

ANÁLISE DINÂMICA DE UM
VOLANTE SUPERCRÍTICO PARA
ARMAZENAMENTO DE ENERGIA

097

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

*Este exemplar corresponde a' edição final
da tese defendida por Virgílio Mendonça
da Costa e Silva e aprovada pela
Comissão julgadora em 17/02/1984*

José Roberto de França Arruda

ANÁLISE DINÂMICA DE UM
VOLANTE SUPERCRÍTICO PARA
ARMAZENAMENTO DE ENERGIA

VIRGÍLIO MENDONÇA DA COSTA E SILVA

Orientador: HANS INGO WEBER

Co-Orientador: JOSÉ ROBERTO DE FRANÇA ARRUDA

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas, da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.

CAMPINAS, 1984

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Para Gilberto e Irene, meus
pais, pela força e apoio in
comum que resultaram na mi
nha formação.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	ii
ABSTRACT	iii
LISTA DE FIGURAS	iv
LISTA DE TABELAS	viii
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - RESTROSPECTIVA HISTÓRICA	2
1.2 - CARACTERÍSTICAS DO VOLANTE SUPERCRÍTICO ..	3
1.3 - DESCRIÇÃO DO TRABALHO	5
CAPÍTULO 2 - MODELO FÍSICO E MATEMÁTICO	7
2.1 - MODELO FÍSICO DO VOLANTE	8
2.2 - MODELO MATEMÁTICO DO VOLANTE	10
2.2.1 - Sistemas de Referências e Coordena	
das Generalizadas	10
2.2.2 - Análise Cinemática e Dinâmica	15
2.3 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE "WHIRLING" LIVRE	
SEM AMORTECIMENTO	20
2.4 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE "WHIRLING" FORÇA	
DO COM AMORTECIMENTO	26
CAPÍTULO 3 - DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS DO	
VOLANTE	32
3.1 - MASSAS DO ANEL E CUBO DO VOLANTE	33

3.2 - INÉRCIAS DIAMETRAL E POLAR DO VOLANTE	34
3.3 - RIGIDEZ AXIAL, RADIAL E ANGULAR DAS FAIXAS	37
 CAPÍTULO 4 - RESULTADOS ANALÍTICOS	 51
4.1 - ANÁLISE DE "WHIRLING" LIVRE SEM AMORTECI MENTO	52
4.2 - INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DE SUSPENSÃO NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DO VOLANTE	56
4.2.1 - Comprimento do Eixo do Volante ...	57
4.2.2 - Inércia da Seção Transversal do E ixo	59
4.3 - ANÁLISE DO MOVIMENTO DE "WHIRLING" FORCADO COM AMORTECIMENTO EXTERNO	62
 CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DE ESTABILIDADE	 72
5.1 - MODELO MATEMÁTICO DO AMORTECIMENTO INTERNO DO MATERIAL DO EIXO E DAS FAIXAS	73
5.2 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE "WHIRLING" LIVRE COM AMORTECIMENTO EXTERNO E INTERNO	80
5.3 - RESULTADOS ANALÍTICOS	83
 CAPÍTULO 6 - ANÁLISE EXPERIMENTAL DO VOLANTE	 86
6.1 - CARACTERÍSTICAS DO MODELO EXPERIMENTAL ...	87
6.2 - BANCADA PARA ENSAIO DO VOLANTE	90
6.3 - RESULTADOS EXPERIMENTAIS	90
 CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS POSTERIORES	102
7.1 - CONCLUSÕES	103

7.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS POSTERIORES	106
APÊNDICE 1 - PROGRAMAS COMPUTACIONAIS	111
APÊNDICE 2 - ALGORÍTMOS PARA DETERMINAÇÃO DE AUTOVALORIS DE MATRIZES COMPLEXAS E REAIS MAL CONDICIONADAS ...	123
Ap.2.1 - Condicionamentos de Matrizes	124
Ap.2.1.1 - Permutações Preliminares ...	125
Ap.2.1.2 - Condicionamento	126
Ap.2.2 - Transformação de uma Matriz Real ou Com plexa na Forma de Hessenberg	127
Ap.2.3 - Determinação de Autovalores e Autoveto res de Matrizes Complexas e Reais na For ma de Hessenberg	128
APÊNDICE 3 - DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA ...	133
APÊNDICE 4 - DESENHOS EM DETALHES E CONJUNTO DO SISTEMA VOLAN TE-SUSPENSÃO NO POÇO DE PROVA	138
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é fruto de um esforço mútuo onde várias mãos se uniram para sua concretização.

Sinto-me pois, na obrigação de citar nomes de algumas pessoas que conduziram à realização deste.

À Mailde , minha esposa, pela paciência e compreensão.

Aos Professores Dr. Hans Ingo Weber, meu orientador , e Dr. José Roberto França Arruda, meu co-orientador , pela oportunidade, apoio e maneira gentil com que sempre me receberam.

Aos amigos do GEPROM e UFPb., pela ajuda e confiança depositada na minha pessoa.

À M. Júlia, pelo excelente trabalho de datilografia.

Título: ANÁLISE DINÂMICA DE UM VOLANTE SUPERCRÍTICO PARA ARMAZENAMEN
TO DE ENERGIA

RESUMO

Analisa-se dinamicamente um volante supercrítico para armazenamento de energia. Apresenta-se um modelo matemático do volante em sua estrutura de suporte, e analisa-se os movimentos de "whirling" livre e forçado, onde determina-se as velocidades críticas e amplitudes de vibração do volante.

O volante tem formato anular preso por faixas a um cubo central. Desenvolveu-se também, uma análise de estabilidade do sistema levando-se em consideração o amortecimento interno do material do eixo e das faixas do volante, e estuda-se a influência de um amortecedor externo ao sistema, com a finalidade de aumentar suas regiões de estabilidade.

Title: DYNAMICAL ANALYSIS OF A SUPERCRITICAL FLYWHEEL FOR ENERGY STORAGE.

ABSTRACT

A supercritical flywheel for energy storage is analysed and its dynamical behavior obtained. The mathematical model of an elastically supported flywheel is presented and free and forced whirling is investigated, to obtain critical velocities and amplitudes of vibration.

The flywheel consists of a ring supported by spokes from the hub. A stability analysis is performed considering internal damping in the shaft and in the spokes and the stabilizing action for an external damper is investigated.

LISTA DE FIGURAS

Fig.		
1.1	- Vista Frontal do Volante para Armazenamento de energia .	4
2.1	- Influência do Peso Próprio em Sistemas com Volantes Posi cionados na Vertical	9
2.2	- Modelo Físico do Volante e Coordenadas do Movimento de "whirling"	11
2.3	- Sistemas de Referência	12
2.4	- Diagramas de Forças e Momentos atuando no Cubo	21
2.5	- Diagrama de Corpo Livre do Anel	22
2.6	- Representação da Posição do Amortecedor Externo no Mode lo Teórico	27
3.1	- Detalhe do Cubo do Volante	34
3.2	- Montagem Experimental para Determinação da Inércia Polar do Volante	35
3.3	- Torque aplicado ao Anel em Função da Aceleração Angular do Volante	36
3.4	- Montagem Experimental para Determinação da Rigidez Axial das Faixas do Volante	38
3.5	- Montagem Experimental para Determinação da Rigidez Radial das Faixas do Volante	38
3.6	- Circuito Dinâmico do Sistema Massa-Mola-Massa	39
3.7	- Curva de Resposta do Martelo no Domínio do Tempo, obtida com Ponta de Náilon excitando em Alumínio	42
3.8	- Curva de Resposta do Martelo no Domínio de Frequência, ob tida com Ponta de Náilon excitando em Alumínio	42
3.9	- Processamento dos Sinais do Acelerômetro e do Martelo Ex citador	43

3.10 - Curva de Mobilidade de Ponto do Sistema, excitado de Mo
do a se determinar K_r 44

3.11 - Curva de Mobilidade de Ponto do Sistema, excitado de Mo
do a se determinar K_r 45

3.12 - Montagem Experimental para Determinação da Rigidez Angu
lar das Faixas 47

3.13 - Diagrama das Deflexões sofridas pelo Anel 47

3.14 - Diagrama de Torque Aplicado ao Anel em Função de sua In
clinação 49

4.1 - Frequências de "whirl" em Função da Rotação do Volante 53

4.2 - Representação dos Modos de Vibração do Volante, no Movi
mento de "whirling" 55

4.3 - Variação das Velocidades Críticas do Primeiro e Segundo
Modo de Vibração com o Comprimento do Eixo 58

4.4 - Variação das Velocidades Críticas do Primeiro e Segundo
Modo de Vibração com a Inércia da Seção Transversal do
Eixo 60

4.5 - Variação das Velocidades Críticas do Terceiro Modo de
Vibração com a Rigidez Radial das Faixas do Volante 61

4.6 - Resposta do Eixo do Volante, com Excentricidade no Cubo,
obtida com Amortecimento Externo Nulo 63

4.7 - Resposta do Eixo do Volante, com Desalinhamento Angular
no Cubo, obtida com Amortecimento Externo Nulo 64

4.8 - Resposta do Eixo do Volante, com Excentricidade no Cubo,
obtida com Amortecimento Externo de 15 Kg.S^{-1} 67

4.9 - Resposta do Eixo do Volante, com Desalinhamento Angular
no Cubo, obtida com Amortecimento Externo de 15 Kg.S^{-1} . 68

4.10 - Resposta do Eixo do Volante, com Desalinhamento Angular
no cubo, obtido com Amortecimento Externo de 15 Kg.S^{-1} 69

4.11 - Resposta do Eixo do Volante, com Excentricidade no Anel, obtida com Amortecimento Externo de 15 Kg.S^{-1} e 100 Kg.S^{-1} .	70
4.12 - Resposta do Eixo do Volante, com Desalinhamento Angular no Anel, obtida com Amortecimento Externo de 15 Kg.S^{-1}	71
5.1 - Modelo de Amortecimento Interno em Materiais	74
5.2 - Rotor de Laval	76
5.3a- Configuração de um Sistema Volante-Suspensão com Movimento de "whirling"	79
5.3b- Loop de Tensão-Deformação sofrida pelo Eixo	79
5.3c- Seção Transversal do Eixo com Movimento de "whirling" ..	79
5.4 - Grau de Amortecimento do Primeiro Modo em Função da Velocidade de Rotação do Volante	85
6.1 - Detalhe da Fixação do Volante na sua Suspensão	88
6.2 - Detalhe da Fixação do Sistema Volante-Suspensão no Poço de Prova	89
6.3 - Detalhe da Transmissão usada para Acionamento do Volante	89
6.4 - Vista da Bancada de Instrumentação	91
6.5 - Detalhe da Fixação dos Sensores Magnéticos de Velocidade	91
6.6 - Análise de Assinatura do Primeiro Modo de Vibração do Volante, obtida na Desaceleração, sem Efeito do Motor e da Transmissão	94
6.7 - Resposta do Eixo do Volante, com e sem Excitação, obtida na rotação de 600 r.p.m.	97
6.8 - Resposta do Eixo do Volante, obtida com a rotação de 600 r.p.m.	98
6.9 - Resposta da Estrutura de Fixação do Sistema Volante - Suspensão a uma Excitação por Impacto	100
7.1 - Frequências de "whirl" em Função da Rotação, obtida com uma redução de 30% no Comprimento do Eixo e um Aumento de 50% de Diâmetro simultaneamente	105

7.2 - Resposta do Eixo do Volante, com Excentricidade no Volante, com Excentricidade no Cubo, obtida com Amortecimento Externo de $1,62 \text{ Kg.S}^{-1}$	107
7.3 - Resposta do Eixo do Volante, com Excentricidade no Anel, obtida com Amortecimento de $1,62 \text{ Kg.S}^{-1}$	108
7.4 - Amortecedor Externo composto por Quatro Bobinas Magnéticas a 90°	110
7.5 - Amortecedor Externo composto por um Disco Submerso em Óleo ou Graxa	110
Ap.2.1 - Sequência de Subrotinas necessárias para Obtenção de Autovalores e Autovetores de Matrizes Reais mal condicionadas	131
Ap.2.2 - Sequência de Subrotinas necessárias para Obtenção de Autovalores e Autovetores de Matrizes Complexas mal condicionadas	132

LISTA DE TABELAS

Tabela .

