

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Estudo Comparativo entre Elementos
Finitos Isoparamétricos das Famílias
Serendipity e Lagrangeana para Análise
Estática de Placas e Cascas**

Autor: **Marcelo de Almeida Pierossi**
Orientador: **Loir Afonso Moreira**

53/95

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Marcelo de Almeida
Pierossi E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 31/07/96.

Loir Afonso Moreira
ORIENTADOR

P613e

28773/BC

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

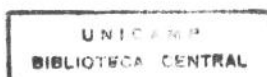
**Estudo Comparativo entre Elementos
Finitos Isoparamétricos das Famílias
Serendipity e Lagrangeana para Análise
Estática de Placas e Cascas**

Autor: **Marcelo de Almeida Pierossi**
Orientador: **Loir Afonso Moreira**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1995
S.P. - Brasil



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
	T/UNICAMP
	P613E
V.	Ex.
TOMBO BC	28773
PROC.	667/96
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	11/20/96
N.º CPD	

CM-0009280 9-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P613e Pierossi, Marcelo de Almeida
Estudo comparativo entre elementos finitos isoparamétricos das famílias Serendipity e Lagrangeana para análise estática de placas e cascas / Marcelo de Almeida Pierossi.--Campinas, SP: [s.n.], 1995.

Orientador: Loir Afonso Moreira.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Cascas (engenharia). 3. Placas (engenharia). I. Moreira, Loir Afonso. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

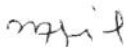
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

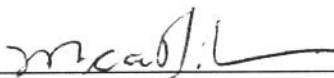
**Estudo Comparativo entre Elementos Finitos
Isoparamétricos das Famílias Serendipity e
Lagrangeana para Análise Estática de
Placas e Cascas.**

Autor: **Marcelo de Almeida Pierossi**

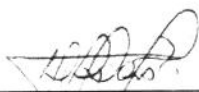
Orientador: **Loir Afonso Moreira**



Prof. Dr. Loir Afonso Moreira
Instituição UNICAMP



Profª Drª Maria Cecília Amorim Teixeira da Silva
Instituição UNICAMP



Prof. Dr. Milton Dias Júnior
Instituição UNICAMP

Campinas, 31 de Julho de 1995

*Aos meus pais, Jurandyr e Joanna,
pelo total apoio e incentivo*

*À Leila,
por toda a sua compreensão e carinho*

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Loir Afonso Moreira, pelo incentivo, paciência e apoio demonstrado durante a execução deste trabalho e principalmente pela sua compreensão na fase final do trabalho;

Aos amigos Waldemar Scudeller Jr. e Amarildo Tabone Paschoalini pela ajuda na elaboração do programa computacional;

Aos amigos Rui Casão Jr., Acires Dias, Luis Antônio Galli, Eduardo Suavinho Ferro, Marco Lúcio Bittencourt, Roberto Funes Abrahão, José Teodoro Jr., Maurício Pires Martins e Marcos Lves dos Reis pelo auxílio prestado durante o cotidiano do trabalho;

A todos os colegas do Departamento de Projeto Mecânico, que de uma forma ou de outra colaboraram na execução deste trabalho.

Conteúdo

1 - INTRODUÇÃO.....	1
2 - DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA DO ELEMENTO.....	5
2.1 - Introdução.....	5
2.2 - Definição da geometria do elemento de casca.....	6
2.2.1 - Determinação do vetor \vec{r}	6
2.2.2 - Determinação do vetor \vec{m}	8
2.2.3 - Determinação do vetor \vec{R}	12
3 - CAMPO DE DESLOCAMENTO.....	14
3.1 - Introdução.....	14
3.2 - Determinação do campo de deslocamento do elemento de casca.....	17
4 - ESTADO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA.....	24
4.1 - Introdução.....	24
4.2 - Estado de deformação específica com relação ao sistema de referência local (x',y',z').....	28
5 - FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO DE CASCA.....	38
5.1 - Introdução.....	38
5.2 - Formulação das características do elemento de casca.....	41
5.3 - Determinação da matriz de rigidez do elemento de casca.....	45
5.3.1 - Determinação da submatriz $[K_{ij}]$	46
5.4 - Determinação do vetor de carga do elemento de casca $\{f^e\}$	58
5.4.1 - Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento : $\{fq^e\}$	58
5.4.1.1 - Determinação da submatriz $\{fq_i\}$	60
5.4.2 - Determinação do vetor de carga correspondente à ação das forças de corpo : $\{fb^e\}$	62
5.4.2.1 - Determinação da submatriz $\{fb_i\}$	62
6 - FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA.....	64
6.1 - Introdução.....	64

6.2 - Determinação da matriz de rigidez global e do vetor de carga global.....	65
6.3 - Armazenamento "Skyline" da matriz de rigidez global.....	67
6.4 - Resolução do sistema de equações.....	69
6.4.1 - Decomposição $[L][D][L]^T$ da matriz de rigidez global.....	69
6.4.2 - Substituição reversa.....	71
6.5 - Programa computacional.....	72
7 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	74
7.1 - Introdução.....	74
7.2. - Placa quadrada.....	74
7.2.1 - Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados :.....	75
7.2.1.1 - Submetida a uma carga uniformemente distribuída perpendicular ao seu plano.....	75
7.2.1.2 - Submetida a uma carga concentrada central, perpendicular ao seu plano.....	77
7.2.1.3 - Submetida a uma carga distribuída senoidal, perpendicular ao seu plano.....	80
7.2.2 - Placa quadrada engastada em seus lados.....	82
7.2.2.1 - Submetida a uma carga uniformemente distribuída perpendicular ao seu plano.....	82
7.2.2.2 - Submetida a uma carga concentrada central, perpendicular ao seu plano.....	84
7.2.3 - Placa quadrada simplesmente apoiada nos cantos.....	86
7.2.3.1 - Submetida a uma carga uniformemente distribuída perpendicular ao seu plano.....	86
7.3 - Placa retangular.....	88
7.3.1 - Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados.....	88
7.3.1.1 - Submetida a uma carga uniformemente distribuída perpendicular ao seu plano.....	88
7.3.1.2 - Submetida a uma carga concentrada central, perpendicular ao seu plano.....	91
7.3.1.3 - Submetida a uma carga distribuída senoidal, perpendicular ao seu plano.....	93
7.3.2 - Placa retangular engastada em seus lados.....	95
7.3.2.1 - Submetida a uma carga uniformemente distribuída perpendicular ao seu plano.....	95
7.3.2.2 - Submetida a uma carga concentrada central, perpendicular ao seu plano.....	97
7.4 - Casca Cilíndrica.....	99
7.5 - Viga Reta.....	104
8 - CONCLUSÕES.....	108
BIBLIOGRAFIA.....	109
A - FUNÇÕES DE FORMA.....	112
A.1 - Introdução.....	112

A.2 - Funções de forma da família Serendipity	112
A.3 - Derivadas das funções de forma da família Serendipity	116
A.4 - Funções de forma da família Lagrangeana	117
A.5 - Derivadas das funções de forma da família Lagrangeana	121
B - ELEMENTOS DAS MATRIZES $[A(\xi, \eta)]$, $[d(\xi, \eta)]$ e $[B_i(\xi, \eta)]$	123
B.1 - Elementos da matriz $[A(\xi, \eta)]$	123
B.2 - Elementos da matriz $[d(\xi, \eta)]$	124
B.3 - Elementos da matriz $[B_i(\xi, \eta)]$	125

Lista de Figuras

1.1- (a) Elemento sólido tridimensional; (b) elemento de casca obtido a partir da degeneração elemento sólido tridimensional	2
1.2 - Elemento de casca, quadrilátero, quadrático, da Família Lagrangeana.....	3
1.3 - Elemento de casca, quadrilátero, quadrático, da Família Serendipity.....	4
2.1 - Elemento de casca, sua superfície média e os nós i associados a ela: (a) elemento da Família Serendipity, (b) elemento da Família Lagrangeana.....	5
2.2 - Vetor $\bar{\mathbf{R}}$, que define a posição de qualquer ponto Q do elemento de casca.....	6
2.3 - Vetor $\bar{\mathbf{r}}_3$, normal à superfície média e vetores $\bar{\mathbf{r}}_1$ e $\bar{\mathbf{r}}_2$, tangentes a ela.....	8
2.4 - Versor $\bar{\mathbf{v}}_3$, normal à superfície média no ponto \mathbf{O} e versor $\bar{\mathbf{v}}_{3i}$, normal a esta superfície no nó i	10
2.5 - Espessura t_i da casca no nó i e os vetores $\bar{\mathbf{m}}_i$ e $\bar{\mathbf{m}}$, que definem, respectivamente, os pontos \mathbf{P} e \mathbf{Q} , fora da superfície média.....	11
2.6 - <i>Mapeamento</i> tridimensional do elemento de casca da família Lagrangeana, do <i>espaço local</i> para o <i>espaço cartesiano</i>	
3.1 - Sistema, local, de referência (x', y', z') , associado ao ponto \mathbf{O} e versor $\bar{\mathbf{i}}$, associado à direção \mathbf{X} do sistema de referência global.....	14
3.2 - Sistema, local, de referência (x', y', z') , associado ao nó i	17
3.3 - Deslocamento $\bar{\delta}_i$, apresentado pelo nó i	18
3.4 - Deslocamento $\bar{\Delta}_i$, apresentado pelo ponto \mathbf{P}	19
3.5 - Termos da expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma da Família Serendipity.....	21
3.6 - Termos da expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma da Família Lagrangeana.....	21
4.1 - Ponto \mathbf{Q} , genérico, do elemento de casca.....	25
4.2 - Sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto \mathbf{O}	28
5.1 - Estado de tensão no ponto \mathbf{Q} , segundo o sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto \mathbf{O}	38
6.1 - Esquema de armazenamento "Skyline".....	68
6.2 - Fluxograma do programa computacional.....	73

7.1 - Malha de discretização de 2x2 elementos de um quarto de placa quadrada	75
7.2 - Malha de discretização de 3x3 elementos de um quarto de placa quadrada	75
7.3 - Malha de discretização de 2x2 elementos de um quarto de placa retangular	88
7.4 - Malha de discretização de 3x3 elementos de um quarto de placa retangular	88
7.5 - Casca cilíndrica submetida à ação do seu peso próprio	99
7.6 - Malha de discretização usada na viga reta	104
7.7 - Carregamentos atuantes na viga reta	105
8.1 - Expansão polinomial correspondente ao refinamento hierárquico	108
A.1 - Função de Forma $N_1(\xi, \eta)$, associada ao nó 1 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity	113
A.2 - Função de Forma $N_2(\xi, \eta)$, associada ao nó 2 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity	113
A.3 - Função de Forma $N_3(\xi, \eta)$, associada ao nó 3 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity	113
A.4 - Função de Forma $N_4(\xi, \eta)$, associada ao nó 4 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity	114
A.5 - Função de Forma $N_5(\xi, \eta)$, associada ao nó 5 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity	114
A.6 - Função de Forma $N_6(\xi, \eta)$, associada ao nó 6 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity	115
A.7 - Função de Forma $N_7(\xi, \eta)$, associada ao nó 7 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity	115
A.8 - Função de Forma $N_8(\xi, \eta)$, associada ao nó 8 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity	115
A.9 - Função de Forma $N_1(\xi, \eta)$, associada ao nó 1 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana	118
A.10-Função de Forma $N_2(\xi, \eta)$, associada ao nó 2 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana	118
A.11-Função de Forma $N_3(\xi, \eta)$, associada ao nó 3 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana	118
A.12-Função de Forma $N_4(\xi, \eta)$, associada ao nó 4 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana	119
A.13-Função de Forma $N_5(\xi, \eta)$, associada ao nó 5 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana	119
A.14-Função de Forma $N_6(\xi, \eta)$, associada ao nó 6 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana	119
A.15-Função de Forma $N_7(\xi, \eta)$, associada ao nó 7 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana	120

A.16-Função de Forma $N_8(\xi, \eta)$, associada ao nó 8 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana.....	120
A.17-Função de Forma $N_9(\xi, \eta)$, associada ao nó 9 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana	120

Lista de Gráficos

7.1 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga uniformemente distribuída)	77
7.2 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	77
7.3 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga concentrada central).....	79
7.4 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga concentrada central).....	79
7.5 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga distribuída senoidal).....	81
7.6 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga distribuída senoidal).....	81
7.7 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa quadrada engastada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	83
7.8 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa quadrada engastada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	83
7.9 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa quadrada engastada, submetida a uma carga concentrada central).....	85
7.10 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa quadrada engastada, submetida a uma carga concentrada central).....	85
7.11 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa quadrada simplesmente apoiada nos cantos, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	87
7.12 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa quadrada simplesmente apoiada nos cantos, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	87

7.13 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa retangular simplesmente apoiada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	90
7.14 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa retangular simplesmente apoiada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	90
7.15 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa retangular simplesmente apoiada, submetida a uma carga concentrada central).....	92
7.16 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa retangular simplesmente apoiada, submetida a uma carga concentrada central).....	92
7.17 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa retangular simplesmente apoiada, submetida a uma carga distribuída senoidal).....	94
7.18 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa retangular simplesmente apoiada, submetida a uma carga distribuída senoidal).....	94
7.19 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa retangular engastada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	96
7.20 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa retangular engastada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	96
7.21 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa retangular engastada, submetida a uma carga concentrada central).....	98
7.22 - Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa retangular engastada, submetida a uma carga concentrada central).....	98
7.23 - Valores dos erros da deflexão v_1 para várias malhas de discretização, considerando-se o caso de malha regular (casca cilíndrica sujeita à ação do seu peso próprio).....	102
7.24 - Valores dos erros da deflexão v_1 para várias malhas de discretização, considerando-se o caso de malha distorcida (casca cilíndrica sujeita à ação do seu peso próprio).....	102
7.25 - Valores dos erros da deflexão w_2 para várias malhas de discretização, considerando-se o caso de malha regular (casca cilíndrica sujeita à ação do seu peso próprio).....	103
7.26 - Valores dos erros da deflexão w_2 para várias malhas de discretização, considerando-se o caso de malha distorcida (casca cilíndrica sujeita à ação do seu peso próprio).....	103
7.27 - Valores dos erros da deflexão w_3 para várias malhas de discretização, considerando-se o caso de malha regular (casca cilíndrica sujeita à ação do seu peso próprio).....	103
7.28 - Valores dos erros da deflexão w_3 para várias malhas de discretização, considerando-se o caso de malha distorcida (casca cilíndrica sujeita à ação do seu peso próprio).....	104
7.29 - Valores dos erros do deslocamento dos nós carregados, na direção do carregamento, para malha de discretização regular.....	106

7.30 - Valores dos erros do deslocamento dos nós carregados, na direção do carregamento, para malha de discretização trapezoidal.....	107
7.31 - Valores dos erros do deslocamento dos nós carregados, na direção do carregamento, para malha de discretização paralelogramo.....	107

Lista de Tabelas

7.1 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha regular (2×2 elementos).	76
7.2 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (2×2 elementos).	76
7.3 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha regular (3×3 elementos).	78
7.4 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3×3 elementos).	78
7.5 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha regular (2×2 elementos).	80
7.6 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (2×2 elementos).	80
7.7 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha regular (3×3 elementos).	82
7.8 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3×3 elementos).	82
7.9 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha regular (3×3 elementos).	84
7.10 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3×3 elementos)	84
7.11 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha regular (3×3 elementos).	86
7.12 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3×3 elementos).	86
7.13 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior, a , da placa, considerando-se o caso de malha regular (2×2 elementos).	89
7.14 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior, a , da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (2×2 elementos).	89
7.15 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior da placa, considerando-se o caso de malha regular (3×3 elementos).	91
7.16 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3×3 elementos).	91

7.17 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior, a , da placa, considerando-se o caso de malha regular (2×2 elementos).....	93
7.18 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior, a , da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (2×2 elementos).....	93
7.19 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior, a , da placa, considerando-se o caso de malha regular (3×3 elementos).....	95
7.20 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior, a , da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3×3 elementos).....	95
7.21 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior da placa, considerando-se o caso de malha regular (3×3 elementos).....	97
7.22 - Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3×3 elementos).....	97
7.23 - Deflexões v_1 , w_2 e w_3 , para diferentes malhas de discretização, considerando-se o caso de malha regular.....	100
7.24 - Deflexões v_1 , w_2 e w_3 , para diferentes malhas de discretização, considerando-se o caso de malha distorcida.....	101
7.25 - Erros do deslocamento dos nós carregados, na direção do carregamento, para malha de discretização regular.....	105
7.26 - Erro do deslocamento dos nós carregados, na direção do carregamento, para malha de discretização trapezoidal.....	106
7.27 - Erro dos deslocamentos dos nós carregados, na direção do carregamento, para malha de discretização paralelogramo.....	106

Estudo Comparativo entre Elementos Finitos Isoparamétricos das Famílias Serendipity e Lagrangeana para Análise Estática de Placas e Cascas.

RESUMO

Em 1970, *Ahmad* apresentou uma formulação, para a análise de placas e cascas, baseada na degeneração de um elemento sólido tridimensional, através da redução de sua dimensão na direção da espessura. O campo de deslocamento era, então, interpolado a partir das funções de forma da família Serendipity e, para a obtenção das características do elemento, utilizava-se *integração numérica consistente*. Os resultados obtidos por este elemento foram excelentes para situações de placas e cascas moderadamente grossas, atendendo, portanto, à teoria de *Reissner*. Contudo, com a redução da espessura, o elemento tornava-se excessivamente rígido e os resultados não tendiam, como era de se esperar, àqueles da teoria clássica de *Kirchhoff* para placas e cascas finas. O objetivo deste trabalho é o estudo comparativo, na análise estática de placas e cascas, entre o desempenho, utilizando-se *integração numérica consistente*, do elemento finito isoparamétrico, quadrilateral, quadrático, da família Serendipity e do elemento isoparamétrico, quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana, obtidos, ambos, a partir da formulação de *Ahmad*; pretende-se estabelecer, dentre os dois elementos, qual é o mais adequado para iniciar o desenvolvimento de um *elemento finito subparamétrico do tipo hierárquico*, baseado no conceito da aproximação p , visando retirar a característica de rigidez excessiva do elemento de *Ahmad*, para as situações de placas e cascas finas.

Comparative Study of Isoparametric Finite Elements of the Serendipity and Lagrangean Families in the Static Analysis of Plates and Shells.

ABSTRACT

In 1970, *Ahmad* presented a formulation for the analysis of plates and shells, based on the degeneration of a three-dimensional solid element, by reducing its dimension in the thickness direction. The displacement field was then interpolated through the shape functions of Serendipity family and, in order to achieve the element characteristics, *consistent numerical integration* was used. The results were excellent for moderately thick plates and shells applications, in accordance with the *Reissner's* theory; however, with the reduction of the thickness, the element became excessively rigid and the results did not tend to those of the *Kirchhoff's* theory for thin plates and shells. The purpose of this work is the comparative study in the static analysis of plates and shells concerning the performance, considering *consistent numerical integration*, of the isoparametric, quadrilateral, quadratic finite element of Serendipity family and of the isoparametric, quadrilateral, quadratic finite element of Lagrangean family, obtained, both, from the *Ahmad's* formulation. The main purpose is to establish, between both elements, which is the most adequate to start the development of a *subparametric hierarchical element*, based on the *p*-approximation concept, removing the characteristic of excessive rigidity of the *Ahmad's* element for the situations of thin plates and shells.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

As placas e as cascas são componentes estruturais, respectivamente, planos e curvos, que apresentam sua espessura muito menor que suas outras dimensões; encontram grande aplicação na indústria moderna, especialmente, mecânica, naval, aeronáutica, petroquímica, aeroespacial, nuclear e, também, na construção civil. A espessura é medida na direção perpendicular a sua superfície média e, quando comparada às outras dimensões, determina seu comportamento. Assim, pode-se estabelecer a seguinte classificação [1]:

(a) Se a relação entre a espessura, t , e uma dimensão característica, a , de sua superfície média é menor do que $1/20$ ($t/a < 0,05$), tem-se o caso de *placa e casca finas* [2], que se caracterizam por seguir as hipóteses de *Kirchhoff* [3]:

(1a.) Um elemento reto da placa ou casca, normal a sua superfície média, após a deformação, permanece perpendicular àquela superfície e mantém seu comprimento inicial; esta hipótese é equivalente a desconsiderar as tensões de cisalhamento atuantes na direção da espessura, bem como, a deformação específica na direção perpendicular à superfície média.

(2a.) As tensões normais à superfície média são pequenas em comparação com as outras tensões e podem ser desprezadas; esta hipótese é equivalente a desconsiderar a energia de deformação correspondente a estas tensões.

(b) Se a relação entre a espessura, t , e uma dimensão característica, a , da superfície média é maior ou igual a $1/20$ ($t/a \geq 0,05$), as tensões de cisalhamento na direção da espessura tornam-se importantes e não podem mais ser desprezadas. Neste caso, se um elemento reto da placa ou casca é normal a sua superfície média, após a deformação, ele permanece reto, mantém seu comprimento inicial, porém, não é mais perpendicular àquela superfície. Esta é a hipótese básica de *Reissner*, que caracteriza *placa ou casca moderadamente grossas* [1].

Em 1970, Ahmad [4] apresentou uma formulação baseada na degeneração de um elemento sólido tridimensional, através da redução de sua dimensão na direção da espessura (Figura 1.1); nesta formulação, considera-se que as normais à superfície média permanecem retas, após a deformação, sem, contudo, continuarem normais a ela; este fato, possibilita que sejam levadas em conta as tensões de cisalhamento na direção da espessura; desconsidera-se, ainda, nesta formulação, a energia de deformação correspondente às tensões normais à superfície média, com o objetivo de se obter um melhor condicionamento numérico, visto que estas tensões são de valores muito baixos.

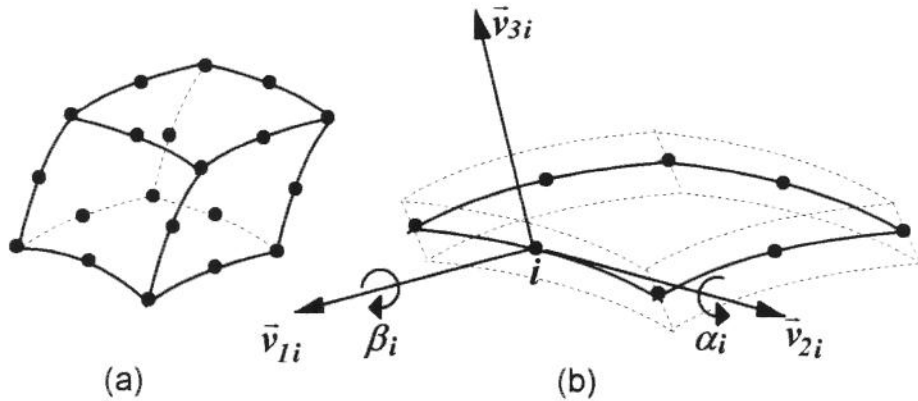


Figura 1.1: (a) Elemento sólido tridimensional; (b) elemento de casca, obtido a partir da degeneração do elemento sólido tridimensional.

A geometria do elemento é descrita pelas coordenadas dos nós, i , situados na superfície média e por vetores nodais \vec{v}_{3i} (Figura 1.1), que definem os pontos, que estão fora desta superfície. Em cada nó, consideram-se cinco graus de liberdade, sendo três deslocamentos globais (u_i, v_i, w_i) e duas rotações locais (α_i e β_i) do vetor \vec{v}_{3i} em torno de dois outros vetores: \vec{v}_{1i} e \vec{v}_{2i} , normais a ele.

A matriz de rigidez do elemento é obtida da maneira usual, a partir da integração numérica da expressão:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta d\zeta \tag{1.1}$$

através da utilização de 2 pontos de integração na direção ζ e, para o caso de elemento quadrático, (3x3) pontos de integração na superfície média (ξ e η); caracterizando, assim, uma **integração numérica consistente**, uma vez que este é o número de pontos necessário para

integrar exatamente à Equação 1.1 [5]. As funções de forma utilizadas para a obtenção da matriz $[B]$ da equação anterior são aquelas da família Serendipity, que, para o caso de elemento quadrático, consideram oito nós na superfície média (Figura 1.2).

Os resultados obtidos por este elemento foram excelentes para situações de placas e cascas moderadamente grossas, atendendo, portanto, à teoria de *Reissner*. Entretanto, com a redução da espessura, os resultados não tendiam, como era de se esperar, àqueles da teoria clássica de *Kirchhoff* para placas e cascas finas.

A partir de então, um grande número de autores tem estudado este elemento e feito suas propostas para melhorar seu comportamento. Com a introdução da *Técnica de Integração Reduzida*, proposta em [6] (elemento de *Zienkiewicz*), conseguiu-se uma melhora considerável no desempenho do elemento para as aplicações de placas e cascas finas. Neste caso, para a obtenção da matriz de rigidez (Equação 1.1), ao invés de (3×3) , utilizam-se (2×2) pontos de integração na superfície média, caracterizando, desta forma, o que se convencionou chamar de *integração reduzida*. A *integração totalmente reduzida* mostrou resultados notáveis [6] para as situações de placas e cascas finas. Para o elemento de *Zienkiewicz*, consideram-se, também, as funções de forma da família Serendipity com 8 nós na superfície média, conforme mostra a Figura 1.2. Entretanto, como este fenômeno da *melhoria do desempenho do elemento pela redução do número de pontos de integração* não foi explicado de uma maneira satisfatória, foi considerado por muitos autores como um embuste [19]. Fizeram-se, então, várias tentativas [20], [21], [22], [23] e [24], visando encontrar uma explicação plausível para este fato, sem, contudo, lograr efeito.

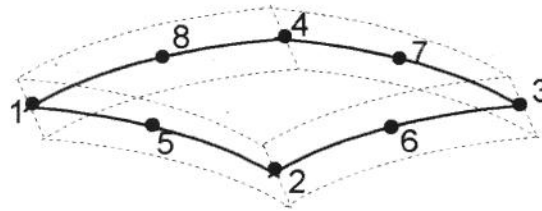


Figura 1.2: Elemento de casca, quadrilateral, quadrático, da família Serendipity.

O objetivo deste trabalho é o estudo comparativo, na análise estática de placas e cascas, entre o desempenho do elemento finito isoparamétrico, quadrilateral, quadrático da família Serendipity e o elemento isoparamétrico, quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana, baseado na degeneração do elemento sólido tridimensional (formulação de Ahmad), sendo que o elemento da família Lagrangeana considera 9 nós na superfície média como mostra a Figura 1.3. Ambos elementos utilizaram-se da *integração numérica consistente*.

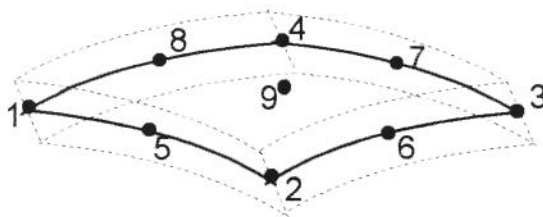


Figura 1.3: Elemento de casca, quadrilateral, quadrático, da família Lagrangeana.

Compara-se o desempenho destes elementos, considerando-se diversas relações, t/a , entre a espessura, t , e a dimensão característica, a , da superfície média, abordando, portanto, desde aplicações de placas e cascas finas até placas e cascas moderadamente grossas. Pretende-se, com este trabalho, estabelecer qual dentre os dois elementos (da família Serendipity ou da família Lagrangeana) é o mais adequado para iniciar o desenvolvimento de um elemento finito subparamétrico, quadrilateral, do tipo hierárquico, para a análise de placas e cascas. A finalidade deste *elemento hierárquico* será, então, o de retirar a característica de rigidez excessiva do elemento apresentado por *Ahmad* para as situações de placas e cascas finas. Pretende-se, portanto, futuramente, obter um *novo elemento* que, mesmo considerando *integração consistente*, refina a solução, obtida a partir do elemento de *Ahmad* através de uma formulação do tipo hierárquica, baseada no conceito da aproximação p .

CAPÍTULO 2

DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA DO ELEMENTO

2.1. Introdução

Considere-se um elemento de casca, como mostra a Figura 2.1, onde as secções ao longo da espessura são geradas por linhas retas. Na superfície média do elemento, considerem-se os nós

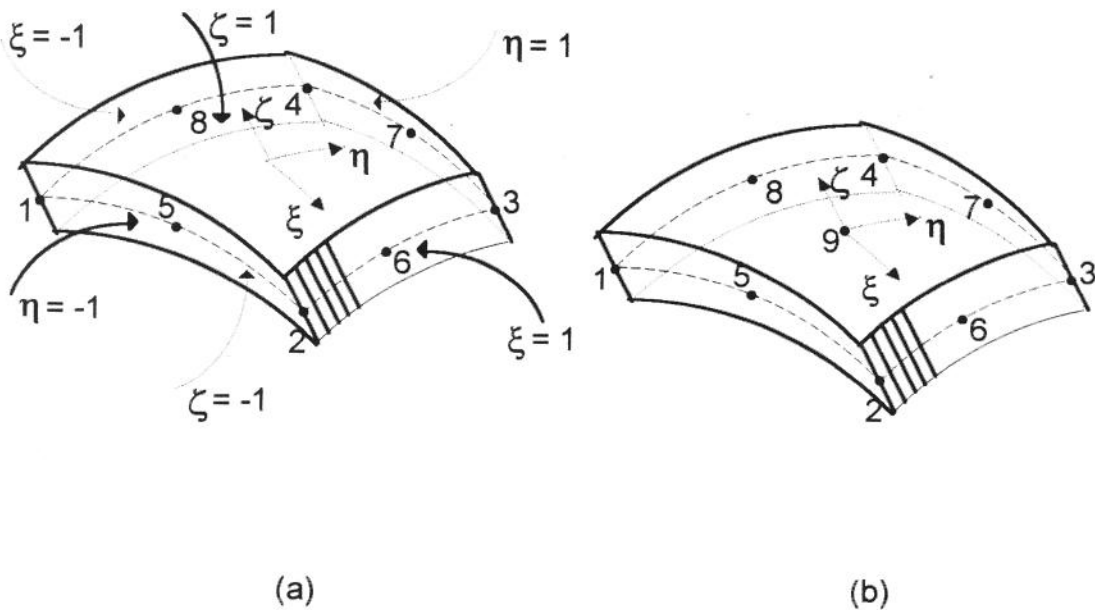


Figura 2.1: Elemento de casca, sua superfície média e os nós i associados a ela: (a) elemento da família Serendipity, (b) elemento da família Lagrangeana.

i , de 1 a 8 para o elemento da família Serendipity e de 1 a 9 para o elemento da família Lagrangeana, dispostos de acordo com a representação da Figura 2.1. Considere-se, ainda, o

sistema de referência local, constituído das coordenadas curvilíneas ξ e η na superfície média e da coordenada linear ζ na direção da espessura do elemento (Figura 2.1). Estas coordenadas devem variar entre -1 e 1 , de tal forma que $\xi = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$ definam as faces laterais e $\zeta = \pm 1$, as faces externas do elemento.

2.2. Definição da geometria do elemento de casca

Associando-se ao elemento de casca um sistema cartesiano de referência (X, Y, Z) , denominado global, a posição de qualquer ponto Q do elemento será dada pelo vetor \bar{R} , que, conforme mostra a Figura 2.2, é determinado pela soma de dois outros vetores: o vetor \bar{r} , que define a posição de qualquer ponto O da superfície média e o vetor \bar{m} , que define a posição de qualquer ponto Q , fora desta superfície. Assim,

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{m} \tag{2.1}$$

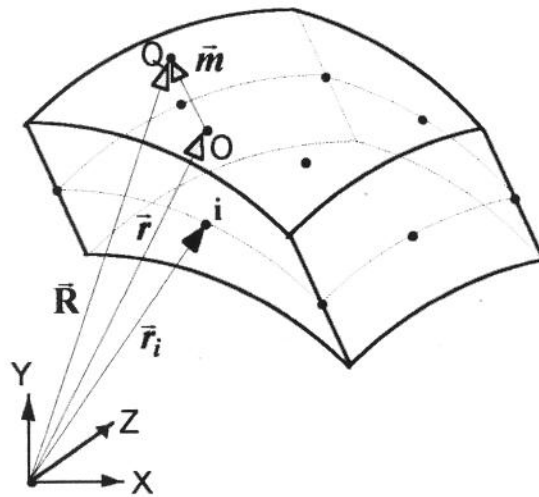


Figura 2.2: Vetor \bar{R} , que define a posição de qualquer ponto Q do elemento de casca.

