



**PAOLA GONZALEZ RAMOS**

# **Controle de Vibração para uma Viga Flexível Longa**

21/2013

**CAMPINAS  
2013**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

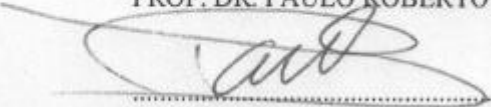
**PAOLA GONZALEZ RAMOS**

# **Controle de Vibração para uma Viga Flexível Longa**

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestra em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO  
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA  
ALUNA PAOLA GONZALEZ RAMOS E ORIENTADA PELO  
PROF. DR. PAULO ROBERTO GARDEL KURKA.



ASSINATURA DO ORIENTADOR

**CAMPINAS**  
**2013**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

G589c Gonzalez Ramos, Paola  
Controle de vibração para uma viga flexível longa /  
Paola Gonzalez Ramos. --Campinas, SP: [s.n.], 2013.

Orientador: Paulo Roberto Gardel Kurka.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Vigas. 2. Vibração. 3. Metodo de Elementos  
Finitos. 4. Vibração - Controle. I. Kurka, Paulo Roberto  
Gardel, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Vibration control for a flexible and long beam

Palavras-chave em Inglês: Beams, Vibration, Finite Element Method, Vibration -  
Control

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestra em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Ely Carneiro de Paiva, Humberto Ferasoli Filho

Data da defesa: 28-02-2013

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

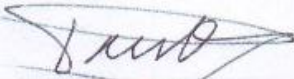
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADEMICO

# Controle de Vibração para uma Viga Flexível Longa

Autor: Paola Gonzalez Ramos


Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



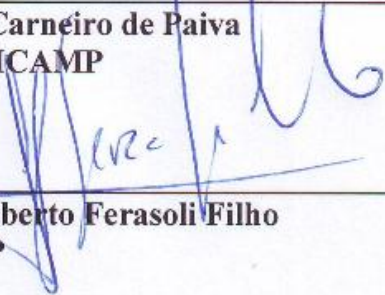
---

**Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka, Presidente**  
CEP/FEM/UNICAMP



---

**Prof. Dr. Ely Carneiro de Paiva**  
CEP/FEM/UNICAMP



---

**Prof. Dr. Humberto Ferasoli Filho**  
DC/FC/UNESP

Campinas, 28 de Fevereiro de 2013

## **DEDICATÓRIA**

A minha mãe Yaneth Ramos e minha avó Cecilia Forero as quais quero muito e agradeço por todo o carinho e o apoio de sempre.

## **Agradecimentos**

Agradeço a Deus por cada momento de minha vida e das oportunidades que coloca em meu caminho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Gardel Kurka, pela dedicação e paciência, por seu apoio e conselhos dados ao longo desse período.

Ao Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira, pelas sugestões e conselhos.

A minha família, minha mãe Yaneth Ramos e minha avó Cecilia Forero, pela formação que me deram, pela motivação, apoio e carinho em todos meus planos. A minha tia Carmenza Forero pelo apoio e carinho. A meus tios, tias e primos por sua confiança e apoio.

A meu companheiro de aventura Oscar Rojas, pela companhia, conselhos e ajuda, por aceitar viver esta experiência comigo.

A meu companheiro de trabalho Jaime Izuka pela colaboração e apoio durante esse período.

A minhas amigas e companheiras de casa Miriam Dominguez e Juliana Kobashikawa, pela amizade e os momentos felizes que foram compartilhados.

A minha pequena família Colombo-Brasileira, pelos momentos compartilhados, passeios e comidas, que fizeram mais agradável nossa experiência longe de casa.

A todos amigos e familiares que de alguma forma colaboraram para que eu pudesse chegar até aqui.

A CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo indispensável apoio financeiro.

*Não devemos ter medo dos confrontos...  
até os planetas se chocam e do caos nascem as estrelas.*

Charles Chaplin

*Há uma força motriz mais poderosa que o vapor,  
a eletricidade e a energia atômica: a vontade*

Albert Einstein

## Resumo

O uso de manipuladores longos e flexíveis em veículos de exploração autônoma, ao contrário dos braços curtos e rígidos, pode ser uma forma de obter dados de um ambiente específico de longo alcance, como encostas de terreno e penhascos. A desvantagem de se utilizar uma estrutura flexível, é a dificuldade de controlar os seus movimentos de vibração durante a operação. Este trabalho, portanto, tem como objetivo principal projetar um controle de vibração ativa para uma viga flexível longa, deformável pela ação de um cabo fixado em sua extremidade. O controle pretende minimizar os movimentos oscilatórios da ponta da viga decorrentes de perturbações externas. A projeção do controle baseia-se no modelo matemático em tempo contínuo da viga, realizado pelo método de elementos finitos. A estratégia de controle é calculada com um modelo reduzido do sistema, no qual estão contidos os modos dominantes do mesmo. Mostra-se que uma resposta desejada de controle é obtida aplicando-se o método de alocação de polos.

Palavras-chave: Controle vibração ativa, Viga flexível longa, Método de elementos finitos, Modos de vibração.



## **Abstract**

The use of long manipulators in autonomous exploration vehicles, as opposed to short and rigid arms, may be an attractive way to collect data in specific long range environments such as terrain slopes and cliff sides. The drawback of employing such a flexible structure is the fact that its vibrations cannot be easily controlled in real time operation. This work has the principal objective to project an active vibration control of a long flexible beam which is deformed by action of a pulling cable, fixed to its extremity. The control aims to minimize the oscillatory movements of the beam's tip caused by external disturbances. The control strategy is based on the continuous time mathematical model of the beam, using the finite element method. The control strategy is calculated in a reduced model system which contains the dominant modes of the same. It is shown that an adequate control response is obtained using the method of allocation of poles.

Keywords: Active vibration control, long flexible beam, Finite elements methods, vibration models.

## Lista de Ilustrações

Figura 1.1: Modelo do robô com o braço flexível	2
Figura 2.1: Elementos do Sistema.	9
Figura 2.2: Análises de deflexão da viga	11
Figura 2.3: Ângulo $\beta$ da força em função do comprimento do cabo.	15
Figura 2.4: Discretização da viga.	16
Figura 2.5: Sistema de coordenadas globais e locais do elemento.	16
Figura 2.6: Sistema viga cabo.	20
Figura 2.7: Modelo equivalente do motor.	23
Figura 2.8: Comportamento do extensômetro sometido a deformações,	24
Figura 3.1: Diagrama de blocos geral	29
Figura 3.2: Representação variáveis de estado.	30
Figura 3.3: Localização dos auto-valores do sistema dinâmico lineal no plano complexo (CASTAÑEDA , PARRA e COLINA, 2009)	34
Figura 3.4: Diagrama do controle em realimentação de estados	35
Figura 3.5: Sistema controlado com observador.	38
Figura 4.1: Diagrama de blocos com os modelo dinâmicos	39
Figura 4.2: Modos dominantes do sistema	43
Figura 5.1: Elementos e graus de liberdade do Sistema.	48
Figura 5.2: Vibrações da ponta de viga em malha aberta com entrada impulso.	53
Figura 5.3: Vibrações da ponta de viga em malha fechada com entrada impulso	54
Figura 5.4: Resposta obtida pelo observador do sistema controlado.	55
Figura 5.5: Sistema em malha aberta com entrada aleatória.	56
Figura 5.6: Sistema em malha fechada com entrada aleatória.	56
Figura 5.7: Resposta obtida pelo observador do sistema controlado.	57

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1: Propiedades físicas e geométricas da viga e do cabo	49
Tabela 5.2: Propiedades do motor	49
Tabela 5.3: Propiedades do sensor	49
Tabela 5.4: Auto-valores do sistema com e sem control	50

## Lista de Abreviaturas e siglas

### *Letras Latinas*

<b>A, A<sub>ç</sub>:</b>	Matriz do sistema e matriz reduzida do sistema.
<b>A, B, C:</b>	Ponto base, ponto final da viga e ponto generico ao longo da viga.
<b>B, B<sub>ç</sub>:</b>	Matriz de entrada e matriz reduzida da entrada.
<b>b:</b>	Matriz de incidência da força em coordenadas nodais.
<b>b<sub>n</sub>:</b>	Atrito viscoso do motor ( <i>Nms</i> )
<b>C, C<sub>ç</sub>:</b>	Matriz de saída e matriz reduzida da saída.
<b>c:</b>	Constante adimensional ( $c = -\frac{PL^2}{EI}$ ).
<b>D, D<sub>e</sub>:</b>	Matriz de amortecimento proporcional ( <i>Ns/m</i> ).
<b>E:</b>	Matriz de entrada para a variável do distúrbio.
<b>E:</b>	Coefficiente elástico (módulo de Young) ( <i>N/m<sup>2</sup></i> ).
<b>e:</b>	Força contra eletromotriz do motor ( <i>V</i> ).
<b>F, F<sub>a</sub>:</b>	Força de tração do cabo ( <i>N</i> ).
<b>F<sub>a</sub>, F<sub>d</sub>:</b>	Matriz força do atuador e matriz força de distúrbio ( <i>N</i> ).
<b>GF:</b>	Fator de ganho do sensor.
<b>G, g<sub>ç</sub>:</b>	Matriz do ganho do controle e matriz reduzida do ganho do controle.
<b>h<sub>x</sub>, h<sub>y</sub>:</b>	Coordenadas de posição de apoio do cabo ( <i>m</i> ).
<b>I:</b>	Momento de inércia de área ( <i>m<sup>4</sup></i> ).
<b>i:</b>	Corrente de armadura do motor ( <i>Amp</i> ).
<b>J:</b>	Momento de inércia ( <i>m<sup>2</sup>kg</i> ).
<b>J<sub>m</sub>:</b>	Momento de inércia do motor ( <i>kg.m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup></i> ).
<b>k<sub>c</sub>:</b>	Rigidez do cabo ( <i>kN/m</i> ).
<b>k<sub>e</sub>:</b>	Constante da força contra eletromotriz do motor ( <i>Nm/Amp</i> ).

$K_t$ :	Constante de torque do motor ( $Nm/Amp$ ).
$\mathbf{K}$ :	Matriz de rigidez da viga e o cabo em coordenadas globais $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_e + \mathbf{b}\mathbf{k}_c\mathbf{b}^T)$ .
$\mathbf{K}_e, \bar{\mathbf{k}}_e$ :	Matriz de rigidez em coordenadas globais e locais ( $N/m$ ).
$\mathbf{L}_c, \mathbf{I}_c$ :	Matriz de ganho do observador e matriz reduzida do ganho do observador.
$L, L_c$ :	Comprimento da viga, comprimento do cabo caso de não-deformação ( $m$ ).
$L_a$ :	Indutância elétrica do motor ( $H$ ).
$M$ :	Momento ( $N/m$ ).
$\mathbf{M}_c, \mathbf{M}_o$ :	Matriz de controlabilidade e matriz de observabilidade.
$M_{eff,n}$ :	Massa modal efetiva.
$\mathbf{M}, \mathbf{M}_e$ :	Matriz de massa dos elementos finitos em coordenadas globais ( $kg$ ).
$\bar{\mathbf{m}}_e$ :	Matriz massa do elemento finito em coordenada local ( $kg$ ).
$o, q, r$ :	Deslocamentos das deformações.
$P$ :	Força de tração do cabo ( $N$ ).
$p$ :	Parâmetro adimensional ( $p = \sin(\frac{\alpha_B + \beta}{2})$ ).
$\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_e$ :	Polos desejados do controlador e polos desejados com observador.
$\mathbf{p}, \mathbf{p}^*$ :	Vetor de deslocamento noda e Vetor de deslocamento modal ( $m$ ).
$\mathbf{R}, \mathbf{r}_e$ :	Vetores globais e locais de graus de liberdade dos elementos finitos ( $m$ ).
$R_a$ :	Resistencia elétrica do motor ( $\Omega$ ).
$\mathbf{r}$ :	Vetor de coordenadas locais ( $m$ ).
$\mathbf{r}'$ :	Vetor com os deslocamentos da massa ( $m$ ).
$r_p$ :	Raio primitivo da polia ( $mm$ ).
$T$ :	Tensão do cabo ( $N$ ).
$T$ :	Torque do motor ( $Nm$ ).
$T_e, U_e$ :	Energia cinética e energia potencial ( $Nm$ ).
$t_e$ :	Tempo de estabilização ( $s$ ).
$\mathbf{u}$ :	Vetor de entrada.
$\mathbf{V}$ :	Matriz com os auto-vetores do sistema.
$V_o$ :	Voltagem de entrada ( $V$ ).
$\mathbf{v}$ :	Vetor de estados.

$w$ : Deslocamento do cabo ( $m$ ).  
 $x, x_B$  ou  $X_B$ : Coordenada horizontal, coordenada horizontal da posição final da viga ( $m$ ).  
 $y, y_B$  ou  $Y_B$ : Coordenada vertical, coordenada vertical da posição final da viga ( $m$ ).

.....

### ***Letras Gregas***

$\alpha, \alpha_B$ : Ângulo de inclinação da viga, ângulo de inclinação da extremidade viga ( $Rd$ )  
 $\beta$ : Ângulo de cabo ou de força aplicada ( $Rd$ ).  
 $\Upsilon$ : Vetor de saída do motor ( $Rd$ ).  
 $\gamma$ : Vetor de saída do sistema ( $V$ ).  
 $\gamma$ : Ângulo cumulativo ( $\gamma = \alpha + \beta$ ,  $Rd$ ).  
 $\varepsilon$ : Variação de comprimento do sensor ( $\Delta L/L$ ).  
 $\zeta$ : Fator de amortecimento ( $Ns/m$ ).  
 $\eta$ : Vetor com as coordenadas modais.  
 $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ : Ângulos graus de liberdade ( $Rd$ ).  
 $\vartheta$ : Posição angular gerada pelo atuador.  
 $\iota, \sigma$ : Constantes para calcular a matriz de amortecimento proporcional.  
 $\lambda$ : Matriz com os autovalores de  $\mathbf{A}$ .  
 $v_s$ : Voltagem de saída do sensor ( $V$ ).  
 $v_W$ : Voltagem de excitação do ponte Wheatstone para o sensor ( $V$ ).  
 $\xi$ : Coeficiente adimensional ( $\xi = x/l$ ).  
 $\rho$ : Densidade ( $kg/m^3$ ).  
 $\Phi$ : Matriz com os auto-vetores.  
 $\emptyset$ : Auto-vetores (modos de vibrar).  
 $\phi, \phi_A, \phi_B, \phi_C$ : Ângulos auxiliares ( $\phi = \arcsin \frac{\gamma}{2}$ ).  
 $\chi_1, \chi_2, \chi_3$ : Variáveis auxiliares.

$\omega$ : Autovalores (frequências naturais).

$\boldsymbol{w}$ : Vetor de entrada do distúrbio.

$\omega_n$ : Frequência natural ( $Rd/s$ ).

.....

### *Abreviações*

**MEF** - Método de Elementos Finitos

**PID** - Controlador Proporcional Integral Derivativo

**GDL** - Graus de Liberdade

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Trabalhos correlatos	5
1.2	Objetivos	7
1.3	Organização do texto	7
2	MODELAMENTOS DOS ELEMENTOS DO SISTEMA	9
2.1	Modelamento da viga flexível longa	10
2.1.1	Deflexão não linear	10
2.1.2	Método de elementos finitos [MEF]	15
2.2	Modelamento do cabo	19
2.3	Modelamento do motor	22
2.4	Modelamento do sensor	24
2.5	Modelo em coordenadas modais	25
3	PROJETO DO CONTROLADOR	29
3.1	Modelo em espaços de estado	30
3.2	Modelo do sistema em coordenadas modais	31
3.3	Método de alocação de polos	33
3.4	Controle em realimentação de estados	34
3.5	Observador	36
4	INTEGRAÇÃO DOS MODELOS DINAMICOS E DO CONTROLE	39
4.1	Descrição do modelo em espaço de estados	40
4.2	Calculo do ganho do controle	42



4.3	Calculo do ganho do observador	45
5	SIMULAÇÕES	47
5.1	Descrição do modelo	47
5.2	Propriedades físicas	49
5.3	Incidência do controle nos modos	50
5.4	Respostas das simulações	52
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	58
6.1	Conclusões	58
6.2	Propostas de trabalhos futuros	59
	REFERÊNCIAS	60
	APÊNDICE A – ARTIGO SOMETIDO AO JORNAL AIAA	63

# 1 INTRODUÇÃO

Estruturas flexíveis são comumente encontradas em aplicações nas áreas de engenharia automobilística, robótica, indústria, espacial entre outras. Robôs móveis são usados, dentre outras aplicações, na navegação em ambientes hostis e de difícil acesso como na exploração espacial, no interior de minas, prédios inseguros e etc., exigindo modelos e protótipos cada vez mais robustos e de baixo custo.

No âmbito da navegação visual deseja-se que o horizonte de exploração seja o mais amplo possível, permitindo uma melhor visualização de ambientes específicos de difícil acesso, como encostas de terreno e penhascos. Assim, um braço longo e controlável com uma câmera posicionada sobre sua extremidade livre, representa uma importante ferramenta acessória dos robôs de exploração.

Braços manipuladores e exploradores de veículos autônomos em geral, são estruturas rígidas e curtas que permitem um controle confiável de posição, com um mínimo gasto de energia. Estruturas longas, leves e flexíveis não são comumente projetadas como acessórios de exploração de precisão, devido principalmente à dificuldade de seu controle de vibração, quando está sujeito à perturbação de forças externas.

A principal vantagem do manipulador flexível é a simplicidade, evitando a utilização de vários atuadores elétricos, como motores nas articulações dos braços robóticos. Como trabalho de mestrado se propõe um controle ativo de vibração, para diminuir os movimento oscilatório no manipulador consequente das perturbações. Nesse caso, o manipulador consiste em uma viga longa e engastada, que é deformada para a posição de trabalho através da contração de um cabo

fixo à sua extremidade livre. O mesmo atuador eletromecânico (motor) responsável pela contração do cabo de posicionamento da viga é usado para o seu controle de vibração, baseado em um sensor de deformação instalado no cabo, que realimenta o modelo com o sinal de deslocamento medido. Uma idealização de tal sistema é apresentada na Figura 1.1.

O sistema a controlar consiste em um modelo da viga engastada onde uma extremidade é ancorada a uma base fixa horizontal, apresentando uma posição inicial perpendicular ao solo. Quando a extremidade livre é puxada por um cabo, deformando-a para uma posição de operação desejada, o controle de vibração entra em ação, minimizando a vibração do conjunto naquela condição. O cabo está também ligado a uma polia no eixo de um motor elétrico DC, cuja função é modificar o seu comprimento, produzindo uma deformação ou alteração de posição da extremidade livre da viga.



Figura 1.1: Modelo do robô com o braço flexível

No presente trabalho se projeta e implementa uma estratégia de controle ativo para minimizar as vibrações da extremidade do manipulador, considerando a sua deformação inicial de posicionamento em uma condição operacional arbitrária. O modelo de deformação operacional ou estática utilizado é aquele proposto no trabalho de doutorado de Izuka, e descrito no artigo (KURKA, IZUKA, *et al.*, 2012), apresentado no apêndice A. O modelo de controle, descrito no mesmo trabalho é o desenvolvido no âmbito da presente dissertação.

Na projeção do controle vibração utiliza-se o modelo matemático em tempo contínuo da viga deformada. O modelo depende da solução de equações diferenciais não lineares, equações elípticas e de Timoshenko, que não são adequadas para implementação de uma estratégia de controle em tempo real. Para resolver esse problema, Izuka, desenvolve um modelo de viga longa, baseado na criação de uma malha de elementos finitos, adaptados a uma equação aproximada da deflexão estática de uma viga tracionada por um cabo.

Na dissertação descreve-se o modelo dinâmico em tempo contínuo do manipulador, obtido a partir do método dos elementos finitos. O manipulador é discretizado por elementos viga de baixa ordem para a configuração curva do manipulador, cujas vibrações serão controladas. Os modelos matemáticos dos elementos do sistema (viga, cabo, atuador e sensor) são usados na projeção do controlador.

Existem duas técnicas de controle de vibração, chamados de controle passivo e controle ativo. A técnica passiva refere-se ao uso de elementos como molas, amortecedores e outros objetos físicos, que se limitam a armazenar e dissipar energia para controlar as vibrações das estruturas. A técnica ativa caracteriza-se por usar elementos com capacidade de transformar a energia elétrica ou magnética em força mecânica ou de flexão e vice-versa. O controle de vibração ativa é o adotado no presente trabalho. A principal vantagem do uso de tal técnica é a possibilidade de controlar os movimentos oscilatórios da viga a partir de dispositivos eletrônicos operados por sistemas computacionais.

Dentre as técnicas de controle de vibração ativa para estruturas flexíveis encontram-se o controle de realimentação de posição positiva, usado por (INMAN, 2001), (BAZ e POH, 1996), o controle ótimo quadrático linear usado por (NESTOROVÍ e TRAJKOV, 2010), (JINGJUN, LILI, *et al.*, 2008), o controle H-infinito, usado por (MOREIRA, 1998), (ZHANG, LILI, *et al.*, 2009) e o controle modal implementado o método de alocação de polos, desta estratégia é usada no trabalho de (ZHANG e GUANG, 2012), (TUMA e SKUTOVA, 2012), (RODRIGUEZ, GALLARDO e OROZCO, 2010), dentre outros. A escolha da técnica de controle a ser usada depende da modelagem da planta, dos elementos implementados e da resposta desejada.

Neste trabalho é adotada a técnica modal graças à sua capacidade de controlar certa quantidade de modos, aproveitando as relações de semelhança entre as configurações de vibração operacional do sistema e os seus modos naturais de vibração. Este tipo de controle é adotado em estruturas flexíveis (PREUMONT, 2011), descritas por um modelo discreto com um grande número de graus de liberdade. A transformação em coordenadas modais permite restringir os Graus de liberdade - GDL quando são escolhidos os modos de baixa frequência e grande amplitude. Dessa forma, o controle atinge os critérios de controlabilidade e observabilidade que irão atuar em certa quantidade de modos. Os modos e frequências são obtidos através da discretização da estrutura em um modelo de Elementos Finitos. A geometria da viga estaticamente deformada, por sua vez, é obtida analiticamente através da solução da equação de Euler Bernoulli.

O método de alocação de polos é utilizado na estratégia do controle, onde se espera obter uma resposta com a menor amplitude de oscilações. Igualmente é projetado um observador, ferramenta virtual, para estimar computacionalmente a dinâmica do sistema a partir da informação obtida pelo sensor. Os componentes de entrada e saída estão representados no espaço nodal por meio de coordenadas cartesianas X, Y. Portanto para se analisar o sistema, considera-se o caso de múltiplas entradas e múltiplas saídas (*MIMO*).

## 1.1 Trabalhos correlatos

O desenvolvimento do presente trabalho está relacionado aos tópicos de análise de deformação de vigas longas e flexíveis, bem como ao controle ativo de vibrações. Considerando tais temas, apresenta-se a seguir uma revisão dos principais trabalhos correlatos.

O modelo numérico que representa o comportamento dinâmico deste manipulador está relacionado com o problema não linear geométrico de uma viga sujeita a grandes deformações, seguido da análise dinâmica da viga na configuração defletida. A solução analítica para a equação diferencial que descreve o deslocamento estático de uma viga sujeita a grandes deflexões envolvem a utilização de integrais elípticas, e podem ser encontradas nos trabalhos de (YAU, 2010), (FRISCH-FAY, 1962) , (TIMOSHENKO, 1961). Os métodos de integração numérica aplicados para encontrar a solução da equação diferencial que governa a deformação estática de uma viga engastada incluem: o método *shooting*, como se vê no trabalho de (HOLLAND, STANCIULESCU e LAWRENCE, 2006) e o método Runge Kutta, apresentado no trabalho de (OHTSUKI, 2001).

