

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR MÁRCIO DA SILVA
MOURA..... E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 14.02.2007

R. Pavanello
.....
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Elaboração de uma ferramenta computacional
para modelagem de próteses e ossos
através da poroelasticidade acoplada

Autor: Márcio da Silva Moura

Orientador: Renato Pavanello

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Elaboração de uma ferramenta computacional para modelagem de próteses e ossos através da poroelasticidade acoplada

Autor: **Márcio da Silva Moura**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2007

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M865e Moura, Márcio da Silva
Elaboração de uma ferramenta computacional para modelagem de próteses e ossos através da poroelasticidade acoplada. / Márcio da Silva Moura. – Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador: Renato Pavanello
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Bioengenharia. 2. Ossos. 3. Prótese. 4. Método dos elementos finitos. I. Pavanello, Renato. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: A computational tool for the modeling of prosthesis and bones using the poroelasticity theory

Palavras-chave em Inglês: Bioengineering, Bones, Prosthesis, Poroelasticity, Finite element, Staggered solution

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Jonas de Carvalho e Paulo Sollero

Data da defesa: 14/02/2007

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Elaboração de uma ferramenta computacional
para modelagem de próteses e ossos
através da poroelasticidade acoplada

Autor: Márcio da Silva Moura

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello



Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Jonas de Carvalho
USP/São Carlos



Prof. Dr. Paulo Sollero
DMC/FEM/UNICAMP

Campinas, 14 de fevereiro de 2007.

Dedicatória

À todos aqueles que lutam por um mundo melhor, que acreditam que homem tem solução e fazem de sua vida uma constante busca pelo bem comum.

“Tudo vale a pena se alma não é pequena.”

Fernando Pessoa

Agradecimentos

- À Deus, pelo dom da vida e por me proporcionar momentos tão felizes.
- À meus pais, João e Marilena, por tanto amor, dedicação e carinho. Pela minha formação humana e por terem cuidado e continuarem cuidando de mim.
- À minha esposa, Jaqueline, por seu companheirismo, paciência e, principalmente por seu amor. Te amo.
- Aos meus irmãos, Alberto e Elaine, por tudo que já passamos juntos e pelo carinho.
- À meu orientador, Renato, por ter me ajudado tantas vezes, por conduzir-me para uma formação sólida, por seu companheirismo e dedicação.
- Ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro ao desenvolvimento do trabalho.
- Aos professores e funcionários do Departamento de Mecânica Computacional e da Coordenação de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da UNICAMP.
- Ao grupo de orientandos do Prof. Renato: Alberto, Ilson, Liliana, Douglas e Gabriel. Pela amizade e ajuda.
- Aos amigos: Elson, Vilson, Flávio, Labaque, Luiz, Aldecir, Fuga, Kaled, Sílvio, Minerinho, Minerão, Amilkar, Marangoni, Rangel, Wallace e outros. Que propiciaram momentos de estudos, ciência e descontração.
- Aos professores Paulo Sollero e Jonas de Carvalho. Por aceitarem o convite de participar da banca de defesa desta dissertação e pela excelente contribuição para revisão deste trabalho.
- À todos aqueles que direta ou indiretamente me ajudaram a conquistar esse objetivo.

Resumo

Moura, Márcio da Silva, *Elaboração de uma Ferramenta Computacional para Modelagem de Próteses e Ossos Através da Poroelasticidade Acoplada*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2007, 115 p., Dissertação (Mestrado).

O modelo poroelástico é aplicado na representação do comportamento físico de um meio contínuo composto por duas fases distintas, uma sólida e outra fluida. A fase sólida está envolta em um domínio fluídico saturado. A matéria fluida presente no sistema pode ser líquida, gasosa ou uma mistura em função do meio a que se pretende estudar. Estruturas ósseas são um bom exemplo de material poroso, pois são constituídas de uma porção sólida, formada por uma estrutura calcificada e outra fluida, formada pelo sangue, gorduras e fluidos ósseos. Neste trabalho propõem-se elaborar uma ferramenta para simulação computacional da poroelasticidade aplicada em ossos, considerando solicitações estáticas e respostas transientes. Da mesma forma esta ferramenta permite a análise sobre próteses inseridas em ossos e sua interação elástica com uma estrutura poroelástica. O modelo utilizado é baseado no trabalho precursor de Maurice A. Biot, que submeteu uma porção de solo em água saturada a cargas de compressão, analisando suas respostas e o comportamento poroso do sistema. A ferramenta computacional foi desenvolvida em ambiente Fortran90. As análises foram realizadas em termos de tensão, deformação, deslocamentos e pressão e as condições submetidas foram baseadas em situações de solicitação disponíveis na literatura. Os resultados proporcionaram o mapeamento das regiões sujeitas a tensões elevadas avaliando o comportamento da interface osso prótese. Esses estudos possibilitam um melhor entendimento do comportamento dinâmico da fase fluida do osso, permitindo que análises mais precisas em próteses implantadas possam ser realizadas.

Palavras chaves: Bioengenharia, Ossos, Próteses, Poroelasticidade, Elementos Finitos, Solução Particionada.

Abstract

Moura, Márcio da Silva, *A Computational Tool for the Modeling of Prosthesis and Bones Using the Poroelasticity Theory*. Campinas: Mechanical Engineering Faculty, State University of Campinas, 2007, 115 p., Dissertation (Master Degree)

The poroelastic model is applied in the representation of the physical behavior of a continuous medium composed by two separate phases: a solid phase and a fluid one. The solid phase is wrapped in a fluidic saturated dominium. The fluid matter in the system may be liquid, gaseous or else a mixture, depending on the medium one intends to study. Bones structures are a good example of a porous material because they comprise a calcified structure and another fluid structure formed by blood, fat and bones fluids. In this paper, it propose to develop a tool for computer simulation of poroelasticity applied to bones, considering static loads and transient responses. Likewise, this tool enables analysis of prostheses inserted in bones and their elastic interaction with a poroelastic structure. The model used is based on the early work of Maurice A. Biot, who submitted a portion of soil in saturated water to compression loads and analyzed its responses and the porous behavior of the system. The computer tool was developed in Fortran90 environment. Analyses were conducted in terms of stress, strain, displacements and pressure. The boundary conditions submitted were based on situations of stress available in the literature. The results enabled to map areas that are subject to high stress so the behavior of the bone / prosthesis interface could be assessed. These studies provided a better understanding of the dynamic behavior of the fluid phase of the bone so more precise analyses of implanted prostheses can be made.

Key words: Bioengineering, Bones, Prosthesis, Poroelasticity, Finite Elements, Staggered Solution.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos do Trabalho	5
1.2	Estrutura do Texto	5
2	Revisão Bibliográfica	8
2.1	Histórico	8
2.2	Aplicações do MEF em Ossos e Próteses	12
2.3	Aplicações da Poroelasticidade Acoplada a Ossos	16
3	Histologia e Estrutura Óssea	21
3.1	Classificação Óssea	21
3.2	Canal de Havers	25
3.3	Remodelamento Ósseo	26
3.4	Próteses Totais	27
3.4.1	Outros Tipos de Próteses	28
4	Formulação Matemática da Poroelasticidade	30
4.1	Equações de Equilíbrio da Fase Sólida	30
4.2	Equações de Equilíbrio da Fase Fluida	36
4.3	Outras Constantes Envolvidas na Formulação Poroelástica	37
4.3.1	Coefficiente de compressibilidade ou coeficiente de Skempton (B) . . .	37
4.3.2	Compressibilidades (k) e (k_u)	38
4.3.3	Porosidade do material (ϕ)	38
4.3.4	Conteúdo de fluido (γ')	38

4.3.5	Coefficiente de Lamé (λ)	39
5	Formulação Numérica	40
5.1	Forma Fraca da Fase Sólida	41
5.2	Formulação para Forma Fluida	45
5.3	Formulação na forma matricial	47
5.4	Equações para o Método Particionado	49
5.5	Acoplamento Elástico-Poroelástico	51
6	Implementação Computacional	53
6.1	Algoritmo para o Problema Particionado	53
6.2	Estrutura do programa MefLab / FORTRAN	55
7	Validação do Modelo e Resultados	62
7.1	Obtenção das Geometrias Biomecânicas	62
7.2	Validação do Modelo - Coluna Poroelástica	64
7.2.1	Comparação com resultados analíticos	69
7.3	Condições de Contorno para o Problema Biomecânico	71
7.4	Modelo Poroelástico do Fêmur	73
7.5	Comparação Modelo elástico com Poroelástico	81
7.6	Modelo Elástico-Poroelástico (Prótese-Fêmur)	83
8	Conclusão	91
A	Formulação Analítica de Biot para o Problema da Coluna Poroelástica	104
B	Elemento Isoparamétrico Quadrilateral Linear	108
C	Programa GID - Pré e Pós-Processamento	112

Lista de Figuras

1.1	Aplicações de sistemas poroelásticos: a)Isolamento aeronáutico, b)Fundação e Rochas, c)Acústica musical ou arquitetônica, d)Modelos ósseos	1
1.2	Principais regiões porosas no osso	2
1.3	Constituintes do meio poroelástico	3
3.1	Classificação óssea.	22
3.2	Aspecto geral de um osso longo. a)Tíbia em corte; b)Detalhe da epífise; c)Detalhe da diáfise.	23
3.3	Detalhe do sistema de Havers.	26
3.4	Esquema de próteses totais implantadas	27
4.1	Componentes de tensão	31
5.1	Meio poroso e condições de contorno	42
6.1	Algoritmo do método particionado	55
6.2	Estrutura da modelagem por elementos finitos	56
6.3	Estrutura do programa principal MefLab	57
6.4	Estrutura da subrotina ReadData	57
6.5	Estrutura da subrotina Solve	58
6.6	Estrutura da subrotina AssembPro	59
6.7	Estrutura da subrotina SolverPoroStructure	60
6.8	Estrutura da subrotina WriteDatatoGid	61
7.1	Modelo do fêmur em extensão db	63
7.2	Superfícies sendo apagadas	64

7.3	Linhas de construção 3D	64
7.4	Contorno planificado	64
7.5	Corte da base e definição das áreas	64
7.6	Malha e condições de contorno para coluna poroelástica. (A)Elemento quadrilateral, (B)Elemento triangular	65
7.7	Resultados dos deslocamentos para o elemento quadrilateral	66
7.8	Resultados das pressões para o elemento quadrilateral	67
7.9	Resultados dos deslocamentos para o elemento triangular	68
7.10	Resultados das pressões para o elemento triangular	69
7.11	Comparação dos deslocamentos para diferentes soluções no topo da coluna	70
7.12	Comparação das pressões para diferentes soluções na base da coluna	71
7.13	Forças aplicadas sobre o apoio de apenas uma perna	72
7.14	Esquema dos esforços sobre a perna	72
7.15	Malha e condições de contorno para o modelo da cabeça do fêmur	74
7.16	Deslocamentos fêmur $\Delta t = 0$	75
7.17	Deslocamentos fêmur $\Delta t = 50$ s	75
7.18	Deslocamentos fêmur $\Delta t = 200$ s	76
7.19	Deslocamentos para o nó 1476	77
7.20	Deslocamentos para o nó 3167	77
7.21	Pressões fêmur $\Delta t = 0,0$	78
7.22	Pressões fêmur $\Delta t = 50$ s	78
7.23	Pressões fêmur $\Delta t = 100$ s	78
7.24	Pressões fêmur $\Delta t = 500$ s	78
7.25	Pressões para o nó 1476	79
7.26	Pressões para o nó 3167	79
7.27	Pressões para o nó 3368	80
7.28	Tensões fêmur $\Delta t = 0,0$	81
7.29	Tensões fêmur $\Delta t = 50$ s	81
7.30	Tensões fêmur $\Delta t = 100$ s	81
7.31	Deslocamentos modelo elástico	82

7.32	Deslocamentos modelo poroelástico	82
7.33	Tensões modelo elástico	82
7.34	Tensões modelo poroelástico	82
7.35	Malha e condições de contorno para o modelo prótese-fêmur	83
7.36	Deslocamentos prótese $\Delta t = 0,0$	84
7.37	Deslocamentos prótese $\Delta t = 50$ s	84
7.38	Deslocamentos prótese $\Delta t = 200$ s	84
7.39	Deslocamentos para o nó 678	85
7.40	Deslocamentos para o nó 3319	85
7.41	Pressões prótese $\Delta t = 0,0$	86
7.42	Pressões prótese $\Delta t = 50$ s	86
7.43	Pressões prótese $\Delta t = 100$ s	87
7.44	Pressões prótese $\Delta t = 500$ s	87
7.45	Pressões para o nó 3369	88
7.46	Pressões para o nó 3693	88
7.47	Tensões prótese $\Delta t = 0,0$	89
7.48	Tensões prótese $\Delta t = 50$ s	89
7.49	Tensões prótese $\Delta t = 200$ s	89
A.1	Coluna Poroelástica	104
B.1	Elemento quadrilateral linear nas coordenadas globais	109
B.2	Elemento quadrilateral linear nas coordenadas locais	109
C.1	Imagem ilustrativa do programa	112
C.2	Organograma do GID no MEF	113
C.3	Organograma do GID no MEF	114

Lista de Tabelas

2.1	Resumo das principais publicações dos séculos XVIII e XIX	9
2.2	Resumo histórico da formalização da teoria poroelástica - século XX	12
2.3	Atuais publicações com a utilização do MEF em ossos - anos 90	14
2.4	Publicações recentes com a utilização do MEF em ossos	16
3.1	Sub sistemas porosos presentes no osso	26
7.1	Propriedades para coluna poroelástica	66
7.2	Propriedades para cabeça do fêmur	75
B.1	Derivadas das funções de forma: elemento quadrilateral linear	108

Nomenclatura

Acrônimos

$gdl(s)$ - grau(s) de liberdade

MDF - Método das Diferenças Finitas

MEF - Método dos Elementos Finitos

CAD - Computational Architecture Design

3D - Três dimensões

2D - Duas dimensões

Pa - Pascal [N/m^2]

SI - Sistema Internacional de Unidades

CAD - Computer-Aided Design

Símbolos

σ_{ij} - tensor de tensões infinitesimais

δ_{ij} - delta de Kroenecker

ε_{ij} - tensor de deformações infinitesimais

E - módulo de elasticidade drenado

G - módulo de elasticidade transversal drenado

ν - coeficiente de Poisson drenado

ν_u - coeficiente de Poisson não drenado

K - módulo volumétrico drenado

K_u - módulo volumétrico não drenado

α - coeficiente de Biot

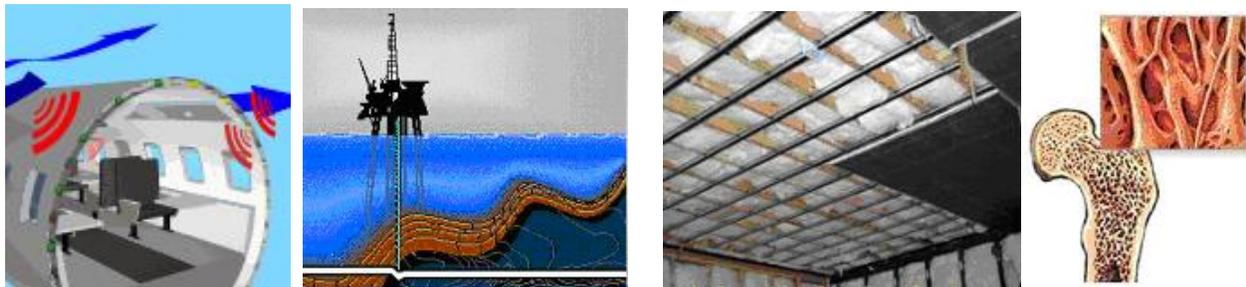
κ - coeficiente de permeabilidade dinâmica

k - permeabilidade específica
 μ - viscosidade do fluido
 ϕ - porosidade
 B - coeficiente de Shempton
 N_1, N_2, N_3 e N_4 - funções de interpolação
 ρ_s - massa específica sólido
 ρ_f - massa específica fluido
 W - função peso do MEF
 ξ, η - coordenadas no espaço isoparamétrico
 Δt - passo de tempo
 Ω - domínio poroelástico
 Γ - contorno poroelástico
 f - força de superfície
 q - fluxo de fluido
 m - massa em um sistema de um grau de liberdade
 n_i - componentes de um vetor normal unitário, $i = 1, 2$ e 3
 t - tempo
 u - deslocamento
 p - pressão
 x, y - coordenadas geométricas no espaço real
 A - área
 $[C]$ - matriz de amortecimento mecânico global
 $[J]$ - matriz jacobiana
 $[K]$ - matriz de rigidez global
 $[L]$ - matriz de acoplamento global
 $[M]$ - matriz de massa global
 $[K_e]$ - matriz de rigidez da parte sólida
 $[A]$ - matriz de acoplamento
 $[K_{af}]$ - matriz de amortecimento fluido
 $[K_f]$ - matriz de rigidez fluída.

Capítulo 1

Introdução

Estruturas contendo materiais poroelásticos são amplamente utilizadas na engenharia. Na área de vibro-acústica os materiais porosos são usados devido às suas propriedades de absorção do som e suas características de amortecimento. Pode-se citar os materiais utilizados como isolantes sonoros em veículos, teatros e casas de espetáculos, indústrias e estúdios musicais (da Silva Jr., 2003); em amortecimento de vibrações, em automóveis, eletroeletrônicos e brinquedos; e estruturas aeroespaciais (Lamary et al., 2001). O solo também é um material poroelástico, muito estudado na geologia na formação de lençóis petrolíferos, no projeto de fundações de estruturas da engenharia civil em geral (Lewis and Schrefler, 1987). Além destas áreas clássicas, destacam-se as aplicações em bioengenharia, em particular na modelagem de estruturas ósseas (Cowin, 2001). Na figura 1.1 mostram-se aplicações que envolvem meios poroelásticos.



a)(QinetiQ, 2006)

b)(ICA, 2006)

c)(ASC, 2006)

d)(Liftoff, 2006)

Figura 1.1: Aplicações de sistemas poroelásticos: a) Isolamento aeronáutico, b) Fundação e Rochas, c) Acústica musical ou arquitetônica, d) Modelos ósseos

Na bioengenharia, os ossos podem ser representados pelo modelo poroelástico, pois nestes se encontram formações de estruturas porosas em um meio saturado. Basicamente, o tecido ósseo apresenta duas escalas principais de porosidade, formada pelo osso cortical, mais denso e compacto e o osso trabecular, em forma de rede. A figura 1.2 apresenta essas regiões.

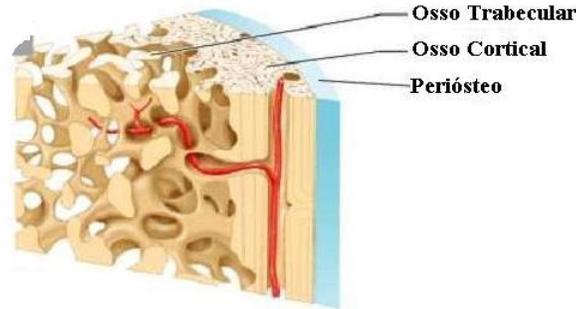


Figura 1.2: Principais regiões porosas no osso (Benito, 2005)

A porosidade presente nas trabéculas, na região trabecular sólida, é a mesma da parte cortical, todavia, a estrutura em rede confere uma porosidade relativa ao sistema de trabéculas. Esta porosidade relativa é devido às trabéculas estarem em banho em um sistema saturado formado pela medula óssea.

O fluido contido no osso está submetido a um constante movimento; este conduz minerais e proteínas às células e à estrutura sólida do osso (Junqueira and Carneiro, 2004). O fluido exerce resistência às cargas mecânicas, seu comportamento viscoso tende a amortecer os esforços, desta forma o estudo dos deslocamentos em um modelo que leve em conta a presença de poros tende a uma maior flexibilidade do meio, se comparado a modelos puramente elásticos.

A modelagem do osso foi, e é, feita por muitos pesquisadores usando modelos elásticos. Neste trabalho, a teoria da poroelasticidade acoplada é utilizada. Esta teoria visa modelar as interações dos campos de deformação e o fluxo de fluido nos meios porosos.

Na figura 1.3 mostra-se um esquema padrão do meio poroelástico, onde se pode ver a superposição de duas fases, uma sólida e outra líquida. O precursor destes estudos foi

Biot (Biot, 1935; Biot, 1941; Biot, 1972), pesquisador belga que desenvolveu uma técnica de adensamento tridimensional, baseando-se nas hipóteses da mecânica do contínuo e nas teorias de homogenização.

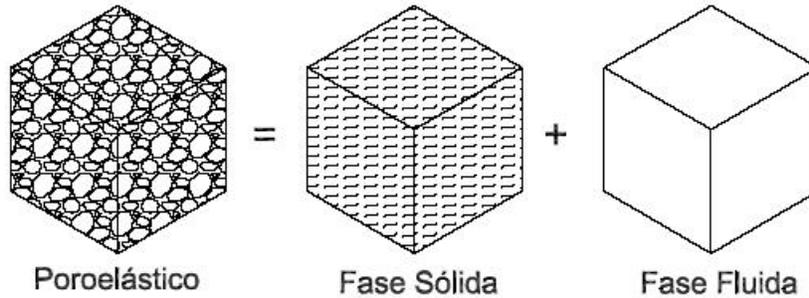


Figura 1.3: Constituintes do meio poroelástico
(da Silva Jr., 2003)

Por meio de suas características biológicas, o osso tende a se acomodar e moldar-se em função dos carregamentos sofridos (Papathanasopoulou et al., 2002). De uma forma geral o osso pode ser considerado como um material heterogêneo e anisotrópico, dificultando assim a modelagem de sua estrutura.

Outra característica óssea é sua capacidade de remodelar-se, que pode ser basicamente de dois tipos, a externa, que pode ocorrer após algum rompimento ou fratura do osso, por exemplo, a formação de "calo ósseo". E, a interna, onde o organismo tende a fortificar regiões mais solicitadas ao carregamento, migrando substâncias de regiões menos carregadas. Este tipo de remodelamento baseia-se no adensamento ósseo em direções e regiões de maior solicitação (Cowin, 1976).

Devido ao comportamento transiente do elemento poroelástico, as equações governantes das deformações, atuantes neste sistema, tornam-se parabólicas. Além das características puramente poroelásticas o osso também apresenta um comportamento visco-elástico, o que agrega complexidade ao modelo. Com o advento dos computadores e dos métodos numéricos, as resoluções destes problemas tornaram-se mais viáveis.

O modelo numérico através do método dos elementos finitos permite a solução de uma

infinidade de problemas desta área, tornando-se uma ferramenta indispensável nos estudos realizados. Outros métodos numéricos podem ser citados, como dos volumes finitos, diferenças finitas ou elementos de contorno, cada qual com sua importância e aplicabilidade. O uso do método dos elementos finitos para análise de estruturas biomecânicas pode ser encontrado em diversos artigos da área médica e de engenharia, dentre eles pode-se citar os trabalhos de Wang e Rudman (Wang et al., 1998; Rudman et al., 2006). Nestes trabalhos evidencia-se a importância de conhecimentos inter-disciplinares, sendo que a participação de pesquisadores de diferentes áreas ajudam no complemento das informações.

Além da análise numérica existem outras formas de análise, como por exemplo, a experimental, cita-se a fotoelasticidade, fotopolimerização e extensimetria. Os processos experimentais, muitas vezes, tornam-se caros e dependem muito tempo de execução. Um exemplo disso é análise realizada sobre implantes e próteses em pacientes após a cirurgia. Pelo método experimental, o paciente seria submetido a seções demoradas de exames e testes, o que poderia ocasionar possíveis complicações. Já pelo método numérico pode-se conseguir resultados confiáveis, desde que o modelo esteja devidamente aferido e testado, sem a dependência de procedimentos dificultosos. Não há necessidade do paciente ficar por horas sendo examinado e é possível ter um melhor conhecimento do comportamento do sistema como um todo, inclusive em locais de difícil acesso para medição. Neste caso os maiores desafios concentram-se na área de validação da cada modelo biomecânico específico.

Neste trabalho a discretização do problema poroelástico é realizada no espaço bidimensional, sobre o comportamento mecânico interno das tensões das fases do material, admitindo a hipótese do material ser isotrópico. As cargas têm comportamento quase-estático, tendendo a se estabilizar no tempo, o que caracteriza o problema como transiente ou parabólico.

Elaborou-se um simulador capaz de avaliar os efeitos e o comportamento do tecido ósseo acoplado a uma prótese sujeita a determinados tipos de esforços. A ferramenta obtida pode auxiliar na elaboração de planos de prevenção de traumas e complicações pós-cirúrgicas. O simulador possibilita visualizar as regiões de maior risco de fraturas e o campo de pressões para as diferentes regiões. Além disso, o modelo poroelástico pode constituir uma poderosa

ferramenta para o estudo do desempenho de atletas, tratamentos em ortopedia entre outros.

O simulador pode ser aplicado também no auxílio ao projeto de próteses de alto desempenho, permitindo o avanço e consolidação da área de equipamentos ortopédicos.

Convém ressaltar, que a etapa de validação dos modelos é relevante para uma simulação desta natureza. Vários testes *in vitro* e posteriormente *in vivo* são necessários para a caracterização dos materiais e de suas propriedades. Nesta pesquisa, o foco está no desenvolvimento do modelo e, dados encontrados na literatura são usados para mostrar a validade e as potencialidades do mesmo.

1.1 Objetivos do Trabalho

Os objetivos globais deste trabalho são: A investigação e implementação de estratégias de solução numérica transiente para problemas de acoplamento poroelástico; criar uma ferramenta de análise que auxilie o projeto de sistemas acoplados, osso-prótese e seus esforços; aplicação em projetos com geometrias bidimensionais; conhecimento e aprofundamento dos problemas da biomecânica.

Os objetivos específicos deste trabalho são: o desenvolvimento da ferramenta computacional usando programação estruturada em linguagem Fortran90; aplicação e estudos de casos em meios elástico e poroelástico; construir uma ferramenta computacional que seja disponível à comunidade científica e auxilie médicos e engenheiros no estudo de implantes e próteses; integrar o módulo de processamento matemático com um sistema de interface gráfica e de visualização.

1.2 Estrutura do Texto

A estrutura do texto foi organizada de modo a transmitir ao leitor as características dos meios poroelásticos, o desenvolvimento histórico dos modelos, apresentando as estruturas ósseas e suas classificações. Relaciona a teoria poroelástica à análise de estruturas ósseas, equacionando o problema físico e utilizando uma ferramenta matemática para solucioná-lo.

Faz algumas investigações e fecha com as conclusões e discussões da pesquisa. O trabalho foi ordenado da forma como segue.

No Capítulo 1 é realizado uma introdução ao tema da dissertação com uma breve explanação sobre a poroelasticidade, a aplicação desta teoria na análise de ossos e a motivação para realização deste trabalho. Também são colocados os objetivos principais e secundários para orientação da linha de pesquisa e um resumo da estrutura do texto.

O Capítulo 2 traz a Revisão Bibliográfica do tema, apresentando uma visão da área de pesquisa e uma síntese de dados, testes e trabalhos já publicados sobre o assunto, além de trazer um histórico sobre a teoria poroelástica com os principais autores que se destacaram em seu tempo. Este ítem também define como o assunto vem sendo abordado nos dias atuais.

No Capítulo 3 faz-se uma apresentação dos conceitos básicos relativos aos aspectos biológicos deste trabalho, apresentando os ossos, sua classificação, divisões e subdivisões. Elucida qual a relação entre osso e o modelo poroelástico, apresentando alguns tipos de prótese e aplicações.

No Capítulo 4 são apresentadas as equações governantes para o domínio elástico e para o domínio fluido. A forma com a qual se dá o acoplamento entre os dois também é exposta. Constantes poroelásticas são apresentadas, de modo a conhecer-se os fatores que determinam as características físicas dos materiais estudados.

No Capítulo 5 estão os métodos de resolução numérica propostas para o problema de acoplamento poroelástico. Tem-se uma breve exposição sobre os elementos finitos implementados e em seguida são apresentados os métodos de análise.

O Capítulo 6 fornece uma visão geral sobre a programação em Fortran90, o software de solução MeFLab e as estratégias de simulação acoplada dentro do programa.

O Capítulo 7 contém exemplos analisados com as estratégias de solução desenvolvidas ao longo do trabalho. São usados sistemas biomecânicos com estruturas simples tipicamente presentes em problemas médicos.

No Capítulo 8 são apresentadas as considerações e conclusões finais sobre o trabalho desenvolvido. Também são indicadas propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Neste capítulo são apresentados os principais trabalhos que favoreceram o equacionamento e entendimento dos sistemas porosos e quais suas influências nas pesquisas atuais. A revisão é apresentada dentro de uma perspectiva histórica e das aplicações numéricas na área de bioengenharia.

2.1 Histórico

As formulações teóricas sobre os meios porosos não são recentes. Têm-se datado de 1762 os primeiros estudos sobre fundações de mecânica dos solos. O pesquisador Euler definiu, pela primeira vez, o que é um poro, mas sua publicação não trouxe grandes contribuições na análise da poroelasticidade. Mais tarde, vários engenheiros e cientistas contribuíram para o progresso na descrição da estrutura porosa. Uma das maiores contribuições para a teoria da porosidade foi de Woltman, entre o final do século XVIII e início do século XIX (Woltman, 1794) apud (de Boer, 1996). Ele separou o solo em 4 tipos diferentes e verificou as diferentes pressões a que estavam submetidos. Suas principais contribuições foram desenvolver o conceito de frações de volume e a teoria da heterogeneidade dos corpos compostos.

O século XIX foi um dos grandes berços de pesquisadores que formalizaram várias leis fundamentais, dentre estes cita-se: Cauchy, que em 1820 formalizou a teoria básica para determinação das tensões mecânicas sobre meios isotrópicos contínuos (Brown, 2004); e Dellese, Fick e Darcy que por volta da metade do século XIX apresentaram as leis fundamentais sobre escoamento em meios porosos (de Boer, 1996). Eles propuseram modelos expressos por

equações diferenciais, que puderam ser aplicados aos meios porosos. Em 1871 o matemático e físico Josef Stefan criou a teoria da cinemática dos gases, baseado nas equações de hidrodinâmica da mistura de gases de Maxwell. Stefan formulou um conjunto de equações diferenciais que tornaram-se um passo importante para a formulação matemática dos gases (Stefan, 1871) apud (de Boer, 1996). Todos esses trabalhos contribuíram para o aumento do conhecimento e da base matemática para o estudo dos materiais com vazios e dos sólidos porosos em fluido saturado. Na tabela 2.1 apresenta-se um resumo de algumas das principais publicações do período inicial.

Tabela 2.1: Resumo das principais publicações dos séculos XVIII e XIX

Ano	Autor	Contribuição	Teoria
1794	Woltman	Desenvolveu o conceito de frações de volume e a teoria da heterogeneidade dos corpos compostos	Meios Porosos
1820	Cauchy	Determinação da tensão mecânica em meios elásticos isotrópicos	Elasticidade
1848	Delesse	Composição de rochas e solo	Meios Porosos
1855	Fick	Conceito de difusão	Meios Porosos
1856	Darcy	Leis fundamentais sobre o gradiente de fluxo da água	Escoamento em Meios Porosos
1871	Josef Stefan	Cinemática dos gases	Gases

Em meados do século XX, entre os anos de 1914 e 1934, os professores Paul Fillunger e Karl Terzaghi estudaram o fenômeno físico do sólido poroso em meio ao líquido saturado (de Boer, 1996). Eles fizeram várias investigações e experimentos para a determinação dos fatores que influenciavam os esforços sobre um corpo poroso. Suas pesquisas tornaram-se base para os estudos futuros de Terzaghi sobre a deformação do sólido poroso e conseqüentemente a formulação da teoria da consolidação. A teoria da consolidação tornou-se a base para os estudos de mecânica dos solos e a base para o cálculo de fundações na área de engenharia civil.