1.1	- Parâmetros Geométricos do Volante e seu Eixo	5
3.1	- Deflexão do Anel em Relação ao Cubo, para Pesos colocados sobre o Anel variando de 1 a 8 Kgf	48
3.2	- Parâmetros Característicos do Volante	50
6.1	- Frequências Naturais do Primeiro Modo de Vibração Precessão Direta	95

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. RETROSPECTIVA HISTÓRICA

A escassez e o elevado custo do petróleo tem despertado interesse, em especial aos países que não possuem reservas próprias, tanto na criação de novas fontes energéticas quanto na otimização dos rendimentos dos equipamentos e das instalações que utilizam formas de energia convencionais.

Entre os sistemas desenvolvidos em função desta crise mundial situam-se os veículos híbridos, com o intuito de obter sistemas de transportes com elevado rendimento. Entre os sistemas híbridos encontram-se aqueles que usam volantes de inércias para armazenamento de energia. A quantidade de energia armazenada nestes volantes é proporcional ao produto entre a inércia da massa girante e o quadrado da velocidade angular [1].

Estes volantes, em sua maior parte de grandes inércias, vem sendo utilizados desde a antiguidade normalmente em forma de discos. Muitos deles foram construídos de materiais que são essencialmente homogêneos e isotrópicos tal como aço e possuindo características de alta rigidez e de elevado peso.

Os volantes de concepção moderna são de baixa inércia e operam em altas rotações, devendo portanto ser construídos de materiais de alta resistência. A tendência atual é a utilização de volantes de forma anular em materiais reforçados. Esta tecnologia tem sido investigada [2,3] com a construção de volantes dos mais variados tipos e formatos, montados em suspensões especiais com a capacidade de reduzir em até 90% o peso utilizando um alívio magnético de carga para melhorar a performance dos mancais de baixo atrito, aumentando a previsão de vida.

De um modo geral, estes volantes são construídos de mate

riais com configuração em forma de filamentos altamente resistente, em uma matriz aglomerante, que permite uma grande quantidade de energia por peso e volume, além de possuir uma geometria conveniente para a operação como armazenador de energia em um máximo de velocidade de rotação.

Dentre uma variada gama de materiais investigados para construção de volantes de concepção moderna, maior interesse tem sido despertado para materiais compostos de fibra de vidro, de carbono, etc.

A grande motivação de uso destes materiais na construção de volantes é a obtenção de grande energia específica armazenada, baixo custo em grande escala de produção, fácil processo de fabricação e viabilidade de aquisição destes materiais, além de simplificar as medidas de segurança contra falhas.

A alta resistência permite um acionamento em rotações elevadas, frequentemente acima de algumas de suas velocidades críticas. Por outro lado, esta flexibilidade inerente exige uma análise dinâmica detalhada do sistema volante-suspensão.

As mais recentes pesquisas sobre volantes estão sendo desenvolvidas com volantes adaptados em unidades seladas a vácuo [4, 5], a qual permite sua operação em velocidades bastante elevadas sem acarretar aumento nas perdas por atrito aerodinâmicos [6].

1.2. CARACTERÍSTICAS DO VOLANTE

O volante analisado foi confeccionado pelo IAE/CTA em colaboração a um projeto de pesquisa desenvolvido no Laboratório de Pro

jetos Mecânicos da UNICAMP-GEPROM, Fig.1.1, consiste essencialmente de um anel de fibra com seção transversal retangular, fixado radialmente a um cubo central em alumínio st 37 por meio de faixas flexíveis, também em fibra. O cubo do volante é fixado a um eixo bastante flexível, usinado em aço, por meio de um flange também usinado em aço. Na parte inferior do cubo é montado um mancal de rolamento que serve de limitação para o movimento radial do volante.

Na Tabela 1.1 encontram-se listados os valores numéricos dos parâmetros geométricos do eixo, cubo e anel do volante, enquanto que os de rigidez, as massas e inércias foram determinados experimentalmente e encontram-se apresentados no Capítulo 3.

Na ausência de perdas por atrito aerodinâmico e nos mancais, com as características físicas e geométricas do anel do volante, garante-se uma capacidade de armazenamento de energia de 0,277 Kwh, em 20000 r.p.m.

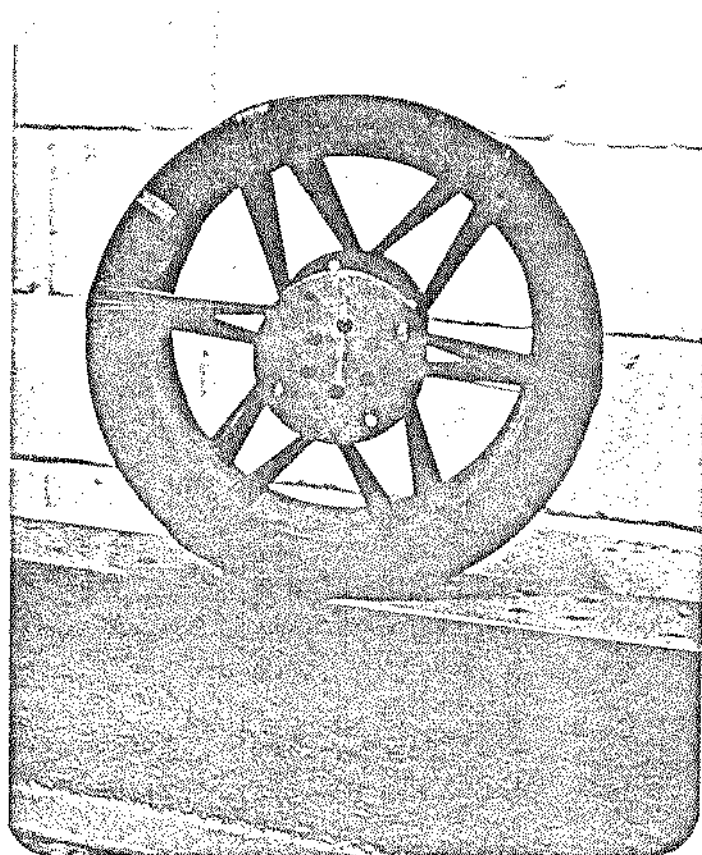


Fig. 1.1 - Vista frontal do volante para armazenamento de energia

Tabela 1.1 - Parâmetros Geométricos do Volante e seu eixo.

QUANTIDADE	Símbolo	Valor	Unidade
Raio externo do anel	Re	0.200	m
Raio interno do anel	Ri	0.150	m
Inclinação das faixas com relação ao plano do volante	ψ	2.9	graus
Inclinação entre uma faixa superior e uma inferior correspondente	θ	15	graus
Espessura do anel	2B	0.100	m
Comprimento do eixo do volante	Le	0.243	m
Diâmetro do eixo do volante	ϕ_e	0.009	m
Comprimentos das faixas	Lf	0.202	m
Dimensões do cubo e flange	*	*	*

* Ver desenho em detalhe do Apêndice 4.

1.3. DESCRIÇÃO DO TRABALHO

Neste trabalho faz-se uma análise dinâmica de um volante de fibra para armazenamento de energia. Escolhe-se um modelo físico de cinco graus de liberdade para representar os movimentos do volante em sua estrutura de suporte.

Desenvolve-se um modelo matemático que define posições (X, Y, Z) e inclinações (ψ_x, ψ_y) do cubo e anel do volante em relação a um sistema inercial fixo, e analisa-se os movimentos de "whirling" livre e forçado, e estabilidade.

Foram desenvolvidos programas computacionais, que determinam as soluções das equações diferenciais formuladas no modelo matemático de "whirling" e estabilidade, em função da rotação do volante.

Na análise de "whirling" livre apresentada, determina-se as frequências naturais dos quatro modos de vibração do volante em função de sua velocidade de rotação e observa-se as mudanças das velocidades críticas com relação a variação dos parâmetros de suspensão do volante.

Na análise de "whirling" forçado com amortecimento, considera-se a excitação decorrente do desbalanceamento provocado por excentricidade e desalinhamento angular no cubo e anel do volante, e analisa-se a influência de um amortecedor externo sem massa posicionada na parte inferior do cubo do volante, com a finalidade de limitar os níveis de amplitude do movimento radial do volante na passagem pela ressonância.

Na análise de estabilidade apresentada, determina-se o amortecimento externo mínimo necessário para estabilizar o volante na faixa de rotação nominal. Para isto, foi desenvolvido também um modelo matemático de amortecimento interno estrutural para o eixo e as faixas do volante.

A parte experimental foi desenvolvida com o intuito de se verificar a validade do modelo teórico de quatro graus de liberdade, escolhido para representar os movimentos de "whirling" do volante, através de comparações feitas entre as frequências naturais dos modos de vibração dos dois modelos.

O resultado das três análises apresentadas, permite definir os valores ideais dos parâmetros de suspensão do volante, rigidez do eixo e amortecimento, como também a faixa de rotação que garante estabilidade dos movimentos do volante.

CAPÍTULO 2

MODELO FÍSICO E MATEMÁTICO

2.1. MODELO FÍSICO DO VOLANTE

Os objetivos principais deste trabalho são: determinação das velocidades críticas de primeira ordem, amplitude de vibração do volante provocada por desbalanceamento e análise de estabilidade, selecionando parâmetros convenientes de suspensão.

Para analisar o comportamento dinâmico do sistema volante-suspensão, adota-se um modelo físico simplificado que considera o cubo e o anel do volante como corpos rígidos, enquanto o eixo e as faixas são assumidos como elementos elásticos de massas desprezíveis.

