$$

sendo que esta é uma equação de Bessel modificada e tem como solução

$$U = A_1 I_1(\alpha) + A_2 K_1(\alpha)$$

ou
$$U = A_1 I_1(\sigma R) + A_2 K_1(\sigma R) \quad (25)$$

onde I_1 e K_1 são funções de Bessel modificadas de primeira ordem e de primeira e segunda espécies respectivamente.

Aplicando as condições de contorno (19) nas expressões (24) e (25), encontramos as constantes:

$$A_1 = \frac{2a^2 b K_1 \left(\frac{c}{a} \sigma\right)}{b(a^2 - b^2)d_2 - (a^2 + b^2)ad_1} \quad A_2 = \frac{2a^2 b I_1 \left(\frac{c}{a} \sigma\right)}{-b(a^2 - b^2)d_2 + (a^2 + b^2)ad_1}$$

$$B_1 = \frac{a^2 b d_2 - a^3 d_1}{b(a^2 - b^2)d_2 - (a^2 + b^2)ad_1} \quad B_2 = \frac{b^3 d_2 + ab^2 d_1}{-b(a^2 - b^2)d_2 + (a^2 + b^2)ad_1}$$

e as expressões para os perfis de velocidade tornam-se:

$$u = \frac{a^2 b d_2 - a^3 d_1}{b(a^2 - b^2)d_2 - (a^2 + b^2)ad_1} R + \frac{b^3 d_2 + ab^2 d_1}{-b(a^2 - b^2)d_2 + (a^2 + b^2)ad_1} \frac{1}{R} \quad (26a)$$

$$1 \leq R \leq b/a$$

e

$$U = \frac{2a^2 b K_1 \left(\frac{c}{a} \sigma\right)}{b(a^2 - b^2)d_2 - (a^2 + b^2)ad_1} I_1(\sigma R) + \frac{2a^2 I_1 \left(\frac{c}{a} \sigma\right)}{-b(a^2 - b^2)d_2 + (a^2 + b^2)ad_1} K_1(\sigma r) \quad (26b)$$

$$b/a \leq R \leq c/a$$

onde $d_1 = I_1\left(\frac{c}{a} \sigma\right) K_1\left(\frac{b}{a} \sigma\right) - I_1\left(\frac{b}{a} \sigma\right) K_1\left(\frac{c}{a} \sigma\right),$

$$d_2 = I_1'(\sigma R)_{R=b/a} K_1\left(\frac{c}{a} \sigma\right) - I_1\left(\frac{c}{a} \sigma\right) K_1'(\sigma R)_{R=b/a}$$

e I_1' e K_1' são as derivadas de I_1 e K_1 em relação a R .

A seguir, resolvemos o conjunto de equações (17c) e (18c). A equação (17c) é:

$$\frac{d^2 w}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dw}{dR} = Re$$

Sabendo-se que

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{1}{R} \frac{dw}{dR} \right) = - \frac{1}{R^2} \frac{dw}{dR} + \frac{1}{R} \frac{d^2w}{dR^2}$$

ou

$$\frac{d^2w}{dR^2} = R \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{R} \frac{dw}{dR} \right) + \frac{1}{R} \frac{dw}{dR}$$

Substituimos na equação (17c) e ficamos com:

$$R \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{R} \frac{dw}{dR} \right) + \frac{2}{R} \frac{dw}{dR} = R e$$

Fazendo a mudança de variáveis $\delta = \frac{1}{R} \frac{dw}{dR}$ obtemos:

$$\frac{d\delta}{dR} + \frac{2}{R} \delta = \frac{R e}{R}$$

ou

$$R^2 \frac{d\delta}{dR} - 2R\delta = R e \quad (27)$$

A equação (27) pode ser posta na forma:

$$\frac{d}{dR} (R^2 \delta) = R e$$

e fazendo a integração achamos:

$$\delta = \frac{R e}{2} + \frac{C}{R^2} \quad (28)$$

onde C é uma constante.

Substituindo a variável δ e integrando a equação (28) temos a solução:

$$w = C_1 + C_2 \ln R + \frac{R e}{4} R^2 \quad (29)$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

Para resolver a equação (18c) consideramos inicialmente a equação homogênea associada e com a transformação de variáveis $\gamma = \sigma R$, obtemos a equação abaixo:

$$\gamma^2 \frac{d^2 W}{d\gamma^2} + \gamma \frac{dW}{d\gamma} - \gamma^2 W = 0 \quad (30)$$

que é uma equação de Bessel modificada que nos fornece como solução

$$W = D_1 I_0(\gamma) + D_2 K_0(\gamma)$$

ou

$$W = D_1 I_0(\sigma R) + D_2 K_0(\sigma R)$$

onde I_0 e K_0 são funções de Bessel modificadas de ordem zero de 1a. e 2a. espécies respectivamente.

Admitindo, então, que a solução geral é da forma $W = D_1 I_0(\sigma R) + D_2 K_0(\sigma R) + E$, substituímos na equação completa (18c) e encontramos a solução particular

$$E = - \frac{R_e}{\sigma^2}$$

e portanto a solução geral da equação (18c) é dada por

$$W = D_1 I_0(\sigma R) + D_2 K_0(\sigma R) - \frac{R_e}{\sigma^2} \quad (31)$$

Com as condições de contorno dadas em (19) e as expressões (29) e (31) encontramos as constantes

$$C_1 = -\frac{Re}{4}$$

$$C_2 = \frac{Re}{4 \left[\frac{b}{a} d_3 - d_4 \ln \frac{b}{a} \right]} \left\{ \left[\frac{2b}{a} I_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) - \frac{4}{\sigma} I_1 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) \right] K_0 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) - \right. \\ \left. - \left[\frac{2b}{a} K_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) \right] + \left[\frac{4}{\sigma} K_1 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) \right] I_0 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 + \frac{4}{\sigma^2} d_4 \right) \right\}$$

$$D_1 = \frac{Re}{4 \left[\frac{b}{a} d_3 - d_4 \ln \frac{b}{a} \right]} \left\{ \left[\left[\left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) K_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) \right] + \frac{4}{\sigma^2} \left[K_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) - K_0 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) \right] \right] \frac{a}{b} - \right. \\ \left. - \left[\frac{2b}{a} K_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) + \frac{4}{\sigma} K_1 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) \right] \ln \frac{b}{a} \right\}$$

$$D_2 = \frac{Re}{4 \left[\frac{b}{a} d_3 - d_4 \ln \frac{b}{a} \right]} \left\{ \left[\frac{4}{\sigma^2} \left[I_0 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) - I_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) \right] - \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) I_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) \right] \frac{a}{b} + \right. \\ \left. + \left[2 \frac{b}{a} I_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) - \frac{4}{\sigma} I_1 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) \right] \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right\}$$

e portanto:

$$w = \frac{Re}{4 \left[\frac{b}{a} d_3 - d_4 \ln \frac{b}{a} \right]} \left\{ \left[\frac{2b}{a} I_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) - \frac{4}{\sigma} I_1 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) \right] K_0 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) - \right. \\ \left. - \left[\frac{2b}{a} K_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) + \frac{4}{\sigma} K_1 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) \right] I_0 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 + \frac{4}{\sigma^2} d_4 \right) \right\} \ln R + \frac{Re}{4} (R^2 - 1) \quad (32a)$$

$$1 \leq R \leq \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned}
w = \frac{Re}{4 \left[\frac{b}{a} d_3 - d_4 \ln \frac{b}{a} \right]} & \left\{ \left[\left[\left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) K_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) \right] + \frac{4}{\sigma^2} \left[K_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) - K_0 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) \right] \right] \frac{a}{b} - \right. \\
& \left. - \left[\frac{2b}{a} K_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) + \frac{4}{\sigma} K_1 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) \right] \ln \frac{b}{a} \right\} I_0(\sigma R) + \left\{ \frac{4}{\sigma^2} \left[I_0 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) - I_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) \right] - \right. \\
& \left. - \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) I_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) \left[\frac{a}{b} + 2 \frac{b}{a} I_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) - \frac{4}{\sigma} I_1 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) \right] \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right\} K_0(\sigma R) \left. \right\} - \frac{Re}{\sigma^2} \quad (32b)
\end{aligned}$$

$$p / \frac{b}{a} \leq R \leq \frac{c}{a}$$

onde

$$d_3 = I_0 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) K_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) - K_0 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) I_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right)$$

$$d_4 = \sigma \left[K_1 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) I_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) + I_1 \left(\frac{b}{a} \sigma \right) K_0 \left(\frac{c}{a} \sigma \right) \right]$$

3.2.2 Distribuição de pressões

Com as expressões (26a) e (26b), que fornecem os perfis de velocidade na direção θ , podemos encontrar a distribuição de pressão na direção radial usando as equações (17a) e (18a).

Pela análise das equações (11a), (11c), (12a) e (12c) podemos tirar as seguintes conclusões:

1. Para as equações (11c) e (12c) serem válidas, o termo $\frac{\partial p}{\partial z}$ tem que ser constante, ou seja, p tem que ser uma função linear em relação a z .
2. As equações (11a) e (12a) nos indicam que $\frac{dp}{dR}$ é somente função de V_θ e $V_{\theta p}$ que, por sua vez, são funções unicamente de

R e portanto $\frac{\partial p}{\partial R}$ é função exclusivamente de R.

Com estas duas afirmações, podemos deduzir que:

$$p = p(R) + p(z) \quad (33)$$

Substituindo, então, as expressões dos perfis de ve locidades nas equações (17a) e (18a) encontramos:

$$p_{1R} = \int_1^R (B_1^2 R + 2B_1 B_2 \frac{1}{R} + \frac{B_2^2}{2} \frac{1}{R^3}) dR \text{ para } 1 \leq R \leq b/a \quad (34a)$$

e

$$p_{1R} = \int_1^{b/a} (B_1^2 R + 2B_1 B_2 \frac{1}{R} + \frac{B_2^2}{2} \frac{1}{R^3}) dR + \int_{b/a}^R [A_1^2 \frac{I_1^2(\sigma R)}{R} + 2A_1 A_2 \frac{I_1(\sigma R)}{R} K_1(\sigma R) + A_2^2 \frac{K_1^2(\sigma R)}{R}] dR \quad \text{p/ } b/a \leq R \leq c/a \quad (34b)$$

Fazendo as integrações e usando a condição (33) en contramos a distribuição que segue:

$$p_{1R} = \frac{B_1^2}{2} R^2 + 2B_1 B_2 \ln R - \frac{B_2^2}{2} \frac{1}{R^2} - \frac{B_2^2}{2} R - \frac{B_1^2}{2} + \frac{B_2^2}{2} + p_I(z) \quad 1 \leq R \leq b/a \quad (34c)$$

$$p_{1R} = p_I(z) + \frac{B_1^2}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2B_1 B_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{B_2^2}{2 \left(\frac{b}{a}\right)^2} - \frac{B_1^2}{2} + \frac{B_2^2}{2} + \frac{A_1^2}{2} [I_0^2(\sigma R) - I_1^2(\sigma R)] - A_1 A_2 [I_1(\sigma R) K_1(\sigma R) + I_0(\sigma R) K_0(\sigma R)] + \frac{A_2^2}{2} [K_0^2(\sigma R) - K_1^2(\sigma R)] - \frac{A_1^2}{2} [I_0^2\left(\frac{b}{a} \sigma\right) - I_1^2\left(\frac{b}{a} \sigma\right)] + A_1 A_2 [I_1\left(\frac{b}{a} \sigma\right) K_1\left(\frac{b}{a} \sigma\right) + I_0\left(\frac{b}{a} \sigma\right) K_0\left(\frac{b}{a} \sigma\right)] - \frac{A_2^2}{2} [K_0^2\left(\frac{b}{a} \sigma\right) - K_1^2\left(\frac{b}{a} \sigma\right)]$$

$$\frac{b}{a} \leq R \leq \frac{c}{a} \quad (34d)$$

Se forem substituídos os valores das constantes B_1, B_2, A_1 e A_2 , obtidos anteriormente, nas expressões (34c) e (34d) teremos a distribuição de pressão em sua forma geral.

3.2.3 Tensão de cisalhamento

Outro parâmetro que normalmente é conveniente se conhecer é a tensão de cisalhamento nas superfícies sólidas que limitam o campo de escoamento. Esta tensão de cisalhamento pode ser determinada pela expressão.

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] \quad (35)$$

Para o escoamento em estudo, determinamos a tensão de cisalhamento no cilindro interno.

Com as transformações adimensionais $r = aR$ e $v_\theta = \omega a u$, transformamos a equação (35) em:

$$\tau_{r\theta} = \mu \omega \left[R \frac{d}{dR} \frac{u}{R} \right]_{R=1} \quad (36)$$

Substituindo a velocidade u , dada pela expressão (26a), na equação (36) encontramos a tensão de cisalhamento no cilindro interno dada por:

$$\tau_{r\theta} = 2\mu\omega \left[\frac{b^3 d_2 + ab^2 d_1}{-b(a^2 - b^2) d_2 + (a^2 + b^2) a d_1} \right] \quad (37)$$

De posse da tensão de cisalhamento, podemos encontrar que o torque resistente que aparece no cilindro interno, devido à viscosidade do fluido, é dado por:

$$T_1 = 4\pi a^2 L \omega \left[\frac{b^3 d_2 - ab^2 d_1}{-b(a^2 - b^2)d_2 + (a^2 + b^2)ad_1} \right] \quad (38)$$

onde L é o comprimento do cilindro interno.

3.2.4 Distribuição de temperatura

A. Descrição do Problema

Para a determinação da distribuição de temperatura admitimos, no modelo da figura (3.1), que a temperatura no cilindro externo é T_2 conhecida, que não há fluxo de calor do fluido para o cilindro interno, isto é, o cilindro interno é adiabático, e existe geração de calor devido à dissipação viscosa.