Seguindo a linha de pesquisa de seus antecessores, em 1935, o engenheiro elétrico, de minas e filosofo belga Maurice A. Biot generalizou a teoria da consolidação, proposta por Terzaghi, estendendo-a para o caso tri-dimensional e estabelecendo equações válidas para quaisquer cargas variando no tempo (Biot, 1935). Biot, em sua formulação, propõe uma

série de constantes derivadas das equações gerais e que se tornam apropriadas ao cálculo de modelos poroelásticos. O modelo teórico da poroelasticidade, contemporânea, é conhecida como modelo de Biot. Depois de seu trabalho de 1935 ele continuou a pesquisar sobre o comportamento da fase fluida do solo e de suas interações. Em seu artigo de 1941 publicou proposições a respeito da consolidação, de modo mais geral, apresentado o modelo tridimensional (Biot, 1941).

Já em 1956, com uma grande experiência em testes, Biot publicou um artigo sobre o equacionamento de ondas nos meios porosos (Biot, 1956). Neste artigo são apresentadas as teorias básicas da propagação de ondas em meios tridimensionais porosos e a dissipação neste meio. Um pouco depois, com as técnicas numéricas em expansão, Biot publicou sobre as deformações finitas nos meios porosos, introduzindo sua teoria no equacionamento numérico das deformações presentes nestes meios (Biot, 1972). Para ter-se idéia de como a formulação de Biot é ainda atual, Haire e Langton aplicaram estas equações no estudo da propagação ultrasônica em ossos (Haire and Langton, 1997).

De posse do conhecimento das equações apresentadas por Biot, os cientistas Rice e Cleary propuseram novas variáveis, que segundo eles, descreveriam melhor o comportamento poroelástico para o solo e rochas. Eles retrabalharam as equações da consolidação e apresentaram propriedades físicas porosas de meios rochosos mensuradas experimentalmente em laboratório. Outra contribuição deste trabalho foi a relação apresentada entre deformação e pressão e, ainda a formulação do campo de acoplamento deformação-difusão (Rice and Cleary, 1976).

Desde os anos 70 muitas análises puderam ser desenvolvidas sobre as formulações clássicas de Biot e Rice & Cleary, mas em 1988 o estudo desenvolvido por Detournay possibilitou uma apresentação clara das idéias de seus antecessores, desenvolvendo um trabalho bibliográfico rico de informações e muito didático (Cheng and Detournay, 1988). Ele também retrabalhou os equacionamentos anteriores, introduzindo o conceito de variação de volume e realizando o acoplamento no processo deformação-difusão. São apresentados exemplos numéricos e testes com diferentes cargas de excitação.

Os pioneiros na análise da poroelasticidade pelo método dos elementos finitos foram Sandhu e Wilson, que utilizaram as técnicas e equações do modelo poroelástico para análise da infiltração em meios elásticos (Sandhu and Wilson, 1969). Na bioengenharia, data-se de 1972 a primeira aplicação do método dos elementos finitos. O trabalho de Ribichy foi aplicado na análise estrutural óssea, utilizando um elemento isotrópico elástico (Rybicki et al., 1972). Outro trabalho de, Brekelmans, realizado por um grupo holandês, também preocupou-se em analisar a resposta óssea a cargas mecânicas (Brekelmans et al., 1972).

Também no ano de 1972, com muitos pesquisadores interessados em aplicar o método dos elementos finitos a problemas médicos e descobrir as relações entre materiais biológicos e reabilitação, Nowinski publicou um artigo com um estudo sobre a concentração de tensões na cavidade cilíndrica óssea utilizando material poroelástico (Nowinski, 1972), mas anterior a isso o próprio Nowinski e Davis fizeram um modelo de crânio humano utilizando uma casca poroelástica esférica, aplicando cargas quase-estáticas (Nowinski and Davis, 1970).

Alguns nomes mais relevantes atualmente na aplicação da poroelasticidade acoplada na análise de estruturas ósseas são Taylor, Simon, Cowin, Wang, Doblaré entre outros. Muitos desses autores vem desenvolvendo uma grande base fenomenológica do remodelamento, fratura e recrescimento ósseo (Taylor et al., 1996; Simon, 1992; Cowin, 1999; Wang et al., 1999; Doblaré et al., 2002).

Segue, na tabela 2.2, resumo dos principais nomes na formulação poroelástica e de elementos finitos, suas contribuições e datas relevantes.

Tabela 2.2: Resumo histórico da formalização da teoria poroelástica - século XX

Ano	Autor	Contribuição	Teoria
1935	Biot	Poroelasticidade Acoplada	Poroelasticidade
1960	Clough	Elementos discretos	MEF
1969	Sandhu	Pioneiro na aplicação do MEF para análise poroelástica	Poroelasticidade
1972	Ribichy	Primeiras análises estruturais óssea	Biomédica
1972	Nowinski	Estudo sobre a concentração de tensões na cavidade cilíndrica óssea	Poroelasticidade óssea
1976	Rice & Cleary	Campo de acoplamento deformação-difusão	Poroelasticidade
1999	Cowin	Resumo da teoria poroelástica aplicada a ossos	Poroelasticidade óssea

2.2 Aplicações do MEF em Ossos e Próteses

Desde o surgimento do MEF, muitos médicos interessados em entender o comportamento biomecânico dos ossos, aliaram seus estudos, biológicos e comportamentais às ferramentas numéricas. Isso contribuiu para uma revolução da aplicação dos métodos numéricos, pois o osso, além de ser um componente vivo, também apresenta características estruturais, análoga aos metais. Neste sentido muitos grupos de pesquisa foram formados, nos Estados Unidos, Inglaterra, Espanha, Portugal, Índia etc, que contribuíram para o embasamento bibliográfico e científico do assunto.

Um trabalho muito interessante foi o de Sim, que fez um estudo das zonas de fraturas na cabeça do fêmur utilizando a distribuição de deformações (Sim et al., 1995). Ele também avaliou os esforços e possíveis fraturas com dois diferentes tipos de implantes. Seus resultados de tensão foram analisados com base na experiência clínica, no qual se confirmaram tendências observadas em pacientes com implantes.

Utilizando quatro amostras de diferentes modelos protéticos Taylor investigou através do método dos elementos finitos o comportamento dos deslocamentos à solicitação de duas cargas distintas e dois modelos: o primeiro linearmente elástico e o outro com características plásticas. Ele também fez um estudo para investigar a variação da rigidez do osso trabecular e seu comportamento a tais carregamentos (Taylor et al., 1995). Os resultados foram

comparados com exames clínicos e apresentaram-se equivalentes aos do MEF. Seus estudos foram muito importantes para a análise do osso trabecular e puderam estimar a acomodação das próteses nesses meios e as possíveis fraturas devido a essa acomodação.

Com a intenção de verificar que tipo de solicitação predominava sobre o osso, Taylor desenvolveu um estudo utilizando MEF e radiologia sobre o fêmur (Taylor et al., 1996). Com o MEF ele simulou os esforços sobre as juntas e respostas musculares e, com a análise radiológica observou a deflexão de um osso vivo na condição de um indivíduo em pé. Seus estudos demonstraram a tendência à resistência compressiva da cabeça do fêmur e como a diáfise distribui este carregamento sobre as demais seções ósseas. Ele comparou os resultados testados e verificou a semelhança dos comportamentos de deflexão da análise de elementos finitos e radiológica.

Em 1998 o grupo de pesquisadores liderado por Wang realizou um estudo sobre os implantes "Gamma nail", um tipo de implante que é inserido normalmente no fêmur com muitas fraturas na intenção de unificar suas partes. Em seus estudos, eles levaram em conta a não linearidade óssea, admitindo diferentes valores de módulo de elasticidade ao longo da geometria do fêmur, pretendendo simular também o osso trabecular. Os resultados, sobre os dois tipos de fraturas analisados, apresentaram altos valores de tensão sobre os componentes do implante, o que identifica solicitações maiores, sobre próteses, para maiores níveis de fraturas (Wang et al., 1998). Na tabela 2.3 apresenta-se um resumo das publicações desta área na década de 90.

Com o surgimento de novas próteses e implantes, a necessidade de se investigar seu desempenho tornou-se inevitável, por isso que Tai investigou o comportamento das próteses "cervico-trochanteric" comparando-as com as prótese padrão e com as prótese porosas (Tai et al., 2003). Suas análises são muito significantes no sentido da adaptação desses tipos de próteses, tendo as tensões refletido bem tais distribuições.

Uma das maiores fontes de estudo e tentativas de simulação concentram-se no osso trabecular. Seu comportamento totalmente anisotrópico, sua geometria não uniforme, sua porosi-

Tabela 2.3: Atuais publicações com a utilização do MEF em ossos - anos 90

Ano	Autor	Contribuição	Teoria
1994	Jacobs	Instabilidade numérica no remodelamento ósseo	MEF - fêmur
1995	Sim	Estudo das zonas de fraturas na cabeça do fêmur	MEF - fêmur e próteses
1995	Taylor	Análise do osso trabecular e acomodação protética	MEF - fêmur e próteses
1996	Taylor	Análise óssea com MEF e radiologia	MEF - fêmur
1996	Müller	Propriedades mecânicas nas trabéculas	MEF - Osso trabecular
1998	Wang	Estudo sobre os implantes "Gamma nail"	MEF - fêmur e implantes

dade e densidade variável e fluidos com características hora compressível, hora não, tem gerado publicações significativas. Dentre elas, cita-se a de Müller e Rüeegsegger, que fizeram um estudo sobre as propriedades mecânicas e a estrutura trabecular (Müller and Rüeegsegger, 1996); e a de Bayraktar e Keaveny, que fizeram um estudo sobre os campos de deformação e os mecanismos do comportamento mecânico desse tipo de osso (Bayraktar and Keaveny, 2004). Estes estudos utilizam o MEF como fonte de análise.

Apesar de não ter utilizado o MEF, Gibson realizou um estudo numérico minucioso do comportamento dos materiais de alta porosidade, dentre eles o osso trabecular, levantando curvas de tensão *versus* deformação e analisando as diferentes respostas destes materiais (Gibson, 2005).

Uma boa referência apresentando um apanhado geral da aplicação do MEF em análise de ossos e próteses foi publicado por Brown, seu trabalho traz revisões teóricas e diferentes modelos de próteses (Brown, 2004).

Existem inúmeros trabalhos com estudos sobre o fêmur e sua análise pelo MEF, todos contendo contribuições para o melhor entendimento de seu funcionamento e caracterização de suas propriedades. O trabalho de Wei apresenta um estudo sobre tais propriedades e acopla o estudo sobre o osso da bacia (Wei et al., 2005). Outro trabalho recente foi o de Kayabasi e Erzincanli, que fizeram um estudo sobre alguns tipos de próteses analisando suas

tensões e projeto (Kayabasi and Erzincanli, 2006). A contribuição de Rudman apresenta uma discussão sobre as cargas majoritárias atuando sobre o fêmur devido ao peso próprio do corpo (Rudman et al., 2006). Taylor em 2005 publicou um trabalho sobre a análise com MEF em próteses de juntas e sua influência sobre a cabeça do fêmur (Taylor, 2005). O trabalho de Taylor serviu de base para as análises feitas por Gupta, que estudou o remodelamento da cabeça do fêmur com diferentes tipos de prótese, devido sua acomodação e características geométricas (Gupta et al., 2006).

O remodelamento ósseo tem sido muito pesquisado, pois através do conhecimento deste fenômeno pode-se prever a distribuição e densidade óssea, bem como a resposta a determinadas cargas, assim Cowin formulou a teoria do remodelamento ósseo com base na teoria dos materiais porosos (Cowin, 1976; Hegedus and Cowin, 1976). De um modo diferente Jacobs, utilizando a técnica dos elementos finitos, fez um estudo sobre a instabilidade numérica na simulação do remodelamento ósseo com um modelo simplificado do fêmur (Jacobs et al., 1995).

Outros trabalhos sobre o remodelamento foram os de Garcia e Doblaré, que aplicaram o MEF na análise de um fêmur com diferentes tipos de implantes e demonstraram como o remodelamento é uma importante ferramenta para o projetos de próteses (García et al., 2002; Doblaré et al., 2002). Já Fancello estudou o remodelamento ósseo no contorno de próteses através da otimização topológica (Fancello, 2003). Na mesma linha Wide publicou um estudo sobre o remodelamento ósseo no contorno de implantes e próteses (Wide et al., 2003).

Cheung estudou as tensões sobre o implante de fêmur, comparando resultados em elementos finitos e experimental. Sua metodologia experimental e suas análises resumem bem como os modelos numéricos podem se aproximar da realidade e, como o MEF pode ser uma poderosa ferramenta para a concepção de projeto e estudos científicos (Cheung et al., 2004). Recentemente Anderson publicou um estudo com modelo 3D sobre os ossos curtos das mãos e sua junta com o osso radio, seu modelo apresenta a distribuição das tensões e o comportamento deste tipo de osso e estuda as fraturas decorrentes das solicitações (Anderson et al., 2004). Na tabela 2.4 mostra-se um resumo das publicações mais recentes encontradas sobre

este t3pico.

Tabela 2.4: Publica33es recentes com a utiliza33o do MEF em ossos

Ano	Autor	Contribui33o	Teoria
2002	Doblar33, et al.	Remodelamento 33sseo	Remodelagem MEF
2003	Tai	Comportamento das pr33teses "cervico-trochanteric"	MEF - f33mur e pr33teses
2004	Cheung, et al.	Compara33o entre MEF e experi-mental - an33lise das tens33es	MEF - osso e pr33teses
2004	Bayraktar	Campos de deforma33o do osso tra-becular	MEF - osso trabecular
2005	Taylor	An33lise sobre pr33teses de juntas	MEF - f33mur e pr33teses
2006	Gupta, et al.	Remodelamento 33sseo	MEF - f33mur

2.3 Aplica33es da Poroelasticidade Acoplada a Ossos

Desde que Biot formulou a teoria b33sica da poroelasticidade e o estudo dos materiais porosos, que em sua concep33o fora aplicada ao solo e rochas, pesquisadores perceberam que esta mesma teoria poderia ser aplicada no estudo dos ossos. Sua estrutura porosa em um meio saturado flu33ido, 33 muito bem representada por esta formula33o.

Os estudos realizados com modelos el33sticos foram muito importantes para a modelagem da parte s33lida poroel33stica, pois os resultados experimentais e num33ricos desenvolvidos, por exemplo por Ashman, Cowin e Williams, possibilitaram embasamento para aplica33o porosa (Ashman, 1988; Cowin, 1989; Williams, 1992). Quanto aos trabalhos onde foram levantadas as caracter33sticas flu33idicas do osso citam-se os de Hughes, Sakkers e Grimm, que estudaram o sistema de vasculariza33o do osso, a toler33ncia da press33o hidr33ulica na cavidade medular e mediram a permeabilidade no osso trabecular, respectivamente (Hughes et al., 1986; Sakkers et al., 1995; Grimm and Williams, 1997). Percebe-se que as ferramentas experimentais s33o muito utilizadas para an33lise do comportamento flu33ido e estrutural dos ossos. Tais an33lises

tendem a descobrir parâmetros ou interações poroelásticas, como é caso de Qin que aplicou pressão oscilante sobre a região medular do osso, investigando a adaptação da estrutura e sua interação a região cortical (Qin et al., 2003b). Qin também fez um estudo sobre a micro estrutura e porosidade óssea utilizando técnicas de microscopia (Qin et al., 2003a). Já Pakula construiu um modelo celular, baseado no comportamento experimental ósseo de alta porosidade (Pakula et al., 2004).

No decorrer dos anos pesquisadores desenvolveram ferramentas para obter precisão sobre os valores dos parâmetros poroelásticos dos ossos. Os trabalhos de Simon, Young, Morgan, Dong e Hellmich apresentam estudos sobre o modelo multifásico poroelástico, parâmetros da poroelasticidade anisotrópica do osso, a relação entre módulo de elasticidade e densidade de material, a dependência entre os fatores de porosidade e de elasticidade transversal isotrópica no fêmur e a influência dos parâmetros drenados e não drenados na patologia óssea, respectivamente (Simon, 1992; Young and Kohles, 2001; Morgan et al., 2003; Dong and Guo, 2004; Hellmich and Ulm, 2005). Todos eles preocuparam-se em mapear problemas e caracterizar parâmetros.

Apesar de não ter estudado o fenômeno poroelástico em ossos, o trabalho de Cui, traz uma interessante formulação para um elemento espacial poroso (Cui et al., 1997). Seus estudos aplicados ao modelo de elementos finitos foi bem detalhado e serve como base para o equacionamento poroso. O trabalho de Göransson, que também não estudou o fenômeno no osso, apresenta o estudo sobre acústica com propagação de ondas utilizando o MEF em meios porosos, com elemento tridimensional. O texto traz o equacionamento acústico, apresenta modelos bem representativos e tem um resumo bibliográfico muito relevante (Göransson, 1998). A acústica é um fenômeno muito relacionado ao estudo de materiais poroelásticos, além dos já citados, Schanz e Busse fizeram um estudo sobre o comportamento acústico em placas de material poroso (Schanz and Busse, 2004).

As preocupações com o entendimento da fenomenologia no estudo dos materiais porosos, em bioengenharia, geraram uma gama de pesquisas voltadas ao entendimento dos efeitos físicos destes materiais. Deste modo Fritton publicou um artigo sobre o fenômeno de interação

entre cargas mecânicas, fluxo sanguíneo e fluxo interno (Fritton et al., 2001). Neste trabalho pôde-se ter noção da atuação da dupla porosidade no meio ósseo. Em alguns trabalhos esta dupla porosidade é simplificada pelo método da homogenização, como é o caso de Terada (Terada et al., 1998). O modelo proposto por Xia e Zhang traz um estudo sobre o fluxo de fluido através do MEF e aplica seus estudos à fratura deste meio, combinando as análises com elementos unidirecionais infinitos, além de dedicar uma parte do seu artigo ao equacionamento da dupla porosidade (Xia and Zhang, 2006). Recentemente Cowin apresentou a formulação para o tensor anisotrópico poroelástico, que pode ser aplicado ao modelo ósseo, apesar de ser um estudo fenomenológico, ele traz um estudo profundo e compara seu modelo a outros modelos (Cowin, 2004).

Outro aspecto interessante refere-se à estimação das propriedades porosas, por isso (Smit et al., 2002) realizaram um trabalho de caracterização do osso cortical através de um levantamento bibliográfico e fez a aplicação das equações de Biot e Detournay sobre as constantes e propriedades poroelásticas. O artigo de Swan traz um resumo do equacionamento poroelástico e apresenta os resultados de uma simulação em elementos finitos para um modelo com influência do fluxo de fluido no meio Haversiano do osso (ver capítulo 3). Suas principais contribuições estão na aplicação de carregamento harmônico e na modelagem do fluxo haveriano, além da comparação do modelo de tensões contida nos ossos vivos (Swan et al., 2003).

Este presente trabalho é muito parecido com o de Swan, pois também constrói o modelo ósseo com características do nível Haversiano, mas o modelo de Swan não levou em consideração a geometria do fêmur e sim de um modelo idealizado de coluna óssea. Com o intuito de investigar a relação entre os modelos de medida de propagação de ondas em ossos e sua poroelasticidade Fantazzini publicou um artigo com diferentes respostas a aplicação de ondas em espécimes de porcos (Fantazzini et al., 2003).

Por apresentar características anisotrópicas o modelamento ósseo tem custo computacional alto, quando acoplado ao problema de dupla porosidade, torna-se mais complexo ainda, não apenas pelo equacionamento, mas também pela implementação computacional. Jacobs fez um estudo sobre a instabilidade na simulação do remodelamento ósseo com base

no MEF, investigando as características numéricas do meio (Jacobs et al., 1995). Seu modelo geométrico é muito parecido com o utilizado neste trabalho, mas suas análises e respostas foram sobre o perfil das densidades do fêmur, enquanto aqui são sobre os deslocamentos e pressões.

A aplicação da teoria poroelástica utilizando o MEF como ferramenta na análise de ossos é muito importante, pois o conhecimento comportamental de um material biológico não resume-se a solucionar problemas produtivos ou de máquinas, mas envolve a qualidade de vida e prevenção de acidentes. Neste sentido Bujurke e Kudenatti aplicaram o modelo poroelástico na análise de cartilagens e juntas. Eles também fizeram um estudo dos acoplamentos de pressão fluida (Bujurke and Kudenatti, 2006). Um estudo aplicando o MEF em ossos utilizando o modelo poroelástico foi o de Manfredini que aplicou cargas cíclicas sobre seu modelo e pesquisou as diferentes reações, tanto nas pressões como nas deformações (Manfredini et al., 1999).

Já Mark, induziu deformações ao modelo do osso trabecular com MEF, com esse modelo ele estudou o fluxo nos interstícios trabeculares (Mak et al., 1997). Outro trabalho que estudou o comportamento poroelástico nos ossos da coluna, com aplicações experimental e numérica foi o de Pilcher, seu trabalho traz modelos teóricos e uma bibliografia bem detalhada (Pilcher, 2004).

As próteses são elementos muito utilizados para reabilitação humana, sua análise é importante para verificação de sua resistência e otimização. Os esforços são transmitidos para elas pela ação dos ossos e músculos, seu projeto deve levar em conta que a resistência óssea será menor que a sua e este permanecerá em um meio aquoso.

Kayabasi e Erzincanli fizeram um estudo das tensões sobre uma prótese cementada devido a cargas comuns atuantes do corpo humano, seu modelo em três dimensões foi analisado através do MEF com aplicação de cargas estáticas e dinâmicas. Eles também realizaram um estudo sobre a fadiga devido a estes carregamentos (Kayabasi and Erzincanli, 2006).

Ao fazer-se o levantamento bibliográfico constatou-se que através do modelo poroelástico

poder-se-ia simular o comportamento das características vivas do osso, visto que, a drenagem e seus processos celulares se dão através dos fluidos do sistema. Tal modelo fluido só é obtido com a inclusão das propriedades presentes na estrutura de sustentação, parte sólida e, as propriedades dos meios que regulam esta sustentação, parte fluida.

Os trabalhos da literatura que realizaram análises sobre modelos com próteses e ossos puderam ser utilizados como base das condições de contorno e propriedades do material da prótese. Esses modelos também trazem informações dos procedimentos médicos e casos com pacientes na aplicação de implantes.

O presente trabalho se insere no contexto bibliográfico, basicamente, de duas maneiras: a primeira na aplicação da teoria da poroelasticidade acoplada de Biot ao meio ósseo e na construção do modelo de elementos finitos; e a segunda, por constituírem uma importante base de dados dos trabalhos atuais e, suas aplicações e compará-los aos modelos desta pesquisa.

Este trabalho também apresenta o comportamento poroelástico de uma porção óssea bidimensional, muito aplicada pelos grupos de pesquisa apresentados, para modelos elásticos.

Dentro deste escopo, este trabalho apresenta as seguintes contribuições: - Definições das diferentes regiões porosas, com variação de porosidade entre elas; - Acoplamento do modelo elástico com o poroelástico; - Utilização do método de solução particionado para solução das matrizes poroelásticas; - Estabelecer critérios de análise para a distribuição das respostas de pressão e do comportamento estrutural e biológico desta.

Capítulo 3

Histologia e Estrutura Óssea

Este capítulo tem por objetivo introduzir conceitos básicos sobre a formação e classificação óssea, comparando histologia e estrutura óssea ao modelamento poroelástico, sustentando a hipótese de que esse modelo aproxima-se das características presentes nesse tipo de material. Os textos apresentados neste capítulo estão sustentados, basicamente, em quatro trabalhos: (Benito, 2005; Noritomi, 2006; Gartner, 1999; Junqueira and Carneiro, 2004).

O osso é um tecido conjuntivo especializado e tem como principais funções: sustentar o corpo, proteger os órgãos internos e servir de alavanca para as contrações geradas nos músculos. É formado por 65% de matriz óssea, parte inorgânica mineral e, o restante pela porção orgânica. A base inorgânica pode ser representada, no modelo poroelástico, pela fase sólida e a orgânica pela fase fluída.

3.1 Classificação Óssea

Os ossos podem ser classificados conforme sua forma. Existem ossos longos, curtos, chatos e irregulares.

Os ossos longos têm duas extremidades ou epífises; o corpo do osso é a diáfise; entre a diáfise e cada epífise fica a metáfise. A diáfise é formada por tecido ósseo compacto, enquanto a epífise e a metáfise, por tecido ósseo esponjoso. No fêmur e no úmero, pode-se observar esta distribuição de densidades.

Os ossos curtos têm as epífises e diáfise equivalentes e são encontrados nas mãos e nos

pés. São constituídos por tecido ósseo esponjoso. Exemplo: calcâneo, tarsos, carpos.

Os ossos chatos são formados por duas camadas de tecido ósseo compacto, tendo entre elas uma camada de tecido ósseo esponjoso e de medula óssea. Exemplos: esterno, ossos do crânio, ossos da bacia, escapula. Na figura 3.1 mostram-se exemplos desses tipos de ossos.

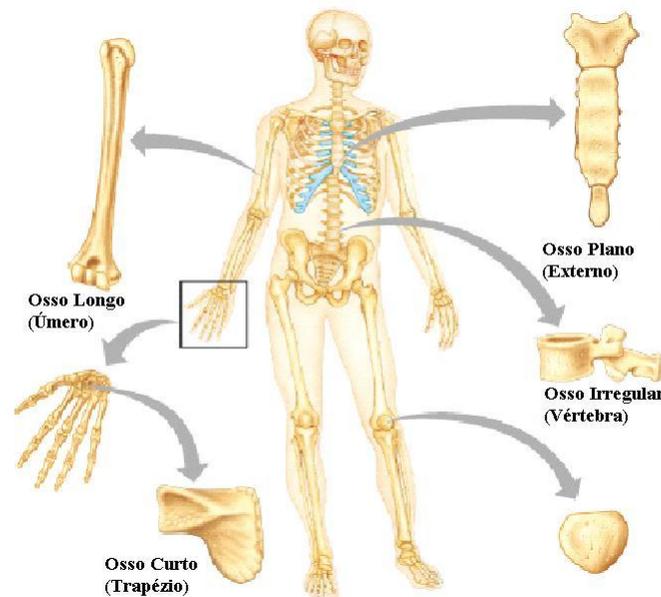


Figura 3.1: Classificação óssea.
Adaptado de (Benito, 2005)

Percebe-se como a geometria é um fator complicante para o modelamento dos ossos, por exemplo se fosse construída uma malha sobre a geometria dos ossos da coluna, esta deveria ser o mais discretizada possível, o que acarretaria um alto custo computacional na solução do problema. Muitas vezes o número de elementos contidos em geometrias menores, mas com perfis irregulares, por exemplo os ossos da coluna, são maiores do que aqueles contidos em geometrias maiores, mas com geometria mais simples, como por exemplo o osso rádio do braço.

Quanto a classificação porosa do osso, pode-se dividir em duas grandes regiões: A cortical e a trabecular. Existem outras subdivisões porosas, mas só serão apresentadas após a discussão dos aspectos microscópicos da estrutura óssea.

O osso cortical é muito denso e normalmente se apresenta na superfície externa do osso, conforme mostrado na figura 3.2. Na parte mais externa estão as lamelas externas e o periósteo. Também formado de material denso, o periósteo circunda toda a superfície óssea, ligando-se ao osso cortical e as lamelas através das fibras de Sharpey. O mesmo tipo de estrutura é encontrada na parte interna ao osso cortical, mas ali elas são chamadas de lamelas internas, isto é, endósteo.

Menos denso e muito poroso, o osso trabecular ou esponjoso fica na região central do osso. Tem esse nome, pois é formado por trabéculas ósseas que se ramificam do endósteo. Não existe sistemas de Havers no osso trabecular, mas como este fica envolto na medula, suas células nutrem-se dela. O sistema Havers será apresentado na seção 3.2.

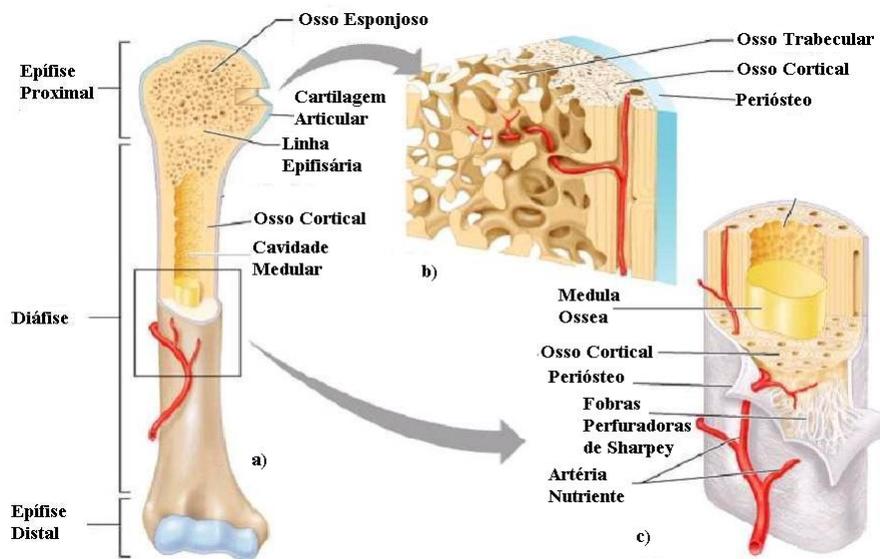


Figura 3.2: Aspecto geral de um osso longo. a) Tíbia em corte; b) Detalhe da epífise; c) Detalhe da diáfise.

Adaptado de (Benito, 2005)

Para se compreender as características mecânicas presentes nos ossos, deve-se primeiramente, entender como este é gerado. O osso, por ser um tecido conjuntivo, é formado a partir de células secretoras, de nutrição, reabsorção e de formação, bem como pela matriz extra-celular.

A matriz extra-celular é composta de uma matriz amorfa hidratada mais fibras colágenas. Esta matriz é formada pela secreção de células chamadas condroblastos em uma solução aquosa ao seu redor, que é constituída basicamente por macro-moléculas de açúcar e tem a aparência de um gel. Esta matriz é responsável pela resistência a compressão do osso. As fibras colágenas são basicamente proteínas, sendo responsáveis pela resistência a tração do osso. A força de tensão das fibras colágenas é maior do que a do aço.

A formação óssea surge a partir dos condroblastos por dois processos de ossificação, chamados intramembranosa e endocrinal. Estas células ficam inseridas na matriz extra-celular, secretada por elas. Antes da formação do osso propriamente dito, desenvolve-se um molde de cartilagem, criado pelos condroblastos, por uma outra função fisiológica, na matriz extra-celular. Estes condroblastos podem hipertrofiar no centro da cartilagem, isto resulta no crescimento do espaço ocupado por eles e na redução da cartilagem, que torna-se calcificada. A calcificação da cartilagem também ocorre pela ação dos condroblastos.

