



EDUARDO FERREIRA GASPARI

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE *ROLL WAVES* EM CANAIS FECHADOS

CAMPINAS
2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

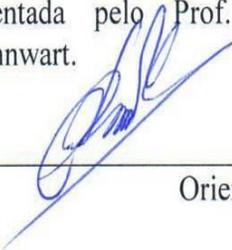
EDUARDO FERREIRA GASPARI

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE *ROLL WAVES* EM CANAIS FECHADOS

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Bannwart

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências e Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Doutor em Ciências e Engenharia de Petróleo na área de Exploração.

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Eduardo Ferreira Gaspari e orientada pelo Prof. Dr. Antonio Carlos Bannwart.



Orientador

CAMPINAS
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

G213s Gaspari, Eduardo Ferreira
Simulação numérica de roll waves em canais
fechados / Eduardo Ferreira Gaspari. --Campinas, SP:
[s.n.], 2013.

Orientador: Antonio Carlos Bannwart.
Tese de Doutorado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto
de Geociências.

1. escoamento multifásico. 2. Método dos volumes
finitos. 3. Equações diferenciais hiperbólicas. I.
Bannwart, Antonio Carlos, 1955-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Mecânica e Instituto de Geociências. III. Título.

Título em Inglês: Roll waves numerical simulation in closed channels

Palavras-chave em Inglês: Multiphase flow, Finite volume method, Hyperbolic
differential equations

Área de concentração: Exploração

Titulação: Doutor em Ciência e Engenharia de Petróleo

Banca examinadora: Antonio Carlos Bannwart, Eugênio Spanó Rosa, Erick
de Moraes Franklin, Geraldo Afonso Spinelli Martins
Ribeiro, Jose Roberto Fagundes Netto

Data da defesa: 27-02-2013

Programa de Pós Graduação: Ciência e Engenharia de Petróleo



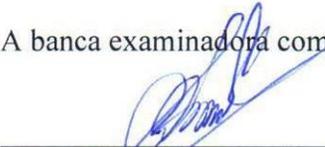
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

TESE DE DOUTORADO

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE *ROLL WAVES* EM CANAIS
FECHADOS**

Autor: Eduardo Ferreira Gaspari
Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Bannwart

A banca examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta tese:



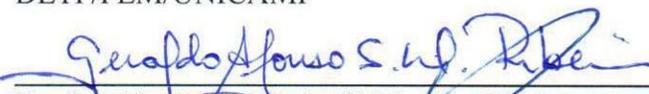
Prof. Dr. Antonio Carlos Bannwart, Presidente
DEP/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa
DE/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Erick de Moraes Franklin
DETF/FEM/UNICAMP



Dr. Geraldo Afonso Spinelli Martins Ribeiro
PETROBRAS



Dr. José Roberto Fagundes Netto
PETROBRAS

Campinas, 27 de Fevereiro de 2013

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu pai, à minha mãe e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Petrobras pela oportunidade de fazer este doutorado. Oportunidade que, em um mundo focado em custos e lucros, poucas empresas têm a coragem de oferecer aos seus empregados. Foram quatro anos de grande capacitação profissional que espero saber utilizar no meu trabalho, mas ainda mais importante, quatro anos de rejuvenescimento intelectual. Um grande privilégio.

Agradeço ao meu Orientador, Antonio Carlos Bannwart, pela paciência e confiança em lidar com um aluno de pensamento caótico, com pouco método e que em vários momentos pareceu não ter nada de relevante para apresentar.

Agradeço ao Professor Eugênio Spanó Rosa pela generosidade em oferecer o laboratório do seu grupo de pesquisa para que se pudesse fazer o conjunto de testes que vieram a ser esclarecedores sobre o objeto de estudo deste trabalho.

Por último, mas não menos importante, agradeço a todas as pessoas que conheci na UNICAMP e em Campinas e que me deram a honra de permitir se tornarem minhas amigas. Durante esta jornada de quatro anos que agora se encerra, nada teria alguma relevância ou graça para mim, nem mesmo esta tese, se não houvesse a amizade de vocês, muito obrigado.

*“Eu quase que nada não sei. Mas desconfio de
muita coisa.”*

Guimarães Rosa

RESUMO

Utilizando um método numérico especializado em problemas hiperbólicos chamado *Riemann Solver*, é feito um estudo para avaliar o processo de evolução de *roll waves* em canais fechados. Todo o estudo se baseia em fenômenos de propagação de ondas hiperbólicas do tipo ondas de gravidade. Foi utilizado um modelo unidimensional para representar a dinâmica das *roll waves*. Inicialmente foi feita uma análise das velocidades características envolvidas, a qual indicou, para o arranjo estratificado, um fraco acoplamento entre os fenômenos de propagação de onda mais relacionados com a compressibilidade dos fluidos e os fenômenos de propagação de ondas mais relacionados com a variação hidrostática na seção transversal do canal. Os resultados desta análise foram utilizados para justificar uma modelagem de *roll wave* considerando os fluidos como incompressíveis. Testes numéricos também foram feitos, demonstrando que a hipótese de fluidos incompressíveis não leva a uma perda de qualidade na modelagem de ondas de gravidade em canais fechados. Foi observada a fragilidade da hipótese de perfil hidrostático de pressão nos modelos de dois fluidos e é proposta uma modificação para este perfil de pressão considerando os efeitos dinâmicos devido à forma rugosa da interface em um escoamento estratificado instável. São feitas comparações com resultados experimentais de literatura para o filme de líquido em regime laminar e foram feitos experimentos para o filme de líquido em regime turbulento. As comparações entre as simulações e os resultados experimentais demonstrando que o modelo proposto é consistente.

Palavras-Chave: Escoamento multifásico, Equações Diferenciais Hiperbólicas, Método de Volumes Finitos.

ABSTRACT

Using a Riemann Solver numerical method, a study to evaluate the process of evolution of roll waves in closed channels was implemented. The whole study is based on the phenomena of hyperbolic gravity waves propagation. It was used a one-dimensional model to represent the dynamics of roll waves. Initially an analysis of the propagation wave velocities involved on to the stratified flow was done, a weak coupling between the wave propagation phenomena more closely related to fluid compressibility and wave propagation phenomena more closely related to the change in the void fraction, due the gravity waves, was verified. The results of this analysis were used to justify a roll wave modeling considering the fluids as incompressible. Numerical tests were also performed, showing that the hypothesis of incompressible fluids does not lead to a loss of quality in the modeling of gravity waves in closed channels. It was observed a fragility of the hydrostatic pressure profile assumption to modeling unstable stratified flow. It was proposed a modification to this pressure profile, considering the dynamic effects of the roughness interface. Comparisons were made with experimental results from the literature for the liquid film in laminar and experiments made for the film of liquid in turbulent flow. This comparison between simulations and experimental results demonstrate that the proposed model is consistent.

Keywords: Multiphase flow, Hyperbolic differential equations, Finite volume method.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	xix
LISTA DE NOMENCLATURAS	xxiii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Motivação	2
1.2. Objetivos.....	3
1.3. Roteiro	4
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	7
2.1. Classificação das ondas envolvidas em problemas de escoamento estratificado transiente	7
2.2. Estabilidade de filme de líquido em arranjo estratificado	10
2.3. Roll waves em canais abertos	17
2.4. Roll waves em canais fechados	18
2.5. Hiperbolicidade e método numérico.....	21
2.6. Conclusão	25
3. MODELO UNIDIMENSIONAL PARA ESCOAMENTO ESTRATIFICADO TRANSIENTE	27
3.1. Equações 1-D para escoamento estratificado transiente	27
3.2. Sobre a Hipótese de Água Rasa	36
3.3. Acoplamento entre a família de ondas sônicas e a de ondas de gravidade, a simplificação de escoamento incompressível	38
3.4. Tensões cisalhantes e fatores de forma do perfil de velocidade	44

4. METODOLOGIA NUMÉRICA	49
4.1. Descrição do método numérico utilizado	49
4.2. Estudo de caso, roll waves com filme de líquido em regime laminar, hipótese de perfil hidrostático de pressão.....	57
4.3. Estudo de casos, roll wave com filme de líquido em regime turbulento, hipótese de perfil hidrostático de pressão.....	68
5. HIPERBOLICIDADE.....	85
6. COMPARAÇÃO COM EXPERIMENTOS	109
7. CONCLUSÕES.....	123
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	127
Apêndice A - Modelagem numérica para estudo de roll waves em canais fechados	131
7.1. Sobre as equações para arranjo estratificado transiente para fases compressíveis	131
7.2. Sobre as variáveis utilizadas no modelo	132
7.3. Sobre as derivadas dos termos de pressão e hidrostática.....	133
7.4. Explicitando as derivadas de hidrostática.....	138
7.5. Determinação da Matriz de Roe	140
7.6. Condições de contorno para o modelo sem termo fonte (homogêneo)	147
7.7. Termos fontes e método de passos fracionários	149
7.8. Correção das condições de contorno para o método de passos fracionários	151
7.9. Modelo sem termos fontes para o caso de fases incompressíveis	153
7.10. Comparação entre o caso com compressibilidade e o caso sem compressibilidade	159
Apêndice B: Modelo simplificado para o arranjo estratificado	163
Apêndice C: Fator de forma do perfil de velocidades (filme de líquido em regime turbulento, gás em regime turbulento)	171

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Exemplo de escoamento estratificado estável	1
Figura 1.2 Exemplo de escoamento estratificado instável em condição de <i>roll wave</i>	2
Figura 2.1 Variedade de família de ondas em um arranjo estratificado	10
Figura 2.2 Onda solitária em um escoamento estratificado.....	13
Figura 2.3 Exemplo de <i>roll wave</i> em canal aberto	18
Figura 2.4 Exemplificação das premissas utilizadas por Jonhson et al,2009	20
Figura 2.5 Gás passando por uma expansão abrupta devido ao choque de onda de gravidade.....	25
Figura 3.1 Estrutura simplificada de um arranjo estratificado com interface lisa	28
Figura 3.2 Ação da pressão interfacial em um pequeno trecho rugoso na interface.....	31
Figura 3.3 Região onde forças dinâmicas podem dominar a variação do perfil de pressão em um escoamento estratificado.....	37
Figura 3.4 Exemplo de perfil de velocidade para filme de líquido em regime laminar	47
Figura 3.5 Fator de forma, regime laminar	48
Figura 4.1 Condição inicial do problema de Riemann	50
Figura 4.2 Discretização de uma função contínua.....	50
Figura 4.3 Procedimento para resolução de um problema hipérbólico utilizando volumes finitos	51
Figura 4.4 Resultado experimental 1, Bruno & McCready, $Re_g = 12180$, $Re_l = 300$	58
Figura 4.5 Resultado experimental 2, Bruno e McCready, $Re_g = 9975$, $Re_l = 300$	59
Figura 4.6 Comparação resultado experimental e simulação, Caso 1	62
Figura 4.7 Comparação, resultado experimental e simulação, Caso 2	64
Figura 4.8 Exemplo de perfil de filme para experimento 1, simulado	65
Figura 4.9 Exemplo de perfil de KHi, experimento 1 simulado.....	65
Figura 4.10 Espectro de frequência para a simulação de um canal mais longo.....	66
Figura 4.11 Resultado de simulação, experimento 1, para fator de forma =1	67
Figura 4.12 Perfil de roll wave, caso 1	69

Figura 4.13 Termo KHi X Holdup, caso 1, 68.91 segundos	70
Figura 4.14 Velocidades médias das fases, caso 1, 68,91 segundos.....	71
Figura 4.15 Fluxo volumétrico da mistura, caso 1, 68.91 segundos	72
Figura 4.16 Velocidade Característica, caso 1, 68.91 segundos.....	72
Figura 4.17 Fenômenos desprezados no modelo de escoamento estratificado transiente	73
Figura 4.18 Perfil de roll wave, caso 2	76
Figura 4.19 Termo KHi X Holdup, caso 2, 82 segundos	77
Figura 4.20 Velocidades médias das fases, caso 2, 82 segundos.....	77
Figura 4.21 Velocidade Característica, caso 2, 82 segundos.....	78
Figura 4.22 Amplificação de roll-wave, caso 2	78
Figura 4.23 Perfil de roll wave, Caso 3	80
Figura 4.24 Termo KHi X Holdup, Caso 3, 88 segundos.....	80
Figura 4.25 Velocidades médias das fases, Caso 3, 88 segundos.....	81
Figura 4.26 Velocidade Característica, Caso 3, 88 segundos.....	81
Figura 4.27 Amplificação de roll wave, caso 3	82
Figura 5.1 Região onde o perfil de pressão é alterado pela ação da interface rugosa.....	93
Figura 5.2 Exemplo de interface rugosa	95
Figura 5.3 Aproximação de interface rugosa.....	96
Figura 5.4 Variação de pressão próximo a um semicilindro, escoamento potencial.....	97
Figura 6.1 Esquemático do circuito de teste para experimentos de roll-waves.....	109
Figura 6.2 Esquema de sondas capacitivas emu ma estação de medição	110
Figura 6.3 Comparação entre a variação no tempo do holdup experimental e simulado na estação 4, velocidade superficial de gás de 7,44 m/s, velocidade superficial de líquido de 0,19 m/s.....	113
Figura 6.4 Comparação entre a variação no tempo do holdup experimental e simulado na estação 4, velocidade superficial de gás de 6,6 m/s, velocidade superficial de líquido de 0,19 m/s.....	113
Figura 6.5 Comparação entre a variação no tempo do holdup experimental e simulado na estação 4, velocidade superficial de gás de 5,47 m/s, velocidade superficial de líquido de 0,19 m/s.....	114
Figura 6.6 Comparação da faixa de velocidade dos choques, estações 3 e 4, velocidade superficial de gás de 7,44 m/s.....	114

Figura 6.7 Comparação da faixa de velocidade dos choques, estações 3 e 4, velocidade superficial de gás de 6,6 m/s.....	115
Figura 6.8 Comparação da faixa de velocidade dos choques, estações 3 e 4, velocidade superficial de gás de 5,47 m/s.....	115
Figura 6.9 Comparação holdup médio, estações 2, 3 e 4, caso com velocidade superficial de gás de 7,44 m/s.....	116
Figura 6.10 Comparação holdup médio, estações 2, 3 e 4, caso com velocidade superficial de gás de 6,6 m/s.....	116
Figura 6.11 Comparação holdup médio, estações 2, 3 e 4, caso com velocidade superficial de gás de 5,47 m/s.....	117
Figura 6.12 Espectro de frequência para o holdup, experimento e simulação, velocidade superficial de gás de 7,44 m/s.....	118
Figura 6.13 Espectro de frequência para o holdup, experimento e simulação, velocidade superficial de gás de 6,6m/s.....	119
Figura 6.14 Espectro de frequência para o holdup, experimento e simulação, velocidade superficial de gás de 5,47 m/s.....	120
Figura C.1 Perfis de velocidade levantados experimentalmente para filme de líquido em golfadas	171
Figura C.2 Comparação, perfil experimental com perfil de lei de parede de Spalding.....	173
Figura C.3 Composição de perfis para os escoamento estratificado	174
Figura C.4 Comparação perfil experimental com perfil teórico.....	179
Figura C.5 Comparação perfil experimental com perfil numérico Soria (2009).....	180
Figura C.6 Fator de forma para a fase líquida	181
Figura C.7 Fator de forma para a fase gasosa.....	181

LISTA DE NOMENCLATURAS

SIGLAS	Símbolos Latinos	UNIDADE SI
a	altura máxima de um canal retangular	m
a_{\pm}	velocidade de propagação de onda dinâmica	m/s
A	matriz Jacobiana	
A_t	área da tubulação	m^2
B	constante de interseção para lei de parede	-
c	celeridade	m/s
c_c	velocidade de propagação de onda cinemática	m/s
c_d	coeficiente de descarga	-
c_g	velocidade de propagação do som no gás	m/s
c_l	velocidade de propagação do som no líquido	m/s
c_0	velocidade de propagação do som no gás em um estado inicial	m/s
C_{vm}	coeficiente de massa virtual	-
D	diâmetro da tubulação	m
f	frequência	Hz
F	diferença entre as forças de atrito por unidade de comprimento entre a fase gás e fase líquida de um arranjo estratificado	kg/s^2
$F(\theta)$	termo de correção da pressão interfacial média em uma superfície rugosa	-
Fa	termo adimensional	-

f_i	fator de fricção na interface	-
f_g	fator de fricção entre o gás e a parede do canal	-
f_l	fator de fricção entre o líquido e a parede do canal	-
g	aceleração da gravidade	m/s ²
h	altura do filme de líquido	m
$h_{máx}$	altura máxima de um canal com forma genérica	m
H	vetor de fluxos conservativos	
Hl	contribuição da hidrostática na seção transversal do canal para a fase líquida	kg/m ³
Hg	contribuição da hidrostática na seção transversal do canal para a fase líquida	kg/m ³
j	fluxo volumétrico da mistura	m/s
k	número de onda	m ⁻¹
KHi	termo adimensional relacionado com a estabilidade do arranjo estratificado	-
KHi_t	termo adimensional relacionado com a estabilidade do arranjo estratificado na transição entre interface lisa e rugosa	-
L	comprimento característico de uma interface rugosa	m
n_g	vetor unitário ortogonal à interface no lado da fase gás	-
n_{gx}	Componente na direção x do vetor unitário ortogonal à interface no lado da fase gás	-
p_0	pressão do escoamento em um estado inicial	Pa
p_g	pressão na fase gás	Pa
p_i	pressão na interface	Pa
p_l	pressão na fase líquida	Pa
p_∞	pressão nas proximidades da interface	Pa
R	matriz de Roe	
\tilde{R}	matriz de Roe aproximada	
Re_g	Reynolds do gás	-

Re_l	Reynolds do líquido	-
s	velocidade de propagação de um choque, velocidade de propagação de um trem de onda	m/s
S_i	perímetro da interface	m
S_{wl}	perímetro molhado pela fase líquida	m
S_{wg}	perímetro molhado pela fase gás	m
t	tempo	s
u	vetor de variáveis conservativas	
u^*	velocidade de fricção	m/s
u^+	velocidade adimensional	-
\tilde{u}	vetor de variáveis conservativas do problema aproximado de Riemann	
u_g	velocidade da fase gasosa	m/s
u_{g0}	velocidade da fase gasosa para um estado inicial	m/s
u_l	velocidade da fase líquida	m/s
u_{l0}	velocidade da fase líquida para um estado inicial	m/s
U_{gs}	velocidade superficial de gás	m/s
U_{ls}	velocidade superficial de líquido	m/s
U_{sgt}	velocidade de referência para a determinação do fator de atrito interfacial em uma interface rugosa	m/s
W	autovetores	
w	variáveis auxiliares para o cálculo da matriz de Roe	
x	coordenada seguindo o comprimento do canal	m
y	coordenada ortogonal ao eixo longitudinal do canal	m
y^+	coordenada adimensional ortogonal ao eixo longitudinal do canal	-

Símbolos Gregos

α	fração de vazio	-
----------	-----------------	---

α'	perturbação sobre a fração de vazio	-
α_0	condição inicial para a fração de vazio	-
Γ_g	fator de forma do perfil de velocidade para a fase gás	-
Γ_l	fator de forma do perfil de velocidade para a fase líquida	-
κ	constante de Von Karmán	-
λ	comprimento de onda	m
λ_i	autovalores ou velocidades características	m/s
μ_g	viscosidade dinâmica do gás	kg m/s
μ_l	viscosidade dinâmica do líquido	kg m/s
ϕ	função espectral	cm ² s, s
θ	ângulo entre o eixo longitudinal do canal e a horizontal, ou coordenada paramétrica quando a um trecho característico da interface rugosa é representada como um semi-cilindro	rad
ρ_a	massa específica da fase gasosa nas condições atmosféricas	kg/m ³
ρ_g	massa específica da fase gasosa	kg/m ³
ρ_{g0}	massa específica da fase gasosa em um estado inicial	kg/m ³
ρ_l	massa específica da fase líquida	kg/m ³
ρ_{l0}	massa específica da fase líquida em um estado inicial	kg/m ³
σ	tensão superficial	N/m
τ	coordenada curvilínea relacionada com a interface rugosa	
τ_i	tensão de cisalhamento na interface	Pa
τ_{wl}	tensão de cisalhamento da fase líquida com a parede	Pa
τ_{wg}	tensão de cisalhamento da fase gasosa com a parede	Pa
ω	frequência	rad/s

1. INTRODUÇÃO

Roll waves são ondas especiais que, no caso de escoamento em canal fechado, se desenvolvem no arranjo estratificado. O escoamento estratificado pode ser estável ou instável. Em sua situação estável, é possível sempre estabelecer um escoamento em regime permanente com a disposição das fases bem definidas, altura de filme de líquido constante com uma interface sem apresentar ondulações. Esta é uma condição relativamente fácil de ser modelada. Na condição instável, o arranjo estratificado não consegue manter uma altura de filme de líquido constante e sua interface se torna ondulada. As ondas se desenvolvem em um largo espectro de frequências, porém as frequências mais baixas (com comprimento bem maior que o diâmetro/altura do canal) levam à evolução de ondas de amplitudes maiores, da ordem de grandeza da altura de filme de líquido e, por isto, podem dar a impressão de que apenas uma frequência de onda existe no arranjo, mesmo com um largo espectro de frequência atuando no sistema. Este tipo de onda que se desenvolve no arranjo estratificado instável é chamado de *roll-wave*. As figuras a seguir exemplificam a diferença entre um escoamento em situação estável e um escoamento estratificado com *roll-waves*.

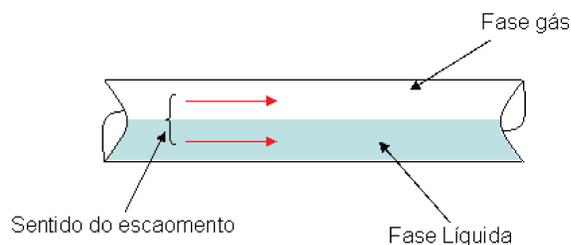


Figura 1.1 Exemplo de escoamento estratificado estável

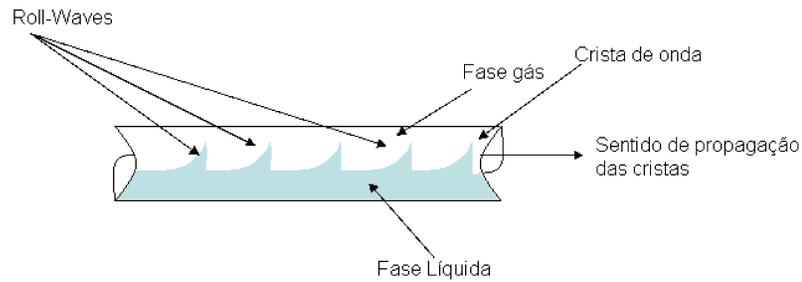


Figura 1.2 Exemplo de escoamento estratificado instável em condição de *roll wave*

Na Figura (1.2), vale observar que a escala não respeita o comprimento de uma *roll wave*, ondas deste tipo tem, normalmente, um comprimento superior a 20 diâmetros.

1.1. Motivação

Roll-waves na indústria de petróleo são mais comuns em gasodutos. Eventualmente, em um gasoduto, as velocidades médias da fase gás e da fase líquida não são propícias à transição estratificado-golfada, mesmo com a interface em uma condição instável. Quando a velocidade média de gás é muito superior à velocidade média da fase gás, o filme de líquido se torna delgado e incapaz de atingir o topo do canal em um processo de desestabilização. Neste caso, ocorre a formação de *roll waves*. A possibilidade de formação de *roll waves* em gasodutos na indústria de petróleo não deve ser desprezada, pois situações em que o filme de líquido é delgado não é incomum nestes gasodutos. Nos modelos utilizados nos projetos de gasodutos é comum se tratar erroneamente uma situação de *roll wave* como se fosse um arranjo golfada. Este tratamento errôneo de uma condição de *roll wave* pode levar a erros importantes na previsão do volume médio de líquido e das pressões requeridas para o transporte dos fluidos, variáveis importantes no projeto de um gasoduto. Para um bom projeto de gasodutos, torna-se importante o desenvolvimento de modelos e simuladores capazes de distinguir situações em que se tenha um escoamento em um arranjo do tipo golfada ou uma condição do tipo *roll-wave*. Existem atualmente poucos simuladores adequados e capazes de levar em conta uma condição de escoamento do tipo *roll-wave*. Além disto, a modelagem deste tipo de problema ainda se encontra em um estágio incompleto. Justificando assim o esforço na melhoria da modelagem deste

problema e o desenvolvimento de simuladores capazes de representar este problema adequadamente.

1.2. Objetivos

O trabalho que será apresentado teve como objetivo desenvolver um simulador com o foco no processo de evolução de *roll-waves*. Utilizou-se um modelo de dois-fluidos unidimensional e transiente para representar este processo de evolução. O método numérico escolhido para o desenvolvimento do simulador foi do tipo *Riemann Solver*. Com o simulador, avaliou-se o processo de evolução de *roll waves* em canais fechados com o filme de líquido em regime laminar e em regime turbulento. O método do tipo *Riemann Solver* garantiu a captura adequada dos choques além de uma alta resolução destes. Do que foi verificado neste estudo, métodos que não tenham esta habilidade de capturar e obter alta resolução dos choques não devem ser utilizados para a simulação de *roll waves*. Foi verificado como perdas de carga localizadas promovidas pelo choque na *roll wave* alteram a forma destas ondas.

Foi observado, ao longo do trabalho, que os modelos de dois-fluidos unidimensionais indicados na literatura para a simulação numérica de escoamento estratificado transiente invariavelmente se tornavam mal-postos quando se fazia o estudo de evolução de *roll-waves*. As velocidades características se tornavam complexas e isto impedia a simulação completa do processo de evolução das ondas. Este foi o principal desafio deste trabalho, desenvolver simulações consistentes da evolução de *roll-waves*, evitando que o modelo de dois-fluidos se torne mal-posto. Para tanto, foi proposto um novo mecanismo que foi incluído no modelo de dois fluidos. Este mecanismo atua apenas no escoamento estratificado quando este se encontra em uma condição instável e indica a forma como ondas de curto comprimento na interface interagem com ondas de comprimento mais longo. A proposição deste mecanismo pode ser entendido como o principal resultado deste trabalho.

Finalizando, alguns poucos experimentos foram levantados apenas para verificar se o mecanismo proposto permite que um modelo de dois-fluidos seja capaz de representar de maneira

consistente a evolução de *roll waves* em canais fechados. Os resultados, embora ainda careçam de uma precisão maior, principalmente na previsão do *holdup* médio do escoamento, indicam que considerar este mecanismo leva o modelo de dois-fluidos a se manter bem-posto e a representar de maneira ao menos aceitável a evolução de *roll waves* em canais fechados.

1.3. Roteiro

No Capítulo 3:

A- É apresentado o modelo de escoamento estratificado transiente unidimensional utilizado por Issa e Kempf (2003). São apresentadas variações das equações do modelo de Issa & Kempf (2003) e uma correção do modelo para que, futuramente, se possa considerar a influência de uma interface rugosa no modelo de escoamento estratificado transiente. É feita também uma breve discussão sobre a hipótese de distribuição hidrostática de pressão feita em modelos de água-rasa.

B- É feita uma avaliação de como ocorre o acoplamento entre dois conjuntos importantes de famílias de ondas no escoamento estratificado. No caso as ondas dinâmicas mais rápidas, mais relacionadas com o processo de compressão dos fluidos, e uma família de onda mais lenta, relacionada principalmente com a propagação de alterações na fração de vazio por meio de efeitos gravitacionais, similares aos que se vê em canais abertos em problemas de água rasa. Será demonstrado neste capítulo que o acoplamento entre estas duas famílias é fraco para o escoamento estratificado, com algumas exceções, sendo talvez a mais importante relacionada frações de gás muito pequenas. A partir das conclusões apresentadas neste capítulo, pode-se argumentar que é válido na simulação de *roll-waves*, fenômeno mais relacionado com a família de ondas lentas, trabalhar com modelos que considerem os dois fluidos incompressíveis, já que a compressibilidade pouco irá influenciar no comportamento da família de ondas lentas do tipo água rasa.

No Capítulo 4:

A- É apresentado de maneira concisa o método numérico utilizado no trabalho.

B- É feita uma comparação das simulações com os experimentos de Bruno & McCready (1988). Os resultados foram aceitáveis, muito embora em uma condição mais fácil de teste, onde as ondas ainda não tinham atingido grandes amplitudes, condição em que o risco é grande do modelo se tornar mal posto. Verificou-se a influência do parâmetro de forma na qualidade da simulação, algo que só faz sentido no regime laminar, já que para o turbulento, este parâmetro é sempre muito próximo de 1.

C- São apresentados alguns resultados de simulação para filme de líquido em regime turbulento. Com o modelo de dois fluidos utilizado por Issa & Kempf (2003), as simulações quase sempre se tornaram mal-postas. As velocidades de propagação de onda não se mantiveram reais ao longo da evolução da *roll-wave*, para grandes amplitudes. Esta foi uma limitação grave e todo o trabalho a partir da verificação desta limitação do modelo se concentrou em elencar mecanismos não considerados no modelo de Issa & Kempf (2003) e que poderiam contribuir para evitar esta indesejável condição de modelo mal posto.

No Capítulo 5:

Foi avaliada a efetividade de um recurso ad hoc muito utilizado de se aplicar uma massa virtual no problema para garantir que este se mantenha bem posto. A conclusão que se chegou é que, ao menos para o estudo da evolução de *roll-wave*, este recurso ad hoc é pouco recomendável, pois altera muito o processo de evolução da onda, eliminando o compromisso físico da simulação. Partiu-se para algumas considerações heurísticas em que o efeito das ondulações de pequeno comprimento de onda foi adicionado ao modelo de *roll-wave*, a chamada “interface rugosa”. O que se verificou é que esta “interface rugosa” pode ser de fato um mecanismo importante na garantia de que a simulação numérica se mantenha bem posta por mais tempo durante a evolução das ondas.

No Capítulo 6:

São apresentados os resultados de alguns testes experimentais para *roll-waves* com filme de líquido em regime turbulento feitos no *loop* de teste do Grupo de Escoamento Multifásico da FEM/UNICAMP. São feitas comparações destes experimentos com simulações numéricas considerando o modelo de dois-fluidos proposto neste trabalho.

No Apêndice A:

É apresentado com algum detalhe o método numérico utilizado para resolver um modelo unidimensional mais completo para escoamento estratificado transiente horizontal. Como foi dito, *roll-waves* são fenômenos intimamente ligados à formação de choques no escoamento multifásico, torna-se necessário o uso de métodos numéricos especiais que tenham a habilidade de capturar estes choques garantindo inclusive uma boa resolução destes. O método que foi utilizado neste trabalho foi um de Volumes Finitos especializado em problemas hiperbólicos, no caso o conhecido *Riemann Solver*.

No Apêndice B:

É apresentada uma proposta de modelo simplificado para escoamento estratificado horizontal transiente. Este modelo simplificado será útil para algumas análises de cunho mais qualitativo que quantitativo, pois apresenta o problema de escoamento estratificado transiente em uma forma muito similar ao muito conhecido modelo de escoamento em canal aberto. Isto permite fazer uma analogia com o problema em canal aberto.

No Apêndice C:

É apresentada uma modelagem das tensões cisalhantes de cada fase com a parede da tubulação e a tensão cisalhante na interface, para o caso em que as duas fases se encontram em regime turbulento, considerando interface lisa. Além disto, é obtido um modelo que permite calcular o perfil de velocidade de cada fase e o parâmetro de forma para estes regimes. O resultado é comparado com um perfil de velocidade obtido experimentalmente, mostrando que o modelo é capaz de apresentar resultados convincentes.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, são apresentados estudos desenvolvidos por outros autores com contribuições para o entendimento do escoamento de filmes de líquido em arranjo estratificado, com particular ênfase naqueles dedicados à simulação e modelagem de roll waves.

2.1. Classificação das ondas envolvidas em problemas de escoamento estratificado transiente

Roll waves, seu nome já revela isto, é um problema de propagação de ondas, mas ao contrário do que se possa imaginar, não existe apenas um tipo ou uma família de ondas determinando o comportamento das *roll waves*. Fenômenos transientes em escoamento multifásico são na verdade a composição de uma notável variedade de família de ondas, saber quais as famílias de onda que entram em jogo no escoamento multifásico e qual a relevância destas famílias para estes fenômenos é fundamental para o seu entendimento.

A primeira distinção que deve ser feita nas ondas que concorrem no fenômeno de *roll waves* é entre ondas hiperbólicas e ondas dispersivas, ver Witham (1999); Kundu (2002). Ondas sônicas, ondas de gravidade do tipo “água-rasa”, ondas de compressão e cisalhamento em sólidos são todas do grupo de ondas hiperbólicas, ver Witham (1999). A velocidade de propagação destas ondas independe do seu número de onda. Neste caso, para problemas não-lineares, é comum a formação de choques e ondas de rarefação devido a este comportamento hiperbólico, ver Leveque (2002). Já no caso de ondas dispersivas - ondas de gravidade com comprimento de onda menor ou próximo à altura do filme de líquido, ver Kundu (2002), por exemplo – a velocidade de propagação (velocidade de fase) depende do número de onda. Neste caso, é mais difícil ocorrer a distorção de uma onda em problemas não-lineares, como ocorre com ondas hiperbólicas no seu processo de formação de choque. Ao contrário, em ondas dispersivas, a partir de uma

determinada forma na condição inicial, se dá uma separação, dispersão, desta forma inicial em várias ondas com comprimentos distintos, cada onda com uma velocidade de fase distinta, ver Kundu (2002). No caso de ondas dispersivas, talvez mais importante do que a velocidade de fase é a dita velocidade de grupo que indica como a energia da onda se propaga.

As ondas dispersivas aparentemente não têm uma função relevante na evolução de *roll wave*, pois, por suas características, elas terão sempre amplitudes muito pequenas quando comparadas às ondas hiperbólicas envolvidas no problema, mas, como se verá futuramente, estas ondas são provavelmente influentes, não na forma global da *roll wave*, mas nos mecanismos que determinam o processo de evolução da *roll wave*. Outras ondas podem se desenvolver entre ondas de gravidade dispersivas e ondas de gravidade hiperbólicas, tais como ondas solitárias também conhecidas como *solitons*, ver Kundu (2002).

Dentre as ondas hiperbólicas em sistemas multifásicos, uma distinção importante se dá entre ondas dinâmicas e ondas cinemáticas. Ondas dinâmicas ocorrem em uma situação em que não existe um equilíbrio de forças estabelecido no sistema, sendo importante considerar os termos de aceleração nas equações de quantidade de movimento de cada fase, ver Witham (1999). Ondas dinâmicas estão sempre relacionadas à maneira como o sistema se ajusta e propaga alterações de pressão no sistema. Já ondas cinemáticas se dão em uma situação em que já foi estabelecido o equilíbrio de força no sistema e os termos de aceleração de cada fase deixam de ser relevantes, neste caso, é possível estabelecer alguma relação cinemática para a velocidade de escoamento em substituição à equação de quantidade de movimento, ver Witham (1999). A onda cinemática está menos relacionada com propagação de pulsos de pressão, a “informação” relacionada a este tipo de onda diz respeito ao acúmulo/desacúmulo da massa de cada fase. A propagação destas ondas altera de maneira relevante as frações de cada fase, sendo, portanto também chamadas de ondas de densidade, ver Wallis (1969). Como estas ondas ocorrem quando o equilíbrio entre as forças que atuam no sistema já foi estabelecido, a “informação” relacionada com este tipo de onda é transportada de maneira mais lenta do que o que é transportado pelas ondas dinâmicas.

No caso das ondas dinâmicas, para o arranjo estratificado duas famílias se destacam. Ondas sônicas e ondas de gravidade. No caso de ondas sônicas, um pulso de pressão é transportado principalmente pela habilidade de cada fase se comprimir. É um tipo de onda muito similar ao que se veria em propagação de ondas em gasodutos monofásicos. A propagação de uma onda

sônica pode alterar a condição de fração de vazio do sistema no momento de sua passagem, mas esta alteração deve ser pouco relevante quando comparada com a alteração da massa específica de cada fase. Ondas sônicas apresentam as velocidades de propagação mais rápidas do sistema, seus tempos característicos são muito pequenos, ver Leveque (2002). Uma outra família seria a de ondas de gravidade do tipo água rasa. A definição “água rasa” é feita para distinguir estas ondas de gravidade das ondas dispersivas, que também são ondas de gravidade. No caso de “água rasa”, o comprimento de onda deve ser bem maior que a altura de filme de líquido, para que a hipótese de onda hiperbólica seja válida (neste caso, a variação de pressão na seção transversal do canal pode ser tratada meramente como hidrostática), ver Lighthill (2005). Esta onda também tem como habilidade propagar pulsos de pressão, porém em um sistema estratificado, a maior parte do pulso será propagada por meio das ondas sônicas. O mais interessante nas ondas de gravidade é que apesar da sua pouca habilidade em propagar pulsos de pressão, para que este pulso se propague é necessário promover alterações sensíveis na disposição das fases, ou melhor, na fração de vazio, fazendo com que a hidrostática das fases altere a pressão média do sistema. Estas alterações concorrem com as alterações que ondas cinemáticas promovem na fração de vazio. Ondas de gravidade do tipo “água rasa” podem alterar a massa específica de cada fase, mas o seu maior impacto é na fração de vazio, ao contrário das ondas sônicas. Será demonstrado que o acoplamento entre estas duas famílias de ondas é muito pequeno no arranjo estratificado, sendo possível trata-las como fenômenos independentes. Ondas de gravidade têm velocidade bem inferior à velocidade de propagação das ondas sônicas, tendo um tempo característico bem maior, elas são relevantes para problemas físicos bem distintos dos problemas físicos da alçada da propagação de ondas sônicas.

O esquema a seguir exemplifica a variedade de ondas que atuam no escoamento estratificado transiente e que podem ser relevantes na modelagem deste arranjo de escoamento:

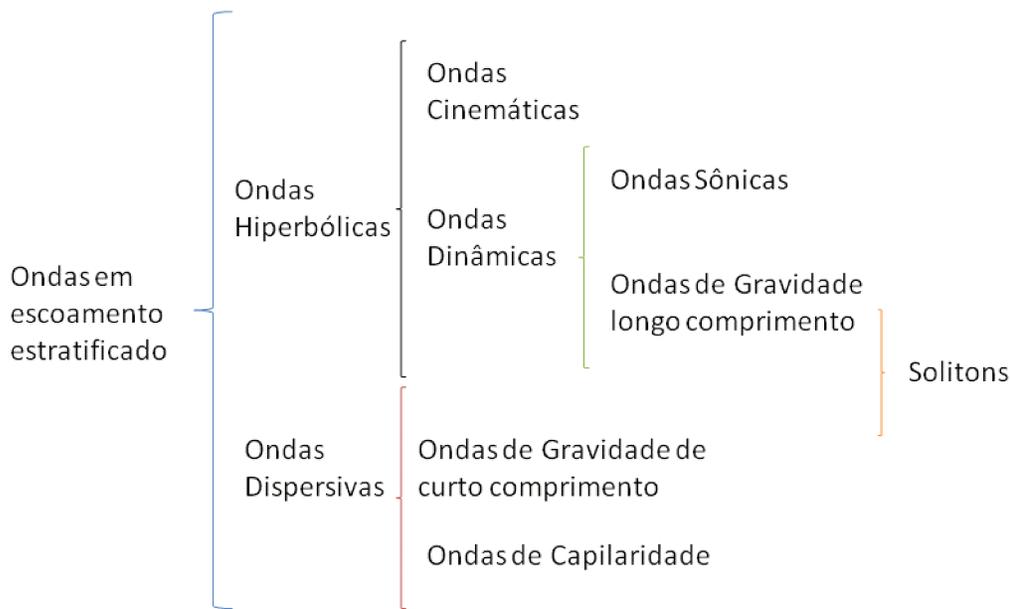


Figura 2.1 Variedade de família de ondas em um arranjo estratificado

Neste trabalho, será investigada a influência de algumas destas famílias de onda no processo de evolução de *roll waves*.

2.2. Estabilidade de filme de líquido em arranjo estratificado

A origem de *roll waves* em um arranjo estratificado gás-líquido está relacionada com o processo de desestabilização da interface. Existe um critério, conhecido como Kelvin-Helmholtz viscoso, que determina os limites de estabilidade marginal da interface do arranjo estratificado. A determinação deste critério parte de um processo de linearização das equações unidimensionais transientes para o arranjo estratificado (ver equações (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) no Capítulo 3) e, a partir de uma análise do comportamento de pequenas perturbações impostas sobre uma determinada condição inicial, verifica se esta perturbação tende a ser amplificada indefinidamente para as condições de escoamento estabelecidas. Se for este o caso, o arranjo estratificado é considerado instável. Este critério foi utilizado em diversos trabalhos como os publicados por Lin & Hanratty (1986) e Barnea & Taitel (1993).

Detalhando um pouco mais a execução desta análise, as perturbações aplicadas às equações de conservação linearizadas seguem sempre a forma:

$$f(x,t) = \delta f e^{i(\omega t - kx)}. \quad (2.1)$$

Na Equação (2.1), f é uma variável qualquer; δf representa a amplitude da perturbação que é inserida na condição de fundo. A perturbação δf deve ser pequena para que a linearização seja feita: considerando a condição de inicial representada por F , $F \gg \delta f$ e $\delta f^* \delta f \ll \delta f$.

A condição inicial, ou condição de fundo, na qual irá se aplicar esta perturbação é sempre definida a partir de uma solução permanente, obtida a partir do equilíbrio das equações de quantidade de movimento, para cada fase, sendo, portanto, os termos dinâmicos desconsiderados no cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial x} &= \frac{-\tau_i S_i - \tau_{wg} S_{wg}}{A_i \alpha}; \\ \frac{\partial p_i}{\partial x} &= \frac{\tau_i S_i - \tau_{wl} S_{wl}}{A_i (1 - \alpha)}; \\ \frac{\tau_i S_i - \tau_{wl} S_{wl}}{A_i (1 - \alpha)} &= \frac{-\tau_i S_i - \tau_{wg} S_{wg}}{A_i \alpha} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aplicando a relação (2.1) nas equações de conservação linearizadas, torna-se possível determinar a frequência, ω . O objetivo então se resume em definir em que condições o termo complexo da frequência é igual a zero. A isto chama-se condição neutra de estabilidade, ou condição marginal. Quando o termo complexo da frequência é não nulo, a exponencial em (2.1) crescerá indefinidamente. Isto mostra que a condição original, a dita condição de fundo, do escoamento estratificado é instável e qualquer perturbação, por menor que seja, levará o escoamento a redistribuir as fases na tubulação na busca de um novo arranjo estável. A análise deste problema geralmente se limita a perturbações de comprimento de onda longo, muito maiores que a altura de filme. No entanto, alguns trabalhos analisam a estabilidade da interface quando submetida a perturbações de comprimento de onda curto, como por exemplo os trabalhos feitos por Bruno & McCready (1988), Mata *et al.* (2002).

Nos trabalhos que fazem a análise da estabilidade linear da interface, utilizando o critério Kelvin Helmholtz viscoso, o foco principal é determinar quando o arranjo estratificado transita para um arranjo em golfadas, ver Lin & Hanratty (1986). No entanto, este critério também é

utilizado para determinar condições em que o arranjo estratificado transita para *roll waves*, ver Bruno & McCready (1988). De uma forma geral, em uma condição de interface instável o que definirá se um arranjo estratificado instável irá evoluir para golfadas ou *roll waves* será principalmente a altura média do filme de líquido. Arranjos estratificados instáveis com pequenas alturas de filme de líquido dificilmente transitarão para golfadas, sendo mais provável evoluir para uma condição do tipo *roll wave*.

O critério de Kelvin Helmholtz viscoso é satisfatório na determinação da condição de instabilidade de um arranjo estratificado. Um outro critério também utilizado e menos preciso é o critério de Kelvin Helmholtz não-viscoso. Neste caso, na linearização das equações de conservação, os termos fontes como as tensões cisalhantes são desprezadas. Este critério é menos rigoroso que o viscoso na determinação da instabilização da interface, e pode indicar uma condição estável em situações nas quais o critério viscoso já indica uma condição instável, ver Barnea & Taitel (1993).

Apesar destas limitações, o critério de Kelvin Helmholtz não-viscoso é interessante pois revela um fenômeno físico importante em problemas de escoamento estratificado transiente em condição instável, que é o processo de sucção da fase líquida em direção ao núcleo gasoso devido ao efeito Bernoulli. Uma maneira simples de entender o critério é imaginar a crista de uma onda na interface do filme como uma restrição de área ao escoamento de gás (ver Figura 2.2). Usando-se a equação de Bernoulli, a aceleração do gás na região da crista acarreta uma queda local de pressão, como em uma garganta de um Venturi. Em contrapartida, para a fase líquida, na região da crista tem-se um aumento de área e o efeito na pressão é o oposto. Este desequilíbrio nas pressões de cada fase poderia implicar em uma inevitável desestabilização, levando a crista da onda a aumentar sua amplitude até atingir o topo da seção transversal da tubulação, fechando a passagem de gás e iniciando um arranjo do tipo golfada. Assim, o escoamento estratificado seria inerentemente instável. No entanto, não é este o caso, pois a gravidade atua como uma força restauradora, impedindo o crescimento indefinido do filme de líquido. Existem certas condições em que a gravidade não é suficiente para equilibrar esta tendência de crescimento da altura de filme. Quando a gravidade não é suficiente para impedir a sucção do filme pelo efeito Bernoulli, o escoamento estratificado se torna instável do ponto de vista do Kelvin Helmholtz não viscoso.

Um resultado importante é que sempre que uma condição de escoamento estratificado se torna instável por este critério, as velocidades características das ondas de gravidade serão complexas.

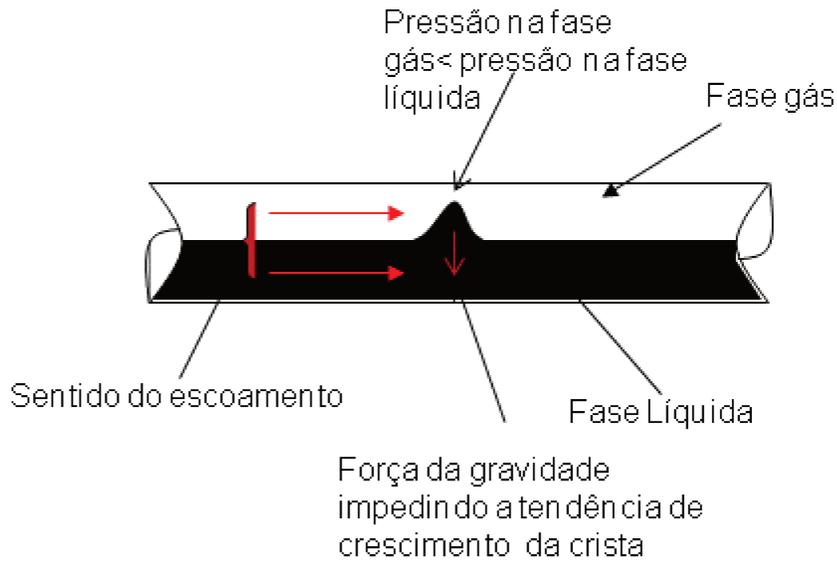


Figura 2.2 Onda solitária em um escoamento estratificado

Crowley *et al.*(1992) apresentaram uma metodologia diferente para a obtenção do critério de estabilidade em um arranjo estratificado. Um dos atrativos desta proposta é o maior compromisso com o significado físico dos fenômenos envolvidos, permitindo um melhor entendimento de como se dá a desestabilização do escoamento estratificado.

A metodologia se resume à consideração de que um fenômeno de propagação de onda hiperbólica se instabiliza quando ondas cinemáticas se tornam mais velozes que todas as ondas dinâmicas que propagam no mesmo sentido da onda cinemática. Esta afirmação é detalhada por Witham (1999), quando discute hierarquia de ondas. Para o caso de escoamento estratificado, considerando apenas ondas de gravidade, o sistema será estável quando

$$a_- < c_c < a_+, \quad (2.3)$$

onde a_+ e a_- são as duas velocidades de propagação de ondas dinâmicas que se estabelecem no sistema e c_c é a velocidade da onda cinemática, ver Wallis (1969).

Para a obtenção destas velocidades de ondas de gravidade, os termos fontes, tais como as tensões de cisalhamento nas equações de quantidade de movimento, são desconsiderados. Como se trata apenas de ondas de gravidade, os fluidos são considerados incompressíveis, eliminando os efeitos de ondas acústicas (o impacto desta aproximação será melhor avaliado um pouco mais à frente). Nesta situação, a equação de quantidade de movimento envolve apenas termos não dissipativos e qualquer perturbação implicará em um esquema de transformação de energia entre o trabalho de escoamento (pressão), energia potencial (gravidade) e energia cinética.

Observe que isto se aproxima da interpretação apresentada para explicar como a estabilidade do arranjo estratificado é determinada pelo critério de Kelvin-Helmholtz não viscoso. O sistema funciona com um comportamento similar a um sistema massa-mola oscilante, onde a energia total é constante, apesar de transmutar entre as formas de energia potencial e energia cinética. Conforme afirmado por Wallis (1969), as ondas dinâmicas envolvem apenas forças restauradoras. A variação da pressão dependerá apenas destas forças restauradoras, o que impedirá um processo instabilizador.

Porém, no caso de ondas cinemáticas, chamadas por Wallis de ondas de continuidade, estas forças restauradoras são desconsideradas. Na equação de quantidade de movimento, apenas os termos fontes e o gradiente de pressão são considerados na determinação da variação de pressão ao longo do duto. Com isto, um equilíbrio local para a quantidade de movimento é obtido. Isto é feito a partir da Equação (2.2), num procedimento similar àquele no qual se determina a condição permanente em escoamentos estratificados. Com este equilíbrio local, é possível estabelecer uma relação algébrica entre a velocidade superficial de líquido, U_{ls} , a velocidade superficial de gás, U_{gs} e a fração de vazio α . Esta relação algébrica é aplicada na conservação da massa e com isto pode-se calcular a velocidade de propagação da onda cinemática.

As relações que determinam as velocidades dinâmicas e cinemáticas são fornecidas por Crowley *et al.*(1992):

$$c_c = \frac{\frac{\partial F}{\partial \alpha}}{\frac{\partial F}{\partial U_{ls}} - \frac{\partial F}{\partial U_{gs}}}, \quad (2.4)$$

onde $U_{ls} = (1-\alpha)u_l$ e $U_{gs} = \alpha u_g$; F é o resultado da relação de equilíbrio local da quantidade de movimento de cada fase:

$$F = \frac{-\tau_i S_i + \tau_{wl} S_{wl}}{A_t (1-\alpha)} - \left(\frac{\tau_i S_i + \tau_{wg} S_{wg}}{A_t \alpha} \right) \quad (2.5)$$

Já a velocidade de propagação de onda dinâmica, quando as é definida as fases são incompressíveis e supondo fatores de forma dos perfis de velocidade iguais a 1, é definida em Crowley *et al.*(1992) por

$$a = \frac{\frac{\rho_l U_{ls}}{1-\alpha} + \frac{\rho_g U_{gs}}{\alpha}}{\frac{\rho_l}{1-\alpha} + \frac{\rho_g}{\alpha}} \pm \sqrt{\frac{g \frac{\pi D^2}{4} (\rho_l - \rho_g) \left(\frac{U_{gs}}{\alpha} - \frac{U_{ls}}{1-\alpha} \right)^2}{S_i \left(\frac{1-\alpha}{\rho_l} + \frac{\alpha}{\rho_g} \right)}}{\frac{\rho_l}{1-\alpha} + \frac{\rho_g}{\alpha}} \quad (2.6)$$

É conveniente definir uma velocidade de referência, V_0 , como

$$V_0 = \frac{\frac{\rho_l U_{ls}}{1-\alpha} + \frac{\rho_g U_{gs}}{\alpha}}{\frac{\rho_l}{1-\alpha} + \frac{\rho_g}{\alpha}} \quad (2.7)$$

de forma que o critério para a estabilidade do escoamento possa ser escrito como - Crowley *et al.*(1992):

$$(c_c - V_0)^2 < (a - V_0)^2 \quad (2.8)$$

Whitham (1999) demonstra que o critério utilizado por Wallis (expresso pela Equação (2.3)) leva aos mesmos resultados de uma análise linear como a utilizada por Barnea & Taitel (1993) e Lin & Hanratty (1985). Whitham apresenta uma linearização de sistemas de equação para ondas hiperbólicas similares ao sistema que representa o arranjo estratificado transiente unidimensional, demonstrando que quando estas equações são linearizadas, tomando como base uma condição de fundo original (um estado permanente), elas sempre tomam o formato

$$\eta \left(\frac{\partial}{\partial t} + a_- \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + a_+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi + \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_c \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi = 0, \quad (2.9)$$

onde η é um parâmetro que indica a relevância das ondas cinemáticas e dinâmicas na propagação de uma perturbação e φ para o caso de ondas de gravidade em escoamento estratificado é a altura de filme de líquido. Quando este parâmetro é pequeno, as ondas dinâmicas são pouco relevantes e a maior parte de perturbação será transportada por ondas cinemáticas. Trabalhando com a linearização das equações de arranjo estratificado transiente como utilizado por Barnea e Taitel (1993) e comparando-a com (2.9), pode-se demonstrar que

$$\eta = \frac{\frac{\rho_l}{1-\alpha} + \frac{\rho_g}{\alpha}}{\frac{\partial F}{\partial U_{ls}} - \frac{\partial F}{\partial U_{gs}}} \quad (2.10)$$

Uma informação de considerável utilidade que talvez possa ser obtida a partir deste parâmetro é a indicação dos limites fora dos quais não é relevante a aplicação dos termos convectivos em modelos de escoamento multifásico. A vantagem de se obter estes limites seria a de estimar com mais segurança quando se pode ou não simplificar modelos transientes de escoamento multifásico para simulação numérica. Isto pode representar um ganho considerável no tempo destas simulações.

Ao longo deste trabalho, se utilizará o critério definido pela Equação (2.8) para determinar se o arranjo estratificado é estável ou não.

2.3. Roll waves em canais abertos

Roll waves se caracterizam por uma série de variações abruptas na altura de filme de líquido conectadas por trechos mais longos com variações suaves na altura do filme. Fisicamente, é um problema dominado por ondas de gravidade hiperbólicas e não lineares de grandes comprimentos. Estruturas deste tipo também são observadas em canais abertos, como é exemplificado em Witham (1999), e Lighthill (2005). O que se chama de *roll waves* em canais abertos têm uma natureza similar às *roll waves* em canais fechados. A Figura 2.3 ilustra uma *roll wave* em canal aberto, notar que a figura tem escala expandida na direção y .