A dinâmica de estruturas submetidas a grandes deflexões foi pesquisado por (FERRIS e AFONTA, 1993), (SALLSTROM , POELAERT e JANSSENS , 1996), (SANTILLAN, VIRGIN e PLAUT , 2005) e (HOLLAND, STANCIULESCU e LAWRENCE, 2006). (FERRIS e AFONTA, 1993) estudaram os modos e as frequências naturais de vibração de uma viga, levando em conta seu peso próprio, utilizando o método dos elementos finitos. Um trabalho similar foi desenvolvido por (SALLSTROM , POELAERT e JANSSENS , 1996), que considera uma viga de deflexão grande causada por uma carga estática. O método de *Shooting* é aplicado por (SANTILLAN, VIRGIN e PLAUT , 2005), para encontrar os modos e as frequências naturais, com o objetivo de analisar as pequenas vibrações no plano de uma viga. No trabalho de (HOLLAND, STANCIULESCU e LAWRENCE, 2006), apresenta-se o análises da dinâmica de uma estrutura longa e flexível. O autor faz uma análise das vibrações através da integração numérica da equação elástica governante, utilizando o método *shooting* e o método de elementos

finitos. O modelo de (HOLLAND, STANCIULESCU e LAWRENCE, 2006), é discretizado por uma grande quantidade de elementos de alta ordem.

Neste projeto utiliza-se o modelo de viga do projeto de doutorado de Izuka apresentado em (KURKA, IZUKA, *et al.*, 2012). O modelo descreve as propriedades dinâmicas (autovalores e auto-vetores) de uma viga longa e flexível, que é defletida estaticamente pela força de tensão de um cabo. Izuka propõe o uso de elementos finitos lineares de baixa ordem tipo viga, conservando a qualidade do modelo deformado. Obtém-se um modelo numérico simples, cujas características dinâmicas e estáticas são comparáveis aos de outros modelos mais complexos como os de (HOLLAND, STANCIULESCU e LAWRENCE, 2006).

Para o controle de vibração foram investigados trabalhos cujos objetivos são de diminuir as vibrações em vigas engastadas. A maioria deles utilizam elementos ativos do tipo piezoelétricos e piezocerâmicos. A partir do modelamento e da localização dos elementos na viga projeta-se uma estratégia de controle.

Nos trabalhos de (NESTOROVIC e TRAJKOV, 2010), (ZHANG, HE, *et al.*, 2008), (OKUBO, ICHIKAWA e NISHIMURA, 1998), (MANJUNATH e BANDYOPADHYAY, 2006) e (RODRIGUEZ, GALLARDO e OROZCO, 2010), utiliza-se modelamento modal, restringindo o projeto do controlador aos modos influentes no comportamento da viga. A estratégia de (NESTOROVIC e TRAJKOV, 2010) consiste em usar um controle adaptativo para suprimir as vibrações e atenuar o ruído das estruturas ativas. (ZHANG, HE, *et al.*, 2008) utiliza um controle linear quadrático para suprimir as vibrações de um modelo de viga que contém atuadores e sensores com alocação ótima. Por outro lado a estratégia de (OKUBO, ICHIKAWA e NISHIMURA, 1998) e (RODRIGUEZ, GALLARDO e OROZCO, 2010) baseia-se no método de alocação de polos. (OKUBO, ICHIKAWA e NISHIMURA, 1998), desenvolve um método robusto na alocação de polos em um plano complexo, mediante a projeção dos parâmetros estruturais, locação dos atuadores e controle de realimentação. (RODRIGUEZ, GALLARDO e OROZCO, 2010) aproveitam o modelo de controle multimodal manipulando os dois modos de vibração com maior domínio, obtendo de forma teórica e experimental, uma resposta estável em um tempo previamente estabelecido.

## 1.2 Objetivos

O objetivo geral deste projeto é projetar um controle de vibração ativo para diminuir as oscilações de uma viga engastada flexível e longa, tracionada por um cabo preso a sua extremidade.

- Utilizar um modelo de tempo real para determinação da curva de deformação estática de uma viga longa, baseado nas equações diferenciais de deformação contínua.
- Utilizar uma estratégia de representação discreta da viga, através do método de elementos finitos, para obtenção de um modelo dinâmico simplificado que seja útil para implementação de um procedimento de controle ativo de vibração.
- Conceber e testar numericamente uma malha de controle com realimentação ativa, que efetue a tarefa de estabilizar as vibrações de uma viga longa, sujeita a excitações transientes ou permanentes.

## 1.3 Organização do texto

No Capítulo 2 são detalhados os aspectos de modelagem. Primeiro descreve-se a forma em que foi modelada a viga flexível curva, encontrando a equação diferencial governante, as características dinâmicas (autovalores e auto-vetores) do modelo através da formulação Euler-Bernoulli e a teoria de elementos finitos. Além disso, apresenta-se o modelamento dos elementos que compõem o sistema.



O capítulo 3 apresenta o modelo de controle de vibração ativo proposto. Inicialmente faz-se uma descrição do modelo geral em diagrama de blocos. Em seguida, descreve-se o modelo em espaços de estado. Os estados correspondentes aos graus de liberdade são transformados em coordenadas modais para o projeto do controle de vibração. Em seguida apresenta-se o cálculo do ganho do controle usando o método de alocação de polos, seguido pela aplicação do controle no modelo. É descrito ainda um observador de estado para testar o comportamento do sistema.

O capítulo 4 apresenta a integração dos modelos dos diversos elementos que compõem os sistemas de modelamento e controle de vibrações da viga. Primeiro apresenta-se a descrição do modelo geral em espaço de estado. Em seguida, descreve-se a formulação da estratégia do controle de vibração e por último a descrição do cálculo do observador.

O capítulo 5 apresenta o modelo numérico de um manipulador característico, bem como as suas propriedades dinâmicas em malha aberta e fechada. São apresentadas as simulações do sistema controlado, validando a efetividade da estratégia de modelamento e controle proposta.

No capítulo 6 apresenta-se, finalmente, as principais conclusões do trabalho, perspectivas e sugestões para futuros desenvolvimentos.

## 2 MODELAMENTOS DOS ELEMENTOS DO SISTEMA

O manipulador de exploração proposto neste trabalho se caracteriza pela simplicidade. Ele é formado por uma viga longa e flexível, cujo posicionamento é obtido através da força de um cabo ligado a extremidade livre da viga e tracionado por um motor eletromecânico. Esta configuração é apresentada na Figura 2.1, Além da função de garantir a geometria estática de deformação da viga, o motor realimentado pelo sensor de posicionamento atua também no sentido de diminuir as vibrações de operação. O modelo matemático deste manipulador é essencial para se definir os ganhos do controle. Assim, neste capítulo apresentam-se os modelos matemáticos usados para a descrição da viga, cabo de tração e motor.

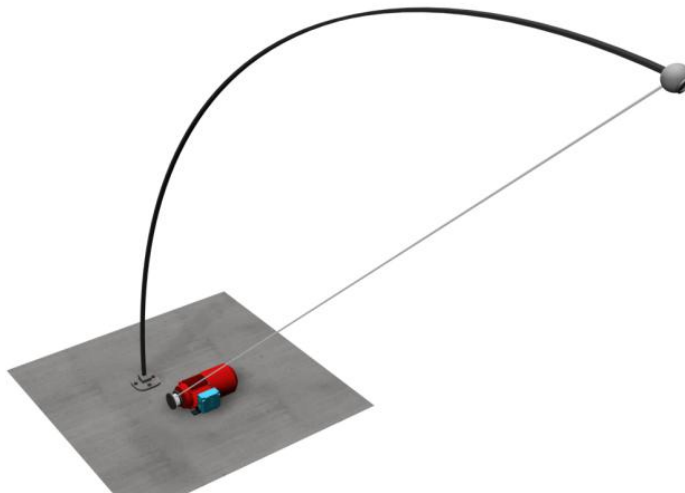


Figura 2.1: Elementos do Sistema.

## 2.1 Modelamento da viga flexível longa

O Modelamento da viga é feito no trabalho de doutorado de Jaime Izuka descrito brevemente em (KURKA, IZUKA, *et al.*, 2012). Entre os objetivos principais de Izuka está buscar uma configuração deformada da linha central da viga, cuja descrição está na seção 2.1.1, com essa linha deformada se atribui uma distribuição de elementos finitos de baixa ordem, obtendo os modos e frequências (auto vetores e auto-valores) da viga e do cabo. A descrição é apresentada na seção 2.1.2.

### 2.1.1 Deflexão não linear

O problema de determinar a força de tração e do ângulo do cabo da viga deformada é dirigida por Holland [11], especificando a componente de ponta de força horizontal e atualizando a força vertical até que a condição do momento zero no final da viga esteja satisfeita com precisão suficiente. Uma expressão para a curvatura de grande deflexão da viga é resolvido pela integração da equação diferencial usando o método de Runge Kutta. Yau [5] apresenta uma abordagem analítica para descrever tal comportamento de deflexão. No trabalho de doutorado de Jaime Izuka, a posição da ponta da viga é determinada utilizando integrais elípticas. O ângulo da força do cabo é expresso, por meio de considerações geométricas, como uma função do ângulo de ponta.

O modelo simplificado da viga deformada por o cabo é apresentada na Figura 2.2. O arcotangente  $s$  é medido da base (ponto  $A$ ) até um ponto genérico  $C$ , a inclinação da viga é representada por o ângulo  $\alpha$  e a força do cabo  $F_a$  possui um ângulo de inclinação  $\beta$ . O comprimento total da viga é  $L$ , enquanto as coordenadas do suporte do cabo são  $(h_x, h_y)$ . A posição da ponta da viga é representada pelas coordenadas  $(x_B, y_b)$ .

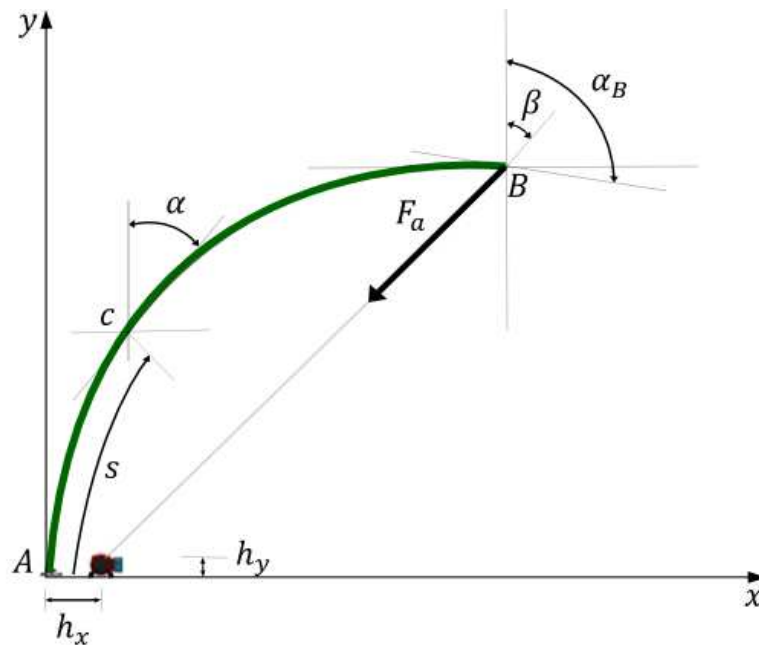


Figura 2.2: Análises de deflexão da viga

O momento de torção na seção genérica  $c$  da viga, é proporcional à mudança na curvatura causada pela força aplicada, de acordo com a teoria de Euler-Bernoulli clássica para a deflexão de vigas. O equilíbrio dos momentos de uma porção infinitesimal da viga homogênea com seção transversal constante é descrito como:

$$M = EI \frac{d\alpha}{ds} = -F_a \sin \beta (x_B - x) - F_a \cos \beta (y_B - y). \quad (2.1)$$

A diferenciação da equação (2.1), com respeito ao comprimento do arco  $s$ , produz a equação diferencial governante do modelo expreso por,

$$\frac{d^2\gamma}{du^2} + c \sin \gamma = 0 \quad (2.2)$$

Onde  $u$ ,  $\gamma$  e  $c$  são definidos como:

$$\left. \begin{aligned} u &= s/L \\ \gamma &= \alpha - \beta \\ c &= \frac{PL^2}{EI} \end{aligned} \right\}. \quad (2.3)$$

As condições de contorno para a configuração da Figura 2.2 são,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{u=0} &= -\beta \\ \left(\frac{d\gamma}{du}\right)_{u=1} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.4)$$

Os parâmetros  $p$  e  $\phi$  são introduzidos para a manipulação da equação diferencial, para usar as integrais elípticas,

$$\left. \begin{aligned} p &= \sin \frac{\alpha_B - \beta}{2} \\ p * \sin \phi &= \sin \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (2.5)$$

As definições das relações entre  $ds$  e  $\gamma$ ,  $d\gamma$  e  $d\phi$ ; e  $ds$  e  $d\phi$  são necessárias, para encontrar as expressões das coordenadas da viga defletida, em termos de integrais elípticas. A primeira relação é determinada pelo produto entre a Equação (2.2) e  $2d\gamma$ , e posteriormente integrando com respeito a  $\gamma$ . A relação entre  $du$  e  $d\gamma$  pode ser expressa como,

$$du = \frac{d\gamma}{\sqrt{2c[\cos\gamma - \cos(\alpha_B - \beta)]}}. \quad (2.6)$$

A relação entre  $d\gamma$  e  $d\phi$  é obtida pela Equação (2.5)b com respeito a  $\phi$ , o que é,

$$d\gamma = \frac{2p\cos\phi}{\sqrt{1 - p^2\sin^2\phi}} d\phi. \quad (2.7)$$

Da equação (2.6) e (2.7) se obtém,

$$ds = \frac{1}{k\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}} d\phi \quad (2.8)$$

Onde,

$$k = \frac{\sqrt{c}}{L}. \quad (2.9)$$

Alguns trabalhos algébricos são feitos para expressar as coordenadas  $x$  e  $y$  da viga, em termos de variáveis das integrais elípticas,

$$x = \frac{\cos\beta}{k} [-F(p, \phi_c) + F(p, \phi_A) + 2E(p, \phi_c) - 2E(p, \phi_A)] \\ + \frac{2p\sin\beta}{k} (\cos(\phi_a) - \cos(\phi_c)) \quad (2.10)$$

e

$$y = \frac{2p\cos\beta}{k} (\cos(\phi_a) - \cos(\phi_c)) \\ - \frac{\sin\beta}{k} [-F(p, \phi_c) + F(p, \phi_A) + 2E(p, \phi_c) - 2E(p, \phi_A)] \quad (2.11)$$

onde,

$$\left. \begin{aligned} \phi_A &= \arcsin\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi/2+\beta}{2}\right)}{p}\right) \\ \phi_B &= \frac{\pi}{2} \\ \phi_C &= \arcsin\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{p}\right) \end{aligned} \right\}, \quad (2.12)$$

$$F(p, \phi) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}} d\phi, \quad (2.13)$$

$$E(p, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1-p^2\sin^2\phi} d\phi. \quad (2.14)$$

Com os deslocamentos  $x$  e  $y$  da equação (2.10) e (2.11) acima, escreve-se uma expressão analítica para o cálculo do ângulo da força  $\beta$ , como,

$$\frac{h_x}{L} \sin \beta + \frac{h_y}{L} \cos \beta - \frac{2p \cos(\phi_A)}{F(p, \phi_c) - F(p, \phi_A)} = 0. \quad (2.15)$$

A Equação (2.15) expressa o ângulo horizontal do cabo puxado com respeito a uma inclinação arbitrária da ponta da viga, permitindo um cálculo analítico das coordenadas  $X$  e  $Y$  da curvatura da viga, dadas pelas equações (2.10) e (2.11). A solução numérica da equação (2.15) só pode ser encontrada de forma iterativa, que apresenta uma situação crítica para uma aplicação em tempo real que defina a deformação geométrica produzida por uma força arbitrária aplicada ao cabo. O cálculo do ângulo  $\beta$  gerado pela força no cabo, expressada como função do comprimento total do cabo, é apresentada na Eq. (2.16). Tal relação pode ser ajustada por uma curva polinomial de ordem arbitrária  $M$ , e coeficientes  $\mu_i$ , do tipo.

$$\beta = \sum_{i=0}^N \mu_i * \left(\frac{\ell}{L_c}\right)^i \quad (2.16)$$

Onde  $\ell$  é o comprimento do cabo quando a viga está deformada, e  $L_c$  é o comprimento do cabo quando a viga não está deformada. Testes numéricos mostram que um polinômio de ordem  $N \approx 15$  é adequado para ajustar o comportamento da curva graficamente descrita pelo ângulo, conforme ilustrado na Figura 2.3.

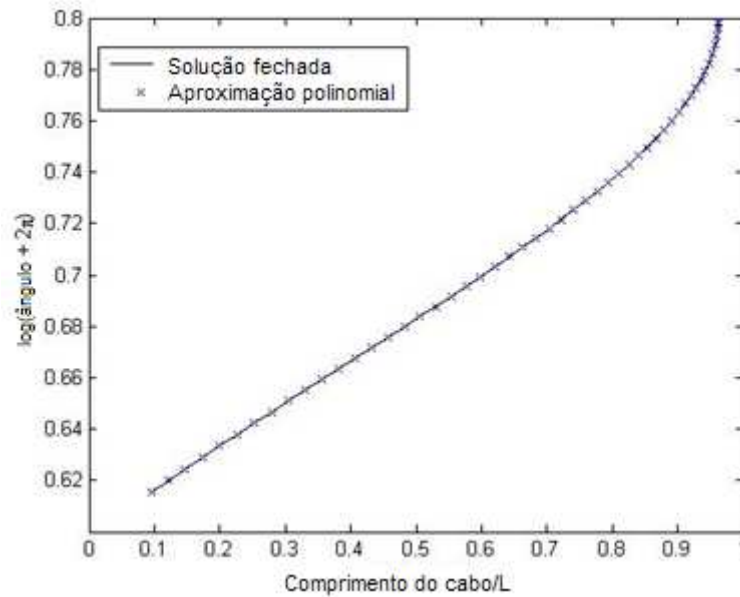


Figura 2.3: Ângulo  $\beta$  da força em função do comprimento do cabo.

Na prática os parâmetros  $\mu_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, M$  do ângulo da força  $\times$  função comprimento-cabo, pode ser calculado, baseado nas propriedades físicas do comprimento do cabo. Com tais parâmetros, as coordenadas da deformação estática da curva da viga podem ser facilmente calculadas, através da equação (2.10) e (2.11).

### 2.1.2 Método de elementos finitos [MEF]

O MEF se baseia na discretização de um corpo ou estrutura em elementos com determinadas condições de vínculo entre si, gerando um sistema de equações algébricas que resolve numericamente o estado de tensão e deformação.

O modelo matemático da viga deformada está composto pelas matrizes de massa e rigidez obtidas através do MEF (PETYT, 2010). Um pequeno número de elementos da viga é alocado ao longo da linha central da deformação dela. O cabo é modelado com um elemento barra, cujo deslocamento é em direção axial. Na Figura 2.4 apresenta-se a discretização da viga e o cabo



com os elementos discretos representados. O uso de um modelo com um número reduzido de elementos visa a minimização do esforço computacional para a descrição dinâmica da estrutura.

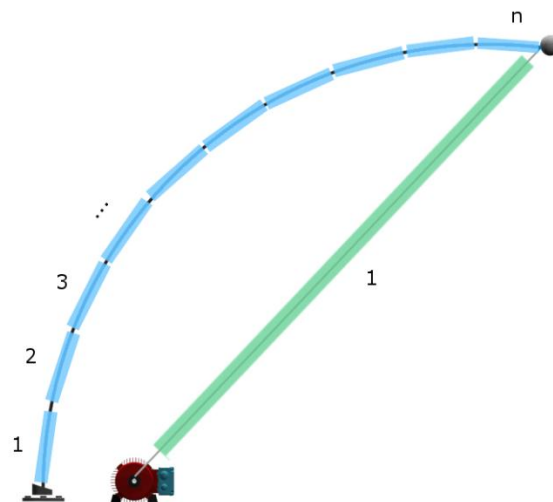


Figura 2.4: Discretização da viga.

No modelo da viga são utilizados elementos 3-D. Os sistemas de coordenadas locais e globais de tais elementos são mostrados na Figura 2.5.

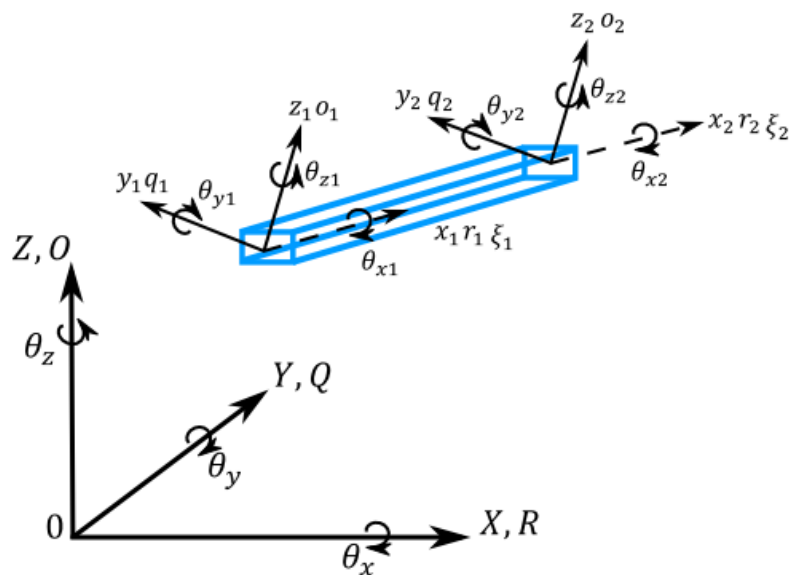


Figura 2.5: Sistema de coordenadas globais e locais do elemento.

A viga é descrita através da combinação de elementos sujeitos a deformação axial, flexão e torção (PETYT, 2010). As funções de energia cinética e tensão em coordenada local são representadas por,

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A (\dot{r}^2 + \dot{q}^2 + \dot{o}^2) dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho I_x \dot{\theta}_x^2 dx, \quad (2.17)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EA \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \left\{ EI_z \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right)^2 dx + EI_y \left( \frac{\partial^2 o}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} GJ \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2.18)$$

As deformações dos desacoplamentos no sentido, axial, flexão e torção, são consideradas e tratadas separadamente (PETYT, 2010). As funções dos deslocamentos  $r$ ,  $q$ ,  $o$  e  $\theta_x$  são expressos em termos da coordenada adimensional,  $\xi = x/l$ , como:

$$\left. \begin{aligned} r &= \left[ \frac{1}{2}(1 + \xi_1 \xi) \frac{1}{2}(1 + \xi_2 \xi) \right] \{r\}_e \\ q &= [N_1(\xi) \quad lN_2(\xi) \quad N_3(\xi) \quad lN_4(\xi)] \{q\}_e \\ o &= [N_1(\xi) \quad -lN_2(\xi) \quad N_3(\xi) \quad -lN_4(\xi)] \{o\}_e \\ \theta_x &= \left[ \frac{1}{2}(1 + \xi_1 \xi) \frac{1}{2}(1 + \xi_2 \xi) \right] \{\theta_x\}_e \end{aligned} \right\}. \quad (2.19)$$

As matrizes de massa e rigidez de cada elemento são determinadas pela substituição da função de deslocamento (2.19) nas expressões de energia cinética (2.17) e tensão (2.18). A energia cinética é expressa após da integração:

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_e^T \bar{\mathbf{m}}_e \dot{\mathbf{r}}_e, \quad (2.20)$$

e a expressão de energia potencial após da integração:

$$U_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_e^T \bar{\mathbf{k}}_e \dot{\mathbf{r}}_e, \quad (2.21)$$

onde

$$\dot{\mathbf{r}}_e^T = [r_1 \quad q_1 \quad o_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} r_2 \quad q_2 \quad o_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2}]. \quad (2.22)$$

Variáveis  $\bar{\mathbf{k}}_e$  e  $\bar{\mathbf{m}}_e$  são as matrizes de rigidez e massa do elemento no sistema de coordenadas locais. A coordenada local  $\mathbf{r}$  pode ser transformada em coordenadas globais pela relação:

$$\mathbf{r} = \mathbf{T} \mathbf{R}, \quad (2.23)$$

onde  $\mathbf{T}$  é definido como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} [L] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [L] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [L] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [L] \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

e  $\mathbf{L}$  é:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

onde  $\cos(x, Y)$ , representa o coseno dos ângulos formados entre as coordenadas locais do eixo  $x$  e as coordenadas globais do eixo  $Y$ .

