



IGOR GIMENES CESCA

**PREVISÃO DE CUSTO DE CICLO DE VIDA E GESTÃO
ECONÔMICA DE ATIVOS FÍSICOS DE INDÚSTRIAS DO
SETOR ENERGÉTICO**

CAMPINAS
2012



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

IGOR GIMENES CESCA

**PREVISÃO DE CUSTO DE CICLO DE VIDA E GESTÃO
ECONÔMICA DE ATIVOS FÍSICOS DE INDÚSTRIAS
DO SETOR ENERGÉTICO**

Orientador: Dr. Gabriel Alves da Costa Lima

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências e Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo na área de Reservatórios e Gestão.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Igor Gimenes Cesca e orientada pelo Dr. Gabriel Alves da Costa Lima.


Orientador

CAMPINAS
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C337p Cesca, Igor Gimenes, 1986-
Previsão de custo de ciclo de vida e gestão econômica
de ativos físicos de indústrias do setor energético / Igor
Gimenes Cesca. --Campinas, SP: [s.n.], 2012.

Orientador: Gabriel Alves da Costa Lima.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica e
Instituto de Geociências.

1. Custo de ciclo de vida. 2. Engenharia econômica.
3. Programação dinâmica. 4. Econometria. 5.
Equipamento industrial - Manutenção e reparos. I. Lima,
Gabriel Alves da Costa, 1970-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Mecânica e Instituto de Geociências. III. Título.

Título em Inglês: Life-cycle cost forecasting and physical assets management of
industries from the energy sector

Palavras-chave em Inglês: Life-cycle cost, Engineering economics, Dynamic
programming, Econometrics, Industrial equipment -
Maintenance and repairs

Área de concentração: Reservatório e Gestão

Titulação: Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo

Banca examinadora: Gabriel Alves da Costa Lima, Ana Teresa Ferreira da Silva
Gaspar Ravagnani, João Meidanis

Data da defesa: 17-12-2012

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
E INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

PREVISÃO DE CUSTO DE CICLO DE VIDA E GESTÃO ECONÔMICA DE ATIVOS FÍSICOS DE INDÚSTRIAS DO SETOR ENERGÉTICO

Autor: Igor Gimenes Cesca

Orientador: Dr. Gabriel Alves da Costa Lima

A banca examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta dissertação:



Dr. Gabriel Alves da Costa Lima, Presidente
DEP/FEM/UNICAMP



Dra. Ana Teresa Ferreira da Silva Gaspar
UNISIM/CEPETRO/UNICAMP



Prof. Dr. João Meidanis
DTC/IC/UNICAMP

Campinas, 17 de dezembro de 2012

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, irmãos, cunhados e sobrinhos pelo apoio nesse período;

A minha namorada Mariana, que conheci durante o mestrado, e já se tornou muito importante para mim. Não só pelo carinho, mas também por ter me ajudado na elaboração deste texto. Com toda certeza, sem sua presença nos meus dias, a realização deste trabalho não teria sido possível;

A todos meus amigos, principalmente aqueles que eu conheci durante estes sete anos como aluno da Unicamp;

Aos membros da banca: Prof. Dr. João Meidanis, Dra. Ana Teresa Gaspar e meu orientador Dr. Gabriel Alves da Costa Lima pelas valiosas sugestões e colaborações para o desenvolvimento desta dissertação;

Ao meu antigo orientador, o Prof. Dr. Saul Suslick (*in memoriam*), a quem sou muito grato por ter sido o responsável por mostrar, para mim, as áreas acadêmicas de avaliação econômica e de petróleo, e também pelos seus ensinamentos no período em que trabalhamos juntos;

À CAPES e à ANEEL pelo financiamento dado por meio da bolsa de estudos;

À AES Tietê pelo fornecimento de dados empregados na realização desta dissertação;

E a todos aqueles que, de alguma forma, me ajudaram na realização deste trabalho, em especial, ao meu amigo Douglas Novaes que muito me ajudou na construção dos modelos matemáticos.

*“Escuto e esqueço. Vejo e
recordo. Faço e entendo”.*

(Provérbio Chinês)

RESUMO

No setor energético (mineração, energia elétrica e petróleo), o conhecimento do comportamento dos custos dos equipamentos em seus ciclos de vida se torna muito importante devido a: (1) alto custo de aquisição e (2) elevadas despesas de manutenção. Dessa maneira, a aquisição de um ativo físico não deve ser decidida somente com base no custo inicial, mas sim por meio do custo do ciclo de vida desse ativo. Para esta dissertação foi elaborado um modelo matemático para encontrar a vida econômica e realizar previsões de custos de manutenção de um grupo de ativos físicos empregados no setor energético. Sendo assim, isso ocorre por meio de: (1) programação dinâmica, utilizando o modelo clássico de Bellman para reposição de equipamentos; (2) engenharia econômica, de tal forma que a vida econômica dos equipamentos é modelada por meio da função W de Lambert e (3) técnicas econométricas de previsão, tal que a relação entre os custos de manutenção e a idade dos equipamentos é testada por formas funcionais de regressões lineares simples. Com isso, para modelagem de vida econômica, foi possível estabelecer teoremas e, para previsão de custos de manutenção, foi possível perceber que as variáveis possuem uma relação não linear entre elas. Portanto, foi possível concluir que os equipamentos podem ser utilizados de maneira mais eficiente e com menores custos de ciclo de vida incorporados, uma vez que seja aplicada uma gestão econômica com base no modelo proposto nesta dissertação e, conseqüentemente, também possibilitar obter melhores indicadores financeiros para as empresas do setor energético.

Palavras-Chave: Custo de ciclo de vida, Engenharia econômica, Programação dinâmica, Econometria, Equipamento industrial - Manutenção e reparos.

ABSTRACT

In the energy sector (mining, oil and electricity), the knowledge of the asset's behavior in their life-cycle costs becomes very important because of: (1) the high cost of acquisition and (2) the high maintenance expenses. Thus, the acquisition of a physical asset should not be decided only on the basis of its initial cost, but through the consideration of its entire life cycle cost. In this dissertation a mathematical model of economic life and maintenance costs forecasts of a group of physical assets is developed and employed in the analysis of problems in the energy sector. The model considers the following: (1) dynamic programming, using the classical Bellman model for equipment replacement; (2) engineering economics, using to model the economic life of the equipment the equivalent cost theory and Lambert W-function and (3) econometric forecasting techniques, such that the relationship between the maintenance costs and equipment age are tested for functional forms of linear regressions. Therefore, on economic life modeling, it was possible to establish theorems and on maintenance costs forecasting. It was revealed that the variables have a nonlinear relationship between them. To conclude, physical assets can be used more efficiently and at lower life-cycle costs incorporated with the application of models developed in this dissertation and, consequently, contribute to obtain better financial indicators for companies in the energy sector.

Key Words: Life Cycle Cost (LCC), Engineering economics, Dynamic programming, Econometrics, Industrial Equipment – maintenance and repair.

SUMÁRIO

<u>AGRADECIMENTOS</u>	<u>VII</u>
<u>RESUMO</u>	<u>XI</u>
<u>ABSTRACT</u>	<u>XIII</u>
<u>SUMÁRIO</u>	<u>XV</u>
<u>LISTA DE FIGURAS</u>	<u>XIX</u>
<u>LISTA DE TABELAS</u>	<u>XXI</u>
<u>LISTA DE NOMENCLATURAS</u>	<u>XXIII</u>
<u>1. INTRODUÇÃO</u>	<u>1</u>
1.1. INTRODUÇÃO À GESTÃO ECONÔMICA DE ATIVOS FÍSICOS	2
1.1.1. ESTRUTURA DA GESTÃO ECONÔMICA DE ATIVOS NAS EMPRESAS	3
1.1.2. <i>PUBLIC AVAIAABLE SPECIFICATION (PAS-55)</i>	6
1.2. INTRODUÇÃO À MANUTENÇÃO DE ATIVOS FÍSICOS USADOS NO SETOR ENERGÉTICO	6
1.3. CUSTOS DE MANUTENÇÃO NO SETOR ENERGÉTICO	8
1.4. INTRODUÇÃO À VIDA ECONÔMICA E À REPOSIÇÃO DE ATIVOS FÍSICOS (VERA)	10
1.5. OBJETIVOS	12
1.6. MOTIVAÇÃO	12
1.7. PRINCIPAIS DESAFIOS PARA A PESQUISA	13
<u>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</u>	<u>15</u>
2.1. GESTÃO ECONÔMICA DE ATIVOS	15
2.2. MANUTENÇÃO DE ATIVOS	17
2.3. CUSTOS DE MANUTENÇÃO DE ATIVOS	18
2.4. VIDA ECONÔMICA E REPOSIÇÃO DE ATIVOS (VERA)	19

3. MODELAGEM ESTATÍSTICA DOS CUSTOS DE MANUTENÇÃO **21**

3.1. ESTIMATIVA DOS CUSTOS DE MANUTENÇÃO	21
3.1.1. CUSTO DE MANUTENÇÃO ACUMULADO	22
3.2. ESTIMATIVA DE CUSTOS DE MANUTENÇÃO POR MEIO DE REGRESSÃO LINEAR	23
3.2.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE REGRESSÃO LINEAR	23
3.2.2. TESTE DE HIPÓTESES	27
3.2.3. PREDIÇÃO	28
3.2.4. TESTE DE NORMALIDADE	30
3.2.5. USO DE DIFERENTES FORMAS FUNCIONAIS NA MODELAGEM DOS CUSTOS DE MANUTENÇÃO ACUMULADO	30
3.3. REGRESSÃO COM DADOS DE SÉRIES TEMPORAIS	33
3.3.1. ESTACIONARIEDADE	34
3.3.2. TESTE DE RAIZ UNITÁRIA	34

4. MODELOS PARA DETERMINAR VIDA ECONÔMICA E ORIENTAR REPOSIÇÃO ENTRE ATIVOS **37**

4.1. CONCEITOS BÁSICOS NA VIDA ECONÔMICA E REPOSIÇÃO DE ATIVOS	37
4.2. PROBLEMAS DE VERA POR MEIO DE MÉTODOS DE ENGENHARIA ECONÔMICA	39
4.2.1. VPL (VALOR PRESENTE LÍQUIDO)	40
4.2.2. AE (ANUIDADE EQUIVALENTE)	41
4.2.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS POR MÉTODOS DE ENGENHARIA ECONÔMICA	43
4.2.4. ANÁLISE DOS CRITÉRIOS DE ENGENHARIA ECONÔMICA	50
4.2.4.1 Limitações e características do VPL	53
4.2.4.1.1. VPL no Regime 1	53
4.2.4.1.2. VPL no Regime 2	56
4.2.4.2 Limitações e características da AE	58
4.2.4.2.1. AE no Regime 1	59
4.2.4.2.2. AE no Regime 2	63
4.2.4.3 Análise de vida econômica	67
4.3. PROBLEMAS DE VERA POR MEIO DE MODELAGEM DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA	74
4.3.1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	76
4.4. COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS	80

5. ESTUDO DE CASO	85
5.1. LEVANTAMENTO DE DADOS DE CUSTOS DE MANUTENÇÃO DE EQUIPAMENTOS	85
5.2. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ESTIMATIVAS DE CUSTOS DE MANUTENÇÃO	86
6. RESULTADOS E DISCUSSÕES	91
7. CONCLUSÕES	93
REFERÊNCIAS	95
ANEXO A – Estudo de Caso 2	105
ANEXO B – Caso 1 de comparação entre os métodos de VERA	109
ANEXO C – Caso 2 de comparação entre os métodos de VERA	115
ANEXO D – Caso 3 de comparação entre es métodos de VERA	121
Apêndice I – Conceitos contábeis	127
Apêndice II – Demonstrações matemáticas	133
Apêndice III – Inferência no modelo de regressão linear simples	141

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura 1.1 – Organização da gestão econômica de ativos em uma empresa</u>	<u>4</u>
<u>Figura 1.2 – Fluxograma de coleta e validação de dados de custos de manutenção</u>	<u>10</u>
<u>Figura 3.1 – Curva de custo de manutenção anual</u>	<u>22</u>
<u>Figura 3.2 – Curva de custo de manutenção acumulado</u>	<u>23</u>
<u>Figura 3.3 – Exemplo de curva de custo acumulado de manutenção</u>	<u>31</u>
<u>Figura 3.4 – Ajuste por função quadrática</u>	<u>32</u>
<u>Figura 3.5 – Ajuste por função exponencial</u>	<u>33</u>
<u>Figura 4.1 – Comparação entre diagramas</u>	<u>42</u>
<u>Figura 4.2 – Modelo para estimativa de vida econômica</u>	<u>48</u>
<u>Figura 4.3 – Tentativa de modelagem da vida econômica por VPL</u>	<u>49</u>
<u>Figura 4.4 – Comportamento da função VPL(t)</u>	<u>57</u>
<u>Figura 4.5 - Comportamento da função AE(t) no Regime 1</u>	<u>61</u>
<u>Figura 4.6 - Representação da equação (4.25) no plano</u>	<u>62</u>
<u>Figura 4.8 - Gráfico de AE(t) para o Caso 1</u>	<u>70</u>
<u>Figura 4.9 – Gráfico de AE(t) para o Caso 2</u>	<u>71</u>
<u>Figura 4.10 – Gráfico de AE(t) para o Caso 3</u>	<u>71</u>
<u>Figura 4.11 – Gráfico de AE(t) para o Caso 4</u>	<u>72</u>
<u>Figura 4.12 – Gráfico de AE(t) para o Caso 5</u>	<u>73</u>
<u>Figura 4.13 – Gráfico de AE(t) para o Caso 6</u>	<u>74</u>

Figura 4.14 – Árvore de decisão do método de PD	76
Figura 4.15 – Árvore de decisão com fundamentação teórica	78
Figura 4.16 – Árvore de decisão para o método de PD	84
Figura 5.1 – Custos de manutenção acumulado para transformadores de 138kV	86
Figura 5.2 – Ajuste de regressão e previsão para o Estudo de Caso 1	89
Figura A.1 – Despesas de manutenção acumuladas	105
Figura A.2 – Ajuste de regressão e previsão para o Estudo de Caso 2	107
Figura A.3 – Comportamento de $AE(t)$ para Caso 1	110
Figura A.4 – Comportamento de $AE(t)$ para o Caso 2	116
Figura A.5 – Comportamento de $AE(t)$ para o Caso 3	123
Figura AP.1 – Equivalência de fluxos de caixa	134
Figura AP.2 – Gráfico da função $f(w)$	136
Figura AP.3 – Função W de Lambert	137
Figura AP.4 – Gráfico da função W de Lambert	138
Figura AP.5 – Comparação entre a distribuição Normal e a t-Student	142

LISTA DE TABELAS

<u>Tabela 1.1 – Exemplo de nota de serviço.....</u>	<u>8</u>
<u>Tabela 1.2 – Exemplo de nota de serviço bem especificada</u>	<u>14</u>
<u>Tabela 4.1 – Ilustração do conceito de VPL de um fluxo de caixa.....</u>	<u>41</u>
<u>Tabela 4.2 – Exemplo do critério do AE.....</u>	<u>43</u>
<u>Tabela 4.3 – Fluxo de caixa do equipamento em operação</u>	<u>44</u>
<u>Tabela 4.4 – Fluxo de caixa do equipamento novo.....</u>	<u>44</u>
<u>Tabela 4.5 – Comparação entre as despesas dos dois ativos ao longo dos anos</u>	<u>45</u>
<u>Tabela 4.6 – Valores de manutenção e de mercado para exemplo de vida econômica</u>	<u>47</u>
<u>Tabela 5.1 – Resultados do modelo de regressão para o estudo de Caso 1.....</u>	<u>88</u>
<u>Tabela 6.1 – Situações em que ativos são modelados pelo método de AE</u>	<u>92</u>
<u>Tabela A.1 – Resultados do modelo de regressão para o estudo de Caso 2.....</u>	<u>106</u>
<u>Tabela A.2 – Caso 1 de comparação de métodos de VERA</u>	<u>109</u>
<u>Tabela A.3 – Resultados do Caso 1 para o método de PD</u>	<u>111</u>
<u>Tabela A.4 – Características do ativo para o Caso 2</u>	<u>115</u>
<u>Tabela A.5 – Resultados do Caso 2 para o método de PD</u>	<u>117</u>
<u>Tabela A.6 – Características do ativo para o Caso 3</u>	<u>121</u>
<u>Tabela A.7 – Resultados do Caso 3 para o método de PD</u>	<u>124</u>

LISTA DE NOMENCLATURAS

Abraman – Associação Brasileira de Manutenção e Gestão de Ativos

AE – Anuidade equivalente

AHP – *Analytical Hierarchy Processes*

ANEEL – Agência Nacional de Energia Elétrica

CEC – Custo equivalente de capital

CEM – Custo equivalente de manutenção

CEP – Custo equivalente de propriedade

DF – Teste de Dickey-Fuller

IC – Intervalo de confiança

kV – Kilo Volts

LCC – *Life cycle cost*, em português, custo do ciclo de vida

MQO – Mínimos quadrados ordinários

PAS-55 – *Public Available Specification*

PD – Programação dinâmica

SARIMA – Modelo auto-regressivo, de médias móveis, integrado e sazonal

VERA – Vida econômica e reposição de ativos

VPL – Valor presente líquido

1. INTRODUÇÃO

Esta dissertação de mestrado, cujo título é *Previsão de custo de ciclo de vida e gestão econômica de ativos físicos de indústrias do setor energético*, é dividida da seguinte maneira:

No Capítulo 1 são apresentadas as primeiras noções e justificativas referentes aos temas de custos de manutenção, vida econômica e reposição de ativos estudados nesta pesquisa, de modo que é possível ter uma amostra inicial desta dissertação. Além disso, neste Capítulo também são definidos os objetivos, as principais dificuldades encontradas e também as motivações.

No Capítulo 2 é apresentada a revisão bibliográfica. Para este Capítulo foram levantados os principais trabalhos envolvendo custo de ciclo de vida, destacando a previsão de custos de manutenção e estimativa de vida econômica. Não só, mas também foram listados os principais trabalhos específicos do setor de mineração, energia elétrica e na indústria do petróleo.

No Capítulo 3 encontra-se o arcabouço teórico para modelagem estatística dos custos de manutenções dos equipamentos escolhidos. Para isso, foram utilizadas técnicas econométricas de regressões lineares simples com dados de séries temporais.

No Capítulo 4 são levantadas as metodologias para estimativa de vida econômica e reposição de ativos (VERA), sendo estes ativos que se encontram em operação em indústrias do setor energético. Há autores que utilizam a teoria clássica de engenharia econômica. Nela, os critérios utilizados são o VPL (valor presente líquido) e AE (anuidades equivalentes), principalmente este último. Sendo assim, neste Capítulo, ao contrário dos outros autores, é feito um estudo a fim de demonstrar analiticamente todas as propriedades estabelecidas na literatura em relação aos critérios. Outra opção que se apresenta é utilizar a metodologia de programação dinâmica (PD). Por fim, os métodos de PD e AE são comparados.

No Capítulo 5 é apresentado o estudo de caso para um transformador elevador. Sendo assim, é aplicada a metodologia descrita nos capítulos anteriores. O Capítulo 6 apresenta os resultados e discussões da aplicação da metodologia para equipamentos que existem no setor energético.

No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões deste trabalho.

No Anexo da dissertação, encontram-se outros estudos de casos para outros equipamentos do setor energético. Por último, no Apêndice há um conjunto de definições e demonstrações que não foram feitas durante os Capítulos para deixar o texto mais dinâmico para o leitor.

1.1. Introdução à gestão econômica de ativos físicos

Um ativo físico é um bem, seja de uma pessoa física ou jurídica. Para uma empresa (pessoa jurídica), os principais ativos físicos são, por exemplo, máquinas, prédios, veículos, equipamentos, cabos, encanamentos, sistemas de *software*, etc. Nesta dissertação, os ativos físicos apresentados são equipamentos (transformadores, motores, bombas, geradores, caldeiras, etc.) utilizados em indústrias do setor energético, como mineração, energia elétrica e petróleo.

Sendo assim, esses ativos serão vistos sob a perspectiva da *gestão econômica de ativos*. Esta consiste em um planejamento estratégico, dentro de uma corporação, com atividades no sentido de minimizar os custos e otimizar os indicadores de desempenho dos ativos.

De acordo com Hastings (2010), a gestão econômica de ativos é uma área que consiste em fornecer recursos e conhecimento para auxiliar no planejamento de aquisições, manutenções e descarte de ativos físicos. Portanto, trata-se de uma área distinta da de operações, assim como da área de manutenção (p. 14), ou seja, a gestão econômica de ativos é uma área bem mais abrangente, pois nela ocorrem atividades que são exercidas por diferentes áreas. Além disso, o autor destaca que historicamente a gestão econômica de ativos nunca foi uma atividade propriamente identificada e reconhecida.

Outros autores como Pintelon e Gelders (1992) destacam a importância da gestão econômica de ativos. Contudo, na época da publicação do estudo dos autores, as empresas do setor possuíam pouco interesse na sua aplicação.

Ainda assim, conforme destacam Hoskins, Brint e Strbac (1998), com o passar dos anos a gestão econômica de ativos começou a ser importante no ambiente industrial, pois muitos equipamentos são operados em ambientes com normas regulatórias e são forçados a fornecer

serviços para um mercado consumidor que demanda qualidade¹. Sendo assim, “é necessário que exista uma política de gestão de ativos para garantir que a infraestrutura permaneça em uma condição satisfatória”.

Dessa forma, na tomada de decisão de uma empresa, por exemplo, entre realizar a manutenção de um ativo em danificado, ou adquirir um ativo novo, é necessário conhecer os custos envolvidos em cada uma das etapas, ou seja, os custos de aquisição, operação, manutenção e descarte, de modo que a gestão econômica de ativos consiga passar uma visão global de todos os custos e auxiliar na tomada de decisão de uma empresa. Por isso, o custo compreendendo todas as fases é chamado de custo de ciclo de vida, em inglês *life-cycle cost* (LCC), o qual consiste na metodologia para estimativa de custos reais dos ativos e também para gerir a vida econômica dos mesmos.

Por esses motivos, nas empresas do setor energético, foi criado um conjunto de normas e especificações, chamado de PAS-55², de modo a facilitar a execução de etapas necessárias para implementar modelos de gestão econômica de ativos.

1.1.1. Estrutura da gestão econômica de ativos nas empresas

As atividades e responsabilidades da gestão econômica de ativos impactam em diversas funções de uma empresa (departamento de manutenção, financeiro, contábil e engenharia). Assim sendo, ela não se resume em um único departamento em uma empresa³, mas na união de outros, de tal maneira que áreas de finanças, engenharia, contábil e comercial trabalham em conjunto como sendo um novo departamento.

Isso ocorre de tal maneira que as finanças estariam responsáveis pelo orçamento dos projetos, a engenharia pelas operações e manutenções a serem executadas nos ativos físicos, o contábil em relação às tributações referentes para cada ativo e, por último, o departamento comercial cuidando dos contratos.

¹ Este é o caso de empresas do segmento de geração de energia elétrica no Brasil, nas quais os ativos pertencem à ANEEL e são apenas empregados pelas concessionárias para a produção, transmissão e distribuição de energia elétrica.

² O PAS-55 será descrito no item 1.1.2. desta dissertação.

³ Apenas para empresas muito grandes, a gestão econômica de ativos será um departamento próprio com funcionários especializados no assunto. Ainda assim, mesmo nessas empresas, um departamento próprio de gestão econômica de ativos será consequência de anos dessa atividade dentro da empresa.

Na Figura 1.1 é possível observar a estrutura de organização da gestão econômica de ativos.



Figura 1.1 – Organização da gestão econômica de ativos em uma empresa

Assim, conforme ilustra a Figura 1.1, a integração de todas essas áreas poderá dar início à gestão econômica de ativos. As principais etapas são:

- 1) Identificação das principais necessidades da empresa: Nessa etapa é importante entender as despesas da empresa; isto é, avaliar se os gastos com manutenção e aquisição de equipamentos estão elevados em comparação com as receitas.
- 2) Avaliação dos equipamentos: É importante avaliar as condições de operação e manutenção dos equipamentos. Para isso, é necessário checar se os equipamentos estão operando nas condições adequadas, e se a produção é consistente com a capacidade produtiva dos equipamentos. Além disso, verificar se as manutenções ocorrem, de fato, como o planejado.

- 3) Modelagem dos custos: Nesta etapa é necessário modelar os custos de operação e manutenção ao longo do tempo, de modo que seja possível realizar previsões destes custos.
- 4) Monitoração e revisão: Convém sempre monitorar os custos dos ativos e analisar se a modelagem foi bem sucedida. E se não foi, realizar alterações, de modo que uma nova modelagem seja adequada ao comportamento dos custos de manutenção e operação dos ativos.
- 5) Descarte: Com o passar dos anos, conforme os custos de manutenção e operação forem aumentando, pode ocorrer a necessidade de substituir os equipamentos. Além desta situação, deve ser observado que a substituição pode ocorrer por razões de outra natureza, tais como tecnológicas, regulatórias, contratuais, etc. Por exemplo, a substituição de um motor a diesel empregado em ambiente fechado pode ser devido às restrições ambientais e não em decorrência de considerações econômicas.

Atualmente as principais responsabilidades da área de gestão econômica de ativos são:

- Previsão e tendências de demandas de serviços;
- Previsão e tendências de custos de manutenção e operação;
- Administração financeira de capital;
- Estratégias de aquisição de ativos físicos;
- Substituição de equipamentos em operação;
- Inovação tecnológica e obsolescência de ativos;
- Análise de risco de produção e confiabilidade das condições de operação dos equipamentos.

Para se aplicar a gestão econômica de ativos nas empresas é necessário ter um bom conhecimento dos ativos físicos. Para isso, convém saber desde a localização destes na empresa, bem como os valores de mercado atuais e futuros; além disso, suas utilidades para empresa, as atuais condições de operação, o tempo de uso de cada um deles, o tempo esperado em que devem continuar em funcionamento, manutenções futuras e custos e, por último, inovações tecnológicas que estão para surgir em relação aos ativos.

1.1.2. Public Available Specification (PAS-55)

O PAS-55, em inglês *Public Available Specification*, é uma especificação para gestão econômica de ativos determinada pelo *British Standard Institute*. Esta identifica os diversos tipos de ativos nas empresas e organizações, e, além disso, define a gestão econômica de ativos como:

“Atividades e práticas sistemáticas e coordenadas pelas quais uma organização de maneira ótima e sustentável gerencia seus ativos e seus sistemas de ativos, suas performances, riscos, despesas ao longo dos ciclos de vida a fim de atingir seu plano estratégico organizacional.”

Nesse contexto, com o PAS-55, as diversas áreas e empresas que desejarem focar no assunto possuem um conjunto de especificações para seguirem.

1.2. Introdução à manutenção de ativos físicos usados no setor energético

Manutenção é toda ação que consiste em tomar um equipamento inoperante, ou com mau desempenho⁴, e repará-lo para suas condições de uso normal. Os principais tipos de manutenção são:

- Preditiva
- Preventiva
- Corretiva

A manutenção *preditiva*, de acordo com Mobley (2002), é uma técnica de gestão que, por meio de inspeções regulares das condições de operação de determinado equipamento, permite aperfeiçoar suas operações. O autor ainda afirma que o resultado da manutenção preditiva é um banco de dados estatístico. O fato é que apenas com as manutenções preditivas, o desempenho do equipamento não é melhorado. Assim, é necessário que haja um plano de manutenção que se comprometa a corrigir os erros apontados pelo banco de dados para trazer benefícios reais para os equipamentos. Entre as principais manutenções preditivas, destacam-se as análises de óleos e as medições.

⁴ Dentre os indicadores de desempenho, destacam-se confiabilidade, disponibilidade, número de falhas, etc.

A manutenção *preventiva* é aquela que é realizada antes que ocorra a falha de componentes⁵. Ela consiste em corrigir erros de lubrificação, calibração, alinhamento, desgaste, fadiga, entre outros, nos equipamentos. Em geral, esses erros são apontados por manutenções preditivas. Atualmente, "está se investindo mais em técnicas preventivas para aumentar a produção e evitar paradas não programadas", conforme J.R. Lafraia, presidente da Abraman (Associação Brasileira de Manutenção e Gestão de Ativos) (Valor Econômico, 2012).

Já a manutenção *corretiva* ocorre sempre depois que um equipamento apresenta alguma falha, ou mau funcionamento, causado por algum tipo de degradação (Gulati, 2008), (Blanchard & Lowery, 1969). Sempre que ocorre a falha de um componente⁶, a manutenção corretiva tem a função de restabelecer o ativo as suas atividades normais.

Ocorre que em todas as empresas do setor energético existe a necessidade de um programa de manutenção para seus equipamentos para prevenir e corrigir falhas. Nestas são realizadas manutenções preditivas regularmente para avaliar as condições do equipamento, bem como manutenções preventivas para garantir a maior disponibilidade possível e com custo controlado (Gulati, 2008, p. 50). A decisão final envolve a quantificação de custos a fim de garantir um programa eficiente, tanto sob o ponto de vista operacional, quanto econômico e de segurança⁷.

Afinal, segundo Otani & Machado (2008), hoje a manutenção atua como função estratégica das organizações e é responsável diretamente pela disponibilidade dos ativos. Consequentemente, "tem importância nos resultados da empresa. Esses serão tanto melhores quanto mais eficaz for a gestão da manutenção". Ainda neste trabalho, os autores concluem que "a adoção de um modelo de sistema de manutenção que utilize a manutenção preditiva aponta para uma gestão mais eficaz das máquinas. Para que isto possa ser feito, é necessário que além de identificar todas as

⁵ Existem muitos artigos para quantificar o tempo antes que ocorra a falha de equipamentos. Embora não seja o objetivo desta dissertação, a determinação do intervalo ótimo de manutenção preventiva é um problema clássico de gestão econômica de ativos físicos, como por exemplo, em trabalhos desenvolvidos por Barlow & Hunter (1960) e Sellitto (2005).

⁶ É importante estabelecer a diferença entre *ativo* e *componente*. Ocorre que componentes são peças cujo agregado é um ativo. Por exemplo, um transformador é um ativo formado por diversos componentes como buchas, núcleo, relés, etc.

⁷ Autores como Belo et al (2007) desenvolveram trabalhos sobre gestão de manutenção e suas implicações. O trabalho deles foi sobre um estudo de caso de um sistema gerencial com indicadores da eficiência da manutenção, levando a uma gestão que mensura o desempenho de todo o sistema organizacional. Outro trabalho que promoveu um estudo de caso foi o de Costa et al (2006). Este focou em realizar uma análise do processo de manutenção implantado em uma grande empresa multinacional, procurando observar a forma como a atividade de manutenção é conduzida.

restrições dos sistemas produtivos e disponibilizar os recursos materiais necessários para a transformação, os gestores e os mantenedores sejam tratados como atores importantes desse processo”.

1.3. Custos de manutenção no setor energético

Durante a pesquisa para esta dissertação, foi observado que os custos de manutenção no setor energético são altos devido à natureza das operações e ao tipo de equipamentos (transformadores, bombas, mancais, geradores, entre outros). Conseqüentemente, torna-se importante conhecê-los sob a perspectiva econômica.

Contudo, de acordo com Lafraia, presidente da Abraman, no Brasil a manutenção é vista apenas como despesa, uma abordagem que precisa mudar. Para isso, “é importante entender que investir em manutenção aumenta o faturamento” (Valor Econômico, 2012). Afinal, conforme Brown & Yanuck (1985), o conhecimento dos custos de manutenção é importante, uma vez que estes podem equivaler a várias vezes o custo de aquisição do ativo.

Mesmo com tal importância econômica, ocorre que a maioria das empresas não possui todas as despesas de manutenção devidamente organizadas com periodicidade que permita uma análise mais refinada e que seja útil para a tomada de decisões. Na prática, os dados de custo de manutenção geralmente se encontram parecidos com os que se encontram na Tabela 1.1.

Tabela 1.1 – Exemplo de nota de serviço

Data	Classe de custo	Valor	Denominação
17/12/2009	Manutenção de equipamentos auxiliares	R\$ 1.600,00	SERVIÇOS PRESTADOS – NF.001
27/12/2010	Manutenção de equipamentos	R\$ 4.700,00	Serviço de Análise Óleo

Fonte: Trabalho de pesquisa do autor

Na Tabela 1.1, é possível verificar a data, classe de custo, o valor e a denominação de cada serviço de manutenção. É possível ver na coluna “Denominação” que não há uma especificidade para qual equipamento. Além disso, para a primeira linha, há apenas uma referência de nota fiscal, aumentando a dificuldade para saber em quais equipamentos foram feitos os serviços,

enquanto que a segunda linha indica que foi feito um serviço de análise de óleo, mas não foi indicada a qual equipamento esta se refere. Dessa maneira, é possível perceber que as empresas não possuem de maneira clara e organizada as despesas com manutenção.

Isso ocorre porque as empresas não costumam organizar as despesas de maneira clara na folha de pagamento. Costuma-se encontrar um único valor nas folhas de pagamento para várias despesas; assim, esse valor engloba os gastos com outras saídas de caixa que não fazem parte da manutenção do equipamento. Logo, fica difícil distinguir o que foi para a manutenção e o que não foi. Sendo assim, há incertezas referentes aos dados de manutenção obtidos. Com toda essa desorganização, é impossível determinar quanto se gasta em manutenção por ativo ao longo de um ano, nem em qual ano este deve ser repostado.

Para solucionar esse problema, sugere-se realizar reuniões com os profissionais da empresa que trabalharam com as manutenções, pois, com eles, facilita a identificação de custos de manutenção. Nessas reuniões, a presença de profissionais da área administrativa também é essencial, pois, uma vez que trabalham com o banco de dados da empresa, eles podem auxiliar na busca e localização de informações para que ajudem a solucionar os problemas de falta de precisão dos dados.

Ainda assim, como esse processo é feito por meio da memória dos profissionais da empresa, é de se esperar que haja alguns equívocos. Mais ainda, é possível não conseguir solucionar todas as incertezas, até pelo fato de que alguns dos profissionais responsáveis pelas informações necessárias possam não estar mais trabalhando na empresa.

Logo, este processo de aquisição de dados de custos de manutenção consiste em uma *amostragem estatística*. Consequentemente, esses custos passam a ser uma variável aleatória, a qual possui uma função de distribuição de probabilidade que descreve os diversos valores dos custos de manutenção. Em seguida, com a formulação de um modelo econométrico, é possível verificar o quanto os custos de manutenção variam em relação à variável tempo e também em realizar previsões destes. Os aspectos da formulação do modelo econométrico serão discutidos no Capítulo 3 dessa dissertação.

Na Figura 1.2, é possível ver um fluxograma ilustrando todo processo, desde a identificação dos custos até as previsões.

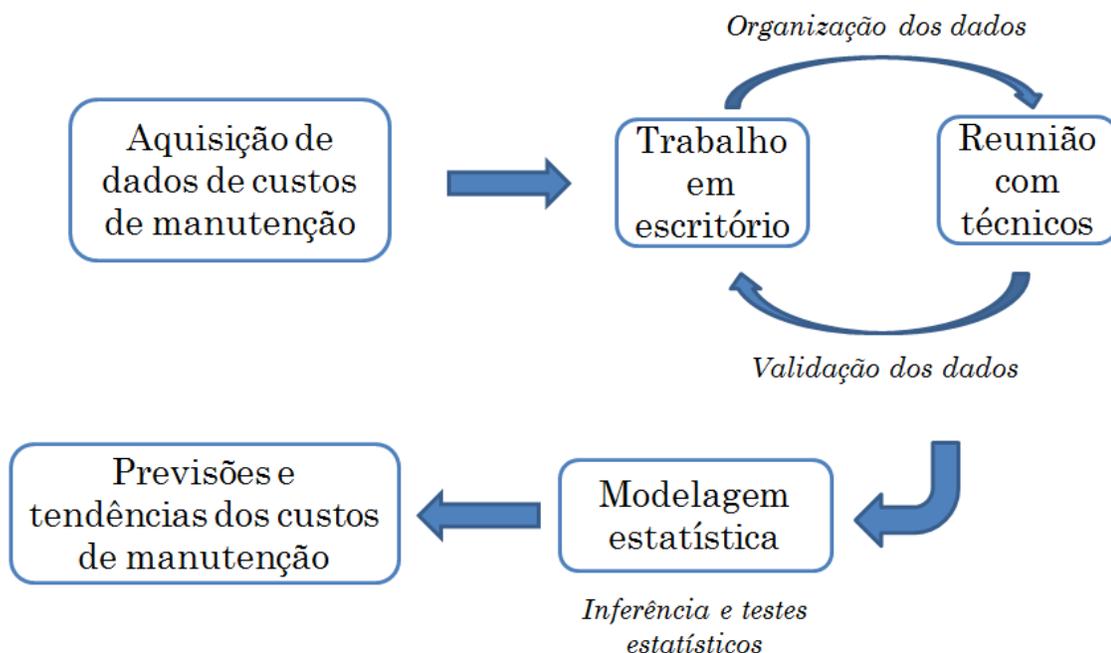


Figura 1.2 – Fluxograma de coleta e validação de dados de custos de manutenção

Na Figura 1.2, é possível visualizar um fluxograma do processo de coleta e validação de dados. Este resume toda a explicação desta seção 1.3 sobre custos de manutenção no setor energético.

1.4. Introdução à vida econômica e à reposição de ativos físicos (VERA)

Ativos físicos empregados no setor energético são vulneráveis à depreciação física e funcional. Ambos os tipos de depreciação possuem a seguinte definição, conforme Park (2002, p. 450):

- 1) Depreciação física – Esta pode ocorrer devido à deterioração do ativo pela má conservação por causa de corrosão, alterações na estrutura física e química.
- 2) Depreciação funcional – Alterações na estrutura organizacional da empresa que resulta na não necessidade do ativo, ou ainda, no surgimento de inovação tecnológica, resultando em um ativo obsoleto.

As principais consequências de ambas as depreciações são queda na produção, redução na disponibilidade e no desempenho, aumento das despesas de operação e manutenção, entre outros

(Park & Sharpe-Bette, 1990, p. 654). Sendo assim, com o passar do tempo os ativos que apresentam essas características são repostos.

Contudo, de uma maneira geral, com as devidas manutenções feitas, os ativos podem ser mantidos por muito mais tempo que sua natureza física permite. Como por exemplo, é possível ver nas ruas carros muito antigos ainda em funcionamento. Porém, para isso ser possível, tem que se pagar um preço alto, algo que as empresas no setor de energético não estão interessadas em arcar.