Com estas considerações, usando as equações da conservação da energia para fluidos Newtonianos e para meios porosos, demonstrada no Capítulo II, e levando em conta que a transmissão de calor se dá em regime permanente, que existe simetria cilíndrica, que as condutividades térmicas são constantes e que o escoamento é devido somente à rotação do cilindro interno ($\frac{dp}{dz} = 0$), teremos as seguintes equações simplificadas para descrever o fenômeno:

$$\frac{k}{\rho C \tau} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\nu}{C} \Phi = 0 \quad \text{na região de fluido puro} \quad (39a)$$

$$\frac{k^*}{\varepsilon \rho c \kappa} \frac{\partial}{\partial \kappa} \kappa \frac{\partial T}{\partial \kappa} + \frac{v}{c} \Phi = 0 \quad \text{no meio poroso} \quad (39b)$$

onde k^* é a condutividade térmica efetiva do meio poroso saturado e

$$\Phi = \left(\frac{dV_\theta}{d\kappa} - \frac{V_\theta}{\kappa} \right)^2$$

Usando os parâmetros adimensionais

$$u = \frac{V_\theta}{\omega a}, \quad U = \frac{V_{\theta p}}{\omega a}, \quad R = \frac{\kappa}{a}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_2 - T_0}, \quad \theta^* = \frac{T_p - T_0}{T_2 - T_0}$$

onde T_2 é a temperatura no cilindro externo e T_0 é uma temperatura de referência. Substituindo nas equações (39a) e (39b) obtemos:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + P_{\kappa} E_k \left[\frac{dU}{dR} - \frac{U}{R} \right]^2 = 0 \quad p/1 \leq R \leq \frac{b}{a} \quad (40a)$$

e

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta^*}{\partial R} + P_{\kappa 1} E_k \left[\frac{dU}{dR} - \frac{U}{R} \right]^2 = 0 \quad p/\frac{b}{a} < R < \frac{c}{a} \quad (40b)$$

$$\text{onde} \quad P_{\kappa} = \frac{\mu c p}{k}, \quad P_{\kappa 1} = \frac{\mu c_1}{k^*} = n^{\circ} \text{ de Prandtl}$$

$$E_k = \frac{(\omega a)^2}{c \Delta T} \quad - \quad n^{\circ} \text{ de Eckert}$$

$$\Delta T = (T_2 - T_0) \quad \text{e} \quad k_1^* = \frac{k^*}{\varepsilon}$$

As velocidades u e U , nas equações (40a) e (40b), são dadas pelas expressões (26a) e (26b) respectivamente. A solução destas equações é feita numericamente devido à grande dificuldade de se obter uma solução analítica, principalmente na re

gião porosa. Esta solução numérica satisfaz as seguintes condições:

- A temperatura na superfície do cilindro externo é T_2 ($\theta^* = 1$) conhecida.

- Não há transferência de calor para o cilindro interno isto é,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=a} = 0 \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_{R=1} = 0$$

- A temperatura na interface, dadas pelas equações (40a) e (40b), é a mesma $\theta_i = \theta_i^*$

- Existe continuidade do fluxo de calor na interface fluido-região porosa, isto é, o calor que chega à interface vindo da região de fluido, $k \left(\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_i$, é igual à que parte da interface para o meio poroso,

$$k^* \left(\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_i$$

B. Descrição do método numérico

Usando o método das diferenças finitas descendentes, substituímos as derivadas por diferenças do tipo:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} = \frac{\theta_{j-2} - 2\theta_{j-1} + \theta_j}{\Delta R^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{\Delta R}$$

onde j é uma das divisões radiais feitas no modelo e ΔR é o espaçamento entre duas divisões consecutivas.

Substituindo estas diferenças nas equações (40a) e (40b) obtemos:

$$R_j \theta_{j-2} - (2R_j + \Delta R) \theta_{j-1} + (R_j + \Delta R) \theta_j = (\Delta R)^2 R_j F(R_j) \quad j = 3, i \quad (41a)$$

$$R_j \theta_{j-2}^* - (2R_j + \Delta R) \theta_{j-1}^* + (R_j + \Delta R) \theta_j^* = (\Delta R)^2 R_j F_1(R_j) \quad j = i+1, n+1 \quad (41b)$$

$$F(R) = \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right)^2 P_{\mathcal{R}} E_k$$

$$F_1(R) = \left(\frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R} \right)^2 P_{\mathcal{R}1} E_k, \quad P_{\mathcal{R}1} = P_{\mathcal{R}} \left(\frac{k}{k_1^*} \right)$$

onde i é a divisão que contém a interface e
 n é o número de divisões feitas

Aplicando as diferenças finitas nas condições que as equações tem que satisfazer, temos ainda as expressões:

$$k_1^* \theta_{i+1} - (k_1^* + k) \theta_i + k \theta_{i-1} = 0 \quad (41c)$$

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (41d)$$

$$\theta_{n+1} = 1 \quad (41e)$$

Com as equações (41a) a (41e), transformamos as equações (40a) e (40b) num sistema de equações lineares do tipo:

$$B_1 \theta_1 + C_1 \theta_2 = D_1$$

$$A_2 \theta_1 + B_2 \theta_2 + C_2 \theta_3 = D_2$$

$$A_3 \theta_2 + B_3 \theta_3 + C_3 \theta_4 = D_3$$

$$A_{n-1} \theta_{n-2} + B_{n-1} \theta_{n-1} + C_{n-1} \theta_n = D_{n-1}$$

$$A_n \theta_{n-1} + B_n \theta_n = D_n$$

ou, escrevendo na forma matricial

$$[A] \times [\theta] = [D]$$

onde $[A]$ é uma matriz tridiagonal.

Este sistema pode ser resolvido rapidamente pelo método de eliminação de Gauss sendo que a solução para um sistema deste tipo pode ser dada de modo bastante concisa como mostra Carnahan |13| :

$$\theta_n = \gamma_n$$

$$\theta_i = \gamma_i - \frac{C_i \theta_{i+1}}{\beta_i} \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

e os valores dos β'_i e γ'_i determinados pelas fórmulas de recorrência:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= B_1 & \gamma_1 &= \frac{D_1}{B_1} \\ \beta_i &= B_i - \frac{A_i C_{i-1}}{\beta_{i-1}} & i &= 2, 3, \dots, n \\ \gamma_n &= \frac{D_n - A_n \gamma_{n-1}}{\beta_n} & i &= 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

Uma das desvantagens do método de eliminação de Gauss é que o erro final pode se acumular seriamente, entretanto, Douglas |14| diz que o erro final esperado é pequeno comparado com o erro de discretização do problema.

3.2.5 Transferência de calor

Pela lei de Fourier, podemos escrever

$$\dot{q} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{parede}}$$

Sabemos também que:

$\dot{q} = h(T_2 - T_0)$ onde h é o coeficiente de transferência de calor e T_0 é uma temperatura de referência.

Da combinação das duas expressões acima podemos ti
rar:

$$h = \frac{-k}{(T_2 - T_0)} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{parede}} \quad (42)$$

Considerando a transferência de calor para fora do cilindro externo e com as transformações adimensionais $\theta = \frac{T - T_0}{T_2 - T_0}$ e $R = \frac{x}{a}$ aplicadas na equação (42), chegamos a

$$h = -\frac{k}{a} \left(\frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=c/a} \quad (43)$$

O número de Nusselt local, para este caso é:

$$Nu = \frac{ha}{k}$$

então

$$Nu = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=c/a} \quad (44)$$

No capítulo seguinte é mostrada uma curva que nos fornece o número de Nusselt em função de σ , Pr , Ek e $\frac{k}{k_f}$

3.3 ESCOAMENTO EM REGIME NÃO PERMANENTE

No modelo da figura (3.1), vamos considerar, para determinação dos perfis de velocidades para o escoamento em regime não permanente, que a região de fluido seja muito pequena em comparação com a região porosa e então possa ser admitido que todo o espaço entre os cilindros esteja preenchido com meio poroso. Para esta nova configuração, determinamos os perfis de velocidade quando para um tempo $t = 0$, o cilindro interno está parado e $\frac{dp}{dz} = 0$ e para $t > 0$, este cilindro é acelerado subitamente atingindo uma velocidade angular, ω , constante e é aplicado um gradiente de pressão, na direção z , constante. Este gradiente de pressão pode ser nulo ou não nulo.

As equações que descrevem o movimento são:

$$\rho \frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} = \mu \left[\frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{K} \right) v_{\theta} \right] \quad (45a)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_z}{K} \right] \quad (45b)$$

Na simplificação destas equações foram consideradas as condições:

- a. Cilindros longos, para se desprezar os efeitos das bordas
- b. $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, devido à simetria cilíndrica

As velocidades v_{θ} e v_z podem ser decompostas em duas partes, uma permanente ($v_{p\theta}$, v_{pz}), quando t é muito grande e outra não permanente ($v_{np\theta}$, v_{npz}) quando t é pequeno. Esta decomposição é feita para se conseguir satisfazer as condições de contorno e inicial. Assim, podemos escrever

$$V_{\theta}(r,t) = V_{p\theta}(r) + V_{np\theta}(r,t) \quad e \quad V_z(r,t) = V_{pz}(r) + V_{npz}(r,t)$$

Fazendo as transformações adimensionais

$$U = \frac{V_{\theta}}{\omega a}, \quad \tau = \frac{t\nu}{a^2}, \quad R = \frac{r}{a}, \quad p_1 = \frac{p}{\rho\nu^2}, \quad W = \frac{V_z}{U}, \quad z_1 = \frac{z}{L}$$

nas equações (45a) e (45b) obtemos:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \left(\frac{1}{R^2} + \sigma^2\right) U \quad (46a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} - \sigma^2 W - Re \quad (46b)$$

onde

$$\sigma^2 = \frac{a^2}{K} \quad e \quad Re = \frac{Va^2}{\nu L} \frac{\partial p_1}{\partial z_1}$$

A parte permanente das velocidades U e W, é dada por

$$Up = F_1 I_1(\sigma R) + F_2 K_1(\sigma R) \quad (47a)$$

$$Wp = G_1 I_0(\sigma R) + G_2 K_0(\sigma R) - \frac{Re}{\sigma^2} \quad (47b)$$

conforme foi visto quando se estudou o escoamento em regime permanente

As condições de contorno e iniciais para este problema são:

$$\begin{aligned} U(1, \tau) &= 1, & U\left(\frac{c}{a}, \tau\right) &= 0, & U(R, 0) &= 0 \\ W(1, \tau) &= W\left(\frac{c}{a}, \tau\right) = 0 & e & & W(R, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Pelo método de separação de variáveis, assumindo $U(R, \tau) = F(R) T(\tau) + U_p$, fazendo as derivadas necessárias e substituindo na equação (46a) temos:

$$\frac{T'}{T} = \frac{F''}{F} + \frac{1}{R} \frac{F'}{F} - \left(\frac{1}{R^2} + \sigma^2 \right) \frac{F}{F} = -\lambda^2$$

Portanto,

$$\frac{T'}{T} = -\lambda^2 \implies T(\tau) = H_1 e^{-\lambda^2 \tau}$$

onde H_1 é uma constante, e

$$\frac{F''}{F} + \frac{1}{R} \frac{F'}{F} - \left(\frac{1}{R^2} + (\sigma^2 - \lambda^2) \right) F = 0 \quad (49)$$

1º CASO: Se $\sigma^2 > \lambda^2$, fazendo a mudança de variáveis

$$\beta = \sqrt{\sigma^2 - \lambda^2} R \quad \text{obtemos}$$

$$\beta^2 \frac{d^2 F}{d\beta^2} + \beta \frac{dF}{d\beta} - (1 + \beta^2) F = 0$$

cuja solução é

$$F(R) = L_1 I_1(\sqrt{\sigma^2 - \lambda^2} R) + L_2 K_1(\sqrt{\sigma^2 - \lambda^2} R) \quad (50)$$

onde L_1 e L_2 são constantes que dependem das condições de contorno.

2º CASO: Se $\sigma^2 = \lambda^2$, a equação (49) torna-se

$$F'' + \frac{1}{R} F' - \frac{1}{R^2} F = 0 \quad (51)$$

e esta equação tem como solução:

$$F(R) = L_3 R + L_4 \frac{1}{R} \quad (52)$$

onde L_3 e L_4 são constantes.

3º CASO: Se $\sigma^2 < \lambda^2$, a equação (49) pode ser escrita da seguinte maneira

$$F'' + \frac{1}{R} F' + \left[(\lambda^2 - \sigma^2) - \frac{1}{R^2} \right] F = 0 \quad (53)$$

e com a transformação de variáveis $\beta = \sqrt{\lambda^2 - \sigma^2} R$, temos:

$$\beta^2 \frac{d^2 F}{d\beta^2} + \beta \frac{dF}{d\beta} + (\beta^2 - 1) F = 0 \quad (54)$$

A solução da equação (54) é

$$F(R) = L_5 J_1(\sqrt{\lambda^2 - \sigma^2} R) + L_6 Y_1(\sqrt{\lambda^2 - \sigma^2} R) \quad (55)$$

onde L_5 e L_6 são constantes e J_1 e Y_1 são as funções de Bessel de primeira ordem de 1ª. e 2ª. espécies respectivamente.