As matrizes de rigidez ( $\mathbf{K}_e$ ) e massa ( $\mathbf{M}_e$ ) descritas no sistema de coordenadas globais são calculadas como:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}_e \mathbf{T}, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{m}}_e \mathbf{T}. \quad (2.27)$$

Definindo uma matriz de amortecimento proporcional como (INMAN, 2006):

$$\mathbf{D}_e = \sigma \mathbf{M}_e + \iota \mathbf{K}_e, \quad (2.28)$$

onde as constantes  $\sigma$  e  $\iota$  são reais.

Uma vez calculadas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, é construída a equação de movimento da viga flexível:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{K}_e \mathbf{p}(t) = -\mathbf{T} + \mathbf{F}_d, \quad (2.29)$$

Onde  $\mathbf{p}$  é o vetor de coordenadas globais,  $\mathbf{T}$  é a tensão do cabo efetuado pela força do atuador ( $\mathbf{F}_a$ ) e  $\mathbf{F}_d$  é a força de distúrbio. O projeto do controle vai-se desenvolver com a viga deformada em 2-D no plano  $x$ - $y$ . A deformação está em torno a  $\theta_z$ . Pela inclinação do cabo e o modelo matemático descrito nos graus de liberdade, as forças aplicadas à viga ( $\mathbf{F}_a, \mathbf{F}_d$ ), têm componentes em  $x$  e  $y$ .

Na seguinte seção se descreve o modelo do cabo e a influência na equação dinâmica da viga.

## 2.2 Modelamento do cabo

Uma força de tensão estática aplicada no cabo é responsável pela deformação da geometria básica da viga, o que é útil para o posicionamento de sua ponta em alguma configuração de interesse de trabalho. Ao mesmo tempo, pequenas variações da tensão estática aplicada no cabo são utilizadas pelo sistema de controle para diminuir os seus movimentos de vibração. A estratégia de posicionamento de estruturas com cabos é usada com frequência na engenharia civil, em construções como: pontes suspensas, telhados em estádios, grandes edifícios

etc... Estas estruturas muito flexíveis são sensíveis ao vento e sofrem vibrações produzidas pelo tráfego de pessoas e automóveis (PREUMONT, 2011). Uma técnica de controle de vibração, utilizando o modelo dinâmico de um cabo para transmitir a força do atuador, é apresentada em (GUO, LU e LI, 2008). Tal técnica é igualmente adotada no presente trabalho.

A estrutura física do modelo do cabo e da viga está expressada na Figura 2.6, onde o controle  $\mathbf{u}$ , é o apoio do deslocamento,  $\mathbf{T}$  é a tensão no cabo,  $w$  é a vibração transversal do cabo e  $\mathbf{p}$  a vibração da estrutura. Os vetores de deslocamentos do sistema são expressos na seguinte equação,

$$\mathbf{u} = h(w \quad \ddot{w} \quad \mathbf{p} \quad \dot{\mathbf{p}} \quad \ddot{\mathbf{p}}), \quad (2.30)$$

onde,  $h$  representa a posição da ponta da viga em coordenadas  $x, y$  descrita na seção 2.1.1.

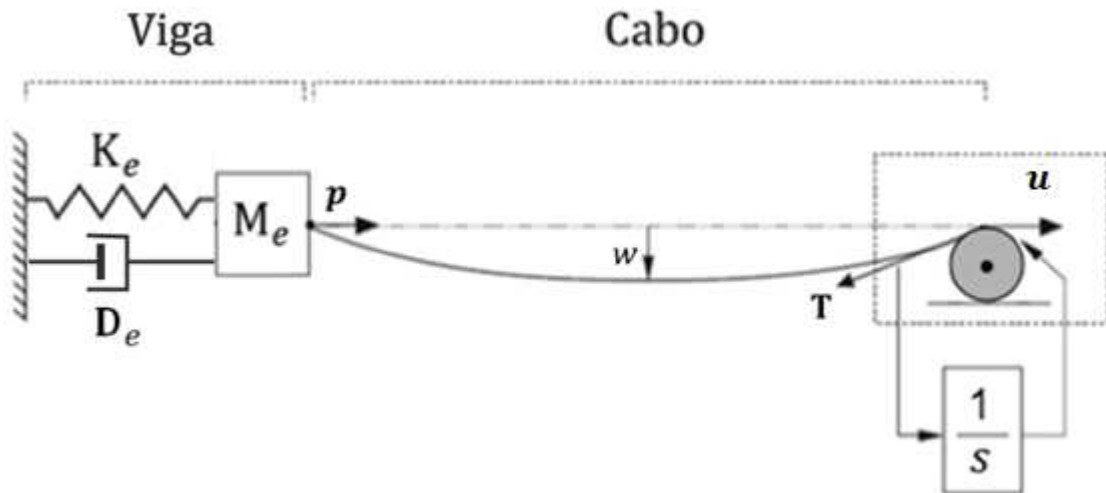


Figura 2.6: Sistema viga cabo.

Tendo em conta que a massa do cabo é muito menor do que da viga, esta pode ser desprezada. A dinâmica do cabo é simplificada considerando unicamente a sua rigidez ( $k_c$ ), por conseguinte é possível trata-lo como se fosse uma mola. De acordo com (GUO, LU e LI, 2008) a tensão do cabo pode ser obtida como segue,

$$\mathbf{T} = \mathbf{b}k_c(\mathbf{b}^T\mathbf{p} - \vartheta r_p), \quad (2.31)$$

Onde  $r_p$  representa o raio primitivo da polia,  $\vartheta$  a posição angular do motor e  $\mathbf{b}$  a matriz de incidência da força em coordenadas nodais descrita em 0 e 1. Substituindo a equação (2.31) na (2.29), tem-se:

$$\mathbf{M}_e\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{D}_e\dot{\mathbf{p}}(t) + (\mathbf{K}_e + \mathbf{b}k_c\mathbf{b}^T)\mathbf{p}(t) = \mathbf{b}k_c\vartheta r_c + \mathbf{F}_d, \quad (2.32)$$

simplificando,

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_e, \mathbf{D} = \mathbf{D}_e, \mathbf{K} = (\mathbf{K}_e + \mathbf{b}k_c\mathbf{b}^T) \text{ e } \mathbf{F}_a = \mathbf{b}k_c\vartheta r_c.$$

A equação dinâmica do sistema geral é finalmente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{p}(t) = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_d. \quad (2.33)$$

A posição angular efetuada pelo motor é descrita na seção do modelamento do motor a continuação.

## 2.3 Modelamento do motor

Um motor elétrico DC é usado como atuador para o controle de vibração. Inicialmente se descrevem os componentes elétricos e mecânicos do motor. Os componentes são modelados matematicamente para determinar a equação dinâmica do motor.

O torque do motor,  $T$ , está relacionado com a corrente de armadura,  $i$ , por um fator constante  $K_t$ . A força contra eletromotriz,  $e$  se relaciona com a velocidade de rotação mediante as seguinte equações:

$$T = K_t i, \quad (2.34)$$

$$e = k_e \dot{\vartheta}. \quad (2.35)$$

A partir das equações (2.34) e (2.35), se descrevem as seguintes equações baseadas na lei de Newton combinada com a lei de Kirchhoff:

$$J_m \ddot{\vartheta} + b_n \dot{\vartheta} = k_t i, \quad (2.36)$$

$$L_a \frac{di}{dt} + R_a i = V_o - k_e \dot{\vartheta}, \quad (2.37)$$

Onde  $J_m$ , é o momento de inercia do motor,  $R_a$ , a resistência elétrica,  $L_a$ , a indutância elétrica,  $V_o$ , a voltagem de entrada e  $\ddot{\vartheta}$ , a aceleração angular. Diminuindo a ordem das equações (2.36) e (2.37), se obtém a posição angular  $\vartheta$ . Considerando as variáveis  $\chi_1 = \vartheta$ ,  $\chi_2 = \dot{\vartheta}$ ,  $\chi_3 = i$  e  $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\vartheta}$  obtém-se as seguintes equações.

$$\dot{\chi}_1 = \chi_2, \quad (2.38)$$

$$\dot{\chi}_2 = \frac{k_t}{J_m} \chi_3 + \frac{b_n}{J_m} \chi_2, \quad (2.39)$$

$$\dot{\chi}_3 = \frac{V_o}{L_a} - \frac{R_a}{L_a} \chi_3 - \frac{k_e}{L_a} \chi_2. \quad (2.40)$$

A expressão matemática descreve o modelo físico do motor apresentado na Figura 2.7.

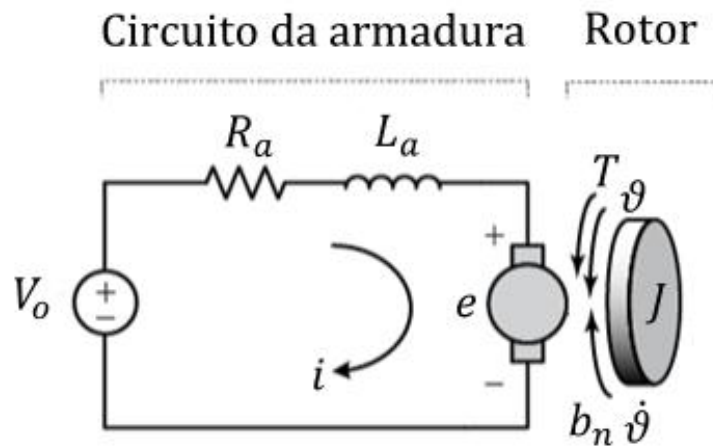


Figura 2.7: Modelo equivalente do motor.

O modelo do sistema da viga e cabo é acrescentado pelo modelo do motor. A expressão geral é descrita no capítulo 0.



## 2.4 Modelamento do sensor

Um extensômetro resistivo (*strain gage*) fixado no cabo de tração é o sensor adotado para realimentar o sistema. O sensor converte o esforço de deformação produzido pela força de tração do cabo a uma saída de voltagem. O sinal de voltagem do extensômetro, depois de passar por um condicionador, é aplicado como entrada do controle. De acordo com a informação do sensor alocado no cabo, o controle envia o sinal de energização ao motor, o qual atua mecanicamente na viga.

O extensômetro consiste de um cabo fino ou papel de alumínio em forma de grade colado entre duas folhas de papel ou finas películas de plástico. O funcionamento é baseado na variação da resistência em forma proporcional sujeita ao esforço de deformação, Figura 2.8

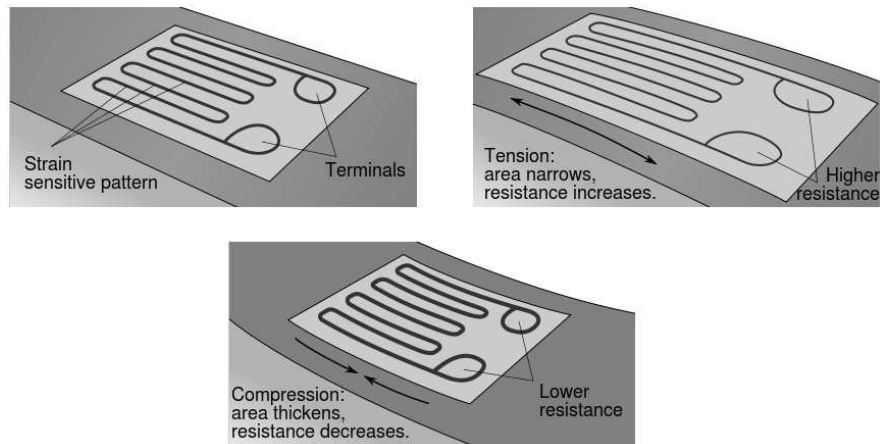


Figura 2.8: Comportamento do extensômetro sometido a deformações, (MEASUREMENTS, 2010).

O parâmetro fundamental do sensor é a sensibilidade ao esforço expresso quantitativamente como fator de ganho, GF. O fator de ganho é definido como a relação entre a taxa de variação da resistência elétrica,  $\Delta R/R$  e a taxa de variação de comprimento,  $\Delta L/L$  (SOSA, 2012),

$$GF = \frac{\Delta R/R}{\Delta L/L} = \frac{\Delta R/R}{\varepsilon} \quad (2.41)$$

O condicionamento do dispositivo consiste em uma ponte de Wheatstone, onde é obtida a voltagem  $v_s$  proporcional à deformação  $\varepsilon$ , da forma,

$$v_s = \frac{v_W GF \varepsilon}{4} \quad (2.42)$$

onde  $v_W$  é a voltagem de excitação do ponte.

A relação entre a deformação e a voltagem é linear. Considerando a posição inicial da viga defletida em zero, a voltagem de saída do sensor vai ser igualmente zero. Se houver movimentos de vibração, o sensor começa a apresentar variações de voltagem. Para adotar as características do sensor ao sistema em coordenadas físicas (graus de liberdade), este se decompõe em coordenadas  $X, Y$ .

## 2.5 Modelo em coordenadas modais

Modelos obtidos através do MEF são frequentemente representadas em termos de coordenadas espaciais generalizadas. Uma forma alternativa é a representação do modelo em termos de coordenadas modais, o que facilita a visualização dos progressivos modos de vibrar da estrutura. A representação modal permite ainda, para efeito de aplicação de uma estratégia de controle, a realização de truncagem do número de graus de liberdade do modelo. Graus de liberdade associados às menores frequências naturais do modelo são em geral utilizados em estratégias de controle de vibrações (GAWRONSKI, 2004).

A obtenção do modelo em coordenadas modais é feito a partir do modelo em coordenadas generalizadas. A equação de movimento de uma estrutura sujeita a vibração livre é descrita por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{p}(t) = 0. \quad (2.43)$$

A solução desta equação é:  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\phi} e^{j\omega t}$ . Encontrando a segunda derivada da solução e substituindo, tem-se,

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi} e^{j\omega t} = 0. \quad (2.44)$$

A solução não trivial da equação (2.43) é obtida para,

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (2.45)$$

As frequências  $\omega$  que satisfazem esta condição são chamadas de auto-valores (frequências naturais). Substituindo o conjunto de soluções  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  na equação acima, tem-se o conjunto de vetores  $\{\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_n\}$ , denominados de auto-vetores (modos de vibrar).

Adotando uma notação matricial para os auto-valores e auto-vetores do sistema tem-se:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

e

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1 \quad \boldsymbol{\phi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \dots & \phi_{n1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \dots & \phi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1n_d} & \phi_{2n_d} & \dots & \phi_{nn_d} \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

A matriz de auto vetores  $\boldsymbol{\Phi}$  possui a propriedade de diagonalizar as matrizes de massa e rigidez,

$$\mathbf{M}^* = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi}. \quad (2.49)$$

Denominados matriz de massa modal e matriz de rigidez modal. Aplicando a mesma transformação para o amortecimento,

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{D} \mathbf{\Phi}. \quad (2.50)$$

Para o caso de uma matriz de amortecimento proporcional, como utilizado neste trabalho, tem-se uma matriz de amortecimento modal diagonal.

A transformação de coordenadas nodais para coordenadas modais é feito por,

$$\mathbf{p} = \mathbf{\Phi} \mathbf{p}^*. \quad (2.51)$$

Onde  $\mathbf{p}^*$  é chamado de deslocamento modal.

O sistema pode-se representar em um modelo reduzido caracterizado por conter os modos com maior influência. O método para quantificar a importância de cada modo de vibração corresponde ao cálculo da massa modal efetiva. Os modos com relação de massa efetiva alta contribuem de forma significativa para o comportamento de resposta dinâmica do sistema, o contrário do que ocorre com os modos com baixa massa efetiva (IRVINE, 2012). A seleção dos modos para serem controlados, portanto, será feita com base nas maiores massas modais efetivas presentes. A massa modal efetiva  $M_{eff,n}$  para cada modo  $n$  é,

$$M_{eff,n} = \frac{\mathbf{L}_n^2}{M_{nn}^*}, \quad (2.52)$$

onde o vetor  $\mathbf{L}$  é definido à partir da equação (2.48) como

$$\mathbf{L} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{r}', \quad (2.53)$$

onde  $\mathbf{r}'$  é o vetor com os deslocamentos da massa.

Neste capítulo foram apresentados os aspectos da modelagem. Primeiro se descreveu a forma em que foi modelada a viga flexível curva, determinando a equação diferencial governante, as características dinâmicas (auto-valores e auto-vetores) do modelo através da formulação Euler-Bernoulli e a metodologia de elementos finitos. Foi apresentado o modelamento dos elementos que compõem o sistema como o cabo de tração, sensor e atuador. Da mesma forma foi apresentada a forma alternativa de representar o modelo em termos de coordenadas modais. O objetivo da representação modal é projetar o controle ativo de vibração. No seguinte capítulo se apresenta a projeção do controlador numa representação do modelo em variáveis de estado em coordenadas modais, tendo presente os componentes dinâmicos de maior influência no sistema.

### 3 PROJETO DO CONTROLADOR

A estratégia usada para a projeção foi baseada no controle de vibração ativo de estruturas flexíveis retas. No mesmo sentido o controlador ativo de vibração foi adotado para diminuir os efeitos dinâmicos das perturbações. A estratégia do controle está formada por um servomecanismo que inclui um sensor, um processador de sinal e um atuador. O controle mantém constante uma distância entre a massa vibrante e o plano de referência. Quando uma força externa aplicada ao sistema varia essa distância, o sensor a detecta e gera um sinal proporcional à magnitude da excitação (ou da resposta) do sistema. Esse sinal chega ao processador que envia uma ordem ao atuador para que efetue um movimento forçado proporcional ao sinal medido. O diagrama de blocos da Figura 3.1, ilustra a configuração do sistema geral em malha fechada.

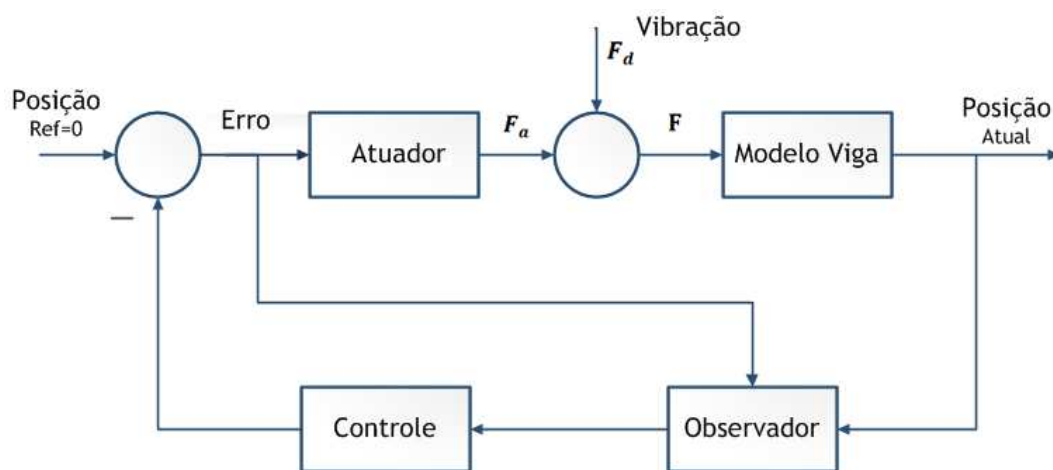


Figura 3.1: Diagrama de blocos geral

A estratégia do controle modal é usada para o controle de vibração. O conceito do controle modal é gerar uma excitação na estrutura por realimentação linear, de tal forma que o sistema de malha fechada exiba os auto-valores prescritos (PORTER e CROSSLEY, 1972). O modelo matemático da viga, do cabo, do sensor e do motor apresentados no capítulo 0, constituem a expressão analítica do sistema geral, equação 2.31. Esse modelo é expresso em coordenadas modais, no qual são analisados os valores próprios do sistema para projetar uma estratégia de controle. Neste capítulo se apresenta o algoritmo de controle modal em representação de espaço de estados.

### 3.1 Modelo em espaços de estado

A representação em variáveis de estado do sistema está expressa na Figura 3.2. Esta representação é uma ferramenta que facilita os cálculos para modelos com poucos graus de liberdade, múltiplas entradas e múltiplas saídas.

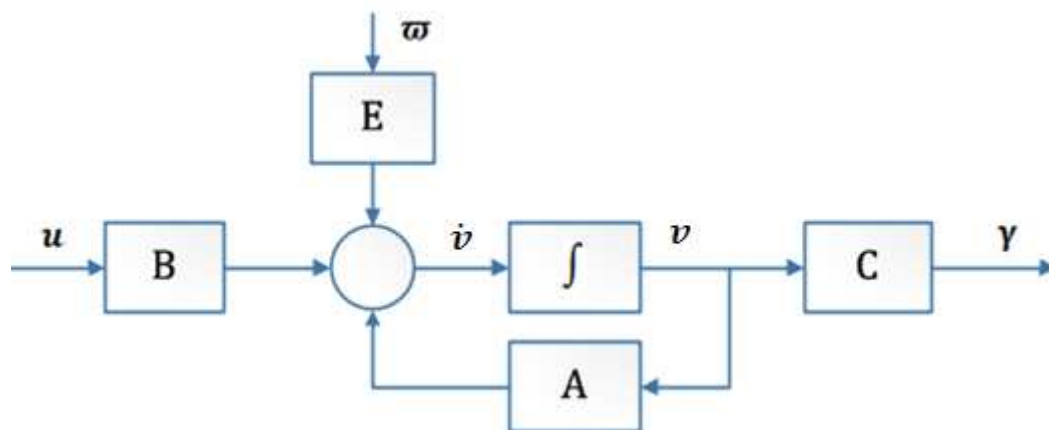


Figura 3.2: Representação variáveis de estado.

A representação de estado é feita somente para sistemas lineares e pode se expressar em forma geral em equações matriciais diferenciais de primeira ordem como:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\boldsymbol{\omega}(t), \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{C}\mathbf{v}(t), \quad (3.2)$$

onde,  $\mathbf{v}(t) = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]^T$  é o vetor de estados de ordem  $2n$ ,  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T$  é o vetor de entrada de ordem  $r$ ,  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r]^T$  é o vetor de entrada de distúrbio,  $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m]^T$  é o vetor de saída de ordem  $m$ ,  $\mathbf{A}$  é a matriz do sistema de dimensão  $2n \times 2n$ ,  $\mathbf{B}$  é a matriz com coeficiente de entrada de dimensão  $2n \times r$ ,  $\mathbf{C}$  é a matriz com o coeficiente de saída de dimensão  $m \times 2n$  e  $\mathbf{E}$  é a matriz de entrada que habilita a variável do distúrbio de dimensão  $2n \times r$ .

