UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Modelo Dinâmico do Sistema Pistão-Biela-Manivela com Mancais Hidrodinâmicos

Autor: Rodrigo Ceccatto Gerardin
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

10/05

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Modelo Dinâmico do Sistema Pistão-Biela-Manivela com Mancais Hidrodinâmicos

Autor: Rodrigo Ceccatto Gerardin
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

CAMPINAS, 2005
SP - BRASIL

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

	Gerardin, Rodrigo Ceccatto
G312m	Modelo dinâmico do sistema pistão-biela-manivela com mancais hidrodinâmicos / Rodrigo Ceccatto Gerardin. --Campinas, SP: [s.n.], 2005.
	Orientador: Marco Lúcio Bittencourt Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.
	1. Mancais hidrodinâmicos. 2. Reynolds, Números de. 3. Newton-Raphson, Método. 4. Método dos Elementos Finitos. I. Bittencourt, Marco Lúcio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Dynamic modeling of the piston-conrod-crank system with hydrodynamic bearings
Palavras-chave em Inglês: Hydrodynamic bearing, Crank system mechanism, Crankshaft, bearing, connecting-rod bearings, Reynolds equation, Newton-Raphson method, Finite element method
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Valder Steffen Junior e José Roberto França de Arruda
Data da defesa: 21/07/2005

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Modelo Dinâmico do Sistema Pistão-Biela-Manivela com Mancais Hidrodinâmicos

Autor: Rodrigo Ceccatto Gerardin
Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, Presidente
DPM/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Valder Steffen Jr.
FEMEC/UFU

Prof. Dr. José Roberto França de Arruda
DMC/FEM/UNICAMP

Campinas, 21 de Julho de 2005.

Dedicatória

Ao meus pais, minha irmã e ao meu amor.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pela força e saúde que me deu para que eu percorresse este caminho e conquistasse mais uma vitória

Ao Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt e ao Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos por todos os ensinamentos transmitidos, por acreditar em mim, pela paciência, companheirismo, compreensão e acima de tudo a amizade e a orientação dedicada. Fica minha admiração pelo interesse e dedicação à pesquisa científica.

Aos meus pais Sebastião e Ana que sempre me ensinaram a lutar honestamente e vencer com dignidade, o amor e o carinho em todo os instantes e principalmente pelo apoio, confiança e incentivo em todos os momentos difíceis.

À minha amiga, irmã e companheira Daniela Cristina, pelo apoio em todo o trabalho e sua valorosa colaboração moral.

Ao meu amor Fernanda, pela paciência, comprensão, carinho e o amor que sempre me deu e me ensinou a ter em todos os momentos.

A todos os meus amigos da Unicamp, Luciano Menegasso, Fabiano Leonardo Marquezi, Rodrigo Alves Augusto, Thais Vazquez Godoy, Denise Villela, Eduardo Carvalho, Edilson Borges, Pedro Henrique Baptistella e Daniel Leonardo Martins que foram importantes na conclusão deste trabalho.

Ao amigo Carlos Eduardo Pereira Leite, pela disponibilidade que sempre mostrou em todo o projeto contribuindo com sua experiência.

Ao pessoal da empresa MAHLE Metal Leve pela confiança e oportunidade que estão oferecendo a nós alunos de pós graduação.

A todos os colegas, professores e funcionários da FEM que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desse trabalho.

À CAPES, DPM, FEM e UNICAMP pelo suporte financeiro e instituicional destinados a esse projeto.

“O temor do Senhor é a
instrução da sabedoria, e a
humildade precede a honra.”

Provérbios 15:33

Resumo

GERARDIN, Rodrigo Ceccatto . *Modelo Dinâmico do Sistema Pistão-Biela-Manivela com Mancais Hidrodinâmicos* Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005, 80 p, (Dissertação de Mestrado)

Atualmente, devido às exigências comerciais e técnicas, os motores de combustão interna operam com pressões de combustão cada vez mais altas. Ao mesmo tempo, deve-se otimizar a operação de todo sistema e a forma dos componentes levando-se em conta a melhor performance e redução de peso. Para um melhor entendimento do comportamento dinâmico de um motor de multi cilindros, é necessário verificar a cinemática e a dinâmica para apenas um cilindro como feito neste trabalho.

O foco principal deste trabalho é desenvolver um modelo matemático para determinar as distribuições de pressão e as forças atuantes nos mancais hidrodinâmicos para um cilindro de um motor de combustão interna. Um modelo dinâmico do sistema de pistão-biela-manivela é apresentado e permite calcular as forças dinâmicas e folgas no mancal principal, olhais maior e menor da biela derivados da pressão de combustão.

O modelo matemático do mancal hidrodinâmico radial é oriundo da equação de Reynolds e resolvido utilizando o Método de Elementos Finitos. O sistema dinâmico não-linear é resolvido utilizando o método iterativo de Newton-Raphson para cada passo de integração no tempo.

Palavras-chave

- Mancais hidrodinâmicos, mecanismo pistão-biela-manivela, equação de Reynolds, método de Newton-Raphson, Método de Elementos Finitos.

Abstract

GERARDIN, Rodrigo Ceccatto. *Dynamic Model of the Piston-Conrod-Crank System with Hydrodynamic Bearings* Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005, 80p, (Master's Thesis).

Due to the current commercial and technical requirements, the internal combustion engines must operate under higher pressures. It is also necessary to optimize the system operation and the shape of the components aiming at increasing the performance and weight reducing. For a better understanding of the dynamical behavior of a multi-cylinder engine, it is necessary to verify the kinematics and dynamics for just one cylinder, as considered in this work.

The main focus of this work is the development of a mathematical model to determine the pressure distributions and the hydrodynamic bearing forces for one cylinder internal combustion engine. The dynamical model of the piston-conrod-crank system is presented and allows the calculation of the dynamic forces and clearances obtained from the combustion pressure for the main, big-end and small-end bearings.

The mathematical model of the hydrodynamic bearing comes from the Reynolds equation and is solved by the Finite Element Method. The non-linear dynamic system is solved by the iterative Newton-Rhapson method for each time integration step.

Keywords

- Hydrodynamic bearing, Crank system mechanism, crankshaft bearing, connecting-rod bearings, Reynolds equation, Newton-Raphson method, Finite Element Method.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Nomenclatura

Letras Latinas

A - centro do eixo menor da manivela
A' - centro do olhal maior da biela
a_i - aceleração dos corpos (i = 1, 2 e 3) $[m/s^2]$
b - largura do mancal $[m]$
B - centro do pino do pistão
B' - centro do olhal menor da biela
$B1$ e $B2$ - sistemas móveis de referência
$c = R - r_j$ - folga radial nominal do mancal $[m]$
d - diâmetro do rotor $[m]$
D - diâmetro do mancal $[m]$
d_p - diâmetro do pistão $[m]$
F - capacidade de carga do mancal $[m]$
F_e - força de explosão $[N]$
$F_{R,T}$ - forças radial e tangencial, respectivamente $[N]$
$F_{x,y}$ - forças nas direções x e y, respectivamente $[N]$
h - folga radial $[m]$
L - comprimento da biela $[m]$
I - sistema inercial de referência
$\mathbf{I}$ - tensor de inércia
m_i - massa dos corpos (i = 1, 2 e 3) $[kg]$
M - momento $[Nm]$
n - rotação da manivela $[rpm]$
N - força normal a superfície do cilindro $[N]$
O - centro do mancal principal
O' - centro do eixo maior da manivela
P - pressão no filme de óleo $[N/m^2]$
Q - vazão do fluido $[m^3/s]$
r - raio do virabrequim $[m]$
R - raio do mancal $[m]$

r_j - raio do rotor $[m]$

$S = \mu\Omega bD/2\pi F(c/R)^2$ - número de Sommerfeld

t - tempo $[s]$

u, v, w - componentes de velocidade do fluido nas direções x, y, z, respectivamente

U - velocidade superficial do rotor $[m/s]$

$x = R\theta$ - coordenada circunferencial $[m]$

x_b, y_b e x_m, y_m - deslocamentos linear nas direções X, Y dos eixos menor e maior da manivela, respectivamente $[m]$

x_p - deslocamento linear do olhal menor da biela da direção X $[m]$

X, Y - eixos do sistema de coordenadas cartesianas inercial

$X1, Y1$ - eixos do sistema de coordenadas cartesianas móvel $B1$

$X2, Y2$ - eixos do sistema de coordenadas cartesianas móvel $B2$

Letras Gregas

β - ângulo de deslocamento da biela $[rad]$

β_b - ângulo de deslocamento da biela devido a folga radial do olhal menor $[rad]$

γ - coordenada angular com origem no eixo X $[rad]$

ε - excentricidade radial $[m]$

θ^* - ângulo de atitude do rotor $[rad]$

λ - ângulo de deslocamento da manivela $[rad]$

μ - viscosidade absoluta ou dinâmica do fluido $[Ns/m^3]$

Ω - velocidade angular da manivela $[rad/s]$

Capítulo 1

Introdução

O estudo do comportamento dinâmico de motores de combustão interna é um tema de muito interesse nos dias de hoje. Aspectos como eficiência, confiabilidade, precisão e operação em condições mais severas e variáveis devem ser considerados. Isso implica em desafios tecnológicos e a adoção de novas filosofias e técnicas de projetos em diversas áreas como materiais, fabricação, instrumentação e controle, de modo a proporcionar melhorias significativas das características de desempenho destes motores.

Para um melhor dimensionamento dos componentes de motores dependentes da oferta de óleo lubrificantes, as pressões e as forças atuantes nos mancais de deslizamento precisam ser conhecidas. Além disso, as características dinâmicas dos diferentes tipos de componentes, como por exemplo o filme de fluido lubrificante, afetam sensivelmente o comportamento do sistema. Um melhor dimensionamento de componentes tem sido exigido pela tendência atual de projetos de motores de combustão interna cada vez maiores. O desafio é suportar as velocidades e cargas cada vez mais flexíveis, gerando condições dinâmicas mais severas, e por outro lado as dimensões dos componentes cada vez mais esbeltas.

O desempenho, durabilidade e confiança dos mancais de deslizamento podem ser melhorados sabendo as forças que atuam nos componentes. A redução de vibrações e ruídos também tem se tornado altamente importante para as indústrias automotivas.

O enfoque deste trabalho está no desenvolvimento de um modelo dinâmico do sistema pistão-biela-manivela empregando as equações de Newton-Euler e com acoplamento das equações de Reynolds dos mancais principal e de biela.

1.1 Revisão Bibliográfica

O óleo lubrificante em motores de combustão interna é distribuído por diversas partes do mesmo através de uma bomba. Assim, os mancais hidrodinâmicos dos motores de combustão interna possuem um furo para que sejam lubrificados e, deste modo, preencher a folga radial do mancal formando uma fina camada de fluido lubrificante. Este lubrificante tem a função de separar as duas superfícies evitando o atrito e desgaste.

A lubrificação com filme de fluido é um dos inúmeros regimes de lubrificação existentes (Hamrock et al., 2004). Destaca-se pela eliminação do contato entre componentes mecânicos através de uma fina película de fluido lubrificante que tem como vantagens a redução do atrito, desgaste e aquecimento e, como conseqüência, o aumento da vida útil dos componentes e do amortecimento nos suportes do rotor. O comportamento do contato entre superfícies separadas por um filme de fluído é governada pelas características de escoamento do fluido lubrificante e por suas propriedades físicas.

Existem basicamente dois mecanismos de lubrificação com filme de óleo em mancais de deslizamento, a hidrodinâmica e a hidrostática, sendo que o mais conhecido é a lubrificação hidrodinâmica ou auto-atuante, que será vista com detalhes nesse trabalho. Estes mancais hidrodinâmicos têm como característica gerar a pressão que suporta a carga através do movimento relativo entre as superfícies do mancal e do rotor. Assim, a capacidade de carga depende da velocidade angular do rotor. Quando as cargas são relativamente elevadas e/ou as velocidades entre mancal e rotor são baixas, a eliminação total do contato entre superfícies pode não ser possível; entretanto, se a lubrificação total com filme de fluido é desejada mesmo sob estas condições, é necessário o emprego de um outro mecanismo de lubrificação chamado lubrificação hidrostática ou externamente pressurizada. Em mancais hidrostáticos a carga é suportada pela pressão do fluido injetado sob pressão em rebaixos, poros ou canais no mancal e assim, entre as superfícies de contato do rotor e mancal. Um terceiro mecanismo de lubrificação é quando as duas formas de lubrificação, a hidrodinâmica e a hidrostática, atuam simultaneamente em um mancal de deslizamento, sendo chamada de lubrificação híbrida. Diversos autores referem-se aos mancas hidrostáticos que atuam em rotações elevadas como mancais híbridos, uma vez que nas regiões planas ou nos ressaltos do mancal ocorre a lubrificação hidrodinâmica superposta à lubrificação hidrostática.

Mancais hidrodinâmicos, hidrostáticos e híbridos podem ser classificados de acordo com a direção da carga, como radial ou axial, ou de acordo com a construção, podendo ser planos, circulares, cilíndricos, cilíndricos parciais ou esféricos, e ainda suas superfícies podem ser segmentadas, com ranhuras, pivotadas ou porosas (Someya, 1988). Dentre estas configurações os mancais hidrodinâmicos têm recebido muita atenção em diversas aplicações, principalmente nas indústrias automobilísticas, devido às exigências de serem cada vez mais leves e compactos; no entanto, as pressões de combustão e as cargas aplicadas têm aumentado. A teoria dos mancais radiais se torna complexa devido à não uniformidade da espessura do filme de fluido quando o eixo é deslocado ou inclinado pelo carregamento ou por desalinhamentos, apesar da simplicidade da geometria cilíndrica, e ainda o regime de lubrificação pode sair do laminar para o turbulento.

A influência dos tipos dos mancais no desempenho dos sistemas mancais-rotores tem sido estudada por muitos anos. Segundo Watanabe (Watanabe, 2003) uma das primeiras tentativas de modelar mancais radiais foi relatada pela investigação do efeito da rigidez do filme de fluido lubrificante na rotação crítica de um eixo suportado em mancais hidrodinâmicos radiais (Stodola, 1925). Posteriormente, realizaram-se trabalhos de modelagem e linearização de mancais e como estes afetavam no comportamento dinâmico de um rotor (Hagg e Sankey, 1956; Sternlicht, 1959). Pinkus (Pinkus, 1987) relatou que o mecanismo da lubrificação hidrodinâmica foi formulado na década de 1880 por três cientistas, um russo, N. P. Petrov (1836-1892), e dois britânicos, B. Tower (1845-1904) e O. Reynolds (1842-1912). Eles tinham em comum o conhecimento do processo de lubrificação como sendo devido não à interação mecânica de duas superfícies sólidas, mas a dinâmica de um filme de fluido separando as mesmas. No período de 1883-1886, seus fundamentos experimentais e teóricos foram firmemente estabelecidos.

Em aplicações modernas, os mancais hidrodinâmicos são projetados de acordo com o limite de trabalho e com a necessidade de rotação. As condições de alimentação (pressão, temperatura de alimentação, dimensão dos canais ou furos de lubrificação e sua localização) influenciam na taxa de fluxo do fluido lubrificante, como conseqüência, a viscosidade do óleo e a capacidade de carga do mancal são afetadas.

Segundo Booker (Booker e LaBouff, 1985) as primeiras publicações de aplicação do Método de Elementos Finitos (MEF) explicitamente para mancais surgiram na década de 1960, fornecendo bases para a formulação variacional de elementos finitos (Hays, 1959; Tao, 1964). Mais tarde o método foi aplicado para problemas de lubrificação incompressível. Concluiu-se que o MEF permite condições de contorno de fluxo e efeitos de esmagamento do filme, e a exatidão pode ser melhorada alterando o tamanho da malha (Reddi, 1969).

Uma formulação variacional incremental e direta foi apresentada para o estado estático da equação de Reynolds em problemas de lubrificação compressível. Constatou-se que a aplicação do MEF para a resolução de problemas de lubrificação estático é consistente e flexível (Reddi e Chu, 1970). Obteve-se também sucesso na aplicação do método para análise de problemas de lubrificação de mancais elásticos, através de uma aproximação por Galerkin e melhorando a convergência da solução (Taylor e O'Callaghan, 1972). Uma metodologia similar foi apresentada em (Oh e Huebner, 1973), assumindo constante a propriedade do lubrificante e material do mancal linearmente elástico. O MEF foi aplicado para estudar os efeitos da distorção elástica no desempenho dos mancais; os melhores resultados foram obtidos em baixas excentricidades e pequenas deformações elásticas. O método mostrou-se eficiente também na solução de problemas como a pressurização externa, cisalhamento e esmagamento do filme, forças de corpo, etc. Foi concluído que o MEF pode ser considerado uma ferramenta de análise numérica poderosa (Booker e Huebner, 1972).

Análises dinâmicas para verificação do esmagamento do filme foram estudados em mancais elásticos com lubrificação hidrodinâmica e obteve-se uma solução completa para o problema de transiente de tempo (Rohde et al., 1976). Posteriormente, Rohde (Rohde et al., 1979) apresentou um trabalho semelhante incluindo os efeitos de viscoelasticidade e carga flutuante. Goenka (Goenka, 1984) empregou uma formulação do MEF para solucionar mancais radiais carregandos dinamicamente. Obteve-se uma análise computacional eficiente, ilustrando também a versatilidade do método em análises dependentes do tempo, e em diversas configurações de mancais. Oh (Oh, 1984) também empregou o MEF e desenvolveu um trabalho para analisar efeitos de contato em mancais elastohidrodinâmicos (EHD) carregados dinamicamente. Trabalhando juntos Oh e Goenka (Oh e Goenka, 1985) empregaram o algoritmo de Newton-Raphson em conjunto com o algoritmo de Murty e o MEF para analisar o efeito da lubrificação elastohidrodinâmica em mancais radiais de biela com carregamento dinâmico, gerando-se a pressão e a espessura do filme de fluido lubrificante em função do tempo. Embora o método seja robusto e de custo computacional elevado, pode-se utilizar o mesmo para solucionar problemas reais de mancais de motores. Posteriormente, uma redução significativa do tempo computacional foi alcançada novamente por Oh e Goenka (Oh e Goenka, 1986), utilizando-se a teoria de mancal curto e assumindo uma distribuição de pressão parabólica na direção axial. Embora reduzindo significamente o tempo computacional, observaram-se diferenças com a análise anterior, especialmente para prever a espessura do filme.

O trabalho de LaBouff e Booker (1985) mostrou um procedimento computacional baseado no MEF aplicado à mancais radiais com escorregamento dinâmico em superfícies rígidas ou flexíveis. Nos exemplos numéricos apresentados, os efeitos da elasticidade na espessura mínima do filme e na região de máxima pressão mostraram ser substanciais, dependendo da aplicação da carga. A técnica de elementos finitos empregada foi a mesma apresentada no trabalho de Booker e Huebner (1972).

Posteriormente foi apresentado o método de Newton-Raphson na análise do comportamento de um mancal hidrodinâmico de biela carregado dinamicamente (Mclvor e Fenner, 1989). Utilizaram-se elementos de alta ordem para modelar o filme de óleo e o mancal. O efeito combinado resultou em um tempo computacional reduzido, e ainda pode-se utilizar em análises mais completas de motores.

Um modelo semelhante ao de Goenka (1984) e LaBouff e Booker foi empregado por Kumar e Booker (Kumar e Booker, 1991). A diferença neste trabalho foi a importância na conservação da massa para análises da cavitação do filme de fluido lubrificante. Exemplos numéricos mostraram eficiência em diversas aplicações do modelo para problemas dinâmicos. Posteriormente, um trabalho para analisar o comportamento dinâmico de dois mancais elásticos de biela foi apresentado (Bonneau et al., 1995), incluindo os efeitos de inércia e o modelo de conservação da massa. As forças de inércia devido a cinemática da estrutura e o efeito da pressão hidrodinâmica nas deformações elásticas do mancal também foram considerados. Foi empregado o método de Newton-Raphson com o algoritmo de Murty e uma discretização em elementos finitos. Os resultados mostraram a necessidade de considerar as deformações elásticas tridimensionais e que o algoritmo pode ser aplicado em uma grande diversidade de geometrias e problemas dinâmicos. Pode-se adicionar um modelo de conservação de fluxo permitindo que os projetos de motores sejam otimizados na geometria de contato da lubrificação e na posição dos canais de lubrificação.

Em 1997, foi apresentado um estudo mais avançado usando lubrificação elasto-hidrodinâmica (EHL) visando melhorar a eficiência dos mancais principais de motores (Ushijima et al., 1997). Descreveu-se um método para predizer a quantidade do desgaste real em mancais de motores baseado em resultados de análises numéricas, levando em conta a pressão, a viscosidade do lubrificante e a deformação elástica da capa do mancal. O método fornece a forma de desgaste como um dado de entrada para análises em EHL. Os resultados mostram que ocorre variações no desempenho dos mancais devido ao desgaste e possibilitam examinar a durabilidade dos mancais sob condições próximas das reais.

Nos últimos anos, os mancais de motores de combustão interna têm recebido muita atenção. Estudos para mostrar o seu comportamento dinâmico, análises térmica e elásticas, dentre outras, têm sido conduzidas devido às severas condições de operação. Boneau e Grente (1999) (Bonneau et al., 1999) apresentaram uma formulação para analisar e otimizar os mancais elasto-hidrodinâmicos principais de um motor automotivo de quatro cilindros. Consideram-se deformações elásticas nos mancais e no virabrequim em conjunto com o campo de pressão e o balanço das cargas cinéticas do sistema. Foi utilizado o MEF para a resolução da equação de Reynolds e o método de Newton-Raphson para análise numérica. Os resultados mostraram que a nova geração de motores de pequeno porte com blocos de alumínio sofreu maiores deformações.

Cho, Han e Choi (1999) (Cho et al., 1999) estudaram o efeito térmico na espessura do filme de óleo em mancal de biela de motores de combustão interna, comparando-se resultados teóricos e experimentais. Nas análises em processos adiabáticos e isotérmicos, concluiu-se que a viscosidade é um fator importante para os efeitos de variação da curva da espessura mínima do filme. Observaram-se algumas diferenças entre a teoria e o experimento na tendência total de sua curva, mas uma diferença mínima sobre o ciclo completo do motor. Análises termo-hidrodinâmica em mancal de biela também foram apresentadas por Kim e Kim (2001) (Kim e Kim, 2001), incluindo distorção térmica e deformações elásticas na superfície do mancal. Os resultados mostraram que o nível de distorção térmica é tão grande quanto a deformação elástica do mancal, e que a distorção térmica tem efeitos notáveis no desempenho do mancal.