A justificativa para as considerações acima, provêm do fato de que as frequências destes elementos como corpos elásticos, observadas em [7], estão acima da faixa de interesse deste estudo.

Além das simplificações acima, admite-se para facilitar a análise matemática:

- mancal rígido nos planos diametrais
- simetria dos elementos rotativos

O peso próprio de volantes posicionados na vertical provoca um efeito pendular no sistema, quando o volante se desloca de sua posição de repouso, tentando retorná-lo a sua posição inercial. Este efeito tende a desaparecer quando o volante é fixado em suspensões com engaste, principalmente quando é acionado em altas rotações. A Fig. 2.1 mostra que a magnitude da força que tenda retornar um volante, com suspensão engastada, para sua posição inercial, é bastante pequena em comparação com as forças de "whirling" do sistema, sendo por isso considerada neste trabalho como desprezível.

Com estas simplificações, reduz-se o grau de complexidade da solução das equações do movimento e obtêm-se resultados que são suficientemente conclusivos para análise do problema completo.

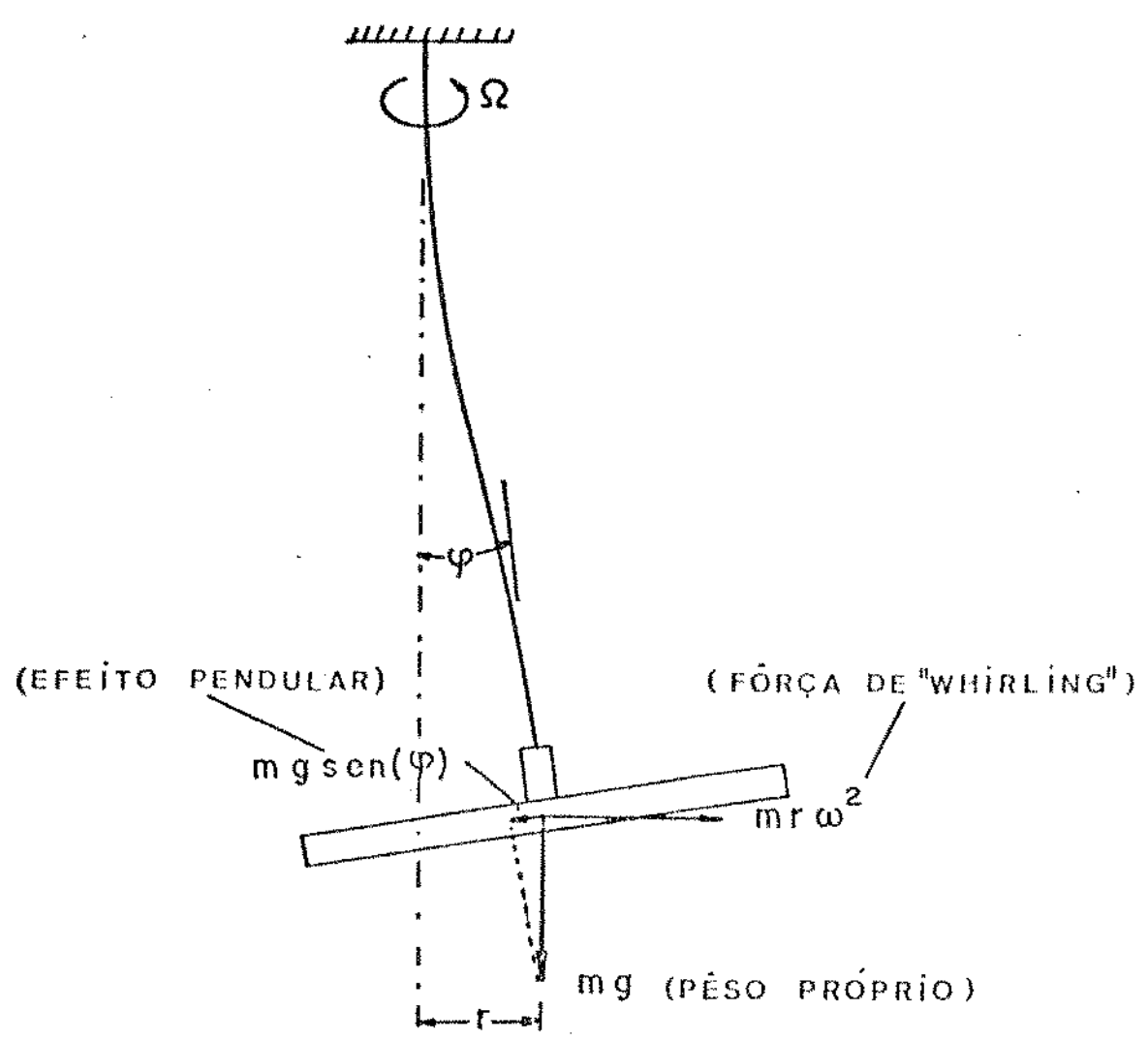


Fig. 2.1 - Influência do peso próprio em sistemas com volante posicionado na vertical

Desta forma, o modelo considerado se limita inicialmente a nove graus de liberdade, definidos pelas coordenadas generalizadas, $X_C, Y_C, \psi_{XC}, \psi_{YC}, X_A, Y_A, Z_A, \psi_{XA}$ e ψ_{YA} , correspondentes à translação e inclinação do cubo e anel do volante no espaço tridimensional XYZ.

Encontra-se, na referência [8], uma série de modelos físicos de volantes supercríticos para armazenamento de energia, com seus respectivos modelos matemáticos e frequências naturais obtidos para cada um.

O uso de transformações de coordenadas cartesianas para coordenadas complexas, como feito em [7], [8] e [19], facilita bastante a análise computacional do sistema. Após feito este acoplamento de coordenadas, pode-se, devido à isotropia do mancal e simetria dos elementos rotativos, reduzir o número de coordenadas generalizadas do sistema. Na realidade, o número de graus de liberdade de um sistema não é uma propriedade dependente do sistema de coordenadas, mas de acordo com as referências [7], [8] e [19] considera-se apenas como cinco o número de graus de liberdade definidos por r_C, r_A, Z_A, ψ_C e ψ_A que representam respectivamente deslocamento radial do cubo e anel, deslocamento axial do anel e inclinação do cubo e anel com relação a sua posição de equilíbrio estático.

A Fig. 2.2 mostra o modelo físico adotado, indicando o tipo de movimento considerado para o anel e cubo do volante, no movimento de "whirling".

2.2. MODELO MATEMÁTICO

2.2.1. Sistemas de Referência e Coordenadas Generalizadas

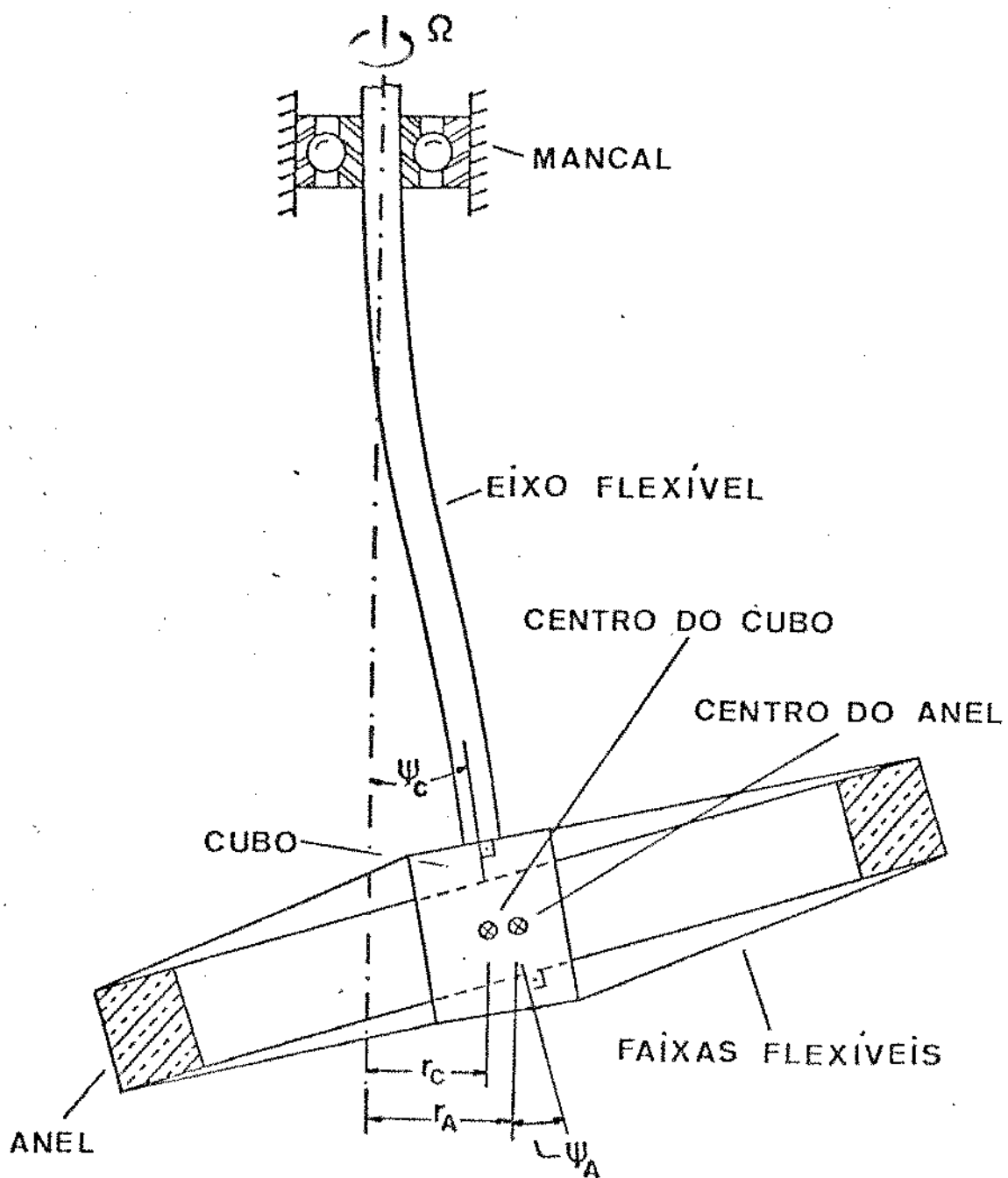


Fig. 2.2 - Modelo físico do volante e coordenadas do movimento de "whirling"

A Fig. 2.3 mostra o modelo físico adotado com os sistemas de referência usados para formulação das equações de movimento. Nesta figura, para facilitar a obtenção das equações de movimento, considera-se em princípio o anel e cubo do volante como um único corpo de massa M , com rotação própria constante Ω em torno do eixo Z_S e momentos principais de inércia J, J e I em relação aos eixos X_S, Y_S e Z_S .