### 3.2 Modelo do sistema em coordenadas modais

Para o projeto do controle modal é necessário expressar a equação dinâmica da estrutura em coordenadas modais. Considerando a descrição em espaço de estado da equação (3.1), se a matriz  $\mathbf{A}$  tem uma diagonal com a forma de Jordan, então existe uma matriz  $\mathbf{V}$  não singular tal que,

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \boldsymbol{\lambda}, \quad (3.3)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  é a matriz diagonal com os auto-valores da matriz  $\mathbf{A}$ . Como neste caso o modelo possui um amortecimento quase nulo, os elementos da diagonal são pares complexos conjugados. Substituindo  $\mathbf{v} = \mathbf{V}\boldsymbol{\eta}$  na equação (3.1) e multiplicando pela inversa da matriz não singular  $\mathbf{V}$ , que contem os auto-vetores do sistema (INMAN, 2006), tem-se a representação em coordenadas modais do sistema:



$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{E}\boldsymbol{\varpi}(t), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{V}\boldsymbol{\eta}(t). \quad (3.5)$$

Aqui, o vetor  $\boldsymbol{\eta}$  representa as coordenadas modais do sistema de ordem  $2n$ . Esta forma é utilizada para verificação da condição de controlabilidade do sistema, descrita a seguir.

De acordo com (INMAN, 2006), que considera um modelo com uma entrada, o vetor  $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}$  contém  $2n$  elementos denotados por  $B_i$ . O sistema é claramente controlável se cada  $B_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ . No caso contrário o sistema é incontrolável, já que nenhuma lei de controle de realimentação poderia afetar o modo  $i$ . Assim, o vetor  $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}$  indica a capacidade de controlar o sistema por inspeção.

A equação (3.4) pode ser usada também para realizar uma redução rápida do modelo supondo que se deseja controlar apenas os modos mais rápidos ou modos em uma pequena gama de frequência. O modelo de ordem reduzida apresentado na equação 3.6 e 3.7 está caracterizado por conter só os modos de interesse, descartando os demais modos.

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \underbrace{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}_{\mathbf{A}_\zeta} \boldsymbol{\eta}(t) + \underbrace{\bar{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{B}}_{\mathbf{B}_\zeta} \mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{E}\boldsymbol{\varpi}(t), \quad (3.6)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \underbrace{\mathbf{C}\bar{\mathbf{V}}}_{\mathbf{C}_\zeta} \boldsymbol{\eta}(t). \quad (3.7)$$

Aqui, as matrizes  $\mathbf{A}_\zeta$ ,  $\mathbf{B}_\zeta$  e  $\mathbf{C}_\zeta$  representam a forma reduzida do sistema, da entrada e saída respectivamente. A matriz  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ , é a diagonal dos auto-valores reduzidos de dimensão  $\bar{n} \times \bar{n}$  e a

matriz  $\bar{V}$  é a matriz como os auto-vetores associados reduzidos de dimensão  $\bar{n} \times 2n$ .  $\bar{n}$  é o número de auto-valores reduzidos.

### 3.3 Método de alocação de polos

Na forma reduzida pode-se calcular o ganho do controle mediante o método de alocação de polos, como foi apresentado por (RODRIGUEZ, GALLARDO e OROZCO , 2010), em um modelo de viga ativa. Este método consiste em alocar os auto-valores ou polos do sistema em malha fechada numa região específica do plano complexo, o que permite impor parâmetros de desempenho para o sistema. Os polos em malha fechada associados com os modos no eixo esquerdo do plano complexo dos auto-valores, assegura a estabilidade do sistema.

Para entender melhor a o comportamento do sistema, de acordo com a alocação dos polos se conhece pela literatura que quando os polos estão sob o eixo imaginário, a exceção do zero absoluto, cujo comportamento da planta é nulo, a resposta do sistema é oscilatória. Se os polos estão sob o eixo real, mas afastados do eixo imaginário, o comportamento do sistema decresce no tempo se estiver no quadrante esquerdo ou cresce se estiver alocado no plano direito. Para polos complexos a resposta é harmônica que decresce ou cresce no tempo de acordo com a posição no plano, como se vê na Figura 3.3. No caso, o objetivo é alocar os polos complexos caraterísticos do modelo, para obter uma resposta harmônica decrescente no tempo. Para isso se tem em conta o tempo de estabilização e da porcentagem de sobimpulso.

Em seguida são calculados os ganhos de comando necessários para produzir esses polos.

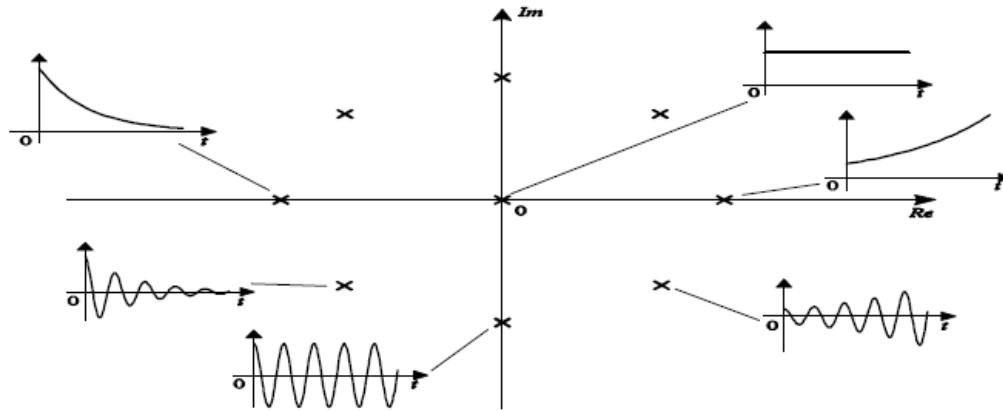


Figura 3.3: Locação dos auto-valores do sistema dinâmico lineal no plano complexo  
(CASTAÑEDA , PARRA e COLINA, 2009)

Para calcular os ganhos do controle no sistema reduzido,  $\mathbf{g}_\zeta (\zeta = 1, 2, \dots, \bar{n})$ , usa-se a formula de Ackerman (OGATA, 2005), que é dada por:

$$\mathbf{g}_\zeta = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \mathbf{M}_c^{-1} \Phi_T(p_c), \quad (3.8)$$

onde  $\Phi_T(p_c)$ , representa o polinômio caraterístico com os polos desejados de malha fechada.  $\mathbf{M}_c = [\mathbf{B}_\zeta \ \mathbf{A}_\zeta \mathbf{B}_\zeta \ \mathbf{A}_\zeta^2 \mathbf{B}_\zeta \ \dots \ \mathbf{A}_\zeta^{n-1} \mathbf{B}_\zeta]$  é a matriz de controlabilidade que deve ser inversível. Na implementação prática do controle no presente trabalho é usada a função *acker* do MATLAB®, para um modelo com uma entrada e uma saída, ou função *place*, caso seja um modelo com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

### 3.4 Controle em realimentação de estados

O método de controle em realimentação de estado é a forma de atribuir o ganho do controle para que cause efeito no sistema. Neste caso, o ganho do controle do sistema se

caracteriza por conter a matriz de ganho calculado no modelo reduzido  $\mathbf{g}_\zeta$ . De acordo com a lei de controle implementada por (RODRIGUEZ, GALLARDO e OROZCO , 2010), o ganho de controle para o sistema em coordenadas físicas é calculado por,

$$\mathbf{G} = \mathbf{g}_\zeta \bar{\mathbf{V}}^{-1}. \quad (3.9)$$

O controle por realimentação de estados é finalmente definido por,

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{G}\mathbf{v}(t). \quad (3.10)$$

Substituindo a equação (3.10) em (3.1), tem-se,

$$\dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BG})\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}r(t) + \mathbf{E}\boldsymbol{\omega}(t). \quad (3.11)$$

Tal processo é expresso no diagrama de blocos da figura 3.4 abaixo.

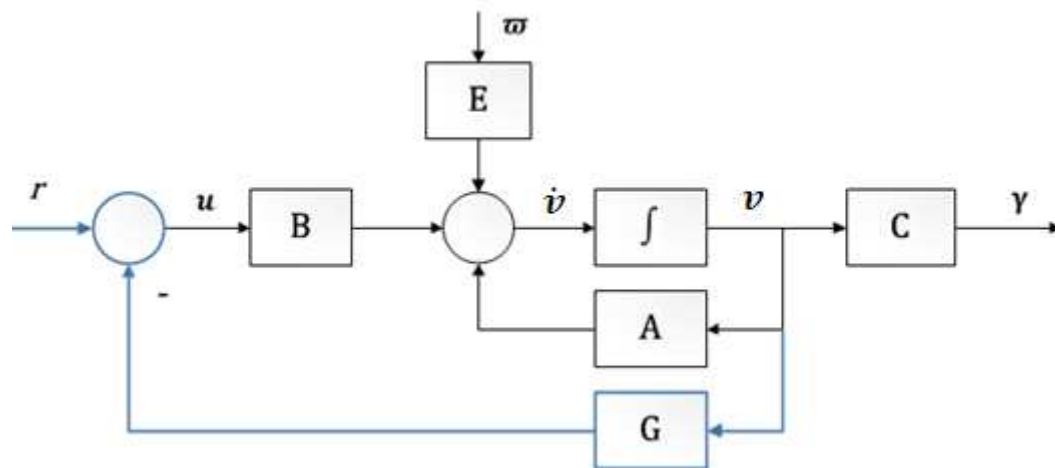


Figura 3.4: Diagrama do controle em realimentação de estados

O controle por realimentação atinge com os parâmetros de estabilização da resposta, atenuando a oscilação vibratória do sistema num tempo desejado.

O passo seguinte consiste em conhecer o comportamento do sistema controlado. Para isso é adicionado um observador, cuja função é estimar os estados a partir da informação obtida do sensor na saída.

### 3.5 Observador

O observador é um método utilizado em vários projetos de controle, que permite estimar o estado do sistema a partir da saída. Sua vantagem é que evita o uso de uma grande quantidade de sensores. O princípio de funcionamento é baseado na aceleração dinâmica do processo. A representação de estados é reproduzida com uma dinâmica de maior rapidez mediante uma matriz  $\mathbf{L}_c$ , esta ação permite prever o comportamento das variáveis desejadas. O tempo de convergência entre a variável estimada e a real é determinada por  $\mathbf{L}_c$ . (SALVADOR e MORALES, 2008).

Para adicionar a dinâmica do observador se introduz no sistema um sinal que indique o erro de estimação. Esse sinal é a diferença entre a saída real e a estimada ( $\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{v}}$ ). Considerando o sistema linear estacionário (3.1), o modelo do observador assume a forma,

$$\dot{\hat{\boldsymbol{v}}} = \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{v}} + \mathbf{B}\boldsymbol{u} + \mathbf{L}_c(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{v}}), \quad (3.12)$$

onde  $\hat{\boldsymbol{v}}$ , é o vetor estimado de  $\boldsymbol{v}$ , como se vê ilustrado na Figura 3.5.

O erro de estimação se define como,

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{v} - \hat{\boldsymbol{v}}. \quad (3.13)$$

Para que o erro do sistema tenda a zero, a matriz  $\mathbf{L}_c$  deve assegurar a posição, tanto dos polos do sistema quanto dos polos estimados, no semi-plano esquerdo do plano complexo. Como o observador deve ser mais rápido do que o sistema em malha fechada, os polos deste devem estar mais afastados do eixo real do que os polos do sistema controlado. Para determinar os polos do observador deve-se ter em conta o tempo de convergência e a qualidade do estimador.

Para calcular o ganho do observador,  $\mathbf{L}_c$ , utiliza-se o método de alocação de polos que garante a posição dos auto-valores na posição desejada. Semelhantemente ao calculo do controle de realimentação, o observador é calculado para o modelo de ordem reduzido. O ganho é representado por  $\mathbf{l}_\zeta (\zeta = 1, 2, \dots, \bar{n})$ , e é calculado pela formula de Ackerman (OGATA, 2005),

$$\mathbf{l}_\zeta = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \mathbf{M}_o^{-1} \Phi_T(p_e), \quad (3.14)$$

onde  $\Phi_T(p_e)$ , representa o polinômio caraterístico em função dos polos desejados ( $p_e$ ) do estimador.  $\mathbf{M}_o = [\mathbf{C}_\zeta \ \mathbf{A}_\zeta \mathbf{C}_\zeta \ \mathbf{A}_\zeta^2 \mathbf{C}_\zeta \ \dots \ \mathbf{A}_\zeta^{n-1} \mathbf{C}_\zeta]$  é a matriz de observabilidade. Por simplicidade são usados os comandos apresentados na seção 3.3.

Para se adicionar o ganho do observado ao modelo de coordenadas físicas se faz,

$$\mathbf{L}_c = \bar{\mathbf{V}} \mathbf{l}_\zeta. \quad (3.15)$$

A expressão matemática do sistema, acrescentando o modelo controlado com o observador é:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\hat{\mathbf{v}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{G} \\ \mathbf{L}_c \mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G} - \mathbf{L}_c \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}, \quad (3.16)$$

$$\gamma = [C \quad 0] \begin{bmatrix} v \\ \hat{v} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

e o diagrama de blocos de tal sistema controlado é apresentado na Figura 3.6.

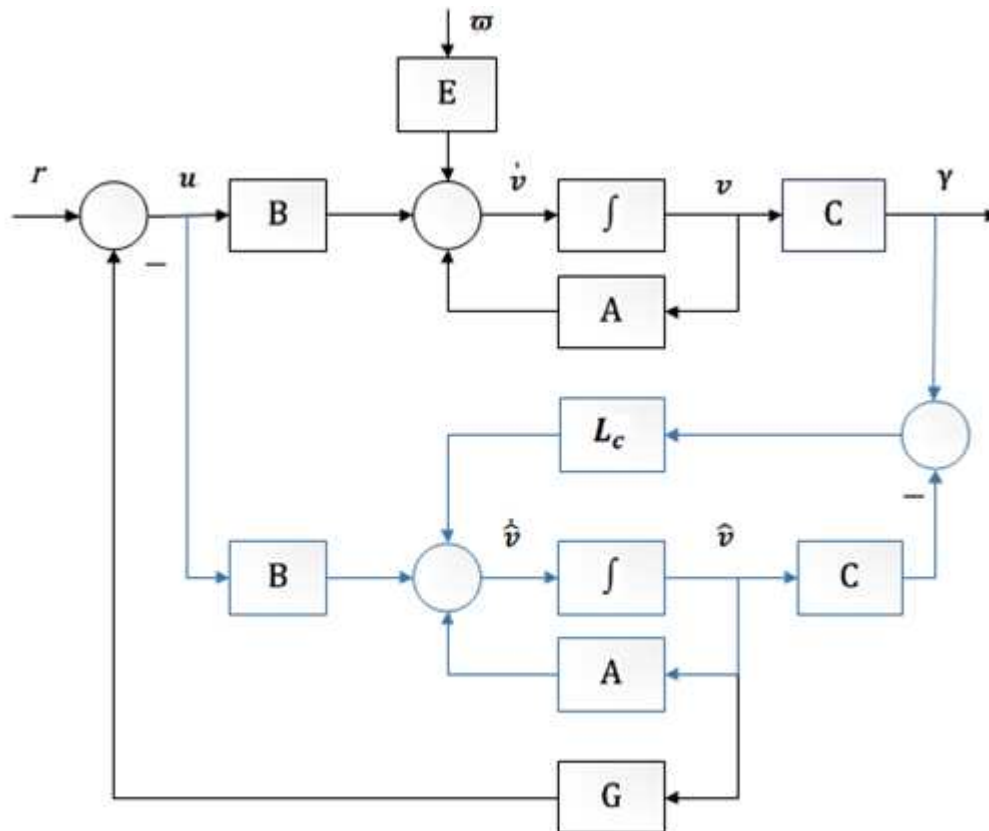


Figura 3.5: Sistema controlado com observador.

Neste capítulo foi apresentado o modelo teórico do controle ativo de vibração, seguindo os modelos encontrados na literatura. Inicialmente se descreveu o modelo do sistema geral em coordenadas modais, em cuja representação de variáveis de estado foi calculado o controle e o observador de estado. A integração entre o modelo do manipulador com os elementos que o conformam e o algoritmo teórico do controlador descrito no presente capítulo é apresentado no capítulo 4.

## 4 INTEGRAÇÃO DOS MODELOS DINAMICOS E DO CONTROLE

A estratégia do controle de vibração está baseada nas características modais da deformação da viga. O presente projeto usa um controle modal como desenvolve (RODRIGUEZ, GALLARDO e OROZCO , 2010) em um conjunto de viga inteligente (dispõe de sensores e atuadores ativos para controlar a vibração). Partindo da projeção das matrizes de massa, amortecimento e rigidez do modelo em coordenadas modais, é desenhada a estratégia de controle. A vantagem do método é a flexibilidade de colocar os polos no plano imaginário que satisfaça os requerimentos de atenuação de vibração da resposta dinâmica da viga.

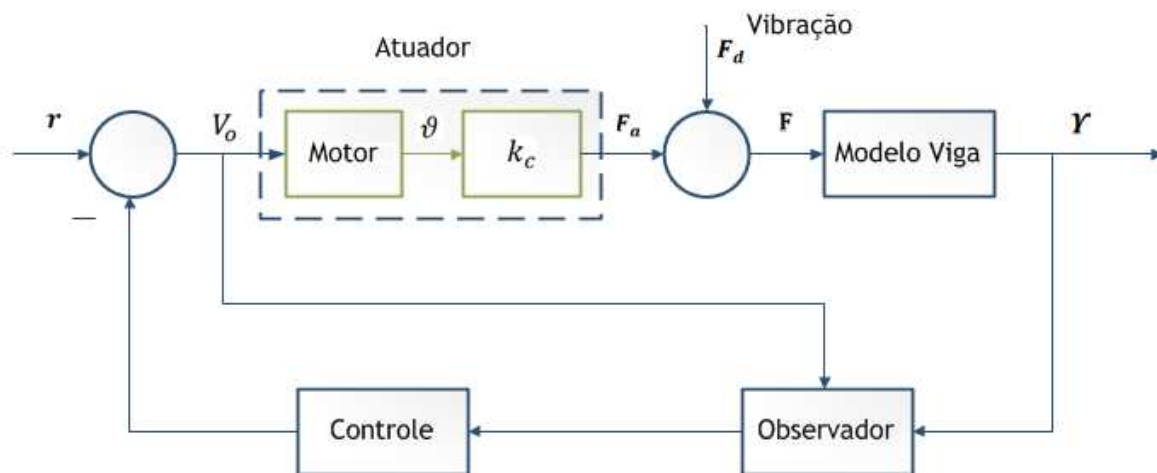


Figura 4.1: Diagrama de blocos com os modelo dinâmicos



No diagrama de blocos da Figura 4.1, se apresenta a relação dos modelos dinâmicos do motor, do cabo e da viga com a configuração do controle e do observador. No presente capítulo se descreverá passo a passo o cálculo algébrico do controlador e do observador para o sistema da viga, cujos elementos foram descritos no capítulo 2. Seguindo a expressão final do modelo da equação (3.16), o objetivo de esta seção é descrever as variáveis que a conformam. Para isso, primeiro se apresenta todos os modelos dinâmicos dos elementos em espaço de estados, com os quais se cria uma descrição geral do sistema. Este modelo é convertido em coordenadas modais, onde é calculado o controlador modal. O ganho do controle é determinado pelo método de alocação de polos. Logo esse modelo do controle é convertido de novo a coordenadas físicas, realimentando o sistema da viga. Por último é calculado o ganho observador e é incluído no sistema como se descreveu no capítulo 3

#### 4.1 Descrição do modelo em espaço de estados

A relação entre a descrição do modelo da viga em coordenadas físicas dada por (2.33) e as formulações de espaços de estados dadas por (3.1) e (3.2) é simplificada para,

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} F_a + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} F_d, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{v}^T = [\mathbf{p}^T \quad \dot{\mathbf{p}}^T]. \quad (4.3)$$

Se  $n$  representa os graus de liberdade, então o vetor  $\mathbf{v}$  é de dimensão  $2n \times 1$ .  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  são formados pelas coordenadas  $[X_1, Y_1, \theta_1, X_2, Y_2, \theta_2, \dots, X_N, Y_N, \theta_N]^T$ , onde  $N$  é o número de nós do

modelo.  $\mathbf{b}$  é a matriz de dimensão  $n \times 2$ , que permite a entrada das forças em  $X_N, Y_N$  (ponta da viga). Os vetores  $\mathbf{F}_a$  e  $\mathbf{F}_d$ , cada um de dimensão  $2 \times 1$ , contem a decomposição da força nas direções  $X$  e  $Y$ . O vetor  $\mathbf{Y}$  representa a posição da ponta em  $X, Y$ . A matriz identidade  $\mathbf{I}$  e a matriz de zeros  $\mathbf{0}$  são de ordem  $n \times n$ .

Como se descreveu anteriormente a força do atuador é feita por um motor elétrico DC, modelado no Capítulo 2. A representação em espaços de estados do motor têm em conta as equações (2.38), (2.39) e (2.40). Escolhendo a posição angular do motor ( $\vartheta$ ), a velocidade angular do motor ( $\dot{\vartheta}$ ) e a corrente da armadura ( $i$ ) como variáveis de estado se descreve o modelo do motor como,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-b_n}{J_m} & \frac{k_t}{J_m} \\ 0 & \frac{-k_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} V_o, \quad (4.4)$$

$$\Upsilon = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \\ i \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Finalmente o modelo do sistema geral é descrito como,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vartheta \\ \dot{\vartheta} \\ i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}k_c r_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-b_n}{J} & \frac{k_t}{J} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-k_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vartheta \\ \dot{\vartheta} \\ i \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} V_o + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \mathbf{F}_d \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

$$\mathbf{Y} = \underbrace{[\mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]}_{\mathbf{c}} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vartheta \\ \dot{\vartheta} \\ i \end{bmatrix}.$$

As expressões matemáticas (4.1) e (4.2) são acrescentadas aos modelos dos elementos que compõem o sistema. Assim, a entrada ao sistema é a voltagem de alimentação do motor,  $V_o$ , sendo  $\mathbf{B}$  o vetor de entrada do atuador de dimensão  $2n \times 1$ . A matriz  $\mathbf{E}$  de  $2n \times 2$ , é a entrada do distúrbio nas coordenadas  $x$  e  $y$ .

## 4.2 Calculo do ganho do controle

O ganho do controle é calculado a partir da representação do modelo em coordenadas modais. Para tal representação se tem presente que as entradas de força e voltagem não afetam as características dinâmicas do sistema. O calculo dos auto-valores e os auto-vetores do modelo geral expresso em (4.6) é determinado pela formula (3.3), sendo  $\mathbf{v}^* = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \vartheta \quad \dot{\vartheta} \quad i]^T$  o vetor de coordenadas físicas. A representação em coordenadas modais do sistema é determinada a partir das equações (3.4) e (3.5). O projeto do controle se baseia nos dois modos dominantes do sistema como se vê na Figura 4.2. A seleção deles depende da relação de massa efetiva apresentado na equação (2.52).