Um modelo para análise estrutural dinâmica de virabrequim acoplado com a presença da lubrificação hidrodinâmica nos mancais principais e um bloco de motor rígido, foi apresentado por Mourelatos (Mourelatos, 2001) para motores de combustão interna. Utilizou-se o MEF na análise estrutural do virabrequim e para a solução da equação de Reynolds para os mancais hidrodinâmicos. O modelo foi comparado com resultados experimentais e seus resultados mostraram capacidade e importância no projeto de virabrequim de motores.

Zheng-Dong e Perkins em 2002 (Ma e Perkins, 2002) apresentaram uma modelagem de motor para otimizar projetos de sistemas. O modelo emprega uma formulação envolvendo a dinâmica de múltiplos corpos com um número mínimo de equações de movimento para representar a dinâmica e vibração de motor. Para este caso, o modelo apresentou uma grande eficiência computacional. Utilizou-se um motor com seis cilindros em linha e um virabrequim rígido e empregou-se a equação de Reynolds para a resolução de diferentes tipos de mancais. O modelo foi comparado com estudos experimentais. A exigência de uma maior eficiência dos motores faz que o projeto dos virabrequins seja mais difícil.

Makino e Koga (Makino e Koga, 2002) mostraram um estudo da teoria da lubrificação elastohidrodinâmica em aplicações 3D para mancais de virabrequim para motores diesel de 4 tempos. Utilizou-se o método de Newton-Raphson para a resolução das equações não lineares e o MEF para análise numérica.

Estudos em mancais de biela foram apresentados para otimizar formas de mancais de biela (Sato et al., 2002). O objetivo do trabalho foi desenvolver um sensor com alta precisão para medir a distribuição de pressão no filme de óleo em mancais de bielas de veículos de passeio. Para analisar os resultados, utilizaram-se mancais rígidos e EHD nas mesmas condições. Foi concluído que o sensor mede diretamente a distribuição de pressão em motores a gasolina e constatou-se diferenças na pressão do filme de óleo para mancais de biela rígidos. Os mesmos resultados foram obtidos através de simulação computacional e técnicas experimentais para EHD, confirmando sua validação. Uma característica especial deste sensor é que ele permite medir múltiplos pontos na direção da largura do mancal, permitindo fazer estudos em terceira dimensão.

No mesmo ano de 2002, Stefani e Rebora (Stefani e Rebora, 2002) desenvolveram um modelo melhorado do MEF para simular comportamentos de mancais EHD de biela. Para o estudo considerou-se um motor diesel marítimo sobre o processo da carga de combustão e cargas de inércia utilizando o método de Newton-Raphson juntamente com o algoritmo de Murty na resolução. Para a validação do programa foi utilizado um modelo estrutural muito semelhante ao de Mclvor e Fenner (1989), e obteve-se uma boa concordância nos resultados.

Em 2003, foi apresentado um modelo para otimização estrutural de virabrequins utilizados em motores diesel de alta potência (Mendes et al., 2003). Utilizou-se um motor de quatro cilindros de quatro tempos, considerando cargas derivadas da força de explosão, de inércia do sistema e vibração torcional, mas desprezou-se os efeitos dos mancais hidrodinâmicos. Foi apresentado um modelo dinâmico do mecanismo pistão-biela-manivela calculados como um sistema integrado através das relações entre ângulos motor e movido e a segunda lei de Newton para obtenção das forças resultantes. Um modelo de elementos finitos foi aplicado na análise do virabrequim considerando o bloco e os mancais principais como corpos rígidos. Os resultados mostraram que o virabrequim não apresentou problemas estruturais durante a operação e a otimização da pressão de combustão, ou seja, uma queima completa imediata gera uma amplitude de vibração baixa.

Ma e Perkins (Ma e Perkins, 2003) apresentaram equações de movimentos para motores de combustão interna, considerando bloco do motor, pistão e biela como corpos rígidos e virabrequim e mancais principais flexíveis. Utilizaram-se diversos tipos de mancais hidrodinâmicos e motores com quatro cilindros em linha e seis cilindros em V. Os modelos de mancais hidrodinâmicos foram resolvidos através da integração da equação de Reynolds, teoria de mancais curtos, obtendo as componentes das forças. Os resultados servem de suporte ao projeto de motores, permitindo também análises de ruídos e vibrações ao mesmo tempo, chegando-se a um melhor desempenho e eficiência.

Análise de lubrificação em mancais de biela, rígido ou EHD, para motores de alta rotação foi desenvolvida levando em consideração as forças de inércia e a quantidade de força no pino do pistão, que são fatores importantes nas características de lubrificação do mancal de biela em um motor com alta rotação (Wang et al., 2004). A resolução da equação de Reynolds foi feita pelo Método das Diferenças Finitas. Baseado nos resultados numéricos, mostrou-se que a mínima espessura do filme é menor no mancal EHD do que no mancal rígido, a pressão máxima hidrodinâmica é maior no mancal EHD do que no mancal rígido e os efeitos da força de inércia e da pré-carga não podem ser desprezados em altas rotações.

1.2 Objetivo do Trabalho

Tendo em vista a otimização do sistema de lubrificação, bem como a forma dos mancais e componentes que fazem parte dos motores de combustão interna, é necessário determinar as condições de funcionamento e de operação dos componentes. Diversos autores apresentam seus modelos, fazendo considerações relevantes para o caso. Esta dissertação busca dar uma contribuição à modelagem dinâmica do sistema de mecanismo pistão-biela-manivela com a incorporação dos mancais hidrodinâmicos radiais no mancal central e nos olhais maior e menor da biela. Objetiva-se a médio prazo obter um sistema completo tanto para análise de lubrificação, como das forças atuantes em um motor de 4 cilindros. Ressalta-se aqui que somente o sistema de lubrificação hidrodinâmica atua sobre os mancais.

A contribuição do trabalho em relação à literatura está no uso de um modelo baseado inteiramente na Dinâmica de Corpos Rígidos acoplado com a solução por elementos finitos da equação de Reynolds.

1.3 Organização do Trabalho

O Capítulo 2 apresenta o modelo matemático do mancal hidrodinâmico radial. Os perfis de pressão são obtidos resolvendo-se a equação de Reynolds pelo MEF, considerando-se o fluxo laminar, isoviscoso e incompressível, e empregando-se as pressões nas saídas do mancais como condição de contorno.

Para a resolução da equação de Reynolds a dinâmica do sistema pistão-biela-manivela é modelada para se obterem as expressões de velocidade tangencial e de esmagamanto do filme de fluido lubrificante. O Capítulo 3 apresenta a modelagem através da cinemática (equações de vínculos) e do método de Newton-Euler para obtenção das forças e momentos.

As equações dinâmicas do sistema de múltiplos corpos e as equações de Reynolds para os três mancais (mancal central, olhais maior e menor da biela) são resolvidas iterativamente pelo método de Newton-Raphson. O Capítulo 4 apresenta o algoritmo do programa desenvolvido em Matlab e os resultados obtidos.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões finais e as perspectivas futuras, visando a continuidade deste trabalho, baseados nos resultados obtidos no Capítulo 4.

Capítulo 2

Modelo Matemático do Mancal Hidrodinâmico Radial

Um modelo matemático que descreve o comportamento estático e dinâmico do Mancal Hidrodinâmico Radial (MHR) é desenvolvido neste Capítulo, a partir das equações da continuidade e Navier-Stokes.

Considera-se que o rotor ou eixo está girando em velocidade constante. A equação básica que descreve o comportamento do fluido lubrificante na folga radial do mancal hidrodinâmico é a equação de Reynolds, descrita para um fluido Newtoniano e isoviscoso. Os efeitos de inércia do fluido lubrificante são desprezados.

A equação de Reynolds é aproximada empregando-se o Método de Elementos Finitos, resultando na determinação dos campos de pressões do filme de óleo lubrificante entre as superfícies do mancal e do rotor. A integração numérica dos campos de pressões permite determinar as forças desenvolvidas pelo fluido lubrificante, que podem ser representadas em termos de capacidade de carga do mancal.

Usualmente, as características estáticas e dinâmicas de um mancal são referenciadas a um parâmetro adimensional denominado número de Sommerfeld, S, definido a seguir

$$S = \frac{\mu \Omega b D}{2\pi F (c/R)^2}.$$

O número de Sommerfeld é um parâmetro que relaciona dados dimensionais do mancal (largura b, diâmetro D e a folga radial c), com a viscosidade dinâmica μ do fluido lubrificante, a velocidade angular do rotor Ω e a capacidade de carga do mancal F.

A apresentação a seguir está baseada nas referências de (Hamrock et al., 2004; Childs, 1993; Wendt, 1992; Someya, 1988).

2.1 Características Geométricas e Condições de Operação

As características geométricas do mancal são apresentadas na Figura 2.1. O modelo matemático do MHR é desenvolvido a partir de um sistema inercial de coordenadas cartesianas XYZ, com origem no ponto O, centro do mancal. Uma coordenada angular, θ, é adotada com origem no semi-eixo positivo X, e sentido positivo anti-horário.

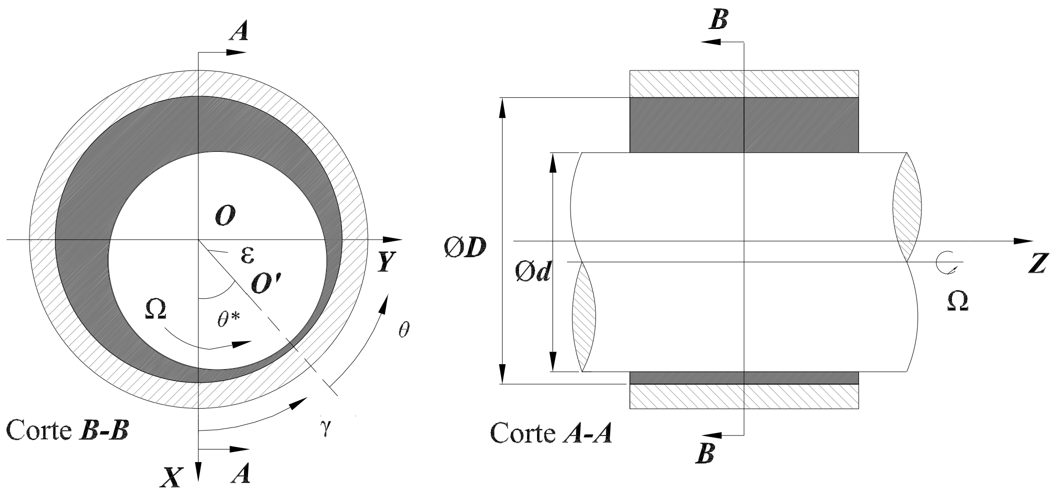


Figura 2.1: Vistas em corte transversal (B-B) e corte longitudinal (A-A) (Watanabe, 2003).

Assume-se que o rotor de centro O' gira no sentido anti-horário em torno de seu próprio eixo, com velocidade angular constante Ω. Uma carga vertical para baixo é imposta, resultando em uma excentricidade radial ε, definida pela distância entre centros $\overline{OO'}$. O ângulo θ^* é formado entre o eixo X e a direção de $\overline{OO'}$ é denominado ângulo de atitude do rotor.

As dimensões obedecem à seguinte nomenclatura:

$.D = 2R$	diâmetro do mancal;
$.R$	raio do mancal;
$.d = 2r_J$	diâmetro do rotor;
$.r_J$	raio do rotor;
$.c = R$ - r_J	folga radial nominal do mancal;
$.b$	largura do mancal.

2.2 Excentricidade e Folga Radial

Devido à carga e rotação, o rotor está sujeito a desalinhamentos radial e angular, em relação ao eixo do mancal. Porém, somente o desalinhamento radial é considerado neste estudo. A partir desta hipótese, definem-se a seguir as expressões para a excentricidade radial do rotor, a folga radial ou espessura do filme de fluido lubrificante no mancal e a velocidade periférica do rotor, que serão utilizadas na modelagem do MHR.

2.2.1 Excentricidade Radial do Rotor

A posição inicial descentrada do centro do rotor O', em relação ao centro O do mancal, origem do sistema de coordenadas XYZ, é definida pela excentricidade radial $\boldsymbol{\varepsilon}$, e pelo ângulo de atitude, θ^*, representados na Figura 2.2 ampliada.

A posição $\boldsymbol{\varepsilon}$ e o ângulo θ^* definem a excentricidade para um instante de tempo, ou seja, o equilíbrio estático referente a uma carga e uma rotação como ilustrado na Figura 2.2. Com a variação destes parâmetros o rotor tenderá a uma nova posição de equilíbrio.

A excentricidade do rotor pode ser descrita também através de suas componentes ortogonais ε_x e ε_y, nas direções X e Y, respectivamente

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon \cos\theta^* \\ \varepsilon_y = \varepsilon \sin\theta^* \end{cases}.$$

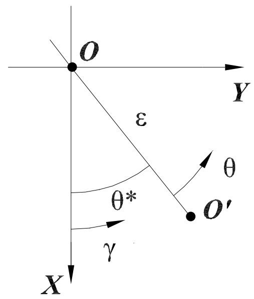


Figura 2.2: Centro do mancal O e eixo deslocado O'.

Portanto, a excentricidade pode ser escrita em forma vetorial, como $\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_x & \varepsilon_y & 0 \end{array} \right\}^T$ ou pelo seu módulo $|\boldsymbol{\varepsilon}| = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}$.

2.2.2 Folga Radial ou Espessura Radial do Filme de Fluido Lubrificante

Uma vez determinadas as expressões para as excentricidades do rotor, pode-se determinar a folga radial ou espessura do fluido lubrificante h nas região circunferencial do mancal hidrodinâmico como ilustrada na Figura 2.3

A folga radial é definida na direção perpendicular à superfície do mancal e determinada em função da posição do rotor caracterizada pela excentricidade ε e pelo ângulo de atitude θ^*, e também pela folga radial nominal $c = R - r_J$. Através da geometria formada na Figura 2.3, aplica-se a lei dos senos (Hamrock et al., 2004)

$$r_J \cos\alpha = (R - h) - \varepsilon \cos(\gamma - \theta^*).$$

Considerando que $\cos\alpha \approx 1$ e definindo uma nova coordenada angular $\theta = \gamma - \theta^*$, rearranja-se a equação anterior e tem-se que

$$h = c - \varepsilon \cos\theta, \tag{2.1}$$

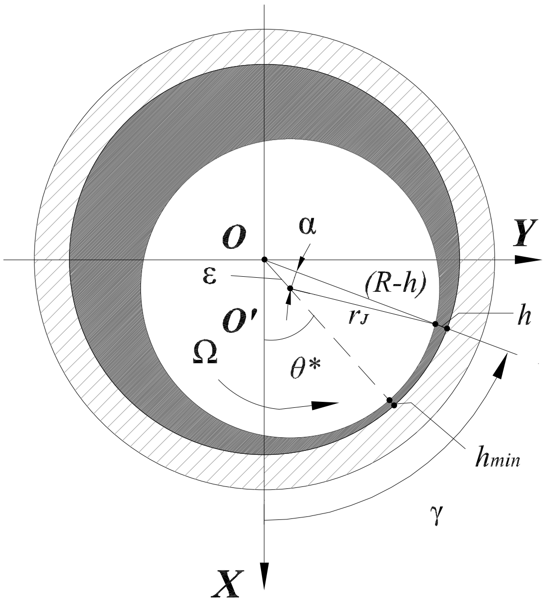


Figura 2.3: Espessura do filme de óleo h (Watanabe, 2003).

2.3 Equação de Reynolds

A equação de Reynolds descreve o comportamento do fluido na folga radial. A resolução desta equação permite determinar o campo de pressão no fluido do mancal. Obtém-se a mesma, a partir das equações de Navier-Stokes e da continuidade, considerando um fluido Newtoniano, isoviscoso e incompressível (Hamrock et al., 2004).

2.3.1 Equação de Reynolds para Carregamento Dinâmico

Para modelagem da equação de Reynolds no caso de carregamentos dinâmicos, considera-se a velocidade de esmagamento do fluido, ou seja, a variação da altura do filme de fluido lubrificante no tempo ($\partial h/\partial t$).

Equação da Continuidade

A equação da continuidade do fluido na folga radial do mancal é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{2.2}$$

sendo u, v e w as componentes da velocidade nas direções x, y e z, respectivamente.

Considerando uma coluna de fluido de altura h, e base dx, dz (Russo, 1999), como ilustrado na Figura 2.4, a vazão de fluido que está entrando à esquerda da coluna (direção x) é dada por

$$Q_x = u(hdz).$$

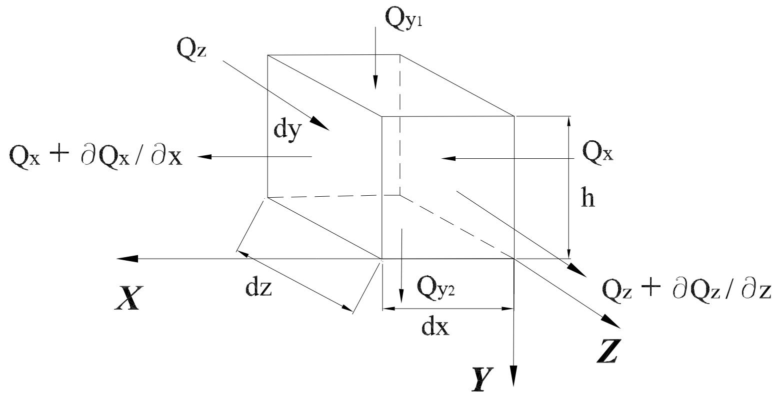


Figura 2.4: Continuidade do escoamento de um fluido em uma coluna (Russo, 1999).

Escrevendo a vazão por unidade de comprimento, tem-se

$$q_x = \frac{Q_x}{dz} = uh.$$

A vazão do fluido na saída da coluna nesta mesma direção é dada por

$$Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dz.$$

Analogamente, para a direção z, tem-se que o fluxo na entrada é

$$Q_z = w(dxh) = q_z dx.$$

A vazão de saída pode ser escrita como

$$Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} dz = \left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) dx.$$

Para a direção Y, o escoamento do fluido é resultante dos movimentos do eixo que, para os casos de mancais em motores de combustão interna, sofrem alteração devido à carga decorrente da explosão ou quando é requerido uma maior velocidade de rotação. Se o eixo estiver-se deslocando para baixo a uma velocidade u_1, a vazão de entrada pode ser escrita como

$$(Q_y)_{entrada} = u_1 dxdz. \quad (2.3)$$

Como a superfície do mancal não se movimenta, ou seja, a velocidade $u_2 = 0$, a vazão de saída do elemento é

$$(Q_y)_{saida} = u_2 dxdz = 0$$

Considerando a continuidade do escoamento em todas as direções, e sabendo-se que a densidade deve ser mantida constante, tem-se que a mesma vazão mássica que entra deve sair. Portanto,

$$(Q_x + Q_y + Q_z)_{entrada} = (Q_x + Q_y + Q_z)_{saida},$$

ou seja,

$$u_1 dxdz + q_x dz + q_z dx = u_2 dxdz + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) dz + \left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz\right) dx.$$

Assim, tem-se

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + (u_2 - u_1) = 0.$$

Como u_1 e u_2 são dependentes dos movimentos do rotor e do mancal, então, pode-se dizer que a diferença entre as velocidades ($V = u_2 - u_1$) é função da variação da folga radial no tempo, ou seja, a derivada de h em relação ao tempo. Como a folga radial é medida a partir da superfície do mancal, tem-se que os valores positivos de V correspondem à derivadas negativas de h, ou seja, $V = -\partial h/\partial t$.

Portanto, a equação da continuidade do escoamento pode ser escrita como

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \tag{2.4}$$

Equação de Navier-Stokes

Nas análises de lubrificação hidrodinâmica, os fluidos, na maioria dos casos, são considerados Newtonianos. Escreve-se a equação de Navies-Stokes nas três dimensões, correspondendo ao equilíbrio de forças de inércia, corpo e viscosas que atuam no lubrificante, como (Watanabe, 2003)

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho X_g-\dfrac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho Y_g-\dfrac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \\ \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho Z_g-\dfrac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \end{cases} \tag{2.5}$$

sendo ρ a densidade volumétrica do fluido lubrificante, P a pressão no filme de fluido, (X_g, Y_g, Z_g) as componentes de forças de corpo nas direções x, y, z, respectivamente.

A redução da equação de Navier-Stokes pode ser feita através do balanço das forças que agem sobre um elemento de fluido. Inicializando pela direção x, e observando na Figura 2.5, tem-se

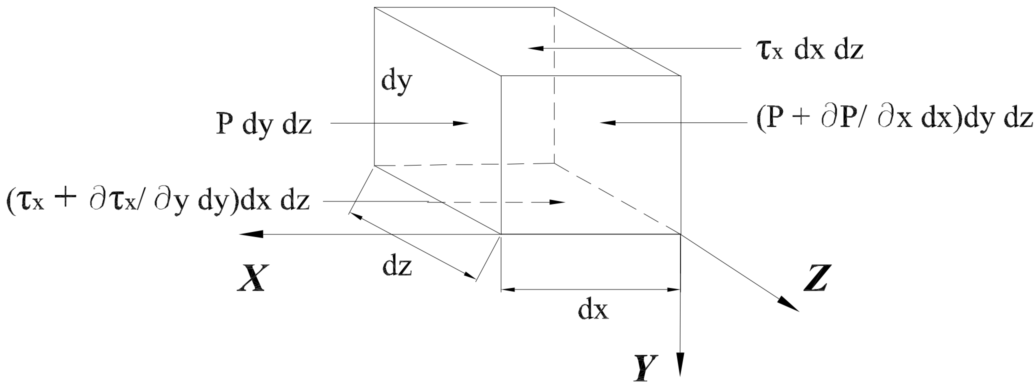


Figura 2.5: Forças atuantes na direção X no elemento de fluido.

$$\rho dxdydz\frac{Du}{Dt}=-Pdydz+\left(P+\frac{\partial P}{\partial x}dx\right)dydz+\tau_x dxdz-\left(\tau_x+\frac{\partial \tau_x}{\partial z}dz\right)dxdy \tag{2.6}$$

Simplificando a equação anterior, chega-se a

$$\rho dxdydz\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial \tau_x}{\partial y}. \tag{2.7}$$

Como dito anteriormente, o fluido foi considerado Newtoniano, ou seja, a tensão de cisalhamento do fluido é proporcional à taxa de deformação. Desta forma, pode-se escrever que

$$\tau_x=\mu\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{2.8}$$

sendo μ a viscosidade dinâmica do fluido lubrificante.