Roll waves são fruto da instabilização de ondas de gravidade de grande comprimento, e utilizando-se um critério como o definido na Relação (2.8) é possível determinar a condição de estabilidade marginal de *roll waves* em canais abertos, como demonstrado por Witham (1999). Os estudos sobre *roll waves* em canais abertos são anteriores aos estudos de *roll waves* em canais fechados, sendo que, atualmente, dispõe-se de um grande número de trabalhos sobre este escoamento em canais abertos, ao contrário do que ocorre em canais fechados.

Um trabalho sobre *roll wave* em canal aberto de particular interesse, pois sua metodologia é utilizada com alguma frequência para canais fechados é o desenvolvido por Dressler (1949). Neste trabalho, Dressler trata *roll waves* em canais abertos com uma abordagem aproximada, admitindo um único comprimento de onda no problema, e assim as *roll waves* são abordadas como um trem de onda. A velocidade de propagação deste trem de onda é constante, assim, na abordagem aproximada, é possível trabalhar com uma variável do tipo $\xi = x - st$, onde s é a velocidade com que o trem de onda se propaga. Desta forma, as equações diferenciais parciais unidimensionais que representam o escoamento em canal aberto se reduzem a apenas uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, dependente de ξ . A equação ordinária é integrada nos trechos contínuos e estes são conectados no choque por meio das regras que definem a condição de salto, obtendo assim a velocidade de propagação do trem de onda. Esta metodologia tornou-se comum no tratamento de *roll waves* também em canais fechados. Porém, o fato da metodologia requerer a priori o conhecimento do comprimento de onda ou da frequência da *roll wave* limita em muito a aplicação desta metodologia tanto em canais abertos, quanto em canais fechados.

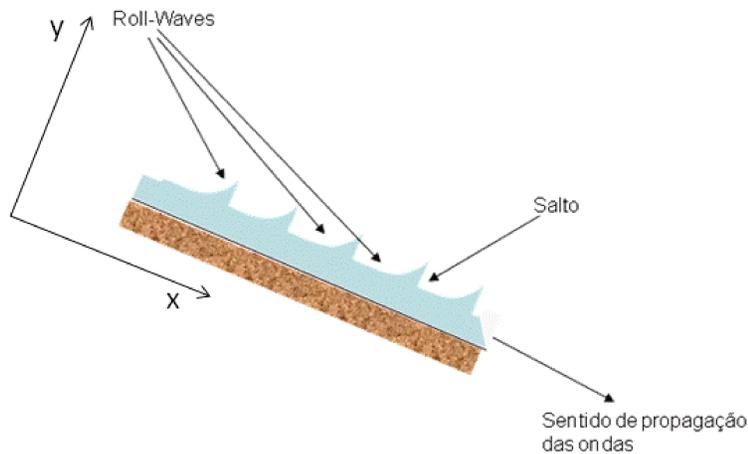


Figura 2.3 Exemplo de *roll wave* em canal aberto

Yu & Kervorkian (1992) tentaram construir uma metodologia capaz de determinar a periodicidade de uma *roll wave* em canal aberto, efetuando uma análise que utiliza séries assintóticas e o método *multiscale* para um modelo unidimensional de *roll waves* próximas da condição de estabilidade marginal. Os autores concluíram que, quando um escoamento em canal aberto em uma condição instável, porém próxima da condição de estabilidade marginal, é alterado com uma leve perturbação de periodicidade definida, as *roll waves* que se formam herdam esta periodicidade. Esta é uma conclusão interessante, mas que não apresenta um valor prático de fato. *Roll waves* surgem geralmente de um ambiente mais caótico onde é difícil garantir uma periodicidade bem definida nas suas condições iniciais ou condições de contorno.

2.4. Roll waves em canais fechados

No caso da modelagem de *roll waves* em canais fechados, verifica-se também uma preocupação em determinar a frequência dominante com que estas ondas se propagam, pois isto simplificaria bastante o problema, permitindo modelar o problema de uma maneira similar à proposta por Dressler (1949).

A frequência dominante de uma *roll wave* parece ser dependente de diversas variáveis do escoamento, ela é dependente por exemplo, no caso de canais fechados, da velocidade superficial do gás, quanto maior for esta velocidade, maior é frequência das *roll waves*, conforme observado

por Soleimani & Hanratty (2003). Na determinação da periodicidade de uma *roll wave* deve-se também levar em conta a condição inicial, a condição de entrada no duto, o comprimento deste duto e o próprio processo de coalescimento destas ondas ao longo do duto.

Bruno & McCready (1988), tentaram correlacionar a frequência de *roll waves* com a frequência observada nas análises de estabilidade linear do tipo Kelvin- Helmholtz viscoso, obtida a partir da relação (2.1) e de análises lineares do tipo Orr-Sommerfeld. Os resultados apresentados por eles mostram uma boa capacidade de previsão utilizando Orr-Sommerfeld para a determinação das frequências dominantes de curto comprimento, o que não é representativo das *roll waves*. Para longos comprimentos de onda, tanto Orr-Sommerfeld, quanto o Kelvin-Helmholtz viscoso não foram capazes de fazer uma previsão adequada das frequências dominantes.

Mya *et al.* (1971), apresentam um modelo para *roll waves* em canais fechados retangulares inspirado no trabalho de Dressler (1949), a principal dificuldade do trabalho está justamente na determinação da periodicidade do trem de onda.

Johnson *et al.* (2009), apresenta uma abordagem interessante para a determinação da frequência de *roll waves*, porém deve-se atentar às premissas indicadas no trabalho, uma vez que impõem várias restrições à sua utilização. A abordagem dos autores é similar à apresentada por Dressler (1949), porém aplicada a *roll waves* em canais fechados: impõe-se um conjunto de premissas adicionais que permitem calcular a frequência dominante em uma condição de *roll wave* em canal fechado. Destas premissas, pode-se destacar a hipótese de que sempre na crista de uma *roll wave* a derivada da altura de filme de líquido será infinita e na cauda da *roll wave* a derivada da altura de filme será sempre zero. Além disto, o trecho contínuo de uma *roll wave* é dividido em duas partes: uma região subcrítica e uma região dita super crítica, do ponto de vista da velocidade de propagação de ondas de gravidade. Entre elas existe um ponto em que a condição de escoamento é crítico, com a sua respectiva altura de filme de líquido. Os autores impõem que esta altura de filme é sempre igual ao valor da altura média da *roll wave*. A Figura 2.4 representa as premissas utilizadas por Johnson *et al.*(2009). Por conta destas premissas discutíveis, preferiu-se neste trabalho não utilizar a abordagem indicada por Johnson *et al.* (2009).

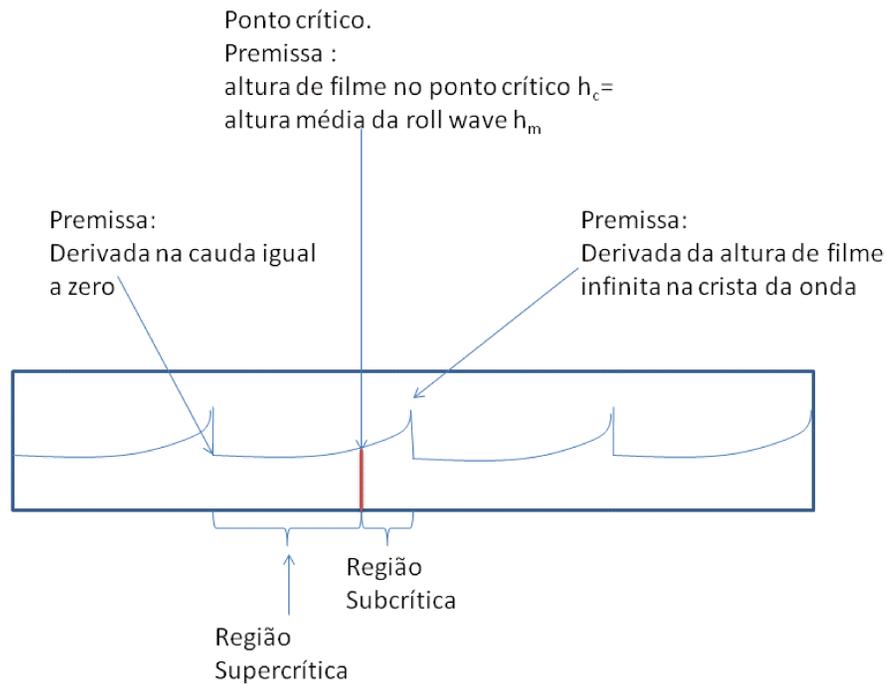


Figura 2.4 Exemplificação das premissas utilizadas por Johnson et al,2009

Sem se dispor de uma frequência predefinida para *roll waves*, torna-se necessário uma modelagem não linear capaz de representar o processo de evolução e a interação destas ondas. Talvez só a partir de uma análise deste tipo seja possível se obter uma estimativa consistente da forma, amplitude e frequência destas ondas. Seguindo esta linha, algumas abordagens se destacam para se entender o processo de evolução de uma *roll wave*: uma abordagem lagrangiana similar às utilizadas em slug-tracking e abordagens que utilizam um modelo unidimensional transiente para o escoamento estratificado considerando as suas equações de conservação na forma diferencial. Estas análises são mais utilizadas nos estudos de evolução de golfadas, já que este arranjo detém uma atenção maior dos pesquisadores, o que é natural por sua relevância para os problemas observados na indústria.

Uma análise lagrangiana para se entender como as *roll waves* evoluem foi apresentada por DeLeebeeck & Nydal (2010). Eles trabalharam com um modelo numérico de seguimento de ondas similar aos modelos de *slugtracking*; na realidade, o modelo de *roll waves* foi construído a partir de um modelo de *slugtracking* que já havia sido desenvolvido pelos autores.

Uma abordagem interessante e que neste trabalho servirá de guia para o estudo da evolução de *roll waves* é a apresentada por Issa & Kempf (2003). Suas análises se concentraram no estudo

de evolução do arranjo estratificado para golfadas; Issa defende esta abordagem e acredita ser possível se determinar inclusive a frequência de golfadas a partir dela, ver Issa & Kempf (2003), e Bonizzi & Issa (2003). A abordagem apresentada por Issa se resume a utilizar um modelo diferencial, unidimensional e transiente para o arranjo estratificado, aplicar uma condição inicial em uma região instável para o escoamento e permitir que, em uma simulação numérica, perturbações randômicas, de pequena amplitude evoluam para o arranjo em golfada, posteriormente, observa-se o processo de coalescimento destas golfadas. O método numérico utilizado por Issa era de primeira ordem, o que representa uma importante limitação, principalmente no estudo de *roll waves*, onde se deseja uma boa resolução na representação do choque.

2.5. Hiperbolicidade e método numérico

Embora existam alguns trabalhos que buscam descrever matematicamente o fenômeno de *roll waves*, a simulação numérica do problema apresenta vários desafios técnicos, pois é comum a um certo ponto da simulação da evolução da onda que se torne impossível a continuidade da solução.

Issa & Kempf (2003) interpretaram estas ocorrências como uma limitação dos modelos numéricos que não necessariamente reflete uma instabilidade no sistema físico. Na realidade, estas ocorrências parecem estar ligadas às deficiências da modelagem em representar o fenômeno físico. Assim, o modelo se torna mal-posto, conforme discutido por Issa & Kempf:

Well-posedness is a property of the modelling process, rather than a specific property of the flow itself and requires that the model appropriately reflects the physics of the flow. A necessary condition for an initial value problem to be well-posed is that the governing differential equations should possess real characteristics (see for example Garabedian, 1964.; Anderson, 1995; Song and Ishii, 2000).

Neste trabalho, será utilizada a definição de modelo mal-posto como proposta por estes autores.

No caso de *roll waves*, o fato de um problema se tornar mal-posto é um resultado mais grave do que no estudo de evolução de golfadas. Quando se fala em um modelo bem-colocado

está se referindo, obviamente, a problemas hiperbólicos e o que se deseja é assegurar que a solução seja possível no contexto deste problema hiperbólico.

Assim, partindo da Equação (2.1), pode-se escrever em termos de velocidade de propagação de onda:

$$f(x, t) = \mathcal{F} e^{i(\omega t - kx)} = \mathcal{F} e^{ik(ct-x)} \quad (2.11)$$

onde k representa o número de onda e c a sua celeridade. Sendo k um número real ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ é o comprimento de onda), a consistência de representação das *roll waves* como ondas hiperbólicas requer que c seja real. Assim, para uma dada posição x no canal, quando c , a celeridade, resulta em um número complexo, um conjugado do tipo $c = |A| \pm |B|i$. A parte imaginária positiva do conjugado levaria a uma condição estável que não é objeto de estudo neste trabalho, já a parte imaginária negativa levaria a um exponencial com expoente real, positivo e dependente do tempo, indicando que a onda poderá crescer indefinidamente, não sendo mais possível representar o problema por meio de direções características ($ct-x=const$), a continuidade da simulação fica inviabilizada. Isto irá configurar um problema hiperbólico mal posto, o que impediria a representação da evolução de *roll waves* por exemplo. No caso da evolução de golfadas, talvez o problema seja menos grave, pois a amplificação da onda seria limitada pela própria parede do canal e talvez, no momento em que a crista se aproxima do topo do canal, o problema de fato deixe de ser hiperbólico. Não é este o caso para *roll waves*, e assim deve-se garantir sempre que o problema tenha velocidades características reais, evitando que as conclusões sobre o fenômeno sejam falhas.

Métodos numéricos como o utilizado por Issa & Kempf (2003), não verificam se um problema está ou não em uma condição mal-posta, o que seria um problema para a simulação de *roll waves*. Neste trabalho, fez-se a opção de se trabalhar com um método numérico especializado para problemas hiperbólicos, ver Leveque (2002), os chamados *Riemann Solvers*. Conforme observado por Leveque (2002), estes métodos não chegam a ser de segunda ordem, mas se aproximam disto e conseguem representar choques com uma alta resolução, o que é bastante adequado para o estudo de *roll waves*. Métodos deste tipo se inspiram no problema de Riemann -

para uma discussão sobre o problema de Riemann, ver Witham (1999)- o que os obriga a todo o tempo calcular as velocidades características do problema hiperbólico. Isto é interessante, mas, ao mesmo tempo, revela as limitações de um modelo. O modelo aqui utilizado é o de Dois Fluidos, como indicado por Issa & Kempf (2003), Toumi & Kumbaro (1993), Evje & Flåtten (2003). Este modelo apresenta dificuldades em garantir que o problema se mantenha sempre bem-posto, porém é bastante adequado para a representação de problemas de fases separadas, como no caso de *roll waves*.

Quando se trabalha com o modelo de Dois Fluidos, é comum lançar mão de recursos que alteram o modelo garantindo assim que o modelo se torne bem-posto. Toumi & Kumbaro (1993) apresentam uma formulação numérica com *Riemann Solver* para um Modelo de Dois Fluidos com a adição de uma massa virtual capaz de garantir que este modelo se mantenha bem-posto. O problema de se lançar mão de um recurso como este é que existe pouco compromisso de um termo como uma massa virtual com a fenomenologia de um problema de escoamento com fases separadas. A depender da ordem de grandeza desta massa virtual, ela pode alterar completamente as características do problema que se quer estudar.

Outro mecanismo que pode ter um efeito positivo na garantia de um modelo sempre bem-posto seria a alteração da pressão e da tensão cisalhante na interface devido a uma forma mais rugosa desta, fruto das ondas dispersivas de curto comprimento de onda. Stuhmiller (1977) apresenta uma maneira de se aplicar a ação da pressão interfacial em um modelo de dois-fluidos para garantir que este se mantenha bem-posto. O estudo de Stuhmiller se baseou em um arranjo em bolhas. Ele observou que três termos surgem da ação da pressão interfacial: um coeficiente de massa virtual, um efeito de arraste devido à assimetria desta pressão interfacial ao longo da superfície da bolha e um termo que diminui a pressão interfacial média ao longo da bolha quando ocorre uma variação de fração de vazio no espaço. O mais interessante deste estudo é que, a despeito do escoamento ser em bolhas, o principal mecanismo a garantir que o modelo de dois fluidos se mantivesse bem-posto foi o termo que diminui a pressão interfacial média ao longo da bolha quando ocorre uma variação de fração de vazio no espaço.

Outro problema enfrentado por quem quer utilizar um método como o *Riemann Solver* em um modelo de dois fluidos, é que este modelo não é conservativo, ver Toumi & Kumbaro (1993). Estes autores lançam mão de médias harmônicas entre as células do domínio discretizado para

representar os termos não conservativos existentes no modelo de dois fluidos. Já Evje & Flåtten (2003), indica o uso de médias aritméticas. Na prática, a escolha de qual tipo de média deve ser usada para ponderar entre as células do domínio discretizado os termos não conservativos do modelo de dois fluidos não leva a diferenças significativas na representação numérica do problema.

Outra questão importante ao representar a evolução de *roll waves* é se o modelo é capaz de garantir que a onda se mantenha com uma amplitude estável após um certo tempo. Uma *roll wave* que não alcança uma condição de amplitude estável pode indicar uma condição de transição para golfadas, porém, em alguns casos, esta inabilidade de se obter uma *roll wave* estável pode ser apenas falha do modelo. Holmås (2010), baseado na metodologia desenvolvida por Biberg (2007), para cálculo da tensão de cisalhamento na interface, e utilizando um método numérico pseudo-spectral aplicado a um modelo de dois fluidos, propôs uma alteração no termo de fricção interfacial que foi capaz de controlar o processo de amplificação de uma *roll wave*. Embora o autor não tenha verificado se o modelo se tornava ou não mal-posto, é provável que esta alteração na fricção interfacial tenha funcionado também como um termo capaz de garantir que o modelo se mantivesse bem-posto. Apesar da correção feita por Holmås no fator de fricção interfacial ter sido bem sucedida em prevenir que a simulação de *roll wave* se mantivesse estável, seu trabalho não explicita quais mecanismos levam às alterações propostas. Além do mais, para eliminar a dispersão numérica do método, Holmås aplicou uma viscosidade artificial que também pode funcionar como um termo estabilizador para a simulação.

Neste trabalho, apesar de não se utilizar o fator de fricção apresentado em Holmås (2010), utilizou-se uma metodologia similar à desenvolvida por Biberg (2007), embora mais simples, para se obter os perfis de velocidades de líquido e de gás, e assim determinar os fatores de forma destes perfis em uma *roll wave*, no caso de ambas as fases escoando em regime turbulento.

Existem mecanismos que não são normalmente utilizados em modelos de arranjo estratificado transiente e que podem exercer uma função importante na garantia de se modelar *roll waves* com amplitudes estáveis. Por exemplo, em seu trabalho sobre *roll waves*, DeLeebeck & Nydal (2010), consideraram perdas localizadas devido à passagem do gás pela crista de uma *roll wave*: o choque da onda de gravidade funcionaria como uma expansão abrupta da área de

escoamento do gás, como mostrado na Figura 2.5. Este é um mecanismo que parece ser relevante na evolução de *roll waves* com grandes velocidades médias de gás e grandes amplitudes.

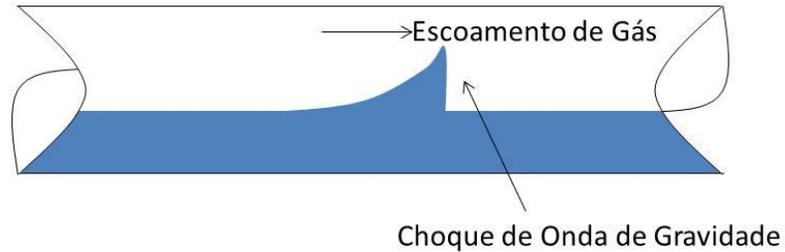


Figura 2.5 Gás passando por uma expansão abrupta devido ao choque de onda de gravidade

2.6. Conclusão

Do que foi observado nesta revisão bibliográfica, é relativamente reduzido o número de trabalhos sobre *roll waves* em canais fechados, notadamente quando comparado com os que abordam canais abertos. A possível explicação para isto é que o fenômeno de *roll waves* em canais fechados sempre esteve à sombra, do ponto de vista de interesse, do problema de golfadas, sendo a maior parte dos esforços direcionados para este arranjo. Nos anos mais recentes aumentou-se o número de trabalhos publicados sobre *roll waves*, provavelmente devido ao interesse de modelar este problema para longos gasodutos. Observa-se também uma evolução na metodologia para modelar as *roll waves* em canais fechados: os trabalhos mais antigos sempre seguem a linha apresentada por Dressler (1949) para *roll waves* em canais abertos, modelando o problema sempre como um trem de onda com uma periodicidade definida. Os trabalhos mais recentes são um pouco mais sofisticados, em geral lidando com um modelo de dois fluidos e tentando representar o processo completo de evolução de uma *roll wave*.

4

3. MODELO UNIDIMENSIONAL PARA ESCOAMENTO ESTRATIFICADO TRANSIENTE

3.1. Equações 1-D para escoamento estratificado transiente

No modelo que se utilizará neste trabalho, a interface será aproximada com curvatura zero na seção transversal (na longitudinal a curvatura é diferente de zero). Isto é uma aproximação e para certas condições de escoamento esta curvatura será diferente de zero. Questões relacionadas a ângulo de contato e molhabilidade da parede serão também desprezadas. Será admitido que o escoamento é isotérmico, o que dispensaria o uso de equações de conservação de energia para cada fase. Deve-se, portanto, apresentar apenas as equações unidimensionais transientes representativas da conservação de massa para cada fase e da quantidade de movimento para cada fase. As equações aqui apresentadas são as mesmas utilizadas por Issa e Kempf (2003).

Conservação da massa de gás:

$$\frac{\partial \alpha \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_g u_g}{\partial x} = 0; \quad (3.1)$$

Conservação da massa de líquido:

$$\frac{\partial (1-\alpha) \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial (1-\alpha) \rho_l u_l}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

α é a fração volumétrica da fase gasosa.

Seguindo a formulação apresentada por Issa e Kempf (2003), as equações de quantidade de movimento para cada fase são apresentadas a seguir:

Quantidade de movimento do gás:

$$\frac{\partial \rho_g \alpha u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \alpha \Gamma_g u_g^2}{\partial x} + \alpha \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\partial g \cos(\theta) \left(\int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y) S_i(y)}{A_t} dy \right)}{\partial x} = \frac{-\tau_i S_i - \tau_g S_{wg}}{A_t} - \rho_g g \alpha \sin(\theta) \quad (3.3)$$

Quantidade de movimento do líquido:

$$\frac{\partial \rho_l (1-\alpha) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1-\alpha) \Gamma_l u_l^2}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\partial g \cos(\theta) \int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i(y)}{A_t} dy}{\partial x} = \frac{\tau_i S_i - \tau_l S_{wl}}{A_t} - \rho_l g (1-\alpha) \sin(\theta) \quad (3.4)$$

A variável p_i é a pressão na interface entre o líquido e o gás. Γ_l e Γ_g são os fatores de forma dos perfis de velocidade.

A variável h é a altura de filme tomando como referência a normal ao eixo da superfície inferior do canal. A variável y é a coordenada normal ao eixo da superfície inferior do canal, estas variáveis são melhores representadas na Figura (3.1) a seguir.

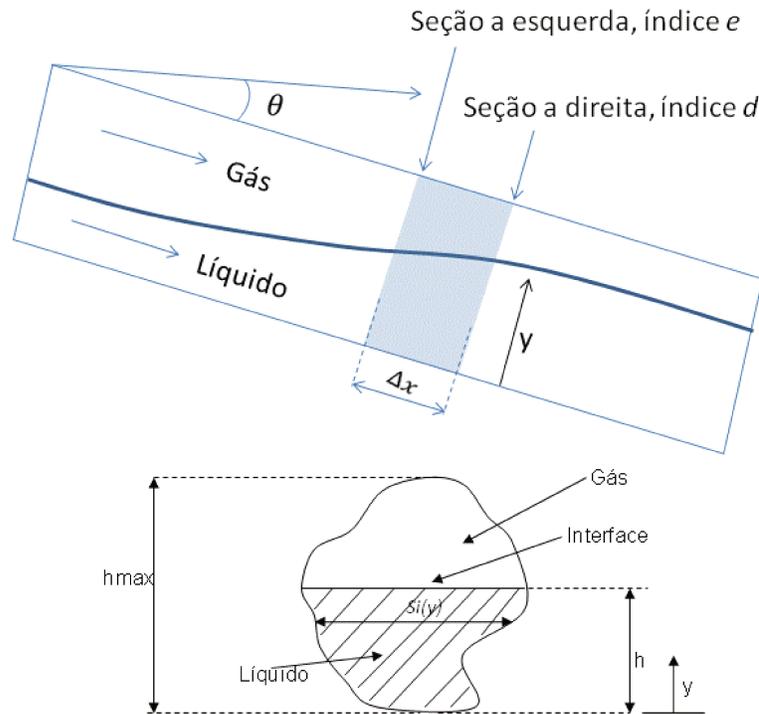


Figura 3.1 Estrutura simplificada de um arranjo estratificado com interface lisa

Na figura (3.1), pode-se ver que o ângulo θ é o ângulo entre o eixo do canal e a horizontal. $S_i(y)$ é a corda na seção transversal na coordenada y . A variável A_t é a área da tubulação.

O termo $g \cos(\theta) \int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i(y)}{A_t} dy$ representa o acréscimo, em relação à pressão interfacial, da pressão média da fase líquida devido à hidrostática. O termo $g \cos(\theta) \left(\int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y) S_i(y)}{A_t} dy \right)$ representa o decréscimo, em relação à pressão interfacial, da pressão média da fase gasosa. Estas duas relações surgem do balanço da ação da pressão em cada fase e da hipótese simplificadora de que a variação da pressão na seção é apenas devido à sua hidrostática, hipótese esta representada pelas equações a seguir:

Para a fase líquida:

$$p_l(x, y, t) = p_i(x, t) + g \rho_l \cos(\theta)(h - y) \quad (3.5)$$

Para a fase gasosa:

$$p_g(x, y, t) = p_i(x, t) + g \rho_g \cos(\theta)(h - y) \quad (3.6)$$

Durante este trabalho, a conservação de massa de cada fase e as equações de quantidade de movimento não serão sempre representadas pelas relações (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4). Outras relações, derivadas deste conjunto inicial, serão utilizadas por uma questão de conveniência, ou pela necessidade de se acrescentar novos termos a estas relações originais. Por exemplo, em algumas situações será mais adequado apresentar as equações de quantidade de movimento na seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho_g \alpha u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \alpha \Gamma_g u_g^2}{\partial x} - p_i \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{A_t} \frac{\partial \left(\int_h^{h_{MAX}} p_g(x, y, t) \frac{dA(y)}{dy} dy \right)}{\partial x} = \quad (3.7)$$

$$\frac{-\tau_i S_i - \tau_g S_{wg}}{A_t} - \rho_g g \alpha \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial \rho_l (1-\alpha) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1-\alpha) \Gamma_l u_l^2}{\partial x} - p_i \frac{\partial (1-\alpha)}{\partial x} + \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^h p_l(x, y, t) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} = \frac{\tau_i S_i - \tau_l S_{wl}}{A_t} - \rho_l g (1-\alpha) \sin(\theta) \quad (3.8)$$

O termo $p_i \frac{\partial \alpha}{\partial x}$ representa a ação da pressão interfacial no balanço de força para a fase gás, o termo $p_i \frac{\partial (1-\alpha)}{\partial x}$ representa a ação da pressão interfacial no balanço de força para a fase líquida.

Aplicando a Equação (3.6) na Equação (3.7), esta se torna idêntica à Equação (3.3). Da mesma maneira, aplicando a Equação (3.5) na Equação (3.8), esta se torna idêntica à Equação (3.4). A vantagem de se utilizar as equações (3.7) e (3.8) é que estas admitem variações mais genéricas para o perfil de pressão, o que será considerado futuramente neste trabalho.

Existe uma dificuldade na utilização das equações (3.7) e (3.8). Elas são relativamente fáceis de ser aplicadas quando a interface do arranjo estratificado é lisa. O problema é um pouco diferente quando a interface é rugosa, o que é comum no problema de *roll waves*. Neste caso, as variações de altura da interface podem ser muito rápidas, devido a ondas de curto comprimento, e computar a ação da pressão interfacial nesta interface rugosa pode ser muito complexo e talvez até exija uma modelagem bidimensional. Não é intenção deste trabalho lidar com modelos bidimensionais. Além disto, em um método numérico unidimensional, a malha utilizada pode não ser refinada o suficiente para representar a forma rugosa da interface, mas pode-se desejar representar a influência desta rugosidade no escoamento estratificado. A Figura (3.2) exemplifica melhor a dificuldade que se terá, caso se queira representar a ação da pressão interfacial em uma interface rugosa.

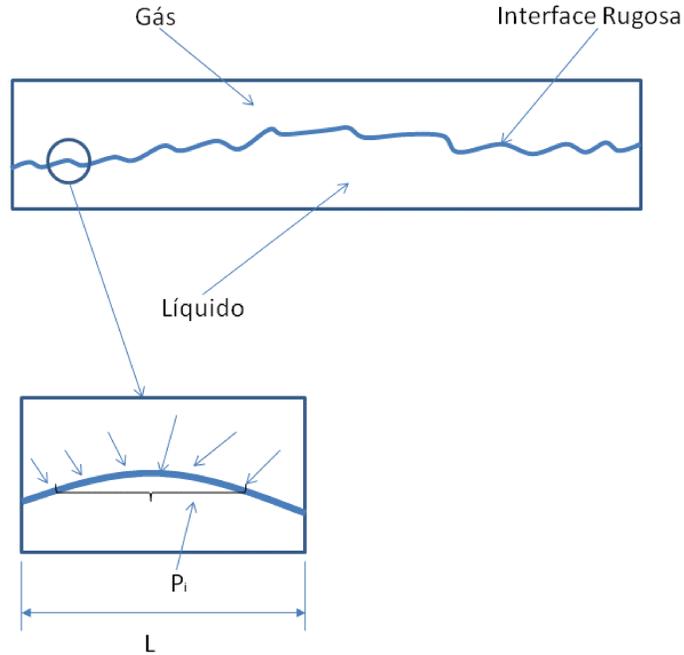


Figura 3.2 Ação da pressão interfacial em um pequeno trecho rugoso na interface

Uma solução seria admitir um comprimento representativo das ondas curtas que dão o caráter rugoso à interface e se trabalhar com o valor médio da ação da pressão interfacial neste comprimento representativo.

Com isto, trabalhar-se-á com as seguintes relações aproximadas para a média da ação da pressão interfacial em uma interface rugosa:

$$\frac{1}{L_L} \int p_i \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau \approx \frac{1}{A_t} \frac{1}{L_L} \int p_i(\tau) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau ; \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{L_L} \int p_i \frac{\partial(1-\alpha)}{\partial x} \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau \approx \frac{1}{A_t} \frac{1}{L_L} \int p_i(\tau) (n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau ; \quad (3.10)$$

Onde L é o comprimento representativo da rugosidade na interface, n_g é a normal da superfície externa que circunda a fase gasosa, n_{gx} é a componente em x desta normal e τ é a coordenada curvilínea representativa da curva ao longo da interface rugosa.

As equações (3.9) e (3.10) estão apenas computando a força média relacionada com a pressão interfacial sobre um pequeno trecho da interface rugosa por unidade de volume.

A fração de vazio para a interface rugosa apresenta uma variação muito rápida, torna-se mais útil trabalhar com a fração de vazio média, definida em um pequeno trecho rugoso definido pelo comprimento característico L :

$$\langle \alpha \rangle = \frac{1}{L_L} \int \alpha(\tau) \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.11)$$

Uma relação auxiliar que deve ser levantada é a que trata da variação média da fração de vazio ao longo do comprimento que caracterizaria a interface rugosa:

$$\frac{1}{L_L} \int \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{\partial \frac{1}{L_L} \int \alpha \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau}{\partial x} = \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} \approx \frac{1}{A_t} \frac{1}{L_L} \int (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.12)$$

Será admitido que a variação observada na interface devido ao seu aspecto rugoso não alterará, ao menos de maneira notável, variáveis como velocidades médias das fases, massas específicas e perímetros, o impacto da interface rugosa será computado apenas na fração de vazio, altura de filme e na pressão interfacial. Com isto, integrando as equações (3.7) e (3.8) ao longo de um comprimento representativo da interface rugosa e dividindo as equações por este comprimento, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_g u_g}{\partial t} \frac{1}{L_L} \int \alpha(\tau) \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau + \frac{\partial \rho_g \Gamma_g u_g^2}{\partial x} \frac{1}{L_L} \int \alpha(\tau) \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau - \\ & \frac{1}{L_L} \int p_i \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau + \frac{1}{A_t} \frac{\partial \left(\int_{\langle h \rangle}^{h_{MAX}} p_g(x, y, t) \frac{dA(y)}{dy} dy \right)}{\partial x} = , \quad (3.13) \\ & \frac{-\tau_i S_i - \tau_g S_{wg}}{A_t} - \rho_g g \frac{1}{L_L} \int \alpha(\tau) \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau \text{sen}(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_l \left(1 - \frac{1}{L} \int \alpha(\tau) \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau \right) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l \left(1 - \frac{1}{L} \int \alpha(\tau) \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau \right) \Gamma_l u_l^2}{\partial x} - \\
& \frac{1}{L} \int p_i \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau + \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{\langle h \rangle} p_l(x, y, t) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} = \quad . \quad (3.14) \\
& \frac{\tau_i S_i - \tau_l S_{wl}}{A_t} - \rho_l g \left(1 - \frac{1}{L} \int \alpha(\tau) \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau \right) \text{sen}(\theta)
\end{aligned}$$

Aplicando as equações (3.9) e (3.11) em (3.13) e as equações (3.10) e (3.11) em (3.14) tem-se um novo par para as equações de quantidade de movimento que será conveniente quando se vier a considerar a interface rugosa. Este novo par é dado por

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle \Gamma_g u_g^2}{\partial x} - \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \left(\int p_i(\tau) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau \right) + \\
& \frac{1}{A_t} \frac{\partial \left(\int_0^{h_{MAX}} \int \langle h \rangle p_g(x, y, t) \frac{dA(y)}{dy} dy \right)}{\partial x} = \frac{-\tau_i S_i - \tau_g S_{wg}}{A_t} - \rho_g g \langle \alpha \rangle \text{sen}(\theta) \quad ; \quad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) \Gamma_l u_l^2}{\partial x} - \\
& \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \left(\int p_i(\tau) (n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau \right) + \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{\langle h \rangle} p_l(x, y, t) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} = ; \quad (3.16) \\
& \frac{\tau_i S_i - \tau_l S_{wl}}{A_t} - \rho_l g (1 - \langle \alpha \rangle) \text{sen}(\theta)
\end{aligned}$$

Outra variação importante do conjunto de equações (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) é a que considera os fluidos como incompressíveis, o conjunto de equações com esta hipótese será muito utilizada neste trabalho e deve ser apresentada neste tópico. Neste caso, as equações (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) são alteradas para

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_g}{\partial x} = 0; \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial x} = 0; \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \alpha u_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \Gamma_g u_g^2}{\partial x} + \frac{\alpha}{\rho_g} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\partial g \cos(\theta) \left(\int_h^{h_{MAX}} \frac{(h-y)S_i(y)}{A_t} dy \right)}{\partial x} = ; \quad (3.19)$$

$$\frac{-\tau_i S_i - \tau_g S_{wg}}{\rho_g A_t} - g \alpha \text{sen}(\theta)$$

$$\frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial t} + \frac{\partial(1-\alpha)\Gamma_l u_l^2}{\partial x} + \frac{(1-\alpha)}{\rho_l} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\partial g \cos(\theta) \int_0^h \frac{(h-y)S_i(y)}{A_t} dy}{\partial x} = . \quad (3.20)$$

$$\frac{\tau_i S_i - \tau_l S_{wl}}{\rho_l A_t} - g(1-\alpha)\text{sen}(\theta)$$

A vantagem mais importante da hipótese de fluidos incompressíveis é que permite a diminuição do número de equações, além de não tratar da família de ondas sônicas que tem velocidades propagações muito altas, podendo levar a restrições no incremento de tempo em um método numérico explícito.

A redução do número de equações se dá através das duas equações (3.17) e (3.18). Somando estas duas equações se tem a seguinte relação:

$$\frac{\partial(1-\alpha)u_l + \alpha u_g}{\partial x} = \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = 0. \quad (3.21)$$

Onde j é o fluxo volumétrico da mistura. De (3.21):

$$j(x,t) = (1-\alpha)u_l + \alpha u_g = F(t). \quad (3.22)$$

Com isto, reduz-se o sistema em uma equação. Porém, o sistema agora, por conta da Equação (3.22), deixa de ser hiperbólico e passa a ser parabólico. Para que se possa manter o problema com características hiperbólicas, deve-se fazer uma imposição:

$$j(x,t) = (1-\alpha)u_l + \alpha u_g = \text{Constante}. \quad (3.23)$$

A Equação (3.23) não só mantém as características hiperbólicas do sistema como também permite reduzir em mais uma equação o problema original, pois de (3.23) tem-se a seguinte relação

$$u_l = \frac{j - \alpha u_g}{(1-\alpha)}. \quad (3.24)$$

Com a Equação (3.24) pode-se trabalhar com apenas duas equações do sistema e substituir todas as referências a u_l por esta relação.

Para se obter estas duas equações representativas do problema de fluidos incompressíveis, deve-se eliminar de alguma maneira a variável pressão interfacial do sistema. Somando (3.19) e (3.20) pode-se representar a derivada da pressão interfacial no espaço por meio das variáveis u_l , u_g e α :

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\rho_g} \frac{\partial p_i}{\partial x} \\ &= - \frac{1}{\left[1 + \frac{\rho_g (1-\alpha)}{\rho_l \alpha} \right]} \frac{\partial (1-\alpha) \Gamma_l u_l^2 + \alpha \Gamma_g u_g^2}{\partial x} \\ & \quad - \frac{1}{\left[1 + \frac{\rho_g (1-\alpha)}{\rho_l \alpha} \right]} \frac{\partial g \cos(\theta) \left(\int_h^{h_{MAX}} \frac{(h-y) S_i(y)}{A_t} dy + \int_0^h \frac{(h-y) S_i(y)}{A_t} dy \right)}{\partial x} + \\ & \quad \frac{1}{\left[1 + \frac{\rho_g (1-\alpha)}{\rho_l \alpha} \right]} \left(\frac{\tau_i S_i - \tau_l S_{wl}}{\rho_l A_t} - \frac{\tau_i S_i + \tau_g S_{wg}}{\rho_g A_t} - g \operatorname{sen}(\theta) \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Aplicando (3.25) em (3.19), pode-se eliminar a variável pressão interfacial desta última relação, com (3.24) pode-se eliminar todas as referências a u_l nesta nova relação. O novo sistema de equações toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_g}{\partial x} = 0; \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \alpha u_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \Gamma_g u_g^2}{\partial x} + \frac{\partial g \cos(\theta) \int_h^{h_{MAX}} \frac{(h-y) S_i(y)}{A_t} dy}{\partial x} - \\
& \frac{1}{1+Fa} \frac{\partial \left[\alpha \Gamma_g u_g^2 + \frac{\Gamma_l (j - \alpha u_g)^2}{1-\alpha} \right]}{\partial x} - \frac{1}{1+Fa} \frac{\partial g \cos(\theta) \int_0^{h_{MAX}} \frac{(h-y) S_i(y)}{A_t} dy}{\partial x} = . \quad (3.27) \\
& \frac{Fa}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g} \right) - \frac{1}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l} \right) - \\
& g \operatorname{sen}(\theta) \left(\alpha - \frac{1}{1+Fa} \right)
\end{aligned}$$

Onde o termo Fa é definido por

$$Fa = \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1-\alpha}{\alpha} . \quad (3.28)$$

Observar que este par de equações (3.26) e (3.27) só é válido enquanto se respeitar a restrição $j(x,t) = (1-\alpha)u_l + \alpha u_g = \text{Constante}$.

Com isto foram apresentados os sistemas de equações mais importantes que serão utilizados neste trabalho. Para complementar, no Apêndice B deduz-se uma equação simplificada para escoamento estratificado transiente, esta equação tem um valor secundário no trabalho, mas facilitará as análises de hiperbolicidade que serão feitas futuramente.

3.2. Sobre a Hipótese de Água Rasa

Comentou-se de maneira rápida no Tópico 3.1 sobre a hipótese de perfil hidrostático de pressão na seção transversal do canal. Esta é uma aproximação nas equações unidimensionais. Outros efeitos podem influenciar como a pressão varia ao longo da seção transversal

Na verdade, a maneira como se define esta variação de pressão é o que distingue o que vem a ser uma onda de gravidade hiperbólica de uma onda de gravidade dispersiva. No caso de ondas hiperbólicas, os efeitos dinâmicos são descartados e considera-se apenas a

hidrostática como termo relevante na variação da pressão ao longo da seção transversal. Este é o típico modelo de água rasa, o qual é válido para comprimentos de onda longos, $\lambda \gg h$, ver Lighthill (2005), onde λ é o comprimento de onda. A justificativa para se admitir apenas a hidrostática na variação transversal da pressão para ondas de comprimentos longos pode ser intuída pelo fato de que em comprimentos de onda longos, as variações de área são suaves o bastante para se desprezar os efeitos dinâmicos na Equação de Bernoulli.

As relações (3.5) e (3.6) que definem como a pressão varia com a hidrostática na seção transversal do canal parecem ser razoáveis para escoamentos estratificados com variações suaves de altura de filme. Porém, deve-se lembrar que no caso do arranjo estratificado, ao contrário do escoamento em canal aberto, lida-se com diferenças importantes nas suas velocidades médias. Além disto, a despeito das ondas de grande comprimento ($\lambda > 20 h$) terem as maiores amplitudes, em um arranjo estratificado de interface instável, existirão ondas de curto comprimento as quais não se aplicam a hipótese do perfil hidrostático de pressão. Considerando estas ondas de curto comprimento, que dão o aspecto rugoso à interface e a grande diferença de velocidade entre as fases, próximo à interface, as relações (3.5) e (3.6) podem não ser representativas. Portanto, apesar de em pontos da seção transversal, distantes da interface, e em fenômenos dominados por ondas de grande comprimento ser possível utilizar as relações (3.5) e (3.6), em alguns casos especiais deve-se fazer uma modelagem a parte da variação da pressão próximo à interface, onde os efeitos dinâmicos devem ser considerados. A Figura 3.3 representa este problema.

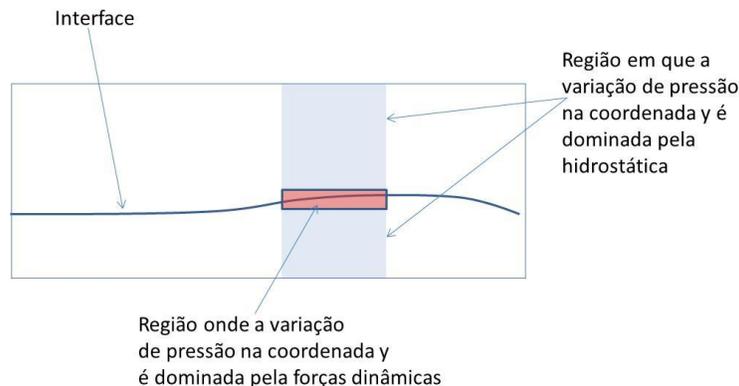


Figura 3.3 Região onde forças dinâmicas podem dominar a variação do perfil de pressão em um escoamento estratificado

Caso se queira considerar os efeitos dinâmicos na pressão na região próxima a interface, o par de equações (3.15) e (3.16) apresentados no Tópico 3.1 seria mais adequado para tratar das equações de quantidade de movimento de cada fase, pois permite, ao menos de maneira aproximada, considerar como a pressão interfacial atua em uma interface rugosa de um escoamento estratificado.

3.3. Acoplamento entre a família de ondas sônicas e a de ondas de gravidade, a simplificação de escoamento incompressível

Roll waves são regidas principalmente por ondas de gravidade. Em canais fechados, ao contrário de canais abertos, pode existir a influência da família de ondas sônicas na evolução de *roll waves*. Para se ter uma noção do quanto a família de ondas sônicas influencia na evolução de uma *roll wave*, deve-se verificar até que ponto os fenômenos de propagação de ondas sônicas e ondas de gravidade podem ser tratados de maneira desacopladas em um sistema em canal fechado.

A maior preocupação é com o efeito da compressibilidade do gás. O líquido pode ser considerado de antemão incompressível.

Neste ponto se irá fazer algumas simplificações das equações (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4). Será desconsiderado os termos fontes, o escoamento será horizontal, serão desprezados os fatores de forma e a fase líquida se admitirá incompressível, com isto, a conservação da massa do gás se mantém a mesma. Já a conservação da massa do líquido se altera para

$$\rho_l \frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t} + \rho_l \frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial x} = 0,$$

o que leva à nova expressão

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial x} = 0. \quad (3.29)$$

A equação de quantidade de movimento para a fase gás é alterada para

$$\frac{\partial \rho_g \alpha u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \alpha u_g^2}{\partial x} + \alpha \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\partial g \left(\int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y) S_i(y)}{A_t} dy \right)}{\partial x} = 0. \quad (3.30)$$

Já a equação de quantidade de movimento para a fase líquida se altera para:

$$\rho_l \frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial t} + \rho_l \frac{\partial(1-\alpha)u_l^2}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{\partial p_i}{\partial x} + \rho_l \frac{\partial g \int_0^h \frac{(h-y)S_i(y)}{A_t} dy}{\partial x} = 0.$$

O que leva à expressão

$$\frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial t} + \frac{\partial(1-\alpha)u_l^2}{\partial x} + \frac{(1-\alpha)}{\rho_l} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\partial g \int_0^h \frac{(h-y)S_i(y)}{A_t} dy}{\partial x} = 0. \quad (3.31)$$

Com isto, para a condição de fase líquida incompressível, o seguinte conjunto de equações deve ser destacado:

$$\frac{\partial \alpha \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_g u_g}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial x} = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \rho_g \alpha u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \alpha u_g^2}{\partial x} + \alpha \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\partial g \left(\int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y)S_i(y)}{A_t} dy \right)}{\partial x} = 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial t} + \frac{\partial(1-\alpha)u_l^2}{\partial x} + \frac{(1-\alpha)}{\rho_l} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\partial g \int_0^h \frac{(h-y)S_i(y)}{A_t} dy}{\partial x} = 0. \quad (3.31)$$

As equações de quantidade de movimento serão modificadas para as suas formas não-conservativas, neste caso, a Equação (3.30) é modificada para

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{g}{\rho_g \alpha A_t} \frac{\partial \left(\int_h^{h_{MAX}} \rho_g (h-y)S_i(y) dy \right)}{\partial x} = 0. \quad (3.32)$$

Já a Equação (3.31) é alterada para

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{g}{(1-\alpha)A_t} \frac{\partial \int_0^h (h-y)S_i(y) dy}{\partial x} = 0. \quad (3.33)$$

Como se deseja verificar o acoplamento entre ondas sônicas e ondas de gravidade, as seguintes relações serão utilizadas:

$$\frac{dp}{d\rho_g} = \frac{1}{c_g^2} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \int_0^h (h-y) S_i(y) dy}{\partial x} = A_t (1-\alpha) \frac{dh}{dx}, \quad (3.35)$$

c_g é a velocidade do som na fase gás.

Aplicando as relações (3.34) e (3.35) nas relações (3.32) e (3.33), tem-se o seguinte conjunto de equações

$$\frac{\partial \alpha \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_g u_g}{\partial x} = 0, \quad (3.36)$$

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial (1-\alpha) u_l}{\partial x} = 0, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{1}{\rho_g} \left(1 + \frac{g}{\alpha A_t c_g^2} \int_0^{h_{\max}} (h-y) S_i(y) dy \right) \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0. \quad (3.39)$$

Deseja-se determinar a partir de que ponto a compressibilidade do gás é relevante nos fenômenos de propagação mais relacionados com os efeitos de gravidade. As velocidades dinâmicas podem ser obtidas a partir de uma linearização das equações (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4). Com isto, pode-se entender todas as variáveis apresentadas nestas equações como a soma de um termo de estado inicial, uniforme, com um termo de ordem de grandeza inferior e variável no tempo e no espaço. Desta maneira: $p = p_0 + p'$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$, $u_g = u_{g0} + u'_g$, $u_l = u_{l0} + u'_l$.

Desprezando os termos de segunda ordem, pode-se obter um sistema linearizado a partir de (3.36), (3.37), (3.38) e (3.39), que com os devidos algebrismos pode ser representado por

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\rho_{g0} c_0^2}{\alpha_0} (u_{g0} - u_{l0}) \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + u_{g0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \rho_{g0} c_0^2 \frac{\partial u'_g}{\partial x} + \rho_{g0} c_0^2 \frac{(1-\alpha_0)}{\alpha_0} \frac{\partial u'_{l0}}{\partial x} = 0; \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + u_{l0} \frac{\partial \alpha'}{\partial x} - (1-\alpha_0) \frac{\partial u'_{l0}}{\partial x} = 0; \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial u'_g}{\partial t} + u_{g0} \frac{\partial u'_g}{\partial x} + \frac{1}{\rho_{g0}} \left(1 + \frac{g}{\alpha A_t c_0^2} \frac{hmáx}{h} \int (h-y) S_i(y) dy \right) \frac{\partial p'}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha'}{\partial x} = 0; \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial u'_l}{\partial t} + u_{l0} \frac{\partial u'_l}{\partial x} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p'}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha'}{\partial x} = 0. \quad (3.43)$$

Onde c_0 é a velocidade de propagação do som no gás considerando o estado de pressão inicial.

Na forma matricial:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p' \\ \alpha' \\ u'_g \\ u'_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{g0} & \frac{\rho_{g0} c_0^2}{\alpha_0} (u_{g0} - u_{l0}) & \rho_{g0} c_0^2 & \rho_{g0} c_0^2 \frac{(1-\alpha_0)}{\alpha_0} \\ 0 & u_{l0} & 0 & -(1-\alpha_0) \\ \frac{1}{\rho_{g0}} \left(1 + \frac{g}{\alpha A_t c_0^2} \frac{hmáx}{h} \int (h-y) S_i(y) dy \right) & g \frac{\partial h}{\partial \alpha} & u_{g0} & 0 \\ \frac{1}{\rho_l} & g \frac{\partial h}{\partial \alpha} & 0 & u_{l0} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} p' \\ \alpha' \\ u'_g \\ u'_l \end{bmatrix} = 0 \quad (3.44)$$

Estas últimas equações são muito simples e hiperbólicas e prontamente se pode determinar as velocidades características deste sistema. O polinômio característico para a obtenção destas velocidades é obtido da igualdade

$$\begin{vmatrix} u_{g0} - \lambda & \frac{\rho_{g0} c_0^2}{\alpha_0} (u_{g0} - u_{l0}) & \rho_{g0} c_0^2 & \rho_{g0} c_0^2 \frac{(1-\alpha_0)}{\alpha_0} \\ 0 & u_{l0} - \lambda & 0 & -(1-\alpha_0) \\ \frac{1}{\rho_{g0}} \left(1 + \frac{g}{\alpha A_t c_0^2} \frac{hmáx}{h} \int (h-y) S_i(y) dy \right) & g \frac{\partial h}{\partial \alpha} & u_{g0} - \lambda & 0 \\ \frac{1}{\rho_l} & g \frac{\partial h}{\partial \alpha} & 0 & u_{l0} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.45)$$

E é dado por:

$$\begin{aligned}
& (u_{g0} - \lambda)^2 (u_{l0} - \lambda)^2 - c_0^2 \left(1 + \frac{g}{\alpha A_t c_0^2} \int_h^{h_{\max}} (h-y) S_i(y) dy \right) (u_{l0} - \lambda)^2 + \\
& (1 - \alpha_0) g \frac{\partial h}{\partial \alpha} (u_{g0} - \lambda)^2 - \left(1 + \frac{g}{\alpha A_t c_0^2} \int_h^{h_{\max}} (h-y) S_i(y) dy \right) g \frac{\partial h}{\partial \alpha} c_0^2 (1 - \alpha_0) - \\
& c_0^2 \frac{(1 - \alpha_0)}{\alpha_0} \frac{\rho_{g0}}{\rho_l} (u_{g0} - \lambda) (u_{l0} - \lambda) - c_0^2 (u_{g0} - u_{l0}) \frac{(1 - \alpha_0)}{\alpha_0} \frac{\rho_{g0}}{\rho_l} (u_{g0} - \lambda) + \\
& \rho_{g0} c_0^2 (1 - \alpha_0) g \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{1}{\rho_l} = 0
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Da Equação (3.46), três termos se tornam relevantes para determinar o acoplamento entre as ondas sônicas e de gravidade, são eles:

$$\begin{aligned}
& \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \frac{\rho_{g0}}{\rho_{l0}}; \\
& \frac{1}{c_0^2} \frac{g}{\alpha A_t} \int_h^{h_{\max}} (h-y) S_i(y) dy; \\
& \frac{\rho_{l0} - \rho_{g0}}{\rho_{l0}};
\end{aligned}$$

Quando

$$\frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \frac{\rho_{g0}}{\rho_{l0}} \ll 1, \quad \frac{1}{c_0^2} \frac{g}{\alpha A_t} \int_h^{h_{\max}} (h-y) S_i(y) dy \ll 1, \quad \text{e} \quad \frac{\rho_{l0} - \rho_{g0}}{\rho_{l0}} \approx 1,$$

a Equação (3.47) pode ser simplificada para:

$$(u_{g0} - \lambda)^2 (u_{l0} - \lambda)^2 + (1 - \alpha_0) g \frac{\partial h}{\partial \alpha} (u_{g0} - \lambda)^2 - c_0^2 (u_{l0} - \lambda)^2 - c_0^2 (1 - \alpha_0) g \frac{\partial h}{\partial \alpha} \tag{3.48}$$

O que dá dois pares de velocidades características, $\lambda = u_{g0} \pm c_0$ e $\lambda = u_{l0} \pm \sqrt{-(1 - \alpha_0) g \frac{\partial h}{\partial \alpha}}$. Estes dois pares são bastante esclarecedores, o primeiro

apresenta as velocidades de propagação de um pulso de pressão no gás, o segundo representa claramente as velocidades de propagação de um pulso em um canal aberto. Ou

seja, quando $\frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \frac{\rho_{g0}}{\rho_{l0}} \ll 1$, $\frac{1}{c_0^2} \frac{g}{\alpha A_t} \int_h^{h_{\max}} (h-y) S_i(y) dy \ll 1$ e $\frac{\rho_{l0} - \rho_{g0}}{\rho_{l0}} \approx 1$ o

comportamento da propagação de ondas deve, provavelmente, se apresentar como se

existissem dois sistemas desacoplados, um relacionado com fenômenos acústicos e outro relacionado com ondas de gravidade do tipo água-rasa.