2.2.1. Determinação do vetor \bar{r}

De acordo com o sistema de referência global (X, Y, Z) , a posição de um nó i , genérico, da superfície média, será dada pelo vetor \bar{r}_i (Figura 2.2), que tem as componentes x_i , y_i e z_i segundo os eixos X , Y , e Z , respectivamente. Portanto,

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

O vetor $\bar{\mathbf{r}}$, que define a posição de qualquer ponto \mathbf{O} da superfície média, pode, então, ser interpolado a partir dos vetores nodais $\bar{\mathbf{r}}_i$ e das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ associadas a cada um dos nós da superfície média [7] e [8]:

$$\bar{\mathbf{r}}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\mathbf{r}}_i \quad (2.3)$$

onde, para o elemento da família Serendipity, n é igual a 8 e as funções de forma, dadas por [9]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad \text{para os nós } i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.4)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad \text{para os nós } i = 5 \text{ e } 7 \quad (2.5)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) \quad \text{para os nós } i = 6 \text{ e } 8 \quad (2.6)$$

e, para o elemento da família Lagrangeana, n é igual a 9 e as funções de forma, dadas por [9]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi_i\eta_i\xi\eta(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad \text{para os nós } i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.7)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\eta_i(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad \text{para os nós } i = 5 \text{ e } 7 \quad (2.8)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi_i(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) \quad \text{para os nós } i = 6 \text{ e } 8 \quad (2.9)$$

$$N_i(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad \text{para o nó } i = 9 \quad (2.10)$$

sendo que ξ_i e η_i são as coordenadas curvilíneas correspondentes a cada nó i .

Os gráficos das funções de forma, para cada nó da superfície média, são apresentados no Apêndice A.

2.2.2. Determinação do vetor \vec{m}

Considere-se no ponto O (Figura 2.3) a definição de um vetor \vec{r}_3 , normal à superfície média, obtido a partir do produto vetorial de dois outros vetores: \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , tangentes a esta superfície e dados por [10]:

$$\vec{r}_1(\xi, \eta) = \frac{\partial \vec{r}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad (2.11)$$

$$\vec{r}_2(\xi, \eta) = \frac{\partial \vec{r}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (2.12)$$

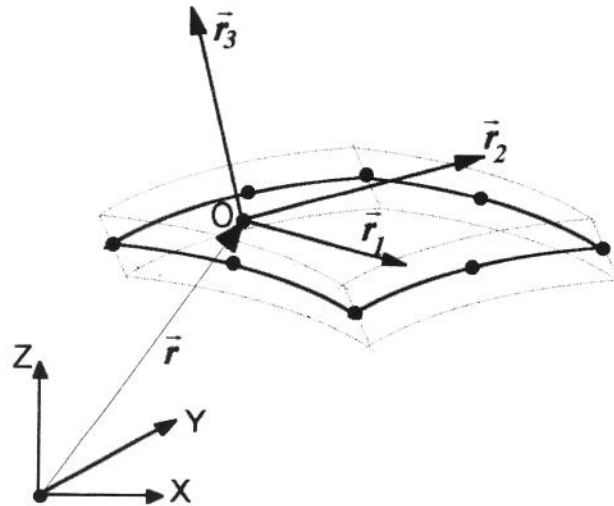


Figura 2.3: Vetor \vec{r}_3 , normal à superfície média e vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , tangentes a ela.

Portanto,

$$\vec{r}_3(\xi, \eta) = \vec{r}_1(\xi, \eta) \wedge \vec{r}_2(\xi, \eta) \quad (2.13)$$

Considerando-se a Equação (2.3), pode-se escrever, então, que:

$$\vec{r}_1(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \vec{r}_i \quad (2.14)$$

$$\bar{r}_2(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \bar{r}_i \quad (2.15)$$

Se r_{11} , r_{12} e r_{13} são, respectivamente, as componentes do vetor \bar{r}_1 , segundo os eixos X , Y , e Z do sistema de referência global e, da mesma forma, r_{21} , r_{22} e r_{23} , as componentes do vetor \bar{r}_2 , pode-se, tendo-se em conta a Equação (2.2), escrever que:

$$\bar{r}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{11}(\xi, \eta) \\ r_{12}(\xi, \eta) \\ r_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

e que:

$$\bar{r}_2(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{21}(\xi, \eta) \\ r_{22}(\xi, \eta) \\ r_{23}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Se \bar{i} , \bar{j} e \bar{k} são uma base triortogonal, associada ao sistema de referência global, o vetor \bar{r}_3 , de componentes r_{31} , r_{32} e r_{33} , obtido a partir da Equação 2.13, será dado por:

$$\bar{r}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{31}(\xi, \eta) \\ r_{32}(\xi, \eta) \\ r_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_{11}(\xi, \eta) & r_{12}(\xi, \eta) & r_{13}(\xi, \eta) \\ r_{21}(\xi, \eta) & r_{22}(\xi, \eta) & r_{23}(\xi, \eta) \end{vmatrix} \quad (2.18)$$

Resolvendo-se a equação anterior e substituindo-se as componentes de \bar{r}_1 e \bar{r}_2 , dadas através das Equações (2.16) e (2.17), obtém-se que:

$$r_{31}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} (y_i z_j - y_j z_i) \quad (2.19)$$

$$r_{32}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} (z_i x_j - x_i z_j) \quad (2.20)$$

$$r_{33}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} (x_i y_j - y_i x_j) \tag{2.21}$$

Tendo-se determinado o vetor $\bar{\mathbf{r}}_3$, pode-se, agora, definir no ponto \mathbf{O} o versor $\bar{\mathbf{v}}_3$ (Figura 2.4), normal à superfície média, dado por:

$$\bar{\mathbf{v}}_3(\xi, \eta) = \frac{\bar{\mathbf{r}}_3(\xi, \eta)}{\|\bar{\mathbf{r}}_3(\xi, \eta)\|} \tag{2.22}$$

onde $\|\bar{\mathbf{r}}_3(\xi, \eta)\|$ é o módulo do vetor $\bar{\mathbf{r}}_3$, obtido da seguinte maneira:

$$\|\bar{\mathbf{r}}_3(\xi, \eta)\| = \sqrt{r_{31}^2(\xi, \eta) + r_{32}^2(\xi, \eta) + r_{33}^2(\xi, \eta)} \tag{2.23}$$

Se v_{31} , v_{32} e v_{33} são as componentes do versor $\bar{\mathbf{v}}_3$, segundo o sistema de referência global, a Equação (2.22) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{v}}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{31}(\xi, \eta) \\ v_{32}(\xi, \eta) \\ v_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\|\bar{\mathbf{r}}_3(\xi, \eta)\|} \cdot \begin{Bmatrix} r_{31}(\xi, \eta) \\ r_{32}(\xi, \eta) \\ r_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

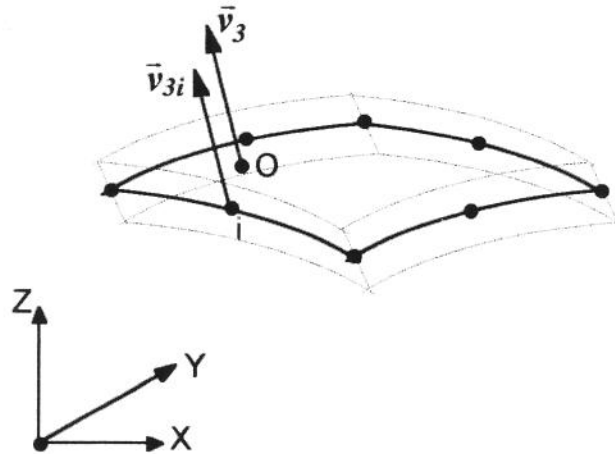


Figura 2.4: Versor $\bar{\mathbf{v}}_3$, normal à superfície média no ponto \mathbf{O} e versor $\bar{\mathbf{v}}_{3i}$, normal a esta superfície no nó i .

ou, ainda,

$$v_{31}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\bar{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot r_{31}(\xi, \eta) \tag{2.25}$$

$$v_{32}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\bar{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot r_{32}(\xi, \eta) \tag{2.26}$$

$$v_{33}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\bar{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot r_{33}(\xi, \eta) \tag{2.27}$$

Quando se considera o nó i de coordenadas ξ_i e η_i , o versor \bar{v}_{3i} (Figura 2.4), normal à superfície média neste nó, será dado por:

$$\bar{v}_{3i} = \bar{v}_3(\xi_i, \eta_i) \tag{2.28}$$

e suas componentes, segundo o sistema de referência global, por:

$$v_{31i} = v_{31}(\xi_i, \eta_i) \tag{2.29}$$

$$v_{32i} = v_{32}(\xi_i, \eta_i) \tag{2.30}$$

$$v_{33i} = v_{33}(\xi_i, \eta_i) \tag{2.31}$$

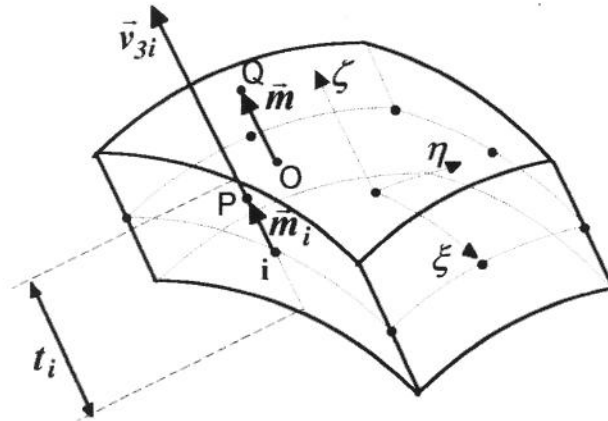


Figura 2.5: Espessura t_i da casca no nó i e os vetores \bar{m}_i e \bar{m} , que definem, respectivamente, os pontos P e Q , fora da superfície média.

De acordo com a Figura 2.5, se t_i é a espessura da casca no nó i , qualquer ponto P , ao longo desta espessura, será dado pelo vetor \bar{m}_i , obtido da seguinte maneira:

$$\bar{m}_i(\zeta) = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \bar{v}_{3i} \quad (2.32)$$

Desta forma, o vetor \bar{m} (Figura 2.5), que define a posição de qualquer ponto Q , fora da superfície média, pode, então, ser interpolado a partir dos vetores \bar{m}_i e das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ de cada nó da superfície média. Portanto,

$$\bar{m}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{m}_i \quad (2.33)$$

ou, ainda, tendo-se em conta a Equação (2.32),

$$\bar{m}(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot \bar{v}_{3i} \quad (2.34)$$

2.2.3. Determinação do vetor \bar{R}

De acordo com a equação (2.1) e, tendo-se em conta as Equações (2.3) e (2.34), o vetor \bar{R} , que define a posição de qualquer ponto Q do elemento de casca, será dado por:

$$\bar{R}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{r}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot \bar{v}_{3i} \quad (2.35)$$

Se x , y e z são as componentes do vetor \bar{R} , segundo o sistema de referência global, a equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\bar{R}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{31i} \\ v_{32i} \\ v_{33i} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

ou, ainda,

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot x_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{31i} \quad (2.37)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot y_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{32i} \tag{2.38}$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot z_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{33i} \tag{2.39}$$

Estas equações fornecem, então, as coordenadas x , y e z de qualquer ponto do elemento de casca.

A Figura 2.6 mostra o *mapeamento* do elemento de casca do *espaço local* para o *espaço cartesiano*.

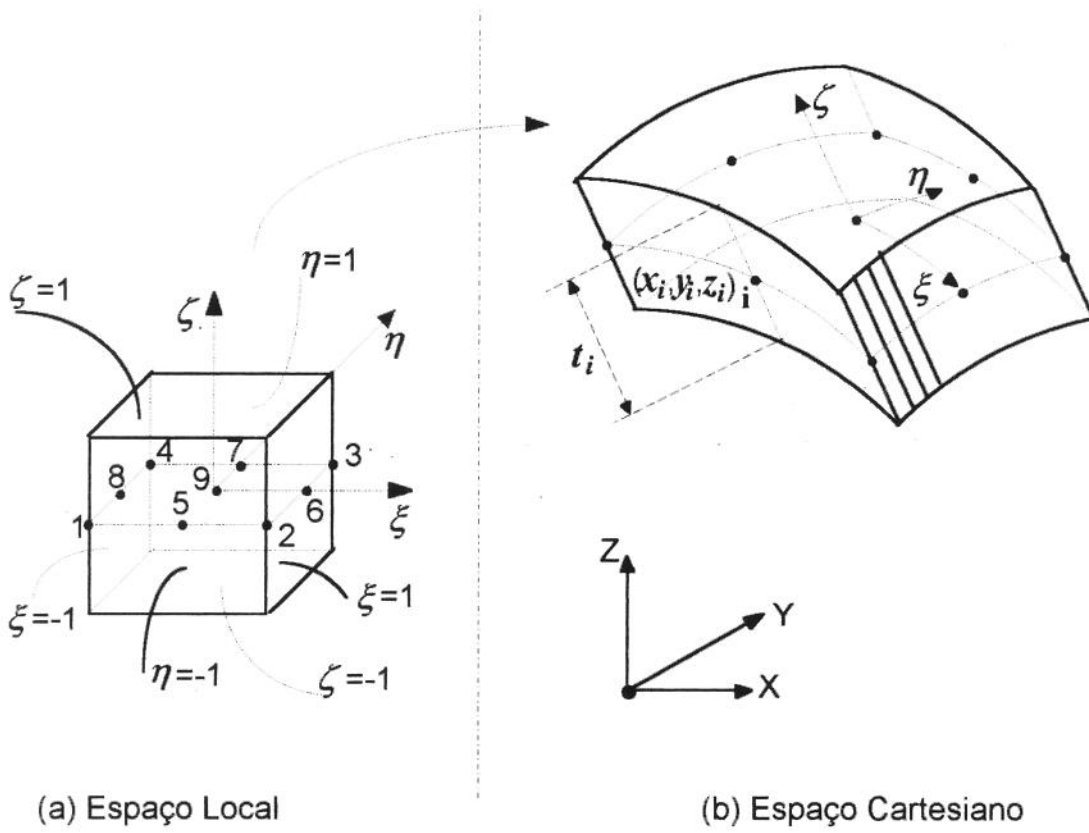


Figura 2.6: *Mapeamento* tridimensional do elemento de casca da família Lagrangeana, do *espaço local* para o *espaço cartesiano*.

CAPÍTULO 3

CAMPO DE DESLOCAMENTO

3.1. Introdução

Considere-se no ponto O , genérico, da superfície média do elemento de casca, a definição de um sistema cartesiano, local, de referência, constituído dos eixos x' , y' e z' , cujos versores são, respectivamente, \bar{v}_1 , \bar{v}_2 e \bar{v}_3 , conforme mostra a Figura 3.1.

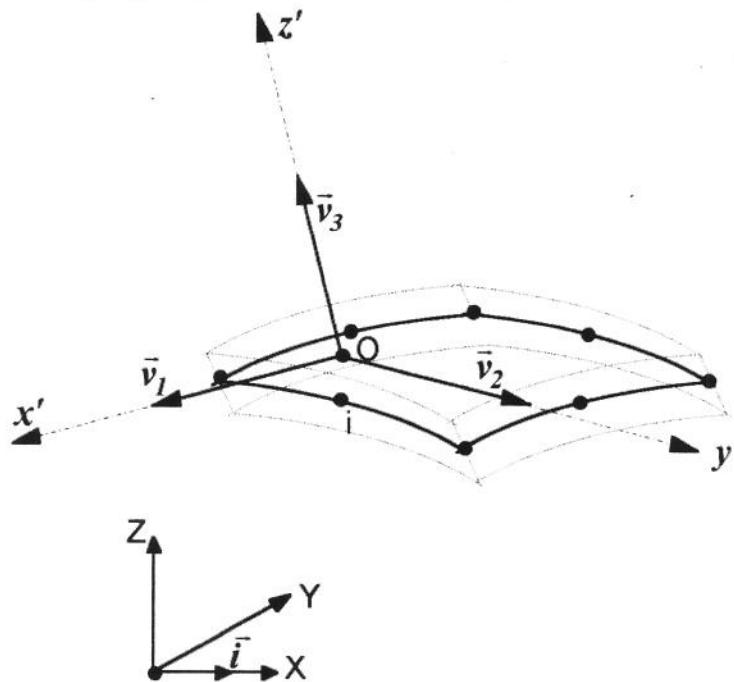


Figura 3.1: Sistema, local, de referência (x', y', z') , associado ao ponto O e versor \bar{i} , associado à direção X do sistema de referência global.

O versor \bar{v}_3 é normal à superfície média e já foi determinado, anteriormente, através da Equação (2.24); os versores \bar{v}_1 e \bar{v}_2 são tangentes àquela superfície e obtidos a partir dos seguintes produtos vetoriais:

$$\bar{v}_1(\xi, \eta) = \frac{\bar{i} \wedge \bar{v}_3(\xi, \eta)}{\|\bar{i} \wedge \bar{v}_3(\xi, \eta)\|} \quad (3.1)$$

e

$$\bar{v}_2(\xi, \eta) = \bar{v}_3(\xi, \eta) \wedge \bar{v}_1(\xi, \eta) \quad (3.2)$$

onde \bar{i} é o versor do eixo X do sistema de referência global (Figura 3.1); caso, eventualmente, este versor tenha a mesma direção do versor \bar{v}_3 , deve-se tomar o versor \bar{j} do eixo Y para executar o produto vetorial estabelecido na Equação (3.1). Se v_{11} , v_{12} e v_{13} são as componentes do versor \bar{v}_1 , segundo o sistema de referência global e, da mesma forma, 1 , 0 e 0 , as componentes do versor \bar{i} , a Equação (3.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{v}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{11}(\xi, \eta) \\ v_{12}(\xi, \eta) \\ v_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\|\bar{i} \wedge \bar{v}_3(\xi, \eta)\|} \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ v_{31}(\xi, \eta) & v_{32}(\xi, \eta) & v_{33}(\xi, \eta) \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

ou, resolvendo-se o determinante indicado na equação anterior,

$$\bar{v}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{11}(\xi, \eta) \\ v_{12}(\xi, \eta) \\ v_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v_{32}^2(\xi, \eta) + v_{33}^2(\xi, \eta)}} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -v_{33}(\xi, \eta) \\ v_{32}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Portanto,

$$v_{11}(\xi, \eta) = 0 \quad (3.5)$$

$$v_{12}(\xi, \eta) = -\frac{1}{\sqrt{v_{32}^2(\xi, \eta) + v_{33}^2(\xi, \eta)}} \cdot v_{33}(\xi, \eta) \quad (3.6)$$

e

$$v_{13}(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{v_{32}^2(\xi, \eta) + v_{33}^2(\xi, \eta)}} \cdot v_{32}(\xi, \eta) \quad (3.7)$$

Executando-se, agora, o produto vetorial especificado na Equação (3.2), o versor \bar{v}_2 de componentes v_{21} , v_{22} e v_{23} , segundo o sistema de referência global, resulta:

$$\bar{v}_2(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{21}(\xi, \eta) \\ v_{22}(\xi, \eta) \\ v_{23}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{32}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) - v_{12}(\xi, \eta) v_{33}(\xi, \eta) \\ v_{33}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) - v_{31}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \\ v_{31}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) - v_{32}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Tendo-se, ainda, em conta que a componente v_{11} do versor \bar{v}_1 é nula, as componentes do versor \bar{v}_2 tornam-se:

$$v_{21}(\xi, \eta) = v_{32}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) - v_{12}(\xi, \eta) v_{33}(\xi, \eta) \quad (3.9)$$

$$v_{22}(\xi, \eta) = -v_{31}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (3.10)$$

$$v_{23}(\xi, \eta) = v_{31}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (3.11)$$

As Equações (3.5), (3.6), (3.7), (3.9), (3.10), (3.11), (2.25), (2.26) e (2.27) fornecem, então, as componentes dos versores \bar{v}_1 , \bar{v}_2 e \bar{v}_3 , que definem o sistema cartesiano, local, de referência (x', y', z') , associado ao ponto O .

Quando se considera o nó i de coordenadas ξ_i e η_i , o sistema de referência local (x', y', z') , a ele associado (Figura 3.2), será definido pelos seguintes versores:

$$\bar{v}_{1i} = \bar{v}_1(\xi_i, \eta_i) \quad (3.12)$$

$$\bar{v}_{2i} = \bar{v}_2(\xi_i, \eta_i) \quad (3.13)$$

$$\bar{v}_{3i} = \bar{v}_3(\xi_i, \eta_i) \quad (3.14)$$

Da mesma forma, as componentes dos versores \bar{v}_{1i} e \bar{v}_{2i} , segundo o sistema de referência global, serão dadas por:

$$v_{11i} = v_{11}(\xi_i, \eta_i) \quad (3.15)$$

$$v_{12i} = v_{12}(\xi_i, \eta_i) \quad (3.16)$$

$$v_{13i} = v_{13}(\xi_i, \eta_i) \quad (3.17)$$

$$v_{21i} = v_{21}(\xi_i, \eta_i) \tag{3.18}$$

$$v_{22i} = v_{22}(\xi_i, \eta_i) \tag{3.19}$$

$$v_{23i} = v_{23}(\xi_i, \eta_i) \tag{3.20}$$

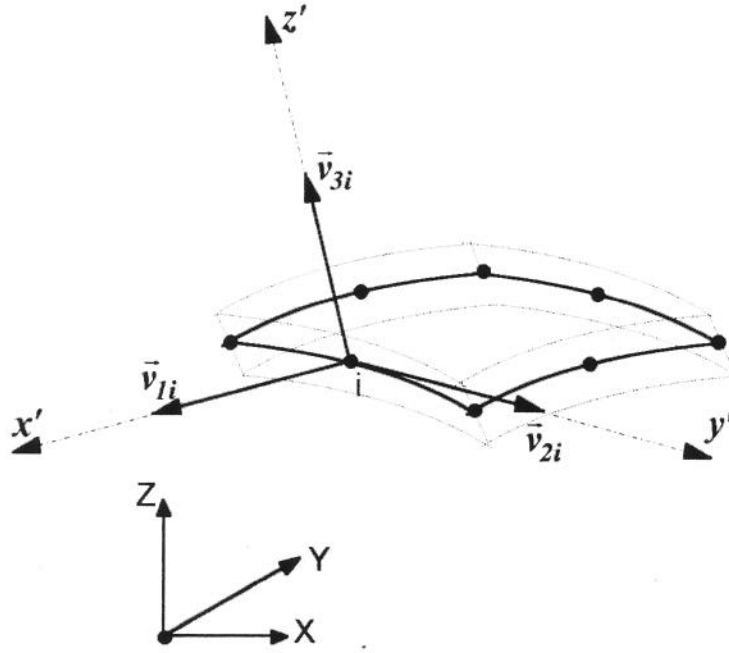


Figura 3.2: Sistema, local, de referência (x', y', z'), associado ao nó i .

As componentes do vetor \bar{v}_{3i} já foram obtidas, anteriormente e são dadas pelas Equações (2.29), (2.30) e (2.31).

As Equações (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (2.29), (2.30) e (2.31) fornecem, então, as componentes dos vetores \bar{v}_{1i} , \bar{v}_{2i} e \bar{v}_{3i} , que definem o sistema cartesiano, local, de referência (x', y', z'), associado ao nó i .

3.2. Determinação do campo de deslocamento do elemento de casca

Se, em função de sua solicitação, o elemento de casca é deformado, o nó i , genérico, de sua superfície média, vai apresentar um deslocamento $\bar{\delta}_i$ (Figura 3.3), cujas componentes nas direções X , Y e Z do sistema de referência global são, respectivamente: u_i , v_i e w_i .

De acordo com o modelo cinemático de *Reissner*, que possibilita considerar, também, as tensões de cisalhamento ao longo da espessura, se um elemento reto da casca é normal a sua superfície média, após a deformação, ele permanece reto, mantém seu comprimento inicial ($\epsilon_{z'} = 0$), porém, não é mais normal à superfície média. Assim, o estado de deformação

específica do elemento de casca, com relação ao sistema de referência local (x', y', z') , deverá conter as seguintes componentes: $\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$, $\gamma_{x'y'}$, $\gamma_{x'z'}$ e $\gamma_{y'z'}$.

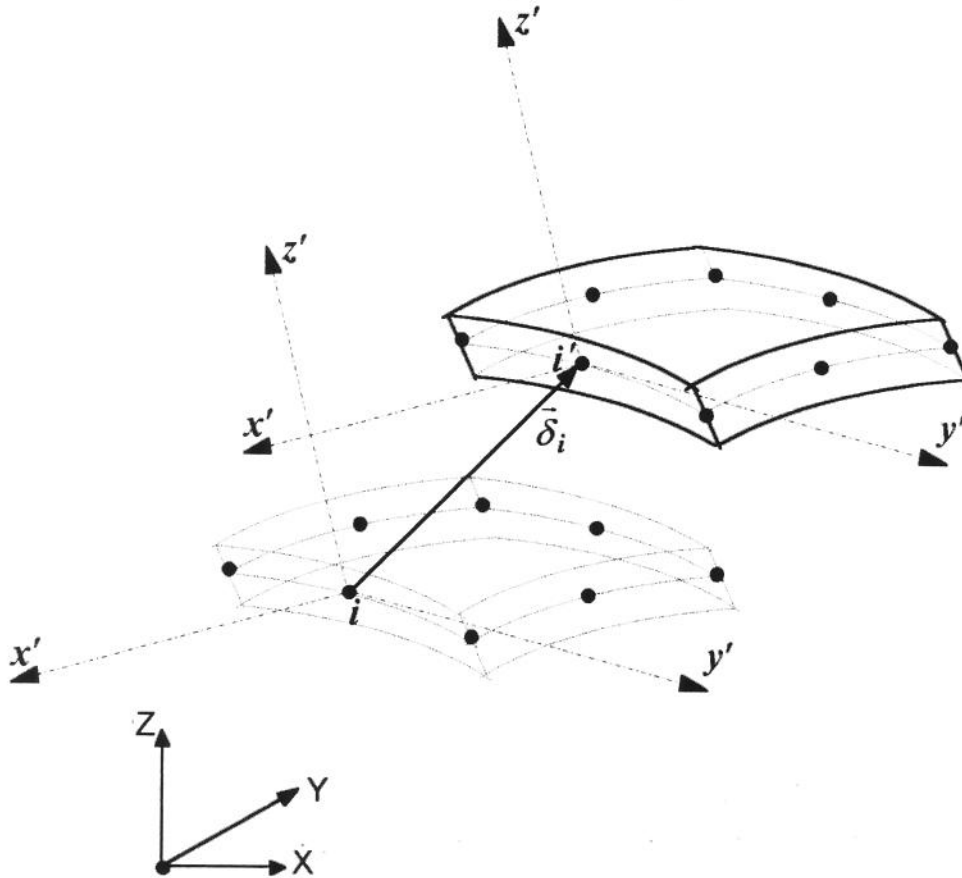


Figura 3.3: Deslocamento $\bar{\delta}_i$, apresentado pelo nó i .

Em função do exposto, quando se considera o vetor \bar{m}_i (Figura 2.5 e Figura 3.4), normal à superfície média e que define o ponto P fora desta superfície, após a deformação, ele deverá continuar reto, não mais perpendicular àquela superfície e manter seu comprimento inicial. Portanto, no caso mais geral de sollicitação, deverá apresentar duas rotações (Figura 3.4): α_i e β_i , em torno dos eixos y' e x' , respectivamente. O ponto P assume, então, a posição P' , apresentando, conseqüentemente, um deslocamento $\bar{\Delta}_i$, que, de acordo com a Figura 3.4 e admitindo-se a hipótese de deslocamentos e deformações pequenos, será dado por:

$$\bar{\Delta}_i = \bar{\delta}_i + m_i \alpha_i \cdot \bar{v}_{1i} - m_i \beta_i \cdot \bar{v}_{2i} \tag{3.21}$$

onde m_i é o módulo do vetor \bar{m}_i e que, de acordo com a Equação (2.32), é dado por:

$$m_i = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \tag{3.22}$$

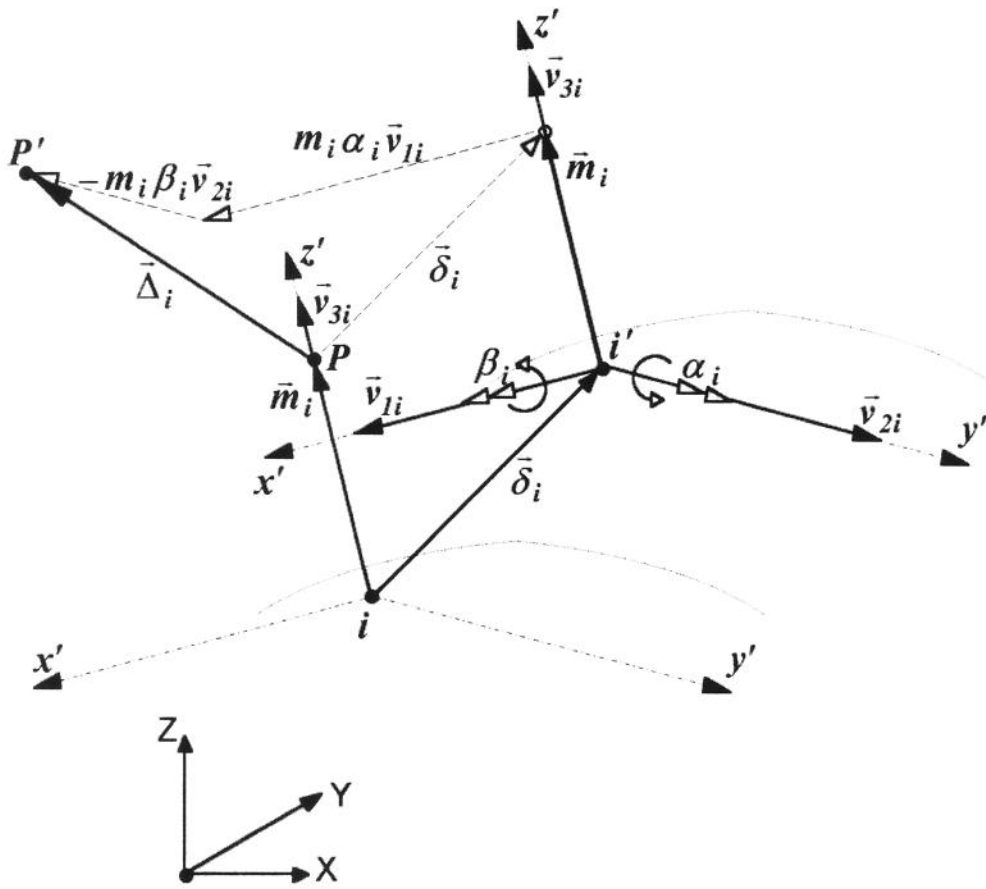


Figura 3.4: Deslocamento $\bar{\Delta}_i$, apresentado pelo ponto \mathbf{P} .

Substituindo-se este valor na Equação (3.21), tem-se que:

$$\bar{\Delta}_i(\zeta) = \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i \tag{3.23}$$

Esta expressão possibilita determinar o deslocamento apresentado por qualquer ponto \mathbf{P} ao longo da espessura t_i no nó i . Pode-se, agora, interpolar o deslocamento de qualquer ponto \mathbf{Q} (Figura 2.5) do elemento de casca a partir dos deslocamentos $\bar{\Delta}_i$ e das funções de forma $N_i'(\xi, \eta)$ de cada nó da superfície média [9]:

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i'(\xi, \eta) \cdot \bar{\Delta}_i(\zeta) \tag{3.24}$$

onde n é o número de nós da superfície média. Se o elemento é do tipo *isoparamétrico* [11], as funções de forma são iguais àquelas utilizadas para interpolar a geometria e dadas através das

Equações (2.4), (2.5) e (2.6), para o elemento da família Serendipity e (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10), para o elemento da família Lagrangeana. Portanto,

$$N'_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \quad (3.25)$$

e a Equação (3.24) pode ser reescrita como:

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\Delta}_i(\zeta) \quad (3.26)$$

Substituindo-se $\bar{\Delta}_i$ pelo seu valor, dado a partir da Equação (3.23), tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i \\ - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (3.27)$$

Se u, v e w são, respectivamente, as componentes do deslocamento $\bar{\Delta}$ nas direções X, Y e Z do sistema de referência global, a equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{11i} \\ v_{12i} \\ v_{13i} \end{Bmatrix} \cdot \alpha_i \\ - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{21i} \\ v_{22i} \\ v_{23i} \end{Bmatrix} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (3.28)$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i \\ - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
 v(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i \\
 & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i \\
 & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

A expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma quadráticas da família Serendipity, é mostrada na Figura 3.5 e a expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma quadráticas da família Lagrangeana, na Figura 3.6.