Nisso, surge o conceito de *vida econômica*. O conceito de vida econômica de um ativo físico se refere ao período de utilização do equipamento de modo que a soma dos *custos de manutenção* e do *custo de capital* sejam mínimos em anuidades equivalentes⁸, simplificando, em outras palavras, é o momento em que as despesas envolvendo o ativo são mínimas.

Ocorre que o custo de capital é definido como o *custo de aquisição* do ativo subtraído de seu *valor residual*, levando em conta a devida taxa de desconto, ou seja, o custo de aquisição amortizado ao longo do tempo. Já os custos de manutenção são todas as despesas gastas para manter o ativo funcionando normalmente ao longo do tempo.

Por causa disso, se o ativo for mantido por um período maior que a vida econômica, as despesas de manutenção serão muito maiores, enquanto que se o ativo for trocado antes de atingir a vida econômica, o custo de capital não terá sido amortizado suficientemente; logo, parte do investimento na aquisição do ativo será perdida. Por isso, os ativos físicos em geral são sempre utilizados por um tempo limitado (Valverde e Rezende 1997 *apud* Marques 2003).

Para que nem a substituição tardia, ou a substituição prematura ocorram, existe a técnica de custo de ciclo de vida (LCC) de equipamentos, a qual é o somatório de todas as despesas ocorridas durante a vida útil de um ativo físico. Isso envolve identificar as principais causas dos custos de aquisição, operação, manutenção e reposição. Para isso, segundo Hastings (2010), os custos e recursos do LCC dependem sempre de técnicas de previsão e quantificação do comportamento do equipamento, em especial, para as taxas de ocorrências de manutenção. Para Barringer (1998), o objetivo de uma metodologia de LCC é determinar o melhor momento, entre

⁸ Dada uma entrada, ou saída, de fluxo de caixa, é possível transformá-la em uma série de fluxo de caixa regular; isto é, entradas, ou saídas, de caixas de valores iguais até um ano N arbitrário. No Capítulo 4 isso é visto detalhadamente.

diversas alternativas, para descartar o ativo (e substituir por um novo), de forma que o menor custo de propriedade seja atingido no longo prazo.

Por isso, no setor energético, as máquinas e equipamentos apresentam custos de aquisição e de manutenções bastante elevados. Conseqüentemente, as empresas são forçadas a se preocuparem com a vida útil e com a sua utilização, a fim de conter as despesas. Dessa maneira, de acordo com Dhillon (2010), a aquisição de um equipamento não deve ser decidida mediante o custo inicial, mas por meio de um estudo sobre a vida econômica útil deste equipamento, que leva em conta as despesas de manutenção e operação.

As desvantagens deste processo são referentes ao tempo gasto para levantar os dados de custos e também a possível falta de precisão destes dados. Afinal, como foi dito, as empresas não possuem de maneira organizada os dados referentes aos custos de manutenção de cada ativo.

1.5. Objetivos

Os principais objetivos desta dissertação são:

- (1) Prever custos de manutenção de ativos empregados em atividades do setor energético;
- (2) Estimar a vida econômica de diferentes equipamentos usados em atividades no setor energético;
- (3) Comparar metodologias de engenharia econômica e programação dinâmica clássicas na literatura no uso de estimativa de vida econômica de ativos;
- (4) Analisar como funcionam os processos de gestão econômica de ativos e suas implicações no caixa das empresas desse setor.

1.6. Motivação

A proposta desta dissertação surgiu junto a um projeto de P&D vinculado a ANEEL (Agência Nacional de Energia Elétrica) cujo título é *Desenvolvimento de plataforma computacional para modelagem da vida econômica de ativos empregados em atividades operacionais de empresas geradoras*. Neste projeto, o produto final foi um *software* que determina a vida econômica de ativos físicos utilizados na geração de energia elétrica em usinas

hidrelétricas. Sendo assim, por se tratar de um projeto de pesquisa, o trabalho desenvolvido nesta dissertação teve resultado direto na confecção da plataforma computacional.

Além desta motivação vinculada ao projeto de P&D, podem-se também destacar as seguintes motivações:

- (1) Necessidade de modelos para a tomada de decisão nas empresas;
- (2) Contribuição para a consolidação das práticas de gestão econômica de ativos nas empresas do setor energético no Brasil, principalmente na indústria de petróleo que é muito intensiva em capital;
- (3) Inexistência de uma literatura com modelagem econométrica de custos de manutenção para equipamentos específicos surgindo, com isso, a oportunidade de inovação;
- (4) Inexistência de trabalho com rigor matemático sobre os métodos de engenharia econômica para a estimativa de vida econômica dos ativos e, por isso, também surge mais uma oportunidade de inovação.

1.7. Principais desafios para a pesquisa

Os principais desafios encontrados no desenvolvimento desta dissertação de mestrado foram os seguintes:

- 1) Dificuldade na aquisição de dados para o estudo de caso;
- 2) Inexistência de uma bibliografia sobre o comportamento de custos de manutenção de equipamentos. Embora existam trabalhos sobre modelos para análise do momento ótimo para a reposição Bellman (1955), Bellman & Dreyfus (1962), Marques (2003), Dhillon (2010), os autores assumem que a relação entre as variáveis custo de manutenção e idade do ativo seja conhecida ao longo do tempo.

O primeiro problema, a aquisição de dados para o estudo de caso, foi previamente comentado na seção 1.3 desta dissertação. Como as empresas deste setor não possuem os dados organizados, tomou-se muito tempo para adquirir uma base de dados de custos de manutenção para o estudo de caso, o qual foi um processo muito trabalhoso feito a partir de notas de serviço imprecisas, conforme demonstrado na Tabela 1.1 (seção 1.3 da dissertação), as quais poderiam

ter tido maiores especificações, conforme observado na Tabela 1.2; nesta, há clareza e especificidade sobre serviço, valores e equipamentos em uma refinaria de petróleo.

Tabela 1.2 – Exemplo de nota de serviço bem especificada

Data	Serviço	Valor	Denominação
17/12/2009	Manutenção no compressor a gás (registro 0001)	R\$ 1.000,00	Inspeção no compressor para verificar necessidade de manutenção futura. Nenhuma anormalidade encontrada
01/05/2010	Manutenção no motor (registro 3150)	R\$ 3.500,00	Motor com falta de óleo. Aquisição e instalação de óleo no motor.

Na Tabela 1.2 há duas ocorrências de manutenção em equipamentos que podem ser usadas em ativos de produção de petróleo. Na primeira linha encontra-se especificado o serviço de manutenção em um compressor, indicando o registro para se ter certeza de qual compressor a gás se trata. Na coluna seguinte, o valor da manutenção, e na última coluna, “Denominação”, está especificada qual manutenção ocorreu. De maneira semelhante, para a segunda ocorrência, há indicação de data, serviço, valor e denominação. Para se chegar em especificações como na Tabela 1.2 foram necessárias diversas reuniões com os profissionais de empresa para filtrar os dados e realizar previsão de custo de ciclo de vida dos ativos.

O segundo problema é referente à falta de bibliografia sobre o tema desta dissertação. Diversos trabalhos vêm sendo realizados para estimar o custo ao longo do ciclo de vida de equipamentos, mas muitos deles em diferentes áreas, tais como engenharia agrícola, florestal e civil (Bellman 1955, Perrin 1972, Silva & Santiago 2006). Entretanto, pouco é encontrado sobre o custo do ciclo de vida de equipamentos da indústria do petróleo, mineração e energia elétrica e suas aplicações na gestão de ativos físicos.

No tocante às manutenções, foram encontrados trabalhos com enfoque no aspecto técnico dos equipamentos, mas nenhum trabalho focando inteiramente no aspecto econômico das manutenções, que é o foco desta dissertação. Talvez isso possa ser explicado pela dificuldade das empresas em permitirem a divulgação de seus custos de manutenção por entenderem se tratar de informação que deva ser mantida em confidencialidade.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Foram levantados artigos científicos e livros-textos escritos sobre gestão econômica de ativos, manutenção, custos de manutenção, vida econômica e reposição das principais áreas do setor energético (mineração, energia elétrica e petróleo). Neste Capítulo serão apresentados os principais trabalhos encontrados, os quais serviram de pesquisa para a elaboração desta dissertação.

2.1. Gestão econômica de ativos

Na indústria do petróleo há poucos trabalhos sobre gestão econômica de ativos. A maioria destes relata apenas estudos de caso de melhorias na manutenção, as quais aumentaram a disponibilidade de equipamentos e, conseqüentemente, melhoraram a produção de óleo e gás. Sendo assim, alguns exemplos de trabalhos sobre o assunto com aplicação na indústria do petróleo⁹ foram escritos por:

- Gray (1994) fez um estudo de caso com equipamentos da indústria do petróleo simulando intervalos de manutenção dos equipamentos utilizados. Segundo o autor, foi possível aumentar a disponibilidade dos equipamentos, reduzindo os gastos com manutenções excessivas, colaborando para obter um menor custo de ciclo de vida dos equipamentos.
- Winkel (1996) apresentou exemplos nos quais o uso da metodologia de LCC consegue reduzir despesas. Além disso, considerou aquisição de bases de dados de produção para a metodologia.
- Kostøl & Nedregaard (1998) relataram a perfuração de um poço, destacando as etapas de planejamento, intervenção e completação com uma equipe formada por diferentes setores dentro da empresa.
- Airlie & Lemanczyk (2004) trabalharam com gestão econômica de ativos realizando monitoramento da produção de petróleo, obtendo informações sobre reservatório,

⁹ Ainda assim, estes trabalhos relataram apenas resultados da gestão econômica de ativos. Em nenhum deles foi discutido com detalhes a metodologia de coleta de dados de produção e de como integrar os diferentes setores das empresas.

poços, melhorando a manutenção e produção, podendo assim realizar melhores previsões e alocações de recursos.

- Hedding (2005) realizou um trabalho sobre gestão econômica de ativos, mostrando as práticas envolvidas e junção de áreas diferentes dentro da empresa que tornam possível as práticas da gestão.
- Fidler (2009) realizou um trabalho sobre a importância da gestão econômica de ativos nas empresas do petróleo. Neste, ele destaca a importância da coleta de dados sobre manutenção e produção, com as quais é possível tomar melhores decisões para as empresas.

Na mineração, foi encontrado apenas um trabalho, o qual escrito por Sabino et al (2011). Neste, os autores relatam uma prática de gestão econômica de ativos em uma mina de pequeno porte no interior do Estado da Bahia. Segundo eles, “a metodologia de gestão de ativos para qualquer projeto de mineração consiste num fator decisivo para o desempenho das operações da mina”. Não só isso, mas concluíram que as empresas de mineração podem aprimorar suas atividades por meio da gestão econômica de ativos, resultando em melhores indicadores financeiros.

Na área de energia elétrica foram encontrados diversos trabalhos. Isto se deve ao fato de ser uma indústria regulada e cuja característica principal consiste em fornecer serviços com alto nível de disponibilidade e confiabilidade. Os principais foram:

- Kostic (2003) realizou um trabalho com objetivo de esclarecer as atividades técnicas que envolvem a gestão econômica de ativos. Segundo o autor, seu trabalho colabora para “desmistificação da gestão de ativos, a qual fazem referência como tudo e nada específico”. Sendo assim, o autor passa pelas áreas de operação, manutenção, inclusive em inspeções, avaliações, confiabilidade e gestão.
- Amadi-Echendu (2004) argumenta em seu trabalho que a organização tradicional adotada pelas empresas não é válida para gerir ativos físicos ao longo dos seus ciclos de vida.
- Ferrero & Shahidehpour (2005) concluem que a gestão econômica de ativos é uma combinação de diferentes atividades, as quais são realizadas a fim de tomar decisões

ótimas em custos, lucros e confiabilidade. Além disso, os autores comentam sobre a importância do monitoramento dos ativos.

- Korn & Veldman (2008) fizeram um trabalho para uma empresa geradora de energia elétrica, focando na análise de risco na gestão econômica de ativos. De acordo com os autores, “o sucesso de uma gestão econômica de ativos depende inteiramente do compromisso da equipe e do gerente”. Além disso, foi possível constatar que os ativos tem que ser monitorados continuamente - e não periodicamente - para análise de risco ser bem sucedida.
- Feinstein & Morris (2010) formularam um trabalho sobre incertezas na gestão econômica de ativos no setor de energia elétrica. Segundo os autores, a análise de incertezas, referente à disponibilidade, confiabilidade, entre outros, é essencial para redução de custos.

Além destes artigos, também foram utilizados livros textos como Hastings (2010) e Fabricky & Blanchard (1991).

2.2. Manutenção de ativos

Para equipamentos utilizados na indústria do petróleo, Brandt (2005) e Adair et al (2008) realizaram trabalhos sobre programas de inspeção e manutenção de ativos físicos no petróleo.

Na engenharia elétrica, para manutenções em equipamentos específicos, como transformadores, por exemplo, foram encontrados trabalhos mais atuais como Arantes (2002), Lucio & Teive (2008), Bechara & Brandão (2009), Landucci (2009) e Bechara (2010). Nestes trabalhos, as pesquisas eram sobre diagnósticos e análise de falhas.

Para equipamentos em geral, isto é, sem abordar uma classe específica de equipamentos, houve trabalhos como os de:

- Barlow & Hunter (1960): Este é um dos trabalhos pioneiros sobre manutenção de ativos. Neste, os autores descrevem planos de manutenção preventiva, os quais são modelados matematicamente a fim de encontrar o plano ótimo de manutenção para ativos.

- Costa & Peixoto & Dias (2006): Os autores conduzem um estudo de caso que consiste em uma análise do processo de manutenção em uma empresa.
- Silva & Costa (2006): Realizaram um estudo de caso, a partir da implementação de um *software* em uma empresa aeroportuária.
- Otani & Machado (2008): Neste trabalho, os autores descrevem como os diferentes tipos de manutenção – preditiva, preventiva e corretiva – formam um sistema de manutenção buscando um melhor resultado econômico-financeiro.

2.3. Custos de manutenção de ativos

Conforme foi mencionado na seção 1.8 desta dissertação, não foi encontrada uma bibliografia para modelagem e previsão de custos de manutenção, com exceção de alguns poucos trabalhos, os quais não se encaixavam no enfoque desta dissertação. Ainda assim, mesmo com poucos trabalhos, houve a tentativa de aproveitá-los ao máximo para a pesquisa.

Um dos trabalhos encontrados foi o de Elandt-Johnson (1967). Neste trabalho, a autora estima uma política de manutenção preventiva ótima em função do custo de manutenção. Assim, o custo de manutenção é formado por uma manutenção programada e por outra não programada. Logo, o custo de manutenção, cujo valor é desconhecido, é modelado por uma regressão polinomial.

Outro trabalho encontrado foi o de Nascimento (2006). Neste trabalho, o autor realiza uma pesquisa sobre previsão de custos de manutenção de aeronaves militares. Em sua pesquisa, foram utilizados modelos de séries temporais para previsão, em particular, o modelo SARIMA, o qual realiza previsões de séries temporais sazonais não-estacionárias. Apesar de o resultado de Nascimento ser consistente, para atingi-los são necessários muitos dados, os quais têm que estar muito bem organizados. Já para esta dissertação, como os dados coletados são poucos, um modelo de séries temporais como o de Nascimento (2006) não é viável.

Além destes, houve outros trabalhos como Watts (1982) e Makis et al (2000), nos quais foram trabalhados o custo de manutenção em relação à depreciação e risco de falha, respectivamente.

2.4. Vida econômica e reposição de ativos (VERA)

A bibliografia de estimativa de vida econômica e reposição de ativos, ao contrário da de custos de manutenção, é muito extensa. Os primeiros trabalhos são da década de 50 e ainda hoje são escritos muitos trabalhos com inovações sobre o assunto.

Bellman (1954) formulou a teoria de programação dinâmica. A partir desta, ele escreveu o primeiro trabalho sobre o assunto introduzindo a metodologia.

Sasieni (1956) também trabalhou com reposição de ativos. Porém, ao contrário de Bellman (1954), ele não utilizou a metodologia de programação dinâmica. Em seu trabalho foi utilizada a metodologia de cadeias de Markov para determinar o momento ótimo de substituição. Contudo, a metodologia de Sasieni não foi a mais aceita. O motivo disso foi que, de acordo com Dreyfus (1957), a programação dinâmica podia ser implementada computacionalmente de maneira mais rápida e eficiente que os outros métodos.

Outra tentativa, diferente das técnicas citadas, foi por meio de métodos da engenharia econômica. Alchian (1958) acreditava que para realizar a reposição de ativos bastava analisar o valor presente dos custos. Dessa forma, aos olhos da engenharia econômica, a reposição de ativos trata-se apenas de um ramo da teoria de investimentos.

Com o passar dos anos, a metodologia de reposição de ativos e a determinação da vida econômica de ativos começou a ser utilizada por muitas áreas, de tal maneira que foram surgindo aplicações em diversos setores como na engenharia agrícola com Perrin (1972), engenharia florestal com Marques (2003) e em mineração com Silva & Santiago (2006).

Na indústria do petróleo, há poucas referências sobre o assunto. A maioria relata estudos de casos utilizando alguma metodologia para determinação de vida econômica e substituição de equipamentos. Alguns trabalhos foram:

- Waddel (1983) elaborou um *software* com metodologia de programação dinâmica para substituição de tratores e caminhões utilizados pela *Philips Petroleum Company*;
- Holm (1992): Escreveu um trabalho sobre vida econômica e substituição de equipamentos de perfuração na indústria do petróleo.

Na área de energia elétrica, em relação à vida econômica e reposição de ativos, foi encontrado o seguinte trabalho:

- Schijnder et al (2012): Segundo os autores, percebeu-se que no setor de energia elétrica, os ativos eram utilizados por um período de 30 a 60 anos e a reposição, de tal maneira que quando ocorria uma falha, sua reposição era inevitável. Sendo assim, foi desenvolvido pelos autores um modelo probabilístico na confiabilidade dos ativos para definir estratégias de reposição.

Além destes, foram utilizados como referências bibliográficas para essa dissertação, os seguintes trabalhos:

- Anders et al (2001): Realizaram um trabalho relatando técnicas determinísticas e probabilísticas para encontrar a curva de vida econômica dos ativos.
- Feldens et al (2010): Os autores realizaram um trabalho sobre substituição de equipamentos com aplicação em transporte urbano. Neste trabalho uniram métodos de decisão multi-critério, como AHP (*Analytical Hierarchy Processes*), com métodos da teoria de investimento, como análise de fluxo de caixa. Além disso, com abordagem diferente desta dissertação, levaram em conta custos de operação para determinar o momento ótimo de substituição.
- Abensur (2010) realizou um trabalho comparando as principais teorias sobre reposição de equipamentos e listou as vantagens e desvantagens de cada uma delas.

Além destes artigos, foram também utilizados livros clássicos de engenharia econômica como Thuesen et al (1971), Park & Sharp-Bette (1990), Grant et al (1990) e Park (2002). Em relação a estes livros, percebe-se que a vida econômica e reposição de ativos é um tema clássico de engenharia econômica, tanto que este assunto encontra-se em todos os livros desta área. Porém, nestes livros que serviram como referência bibliográfica, este tema é abordado da mesma maneira superficial, ou seja, explicando a metodologia e ilustrando situações básicas, sem considerar tópicos como aquisição de dados e propriedades dos indicadores econômicos (os quais serão abordados nos Capítulo 3 e 4, respectivamente).

3. MODELAGEM ESTATÍSTICA DOS CUSTOS DE MANUTENÇÃO

Neste capítulo é feito um estudo estatístico da relação entre as variáveis custos de manutenção e idade dos ativos. Na gestão econômica de ativos e na metodologia de LCC, a modelagem estatística é importante para os gestores determinarem as relações entre ambas as variáveis, assim como para realizar previsões dos custos de manutenção.

3.1. Estimativa dos custos de manutenção

O conhecimento da curva de custo de manutenção não é simples, pois envolve muito trabalho empírico que deve ser realizado para cada um dos equipamentos individualmente. Por isso, há uma literatura que busca elaborar políticas ótimas de manutenibilidade no sentido de minimização de custo de longo prazo (Barlow & Hunter 1960, Elandt-Johnson 1967, Watts 1982, Markis et al 2000). Embora difícil, torna-se necessário o conhecimento da curva de custo de manutenção de equipamentos, de modo que seja possível quantificar a relação entre as variáveis e realizar previsões no sentido de melhorar a gestão econômica de ativos.

Em geral, as previsões, assim como a quantificação da relação entre duas variáveis quaisquer, podem ser feitas de muitas maneiras, desde técnicas mais complexas, a métodos mais simples. Sendo assim, a escolha de uma técnica, ou de outra, depende dos dados disponíveis. Se os dados históricos apresentam características como tendência ou sazonalidade, é aconselhável utilizar técnicas mais complexas. Por outro lado, se a base de dados for limitada, devem ser empregados métodos mais simples (Hirschey, 2009).

Nesta pesquisa, ocorre que todos os dados de custos de manutenção foram fornecidos pelo projeto de pesquisa que gerou essa dissertação. Logo, conforme explicado na seção 1.3 – Custos de manutenção no setor energético – as despesas de manutenção encontraram-se desorganizadas nas empresas desse setor e, por isso, a amostragem é limitada. Sendo assim, no item 3.1.1 – Custos de manutenção acumulado – deste capítulo, é possível ver como os dados serão dispostos ao longo do tempo para modelagem.

3.1.1. Custo de manutenção acumulado

Na coleta de dados de custos de manutenção de um ativo são consideradas todas as despesas em uma base anual. Para um exemplo hipotético, na Figura 3.1 há o gráfico indicando os custos de manutenção para um gerador.

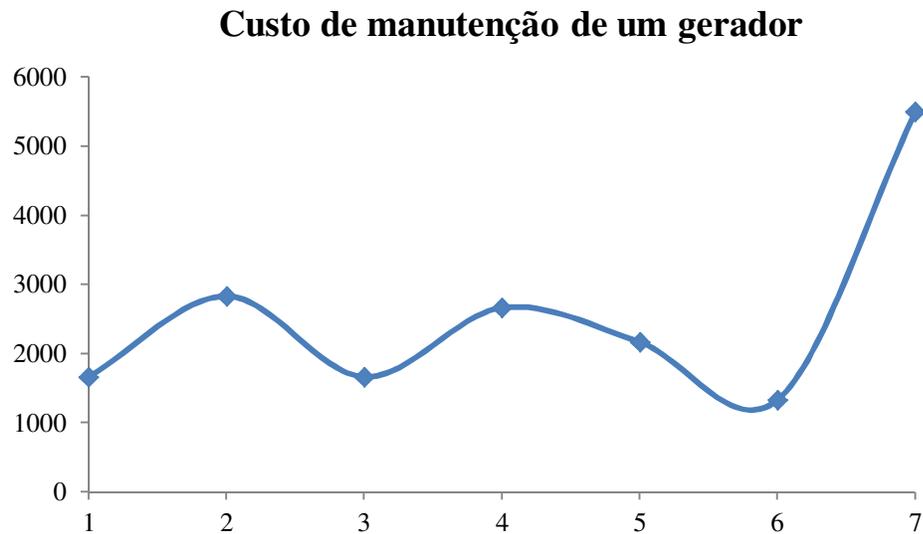


Figura 3.1 – Curva de custo de manutenção anual

Na Figura 3.1, é possível observar os diferentes valores de custos de manutenção ao longo dos anos para um ativo. Porém, na modelagem estatística de tais custos, para esta dissertação, serão utilizados custos de manutenção *acumulados* ao longo do tempo. Sendo assim, calcula-se o gasto acumulado de manutenção ao longo dos anos. Para o exemplo, na Figura 3.2 há a curva de custo de manutenção acumulado.

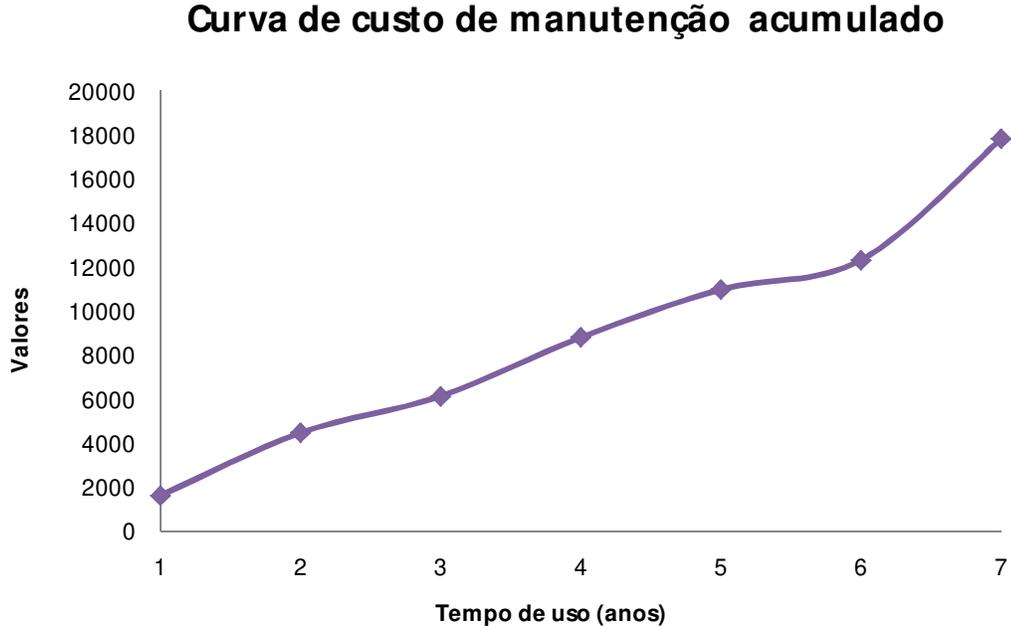


Figura 3.2 – Curva de custo de manutenção acumulado

Na Figura 3.2 é possível ver a curva de custo de manutenção acumulado para um gerador hipotético. A justificativa em trabalhar com custos acumulados deve-se ao fato de nos modelos de VERA, conforme será explicado no Capítulo 4, é considerado o montante total de despesas com manutenção ao longo do tempo. Por isso, na modelagem estatística, consideram-se custos de manutenção acumulados.

3.2. Estimativa de custos de manutenção por meio de regressão linear

Nesta seção 3.2, é descrita a teoria para formulação de modelos estatísticos de regressão linear simples, passando pelas inferências estatísticas e finalizando com o uso de diferentes formas funcionais para o modelo.

3.2.1. Considerações iniciais sobre regressão linear

De acordo com Hill et al (2010), para pesquisar a relação entre duas variáveis, deve-se construir um modelo econômico e, a seguir, um modelo econométrico que constitua a base de uma análise econômica quantitativa. Sendo assim, qualquer modelo econométrico estabelecido é

uma tentativa de abstração da relação entre duas variáveis; neste caso, para este estudo, a relação entre os custos de manutenção e a idade dos ativos.

Dessa maneira, na quantificação dos custos de manutenção, assumem-se uma variável independente x como o tempo (idade do ativo) e uma variável aleatória dependente c como o custo de manutenção. Logo, há uma associação entre ambas as variáveis, tal que a variável c tem uma função de densidade de probabilidade condicionada por x , $f(c|x)$, que descreve as probabilidades dos diversos valores de custos de manutenção para um ativo com determinada idade x do ativo.

Consequentemente, tal função de probabilidade tem um valor esperado $E(c|x) = \mu_{c|x}$ e uma variância $var(c|x) = \sigma^2$ constante. Com tais informações, supõe-se uma associação entre ambas as variáveis por meio de um modelo estatístico. Como de fato não se sabe como é a função de probabilidade $f(c|x)$, a primeira suposição inicial de modelo estatístico é uma regressão linear simples, como mostra a equação (3.1).

$$E(c|x) = \beta_1 + \beta_2 x \quad (3.1)$$

O modelo de regressão linear simples na (3.1) é usado para estimar a relação entre a variável dependente, custos de manutenção, e a independente, idade do ativo, por meio dos parâmetros β_1 e β_2 , os quais possuem uma relação *linear* entre si. Como no modelo há apenas uma variável independente e a relação entre os parâmetros é linear, o modelo na equação (3.1) recebe o nome de regressão linear simples.

Contudo, para ser válido matematicamente, tal modelo tem os cinco pressupostos seguintes:

(1) O valor de c , para cada valor de x , é dado por:

$$c(x) = \beta_1 + \beta_2 x + e \quad (3.2)$$

Percebe-se que a diferença entre as equações (3.2) e (3.1) é a presença da variável e . Logo, $e = c(x) - E(c|x)$. Assim, a variável dependente $c(x)$ é explicada por um componente

sistemático que varia conforme x , ou seja, o valor esperado $E(c|x)$, e um componente aleatório, ou seja, a variável e , a qual também é chamada de *erro aleatório* ou simplesmente *erro*.

Dessa maneira, fica definido um modelo estatístico para custos de manutenção ao longo do tempo. De acordo com Magalhães & Lima (2008), “o conceito de modelo estatístico consiste em decompor o valor de cada observação em uma parte com estrutura conhecida e uma parte residual, com informações que não são explicadas pela estrutura” (p. 293).

Por isso, em qualquer tentativa de modelo econômico devem ser incluídas todas as variáveis essenciais possíveis de se obterem dados. Conseqüentemente, a influência de todas as variáveis não essenciais serão mensuradas pelo termo aleatório do modelo. Dessa forma, quando o modelo é expresso por meio de uma reta, como na equação (3.2), define-se um modelo de regressão linear simples.

(2) Para cada valor de x , os valores de c se distribuem em torno de seu valor médio, de forma que todos têm as mesmas variâncias, conforme é possível ver na equação (3.3).

$$\text{var}(c|x) = \sigma^2 \quad (3.3)$$

A equação (3.3) implica que para determinada idade do ativo, todos os valores de custos de manutenção têm a mesma variância; isto é, todos têm a mesma dispersão em torno de sua média. Esta propriedade é chamada de *homocedasticidade*, enquanto a ausência de tal propriedade é chamada de *heterocedasticidade*.

(3) Os valores de c são todos *não correlacionados* e têm *covariância zero*, portanto não há associação linear entre eles. Esta característica é formalizada matematicamente pela equação (3.4).

$$\text{cov}(c_i, c_j) = 0 \quad (3.4)$$

Tal propriedade surge do fato de que os dados de custos de manutenção foram coletados *aleatoriamente*. Logo, eles são estatisticamente independentes.

(4) Para cada valor de x , os valores de c se distribuem normalmente em torno de sua média, conforme a equação (3.5).

$$c \sim N[(\beta_1 + \beta_2 x), \sigma^2] \quad (3.5)$$

(5) Os valores de e se *distribuem normalmente* em torno de sua média nula com variância constante, conforme a equação (3.6).

$$e \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.6)$$

Ocorre que o valor esperado do erro é $E(e) = 0$, pois $E(c(x)) = \beta_1 + \beta_2 x$. Por isso, conforme Hill et al (2010), as funções de densidade de probabilidade da variável dependente e do erro são idênticas, exceto pela localização, a qual difere por $\beta_1 + \beta_2 x$ (p. 53).

Além disso, todos os valores não são correlacionados, conforme é possível ver na equação (3.7).

$$\text{cov}(e_i, e_j) = 0 \quad (3.7)$$

Assim, com as premissas matematicamente bem estabelecidas, é possível estimar os valores dos parâmetros β_1 e β_2 . Para isso, um dos métodos mais utilizados é o dos Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) (Gujarati, 2000), o qual será utilizado para esta dissertação também. Logo, as estimativas para os parâmetros de β_1 e β_2 são os valores pontuais b_1 e b_2 . Desse modo, obtém-se o seguinte ajuste de reta, conforme a equação (3.8):

$$c_t = b_1 + b_2 x_t + \hat{e}_t \quad (3.8)$$

Na equação (3.8), os valores de b_1 e b_2 dependem dos valores de c . Por esse motivo, as estimativas são variáveis aleatórias. Logo, possuem distribuições de probabilidade, média e variância. Nesta dissertação, todas as demonstrações das propriedades serão omitidas. Contudo, elas podem ser encontradas facilmente nas bibliografias básicas de econometria, como Hill et al (2010), Gujarati (2000), entre outros.

Com isso, é possível encontrar estimativas para c_t e e_t para cada valor de x_t . Assim, as estimativas são denotadas por \hat{c}_t e \hat{e}_t . A primeira representa o componente explicável pelo modelo e a segunda o componente não-explicável, chamado de resíduo, tais que

$$\hat{c}_t = b_1 + b_2 x_t \quad (3.9)$$

$$\hat{e}_t = c_t - \hat{c}_t \quad (3.10)$$

Assim, ficam finalizadas as considerações iniciais sobre o modelo de regressão linear simples, suas premissas e como encontrar a estimativa dos parâmetros. Feito isso, na seção seguinte serão discutidos métodos de análise econométrica mais avançados, os quais permitem discutir as estimativas encontradas nos modelos de regressão linear por meio de MQO. Sendo assim, serão definidos o *teste de normalidade*, o *teste de hipóteses* e *predição* no modelo de regressão linear simples.

3.2.2. Teste de hipóteses

O objetivo de um *teste de hipóteses* é calcular a probabilidade de se obter estimativas mais extremas do que as fornecidas pela amostra. Dessa maneira, é possível comparar diferentes conjecturas sobre uma população com as informações contidas numa amostra de dados (Hill et al, 2010). Assim, sob a ótica da gestão econômica de ativos, os testes de hipótese permitem comparar condições do ativo à luz do desempenho técnico e da vida econômica dos equipamentos.

Para isso, são testadas hipóteses sobre valores alternativos que os parâmetros b_1 e b_2 da regressão podem assumir. O procedimento para realização de teste de hipóteses envolve quatro etapas, conforme baseado em Magalhães & Lima (2008) e Hill et al (2010):

1. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa;
2. Realizar a estatística de teste t ;
3. Definir a forma da região de rejeição com o nível descritivo α ;
4. Concluir o teste com base na estimativa e na região de rejeição.

Na *etapa 1* são estabelecidas as hipóteses nula e alternativa. A *nula*, representada por H_0 , especifica um valor para um parâmetro, enquanto a *alternativa*, representada por H_a , rejeita o valor especificado na hipótese nula. Por exemplo, se $H_0: \beta_1 = 0$, então a hipótese alternativa é

flexível, podendo ser ou $\beta_1 \neq 0$, ou $\beta_1 > 0$, ou $\beta_1 < 0$, conforme as condições econômicas que se pretende testar.

Na *etapa 2* é realizada a estatística de teste t , a qual é utilizada para testar a hipótese nula. Dessa maneira, dada $H_0: \beta_k = w$ e $H_a: \beta_k \neq w$, a estatística de teste é dada pela equação (3.11).

$$t = \frac{(b_k - w)}{\sqrt{\hat{v}\hat{r}(b_k)}} \quad (3.11)$$

Logo, t é uma variável aleatória com uma distribuição t -Student¹⁰. Assim, se a hipótese nula é verdadeira, a estatística de teste t , na equação (3.11), tem a distribuição t com $T - 2$ graus de liberdade. Caso contrário, a estatística de teste t possui outra distribuição.

Para a *etapa 3*, quando a hipótese nula é verdadeira, a região de rejeição é um conjunto de valores da estatística de teste t que apresenta baixa probabilidade de ocorrência. Logo, nesta etapa, definem-se intervalos de valores que conduzem à rejeição da hipótese nula. Para isso se escolhe o valor de α , o qual representa o nível de probabilidade extrema. Consequentemente, com α e o número $T - 2$ de graus de liberdade, é possível determinar o valor crítico t_c na distribuição, tal que se $P(t \geq t_c) = P(t \leq -t_c) = \alpha/2$, a hipótese nula é rejeitada.

Por último, na *etapa 4* compara-se o valor da estatística de teste t com o t_c . Se $t \leq -t_c$ ou $t \geq t_c$, então a hipótese nula é rejeitada. Caso contrário, a hipótese não é rejeitada. Na prática, a probabilidade de obter-se um valor amostral da estatística de teste que esteja nas caudas é pequeno, de tal forma que se o valor de t calculado cai em uma região de baixa probabilidade, então é pouco provável que t tenha uma distribuição t -Student, ou seja, pouco provável que a hipótese nula seja verdadeira.

3.2.3. Predição

No modelo de regressão linear, uma predição é uma previsão de um valor futuro da variável c para um valor de x . Dessa maneira, para um valor pontual x_o , por meio da equação (3.9), é possível obter uma estimativa de c_o , ou seja, \hat{c}_o .

¹⁰ Mais informações sobre a distribuição t -Student no Apêndice III – Inferências no modelo de regressão linear simples.

Como \hat{c}_0 é uma variável aleatória; assim, define-se o erro f da estimativa.

$$f = \hat{c}_0 - c_0 \quad (3.12)$$

Na equação (3.12), f possui média $E(f)$ e variância $var(f)$. Nisso, é possível construir uma variável aleatória com distribuição t -Student, a qual é

$$\frac{f}{\sqrt{v\hat{a}r(f)}} \sim t_{(T-2)} \quad (3.13)$$

Dessa maneira, assim como foi feita na seção 3.2.2 – Teste de hipóteses – estabelece-se um valor para o nível descritivo α , de tal maneira que com os graus de liberdade é possível encontrar um valor crítico para t_c , tal que

$$P(-t_c \leq t \leq t_c) = 1 - \alpha.$$

Logo,

$$P\left(-t_c \leq \frac{\hat{c}_0 - c_0}{\sqrt{v\hat{a}r(f)}} \leq t_c\right) = 1 - \alpha.$$

Isolando o termo c_0 tem-se que

$$P(\hat{c}_0 + t_c\sqrt{v\hat{a}r(f)} \geq c_0 \geq \hat{c}_0 - t_c\sqrt{v\hat{a}r(f)}) = 1 - \alpha.$$

Portanto, para o nível de confiança de $1 - \alpha$, uma previsão \hat{c}_0 tem um intervalo de confiança (IC) de acordo com a equação (3.14).

$$\hat{c}_0 \pm t_c\sqrt{v\hat{a}r(f)} \quad (3.14)$$

Enfim, com as considerações iniciais sobre como é formada uma regressão linear simples e com o arcabouço teórico sobre inferências no modelo, agora é possível modelar o comportamento dos custos de manutenção ao longo do tempo.

