



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Mecânica

DÉCIO LUÍS MEDEIROS FILHO

**Estudo Numérico do Escoamento Sobre um
Degrau com a Presença de um Obstáculo de
Seção Retangular**

CAMPINAS
2018

DÉCIO LUÍS MEDEIROS FILHO

Estudo Numérico do Escoamento Sobre um Degrau com a Presença de um Obstáculo de Seção Retangular

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Térmica e Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Gonçalves dos Santos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO DÉCIO LUÍS MEDEIROS FILHO, E ORIENTADO PELO PROF. DR. ROGÉRIO GONÇALVES DOS SANTOS.

.....
ASSINATURA DO ORIENTADOR

**CAMPINAS
2018**

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): FUNCAMP

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

M467e Medeiros Filho, Décio Luís, 1991-
Estudo numérico do escoamento sobre um degrau com a presença de um obstáculo de seção retangular / Décio Luís Medeiros Filho. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Rogério Gonçalves dos Santos.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Mecânica de fluidos. 2. Métodos numéricos. I. Santos, Rogério Gonçalves dos, 1978-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Numerical study on the influence of a rectangular cross-sectional obstacle in a backward-facing step flow

Palavras-chave em inglês:

Fluid mechanics

Numerical methods

Área de concentração: Térmica e Fluídos

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Rogério Gonçalves dos Santos [Orientador]

João Marcelo Vedovoto

Flávio de Campos Bannwart

Data de defesa: 25-01-2018

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADEMICO

Estudo Numérico do Escoamento Sobre um Degrau com a Presença de um Obstáculo de Seção Retangular

Autor: Décio Luís Medeiros Filho

Orientador: Prof. Dr. Rogério Gonçalves dos Santos

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

**Prof. Dr. Rogério Gonçalves dos Santos, Presidente
UNICAMP/FEM**

**Prof. Dr. João Marcelo Vedovoto
UFU/Campus de Patos de Minas**

**Prof. Dr. Flávio dos Campos Bannwart
UNICAMP/FEM**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Campinas, 25 de Janeiro de 2018.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à todos que contribuíram de maneira direta ou indireta à conclusão deste trabalho.

Ao professor Rogério, agradeço pelos bons direcionamentos, pela paciência e sempre disponibilidade durante todo o andamento do projeto.

Aos amigos, muito obrigado por estarem presentes e sempre animando o dia. Agradeço também aos que contribuíram com dicas para o trabalho e ajudando a encontrar erros no código computacional.

Aos meus pais, agradeço pelo suporte durante esta jornada.

Resumo

Separação é um fenômeno físico característico de escoamentos viscosos internos ou externos, onde a presença de um gradiente adverso de pressão, muitas vezes devido a variações bruscas na geometria, resulta no desprendimento da camada limite do fluido. No caso do escoamento sobre degrau uma ou mais zonas de recirculação podem ser formadas como consequência deste fenômeno. Já no escoamento externo ao redor de um obstáculo retangular, o ponto de desprendimento está localizado nos vértices da geometria, podendo resultar no desprendimento dos vórtices da esteira de von Karman.

Este trabalho tem como um dos objetivos obter resultados referentes a simulação numérica do escoamento sobre degrau com a presença de um obstáculo de seção retangular como redirecionador de fluxo. Alterações nas zonas de recirculação do degrau podem influenciar aplicações industriais que envolvam mecanismos de transferência de massa ou calor. Considerando como exemplo trocadores de calor, o obstáculo poderia ter papel semelhante a uma aleta. Também são consideradas possíveis influências do degrau na esteira do obstáculo, como a frequência de formação dos vórtices, fato interessante em um estudo de vibrações. Outro objetivo do trabalho é a implementação do método de discretização numérica espacial UNIFAES para simulações transientes.

Para atingir estes objetivos são desenvolvidos em Fortran dois códigos de CFD bidimensionais em volumes finitos. O primeiro (*NUM1*) é adimensional, apresentando malha semi-deslocada, discretização espacial e temporal pelos métodos UNIFAES e Euler explícito, com obtenção de uma equação de Poisson para a pressão. O segundo (*NUM2*) é dimensional, utilizando malha deslocada (*staggered*), discretização espacial e temporal pelos métodos upwind e Euler implícito, com utilização do algoritmo SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*). Em ambos os casos um solver iterativo SOR (*Successive Over-Relaxation*) resolve o sistema de equações algébricas. As simulações dos escoamentos envolvendo o degrau e o obstáculo de seção retangular são realizadas em uma faixa de Reynolds entre 100 e 600.

Primeiramente, os códigos *NUM1* e *NUM2* são validados para o escoamento sobre degrau, através da comparação dos resultados referentes a quantidade e comprimento das bolhas de recirculação com dados experimentais encontrados na literatura. Além disso, os resultados obtidos por ambos os códigos são comparados entre si. O código *NUM1* é o de interesse principal do trabalho, sendo o *NUM2* utilizado apenas como meio de comparação. Após a validação, é definido que as próximas simulações serão conduzidas utilizando apenas o código *NUM1*.

Em uma segunda etapa, resultados relacionados a presença e frequência da formação de vórtices são obtidos na simulação do escoamento ao redor do obstáculo de seção retangular confinado em canal. Por fim, os casos de escoamento sobre degrau com a presença do obstáculo de seção retangular, em dois posicionamentos diferentes, são simulados.

Como conclusão é notado que a presença do obstáculo controla o comprimento e quantidade das zonas de recirculação no escoamento degrau. Sendo os efeitos maiores quanto maior o número de Reynolds e a proximidade entre obstáculo e degrau. É também observado que existe influência da presença do degrau no valor do Reynolds crítico de formação da esteira de von Karman do obstáculo de seção retangular.

Abstract

Flow separation is a physical phenomenon characteristic of internal and external viscous flows, in which the presence of a negative pressure gradient, commonly originated from abrupt changes in geometry, can generate boundary layer detachment. As a result, one or more recirculation zones can be formed in a backward-step flow. Regarding the flow around an obstacle with rectangular cross-section, the separation point is located at the obstacle vertex, leading to the von Karman vortex street formation.

One of this work goals is to study the results related to the backward-facing step flow with the presence of a rectangular cross-sectional obstacle acting as a flow redirector. Changes in the recirculation zones behavior can impact industrial applications that relies on heat and mass transfer mechanisms. Taking a heat exchanger as example, the obstacle could behave similarly to a fin. Moreover, changes in the obstacle wake behavior like vortex frequency can be interesting for vibration studies. Another goal, is to apply the UNIFAES exponential-type spatial discretization method in transient simulations.

Two 2D, finite volume, transient, laminar and incompressible Fortran CFD codes were developed to achieve those goals. The first code (*NUM1*) presents a semi-staggered grid, the UNIFAES and explicit Euler as spatial and temporal discretization schemes, and solves a pressure Poisson equation. The second one (*NUM2*) consists of a staggered grid, the upwind and implicit Euler schemes for the spatial and temporal discretization, and uses the SIMPLE algorithm. In both cases, the SOR method is used as the algebraic equation system iterative solver. The flow simulations including the step and obstacle geometries were realized for a 100 to 600 Reynolds number range.

Initially, the *NUM1* and *NUM2* codes were validated for the backward-facing step flow using experimental values, about the recirculation bubbles number and size, found in the literature. Besides this, both codes results were compared between each other. *NUM1* is this work main code of interest, whereas *NUM2* is used only as a comparison tool. After the validation, it's set that the next simulations cases will be ran only with the *NUM1* code.

As a second step, results regarding the vortex street presence and frequency were obtained for the simulation around a confined rectangular cross-sectional obstacle. Finally, simulations cases for the backward-step flow with the presence, at two different positions, of an obstacle with rectangular cross-section were conduced.

As conclusion, it's observed that the obstacle presence can control the size and number of the backward-facing step flow recirculation zones. These effects are enhanced by the Reynolds number value and the distance between step and obstacle. Moreover, the step influences the obstacle von Karman street critical Reynolds number value.

Lista de Ilustrações

2.1	Zonas de recirculação em um escoamento sobre degrau	20
2.2	Separação laminar em uma parede curva. (WERLÉ, 1974) (apud Dyke (1982)) . . .	21
2.3	Escoamento externo ao redor de um aerofólio. (WERLÉ, 1974) (apud Dyke (1982))	24
2.4	Escoamento ao redor de um cilindro	25
2.5	Esteira laminar de von Karman após um cilindro. (Dyke (1982) - <i>Fotografia de Sadatoshi Taneda</i>)	26
2.6	Valor da componente permanente do coeficiente de empuxo para diferentes seções transversais. (SUMER E FREDSOE, 1997)	30
2.7	Escoamento ao redor de corpo imerso com seção retangular, confinado e com ângulo de ataque nulo	31
2.8	Elemento fluido infinitesimal (VERSTEEG E MALALASEKERA, 2007)	33
3.1	Solver incompressível do código <i>NUM1</i>	49
3.2	Solver incompressível do código <i>NUM2</i>	50
3.3	Tipos de malha: (a) Deslocada; (b) Semi-deslocada; (c) Co-localizada no centro . .	54
3.4	Nomenclatura malha deslocada	55
3.5	Nomenclatura malha semi-deslocada	55
4.1	Geometria degrau descendente	66
4.2	Degrau: Linhas de corrente para $Re = 300$ (NUM1)	71
4.3	Degrau: Contornos de vorticidade para $Re = 300$ (NUM1)	71
4.4	Degrau: Contornos de velocidade horizontal U para $Re = 300$ (NUM1)	71
4.5	Degrau: Linhas de corrente para $Re = 500$ (NUM1)	71
4.6	Degrau: Contornos de vorticidade para $Re = 500$ (NUM1)	72
4.7	Degrau: Contornos de velocidade horizontal U para $Re = 500$ (NUM1)	72
4.8	Geometria do escoamento ao redor do obstáculo de seção retangular	73
4.9	Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 300$ (NUM1)	74
4.10	Obstáculo: Contornos de velocidade horizontal U para $Re = 300$ (NUM1)	75
4.11	Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 500$ (NUM1)	75
4.12	Obstáculo: Contornos de velocidade horizontal U para $Re = 500$ (NUM1)	75
4.13	Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 600$ (NUM1)	76
4.14	Obstáculo: Contornos de velocidade horizontal U para $Re = 600$ (NUM1)	76
4.15	Obstáculo: Coeficiente de empuxo em função do tempo para $Re = 600$ (NUM1) . .	77
4.16	Geometria degrau com obstáculo	78

4.17	Campo de velocidades $Re = 500$. Para os casos: a) sem obstáculo; b) $d = 2$ e c) $d = 4$	80
4.18	Campo de velocidades $Re = 600$. Para os casos: a) sem obstáculo; b) $d = 2$	81
4.19	Degrau com Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 500$ e $d = 2$ (NUM1) .	81
4.20	Degrau com Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 600$ e $d = 2$ (NUM1) .	81
4.21	Degrau com Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 400$ e $d = 4$ (NUM1) .	82
4.22	Degrau com Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 500$ e $d = 4$ (NUM1) .	82
4.23	Degrau com Obstáculo: Gráfico do coeficiente de empuxo vs tempo para $Re = 500$ e $d = 4$ (NUM1)	83

Lista de Tabelas

4.1	Resultados dimensões zona recirculação (NUM1)	68
4.2	Resultados das dimensões da zona recirculação (NUM2)	69
4.3	Comparação dimensão x_1 entre NUM2, NUM1 e Experimental)	70
4.4	Comparação dimensão x_2 entre NUM2, NUM1 e Experimental)	70
4.5	Comparação dimensão x_3 entre NUM2, NUM1 e Experimental)	70
4.6	Resultados para dimensões x_1 , x_2 e x_3 para $d = 2$, na faixa de Reynolds estudada (Configuração NUM1).	79
4.7	Resultados para dimensões x_1 , x_2 e x_3 para $d = 4$, na faixa de Reynolds estudada (Configuração NUM1).	80

Lista de Abreviaturas e Siglas

A, A_f	-	Áreas faces elementos [m^2]
V	-	Volumes elementos [m^3]
V_c, U_c	-	Velocidade característica/referência [m/s]
U_∞	-	Velocidade do escoamento livre [m/s]
Re	-	Número de Reynolds [-]
St	-	Número de Strouhal [-]
P	-	Número de Peclet [-]
D, F	-	Fluxos difusivo e convectivo
f	-	Frequência de formação de vórtices [Hz]
C_l	-	Coefficiente de empuxo [-]
C_d	-	Coefficiente de arrasto [-]
F_l	-	Força de empuxo [N]
F_d	-	Força de arrasto [N]
x, y, z	-	Coordenadas espaciais em cada direção [m]
x^*, y^*, z^*	-	Coordenadas espaciais adimensionalizada
f^*, F_l^*, F_d^*	-	Outras variáveis adimensionalizada
H, L	-	Dimensões do canal (altura e comprimento) [-]
s, c	-	Dimensões do degrau (altura e comprimento) [-]
O_x, O_y	-	Dimensões do obstáculo (altura e comprimento) [-]
dx, d	-	Posicionamento do obstáculo (distância da entrada ou do degrau) [-]
x_1, x_2, x_3	-	Coordenadas zona de recirculação do degrau [-]
N, S, L, E	-	Nomenclatura de posicionamento de ponto nodal
n, s, l, e	-	Nomenclatura de posicionamento de fronteira do volume de controle
u, v, w	-	Componentes da velocidade [m/s]
\vec{v}	-	Vetor velocidade
A_u, A_v	-	termos de fluxo total (convectivo e difusivo)

p	- Pressão [Pa]
P'	- Correção da pressão [Pa]
t	- tempo [s]
g	- gravidade [m/s^2]
E_t	- Energia total [J]
a_E, a_W, a_P, a_N, a_S	- Coeficientes equação discretizada
S_E, S, S_P, S_C, b, b'	- Temos fontes equação algébrica
R	- Coeficiente discretização UNIFAES [W/mK]
k	- Condutividade térmica [W/mK]
CFL	- Número de Courant
N_I, N_J	- Número de elementos em cada direção na malha
i, j	- Posicionamento do elemento em cada direção na malha
C_1, C_2, C_3	- Constantes
Z	- Coeficiente adimensional
D_P	- Balanço de massa no ponto nodal P
n	- Número iteração no tempo

Letras Gregas

θ	- Ângulo de separação do escoamento [deg]
ν	- Viscosidade cinemática [m^2/s]
μ	- Viscosidade dinâmica [$Pa.s$]
ρ	- Densidade [kg/m^3]
τ	- Tensões superficiais [N/m^2]
∂	- Derivada parcial
$\delta_x, \delta_y, \delta_z, \delta$	- Dimensões em dada coordenada [m]
∇	- Operador nabla
ψ, χ, Π^\pm, π	- Coeficientes discretização UNIFAES
λ_c	- Autovalores
ϕ	- Variável generalizada
Γ	- Coeficiente difusivo
Δt	- Passo de tempo [s]
Δ_x, Δ_y	- Dimensões da malha em cada coordenada [m]

Outras Notações

NUM1 - Primeira configuração numérica da simulação

NUM2 - Segunda configuração numérica da simulação

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

SUMÁRIO

1	Introdução	16
2	Revisão Bibliográfica	20
2.1	Escoamento sobre degrau	20
2.2	Escoamento ao redor de um obstáculo	24
2.2.1	Escoamento ao redor de um cilindro fixo	25
2.2.2	Escoamento ao redor de um obstáculo de seção transversal retangular confinado em canal	30
2.3	Equações Governantes	33
2.4	Métodos Numéricos	36
2.4.1	Método dos Volumes Finitos	38
2.4.2	Interpolação Espacial Numérica	39
2.4.3	Introdução ao UNIFAES	43
2.4.4	Interpolação Temporal Numérica	44
2.4.5	Soluções Numéricas para equações de Navier-Stokes	44
3	Metodologia	48
3.1	Modelagem Matemática	50
3.1.1	Sistema de equações diferenciais parciais	50
3.1.2	Malhas Computacionais	53
3.1.3	Equação de Poisson para Pressão	56
3.2	Discretização Numérica	58
3.2.1	Discretização dos coeficientes do esquema UNIFAES	59
3.3	Algoritmo SIMPLE	62
3.4	Solução do sistema de equações algébricas	63

3.5	Critério de convergência: análise do resíduo	63
4	Resultados e Discussão	65
4.1	Escoamento sobre Degrau descendente	66
4.1.1	Modelagem	66
4.1.2	Resultados Obtidos	68
4.2	Escoamento ao redor de um obstáculo de seção retangular	72
4.2.1	Modelagem	72
4.2.2	Resultados Obtidos	74
4.3	Escoamento sobre degrau na presença de um obstáculo de seção retangular	78
4.3.1	Modelagem	78
4.3.2	Resultados Obtidos	78
5	Conclusões	84
6	Sugestões para Trabalhos Futuros	86
	Referências	87

1 Introdução

Um projeto ou estudo de engenharia que envolva mecânica dos fluidos pode ser estruturado utilizando técnicas de análise teórica, experimental e numérica. Cada uma destas abordagens possui vantagens e desvantagens, sendo idealmente utilizadas de forma complementar. Estudos numéricos podem ser aplicados qualitativamente e/ou quantitativamente de modo a direcionar ou reduzir o número de análises experimentais. Além disso é possível simular novas situações físicas em casos onde não se possui o equipamento exigido em laboratório. É importante salientar que uma avaliação numérica sempre contém erros numéricos, ou seja é uma aproximação, sendo necessária a validação dos resultados por meios experimentais e/ou analíticos. (DE OLIVEIRA FORTUNA, 2012)

Dinâmica computacional dos fluidos (*CFD*) é o estudo numérico de fenômenos físicos que envolvam fluidos em movimento. A simulação tem como objetivo obter resultados sobre o comportamento dos campos de pressão, velocidade e demais escalares de interesse que possam descrever o caso físico em estudo. Um programa de *CFD* é normalmente estruturado em três partes principais: pré-processamento, processamento (*solver*) e pós-processamento. A etapa de pré-processamento normalmente engloba: as definições dos aspectos geométricos, a modelagem física e matemática representada através de um sistema incluindo equações diferenciais parciais e constitutivas, a modelagem das condições auxiliares de contorno e inicial, além da escolha de uma abordagem geral de discretização e da malha computacional. Na etapa de processamento, temos a implementação do processo de discretização numérica, seguindo a abordagem escolhida, de forma a obter um sistema algébrico de equações a ser resolvido pelo computador. O pós-processamento envolve o processo de tratamento e apresentação das variáveis de interesse, como os campos de pressão, velocidade, temperatura e demais escalares pertinentes ao estudo.

Separação de escoamento é o desprendimento da camada limite do fluido em relação a uma superfície sólida. Este fenômeno físico é característico da escoamentos viscosos internos ou externos, podendo ocorrer devido a aspectos da geometria ou pela existência de um gradiente adverso de pressão. Em escoamentos internos a variação da seção transversal do canal normalmente resulta em separação, podendo ocorrer neste caso a formação de regiões de recirculação. A presença destas bolhas pode influenciar os mecanismos de transferência de calor e massa. Como exemplo, considerando um queimador de uma mistura de gases, as zonas de recirculação podem influenciar a distribuição da concentração dos componentes do gás, variável que é um dos fatores para definição do posicionamento do ignitor. Outro exemplo a ser citado é em relação a trocadores de calor, onde influências no mecanismos de transferência de calor podem resultar em alterações na eficiência do

sistema. No caso de escoamentos ao redor de corpos imersos (obstáculo), o fenômeno da separação pode resultar na formação de vórtices na esteira da geometria, sendo a frequência e intensidade destes considerados em estudos de vibrações, fratura de materiais, e acústica. Exemplos práticos de aplicação na indústria, incluem as áreas de aerodinâmica e aeroacústica. (BLEVINS, 2001)

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver na linguagem Fortran dois códigos de CFD em volumes finitos. Estes tem características bidimensional, transiente e incompressível. Sendo utilizados para obter resultados a respeito da simulação numérica de um escoamento laminar sobre degrau com a presença de um obstáculo de seção retangular posicionado a sua jusante. Para isto, primeiramente é validado separadamente o escoamento sobre degrau, o qual tem como principal característica a formação de zonas de recirculação que variam em quantidade e posicionamento de acordo com parâmetros como o número de Reynolds, as dimensões geométricas do degrau (altura e comprimento) e o perfil de velocidade na entrada do canal. Depois, o escoamento ao redor de um obstáculo de seção retangular confinado em canal é analisado, de maneira a buscar informações sobre o Reynolds crítico na formação dos vórtices da esteira laminar de von Karman. No caso final de estudo, verifica-se se através da inserção de um obstáculo sólido de seção transversal retangular em um escoamento sobre degrau descendente é possível controlar características da separação do fluido. Espera-se que dependendo do posicionamento do obstáculo, é gerado um redirecionamento no fluxo o qual influenciaria as regiões de recirculação presentes nas paredes superior e inferior do canal. Além disso, também será avaliada a influência da geometria do degrau no mecanismos de formação vórtices do obstáculo.

Além dos aspectos físicos do problema, este trabalho visa utilizar o método exponencial UNIFAES (*Unified Finite Approaches Exponential-type Scheme*) na discretização espacial dos termos convectivos e difusivos das equações transientes de Navier-Stokes. Este método desenvolvido por Figueiredo (1997), já foi utilizado em diversas geometrias e tipos de malha em casos de simulação de escoamentos estacionários e contendo transferência de calor, como por exemplo em (LLAGOSTERA E FIGUEIREDO, 2000b) e (FIGUEIREDO E DE OLIVEIRA, 2009). No entanto, em fenômenos físicos de característica transiente o método UNIFAES ainda não foi aplicado. A avaliação do comportamento deste método neste tipo de problema também é um objetivo deste trabalho.