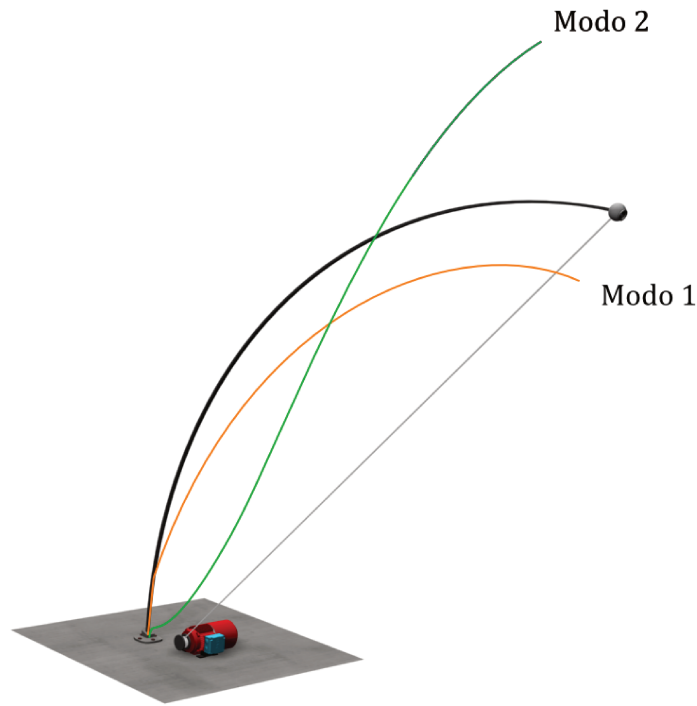


Figura 4.2: Modos dominantes do sistema

O modelo reduzido, como se apresenta na equação (3.6), possui as variáveis:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_s = \bar{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix},$$

onde  $\dot{\boldsymbol{\eta}}(t)$  é o vetor com de coordenadas modais de dimensão  $3 \times 1$ ,  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$  é uma matriz de dimensão  $3 \times 3$ . Os auto-valores.  $\omega_1$  e  $\omega_2$  representam as frequências modais e figuram em pares complexos. O zero da diagonal é o polo gerado pelo modelo do motor. A partir dos dados da diagonal  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ , se determina um vetor de polos desejados os quais são alocados em malha fechada no eixo esquerdo do plano complexo dos auto-valores mediante o ganho do controle. Dessa forma é, assegurada a estabilidade do sistema e a resposta desejada.

O método de alocação de polos permite calcular o ganho do controle por realimentação e do integrador. Os polos desejados são determinados por um fator de amortecimento ( $\zeta < 1$ ), garantindo um sinal de saída com uma constante de tempo de atenuação, arbitrariamente menor do que  $2s$ , o que equivale a uma resposta sub-amortecida, e uma frequência natural dada por,

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta t_e}. \quad (4.8)$$

O vetor de polos desejados é calculado por:

$$\mathbf{p}_c = \sigma + \text{diag } \bar{\lambda}. \quad (4.9)$$

onde:

$$\sigma = -\zeta \omega_n, \quad (4.10)$$

O ganho do controle do modelo reduzido  $\mathbf{g}_\zeta$  é calculado com o comando *acker* do MATLAB® de forma

$$\mathbf{g}_\zeta = \text{acker}(\mathbf{A}_\zeta, \mathbf{B}_\zeta, \mathbf{p}_c), \quad (4.11)$$

onde  $\mathbf{g}_\zeta$  se escreve como:

$$\mathbf{g}_\zeta = [g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4 \quad g_5].$$

O ganho do controle de realimentação  $\mathbf{G}$  do sistema geral em coordenadas físicas é calculado mediante a equação (3.9). O controle é adicionado ao sistema pela entrada do atuador assim:

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{r}(t) - \mathbf{G}\hat{\mathbf{v}}^*(\mathbf{t}). \quad (4.12)$$

Finalmente a representação analítica do sistema com o ganho do controle  $\mathbf{G}$  é apresentado na seguinte expressão.

$$\dot{\mathbf{v}}^* = \mathbf{A}\mathbf{v}^*(t) + \mathbf{B}\mathbf{r}(t) - \mathbf{B}\mathbf{G}\hat{\mathbf{v}}^*(t) + \mathbf{E}\boldsymbol{\omega}(t). \quad (4.13)$$

### 4.3 Calculo do ganho do observador

Para se obter informação do comportamento do sistema a partir dos dados enviados por um sensor alocado no extremo livre da viga é projetado um observador. O ganho do observado,  $\mathbf{L}_c$ , é calculado com o método de alocação de polos. Os polos desejados do observador  $\mathbf{p}_e$  devem estar mais afastados do eixo real do que os polos do sistema controlado. Portanto o vetor de polos desejados do observador é dado por,

$$\mathbf{p}_e = -25 \text{ abs}(\mathbf{p}_c). \quad (4.14)$$

O ganho do observador  $\mathbf{I}_\zeta$  é calculado no modelo reduzido com o comando *acker* do MATLAB® na seguinte forma:

$$\mathbf{I}_\zeta = \text{acker}(\mathbf{A}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{p}_e). \quad (4.15)$$

$\mathbf{I}_\zeta$  é de dimensão  $5 \times 1$ . A partir do vetor  $\mathbf{I}_\zeta$  é calculado o ganho do observado do modelo de coordenadas físicas através da equação (3.15). A representação analítica do sistema com o ganho do observador  $\mathbf{L}_c$  é apresentado na seguinte expressão,

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}^* = \mathbf{L}_c\mathbf{C}\hat{\mathbf{v}} + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G} - \mathbf{L}_c\mathbf{C})\hat{\mathbf{v}}^* + \mathbf{B}\mathbf{r}(t) + \mathbf{E}\boldsymbol{\omega}(t). \quad (4.16)$$

O sistema com controlador e observador é apresentado na equação (4.13) e (4.16). Por tanto a expressão final assume a forma apresentada na equação (3.16) e (3.17).

No presente capítulo o sistema geral foi estabelecido com as expressões matemáticas dos elementos que interferem na dinâmica da viga como o motor, o sensor e o cabo. Partindo do modelo dinâmico em posição defletida da viga, foram obtidos os modos e frequências (auto-vetores e auto-valores) da estrutura. Neste sentido foi projeção do controle modal focado aos modos de maior domínio. Para obter informação adicional do comportamento da viga foi acrescentado o modelo com a projeção de um observador cujo ganho foi calculado nesta secção.

No capítulo 5 são apresentados os dados numéricos do testes feitos computacionalmente e os correspondentes resultados.

## **5 SIMULAÇÕES**

Neste capítulo são apresentadas as simulações realizadas com a viga discretizada, as propriedades dos elementos que compõem o sistema e as características dinâmicas do modelo geral. São apresentadas as respostas do sistema em malha aberta e em malha fechada, e é analisado o efeito do controle sobre a saída do sistema.

### **5.1 Descrição do modelo**

A viga flexível deformada está discretizada em nove elementos de viga retangular. Com o modelo em 2-D, a viga possui 10 nós. A viga é engastada na base. O cabo é considerado como um elemento barra, cujas características não influenciam no número de nós do sistema. Assim o modelo da viga possui nove nós e 27 graus de liberdade, conforme ilustrado na Figura 5.1.



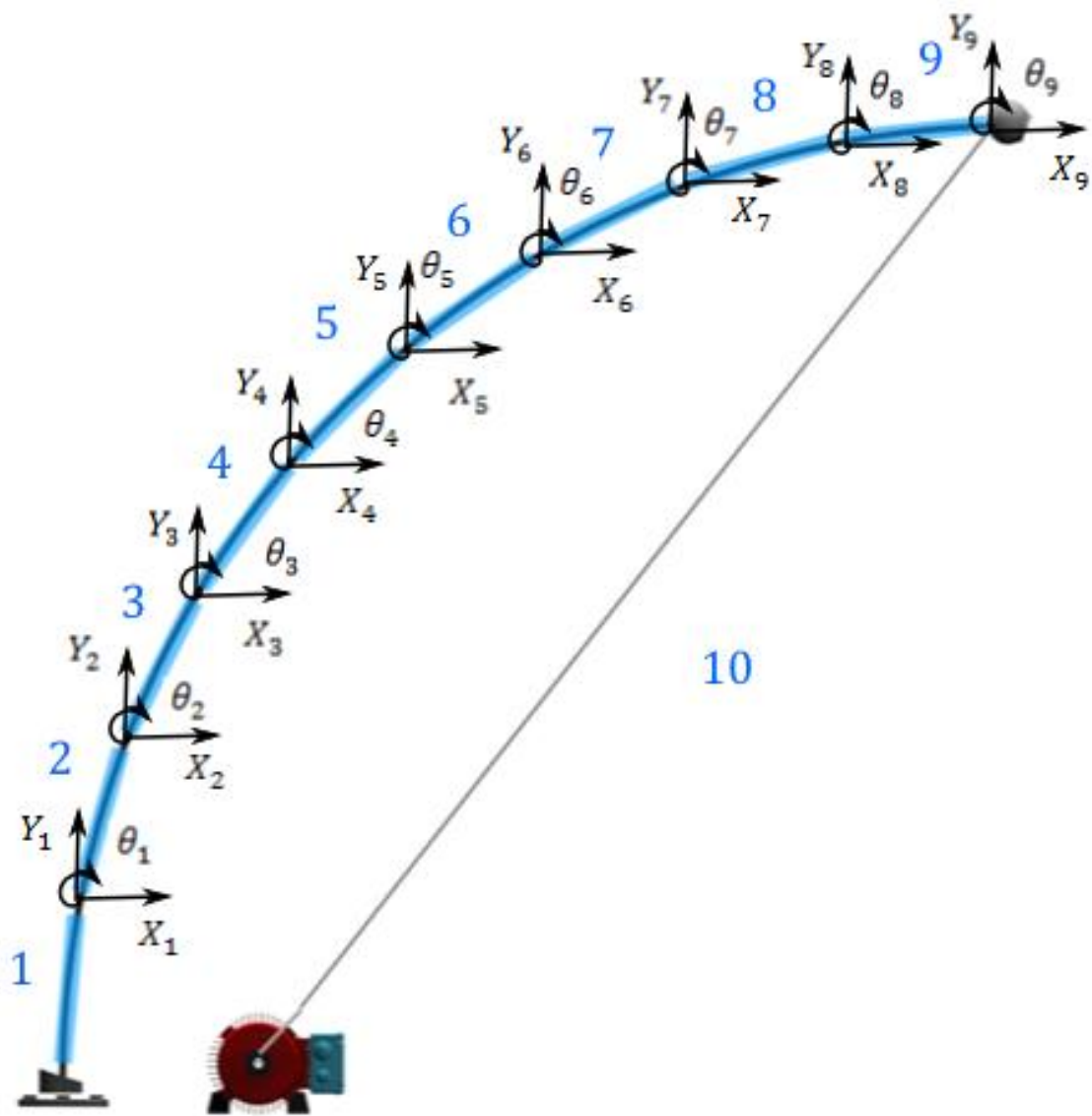


Figura 5.1: Elementos e graus de liberdade do Sistema.

## 5.2 Propriedades físicas

As propriedades físicas e geométricas dos elementos que compõem o sistema (viga, cabo, sensor e atuador) estão apresentadas nas seguintes tabelas:

Tabela 5.1: Propriedades físicas e geométricas da viga e do cabo

Variável	Símbolo	Valor
Largura da viga	$L$	0,762 m
Seção retangular		0,0048X 0,0254 m
Modulo de Young	$E$	1,656 GPa
Densidade	$\rho$	1120 kg/m <sup>3</sup>
Rigidez do cabo	$K_c$	11,67kN/m
Ponto de base do cabo em X	$h_x$	12,7mm
Ponto de base do cabo em Y	$h_y$	28,6 mm

Tabela 5.2: Propriedades do motor

Variável	Símbolo	Valor
Resistência Induzida	$R_a$	1.09 Ohm
Indutância	$L_a$	3.42e-3 H
Constante de torque	$K_t$	0.453 Nm/Amp
Constante da força contra eletromotriz	$k_e$	0.262 V/rad s <sup>-1</sup>
Momento de inércia do motor	$J_m$	8,00E-04 kg.m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Atrito viscoso do motor	$b_n$	0.0001 Nms

Tabela 5.3: Propriedades do sensor

Variável	Símbolo	Valor
Fator de ganho	$GF$	2.9
Resistencia	$R$	120 Ohm
Comprimento do <u>S</u> train gage	$L_g$	1 mm

### 5.3 Incidência do controle nos modos

Na Tabela 5.4 se apresentam as frequências modais do sistema em malha aberta e malha fechada. Pode-se apreciar que os dois primeiros modos  $\omega_1$  e  $\omega_2$  mudam de valor devido à ação do controlador. Os valores dos modos  $\omega_3$  até  $\omega_{28}$  se mantem constantes no modelo.

Tabela 5.4: Auto-valores do sistema com e sem control

	<b>Autovalores malha aberta <math>\times 10^4</math></b>	<b>Autovalores malha fechada <math>\times 10^4</math></b>
	0	$-0.0004 \pm 0.0003i$
$\omega_1$	$-0.0000 \pm 0.0014i$	$-0.0004 \pm 0.0014i$
$\omega_2$	$-0.0000 \pm 0.0122i$	$-0.0002 \pm 0.0122i$
$\omega_3$	$-0.0159 \pm 0.0134i$	$-0.0159 \pm 0.0134i$
$\omega_4$	$-0.0000 \pm 0.0286i$	$-0.0000 \pm 0.0286i$
$\omega_5$	$-0.0001 \pm 0.0511i$	$-0.0001 \pm 0.0511i$
$\omega_6$	$-0.0003 \pm 0.0787i$	$-0.0003 \pm 0.0787i$
$\omega_7$	$-0.0006 \pm 0.1077i$	$-0.0006 \pm 0.1077i$
$\omega_8$	$-0.0010 \pm 0.1443i$	$-0.0010 \pm 0.1443i$
$\omega_9$	$-0.0020 \pm 0.1977i$	$-0.0020 \pm 0.1977i$
$\omega_{10}$	$-0.0035 \pm 0.2654i$	$-0.0035 \pm 0.2654i$
$\omega_{11}$	$-0.0055 \pm 0.3324i$	$-0.0055 \pm 0.3324i$
$\omega_{12}$	$-0.0070 \pm 0.3750i$	$-0.0070 \pm 0.3750i$
$\omega_{13}$	$-0.0092 \pm 0.4283i$	$-0.0092 \pm 0.4283i$
$\omega_{14}$	$-0.0139 \pm 0.5273i$	$-0.0139 \pm 0.5273i$
$\omega_{15}$	$-0.0243 \pm 0.6963i$	$-0.0243 \pm 0.6963i$
$\omega_{16}$	$-0.0338 \pm 0.8210i$	$-0.0338 \pm 0.8210i$
$\omega_{17}$	$-0.0392 \pm 0.8843i$	$-0.0392 \pm 0.8843i$
$\omega_{18}$	$-0.0643 \pm 1.1325i$	$-0.0643 \pm 1.1325i$
$\omega_{19}$	$-0.0926 \pm 1.3574i$	$-0.0926 \pm 1.3574i$
$\omega_{20}$	$-0.1083 \pm 1.4680i$	$-0.1083 \pm 1.4680i$
$\omega_{21}$	$-0.1783 \pm 1.8802i$	$-0.1783 \pm 1.8802i$
$\omega_{22}$	$-0.1957 \pm 1.9689i$	$-0.1957 \pm 1.9689i$
$\omega_{23}$	$-0.3219 \pm 2.5168i$	$-0.3219 \pm 2.5168i$
$\omega_{24}$	$-0.3435 \pm 2.5986i$	$-0.3435 \pm 2.5986i$
$\omega_{25}$	$-0.5851 \pm 3.3705i$	$-0.5851 \pm 3.3705i$
$\omega_{26}$	$-0.9750 \pm 4.3069i$	$-0.9750 \pm 4.3069i$
$\omega_{27}$	$-1.5764 \pm 5.3892i$	$-1.5764 \pm 5.3892i$
$\omega_{28}$	$-2.4639 \pm 6.5733i$	$-2.4639 \pm 6.5733i$

A Figura 5.2 apresenta a resposta em frequência em malha aberta do sistema. Pode-se observar que os dois maiores picos de ressonância do sistema correspondem as frequências  $\omega_1=14.2$  rad/sec, e  $\omega_2=124$  rad/sec cujas magnitudes são de 52.2 dB e de -31 dB respectivamente. A Figura 5.3 apresenta a resposta em frequência em malha fechada. Aqui pode-se observar que os dois maiores picos de ressonância da Figura 5.2 continuam presentes embora suas magnitudes diminuíram, por causa do controle, até -15 dB e -60 dB, nas frequências  $\omega_1=14.2$  rad/sec, e  $\omega_2=124$  rad/sec respectivamente. A atenuação na magnitude foi aproximadamente de 67.2 dB para a frequência  $\omega_1$  e de 29 dB para a frequência  $\omega_2$ . Devido ao aumento do fator de amortecimento no sistema gerado pela ação do controlador, aprecia-se um aumento no ancho de banda na resposta de malha fechada.

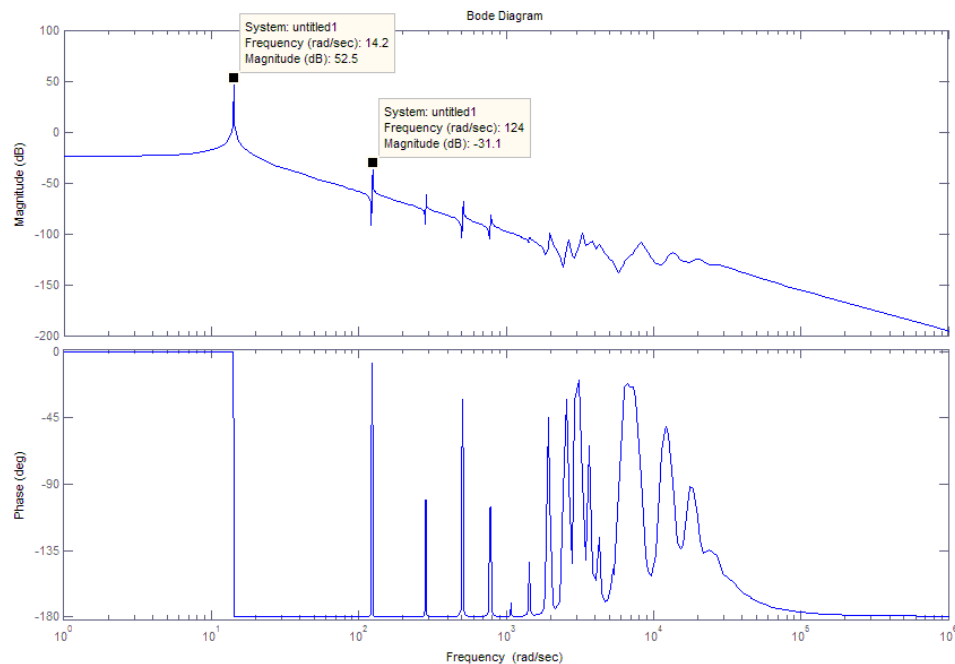


Figura 5.2: Resposta em frequência em malha aberta

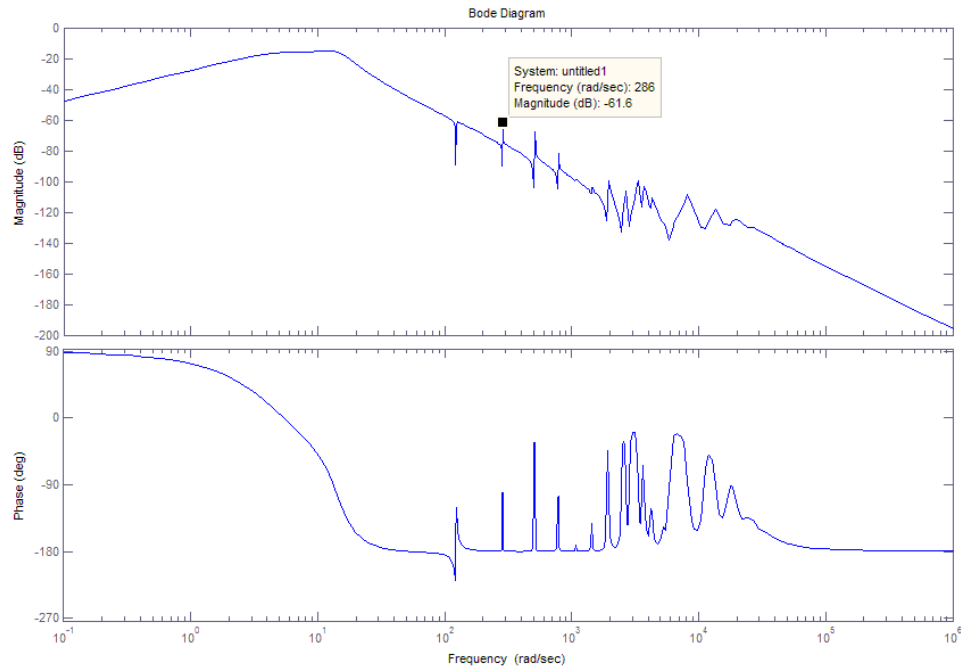


Figura 5.3: Resposta em frequência em malha fechada

## 5.4 Respostas das simulações

A estratégia de controle descrita no presente trabalho é aplicada em simulações numéricas que descrevem o comportamento das vibrações na ponta da viga. O controle de vibração é realizado atuando sobre o motor e o cabo. As alterações de tensão sobre a força de tração constante do cabo é proporcional ao deslocamento da ponta da viga deformada. O sinal de controle é, por conseguinte, uma entrada de tensão eléctrica adicional no motor de tração.

Na simulação proposta a viga flexível é sujeita a uma força de tração estática do cabo, que posiciona a ponta da viga em  $X_B = 0,4557$  m e  $Y_B = 0,4648$  m. A extremidade livre da viga é submetida a deformações de impulso nas direções  $X$  e  $Y$  negativos. O polo alocado na estratégia de controle está projetado para cumprir um tempo de estabilização menor a 2s. Tendo presente a capacidade de atuação do atuador e as características dinâmicas no modelo, o tempo necessário

para obter um sinal de saída com mínimas oscilações depende do período da maior frequência controlável do sistema. Sendo a metade do período o tempo mínimo em que se estabiliza a resposta do conjunto da viga. Um tempo em torno a 1.5s, atinge com os parâmetros de restrição.

Na Figura 5.2 é apresentada a resposta do sistema para uma entrada de perturbação impulso. Apresenta-se em verde o deslocamento da ponta na direção  $Y$  e em azul o deslocamento da ponta na direção  $X$ . Pode-se apreciar que existe um maior deslocamento na direção  $Y$  embora a magnitude da força seja igual nos dois sentidos, isto pode dever-se a que na posição da viga apresentada na

Figura 5.1, oferece menor resistência aos deslocamentos na direção  $Y$ . Tanto as vibrações em  $X$  quanto em  $Y$  são oscilatórias no regime permanente fazendo que o sistema seja instável e a viga permaneça oscilando.

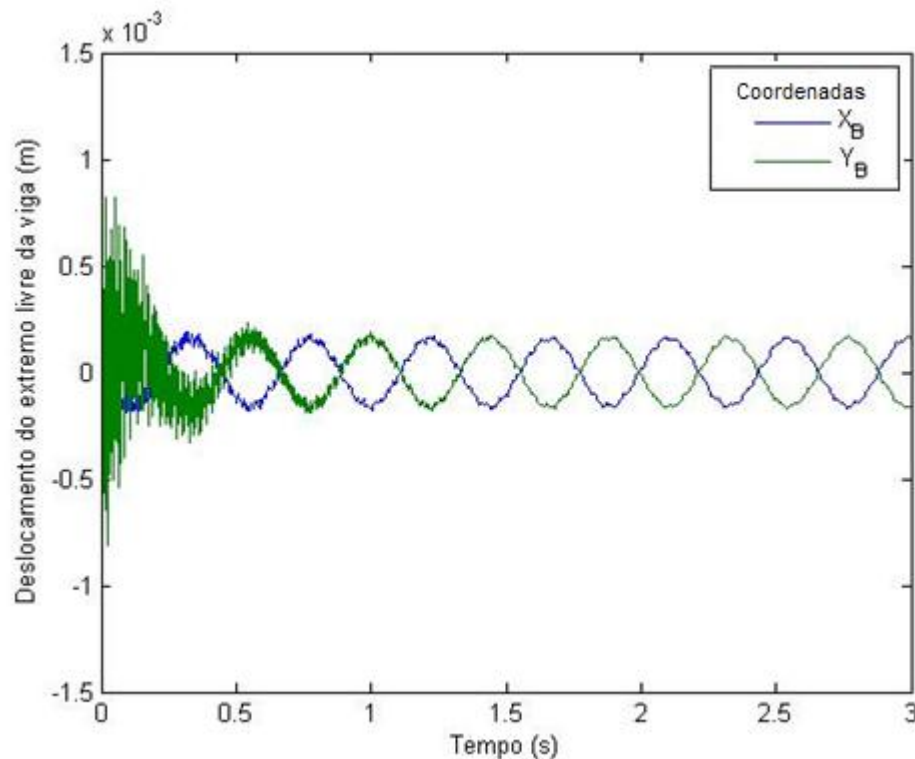


Figura 5.2: Vibrações da ponta de viga em malha aberta com entrada impulso.