Através da nutrição do meio, outras células migram para região calcificada, estas células são chamadas de osteoblastos, que sintetizam a matriz óssea na matriz extra-celular calcificada, isto é, inserem mais hidroxitoapatita na matriz, formando uma barreira para nutrição dos condroblastos hipertrofiados. Sem nutrição essas células morrem criando vazios na matriz óssea. Ao mesmo tempo em que os nutrientes migram, outras células também se aproximam do meio, como por exemplo os osteoclastos. Estas células são multinucleadas e grandes, sendo responsáveis pela remodelagem óssea. Os osteoclastos trabalham juntamente com os osteoblastos para a formação e crescimento do osso, enquanto o primeiro destrói a matriz óssea, o segundo cria. Nos primeiros anos de vida de uma pessoa os osteoblastos sintetizam mais matriz óssea do que os osteoclastos destroem, já nos idosos o efeito é oposto.

Conforme a matriz óssea vai sendo criada, muitos osteoblastos vão sendo confinados por ela, diminuindo seu tamanho. Quando isso acontece essas células passam a ser chamadas de osteócitos. Os osteócitos ficam entre as lamelas da matriz óssea e comunicam-se entre si através de canalículos. Estas células são responsáveis pela nutrição da matriz óssea, desta forma encontram-se espalhadas por todas as partes dela.

Dos vazios deixados pelos condroblastos mortos, na matriz óssea, surgem as regiões de vascularização. Nelas podem estar a medula óssea, fluido ósseo, veias sanguíneas, nervos e gorduras, dependendo da região e do tipo de osso. Em torno dos vazios existem osteoblastos que interagem com os fluidos vasculares, nutrindo-se e nutrindo os osteócitos através dos canalículos, que por sua vez nutrem a matriz óssea.

3.2 Canal de Havers

Esta seção tem finalidade de apresentar o nível estrutural do osso formado pelos sistemas haversianos e sistemas de Volkman. Neste nível, de subestruturação, é que estão aplicadas as características de pressão e fluido no modelo computacional. A compreensão destes sistemas torna-se importante devido suas funções biológicas e nível de porosidade.

Sistemas contínuos, de forma cilíndrica e longa, com um raio médio de 100 a 150 μm , formam a base unitária óssea, são chamados de sistema Ósteon. Em seu centro existe um canal de vascularização de 40 μm de diâmetro, chamado de canal de Havers, como observado na figura 3.3. Neste canal há vasos sanguíneos, nervos e tecido conjuntivo, que podem conectar-se uns aos outros pelos canais de Volkmann. Os sistemas Ósteon podem ser compostos de 4 a 20 lamelas ósseas concêntricas, sendo delimitadas por linhas cementantes. Entre o canal vascular e a linha cementante está a matriz óssea, nesta existem lamelas e canalículos onde, por sua vez, encontram-se os osteócitos. O conjunto destes sistemas formam o osso compacto ou cortical.

O detalhamento biológico torna-se importante devido a compreensão das escalas porosas presentes no osso, podendo ser classificadas em quatro camadas diferentes. A primeira, presente na macro escala, entre osso cortical e trabecular, sendo perceptível a olho nú, osso denso e osso esponjoso. A segunda com relação ao osso cortical e aos canais de Havers, que formam micro-sistemas circulares. A terceira entre os canais de Havers e Volkman e, os sistemas de canalículos e células de nutrição (osteócitos). E a última formada pela porosidade presente na matriz calcificada e os fluidos ósseos que o saturam. Cada uma dessas camadas podem separar-se em sistemas de fases fluida e sólida, a tabela 3.1 traz um resumo desses

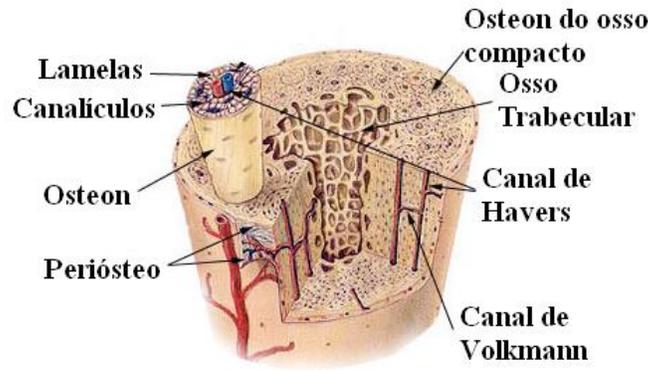


Figura 3.3: Detalhe do sistema de Havers.
Adaptado de (Bertolo, 2002)

sub-sistemas porosos no osso.

Sub-Sistema	Fase Sólida	Fase Fluída
1	Osso cortical e trabecular	Medula óssea
2	Sistema Havers e Volkman	Canais sanguíneos e fluídos ósseos
3	Matriz calcificada	Canalículos, osteócitos e fluídos ósseos
4	Matriz calcificada porosa	Fluidos ósseos e nutrientes

Tabela 3.1: Sub sistemas porosos presentes no osso

3.3 Remodelamento Ósseo

Toda estrutura óssea está em constante remodelamento, pois além de fazer parte de um organismo vivo, que se desenvolve e cresce no decorrer do tempo, este é capaz de modificar sua estrutura interna devido aos diferentes carregamentos a que é submetido. Existem basicamente dois tipos de remodelamento, o externo e o interno.

A remodelagem externa é aquela que ocorre devido a alguma fratura no osso, existe morte celular, pois o osso se rompe. Através da interação sanguínea e do fluxo de nutrientes, o osso tende a remodelar-se no local da fratura, unindo novamente as partes danificadas, podendo haver uma pequena variação na geometria final do osso (Gartner, 1999).

A remodelagem interna é um processo que envolve uma constante mudança na deposição de material. Através de um processo físico-químico, com a quebra de ligações iônicas entre

moléculas e rearranjo destas, as células ósseas interagem-se depositando material onde os esforços se tornam mais acentuados e retiram material dos menos solicitados (Junqueira and Carneiro, 2004). Quando o osso é comprimido suas células fazem a leitura deste esforço e iniciam o processo de fortificação de determinada região. Neste sentido a parte trabecular óssea atua como uma importante base estrutural, pois é esta que recebe as cargas das mais variadas direções e se remodela conforme a direção dos maiores esforços.

3.4 Próteses Totais

As primeiras próteses idealizadas foram confeccionadas com materiais que tinham pouca biocompatibilidade. Entre eles cita-se o ouro, acrílico, vidro, baquelite, etc. As próteses atuais são feitas de materiais totalmente bio-compatíveis. Os mais empregados são: polietileno de alta densidade, cobalto, cromo-titânio, polimetilmetacrilato.

Quase todas as fraturas de quadril requerem tratamento cirúrgico, seja para estabilizar a articulação com placas e pinos de metal, seja para substituí-la completamente através da colocação de uma prótese total de quadril. Pacientes idosos podem precisar de uma estadia hospitalar mais prolongada até a recuperação total.

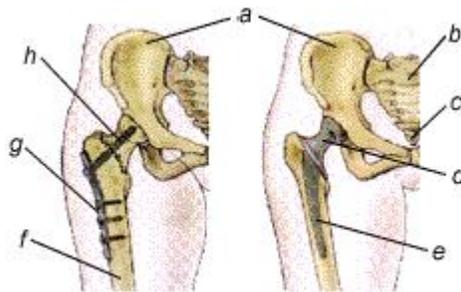


Figura 3.4: Esquema de próteses totais implantadas (Bertolo, 2002)

Na figura 3.4 mostram-se alguns esquemas de prótese total de quadril, onde identificam-se as seguintes partes: a)Pelve, b)Sacro, c)Cóccix, d)Prótese artificial substitui a cabeça do fêmur quebrada, e)A haste da prótese artificial é inserida no fêmur. Ainda na figura 3.4 observam-se as partes de uma articulação do quadril com placas e pinos ortopédicos:

f)Fêmur, g)Placa de metal e pinos ortopédicos reforçam o restauro do fêmur, h)A cabeça do fêmur une-se novamente ao fêmur por meio de um parafuso de metal.

A prótese total do quadril se caracteriza pela substituição ou troca da articulação do quadril. Esta cirurgia foi idealizada por ortopedistas para restabelecer a função da articulação coxo-femoral. Muitas doenças acometem esta articulação, sendo que as mais importantes são: Artrose de Quadril e Fraturas do Colo do Fêmur. Existem vários tipos de prótese de quadril. A indicação de usar uma ou outra prótese depende da idade do paciente, do tipo de doença, da qualidade do osso e da experiência do cirurgião.

3.4.1 Outros Tipos de Próteses

A prótese cimentada é aquela que usa cimento ósseo para fixar o componente acetabular na bacia e a parte femoral. A mais utilizada é a prótese de Charnley. O acetábulo é confeccionado com polietileno de alta densidade (tipo especial de plástico) e a parte femoral é feita de liga metálica cobalto-cromo-titânio. Normalmente usa-se esta prótese em pacientes com idade mais avançada.

A prótese não-cimentada é aquela em que fixa-se suas partes (acetábulo e componente femoral) diretamente na superfície óssea, sem a utilização de cimento. Este tipo é indicado para pessoas mais jovens, com boa qualidade óssea.

Na prótese híbrida, o componente acetabular é fixado à bacia através de parafusos, sendo o componente femoral fixado com cimento ao fêmur. É usada em pacientes com até 75 anos de idade.

As próteses uni e bi-polares são utilizadas em pacientes idosos, com fratura do colo do fêmur e que necessitam sair do leito o mais precoce possível.

As endo-próteses são utilizadas para a substituição de grandes segmentos ósseos, como no caso de um tumor que comprometa a parte superior do fêmur.

As próteses em copa estão em desuso, sendo utilizadas eventualmente em pacientes com

fratura de acetábulo em péssimas condições de saúde, pois uma prótese total necessita de maior tempo cirúrgico e anestésico, dificilmente suportado por esse tipo de paciente.

Desta forma, o modelo ósseo, que é formado por subdivisões estruturais, apresenta diferentes porosidades para cada sub-estrutura. O modelo computacional apresenta estes diferentes níveis de porosidade de forma homogenizada, ou seja, as propriedades de cada nível ósseo está em torno de valores médios, englobando diferentes níveis de propriedades. Por exemplo, ao considerar-se as características da parte trabecular, percebe-se que existem três sub-níveis de porosidade relacionados a ela: uma formada pela matriz óssea porosa calcificada e seus fluidos; outra pela matriz óssea homogenizada e os canalículos e constituintes celulares, sendo que o elemento trabecular não possui sistemas ósteons, este nível poroso está ligado diretamente a medula óssea; e o terceiro sub-nível formado pela geometria treliçada das trabéculas e a medula óssea.

Toda variação provocada por esforços sobre o osso geram variações também nas estruturas celulares, que dependendo do processo, através dos fluidos do sistema, enviam informações a outros componentes. Este é o caso dos osteócitos que ao serem comprimidos no interior da matriz, enviam informações através dos canalículos aos osteoblástos, que estão no contorno dos vasos sanguíneos, transmitindo, através de mudança de ph e proteínas, a informação para diminuir-se a pressão no sistema. Neste sentido a apresentação da parte de histologia, formação e estruturação óssea torna-se necessária, pois para se compreender os diversos níveis de porosidade, ou mesmo saber o que fornece ao osso características poroelásticas, deve-se conhecer seus elementos e a função de cada um desses na resposta as solicitações mecânicas.

Capítulo 4

Formulação Matemática da Poroelasticidade

Neste capítulo serão apresentadas as equações que governam a teoria poroelástica, bem como as leis fundamentais adotadas no modelo. Conforme o modelo clássico de Biot as seguintes hipóteses básicas são assumidas para o meio poroso: a) o material é isotrópico; b) reversibilidade da relação tensão-deformação; c) linearidade entre tensão e deformação; d) pequenas deformações; e) o fluido contido nos poros é incompressível; f) o fluxo através do esqueleto poroso se comporta conforme as leis de Darcy. A partir destas hipóteses é possível escrever as equações que governam o problema da poroelasticidade como segue.

4.1 Equações de Equilíbrio da Fase Sólida

Na teoria de Biot considera-se, inicialmente, um elemento infinitesimal sujeito às tensões conforme a teoria da elasticidade clássica tridimensional, isto é:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde as componentes do tensor de tensões σ_{ij} são definidas conforme representação da figura 4.1.

Na figura 4.1 as tensões axiais são representadas por σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} , as tensões de cisalhamento por σ_{xy} , σ_{xz} e σ_{yz} e as tensões σ_p são aquelas geradas pela pressão no modelo poroelástico.

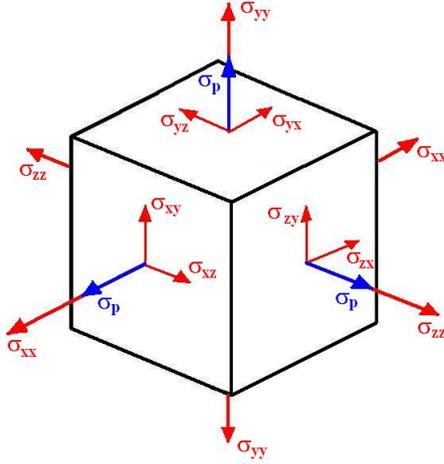


Figura 4.1: Componentes de tensão

Aplicando as condições de equilíbrio do sistema e desprezando as forças de volume, têm-se:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (4.4)$$

Sabe-se pela teoria da elasticidade que o tensor de deformações ε_{ij} é dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

onde u , v e w representam as componentes do vetor de deslocamentos na direção x , y e z , respectivamente.

A lei de Hooke, para material isotrópico, relaciona as tensões e as deformações na forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

onde E é o módulo de elasticidade ou coeficiente de Young, G o módulo de elasticidade transversal e ν o coeficiente de Poisson, todos referentes a parte sólida, isto é, são os coeficientes das propriedades drenadas porosa. A relação entre E , G e ν é:

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (4.7)$$

Acrescentando-se, na equação 4.6, o efeito da pressão hidrostática p nos poros, esta pode ser reescrita na forma:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{p}{3H} \\ \frac{p}{3H} \\ \frac{p}{3H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

onde H representa a constante de ponderação da pressão em função das constantes relacionadas a variação da quantidade de fluido.

Biot (Biot, 1941) utilizando-se da variável ζ , que representa a variação da quantidade de fluido no sistema, relacionou-a da seguinte forma com as tensões elásticas e com a pressão:

$$\zeta = a_1\sigma_{xx} + a_2\sigma_{yy} + a_3\sigma_{zz} + a_4\sigma_{xy} + a_5\sigma_{xz} + a_6\sigma_{yz} + a_7p \quad (4.9)$$

Admitindo-se material isotrópico tem-se que a_4 , a_5 e a_6 são nulas, pois não induzem variação volumétrica e, a_1 , a_2 e a_3 são iguais e valem $1/3H$ e a_7 vale $1/R$, assim ζ fica:

$$\zeta = \frac{1}{3H}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \frac{p}{R} \quad (4.10)$$

sendo R uma constante física poroelástica definida para balanceamento das equações de tensão e pressão.

Inserindo a equação 4.10 em 4.8 e as reescrevendo em termo das tensões, pode-se apresentar, conforme a equação 4.11, um novo termo poroelástico α .

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & 2G + \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 2G + \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha p \\ \alpha p \\ \alpha p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

O coeficiente poroelástico α , apresentado na equação anterior, é chamado de coeficiente de Biot. Ele relaciona os estados sólido e fluido através dos coeficientes de acoplamento e, com a pressão, dá a tensão provocada pelo fluido no sistema poroso. Tem unidade adimensional e pode ser representado das seguintes maneiras:

$$\alpha = \frac{K}{H} \quad (4.12)$$

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_u} = 1 - \frac{k_u}{k} \quad (4.13)$$

$$\alpha^2 = \frac{2G(\nu_u - \nu)}{Q(1 - 2\nu_u)(1 - 2\nu)} \quad (4.14)$$

sendo Q a constante poroelástica que representa a variação das propriedades transversais e longitudinais de um sistema sujeito a carregamento e o acoplamento destes com as porções sólida e fluida. O coeficiente de Poisson drenado (ν) representa a relação entre as deformações transversais e longitudinais de um corpo submetido a um carregamento. Ele apresenta grandeza adimensional com limite superior de 0,5 (material incompressível). Da mesma forma, o coeficiente de Poisson não-drenado (ν_u) tem a mesma representação, mas para este, não se permite que o fluxo vá para fora do volume de controle. A faixa deste módulo é entre o valor do módulo de Poisson drenado e 0,5, sendo seu limite superior atingido quando ambas as fases são incompressíveis, por consequência o limite inferior é atingido quando o fluido dos poros é compressível.

K é o módulo de deformação volumétrica drenado que representa a capacidade que um sólido poroso tem de variar seu volume, quando submetido a um carregamento, estando em um meio saturado. Este relaciona-se com o módulo de elasticidade transversal da seguinte forma:

$$K = \frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} \quad (4.15)$$

O coeficiente K_u representa a capacidade de um sólido variar sua deformação volumétrica, mas para este caso, o sólido não está em um ambiente saturado, e sim, como um sólido independente.

$$\begin{aligned} K_u &= \frac{1}{\frac{1}{K} - \frac{1}{H}} \\ K_u &= \frac{K}{1 - \alpha B} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Através das simplificações realizadas para a obtenção da equação 4.11 a relação entre os coeficientes poroelásticos podem ser dados por:

$$H = \frac{2(1 + \nu) G}{(1 - 2\nu) 3\alpha} \quad (4.17)$$

$$\zeta = \alpha e + \frac{p}{Q} \quad (4.18)$$

sendo e a variação volumétrica ou dilatação, dada por:

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (4.19)$$

Assim as constantes poroelásticas respeitam a seguinte relação:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H} \quad (4.20)$$

Nota-se que a equação 4.11 pode ser simplificada na forma:

$$\sigma_i^t = \sigma_i' - \alpha p_i \quad (4.21)$$

onde σ_i^t são as componentes do tensor de tensão total e σ_i' as componentes do tensor de tensão da porção elástica.

A equação 4.21 representa a forma geral das tensões para o problema poroelástico, pois o termo de tensão elástica representa as tensões geradas na porção sólida e o termo αp as tensões da porção fluida. O termo de tensões de pressão σ_p representado na figura 4.1 é igual ao termo $\{\alpha p\}$.

Considerando os termos da equação 4.2 e aplicando 4.11 tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_{xx} \left(2G + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_{yy} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon_{zz} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \right) \right] - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \quad (4.22) \\ \frac{\partial}{\partial y} (2G\varepsilon_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (2G\varepsilon_{xz}) = 0 \end{aligned}$$

Aplicando a equação 4.5 nos termos de deformação da equação 4.22 obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(2G \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial w}{\partial z} + G \frac{\partial v}{\partial y} + G \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \quad (4.23) \\ G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Realizando as simplificações necessárias sobre a equação 4.23 e aplicando a equação 4.19, tem-se um novo sistema em função dos deslocamentos e das pressões, dado por:

$$G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4.24)$$

Simplificando um pouco mais a equação 4.24 e realizando as mesmas passagens realizadas para equação 4.3 e 4.4 (Biot, 1941), obtém-se:

$$\begin{aligned} G \nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ G \nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ G \nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.2 Equações de Equilíbrio da Fase Fluida

Ao analisar-se a equação 4.25 percebe-se que o sistema tem 3 equações e 4 incógnitas. A solução destas equações tornam-se viáveis considerando-se um fluxo de fluido no meio poroso, segundo a Lei de Darcy. Segundo Darcy existem variáveis de velocidade V_x , V_y e V_z que definidas no volume de controle de um cubo fluido, que desloca-se em um espaço de tempo e através de uma seção, perpendicular as direções principais deste cubo. Ainda, segundo Darcy estas variáveis podem relacionar-se com a pressão no sistema da seguinte forma (Darcy, 1856):

$$V_x = -\kappa \frac{\partial p}{\partial x} \quad V_y = -\kappa \frac{\partial p}{\partial y} \quad V_z = -\kappa \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.26)$$

sendo, κ o coeficiente de permeabilidade, sendo expresso por:

$$\kappa = \frac{k}{\mu} \quad (4.27)$$

onde k é a constante de permeabilidade de Darcy, sua unidade no SI é o $[m^2]$ e μ a viscosidade do fluido, de unidade no SI em [Pa.s].

Assumindo que o fluido é incompressível, tem-se que a razão de fluido contido no elemento sólido será igual ao volume de fluido entrando pela superfície deste elemento, desta maneira:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (4.28)$$

Fazendo-se as simplificações necessárias e aplicando as equações 4.6 e 4.26 em 4.28, tem-se a equação governante da fase fluida, que é dependente do tempo e dos deslocamentos, dada pela expressão (Ferreira, 1996):

$$\kappa \nabla^2 p = \alpha \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.29)$$

Desta forma as equações que regem o problema mecânico poroelástico são expressas pelas equações 4.25 e 4.29, que representam o comportamento transiente de um meio poroelástico

saturado de fluído incompressível. Elas podem ser representadas em conjunto da seguinte forma.

$$\begin{aligned}
G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\
G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\
G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \\
\kappa \nabla^2 p &= \alpha \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Desta forma, tem-se quatro equações e quatro incógnitas na expressão 4.30 e, assim o problema pode ser resolvido.

4.3 Outras Constantes Envolvidas na Formulação Poroelástica

Nesta seção são apresentadas algumas constantes inerentes ao problema poroelástico que, não aparecem de forma explícita, mas devem ser consideradas, pois existem trabalhos que relacionam as propriedades dos materiais apresentadas por Biot com aquelas que podem ser obtidas experimentalmente ou mensuradas diretamente, ou até mesmo pelas obtidas algebricamente com sua manipulação. Essas constantes podem definir outras constantes ou relacionarem-se entre si. Algumas destas constantes podem ser encontradas nos trabalhos de Cheng e Detournay (1988) e Rice e Cleary (1976).

4.3.1 Coeficiente de compressibilidade ou coeficiente de Skempton (B)

Este coeficiente representa a relação entre uma variação de pressão do poro e a variação de tensão hidrostática total na amostra, sob condição não drenada. Este coeficiente tem grandeza adimensional, e seu valor está entre 0 e 1. Para B igual a zero o fluído dos poros é totalmente compressível.

$$B = -\frac{\delta p}{\delta \bar{\sigma}} \quad (4.31)$$

$$B = \frac{3(\nu_u - \nu)}{\alpha(1 + \nu_u)(1 - 2\nu)} \quad (4.32)$$

4.3.2 Compressibilidades (k) e (k_u)

Os parâmetros de compressibilidade de um sistema sólido, saturado e não saturado são dados pelos inversos dos módulos de deformação volumétrica. Eles indicam a capacidade que um sólido tem de se comprimido. Sua unidade é a área por unidade de força.

$$k = \frac{1}{K} \quad (4.33)$$

$$k_u = \frac{1}{K_u} \quad (4.34)$$

4.3.3 Porosidade do material (ϕ)

A porosidade é um fator muito importante na formulação porosa visto que ela influencia diretamente na proporção da quantidade de fluido presente nos poros e a capacidade de resistência deste. Os materiais mais porosos tendem a ser mais quebradiços e ter baixa resistência, em contra partida se o fluido tem alta viscosidade esta relação diminui. Sua grandeza é adimensional.

$$\phi = \frac{V_f}{V_f + V_s} \quad (4.35)$$

sendo V_f o volume do fluido e V_s o volume do sólido.

4.3.4 Conteúdo de fluido (γ')

O coeficiente do conteúdo de fluido que entra no meio poroso por unidade de pressão é γ' , sua relação é importante quanto a compreensão de como o fluido preenche os espaços no poros e como o fluido deixa o sistema.

$$\gamma' = \frac{\phi(\varepsilon - E)}{p} = \frac{\zeta}{p} \quad (4.36)$$

sendo ε a deformação da fase sólida, E da fase fluida, ζ a variação da quantidade de fluido e p a pressão no poros.

4.3.5 Coeficiente de Lamé (λ)

O coeficiente de Lamé tem unidade de tensão e representa a relação entre o módulo de elasticidade transversal e o módulo de Poisson drenado.

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \quad (4.37)$$

Capítulo 5

Formulação Numérica

No capítulo 4 apresentou-se a formulação de Biot através do equacionamento dos parâmetros elásticos e fluidos, incluindo as equações fundamentais da elasticidade e de Darcy. De forma resumida, foram dados os passos para obtenção das equações fundamentais da poroelasticidade, tais equações serão aproveitadas, neste capítulo, para a descrição da formulação numérica aplicada a poroelasticidade. Utilizando-se do método dos elementos finitos esta formulação será aplicada ao problema plano, isto é, para as direções x e y . Desta forma a equação 4.30, que representa o estado tridimensional, pode ser reduzida à forma:

$$\begin{aligned} G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \kappa \nabla^2 p &= \alpha \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.1)$$

O modelo expresso na equação 5.1 é bidimensional e é descrito pelas variáveis de deslocamento (u, v), pressão (p) e dilatação (e). Reescrevendo estas equações em função das tensões, deformações e pressão, tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G \left(\varepsilon_{xx} + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right) - \alpha p \\ \sigma_{yy} &= 2G \left(\varepsilon_{yy} + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right) - \alpha p \\ \kappa \nabla^2 p - \alpha \frac{\partial e}{\partial t} - \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Aplicando o equilíbrio para as tensões e observando a equação do fluido tem-se uma maneira mais conveniente para escrever a forma fraca do problema, que é:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \\
\kappa \nabla^2 p - \alpha \frac{\partial e}{\partial t} - \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Aplicando sobre a equação 5.3 o método dos resíduos ponderados tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) W d\Omega &= 0 \\
\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) W d\Omega &= 0 \\
\int_{\Omega} \left(-\kappa \nabla^2 p + \alpha \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \right) W d\Omega &= 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

sendo W a função peso e Ω o domínio do problema poroelástico.

Percebe-se pela equação 5.4 que a solução torna-se transiente ou parabólica devido a inclusão das equações de fluido, pois as tensões elásticas sem a implementação de pressão, solucionam o problema estático e quando é inserido o conceito de fluxo, este depende do tempo.

5.1 Forma Fraca da Fase Sólida

A seguir é apresentada a formulação numérica baseada nas duas primeiras equações de 5.4. Inicialmente, discretiza-se somente a equação de equilíbrio na direção x .

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} W d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} W d\Omega = 0 \tag{5.5}$$

Com o objetivo de equilibrar os requisitos de diferenciabilidade do problema, aplica-se na equação 5.5, que está apenas em função do domínio, o teorema da divergência.

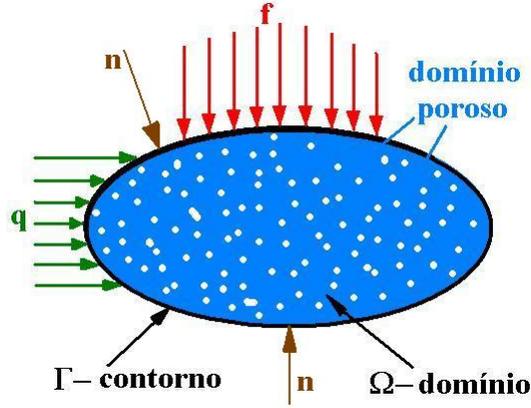


Figura 5.1: Meio poroso e condições de contorno

$$\int_{\Gamma} \sigma_{xx} W n d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{xx} \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{xy} W n d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{xy} \frac{\partial W}{\partial y} d\Omega = 0 \quad (5.6)$$

sendo Γ referente ao contorno do sistema e n o vetor normal ao contorno, conforme mostrado no esquema da figura 5.1.

A equação 5.6 pode ser reorganizada de modo a separar as equações do domínio e do contorno, incluindo as condições de contorno naturais do problema.

$$\int_{\Omega} \sigma_{xx} \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{xy} \frac{\partial W}{\partial y} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{xx} W n d\Gamma + \int_{\Gamma} \sigma_{xy} W n d\Gamma \quad (5.7)$$

A soma das integrais de contorno podem ser traduzidas como sendo a força de superfície aplicada sobre a fronteira Γ , da seguinte maneira:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{xx} W n d\Gamma + \int_{\Gamma} \sigma_{xy} W n d\Gamma = \int_{\Gamma} f_x W d\Gamma \quad (5.8)$$

Assim as equações do domínio de 5.7 podem ser escritas da forma:

$$\int_{\Omega} \sigma_{xx} \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{xy} \frac{\partial W}{\partial y} d\Omega = \int_{\Gamma} f_x W d\Gamma \quad (5.9)$$

Os termos de tensão da equação 5.9 podem ser substituídos por 4.11, desta forma pode-se expressá-la na forma:

$$\int_{\Omega} 2G\varepsilon_{xx} \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} 2G \frac{\nu e}{1-2\nu} \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \alpha p \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{xy} G \frac{\partial W}{\partial y} d\Omega = \int_{\Gamma} f_x W d\Gamma \quad (5.10)$$

Escrevendo a equação 5.10 em função dos deslocamentos, considerando a equação 4.19 para termos bidimensionais, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2G \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \alpha p \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega \\ + \int_{\Omega} G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial W}{\partial y} d\Omega = \int_{\Gamma} f_x W d\Gamma \end{aligned} \quad (5.11)$$

que é a forma fraca em termos de deslocamentos e pressão da fase sólida.

O método dos elementos finitos utiliza funções de interpolação para aproximar a resposta do sistema em subdomínios denominados elementos (Zienkiewicz and Taylor, 1989). As funções de interpolação também são conhecidas como função de forma, elas podem ser representadas pela letra N e podem ser de diversas ordens conforme a aproximação que se deseja em cada subdomínio. Aplicando as funções de interpolação para os deslocamentos e pressão tem-se:

$$\begin{aligned} u &= N_i u_i \\ v &= N_i v_i \\ p &= N_i^p p_i \end{aligned} \quad (5.12)$$

Para as variações em função de x , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial N_i^p}{\partial x} p_i \end{aligned} \quad (5.13)$$

Do mesmo modo para as variações em y, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} p_i\end{aligned}\quad (5.14)$$

O método de Galerkin para formulação de elementos finitos através dos resíduos ponderados considera a função peso W igual a função de interpolação N_j , desta forma tem-se, de uma forma genérica:

$$W = N_j \quad (5.15)$$

sendo que o índice i refere-se as variáveis do problema e o índice j a da função peso W .