Com o objetivo de comparação entre resultados, são abordados dois códigos numéricos para alguns dos casos de estudo. O primeiro código (*NUM1*) é adimensional e baseado no método MAC (*marker and Cell*). Este apresenta uma malha computacional semi-deslocada, discretização espacial e temporal utilizando respectivamente os métodos UNIFAES e Euler explícito e acoplamento da pressão com velocidade por obtenção de uma equação de Poisson para a pressão. O segundo código

(*NUM2*) é dimensional, empregando uma malha computacional totalmente deslocada, discretização espacial e temporal pelos métodos upwind e Euler implícito, e acoplamento pressão-velocidade por meio do algoritmo SIMPLE transiente. O método de discretização espacial UNIFAES é da classe exponencial e considerado como de segunda ordem, já o método Upwind é de primeira ordem. Ambos os métodos de discretização temporal utilizados são de primeira ordem.

NUM1 é o principal código de interesse deste trabalho, sendo utilizados nas simulações de todos os casos abordados. O código *NUM2* é apenas utilizado como método auxiliar na confirmação dos resultados de obtidos por *NUM1*, sendo empregado apenas na etapa de validação do escoamento sobre degrau.

Este trabalho é estruturado nos seguintes capítulos: Revisão Bibliográfica (Capítulo 2), Metodologia (Capítulo 3), Resultados e Discussão (Capítulo 4) e Conclusão (Capítulo 5) e Sugestão para Trabalhos Futuros (Capítulo 6) .

No capítulo 2 é introduzida inicialmente uma revisão bibliográfica da teoria física envolvida no fenômeno de separação do escoamento. O escoamento sobre degrau (seção 2.1) é explorado, incluindo referências de testes experimentais e numéricos conduzidos nesta geometria, os quais focam no estudo das zonas de recirculação. Em seguida apresenta-se o escoamento ao redor de um obstáculo imerso (seção 2.2), iniciando pela teoria base de escoamento ao redor de um cilindro (seção 2.2.1) e estendendo posteriormente para o caso de um obstáculo de seção retangular (seção 2.2.2). O foco é na influência do número de Reynolds nos regimes de escoamento presentes na esteira e no mecanismo de formação dos vórtices. Na seção 2.3 são introduzidas a modelagem da conservação de massa, momentum e energia em meios fluidos por meio de um sistema de equações diferenciais parciais. Na seção 2.4 a teoria dos métodos numéricos é apresentada de forma geral, incluindo uma breve introdução as diferentes abordagens como por exemplo o método das diferenças finitas, dos volumes finitos e dos elementos finitos. A abordagem por meio do método dos volumes finitos é detalhada na seção 2.4.1. Alguns esquemas de interpolação espacial e temporal estão presentes nas seções 2.4.2 e 2.4.4, além disso o esquema de interpolação espacial exponencial UNIFAES é aprofundado na seção 2.4.3. Por fim, na seção 2.4.5 são consideradas abordagens para a solução das equações incompressíveis de Navier-Stokes.

No capítulo 3 a metodologia aborda o processo de modelagem e definição dos métodos numéricos utilizados no desenvolvimento dos códigos de CFD. A seção 3.2 contém a modelagem matemática e física das equações diferenciais parciais que caracterizam o movimento do fluido para os casos de interesse deste trabalho, assim como as adimensionalizações adotadas. O sistema

de equações diferenciais parciais final é exposto na seção 3.1.1). Conceitos gerais e definições sobre malha computacional são exposto na seção 3.1.2). O método de acoplamento da pressão-velocidade por meio da obtenção de equação de Poisson para pressão é detalhado na seção 3.1.3), enquanto o algoritmo SIMPLE está presente na seção 3.3). As discretizações numéricas espaciais e temporais são tratadas na seção 3.2). A seção 3.4) inclui o método de solução escolhido para o sistema de equações algébricas. Finalmente, a seção 3.5) apresenta os critérios de convergência adotados nas simulações.

No capítulo 4 são expostos e discutidos os resultados obtidos para cada um dos casos simulados. A seção 4.1 contém a modelagem e os resultados obtidos para o escoamento sobre degrau. Na seção 4.2 a modelagem e os resultados para as simulações que abordam o escoamento ao redor do obstáculo de seção retangular confinado em canal são discutidos. Por fim, são apresentados na seção 4.3 os resultados referentes ao caso final de interesse do trabalho, o escoamento sobre degrau na presença de um obstáculo de seção retangular.

Os capítulos 5 e 6 incluem respectivamente a conclusão final do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Escoamento sobre degrau

Escoamento interno sobre degrau é historicamente um dos problemas mais extensivamente estudados, tanto de forma experimental como numérica. Além de possuir uma simples geometria de fácil reprodução, o estudo do escoamento em degrau é incentivado pela presença dos fenômenos de separação e recirculação do escoamento. Em hidrodinâmica, a ocorrência de separação do escoamento é característico em canais com área de passagem variada, sendo decorrente do descolamento da camada limite devido a presença de um gradiente adverso de pressão. Este fenômeno físico influencia a eficiência de processos envolvendo transferência de massa e calor, possuindo vasta importância em aplicações de engenharia como por exemplo câmaras de combustão, trocadores de calor, refrigeração das pás de turbinas e em escoamento externo sobre aerofólios.

A zona de recirculação formada a jusante do degrau, proveniente da separação entre a camada limite e a parede do canal, tem seu comprimento delimitado por um ponto de recolamento. Este parâmetro de interesse é definido como a posição onde ocorre transição entre o escoamento ascendente e descendente, sendo portanto a velocidade aproximadamente nula neste local. Dependendo da intensidade do escoamento (número de Reynolds) é possível a formação de uma segunda zona de recirculação na parede superior do canal. É interessante obter resultados com relação ao comprimento das bolhas formadas pela recirculação e os perfis de velocidade ao longo do canal.

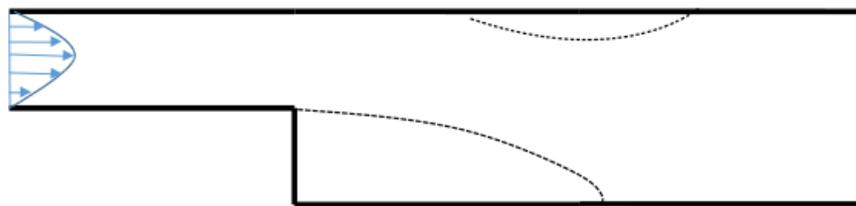


Figura 2.1: Zonas de recirculação em um escoamento sobre degrau

A figura 2.1 exemplifica um escoamento sobre degrau descendente. Mostrando os posicionamentos aproximados de formação das zonas de recirculação na parede superior e inferior do canal. Neste caso o perfil de entrada velocidade é exemplificado como completamente desenvolvido e existe um comprimento de entrada na geometria do canal.

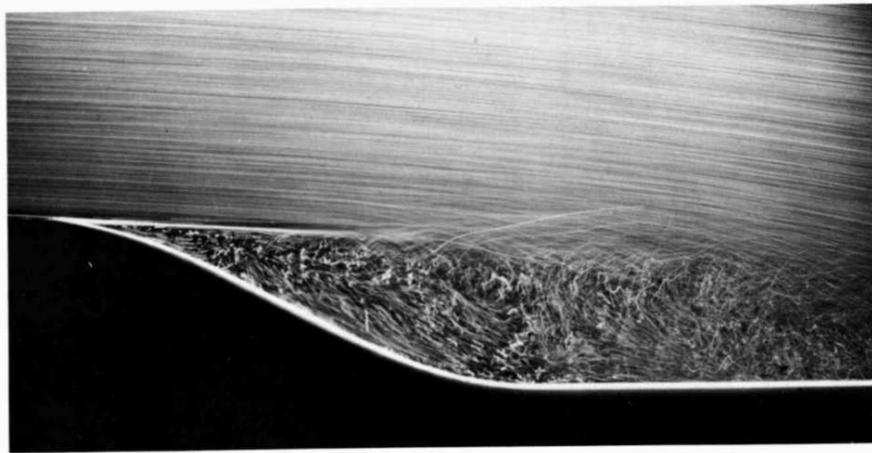


Figura 2.2: Separação laminar em uma parede curva. (WERLÉ, 1974) (apud Dyke (1982))

A figura 2.2 representa um exemplo de recirculação de escoamento resultante da separação devido a variação da seção transversal do canal. O experimento foi conduzido por Werlé (1974).

Chapman *e outros* (1958) sugerem que o gradiente de pressão negativo em um escoamento com separação é responsável por balancear a massa "re-arrastada" pela parte inferior da camada de cisalhamento formada entre o fluido e a parede. Acrescentando que qualquer fator contribuinte para o aumento do arrastamento da camada de cisalhamento irá gerar redução na distância de recolamento do escoamento. Baseado neste princípio, Adams e Johnston (1988), concluem que o gradiente de pressão negativo é maior em escoamentos laminares do que em turbulentos, já que neste últimos ocorre um aumento no comprimento de recolamento. Além disto, um dos objetivos do trabalho foi identificar a grande variação no tamanho da região de recolamento devido a transição do regime laminar para turbulento, gerando diferenças e incertezas nas medições experimentais efetuadas independentemente do equipamento utilizado (neste trabalho um tufo de arames térmicos obteve a posição do ponto de recolamento). Ainda é notado, que durante o regime laminar o comprimento da zona de recirculação aumenta linearmente com o número de Reynolds.

Armaly *e outros* (1983) utilizando anemômetros Laser-Doppler obtiveram medições para a distribuição de velocidade e o comprimento da zona de recirculação em um degrau descendente para uma extensa faixa de Reynolds que abrange casos laminares, em transição e turbulentos. O experimento identificou a existência de mais duas zonas de recirculação: uma localizada na parede superior (oposta ao degrau) e a outra na parede inferior em um ponto posterior a região de circulação primária (formada logo após ao degrau). A segunda recirculação na parede inferior surge

quando o escoamento entra no regime de transição para turbulento, tendo seu comprimento rapidamente diminuído com o aumento do número de Reynolds até seu completo desaparecimento em torno de $Re = 2300$. Já a recirculação na parede superior se origina ainda no regime laminar em torno de $Re = 400$ e persiste até o escoamento se tornar totalmente turbulento. Os autores notam que o comprimento da zona de recirculação primária incrementa quase linearmente com o número de Reynolds durante a faixa de escoamento laminar, sofrendo uma queda brusca e depois gradual durante o regime transitório. Atingindo a turbulência o comprimento tende a se manter constante. Neste mesmo trabalho, Armaly *e outros* (1983), ainda estudam a acurácia de resultados do campo de velocidade obtidos para um método numérico de diferenças finitas, com discretização *upwind* em um domínio bidimensional, com relação aos dados experimentais medidos anteriormente. O método numérico se mostrou de boa precisão para números de Reynolds inferiores a 400. No entanto, divergências foram obtidas em números de Reynolds superiores, fato que os autores atribuem a tridimensionalização do problema devido a formação das zonas de recirculação adicionais nas paredes superior e inferior.

Kim e Moin (1985) mostram um método numérico com passo de tempo fracionado para solução das equações de Navier-Stokes incompressíveis aplicadas a simulação do escoamento de grau. A pressão foi obtida de forma direta através da equação de Poisson discretizada. Os métodos de discretização temporal e espacial são de segunda ordem. Ambas as condições de contorno de Neumann e Dirichlet foram testadas separadamente na saída do escoamento e não tiveram influência sobre as soluções obtidas. A solução numérica para o caso do problema de escoamento sobre degrau descendente bidimensional apresentou resultados condizentes com o experimento de Armaly *e outros* (1983) até $Re = 500$. A partir de $Re = 600$ os resultados demonstraram o aparecimento de possíveis instabilidades.

Sohn (1988) simula numericamente casos de escoamento incompressível laminar e turbulento sobre um degrau descendente utilizando o pacote computacional FIDAP (*Fluid Dynamics Analysis Package*). O pacote se baseia no método de Galerkin para elementos finitos. Os resultados são comparados com os obtidos experimentalmente por Armaly *e outros* (1983) e numericamente por Kim e Moin (1985). Conclui-se novamente que ocorre divergência para os resultados experimentais devido a existência de tridimensionalidade no escoamento.

Gartling (1990) estudou a solução numérica em regime permanente para um escoamento de grau bidimensional incompressível e isotérmico, utilizando um método de discretização baseado em elementos finitos (Galerkin). O objetivo principal do trabalho foi obter uma condição de contorno na saída do canal apropriada, a qual não influencie nas zonas de recirculação do problema,

para isto o comprimento do canal foi testado. Além disso foram obtidos perfis de velocidade, pressão, tensão normal total na saída e de cisalhamento nas paredes do canal para número de Reynolds igual a 800. Uma das conclusões é que os valores obtidos são melhores comparados com outras simulações numéricas bidimensionais, já que dados experimentais possuem o efeito da tridimensionalização não considerado em uma metodologia bidimensional.

Lee e Mateescu (1998) propõem um método experimental e um numérico para obtenção do comprimento das zonas de recirculação formadas nas parede inferior e superior de um canal no caso de um escoamento sobre degrau bidimensional descendente. Utilizando de um método experimental de medição não intrusivo (*multi-element hot film sensor array*) para localização dos pontos de separação do escoamento e tamanho da zona de recirculação. Os autores procuraram solucionar problemas encontrados na maioria das técnicas experimentais da época como complicações na instalação dos sensores, custo do equipamento e a necessidade do pré conhecimento dos pontos de recolamento. No âmbito numérico é utilizada uma abordagem, detalhada anteriormente em Mateescu *e outros* (1994), com a discretização das equações incompressíveis de Navier-Stokes baseada em diferenças finitas e na introdução de um termo adicional de compressibilidade artificial. A integração temporal utiliza o método Euler implícito enquanto a espacial aplica um esquema de diferenças centrais baseado em uma malha deslocada.

Biswas *e outros* (2004) obtiveram resultados para simulações bi e tri-dimensionais para o escoamento sobre degrau em uma ampla faixa de Reynolds. Notam que para $Re < 400$ as simulações 2D são suficientemente satisfatórias na descrição do comportamento do escoamento. Para $Re > 400$ são notadas algumas discrepâncias entre as simulações 2D e 3D, com relação as zonas de recirculação.

Eturk (2008) conduziu simulações numéricas para o escoamento sobre degrau para números de Reynolds elevados (até $Re = 3000$). O sistema de equações incompressível de Navier-Stokes é discretizado utilizando uma abordagem de diferenças finitas. O autor apresenta resultados relacionados ao comprimento da zona de recirculação e a perfis de velocidade no canal. O autor conclui que um comprimento de entrada de pelo menos cinco vezes o tamanho da altura de entrada é necessário para obter soluções estáveis. Além disso, aponta que a localização da fronteira de saída tem influência nos resultados.

2.2 Escoamento ao redor de um obstáculo

Escoamentos externos sobre corpos imersos em meio fluido é um tópico estudado de forma extensiva por pesquisadores devido a ocorrência de diversos fenômenos físicos tanto do ponto de vista do meio fluido, onde o interesse se concentra no padrão do escoamento e principalmente na formação e desprendimento de vórtices, quanto da abordagem centrada nas vibrações resultantes no corpo sólido decorrentes da interação com o escoamento. Um caso clássico de estudo da área é o escoamento ao redor de um cilindro fixo, o qual abrange tópicos como a variação dos regimes de escoamento devido ao número de Reynolds, o mecanismo de emissão dos vórtices e o impacto das forças resultantes de empuxo e arrasto sobre a estrutura sólida. Este tópico foi expandido ao longo da história de diversas maneiras, como o estudo da influência dos vórtices em cilindros alinhados, os efeitos de rugosidade da parede do cilindro, a inibição de formação de vórtices devido a presença de paredes próximas ao cilindro e variações da geometria do corpo imerso em estudo.

Vibrações induzidas por escoamento (VIE) estão se tornando cada vez mais importantes para engenheiros projetistas, devido ao estudo aprofundado dos materiais que compõem determinada estrutura, tornando-as mais leves, flexíveis e portanto susceptíveis a vibração. Exemplos de aplicações englobam cabos de sustentação ao vento, eficiência térmica de trocadores de calor e estruturas aerodinâmicas. A interação entre um obstáculo e o fluido gera forças de ação e reação, causando deformações no primeiro. O efeito desta interação no fluido contribui com o mecanismo de formação da esteira e emissão de vórtices. (BLEVINS, 2001)

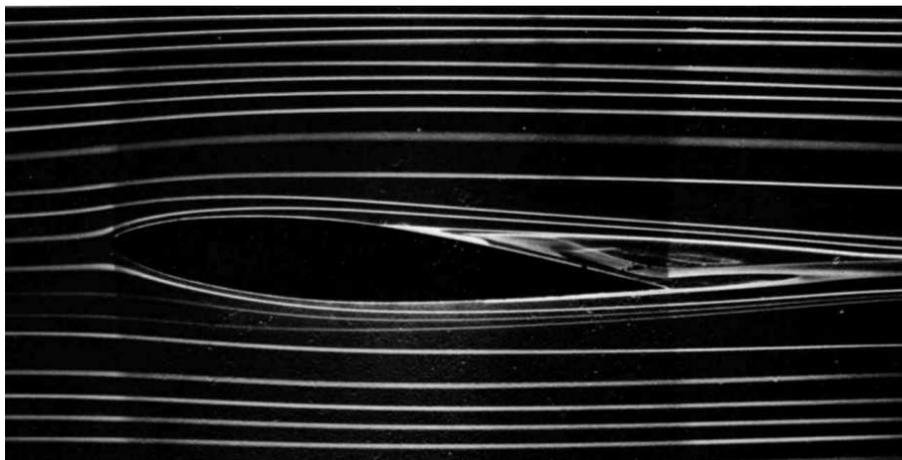


Figura 2.3: Escoamento externo ao redor de um aerofólio. (WERLÉ, 1974) (apud Dyke (1982))

A figura 2.3 mostra a separação da camada limite laminar em um escoamento externo ao redor de aerofólio NACA64A015 inclinado. Pode-se identificar a formação de uma zona de recirculação posicionada próxima a esteira. As linhas de corrente do escoamento estão representadas na figura.

2.2.1 Escoamento ao redor de um cilindro fixo

No escoamento ao redor de um cilindro podem ser identificados os seguintes elementos ou regiões: ponto de estagnação, camada limite ao redor do cilindro, pontos de desprendimento (inferior/superior) e a região da esteira. O fluido em corrente livre incidente sobre a região frontal do cilindro é desacelerado e levado ao repouso no chamado ponto de estagnação. Este ponto localizado próximo a superfície frontal do cilindro se caracteriza pelo elevado aumento de pressão. Na superfície do cilindro próxima ocorre a formação de uma estreita camada limite, esta se estende pelas metade superior e inferior da seção transversal da geometria até os respectivos pontos de desprendimento. (INCROPERA, 2007)

Inicialmente, a partir do ponto de estagnação, o gradiente pressão ao redor do cilindro é favorável, acelerando o fluido no sentido do escoamento livre. No entanto, a partir de determinado ponto na superfície, o gradiente de pressão passa a ser adverso, resultando na desaceleração do escoamento. O ponto de desprendimento (ou separação) é denominado como o local na superfície do cilindro onde o fluido não consegue mais superar o gradiente de pressão adverso, levando ao desprendimento da superfície e como consequência a possível emissão de vórtices na região da esteira. (INCROPERA, 2007)

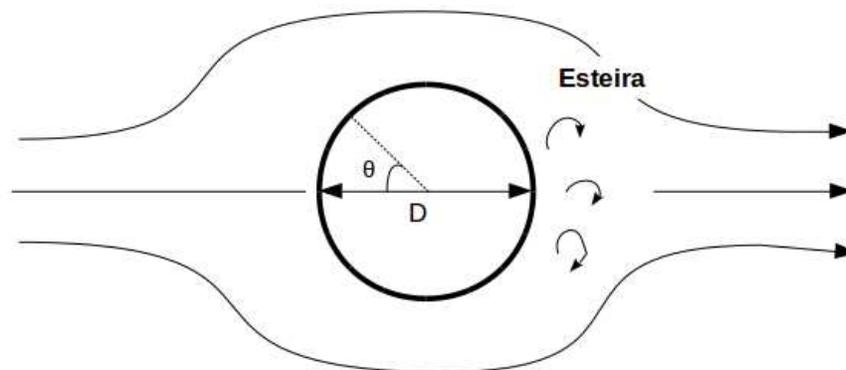


Figura 2.4: Escoamento ao redor de um cilindro

Como esquematizado na figura 2.4 o ângulo entre cada um dos pontos de separação e a direção horizontal (sentido do escoamento livre) formam o chamado ângulo de separação θ , o qual varia com o regime do escoamento, sendo $\theta \approx 80$ deg para laminar e $\theta \approx 140$ deg no caso turbulento. (INCROPERA, 2007)



Figura 2.5: Esteira laminar de von Karman após um cilindro. (Dyke (1982) - *Fotografia de Sadatoshi Taneda*)

A figura 2.5 retrata a formação da esteira laminar de von Karman em um escoamento ao redor de um cilindro. Nesta esteira laminar, a formação dos vórtices se dá de maneira alternada e a uma frequência característica. Quanto maior o gradiente de pressão adverso, maior a possibilidade de descolamento e a formação da esteira, fato que leva a um aumento da força de arrasto exercida sobre o cilindro.

As características que descrevem o escoamento ao redor de um cilindro liso são dependentes do número adimensional de Reynolds do escoamento, definido na equação 2.1.

$$Re = \frac{D U_c}{\nu} \quad (2.1)$$

Na equação 2.1, considera-se diâmetro do cilindro D como dimensão geométrica característica, já a velocidade característica é considerada como sendo a do escoamento livre U_∞ e a viscosidade cinemática do fluido é dada por ν . No caso de um cilindro confinado em canal é utilizada a velocidade média na entrada como a característica U_c . A esteira é uma região de baixa pressão que se estende por uma distância proporcional ao diâmetro do cilindro. (SUMER E FREDSOE, 1997)

Dependendo da faixa do número de Reynolds podemos identificar diferentes regimes de escoamento ao redor do cilindro. De acordo com Sumer e Fredsoe (1997) estes regimes são definidos através de características laminar ou turbulentas presentes tanto na esteira, como na camada limite do cilindro. A transição começa na esteira e se move em direção ao cilindro, iniciando no ponto de separação da camada limite e posteriormente se expandido completamente pela mesma até o ponto de estagnação localizado na face oposta do cilindro.