Na Figura 5.3 é apresentada a vibração da ponta da viga aplicando a estratégia de controle ativa. Pode-se apreciar os deslocamento tanto em  $X$ , em azul, como em  $Y$ , em verde, são reduzidos quase a zero em aproximadamente 1.5 segundos atingindo os parâmetros projetados do controlador.

De acordo com a estratégia do controle só são reduzidos os efeitos dos dois primeiros modos, a presença dos demais modos geram menores oscilações ao redor do zero que podem ser desprezadas.

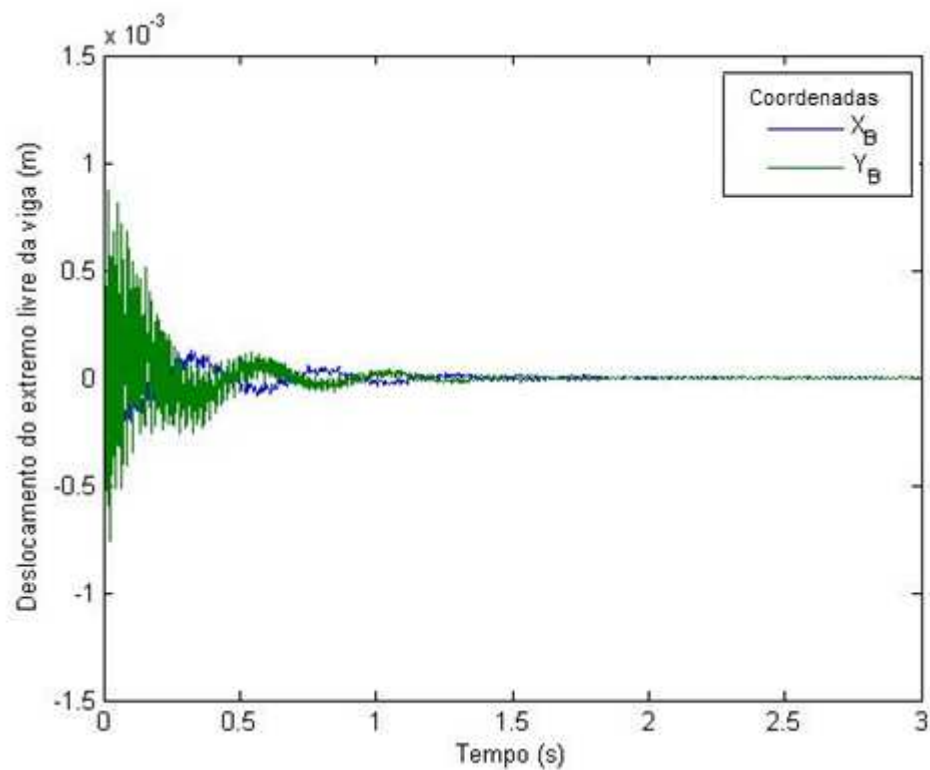


Figura 5.3: Vibrações da ponta de viga em malha fechada com entrada impulso

A Figura 5.4 mostra a resposta obtida pelo observador do sistema controlado. Pode-se ver como a resposta do observador é a mesma obtida na saída controlada, evidenciando um bom funcionamento preditivo da saída.

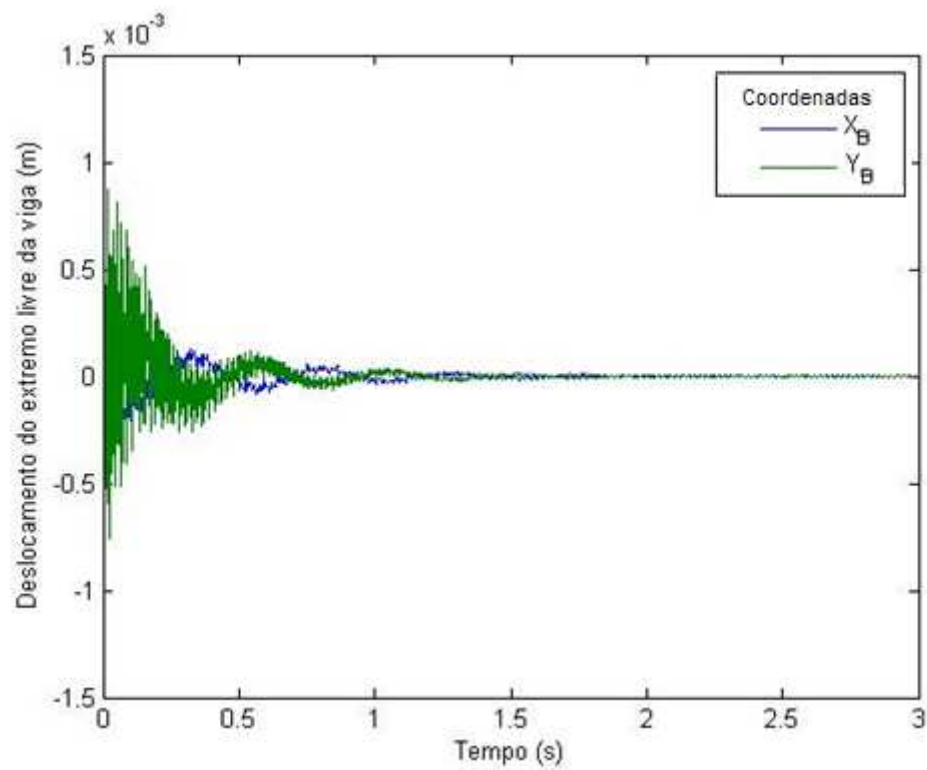


Figura 5.4: Resposta obtida pelo observador do sistema controlado.

Numa segunda simulação, a viga está sujeita a forças aleatórias de 1.5 N RMS nas direções  $X$  e  $Y$ . Na Figura 5.5 é apresentada a resposta vibratória da ponta da viga sem a atuação do controle. Aprecia-se um aumento nas magnitudes dos deslocamentos tanto em  $X$  como em  $Y$ .



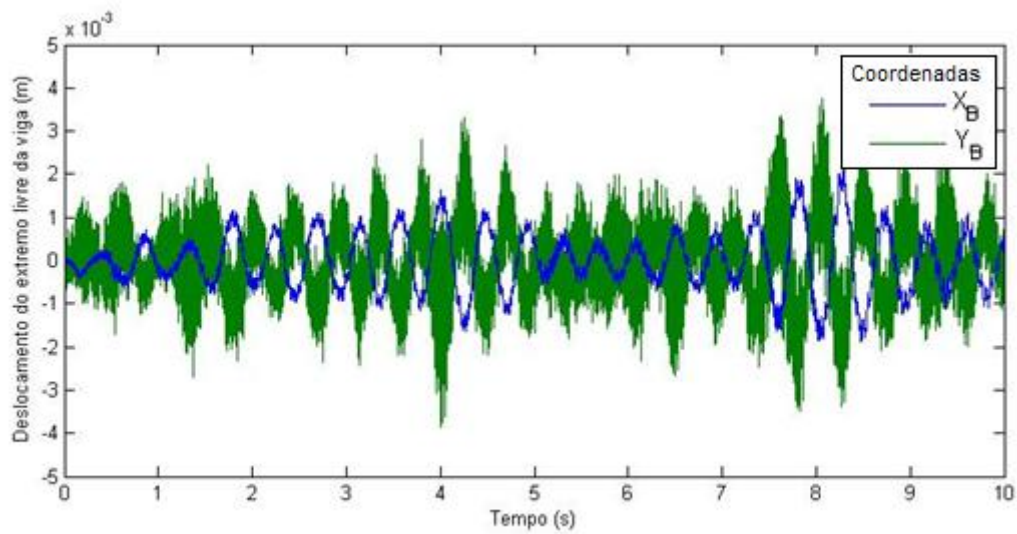


Figura 5.5: Sistema em malha aberta com entrada aleatória.

A Figura 5.6 apresenta a resposta de vibração aplicando a estratégia do controle ativo. Pode-se apreciar que o controle não conseguiu atenuar as vibrações da mesma maneira do que na entrada impulso, embora a amplitude das vibrações seja menor do que a resposta em malha aberta.

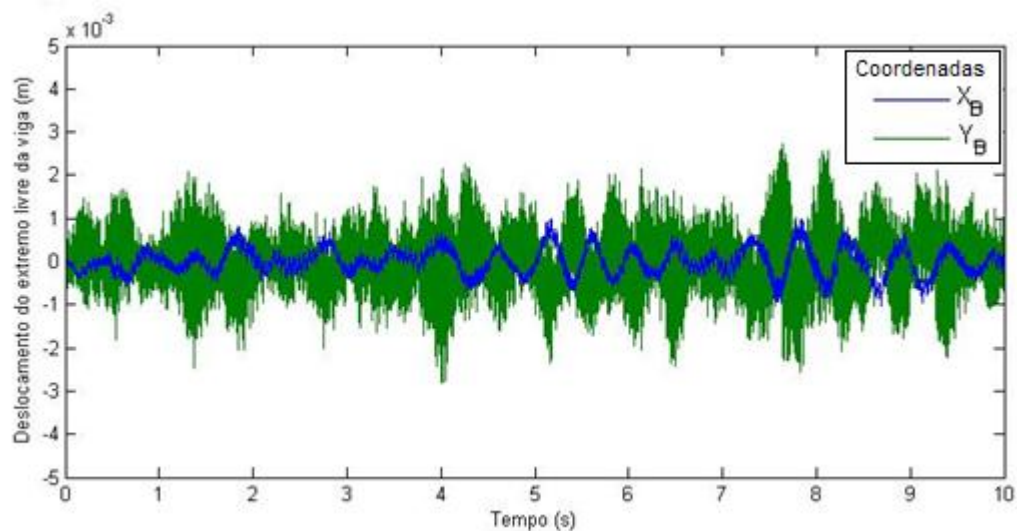


Figura 5.6: Sistema em malha fechada com entrada aleatória.

A Figura 5.7 mostra a resposta obtida pelo observador do sistema controlado. Novamente é obtiva a saída esperada demonstrando o bom funcionamento do observador.

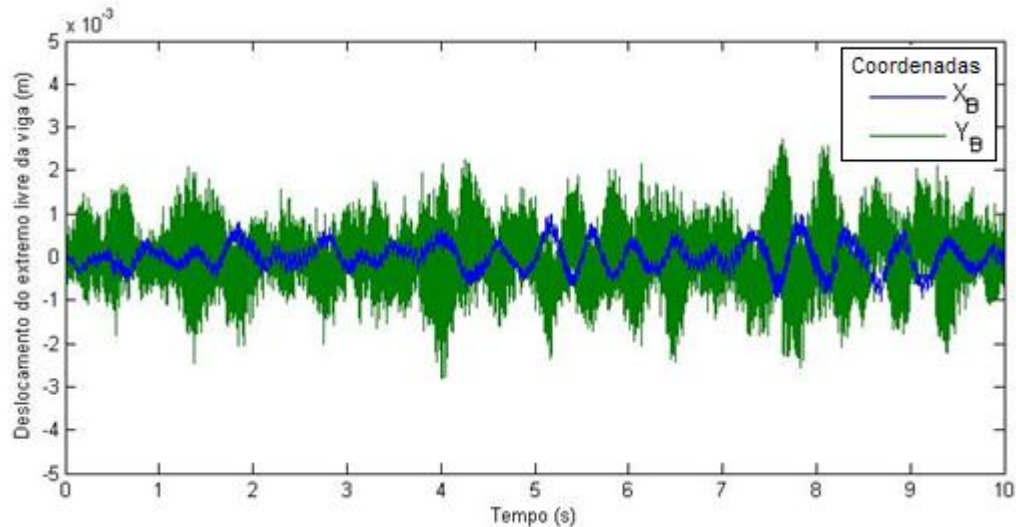


Figura 5.7: Resposta obtida pelo observador do sistema controlado.

A presença de permanentes forças aleatórias de perturbação com frequência maiores a 0.5Hz, faz com que a estratégia de controle seja menos eficiente na tarefa de estabilizar oscilações na ponta da viga. Neste caso, o controle é forçado a reduzir os níveis de vibração para cerca de metade da intensidade das vibrações não controladas, como é mostrado nas Figura 5.6 e Figura 5.7.

Dos resultados anteriores pode-se concluir que a estratégia de controle usando redução de modos consegue atenuar as vibrações cuja amplitude produz os maiores deslocamentos da ponta da viga. Esta estratégia permite reduzir enormemente o tamanho das matrizes de massa, rigidez e amortecimento da equação dinâmica do sistema, diminuindo o número de operações e, por tanto, o tempo de processamento de dados, ao não levar em conta os modos que aportam muito pouco ao deslocamento da ponta da viga.

A Figura 5.3 demonstra que o controle consegue estabilizar a resposta oscilatória em menos de dois segundos, garantindo uma supressão das vibrações tanto em  $X$  quanto em  $Y$ .

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresenta a discussão dos resultados obtidos neste trabalho.

### 6.1 Conclusões

Projetou-se um controle de vibração ativo para diminuir as oscilações de uma viga engastada flexível e longa, tracionada por um cabo preso a sua extremidade.

O controle foi calculado em um modelo analítico da viga deformada, através de uma aproximação polinomial baseada na equação de Euler Bernoulli, obtendo a curva de deformações estáticas da viga. O modelo em tempo real mantém um apropriado controle do sistema.

Utilizou-se uma representação discreta da viga através do método dos elementos finitos obtendo os modos e frequências (auto-vetores e autovalores) da estrutura. Com o modelo dinâmico se planejou um controle modal com realimentação ativa que estabiliza as vibrações de viga longa sujeita a excitações transientes e permanentes.

O algoritmo do controle de vibração feito na ponta da viga foi testado computacionalmente, inicialmente com uma entrada impulso, a resposta de vibração se ilustra na Figura 5.2 e Figura 5.3. Os resultados obtidos foram satisfatórios, alcançando atenuar o comportamento oscilatório em um tempo de 1.5s. Com a presença de forcas de distúrbio

aleatória, a estratégia de controle atenua as oscilações da ponta da viga. Na Figura 5.5 e Figura 5.6 se vê a redução dos níveis de vibração do sistema sem controle.

O observador projetado apresenta satisfatoriamente a resposta do sistema controlado, sendo comparadas a Figura 5.3 com a Figura 5.4 para uma entrada impulso e a Figura 5.6 com a Figura 5.7 para uma entrada aleatória.

## 6.2 Propostas de trabalhos futuros

As sugestões de continuação desse trabalho podem ser dadas como:

Projetar um controle de vibração que leve em conta deslocamentos no eixo  $Z$ , ou seja com possibilidade de vibrações nas três dimensões espaciais.

Implementar o controle de vibração calculado teoricamente no presente trabalho em um modelo físico da viga flexível longa, deformada pela força de um motor DC, cumprindo com as especificações propostas.

Analisar o desempenho e robustez do controle de vibração teórico com o objetivo de melhorar o ganho do controle mediante o método de alocação de polos.

Comparar o comportamento do sistema a partir do controle de vibração adotado com outra estratégia de controle como o H-infinito, H2, PID entre outros, usando a metodologia que atenua satisfatoriamente com os movimentos oscilatórios da extremidade livre da viga, em um tempo de estabilização aceitável.

Projetar um controlador de posição para alocar a extremidade livre da viga flexível longa e opera-la junto com o controle de vibração. De essa forma se teria um manipulador funcional para trabalhos de exploração, adquirindo dados de ambientes externos.

Adaptar o modelo do manipulador logo e flexível com controle num projeto de robótica móbil, para a exploração de ambientes de largo alcance como penhascos e precipícios.

## REFERÊNCIAS

BAZ, A.; POH, S. OPTIMAL VIBRATION CONTROL WITH MODAL POSITIVE POSITION. **OPTIMAL CONTROL APPLICATIONS & METHODS**, Washington, v. 17, p. 141 - 149, 1996.

CASTAÑEDA , H.; PARRA, C.; COLINA, M. Identification of linear dynamic systems by weight decomposition of state variable and Moore-Penrose's pseudo-inverse method. **Revista avances en sistemas e informatica**, Medellin, p. 77-84, 2009.

FERRIS, D. G.; AFONTA, A. O. Small Vibrations of Flexible Bars by Using the Finite Element Method with Equivalent Uniform Stiffness and Mass Methodology. **Journal of Sound and Vibration**, p. 343-358, 1993.

FRISCH-FAY, R. **Flexible Bars**. [S.l.]: Butterworths, 1962.

GAWRONSKI, W. **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**. [S.l.]: Springer, 2004.

GUO, T.; LU, Q.; LI, J. PI force feedback control for large flexible structure vibration with active tendons. **Acta Mechanica Sinica**, p. 721-725, 2008.

HOLLAND, D.; STANCIULESCU, L.; LAWRENCE, N. Vibration and Large Deflection of Cantilevered Elastica Compressed by Angled Cable. **Journal AIAA**, p. 1468-1476, 2006.

INMAN, D. **Vibration with control**. Virginia: John Wiley & Sons, Ltd, 2006.

INMAN, J. Active modal control for smart structures. **The Royal Society**, Blacksburg, p. 205-219, 2001.

IRVINE, T. [www.vibrationdata.com](http://www.vibrationdata.com). **Vibration data**, 9 Março 2012. Disponível em: <<http://www.vibrationdata.com/tutorials2/EffectiveModalMass.pdf>>. Acesso em: 20 Novembro 2012.

JINGJUN, Z. et al. A LQR Controller Design for Active Vibration Control of Flexible Structures. **IEEE**, Handan, v. 1, p. 127-132, dez. 2008.

KURKA, P. et al. Active Control of Vibrations of a Long, Tip Pulled Deflected Beam. **Submetido ao Journal AIAA**, Novembro 2012.

MANJUNATH, T. C.; BANDYOPADHYAY, B. Smart Control of Cantilevered Structures Using Output Feedback. **International Journal of Simulation**, p. 51-68, 2006.

MEASUREMENTS, M. **Strain Gage Selection: Criteria, Procedures, Recommendations**. [S.l.], p. 49-64. 2010.

MOREIRA, F. J. D. O. **Um Controle H-Infinito de Banda Limitada para o Controle Ativo de Vibração Estrutural**. Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 1998.

NESTOROV, T.; TRAJKOV, M. Active Control of Smart Structures – an Overall Approach. **Architecture and Civil Engineering**, p. 35-44, 2010.

OGATA, K. **Ingeniería de control Moderna**. 4ª. ed. Madrid: Pearson Prentice Hall, 2005.

OHTSUKI, A. Analysis of the Characteristics of Fishing Rods Based on the Large-Deformation Theory. **Materials and Science in Sports**, p. 161-170, 2001.

OKUBO, H.; ICHIKAWA, H.; NISHIMURA, T. Structure and Controller Design for Vibration Control of Flexible Structures via Robust Pole Assignment. **IEEE**, p. 619-623, 1998.

PETTY, M. **Introduction to Finite Element Vibration Analysis**. New York: Cambridge University Press, 2010.

PORTER, B.; CROSSLEY, R. **Modal Control**. London: Taylor & Francis, 1972.

PREUMONT, A. **Vibration Control of Active Structures**. Berlin: Springer, 2011.

RODRIGUEZ, R.; GALLARDO, J.; OROZCO, H. Modal Control of a flexible Cantilevered Beam. **IEEE**, p. 660-665, 2010.

SALLSTROM, J. H.; POELAERT, D. H.; JANSSENS, F. L. Small Displacements About Equilibrium of a Beam Subjected to Large Static Loads. **Journal AIAA**, p. 2384-2391, 1996.

SALVADOR, C.; MORALES, A. Fundamentos y aplicaciones de los sensores Virtuales. **Simposio de metrología**, 2008.

SANTILLAN, S.; VIRGIN , L. N.; PLAUT , R. H. Equilibria and Vibration of a heavy pinched loop. **Journal of Sound and Vibration**, p. 81 - 90, 2005.

SOSA, J. [www.ing.unlp.edu.ar](http://www.ing.unlp.edu.ar). **Facultad de ingenieria-Universidad Nacional de la Plata**, 2012. Disponivel em: <[http://www.ing.unlp.edu.ar/electrotecnia/procesos/apuntes/Strain\\_Gages\\_1.pdf](http://www.ing.unlp.edu.ar/electrotecnia/procesos/apuntes/Strain_Gages_1.pdf)>. Acesso em: 20 Novembro 2012.

TIMOSHENKO, S. P. **Theory of Elastic Stability**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1961.

TUMA, J.; SKUTOVA, J. Simulation of Active Vibration Control of the Cantilever Beam. **IEEE** , Ostrava, p. 744-747, 2012.

YAU, J. Closed-Form Solutions of Large Deflection for a Guyed Cantilever Column Pulled by an Inclination Cable. **Marine Science and Technology**, p. 130-136, 2010.

ZHANG, J. et al. A LQR controller design for active vibration control of flexible structures. **IEEE**, Hebei, p. 127-132, 2008.

ZHANG, J. et al. Robust Active Vibration Control of Flexible Structures Based on  $H^\infty$  Control Theorem. **IEEE**, Handan, p. 1-6, maio 2009.

ZHANG, T.; GUANG, H. Adaptive pole placement control for vibration control of a smart cantilevered beam in thermal environment. **Journal of Vibration and Control**, Shanghai, p. 1-11, MAIO 2012.