Desprezando as forças de inércia do fluido e substituindo a equação (2.8) na equação (2.7), tem-se

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{2.9}$$

Analogamente para a direção z e sabendo-se que não há tensão de cisalhamanto na direção y, a equação de Navier-Stokes resulta na seguinte forma simplificada

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial P}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial P}{\partial z}. \end{cases} \tag{2.10}$$

As equações que descrevem os perfis das componentes de velocidade do fluido, u e w, são obtidas integrando-se duas vezes as equações de Navier-Stokes (2.10), em relação a y, e aplicando-se as condições de contorno definidas para as coordenadas $y = 0$ e $y = h$

$$\begin{cases} y = 0 \Rightarrow u = 0, v = 0, w = 0, \\ y = -h \Rightarrow u = U, v = 0, w = 0, \end{cases}$$

sendo U a velocidade superficial do eixo. Assim, pode-se escrever as componentes de velocidade como

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial P}{\partial x}(y^2 + hy) - \dfrac{U}{h}y, \\ w = \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial P}{\partial z}(y^2 + hy). \end{cases} \tag{2.11}$$

Para se obter a equação de Reynolds para este tipo de fluxo, integra-se a equação da continuidade na direção da espessura do filme de fluido, y, e sabendo-se que $q_x = \int_0^{-h} u dy$, pode-se escrever a equação da continuidade como

$$\int_0^{-h} \frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^{-h} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \tag{2.12}$$

Substituindo as expressões de u e v dadas na equações (2.11), na equação (2.12), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{-h}\left[\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}(y^2 + hy) - \frac{U}{h}y\right]dy + \frac{\partial}{\partial z}\int_0^{-h}\left[\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial z}(y^2 + hy)\right]dy - \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

Aplicando os limites de integração para a resolução, chega-se a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{U}{2}h\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\right) - \frac{\partial h}{\partial t} = 0,$$

Rearranjando a equação anterior, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial P}{\partial z}\right)=6\mu U\frac{\partial h}{\partial x}+12\mu\frac{\partial h}{\partial t}. \tag{2.13}$$

Escrevendo a equação (2.13) em função do ângulo θ com a relação $x = r_J\theta$, tem-se

$$\frac{1}{r_J^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial P}{\partial z}\right)=6\mu\Omega\frac{\partial h}{\partial\theta}+12\mu\frac{\partial h}{\partial t}. \tag{2.14}$$

2.3.2 Equação de Reynolds para Carregamento Estático

Pode-se escrever a equação de Reynolds para o caso de carregamento estático, ou seja, no qual não há variação da carga ou da rotação em função do tempo. Assim, a altura do filme de fluido lubrificante h é constante no tempo. Como visto na equação (2.3), a velocidade na direção Y para o caso dinâmico é diferente de zero. Neste caso, a velocidade $u_1 = 0$ e também $u_2 = 0$. Sendo assim, a equação da continuidade do escoamento para este caso pode ser escrita de modo análogo ao anterior

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_z}{\partial z}=0.$$

A partir daí determina-se seguinte equação de Reynolds

$$\frac{1}{r_J^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial P}{\partial z}\right)=6\mu\Omega\frac{\partial h}{\partial\theta}. \tag{2.15}$$

2.4 Resolução da Equação de Reynolds pelo Método de Elementos Finitos

A distribuição de pressão no filme de óleo lubrificante do mancal hidrodinâmico radial é determinada resolvendo a equação de Reynolds (2.14), respeitando as condições de contorno

$.P(\theta, \pm b) = 0$ pressão nas bordas

$.\frac{\partial P}{\partial Z}\,|_{Z=0} = 0$ simetria na direção Z.

Dentre os vários métodos numéricos para a solução da equação de Reynolds, tem-se o Método de Diferenças Finitas e o Método de Elementos Finitos e os métodos que utilizam funções de séries infinitas ou funções de Green (Someya,1989). Utiliza-se neste trabalho o MEF.

Devido à simetria longitudinal do mancal, define-se a malha apenas na metade do mancal, como ilustrado na Figura 2.6.

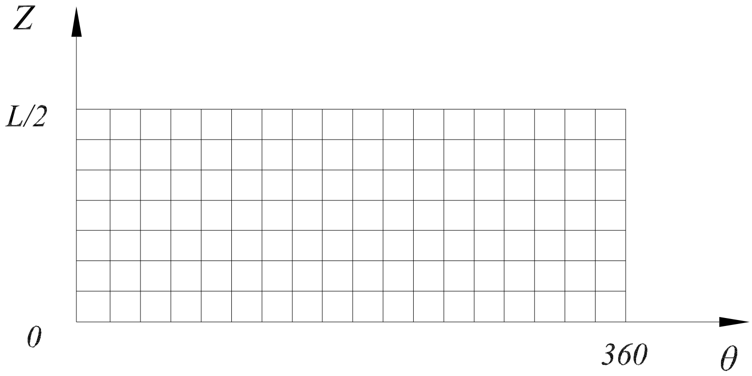


Figura 2.6: Malha para aplicação do MEF.

A forma fraca, baseada no Método de Resíduos Ponderados, correspondente à equação (2.14) é

$$\frac{1}{r_J^2}h^3 \int\limits_{\Omega} \left\{ \frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right\} d\theta dz = \int\limits_{\Omega} 6\mu\Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} v d\theta dz + \int\limits_{\Omega} 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} v d\theta dz - \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} n_\theta + \frac{\partial P}{\partial z} n_z \right) v d\Gamma,$$

sendo v a função teste e $\boldsymbol{n} = (n_\theta, n_z)$ o vetor normal em cada ponto do contorno. Como a função teste v é nula no contorno, o último termo da expressão é também nulo. Empregando uma aproximação por Galerkin com n funções de interpolação, tem-se para $i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_J^2}h^3 \int\limits_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \theta}\frac{\partial N_j}{\partial \theta} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} d\theta dz = \int\limits_{\Omega} 6\mu\Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} N_j d\theta dz + \int\limits_{\Omega} 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} N_j d\theta dz.$$

2.4.1 Utilização de Elementos Finitos Isoparamétricos

Além da aproximação das incógnitas do problema, pode-se estabelecer uma aproximação para a geometria, definida a partir das coordenadas dos nós. Neste caso, utiliza-se um sistema de coordenadas local baseado em um elemento de referência. As funções da transformação geométrica são idênticas às funções de interpolação, assim chamada formulação de elementos finitos isoparamétricos.

Utiliza-se um elemento de referência que é descrito a partir da geometria do elemento real usando expressões de transformação geométricas (Zienkiewicz et al., 1983). Neste trabalho, utilizou-se um elemento quadrilateral com quatro nós, como ilustrado na Figura 2.7

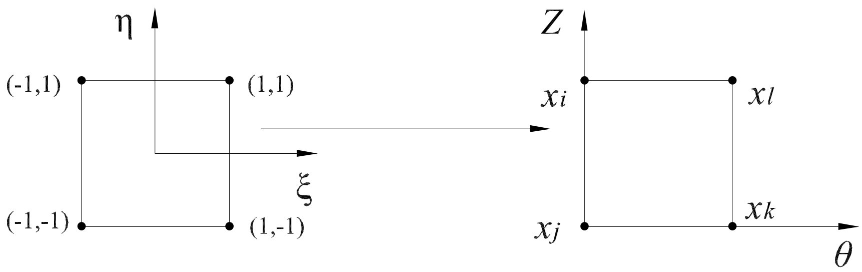


Figura 2.7: Transformação de um elemento de referência para um elemento real.

A descrição das coordenadas do elemento de referência para um elemento real é dado por

$$\begin{cases} \theta(\xi,\eta) = \sum\limits_{n=1}^{Nnos} N_n(\xi,\eta)\theta_n, \\ z(\xi,\eta) = \sum\limits_{n=1}^{Nnos} N_n(\xi,\eta)z_n, \end{cases}$$

sendo N_{nos} o número de nós do elemento e N_n funções de forma ou interpolação. Para este caso, utilizou-se as funções de interpolação lineares (Zienkiewicz et al., 1983).

$$\begin{aligned} N_1(\xi,\eta) &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, \\ N_2(\xi,\eta) &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, \\ N_3(\xi,\eta) &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, \\ N_4(\xi,\eta) &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}. \end{aligned}$$

Uma vez escolhido o mapeamento, a função de forma escrita no espaço do elemento de referência (ξ,η) pode ser usada para representar a variação sobre o espaço do elemento real (θ, Z). Na derivação das funções de forma em relação às coordenadas do elemento de referência, obtém-se a matriz transformação em conjunto com a derivada das funções de forma referente às coordenadas do elemento real, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \dfrac{\partial \theta}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial N_i}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{array} \right\}, \ i = 1, 2, 3, 4.$$

De forma compacta

$$\left\{ \partial_{(\xi,\eta)} \right\} = [J] \left\{ \partial_{(\theta,Z)} \right\},$$

sendo $[J]$ a matriz Jacobiana de transformação geométrica. Uma expressão similar é obtida trocando-se as derivadas do espaço real pelas do espaço de referência

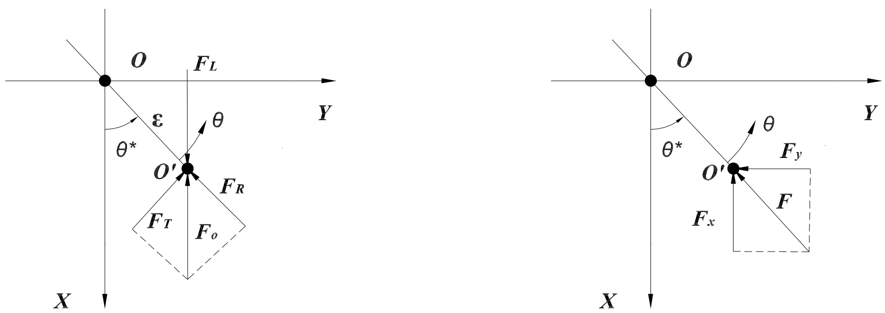
$$\left\{ \partial_{(\theta,Z)} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \partial_{(\xi,\eta)} \right\}.$$

Assim, a forma fraca elementar para o caso de carregamento dinâmico dada na equação (2.14) é

$$\left(\frac{1}{r_J^2} h^3 \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N_j}{\partial \theta}\frac{\partial N_i}{\partial \theta} + \frac{\partial N_j}{\partial z}\frac{\partial N_i}{\partial z} \right\} d\theta dz \right) \{p\} = \int_{\Omega_e} 6\mu\Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} N_j d\theta dz + \int_{\Omega_e} 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} d\theta dz.$$

2.4.2 Capacidade de Carga

Resolvendo a equação de Reynolds, tem-se a distribuição de pressão P no mancal hidrodinâmico. Integrando a pressão do filme lubrificante, tem-se a força resultante no mancal.



(a) Componentes tangencial e radial. (b) Sistema cartesiano.

Figura 2.8: Componentes de forças.

As componentes radial F_R e tangencial F_T, conforme ilustrado na Figura 2.8(a), podem ser determinadas através das seguintes integrais (Watanabe, 2003)

$$\begin{cases} F_R = -2\displaystyle\int_0^{b/2}\int_0^{2\pi} PR\cos\theta\, d\theta\, dz, \\ F_T = 2\displaystyle\int_0^{b/2}\int_0^{2\pi} PR\sin\theta\, d\theta\, dz. \end{cases}$$

Portanto, a carga resultante do mancal, F_o, é dada por

$$F_o = \sqrt{{F_R}^2 + {F_T}^2}.$$

As forças resultantes nas direções X e Y, ilustrado na Figura 2.8(b), são calculadas através da decomposição das forças radial e tangencial no sistema cartesiano, como

$$\begin{cases} F_x = F_T\sin\theta^* + F_T\cos\theta^*, \\ F_y = F_R\cos\theta^* + F_R\sin(\theta^*). \end{cases}$$

2.4.3 Condições de Contorno

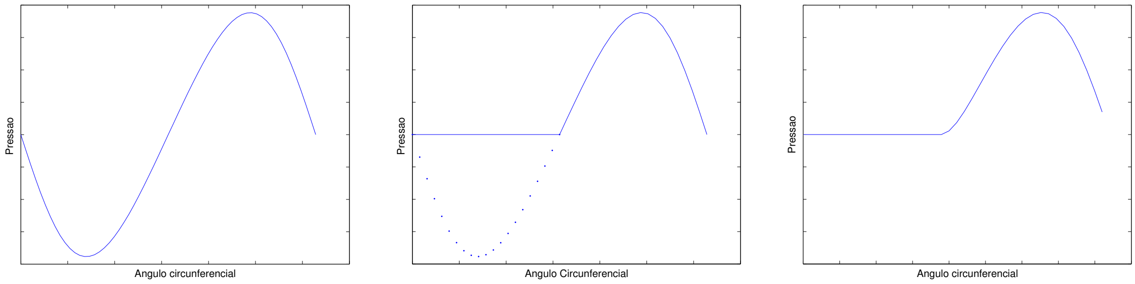
Para a resolução da equação de Reynolds estudaram-se diferentes tipos de condição de contorno como ilustrados na Figura 2.9, devido à ruptura do filme na região de cavitação (Someya,1989).

O primeiro tipo é a condição de contorno circunferencial usualmente utilizada nos mancais circulares completos como ilustrado qualitativamente na Figura 2.9(a), ou seja, a condição de contorno de Sommerfeld. A pressão calculada para esta condição apresenta simetria em $\theta = \pi$. Pode-se dizer que, na região onde a pressão é negativa, tem-se a pressão atmosférica, por causa da ruptura do filme.

A segunda condição de contorno é a de Gümbel, a qual não é muito utilizada, apesar da simplicidade, exceto quando o mancal é alimentado com alta pressão. Neste caso, o estudo é feito onde a pressão é positiva, como mostrado na Figura 2.9(b). A pressão negativa da condição de contorno de Sommerfeld é substituída pela pressão atmosférica. Esta condição é inapropriada fisicamente, porque não satisfaz a equação da continuidade para $\theta = \pi$.

A terceira condição de contorno é a de Reynolds, mostrada na Figura 2.9(c), e minimiza a característica de acentuação da curva no ponto de $\theta = \pi$. A condição de contorno de Reynolds aplica um gradiente de pressão zero no ponto onde o filme de pressão aproxima-se da pressão atmosférica. Produz as seguintes condições:

$$.P = 0 \qquad\qquad \text{para } \theta = 0$$
$$.P = 0, \ \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \text{para } \theta = \theta_{cav}.$$



(a) Sommerfeld. (b) Gümbel. (c) Reynolds.

Figura 2.9: Condições de contorno.

A pressão do filme obtida usando a condição de Reynolds é positiva na região de $\theta_{cav} < \theta < 2\pi$ e zero em $0 < \theta < \theta_{cav}$, sendo θ_{cav} um valor calculado. Para se determinar o ângulo θ_{cav} é necessário saber o ângulo no qual a pressão é mínima e então estabelecer a condição de contorno que $P = 0$ para $\theta = \theta_{cav}$. Efetua-se o cálculo novamente até que a pressão mínima seja próxima de zero, como ilustrado na Figura 2.10. Apesar do maior custo computacional, a condição de Reynolds fornece resultados mais precisos.

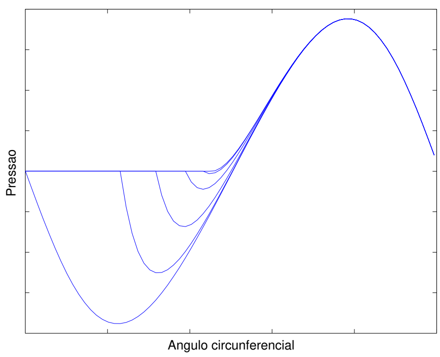


Figura 2.10: Determinação da condição de contorno de Reynolds.

2.4.4 Resultados do Mancal Hidrodinâmico Estático

Os resultados do mancal hidrodinâmico estático são apresentados nesta seção com a finalidade de analisar o comportamento do mancal. Para a resolução do caso a seguir são utilizadas as condições de contorno de Sommerferld, Gümbel e Reynolds.

A Tabela 2.1 apresenta as dimensões geométricas e características do mancal hidrodinâmico.

Tabela1 2.1: Parâmetros geométricos e de operação do mancal hidrodinâmico.

Rotação do rotor	$N = 8000$	rpm
Raio do rotor	$r_J = 49{,}790$	mm
Folga radial	$c = 0{,}0526$	mm
Largura do mancal	$b = r_j + c$	mm
Viscosidade do lubrificante	$\mu = 0,0232$	Ns/m^2
Número de pontos no eixo θ para formação da malha	81	
Número de pontos no eixo Z para formação da malha	41	

A Figura 2.11 refere-se a condição de contorno de Sommerfeld com uma excentricidade $\varepsilon = 0,0036$ e o número de Sommerfeld $S = 3,2050$.

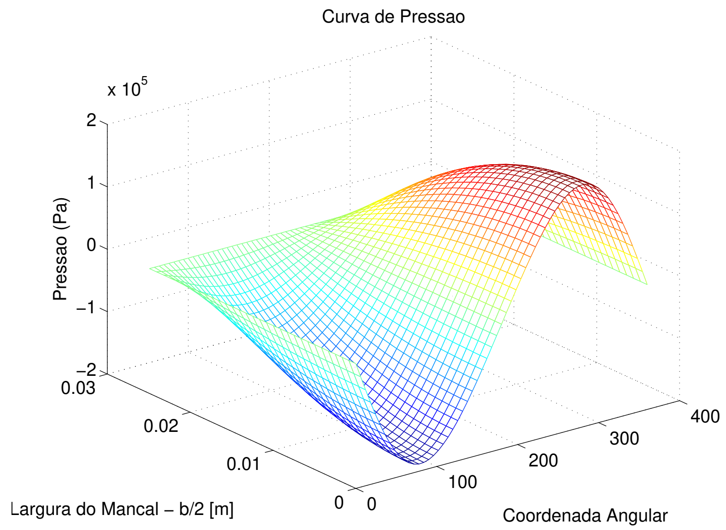


Figura 2.11: Distribuição da pressão no mancal ($b/D = 0,5$ e $\varepsilon = 0,0036$).

Com a condição de contorno de Gümbel a Figura 2.12 mostra a curva de pressão com uma excentricidade $\varepsilon = 0,0036$ e o número de Sommerfeld $S = 6,3928$.

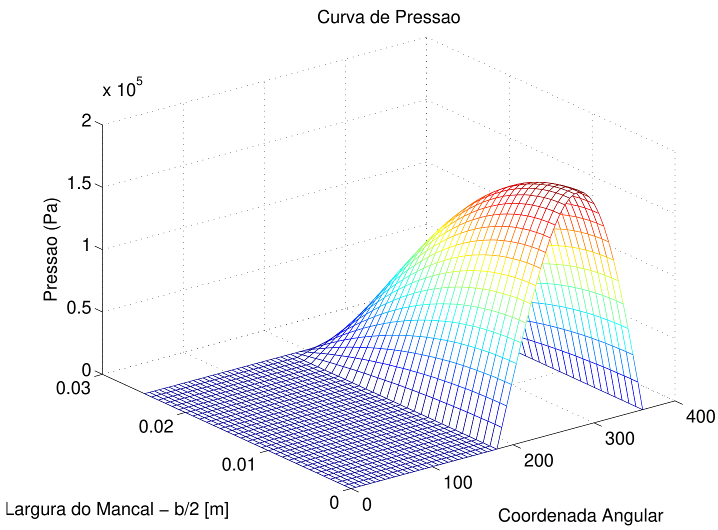


Figura 2.12: Distribuição da pressão no mancal ($b/D = 0,5$ e $\varepsilon = 0,0036$).

Para a condição de contorno de Reynolds, tem-se a Figura 2.13 com uma excentricidade $\varepsilon = 0,0036$ e o número de Sommerfeld $S = 6,3688$.

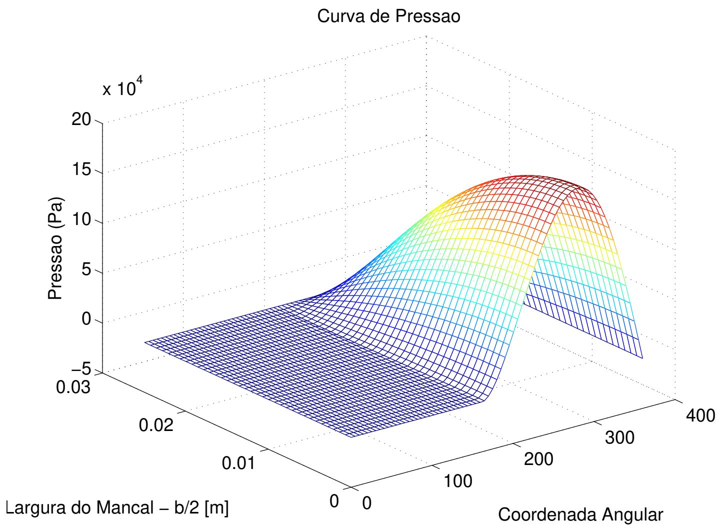


Figura 2.13: Distribuição da pressão no mancal ($b/D = 0,5$ e $\varepsilon = 0,0036$).

Nota-se que o número de Sommerfeld na condição de contorno de Sommerfeld é menor que Gümbel e Reynolds, pois na condição de contorno de Sommerfeld é considerado a circunferência completa do mancal, enquanto que nas condições de contorno de Gümbel e Reynolds, existe somente forças positivas.

Os resultados foram comparados com um programa desenvolvido em Matlab pelo

Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos da Universidade Técnica da Dinamarca, que utilizou o método de diferenças finitas na solução do MHR. Os resultados obtidos neste trabalho foram idênticos com o programa solucionado por diferenças finitas.