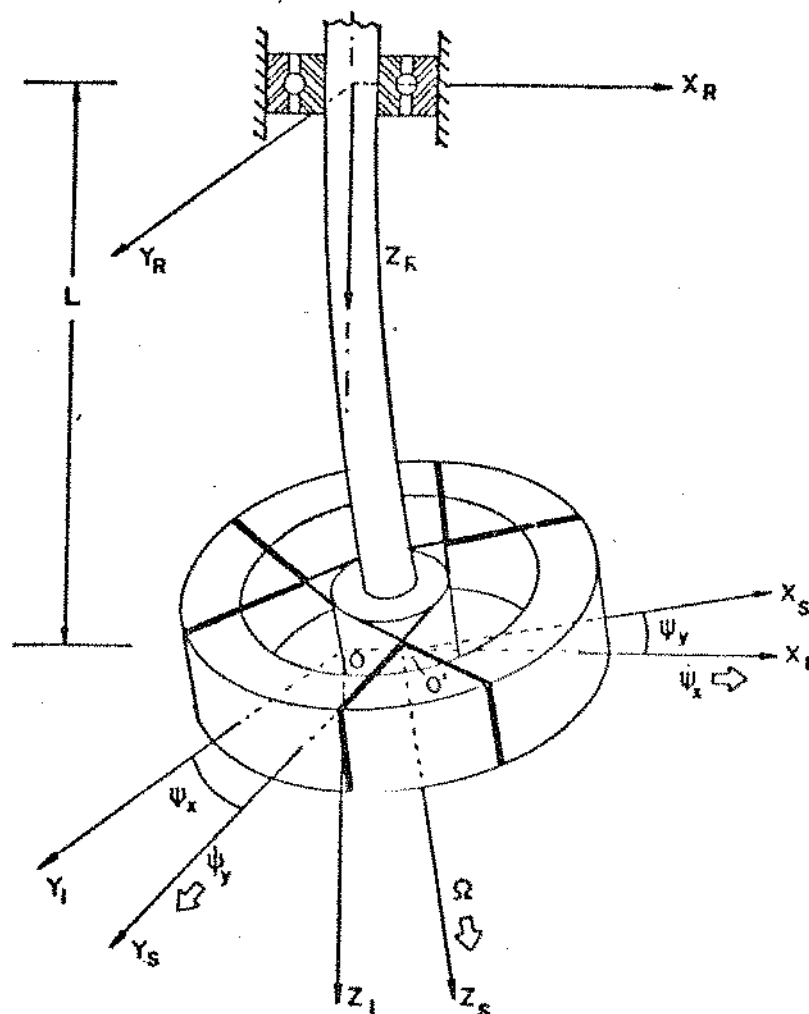


Fig. 2.3 - Sistemas de Referência

Com base na Fig. 2.3, tem-se:

0 - centro geométrico do volante

$R(X_R, Y_R, Z_R)$ - sistema inercial de coordenadas fixado no mancal

$S(X_S, Y_S, Z_S)$ - sistema de coordenadas, em relação ao qual o volante gira apenas com Ω , fixo ao volante com origem 0.

$I(X_I, Y_I, Z_I)$ - sistema de coordenadas inercial, transladado de 0, 0, 0 em relação a R, com origem em 0'.

Com o volante em repouso, o sistema de coordenadas S coincide com o referencial inercial I. A partir de uma rotação ψ_X em torno do eixo X_I e uma rotação ψ_Y em torno do eixo Y_I no sentido indicado pelos vetores $\dot{\psi}_X$ e $\dot{\psi}_Y$, respectivamente (na hipótese de pequenos deslocamentos), o sistema de coordenadas S assume uma posição genérica em relação ao inercial I.

$1(X_1, Y_1, Z_1)$ - sistema de coordenadas obtido por uma rotação ψ_X em torno do eixo X_I no sentido indicado pelo vetor $\dot{\psi}_X$.

Representando-se por S_T^R a matriz de transformação de um sistema R para um sistema S de modo que $S_Y = S_T^R \cdot R_Y$ onde R_Y e S_Y são vetores escritos nos sistemas R e S respectivamente, escreve-se:

Do sistema I para o sistema 1:

$${}^1_T I \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi_X & \text{sen}\psi_X \\ 0 & -\text{sen}\psi_X & \cos\psi_X \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Do sistema 1 para sistema S:

$${}^S_T 1 \approx \begin{bmatrix} \cos\psi_Y & 0 & -\text{sen}\psi_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\psi_Y & 0 & \cos\psi_Y \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Para matriz de transformação do sistema I para sistema S, de acordo com [9], escreve-se:

$$\underset{\approx}{S}_{T^I} = \underset{\approx}{S}_T^1 \cdot \underset{\approx}{1}_{T^I}$$

ou

$$\underset{\approx}{S}_{T^I} = \begin{bmatrix} \cos\psi_Y & \text{sen}\psi_Y \cdot \text{sen}\psi_X & -\text{sen}\psi_Y \cdot \cos\psi_X \\ 0 & \cos\psi_X & \text{sen}\psi_X \\ \text{sen}\psi_Y & -\cos\psi_X \cdot \text{sen}\psi_X & \cos\psi_Y \cdot \cos\psi_X \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Linearizando os termos da matriz de transformação representada na equação (2.3), isto é, achando-se a expansão de cada termo da matriz em série de Taylor e desprezando-se os termos não lineares, obtém-se:

$$\underset{\approx}{S}_{T^I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\psi_Y \\ 0 & 1 & \psi_X \\ \psi_Y & -\psi_X & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

A matriz de transformação do sistema de coordenadas S para o sistema de coordenadas I, é a transposta da matriz $\underset{\approx}{S}_{T^I}$ obtida na equação (2.4). Escreve-se portanto:

$$\underset{\approx}{I}_{T^S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \psi_Y \\ 0 & 1 & -\psi_X \\ -\psi_Y & \psi_X & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

O tensor de inércia ${}^S I$ de um corpo, com momentos principais de inércias J, J e I em relação a X_S , Y_S e Z_S respectivamente, onde o índice S indica o sistema no qual ele foi escrito, é:

$$\underset{\sim}{S}_I = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Usando-se as equações (2.4) e (2.5) para representar o tensor de inércia no sistema inercial I, pode-se escrever:

$$\underset{\sim}{I}_I = \underset{\sim}{I}_T \underset{\sim}{S} \cdot \underset{\sim}{S}_I \cdot \underset{\sim}{S}_T \underset{\sim}{I} \quad (2.7)$$

Substituindo-se as equações (2.4), (2.5) e (2.6) na equação 2.7), obtêm-se:

$$\underset{\sim}{I}_I = \begin{bmatrix} J & 0 & (I-J)\psi_Y \\ 0 & J & (J-I)\psi_X \\ (I-J)\psi_Y & (J-I)\psi_X & I \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

2.2.2. Análise Cinemática e Dinâmica

Representando por $\underset{\sim}{I}_\omega$ o vetor velocidade angular absoluta do volante no sistema inercial I, escreve-se:

$$\underset{\sim}{I}_\omega = \underset{\sim}{I}_\Omega + \underset{\sim}{I}_{\dot{\psi}_X} + \underset{\sim}{I}_{\dot{\psi}_Y} \quad (2.9)$$

onde:

$$\underset{\sim}{S}_\Omega = \{0, 0, \Omega\}^T$$

$$\underset{\sim}{I}_{\dot{\psi}_X} = \{\dot{\psi}_X, 0, 0\}^T$$

$$\underset{\sim}{I}_{\dot{\psi}_Y} = \{0, \dot{\psi}_Y, 0\}^T$$

O vetor rotação do volante no sistema inercial I pode ser escrito usando a matriz de transformação I_{T^S} . Neste caso, obtêm-se:

$$\underline{I}_{\Omega} = \underline{I}_{T^S} \cdot \underline{S}_{\Omega}$$

ou

$$\underline{I}_{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \psi_Y \\ 0 & 1 & -\psi_X \\ -\psi_Y & \psi_X & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$$

$$\underline{I}_{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega \psi_Y \\ -\Omega \psi_X \\ \Omega \end{pmatrix}$$

(2.10)

Para o vetor $\dot{\psi}_Y$ no sistema inercial I de coordenadas, es creve-se:

$$\underline{I}_{\dot{\psi}_Y} = \underline{I}_{T^1} \cdot \underline{1}_{\dot{\psi}_Y}$$

ou

$$\underline{I}_{\dot{\psi}_Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_X & -\text{sen} \psi_X \\ 0 & \text{sen} \psi_X & \cos \psi_X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi}_Y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{I}_{\dot{\psi}_Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi}_Y \cos \psi_X \\ \dot{\psi}_Y \text{sen} \psi_X \end{pmatrix}$$

(2.11)

Substituindo os resultados obtidos nas equações (2.10) e (2.11) na equação (2.9) e linearizando, obtêm-se:

$$\underline{I}_{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega \psi_Y + \dot{\psi}_X \\ -\Omega \psi_X + \dot{\psi}_Y \\ \Omega \end{pmatrix}$$

(2.12)

Representando por $I_{\tilde{L}}$ o momento angular do volante no sistema inercial I de coordenadas, pode-se escrever:

$$I_{\tilde{L}} = I_{\tilde{I}} \cdot I_{\tilde{\omega}} \quad (2.13)$$

Substituindo os resultados obtidos nas equações (2.8) e (2.12) na equação (2.13), tem-se:

$$I_{\tilde{L}} = \begin{pmatrix} J\dot{\psi}_X + I\Omega\psi_Y \\ J\dot{\psi}_Y - I\Omega\psi_X \\ I\Omega \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

O vetor momento M do volante é igual à taxa de variação no tempo do momento angular. Da equação (2.14), obtêm-se:

$$\tilde{M} = \dot{I}_{\tilde{L}} = \begin{pmatrix} J\ddot{\psi}_X + I\Omega\dot{\psi}_Y \\ J\ddot{\psi}_Y - I\Omega\dot{\psi}_X \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Da equação (2.15) pode-se escrever as componentes do momento no sistema inercial:

$$\begin{aligned} M_X &= J\ddot{\psi}_X + I\Omega\dot{\psi}_Y \\ M_Y &= J\ddot{\psi}_Y - I\Omega\dot{\psi}_X \\ M_Z &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

De acordo com a segunda lei de Newton, obtêm-se para forças do volante, de massa m, nas direções X_I , Y_I e Z_I respectivamente:

$$F_X = m\ddot{X}$$

$$F_Y = m\ddot{Y} \tag{2.17}$$

$$F_Z = m\ddot{Z}$$

As equações (2.16) e (2.17) foram encontradas para um volante rígido, constituído de uma única massa m .