3.2.4. Teste de normalidade

Para o modelo de regressão linear simples não é obrigatório o pressuposto de que os erros tenham distribuição Normal. Contudo, para realizar inferências sobre o modelo como teste de hipóteses e predição, uma exigência é que os erros sejam normalmente distribuídos. Nisso, como os erros não são observáveis, trabalha-se com os resíduos. Assim, uma maneira de verificar a normalidade do modelo é por meio do *Teste de Jarque-Bera*, o qual testa a normalidade da distribuição dos resíduos. Este teste recebe o nome dos autores Carlos Jarque e Anil Bera.

De acordo com Jarque & Bera (1980), dada uma amostra de uma população, o teste se baseia nas medidas estatísticas de assimetria e curtose. Logo, o teste de Jarque-Bera possui dois graus de liberdade. A estatística de Jarque-Bera é dada por

$$JB = \frac{T}{6} \left(S^2 + \frac{(k - 3)^2}{4} \right) \quad (3.15)$$

Na equação (3.15), T é o número total da amostra, S a assimetria e k a curtose. Dessa forma, estabelece-se uma hipótese nula de que os resíduos são normalmente distribuídos com nível crítico α arbitrário. Para esta dissertação é utilizado 5%; logo, se o valor- p da estatística de JB é menor que α , então rejeita-se a hipótese nula de que os erros são normalmente distribuídos.

3.2.5. Uso de diferentes formas funcionais na modelagem dos custos de manutenção acumulado

O emprego de regressões lineares para modelagem de custo de manutenção será utilizado nos custos de manutenção acumulado. A Figura 3.3 exibe um exemplo de curva hipotética de custo acumulado.

Curva de custo acumulado de manutenção

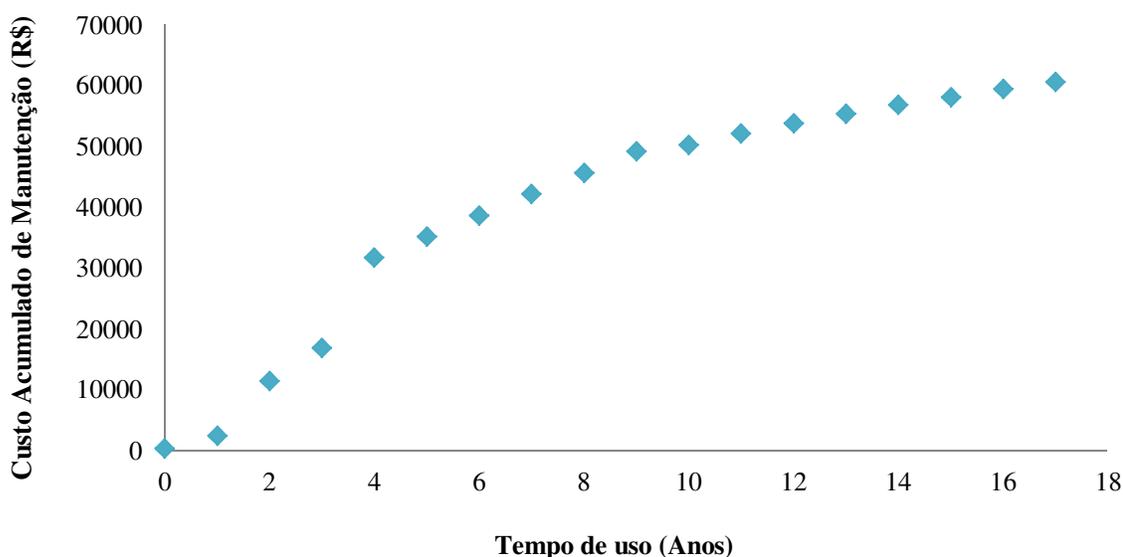


Figura 3.3 – Exemplo de curva de custo acumulado de manutenção

Na Figura 3.3, é possível ver a curva de custo acumulado de manutenção para um ativo hipotético ao longo dos anos. Dessa maneira, como os custos são acumulados, a curva é sempre crescente. Para a gestão econômica de ativos o desafio é encontrar uma função que modele os custos de manutenção ao longo da vida útil deste equipamento, e também que realize previsões.

Para construir um modelo para os custos de manutenção ao longo do tempo, utilizam-se os pressupostos formulados na seção 3.2.1, no qual se supõe uma distribuição de probabilidade condicional $f(c|x)$. Uma vez que o processo estocástico que gerou a verdadeira função de custo $c(x)$ é desconhecida, um experimento preliminar é realizado para obter uma primeira estimativa do custo de manutenção em função do tempo, utilizando métodos de regressão (Elandt-Johnson, 1967), o qual pode ser representado pela equação (3.2). Recordando, a equação (3.2) é $c(x) = \beta_1 + \beta_2x + \varepsilon$.

Não só a regressão da equação (3.2), mas também outras funções podem ser utilizadas. Afinal, se uma variável tiver custo de manutenção acumulado como na Figura 3.3, uma estimativa linear é inadequada para modelar os custos. Por esse motivo, outras funções podem ser utilizadas para modelar os custos de manutenção, tais como funções inversas, exponenciais (a qual também é chamada de log-linear), logarítmicas, entre outras, conforme as equações (3.16), (3.17) e (3.18), respectivamente.

$$c = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{x} + e \quad (\text{inversa}) \quad (3.16)$$

$$c = \exp(\beta_1 + \beta_2 x + e) \quad (\text{exponencial}) \quad (3.17)$$

$$\ln(c) = \beta_1 * \ln(x) + \beta_2 + e \quad (\text{logaritmica}) \quad (3.18)$$

Para isso, são realizadas tentativas de regressão por meio do método dos mínimos quadrados com diversas funções, de modo que se obtenha a função que melhor se ajusta aos dados de custos. Quando se diz *ajustar* quer dizer encontrar um modelo cujo termo aleatório possua uma distribuição Normal $N(0, \sigma^2)$, a covariância entre dois termos aleatórios e_s e e_j seja nula, ou seja, $cov(e_s, e_j) = 0$ e a taxa de crescimento dos dados seja captada da melhor maneira possível pela forma funcional escolhida.

Para exemplificar como um modelo consegue acompanhar a taxa de crescimento dos dados, analisam-se as Figura 3.4 e Figura 3.5.

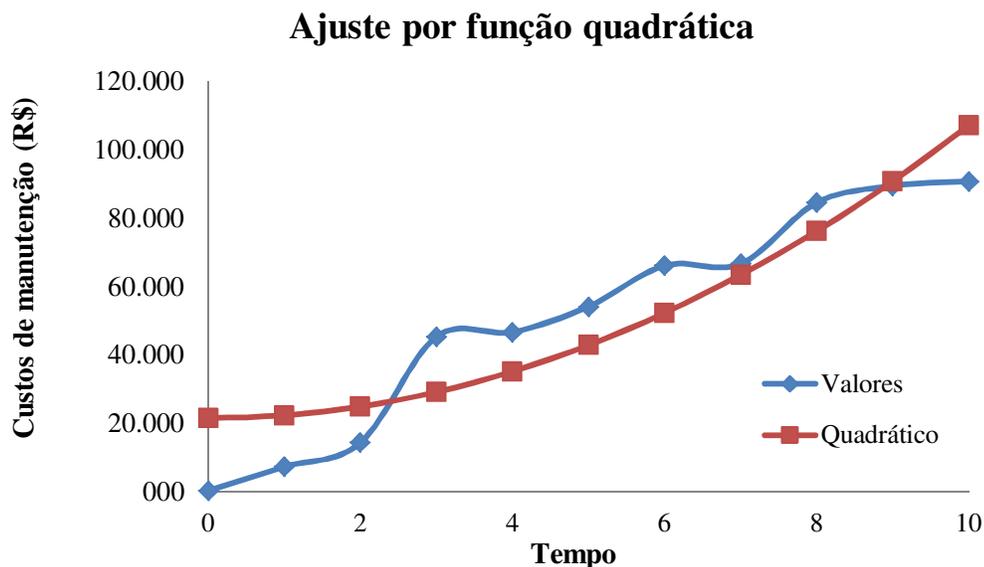


Figura 3.4 – Ajuste por função quadrática

Na Figura 3.4, é possível ver a base de dados, *valores*, em azul e o ajuste pela função quadrática, *quadrático*, em vermelho. Percebe-se que há uma predominância de resíduos

positivos no centro e negativos nos extremos. Por esse motivo, o ajuste pela função quadrática não consegue acompanhar a real taxa de crescimento dos dados, ao contrário do ajuste pela função exponencial, conforme a Figura 3.5.

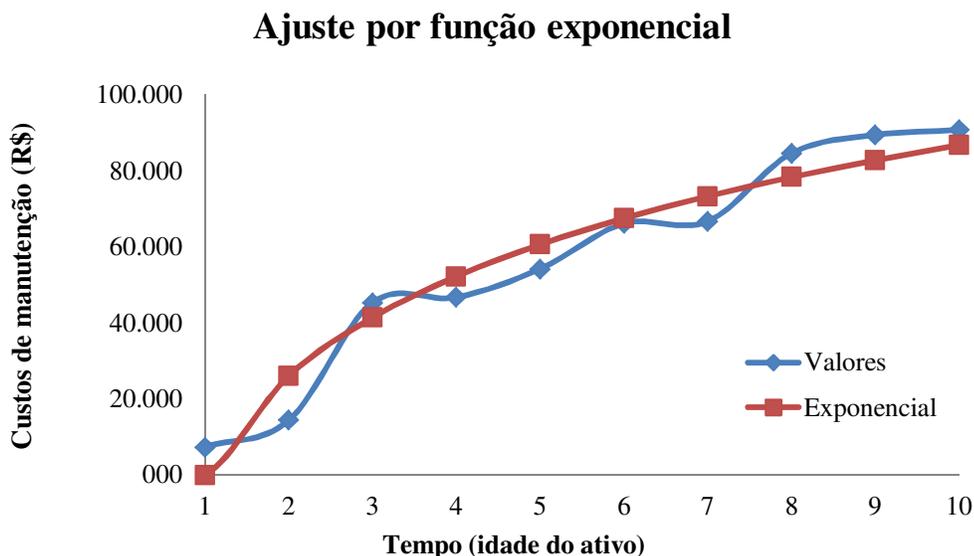


Figura 3.5 – Ajuste por função exponencial

Já na Figura 3.5, é possível ver que não há predominância de resíduos positivos, ou negativos, em nenhuma parte da base de dados. Não só, mas percebe-se que o ajuste fica próximo dos valores da base de dados ao longo do tempo.

Sendo assim, é importante testar diversas formas funcionais, de modo que se encontre a melhor relação entre as variáveis do modelo, respeitando os pressupostos.

3.3. Regressão com dados de séries temporais

Nesta dissertação, a amostra de dados de custo de manutenção dos ativos está em função do tempo. Quando isso ocorre, dizemos que a amostra é uma *série temporal*.

Ocorre que quando se utiliza uma regressão com dados de séries temporais é importante verificar a *estacionariedade* da série; para isso, verifica-se a presença de *raiz unitária*. Conforme Bueno (2011), as inferências estatísticas só terão validade se os resíduos da série temporal estimada forem estacionários (p. 3). Nas seções seguintes, as definições e implicações de cada um dos termos serão comentadas.

3.3.1. Estacionariedade

Uma série temporal é estacionária se a média e variância forem constantes ao longo do tempo e se a covariância entre dois valores da série depender apenas da distância entre os valores, não do tempo em que as variáveis são observadas. Matematicamente, definimos uma série temporal Z_t como estacionária se:

$$E(Z_t) = \mu \quad (3.19)$$

$$Var(Z_t) = \sigma^2 \quad (3.20)$$

$$Cov(Z_t, Z_{t+s}) = Cov(Z_t, Z_{t-s}) \quad (3.21)$$

Além disso, se um processo é estacionário, a distribuição de probabilidade de Z_t é a mesma para todos os períodos de tempo t e seu formato pode ser inferido de um histograma das observações que constituem a série observada (Pindyck & Rubinfeld, 2004, p. 569).

Entretanto, caso a série temporal não seja estacionária, as consequências econométricas serão muito graves, levando a estimadores de mínimos quadrados, estatísticas de testes e preditores não confiáveis (Hill et al, 2010).

3.3.2. Teste de raiz unitária

Para verificar a estacionariedade de uma série, vamos analisar a equação (3.22).

$$Z_t = \theta Z_{t-1} + e_t \quad (3.22)$$

Na qual θ é o parâmetro, e_t é o termo aleatório e Z_t , assim como Z_{t-1} , são observações da série em um período t e $t - 1$, respectivamente.

Nisso, a variância nesta equação é:

$$Var(Z_t) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}$$

Ocorre que se $|\theta| > 1$, então a variância seria negativa, logo, um absurdo. Por outro lado, se $\theta = 1$, o que caracteriza uma série com *raiz unitária*, a variância seria infinita, logo, não seria possível realizar qualquer inferência estatística. Por fim, por tricotomia, se $|\theta| < 1$ a variância é constante.

Sendo assim, no processo de estimativa do parâmetro θ , é feito um teste de hipóteses, com $H_0: \theta = 1$, para verificar a presença de raiz unitária na série temporal. Contudo, conforme explicado por Bueno (2011), como não se sabe se Z_t é uma série estacionária e se o termo aleatório tem ou não uma distribuição Normal $N(0, \sigma^2)$, não é possível utilizar um teste de hipóteses com a distribuição *t-Student*.

Para resolver esse problema, Dickey & Fuller (1979) formularam um teste para detectar a presença de raiz unitária. Este consiste nas seguintes etapas:

- Estimar o parâmetro θ por MQO e subtrair 1, tal que $\hat{\alpha} = \hat{\theta} - 1$, logo $H_0: \hat{\alpha} = 0$;
- Calcular a variância amostral S^2 da série temporal;
- Calcular o desvio padrão de $\hat{\alpha}$, $s(\hat{\alpha})$, tal que:

$$s(\hat{\alpha}) = \frac{S}{\sqrt{\sum_{t=1}^T Z_{t-1}^2}}$$

- Feito isso, obtém-se a estatística τ :

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\alpha}}{s(\hat{\alpha})}$$

Percebe-se que a estatística τ foi especialmente construída de maneira semelhante à estatística *t* para ter a mesma função

Com $\hat{\tau}$ é possível obter valores críticos, os mesmos utilizados no teste de hipóteses com a distribuição *t-Student*. Dessa maneira, consultando a tabela da distribuição *t-Student* para o nível descritivo α desejado é possível calcular os níveis críticos. Se $\hat{\tau} > \tau_c$, então rejeita-se a hipótese nula e conclui-se que a série temporal é estacionária. Caso contrário, a série não é estacionária.

O teste de Dickey-Fuller (DF) não só verifica se a série é estacionária para a equação em (3.22), mas também verifica a presença de raiz unitária para os casos: 1) em que no modelo há presença de um intercepto e 2) presença de um intercepto e de tendência juntos.

Contudo, uma vez que para esta dissertação a amostra é pequena, os resultados dos testes ficam imprecisos, não contribuindo para a verificação da estacionariedade.

Por fim, dado que o modelo escolhido $c = \beta_1 + \beta_2 x + e$ apresenta uma tendência dada por $\beta_2 x$, este não é estacionário. Ainda assim, se as observações flutuarem em torno desta tendência e se os resíduos do modelo forem distribuídos normalmente $N(0, \sigma^2)$, é possível afirmar que a tendência do modelo é estacionária. Consequentemente, é possível confiar nas inferências estatísticas e nas previsões realizadas.

4. MODELOS PARA DETERMINAR VIDA ECONÔMICA E ORIENTAR REPOSIÇÃO ENTRE ATIVOS

Neste capítulo, são comparados os modelos clássicos de programação dinâmica (Bellman, 1955) e de engenharia econômica, cujos critérios são anuidades equivalentes (AE) e valor presente líquido (VPL) para problemas de VERA¹¹.

Para os critérios de engenharia econômica, foi feito um levantamento dos principais livros textos, como Park (2002), Park & Sharp-Bette (1990), Grant et al (1990), Thuesen et al (1971) e dos artigos clássicos, como Alchian (1958), a fim de verificar como esses critérios são aplicados para os problemas de VERA. Assim, constatou-se que nessas literaturas as propriedades dos critérios que permitem encontrar a vida econômica eram demonstradas intuitivamente e por meio de exemplos apenas, sem rigor matemático algum.

Sendo assim, neste Capítulo 4 da dissertação, primeiramente são formalizados os conceitos básicos de VERA. Em segundo lugar, são revisados os critérios de engenharia econômica, de acordo com a literatura, para o leitor se inteirar com estes. Depois, por meio de análise matemática, é feito um estudo destes critérios a fim de formalizá-los com rigor e encontrar propriedades importantes para determinar a vida econômica. Em seguida, o modelo clássico de programação dinâmica é revisado para problemas de reposição de equipamentos (Bellman, 1955). Com isso, estabelecem-se as principais propriedades para este modelo. Por último, comparam-se ambas as teorias de VERA. Assim, fica possível estabelecer vantagens e desvantagens de cada uma.

4.1. Conceitos básicos na vida econômica e reposição de ativos

Os conceitos básicos que devem ser considerados num modelo para determinação de vida econômica e reposição de ativos físicos são:

¹¹ Os problemas de VERA são formados por dois tipos: (1) Vida econômica e (2) Reposição de ativos. Apesar de nesta dissertação estarem considerados em um mesma classe, há uma diferença sutil entre eles. Ocorre que para os problemas de *vida econômica*, é feita uma análise do momento em que um único ativo possui o menor custo ao longo de seu ciclo de vida. Já para os problemas de *reposição*, são comparados os custos de dois ativos diferentes, sendo um deles um ativo em operação e outro um ativo novo, de modo a se determinar se o segundo deve substituir ou não o primeiro.

- Custo de oportunidade do capital
- Custo de aquisição de capital
- Custo de manutenção de ativos
- Inflação de custos de manutenção e aquisição de ativos físicos
- Depreciação, imposto de renda e benefício fiscal

O *custo de oportunidade de capital* é um termo que se refere ao custo de possíveis receitas perdidas que poderiam ter sido obtidas. Por exemplo, uma empresa está em dúvida se vende ou não um caminhão que também é alugado para serviços de terceiros. Logo, ao realizar a venda, a empresa renuncia à oportunidade de locação do ativo. Assim, essa receita perdida, o aluguel, deve ser vista como despesa no fluxo de caixa. Esta despesa recebe o nome de custo de oportunidade.

O *custo de aquisição de capital* é a saída de caixa referente à compra de ativos. Além disso, este custo cobre os gastos de frete, instalação e treinamento (no caso de qualificar a mão de obra para operar com o novo ativo). Esse tipo de custo também é chamado de custo inicial ou custo de investimento (Fabrycky & Blanchard, 1991, p. 22), pois este tipo de custo ocorre apenas na etapa inicial de projetos.

Em contrapartida ao custo de aquisição de capital, o *custo de manutenção de ativos* ocorre ao longo de toda a vida econômica dos ativos. Nessa categoria estão os custos com mão-de-obra, lubrificação, calibração, reparos de componentes, despesas com seguro, entre outros referentes ao ativo.

Outro importante custo é o custo da *inflação nos custos de manutenção e aquisição*. De maneira geral, uma quantia de dinheiro na data de hoje perde o poder de compra ao longo do tempo para o futuro. Em virtude disso, os preços dos custos de aquisição e manutenção dos ativos mudam de valor ao longo dos anos. Para quantificar quanto os preços evoluem existem índices de preços do consumidor. No Brasil, existem diversos índices de preços, cada um utilizando um critério diferente. Ainda assim, todos medem de maneira aceitável a evolução da inflação. Para

esta dissertação será utilizado o IPCA¹² (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo), tomando como valor base o do período de março de 2011.

Por último, a *depreciação*. Esta pode ser classificada de três maneiras diferentes. Duas delas já foram definidas anteriormente na seção 1.4 desta dissertação. A terceira é a *depreciação fiscal*. Esta consiste de tomar o amortizado ao longo da vida útil do ativo, de modo que no cálculo de apuração do *imposto de renda* seja possível a geração de *benefício fiscal*. Como este assunto não é o foco desta dissertação, as considerações sobre depreciação e contabilidade na gestão econômica de ativos estão descritas no Apêndice I – Conceitos de contabilidade, no final desta dissertação.

4.2. Problemas de VERA por meio de métodos de engenharia econômica

O procedimento na literatura tradicional consiste em incorporar o LCC na tomada de decisão, o qual é feito em algumas etapas. Primeiramente, escolhem-se os ativos físicos que se deseja determinar a vida econômica. Em seguida, levantam-se os custos de manutenção, aquisição e revenda do equipamento. Dessa maneira, organizam-se todos esses valores em um fluxo de caixa. De acordo com Ross et al (2002), “a demonstração em fluxo de caixa ajuda a explicar a variação dos saldos de caixas e aplicações financeiras” (p. 43). Logo, na metodologia do LCC, o fluxo de caixa é utilizado para facilitar a avaliação do impacto das entradas e saídas de caixa em diferentes anos.

Feito isso, é necessário que todos os valores de entrada e saída de caixa ao longo dos anos da vida do ativo sejam contabilizados no valor do dinheiro, isto é, que as taxas de juros e inflação sejam levadas em consideração. Logo, todos os custos são descontados às taxas referentes ao período. A justificativa em levar em conta essas taxas está em mostrar a comparação entre ações futuras e presentes. Então, é desejável comparar as consequências entre tomar uma decisão hoje e uma decisão amanhã.

A maneira mais simples de realizar um estudo de LCC entre dois ativos, um novo e um antigo (em operação), é utilizar critérios de engenharia econômica, como por exemplo, VPL

¹² Desde 30 de junho de 1999, o CMN (Conselho Monetário Nacional) estabeleceu o IPCA como índice oficial de inflação do Brasil. Este índice é mensurado pelo IBGE nas maiores Regiões Metropolitanas do Brasil (Rio de Janeiro, Porto Alegre, Belo Horizonte, Recife, São Paulo, Belém, Fortaleza, Salvador, Curitiba, Goiânia e Brasília) e liberado mensalmente, em torno do dia 15 de cada mês.

(valor presente líquido), AE (anuidade equivalente), entre outros, sendo estes, utilizados para o estudo desta dissertação.

4.2.1. VPL (valor presente líquido)

O VPL é um critério de comparação entre dois projetos, para esta dissertação, dois ativos. Para isso, primeiramente, são levantadas todas as entradas e saídas de caixa dos projetos ao longo dos anos. Em segundo lugar, escolhe-se uma taxa de desconto i determinada pela empresa, a qual representa o rendimento da segunda melhor alternativa de investimento.

Para se obter o VPL de uma série de entradas e saídas de caixa $D_1, D_2, D_3, \dots, D_N$, tal que N representa o ano, calcula-se da seguinte forma, conforme descreve a equação (4.1)¹³:

$$VPL(n) = \frac{D_0}{(i+1)^0} + \frac{D_1}{(i+1)^1} + \frac{D_2}{(i+1)^2} + \dots + \frac{D_n}{(i+1)^n} \quad (4.1)$$

Para ilustrar o critério, será dado como exemplo, a decisão entre investir ou não em um projeto, com o qual terá rendimentos mensais regulares de R\$3.500,00 durante os próximos anos, mas o custo inicial é de R\$30.000,00 e a taxa de desconto que a empresa trabalha é de 2,00% ao mês. A Tabela 4.1 exibe o fluxo de caixa de deste projeto.

¹³ É importante observar que na equação (4.1) o tempo é discreto.

Tabela 4.1 – Ilustração do conceito de VPL de um fluxo de caixa

Mês	Entradas de caixa	Saídas de caixa	Total	VPL
0		-R\$ 30.000,00	-R\$ 30.000,00	-R\$ 30.000,00
1	R\$ 3.500,00		R\$ 3.500,00	-R\$ 26.568,63
2	R\$ 3.500,00		R\$ 3.500,00	-R\$ 23.204,54
3	R\$ 3.500,00		R\$ 3.500,00	-R\$ 19.906,41
4	R\$ 3.500,00		R\$ 3.500,00	-R\$ 16.672,95
5	R\$ 3.500,00		R\$ 3.500,00	-R\$ 13.502,89
6	R\$ 3.500,00		R\$ 3.500,00	-R\$ 10.394,99
7	R\$ 3.500,00		R\$ 3.500,00	-R\$ 7.348,03
8	R\$ 3.500,00		R\$ 3.500,00	-R\$ 4.360,81
9	R\$ 3.500,00		R\$ 3.500,00	-R\$ 1.432,17
10	R\$ 3.500,00		R\$ 3.500,00	R\$ 1.439,05
11	R\$ 3.500,00		R\$ 3.500,00	R\$ 4.253,97
12	R\$ 3.500,00		R\$ 3.500,00	R\$ 7.013,69

Na Tabela 4.1 há todas as entradas de caixa (rendimentos mensais), saídas de caixa (custo de entrada no projeto), o valor total mês a mês e o VPL para cada mês, o qual é calculado de acordo com a equação (4.1). A partir do décimo mês, o VPL passa a ser positivo, ou seja, em comparação com a taxa de juros interna da empresa, o projeto vale a pena ser investido.

4.2.2. AE (Anuidade equivalente)

A ideia deste critério é converter os valores de um fluxo de caixa irregular em uma série de pagamentos anuais idênticos. Na Figura 4.1 encontra-se um fluxo de caixa irregular de um projeto e também o seu equivalente em valores constantes ao longo do tempo.

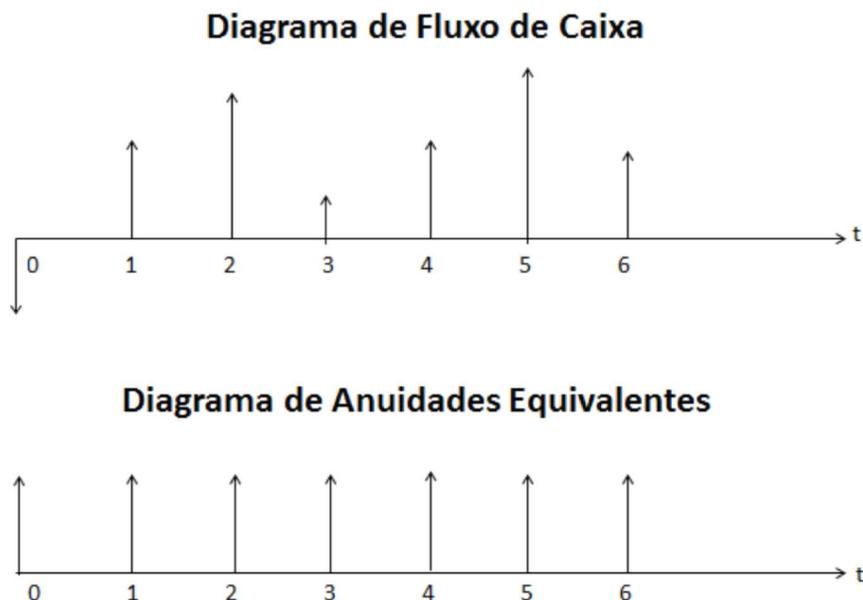


Figura 4.1 - Comparação entre diagramas

Na Figura 4.1, o *diagrama de fluxo de caixa* exibe as entradas (com setas apontadas para cima) e saídas (setas apontadas para baixo) de caixa ao longo do tempo. O tamanho diversificado de cada seta indica que há valores diferentes, tanto de entrada quanto de saída. O *diagrama de anuidades equivalentes* exibe todas as setas no mesmo sentido e com o mesmo tamanho, ou seja, o critério de custo de anuidades equivalentes (AE) implica em obter uma série de valores iguais ao longo dos anos¹⁴.

Assim, obtém-se o valor de anuidades equivalentes por meio da equação (4.2).

$$AE(n) = VPL * \left[\frac{i * (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right] \quad (4.2)$$

Para ilustrar, dada uma série de entradas de caixa irregular em um fluxo de caixa hipotético, conforme mostra a Tabela 4.2, calcula-se o VPL e em seguida a AE, de acordo com a equação (4.2).

¹⁴ A demonstração matemática de como isso ocorre encontra-se no Apêndice II – Demonstrações Matemáticas.

Tabela 4.2 – Exemplo do critério do AE

Ano	Entrada de caixa	VPL	AE
0	R\$ 15.000,00		
1	R\$ 1.000,00		
2	R\$ 5.000,00		
3	R\$ 7.000,00	R\$ 24.861,29	R\$ 10.350,97

Na Tabela 4.2, é possível ver todas as entradas de caixa irregulares ao longo de quatro anos. Na coluna seguinte, *VPL*, encontra-se o seu valor ao final do ano três com uma taxa de desconto de 12%, conforme a equação (4.1) e na última coluna, *AE*, é calculado o valor da anuidade equivalente de acordo com a equação (4.2).

4.2.3. Exemplos resolvidos por métodos de engenharia econômica

Nesta seção são resolvidos dois exemplos com métodos de engenharia econômica. O primeiro¹⁵ é um caso de reposição de um ativo em operação por um novo. Utiliza-se tanto o critério de *VPL*, quanto o de *AE*; porém, dando maior destaque para o primeiro. No segundo exemplo, é feita a análise de vida econômica de um ativo por meio de *AE* e *VPL*, sendo que neste é dado maior destaque para a *AE*.

Para o primeiro, considera-se um compressor a gás de uma refinaria de petróleo que tenha sido adquirido há dois anos pelo valor de R\$35.000,00. As despesas de manutenção começaram no ano 1, cujo valor é R\$5.000,00, e aumentam R\$1.500,00 por ano. Atualmente, ano 2, o valor de mercado deste equipamento é de R\$25.000,00. A expectativa é de que no ano 5, tal valor seja de R\$8.000,00. Contudo, a empresa analisa o caso de vender o equipamento atual e comprar um novo por R\$30.000,00, cujo valor de manutenção inicial é de R\$5.000,00, o qual aumenta em R\$500,00 ao longo dos anos. Para efeitos de comparação, o valor deste ativo no ano 5 é de R\$10.000,00. O problema consiste em analisar se a empresa deve realizar a substituição do equipamento de modo a reduzir custos, dada a oportunidade de realizar a troca.

Na Tabela 4.3 e na Tabela 4.4 há o fluxo de caixa do equipamento antigo e do novo, respectivamente.

¹⁵ Baseado em um exemplo de Park (2002).

Tabela 4.3 – Fluxo de caixa do equipamento em operação

Ano	Manutenção	Custo de aquisição	Valor de mercado	Total	VPL
0		R\$ 35.000,00			
1	R\$ 5.000,00				
2	R\$ 6.500,00		R\$ 25.000,00	-R\$ 25.000,00	
3	R\$ 8.000,00			-R\$ 8.000,00	
4	R\$ 9.500,00			-R\$ 9.500,00	
5	R\$ 11.000,00		R\$ 8.000,00	-R\$ 3.000,00	-R\$ 41.851,54

Na Tabela 4.3 é possível ver os valores indicados para o custo de aquisição, manutenção e valor de mercado, sendo que os valores até o *Ano 2* já ocorreram e os seguintes são previsões. Além disso, é importante observar na linha do *Ano 2* que o valor indicado na coluna *Total* (-R\$ 25.000,00) não é a soma dos custos de manutenção com o valor de mercado. Este representa o custo de oportunidade de vender o equipamento pelo valor de mercado no final do *Ano 2*. Portanto, o problema consiste em decidir-se se deve ou não substituir o equipamento no *Ano 2*.

Aplicando-se a equação (4.1) nos valores da coluna *Total*, tem-se que:

$$VPL = \frac{-25000}{(1 + 0,12)^0} + \frac{-8000}{(1 + 0,12)^1} + \frac{-9500}{(1 + 0,12)^2} + \frac{-3000}{(1 + 0,12)^3} = -41851,54$$

Portanto, o VPL do custo do compressor a gás atual é de -R\$41.851,54. Na sequência, é preciso calcular o VPL do novo ativo que está sendo considerado para troca.

Na Tabela 4.4 encontram-se os valores que compõem o fluxo de caixa de custos do equipamento novo que é candidato à reposição de um que atualmente se encontra em uso.

Tabela 4.4 – Fluxo de caixa do equipamento novo

Ano	Manutenção	Custo de aquisição	Valor de mercado	Total	VPL
0					
1					
2		R\$ 30.000,00		-R\$ 30.000,00	
3	R\$ 5.000,00			-R\$ 5.000,00	
4	R\$ 5.500,00			-R\$ 5.500,00	
5	R\$ 6.000,00		R\$ 10.000,00	R\$ 4.000,00	-R\$ 36.001,73

Na Tabela 4.4, de maneira similar com a Tabela 4.3, encontra-se o fluxo de caixa para o equipamento novo.

Novamente, aplicando a equação (4.1) na coluna *Total*, tem-se que:

$$VPL = \frac{-30000}{(1 + 0,12)^0} + \frac{-5000}{(1 + 0,12)^1} + \frac{-5500}{(1 + 0,12)^2} + \frac{4000}{(1 + 0,12)^3} = -36001,73$$

Comparando o VPL dos dois fluxos de caixa é possível ver que no ano 5, o VPL do equipamento atual é de -R\$41.851,54 e o do equipamento novo é de -R\$36.001,73. Logo, o maior VPL é o do equipamento novo. Dessa maneira, dada a oportunidade de realizar a troca do equipamento ao final do ano dois, a empresa deve realizá-la.

Contudo, para entender melhor a metodologia, é necessário questionar o quanto, de fato, é gasto se o equipamento for repostado ou não. Para melhor visualizar isso, na Tabela 4.5 encontram-se todas as despesas listadas a partir do final do ano dois (momento em que deve ser tomada a decisão de substituir, ou não, os equipamentos) até o ano 5.

Tabela 4.5 – Comparação entre as despesas dos dois ativos ao longo dos anos

Ano	Equipamento atual		Equipamento novo	
	Gastos	VPL	Gastos	VPL
2			R\$ 5.000,00	R\$ 5.000,00
3	R\$ 8.000,00	R\$ 7.142,86	R\$ 5.000,00	R\$ 4.464,29
4	R\$ 9.500,00	R\$ 7.573,34	R\$ 5.500,00	R\$ 4.384,57
5	R\$ 11.000,00	R\$ 7.829,58	R\$ 6.000,00	R\$ 4.270,68
Total	R\$ 28.500,00	R\$ 22.545,78	R\$ 21.500,00	R\$ 18.119,53

A Tabela 4.5 está dividida em duas partes, tal que em uma estão os gastos, com o respectivo VPL, caso o equipamento não seja substituído (*Equipamento atual*) e outra os gastos, e o VPL, caso ocorra a substituição (*Equipamento Novo*). Assim, na parte do *Equipamento atual*, os gastos são as despesas de manutenção. Por outro lado, na parte de *Equipamento novo*, no ano dois há o gasto de reposição de equipamentos, tal que este valor é a diferença entre o equipamento atual vendido por R\$25.000,00 e a compra do equipamento novo por R\$30.000,00. Nos anos seguintes, os gastos são referentes às despesas de manutenção somente. Por fim, se os ativos não fossem trocados, ao final do período de três anos, a empresa teria que gastar

R\$28.500,00, enquanto que com a troca gastaria R\$21.500,00, ou seja, uma diferença de R\$7.000,00.

Nesse caso, como os gastos para ambos os equipamentos ocorreram em anos diferentes, convém calcular o valor presente para quantificar o montante de investimento inicial caso ocorra, ou não, a reposição de equipamentos. Sendo assim, no final do ano 2, ocorrendo a reposição de equipamentos, a empresa economiza a quantidade de R\$4.426,25, em valores calculados para o ano 2.

Como é possível ver, o critério do VPL não informa de fato qual a diferença monetária entre dois projetos. Logo, essa é a sua principal desvantagem. Para superar essa dificuldade, existe o critério da anuidade equivalente.

De acordo com Park (2002), há diversas situações em que se devem resolver os problemas de fluxo de caixa por meio do VPL e outras em que o critério da AE é mais conveniente (p. 350). Para o caso da reposição de equipamentos, ambos os critérios são efetivos para se tomar a decisão. Entretanto, a principal vantagem em utilizar a AE é que com ela é possível perceber o quanto se gasta com o ativo em base periódica (mensal, anual, KWh, toneladas, ciclos, etc).

Assim, no exemplo, os valores também podem ser calculados como anuidades equivalentes. Sendo assim, aplicando a equação (4.2) para os equipamentos atual e novo verifica-se que são, respectivamente, - R\$13.778,97 e - R\$11.853,01. Conseqüentemente, o equipamento deve ser trocado. Assim, é possível perceber a diferença de gastos anuais com cada equipamento.

Quanto ao segundo exemplo, o objetivo é esclarecer o conceito de vida econômica e de aplicação do critério de AE, considerando-se, como exemplo, um ativo que é adquirido por R\$10.000.000,00. A expectativa dos custos de manutenção e dos valores de mercado ao longo dos anos é possível ver na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Valores de manutenção e de mercado para exemplo de vida econômica

Ano	Manutenção (R\$1.000,00)	Valor de mercado (R\$1.000,00)
0	-	10.000,00
1	1.000,00	7.500,00
2	1.250,00	5.625,00
3	1.562,50	4.218,75
4	1.953,13	3.164,06
5	2.441,41	2.373,05
6	3.051,76	1.779,79
7	3.814,70	1.334,84
8	4.768,37	1.001,13
9	5.960,46	750,85
10	7.450,58	563,14
11	9.313,23	422,35
12	11.641,53	316,76

Na Tabela 4.6 é possível ver a evolução dos custos de manutenção e do valor de mercado do ativo ao longo dos anos, sendo que os custos de manutenção aumentam e o valor de mercado diminui. A questão que surge é: Em qual momento o ativo possui o menor custo de ciclo de vida?

Antes disso, definem-se alguns conceitos: *custo equivalente de capital*, *custo equivalente de manutenção* e, por último, *custo equivalente de propriedade*¹⁶.

- **Custo equivalente de capital (CEC):** O custo de capital possui duas componentes: *custo de aquisição (CA)* e *valor residual (VR(n))* do ativo, sendo que a primeira possui um valor fixo e a segunda um valor variável em relação ao tempo. Calcula-se a diferença das anuidades equivalentes de cada uma das componentes. É possível ver, na sequência, como fica o cálculo para o exemplo.

$$AE(n) = \left(\frac{i * (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right) \left(CA - \frac{VR(n)}{(1 + i)^n} \right)$$

- **Custo equivalente de manutenção (CEM):** Para encontrar o custo equivalente de manutenção, primeiramente é necessário calcular o valor presente do somatório da série de custos de manutenção (*CM(n)*) ao longo do tempo. Feito isso, calcula-se a AE do valor encontrado, conforme é possível ver na equação abaixo o cálculo para o exemplo.