1	...	cte
$\xi \quad \eta$...	1^o grau
$\xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2$...	2^o grau
$\xi^2 \eta \quad \xi \eta^2$		

Figura 3.5: Termos da expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma da família Serendipity

1	...	cte
$\xi \quad \eta$...	1^o grau
$\xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2$...	2^o grau
$\xi^2 \eta \quad \xi \eta^2$		
$\xi^2 \eta^2$		

Figura 3.6: Termos da expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma da família Lagrangeana

Verifica-se a partir das Figuras 3.5 e 3.6 que as duas expansões polinomiais satisfazem os *critérios de convergência*, isto é, além de terem garantida a continuidade C^0 , apresentam o termo constante e contêm o polinômio completo de primeiro grau.

As Equações (3.29), (3.30) e (3.31) podem ser escritas na forma que se apresenta a seguir:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n [N_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \{a_i\} \tag{3.32}$$

onde $[N_i(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (3×5) , constituída das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ e dos parâmetros (espessura t_i e componentes dos versores \bar{v}_{1i} e \bar{v}_{2i}) referentes ao nó i :

$$[N_i(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 & 0 & \zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{11i} \\ 0 & N_i(\xi, \eta) & 0 & \zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{12i} \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta) & \zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{13i} \\ & & & -\zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{21i} \\ & & & -\zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{22i} \\ & & & -\zeta N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} v_{23i} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

e $\{a_i\}$ é uma matriz coluna (5×1) , constituída dos deslocamentos e rotações relativos ao nó i :

$$\{a_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \tag{3.34}$$

Desta maneira, a Equação (3.32) pode ser apresentada na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \left[[N_1(\xi, \eta, \zeta)] \quad [N_2(\xi, \eta, \zeta)] \quad \cdots \quad [N_i(\xi, \eta, \zeta)] \quad \cdots \right. \\ \left. \cdots \quad [N_n(\xi, \eta, \zeta)] \right] \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_n\} \end{Bmatrix} \tag{3.35}$$

Verifica-se, portanto, que a cada nó i da superfície média do elemento de casca estão associados cinco graus de liberdade: três translações (u_i, v_i e w_i) e duas rotações (α_i e β_i). De uma maneira compacta, a equação anterior pode, ainda, ser dada por:

$$\{u\} = [N] \cdot \{a\} \tag{3.36}$$

onde $\{u\}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída dos deslocamentos $u(\xi, \eta, \zeta), v(\xi, \eta, \zeta)$ e $w(\xi, \eta, \zeta)$, $[N]$ é uma matriz (3×40), para o elemento da família Serendipity e (3×45), para o elemento da família Lagrangeana, constituída das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ e $\{a\}$ é uma matriz coluna (40×1), para o elemento da família Serendipity e (45×1), para o elemento da família Lagrangeana, constituída dos deslocamentos nodais: u_i, v_i, w_i, α_i e β_i .

CAPÍTULO 4

ESTADO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA

4.1. Introdução

Um ponto Q (Figura 4.1), genérico, do elemento de casca tem com relação ao sistema de referência global (X, Y, Z), no caso geral de solitação, o seguinte *estado de deformação específica* [12]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} \quad (4.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} \quad (4.4)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} \quad (4.5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} \quad (4.6)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} \tag{4.6}$$

onde $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$ são os deslocamentos apresentados pelo ponto Q , com relação àquele sistema de referência. Por outro lado, como mostram as Equações de (3.29) a (3.31), os deslocamentos u , v e w são funções das coordenadas curvilíneas ξ e η e da coordenada linear ζ , assim como, as coordenadas x , y e z do ponto Q , que de acordo com as Equações de (2.37) a (2.39) também são funções das coordenadas curvilíneas. Portanto, as derivadas dos deslocamentos com relação às coordenadas globais, x , y e z , podem ser obtidas a partir de suas derivadas com relação às coordenadas curvilíneas e coordenada linear, através da seguinte equação matricial [13]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

onde $[J]$ é a matriz Jacobiano da transformação e é dada por [13]:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

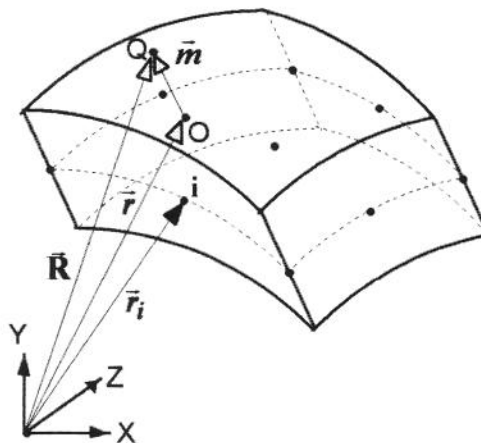


Figura 4.1: Ponto Q , genérico, do elemento de casca.

Como x , y e z são as componentes do vetor \vec{R} (Figura 4.1), segundo o sistema de referência global e, ainda, uma vez que este vetor é dado pela Equação (2.1), pode-se escrever que:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (\vec{r} + \vec{m})}{\partial \xi} \\ \frac{\partial (\vec{r} + \vec{m})}{\partial \eta} \\ \frac{\partial (\vec{r} + \vec{m})}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Tendo-se, agora, em conta que:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial \xi} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial \eta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} = \vec{0} \quad (4.10)$$

a equação anterior torna-se:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \vec{m}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

ou, ainda,

$$[J] = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

onde \vec{r}_1 e \vec{r}_2 são os vetores tangentes à superfície média, obtidos através das Equações (2.11) e (2.12) e \vec{V}_3 é um vetor normal àquela superfície, obtido a partir da derivação com relação a ζ da Equação (2.34), assim,

$$\vec{V}_3(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \quad (4.13)$$

Se V_{31} , V_{32} e V_{33} são as componentes do vetor \vec{V}_3 , segundo o sistema de referência global, pode-se escrever que:

$$\vec{V}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} V_{31}(\xi, \eta) \\ V_{32}(\xi, \eta) \\ V_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{31i}(\xi, \eta) \\ v_{32i}(\xi, \eta) \\ v_{33i}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Portanto,

$$V_{31}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{31i}(\xi, \eta) \quad (4.15)$$

$$V_{32}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{32i}(\xi, \eta) \quad (4.16)$$

$$V_{33}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{33i}(\xi, \eta) \quad (4.17)$$

Tendo sido obtida a *matriz Jacobiano da transformação*, $[\mathbf{J}]$, pode-se determinar, agora, sua inversa, $[\mathbf{J}]^{-1}$, através da seguinte equação [13]:

$$[\mathbf{J}]^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \cdot \begin{bmatrix} \vec{r}_2 \wedge \vec{V}_3 & \vec{V}_3 \wedge \vec{r}_1 & \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

onde $|\mathbf{J}|$ é o determinante da matriz Jacobiano, obtido como se segue [13]:

$$|\mathbf{J}| = \vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{V}_3) \quad (4.19)$$

Resolvendo-se a equação anterior, tem-se que:

$$\begin{aligned} |\mathbf{J}(\xi, \eta)| &= r_{11}(\xi, \eta) \cdot [r_{22}(\xi, \eta)V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta)V_{32}(\xi, \eta)] \\ &\quad - r_{12}(\xi, \eta) \cdot [r_{21}(\xi, \eta)V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta)V_{31}(\xi, \eta)] \\ &\quad + r_{13}(\xi, \eta) \cdot [r_{21}(\xi, \eta)V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta)V_{31}(\xi, \eta)] \end{aligned} \quad (4.20)$$

sendo que as componentes dos vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 são dadas através das Equações (2.16) e (2.17) e as do vetor \vec{V}_3 , pelas Equações de (4.15) a (4.17).

4.2. Estado de deformação específica com relação ao sistema de referência local (x' , y' , z')

O estado de deformação específica no ponto Q , segundo o sistema de referência local (x' , y' , z'), associado ao ponto O (Figura 4.2), será dado por:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \tag{4.21}$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\partial v'}{\partial y'} \tag{4.22}$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \tag{4.23}$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \tag{4.24}$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \tag{4.25}$$

sendo u' , v' e w' os deslocamentos apresentados pelo ponto Q , segundo o sistema de referência local.

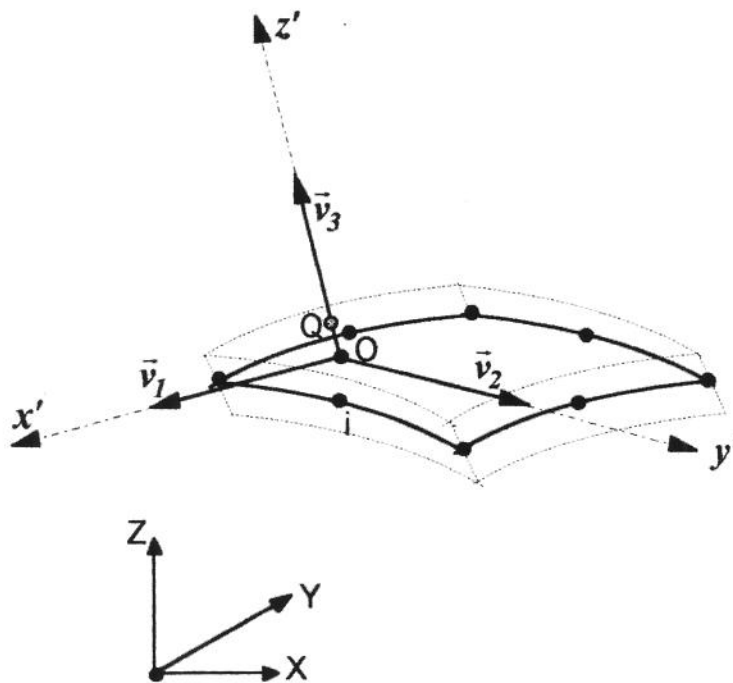


Figura 4.2: Sistema de referência local (x' , y' , z'), associado ao ponto O .

Nota-se, portanto, que para a determinação deste estado de deformação específica, necessita-se obter as derivadas dos deslocamentos locais (u' , v' e w') com relação às coordenadas locais (x' , y' , z'); estas derivadas podem ser obtidas a partir das derivadas dos deslocamentos globais (u , v e w) com relação às coordenadas globais (x , y e z), através da seguinte operação de transformação [14]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot [\theta] \quad (4.26)$$

onde $[\theta]$ é uma matriz quadrada constituída dos cossenos diretores do sistema de referência local com relação ao sistema de referência global, assim,

$$[\theta] = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3] \quad (4.27)$$

sendo que os versores \bar{v}_1 , \bar{v}_2 e \bar{v}_3 são dados, respectivamente, pelas Equações (3.4), (3.8) e (2.24).

Substituindo-se na Equação (4.26) a Equação (4.7), tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \cdot [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot [\theta] \quad (4.28)$$

Tendo-se, agora, em conta as Equações (4.18) e (4.27), pode-se escrever que:

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3 & \bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1 & \bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

ou, ainda,

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_1 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \\ \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_2 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \\ \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_3 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Uma vez que $(\vec{r}_2 \wedge \vec{V}_3)$ e $(\vec{V}_3 \wedge \vec{r}_1)$ são vetores tangentes à superfície média e $(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$ é um vetor normal a ela, segue-se que:

$$\vec{v}_3 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{v}_3 \cdot (\vec{V}_3 \wedge \vec{r}_1) = \vec{v}_1 \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = \vec{v}_2 \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = 0 \quad (4.31)$$

Portanto,

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

onde

$$A_{11}(\xi, \eta) = \vec{v}_1(\xi, \eta) \cdot (\vec{r}_2(\xi, \eta) \wedge \vec{V}_3(\xi, \eta)) \quad (4.33)$$

$$A_{21}(\xi, \eta) = \vec{v}_2(\xi, \eta) \cdot (\vec{r}_2(\xi, \eta) \wedge \vec{V}_3(\xi, \eta)) \quad (4.34)$$

$$A_{12}(\xi, \eta) = \vec{v}_1(\xi, \eta) \cdot (\vec{V}_3(\xi, \eta) \wedge \vec{r}_1(\xi, \eta)) \quad (4.35)$$

$$A_{22}(\xi, \eta) = \vec{v}_2(\xi, \eta) \cdot (\vec{V}_3(\xi, \eta) \wedge \vec{r}_1(\xi, \eta)) \quad (4.36)$$

$$A_{33}(\xi, \eta) = \vec{v}_3(\xi, \eta) \cdot (\vec{r}_1(\xi, \eta) \wedge \vec{r}_2(\xi, \eta)) = \vec{v}_3(\xi, \eta) \cdot \vec{r}_3(\xi, \eta) \quad (4.37)$$

Os resultados dos produtos, vetorial e escalar, especificados nas equações anteriores, são apresentados no Apêndice B.

Desta forma, a Equação (4.28) pode ser reescrita como se segue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Resolvendo-se os produtos matriciais indicados na equação anterior, pode-se obter, então, as derivadas necessárias para a definição do estado de deformação específica do ponto Q, com relação ao sistema de referência local:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{11}v_{11} \quad A_{11}v_{12} \quad A_{11}v_{13} \quad A_{12}v_{11} \quad A_{12}v_{12} \quad A_{12}v_{13}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{21}v_{21} \quad A_{21}v_{22} \quad A_{21}v_{23} \quad A_{22}v_{21} \quad A_{22}v_{22} \quad A_{22}v_{23}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{21}v_{11} \quad A_{21}v_{12} \quad A_{21}v_{13} \quad A_{22}v_{11} \quad A_{22}v_{12} \quad A_{22}v_{13}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{11}v_{21} \quad A_{11}v_{22} \quad A_{11}v_{23} \quad A_{12}v_{21} \quad A_{12}v_{22} \quad A_{12}v_{23}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{21}v_{31} \quad A_{21}v_{32} \quad A_{21}v_{33} \quad A_{22}v_{31} \quad A_{22}v_{32} \quad A_{22}v_{33}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{11}v_{31} \quad A_{11}v_{32} \quad A_{11}v_{33} \quad A_{12}v_{31} \quad A_{12}v_{32} \quad A_{12}v_{33}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{33}v_{11} \quad A_{33}v_{12} \quad A_{33}v_{13}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right]^T \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{33}v_{21} \quad A_{33}v_{22} \quad A_{33}v_{23}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \right]^T \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial z'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{33}v_{31} \quad A_{33}v_{32} \quad A_{33}v_{33}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \right]^T \quad (4.47)$$

Substituindo-se, agora, as equações anteriores nas Equações de (4.21) a (4.25), tem-se que:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{11}v_{11} \quad A_{11}v_{12} \quad A_{11}v_{13} \quad A_{12}v_{11} \quad A_{12}v_{12} \quad A_{12}v_{13}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T \quad (4.48)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{21}v_{21} \quad A_{21}v_{22} \quad A_{21}v_{23} \quad A_{22}v_{21} \quad A_{22}v_{22} \quad A_{22}v_{23}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T \quad (4.49)$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{1}{|J|} \cdot [(A_{21}v_{11} + A_{11}v_{21}) \quad (A_{21}v_{12} + A_{11}v_{22}) \quad (A_{21}v_{13} + A_{11}v_{23}) \quad (A_{22}v_{11} + A_{12}v_{21}) \quad (A_{22}v_{12} + A_{12}v_{22}) \quad (A_{22}v_{13} + A_{12}v_{23})] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T \quad (4.50)$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{11}v_{31} \quad A_{11}v_{32} \quad A_{11}v_{33} \quad A_{12}v_{31} \quad A_{12}v_{32} \quad A_{12}v_{33}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T + \frac{1}{|J|} \cdot [A_{33}v_{11} \quad A_{33}v_{12} \quad A_{33}v_{13}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \right]^T \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{y'z'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{21}v_{31} \quad A_{21}v_{32} \quad A_{21}v_{33} \quad A_{22}v_{31} \quad A_{22}v_{32} \quad A_{22}v_{33}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \right. \\ \left. \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T + \frac{1}{|J|} \cdot [A_{33}v_{21} \quad A_{33}v_{22} \quad A_{33}v_{23}] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right]^T \end{aligned} \quad (4.52)$$

Estas equações podem, ainda, ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right]^T \quad (4.53)$$

onde

$$[d(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} & d_{48} & d_{49} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} & d_{58} & d_{59} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

sendo que os elementos da matriz $[d(\xi, \eta)]$ são apresentados no Apêndice B.

Os termos nulos da matriz $[d(\xi, \eta)]$ na Equação 4.54 referem-se às componentes do estado de deformação específica no plano ξ, η .

Finalmente, para a determinação do estado de deformação específica no ponto **Q**, segundo o sistema de referência local, basta, agora, obter as derivadas dos deslocamentos globais **u**, **v** e **w** com relação as coordenadas ξ , η e ζ . Tendo-se em conta as Equações de (3.29) a (3.31), pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i \\ - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \quad (4.63)$$

As equações anteriores podem ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n [G_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

sendo que $[G_i(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (9×5), dada por:

$$[G_i(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \\ 0 & 0 & 0 & N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & 0 & 0 & N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & 0 & N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Substituindo-se a Equação (4.63) na Equação (4.52), segue-se que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [G_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

ou, ainda,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n [B_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (4.67)$$

onde $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (5×5), dada por:

$$[B_i(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{12i} & B_{13i} & \zeta^{\frac{t_i}{2}} B_{14i} & \zeta^{\frac{t_i}{2}} B_{15i} \\ B_{21i} & B_{22i} & B_{23i} & \zeta^{\frac{t_i}{2}} B_{24i} & \zeta^{\frac{t_i}{2}} B_{25i} \\ B_{31i} & B_{32i} & B_{33i} & \zeta^{\frac{t_i}{2}} B_{34i} & \zeta^{\frac{t_i}{2}} B_{35i} \\ B_{41i} & B_{42i} & B_{43i} & \zeta^{\frac{t_i}{2}} B_{44i} + \frac{t_i}{2} C_{44i} & \zeta^{\frac{t_i}{2}} B_{45i} + \frac{t_i}{2} C_{45i} \\ B_{51i} & B_{52i} & B_{53i} & \zeta^{\frac{t_i}{2}} B_{54i} + \frac{t_i}{2} C_{54i} & \zeta^{\frac{t_i}{2}} B_{55i} + \frac{t_i}{2} C_{55i} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Os elementos da matriz $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$ são apresentados no Apêndice B e as expressões das derivadas das funções de forma, no Apêndice A.

A Equação (4.66) pode, ainda, ser dada na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \left[[B_1(\xi, \eta, \zeta)] \quad [B_2(\xi, \eta, \zeta)] \quad \cdots \quad [B_i(\xi, \eta, \zeta)] \quad \cdots \right. \\
 \left. \cdots \quad [B_n(\xi, \eta, \zeta)] \right] \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_n\} \end{Bmatrix} \tag{4.69}$$

ou, de uma maneira compacta,

$$\{\varepsilon'\} = [B] \cdot \{a\} \tag{4.70}$$

onde $\{\varepsilon'\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das deformações específicas e distorções no ponto **Q**, segundo o sistema de referência local, $[B]$ é uma matriz (5×40), para o elemento da família Serendipity e (5×45), para o elemento da família Lagrangeana, constituída das derivadas das funções de forma e $\{a\}$ é uma matriz coluna (40×1), para o elemento da família Serendipity e (45×1), para o elemento da família Lagrangeana, constituída dos deslocamentos nodais: u_i, v_i, w_i, α_i e β_i .

CAPÍTULO 5

FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO DE CASCA

5.1. Introdução

O estado de tensão no ponto Q , genérico, do elemento de casca, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O (Figura 4.2), é o representado na Figura 5.1.

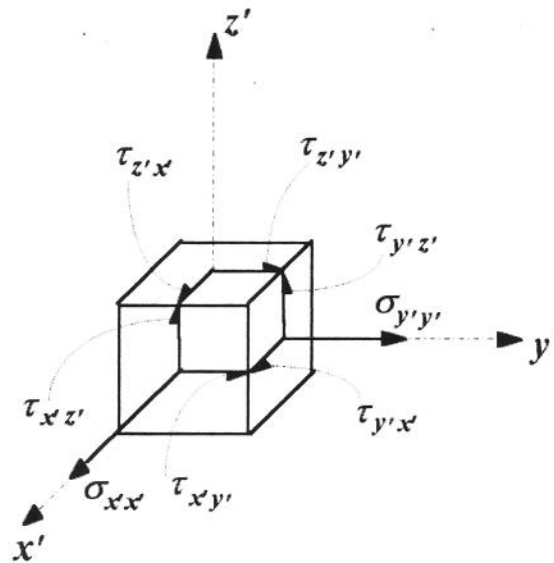


Figura 5.1: Estado de tensão no ponto Q , segundo o sistema de referência local (x', y', z') , associado ao ponto O .

Neste estado de tensão, de acordo com as hipóteses básicas de *Kirchhoff* [3], desconsidera-se a tensão normal na direção perpendicular à superfície média, por ser pequena comparativamente às outras tensões. Assim,

$$\sigma_{z'z'} = 0 \quad (5.1)$$

Admitindo-se que o material do elemento de casca seja homogêneo, isotrópico e de comportamento elástico e linear [15], o estado de deformação específica no ponto \mathbf{Q} , segundo o sistema de referência local (x', y', z') , é dado pela *Lei de Hooke Generalizada* [16]:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{x'x'} - \nu \cdot \sigma_{y'y'}) \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{y'y'} - \nu \cdot \sigma_{x'x'}) \quad (5.3)$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{x'y'} \quad (5.4)$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{x'z'} \quad (5.5)$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{y'z'} \quad (5.6)$$

sendo E o *Módulo de Elasticidade Longitudinal* e ν o *Coefficiente de Poisson* do material. As equações anteriores podem, ainda, ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

ou, de uma maneira compacta,

$$\{\varepsilon'\} = [\phi'] \cdot \{\sigma'\} \quad (5.8)$$

onde $[\phi']$ é uma matriz quadrada (5×5) , simétrica, constituída das constantes elásticas do material e $\{\sigma'\}$ é uma matriz coluna (5×1) , constituída das tensões atuantes no ponto \mathbf{Q} , segundo o

sistema de referência local (x', y', z') . Resolvendo-se a equação anterior para as tensões, tem-se que:

$$\{\sigma'\} = [\phi']^{-1} \cdot \{\varepsilon'\} \quad (5.9)$$

ou, ainda,

$$\{\sigma'\} = [D'] \cdot \{\varepsilon'\} \quad (5.10)$$

sendo que $[D']$ é a inversa da matriz $[\phi']$ e é dada por:

$$[D'] = [\phi']^{-1} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Tendo-se em conta que a distribuição de tensão de cisalhamento ao longo da espessura do elemento de casca não é uniforme, porém, aproximadamente, parabólica [17], introduz-se um fator k de valor igual a $\frac{6}{5}$ nos termos de $[D']$, relacionados com as tensões de cisalhamento $\tau_{x'z'}$ e $\tau_{y'z'}$. Portanto,

$$[D'] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Substituindo-se, agora, a Equação (4.69) na Equação (5.10), obtém-se que:

$$\{\sigma'\} = [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \quad (5.13)$$

5.2. Formulação das características do elemento de casca

Considere-se o elemento de casca submetido a forças de superfície \vec{q} , cujas componentes, com relação aos eixos x' , y' e z' do sistema de referência local sejam, respectivamente, $q_{x'}$, $q_{y'}$ e $q_{z'}$, e, ainda, a forças de corpo \vec{b} , cujas componentes, segundo aquele sistema, sejam $b_{x'}$, $b_{y'}$ e $b_{z'}$. Se os deslocamentos u' , v' e w' , apresentados pelos pontos do elemento, em consequência do carregamento atuante, sofrerem, respectivamente, os incrementos $\delta u'$, $\delta v'$ e $\delta w'$, denominados *deslocamentos virtuais*, o estado de deformação específica nestes pontos, de acordo com as Equações de (4.21) a (4.25), vai apresentar os seguintes incrementos:

$$\delta \varepsilon_{x'} = \frac{\partial \delta u'}{\partial x'} \quad (5.14)$$

$$\delta \varepsilon_{y'} = \frac{\partial \delta v'}{\partial y'} \quad (5.15)$$

$$\delta \gamma_{x'y'} = \frac{\partial \delta u'}{\partial y'} + \frac{\partial \delta v'}{\partial x'} \quad (5.16)$$

$$\delta \gamma_{x'z'} = \frac{\partial \delta u'}{\partial z'} + \frac{\partial \delta w'}{\partial x'} \quad (5.17)$$

$$\delta \gamma_{y'z'} = \frac{\partial \delta v'}{\partial z'} + \frac{\partial \delta w'}{\partial y'} \quad (5.18)$$

denominados *deformações específicas virtuais*. Desta forma, o *trabalho virtual*, δW , executado pelo carregamento externo (forças de superfície e forças de corpo), em consequência dos deslocamentos virtuais, será dado por [12]:

$$\delta W = \int_A \{ \delta u' \}^T \cdot \{ q' \} \cdot dA + \int_V \{ \delta u' \}^T \cdot \{ b' \} \cdot dV \quad (5.19)$$

onde $\{ \delta u' \}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída dos deslocamentos virtuais:

$$\{ \delta u' \} = \begin{Bmatrix} \delta u' \\ \delta v' \\ \delta w' \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

$\{ q' \}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída das componentes das forças de superfície:

$$\{q'\} = \begin{Bmatrix} q_{x'} \\ q_{y'} \\ q_{z'} \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

e $\{b'\}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída das componentes das forças de corpo:

$$\{b'\} = \begin{Bmatrix} b_{x'} \\ b_{y'} \\ b_{z'} \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

A energia de deformação virtual, δU , armazenada no elemento de casca, como consequência do estado de tensão em seus pontos e do estado de deformação específica virtual, correspondente, será dada por [12]:

$$\delta U = \int_V \{\delta \varepsilon'\}^T \cdot \{\sigma'\} \cdot dV \quad (5.23)$$

onde $\{\delta \varepsilon'\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das deformações específicas virtuais:

$$\{\delta \varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_{x'} \\ \delta \varepsilon_{y'} \\ \delta \gamma_{x'y'} \\ \delta \gamma_{x'z'} \\ \delta \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

e $\{\sigma'\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das tensões atuantes nos pontos do elemento, segundo o sistema de referência local:

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

Aplicando-se, agora, o *princípio dos trabalhos virtuais* [12], pode-se escrever que:

$$\delta W = \delta U \quad (5.26)$$

ou, ainda,

$$\int_A \{ \delta \mathbf{u}' \}^T \cdot \{ \mathbf{q}' \} \cdot dA + \int_V \{ \delta \mathbf{u}' \}^T \cdot \{ \mathbf{b}' \} \cdot dV = \int_V \{ \delta \boldsymbol{\varepsilon}' \}^T \cdot \{ \boldsymbol{\sigma}' \} \cdot dV \quad (5.27)$$

A Equação (3.36) fornece os deslocamentos, $\{ \mathbf{u} \}$, dos pontos do elemento de casca, com relação ao sistema de referência global. Necessita-se, entretanto, dos deslocamentos, $\{ \mathbf{u}' \}$, com relação ao sistema de referência local. Estes deslocamentos podem ser obtidos através da seguinte transformação:

$$\{ \mathbf{u}' \} = [\boldsymbol{\theta}]^T \cdot \{ \mathbf{u} \} = [\boldsymbol{\theta}]^T \cdot [\mathbf{N}] \cdot \{ \mathbf{a} \} \quad (5.28)$$

onde $[\boldsymbol{\theta}]$, já foi definido, anteriormente, através da Equação (4.27). Da mesma forma, pode-se escrever que:

$$\{ \mathbf{q}' \} = [\boldsymbol{\theta}]^T \cdot \{ \mathbf{q} \} \quad (5.29)$$

e

$$\{ \mathbf{b}' \} = [\boldsymbol{\theta}]^T \cdot \{ \mathbf{b} \} \quad (5.30)$$

sendo que $\{ \mathbf{q} \}$ e $\{ \mathbf{b} \}$ são, respectivamente, as forças de superfície e as forças de corpo, de acordo com o sistema de referência global.

Tendo-se em conta as Equações (5.28) e (4.69), os deslocamentos virtuais, $\{ \delta \mathbf{u}' \}$ e as deformações específicas virtuais, $\{ \delta \boldsymbol{\varepsilon}' \}$, podem ser dados por [9]:

$$\{ \delta \mathbf{u}' \} = [\boldsymbol{\theta}]^T \cdot [\mathbf{N}] \cdot \{ \delta \mathbf{a} \} \quad (5.31)$$

e

$$\{ \delta \boldsymbol{\varepsilon}' \} = [\mathbf{B}] \cdot \{ \delta \mathbf{a} \} \quad (5.32)$$

onde $\{ \delta \mathbf{a} \}$ é a matriz coluna, constituída dos deslocamentos virtuais correspondentes aos deslocamentos nodais.

Substituindo-se, agora, as Equações (5.13) e (5.32) na Equação (5.27), tem-se que:

$$\int_A \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot [\theta] \cdot [\theta]^T \{q\} \cdot dA + \int_V \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot [\theta] \cdot [\theta]^T \{b\} \cdot dV = \int_V \{\delta a\}^T \cdot [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \cdot dV \quad (5.33)$$

Como $[\theta]$ é uma matriz quadrada e ortonormal, isto é, suas colunas são ortonormais, pode-se escrever que:

$$[\theta] \cdot [\theta]^T = [I] \quad (5.34)$$

sendo $[I]$ a matriz identidade. Assim, a Equação (5.33) torna-se:

$$\int_A \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot \{q\} \cdot dA + \int_V \{\delta a\}^T \cdot [N]^T \cdot \{b\} \cdot dV = \int_V \{\delta a\}^T \cdot [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \cdot dV \quad (5.35)$$

ou, ainda, uma vez que $\{\delta a\}^T$ e $\{a\}$ são constantes para as integrações na área e no volume:

$$\{\delta a\}^T \left(\int_A [N]^T \{q\} dA + \int_V [N]^T \{b\} dV \right) = \{\delta a\}^T \left(\int_V [B]^T [D'] [B] dV \right) \cdot \{a\} \quad (5.36)$$

Como a equação anterior é válida quaisquer que sejam os deslocamentos virtuais $\{\delta a\}$, pode-se escrever que:

$$\int_A [N]^T \{q\} dA + \int_V [N]^T \{b\} dV = \left(\int_V [B]^T [D'] [B] dV \right) \cdot \{a\} \quad (5.37)$$

Nesta equação,

$$\int_A [N]^T \{q\} dA = \{f_q^e\} \quad (5.38)$$

é uma matriz coluna de ordem (40×1) , para o elemento da família Serendipity e (45×1) , para o elemento da família Lagrangeana, que corresponde às forças de superfície,

$$\int_V [N]^T \{b\} dV = \{f_b^e\} \quad (5.39)$$

é uma matriz coluna de ordem (40×1) , para o elemento da família Serendipity e (45×1) , para o elemento da família Lagrangeana, que corresponde às forças de corpo e

$$\int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}'] [\mathbf{B}] dV = [\mathbf{K}^e] \quad (5.40)$$

é uma matriz quadrada, simétrica, de ordem (40×40) , para o elemento da família Serendipity e (45×45) , para o elemento da família Lagrangeana, denominada *matriz de rigidez* do elemento de casca. Desta forma, a Equação (5.37) pode ser reescrita como se segue:

$$[\mathbf{K}^e] \cdot \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{f}_q^e\} + \{\mathbf{f}_b^e\} = \{\mathbf{f}^e\} \quad (5.41)$$

onde $\{\mathbf{f}^e\}$ é, portanto, o vetor de carga do elemento correspondente às ações das forças de superfície e de corpo.