Em geral, para a maior parte dos problemas práticos na indústria de petróleo que envolvem escoamento estratificado do tipo gás-líquido, as condições citadas acima são satisfeitas. Portanto, parece que para um estudo de *roll-waves*, fenômeno regido pelas ondas de gravidade, trabalhar com um modelo incompressível (que desconsidera os termos referentes à propagação de ondas de natureza sônica) não deve levar a falhas relevantes na representação da realidade.

É importante ressaltar que esta aproximação de escoamento incompressível para o gás é válida do ponto de vista local. Do ponto de vista global, considerando longas extensões de duto, a variação de massa específica do gás deve ser considerada, mesmo em um modelo transiente que originalmente foi pensado para escoamento incompressível. Reforçando, o que se afirma com isto não é que o escoamento é incompressível, pois a incompressibilidade está lá no primeiro par de velocidades características, o que se afirma é que as ondas dominadas pela compressibilidade tem um acoplamento muito fraco com as ondas dominadas pela gravidade, portanto, já que se deseja analisar fenômenos relacionados com ondas de gravidade, é razoável não considerar a compressibilidade dos fluidos.

3.4. Tensões cisalhantes e fatores de forma do perfil de velocidade

No caso de escoamento estratificado com filme de líquido e gás em regime turbulento, as correlações utilizadas para a tensão cisalhante serão as indicadas pela literatura.

Para uma tubulação, os números de Reynolds de cada fase serão definidos por Reynolds do filme de líquido

$$\text{Re}_l = \frac{4(1-\alpha)A_t}{S_{wl}} \frac{u_l \rho_l}{\mu_l}. \quad (3.48)$$

Onde μ_l é a viscosidade do líquido e S_{wl} o perímetro de contato da tubulação com a fase líquida.

Reynolds do gás

$$\text{Re}_g = \frac{4\alpha A_t}{S_{wg} + S_i} \frac{u_g \rho_g}{\mu_g}. \quad (3.49)$$

Onde μ_g é a viscosidade do gás e S_{wg} o perímetro de contato da tubulação com a fase gasosa.

As tensões cisalhantes são definidas por

Tensão cisalhante na parede para a fase gás

$$\tau_{wg} = f_g \frac{\rho_g u_g^2}{2}. \quad (3.50)$$

Onde f_g é o fator de fricção para a fase gás.

Tensão cisalhante na parede para a fase líquida

$$\tau_{wl} = f_l \frac{\rho_l u_l^2}{2}. \quad (3.51)$$

Onde f_l é o fator de fricção para a fase líquida.

Tensão cisalhante na interface

$$\tau_i = f_g \frac{\rho_g (u_g - u_l) |u_g - u_l|}{2}. \quad (3.52)$$

Os fatores de fricção com a parede da fase gasosa e da fase líquida são obtidas da mesma correlação para duto liso:

$$f = 0,046 \text{Re}^{-0,2}. \quad (3.53)$$

O fator de fricção interfacial neste trabalho é definido como igual ao fator de fricção da fase gás. No Apêndice C é apresentada uma breve discussão em que se demonstra que esta aproximação parece ser aceitável. É importante notar que esta definição de fator de fricção interfacial é válida apenas para interface lisa, para o caso de interface rugosa torna-se necessário corrigir este fator de fricção.

Para o caso das fases se encontrarem em regime turbulento, se trabalhará com os fatores de forma dos perfis de velocidade iguais a 1. Também, no Apêndice C se demonstra que esta é uma aproximação razoável.

O caso de escoamento em regime laminar não é o mais comum em roll waves, ao menos para o caso de gasodutos, mas tornou-se necessário determinar estas equações de fechamento para este caso, pois, neste trabalho, se utiliza os resultados experimentais de Bruno & McCready (1988), como parâmetros de comparação com os experimentos. Estes experimentos foram feitos em regime laminar. O mais importante neste caso é determinar o fator de forma de maneira adequada.

O trabalho de Bruno & McCready (1988) trata de canais retangulares, portanto, as equações de fechamento para regime laminar serão definidas apenas para este caso.

No caso de canais retangulares, os números de Reynolds de cada fase são definidos por

$$\text{Re}_g = \frac{A_t}{S_{wg} + S_i} \frac{\rho_g \alpha u_g}{\mu_g} \quad (3.54)$$

$$\text{Re}_l = \frac{A_t}{S_{wl}} \frac{\rho_l (1 - \alpha) u_l}{\mu_l} \quad (3.55)$$

Para o escoamento estratificado instável com filme em regime laminar, não só a vazão de gás é muito superior à vazão de líquido, também a velocidade média do gás é muito superior à velocidade média do líquido. Neste caso, considerando apenas o arraste por atrito de película (o arraste dominante em uma interface lisa), a tensão cisalhante na interface deve ser aproximadamente igual à tensão cisalhante da fase gás na parede.

A tensão cisalhante da fase gás será obtida pelas relações usuais de fator de fricção para regime turbulento, tomando-se apenas o cuidado de utilizar o diâmetro hidráulico para a obtenção deste fator de fricção, o seu fator de forma será admitido igual a 1.

Resta determinar a tensão cisalhante do líquido na parede, o seu perfil de velocidade e a razão Γ_l .

A determinação do perfil de velocidade é simples, já que o líquido se encontra em regime laminar. Admitindo que o gradiente de pressão é pequeno e que a maior variação da velocidade se dá na direção transversal do canal (y), pode-se chegar à expressão (para o caso laminar)

$$\frac{\partial^2 u_l(y)}{\partial y^2} = \frac{C_0}{\mu_l}. \quad (3.56)$$

Integrando a Relação (3.56)

$$u_l(y) = \frac{C_0}{2\mu_l} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (3.57)$$

Duas condições podem ser estabelecidas

$$\mu_l \frac{\partial u_l(h)}{\partial y} = \tau_i = \tau_{wg}, \quad (3.58)$$

$$u_l(0) = 0. \quad (3.59)$$

Com (3.58), imediatamente se tem $C_2 = 0$.

Uma relação adicional para determinar C_1 e C_2 pode ser obtida da definição da velocidade média da fase líquida

$$\bar{u}_l = \frac{\int_0^h u_l(y) dy}{h}. \quad (3.60)$$

Com (3.56) e (3.54)

$$C_0 = \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_{wg}}{h} - 2 \frac{\mu_l \bar{u}_l}{h^2} \right), \quad (3.61)$$

$$C_1 = 3 \frac{\bar{u}_l}{h} - \frac{1}{2} \frac{\tau_{wg}}{\mu_l}. \quad (3.62)$$

A tensão cisalhante da fase líquida é então definida por

$$\tau_{wl} = 3 \frac{\overline{\mu_l u_l}}{h} - \frac{1}{2} \tau_{wg}. \quad (3.63)$$

O perfil de velocidade é dado por

$$u_l(y) = \frac{3}{4} \left(\frac{\tau_{wg}}{\mu_l h} - 2 \frac{\overline{u_l}}{h^2} \right) y^2 + \left(3 \frac{\overline{u_l}}{h} - \frac{1}{2} \frac{\tau_{wg}}{\mu_l} \right) y. \quad (3.64)$$

Com (3.64), pode-se calcular o fator de forma do perfil de velocidade do filme de líquido em regime laminar. Para um dos casos experimentais que serão utilizados para teste do modelo, fluxo volumétrico de líquido de 0,065 m/s e fluxo volumétrico da mistura de 6,9 m/s, o resultado do perfil seria dado por

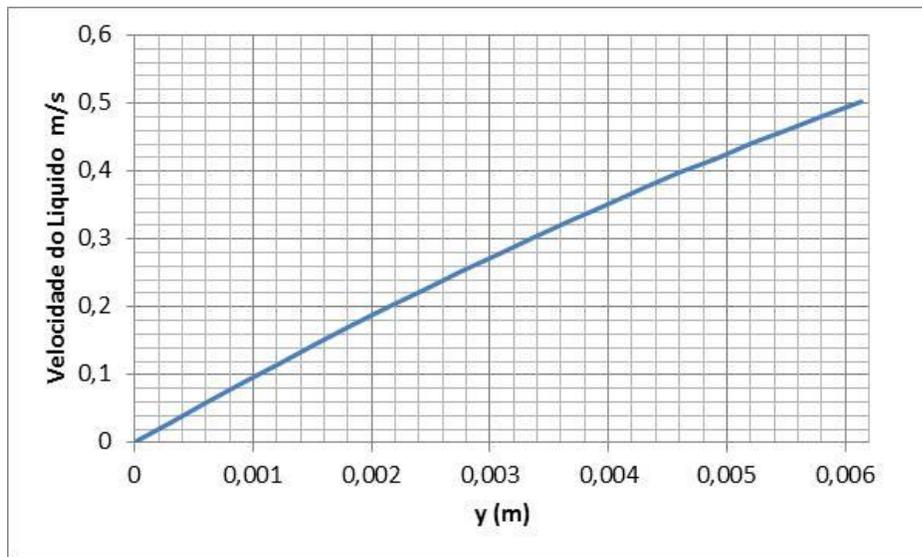


Figura 3.4 Exemplo de perfil de velocidade para filme de líquido em regime laminar

A razão Γ_l , definida por $\Gamma_l = \frac{\langle u_l^2 \rangle}{\langle u_l \rangle \langle u_l \rangle}$, para condições de escoamento próximas do

caso experimentado por Bruno e McCreedy é dada graficamente por

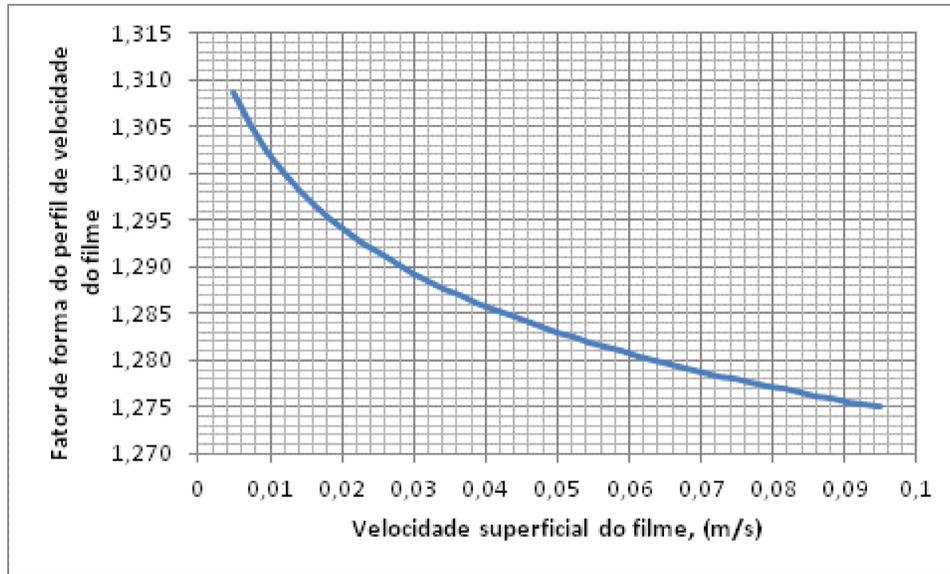


Figura 3.5 Fator de forma, regime laminar

Simplificando Γ_l para uma reta

$$\Gamma_l(U_{ls}) \approx 1,30456 - 0,275U_{ls} \quad (3.65)$$

4. METODOLOGIA NUMÉRICA

Serão apresentados casos que foram simulados com o modelo considerado no capítulo anterior. Para o caso de filme de líquido em regime laminar, serão feitas duas comparações com resultados experimentais existentes na literatura. Para o caso de filme em regime turbulento, serão feitas apenas as simulações numéricas e se discutirá, a partir dos resultados destas simulações, as dificuldades de se utilizar um modelo de escoamento estratificado unidimensional transiente que considera um perfil hidrostático de pressão.

4.1. Descrição do método numérico utilizado

Antes de se apresentar os casos que foram simulados, deve-se fazer uma breve explanação sobre o método numérico utilizado. Uma discussão mais detalhada do método é feita no Apêndice A.

Problemas como roll-waves e golfadas são caracterizados por uma sequência de choques no filme de líquido (ou na sua fração volumétrica de líquido - *holdup*) ao longo de uma tubulação. Um bom método numérico para estudar fenômenos como *roll-waves* deve ser capaz de capturar e representar com uma boa resolução estes choques. Estranhamente em muitos trabalhos de simulação numérica voltados para o estudo da evolução de roll-waves e golfadas a partir do arranjo estratificado - ver Issa & Kempf (2003); Holmås (2010) - o método numérico escolhido não é de fato adequado para este tipo de problema, exigindo em alguns casos uma discretização exageradamente refinada, levando a simulações muito lentas, e em outros casos exigindo o uso de uma difusidade artificial para se garantir estabilidade na simulação. Existem métodos de Volumes Finitos especializados para o tratamento de fenômenos hiperbólicos - ver Leveque (2002) - que garantem a captura de choques e sua representação com alta resolução sem o problema de instabilizações devido à dispersão numérica para o caso de métodos de segunda ordem. Estes métodos numéricos tratam a variação de estados na interface entre duas células de simulação como um problema de Riemann. O problema de Riemann se resume a determinar a evolução de um

fenômeno, de natureza hiperbólica, definido a partir de uma condição inicial em que, considerando uma superfície $\partial\Omega$, separando o domínio Ω em dois (Ω_e, Ω_d), o estado U assume um valor constante e distinto em cada um destes domínios (ver Witham (1999) para alguns exemplos de problema de Riemann). A condição inicial de um problema de Riemann é apresentada de maneira simplificada na Figura 4.1.

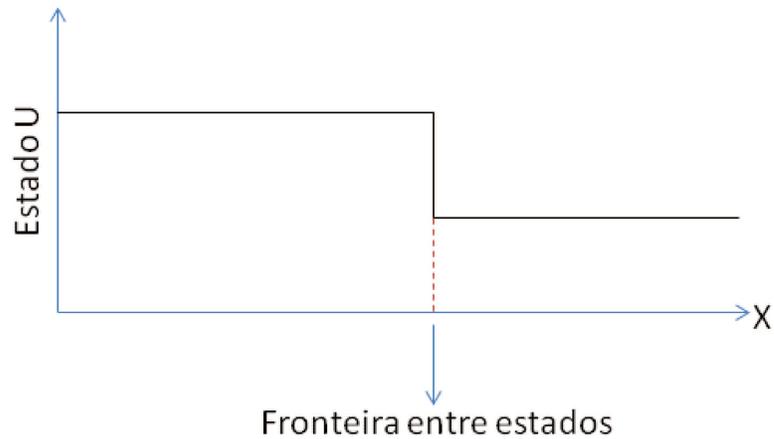


Figura 4.1 Condição inicial do problema de Riemann

A Figura 4.2 representa o processo de discretização de uma função contínua e a forma como fica a interface de cada célula.

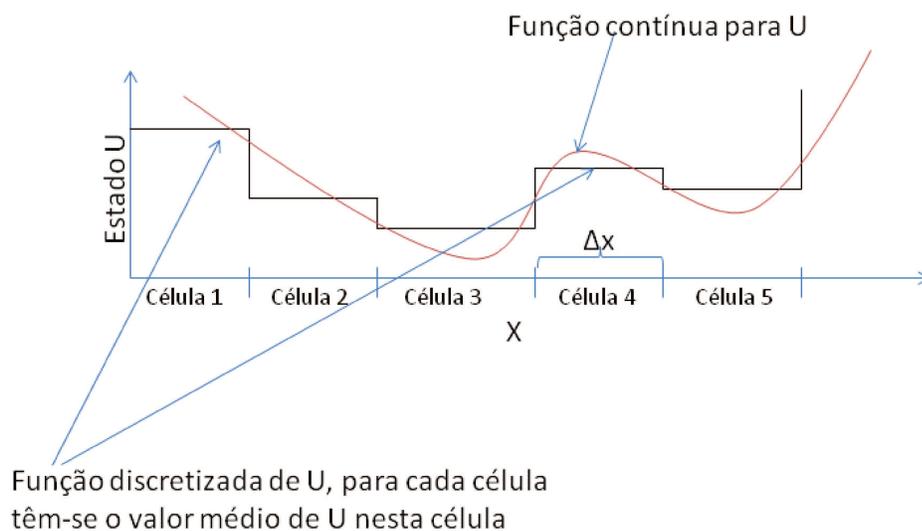


Figura 4.2 Discretização de uma função contínua

Das figuras 4.1 e 4.2, pode-se observar que da passagem de uma célula para outra tem-se uma variação discreta de estados, como em um choque. Disto, vem a ideia de tratar o problema numérico como uma sequência de problemas de Riemann. No método de Gudonov (inspirado na ideia de tratar o problema discretizado como um problema de Riemann), os seguintes passos devem ser aplicados para tratar adequadamente o problema de propagação de ondas, ver Leveque (2002):

- Construir uma função discreta e constante em cada célula representando de maneira aproximada a função exata;
- Resolver o problema hiperbólico de propagação de ondas como um problema de Riemann considerando as alterações que as oscilações promovem em cada célula;
- Após um intervalo de tempo predefinido (dependente da dita condição CFL, ver Leveque (2002), em que estas oscilações se propagam nas células, recalculer uma nova condição média para cada célula.

A Figura 4.3 representa este procedimento:

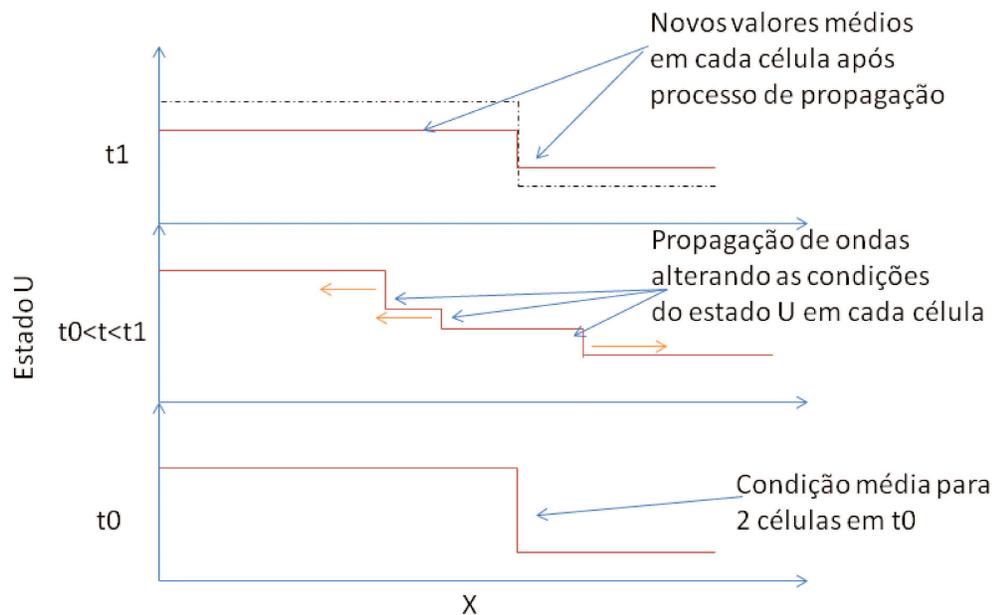


Figura 4.3 Procedimento para resolução de um problema hiperbólico utilizando volumes finitos

O procedimento se assemelha a um método como o das características, porém existem diferenças relevantes. A primeira é o cálculo de um novo valor médio para o estado U em uma célula ao final de um incremento de tempo. O segundo vem do fato de que como se trata de um problema de Riemann não-linear, deve-se sempre avaliar se a evolução do fenômeno envolve ondas de choque e de rarefação, ver Leveque (2002), isto torna o problema bem mais complexo. Em geral, avaliar estas ondas de choque e rarefação em um problema hiperbólico não é algo que possa ser feito de maneira imediata, exigindo um esforço matemático-computacional que pode por em cheque a aplicabilidade do método. O que geralmente se faz é trabalhar com um problema de Riemann aproximado, tratando a sua evolução em pequenos intervalos de tempo de maneira linearizada, lógico, tomando o cuidado de não se perder as principais características de eventuais choques e rarefações que venham a ocorrer no problema original. A ideia é obter um conjunto de equações que, no domínio de duas células adjacentes, apesar de linearizado seja capaz de representar com razoável fidelidade o problema de Riemann exato. A equação conservativa e não-linear, capaz de representar o problema de Riemann exato seria dada por

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial H(V)}{\partial x} = 0. \quad (4.1)$$

Onde V seria o vetor com as variáveis conservativas do problema e $H(V)$ seriam os fluxos destas variáveis conservativas. No método numérico, (4.1) é transformado em um problema linear aproximado

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + R|_t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0. \quad (4.2)$$

\tilde{u} seria a solução aproximada e $R|_t$ seria a dita matriz de Roe que tem como característica principal ser capaz de representar, de maneira aproximada, mas com razoável fidelidade, o problema de Riemann entre duas células adjacentes.

A maneira como esta metodologia foi aplicada para implementação de um simulador de escoamento estratificado transiente é apresentada no Apêndice A.

Conforme observado no Capítulo 3, a compressibilidade dos fluidos não deve ser relevante para o estudo de *roll waves* que são dominadas por ondas de gravidade. Portanto, se trabalhará com um modelo que considere os fluidos incompressíveis. Além disto, se

considerará o perfil de pressão regido apenas pela hidrostática, serão desprezados possíveis efeitos dinâmicos sobre o perfil de pressão na proximidade da interface.

Trabalhar com um modelo em que os fluidos são tratados como incompressíveis diminui de maneira relevante o esforço numérico. No caso de roll waves, pode-se trabalhar com um esquema explícito sem que a condição CFL, LeVeque (2002), leve a uma restrição no incremento numérico que torne a simulação desnecessariamente lenta. Num modelo que considera os fluidos incompressíveis, o limite de incremento que satisfaz a condição CFL é o limite relacionado com a velocidade de propagação das ondas de gravidade, que são exatamente as ondas que caracterizam as roll waves. Ou seja, no caso de fluidos incompressíveis, o critério CFL indica o incremento de tempo necessário para que se tenha uma boa representação da evolução das roll waves, nada além do que se necessita.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, construiu-se dois simuladores, um considerando a compressibilidade dos fluidos e outro em que se admite que os fluidos são incompressíveis. No Apêndice A é apresentada a maneira como foi feita a discretização para as duas situações e uma comparação dos resultados numéricos utilizando estas duas hipóteses para simulações de fenômenos dominados por ondas de gravidade. Como foi demonstrado no Capítulo 3, para problemas em que a família de ondas de gravidade são as mais relevantes, a consideração da compressibilidade não é importante para o modelo. Este é o caso para a simulação numérica de *roll waves*, portanto, preferiu-se trabalhar com um modelo com fluidos incompressíveis, como apresentado pelas equações (3.26) e (3.27).

Para que se faça corretamente a captura de choques em fenômenos de propagação de ondas hiperbólicas não lineares o ideal seria ter uma formulação conservativa no lado esquerdo das equações (3.26) e (3.27). Infelizmente na Equação (3.27), os termos a esquerda não são conservativos. Não é possível construir uma formulação integral correta para conectar os estados a esquerda e a direita de um choque. Neste trabalho, esta dificuldade é resolvida trabalhando com médias aritméticas da condição a direita e a esquerda do choque para os termos que multiplicam as derivadas no espaço. Isto não é de fato ideal no tratamento do choque, mas acredita-se que os coeficientes das derivadas espaciais devem variar pouco ao longo de um choque, o que deve reduzir o erro deste tratamento aproximado.

As equações (3.26) e (3.27) devem ser rerepresentadas por meio de variáveis conservativas para que se possa trabalhar corretamente com o método numérico. Definindo as variáveis conservativas por

$$u_1 = \alpha \quad , \quad (4.3)$$

$$u_2 = \alpha u_g \quad , \quad (4.4)$$

e aplicando (4.3) e (4.4) nas equações (3.26) e (3.27) tem-se o par de equações com variáveis conservativas que será aplicado no método numérico para se obter a matriz de Roe definida em (4.2) (o escoamento foi definido como horizontal):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \quad , \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial \left(\Gamma_g \frac{u_2^2}{u_1} \right)}{\partial x} - \frac{1}{1+Fa} \frac{\partial \left[\Gamma_g \frac{u_2^2}{u_1} + \Gamma_l \frac{(j-u_2)^2}{1-u_1} \right]}{\partial x} + \\ \frac{\partial \left[g \int_h^{h_{\max}} \frac{(h-y)S_i(y)}{A_t} dy \right]}{\partial x} - \frac{1}{1+Fa} \frac{\partial \left[g \int_0^{h_{\max}} \frac{(h-y)S_i(y)}{A_t} dy \right]}{\partial x} = \\ \frac{Fa}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g} \right) + \frac{1}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Considerando $\Gamma_g = 1$ e $\Gamma_l = \Gamma_l(U_{sl})$, a forma *quasi-linear* deste modelo é representada por

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \quad , \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \left[\frac{1}{1+Fa} \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2 - \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2 - \frac{1}{1+Fa} \Gamma_l \left(\frac{j-u_2}{1-u_1} \right)^2 + \frac{\partial g}{\partial u_1} \frac{\int_h^{h_{\max}} \frac{(h-y)S_i(y)}{A_t} dy}{1+Fa} - \frac{\partial g}{\partial u_1} \frac{\int_0^{h_{\max}} \frac{(h-y)S_i(y)}{A_t} dy}{1+Fa} \right] \frac{\partial u_1}{\partial x} +$$

$$\left(2 \frac{u_2}{u_1} - 2 \frac{1}{1+Fa} \frac{u_2}{u_1} + 2 \frac{1}{1+Fa} \Gamma_l \frac{j-u_2}{1-u_1} + \frac{1}{1+Fa} \frac{(j-u_2)^2}{1-u_1} \frac{\partial \Gamma_l}{\partial u_2} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x} =$$

$$\frac{Fa}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g} \right) - \frac{1}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l} \right)$$

Os autovalores deste par de equações são

$$\lambda_{1,2} =$$

$$\frac{Fa}{1+Fa} \alpha + \frac{1}{1+Fa} \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} \pm$$

$$\sqrt{-\frac{Fa}{1+Fa} u_g^2 - \frac{1}{1+Fa} \Gamma_l \left(\frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} \right)^2 - g \frac{A_t}{S_i(\alpha)} \int_h^{h_{\max}} \frac{S_i(y)}{A_t} dy + \frac{1}{1+Fa} g \frac{A_t}{S_i(\alpha)} \int_0^{h_{\max}} \frac{S_i(y)}{A_t} dy + \left(\frac{Fa}{1+Fa} \alpha + \frac{1}{1+Fa} \Gamma_l \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+Fa} \frac{(j-u_2)^2}{1-u_1} \frac{\partial \Gamma_l}{\partial u_2} \right)^2}.$$

Para este caso, a matriz de Roe é definida por

$$R = [R_{i,j}], \text{ onde}$$

$$R_{1,1} = 0, \tag{4.10}$$

$$R_{1,2} = 1, \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
R_{2,1} = & \frac{\left(\sqrt{\alpha} u_g \Big|_L + \sqrt{\alpha} u_g \Big|_R \right) \left[\left(\sqrt{\alpha} u_g \Big|_L + \sqrt{\alpha} u_g \Big|_R \right) \left(1 - \frac{1}{1+Fa} \right) + \right. \\
& \left. - \frac{2 \frac{1}{1+Fa} \int_L^R \sqrt{\alpha} \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} \left(\Gamma_l + \frac{1}{2} \frac{d\Gamma_l}{du_{sl}} \sqrt{\alpha} u_g u_{sl} \right) dz}{\left(\sqrt{\alpha} \Big|_L + \sqrt{\alpha} \Big|_R \right)^2} + \right. \\
& \left. 2 \frac{1}{1+Fa} \int_L^R \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} \left(\sqrt{\alpha} u_g \Gamma_l - \Gamma_l \sqrt{\alpha} \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} + \frac{1}{2} \frac{d\Gamma_l}{du_{sl}} \sqrt{\alpha} u_g u_{sl} \right) dz - \right. \\
& \left. \frac{g \left(\int_L^R 2 \sqrt{\alpha} \frac{1}{s_i(\alpha)} \int_h^{h_{\max}} S_i(y) dy dz - \frac{1}{1+Fa} \int_L^R 2 \sqrt{\alpha} \frac{1}{s_i(\alpha)} \int_0^{h_{\max}} S_i(y) dy dz \right)}{\left(\sqrt{\alpha} \Big|_L + \sqrt{\alpha} \Big|_R \right)} \right] , \tag{4.12}
\end{aligned}$$

$$R_{2,2} = \frac{\left[2 \left(\sqrt{\alpha} u_g \Big|_L + \sqrt{\alpha} u_g \Big|_R \right) \left(1 - \frac{1}{1+Fa} \right) + \right.}{\sqrt{\alpha} \Big|_L + \sqrt{\alpha} \Big|_R} \left[2 \frac{1}{1+Fa} \int_L^R \sqrt{\alpha} \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} \left(\Gamma_l + \frac{1}{2} \frac{d\Gamma_l}{du_{sl}} \sqrt{\alpha} u_g u_{sl} \right) dz \right] . \tag{4.13}$$

O subscrito L indica o estado da célula a esquerda e o subscrito R indica o estado da célula a direita.

Com os autovalores e a Matriz de Roe, é possível simular o avanço das ondas de gravidade com a adequada captura dos seus choques.

Como existe um termo fonte, deve-se utilizar um método como o Strang splitting (ver Apêndice A), o avanço da onda é tratado por um método de Godunov, a partir de (4.2), com uma correção de segunda ordem e a variação com o tempo devido ao termo fonte é resolvida com um Ruge-Kutta de segunda ordem.

Esta formulação numérica serve tanto para o caso de filme laminar como para o caso do filme turbulento. Porém, no caso do filme em regime laminar o fator de forma do perfil de velocidade ganha uma relevância maior por ser maior que 1, como será visto, isto tem um impacto importante nos resultados simulados.

4.2. Estudo de caso, roll waves com filme de líquido em regime laminar, hipótese de perfil hidrostático de pressão

Bruno & McCready (1988) fizeram um levantamento experimental sobre evolução de *roll-waves* com filme em regime laminar. Neste trabalho, os resultados são apresentados no domínio da frequência. Isto é muito conveniente, muito embora o estudo tenha sido feito em um canal de pequeno comprimento. Neste pequeno comprimento, as ondas não tiveram tempo suficiente de propagação no canal para apresentar grandes amplificações.

O estudo foi feito em um canal retangular fechado de largura de 30,5 cm e altura de 2,54 cm. O comprimento total era de 6 metros. Foram instaladas três sondas de condutância a 1,2, 3,8 e 6 metros da entrada do canal. Os dados coletados por estas sondas passaram por um tratamento e são apresentados no domínio da frequência. Trabalhou-se com ar e uma mistura de água e glicerina que dava à mistura líquida uma viscosidade de 5 cP. Os experimentos foram feitos em um canal a baixa pressão, próxima da atmosférica. Para o Caso 1, têm-se $Re_g = 12180$ e $Re_l = 300$, para o Caso 2, têm-se $Re_g = 9975$ e $Re_l = 300$.

As simulações neste caso foram feitas com uma malha bastante refinada, a despeito da alta resolução do problema, os comprimentos das células foram estabelecidas em um doze avos da altura do canal. Isto fez com que a simulação se tornasse bem lenta, devido ao critério CFL. Uma análise posterior indicou que esta discretização refinada é desnecessária para um método de alta resolução capturar com fidelidade os choques de uma *roll wave*. Foi observado que o método utilizado precisa de cerca de 4 a 6 células para caracterizar um choque de onda de gravidade. Uma discretização com células de um quarto da altura de canal implicará portanto em choques definidos em um comprimento aproximadamente igual à altura do canal, para ondas do tipo *roll waves*, geralmente longas, isto é suficiente para representar adequadamente o choque, discretizações menores não representaram um ganho significativo na qualidade dos resultados da simulação.

Seguem abaixo os resultados obtidos deste experimento.

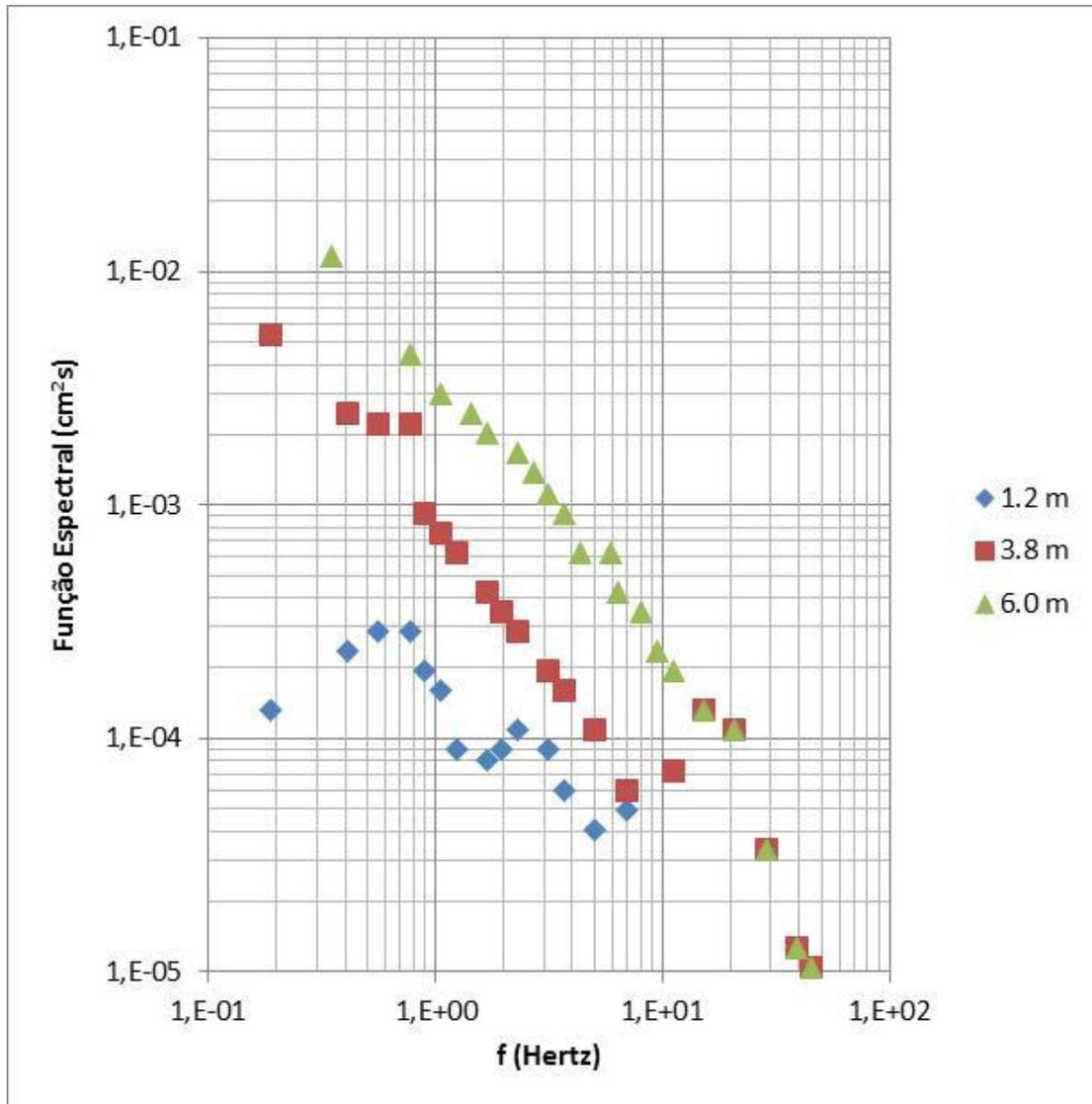


Figura 4.4 Resultado experimental 1, Bruno & McCready, $Re_g = 12180$, $Re_l = 300$

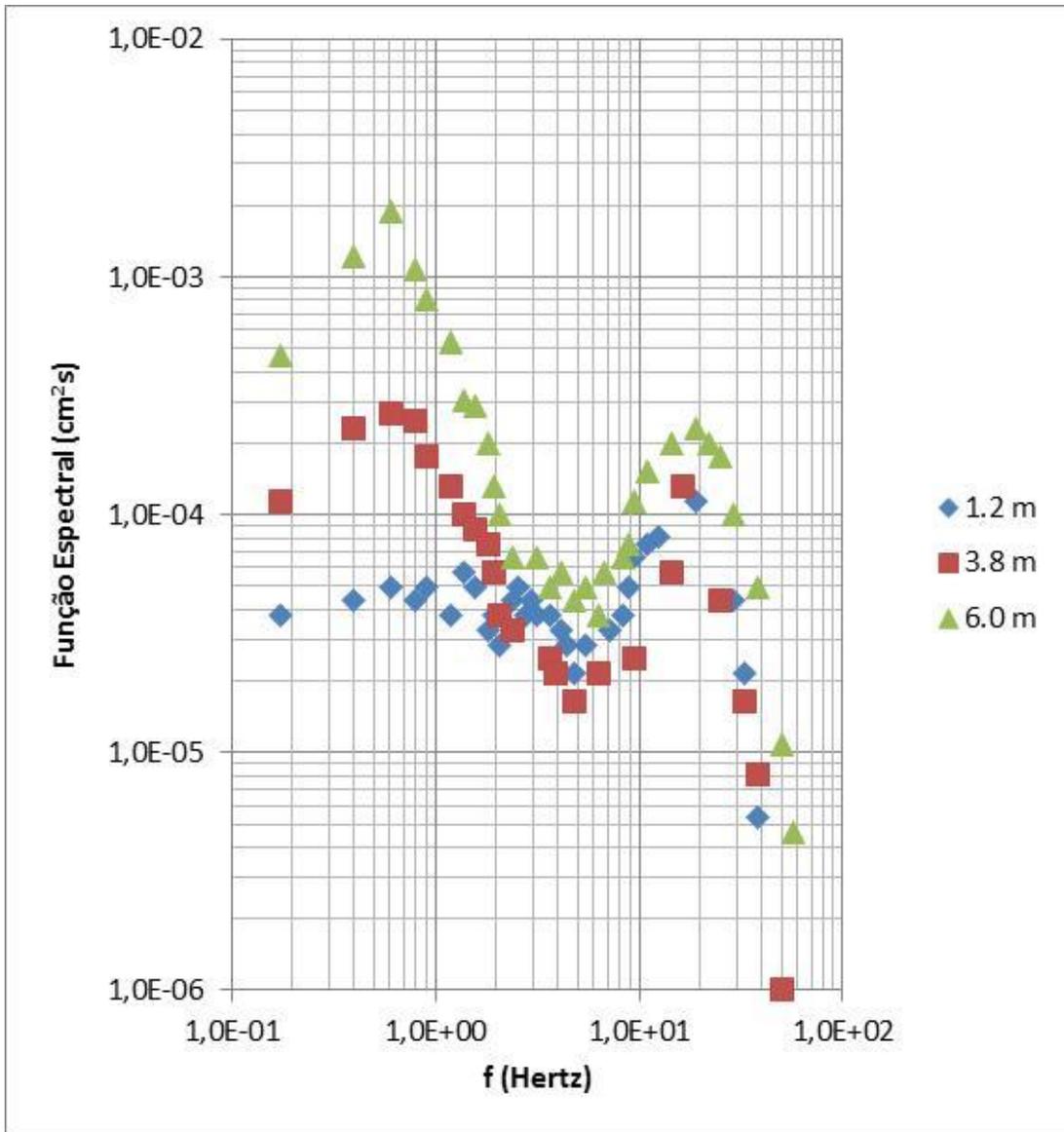


Figura 4.5 Resultado experimental 2, Bruno e McCready, $Re_g=9975$, $Re_l = 300$

A função espectral foi definida como

$$\overline{a^2} = \int_0^{\infty} \phi(f) df \quad (4.14)$$

onde $\overline{a^2}$ é a variância do deslocamento instantâneo da altura de filme, definido por

$$a(x,t) = h(x,t) - \bar{h}, \quad (4.15)$$

onde \bar{h} é a altura média do escoamento estratificado.

Nas figuras (4.4) e (4.5), observa-se uma realidade interessante de um escoamento estratificado instável, o espectro de frequência das ondas envolvidas na alteração da altura

de filme de líquido é muito largo, convive-se com ondas de diferentes comprimentos, muitas respeitando a hipótese de água rasa, outras, as mais curtas, nem tanto. Pode-se verificar que inicialmente, no ponto a 1,2 metros da entrada do canal, existe um certo domínio, em termos da amplitude, das ondas de curto comprimento (região de alta frequência), à medida que as ondas se deslocam no canal, pontos a 3,8 e 6 metros da entrada, as ondas de maior comprimento (baixa frequência) vão se amplificando e superam as ondas curtas em uma ou até duas ordens de grandeza, o que é uma característica de *roll waves*, as ondas de maior comprimento são as de maiores amplificação. O valor da variação de *holdup* que cada frequência impõe no sistema no início do canal é da ordem de 10^{-6} , o que é muito pequeno. Mesmo no final do canal, a amplitude das ondas longas ainda é pequena, o canal é pequeno demais para permitir uma amplificação notável destas ondas.

Para as condições utilizadas no experimento, a vazão de gás é muito superior à vazão volumétrica de líquido. Por exemplo, utilizando as relações para o número de Reynolds de cada fase em um canal retangular, equações (3.54) e (3.55), para o caso de Reynolds de gás de 12180 e Reynolds de líquido de 300, o fluxo volumétrico da mistura é de 6,9 m/s, já o fluxo volumétrico do líquido é de 0,065 m/s. Para uma condição de permanente instável, o *holdup* seria de 0,2386.

A ideia, para testar o método numérico, é utilizar a distribuição espectral no início do canal, a 1,2 metros, como condição de contorno para o simulador e verificar como o simulador amplifica esta frente de onda. É comum em simulações similares a esta, pôr o simulador em uma condição de transiente instável e deixar que o próprio erro numérico promova o processo de amplificação, ver Issa & Kempf (2002). Nas simulações aqui feitas, se não se alimentasse o simulador com alguma perturbação, não era possível observar a formação de *rol waves*. Quando se colocava alguma perturbação, por menor que fosse já era suficiente para ocorrer uma amplificação e formar ondas de grande amplitude, mas sempre foi necessário impor alguma perturbação. Outro ponto importante é que não parece confiável a metodologia de deixar que os erros numéricos promovam a perturbação inicial e esperar que estas perturbações indiquem corretamente os comprimentos de onda finais de uma *roll wave*. A quantidade de incógnitas neste problema é muito grande, principalmente quando se considera a capacidade do modelo em garantir um processo de coalescimento de

ondas aceitável, ver Capítulo 7, não seria bom acrescentar mais uma fonte de dúvida. No simulador, claro, o valor que era alimentado na condição de contorno não era no domínio da frequência, mas no domínio do tempo, para isto, se utilizou as Relações (4.14) e (4.15). A altura média do filme de líquido foi admitido como igual à altura da condição permanente obtida a partir dos fluxos volumétricos de cada fase. Com a Equação (4.14), era possível fazer uma integração do espectro de frequência do experimento de Bruno e McCready (1988) na posição a 1,2 metros da entrada do canal. Este valor indica a variância para uma determinada frequência. Com a Relação (4.15), era possível com o resultado da variância se obter uma representação de como o filme de líquido oscilava em uma determinada frequência, a partir da seguinte expressão

$$h(t, \omega) = \bar{h} + |a| \text{sen}(\omega t).$$

(4.16)

Com isto, foi possível obter as perturbações de altura de filme que seriam aplicadas na condição de contorno, lembrando que o fluxo volumétrico da mistura era mantido constante.

Seguem os resultados:

Para o Caso 1, a velocidade cinemática foi calculada em 0,8 m/s e a velocidade dinâmica maior foi calculada em 0,65 m/s, o que indicaria instabilidade por este critério. Para o Caso 2, a velocidade cinemática foi calculada em 0,75 m/s e a velocidade dinâmica maior foi calculada em 0,54 m/s, o que também indicaria instabilidade por este critério.

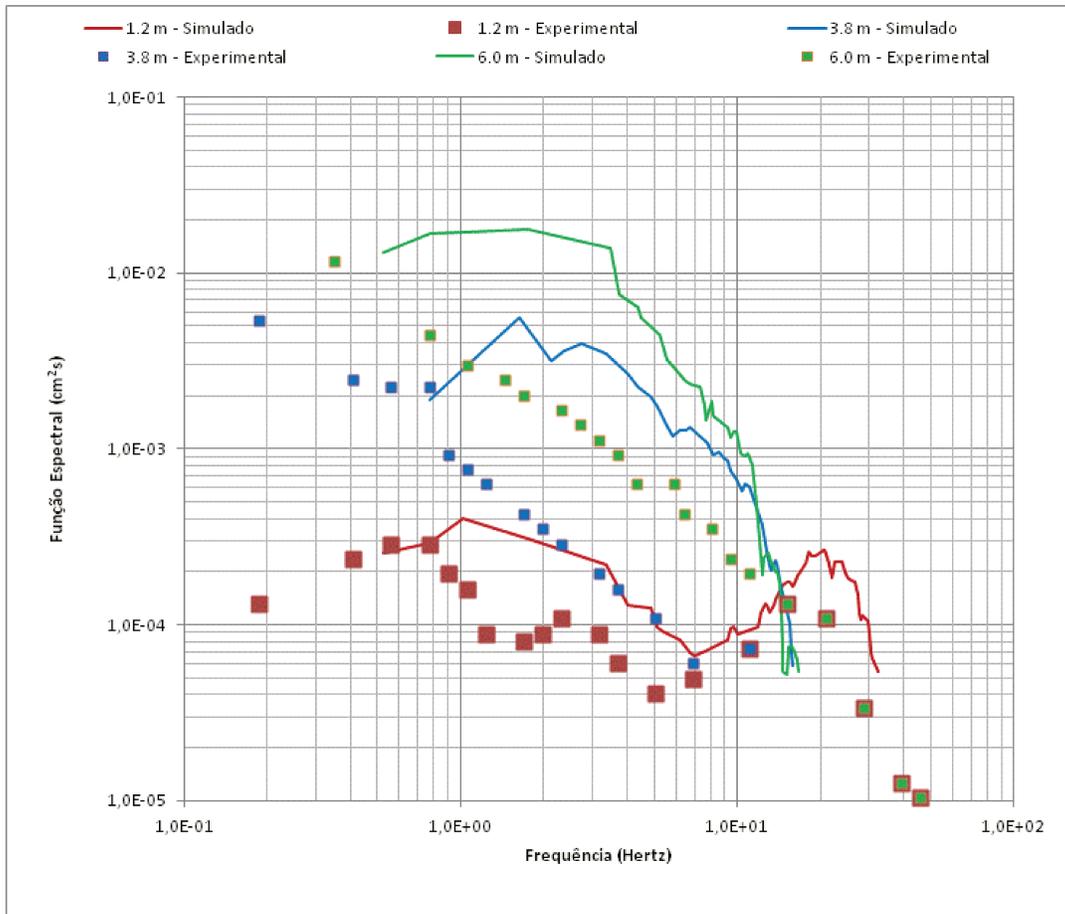


Figura 4.6 Comparação resultado experimental e simulação, Caso 1

O primeiro ponto que se observa no resultado da Figura (4.6) e também se observará na Figura (4.7) é que o espectro de frequência experimental não é exatamente o espectro de frequência simulado no ponto 1,2 metros, o que pode soar estranho, já que é este espectro de frequência que é utilizado para alimentar o simulador. Na verdade, este espectro representa o caminho de volta da condição de contorno, quando nela era aplicada uma transformada de Fourier discreta, surpreendentemente, o resultado não deu exatamente igual ao espectro experimental, indicando que a própria transformada de Fourier discreta pode ser uma fonte de erro na comparação entre o resultado simulado e resultado experimental.

Observa-se que o resultado simulado apresenta uma tendência a ter suas amplificações principais em uma região de frequência mais alta que na região em que estas

amplificações maiores ocorrem no experimento. Provavelmente isto se deva à alguma limitação do modelo em prever corretamente o processo de coalescimento destas ondas.

Nos dois casos representados pelas figuras (4.6) e (4.7), não foi possível se representar adequadamente a faixa espectral de alta frequência ($f > 10$ Hertz). Isto já era esperado, ondas de alta frequência implicam em comprimentos de ondas muito curtos, menores que a ordem de grandeza da altura de canal. Isto exigiria uma discretização pouco factível para a simulação. Pior, provavelmente, para ondas curtas, seria obrigatório uma simulação multidimensional, além do que, as hipóteses de onda hiperbólica não seriam mais válidas. Já no caso da faixa de frequência mais baixa ($f < 1$ Hertz) os resultados parecem razoáveis. Embora não sejam precisos, respeitou-se a ordem de grandeza das amplificações.

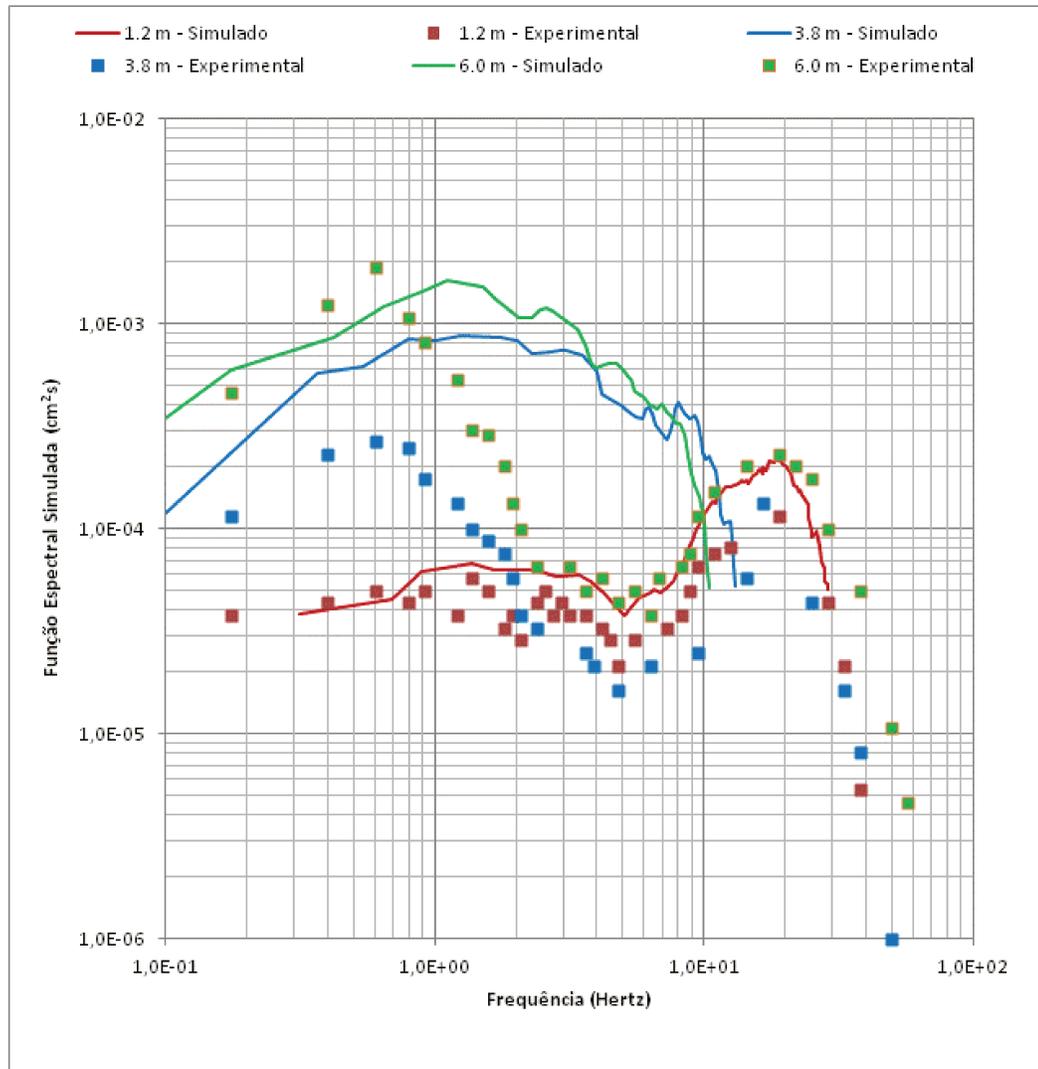


Figura 4.7 Comparação, resultado experimental e simulação, Caso 2

Estas *roll waves* são distintas do que se teria em um sistema em canal aberto. Mesmo com amplitudes pequenas o seu comportamento já não pode ter um paralelo com ondas em canais abertos. Um parâmetro interessante para verificar quanto um escoamento estratificado se distingue de um escoamento em canal aberto é dado por

$$\frac{1}{g} \frac{\rho_g}{\rho_l - \rho_g} \frac{S_i}{A_t} \frac{1}{\alpha} (u_g - u_l)^2 \quad (\text{ver Apêndice B}),$$

este termo desacelera a velocidade de propagação das ondas de gravidade e surge nos modelos para escoamento estratificado transiente devido ao efeito Bernoulli. Quanto menor for este termo, aqui chamado de KHi, mais similar ao escoamento em canal aberto é o escoamento estratificado. Quanto maior for KHi, mais o escoamento estratificado se distingue de um canal aberto. Para o modelo aqui

utilizado, quando K_{Hi} se aproxima de 1, o modelo se torna mal-posto. Acompanhar este parâmetro durante a evolução de uma *roll wave* é um bom meio de se verificar o risco da simulação se tornar mal-posta. Além disto, este termo pode ser uma boa medida do quanto um arranjo estratificado é instável.

Para se ter noção do nível da amplitude de onda aqui avaliada, será apresentado a seguir os perfis de *holdup* e do termo K_{Hi} , nos três últimos metros do canal, para o Caso 1.