Capítulo 3

Dinâmica do Sistema Pistão-Biela-Manivela com Mancais Hidrodinâmicos

O objetivo deste capítulo é apresentar a cinemática e os esforços dinâmicos em um sistema mecânico pistão-biela-manivela conectados através de mancais hidrodinâmicos. Para isso, aplica-se o método de Newton-Euler (Santos, 2001)

3.1 Cinemática

A Figura 3.1 ilustra os componentes pistão-biela-manivela, bem como os sistemas de coordenadas inercial e móveis empregados na modelagem dinâmica. O sistema será modelado considerando três mancais hidrodinâmicos correspondentes ao mancal central na manivela e os mancais nos olhais maior e menor da biela.

O sistema é constituído de pistão, biela e manivela indicados, respectivamente, pelos corpos 3, 2 e 1. Inicialmente, o centro do eixo maior da manivela coincide com o centro do mancal principal representado pelo ponto O, o qual permanece fixo. Assume-se que o ponto A está fixo no centro do eixo menor da manivela e o ponto B fixo ao centro do pino do pistão.

Sendo os três mancais (central, olhal maior e olhal menor) hidrodinâmicos, observa-se que haverá deslocamentos da manivela e da biela, como indicado na Figura 3.2. Assim, o eixo maior da manivela desloca-se para O' e o centro dos olhais maior e menor da biela deslocam-se para os pontos A' e B', respectivamente. Além disso a biela tem uma rotação rígida de um ângulo β_b tomando-se o ponto A' como origem, devido à folga radial existente no olhal menor da biela.

Assim os pontos indicados nas Figuras 3.1 e 3.2 são tais que

- O é fixo no centro do mancal principal;
- O' translada com x_m e y_m (centro do eixo maior da manivela);
- A é fixo ao corpo 1 (centro do eixo menor da manivela).
- A' translada com x_b e y_b (centro do olhal maior da biela, fixo ao corpo 2);
- B é fixo ao corpo 3 (centro do pino do pistão);
- B' é o centro do olhal menor da biela, fixo ao corpo 2;
- os pontos O e B estão alinhados.

Denomina-se λ o ângulo da manivela e $\dot{\lambda}$ a sua respectiva velocidade de rotação, considerada aqui como constante. O ângulo da biela é indicado por β.

A curva de pressão utilizada é retirada de teste experimental, e então calcula-se a força de explosão F_e. Lembrando-se que a força de explosão é em função ângulo da manivela (λ), ou seja,

$$F_e(\lambda) = P_c(\lambda)\frac{\pi d_p^2}{4},$$

onde P_c é a pressão na câmara de combustão e d_p o diâmetro do cilindro.

3.1.1 Sistemas de referência

Utiliza-se um sistema inercial e dois sistemas de referência móveis conforme ilustrado na Figura 3.2. Os sistemas são indicados por:

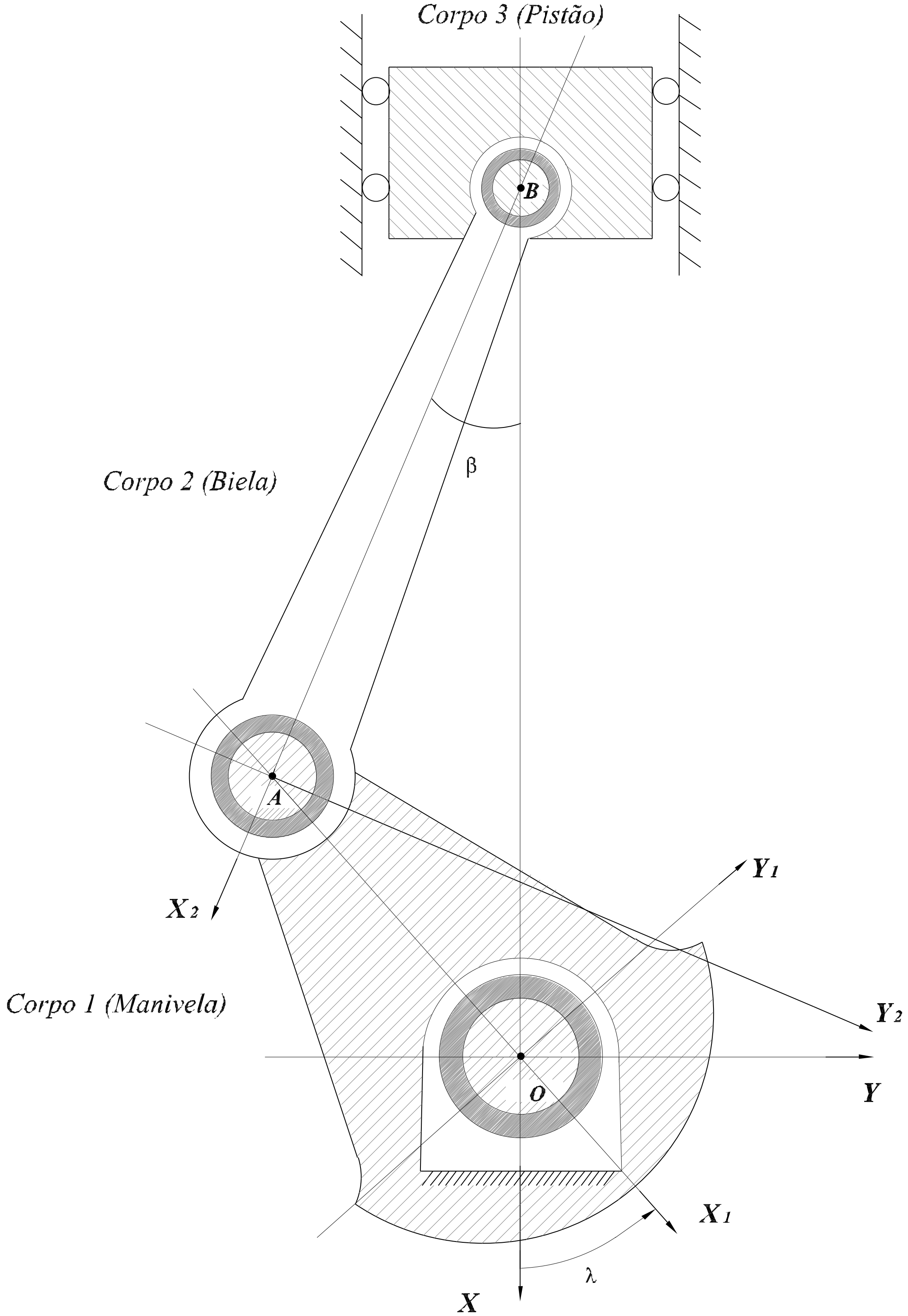


Figura 3.1: Sistemas de referência (inercial e móveis) utilizados para descrever o comportamento do sistema de múltiplos corpos no plano (sistema sem excitação da força de explosão).

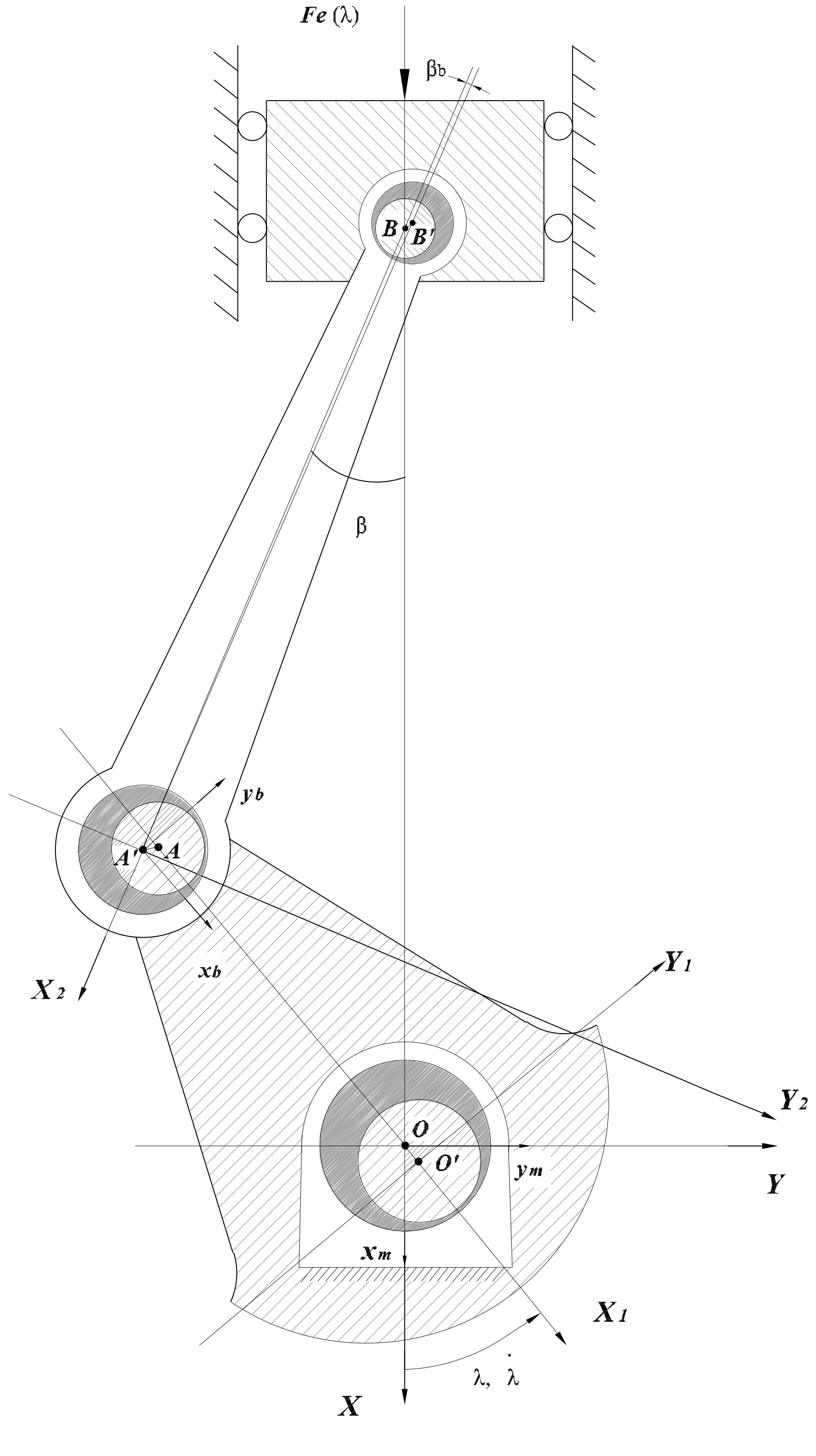


Figura 3.2: Sistemas de referência (inercial e móveis) utilizados para descrever o comportamento do sistema de múltiplos corpos no plano (sistema excitado pela força de explosão).

- *I* - Sistema inercial com eixos X, Y, Z, representados pelos versores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, com origem no centro do mancal principal indicado pelo ponto O.

- *B1* - Sistema móvel com eixos X_1, Y_1, Z_1, representados pelos versores $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{k}_1$, com origem no ponto O'. O ponto O' executa movimentos de translação dados por ${}_I\mathbf{dm} = \left\{ \begin{array}{ccc} x_m & y_m & 0 \end{array} \right\}^T$, ${}_I\dot{\mathbf{dm}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \dot{x}_m & \dot{y}_m & 0 \end{array} \right\}^T$ e ${}_I\ddot{\mathbf{dm}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \ddot{x}_m & \ddot{y}_m & 0 \end{array} \right\}^T$. O sistema móvel *B1* gira com velocidade angular constante ${}_I\boldsymbol{\omega}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \dot{\lambda} \end{array} \right\}^T$.

- *B2* - Sistema móvel com eixos X_2, Y_2, Z_2, representados pelos versores $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{j}_2$, $\boldsymbol{k}_2$, com origem no centro do olhal maior da biela indicado pelo ponto A'. O ponto A' executa translação dada por ${}_{B1}\mathbf{db} = \left\{ \begin{array}{ccc} x_b & y_b & 0 \end{array} \right\}^T$, ${}_{B1}\dot{\mathbf{db}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \dot{x}_b & \dot{y}_b & 0 \end{array} \right\}^T$ e ${}_{B1}\ddot{\mathbf{db}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \ddot{x}_b & \ddot{y}_b & 0 \end{array} \right\}^T$. O sistema móvel *B2* gira com velocidade angular ${}_I\boldsymbol{\omega}_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -(\dot{\beta} + \dot{\beta}_b) \end{array} \right\}^T$ e aceleração angular ${}_I\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -(\ddot{\beta} + \ddot{\beta}_b) \end{array} \right\}^T$.

3.1.2 Matrizes de transformação de coordenadas

Uma vez definido os sistemas de referência, é necessário determinar as matrizes de transformação entre os sistemas móveis e inercial, para que se consiga passar grandezas de um sistema para outro. A matriz de transformação de coordenadas do sistema inercial para o móvel *B1*, o qual gira no sentido positivo em torno do eixo Z com ângulo λ, é

$$\mathbf{T}_\lambda = \begin{bmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} => {}_{B1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\lambda \; {}_I\mathbf{s}.$$

A matriz de transformação de coordenadas do sistema inercial para o móvel *B2*, o qual gira no sentido negativo em relação do eixo Z de um ângulo $\beta + \beta_b$, é

$$\mathbf{T}_{(\beta+\beta_b)} = \begin{bmatrix} \cos(\beta+\beta_b) & -\sin(\beta+\beta_b) & 0 \\ \sin(\beta+\beta_b) & \cos(\beta+\beta_b) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} => {}_{B2}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{(\beta+\beta_b)} \; {}_I\mathbf{s}.$$

3.1.3 Equações de vínculo

Através da Figura 3.3, obtém-se a seguinte equação vetorial representada no sistema inercial

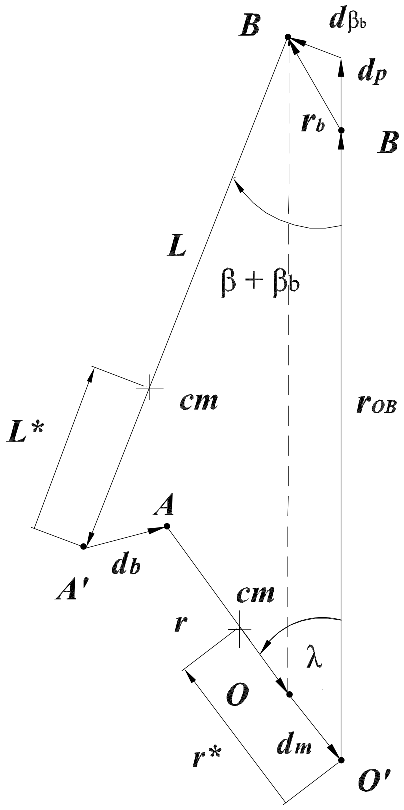


Figura 3.3: Cadeia cinemática do sistema pistão-biela-manivela.

$$ {}_I\mathbf{r}_{OB} + {}_I\mathbf{dp} + \mathbf{T}^T_{(\beta+\beta_b)\ B2}\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}_b + \mathbf{T}^T_{(\beta+\beta_b)B2}\mathbf{L} + \mathbf{T}^T_{\lambda\,B1}\mathbf{db} + \mathbf{T}^T_{\lambda\,B1}\mathbf{r} + {}_I\mathbf{dm} = \mathbf{0}. \qquad (3.1) $$

Devido à presença dos 3 mancais hidrodinâmicos O, A e B, seus respectivos centros deslocam-se para as posições O', A' e B' com vetores deslocamento $\mathbf{dm}$, $\mathbf{db}$ e $\mathbf{r}_b$, respectivamente. O vetor $\mathbf{r}_b$ é dado por

$$ \mathbf{r}_b = \mathbf{dp} + \mathbf{d}\boldsymbol{\beta}_b, $$

sendo $\mathbf{dp}$ o deslocamento do pistão e $\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}_b$ o valor do deslocamento proveniente da rotação rígida β_b da biela devido ao mancal hidrodinâmico B. Supondo que β_b é um ângulo pequeno, o deslocamento $\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}_b$ ocorre na direção $-Y_2$ e seu módulo é Lβ_b, sendo L o comprimento da biela.

As componentes dos vetores da equação de vínculo no sistema inercial são:

$$ {}_I\mathbf{r}_{OB} = \begin{Bmatrix} -r_{OB} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; $$

$$ {}_I\mathbf{dp} = \begin{Bmatrix} -x_p \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; $$

$$ {}_{B2}\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}_b = \begin{Bmatrix} 0 \\ -L\beta_b \\ 0 \end{Bmatrix} => {}_I\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}_b = \mathbf{T}^T_{(\beta+\beta_b)}\ {}_{B2}\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}_b => {}_I\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}_b = \begin{Bmatrix} -L\beta_b \sin(\beta+\beta_b) \\ -L\beta_b \cos(\beta+\beta_b) \\ 0 \end{Bmatrix}; $$

$$ {}_{B2}\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} => {}_I\mathbf{L} = \mathbf{T}^T_{(\beta+\beta_b)}\ {}_{B2}\mathbf{L} => {}_I\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} L\cos(\beta+\beta_b) \\ -L\sin(\beta+\beta_b) \\ 0 \end{Bmatrix}; $$

$$ {}_{B1}\mathbf{db} = \begin{Bmatrix} x_b \\ y_b \\ 0 \end{Bmatrix} => {}_I\mathbf{db} = \mathbf{T}^T_{\lambda}\ {}_{B1}\mathbf{db} => {}_I\mathbf{db} = \begin{Bmatrix} x_b\cos\lambda - y_b\sin\lambda \\ x_b\sin\lambda + y_b\cos\lambda \\ 0 \end{Bmatrix}; $$

$$ {}_{B1}\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} => {}_I\mathbf{r} = \mathbf{T}^T_{\lambda}\ {}_{B1}\mathbf{r} => {}_I\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r\cos\lambda \\ r\sin\lambda \\ 0 \end{Bmatrix}; $$

$$ {}_I\mathbf{dm} = \begin{Bmatrix} x_m \\ y_m \\ 0 \end{Bmatrix}. $$

Substituindo os vetores anteriores em (3.1), obtém-se a equação de vínculo em termos de componentes cartesianas, ou seja,

$$ \begin{Bmatrix} -r_{OB} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -x_p \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -L\beta_b \sin(\beta+\beta_b) \\ -L\beta_b \cos(\beta+\beta_b) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} L\cos(\beta+\beta_b) \\ -L\sin(\beta+\beta_b) \\ 0 \end{Bmatrix} + $$

$$\left\{\begin{array}{c} x_b\cos\lambda - y_b\sin\lambda \\ x_b\sin\lambda + y_b\cos\lambda \\ 0 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} r\cos\lambda \\ r\sin\lambda \\ 0 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} x_m \\ y_m \\ 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}, \tag{3.2}$$

sendo r_{OB}, x_p, β, β_b, x_b, y_b, x_m e y_m as incógnitas a serem determinadas.

3.1.4 Velocidades e acelerações

Assume-se que a manivela gira com uma velocidade angular constante $\dot{\lambda}$. Assim, a velocidade e a aceleração angulares no corpo 1 (manivela), e conseqüentemente da base *B1*, são conhecidas e dadas, respectivamente, por

$$\text{Base } B1: \quad {}_I\boldsymbol{\omega}_1 = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\lambda} \end{array}\right\} \ \text{ e } \ {}_I\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} \text{pois } \dot{\lambda} \text{ é constante.}$$

A velocidade e a aceleração angulares do corpo 2 (biela) são desconhecidas. Sabendo-se que o movimento se passa no plano *XY*, a rotação da biela acontece necessariamente em torno do eixo *Z*. Logo, a velocidade e a aceleração angulares do corpo a da base *B2* podem ser escritas vetorialmente como

$$\text{Base } B2: \quad {}_I\boldsymbol{\omega}_2 = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\beta} + \dot{\beta}_b) \end{array}\right\} \ \text{ e } \ {}_I\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -(\ddot{\beta} + \ddot{\beta}_b) \end{array}\right\}.$$

Derivando-se a equação (3.1), obtém-se a seguinte expressão matricial em termos das derivadas das 8 incógnitas cinemáticas

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -L(a+\beta_b b) & -L(2a+\beta_b b) & \cos\lambda & -\sin\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L(\beta_b a - b) & L(\beta_b a - 2b) & \sin\lambda & \cos\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_{OB} \\ \dot{x}_p \\ \dot{\beta} \\ \dot{\beta}_b \\ \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned} a &= \sin(\beta+\beta_b), \\ b &= \cos(\beta+\beta_b), \\ c &= r\dot{\lambda}\sin\lambda + x_b\dot{\lambda}\sin\lambda + y_b\dot{\lambda}\cos\lambda, \\ d &= -r\dot{\lambda}\cos\lambda - x_b\dot{\lambda}\cos\lambda + y_b\dot{\lambda}\sin\lambda. \end{aligned}$$

Derivando a relação anterior e lembrando que $\ddot{\lambda} = 0$, obtém-se os termos relacionados à aceleração. Escrevendo em forma matricial para evidenciar os termos a serem calculados ($\ddot{r}_{OB}$, $\ddot{x}_p$, $\ddot{\beta}$, $\ddot{\beta}_b$, $\ddot{x}_b$, $\ddot{y}_b$, $\ddot{x}_m$ e $\ddot{y}_m$), chega-se a

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -L(a+\beta_b b) & -L(2a+\beta_b b) & \cos\lambda & -\sin\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L(\beta_b a - b) & L(\beta_b a - 2b) & \sin\lambda & \cos\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_{OB} \\ \ddot{x}_p \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\beta}_b \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{y}_b \\ \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix}, \qquad (3.3)$$

sendo

$$\begin{aligned} e &= 2L\dot{\beta}_b(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)b - L(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2(\beta_b a - b) + r\dot{\lambda}^2\cos\lambda + 2\dot{x}_b\dot{\lambda}\sin\lambda \\ &+ x_b\dot{\lambda}^2\cos\lambda + 2\dot{y}_b\dot{\lambda}\cos\lambda - y_b\dot{\lambda}^2\sin\lambda, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f &= -2L\dot{\beta}_b(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)a - L(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2(\beta_b b - a) + r\dot{\lambda}^2\sin\lambda - 2\dot{x}_b\dot{\lambda}\cos\lambda \\
&+ x_b\dot{\lambda}^2\sin\lambda + 2\dot{y}_b\dot{\lambda}\sin\lambda + y_b\dot{\lambda}^2\cos\lambda.
\end{aligned}
$$