Como já foi dito anteriormente, temos que:

$$U = U_{np} + U_p \quad e \quad U_{np} = F(R) T(\tau)$$

e com as condições de contorno dadas por (48), podemos tirar:

$$U_p(1) = 1, \quad U_p\left(\frac{c}{a}\right) = 0$$

$$U_{np}(1, \tau) = 0, \quad U_{np}\left(\frac{c}{a}, \tau\right) = 0, \quad U_{np}(R, 0) = -U_p(R)$$

Com estas condições e a equação (47a), obtemos:

$$U_p = \frac{K_1\left(\frac{c}{a}\sigma\right)}{I_1(\sigma)K_1\left(\frac{c}{a}\sigma\right) - I_1\left(\frac{c}{a}\sigma\right)K_1(\sigma)} I_1(\sigma R) - \frac{I_1\left(\frac{c}{a}\sigma\right)}{I_1(\sigma)K_1\left(\frac{c}{a}\sigma\right) - I_1\left(\frac{c}{a}\sigma\right)K_1(\sigma)} K_1(\sigma R) \quad (56)$$

Aplicando as condições de contorno, referentes a U_{np} , na expressão (50) verificamos que, para se ter solução não trivial, temos que satisfazer a expressão:

$$I_1(\sqrt{\sigma^2 - \lambda^2})K_1\left(\sqrt{\sigma^2 - \lambda^2}\frac{c}{a}\right) - I_1\left(\sqrt{\sigma^2 - \lambda^2}\frac{c}{a}\right)K_1(\sqrt{\sigma^2 - \lambda^2}) = 0 \quad (57)$$

Como $c > a \longrightarrow \frac{c}{a} > 1$, então

$$I_1\left(\sqrt{\sigma^2 - \lambda^2}\frac{c}{a}\right) > I_1(\sqrt{\sigma^2 - \lambda^2})$$

e

$$K_1\left(\sqrt{\sigma^2 - \lambda^2}\frac{c}{a}\right) < K_1(\sqrt{\sigma^2 - \lambda^2})$$

sendo, portanto, impossível satisfazer a expressão (57), o que força a ter $L_1 = L_2 = 0$ na equação (50).

Repetindo o mesmo procedimento anterior para a equação (52), temos:

$$\frac{a}{c} - \frac{c}{a} = 0$$

o que não é possível visto que a e $c \neq 0$ e $c > a$.

Portanto $L_3 = L_4 = 0$

Aplicando este procedimento na expressão (55) encontramos que a expressão a ser satisfeita é:

$$J_1(\alpha) Y_1\left(\frac{c}{a}\alpha\right) - J_1\left(\frac{c}{a}\alpha\right) Y_1(\alpha) = 0 \quad (58)$$

onde $\alpha = \sqrt{\lambda^2 - \sigma^2}$

De acordo com Abramowitz e Stegun [15], as raízes da expressão (58) são dadas por:

$$\alpha_n = \ell + \frac{p}{\ell} + \frac{q - p^2}{\ell^3} + \frac{\kappa - 4pq + 2p^3}{\ell^5} + \dots \quad (59)$$

sendo $\ell = \frac{n\pi}{\frac{c}{a} - 1}$, $p = \frac{4\nu^2 - 1}{8\left(\frac{c}{a}\right)}$,

$$q = \frac{4(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 25)\left[\left(\frac{c}{a}\right)^3 - 1\right]}{3\left[8\left(\frac{c}{a}\right)^3\left(\frac{c}{a} - 1\right)\right]}, \quad \kappa = \frac{32(4\nu^2 - 1)\left[(4\nu^2)^2 - 114(4\nu^2) + 1073\right]\left[\left(\frac{c}{a}\right)^5 - 1\right]}{5\left[8\left(\frac{c}{a}\right)\right]^5\left(\frac{c}{a} - 1\right)}$$

e ν a ordem das funções de Bessel envolvidas.

Assim, podemos escrever:

$$U_{np} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n Z_1(\alpha_n R) e^{-(\alpha_n^2 + \sigma^2)\tau} \quad (60).$$

onde
$$Z_1(\alpha_n R) = J_1(\alpha_n R) - \frac{J_1(\alpha_n)}{Y_1(\alpha_n)} Y_1(\alpha_n R)$$

Da condição inicial tiramos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n Z_1(\alpha_n R) = -U_p$$

Multiplicando ambos os termos por $R Z_1(\alpha_m R) dR$ e integrando no intervalo $|1, \frac{c}{a}|$, ficamos com:

$$\int_1^{\frac{c}{a}} M_n R Z_1(\alpha_n R) Z_1(\alpha_m R) dR = \int_1^{\frac{c}{a}} -U_p R Z_1(\alpha_m R) dR \quad (61)$$

Pelo princípio da ortogonalidade das funções de Bessel neste intervalo,

$$\int_1^{\frac{c}{a}} R Z_1(\alpha_n R) Z_1(\alpha_m R) dR = 0 \quad \text{se } m \neq n,$$

então a expressão (61) torna-se

$$M_n \int_1^{\frac{c}{a}} R [Z_1(\alpha_n R)]^2 dR = - \int_1^{\frac{c}{a}} U_p R Z_1(\alpha_n R) dR$$

ou
$$M_n = \frac{\int_1^{\frac{c}{a}} U_p R Z_1(\alpha_n R) dR}{\int_1^{\frac{c}{a}} R |Z_1(\alpha_n R)|^2 dR} \quad (62)$$

Substituindo o valor de U_p , dado pela expressão (56), na expressão (62) e resolvendo as integrais encontramos:

$$M_n = \frac{-2\alpha_n Z_0(\alpha_n)}{(\sigma^2 + \alpha_n^2) \left\{ \left(\frac{c}{a}\right)^2 [Z_0(\alpha_n \frac{c}{a})]^2 - [Z_0(\alpha_n)]^2 \right\}}$$

onde $Z_0(\alpha_n R) = J_0(\alpha_n R) - \frac{J_1(\alpha_n)}{y_1(\alpha_n)} y_0(\alpha_n R),$ e

$$U_{np} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\alpha_n Z_0(\alpha_n)}{(\sigma^2 + \alpha_n^2) \left\{ \left(\frac{c}{a}\right)^2 [Z_0(\alpha_n \frac{c}{a})]^2 - [Z_0(\alpha_n)]^2 \right\}} Z_1(\alpha_n R) e^{-(\sigma^2 + \alpha_n^2)\tau} \quad (63)$$

Portanto, a solução geral da equação (46a) é dada por:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\alpha_n Z_0(\alpha_n)}{(\sigma^2 + \alpha_n^2) \left\{ \left(\frac{c}{a}\right)^2 [Z_0(\alpha_n \frac{c}{a})]^2 - [Z_0(\alpha_n)]^2 \right\}} Z_1(\alpha_n R) e^{-(\sigma^2 + \alpha_n^2)\tau} +$$

$$+ \frac{K_1(\frac{c}{a}\sigma)}{I_1(\sigma)K_1(\frac{c}{a}\sigma) - I_1(\frac{c}{a}\sigma)K(\sigma)} I_1(\sigma R) - \frac{I_1(\frac{c}{a}\sigma)}{I_1(\sigma)K_1(\frac{c}{a}\sigma) - I_1(\frac{c}{a}\sigma)K_1(\sigma)} K_1(\sigma R) \quad (64)$$

De modo análogo, fazendo $w(R, \tau) = X(R)T(\tau) + w_p$ sendo w_p dado por (47b), derivando e substituindo na equação (46b), chegamos a:

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{1}{R} \frac{X'}{X} - \sigma^2 \frac{X}{X} = -\lambda^2$$

donde tiramos

$$T(\tau) = N_1 e^{-\lambda^2 \tau}$$

$$e \quad X''' + \frac{1}{R} X' - (\sigma^2 - \lambda^2) X = 0$$

Repetindo a análise feita para a velocidade na direção teta, se $\sigma^2 > \lambda^2$

$$X(R) = N_2 I_0(\sqrt{\sigma^2 - \lambda^2} R) + N_3 K_0(\sqrt{\sigma^2 - \lambda^2} R) \quad (65)$$

$$se \quad \sigma^2 = \lambda^2$$

$$X(R) = N_4 \ln R + N_5 \quad (66)$$

$$e \ se \quad \sigma^2 < \lambda^2$$

$$X(R) = N_6 J_0(\sqrt{\lambda^2 - \sigma^2} R) + N_7 Y_0(\sqrt{\lambda^2 - \sigma^2} R) \quad (67)$$

As condições de contorno e iniciais, neste caso, são tiradas das propostas em (48) e da expressão $w = X(R) T(\tau) + w_p$. Da combinação destas expressões obtemos:

$$\begin{array}{lll} R = 1 & X(1) = 0 & w_p(1) = 0 \\ R = \frac{c}{a} & X\left(\frac{c}{a}\right) = 0 & w_p\left(\frac{c}{a}\right) = 0 \\ \tau = 0 & w_{np} = -w_p \end{array}$$

Aplicando as condições referentes a w_p na expressão (47b) chegamos a:

$$w_p = \frac{\frac{R_e}{\sigma^2} [I_0(\sigma) - I_0\left(\frac{c}{a}\sigma\right)]}{I_0(\sigma)K_0\left(\frac{c}{a}\sigma\right) - I_0\left(\frac{c}{a}\sigma\right)K_0(\sigma)} K_0(\sigma R) + \frac{R_e}{\sigma^2} \frac{[K_0\left(\frac{c}{a}\sigma\right) - K_0(\sigma)]}{I_0(\sigma)K_0\left(\frac{c}{a}\sigma\right) - I_0\left(\frac{c}{a}\sigma\right)K_0(\sigma)} I_0(\sigma R) - \frac{R_e}{\sigma^2} \quad (68)$$

e com as condições relativas a X , tiramos que $N_2=N_3=N_4=N_5=0$ e portanto a solução de (46b) é

$$w_{np}(R, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n Z_0^*(\gamma_n R) e^{-(\gamma_n^2 + \sigma^2)\tau}$$

onde os γ_n 's são as raízes do polinômio

$J_0(\gamma)Y_0\left(\frac{c}{a}\gamma\right) - J_0\left(\frac{c}{a}\gamma\right)Y_0(\gamma)$, com $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - \sigma^2}$, dadas pela expressão (59) usando $v=0$.

Usando a condição inicial, encontramos

$$w_{np} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R_e Z_0(\gamma_n R) e^{-(\sigma^2 + \gamma_n^2)\tau}}{(\sigma^2 + \gamma_n^2) \gamma_n \left[\frac{c}{a} Z_j^*\left(\gamma_n \frac{c}{a}\right) + Z_j^*(\gamma_n) \right]} \quad (69)$$

e portanto, a solução geral da equação (46b) é:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R_e Z_0^*(\gamma_n R) e^{-(\sigma^2 + \gamma_n^2)\tau}}{(\sigma^2 + \gamma_n^2) \gamma_n \left[\frac{c}{a} Z_j^*\left(\gamma_n \frac{c}{a}\right) + Z_j^*(\gamma_n) \right]} + \frac{R_e}{\sigma^2} \frac{[K_0\left(\frac{c}{a}\sigma\right) - K_0(\sigma)]}{I_0(\sigma)K_0\left(\frac{c}{a}\sigma\right) - I_0\left(\frac{c}{a}\sigma\right)K_0(\sigma)} I_0(\sigma R) + \frac{R_e}{\sigma^2} \frac{[I_0(\sigma) - I_0\left(\frac{c}{a}\sigma\right)]}{I_0(\sigma)K_0\left(\frac{c}{a}\sigma\right) - I_0\left(\frac{c}{a}\sigma\right)K_0(\sigma)} K_0(\sigma R) - \frac{R_e}{\sigma^2} \quad (70)$$

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 PERFIS DE VELOCIDADE E DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO

4.1.1 Escoamento em regime permanente

Os resultados dependem das distâncias relativas entre os cilindros e a interface das regiões de fluido puro e porosa. As curvas mostradas neste item, foram traçadas assumindo-se que os raios do cilindro externo (c) e da interface (b) são, respectivamente, 2 e 1.1 vezes o raio do cilindro interno (a), isto é, $c = 2a$ e $b = 1.1a$.

A. Perfis de velocidade na direção θ

Na figura (4.1) são apresentados os perfis de velocidades na direção θ , obtidos das expressões (26a) e (26b), para diversos valores do parâmetro de permeabilidade σ .

Como podemos notar, o aumento do parâmetro de porosidade causa uma diminuição nos valores das velocidades tanto no meio poroso como na região de fluido puro.

Os valores $\sigma=0$ e $\sigma=\infty$ correspondem, respectivamente, aos valores de permeabilidades do meio poroso $K=\infty$ $K=0$ isto é, quando $\sigma=0$ não existem partículas sólidas na região b-c e quando $\sigma = \infty$, esta região é totalmente sólida. Nestes casos, as expressões (26a) e (26b) transformam-se em:

$$u = \frac{a^2}{a^2-c^2} R - \frac{c^2}{a^2-c^2} \frac{1}{R} \quad (p/\sigma=0) \quad (71a)$$

$$e \quad u = \frac{a^2}{a^2-b^2} R - \frac{b^2}{a^2-c^2} \frac{1}{R} \quad (p/\sigma=\infty) \quad (71b)$$

$$U = 0 \quad (71c)$$

As expressões (71a) e (71b) são idênticas à solução, mostrada por YUAN [16] para o escoamento entre cilindros concêntricos com o cilindro interno girando com velocidade angular, ω , constante e o espaço entre eles contendo um fluido Newtoniano.