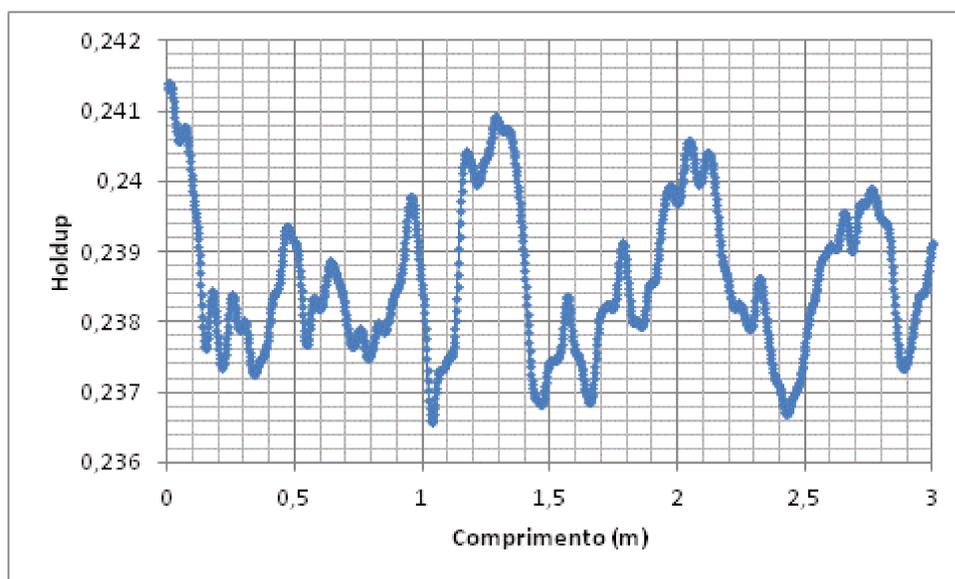


Figura 4.8 Exemplo de perfil de filme para experimento 1, simulado

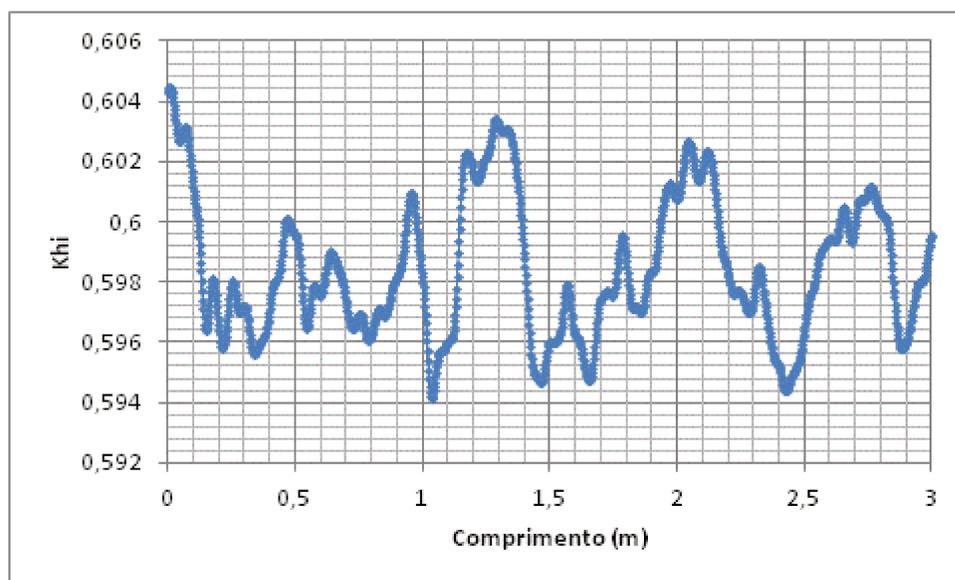


Figura 4.9 Exemplo de perfil de K_{Hi} , experimento 1 simulado

Pelas figuras (4.8) e (4.9), verifica-se que a amplitude de onda ainda é pequena, a despeito do KHi já se encontrar em um patamar alto. O patamar alto do KHi se justifica pela grande diferença de velocidades entre a fase gasosa e a líquida.

Claro, o relativo sucesso do modelo em representar o fenômeno real vem muito mais das condições em que os testes foram feitos do que da qualidade do modelo. Os testes experimentais foram feitos em condições de baixa amplitude de onda na faixa de alta e baixa frequência. Em grandes amplitudes, o modelo se torna mal posto. Em grandes amplitudes fica clara a necessidade de se adicionar termos novos no modelo e que infelizmente ainda são de pouco domínio. Por exemplo, a Figura (4.10) apresenta o processo de amplificação que se teria no Caso 1, se a simulação fosse feita em um canal um pouco mais longo.

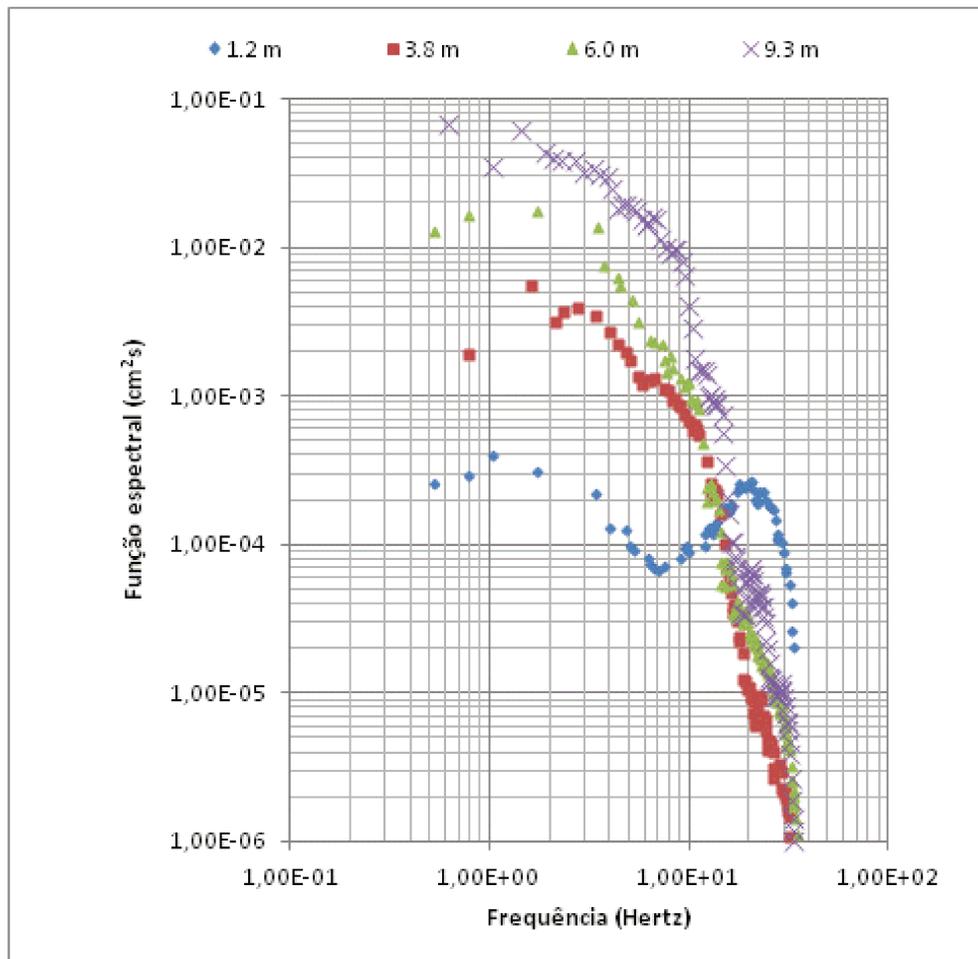


Figura 4.10 Espectro de frequência para a simulação de um canal mais longo

Na Figura (4.10), não foi possível ir além de 9.3 metros, neste ponto, a simulação se tornou mal-posta.

Infelizmente, a conclusão que se obtém é que o problema de modelagem e simulação de escoamento estratificado instável ainda é um problema em aberto e qualquer modelo atual, por melhor que seja, só apresentará resultados confiáveis em condições muito restritas ou restritivas.

Para se ter noção do quanto a simulação do arranjo estratificado instável é sensível e exige um grande cuidado com detalhes de modelagem, foi feito um teste de simulação considerando $\Gamma_i = 1$. Para o primeiro caso, Reynolds de gás mais alto, o resultado é apresentado na Figura (4.11).

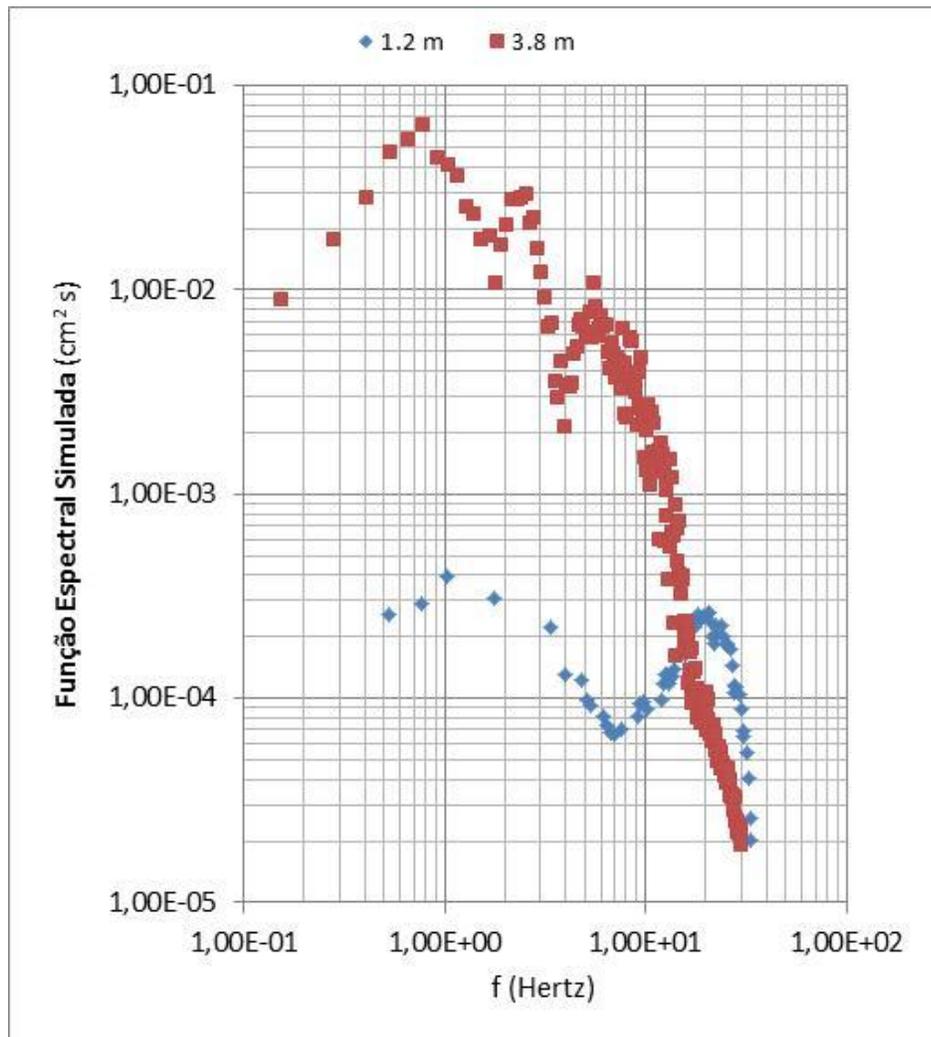


Figura 4.11 Resultado de simulação, experimento 1, para fator de forma =1

‘

Não foi possível simular por tempo suficiente para se ter um espectro adequado para o ponto a 6 metros, antes disto a simulação ficou mal-posta. Observa-se que a amplificação foi muito superior à obtida nas simulações anteriores, uma ordem de grandeza superior, e distinta dos resultados experimentais. Provavelmente, se fosse utilizado um método numérico menos cuidadoso, esta condição mal-posta não seria verificada e se continuaria a simulação detectando inclusive uma antecipada e equivocada formação de golfadas.

4.3. Estudo de casos, roll wave com filme de líquido em regime turbulento, hipótese de perfil hidrostático de pressão

O primeiro caso apresentado corresponde a um duto de duas polegadas, cada célula tem um comprimento de $0,25 D$ e o comprimento total da tubulação é de 2000 diâmetros. A massa específica do líquido utilizada na simulação foi de 1000 kg/m^3 , a massa específica do gás utilizada foi de $1,5 \text{ kg/m}^3$, viscosidade do líquido de 1 cP e de gás de 10^{-2} cP . O fluxo volumétrico da mistura de 4 m/s e fluxo volumétrico da fase líquida de $0,2 \text{ m/s}$. A simulação foi feita a partir da sua condição permanente instável, *holdup* de $0,5039$. É aplicada uma pequena perturbação senoidal no *holdup*, de amplitude $0,001$ e comprimento de onda de 25 diâmetros. A discretização utilizada nesta simulação e nas seguintes foi de um quarto de diâmetro para o comprimento da célula. Para este caso, na condição permanente a velocidade de onda cinemática ficou em $0,964 \text{ m/s}$ e a máxima velocidade de onda dinâmica ficou em $0,765 \text{ m/s}$, isto indica que o escoamento é de fato instável. Seguem os resultados.

- Caso 1: perturbação com comprimento de onda de 25 diâmetros.

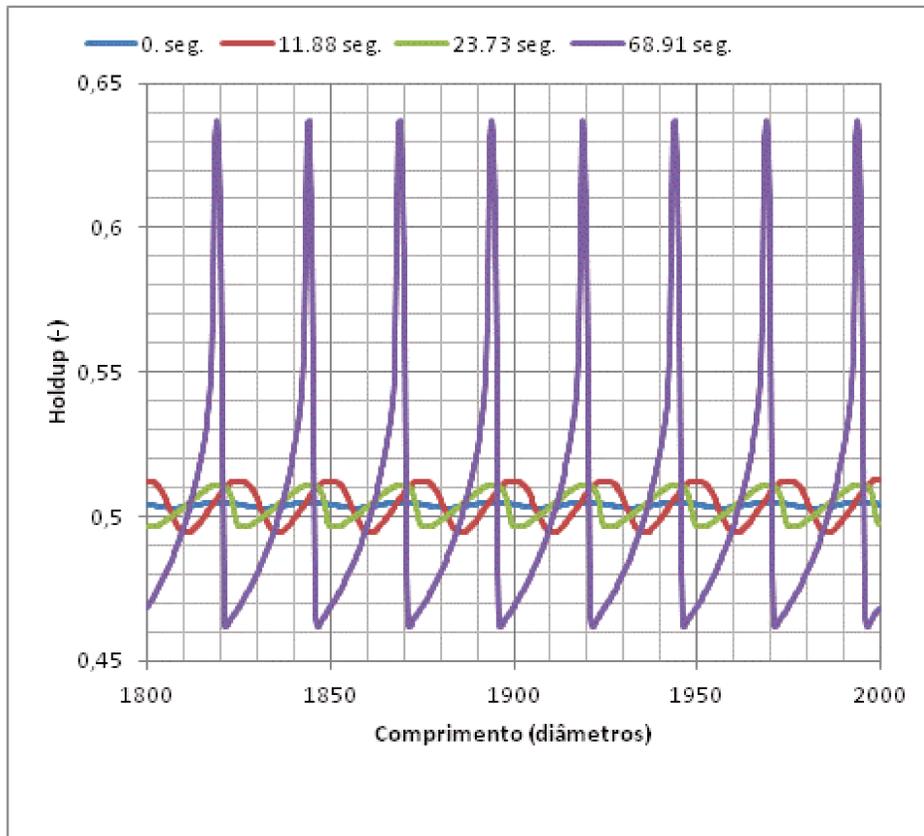


Figura 4.12 Perfil de roll wave, caso 1

A Figura (4.12) mostra o perfil da onda em um trecho de tubulação em diversos momentos da simulação. O processo parece consistente e como era de se esperar, pelo fato da velocidade de propagação de onda cinemática ser mais rápida que a velocidade de propagação de onda dinâmica, há uma amplificação da pequena perturbação que é imposta no escoamento. Observa-se que em todos os tempos do gráfico o comprimento de onda é o mesmo, 25 diâmetros, esta é uma característica de uma roll wave, quando há apenas um comprimento de onda atuando no problema, este comprimento de onda se conserva, ver Gaspari & Bannwart (2012). Com o modelo utilizado até aqui não foi possível fazer a simulação muito além dos 68 segundos. O perfil de velocidade característica da família de onda mais relacionada com ondas de gravidade indica um processo de desestabilização na região em que o termo KHi é grande. Logo após este momento, a simulação acusa que as velocidades características se tornaram complexas, ou seja, o problema se tornou mal posto. É curioso o fato que este modelo não difira de maneira relevante dos modelos normalmente

utilizados para simulação numérica de *roll-waves* e de escoamento estratificado instável, ver Issa & Kempf (2002); Holmås (2010).

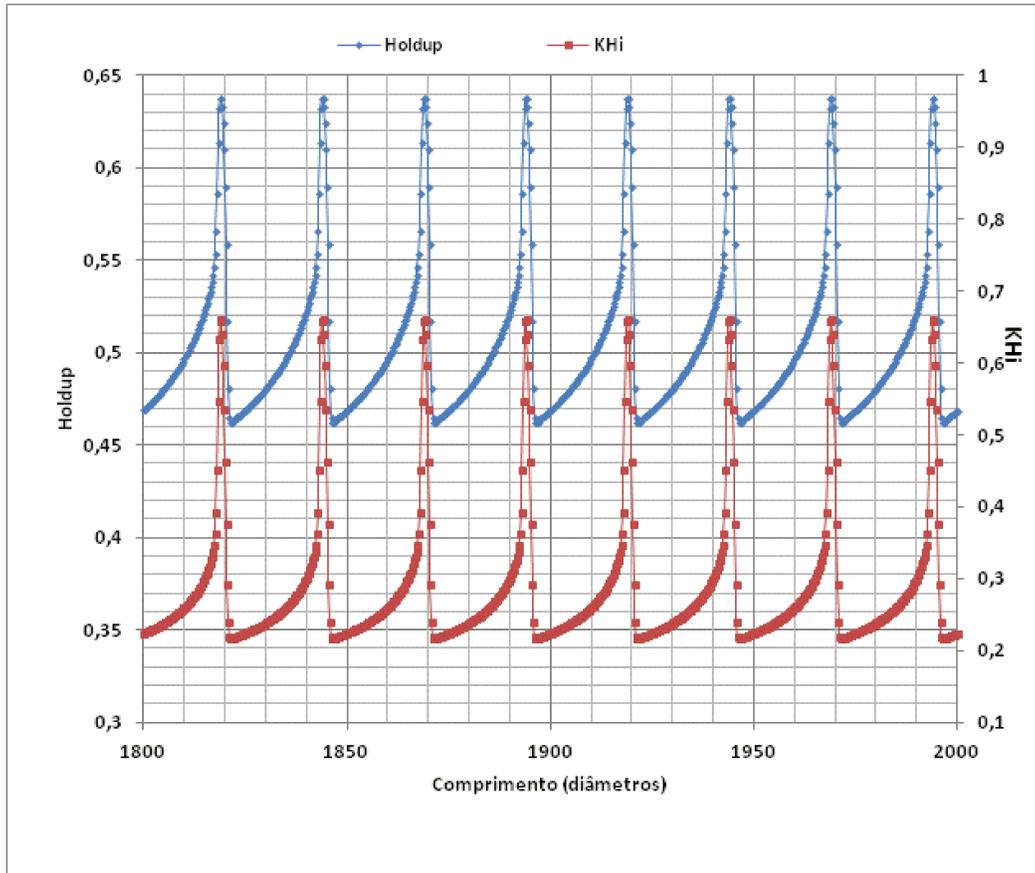


Figura 4.13 Termo KHi X Holdup, caso 1, 68.91 segundos

Na Figura (4.13), é apresentado o gráfico de *holdup* no momento 68,91 segundos e o seu termo KHi. Observa-se que o termo KHi, na crista da onda, já se encontra em um valor muito alto, 0,8, próximo de 1, indicando que os mecanismos mais relacionados com o dito efeito Bernoulli se encontram próximos de tornarem maiores que o termo estabilizador relacionado a hidrostática na seção transversal.

A amplificação da onda neste caso não diminui, atingindo uma condição mal-posta. Holmås também observa esta tendência de não diminuir a amplificação de uma *roll-wave*, quando o modelo usual de escoamento estratificado transiente é aplicado, ver Holmås, (2010). No caso de Holmås, a amplificação foi controlada a partir de considerações heurísticas no fator de fricção interfacial, não será esta a abordagem aqui utilizada.

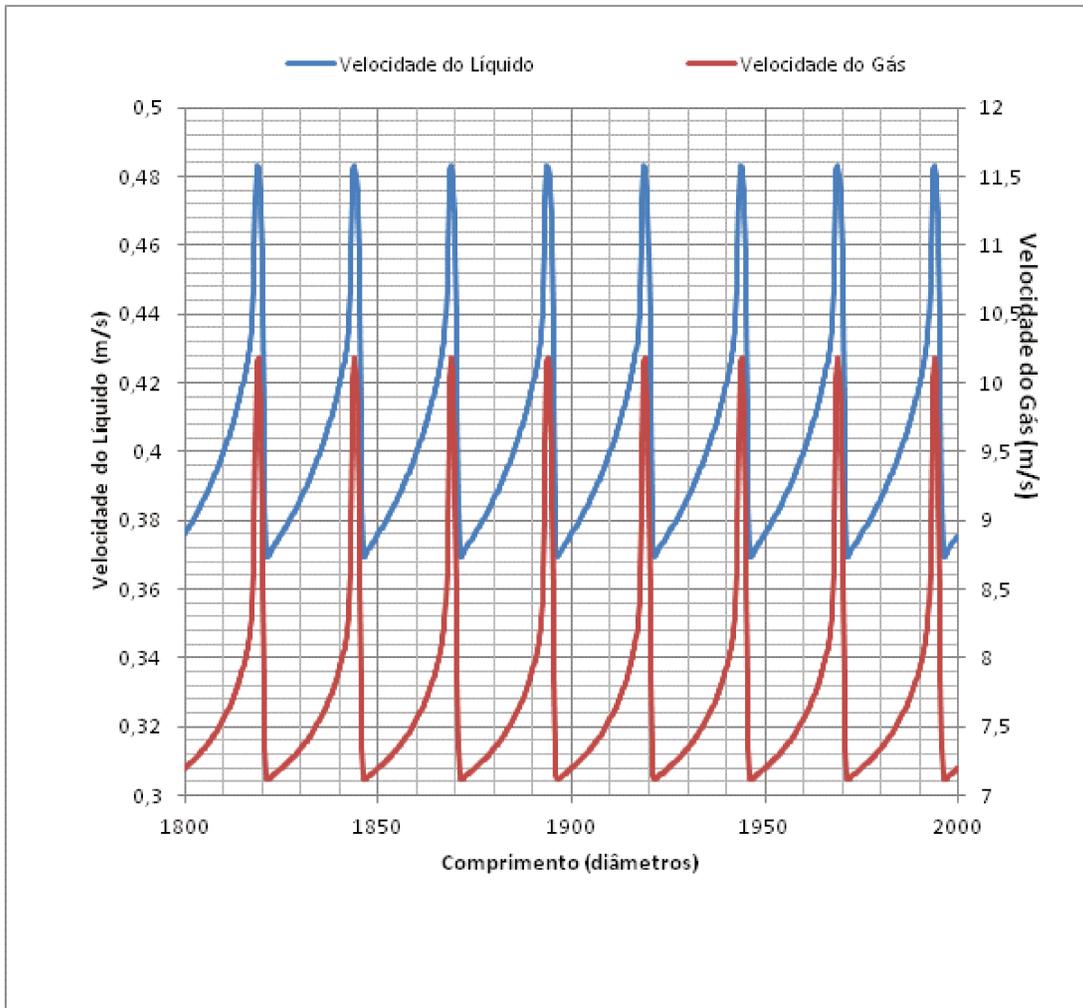


Figura 4.14 Velocidades médias das fases, caso 1, 68,91 segundos

A Figura 4.14 apresenta os perfis de velocidade de cada fase. Observa-se que as velocidades aumentam e diminuem ao mesmo tempo, o que poderia indicar que o simulador não está respeitando a conservação da massa. Não é este o caso. Uma das condições impostas ao simulador é que o fluxo volumétrico da mistura seja sempre constante. Isto está de fato sendo respeitado, pois não se deve observar apenas o comportamento das velocidades, mas também como se comporta a fração de vazio. A Figura (4.15) é obtida da expressão $j = (1 - \alpha)u_l + \alpha u_g$ e mostra claramente que o fluxo volumétrico da mistura é constante.

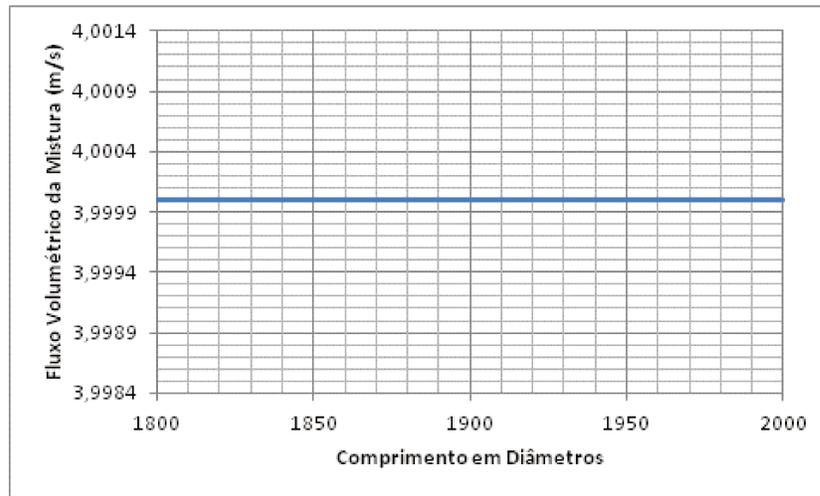


Figura 4.15 Fluxo volumétrico da mistura, caso 1, 68.91 segundos

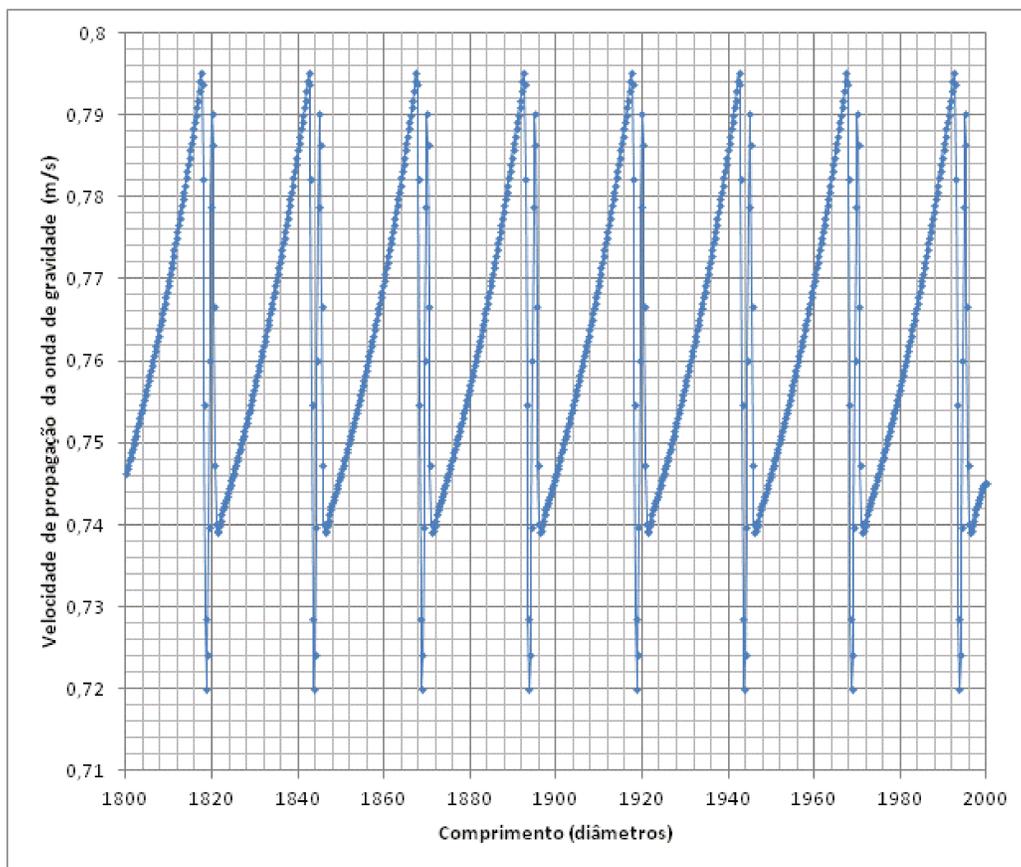


Figura 4.16 Velocidade Característica, caso 1, 68.91 segundos

A Figura (4.16) apresenta o perfil de velocidade característica mais rápida da família de ondas de gravidade no tempo de 68,91 segundos. Observa-se que o resultado já indica que o simulador encontra dificuldade em calcular esta velocidade, no passo de tempo seguinte, estas velocidades se tornam complexas e o problema mal-posto.

O fato de um problema hiperbólico se tornar mal-posto não indica que este problema se encontra em uma nova situação de instabilidade. O escoamento estratificado aqui simulado já é instável. Uma condição instável busca um novo estado e o modelo deve ser capaz de indicar como será este novo estado. Um modelo, quando se torna mal-posto indica apenas que se tornou inadequado para representar o fenômeno e que, provavelmente, termos importantes antes desconsiderados são agora relevantes para representar o fenômeno. Quando se trabalha com um modelo unidimensional, é muito provável que alguns detalhes venham a ser esquecidos no procedimento de médias espaciais. Alguns destes detalhes não são de fato relevantes, mas no caso instável do arranjo estratificado deve-se recuperar alguns fenômenos que no arranjo estratificado estável são irrelevantes. A figura a seguir apresenta alguns destes fenômenos dignos de ser reavaliados.

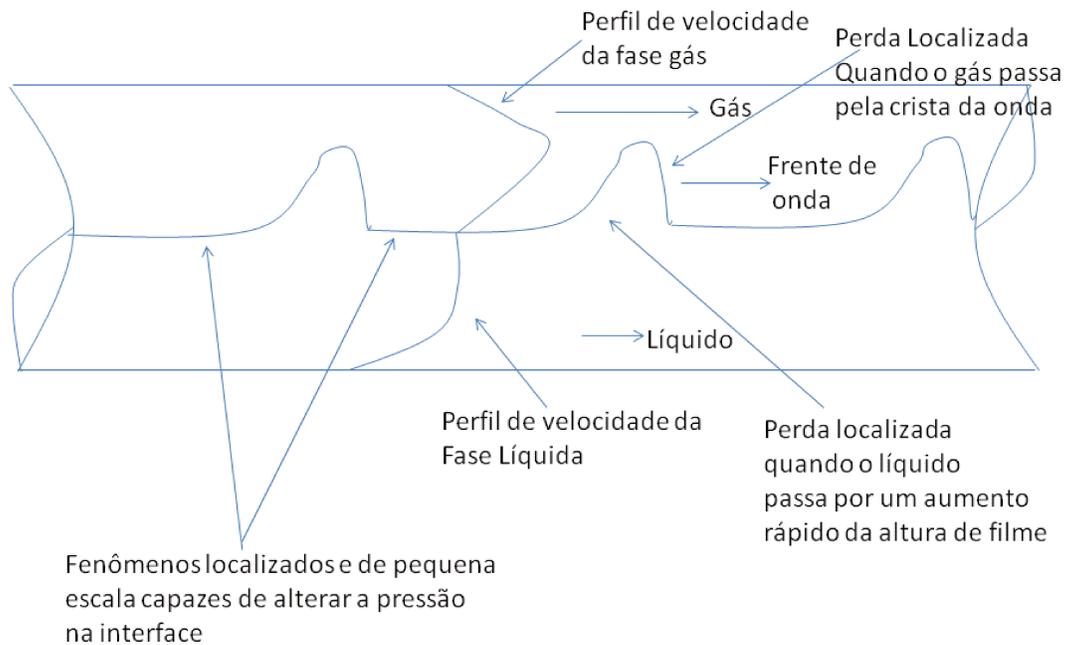


Figura 4.17 Fenômenos desprezados no modelo de escoamento estratificado transiente

O perfil de velocidade é relevante por conta da relação $\Gamma_l = \frac{\langle U_l^2 \rangle}{\langle U_l \rangle \langle U_l \rangle}$. Para o caso em que as duas fases são turbulentas, como foi visto no tópico de tensão de cisalhamento na interface, a relação entre a média da velocidade ao quadrado e o quadrado da velocidade média não afetará os resultados do modelo, pois terá sempre um valor muito próximo de 1.

Os fenômenos de pequena escala que possam alterar a pressão na interface é um assunto mais difícil de ser discutido e o risco de detalhes serem esquecidos na representação destes fenômenos é sempre muito grande. Como já comentado no Capítulo 3, a hipótese de perfil hidrostático não necessariamente está correta em uma região próxima da interface, onde, devido à grande diferença das velocidades entre as fases e as ondas de pequeno comprimento outros efeitos além da hidrostática devem ser considerados. Uma discussão com um pouco mais de cuidado será feita sobre esta questão no tópico sobre hiperbolicidade do modelo.

Aqui, neste tópico, se limitará à discussão de possíveis perdas localizadas na fase gás e na fase líquida, quando estas fases são submetidas a variações bruscas nas suas áreas de escoamento. É importante denotar a importância de se trabalhar com métodos numéricos que garantam uma boa resolução do perfil de *holdup* quando este apresenta um gradiente acentuado. Sem esta alta resolução, um estudo sobre perdas localizadas devido ao gradiente acentuado de *holdup* fica comprometido. DeLeebeeck & Nidal (2009), por meio de uma abordagem Lagrangiana similar à utilizada em modelos de *slug-tracking*, apresentou um trabalho sobre estas perdas localizadas em *roll-waves* de grande amplitude e o modelo aqui utilizado é inspirado no modelo proposto por DeLeebeeck & Nidal (2009).

A perda localizada do gás ocorre ao passar por uma crista de onda, onde se inicia o choque. Esta perda localizada é tratada de uma maneira simplificada como uma perda de carga em um orifício, ver White (2006):

$$\Delta p_g = \frac{\rho_g}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{\alpha_L}{\alpha_R} \right)^2}{c_d} (u_g - s) \right]^2 \quad (4.16)$$

Onde

s é a velocidade de propagação da crista;

u_g é a velocidade da fase gás na crista;

α_L é a fração de vazio na crista;

α_R é a fração de vazio no final do choque (o ponto mais baixo do perfil de *holdup*);

c_d é o coeficiente de descarga.

É necessário definir qual o valor do coeficiente de descarga. Miya *et al.* (1971) em um trabalho sobre *roll-waves* indica que esta perda localizada é de pouca importância para a modelagem do fenômeno o que indica que este coeficiente deve ser muito grande, atenuando a perda localizada. Porém, deve-se observar que o trabalho foi todo feito para *roll-waves* de pequena amplitude. Já DeLeebeeck & Nidal (2009), no seu trabalho sobre *roll-waves* de grande amplitude, indica que este coeficiente deve ter um valor entre 0,2 e 0,4, o que é um valor muito pequeno, levando a uma grande perda localizada. Para se ter uma noção, em cálculo de perdas localizadas em expansões bruscas em tubulações é comum se utilizar um coeficiente de descarga de 0,6. Provavelmente, a discrepância nas considerações sobre a perda localizada em *roll-waves* observada nos trabalhos de Miya *et al.* (1971) e DeLeebeeck & Nidal (2009) ocorre devido à amplitude de onda observada nos experimentos de cada autor. DeLeebeeck & Nidal (2009) comentam que o seu c_d baixo se deve a fenômenos que ocorrem na crista como uma maior “rugosidade” da interface e a entrada de gás no filme. De fato, estes devem ser fatores a aumentar a perda de carga na roll wave, mas não deveria ser carregado em um termo de perda de carga localizada. Definir como deve de fato ser este valor de coeficiente de descarga é difícil. A escolha do valor do coeficiente de descarga, mais do que uma questão de perda de carga, leva a morfologias distintas e até um processo de coalescimento de ondas distintos. Neste trabalho, utilizou-se um coeficiente típico de placa de orifício de 0,6, pois leva a uma morfologia de *roll waves* mais similar ao que se observou nos experimentos.

A despeito da alta resolução do choque, este não é representado completamente entre duas células, é sempre necessário mais do que duas células para representar o choque. O que se faz no simulador é distribuir a perda de carga calculada na Relação (4.16) ao longo das células que caracterizam o choque, no caso, ponderadas pelo gradiente de *holdup*, quanto maior o gradiente, maior a fatia da perda carga em que uma célula será submetida.

Como foi visto no caso apresentado anteriormente, existe o risco de um aumento brusco da área de escoamento da fase líquida também, portanto deve-se ter o cuidado de se calcular a perda localizada na fase líquida em um procedimento similar ao definido para a fase gasosa. No caso a relação utilizada para a perda localizada na fase líquida será dada por

$$\Delta p_l = \frac{\rho_l}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{1 - \alpha_L}{1 - \alpha_R} \right)^2}{c_d} (u_l - s) \right]^2 \quad (4.17)$$

Como geralmente a velocidade de propagação de ondas de gravidade no arranjo estratificado é próxima da velocidade média da fase líquida, a perda localizada na fase líquido é pequena.

A série de resultados apresentados foi obtida a partir de perturbações em uma condição de permanente estável idêntica à que foi utilizada no caso anterior, uma tubulação de 2 polegadas de diâmetro interno, 2000 diâmetros de comprimento, células de 0,25 diâmetros, fluxo volumétrico de líquido de 0,2 m/s e fluxo volumétrico da mistura de 4 m/s.

- Caso 2: perturbação com comprimento de onda de 25 diâmetros, com perda localizada.

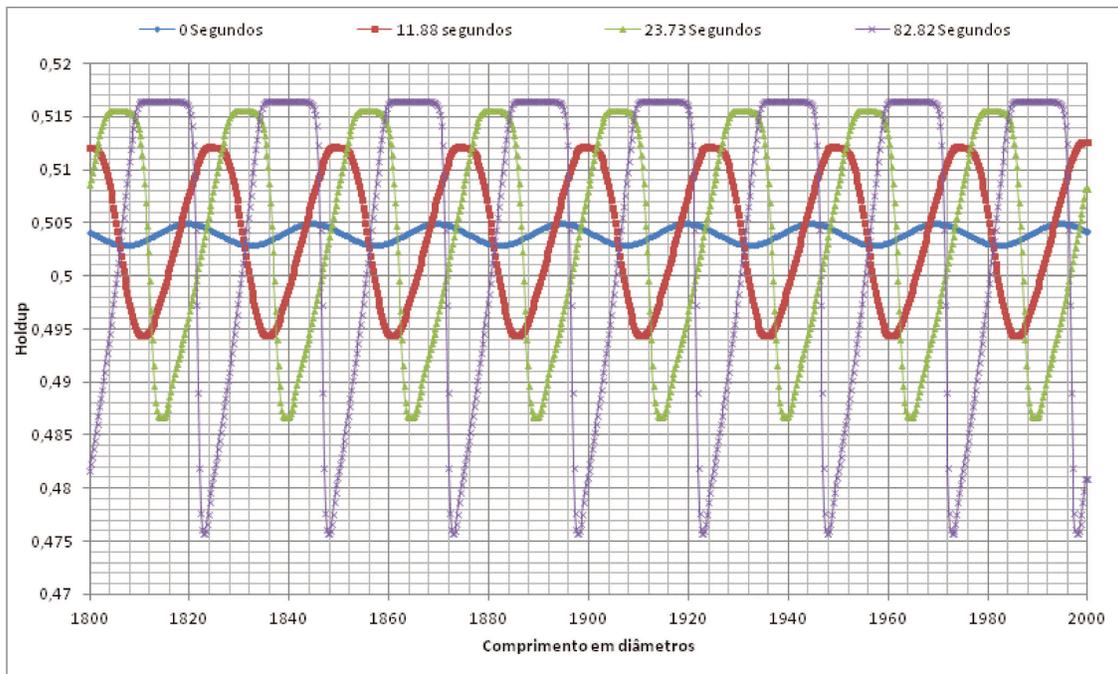


Figura 4.18 Perfil de roll wave, caso 2

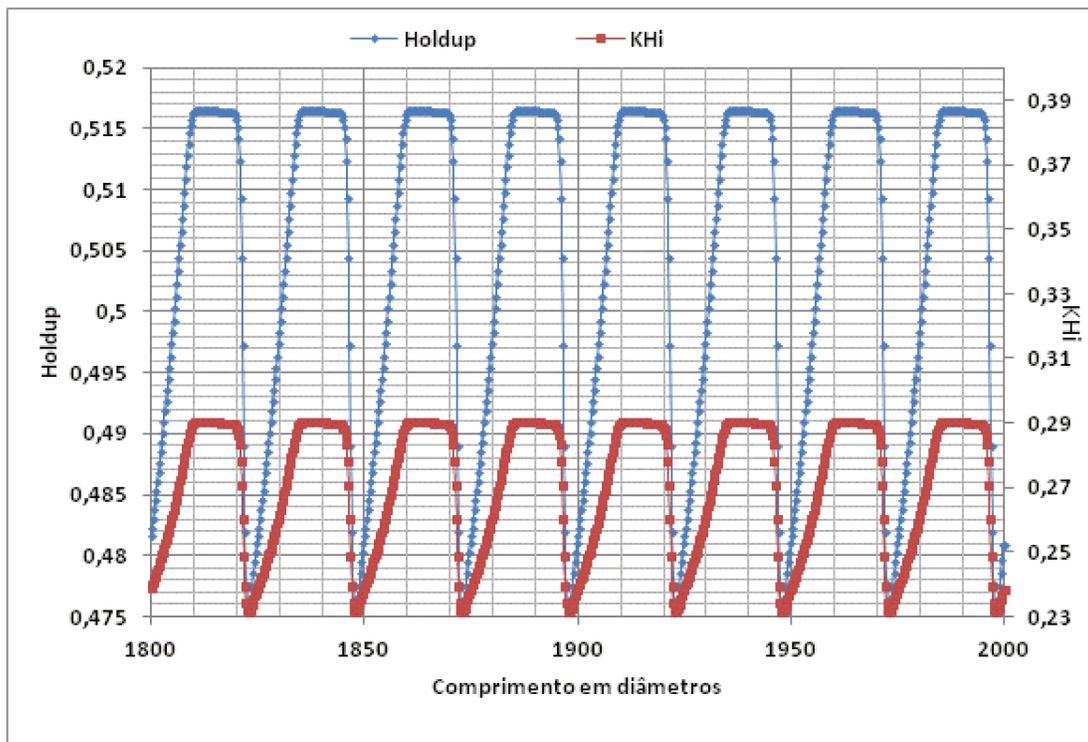


Figura 4.19 Termo KHi X Holdup, caso 2, 82 segundos

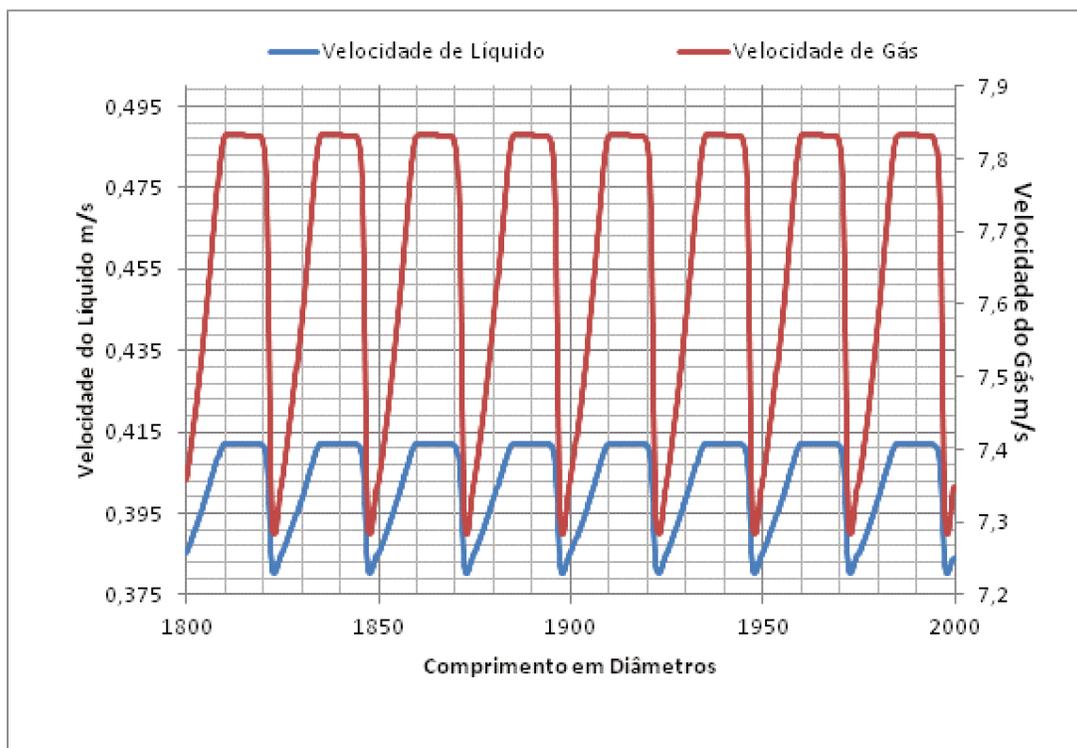


Figura 4.20 Velocidades médias das fases, caso 2, 82 segundos

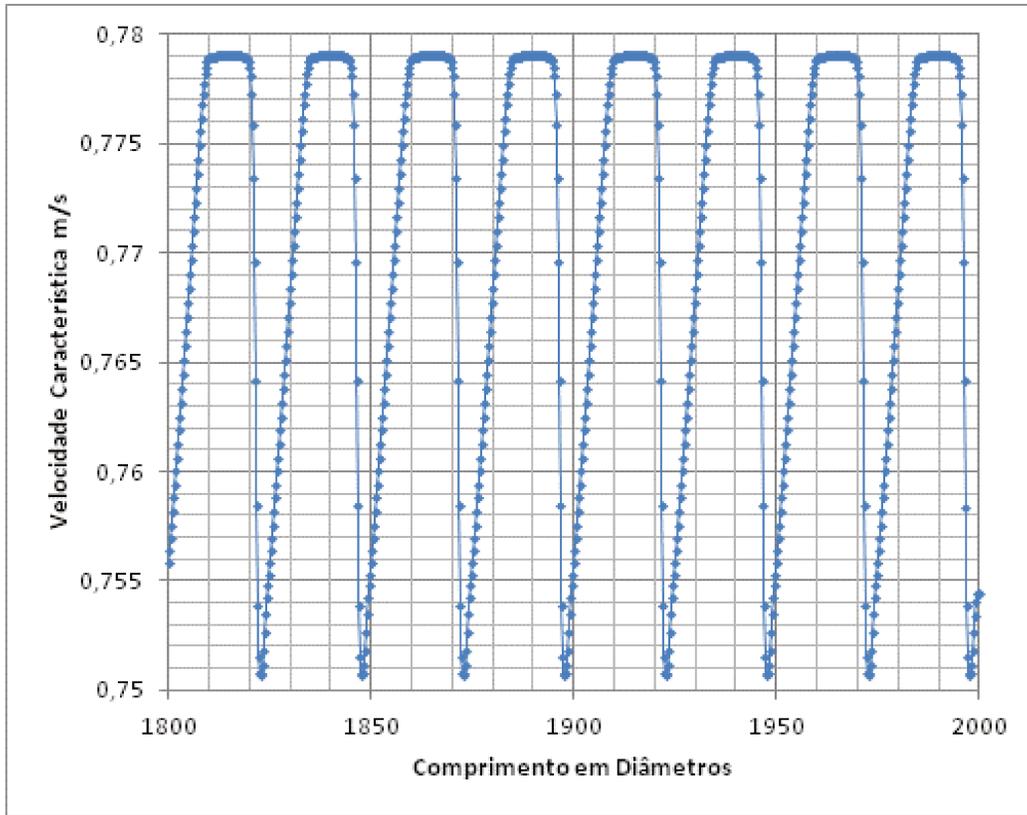


Figura 4.21 Velocidade Característica, caso 2, 82 segundos

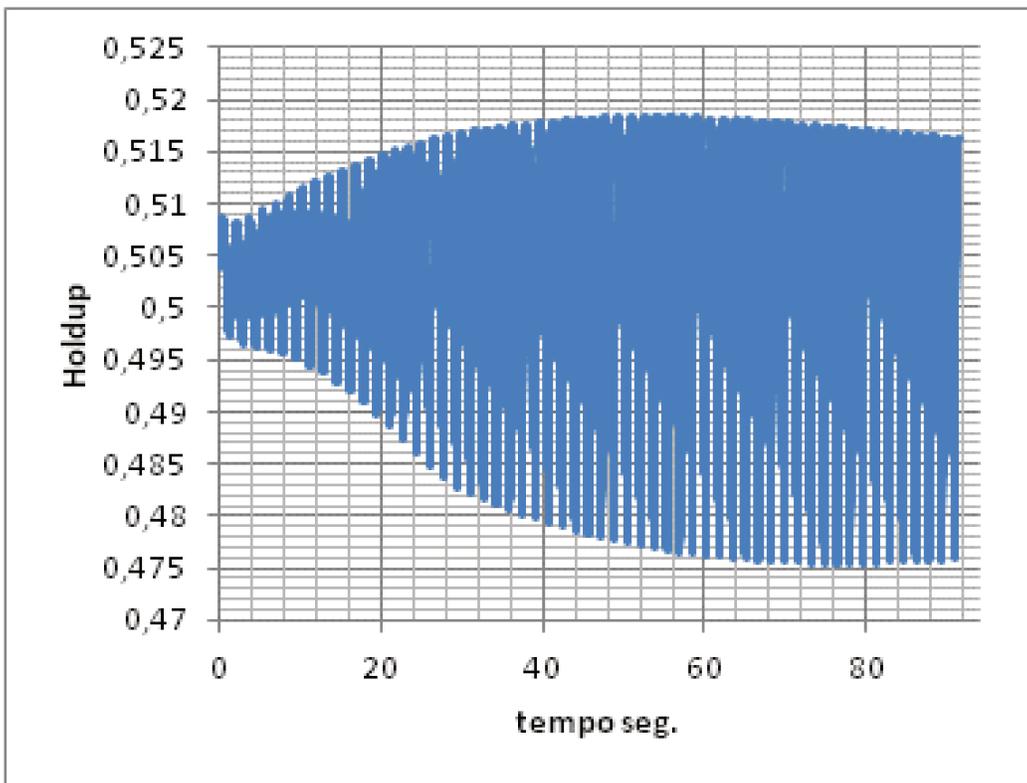


Figura 4.22 Amplificação de roll-wave, caso 2

Nas figuras (4.19) e (4.20), a alteração mais importante que se observa quando se adiciona os termos de perda localizada no modelo de *roll-wave* esta na forma da onda. Enquanto no caso sem perda localizada foi observado um perfil de filme “pontudo”, no caso com perda de carga localizada, verifica-se um achatamento no perfil holdup. Como se verá no tópico que trata dos experimentos efetuados para este trabalho, este tipo de perfil não foi observado, não se quer dizer aqui que um perfil deste tipo não exista, mas que apenas não foi verificado nos experimentos realizados, o que pode ser um indicativo de que há algum problema em se considerar esta perda localizada. De fato, no capítulo que trata da hiperbolicidade do modelo de dois-fluidos, serão adicionados novos termos que atuando em conjunto com a perda de carga localizada, elimina este comportamento achatado da onda. Como revela a Figura (4.22), ao contrário das simulações anteriores, a amplitude da *roll-wave* se estabilizou depois de um certo tempo, indicando que é possível obter *roll-waves* estáveis em canais fechados. Além disto, pode-se observar na Figura (4.21) a qualidade do perfil de velocidade característica, sem descontinuidades. A velocidade característica máxima para ondas de gravidade teve um valor de 0,75 m/s, muito inferior ao fluxo volumétrico da mistura. Esta velocidade característica tende a aumentar para *roll-waves* de maiores amplitudes. Ou seja, apesar da questão da morfologia alterada da onda devido à inclusão da perda localizada na crista da onda, este mecanismo se revelou um elemento importante na estabilização de uma *roll wave*.

A perda localizada inibe a amplificação da *roll wave*, impedindo, em alguns casos, que a onda atinja holdups grandes o suficiente para tornar o modelo mal-posto. Mas em situações em que a amplitude se torna alta, esta perda de carga localizada nada pode fazer, ou seja, o modelo ainda é deficiente na garantia de se ter um modelo bem –posto para ondas de grande amplitude. O caso a seguir exemplifica este problema. A simulação foi feita com uma perturbação inicial de 100 diâmetros, como já comentado, é uma característica destas ondas ter amplitudes maiores com comprimentos onda maiores.

- Caso 3: perturbação com comprimento de onda de 100 diâmetros.