Usando estas equações separadamente para o anel e cubo do volante, pode-se escrever:

Para o cubo do volante:

$$M_{XC} = J_C \ddot{\psi}_{XC} + I_C \dot{\psi}_{YC} \Omega$$

$$M_{YC} = J_C \ddot{\psi}_{YC} - I_C \dot{\psi}_{XC} \Omega$$

$$M_{ZC} = 0$$

(2.18)

$$F_{XC} = m_C \ddot{X}_C$$

$$F_{YC} = m_C \ddot{Y}_C$$

$$F_{ZC} = 0$$

Para o anel do volante:

$$M_{XA} = J_A \ddot{\psi}_{XA} + I_A \dot{\psi}_{YA} \Omega$$

$$M_{YA} = J_A \ddot{\psi}_{YA} - I_A \dot{\psi}_{XA} \Omega$$

$$M_{ZA} = 0$$

(2.19)

$$F_{XA} = m_A \ddot{X}_A$$

$$F_{YA} = m_A \ddot{Y}_A$$

$$F_{ZA} = m_A \ddot{Z}_A$$

O número mínimo de equações necessárias para descrever o comportamento do volante, pode ser reduzido para cinco após feito a transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas complexas .

Definindo:

$$r_C = X_C + iY_C \tag{2.20}$$

$$r_A = X_A + iY_C$$

$$\psi_C = \psi_{XC} + i\psi_{YC}$$

$$\psi_A = \psi_{XA} + i\psi_{YA}$$

Obtém-se, com relação às equações (2.18) e (2.19):

$$M_C = J_C \ddot{\psi}_C - iI_C \Omega \dot{\psi}_C$$

$$M_A = J_A \ddot{\psi}_A - iI_A \Omega \dot{\psi}_A$$

$$F_C = m_C \ddot{r}_C \tag{2.21}$$

$$F_A = m_A \ddot{r}_A$$

$$F_{ZA} = m_A \ddot{z}_A$$

onde:

$$F_C = F_{XC} + iF_{YC}$$

$$F_A = F_{XA} + iF_{YA}$$

$$M_C = M_{XC} + iM_{YC}$$

$$M_A = M_{XA} + iM_{YA}$$

Os primeiros termos do segundo membro das duas primeiras equações de (2.21) estão associados com inércias de rotação do cubo e anel do volante, enquanto que os segundos termos estão associados aos efeitos giroscópicos.

2.3. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE "WHIRLING" LIVRE SEM AMORTECIMENTO

O uso de transformações de coordenadas cartesianas para coordenadas complexas, reduz para cinco o número de graus de liberdade do sistema volante-suspensão, de acordo com [7,8,19], definidos pelo vetor de coordenadas generalizadas.

$$q_i = \{ r_C, r_A, z_A, \psi_C, \psi_A \}^T \quad (2.22)$$

As equações de movimento associadas com o vetor de coordenadas generalizadas, representado na equação (2.22), podem ser obtidas das equações de equilíbrio escritas com base na teoria da linha elástica.

De acordo com a Fig. 2.4, pode-se escrever:

Para deslocamento radial e angular do cubo:

$$\begin{aligned} - r_C &= \alpha_1 (F_C + F_A) + \alpha_2 (M_C + M_A) \\ - \psi_C &= \alpha_2 (F_C + F_A) + \alpha_3 (M_C + M_A) \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde:

- α_i , para $i = 1, 2$, e 3 - coeficientes de flexibilidade definidos, de acordo com [4], por:

$$\alpha_1 = \frac{Le^3}{3 Ee Je} + \frac{Le^2 \lambda}{Ee Je} + \frac{Le \lambda^2}{Ee Je}$$

$$\alpha_2 = \frac{Le^2}{2 Ee Je} + \frac{Le}{Ee Je} \lambda$$

$$\alpha_3 = \frac{Le}{Ee Je}$$

L_e - comprimento do eixo do volante

E_e - módulo de elasticidade do material do eixo

J_e - inércia diametral da seção transversal do eixo

$\lambda = 1/2$ comprimento do cubo do volante

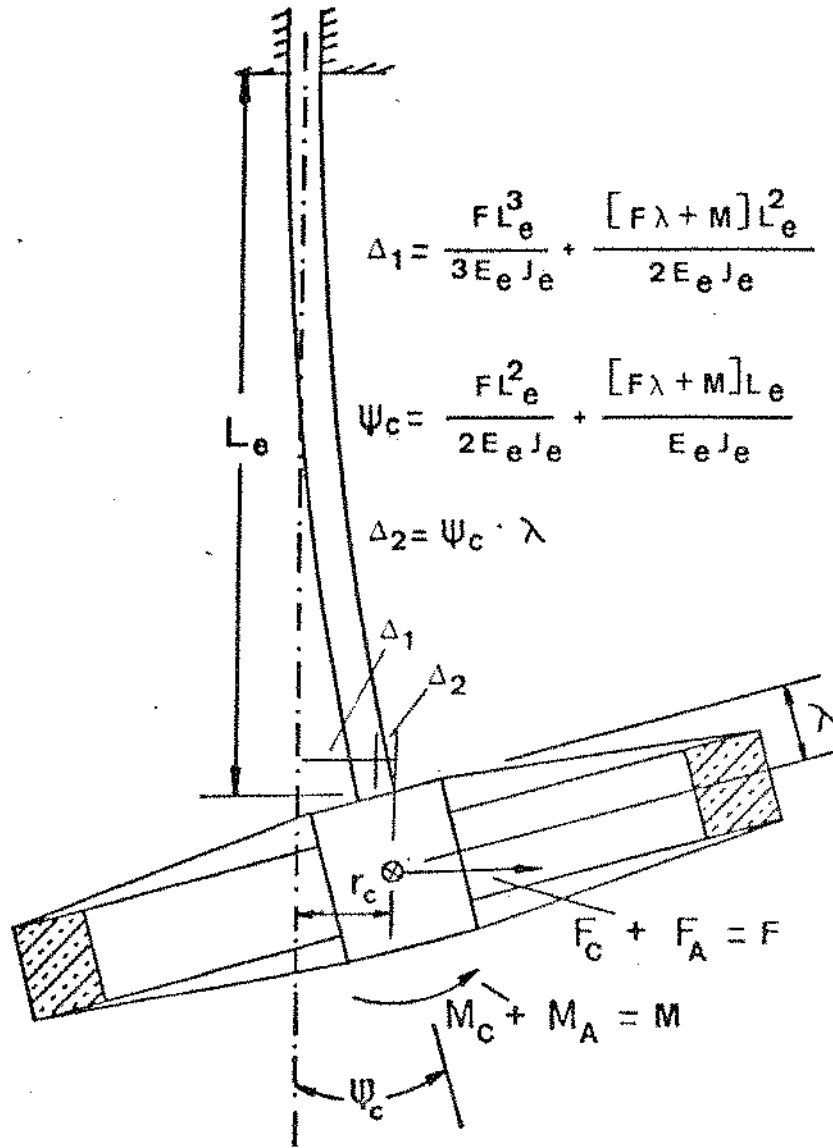


Fig. 2.4 - Diagrama de Forças e Momentos atuando no cubo

De acordo com a Fig. 2.5(a) e 2.5(b), pode-se escrever para deslocamento radial e angular do anel:

$$r_A = r_C - F_A / K_r$$

$$\psi_A = \psi_C - M_A/K_i \tag{2.24}$$

Para deslocamento axial do anel, pode-se escrever:

$$Z_A = -F_{ZA}/K_A \tag{2.25}$$

onde:

K_A , K_R e K_i - rigidez axial, radial e angular das faixas do volante.

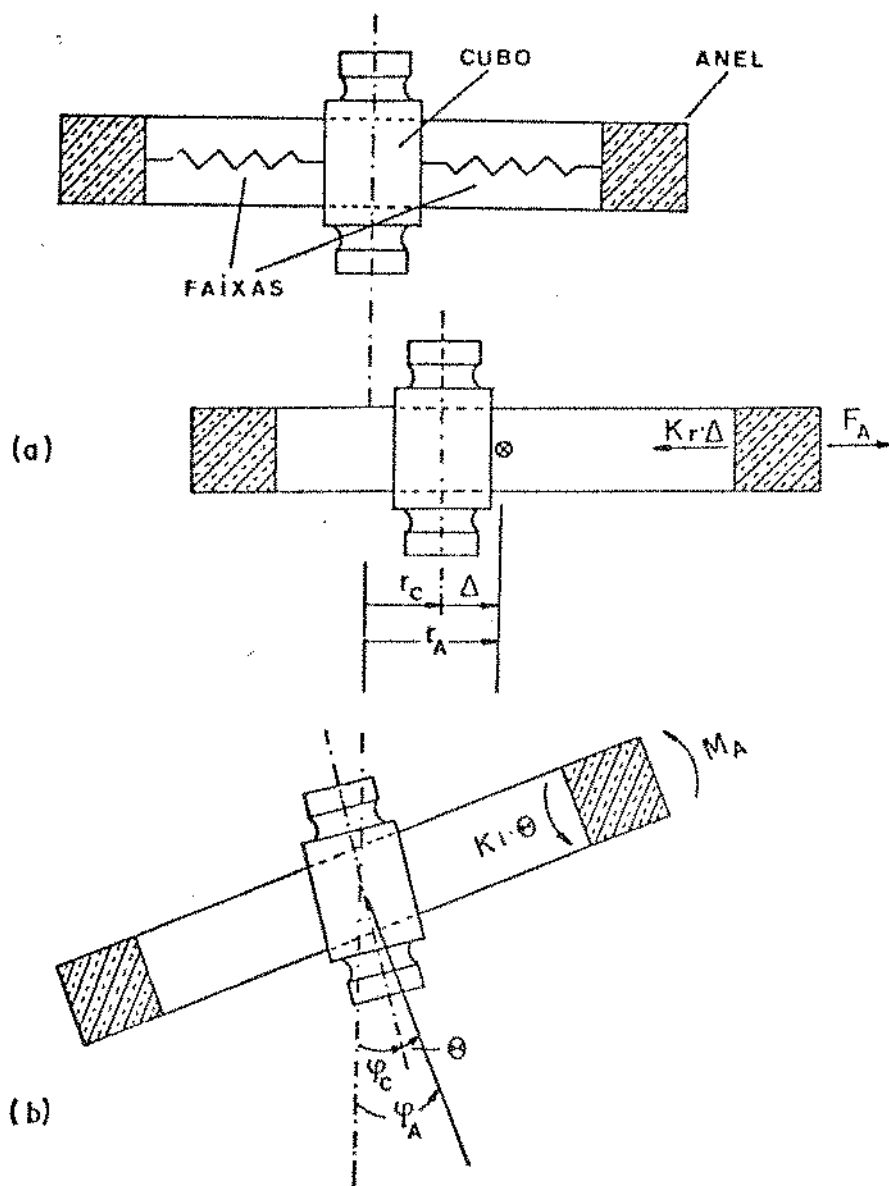


Fig. 2.5 - Diagrama de corpo livre do anel em relação ao cubo

Colocando as equações (2.23) e (2.24) na forma matricial, obtêm-se:

$$- \begin{pmatrix} r_C \\ r_A \\ \psi_C \\ \psi_A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_1 + 1/K_r & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_3 + 1/K_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_C \\ F_A \\ M_C \\ M_A \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Substituindo os valores de forças e momentos do cubo e anel do volante obtidos na equação (2.21) e rearranjando, tem-se:

$$- \begin{pmatrix} m_C \ddot{r}_C \\ m_A \ddot{r}_A \\ J_C \ddot{\psi}_C - i I_C \dot{\psi}_C \Omega \\ J_A \ddot{\psi}_A - i I_A \dot{\psi}_A \Omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_C \\ F_A \\ \psi_C \\ \psi_A \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$m_A \ddot{z}_A + K_A z_A = 0 \quad (2.28)$$

O sistema matricial de equações (2.27) representa as equações do movimento de "whirling" do volante em sua estrutura de suporte, enquanto que a equação (2.28) representa o movimento axial do anel.