B. Perfis de velocidades na direção z

Os perfis de velocidade para a direção z, conseguidos através das expressões (32a) e (32b) estão mostrados nas figuras (4.2.a) e (4.2.b) sendo que o comportamento em relação à variação do parâmetro σ , é idêntico ao da velocidade na direção teta. Deste modo, há uma diminuição do fluxo de massa através da região de fluxo puro quando se aumenta o valor de σ pois

$$\dot{Q} = \int_a^b u(R) R dR$$

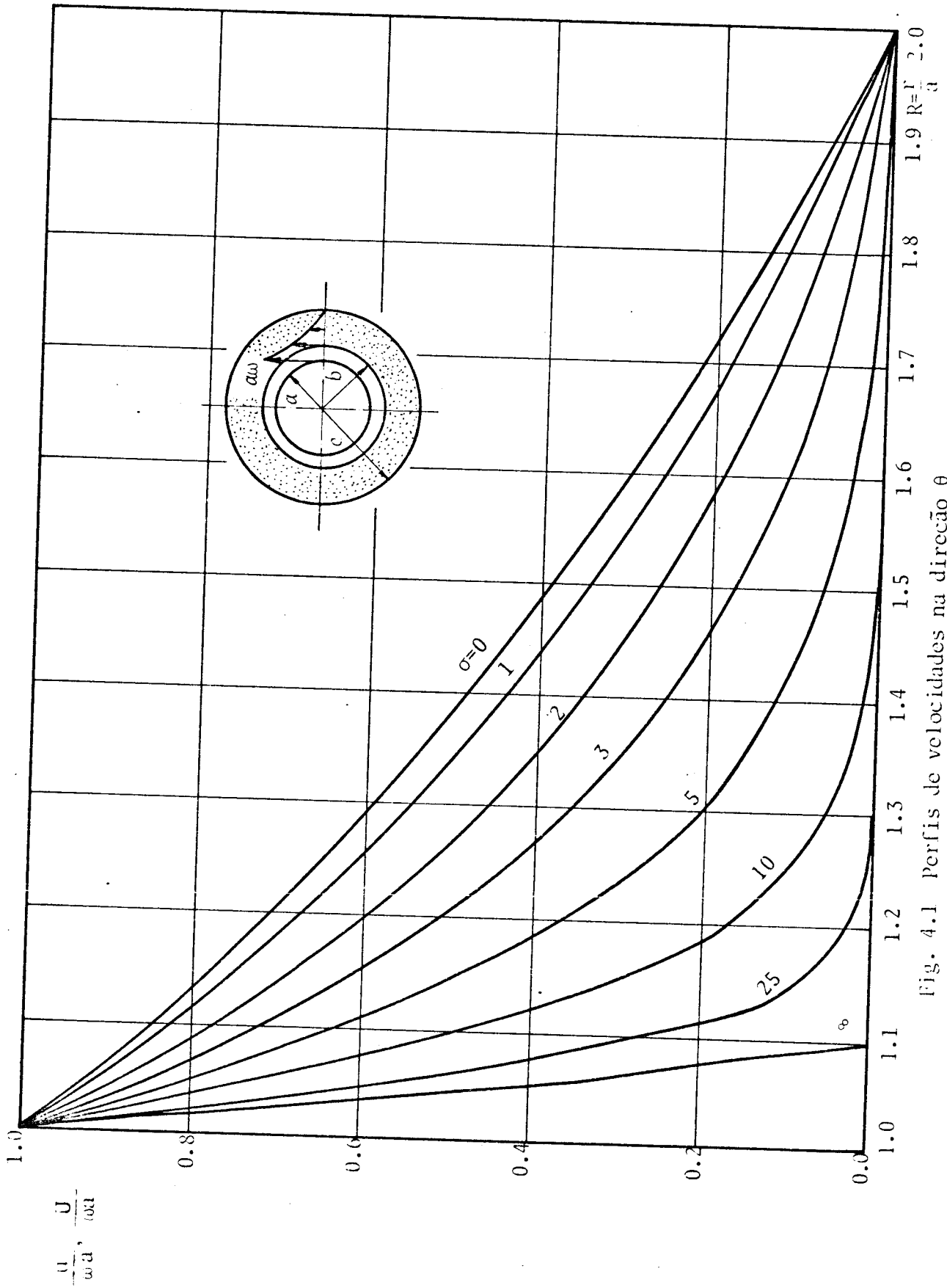
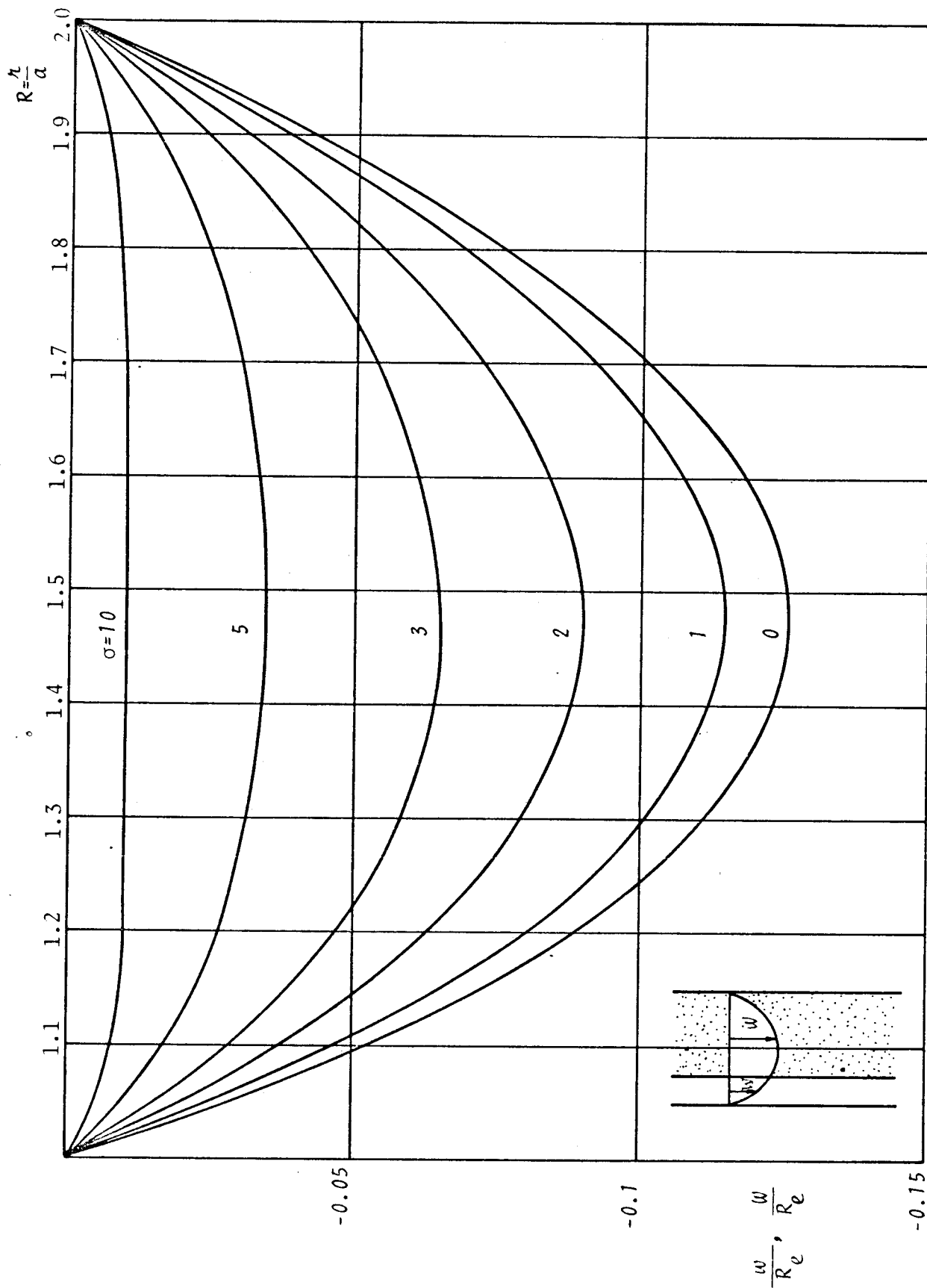


Fig. 4.1 Perfis de velocidades na direção θ

Fig. 4.2.a Perfis de velocidades na direção z

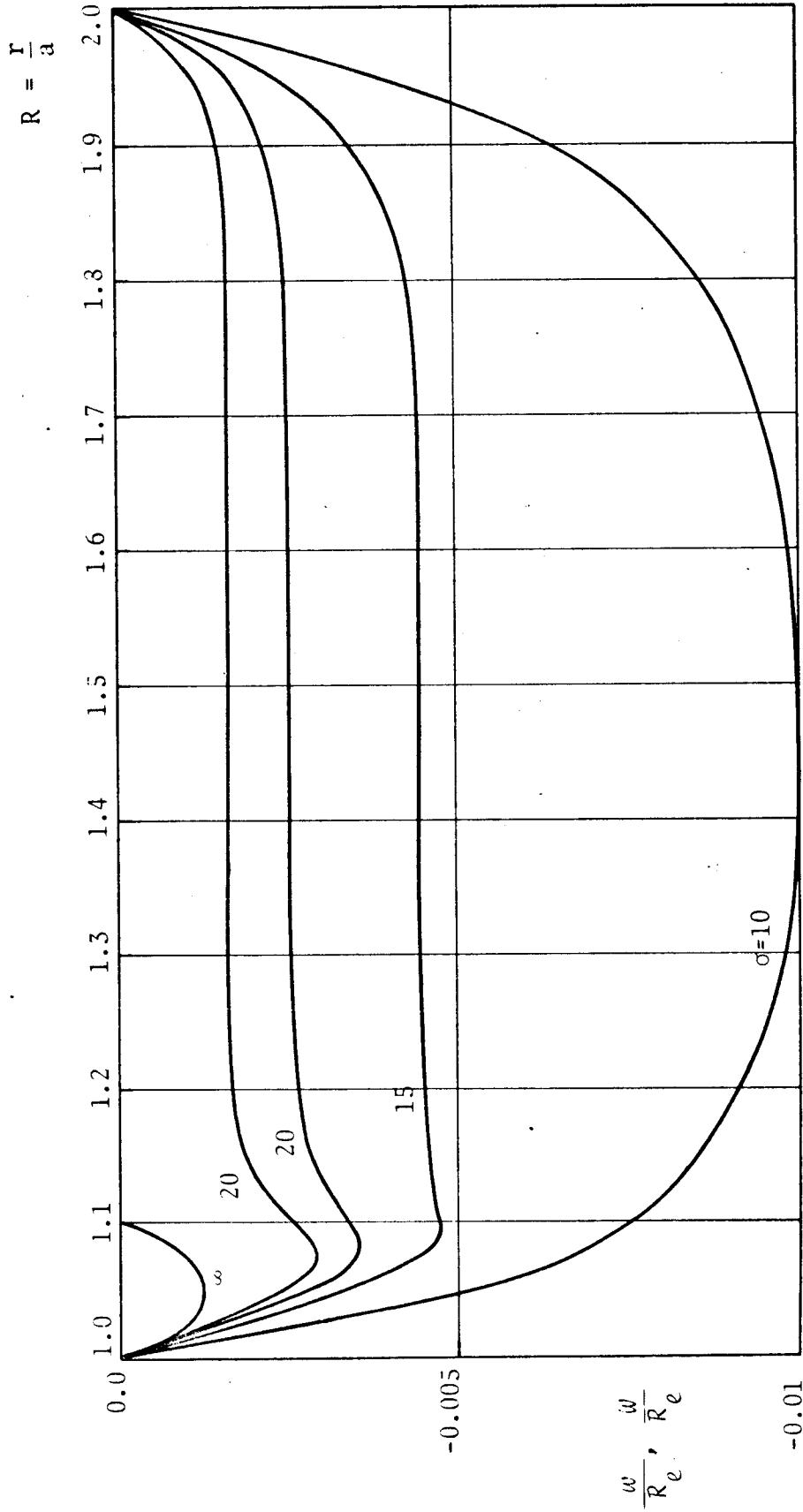


Fig. 4.2.b Perfis de velocidades na direção z

Os valores plotados, nas figuras anteriores, são os da velocidade na direção z divididos pelo número de Reynolds (W/R_e , w/R_e). Como o nº de Reynolds, neste caso, é definido como

$$R_e = \frac{\rho V a^2}{\mu L} \frac{dp_1}{dz_1},$$

valores positivos deste número, implicam em valores positivos de gradiente de pressão e, por este motivo, os valores plotados são negativos.

Do mesmo modo feito anteriormente, para $\sigma=0$ e $\sigma=\infty$, as expressões (32a) e (32b) podem ser transformadas em

$$w = \frac{R_e}{4} \left\{ \left[\frac{(\frac{c}{a})^2 - 1}{\ln(\frac{c}{a})} \right] \ln R + (R^2 - 1) \right\} \quad p/ \quad 1 \leq R \leq \frac{c}{a} \quad (72)$$

para $\sigma=0$ e

$$w = \frac{R_e}{4} \left\{ \frac{(\frac{b}{a})^2 - 1}{\ln(\frac{b}{a})} \ln R + (R^2 - 1) \right\} \quad p/ \quad 1 \leq R \leq \frac{b}{a} \quad e$$

$$w=0 \quad (73)$$

para $\sigma = \infty$

Estas expressões são as mesmas encontradas por YUAN [16] para o escoamento, entre cilindros concêntricos, na direção axial.

C. Distribuição de pressão

As expressões (34c) e (34d) nos fornecem a distribuição de pressão que segue:

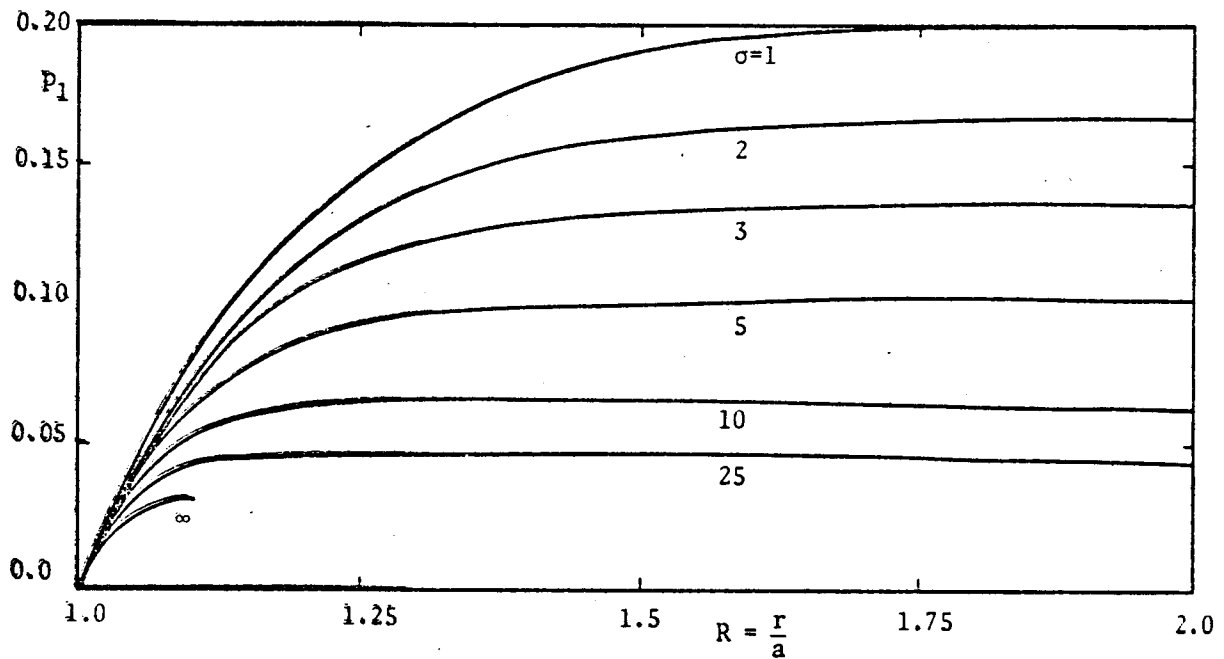


Fig. 4.3 Distribuição de pressões na direção radial

Os valores das pressões, indicados na figura (4.3), são os que surgem devido à rotação do cilindro interno e, consequentemente, devido à velocidade na direção teta. A estes valores devem ser adicionados os valores da pressão estática da seção em que se está analisando e esta pressão é função da coordenada z .