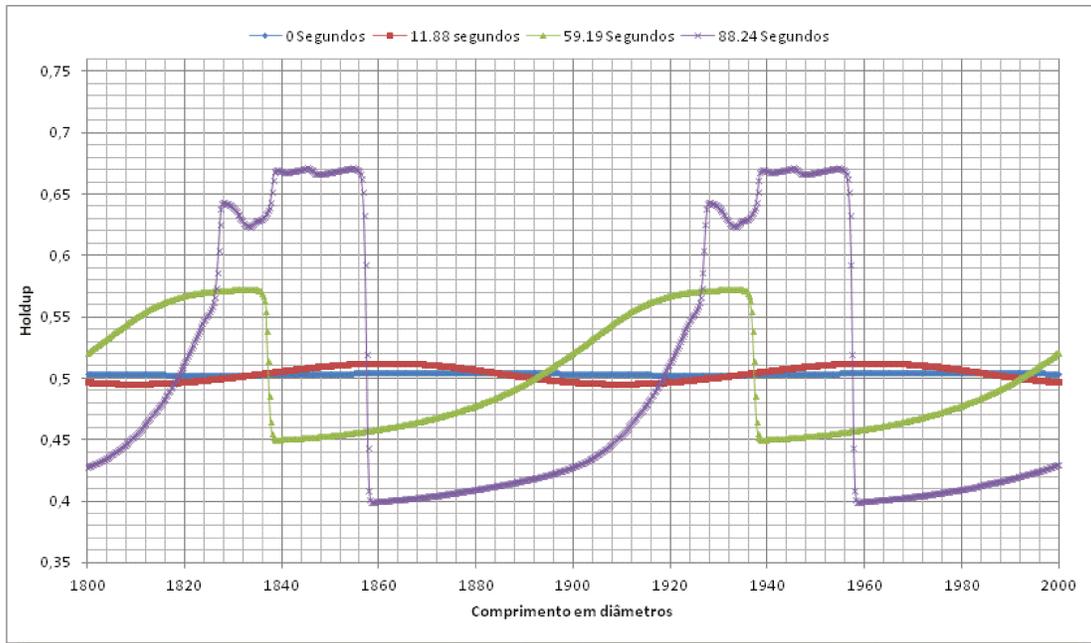


Figura 4.23 Perfil de roll wave, Caso 3

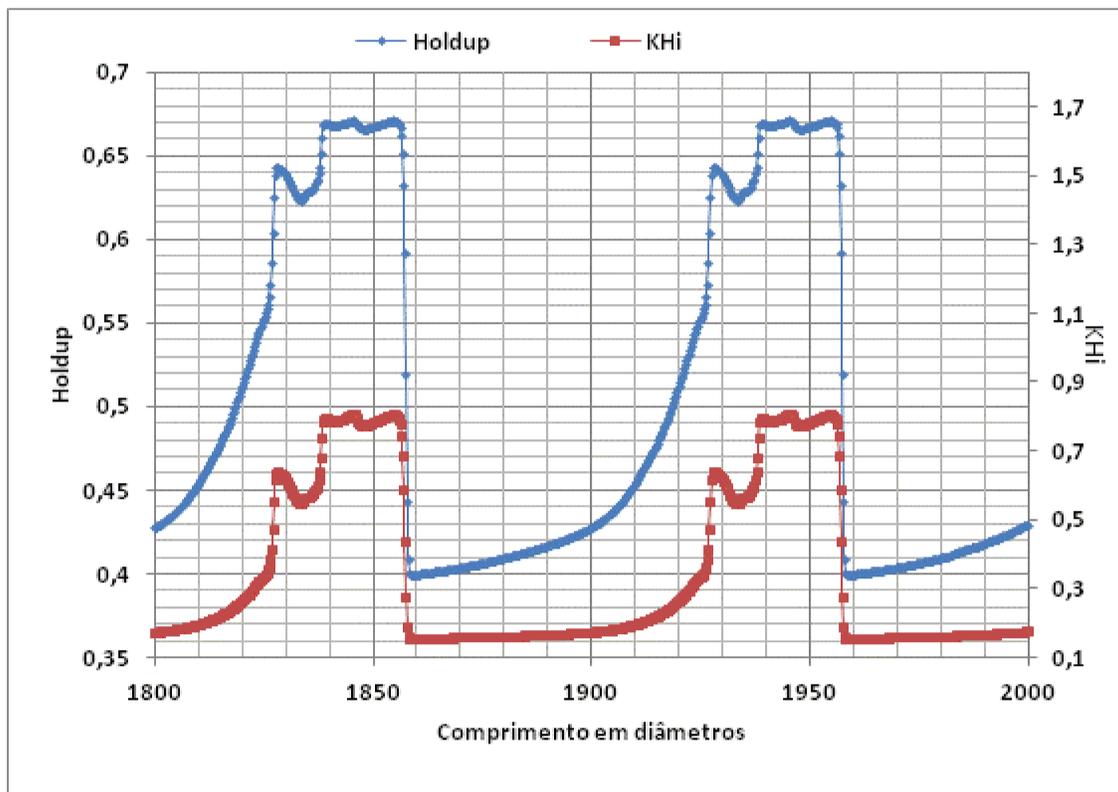


Figura 4.24 Termo KHi X Holdup, Caso 3, 88 segundos

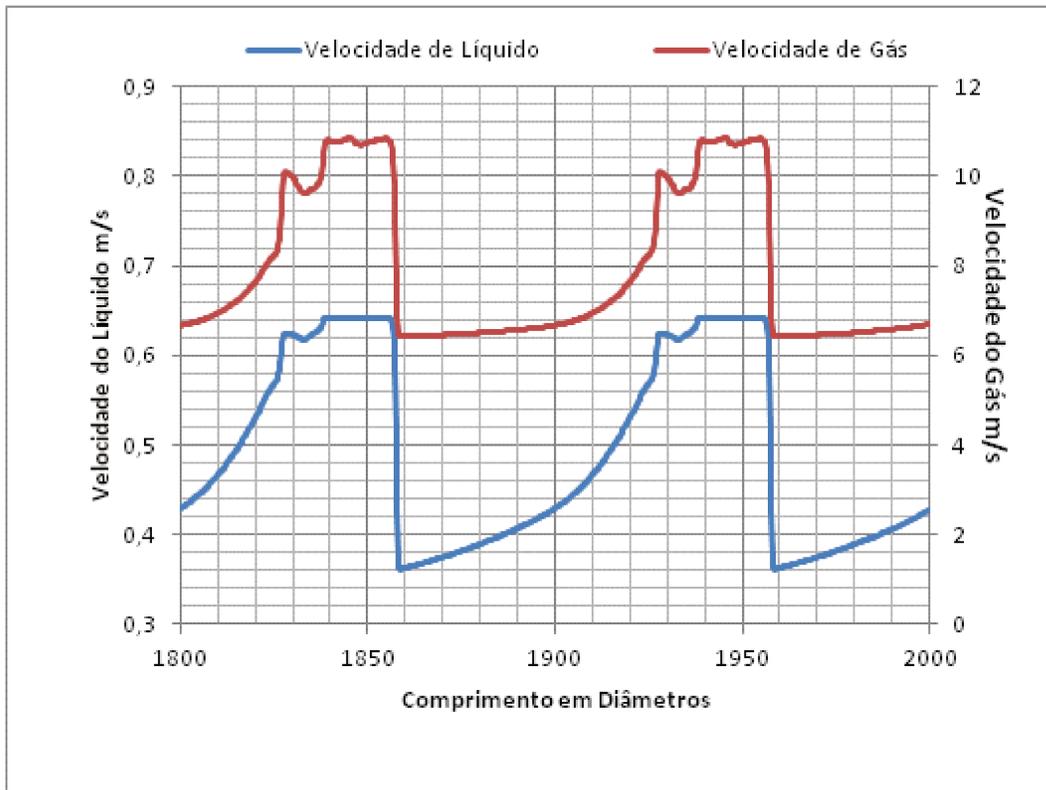


Figura 4.25 Velocidades médias das fases, Caso 3, 88 segundos



Figura 4.26 Velocidade Característica, Caso 3, 88 segundos

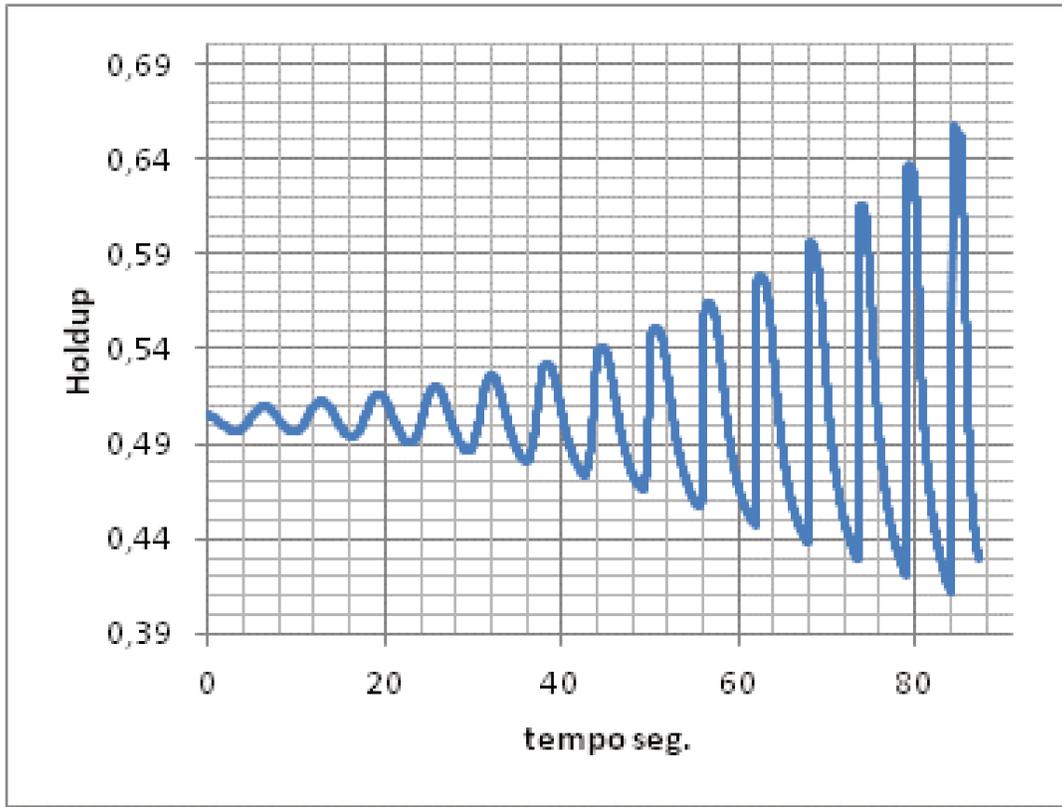


Figura 4.27 Amplificação de roll wave, caso 3

No Caso 3, as figuras (4.23) e (4.24) mostram que o grande comprimento de onda leva a grandes amplitudes. Algo próximo de um *holdup* de 0,7 na crista. Isto é de se esperar, devido a uma perturbação inicial com uma periodicidade de 100 diâmetros o que indica ondas de muito baixa frequência. A Figura (4.27) revela que a perda localizada que foi tão eficiente em estabilizar a evolução da *roll wave* no caso anterior, não conseguiu estabilizar a onda neste caso. Talvez esta seja uma situação em que de fato não se deve esperar estabilização, e a tendência seria a onda crescer até fechar o canal. Porém, a simulação se tornou mal-posta logo após os 88 segundos. O que já era indicado nos resultados, devido ao alto valor de KH_i observado na Figura (4.24) e ao estranho comportamento oscilante da velocidade característica, observado na Figura (4.26). Ou seja, ainda faltam elementos para que o modelo se torne completo e capaz de simular todo o processo de evolução destas ondas.

‘

Considerar as perdas localizadas que eventualmente ocorrem em uma *roll-wave* melhora a questão de se perder o controle da amplificação da onda, impedindo em alguns casos que o problema se torne mal posto. Infelizmente, apenas adicionar este termo no modelo ainda não é suficiente para garantir que qualquer simulação de *roll wave* seja bem posta. Torna-se necessário buscar outros mecanismos que venham a ser relevantes em *roll waves* e que talvez tenham a habilidade de manter o modelo sempre bem-posto, isto será melhor discutido no tópico sobre hiperbolicidade.

‘

5. HIPERBOLICIDADE

Do que foi visto das simulações até aqui apresentadas, houve limitações na representação da evolução de uma *roll-wave*. A depender da amplitude da onda, quando a crista se aproxima de fechar o duto, o modelo se torna mal posto. Neste tópico sobre hiperbolicidade, concentrar-se-á no principal limitante das simulações até aqui, o fato de que em grandes amplitudes é comum se ter velocidades características complexas.

Ao contrário do que alguns autores acreditam, para escoamento estratificado em condição instável, o fato de se ter uma condição inicial bem posta não garante que a evolução da onda se mantenha sempre bem posta. É comum no modelo de dois fluidos, para contornar esta limitante situação de modelo mal-posto, se aplicar termos ad hoc sem compromisso com a fenomenologia do problema, mas capazes de garantir que as velocidades características do problema sejam sempre reais. Não é um erro se usar termos ad hoc que permitam a resolução do problema, mas sem compromisso com a representatividade do fenômeno, desde que este termo ad hoc não altere de maneira sensível a representatividade do fenômeno que se quer estudar. Um exemplo de termo ad hoc que é aplicado em modelos de dois fluidos para mantê-los bem-postos é o termo de massa virtual, ver Toumi & Kumbaro (1996).

O termo de massa virtual conforme apresentado por Toumi & Kumbaro (1996) é definido por

$$Mv = -C_{vm} \alpha(1 - \alpha) [\alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_l] \left\{ \frac{\partial(u_g - u_l)}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_g}{\partial x} - u_g \frac{\partial u_l}{\partial x} \right\} \quad (5.1)$$

C_{vm} é um coeficiente a ser definido. Geralmente este coeficiente é determinado ad hoc de maneira a garantir que o problema seja sempre bem posto. O termo de massa virtual entra como uma fonte adicional na equação de quantidade de movimento da fase gás e, com o sinal trocado, da fase líquida.

É tentador utilizar este termo no modelo para evolução de *roll-wave*. Porém, deve-se estar ciente que a maioria dos trabalhos que lançam mão de um termo de massa virtual em um modelo de dois fluidos, tem como objeto de estudo problemas de transiente multifásico relacionado com as famílias de onda mais rápidas. As ondas mais rápidas estão mais vinculadas com a compressibilidade dos fluidos. No modelo de dois fluidos, o modelo se torna mal posto devido aos efeitos de aceleração e desaceleração dos fluidos devido à variação da fração de vazio/*holdup* (o efeito Bernoulli). No modelo simplificado (Apêndice B), este efeito é representado pelo termo KH_i , que age diretamente na família de ondas mais lentas do modelo de dois fluidos, a família de ondas vinculadas com a variação de fração de vazio. As duas famílias de ondas (sônica e de gravidade) apresentam velocidades características muito distintas, além do que, como já discutido, apresentam um acoplamento fraco entre si. Portanto, qualquer termo ad hoc aplicado para conter o termo KH_i alterará pouco a evolução da família de ondas mais rápidas, não sendo um problema para análise de fenômenos mais relacionados com propagação de pressão. Mas não é este o caso para um estudo de *roll-waves*, este é um fenômeno relacionado com a família de ondas mais lenta do modelo de dois fluidos. Deve-se, portanto, analisar como este termo de massa virtual altera a representatividade da evolução da *roll-wave*.

Para analisar como o termo de massa virtual altera a hiperbolicidade de um modelo unidimensional de escoamento estratificado transiente, serão utilizadas as equações simplificadas do Apêndice B, (B.19) e (B.20)

A despeito de todas as simplificações do par de equações (B.19) e (B.20), este par, pela sua simplicidade, é útil para se entender de maneira clara como ocorre a perda de hiperbolicidade de um modelo de dois fluidos e como um termo de correção garante esta hiperbolicidade. Este par simplificado trata apenas da família de ondas dinâmicas mais lentas no modelo de escoamento estratificado transiente. Ou seja, a família de ondas que propaga um pulso de pressão principalmente pela redistribuição das fases dentro de um canal fechado.

Retirando o termo fonte de (B.20), tem-se um novo par de equações

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial x} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \left\{ g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{S_i}{A_t} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2 \right\} \frac{A_t}{S_i} \frac{\partial(1 - \alpha)}{\partial x} = 0. \quad (5.3)$$

De (5.2) e (5.3) se torna muito fácil determinar as velocidades características deste problema

$$a^+ = u_l + \sqrt{g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} \frac{A_t}{S_i} - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2} \quad (5.4)$$

$$a^- = u_l - \sqrt{g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} \frac{A_t}{S_i} - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2}$$

As velocidades características se tornam complexas quando o termo

$$g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} \frac{A_t}{S_i} - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2 \quad \text{for menor que } 1, \quad \text{ou melhor, quando}$$

$$\frac{1}{g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} \frac{A_t}{S_i} - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2} > 1, \quad \text{ou } KHi > 1. \quad \text{Deve-se observar que no caso de canal}$$

aberto, o problema do modelo se tornar mal posto não ocorre, pois o termo KHi é sempre zero, já que $j = u_l$. Ou seja, qualquer termo que seja inserido em um modelo de dois fluidos, para torná-lo bem posto, deve atuar de maneira a compensar o incremento do termo KHi à medida que uma onda evolui. Uma outra maneira de manter o modelo bem-posto seria aumentando a transferência de quantidade de movimento da fase gás para a fase líquida, fazendo com que j se aproxime de u_l à medida que a onda evolui. Isto pode ser feito aumentando o arraste na interface. Provavelmente estes dois mecanismos devem atuar em conjunto durante a evolução da onda.

Fazendo os devidos algebrismos, o termo de massa virtual alterará a Relação (5.3) para

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{vm}\alpha(1-\alpha)[\alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_l]}{(1-\alpha)\alpha^2\rho_l} \left(\frac{j-u_l}{\alpha} \right) \frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t} + \\
& \left(1 - \frac{C_{vm}\alpha(1-\alpha)[\alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_l]}{(1-\alpha)\alpha^2\rho_l} \right) \frac{\partial u_l}{\partial t} + \\
& \left(u_l - \frac{C_{vm}\alpha(1-\alpha)[\alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_l]j}{(1-\alpha)\alpha^2\rho_l} \right) \frac{\partial u_l}{\partial x} + \\
& \left\{ g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} + \frac{C_{vm}\alpha(1-\alpha)[\alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_l]}{(1-\alpha)\alpha^2\rho_l} \frac{S_i}{A_t} \left(\frac{j-u_l}{\alpha} \right) u_l - \right. \\
& \left. \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{S_i}{A_t} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j-u_l}{\alpha} \right)^2 \right\} \frac{A_t}{S_i} \frac{\partial(1-\alpha)}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Pode-se observar que adicionar o termo de massa virtual altera bastante a forma da equação simplificada. Se o coeficiente C_{vm} for pequeno, estas alterações não são relevantes para a representatividade da propagação da família de ondas mais lentas. Caso, para garantir que o problema se mantenha bem-posto, este coeficiente venha a ser grande, a utilização do termo de massa virtual só deverá ser utilizado se de fato ele for representativo de algum fenômeno físico que ocorra ao longo da propagação da família de ondas. Em caso contrário, se adicionará um novo termo influente em grandeza e sem compromisso com a física do fenômeno.

Com a adição da massa virtual, o termo $g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} \frac{A_t}{S_i} - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j-u_l}{\alpha} \right)^2$ é alterado para $g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} \frac{A_t}{S_i} + \frac{C_{vm}\alpha(1-\alpha)[\alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_l]}{(1-\alpha)\alpha^2\rho_l} \left(\frac{j-u_l}{\alpha} \right) u_l - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j-u_l}{\alpha} \right)^2$. A massa virtual de fato dificulta que a raiz deste termo se torne negativo. Para que o problema seja bem posto, a seguinte condição deve ser satisfeita

$$C_{vm} \geq \frac{\left[-g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} \frac{A_t}{S_i} \frac{\alpha}{j-U_l} + \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j-u_l}{\alpha} \right) \right]}{\alpha(1-\alpha)[\alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_l] u_l} (1-\alpha)\alpha^2\rho_l \tag{5.6}$$

Nas simulações numéricas que foram feitas neste trabalho, para se garantir que o modelo seja bem-posto em ondas de grande amplitude, C_{vm} deve ter uma ordem de grandeza de 1. Este valor não tem importância quando se deseja estudar fenômenos

relacionados com a família de ondas mais rápidas, porém, para a família de ondas mais lentas, objeto de estudo neste trabalho, a massa virtual aplicada, com C_{vm} da ordem de 1 pode alterar completamente a fenomenologia do problema. Portanto, para se utilizar o coeficiente de massa virtual como um recurso que garanta um modelo bem-posto no problema de evolução de *roll waves*, deve-se ter uma justificativa física convincente. No problema de evolução de *roll wave*, a massa virtual não atua simplesmente como um “transparente” termo ad hoc.

Mais do que buscar termos ad hoc que garantam que o modelo se torne bem-posto (não necessariamente representativo), deve-se avaliar quais fenômenos não foram considerados no modelo de dois fluidos e que apresentam potencial para torna-lo bem-posto sem que a consistência física seja perdida.

Uma questão que ainda não foi considerada é sobre como alterar a hipótese de perfil de pressão hidrostático geralmente utilizado em modelos de água rasa. Em geral, esta é uma abordagem bem sucedida para modelos de água-rasa em canais abertos. Os modelos unidimensionais mais comuns de escoamento estratificado transiente herdam esta abordagem. Porém, como observado no Capítulo 3, existe o risco de se perder representatividade de como varia a pressão na seção transversal na região próxima à interface, onde os efeitos dinâmicos podem ser tão relevantes quanto a hidrostática, já que existem na interface ondas de curto comprimento e pequena amplitude que não se inserem na hipótese de água rasa. Deve-se avaliar em quais situações estas ondas de curto comprimento alteram de maneira relevante o perfil de pressão próximo à interface e se esta alteração localizada no perfil é positiva para a garantia de que o modelo se mantenha bem-posto.

Um trabalho muito interessante que trata de como garantir que um modelo de dois-fluidos se mantenha bem-posto foi apresentado por Stuhmiller (1977). O mais importante do trabalho de Stuhmiller (1977) é que todos os termos adicionados ao modelo e que foram capazes de garantir que este se torne bem posto tinham de fato um compromisso com a física do problema.

Stuhmiller (1977) fez suas análises para bolhas dispersas, portanto o modelo utilizado é levemente distinto do aqui apresentado. A variação hidrostática de pressão na seção

transversal do canal não é relevante para este arranjo e a pressão média em cada fase pode ser tratada como a mesma. Stuhmiller (1977) considerou as pressões médias que agem em cada fase como iguais, mas admitiu que localmente, na interface, possa existir variações que diferencie a pressão média no sistema da pressão local próxima à interface.

No caso de bolhas dispersas, Stuhmiller (1977) observou que a curvatura das bolhas pode causar alterações dinâmicas na pressão próxima da interface bolha-líquido, como no escoamento de um fluido sobre uma esfera, alterando de maneira notável a pressão na interface sem alterar significativamente a pressão média do sistema. O interessante na modelagem proposta por Stuhmiller (1977) é que são obtidos três mecanismos, um relacionado com a massa virtual do escoamento da bolha no meio fluido, outro relacionado pela queda de pressão localmente na interface devido à aceleração do líquido ao passar por este elemento de grande curvatura e um último efeito relacionado com o arraste frontal na bolha devido à instabilidade do perfil de velocidade ao escoar em volta da bolha. O mecanismo mais importante para garantir que o modelo se torne bem posto não é a massa virtual, mas a queda média de pressão devido aos efeitos dinâmicos que o fluido sofre ao passar por uma bolha aproximadamente esférica.

Para se ter algo similar ao que Stuhmiller (1977) observou para bolhas dispersas em um escoamento estratificado, deve-se buscar algum fenômeno que garanta que a interface entre a fase líquida e a fase gasosa tenha uma curvatura acentuada para promover os efeitos dinâmicos necessários na pressão interfacial. Ao mesmo tempo esta alteração na interface não deve ter uma grande amplitude, pois os efeitos dinâmicos não devem alterar de maneira notável a pressão média do sistema. Além disto, este fenômeno deve ter uma grande frequência no espaço para que garanta uma distinção praticamente contínua entre a pressão média na interface e a pressão média no sistema.

Um arranjo estratificado instável é caracterizado por um largo espectro de frequência de ondas se propagando na sua interface. A parte do espectro que contém os maiores comprimentos de onda será dominante na forma final da *roll-wave*, pois são estes comprimentos de ondas maiores (\gg altura do canal) que levam às maiores amplitudes de onda. Entretanto, a convivência com comprimentos de ondas menores existirá, embora estes sejam pouco relevantes na forma global da onda. Caso existam no espectro inicial

elementos de comprimento de onda muito pequenos (\ll altura do canal), este espectro se manterá no sistema desenvolvido, com uma amplitude pequena e pouco relevante para a forma da *roll-wave*. Estas ondas provavelmente são as responsáveis por dar um aspecto rugoso na interface do escoamento estratificado instável. Ondas de comprimento curto trazem consigo todas as características citadas anteriormente para que a pressão na interface possa se distinguir da pressão média do escoamento, como no caso de bolhas dispersas. Como são ondas de comprimento muito curto - provavelmente ondas dispersivas, ver Kundu (2002) - elas podem ter o efeito de curvatura suficiente para causar alterações dinâmicas importantes no escoamento próximo da interface, ao mesmo tempo, por terem amplitudes pequenas, estas ondas não apresentam a capacidade de alterar de maneira global o escoamento, alteram apenas localmente próximo à região da interface. Além disto, elas devem ter uma alta frequência no espaço.

Modelar estas ondas parece ser algo complexo, por ter um comprimento de onda muito menor que a altura do canal, elas não devem ser tratadas como ondas hiperbólicas e sim dispersivas. Além disto, um tratamento unidimensional seria insuficiente para representar adequadamente estas ondas. Como o objeto de estudo aqui são *roll-waves*, que apresentam grandes comprimentos de onda, não vem ao caso fazer a modelagem precisa destas ondas curtas, o ideal seria apresentar uma abordagem aproximada que dê espaço para a proposição de equações de fechamento que melhorem o modelo de dois fluidos unidimensional.

No Capítulo 3 foi feita uma discussão sobre como se representar de maneira aproximada os efeitos da interface rugosa em um modelo de dois fluidos unidimensional. Foram apresentadas duas equações que poderiam representar de maneira aproximada a ação média da pressão interfacial em uma interface rugosa, no caso, as expressões (3.9) e (3.10). Deve-se detalhar um pouco mais estas expressões. Será considerado que existe um comprimento característico desta interface rugosa e que é possível, neste comprimento característico se representar a pressão interfacial por

$$p_i = \langle p_i \rangle + p'_i(\tau). \quad (5.7)$$

Onde $\langle p_i \rangle$ seria a pressão média observada neste comprimento característico, definida por

$$\langle p_i \rangle = \frac{1}{L} \int_L p_i(\tau) \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (5.8)$$

$p'_i(\tau)$ seria a parte variável desta pressão interfacial. Aplicando a Relação (5.7) na Relação (3.9), tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int_L p_i(\tau) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau = \\ & \langle p_i \rangle \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int_L (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau + \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int_L p'_i(\tau) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau \end{aligned} \quad (5.9)$$

A integral $\frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int_L (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau$ já tinha sido apresentada no Capítulo 3 e representa a variação média da fração de vazio ao longo de um trecho rugoso característico definido pelo comprimento L. isto é explicitado na Equação (3.12). Aplicando a Equação (3.12) em (5.9)

$$\frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int_L p_i(\tau) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau \approx \langle p_i \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} + \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int_L p'_i(\tau) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (5.10)$$

Com isto, as equações (3.15) e (3.16) podem ser reformuladas a partir de (5.10):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle \Gamma_g u_g^2}{\partial x} - \langle p_i \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} - \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int_L p'_i(\tau) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau + \\ & \frac{1}{A_t} \frac{\partial \left(\int_0^{h_{MAX}} p_g(x, y, t) \frac{dA(y)}{dy} dy \right)}{\partial x} = \frac{-\tau_i S_i - \tau_g S_{wg}}{A_t} - \rho_g g \langle \alpha \rangle \text{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) \Gamma_l u_l^2}{\partial x} - \\ & \langle p_i \rangle \frac{\partial (1 - \langle \alpha \rangle)}{\partial x} + \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int_L p'_i(\tau) (n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau + \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{\langle h \rangle} p_l(x, y, t) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} = \\ & \frac{\tau_i S_i - \tau_l S_{wl}}{A_t} - \rho_l g (1 - \langle \alpha \rangle) \text{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Como as perturbações no perfil de pressão devem ocorrer em uma região muito próxima da interface, esta perturbação pode ser tratada de maneira localizada apenas na interface. Esta perturbação não deve alterar de maneira sensível as condições médias da pressão no escoamento. Esta é uma hipótese importante no desenvolvimento do modelo. A Figura (5.1) exemplifica esta região em que a pressão é perturbada pela interface rugosa:

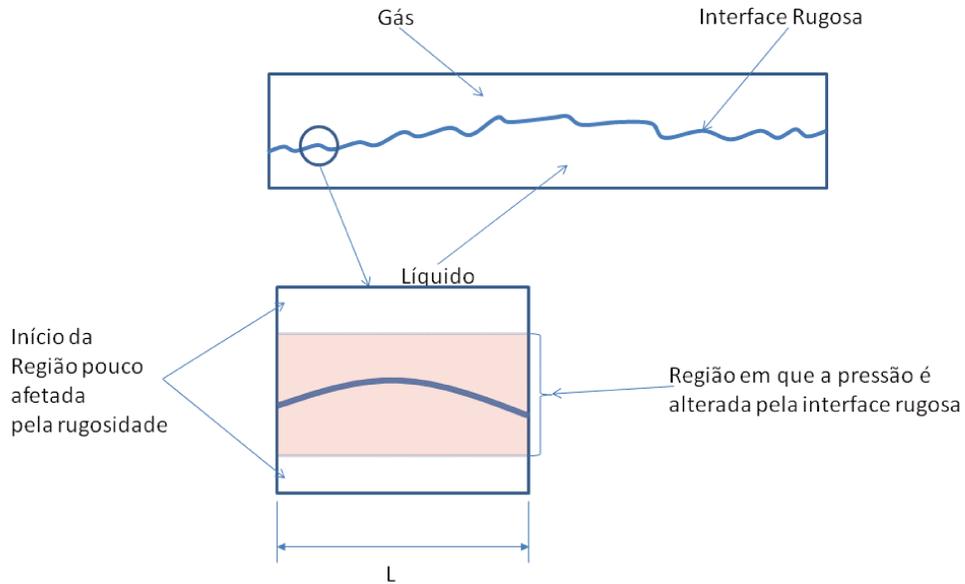


Figura 5.1 Região onde o perfil de pressão é alterado pela ação da interface rugosa

Com isto, as variáveis $p_g(x, y, t)$ e $p_l(x, y, t)$ das equações (5.11) e (5.12) podem ser escritas admitindo um perfil de pressão hidrostático, mas não se pode expressar como nas equações (3.5) e (3.6). O perfil hidrostático de pressão só será válido quando um pouco afastado da interface, portanto

$$p_l(x, y, t) = p_{\infty g}(x, t) + g\rho_l \cos(\theta)(h - y), \quad (5.13)$$

$$p_g(x, y, t) = p_{\infty l}(x, t) + g\rho_g \cos(\theta)(h - y), \quad (5.14)$$

$p_{\infty g}(x, t)$ e $p_{\infty l}(x, t)$ são as pressões nos pontos mais próximos da interface, mas afastados o suficiente para que a influência da interface rugosa deixe de ser relevante.

Será admitido que $p_{\infty g}(x, t) = p_{\infty l}(x, t) = p_{\infty}(x, t)$. Esta hipótese surge da idéia de que a interface rugosa não é capaz de alterar a pressão média observada em cada fase, apesar de

ter impacto no comportamento da pressão interfacial. Em trabalhos futuros, esta hipótese deve ser avaliada de uma maneira mais cuidadosa.

Com (5.13) e (5.14), aplicadas a (5.11) e (5.12)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle \Gamma_g u_g^2}{\partial x} - \langle p_i \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} - \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int_L p'_i(\tau) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau + \\ & \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{h_{MAX}} [p_\infty(x,t) + g \rho_g \cos(\theta)(h-y)] \frac{dA(y)}{dy} dy}{\langle h \rangle \partial x} = \frac{-\tau_i S_i - \tau_g S_{wg}}{A_t} - \rho_g g \alpha \text{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) \Gamma_l u_l^2}{\partial x} - \langle p_i \rangle \frac{\partial (1 - \langle \alpha \rangle)}{\partial x} + \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int_L p'_i(\tau) (n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau + \\ & \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{\langle h \rangle} [p_\infty(x,t) + g \rho_l \cos(\theta)(h-y)] \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} = \frac{\tau_i S_i - \tau_l S_{wl}}{A_t} - \rho_l g (1 - \alpha) \text{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Reorganizando (5.13) e (5.14)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle \Gamma_g u_g^2}{\partial x} + \langle \alpha \rangle \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{h_{MAX}} g \rho_g \cos(\theta)(h-y) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} + \\ & (p_\infty - \langle p_i \rangle) \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} - \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int_L p'_i(\tau) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau = \\ & \frac{-\tau_i S_i - \tau_g S_{wg}}{A_t} - \rho_g g \langle \alpha \rangle \text{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) \Gamma_l u_l^2}{\partial x} + (1 - \langle \alpha \rangle) \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \\ & \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{\langle h \rangle} g \rho_l \cos(\theta)(h-y) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} - (p_\infty - \langle p_i \rangle) \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} + \\ & \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int_L p'_i(\tau) (n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{\tau_i S_i - \tau_l S_{wl}}{A_t} - \rho_l g (1 - \langle \alpha \rangle) \text{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (5.16)$$

As equações (5.15) e (5.16) aparentemente não ajudam em muito, são apenas variações sobre o mesmo tema, pois não se tem expressões para os termos $\langle p_i \rangle$ e $\frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int p'_i(\tau) (n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau$. Pior, tem-se agora dois termos adicionais a serem determinado no modelo de dois fluidos. Estes são termos que seriam difíceis de se obter diretamente de uma modelagem unidimensional. Deve-se obter equações de fechamento para estes termos. A pergunta que se deve fazer é se vale a pena o esforço de buscar equações de fechamento para estes termos. Deve-se lembrar que todo o esforço de incluir estes termos é devido à possibilidade da interface rugosa oferecer mecanismos capazes de garantir que o modelo de dois fluidos se mantenha bem-posto. Seria muito difícil determinar as expressões exatas dos termos em questão, mas com uma modelagem unidimensional ao menos é possível verificar se a ordem de grandeza destes termos é suficiente para melhorar a capacidade do modelo em se manter bem-posto. Esta verificação será feita a seguir.

Considere um trem de ondas de pequena amplitude e pequeno comprimento na interface de um escoamento estratificado instável, como na Figura (5.2):

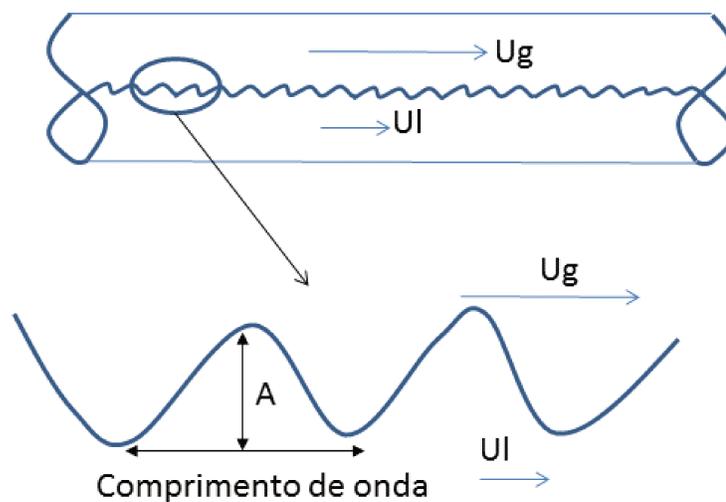


Figura 5.2 Exemplo de interface rugosa

Será considerado que a amplitude tem ao menos a mesma ordem de grandeza do comprimento de onda, $A = O(\lambda)$. Esta é uma hipótese utilizada para facilitar a análise. Reforçando, não se deseja determinar com precisão neste capítulo como seria, quantitativamente o efeito desta interface rugosa na dinâmica do problema. O que se deseja aqui é apenas, a partir de uma análise qualitativa, verificar as potencialidades da interface rugosa em tornar o modelo de dois fluidos bem-posto.

Como se quer verificar de maneira aproximada os efeitos dinâmicos da curvatura destas pequenas ondas na interface, para facilitar o trabalho de modelagem, este trem de onda será tratado como semi-cilindros em série ao longo da interface, como na Figura (5.3):

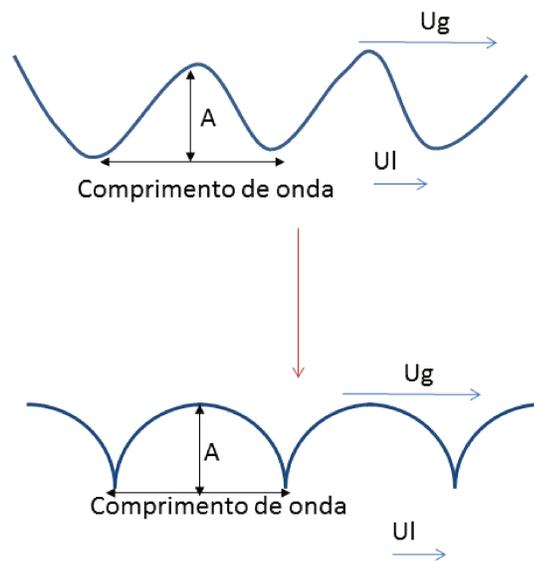


Figura 5.3 Aproximação de interface rugosa

Nesta aproximação, a amplitude seria igual ao raio do cilindro e o comprimento seria aproximadamente igual ao diâmetro do cilindro. Isto pode soar como uma aproximação grosseira das ondas de comprimento curto e de fato o é, porém, em face de toda a complexidade destas ondas e a despreensão deste trabalho em se fazer uma modelagem precisa deste problema, esta aproximação parece ser um bom ponto de partida para a proposição de uma equação de fechamento que transporte a ação destas ondas curtas para o modelo de *roll-wave*. A hipótese de semi-cilindros facilita enormemente o trabalho de modelagem, neste caso, a variação da pressão interfacial pode ser tratado como no

escoamento potencial passando por um cilindro. Para o escoamento potencial da fase gás em um cilindro ter-se-ia, ver Lamb, (1932):

$$p_i = p_\infty + \rho_g A \frac{DU}{Dt} \cos(\theta) + \frac{1}{2} \rho_g U^2 (1 - 4 \sin^2(\theta)). \quad (5.17)$$

U seria a velocidade relativa do gás em relação à onda:

$U = u_g - (u_l \pm c)$, onde c é a velocidade da onda em um fluido em repouso. Para comprimentos de onda menores que 4 mm, em um sistema água-ar, as ondas são dominadas pela tensão interfacial e c é dado por (ver Kundu, 2002)

$$c = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho_l}} \quad (5.18)$$

Para $\lambda = 4\text{mm}$ e um sistema água-ar com $\sigma = 0,074 \text{ N/m}$, se teria $c = 0,341 \text{ m/s}$ o que seria um valor pequeno. Logo, U será aproximado para

$$U = u_g - u_l \quad (5.19)$$

O último termo da Relação (5.17) diz respeito ao processo de aceleração e desaceleração do fluido nas proximidades da região do semi-cilindro, um resultado muito conhecido em escoamento potencial. A Figura (5.4) apresenta este resultado:

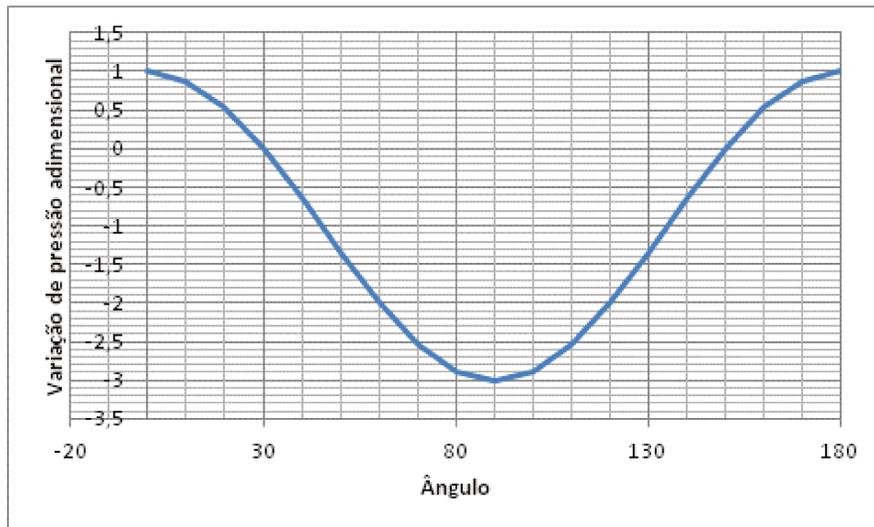


Figura 5.4 Variação de pressão próximo a um semicilindro, escoamento potencial

A variação de pressão adimensional é dada por $\frac{p_i - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_g U^2}$.

Stuhmiller, quando fez a modelagem para bolhas dispersas considerou o escoamento potencial passando por esferas. Além disto, ele considerou o efeito de instabilidade do perfil de velocidade ao passar por uma região de aumento de área, ou seja, a questão da perda de simetria nas linhas de corrente. Isto deve levar a um acréscimo no arraste na interface. Por enquanto, como se quer apenas verificar a ordem de grandeza dos termos, se trabalhará com a função de escoamento potencial $1 - 4\text{sen}^2(\theta)$, ver Kundu, (2002).

A Relação (5.17) servirá para explicitar o termo $(p_\infty - \langle p_i \rangle) \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int p'_i(\tau) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\tau)}{d\tau} d\tau$ que surge tanto em (5.15) quanto em (5.16).

Neste caso, θ é a coordenada paramétrica ao longo de um trecho rugoso definido pelo semicilindro. A partir deste momento, θ substituirá a variável τ .

Considerando $F(\theta) = 1 - 4\text{sen}^2(\theta)$:

$$\langle p_i \rangle = p_\infty + \rho_g U^2 \langle F(\theta) \rangle \quad (5.20)$$

$$p'_i = \rho_g A \frac{DU}{Dt} \cos(\theta) + \rho_g U^2 F'(\theta) \quad (5.21)$$

Onde $F'(\theta) = F(\theta) - \langle F(\theta) \rangle$.

Para o caso de escoamento potencial, $\langle F(\theta) \rangle = -0.5$. Se fosse utilizado o modelo de variação de pressão na transição laminar-turbulento de um cilindro $\langle F(\theta) \rangle \approx -0.37$. Estes valores são interessantes, pois, apesar de provavelmente não serem valores corretos, já oferecem uma noção de qual deve ser a ordem de grandeza do termo médio.

Na relação $(p_\infty - \langle p_i \rangle) \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} - \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int p'_i(\theta) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\theta)}{d\theta} d\theta$, tem-se então

$$\begin{aligned}
& (p_\infty - \langle p_i \rangle) \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} - \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int p'_i(\theta) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\theta)}{d\theta} d\theta = \\
& - \rho_g U^2 \langle F(\theta) \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} - \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int \left(\rho_g A \frac{DU}{Dt} \cos(\theta) + \rho_g U^2 F'(\theta) \right) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\theta)}{d\theta} d\theta
\end{aligned} \quad (5.22)$$

Integrando o último termo de (5.22), tem-se que

$$\begin{aligned}
& (p_\infty - \langle p_i \rangle) \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} - \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int p'_i(\theta) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\theta)}{d\theta} d\theta = \\
& - \rho_g U^2 \langle F(\theta) \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} - \frac{1}{(2A)A_t} \int_0^\pi (\rho_g A \frac{DU}{Dt} \cos(\theta) + \rho_g U^2 F'(\theta)) (-S_i A \cos(\theta)) d\theta
\end{aligned} \quad (5.23)$$

O que fornece a expressão (admitindo que $\langle F(\theta) \rangle$ é negativo):

$$\begin{aligned}
& (p_\infty - \langle p_i \rangle) \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} - \frac{1}{A_t} \frac{1}{L} \int p'_i(\theta) (-n_{gx}) S_i \frac{dL(\theta)}{d\theta} d\theta = \\
& \underbrace{\rho_g U^2 \langle F(\theta) \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x}}_{\text{Quedade pressão média}} + \underbrace{\frac{\pi S_i A \rho_g}{A_t} \frac{DU}{4 Dt}}_{\text{Massa Virtual}} + \underbrace{\frac{S_i \rho_g}{A_t} \frac{U^2}{2} \int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta}_{\text{Incremento no arraste interfacial}}
\end{aligned} \quad (5.24)$$

devido a assimetria da pressão na interface rugosa

O segundo termo do lado direito de (5.24) diz respeito ao efeito de massa virtual que estas pequenas ondas induzem no escoamento estratificado, como este termo de massa virtual é proporcional à amplitude da onda, que, acredita-se, seja muito pequena, é de se esperar que seja pouco influente no problema de evolução de *roll-waves*. Já o termo mais a direita depende da forma de $F'(\theta)$ e indica o arraste que o semi-cilindro sentirá devido a alguma assimetria no perfil de pressão. Caso $F'(\theta)$ se aproxime do que se esperaria para o escoamento potencial, este termo será pequeno, caso exista uma assimetria importante em relação a θ , este termo poderá aumentar o arraste do líquido pelo gás e a tensão cisalhante na interface será aumentada, uma expressão que deve servir para representar este incremento na tensão cisalhante na interface vem da correlação de Andritsos e Hanratty

para escoamento estratificado ondulado, ver Andritsos & Hanratty (1987). Por fim, tem-se o termo de pressão média na interface, cujo valor $\langle F(\theta) \rangle$ é ao menos estimado como sendo da ordem de 0.5. Esta ordem de grandeza parece ser grande o suficiente para se acreditar que a interface rugosa tem um papel relevante em garantir que um modelo de dois fluidos seja bem-posto, o que justificaria a busca por equações de fechamento para $\langle F(\theta) \rangle$.

Aplicando a Equação (5.24) nas equações (5.15) e (5.16), tem-se um novo par de equações para a quantidade de movimento de cada fase quando se considera a interface rugosa:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle \Gamma_g u_g^2}{\partial x} + \langle \alpha \rangle \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{h_{MAX}} g \rho_g \cos(\theta) (h-y) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} + \\ & \rho_g U^2 \langle F(\theta) \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} + \frac{\pi S_i A \rho_g}{A_t} \frac{DU}{4 Dt} + \frac{S_i \rho_g}{A_t} \frac{U^2}{2} \int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta = \quad , \quad (5.25) \\ & \frac{-\tau_i S_i - \tau_g S_{wg}}{A_t} - \rho_g g \langle \alpha \rangle \text{sen}(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) \Gamma_l u_l^2}{\partial x} + (1 - \langle \alpha \rangle) \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \\ & \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{\langle h \rangle} g \rho_l \cos(\theta) (h-y) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} - \quad (5.26) \\ & \rho_g U^2 \langle F(\theta) \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} - \frac{\pi S_i A \rho_g}{A_t} \frac{DU}{4 Dt} - \frac{S_i \rho_g}{A_t} \frac{U^2}{2} \int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta = \\ & \frac{\tau_i S_i - \tau_l S_{wl}}{A_t} - \rho_l g (1 - \langle \alpha \rangle) \text{sen}(\theta) \end{aligned}$$

Nas equações (5.25) e (5.26), o termo de massa virtual deve ser desprezado, logo:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle \Gamma_g u_g^2}{\partial x} + \langle \alpha \rangle \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{h_{MAX}} g \rho_g \cos(\theta) (h-y) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} + \\
& \rho_g U^2 \langle F(\theta) \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} + \frac{S_i}{A_t} \frac{\rho_g}{2} U^2 \int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta = \quad , \quad (5.27) \\
& \frac{-\tau_i S_i - \tau_g S_{wg}}{A_t} - \rho_g g \langle \alpha \rangle \text{sen}(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_l (1-\langle \alpha \rangle) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1-\langle \alpha \rangle) \Gamma_l u_l^2}{\partial x} + (1-\langle \alpha \rangle) \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \\
& \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{h} g \rho_l \cos(\theta) (h-y) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} - \quad . \quad (5.28) \\
& \rho_g U^2 \langle F(\theta) \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} - \frac{S_i}{A_t} \frac{\rho_g}{2} U^2 \int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta = \\
& \frac{\tau_i S_i - \tau_l S_{wl}}{A_t} - \rho_l g (1-\langle \alpha \rangle) \text{sen}(\theta)
\end{aligned}$$

Reorganizando as equações (5.27) e (5.28), e considerando, conforme argumentado anteriormente que $U = u_g - u_l$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle \Gamma_g u_g^2}{\partial x} + \langle \alpha \rangle \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{h_{MAX}} g \rho_g \cos(\theta) (h-y) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} + \\
& \rho_g U^2 \langle F(\theta) \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} = \quad , \quad (5.29) \\
& \frac{-\left(\tau_i + \frac{\rho_g}{2} (u_g - u_l)^2 \int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta \right) S_i - \tau_g S_{wg}}{A_t} - \rho_g g \langle \alpha \rangle \text{sen}(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) \Gamma_l u_l^2}{\partial x} + (1 - \langle \alpha \rangle) \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \\
& \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{\langle h \rangle} g \rho_l \cos(\theta) (h - y) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} - \rho_g U^2 \langle F(\theta) \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} = \\
& \frac{\left(\tau_i + \frac{\rho_g}{2} (u_g - u_l)^2 \int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta \right) S_i - \tau_l S_{wl}}{A_t} - \rho_l g (1 - \langle \alpha \rangle) \text{sen}(\theta)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Utilizando a Equação (3.52) que representa a tensão cisalhante na interface devido ao atrito de película, as equações (5.29) e (5.30) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle \Gamma_g u_g^2}{\partial x} + \langle \alpha \rangle \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{h_{MAX}} g \rho_g \cos(\theta) (h - y) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\langle h \rangle \partial x} + \\
& \rho_g U^2 \langle F(\theta) \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} = \\
& \frac{- f_g \frac{\rho_g}{2} (u_g - u_l)^2 \left(1 + \frac{\int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta}{f_g} \right) S_i - \tau_g S_{wg}}{A_t} - \rho_g g \langle \alpha \rangle \text{sen}(\theta)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) \Gamma_l u_l^2}{\partial x} + (1 - \langle \alpha \rangle) \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \\
& \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{\langle h \rangle} g \rho_l \cos(\theta) (h - y) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} - \rho_g U^2 \langle F(\theta) \rangle \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} = \\
& \frac{f_g \frac{\rho_g}{2} (u_g - u_l)^2 \left(1 + \frac{\int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta}{f_g} \right) S_i - \tau_l S_{wl}}{A_t} - \rho_l g (1 - \langle \alpha \rangle) \text{sen}(\theta)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Tanto na Equação (5.31) como na equação (5.32) surge um termo multiplicador ao que se entenderia como a tensão cisalhante para interface lisa, no caso

$$\left(1 + \frac{\int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta}{f_g} \right), \text{ deve-se determinar quanto deve ser este fator multiplicador.}$$

Como já comentado, Andritsos & Hanratty (1987) propuseram uma expressão para a tensão cisalhante interfacial para o caso de interface rugosa, a qual é dada por

$$\tau_i = f_g \left[1 + 15 \left(\frac{h}{D} \right)^{1/2} \left(\frac{\alpha u_g}{U_{sgt}} - 1 \right) \right] \rho_g \frac{(u_g - u_l)^2}{2}. \quad (5.33)$$

Onde

$$U_{sgt} = 5 \left(\frac{\rho_{ga}}{\rho_g} \right). \quad (5.34)$$

A unidade de U_{sgt} é m/s. O termo ρ_{ga} é a massa específica do gás na pressão atmosférica. Quando αu_g for menor que U_{sgt} , o termo de arraste devido à rugosidade é considerado zero.

Comparando (5.33) com a tensão cisalhante modificada pela interface rugosa obtida em (5.31) e (5.32), chega-se à conclusão que, no caso da correlação proposta por Andritsos & Hanratty (1987)

$$\int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta = 15 \left(\frac{h}{D} \right)^{1/2} \left(\frac{U_{sg}}{U_{sgt}} - 1 \right) f_g. \quad (5.35)$$

É interessante notar que o termo $\int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta$ já está previsto na correlação de Andritsos & Hanratty (1987).

Aplicando (5.35) em (5.31) e (5.32):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \langle \alpha \rangle \Gamma_g u_g^2}{\partial x} + \langle \alpha \rangle \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^{h_{MAX}} g \rho_g \cos(\theta) (h-y) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} + \\
& \rho_g U^2 \left| \langle F(\theta) \rangle \right| \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} = \quad , \quad (5.36) \\
& \frac{-f_g \frac{\rho_g}{2} (u_g - u_l)^2 \left(1 + 15 \left(\frac{h}{D} \right)^{1/2} \left(\frac{U_{sg}}{U_{sgt}} - 1 \right) \right) S_i - \tau_g S_{wg}}{A_t} - \rho_g g \langle \alpha \rangle \text{sen}(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1 - \langle \alpha \rangle) \Gamma_l u_l^2}{\partial x} + (1 - \langle \alpha \rangle) \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \\
& \frac{1}{A_t} \frac{\partial \int_0^h g \rho_l \cos(\theta) (h-y) \frac{dA(y)}{dy} dy}{\partial x} - \rho_g U^2 \left| \langle F(\theta) \rangle \right| \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x} = \quad . \quad (5.37) \\
& \frac{f_g \frac{\rho_g}{2} (u_g - u_l)^2 \left(1 + 15 \left(\frac{h}{D} \right)^{1/2} \left(\frac{U_{sg}}{U_{sgt}} - 1 \right) \right) S_i - \tau_l S_{wl}}{A_t} - \rho_l g (1 - \langle \alpha \rangle) \text{sen}(\theta)
\end{aligned}$$

O que se fez em (5.36) e (5.37) foi simplesmente aplicar a correlação de Andritsos & Hanratty (1987) para a tensão cisalhante em uma interface rugosa.

Para que (5.36) e (5.37) tornem-se equações utilizáveis, falta determinar o termo relacionado com a pressão média na interface, no caso, o termo $\rho_g U^2 \left| \langle F(\theta) \rangle \right| \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x}$.

Infelizmente, não foi encontrada uma correlação para o termo $\left| \langle F(\theta) \rangle \right|$ na literatura. Este termo é o mais importante para se garantir que o modelo de dois-fluidos se mantenha bem-posto durante uma simulação de *roll-waves*, mas acredita-se que este termo nunca foi fonte de atenção para quem trabalha com escoamento estratificado, ao contrário do termo de fricção na interface.

Pode-se ao menos se inferir como deve ser o formato de $\left| \langle F(\theta) \rangle \right|$. A correlação de Andritsos & Hanratty (1987) revela como provavelmente deve se comportar termos relacionados com a interface rugosa. Parece razoável se acreditar que a forma que define

como $\int_0^{\pi} F'(\theta) \cos(\theta) d\theta$ varia, revelada na Equação (5.35), deve ser repetida para $\langle F(\theta) \rangle$, já que a origem dos dois termos é a mesma.