O mecanismo de emissão dos vórtices é o principal fenômeno ligado ao escoamento ao redor de um cilindro. A camada limite presente sobre a superfície do cilindro se separa em dois pontos, um na região inferior e outro na superior do cilindro, devido ao gradiente adverso de pressão. Esta separação forma dois vórtices de vorticidade em sentidos opostos, cada provenientes de um dos pontos de separação, na esteira. Os eventos que compõem a emissão de vórtices podem ser descritos pelo modelo de Gerrard (1966). De acordo com o mesmo, a interação mútua entre as camadas cisalhantes é fundamental no processo de formação dos vórtices. (SUMER E FREDSOE, 1997)

Para $Re < 5$, não ocorre o fenômeno da separação de fluido do cilindro, não ocorrendo formação de vórtices ou da esteira, é o denominado *creeping flow*. Na faixa $5 < Re < 40$, observa-se os primeiros efeitos da separação do escoamento em relação a superfície do cilindro, resultando na formação de um par fixo de vórtices simétricos estáveis que crescem proporcionalmente em comprimento com o aumento do número de Reynolds. Em um escoamento com $Re > 40$ os vórtices formados passam a ser instáveis ao serem expostos a pequenos distúrbios, passando a crescer em ritmos diferentes. O vórtice de maior intensidade arrasta o de menor resultando na formação da esteira de von Karman através da emissão alternada de vórtices livres em certa frequência.

Entre $40 < Re < 200$, a esteira de vórtices é completamente laminar, sendo o fenômeno do desprendimento essencialmente de características bidimensionais. Já para $200 < Re < 300$, é notado na esteira a transição do regime laminar para o turbulento, surgindo presença de características tridimensionais no fenômeno da emissão de vórtices.

O escoamento é chamado subcrítico na faixa $300 < Re < 3.10^5$. Quando a camada limite na região da separação se torna turbulenta no ponto de desprendimento inferior do cilindro, temos assim o escoamento crítico, característico na faixa $3.10^5 < Re < 3,5.10^5$. Neste momento a camada limite apenas se tornou turbulenta próximo da separação, sendo laminar no restante da superfície cilíndrica. O escoamento se torna supercrítico em $3.10^5 < Re < 1,5.10^6$ quando a camada limite se torna parcialmente turbulenta, incluindo ambos os pontos de separação.

Na faixa de Reynolds $1,5 \cdot 10^5 < Re < 4 \cdot 10^6$ ocorre transição completa para turbulento na camada limite da região superior do cilindro. Por fim, a transição total tanto da camada limite em sua totalidade como da esteira é observada para números de Reynolds aproximadamente acima de $4 \cdot 10^6$, onde o escoamento é denominado transcrito.

O mecanismo de emissão dos vórtices é o principal fenômeno ligado ao escoamento ao redor de um cilindro. A camada limite presente sobre a superfície do cilindro se separa em dois pontos, um na região inferior e outro na superior do cilindro, devido ao gradiente adverso de pressão. Esta separação forma dois vórtices de vorticidade em sentidos opostos, cada provenientes de um dos pontos de separação, na esteira. Os eventos que compõem a emissão de vórtices podem ser descritos pelo modelo de Gerrard (1966). De acordo com o mesmo, a interação mútua entre as camadas cisalhantes é fundamental no processo de formação dos vórtices. (SUMER E FREDSOE, 1997)

De acordo com Meneghini (2002) existem três caminhos possíveis para a separação da camada limite oposta quando está é atraída pelo vórtice oposto de maior intensidade. A primeira opção é juntar-se ao vórtice oposto em crescimento e diminuir sua intensidade, já que possui sinal oposto. O segundo possível caminho da camada consiste é chocar-se com a camada limite oposta, causando diminuição de sua intensidade e posterior rompimento, o qual interromperá a alimentação gerando emissão do vórtice oposto. A última possibilidade é o retorno à sua própria região de formação, ajudando no aumento da intensidade da vorticidade desta região e crescimento do vórtice. A quantidade de fluido que segue cada um dos caminhos descrito contribui para determinar características ao escoamento como: frequência de geração dos vórtices, intensidade dos vórtices e pressão na região anterior do cilindro.

A frequência f de desprendimento dos vórtices é normalizada com relação a uma velocidade de referência U_c (pode ser a velocidade do escoamento livre ou a velocidade média de entrada no caso confinado) e o diâmetro do cilindro D . Defini-se na equação 2.2 o coeficiente adimensional de Strouhal.

$$St = St(Re) = \frac{fD}{U_c} \quad (2.2)$$

O número de Strouhal é função do número de Reynolds, e varia com o mesmo em cada um dos regimes do escoamento ao redor de um cilindro. A emissão de vórtices se inicia quando $Re = 40$,

sendo que a frequência normalizada de emissão corresponde a $St \approx 0,1$. A partir deste ponto o número de Strouhal tende a crescer gradualmente com o aumento de Reynolds até $Re \approx 300$, onde $St \approx 0,2$. O valor de Strouhal permanece então praticamente constante durante todo regime subcrítico. É importante notar que existe um aumento brusco no valor de St na faixa de Reynolds que define regime de escoamento crítico. (BLEVINS, 2001).

A frequência de emissão dos vórtices pode ser relacionada tanto ao coeficiente de empuxo C_l como ao de arrasto C_d , estes são provenientes das forças de empuxo e arrasto atuantes no cilindro como resultado da interação com o meio fluido. A força média de atrito equivale à componente na direção horizontal da força resultante atuante no cilindro, a qual é composta pela pressão e atrito exercido pelo escoamento sobre toda a extensão da superfície externa do cilindro. A força média de empuxo é modelada da mesma maneira, mas sendo equivalente a componente na direção vertical da força resultante atuante na superfície externa. No caso do cilindro ser modelado como totalmente liso, a rugosidade é considerada pouco relevante. Estes coeficientes são definidos nas equações 2.3 e 2.4.

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho D U_c^2} \quad (2.3)$$

$$C_l = \frac{F_l}{\frac{1}{2}\rho D U_c^2} \quad (2.4)$$

Onde, ρ é a densidade, D é o diâmetro do cilindro, U_c é a velocidade característica e F_d e F_l são as forças de arrasto e empuxo na superfície.

Como consequência da emissão dos vórtices, fenômeno presente para $Re > 40$, a distribuição de pressão ao redor do cilindro sofre uma variação periódica ao longo de tempo, resultando na oscilação periódica das componentes de empuxo e arrasto. A força de arrasto oscila, em torno de um valor médio diferente de zero, com frequência correspondente ao dobro da de emissão dos vórtices. Já a força de empuxo oscila com frequência igual a de emissão dos vórtices, e em torno de um valor médio nulo.

2.2.2 Escoamento ao redor de um obstáculo de seção transversal retangular confinado em canal

A geometria da seção transversal do obstáculo influencia a componente de valor permanente dos coeficientes de empuxo e arrasto, influenciando a força resultante. Para o caso de uma seção transversal com vértices pontiagudos (por exemplo uma seção quadrangular ou retangular), o ponto de separação do fluido em relação a superfície é fixo e se localiza em tais vértices. Se o ponto de separação não varia sua posição de acordo com o número de Reynolds, os coeficientes das forças devem permanecer constantes para qualquer regime de escoamento. (SUMER E FREDSON, 1997)

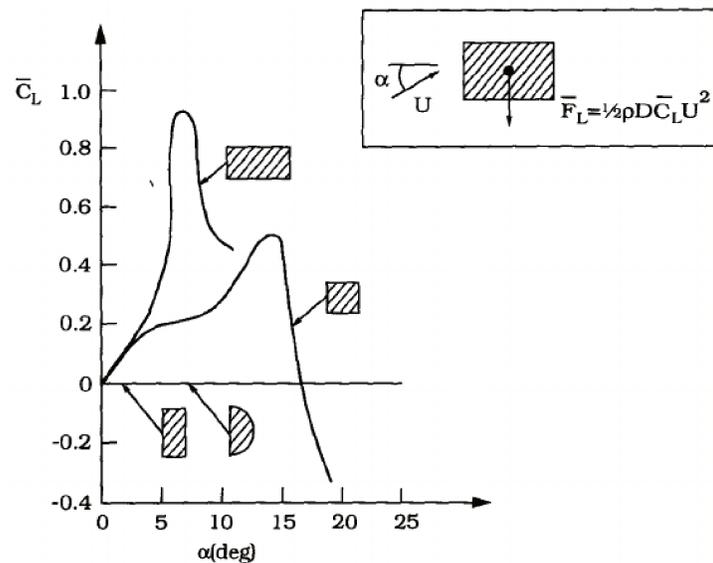


Figura 2.6: Valor da componente permanente do coeficiente de empuxo para diferentes seções transversais. (SUMER E FREDSON, 1997)

A figura 2.6 mostra o gráfico da variação dos valores do empuxo médio C_l pelo ângulo de ataque α , para diferentes seções transversais do corpo imerso. O ângulo de ataque representa a direção com a qual o fluido incide sobre a superfície externa da seção. É possível notar que para um ângulo de ataque nulo e uma seção transversal retangular é esperado um coeficiente médio de empuxo nulo.

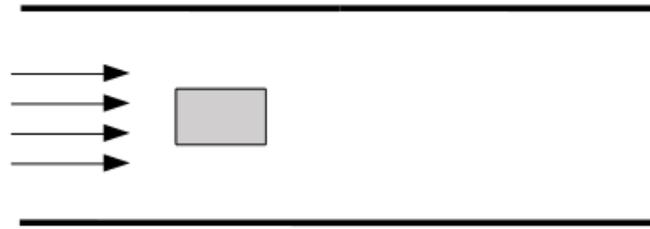


Figura 2.7: Escoamento ao redor de corpo imerso com seção retangular, confinado e com ângulo de ataque nulo

A figura 2.7 exemplifica a geometria de interesse nas simulações deste trabalho. O corpo imerso com seção retangular e ângulo de ataque nulo confinado em um canal. O fator de confinamento, ou seja, o comportamento do escoamento com a proximidade das paredes será introduzido a seguir.

O caso da proximidade do corpo imerso de uma parede sólida pode gerar algumas alterações no comportamento do escoamento. O ponto de estagnação (na superfície à jusante) se desloca para uma posição inferior, os pontos onde ocorre desprendimento se deslocam e tornam-se assimétricos assim como a distribuição de pressão na superfície do cilindro. Quanto as componentes oscilatórias dos coeficientes de empuxo de arrasto é importante apontar que o fenômeno de emissão de vórtices é suprimido por completo se a razão do espaçamento pelo diâmetro do cilindro for menor que 0,3. Para razões maiores que essa o desprendimento de vórtices ocorre mais ainda pode sofrer influências da presença da parede se o espaçamento não for grande o suficiente. (SUMER E FRED-SOE, 1997)

Ainda em relação a proximidade da parede, de acordo Muzaferija *e outros* (1995), o número de Strouhal tende a ser maior em um corpo imerso em ambiente confinado do que em um escoamento livre. O confinamento tende a causar um aumento na frequência de desprendimento dos vórtices.

Simulações numéricas, em duas e três dimensões, utilizando em grande parte o método dos volumes finitos foram desenvolvidas na forma de obter o comportamento da região da esteira durante a separação do escoamento e formação de vórtices. Para um escoamento ao redor de um cilindro podem ser obtidos resultados em relação a distribuição de pressão, ao campo de vorticidade na esteira, aos coeficientes aerodinâmicos (empuxo e arrasto), e a localização angular do

início do desprendimento do escoamento nos vários regimes de Reynolds.

Sohankar *e outros* (1997) realizaram simulações bidimensionais de escoamentos incompressíveis ao redor de um cilindro retangular para números de Reynolds inferiores a 200 e com variação dos ângulos de incidência (com relação a superfície do corpo imerso) entre 0 e 90 graus. O código numérico empregou o esquema de interpolação espacial QUICK, a interpolação temporal pelo método de Crank-Nicholson e o algoritmo SIMPLEC para acoplamento da pressão. Os resultados para o número de Strouhal estão na faixa entre 0,14 e 0,15 para o ângulo de incidência nulo e seção quadrangular. Para Reynolds igual a 100 o valor obtido para Strouhal nestas configurações é 0,146.

Galletti *e outros* (2004) realizaram simulações bidimensionais através da modelagem do escoamento ao redor de um obstáculo com seção quadrangular confinado. A modelagem é chamada *proper orthogonal decomposition (POD)*, sendo estas funções derivadas de dados experimentais e numéricos já existentes. As geometrias testadas tinham razões de confinamento (lado do obstáculo dividido por altura do canal) variáveis entre 0,125 e 0,375. Os resultados obtidos com relação ao número de Strouhal ficaram na faixa entre 0,14 e 0,15. Para a razão de confinamento 0,125 foi encontrado um Reynolds crítico igual a 66.

Rajani *e outros* (2008) realizou simulações bi e tridimensionais utilizando um esquema de volumes finitos baseado em um método preditor-corretor iterativo de pressão similar ao SIMPLE de Patankar. As equações foram discretizadas no espaço seguindo um método de diferenças centrais de segunda ordem, e no tempo através de um método totalmente implícito de segunda ordem. A malha deslocada foi estruturada em um sistema de coordenadas polar e refinada de acordo com a proximidade da superfície do cilindro. Foram estudados regimes abrangendo *Creeping Flow* até a formação da esteira laminar de von Karman. Resultados foram obtidos de forma gráfica para a distribuição de pressão na superfície, flutuação dos coeficientes aerodinâmicos e frequência normalizada de emissão de vórtices (número de Strouhal). Foram apontados os efeitos do fenômeno da tridimensionalidade sobre as instabilidades decorrentes do desprendimento de vórtices na esteira.

Kumar e Biswas (2008) investigaram a dinâmica da emissão de vórtices, através da determinação dos números de Reynolds e Strouhal críticos onde ocorre o início da formação da esteira de Von Karman. Para isto utilizaram um método numérico SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Garlekin Method*) baseado na teoria de elementos finitos. Reynolds crítico foi obtido como 45,376 e Strouhal crítico como 0,1323, além disso é ressaltada a sensível variação destes valores para diferentes razões de bloqueio (diâmetro do cilindro por altura do canal).

Yoon *e outros* (2010) realizaram estudos numéricos sobre as características do escoamento livre ao redor de um cilindro com seção quadrangular para diversos ângulos de incidência do escoamento com a superfície. No caso do ângulo de incidência nulo, encontrou-se um Reynolds crítico igual a 45. O Reynolds crítico máximo foi encontrado para um ângulo de incidência com valor de 5 graus e o mínimo para um de 45 graus.

2.3 Equações Governantes

Um fenômeno físico é modelado matematicamente através de um conjunto de equações diferenciais parciais de conservação, para cada propriedade de interesse, sendo necessário a modelagem de termos utilizando as leis constitutivas. Estas últimas são relações entre variáveis físicas, como exemplo: Lei de Hooke para tensão e deformação, Lei de Fourier para condução de calor e Lei de Darcy para permeabilidade. Cada equação governante emprega uma certa quantidade física como sua variável dependente, e define que deve haver um balanço entre os vários fatores que influenciam esta quantidade. Estas variáveis dependentes representam a densidade no caso da equação governante da massa, a velocidade nas equações de conservação de momentum e a temperatura na equação governante da energia. Para análises de fluidos em escalas macroscópicas, o mesmo é considerado contínuo, e portanto as influências de sua estrutura e movimento moleculares são consideradas de pouca relevância nesta abordagem. Sendo uma partícula de fluido considerada como o menor possível elemento tridimensional ($\delta_x, \delta_y, \delta_z$) cujas propriedades macroscópicas podem ser medidas. (VERSTEEG E MALALASEKERA, 2007)

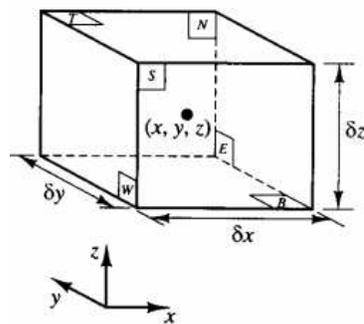


Figura 2.8: Elemento fluido infinitesimal (VERSTEEG E MALALASEKERA, 2007)

As seis faces do elemento fluido infinitesimal ilustrado na figura 2.8 são indexadas como Norte (N), Sul (S), Leste (E), Oeste (W), Superior (T), Inferior (B) definindo as fronteiras do ele-

mento. As propriedades de interesse no ponto (x, y, z) são considerados como as do elemento como um todo. Com base nisto é possível definir equações governantes para cada variável de interesse.

O **balanço de massa** pode ser definido como: a taxa de variação de massa em um elemento fluido é igual ao inverso do escoamento resultante de fluido que atravessa o elemento durante um determinado período de tempo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Esta equação se caracteriza por apresentar apenas os termos transiente e um convectivo. Onde ρ representa a densidade, u e v as componentes da velocidade.

A **equação governante do momentum** é obtida com base na Segunda Lei de Newton. Esta lei afirma que a variação de momento de uma partícula é igual a soma das forças atuantes na mesma. Estas forças podem ser divididas em forças de superfície (pressão, forças viscosas) e forças volumétricas (forças gravitacionais, eletromagnéticas e de Coriolis). O tensor de tensão em um elemento fluido é definido como a soma da pressão e das componentes das tensões viscosas atuantes no mesmo.

As **equações de Navier-Stokes** são um caso particular de modelagem das tensões viscosas das Equações de Cauchy. Este modelo considera o fluido como newtoniano (a tensão viscosa é proporcional as taxas de deformação linear e volumétrica). Esta proporcionalidade envolve duas constantes denominadas viscosidade dinâmica μ , a qual relaciona a tensão com deformações lineares, e viscosidade secundária λ , a qual relaciona a tensão com a deformação volumétrica do fluido. Esta última viscosidade influencia a espessura de ondas de choque e tem efeito nulo em escoamentos incompressíveis. Deixando estas contribuições menores para serem possivelmente calculadas como parte do termo fonte, podemos escrever as equações de Navier-Stokes na forma simplificada para o caso laminar e incompressível como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (u\vec{v}) &= -\frac{\partial \left(\frac{p}{\rho}\right)}{\partial x} + \vec{\nabla} \cdot (\nu \nabla u) \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (v\vec{v}) &= -\frac{\partial \left(\frac{p}{\rho}\right)}{\partial y} + \vec{\nabla} \cdot (\nu \nabla v) \\
\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (w\vec{v}) &= -\frac{\partial \left(\frac{p}{\rho}\right)}{\partial z} + \vec{\nabla} \cdot (\nu \nabla w) \\
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\vec{v}) &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho}\right) + \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla} \cdot \vec{v})
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Onde, ρ representa a densidade, u , v e w as componentes da velocidade, t o tempo, p a pressão e x , y e z as componentes espaciais.

A **equação de conservação da energia** E de um fluido é definida como a soma das energias interna i , cinética $\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ e potencial gravitacional (incluída no termo fonte). Conservação de energia em uma partícula fluida é obtida considerando-se que a variação da energia dentro de uma partícula é igual a soma do trabalho resultante exercido, da taxa de transferência de calor e do termo fonte. Podendo ser definida como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho E_t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E_t \vec{v}) &= -\nabla \cdot (p\vec{v}) + u \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \\
&w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \nabla \cdot (k \nabla T) + S_E
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Onde, u , v e w representam as componentes da velocidade, x , y e z as componentes espaciais, τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{zz} , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} e τ_{zy} as tensões viscosas.

Finalmente, de acordo com Patankar (1980) a **equação governante geral** para uma propriedade qualquer ϕ pode ser definida na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S \tag{2.8}$$

Onde os quatro termos presentes na equação acima correspondem em ordem à: o termo transiente, o termo convectivo, o termo difusivo e o termo fonte.

2.4 Métodos Numéricos

Com o aprimoramento tecnológico e consequente aumento da capacidade de processamento dos computadores é possível simular quantitativamente e qualitativamente fenômenos físicos a partir da solução do conjunto de equações parciais diferenciais resultante da modelagem matemática representativa do caso em estudo. Os métodos de solução numérica diferem dos analíticos no sentido de representar o mesmo fenômeno físico através de um sistema de equações aproximadas, com precisão em certa ordem de grandeza, obtidas a partir da discretização do sistema de equações que modelam o caso físico. Um sistema numérico discretizado é simplificado e de característica algébrica, permitindo ao computador resolver o problema inúmeras vezes com elevada rapidez por meio de métodos iterativos. É importante executar um número suficiente de iterações para que se atinja a convergência baseada na tolerância definida ao problema. Muitos erros numéricos estão envolvidos em uma simulação, como imprecisões provenientes do refinamento da malha e do próprio método de aproximação utilizado para discretização das equações diferenciais. Para validar uma simulação numérica é necessário comparar os resultados com uma análise experimental do fenômeno ou com outras simulações previamente já validadas.

Métodos de discretização temporal podem ser explícitos ou implícitos. Os métodos explícitos dependem de valores de variáveis de interesse já conhecidos de tempos anteriores, enquanto os implícitos dependem de valores de tempos atuais ainda desconhecidos. Estes últimos possuem maior estabilidade numérica (maior facilidade de convergência), mas exigem maior custo computacional na solução do sistema linear. Em simulações com interesse no resultado em regime permanente o objetivo é simplesmente percorrer os passos de tempo de forma rápida, já que a acurácia da parte transiente não é importante, no entanto deve-se tomar cuidado para manter a estabilidade do problema. O termo transiente também apresenta erro numérico devido a aproximação (truncamento). (LOMAX E PULLIAM, 1999)

Existem vários métodos de abordagem geral como base de discretização das equações diferenciais parciais (*PDE*) obtidas através da modelagem matemática: Método dos Elementos Finitos (*FEM*), Método das Diferenças Finitas (*FDM*) e Método dos Volumes Finitos (*FVM*).