Admitindo para equação (2.27) uma solução do tipo:

$$\{q_i\} = \{Q_i\} e^{i\omega t} \quad (2.29)$$

onde:

$i = 1, \dots, 4$ e Q_i é a amplitude de q_i

encontra-se:

$$\left([M_{ij}] \omega^2 - [N_{ij}] \omega - [K_{ij}] \right) \{ Q_i \} = 0 \quad (2.30)$$

onde:

$[M_{ij}]$ e $[N_{ij}]$ são matrizes 4x4 com elementos definidos por:

$$M_{11} = m_C$$

$$M_{22} = m_A$$

$$M_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j \text{ e } i, j = 1, \dots, 4$$

$$M_{33} = J_C$$

$$M_{44} = J_A$$

$$N_{11} = N_{22} = 0$$

$$N_{33} = I_C \Omega \quad N_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j \text{ e } i, j = 1, \dots, 4$$

$$N_{44} = I_A \Omega$$

$[K_{ij}]$ é a matriz de rigidez de ordem 4x4 definida por:

$$[K_{ij}] = [\alpha_{ij}]^{-1} \quad (2.31)$$

Os elementos da matriz de rigidez, representada na equação (2.31), foram obtidos de acordo com [29] e encontram-se desenvolvidos no Apêndice 3. Tem-se:

$$K_{11} = 12 \frac{Ee Je}{Le^3} + K_R$$

$$K_{12} = K_{21} = -K_R$$

$$K_{13} = K_{31} = -6 \frac{Ee Je}{Le^2} - 12 \frac{Ee Je}{Le^3} \lambda$$

$$K_{22} = K_r$$

$$K_{33} = 4 \frac{Ee Je}{Le} + 12 \frac{Ee Je \lambda}{Le^2} + 12 \frac{Ee Je \lambda^2}{Le^3} + K_i$$

$$K_{34} = K_{43} = -K_i$$

$$K_{44} = K_i$$

$$K_{14} = K_{23} = K_{24} = K_{32} = K_{41} = K_{42} = 0$$

A solução da equação (2.30) pode ser obtida após transformação na forma de equação de estado, que representa um problema de autovalores e autovetores apresentado na forma padrão.

Definindo um vetor $\{P_i\}$ tal que:

$$\{P_i\} = \omega \{Q_i\} \tag{2.32}$$

pode-se escrever a equação (2.30) como:

$$\left[\begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{c} 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} I \end{array} \right] \\ \hline \left[\begin{array}{c} A_{1,ij} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} A_{2,ij} \end{array} \right] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{Q_i\} \\ \{P_i\} \end{array} \right\} = \omega \left\{ \begin{array}{c} \{Q_i\} \\ \{P_i\} \end{array} \right\} \tag{2.33}$$

onde:

$\left[\begin{array}{c} 0 \end{array} \right]$ e $\left[\begin{array}{c} I \end{array} \right]$ são matrizes nula e identidade, de ordem 4x4, enquanto que $\left[\begin{array}{c} A_{1,ij} \end{array} \right]$ e $\left[\begin{array}{c} A_{2,ij} \end{array} \right]$ são matrizes quadradas de ordem quatro definidas por:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} A_{2,ij} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c} M_{ij} \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} N_{ij} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} A_{1,ij} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c} M_{ij} \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} K_{ij} \end{array} \right] \end{aligned}$$

2.4. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DE "WHIRLING" FORÇADO COM AMORTECIMENTO EXTERNO

Apesar dos excelentes métodos existentes para balancear rotores, empregando técnicas de otimização para minimizar os níveis de vibrações residuais, não se consegue eliminar completamente os desbalanceamentos originais. Os desbalanceamentos residuais podem causar elevadas amplitudes de vibrações quando o volante gira próximo de uma de suas velocidades críticas.

Na ausência de amortecimento externo, as respostas na ressonância crescem para valores infinitamente grandes, provocando falha no eixo do volante.

O uso de um amortecedor externo atuando sobre o sistema volante-suspensão, tem a finalidade de reduzir as amplitudes de vibração na passagem pela ressonância, obtendo níveis inferiores ao limite elástico do eixo. Sabe-se por outro lado que além desta redução de amplitude, o amortecimento externo também pode eliminar fenômenos de instabilidade provocados, por exemplo, por amortecimento interno do material do eixo do volante.

O principal objetivo da análise de "whirling" forçado, é calcular o valor mínimo de amortecimento necessário ao sistema, tal que o nível máximo de resposta na ressonância esteja abaixo do valor máximo permissível para a deformação do eixo do volante.

Para facilitar a análise matemática, considera-se inicialmente o amortecimento externo no plano do volante, como mostra a Fig. 2.6, e procura-se depois uma relação de equivalência para um amortecedor de massa desprezível localizado na parte inferior do cubo do volante.

Se o desbalanceamento do volante for originado em uma descentragem do cubo, com excentricidade r_c , pode-se escrever para des

locamento radial do conjunto:

$$r_C = r + r_\epsilon e^{i\Omega t} \tag{2.34}$$

onde r é a distância da linha de equilíbrio estático ao centro geométrico do cubo.

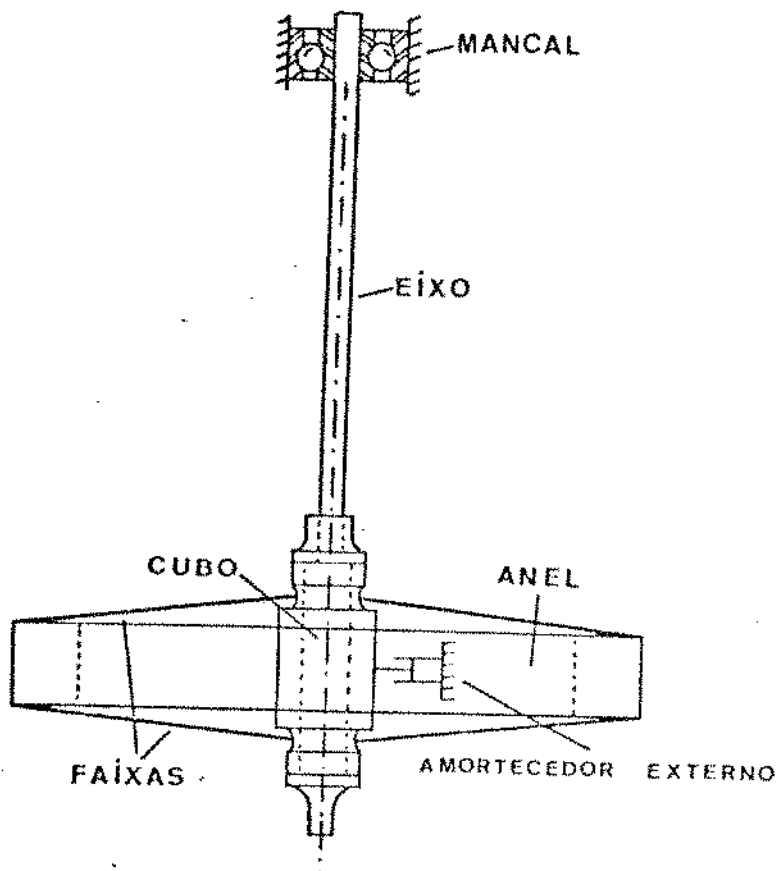


Fig. 2.6 - Representação da posição do amortecedor externo no modelo teórico

Analogamente, para desbalanceamento provocado por desalinhamento angular do cubo, pode-se escrever:

$$\psi_C = \psi + \psi_\epsilon e^{i\Omega t} \tag{2.35}$$

onde ψ é o deslocamento angular entre a linha de equilíbrio estático e a li

nha que passa pelo centro geométrico do cubo.

Encontrando as derivadas de primeira e segunda ordem das equações (2.34) e (2.35) e substituindo nas equações (2.21), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 M_C &= J_C \ddot{\psi} - i I_C \Omega \dot{\psi} - (J_C - I_C) \psi \epsilon \Omega^2 e^{i\Omega t} \\
 M_A &= J_A \ddot{\psi}_A - i I_A \Omega \dot{\psi}_A \\
 F_C &= m_C \ddot{r} - m_C r \epsilon \Omega^2 e^{i\Omega t} \\
 F_A &= m_A \ddot{r}_A \\
 F_{ZA} &= m_A \ddot{z}_A
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Substituindo as quatro primeiras equações de (2.36) na equação matricial (2.27) e introduzindo o amortecimento externo no plano do volante, para amortecer as vibrações radial do volante, tem-se:

$$\begin{pmatrix} m_C \ddot{r} + c \dot{r} - m_C r \epsilon \Omega^2 e^{i\Omega t} \\ m_A \ddot{r}_A \\ J_C \ddot{\psi} - i I_C \Omega \dot{\psi} - (J_C - I_C) \psi \epsilon \Omega^2 e^{i\Omega t} \\ J_A \ddot{\psi}_A - i I_A \Omega \dot{\psi}_A \end{pmatrix} = [\alpha_{ij}]^{-1} \begin{pmatrix} r \\ r_A \\ \psi \\ \psi_A \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

onde:

c = coeficiente de amortecimento externo no plano do volante.

A equação (2.37) representa o movimento de "whirling" forçado do volante, devido à excitação provocada por excentricidade e de salinhamento angular, com amortecimento externo.

Admitindo para (2.37) uma solução do tipo:

$$\{q_j\} = \{Q_j\} e^{i\Omega t} \quad (2.38)$$

obtém-se:

$$([M_{ij}]\Omega^2 - [N_{ij}]\Omega - [K_{ij}]) \begin{pmatrix} r \\ r_A \\ \psi \\ \psi_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_C r_c \Omega^2 e^{i\Omega t} \\ 0 \\ (J_C - I_C) \psi_C \Omega^2 e^{i\Omega t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

onde:

$\{q_j\}$ para $j = 1, \dots, 4$ é o valor de coordenadas generalizadas definido por:

$$\{q_j\} = \{r, r_A, \psi, \psi_A\}^T$$

e $\{Q_j\}$ para $j = 1, \dots, 4$ é o vetor amplitude.