Na Equação (5.35), tem-se um termo dependente do *holdup*, no caso $15 \left(\frac{h}{D} \right)^{1/2}$ e um termo que define o quanto a interface se encontra distante de uma de uma interface lisa, no caso $\left(\frac{\alpha u_g}{U_{sgt}} - 1 \right)$. Tomando este formato de correlação como inspiração, acredita-se que o termo $\langle F(\theta) \rangle$ deve ter um formato do tipo

$$\langle F(\theta) \rangle = C_1 \alpha^{C_2} \left(\frac{\alpha u_g}{U_{sgt}} - 1 \right)^{C_3} \quad (5.38)$$

Onde C_1 , C_2 e C_3 são valores a serem determinados.

Acredita-se, neste trabalho, que em vez de se trabalhar com a velocidade superficial de gás como parâmetro para definir o quanto a interface é instável, melhor seria se trabalhar com o termo KHi , portanto, neste trabalho, se investigará uma possível correlação para $\langle F(\theta) \rangle$ no formato

$$\langle F(\theta) \rangle = C_1 \alpha^{C_2} \left(\frac{KHi}{KHi_t} - 1 \right)^{C_3}, \quad (5.39)$$

onde KHi_t seria um valor de KHi que indicaria a transição de uma interface lisa para uma interface rugosa.

Uma correlação para $\langle F(\theta) \rangle$ seguindo o formato proposto em (5.39) será apresentado no capítulo sobre experimentos.

Para o caso do modelo aproximado (relações (5.2) e (5.3)), a Relação (5.24) alterará o modelo para

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial x} = 0 \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \left\{ g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{S_i}{A_t} \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{\langle F(\theta) \rangle}{1-\alpha} \right) \left(\frac{j-u_l}{\alpha} \right)^2 \right\} \frac{A_t}{S_i} \frac{\partial(1-\alpha)}{\partial x} = 0 \quad (5.41)$$

O termo $|\langle F(\theta) \rangle|$ atua diminuindo o efeito do termo KHi que é o responsável por tornar o modelo mal-posto para grandes amplitudes de onda. $|\langle F(\theta) \rangle|$ diminui o valor de KHi, dificultando a possibilidade do modelo se tornar mal-posto com a evolução da roll-wave.

De (5.41), a condição de hiperbolicidade agora é dada por

$$\begin{aligned}
 g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{S_i}{A_t} \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{|\langle F(\theta) \rangle|}{1 - \alpha} \right) \left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2 > 0 &\Rightarrow \\
 1 - \frac{|\langle F(\theta) \rangle|}{1 - \alpha} < g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} \frac{\rho_l}{\rho_g} \frac{A_t}{S_i} \frac{\alpha^3}{\left(j - \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} \right)^2} &\Rightarrow \\
 |\langle F(\theta) \rangle| > \left[-1 + g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} \frac{\rho_l}{\rho_g} \frac{A_t}{S_i} \frac{\alpha^3}{(j - u_l)^2} \right] (1 - \alpha). &\quad (5.42)
 \end{aligned}$$

Resta agora verificar como o termo $\rho_g U^2 |\langle F(\theta) \rangle| \frac{\partial \alpha}{\partial x}$ altera o esquema numérico utilizado para fazer as simulações de evolução de *roll-wave* em canais fechados. Isto será feito apenas para o caso de fluidos incompressíveis.

As alterações no esquema numérico original se dá no calculo da matriz de Roe, ver Apêndice A. Este novo termo é não conservativo e, portanto, não entra no processo de integração usual para obtenção da matriz de Roe, é feita apenas uma ponderação aritmética dos coeficientes a esquerda e a direita de uma célula.

Os termos da matriz de Roe, agora são representados por

$$R = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} \\ R_{2,1} & R_{2,2} \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

$$R_{1,1} = 0, \quad (5.44)$$

$$R_{1,2} = 1, \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned}
R_{2,1} = & - \frac{\left(\sqrt{\alpha} u_g \Big|_L + \sqrt{\alpha} u_g \Big|_R \right) \left[\left(\sqrt{\alpha} u_g \Big|_L + \sqrt{\alpha} u_g \Big|_R \right) \left(1 - \frac{1}{1+Fa} \right) + \right. \\
& \left. \frac{1}{1+Fa} \int_L^R \sqrt{\alpha} \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} dz \right]}{\left(\sqrt{\alpha} \Big|_L + \sqrt{\alpha} \Big|_R \right)^2} + \\
& \frac{\left[\frac{1}{1+Fa} \int_L^R \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} \left(\sqrt{\alpha} u_g - \sqrt{\alpha} \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} \right) dz - \right. \\
& \left. g \left(- \int_L^R 2\sqrt{\alpha} \frac{1}{s_i(\alpha)} \int_h^{h_{\max}} s_i(y) dy dz + \frac{1}{1+Fa} \int_L^R 2\sqrt{\alpha} \frac{1}{s_i(\alpha)} \int_0^{h_{\max}} s_i(y) dy dz \right) \right]}{\left(\sqrt{\alpha} \Big|_L + \sqrt{\alpha} \Big|_R \right)} +, \tag{5.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle F(\theta) \rangle &= \frac{(\alpha j - \alpha u_g)^2 (\rho_g + Fa \rho_l)}{(1+Fa) \alpha^2 \rho_l (1 - \alpha^2)^2} \\
R_{2,2} = & \frac{2 \left(\sqrt{\alpha} u_g \Big|_L + \sqrt{\alpha} u_g \Big|_R \right) \left(1 - \frac{1}{1+Fa} \right) + 2 \frac{1}{1+Fa} \int_L^R \sqrt{\alpha} \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} dz}{\sqrt{\alpha} \Big|_L + \sqrt{\alpha} \Big|_R}. \tag{5.47}
\end{aligned}$$

‘

6. COMPARAÇÃO COM EXPERIMENTOS

Foram feitas rodadas experimentais em um circuito horizontal do Departamento de Energia da Engenharia Mecânica da UNICAMP. A Figura (6.1) apresenta o esquemático do circuito. O circuito é horizontal e o comprimento de interesse para as medições tinha 747 diâmetros.

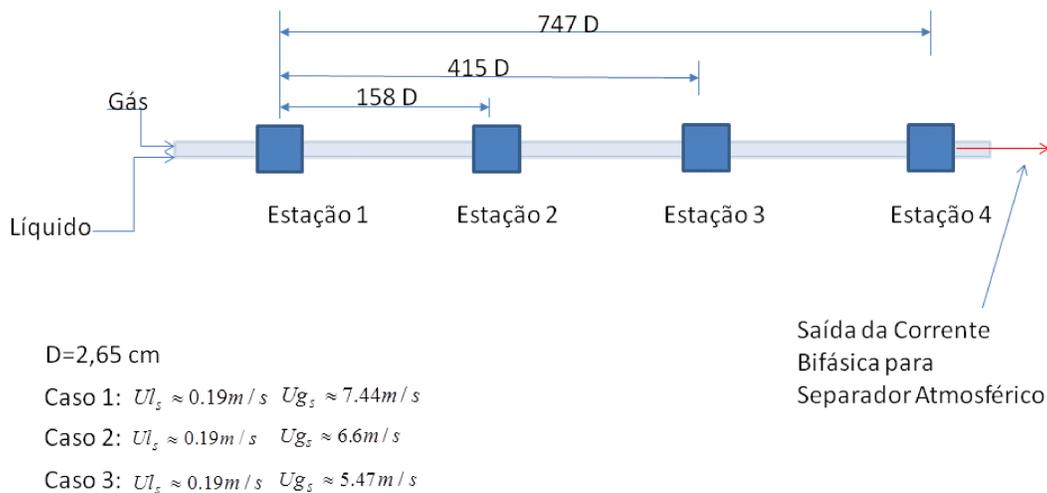


Figura 6.1 Esquemático do circuito de teste para experimentos de roll-waves

Os experimentos foram simples, outros testes devem ser feitos para uma proposição mais precisa das equações de fechamento representativas do efeito da interface rugosa na evolução de *roll-waves*. Buscou-se apenas levantar os perfis de *holdup* para estas três rodadas experimentais. Estes perfis foram levantados por meio de sondas capacitivas. Foram utilizadas quatro estações para coleta de dados, sendo que cada estação utilizava 2 sondas defasadas de 112.15 mm uma da outra, conforme esquema representado na Figura 6.2, o que permitiu não só levantar o perfil de *holdup*, mas também as velocidade de propagação dos choques.

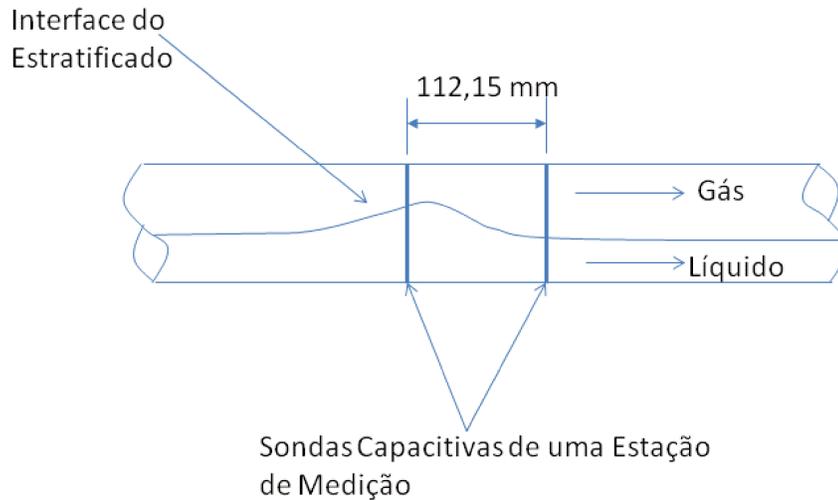


Figura 6.2 Esquema de sondas capacitivas em uma estação de medição

O duto tinha um diâmetro interno de 2.65 cm. A pressão média na estação mais próxima da entrada dos fluidos ficou em aproximadamente 1.05 bar. As distâncias em diâmetro de cada estação em relação à estação de entrada foram de 158 D para a estação 2; 415 D para a estação 3; 747 D para a estação 4. Nas simulações, utilizou-se uma discretização de um quarto de diâmetro para o diâmetro das células.

A comparação foi feita entre os resultados obtidos pelo simulador e os resultados adquiridos experimentalmente nas três últimas estações. Os dados experimentais sobre o *holdup* obtidos na primeira estação foram alimentados como condição de contorno no simulador. O simulador sempre iniciava com um permanente instável e seu processo de perturbação se originava das oscilações de *holdup* na entrada, as quais nada mais eram do que os dados coletados da primeira estação. As velocidades superficiais utilizadas foram:

Caso 1 ($U_{l_s} \approx 0.19 \text{ m/s}$, $U_{g_s} \approx 7.44 \text{ m/s}$);

Caso 2 ($U_{l_s} \approx 0.19 \text{ m/s}$, $U_{g_s} \approx 6.6 \text{ m/s}$);

Caso 3 ($U_{l_s} \approx 0.19 \text{ m/s}$, $U_{g_s} \approx 5.47 \text{ m/s}$).

No Capítulo 5, mostrou-se que considerar a influência da interface rugosa no escoamento estratificado instável pode ser importante para manter o modelo de dois fluidos bem-posto, quando se simula a evolução de *roll waves*. Observou-se, a partir da Equação (5.24), que dois termos relacionados com a interface rugosa são relevantes, um termo

relacionado com a queda da pressão interfacial devido a efeitos dinâmicos na interface, no caso o termo $\rho_g U^2 \left| \langle F(\theta) \rangle \right| \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x}$ e o termo relacionado com o incremento da tensão cisalhante na interface, no caso, o termo $\frac{\rho_g}{2} U^2 \int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta$, onde $U = (u_g - u_l)$.

Mostrou-se que a correlação de Andritsos & Hanratty (1987) apresenta uma expressão para a tensão cisalhante em uma interface rugosa na qual é possível determinar o termo $\frac{\rho_g}{2} U^2 \int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta$. Não se tem uma correlação na literatura para $\left| \langle F(\theta) \rangle \right|$, mas foi feita uma inferência de como pode ser a forma de uma expressão que represente $\left| \langle F(\theta) \rangle \right|$ a partir da análise da forma com que a correlação de Andritsos & Hanratty (1987) indica que deve ser o termo $\int_0^\pi F'(\theta) \cos(\theta) d\theta$. A forma que se acredita que o termo $\left| \langle F(\theta) \rangle \right|$ deva ter foi apresentada na Equação (5.39). O experimento será utilizado para obter os coeficientes da Equação (5.39). Utilizando os resultados de amplificação de *roll wave* do caso 3, foram feitas simulações em que valores dos coeficientes de (5.39) foram testados até se obter o resultado mais próximo do que se observou no experimento. Claro, a quantidade de experimentos é muito pequena para se ter segurança de que a correlação proposta é adequada, deve-se entender apenas como um ponto de partida para futuros trabalhos e melhorias no modelo.

Das comparações entre a amplificação real do Caso 3 e a amplificação da simulação, obteve-se a seguinte relação

$$\left| \langle F(\theta) \rangle \right| = \frac{0.08}{\alpha^2} \left(\frac{KH_i}{0.4} - 1 \right)^2. \quad (6.1)$$

Lembrando que KH_i é unidimensional. Quando KH_i é menor do que 0.4, este termo é considerado igual a zero. Com (6.1), é possível se fazer simulações numéricas para *roll-waves*, utilizando um modelo que incorpore o efeito da interface rugosa.

Para o Caso 1, na condição de permanente instável, o *holdup* calculado foi de 0,246, velocidade de propagação de onda dinâmica foi de 0,927, já a velocidade de propagação de onda cinemática foi de 1,218. Caso o efeito da interface rugosa não fosse considerado, o

holdup seria de 0,37, a velocidade de propagação de onda cinemática seria de 0,9858 m/s e a velocidade de propagação de onda dinâmica seria de 0,52355+0,1058 i e já se iniciaria mal-posto.

Para o Caso 2, na condição de permanente instável, o *holdup* calculado foi de 0,289, velocidade de propagação de onda dinâmica foi de 0,82, já a velocidade de propagação de onda cinemática foi de 1,09. Caso a interface rugosa não fosse considerada, o *holdup* seria de 0,39, a velocidade de propagação de onda cinemática seria de 0,964 m/s e a velocidade de propagação de onda dinâmica seria de 0,494+0,31 i.

Para o Caso 3, na condição de permanente instável, o *holdup* calculado foi de 0,38, velocidade de propagação de onda dinâmica foi de 0,67, já a velocidade de propagação de onda cinemática foi de 0,91. Caso a interface rugosa não fosse considerada, o *holdup* seria de 0,427, a velocidade de propagação de onda cinemática seria de 0,94 m/s e a velocidade de propagação de onda dinâmica seria de 0,66. Este é o caso em que mais se aproximam os resultados com e sem rugosidade, isto se deve ao fato de que a velocidade superficial de gás já está muito próxima de U_{gst} , atenuando o efeito do arraste devido à interface rugosa.

As figuras (6.1), (6.2) e (6.3) apresentam a comparação da variação com o tempo do *holdup* na última estação entre os resultados da simulação e os dados experimentais para os casos 1, 2 e 3 respectivamente. Observa-se uma maior quantidade de *roll waves* curtas no caso simulado. Na verdade, parece existir uma falha na previsão do coalescimento de *roll waves* nos casos simulados. Este coalescimento é observado nas simulações, mas em menor quantidade do que o que se verificou no experimento. Observa-se nos perfis simulados a existência de pequenos trens de onda com 2 ou três *roll waves* bastante curtas e muito semelhantes, ao mesmo tempo, nos dados experimentais, o que seria estes trens de ondas curtas se apresenta como uma *roll wave* bastante longa. O fato destas ondas curtas terem aspectos muito semelhantes implica em velocidades de propagação próximas, o que impede o coalescimento das ondas no modelo. Talvez, para ondas muito curtas, mesmo tendo formas similares, não seja o caso de se ter velocidades de propagação idênticas. Uma *roll wave* logo atrás de outra pode encontrar um perfil de velocidade a sua frente ainda não desenvolvido o que talvez altere a sua velocidade de propagação, este é um aspecto que

deve ser investigado e, caso seja relevante, deve ser aplicado em modelos de *roll waves* futuros.

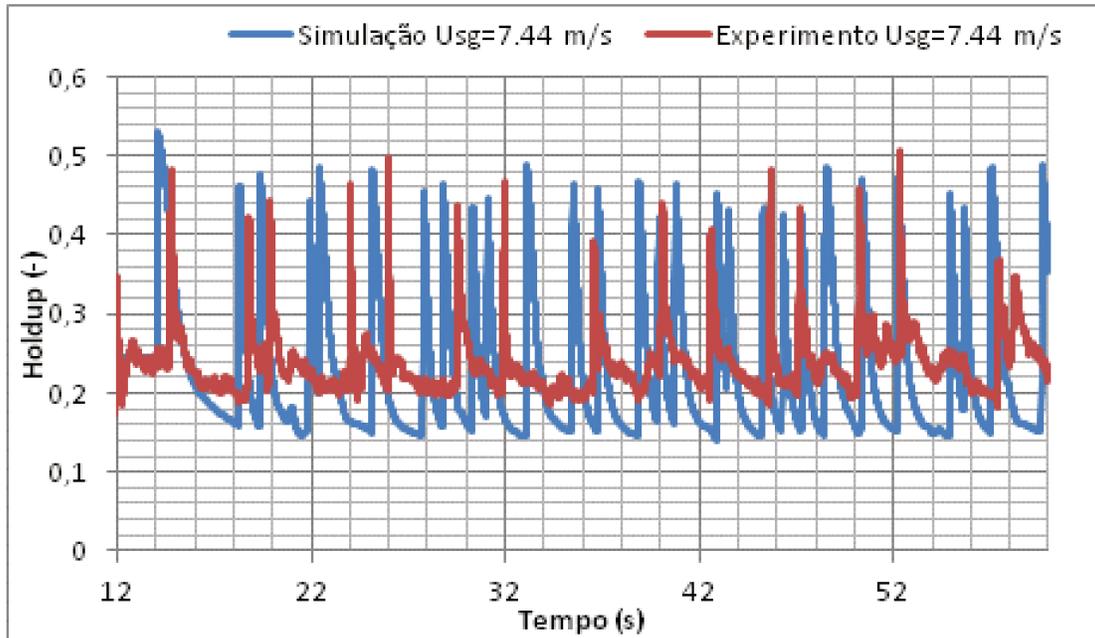


Figura 6.3 Comparação entre a variação no tempo do holdup experimental e simulado na estação 4, velocidade superficial de gás de 7,44 m/s, velocidade superficial de líquido de 0,19 m/s

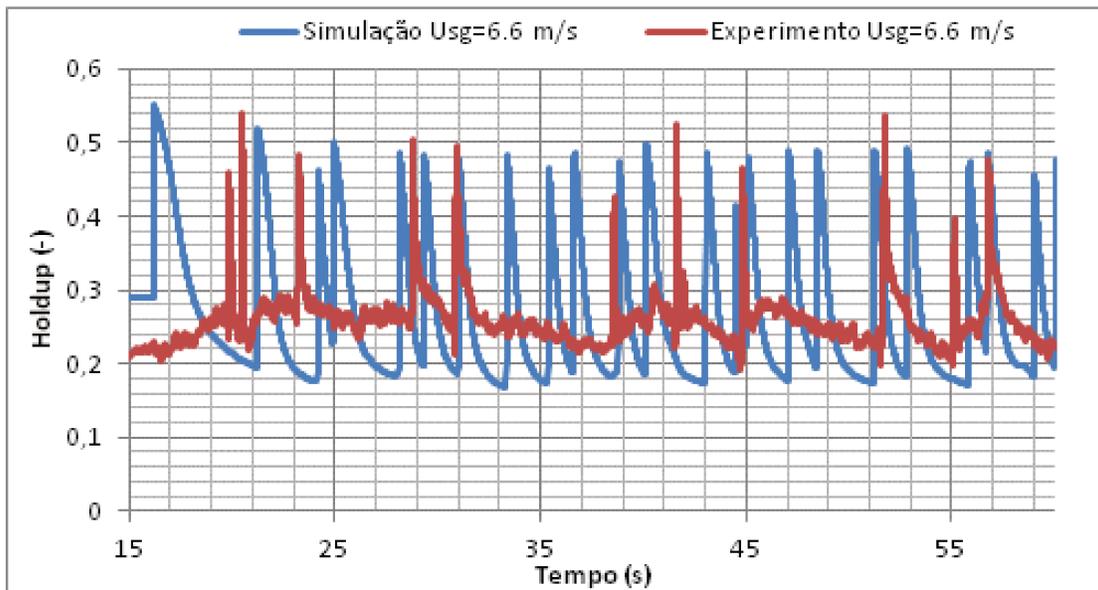


Figura 6.4 Comparação entre a variação no tempo do holdup experimental e simulado na estação 4, velocidade superficial de gás de 6,6 m/s, velocidade superficial de líquido de 0,19 m/s

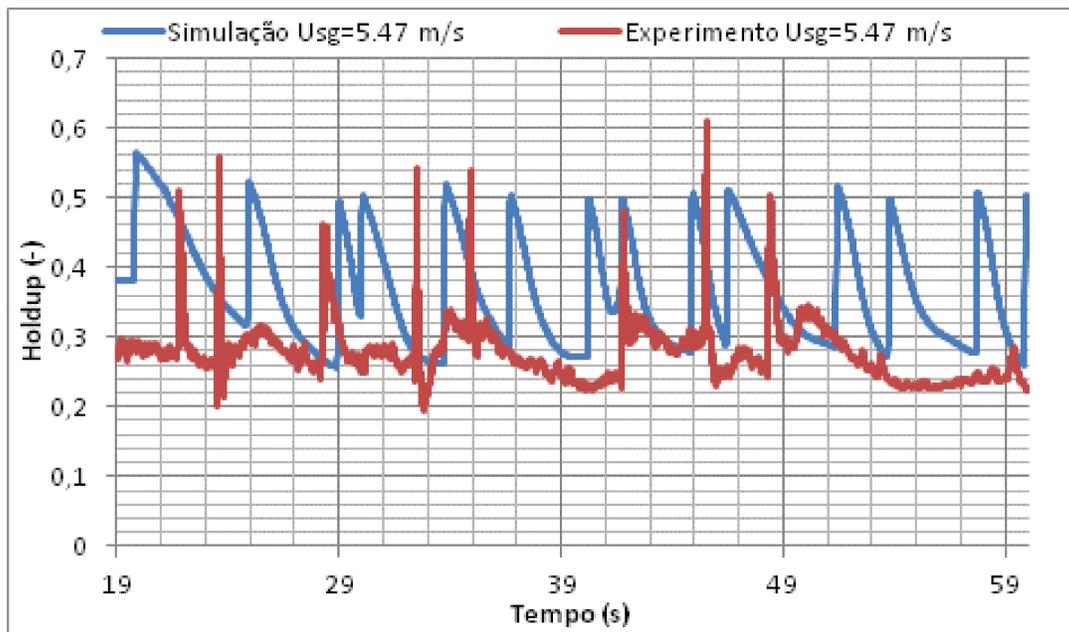


Figura 6.5 Comparação entre a variação no tempo do holdup experimental e simulado na estação 4, velocidade superficial de gás de 5,47 m/s, velocidade superficial de líquido de 0,19 m/s

As figuras (6.6), (6.7) e (6.8) apresentam os histogramas com as faixas de velocidade e a frequência com que estas faixas foram observadas para as estações 3 e 4 na simulação e no experimento para os casos 1, 2 e 3 respectivamente.

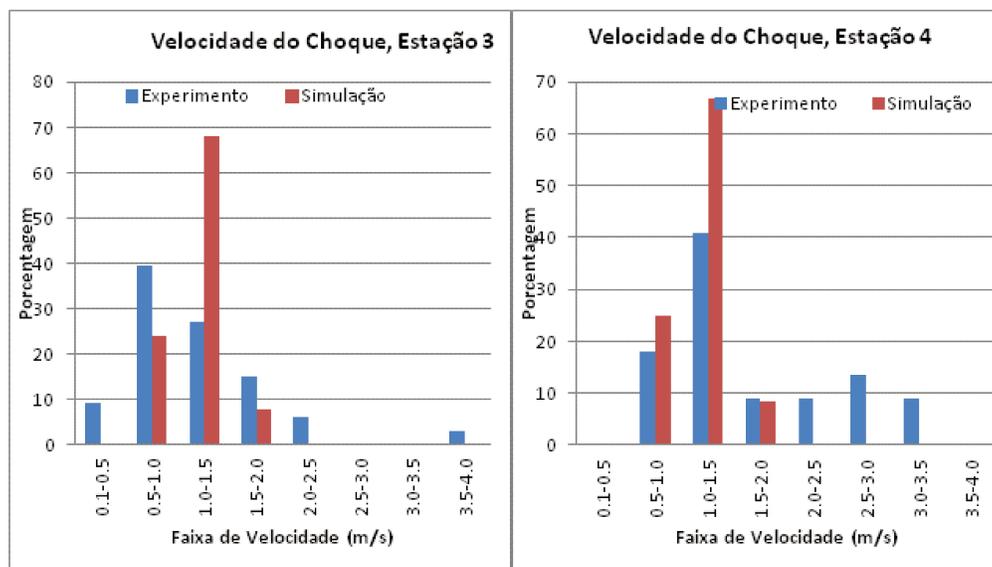


Figura 6.6 Comparação da faixa de velocidade dos choques, estações 3 e 4, velocidade superficial de gás de 7,44 m/s

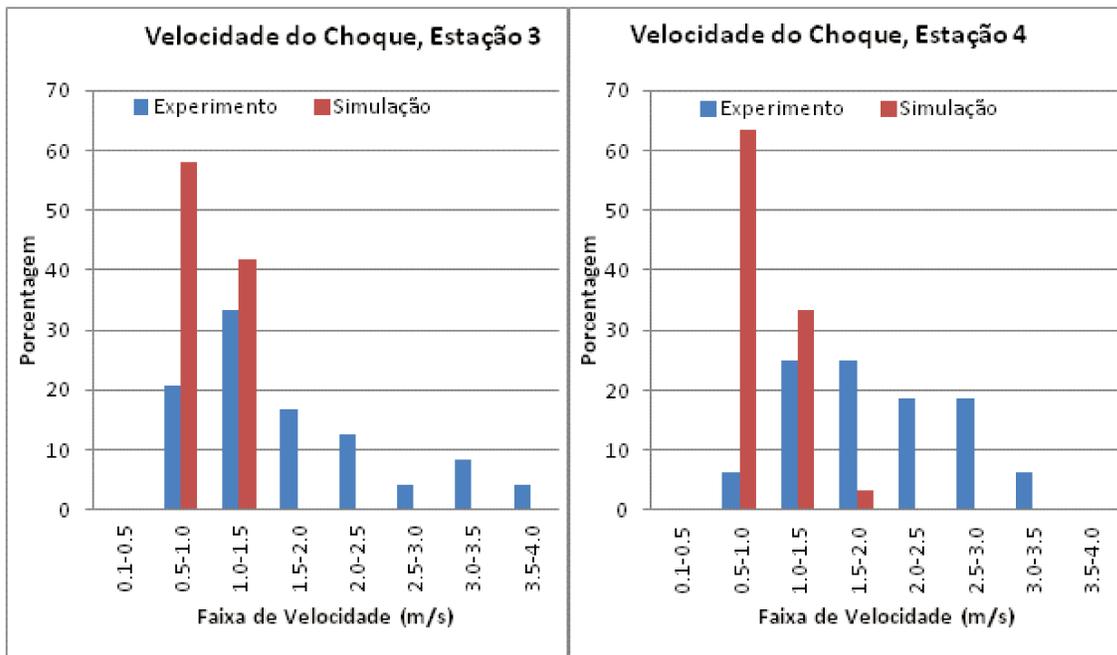


Figura 6.7 Comparação da faixa de velocidade dos choques, estações 3 e 4, velocidade superficial de gás de 6,6 m/s

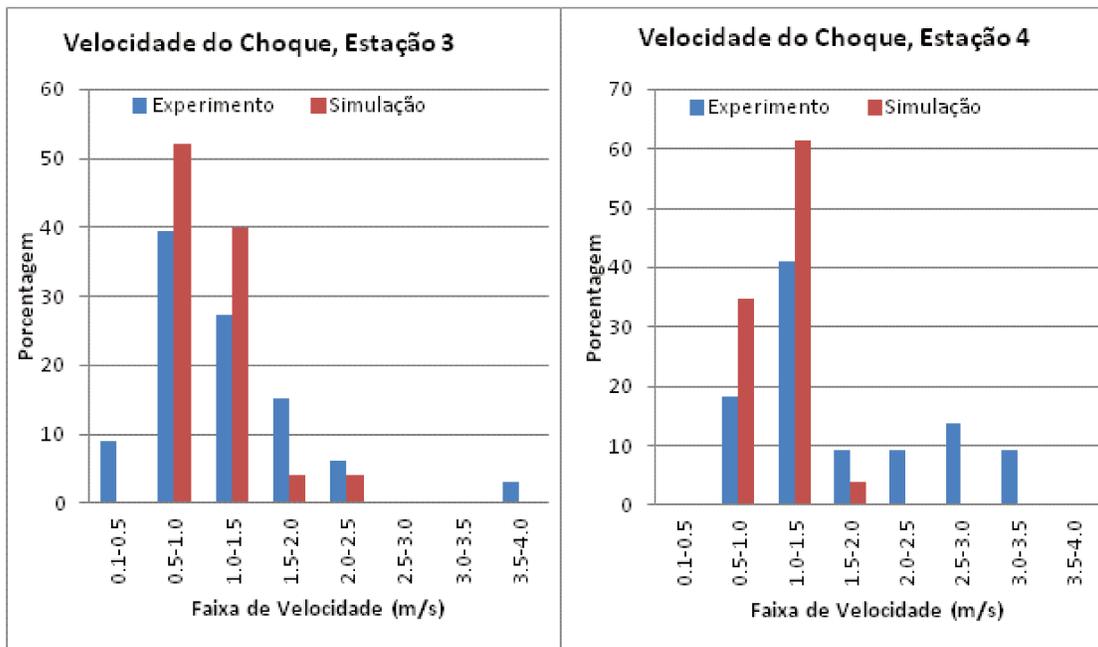


Figura 6.8 Comparação da faixa de velocidade dos choques, estações 3 e 4, velocidade superficial de gás de 5,47 m/s

As figuras (6.9), (6.10) e (6.11) apresentam comparações entre os *holdups* médios simulados e experimentais nas quatro estações de medição para os casos 1, 2 e 3 respectivamente. Os resultados foram bons para os casos com velocidade superficial de gás

em 7,44 e 6.6 m/s, porém, no caso de velocidade superficial de gás de 5,47 o erro foi de cerca de 30 % na previsão, isto se justifica pelo fato de que pela Relação (6.2), a uma velocidade superficial de gás próxima de 5 m/s o acrescime na tensão cisalhante na interface devido ao aspecto rugoso já seria quase descartado, parece não ser este o caso no resultado experimental.

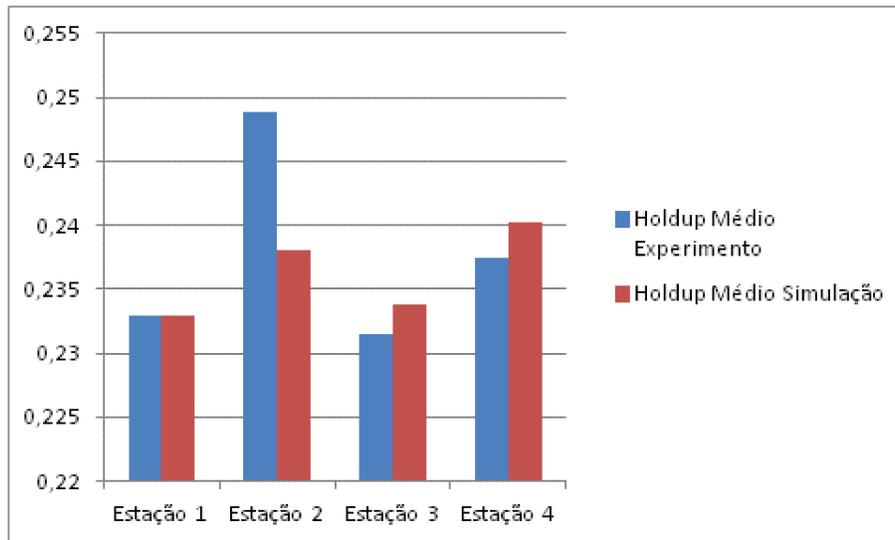


Figura 6.9 Comparação holdup médio, estações 2, 3 e 4, caso com velocidade superficial de gás de 7,44 m/s

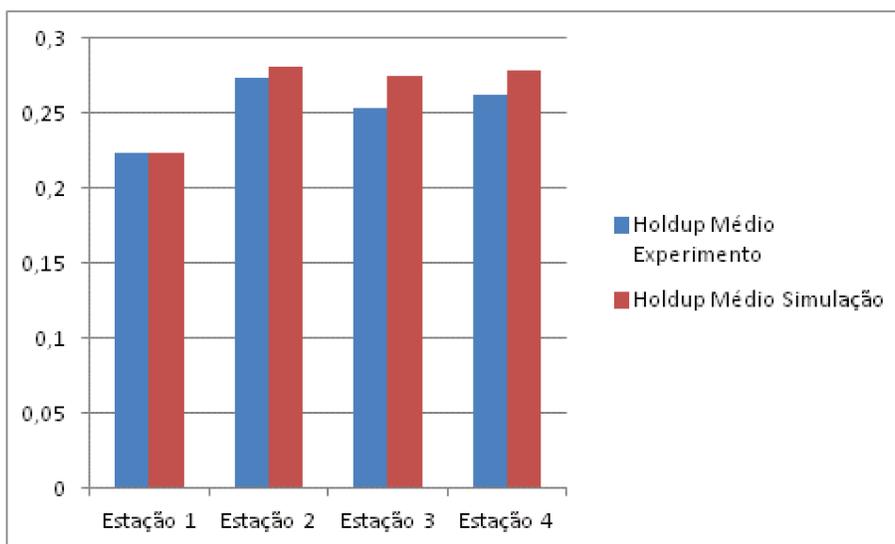


Figura 6.10 Comparação holdup médio, estações 2, 3 e 4, caso com velocidade superficial de gás de 6,6 m/s

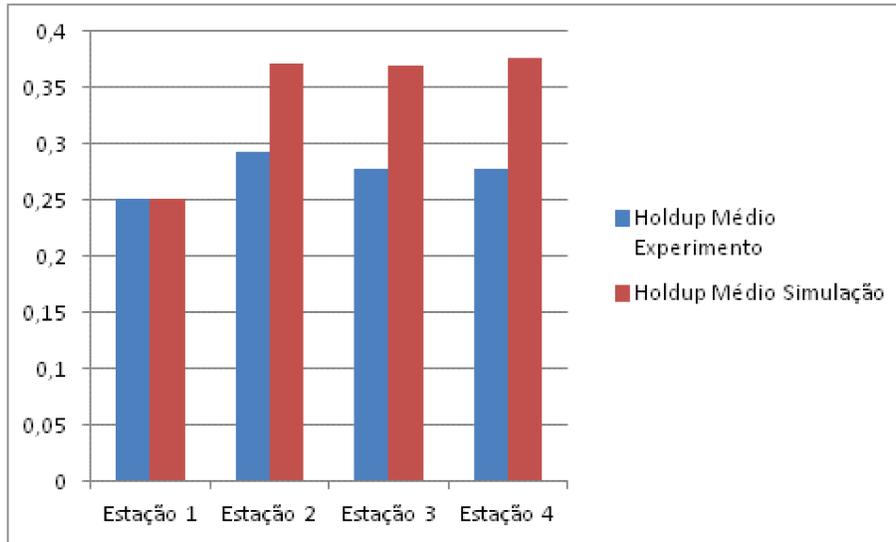


Figura 6.11 Comparação holdup médio, estações 2, 3 e 4, caso com velocidade superficial de gás de 5,47 m/s

As figuras (6.12), (6.13) e (6.14) apresentam a função espectral das quatro estações de medição para a simulação e o experimento para os casos 1, 2 e 3 respectivamente. A função espectral é aqui definida por

$$\overline{[(1 - \alpha(t)) - \overline{(1 - \alpha)}]^2} = \int_0^{\infty} \phi(f) df \quad (6.2)$$

A unidade desta função espectral está em segundos.

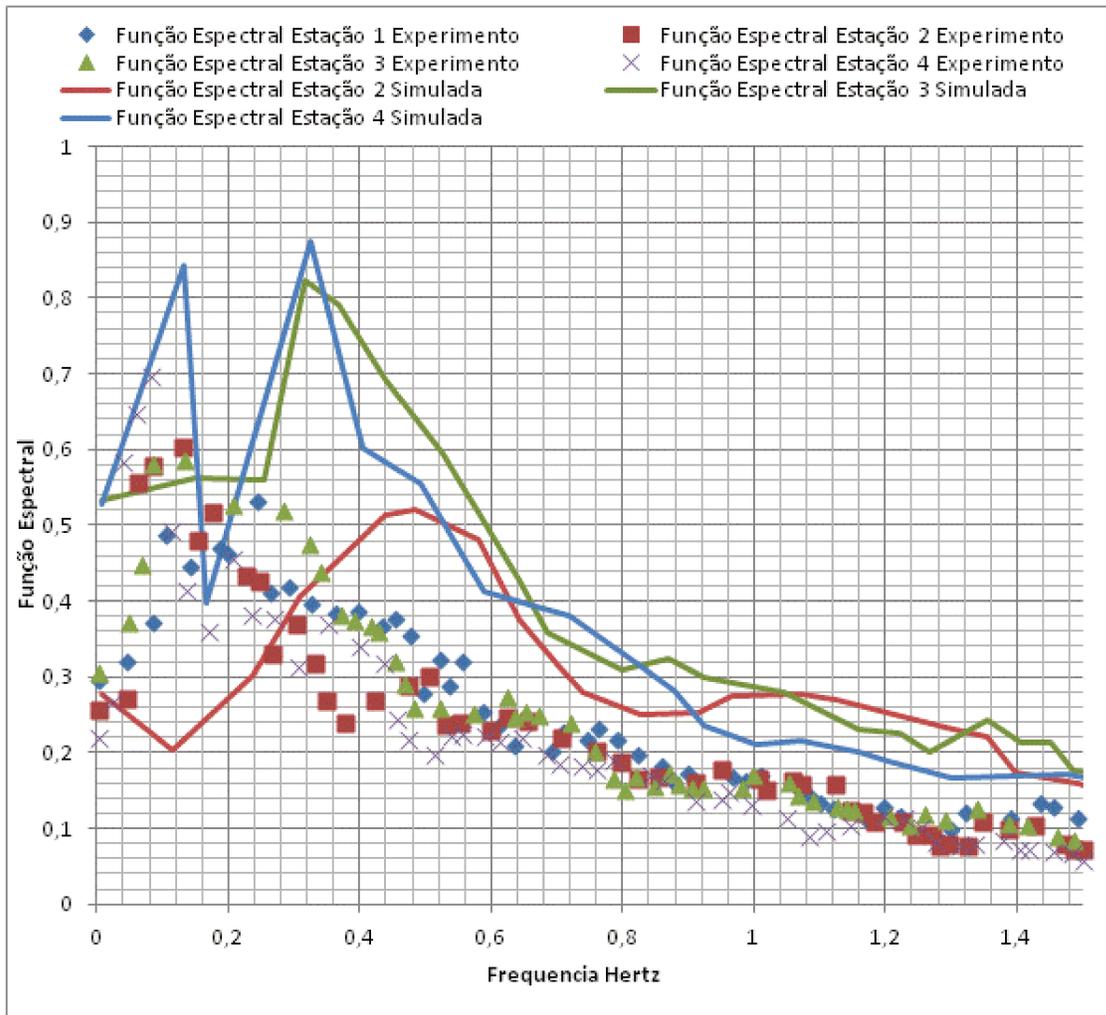


Figura 6.12 Espectro de frequência para o holdup, experimento e simulação, velocidade superficial de gás de 7,44 m/s

Observa-se na Figura (6.12) um pouco de coalescimento das ondas simuladas, pois a frequência de pico no espectro sai de um valor de cerca de 0,5 Hertz na Estação 2 para um valor de pico de cerca de 0,3 Hertz na Estação 4. Porém, este coalescimento é inferior ao coalescimento observado nos experimentos. No caso experimental, o espectro parece se concentrar em uma frequência próxima a 0,2 Hertz, o que daria um erro de aproximadamente 50% na previsão da frequência de *roll-wave*. Este é um erro considerável e provavelmente indica a dificuldade do simulador em impor o coalescimento das ondas.

É interessante notar que o resultado indica uma possível condição de *roll-wave* com amplitude estável. No caso Experimental e no caso simulado, a amplificação de uma estação para outra foi diminuindo, sendo que no caso simulado o incremento relativo da

amplificação da Estação 3 para a Estação 4 é bem inferior ao que se observa no experimento, provavelmente isto é devido ao menor coalescimento de ondas no caso simulado.

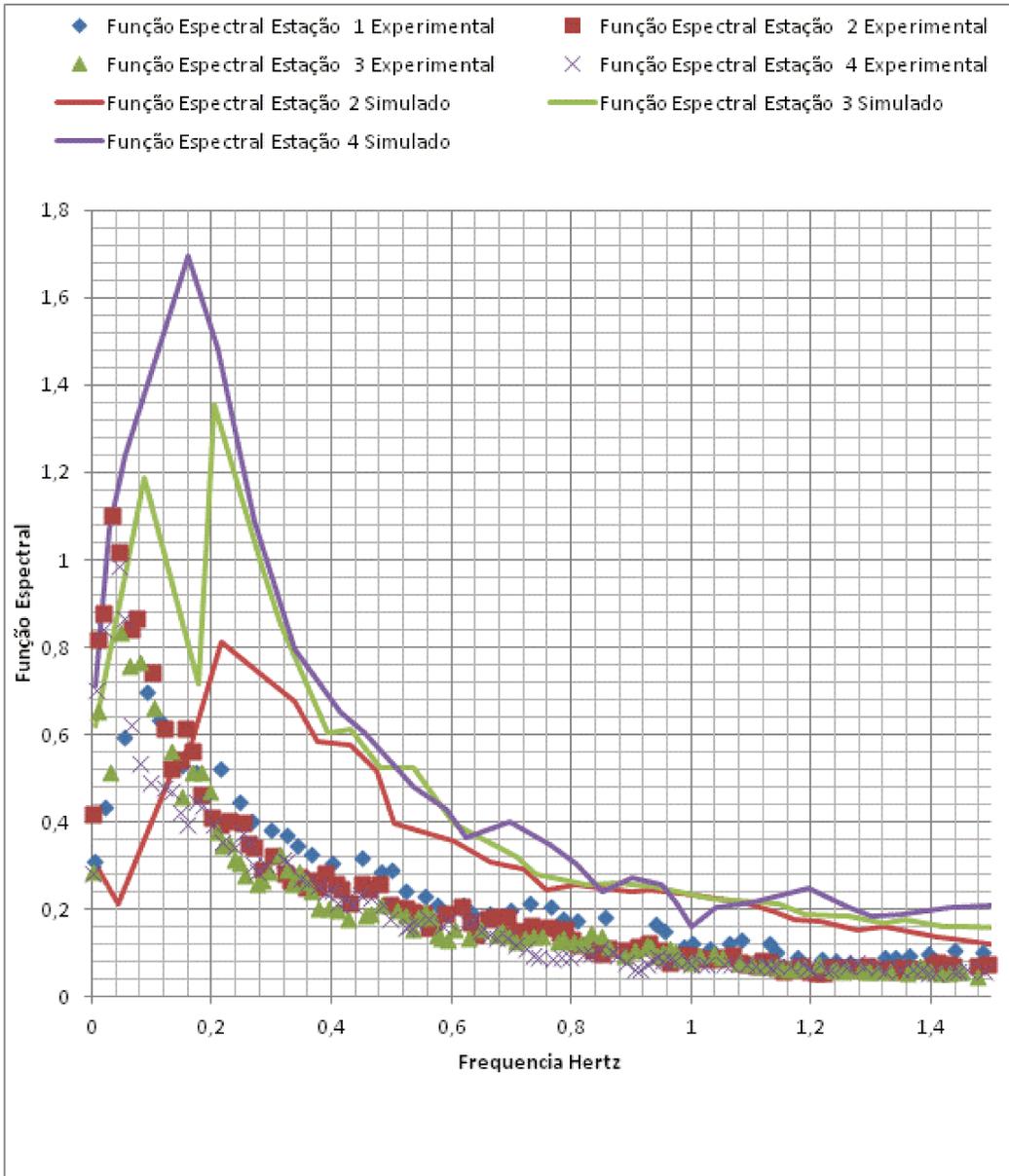


Figura 6.13 Espectro de frequência para o holdup, experimento e simulação, velocidade superficial de gás de 6,6m/s

Observa-se que no caso apresentado na Figura (6.13) que o coalescimento pela simulação foi pouco. Não há uma diminuição relevante na frequência em que ocorre o pico

do espectro à medida que se desloca de uma estação mais próxima da entrada para uma estação mais distante.

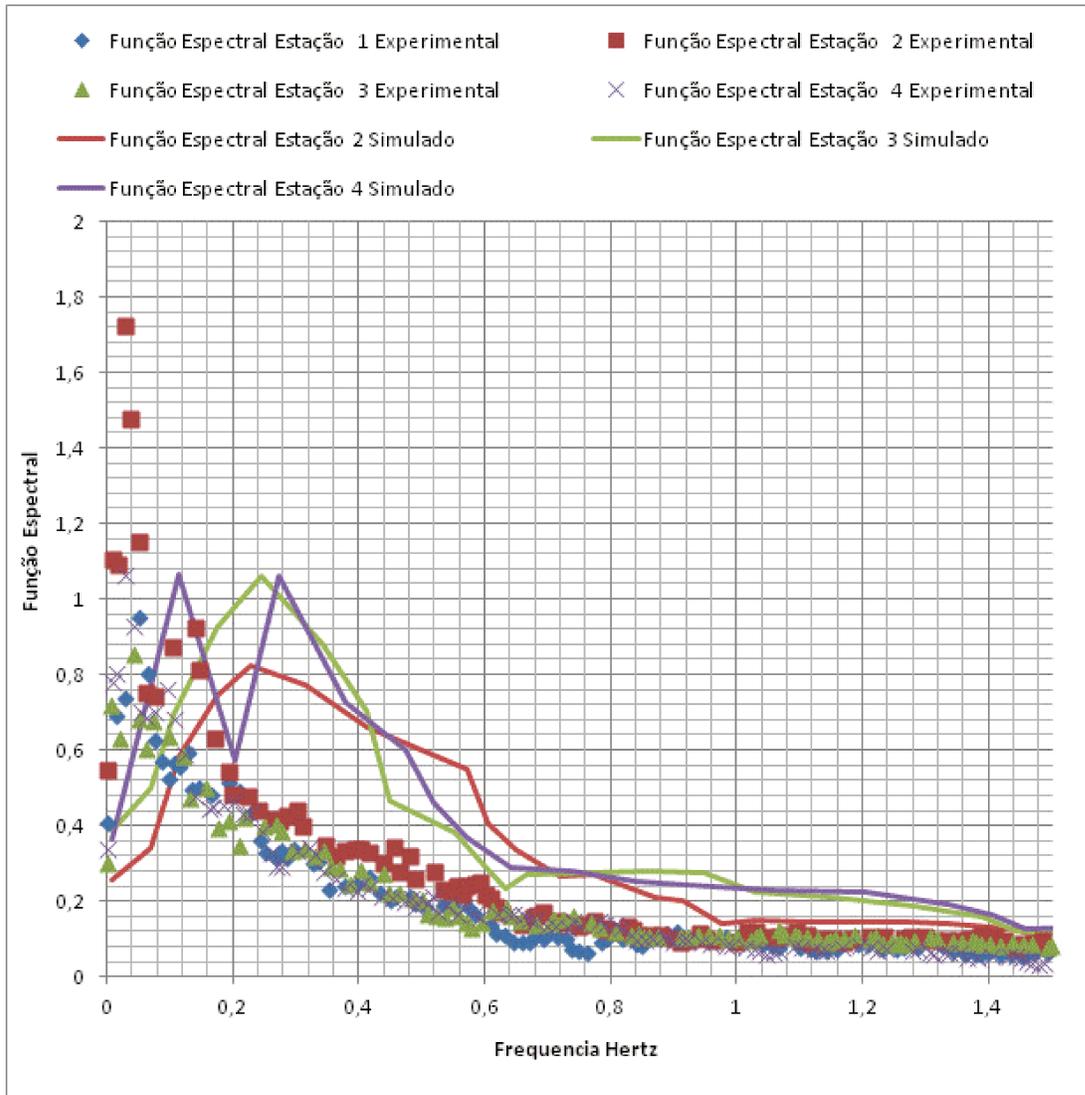


Figura 6.14 Espectro de frequência para o holdup, experimento e simulação, velocidade superficial de gás de 5,47 m/s

Na Figura (6.14), observa-se que a amplificação prevista pelo simulador ficou muito próxima do que se observou no experimento, muito embora a frequência dominante observado na simulação ficou distante da experimental.

Os resultados obtidos pelo simulador podem ser entendidos como satisfatórios, principalmente quando se considera que este é um problema que sem nenhuma correção,

seria mal-posto, nos casos 1 e 2 o problema seria mal-posto desde sua condição inicial. Porém, existem ainda erros importantes entre os resultados do simulador e os resultados experimentais. Devido à tendência do simulador em ter menos coalescimento de ondas, as frequências dominantes na simulação foram sempre maiores que as observadas no experimento. Respeitou-se a ordem de grandeza das amplificações e das frequências, algo que não ocorreria em uma simulação mal-posta. No caso da ordem de grandeza da amplitude das ondas, o resultado é interessante por respeitar sua ordem de grandeza, pois indica que o simulador ao menos deve ser capaz de prever de maneira aceitável a amplitude de *roll-waves* estáveis.. Lógico, as simulações foram facilitadas no que se pôde ter de qualidade em seus resultados por se ter utilizado como condição de contorno as oscilações de *holdup* aquiritadas na primeira sonda do circuito experimental.

Futuros estudos devem considerar um número maior de experimentos, melhorar as equações de fechamento relacionadas com a rugosidade da interface além de considerar quais mecanismos devem ser adicionados, quando duas *roll waves* se encontram próximas, melhorando assim o processo de coalescimento destas ondas.

‘

7. CONCLUSÕES

Foi feito um estudo sobre *roll-waves* em canais fechados.

Utilizou-se um modelo unidimensional transiente para o escoamento estratificado. Para a resolução deste problema, utilizou-se um método do tipo *Riemann Solver*, que garantiu uma alta resolução dos perfis de filme foi capaz de capturar choques de ondas hiperbólicas.

O método numérico demonstrou ser bastante adequado para a simulação de escoamento multifásico transiente, deve-se fazer novos estudos para se avaliar a aplicabilidade deste método em problemas mais genéricos da indústria de petróleo. Deve-se também avaliar esquemas semi-implícitos para este método para que a limitação de incremento de tempo do critério CFL seja atenuado quando se utiliza um modelo com fluidos compressíveis.

Neste estudo numérico, teve-se um cuidado no tratamento de alguns termos de fechamento que, acredita-se, são influentes na maneira como uma *roll-wave* evolui. Fez-se um estudo sobre a tensão cisalhante na interface devido ao atrito de película e propôs-se um novo modelo para esta tensão cisalhante no caso em que as duas fases se encontram em regime turbulento. Foi também levantado a forma do perfil de velocidade para os casos líquido (turbulento)-gás (turbulento) e líquido (laminar)-gás (turbulento), para o último caso, considerar o perfil de velocidade demonstrou ser de grande relevância. Considerou-se também a perda de carga localizada que pode ocorrer em *roll-waves* de grande amplitude devido à existência de grandes gradientes de *holdup*. Observou-se que estas perdas de carga alteram o processo de evolução e que em alguns casos podem inclusive alterar a forma da *roll-wave*. Observou-se também que é comum, quando se utiliza a hipótese de perfil de pressão hidrostático em uma condição de escoamento estratificado instável ocorrer problemas de hiperbolicidade, não na condição inicial, mas em algum momento da evolução da *roll-wave*. Isto em muitos trabalhos não é percebido pelo fato do método numérico não acusar esta limitação do modelo ao longo da evolução da onda, algo que não

ocorre com o método utilizado aqui. Foi feita uma verificação sobre como se deve atacar este problema da perda de hiperbolicidade para o caso de escoamento estratificado instável. Chegou-se à conclusão que o recurso de utilização de uma massa virtual ad hoc é desaconselhável, pois, a despeito de garantir hiperbolicidade, atua diretamente no fenômeno, não sendo um termo ad hoc transparente para a evolução da onda. Advogou-se que se deve utilizar termos que garantam hiperbolicidade e que de fato tenha algum compromisso com a física do fenômeno. Um destes termos que usualmente é esquecido na modelagem de escoamento estratificado instável é a influência das ondas de curto comprimento na pressão interfacial. Estas ondas podem alterar o perfil de pressão na proximidade da interface devido aos efeitos dinâmicos induzidos pela curvatura destas ondas e pela grande diferença de velocidade entre as fases. Observou-se que na ordem de grandeza em que estas ondas podem atuar elas são capazes de alterar bastante o comportamento de uma *roll-wave* e podem inclusive garantir em muitos casos a hiperbolicidade do modelo. O estudo sobre ondas curtas feito aqui foi apenas um estudo de ordem de grandeza, não foi apresentado um modelo definitivo para estas ondas e para a maneira como elas influenciam a pressão na interface do arranjo estratificado. Uma proposta mais cuidadosa carece de um estudo mais avançado sobre estas ondas curtas e de um número maior de experimentos para se analisar como estas ondas se comportam na interface líquido-gás.

Apesar dos poucos experimentos, propôs-se uma equação de fechamento que leva em conta este efeito da interface rugosa. Comparações preliminares com alguns experimentos indicaram a consistência do modelo, muito embora as equações de fechamento propostas precisem ser melhoradas já que a previsão de coalescimento de roll waves ainda deixa a desejar. Provavelmente, para que se tenha um modelo de coalescimento mais adequado, deva-se melhorar o modelo de perfil de pressão na região do choque da roll wave, onde não só na interface, mas em toda seção transversal do canal, a hipótese de perfil hidrostático de pressão não é válido. Infelizmente, um modelo adequado para representar a evolução de roll waves ainda é um problema em aberto. Neste trabalho, acredita-se, foram feitos alguns avanços na indicação de termos que devem ser adicionados ao two fluid model usual, mas estes termos ainda parecem ser insuficientes para uma representatividade do fenômeno,

pesquisas futuras devem ser feitas para que novos termos sejam adicionados ao two fluid model, garantindo assim uma representação mais exata da evolução de roll waves.