No sentido de generalizar a aplicação do modelo dinâmico desenvolvido, sete casos particulares podem ser identificados. O primeiro deles se refere ao caso em que O, A e B são rígidos, ou seja, têm-se pinos em O, A e B. Nesse caso não existem as folgas radiais nos mancais central e de biela e o sistema da equação (3.3) se reduz a

$$
\begin{bmatrix} -1 & -L\sin\beta \\ 0 & -L\cos\beta \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \ddot{r}_{OB} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} r\dot{\lambda}^2\cos\lambda + L\dot{\beta}^2\cos\beta \\ r\dot{\lambda}^2\sin\lambda - L\dot{\beta}^2\sin\beta \end{Bmatrix}. \tag{3.4}
$$

Supondo que em O exista um mancal hidrodinâmico e em A e B pinos, têm-se mais duas incógnitas do problema, ou seja, $\ddot{x}_m$ e $\ddot{y}_m$. Logo, o sistema (3.3) se reduz a

$$
\begin{bmatrix} -1 & -L\sin\beta & 1 & 0 \\ 0 & -L\cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \ddot{r}_{OB} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} r\dot{\lambda}^2\cos\lambda + L\dot{\beta}^2\cos\beta \\ r\dot{\lambda}^2\sin\lambda - L\dot{\beta}^2\sin\beta \end{Bmatrix}.
$$

Analogamente, supondo que em A exista um mancal hidrodinâmico e que em O e B pinos, tem-se a partir de (3.3)

$$
\begin{bmatrix} -1 & -L\sin\beta & \cos\lambda & -\sin\lambda \\ 0 & -L\cos\beta & \sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \ddot{r}_{OB} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{y}_b \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} h \\ i \end{Bmatrix},
$$

sendo

$$
\begin{aligned}
h &= r\dot{\lambda}^2\cos\lambda + L\dot{\beta}^2\cos\beta + 2\dot{x}_b\dot{\lambda}\sin\lambda + x_b\dot{\lambda}^2\cos\lambda + 2\dot{y}_b\dot{\lambda}\cos\lambda - y_b\dot{\lambda}^2\cos\lambda, \\
i &= r\dot{\lambda}^2\sin\lambda - L\dot{\beta}^2\sin\beta - 2\dot{x}_b\dot{\lambda}\cos\lambda + x_b\dot{\lambda}^2\sin\lambda + 2\dot{y}_b\dot{\lambda}\sin\lambda + y_b\dot{\lambda}^2\cos\lambda.
\end{aligned}
$$

Novamente por analogia, supondo que em B exista um mancal hidrodinâmico e que O e A sejam rígidos, tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -L(a+\beta_b b) & -L(2a+\beta_b b) \\ 0 & 0 & L(\beta_b a - b) & L(\beta_b a - 2b) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_{OB} \\ \ddot{x}_p \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\beta}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ l \end{Bmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned} k &= 2L\dot{\beta}_b(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)b - L(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2(\beta_b a - b) + r\dot{\lambda}^2\cos\lambda, \\ l &= -2L\dot{\beta}_b(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)a - L(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2(a+\beta_b b) + r\dot{\lambda}^2\sin\lambda. \end{aligned}$$

Para dois mancais hidrodinâmicos em O e A, e somente B rígido, tem-se a partir de (3.3)

$$\begin{bmatrix} -1 & -L\sin\beta & \cos\lambda & -\sin\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -L\cos\beta & \sin\lambda & \cos\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_{OB} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{y}_b \\ \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h \\ i \end{Bmatrix}.$$

Existindo mancais hidrodinâmicos em O e B e pino em A, tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -L(a+\beta_b b) & -L(2a+\beta_b b) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L(\beta_b a - b) & L(\beta_b a - 2b) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_{OB} \\ \ddot{x}_p \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\beta}_b \\ \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ l \end{Bmatrix}.$$

Analogamente, para o caso em que A e B existam mancais hidrodinâmicos e O seja rígido, tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -L(a+\beta_b b) & -L(2a+\beta_b b) & \cos\lambda & -\sin\lambda \\ 0 & 0 & L(\beta_b a - b) & L(\beta_b a - 2b) & \sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_{OB} \\ \ddot{x}_p \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\beta}_b \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{y}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix}.$$

3.2 Dinâmica

A Figura 3.4 ilustra os diagramas de corpo livre da manivela, biela e pistão. A manivela e a biela são modeladas como corpo rígido e o pistão como partícula (Santos, 2001). Utiliza-se o método Newton-Euler para obter as reações dinâmicas dos componentes. A seguir apresenta-se o equilíbrio dinâmico de cada um dos corpos.

3.2.1 Corpo 1 (manivela)

A manivela possui massa m_1 e está solicitado pelo seu peso próprio ($\mathbf{P}_1$), pelas forças nos mancais central ($\mathbf{F}_1$) e de biela ($\mathbf{F}_2$) e pelo momento na manivela ($\mathbf{M}_1$). As componentes dessas forças e do momento são (ver Figura 3.4(a)):

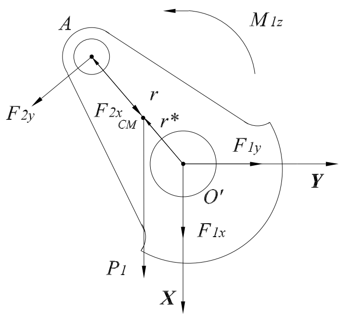
$${}_I\mathbf{P}_1 = \begin{Bmatrix} m_1 g & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T,$$

$${}_{B1}\mathbf{F}_2 = \begin{Bmatrix} F_{2x} & -F_{2y} & 0 \end{Bmatrix}^T,$$

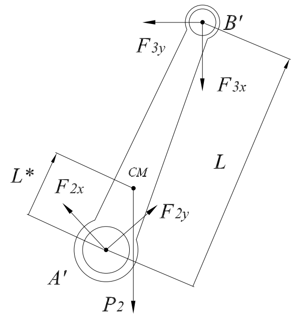
$${}_I\mathbf{F}_1 = \begin{Bmatrix} F_{1x} & F_{1y} & 0 \end{Bmatrix}^T,$$

$${}_I\mathbf{M}_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & M_{1z} \end{Bmatrix}^T.$$

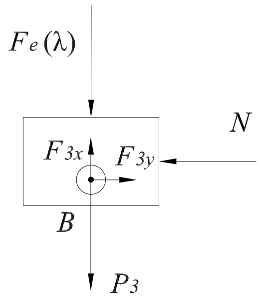
A força $\mathbf{F}_2$ é descrita com auxílio do sistema móvel *B1*, pois as componentes de deslocamento x_b e y_b são definidas no mesmo sistema.



(a) Corpo1: manivela.



(b) Corpo2: biela.



(c) Corpo3: pistão.

Figura 3.4: Diagramas de corpo livre e pontos de aplicação das forças.

Aplicando a segunda lei de Newton com os vetores representados na base inercial, tem-se

$$\sum_{i=1}^{3} {}_I\mathbf{F}_i = m_1 \ {}_I\mathbf{a}_1^* \quad => \quad \left\{\begin{array}{c} m_1 g \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} + \mathbf{T}_\lambda^T \left\{\begin{array}{r} F_{2x} \\ -F_{2y} \\ 0 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} F_{1x} \\ F_{1y} \\ 0 \end{array}\right\} = m_1 \left\{\begin{array}{c} a_{1x}^* \\ a_{1y}^* \\ 0 \end{array}\right\}, \quad (3.5)$$

sendo ${}_I\mathbf{a}_1^*$ a aceleração do centro de massa da manivela no sistema inercial. Tomando-se o ponto O' como referência, a aceleração é determinada a partir de

$${}_I\mathbf{a}_1^* = {}_I \mathbf{a}_{O'} + {}_I \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_I\mathbf{r}^* + {}_I \boldsymbol{\omega}_1 \times ({}_I\boldsymbol{\omega}_1 \times {}_I\mathbf{r}^*) + 2{}_I\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_I\mathbf{v}_{rel} + {}_I\mathbf{a}_{rel}.$$

A equação acima é resultado da derivada segunda do vetor posição em relação ao tempo. Sendo os termos (Santos, 2001):

- ${}_I\mathbf{a}_{O'}$ a aceleração linear absoluta do ponto O', onde a origem do sistema móvel $B1$ está posicionado, representada no sistema inercial I;

- ${}_I\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_I\mathbf{r}^*$ o produto vetorial da aceleração angular absoluta do sistema de referência móvel pelo vetor de posição ${}_I\mathbf{r}^*$, sendo ambos descritos no sistema inercial. O vetor ${}_I\mathbf{r}^*$ está diretamente relacionado à aceleração tangencial, pelo fato de o vetor ${}_I\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$ variar no tempo e o vetor ${}_I\mathbf{r}^*$ estar fixo no sistema móvel, sendo acelerado angularmente;

- ${}_I\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}_I\boldsymbol{\omega}_1 \times {}_I\mathbf{r}^*)$ o produto vetorial duplo da velocidade angular absoluta do sistema de referência móvel pelo vetor resultante da operação ${}_I\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_I\mathbf{r}^*$, este termo está relacionado à variação do vetor de velocidade ${}_I\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_I\mathbf{r}^*$ em termos de sua direção, sendo que, este vetor ${}_I\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_I\mathbf{r}^*$ gira com velocidade angular ${}_I\boldsymbol{\omega}_1$;

- $2{}_I\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_I\mathbf{v}_{rel}$ é o produto vetorial da aceleração angular absoluta do sistema móvel pela velocidade relativa, também representadas no sistema inercial, este termo é conhecido como aceleração do *Coriolis* e resulta na variação do vetor de velocidade relativa ${}_I\mathbf{v}_{rel}$ em termos de direção. Este vetor gira no espaço com uma velocidade angular ${}_I\boldsymbol{\omega}_1$. Vale a pena lembrar que o vetor que tem uma velocidade relativa, também estão variando em termos de direção com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, uma variação na direção do vetor de velocidade acarreta sempre uma aceleração. Assim, para entender a aceleração de Coriolis, fica mais fácil pensar em termos de velocidade (relativa) variando em termos de direção;

- ${}_I\mathbf{a}_{rel}$ a aceleração relativa do ponto O' ao centro de massa, essa aceleração é obtida quando se deriva duas vezes o vetor de posição ${}_{B1}\mathbf{r}^*$ em relação ao tempo, sendo este representado no sistema móvel de referência, cuja velocidade angular é ${}_I\boldsymbol{\omega}_1$. Derivando-se este vetor no sistema móvel, tem-se sua representação no sistema móvel $B1$. Então, é necessário multiplicá-lo pela matriz transformação $\mathbf{T}_\lambda^T$ para obter a representação deste vetor na base inercial.

Neste caso, ${}_I\mathbf{a}_{O'} = {}_I\ddot{\mathbf{dm}}$ e ${}_I\mathbf{r}^* = \mathbf{T}_\lambda^T {}_{B1}\mathbf{r}^*$, sendo ${}_{B1}\mathbf{r}^* = \left\{ \begin{array}{ccc} -r^* & 0 & 0 \end{array} \right\}^T$ a distância do ponto O' ao centro de massa (ver Figura 3.4(a)). Desconsidera-se o termo relacionado à $\ddot{\lambda}$, pois $\ddot{\lambda} = 0$. Como o corpo é rígido, a distância entre O' e o centro de massa permanece constante e conseqüentemente ${}_I\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{0}$ e ${}_I\mathbf{a}_{rel} = \mathbf{0}$. Logo,

$$ {}_I\mathbf{a}_1^* = \begin{Bmatrix} a_{1x}^* \\ a_{1y}^* \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\lambda}^2 r^* \cos\lambda \\ \dot{\lambda}^2 r^* \sin\lambda \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{3.6} $$

Transformando o vetor de força $\mathbf{F}_2$ do sistema móvel *B1* para o sistema inercial, tem-se

$$ {}_I\mathbf{F}_2 = \mathbf{T}_\lambda^T {}_{B1}\mathbf{F}_2 = \begin{Bmatrix} \cos\lambda F_{2x} + \sin\lambda F_{2y} \\ \sin\lambda F_{2x} - \cos\lambda F_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{3.7} $$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.5), obtém-se as seguintes equações de equilíbrio

$$ \begin{aligned} -m_1\ddot{x}_m + F_{1x} + \cos\lambda F_{2x} + \sin\lambda F_{2y} &= m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \cos\lambda - m_1 g, \\ -m_1\ddot{y}_m + F_{1y} + \sin\lambda F_{2x} - \cos\lambda F_{2y} &= m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \sin\lambda. \end{aligned} \tag{3.8} $$

Utilizando a equação de Euler para os movimentos de rotação do corpo, e fazendo o somatório dos momentos na base *B1* em relação ao ponto *O'*, escreve-se

$$ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} {}_{B1}\mathbf{M}_{O'i} &= \underbrace{{}_{B1}\mathbf{I}_{O'} \frac{d}{dt}({}_{B1}\dot{\boldsymbol{\lambda}})}_{=0} + \underbrace{{}_{B1}\dot{\boldsymbol{\lambda}} \times ({}_{B1}\mathbf{I}_{O'}\ {}_{B1}\dot{\boldsymbol{\lambda}})}_{=0} + {}_{B1}\mathbf{r}^* \times m_1 {}_{B1}\mathbf{a}_{O'} \\ &= {}_{B1}\mathbf{r} \times {}_{B1}\mathbf{F}_2 + {}_{B1}\mathbf{r}^* \times {}_{B1}\mathbf{P}_1 + {}_{B1}\mathbf{M}_1. \end{aligned} \tag{3.9} $$

Para entender melhor a equação anterior, é importante saber que a quantidade de movimento angular de um corpo rígido (ou seja, de um sistema de partículas representado pelo centro de massa, ${}_{B1}\mathbf{r}^*$ e pelo tensor de inércia ${}_{B1}\mathbf{I}_{O'}$) só pode ser alterado mediante a aplicação de momentos externos sobre o mesmo. Assim deriva-se a equação de quantidade de movimento angular no sistema de referência solidário ao corpo, $B1$, pois o tensor de inércia permanece independente do tempo. Porém, ao derivar um vetor no sistema móvel, perdem-se as informações relacionadas com a variação de sua direção, e para obter sua variação absoluta deve-se somar o produto do vetor de velocidade angular do sistema de referência ${}_{B1}\boldsymbol{\Omega}_1$ pelo vetor a ser derivado, no caso, o vetor de quantidade de movimento angular ${}_{B1}\mathbf{H}_{O'}$, onde ${}_{B1}\mathbf{H}_{O'} = {}_{B1}\mathbf{I}_{O'}{}_I\dot{\boldsymbol{\lambda}} + m_1 {}_{B1}\mathbf{r}^* \times {}_{B1}\mathbf{v}_{O'}$. Assim,

$$ \sum_{i=1}^{2} {}_{B1}\mathbf{M}_{O'i} = \frac{d}{dt}({}_{B1}\mathbf{H}_{O'}) + {}_{B1}\boldsymbol{\Omega}_1 \times ({}_{B1}\mathbf{H}_{O'}) = $$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}({}_{B1}\mathbf{I}_{O'})}_{=0}\ {}_{B1}\dot{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{d}{dt}({}_{B1}\dot{\boldsymbol{\lambda}})_{B1}\mathbf{I}_{O'} + \underbrace{\frac{d}{dt}(m_1)}_{=0}\,{}_{B1}\mathbf{r}^* \times {}_{B1}\mathbf{v}_{O'} + m_1\underbrace{\frac{d}{dt}({}_{B1}\mathbf{r}^*)}_{=0} \times {}_{B1}\mathbf{v}_{O'} +$$

$$m_{1\,B1}\mathbf{r}^* \times \frac{d}{dt}({}_{B1}\mathbf{v}_{O'}) +_{B1} \boldsymbol{\Omega}_1 \times ({}_{B1}\mathbf{I}_{O'}\ {}_{B1}\dot{\boldsymbol{\lambda}} + m_{1\,B1}\mathbf{r}^* \times {}_{B1}\mathbf{v}_{O'}) =$$

$${}_{B1}\mathbf{I}_{O'}\frac{d}{dt}({}_{B1}\dot{\boldsymbol{\lambda}}) +_{B1} \boldsymbol{\Omega}_1 \times ({}_{B1}\mathbf{I}_{O'}\ {}_{B1}\dot{\boldsymbol{\lambda}}) + m_{1\,B1}\mathbf{r}^* \times \underbrace{\left[\frac{d}{dt}({}_{B1}\mathbf{v}_{O'}) +_{B1} \boldsymbol{\Omega}_1 \times {}_{B1}\mathbf{v}_{O'}\right]}_{{}_{B1}\mathbf{a}_{O'}}.$$

Sendo os termos

- $\sum_{i=1}^{2} {}_{B1}\mathbf{M}_{O'i}$ o somatório dos momentos provocados pelas forças externas e de reação em relação ao ponto O', representados no sistema solidário ao corpo ($B1$);

- ${}_{B1}\mathbf{I}_{O'}$ o tensor de inércia do corpo, calculado em relação ao ponto O' (ponto que é calculado o somatório de momento). Sendo este tensor descrito no sistema de referência móvel O' solidário ao corpo;

- $\frac{d}{dt}({}_{B1}\dot{\boldsymbol{\lambda}})$a derivada do vetor de velocidade angular absoluta do corpo, quando este é representado no sistema móvel $B1$. Assim, se a velocidade angular ${}_{B1}\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ e da base $B1$, ${}_{B1}\boldsymbol{\Omega}_1$, forem diferentes, este vetor não coincide com a aceleração angular absoluta do corpo;

- ${}_{B1}\boldsymbol{\Omega}_1$ o vetor de velocidade absoluta da base $B1$, representado no sistema móvel $B1$;

- m a massa total do corpo;

- ${}_{B1}\mathbf{r}^*$ó vetor com origem no ponto em torno do qual se calcula a quantidade de movimento angular, neste caso o ponto O', e termino no centro de massa do corpo. Sua representação é feita na base móvel $B1$;

- ${}_{B1}\mathbf{a}_{O'}$ a aceleração linear absoluta do ponto em torno do qual se calcula a quantidade de movimento angular absoluta do corpo e, também, realiza-se o somatório de momentos. Sua representação é feita na base móvel $B1$.

Neste caso, a velocidade angular do corpo $\boldsymbol{\lambda}_1$ coincide com a da base $B1$, ${}_{B1}\boldsymbol{\Omega}_1$, e sendo ${}_{B1}\mathbf{r} = \left\{ \begin{array}{ccc} -r & 0 & 0 \end{array} \right\}^T$ a distância entre os pontos *O'* e A (ver Figura 3.4(a)). O segundo termo do lado direito da equação (3.9) é nulo, pois a velocidade de rotação do corpo 1 e do sistema móvel $B1$ são iguais.

Deve-se transferir o vetor aceleração $\mathbf{a}_{O'}$ do sistema inercial para o móvel *B1*. Logo,

$$ {}_{B1}\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{T}_{\lambda I}\mathbf{a}_{O'} \ = \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x}_m \cos\lambda + \ddot{y}_m \sin\lambda \\ -\ddot{x}_m \sin\lambda + \ddot{y}_m \cos\lambda \\ 0 \end{array} \right\}, $$

Substituindo as componentes dos vetores e efetuando as operações indicadas em (3.9), obtém-se mais uma equação de equilíbrio relativa aos movimentos de rotação do corpo 1 em torno do eixo inercial Z, ou seja,

$$ -r^* m_1 \sin\lambda \ddot{x}_m + r^* m_1 \cos\lambda \ddot{y}_m + rF_{2y} + M_{1z} = r^* m_1 g \sin\lambda. \tag{3.10} $$

As equações de equilíbrio dadas em (3.8) e (3.10) podem ser escritas matricialmente como

$$ \left[\begin{array}{ccccccc} -m_1 & 0 & 1 & 0 & \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ 0 & -m_1 & 0 & 1 & \sin\lambda & -\cos\lambda & 0 \\ -m_1 r^* \sin\lambda & m_1 r^* \cos\lambda & 0 & 0 & 0 & r & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{1z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \cos\lambda - m_1 g \\ m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \sin\lambda \\ r^* m_1 g \sin\lambda \end{array} \right\}. \tag{3.11} $$

Como os mancais O e A são hidrodinâmicos, as componentes de força F_{1x}, F_{1y}, F_{2x} e F_{2y} são obtidas pela solução da equação de Reynolds para cada mancal. Nesse caso, o sistema de equações anterior se reduz a

$$ \left[\begin{array}{ccc} -m_1 & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 & 0 \\ -m_1 r^* \sin\lambda & m_1 r^* \cos\lambda & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ M_{1z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \cos\lambda - m_1 g - F_{1x} - \cos\lambda F_{2x} - \sin\lambda F_{2y} \\ m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \sin\lambda - F_{1y} - \sin\lambda F_{2x} + \cos\lambda F_{2y} \\ r^* m_1 g \sin\lambda - rF_{2y} \end{array} \right\}. \tag{3.12} $$

No sentido de generalizar a aplicação do modelo dinâmico desenvolvido, 3 novos casos podem ser identificados. O primeiro deles se refere ao caso em que O e A são rígidos, ou seja, têm-se pinos em O e A. Logo, as folgas radiais no mancal central x_m e

y_m são nulas e o sistema de equações (3.11) se reduz a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ 0 & 1 & \sin\lambda & -\cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \cos\lambda - m_1 g \\ m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \sin\lambda \\ r^* m_1 g \sin\lambda \end{Bmatrix}.$$

Supondo que em O exista um mancal hidrodinâmico e em A um pino, as reações F_{1x} e F_{1y} são obtidas pela solução da equação de Reynolds e F_{2x} e F_{2y} tornam-se incógnitas dinâmicas do problema. Logo, o sistema (3.11) se reduz a

$$\begin{bmatrix} -m_1 & 0 & \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ 0 & -m_1 & \sin\lambda & -\cos\lambda & 0 \\ -m_1 r^* \sin\lambda & m_1 r^* \cos\lambda & 0 & r & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \cos\lambda - m_1 g - F_{1x} \\ m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \sin\lambda - F_{1y} \\ r^* m_1 g \sin\lambda \end{Bmatrix}.$$