5.3. Determinação da matriz de rigidez do elemento de casca

Na Equação (5.40), que possibilita determinar a matriz de rigidez do elemento, o diferencial de volume é dado com relação ao sistema de referência global. Portanto,

$$dV = dx dy dz \quad (5.42)$$

Como os termos de $[\mathbf{B}]$ são funções das coordenadas curvilíneas ξ e η e da coordenada linear ζ , o diferencial de volume deve ser dado segundo este sistema de referência; para efetuar esta transformação, será utilizado um procedimento padrão, que envolve o determinante, $|J(\xi, \eta)|$, da matriz Jacobiano, dado através da Equação (4.20). Assim [13],

$$dV = |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.43)$$

e a Equação (5.40) pode ser reescrita como se segue:

$$[\mathbf{K}^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}'] [\mathbf{B}] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.44)$$

ou, ainda, pela substituição da matriz $[\mathbf{B}]$, dada a partir das Equações (4.68) e (4.69), tem se que:

$$\begin{aligned}
 [K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \begin{bmatrix} [B_1(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ [B_2(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_i(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_n(\xi, \eta, \zeta)]^T \end{bmatrix} [D'] \left[[B_1(\xi, \eta, \zeta)] \quad [B_2(\xi, \eta, \zeta)] \quad \dots \right. \\
 & \left. [B_j(\xi, \eta, \zeta)] \quad \dots \quad [B_n(\xi, \eta, \zeta)] \right] |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

Esta equação, uma vez resolvida, levará à matriz de rigidez do elemento, que será dada por:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & \dots & [K_{1j}] & \dots & [K_{1n}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & \dots & [K_{2j}] & \dots & [K_{2n}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{i1}] & [K_{i2}] & \dots & [K_{ij}] & \dots & [K_{in}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{n1}] & [K_{n2}] & \dots & [K_{nj}] & \dots & [K_{nn}] \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

5.3.1. Determinação da submatriz $[K_{ij}]$

De acordo com a Equação (5.45), a submatriz $[K_{ij}]$ será dada pela seguinte expressão:

$$[K_{ij}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i(\xi, \eta, \zeta)]^T [D'] [B_j(\xi, \eta, \zeta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.47)$$

ou, ainda, tendo-se em conta as Equações (4.67) e (5.12):

$$\begin{aligned}
 [K_{ij}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{21i} & B_{31i} & B_{41i} \\ B_{12i} & B_{22i} & B_{32i} & B_{42i} \\ B_{13i} & B_{23i} & B_{33i} & B_{43i} \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{14i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{44i} + \frac{t_i}{2} C_{44i} \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{15i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{45i} + \frac{t_i}{2} C_{45i} \end{bmatrix} \\
 &\cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11j} & B_{12j} \\ B_{21j} & B_{22j} \\ B_{31j} & B_{32j} \\ B_{41j} & B_{42j} \\ B_{51j} & B_{52j} \end{bmatrix} \\
 &\cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \\
 &\begin{bmatrix} B_{13j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{14j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{15j} \\ B_{23j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25j} \\ B_{33j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35j} \\ B_{43j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{44j} + \frac{t_i}{2} C_{44j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{45j} + \frac{t_i}{2} C_{45j} \\ B_{53j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{54j} + \frac{t_i}{2} C_{54j} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{55j} + \frac{t_i}{2} C_{55j} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \tag{5.48}
 \end{aligned}$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se que:

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

onde

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{21j} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{41j} + B_{51i} \cdot B_{51j}) \right\} \cdot \\
 &\quad |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \tag{5.50}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{21} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{21j} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{41j} + B_{52i} \cdot B_{51j}) \right\} \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned}
k_{31} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{21j} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{41j} + B_{53i} \cdot B_{51j}) \right\} \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned}
k_{41} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot \right. \\
& B_{21j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{31j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{44i} \cdot B_{41j} + B_{54i} \cdot B_{51j}) \\
& \left. + (C_{44i} \cdot B_{41j} + C_{54i} \cdot B_{51j})] \right\} \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned}
k_{51} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot \right. \\
& B_{21j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{31j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{45i} \cdot B_{41j} + B_{55i} \cdot B_{51j}) \\
& \left. + (C_{45i} \cdot B_{41j} + C_{55i} \cdot B_{51j})] \right\} \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned}
k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{22j} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{42j} + B_{51i} \cdot B_{52j}) \right\} \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned}
 k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{22j} \right. \\
 \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{42j} + B_{52i} \cdot B_{52j}) \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{22j} \right. \\
 \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{42j} + B_{53i} \cdot B_{52j}) \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{42} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot \right. \\
 \left. B_{22j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{32j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{44i} \cdot B_{42j} + B_{54i} \cdot B_{52j}) \right. \\
 \left. + (C_{44i} \cdot B_{42j} + C_{54i} \cdot B_{52j})] \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.58)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{52} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot \right. \\
 \left. B_{22j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{32j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{45i} \cdot B_{42j} + B_{55i} \cdot B_{52j}) \right. \\
 \left. + (C_{45i} \cdot B_{42j} + C_{55i} \cdot B_{52j})] \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.59)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{23j} \right. \\
 \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{43j} + B_{51i} \cdot B_{53j}) \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.60)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{23j} \right. \\
 \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{43j} + B_{52i} \cdot B_{53j}) \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.61)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{23j} \right. \\
 \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{43j} + B_{53i} \cdot B_{53j}) \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.62)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{43} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot \right. \\
 \left. B_{23j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{33j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{44i} \cdot B_{43j} + B_{54i} \cdot B_{53j}) \right. \\
 \left. + (C_{44i} \cdot B_{43j} + C_{54i} \cdot B_{53j})] \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.63)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{53} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot \right. \\
 \left. B_{23j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{33j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{45i} \cdot B_{43j} + B_{55i} \cdot B_{53j}) \right. \\
 \left. + (C_{45i} \cdot B_{43j} + C_{55i} \cdot B_{53j})] \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.64)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{14} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot \right. \\
 \left. B_{24j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{41i} \cdot B_{44j} + B_{51i} \cdot B_{54j}) \right. \\
 \left. + (B_{41i} \cdot C_{44j} + B_{51i} \cdot C_{54j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.65)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{24} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \right. \\
\cdot B_{24j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{42i} \cdot B_{44j} + B_{52i} \cdot B_{54j}) \\
\left. + (B_{42i} \cdot C_{44j} + B_{52i} \cdot C_{54j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{34} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \right. \\
\cdot B_{24j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{43i} \cdot B_{44j} + B_{53i} \cdot B_{54j}) \\
\left. + (B_{43i} \cdot C_{44j} + B_{53i} \cdot C_{54j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{44} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \right. \\
\cdot B_{24j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{44i} \cdot B_{44j} + B_{54i} \cdot B_{54j}) \\
+ \zeta(B_{44i} \cdot C_{44j} + B_{54i} \cdot C_{54j}) + (C_{44i} \cdot C_{44j} + C_{54i} \cdot C_{54j})] \\
\left. + \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta(C_{44i} \cdot B_{44j} + C_{54i} \cdot B_{54j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{54} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \right. \\
\cdot B_{24j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{45i} \cdot B_{44j} + B_{55i} \cdot B_{54j}) \\
+ \zeta(B_{45i} \cdot C_{44j} + B_{55i} \cdot C_{54j}) + (C_{45i} \cdot C_{44j} + C_{55i} \cdot C_{54j})] \\
\left. + \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta(C_{45i} \cdot B_{44j} + C_{55i} \cdot B_{54j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{15} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \right. \\
\cdot B_{25j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{41i} \cdot B_{45j} + B_{51i} \cdot B_{55j}) \\
\left. + (B_{41i} \cdot C_{45j} + B_{51i} \cdot C_{55j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{25} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \right. \\
\cdot B_{25j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{42i} \cdot B_{45j} + B_{52i} \cdot B_{55j}) \\
\left. + (B_{42i} \cdot C_{45j} + B_{52i} \cdot C_{55j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{35} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \right. \\
\cdot B_{25j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{43i} \cdot B_{45j} + B_{53i} \cdot B_{55j}) \\
\left. + (B_{43i} \cdot C_{45j} + B_{53i} \cdot C_{55j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{45} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \right. \\
\cdot B_{25j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{44i} \cdot B_{45j} + B_{54i} \cdot B_{55j}) \\
+ \zeta(B_{44i} \cdot C_{45j} + B_{54i} \cdot C_{55j}) + (C_{44i} \cdot C_{45j} + C_{54i} \cdot C_{55j})] \\
\left. + \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta(C_{44i} \cdot B_{45j} + C_{54i} \cdot B_{55j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{55} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \right. \\
\cdot B_{25j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{45i} \cdot B_{45j} + B_{55i} \cdot B_{55j}) \\
+ \zeta(B_{45i} \cdot C_{45j} + B_{55i} \cdot C_{55j}) + (C_{45i} \cdot C_{45j} + C_{55i} \cdot C_{55j})] \\
\left. + \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta(C_{45i} \cdot B_{45j} + C_{55i} \cdot B_{55j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.74)
\end{aligned}$$

Na obtenção da matriz de rigidez, a integração na direção ζ será feita analiticamente, enquanto que nas outras duas direções, ξ e η , a integração será numérica, utilizando-se o processo da *quadratura de Gauss* [9]. Portanto, tendo-se em conta que:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 d\zeta &= 2 \\ \int_{-1}^1 \zeta \cdot d\zeta &= 0 \\ \int_{-1}^1 \zeta^2 \cdot d\zeta &= \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{5.75}$$

e, ainda, considerando-se que ξ_p e η_p sejam as coordenadas curvilíneas do ponto de integração p , W_p , o fator de ponderação, associado a este ponto e m , o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se [9]:

$$\begin{aligned} k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \right. & \cdot [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11j}(\xi_p, \eta_p) \\ & + (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21j}(\xi_p, \eta_p) \\ & + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \\ & \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \\ & \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \end{aligned} \tag{5.76}$$

$$\begin{aligned} k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \right. & \cdot [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11j}(\xi_p, \eta_p) \\ & + (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21j}(\xi_p, \eta_p) \\ & + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \\ & \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \\ & \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \end{aligned} \tag{5.77}$$

$$\begin{aligned} k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^m \frac{2}{(1-\nu^2)} & \cdot [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11j}(\xi_p, \eta_p) \\ & + (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21j}(\xi_p, \eta_p) \\ & + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \\ & \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \\ & \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \end{aligned} \tag{5.78}$$

$$k_{41} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.79)$$

$$k_{51} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.80)$$

$$k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.81)$$

$$k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.82)$$

$$k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^m \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.83)$$

$$k_{42} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.84)$$

$$k_{52} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.85)$$

$$k_{13} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.86)$$

$$k_{23} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.87)$$

$$k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.88)$$

$$k_{43} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.89)$$

$$k_{53} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.90)$$

$$k_{14} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.91)$$

$$k_{24} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.92)$$

$$k_{34} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned} k_{44} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{14j}(\xi_p, \eta_p) \right. \\ \left. + (\nu B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{24j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i}(\xi_p, \eta_p) \right. \\ \left. \cdot B_{34j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{44j}(\xi_p, \eta_p) \right. \\ \left. + B_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{54j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \right. \\ \left. C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.94) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{54} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{14j}(\xi_p, \eta_p) \right. \\
+ (\nu B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{24j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i}(\xi_p, \eta_p) \\
\cdot B_{34j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{44j}(\xi_p, \eta_p) \\
+ B_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{54j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{15} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \\
\cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.96)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{25} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \\
\cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{35} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \\
\cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.98)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{45} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{15j}(\xi_p, \eta_p) \right. \\
+ (\nu B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{25j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i}(\xi_p, \eta_p) \\
\cdot B_{35j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{45j}(\xi_p, \eta_p) \\
+ B_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{55j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.99)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{55} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{15j}(\xi_p, \eta_p) \right. \\
 + (\nu B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{25j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i}(\xi_p, \eta_p) \\
 \cdot B_{35j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{45j}(\xi_p, \eta_p) \\
 + B_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{55j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.100)
 \end{aligned}$$

5.4. Determinação do vetor de carga do elemento de casca: $\{f^e\}$

Nas Equações (5.38) e (5.39), que possibilitam determinar o vetor de carga do elemento, o diferencial de volume, assim como, o diferencial de área são dados com relação ao sistema de referência global. Contudo, uma vez que os elementos da matriz $[N]$ são funções das coordenadas curvilíneas, os diferenciais de volume e de área devem ser dados segundo este sistema de referência; o diferencial de volume já foi estabelecido, anteriormente, através da Equação (5.43) e para a obtenção do diferencial de área, utiliza-se o procedimento padrão, que envolve o módulo, $\|\bar{r}_3(\xi, \eta)\|$, do vetor $\bar{r}_3(\xi, \eta)$, normal à superfície média; este módulo é dado a partir da Equação (2.23). Portanto [13],

$$dA = \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.101)$$

5.4.1. Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento: $\{f_q^e\}$

Admitindo-se, por simplicidade, que a carga esteja distribuída na superfície média do elemento, onde $\zeta = 0$, os deslocamentos de interesse serão aqueles relacionados com os pontos desta superfície. Assim, a submatriz $[N_i(\xi, \eta, \zeta)]$, apresentada na Equação (3.33) e que compõe a matriz $[N]$ da Equação (5.38), torna-se:

$$[N_i(\xi, \eta, \zeta)] = [N_i(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

Se, por outro lado, \bar{q}_i de componentes q_{xi}, q_{yi} e q_{zi} , segundo o sistema de referência global, é a carga distribuída associada ao nó i , a carga \bar{q} , distribuída na superfície média do elemento, pode

ser interpolada a partir das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$, dadas pelas Equações de (2.4) a (2.6), para o elemento da família Serendipity e pelas Equações de (2.7) a (2.10), para o elemento da família Lagrangeana. Portanto,

$$\bar{q}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{q}_i \tag{5.103}$$

Chamando-se de q_x, q_y e q_z as componentes de \bar{q} , segundo o sistema de referência global, esta equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\bar{q}(\xi, \eta) = \{q(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} q_x(\xi, \eta) \\ q_y(\xi, \eta) \\ q_z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{zi} \end{Bmatrix} \tag{5.104}$$

ou, ainda,

$$q_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot q_{xi} \tag{5.105}$$

$$q_y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot q_{yi} \tag{5.106}$$

$$q_z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot q_{zi} \tag{5.107}$$

Se $\{q_i\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das componentes, segundo o sistema de referência global, da carga distribuída relativa ao nó i :

$$\{q_i\} = \begin{Bmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{zi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.108}$$

as equações anteriores podem ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\{q(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} q_x(\xi, \eta) \\ q_y(\xi, \eta) \\ q_z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \left[[N_1(\xi, \eta)] \quad \dots \quad [N_i(\xi, \eta)] \quad \dots \quad [N_n(\xi, \eta)] \right] \cdot \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \vdots \\ \{q_i\} \\ \vdots \\ \{q_n\} \end{Bmatrix} \quad (5.109)$$

Tendo-se, agora, em conta as Equações (5.101), (5.102) e (5.109), a Equação (5.38) será dada por:

$$\{f_q^e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} [N_1(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [N_i(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [N_n(\xi, \eta)]^T \end{Bmatrix} \cdot \left[[N_1(\xi, \eta)] \quad \dots \quad [N_j(\xi, \eta)] \quad \dots \quad [N_n(\xi, \eta)] \right] \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \vdots \\ \{q_j\} \\ \vdots \\ \{q_n\} \end{Bmatrix} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.110)$$

Esta equação, uma vez resolvida levará ao vetor de carga do elemento, correspondente à ação da carga distribuída sobre suas faces externas:

$$\{f_q^e\} = \begin{Bmatrix} \{f_{q1}\} \\ \vdots \\ \{f_{qi}\} \\ \vdots \\ \{f_{qn}\} \end{Bmatrix} \quad (5.111)$$

5.4.1.1. Determinação da submatriz $\{f_{qi}\}$

A submatriz $\{f_{qi}\}$ está relacionada com o nó i , genérico, do elemento de casca e é dada por:

$$\{f_{qi}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_i(\xi, \eta)]^T \cdot \sum_{j=1}^n [N_j(\xi, \eta)] \cdot \{q_j\} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.112)$$

ou, ainda, considerando-se as Equações (5.102) e (5.108):

$$\{f_{qi}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{xj} \\ q_{yj} \\ q_{zj} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.113)$$

Resolvendo-se esta equação, obtém-se que:

$$\{f_{qi}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.114)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) \cdot \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta) \cdot q_{xj} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.115)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) \cdot \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta) \cdot q_{yj} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.116)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) \cdot \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta) \cdot q_{zj} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.117)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.118)$$

Fazendo-se, agora, a integração numérica nas direções ξ e η , com m , sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = \sum_{p=1}^m N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{j=1}^n N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{xj} \cdot \|\bar{r}_3(\xi_p, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (5.119)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^m N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{j=1}^n N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{yj} \cdot \|\bar{r}_3(\xi_p, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (5.120)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^m N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{j=1}^n N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{zj} \cdot \|\bar{r}_3(\xi_p, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (5.121)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \tag{5.122}$$

5.4.2. Determinação do vetor de carga correspondente à ação das forças de corpo: $\{f_b^e\}$

Se b_x, b_y e b_z são as componentes da força se corpo \vec{b} , segundo o sistema de referência global, a Equação (5.39) pode, tendo-se em conta as Equações (3.35) e (5.43), ser escrita como se segue:

$$\{f_b^e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [N_1(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_i(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_n(\xi, \eta, \zeta)]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \tag{5.123}$$

e, uma vez resolvida, vai determinar o vetor de carga do elemento correspondente à ação das forças de corpo:

$$\{f_b^e\} = \begin{Bmatrix} \{f_{b1}\} \\ \vdots \\ \{f_{bi}\} \\ \vdots \\ \{f_{bn}\} \end{Bmatrix} \tag{5.124}$$

5.4.2.1. Determinação da submatriz $\{f_{bi}\}$

A submatriz $\{f_{bi}\}$ está relacionada com o nó i , genérico, do elemento de casca e é dada por:

$$\{f_{bi}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta) \\ \zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & \zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & \zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \\ -\zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} & -\zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} & -\zeta \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \tag{5.125}$$

Resolvendo-se esta equação, obtém-se que:

$$\{f_{bi}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.126)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) \cdot b_x \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.127)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) \cdot b_y \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.128)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) \cdot b_z \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.129)$$

$$f_4 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot (v_{11i}b_x + v_{12i}b_y + v_{13i}b_z) \right] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.130)$$

$$f_5 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[-\zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot N_i(\xi, \eta) \cdot (v_{21i}b_x + v_{22i}b_y + v_{23i}b_z) \right] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.131)$$

Fazendo-se, agora, a integração analítica na direção ζ (Equação (5.75)) e a integração numérica nas direções ξ e η , com m , sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = 2 \cdot \sum_{p=1}^m N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot b_x \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.132)$$

$$f_2 = 2 \cdot \sum_{p=1}^m N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot b_y \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.133)$$

$$f_3 = 2 \cdot \sum_{p=1}^m N_i(\xi_p, \eta_p) \cdot b_z \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.134)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.135)$$

CAPÍTULO 6

FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA

6.1. Introdução

Tendo sido encontradas as equações algébricas (Equação (5.41)), que descrevem as características de cada elemento do sistema estrutural em análise, o próximo passo é combiná-las para formar um conjunto completo de equações, que governe a reunião de todos os elementos. O procedimento de montagem deste conjunto de equações é baseado na necessidade de que o *equilíbrio* se verifique por todo o sistema. Como as condições de equilíbrio já foram impostas dentro de cada elemento (utilização do princípio dos trabalhos virtuais), necessita-se, agora, estabelecer as condições para que cada nó do sistema discretizado esteja em equilíbrio. Para tanto, é estabelecido um esquema de numeração global, que identifica cada nó k do sistema discretizado; em seguida, é criada a *topologia*, que especifica quais nós do sistema pertencem a quais elementos, ou seja, especifica a correspondência entre os nós k do sistema discretizado e os nós i dos elementos. Esta topologia, dada como uma entrada no programa computacional, serve para definir a *conectividade* da malha de elementos. Desta forma, para que um nó k , genérico, do sistema esteja em equilíbrio, as componentes do vetor de carga $\{f_k\}$, nele atuantes, devem ser iguais à soma das componentes das forças $\{f_k^e\}$ de cada elemento, que concorre para o nó k .

Portanto,

$$\{f_k\} = \sum_{e=1}^{n_e} \{f_k^e\} \quad (6.1)$$

onde n_e é o número total de elementos, que compõem o sistema estrutural discretizado.

Tendo-se em conta a Equação (5.41) e conhecendo-se a correspondência entre os nós dos elementos e os nós do sistema, pode-se escrever a seguinte equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \{f_1^e\} \\ \vdots \\ \{f_k^e\} \\ \vdots \\ \{f_s^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}^e] & \cdots & [K_{1k}^e] & \cdots & [K_{1s}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{k1}^e] & \cdots & [K_{kk}^e] & \cdots & [K_{ks}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{s1}^e] & \cdots & [K_{sk}^e] & \cdots & [K_{ss}^e] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \vdots \\ \{a_k\} \\ \vdots \\ \{a_s\} \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

onde s é o número total de nós do sistema discretizado, $\{a_1\}, \dots, \{a_k\}, \dots, \{a_s\}$ são os deslocamentos nodais correspondentes, $\{f_1^e\}, \dots, \{f_k^e\}, \dots, \{f_s^e\}$, as forças relativas ao elemento e , atuantes em cada nó do sistema e $[K_{11}^e], \dots, [K_{kk}^e], \dots, [K_{ss}^e]$, as submatrizes da matriz de rigidez do elemento e , relacionadas com os nós do sistema discretizado.

Resolvendo-se, agora, a Equação (6.2) para as forças nos nós, tem-se que:

$$\{f_1^e\} = [K_{11}^e] \cdot \{a_1\} + \cdots + [K_{1k}^e] \cdot \{a_k\} + \cdots + [K_{1s}^e] \cdot \{a_s\} \quad (6.3)$$

$$\{f_k^e\} = [K_{k1}^e] \cdot \{a_1\} + \cdots + [K_{kk}^e] \cdot \{a_k\} + \cdots + [K_{ks}^e] \cdot \{a_s\} \quad (6.4)$$

$$\{f_s^e\} = [K_{s1}^e] \cdot \{a_1\} + \cdots + [K_{sk}^e] \cdot \{a_k\} + \cdots + [K_{ss}^e] \cdot \{a_s\} \quad (6.5)$$

6.2. Determinação da matriz de rigidez global e do vetor de carga global

Substituindo-se as equações anteriores na Equação (6.1) para cada nó do sistema discretizado e notando-se que os deslocamentos nodais do sistema dependem apenas dos nós e não dos elementos, pode-se escrever que:

$$\{f_1\} = \sum_{e=1}^{n_e} \{f_1^e\} = \left(\sum_{e=1}^{n_e} [K_{11}^e] \right) \cdot \{a_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^{n_e} [K_{1k}^e] \right) \cdot \{a_k\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^{n_e} [K_{1s}^e] \right) \cdot \{a_s\} \quad (6.6)$$

$$\{f_k\} = \sum_{e=1}^{n_e} \{f_k^e\} = \left(\sum_{e=1}^{n_e} [K_{k1}^e] \right) \cdot \{a_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^{n_e} [K_{kk}^e] \right) \cdot \{a_k\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^{n_e} [K_{ks}^e] \right) \cdot \{a_s\} \quad (6.7)$$

$$\{f_s\} = \sum_{e=1}^{n_e} \{f_s^e\} = \left(\sum_{e=1}^{n_e} [K_{s1}^e] \right) \cdot \{a_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^{n_e} [K_{sk}^e] \right) \cdot \{a_k\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^{n_e} [K_{ss}^e] \right) \cdot \{a_s\} \quad (6.8)$$

As equações anteriores podem, ainda, ser dadas na forma matricial compacta, que se apresenta a seguir:

$$\{f\} = [K] \cdot \{a\} \tag{6.9}$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez global do sistema estrutural discretizado:

$$[K] = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{n_e} [K_{11}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n_e} [K_{1k}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n_e} [K_{1s}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{e=1}^{n_e} [K_{k1}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n_e} [K_{kk}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n_e} [K_{ks}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{e=1}^{n_e} [K_{s1}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n_e} [K_{sk}^e] & \cdots & \sum_{e=1}^{n_e} [K_{ss}^e] \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

$\{f\}$, o vetor de carga global, correspondente às forças de superfície e forças de corpo:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \sum_{e=1}^{n_e} \{f_1^e\} \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^{n_e} \{f_k^e\} \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^{n_e} \{f_s^e\} \end{Bmatrix} \tag{6.11}$$

e $\{a\}$, o vetor constituído dos deslocamentos nodais do sistema discretizado:

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \vdots \\ \{a_k\} \\ \vdots \\ \{a_s\} \end{Bmatrix} \tag{6.12}$$

Este procedimento de obtenção da matriz de rigidez global e do vetor de carga global é denominado *superposição*. O algoritmo, desenvolvido neste trabalho, possibilita que tão logo seja encontrado um coeficiente da matriz de rigidez ou do vetor de carga, ele possa ser colocado, imediatamente, na posição apropriada das respectivas matrizes.

Se, eventualmente, além das forças de superfície e das forças de corpo, atuarem, também, forças concentradas, o vetor de carga global será dado por:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \sum_{e=1}^{n_e} \{f_l^e\} + \{r_l\} \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^{n_e} \{f_k^e\} + \{r_k\} \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^{n_e} \{f_s^e\} + \{r_s\} \end{Bmatrix} \quad (6.13)$$

onde $\{r_k\}$ é o vetor constituído das componentes, segundo o sistema de referência global, da força concentrada, atuante no nó k , genérico, do sistema estrutural discretizado e que é dado por:

$$\{r_k\} = \begin{Bmatrix} r_{kx} \\ r_{ky} \\ r_{kz} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

Tendo-se encontrado as características do sistema estrutural discretizado (matriz de rigidez global e vetor de carga global), deve-se, a seguir, resolver o sistema de equações lineares, obtido a partir da Equação (6.9). Entretanto, este sistema só pode ser resolvido para os deslocamentos nodais $\{a\}$, após a imposição das condições de contorno do sistema estrutural em análise. Este procedimento é efetuado por ocasião da determinação da matriz de rigidez global e do vetor de carga global, onde, para cada condição de contorno (vínculo), são eliminados da matriz de rigidez global a linha e a coluna correspondentes e do vetor de carga global, a linha correspondente. Desta forma, o sistema de equações resultante pode, então, ser resolvido através de diversos métodos numéricos, tais como, *Gauss*, *Crout*, *Cholesky*, *Doolittle*, etc. Neste trabalho, utilizou-se o Método da decomposição $[L][D][L]^T$.

6.3. Armazenamento "Skyline" da Matriz de Rigidez Global

O procedimento a ser adotado no armazenamento da matriz de rigidez global é de fundamental importância na implementação computacional do método dos elementos finitos, uma vez que se executado, adequadamente, reduz o tempo computacional gasto na montagem e resolução do sistema de equações.

Neste trabalho utilizou-se o método "Skyline", que é propício ao armazenamento das matrizes geradas pelo método dos elementos finitos [5], já que este método produz matrizes

6.4. Resolução do Sistema de Equações

A resolução do sistema de equações lineares é efetuada pela eliminação gaussiana da matriz de rigidez global, através da decomposição $[L][D][L]^T$ desta matriz global e pela substituição reversa, realizada na sequência.

6.4.1. Decomposição $[L][D][L]^T$ da Matriz de Rigidez Global

A resolução do sistema de equações lineares utiliza a decomposição da matriz de rigidez global $[K]$ na matriz $[L][D][L]^T$, onde $[L]$ é uma matriz triangular inferior e $[D]$, uma matriz diagonal [5]. Esta decomposição baseia-se na eliminação gaussiana.

A matriz $[K]$ pode, então, ser decomposta em :

$$[K] = [L][D][L]^T \quad (6.15)$$

onde : $[L]$ é a matriz triangular inferior definida como :

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

e $[D]$ é a matriz diagonal, dada por :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Substituindo-se as matrizes $[L]$ e $[D]$ na equação (6.15) e realizando o produto matricial indicado, tem-se que :

$$[K'] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & d_n \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

6.4.2 - Substituição reversa

Uma vez realizada a decomposição $[L][D][L]^T$, ou seja, tendo-se os coeficientes das matrizes $[L]$ e $[D]$, o vetor de carga $\{f\}$ necessita ser reduzido da seguinte maneira :

$$f'_1 = f_1 \quad (6.24)$$

e para $i=2, \dots, n$

$$f'_i = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki} f_k \quad (6.25)$$

O vetor reduzido $\{f'\}$ é armazenado no mesmo local onde era armazenado o vetor $\{f\}$, isto é realizado de forma a economizar espaço destinado ao armazenamento das variáveis.

Para encontrar os valores dos deslocamentos nodais $\{a\}$, ou seja, para resolver o sistema de equações descrito na equação (6.9), deve-se proceder a substituição reversa, que é realizada pela seguinte equação :

$$[L]\{a\} = [D]^{-1}\{f'\} \quad (6.26)$$

Portanto, a substituição reversa é obtida através das equações apresentadas a seguir :

$$\bar{f}_k^{(i-1)} = \bar{f}_k^{(i)} - l_{ki} a_i \quad k = 1, \dots, i-1 \quad (6.27)$$

$$x_{i-1} = \bar{f}_k^{(i-1)} \quad (6.28)$$

Deve-se observar que o vetor \bar{f}'_k é armazenado na mesma posição em que, antes, era armazenado o vetor $\{f'\}$, ou seja, na mesma localização original do vetor $\{f\}$.

6.5. Programa Computacional

A partir das equações estabelecidas nos Capítulos anteriores, desenvolveu-se um programa computacional em linguagem C para a análise de placas e cascas, considerando-se os elementos das famílias Lagrangeana e Serendipity. Originalmente, o programa foi desenvolvido para rodar em computadores PC com sistema operacional DOS; entretanto, com algumas pequenas modificações é possível utilizá-lo em estações de trabalho, que rodem o sistema operacional UNIX.

O fluxograma de funcionamento do programa encontra-se na Figura 6.2. O programa foi montado de forma que as rotinas fossem divididas em sub-rotinas, chamadas por um programa principal. Foi utilizado, também, o sistema de alocação dinâmica de memória, onde o vetor é alocado, a qualquer momento, no tamanho necessário e, após a sua utilização, o mesmo é desalocado, deixando este espaço de memória livre para utilização de outras variáveis [25]. As variáveis utilizadas em matrizes foram todas alocadas em vetores, utilizando desta maneira, para as matrizes simétricas, apenas a quantidade de memória suficiente para armazenamento do triângulo superior.

O primeiro passo realizado pelo programa é a leitura dos dados de entrada do modelo: coordenadas nodais, incidência dos nós, propriedades do material, tipo e valores dos carregamentos e as restrições nodais.

Com estas informações, passa-se à montagem das matrizes dos elementos. Para a montagem destas matrizes, executam-se vários passos (estes passos devem ser realizados dentro de um processo em ciclo variando de 1 até o número total de elementos):

- Cálculo das funções de forma para os nós e para os pontos de integração ;
- Cálculo dos vetores e dos versores nos nós e pontos de integração (tangentes e perpendiculares à superfície média);
- Cálculo do Jacobiano, da matriz $[A]$ e da matriz $[d]$ para cada ponto de integração;
- Cálculo da matriz $[B_i]$ para os pontos de integração;
- Cálculo da matriz de rigidez do elemento $[K^e]$;
- Cálculo do vetor de carga do elemento $\{f^e\}$;

Após o término da montagem das matrizes dos elementos, o próximo passo é o cálculo da altura das colunas da matriz de rigidez global para a sua montagem na forma "Skyline". Calculada as alturas das colunas é, então, calculado o vetor $\{MAXA\}$ e, posteriormente, a matriz de rigidez global na forma "Skyline". Para completar a montagem das equações do sistema, necessita-se, ainda, montar o vetor de carga global. Na sequência, pode-se, então, resolver o sistema de equações lineares e, a seguir, imprimir os resultados. Cabe ressaltar que a eliminação dos graus de liberdade restritos é realizada na ocasião da montagem do vetor de carga global e da matriz de rigidez global.