D. Tensão de cisalhamento e torque resistente

Analisando as figuras (4.4) e (4.5) podemos observar a variação da tensão de cisalhamento e do torque resistente, na superfície do cilindro interno, em função do parâmetro de permeabilidade σ .

Observando a figura (4.1) vemos que a derivada da velocidade u , na parede do cilindro interno, cresce com o aumento do valor de σ . Como a tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau_{r\theta} = \mu\omega \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{R} \right)$$

e o torque resistivo por

$$T_1 = 2\pi aL \tau_{r\theta},$$

onde L é o comprimento do cilindro interno, há consequentemente, um acréscimo nestes valores.

4.1.2 Escoamento em regime não permanente

As figuras (4.6) e (4.7) mostram os perfis de velocidade nas direções θ e z , respectivamente. Estes perfis, quando $\sigma=0$, são os mesmos encontrados por YIH [17] para o escoamento, em regime não permanente, entre cilindros concêntricos nas direções θ e z .

Para se determinar estes perfis, foi considerado que todo o espaçamento entre os cilindros está cheio com meio poroso isto porque, a existência da interface torna o problema matematicamente muito complexo e não se consegue obter os auto-valores que irão satisfazer o método de resolução.

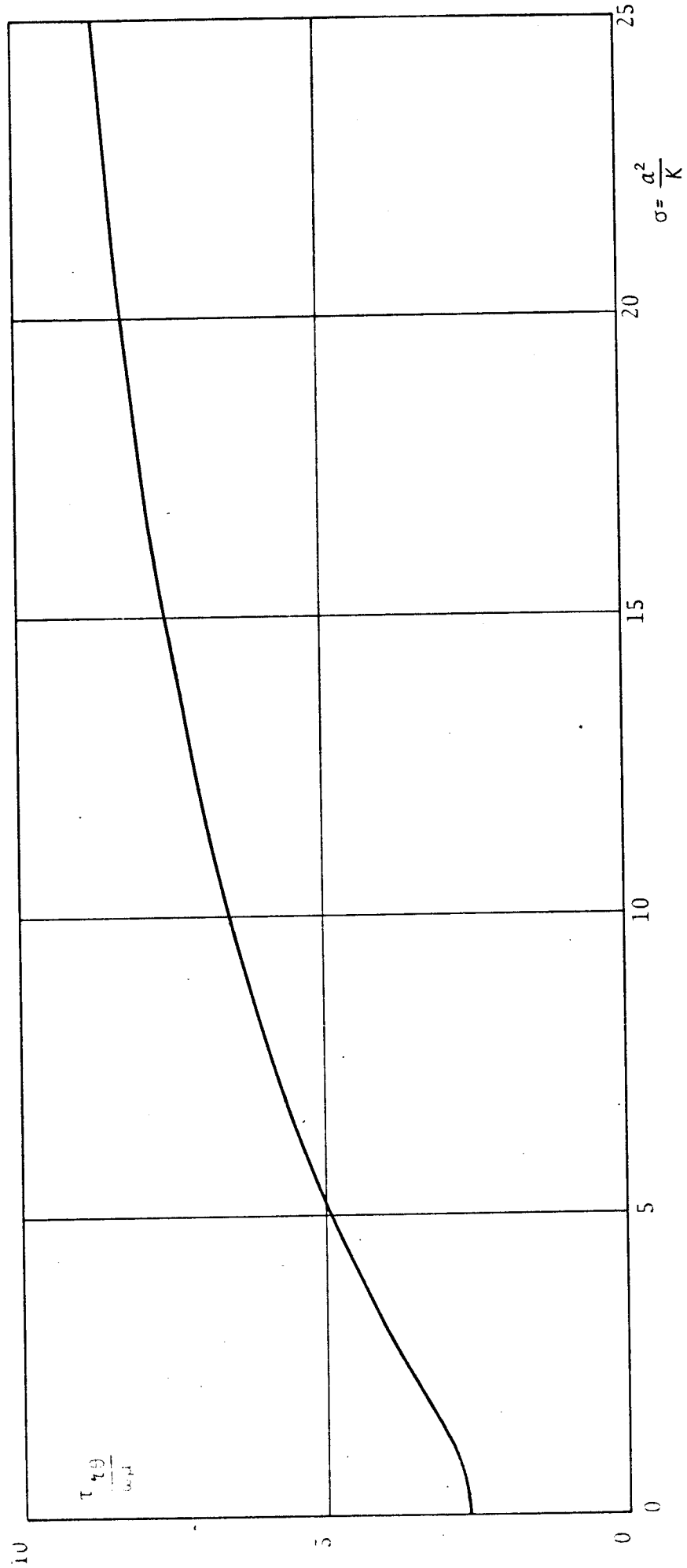


Fig. 4.4 Tensão de cisalhamento em função de σ

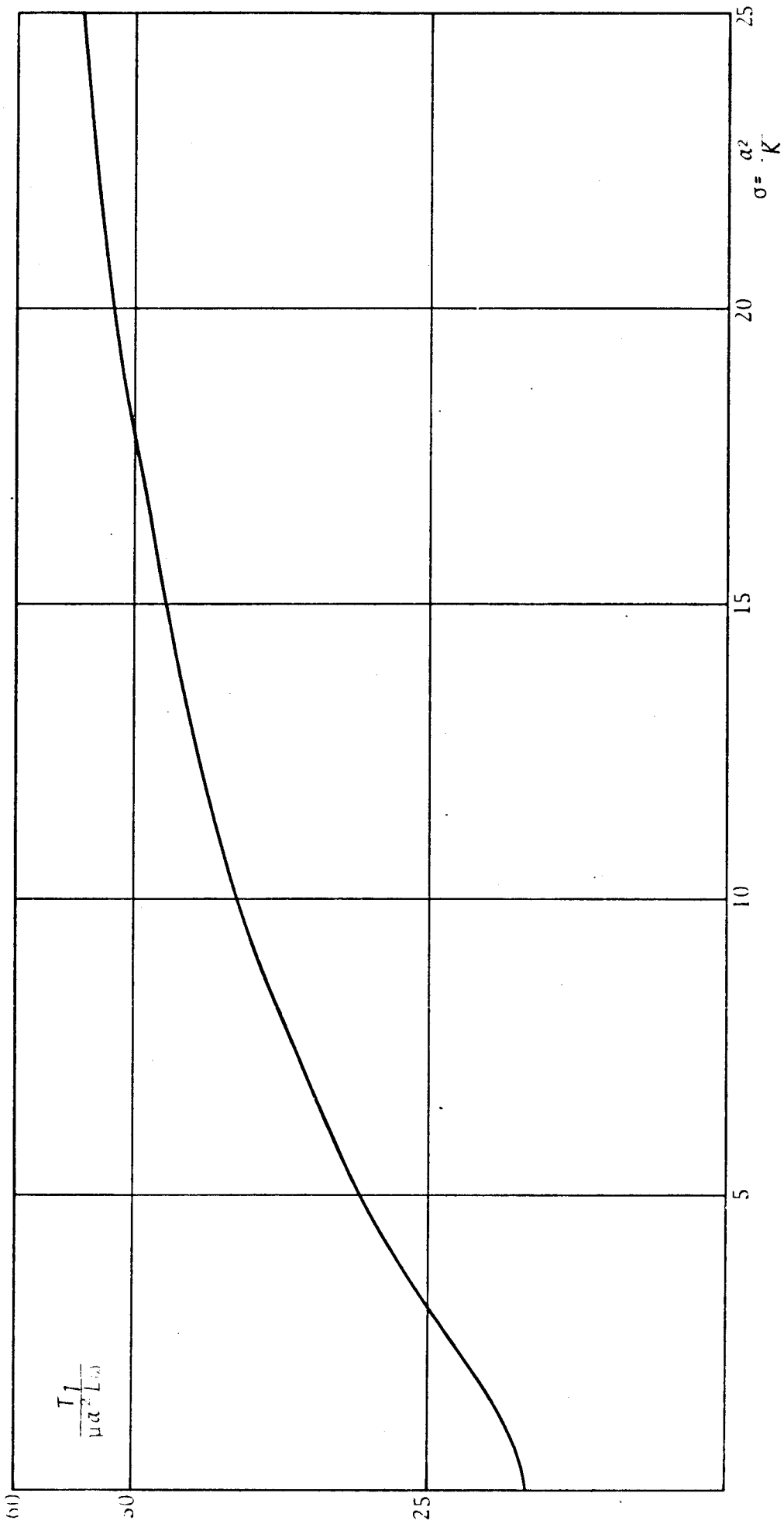


Fig. 4.5 Torque resistente em função de σ

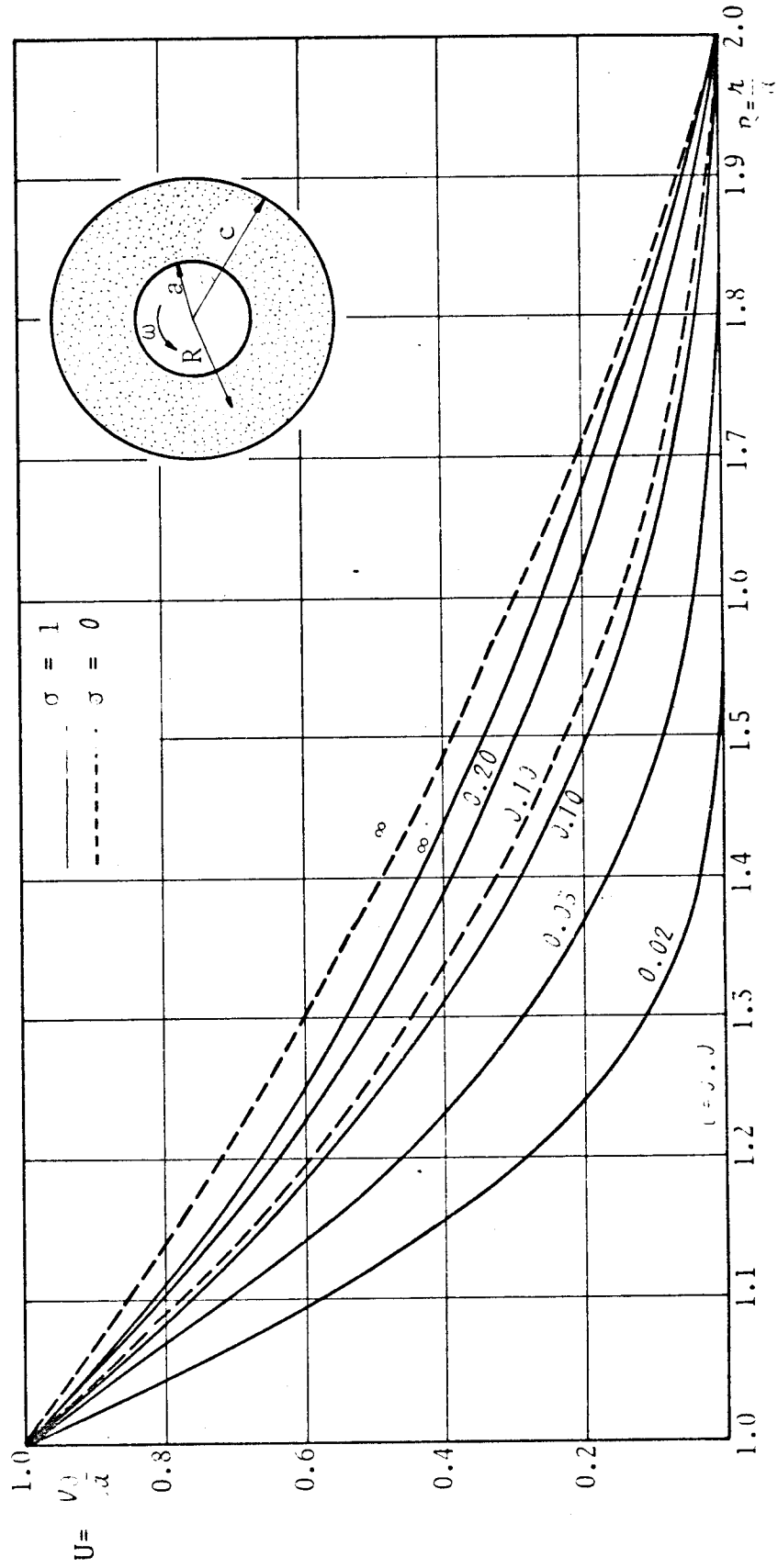


Fig. 4.6 Perfis de velocidades em regime não permanente na direção θ

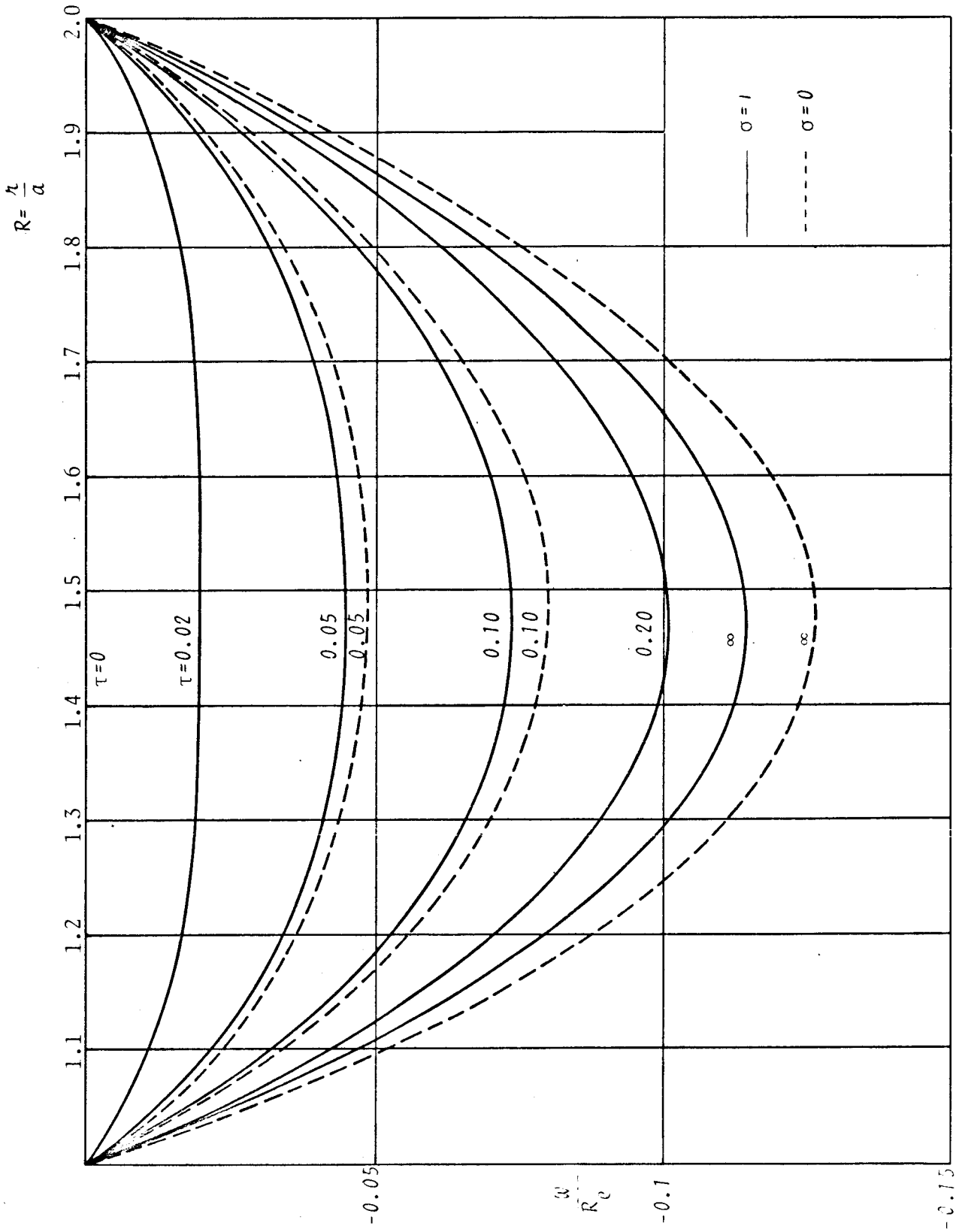


Fig. 4.7 Perfis de velocidades em regime não permanente na direção z

4.2 Perfis de temperatura

Com as dimensões definidas no ítem 4.1.1 e considerando que no cilindro interno $\frac{\partial \theta}{\partial R} = 0$ e no externo $\theta = 1$, são mostrados a seguir os perfis de temperatura e a variação destes com os diversos parâmetros adimensionais envolvidos.

As equações (41a) e (41b), resolvidas numericamente, nos fornecem os resultados que são mostrados e descritos a seguir.

Na figura (4.8) estão as curvas temperatura versus raio quando se variam os valores do parâmetro σ e se mantêm constantes as relações de condutividades térmicas ($k/k_j^* = 1.0$) e o parâmetro $P_n \times E_k$, isto é, a velocidade do cilindro interno é mantida constante.

São mostradas também, a distribuição de temperatura se não for considerada a dissipação no meio poroso o que, de acordo com as curvas, pode ser feito quando se tem valores altos de σ . Podemos notar também, que o calor gerado devido à rotação é maior quando o valor de σ cresce, embora o cilindro interno permaneça com velocidade constante. Isto ocorre porque o calor gerado devido ao atrito é expresso por $\phi = \left(\frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R} \right)^2$ e como já foi visto anteriormente, quanto maior o valor de σ , maior é a derivada da velocidade. Embora, neste caso, a velocidade e sua derivada tenham sinais contrários, isto é, no termo de dissipação elas se somam, e a velocidade diminua quando há um aumento de σ , o aumento da derivada é maior que a queda da velocidade e isso faz com que o valor de ϕ seja maior.