¹⁶ Esses conceitos foram baseados em Park (2002). Park utiliza a ideia de tomar as despesas de manutenção e aquisição separadamente uma da outra e calcular as respectivas anuidades equivalentes. Assim, a soma das duas determina a curva de vida econômica do ativo.

$$AE(n) = \left(\frac{i * (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right) \sum_{n=0}^{12} \frac{CM(n)}{(1 + i)^n}$$

- Custo equivalente de propriedade (CEP): O custo equivalente de propriedade de um ativo é a soma dos custos de capital e de manutenção equivalentes, conforme é possível ver na equação abaixo.

$$AE(n) = \left(\frac{i * (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right) \left[\left(CA - \frac{VR(n)}{(1 + i)^n} \right) + \sum_{n=0}^{12} \frac{CM(n)}{(1 + i)^n} \right]$$

Para os valores na Tabela 4.6, é possível observar na Figura 4.2 o resultado encontrado para o exemplo.

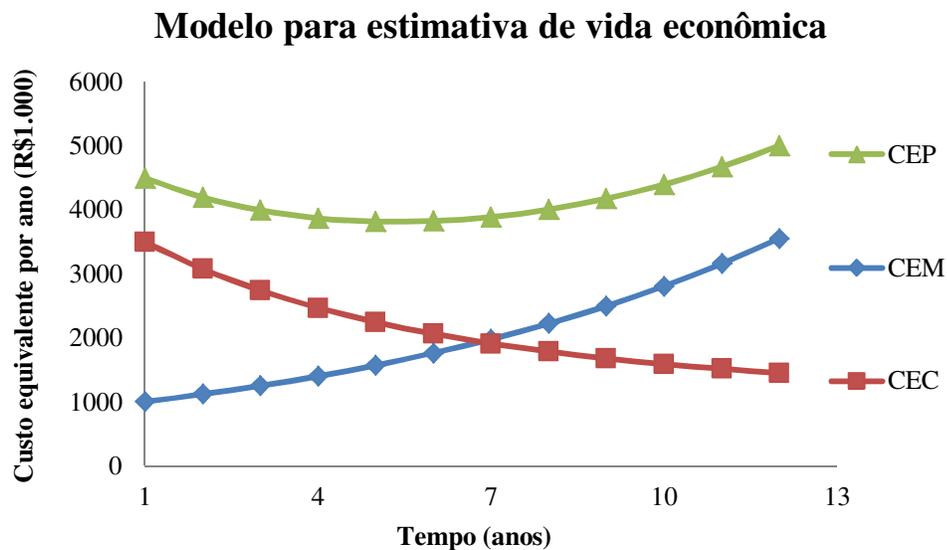


Figura 4.2 – Modelo para estimativa de vida econômica

Na Figura 4.2 encontram-se os custos (eixo vertical) das três variáveis ao longo do tempo (eixo horizontal). Conforme é possível ver, o custo equivalente de manutenção aumenta com o tempo, enquanto o custo equivalente de capital diminui, sendo que a soma de ambas as curvas resulta na curva de custo equivalente de propriedade do ativo. Nesta curva, o ponto de valor mínimo representa o período ótimo de uso do ativo; isto é, a *vida econômica* do ativo, a qual, para o exemplo, é de cinco anos. Assim, este é o período ótimo em que um ativo deve ser utilizado.

Por outro lado, caso nos valores da Tabela 4.6 fosse aplicado a equação (4.1) para calcular o VPL dos custos, o resultado seria conforme a Figura 4.3.

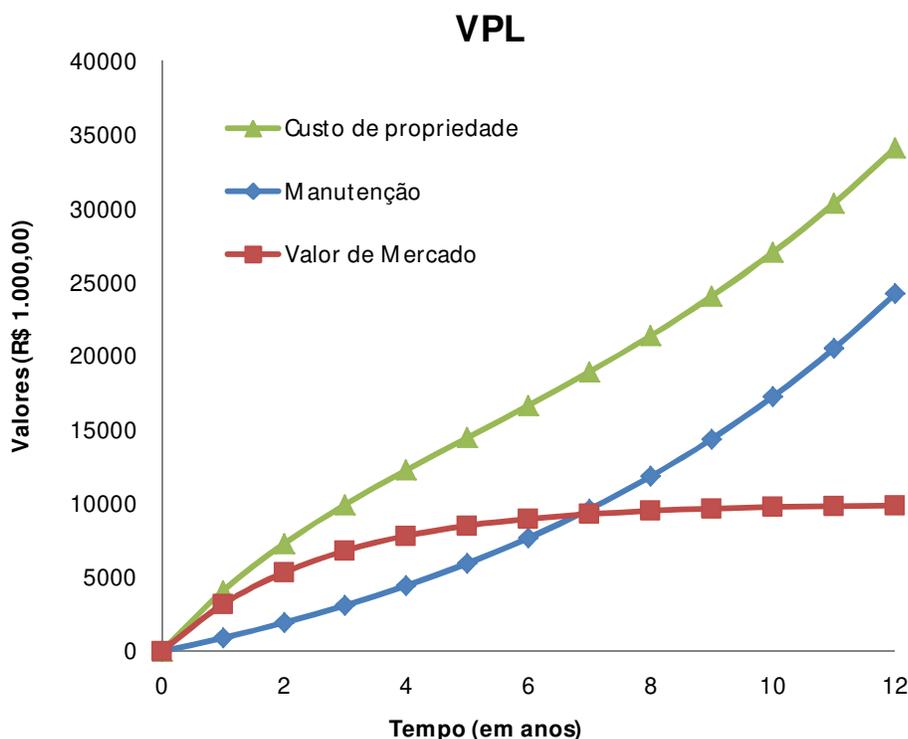


Figura 4.3 – Tentativa de modelagem da vida econômica por VPL

Na Figura 4.3, ocorre a tentativa de modelagem de vida econômica por meio do VPL. Percebe-se que os dados da Tabela 4.6, quando aplicados ao método de VPL, não resultam em um ponto de mínimo na curva de custo de propriedade. Por esse motivo, não se utiliza o VPL para cálculo de vida econômica.

É importante destacar que na literatura não há nenhuma discussão sobre não utilizar o critério do VPL para vida econômica. Simplesmente a literatura ignora qualquer tentativa de utilizar o VPL e sem explicar o porquê.

Por fim, podem-se listar as principais características de ambos os critérios:

- A AE informa o ano cuja despesa é mínima; isto é, o ponto de vida econômica do ativo em operação. Não só, mas também informa o quanto se gasta por ano com cada ativo, a

fim de se comparar qual é a melhor opção. E, além disso, pode ser utilizado na reposição entre dois ativos.

- O VPL, por sua vez, não informa a vida econômica. Este critério é utilizado apenas para reposição de ativos; isto é, dada a oportunidade de substituir um ativo em operação por um novo, o VPL determina a melhor escolha. Além disso, ele pode ser utilizado para quantificar períodos menores que o ciclo de vida do ativo.

4.2.4. Análise dos critérios de engenharia econômica

Ambos os critérios apresentados servem como modelos para orientar o cálculo de problemas de VERA. Contudo, conforme foi dito no início deste capítulo, na literatura isto foi feito de maneira intuitiva e por meio de exemplos. Dessa forma, as conclusões feitas na seção anterior não foram rigorosas do ponto de vista matemático.

Sendo assim, nas seções 4.2.4.1 e 4.2.4.2, as equações de cada um dos critérios serão analisadas analiticamente, a fim de encontrar todas as suas características e limitações. Além desta dissertação, em um artigo feito por Cesca & Novaes (2012), os resultados desta seção 4.2.4 também já foram publicados; porém, de forma mais resumida.

Dessa maneira, as seguintes equações são formalizadas:

- Curva de custo equivalente de capital: Calcula-se a diferença das anuidades equivalentes do *custo de aquisição* e do *valor residual* do ativo. O resultado é o custo equivalente de capital, conforme mostra a equação (4.3).

$$CEC = \left(\frac{e^r - 1}{e^{rt} - 1} e^{rt} \right) (A - R(t) * e^{-rt}) \quad (4.3)$$

- Curva de custo equivalente de manutenção: Para encontrar a curva de custo equivalente de manutenção, primeiramente é necessário calcular o valor presente do somatório da série de custos de manutenção ao longo do tempo. Feito isso, calcula-se a AE, conforme mostra a equação (4.4).

$$CEM = \left(\frac{e^r - 1}{e^{rt} - 1} e^{rt} \right) \int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt \quad (4.4)$$

Assim, para cada ano obtêm-se pontos na curva de custos de manutenção equivalente.

- Curva de custo equivalente de propriedade: O custo equivalente de propriedade de um ativo é a soma do custos de capital e de manutenção equivalentes, conforme mostra a equação (4.5).

$$CEP = CEC + CEM \quad (4.5)$$

Onde:

- $\left(\frac{e^r - 1}{e^{rt} - 1} e^{rt} \right)$ é o fator de equivalência de fluxo de caixa presente em anuidades regulares para o caso contínuo¹⁷. Além disso, r é a taxa de juros, tal que $0 \leq r \leq 1$.
- $M(t)$ representa os gastos de manutenção ao longo do tempo (em anos). Conforme explicado no Capítulo 3, $M(t)$ é encontrada por meio de regressão linear simples a partir de coleta de dados de custos de manutenções de ativos. Logo, é aceitável que $M(t)$ seja linear e crescente, uma vez que um dos pressupostos dos custos de manutenção é que estes sejam maiores a cada ano. Por isso, define-se $M(t) = at$, com $a > 0$.

Entretanto, $M(t)$ pode assumir outras formas, sem perda de generalidade para o modelo de VERA. Ocorre que a integral $\int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt$ representa a *transformada de Laplace* da função $M(t)$. Dessa forma, $M(t)$ pode ser qualquer função que, por meio de uma transformada de Laplace, o valor presente pode ser facilmente encontrado (Buser, 1986).

- A representa o custo de aquisição do ativo;
- $R(t)$ é o valor de revenda do equipamento no ano de substituição t . Uma vez que ativos são vulneráveis à depreciação, espera-se que $R(t)$ seja decrescente. Contudo, $R(t)$ é sempre positiva. Afinal, é impossível o ativo ter valor negativo. Assim, a função é definida da seguinte forma:

¹⁷ A equivalência de fluxo de caixa é demonstrada no Apêndice II – Demonstrações Matemáticas.

$R(t) = \begin{cases} A - bt & , 0 \leq t < A/b \\ 0 & , t \geq A/b \end{cases}$, tal que b é a taxa de depreciação do ativo a cada ano e $b > 0$ e $A > 0$.

Assim, o *CEP* fica formalizado da seguinte forma:

$$CEP = CEM + CEC = \left[\frac{(e^r - 1) * e^{rt}}{e^{rt} - 1} \right] * \left(\int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt + A - R(t) * e^{-rt} \right)$$

Logo, define-se a equação (4.6):

$$AE(t) = \left[\frac{(e^r - 1) * e^{rt}}{e^{rt} - 1} \right] * \left(\int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt + A - R(t) * e^{-rt} \right) \quad (4.6)$$

Como, pela equação (4.2),

$$AE = \left[\frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] * VPL,$$

tem-se, para o caso contínuo, que:

$$AE(t) = \left[\frac{(e^r - 1) * e^{rt}}{e^{rt} - 1} \right] * VPL$$

Então, pela equação (4.6), define-se o $VPL(t)$, na equação (4.7)

$$VPL(t) = \int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt + A - R(t) * e^{-rt} \quad (4.7)$$

Assim, ficam formalizadas as equações de $AE(t)$ e $VPL(t)$. Nisso, pretende-se responder por meio da análise matemática algumas questões que as seções anteriores não conseguiram, devido à falta de precisão e rigor:

- Por que o VPL não pode ser utilizado para determinar vida econômica de ativos?
- A função AE pode de fato ser utilizada para cálculo de vida econômica em qualquer caso?

- É possível existir mais de um ponto de vida econômica na curva de custo de propriedade de ativos?

4.2.4.1 Limitações e características do VPL

Nesta seção, analisam-se as características e limitações de $VPL(t)$. Ocorre que, dado o comportamento de $R(t)$ ¹⁸, a qual não é diferenciável, convém analisar a equação (4.7) em duas partes, sendo o *Regime 1*, $0 \leq t < A/b$, e o *Regime 2*, $t \geq A/b$. Dessa maneira, a equação (4.7) é reescrita da seguinte maneira:

$$VPL(t) = \begin{cases} \left(\int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt + A - R(t) * e^{-rt} \right) & , 0 \leq t < A/b \\ \left(\int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt + A \right) & , t \geq A/b \end{cases} \quad (4.8)$$

4.2.4.1.1. VPL no Regime 1

Define-se a equação (4.9), a qual representa o cálculo do VPL do ativo para a região do *Regime 1* de forma simplificada da equação (4.8).

$$VPL(t) = \frac{a(1 - e^{-rt}(1 + rt))}{r^2} + A - e^{-rt}(A - bt) \quad (4.9)$$

A etapa seguinte é encontrar os pontos críticos da equação (4.9), a fim de verificar a existência de um mínimo. Para isso, deriva-se a função em relação à variável t . Sendo assim,

$$\frac{dVPL}{dt}(t) = e^{-rt}(b + Ar + (a - br)t) \quad (4.10)$$

¹⁸ Em relação ao comportamento da função $R(t)$, percebe-se que não se trata de uma função analítica. O motivo da escolha desta função para modelar o valor de renda dos ativos do setor energético foi, que com esta função, fica determinada a função de vida econômica para o caso mais difícil, por assim dizer, de se modelar. Caso se encontre na prática alguma função de valor de revenda analítica, a modelagem fica mais fácil. De qualquer forma, a formulação sugerida aqui nesta dissertação, modela ambos os casos de a função $R(t)$ ser ou não analítica.

Ocorre que para a equação (4.10) ser nula, a expressão $(b + Ar + (a - br)t)$ também tem que ser nula, isso ocorre, pois $e^{-rt} > 0, \forall t \in \mathcal{N}$.

Dessa maneira, (4.10) é nula para os seguintes valores de t :

$$t = -\frac{(b + Ar)}{(a - br)} \quad (4.11)$$

Feito isso, precisa-se verificar se o valor de t encontrado satisfaz as condições do *Regime 1*.

Sendo assim, para a equação (4.11) ser válida em $0 \leq t < A/b$, as equações $\begin{cases} 0 \leq -\frac{(b+Ar)}{(a-br)} \\ -\frac{(b+Ar)}{(a-br)} < \frac{A}{b} \end{cases}$ têm

que ser satisfeitas. Segue a análise abaixo das equações.

$$0 \leq -\frac{(b + Ar)}{(a - br)} \quad (4.12)$$

Tal que,

$$0 \geq \frac{b+Ar}{a-br}.$$

Como b, A, r e a são positivos, logo $b + Ar > 0$. Sendo assim, para equação (4.12) ser válida, $a - br < 0$, ou seja, $a < br$. Continuando:

$$-\frac{(b + Ar)}{(a - br)} < \frac{A}{b} \quad (4.13)$$

$$\frac{(b+Ar)}{(a-br)} > -\frac{A}{b}$$

Como $a - br < 0$, então

$$b(b + Ar) < -A(a - br)$$

$$b^2 + Abr < -Aa + Arb$$

$$b^2 < -Aa$$

Contudo, $b^2 > 0$ e $-Aa < 0$, então a afirmação $b^2 < -Aa$ é inconsistente. Dessa maneira, $t = -\frac{(b+Ar)}{(a-br)}$ não é menor que A/b ; isto é, $t = -\frac{(b+Ar)}{(a-br)}$ não faz parte do *Regime 1*. Portanto, não há ponto crítico no *Regime 1*.

Apesar de não existir nenhum ponto crítico, como $VPL(t)$ é contínua, pelo *Teorema de Weierstrass*¹⁹, há algum mínimo. Para verificar qual esse mínimo, precisa-se analisar se a função $VPL(t)$ é crescente ou decrescente. Logo, analisa-se a derivada, conforme definida na equação (4.10).

Então, para $\frac{dVPL}{dt}(t) = e^{-rt}(b + Ar + (a - br)t)$ ser positiva, ocorre que

$$(b + Ar + (a - br)t) > 0, \text{ logo}$$

$$b + Ar > -(a - br)t$$

Nisso, há duas opções

$$(1) a - br > 0, \text{ ou}$$

$$(2) a - br < 0.$$

Se ocorrer (1), ou seja, $a > br$, tem-se que

$$b + Ar > -(a - br)t$$

$$\frac{b+Ar}{a-br} > -t$$

$$-\frac{b+Ar}{a-br} < t.$$

Então, se $a - br > 0$, $\frac{b+Ar}{a-br}$ é positivo, logo $-\frac{b+Ar}{a-br}$ é negativo. Por tricotomia, $-\frac{b+Ar}{a-br} < 0 < t$. Assim, se $a > br$, então, para todo t no *Regime 1*, $\frac{dVPL}{dt}(t) > 0$. Logo, o mínimo da ocorre quando $t = 0$, tal que, $VPL(0) = 0$.

Se ocorrer (2), ou seja, $a < br$, tem-se que

$$b + Ar > -(a - br)t$$

$$\frac{b+Ar}{a-br} < -t$$

¹⁹ Definição do Teorema de *Weierstrass* no Apêndice II – Demonstrações Matemáticas.

$$-\frac{b+Ar}{a-br} > t$$

Contudo, como já foi visto, $-\frac{(b+Ar)}{(a-br)}$ não faz parte do *Regime 1*.

Portanto, conclui-se que no *Regime 1*, $VPL(t)$ é crescente e, por *Weierstrass*, o ponto de mínimo ocorre quando $t = 0$.

4.2.4.1.2. VPL no Regime 2

Define-se a equação (4.14), a qual representa a equação de (4.8) de forma simplificada para o *Regime 2*.

$$VPL(t) = \frac{a(1 - e^{-rt}(1 + rt))}{r^2} + A \quad (4.14)$$

Derivando a equação (4.14) para encontrar os pontos críticos, encontra-se a seguinte equação (4.15):

$$\frac{dVPL}{dt}(t) = ae^{-rt}t \quad (4.15)$$

Como a , r e t são sempre maiores que zero, logo $\frac{dVPL}{dt}(t) > 0$ para qualquer valor de t . Logo, não há nenhum ponto crítico na região de $t > A/b$. Contudo, ainda precisa ser verificado se o ponto $t = A/b$ é um ponto de mínimo.

Novamente, pelo *Teorema de Weierstrass*, os pontos de mínimo e de máximo dessa função estão nos extremos dela. Sendo assim, precisa-se analisar o comportamento da função; isto é, se ela é crescente ou decrescente. Se for decrescente, $t = A/b$ é um ponto de máximo. Se for crescente, $t = A/b$ é um ponto de mínimo.

Sendo assim, analisando a equação (4.15), a qual é a derivada de $VPL(t)$, percebe-se que ela é positiva para $t > 0$. Logo, $VPL(t)$ é crescente. Portanto, $t = A/b$ é um ponto de mínimo no *Regime 2*.

Contudo, $VPL\left(\frac{A}{b}\right) > VPL(0)$. Logo o mínimo da função $VPL(t)$ para os dois regimes ocorre quando $t = 0$. Mais ainda, a função $VPL(t)$ atinge um máximo, como é possível ver no resultado da equação (4.16).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{a(1 - e^{-rt}(1 + rt))}{r^2} + A \right] \quad (4.16)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[A + \frac{a}{r^2} - \frac{a(1+rt)}{r^2 e^{rt}} \right] =$$

$$A + \frac{a}{r^2} - \frac{a}{r^2} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{(1+rt)}{e^{rt}} \right] \right) =$$

$$A + \frac{a}{r^2} =$$

Na Figura 4.4 é possível ver como se comporta a função $VPL(t)$ ao longo do tempo, começando pelo mínimo e chegando ao limite superior, o qual foi encontrado por meio da equação (4.16).

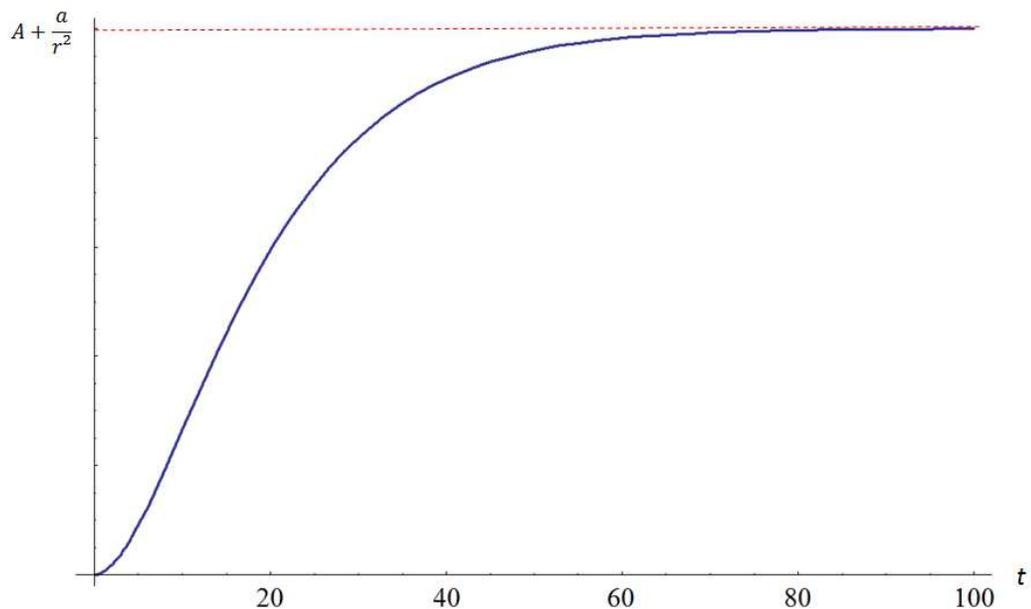


Figura 4.4 – Comportamento da função $VPL(t)$

Na Figura 4.4 é possível observar o comportamento da função $VPL(t)$. Ocorre que ao longo do tempo, para $t > 0$, a função não atinge um ponto de mínimo, o qual seria a vida econômica do ativo. Por isso, a função $VPL(t)$ não pode ser utilizada para encontrar vida econômica de ativos. Além disso, com o passar do tempo, a função atinge um valor máximo, o qual é $A + \frac{a}{r^2}$.

Portanto, fica demonstrado que o critério do VPL não pode ser utilizado para se encontrar o ponto de vida econômica de um equipamento. Sendo assim, a metodologia do VPL é utilizada para comparações entre diferentes projetos; isto é, esta metodologia compara a oportunidade de se repor um ativo em operação com os dados do ativo novo ou se este deve ser mantido. Por fim, pode-se formalizar um primeiro lema, o *Lema 1*.

Lema 1: A função $VPL(t)$ de um ativo não possui ponto crítico. Porém, como a função é contínua, pelo *Teorema de Weierstrass*, ela possui um mínimo em $t = 0$, tal que $VPL(0) = 0$ e um máximo para algum t_0 , tal que $VPL(t_0) = A + \frac{a}{r^2}$. Portanto, não é possível calcular a vida econômica por essa função. Ainda assim, a função $VPL(t)$ pode ser utilizada para reposição entre ativos.

4.2.4.2 Limitações e características da AE

Conforme definida na seção 4.2.4., a equação (4.6) representa a função $AE(t)$.

Novamente, dado o comportamento de $R(t)$, a qual não é diferenciável, convém analisar a equação (4.6) em duas partes, sendo o *Regime 1*, $0 \leq t < A/b$, e o *Regime 2*, $t \geq A/b$, da mesma maneira que foi feito para o VPL nas seções anteriores desta dissertação.

Dessa maneira, a equação (4.6) é reescrita da seguinte maneira:

$$AE(t) = \begin{cases} \left[\frac{(e^r - 1) * e^{rt}}{e^{rt} - 1} \right] * \left(\int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt + A - R(t) * e^{-rt} \right) & , 0 \leq t < A/b \\ \left[\frac{(e^r - 1) * e^{rt}}{e^{rt} - 1} \right] * \left(\int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt + A \right) & , t \geq A/b \end{cases} \quad (4.17)$$

Sendo a primeira parte referente ao *Regime 1* e a segunda ao *Regime 2*.

É importante comparar a equação (4.2) com a (4.17). Na primeira, é calculada a anuidade equivalente em função de n de forma discreta. Sendo assim, $AE(n)$ não está definida para $n = 0$. Já na segunda equação, $AE(t)$ é contínua. Dessa maneira, embora haja um “salto” em $t = 0$, como $\lim_{t \rightarrow 0} AE(t) = AE(0)$, então $AE(t)$ é contínua em $t = 0$. Além disso, é importante observar que $\lim_{t \rightarrow \frac{A}{b}^+} AE(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{A}{b}^-} AE(t)$. Por isso, a função é contínua em $t = A/b$.

4.2.4.2.1. AE no Regime 1

Nesta seção será analisada a equação de anuidade equivalente para o *Regime 1*, ou seja, para quando $0 \leq t < A/b$.

Assim, simplificando a equação (4.17) referente ao *Regime 1*, obtém-se a seguinte expressão, definida pela equação (4.18):

$$AE(t) = \left(\frac{e^r - 1}{r^2} \right) \left(\frac{rt(br - a)}{e^{rt} - 1} + a + Ar^2 \right) \quad (4.18)$$

Em seguida, deriva-se a função para encontrar os pontos críticos e depois avaliar se estes são pontos de mínimo, conforme é possível observar na equação (4.19).

$$\frac{dAE}{dt}(t) = \left(\frac{e^r - 1}{r(e^{rt} - 1)^2} \right) (e^{rt}(rt - 1) + 1)(a - br) \quad (4.19)$$

Nesse caso, há duas situações em que $\frac{dAE}{dt}(t) = 0$:

$$(1) (a - br) = 0.$$

Esta solução implica em $AE'(t) = 0$, para qualquer t pertencente ao domínio de AE . Logo, qualquer t no domínio de AE é ponto crítico. Contudo, para um ponto crítico $AE(t_0)$ ser avaliado como mínimo de uma função é necessário que ocorra $AE''(t_0) > 0$ e $AE'(t_0) = 0$. Como neste caso $AE''(t) = 0$, logo esta situação não é válida como mínimo da função $AE(t)$ em problemas de vida econômica.

$$(2) (e^{rt}(rt - 1) + 1) = 0$$

Nesta situação, ocorre que $(e^{rt}(rt - 1) + 1) = 0$, quando $t = 0$. Contudo, quando se analisa a equação (4.19) por completo, tem-se $\frac{0}{0}$; ou seja, uma indeterminação.

Agora, continua-se o estudo da função $AE(t)$ no *Regime 1*, analisando se ela possui comportamento crescente, decrescente ou constante neste intervalo. Sendo assim, reescreve-se a equação (4.18) de acordo com a seguinte forma:

$$AE(t) = \left(\frac{e^r - 1}{r^2}\right)(a + Ar^2) + \left(\frac{e^r - 1}{r^2}\right)\left(\frac{rt(br - a)}{e^{rt} - 1}\right)$$

Depois, definem-se as seguintes funções $f(t)$ e $g(t)$ no intervalo de $0 \leq t < A/b$:

$$f(t) = \left(\frac{e^r - 1}{r^2}\right)(a + Ar^2) \quad (4.20)$$

$$g(t) = \left(\frac{e^r - 1}{r^2}\right)\left(\frac{rt}{e^{rt} - 1}\right)(br - a) \quad (4.21)$$

Tais que,

$$AE(t) = f(t) + g(t) \quad (4.22)$$

Na equação (4.20), $f(t)$ é sempre constante para qualquer valor de t . Já na equação (4.21), por sua vez, $g(t)$ varia conforme o valor de t . Logo, convém analisar o comportamento desta função. Para analisar o comportamento de uma função, convém sempre derivá-la, conforme é possível ver na equação (4.23).

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{(e^r - 1)r}{r^2}(a - br)(e^{rt}(rt - 1) + 1) \quad (4.23)$$

Ocorre que o termo $(e^{rt}(rt - 1) + 1)$ é sempre positivo para $t \geq 0$. Sendo assim, o comportamento de $g(t)$ depende exclusivamente de $(a - br)$, tal que b é a taxa de

desvalorização do ativo, r a taxa de desconto utilizada e a o coeficiente da função de manutenção $M(t)$. Dessa maneira, se $br = a$, ou se $br > a$, ou se $br < a$, a função $g(t)$ possui o seguinte comportamento, conforme pode ser observado em (4.24):

$$\begin{cases} br = a, & g(t) \rightarrow \text{constante} \\ br > a, & g(t) \rightarrow \text{decrecente} \\ br < a, & g(t) \rightarrow \text{crescente} \end{cases} \quad (4.24)$$

Conseqüentemente, como $f(t)$, na equação (4.20), é constante, a equação (4.22), da função $AE(t)$, possui o mesmo comportamento de $g(t)$. Portanto, no *Regime 1*, $AE(t)$ possui uma das três seguintes possíveis funções, conforme é possível ver na Figura 4.5.

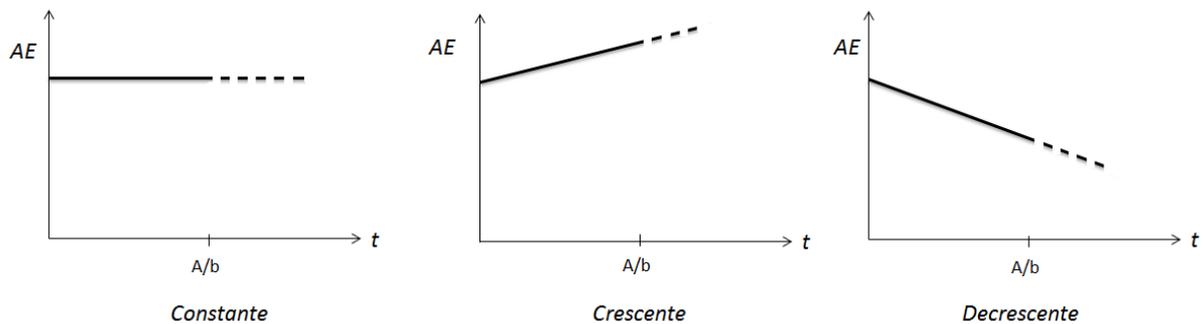


Figura 4.5 - Comportamento da função $AE(t)$ no Regime 1

Na Figura 4.5, é possível ver os possíveis comportamentos da função $AE(t)$ na região de $0 \leq t < A/b$, os quais são crescente, decrescente e constante. Contudo, o comportamento constante da função não ocorre para um caso real.

Ocorre que

$$a - br = 0,$$

logo

$$a = br \quad (4.25)$$

No plano, a equação (4.25), está representada, conforme é possível ver na Figura 4.6

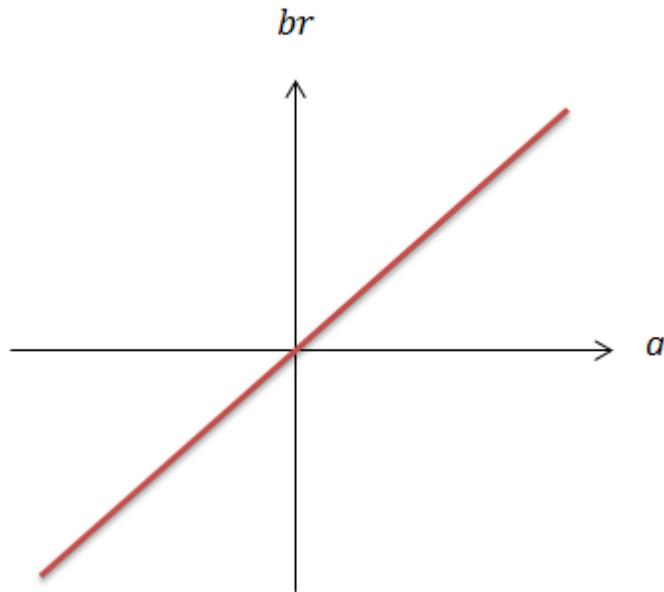


Figura 4.6 - Representação da equação (4.25) no plano

Na Figura 4.6, é possível observar o plano formado pelos eixos com os valores de a e br . Percebe-se que qualquer ponto acima da reta implica em $br > a$, já qualquer ponto abaixo da reta implica em $br < a$ e, por último, qualquer ponto na reta implica em $br = a$, esta conforme a equação (4.25).

Sendo assim, ocorre que em um plano toda reta tem área nula, enquanto o plano tem área infinita. Dessa maneira, a chance de um ponto cair aleatoriamente na reta é de 0,00%. Por isso, as chances de a função $AE(t)$ ser constante no *Regime 1*, para um caso real, são nulas.

Assim, conclui-se que a função $AE(t)$ no intervalo $[0, A/b[$ possui um comportamento crescente ou decrescente. Logo, o ponto de mínimo da função, pelo *Teorema de Weierstrass*, encontra-se nos respectivos extremos do intervalo de definição. Nas equações (4.26) e (4.27) é possível ver os mínimos.

Se a função $AE(t)$ é crescente, então

$$AE(0) = \frac{(-1 + e^r)(b + Ar)}{r} \quad (4.26)$$

Se a função $AE(t)$ é decrescente, então

$$AE(A/b) = \frac{(-1 + e^r) \left(a + \frac{Ar(-a + br)}{b(-1 + e^{\frac{Ar}{b}})} + Ar^2 \right)}{r^2} \quad (4.27)$$

Portanto, estabelece-se o *Lema 2*:

Lema 2: Em $0 \leq t < A/b$, se $br < a$, então $AE(t)$ é crescente e, pelo Teorema de *Weierstrass*, o ponto de mínimo no intervalo é $AE(0) = \frac{(-1+e^r)(b+Ar)}{r}$. Já quando $br > a$, ocorre que $AE(t)$ é decrescente, novamente por *Weierstrass*, $AE\left(\frac{A}{b}\right) = (-1 + e^r) \left(a + \frac{Ar(-a+br)}{b(-1+e^{\frac{Ar}{b}})} + Ar^2 \right) r^{-2}$ é o mínimo no intervalo.

4.2.4.2.2. AE no Regime 2

No *Regime 2*, será analisado o comportamento da função AE para $t > A/b$. Sendo assim, define-se a equação (4.28), simplificando a equação (4.17) para esta região:

$$AE(t) = \frac{(-1 + e^r)}{(-1 + e^{rt})r^2} (e^{rt}(a + Ar^2) - a(1 + rt)) \quad (4.28)$$

Calculando a derivada de (4.28) para encontrar os pontos críticos:

$$\frac{dAE}{dt}(t) = \frac{(-1 + e^r)}{r(-1 + e^{rt})^2} (a - e^{rt}(-art + a + Ar^2)) \quad (4.29)$$

Dessa maneira, a fim de facilitar o entendimento, define-se:

$$h(t) = (a - e^{rt}(-art + a + Ar^2)) \quad (4.30)$$

tal que,

$$\frac{dAE}{dt}(t) = \frac{(-1 + e^r)}{r(-1 + e^{rt})^2} * h(t)$$

Então, como $\frac{(-1+e^r)}{r(-1+e^{rt})^2} > 0$, para qualquer valor t em $t > A/b$, então calcula-se $h(t) = 0$, a fim de encontrar os pontos críticos da equação (4.29).

Sejam

$$\tau = r * t \text{ e } c = \frac{Ar^2}{a}.$$

Dessa maneira, reescreve-se a equação (4.30) da seguinte maneira:

$$h(\tau) = 1 - e^\tau(-\tau + 1 + c) \tag{4.31}$$

Assim, iguala-se a equação (4.31) a zero, a fim de se encontrar os pontos críticos nela.

$$1 - e^\tau(-\tau + 1 + c) = 0.$$

Resultando em:

$$c = \frac{1 - e^\tau + \tau e^\tau}{e^\tau} \tag{4.32}$$

Agora, define-se a seguinte função, conforme é possível ver na equação (4.33):

$$p(\tau) = \frac{1 - e^\tau + \tau e^\tau}{e^\tau} \tag{4.33}$$

Então, a função $h(t)$, na equação (4.30), é nula se, e somente se, $p(\tau) = c$.

Nisso, pode-se afirmar a seguinte relação: se $p(rt_0) = c$, então $t_0 > A/b$, segue que:

$$t_0 > \frac{A}{b} \Leftrightarrow$$

$$p(rt_0) > p\left(r\frac{A}{b}\right) \Leftrightarrow$$

$$c > \left(1 - e^{-r\frac{A}{b}} + r\frac{A}{b} * e^{-r\frac{A}{b}}\right) e^{-r\frac{A}{b}} \Leftrightarrow$$

$$c > \left(e^{-r\frac{A}{b}} - 1 + r\frac{A}{b}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{Ar^2}{a} > \left(e^{-r\frac{A}{b}} - 1 + r\frac{A}{b}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{Ar^2}{a} > \left(e^{-r\frac{A}{b}} - 1 + r\frac{A}{b}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{bAr^2}{b\left(e^{-r\frac{A}{b}} - 1\right) + Ar} > a \quad (4.34)$$

Sendo assim, conclui-se que se existe um t_0 , tal que este seja solução da equação (4.30) e $t_0 > A/b$, então uma condição para existência deste ponto na equação (4.30) é expressa pela equação (4.34). Por fim, o ponto crítico encontrado²⁰ na equação (4.30)²¹ é:

$$t = \frac{W_0(-e^{-c-1})+c+1}{r}, \text{ tal que}$$

$$t = \tilde{T}(c,r) = \frac{W_0(-e^{-c-1})+c+1}{r}.$$

Dessa maneira, é possível determinar o ponto crítico de qualquer equipamento, uma vez que se possuem os valores de A , r e a . Além disso, é possível deixar essa equação apenas em função de c , conforme é mostrado abaixo:

Seja

$$t = \frac{W_0(-e^{-c-1}) + c + 1}{r} \quad (4.35)$$

tal que

$$t = \tilde{T}(c,r) = \frac{T(c)}{r}$$

²⁰ Solução encontrada com o software *Wolfram Mathematica 8*.

²¹ W_n é a função de Lambert. Mais informações sobre a função de Lambert no Apêndice II – Demonstrações Matemáticas.

$$rt = r\tilde{T}(c,r) = T(c)$$

Então,

$$T(c) = W_0(-e^{-c-1}) + c + 1 \quad (4.36)$$

Portanto, o ponto crítico é dado pela equação (4.35). Assim, define-se o ponto de mínimo do equipamento no *Regime 2*. Na Figura 4.7 é possível ver como ficam as possíveis curvas da função $AE(t)$.