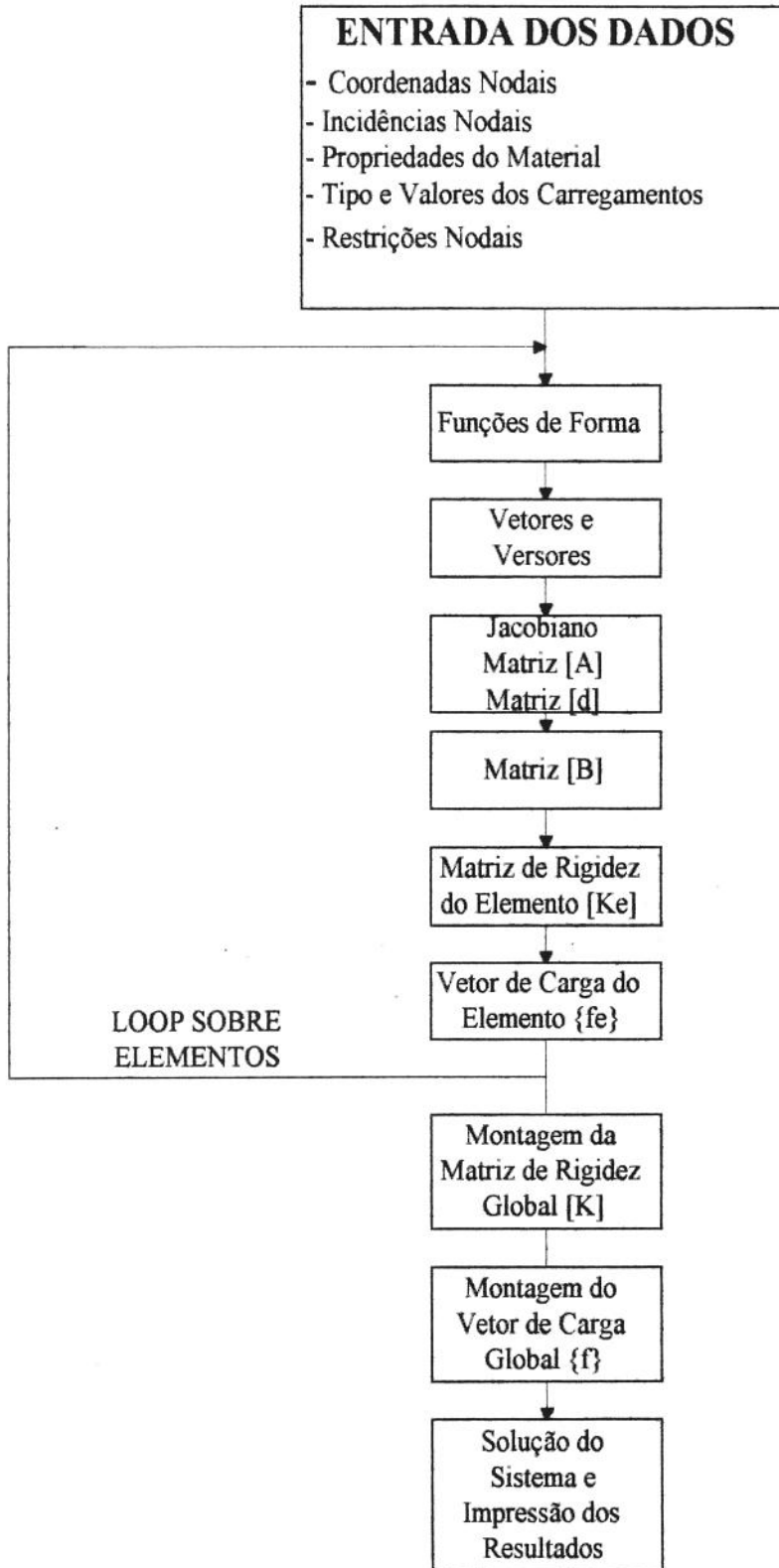


Figura 6.2 - Fluxograma do Programa Computacional.

CAPÍTULO 7

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

7.1. Introdução

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos a partir dos elementos isoparamétricos, quadrilaterais, quadráticos, das famílias Serendipity e Lagrangeana com *integração numérica consistente*, onde o número m de pontos de integração na superfície média é igual a nove (3×3). Os resultados se referem à análise estática de placas e cascas, utilizando-se diversas configurações de condições de contorno, condições de carregamento (propostas na literatura [27], [28]), relações t/a (entre espessura e dimensão característica) e malhas de discretização regulares e distorcidas (as distorções provocadas nas malhas de discretização são adaptadas das propostas na referência [29]). Foram analisadas as malhas distorcidas pelo fato de que as matrizes geradas por esta malha são mal condicionadas. Estes resultados são comparados com aqueles obtidos através de outras formulações disponíveis na literatura, como também, com resultados obtidos a partir de soluções analíticas.

7.2. Placa quadrada

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se, apenas, um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização regular e distorcida, de 2×2 elementos (Figura 7.1), para o caso de placa simplesmente apoiada e de 3×3 elementos (Figura 7.2), para o caso de placa engastada e placa submetida à carga concentrada.

Como resultado, apresenta-se a deflexão no centro da placa, w_c , normalizada com relação ao fator $\frac{qa^4}{D}$, para o caso de carga uniformemente distribuída, $\frac{Pa^2}{D}$, para o caso de carga concentrada e $\frac{q_0 a^4}{D}$, para o caso de carga distribuída senoidal. Nestas expressões, q é o valor da

carga uniformemente distribuída, P , o valor da carga concentrada no nó central, q_0 , o valor da carga distribuída senoidal no nó central, a , o lado da placa e D , sua rigidez, que é dada por [1]:

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} \tag{7.1}$$

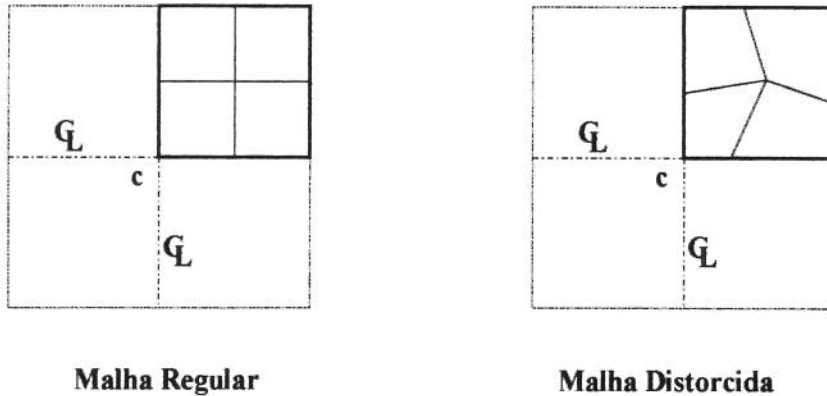


Figura 7.1: Malha de discretização de 2x2 elementos de um quarto da placa quadrada

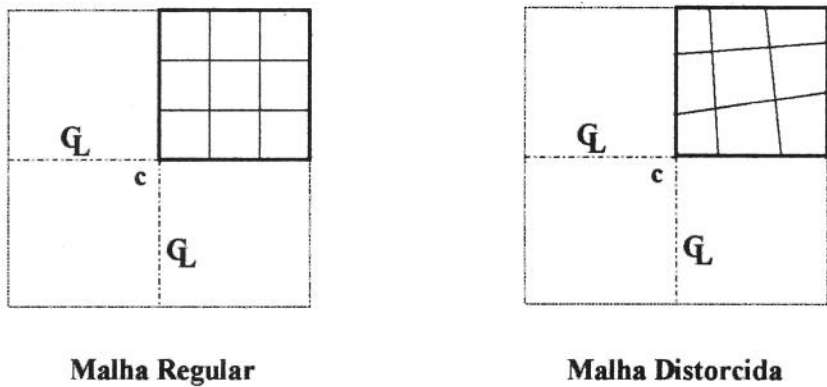


Figura 7.2: Malha de discretização de 3x3 elementos de um quarto da placa quadrada

7.2.1. Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados:

7.2.1.1. Submetida a uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano:

As Tabelas 7.1 e 7.2 apresentam, para os dois elementos em análise, a deflexão, w_c , normalizada com relação ao fator $\frac{qa^4}{D}$, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da

placa. Estes resultados são comparados com aqueles obtidos a partir da *Teoria da Elasticidade Tridimensional* [26], que, neste caso, fornece a solução exata, tanto para placas finas, como para placas moderadamente grossas. A Tabela 7.1 se refere à malha regular e a Tabela 7.2, à malha distorcida.

Tabela 7.1: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha regular (2x2 elementos).

t/a	Solução exata [26]	Serendipity		Lagrange	
	α	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,004060	0,003135	22,8	0,003981	1,9
0,010	0,004061	0,003731	8,1	0,003984	1,9
0,050	0,004111	0,004048	1,5	0,004069	1,0
0,100	0,004263	0,004243	0,5	0,004256	0,2
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$					

Tabela 7.2: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (2x2 elementos).

t/a	Solução exata [26]	Serendipity		Lagrange	
	α	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,004060	0,002512	38,3	0,003843	5,3
0,010	0,004061	0,003296	18,8	0,003888	4,3
0,050	0,004111	0,003901	5,1	0,004011	2,4
0,100	0,004263	0,004164	2,3	0,004229	0,8
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$					

Os Gráficos 7.1 e 7.2 apresentam os valores dos erros das soluções obtidas a partir dos dois elementos, comparativamente à solução exata, para cada valor da relação, t/a . O Gráfico 7.1 se refere à malha regular e o Gráfico 7.2, à malha distorcida.

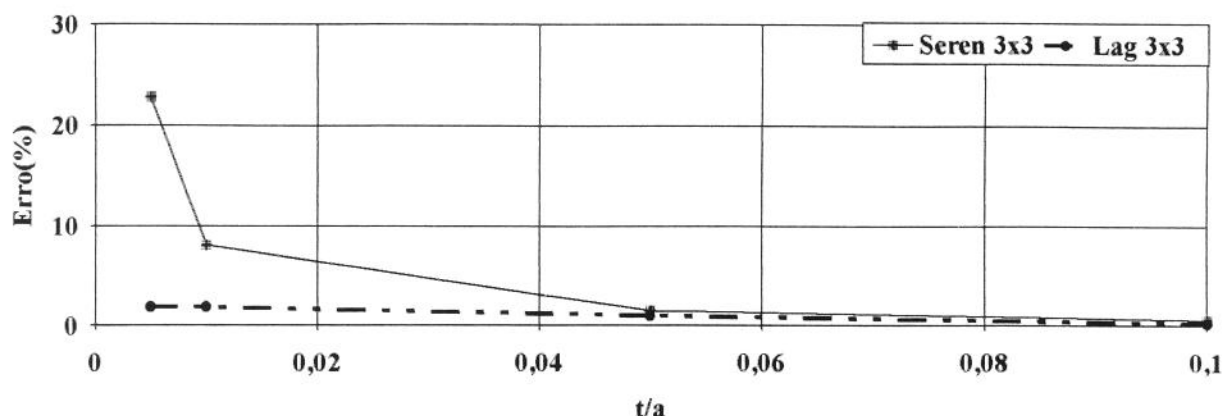


Gráfico 7.1: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

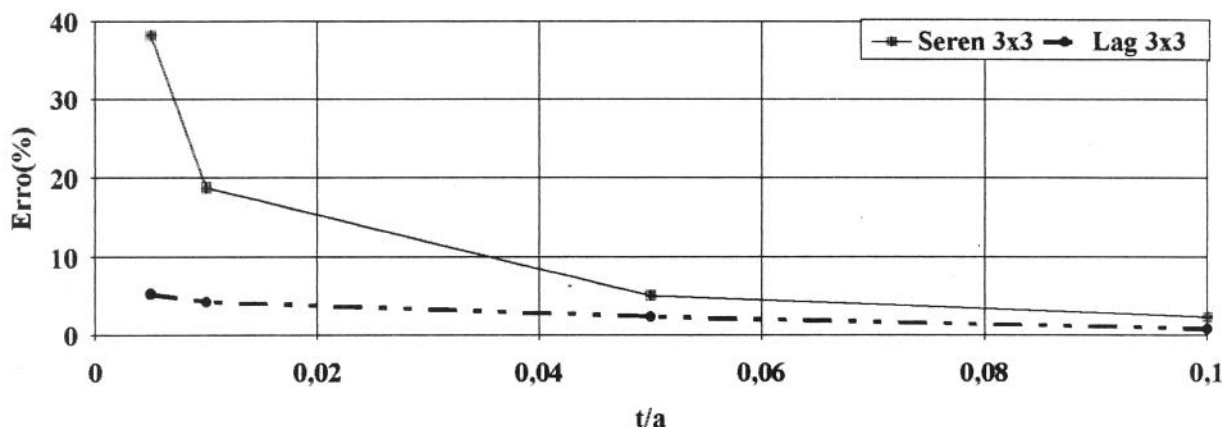


Gráfico 7.2: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

Verifica-se, a partir das Tabelas 7.1 e 7.2 e dos Gráficos 7.1 e 7.2, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0,05$). Nota-se, também, que o elemento da família Lagrangeana é menos sensível à distorção da malha.

7.2.1.2. Submetida a uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano:

As Tabelas 7.3 e 7.4 apresentam, para os dois elementos em análise, a deflexão, w_c , normalizada com relação ao fator $\frac{Pa^2}{D}$, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa. Estes resultados são comparados com aqueles obtidos a partir da Teoria Clássica de

Kirchhoff [1] para placas finas. A Tabela 7.3 se refere à malha regular e a Tabela 7.4, à malha distorcida.

Tabela 7.3: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha regular (3x3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	β	Erro (%)	β	Erro (%)
0,005	0,010560	9,0	0,010910	6,3
0,010	0,010830	6,6	0,010981	5,6
0,050	0,011762	-1,4	0,011852	-2,2
0,100	0,013280	-14,5	0,013510	-16,5

Solução exata [1]: $\beta = 0,011600$

$$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$$

Tabela 7.4: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3x3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	β	Erro (%)	β	Erro (%)
0,005	0,008804	24,1	0,010169	12,3
0,010	0,009538	17,8	0,010297	11,2
0,050	0,011309	2,5	0,011446	1,3
0,100	0,013106	-13,0	0,013306	-14,7

Solução exata [1]: $\beta = 0,011600$

$$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$$

Os Gráficos 7.3 e 7.4 apresentam os valores dos erros das soluções obtidas a partir dos dois elementos, comparativamente à solução exata de placa fina, para cada valor da relação, t/a . O Gráfico 7.3 se refere à malha regular e o Gráfico 7.4, à malha distorcida.

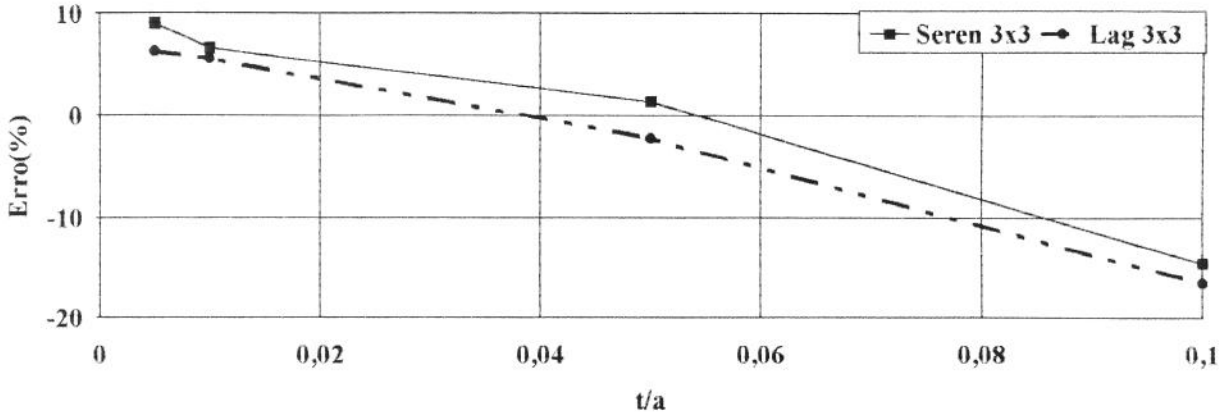


Gráfico 7.3: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga concentrada central).

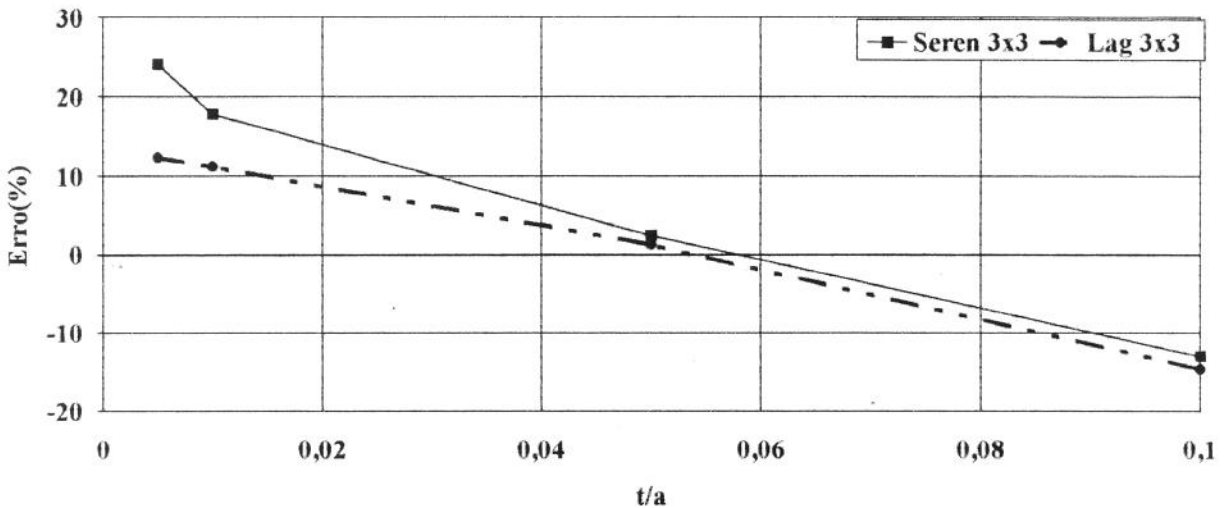


Gráfico 7.4: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga concentrada central).

Verifica-se, a partir das Tabelas 7.3 e 7.4 e dos Gráficos 7.3 e 7.4, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0,05$). Nota-se, também, que o elemento da família Lagrangeana é menos sensível à distorção da malha. Deve-se ressaltar, ainda, que o aumento do erro com o aumento da espessura se dá devido ao fato de se estar comparando o resultado obtido com o da solução exata para placa fina [1]; de acordo com o Capítulo 1, o aumento da espessura implica na necessidade de se considerar a tensão de cisalhamento na direção da espessura, o que caracteriza placa moderadamente grossa e não placa fina.

7.2.1.3. Submetida a uma carga distribuída senoidal, perpendicular a seu plano:

As Tabelas 7.5 e 7.6 apresentam, para os dois elementos em análise, a deflexão, w_c , normalizada com relação ao fator $\frac{q_0 a^4}{D}$, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa. Estes resultados são comparados com aqueles obtidos a partir da *Teoria da Elasticidade Tridimensional* [26], que, neste caso, fornece a solução exata, tanto para placas finas, como para placas moderadamente grossas. A Tabela 7.5 se refere à malha regular e a Tabela 7.6, à malha distorcida.

Tabela 7.5: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha regular (2x2 elementos).

t/a	Solução exata [26]	Serendipity		Lagrange	
	α	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,002566	0,001981	22,8	0,002492	2,9
0,010	0,002566	0,002358	8,1	0,002502	2,5
0,050	0,002598	0,002559	1,5	0,002557	1,6
0,100	0,002695	0,002682	0,5	0,002690	0,2

$$w_c = \alpha \cdot \frac{q_0 a^4}{D}$$

Tabela 7.6: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (2x2 elementos).

t/a	Solução exata [26]	Serendipity		Lagrange	
	α	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,002566	0,001412	45,0	0,001702	33,7
0,010	0,002566	0,001556	39,3	0,001712	33,3
0,050	0,002598	0,001651	36,5	0,001746	32,8
0,100	0,002695	0,001751	35,0	0,001827	32,2

$$w_c = \alpha \cdot \frac{q_0 a^4}{D}$$

Os Gráficos 7.5 e 7.6 apresentam os valores dos erros das soluções obtidas a partir dos dois elementos, comparativamente à solução exata, para cada valor da relação, t/a . O Gráfico 7.5 se refere à malha regular e o Gráfico 7.6, à malha distorcida.

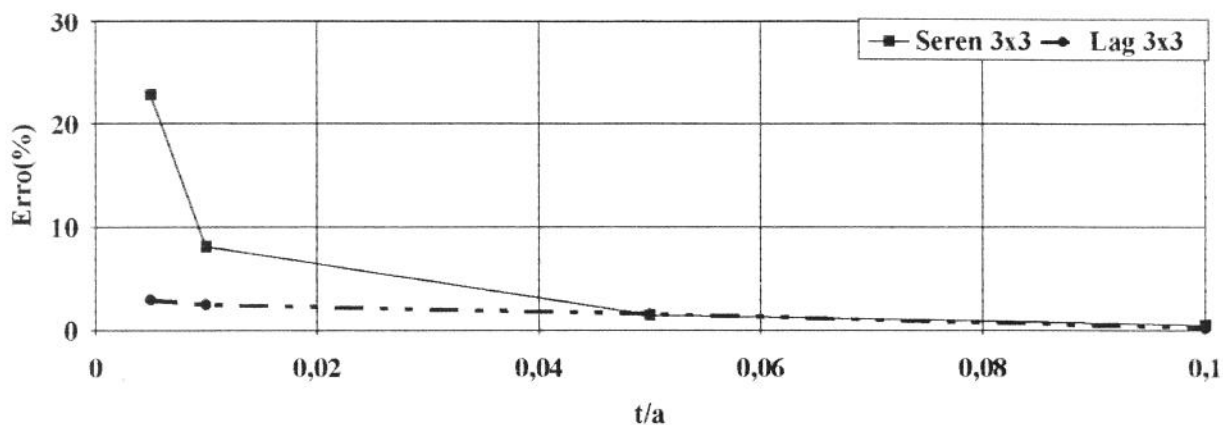


Gráfico 7.5: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga distribuída senoidal).

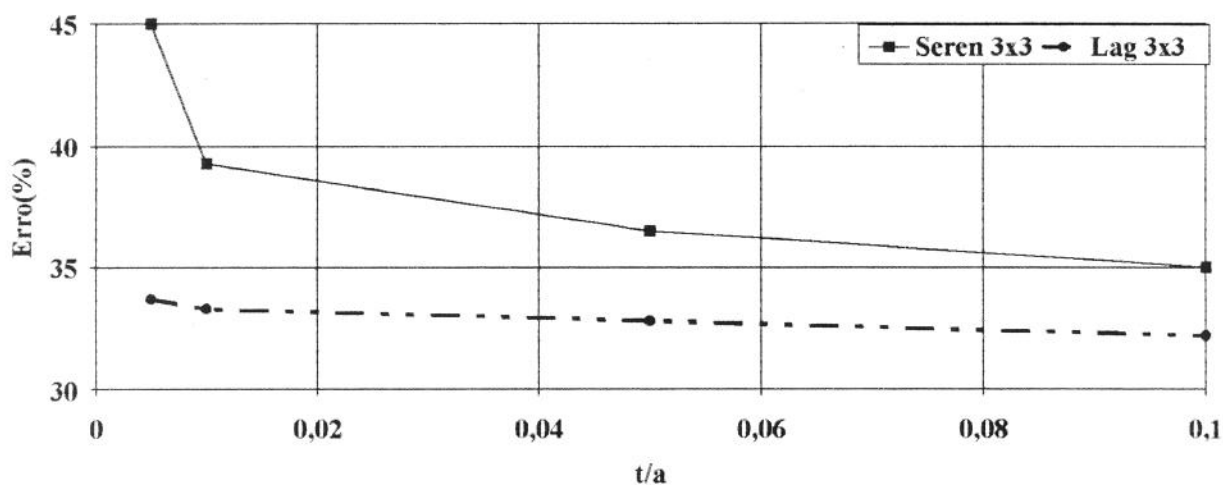


Gráfico 7.6: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga distribuída senoidal).

Verifica-se, a partir das Tabelas 7.5 e 7.6 e dos Gráficos 7.5 e 7.6, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0,05$) e malha distorcida.

7.2.2. Placa quadrada engastada em seus lados:

7.2.2.1. Submetida a uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano:

As Tabelas 7.7 e 7.8 apresentam, para os dois elementos em análise, a deflexão, w_c , normalizada com relação ao fator $\frac{qa^4}{D}$, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa. Estes resultados são comparados com aqueles obtidos a partir da *Teoria Clássica de Kirchhoff* [1] para placas finas. A Tabela 7.7 se refere à malha regular e a Tabela 7.8, à malha distorcida.

Tabela 7.7: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha regular (3×3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,000810	35,7	0,001140	10,5
0,010	0,001044	17,1	0,001150	9,6
0,050	0,001275	-1,2	0,001240	1,6
0,100	0,001487	-18,0	0,001490	-15,4

Solução exata [1]: $\alpha = 0,001260$ ($\nu = 0,3$)

$$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$$

Tabela 7.8: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3×3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,000652	48,2	0,001053	16,4
0,010	0,000924	26,7	0,001087	13,7
0,050	0,001239	1,7	0,001253	0,6
0,100	0,001468	-16,5	0,001477	-17,2

Solução exata [1]: $\alpha = 0,001260$ ($\nu = 0,3$)

$$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$$

Os Gráficos 7.7 e 7.8 apresentam os valores dos erros das soluções obtidas a partir dos dois elementos, comparativamente à solução exata de placa fina [1], para cada valor da relação, t/a . O Gráfico 7.7 se refere à malha regular e o Gráfico 7.8, à malha distorcida.

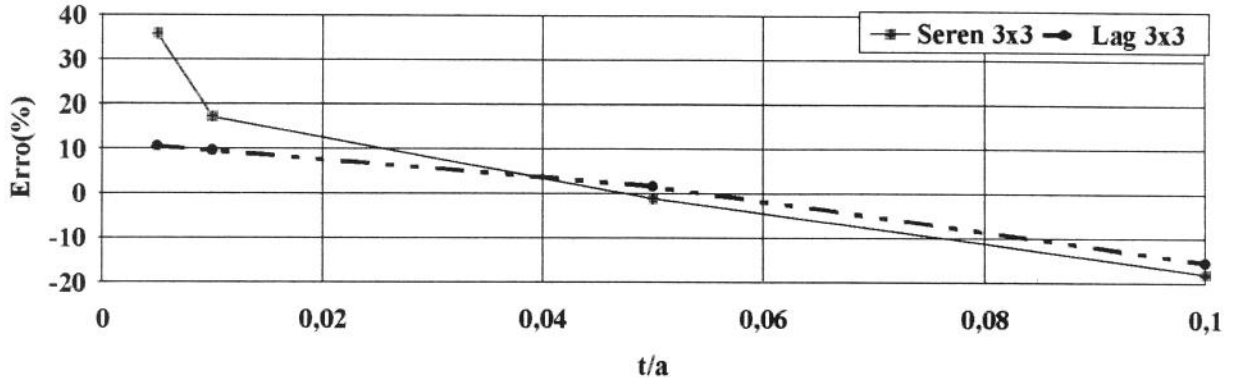


Gráfico 7.7: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa quadrada engastada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

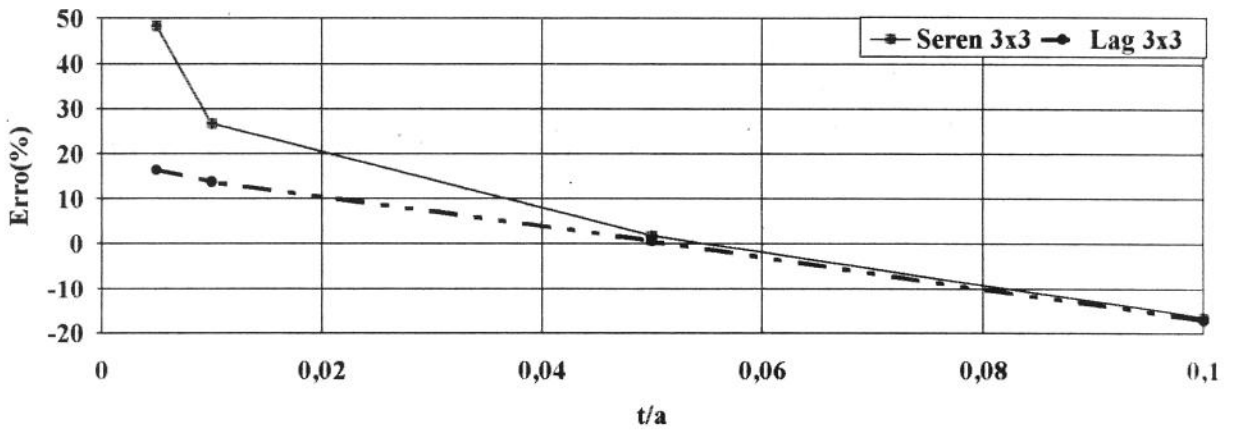


Gráfico 7.8: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa quadrada engastada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

Verifica-se, a partir das Tabelas 7.7 e 7.8 e dos Gráficos 7.7 e 7.8, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0,05$). Nota-se, também, que o elemento da família Lagrangeana é menos sensível à distorção da malha. Deve-se ressaltar, ainda, que o aumento do erro com o aumento da espessura se dá devido ao fato de se estar comparando o resultado obtido, com o da solução exata para placa fina [1]; de acordo com o Capítulo 1, o aumento da espessura implica na necessidade de se considerar a tensão de cisalhamento na sua direção, o que caracteriza placa moderadamente grossa e não placa fina.

7.2.2.2. Submetida a uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano:

As Tabelas 7.9 e 7.10 apresentam, para os dois elementos em análise, a deflexão, w_c , normalizada com relação ao fator $\frac{Pa^2}{D}$, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa. Estes resultados são comparados com aqueles obtidos a partir da *Teoria Clássica de Kirchhoff* [1] para placas finas. A Tabela 7.9 se refere à malha regular e a Tabela 7.10, à malha distorcida.

Tabela 7.9: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha regular (3x3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	β	Erro (%)	β	Erro (%)
0,005	0,003381	39,6	0,004791	16,9
0,010	0,004374	21,9	0,004851	15,5
0,050	0,005730	-2,3	0,005830	-4,1
0,100	0,007351	-31,3	0,007581	-35,4

Solução exata [1]: $\beta = 0,005600$ ($\nu = 0,3$)

$$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$$

Tabela 7.10: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3x3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	β	Erro (%)	β	Erro (%)
0,005	0,002290	59,1	0,004033	28,0
0,010	0,003408	39,1	0,004208	24,8
0,050	0,005355	4,4	0,005477	2,2
0,100	0,007213	-28,8	0,007403	-32,2

Solução exata [1]: $\beta = 0,005600$ ($\nu = 0,3$)

$$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$$

Os Gráficos 7.9 e 7.10 apresentam os valores dos erros das soluções obtidas a partir dos dois elementos, comparativamente à solução exata de placa fina [1], para cada valor da relação, t/a . O Gráfico 7.9 se refere à malha regular e o Gráfico 7.10, à malha distorcida.

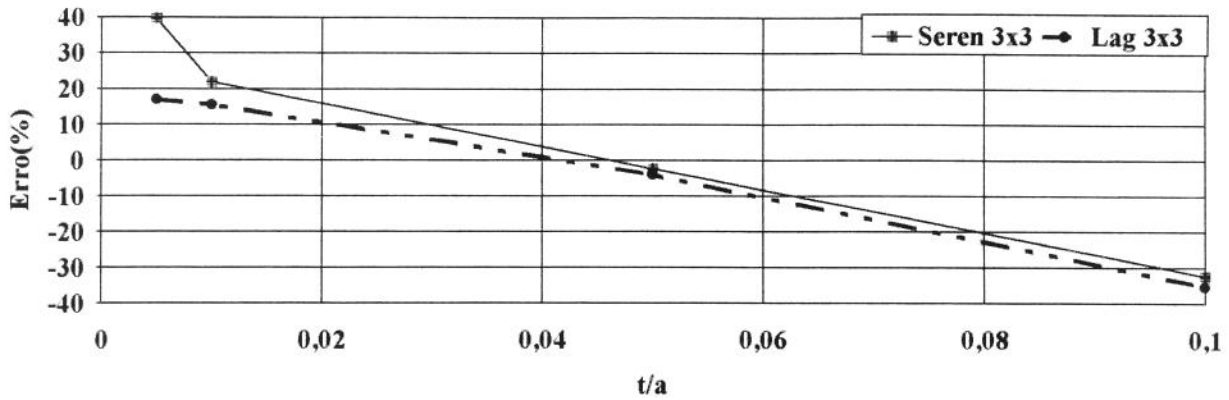


Gráfico 7.9: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa quadrada engastada, submetida a uma carga concentrada central).