Analogamente, supondo O rígido e A mancal hidrodinâmico, tem-se a partir de (3.11)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \cos\lambda - m_1 g - \cos\lambda F_{2x} - \sin\lambda F_{2y} \\ m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \sin\lambda - \sin\lambda F_{2x} + \cos\lambda F_{2y} \\ r^* m_1 g \sin\lambda - r F_{2y} \end{Bmatrix}$$

3.2.2 Corpo 2 (biela)

A biela possui massa m_2 e está solicitado pelo seu próprio peso ($\mathbf{P}_2$) e pelas forças nos olhais maior ($\mathbf{F}_2$) e menor ($\mathbf{F}_3$) (ver Figura 3.4(b)). As componentes dessas forças são:

$$_I\mathbf{P}_2 = \begin{Bmatrix} m_2 g & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T,$$

$$_{B1}\mathbf{F}_2 = \begin{Bmatrix} -F_{2x} & F_{2y} & 0 \end{Bmatrix}^T,$$

$$_I\mathbf{F}_3 = \begin{Bmatrix} F_{3x} & -F_{3y} & 0 \end{Bmatrix}^T.$$

Aplicando a segunda lei de Newton, com os vetores representados na base inercial, tem-se

$$\sum_{i=1}^{3} {}_I\mathbf{F}_i = m_2\ {}_I\mathbf{a}_2^* \quad => \quad \left\{ \begin{array}{c} m_2 g \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} + \mathbf{T}_\lambda^T \left\{ \begin{array}{r} -F_{2x} \\ F_{2y} \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{r} F_{3x} \\ -F_{3y} \\ 0 \end{array} \right\} = m_2 \left\{ \begin{array}{c} a_{2x}^* \\ a_{2y}^* \\ 0 \end{array} \right\}, \tag{3.13}$$

sendo ${}_I\mathbf{a}_2^*$ a aceleração do centro de massa da biela, denotado através do vetor $\mathbf{L}^*$ (ver Figura 3.4(b)). Usando o ponto *A'* como referência, a aceleração do centro de massa da biela no sistema inercial é

$${}_I\mathbf{a}_2^* = {}_I\mathbf{a}_{A'} + {}_I\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}_I\boldsymbol{\omega}_2 \times {}_I\mathbf{L}^*) + {}_I\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}_I\mathbf{L}^* + 2\ {}_I\boldsymbol{\omega}_2 \times {}_I\mathbf{v}_{rel} + {}_I\mathbf{a}_{rel}.$$

Nota-se que o vetor ${}_{B1}\mathbf{L}^* = \left\{ \begin{array}{ccc} -L & 0 & 0 \end{array} \right\}^T$, que está entre os pontos A' e o centro de massa, pertence a um corpo rígido. Conclui-se então que ${}_I\mathbf{v}_{rel} = 0$ e ${}_I\mathbf{a}_{rel} = 0$. Por sua vez, através da cadeia cinemática tem-se

$$\begin{aligned} {}_I\mathbf{a}_{A'} &= {}_I\mathbf{a}_A + \mathbf{T}_{\lambda\,B1}^T\ddot{\mathbf{d}\mathbf{b}} = {}_I\mathbf{a}_{O'} +_I \boldsymbol{\omega}_1 \times ({}_I\boldsymbol{\omega}_1 \times {}_I\mathbf{r}) + \mathbf{T}_{\lambda\,B1}^T\ddot{\mathbf{d}\mathbf{b}} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \dot{\lambda}^2\ r\cos\lambda \\ \dot{\lambda}^2\ r\sin\lambda \\ 0 \end{array} \right\} + \mathbf{T}_\lambda^T \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x}_b \\ \ddot{y}_b \\ 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Assim, representando ${}_I\mathbf{a}_2^*$ em sua forma vetorial, tem-se

$$\begin{aligned} {}_I\mathbf{a}_2^* = & \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \dot{\lambda}^2\ r\cos\lambda \\ \dot{\lambda}^2\ r\sin\lambda \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x}_b\cos\lambda - \ddot{y}_b\sin\lambda \\ \ddot{x}_b\sin\lambda + \ddot{y}_b\cos\lambda \\ 0 \end{array} \right\} + \\ & \left\{ \begin{array}{r} (\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*b) \\ -(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*a) \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{r} (\ddot{\beta}+\ddot{\beta}_b)\ (L^*a) \\ (\ddot{\beta}+\ddot{\beta}_b)\ (L^*b) \\ 0 \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Substituindo (3.14) em (3.13), obtém-se as seguintes equações de equilíbrio

$$\begin{aligned} -\cos\lambda F_{2x} &- \sin\lambda F_{2y} + F_{3x} - m_2\ddot{x}_m - m_2\ddot{x}_b\cos\lambda + m_2\ddot{y}_b\sin\lambda \\ &- m_2(\ddot{\beta}+\ddot{\beta}_b)\ (L^*a) = m_2\dot{\lambda}^2\ r\cos\lambda + m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*b) - m_2 g, \\ -\sin\lambda F_{2x} &+ \cos\lambda F_{2y} - F_{3y} - m_2\ddot{y}_m - m_2\ddot{x}_b\sin\lambda - m_2\ddot{y}_b\cos\lambda \\ &- m_2(\ddot{\beta}+\ddot{\beta}_b)\ (L^*b) = m_2\dot{\lambda}^2\ r\sin\lambda - m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*a). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Utilizando a equação de Euler para os movimentos de rotação do corpo, e fazendo-se o somatório dos momentos em relação ao ponto *A'* na base móvel *B2*, escreve-se

$$\sum_{i=1}^{2} {}_{B2}\mathbf{M}_{A'i} = {}_{B2}\mathbf{I}_{A'}\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\boldsymbol{\beta}}_b) + \underbrace{{}_{B2}(\dot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\boldsymbol{\beta}}_b) \times [{}_{B2}\mathbf{I}_{A'B2}(\dot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\boldsymbol{\beta}}_b)]}_{=0} +$$
$${}_{B2}\mathbf{L}^* \times m_{2\,B2}\mathbf{a}_{A'} = {}_{B2}\mathbf{L} \times {}_{B2}\mathbf{F}_3 + {}_{B2}\mathbf{L}^* \times {}_{B2}\mathbf{P}_2. \tag{3.16}$$

Aplicando matrizes de transformação em ${}_I\mathbf{a}_{A'}$ e ${}_I\mathbf{F}_3$, tem-se

$${}_{B2}\mathbf{a}_{A'} = \mathbf{T}_{(\beta+\beta_b)\,I}\mathbf{a}_{A'} = \left\{ \begin{array}{c} m\cos(\beta+\beta_b) - n\sin(\beta+\beta_b) \\ m\sin(\beta+\beta_b) + n\cos(\beta+\beta_b) \\ 0 \end{array} \right\},$$

$${}_{B2}\mathbf{F}_3 = \mathbf{T}_{(\beta+\beta_b)\,I}\mathbf{F}_3 = \left\{ \begin{array}{c} F_{3x}\cos(\beta+\beta_b) + F_{3y}\sin(\beta+\beta_b) \\ F_{3x}\sin(\beta+\beta_b) - F_{3y}\cos(\beta+\beta_b) \\ 0 \end{array} \right\},$$

sendo $m = \ddot{x}_m + \dot{\lambda}^2\, r\cos\lambda + \ddot{x}_b\cos\lambda - \ddot{y}_b\sin\lambda$ e $n = \ddot{y}_m + \dot{\lambda}^2\, r\sin\lambda + \ddot{x}_b\sin\lambda + \ddot{y}_b\cos\lambda$.

Substituindo as expressões anteriores em (3.16) e efetuando as operações indicadas, obtém-se a equação de equilíbrio para os movimentos de rotação do corpo 2 em torno do eixo inercial *Z*, ou seja,

$$I_{zz_2}(\ddot{\beta} + \ddot{\beta}_b) + L^* m_2(ma + nb) + LaF_{3x} - LbF_{3y} = -L^* m_2 ga. \tag{3.17}$$

Escrevendo as equações de equilíbrio dadas em (3.15) e (3.17) na forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} -m_2L^*a & -m_2L^*a & -m_2\cos\lambda & m_2\sin\lambda & -m_2 & 0 & -\cos\lambda & -\sin\lambda & 1 & 0 \\ -m_2L^*b & -m_2L^*b & -m_2\sin\lambda & -m_2\cos\lambda & 0 & -m_2 & -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 & -1 \\ I_{zz_2} & I_{zz_2} & L^*m_2p & L^*m_2q & L^*m_2a & L^*m_2b & 0 & 0 & La & -Lb \end{bmatrix}$$

$$
\left\{\begin{array}{c}\ddot{\beta}\\ \ddot{\beta}_b\\ \ddot{x}_b\\ \ddot{y}_b\\ \ddot{x}_m\\ \ddot{y}_m\\ F_{2x}\\ F_{2y}\\ F_{3x}\\ F_{3y}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} m_2\dot{\lambda}^2\ r\cos\lambda + m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*b) - m_2 g\\ m_2\dot{\lambda}^2\ r\sin\lambda - m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*a)\\ -L^*m_2 g\ a - L^*m_2\dot{\lambda}^2\ rp \end{array}\right\}, \tag{3.18}
$$

sendo $p = (\cos\lambda a + \sin\lambda b)$ e $q = (\cos\lambda b - \sin\lambda a)$.

Para A e B mancais hidrodinâmicos, as forças F_{2x}, F_{2y}, F_{3x} e F_{3y} são determinadas pela solução das equações de Reynolds. Assim, pode-se escrever (3.18) como

$$
\left[\begin{array}{cccccc} -m_2L^*a & -m_2L^*a & -m_2\cos\lambda & m_2\sin\lambda & -m_2 & 0\\ -m_2L^*b & -m_2L^*b & -m_2\sin\lambda & -m_2\cos\lambda & 0 & -m_2\\ I_{zz_2} & I_{zz_2} & L^*m_2p & L^*m_2q & L^*m_2a & L^*m_2b \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\ddot{\beta}\\ \ddot{\beta}_b\\ \ddot{x}_b\\ \ddot{y}_b\\ \ddot{x}_m\\ \ddot{y}_m\end{array}\right\} =
$$

$$
\left\{\begin{array}{l} m_2\dot{\lambda}^2\ r\cos\lambda + m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*b) - m_2 g + F_{2x}\cos\lambda + F_{2y}\sin\lambda - F_{3x}\\ m_2\dot{\lambda}^2\ r\sin\lambda - m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*a) + F_{2x}\sin\lambda - F_{2y}\cos\lambda + F_{3y}\\ -L^*m_2 g\ a - L^*m_2\dot{\lambda}^2\ r(\cos\lambda a + \sin\lambda b) - LF_{3x}a + LF_{3y}b \end{array}\right\}.
$$

Considerando O, A e B rígidos, tem-se que as folgas x_m, y_m, x_b e y_b são nulas, além da rotação rígida adicional da biela β_b. Portanto, a equação (3.18) se reduz a

$$
\left[\begin{array}{ccccc} -m_2L^*\sin\beta & -\cos\lambda & -\sin\lambda & 1 & 0\\ -m_2L^*\cos\beta & -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 & -1\\ I_{zz_2} & 0 & 0 & L\sin\beta & -L\cos\beta \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\ddot{\beta}\\ F_{2x}\\ F_{2y}\\ F_{3x}\\ F_{3y}\end{array}\right\} =
$$

$$\left\{\begin{array}{l} m_2\dot{\lambda}^2\ r\cos\lambda + m_2\dot{\beta}^2 L^*\cos\beta - m_2 g \\ m_2\dot{\lambda}^2\ r\sin\lambda - m_2\dot{\beta}^2 L^*\sin\beta \\ -L^* m_2 g\sin\beta - L^* m_2\dot{\lambda}^2\ r(\cos\lambda\sin\beta + \sin\lambda\cos\beta) \end{array}\right\}.$$

Supondo que somente em O exista um mancal hidrodinâmico, tem-se

$$\left[\begin{array}{ccccccc} -m_2 L^*\sin\beta & -m_2 & 0 & -\cos\lambda & -\sin\lambda & 1 & 0 \\ -m_2 L^*\cos\beta & 0 & -m_2 & -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 & -1 \\ I_{zz_2} & L^* m_2\sin\beta & L^* m_2\cos\beta & 0 & 0 & L\sin\beta & -L\cos\beta \end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{c} \ddot{\beta} \\ \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} m_2\dot{\lambda}^2\ r\cos\lambda + m_2\dot{\beta}^2\ L^*\cos\beta - m_2 g \\ m_2\dot{\lambda}^2\ r\sin\lambda - m_2\dot{\beta}^2\ L^*\sin\beta \\ -L^* m_2 g\sin\beta - L^* m_2\dot{\lambda}^2\ r(\cos\lambda\sin\beta + \sin\lambda\cos\beta) \end{array}\right\}.$$

Supondo que em A exista um mancal hidrodinâmico e que O e B sejam rígidos, tem-se $x_m = y_m = \beta_b = 0$. As reações F_{2x} e F_{2y} são obtidas pela solução da equação de Reynolds e F_{3x} e F_{3y} tornam-se incógnitas dinâmicas do problema. Logo, o sistema (3.18) se reduz a

$$\left[\begin{array}{ccccc} -m_2 L^*\sin\beta & -m_2\cos\lambda & m_2\sin\lambda & 1 & 0 \\ -m_2 L^*\cos\beta & -m_2\sin\lambda & -m_2\cos\lambda & 0 & 1 \\ I_{zz_2} & L^* m_2(\cos\lambda\sin\beta + \sin\lambda\cos\beta) & L^* m_2(\cos\lambda\cos\beta - \sin\lambda\sin\beta) & L\sin\beta & +L\cos\beta \end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{c} \ddot{\beta} \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{y}_b \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} r \\ s \\ t \end{array}\right\},$$

sendo

$$\begin{aligned} r &= m_2\dot{\lambda}^2\ r\cos\lambda + m_2\dot{\beta}^2\ L^*\cos\beta - m_2 g + F_{2x}\cos\lambda + F_{2y}\sin\lambda, \\ s &= m_2\dot{\lambda}^2\ r\sin\lambda - m_2\dot{\beta}^2\ L^*\sin\beta + F_{2x}\sin\lambda - F_{2y}\cos\lambda, \\ t &= -L^* m_2 g\sin\beta - L^* m_2\dot{\lambda}^2\ r(\cos\lambda\sin\beta + \sin\lambda\cos\beta). \end{aligned}$$

Analogamente, supondo que em B exista um mancal hidrodinâmico e que O e A sejam rígidos, tem-se

$$\begin{bmatrix} -m_2L^*a & -m_2L^*a & -\cos\lambda & -\sin\lambda \\ -m_2L^*b & -m_2L^*b & -\sin\lambda & \cos\lambda \\ I_{zz_2} & I_{zz_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\beta}_b \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} m_2\dot{\lambda}^2\ r\cos\lambda + m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*b) - m_2g - F_{3x} \\ m_2\dot{\lambda}^2\ r\sin\lambda - m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*a) + F_{3y} \\ -L^*m_2g\ a - L^*m_2\dot{\lambda}^2\ r(\cos\lambda a + \sin\lambda b) - LF_{3x}a + LF_{3y}b \end{Bmatrix}.$$

Para o caso que O e A são mancais hidrodinâmicos, e somente B é rígido, a partir da equação (3.18), tem-se

$$\begin{bmatrix} -m_2L^*\sin\beta & -m_2\cos\lambda & m_2\sin\lambda & -m_2 & 0 & 1 & 0 \\ -m_2L^*\cos\beta & -m_2\sin\lambda & -m_2\cos\lambda & 0 & -m_2 & 0 & -1 \\ I_{zz_2} & L^*m_2(\cos\lambda\sin\beta+\sin\lambda\cos\beta) & L^*m_2(\cos\lambda\cos\beta-\sin\lambda\sin\beta) & L^*m_2\sin\beta & L^*m_2\cos\beta & L\sin\beta & +L\cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{y}_b \\ \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \\ s \\ t \end{Bmatrix}.$$

Novamente, por analogia, considerando que existam mancais hidrodinâmicos em O e B e que A seja rígido

$$\begin{bmatrix} -m_2L^*a & -m_2L^*a & -m_2 & 0 & -\cos\lambda & -\sin\lambda \\ -m_2L^*b & -m_2L^*b & 0 & -m_2 & -\sin\lambda & \cos\lambda \\ I_{zz_2} & I_{zz_2} & L^*m_2a & L^*m_2b & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\beta}_b \\ \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} m_2\dot{\lambda}^2\ r\cos\lambda + m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*b) - m_2g - F_{3x} \\ m_2\dot{\lambda}^2\ r\sin\lambda - m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*a) + F_{3y} \\ -L^*m_2g\ a - L^*m_2\dot{\lambda}^2\ r(\cos\lambda a + \sin\lambda b) - LF_{3x}a + LF_{3y}b \end{array}\right\}.$$

Sendo O rígido e A e B mancais hidrodinâmicos, pode-se escrever, a partir da equação (3.18), a seguinte expressão

$$\left[\begin{array}{cccc} -m_2L^*a & m_2L^*a & -m_2\cos\lambda & m_2\sin\lambda \\ -m_2L^*b & -m_2L^*b & -m_2\sin\lambda & -m_2\cos\lambda \\ I_{zz_2} & I_{zz_2} & L^*m_2(\cos\lambda a + \sin\lambda b) & L^*m_2(\cos\lambda b - \sin\lambda a) \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \ddot{\beta} \\ \ddot{\beta}_b \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{y}_b \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} m_2\dot{\lambda}^2\ r\cos\lambda + m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*b) - m_2g + F_{2x}\cos\lambda + F_{2y}\sin\lambda - F_{3x} \\ m_2\dot{\lambda}^2\ r\sin\lambda - m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2\ (L^*a) + F_{2x}\sin\lambda - F_{2y}\cos\lambda + F_{3y} \\ -L^*m_2g\ a - L^*m_2\dot{\lambda}^2\ r(\cos\lambda a + \sin\lambda b) - LF_{3x}a + LF_{3y}b \end{array}\right\}.$$

3.2.3 Corpo 3 (pistão)

O pistão possui massa m_3 e está solicitado pelo seu peso próprio $\mathbf{P}_3$, pelas reações no mancal $\mathbf{F}_3$, pela força normal na parede do cilindro $\mathbf{N}$ e pela força de explosão $\mathbf{F}_e(\lambda)$, como ilustrado na Figura 3.4(c) . As componentes destes vetores no sistema inercial são:

$$_I\mathbf{P}_3 = \left\{\begin{array}{ccc} m_3g & 0 & 0 \end{array}\right\}^T,$$

$$_I\mathbf{F}_3 = \left\{\begin{array}{ccc} -F_{3x} & F_{3y} & 0 \end{array}\right\}^T,$$

$$_I\mathbf{N} = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & -N & 0 \end{array}\right\}^T,$$

$$_I\mathbf{F}_e = \left\{\begin{array}{ccc} F_e(\lambda) & 0 & 0 \end{array}\right\}^T.$$

Aplicando a segunda lei de Newton, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{4} {_I\mathbf{F}_i} = m_3\ {_I\mathbf{a}_3} \quad => \quad \left\{\begin{array}{c} m_3g \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} -F_{3x} \\ F_{3y} \\ 0 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ -N \\ 0 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} F_e(\lambda) \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} = m_3 \left\{\begin{array}{c} _Ia_{3x} \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}. \quad (3.19)$$

Observa-se que ${}_I\mathbf{a}_3 = -\ddot{\boldsymbol{r}}_{OB} - \ddot{\mathbf{dp}}$, pois a aceleração só é permitida na vertical (direção X). Através da equação (3.19), obtém-se as seguintes equações de equilíbrio

$$\begin{aligned} & m_3(\ddot{r}_{OB} + \ddot{x}_p) - F_{3x} = -m_3 g - F_e(\lambda), \\ & F_{3y} - N = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Supondo que em B exista um mancal hidrodinâmico, as componentes de força F_{3x} e F_{3y} são calculadas através da equação de Reynolds. Nesse caso, a equação (3.19) assume a seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_3 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_{OB} \\ \ddot{x}_p \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_3 g - F_e(\lambda) + F_{3x} \\ -F_{3y} \end{Bmatrix}.$$

Como feito anteriormente para os corpos 1 e 2, pode-se ter um pino em B. Portanto, as componentes de força F_{3x} e F_{3y} passam a ser incógnitas do problema. Neste caso, a equação (3.20) é escrita matricialmente como

$$\begin{bmatrix} m_3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_{OB} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_3 g - F_e(\lambda) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

3.3 Sistema de Equações

A partir do estudo da cinemática e da dinâmica do sistema considerado, têm-se duas equações de vínculo cinemático e oito equações de equilíbrio dinâmico (três da manivela, três da biela e duas do pistão), totalizando dez equações. O número de incógnitas depende se O, A e B são pinos ou mancais hidrodinâmicos.