A equação (2.39) é do tipo:

$$[A_{ij}] \{Q_j\} = \{F_i\} \quad (2.40)$$

onde:

$[A_{ij}]$ é uma matriz simétrica complexa de ordem 4x4 definida por:

$$A_{11} = m_C \Omega^2 - c i \Omega - K_{11}$$

$$A_{22} = m_A \Omega^2 - K_{22}$$

$$A_{33} = (J_C - I_C) \Omega^2 - K_{33}$$

$$A_{44} = J_A \Omega^2 - K_{44}$$

$$A_{ij} = -K_{ij} \quad \text{para } i \neq j \text{ e } i, j = 1, \dots, 4$$

$\{F_i\}$ é um vetor excitação 4x1, definido por:

$$F_1 = m_C r_e \Omega^2$$

$$F_3 = (J_C - I_C) \psi_e \Omega^2$$

$$F_2 = F_4 = 0$$

A solução da equação matricial (2.40) pode ser obtida definindo-se:

$$[A_{ij}] = [A_{Rij}] + i[A_{Iij}] \quad (2.41)$$

$$\{Q_j\} = \{Q_{Rj}\} + i\{Q_{Ij}\}$$

Usando as expressões (2.41) pode-se escrever a equação (2.40) na forma:

$$\begin{bmatrix} [A_{Rij}] & -[A_{Iij}] \\ [A_{Iij}] & [A_{Rij}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q_{Rj}\} \\ \{Q_{Ij}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{Ri}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

Para solução de (2.42), escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} \{Q_{Rj}\} \\ \{Q_{Ij}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{Rij}] & -[A_{Iij}] \\ [A_{Iij}] & [A_{Rij}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{F_{Ri}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Se o desbalanceamento está no anel do volante provocado por excentricidade ou desalinhamento angular, pode-se escrever:

$$r_A = r + r_e e^{i\Omega t}$$

$$\psi_A = \psi + \psi_\epsilon e^{i\Omega t} \quad (2.44)$$

onde r e ψ são as distâncias e o deslocamento angular entre a linha de equilíbrio estático e a linha que passa pelo eixo geométrico do anel, respectivamente.

Fazendo-se o procedimento análogo, chega-se para o vetor força de excitação $\{F_i\}$ e matriz $[A_{ij}^*]$ da equação (2.40):

$$A_{11} = m_C \Omega^2 - c i \Omega - K_{11}$$

$$A_{22} = m_A \Omega^2 - K_{22}$$

$$A_{33} = J_C \Omega^2 - K_{33}$$

$$A_{44} = (J_A - I_A) \Omega^2 - K_{44}$$

$$F_1 = F_3 = 0$$

$$F_2 = m_A r_\epsilon \Omega^2$$

$$F_4 = (J_A - I_A) \psi_\epsilon \Omega^2$$

$$A_{ij} = -K_{ij} \quad \text{para } i \neq j \text{ e} \\ i, j = 1, \dots, 4$$

CAPÍTULO 3

DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS
DO VOLANTE

Este capítulo apresenta basicamente os experimentos estáticos e dinâmicos realizados para determinar os parâmetros característicos do volante, quais sejam: massas, inércias e rigidez dinâmicas das faixas a serem introduzidas nos modelos matemáticos de "whirling" livre e forçado desenvolvido no capítulo anterior.

3.1. MASSAS DO ANEL E CUBO DO VOLANTE

O cubo do volante (Fig. 3.1) é composto por três partes, sendo uma delas em alumínio st 37 pesando 1,23 Kg, onde são fixadas as faixas e duas usinadas em aço ABNT 1020 pesando 0,6 Kg. Uma das peças de aço serve como suporte de fixação do volante à sua suspensão, eixo flexível, enquanto que a outra foi colocada para limitar as amplitudes de vibração radial do cubo, conforme mostram os desenhos em conjunto do Apêndice 4.

Durante os experimentos de determinação dos parâmetros do volante, as duas peças em aço foram substituídas por dois discos, também usinados em aço, pesando 2,44 Kg. Com esta substituição, a massa total do cubo a ser considerada nestes experimentos é de 3,67 Kg.

O anel do volante foi construído de fibra e pesa 12,67 Kg.

As massas foram obtidas por meio de pesagem em balança de precisão, 10^{-2} gr, e encontram-se listadas na Tabela 3.2, que resume no final do capítulo todos os parâmetros característicos obtidos.

A inércia polar do volante com relação ao eixo Z foi determinada por meio da montagem experimental esquematizada na Fig. 3.2.

Um determinado peso P de massa conhecida, o qual encontra-se fixo a um fio enrolado sobre o diâmetro externo do volante, é solto na posição 1 da Fig. 3.2 e faz com que o volante gire e transmita um sinal de velocidade ao tacômetro por meio de um sensor ótico A. O tacômetro emite um sinal DC proporcional à velocidade ao plotter, que sua vez plota a curva $\omega = \omega(t)$. A derivada da curva adquirida no plotter fornece a aceleração angular do volante. Repetindo o experimento para diversos pesos, plota-se uma curva de torque em função da aceleração angular conforme mostra a Fig. 3.3.

Uma vez que a relação é linear, tem-se:

$$I_T = \Delta T / \Delta \dot{\omega} \quad (3.2)$$

onde: T é o torque aplicado ao volante

I_T é a inércia polar do volante

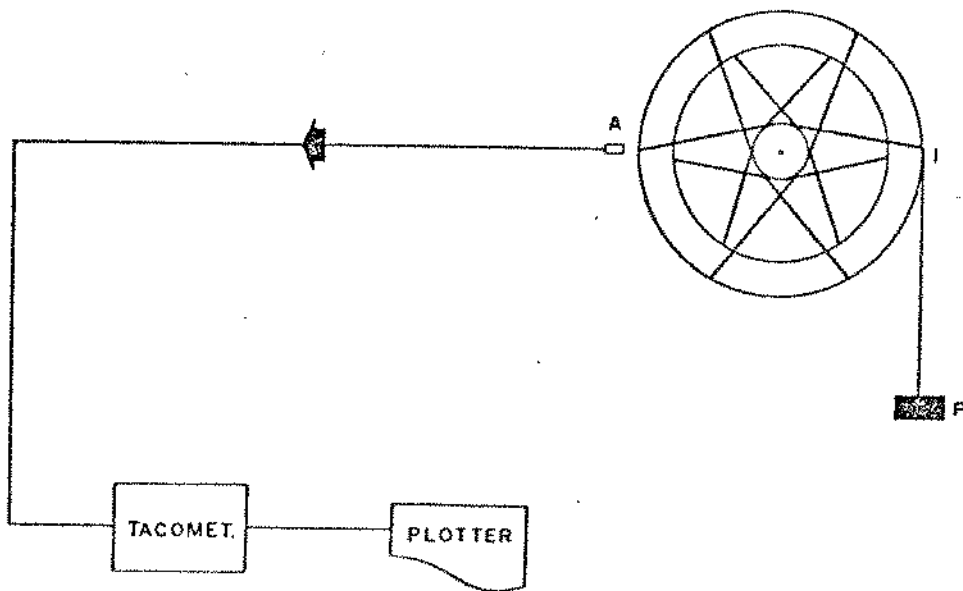


Fig. 3.2 - Montagem experimental para determinação da inércia polar do volante

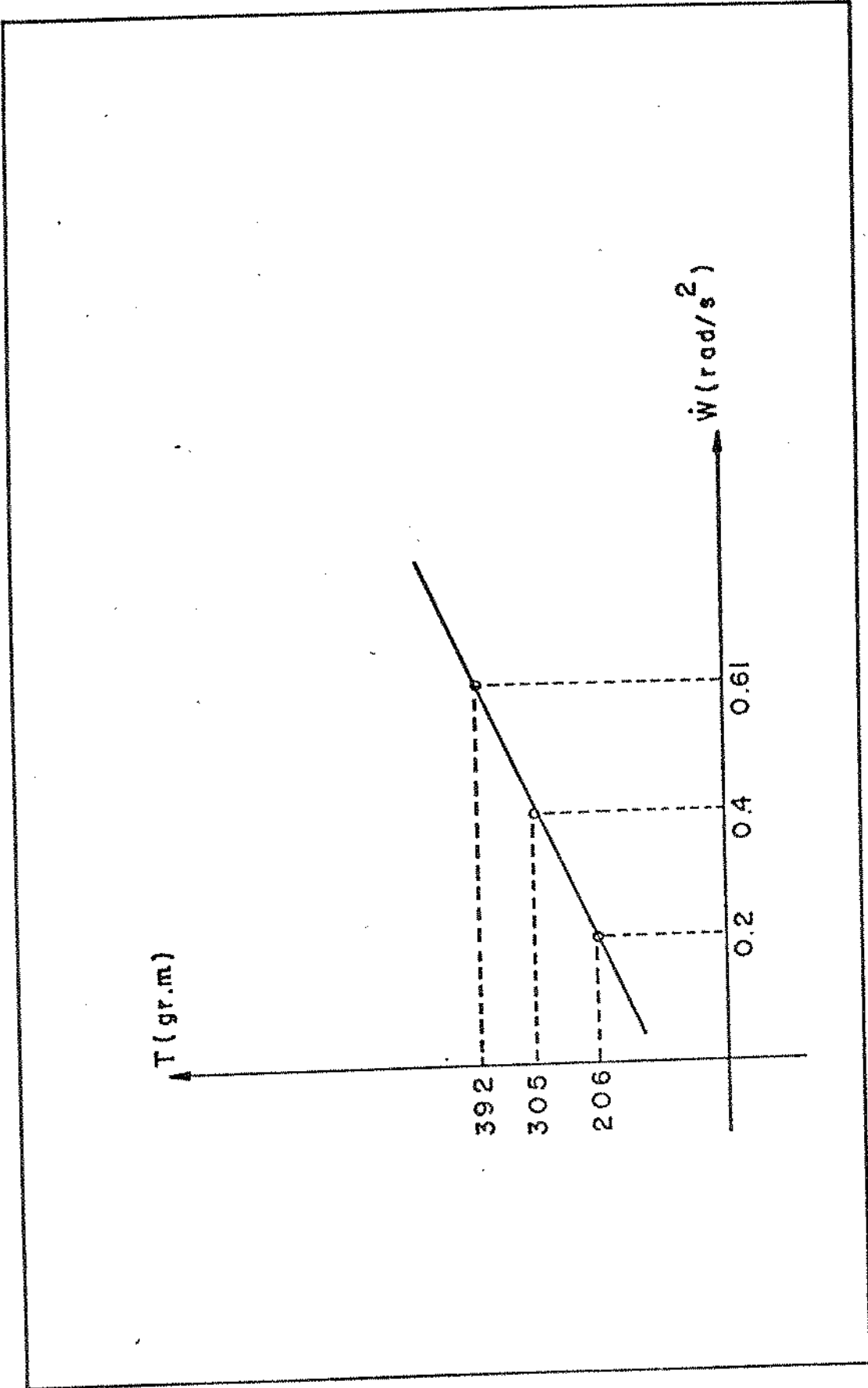


Fig. 3.3 - Torque aplicado ao anel em função da aceleração angular do volante

A inércia polar do anel em relação ao eixo Z foi calculada pela expressão:

$$I_A = \frac{1}{2} m_A (R_e^2 + R_i^2) \quad (3.3)$$

Usando as eqs. (3.2) e (3.3), pode-se calcular a inércia polar do cubo em relação ao eixo Z, desprezando-se a inércia das faixas. Tem-se portanto:

$$I_C = I_T - I_A \quad (3.4)$$

3.3. RIGIDEZ AXIAL, RADIAL E ANGULAR DAS FAIXAS

A rigidez axial e radial das faixas do volante foram encontradas dinamicamente por meio de testes de impedância mecânica [17]. A montagem do volante fixado em uma suspensão flexível, Figs. 3.4 e 3.5, é em ambos os casos equivalente a um sistema massa-mola-massa livre no espaço. A Fig. 3.6 mostra um circuito dinâmico para associações de impedância do sistema massa-mola-massa.