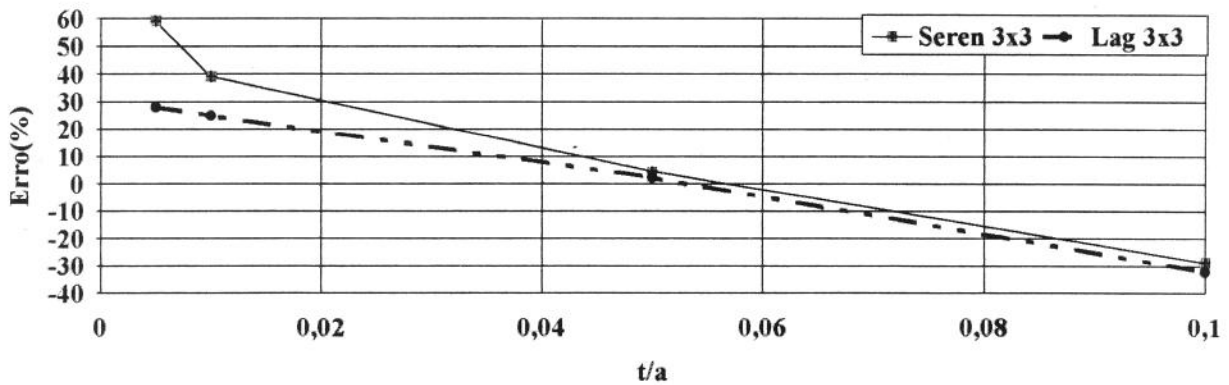


Gráfico 7.10: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa quadrada engastada, submetida a uma carga concentrada central).

Verifica-se, a partir das Tabelas 7.9 e 7.10 e dos Gráficos 7.9 e 7.10, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0,05$). Nota-se, também, que o elemento da família Lagrangeana é menos sensível à distorção da malha. Deve-se ressaltar, ainda, que o aumento do erro com o aumento da espessura se dá devido ao fato de se estar comparando o resultado obtido, com o da solução exata para placa fina [1]; de acordo com o Capítulo 1, o aumento da espessura implica na necessidade de se considerar a tensão de cisalhamento na sua direção, o que caracteriza placa moderadamente grossa e não placa fina.

7.2.3. Placa quadrada simplesmente apoiada nos cantos:

7.2.3.1. Submetida a uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano:

As Tabelas 7.11 e 7.12 apresentam, para os dois elementos em análise, a deflexão, w_c , normalizada com relação ao fator $\frac{qa^4}{D}$, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa. Estes resultados são comparados com os resultados experimentais obtidos nas referências [30] e [31]. A Tabela 7.11 se refere à malha regular e a Tabela 7.12, à malha distorcida.

Tabela 7.11: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha regular (3x3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,02454	7,4	0,02475	6,6
0,010	0,02475	6,6	0,02481	6,4
0,050	0,02587	2,4	0,02589	2,3
0,100	0,02772	-4,6	0,02784	-5,1
Solução [30], [31]: $\alpha = 0,02650$				
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$				

Tabela 7.12: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3x3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,02203	16,9	0,02462	7,1
0,010	0,02394	9,7	0,02480	6,4
0,050	0,02594	2,1	0,02590	2,3
0,100	0,02782	-5,0	0,02794	-5,4
Solução [30], [31]: $\alpha = 0,02650$				
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$				

Os Gráficos 7.11 e 7.12 apresentam os valores dos erros das soluções obtidas a partir dos dois elementos, comparativamente à solução apresentada em [30] e [31], para cada valor da relação, t/a . O Gráfico 7.11 se refere à malha regular e o Gráfico 7.12, à malha distorcida.

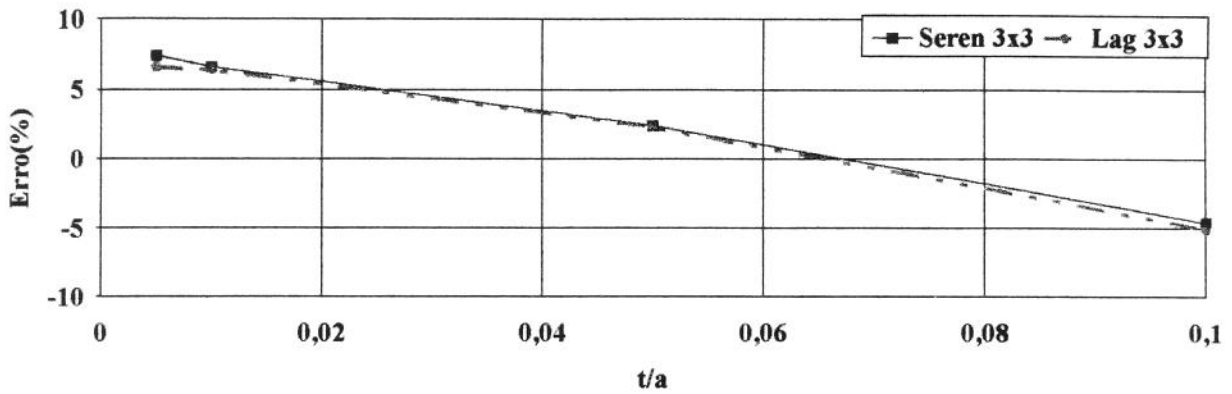


Gráfico 7.11: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa quadrada simplesmente apoiada nos cantos, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

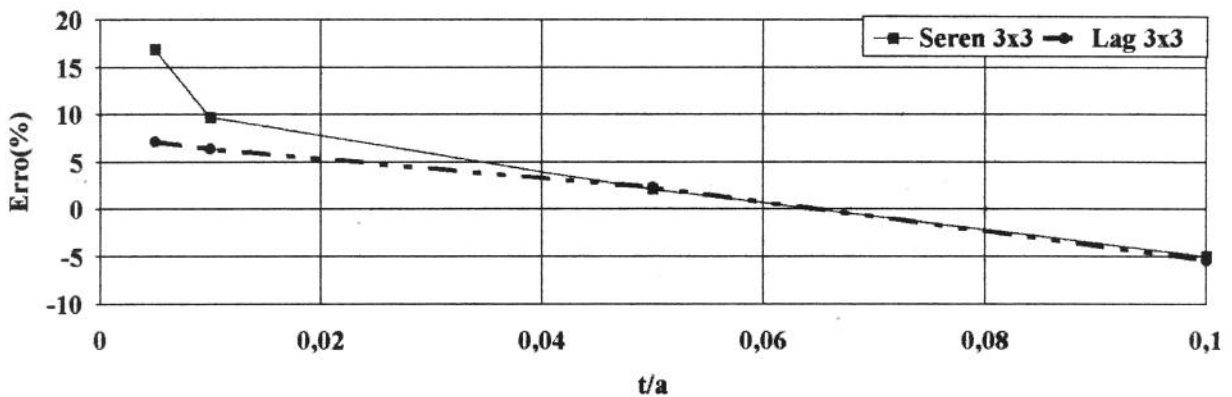


Gráfico 7.12: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa quadrada simplesmente apoiada nos cantos, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

Verifica-se, a partir das Tabelas 7.11 e 7.12 e dos Gráficos 7.11 e 7.12, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0,05$). Nota-se, também, que o elemento da família Lagrangeana é menos sensível à distorção da malha.

7.3. Placa retangular

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização regular e distorcida, de 2x2 elementos (Figura 7.3), para o caso de placa simplesmente apoiada e de 3x3 elementos (Figura 7.4), para o caso de placa engastada e placa submetida à carga concentrada.

Como resultado, apresenta-se a deflexão no centro da placa, w_c , normalizada com relação ao fator $\frac{qb^4}{D}$, para o caso de carga uniformemente distribuída, $\frac{q_0b^4}{D}$ para o caso de carga distribuída senoidal e $\frac{Pb^2}{D}$, para o caso de carga concentrada. Nestas expressões, q é o valor da carga uniformemente distribuída, P , o valor da carga concentrada no nó central, b , o lado menor da placa e D , sua rigidez, dada pela Equação (7.1).

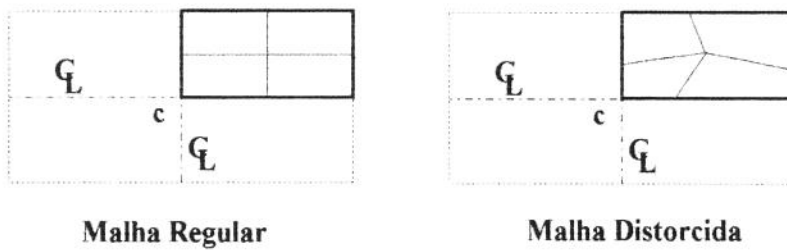


Figura 7.3: Malha de discretização de 2x2 elementos de um quarto da placa retangular.

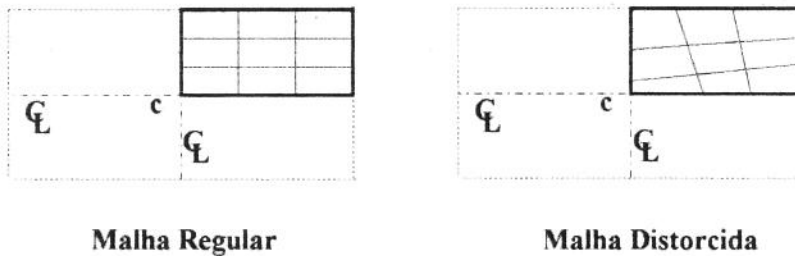


Figura 7.4: Malha de discretização de 3x3 elementos de um quarto da placa retangular.

7.3.1. Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados:

7.3.1.1. Submetida a uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano:

As Tabelas 7.13 e 7.14 apresentam, para os dois elementos em análise, a deflexão, w_c , normalizada com relação ao fator $\frac{qb^4}{D}$, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior da placa. Estes resultados são comparados com aqueles obtidos a partir da *Teoria Clássica de Kirchhoff* [1] para placas finas. A Tabela 7.13 se refere à malha regular e a Tabela 7.14, à malha distorcida.

Tabela 7.13: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior, a , da placa, considerando-se o caso de malha regular (2×2 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,009133	9,8	0,009891	2,4
0,010	0,009802	3,2	0,009923	2,0
0,050	0,010395	-2,6	0,010409	-2,8
0,100	0,011406	-12,6	0,011421	-12,7

Solução exata [1]: $\alpha = 0,010130$ ($a/b=2$ e $\nu=0,3$)

$$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$$

Tabela 7.14: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior, a , da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (2×2 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,007688	24,1	0,009758	3,7
0,010	0,008944	11,7	0,009777	3,5
0,050	0,010208	-0,8	0,010312	-1,8
0,100	0,011333	-11,9	0,011390	-12,4

Solução exata [1]: $\alpha = 0,010130$ ($a/b=2$ e $\nu=0,3$)

$$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$$

Os Gráficos 7.13 e 7.14 apresentam os valores dos erros das soluções obtidas a partir dos dois elementos, comparativamente à solução exata de placa fina [1], para cada valor da relação, t/a . O Gráfico 7.13 se refere à malha regular e o Gráfico 7.14, à malha distorcida.

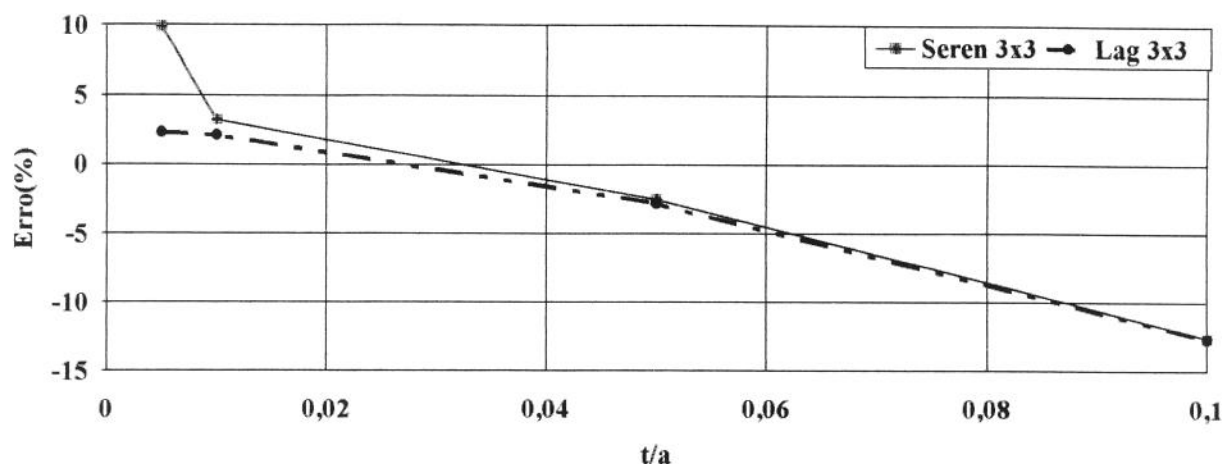


Gráfico 7.13: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa retangular simplesmente apoiada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

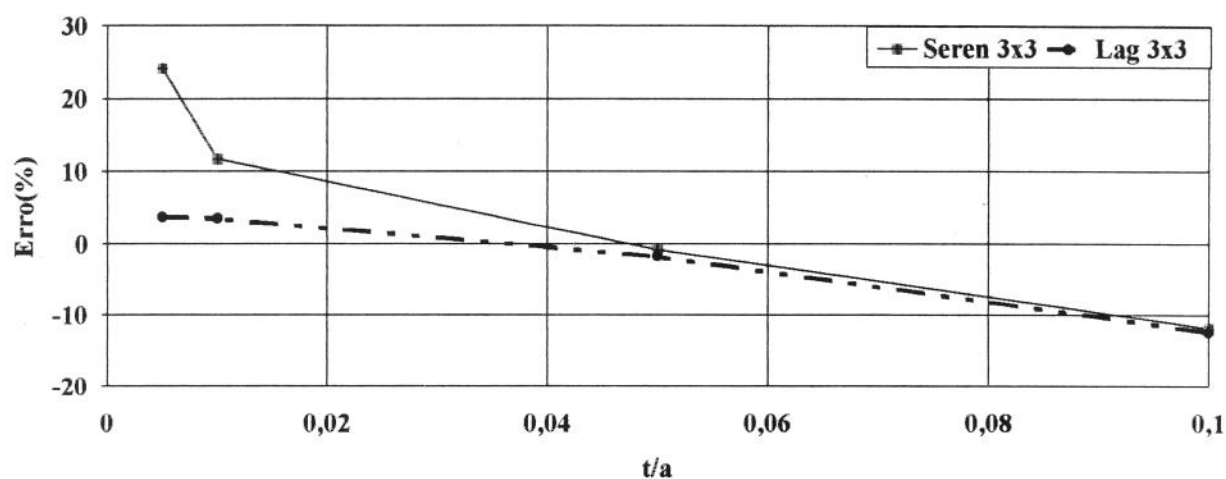


Gráfico 7.14: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa retangular simplesmente apoiada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

Verifica-se, a partir das Tabelas 7.13 e 7.14 e dos Gráficos 7.13 e 7.14, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0,05$). Nota-se, também, que o elemento da família Lagrangeana é menos sensível à distorção da malha. Deve-se ressaltar, ainda, que o aumento do erro com o aumento da espessura se dá devido ao fato de se estar comparando o resultado obtido, com o da solução exata para placa fina [1]; de acordo com o Capítulo 1, o aumento da espessura implica na necessidade de se considerar a tensão de cisalhamento na sua direção, o que caracteriza placa moderadamente grossa e não placa fina.

7.3.1.2. Submetida a uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano:

As Tabelas 7.15 e 7.16 apresentam, para os dois elementos em análise, a deflexão, w_c , normalizada com relação ao fator $\frac{Pb^2}{D}$, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior da placa. Estes resultados são comparados com aqueles obtidos a partir da *Teoria Clássica de Kirchhoff* [1] para placas finas. A Tabela 7.15 se refere à malha regular e a Tabela 7.16, à malha distorcida.

Tabela 7.15: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior da placa, considerando-se o caso de malha regular (3x3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	β	Erro (%)	β	Erro (%)
0,005	0,014517	12,1	0,015050	9,7
0,010	0,015030	9,0	0,015241	8,3
0,050	0,017750	-7,5	0,017962	-8,8
0,100	0,023173	-40,4	0,023773	-44,0
Solução exata [1]: $\beta = 0,016510$ ($a/b=2$) $w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$				

Tabela 7.16: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3x3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	β	Erro (%)	β	Erro (%)
0,005	0,012037	27,1	0,013355	19,1
0,010	0,013068	20,8	0,013764	16,6
0,050	0,017103	-3,6	0,017300	-4,8
0,100	0,023008	-39,4	0,024451	-48,0
Solução exata [1]: $\beta = 0,016510$ ($a/b=2$) $w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$				

Os Gráficos 7.15 e 7.16 apresentam os valores dos erros das soluções obtidas a partir dos dois elementos, comparativamente à solução exata de placa fina [1], para cada valor da relação, t/a . O Gráfico 7.15 se refere à malha regular e o Gráfico 7.16, à malha distorcida.

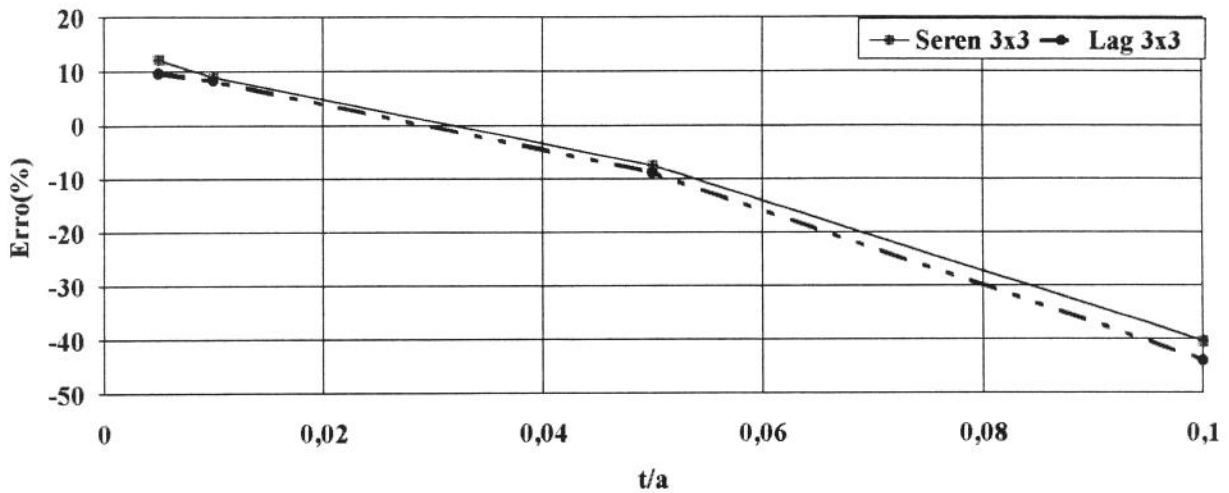


Gráfico 7.15: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa retangular simplesmente apoiada, submetida a uma carga concentrada central).

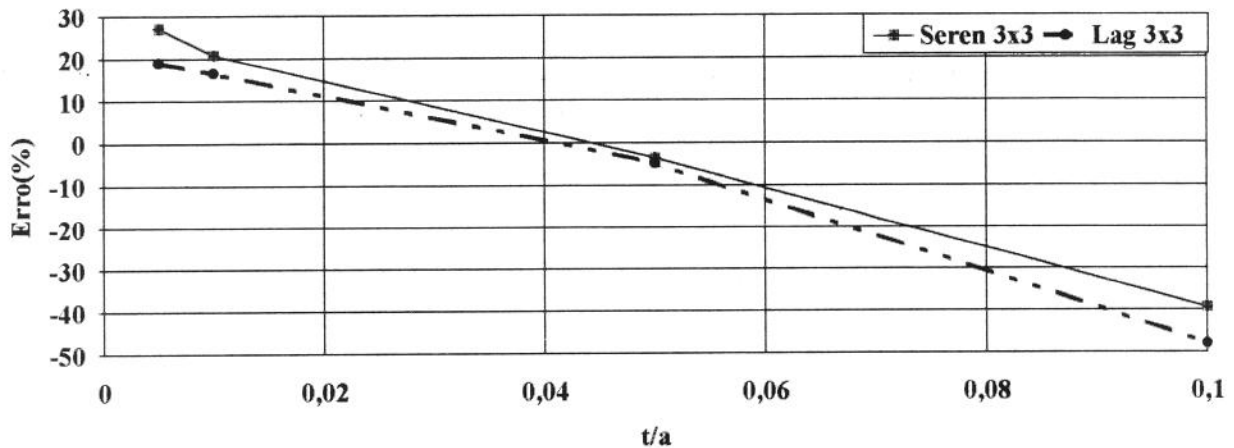


Gráfico 7.16: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa retangular simplesmente apoiada, submetida a uma carga concentrada central).

Verifica-se, a partir das Tabelas 7.15 e 7.16 e dos Gráficos 7.15 e 7.16, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0,05$). Nota-se, também, que o elemento da família Lagrangeana é menos sensível à distorção da malha. Deve-se ressaltar, ainda, que o aumento do erro com o aumento da espessura se dá devido ao fato de se estar comparando o resultado obtido, com o da solução exata para placa fina [1]; de acordo com o Capítulo 1, o

aumento da espessura implica na necessidade de se considerar a tensão de cisalhamento na sua direção, o que caracteriza placa moderadamente grossa e não placa fina.

7.3.1.3. Submetida a uma carga distribuída senoidal, perpendicular a seu plano:

As Tabelas 7.17 e 7.18 apresentam, para os dois elementos em análise, a deflexão, w_c , normalizada com relação ao fator $\frac{q_0 b^4}{D}$, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior da placa. Estes resultados são comparados com aqueles obtidos a partir da *Teoria Clássica de Kirchhoff* [1] para placas finas. A Tabela 7.17 se refere à malha regular e a Tabela 7.18, à malha distorcida.

Tabela 7.17: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior, a , da placa, considerando-se o caso de malha regular (2x2 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,005666	13,8	0,006322	3,8
0,010	0,006143	6,5	0,006346	3,4
0,050	0,006681	-1,7	0,006723	-2,3
0,100	0,007428	-13,1	0,007468	-13,7
Solução exata [1]: $\alpha = 0,006570$ $w_c = \alpha \cdot \frac{q_0 b^4}{D}$				

Tabela 7.18: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior, a , da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (2x2 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,003300	49,8	0,004274	34,9
0,010	0,003815	41,9	0,004331	34,0
0,050	0,004243	35,4	0,004364	33,6
0,100	0,004634	29,5	0,004744	27,8
Solução exata [1]: $\alpha = 0,006570$ $w_c = \alpha \cdot \frac{q_0 b^4}{D}$				

Os Gráficos 7.17 e 7.18 apresentam os valores dos erros das soluções obtidas a partir dos dois elementos, comparativamente à solução exata de placa fina [1], para cada valor da relação, t/a . O Gráfico 7.17 se refere à malha regular e o Gráfico 7.18, à malha distorcida.

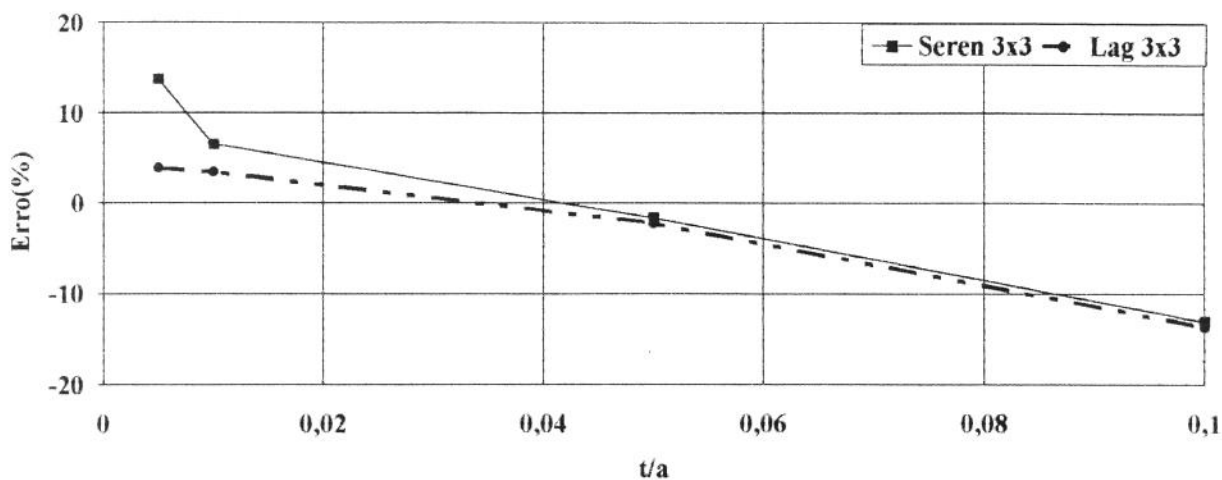


Gráfico 7.17: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa retangular simplesmente apoiada, submetida a uma carga distribuída senoidal).

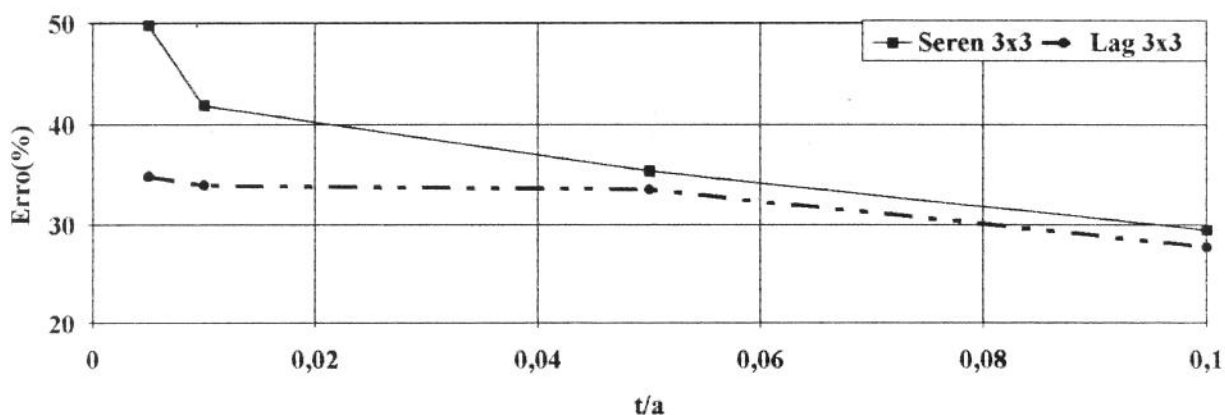


Gráfico 7.18: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa retangular simplesmente apoiada, submetida a uma carga distribuída senoidal).

Verifica-se, a partir das Tabelas 7.17 e 7.18 e dos Gráficos 7.17 e 7.18, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0,05$).

7.3.2. Placa retangular engastada em seus lados:

7.3.2.1. Submetida a uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano:

As Tabelas 7.19 e 7.20 apresentam, para os dois elementos em análise, a deflexão, w_c , normalizada com relação ao fator $\frac{qb^4}{D}$, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior da placa. Estes resultados são comparados com aqueles obtidos a partir da *Teoria Clássica de Kirchhoff* [1] para placas finas. A Tabela 7.19 se refere à malha regular e a Tabela 7.20, à malha distorcida.

Tabela 7.19: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior, a , da placa, considerando-se o caso de malha regular (3x3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,002164	14,8	0,002311	9,0
0,010	0,002349	7,5	0,002362	7,5
0,050	0,002863	-12,7	0,002863	-12,7
0,100	0,003938	-55,0	0,003938	-55,0
Solução exata [1]: $\alpha = 0,002540$ ($a/b=2$ e $\nu=0,3$) $w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$				

Tabela 7.20: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior, a , da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3x3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	α	Erro (%)	α	Erro (%)
0,005	0,001931	24,0	0,002257	11,1
0,010	0,002222	12,5	0,002295	9,6
0,050	0,002839	-11,8	0,002844	-12,0
0,100	0,003930	-54,7	0,003935	-54,9
Solução exata [1]: $\alpha = 0,002540$ ($a/b=2$ e $\nu=0,3$) $w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$				

Os Gráficos 7.19 e 7.20 apresentam os valores dos erros das soluções obtidas a partir dos dois elementos, comparativamente à solução exata de placa fina [1], para cada valor da relação, t/a . O Gráfico 7.19 se refere à malha regular e o Gráfico 7.20, à malha distorcida.

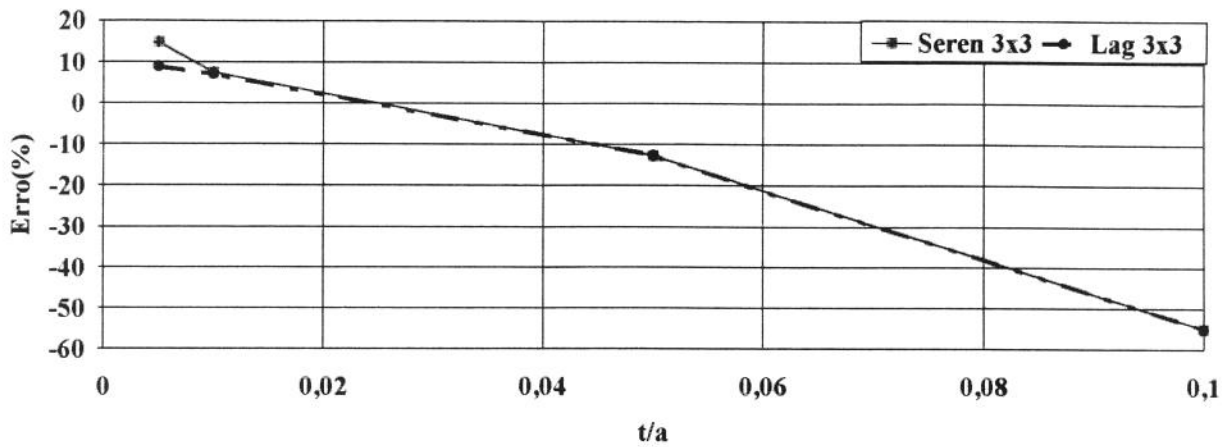


Gráfico 7.19: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa retangular engastada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

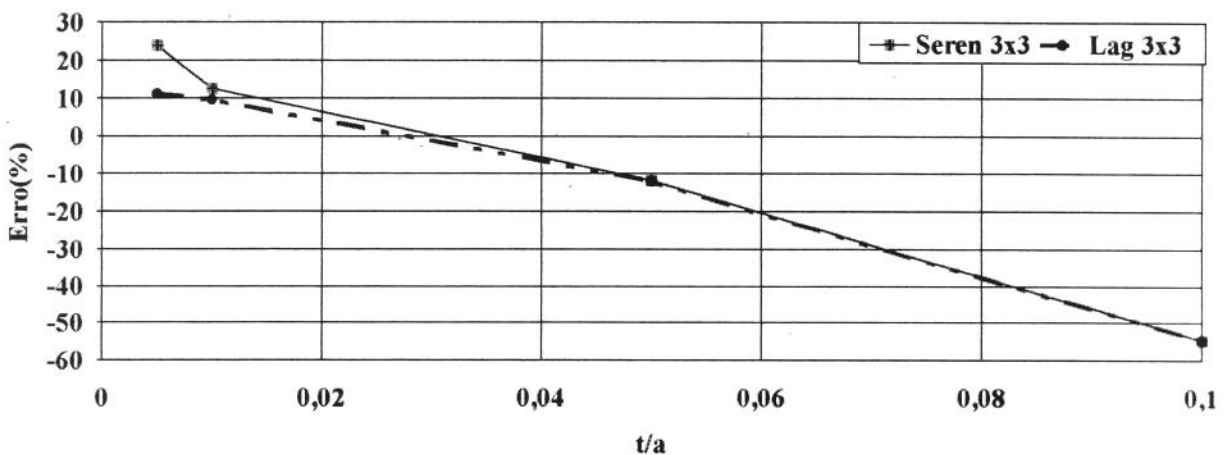


Gráfico 7.20: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa retangular engastada, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

Verifica-se, a partir das Tabelas 7.19 e 7.20 e dos Gráficos 7.19 e 7.20, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0,05$). Nota-se, também, que o elemento da família Lagrangeana é menos sensível à distorção da malha. Deve-se ressaltar, ainda, que o aumento do erro com o aumento da espessura se dá devido ao fato de se estar comparando o resultado obtido, com o da solução exata para placa fina [1]; de acordo com o Capítulo 1, o aumento da espessura implica na necessidade de se considerar a tensão de cisalhamento na sua direção, o que caracteriza placa moderadamente grossa e não placa fina.