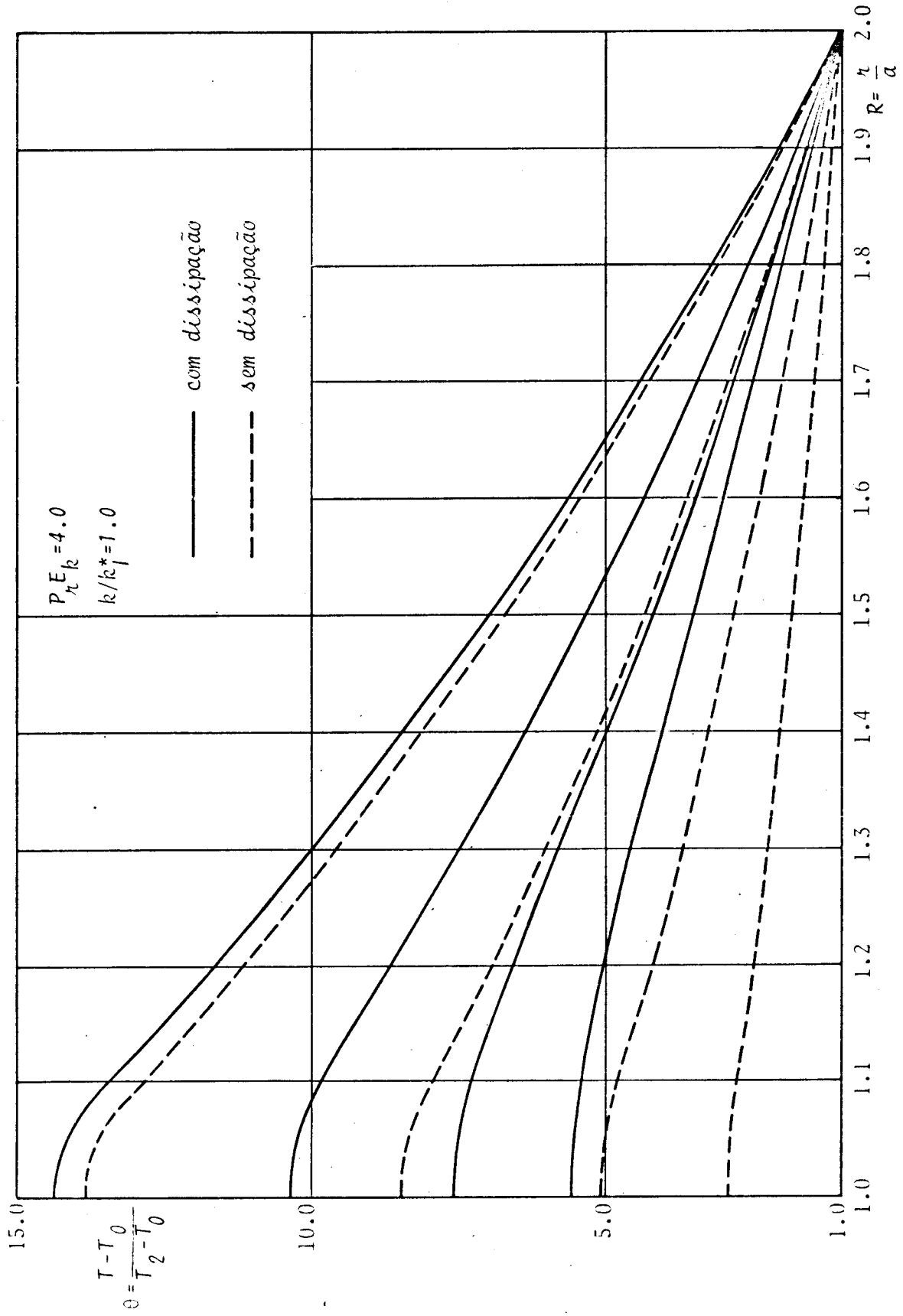


Fig. 4.8 Influência do parâmetro α na distribuição de temperaturas

A figura (4.9) mostra a influência do parâmetro $P_R \times E_k$ na temperatura. Quanto maior for este parâmetro, maior será a velocidade do cilindro interno pois

$$P_R \times E_k = \frac{\mu C}{k} - \frac{(\omega a)^2}{C \Delta T}$$

O aumento deste parâmetro implica em maior calor gerado por atrito fluido pois ele aparece multiplicando o fator Φ , como pode ser visto nas equações (41a) e (41b).

Outro gráfico apresentado, figura (4.10), mostra as distribuições de temperatura quando se mantêm constantes os valores de σ e de $P_R \times E_k$ e se variam as relações entre as condutividades térmicas k/k_j^* .

Embora o calor gerado seja o mesmo, quanto menor k/k_j^* , maior é a facilidade de se transmitir calor e, portanto se atinge temperaturas menores no escoamento. O valor $k/k_j^*=2.0$ indica que o fluido é 2 vezes mais condutivo que o meio poroso e, portanto, este último se comporta com uma resistência maior à transmissão de calor o que faz com que se tenha temperaturas mais elevadas no escoamento na região de fluido puro.

Na figura (4.11) se tem a variação da temperatura no cilindro interno com o parâmetro σ para valores de k/k_j^* e $P_R \times E_k$ constantes.

Vemos que a temperatura, para pequenos valores de σ , diminui quando σ é maior e isto ocorre até certo ponto a partir do qual a temperatura passa a aumentar com o acréscimo de σ . Isto ocorre devido à influência da dissipação no meio poroso pois quando não consideramos a dissipação no meio poroso, notamos

que esta tendência desaparece.

4.3 Transferência de Calor

De acordo com a expressão (44), o número de Nusselt é dado por:

$$Nu = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_{R=c/a}$$

Da análise da derivada da temperatura neste ponto verificamos que esta varia linearmente com $P_r \times E_k$ e k/k_1^* . Deste modo

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_{c/a} = P_r \times E_k \times f(\sigma) \times \frac{k}{k_1^*} \quad \text{e conseqüentemente}$$

$$Nu = P_r \times E_k \times k/k_1^* \times f(\sigma).$$

Ná figura (4.12) é mostrada a variação de $\frac{Nu}{P_r \times E_k \times k/k_1^*}$ em função de σ e vemos que o comportamento é parecido com o da figura (4.11) e pode ser explicado de modo análogo.

Para algumas faixas de σ , podemos escrever:

$$Nu \approx P_r \times E_k \times k/k_1^* (1,16 \sigma^{-0,014}) \quad p/ \quad 0,5 \leq \sigma \leq 1,64$$

$$Nu \approx P_r \times E_k \times k/k_1^* (1,11 \sigma^{0,075}) \quad p/ \quad 1,64 \leq \sigma \leq 2,74$$

$$Nu \approx P_r \times E_k \times k/k_1^* (0,90 \sigma^{0,283}) \quad p/ \quad 2,74 \leq \sigma \leq 5,0$$

$$Nu \approx P_r \times E_k \times k/k_1^* (0,77 \sigma^{0,38}) \quad p/ \quad 5,0 \leq \sigma \leq 25,0$$