**APÊNDICE A – ARTIGO SOMETIDO AO JORNAL AIAA**

**Active control of vibrations of a  
long, tip pulled deflected beam**

Paulo Kurka<sup>1</sup>, Jaime Izuka<sup>1</sup>, Paola Gonzalez<sup>1</sup>, Joel Burdick<sup>2</sup>, Alberto Elfes<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Mechanical Engineering, Universidade Estadual de Campinas,  
Campinas, São Paulo, Brazil

<sup>2</sup>Faculty of Mechanical Engineering, California Institute of Technology,  
Pasadena, California, USA

<sup>3</sup>Autonomous Systems Lab, ICT Centre, CSIRO,  
Pullenvale, Australia



## Abstract

*The use of long flexible probes in autonomous exploration vehicles, as opposed to short and rigid arms, may be an attractive way of obtaining scientific relevant data, such as information from wider navigation horizons, or easier access to regions of scientific interest such as terrain slopes and cliff sides. The drawback of employing such a flexible structure is the fact that it is cannot be easily controlled in real time operation by means of a simple analytic linear model. The present work therefore proposes a simplified numerical model of a long flexible beam which is statically deflected by a pulling cable. The dynamic characteristics of the model of the beam are used as intrinsic parameters in the design of a controller that stabilizes the vibration of its tip, by means of additional forces applied to the deformation pulling cable. The paper compares the static and dynamic characteristics of the proposed simplified model of the beam, with more complex models found in the literature. The design and performance simulation of an active controller of the beam's tip vibration is also presented in the work.*

## NOMENCLATURE:

Greek letters:

$\alpha, \alpha_B$ : Slope angle of the beam, slope angle of beam's extremity (Rd)

$\beta$ : Angle of cable or applied force (Rd)

$\gamma$ : Cumulative angle ( $\gamma = \alpha + \beta$ , Rd)

$\lambda$ : Eigenvalues matrix (1/s)

$\phi, \phi_A, \phi_B, \phi_C$ : Auxiliary angles ( $\phi = \arcsin \frac{\gamma}{2}$ )

$\mu_i$ : Coefficient of polynomial expansion (dimensionless)

$\boldsymbol{\eta}$ :	Vector of modal coordinates of beam's FE model ( $m$ )
$\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ :	Angular degrees of freedom (Rd)
$\boldsymbol{\zeta}$ :	Observer gain vector
Latin letters:	
$A$ :	Base point of the beam
$B$ :	End point of the beam
$b_n$ :	Motor's torsional damping ( $mNs$ )
$C$ :	Generic point along the beam
$c$ :	Adimensional constant ( $c = -\frac{PL^2}{EI}$ )
$\mathbf{D}$ :	Damping matrix of finite element model of beam ( $Ns/m$ )
$E$ :	Elasticity coefficient (Young's module) ( $N/m^2$ )
$\mathbf{F}$ :	Vector of external forces applied to the finite element model of beam ( $Ns/m$ )
$F, F_d, F_a$ :	Cable pull, external disturbance end control forces ( $N$ )
$\mathbf{G}, \mathbf{g}_i$ :	Gain control matrix and vector
$h_x, h_y$ :	Coordinates of position of cable support ( $m$ )
$\mathbf{I}_i$ :	Matrix of controlled poles
$I$ :	Moment of inertia of area ( $m^4$ )
$i$ :	Armature current ( $A$ )
$J$ :	Moment of inertia ( $m^2kg$ )
$\mathbf{K}_e, \mathbf{k}_e$ :	Finite element stiffness matrix in global or local coordinates ( $N/m$ )
$\mathbf{K}$ :	Stiffness matrix of finite element model of beam ( $N/m$ )

$k_b, k_t$ :	Motor's constant ( $\Omega A s$ ), armature constant ( $mNs/A$ )
$k_c$ :	Pulling cable stiffness ( $N/m$ )
$\mathbf{L}$ :	Local-to-global degrees of freedom rotation matrix (dimensionless)
$L_a$ :	Motor's inductance ( $H$ )
$L, L_c$ :	Total length of beam, length of cable in non-deformed beam condition ( $m$ )
$\ell$ :	Length of cable in the deformed beam condition ( $m$ )
$\mathbf{M}_e, \bar{\mathbf{m}}_e$ :	Finite element mass matrix in global or local coordinates ( $kg$ )
$\mathbf{M}$ :	Finite element mass matrix of long beam model ( $kg$ )
$M$ :	Torque ( $N.m$ )
$N$ :	Order of polynomial (dimensionless)
$P$ :	Pulling cable force ( $N$ )
$p$ :	Dimensionless parameter ( $p = \sin(\frac{\alpha_B + \beta}{2})$ )
$q_i$ :	Linear degree of freedom ( $m$ )
$\mathbf{R}_e, \mathbf{r}_e$ :	Global and local vectors of degrees of freedom of finite element ( $m$ )
$\mathbf{q}$ :	Degrees of freedom of long beam finite element model ( $m$ )
$R_a$ :	Motor's electric resistance ( $\Omega$ )
$r_i$ :	Linear degree of freedom ( $m$ )
$r_p$ :	Radius of traction cable pulley ( $m$ )
$s$ :	Arc length ( $m$ )
$\mathbf{T}$ :	Local-to-global, coordinates transform matrix (dimensionless)

$\mathbf{u}$ :	Vector of actuator forces ( $N$ )
$u$ :	Arc length ratio ( $u = \frac{s}{L}$ )
$\mathbf{V}, \bar{\mathbf{V}}$ :	Eigenvector's full and reduced matrices ( $m$ )
$\hat{\mathbf{v}}$ :	Estimated state coordinates vector ( $m$ )
$\mathbf{v}$ :	Vector of state coordinates of beam's FE model ( $m$ )
$V_o$ :	Input voltage ( $V$ )
$\vartheta$ :	Motor's angular position ( $Rd$ )
$\mathbf{w}$ :	Vector of external disturbance forces ( $N$ )
$x, x_B$ or $X_B$ :	Horizontal coordinate, horizontal coordinate of the beam's end position ( $m$ )
$y, y_B$ or $Y_B$ :	Vertical coordinate, vertical coordinate of the beam's end position ( $m$ )

## 1. Introduction

Long, flexible and light weight deployable structures are often used in space exploration vehicles in a variety of low gravity environment applications [1], [2] and [3]. Planet exploration vehicles, on the other hand, tend to use short rigid extension probes to collect scientific interest data, including panoramic views of the landscape. The length of the exploration probes are limited by the weight, stiffness constraints and power required to accurately position and control its tip end. A long, light weight deployable probe, such as the ones used in low gravity applications, would work as a better exploration tool, providing wider navigation horizons and offering the possibility of reaching less accessible regions of scientific interest, such as cliff sides and terrain slopes. Another advantage of using a long flexible probe is the possibility to position its tip in a wide range of spatial locations, using a simple traction cable control mechanism. The

drawbacks of employing such a long structure in the context of exploration of a planet with a significant gravitational field are the large displacement and the vibration movement of its flexible tip, which cannot be easily controlled in real time operation by a simple analytic linear model. The numeric model which accurately represents the dynamic behavior of a long, flexible structure, requires a relatively large space of storage data, as well as time consuming algorithms to perform necessary simulation and analysis. A simple analytic model of the static deflection of a long beam, combined with a low order numerical model of the dynamics of a curved beam, is therefore developed in the present work, to yield a practical system employed in the real time control of a long exploration probe.

Analytical solutions for the nonlinear differential equations that describe the static displacement of a beam with large deflections, use elliptical integration, as seen in Yau[4], Ang[5], Frish Fay[6], Timoshenko-Gere [7], or through numerical approximations. Numerical integration of the differential equation that govern the static deflection of a Bernoulli-Euler cantilever beam, use the RungeKutta method, as shown in Ohtsuki[8], Shvartsman[9], the shooting method as seen in Holland[10], or quasi-linearization finite differences methods as seen in the work of Al-Sadder [11]. The Bernoulli-Euler formulation is applied in the present work, in order to find the governing differential equation of the static deformation of the beam with a pulling force. The solution of the differential equation is obtained by an approximation of the elliptical integration problem.

The dynamic analysis of structures with large deflection has been researched by Ferris [12], Salltrom[13], Santillan [14], Santillan[15],Santillan[16] and Holland[10]). Ferris studies the eigenmodes and frequencies of a beam subject to its own weight trough a finite element method. A similar study by Salltrom[13] considers the large deflection of a beam caused by a static load. Bending and torsion are taken into account by the Bernoulli Euller and Saint Venant theory, respectively. The dynamics of a deflected buckled beam, considering a small vibration about equilibrium, is studied by Santillan[14], where the shooting method is applied to find the eigenmodes and frequencies. A small in-plane vibration of a beam, bended to form a tear drop shape is also studied by Santillan [15]. The Same author, (Santillan[16]) derives a free-vibration analysis solution for small-amplitude oscillations of risers and pipelines. A work by Holland [10] presents the dynamic analysis of a long flexible structure, such as the one investigated in the present work. In Holland´s work, the vibration analysis is performed via numerical integration of the governing elastic equations, using a shooting method and commercial finite element software. The finite element model of the structure used by Holland, requires a very large number of elements to yield a fine discretization, in order to warrant convergence between numerical predictions and experimental results. In the present work, low order finite element models are fitted to the statically deformed baseline of a long beam subject to the known pull force of a cable attached to its tip. The dynamic characteristics (eigenvalues and eigenvectors) of the finite element model of the deformed beam are used in the real time control of vibrations of the beam.

The control of vibrations is made through an adaptation of state-space methods of control of flexible cantilevered beams, based on pole placement, such as the one used by Rodríguez[21].

Comparisons between the analytical and experimental dynamic characteristics of the proposed model and those available in the literature, are made in the present work. Numerical simulations of the control of vibrations of the probe's tip end are also presented, which illustrate the satisfactory behavior of the proposed modeling and control strategies.

## 2. Analytical and Numerical Model

### 2.1. Static deformation model

The problem of determining the traction force and cable angle of a long, tip pulled flexible beam is addressed by Holland [10] by specifying the tip's horizontal force component and updating the vertical force until the condition of zero moment at the beam's end is satisfied with sufficient accuracy. An expression for the large deflection curvature of the beam is solved by integrating the differential equation using the Runge Kutta method. Yau[4] presents an analytical approach for describing such a large deflection behavior. In this work, the tip position of a guyed mast is determined using elliptical integrals. The angle of the cable force is expressed, through geometric considerations, as a function of the tip angle.

A simplified model of a long beam with a pulling cable is presented in Figure 1. The arc length  $s$  is measured from the base (point A) to a generic point C, the beam's slope is represented by angle  $\alpha$  and the inclination of the cable's pulling force  $P$  is represented by angle  $\beta$ . The beam's total length is  $L$ , while the coordinates of the cable support is  $(h_x, h_y)$ . The beam's tip position is represented by coordinates  $(x_B, y_B)$ .

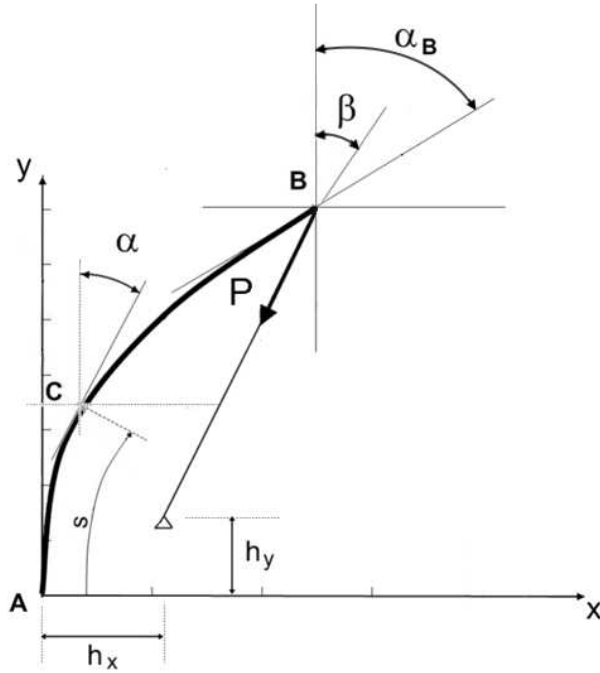


Figure 1: Long beam pulled by an inclined cable

The bending moment at the generic section **c** of the beam, is proportional to the change in curvature caused by the applied force, according to the classical Bernoulli-Euler theory for the deflection of beams. The equilibrium of moments of an infinitesimal portion of the homogeneous beam with constant cross section is described as

$$M = EI \frac{d\alpha}{ds} = P \sin \beta (y_B - y) - P \cos \beta (x_B - x). \quad (1)$$



The differentiation of Eq.(1), with respect to the arch length  $s$ , yields the governing differential equation of the model given by,

$$\frac{d^2\gamma}{du^2} + c \sin \gamma = 0 \quad (2)$$

where  $u$ ,  $\gamma$  and  $c$  are defined as:

$$\left. \begin{aligned} u &= s/L \\ \gamma &= \alpha - \beta \\ c &= \frac{-PL^2}{EI} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

The boundary conditions for the configuration shown in Figure 1, are:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{u=0} &= -\beta \\ \left(\frac{d\gamma}{du}\right)_{u=1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Parameters  $p$  and  $\phi$  are introduced for manipulation of the differential equations, in order to use the elliptical integrals:

$$\left. \begin{aligned} p &= \sin \frac{\alpha_B - \beta}{2} \\ p * \sin \phi &= \sin \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Definition of the relationships between  $ds$  and  $\gamma$ ,  $d\gamma$  and  $d\phi$ ; and  $ds$  and  $d\phi$  are necessary, in order to find expressions for the coordinates of the deflected beam, in terms of elliptical integrals. The first one is found by multiplying Eq.(2) by  $2d\gamma$  and integrating it with respect to  $\gamma$ . The relationship between  $du$  and  $d\gamma$  can be expressed as,

$$du = \frac{d\gamma}{\sqrt{2c[\cos\gamma - \cos(\alpha_B - \beta)]}}. \quad (6)$$

The relation between  $d\gamma$  and  $d\phi$  is obtained by differentiating Eq.(5)b with respect to  $\phi$ , that is,

$$d\gamma = \frac{2p\cos\phi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}} d\phi. \quad (7)$$

It can be seen from Eq.(6) and Eq. (7) that

$$ds = \frac{1}{k\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}} d\phi \quad (8)$$

where,

$$k = \frac{\sqrt{c}}{L}. \quad (9)$$

Some algebraic work is done to express coordinates  $x$  and  $y$  of the beam, in terms of the variables of the elliptical integrals:

$$y = \frac{\cos\beta}{k} [-F(p, \phi_c) + F(p, \phi_A) + 2E(p, \phi_c) - 2E(p, \phi_A)] + \frac{2p\sin\beta}{k} (\cos(\phi_c) - \cos(\phi_a)), \quad (10)$$

and

$$x = \frac{2p\cos\beta}{k} (\cos(\phi_a) - \cos(\phi_c)) + \frac{\sin\beta}{k} [-F(p, \phi_c) + F(p, \phi_A) + 2E(p, \phi_c) - 2E(p, \phi_A)], \quad (11)$$

where,

$$\left. \begin{aligned} \phi_A &= \arcsin\left(\frac{\sin\left(\frac{-\beta}{2}\right)}{p}\right) \\ \phi_B &= \frac{\pi}{2} \\ \phi_C &= \arcsin\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{p}\right) \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

$$F(p, \phi) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}} d\phi, \quad (13)$$

$$E(p, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1-p^2\sin^2\phi} d\phi, \quad (14)$$

Displacements  $y$  and  $x$  of Eqs.(10) and (11) above, allow to write an analytic expression for calculation of the force angle  $\beta$ , that is,

$$\frac{h_x}{L} \cos \beta - \frac{h_y}{L} \sin \beta - \frac{2p \cos(\phi_A)}{F(p, \phi_c) - F(p, \phi_A)} = 0. \quad (15)$$

Equation (15) expresses the horizontal angle of the pulling cable, with respect to an arbitrary angular tip inclination, allowing an analytical calculation of the  $x$  and  $y$  static deformation curve of the beam, given by Eqs. (10) and (11). A solution of Eq. (15) can only be found in an iterative numerical manner, which poses as a critical situation for a real time application of defining the beam's deformed geometry from an arbitrary force applied to the cable or, alternatively, from an arbitrarily given length of the pulling cable. A typical plot of the lengthy calculations of the pulling force angle  $\beta$ , expressed as a function of the total length of the beam's traction cable, is shown in Eq. (16) Such a relationship curve can be fitted by a polynomial of arbitrary order  $M$ , and coefficients  $\mu_i$ , of the type:

$$\beta = \sum_{i=0}^N \mu_i * \left(\frac{\ell}{L_c}\right)^i. \quad (16)$$

where  $\ell$  and  $L_c$  are the lengths of the cable in the deformed and non-deformed beam conditions, respectively. Numerical tests show that a polynomial order of  $N \approx 15$  is adequate to fit the graphically described angle-length behavior curve of Figure 2.

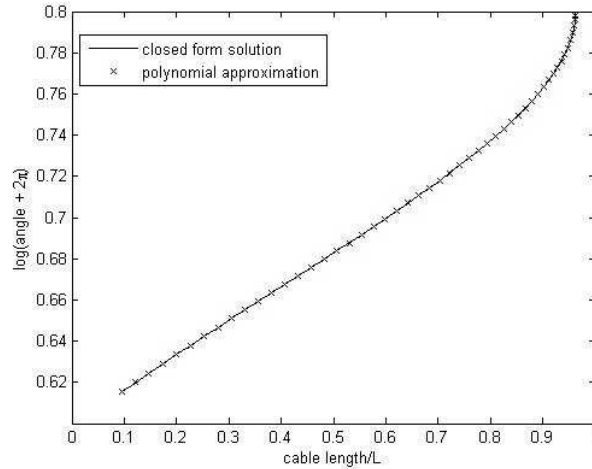


Figure 2 : Force angle  $\beta$  as a function of cable length.

In a practical application, therefore, parameters  $\mu_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, M$  of the force-angle  $\times$  cable-length function, can be initially calculated, based on physical properties of the long beam. With such parameters, the coordinates of the static deformation curve of the beam can be easily calculated, through Eqs. (10) and (11), as a function of the current pulling cable length.

## 2.2 Finite Element (FE) Models for Beam and Cable

A numerical model containing stiffness and mass matrices of the long deformed probe is derived using the finite element method (Petyt[17]). A small number of finite beam elements are allocated along the central line of deformation of the probe. The 3-D beam element used, together with its local and global coordinate system is shown in Figure 3. This beam element is described through the combination of elements subjected to axial deformation, bending and torsion

(Petyt[17], Craig[18], Kwon [19], Cook [20]). Uncoupled deformations in the axial, bending and twisting directions are considered and treated separately (Petyt[17]).

The local degrees of freedom of each element are described in vector  $\mathbf{r}_e$  as,

$$\mathbf{r}_e^T = [r_1 \quad q_1 \quad o_1 \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} r_2 \quad q_2 \quad o_2 \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2}]. \quad (17)$$

The stiffness ( $\mathbf{K}_e$ ) and mass ( $\mathbf{M}_e$ ) contribution of each individual element is described in the global coordinate system as,

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}_e \mathbf{T}, \quad (18)$$

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{m}}_e \mathbf{T}. \quad (19)$$

where  $\bar{\mathbf{k}}_e$  and  $\bar{\mathbf{m}}_e$  are a single element stiffness and mass matrix, given in the local coordinates system. The global position  $\mathbf{R}_e$ , of the local vector of degrees of freedom  $\mathbf{r}_e$ , is expressed by

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{r}_e, \quad (20)$$

where,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} [L] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [L] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [L] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [L] \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

and  $\cos(i, J)$  representing the cosine of the angles formed between the local coordinates axis  $i$  and the global coordinates axis  $J$ .

The probe's pulling cable is modeled as an axial displacement truss element and the same procedure described above is done in order to calculate its stiffness and mass matrices.

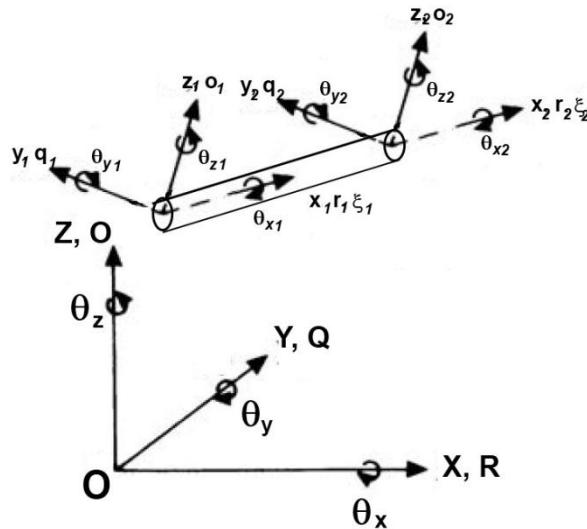


Figure 3: Global Coordinate Systems and Element Local Coordinate System.

### 3. Strategy to the control of vibrations

The vibration control strategy proposed in the present work is based on the modal characteristics of the deflected beam's FE model. The modal control strategy can be seen in the works of Rodríguez[21] and Inman[22]. The procedure consists in projecting the model's mass and stiffness matrices into the modal coordinates system, where the control strategy is applied. The advantage of such a method is the flexibility to place poles at convenient locations, in order to satisfy the desired response requisites.

The block diagram of the state feedback control used is shown in Figure 4. A state observer is used, which esteems the state of the system at any given instant. In the present work,



the observer is the vertical and horizontal displacement of the beam's tip, measured from the fluctuations of tension of the pulling cable. The controlling force is also applied to the beam's tip, through additional tension exerted at the pulling cable, by the same DC electrical motor which is used to pull the cable and hold it in the desired deformed position

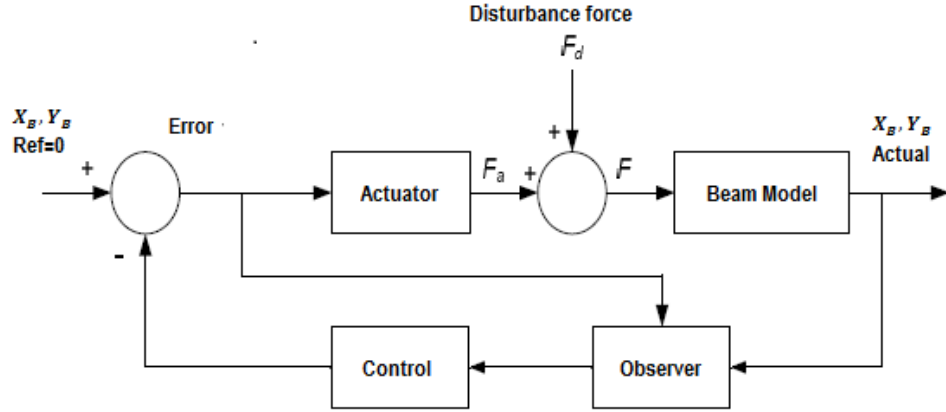


Figure 4 : Control Scheme

The constitutive model of the motor is given by:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-b_n}{J} & \frac{k_t}{J} \\ 0 & \frac{-k_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} V_o. \quad (23)$$

$$\Upsilon = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \\ i \end{bmatrix} \quad (24)$$

where  $b_n$  is the torsional damping of the motor,  $k_t$  is the armature constant,  $k_b$  is the motor's constant,  $J$  is the moment of rotational inertia,  $L_a$ ,  $R_a$  are the electric inductance and resistance, and  $V_o$  is the input voltage. The state variables, in this case, are the motor's angular position, angular speed, and armature current, which are represented by  $\vartheta$ ,  $\dot{\vartheta}$  and  $i$ , respectively.

The actuator's control force is defined by:

$$F_a = \vartheta * r_p * k_c. \quad (25)$$

where,  $r_p$  is the radius of the pulley attached between the motor and the traction cable and  $k_c$  is cable's stiffness.

The dynamic FE model of the beam has the form:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F \cos \beta \\ F \sin \beta \end{bmatrix}, \quad (27)$$

where,  $\mathbf{q}(t)$  is a  $n \times 1$  vector of global coordinates related to the finite elements degrees of freedom. Element  $F$  in vector  $\mathbf{F}$  represents the sum of the static ( $F_d$ ) and control ( $F_a$ ) forces that are applied in the vertical and horizontal directions of the probe's end tip via the tension cable

The mass matrix is represented by  $\mathbf{M}$ , and the stiffness matrix by  $\mathbf{K}$ . The model may also contain a damping matrix  $\mathbf{D}$ , in the case of high internal dissipative forces in the beam. The simulations presented in this work do not consider the action of such dissipative forces.

The model of Eq. (26) is converted into the space state form as:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{w}, \quad (28)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{v}, \quad (29)$$

where,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0] \quad (30)$$

and

$$\mathbf{v}^T = [\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]. \quad (31)$$

The actuator force input is represented by the  $2 \times 1$  vector  $\mathbf{u}(t)$ . An external tip-applied disturbance force input is represented by the  $2 \times 1$  vector  $\mathbf{w}(t)$ .  $\mathbf{b}$  is a  $n \times 2$  matrix, comprised of elements equals to 0 or 1, depending on the position of the controlling forces in vector  $\mathbf{u}$ .

The control is designed using the state space description of the Eq. (28). The system model is expressed in modal coordinates as:

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \boldsymbol{\lambda}. \quad (32)$$

Where  $\boldsymbol{\lambda}$  is a diagonal matrix with the eigenvalues of the state matrix  $\mathbf{A}$ . Substituting  $\mathbf{v} = \mathbf{V}\boldsymbol{\eta}$  into Eq. (28), and pre multiplying by the inverse of the eigenvector matrix  $\mathbf{V}$ , yields the modal coordinate representation of the system such as

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{w}(t), \quad (33)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{V}\boldsymbol{\eta}(t). \quad (34)$$

Calculations of the controllability of the numerical model of the beam indicate that the system can only be controlled at the first few modes of vibration. The two lowest frequency associated modes are therefore used to implement the control strategy. The pole placement method is used to calculate the modal control gain. This method consists of placing the closed loop poles associated with the modes on the left half of the complex plane of the eigenvalues to ensure the stability of the system. The poles location depend of the desired response, that is, a stabilization time and a percentage of estimated overshoot.