Em diferenças finitas a solução é calculada nos chamados pontos nodais que constituem o

domínio computacional. A discretização é baseada na forma diferencial das equações diferenciais parciais que modelam o problema, sendo cada derivada substituída por uma aproximação obtida através de uma expansão da série de Taylor. A série de Taylor é definida como a expansão de uma função analítica na vizinhança de um determinado ponto e serve como aproximação do valor da função em torno daquele ponto com certa ordem de erro numérico variável dependente do número de termos utilizados. A aproximação de derivadas espaciais pode ser obtida pela construção das chamadas tabela de Taylor. Dependendo do número de nós vizinhos utilizados na construção do esquema diferenciador e do erro precisão pode-se obter diferentes métodos de discretização. Um exemplo são os métodos de interpolação, divididos em: *backward*, os quais levam em consideração a influência de pontos posicionados anteriormente no domínio e *forward* os quais consideram nós localizados posteriormente no mesmo. Os métodos de Padé possuem melhor precisão por serem baseados em diferenças centrais. Para selecionar um esquema de diferença finita apropriado é possível analisar a acurácia através de uma análise em séries de Fourier, já que os mesmos podem apresentar erros numéricos do tipo dispersão (erros de fase) ou do tipo dissipação (erros de amplitude). (LOMAX E PULLIAM, 1999)

A discretização pelo método dos volumes finitos tem como princípio a divisão do domínio de cálculo em inúmeros volumes de controle os quais formarão a malha computacional, onde localizados em seus centros geométricos estão os chamados pontos nodais. Em cada um destes volumes de controle são aplicadas as equações de balanço diferencial (governantes), como a de massa (continuidade), quantidade de movimento e energia. As equações governantes são então integradas com respeito aos volumes de controle e em seguida discretizadas no espaço e no tempo de acordo com o método de aproximação escolhido. O objetivo é a obtenção de um sistema de equações algébricas de solução simplificada, o qual é resolvido iterativamente. Este sistema de equações normalmente envolve fluxos das variáveis conservadas, sendo este método considerado mais físico devido a conservação de variáveis apresentada em cada um dos volumes de controle. Este método se adapta bem a malhas não-estruturadas. Os resultados são obtidos para os pontos nodais localizados nos centros da célula, sendo valores de variáveis nas fronteiras do volume de controle calculados utilizando métodos de interpolação (com precisão variável de acordo com o caso). (PATANKAR, 1980)

O método de elementos finitos é uma discretização baseada sobre uma representação por partes da solução em termos de funções de base especificadas. O domínio computacional é dividido em domínios menores chamados elementos finitos e a solução de cada um destes é construída através das funções base e de peso. As equações são normalmente obtidas através da forma fraca da equação de conservação de massa, sendo as variáveis de interesse escritas em termos das funções base. Este equacionamento é integrado para todo o elemento. A modelagem matemática deste

método é mais detalhada e requer um maior número de informações, resultando em formulação mais complexa das condições de contorno. Este método produz soluções contínuas em uma determinada extensão.

Neste trabalho optou-se pela utilização do método de volumes finitos devido as vantagens conservativas que o mesmo possui.

2.4.1 Método dos Volumes Finitos

A equação de balanço de uma variável ϕ pode ser escrita através dos termos transiente, convectivo, difusivo e fonte. Cada um destes termos deve ser discretizado no espaço e no tempo para a obtenção de um sistema algébrico de equações. Neste processo é assumido um perfil de variação de ϕ entre os pontos nodais para interpolação de valores, cada termo pode ser tratado independentemente, utilizando um perfil mais adequado para o caso. No método dos volumes finitos o valor da variável para um determinado ponto nodal é válido para todo o volume de controle em que este ponto está localizado. (PATANKAR, 1980)

O método dos volumes finitos tem como base a integração espacial das equações diferenciais governantes escritas na forma divergente, de modo a obter as mesmas em sua forma integral, para uma variável qualquer ϕ :

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dV + \iint_A \nabla \cdot (\rho \vec{u} \phi) dA = \iint_A \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dA + \iiint_V S dV \quad (2.9)$$

Onde, ρ é a densidade, ϕ é uma variável escalar qualquer e S o termo fonte.

Cada integral é então aproximada através de um método numérico utilizando os valores dos pontos nodais. As integrais de superfície correspondentes aos fluxos difusivos e convectivo são consideradas como a soma das integrais sobre cada uma das faces do volume de controle. Estas últimas são aproximadas utilizando a regra do ponto médio (segunda ordem de precisão). As integrais volumétricas do termo fonte e transiente também são aproximadas utilizando a regra do ponto médio. Aproximações de ordem maior utilizam um número maior de pontos nodais vizinhos.

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dV \approx \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) \right)_e V_e \quad (2.10)$$

$$\iint_A \nabla \cdot (\rho \vec{u} \phi) dA \approx \sum_f (\rho \vec{u} \phi)_f A_f \quad (2.11)$$

$$\iint_A \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dA \approx \sum_f (\Gamma \nabla \phi)_f A_f \quad (2.12)$$

$$\iiint_V S dV \approx S_e V_e \quad (2.13)$$

Onde o sub-índice e corresponde a um elemento volumétrico e o sub-índice f a uma fronteira (face) do volume.

Interpolação numérica é necessária de acordo com a localização do ponto nodal requerido no cálculo da integração numérica, mais detalhes sobre métodos de interpolação adiante.

Após a discretização espacial é necessário a temporal na forma de marcha em determinado passo de tempo, podendo ocorrer na forma explícita ou implícita. Um formato generalizado da aproximação no tempo é dado por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) \right) \approx f(\Delta t, (\rho\phi)^n, (\rho\phi)^{n-1}, (\rho\phi)^{n-2} \dots) \quad (2.14)$$

Onde n representa o número da iteração temporal.

2.4.2 Interpolação Espacial Numérica

As aproximações decorrentes dos métodos de integração numérica exigem valores da variável ϕ e de sua derivada $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ nas fronteiras dos volumes de controle. Considerando que apenas os valores nos pontos nodais localizados nos centros dos elementos são conhecidos, será necessário a

aplicação de métodos de interpolação numérica para obtenção dos dados requeridos.

Alguns dos principais esquemas de interpolação espacial utilizados são: **upwind** (UDS), **diferenças centrais** (CDS), **exponenciais** (exatos), **híbrido**.

O esquema de interpolação **upwind** pode ser equivalente a uma diferença avançada (FDS - forward differencing scheme) ou atrasada (BDS - backward differencing scheme), dependendo do sentido do escoamento. Para um ponto ϕ_e localizado na fronteira leste de um volume de controle de ponto central nodal $\phi(i,j)$, temos:

$$\begin{aligned}\phi_e &\approx \phi(i,j), u_e > 0 \\ \phi_e &\approx \phi(i+1,j), u_e < 0\end{aligned}\tag{2.15}$$

Onde, u_e é a velocidade na direção perpendicular a fronteira leste.

O esquema upwind é estável e não gera soluções oscilatórias, entretanto sendo um esquema de primeira ordem possui erro de truncamento de segunda ordem, o qual atua como difusão numérica.

O esquema de **central** (ou interpolação linear) é de segunda ordem de precisão e pode gerar soluções oscilatórias. Para obter uma aproximação de ϕ_e da fronteira, esse esquema assume um perfil linear de interpolação entre os pontos nodais centrais $\phi(i,j)$ e $\phi(i+1,j)$, de forma que:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e \approx \frac{\phi(i+1,j) - \phi(i,j)}{x(i+1,j) - x(i,j)}\tag{2.16}$$

O **método híbrido** é uma aproximação da curva de interpolação exata obtida na discretização exponencial. Desenvolvido para diminuir o gasto computacional exigido para o cálculo da função exponencial, envolve uma aproximação para cada faixa de Peclet. Para $P < -2$ é utilizado esquema upwind, no caso de $-2 \leq P \leq 2$ é utilizado o esquema central, e se $P > 2$ o valor é aproximado para zero. Onde o número de Peclet é definido como a razão entre o fluxo convectivo e o difusivo.

Os métodos **exponenciais** são definidos como esquemas provenientes da interpolação da curva da solução exata da equação de difusão-convecção unidimensional (chamada de equação geradora) dada por :

$$\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} - \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x^2} = K \quad (2.17)$$

Onde os termos a esquerda correspondem aos fluxos difusivo e convectivo. O termo fonte é dado por K . O esquema exponencial tradicional é homogêneo, $K = 0$.

$$\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} - \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x^2} = 0 \quad (2.18)$$

É possível obter a solução desta equação homogênea analiticamente, para isto assume-se uma solução exponencial, a qual é substituída na equação geradora.

$$\phi_h = e^{\lambda_c x} \quad (2.19)$$

Obtêm-se uma equação característica de segunda ordem na forma:

$$e^{\lambda x} (-\Gamma \lambda_c^2 + \rho u \lambda_c) = 0 \quad (2.20)$$

Obtendo-se as raízes da equação característica (autovalores), a solução homogênea é dada por:

$$\phi_h = C_1 + C_2 e^{\frac{P}{L} x} \quad (2.21)$$

Onde P é o número de Peclet, e L é o comprimento total do domínio unidimensional

Considerando a equação acima para definir a curva interpolante para o valor de ϕ_e na fronteira leste de um volume de controle:

$$\phi_e = \phi(i,j) + [\phi(i+1,j) - \phi(i,j)] \left[\frac{e^{\frac{Pe x_e}{\delta x_e}} - 1}{e^{Pe} - 1} \right] \quad (2.22)$$

A variável x_e é a posição da fronteira na direção x e $\delta x_e = x(i+1,j) - x(i,j)$ é a distância entre os pontos nodais. O número de Peclet na fronteira é dado por $P = \frac{F}{D} = \frac{\rho u \delta x}{\Gamma}$. Onde $F = \rho u$ é o fluxo convectivo e $D = \Gamma/\delta x$ o difusivo. Portanto, este número é alto se o escoamento é convectivamente dominante e baixo se difusivamente dominante.

Métodos **exponenciais não-homogêneos** possuem coeficiente $K \neq 0$ possuindo solução analítica unidimensional para um domínio que se prolonga de uma posição inicial i até uma final j na forma:

$$\frac{\phi - \phi_i}{\phi_f - \phi_i} = \left(\frac{1 - \frac{Z}{P}}{e^P - 1} \right) e^{P \frac{x - x_i}{x_f - x_i} - 1} + \frac{Z}{P} \frac{x - x_i}{x_f - x_i} \quad (2.23)$$

Onde, x_i é a posição inicial e x_f a final, sendo ϕ_i e ϕ_f as variáveis correspondentes a estas localizações. P é o número de Peclet e $Z = \frac{K(x_f - x_i)^2}{\Gamma(\phi_f - \phi_i)}$ é um coeficiente adimensional adicional que envolve o termo fonte K . **O método UNIFAES** é um exemplo de exponencial não homogêneo e será detalhado mais a frente.

Para se chegar neste resultado é preciso obter a solução analítica da equação 2.17, qual é a soma da solução homogênea ϕ_h com uma solução particular ϕ_{nh} :

$$\phi = \phi_h + \phi_{nh} \quad (2.24)$$

Sendo a solução particular na forma:

$$\phi_{nh} = \frac{K}{\rho u} x \quad (2.25)$$

2.4.3 Introdução ao UNIFAES

O método UNIFAES (Unified Finite Approach Exponential-type Scheme) pode ser aplicada para a discretização espacial dos termos difusivo e convectivo da equação de Navier-Stokes incompressível. Este esquema numérico é obtido através da solução exata de uma equação linear. Considerando a equação bidimensional adimensional do momentum escrita em termos de uma variável generalizada ϕ . (FIGUEIREDO, 1997)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + Re \frac{\partial(u\phi)}{\partial x} + Re \frac{\partial(v\phi)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S \quad (2.26)$$

Onde, Re é o número de Reynolds, u , v e w as componentes da velocidade, t o tempo, S o termo fonte, ϕ uma variável escalar qualquer e x , y e z as componentes espaciais.

Os métodos exponenciais de discretização do fluxo viscoso das equações de Navier-Stokes são definidos como esquema provenientes da interpolação da curva da solução exata da equação unidimensional dada por (chamada equação geradora):

$$Re u \frac{\partial(\phi)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = K \quad (2.27)$$

Os esquemas de discretização da classe exponencial foram primeiramente introduzidos através do esquema baseado em diferenças finitas de Allen e Southwell (1955). Esquemas utilizando como base uma equação geradora não-homogêneos e baseados no método dos volumes finitos incluem: Locally Analytic Differencing Scheme (LOADS), Flux-Spline Scheme e o esquema UNIFAES Figueiredo (1997).

Todos os esquemas do tipo exponencial são originalmente de segunda ordem de precisão. No entanto alguns casos apresentam exceções: esquemas baseados em equações geradoras homogêneas se aproximam da primeira ordem para altos números de Reynolds. Uma desvantagem dos métodos exponenciais é o custo computacional para se obter uma solução, fato que motivou o desenvolvimento de aproximações como o esquema Power-Law desenvolvido por Patankar (1980).

O método UNIFAES foi inicialmente submetido a uma série de testes no intuito de determinar

a estabilidade para diversos números de Peclet, com comparações e análises efetuadas em relação ao esquema LOADS. Os coeficientes resultantes da discretização dos fluxos utilizando o UNIFAES serão dados no próximo capítulo.

2.4.4 Interpolação Temporal Numérica

A integração temporal dos termos fonte e de fluxo é feita através da obtenção de uma curva interpoladora da variável ϕ entre pontos no tempo. Considerando a integral no tempo de uma função $g(t, \phi(t))$ que pode ser considerado como o somatório dos termos de fluxo e fonte de uma equação de balanço, temos:

$$\int_t^{t+\Delta t} g(t, \phi(t)) dt = [f g(t + \Delta t, \phi(t + \Delta t)) + (1 - f) g(t, \phi(t))] \Delta t \quad (2.28)$$

Onde, $f = 1$ define o esquema Euler Implícito e $f = 0$ o esquema Euler Explícito.

O Número de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) é utilizado como critério de escolha do passo de tempo, determinando a taxa com que a informação é transportada de maneira convectiva no domínio:

$$CFL = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \quad (2.29)$$

Para que o esquema Euler Explícito seja estável $CFL \leq 0,5$. Não há restrições de estabilidade para o esquema Euler Implícito (incondicionalmente estável), sendo possível utilizar grandes passos de tempo.

2.4.5 Soluções Numéricas para equações de Navier-Stokes

Equações de balanço de momentum para fluidos newtonianos viscosas são modeladas matematicamente pelo conjunto de equações de Navier-Stokes. Estas equações não-lineares podem ser aproximadas numericamente dependendo do caso em estudo. A discretização pode ser efetuada

tanto com base no método de diferenças finitas, elementos finitos ou volumes finitos, sendo este último o focado nesta seção. Dois pontos importantes ao discutir os métodos de solução numérica para este conjunto de equações é a compressibilidade ou incompressibilidade do escoamento e se malha computacional adotada é do tipo deslocada (*staggered*) ou co-localizada (*collocated*).

Esquemas de solução baseados em malhas co-localizadas possuem como vantagens a simplificação na implementação e a boa adaptabilidade a domínios não estruturados (normalmente utilizadas em geometrias complexas). No entanto este tipo de abordagem apresenta um grande ponto negativo, que é a falta de soluções de acoplamento entre pressão e velocidade, o qual pode gerar oscilações no resultado do campo de pressão. Um esquema de interpolação mais preciso entre os valores das propriedades no centro do volume e nas fronteiras ajuda a obter melhores resultados. Normalmente o método de Rhie e Chow é utilizado na interpolação das variáveis, o mesmo será detalhado na metodologia.

As malhas deslocadas, isto é os *grids* de discretização da pressão e das velocidades são diferentes, são normalmente as mais utilizadas nas simulações atuais pois apresentam uma grande vantagem que é a possibilidade de acoplamento entre pressão e velocidade, não necessitando do uso de interpolação entre centro e faces.

Em escoamentos compressíveis a equação de conservação de massa é considerada como equação de transporte para a densidade, já que a mesma é variável no tempo. Além disso, é necessário obter uma equação adicional para a pressão, a qual pode ser obtida utilizando uma equação termodinâmica de estado, normalmente a Lei para Gás Ideal. Exemplos de soluções de Navier-Stokes compressível incluem como discretização espacial os métodos de MacComarck, ROE, Steger-Warming. (LOMAX E PULLIAM, 1999).

No caso de escoamentos incompressíveis aparecem complicações decorrentes do fato da equação da continuidade não ser ao mesmo tempo a equação de transporte da densidade no tempo, já que a mesma é constante, anulando o termo transiente. Portanto, existe uma restrição em relação a conservação de massa que precisa ser satisfeita, o divergente do campo de velocidades deve ser zero ($\nabla \vec{u} = 0$). Ainda no caso incompressível é necessário obter uma equação para a pressão que satisfaça tal restrição, sendo a equação termodinâmica de estado não aplicável.

Os métodos de solução para equação de Navier-Stokes incompressível são detalhados e investigados já que esta modelagem é de interesse no desenvolvimento deste trabalho. Os principais métodos de solução considerados podem ser divididos em: Método da compressibilidade artificial e

métodos de correção de pressão precisos no tempo. Este último inclui o método MAC, os métodos das projeções, os métodos de passo de tempo fracionado e o método SIMPLE (e suas posteriores revisões como SIMPLER e o SIMPLEC). Com exceção do método SIMPLE e seus derivados, os métodos de correção de pressão se baseiam na obtenção de uma equação de Pressão de Poisson a qual é resolvida a cada iteração temporal. (FERZIGER E PERIĆ, 2002)

Outro método para solução da modelagem de Navier-Stokes incompressível, o primeiro aplicado em estudos numéricos, é reescrever o sistema de equações em função da vorticidade e função de corrente ao invés de utilizar as variáveis primitivas pressão e velocidade. Esta abordagem elimina o gradiente de pressão das equações, mas é apenas aplicável em casos dimensionais (x, y) . Para obter este sistema basta subtrair a derivada da equação de momentum na direção 'x' com respeito a 'y' e a derivada da equação de momentum na direção 'y' com respeito a 'x'. Obtendo ao fim, uma equação de transporte de vorticidade e uma equação de Poisson para a função de corrente. Um dos pontos negativos desta abordagem é a definição não trivial das condições de contorno, especialmente para a vorticidade. Estas são de característica não física, geradas artificialmente através de uma expansão de série de Taylor.

Harlow e Welch (1965) desenvolveram uma técnica para solução numérica de escoamentos incompressíveis transientes chamado método *Marker and Cell* (MAC). As equações de Navier-Stokes são discretizadas usando como base o método dos volumes finitos. Este método é caracterizado por apresentar equações de correção de velocidade e pressão. Inicialmente é necessário um chute inicial dos campos de velocidade e pressão, a partir do qual é calculado um campo de velocidades intermediário. Com este campo se obtém um erro na equação de continuidade, onde sendo este maior que a tolerância calcula-se uma correção na pressão através de uma modelagem baseada no tamanho dos elementos da malha. A partir da pressão corrigida as componentes de velocidade são recalculadas e repete-se a iteração. Este método foi inicialmente desenvolvido para malhas deslocadas e requer a obtenção e discretização de uma Equação de Poisson para a pressão.

Chorin (1967) introduziu o método de solução numérica de equações incompressíveis de Navier-Stokes pela introdução de um variável adicional nas equações do momentum chamada compressibilidade artificial. Além disso, é introduzida uma equação adicional de variação da pressão no tempo ligada a restrição exercida pela continuidade. O passo de tempo onde a pressão varia é não físico, e denominado pseudo-passo de tempo. Após cada passo de tempo físico (presente nas equação de momentum) um passo de tempo não físico também é avançado até que a variação da pressão em relação a esta escala de tempo convirja para zero.

Rhie e Chow (1983) apresentam método de solução do sistema de equações bidimensionais incompressíveis de Navier-Stokes através de uma abordagem de volumes finitos em coordenadas curvilíneas. A malha escolhida é do tipo co-localizada.

Patankar (1980) descreve em seu livro de métodos numéricos os fundamentos do método SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*) para solução numérica de equações de Navier-Stokes incompressíveis. Este método se baseia na utilização de uma equação de correção de velocidade e uma de correção de pressão. A equação de continuidade é a equação governante para correção da pressão. Este método é desenvolvido para malha do tipo deslocada. Consiste em primeiramente estimar um campo de pressão e obter o campo de velocidades correspondentes ao mesmo através da solução das equações de momentum. Com estas velocidades é possível resolver a equação de correção de pressão obtida através da restrição da conservação de massa. Com a pressão corrigida recalcula-se o campo de velocidade, repetindo-se o ciclo de iterações até a convergência. Um dos pontos negativos deste método é que a correção de pressão é superestimada sendo recomendado o uso de fatores de sub-relaxamento.

Neste trabalho são utilizados o acoplamento por meio da obtenção de uma equação de Poisson para pressão, sendo exibida a discretização no próximo capítulo, e o algoritmo SIMPLE, também detalhado na metodologia.

3 Metodologia

São desenvolvidos dois códigos de CFD em Fortran que apresentam configurações diferentes utilizadas nas simulações. O Código Numérico 1 (*NUM1*), apresenta as seguintes características:

- **Malha computacional:** Estrutura semi-deslocada, aproximada para deslocada utilizando o método de Rhie e Chow (1983).
- **Discretização espacial:** UNIFAES.
- **Discretização temporal:** Euler Explícito.
- **Acoplamento da Pressão:** Equação de Poisson.

O Código Numérico 2 (*NUM2*), apresenta as seguintes características:

- **Malha computacional:** Deslocada.
- **Discretização espacial:** Upwind.
- **Discretização temporal:** Euler Implícito.
- **Acoplamento da Pressão:** SIMPLE.

Primeiramente a modelagem matemática do sistema é descrita, obtendo-se um sistema de equações diferenciais parciais composto pelas equações de balanço do momentum nas componentes 'x' e 'y' e pela conservação de massa. Assumidas hipóteses de fluido newtoniano, incompressível e laminar. São consideradas modelos de acoplamento de pressão. As equações são então discretizadas espacialmente seguindo o tipo de malha e depois temporalmente. Um sistema algébrico de equações é obtido. Este sistema é não linear e resolvido de maneira iterativa. Critérios de convergência são adotadas de acordo com o cálculo dos resíduos. A visão geral da lógica dos *solvers* incompressíveis utilizados nos códigos é esquematizada nas figuras 3.1 e 3.2.