Aplicando sobre a equação 5.11 as equações 5.12 a 5.15, esta pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} 2G \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} u_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} u_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} v_i d\Omega \\ - \int_{\Omega} \alpha N_i^p \frac{\partial N_j}{\partial x} p_i d\Omega + \int_{\Omega} G \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} u_i d\Omega + \int_{\Omega} G \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} v_i d\Omega = \int_{\Gamma} f_x N_j d\Gamma\end{aligned}\quad (5.16)$$

A equação 5.16 apresenta as funções integrais para a solução da parte sólida poroelástica na direção x. O mesmo procedimento aplicado a equação 5.5, para obter-se as equações para solução do problema, pode ser aplicado a direção y.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} W d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} W d\Omega = 0 \quad (5.17)$$

Desta forma através da discretização pelo método dos elementos finitos, por resíduos ponderados, e aplicando Galerkin tem-se para y:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} 2G \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} v_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} v_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} u_i d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \alpha N_i^p \frac{\partial N_j}{\partial y} p_i d\Omega + \int_{\Omega} G \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} v_i d\Omega + \int_{\Omega} G \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} u_i d\Omega = \int_{\Gamma} f_y N_j d\Gamma \quad (5.18)
\end{aligned}$$

5.2 Formulação para Forma Fluida

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados sobre a equação 4.29 tem-se o terceiro componente da equação 5.4, que pode ser escrita como segue:

$$\int_{\Omega} \alpha \frac{\partial e}{\partial t} W d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} W d\Omega - \int_{\Omega} \kappa \nabla^2 p W d\Omega = 0 \quad (5.19)$$

Aplicando o teorema da divergência para o último termo da equação 5.19, utilizando a definição de dilatação e, inserindo 4.19 obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) W d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} W d\Omega + \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} \kappa \frac{\partial p}{\partial x} W n d\Gamma + \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} d\Omega - \int_{\Gamma} \kappa \frac{\partial p}{\partial y} W n d\Gamma = 0 \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Reorganizando a equação anterior de modo que as equações do domínio fiquem do lado esquerdo e as de contorno do lado direito, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) W d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} W d\Omega + \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} d\Omega = \int_{\Gamma} \kappa \frac{\partial p}{\partial x} W n d\Gamma + \int_{\Gamma} \kappa \frac{\partial p}{\partial y} W n d\Gamma \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Todo o termo do contorno poder ser expresso como sendo o fluxo de fluido que escoar em um volume de controle, dados pela permeabilidade e pela variação de pressão.

$$\int_{\Gamma} \kappa \frac{\partial p}{\partial x} W n d\Gamma + \int_{\Gamma} \kappa \frac{\partial p}{\partial y} W n d\Gamma = \int_{\Gamma} q W d\Gamma \quad (5.22)$$

Da mesma forma, reorganizando a parte esquerda da equação 5.21, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) W d\Omega + \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) W d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} W d\Omega \\ + \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} d\Omega = \int_{\Gamma} q W d\Gamma \end{aligned} \quad (5.23)$$

Inserindo-se a formulação de Galerkin, através das equações 5.12 a 5.15 na equação 5.23, chega-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j^p \frac{\partial u_i}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j^p \frac{\partial v_i}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \frac{\partial p_i}{\partial t} N_i^p N_j^p d\Omega \\ + \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial N_i^p}{\partial x} \frac{\partial N_j^p}{\partial x} p_i d\Omega + \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial N_i^p}{\partial y} \frac{\partial N_j^p}{\partial y} p_i d\Omega = \int_{\Gamma} q N_j d\Gamma \end{aligned} \quad (5.24)$$

A equação 5.24 representa a fase fluida do problema poroelástico, dependente da pressão, dos deslocamentos e do tempo.

Aplicando a discretização por diferenças finitas em atraso (fórmula de Euler) nos termos de dependência temporal, tais como u_i , v_i e p_i , da forma:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x^n - x^{n-1}}{\Delta t} \quad (5.25)$$

sendo x a variável empírica dependente do tempo, n o estado atual, $n-1$ o estado no tempo anterior e Δt a variação do tempo do estado atual pelo estado anterior.

Este esquema permite avaliar a resposta de forma implícita em um esquema de marcha no tempo que é incondicionalmente estável, com aproximação de ordem Δt .

Inserindo a equação 5.25 em 5.24 tem-se a representação da equação integral fluida poroelástica em termos de variáveis temporais diferenciais e não-diferenciais.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j^p \left(\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j^p \left(\frac{v_i^n - v_i^{n-1}}{\Delta t} \right) d\Omega \\
& \quad + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} N_i^p N_j^p \left(\frac{p_i^n - p_i^{n-1}}{\Delta t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial N_i^p}{\partial x} \frac{\partial N_j^p}{\partial x} p_i^n d\Omega \\
& \quad \quad \quad + \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial N_i^p}{\partial y} \frac{\partial N_j^p}{\partial y} p_i^n d\Omega = \int_{\Gamma} q N_j d\Gamma \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Reorganizando a equação 5.26 e passando os termos no instante n-1 para o lado direito da equação tem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j^p \frac{u_i^n}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j^p \frac{v_i^n}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} N_i^p N_j^p \frac{p_i^n}{\Delta t} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial N_i^p}{\partial x} \frac{\partial N_j^p}{\partial x} p_i^n d\Omega + \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial N_i^p}{\partial y} \frac{\partial N_j^p}{\partial y} p_i^n d\Omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j^p \frac{u_i^{n-1}}{\Delta t} d\Omega \\
& \quad + \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j^p \frac{v_i^{n-1}}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} N_i^p N_j^p \frac{p_i^{n-1}}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Gamma} q N_j d\Gamma \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Multiplicando todos os termos da equação 5.26 por Δt obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j^p u_i^n d\Omega + \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j^p v_i^n d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} N_i^p N_j^p p_i^n d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \kappa \Delta t \frac{\partial N_i^p}{\partial x} \frac{\partial N_j^p}{\partial x} p_i^n d\Omega + \int_{\Omega} \kappa \Delta t \frac{\partial N_i^p}{\partial y} \frac{\partial N_j^p}{\partial y} p_i^n d\Omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j^p u_i^{n-1} d\Omega \\
& \quad + \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j^p v_i^{n-1} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} N_i^p N_j^p p_i^{n-1} d\Omega + \Delta t \int_{\Gamma} q N_j d\Gamma \quad (5.28)
\end{aligned}$$

que é a forma fraca do problema levando-se em conta a aproximação no tempo.

5.3 Formulação na forma matricial

Nesta seção as equações 5.16, 5.18 e 5.28 são apresentadas na forma matricial com o objetivo de visualizar-se as matrizes e facilitar a implementação do problema acoplado. Desta forma reorganizando o sistema matricialmente tem-se:

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + G \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + G \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} & -\alpha N_i^p \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + G \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + G \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} & -\alpha N_i^p \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j^p & \alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j^p & \frac{1}{Q} N_i^p N_j^p + \kappa \Delta t \left(\frac{\partial N_i^p}{\partial x} \frac{\partial N_j^p}{\partial x} + \frac{\partial N_i^p}{\partial y} \frac{\partial N_j^p}{\partial y} \right) \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} u_i^n \\ v_i^n \\ p_i^n \end{Bmatrix} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j^p & \alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j^p & \frac{1}{Q} N_i^p N_j^p \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} u_i^{n-1} \\ v_i^{n-1} \\ p_i^{n-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{f_x\} \\ \{f_y\} \\ \Delta t \{q\} \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

Simplificando o modo de apresentação da equação 5.29 pode-se expressá-la na forma de:

$$\begin{bmatrix} [K_e] & -[A]^T \\ [A] & [[K_{af}] + \Delta t [K_f]] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^n \\ p^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [A] & [K_{af}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{n-1} \\ p^{n-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \Delta t \{q\} \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

onde $[K_e]$ é a matriz simétrica de rigidez da parte sólida, $[A]$ a matriz anti-simétrica de acoplamento, $[K_{af}]$ a matriz de amortecimento fluido e $[K_f]$ a matriz de rigidez fluida.

simplificando mais um pouco os termos da equação 5.30 obtém-se:

$$[K_i] \{u_i^n\} = [L_i] \{u_i^{n-1}\} + \{F\} \quad (5.31)$$

sendo $[K_i]$ a matriz não-simétrica de rigidez acoplada, $[L_i]$ a matriz não-simétrica fluida de acoplamento, F o vetor das cargas, u_i^n o vetor das variáveis de deslocamento e pressão no tempo atual e u_i^{n-1} o vetor das variáveis de deslocamento e pressão no tempo anterior.

Esta formulação é chamada de forma acoplada de solução direta para o problema poroelástico, visto que os termos da parte sólida e da fluida ficam conjugados dentro das matrizes e vetores. As matrizes simétricas da equação 5.30 são formadas pelas integrais de contorno dadas por:

$$\begin{aligned} [K_e] &= \int_{\Omega} [\nabla N]^T [D_e] [\nabla N] d\Omega \\ [K_f] &= \int_{\Omega} [\nabla N^p]^T \kappa [\nabla N^p] d\Omega \\ [K_{af}] &= \int_{\Omega} [N^p] \frac{1}{Q} [N^p] d\Omega \\ [A] &= \int_{\Omega} [\nabla N] \alpha [N] d\Omega \end{aligned} \quad (5.32)$$

sendo $[D_e]$ a matriz constitutiva elástica.

5.4 Equações para o Método Particionado

As equações apresentadas, até este momento, referem-se à solução do problema mecânico poroelástico através do método direto (Li et al., 1990), isto é, as incógnitas do problema são resolvidas diretamente usando um sistema matricial acoplado não-simétrico.

Neste trabalho adotou-se o método de solução particionado baseado no trabalho de (Ferreira, 1996). Outros autores também utilizaram-se este método para solução de sistemas acoplados lineares (Park, 1983; Zienkiewicz et al., 1988). Este método consiste em solucionar o problema acoplado através de um esquema iterativo, tendo os deslocamentos e pressões, a partir da solução de sistemas separados, respostas dependentes da resposta do outro.

Para transformar as matrizes acopladas unidas em acopladas separadas deve-se fazer algumas manipulações algébricas e isolar-se as incógnitas de deslocamento e pressão. A partir da equação 5.30, tem-se:

$$[K_e] \{u^n\} = \{f\} + [A] \{p^n\} \quad (5.33)$$

$$[[K_{af}] + \Delta t[K_f]] \{p^n\} = [A]^T \{\{u^{n-1}\} - \{u^n\}\} + [K_{af}] \{p^{n-1}\} + \Delta t \{q\} \quad (5.34)$$

As equações 5.33 e 5.34 envolvem a resolução de sistemas lineares com matrizes simétricas. A forma explícita para o cálculo das matrizes do sistema ao nível de cada elemento é:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{array} \right] \frac{2G}{1-2\nu} \left[\begin{array}{ccc} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{array} \right]}_{[K_e]} \left\{ \begin{array}{c} u_i^n \\ v_i^n \end{array} \right\} d\Omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \underbrace{\left[\alpha \left[\begin{array}{c} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{array} \right] \left[N_i^p \right] \right]}_{[A]} \{ p_i^n \} d\Omega + \left\{ \begin{array}{c} \{f_x\} \\ \{f_y\} \end{array} \right\} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \underbrace{\left[\frac{1}{Q} [N_j^p] [N_i^p] + \kappa \Delta t \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j^p}{\partial x} & \frac{\partial N_i^p}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_j^p}{\partial y} \end{bmatrix} \right]}_{[K_{af}] + \Delta t [K_f]} \{p_i^n\} d\Omega = \\
& \int_{\Omega} \underbrace{\left[\alpha [N_j^p] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \right]}_{[A]^T} \underbrace{\left\{ \begin{Bmatrix} u_i^{n-1} \\ v_i^{n-1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} u_i^n \\ v_i^n \end{Bmatrix} \right\}}_{\{\Delta u\}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \underbrace{\left[\frac{1}{Q} [N_j^p] [N_i^p] \right]}_{[K_{af}]} \{p_i^{n-1}\} d\Omega + \Delta t \{q\} \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Repara-se que os termos de $[K_e]$, que é a rigidez elástica da parte sólida, na equação 5.35, são iguais aos termos da matriz de rigidez puramente elástica e, que os termos de $[K_f]$, que é a matriz de fluido, são iguais aos termos puramente fluidos. Isso demonstra o desacoplamento e evidencia a possibilidade de reaproveitamento de implementações desacopladas de fluido e estrutura.

Na solução particionada, quando as condições de contorno e as condições iniciais são nulas, pode-se utilizar de um recurso matemático para predição destas condições. Admite-se que no primeiro instante, quando o sistema recebe o carregamento, este não tem variação de massa do fluido ou seja $\zeta = 0$. Admite-se que as condições de todo o sistema são não drenadas, desta forma a pressão nos poros pode ser expressa por:

$$p = -\alpha Q e \tag{5.37}$$

Como a pressão está expressa de forma diferente da apresentada pela equação 4.18 substitui-se o termo de pressão na lei de Hooke generalizada, apresentada pela equação 4.11, pelos termos da equação 5.37. Com isso as matrizes de rigidez elásticas modificam-se, sendo agora dependentes não apenas dos termos de elasticidade, como E e ν , mas também dependem dos termos poroelásticos, como α e Q .

$$\int_{\Omega} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} + \alpha^2 Q\right) & \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} + \alpha^2 Q\right) & 0 \\ \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} + \alpha^2 Q\right) & \left(\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} + \alpha^2 Q\right) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}}_{[K_{ei}]} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} d\Omega = \begin{Bmatrix} \{f_x\} \\ \{f_y\} \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

A matriz $[K_{ei}]$ é chamada de matriz poroelástica para a condição inicial não drenada. Esta apresenta uma maior rigidez devido a adição dos termos poroelásticos, com relação a matriz puramente elástica. A solução do sistema da equação 5.38 inicializará a solução transiente do sistema, pois os termos u_i e v_i são utilizados na equação 5.35 e 5.36 como u_i^{n-1} e v_i^{n-1} , ou seja, os deslocamentos no passo de tempo anterior. As variáveis de pressão p_i^{n-1} são obtidas pela solução da equação 5.37. Desta forma, as equações 5.37 e 5.38 são as equações para a condição inicial do método de solução particionado, quando as condições de contorno são nulas e não existe imposição de condições iniciais.

5.5 Acoplamento Elástico-Poroelástico

No modelo osso-prótese existem dois principais sistemas acoplados, o primeiro poroelástico-elástico, formado pela porção dependente dos deslocamentos e, o segundo poroelástico puro, formado pelas partes biológicas do osso.

Os deslocamentos bidimensionais da porção sólida são representados pelas letras u e v , da mesma forma os deslocamento da parte fluida são dados por U e V . Todas as relações aplicadas aos deslocamentos sólido podem aplicar-se ao fluido, desta maneira tem-se:

$$E_f = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \quad (5.39)$$

sendo E_f a variação volumétrica da parte fluida.

Na ausência de forças de corpo o fluxo de fluidos em meio poroso é dado pela lei de Darcy da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial x} = b \frac{\partial}{\partial t} (U - u) \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial y} = b \frac{\partial}{\partial t} (V - v) \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial z} = b \frac{\partial}{\partial t} (W - w) \quad (5.42)$$

sendo σ_p o termo de tensão do fluido e b uma variável poroelástica dependente da porosidade. A função σ_p é dada por:

$$\sigma_p = \alpha p \quad (5.43)$$

Estas relações demonstram que a variação de pressão está associada à variação volumétrica. Atalla (Atalla et al., 2001) considerou que para existência de acoplamento elástico-poroelástico, na formulação deslocamento pressão, não se necessita acrescentar nenhum termo adicional na formulação da interface porosa/elástica. Duas de suas considerações são apresentadas a seguir:

$$\phi(U^n - u^n) = 0 \quad (5.44)$$

$$u = u_e \quad ,$$

sendo u o vetor dos deslocamentos poroelásticos e u_e dos elásticos.

Isto significa que o acoplamento entre os meios elástico e poroelástico é natural, não há variação da pressão no campo de acoplamento $\phi(U^n - u^n)$, conforme equação 5.40 e, o deslocamento relativo entre as partes $u = u_e$ está explícito no modelo.

Capítulo 6

Implementação Computacional

Este capítulo tem o objetivo de mencionar as técnicas computacionais utilizadas para a implementação da ferramenta numérica, os programas para construção dos modelos e rotinas e, explicar de forma sucinta quais problemas podem ser resolvidos com a ferramenta implementada.

Tendo em vista o avanço da linguagem FORTRAN 90/95, bem como a sua grande aplicação numérica, sua capacidade de particionar vetores e alocação de memória, o grupo de pesquisa formado no Departamento de Mecânica Computacional da Unicamp, decidiu criar uma ferramenta de solução, através do método dos elementos finitos com base nesta linguagem. O grupo tem como objetivo resolver problemas relacionados a meios acoplados, por exemplo o poroelástico. Desta maneira construiu-se rotinas e subrotinas, com a intenção de formar um *solver* com uma biblioteca de elementos vasta e de acesso aos diversos grupos associados a esta pesquisa.

O nome dado ao *solver* foi MefLab e neste capítulo são apresentadas as técnicas de programação utilizada para construção do módulo transiente poroelástico no âmbito desta ferramenta.

6.1 Algoritmo para o Problema Particionado

No método particionado as matrizes globais são montadas separadamente, sendo o procedimento para solução do método baseado na convergência da variável de pressão. Os passos

do algoritmo utilizado para a solução são descritos a seguir:

1. Determinação das constantes poroelásticas do material, pelo menos cinco;
2. Montagem das matrizes globais dos sistema: $[K_e]$, $[K_f]$, $[A]$, $[K_{af}]$ e $[K_{ei}]$;
3. Resolver o sistema para as condições iniciais não-drenada, formado por $[K_{ei}]\{u_i\}=\{f\}$;
4. Encontrar as deformações iniciais, a partir dos valores de $\{u_i\}$;
5. Calcular o vetor das pressões iniciais pela equação 5.37, $\{p_i\}=-\alpha Q \{e\}$;
6. Para cada instante de tempo n , faz-se:
 - (a) Resolve-se o sistema da parte sólida, formado pela equação 5.35, $[K_e]\{u_i^n\} = [A]\{p_i^{n-1}\} + \{f\}$, a partir das pressões $\{p_i\}$;
 - (b) Com o incremento do deslocamento u^n atualiza-se as pressões utilizando a equação 5.36, formada por $[K_f+\Delta t K_{af}]\{p_i^n\} = [A]^T\{u_i^{n-1}-u_i^n\} + [K_{af}]\{p_i^{n-1}\} + \{\Delta tq\}$;
 - (c) Os passos (a) e (b) são repetidos até que a diferença entre a pressão calculada e a anterior sejam menores que o erro estipulado;
 - (d) A partir do campo de pressões calculado, recomeça-se a nova iteração para o tempo $n + 1$, repetindo-se o passo 6.
7. A solução é finalizada no instante de tempo máximo imposto.

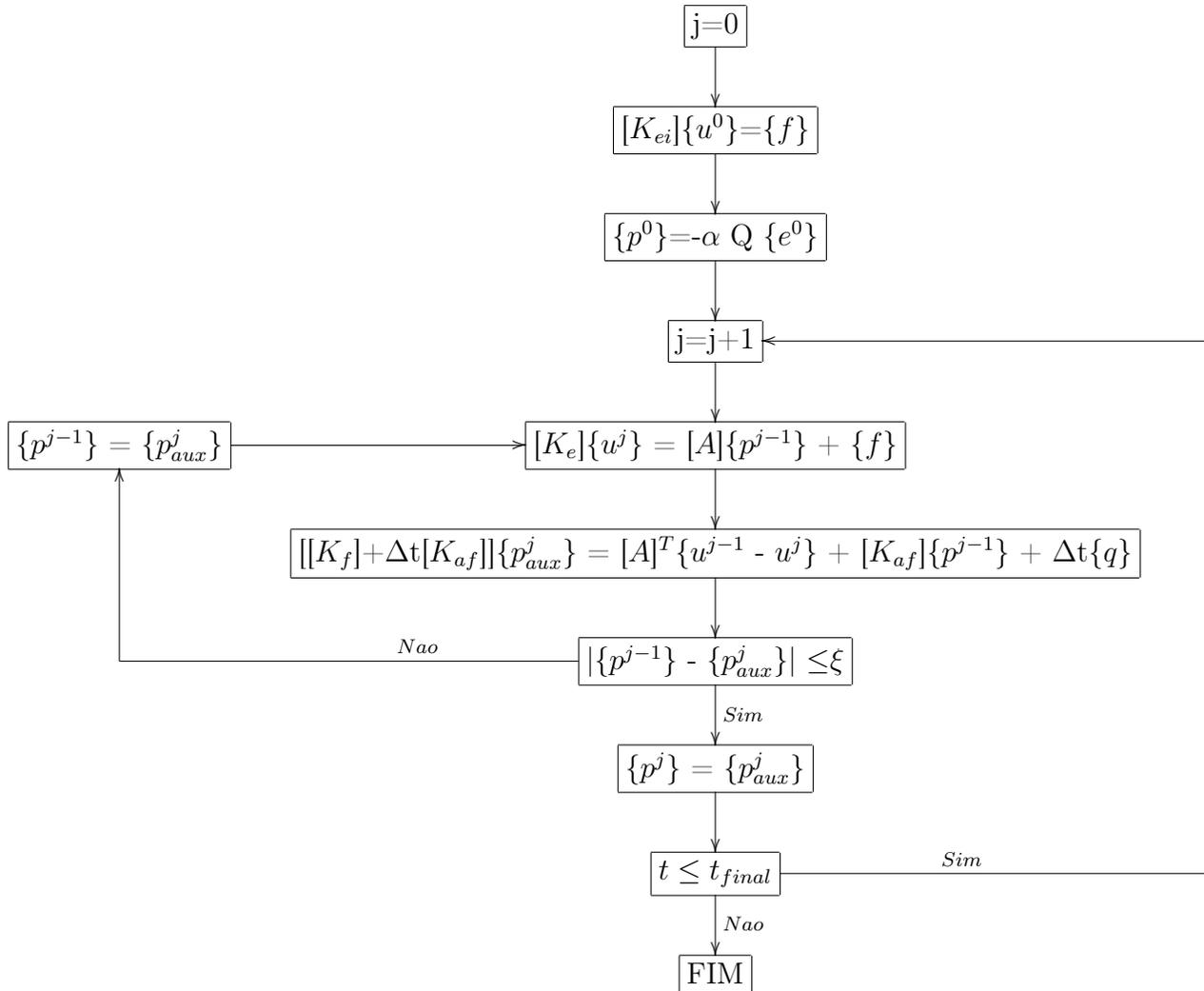


Figura 6.1: Algoritmo do método particionado

6.2 Estrutura do programa MefLab / FORTRAN

O Meflab é um programa de categoria de 20.000 linhas, que visa permitir a resolução de vários tipos de problemas encontrados em engenharia pelo método de elementos finitos e ainda na busca de soluções ótimas em determinados campos utilizando-se dos métodos computacionais clássicos de otimização.

A solução de problemas pelo MefLab parte da leitura do arquivo de dados oriundos do pré-processamento de algum software comercial, organiza esses dados de forma a realizar uma construção numérica satisfatória, aplica as funções fundamentais para o cálculo, constroi e

agrupa as matrizes necessárias a solução, utiliza-se de rotinas comerciais para a resolução dos sistemas e, grava as respostas em arquivos de saída a serem lidos por algum programa de pós-processamento. Na figura 6.2 mostra-se um esquema geral de funcionamento do MefLab, que nesta versão, usa o programa GID como pré e pós-processador (verificar Anexo C).

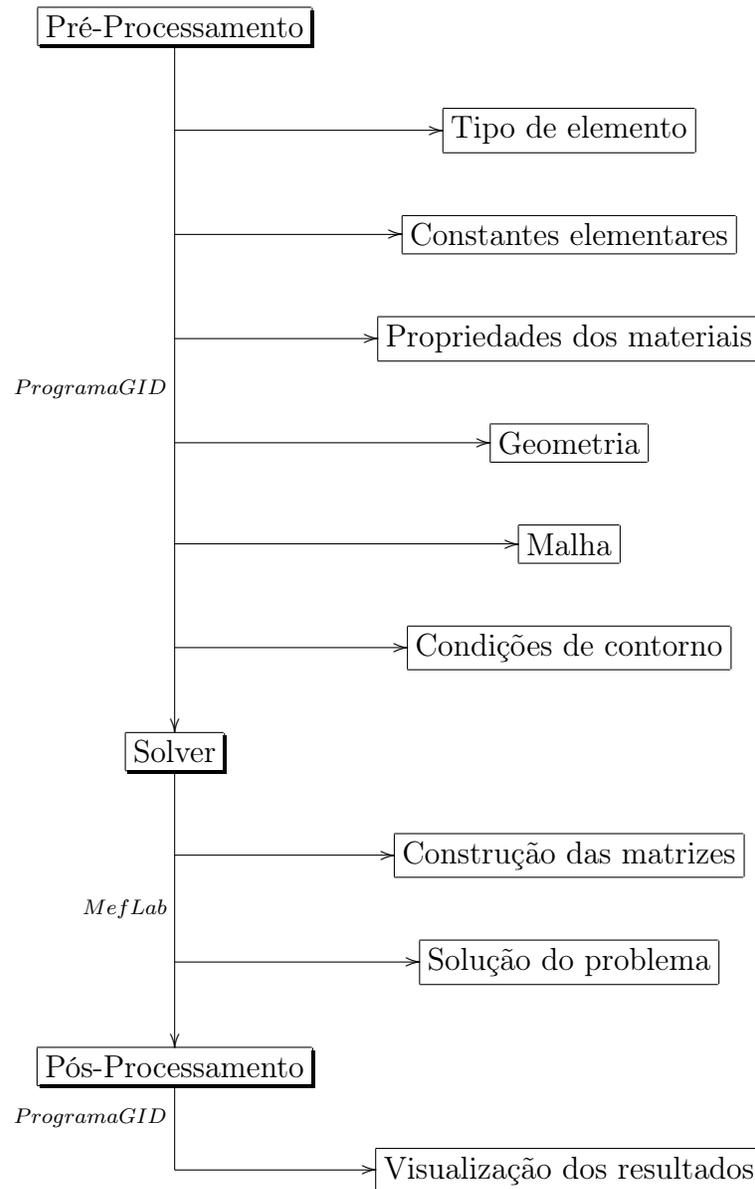


Figura 6.2: Estrutura da modelagem por elementos finitos

A seguir apresenta-se, de forma resumida, a organização do programa MefLab e suas subestruturas para a solução de um problema por elástico pelo método particionado.

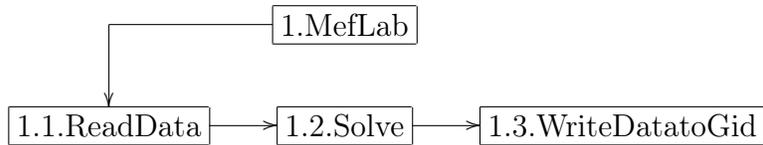


Figura 6.3: Estrutura do programa principal MefLab

A rotina *MefLab* abre o arquivo de dados provenientes do programa de pré-processamento (GID), com os dados de malha, propriedade dos materiais, tipos de elementos, condições de contorno e especificações do tipo de solução (estática, transiente, dinâmica, modal etc). Esta por sua vez chama três subrotinas: A subrotina *ReadData*, que faz a leitura de cada linha do arquivo de entrada e traduz esses dados para o ambiente do programa; A subrotina *Solve*, que faz a montagem das matrizes, soluciona os sistemas e guarda as respostas em vetores ou matrizes; A subrotina *WriteDatatoGid*, que transcreve as respostas geradas pela subrotina anterior para linguagem de leitura do pós-processador. A figura 6.3 ilustra o encadeamento destas rotinas.

A numeração à esquerda dos nomes representam o nível de estruturação das rotinas, dentro do programa. Por exemplo, o nome 1.2.1.1.BuildElements significa que a subrotina *BuildElements* é a primeira subrotina no nível de estruturação 4 e está dentro da 1ª subrotina de estruturação 3 (1.2.1.Assemb), que por sua vez, está inserida na 2ª subrotina de estruturação 2 (1.2.Solve), que está dentro da rotina principal (1.MefLab), que engloba todas as outras anteriores. Ou seja, o número representa a ordem da subrotina dentro de outra e a quantidade de pontos representam o nível de estruturação.

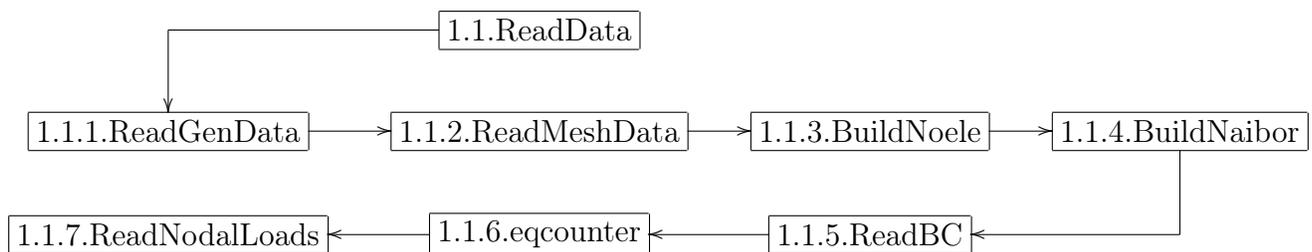


Figura 6.4: Estrutura da subrotina ReadData

Na figura 6.4 mostra-se a estruturação lógica do módulo *ReadData*.

A subrotina *ReadGenData* é responsável por ler os dados gerais, tais como: - número total de nós, elementos, coordenadas geométricas e materiais; - tipo de elemento; - valores das propriedades dos materiais; - tipo de análise; - erros e passo de tempo.

A subrotina *ReadMeshData* faz a leitura dos dados de cada nó e elemento, para os nós lê sua ordem, numeração e seus pontos geométricos, para os elementos lê sua ordem, numeração e quais nós o formam. A subrotina *BuildNoele* cria a tabela de conectividade dos nós e inicializa os graus de liberdade livres. Para a subrotina *BuildNaibor* cabe a tarefa de montar a incidência de vizinhos. A subrotina *ReadBC* lê as condições de contorno de restrição e preenche a matriz de equações (ID) com valores 1 e 0 para nós restritos e não restritos, respectivamente. Na subrotina *eqcounter* são preenchidos os elementos da matriz de equações (ID) (Cook et al., 1989) e enumera-se o número de equações conforme os nós livres, para o elemento poroelástico que contem duas fases distintas a numeração se repete conforme o tipo de grau de liberdade. Finalmente a subrotina *ReadNodalLoads* faz a leitura dos valores das condições de contorno de carregamento, como forças e fluxos.

Na figura 6.5, mostra-se um esquema geral do módulo de solução *Solve*.

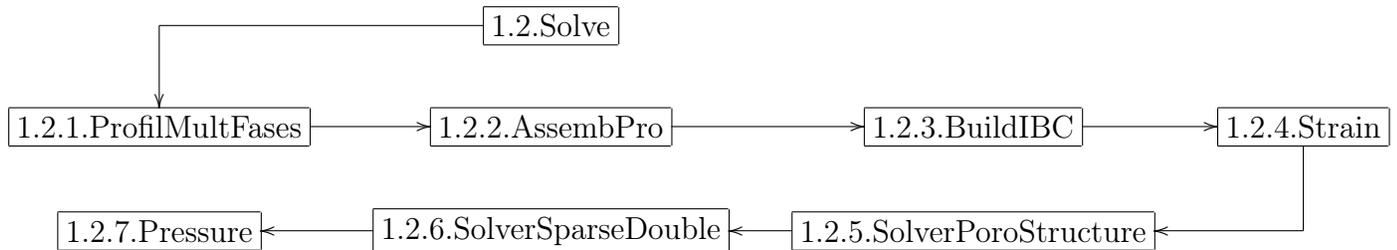


Figura 6.5: Estrutura da subrotina *Solve*

A subrotina *Solve*, como já descrito, é responsável pela solução do problema. Ela é formada pelas subrotinas: *ProfilMultFases*, que faz a contagem dos elementos não nulos das matrizes globais e constroe o vetor posição, que servirá para montagem da matriz esparça; *AssembPro*, que tem a finalidade de selecionar o tipo de elemento, calcular as matrizes elementares simétricas e a alocação das equações e montar as matrizes globais esparsas; *BuildIBC*, que tem a função de resolver o sistema global no passo de tempo inicial utilizando

os dados iniciais prescritos, quando estes existirem; Se não houverem dados prescritos o programa aponta para a subrotina *SolverSparseDouble*, que é a subrotina que implementa o método direto de solução de sistemas lineares com matrizes esparsas simétricas; Depois de realizada a solução necessita-se calcular as deformações, que é feita pela subrotina *Strain*. As deformações são calculadas por outros subconjuntos de subrotinas que realizam a derivação das variáveis de deslocamento pelo espaço; Para calcular-se as pressões iniciais utiliza-se a subrotina *Pressure*, que se baseia na equação 5.37, $\{p_i\} = -\alpha Q \{e\}$; e por último faz-se a solução para cada incremento de tempo do sistema sólido e fluido através da subrotina *SolverPoroStructure*, que além de resolver os sistemas aplica a condição de convergência do método particionado.