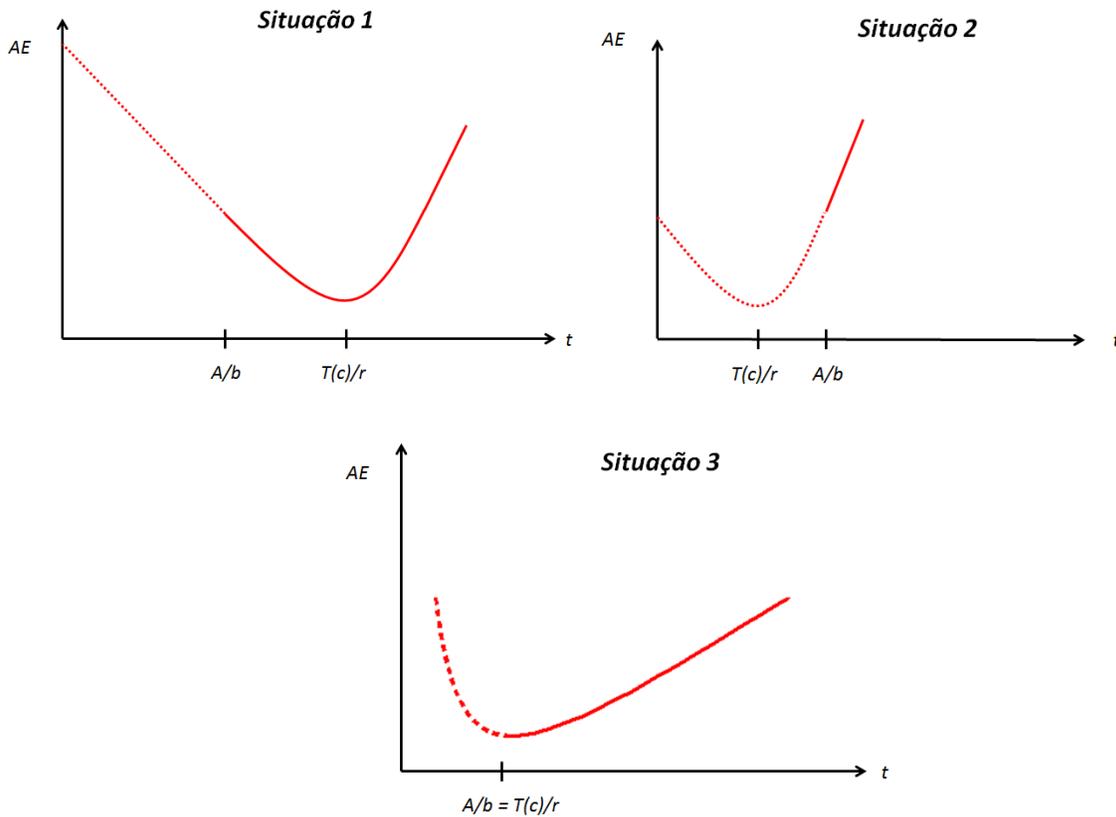


Figura 4.7 – Comportamento da função $AE(t)$ no Regime 2

Na Figura 4.7, observa-se as possíveis curvas da função $AE(t)$ no *Regime 2*. Na *Situação 1*, $T(c)/r > A/b$. Na *Situação 2*, $T(c)/r < A/b$; logo, o mínimo da função não está no *Regime 2*. Por último, na *Situação 3*, $T(c)/r = A/b$, ou seja, o ponto crítico do *Regime 2* está no ínfimo do intervalo $\left[\frac{A}{b}, \infty\right]$.

Em relação ao comportamento de $p(\tau)$, novamente analisa-se a derivada da função:

$$\frac{dp}{d\tau}(\tau) = 1 - \cosh(\tau) + \sinh(\tau) \quad (4.37)$$

Na equação (4.37), observa-se que $p(\tau)$ é sempre crescente para qualquer $\tau > 0$. Logo, dado $p\left(r\frac{T(c)}{r}\right) = c$, ocorre que, para qualquer $\tau < \frac{T(c)}{r}$, tem-se que $p(\tau) < c$ e para qualquer $\tau > \frac{T(c)}{r}$, tem-se que $p(\tau) > c$. Assim, $\tau = r\frac{T(c)}{r}$ é a solução única de $p(\tau)$.

De maneira semelhante, na equação (4.31), para uma solução $\tau = rt_0$, ocorre que $h(\tau) < 0$ para qualquer $\tau < rt_0$, e $h(\tau) > 0$ para qualquer $\tau > rt_0$. Portanto, $h(rt_0)$ é solução única.

Nisso, formaliza-se o *Lema 3*.

Lema 3: Na região $\left[\frac{A}{b}, \infty\right]$, se $\frac{bAr^2}{b\left(e^{-r\frac{A}{b}} - 1\right) + Ar} > a$, a equação $AE(t) = \frac{(-1+e^t)}{(-1+e^{rt})r^2} (e^{rt}(a + Ar^2) - a(1 + rt))$ tem solução para t . Uma vez que esta solução depende apenas de a , r e A , tal que $c = \frac{Ar^2}{a}$, por meio da função $T(c) = W_0(-e^{-c-1}) + c + 1$ encontra-se o valor de t , tal que $t = \frac{T(c)}{r}$. Além disso, tal solução é única, uma vez que $AE(t)$ é decrescente em $A/b < t < T(c)/r$ e é crescente em $t > T(c)/r$.

4.2.4.3 Análise de vida econômica

Percebe-se que nos dois regimes há pontos de mínimo. Sendo assim, precisam-se analisar ambos os regimes juntos e comparar os pontos críticos de cada região, a fim de se estabelecer qual o mínimo comum às duas regiões, ou seja, o mínimo global da função. Assim, este mínimo é o ponto de vida econômica do ativo.

Nas seções anteriores, constam as propriedades dos mínimos no *Regime 1* e no *Regime 2*. Em resumo, até agora se sabe que no *Regime 1*, o ponto de mínimo se encontra em uma das fronteiras do intervalo $\left[0, A/b\right]$, enquanto que no *Regime 2*, ou o mínimo se encontra na primeira extremidade, tal que $\frac{T(c)}{r} = A/b$, ou para algum valor $\frac{T(c)}{r} > A/b$.

Primeiramente, serão analisados os casos em que a função $AE(t)$ é crescente no *Regime 1*. Sabe-se que quando $AE(t)$ é crescente, o mínimo no *Regime 1* encontra-se na primeira extremidade, ou seja, em $AE(0) = \frac{(-1+e^r)(b+Ar)}{r}$, conforme calculado na equação (4.26). Já quando $AE(t)$ é decrescente no *Regime 1*, o mínimo está na segunda extremidade, ou seja, em $AE\left(\frac{A}{b}\right) = (-1 + e^r)r^{-2} \left(a + \frac{Ar(-a+br)}{b(-1+e^{\frac{Ar}{b}})} + Ar^2 \right)$, como calculado na equação (4.27).

Feito isso, é necessário comparar com o mínimo no *Regime 2*, o qual é

$$AE\left(\frac{T(c)}{r}\right) = \frac{(e^r - 1)}{r^2} \left(a + Ar^2 + a * W_0 \left(-e^{-\frac{a+Ar^2}{a}} \right) \right) \quad (4.38)$$

e verificar qual o mínimo global da função.

Dessa maneira, se $AE(0) < AE\left(\frac{T(c)}{r}\right)$, então

$$\frac{(-1+e^r)(b+Ar)}{r} < \frac{(e^r-1)}{r^2} \left(a + Ar^2 + a * W_0 \left(-e^{-\frac{a+Ar^2}{a}} \right) \right)$$

$$\frac{r(Ar+b)}{a} < 1 + \frac{Ar^2}{b} + W_0 \left(-e^{-1-\frac{Ar^2}{a}} \right)$$

$$\frac{Ar^2}{a} + \frac{br}{a} < 1 + \frac{Ar^2}{a} + W_0 \left(-e^{-1-\frac{Ar^2}{a}} \right)$$

$$\frac{br}{a} - 1 < W_0 \left(-e^{-1-\frac{Ar^2}{a}} \right)$$

$$W_0^{-1} \left(\frac{br}{a} - 1 \right) < W_0^{-1} \left(W_0 \left(-e^{-1-\frac{Ar^2}{a}} \right) \right)$$

$$\left(\frac{br}{a} - 1 \right) e^{\frac{br}{a}-1} < -e^{-1-\frac{Ar^2}{a}}$$

$$\left(1 - \frac{br}{a} \right) e^{\frac{br}{a}-1} > e^{-1-\frac{Ar^2}{a}}$$

Aplicando \ln em ambos os lados da inequação:

$$\ln\left(\left(1 - \frac{br}{a}\right) e^{\frac{br}{a}-1}\right) > \ln\left(e^{-1-\frac{Ar^2}{a}}\right)$$

$$\ln\left(\left(1 - \frac{br}{a}\right) e^{\frac{br}{a}-1}\right) > \ln\left(e^{-1-\frac{Ar^2}{a}}\right)$$

$$\ln\left(1 - \frac{br}{a}\right) + \frac{br}{a} > \frac{Ar^2}{a}$$

Dessa maneira, pode-se deixar a inequação em função do parâmetro A , multiplicando ambos os lados da inequação por $\frac{a}{r^2}$, então:

$$A > \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r} \quad (4.39)$$

Assim, a equação (4.39) é uma condição, em função do parâmetro A , para que quando $AE(t)$ for crescente no *Regime 1*, ou seja, $br < a$, o mínimo no *Regime 1* seja menor que o mínimo no *Regime 2*. Portanto, é possível listar as seguintes situações de ponto de vida econômica:

- $A < \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, se, e somente se, $AE(0) > AE\left(\frac{T(c)}{r}\right)$.
- $A > \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, se, e somente se, $AE(0) < AE\left(\frac{T(c)}{r}\right)$;
- $A = \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, se, e somente se, $AE(0) = AE\left(\frac{T(c)}{r}\right)$;

Para ilustrar, estabelecem-se três possíveis casos de análise de vida econômica.

Caso 1

Neste caso, ocorre que $A < \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{-\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, se, e somente se, $AE(0) > AE\left(\frac{T(c)}{r}\right)$. Logo o mínimo da função $AE(t)$ está em $t = \frac{T(c)}{r}$. Na Figura 4.8, há um gráfico indicando o comportamento da função.

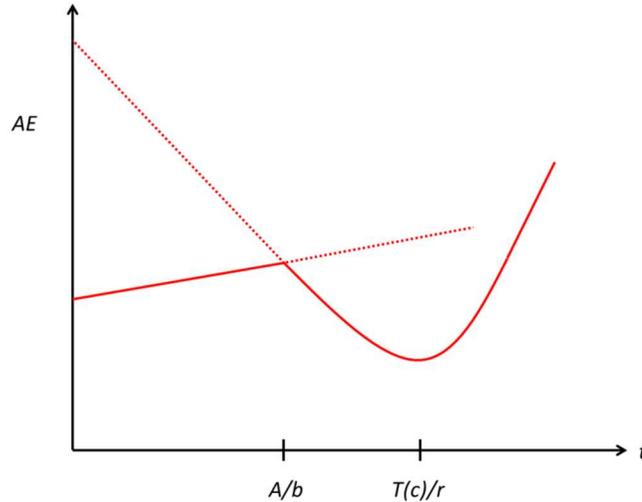


Figura 4.8 - Gráfico de $AE(t)$ para o Caso 1

Caso 2

Já para o *Caso 2*, ocorre que $A > \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{-\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, se, e somente se, $AE(0) < AE\left(\frac{T(c)}{r}\right)$. Logo, o mínimo está em $t = 0$, conforme é possível observar na Figura 4.9.

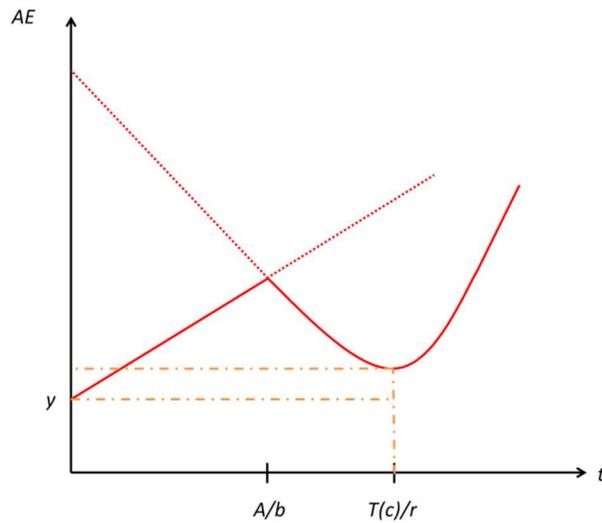


Figura 4.9 – Gráfico de $AE(t)$ para o Caso 2

Caso 3

Para o *Caso 3*, ocorre que $A = \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, se, e somente se, $AE(0) = AE\left(\frac{T(c)}{r}\right)$. Logo, o valor mínimo de $AE(t)$ ocorre em ambos os pontos. Na Figura 4.10, é possível ver como se comporta a função ao longo do tempo.

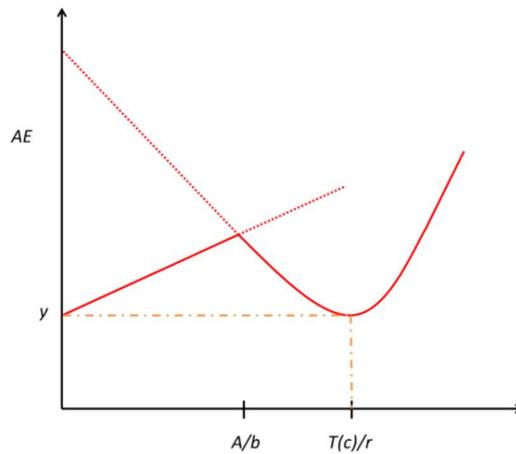


Figura 4.10 - Gráfico de $AE(t)$ para o Caso 3

Para o Caso 3, o valor do mínimo é o mesmo nos dois regimes. Contudo, este caso é improvável de ocorrer. Assim como na *Figura 4.6 - Representação da equação (4.25) no plano*, é possível construir um plano, no qual um eixo é A (lado esquerdo da desigualdade) e o outro eixo

é $\ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{-\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$ (lado direito da igualdade). Nisso, no plano, há a diagonal como espaço de eventos do Caso 3, enquanto há um semiplano para o Caso 1 e outro para o Caso 2. Assim, os casos prováveis são apenas o Caso 1 e Caso 2.

Feito isso, é possível formalizar e estabelecer o *Teorema 1*, sendo este responsável pela condição criada para os três casos anteriores.

Teorema 1: Para função $AE(t)$, com $a > br$ e $t \geq 0$, ocorre que se $A > \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{-\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, o mínimo da função é $AE(0) = \frac{(-1+e^r)(b+Ar)}{r}$. Enquanto que, se $A < \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{-\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, o ponto de mínimo de $AE(t)$ é atingido em $t = \frac{T(c)}{r}$.

Além destes casos, é possível estabelecer outros casos, nos quais $AE(t)$ no *Regime 1* possui comportamento decrescente e, para o *Regime 2*, $AE(t)$ admite soluções não só em $t > A/b$, como nos casos anteriores.

Caso 4

No *Caso 4*, ocorre que $\frac{bAr^2}{b\left(e^{-\frac{A}{b}} - 1\right) + Ar} < a$, logo, pelo *Lema 3*, não há uma solução em $t > A/b$. Sendo assim, se $br < a$, a solução se encontra no *Regime 1*, a qual é quando $t = 0$. Na Figura 4.11, é possível observar como se comporta a função $AE(t)$ neste caso.

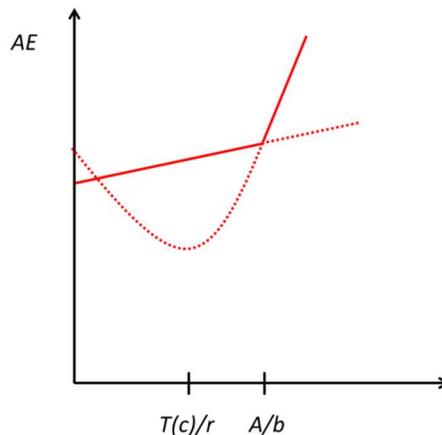


Figura 4.11 – Gráfico de $AE(t)$ para o Caso 4

Caso 5

Para o *Caso 5*, de maneira similar ao *Caso 4*, ocorre que $\frac{bAr^2}{b\left(e^{-r\frac{A}{b}}-1\right)+Ar} < a$. Contudo, nesse caso a função $AE(t)$ é decrescente, ou seja, $br > a$. Logo, o mínimo global da função ocorre quando $t = A/b$, conforme é possível visualizar na Figura 4.12.

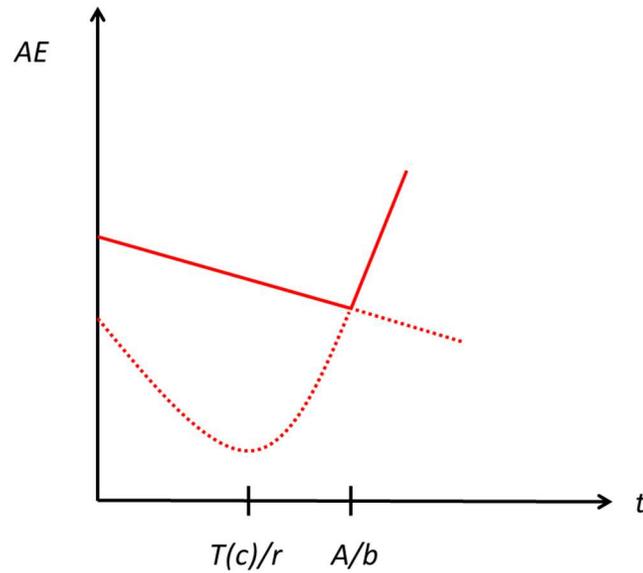


Figura 4.12 – Gráfico de $AE(t)$ para o Caso 5

Caso 6

Por último, no *Caso 6*, a função $AE(t)$ é decrescente no *Regime 1*, ou seja, $br > a$. Além disso, para o *Regime 2*, ocorre que $\frac{bAr^2}{b\left(e^{-r\frac{A}{b}}-1\right)+Ar} > a$. Logo, o mínimo da função é em $t = \frac{T(c)}{r}$.

Na Figura 4.13, é possível ver o comportamento da função para este caso.

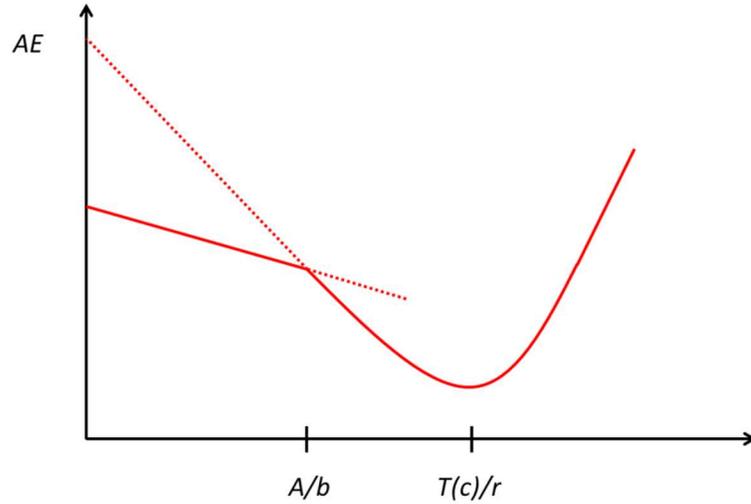


Figura 4.13 – Gráfico de $AE(t)$ para o Caso 6

Por fim, é possível estabelecer um teorema. Este é o resultado de todas as premissas, modelagem para os métodos de AE e VPL e lemas estabelecidos na seção 4.2 desta dissertação. Por fim, estabelece-se o *Teorema 2* para os casos remanescentes.

Teorema 2: Dada a função $AE(t)$, tal que $c = \frac{Ar^2}{a}$, $W_0(z)$ é a função *W de Lambert* e $T(c) = W_0(-e^{-c-1}) + c + 1$, têm-se as seguintes possibilidades de solução para $AE(t)$:

- $a > br$ e $\frac{bAr^2}{b\left(e^{-r\frac{A}{b}} - 1\right) + Ar} < a$, se, e somente se, o mínimo de $AE(t)$ é atingido em $t = 0$.
- $a < br$ e $\frac{bAr^2}{b\left(e^{-r\frac{A}{b}} - 1\right) + Ar} < a$, se, e somente se, o mínimo de $AE(t)$ é atingido em $t = A/b$.
- $a < br$ e $\frac{bAr^2}{b\left(e^{-r\frac{A}{b}} - 1\right) + Ar} > a$, se, e somente se, o mínimo de $AE(t)$ é unicamente atingido em $t = T(c)/r$.

4.3. Problemas de VERA por meio de modelagem de programação dinâmica

Em 1949, o matemático Richard Bellman iniciou seus estudos em métodos de decisão multiestágio enquanto trabalhava na *Rand Corporation* da força aérea estadunidense. Naquela época, não havia apoio para pesquisa matemática. Logo, uma solução foi chamar sua pesquisa de

programação dinâmica (PD), pois, dessa maneira, suas atividades de pesquisa ficaram disfarçadas sob a forma de uma aplicação para área militar (Dreyfus, 2002).

O conceito de *programa* surgiu da economia e está relacionado ao desenvolvimento de planejamentos ótimos de produção (Baumeister & Leitão, 2008, p. 244), os quais eram de interesse dos militares. Já o adjetivo *dinâmica* refere-se à variação de tempo. Sendo assim, com o nome *programação dinâmica*, a atividade de pesquisa de Bellman não sofreria nenhuma intervenção contrária.

Dessa forma, antes de começar a análise de VERA por métodos de programação dinâmica, primeiramente é necessário definir alguns conceitos básicos para:

- Horizonte de planejamento
- Estágio
- Estado
- Decisão
- Política / Política ótima

No método de programação dinâmica, primeiramente define-se o *horizonte de planejamento*, o qual é o período de vida útil do ativo esperado pelos respectivos proprietários. O período é dividido em *estágios*, sendo que estes representam pontos na linha do tempo. De tal forma que para cada estágio há certo número de *estados* associados, tal que estes representam as variáveis quantitativas ou qualitativas do problema que serão otimizadas no problema.

No problema de reposição de ativos os estados representam a idade do equipamento. Então, para cada estágio, toma-se uma *decisão*, isto é, a escolha de manter ou repor o ativo. Consequentemente, a sequência de decisões será chamada de *política*.

Dessa maneira, a metodologia de programação dinâmica considera todas as possíveis as políticas, de modo que é calculado o retorno para cada política factível e, então, é maximizado o retorno de todas as políticas. Assim, obtém-se a *política ótima*, a qual é o resultado do método de PD.

Assim, a programação dinâmica é uma técnica matemática útil para modelar sequências de decisões interrelacionadas. Ela fornece um procedimento sistemático para determinar a combinação de não apenas uma decisão ótima, mas de uma sequência de muitas decisões ao longo do tempo (Hillier & Lieberman, 2006), (Gupta & Cozzolino, 1975).

4.3.1. Fundamentação teórica

Para apresentar a fundamentação teórica do método de programação dinâmica exibe-se primeiramente a Figura 4.14, a qual apresenta um diagrama de árvore de decisão.

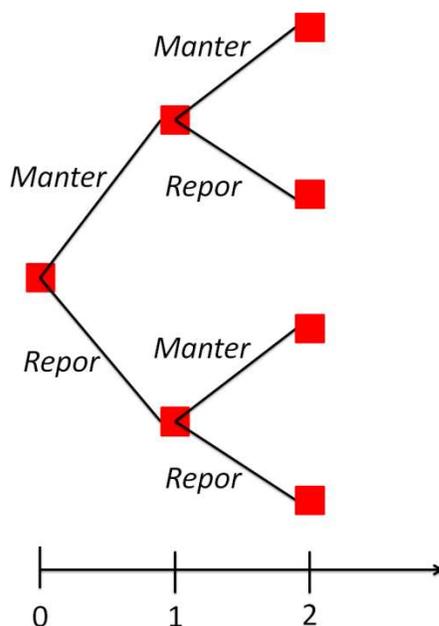


Figura 4.14 – Árvore de decisão do método de PD

Na Figura 4.14 é possível observar um diagrama de árvore de decisão. Em cada nó, há duas alternativas: *Manter* ou *repor*. Sendo assim, dado um ativo em operação, em um estágio k , há duas opções: uma é manter o ativo, outra é repor o ativo. Logo, estabelecem-se duas funções: uma calcula o retorno da escolha de se manter o ativo, enquanto outra calcula o retorno em repô-lo. Dessa maneira, as funções ficam determinadas de acordo com as equações (4.40) e (4.41), respectivamente:

$$f_{M_k}(t) = -c(t) + a * f_{k+1}(t + 1) \quad (4.40)$$

$$f_{R_k}(t) = v(t) - A - c(0) + a * f_{k+1}(1) \quad (4.41)$$

Onde:

- t é a variável que representa o tempo;
- k é o estágio atual;
- $c(t)$ é o custo de manutenção;
- $v(t)$ é o valor de mercado do ativo;
- A é o custo de aquisição;
- a é a taxa de desconto, tal que $a = \frac{1}{(1+i)}$, sendo que i é a taxa de juros, tal que $0 < i < 1$;

A equação (4.40) é o retorno em realizar a manutenção no ativo em operação no estágio k , mais o retorno futuro do estágio seguinte. Já a equação (4.41) é o retorno em repor o ativo em operação no estágio k , por um novo, cujo custo de aquisição é A , acrescido do custo de manutenção inicial mais o retorno futuro do estágio seguinte.

Em seguida, define-se uma função $f_k(t)$ que descreve o retorno financeiro de uma política ótima de reposição de ativos do estágio inicial k até o estágio final N , conforme mostra a equação (4.42):

$$f_k(t) = \text{Max} \begin{bmatrix} f_{M_k}(t) \\ f_{R_k}(t) \end{bmatrix} = \text{Max} \begin{bmatrix} -c(t) + a * f_{k+1}(t + 1) \\ v(t) - A - c(0) + a * f_{k+1}(1) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

A equação (4.42) retorna o valor máximo entre $f_{M_k}(t)$ e $f_{R_k}(t)$ para cada valor de t . Isto é, ao longo do horizonte de planejamento, a equação (4.42) determina, para cada estágio e estado, qual a melhor decisão a ser tomada. Na Figura 4.15 há uma ilustração de como funciona a equação (4.42).

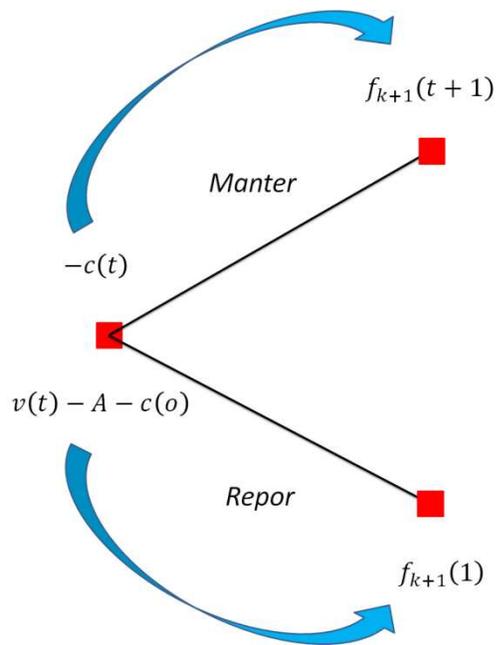


Figura 4.15 – Árvore de decisão com fundamentação teórica

Na Figura 4.15 estão representados os nós de uma árvore de decisão. No primeiro nó, à esquerda, há a opção de manter o ativo ou de repô-lo. Se o equipamento for mantido, o custo envolvido será só o de manutenção $c(t)$, mas se for reposto há o custo A de comprar um novo ativo, a manutenção $c(0)$ deste novo ativo para este estágio e há a entrada de caixa $v(t)$ de vender o ativo em antigo.

Nisso, o método de PD associa as informações do estágio presente com o estágio seguinte. Na Figura 4.15, as setas em azul representam a ligação entre dois estágios diferentes, de modo que em um estágio k , se o equipamento é mantido, no estágio seguinte, $k + 1$, este ativo passa para o estado $t + 1$. Enquanto que, se o equipamento é reposto no estágio k – logo, seu estado é 0 (zero) - no estágio seguinte o ativo passa para o estágio $k + 1$ e estado 1.

Para solucionar os problemas de vida econômica e reposição de equipamentos é necessário realizar as seguintes etapas:

- (1) Determinar o horizonte de planejamento;
- (2) Levantar todos os custos de manutenção e valores dos ativos para cada estado;
- (3) Definir a função $f_k(t)$ inicial do problema.

(4) Resolver o problema recursivamente de N até 1.

(5) Encontrar a política ótima

Os itens (1) a (3) já foram definidos na seção 4.3.1; logo, a etapa seguinte é resolver o problema recursivamente. Para isso, toma-se a equação (4.42) e estabelecem-se os valores para f_{N+1} . Apesar de $N + 1$ não ser um estágio definido no plano de horizonte, ocorre que este estágio é utilizado como condição de contorno do problema. Para condição de contorno, define-se:

$$f_{N+1}(t) = v(t) \quad (4.43)$$

Dessa maneira, a equação (4.42) fica da seguinte forma:

$$f_N(t) = \text{Max} \left[\begin{array}{l} -c(t) + a * v(t + 1) \\ v(t) - A - c(o) + a * v(1) \end{array} \right]$$

Assim, calcula-se $f_N(t)$, sendo que a resposta informa qual decisão deve ser tomada no estágio N . Em seguida, calcula-se $f_{N-1}(t)$:

$$f_{N-1}(t) = \text{Max} \left[\begin{array}{l} -c(t) + a * f_N(t + 1) \\ v(t) - A - c(o) + a * f_N(1) \end{array} \right]$$

Dessa maneira, obtém-se qual a melhor decisão a ser tomada no estágio $N - 1$. Novamente, aplica-se a equação (4.42), mas para o estágio $N - 2$.

$$f_{N-2}(t) = \text{Max} \left[\begin{array}{l} -c(t) + a * f_{N-1}(t + 1) \\ v(t) - A - c(o) + a * f_{N-1}(1) \end{array} \right]$$

E, assim por diante, até chegar no estágio 1:

$$f_1(t) = \text{Max} \left[\begin{array}{l} -c(t) + a * f_2(t + 1) \\ v(t) - A - c(o) + a * f_2(1) \end{array} \right]$$

A justificativa em resolver recursivamente está no fato de que para um estágio k qualquer, $k \in [0, N]$, todas as entradas e saídas de caixa ocorridas antes de k são custos irre recuperáveis²². Logo, não influenciam na tomada de decisão. Sendo assim, conforme foi demonstrado, para o estágio N , apenas as informações de $N + 1$ influenciam. Da mesma maneira, para o estágio $N - 1$, apenas N e, por consequência, $N + 1$ influenciam. E assim por diante até chegar no estágio 1, no qual todos os outros estágios influenciam na decisão.

Logo, sempre que se utiliza a equação (4.42), $f_k(t)$, calcula-se a melhor opção para o estágio atual, considerando os estágios seguintes. Assim, todos os estágios sequenciais ficam “amarrados” uns aos outros, de modo que como a resolução é de maneira recursiva, de N até 1, $f_1(t)$ está calculada para todas as políticas possíveis. Assim, com as decisões de cada estágio tomadas obtém-se a política ótima que deve ser seguida para maximizar o retorno e realizar a reposição do equipamento no melhor momento.

4.4. Comparação entre métodos

Nesta seção, deseja-se comparar os métodos de programação dinâmica e de anuidades equivalentes para resolução de problemas (VERA). Para isso, por meio da teoria desenvolvida nesta dissertação e por estudos de casos listados nos Anexos B, C e D²³, nesta seção 4.4 serão revisadas e resumidas as principais propriedades e limitações de cada um dos métodos e, por fim, comparadas.

Recordando, o método de AE consiste em encontrar o ponto de mínimo da equação (4.6) e o método de programação dinâmica determinar a política ótima dentro de um conjunto de decisões em N estágios dada pela equação (4.42).

$$AE(t) = \left[\frac{(e^r - 1) * e^{rt}}{e^{rt} - 1} \right] * \left(\int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt + A - R(t) * e^{-rt} \right) \quad (4.6)$$

²² Custo irre recuperável refere-se a despesas passadas para os equipamentos que não podem mais ser revertidas. Despesas passadas não são relevantes, não importando a quantia, na tomada de decisão se o equipamento deve ou não ser repostado. Logo, conforme Ross et al (2002) concluem, os custos irre recuperáveis não são fluxos de caixa incrementais. Apenas entradas e saídas futuras de fluxo de caixa devem ser consideradas (p. 148).

²³ Nos Anexos B, C e D desta dissertação, serão apresentados casos, nos quais o estudo de vida econômica e reposição de ativos (VERA) são realizados tanto pelo método de anuidades equivalentes (AE) quanto pelo método de programação dinâmica (PD). Os motivos desses casos ficarem separados em um anexo é simplesmente para deixar o texto do Capítulo 4 mais objetivo, contendo os principais resultados desenvolvidos no anexo para comparação entre os métodos.

$$f_N(t) = \text{Max} \begin{bmatrix} f_{M_N}(t) \\ f_{R_N}(t) \end{bmatrix} = \text{Max} \begin{bmatrix} -c(t) + a * f_{N+1}(t + 1) \\ v(t) - A - c(o) + a * f_{N+1}(1) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Assim, é natural questionar: Qual método é o melhor? Quando se diz o melhor, pensa-se em um que seja menos trabalhoso e mais eficiente. Para responder a essa pergunta, convém analisar o processo de resolução de ambos os métodos.

Há situações em que o método de AE consegue modelar corretamente; contudo, há outras nas quais o método não consegue modelar. Ocorre que sempre que $\frac{bAr^2}{b\left(e^{-r\frac{A}{b}}-1\right)+Ar} > a$, há mínimo no *Regime 2*. Logo, essa é uma situação que o método de AE consegue modelar perfeitamente, indicando o ponto cujo valor de $AE(t)$ é mínimo, ou seja, o ponto de vida econômica do ativo. Tal situação é exemplificada nos Anexo B e Anexo C.

Por outro lado, se $\frac{bAr^2}{b\left(e^{-r\frac{A}{b}}-1\right)+Ar} < a$, não há mínimo no *Regime 2*. Sendo assim, ou o mínimo ocorre em $t = 0$ se $a > br$; isto é, se $AE(t)$ é crescente no *Regime 1*, ou o mínimo ocorre em $t = A/b$ se $a < br$; isto é, se $AE(t)$ é decrescente no *Regime 1*. Se por acaso $a < br$, AE consegue modelar o problema perfeitamente, indicando $t = A/b$ como o ponto de vida econômica. Contudo, se $a > br$, o ponto de vida econômica ocorre em $t = 0$. Isso quer dizer que, sob o escopo da gestão econômica de ativos e da metodologia de AE, o custo de propriedade equivalente desse equipamento só aumenta ao longo do tempo, a ponto de não ser possível determinar sua vida econômica (tal situação é possível de ser visualizada no Anexo D).

Além dessas características, é possível destacar as seguintes propriedades para este método, conforme já discutidas na seção 4.2:

- Anuidade equivalente informa quanto se gasta por ano com cada equipamento:
- Com os teoremas e lemas desenvolvidos, é possível encontrar de maneira eficiente o ponto de vida econômica na curva de custo de propriedade do ativo;

O método de PD²⁴, em síntese, compara para cada estágio o custo de manter o ativo, $f_{M_k}(t) = -c(t) + a * f_{k+1}(t + 1)$, com o custo de repor o ativo, $f_{R_k}(t) = v(t) - A - c(0) + a * f_{k+1}(1)$. Sendo assim, ao longo dos estágios, o ativo é mantido, ou repostado, conforme variam os custos de manutenção e o valor de revenda.

Dessa forma, assim como o de AE, o método de PD também possui situações nas quais os ativos não são modelados por este método. Em situações de *desvalorização intensa* do ativo, isto é, quando o valor de revenda do ativo cai abruptamente, a vida econômica é prolongada mais que o normal pela metodologia de PD. Além desta, outra situação similar é a *desvalorização amena* do ativo; isto é, quando o valor de revenda desvaloriza a taxas pequenas. Já nesta última, a vida econômica do ativo é reduzida mais que o normal.

Para a situação de *desvalorização intensa*, uma vez que a taxa de desvalorização do ativo é muito alta, $v(t) - A$ cresce a taxas muito maiores que $-c(t)$. Por isso, pelo método de PD, compensa manter o ativo por muito mais tempo. Logo, o método de PD não resolve o problema de VERA de maneira adequada para esta situação (no exemplo no Anexo B, é possível ver que o ativo se desvaloriza por completo). Conseqüentemente, o custo de capital do ativo atinge o valor nulo, e os custos de manutenção ficam muito altos, algo totalmente controverso com as premissas de gestão econômica de ativos.

Já para a situação de *desvalorização amena*, ocorre que o ativo se desvaloriza muito pouco de um ano para o outro, a ponto que os custos de manutenção aumentarem em taxas muito maiores. Conseqüentemente, o modelo de PD realiza reposições anualmente para essa situação (para ilustrá-la, no Anexo C há um exemplo deste caso). Por isso, tal modelagem não é apropriada. Afinal, há restrições técnicas nos equipamentos do setor energético, as quais implicam que as fabricações de equipamentos demoram mais que um ano. Logo, tal política ótima de decisão é inviável. Assim, em ambas as situações²⁵, o método de PD se mostra inapropriado para resolver os problemas de VERA, ao contrário do método de AE (conforme é possível ver nos Anexos B e C, este método se mostra eficiente para modelar os ativos em ambas as situações).

²⁴ Para comparação entre o método de PD e AE, considera-se que no método de PD o ativo em operação é repostado por um ativo novo com as mesmas características.

²⁵ Tanto a situação de *desvalorização intensa*, quando a de *desvalorização amena* já foram discutidas anteriormente por Cesca et al (2012).

Por outro lado, há um caso em que o modelo de PD modela perfeitamente um ativo, enquanto o método de AE não consegue. Conforme apresentado anteriormente, o modelo de AE não consegue modelar a vida econômica quando $AE(t)$ é crescente no *Regime 1* e não apresenta ponto crítico no *Regime 2*. Contudo, o método de PD consegue calcular perfeitamente quando os custos de manutenção são maiores que os de reposição, ou seja, o momento de realizar a substituição entre os ativos, suprindo as limitações do método de AE (conforme é possível ver no Anexo D um exemplo para esta situação).