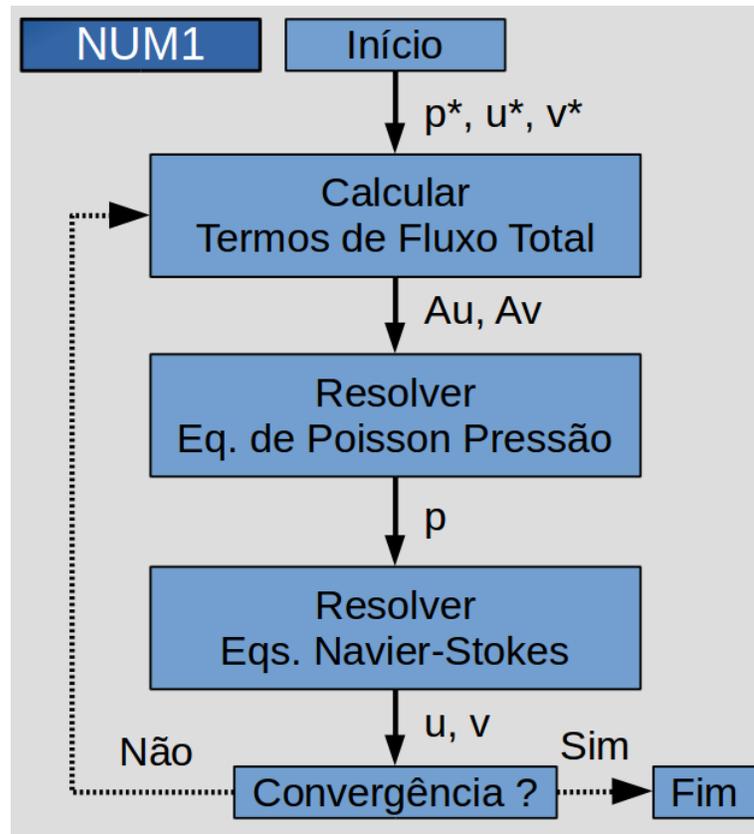


Figura 3.1: Solver incompressível do código *NUM1*

A figura 3.1 apresenta o procedimento utilizado para resolução do sistema de equações discretizadas de modo a obter os campos de pressão e velocidade no código *NUM1*. Inicialmente é estimado um campo inicial para estas variáveis os quais permitem resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis. Em seguida os termos de fluxo total (convectivo mais difusivo) A_u e A_v são obtidos, a solução equação de poisson para Pressão permite atualizar esta variável. Por fim, as equações de Navier-Stokes são resolvidas novamente obtendo-se novos campos de velocidade os quais são analisados pelo critério de convergência escolhido. Se este não é satisfeito, uma nova iteração é executada. Mais detalhes sobre todo o processo serão detalhados a seguir nesta seção.

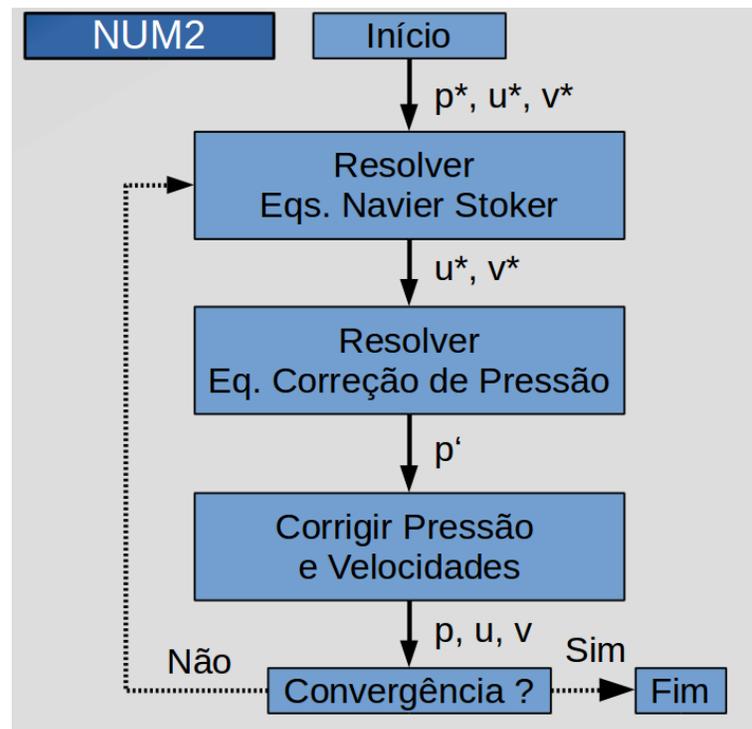


Figura 3.2: Solver incompressível do código *NUM2*

A figura 3.2 apresenta o *solver* utilizado no caso do código computacional *NUM2*. Este código emprega a lógica contida no algoritmo SIMPLE para solução do sistema de equações discretizadas em escoamentos incompressíveis. Inicialmente é estimado os campos iniciais de pressão e velocidade, os quais são utilizados na solução das equações de Navier-Stokes obtendo novos valores para as componentes da velocidade. Estas são utilizadas na solução da equação de correção de pressão característica do método SIMPLE. As pressões e velocidades são então corrigidas e o critério de convergência é verificado. Se necessário outra iteração é executada. Mais detalhes sobre o procedimento são incluídos a seguir na metodologia.

3.1 Modelagem Matemática

3.1.1 Sistema de equações diferenciais parciais

Para o caso bidimensional, transiente e incompressível as equações governantes de continuidade (2.5) e Navier-Stokes podem ser descritas de forma simplificada, modelando o sistema

de equações do problema da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\vec{v}) &= \frac{-\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\nu \nabla u) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v\vec{v}) &= \frac{-\partial p}{\partial y} + \nabla \cdot (\nu \nabla v) \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

Onde a pressão já está dividida pela densidade.

As equações governantes podem ser reescritas através da utilização seguintes variáveis adimensionais para as coordenadas espaciais (x, y) , para o campo de velocidade (u, v) e para o tempo t :

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{x}{L_c} \\ y^* &= \frac{y}{L_c} \\ u^* &= \frac{u}{V_c} \\ t^* &= \frac{t}{\frac{ReL_c}{V_c}}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Onde, L_c é o comprimento característico da geometria, V_c a velocidade da corrente livre e Re o número de Reynolds $Re = \frac{\rho V_c L_c}{\mu}$. A pressão total adimensional pode ser escrita na forma:

$$p^* = \frac{(p + \rho g z)L_c}{\mu V_c}\tag{3.3}$$

Outras variáveis adimensionais de interesse podem ser escritas apenas em função de outras variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} St &= \frac{f^*}{Re} \\ C_l &= \frac{2F_l^*}{Re} \\ C_d &= \frac{2F_d^*}{Re} \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde a f^* é obtido em função do tempo adimensional t^* e as forças de arrasto F_d^* e empuxo F_l^* adimensionais são obtidas em função da pressão adimensional p^* .

Substituindo as variáveis adimensionais no sistema de equações do problema, e omitindo o expoente (*) por simplicidade, podemos obter o novo sistema na forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -Re \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -Re \left(\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

Sendo que, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ (3.5)

Nas equações de Navier-Stokes adimensionais o termo do lado esquerdo da equação é o transiente. Do lado direito, o primeiro termo corresponde ao fluxo advectivo, o segundo ao fluxo viscoso e o terceiro a variação da pressão. O gradiente de pressão atua sobre o campo de velocidades variando o fluxo em determinado volume de controle dentro do sistema, e como restrição a continuidade deve ser nula no balanço do mesmo. O sistema pode ser escrito utilizando A_ϕ para representar os termos de fluxo.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= A_u - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= A_v - \frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}$$

Sendo, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ (3.6)

Onde:

$$\begin{aligned}A_u &= \left[-Re \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \\ A_v &= \left[-Re \left(\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right]\end{aligned}$$

(3.7)

3.1.2 Malhas Computacionais

Em volumes finitos o domínio computacional é dividido em células computacionais menores modeladas como um volume de controle. Cada uma destas unidades é definida geometricamente por vértices, faces (fronteiras) e pontos centrais (nós). A localização das componentes de velocidade e dos escalares (como pressão e temperatura) define o tipo da malha. Alguns exemplos são as malhas: co-localizada, semi-deslocada e deslocada (*staggered*). No código desenvolvido, as malhas tem característica estruturada, uniforme e com elementos quadriláteros.

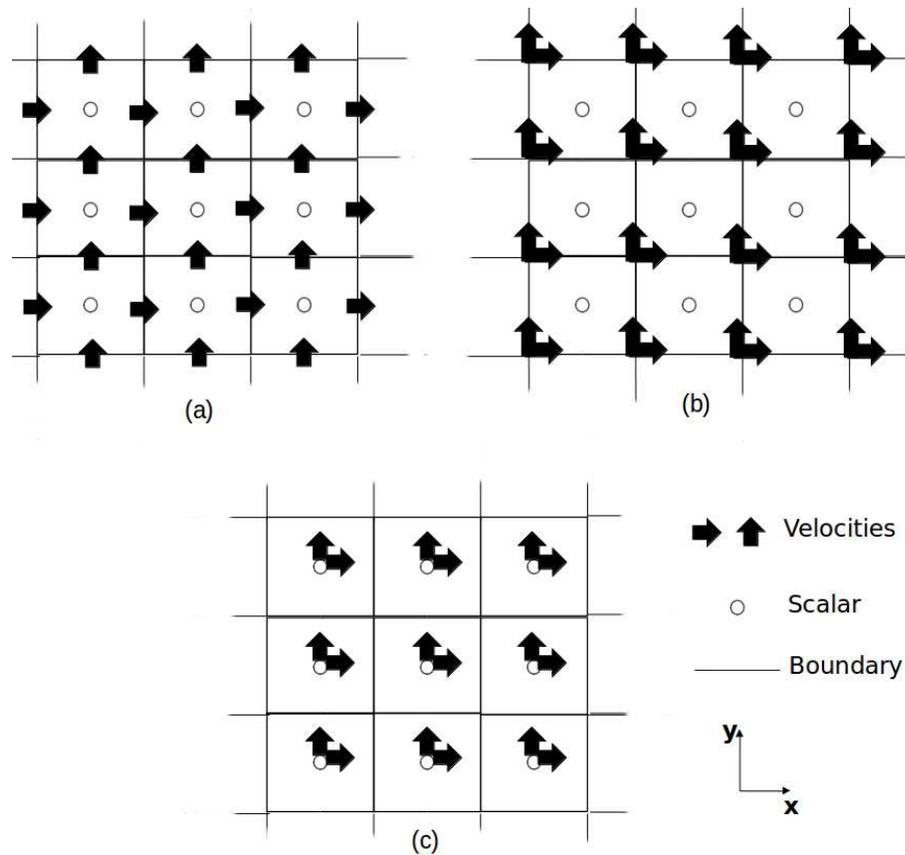


Figura 3.3: Tipos de malha: (a) Deslocada; (b) Semi-deslocada; (c) Co-localizada no centro

Na malha deslocada as velocidades estão localizadas na posição central de cada uma das faces que determinam um elemento da malha, enquanto os escalares estão definidos no nó central e seu valor é aproximado para todo o elemento. Para construção dessa malha bidimensional são necessários três volumes de controles deslocadas em relação ao outro, um para cada componente da velocidade e outro para os escalares.

Na malha semi-deslocada, ambas as componentes da velocidade são definidas nos vértices enquanto os escalares continuam sendo definidos separadamente no centro do elemento. São portanto necessários dois volumes de controles diferentes neste sistema.

Na malha co-localizada no centro, é necessário apenas a definição de um volume de controle para todas as variáveis.

Nesta metodologia as discretizações são efetuadas com base na malha deslocada. A nomen-

clatura que será utilizada na abordagem desta malha é representada na figura 3.4.

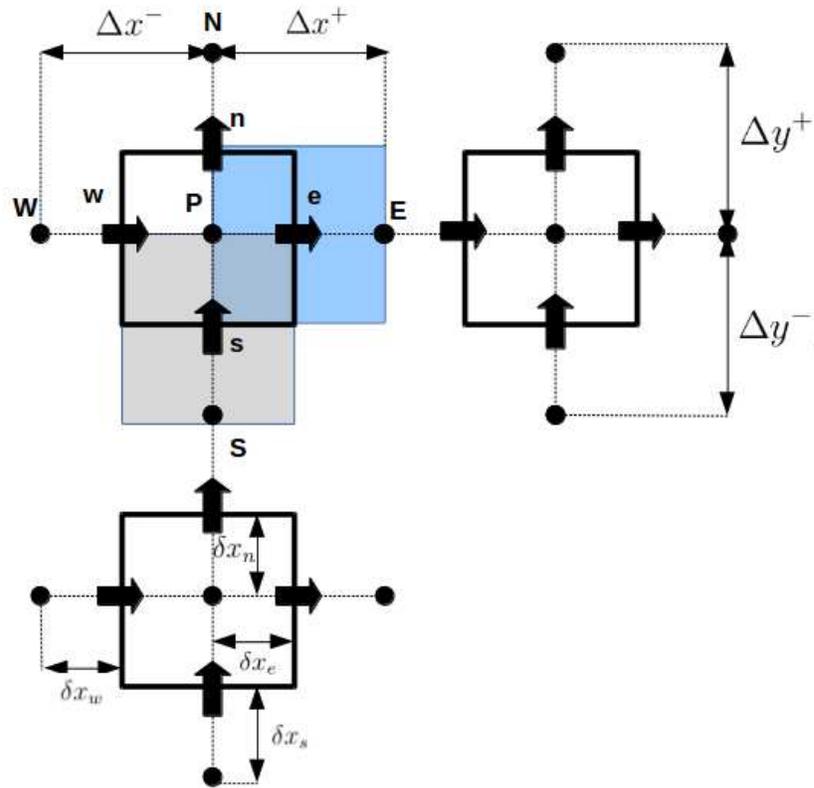


Figura 3.4: Nomenclatura malha deslocada

Já a nomenclatura utilizada na malha semi-deslocada é dada na figura 3.5.

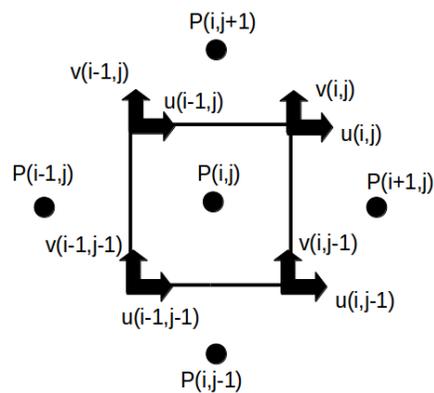


Figura 3.5: Nomenclatura malha semi-deslocada

Uma parte do código desenvolvido é estruturada na malha semi-deslocada no entanto a aproximação de (RHIE E CHOW, 1983) permite utilizar as mesmas equações discretizadas para a malha deslocada, a partir do uso de interpolações do tipo (ver figura 3.5):

$$\begin{aligned}
 u_e &= \frac{u(i,j) + u(i,j-1)}{2} \\
 u_w &= \frac{u(i-1,j-1) + u(i-1,j)}{2} \\
 v_n &= \frac{v(i-1,j) + v(i,j)}{2} \\
 v_s &= \frac{v(i-1,j-1) + v(i,j-1)}{2}
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

3.1.3 Equação de Poisson para Pressão

A equação de Poisson é dada analiticamente na forma:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = f(x,y)
 \tag{3.9}$$

Primeiramente deve-se derivar as equações de Navier-Stokes na direção x e y , com respeito a x e y respectivamente. Rearranjando as equações obtêm-se::

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \frac{\partial A_u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t \partial x} \\
 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= \frac{\partial A_v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial t \partial y}
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Somando-se as equações chega-se na equação de Poisson para pressão resultante:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial A_u}{\partial x} + \frac{\partial A_v}{\partial y} - \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial t} \quad (3.11)$$

Vale lembrar que para haver convergência a restrição da continuidade deve ser respeitada, e portanto quando isto ocorrer o ultimo termo da direita da equação de Poisson da pressão se anula, obtendo como solução final convergida:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial A_u}{\partial x} + \frac{\partial A_v}{\partial y} \quad (3.12)$$

O modelo matemático final do sistema de equações adimensionais que descrevem os fenômenos físicos envolvidos neste projeto pode ser resumido como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= A_u - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= A_v - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= \frac{\partial A_u}{\partial x} + \frac{\partial A_v}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial t} \\ \text{Na convergencia : } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

A equação da pressão de Poisson detalhada em 3.13 pode ser discretizada para a malha deslocada seguindo a nomenclatura introduzida na figura 3.4.

Nos volumes de controle internos do domínio o valor da pressão no nó central P é calculado considerando os vizinhos (E, W, N, S):

$$\frac{P_E - 2P_P + P_W}{\Delta x^2} + \frac{P_N - 2P_P + P_S}{\Delta y^2} = \frac{A_{u_e} - A_{u_w}}{\Delta x} + \frac{A_{v_n} - A_{v_s}}{\Delta y} - \frac{D_P^{n+1} - D_P^n}{\Delta t} \quad (3.14)$$

Nos volumes de controle com fronteiras serão aplicadas as condições de contorno necessárias, detalhadas em cada caso na seção de resultados.

3.2 Discretização Numérica

A discretização espacial para malha deslocada segue a nomenclatura introduzida na figura 3.4. O nó P corresponde ao ponto nodal no centro de determinado volume de controle do elemento em questão. Os vizinhos são denominados por E (Leste), W (Oeste), N (Norte) e S (Sul). Para a malha uniforme temos distância entre os nós na direção 'x' e 'y' iguais a Δx e Δy , as quais também são as dimensões do volume de controle. As fronteiras são denominadas pelos índices minúsculos: e (leste), w (oeste) n (norte), s (sul).

Considera-se os seguintes termos para os fluxos convectivo e difusivo: $F = \rho u$, $D = \Gamma/\delta x$. Onde ρ é a densidade, u a velocidade no ponto onde F está sendo calculado, Γ a difusividade e δx a distância entre dois pontos nodais. Por fim, o número de Peclet é dado como $P = \frac{F}{D}$.

O termo fonte S é linearizado como: $S = S_p\phi_P + S_c$

De acordo com Patankar (1980) a discretização em volumes finitos tem por objetivo transformar o sistema de equações diferencial parcial (modelado matematicamente na 3.13) em um sistema na forma algébrica:

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + b \quad (3.15)$$

Onde os coeficientes da equação algébrica são dados de forma generalizada como:

$$\begin{aligned}
a_E &= D_e A(|P_e|) + \max[-F_e, 0] \\
a_W &= D_w A(|P_w|) + \max[F_w, 0] \\
a_N &= D_n A(|P_n|) + \max[-F_n, 0] \\
a_S &= D_s A(|P_s|) + \max[F_s, 0] \\
a_P^0 &= \rho^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \\
a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S + \rho_P \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - S_p \Delta x \Delta y \\
b &= a_P^0 \phi_P^0 + S_c \Delta x \Delta y
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Onde a função $A(|P_e|)$ varia com esquema de interpolação numérica utilizado, de acordo com a seguinte tabela:

<i>Esquema</i>	$A(P_e)$
Upwind	1
Central	$1 - 0.5 P_e $
Exponencial	$\frac{ P_e }{\exp P_e -1}$
Híbrido	$\max[0, (1 - 0.5 P_e)]$

3.2.1 Discretização dos coeficientes do esquema UNIFAES

O método UNIFAES é exposto a seguir baseado nas modelagens matemáticas efetuadas por (FIGUEIREDO E DE OLIVEIRA, 2009). Nesta discretização é utilizada a nomenclatura introduzida na figura 3.4. O volume de controle bidimensional abaixo será utilizado para derivar as equações que constituem o método de discretização UNIFAES. Para obtenção dos coeficientes do método UNIFAES é necessário utilizar as seguintes curvas interpoladoras para a variável ϕ e sua derivada, como exemplo a fronteira leste (e):

$$\begin{aligned}\phi_e &= C_1 + C_2\delta x_e + C_3e^{Reu_e\delta x_e} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_e} &= C_2 + C_3Reu_e e^{Reu_e\delta x_e}\end{aligned}\quad (3.17)$$

O coeficiente C_2 é dado pela solução particular da equação homogênea na forma:

$$C_2 = \frac{K_P}{Re u} \quad (3.18)$$

A partir das equações acima é possível obter os coeficientes C_1 e C_3 através dos valores da interpolação de ϕ_P e do vizinho leste ϕ_E :

$$\begin{aligned}\phi_P &= C_1 + C_3 \\ \phi_E &= C_1 + C_2\Delta x^+ + C_3e^{Reu_E\Delta x^+}\end{aligned}\quad (3.19)$$

Para obter o valor do termo fonte K_P é utilizado a metodologia de Allen and Southwell, o qual consiste em novamente utilizar as curvas geradoras obtidas para interpolar entres os pontos nodais vizinhos ϕ_P , ϕ_E e ϕ_W :

$$\begin{aligned}\phi_W &= C_1 - C_2\Delta x^- + C_3e^{-Reu_W\Delta x^-} \\ \phi_P &= C_1 + C_3 \\ \phi_E &= C_1 + C_2\Delta x^+ + C_3e^{Reu_E\Delta x^+}\end{aligned}\quad (3.20)$$

De maneira que para malhas uniformes:

$$\begin{aligned}
Re u_P \frac{\partial(\phi)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x^2} &= K_P = (\phi_P - \phi_E) \Pi^+ + (\phi_P - \phi_W) \Pi^- \\
\Pi_{\pm} &= \frac{\pm Re u_P \Delta x}{\Delta x^2 [e^{\pm Re u_{i,j} \Delta x} - 1]}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Portanto temos que o fluxo resultante integrado no volume de controle pode ser aproximado por:

$$\iint A_{\phi} dv \approx a_E(\phi_E - \phi_P) + a_W(\phi_W - \phi_P) + a_N(\phi_N - \phi_P) + a_S(\phi_S - \phi_P) - \psi \tag{3.22}$$

Nesta equação acima cada coeficiente pode ser determinado como:

$$\begin{aligned}
a_{E/W} &= \pi(\pm p_{e/w}) \frac{\delta y}{\Delta x^{\pm}} \\
a_{N/S} &= \pi(\pm p_{n/s}) \frac{\delta x}{\Delta y^{\pm}} \\
p_{e/w} &= Re u_{e/w} \Delta x^{\pm} \\
p_{n/s} &= Re v_{n/s} \Delta y^{\pm} \\
\pi(p) &= \frac{p}{exp(p) - 1} \\
\psi &= [K_e \Delta x^+ \chi(p_e) - K_w \Delta x^- \chi(p_w)] \delta y + [K_n \Delta y^+ \chi(p_n) - K_s \Delta y^- \chi(p_s)] \delta x \\
\chi(p) &= \frac{\pi(p) - 1}{p} + R \\
R_{e/w} &= \frac{\delta x_{e/w}}{\Delta x^{\pm}} \\
R_{n/s} &= \frac{\delta x_{n/s}}{\Delta y^{\pm}}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Nas equações acima, os índices e e n correspondem ao sinal positivo +, enquanto os índices

w e s correspondem ao sinal negativo $-$.