$$Nu = 1,2 P_r \times E_k \quad p/ \quad \sigma = 0 \quad e$$

$$Nu \approx 4,34 P_r \times E_k \quad p/ \quad \sigma = \infty$$

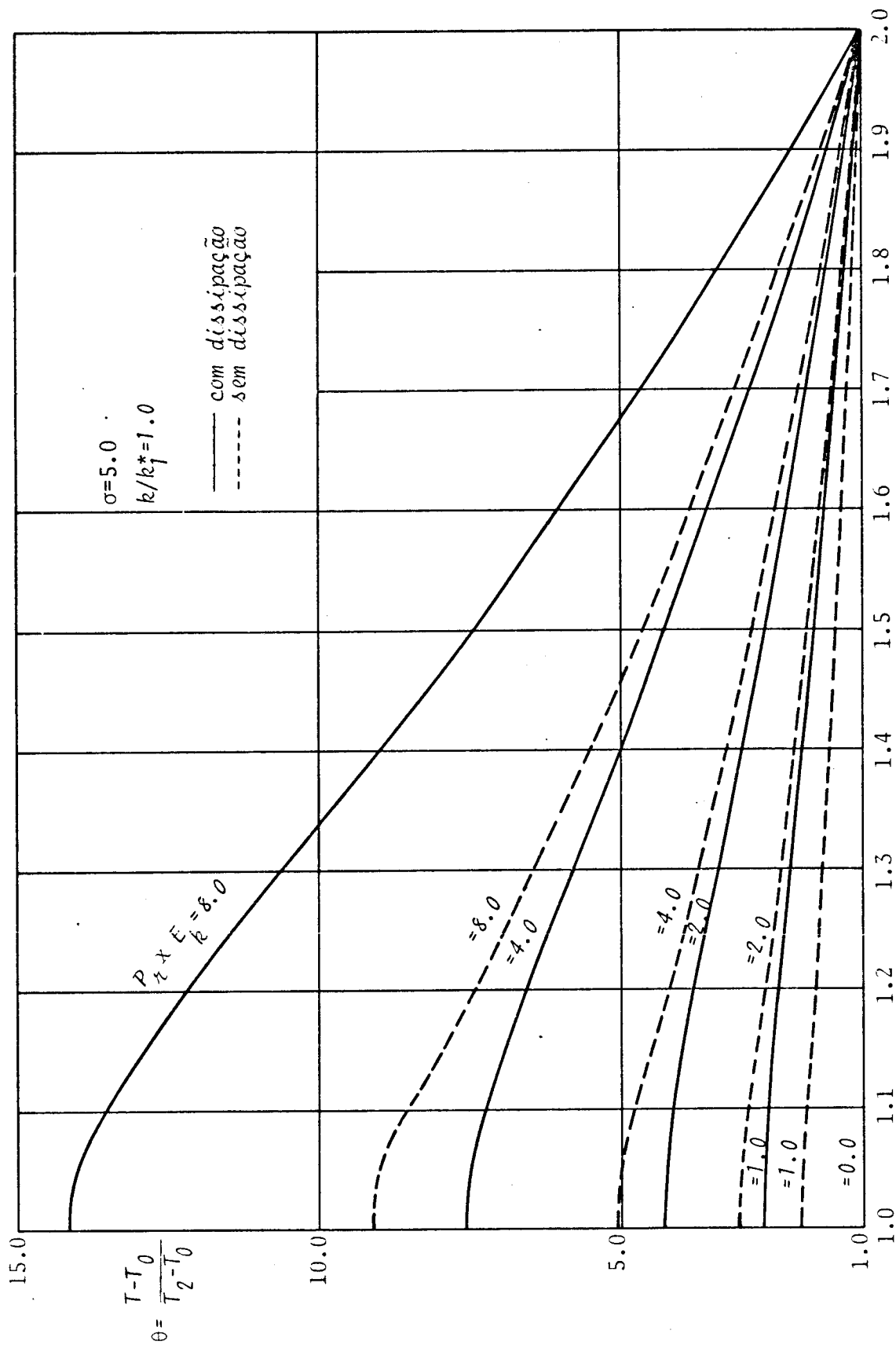


Fig. 4.9 Influência do parâmetro $P \cdot E_k / k$ na distribuição de temperaturas

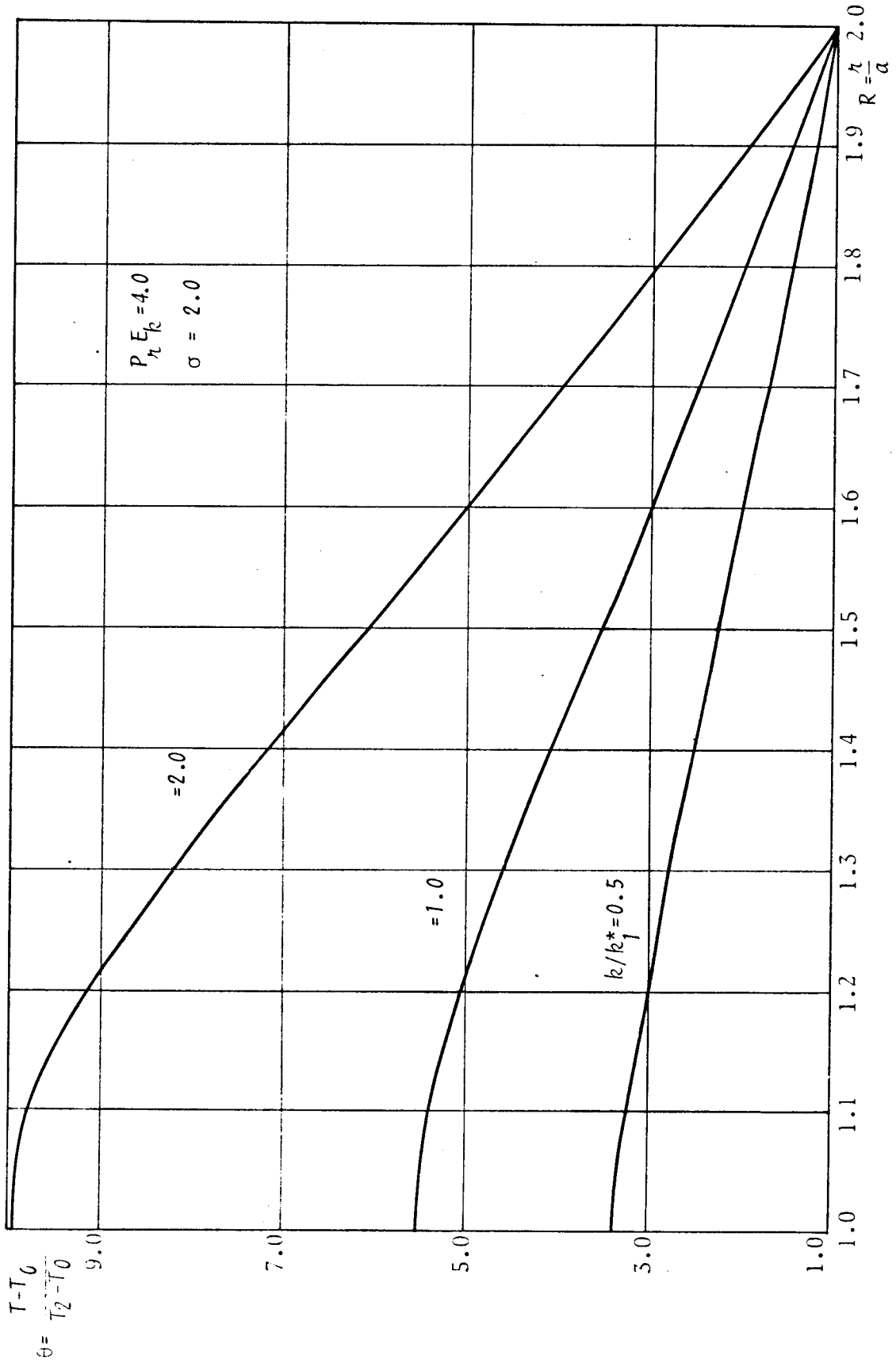


Fig. 4.10 Influência da relação k/k_1^* na distribuição de temperaturas

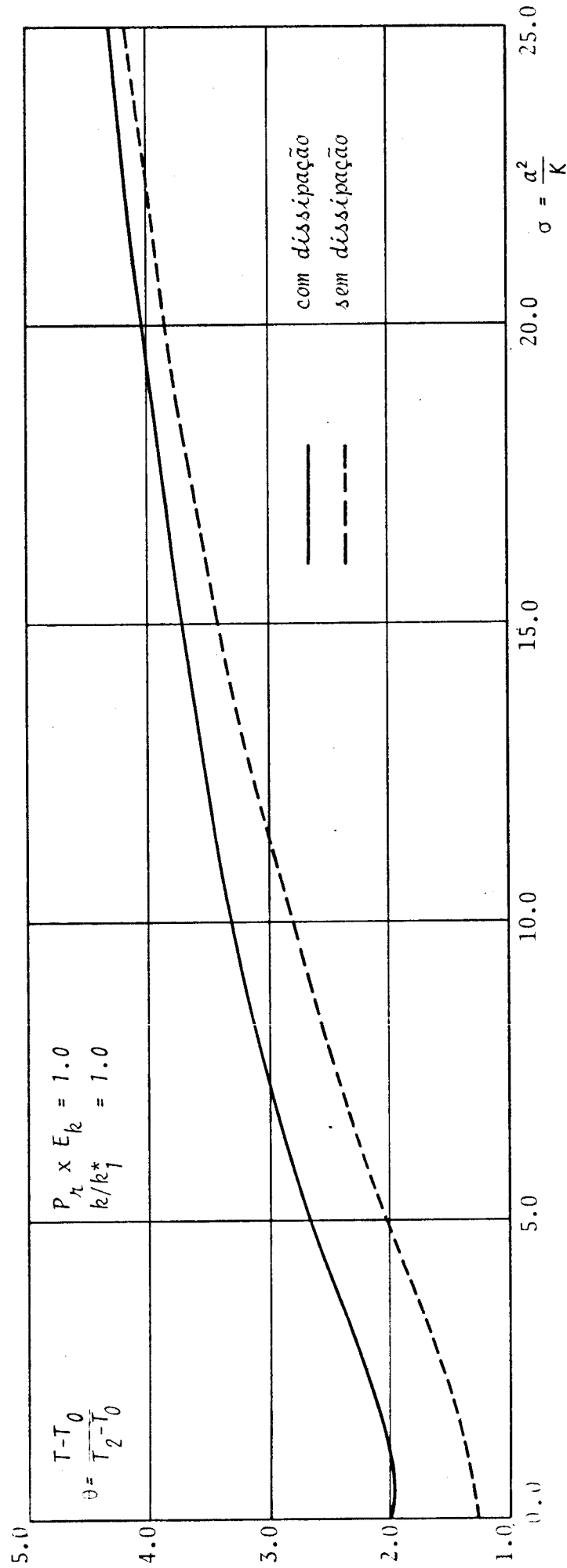


Fig. 4.11 Variação da temperatura do cilindro interno com o valor de σ

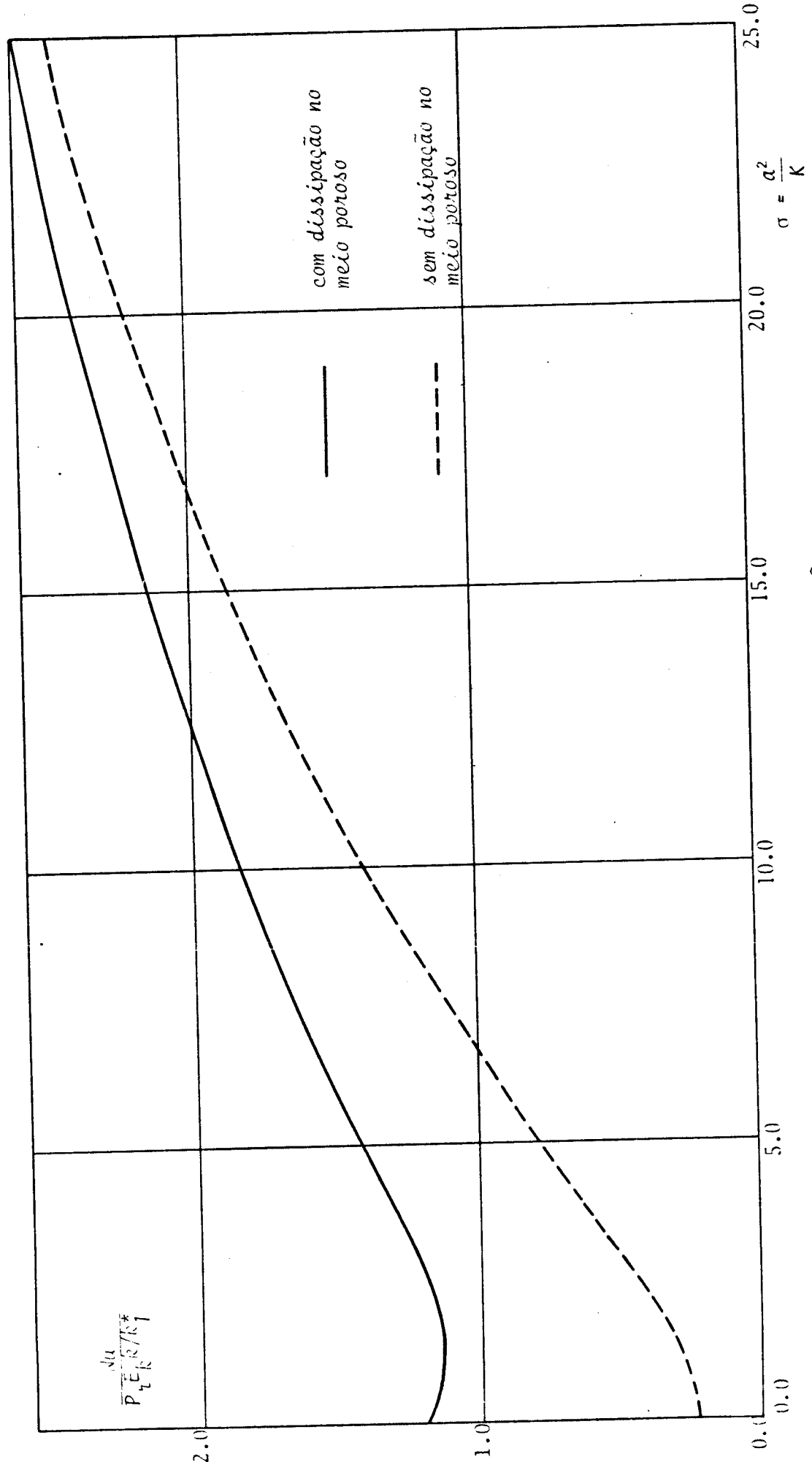


Fig. 4.12 Variação do número de Nusselt com o parâmetro σ

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Existem soluções analíticas do escoamento entre dois cilindros concêntricos com parte do espaçamento preenchido com meio poroso. Os perfis de velocidade, a tensão de cisalhamento a distribuição de pressões e o torque exercido na superfície do cilindro interno dependem dos seguintes fatores: (1) tipo de fluido; (2) distância relativa entre a região de fluido puro e a região do meio poroso; (3) a porosidade do meio poroso; e (4) o gradiente de pressão axial.

As soluções analíticas dos casos limites, $\sigma=0$ e $\sigma=\infty$, foram demonstradas e estão em concordância com as soluções existentes. Isto indica que as soluções gerais deste trabalho são coerentes.

Os perfis de temperatura e o número de Nusselt dependem, além dos fatores que controlam os perfis de velocidade, da dissipação e da razão de condutividades térmicas entre o fluido e o material poroso saturado com o mesmo fluido.