A despeito de todo o trabalho aqui feito indicar que a modelagem de escoamento estratificado instável é ainda um problema em aberto, foi possível fazer alguns testes com experimentos de literatura com *roll-waves* de pequena amplitude, onde a questão da hiperbolicidade não é um limitador. As comparações com os experimentos de literatura indicaram que o modelo e o simulador numérico aqui utilizados são confiáveis nos seus resultados, enquanto não se tem uma condição de amplitude grande o suficiente para que a questão da hiperbolicidade se torne relevante.

‘

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andritsos, N., Hanratty, T., (1987); Influence of Interfacial Waves in Stratified Gas-Liquid Flows, AICHE J., 33, 444-454;

Barnea T., Taitel Y., (1993); Kelvin-Helmholtz Stability Criteria for Stratified Flow: Viscous versus Non-Viscous (Inviscid) Approaches; International Journal of Multiphase Flow, Vol 19, N° 4, pp. 639-649;

Biberg, D., (2007); A Mathematical Model for Two-Phase Stratified Turbulent Duct Flow, Multiphase Science and Technology, Vol 19, N° 1, 1-48;

Bonizzi, M., Issa, R.I., (2003); On The Simulation of Three-Phase Slug Flow in Nearly Horizontal Pipes Using the Multi-Fluid Model; International Journal of Multiphase Flow, Vol. 29, pp. 1719-1747;

Bruno, K., McCready, M., J., (1988); Origin of Roll Waves in Horizontal Gas-Liquid Flows; AICHE Journal, Vol. 34, No. 9, pp 1431-1440;

Crowley C.J., Wallis G.B., Barry J.J., (1992); Validation of an One-Dimensional Wave Model for The Stratified-to-Slug Flow Regime Transition, With Consequences For Wave Growth and Slug Frequency; International Journal of Multiphase Flow, Vol 18, N° 2, pp. 249-271;

DeLeebeeck, A., Nydal, O., J., (2010); Simulation of Large Amplitude Waves in a Slug Tracking Scheme Compared to Roll Wave Experiments at High Pressure, International Journal of Multiphase Flow, 36, 40-50;

Dressler R. F., (1949); Mathematical Solution of the Problem of Roll-Waves in inclined Open Channels, Comm. Pure Appl. Math. 2, 149-194;

Evje, S., Flåtten, T., (2003), Hybrid Flux-Splitting Schemes foa a Common Two-Fluid Model, Vol. 192, pp. 175-210;

Fonseca, Roberto,J., (2009); Medição do campo instantâneo de velocidade do liquido no escoamento bifásico intermitente em tubos horizontais e inclinados; Mastering Thesis, PUC-Rio;

Gaspari, E.F., Bannwart, A.C., (2012); Um estudo sobre a influência do comprimento de onda na evolução de roll-waves em escoamento estratificado, 3º EBECEM;

Holmås, H., (2010); Numerical simulation of transient roll-waves in two-phase pipe flow; Chemical Engineering Science, Vol 65, pp. 1811-1825;

Issa, R.,I., Kempf, M.,H.,W., (2003), Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two-fluid model; International Journal of Multiphase Flow, Vol 29, pp. 69-95;

Johnson, G.W., Bertelsen, A.F., Nossen, J., (2009); A Mechanistic Model for Roll Waves for Two-Phase Pipe Flow; AIChE Journal, Vol. 55, No 11, pp 2788- 2795;

Kundu, P., K., Cohen, I., M., (2002); Fluid Mechanics; Elsevier Science, Segunda edição;

Lamb, H., (1932), Hydrodynamics, Cambridge University Press, Sexta edição;

Leveque, R., (1986), Intermediate Boundary Conditions for Time-Split Methods Applied to Hyperbolic Partial Differential Equations; Mathematics of Computation, Vol 47, No 175, pp 37-54;

Leveque, R., J., (2002); Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge Texts in Applied Mathematics;

Lighthill, J. (2005); Waves in Fluids, Cambridge Mathematical Library;

Lin, P.Y., Hanratty, T.J. (1986), Prediction of The Initiation of Slugs With Linear Stability Theory, International Journal of Multiphase Flow, Vol. 22, No. 1, pp. 79-98;

Mata, C. Pereyra E., Trallero, J.L., Joseph D.D., (2002); Stability of Stratified Gas-Liquid Flows; International Journal of Multiphase Flow, Vol 28, pp. 1249-1268;

Miya, M., Woodmansee D.E., Hanratty, T.J., (1971); A Model for Roll Waves in Gas-Liquid Flow; Chemical Engineering Science, Vol 26, pp. 1915-1931;

Soleimani, A., Hanratty, T.J., 2003, Critical Liquid Flows for the Transition to Intermittent Flow in Small Angle Upflows; International Journal of Multiphase Flow, Vol. 29, pp. 51-67;

Soria, M., F., 2009, Modelagem Tridimensional de Golfada Unitária em Tubulação Horizontal com Modelo VOF; Mastering Thesis, PUC-Rio;

Stuhmiller, J., H., (1977), The Influence of Interfacial Pressure Forces on the Character of Two-Phase Flow Model Equations; International Journal of Multiphase Flow, Vol 3, pp. 551-560;

Taitel, Y., Dukler, A.E., (1976); A Model for Prediction Flow Regime Transitions in Horizontal and Near Horizontal Gas-Liquid Flow; International Journal of Multiphase Flow, Vol 22, N° 1, pp. 47-55;

Toumi, I., Kumbaro, A., (1996), AnAproximate Linearized Riemann Solver foa a Two-Fluid Model, Journal of Computational Physics, Vol. 124, pp. 286-300;

Wallis, G.B., (1969); One-Dimensional Two-Phase Flow; McGraw-Hill.

White, F., M., (2005), Viscous Fluid Flow; McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, Terceira Edição;

White, F., M., (2006), Fluid Mechanics; McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, Sexta Edição;

Witham, G.B., (1999); Linear and Non Linear waves; Interscience;

Yu, J., Kervorkian, J., (1992); Nonlinear Evolution of Small Disturbances into Roll Waves in an Inclined Open Channel, J. Fluid Mech., Vol 243, 575-594.

Apêndice A - Modelagem numérica para estudo de roll waves em canais fechados

7.1. Sobre as equações para arranjo estratificado transiente para fases compressíveis

Para um modelo unidimensional de escoamento estratificado horizontal transiente, sem considerar os termos fontes, as equações (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) seriam modificadas para:

$$\frac{\partial \rho_g \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \alpha u_g}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \rho_l (1-\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1-\alpha) u_l}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \rho_g \alpha u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \alpha u_g^2}{\partial x} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial g \int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y) S_i}{A_t} dy}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \rho_l (1-\alpha) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1-\alpha) u_l^2}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial g \int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i}{A_t} dy}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Será usada a seguinte convenção $Hg = \int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y) S_i}{A_t} dy$ e $Hl = \int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i}{A_t} dy$.

Inicialmente se considerará o modelo com compressibilidade de cada fase. Interessamos os processos de transientes mais relacionados com ondas de gravidade. Já foi observado anteriormente que a compressibilidade das fases influenciam pouco as velocidades de propagação de ondas de gravidade em canais fechados, quando as massas específicas são bem distintas em grandeza e a fração de vazio não é muito pequena. Serão feitas simulações considerando e desconsiderando a compressibilidade da fase gasosa demonstrando que de

fato esta observação é correta. Desta comparação vem a necessidade de se construir dois modelos numéricos considerando e não considerando a compressibilidade de cada fase.

Somando (A.3) e (A.4) para se obter o balanço da quantidade de movimento da mistura:

$$\frac{\partial \rho_g \alpha u_g + \rho_l (1-\alpha) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \alpha u_g^2 + \rho_l (1-\alpha) u_l^2}{\partial x} + \frac{\partial g \left(\int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y) S_i}{A_t} dy + \int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i}{A_t} dy \right)}{\partial x} = 0 \quad (A.5)$$

Trabalhar-se-á com o conjunto de equações (A.1), (A.2), (A.5) e (A.4). Existe um problema neste conjunto de equações que não é observado por exemplo em um problema monofásico. Devido ao termo de derivada de pressão na Equação (A.4), o sistema não é conservativo, o que representa uma limitação em um modelo que se deseja adequado para capturar corretamente choques. Acredita-se que esta limitação no sistema de equações não leva um erro preocupante na captura de choques, porém deve-se ficar atento a isto.

7.2. Sobre as variáveis utilizadas no modelo

Para se tratar o problema de Riemman aproximado em cada célula do espaço discretizado, as variáveis primitivas não são as mais adequadas, dificultando todo o algebrismo que virá a ser feito no modelo numérico. Deve-se buscar um conjunto de variáveis mais adequado para o problema de Riemman aproximado. Definindo um novo conjunto de variáveis:

$$\begin{aligned} u_1 &= \rho_g \alpha \\ u_2 &= \rho_l (1-\alpha) \\ u_3 &= \rho_g \alpha u_g + \rho_l (1-\alpha) u_l \\ u_4 &= \rho_l (1-\alpha) u_l \end{aligned} \quad (A.6)$$

Aplicando (A.6) em (A.1), (A.2), (A.5) e (A.4) e trazendo o sistema para a sua forma não-conservativa:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_3 - u_4}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_4}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial p}{\partial u_1} - u_g^2 + g \frac{\partial \left[\int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y) S_i}{A_t} dy + \int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i}{A_t} dy \right]}{\partial u_1} \right\} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial p}{\partial u_2} - u_l^2 + g \frac{\partial \left[\int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y) S_i}{A_t} dy + \int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i}{A_t} dy \right]}{\partial u_2} \right\} \frac{\partial u_2}{\partial x} + , \quad (\text{A.9})$$

$$2u_g \frac{\partial u_3}{\partial x} + 2(u_l - u_g) \frac{\partial u_4}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial t} + \left\{ (1-\alpha) \frac{\partial p}{\partial u_1} + g \frac{\partial \left[\int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i}{A_t} dy \right]}{\partial u_1} \right\} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left\{ (1-\alpha) \frac{\partial p}{\partial u_2} - u_l^2 + g \frac{\partial \left[\int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i}{A_t} dy \right]}{\partial u_2} \right\} \frac{\partial u_2}{\partial x} + 2u_l \frac{\partial u_4}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.10})$$

7.3. Sobre as derivadas dos termos de pressão e hidrostática

Antes de nos concentrarmos na obtenção da Matriz de Roe - ver Leveque (2002) ; Toumi & Kumbaro (1996) - com a qual trataremos o problema de Riemman aproximado, devemos explicitar as derivadas da pressão e das integrais em relação às variáveis u_1 e u_2 que aparecem nas equações (A.9) e (A.10) em termos das variáveis α e p .

Primeiro deve-se notar que quando u_2 é constante tem-se que $(1-\alpha)d\rho_l - \rho_l d\alpha = 0$,

logo $d\rho_l = \frac{\rho_l}{1-\alpha} d\alpha$, o que implica em

$$dp = c_l^2 \frac{\rho_l}{1-\alpha} d\alpha. \quad (\text{A.11})$$

Já quando u_1 é constante tem-se que $\alpha d\rho_g + \rho_g d\alpha = 0$, logo $d\rho_g = -\frac{\rho_g}{\alpha} d\alpha$, o que

implica em

$$dp = -c_g^2 \frac{\rho_g}{\alpha} d\alpha. \quad (\text{A.12})$$

(A.11) e (A.12) serão necessárias na análise das derivadas de pressão e das integrais apresentadas em (A.9) e (A.10).

Para as derivadas da integral referente à hidrostática na fase líquida (existentes nas equações (A.9) e (A.10)), tem-se

$$\frac{\partial \left[\int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i}{A_t} dy \right]}{\partial u_1} = \int_0^h \left[\frac{(h-y) S_i}{A_t} \frac{\partial \rho_l}{\partial u_1} + \frac{\rho_l S_i}{A_t} \frac{\partial h}{\partial u_1} \right] dy, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial \left[\int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i}{A_t} dy \right]}{\partial u_2} = \int_0^h \left[\frac{(h-y) S_i}{A_t} \frac{\partial \rho_l}{\partial u_2} + \frac{\rho_l S_i}{A_t} \frac{\partial h}{\partial u_2} \right] dy. \quad (\text{A.14})$$

Já para as derivadas da integral referente à hidrostática na fase gasosa (existente na Equação (A.9)), tem-se

$$\frac{\partial \left[\int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y) S_i}{A_t} dy \right]}{\partial u_1} = \int_h^{h_{MAX}} \left[\frac{(h-y) S_i}{A_t} \frac{\partial \rho_g}{\partial u_1} + \frac{\rho_g S_i}{A_t} \frac{\partial h}{\partial u_1} \right] dy, \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \left[\int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y) S_i}{A_t} dy \right]}{\partial u_2} = \int_h^{h_{MAX}} \left[\frac{(h-y) S_i}{A_t} \frac{\partial \rho_g}{\partial u_2} + \frac{\rho_g S_i}{A_t} \frac{\partial h}{\partial u_2} \right] dy. \quad (\text{A.16})$$

Deve-se portanto explicitar as derivadas parciais $\frac{\partial p}{\partial u_1}$, $\frac{\partial p}{\partial u_2}$, $\frac{\partial \rho_l}{\partial u_1}$, $\frac{\partial h}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \rho_l}{\partial u_2}$,

$\frac{\partial h}{\partial u_2}$, $\frac{\partial \rho_g}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial \rho_g}{\partial u_2}$ em termos das variáveis α e p .

- Obtenção de $\frac{\partial p}{\partial u_1}$ e de $\frac{\partial \rho_l}{\partial u_1}$.

Considerando que

$$d\rho_l = \frac{\partial \rho_l}{\partial p} dp, \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial u_1} = \frac{\partial \rho_l}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial u_1} = c_l^2 \frac{\partial p}{\partial u_1}. \quad (\text{A.18})$$

De (A.6)

$$\frac{\partial u_1}{\partial p} = \frac{\partial u_1}{\partial \rho_g} + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial p} = \frac{\alpha}{c_g^2} + \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1-\alpha}{c_l^2}. \quad (\text{A.19})$$

Logo

$$\frac{\partial p}{\partial u_1} = \frac{1}{\frac{\alpha}{c_g^2} + \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1-\alpha}{c_l^2}}. \quad (\text{A.20})$$

Com (A.20) e (A.18)

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial u_1} = \frac{1}{\alpha \frac{c_l^2}{c_g^2} + (1-\alpha) \frac{\rho_g}{\rho_l}}. \quad (\text{A.21})$$

- Obtenção de $\frac{\partial h}{\partial u_1}$.

Considerando que

$$dh = \frac{\partial h}{\partial \alpha} d\alpha, \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\partial h}{\partial u_1} = \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}. \quad (\text{A.23})$$

Onde

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = -\frac{A_t}{s_i(\alpha)}. \quad (\text{A.24})$$

Aplicando (A.11) em (A.23)

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial \alpha} = \rho_g + \frac{\alpha}{c_g^2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \rho_g + \rho_l \frac{c_l^2}{c_g^2} \frac{\alpha}{1-\alpha}. \quad (\text{A.25})$$

Logo

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u_1} = \frac{1}{\rho_g + \rho_l \frac{c_l^2}{c_g^2} \frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (\text{A.26})$$

De (A.23)

$$\frac{\partial h}{\partial u_1} = -\frac{A_t}{S_i(\alpha)} \frac{1}{\rho_g + \rho_l \frac{c_l^2}{c_g^2} \frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (\text{A.27})$$

- Obtenção de $\frac{\partial p}{\partial u_2}$ e de $\frac{\partial \rho_l}{\partial u_2}$.

Considerando que

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial u_2} = \frac{\partial \rho_l}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial u_2}, \quad (\text{A.28})$$

Da definição de u_2 e da Equação (A.12)

$$\frac{\partial u_2}{\partial p} = \frac{\partial u_2}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial p} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial p} = \frac{1-\alpha}{c_l^2} + \frac{\rho_l}{\rho_g} \frac{\alpha}{c_g^2}. \quad (\text{A.29})$$

Logo

$$\frac{\partial p}{\partial u_2} = \frac{1}{\frac{1-\alpha}{c_l^2} + \frac{\rho_l}{\rho_g} \frac{\alpha}{c_g^2}}, \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial u_2} = \frac{1}{1 - \alpha + \frac{\rho_l}{\rho_g} \frac{c_l^2}{c_g^2} \alpha}. \quad (\text{A.31})$$

- Obtenção de $\frac{\partial h}{\partial u_2}$.

$$\frac{\partial h}{\partial u_2} = \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \quad (\text{A.32})$$

Da definição de u_2 e da Equação (A.12)

$$\frac{\partial u_2}{\partial \alpha} = \rho_l \frac{\partial(1-\alpha)}{\partial \alpha} + (1-\alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial \alpha} = -\rho_l + (1-\alpha) \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} = - \left[\rho_l + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{c_g^2}{c_l^2} \rho_g \right]. \quad (\text{A.33})$$

Logo

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u_2} = - \frac{1}{\rho_l + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{c_g^2}{c_l^2} \rho_g}, \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\partial h}{\partial u_2} = \frac{A_t}{s_i(\alpha)} \frac{1}{\rho_l + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{c_g^2}{c_l^2} \rho_g}. \quad (\text{A.35})$$

- Obtenção de $\frac{\partial \rho_g}{\partial u_1}$.

Considerando que

$$d\rho_g = \frac{\partial \rho_g}{\partial p} dp, \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial u_1} = \frac{\partial \rho_g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial u_1}. \quad (\text{A.37})$$

Da definição de u_1 e da Equação (A.11)

$$\frac{\partial u_1}{\partial p} = \frac{\partial u_1}{\partial \rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial p} + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial p} = \frac{\alpha}{c_g^2} + \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1-\alpha}{c_l^2}, \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\partial p}{\partial u_1} = \frac{1}{\frac{\alpha}{c_g^2} + \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1-\alpha}{c_l^2}}, \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial u_1} = \frac{1}{\alpha + \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{c_g^2}{c_l^2} (1-\alpha)}. \quad (\text{A.40})$$

- Obtenção de $\frac{\partial \rho_g}{\partial u_2}$.

Considerando que

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial u_2} = \frac{\partial \rho_g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial u_2}. \quad (\text{A.41})$$

Da definição de u_2 e da Equação (A.12)

$$\frac{\partial u_2}{\partial p} = \frac{\partial u_2}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial p} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial p} = \frac{1-\alpha}{c_l^2} + \frac{\rho_l}{\rho_g} \frac{\alpha}{c_g^2}, \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\partial p}{\partial u_2} = \frac{1}{\frac{1-\alpha}{c_l^2} + \frac{\rho_l}{\rho_g} \frac{\alpha}{c_g^2}}, \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial u_2} = \frac{1}{\frac{c_g^2}{c_l^2} (1-\alpha) + \frac{\rho_l}{\rho_g} \alpha}. \quad (\text{A.44})$$

7.4. Explicitando as derivadas de hidrostática

Com as derivadas $\frac{\partial p}{\partial u_1}$, $\frac{\partial p}{\partial u_2}$, $\frac{\partial \rho_l}{\partial u_1}$, $\frac{\partial h}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \rho_l}{\partial u_2}$, $\frac{\partial h}{\partial u_2}$, $\frac{\partial \rho_g}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial \rho_g}{\partial u_2}$ explicitadas em termos das variáveis α e p , podemos expressar os termos integrais de (9.9) e (9.10) de uma maneira mais adequada.

De (A.13), (A.21) e (A.27)

$$\begin{aligned}
Hl_{u1} &= \frac{\partial \left[\int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i}{A_t} dy \right]}{\partial u_1} = \\
& \int_0^h \left[\frac{(h-y) S_i(y)}{A_t} \frac{1}{\alpha \frac{c_l^2}{c_g^2} + (1-\alpha) \frac{\rho_g}{\rho_l}} - \frac{\rho_l S_i(y)}{s_i(\alpha)} \frac{1}{\rho_g + \rho_l \frac{c_l^2}{c_g^2} \frac{\alpha}{1-\alpha}} \right] dy .
\end{aligned} \tag{A.45}$$

De (A.14), (A.31) e (A.35)

$$\begin{aligned}
Hl_{u2} &= \frac{\partial \left[\int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i}{A_t} dy \right]}{\partial u_2} = \\
& \int_0^h \left[\frac{(h-y) S_i(y)}{A_t} \frac{1}{1-\alpha + \frac{\rho_l}{\rho_g} \frac{c_l^2}{c_g^2} \alpha} + \frac{\rho_l S_i(y)}{s_i(\alpha)} \frac{1}{\rho_l + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{c_g^2}{c_l^2} \rho_g} \right] dy
\end{aligned} \tag{A.46}$$

De (A.15), (A.40) e (A.27)

$$\begin{aligned}
Hg_{u1} &= \frac{\partial \left[\int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y) S_i}{A_t} dy \right]}{\partial u_1} = \\
& \int_h^{h_{MAX}} \left[\frac{(h-y) S_i(y)}{A_t} \frac{1}{\alpha + \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{c_g^2}{c_l^2} (1-\alpha)} - \frac{\rho_g S_i(y)}{s_i(\alpha)} \frac{1}{\rho_g + \rho_l \frac{c_l^2}{c_g^2} \frac{\alpha}{1-\alpha}} \right] dy
\end{aligned} \tag{A.47}$$

De (A.16), (A.44) e (A.35)

$$Hg_{u2} = \frac{\partial \left[\int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y) S_i}{A_t} dy \right]}{\partial u_2} = \int_h^{h_{MAX}} \left[\frac{(h-y) S_i(y)}{A_t} \frac{1}{\frac{c_g^2}{c_l^2} (1-\alpha) + \frac{\rho_l}{\rho_g} \alpha} + \frac{\rho_g S_i(y)}{s_i(\alpha)} \frac{1}{\rho_l + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{c_g^2}{c_l^2} \rho_g} \right] dy \quad (A.48)$$

7.5. Determinação da Matriz de Roe

Como a resolução de um problema de Riemman de maneira exata para cada fronteira de célula seria um trabalho numérico que despenderia um grande esforço computacional, busca-se fazer uma resolução aproximada deste problema. Lida-se com um sistema aproximado em que se admite um comportamento linear do processo de evolução em um pequeno intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$. Para um problema linearizado a formulação fica similar à da forma não conservativa, porém características importantes da forma conservativa são garantidas nesta formulação linearizada.

A forma não conservativa expressa matricialmente tomaria a seguinte forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (A.49)$$

Onde

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \quad (A.50)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial p}{\partial u_1} - u_g^2 + g(Hg_{u1} + Hl_{u1}) & \frac{\partial p}{\partial u_2} - u_l^2 + g(Hg_{u2} + Hl_{u2}) & 2u_g & 2(u_l - u_g) \\ (1-\alpha) \frac{\partial p}{\partial u_1} + gHl_{u1} & (1-\alpha) \frac{\partial p}{\partial u_2} - u_l^2 + gHl_{u2} & 0 & 2u_l \end{bmatrix}. \quad (A.51)$$

Os autovalores da matriz A fornecem as velocidades características do fenômeno. Vale comentar que neste sistema não há a garantia de que o sistema seja sempre bem-posto (características reais). Em certas situações, de fato, o sistema se torna mal-posto. Nas simulações de roll-waves verificou-se que mesmo quando o sistema se iniciava bem-posto, ao longo da evolução, quando as roll-waves atingiam grandes amplitudes, era comum as características se tornarem complexas.

Caso o sistema de equações fosse conservativo, poderia ser representado pela seguinte forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.52})$$

Onde A é dado por

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.54})$$

$$P_1 = u_3 - u_4, \quad (\text{A.55})$$

$$P_2 = u_4, \quad (\text{A.56})$$

$$P_3 = \frac{(u_4 - u_3)^2}{u_1} + \frac{u_3^2}{u_2} + p + g(Hl + Hg), \quad (\text{A.57})$$

$$P_4 = \frac{u_3^2}{u_2} + f(\alpha, p) + gHl. \quad (\text{A.58})$$

Os fluxos são importantes para o acompanhamento de ondas de choque e ondas de rarefação. Por exemplo, a velocidade de propagação de um choque é definido pela condição Rankine-Hugoniot - ver Leveque (2002); Witham (1999) - que depende da dos fluxos envolvidos nas leis de conservação.

$$s = \frac{P|_R - P|_L}{u|_R - u|_L}. \quad (\text{A.59})$$

A Equação (A.59) representa a condição de salto de um choque, s é a velocidade de propagação do choque, o índice R refere-se às condições à direita do choque e L refere-se às condições à esquerda do choque.

Quando se trabalha numericamente com a formulação não conservativa, não se tem garantido o acompanhamento correto do choque e a obtenção correta da velocidade de propagação deste, pois, como visto em (A.59), esta velocidade depende diretamente dos fluxos da forma conservativa. O processo de linearização do problema de Riemman busca aliar a maior simplicidade da forma não conservativa com a garantia da captura correta do choque fornecido pela forma conservativa. A sua formulação seria dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + R|_t \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.60})$$

Sendo que $R|_t$ é uma matriz especial, chamada matriz de Roe, que é reavaliada a cada novo patamar de tempo. Esta matriz tem por característica aliar a simplicidade de um problema linearizado com uma captura adequada de choque. Na verdade esta matriz funciona como uma matriz média entre a forma não conservativa para o estado à direita e a forma não conservativa para o estado à esquerda, a principal característica desta matriz é que seus autovalores devem satisfazer a seguinte condição - ver Leveque (2002); Toumi & Kumbaro (1996)

$$\lambda_R(u_R - u_L) = A|_R - A|_L. \quad (\text{A.61})$$

(A.61) garantiria a correta captura do choque.

Neste tópico será apresentado a matriz de Roe para as equações (A.1), (A.2), (A.5) e (A.4).

Comparando as equações (A.1), (A.2), (A.5) e (A.4) com as equações (A.55), (A.56), (A.57) e (A.58), existe o problema de que em (A.4) não se tem uma função do tipo $f(\alpha, p)$

como em (A.58), tem-se apenas a expressão $(1 - \alpha) \frac{\partial p}{\partial x}$. Isto torna o sistema de equações

para um modelo de dois fluidos utilizado aqui um sistema não conservativo. Em geral, para satisfazer a condição de choque da melhor maneira possível, existem algumas propostas de

tratamento do termo $(1 - \alpha)$ que multiplica $\frac{\partial p}{\partial x}$. Uma das propostas - ver Toumi & Kumbaro

(1996) - é trabalhar com uma média harmônica dos *holdups* a direita e a esquerda do choque. Já Evje & Flatten (2003) argumentam ser mais adequado trabalhar com uma média aritmética dos *holdups* a direita e a esquerda do choque. Estas duas opções foram testadas nas simulações feitas neste trabalho e os resultados não apresentaram diferenças notáveis.

A obtenção da matriz de Roe seguirá o procedimento apresentado por Leveque ou Toumi & Kumbaro. Para tanto, será necessário definir um novo conjunto de variáveis

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha \rho_g} \\ \sqrt{(1-\alpha) \rho_l} \\ \sqrt{\alpha \rho_g} u_g \\ \sqrt{(1-\alpha) \rho_l} u_l \end{bmatrix}. \quad (\text{A.62})$$

O procedimento de média é feito a partir de um caminho entre o estado à direita e à esquerda definido por

$$\Phi(z, u_L, u_R) = \varphi(w_L + z(w_R - w_L)). \quad (\text{A.63})$$

Onde $\varphi(z)$ é uma função tal que $\varphi(w_L) = u_L$ e $\varphi(w_R) = u_R$ e z varia de 0 a 1.

A matriz de Roe para este problema é dada por

$$R = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\frac{\int_0^1 2w_1 \left(\frac{\partial p}{\partial u_1} + \frac{\partial Hl}{\partial u_1} + \frac{\partial Hg}{\partial u_1} \right) dz}{w_1|_L + w_1|_R} - \left(\frac{w_3|_L + w_3|_R}{w_1|_L + w_1|_R} \right)^2 & \frac{\int_0^1 2w_2 \left(\frac{\partial p}{\partial u_2} + \frac{\partial Hl}{\partial u_2} + \frac{\partial Hg}{\partial u_2} \right) dz}{w_2|_L + w_2|_R} - \left(\frac{w_4|_L + w_4|_R}{w_2|_L + w_2|_R} \right)^2 & 2 \frac{w_3|_L + w_3|_R}{w_1|_L + w_1|_R} & 2 \left(\frac{w_4|_L + w_4|_R}{w_2|_L + w_2|_R} - \frac{w_3|_L + w_3|_R}{w_1|_L + w_1|_R} \right) \\
\frac{\int_0^1 2w_1 \left((1-\alpha) \frac{\partial p}{\partial u_1} + \frac{\partial Hl}{\partial u_1} \right) dz}{w_1|_L + w_1|_R} & \frac{\int_0^1 2w_2 \left((1-\alpha) \frac{\partial p}{\partial u_2} + \frac{\partial Hl}{\partial u_2} \right) dz}{w_2|_L + w_2|_R} - \left(\frac{w_4|_L + w_4|_R}{w_2|_L + w_2|_R} \right)^2 & 0 & 2 \frac{w_4|_L + w_4|_R}{w_2|_L + w_2|_R}
\end{bmatrix} \quad (\text{A.64})$$

O método de Godunov determina as oscilações que alteram as células à esquerda e a direita de uma fronteira a partir dos autovalores e autovetores da matriz de Roe. O problema se torna relativamente simples, diagonaliza-se a matriz e trabalha-se com cada um dos seus modos de propagação como em um esquema “upstream”. Isto confere ao método uma precisão de primeira ordem, o que não é muito adequado quando se deseja uma boa resolução na captura dos choques. Para o caso de Godunov, teria-se a seguinte metodologia (ver *Leveque*, 2002)

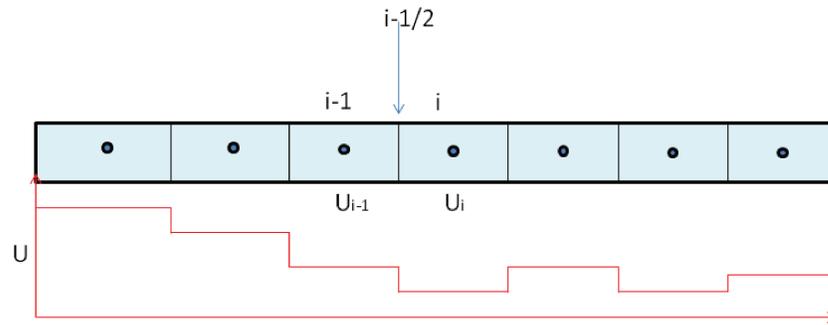


Figura A.1 Domínio discretizado

Definindo

$$u_i - u_{i-1} = \sum_{p=1}^4 \alpha_{i-1/2}^p r_{i-1/2}^p, \quad (\text{A.64})$$

$$W_{i-1/2}^p = \alpha_{i-1/2}^p r_{i-1/2}^p. \quad (\text{A.65})$$

Onde $r_{i-1/2}^p$ é o p-ésimo autovetor da matriz de Roe na fronteira $i-1/2$. W é a oscilação que é transportada entre as células. Os estados em cada célula são atualizados por

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\sum_{p=1}^4 \left(\lambda_{i-1/2}^p \right)^+ W_{i-1/2}^p + \sum_{p=1}^4 \left(\lambda_{i+1/2}^p \right)^+ W_{i+1/2}^p \right]. \quad (\text{A.66})$$

Onde $\left(\lambda_{i-1/2}^p \right)^+$ são os autovalores da matriz de Roe, definidos por $\max\left(\lambda_{i-1/2}^p, 0\right)$ e $\left(\lambda_{i-1/2}^p \right)^-$ são os autovalores da matriz de Roe definidos por $\min\left(\lambda_{i-1/2}^p, 0\right)$.

Para um método de segunda ordem, deve-se utilizar a seguinte correção, ver *Leveque* (2002)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\sum_{p=1}^4 \left(\lambda_{i-1/2}^p \right)^+ W_{i-1/2}^p + \sum_{p=1}^4 \left(\lambda_{i+1/2}^p \right)^+ W_{i+1/2}^p \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\tilde{F}_{i+1/2} - \tilde{F}_{i-1/2} \right) \quad (\text{A.67})$$

Onde

$$\tilde{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^4 \left| \lambda_{i-1/2}^p \right| \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left| \lambda_{i-1/2}^p \right| \right) \tilde{W}_{i-1/2}^p. \quad (\text{A.68})$$

$\tilde{W}_{i-1/2}^p$ é a limitação da oscilação necessária para garantir que o método não apresente dispersão numérica. O esquema limitador de fluxo utilizado foi o de van Leer, (ver *Leveque, 2002*). Além disto, uma correção de rarefação foi aplicada.

O limitador de fluxo é definido por $\tilde{W}_{i-1/2}^p = \frac{\Theta + |\Theta|}{1 + |\Theta|} W_{i-1/2}^p$, onde Θ é a razão da flutuação a esquerda da fronteira $i-1/2$ (calculada com o auto-vetor da fronteira $i-1/2$) pela flutuação na fronteira $i-1/2$, quando $\lambda_{i-1/2}^p < 0$, ou θ é a razão da flutuação a direita da fronteira $i-1/2$ (calculada com o auto-vetor da fronteira $i-1/2$) pela flutuação na fronteira $i-1/2$, quando $\lambda_{i-1/2}^p > 0$.

As simulações de teste que foram feitas com este modelo mais completo, considerando compressibilidade, trabalharam sempre com um canal retangular, não foi considerada a compressibilidade da fase líquida, apenas a compressibilidade da fase gasosa. Foi observada uma grande diferença na magnitude dos autovalores obtidos na matriz de Roe. 1 par tinha valores da ordem de grandeza de 100, autovalores mais relacionados com a propagação de ondas sônicas, o outro par tinha autovalores da ordem de grande de 1, autovalores mais relacionados com a propagação de ondas de gravidade. Esta disparidade de magnitudes levava sempre a oscilações espúrias. Como não era de interesse do trabalho capturar choques de natureza sônica com grande resolução, optou-se por só aplicar a correção de segunda ordem nas flutuações mais relacionadas com ondas de gravidade. Desta forma, as oscilações espúrias foram eliminadas.

7.6. Condições de contorno para o modelo sem termo fonte (homogêneo)

Um ponto importante do modelo numérico é como se dá o tratamento das condições de contorno. A maneira mais adequada para um problema hiperbólico com o método aqui apresentado é utilizar o artifício de “ghost cells” - ver Leveque (2002). Esta foi a abordagem escolhida neste trabalho.

Para o problema de *roll-waves*, considerando a compressibilidade do gás, as condições de contorno foram definidas por

- *Holdup* no início da tubulação definido por uma função no tempo;
- Vazão mássica de gás no início da tubulação definida por uma função no tempo;
- Vazão mássica de líquido no início da tubulação definida por uma função no tempo;
- Massa específica do gás no final da tubulação definida por uma função no tempo.

Em todas as células, inclusive as relacionadas com as condições de contorno, para o problema apresentado até agora, existirão quatro modos de propagação das flutuações. Dois mais relacionados com as ondas de gravidade (o que implica em características mais lentas) e dois mais relacionados com ondas sônicas (o que implica em características mais rápidas). Nas células de contorno deve-se determinar a amplitude de cada modo de flutuação a partir das condições de contorno estabelecidas. Os modos de oscilação são definidos por cada autovetor da matriz de Roe em uma interface. Considere que cada modo seja definido da seguinte forma:

- Autovetor $W_{i-1/2}^1$: Autovetor da característica mais lenta da flutuação mais relacionada com a propagação de ondas de gravidades;
- Autovetor $W_{i-1/2}^2$: Autovetor da característica mais rápida da flutuação mais relacionada com a propagação de ondas de gravidades;
- Autovetor $W_{i-1/2}^3$: Autovetor da característica mais lenta da flutuação mais relacionada com a propagação de ondas sônicas;

- Autovetor $W_{i-1/2}^4$: Autovetor da característica mais rápida da flutuação mais relacionada com a propagação de ondas sônica;

No caso do contorno no início do canal, célula $i=1$, temos 3 condições definidas e 4 modos de flutuação. Deve-se definir estes 4 modos a partir destas 3 condições, ou seja, existe uma variável que não se tem no contorno, esta variável é a massa específica do gás. Neste trabalho admitiu-se simplesmente que um dos modos era não reflexivo, ver Leveque (2002). Como o escoamento do gás nunca é supersônico, o terceiro modo citado anteriormente se propaga em direção ao início da tubulação. Em outras palavras, não propaga a sua flutuação no sentido do escoamento dos fluidos. Este é então o modo preferencial para no contorno no início da tubulação ser tratado como não reflexivo. Em outras palavras, para que ele não seja não reflexivo, o seu modo de flutuação deve ter a mesma amplitude do modo de flutuação da interface logo a sua frente. A Figura (A.2) exemplifica uma condição não reflexiva.

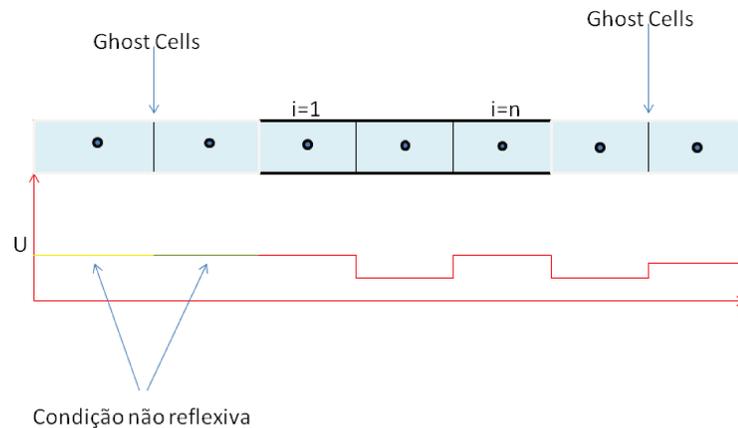


Figura A.2 Exemplo de condição não reflexiva

Com esta condição não reflexiva e as condições de contorno, pode-se determinar a amplitude de cada flutuação na interface de condição contorno. O equacionamento para este caso específico seria como apresentado a seguir:

$$\left[\begin{array}{c} \alpha|_{1/2} \rho_g|_{1/2} \\ (1-\alpha|_{1/2}) \rho_l|_{1/2} \\ \alpha|_{1/2} \rho_g|_{1/2} u_g|_{1/2} + (1-\alpha|_{1/2}) \rho_l|_{1/2} u_l|_{1/2} \\ (1-\alpha|_{1/2}) \rho_l|_{1/2} u_l|_{1/2} \end{array} \right] = , \quad (\text{A.69})$$

$$\beta_{1/2}^1 [W_{1/2}^1] + \beta_{1/2}^2 [W_{1/2}^2] + \beta_{1/2}^3 [W_{1/2}^3] + \beta_{1/2}^4 [W_{1/2}^4]$$

$$\beta_{1/2}^3 = \beta_{3/2}^3. \quad (\text{A.70})$$

Para se resolver a condição de contorno, deve-se determinar os valores de $\beta_{1/2}^1, \beta_{1/2}^2, \beta_{1/2}^4$, o que pode ser obtido com (A.69) e (A.70).

Com todas as amplitudes de flutuação resolvidas na fronteira de contorno, pode-se determinar o valor da massa específica do gás. Como estes valores são sempre constantes no problema que se deseja estudar – o processo transiente nas rol-waves se dá pela desestabilização natural do sistema, não por alguma alteração das condições de contorno – os valores $\alpha|_{1/2} \rho_g|_{1/2}$, $(1-\alpha|_{1/2}) \rho_l|_{1/2}$, $\alpha|_{1/2} \rho_g|_{1/2} u_g|_{1/2}$ e $(1-\alpha|_{1/2}) \rho_l|_{1/2} u_l|_{1/2}$ podem ser utilizados diretamente como valores médios da *ghost-cells* sem nenhum tratamento adicional.

Para a condição de contorno na extremidade final do canal (do ponto de vista do sentido do escoamento) o procedimento é similar. Lembrando que neste caso, a única variável determinada é a massa específica de gás. Três modos de flutuação serão não reflexivos, modos 1, 2 e 4.

7.7. Termos fontes e método de passos fracionários

Até o momento só se considerou a resolução das equações sem os termos fontes. No problema aqui abordado, dois termos fontes serão considerados na equação de quantidade de movimento da mistura, Equação (A.5), e na equação de quantidade de movimento da fase líquida, Equação (A.4). Com os termos fontes, as equações originais são modificadas:

$$\frac{\partial \rho_g \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \alpha u_g}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.71})$$

$$\frac{\partial \rho_l (1-\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1-\alpha) u_l}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.72})$$

$$\frac{\partial \rho_g \alpha u_g + \rho_l (1-\alpha) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g \alpha u_g^2 + \rho_l (1-\alpha) u_l^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial g \left(\int_h^{h_{MAX}} \frac{\rho_g (h-y) S_i}{A_t} dy + \int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i}{A_t} dy \right)}{\partial x} = , \quad (\text{A.73})$$

$$\frac{-\tau_{wg} S_{wg} - \tau_{wl} S_{wl}}{A_t} - \alpha \sigma \frac{\partial \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]}{\partial x} + \frac{\partial \rho_l (1-\alpha) u_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l (1-\alpha) u_l^2}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial g \int_0^h \frac{\rho_l (h-y) S_i}{A_t} dy}{\partial x} = \frac{\tau_i S_i - \tau_l S_{wl}}{A_t}. \quad (\text{A.74})$$

Onde $\sigma \frac{\partial \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]}{\partial x}$ é o termo referente à tensão superficial.

Neste trabalho, a solução com termos fontes foi resolvida utilizando o método de passos fracionários, ver Leveque (2002). O método consiste em resolver de maneira separada o problema homogêneo, já discutido anteriormente e o problema com termo fonte.

A resolução homogênea fornece o primeiro passo, conforme a Equação (A.60):

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + R(u_0)_t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.75})$$

A solução de (A.75) fornece os insumos para a condição inicial do novo problema transiente representado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(\tilde{u}). \quad (\text{A.76})$$

O problema representado por (A.76) não é hiperbólico e pode ser resolvido por métodos triviais como um Runge-Kutta de segunda ordem.

Para garantir um erro de segunda ordem no método de passo fracionário, utilizou-se especificamente o método *Strang Splitting* que consiste nos seguintes passos:

- Resolve-se para um intervalo de tempo $\frac{\Delta t}{2}$ o subproblema homogêneo e hiperbólico

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + R(u_0)_t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.77})$$

- Com um intervalo de tempo Δt , aplica-se este resultado como condição inicial para o segundo sub-problema

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = F(\tilde{u}). \quad (\text{A.78})$$

- Finalmente aplica-se este resultado como condição inicial para um novo subproblema homogêneo com intervalo $\frac{\Delta t}{2}$. Este último passo fornece o resultado final do método fracionário

$$\frac{\partial u}{\partial t} + R(\bar{u})_t \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.79})$$

7.8. Correção das condições de contorno para o método de passos fracionários

Quando se usa um método como o de passos fracionários, as condições de contorno nos passos representados pelas equações (A.77) e (A.78) não podem ser aplicadas exatamente da maneira como foi indicada anteriormente para o caso homogêneo. As condições de contorno de cada passo devem sofrer uma modificação em relação à condição de contorno original para que se possa garantir a segunda ordem do método. Seguiu-se aqui os passos indicados por Leveque (ver *Leveque*, 1986) no seu trabalho sobre problemas hiperbólicos com características de ordem de grandeza distintas. Considere o problema original com termo fonte e o problema homogêneo do método fracionário:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} + F(u), \quad (\text{A.80})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = B \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{A.81})$$

Para v na posição em que a condição de contorno é aplicada no tempo $t_0 + \tau$ (t_0 será indicado pelo índice 0), ter-se-ia a seguinte expansão:

$$v = v_0 + \tau \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_0 + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + O(\tau^3). \quad (\text{A.82})$$

Aplicando a Equação (A.81) em (A.82)

$$v = v_0 + \tau B \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_0 + \frac{\tau^2}{2} B^* B \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + O(\tau^3). \quad (\text{A.83})$$

Como as condições iniciais são idênticas para v e u :

$$v = u_0 + \tau B \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0 + \frac{\tau^2}{2} B^* B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^3). \quad (\text{A.84})$$

De (A.80), tem-se as seguintes relações

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - F \right), \quad (\text{A.85})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (\text{A.86})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\text{A.87})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \left(A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (\text{A.88})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A^{-1} \left(A^{-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (\text{A.89})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A^{-1} \left(A^{-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial A}{\partial t} A^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - F \right) - \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial A}{\partial x} A^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - F \right) - \frac{\partial F}{\partial u} A^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - F \right) \right). \quad (\text{A.90})$$

Aplicando estas relações em (A.84)

$$v = u_0 + \tau B A^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0 - F(u_0) \right) + \frac{\tau^2}{2} B^* B A^{-1} \left(A^{-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial A}{\partial t} A^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - F \right) - \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial A}{\partial x} A^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - F \right) - \frac{\partial F}{\partial u} A^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - F \right) \right) + O(\tau^3) \quad (\text{A.91})$$

A matriz B é a Matriz de Roe e no intervalo de tempo τ ela é constante. Já a matriz A varia no intervalo de tempo τ . No caso, B seria uma aproximação de A com um erro da ordem de τ :

$$A = B + C, \quad (\text{A.92})$$

Onde $C \rightarrow O(\tau)$, como $\Delta x \rightarrow O(\tau)$, isto implica em $\frac{\partial A}{\partial x} \rightarrow O(1)$ e $\frac{\partial A}{\partial t} \rightarrow O(1)$, se $\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow O(1)$ e $F \rightarrow O(1)$, para se ter um erro $O(\tau^2)$ basta a seguinte correção na condição de contorno ($A|_0 = B$):

$$v = u_0 + \tau \left(\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_0 - F(u_0) \right) + O(\tau^2). \quad (\text{A.93})$$

Como neste estudo, na condição de contorno u é constante

$$v = u_{\text{Contorno}} - \tau F(u_{\text{contorno}}) + O(\tau^2). \quad (\text{A.94})$$

Ao ser aplicada estas correções nos passos representados por (A.75) e (A.76) tem-se que as condições de contorno são alteradas para

$$v = u_{\text{Contorno}} - \frac{\Delta t}{2} F(u_{\text{contorno}}). \quad (\text{A.95})$$

Em certas situações, $F = 0$, o que simplifica muito o tratamento das condições de contorno. Não é o caso para o conjunto de equações (A.71), (A.72), (A.73) e (A.74), mas, como se verá, este é o caso para um modelo que considere escoamento incompressível.

7.9. Modelo sem termos fontes para o caso de fases incompressíveis

A condição CFL é necessária para a garantia de estabilidade de métodos explícitos em problemas hiperbólicos (ver *Leveque, 2002*), porém esta condição é um forte limitante no incremento de tempo que poder utilizado em cada passo de simulação. A condição CFL define o maior incremento de tempo a partir da menor valor obtido no domínio discretizado da razão

$$\Delta t_{m\acute{a}ximo} = \text{Min} \left(\frac{|\lambda_i^p|}{\Delta x_i} \right). \quad (\text{A.96})$$

Onde λ_i^p é o p-ésimo autovalor da matriz de Roe na fronteira entre as células i-1 e i, ou i e i+1.

De (A.96), verifica-se que os autovalores que definirão o incremento de tempo máximo da simulação estarão relacionados com a propagação de ondas sônicas, que não é objeto de estudo neste trabalho. Como estes valores tem uma ordem de grandeza muito superior à dos autovalores relacionados com a propagação de ondas de gravidade, eles impõem uma limitação no incremento de tempo que talvez seja desnecessário para a análise do problema. Uma maneira de se evitar esta restrição numérica seria tratar o problema como se os fluidos fossem incompressíveis. Já foi observado, de maneira aproximada, que para frações de gás não muito pequenas e uma razão entre a massa específica do gás e massa específica do líquido pequena, as características relacionadas com ondas de gravidade não sofrem uma influência relevante da compressibilidade dos fluidos, isto pode ser um indicativo de que um modelo incompressível seria adequado para o estudo de *roll-waves*. A partir daqui, um modelo numérico para o caso de fluidos incompressíveis será apresentado, comparações dos resultados de simulações considerando e não considerando a compressibilidade do gás indica que de fato trabalhar com um modelo de escoamento incompressível não implica em um erro relevante no estudo de *roll-waves* em canais fechados.

Considerando que os fluidos são incompressíveis, para o caso homogêneo

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_g}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.97})$$

$$\frac{\partial (1-\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial (1-\alpha)u_l}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.98})$$

$$\frac{\partial \alpha u_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_g^2}{\partial x} + \frac{\alpha}{\rho_g} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \int_h^{h_{MAX}} \frac{(h-y)S_i}{A_t} dy = 0, \quad (\text{A.99})$$

$$\frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial t} + \frac{\partial(1-\alpha)u_l^2}{\partial x} + \frac{(1-\alpha)}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial g \int_0^h \frac{(h-y)S_i}{A_t} dy}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.100})$$

Eliminando a variável pressão e observando que o fluxo volumétrico da mistura é constante em um escoamento incompressível, $j = \alpha u_g + (1-\alpha)u_l = \text{constante}$:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_g}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.101})$$

$$\frac{\partial \alpha u_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_g^2}{\partial x} + \frac{\partial g \int_h^{h_{MAX}} \frac{(h-y)S_i}{A_t} dy}{\partial x} - \frac{1}{1+Fa} \frac{\partial \left[\alpha u_g^2 + \frac{(j-\alpha u_g)^2}{1-\alpha} \right]}{\partial x} - \frac{1}{1+Fa} \frac{\partial g \int_0^h \frac{(h-y)S_i}{A_t} dy}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.102})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{1+Fa} \frac{\rho_g}{\alpha} \left\{ \frac{\partial \left[\alpha u_g^2 + \frac{(j-\alpha u_g)^2}{1-\alpha} \right]}{\partial x} + \frac{\partial g \left[\int_0^h \frac{(h-y)S_i}{A_t} dy + \int_h^{h_{MAX}} \frac{(h-y)S_i}{A_t} dy \right]}{\partial x} \right\}. \quad (\text{A.103})$$

$$\text{Onde } Fa = \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

A equação (A.103) é uma equação complementar que permite determinar o gradiente de pressão. Para a resolução do problema, basta as equações (A.101) e (A.102).

Como no procedimento para escoamentos compressíveis, definindo um novo par de variáveis

$$u_1 = \alpha, \quad (\text{A.104})$$

$$u_2 = \alpha u_g. \quad (\text{A.105})$$

Na sua forma “quase” conservativa, ter-se-ia então o seguinte par de equações de (A.101), (A.102), (A.104) e (A.105):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.106})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{u_2^2}{u_1} \right)}{\partial x} - \frac{1}{1+Fa} \frac{\partial \left[\frac{u_2^2}{u_1} + \frac{(j-u_2)^2}{1-u_1} \right]}{\partial x} + \\ \frac{\partial \left[g \int_h^{h_{\max}} \frac{(h-y)S_i}{A_t} dy \right]}{\partial x} - \frac{1}{1+Fa} \frac{\partial \left[g \int_0^h \frac{(h-y)S_i}{A_t} dy \right]}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

A Equação (A.107) não se encontra em uma forma conservativa de fato devido ao termo $\frac{1}{1+Fa}$ que multiplica duas derivadas da equação. Espera-se que como Fa é usualmente pequeno em escoamentos estratificados, este termo não represente um grande desvio em relação a uma forma conservativa e se trabalhará na matriz de Roe com um valor médio (média aritmética) do tipo $\frac{1}{1+Fa}$.

A Equação (A.107) na sua forma não conservativa seria então

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \\ \left[\frac{1}{1+Fa} \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2 - \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2 - \frac{1}{1+Fa} \left(\frac{j-u_2}{1-u_1} \right)^2 + \right. \\ \left. \frac{\partial g \int_h^{h_{\max}} \frac{(h-y)S_i}{A_t} dy}{\partial u_1} - \frac{1}{1+Fa} \frac{\partial g \int_0^h \frac{(h-y)S_i}{A_t} dy}{\partial u_1} \right] \frac{\partial u_1}{\partial x} + \\ \left(2 \frac{u_2}{u_1} - 2 \frac{1}{1+Fa} \frac{u_2}{u_1} + 2 \frac{1}{1+Fa} \frac{j-u_2}{1-u_1} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

Com (A.106) e (A.108) pode-se determinar as velocidades características do problema que são dadas por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{Fa}{1+Fa} \alpha + \frac{1}{1+Fa} \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{Fa}{1+Fa} u_g^2 - \frac{1}{1+Fa} \left(\frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} \right)^2 - g \frac{A_t}{S_i(\alpha)} \int_h^{h_{\max}} \frac{S_i(y)}{A_t} dy + \frac{1}{1+Fa} g \frac{A_t}{S_i(\alpha)} \int_0^{h_{\max}} \frac{S_i(y)}{A_t} dy + \left(\frac{Fa}{1+Fa} \alpha + \frac{1}{1+Fa} \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} \right)^2} \right)} \quad .(A.109)$$

Os procedimentos para a obtenção da matriz de Roe são similares aos apresentados para o caso de fluidos compressíveis e tem como resultado final uma matriz 2X2, cujos termos são dados por

$$R_{1,1} = 0, \quad (A.110)$$

$$R_{1,2} = 1, \quad (A.111)$$

$$R_{2,1} = - \frac{\left\{ \begin{array}{l} \left(\sqrt{\alpha} u_g \Big|_L + \sqrt{\alpha} u_g \Big|_R \right) \\ \left[\left(\sqrt{\alpha} u_g \Big|_L + \sqrt{\alpha} u_g \Big|_R \right) \left(1 - \frac{1}{1+Fa} \right) + 2 \frac{1}{1+Fa} \int_L^R \sqrt{\alpha} \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} dz \right] \end{array} \right\}}{\left(\sqrt{\alpha} \Big|_L + \sqrt{\alpha} \Big|_R \right)^2} + \frac{\left[\begin{array}{l} 2 \frac{1}{1+Fa} \int_L^R \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} \left(\sqrt{\alpha} u_g - \sqrt{\alpha} \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} \right) dz - \\ g \left(\int_L^R 2 \sqrt{\alpha} \frac{1}{s_i(\alpha)} \int_h^{h_{\max}} S_i(y) dy dz - \frac{1}{1+Fa} \int_L^R 2 \sqrt{\alpha} \frac{1}{s_i(\alpha)} \int_0^{h_{\max}} S_i(y) dy dz \right) \end{array} \right]}{\left(\sqrt{\alpha} \Big|_L + \sqrt{\alpha} \Big|_R \right)} \quad , \quad (A.112)$$

$$R_{2,2} = \frac{2 \left(\sqrt{\alpha} u_g \Big|_L + \sqrt{\alpha} u_g \Big|_R \right) \left(1 - \frac{1}{1+Fa} \right) + 2 \frac{1}{1+Fa} \int_L^R \sqrt{\alpha} \frac{j - \alpha u_g}{1 - \alpha} dz}{\sqrt{\alpha} \Big|_L + \sqrt{\alpha} \Big|_R} \quad . \quad (A.113)$$

Os índices L e R referem aos estados das células à esquerda e à direita de uma fronteira. A integração entre estes estados é feito de maneira tal que as variáveis envolvidas se comportem conforme a seguinte regra

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha} \Big|_L + \left(\sqrt{\alpha} \Big|_R - \sqrt{\alpha} \Big|_L \right) z, \quad (A.114)$$

$$\sqrt{\alpha}u_g = \sqrt{\alpha}u_g|_L + \left(\sqrt{\alpha}u_g|_R - \sqrt{\alpha}u_g|_L \right)z. \quad (\text{A.115})$$

Onde em L $z=0$ e em R $z=1$.