Não só isso, mas também em situações reais, devido a restrições orçamentárias e técnicas²⁶, ocorre que o modelo de programação dinâmica possui uma melhor estrutura para ajudar o responsável pela gestão econômica de ativos. O modelo de PD determina diferentes políticas ao longo da vida do ativo. Logo, se a política ótima não pode ser executada devido a alguma restrição, uma segunda opção de política já está disponível para o responsável pela gestão econômica de ativos na empresa. Na Figura 4.16 é possível ver como isso ocorre.

²⁶ É possível que no momento de vida econômica, a empresa não possua caixa suficiente para adquirir o equipamento novo para reposição. Não só isso, mas também é possível que não haja determinado ativo novo disponível para aquisição; afinal, há equipamentos no setor energético que demoram mais de um ano para ficarem prontos. Logo, a reposição pode não ocorrer no momento de vida econômica do ativo em operação. Assim, a política ótima, de acordo com o modelo, pode não ser exercida e ser necessário uma segunda opção.

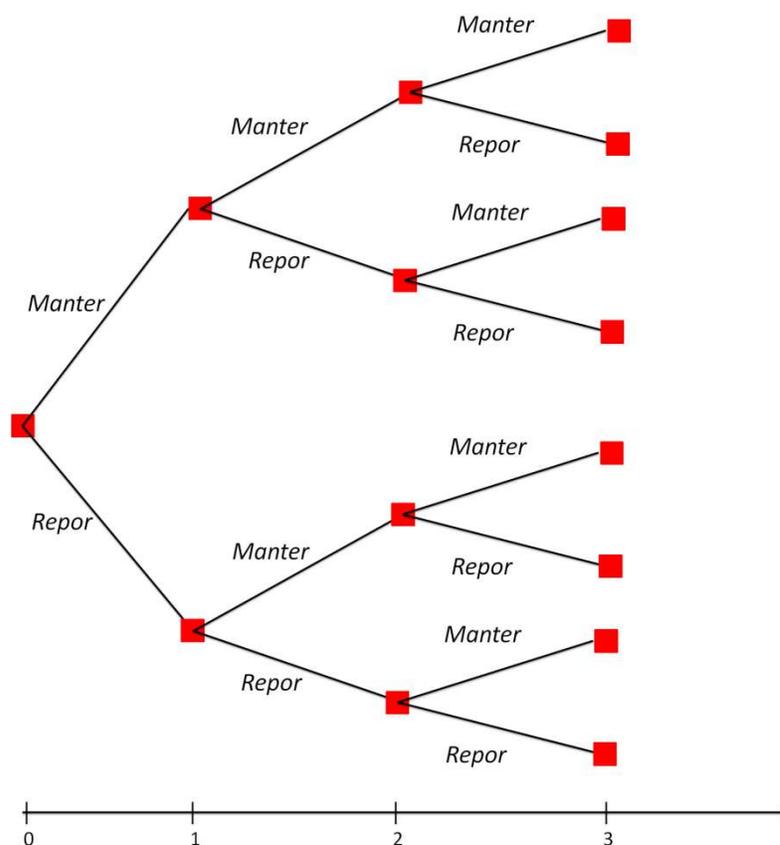


Figura 4.16 – Árvore de decisão para o método de PD

Na Figura 4.16, é possível observar as diferentes opções que o tomador de decisão possui. Sendo assim, caso não seja possível trocar o ativo devido a alguma restrição técnica, o modelo indica qual política deve ser seguida para os próximos anos. Na prática, ocorre que por meio do diagrama de árvore de decisão é possível seguir uma nova política que passa a ser a nova política ótima.

Por fim, comparando os métodos, ocorre que ambos os métodos são para problemas de previsão de custo de ciclo de vida. Embora o de AE seja utilizado para vida econômica e PD para reposição de ativos, ambos devem ser utilizados juntos. Dessa forma, uma vez que por meio de AE, principalmente com os lemas e teoremas estabelecidos, é possível atingir resultados mais eficientes e menos trabalhosos quando comparado com o método de PD, este último fornece alternativas para restrições orçamentárias e técnicas dos ativos. Além disso, há casos que o método de AE não consegue modelar, sendo estes casos supridos pelo método de PD, assim como há casos em que o método de PD não consegue modelar e o AE sim.

5. ESTUDO DE CASO

Para o estudo de caso, foram levantados dados de custos de manutenção para dois equipamentos: transformador e gerador elétrico. Neste capítulo, a fim de a dissertação ficar mais organizada, consta todo o procedimento feito para o transformador. Logo, o procedimento para o gerador, que usa a mesma metodologia, encontra-se no Anexo A da dissertação.

Em relação aos dados de custo de aquisição e valores de revenda, no projeto de pesquisa que gerou esta dissertação tais dados não foram disponibilizados, comprometendo este estudo de caso. Logo, como foram fornecidos apenas dados sobre custos de manutenção, por este motivo somente o Capítulo 5 e o Anexo A são, de fato, os *estudos de caso*. Já em relação a valores de custos de aquisição e de revenda, nos Anexos B, C e D da dissertação, encontram-se estudos de casos com valores hipotéticos de aplicação da metodologia formulada no Capítulo 4.

5.1. Levantamento de dados de custos de manutenção de equipamentos

Para o Estudo de Caso 1, foram levantados dados de custos de manutenção de um transformador de 138kV, o qual é utilizado em usinas hidrelétricas. Sendo assim, todos os dados foram modelados para ajustar alguma função de acordo com a metodologia do Capítulo 3, conforme mostra o gráfico da Figura 5.1.

Custos de manutenção acumulado

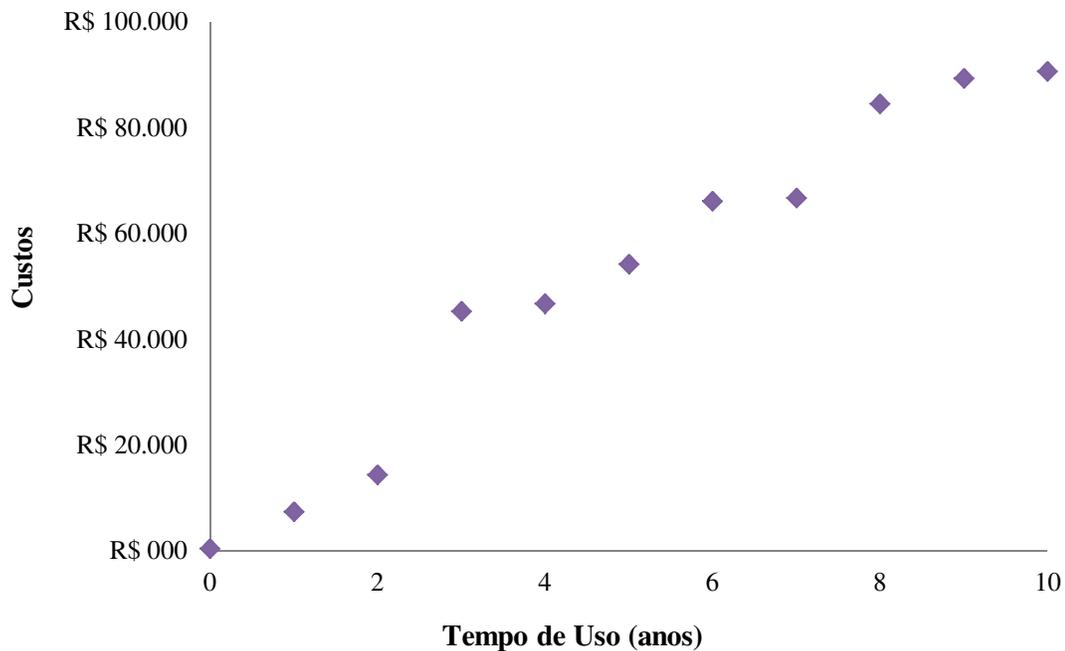


Figura 5.1 – Custos de manutenção acumulado para transformadores de 138kV

Na Figura 5.1 é possível verificar como o custo (eixo vertical) varia ao longo do tempo de uso (eixo horizontal). Nota-se que o comportamento dos custos exibe um aumento rápido nos primeiros anos de uso, seguido por um aumento menos acentuado a partir do terceiro ano de uso.

5.2. Aplicação do método de estimativas de custos de manutenção

Para os métodos de regressão foram utilizados oito modelos diferentes. Em cada um dos modelos a relação entre os estimadores β_1 e β_2 é linear. Contudo, a relação entre as variáveis *custo de manutenção* e *idade do ativo* não necessariamente é linear. Afinal, conforme o equipamento envelhece, seu desempenho e disponibilidade não são mais os mesmos, logo, é de se esperar que a curva de custo de manutenção sofra alterações. Sendo assim, é natural testar outros modelos além do linear, a fim de se encontrar o que mais se aproxima da de custo de manutenção verdadeira. Os modelos utilizados foram os seguintes:

- | | | |
|-----|--------------------------|--|
| (1) | Linear | $c(x) = b_1 + b_2x + e$ |
| (2) | Log-Linear (Exponencial) | $\ln(c(x)) = b_1 + b_2x + e$ |
| (3) | Log-Log | $\ln(c(x)) = b_1 + b_2\ln(x) + e$ |
| (4) | Linear-Log | $c(x) = b_1 + b_2\ln(x) + e$ |
| (5) | Quadrático | $c(x) = b_1 + b_2x^2 + e$ |
| (6) | Cúbico | $c(x) = b_1 + b_2x^3 + e$ |
| (7) | Inverso | $c(x) = b_1 + b_2\frac{1}{x} + e$ |
| (8) | Log-Inverso | $\ln(c(x)) = b_1 + b_2\frac{1}{x} + e$ |

Nisso, dado o conjunto de modelos acima, questiona-se qual o critério para escolher o modelo que melhor se ajuste aos dados. Conforme já discutido na seção 3.2, um modelo de regressão linear tem uma lista de pressupostos que precisam estar bem definidos. Em síntese, espera-se que o modelo escolhido tenha o erro aleatório e com uma distribuição Normal $N(0, \sigma^2)$ e covariância nula entre cada um dos erros, ou seja, $cov(e_i, e_j) = 0$.

Apesar de a distribuição Normal ser opcional para os erros no modelo de regressão simples, os testes de hipótese e previsões utilizam esse pressuposto como obrigatório. Logo, este foi considerado na avaliação da escolha do modelo. Para avaliar se os resíduos do modelo são normalmente distribuídos foi utilizado o teste de Jarque-Bera. Além disso, para avaliar se a covariância entre os erros é nula foi utilizado o teste de Durbin-Watson²⁷.

Além destes testes, foram utilizadas estatísticas descritivas como coeficiente de determinação²⁸. Não só, mas também foram feitos testes de hipóteses nos parâmetros para testar a

²⁷ Mais informações sobre o teste de Durbin-Watson no Apêndice III - Inferência no modelo de regressão linear simples.

²⁸ O coeficiente de determinação, indicado por R^2 , com valores entre 0 e 1, mede a proporção da variação da variável dependente, em torno de sua média, explicada pela variável independente no modelo de regressão linear.

significância entre as variáveis e o Teste F^{29} . Os resultados obtidos dos ajustes, com cada um dos modelos, aos dados exibidos na Figura 5.1 podem ser vistos na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Resultados do modelo de regressão para o Estudo de Caso 1

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6	Modelo 7	Modelo 8
R²	0,95736	0,64737	0,94038	0,94552	0,82492	0,69947	0,75751	0,92906
Durbin-Watson	1,75510	0,81397	1,70925	2,25878	0,67858	0,52815	1,15884	2,56294
Jarque-Bera (valor-p)	0,78828	0,20609	0,39808	0,63734	0,55607	0,49684	0,76753	0,08318
F (valor-p)	0,00000	0,00282	0,00000	0,00000	0,00011	0,00133	0,00105	0,00001
Parâmetros significativos	1	2	2	1	2	2	2	2

Na Tabela 5.1, estão presentes todas as estatísticas feitas para cada um dos oito modelos. Percebe-se que, para um nível de 5% para os testes de hipótese, todos os modelos apresentam os erros com uma distribuição Normal $N(0, \sigma^2)$, conforme exigido pelo modelo. Contudo, as estatísticas de Durbin-Watson indicam que apenas dois modelos apresentam valores para $d > 2$. Sendo assim, os dois são os candidatos mais prováveis. Logo, para a decisão final foi levado em conta que o teste de normalidade de Jarque-Bera para o Modelo 8 apresentou probabilidade de apenas 8,31%. Logo, caso fosse feito um teste de hipótese com nível descritivo de 10%, a hipótese nula de que os erros são normalmente distribuídos seria rejeitada. Por isso, o modelo escolhido é o Modelo 4.

Porém, como é possível ver na Tabela 5.1, este modelo possui apenas um parâmetro significativo. Sendo assim, foi feito um teste para o modelo sem intercepto. Novamente, as estatísticas foram a favor do modelo 4.

Por fim, o modelo estimado para o estudo de caso é o seguinte, conforme a equação (5.1).

$$\hat{c}(x) = 37653,47 \ln(x) \quad (5.1)$$

$$(1303,353)$$

²⁹ O Teste F testa a hipótese nula de que todos os parâmetros da equação são iguais a zero contra a hipótese alternativa de que ao menos um dos parâmetros é diferente de zero. Quando o valor do F de significação é menor do que o valor escolhido para nível de significância, o procedimento conduz à rejeição da hipótese nula.

Na equação (5.1), é possível ver a estimativa do modelo com o erro-padrão da estimativa. Assim, é possível realizar previsões com o modelo estimado. Na Figura 5.2 é possível visualizar como fica o ajuste e a previsão de custos de manutenção futuros.

Ajuste por regressão e previsão

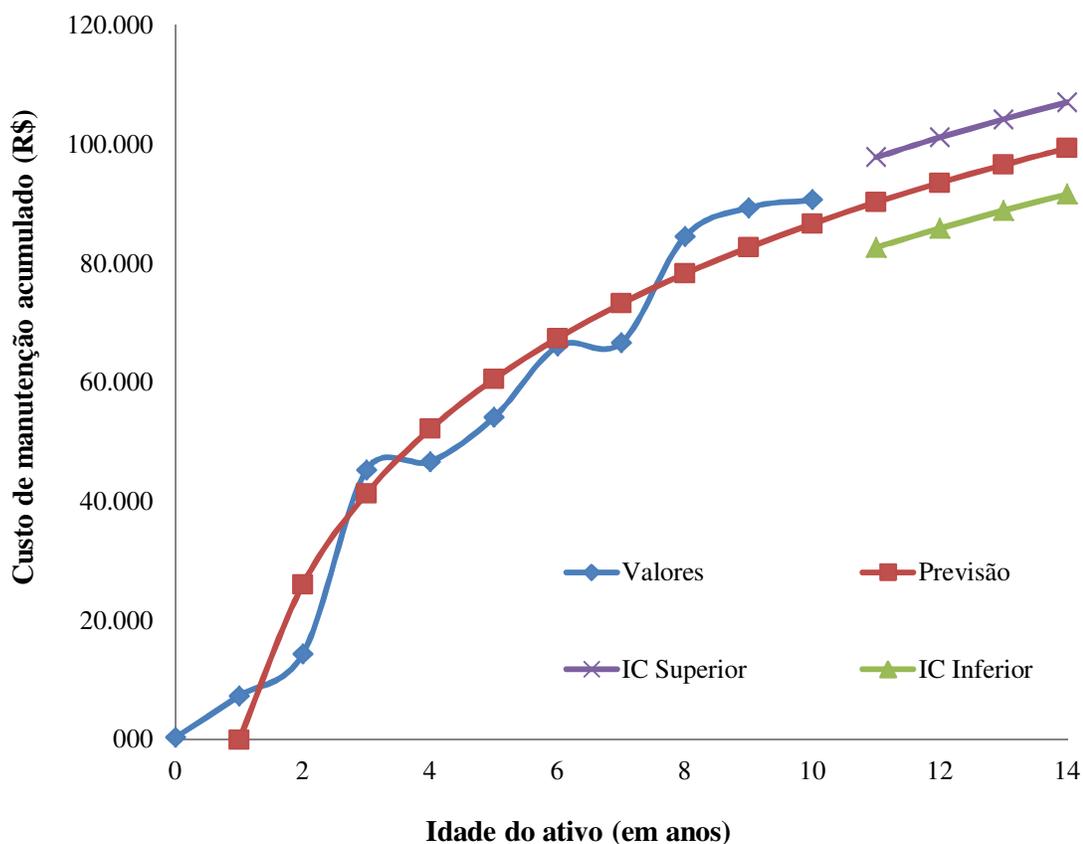


Figura 5.2 – Ajuste de regressão e previsão para o Estudo de Caso 1

Na Figura 5.2, é possível observar como fica o ajuste do modelo linear-log utilizado para o ajuste de regressão linear simples aos dados de custo de manutenção acumulado. É possível ver que a função consegue acompanhar a taxa de crescimento dos custos de manutenção acumulado. Além disso, seguem os valores previstos para os próximos anos com os intervalos de confiança superiores e inferiores, os quais são calculados por meio da equação (3.14).

Por fim, de acordo com o modelo, em quatro anos, para a modelagem dos custos de manutenção do transformador de 138kV se espera que os custos de manutenção aumentem em média 9,54%. Porém, com aumento mínimo em 1,04% e máximo em 18,04%.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O Capítulo 6 resume os principais resultados desta dissertação. Primeiramente, serão expostos os resultados referentes ao Capítulo 3 - MODELAGEM ESTATÍSTICA DOS CUSTOS DE MANUTENÇÃO, em seguida os do Capítulo 4 - MODELOS PARA DETERMINAR VIDA ECONÔMICA E ORIENTAR REPOSIÇÃO ENTRE ATIVOS.

A metodologia de previsão de custos de manutenção formulada no Capítulo 3 apresentou os seguintes resultados:

Foi possível modelar os custos de manutenção utilizando dados de custo de manutenção acumulado ao longo dos anos. O modelo consistiu em duas partes distintas: tendência estacionária e termo aleatório. Dessa forma, a série temporal de custos de manutenção é estacionária em torno da tendência; isto é, sua média e variância acompanham a tendência do modelo.

Apesar de a série temporal de custos de manutenção apresentar poucos dados, a ponto de não ser possível realizar testes para verificar a presença de raízes unitárias, os testes de normalidades confirmam o pressuposto de que os resíduos possuem distribuição Normal $N(0, \sigma^2)$. Logo, a modelagem e a previsão dos dados para o Estudo de Caso 1 e o Estudo de Caso 2 são válidas, sendo que em ambos foi possível estimar intervalos de confiança dos custos para os próximos anos.

No Capítulo 4 da dissertação foram abordados os métodos de engenharia econômica e programação dinâmica para modelar os problemas de VERA. Logo, é possível listar resultados para VPL, AE, sendo este último comparado com o método de PD de Bellman (1955).

Em relação ao VPL, conforme o *Lema 1* estabelecido anteriormente, a função $VPL(t)$ de um ativo não possui ponto crítico. Porém, como a função é contínua, ela possui mínimo em $t = 0$, o qual é nulo e possui máximo, tal que a partir de algum t_0 , a função atinge uma assíntota horizontal.

Já para a AE (anuidades equivalentes), a metodologia desenvolvida conseguiu determinar uma curva de custo equivalente de propriedade para o ativo pela função $AE(t)$, dividida em dois

regimes, a qual determina os custos ao longo de cada ano do ativo. Dessa maneira, é possível determinar qual o ponto de mínimo da curva, representando a vida econômica do ativo.

Sendo assim, dada as características do ativo, é possível modelar pelo método de AE e encontrar a vida econômica. Contudo, não são todos os ativos que podem ser modelados. Na Tabela 6.1 há um resumo de situações em que ativos podem ser modelados, ou não, pelo método de AE.

Tabela 6.1 – Situações em que ativos são modelados pelo método de AE

CEP no Regime 1	Há ponto de mínimo ³⁰ no Regime 2	Possível modelar o ativo por AE?
Crescente	Sim	Sim
Crescente	Não	Não
Decrescente	Sim	Sim
Decrescente	Não	Sim

Na Tabela 6.1, é possível observar que a partir do CEP, ou seja, do comportamento de $AE(t)$ nos *Regime 1* e *Regime 2* é possível saber se o ativo pode, ou não, ser modelado por esta metodologia. Assim sendo, a modelagem por AE só não é bem sucedida na situação em que não há ponto de mínimo no *Regime 2* e a função $AE(t)$ é crescente no *Regime 1*.

Em relação ao método de PD, foi constatado que nas situações de *desvalorização excessiva* e *desvalorização amena* do ativo, este método não consegue encontrar efetivamente o momento de reposição entre os ativos. Logo, na primeira situação, a vida econômica é maior do que deveria ser e, na segunda, ocorrem reposições anualmente, comprometendo novamente o cálculo do momento de reposição.

Comparando os métodos de AE com o de PD, foi constatado que na situação em que um ativo não consegue ser modelado pelo método de AE, este é modelado por de PD. Da mesma forma, quando um ativo não consegue ser modelado pelo método de PD, o método de AE consegue modelar perfeitamente a vida econômica do ativo.

³⁰ Este ponto de mínimo na Tabela 6.1, exclui a possibilidade de ponto de mínimo em $t = A/b$, conforme *Weierstrass*. Para esta situação será considerado o ponto de mínimo encontrado para $t > A/b$ calculado pela equação (4.35).

7. CONCLUSÕES

- Com o modelo de regressão de séries temporais, utilizando formas funcionais para testar as diferentes análises entre as variáveis, foi possível realizar uma análise estatística dos dados de custos de manutenção e estabelecer previsões. Assim, conclui-se que modelos de regressão linear simples, com uso de formas funcionais, conseguem captar a relação entre as variáveis *custo de manutenção* e *idade do ativo*.
- O método do VPL não calcula a vida econômica de ativos; porém, dada a oportunidade de repor um ativo em operação por um novo, este método pode ser utilizado;
- Na comparação do método de AE, desenvolvido por meio de lemas e teoremas nesta dissertação, para estimativa de vida econômica, com o método de PD de Bellman (1955), para reposição de ativos, percebe-se que ambos os métodos são complementares; isto é, quando o método de AE não consegue modelar a vida econômica, o método de PD consegue, e vice-versa. Assim, recomenda-se para o estudo de VERA, utilizar o método de AE junto do método de PD. De tal forma que o método de AE atinge a vida econômica facilmente e o método de PD consegue exibir alternativas para restrições orçamentárias e técnicas do ativo, além de suprir limitações do método de AE em casos específicos. Dessa maneira, apesar de AE ser utilizado para vida econômica e PD para reposição, ambos os métodos são para problemas de determinar custo de ciclo de vida mínimo de ativos e, conforme citado anteriormente, uma vez que um método supre as falhas do outro, ambos devem ser utilizados juntos;
- Ocorre que, por meio de modelagem estatística de custos de manutenção e modelagem de problemas de VERA, é possível quantificar as despesas ao longo do ciclo de vida dos ativos, de modo que resulte em melhores retornos para as empresas que adotam as práticas de gestão econômica de ativos.

REFERÊNCIAS

ABENSUR, E. O.: Um Modelo Alternativo de Otimização para a Política de Reposição de Equipamentos. **Sinergia**, São Paulo, v. 11, n. 2, p. 140-150, jul./dez. 2010.

ADAIR S.; FILMATER, E.; MAHLANGU, F.: **Asset Integrity Management in the Digital Age**. 19th World Petroleum Congress. Madrid, Spain. June 29 - July 3, 2008.

AKERLOF, G. A.: The Market for "Lemons": Quality Uncertainty and the Market Mechanism. **The Quarterly Journal of Economics**, Vol. 84, No. 3. (Aug., 1970), pp. 488-500.

AIRLIE, C. J.; LEMANCZYK, Z. R.: **Intelligent Asset Management: Successful Integration of Modeling Tools and Workflow Processes**. Asia Pacific Conference on Integrated Modelling for Asset Management, Malaysia, March, 2004.

ALCHIAN, A.: **Economic replacement policy**, RAND Report No. R-224, 1958.

AMADI-ECHENDU, J. E.: **Managing Physical Assets is a Paradigm Shift from Maintenance**. Engineering Management Conference. Vol. 3, pp. 1156-1160, Oct., 18-21, 2004.

ANDERS, G.J.; ENDRENYI, J.; YUNG, C.: Risk-based planner for asset management [of electric utilities]. **IEEE Computer Applications in Power**; DOI: 10.1109/67.954523. Nov/2001.

ARANTES, José G.: **Diagnóstico de Falhas em Transformadores de Potência pela Análise de Gases Dissolvidos em Óleo Isolante Através de Redes Neurais**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá-MG, 2005.

BARRINGER, P. E.: **Life cycle cost and good practices**, NPRA Manitenance Conference, San Antonio – Texas, May, 1998.

BARLOW, Richard; HUNTER, Larry: Optimum Preventive Maintenance Policies. **Operations Research**, Vol. 8, No. 1 (Jan. - Feb., 1960), pp. 90-100

BAUMEISTER, Johann; LEITÃO, Antonio: **Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica**. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

BECHARA, Ricardo: **Análise de Falhas de Transformadores de Potência**. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

BECHARA, R.; BRANDAO JR., A. F.: **Análise de falhas em transformadores de potência e seus mecanismos de ocorrência**. XIII ERIAC. Puerto Iguazú, Argentina. Mayo, 24-28, 2009.

BELLMAN, Richard: The theory of dynamic programming. **Bulletin of the American Mathematical Society**, vol. 60 (1954), pp. 503-516.

BELLMAN, Richard: Equipment Replacement Policy. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, Vol. 3, No. 3 (Sep., 1955), pp. 133-136.

BELLMAN, Richard; DREYFUS, Stuart E.: **Applied Dynamic Programming**. Princeton, New Jersey, USA: Princeton Univ. Press, 1962.

BELO, A.; KOVALESKI, J. L.; MARÇAL, R. F. M.: **Medir e avaliar a gestão da manutenção industrial, após o processo de aquisição entre empresas: um estudo de caso**. Encontro Paranaense de Empreendedorismo e Gestão Empresarial, 2007, Ponta Grossa. IV EPEGE, 2007.

BLANCHARD, B.S., LOWERY, E.E.: **Maintainability principles and practices**. New York: McGraw-Hill Book Company, 1969.

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M.: **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. San Francisco, Holden-Day, 1970.

BRANDT, H.: **Optimizing Maintenance and Inspection for New Offshore Installations**. SPE 97267. Annual Technical Conference and Exhibition, Texas, U.S.A., October, 2005.

BROWN, Robert J. & YANUCK, Rudolph R.: **Introduction to Life Cycle Costing**. The Fairmont Press, Inc. e Prentice-Hall, Inc. EUA, 1985.

BUENO, R.L.S.: **Econometria de séries temporais**. 2ª Edição, Cengage Learning, 2011.

BUSER, Stephen A.: LaPlace Transforms as Present Value Rules: A Note. **The Journal of Finance**, Vol. 41, No. 1 (Mar., 1986), pp. 243-247

CESCA, Igor G.; NOVAES, Douglas D.: **Physical Assets Management: An Analytical Approach**. arXiv: 1210.3678 [q-fin.GN], 2012. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1210.3678>

CESCA, Igor G.; LIMA, Gabriel A. C.; ELIAS, Antonio J.; CARVALHO, Marcos H.: **Modelo para previsão de custos de ciclo de vida de equipamentos e sua aplicação na gestão de ativos na indústria do petróleo**. (Apresentação em congresso) Rio Oil & Gas Expo and Conference, Rio de Janeiro, 2012.

CORLESS, R. M.; GONNET G. H.; HARE D. E. G.; JEFFREY, D. J.; KNUTH, D. E.: On the Lambert W Function, **Adv. Comput. Math.** (1996), no. 4, 329-359.

COSTA, H. L. A.; PEIXOTO, J. A. A.; DIAS, L. M.: **Medir e avaliar desempenho no processo de gestão da manutenção industrial: um estudo de caso**. XXVI ENEGEP - Fortaleza, CE, Brasil, 2006.

DHILLON, B. S.: **Life Cycle Costing for Engineers**. CRC Press, 2010.

DICKEY, David A.; FULLER, Wayne A.: Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root. **Journal of the American Statistical Association**, Vol. 74, No. 366 (Jun., 1979), pp. 427-431

DREYFUS, Stuart E.: A Note on an Industrial Replacement Process. **Operations Research**, Vol. 8, No. 4 (Dec., 1957), pp. 190-193

DREYFUS, Stuart E.: Richard Bellman on the birth of dynamic programming. **Operations Research**. 2002 INFORMS Vol. 50, No. 1, January – February 2002, pp. 48–51.

EDWARD, E.O.; BELL, P.W.: **The Theory and Measurement of Business Income**. University of California Press. ISBN: 0-520-00376-4. 1961.

ELANDT-JOHNSON, Regina C.: 'Optimal' Policy in a Maintenance Cost Problem. **Operations Research**, Vol. 15, No. 5 (Sep. - Oct., 1967), pp. 813-819

FABRYCKY, Wolter J.; BLANCHARD, Benjamin S.: **Life-Cycle Cost and Economic Analysis**. Prentice-Hall Inc., 1991.

FEINSTEIN, C. D.; MORRIS, P.A.: **The role of uncertainty in asset management**. Transmission and Distribution Conference and Exposition, 2010 IEEE PES. April, 19-22, 2010.

FELDENS, A. G.; MULLER, C. J.; FILOMENA; T. P.; NETO, F. J. K.; CASTRO, A. dos S.; ANZANELLO, M. J.: Política para Avaliação e Substituição de Frota por Meio da Adoção de Modelo Multicritério. **ABCustos Associação Brasileira de Custos - Vol. V, n° 1 – jan./abr., 2010.**

FERRERO, R.; SHAHIDEHPOUR, M.: Time management for assets: chronological strategies for power system asset management. **IEEE Power & Energy Magazine**. May/June, 2005.

FIDLER, E. S.: **Asset Performance Management Helps Oil and Gas Companies Increase Asset Availability, Improve Uptime and Empower More Intelligent Decision Making**. OTC 19890. Offshore Technology Conference, Houston, Texas, USA, May, 2009.

HEDDING, R.: **The Future of Asset Management**. 18th World Petroleum Congress. Johannesburg, South Africa. September, 25-29, 2005.

GRANT, Eugene L.; IRESON, W. Grant; LEAVENWORTH, Richard S.: **Principles Of Engineering Economy**, 7ª Edição, John Wiley & Sons Inc., New York, EUA, 1990.

GRAY, C.G.: **Using Simulation to Assess Managing, Skills and Logistics Requirements for High Productivity and Low Life Cycle Cost**. SPE 27615. European Production Operations Conference and Exhibition, Aberdeen, Reino Unido, Março, 1994.

GUIDORIZZI, Hamilton L.: **Um curso de cálculo Vol. 1**. 5ª Edição, Editora LTC, Rio de Janeiro, 2001.

GUJARATI, Damodar N.: **Econometria básica**, 3.ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.

GULATI, Ramesh: **Maintenance and Reliability - best practices**. Industrial Press, Inc. USA, 2009.

GUPTA, S. K.; COZZOLINO, J. M.: **Fundamentals of Operations research for management: an introduction to quantitative methods**. San Francisco, 1975.

HASTINGS, Nicholas A. J.: **Physical Asset Management**. Springer-Verlag London Limited, 2010.

HEDDING, R.: **The Future of Asset Management**. 18th World Petroleum Congress. Johannesburg, South Africa, September 25 - 29, 2005.

HILL, R. Carter; GRIFFITHS, William E.; JUDGE, George G.: **Econometria**. Traduzido de *Undergraduate Econometrics*, 2nd ed. 3^a Edição, Editora Saraiva, 2010.

HIRSCHEY, M.: **Fundamentals of Managerial Economics**. South-Western College Pub, 2009.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J.: **Introdução à Pesquisa Operacional**. Traduzido de *Introduction to operations research*. 8^a Edição, 2006.

HOLM, D.W.: **The Economics and Related Factors Involved in the Replacement of Land Drilling Rigs**. IADC/SPE 23864. Drilling Conference, New Orleans, USA, February, 18-21, 1992.

HOSKINS, R.P.; BRINT, A.T.; STRBAC, G.: A structured approach to Asset Management within the electricity industry. **Utilities Policy**, Vol. 7, pp. 221 – 232, 1998.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). **Sistema nacional de índices de preços ao consumidor**. Disponível em: http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/defaultinpc.shtm. Visualizado em 22 de outubro de 2011.

IUDÍBUS, Sérgio de (Coordenação); Equipe de professores da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP: **Contabilidade introdutória**. 10^a Ed., 3^a Reimpressão, São Paulo, Editora Atlas S.A., 2008.

JARQUE, C.; BERA, A.: "Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals". **Economics Letters** 6 (3): 255–259. doi:10.1016/0165-1765(80)90024-5, 1980.

KORN, M. S.; VELDMAN, E.: **Benefits of continuous risk management in (physical) asset orientated companies**. Infrastructure Systems and Services: Building Networks for a Brighter Future (INFRA) – International Conference. Nov, 10-12, 2008.

KOSTIC, T.: Asset Management in Electrical Utilities: How Many Facets It Actually Has. **Power Engineering Society General Meeting**, IEEE. Vol. 1, pp. 275-281. July, 13-17, 2003.

KOSTØL, P.; NEDREGAARD, R.: **Designing Wells on a Lifecycle Basis: A Case Study from the Statfjord Field**. Offshore Technology Conference. OTC 8802, Houston, Texas, EUA, 1998.

LANDUCCI, Amleto: **Manutenção pré-corretiva em transformadores de potência – um novo conceito de manutenção**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2009

LEATHAM, David J.; BAKER; Timothy G.: Empirical Estimates of the Effects of Inflation on Salvage Values, Cost and Optimal Replacement of Tractors and Combines. **North Central Journal of Agricultural Economics**, Vol. 3, No. 2 (Jul., 1981), pp. 109-117

LUCIO, João Carlos; TEIVE, Raimundo C. G.: **Abordagem Fuzzy para o Diagnóstico de Falhas em Transformadores: Uma Ferramenta para o Gerenciamento de Ativos no Setor Elétrico**. LABPLAN, Depto. De Engenharia Elétrica, UFSC, Santa Catarina, 2008.

LUND, J.R.: The value and depreciation of existing facilities: the case of reservoir. **The Engineering Economist**, Vol. 35, Issue 1, 1989.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P.: **Noções de probabilidade e estatística**. 6ª edição revista, 3ª impressão, Edusp, 2008.

MAKIS, V.; JIANG, X.; CHENG, K.: Optimal Preventive Replacement under Minimal Repair and Random Repair Cost. **Mathematics of Operations Research**, Vol. 25, No. 1 (Feb., 2000), pp. 141-156

MARQUES, Gláucio M.: **Transformação e Substituição de Equipamentos Utilizando Equações Diferenciais e Programação Dinâmica**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Viçosa, MG, 2003.

MOBLEY, Keith: **Engineering Maintenance Handbook**. 6th Edition, Mcgraw-Hill, EUA, 2002.

NASCIMENTO, F. S.: **Proposta de Modelo de Previsão Aplicado aos Custos de Manutenção de Aeronaves Militares**. Dissertação de Mestrado - Curso de Engenharia Aeronáutica e Mecânica. São José dos Campos, São Paulo, Brasil, 2006.

OTANI, Márcio; MACHADO, Waltair V.: A Proposta de Desenvolvimento de Gestão da Manutenção Industrial na Busca da Excelência ou Classe Mundial. **Revista Gestão Industrial**, v. 04, nº02, p. 01-16, 2008.

PARK, Chan S.: **Contemporary Engineering Economics**, 3rd Ed., Pearson Education, New Jersey, 2002.

PARK, Chan S.; SHARP-BETTE, Gunter P.: **Advanced Engineering Economics**. John Wiley & Sons, Inc., 1990.

PARKS, Richard W.: Durability, Maintenance, and the Price of Used Assets. **Econ. Inquiry**. Vol. 17, pp. 197-217, 1979.

PERRIN, R. K.: Asset Replacement Principles. **American Journal of Agricultural Economics**, Vol. 54, No. 1 (Feb., 1972), pp. 60-67.

PERRY, Gregory M.; BAYANER, Ahmet; NIXON, Clair J.: The Effect of Usage and Size on Tractor Depreciation. **American Journal of Agricultural Economics**, Vol. 72, No. 2 (May, 1990), pp. 317-325.

PINDYCK, Robert S.; RUBINFELD, Daniel L.: **Econometria – Modelos & Previsões**. Traduzido de *Econometric models and economic forecasts*, 4th Ed. Editora Elsevier, Rio de Janeiro, 2004.

PINTELON, L. M.; GELDERS, L.F.: Maintenance management decision making. **European Journal of Operational Research** (1992), pp. 301-317.

RIETZ, H.L.; CRATHORNE, A.R.; RIETZ, J.C.: **Mathematics of finance**. H. Holt and Company, 1921.

ROSS, Stephen; WESTERFIELD, Randolph W.; JAFFE, Jeffrey F.: **Administração Financeira**. Traduzido de *Corporate finance*, 2nd Ed. Editora Atlas, 2002.

SABINO, R. O.; AGRA, R. V.; TOMI, G.: **Desafios na gestão de ativos em projetos de mineração de pequeno porte: exemplo prático**. III Congresso Brasileiro de Carvão Mineral, 2011, Gramado - RS. III CBCM, 2011.

SASIENI, M. W.: A Markov Chain Process in Industrial Replacement. **OR**, Vol. 7, No. 4 (Dec., 1956), pp. 148-155.

SELLITTO, M.: Formulação Estratégica da Manutenção Industrial com base na Confiabilidade dos Equipamentos. **Revista Produção**, v.15, n.1, p. 44-59, 2005.

SCHIJNDEL, A.; WOUTERS, P. A. A. F.; WETZER, J. M.: Modeling of Replacement Alternatives for Power Transformer Populations. **IEEE Transactions on Power Delivery**, Vol. 27, No. 2, April 2012.

SILVA, A. H. C.; COSTA, A. P. C. S.: **Modelo de gestão de manutenção para uma empresa aeroportuária**. XXVI ENEGEP - Fortaleza, CE, Brasil, 9 a 11 de Outubro de 2006.

SILVA, H. M.; SANTIAGO, L. P.: **Análise de viabilidade da substituição de equipamentos sob incerteza: o caso da São Bento Mineração S.A.**. XXVI ENEGEP, Fortaleza, CE, Brasil, 2006.