APENDICE A - listagens

```

MAURICIO /TESTE
DE NC PAP
: FILE 6=IMPRESSORA,UNIT=PRINTER,UNLABELED
: REAL K1(10),K2(10)
: DIMENSION R(60),A(60),R(60),C(60),D(60),TETA(60),FET(10)
: DIMENSION F(60),DU(60),DW(60),DU(60),H(60),FBI(60),FBK(60)
: DIMENSION FBK(60),FBI(60)
: LEITURA DO NUMERO DE DIVISOES, DA TEMPERATURA NO CILINDRO EXTERNO
: DC NUMERO DE PARAMETROS PRANTIL XECKERT, CONDUTIVIDADE TERMICA
: REAC(5,100)NY, TI, AT, NC
: NY1=NY+1
: DEFINICAO DAS DIMENSÕES DOS CILINDROS
: R(1)=1.0
: R(NY1)=2.0
: RINT=1.1
: CA=R(1)
: CE=RINT
: CC=R(NY1)
: CALCULO DO ESPACAMENTO RADIAL ENTRE AS DIVISOES
: H=(R(NY1)-R(1))/NY
: CALCULO DOS RAIOS E DETERMINACAO DA INTERFACE
: DC 10 I=2,NY
: R(I)=1.0+(I-1)*H
: IF(R(I)-RINT)10,9,10
: 9 IX=1
: 10 CONTINUE
: IX1=IX+1
: IX2=IX-1
: LEITURA DOS PARAMETROS FRANTLXECKERT
: REAC(5,101)(PET(J),J=1,AT)
: LEITURA DOS VALORES DAS CONDUTIVIDADES TERMICAS
: REAC(5,102)(K1(J),J=1,NC)
: REAC(5,102)(K2(J),J=1,NC)
: LEITURA DOS PARAMETROS DE IMPRECISAO
: 11 REAC(5,103,END=114)SIGMA
: CALCULO DA VELOCIDADE NA DIRECAO TETA
: X=CE*SIGMA
: X1=CC*SIGMA
: N=1
: NI=0
: CALL BESIX(X,N,BI1,IER1)
: CALL BESIX(X1,N,EI12,IER1)
: CALL BESIX(X,N1,EI21,NER1)
: CALL BESIX(X1,N1,BI22,NER1)
: CALL BESK(X,N,BI1,IER2)
: CALL BESK(X1,N,EK12,IER2)
: CALL BESK(X,N1,EK21,NER2)
: CALL BESK(X1,N1,BI22,NER2)
: IMPRESSAO DOS PARAMETROS DE CONTROLE DAS SUBROTINAS BESI E BESK
: WRITE(6,104)IER,IER1,NER,NER1,IER2,IER3,NER2,NER3
: CC1=BIU2*BK1-BIU1*EKU2
: CC2=SIGMA*((BI21-EI11/X)*BK2-BIU2*(-BK21-BKU1/X))
: CALCULO DAS CONSTANTES
: E1=(CA**2-CE**2)*(C2*CA
: E2=(CA**2+CE**2)*(C1
: B1=((CA**2)*CB*(C2-(CA**3)*C1)/(E1-E2)
: B2=((CB**3)*C2*(C1*(CB**2)*C1)/(E1+E2)
: A1=(2*(CA**2)*CE*EK2)/(E1-E2)
: A2=(2*(CA**2)*CE*EI2)/(E1+E2)
: DO 12 I=1,IX
: J(I)=E1*R(I)+B2/R(I)-
: 12 DL(I)=B1-B2/(R(I)**2)

```



```

:      DC 23 N1=1,N1
:C      CALCULO DOS VALORES DE A,B,C,D NA INTERFACE
:      A(I)=K2(KK2)
:      B(I)=-1.*(K1(KK2)+K2(KK2))
:      C(I)=K1(KK2)
:      D(I)=0.0
:C      CALCULO DOS VALORES DE C
:      DC 19 I=2,NY2
:      19 D(I)=(-1.)*(H**2)*R(I+1)*(-PET(KK)*F(I+1))
:C      CALCULO DO PRODUTO FRACILXECREFT NO MEIO PORCSO
:      PE1=PET(KK)*(K2(KK2)/K1(KK2))
:      DC 20 I=IX1,NY
:      20 D(I)=(-1.0)*(H**2)*F(I+1)*(PE1+F(I+1))
:C      INICIALIZACAO DA MATRIZ DE TEMPERATURAS
:      DC 21 I=1,NY
:      21 TETA(I)=1.0
:      D(NY)=D(NY)-C(NY)*T1
:C
:C      CALCULO DAS TEMPERATURAS
:C      CALL FERFI(2,NY,A,B,C,D,TETA)
:      TETA(1)=TETA(2)
:C
:C      IMPRESSAO DAS TEMPERATURAS
:      WRITE(6,112)K1(KK2),K2(KK2),SIGMA,PET(KK)
:      DC 22 J=1,NY1
:      22 WRITE(6,113)R(J),TETA(J)
:      23 CONTINUE
:      GO TO 11
:C      FORMATS DE LEITURA E IMPRESSAO
:      100 FORMAT(14,F6.3,4I4)
:      101 FORMAT(4F6.3)
:      102 FORMAT(3F6.3)
:      103 FORMAT(F5.1)
:      104 FORMAT(2X,8I2)
:      105 FORMAT(2X,4I2)
:      106 FORMAT(5X,'SIGMA=',F5.1,3X,'A1=',E14.7,3X,'A2=',E14.7,3X,'B1=',E14.7,3X,'E2=',E14.7)
:      107 FORMAT(40X,'VELOCIDADE NA DIRECAO TETA')
:      108 FORMAT(37X,F12.7)
:      109 FORMAT(40X,'DEIRIVADA DE U')
:      110 FORMAT(40X,'VELOCIDADE NA DIRECAO Z')
:      111 FORMAT(40X,'DEIRIVADA DE W')
:      112 FORMAT(10X,'KP=',F6.3,5X,'KF=',F6.3,5X,'SIGMA=',F6.3,5X,'HPE1=',F6.3,5X,'/,'39X,'RAIC',9X,'TEMPERATURA')
:      113 FORMAT(37X,F8.5,5X,F12.7)
:      114 STOP
:      END

```

```

PAURIC:O /TESTE
:   SUBROUTINE BEST(X,N,BI,IER)
:   IER=0
:   BI=1.0
:   IF(N)150,15,10
:   10 IF(X)160,20,20
:   15 IF(X)160,17,20
:   17 RETURN
: C   DEFINICAO DA TOLERANCIA
:   20 TOL= 1.E-6
:   IF(X-12.)40,40,30
:   30 IF(X-FLCAT(N))40,40,110
:   40 XX=X/2.
:   50 TERM=1.0
:   IF(N)70,70,55
:   55 DO 60 I=1,N
:   FI=I
:   IF(ABS(TERM)-1.E-16)56,60,60
:   56 IER=3
:   BI=0.0
:   RETURN
:   60 TERM=TERM*XX/FI
:   70 BI=TERM
:   XX=XX*XX
:   DO 90 K=1,1000
:   IF(ABS(TERM)-ABS(EI*TOL))100,100,80
:   80 FK=K*(N*K)
:   TERM=TERM*(XX/FK)
:   90 BI=EI+TERM
:   100 RETURN
:   110 FN=4*N*N
:   IF(X-60.0)115,111,111
:   111 IER=4
:   RETURN
:   115 XX=1./(8.*X)
:   TERM=1.
:   BI=1.
:   DO 130 K=1,30
:   IF(ABS(TERM)-ABS(TOL*BT))140,140,120
:   120 FK=(2*K-1)**2
:   TERM=TERM*XX*(FK-FN)/FLCAT(N)
:   130 BI=BI+TERM
:   GO TO 40
:   140 PI=3.1415926
:   BI=BI*EXP(X)/SQRT(2*PI*X)
:   GO TO 100
:   150 IER=1
:   GO TO 100
:   160 IER=2
:   GO TO 100
:   END

```

```

MAURICIO /TESTE
:   SUBROUTINE GESK(X,N,BK,IER)
:   DIMENSION T(12)
:   BK=0
:   IF(N)10,11,21
: 10  IER=1
:   RETURN
: 11  IF(X)12,12,20
: 12  IER=2
:   RETURN
: 20  IF(X-60.0)22,22,21
: 21  IER=3
:   RETURN
: 22  IER=0
:   IF(X-1.136,36,25)
: 25  A=E*P(I-1)
:   B=1./X
:   C=SQRT(B)
:   T(1)=6
:   DO 26 L=2,12
: 26  T(L)=T(L-1)*B
:   IF(N-1)27,29,27
: 27  GO=A*(1.2533141-.1566642*T(1)+.08811128*T(2)-.0913909*T(3)+.134459
:   .16*T(4)-.229851*T(5)+.3792410*T(6)-.5247277*T(7)+.5575268*T(8)-.426
:   .22633*T(9)+.2184516*T(10)-.0668058*T(11)+.0091894*T(12))*C
:   IF(N)20,28,29
: 28  BK=GO
:   RETURN
: 29  G1=A*(1.2533141+.4659927*T(1)-.1468583*T(2)+.1280427*T(3)-.1736432
:   .1*T(4)+.2847618*T(5)-.4594342*T(6)+.6283381*T(7)-.6622295*T(8)+.505
:   .20235*T(9)-.2581304*T(10)+.0788001*T(11)-.0108242*T(12))*C
:   IF(N-1)20,30,31
: 30  BK=G1
:   RETURN
: 31  DO 35 J=2,N
:   GJ=2.*(FLOOR(J)-1.)*G1/Y+GO
:   IF(GJ-1.E36)33,33,32
: 32  IER=4
:   GO=0
: 33  GO=G1
: 35  G1=GJ
: 34  BK=GJ
:   RETURN
: 36  S=X/2.
:   A=.5772156 *ALOG(E)
:   C=B*B
:   IF(N-1)37,43,37
: 37  GO=-A
:   X2J=1.
:   FACT=1.
:   HJ=0
:   DO 40 J=1,6
:   RJ=1./FLOAT(J)
:   X2J=X2J*C
:   FACT=FACT*RJ*RJ
:   HJ=HJ+RJ
: 40  GO=GO+X2J*FACT*(H.-A)
:   IF(N)43,42,43
: 42  BK=GO
:   RETURN
: 43  X2J=6
:   FACT=1.
:   HJ=1.
:   G1=1./X+X2J*(.5*(A-HJ)

```



```

: DL 50 J=2,8
: X2J=X2J+C
: RJ=1./FLOAT(J)
: FACI=FACI+RJ+RJ
: HJ=HJ+RJ
: 50 G1=C1+X2J*FACI+(.5+(A-HJ)*FLOAT(J))
: IF(A-1)31,52,31
: 52 BK=C1
: RETURN
: END

```

MAURICIO /TESTE

```

: SUBROUTINE FERF(I,F,L,A,B,C,D,V)
: DIMENSION A(1),E(1),C(1),D(1),V(1),BETA(10),GAMA(10)
: BETA(1F)=B(1F)
: GAMA(1F)=D(1F)/BETA(1F)
: IFP1=1F+1
: DO 1 I=IFP1,L
: BETA(I)=B(I)-A(I)*C(I-1)/BETA(I-1)
: 1 GAMA(I)=(C(I)-A(I)*GAMA(I-1))/BETA(I)
: V(L)=GAMA(L)
: LAST=L-1F
: DO 2 K=1,LAST
: J=L-K
: 2 V(J)=GAMA(J)-C(J)*V(J+1)/BETA(J)
: RETURN
: END

```

BIBLIOGRAFIA

- |1| BRINKMAN, H.C. Calculation of the viscous force exerted by a flow in fluid a dense swarm of particles. Applied Science Research, Section A1: 27-34, 1947.
- |2| TAM, C.W. The drag of a cloud of spherical particles in low Reynolds number flow. Journal of Fluid Mechanics, 38: 537-546, 1969
- |3| YAMAMOTO, K.; YOSHIDA, Z. Flow through a porous wall with convective acceleration. Journal of Physical Society of Japan, 37: 774-779, 1974.
- |4| NARASIMHACHARYULU, V.; RAMACHARYULU, P. Steady flow through a porous region contained between two cylinders. Journal of Indian Institute, 60(B): 37-42, 1978.
- |5| DEV SARMA, B.K. Flow in a horizontal circular cylinder bounded by a porous medium. Acta Mechanica, 34: 251-255, 1979.
- |6| PADMANABHAN, N. Exact solution for the unsteady motion of a viscous fluid in a porous annulus. Journal of Indian Institute, 61(B): 43-49, feb., 1979.
- |7| GORLA, R.S.R. Heat transfer characteristics of a porous thrust bearing. Journal of Lubrification Technology, 101: 531-536, oct, 1976.

- |8| CHAWLA, S.S.; SINGH, S. Oscillatory flow past a porous bed. Acta Mechanica, 31: 205-213, 1978.
- |9| RUDRAIAH, N. et alii. Effects of nonuniform thermal gradient and adiabatic boundaries on convection in porous media. Journal of Heat Transfer, 102: 254-260, may, 1980.
- |10| CHAW, Y. T.; BANERJEE, S. Analysis of transient three-dimensional natural convection in porous media. Journal of Heat Transfer, 103: 242-248, may, 1981.
- |11| SISSON, L.E.; PITTS, D.R. Fenômenos de Transporte. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1979.
- |12| SCHLICHTING, H. Boundary Layer Theory. 6th ed, New York, McGraw-Hill, 1968.
- |13| CARNAHAN, B. et alii. Applied Numerical Methods. New York, John Wiley, 1969.
- |14| DOUGLAS, J. The effect of round-off error in the numerical solution of the heat equation. Journal of the Association for Computing Machinery, 6: 48-58, 1959.
- |15| ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A. Hand Book of Mathematical Functions. New York, Dover Publication, 1965
- |16| YUAN, S.W. Foundations of Fluid Mechanics. New York, Prentice-Hall, 1967.
- |17| YIH, CHIA-SHUN. Fluid Mechanics - A concise introduction of the theory. New York; The Mapple Press, 1969.