A modelagem de K é o que diferencia os vários esquema exponenciais não-homogêneos. No caso do UNIFAES este valor é obtido pela mesma abordagem do esquema de Allen e Southwell. Neste esquema o termo fonte K para um nó central P é definido em função dos nós vizinhos como:

$$K_P = (\phi_P - \phi_E)\Pi^+ + (\phi_P - \phi_W)\Pi^- \quad (3.24)$$

A variável Π^\pm é definida para malhas uniformes de acordo com a aproximação obtida por Llagostera e Figueiredo (2000a):

$$\begin{aligned} \Pi^\pm &= \frac{\pi(\pm p_u^\pm)}{\Delta x^2} \\ p_u^\pm &= Re u_P \Delta x^\pm \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.3 Algoritmo SIMPLE

O algoritmo iterativo SIMPLE será brevemente revisado, demonstrações mais detalhadas podem ser encontradas na literatura, como em (VERSTEEG E MALALASEKERA, 2007). Resumidamente é composto pelas seguintes etapas:

1. Estimar um campo de velocidades e pressão.
2. Substituir as estimativas nas equações discretizadas de momento em ambas as direções, obtendo-se novos valores para as componentes da velocidade.
3. Resolver a equação algébrica de correção de pressão P' . A qual é dada na forma:

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b' \quad (3.26)$$

4. Com a correção de pressão corrigir as velocidades e a pressão.

5. Checar o critério de convergência e repetir a iteração se necessário.

3.4 Solução do sistema de equações algébricas

O método de eliminação de Gauss Seidel é um método de solução do sistema algébrico de equações obtido após a discretização, com a inserção de um relaxamento (α) Baseando-se na forma geral da equação algébrica discretizada (eq. 3.15). A varredura linha por linha no domínio ocorre no sentido do escoamento (oeste para leste), e depois de sul para norte.

$$\phi_P^{n+1} = \frac{a_E \phi_E^n + a_W \phi_W^{n+1} + a_N \phi_N^n + a_S \phi_S^{n+1} + b^n}{a_P} \quad (3.27)$$

O avanço no tempo pode ser efetuado utilizando o relaxamento:

$$\phi_P^{n+1} = \phi_P^n + \alpha(\phi_P^{n+1} - \phi_P^n) \quad (3.28)$$

3.5 Critério de convergência: análise do resíduo

Como critério de convergência foram analisados os valores dos resíduos da quantidade de movimento e balanço de massa. Foi estipulado como satisfatório que os valores estivessem na ordem de 10^{-3} .

O resíduo é investigado entre iterações temporais do ponto de vista da quantidade de movimento quando do balanço de massa nos volumes finitos. Para a quantidade de movimento, seguindo da norma L_2 é possível obter:

$$\begin{aligned}
 Res_t &= \sqrt{\frac{(\sum Res_u^2 + Res_v^2)}{2(N_I N_J)}} \\
 Res_{u_w} &= -\frac{(P_P - P_W)}{\Delta x} + A_{u_w} \\
 Res_{v_s} &= -\frac{(P_P - P_S)}{\Delta y} + A_{v_s}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Onde, N_I é o número total de elementos na direção 'x' e N_J é o número total de elementos na direção 'y'.

O resíduo do balanço de massa do volume finito é dado a partir da continuidade, sendo o valor máximo obtido em:

$$D_P = \left\| \frac{(u_e - u_w)}{\Delta x} + \frac{(v_n - v_s)}{\Delta y} \right\| \tag{3.30}$$

4 Resultados e Discussão

Nesta dissertação serão estudados os seguintes casos: escoamento sobre degrau com, escoamento ao redor de um obstáculo de seção retangular confinado em canal e escoamento sobre degrau com a presença do obstáculo. As dimensões de altura e comprimento do degrau e do obstáculo são as mesmas para todas as simulações. O número de Reynolds é variável e compreende casos entre $100 \leq Re \leq 600$.

Com o objetivo de comparação entre resultados, são abordados dois códigos numéricos para alguns dos casos de estudo. O primeiro código (*NUM1*) é adimensional e baseado no método MAC (*marker and Cell*). Este apresenta uma malha computacional semi-deslocada, discretização espacial e temporal utilizando respectivamente os métodos UNIFAES e Euler explícito e acoplamento da pressão com velocidade por obtenção de uma equação de Poisson para a pressão. O segundo código (*NUM2*) é dimensional, empregando uma malha computacional totalmente deslocada, discretização espacial e temporal pelos métodos upwind e Euler implícito, e acoplamento pressão-velocidade por meio do algoritmo SIMPLE transiente. O método de discretização espacial UNIFAES é da classe exponencial e considerado como de segunda ordem, já o método Upwind é de primeira ordem. Ambos os métodos de discretização temporal utilizados são de primeira ordem.

NUM1 é o principal código de interesse deste trabalho, sendo utilizados nas simulações de todos os casos abordados. O código *NUM2* é apenas utilizado como método auxiliar na confirmação dos resultados de obtidos por *NUM1*, sendo empregado apenas na etapa de validação do escoamento sobre degrau.

Grande parte do pós-processamento das variáveis de interesse é efetuado na linguagem Python, sendo as exceções obtidas por meio do *software* de visualização *Paraview*. A biblioteca *Matplotlib* é utilizada na plotagem dos resultados relacionados as linhas de corrente e de contorno da velocidade e vorticidade. Os gráficos relacionados ao coeficiente de empuxo e número de Strouhal também são plotados utilizando a biblioteca *Matplotlib*. Já as figuras 4.17 e 4.18, as quais representam campos de velocidade, são obtidas com auxílio do *Paraview*.

4.1 Escoamento sobre Degrau descendente

4.1.1 Modelagem

As dimensões da geometria na figura 4.1 são compostas por um canal com comprimento total $L = 20H$, e altura total $H = 1.0$. O degrau descendente de altura $s = 0.5H$ está localizado próximo a região de entrada do fluido com comprimento $c = 5H$ e altura $(H - s) = 0.5H$. A presença do degrau gera zonas de recirculação nas paredes inferior e superior do canal dependendo do número de Reynold. Na parede inferior se forma a principal bolha de recirculação com comprimento normalizado $\frac{x_1}{s}$. Já na parede superior se forma a bolha de comprimento normalizado $\frac{x_3 - x_2}{s}$.

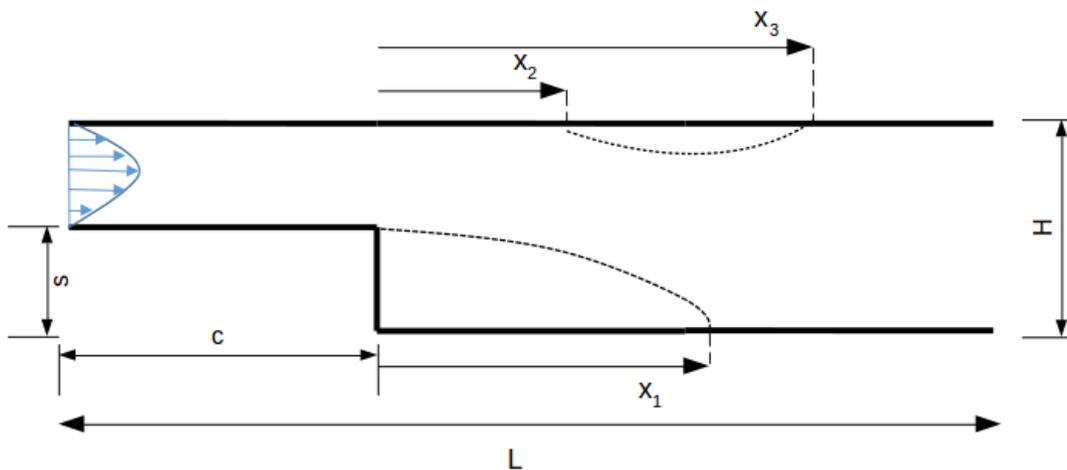


Figura 4.1: Geometria degrau descendente

Com relação as condições iniciais, o perfil de velocidade completamente desenvolvido de entrada é estendido para dentro do domínio por toda a extensão do comprimento de entrada. Para demais regiões as velocidades adimensionais são inicializadas como nulas. A pressão é inicializada como nula para todo o domínio. Na simulação de Reynolds mais elevados é utilizados como ponto inicial a solução convergida para um Reynold menor.

Temos três grupos de condições de contorno, aplicados as variáveis de interesse u , v e p , nos casos estudados. Estes grupos se dividem quanto a localização em: entrada do canal, saída do canal

e nas paredes (do canal e do obstáculo). Os índices (i,j) indicam a posição do elemento na malha computacional.

Condições de contorno na entrada do canal (adimensionalizadas):

$$\begin{aligned}
 u(i,j) &= 1 - (2y(i,j) - 1)^2 \\
 v(i,j) &= 0 \\
 P(i,j) &= P(i - 1,j) \\
 P'(i,j) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

As condições de contorno da velocidade u na entrada do canal foram assumidas um perfil de escoamento completamente desenvolvido.

Condições de contorno na saída do canal (adimensionalizadas): Condições de contorno na entrada do canal (adimensionalizadas):

$$\begin{aligned}
 u(i,j) &= u(i + 1,j) \\
 v(i,j) &= 0 \\
 P(i,j) &= P(i + 1,j) \\
 P'(i,j) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

As condições de contorno das velocidades adimensionais uev nas paredes seguem a condição de não deslizamento (nulas):

$$\begin{aligned}
u(i,j) &= 0 \\
v(i,j) &= 0 \\
P(i,j) &= P(i,j + 1) \\
P(i,j) &= P(i,j - 1) \\
P'(i,j) &= 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1.2 Resultados Obtidos

São apresentados os resultados para o escoamento degrau utilizando os códigos *NUM1* e *NUM2*. As malhas utilizadas serão especificadas em cada uma das tabelas, sendo a comparação na literatura feita com os valores da mais refinada em cada caso. A faixa de Reynolds da simulação escolhida é entre 100 e 600.

Como pode ser identificada na tabela 4.1, foram obtidos os resultados da localização dos pontos que delimitam as zonas de recirculação nas paredes inferior e superior do canal no escoamento degrau. Estas dimensões foram normalizadas da seguinte maneira: $x_{1,2,3} = \frac{(x_{1,2,3}-c)}{s}$. Estas simulações foram conduzidas utilizando o código de CFD *NUM1*. Além disso, foram utilizadas três malhas regulares e uniformes de refinamentos diferentes: 120x80, 180x120 e 240x180.

Tabela 4.1: Resultados dimensões zona recirculação (NUM1)

<i>Re</i>	<i>Malha</i>	x_1	x_2	x_3	<i>Re</i>	<i>Malha</i>	x_1	x_2	x_3
100	120x80	3.094	-	-	400	120x80	8.361	7.406	10.596
100	180x120	3.035	-	-	400	180x120	8.307	7.429	10.466
100	240x180	3.004	-	-	400	240x180	8.284	7.442	10.398
200	120x80	5.151	-	-	500	120x80	9.520	7.891	13.507
200	180x120	5.093	-	-	500	280x120	9.461	7.838	13.438
200	240x180	5.066	-	-	500	240x180	9.440	7.838	13.399
300	120x80	6.904	-	-	600	120x80	10.429	8.377	16.109
300	180x120	6.847	-	-	600	180x120	10.368	8.335	16.055
300	240x180	6.822	-	-	600	240x180	10.347	8.329	16.024

É possível notar pelos resultados da tabela 4.1 que houve uma convergência satisfatória em relação ao refinamento da malha. Com relação aos valores obtidos para x_1 , os quais correspondem ao comprimento da bolha localizada na parede inferior do canal, pode-se afirmar que tendem a aumentar de maneira quase linear em relação ao aumento do número de Reynolds. Ainda, observa-se o surgimento da bolha superior de comprimento ($x_3 - x_2$) a partir de $Re = 400$.

A tabela 4.2 apresenta simulações para o escoamento sobre degrau utilizando o código de CFD *NUM2*. São utilizadas três malhas computacionais regulares e uniformes de refinamentos diferentes: 120x60, 240x120 e 360x180.

Tabela 4.2: Resultados das dimensões da zona recirculação (NUM2)

<i>Re</i>	<i>Malha</i>	x_1	x_2	x_3	<i>Re</i>	<i>Malha</i>	x_1	x_2	x_3
100	120x60	3.867	-	-	400	120x60	8.785	7.003	12.875
100	240x120	4.024	-	-	400	240x120	9.447	7.509	14.765
100	360x180	4.084	-	-	400	360x180	9.622	7.614	15.464
200	120x60	6.345	-	-	500	120x60	12.283	10.212	15.901
200	240x120	6.519	-	-	500	240x120	9.972	7.831	17.031
200	360x180	6.817	-	-	500	360x180	10.383	8.131	18.209
300	120x60	8.058	-	-	600	120x60	15.249	13.249	17.946
300	240x120	8.528	-	-	600	240x120	10.419	8.129	18.689
300	360x180	8.725	-	-	600	360x180	11.059	8.656	19.545

Os resultados na tabela 4.2 mostram que para as malhas testadas ainda não houve convergência dos valores com relação a este critério, seriam necessários refinamentos adicionais. Como estes resultados são um ponto de comparação para o código *NUM1* optou-se por utilizar apenas malhas de dimensionamento próximo. Com relação ao comportamento físico, este apresentou o mesmo já discutido nos resultados da tabela 4.1.

As tabelas 4.3, 4.4 e 4.5 apresentam um resumo comparativo entre as malhas mais refinadas dos códigos numéricos *NUM1* e *NUM2*, com dados experimentais obtidos na literatura por Armaly e outros (1983).

A tabela 4.3 apresenta os resultados obtidos para o ponto x_1 , o qual representa o limite da extensão da bolha de recirculação localizada na parede inferior do canal. É notado que os resultados obtidos nas simulações realizadas com o código *NUM1* são ,aos condizentes com a literatura para a faixa de refinamentos de malha utilizados. Isto pode ser devido ao fato que a interpolação espacial

Tabela 4.3: Comparação dimensão x_1 entre NUM2, NUM1 e Experimental)

Re	x_1 NUM2	x_1 NUM1	x_1 Exp (Armaly, 1983)
100	4.084	3.004	2.922
200	6.817	5.066	4.982
300	8.725	6.822	6.751
400	9.622	8.284	8.237
500	10.383	9.440	9.421
600	11.059	10.347	10.349

deste código tem erro de truncamento menor que aquele da discretização numérica empregada em *NUM2*.

Tabela 4.4: Comparação dimensão x_2 entre NUM2, NUM1 e Experimental)

Re	x_2 NUM2	x_2 NUM1	x_2 Exp (Armaly, 1983)
400	7.614	7.442	7.731
500	8.131	7.838	8.013
600	8.656	8.329	8.486

A tabela 4.4 apresenta os resultados obtidos para o ponto x_2 , correspondente ao marco inicial da bolha de recirculação formada na parede superior do canal. É notado que os resultados das simulações realizadas com o código *NUM1* se aproximam mais da literatura para os refinamentos de malha utilizados.

Tabela 4.5: Comparação dimensão x_3 entre NUM2, NUM1 e Experimental)

Re	x_3 NUM2	x_3 NUM1	x_3 Exp (Armaly, 1983)
400	15.464	10.398	10.037
500	18.209	13.399	13.171
600	19.545	16.024	15.833

A tabela 4.5 apresenta os resultados obtidos para o ponto x_3 , correspondente ao fim da extensão da bolha de recirculação formada na parede superior do canal. É notado que os resultados das simulações realizadas com o código *NUM1* se aproximam mais da literatura para os refinamentos de malha utilizados.

São apresentados nas figuras 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7. os resultados das linhas de corrente, contornos de vorticidade e velocidade para as simulações realizadas utilizando o código numérico *NUM1*.

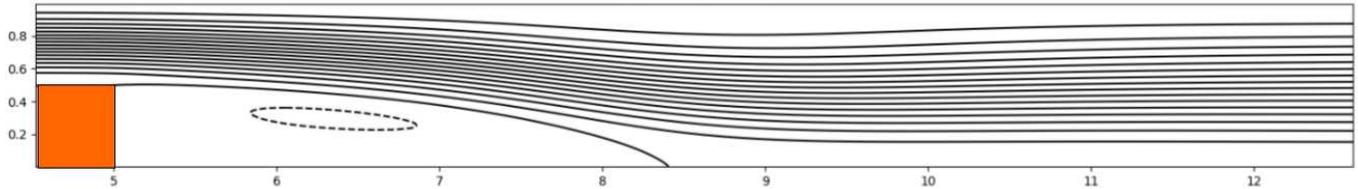


Figura 4.2: Degrau: Linhas de corrente para $Re = 300$ (NUM1)

A figura 4.2 apresenta as linhas de corrente para $Re = 300$. É notada a presença da recirculação da parede inferior. O degrau é denotado pela geometria laranja.

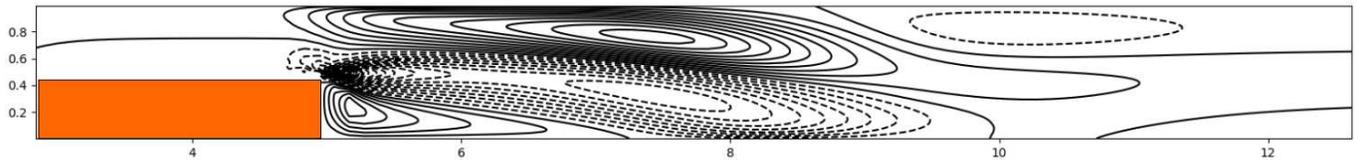


Figura 4.3: Degrau: Contornos de vorticidade para $Re = 300$ (NUM1)

A figura 4.3 apresenta as linhas de vorticidade para $Re = 300$. O degrau é denotado pela geometria laranja.

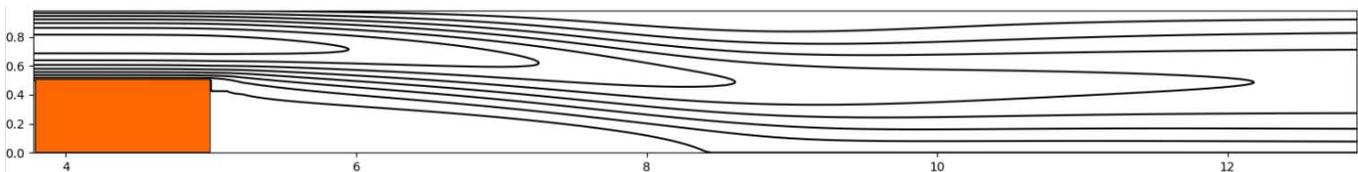


Figura 4.4: Degrau: Contornos de velocidade horizontal U para $Re = 300$ (NUM1)

A figura 4.4 apresenta as linhas da componente horizontal da velocidade para $Re = 300$. O degrau é denotado pela geometria laranja.

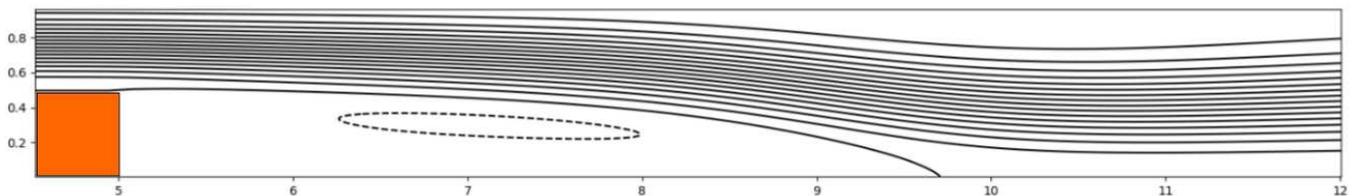


Figura 4.5: Degrau: Linhas de corrente para $Re = 500$ (NUM1)

A figura 4.5 apresenta as linhas de corrente para $Re = 500$. É notada a presença da recirculação nas paredes inferior e superior. O degrau é denotado pela geometria laranja.

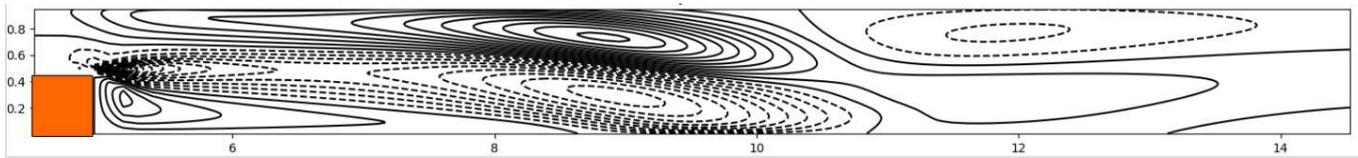


Figura 4.6: Degrau: Contornos de vorticidade para $Re = 500$ (NUM1)

A figura 4.6 apresenta as linhas de vorticidade para $Re = 500$. O degrau é denotado pela geometria laranja.