In the case of state feedback control, the input  $\mathbf{u}$  depends on the state of the system and

$$\mathbf{u} = -\mathbf{G}\mathbf{v}. \quad (35)$$

$\mathbf{G}$  represents the control gain matrix, and it is calculated through the following equation:

$$\mathbf{G} = \mathbf{g}_i \bar{\mathbf{V}}^{-1}, \quad (36)$$

where  $\mathbf{g}_i, i = 1, 2, \dots, \bar{n}$  is a vector with the Ackerman control gain, calculated according to Ackerman's formula (Rodríguez [21]), and  $\bar{\mathbf{V}}$  is a matrix of reduced eigenvectors associated to some of the smallest eigenvalues of the FE model.

The feedback control is expressed in space state representation as

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{v}(t). \quad (37)$$

System observers allow estimations of individual states of the dynamic model, with the objective to describe the internal behavior using the output signal. A complex matrix of controlled poles  $\mathbf{l}_i$  is arbitrarily chosen in order to build an observer with values that are bigger than those of the gain control vector  $\mathbf{g}_i$ . The observer gain is therefore defined as

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{l}_i \bar{\mathbf{V}}. \quad (38)$$

An estimation model of the system is described by means of the estimated state coordinates  $\hat{\mathbf{v}}$ , given as

$$\dot{\hat{v}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G} - \zeta\mathbf{C})\hat{v} + \mathbf{L}Y. \quad (39)$$

The final controlled model represents the situation where the beam is at rest in a particular deformed configuration, and two stabilization controlling forces act on the beam's pulling cable, in the presence of an external disturbance of the initial state.

#### **4. Model comparisons and control application test**

This section presents the process of assemblage and test of the numerical model of a long cantilever probe beam, deformed by the action of a tip pulling force induced by a cable. The deformed geometry of the probe is used as a baseline to allocate the nodes of a small number of finite beam elements. The finite element model is described in terms of its global mass and stiffness matrices, leading to the dynamic characteristics of natural frequencies and mode shapes. The natural mode shapes and frequencies are employed, by their time, in a pole allocation process that is used to define the elements of an active vibration control loop.

Results of direct calculation of the deformation curve of the long flexible beam as a function of the traction cable length, as proposed in the present work, are initially compared to literature results where the deformation curve is calculated by means of iterative solution methods. The dynamic characteristics of the resulting deformed beam model are then compared with the results of other research publications. Simulation results of the control of end tip

vibration of the long probe are finally presented, in the later part of this section, by means of the proposed control strategy.

#### 4.1. Static deformation shape of the long probe

The procedure for determining the static deformation of a pulled flexible beam using analytical expressions, as described by Eqs. (40), are verified in this section. Results of the proposed modeling process are compared with the static solution of Eq.(15) and the experimental results obtained by Holland[10].

A polycarbonate beam with 762 mm of length and rectangular section of 25.4 mm  $\times$  4.8 mm is studied. The material's modulus of Young and density are 1.656 *GPa* and 1120 *kg/m<sup>3</sup>* respectively. The cable is modeled as a massless spring with stiffness 11.67 *kN/m*. The cable origin coordinates (see Fig. 1) are  $h_x = 12.7$  mm and  $h_y = 28.6$  mm.

The beam starts to deform by increasing the pulling force of the cable beyond critical load. Comparisons of the deflection of the beam's end tip using the analytical results from the solution of Eq.(15), the approximate polynomial expression described by Eq(16) and experimental results described in [10] are shown in Figure 5. The pulling loads and deflections in the *X* direction in the figure are normalized by the critical buckling force and the beam's length, respectively.

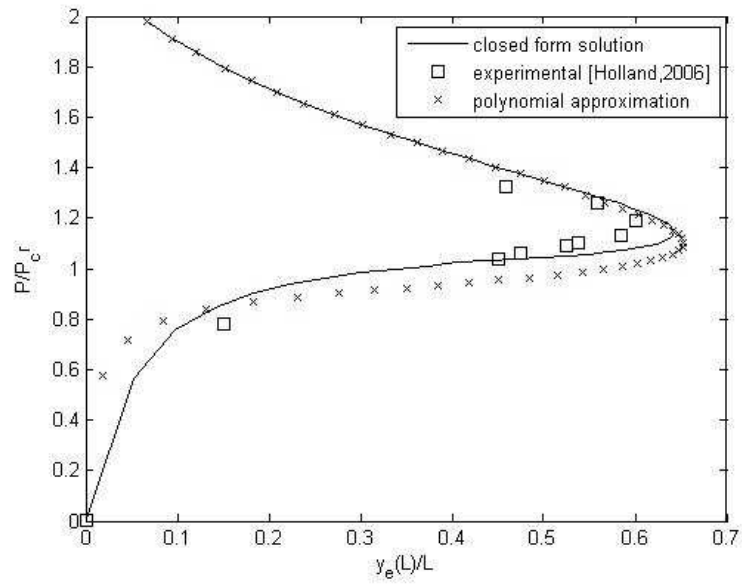


Figure 5: Comparison of beam's end tip deflection

Static baseline deformation of the beam, using the analytical results and approximate polynomial expressions are shown in Figure 6.



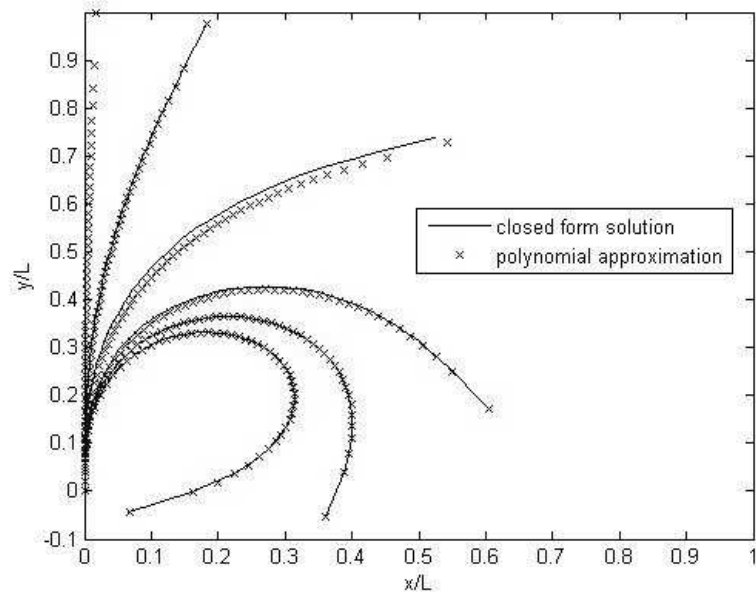


Figure 6 : Comparison of baseline deformations

#### 4.2. Dynamic characteristics of the long probe models

The dynamic characteristics of the deformed beam models and experimental measurements are compared in the present section. The proposed modeling strategy consists in fitting 50 planar 6 degrees of freedom (DOF) beam elements to the baseline geometry of the deflected beam. Holland's simulation of the same structure [10] uses a mesh of 1000, 6 DOF finite beam elements. A graphic containing the values of the first 4 natural frequencies of the deformed structure, as a function of the normalized pulling force, is shown in Figure 7. Experimental results of natural frequencies identified in [10] are also shown in the figure.

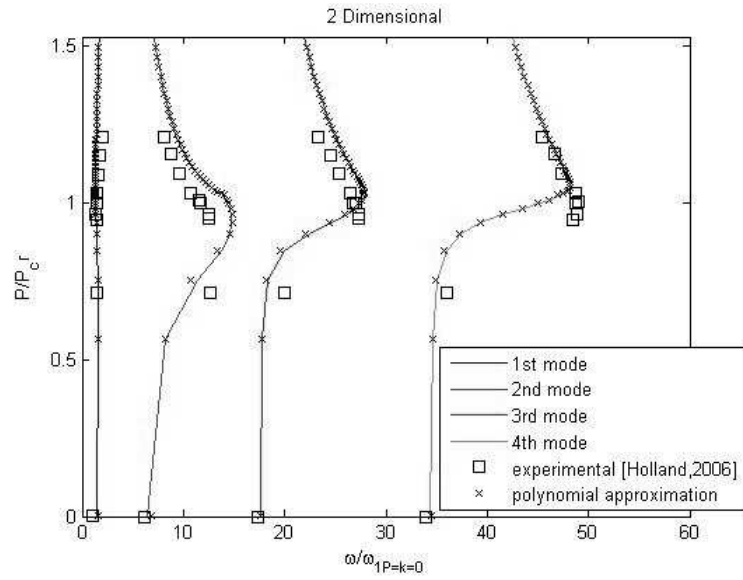


Figure 7: Eigen frequencies for planar vibration

Analysis results of the proposed dynamic model are also made using 50, 12 DOF spatial beam elements. Eight natural frequencies are calculated using the exact deformed baseline solution to Eq. (15), and the deformation baseline calculated from the polynomial approximations of the same analytical expression. Figure 8 shows the results of such a comparison.

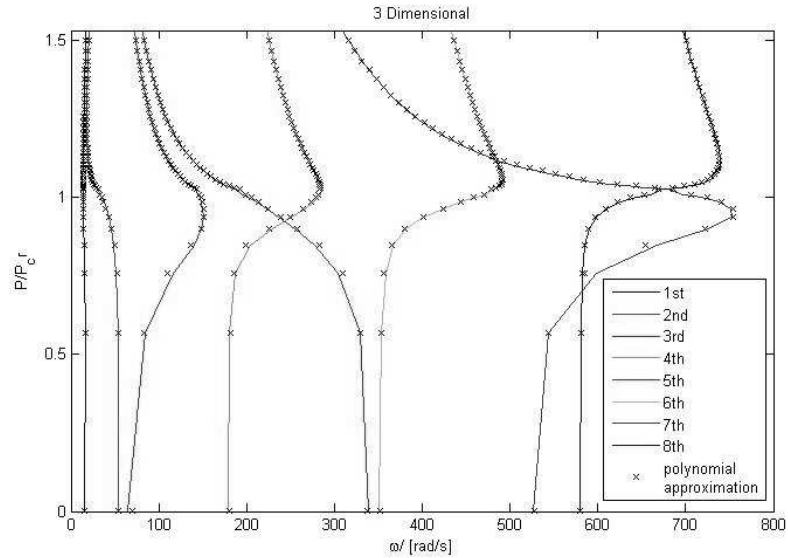


Figure 8: Eigenfrequencies for 3D vibration

#### 4.3 Control of vibrations of the long probe models

The control strategy described in section 3 of the present work is applied in numerical simulations of the vibration behavior of the end tip of the beam. The control of vibrations is made through actuation on the probe's pulling cable motor, which is responsible to maintain the baseline deformations of the flexible structure. Tension changes on the constant traction force of the pulling cable is proportional to the displacement vibration of the tip of the deformed flexible probe. The control signal is therefore an additional electrical tension input to the pulling motor. The sensing signals come from the small measured displacements, which are proportional to the fluctuations of the static tension of the pulling cable. The pole placing control strategy uses a stabilizing time constant of 2 seconds.

The flexible structure is subject to a static cable pulling force which places the probe's tip in the position  $X_B = 0.4557$  m and  $Y_B = 0.4648$  m. The beam's end is subjected to simultaneous impulse deformations of intensity  $10\text{ N}$  in the  $X$  and negative  $Y$  directions. The resulting vibration response of the beam's tip without control actuation is shown in Figure 9. In the Figure 10 shows the response of vibration of the same end point, with application of the active control strategy.

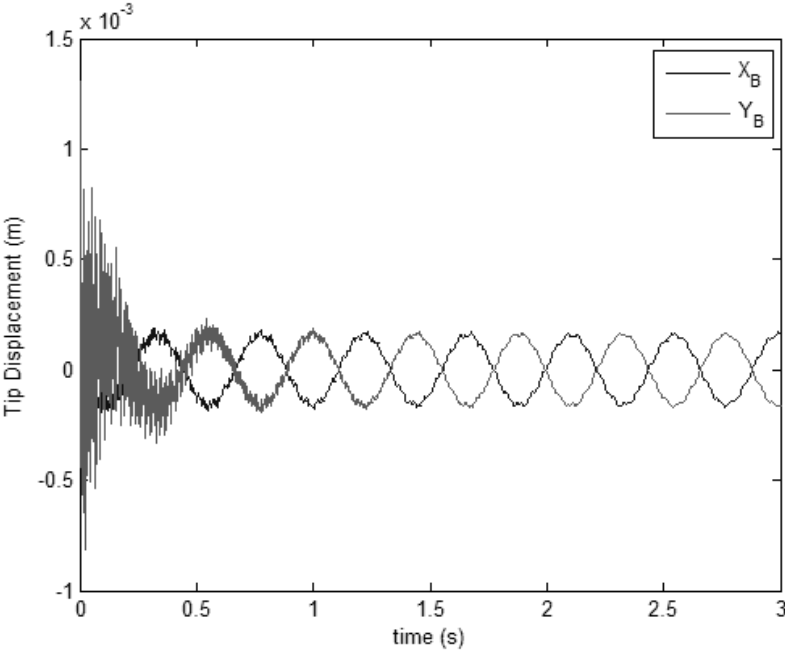


Figure 9: System free of the control vector with impulse input

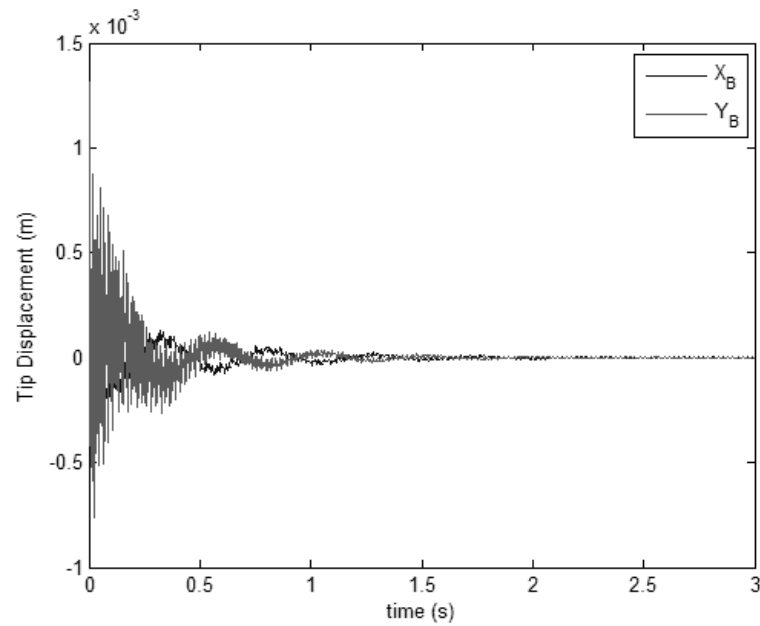


Figure 10: Control vector applied to the actuator with impulse input

The beam's end is also subjected to simultaneous random vibrations of 1.5 N RMS values in the  $X$  and negative  $Y$  directions. The resulting vibration response of the beam's tip without control actuation is shown in 92 In the Figure 12 shows the response of vibration of the same end point, with application of the active control strategy.

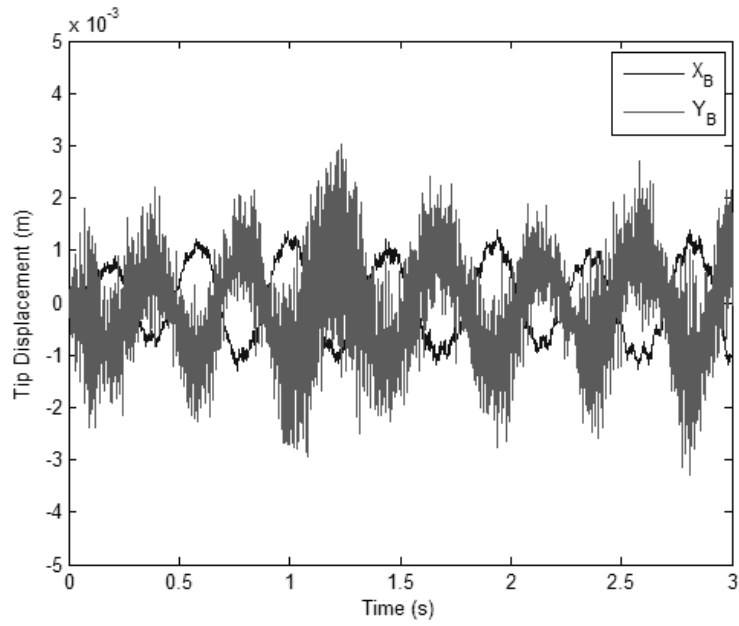


Figure 11: Control vector applied to the actuator with random input

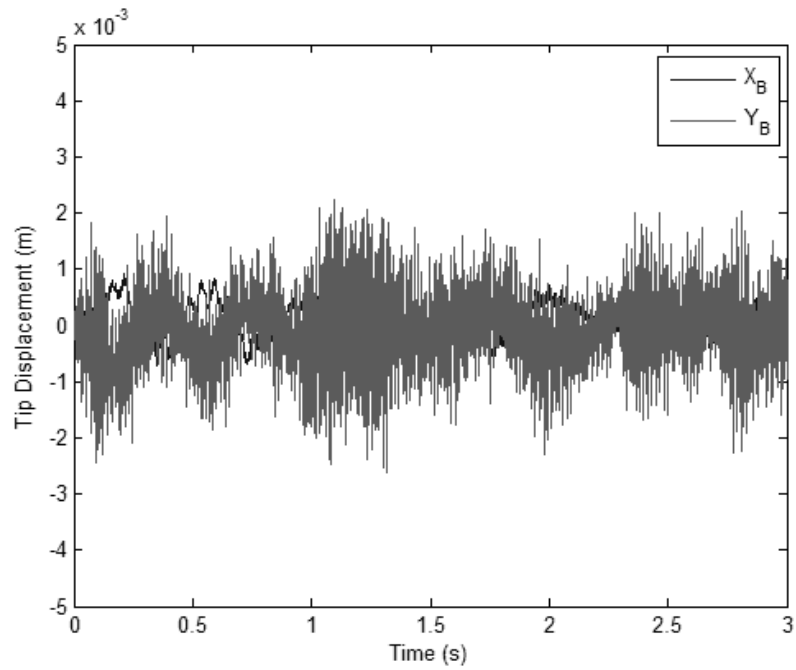


Figure 12: Control vector applied to the actuator with random input

## 5. Comments and conclusions

The static baseline curve of the deflected beam is calculated from a polynomial approximation of the nonlinear relation between the force application angle and cable length. Comparison between the approximated results, and the exact deformation solution, shows a good agreement between the two strategies. A low order finite element mesh is superimposed to the deflected baseline of the beam, to yield a useful dynamic model of the system.

When the beam is subject to small pulling forces and deformations, the polynomial approximation strategy does not yield an accurate representation of the beam's static deflection, as seen in Figure 5 and Figure 6. However, the eigen-frequencies results displayed in Figure 7 and Figure 8 show that, in spite of the differences in the prediction of the beam's static configuration, the dynamic behavior results are always in good agreement between the exact and approximated solutions.

Simulations of the strategy developed to the control of vibrations of the beam's tip end show that it can be conveniently stabilized for impulsive disturbing forces, as illustrated in Figures 10 and 11. The presence of permanent random disturbing forces, make the control strategy less efficient in the task of stabilizing oscillations of the beam's tip end. In this case, control is seen to reduce vibration levels to about half the intensity of uncontrolled vibrations as shown in Figures 12 and 13.

## 6. References

- [1] Puig, L., Barton, A., and Rando, N., “A review on large deployable structures for astrophysics missions,” *Acta Astronautica*, Vol. 67, Issues 1–2, Jul–Aug. 2010, pp. 12-26.
- [2] Tibert, G., “Deployable Tensegrity Structures for Space Applications,” *Royal Institute of Technology*, Stockholm, 2002.
- [3] Pellegrino, S., “Deployable Structures,” Springer, Italy, 2001.
- [4] Yau, J. D., “Close-form solutions of large deflections for a guyed cantilever column pulled by an inclinations cable,” *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 18, No. 1, 2010, pp. 130-136.
- [5] AngJr, M. H., Wei, W., and Teck-Seng, L., “On the estimation of the large deflection of a cantilever beam,” *International Conference on Proceedings of the IECON '93*, Vol. 3, No. 15, Nov. 1993 pp.1604-1609.
- [6] Frisch-Fay, R., *Flexible Bars*, Butterworths, London, 1962.
- [7] Timoshenko, S.P., Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, 2sd ed., McGraw-Hill, 1961.



- [8] Ohtsuki, A., "Analysis of the Characteristics of Fishing Rods Based on the Large-Deformation Theory," *Materials and Science in Sports*, Edited by F.H. (Sam) Froes TMS (The Minerals, Metals & Materials Society), 2001 pp. 161-170.
- [9] Shvartsman, B.S., "Large deflections of a cantilever beam subjected to a follower force," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 304, Issues 3-5, 2007, pp. 969-973.
- [10] Holland, D.B., Stanciulescu, I., Virgin, L.N., and Plaut, R.H. "Vibration and large deflection of cantilevered elastica compressed by angled cable," *AIAA Journal*, Vol. 44, 2006, pp.1468–1476.
- [11] Al-Sadder, S., and AL-Rawi, R. A. O., "Finite difference scheme for large-deflection analysis of non-prismatic cantilever beams subjected to different types of continuous and discontinuous loadings," *Applied Mechanics*, Vol. 75, Issue. 8, 2006, pp. 459-473,
- [12] Ferris, D.G., and Afonta, A.O., "Small Vibrations of Flexible Bars by Using the Finite Element Method with Equivalent Uniform Stiffness and Mass Methodology," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 163, Issue 2, 1993, pp. 343-358.
- [13] Sallstrom, J. H., Poelaert, D. H. L., and Janssens, F.L., "Small displacements about equilibrium of a beam subjected to large static loads," *AIAA Journal*, Vol. 34, No.11, Nov. 1996, pp. 2384-2391.

- [14] Santillan, S. T., Virgin, L. N. and Plaut, R. H., “Post-buckling and Vibration of Heavy Beam on Horizontal or Inclined Rigid Foundation”, *J. of Applied Mechanics*. Vol. 73, Jul. 2006, pp. 664-671.
- [15] Santillan, S. T. Virgin, L. N. and Plaut, R. H. “Equilibria and Vibration of a heavy pinched loop,” *J. of Sound and Vibration*, Vol. 288, Issues.1-2, Nov. 2005, pp.81-90.
- [16] Santillan, S. T., Virgin, L.N., Plaut, R. H., “Static and Dynamic Behavior of Highly Deformed Risers and Pipelines,” *J. Offshore Mech. Arct. Eng.* Vol.132, No.2, 2010.
- [17] Petyt, M., *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, 2sd ed., Cambridge University Press, New York, 2010.
- [18] Craig, R. R., and Kurdila, A. J. *Fundamentals of Structural Dynamics*, 2sd ed., Wiley, 2006.
- [19] Kwon, Y. W., and Bang, H., *The Finite Element Method using Matlab*, CRC Press, 1997.
- [20] Cook, R. D., Malkus, D. S., and Plesha, M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Method*, 3td ed., Johns Willey & Sons, 1989.
- [21] Rodríguez, R., Gallardo, J. and Orozco, H. “Modal Control of a Flexible Cantilevered Beam,” *Electronic, Robotic and Automotive Mechanics Conference*, pp. 660-665, 2010.

[22] Inman, D. J., *Vibration with Control*, Johns Willey & Sons, pp.198-201, 2006