7.3.2.2. Submetida a uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano:

As Tabelas 7.21 e 7.22 apresentam, para os dois elementos em análise, a deflexão, w_c , normalizada com relação ao fator $\frac{Pb^2}{D}$, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior da placa. Estes resultados são comparados com aqueles obtidos a partir da *Teoria Clássica de Kirchhoff* [1] para placas finas. A Tabela 7.21 se refere à malha regular e a Tabela 7.22, à malha distorcida.

Tabela 7.21: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado maior da placa, considerando-se o caso de malha regular (3x3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	β	Erro (%)	β	Erro (%)
0,005	0,004772	33,9	0,005722	26,2
0,010	0,005568	22,9	0,005928	21,8
0,050	0,008583	-18,9	0,008790	-21,7
0,100	0,014221	-97,0	0,014821	-105,3

Solução exata [1]: $\beta = 0,007220$ ($a/b=2$ e $\nu=0,3$)

$$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$$

Tabela 7.22: Deflexão, w_c , normalizada, para diferentes relações, t/a , entre a espessura e o lado da placa, considerando-se o caso de malha distorcida (3x3 elementos).

t/a	Serendipity		Lagrange	
	β	Erro (%)	β	Erro (%)
0,005	0,003560	50,7	0,004585	36,5
0,010	0,004469	38,1	0,004941	31,6
0,050	0,008196	-13,5	0,008384	-16,1
0,100	0,014186	-96,5	0,014663	-103

Solução exata [1]: $\beta = 0,007220$ ($a/b=2$ e $\nu=0,3$)

$$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$$

Os Gráficos 7.21 e 7.22 apresentam os valores dos erros das soluções obtidas a partir dos dois elementos, comparativamente à solução exata de placa fina [1], para cada valor da relação, t/a . O Gráfico 7.21 se refere à malha regular e o Gráfico 7.22, à malha distorcida.

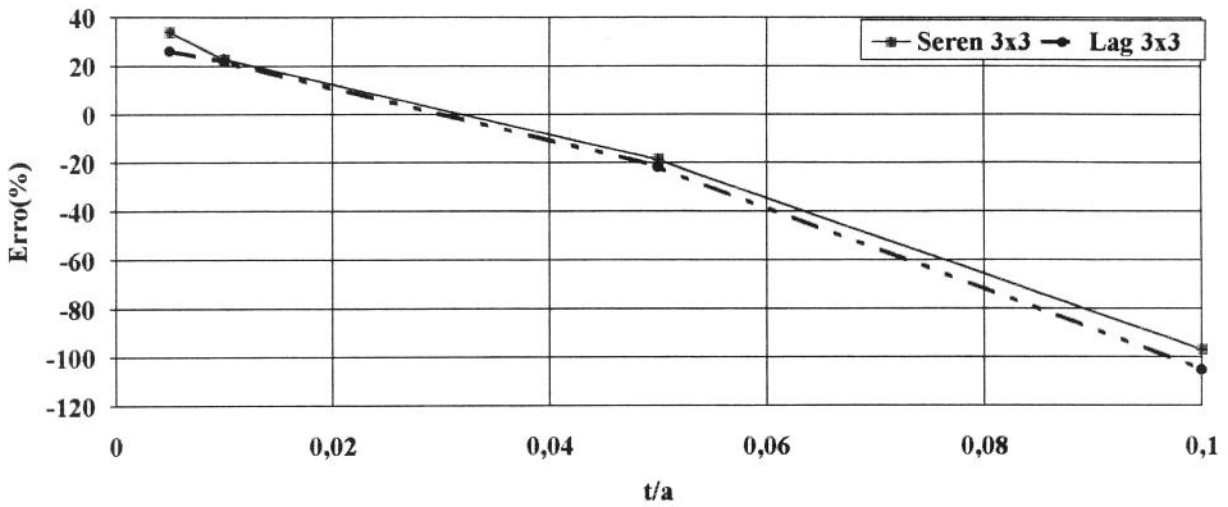


Gráfico 7.21: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha regular (placa retangular engastada, submetida a uma carga concentrada central).

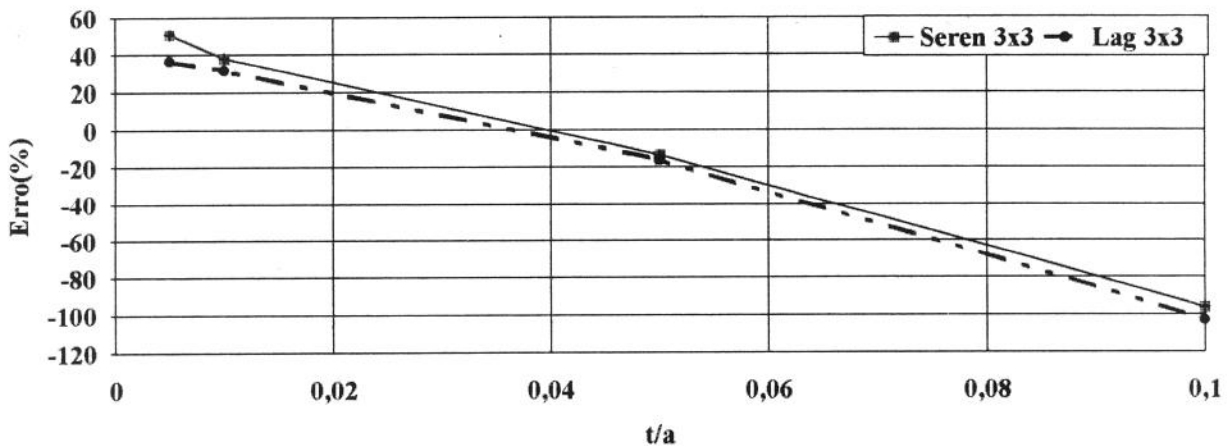


Gráfico 7.22: Valores dos erros da deflexão do nó central para várias relações, t/a , considerando-se o caso de malha distorcida (placa retangular engastada, submetida a uma carga concentrada central).

Verifica-se, a partir das Tabelas 7.21 e 7.22 e dos Gráficos 7.21 e 7.22, que o elemento da família Lagrangeana apresenta um melhor desempenho que o elemento da família Serendipity, particularmente, para a situação de placa fina ($t/a < 0,05$). Deve-se ressaltar, ainda, que o aumento do erro com o aumento da espessura se dá devido ao fato de se estar comparando o resultado

obtido, com o da solução exata para placa fina [1]; de acordo com o Capítulo 1, o aumento da espessura implica na necessidade de se considerar a tensão de cisalhamento na sua direção, o que caracteriza placa moderadamente grossa e não placa fina.

7.4. Casca cilíndrica

Apresenta-se, a seguir, a análise da casca cilíndrica de cobertura, submetida à ação de seu peso próprio (Scordelis-Lo roof), apresentada na referência [28].

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da casca (Figura 7.5), utilizando-se uma malha de discretização regular e distorcida com 2x2 elementos até uma malha de 7x7 elementos.

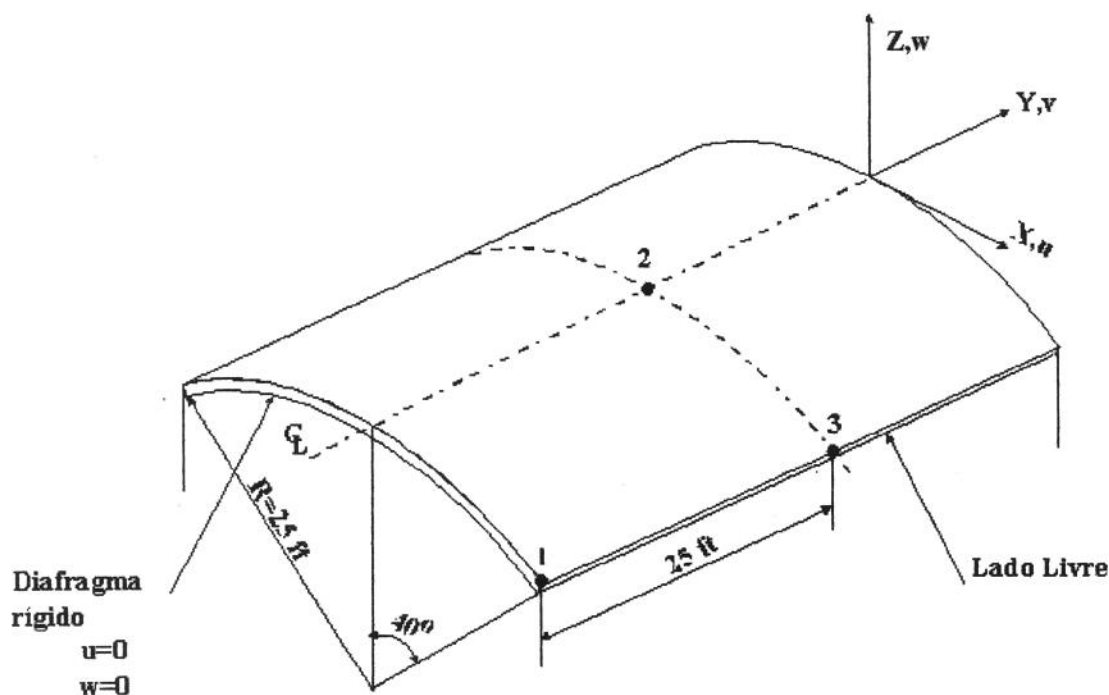


Figura 7.5 - Casca cilíndrica submetida à ação do seu peso próprio.

A casca tem as características apresentadas na Figura 7.5, além do que :

- espessura = 0,25 ft;
- módulo de elasticidade longitudinal = $4,32 \times 10^5$ k/ft² ;
- coeficiente de Poisson = 0,0

Como resultado, apresentam-se, de acordo com o sistema de referência global (Figura 7.5), as deflexões v_1 , w_2 e w_3 , nos nós 1,2 e 3, respectivamente. Estes resultados são comparados com as soluções exatas, dadas a partir da referência [28], para cada malha de discretização, como

mostram as Tabelas 7.23 e 7.24; a Tabela 7.23 refere-se à malha regular e a Tabela 7.24 à malha distorcida.

Tabela 7.23: Deflexões v_1 , w_2 e w_3 , para diferentes malhas de discretização, considerando-se o caso de malha regular

Malha de Discretização	Deflexão	Serendipity		Lagrange	
		Deflexão (ft)	Erro(%)	Deflexão (ft)	Erro(%)
2x2	v_1	-6,925e-3	44,6	-7,125e-3	43,0
	w_2	-1,466e-2	132,5	-1,407e-2	131,2
	w_3	-7,761e-3	74,2	-8,061e-2	73,2
3x3	v_1	-9,425e-3	24,6	-9,550e-3	23,6
	w_2	1,060e-2	76,5	1,100e-2	75,6
	w_3	-1,760e-1	41,5	-1,775e-1	41,0
4x4	v_1	-1,095e-2	12,4	-1,099e-2	12,1
	w_2	2,877e-2	36,2	2,877e-2	36,2
	w_3	-2,391e-1	20,5	-2,391e-1	20,5
5x5	v_1	-1,171e-2	6,3	-1,175e-2	6,0
	w_2	3,635e-2	19,4	3,644e-2	19,2
	w_3	-2,689e-1	10,6	-2,695e-1	10,4
6x6	v_1	-1,198e-2	4,2	-1,200e-2	4,0
	w_2	3,937e-2	12,7	3,987e-2	11,6
	w_3	-2,800e-1	6,9	-2,815e-1	6,4
7x7	v_1	-1,216e-2	2,7	-1,220e-2	2,4
	w_2	4,131e-2	8,4	4,145e-2	8,1
	w_3	-2,876e-1	4,4	-2,885e-1	4,1
Solução Exata [28]		$v_1 = -0,0125$ ft			
		$w_2 = 0,04051$ ft			
		$w_3 = -0,3081$ ft			

Tabela 7.24: Deflexões v_1 , w_2 e w_3 , para diferentes malhas de discretização, considerando-se o caso de malha distorcida.

Malha de Discretização	Deflexão	Serendipity		Lagrange	
		Deflexão (ft)	Erro(%)	Deflexão (ft)	Erro(%)
2x2	v_1	-6,553e-3	47,6	-6,863e-3	45,0
	w_2	-1,621e-2	135,9	-9,711e-3	121,5
	w_3	-6,572e-2	78,2	-8,788e-2	70,8
3x3	v_1	-7,866e-3	37,0	-8,032e-3	35,7
	w_2	-1,024e-2	122,7	-7,575e-3	116,8
	w_3	-1,179e-1	60,8	-1,261e-1	58,1
4x4	v_1	-1,087e-2	13,0	-1,098e-2	12,2
	w_2	3,051e-2	32,4	3,146e-2	30,2
	w_3	-2,398e-1	20,3	-2,442e-1	18,8
5x5	v_1	-1,130e-2	9,6	-1,137e-2	9,0
	w_2	3,166e-2	29,9	3,225e-2	28,5
	w_3	-2,565e-1	14,7	-2,589e-1	13,9
6x6	v_1	-1,196e-2	4,3	-1,198e-2	4,1
	w_2	4,046e-2	10,3	4,062e-2	9,9
	w_3	-2,812e-1	6,5	-2,819e-1	6,3
7x7	v_1	-1,206e-2	3,5	-1,208e-2	3,3
	w_2	4,069e-2	9,8	4,079e-2	9,5
	w_3	-2,853e-1	5,2	-2,857e-1	5,0
Solução Exata [28] : $v_1 = -0,0125$ ft $w_2 = 0,04051$ ft $w_3 = -0,3081$ ft					

Os gráficos 7.23 e 7.24 apresentam os valores dos erros da deflexão v_1 para malha regular e distorcida, respectivamente, para várias malhas de discretização, comparativamente à solução exata obtida na referência [28].

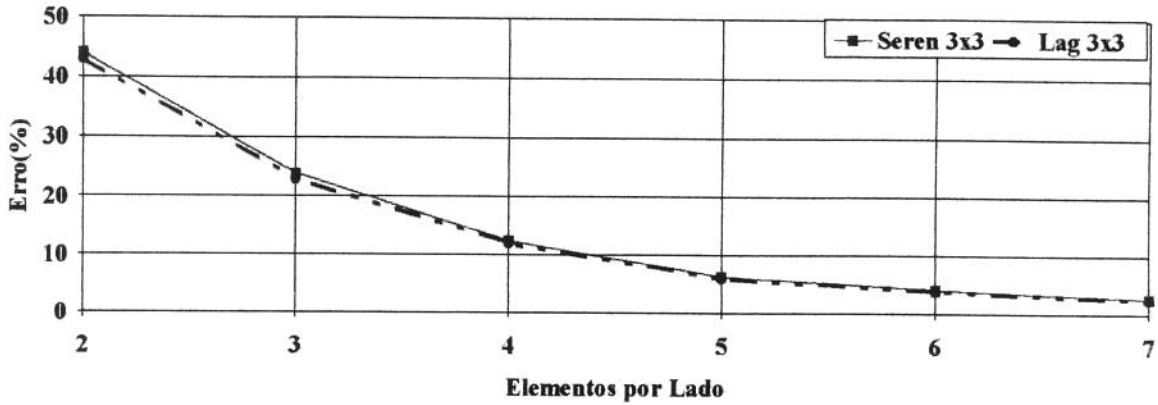


Gráfico 7.23: Valores dos erros da deflexão v_1 para várias malhas de discretização, considerando-se o caso de malha regular (casca cilíndrica sujeita à ação do seu peso próprio)

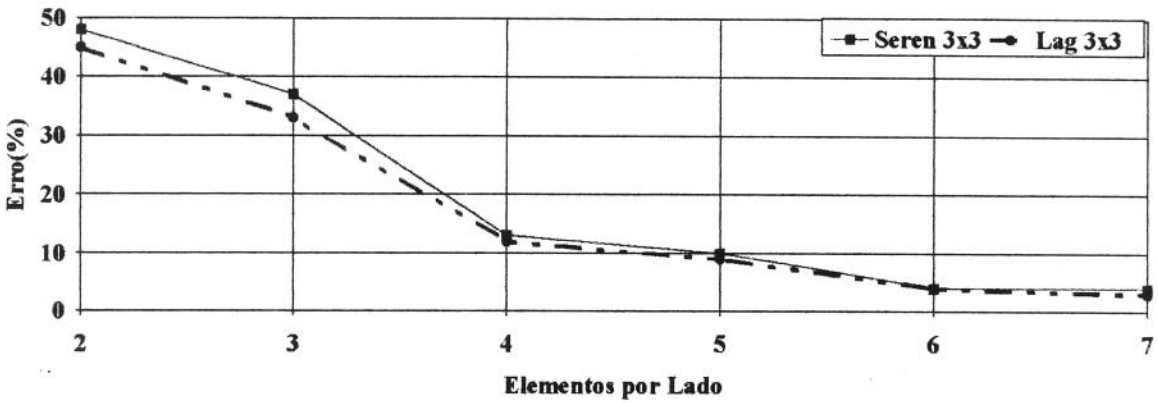


Gráfico 7.24: Valores dos erros da deflexão v_1 para várias malhas de discretização, considerando-se o caso de malha distorcida (casca cilíndrica sujeita à ação do seu peso próprio)

Os Gráficos 7.25 e 7.26 apresentam os valores dos erros da deflexão w_2 para malha regular e distorcida, respectivamente, para várias malhas de discretização, comparativamente à solução exata obtida na referência [28]. Os valores dos erros da deflexão w_3 para malha regular e distorcida são apresentados nos Gráficos 7.27 e 7.28, respectivamente.

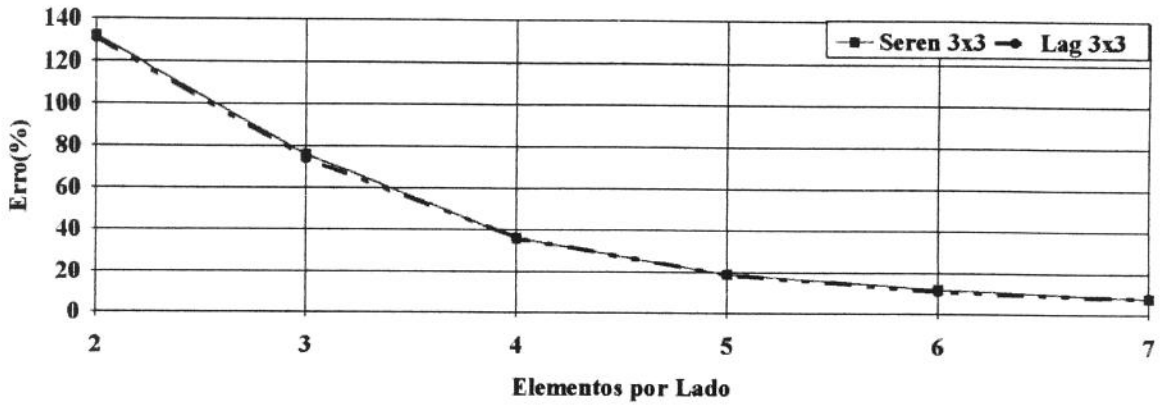


Gráfico 7.25: Valores dos erros da deflexão w_2 para várias malhas de discretização, considerando-se o caso de malha regular (casca cilíndrica sujeita à ação do seu peso próprio)

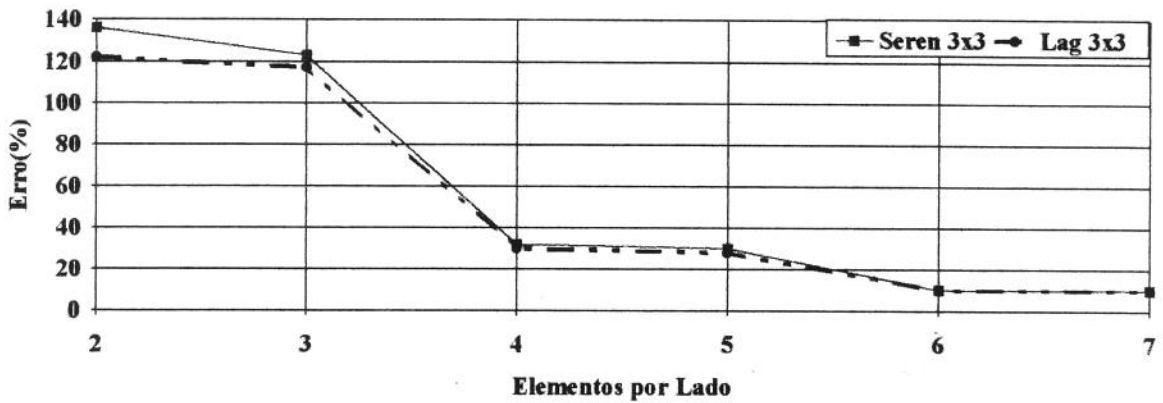


Gráfico 7.26: Valores dos erros da deflexão w_2 para várias malhas de discretização, considerando-se o caso de malha distorcida (casca cilíndrica sujeita à ação do seu peso próprio)

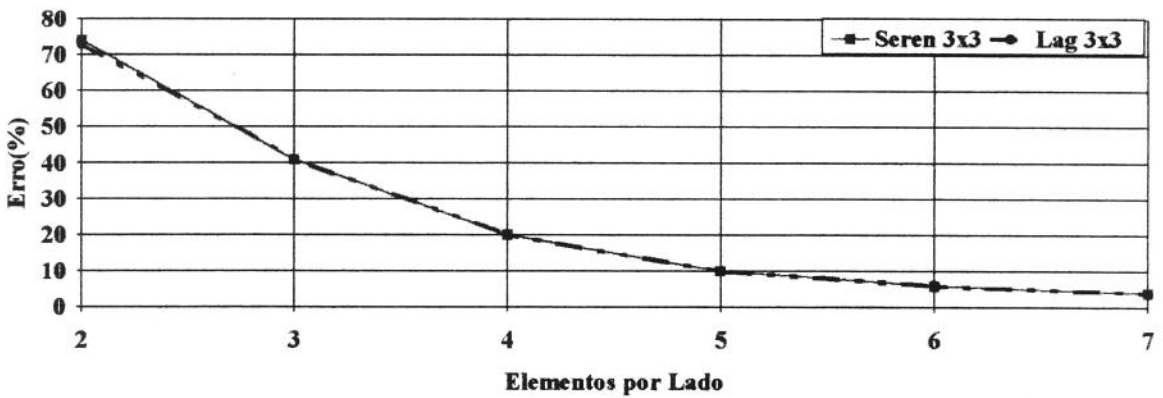


Gráfico 7.27: Valores dos erros da deflexão w_3 para várias malhas de discretização, considerando-se o caso de malha regular (casca cilíndrica sujeita à ação do seu peso próprio)

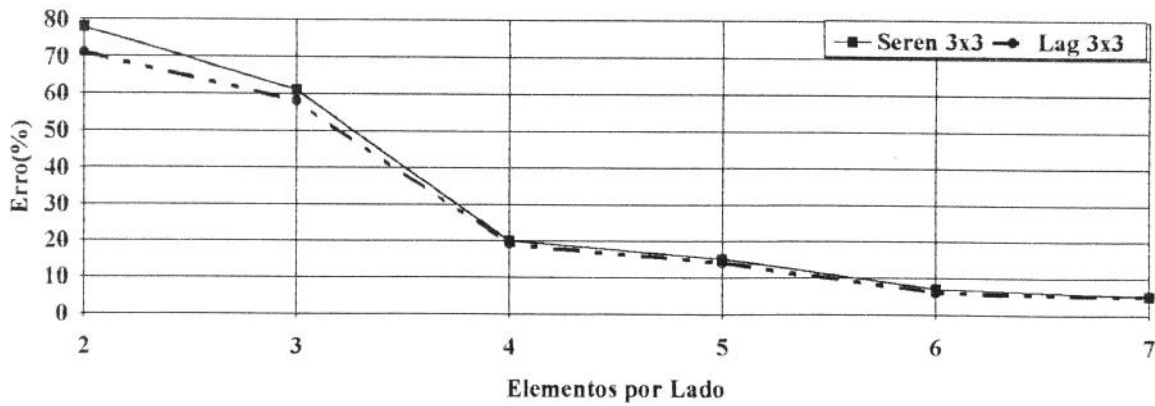


Gráfico 7.28: Valores dos erros da deflexão w_3 para várias malhas de discretização, considerando-se o caso de malha distorcida (casca cilíndrica sujeito à ação do seu peso próprio)

Verifica-se a partir dos Gráficos 7.23 a 7.28 que o elemento da Família Lagrangeana, possui um desempenho ligeiramente melhor que o elemento da Família Serendipity.

7.5. Viga Reta

A viga reta é um teste frequentemente utilizado, que pode ser aplicado a elementos de viga, placa ou sólido; sua maior virtude é a simplicidade e serve para avaliar a sensibilidade do elemento à distorção da malha [28]. Foram utilizadas 3 malhas distintas (malha regular, trapezoidal e paralelogramo) e impostas 4 condições de carregamento (flexão no plano, flexão fora do plano, torção e flexão pura). As malhas utilizadas são apresentadas na Figura 7.6 e os carregamentos, na Figura 7.7.

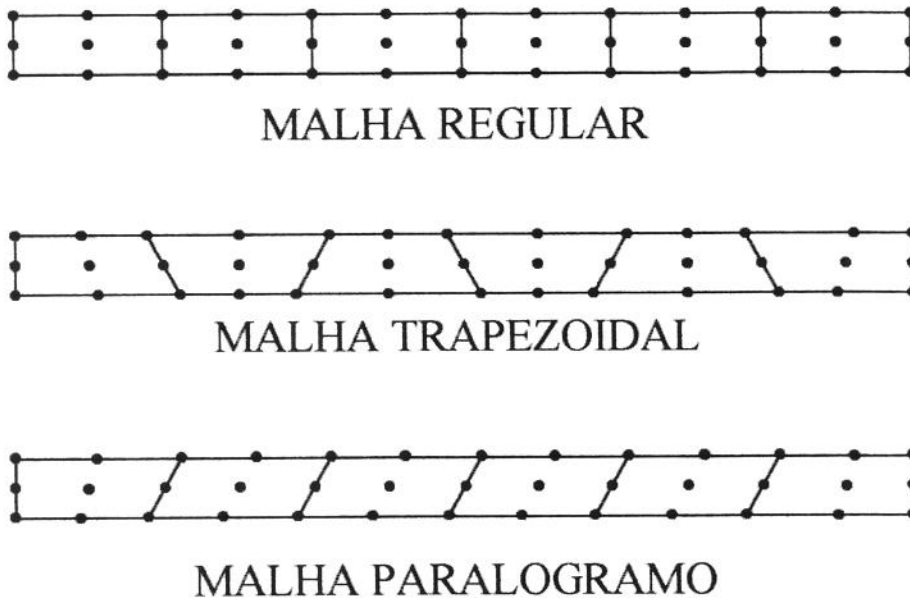


Figura 7.6 - Malhas de discretização usadas na viga reta

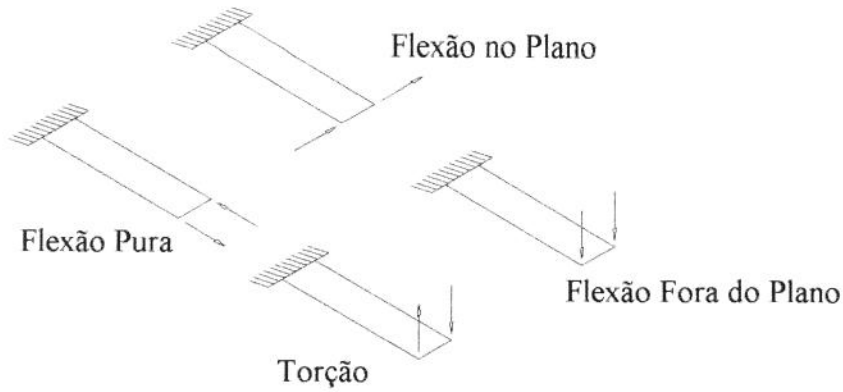


Figura 7.7 - Carregamentos atuantes na viga reta

As vigas possuem as seguintes dimensões : comprimento igual a 6,0, largura igual a 0,2 e espessura igual a 0,1. O módulo de elasticidade (E) é de $1,0 \times 10^7$ e o coeficiente de poisson ν igual a 0,3.

Os carregamentos utilizados foram de 0,5 para flexão no plano e flexão fora do plano e igual a 5 para torção e flexão pura. A figura 7.7 mostra os pontos de aplicação de cada força e sua direção.

Os valores teóricos para os deslocamentos na direção do carregamento são:

Carregamento	Deslocamento
Flexão no Plano	0,1081
Flexão fora do Plano	0,4321
Torção	0,03208
Flexão Pura	3×10^{-5}

Os valores dos erros dos deslocamentos dos nós carregados, na direção do carregamento, são apresentados nas Tabelas 7.24, 7.25 e 7.26, para malha regular, trapezoidal e paralelogramo, respectivamente.

Tabela 7.25: Erros do deslocamento dos nós carregados, na direção do carregamento, para malha de discretização regular.

	Serendipity (Erro %)	Lagrange (Erro %)
Flexão Plano	1,8	1,0
Flexão Fora do Plano	1,6	1,1
Torção	5,7	5,7
Flexão Pura	0,9	0,3

Tabela 7.26: Erro do deslocamento dos nós carregados, na direção do carregamento, para malha de discretização trapezoidal.

	Serendipity (Erro %)	Lagrange (Erro %)
Flexão Plano	1,8	1,9
Flexão Fora do Plano	33,6	1,4
Torção	5,7	6,1
Flexão Pura	8,1	0,3

Tabela 7.27: Erro dos deslocamentos dos nós carregados, na direção do carregamento, para malha de discretização paralelogramo.

	Serendipity (Erro %)	Lagrange (Erro %)
Flexão Plano	1,8	1,0
Flexão Fora do Plano	1,6	1,1
Torção	5,7	5,7
Flexão Pura	0,9	0,3

Os Gráficos 7.29 a 7.31 apresentam os valores dos erros dos deslocamentos dos nós carregados, na direção do carregamento para cada situação de carregamento, para malha regular, trapezoidal e paralelogramo, respectivamente.

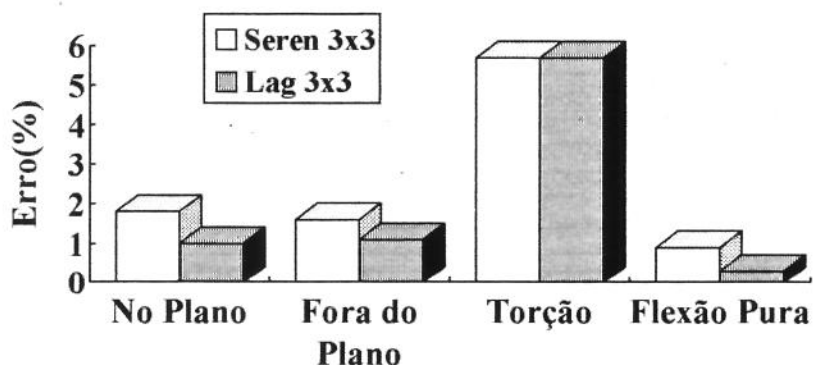


Gráfico 7.29: Valores dos erros do deslocamento dos nós carregados, na direção do carregamento, para malha de discretização regular.