Fazendo a superposição das equações de equilíbrio determinadas anteriormente, chega-se ao seguinte sistema de equações indeterminado com 16 incógnitas e 10 equações

$$
\begin{bmatrix}
-1 & -1 & -L(a+\beta_b b) & -L(2a+\beta_b b) & \cos\lambda & -\sin\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & L(\beta_b a - b) & L(\beta_b a - 2b) & \sin\lambda & \cos\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cos\lambda & \sin\lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sin\lambda & -\cos\lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & -m_2 L^* a & -m_2 L^* a & -m_2\cos\lambda & m_2\sin\lambda & -m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\lambda & -\sin\lambda & 1 & 0 \\
0 & 0 & -m_2 L^* b & -m_2 L^* b & -m_2\sin\lambda & -m_2\cos\lambda & 0 & -m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 & -1 \\
0 & 0 & I_{zz_2} & I_{zz_2} & L^* m_2 p & L^* m_2 q & L^* m_2 a & L^* m_2 b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & La & -Lb \\
m_3 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r^* m_1\sin\lambda & r^* m_1\cos\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\ddot{r}_{OB} \\ \ddot{x}_p \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\beta} b \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{y}_b \\ \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ N \\ M_{1z} \\ F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y}
\end{Bmatrix}
=
$$

$$
\begin{Bmatrix}
e \\
f \\
m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \cos\lambda - m_1 g \\
m_1 r^* \dot{\lambda}^2 \sin\lambda \\
m_2 \dot{\lambda}^2 \; r\cos\lambda + m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2 \; (L^* b) - m_2 g \\
m_2 \dot{\lambda}^2 \; r\sin\lambda - m_2(\dot{\beta}+\dot{\beta}_b)^2 \; (L^* a) \\
-L^* m_2 g \; a - L^* m_2 \dot{\lambda}^2 \; r(\cos\lambda a + \sin\lambda b) \\
-m_3 g - F_e(\lambda) \\
0 \\
r^* m_1 g \sin\lambda
\end{Bmatrix}
$$

De forma resumida,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \kappa \\ \iota \end{Bmatrix}, \tag{3.21}$$

sendo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta} &= \begin{Bmatrix} \ddot{x}_m & \ddot{y}_m & \ddot{x}_b & \ddot{y}_b & \ddot{x}_p & \ddot{\beta}_b & N & M_{1z} & \ddot{r}_{OB} & \ddot{\beta} \end{Bmatrix}^T, \\ \boldsymbol{\eta} &= \begin{Bmatrix} F_{1x} & F_{1y} & F_{2x} & F_{2y} & F_{3x} & F_{3y} \end{Bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Como o vetor $\boldsymbol{\eta}$ é conhecido, ou seja, determinado pelas equações de Reynolds, a equação (3.21), pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \kappa \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \end{Bmatrix}. \tag{3.22}$$

O sistema de equações (3.21) é não linear, pois alguns coeficientes dependem de β_b e $\dot{\beta}_b$, os quais são obtidos por integrações de $\ddot{\beta}_b$. Aplica-se o método de Newton-Raphson (Bonet e Wood, 1997) para a solução de (3.22). Deve-se então resolver iterativamente o seguinte sistema de equações

$$[A]_{(n)} \{\Delta\zeta\}_{(n+1)} = \{\phi\}_{(n)}, \tag{3.23}$$

sendo n o número da iteração e

$$[A]_{(n)} = \begin{bmatrix} -m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 & 0 & -m_2\cos\lambda & m_2\sin\lambda & 0 & m_2L^*a & 0 & 0 & 0 & m_2L^*a \\ 0 & -m_2 & -m_2\sin\lambda & -m_2\cos\lambda & 0 & -m_2L^*b & 0 & 0 & 0 & -m_2L^*b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ m_2L^*a & m_2L^*b & m_2L^*p & m_2L^*q & 0 & I_{zz_2} & 0 & 0 & 0 & I_{zz_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_1r^*\sin\lambda & m_1r^*\cos\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0-1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \cos\lambda & -\sin\lambda & -1 & -L(2a+\beta_b b) & 0 & 0 & -1 & -L(a+\beta_b b) \\ 0 & 1 & \sin\lambda & \cos\lambda & 0 & L(\beta_b a-2b) & 0 & 0 & 0 & L(\beta_b a-b) \end{bmatrix},$$

$$\{\Delta\zeta\}_{(n+1)} = \begin{Bmatrix} \Delta\ddot{x}_m & \Delta\ddot{y}_m & \Delta\ddot{x}_b & \Delta\ddot{y}_b & \Delta\ddot{x}_p & \Delta\ddot{\beta}_b & \Delta N & \Delta M_{1z} & \Delta\ddot{r}_{OB} & \Delta\ddot{\beta} \end{Bmatrix}^T,$$

e $\{\phi\}_{(n)}$ o vetor resíduo. Observa-se que a matriz Jacobiana, ou tangente, é igual a matriz original $[A]$ do sistema de equações em (3.22), pois não há dependência explicita dos coeficientes em relação às incógnitas expressas em termos das acelerações.

3.4 Velocidades Superficial e de Esmagamento do Filme de Óleo

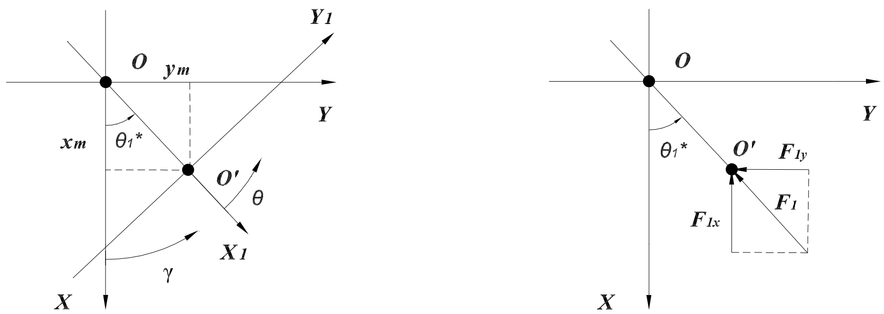
Para resolver a equação de Reynolds (2.14) é necessário saber a velocidade relativa de esmagamento do filme lubrificante ($\frac{dh}{dt}$), decorrente do movimento relativo de aproximação das duas superfícies, e a velocidade de deslizamento relativo entre as duas superfícies, gerando o efeito de cisalhamento do filme (U).

Para o mancal principal, os termos $\dfrac{dh_1}{dt}(\dot{x}_m,\ \dot{y}_m)$ e U_1 são dados por

$$U_1 = r_{J1}\ \dot{\lambda},$$

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{d}{dt}\ (h_{01}\ -\ |\boldsymbol{\varepsilon_1}|\cos\theta),$$

sendo r$_{J1}$ o raio do eixo maior do virabrequim e h_{01} a espessura inicial do filme de óleo. A posição de equilíbrio do rotor é definida pela excentricidade ${}_I\boldsymbol{\varepsilon_1} = {}_I\mathbf{dm} = \left\{\begin{array}{ccc} x_m & y_m & 0 \end{array}\right\}^T$ com $|\boldsymbol{\varepsilon_1}| = \sqrt{{x_m}^2 + {y_m}^2}$ e pelo ângulo de atitude $\theta_1^* = \sin^{-1}\left(\dfrac{y_m}{\sqrt{y_m^2 + x_m^2}}\right)$, com θ a coordenada angular auxiliar com origem no eixo $X1$ conforme ilustrado na Figura 3.5(a), e, reforçando-se mais uma vez que $\theta = \gamma - \theta_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$.



(a) Ângulos θ e θ_1^*. (b) Componentes de força.

Figura 3.5: Equilíbrio estático do conjunto rotor-mancal do mancal principal.

Assim, obtém-se que

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{1}{|\boldsymbol{\varepsilon_1}|}(x_m\dot{x}_m + y_m\dot{y}_m)\cos\theta.$$

Resolvendo a equação de Reynolds para este caso, tem-se a distribuição de pressão P_1 no mancal principal. Integrando a pressão do filme lubrificante, tem-se a força resultante no mancal.

As componentes de força radial F_{R1} e tangencial F_{T1}, podem ser determinadas através das seguintes integrais

$$\begin{cases} F_{R1} = -2\displaystyle\int_0^{b/2}\int_0^{2\pi} P_1 R\cos\theta\, d\theta\, dz, \\ F_{T1} = 2\displaystyle\int_0^{b/2}\int_0^{2\pi} P_1 R\sin\theta\, d\theta\, dz. \end{cases}$$

Sendo que, a carga resultante do mancal, F_{o1}, é dada por

$$F_{o1} = \sqrt{{F_{R1}}^2 + {F_{T1}}^2}.$$

Vale lembrar que as componentes de forcas radial F_{R1} e tangencial F_{T1} precisam ser transformadas para o sistema cartesiano, ou seja, componentes F_{1x} e F_{1y}, conforme ilustrado na Figura 3.5(b), como feito no Capítulo 2.

A velocidade superficial relativa U_2 entre as duas superfícies do olhal maior da biela é dada por

$$U_2 = r_{J2}\ [\dot{\lambda} + (\dot{\beta} + \dot{\beta}_b)],$$

sendo r_{J2} o raio do eixo menor do virabrequim. A velocidade relativa de esmagamento do filme $\frac{dh_2}{dt}(\dot{x}_b,\ \dot{y}_b)$ é dada através do deslocamento que a biela faz devido às folgas radiais. Assim, conclui-se que

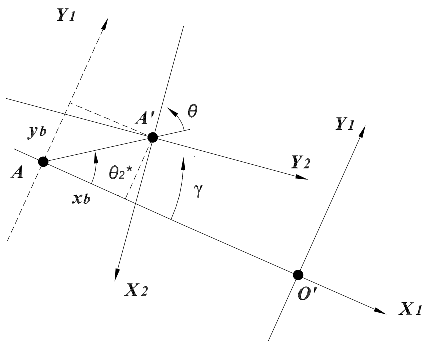
$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{d}{dt}\ (h_{02}\ -\ |\boldsymbol{\varepsilon_2}|\cos\theta),$$

sendo h_{02} a espessura inicial do filme de óleo. A posição de equilíbrio do rotor é definida pela excentricidade ${}_{B1}\boldsymbol{\varepsilon_2} = \begin{Bmatrix} x_b & y_b & 0 \end{Bmatrix}^T$ com $|\boldsymbol{\varepsilon_2}| = \sqrt{{x_b}^2 + {y_b}^2}$ e pelo ângulo de atitude $\theta_2^* = \sin^{-1}\left(\dfrac{y_b}{\sqrt{y_b^2 + x_b^2}}\right)$; θ é a coordenada angular com origem no eixo X_1, como ilustrado na Figura 3.6(a).

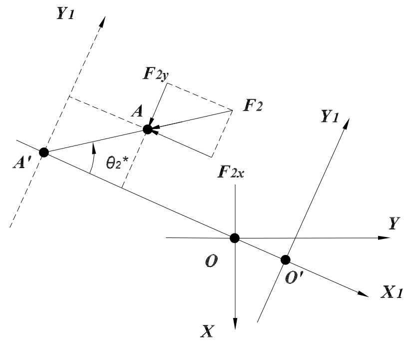
Assim, obtém-se que

$$\frac{dh_2}{dt} = -\frac{1}{|\boldsymbol{\varepsilon_2}|}(x_b\dot{x}_b + y_b\dot{y}_b)\cos\theta.$$

Resolvendo a equação de Reynolds para este caso tem-se a distribuição de pressão P_2 para o olhal maior da biela. Assim, integrando a pressão do filme lubrificante, determina-se a força resultante no mancal.



(a) Ângulos θ e θ_2^*.



(b) Componentes de força.

Figura 3.6: Equilíbrio estático do conjunto rotor-mancal do olhal maior da biela.

As componentes F_{R2} e F_{T2}, podem ser determinadas através das seguintes integrais

$$\begin{cases} F_{R2} = -2\displaystyle\int_0^{b/2}\int_0^{2\pi} P_2 R\cos\theta\, d\theta\, dz \\ F_{T2} = 2\displaystyle\int_0^{b/2}\int_0^{2\pi} P_2 R\sin\theta\, d\theta\, dz. \end{cases}$$

Portanto, a carga resultante do mancal, F_{o2}, é dada por

$$F_{o2} = \sqrt{{F_{R2}}^2 + {F_{T2}}^2}.$$

Transforma-se as forças radial F_{R2} e tangencial F_{T2} para o sistema cartesiano, F_{2x} e F_{2y}, ilustrado na Figura 3.6(b).

A velocidade superficial relativa U_3 entre as duas superfícies do olhal menor da biela é

$$U_3 = r_{J3}\ (\dot{\beta} + \dot{\beta}_b),$$

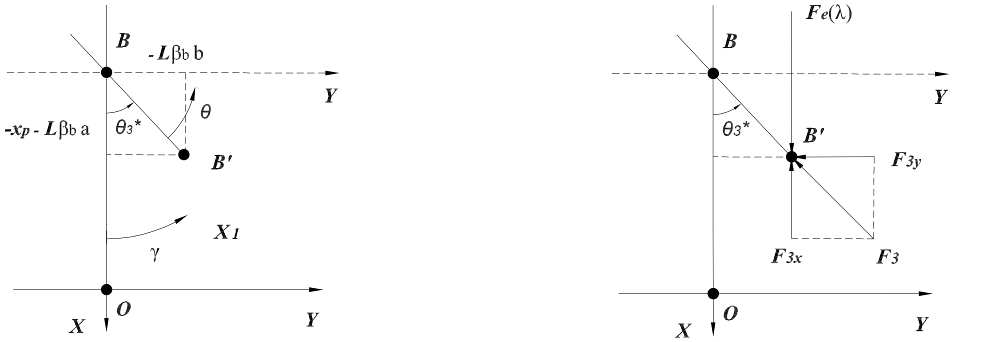
sendo r_{J3} o raio do olhal menor do pistão.

A velocidade relativa de esmagamento do filme $\frac{dh_3}{dt}(\dot{x}_p, L\dot{\beta}_b)$ é a velocidade relativa entre os pontos B e B', dada como a soma da folga radial entre o pino do pistão e o olhal menor da biela e mais o deslocamento angular que a biela faz devido às folgas. Assim, tem-se

$$\frac{dh_3}{dt} = \frac{d}{dt}\ (h_{03}\ -\ |\boldsymbol{\varepsilon_3}|\cos\theta),$$

com h_{03} a espessura inicial do filme de óleo no olhal menor. A posição de equilíbrio do rotor é definida pela excentricidade ${}_I\boldsymbol{\varepsilon_3} = {}_I\mathbf{dp} + {}_I\mathbf{r}_b = \left\{ \begin{array}{ccc} -(x_p + L\beta_b a) & -L\beta_b b & 0 \end{array} \right\}^T$ com $|\boldsymbol{\varepsilon_3}| = \sqrt{(x_p + L\beta_b a)^2 + L\beta_b b^2}$ e pelo ângulo de atitude

$\theta_3^* = \sin^{-1}\left(-\frac{(x_p + L\beta_b a)}{\sqrt{(x_p + L\beta_b a)^2 + (L\beta_b b)^2}}\right)$, sendo θ a coordenada angular com origem no eixo X, como ilustrado na Figura 3.7(a).



(a) Ângulos θ e θ_3^*.

(b) Componentes de força.

Figura 3.7: Equilíbrio estático do conjunto rotor-mancal do olhal maior da biela.

Assim, obtém-se que

$$\frac{dh_3}{dt} = -\frac{1}{|\boldsymbol{\varepsilon_3}|}(u\dot{u} + v\dot{v})\cos\theta,$$

sendo $u = -(x_p + L\beta_b a)$ e $v = -L\beta_b b$, e suas respectivas derivadas $\dot{u} = -\dot{x}_p - L\dot{\beta}_b(\dot{\beta} + \dot{\beta}_b)\cos(\beta + \beta_b)$ e $\dot{v} = L\dot{\beta}_b(\dot{\beta} + \dot{\beta}_b)\sin(\beta + \beta_b)$.

Novamente, a equação de Reynolds é resolvida para este caso e tem-se a distribuição de pressão para o olhal menor da biela. Integrando a pressão P_3 do filme lubrificante, tem-se a distribuição da força aplicada no mancal.

As componentes radial F_{R3} e tangencial F_{T3}, podem ser determinadas através das seguintes integrais

$$\begin{cases} F_{R3} = -2\int_0^{b/2}\int_0^{2\pi} P_3 R\cos\theta\, d\theta\, dz \\ F_{T3} = 2\int_0^{b/2}\int_0^{2\pi} P_3 R\sin\theta\, d\theta\, dz. \end{cases}$$

Portanto, a carga resultante do mancal, F_{o3}, é dada por

$$F_{o3} = \sqrt{{F_{R3}}^2 + {F_{T3}}^2}.$$

Novamente é necessário transformar as forças radial F_{R3} e tangencial F_{T3} para o sistema cartesiano, F_{3x} e F_{3y}, ilustrado na Figura 3.7(b).

Capítulo 4

Resolução do Sistema e Resultados

Um programa computacional foi desenvolvido utilizando o software MatLab. O programa foi implementado baseado no modelo matemático do mancal e na dinâmica do sistema pistão-biela-manivela apresentados nos Capítulos 2 e 3, respectivamente.

4.1 Implementação do Programa Computacional

Desenvolveu-se o programa visando estudar a cinemática e a cinética do sistema pistão-biela-manivela, bem como, o comportamento do sistema na inclusão do mancais hidrodinâmicos.

Basicamente o programa pode ser dividido em três partes. Na primeira parte, define-se se os mancais principal e nos olhais maior e menor da biela são hidrodinâmicos ou rígidos, definem-se as características geométricas dos mancais, biela, pistão e manivela, bem como as propriedades do fluido lubrificante. Ainda na primeira parte, faz-se a leitura da curva de pressão e o cálculo da força de explosão. A característica da malha também é definida para aplicação do MEF para resolução da equação de Reynolds dos mancais.

Na segunda parte são determinadas a distribuição de pressão nos mancais através das excentricidades ε , velocidades de esmagamentos $\dfrac{dh}{dt}$ e superficiais U de cada mancal. Adota-se como condição de contorno a pressão igual a zero nas extremidades do mancal. Uma vez calculada esta distribuição, determina-se a força atuante no mancal através da

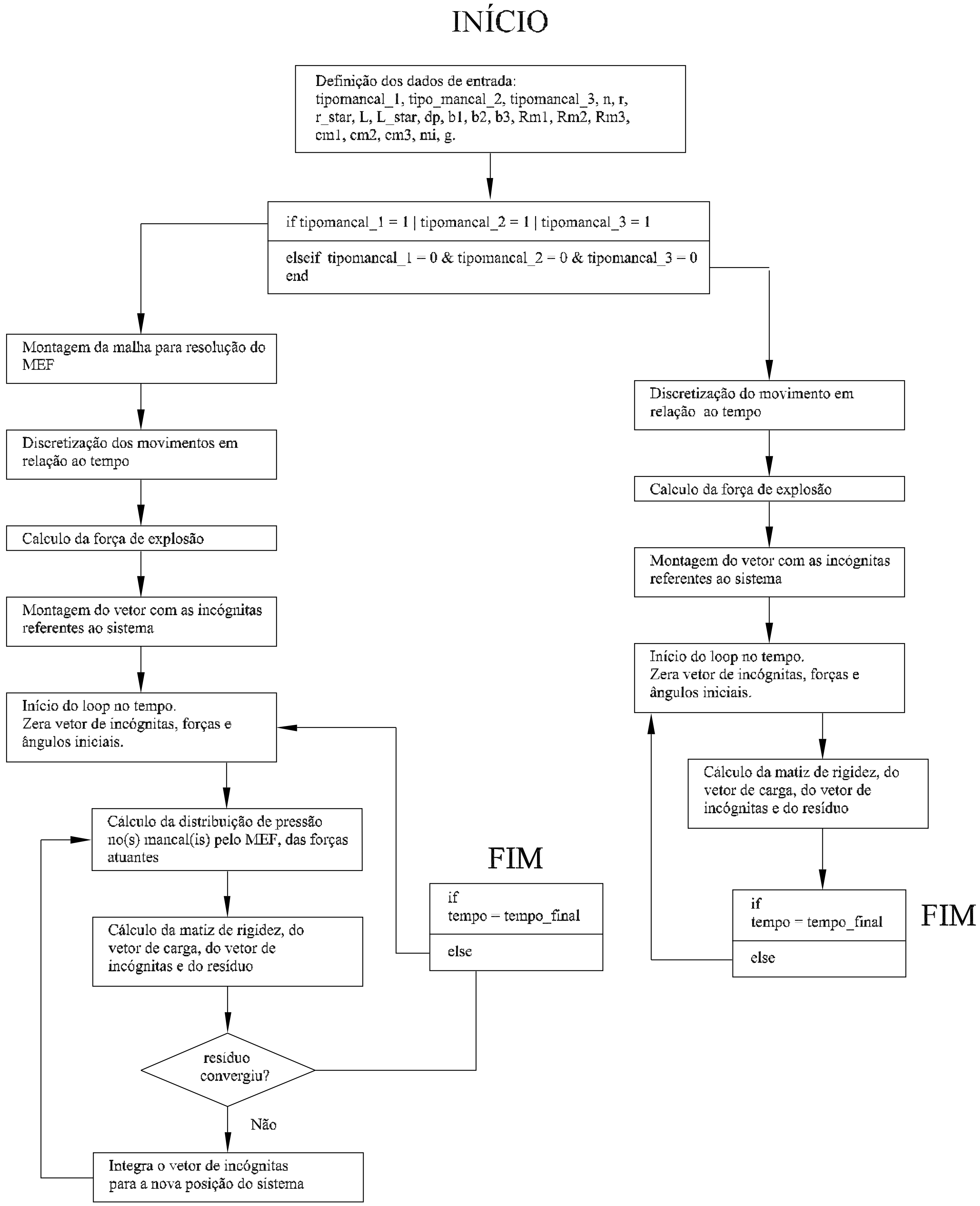


Figura 4.1: Fluxograma do programa.

integração da pressão em relação à área.

Calculadas as forças, o programa passa para a terceira parte na qual são determinadas as características dinâmicas do sistema pistão-biela-manivela, tais como: aceleração das excentricidades do mancal principal $\ddot{\varepsilon}_1$, olhais maior $\ddot{\varepsilon}_2$ e menor da biela $\ddot{\varepsilon}_3$, torque atuante no motor M, força normal N, aceleração do pistão $\ddot{r}_{OB}$ e aceleração angular da biela $\ddot{\beta}$, determinados em um processo iterativo pelo método de Newton-Raphson e integração por Runge-Kutta.

Caso os mancais sejam rígidos, ou seja, não exista lubrificação hidrodinâmica, o sistema determina diretamente, ou seja, com apenas uma iteração, as forças atuantes nos mancais, bem como, as acelerações no pistão e na biela.

4.2 Modelagem Dinâmica Tradicional - Software AVL-Excite

A modelagem tradicional do sistema pistão-biela-manivela baseia-se na equação de vínculo do sistema. O vetor posição do pistão é determinado a partir de uma aproximação por série binomial. Conseqüentemente, pode ser determinada também os vetores de velocidade e aceleração. Após a dedução dos parâmetros cinemáticos, a dinâmica do mecanismo pode ser deduzida.

4.2.1 Cinemática

A posição instantânea do pistão pode ser descrita em função dos ângulos da Figura 4.2 como

$$x = r\,(1 - \cos\lambda) + L\,(1 - \cos\beta)\,. \tag{4.1}$$

Através da equação (4.1), obtém-se a relação entre o ângulo motor e o ângulo movido, e derivando-se a equação uma e duas vezes, obtém-se a velocidade e a aceleração, respectivamente. E ainda, faz-se a aproximação pela série de Fourier (AVL, 2004).