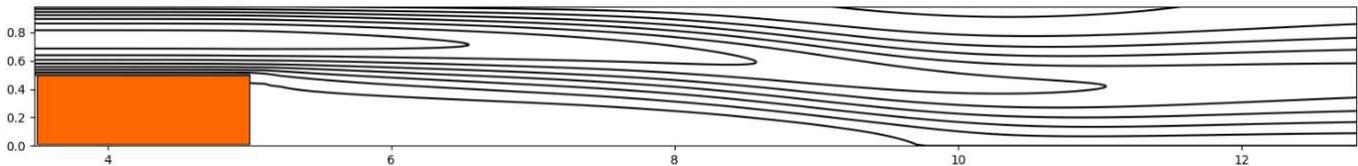


Figura 4.7: Degrau: Contornos de velocidade horizontal U para $Re = 500$ (NUM1)

A figura 4.7 apresenta as linhas da componente horizontal da velocidade para $Re = 500$. O degrau é denotado pela geometria laranja.

4.2 Escoamento ao redor de um obstáculo de seção retangular

4.2.1 Modelagem

As dimensões H e L do canal são as mesmas do caso anterior, a geometria de estudo é destacada na figura 4.8. O obstáculo de seção transversal retangular possui dimensões $O_x = 0.5H$ e $O_y = 0.25H$. Seu posicionamento é simétrico em relação a altura do canal $\frac{H}{2}$ e está localizado a uma distância $dx = 5.0$ da entrada do mesmo.

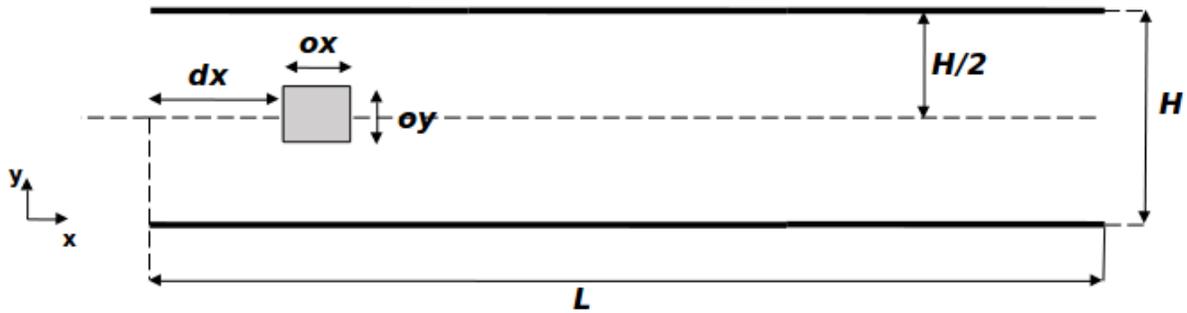


Figura 4.8: Geometria do escoamento ao redor do obstáculo de seção retangular

As condições de contorno são as mesmas utilizadas anteriormente para o caso do escoamento sobre degrau.

Condições de contorno na entrada do canal (adimensionalizadas):

$$\begin{aligned}
 u(i,j) &= 1 - (2y(i,j) - 1)^2 \\
 v(i,j) &= 0 \\
 P(i,j) &= P(i - 1,j) \\
 P'(i,j) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

As condições de contorno da velocidade u na entrada do canal foram assumidas um perfil de escoamento completamente desenvolvido.

Condições de contorno na saída do canal (adimensionalizadas): Condições de contorno na entrada do canal (adimensionalizadas):

$$\begin{aligned}
 u(i,j) &= u(i + 1,j) \\
 v(i,j) &= 0 \\
 P(i,j) &= P(i + 1,j) \\
 P'(i,j) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

As condições de contorno das velocidades adimensionais uev nas paredes (incluindo fronteiras do obstáculo) seguem a condição de não deslizamento (nulas):

$$\begin{aligned}
 u(i,j) &= 0 \\
 v(i,j) &= 0 \\
 P(i,j) &= P(i,j + 1) \\
 P(i,j) &= P(i,j - 1) \\
 P'(i,j) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

4.2.2 Resultados Obtidos

As simulações para o obstáculo de seção retangular confinado foram executadas utilizando o código de CFD *NUM1*. Os resultados apresentados aqui correspondem a malha de dimensões 180x120. São expostas figuras com os contornos de vorticidade e componente horizontal u da velocidade para determinados número de Reynolds contidos na faixa de estudo: $100 \leq Re \leq 600$.

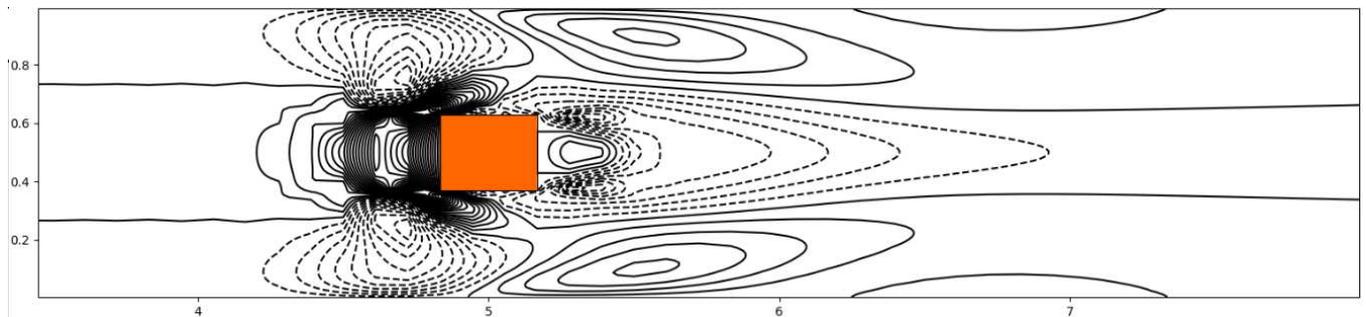


Figura 4.9: Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 300$ (NUM1)

A figura 4.9 mostra os contornos de vorticidade para um obstáculo de seção retangular destacado em laranja. Nota-se que para $Re = 300$ não foi identificada presença da esteira de vórtices.

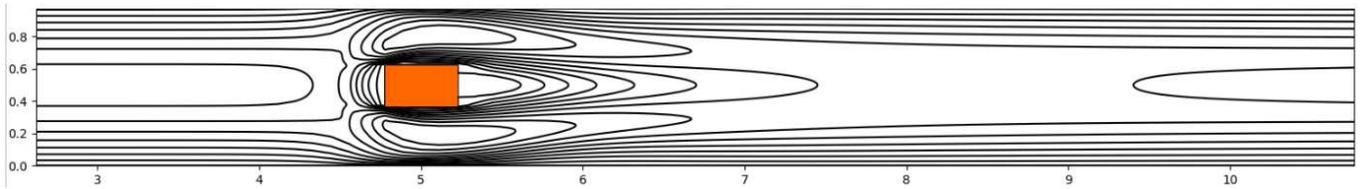


Figura 4.10: Obstáculo: Contornos de velocidade horizontal U para $Re = 300$ (NUM1)

A figura 4.10 mostra os contornos de velocidade horizontal para um obstáculo de seção retangular destacado em laranja, no caso de $Re = 300$.

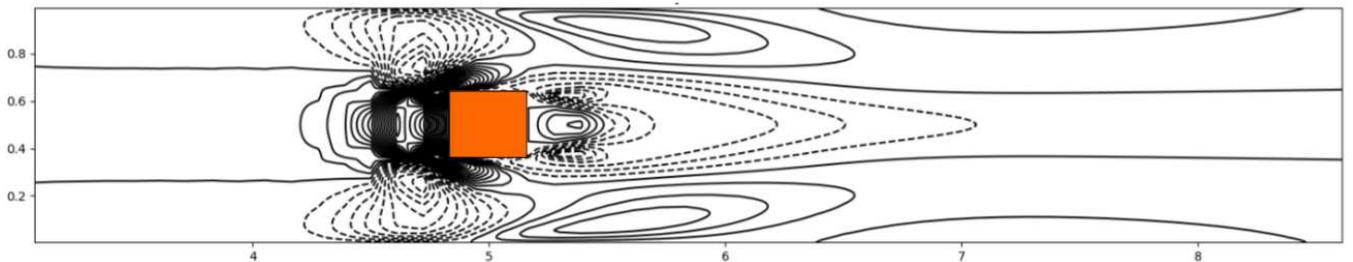


Figura 4.11: Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 500$ (NUM1)

A figura 4.11 mostra os contornos de vorticidade para um obstáculo de seção retangular destacado em laranja. Nota-se que para $Re = 500$ não foi identificada presença da esteira de vórtices.

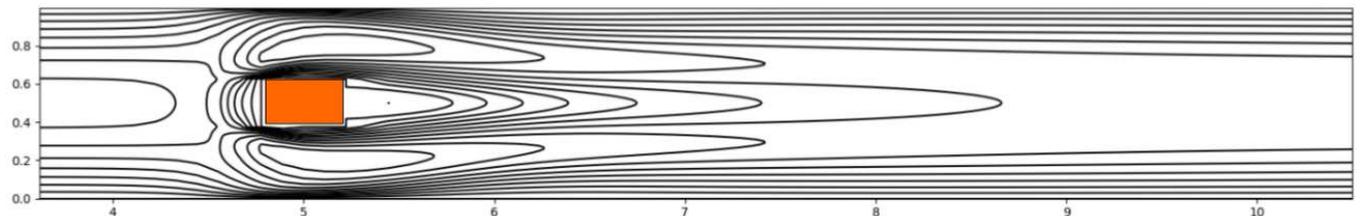


Figura 4.12: Obstáculo: Contornos de velocidade horizontal U para $Re = 500$ (NUM1)

A figura 4.12 mostra os contornos de velocidade horizontal para um obstáculo de seção retangular destacado em laranja, no caso de $Re = 500$.

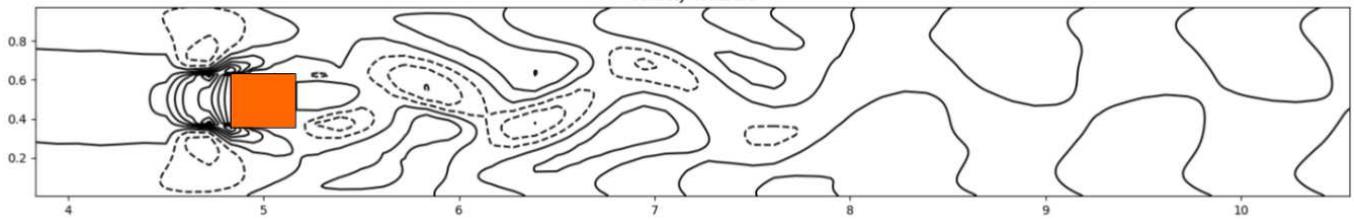


Figura 4.13: Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 600$ (NUM1)

A figura 4.13 mostra os contornos de vorticidade para um obstáculo de seção retangular destacado em laranja. Nota-se que para $Re = 600$ foi identificada presença da esteira de vórtices alternados de von Karman. Para as configurações de discretização e malha utilizados é observado um efeito de dissipação numérica ao longo do canal. No entanto, a sonda para obtenção da frequência dos vórtices é posicionada em região próxima a parede do obstáculo.

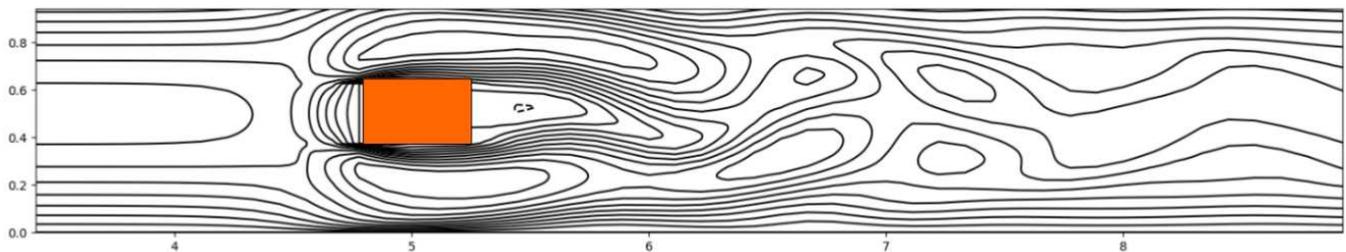


Figura 4.14: Obstáculo: Contornos de velocidade horizontal U para $Re = 600$ (NUM1)

A figura 4.14 mostra os contornos de velocidade horizontal para um obstáculo de seção retangular destacado em laranja, no caso de $Re = 600$.

Foi portanto observado que houve desprendimento periódico de vórtices formação da esteira de von Karman apenas no caso $Re = 600$, dentre os estudados. Este fenômeno também pode ser observado nos gráficos do coeficiente de empuxo ao redor do obstáculo pelo tempo.

No primeiro gráfico da figura 4.15 podemos observar o início da oscilação do coeficiente de empuxo com o tempo ao redor de zero (como esperado pela literatura). No segundo gráfico da figura 4.15 tem-se o final da simulação, neste é possível extrair os valores relacionados ao período da frequência e calcular o número de Strouhal.

$$St = \frac{f^*}{Re} \approx \frac{1}{0,0033 * 600} \approx 0,5$$

O valor encontrado para o número de Strouhal está acima do esperado ($\approx 0,15 - 0,25$) pela literatura para escoamento ao redor de geometrias de seção retangular. De acordo com Muzaferija *e outros* (1995) é esperado um aumento da frequência de vórtices é em casos de confinamento do corpo imerso. No entanto, Galletti *e outros* (2004) obtiveram valores de números de Strouhal inferiores aos encontrados aqui para casos semelhantes de razão de confinamento.

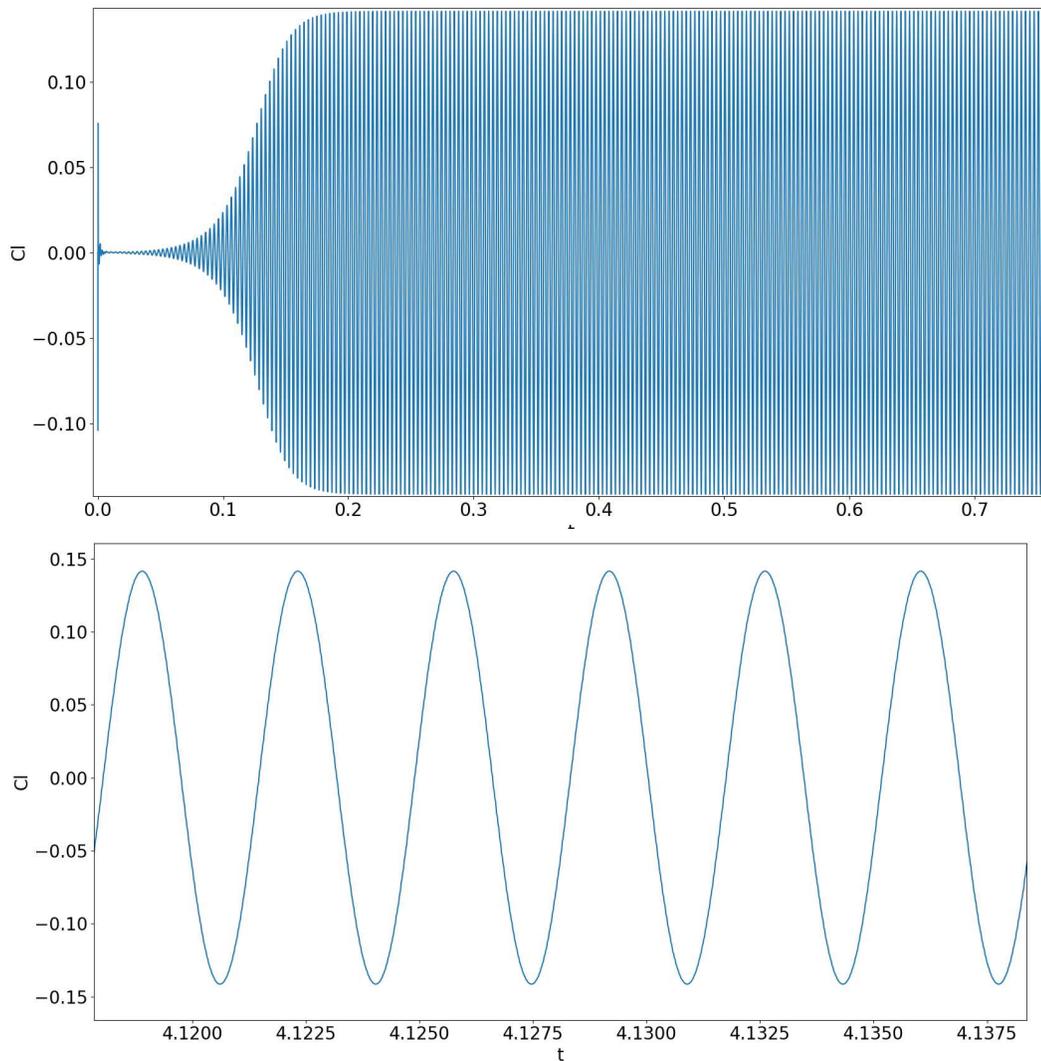


Figura 4.15: Obstáculo: Coeficiente de empuxo em função do tempo para $Re = 600$ (NUM1)

4.3 Escoamento sobre degrau na presença de um obstáculo de seção retangular

4.3.1 Modelagem

As dimensões do canal, do degrau e do obstáculo são as mesmas das seções anteriores, sendo representadas na figura 4.16. O obstáculo de seção transversal retangular possui dimensões $O_x = 0.5H$ e $O_y = 0.25H$. Seu posicionamento é simétrico em relação a altura do canal $\frac{H}{2}$ e com distância d (variável) relativa ao fim do comprimento do degrau.

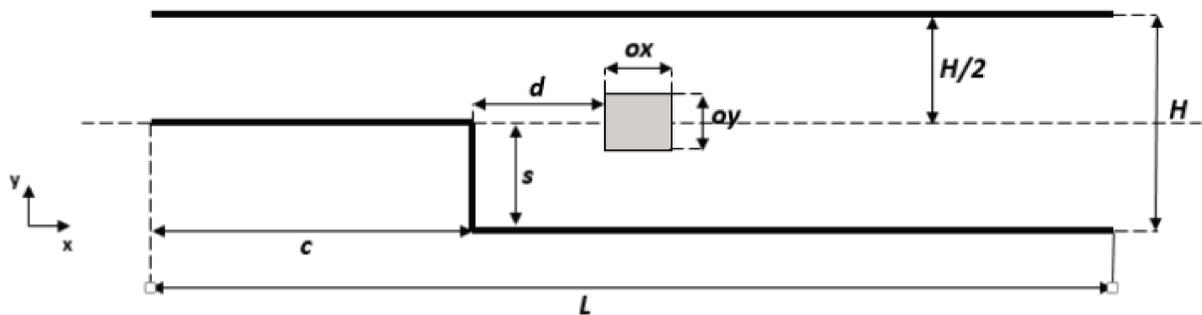


Figura 4.16: Geometria degrau com obstáculo

As condições iniciais e de contorno são as mesmas utilizadas no caso do degrau sem obstáculo. As condições de contorno na parede do obstáculo são as mesmas da parede do canal.

4.3.2 Resultados Obtidos

As simulações foram executadas para a mesma faixa de Reynolds em estudo até aqui: $100 \leq Re \leq 600$. Foi utilizada apenas a configuração numérica NUM1 nos casos relacionados a esta geometria.

O obstáculo de seção retangular foi inserido a duas distâncias $d = 2$ e $d = 4$ distantes da face do degrau descendente. Foram obtidos resultados em relação a variação do comprimento das zonas de recirculação devido a influência do redirecionamento de escoamento gerado pela presença do obstáculo. Foi utilizado apenas o método UNIFAES para obtenção dos resultados numéricos. A faixa de Reynolds estudada neste caso foi $400 \leq Re \leq 600$. A dimensão x_1 corresponde ao

comprimento normalizado para o ponto de descolamento localizado atrás da face do degrau, na parede inferior do canal. As dimensões x_2 e x_3 correspondem a formação da bolha na parede superior do canal. Estas variáveis estão Estas dimensões foram normalizadas da seguinte maneira:

$$x_{1,2,3} = \frac{(x_{1,2,3}-c)}{s}$$

Tabela 4.6: Resultados para dimensões x_1 , x_2 e x_3 para $d = 2$, na faixa de Reynolds estudada (Configuração NUM1).

<i>Re</i>	<i>Malha</i>	x_1 NUM1	x_2 Num. 1	x_3 NUM1
100	180x120	2.948	-	-
100	240x160	2.926	-	-
200	180x120	3.704	-	-
200	240x160	3.665	-	-
300	180x120	3.880	-	-
300	240x160	3.839	-	-
<i>Re</i>	<i>Malha</i>	x_1 NUM1	x_2 NUM1	x_3 NUM1
400	180x120	4.025	-	-
400	240x160	3.989	-	-
500	180x120	4.083	-	-
500	240x160	4.058	-	-
600	180x120	4.089	-	-
600	240x160	4.064	-	-

A tabela 4.6 mostra os resultados obtidos para as dimensões x_1 , x_2 e x_3 em dois refinamentos de malha diferentes: 180x120, 240x160. O código numérico utilizado é o *NUM1* e a distância relativa entre degrau e obstáculo é $d = 2$. Nota-se que o comprimento da zona de recirculação inferior tende a $x_1 = 4,0$, que é o valor correspondente a posição de início da geometria do obstáculo. Não é identificada a formação da zona de recirculação superior para a faixa de Reynolds estudada.

A tabela 4.7 mostra os resultados obtidos para as dimensões x_1 , x_2 e x_3 em dois refinamentos de malha diferentes: 180x120, 240x160. O código numérico utilizado é o *NUM1* e a distância relativa entre degrau e obstáculo é $d = 4$. Nota-se que o comprimento da zona de recirculação inferior tende a $x_1 = 8,0$, que é o valor correspondente a posição de início da geometria do obstáculo. Não é identificada a formação da zona de recirculação superior para a faixa de Reynolds estudada. Não se obteve convergência para o caso de $Re = 600$ nas configurações utilizadas.

Tabela 4.7: Resultados para dimensões x_1 , x_2 e x_3 para $d = 4$, na faixa de Reynolds estudada (Configuração NUM1).