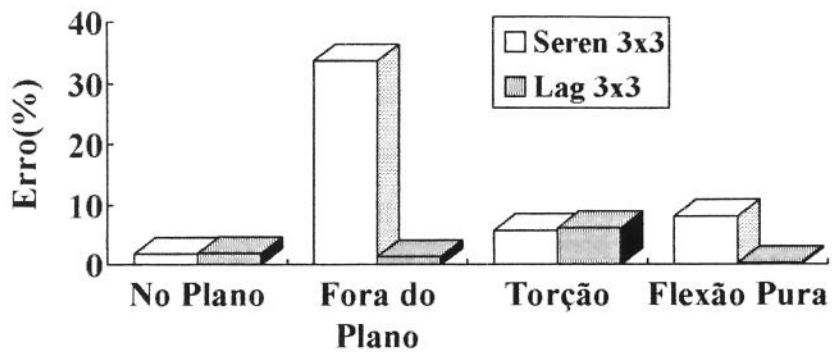


Gráfico 7.30 : Valores dos erros do deslocamento dos nós carregados, na direção do carregamento, para malha de discretização trapezoidal.

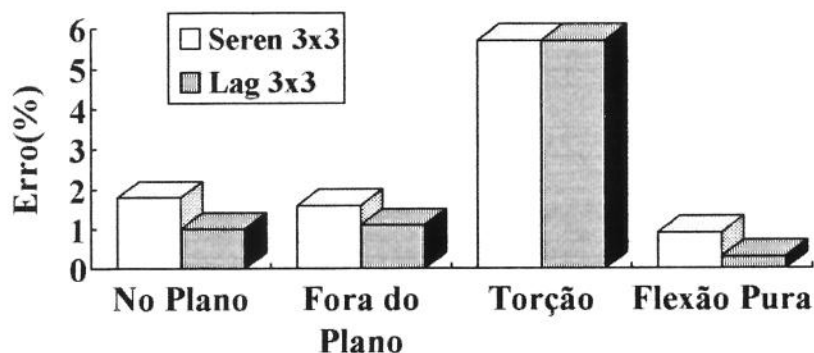


Gráfico 7.31 : Valores dos erros do deslocamento dos nós carregados, na direção do carregamento, para malha de discretização paralelogramo.

Os resultados apresentados nos Gráficos 7.29 a 7.31 mostram que o elemento da Família Lagrangeana obteve melhor resultado que o elemento da Família Serendipity para a maioria das situações analisadas.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES

Verifica-se a partir dos resultados, obtidos no Capítulo anterior, que o *elemento da família Lagrangeana* apresentou um desempenho melhor que o *elemento da família Serendipity* para as situações de placas e cascas finas, considerando-se tanto malhas de discretização regulares, como distorcidas. Desta forma, pode-se estabelecer que o *elemento da família Lagrangeana* é o mais apropriado para iniciar o desenvolvimento de um *elemento finito subparamétrico do tipo hierárquico*, baseado no conceito da aproximação p , com o objetivo de retirar a característica de rigidez excessiva do elemento de *Ahmad*, para as situações de placas e cascas finas. Isto significa que em cima da expansão polinomial, obtida a partir das funções de forma quadráticas da família Lagrangeana, mostrada na Figura 3.6, deve-se inserir termos de maneira a obter polinômios completos de terceiro grau, quarto grau, etc., como mostra a Figura 8.1, refinando-se, desta forma, a solução obtida, inicialmente, através da interpolação quadrática.

$$\begin{array}{rcl}
 & & 1 \\
 & & \xi \quad \eta \\
 & \xi^2 & \xi\eta \quad \eta^2 \quad \dots\dots\dots 2^\circ \text{ grau} \\
 \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 \quad \eta^3 \quad \dots\dots\dots 3^\circ \text{ grau} \\
 \xi^4 & \xi^3\eta & \xi^2\eta^2 \quad \xi\eta^3 \quad \eta^4 \dots\dots\dots 4^\circ \text{ grau}
 \end{array}$$

Figura 8.1 - Expansão polinomial correspondente ao refinamento hierárquico de 3º e 4º graus.

Contudo, deve-se ressaltar que a comparação efetuada neste trabalho, entre os dois elementos (família Serendipity e família Lagrangeana), referiu-se à análise estática, devendo-se, ainda, verificar seus comportamentos no que concerne à análise dinâmica e análise de estabilidade; estas são, portanto, propostas de continuidade deste trabalho:

- Estudo Comparativo de Elementos Finitos Isoparamétricos das Famílias Serendipity e Lagrangeana para Análise Dinâmica de Placas e Cascas;
- Estudo Comparativo de Elementos Finitos Isoparamétricos das Famílias Serendipity e Lagrangeana para Análise de Estabilidade de Placas e Cascas;

BIBLIOGRAFIA

- [1] TIMOSHENKO, S.P , WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of plates and shells*, 2nd. ed., McGraw- Hill Kogakusha, Ltd., 1959.
- [2] UGURAL, A. C. *Stresses in plates and shells*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1981.
- [3] KIRCHHOFF, G. Vorlesungen über mathematische Physik, *Bd. 1, Mechanik*, 1876.
- [4] AHMAD, S., IRONS, B.M. & ZIENKIEWICZ, O. C. Analysis of thick and thin shell structures by curved elements, *Int. J. Numer. Methods. Eng.* **3**, 419-451, 1970.
- [5] BATHE, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1982.
- [6] ZIENKIEWICZ, O. C., TOO, J. & TAYLOR, R. L., Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, *Int. J. Numer. Methods, Eng.* **3**, 375-390, 1971.
- [7] COONS, S. A. *Surfaces for computer aided design of space form*, M.I.T. Project MAC, MAC-TR-41, 1967.
- [8] FORREST, A. R. *Curves and Surfaces for computer aided design*, Computer Aided Design Group, Cambridge, England, 1968.
- [9] ZIENKIEWICZ, O. C, TAYLOR, R. L. *The finite element method*, 4th. Ed., McGraw-Hill Book Co., London, 1989.
- [10] Leithold, L. *The calculus with analytic geometry*, 2nd. Ed., Harper & Row Publ. Inc., USA, 1981.
- [11] DESAI, C. S. *Elementary finite element method*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1979.
- [12] PRZEMIENIECKI, J. S. *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill Book Co., London, 1968.
- [13] KAPLAN, W. *Advanced calculus*, Addison-Wesley Publ. Co., 1971.

- [14] PIPES, L. A. , HOVANESSIAN S. A. *Matrix computer methods in engineering*, John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [15] LEIPHOLZ, L. *Theory of elasticity*, Noordhoof International Publ., Leyden, 1974.
- [16] TIMOSHENKO, S.P. *Resistência dos Materiais*, volume I, 3ª ed., Ao Livro Técnico S/A, Rio de Janeiro, 1969.
- [17] VOLTERRA, E, GAINES, J. H *Advanced strength of materials*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1971.
- [18] STRANG, G. *Linear algebra and its applications*, 2nd. ed., Academic Press Inc., New York, 1976.
- [19] PARISCH, H. A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration, *Computer Meths. in Applied Mech. and Eng.*, **20**, 323-350, North-Holland Publ. Co., 1979.
- [20] PARISCH, H. Thick shell elements applied to thin-walled structures-Numerical considerations, In: 3RD. POST CONFERENCE ON COMPUTING ASPECTS OF THE FINITE ELEMENT METHOD, Imperial College, London, 1975.
- [21] IRONS, B. M., The semiloof shell element, in ASHWELL, D. G. and GALLAGHER, R. H. (eds.), *Finite elements for thin shells and curved members*, 197-222, Wiley, London, 1975.
- [22] HUGHES, T. J. R., TAYLOR, R. L & Kanoknukulchai, W. A simple and efficient finite element for plate bending, *Int. J. Numer. Methods. Eng.* **11**, 1529-1543.
- [23] HUGHES, T. J. R. Hughes, COHEN, M. & Haronn, M. Reduced and selective integration technique in the finite element analysis of plates, *Nucl. Eng. Design*, **46**, 203-222, 1978.
- [24] PUGH, E. D. L, HINTON, E. & Zienkiewicz, O. C. A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **12**, 1059-1079, 1978.
- [25] SANAL, Z. Finite element programming and C, *Comput. Struct.* **51(6)**, 671-686, 1994.
- [26] PAGANO, N. J. Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates, *J. Comp. Mater.*, **4**, 20-34, 1970.
- [27] WHITE, D. W., ABEL, J. F. Testing of shell element accuracy and robustness, *Finite Elements in Analysis and Design*, **6**, 129-151, 1989.
- [28] MACNEAL, R. H., HARDER, R. L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, *Finite Elements in Analysis and Design*, **1**, 3-20, 1985

- [29] RHIU, J. J., LEE, S. W. A nine-node finite element for analysis of geometrically non-linear shells, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **26**, 1945-1962, 1988.
- [30] BALLESTEROS, P. *The application of Maclaurin's series to the analysis of plates in bending*, Univ. of Michigan, Ann Arbor, Mich., 59.196, 1958.
- [31] BALLESTEROS, P., LEE, S. L. Uniformly loaded rectangular plate supported at the corners, *Int. J. Mech. Sci.*, **2(3)**, 206-11, 1960.

APÊNDICE A

FUNÇÕES DE FORMA

A.1. Introdução

Apresentam-se, a seguir, para cada nó i da superfície média do elemento de casca, as funções de forma, $N_i(\xi, \eta)$, das famílias Serendipity e Lagrangeana, bem como, suas derivadas com relação às coordenadas curvilíneas: $\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta}$.

A.2 - Funções de Forma da Família Serendipity

As funções de forma da família Serendipity, utilizadas neste trabalho, estão descritas nas Equações de A.1 a A.8:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1) \quad (\text{A.1})$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1) \quad (\text{A.2})$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) \quad (\text{A.3})$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1) \quad (\text{A.4})$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad (\text{A.5})$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \quad (\text{A.6})$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \tag{A.7}$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \tag{A.8}$$

As Figuras de A.1 a A.8 mostram os gráficos da variação destas funções de forma sobre o elemento.

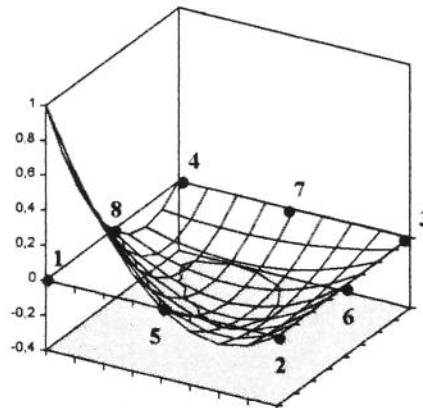


Figura A.1 - Função de Forma $N_1(\xi, \eta)$, associada ao nó 1 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity

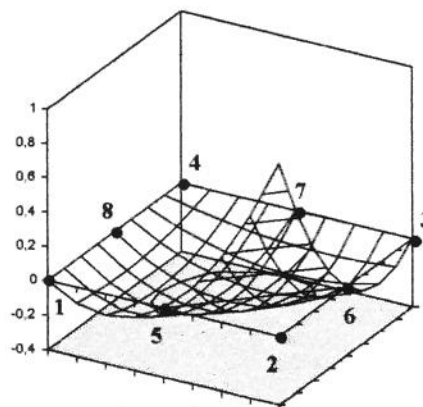


Figura A.2 - Função de Forma $N_2(\xi, \eta)$, associada ao nó 2 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity

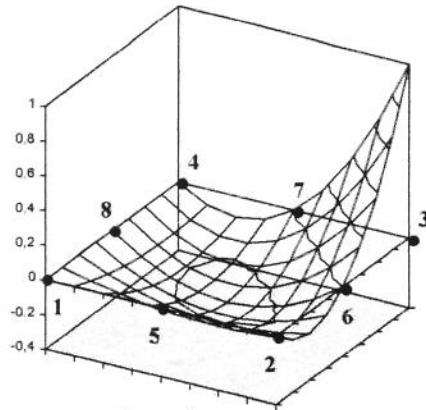


Figura A.3 - Função de Forma $N_3(\xi, \eta)$, associada ao nó 3 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity

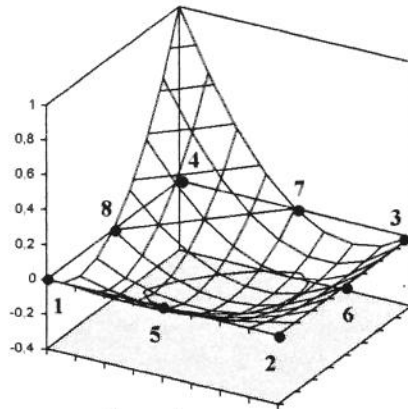


Figura A.4 - Função de Forma $N_4(\xi, \eta)$, associada ao nó 4 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity

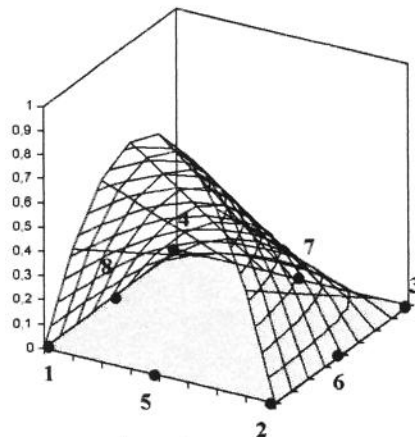


Figura A.5 - Função de Forma $N_5(\xi, \eta)$, associada ao nó 5 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity

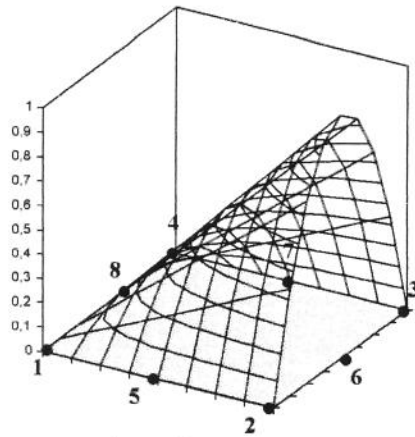


Figura A.6 - Função de Forma $N_6(\xi, \eta)$, associada ao nó 6 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity

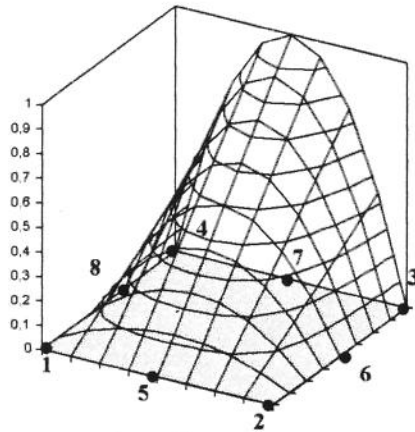


Figura A.7 - Função de Forma $N_7(\xi, \eta)$, associada ao nó 7 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity

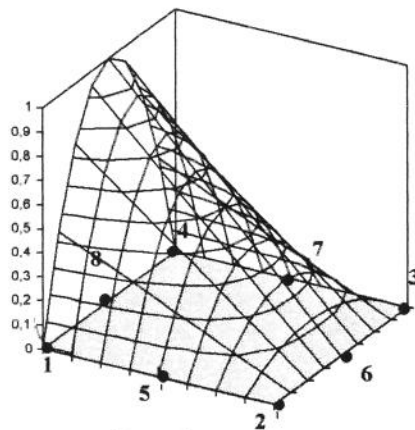


Figura A.8 - Função de Forma $N_8(\xi, \eta)$, associada ao nó 8 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Serendipity

A.3 - Derivadas das Funções de Forma da Família Serendipity

$$\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta)(-2\xi-\eta) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta) \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta)(-2\xi+\eta) \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial N_5(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\xi(1-\eta) \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(1-\eta^2) \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial N_7(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\xi(1+\eta) \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial N_8(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(1-\eta^2) \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi)(-\xi-2\eta) \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi)(\xi-2\eta) \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta) \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)(-\xi+2\eta) \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial N_5(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(1-\xi^2) \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \eta(1 + \xi) \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\partial N_7(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial N_8(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\eta(1 - \xi) \quad (\text{A.24})$$

A.4 - Funções de Forma da Família Lagrangeana

As funções de forma da família Lagrangeana, utilizadas neste trabalho, estão descritas nas Equações de A.25 a A.33:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) \quad (\text{A.25})$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta) \quad (\text{A.26})$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta) \quad (\text{A.27})$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta) \quad (\text{A.28})$$

$$N_5(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 - \eta) \quad (\text{A.29})$$

$$N_6(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - 1) \quad (\text{A.30})$$

$$N_7(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 + \eta) \quad (\text{A.31})$$

$$N_8(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - 1) \quad (\text{A.32})$$

$$N_9(\xi, \eta) = (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) \quad (\text{A.33})$$

As Figuras de A.9 a A.17 mostram os gráficos da variação destas funções de forma sobre o elemento.

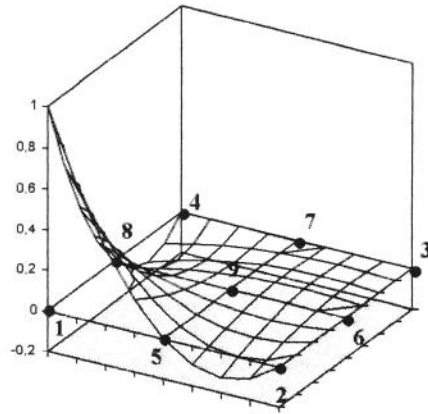


Figura A.9 - Função de Forma $N_1(\xi, \eta)$, associada ao nó 1 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana

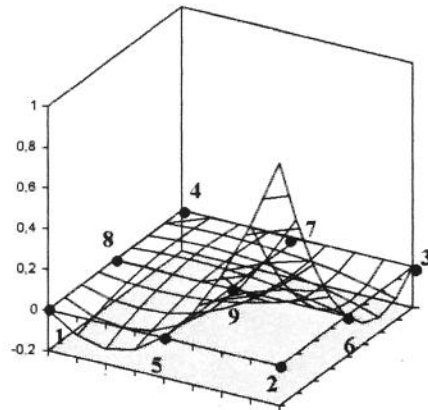


Figura A.10 - Função de Forma $N_2(\xi, \eta)$, associada ao nó 2 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana

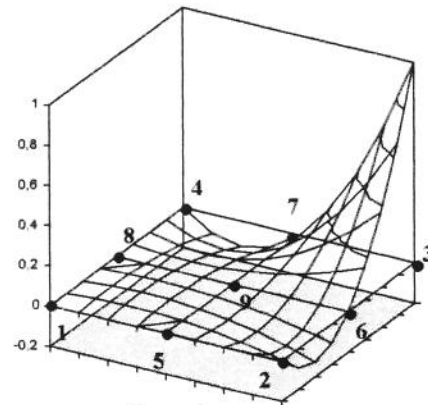


Figura A.11 - Função de Forma $N_3(\xi, \eta)$, associada ao nó 3 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana

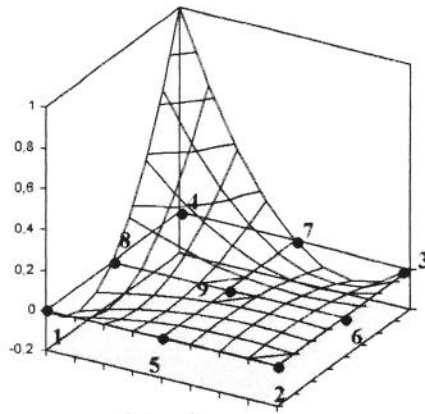


Figura A.12 - Função de Forma $N_4(\xi, \eta)$, associada ao nó 4 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana

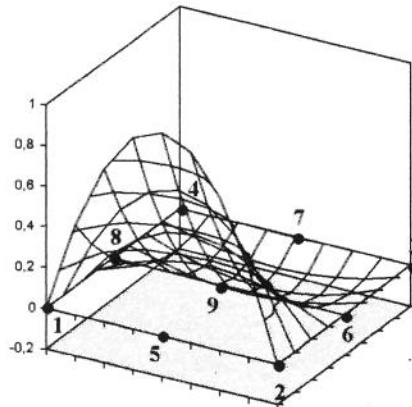


Figura A.13 - Função de Forma $N_5(\xi, \eta)$, associada ao nó 5 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana

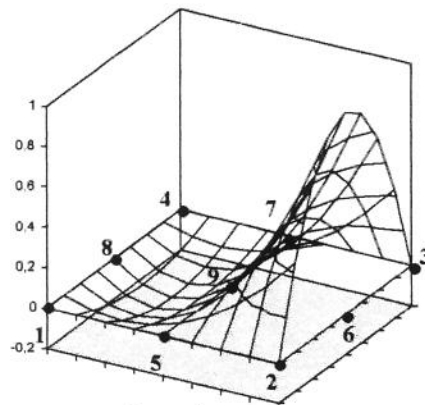


Figura A.14 - Função de Forma $N_6(\xi, \eta)$, associada ao nó 6 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana

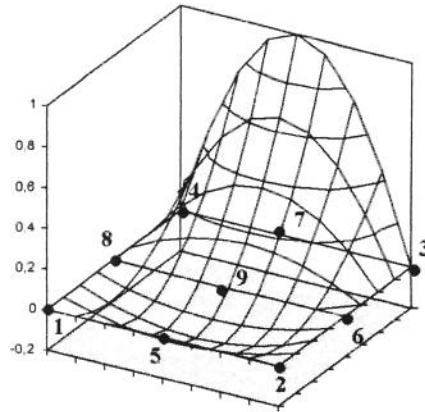


Figura A.15 - Função de Forma $N_7(\xi, \eta)$, associada ao nó 7 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana

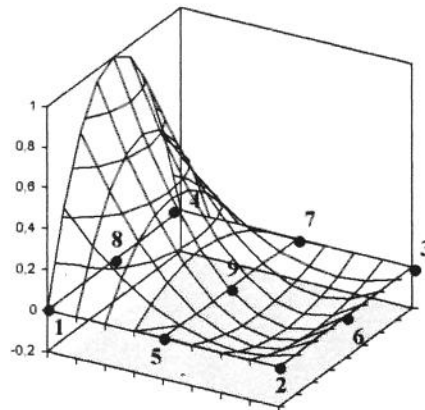


Figura A.16 - Função de Forma $N_8(\xi, \eta)$, associada ao nó 8 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana

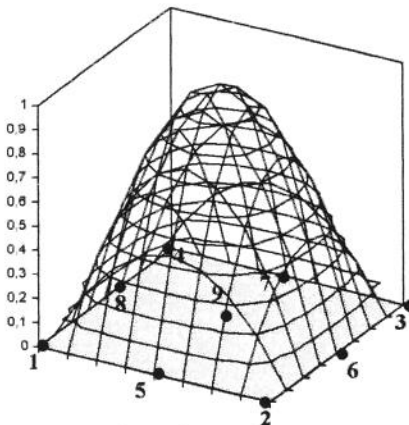


Figura A.17 - Função de Forma $N_9(\xi, \eta)$, associada ao nó 9 do elemento quadrilateral, quadrático, da Família Lagrangeana

A.5 - Derivadas das Funções de Forma da Família Lagrangeana

$$\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi - 1)(\eta^2 - \eta) \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi + 1)(\eta^2 - \eta) \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi + 1)(\eta^2 + \eta) \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi - 1)(\eta^2 + \eta) \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial N_5(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \xi(\eta^2 - \eta) \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(2\xi + 1)(\eta^2 - 1) \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\partial N_7(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \xi(\eta^2 + \eta) \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\partial N_8(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(2\xi - 1)(\eta^2 - 1) \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{\partial N_9(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 2\xi(\eta^2 - 1) \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2\eta - 1)(\xi^2 - \xi) \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2\eta - 1)(\xi^2 + \xi) \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2\eta + 1)(\xi^2 + \xi) \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2\eta + 1)(\xi^2 - \xi) \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{\partial N_5(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(2\eta - 1)(\xi^2 - 1) \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\eta(\xi^2 + \xi) \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\partial N_7(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(2\eta + 1)(\xi^2 - 1) \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{\partial N_8(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\eta(\xi^2 - \xi) \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{\partial N_9(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 2\eta(\xi^2 - 1) \quad (\text{A.51})$$

APÊNDICE B

ELEMENTOS DAS MATRIZES: $[A(\xi, \eta)]$, $[d(\xi, \eta)]$ e $[B_i(\xi, \eta)]$

B.1 - Elementos da Matriz $[A(\xi, \eta)]$

$$\begin{aligned}
 A_{11}(\xi, \eta) &= v_{11}(\xi, \eta) \cdot (r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta)) \\
 &\quad - v_{12}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) \\
 &\quad + v_{13}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{21}(\xi, \eta) &= v_{21}(\xi, \eta) \cdot (r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta)) \\
 &\quad - v_{22}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) \\
 &\quad + v_{23}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) \quad (B.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{12}(\xi, \eta) &= v_{11}(\xi, \eta) \cdot (V_{32}(\xi, \eta) \cdot r_{13}(\xi, \eta) - V_{33}(\xi, \eta) \cdot r_{12}(\xi, \eta)) \\
 &\quad - v_{12}(\xi, \eta) \cdot (V_{31}(\xi, \eta) \cdot r_{13}(\xi, \eta) - V_{33}(\xi, \eta) \cdot r_{11}(\xi, \eta)) \\
 &\quad + v_{13}(\xi, \eta) \cdot (V_{31}(\xi, \eta) \cdot r_{12}(\xi, \eta) - V_{32}(\xi, \eta) \cdot r_{11}(\xi, \eta)) \quad (B.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{22}(\xi, \eta) &= v_{21}(\xi, \eta) \cdot (V_{32}(\xi, \eta) \cdot r_{13}(\xi, \eta) - V_{33}(\xi, \eta) \cdot r_{12}(\xi, \eta)) \\
 &\quad - v_{22}(\xi, \eta) \cdot (V_{31}(\xi, \eta) \cdot r_{13}(\xi, \eta) - V_{33}(\xi, \eta) \cdot r_{11}(\xi, \eta)) \\
 &\quad + v_{23}(\xi, \eta) \cdot (V_{31}(\xi, \eta) \cdot r_{12}(\xi, \eta) - V_{32}(\xi, \eta) \cdot r_{11}(\xi, \eta)) \quad (B.4)
 \end{aligned}$$

$$A_{33}(\xi, \eta) = v_{31}(\xi, \eta) \cdot r_{31}(\xi, \eta) + v_{32}(\xi, \eta) \cdot r_{32}(\xi, \eta) + v_{33}(\xi, \eta) \cdot r_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{B.5})$$

As componentes do versor \bar{v}_1 são dadas através das Equações de (3.5) a (3.7), do versor \bar{v}_2 , através das Equações de (3.9) a (3.12) e do vetor \bar{r}_3 , através das Equações de (2.19) a (2.21).

B.2 - Coeficientes da Matriz $[d(\xi, \eta)]$

$$d_{11}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \quad (\text{B.6})$$

$$d_{12}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (\text{B.7})$$

$$d_{13}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (\text{B.8})$$

$$d_{14}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \quad (\text{B.9})$$

$$d_{15}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (\text{B.10})$$

$$d_{16}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (\text{B.11})$$

$$d_{21}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (\text{B.12})$$

$$d_{22}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (\text{B.13})$$

$$d_{23}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (\text{B.14})$$

$$d_{24}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (\text{B.15})$$

$$d_{25}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (\text{B.16})$$

$$d_{26}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (\text{B.17})$$

$$d_{31}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (\text{B.18})$$

$$d_{32}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (\text{B.19})$$

$$d_{33}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (\text{B.20})$$

$$d_{34}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (\text{B.21})$$

$$d_{35}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (\text{B.22})$$

$$d_{36}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (\text{B.23})$$

$$d_{41}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{31}(\xi, \eta) \quad (\text{B.24})$$

$$d_{42}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{32}(\xi, \eta) \quad (\text{B.25})$$

$$d_{43}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{B.26})$$

$$d_{44}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{31}(\xi, \eta) \quad (\text{B.27})$$

$$d_{45}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{32}(\xi, \eta) \quad (\text{B.28})$$

$$d_{46}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{B.29})$$

$$d_{47}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \quad (\text{B.30})$$

$$d_{48}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (\text{B.31})$$

$$d_{49}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (\text{B.32})$$

$$d_{51}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{31}(\xi, \eta) \quad (\text{B.33})$$

$$d_{52}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{32}(\xi, \eta) \quad (\text{B.34})$$

$$d_{53}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{B.35})$$

$$d_{54}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{31}(\xi, \eta) \quad (\text{B.36})$$

$$d_{55}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{32}(\xi, \eta) \quad (\text{B.37})$$

$$d_{56}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{33}(\xi, \eta) \quad (\text{B.38})$$

$$d_{57}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (\text{B.39})$$

$$d_{58}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (\text{B.40})$$

$$d_{59}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (\text{B.41})$$

B.3 - Elementos da Matriz $[B_i(\xi, \eta)]$

$$B_{11i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{14} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.42})$$

$$B_{21i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{24} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.43})$$

$$B_{31i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{31} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{34} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.44})$$

$$B_{41i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{41} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{44} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.45})$$

$$B_{51i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{51} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{54} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.46})$$

$$B_{12i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{15} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.47)$$

$$B_{22i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{25} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.48)$$

$$B_{32i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{32} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{35} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.49)$$

$$B_{42i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{42} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{45} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.50)$$

$$B_{52i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{52} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{55} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.51)$$

$$B_{13i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{13} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{16} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.52)$$

$$B_{23i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{23} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{26} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.53)$$

$$B_{33i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{33} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{36} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.54)$$

$$B_{43i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{43} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{46} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.55)$$

$$B_{53i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{53} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d_{56} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (B.56)$$

$$B_{14i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{11}v_{11i} + d_{12}v_{12i} + d_{13}v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{14}v_{11i} + d_{15}v_{12i} + d_{16}v_{13i}) \right] \quad (B.57)$$

$$B_{24i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{21}v_{11i} + d_{22}v_{12i} + d_{23}v_{13i}) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{24}v_{11i} + d_{25}v_{12i} + d_{26}v_{13i}) \right] \quad (B.58)$$

$$B_{34i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{31}v_{11i} + d_{32}v_{12i} + d_{33}v_{13i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{34}v_{11i} + d_{35}v_{12i} + d_{36}v_{13i}) \right] \quad (\text{B.59})$$

$$B_{44i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{41}v_{11i} + d_{42}v_{12i} + d_{43}v_{13i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{44}v_{11i} + d_{45}v_{12i} + d_{46}v_{13i}) \right] \quad (\text{B.60})$$

$$B_{54i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{51}v_{11i} + d_{52}v_{12i} + d_{53}v_{13i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{54}v_{11i} + d_{55}v_{12i} + d_{56}v_{13i}) \right] \quad (\text{B.61})$$

$$B_{15i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{11}v_{21i} + d_{12}v_{22i} + d_{13}v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{14}v_{21i} + d_{15}v_{22i} + d_{16}v_{23i}) \right] \quad (\text{B.62})$$

$$B_{25i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{21}v_{21i} + d_{22}v_{22i} + d_{23}v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{24}v_{21i} + d_{25}v_{22i} + d_{26}v_{23i}) \right] \quad (\text{B.63})$$

$$B_{35i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{31}v_{21i} + d_{32}v_{22i} + d_{33}v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{34}v_{21i} + d_{35}v_{22i} + d_{36}v_{23i}) \right] \quad (\text{B.64})$$

$$B_{45i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{41}v_{21i} + d_{42}v_{22i} + d_{43}v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{44}v_{21i} + d_{45}v_{22i} + d_{46}v_{23i}) \right] \quad (\text{B.65})$$

$$B_{55i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} (d_{51}v_{21i} + d_{52}v_{22i} + d_{53}v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (d_{54}v_{21i} + d_{55}v_{22i} + d_{56}v_{23i}) \right] \quad (\text{B.66})$$

$$C_{44i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} [N_i(d_{47}v_{11i} + d_{48}v_{12i} + d_{49}v_{13i})] \quad (\text{B.67})$$

$$C_{54i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} [N_i(d_{57}v_{11i} + d_{58}v_{12i} + d_{59}v_{13i})] \quad (\text{B.68})$$

$$C_{45i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} [N_i(d_{47}v_{21i} + d_{48}v_{22i} + d_{49}v_{23i})] \quad (\text{B.69})$$

$$C_{55i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} [N_i(d_{57}v_{21i} + d_{58}v_{22i} + d_{59}v_{23i})] \quad (\text{B.70})$$