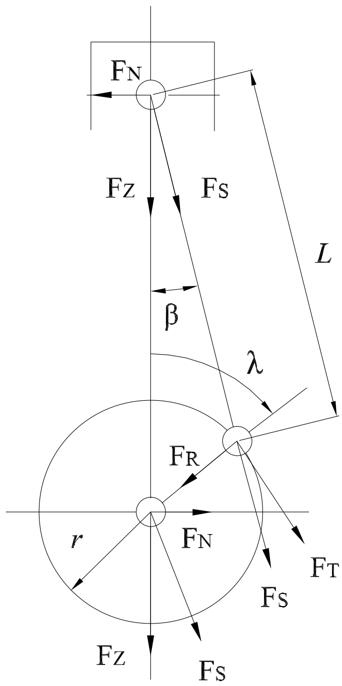


Figura 4.2: Diagrama de forças para a modelagem tradicional (AVL, 2004).

4.2.2 Dinâmica

Para determinar a massa e o centro de gravidade de partes complicadas, nessa abordagem, a força de inércia é decomposta como a soma de uma parcela oscilatória e outra de rotação (AVL, 2004).

A força de inércia de oscilação é dada por

$$F_o = m_o \dot{\lambda}^2 r \left(\cos\lambda + \ddot{x}_p \cos 2\lambda\right),$$

sendo $m_o = (1/3)m_2 + m_3$.

A força resultante no pistão é

$$F_z = F_e(\lambda) - F_o.$$

A força de inércia de rotação é definida como

$$Fr = m_r \dot{\lambda}^2 r,$$

sendo $m_r = (2/3)m_2$.

A força de inércia de compensação no braço de manivela é dada por

$$F_w = 2m_w\dot{\theta}^2 r_w,$$

sendo m_w a massa do web (braço da manivela que liga o eixo maior ao eixo menor) e r_w é o raio de compensação do braço de manivela. Com as duas últimas equações, determina-se a força resultante de inércia de rotação

$$F_{res} = F_r - F_w.$$

A força tangencial atuante no virabrequim é calculada como

$$F_t = F_z \frac{\sin(\lambda + \beta)}{\cos\beta}.$$

A força normal na parede do cilindro é determinada pela seguinte expressão

$$F_N = F_z \tan\beta.$$

A força radial atuante no virabrequim é calculada como

$$F_r = F_z \frac{\cos(\lambda + \beta)}{\cos\beta}.$$

Finalmente, a força resultante na biela é

$$F_s = \frac{F_z}{\cos\beta}.$$

4.3 Resultados

Os resultados numéricos do sistema pistão-biela-manivela são apresentados nesta seção com a finalidade de se discutirem as cargas atuantes nos mancais principal e da biela, tendo como variáveis os parâmetros de projetos, operação e geométricos.

As características geométricas e de operação dos mancais e do sistema pistão-biela-manivela são definidas em função de fatores relacionados com suas aplicações em diferentes tipos de motores.

4.3.1 Momento e Forças Resultantes no Sistema Rígido

Para o caso de pinos nos mancais, apresentam-se as forças e o momento atuante no sistema pistão-biela-manivela, com referência aos dados geométricos apresentados na

Tabela 4.1.

Tabela3 4.1: Parâmetros geométricos e de operação do sistema pistão-biela-manivela para o caso de pinos nos mancais.

Rotação da manivela	$n = 2200$	rpm
Raio entre eixos maior e menor da manivela	$r = 58,74$	mm
Raio entre eixo maior e o centro de massa da manivela	$r* = 0$	mm
Comprimento da biela	L = 175,4	mm
Distância entre o olhal maior (ponto A') e o centro de massa da biela	$L* = 46,02$	mm
Diâmetro do pistão	$d_p = 85,5$	mm
Massa da manivela	$m_1 = 1,9335$	kg
Massa da biela	$m_2 = 1,2700$	kg
Massa do pistão	$m_3 = 1,1900$	kg

Utilizou-se um curva de pressão em função do ângulo da manivela para uma rotação de 2200rpm, como ilustrada na Figura 4.3.

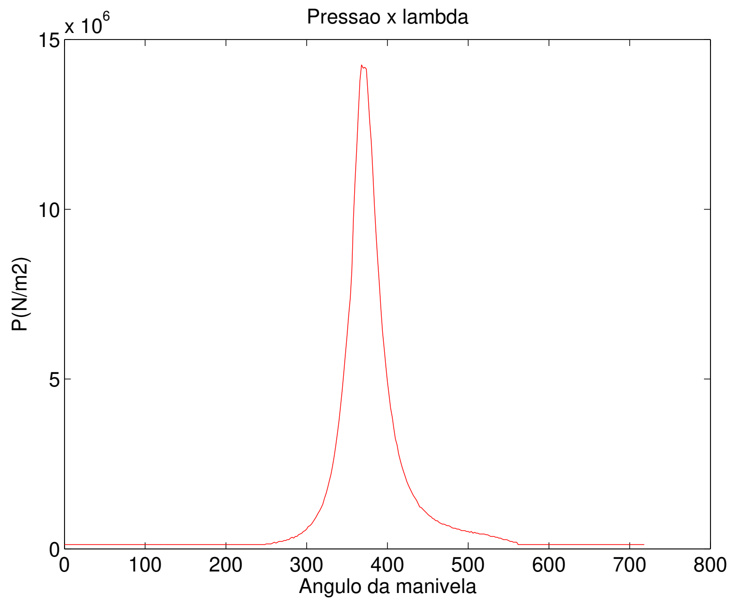
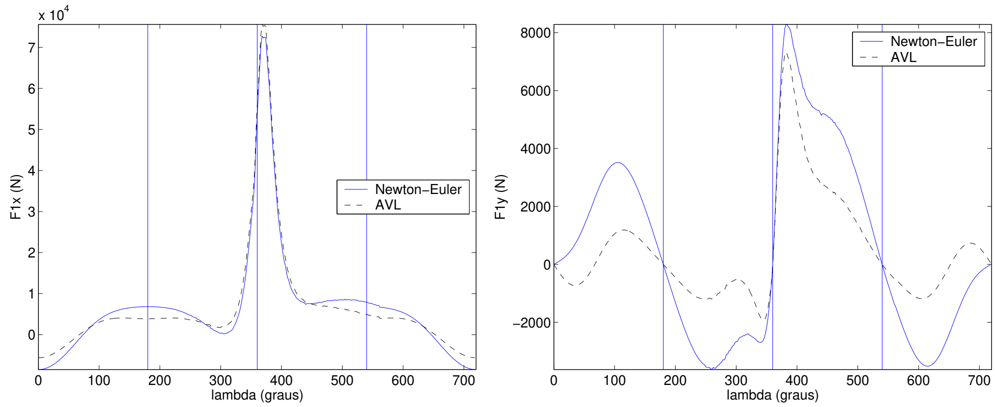


Figura 4.3: Curva de pressão a 2200rpm.

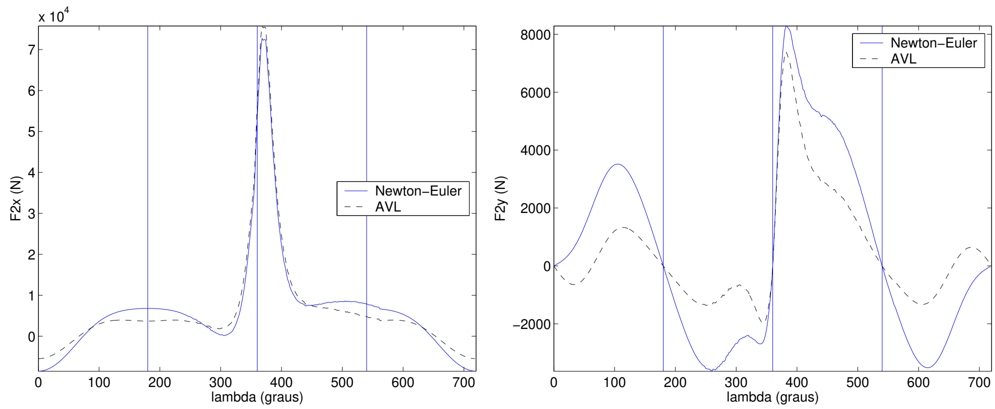
Os resultados são comparados com o software AVL-Excite. Obtiveram-se as forças para as direções X e Y de cada mancal. A Figura 4.4(a) mostra a componente da força nas direções X e Y, podendo ser observado que a força da direção X é maior que força na direção Y, apresentado ainda, uma força de tração devido ao ciclo de admissão do cilindro e uma força maior de compressão que ocorre em três ciclos do motor (compressão, explosão e expulsão dos gases).



(a) Força na direção X. (b) Força na direção Y.

Figura 4.4: Forças resultantes na direção X e Y do mancal principal.

As Figuras 4.5 e 4.6 mostram as componentes das forças nos olhais maior e menor da biela.

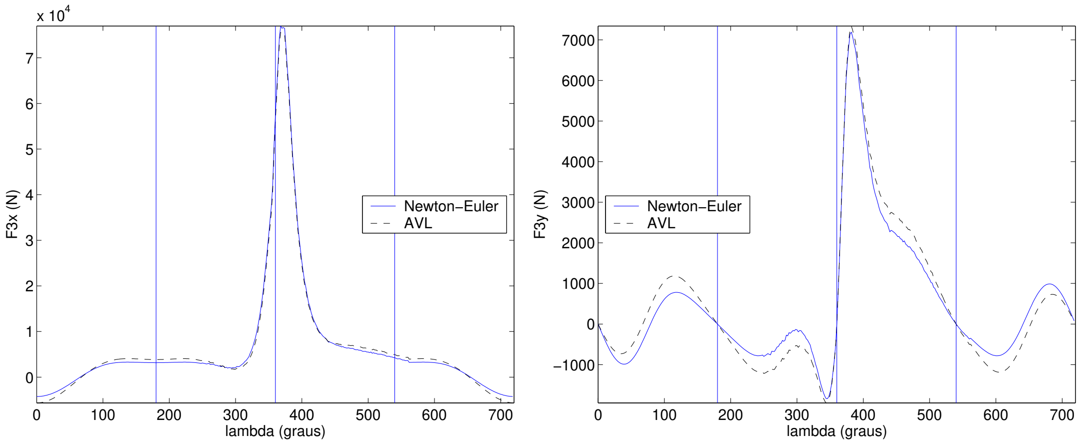


(a) Força na direção X. (b) Força na direção Y.

Figura 4.5: Forças resultantes na direção X e Y do olhal maior da biela.

O momento M_{1z} gerado no ponto O e a força normal na parede do cilindro N são apresentadas nas Figuras 4.7(a) e 4.7 em comparação com o software AVL.

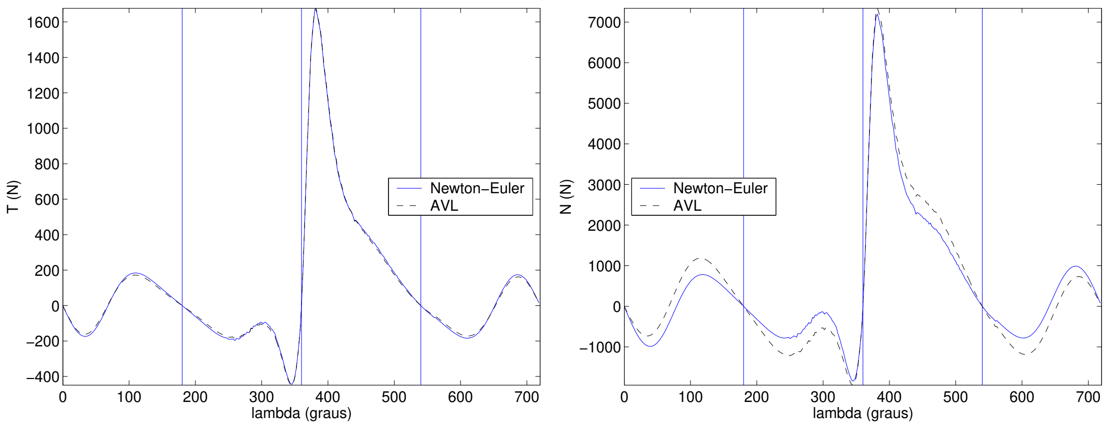
Observa-se que as forças na direção X dos mancais tem seu início na parte negativa do gráfico, isto significa que os componentes do motor estão sendo tracionados devido ao



(a) Força na direção X.

(b) Força na direção Y.

Figura 4.6: Forças resultantes na direção X e Y do olhal maior da biela.



(a) Momento gerado no ponto O.

(b) Força normal ao cilindro, direção Y.

Figura 4.7: Momento e força normal resultante na parede do cilindro.

processo de admissão que ocorre no motor, e um pico de força de compressão devido a força de explosão.

O modelo dinâmico apresentado neste trabalho leva em consideração as forças de inércia real do sistema, não fazendo nenhuma consideração, enquanto que, o software AVL-Excite faz consideração diminuindo as forças de inércia, e conseqüentemente, aumentando a força de pico.

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas Futuras

O modelo do mancal hidrodinâmico radial utilizado foi exatamente o modelo de motores de combustão interna, com uma resolução da equação diferencial pelo método de elementos finitos, onde o método mostrou eficiência nos resultados e precisão com as diferentes condições de contorno.

Os resultados do sistema rígido apresentaram, além da compatibilidade com o software AVL, a coerência dos ciclos de um motor de combustão interna. A parte negativa das forças referem-se ao ciclo de admissão, ou seja, nesse período os componentes estão sofrendo tração. As forças positivas referem-se aos ciclos de compressão, explosão e escape, comprimindo os componentes.

A utilização dos mancais hidrodinâmicos nos mancais principal, olhal maior e olhal menor tem a finalidade de gerar um maior amortecimento do sistema, reduzir o atrito entre os componentes, e conseqüentemente o desgaste, e também o resfriamento devido ao fluxo do fluido lubrificante.

O projeto dos componentes ocorre através de uma modelagem próxima à situação real de trabalho. Para isso a idéia de desenvolver um modelo matemático que descreve o comportamento do sistema com os mancais hidrodinâmicos. Juntamente, a idéia permite calcular as componentes de velocidade do fluido, e assim, calcular a vazão necessária para os mancais e, conseqüentemente, as dimensões dos furos de passagem de óleo do mancal principal para o olhal maior e do olhal maior para o olhal menor.

Infelizmente, a integração temporal empregando métodos baseados em Runge-Kutta para a resolução dos mancais hidrodinâmicos com o sistema dinâmico pistão-biela-manivela não foi concretizada nesse trabalho. Para que isso seja possível, será implementado um procedimento de integração mais robusto, onde é necessário a integração no tempo das acelerações dos eixos, e então, integrar o sistema dinâmico no tempo. A dificuldade foi encontrada na integração dos mancais, ou seja, na convergência da integração no tempo das acelerações dos eixo.

Espera-se que os resultados do sistema com mancais hidrodinâmicos tenham o mesmo comportamento do sistema rígido. O modelo ainda facilita o emprego do modelo de análise de vibração torcional na manivela, e implementos sem hipóteses para que os resultados se aproximem dos dados experimentais.

A modelagem do sistema pistão-biela-manivela apresentada para um cilindro permite a inclusão de mais cilindros, que será apresentada em trabalhos futuros com o intuito de comparar com um motor de compressor instrumentado, e ainda, incluir o modelo de análise de vibração torcional.

Referências Bibliográficas

Avl excite designer, theory, 2004.

Bonet, J., Wood, R. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analisys*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Bonneau, D., Grente, C. , Garnier, T. Three-dimensional ehd behavior of the engine block/cranckshaft assembley for a four cylinder inline automotive engine. *ASME Journal of Tribology*, v. 121p.721–730, 1999.

Bonneau, D., Guines, D., Frene, J. , Toplosky, J. Ehd analysis, including structural inertia effects and a mass-conserving cavitation model. *Transaction of the ASME*, v. 117p.540–547, 1995.

Booker, J., Huebner, K. Application of the finite element method to lubrication: An engineering approach. *ASME Journal of Lubrication Technology*, v. 94, n.4, p.313–323, 1972.

Booker, J., LaBouff, G. Dynamically loaded journal bearings: A finite element treatment for rigid and elastic surfaces. *ASME Journal of Tribology*, v. 107p.505–515, 1985.

Childs, N. *Turbomachinary Rotordynamics Fenomena, Modeling and Analysis*. John Wiley & Sons, 1993.

Cho, M.-R., Han, D.-C. , Choi, J.-K. Oil film thickness in engine connecting-rod bearing with consideration of thermal effects: Comparison between theory and experiment. *ASME Journal of Tribology*, v. 121p.901–907, 1999.

Goenka, P. Dynamically loaded journal bearings: Finite element method analysis. *ASME Journal of Tribology*, v. 106, n.4, p.429–439, 1984.

Hagg, A., Sankey, G. Some dynamic properties of oil-film journal bearing with reference to the unbalance vibration of rotors. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 78p.302–306, 1956.

Hamrock, B. J., Schmid, S. R. , Jacobson, B. O. *Fundamentals of Fluid Film Lubrication - Second Edition*. Marcel Dekker, Inc., 2004.

Hays, D. A variational approach to lubrication problems and the solution of the finite journal bearing. *ASME Journal of Basic Engineering*, 1959.

Kim, B.-J., Kim, K.-W. Thermo-elastohydrodynamic analysis of connecting rod bearing in internal combustion engines. *Transactions of the ASME*, v. 123p.444–450, 2001.

Kumar, A., Booker, J. A finite element cavitation algorithm. *Transaction of the ASME*, v. 113p.276–286, 1991.

Ma, Z.-D., Perkins, N. A first principle engine model for up-front design: Further studies on hydrodynamic bearing models. *Proceedings of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, New Orleans, Louisiana*, 2002.

Ma, Z.-D., Perkins, N. C. An efficient multibody dynamicas model for internal combustion engine systems. *Multibody System Dynamics, Kluwer Academic Publishers*, 2003.

Makino, T., Koga, T. Crank bearing design based on 3-d elasto-hydrodynamioc lubrication theory. *Mitsubishi Heavy Industries Ltd., Technical Review*, v. 39, 2002.

Mclvor, J., Fenner, D. Finite element analysis of dinamically loaded flexible jounal bearings: A fast newton-raphson method. *ASME Journal of Tribology*, v. 111p.597–603, 1989.

Mendes, A. S., Raminelli, L. F. , Gomez, M. P. Structural dimensioning of a crankshaft for a high power diesel engine. *Society of Automotive Engineers, Inc*, 2003.

Mourelatos, Z. Crankshaft system model for structural dynamic analysis of internal combustion engines. *Computers & Structures*, v. 79p.2009–2027, 2001.

Oh, K. The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementary problem. *ASME Journal of Lubrication Technology*, v. 106p.88–95, 1984.

Oh, K., Goenka, P. The elastohydrodynamic solution of a journal bearing under dynamic loading. *ASME Journal of Tribology*, v. 107, n.3, p.389–395, 1985.

Oh, K., Goenka, P. An optimum short bearing theory for the elastohydrodynamic solution of journal bearing. *ASME Journal of Tribology*, v. 108p.294–299, 1986.

Oh, K., Huebner, K. Solution of the elastohydrodynamic finite journal bearing problem. *ASME Journal of Lubrication Technology*, v. 95, n.3, p.342–352, 1973.

Pinkus, O. The reynolds centennial: A brief history of the theory of hydrodynamic lubrications. *Transaction of the ASME*, v. 109p.02–20, 1987.

Reddi, M. Finite element solution of the imcompressible lubrication problem. *ASME Journal of Lubrication Technology*, v. 91, n.3, p.524–533, 1969.

Reddi, M., Chu, T. Finite element solution of the steady-state compressible lubrication problem. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 1970.

Rohde, S., Whicker, D. , Booker, J. Elastohydrodynamic squeeze film: Effects of viscoelaticity and fluctuating load. *ASME Journal of Lubrication Technology*, v. 101p.74–80, 1979.

Rohde, S., Whicker, D. , Browne, A. Dynamic analysis of elastohydrodynamic squeeze film. *ASME Journal of Lubrication Technology*, v. 98, n.3, p.401–408, 1976.

Russo, F. H. *Identificação das Propriedades Dinâmicas de Mancais Sementados Híbridos - Teoria e Experimento*. DPM/FEM/UNICAMP, 1999., Tese (Doutorado), Campinas.

Santos, I. F. *Dinâmica de Sistemas Mecânicos - Modelagem - Simulação - Visualização - Verificação*. Makron, São Paulo, 2001.

Sato, K., Makino, K. , Mochila, K. A study of oil film pressure distribution on connecting rods big ends. *Society of Automotive Engineers, Inc.*, v. 296p.01–07, 2002.

Someya, T. *Journal-Bearing Databook*. Springer-Verlag Berlin, Heidelgerg, 1988.

Stefani, F., Rebora, A. Finite element analysis of dinamically loaded journal bearings: Influence of the bolt preload. *Transaction of the ASME*, v. 124, 2002.

Sternlicht, B. Elastic and damping properties of cylindrical journal bearings. *ASME Journal of Basic Engineering*, v. 81p.101–108, 1959.

Stodola, A. Kritische wellenstörung infolge der nachgiebigkeit desöelpolser im larger (critical shaft perturbations as a result of the elasticity of the oil cushion in the bearing). *Scheweizerische Bauzeitung*, v. 85, 1925.

Tao, L. On the variational principle and lagrange equation in studies of gas dynamic lubrication. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 86p.43, 1964.

Taylor, C., O'Callaghan, J. A numerical solution of the elastohydrodynamic lubrication problem using finite elements. *Journal Mechanical Engineering Science*, v. 14, n.4, p.229–237, 1972.

Ushijima, K., Arai, T., Goto, T. , Aoyama, S. A study of engine bearing performance using ehl analysis and experimental analysis. *Societof Automotive Enginneers of Japan*, v. 18, 1997.

Wang, D., Keith, T. G., Yang, Q. , Vaidyanathan, K. Lubrication analysis of a connecting-rod bearing in a high-speed engine. part ii: Lubrication performance evaluations for non-circular bearings. *Tribology Transactions*, v. 47, n.3, p.290–98, 2004.

Watanabe, F. Y. *Lubrificação Ativa Aplicada a Mancais Híbridos Radiais*. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003., Tese (Doutorado).

Wendt, J. *Computational Fluid Dynamics: An introduction*. Springer & Verlag, 1992.

Zienkiewicz, O., de S.R. Gago, J. , Kelly, D. The hierarchical concept in the finite element analysis. *Computers and Structures*, v. 16p.53–65, 1983.