Na figura 6.6, detalha-se o módulo responsável pela montagem das matrizes necessárias para implementação da solução particionada usada neste trabalho.

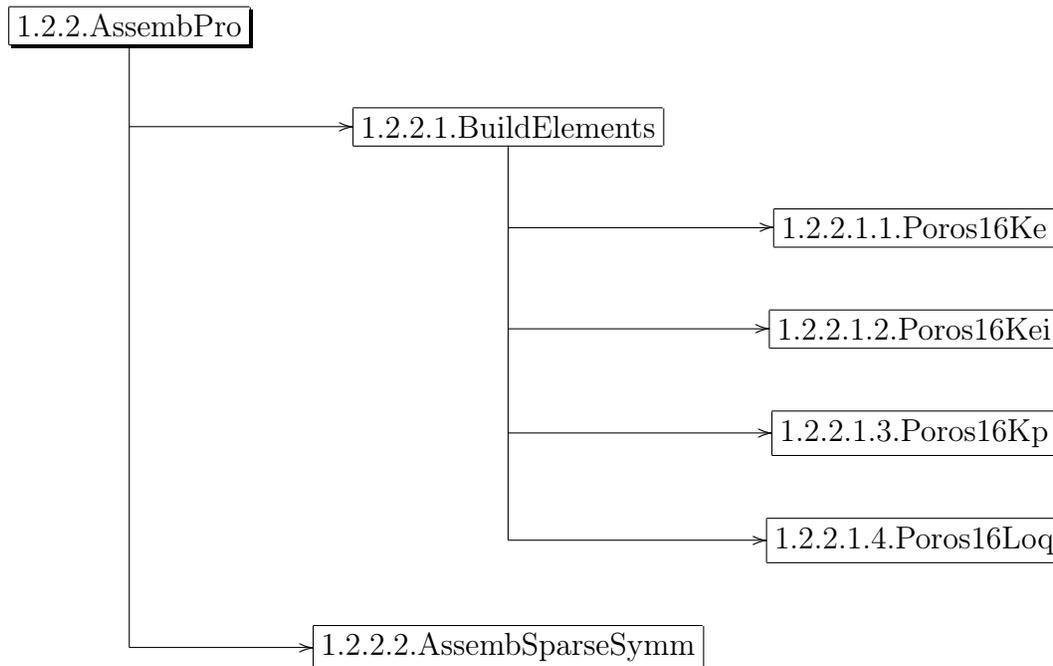


Figura 6.6: Estrutura da subrotina AssembPro

Na subrotina *BuildElements* estão as subrotinas de construção de todos os elementos do programa MefLab, como as dos elementos unidimensionais truss01 e beam02, os triangu-

lares trian03 e trian11, os quadrilaterais quadr04 e fluid10 e os poroelásticos: - poros14, para elemento unidimensional poroelástico; - poros15, para elemento triangular poroelástico; - poros16, para elemento poroelástico quadrilateral. Os elementos poroelásticos foram implementados ao *solver* MeFLab pelo autor deste trabalho, realizando todas as adaptações necessárias para que os processos comuns a outros elementos não se interferissem entre si, visto também, que para o elemento poroelástico foi-se necessário construir matrizes elásticas e fluidas.

Para cada tipo de elemento faz-se a montagem dos termos das matrizes elementares simétricas através da integração de Gauss, no caso do elemento poroelástico são construídas três matrizes iniciais, conforme subrotinas *Poros16Ke*, *Poros16Kei* e *Poros16Kp*, que formam as matrizes de rigidez elástica, de rigidez elástica não drenada e rigidez fluida, respectivamente. Após a montagem dessas matrizes localiza-se a posição de cada elemento não nulo desta, conforme sua equação, através da subrotina *Poros16Loq*.

Após realizada a fase de montagens elementares faz-se a construção dos termos das matrizes globais utilizando-se a subrotina *AssembSparseSymm*. Esta rotina através de *loops* monta os vetores da matriz esparça, constituídos de um vetor de termos não nulos, de um vetor de posição na coluna e de um vetor de posição na linha, tendo ainda variáveis inteiras como o número de termos não nulos. A reunião de todos os termos de todos os elementos faz-se por meio de iterações, conforme número desses elementos.

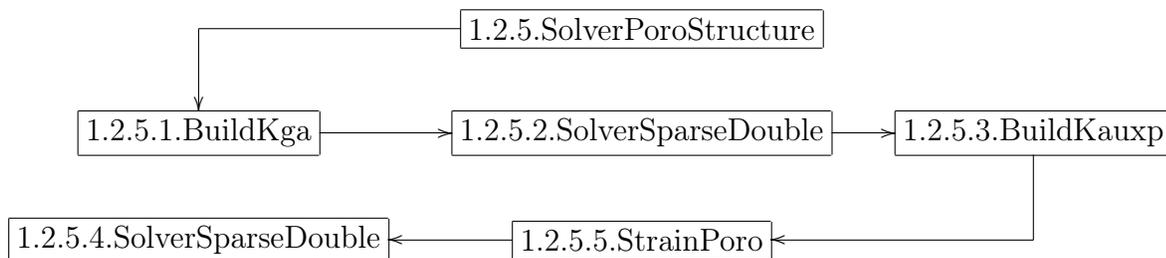


Figura 6.7: Estrutura da subrotina SolverPoroStructure

Para que se possa obter os resultados transientes de deslocamento e pressão, aplica-se iterações no tempo para as soluções sólidas e fluidas com convergência da pressão, conforme

subrotina *SolverPoroStructure*. Esta rotina subdivide-se em: - *BuildKga*, que faz a montagem do vetor global $\{Kga\}$, formado pela multiplicação da matriz global de acoplamento com as pressões iniciais $\{Kga\}=[A]\{p_i^n\}$; - *SolverSparseDouble*, que soluciona o sistema $[K_e]\{u_i^{n+1}\} = \{Kga+\{f\}\}$; - *BuildKauxp*, que tem o papel de construir o vetor $\{Kauxp\}$, formado pela multiplicação da matriz global de acoplamento transposta pela variação dos vetores de deslocamento mais a multiplicação da matriz global de amortecimento fluido pelo vetor de pressões $\{Kauxp\}=[A]^T\{u_i^{n-1}-u_i^n\} + [K_{af}]\{p_i^n\}$; - *SolverSparseDouble*, que neste momento tem a função de solucionar o sistema $[[K_f]+\Delta t[K_{af}]]\{p_i^{n+1}\} = \{Kauxp+\Delta t\{q\}\}$, obtendo os valores de $\{p_i^{n+1}\}$.

Faz-se o teste de convergência entre a diferença de $\{p_i^{n+1}\}$ e $\{p_i^n\}$, que deve ser menor que o erro ξ selecionado, se esta for maior, inicia-se o processo novamente com a montagem do vetor $\{Kga\}$, até que haja convergência. Quando a convergência é obtida atualiza-se os resultados, dos deslocamentos e pressões e também das deformações e tensões, de cada passo no tempo. Este processo continua até que se alcance o tempo total de análise selecionado.

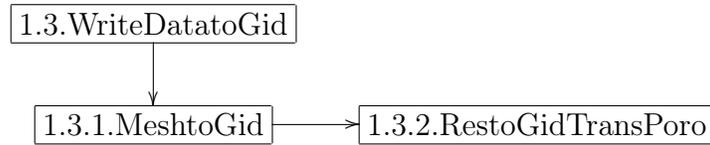


Figura 6.8: Estrutura da subrotina WriteDatatoGid

Como já descrito a subrotina *WriteDatatoGid* escreve os resultados no formato de leitura do pós-processador, suas subrotinas *MeshtoGid* e *RestoGidTransPoro* tem a função de escrever os dados da malha, como posição dos nós e elementos e escrever todos os resultados gerados em arquivos de leitura padrão e no formato do pós-processador, respectivamente.

Capítulo 7

Validação do Modelo e Resultados

Este capítulo divide-se em três seções: uma de apresentação do método utilizado para obtenção das geometrias biomecânicas utilizadas, outra de validação do modelo, que pretende comparar as respostas analíticas do modelo de Biot com o modelo numérico, e a última, de apresentação dos resultados dos modelos biomecânicos com osso e prótese.

7.1 Obtenção das Geometrias Biomecânicas

Esta seção tem por objetivo descrever os passos realizados para obtenção da geometria bidimensional das partes ósseas e prótese utilizadas para as análises. Todas as geometrias foram retiradas da página eletrônica do laboratório italiano de reposição biomecânica, ligado ao Instituto de Ortopedia Rizzoli (Rizzoli, 2005).

A priori foram retirados de (Rizzoli, 2005) as geometrias em 3D no formato ANSYS, extensão ".db". Estas geometrias têm dimensão baseada na experiência médica dos pesquisadores e na média dos tamanhos dos fêmures de pacientes adultos. A figura 7.1 apresenta a geometria do fêmur no formato Ansys. As duas regiões do osso, cortical e trabecular também estão presentes no modelo.

Mesmo sendo o programa Ansys dedicado a análise de elementos finitos, a geometria foi modificada com suas ferramentas CAD. Esta modificação pretende reduzir a geometria 3D do fêmur, para linhas de contorno 3D e, com ajuda de outros programas e recursos CAD, planificar estas linhas geométricas tridimensionais. Esta tarefa engloba os seguintes passos:

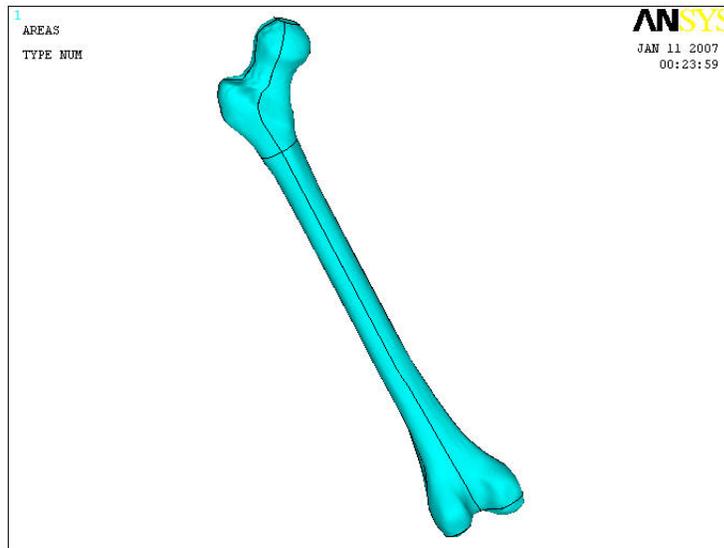


Figura 7.1: Modelo do fêmur em extensão db

1. Apagam-se as superfícies 3D que formam a geometria, deixando-se apenas linhas 3D, figuras 7.2 e 7.3;
2. Apagam-se as linhas do lado direito e esquerdo do eixo de simetria da geometria, desta forma restam-se apenas as linhas do contorno do fêmur e do contorno da porção trabecular;
3. Posiciona-se a geometria em uma posição plana e exporta-se para uma extensão "igs";
4. No programa CAD gera-se um arquivo do tipo metafile para planificar estas linhas, visto que o eixo de simetria da geometria original não está sobre nenhum plano coordenado, figura 7.4;
5. Retira-se uma parte do corpo do fêmur deixando apenas uma porção da parte mesial e a cabeça deste;
6. Este novo arquivo é inserido novamente no programa Ansys. Neste são inseridas, sobre as linhas planificadas, as áreas para cada região porosa (cortical e trabecular), figura 7.5;
7. A nova geometria com os dados de pontos, linhas e áreas é exportada com a extensão "igs" para o pré-processador do GID;

8. No GID as áreas da geometria ainda são unidas e coladas, desta forma, pode-se construir a malha sobre ela.

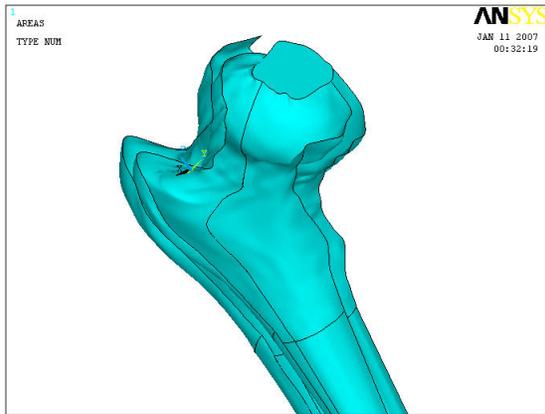


Figura 7.2: Superfícies sendo apagadas

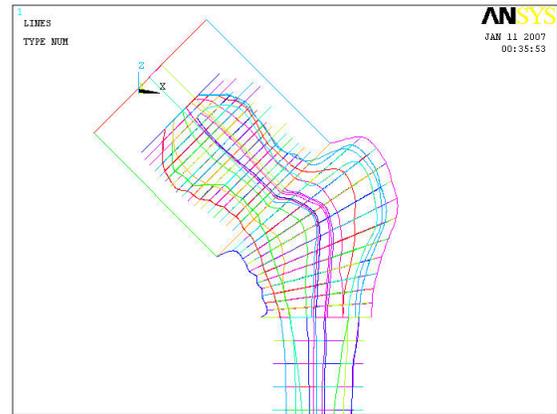


Figura 7.3: Linhas de construção 3D

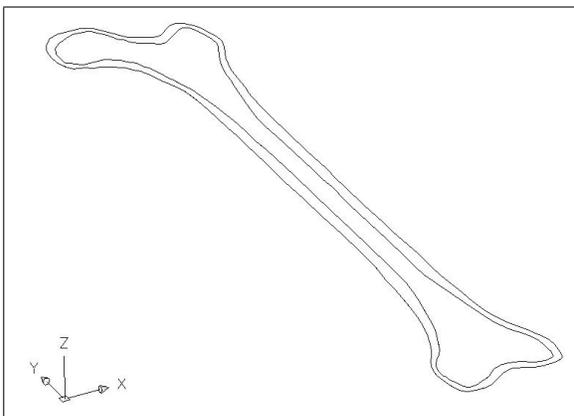


Figura 7.4: Contorno planificado

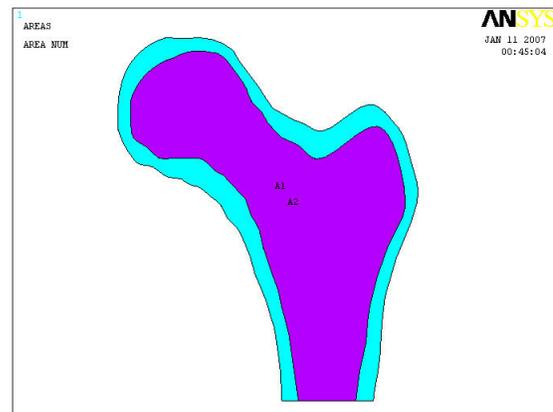


Figura 7.5: Corte da base e definição das áreas

A malha foi aplicada utilizando a ferramenta "mesh" do GID. Utilizou-se uma malha livre quadrilateral e tamanho de referência de 1,5mm para geração desta. Antes da construção da malha deve-se indicar as propriedades e elementos para cada seção do modelo. Embora sendo o modelo bidimensional, este manteve seu contorno semelhante ao modelo real tridimensional.

7.2 Validação do Modelo - Coluna Poroelástica

Nesta seção é apresentada uma análise sobre a ferramenta computacional, de forma a validar a implementação realizada para o elemento poroelástico. Para esta validação utilizou-se o

modelo analítico de uma coluna poroelástica unidimensional, conforme a teoria da consolidação e a teoria de Biot apresentada no anexo A.

Apesar do modelo analítico de Biot aplicar-se ao modelo unidimensional, o modelo plano pode ser validado através da particularização das condições de contorno, visto que restringindo-se todos os deslocamentos na direção de um dos eixos coordenados e aplicando um carregamento no outro eixo, produz-se o mesmo efeito. Desta maneira, construiu-se um modelo de coluna conforme a figura 7.6, aplicando-se um carregamento de tensão de 1 MPa e uma pressão prescrita nula no topo e restringindo todo deslocamento lateral.

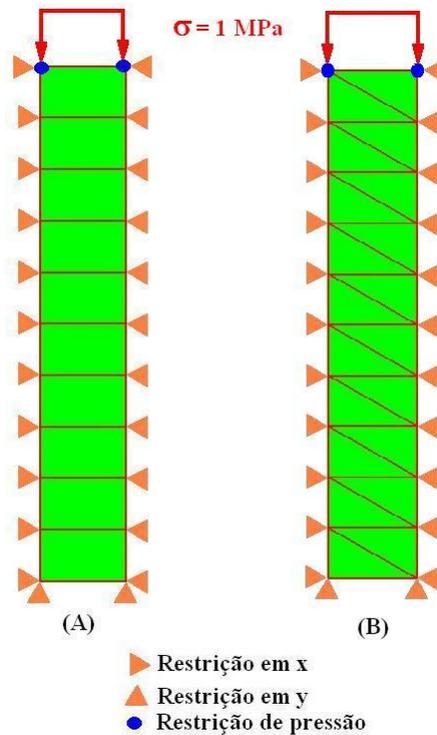


Figura 7.6: Malha e condições de contorno para coluna poroelástica. (A)Elemento quadrilateral, (B)Elemento triangular

Além dos elementos quadrilateral e triangular também foi implementado o elemento unidimensional. Sua formulação é idêntica aos demais e aplica-se a modelos de treliça porosa.

As propriedades da coluna foram retiradas de (Siqueira, 1995). A tabela 7.1 apresenta essas propriedades, com seus valores. Para calcular-se o elemento poroelástico deve-se possuir

no mínimo 5 valores de propriedades.

Tabela 7.1: Propriedades para coluna poroelástica

Constantes	Nomenclatura (Unidades)	Valores
Módulo de elasticidade transversal	G [Pa]	$6,0 \times 10^9$
Coefficiente de Poisson drenado	ν	0,2
Coefficiente de Poisson não drenado	ν_u	0,33
Coefficiente de Skempton	B	0,62
Coefficiente de permeabilidade	κ [m^2 /Pa.s]	$2,0 \times 10^{-11}$
Passo no tempo	Δt [s]	1,0
Altura da coluna	h [m]	6,0

As figuras a seguir apresentam os resultados das distribuição dos deslocamentos para o modelo com elementos quadrilaterais e para o modelo com malha de elementos triangulares em passos de tempo iguais, ao longo da resposta transiente.

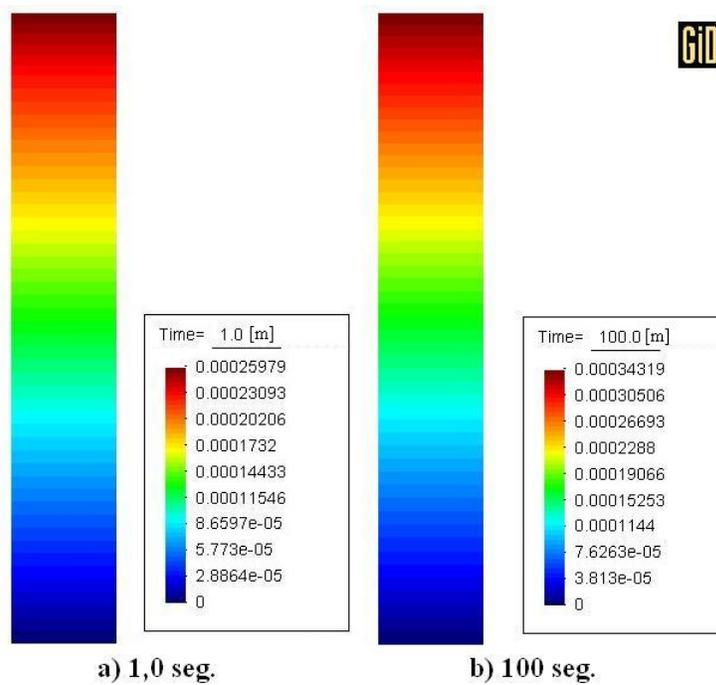


Figura 7.7: Resultados dos deslocamentos para o elemento quadrilateral

Os deslocamentos apresentados na figura 7.7 estão uniformemente distribuídos e não variam suas escalas cromáticas para os dois passos de tempo. Isso indica que a montagem do arquivo de pós-processamento e sua leitura estão corretas. Outro fator importante é

que a escala cromática varia gradativamente, o que também indica que os resultados estão coerentes, pois só existem deslocamentos na direção vertical.

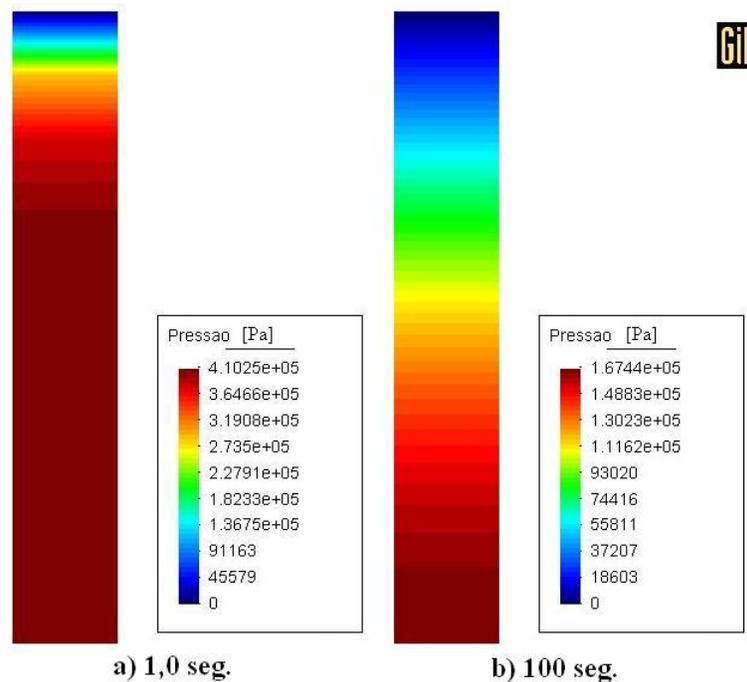


Figura 7.8: Resultados das pressões para o elemento quadrilateral

As pressões para o elemento quadrilateral são apresentadas na figura 7.8, para os mesmos passos de tempo da figura 7.7. Nota-se que a distribuição de pressão também é uniforme e que decresce com o tempo, demonstrando sua tendência de estabilizar-se no tempo com a pressão prescrita nula. Nota-se que os valores de pressão para o tempo inicial são todos iguais, a não ser os do topo, isto indica que os cálculos de pressão estão coerentes, visto que, para o estado inicial admite-se que as características são não drenadas, isto é, não há variação do volume de fluido e, desta forma as pressões nos nós são iguais.

As mesmas análises foram realizadas para o elemento triangular, visto que na integração para obtenção das matrizes deste elemento, as coordenadas geométricas são utilizadas diretamente, não necessitando fazer mudanças. É importante a análise sobre esse elemento pois, na malha, ele apresenta não simetria em relação ao carregamento.

Os deslocamentos para o elemento triangular apresentam-se com as mesmas características

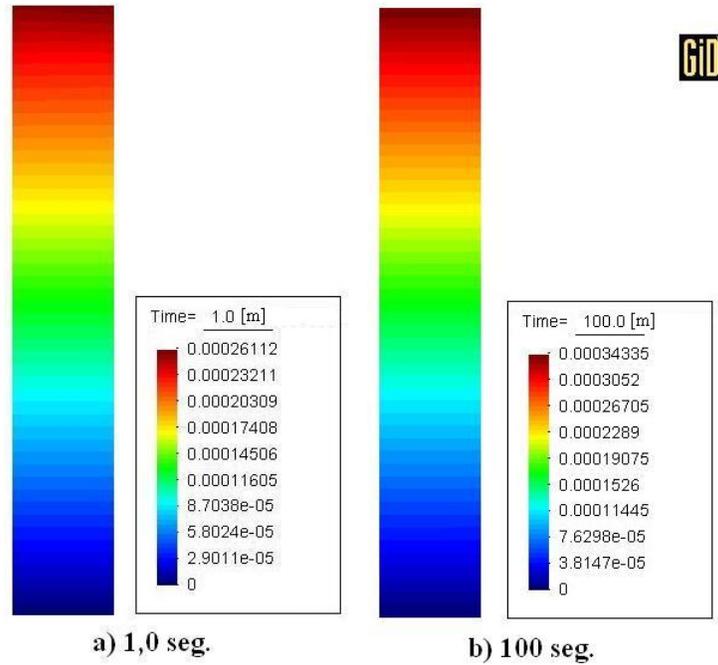


Figura 7.9: Resultados dos deslocamentos para o elemento triangular

mencionadas para o elemento quadrilateral tendo uniformidade na escala de cores e orientação vertical, demonstrando sua aplicação particular para o caso unidimensional.

A distribuição das pressões, mostradas na figura 7.10, para o elemento triangular diferem-se do elemento quadrilateral apenas nos passos de tempo inicial, pois para esses períodos existe uma pequena assimetria. Esta efeito deve-se à geometria do elemento triangular conter um dos lados diagonal a direção de carregamento o que acarreta um maior tempo para estabilização do sistema. Nota-se que para o passo de tempo de 100 segundos as respostas já estão totalmente uniformes.

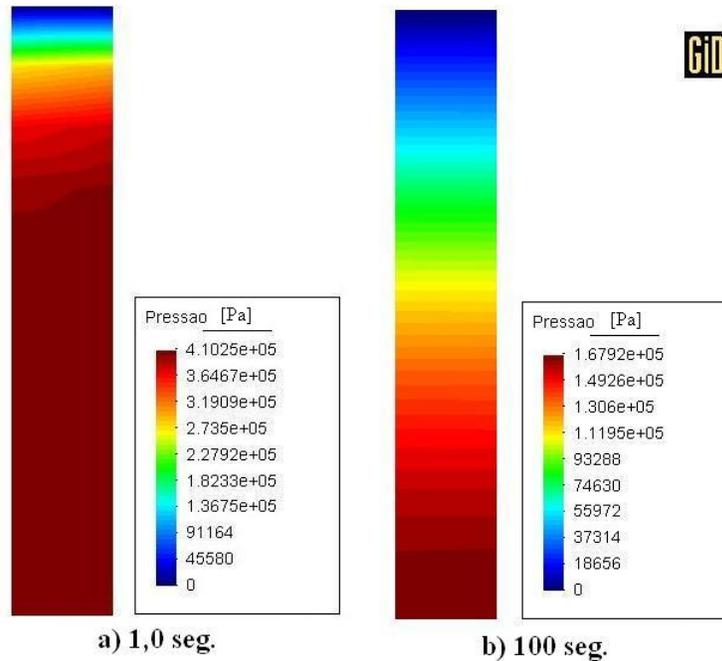


Figura 7.10: Resultados das pressões para o elemento triangular

7.2.1 Comparação com resultados analíticos

Esta seção foi criada para apresentar os resultados de comparação entre o exemplo da coluna poroelástica, na ferramenta computacional (elementos quadrilateral e triangular) e a solução analítica.

Lembra-se que esses valores se baseiam nas pressões da base e nos deslocamentos do topo da coluna ao longo do tempo da análise transiente. A figura 7.11 apresenta o comportamento dos deslocamentos no topo da coluna para os casos numéricos e analítico.

Analisando a figura 7.11 pelas curvas originais não consegue-se perceber diferença entre os valores de deslocamento, mas na ampliação realizada nota-se que os dados do elemento triangular se aproximam mais dos valores analíticos do que do elemento quadrilateral, isso indica uma maior discretização da resposta ao deslocamento para o elemento triangular. Os dados tendem a se estabilizar acima de 500 segundos e as condições iniciais não provocam variação brusca da resposta, sempre acompanhando o perfil da resposta analítica. Mesmo apresentando uma menor aproximação dos valores de deslocamento, o elemento quadrilateral

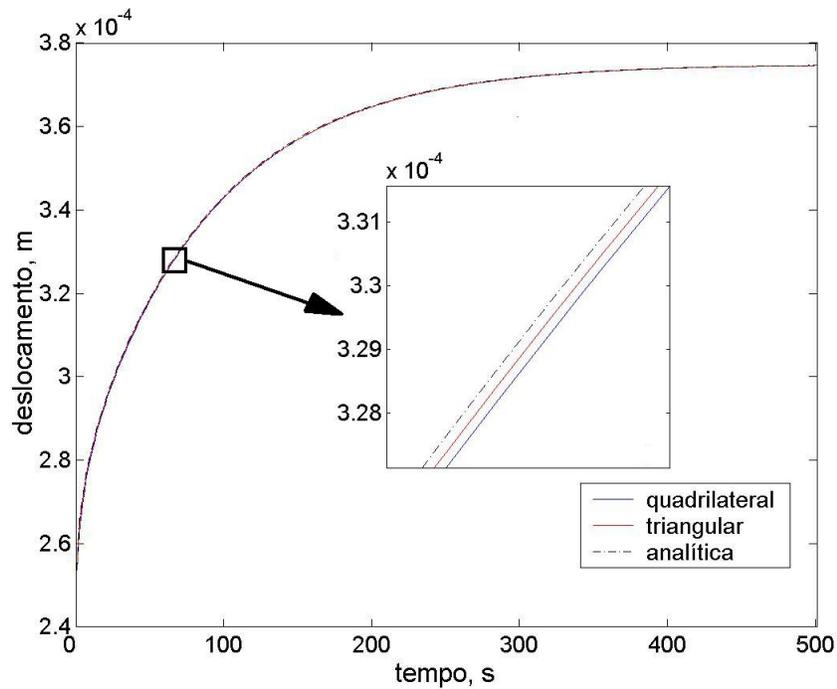


Figura 7.11: Comparação dos deslocamentos para diferentes soluções no topo da coluna

tem um boa resposta, se comparado aos dados analíticos, pois ao reparar-se no detalhe das curvas a escala do deslocamento está variando de centésimo em centésimo de metro, o que é muito pouco. Os erros em deslocamento não ultrapassaram 1% para todos passos de tempo.

As pressões apresentadas pela figura 7.12 tem comportamento inverso ao deslocamento, sendo que a solução para o elemento quadrilateral é mais precisa do que a triangular, com relação a resposta analítica. A pressão do sistema tende a se estabilizar na pressão de prescrição nula, desta forma se houvesse avanço no passo do tempo, a curva tenderia a se aproximar mais ainda do eixo das coordenadas. Neste caso, os erros com relação a solução analítica não ultrapassaram 2%.