Quando se trabalha com os termos fonte, as equações que definem o escoamento estratificado transiente tomam a seguinte forma

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.116})$$

$$\begin{aligned} & \partial_t u_2 + \partial_x \left(\frac{u_2^2}{u_1} \right) - \frac{1}{1+Fa} \partial_x \left[\frac{u_2^2}{u_1} + \frac{(j-u_2)^2}{1-u_1} \right] + \\ & \partial_x \left[g \int_h^{h_{\max}} \frac{(h-y)S_i}{A_t} dy \right] - \frac{1}{1+Fa} \partial_x \left[g \int_0^{h_{\max}} \frac{(h-y)S_i}{A_t} dy \right] = \quad (\text{A.117}) \\ & \frac{Fa}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g} - \frac{\sigma \alpha A_t}{\rho_g} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \frac{1}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l} \right) \end{aligned}$$

Em uma condição de escoamento permanente, o termo fonte da Equação (A.117) é igual a zero, isto é importante, quando se aplica o método de passos fracionários, na análise de evolução de *roll-waves*, pois como se inicia de uma condição de fundo definido por um permanente instável e a condição de contorno é também determinada por esta situação permanente, não se torna necessário nenhum tratamento especial (tal como o apresentado em (A.95)) para a condição de contorno nos passos representados pelas equações (A.77) e (A.79).

Cabe aqui uma consideração adicional sobre as condições de contorno para o caso incompressível. O tratamento é similar ao utilizado para fluidos compressíveis, porém, a condição de $j = \alpha u_g + (1-\alpha)u_l = \text{const}$ impõe uma limitação no tratamento da condição de entrada. O *holdup* na entrada, como no caso de fluidos compressíveis é pode ser tratado como uma função do tempo e variar na condição de contorno de entrada. Já a vazões mássicas na entrada não podem variar com o tempo devido à condição de fluxo de mistura constante. Isto não é uma limitação importante para as simulações de *roll-waves*, mas é uma limitação importante para um simulador genérico, o que torna de grande relevância a busca de esquemas semi-implícitos para que o método aqui apresentado possa ser utilizado de

maneira mais genérica, pois para modelos com fluidos compressíveis, um esquema explícito apresenta uma grande restrição no incremento de tempo devido à condição CFL.

7.10. Comparação entre o caso com compressibilidade e o caso sem compressibilidade

Finalizando a discussão da modelagem numérica, será apresentado um caso em que se compara os resultados de uma simulação em que se considera a compressibilidade com uma simulação similar, distinguindo apenas no fato de que as duas fases são tratadas como incompressíveis. As simulações foram feitas em um canal fechado retangular com base e altura de 1 polegada. Os fatores de fricção foram tratados como constantes; 0.005 foi o valor para o fator de fricção do gás com a parede e do líquido com a parede, o fator de fricção para o cisalhamento na interface foi o dobro do valor do fator de fricção do gás. A

tensão cisalhante na interface foi determinada por $\tau_i = f_i \rho_g \frac{(u_g - u_l)|u_g - u_l|}{2}$.

A simulação consistia em aplicar uma perturbação na altura de filme em um certo ponto do canal em um escoamento estratificado estável. Aplicando esta perturbação era verificado então como se dava a propagação desta no canal.

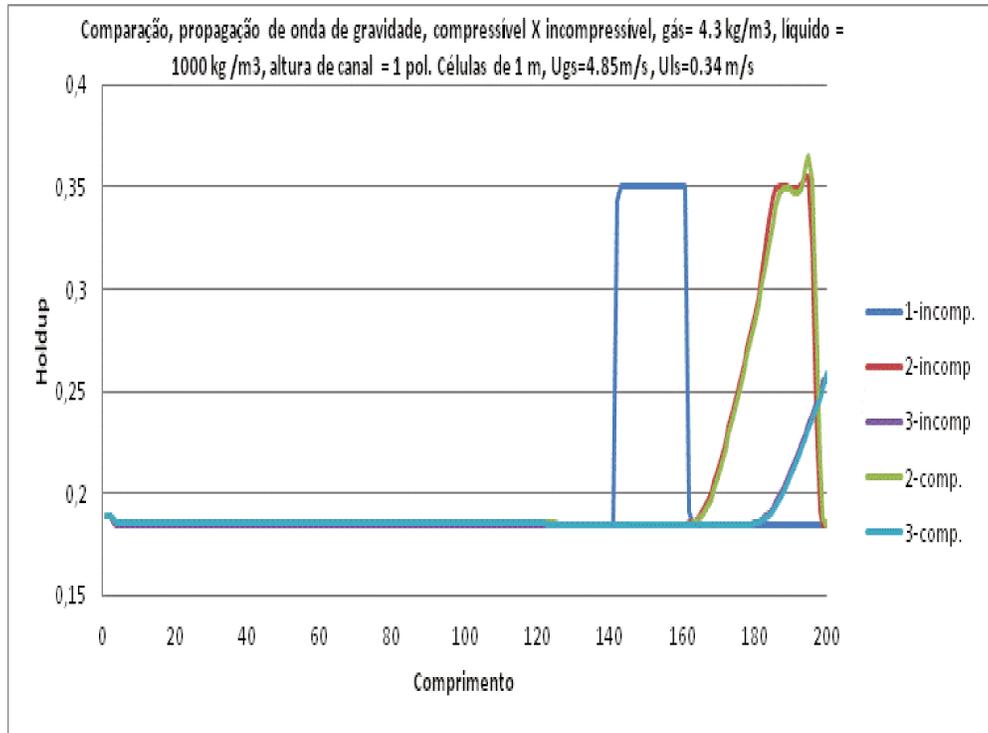


Figura A.3 Compara o entre simula es com e sem compressibilidade do g s, U_{gs}=4.85m/s e U_{ls}=0.34 m/s

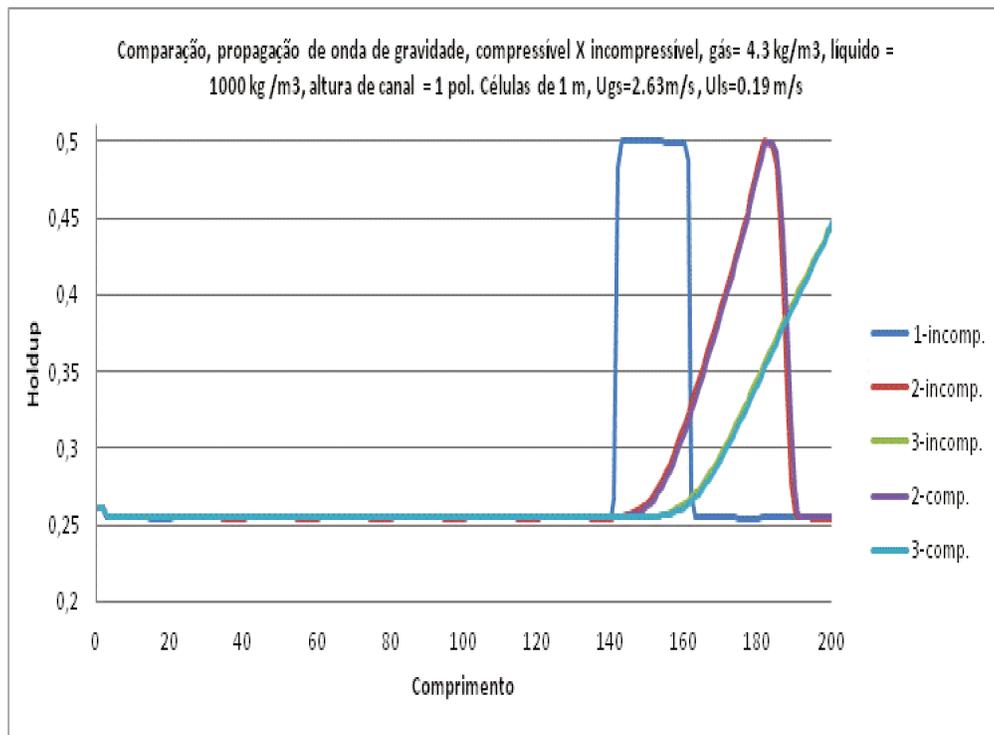


Figura A.4 Compara o entre simula es com e sem compressibilidade do g s, U_{gs} = 2.63 m/s e U_{ls} = 0.19 m/s

As figuras (A.3) e (A.4) demonstram que os erros na propagação de perturbação mais relacionadas com ondas de gravidade são de fato pouco influenciadas pela compressibilidade do gás. Deve-se, claro, tomar cuidado com esta afirmação, pois ela tem suas limitações. Caso se trabalhe com comprimentos muito longos de canal, em que a variação de pressão seja notável, a compressibilidade se tornará relevante, pois a massa específica do gás pode variar muito entre as extremidades do canal; quando se trabalha com velocidade média de escoamento do gás muito alta, o fator compressibilidade pode ser relevante; além disto, em frações de vazio próximas de zero, a compressibilidade do gás pode ser influente nas ondas de gravidade.

‘

Apêndice B: Modelo simplificado para o arranjo estratificado

Considerando a hipótese de escoamento incompressível para o arranjo estratificado, pretende-se simplificar o modelo de dois fluidos que representa este arranjo. A ideia é a de que este modelo simplificado deixe, sem perder a representatividade do fenômeno, mais clara as distinções e semelhanças entre o problema de escoamento em canal aberto e o escoamento estratificado em canal fechado. A análise se limitará ao escoamento horizontal.

Na dedução do modelo simplificado, se utilizará as equações (3.26) e (3.27), considerando a hipótese de escoamento horizontal, será considerado que escoamento é em uma tubulação horizontal e os fatores de forma do perfil de velocidade serão definidos como 1, com isto tem-se o seguinte par de equação:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_g}{\partial x} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha u_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_g^2}{\partial x} + \frac{\partial g \int_h^{h_{MAX}} \frac{(h-y)S_i(y)}{A_t} dy}{\partial x} - \\ & \frac{1}{1+Fa} \frac{\partial \left[\alpha u_g^2 + \frac{(j-\alpha u_g)^2}{1-\alpha} \right]}{\partial x} - \frac{1}{1+Fa} \frac{\partial g \int_0^{h_{MAX}} \frac{(h-y)S_i(y)}{A_t} dy}{\partial x} = . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{Fa}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g} \right) - \frac{1}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l} \right)$$

Os termos de variação de pressão na região transversal ao escoamento devido à hidrostática podem ser representados por:

$$\frac{\partial g \int_h^{h_{MAX}} \frac{(h-y)S_i(y)}{A_t} dy}{\partial x} = g\alpha \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -g\alpha \frac{A_t}{S_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial g \int_0^{h_{MAX}} \frac{(h-y)S_i(y)}{A_t} dy}{\partial x} = g \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -g \frac{A_t}{S_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x}. \quad (B.4)$$

Aplicando (B.3) e (B.4) em (B.2):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha u_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_g^2}{\partial x} - g \alpha \frac{A_t}{S_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \\ & \frac{1}{1+Fa} \frac{\partial \left[\alpha u_g^2 + \frac{(j-\alpha u_g)^2}{1-\alpha} \right]}{\partial x} + \frac{1}{1+Fa} g \frac{A_t}{S_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\ & \frac{Fa}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g} \right) - \frac{1}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l} \right) \end{aligned} \quad (B.5)$$

Como se quer obter uma relação semelhante à relação de canal aberto, deve-se voltar a apresentar explicitamente a velocidade média de filme de líquido na Equação (B.5):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha u_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_g^2}{\partial x} - g \alpha \frac{A_t}{S_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \\ & \frac{1}{1+Fa} \frac{\partial \left[\alpha u_g^2 + (1-\alpha) u_l^2 \right]}{\partial x} + \frac{1}{1+Fa} g \frac{A_t}{S_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\ & \frac{Fa}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g} \right) - \frac{1}{1+Fa} \frac{1}{A_t} \left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l} \right) \end{aligned} \quad (B.6)$$

Para que a equação se assemelhe à equação de canal aberto, deve-se substituir as referências explícitas à velocidade de gás por uma referência que utilize a velocidade de líquido, no caso se utilizará a Relação (3.23), a qual pode ser colocada na seguinte forma

$$\alpha u_g = j - (1-\alpha) u_l. \quad (B.7)$$

Aplicando (B.7) na derivada no tempo de (B.6) e reorganizando esta equação

$$\begin{aligned} & (1+Fa) \frac{\partial (1-\alpha) u_l}{\partial t} + \frac{\partial (1-\alpha) u_l^2}{\partial x} - Fa \frac{\partial \alpha u_g^2}{\partial x} - (1-\alpha - \alpha Fa) g \frac{A_t}{S_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\ & \frac{1}{A_t} \left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l} \right) - Fa \frac{1}{A_t} \left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g} \right) \end{aligned} \quad (B.8)$$

Aplicando a equação de continuidade da fase líquida:

$$(1-\alpha)\frac{\partial u_l}{\partial t} + (1-\alpha)u_l\frac{\partial u_l}{\partial x} + Fa\frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial t} - g(1-\alpha)\frac{A_t}{S_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x} -$$

$$Fa\left(\frac{\partial\alpha u_g u_g}{\partial x} - g\alpha\frac{A_t}{S_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right) = \frac{1}{A_t}\left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l}\right) - Fa\frac{1}{A_t}\left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g}\right). \quad (\text{B.9})$$

Expandindo o termo $Fa\frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial t}$:

$$(1-\alpha)(1+Fa)\frac{\partial u_l}{\partial t} + (1-\alpha)u_l\frac{\partial u_l}{\partial x} - Fau_l\frac{\partial\alpha}{\partial t} - g(1-\alpha)\frac{A_t}{S_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x} -$$

$$Fa\left(\frac{\partial\alpha u_g u_g}{\partial x} - g\alpha\frac{A_t}{S_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right) = \frac{1}{A_t}\left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l}\right) - Fa\frac{1}{A_t}\left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g}\right). \quad (\text{B.10})$$

Deve-se obter uma relação para $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ em termos da derivada espacial, da conservação

da massa da fase gasosa:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial\alpha u_g}{\partial x} = \frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial x} = -u_l\frac{\partial\alpha}{\partial x} + (1-\alpha)\frac{\partial u_l}{\partial x}. \quad (\text{B.11})$$

Aplicando (B.11) em (B.10):

$$(1-\alpha)(1+Fa)\frac{\partial u_l}{\partial t} + (1-\alpha)u_l\frac{\partial u_l}{\partial x} + Fau_l^2\frac{\partial\alpha}{\partial x} - Fa(1-\alpha)u_l\frac{\partial u_l}{\partial x} -$$

$$g(1-\alpha)\frac{A_t}{S_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x} - Fa\left(\frac{\partial\alpha u_g u_g}{\partial x} - g\alpha\frac{A_t}{S_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right) =$$

$$\frac{1}{A_t}\left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l}\right) - Fa\frac{1}{A_t}\left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g}\right) \quad (\text{B.12})$$

Reorganizando (B.12):

$$(1+Fa)\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l\frac{\partial u_l}{\partial x} - g\frac{A_t}{S_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x} -$$

$$\frac{Fa}{(1-\alpha)}\left(\frac{\partial\alpha u_g u_g}{\partial x} - g\alpha\frac{A_t}{S_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + (1-\alpha)u_l\frac{\partial u_l}{\partial x} - u_l^2\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right) =$$

$$\frac{\frac{1}{A_t}\left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l}\right) - Fa\frac{1}{A_t}\left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g}\right)}{(1-\alpha)}. \quad (\text{B.13})$$

Analisando a derivada $\frac{\partial \alpha u_g u_g}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha u_g u_g}{\partial x} &= 2\alpha u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + u_g^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 2\alpha u_g \frac{\partial [j - u_l(1 - \alpha)]}{\alpha \partial x} + \frac{[j - u_l(1 - \alpha)]^2}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\
&= -2\alpha u_g \frac{[j - u_l(1 - \alpha)]}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2\alpha u_g \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\partial u_l}{\partial x} + 2\alpha u_g u_l \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{[j - u_l(1 - \alpha)]^2}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\
&= -2\alpha u_g \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\partial u_l}{\partial x} + \left\{ \frac{[j - u_l(1 - \alpha)]^2}{\alpha^2} - 2\alpha u_g \frac{[j - u_l(1 - \alpha)]}{\alpha^2} + 2\alpha u_g u_l \frac{1}{\alpha} \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\
&= -2\alpha u_g \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\partial u_l}{\partial x} + \{u_g^2 - 2u_g^2 + 2u_g u_l\} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\
&= -2\alpha u_g \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\partial u_l}{\partial x} + \{-u_g^2 + 2u_g u_l - u_l^2 + u_l^2\} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\
&= -2\alpha u_g \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\partial U_l}{\partial x} + \{-(U_g - U_l)^2 + U_l^2\} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\
&= -2\alpha \frac{[j - u_l(1 - \alpha)]}{\alpha} \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\partial u_l}{\partial x} + \left\{ -\left(\frac{[j - u_l(1 - \alpha)]}{\alpha} - u_l \right)^2 + u_l^2 \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\
&= -2\alpha \frac{[j - u_l(1 - \alpha)]}{\alpha} \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\partial u_l}{\partial x} + \left\{ -\left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2 + u_l^2 \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial x}
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha u_g u_g}{\partial x} &= \\
&= -2\alpha u_g \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\partial u_l}{\partial x} + \{-(u_g - u_l)^2 + u_l^2\} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \tag{B.14} \\
&= -2\alpha \frac{[j - u_l(1 - \alpha)]}{\alpha} \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\partial u_l}{\partial x} + \left\{ -\left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2 + u_l^2 \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial x}
\end{aligned}$$

Aplicando a Relação (B.14) na Relação (B.13):

$$\begin{aligned}
& (1+Fa) \frac{\partial u_l}{\partial t} + \left\{ u_l - Fa \left[u_l - 2 \frac{[j - u_l(1-\alpha)]}{\alpha} \right] \right\} \frac{\partial u_l}{\partial x} - \\
& \left\{ g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} \frac{A_t}{S_i} - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2 \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\
& \frac{1}{A_t} \left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l} \right) - Fa \frac{1}{A_t} \left(- \frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g} \right) \\
& \qquad \qquad \qquad (1-\alpha)
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Opcionalmente, pode-se expressar o termo $\frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2$ da Relação (B.15) em termos de u_g e u_l :

$$\begin{aligned}
& (1+Fa) \frac{\partial u_l}{\partial t} + \left\{ u_l - Fa [u_l - 2u_g] \right\} \frac{\partial u_l}{\partial x} - \\
& \left\{ g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} \frac{A_t}{S_i} - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1}{\alpha} (u_g - u_l)^2 \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\
& \frac{1}{A_t} \left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l} \right) - Fa \frac{1}{A_t} \left(- \frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g} \right) \\
& \qquad \qquad \qquad (1-\alpha)
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Para o que se deseja com a simplificação, será limitado o estudo para ondas que apresentem $holdup < 1$, logo se torna razoável a hipótese $Fa \ll 1$. Isto é fácil de ser obtido em escoamentos estratificados, por exemplo, considere uma condição de fração de vazio de 0,5, massa específica de gás de 50 kg/m³, massa específica de líquido de 900 kg/m³, Fa terá um valor de 0,055. Outra hipótese será a de que a ordem de grandeza da diferença de velocidades médias entre as fases será inferior à ordem de grandeza de $1/Fa$. Destas hipóteses, a Equação (B.16) pode ser simplificada para:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} - \left\{ g \frac{A_t}{S_i} - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1}{\alpha} (u_g - u_l)^2 \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\
& \frac{1}{A_t} \left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l} \right) - Fa \frac{1}{A_t} \left(- \frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g} \right) \\
& \qquad \qquad \qquad (1-\alpha)
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Ou

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} - \left\{ g^* \frac{A_t}{S_i} - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2 \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{A_t} \left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l} \right) - Fa \frac{1}{A_t} \left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g} \right) \cdot \quad (\text{B.18})$$

$$\text{Onde } g^* = g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l}.$$

Com isto, para um $Fa \ll 1$, as relações de escoamento estratificado podem ser reduzidas a

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(1-\alpha)u_l}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \left\{ g^* - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{S_i}{A_t} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2 \right\} \frac{A_t}{S_i} \frac{\partial(1-\alpha)}{\partial x} = \frac{1}{A_t} \left(\frac{\tau_i S_i}{\rho_l} - \frac{\tau_{wl} S_{wl}}{\rho_l} \right) - Fa \frac{1}{A_t} \left(-\frac{\tau_i S_i}{\rho_g} - \frac{\tau_{wg} S_{wg}}{\rho_g} \right) \quad (\text{B.20})$$

As equações (B.19) e (B.20) são interessantes pelo que os seus termos à esquerda apresentam de proximidade das relações de canal aberto. As distinções para os termos de canal aberto são muito pequenas, a principal vem da razão $\frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{S_i}{A_t} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2$ que para

efeitos práticos leva a uma diminuição na velocidade de propagação de onda dinâmica. Por exemplo, para um canal retangular aberto, esta velocidade seria dada por \sqrt{gh} , para um

canal fechado retangular esta velocidade seria dada por $\sqrt{g^* h - \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{S_i}{A_t} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j - u_l}{\alpha} \right)^2} h$. Mas

o mais interessante neste termo é que ele está relacionado com a diferença entre as velocidades de gás e líquido ao quadrado. Na verdade, este termo parece indicar os efeitos de aceleração-desaceleração de cada fase devido à passagem de uma onda de gravidade em um canal fechado, num típico problema de Bernoulli para escoamentos incompressíveis com variação de área de escoamento. Na verdade, este termo quando é maior que g^* torna o

modelo mal posto. Isto é, ele indica o momento em que a *diferença* entre a pressão na fase líquida e gasosa devido à variação de fração de vazio se torna maior do que o efeito estabilizador da gravidade. Nada mais do que o dito critério de Kelvin-Helmholtz não viscoso para escoamento estratificado. Este termo é relevante mesmo para $Fa \ll 1$ e só se tornará irrelevante em canais fechados quando $\rho_g \ll \rho_l$, ou quando a velocidade de líquido e de gás são muito próximas. Estas condições não parecem muito realistas para casos práticos na indústria de petróleo. Quando este termo é pequeno, o comportamento transiente do escoamento estratificado em canal fechado fica bastante similar ao comportamento transiente em canal aberto.

‘

Apêndice C: Fator de forma do perfil de velocidades (filme de líquido em regime turbulento, gás em regime turbulento)

Para avaliar o fator de forma do perfil de velocidade de cada fase em um arranjo estratificado turbulento, foi utilizado um dado experimental levantado por Fonseca na sua tese de mestrado (ver *Fonseca*, 2009). Parte do trabalho dele foi obter o perfil de velocidade do filme de líquido de um arranjo em golfadas. A Figura (C.1) apresenta alguns dos perfis obtidos por ele:

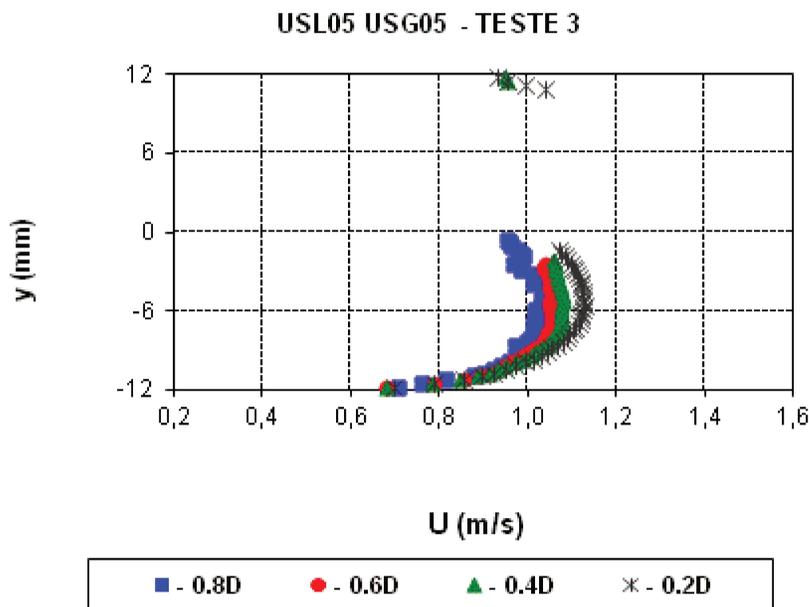


Figura C.1 Perfis de velocidade levantados experimentalmente para filme de líquido em golfadas

Estes dados foram obtidos com ar e água em duto de 24 mm. Por exemplo, -0.6 D representa a distância em que o perfil de velocidade do filme foi tirada em relação ao nariz da bolha.

Focou-se no perfil a -0.6D.

Os seguintes dados foram utilizados:

Diâmetro=2.4 cm;

Velocidade superficial de líquido = 0.383 m/s;

J mistura = 1.2 m/s;

Massa específica da água = 990 kg/m³;

Massa específica do gás = de 2kg/m³;

Perfil utilizado -> Teste 3, -0.6D do nariz, escoamento horizontal.

Primeiro se verificou até que ponto a hipótese de se utilizar o conceito de diâmetro hidráulico para a tensão cisalhante na parede da tubulação é válida. A partir dos dados do teste, verificou-se que a altura de filme era de aproximadamente 10.15 mm. Com este valor, calculou-se a tensão cisalhante na parede – duto liso – utilizando o conceito de diâmetro hidráulico:

$$\text{Re}_l = \frac{4(1-\alpha)A_t}{S_{wl}} \frac{u_l \rho_l}{\mu_l}, \quad (\text{C.1})$$

$$f_L = 0.046 \text{Re}_L^{0.2}, \quad (\text{C.2})$$

$$\tau_{wL} = f_L \rho_l \frac{1}{2} u_l^2. \quad (\text{C.3})$$

Com a tensão cisalhante, calculou-se a velocidade de fricção:

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_{wL}}{\rho_l}}, \quad (\text{C.4})$$

Com isto, utilizando a lei de parede de Spalding, calculou-se um perfil de velocidade provável para este escoamento estratificado.

A lei de parede de Spalding é dada pela seguinte relação (ver *White*, 2005)

$$y^+ = u^+ + e^{-kB} \left[e^{ku^+} - 1 - ku^+ - \frac{(ku^+)^2}{2} - \frac{(ku^+)^3}{6} \right]. \quad (\text{C.5})$$

Onde

$$y^+ = \frac{\rho_l}{\mu_l} u^* y, \quad (\text{C.6})$$

$$u^+ = \frac{u(y)}{u^*}, \quad (\text{C.7})$$

$k = 0,41$ e $B = 5,0$.

O resultado deste perfil em comparação com o perfil obtido pelo experimento é apresentado na Figura (C.2):

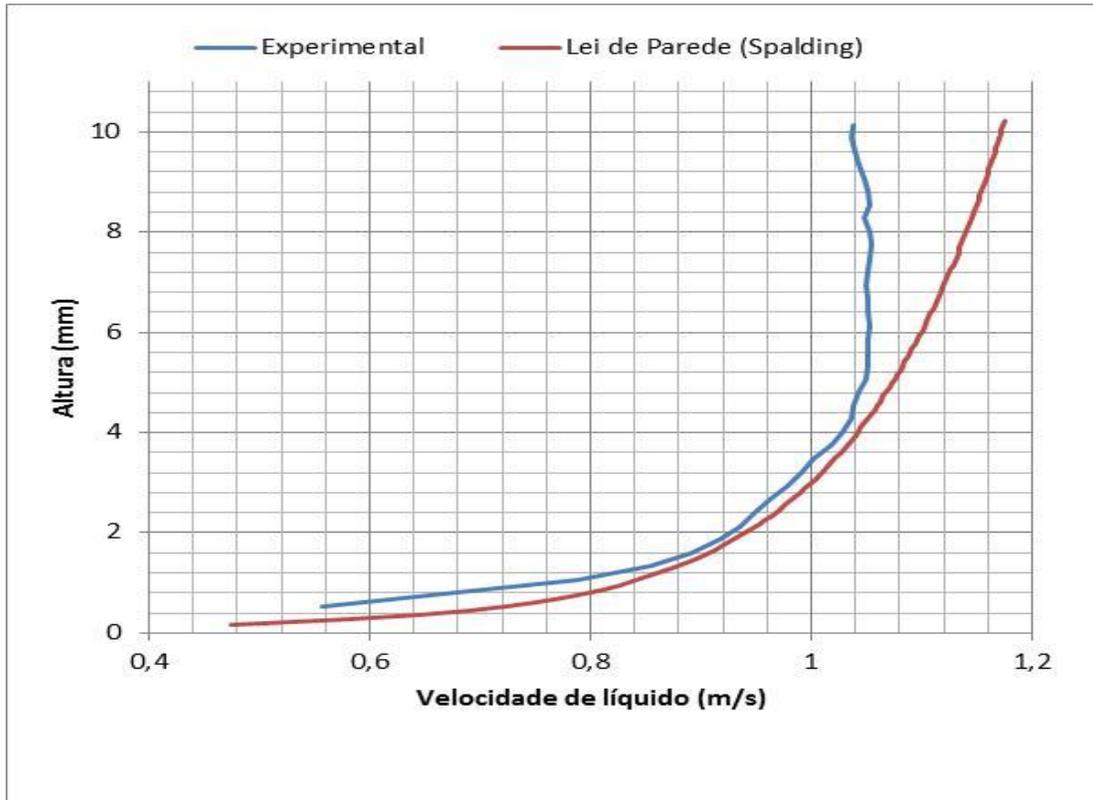


Figura C.2 Comparação, perfil experimental com perfil de lei de parede de Spalding

Para valores de y menores que 4 mm, o perfil obtido pela lei de parede se aproxima surpreendentemente bem do perfil experimental. Porém, a partir de um y aproximadamente igual a 4 mm, os dois perfis começam a se distinguir.

Na parte obtida pela lei de parede usual, foi necessário apenas utilizar uma correlação de fricção de Moody com a correção de diâmetro hidráulico. Isto indica que para a fricção na parede, a metodologia normalmente usada é adequada. O problema é a as relações de fricção na interface.

Tentou-se pensar em alguma modelagem que explicasse este perfil de velocidade, que a uma certa altura toma a forma de um perfil em pistão. Para tanto, foi necessário modelar o problema por meio da composição de 4 perfis. Isto também foi implementado por Biberg

(ver Biberg, 2007) no seu modelo de tensões cisalhantes para arranjo estratificado. Biberg trabalha com a aproximação de que uma lei logarítmica pode representar de maneira aproximada o perfil de velocidade próximo à interface no escoamento estratificado, a mesma hipótese será utilizada neste trabalho. A diferença deste trabalho para o de Biberg (2007) é que aqui se toma como fato que a tensão na parede da tubulação pode ser calculada com o auxílio do conceito de diâmetro hidráulico. Esta hipótese é apoiada pelo perfil de velocidade apresentado anteriormente. Biberg não lançou mão deste recurso, o que deixou sua modelagem bem mais complexa. A Figura (C.3) exemplifica a ideia que será implementada:

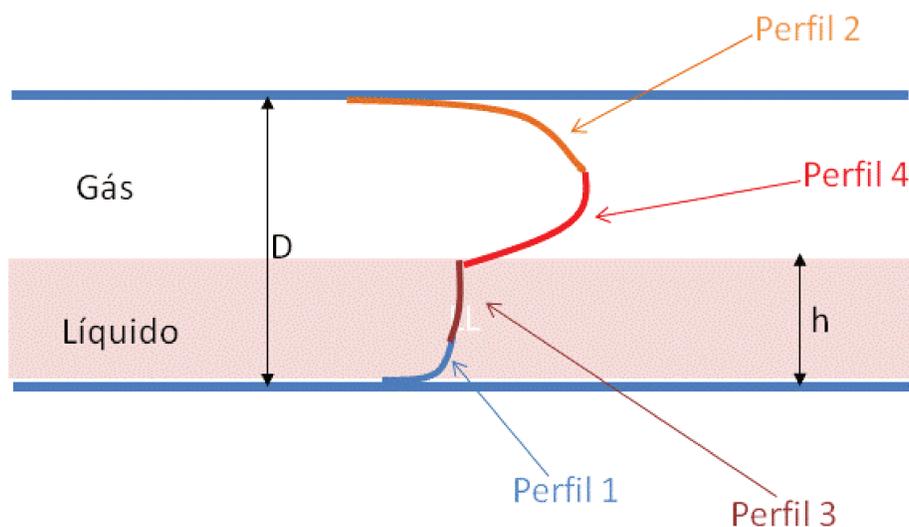


Figura C.3 Composição de perfis para os escoamento estratificado

O Perfil 1 – na fase líquida- pode ser obtido diretamente da lei de parede, como foi feito anteriormente, calculando a tensão cisalhante e a velocidade de fricção de uma maneira direta utilizando o diâmetro hidráulico. Será admitido que o mesmo procedimento poderá ser feito para se obter o Perfil 2 na fase gasosa. Sobra então obter os perfis 3 e 4. A difusão do perfil de velocidade se dá nas paredes da tubulação. E inicialmente, não há nada que impeça este perfil de se desenvolver respeitando a lei de parede usual, com sua sub-camada laminar, camada buffer e camada *overlap*. Como o escoamento é interno, não haverá uma camada externa para o perfil turbulento. À medida que esta difusão alcança a interface, o perfil começa a se distanciar do que se esperaria para uma lei de parede. A

interface deve funcionar como um isolante à difusão do perfil, da mesma maneira como a difusão de temperatura distorce o seu perfil ao encontrar materiais de características diferentes. Uma questão importante e que será utilizada no modelo aqui apresentado é que tanto o perfil 3, quanto o perfil 4 já devem estar suficientemente distantes da parede para se admitir que a difusão de velocidade se dá basicamente por fenômenos turbulentos. Isto significa que o comportamento destes perfis será tipicamente de uma camada *overlap*. Ou seja, a regra de perfil logarítmico deverá ser válida, porém com parâmetros diferentes das camadas *overlaps* mais relacionadas com os perfis que “nascem” das paredes da tubulação. Esta é a principal hipótese do modelo que virá a ser feito aqui. Com isto, pode-se pensar em expressões para os perfis 3 e 4.

$$u_3(y) = u_3^* \left[\frac{1}{k} \ln \left((y-h) \frac{u_3^*}{\nu_l} + y_{3O}^+ \right) + B \right], \quad (\text{C.8})$$

$$u_4(y) = u_4^* \left[\frac{1}{k} \ln \left((y-h) \frac{u_4^*}{\nu_g} + y_{4O}^+ \right) + B \right]. \quad (\text{C.9})$$

A variável u_3^* é a velocidade de fricção do perfil 3. A variável y_{3O}^+ é um valor de referência, um valor de offset, para o perfil 3. Da mesma maneira são as variáveis u_4^* e y_{4O}^+ para o perfil 4.

Algumas relações entre u_3^* , y_{3O}^+ , u_4^* e y_{4O}^+ podem ser obtidas a partir das condições na interface.

$$u_3(h) = u_4(h), \quad (\text{C.10})$$

$$\tau_3(h) = \tau_4(h). \quad (\text{C.11})$$

Como se admitiu que se está em camadas *overlaps*, a viscosidade molecular será pouco influente, deve-se apenas considerar a viscosidade turbulenta para a determinação das tensões cisalhantes. Será utilizada a relação definida por Von-Karman para viscosidade turbulenta na camada *overlap*, ver White (2005)

$$\mu_t \approx \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \approx \rho k^2 (y)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (\text{C.12})$$

Onde para o perfil 3

$$y_3(y) = \frac{v_l}{u_3^*} \left[(y-h) \frac{u_3^*}{v_l} + y_{3O}^+ \right] \Rightarrow$$

$$y_3(h) = \frac{v_l}{u_3^*} y_{3O}^+$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} \Big|_h = \frac{u_3^{*2}}{v_l k} \frac{1}{y_{3O}^+}, \dots \text{LOGO}$$

$$\mu_{t3}(h) = \rho_l k \left(\frac{v_l}{u_3^*} y_{3O}^+ \right)^2 \left| \frac{u_3^{*2}}{v_l} \frac{1}{y_{3O}^+} \right| \Rightarrow$$

$$\mu_{t3}(h) = \rho_l k v_l y_{3O}^+.$$

(C.13)

Para o perfil 4

$$y_4(y) = \frac{v_g}{u_4^*} \left[(y-h) \frac{u_4^*}{v_g} + y_{4O}^+ \right] \Rightarrow$$

$$y_4(h) = \frac{v_g}{u_4^*} y_{4O}^+$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial y} \Big|_h = \frac{u_4^{*2}}{v_g k} \frac{1}{y_{4O}^+}, \dots \text{LOGO}$$

$$\mu_{t4}(h) = \rho_g k \left(\frac{v_l}{u_4^*} y_{4O}^+ \right)^2 \left| \frac{u_4^{*2}}{v_g} \frac{1}{y_{4O}^+} \right| \Rightarrow$$

$$\mu_{t4}(h) = \rho_g k v_g y_{4O}^+.$$

(C.14)

Logo para a condição de velocidade na interface, de (C.10), (C.8) e (C.9)

$$u_3(h) = u_3^* \left[\frac{1}{k} \ln(y_{3O}^+) + B \right] = u_4(h) = u_4^* \left[\frac{1}{k} \ln(y_{4O}^+) + B \right] \Rightarrow$$

$$\ln \left((y_{3O}^+)^{\frac{u_3^*}{k}} \right) = \ln \left((y_{4O}^+)^{\frac{u_4^*}{k}} \right) + B(u_4^* - u_3^*) \Rightarrow$$

$$\ln \left((y_{3O}^+)^{\frac{u_3^*}{k}} \right) = \ln \left((y_{4O}^+)^{\frac{u_4^*}{k}} \right) + \ln \left(e^{B(u_4^* - u_3^*)} \right) \Rightarrow$$

$$(y_{3O}^+)^{\frac{u_3^*}{k}} = (y_{4O}^+)^{\frac{u_4^*}{k}} e^{B(u_4^* - u_3^*)} \Rightarrow$$

$$y_{30}^+ = \left(y_{40}^+ \right)_{u_3^*}^{u_4^*} e^{kB \left(\frac{u_4^*}{u_3^*} - 1 \right)}. \quad (\text{C.15})$$

Para a condição de tensão cisalhante na interface, de (C.11), (C.13) e (C.14)

$$\begin{aligned} \tau_3(h) &= \mu_{l3} \Big|_h \frac{\partial u_3}{\partial y} \Big|_h = \tau_4(h) = \mu_{l4} \Big|_h \frac{\partial u_4}{\partial y} \Big|_h \Rightarrow \\ \rho_l k v_l y_{30}^+ \frac{\partial u_3}{\partial y} \Big|_h &= \rho_g k v_g y_{40}^+ \frac{\partial u_4}{\partial y} \Big|_h \Rightarrow \\ \rho_l k v_l y_{30}^+ \frac{u_3^{*2}}{v_l k y_{30}^+} \frac{1}{v_l k y_{30}^+} &= \rho_g k v_g y_{40}^+ \frac{u_4^{*2}}{v_g k y_{40}^+} \frac{1}{v_g k y_{40}^+} \Rightarrow \\ \rho_l u_3^{*2} &= \rho_g u_4^{*2} \Rightarrow \\ u_3^* &= \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}} u_4^*. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Com isto, aplicando (C.16) em (C.15)

$$y_{30}^+ = \left(y_{40}^+ \right) \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_g}} e^{kB \left(\sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_g}} - 1 \right)}. \quad (\text{C.17})$$

Com (C.16) e (C.17) reduz-se os parâmetros para se resolver os perfis (C.3) e (C.4). Agora, é apenas necessário se determinar u_4^* e y_{40}^+ . Observa-se que o que distingue os parâmetros do Perfil (3) dos parâmetros do Perfil (4) é a razão de massas específicas. Isto parece ser natural já que se admitiu a priori que estes perfis eram formados em uma camada *overlap*, onde a viscosidade molecular tem pouca relevância. Provavelmente, em sistemas estratificados com massas específicas muito próximas, a tendência seria ter perfis muito parecidos, provavelmente, a tendência será a composição de 4 perfis se unirem em um único perfil de velocidade do tipo Coolebrok. Aplicando (C.16) e (C.17) em (C.8) e (C.9):

$$u_3(y) = \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}} u_4^* \left[\frac{1}{k} \ln \left((y-h) \frac{1}{v_l} \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}} u_4^* + \left(y_{40}^+ \right) \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_g}} e^{kB \left(\sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_g}} - 1 \right)} \right) + B \right], \quad (\text{C.18})$$

$$u_4(y) = u_4^* \left[\frac{1}{k} \ln \left((y-h) \frac{u_4^*}{v_g} + y_{40}^+ \right) + B \right]. \quad (\text{C.19})$$

Na fase líquida, da maneira mais grosseira, o ponto onde o perfil (1) termina e começa o perfil (3) é determinado pelo ponto de intercessão das duas curvas. Este mesmo critério é utilizado na fase gás para determinar os limites para os perfis (2) e (4). Com isto, montou-se um algoritmo para obter os dois parâmetros, u_4^* e y_{4O}^+ . Os dois parâmetros são obtidos a partir do balanço de massa. O problema é iterativo, a partir de uma estimativa inicial para os valores de u_4^* e y_{4O}^+ calcula-se os perfis de velocidade os quais são integrados na área da tubulação – portanto, o perfil de velocidade calculado não necessita de grande exatidão. O resultado da integração permite obter uma estimativa das velocidades superficiais de gás e líquido. Estes valores de velocidades superficiais são comparados aos valores corretos. Em um processo iterativo, novos valores de u_4^* e y_{4O}^+ são estimados até se obter os valores corretos das velocidades superficiais a partir da integração dos perfis de velocidade. Com isto, o problema fica resolvido e com estes parâmetros pode-se calcular a tensão de cisalhamento na interface, relacionada com o arraste por atrito de película, a partir da equação

$$\tau_i = \rho_g u_4^{*2}. \quad (C.20)$$

Pode-se verificar este método para o experimento de Fonseca. Utilizando os dados apresentados anteriormente, obtém-se

$$u_4^* = 0.0877;$$

$$y_{4O}^+ = 18.347;$$

Os perfis obtidos teoricamente para a fase gás e a fase líquida, comparados com o experimento são apresentados na Figura (C.4):

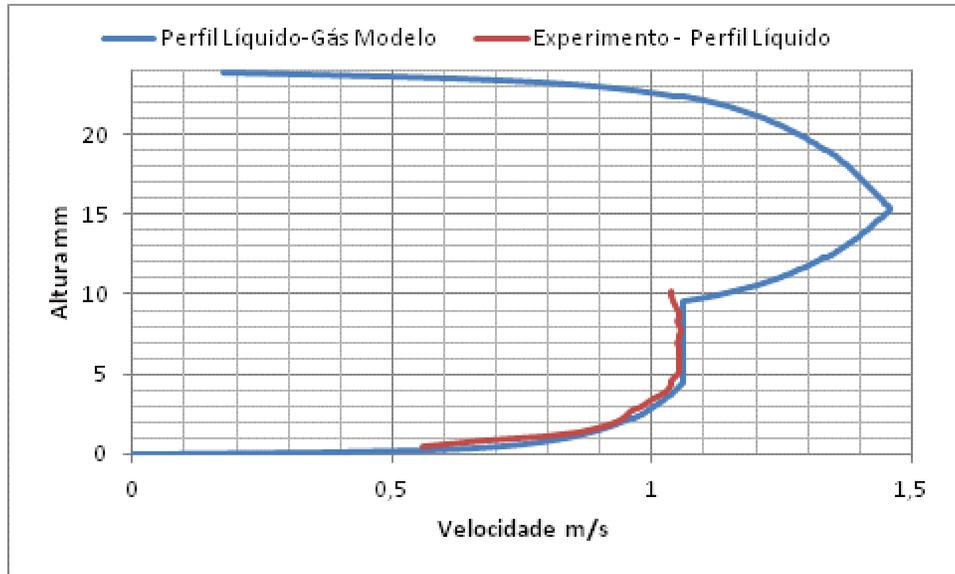


Figura C.4 Comparação perfil experimental com perfil teórico

O valor da tensão cisalhante interfacial que se obtém a partir deste modelo, considerando o caso experimental aqui utilizado, não se distingue de maneira significativa da Equação (3.52) que normalmente é utilizada para o cálculo da tensão cisalhante na interface.

Soria (2009) determinou o perfil de velocidade para o mesmo caso experimental utilizando método numérico VOF e o resultado obtido foi bastante similar ao observado na Figura (C.4). O resultado de Soria é apresentado na Figura (C.5)

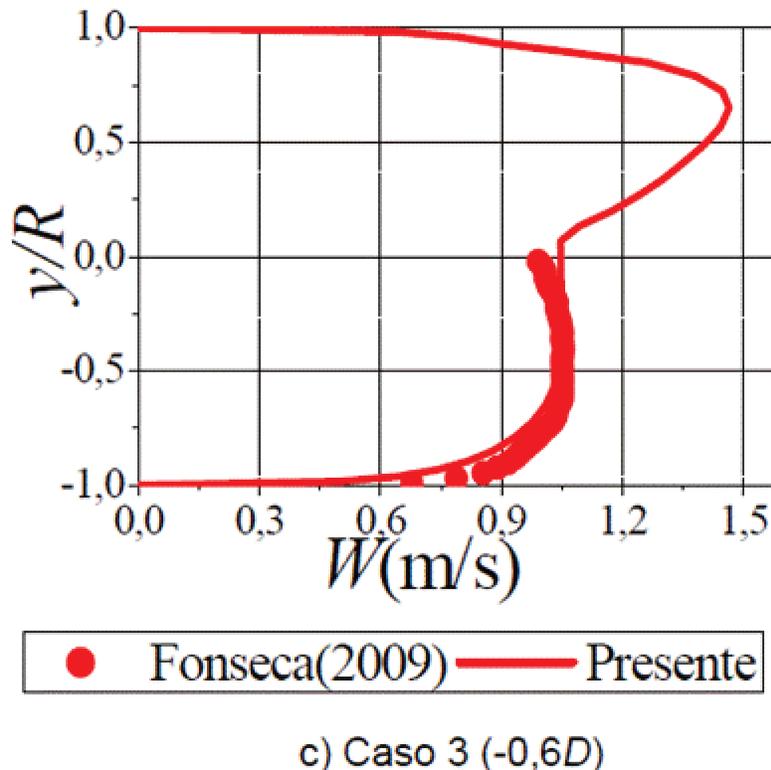


Figura C.5 Comparação perfil experimental com perfil numérico Soria (2009)

Deve-se notar que todo o perfil teórico foi obtido do equacionamento apresentado anteriormente, inclusive o trecho em forma de pistão, que é na verdade uma curva logarítmica. Não foi utilizada nenhuma imposição ad hoc para se obter o perfil de velocidade na forma pistão, isto é meramente um resultado dos perfis logarítmicos. A boa aproximação do perfil teórico e do perfil experimental indica que esta pode ser uma boa abordagem para determinar a tensão cisalhante na interface, claro, sem ainda avaliar os efeitos da interface rugosa.

Para finalizar, deve-se avaliar qual o fator de forma dos perfis de velocidade de cada fase. O fator de forma é dado pela razão $\Gamma = \frac{\langle U^2 \rangle}{\langle U \rangle \langle U \rangle}$. Com o perfil de velocidade obtido pelo modelo aproximado proposto neste trabalho, faz-se integração na área de escoamento da velocidade e da velocidade ao quadrado e com isto se calcula este fator de forma.

Seguem os resultados obtidos a partir do modelo aqui proposto para algumas velocidades superficiais de líquido e gás:

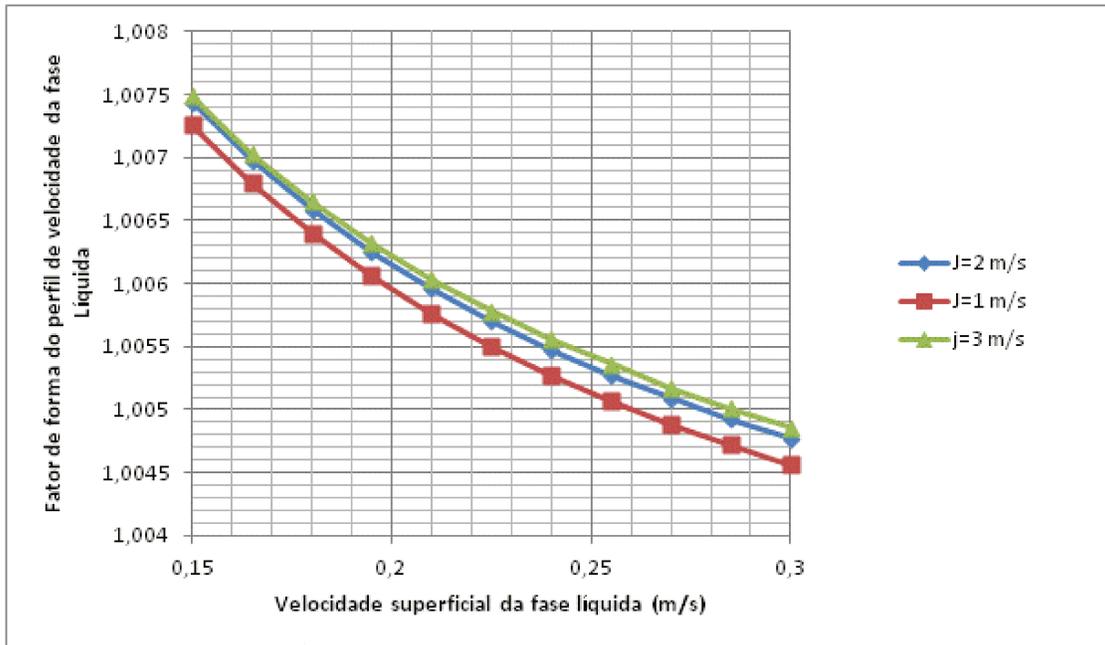


Figura C.6 Fator de forma para a fase líquida

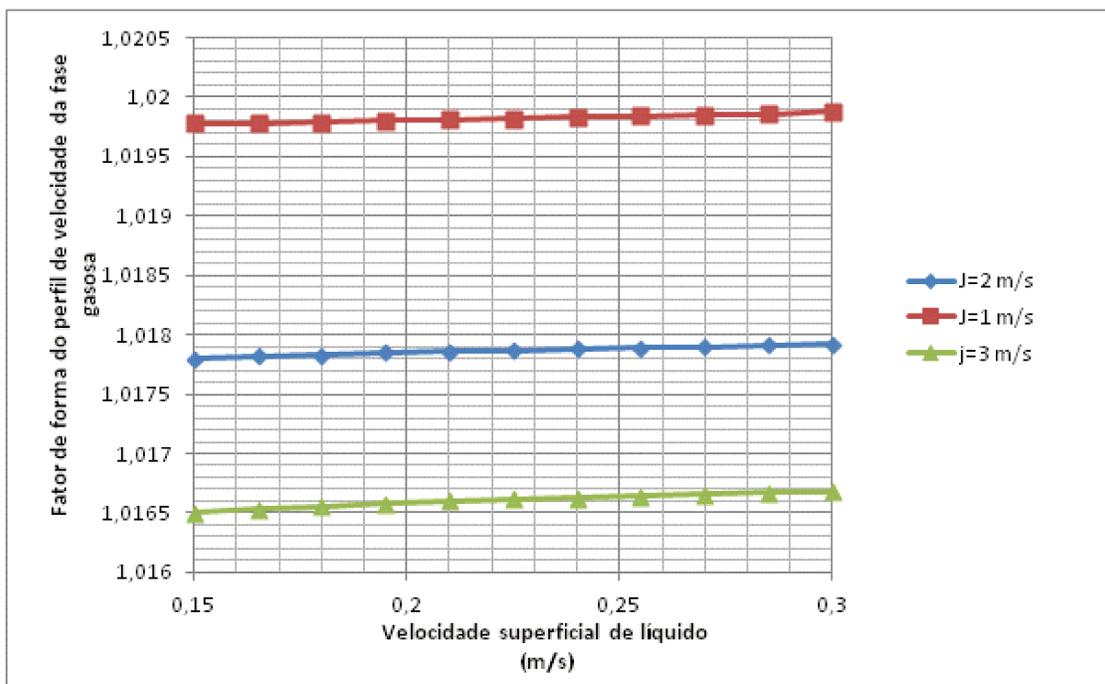


Figura C.7 Fator de forma para a fase gasosa

Como pode ser visto, para o caso turbulento/turbulento este fator de forma é muito próximo de 1, o que indica que não deve ser influente em um modelo de escoamento estratificado transiente.

Deve-se tomar cuidado com estes resultados, o procedimento para o cálculo da tensão cisalhante apresentado aqui só é válido para interface lisa. Para interface rugosa, deverá existir um termo adicional. Infelizmente, este termo adicional, mais difícil de modelar, deve ser comum em *roll-waves*, mais do que no escoamento estratificado estável, pois este tipo de onda, principalmente em regime turbulento, tende a ter uma interface bastante rugosa.