SILVA, F. D.C.; SILVA, A.C.B; VASCONCELOS, M.T.C.; CAMPELO, S.M.: **Comportamento dos custos: uma investigação empírica acerca dos conceitos econométricos sobre a teoria tradicional da contabilidade de custos**. 30º EnANPAD, Salvador-BA, Setembro, 2006.

THUESEN, H. G.; FABRIYCKY, W. J.; THUESEN, G. J.: **Engineering Economy**. 4th Ed. Prentice-Hall Inc. EUA, 1971

VALOR ECONÔMICO: Gasto com manutenção muda o foco. **Jornal Valor Econômico**, 05 de setembro de 2012. Disponível em: <http://www.valor.com.br/empresas/2818198/gasto-com-manutencao-muda-foco>

WADDELL, R.: A Model for Equipment Replacement Decisions and Policies. **Interfaces**, Vol. 13, No. 4 (Aug., 1983), pp. 1 - 7.

WINKEL, J. D.: **Use of Life Cycle Costing in New and Mature Applications**. European Production Conference. SPE 35565. Norway. April, 16 – 17, 1996.

WATTS, Myles J.: Machinery Repair Functions and Depreciation. **North Central Journal of Agricultural Economics**, Vol. 4, No. 1 (Jan., 1982), pp. 69-72.

ANEXO A – ESTUDO DE CASO 2

O Estudo de Caso 2 foi modelar os dados de custos de manutenção de um gerador elétrico. Na Figura A.1, há um gráfico dos custos acumulados para um conjunto de diversos geradores elétricos, de tal maneira que a amostra incluiu equipamentos com 36 a 41 anos de uso e outros com 42 a 47 anos de uso.

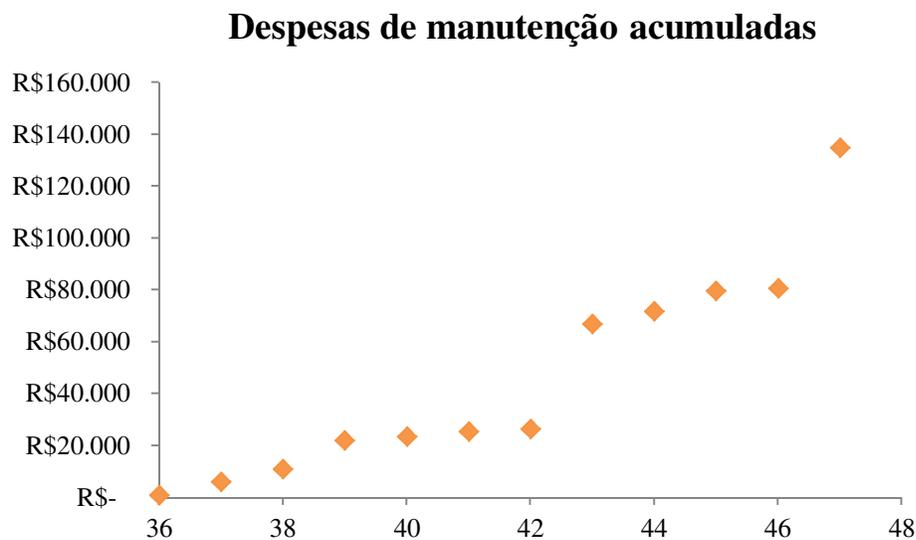


Figura A.1 – Despesas de manutenção acumuladas

Na Figura A.1 é possível ver os valores de custos de manutenção acumulados para o gerador elétrico, possibilitando o uso da proposta de ajuste por meio de regressão linear simples.

Dessa maneira, utilizando-se os mesmos oito modelos no Capítulo 5 – ESTUDO DE CASO, para analisar qual forma funcional de regressão linear simples se ajusta melhor aos dados apresentados na Figura A.1, segue na Tabela A.1 os resultados estatísticos dos oito modelos testados.

Tabela A.1 - Resultados do modelo de regressão para o Estudo de Caso 2

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6	Modelo 7	Modelo 8
R²	0,87345	0,83518	0,96287	0,66870	0,92355	0,92757	0,38997	0,90514
Durbin-Watson	1,42506	1,01779	1,78634	0,78818	2,30006	1,87922	0,58275	0,70884
Jarque-Bera (valor-p)	0,82530	0,10995	0,67771	0,46146	0,83758	0,99843	0,45555	0,65883
F (valor-p)	0,00008	0,00032	0,00000	0,01156	0,00000	0,00001	0,02995	0,00002
Parâmetros significativos	2	2	2	1	1	2	2	2

Na Tabela A.1, é possível ver os resultados estatísticos dos oito modelos testados. Em todos os modelos os resíduos são distribuídos normalmente, indicando que não há nenhum problema na realização de teste de hipóteses. Contudo, quando se verifica se a covariância dos erros é nula, por meio do teste de Durbin-Watson, apenas o Modelo 5 foi bem sucedido. Logo, por esse motivo, este é o modelo que melhor se ajusta aos dados de custos de manutenção. Porém, assim como no Estudo de Caso 1 (para o transformador), o intercepto do modelo é um parâmetro não significativo. Por isso, o modelo quadrático é estimado com intercepto nulo.

Assim, foi escolhido o modelo quadrático cuja estimativa é possível ver na equação (A.1), com o respectivo erro-padrão entre parênteses abaixo.

$$\hat{c}(x) = 831,83x^2$$

(A.1)

(42,05241)

Na Figura A.2 é possível visualizar como o modelo se ajusta aos dados, a previsão para os próximos anos e os respectivos intervalos de confiança.

Ajuste de regressão e previsão

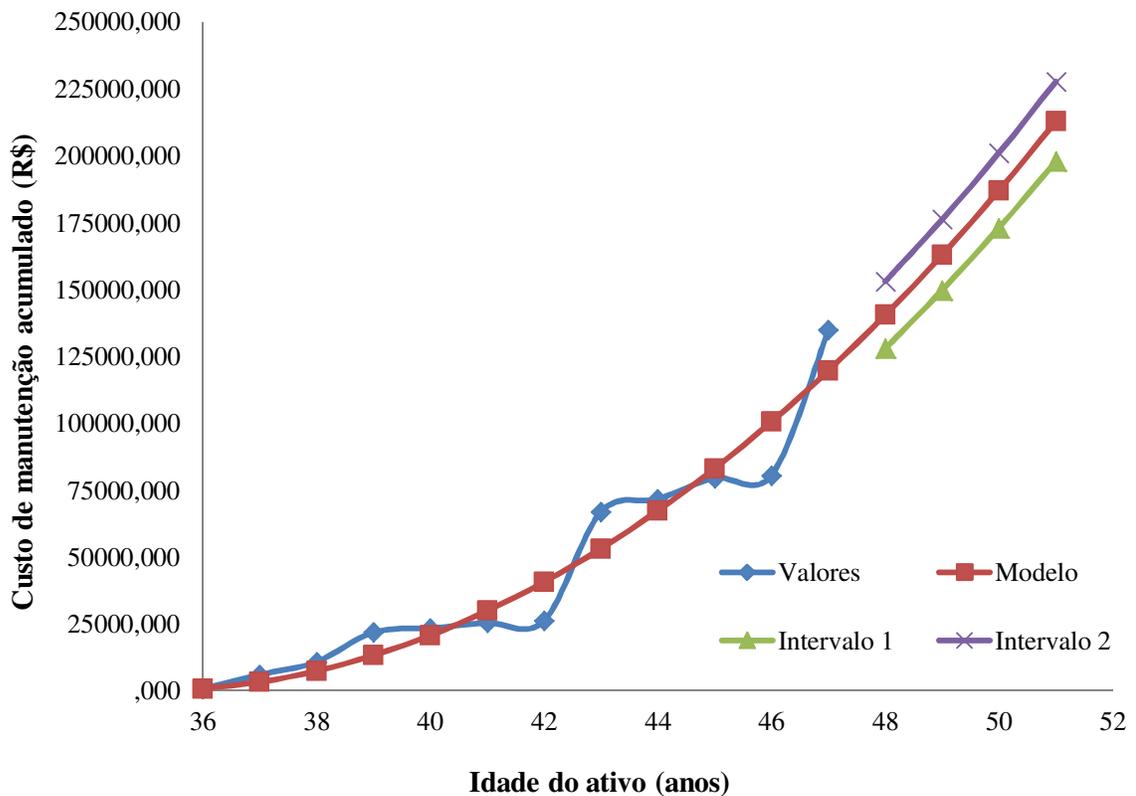


Figura A.2 – Ajuste de regressão e previsão para o Estudo de Caso 2

Na Figura A.2 é possível ver que os custos de manutenção acumulados do gerador elétrico são modelados por um modelo de regressão linear simples, tal qual a relação entre c e x é quadrática. Nisso, os custos de manutenção acumulados aumentarão em média 77,78%. Porém, o aumento mínimo será em 65,30% e o máximo em 90,25% de acordo com o modelo.

ANEXO B – CASO 1 DE COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE VERA

É importante salientar que os dados trabalhados aqui, no Anexo B, assim como nos Anexos C e D, não fizeram parte de uma coleta de dados, ao contrário do que foi feito para o Capítulo 5 e para o Anexo A da dissertação. Infelizmente dados referentes à aquisição, desvalorização, valor de revenda e taxa mínima de atratividade de ativos não foram disponíveis na pesquisa. Sendo assim, no Anexo B, assim como nos Anexos C e D, serão discutidos casos hipotéticos de comportamento de custos de propriedade de ativo por meio dos dois métodos (PD e AE). Dessa maneira, será possível realizar uma discussão válida para comparar os dois métodos e auxiliar nas considerações finais do Capítulo 4.

No anexo B, será analisado o Caso 1. Para o Caso 1 há um ativo, com os valores de mercado, manutenção ao longo dos anos, conforme descreve a Tabela A.2.

Tabela A.2 – Caso 1 de comparação de métodos de VERA

Ano	Manutenção	Revenda
0	R\$ 0,00	R\$ 75.000,00
1	R\$ 3.100,00	R\$ 52.000,00
2	R\$ 6.200,00	R\$ 29.000,00
3	R\$ 9.300,00	R\$ 6.000,00
4	R\$ 12.400,00	R\$ -
5	R\$ 15.500,00	R\$ -
6	R\$ 18.600,00	R\$ -
7	R\$ 21.700,00	R\$ -
8	R\$ 24.800,00	R\$ -
9	R\$ 27.900,00	R\$ -
10	R\$ 31.000,00	R\$ -

Na Tabela A.2 é possível visualizar os valores referentes do ativo ao longo dos anos. Sendo assim, para a curva de custo de propriedade calculada pela equação (4.6), os parâmetros A , b , r , a são, respectivamente, 75000, 23000, 0.1 e 3100.

Dessa maneira, como $a > br$, então $AE(t)$ é crescente no *Regime 1*. Além disso, como $\frac{bAr^2}{b\left(e^{-r\frac{A}{b}}-1\right)+Ar} > a$, há ponto crítico no *Regime 2*. Mais ainda, dado que $A < \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{-\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, o mínimo global da função está no *Regime 2*. Na Figura A.3 é possível visualizar o comportamento da função $AE(t)$ para este ativo.

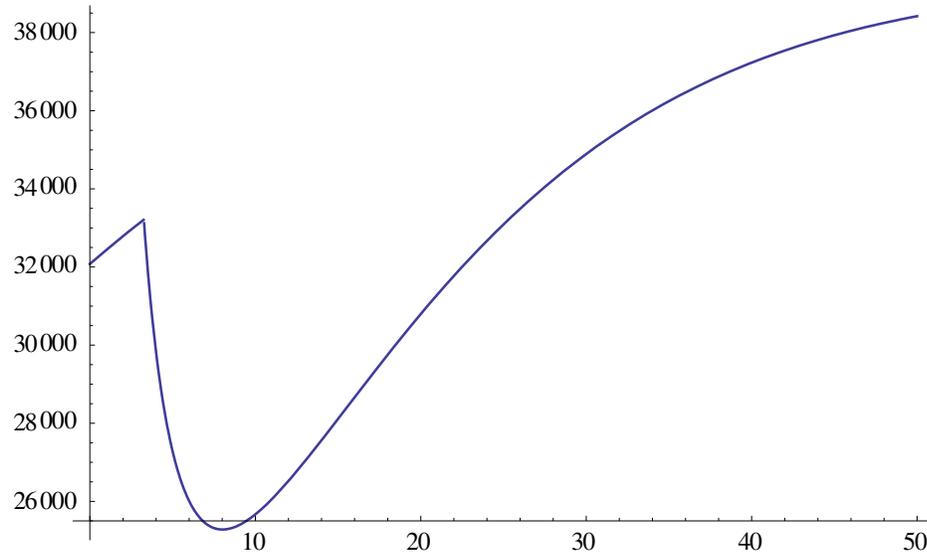


Figura A.3 – Comportamento de $AE(t)$ para Caso 1

Na Figura A.3 é possível ver que nos primeiros anos a curva de custo de propriedade do ativo é crescente. Depois, a partir do ano quatro, a curva fica decrescente, atingindo um mínimo; isto é, a vida econômica, no ano oito, cujo valor é de R\$25.644,65. Após este ano, o custo de propriedade volta a crescer.

Ainda para o Caso 1, caso o método seja resolvido por programação dinâmica, os resultados são possíveis de se visualizar na Tabela A.3.

Tabela A.3 – Resultados do Caso 1 para o método de PD

N	n	Manter	Trocar	Máximo	Decisão
10	0	R\$ 47.272,73	R\$ 47.272,73	R\$ 47.272,73	Indiferente
10	1	R\$ 23.263,64	R\$ 24.272,73	R\$ 24.272,73	Trocar
10	2	-R\$ 745,45	R\$ 1.272,73	R\$ 1.272,73	Trocar
10	3	-R\$ 9.300,00	-R\$ 21.727,27	-R\$ 9.300,00	Manter
10	4	-R\$ 12.400,00	-R\$ 27.727,27	-R\$ 12.400,00	Manter
10	5	-R\$ 15.500,00	-R\$ 27.727,27	-R\$ 15.500,00	Manter
10	6	-R\$ 18.600,00	-R\$ 27.727,27	-R\$ 18.600,00	Manter
10	7	-R\$ 21.700,00	-R\$ 27.727,27	-R\$ 21.700,00	Manter
10	8	-R\$ 24.800,00	-R\$ 27.727,27	-R\$ 24.800,00	Manter
10	9	-R\$ 27.900,00	-R\$ 27.727,27	-R\$ 27.727,27	Trocar
9	0	R\$ 22.066,12	R\$ 22.066,12	R\$ 22.066,12	Indiferente
9	1	-R\$ 1.942,98	-R\$ 933,88	-R\$ 933,88	Trocar
9	2	-R\$ 14.654,55	-R\$ 23.933,88	-R\$ 14.654,55	Manter
9	3	-R\$ 20.572,73	-R\$ 46.933,88	-R\$ 20.572,73	Manter
9	4	-R\$ 26.490,91	-R\$ 52.933,88	-R\$ 26.490,91	Manter
9	5	-R\$ 32.409,09	-R\$ 52.933,88	-R\$ 32.409,09	Manter
9	6	-R\$ 38.327,27	-R\$ 52.933,88	-R\$ 38.327,27	Manter
9	7	-R\$ 44.245,45	-R\$ 52.933,88	-R\$ 44.245,45	Manter
9	8	-R\$ 50.006,61	-R\$ 52.933,88	-R\$ 50.006,61	Manter
8	0	-R\$ 848,99	-R\$ 848,99	-R\$ 848,99	Indiferente
8	1	-R\$ 16.422,31	-R\$ 23.848,99	-R\$ 16.422,31	Manter
8	2	-R\$ 24.902,48	-R\$ 46.848,99	-R\$ 24.902,48	Manter
8	3	-R\$ 33.382,64	-R\$ 69.848,99	-R\$ 33.382,64	Manter
8	4	-R\$ 41.862,81	-R\$ 75.848,99	-R\$ 41.862,81	Manter
8	5	-R\$ 50.342,98	-R\$ 75.848,99	-R\$ 50.342,98	Manter
8	6	-R\$ 58.823,14	-R\$ 75.848,99	-R\$ 58.823,14	Manter
8	7	-R\$ 67.160,56	-R\$ 75.848,99	-R\$ 67.160,56	Manter
7	0	-R\$ 14.929,38	-R\$ 14.929,38	-R\$ 14.929,38	Indiferente
7	1	-R\$ 25.738,62	-R\$ 37.929,38	-R\$ 25.738,62	Manter
7	2	-R\$ 36.547,86	-R\$ 60.929,38	-R\$ 36.547,86	Manter
7	3	-R\$ 47.357,10	-R\$ 83.929,38	-R\$ 47.357,10	Manter
7	4	-R\$ 58.166,34	-R\$ 89.929,38	-R\$ 58.166,34	Manter
7	5	-R\$ 68.975,58	-R\$ 89.929,38	-R\$ 68.975,58	Manter

Tabela A.3 – Resultados do Caso 1 para o método de PD

N	n	Manter	Trocar	Máximo	Decisão
7	6	-R\$ 79.655,05	-R\$ 89.929,38	-R\$ 79.655,05	Manter
6	0	-R\$ 23.398,74	-R\$ 23.398,74	-R\$ 23.398,74	Indiferente
6	1	-R\$ 36.325,33	-R\$ 46.398,74	-R\$ 36.325,33	Manter
6	2	-R\$ 49.251,91	-R\$ 69.398,74	-R\$ 49.251,91	Manter
6	3	-R\$ 62.178,49	-R\$ 92.398,74	-R\$ 62.178,49	Manter
6	4	-R\$ 75.105,07	-R\$ 98.398,74	-R\$ 75.105,07	Manter
6	5	-R\$ 87.913,68	-R\$ 98.398,74	-R\$ 87.913,68	Manter
5	0	-R\$ 33.023,02	-R\$ 33.023,02	-R\$ 33.023,02	Indiferente
5	1	-R\$ 47.874,46	-R\$ 56.023,02	-R\$ 47.874,46	Manter
5	2	-R\$ 62.725,90	-R\$ 79.023,02	-R\$ 62.725,90	Manter
5	3	-R\$ 77.577,34	-R\$ 102.023,02	-R\$ 77.577,34	Manter
5	4	-R\$ 92.321,53	-R\$ 108.023,02	-R\$ 92.321,53	Manter
4	0	-R\$ 43.522,24	-R\$ 43.522,24	-R\$ 43.522,24	Indiferente
4	1	-R\$ 60.123,55	-R\$ 66.522,24	-R\$ 60.123,55	Manter
4	2	-R\$ 76.724,86	-R\$ 89.522,24	-R\$ 76.724,86	Manter
4	3	-R\$ 93.228,66	-R\$ 112.522,24	-R\$ 93.228,66	Manter
3	0	-R\$ 54.657,77	-R\$ 54.657,77	-R\$ 54.657,77	Indiferente
3	1	-R\$ 72.849,87	-R\$ 77.657,77	-R\$ 72.849,87	Manter
3	2	-R\$ 90.953,33	-R\$ 100.657,77	-R\$ 90.953,33	Manter
2	0	-R\$ 66.227,15	-R\$ 66.227,15	-R\$ 66.227,15	Indiferente
2	1	-R\$ 85.784,85	-R\$ 89.227,15	-R\$ 85.784,85	Manter
1	0	-R\$ 77.986,22	-R\$ 77.986,22	-R\$ 77.986,22	Indiferente

Na Tabela A.3, estão calculados todos os valores equações (4.40) e (4.41) nas colunas *Manter* e *Repor*, respectivamente. Mais ainda, na coluna *Máximo*, há a solução da equação (4.42) para cada estágio *N* e estado *n* do ativo. Por último, na coluna *Decisão* é possível ver a decisão tomada para cada estágio e estado, sendo que a política ótima está em destaque.

Com isso, percebe-se que para um horizonte de planejamento de 10 anos, a política ótima encontrada pelo método é de repor o ativo no último ano desse período. A reposição ocorreu no estágio 10, pois somente neste estágio o custo de reposição é menor que o custo de manutenção.

Ocorre que se o equipamento for mantido, o custo será a manutenção no estado nove, subtraído da revenda do ativo no estágio 11, esta última conforme a equação (4.43), ou seja,

$$-R\$27.900 + \frac{R\$0,00}{(1+0,1)} = -R\$27.900.$$

Enquanto que, se o ativo for repostado, o custo será a aquisição do novo ativo, menos a revenda do ativo em operação no estado nove, menos a manutenção no estado zero, mais a revenda do ativo no estágio 11, ou seja,

$$-R\$75.000,00 + R\$0,00 - R\$0,00 + \frac{R\$52.000,00}{(1+0,1)} = -R\$27.727,27.$$

Assim, percebe-se que o modelo de decisão para o método de PD baseia-se na comparação dos custos de manutenção e reposição. Logo, dado um estágio k e um horizonte de planejamento de N estágios, o método de PD calcula o valor presente dos custos de manutenção e reposição do estágio N até k . Se os custos de manutenção são menores, o equipamento é mantido. Caso contrário, o equipamento é repostado.

Comparando a metodologia de PD com a de AE, percebe-se que esta última encontrou um ponto de vida econômica para $t = 8$, sendo que neste ano as despesas anuais do ativo são menores, enquanto que o método de PD realizou a reposição no ano 10. Sendo assim, percebe-se que para ativos cuja desvalorização ocorre mais intensamente, o método de PD prolonga a vida econômica do ativo mais que o usual.

ANEXO C – CASO 2 DE COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE VERA

No Anexo C, continua a comparação entre os métodos de VERA. Agora, no Caso 2, será analisado um ativo com as seguintes características, de acordo com a Tabela A.4.

Tabela A.4 – Características do ativo para o Caso 2

Ano	Manutenção	Revenida
0	R\$ 0,00	R\$ 75.000,00
1	R\$ 1.225,00	R\$ 65.500,00
2	R\$ 2.450,00	R\$ 56.000,00
3	R\$ 3.675,00	R\$ 46.500,00
4	R\$ 4.900,00	R\$ 37.000,00
5	R\$ 6.125,00	R\$ 27.500,00
6	R\$ 7.350,00	R\$ 18.000,00
7	R\$ 8.575,00	R\$ 8.500,00
8	R\$ 9.800,00	R\$ -
9	R\$ 11.025,00	R\$ -
10	R\$ 12.250,00	R\$ -

Na Tabela A.4, é possível observar como se comportam os valores de manutenção e revenda do ativo ao longo dos anos. Para a modelagem por anuidades equivalentes, os parâmetros A , b , r , a são, respectivamente, 75000, 9500, 0.1 e 1225.

Sendo assim, como $a > br$, no *Regime 1* $AE(t)$ é crescente. Além disso, dado que $\frac{bAr^2}{b\left(e^{-r\frac{A}{b}}-1\right)+Ar} > a$, há ponto crítico no *Regime 2* e, como $A < \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right) \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$, o mínimo global da função está no *Regime 2*. Na Figura A.4 é possível ver como se comporta a curva do custo de propriedade para este ativo.

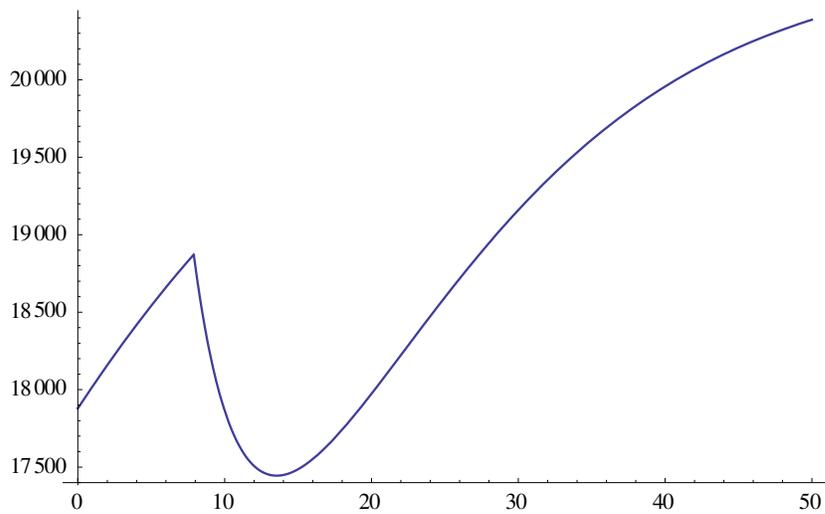


Figura A.4 – Comportamento de $AE(t)$ para o Caso 2

Na Figura A.4, é possível visualizar a curva de custo de propriedade do ativo. Percebe-se que para $t = 14$ o comportamento atinge seu ponto de vida econômica, cujo valor é de R\$17.449,38.

Já para o método de PD, é possível ver os resultados do método de acordo com a Tabela A.5.

Tabela A.5 – Resultados do Caso 2 para o método de PD

N	n	Manter	Trocar	Máximo	Decisão
10	0	R\$ 59.545,45	R\$ 59.545,45	R\$ 59.545,45	Indiferente
10	1	R\$ 49.684,09	R\$ 50.045,45	R\$ 50.045,45	Trocar
10	2	R\$ 39.822,73	R\$ 40.545,45	R\$ 40.545,45	Trocar
10	3	R\$ 29.961,36	R\$ 31.045,45	R\$ 31.045,45	Trocar
10	4	R\$ 20.100,00	R\$ 21.545,45	R\$ 21.545,45	Trocar
10	5	R\$ 10.238,64	R\$ 12.045,45	R\$ 12.045,45	Trocar
10	6	R\$ 377,27	R\$ 2.545,45	R\$ 2.545,45	Trocar
10	7	-R\$ 8.575,00	-R\$ 6.954,55	-R\$ 6.954,55	Trocar
10	8	-R\$ 9.800,00	-R\$ 15.454,55	-R\$ 9.800,00	Manter
10	9	-R\$ 11.025,00	-R\$ 15.454,55	-R\$ 11.025,00	Manter
9	0	R\$ 45.495,87	R\$ 45.495,87	R\$ 45.495,87	Indiferente
9	1	R\$ 35.634,50	R\$ 35.995,87	R\$ 35.995,87	Trocar
9	2	R\$ 25.773,14	R\$ 26.495,87	R\$ 26.495,87	Trocar
9	3	R\$ 15.911,78	R\$ 16.995,87	R\$ 16.995,87	Trocar
9	4	R\$ 6.050,41	R\$ 7.495,87	R\$ 7.495,87	Trocar
9	5	-R\$ 3.810,95	-R\$ 2.004,13	-R\$ 2.004,13	Trocar
9	6	-R\$ 13.672,31	-R\$ 11.504,13	-R\$ 11.504,13	Trocar
9	7	-R\$ 17.484,09	-R\$ 21.004,13	-R\$ 17.484,09	Manter
9	8	-R\$ 19.822,73	-R\$ 29.504,13	-R\$ 19.822,73	Manter
8	0	R\$ 32.723,52	R\$ 32.723,52	R\$ 32.723,52	Indiferente
8	1	R\$ 22.862,15	R\$ 23.223,52	R\$ 23.223,52	Trocar
8	2	R\$ 13.000,79	R\$ 13.723,52	R\$ 13.723,52	Trocar
8	3	R\$ 3.139,43	R\$ 4.223,52	R\$ 4.223,52	Trocar
8	4	-R\$ 6.721,94	-R\$ 5.276,48	-R\$ 5.276,48	Trocar
8	5	-R\$ 16.583,30	-R\$ 14.776,48	-R\$ 14.776,48	Trocar
8	6	-R\$ 23.244,63	-R\$ 24.276,48	-R\$ 23.244,63	Manter
8	7	-R\$ 26.595,66	-R\$ 33.776,48	-R\$ 26.595,66	Manter
7	0	R\$ 21.112,29	R\$ 21.112,29	R\$ 21.112,29	Indiferente
7	1	R\$ 11.250,92	R\$ 11.612,29	R\$ 11.612,29	Trocar
7	2	R\$ 1.389,56	R\$ 2.112,29	R\$ 2.112,29	Trocar
7	3	-R\$ 8.471,80	-R\$ 7.387,71	-R\$ 7.387,71	Trocar
7	4	-R\$ 18.333,17	-R\$ 16.887,71	-R\$ 16.887,71	Trocar
7	5	-R\$ 27.256,48	-R\$ 26.387,71	-R\$ 26.387,71	Trocar

Tabela A.5 – Resultados do Caso 2 para o método de PD

N	n	Manter	Trocar	Máximo	Decisão
7	6	-R\$ 31.527,87	-R\$ 35.887,71	-R\$ 31.527,87	Manter
6	0	R\$ 10.556,62	R\$ 10.556,62	R\$ 10.556,62	Indiferente
6	1	R\$ 695,26	R\$ 1.056,62	R\$ 1.056,62	Trocar
6	2	-R\$ 9.166,10	-R\$ 8.443,38	-R\$ 8.443,38	Trocar
6	3	-R\$ 19.027,47	-R\$ 17.943,38	-R\$ 17.943,38	Trocar
6	4	-R\$ 28.888,83	-R\$ 27.443,38	-R\$ 27.443,38	Trocar
6	5	-R\$ 34.786,70	-R\$ 36.943,38	-R\$ 34.786,70	Manter
5	0	R\$ 960,57	R\$ 960,57	R\$ 960,57	Indiferente
5	1	-R\$ 8.900,80	-R\$ 8.539,43	-R\$ 8.539,43	Trocar
5	2	-R\$ 18.762,16	-R\$ 18.039,43	-R\$ 18.039,43	Trocar
5	3	-R\$ 28.623,52	-R\$ 27.539,43	-R\$ 27.539,43	Trocar
5	4	-R\$ 36.524,28	-R\$ 37.039,43	-R\$ 36.524,28	Manter
4	0	-R\$ 7.763,12	-R\$ 7.763,12	-R\$ 7.763,12	Indiferente
4	1	-R\$ 17.624,48	-R\$ 17.263,12	-R\$ 17.263,12	Trocar
4	2	-R\$ 27.485,85	-R\$ 26.763,12	-R\$ 26.763,12	Trocar
4	3	-R\$ 36.878,89	-R\$ 36.263,12	-R\$ 36.263,12	Trocar
3	0	-R\$ 15.693,75	-R\$ 15.693,75	-R\$ 15.693,75	Indiferente
3	1	-R\$ 25.555,11	-R\$ 25.193,75	-R\$ 25.193,75	Trocar
3	2	-R\$ 35.416,47	-R\$ 34.693,75	-R\$ 34.693,75	Trocar
2	0	-R\$ 22.903,40	-R\$ 22.903,40	-R\$ 22.903,40	Indiferente
2	1	-R\$ 32.764,77	-R\$ 32.403,40	-R\$ 32.403,40	Trocar
1	0	-R\$ 29.457,64	-R\$ 29.457,64	-R\$ 29.457,64	Indiferente

Na Tabela A.5, estão calculados todos os valores equações (4.40) e (4.41) nas colunas *Manter* e *Repôr*, respectivamente. Mais ainda, na coluna *Máximo* há a solução da equação (4.42) para cada estágio *N* e estado *n* do ativo. Por último, na coluna *Decisão* é possível ver a decisão tomada para cada estágio e estado, sendo que a política ótima está em destaque.

Para este Caso 2, o método de PD define como política ótima realizar reposições dos ativos em todos os estágios; isto é, o ativo adquirido no início de um ano deve ser trocar por outro ativo

novo no início do próximo ano. No Caso 2, ao contrário do Caso 1, o ativo desvaloriza mais suavemente. Sendo assim, dada a baixa desvalorização, compensa trocar o ativo anualmente, de modo que trocando todo o ativo possui sempre manutenção nula.

Matematicamente, dado o ativo no estágio 10, o retorno de manter o ativo no estado um por mais um estágio é de R\$49.684,09; isto é, a manutenção de -R\$1.225,00 mais o valor presente do valor de revenda no estágio 11 de R\$50.909,09. Enquanto que se o ativo é trocado no estágio 10, o retorno é de R\$50.045,45; isto é, a aquisição por R\$75.000,00, a venda por R\$56.000,00 mais a revenda no estágio 11 pelo valor presente de R\$59.545,45.

Comparando a metodologia de PD com a de AE, percebe-se que esta última encontrou um ponto de vida econômica para $t = 14$. No método de AE, é calculado que no ano 14, o ativo possui o menor custo de propriedade ao longo de sua vida útil. Por isso, com esse método, o ativo deve ser mantido até o ano 14.

Enquanto o método de PD realiza reposições anualmente ao longo do horizonte de planejamento, ao se calcular o custo anual de se repor o ativo anualmente, tem-se uma anuidade de R\$9.500,00, a qual é o resultado do gasto de manutenção no ano zero (R\$00,00), mais a despesa de compra de um novo ativo (R\$75.000,00), subtraído da venda do ativo um estágio depois (R\$65.500,00). Contudo, tal situação é inverossímil. Como já foi comentado no Capítulo 4, os equipamentos do setor energético possuem restrições técnicas, as quais implicam que novos ativos podem levar mais de um ano para ficarem prontos.

Portando, em casos de desvalorização mais suave, o método de PD considera repor o ativo todos os anos, comprometendo a análise do custo de ciclo de vida. Por isso, para este ativo, o mais indicado é o método de AE.

ANEXO D – CASO 3 DE COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE VERA

No Anexo D, será apresentado mais um exemplo, o Caso 3, para comparação entre os métodos de VERA. Neste exemplo, o ativo possui as seguintes características de acordo com a Tabela A.6.

Tabela A.6 - Características do ativo para o Caso 3

Ano	Manutenção	Revenda
0	R\$ 2.000,00	R\$ 110.000,00
1	R\$ 7.000,00	R\$ 95.000,00
2	R\$ 12.000,00	R\$ 80.000,00
3	R\$ 17.000,00	R\$ 65.000,00
4	R\$ 22.000,00	R\$ 50.000,00
5	R\$ 27.000,00	R\$ 35.000,00
6	R\$ 32.000,00	R\$ 20.000,00
7	R\$ 37.000,00	R\$ 5.000,00
8	R\$ 42.000,00	R\$ -
9	R\$ 47.000,00	R\$ -
10	R\$ 52.000,00	R\$ -

Na Tabela A.6, estão os custos de manutenção e o valor de revenda ao longo dos anos para o ativo no Caso 3. Para a modelagem por anuidades equivalentes, os parâmetros A , b , r , a são, respectivamente, 130000, 17000, 0.1 e 5285,7.

Sendo assim, percebe-se que este ativo, diferente dos apresentados no Caso 1 e 2, possui um custo de aquisição de R\$130.000,00 e um valor de revenda de R\$110.000,00 ainda no ano zero. Para este ativo considera-se que este não pode ser revendido pelo mesmo valor de aquisição, mesmo que ele não tenha sido utilizado. Isso é baseado no fato de os ativos físicos serem considerados investimentos parcialmente irrecuperáveis, pois os possíveis compradores dos ativos não conseguem avaliar a qualidade destes. Por isso, eles irão oferecer um valor que corresponde à qualidade média dos equipamentos do mercado. Por sua vez, os vendedores, que

conhecem a qualidade dos equipamentos, ficarão relutantes em vender equipamentos cuja qualidade está acima do mercado. Logo, isso reduzirá a qualidade dos equipamentos no mercado e seu preço (Akerlof, 1970). Assim, será considerado que para qualquer tentativa de venda do ativo, mesmo que ocorra no primeiro ano de uso deste, o valor de revenda será menor que o custo de aquisição.

Dessa maneira, para o modelo de AE, considerou-se uma taxa de desvalorização de 17000, de modo que com essa taxa a função $R(t)$ a função em $t = 0$ seja o custo de aquisição e em $t = 8$ seja nula, igual à Tabela A.6. Além disso, outra diferença deste Caso 3 para os anteriores é em relação aos custos de manutenção. Para o Caso 1 e 2 foi considerado que o ativo não tinha nenhuma manutenção em seu primeiro ano de vida útil. Contudo, para este serão consideradas manutenções no primeiro ano. Apesar de o ativo ser novo, podem ocorrer manutenções preditivas no primeiro ano de vida como parte de um plano de manutenção da gestão econômica de ativos. Logo, no ano zero constam manutenções para este ativo.

Então, para o método de AE, como $a > br$, no *Regime 1* $AE(t)$ é crescente. Além disso, dado que $\frac{bAr^2}{b(e^{-r\frac{A}{b}}-1)+Ar} < a$, não há ponto crítico no *Regime 2* e, como $A > \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{-\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, o mínimo global da função está no *Regime 1*. Na Figura A.5 é possível ver como se comporta a curva do custo de propriedade para este ativo.

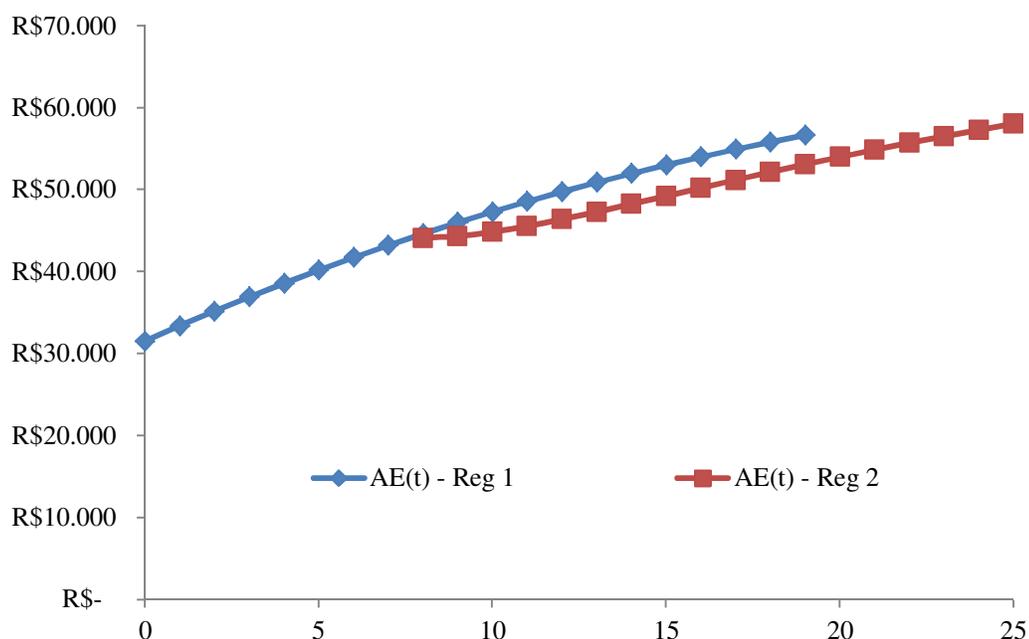


Figura A.5 – Comportamento de $AE(t)$ para o Caso 3

Na Figura A.5 é possível ver o comportamento da função $AE(t)$ ao longo dos anos. Em azul, tem-se a curva de $AE(t)$ para o *Regime 1* e em vermelho para o *Regime 2*. Percebe-se o comportamento crescente para ambas as curvas, de modo que o mínimo em cada uma delas é, respectivamente, R\$31.551,28 e R\$44.130,71. Logo, o ponto de vida econômica da curva é R\$31.551,28, o qual ocorre em $t = 0$.