Com isso a ferramenta computacional foi validada de modo a obter-se os resultados dos demais casos analisados e a aplicação ao modelo do fêmur com e sem prótese.

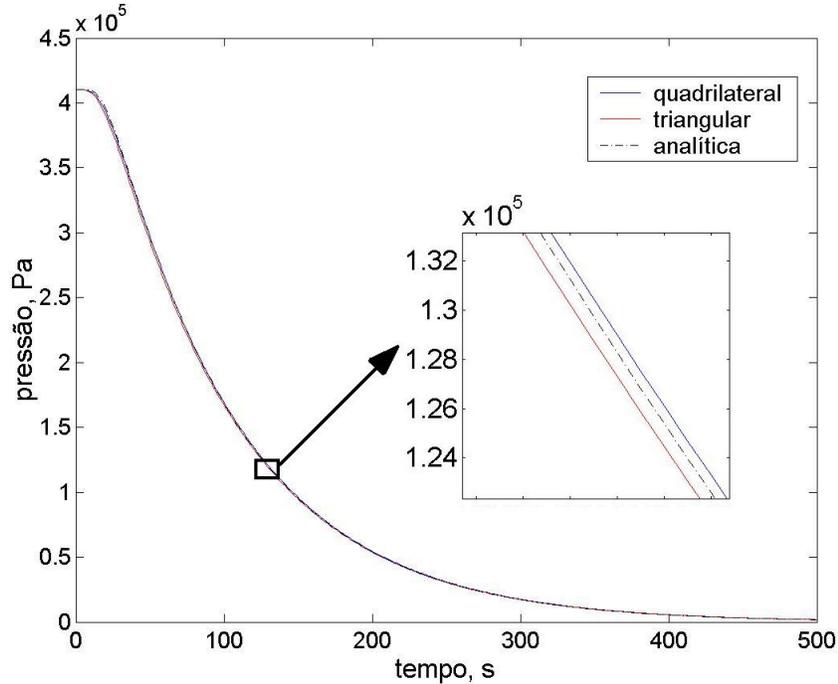


Figura 7.12: Comparação das pressões para diferentes soluções na base da coluna

7.3 Condições de Contorno para o Problema Biomecânico

Os músculos glúteo médio e mínimo e o tensor *fascia femoris* são os principais responsáveis pela força abduutora que controla o deslocamento não rotacional do fêmur e da perna em relação ao eixo central do corpo humano. Eles ligam o íleo ao grande trocanter do fêmur. A cabeça do fêmur, por sua vez, está alojada no acetábulo do osso ilíaco, conforme ilustrado na figura 7.13.

Quando se anda, existe um momento sobre um dos pés e o centro de gravidade do corpo, que está diretamente sobre ele. As forças mais importantes atuantes na perna apoiada são: 1) força vertical para cima no pé, igual ao peso do corpo W ; 2) o peso da perna W_p , que é aproximadamente igual a $W/7$; 3) R , a força de reação entre o fêmur e o quadril; e 4) T , a tensão no grupo muscular, tomada a 70° , entre o quadril e o grande trocanter no fêmur, que estabelece a força para manter o corpo balanceado, conforme ilustração apresentada na figura 7.14

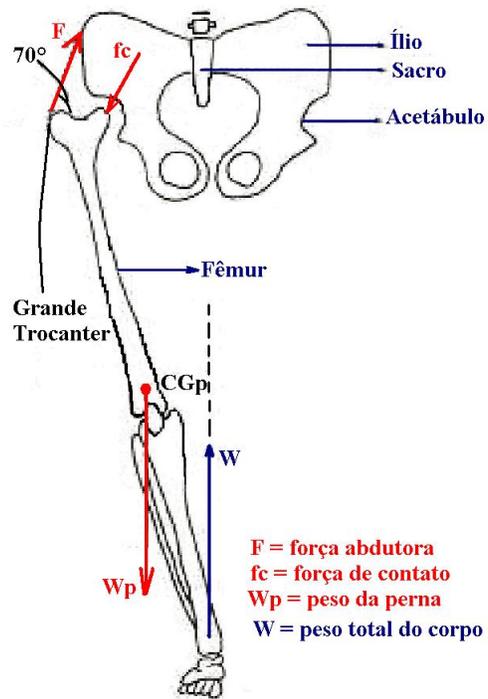


Figura 7.13: Forças aplicadas sobre o apoio de apenas uma perna
Adaptado de (Bertolo, 2002)

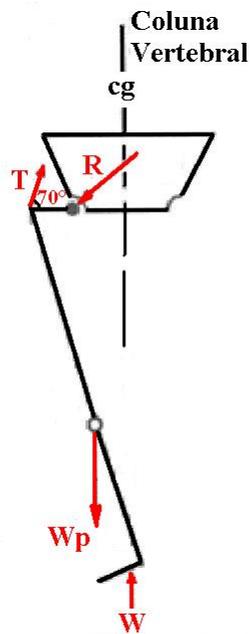


Figura 7.14: Esquema dos esforços sobre a perna
Adaptado de (Bertolo, 2002)

Neste exemplo, figura 7.13, T tem carga de 0,96 W e existe uma força de reação R na junta do quadril igual a 3,0 W. A cabeça do fêmur, para um homem de 75 kg, tem uma força de cerca de 2000 N sobre ela (Bertolo, 2002). Este carregamento simula a condição de um homem de pé, andando, sem carregar nenhum peso.

As cargas aplicadas sobre os modelos biomecânicos são representadas pelas letras T e R da figura 7.14 e tem valores de 703 N e 2317 N, respectivamente (Beaupré et al., 1990). Na base dos modelos foram consideradas restrições na direções vertical e algumas na horizontal e condições de contorno de pressão prescrita de 6600 Pa. Este valor de pressão é referente a pressão sanguínea observada na micro-camada óssea dos canais de Havers e Volkman (Cowin, 2001; Qin et al., 2003b).

Ainda sobre os carregamentos deve-se ressaltar que as cargas, de 703 N e 2317 N, foram aplicadas como cargas nodais equivalentes, sobre a superfície trocanter e cabeça, respectivamente. Ou seja, isto funciona como cargas distribuídas ao longa destas regiões.

As tensões provocadas pelos carregamentos nos modelos foram calculadas segundo o critério de tensão equivalente de Von Misses, para o caso plano. Sendo o modelo isotrópico, essas tensões são calculadas diretamente da multiplicação das deformações equivalentes de Von Misses pela relação constitutiva do material. As deformações equivalentes de Von Misses são dadas por:

$$\varepsilon_{VonMisses} = \frac{1}{1 + \nu} \sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2} \quad (7.1)$$

onde ε_1 e ε_2 são as deformações principais dadas por:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (7.2)$$

7.4 Modelo Poroelástico do Fêmur

O modelo geométrico foi reconstruído conforme apresentado anteriormente. Neste modelo pode-se verificar as regiões formadas pelo osso cortical e pelo osso trabecular. O modelo

baseia-se no mesmo utilizado por (Beaupré et al., 1990) com aplicação das cargas de 703 N e 2317 N nos pontos do trocanter e da cabeça, respectivamente. A figura 7.15 apresenta a malha utilizada para esse modelo e suas condições de contorno.

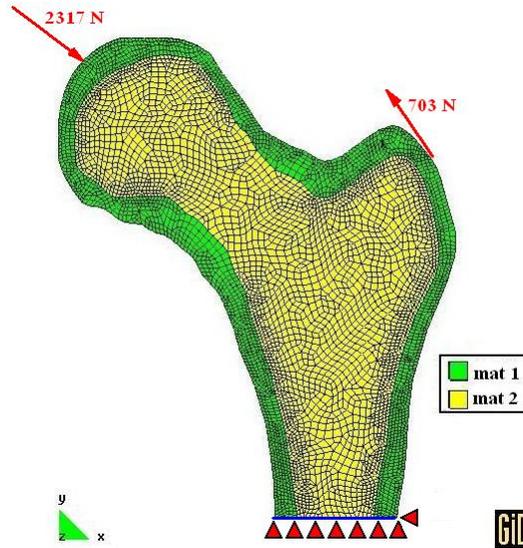


Figura 7.15: Malha e condições de contorno para o modelo da cabeça do fêmur

Sendo que mat1 corresponde a região de osso cortical, mat2 do osso trabecular e a linha azul, na base, as condições de contorno de pressão.

As propriedades dos materiais utilizados foram retirados de diferentes bases da literatura, conforme apresentado na tabela 7.2. Tais propriedades apresentaram valores homogenizados das regiões do osso, visto que, conforme apresentado no capítulo 3, essas regiões caracterizam-se pela dupla porosidade e por parâmetros não lineares da estrutura. Por exemplo, a região trabecular tem uma porosidade contida na estrutura, o que a difere visualmente da região cortical, ou seja, ela é uma estrutura treliçada não uniforme, mas inserido, nesta mesma estrutura trabecular, estão as porosidades referentes aos canalículos, fluidos e conjuntos celulares.

Outras propriedades podem ser consideradas, tais como, a coeficiente de Biot (α), o módulo volumétrico drenado (K) e a viscosidade do fluido (μ), que são derivadas dos valores apresentados na tabela 7.2, ou dão origem a tais. Percebe-se que a região cortical é mais rígida e tem permeabilidade muito menor que da região trabecular.

Tabela 7.2: Propriedades para cabeça do fêmur

Constantes	Nomenclatura (Unidades)	Osso Cortical		Osso Trabecular	
		Valores	Referência	Valores	Referência
Módulo de elasticidade	E [GPa]	20	(Bayraktar and Keaveny, 2004)	18	(Bayraktar and Keaveny, 2004)
Módulo de elasticidade transversal	G [GPa]	7,55	(Bayraktar and Keaveny, 2004)	7,25	(Bayraktar and Keaveny, 2004)
Coefficiente de Poisson drenado	ν	0,325	(Smit et al., 2002)	0,242	(Lim and Hong, 1999)
Coefficiente de Poisson não drenado	ν_u	0,333	(Smit et al., 2002)	0,399	(Lim and Hong, 1999)
Coefficiente de Skempton	B	0,344	(Smit et al., 2002)	0,94	(Pilcher, 2004)
Coefficiente de permeabilidade	$\kappa [\frac{m^2}{Pa.s}]$	1,5e-17	(Cowin, 1999)	4,7e-4	(Kohles, 2002; Lee and Yoon, 2006)
Porosidade	ϕ	0,05	(Cowin, 1999)	0,65	(Lee and Yoon, 2006)
Passo no tempo	Δt [s]			1,0	
Critério de convergência	-			$1,0 \times 10^{-3}$	
Número de elementos	-			5076	
Número de nós	-			5281	

A seguir são apresentadas as respostas de deslocamento ao longo do tempo do modelo, em seguida as curvas destas respostas para alguns pontos de comportamento extremo.

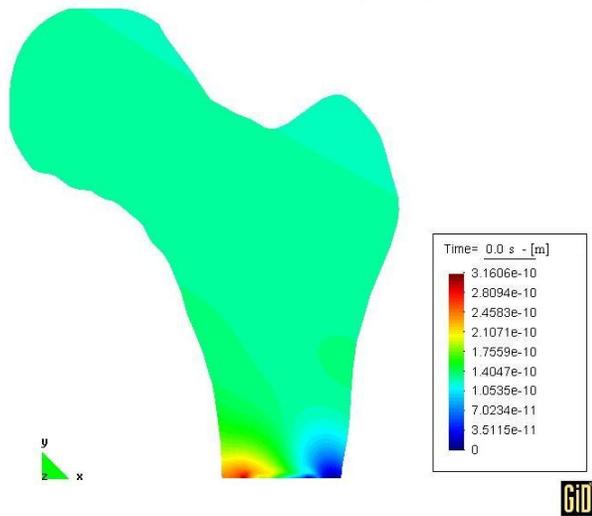


Figura 7.16: Deslocamentos fêmur $\Delta t = 0$

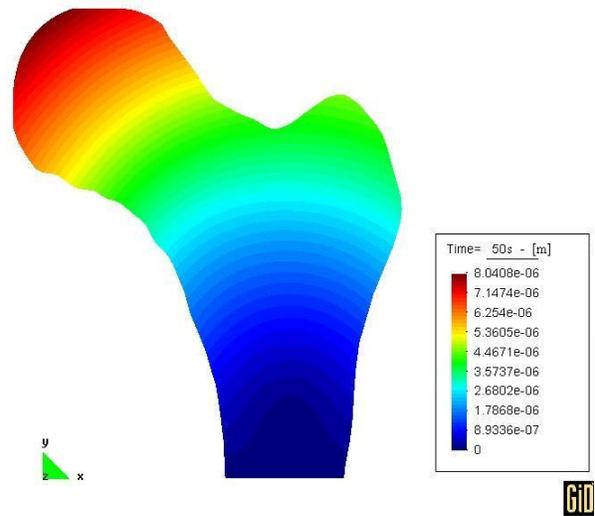


Figura 7.17: Deslocamentos fêmur $\Delta t = 50$ s

A figura 7.16 apresenta deslocamentos não uniformes na base, o que indica a instabilidade do modelo frente as condições iniciais e de contorno. Já na segunda iteração ocorre a estabilidade e convergência das respostas. Nas figuras 7.17 e 7.18 tem-se seus valores semelhantes devido a estabilização das variáveis que ocorrem ao longo do tempo.

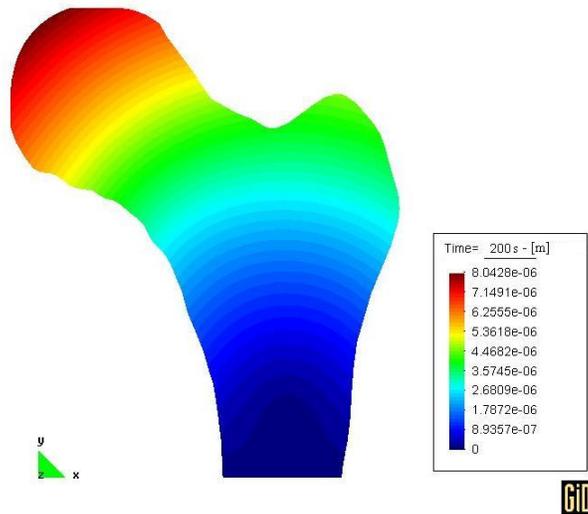


Figura 7.18: Deslocamentos fêmur $\Delta t = 200$ s

As curvas reforçam o que o mapa de cores dos deslocamentos indicavam, pois para os dois nós analisados existe um pico no início, demonstrando esta instabilidade e, há uma convergência rápida, em torno de 2 segundos, como pode ser observado na figuras 7.19 e 7.20.

As pressões apresentam-se diferente dos deslocamentos quanto a variação ao longo do tempo, pois existe variação da pressão do início até quase o tempo final, admitidos 500 segundos. Existe também uma instabilidade inicial, ocorrendo para o passo de tempo inicial e depois tendendo a estabilidade. Conforme apresentado pelas figuras 7.21 a 7.24, com os resultados de pressão, existem regiões formadas por valores de pressão positiva, maiores que a de referência (6600 Pa) e regiões cujo valores estão abaixo dos de referência. Estes apresentam-se com a coloração avermelhada e azulada, respectivamente. Este comportamento é explicado através do deslocamento do sistema, que tende a tração no lado direito e compressão no esquerdo, com isso os poros presentes no lado tracionado tendem a abrir, provocando uma

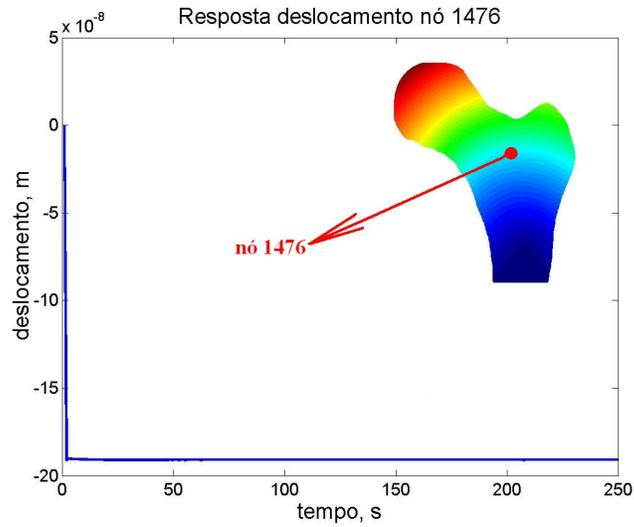


Figura 7.19: Deslocamentos para o nó 1476

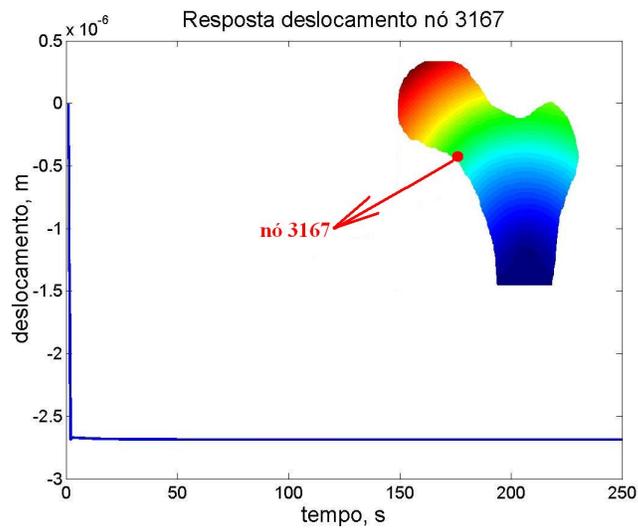


Figura 7.20: Deslocamentos para o nó 3167

sucção de fluido e, no lado esquerdo uma compressão. Esta variação de pressão no sistema provoca o fluxo dos fluidos, que tendem a se estabilizarem no tempo. Esta movimentação de fluidos é muito importante no aspecto biológico, pois são através dos fluidos ósseos que o osso permanece drenado e são transportadas às suas células: proteínas, cálcio e outras informações físico-químicas.

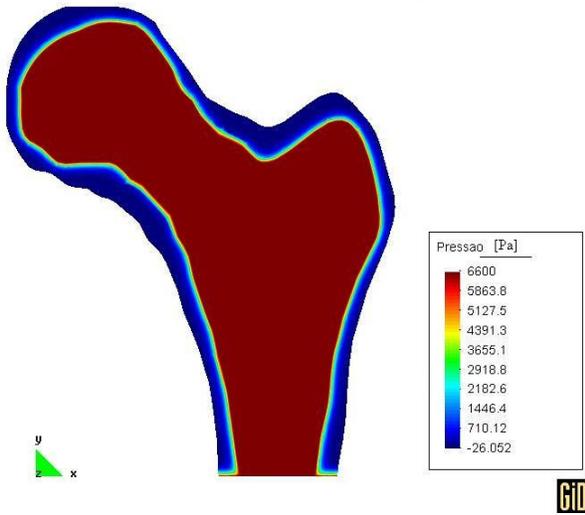


Figura 7.21: Pressões fêmur $\Delta t = 0,0$

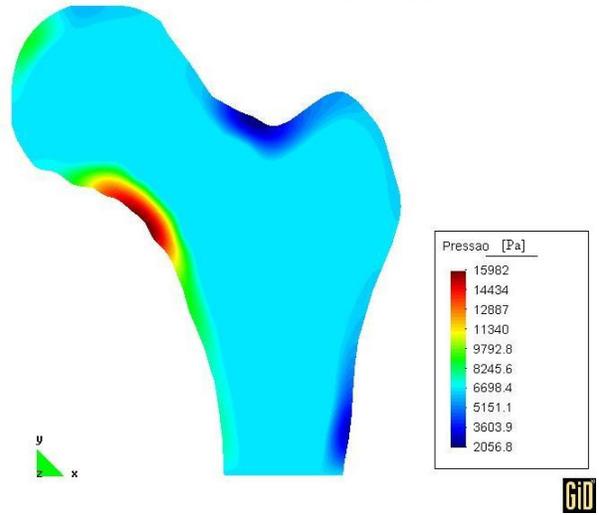


Figura 7.22: Pressões fêmur $\Delta t = 50$ s

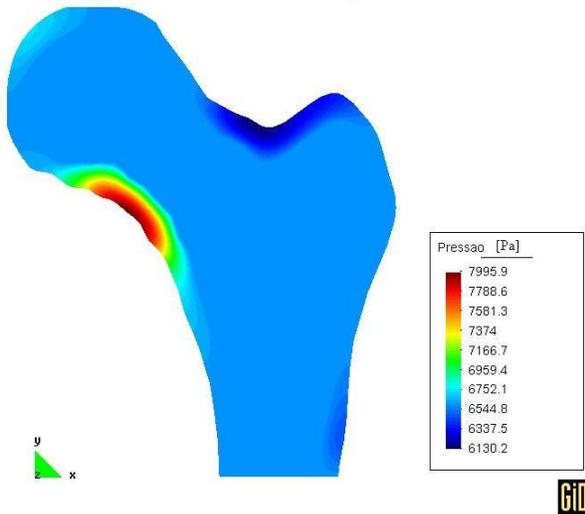


Figura 7.23: Pressões fêmur $\Delta t = 100$ s

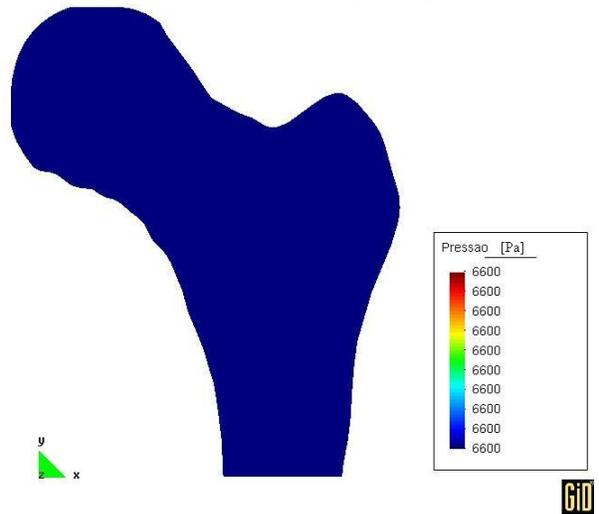


Figura 7.24: Pressões fêmur $\Delta t = 500$ s

Quando ocorre alguma variação do sistema biológico, por exemplo, uma maior compressão dos fluidos, o sistema vivo altera-se promovendo uma variação de acidez, protéica ou química. Estas informações de variação, são então, lançadas no sistema como fonte de acionamento ou inibição de outras células. Isto ocorre muito para o processo de remodelamento ósseo, portanto a avaliação das pressões, que amortece os carregamentos e aumenta a rigidez, não deve apenas ser realizada através de seu comportamento estrutural, mas também sobre sua influência nas relações biológicas contidas no processo de carregamento da mesma.

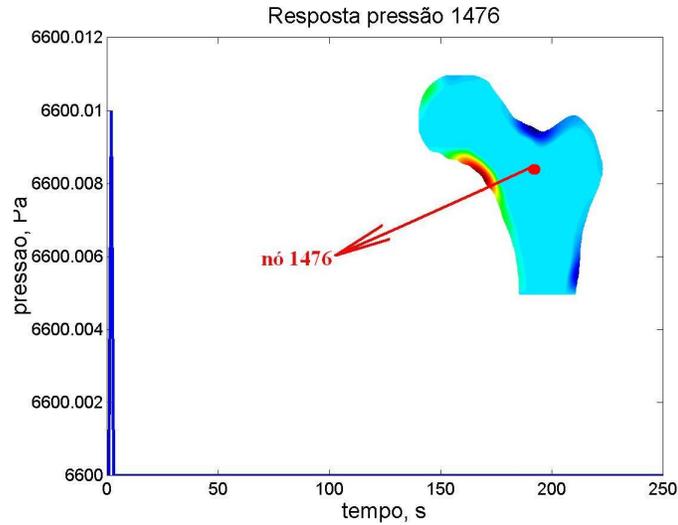


Figura 7.25: Pressões para o nó 1476

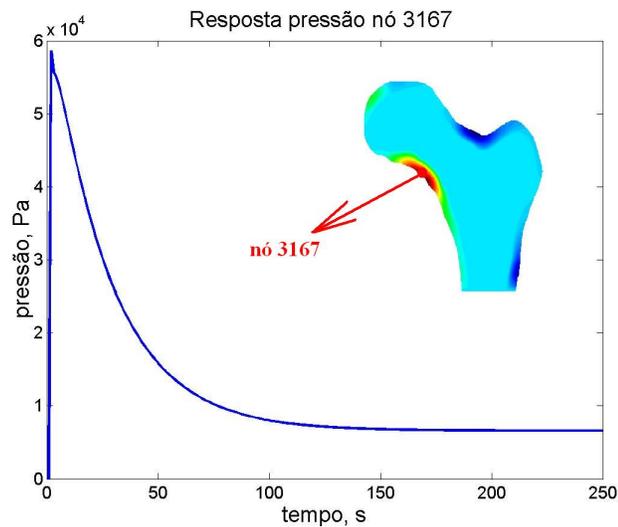


Figura 7.26: Pressões para o nó 3167

Repara-se que todas das curvas das figuras 7.25, 7.26 e 7.27 apresentam a mesma tendência de instabilidade inicial e demoram a se estabilizar, comparando com o tempo de estabilidade dos deslocamentos. Observa-se que o nó 1476 encontra-se na região trabecular e logo alcança a estabilidade, isto se dá pelo valor de permeabilidade do fluido nesta região ser bem maior que o da região cortical. Como a estabilidade da pressão depende da permeabilidade a estabilidade das respostas tendem a se prolongarem no tempo, conforme identificado para as regiões corticais das figuras 7.26 e 7.27.

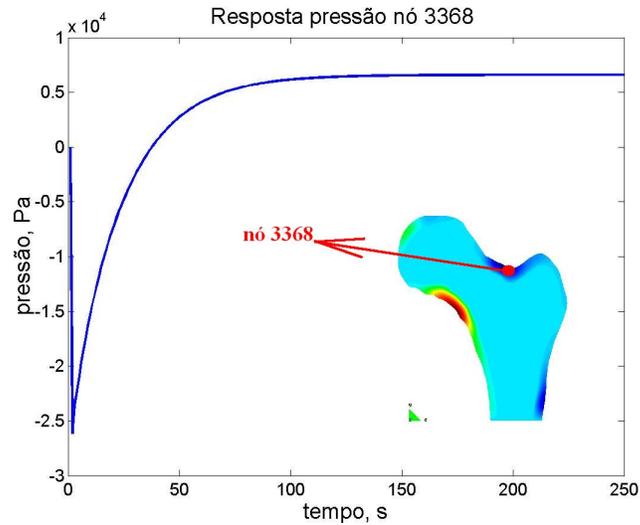


Figura 7.27: Pressões para o nó 3368

As tensões apresentam os mesmos aspectos dos deslocamentos quanto a estabilidade e distribuição dos resultados. O perfil das distribuições de tensão assemelham-se as encontradas por Gupta e Taylor (Gupta et al., 2006; Taylor, 2005). O perfil das deformações é igual ao das tensões, visto que o modelo é isotrópico linear. Percebe-se que há uma pequena concentração de tensões na cabeça do fêmur, dado a região onde fora aplicado o maior carregamento. A região cortical é que está sujeita as maiores tensões, não apenas por apresentar características mais rígidas que a trabecular, mas também por estar localizada nas regiões do contorno, que estão sobre um maior efeito do carregamento.

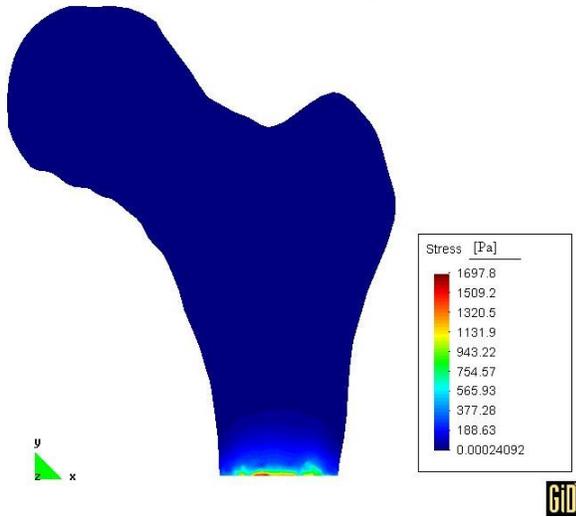


Figura 7.28: Tensões fêmur $\Delta t = 0,0$

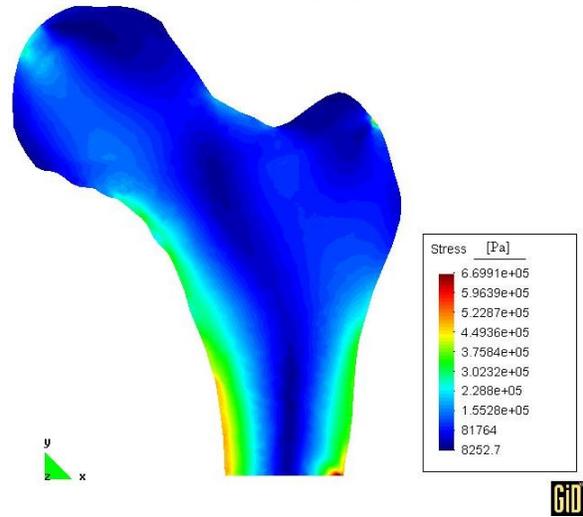


Figura 7.29: Tensões fêmur $\Delta t = 50$ s

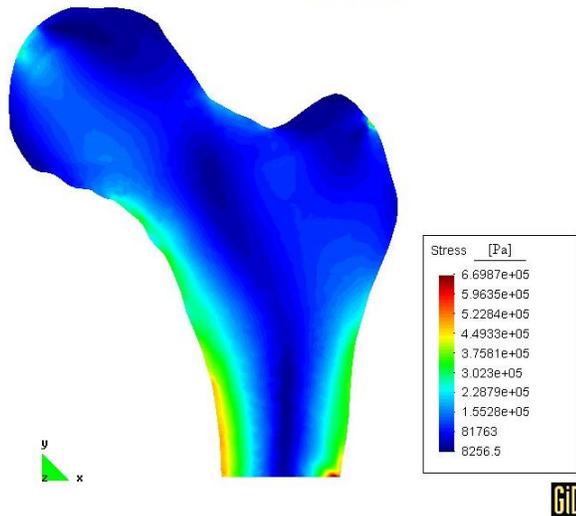


Figura 7.30: Tensões fêmur $\Delta t = 100$ s

7.5 Comparação Modelo elástico com Poroelástico

Um modelo elástico foi construído de forma a se estudar as diferenças entre este modelo e o poroelástico. Para tanto foram inseridas propriedades drenadas as diferentes regiões do fêmur elástico. A região cortical tem módulo de elasticidade de 20 GPa e Poisson de 0,325 e, a região trabecular 18 GPa e Poisson de 0,242. As propriedades aplicadas ao modelo poroelástico foram as mesmas contidas na tabela 7.2. As condições de contorno aplicadas também foram as mesmas para os dois modelos, sendo que para o problema elástico não são incluídas as

condições de pressão. Uma diferença entre os modelos é quanto ao tipo de problema, pois no modelo elástico o problema resolvido é estático, sem variação no tempo, enquanto do poroelástico é transiente, existe variação no tempo. Desta forma, para comparação, utilizou-se as respostas do modelo poroelástico já estabilizado no tempo, adotou-se o tempo de 50 segundos. As malhas foram as mesmas para os dois modelos, sendo que a malha construída no pré-processador do GID foi exportada para o pré-processador do Ansys para a modelagem elástica.