Re	$Malha$	x_1 NUM1	x_2 NUM1	x_3 NUM1
100	180x120	3.035	-	-
100	240x160	3.004	-	-
200	180x120	5.098	-	-
200	240x160	5.075	-	-
300	180x120	6.881	-	-
300	240x160	6.877	-	-
400	180x120	7.527	-	-
400	240x160	7.550	-	-
500	180x120	7.721	-	-
500	240x160	7.738	-	-

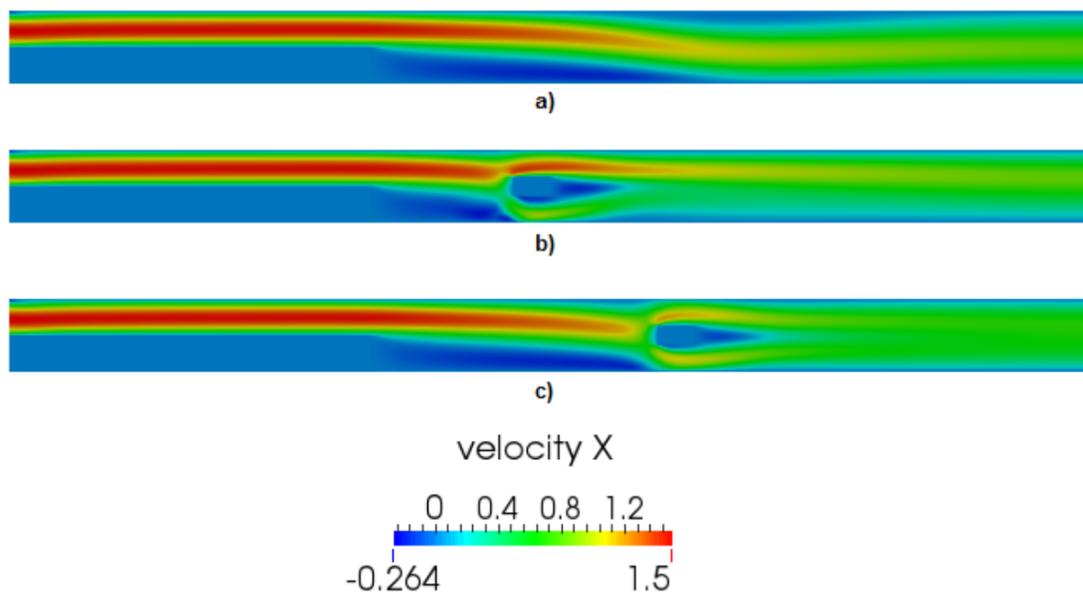


Figura 4.17: Campo de velocidades $Re = 500$. Para os casos: a) sem obstáculo; b) $d = 2$ e c) $d = 4$

É observado que a presença do obstáculo influencia o comportamento das regiões de recirculação características do escoamento de grau. A zona de recirculação presente na parede inferior do degrau tem sua redução mais acentuada quando a distância entre obstáculo e degrau é menor, além disso o efeito é maior para maiores números de Reynolds. Já a região de recirculação que estava presente na parede superior é suprimida pelo redirecionamento de fluxo

gerado pela presença do obstáculo. Isto também pode ser observado nos campos de velocidade exibidos nas figuras 4.17 e 4.18, para Reynolds 500 e 600 respectivamente.

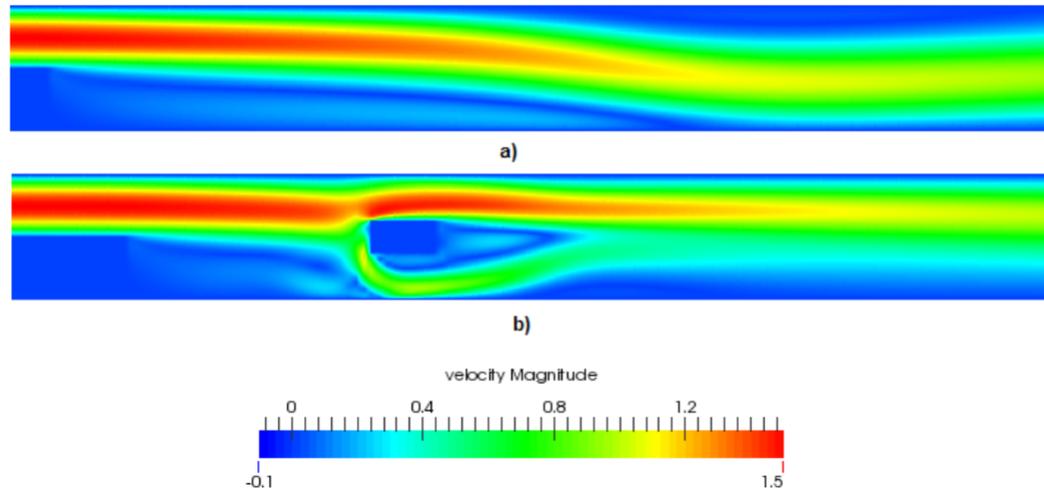


Figura 4.18: Campo de velocidades $Re = 600$. Para os casos: a) sem obstáculo; b) $d = 2$

Por fim seguem resultados relativos ao contorno de vorticidade para alguns número de Reynolds onde os resultados foram considerados pertinentes. Tanto para as distâncias $d = 2$ e $d = 4$.

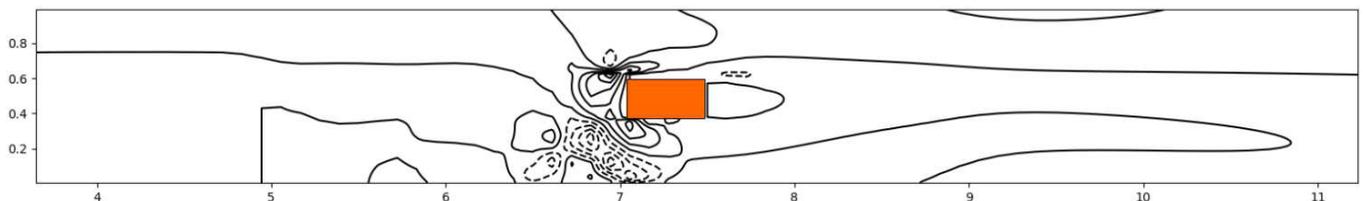


Figura 4.19: Degrau com Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 500$ e $d = 2$ (NUM1)

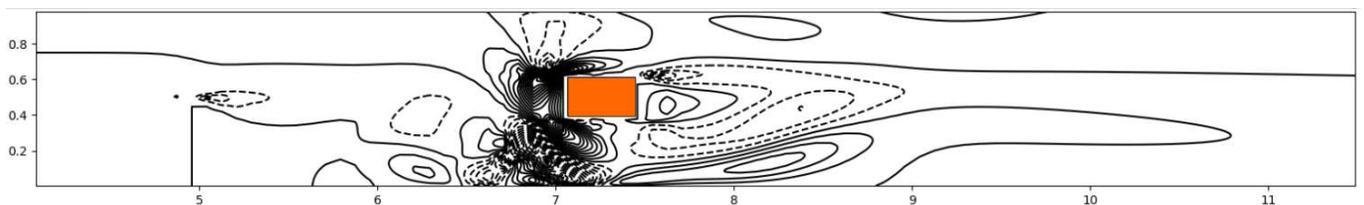


Figura 4.20: Degrau com Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 600$ e $d = 2$ (NUM1)

A partir das figuras 4.19 e 4.20 foi observado que não foi formada esteira de von Karman na

faixa de Reynolds estudada quando a distância entre degrau e obstáculo é igual a $d = 2$.

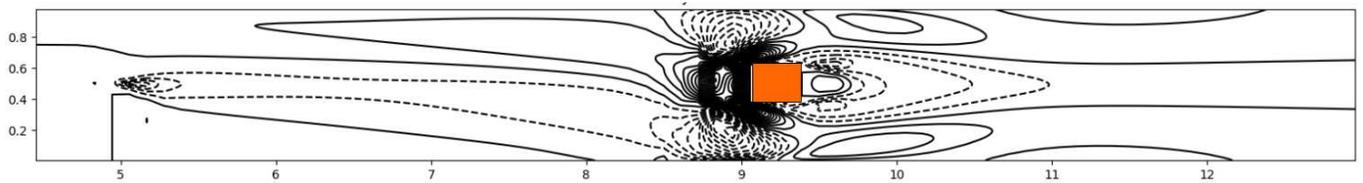


Figura 4.21: Degrau com Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 400$ e $d = 4$ (NUM1)

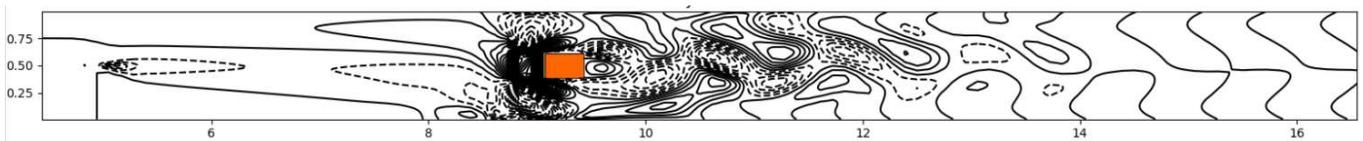


Figura 4.22: Degrau com Obstáculo: Contornos de vorticidade para $Re = 500$ e $d = 4$ (NUM1)

A partir das figuras 4.21 e 4.22 foi observado que foi formada esteira de von Karman em $d = 4$ quando $Re = 500$. Essa formação ocorreu em um Reynolds menor do que aquele encontrado no caso do escoamento ao redor do obstáculo sem o degrau. Calculando o número de Strouhal de maneira semelhante a feita anteriormente, isto é, a partir do gráfico do coeficiente de empuxo em função do tempo (figura 4.23), tem-se:

$$St = \frac{f^*}{Re} \approx \frac{1}{0,004 * 500} \approx 0,5$$

O número de Strouhal obtido para o obstáculo confinado está novamente acima do valor esperado para os casos discutidos da literatura contidos na revisão bibliográfica. A frequência de formação dos vórtices é maior do que a esperada. Além disso, o coeficiente de empuxo oscilou em torno de uma média menor que zero: $C_{l_{med}} \approx -0,052$.

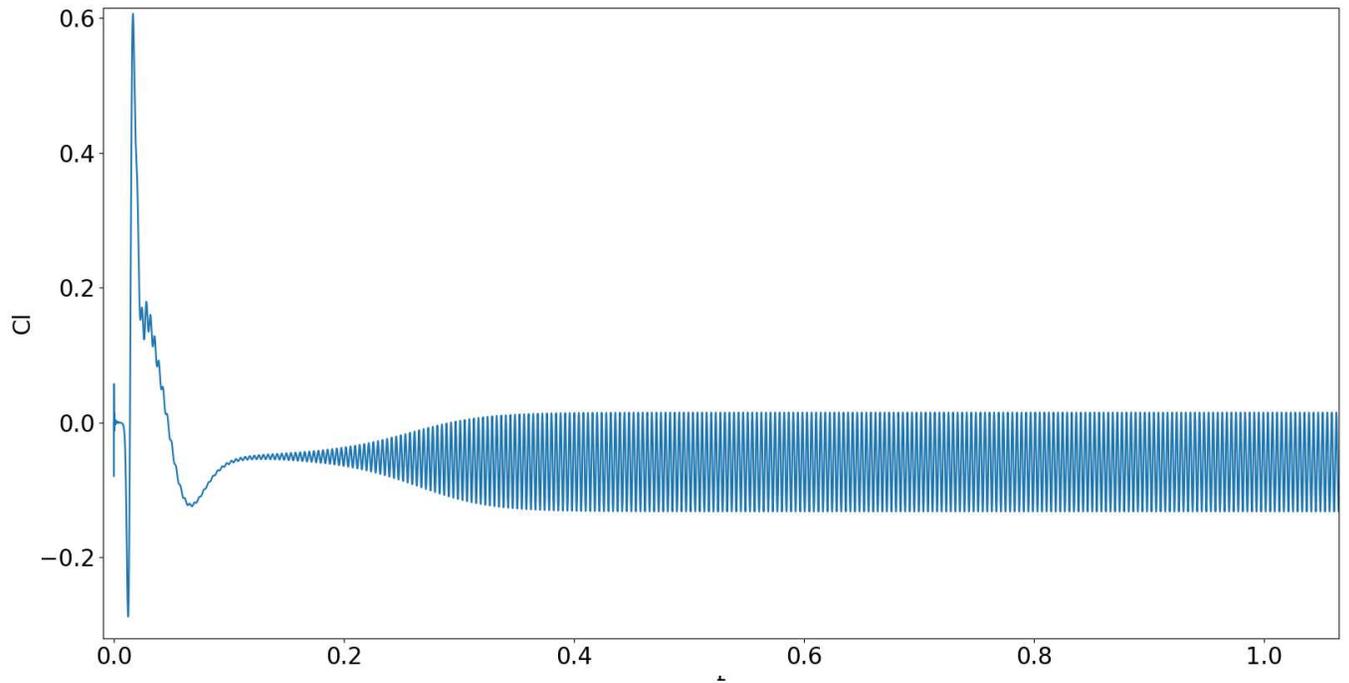


Figura 4.23: Degrau com Obstáculo: Gráfico do coeficiente de empuxo vs tempo para $Re = 500$ e $d = 4$ (NUM1)

5 Conclusões

O caso de estudo do escoamento sobre degrau foi validado com a literatura utilizando as configurações numéricas *NUM1* e *NUM2*. As mesmas também foram comparadas entre si, sendo *NUM1* mais próxima dos valores encontrados na literatura para os refinamentos de malha utilizados. Um possível fator para isso é a diferença na ordem de grandeza do erro de truncamento entre os métodos de discretização espacial. Sobre a física do problema, é notado que comprimento das zonas de recirculação, características deste escoamento, aumentam quanto maior o número de Reynolds, sendo esta variação quase linear. Ainda, sobre o escoamento em degrau, na faixa de Reynolds $100 \leq Re \leq 300$ foi identificada apenas uma zona de recirculação (definida por x_1) localizada na parede inferior do canal. A partir de $Re = 400$ é notada a formação de uma zona de recirculação secundária (definida por x_2 e x_3) na parede superior do canal.

No caso do escoamento ao redor do obstáculo de seção retangular confinado em um canal, foi notado que o fenômeno da esteira laminar de Von Karman esteve presente apenas para o caso de $Re = 600$. Até $Re = 500$ não foi notado a esteira. Portanto, o Reynolds crítico desta transição de regime possivelmente esta na faixa entre 500 e 600. Sobre os resultados relacionados ao número de Strouhal, notou-se que o valor obtido é acima do esperado em relação ao que a literatura informa em casos de obstáculo de seção retangular ou quadrangular. É sugerido que as frequências são maiores na formação de vórtices dependendo do confinamento. Um fato que pode influenciar na diferença obtida nos resultados corresponde aos métodos numéricos utilizados nas simulações encontradas na literatura serem de ordem maior (aproximação mais fina) que os empregados nos códigos deste trabalho.

Já em relação ao caso de foco deste trabalho, o escoamento sobre degrau com presença de obstáculo de seção retangular, foi notado que é possível controlar significativamente o comportamento das zonas de recirculação do degrau através do redirecionamento do fluxo gerado pelo posicionamento do obstáculo. Como resultados obtidos, a zona de recirculação localizada na parede inferior do canal é reduzida e a encontrada anteriormente na parede superior, para $Re \geq 400$ é suprimida. A introdução do obstáculo resulta no surgimento da esteira de Von Karman para $Re = 500$ no caso da distância $d = 4$ entre obstáculo e degrau. Para a distância $d = 2$ não foi identificado o surgimento deste regime de escoamento na faixa de Reynolds estudada. De forma similar, pode-se dizer que a introdução de um degrau no escoamento de um obstáculo confinado gera um Reynolds crítico de transição maior para uma distância $d = 2$ entre as geometrias.

O método de interpolação espacial UNIFAES foi testado em problemas transientes obtendo resultados satisfatoriamente estáveis. Além disso, como esperado, obteve-se um erro de aproximação inferior quando comparado ao esquema de discretização espacial upwind.

6 Sugestões para Trabalhos Futuros

Com relação a trabalhos futuros é sugerido a simulação de uma maior quantidade de posicionamentos do obstáculo retangular em relação ao degrau, tanto na direção horizontal como introduzindo variações verticais para se obter maiores possibilidades de controle sobre a formação das zonas de recirculação. A introdução de uma análise incluindo transferência de calor pode ser pertinente na aplicação prática deste fenômeno em trocadores de calor.

Sobre a malha computacional é sugerida a utilização de malhas não uniformes ou não estruturadas na simulação dos casos deste trabalho. Tendo como objetivo refinar de forma mais detalhada as regiões em torno do obstáculo de seção retangular. A implementação e métodos de interpolação de alta ordem também pode ser considerada, verificando assim possíveis variações no número de Strouhal e Reynolds crítico.

Por fim, a modelagem tridimensional seria interessante do ponto de vista da comparação com resultados bidimensionais. Para atingir uma faixa maior de número de Reynolds a introdução de uma análise turbulenta é sugerida.

Referências

ADAMS, E.W. e JOHNSTON, J.P. Effects of the separating shear layer on the reattachment flow structure. part 2: Reattachment length and wall shear stress. **Experiments in Fluids** **6**, pp. 493–499, 1988.

ALLEN, N.D. e SOUTHWELL, R. Relaxation methods applied to determine the motion, in two dimensions, of a viscous flow past a fixed cylinder. **Quart. J. Mech. And Applied Math.**, v. 8, n. 2, 129–145, 1955.

ARMALY, B.F.; DURST, F.; PEREIRA, J.C.F. e SCHONUNG, B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. **Journal of Fluid Mechanics**, , n. 127, 473–496, 1983.

BISWAS, G.; BREUER, M. e DURST, F. Backward-facing step flows for various expansion ratios at low and moderate reynolds numbers. **ASME**, v. 126, n. 374, 2004.

BLEVINS, R.D. **Flow-Induced Vibration**. Second ed., 2001.

CHAPMAN, D.R.; KUEHN, D.M. e LARSON, H.K. Investigation of separated flows with emphasis on the effect of transition. 1958.

CHORIN, A.J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. 1967.

DE OLIVEIRA FORTUNA, A. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos**. 2012.

DYKE, M.V. **An Album of Fluid Motion**. The Parabolic Press, 1982.

ETURK, E. Numerical solutions of a 2-d steady incompressible flow over a backward-facing step, part i: High reynolds number solutions. **Computers and FLuids**, , n. 37, 633–655, 2008.

FERZIGER, J.H. e PERIĆ, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. 3rd ed., 2002.

FIGUEIREDO, J.R. A unified finite-volume finite-differencing exponential-type convective-diffusive fluid transport equations. **J. Braz. Soc. Mech. Sci.**, v. 3, n. 2, 371–391, 1997.

FIGUEIREDO, J.R. e DE OLIVEIRA, K.P.M. Comparative study of unifaes and other finite-volume schemes for the discretization of advective and viscous fluxes in incompressible navier-stokes equations, using various mesh structures. **Numerical Heat Transfer, Part B**, , n. 55, 379–405, 2009.

GALLETTI, B.; BRUNEAU, C.; ZANNETTI, L. e IOLLO, A. Low-order modelling of laminar flow regimes past a confined square cylinder. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 503, 161–170, 2004.

GARTLING, K.D. A test problem for outflow boundary conditions - flow over a backward-facing step. **International Journal of Numerical Methods in Fluids**, , n. 11, 953–967, 1990.

HARLOW, F.H. e WELCH, J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. 1965.

INCROPERA. **Fundamentals of heat and mass transfer**. 6 ed., 2007.

KIM, J. e MOIN, P. Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equations. **Journal of Computation Physics**, , n. 59, 308–323, 1985.

KUMAR, N.S. e BISWAS, G. A finite element study of the onset of vortex shedding in a flow past two-dimensional circular cylinder. 2008.

LEE, T. e MATEESCU, D. Experimental and numerical investigation of 2-d backward-facing step flow. **Journal of Fluids Structures**, pp. 703–716, 1998.

LLAGOSTERA, J. e FIGUEIREDO, J.R. Application of the unifaes discretization scheme to mixed convection in a porous layer with a cavity, using the darcy model. **J. Porous Media**, v. 3, n. 2, 139–154, 2000a.

LLAGOSTERA, J. e FIGUEIREDO, J.R. Numerical study on mixed convection in a horizontal flow past a square porous cavity using unifaes scheme. **J. Braz. Soc. Mech. Sci.**, v. 4, n. 2, 583–597, 2000b.

LOMAX, H. e PULLIAM, T.H. **Fundamentals of Computational Fluid Dynamics**. 1999.

MATEESCU, D.; PAIDOUSSIS, M.P. e BÉLANGER, F. A time-integration method using artificial compressibility for unsteady viscous flows. **Journal of Sound and Vibration**, pp. 197–205, 1994.

MENEGHINI, J.R. Projetos de pesquisa no tópico de geração e desprendimento de vórtices no escoamento ao redor de cilindros. 2002.

MUZAFERIJA, S.; PERIC, M. e SEIDL, V. Computation of flow around circular cylinder in a channel. **Internal Report, University of Hamburg**, 1995.

PATANKAR, S.V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. 1980.

RAJANI, B.N.; KANDASAMY, A. e MAJUMDAR, S. Numerical simulation of laminar flow past a circular cylinder. 2008.

RHIE, C.M. e CHOW, W.L. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. 1983.

SOHANKAR, A.; NORBERGB, C. e DAVIDSON, L. Numerical simulation of unsteady low-reynolds number flow around rectangular cylinders at incidence. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 503, 189–201, 1997.

SOHN, J. Evaluation of fidap on some classical laminar and turbulent benchmarks. **International Journal of Numerical Methods in Fluids**, , n. 8, 1469–1490, 1988.

SUMER, B.M. e FREDSOE, J. **Hydrodynamics around cylindrical structures**. 1997.

VERSTEEG, H.K. e MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics**. Second edition ed., 2007.

WERLÉ, H. Le tunnel hydrodynamique au service de la recherche aérospatiale. , n. 156, 1974.

YOON, D.H.; YANG, K.S. e CHOI, C.B. Flow past a square cylinder with an angle of incidence. **Physics of Fluids**, , n. 22, 2010.