Pelo método de anuidades equivalentes, é possível perceber que neste caso os custos equivalentes de propriedade só aumentam ao longo dos anos, sendo que o menor valor na curva, o ponto de vida econômica, ocorre em $t = 0$. Por isso não é possível determinar em qual momento deve ocorrer a reposição do ativo por este método.

Já pelo método de PD, foi possível obter os seguintes resultados, conforme é possível ver na Tabela A.7.

Tabela A.7 - Resultados do Caso 3 para o método de PD

N	n	Manter	Trocar	Máximo	Decisão
10	0	R\$ 84.363,64	R\$ 64.363,64	R\$ 84.363,64	Manter
10	1	R\$ 65.727,27	R\$ 49.363,64	R\$ 65.727,27	Manter
10	2	R\$ 47.090,91	R\$ 34.363,64	R\$ 47.090,91	Manter
10	3	R\$ 28.454,55	R\$ 19.363,64	R\$ 28.454,55	Manter
10	4	R\$ 9.818,18	R\$ 4.363,64	R\$ 9.818,18	Manter
10	5	-R\$ 8.818,18	-R\$ 10.636,36	-R\$ 8.818,18	Manter
10	6	-R\$ 27.454,55	-R\$ 25.636,36	-R\$ 25.636,36	Trocar
10	7	-R\$ 37.000,00	-R\$ 40.636,36	-R\$ 37.000,00	Manter
10	8	-R\$ 42.000,00	-R\$ 45.636,36	-R\$ 42.000,00	Manter
10	9	-R\$ 47.000,00	-R\$ 45.636,36	-R\$ 45.636,36	Trocar
9	0	R\$ 57.752,07	R\$ 37.752,07	R\$ 57.752,07	Manter
9	1	R\$ 35.809,92	R\$ 22.752,07	R\$ 35.809,92	Manter
9	2	R\$ 13.867,77	R\$ 7.752,07	R\$ 13.867,77	Manter
9	3	-R\$ 8.074,38	-R\$ 7.247,93	-R\$ 7.247,93	Trocar
9	4	-R\$ 30.016,53	-R\$ 22.247,93	-R\$ 22.247,93	Trocar
9	5	-R\$ 50.305,79	-R\$ 37.247,93	-R\$ 37.247,93	Trocar
9	6	-R\$ 65.636,36	-R\$ 52.247,93	-R\$ 52.247,93	Trocar
9	7	-R\$ 75.181,82	-R\$ 67.247,93	-R\$ 67.247,93	Trocar
9	8	-R\$ 83.487,60	-R\$ 72.247,93	-R\$ 72.247,93	Trocar
8	0	R\$ 30.554,47	R\$ 10.554,47	R\$ 30.554,47	Manter
8	1	R\$ 5.607,06	-R\$ 4.445,53	R\$ 5.607,06	Manter
8	2	-R\$ 18.589,03	-R\$ 19.445,53	-R\$ 18.589,03	Manter
8	3	-R\$ 37.225,39	-R\$ 34.445,53	-R\$ 34.445,53	Trocar
8	4	-R\$ 55.861,76	-R\$ 49.445,53	-R\$ 49.445,53	Trocar
8	5	-R\$ 74.498,12	-R\$ 64.445,53	-R\$ 64.445,53	Trocar
8	6	-R\$ 93.134,49	-R\$ 79.445,53	-R\$ 79.445,53	Trocar
8	7	-R\$ 102.679,94	-R\$ 94.445,53	-R\$ 94.445,53	Trocar
7	0	R\$ 3.097,33	-R\$ 16.902,67	R\$ 3.097,33	Manter
7	1	-R\$ 23.899,12	-R\$ 31.902,67	-R\$ 23.899,12	Manter
7	2	-R\$ 43.314,12	-R\$ 46.902,67	-R\$ 43.314,12	Manter
7	3	-R\$ 61.950,48	-R\$ 61.902,67	-R\$ 61.902,67	Trocar
7	4	-R\$ 80.586,85	-R\$ 76.902,67	-R\$ 76.902,67	Trocar
7	5	-R\$ 99.223,21	-R\$ 91.902,67	-R\$ 91.902,67	Trocar

Tabela A.7 - Resultados do Caso 3 para o método de PD

N	n	Manter	Trocar	Máximo	Decisão
7	6	-R\$ 117.859,57	-R\$ 106.902,67	-R\$ 106.902,67	Trocar
6	0	-R\$ 23.726,47	-R\$ 43.726,47	-R\$ 23.726,47	Manter
6	1	-R\$ 46.376,47	-R\$ 58.726,47	-R\$ 46.376,47	Manter
6	2	-R\$ 68.275,16	-R\$ 73.726,47	-R\$ 68.275,16	Manter
6	3	-R\$ 86.911,52	-R\$ 88.726,47	-R\$ 86.911,52	Manter
6	4	-R\$ 105.547,88	-R\$ 103.726,47	-R\$ 103.726,47	Trocar
6	5	-R\$ 124.184,25	-R\$ 118.726,47	-R\$ 118.726,47	Trocar
5	0	-R\$ 44.160,43	-R\$ 64.160,43	-R\$ 44.160,43	Manter
5	1	-R\$ 69.068,32	-R\$ 79.160,43	-R\$ 69.068,32	Manter
5	2	-R\$ 91.010,47	-R\$ 94.160,43	-R\$ 91.010,47	Manter
5	3	-R\$ 111.296,79	-R\$ 109.160,43	-R\$ 109.160,43	Trocar
5	4	-R\$ 129.933,16	-R\$ 124.160,43	-R\$ 124.160,43	Trocar
4	0	-R\$ 64.789,38	-R\$ 84.789,38	-R\$ 64.789,38	Manter
4	1	-R\$ 89.736,79	-R\$ 99.789,38	-R\$ 89.736,79	Manter
4	2	-R\$ 111.236,75	-R\$ 114.789,38	-R\$ 111.236,75	Manter
4	3	-R\$ 129.873,12	-R\$ 129.789,38	-R\$ 129.789,38	Trocar
3	0	-R\$ 83.578,90	-R\$ 103.578,90	-R\$ 83.578,90	Manter
3	1	-R\$ 108.124,32	-R\$ 118.578,90	-R\$ 108.124,32	Manter
3	2	-R\$ 129.990,35	-R\$ 133.578,90	-R\$ 129.990,35	Manter
2	0	-R\$ 100.294,84	-R\$ 120.294,84	-R\$ 100.294,84	Manter
2	1	-R\$ 125.173,04	-R\$ 135.294,84	-R\$ 125.173,04	Manter
1	0	-R\$ 115.793,68	-R\$ 135.793,68	-R\$ 115.793,68	Manter

Na Tabela A.7 é possível verificar que este ativo, com as descrições na Tabela A.7, possui um ciclo de vida de três anos; isto é, a cada três anos, este ativo é repostado. Isso ocorre, pois, no quarto ano do ativo, as manutenções já estão em R\$17.000,00, as quais representam um montante maior que a desvalorização do ativo. Por isso, o método de PD calcula que a cada três anos a decisão ótima é de trocar o ativo.

Comparando ambos os métodos, para o método de AE, quando não há ponto crítico no *Regime 2* e $AE(t)$ é crescente no *Regime 1*, o ponto de mínimo global da função ocorre em $t = 0$. Por isso, não é possível determinar o momento ótimo de reposição do ativo. Já em relação ao método de PD não houve problemas. Pelo contrário, este método se mostrou o ideal para um ativo com estas características. Além disto, caso haja alguma restrição técnica ou orçamentária, este método mostra um leque maior de opções, podendo atrasar a reposição do ativo a qualquer momento.

APÊNDICE I – CONCEITOS CONTÁBEIS

1. Contabilidade na gestão econômica de ativos

Na gestão econômica de ativos em uma empresa, a contabilidade interpreta as situações patrimoniais, financeiras e econômicas a fim de contribuir para o controle e planejamento da utilização dos ativos ao longo de sua vida útil. Em relação ao controle, este pode ser conceituado como “um processo pelo qual a alta administração de uma empresa se certifica de que a organização está agindo em conformidade com os planos e políticas traçados” (Iudícibus, 2008), enquanto que o planejamento é o processo de decidir quais ações serão tomadas no futuro.

2. Ativo Imobilizado

Ativo Imobilizado é definido como um ativo que é destinado ao uso da empresa, de modo que contribua para o processo operacional, podendo ou não ser vendido posteriormente. Os elementos que compõem o Ativo Imobilizado podem ser tangíveis ou intangíveis, sendo que o primeiro corresponde a um corpo físico, como os equipamentos utilizados no setor energético, enquanto o segundo corresponde a um direito de propriedade, como uma patente, ou mesmo o direito de propriedade.

3. Amortização

Na metodologia de LCC, a última etapa do processo é o descarte dos ativos, sendo que nesta etapa os ativos possuem um valor inferior ao de aquisição. Este valor é chamado de *valor residual*. Para ilustrar o conceito, considere-se um equipamento cujo valor de aquisição foi de R\$100.000,00 e o valor de revenda foi de R\$10.000,00. Logo, este último é o valor residual.

Ainda no mesmo exemplo, a diferença entre o valor de aquisição e o valor residual, ou seja, R\$90.000,00 é uma despesa para a empresa; logo, convém recuperar essa quantidade investida para que ela obtenha lucro. A recuperação desse dinheiro é o processo de *amortização*.

4. Depreciação de ativos

A partir do conceito de amortização, define-se o conceito de depreciação. Em contabilidade, segundo Iudícibus (2008), “depreciação é um custo amortizado” (p. 212). Há

ativos imobilizados que são depreciáveis; isto é, que desvalorizam com o passar dos anos e o seu custo de aquisição é amortizado.

Sendo assim, a depreciação é uma função de (a) deterioração física, (b) obsolescência e mudanças no mercado do ativo em questão. A deterioração ocorre em função da idade, do uso e da preservação do ativo ao longo do tempo, enquanto a obsolescência e mudanças no valor de mercado ocorrem devido ao surgimento de novas tecnologias e produtos (Perry et al, 1990), (Leatham & Baker, 1981). Há ainda autores que levam em conta a variação no rendimento da produção do ativo ao longo anos (Lund, 1989). De qualquer maneira, o valor do ativo diminui com os anos.

Apesar de a idade representar os efeitos de deterioração dos ativos, deve-se levar em conta o quanto o ativo é utilizado. O nível de uso “constitui um elo entre o presente e o futuro. O empresário, ao decidir o nível da escala de produção, escolhe entre usar seu equipamento agora ou preservá-lo para utilizá-lo mais tarde” (Keynes, 1936) *apud* (Perry et al, 1990). Ocorre que a preservação dos ativos pode diminuir os efeitos da idade em deteriorar o ativo. Por preservação, entende-se o uso de manutenções preventivas e corretivas feitas no ativo. Por isso, medidas de preservação podem ser consideradas como uma decisão econômica feita (Parks, 1979). Assim, o empresário usará o equipamento no presente conforme for mais rentável para ele. Contudo, quanto mais utilizado, menor será a vida útil, logo desvalorizando seu valor de mercado.

Essa desvalorização, a chamada depreciação, pode ser visualizada sob duas óticas diferentes, sendo a primeira a do contador, e a segunda a do economista. Os contadores preocupam-se com a descrição de dados históricos; isto é, para eles o processo de desvalorização de ativos consiste de uma coleta de dados a fim de determinar as tributações no fluxo de caixa de uma empresa, enquanto que para os economistas, a desvalorização de ativos é um problema de alocação de recursos, a qual ocorre baseada em expectativas de eventos futuros. (Edward & Bell, 1961). Na gestão econômica de ativos convém ter ambas as óticas. Nos tópicos seguintes, será demonstrado como se calculam as taxas e os períodos de amortização.

a. Métodos de depreciação

Existem diversos métodos para calcular taxas e períodos de amortização. Segundo Iadibicius (2008), o uso desses métodos vem se acentuando em diversos países, em virtude de vantagens fiscais e diminuição do risco de prejuízo (p. 216, 217).

Os modelos mais simples de depreciação, como por exemplo, o método linear e o método exponencial (Rietz et al, 1921) usam uma modelagem matemática mais elementar. Eles não se baseiam em valores futuros e não chegam a considerar nenhuma variável macroeconômica. Estes métodos são mais utilizados para fins de contabilidade. Contudo, foram com eles que teve início os primeiros estudos em desvalorização.

Os principais métodos são os seguintes³¹:

- Método linear (*straight line method* ou de cotas fixas)

Para este método são dados o valor inicial do ativo V , a vida útil estimada n e o valor residual S do ativo³². Logo, a depreciação D é dada através da equação (A1.1).

$$D = (V - S) / n \quad (\text{A1.1})$$

O valor da depreciação D é constante ao longo da vida útil do ativo. Suponha-se, como exemplo, um ativo com os seguintes dados: $V = \text{R}\$1000,00$; $n = 10$ e $S = \text{R}\$100,00$. Assim, aplicando a equação (A1.1), encontramos $D = \text{R}\$90,00$.

- Método exponencial (*Constant percentage* ou Método de Matheson)

Neste método, uma porcentagem constante de desvalorização é retirada no início de cada ano. Essa porcentagem deve ser determinada de modo que ao final de n anos, o valor de mercado final seja o valor residual.

³¹ Existem diversos métodos de depreciação, desde métodos simples até métodos que consideram variáveis macroeconômicas, conforme foi explicado no texto. Como para esta dissertação, o foco não é a depreciação de ativos, mas a estimativa da vida econômica e modelos para reposição de ativo, no texto serão apresentados apenas dois métodos.

³² O motivo de se usar a letra S para o valor residual é devido ao termo em inglês, *salvage value*.

Assim, dados o valor inicial V , o valor residual S e o período de vida útil do ativo n , encontramos por meio da equação (A1.2) abaixo a porcentagem x de desvalorização.

$$x = 1 - \sqrt[n]{\frac{S}{V}} \quad (\text{A1.2})$$

Para ilustrar o método, seja um ativo com os seguintes dados: $V = \text{R}\$1000,00$; $n = 10$ e $S = \text{R}\$100,00$. Assim, aplicando-se a equação (A1.2), encontramos $x = 20,567\%$.

6. Cálculo do imposto de renda e benefício fiscal

Neste item será discutido como se calcula o imposto de renda para um ativo físico. Antes disso, define-se a seguinte nomenclatura:

LT – Lucro tributável;

D – Depreciação;

IR_1 – Imposto de renda sem depreciação;

IR_2 – Imposto de renda com depreciação;

ΔIR – Variação entre IR_1 e IR_2 ,

Tal que

$$\Delta IR = |IR_2 - IR_1| \quad (\text{A1.3})$$

P – Alíquota do imposto de renda³³;

δ – Taxa de depreciação;

A – Custo de aquisição do ativo;

³³ A alíquota de imposto de renda para ativos físicos é de 25%.

B – Benefício fiscal,

Tal que

$$B = \Delta IR \tag{A1.4}$$

Assim, define-se o imposto de renda sem depreciação, IR_1 , e o imposto de renda com depreciação, IR_2 , conforme as equações (A1.5) e (A1.6), respectivamente.

$$IR_1 = P * LT \tag{A1.5}$$

$$IR_2 = P * (LT - D) \tag{A1.6}$$

Dadas ambas equações, calcula-se o valor de ΔR , pela equação (A1.7).

$$\Delta IR = |P * (LT - D) - (P * LT)| = P * D \tag{A1.7}$$

Dessa maneira, percebe-se que a diferença entre imposto de renda com depreciação e sem depreciação é dado pelo produto entre a depreciação e a alíquota do imposto de renda. Consequentemente, como definido que a variação de imposto de renda é o benefício fiscal, na equação (A1.8), logo

$$\Delta IR = B = P * D \tag{A1.8}$$

Agora, uma vez que a depreciação é função da taxa de depreciação e do custo de aquisição do ativo, tal que,

$$D = \delta * A \tag{A1.9}$$

o benefício fiscal, na equação (A1.9), pode ser reescrito da seguinte forma:

$$B = P * \delta * A$$

Analisando essa equação, o valor da alíquota é de 25%. Já a taxa de depreciação, para um equipamento com 10 anos de uso, não deve ser maior que 10%. Logo, o benefício fiscal de um equipamento é $B < 0,025 * A$.

Por fim, dado o pouco retorno no benefício fiscal, a contabilidade não é utilizada no modelo de orientação de vida econômica e reposição de ativos que se encontra no Capítulo 4 desta dissertação, nem nos estudos de caso.

APÊNDICE II – DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Equivalência de taxas de descontos

No Capítulo 4 desta dissertação, as entradas e saídas de caixa referentes a custos de aquisição, valor de revenda e custos de manutenção são todos multiplicados por uma taxa de desconto. Esta implica em deflacionar um valor futuro no fluxo de caixa; isto é, calcular cada valor no fluxo de caixa em valores monetários presentes.

Para o caso discreto, dada uma taxa de desconto i , o fator multiplicativo é $1/(1+i)^t$, tal que $t = 0, 1, 2, \dots$, enquanto que para o caso contínuo, dada uma taxa de desconto r , o fator multiplicativo é e^{-rt} . Ambos os fatores são equivalentes. Abaixo segue a prova:

Sejam

r : taxa de desconto contínua;

M : número de períodos por ano;

i : taxa de desconto discreta.

Então, é possível estabelecer a seguinte relação entre as variáveis, conforme Ross et al (2002):

$$i = \left(1 + \frac{r}{M}\right)^M - 1 \quad (\text{A2.1})$$

Como o período é contínuo, calcula-se o limite da equação (A2.1) com M tendendo ao infinito, conforme é possível ver na equação (A2.2):

$$i = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{r}{M}\right)^M - 1 \right] \quad (\text{A2.2})$$

$$i = e^r - 1$$

Dessa maneira, estabelece-se a equivalência entre os dois fatores multiplicativos de desconto.

$$\frac{1}{(1+i)^t} = \frac{1}{(1+e^r-1)^t} = \frac{1}{(e^r)^t} = e^{-rt} \quad (\text{A2.3})$$

Equivalência de fluxos de caixas

Dado uma entrada de caixa F em $t = N$, deseja-se transformá-la em uma série de fluxo de caixa regular de $t = 1$ a N . A Figura AP.1 ilustra o processo.

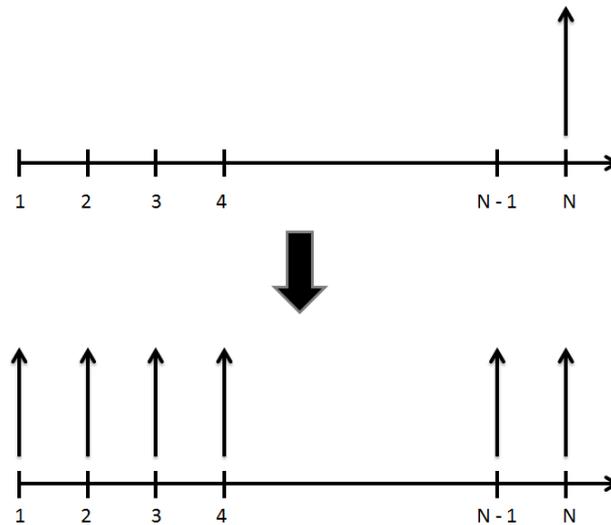


Figura AP.1 – Equivalência de fluxos de caixa

Na Figura AP.1, é possível visualizar a entrada de caixa no ano N e como é uma série de fluxo de caixa regular, isto é, uma sequência de valores idênticos para todos os anos. A questão é: como fazer esta equivalência matematicamente?

Assim, seja F , o qual ocorre em $t = N$, A , que ocorre nos anos de 1 a N , e P , uma entrada de caixa em $t = 1$, tal que $F = P(1 + i)^N$. Então, a equivalência é demonstrada:

$$F = A(1 + i)^{N-1} + A(1 + i)^{N-2} + \dots + A(1 + i)^1 + A \quad (\text{A2.4})$$

$$F = A[(1 + i)^{N-1} + (1 + i)^{N-2} + \dots + (1 + i)^1 + 1] \quad (\text{A2.5})$$

Então, multiplica-se a equação (A2.5) por $(1 + i)$.

$$(1 + i)F = A[(1 + i)^N + (1 + i)^{N-1} + \dots + (1 + i)^2 + (1 + i)^1] \quad (\text{A2.6})$$

Depois, calcula-se (A2.6) – (A2.5), e então tem-se:

$$iF = A[(1 + i)^N - 1]$$

Como $F = P(1 + i)^N$, estabelece-se que

$$P = A \frac{(1+i)^N - 1}{i(1+i)^N} \Leftrightarrow$$

$$A = P \frac{i(1+i)^N}{(1+i)^N - 1} \tag{A2.7}$$

Assim, com a equação (A2.7) é possível fazer a equivalência entre qualquer entrada de caixa presente e fluxo de caixa regular.

Agora, utilizando que $i = e^r - 1$, é possível transformar a equação (A2.7) em uma equação contínua. Segue que

$$A = \frac{Pi(1+i)^N}{[(1+i)^N - 1]}$$

$$A = \frac{P(e^r - 1)(1 + e^r - 1)^N}{[(1 + e^r - 1)^N - 1]}$$

$$A = P \frac{(e^r - 1)e^{rN}}{(e^{rN} - 1)}$$

Teorema de Weierstrass

Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em $[a, b]$.

De acordo com Guidorizzi (2001), este teorema informa que se existir uma função contínua em um intervalo fechado, existirá um ponto nela que será o *valor mínimo* e outro que será o *valor máximo* (p.122).

Função W de Lambert

No Capítulo 4, para encontrar o ponto crítico de $AE(t)$ no *Regime 2* foi utilizado o *software Wolfram Mathematica 8*. Assim, foi encontrado o ponto de mínimo $t = \frac{w_0(-e^{-c-1})+c+1}{r}$, o qual é calculado com o auxílio da função W de Lambert. Para esclarecer a teoria sobre a função de Lambert, antes é necessário definir a seguinte função f .

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ w &\mapsto we^w \end{aligned}$$

Dada a função $f(w)$, determina-se uma inversa a essa função. Porém, esta função não é injetora, conforme é possível verificar na Figura AP.2.

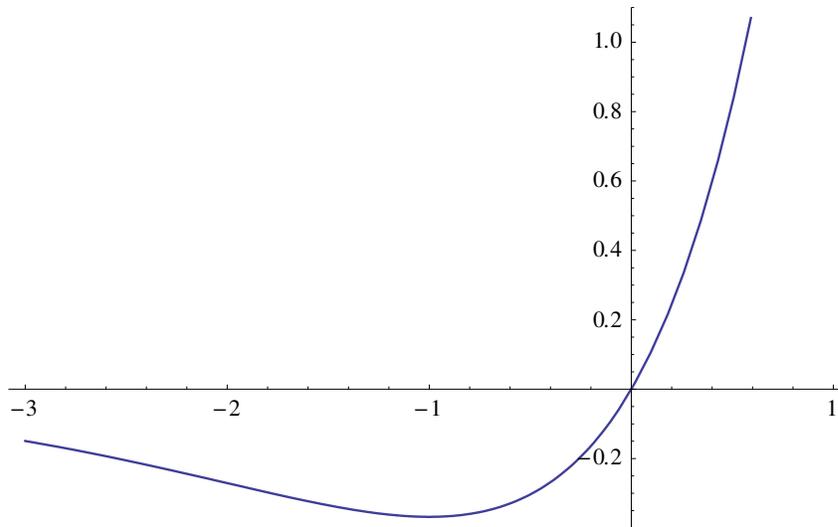


Figura AP.2 – Gráfico da função $f(w)$

Pela Figura AP.2, percebe-se que a função $f(w)$ de fato não é injetora, logo não é invertível. Ainda assim, analisa-se o comportamento desta função, por meio de sua derivada, conforme a equação (A2.8).

$$f'(w) \begin{cases} = 0 \rightarrow w = -1 \\ > 0 \rightarrow w > -1 \\ < 0 \rightarrow w < -1 \end{cases} \quad (\text{A2.8})$$

Dessa maneira, pela equação (A2.8), verifica-se que para $w > -1$, a função $f(w)$ é injetora. Logo, para $w > -1$, a função é invertível. Já para $w \leq -1$, a função não é invertível. Apesar disso, determina-se uma função W , a qual é a inversa multivalorada de $f(w)$. Dessa forma, W tem a seguinte definição:

$$W: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto w$$

Então, tem-se z , o qual é um ponto no domínio de W (assim como, na imagem de f) e sua imagem é $W(z)$. Dessa forma, para cada z no domínio, há um subconjunto $W(z)$, tal que $W(z) = \{w \in \mathbb{C}; z = W(z)e^{W(z)}\}$. Conforme, é possível observar na Figura AP.3.

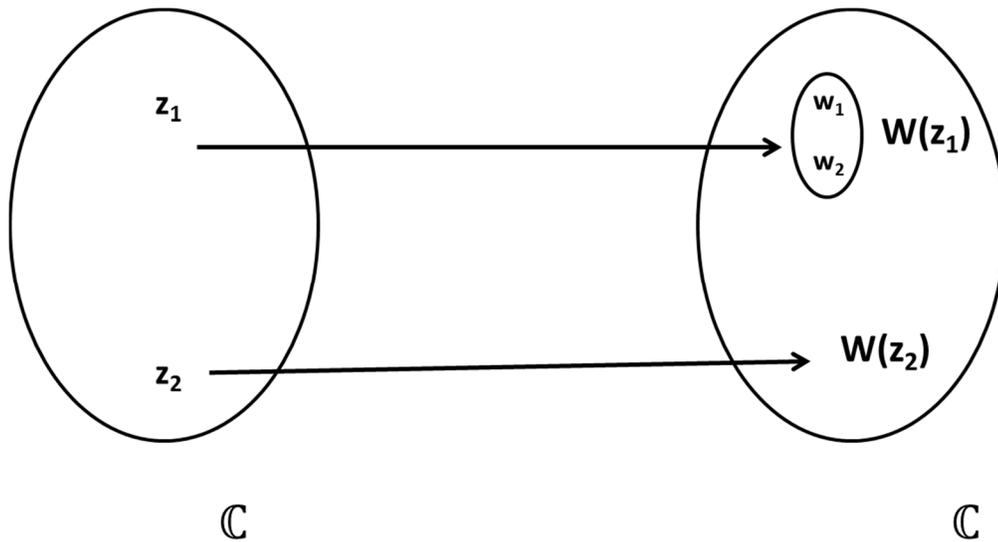


Figura AP.3 – Função W de Lambert

Na Figura AP.3, é possível verificar que há valores no domínio que têm mais de um correspondente no contra-domínio. Apesar dessa relação não ser aceita como função, por se tratar de uma função multivalorada, o correspondente $W(z_1)$ é um subconjunto. Logo, há um único correspondente para cada valor no domínio. Portanto, não quebra os pressupostos de função. O gráfico da função de Lambert pode ser visualizado na Figura AP.4.

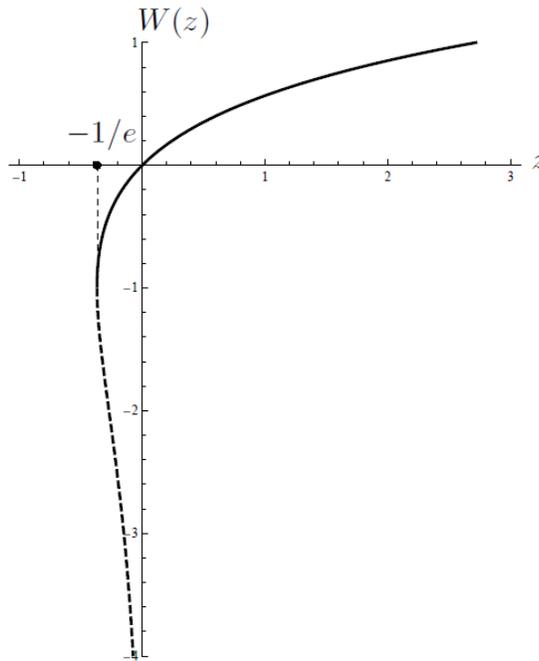


Figura AP.4 – Gráfico da função W de Lambert

Fonte: Cesca & Novaes (2012)

Na Figura AP.4, no eixo vertical, os valores de $W(z)$, tais que $W(z) > -1$, são denominados por $W_0(z)$ e para os valores de $W(z)$, tais que $W(z) < -1$, são denominados por $W_{-1}(z)$. Analisando a função $f(w)$, $W_0(z)$ representa todos os valores que $w > -1$ de $f(w)$, enquanto $W_{-1}(z)$ representa todos os valores de $f(w)$ para $w \leq -1$. Além disso, é possível observar que na Figura AP.4, os valores de $W_0(z)$ estão representados por uma linha contínua, enquanto os valores de $W_{-1}(z)$ são representados por uma linha pontilhada.

Nisso, como todos os valores de $W_0(z)$ são da parte injetora de $f(w)$, ocorre que $W_0(z)$ é uma função analítica e sua expansão em Série de Taylor é definida pela equação (A2.9) com raio de convergência de $1/e$.

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n \quad (\text{A2.9})$$

Assim, define-se:

$$W_0: \left(-\frac{1}{e}, \infty\right) \rightarrow (-1, \infty)$$

$$z \mapsto w$$

Por fim, para equações da forma $z = W(z)e^{W(z)}$, é possível encontrar a solução facilmente pela função de Lambert, a qual é conhecida. Para mais informações sobre a função W de Lambert, consultar Corless et al (1996).

Em seguida, é possível visualizar dois exemplos simples, os quais foram baseados de Wikipedia (2012)³⁴, que mostram como a *função de Lambert* é utilizada para resolver equações exponenciais.

Exemplo 1:

Seja a seguinte equação a ser resolvida:

$$x^x = z$$

Então,

$$x \ln(x) = \ln(z)$$

Uma vez que $x = e^{\ln(x)}$, tem-se que

$$e^{\ln(x)} \ln(x) = \ln(z)$$

Feito isso, define-se a seguinte *função de Lambert*:

$$\ln(x) = W(\ln(z)), \text{ uma vez que } z = W(z)e^{W(z)}.$$

Desta última equação, tem-se que:

$$x = e^{W(\ln(z))}$$

Exemplo 2:

Dada a equação $2^t = 5t$, deseja-se calcular o valor de t que é solução:

³⁴ WIKIPEDIA: **Lambert W Function**. Acessado em 27 de outubro de 2012. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/lambert_W_function.

$$2^t = 5t$$

$$1 = \frac{5t}{2^t}$$

$$1 = 5t(2^{-t})$$

$$1 = 5t(e^{\ln 2^{-t}})$$

$$1 = 5t(e^{-t(\ln 2)})$$

$$\frac{1}{5} = t(e^{-t(\ln 2)})$$

$$\frac{-\ln 2}{5} = (-t(\ln 2))(e^{-t(\ln 2)}).$$

Agora, define-se que:

$$W\left(\frac{-\ln 2}{5}\right) = -t(\ln 2).$$

Assim, percebe-se facilmente que

$$t = -\frac{W\left(\frac{-\ln 2}{5}\right)}{\ln 2}, \text{ tais que as solu\c{c}oes encontradas s\~{a}o:}$$

$$t = 0,23545 \text{ e } t = 4,448.$$

APÊNDICE III – INFERÊNCIA NO MODELO DE REGRESSÃO LINEAR SIMPLES

Considerações iniciais

Inicialmente, seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 desconhecidas, para a qual supõe-se uma distribuição Normal. Dada uma amostra dessa variável aleatória, representada por (X_1, X_2, \dots, X_n) , é possível calcular a média amostral \bar{X} e a variância amostral S^2 . Dessa maneira, define-se uma variável Z padronizada, conforme a equação (A3.1).

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim N(0,1) \quad (\text{A3.1})$$

Na equação (A3.1), é possível ver que Z é uma variável aleatória padronizada com média 0 e variância 1.

Em seguida, definem-se variáveis aleatórias qui-quadrados, as quais “surgem quando elevamos ao quadrado variáveis aleatórias normais padronizadas $N(0,1)$ ” (Hill et al, 2010, p. 104). Assim, se Z_1, \dots, Z_m são m variáveis aleatórias independentes, então

$$V = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_m^2 \sim \chi^2(m) \quad (\text{A3.2})$$

Na equação (A3.2), a variável $V \sim \chi^2(m)$ tem distribuição qui-quadrado com m graus de liberdade, tal que m representa o número de variáveis aleatórias $N(0,1)$ independentes que são elevadas ao quadrado e somadas para compor V .

Dessa maneira, a partir de duas variáveis aleatórias V e Z independentes é possível formar uma variável aleatória t , tal que

$$t = \frac{Z}{\sqrt{V/m}} \sim t_{(m)} \quad (\text{A3.3})$$

Assim, tem-se uma variável aleatória t cujo parâmetro é m , representando os graus de liberdade. A distribuição é denominada t -Student, sendo que é simétrica com média 0 e variância $m/(m - 2)$. Logo, percebe-se que quanto maior o valor de m , mais a distribuição de t tende para uma Normal. Na Figura AP.5 é possível ver como ambas as distribuições são próximas.

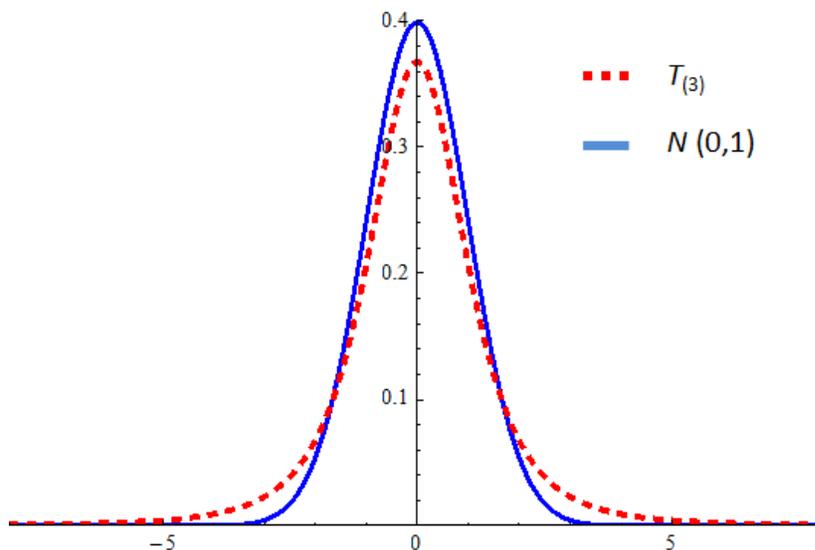


Figura AP.5 – Comparação entre a distribuição Normal e a t -Student

Na Figura AP.5, a distribuição Normal tem média e variância iguais a zero e um, respectivamente, e a t -Student tem três graus de liberdade. De acordo com Magalhães & Lima (2008), como é utilizada a variância amostral, logo a distribuição de t é diferente da Normal. Contudo, como a t converge para a Normal, as tabelas construídas de sua distribuição se limitam a 120. Para graus superiores, as probabilidades são obtidas por meio da tabela Normal.

Aplicação no teste de hipóteses

No teste de hipótese, escolhe-se uma variável X . No contexto de regressão linear simples, a variável escolhida é um dos parâmetros da regressão linear simples, ou seja, ou b_1 , ou b_2 . Nisso, para o parâmetro b_2 , por exemplo, tem-se a média³⁵ $E(b_2) = \beta_2$ e a variância $var(b_2)$. Com as três estimativas, é possível definir a variável padronizada Z , conforme a equação (A3.4).

³⁵ Para mais informações de como calcular a média de uma estimativa de MQO, consultar ou Gujarati (2000), ou Hill et al (2010), ou Magalhães & Lima (2008).

$$Z = \frac{b_2 - \beta_2}{\sqrt{\text{var}(b_2)}} \sim N(0,1) \quad (\text{A3.4})$$

Feito isso, é necessário obter uma distribuição de probabilidade da variância amostral. Conforme foi mencionado no Capítulo 3, o processo de um teste de hipóteses consiste em calcular a probabilidade de se obter estimativas mais extremas do que a fornecida pela amostra. Para isso, toma-se o erro $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, o qual também é padronizado, ou seja, $\varepsilon_t/\sigma \sim N(0,1)$. Em seguida, transformam-se todos os erros do modelo de regressão variáveis quis-quadrado, conforme mostra a equação (A3.5).

$$\sum \left(\frac{e_t}{\sigma}\right)^2 \quad (\text{A3.5})$$

Contudo, como os erros não são observáveis, substituem-se pelos erros amostrais (resíduos)³⁶, tal que

$$V = \frac{\sum \hat{e}_t^2}{\sigma} \sim \chi^2_{(T-2)} \quad (\text{A3.6})$$

Então, tem-se uma variável qui-quadrado da variância amostral. Nisso, esta apresenta $T - 2$ graus de liberdade.

Assim, conforme a equação (A3.3), com uma variável aleatória normal padronizada $N(0,1)$ e uma variável qui-quadrado, é possível formar uma variável aleatória t . Então, para o teste de hipóteses sobre b_2 , define-se:

$$t = \frac{b_2 - \beta_2}{\sqrt{\hat{v}\text{ar}(b_2)}} \sim t_{(T-2)} \quad (\text{A3.7})$$

Por fim, a variável aleatória t e sua distribuição serão as bases para estimação do teste de hipótese dos parâmetros do modelo de regressão linear simples.

³⁶ Mais informações sobre como calcular os erros amostrais em Hill et al (2010), Gujarati (2000) e Magalhães & Lima (2008).

Teste de Durbin-Watson

O teste de Durbin-Watson (DW) utilizado para detectar presença de autocorrelação nos resíduos de uma análise de regressão. De acordo com Hill et al (2010), este teste, desde sua criação em 1950, continua a ser o mais importante para a verificação da autocorrelação. Dessa forma, se os resíduos são correlacionados, então $cov(e_i, e_j) \neq 0$.

A estatística de Durbin-Watson é calculada da seguinte forma, conforme a equação (A3.8).

$$d = \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \hat{e}_t^2} \quad (\text{A3.8})$$

Se $d < 2$, então os erros do modelo são correlacionados. Caso contrário, se $d > 2$, então não há evidência de que os erros do modelo possuem alguma correlação.