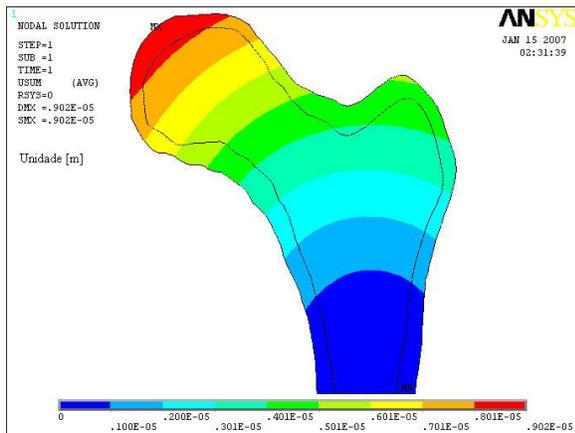


Figura 7.31: Deslocamentos modelo elástico

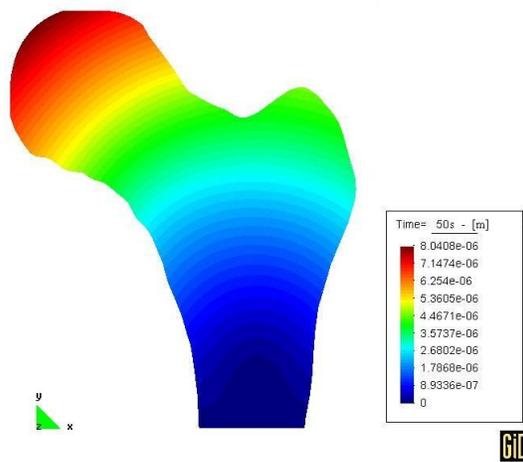


Figura 7.32: Deslocamentos modelo poroelástico

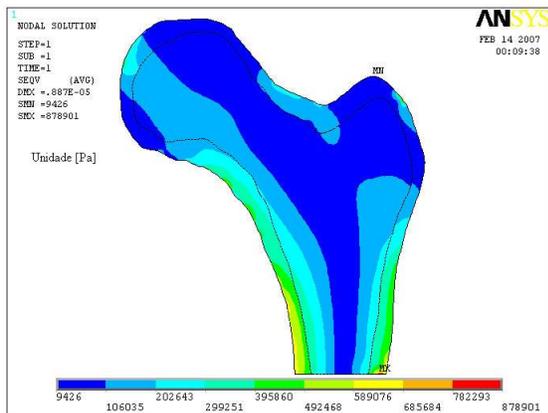


Figura 7.33: Tensões modelo elástico

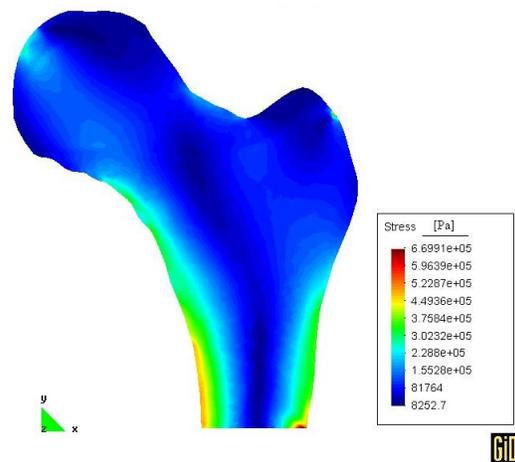


Figura 7.34: Tensões modelo poroelástico

Não existem grandes variações entre os modelos. Para os deslocamentos existe uma

diferença em torno de $1 \mu\text{m}$, no deslocamento máximo, o que corresponde a uma diferença de 12%, com os maiores valores para o modelo elástico. Isto demonstra a maior rigidez do modelo poroelástico devido a ação de resposta do fluido ao carregamento.

O efeito do fluido tende a acomodar melhor os carregamentos, fazendo com que as tensões para o modelo poroelástico sejam menores que as do modelo elástico. As distribuições das tensões, entre os dois modelos, são muito semelhantes, mas a maior diferença entre elas é de 23%. Nota-se que as regiões com maior valor de deslocamento e tensão são as mesmas nos dois modelos simulados.

7.6 Modelo Elástico-Poroelástico (Prótese-Fêmur)

O modelo geométrico para este caso foi obtido pelo mesmo processo utilizado para o modelo ósseo simples. Para tanto o modelo prótese-fêmur apresenta três regiões: formadas pelo osso cortical (poroelástico), pelo osso trabecular (poroelástico) e prótese total de titânio (elástico). Foram aplicadas as mesmas cargas de 703 N e 2317 N nos pontos do trocanter e da cabeça da prótese, respectivamente. A figura 7.35 apresenta a malha utilizada para esse modelo e suas condições de contorno.

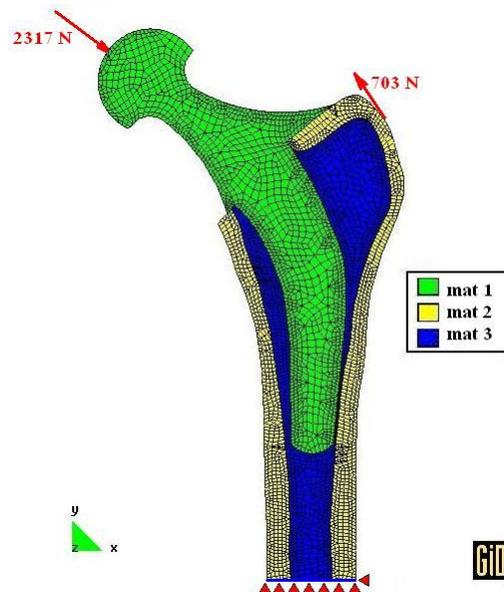


Figura 7.35: Malha e condições de contorno para o modelo prótese-fêmur

Na figura 7.35 mat1 corresponde a região da prótese, mat2 do osso cortical, mat3 do osso trabecular e a linha azul as condições de contorno de pressão, 6600 Pa.

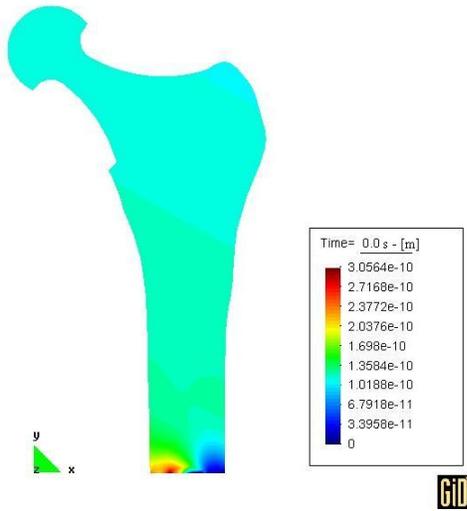


Figura 7.36: Deslocamentos prótese $\Delta t = 0,0$

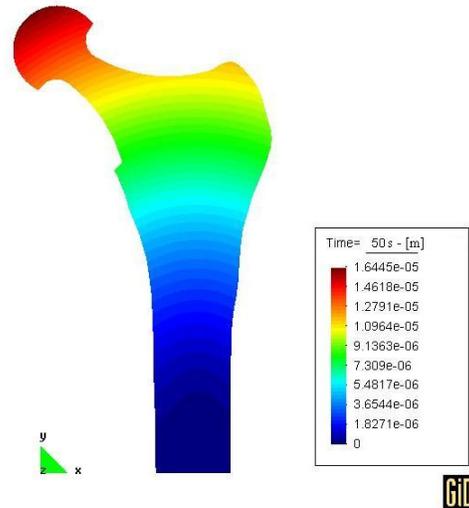


Figura 7.37: Deslocamentos prótese $\Delta t = 50$ s

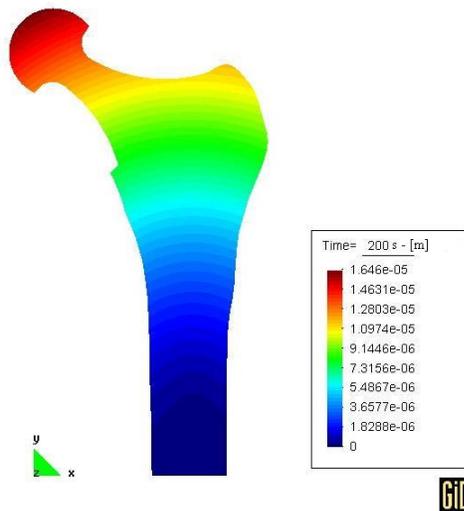


Figura 7.38: Deslocamentos prótese $\Delta t = 200$ s

A partir das análises das figuras 7.36 a 7.38, percebe-se que o perfil dos deslocamentos apresentam-se uniformes e sem saltos ou variações entre as diferentes regiões. As regiões de contato, poroelástica-poroelástica, entre a parte cortical e trabecular e, poroelástica-elástica, entre as regiões trabecular e prótese e cortical e prótese, apresentam continuidade e suavidade na resposta, sendo que possíveis desvios, devido as diferentes propriedades, não ocorreram.

Conforme apresentado por (Atalla et al., 2001) o modelo deve garantir que os deslocamentos no contato sejam iguais para os sistemas unidos, desta forma, pela análise das figuras 7.36, 7.37 e 7.38 estes deslocamentos apresentam-se iguais no contato.

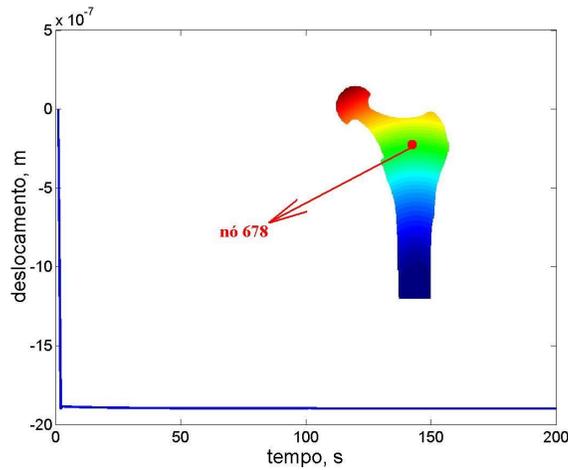


Figura 7.39: Deslocamentos para o nó 678

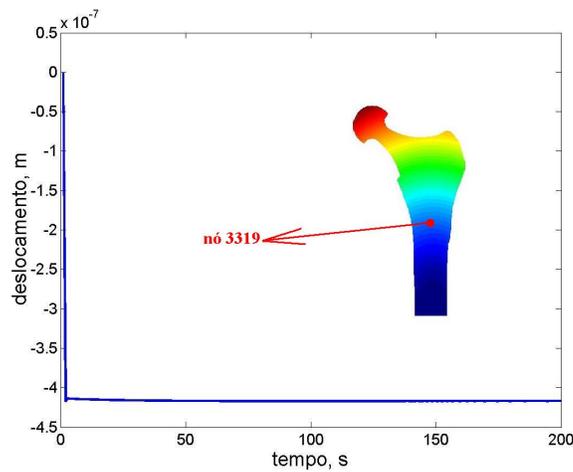


Figura 7.40: Deslocamentos para o nó 3319

Devido as condições iniciais não serem simplificadas para o caso não drenado, tendo o sistema uma pressão prescrita diferente de zero, os deslocamentos iniciais não se apresentam com a mesma distribuição dos demais passos no tempo. Isso já ficou constatado para o modelo ósseo simples e repete-se para este caso. Percebe-se que os deslocamentos na base,

no tempo inicial, são maiores. Estes resultados não são os finais, pois no instante inicial o sistema ainda está ajustando as respostas.

As curvas dos deslocamentos para os nós 678 e 3319 apresentados nas figuras 7.39 e 7.40 demonstram bem o efeito das condições iniciais, pois existe um valor muito pequeno no início e logo no segundo passo de tempo o valor já fica no patamar de estabilidade. Os duas respostas dos gráficos tem perfis semelhantes, mesmo sendo os nós 678 e 3319 de regiões diferentes, uma elástica da prótese e a outra poroelástica da cortical. Além desse fator demonstrar que o comportamento geral dos nós são semelhantes, isto indica a completa união entre regiões e a dependência entre os deslocamentos de cada uma.

Nota-se que os deslocamentos do modelo com prótese são maiores do que com o modelo sem, o que indica uma maior rigidez do modelo original, mesmo a prótese tendo menor alongamento. Na verdade o deslocamento representado na região da prótese é em sua maioria devido ao deslocamento do osso, que recebe o carregamento desta. Quando os resultados de tensão forem apresentados este efeito será também observado, visto que na região onde a prótese está apoiada no osso as tensões se elevam.

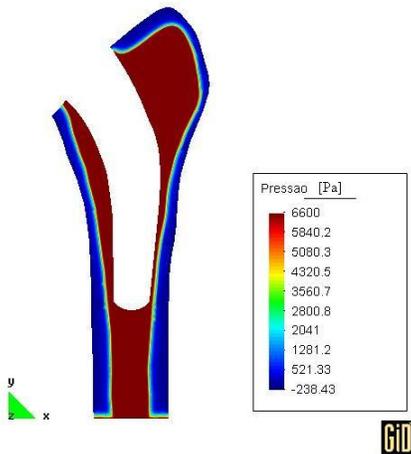


Figura 7.41: Pressões prótese $\Delta t = 0,0$

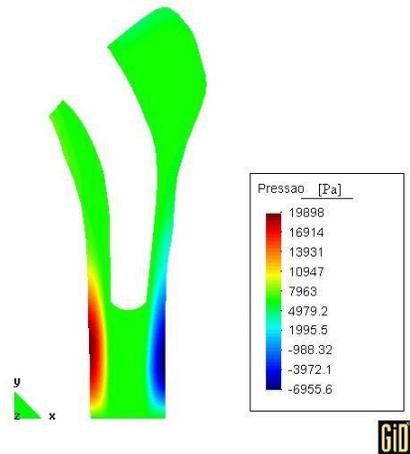


Figura 7.42: Pressões prótese $\Delta t = 50 \text{ s}$

A partir da análise das figuras 7.41 a 7.44 observa-se que as pressões presentes no sistema

tendem a se estabilizar no tempo de acordo com a pressão de prescrição inicial de 6600 Pa. Já no primeiro passo de tempo, a pressão que atua na base, carrega a região trabecular, instantaneamente, isso ocorre pelos valores de permeabilidade presente nesta região, serem altos comparados com os da região cortical. Para região cortical, no primeiro passo de tempo, as pressões se elevam, pois os poros que estavam estabilizados são solicitados bruscamente e, sendo a porosidade desta região baixa esta solicitação aumenta. Mas nos primeiros passos de tempo existe uma instabilidade, de forma o perfil das pressões se ajustam para balancear o sistema e desta forma se estabilizarem no tempo.

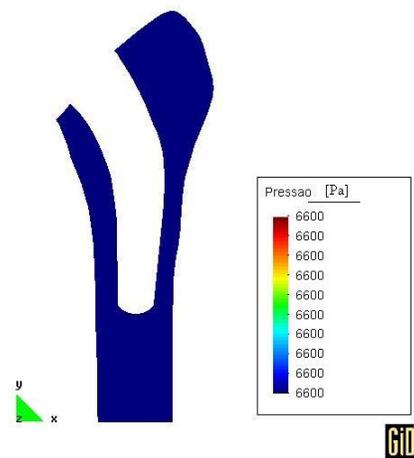
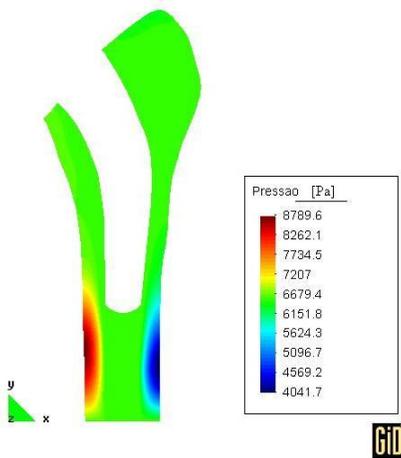


Figura 7.43: Pressões prótese $\Delta t = 100$ s Figura 7.44: Pressões prótese $\Delta t = 500$ s

Nota-se que na região da prótese não existe nenhum valor de pressão. A prótese é modelada com elemento elástico, desta forma não existe duas fases para este sistema, mas as pressões que estão sobre o osso influenciam no comportamento dos deslocamentos da prótese que está ligada a ele.

Comparando os gráficos obtidos pelo modelo simples e com prótese, das respostas de pressão, mostradas nas figuras 7.45 e 7.46, verifica-se que estas são similares, apresentando uma variação no começo, até que se estabilizam (entre 300 e 400 segundos), e continuam com uma tendência exponencial. As duas regiões analisadas correspondem a tração e a compressão dos poros, para o nó 3369 e 3693, respectivamente. Percebe-se que para região tracionada

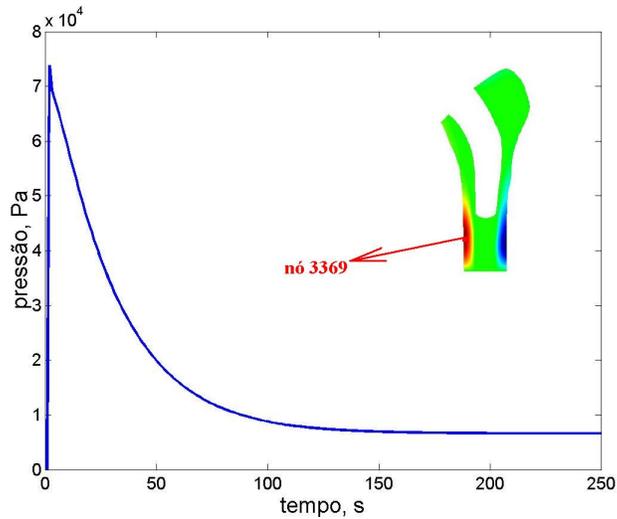


Figura 7.45: Pressões para o nó 3369

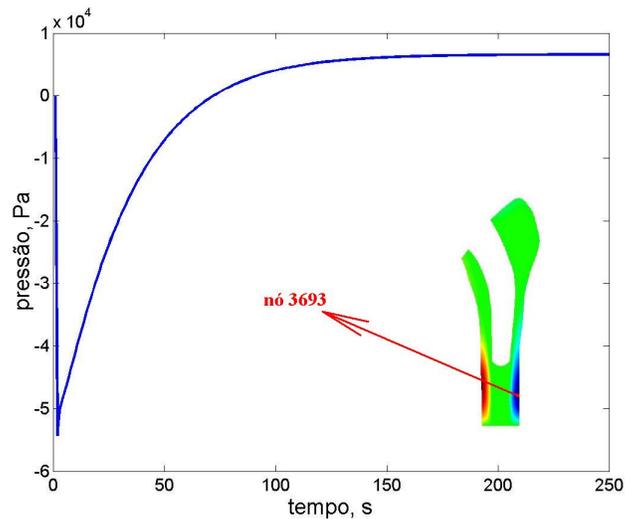


Figura 7.46: Pressões para o nó 3693

as pressões estão abaixo da prescrita de 6600 Pa e, na região comprimida, as pressões estão acima desta. Esse efeito provoca uma diferença de pressões e por conseqüência um fluxo no sistema, tendo na região avermelhada uma atuação de pressão e na azulada uma sucção.

Outro fato é que existe um acúmulo de pressões na região inferior do alojamento da prótese, o que indica que a sua atuação sobre o material ósseo provoca uma reação sobre o fluxo e os fluidos, indicando, na visão biológica, se aquela região necessita de mais ou menos material e até mesmo se necessita de mais cálcio na matriz óssea.

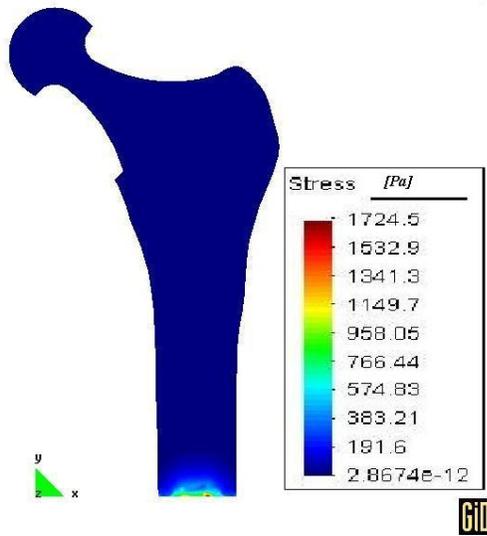


Figura 7.47: Tensões prótese $\Delta t = 0,0$

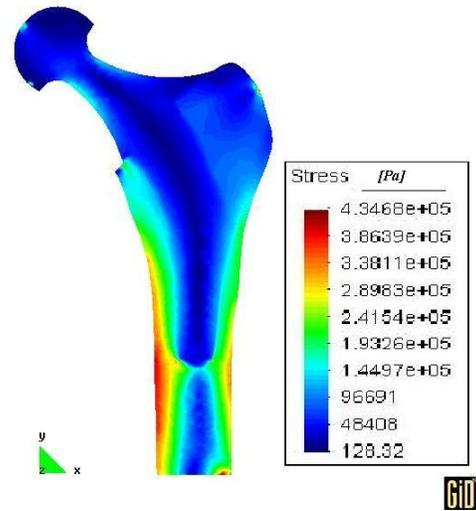


Figura 7.48: Tensões prótese $\Delta t = 50$ s

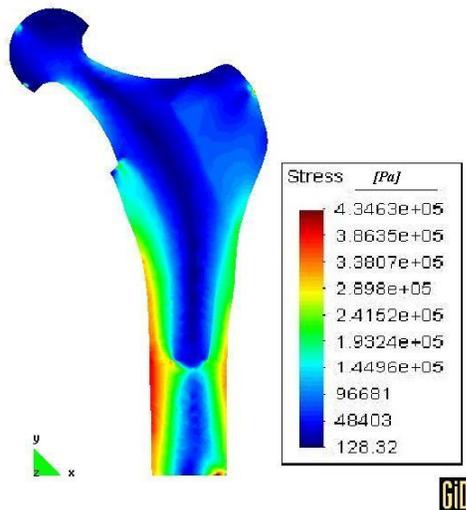


Figura 7.49: Tensões prótese $\Delta t = 200$ s

As figuras 7.47, 7.48 e 7.49 apresentam as distribuições das tensões para o modelo com prótese. Sendo a tensão total σ^t dada por $\sigma^t = \sigma' - \alpha p$, nota-se que as tensões são dependentes dos valores de pressão, desta forma, quando as tensões geradas pelo deslocamento somam-se as pressões o perfil da distribuição de tensão torna-se a superposição dos dois, com uma tendência maior ao perfil das pressões, que tem relação direta com esta. Ao se verificar as regiões em que as pressões são as maiores também estas serão para a tensão.

As respostas da tensão indicam que a base da prótese, que transmite todo o carregamento

recebido do acetábulo em sua cabeça, comprime as paredes do osso cortical e cisalha as trabéculas. As maiores tensões tendem a ficar do lado comprimido, isso explica-se pelo carregamento, que tende a girar a cabeça da prótese no sentido anti-horário, o que também provoca uma elevação de tensão na base direita. A região do trocanter apresenta pequenas variações de tensão, permanecendo quase inalterada no decorrer do passo de tempo.

Sobre a prótese total, que tem maior rigidez que o osso, as tensões não variam muito no tempo. Apenas existe uma pequena região de tensão no local do carregamento, na cabeça, e uma tensão distribuída no pescoço desta. A tensão na região do carregamento ocorre pela aplicação da carga nodal equivalente e as tensões no pescoço devido a diminuição da seção desta região. Pela diferença de rigidez entre a prótese e o osso quase que todo o carregamento do topo é passado a base, com isso as pressões neste local aumentam, bem como as tensões, que se distribuem sobre o material menos rígido.

Desta forma foram apresentados os resultados obtidos utilizando a ferramenta computacional e percebe-se que estes comportaram-se dentro das expectativas da pesquisa, podendo aplicar-se a ferramenta para outros casos semelhantes.

É importante salientar que os valores finais dos resultados, aqui apresentados, devem ser analisados de forma qualitativa, pois os modelos apresentam muitas simplificações, sendo uma delas a bidimensionalidade. Deve-se atentar nas análises para o comportamento geral dos sistemas, evidenciando sua modelagem através da teoria da poroelasticidade acoplada.

Capítulo 8

Conclusão

Percebe-se que o tema abordado neste trabalho é bastante amplo, visto a quantidade de trabalhos que foram consultados para sua fundamentação. A bioengenharia ramifica-se para diversas áreas e, especificamente na modelagem do comportamento ósseo, pode apresentar modelos diferentes. Sendo a proposta deste trabalho modelar a estrutura óssea através da teoria da poroelasticidade acoplada, os resultados apresentaram-se globalmente coerentes.

A modelagem do osso feita através do modelo poroelástico não inclui apenas as características estruturais do sistema, mas também aspectos do escoamento dos fluidos biológicos, o que permite se aproximar das condições *in vivo* dos tecidos ósseos. Os aspectos fluidodinâmicos tem papel fundamental para os processos de remodelamento. Eles são induzidos pelas solicitações mecânicas. Neste sentido, esse trabalho apresentou um modelo computacional que é capaz de verificar as tensões mecânicas no osso e o comportamento dos fluidos ósseos, que possibilitam prever quais regiões possuem gradiente de pressão e velocidade maiores, permitindo avaliar-se fenômenos como do remodelamento.

Nota-se que o modelo poroelástico apresenta maior rigidez que o elástico visto que além das características típicas do sólido, existem também parâmetros do fluido, que conferem ao sistema rigidez e amortecimento. Verifica-se que as distribuições de pressão e tensão concentram-se na região cortical, evidenciando o papel desta região de absorver os carregamentos longitudinais aplicados ao osso, o que acarreta uma variação de pressão, induzindo processos biofísicos de balanceamento.

Apesar do modelo ser baseado no método de integração linear por atraso (fórmula de Euler), as respostas foram coerentes, conforme apresentado no capítulo 7. Se forem analisados os resultados de validação do modelo, logo se perceberá que as diferenças entre as respostas são menores que 1%, considerando malhas não muito refinadas.

Com relação a implementação do método particionado, este apresentou-se eficiente no sentido do dinamismo da linguagem e dos pacotes de solução livres utilizados. Os trabalhos da literatura foram de grande valia para a compreensão do algoritmo e sua implementação. A estratégia deste tipo de solução apresentou tempos de processamento compatíveis, permitindo que se realizassem vários testes em curtos períodos. A convergência do método particionado ocorre em dois passos, tendo em vista a linearidade do sistema. Todos os processos do *solver* apresentaram-se estáveis, conforme as soluções apresentadas neste trabalho.

A malha gerada, pelo pré-processador GID, dos modelos do fêmur e do modelo fêmur-prótese apresentaram-se uniformemente distribuídas e sem grandes distorções dos elementos. Nas regiões de interface entre os diferentes meios os nós e elementos foram unidos, sendo que as respostas se apresentaram com gradientes uniformes entre os meios. Mesmo nas regiões onde houveram maiores valores de tensão, os elementos se dispunham bem alinhados e não deformados.

A inclusão de uma prótese total ao modelo, demonstrou que o programa é uma poderosa ferramenta de solução e, através de sua resposta, pode-se prever os efeitos de uma má acomodação desta no osso. As tensões provenientes do modelo com prótese são, neste caso, menores que do modelo original. Mas isto pode ser diferente considerando-se que o a prótese não tem uma total aderência com o osso e ao receber um carregamento não o distribua de forma uniforme ao osso, provocando um batimento entre as partes e um possível aumento de tensão. Desta forma um estudo sobre a aderência e colagem da prótese ao osso deve ser considerada em futuros trabalhos, bem como mensurar as tensões normais e tangenciais que atuam na interface desses meios.

O modelo ósseo poroelástico ainda pode ser acoplado a elementos visco-elásticos que

representariam o sistema muscular da perna, desta forma poderia-se aplicar carregamentos provenientes de exercícios físicos e verificar as tensões sobre os músculos, sobre o tecido do osso e o comportamento do fluido nesta interação.

Propõem-se também, para trabalhos futuros, construir um modelo tridimensional, que leve em conta a anisotropia do sistema e que possa ser aferido através de testes com pacientes sob a ação de exercícios localizados. Promover uma maior interação entre os diversos grupos de pesquisa em análises biomecânicas. Aplicar ao modelo a formulação de dupla porosidade e estudar a influência dos diversos níveis porosos do osso. Comparar os resultados com casos clínicos e que possam trazer benefícios aos pacientes clinicados.

Referências

- Anderson, D. D., Deshpande, B. R., Daniel, T. E., and Baratz, M. E. (2004). A three-dimensional finite element model of the radiocarpal joint: Distal radius fracture step-off and stress transfer. *The Iowa Orthopaedic Journal*, 25:108–117.
- ASC (2006). *Acoustic Sciences Corporation - Home Theater*. Disponível em: www.asc-hometheater.com, pesquisa Google.
- Ashman, R. B. (1988). Elastic modulus of trabecular bone material. *Journal of Biomechanics*, 21(3):177–181.
- Atalla, N., Hamdi, M. A., and Panneton, R. (2001). Enhanced weak integral formulation for the mixed (u,p) poroelastic equations. *Acoustical Society of America*, 109(6):3065–3068.
- Bayraktar, H. H. and Keaveny, T. M. (2004). Mechanisms of uniformity of yield strains for trabecular bone. *Journal of Biomechanics*, 37:1671–1678.
- Beaupré, G. S., Orr, T. E., and Carter, D. R. (1990). An approach for time-dependent bone modeling and remodeling-application: a preliminary remodeling simulation. *Journal Orthopaedic*, 8:662–670.
- Benito, M. J. G. (2005). *Simulación computacional de los procesos de fractura y consolidación óseas: un modelo mecanobiológico de regeneración ósea*. PhD thesis, Centro Politécnico Superior de Zaragoza, Universidad de Zaragoza.
- Bertolo, L. A. (2002). *Biofísica para Fisioterapia*. Apostila didática - FAFICA, Caruaru.
- Biot, M. A. (1935). Le problème de la consolidation des matières argileuses sous une charge. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, B55:110–113.

- Biot, M. A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12:155–164.
- Biot, M. A. (1956). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range. *The Journal of Acoustical Society of America*, 28:168–178.
- Biot, M. A. (1972). Theory of finite deformation of porous solid. *Indiana University Mathematics Journal*, 21:597–620.
- Brekelmans, W. A. M., Poort, H. W., and Sloof, T. J. J. H. (1972). On the mathematical analysis of stress in the human femur. *Acta Orthopaedica Scandinavica*, 43:301–307.
- Brown, T. D. (2004). Finite element modeling in musculoskeletal biomechanics. *Journal of Applied Biomechanics*, 20:336–366.
- Bujurke, N. M. and Kudenatti, R. B. (2006). An analysis of rough poroelastic bearings with reference to lubrication mechanism of synovial joints. *Applied Mathematics and Computation*, 178:309–320.
- Cheng, A. H.-D. and Detournay, E. (1988). On singular integral equations and fundamental solutions of poroelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 35:4521–4555.
- Cheung, G., Zalzal, P., Bhandari, M., Spelt, J. K., and Papini, M. (2004). Finite element analysis of a femoral retrograde intramedullary nail subject to gait loading. *Medical Engineering & Physics*, 26:93–108.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., and Plesha, M. E. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons Ltda, New Delhi.
- Cowin, S. C. (1976). Bone remodeling-i. a theory of adaptive elasticity. *Journal of Elasticity*, 6:313–326.
- Cowin, S. C. (1989). The mechanical properties of cortical bone tissue. *Bone Mechanics*, chap.6:97–127.
- Cowin, S. C. (1999). Bone poroelasticity. *Journal of Biomechanics*, 32:217–218.

- Cowin, S. C. (2001). *Bone poroelasticity. Bone Mechanics Handbook*. CRC Press LLC, Boca Raton, CA.
- Cowin, S. C. (2004). Anisotropic poroelasticity: fabric tensor formulation. *Mechanics of Materials*, 36:665–677.
- Cui, L., Kaliakin, V. N., Abousleiman, Y., and Cheng, A. H.-D. (1997). Finite element formulation and application of poroelastic generalized plane strain problems. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 34(6):953–962.
- da Silva Jr., F. I. (2003). Modelagem e implementação computacional da poroelásticidade acoplada. Master’s thesis, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.
- Darcy, H. P. (1856). *Les Fontaines Publiques de la Ville Dijon*. Dalmont, Paris.
- de Boer, R. (1996). Highlights in the historical development of the porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory. *Applied Mechanics Reviews*, 49:201–262.
- Doblaré, M., García, J. M., and Cegoñino, J. (2002). Development of an internal bone remodelling theory and applications to some problems in orthopaedic biomechanics. *Meccanica*, 37:365–374.
- Dong, X. N. and Guo, X. E. (2004). The dependence of transversely isotropic elasticity of human femoral cortical bone on porosity. *Journal of Biomechanics*, 37:1281–1287.
- Fancello, E. A. (2003). Special issues on formulations for bone remodelling around prostheses. In *CILAMCE 2003 - XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, pages 1–13.
- Fantazzini, P., Brown, R. J. S., and Borgia, G. C. (2003). Bone tissue and porous media: common features and differences studied by nmr relaxation. *Magnetic Resonance Imaging*, 21:227–234.

- Ferreira, F. H. (1996). Uma implementação numérica para solução de problemas de poroelasticidade. Master's thesis, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Fritton, S. P., Wang, L., Weinbaum, S., and Cowin, S. C. (2001). Interaction of mechanical loading, blood flow, and interstitial fluid flow in osteonal bone. In *Bioengineering Conference - ASME 2001*, pages 341–342.
- García, J. M., Doblaré, M., and Cegoñino, J. (2002). Bone remodelling simulation: a tool for implant design. *Computational Materials Science*, 25:100–114.
- Gartner, L. P. (1999). *Tratado de histologia em cores*. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro.
- Gibson, L. J. (2005). Biomechanics of cellular solids. *Journal of Biomechanics*, 38:377–399.
- Göransson, P. (1998). A 3-d, symmetric, finite element formulation of the biot equations with application to acoustic wave propagation through an elastic porous medium. *International Journal for Numerical Methods in engineering*, 41:167–192.
- Grimm, M. J. and Williams, J. L. (1997). Measurements of permeability in human cacaneal trabecular bone. *Journal of Biomechanics*, 30(7):743–745.
- Gupta, S., New, A. M. R., and Taylor, M. E. (2006). Bone remodelling inside a cemented resurfaced femoral head. *Clinical Biomechanical*, 21:594–602.
- Haire, T. J. and Langton, C. M. (1997). Biot theory: a review of its application to ultrasound propagation through cancellous bone. *Bone*, 24(4):291–295.
- Hegedus, D. H. and Cowin, S. C. (1976). Bone remodeling-ii. small strain adaptive elasticity. *Journal of Elasticity*, 6:337–352.
- Hellmich, C. and Ulm, F. J. (2005). Drained and undrained poroelastic properties of healthy and pathological bone: A poro-micromechanical investigation. *Transport Porous Media*, 58:243–268.
- Hughes, S. P. F., McCarthy, I. D., and Hooper, G. (1986). The vascular system in bone. *Clinical Orthopaedics and Related Research*, 210:31–36.

- ICA (2006). *Instituto de Cálculo Aplicado - Análisis del comportamiento de pozos utilizando tecnologías de computación emergente*. Disponível em: www.ica.luz.ve/petroleo, pesquisa Google.
- Jacobs, C. R., Levenston, M. E., Beaupré, G. S., Simo, J. C., and Carter, D. R. (1995). Numerical instabilities in bone remodeling simulations: The advantages of a node-based finite element approach. *Journal of Biomechanics*, 28(4):449–459.
- Junqueira, L. C. and Carneiro, J. (2004). *Histologia básica (10ª Edição)*. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro.
- Kayabasi, O. and Erzincanli, F. (2006). Finite element modelling and analysis of a new cemented hip prosthesis. *Advances in Engineering Software*, 37:477–483.
- Kohles, S. S. (2002). Linear poroelastic cancellous bone anisotropy: Trabecular solid elastic and fluid transport properties. *Journal of Biomechanical Engineering*, 124:521–526.
- Lamary, P., Tanneau, O., and Chevalier, Y. (2001). Modelling poroelastic multilayered material for aircraft insulation. In *First European Forum - Materials and Products for Noise and Vibration Control in Machinery and Transportation*, pages 1–10.
- Lee, K. I. and Yoon, S. W. (2006). Modifications of the biot and the mba models for predicting the anisotropic phase velocity in cancellous bone. *Journal of the Korean Physical Society*, 48(4):564–572.
- Lewis, R. W. and Schrefler, B. A. (1987). *The finite element method in the deformation and consolidation of porous media*. John Wiley & Sons Ltda, New Delhi.
- Li, X., Zienkiewicz, O. C., and Xie, Y. M. (1990). A numerical model for immiscible two-phase fluid flow in a porous medium and its time domain solution. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:1195–1212.
- Liftoff (2006). *Building Better Bones*. Disponível em: www.liftoff.msfc.nasa.gov/news/2003/news-bones.asp, pesquisa Google.

- Lim, T. H. and Hong, J. H. (1999). Poroelastic properties of bone vertebral trabecular bone. *Journal of Orthopaedic Research*, 18:671–677.
- Mak, A. F. T., Huang, D. T., Zhang, J. D., and Tong, P. (1997). Deformation-induced hierarchical flows and drag forces bone canaliculi and matrix microporosity. *Journal of Biomechanics*, 30(1):11–18.
- Manfredini, P., Cocchetti, G., Maier, G., Redaelli, A., and Montevicchi, F. M. (1999). Poroelastic finite element analysis of a bone specimen under cyclic loading. *Journal of Biomechanics*, 32:135–144.
- Müller, R. and Rügsegger, P. (1996). Analysis of mechanical properties of cancellous bone under conditions of simulated bone atrophy. *Journal of Biomechanics*, 29(8):1053–1060.
- Morgan, E. F., Bayraktar, H. H., and Keaveny, T. M. (2003). Trabecular bone modulus-density relationships depend on anatomic site. *Journal of Biomechanics*, 36:897–904.
- Noritomi, P. Y. (2006). *Desenvolvimento de uma metodologia para análise de bioengenharia em ossos compactos com remodelagem superficial pelo método dos elementos de contorno 3D em meios transversalmente isotrópicos*. PhD thesis, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.
- Nowinski, J. L. (1972). Stress concentrations around a cylindrical cavity in a bone treated as a poroelastic body. *Acta Mechanica*, 13:281–292.
- Nowinski, J. L. and Davis, C. F. (1970). A model of human skull as a poroelastic spherical shell subjected to a quasistatic load. *Mathematical Biosciences*, 8:397–416.
- Pakula, M., Kubik, J., and Kaczmarek, M. (2004). Wave propagation in high porosity bones - a cellular model. In *XXI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, pages 1–2.
- Papathanasopoulou, V. A., Fotiadis, D. I., Foutsitzi, G., and Massalas, C. V. (2002). A poroelastic bone model for internal remodeling. *International Journal of Engineering Science*, 40:511–530.

- Park, K. C. (1983). Stabilization of partitioned solution procedure for pore fluid-soil interaction analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19:1669–1673.
- Pilcher, W. A. (2004). High strain rate testing of bovine trabecular bone. Master’s thesis, Graduate School, University of Notre Dame.
- Qin, Y., Lam, H., Rubin, C., Grine, F., and Ni, Q. (2003a). Correlation between sem measured microstructure and nmr predicted bone porosity. In *2003 Summer Bioengineering Conference*, pages 1097–1098.
- Qin, Y. X., Kaplan, T., Saldanha, A., and Rubin, C. (2003b). Fluid pressure gradients, arising from oscillations in intramedullary pressure, is correlated with the formation of bone and inhibition of intracortical porosity. *Journal of Biomechanics*, 36:1427–1437.
- QinetiQ (2006). *QinetiQ provides key technology expertise for Boeing 7E7 Dreamliner*. disponível em: www.qinetiq.com/home/newsroom, pesquisa Google.
- Rice, J. R. and Cleary, M. P. (1976). Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 14:227–241.
- Rizzoli, I. O. (2005). *Biomechanics European Laboratory*. Disponível em: http://www.tecno.ior.it/VRLAB/researchers/repository/BEL_repository.html, Laboratorio di Tecnologia Medica.
- Rudman, K. E., Aspden, R. M., and Meakin, J. R. (2006). Compression or tension? the stress distribution in the proximal femur. *BioMedical Engineering OnLine*, 5:1–7.
- Rybicki, E. F., Simonen, F. A., and Weis, E. B. (1972). On the mathematical analysis of stress in the human femur. *Journal of Biomechanics*, 5:203–215.
- Sackers, R. J. B., Valkema, R., de Wijn, J. R., Lentjes, E. G. W. M., van Blitterswijk, C. A., and Rozing, P. M. (1995). The intramedullary hydraulic pressure tolerance of the human femur. *Clinical Orthopaedics and Related Research*, 311:183–189.

- Sandhu, R. S. and Wilson, E. L. (1969). Finite element analysis of seepage in elastic media. *Journal of the Engineering Mechanics Division of the American Society of Civil Engineering*, 95:641–652.
- Schanz, M. and Busse, A. (2004). Acoustic behavior of a poroelastic mindlin plate. In *17th ASCE Engineering Mechanics Conference*, pages 1–8.
- Sim, E., Freimüller, W., and Reifer, T. J. (1995). Finite element analysis of the stress distributions in the proximal end of the femur after stabilization of a pertrochanteric model fracture: a comparison of two implants. *International Journal of the Care of the Injured*, 26(7):445–449.
- Simon, B. R. (1992). Multiphase poroelastic finite element models for soft tissue structures. *Applied Mechanical Reviews*, 45:191–218.
- Siqueira, C. A. M. (1995). Um sistema orientado por objetos para análise numérica da poroelasticidade acoplada pela técnica dos elementos finitos. Master's thesis, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.
- Smit, T. H., Huyghe, J. M., and Cowin, S. C. (2002). Estimation of the poroelastic parameters of cortical bone. *Journal of Biomechanics*, 35:829–835.
- Stefan, J. (1871). Über das gleichgewicht und die bewegung, insbesondere die diffusion von gasgemengen. *Sitzungsber. Akad Wiss, Math-Naturwiss Kl, Abt 11a*, 63:63–124.
- Swan, C. C., Lakes, R. S., Brand, R. A., and Stewart, K. J. (2003). Micromechanically based poroelastic modeling of fluid flow in haversian bone. *Journal of Biomechanical Engineering*, 125:25–37.
- Tai, C. L., Shih, C. H., Chen, W. P., Lee, S. S., Liu, Y. L., Hsieh, P. H., and Chen, W. J. (2003). Finite element analysis of the cervico-trochanteric stemless femoral prosthesis. *Clinical Biomechanics*, 18:S53–S58.
- Taylor, M. E. (2005). Finite element analysis oh the resurfaced femoral head. *Journal of Engineering in Medicine*, 220:289–297.

- Taylor, M. E., Tanner, K. E., Freeman, M. A. R., and Yettram, A. L. (1995). Cancellous bone stresses surrounding the femoral component of a hip prosthesis: an elastic-plastic finite element analysis. *Medical Engineering & Physics*, 17(7):544–550.
- Taylor, M. E., Tanner, K. E., Freeman, M. A. R., and Yettram, A. L. (1996). Stress and strain distribution within the intact femur: compression or bending? *Medical Engineering & Physics*, 18(2):122–131.
- Terada, K., Ito, T., and Kikuchi, N. (1998). Characterization of the mechanical behaviors of solid-fluid mixture by the homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 153:223–257.
- Wang, C. J., Yettram, A. L., Yao, M. S., and Procter, P. (1998). Finite element analysis of a gamma nail within a fractured femur. *Medical Engineering & Physics*, 20:677–683.
- Wang, L., Fritton, S. P., Cowin, S. C., and Weinbaum, S. (1999). Fluid pressure relaxation depends upon osteonal microstructure: modeling an oscillatory bending experiment. *Journal of Biomechanics*, 32:663–672.
- Wei, H. W., Sun, S. S., Jao, S. H. E., Yeh, C. R., and Cheng, C. K. (2005). The influence of mechanical properties of subchondral plate, femoral head and neck on dynamic stress distribution of the articular cartilage. *Medical Engineering & Physics*, 27:295–304.
- Wide, V., Cristofolini, L., Stolk, J., Verdonschot, N., and Toni, A. (2003). Experimental investigation of bone remodelling using composite femurs. *Clinical Biomechanics*, 18:523–536.
- Williams, J. L. (1992). Ultrasonic wave propagation in cancellous and cortical bone: Prediction of some experimental results by biot's theory. *Journal of Acoustic Society American*, 91:1106–1112.
- Woltman, R. (1794). *Beyträge zur hydraulischen Architectur*. Dritter Band, Göttingen.
- Xia, K. and Zhang, Z. (2006). Three-dimensional finite/infinite element analysis of fluid flow in porous media. *Applied Mathematical Modelling*, 30:904–919.

Young, D. W. and Kohles, S. S. (2001). Experimental characterization of bone anisotropic poroelasticity parameters. In *Proceedings of the IEEE 27th Annual Northeast Bioengineering Conference*, pages 41–42.

Zienkiewicz, O. C., Paul, D. K., and Chan, A. H. C. (1988). Unconditionally stable staggered solution procedure for soil-pore fluid interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:1039–1055.

Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (1989). *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, Berkshire.

Apêndice A

Formulação Analítica de Biot para o Problema da Coluna Poroelástica

A teoria da consolidação apresentada por Biot pode ser particularizada para a forma unidimensional. Para isto as equações gerais são manipuladas e podem ser transcritas da forma que segue.

Seja o caso da coluna unidimensional carregada para baixo sob ação de uma tensão, restringida em sua base, com pressão não variável nula no topo e impermeável no contorno, conforme mostrado na figura A.1

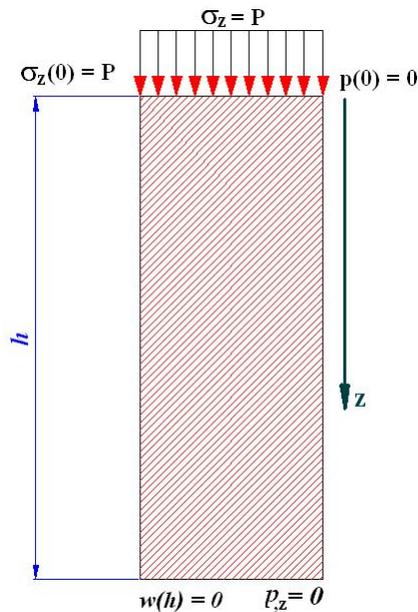


Figura A.1: Coluna Poroelástica

Admite-se para esta formulação que a direção da coluna está sobre o eixo z , desta forma, com base na equação 4.30 no capítulo 4, tem-se as equações:

$$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Aplicando a lei de Hooke generalizada para a direção de z , sabendo-se que $\partial u/\partial x$ e $\partial v/\partial z$ são nulas, tem-se:

$$\sigma_z = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha p \quad (\text{A.3})$$

Segundo Biot a tensão total na coluna poroelástica é dada por $-\sigma_0$, desta forma a equação A.3 pode ser reescrita como:

$$-\sigma_0 = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha p \quad (\text{A.4})$$

Derivando-se a equação A.4 em relação ao tempo, sabendo-se que a tensão total, para este caso, anula-se, obtém-se:

$$0 = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} - \alpha \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A.5})$$

Isolando-se os termos de deslocamento e reorganizando a equação anterior, chega-se a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \alpha \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A.6})$$

A equação A.6, nos termos que foi escrita, pode ser aplicada em A.2, o que origina:

$$\alpha^2 \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Reescrevendo

$$\kappa \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \left(\alpha^2 \frac{1 - 2\nu}{2G(1 - \nu)} + \frac{1}{Q} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

O termo entre parênteses pode ser identificado através da letra c , assim:

$$c = \left(\alpha^2 \frac{1 - 2\nu}{2G(1 - \nu)} + \frac{1}{Q} \right) \quad (\text{A.9})$$

Aplicando a equação A.9 em A.8 tem-se:

$$\kappa \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = c \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A.10})$$

Dividindo-se a expressão anterior por c , tem-se um novo termo, identificado pela letra C .

$$\frac{\kappa}{c} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = C \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A.11})$$

Através da teoria de transferência de calor sabe-se que a solução para a equação diferencial de segunda ordem dada por A.11, é da forma:

$$p = \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(C\beta_n^2)t} \cos \beta_n x \left\{ \kappa \beta_n (-1)^n \int_0^t e^{-(C\beta_n^2)\lambda} p(0) d\lambda + \int_0^h p(0) \cos \beta_n x dx \right\} \quad (\text{A.12})$$

onde:

$$\beta_n = \frac{(2n + 1)\pi}{2h} \quad (\text{A.13})$$

Desta forma, simplificando a solução para o termo de pressão tem-se:

$$p(z, t) = \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \cos[\beta_n(h - z)] \frac{\text{seno}(\beta_n h)}{\beta_n} e^{-(C\beta_n^2)t} \quad (\text{A.14})$$

A equação A.14 representa a resposta de pressão em função do deslocamento e do tempo para a coluna poroelástica unidimensional. Para obter-se a resposta do deslocamento, aplica-se a lei de Hooke generalizada, conforme equação A.1, na equação A.14, obtendo-se:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1 - 2\nu}{2G(1 - \nu)} \left\{ \alpha \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \cos[\beta_n(h - z)] \frac{\text{seno}(\beta_n h)}{\beta_n} e^{-(C\beta_n^2)t} - \sigma_{(0)} \right\} \quad (\text{A.15})$$

Integrando-se e obtendo os limites de integração:

$$w(t) = \frac{1 - 2\nu}{2G(1 - \nu)} \left\{ \sigma_{(0)} - \alpha \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{seno}^2(\beta_n h)}{\beta_n^2} e^{-(C\beta_n^2)t} \right\} \quad (\text{A.16})$$

Esta equação representa as respostas de deslocamento da coluna poroelástica unidimensional, em função do tempo.

Para as condições iniciais, são realizadas as mesma hipótese do capítulo 4, considerando a não variação do volume de fluido no instante inicial, ou seja, o comportamento do modelo é não drenado. Desta forma tem-se:

$$\frac{\partial w_{(0)}}{\partial z} = -\frac{1}{\alpha Q} p_{(0)} \quad (\text{A.17})$$

Aplicando-se novamente, a lei de Hooke generalizada para tensão total fixa, sobre a equação A.17, encontra-se:

$$B = \left(\frac{1 - 2\nu}{2G(1 - \nu)} \frac{1}{\alpha Q} + \alpha \right) \quad (\text{A.18})$$

$$p_{(0)} = \frac{1}{B} \sigma_{(0)} \quad (\text{A.19})$$

Através das equações A.17 e A.19 pode-se calcular os deslocamentos e pressões iniciais para o modelo da coluna poroelástica.

Apêndice B

Elemento Isoparamétrico Quadrilateral Linear

Para elementos quadrilaterais lineares (4 nós), faz a mudança de coordenadas globais, figura B.1, para coordenadas locais, figura B.2, utilizando-se as seguintes interpolações:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i \quad (\text{B.1})$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i \quad (\text{B.2})$$

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) p_i \quad (\text{B.3})$$

Tabela B.1: Derivadas das funções de forma: elemento quadrilateral linear

Nós	$\frac{\partial N}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N}{\partial \eta}$
i	$-0.25(1 - \xi)$	$-0.25(1 - \eta)$
j	$0.25(1 - \xi)$	$-0.25(1 + \xi)$
k	$0.25(1 + \xi)$	$0.25(1 + \xi)$
l	$-0.25(1 + \xi)$	$0.25(1 - \xi)$

Como as funções de interpolação são expressas em coordenadas locais (ξ e η), deve-se utilizar uma relação entre o espaço global e o local, que utiliza o Jacobiano:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (\text{B.4})$$

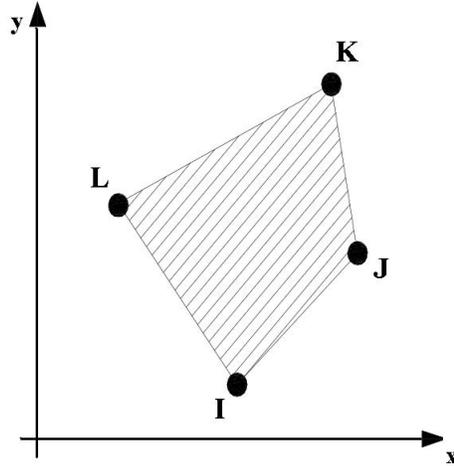


Figura B.1: Elemento quadrilateral linear nas coordenadas globais

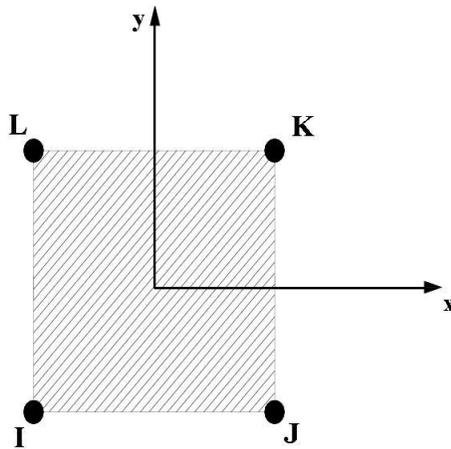


Figura B.2: Elemento quadrilateral linear nas coordenadas locais

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (\text{B.5})$$

As equações B.4 e B.5 podem se expressas da seguinte forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (\text{B.6})$$

A matriz $[J]$ é denominada matriz Jacobiana e é definida como sendo:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Assim para se obter as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas globais (x, y) , deve-se inverter a matriz Jacobiana. Então a equação B.6 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Pode-se escrever o Jacobiano da seguinte forma:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

que será a forma prática aplicada para o cálculo dos elementos.

Utiliza-se a equação que descreve o comportamento do elemento em termos das coordenadas locais, para simplificação nos cálculos, logo deve-se expressar o diferencial de volume em termos também deste referencial.

$$d\Omega = \det(J)d\xi d\eta \quad (\text{B.10})$$

A matriz com os elementos de $[K_{af}]$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$[K_{af}] = \frac{1}{Q} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \{ N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \} \det(J) d\eta d\xi \quad (\text{B.11})$$

A matriz com os elementos de $[K_f]$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$[K_f] = k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [R]^T [J]^T [J] [R] \det(J) d\eta d\xi \quad (\text{B.12})$$

onde

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

A matriz com os elementos de $[A]$ é dada como se segue:

$$[A] = \alpha \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} [B^T] \det(J) d\eta d\xi \quad (\text{B.14})$$

onde $[B^T]$ é da seguinte forma:

$$[B]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} J_{11}^{-1} + \frac{\partial N_1}{\partial \eta} J_{12}^{-1} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} J_{21}^{-1} + \frac{\partial N_1}{\partial \eta} J_{22}^{-1} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} J_{21}^{-1} + \frac{\partial N_1}{\partial \eta} J_{22}^{-1} & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} J_{11}^{-1} + \frac{\partial N_1}{\partial \eta} J_{12}^{-1} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} J_{11}^{-1} + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} J_{12}^{-1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} J_{21}^{-1} + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} J_{22}^{-1} \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} J_{21}^{-1} + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} J_{22}^{-1} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} J_{11}^{-1} + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} J_{12}^{-1} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} J_{11}^{-1} + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} J_{12}^{-1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} J_{21}^{-1} + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} J_{22}^{-1} \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} J_{21}^{-1} + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} J_{22}^{-1} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} J_{11}^{-1} + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} J_{12}^{-1} \\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi} J_{11}^{-1} + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} J_{12}^{-1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} J_{21}^{-1} + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} J_{22}^{-1} \\ 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} J_{21}^{-1} + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} J_{22}^{-1} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} J_{11}^{-1} + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} J_{12}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

A matriz com os elementos de $[K_e]$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$[K_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [R]^T [J]^T [D] [J] [R] \det(J) d\eta d\xi \quad (\text{B.16})$$

onde

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2G\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{2G\nu}{1-2\nu} & \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Deve-se atentar que para a matriz elemental do fluido, as matrizes $[D]$ e $[R]$ são diferentes.

Apêndice C

Programa GID - Pré e Pós-Processamento

O GID é um programa capaz de gerar a geometria e construir uma malha adequada para uma estrutura (Pre-processamento), além de interpretar através do pós-processamento o arquivo (Output File) proveniente do programa de solução (Solver). Cabe ao usuário construir ou utilizar um *solver* comercial. A figura C.1 apresenta a interface gráfica do programa GID.

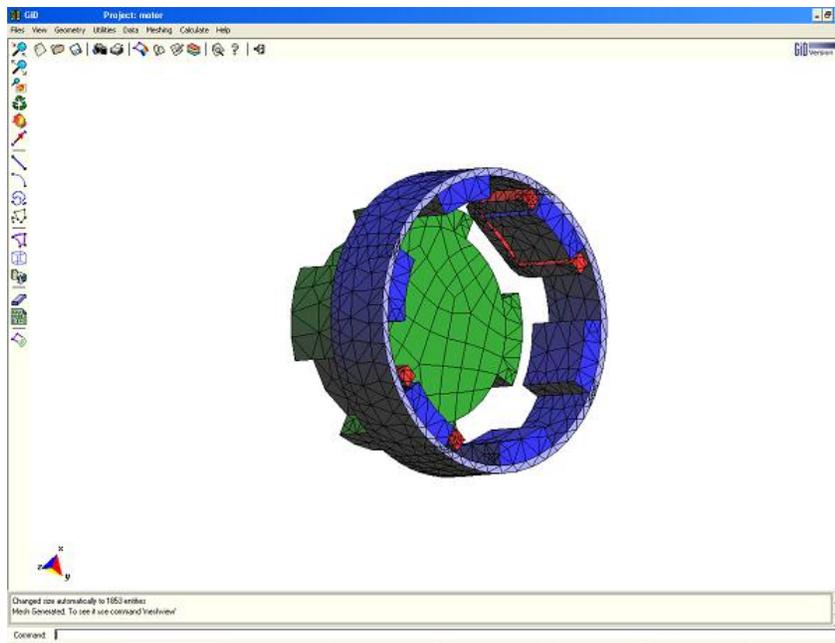


Figura C.1: Imagem ilustrativa do programa

Após gerar a geometria da estrutura e a malha pelo GID, deve-se criar um tipo de problema que engloba principalmente os tipos de materiais a serem utilizados na estrutura, o

sistema de unidades, condições de contorno e principalmente o arquivo de dados que será utilizado pelo "solver". As figuras C.2 e C.3 apresentam como o programa GiD se insere no contexto de uma análise de elementos finitos.

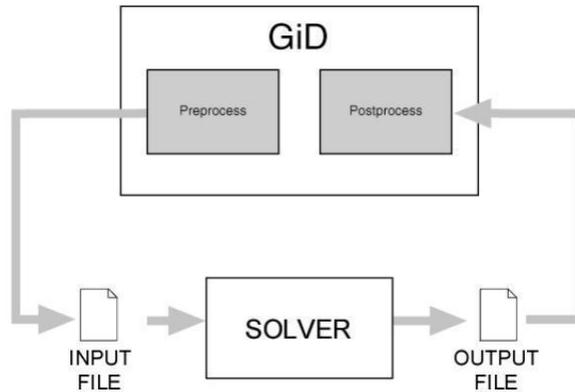


Figura C.2: Organograma do GiD no MEF

Para criar um novo tipo de problema é necessário criar um diretório com o nome ("nome".gid) no diretório *problemtypes* onde o GiD está instalado. Neste diretório estão os seguintes arquivos nome.mat, nome.cnd, nome.bas, nome.bat e o executável do "solver". Cada arquivo tem uma função, por exemplo: *.mat é o arquivo com as propriedades dos materiais; *.cnd é o arquivo com as condições de contorno; *.bas é o arquivo que gera o .dat, que será lido pelo solver; e *.bat é o arquivo que executa o "solver".

Todas as informações da malha gerada pelo GiD tais como as coordenadas dos nós, matriz de conectividade, tipo de elemento, material, etc podem ser armazenadas em um arquivo *.dat gerado pelo arquivo*.bas. Para isto é necessário conhecer a sintaxe e os comandos existentes no GiD.

O pós-processamento do GiD pode estudar os resultados obtidos de um programa do solver. A comunicação entre o solver e o postprocess é feita usando arquivos projectname.post.res e projectname.msh. Em projectname.post.res o arquivo devem conter as variáveis nodais e/ou gaussianas. Aqui estarão os deslocamentos, carregamentos, tensões, etc nos nós, ou nos pontos de Gauss. Em projectname.post.msh são guardadas as informações da nova malha construída pelo "solver", deve conter coordenadas nodais, a conectividade e o

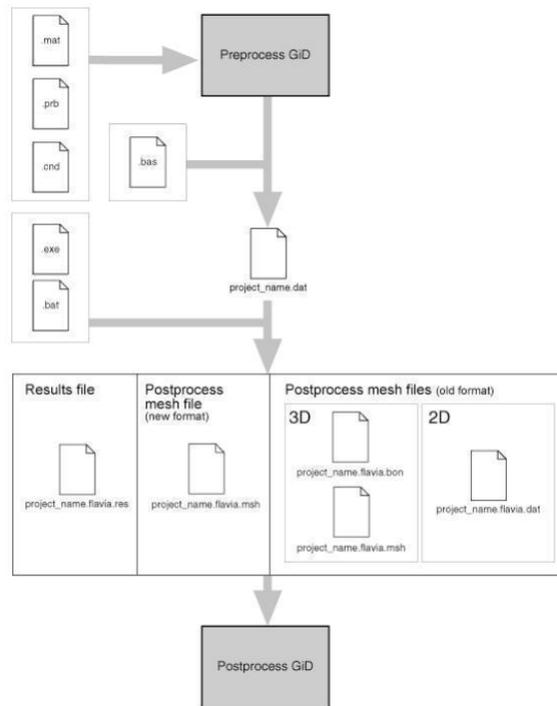


Figura C.3: Organograma do GiD no MEF

material de cada elemento. Se nenhum material for fornecido, GiD assume o número material igual a zero.