Com base na Fig. 3.6, pode-se escrever:

$$Z^B = \frac{1}{\frac{1}{Z_K} + \frac{1}{Zm_A}} \quad (3.5)$$

$$Z = Zm_C + Z^B \quad (3.6)$$

onde:

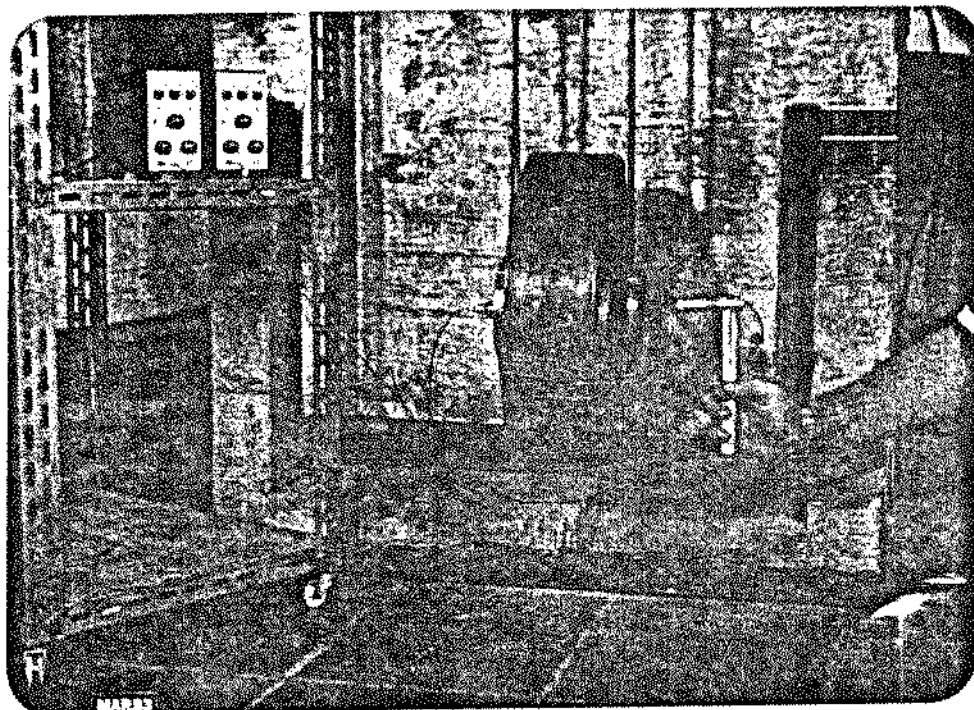


Fig. 3.4 - Montage experimental para determinação da rigidez axial das faixas do volante

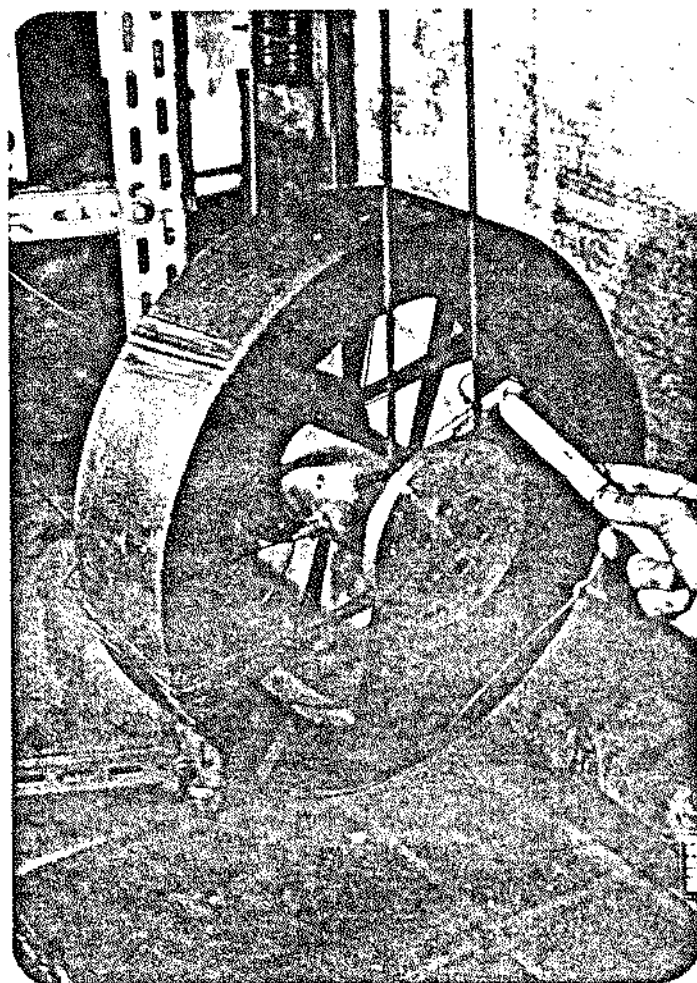


Fig. 3.5 - Montage experimental para determinação da rigidez radial das faixas do volante

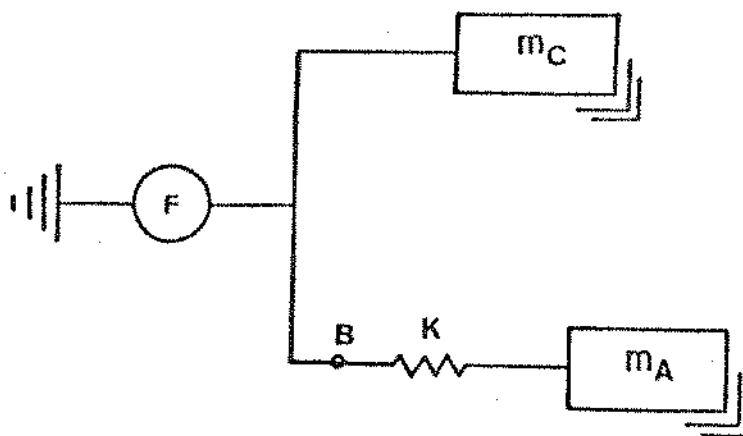


Fig. 3.6 - Circuito dinâmico do sistema massa-mola-massa

Z^B - impedância no Ponto B

Z_{m_C}, Z_{m_A} - impedância das massas do cubo e anel

Z_K - impedância da mola

Z - impedância total do sistema massa-mola-massa

Substituindo a eq. (3.5) em (3.6), encontra-se:

$$Z = Z_{m_C} + \frac{1}{\frac{1}{Z_K} + \frac{1}{Z_{m_A}}} \quad (3.7)$$

Para resposta em velocidade, a impedância dos elementos massa e mola, de acordo com [17], escreve-se:

$$Z_K = -i \frac{K}{\omega} \quad (3.8)$$

$$Z_m = i m \omega^2$$

com

$$i = \sqrt{-1}$$

Substituindo os valores da eq. (3.8) na eq. (3.7), tem-se:

$$Z = i (Km_A \omega + Km_C \omega - m_A m_C \omega^3) / (K - m_A \omega^2) \quad (3.9)$$

onde:

m_A - massa do anel

m_C - massa do cubo

K - rigidez das faixas

Sabe-se que a impedância de um sistema mecânico tende para zero na ressonância e para infinito na antirressonância. Logo, pode -
-se escrever:

Na ressonância:

$$Km_A - Km_C - m_A m_C \omega^2 = 0$$

ou

$$f_R = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K(m_C + m_A)}{m_C \cdot m_A}} \quad (3.10)$$

Na antirressonância:

$$K - m_A \omega^2 = 0$$

ou

$$f_A = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m_A}} \quad (3.11)$$

As frequências de ressonância e antirressonância associadas com os modos de vibração do anel referentes a deslocamento radial no plano XY e axial na direção Z foram determinadas da curva de resposta em frequência por meio de um analisador de Fourier HP 5451C que adquire simultaneamente os sinais gerados por um acelerômetro e uma célula de carga piezoelétrica montada em um excitador por impacto,

e os processa. O volante foi fixado em uma suspensão bastante flexível (0' rings), considerando-se por isso como um corpo livre no espaço, técnica geralmente utilizada na obtenção de curvas de mobilidade de estruturas [13,14,15].

O acelerômetro usado foi posicionado, em cada caso, no cubo do volante na mesma linha de ação da força de excitação e em sentido oposto a esta, como mostraram as Figs. 3.4 e 3.5.

Para excitar o sistema construiu-se um martelo de excitação por impacto adaptado com uma ponta de naylor que permite um nível suficiente de excitação até uma faixa de 1 KHz. Os diagramas das Figs. 3.7 e 3.8 referem-se às curvas de respostas do martelo excitador no domínio do tempo e em frequências respectivamente, obtido com a ponta de naylor excitando alumínio. O martelo foi instrumentado com uma célula de carga piezoelétrica.

Nos dois testes, os sinais analógicos provenientes do acelerômetro e martelo excitador, $S_X(t)$ e $S_Y(t)$ respectivamente, foram inicialmente condicionados e filtrados contra problemas de "aliasing" antes de alimentar um conversor analógico digital onde são convenientemente amostrados durante um tempo total T , a intervalos Δt com resolução em frequência Δf .

A Fig. 3.9 mostra um fluxograma de processamento de sinais.

Os dois sinais digitalizados $\bar{S}_X(t_i)$ e $\bar{S}_Y(t_i)$ são armazenados em blocos no mesmo analisador. Fazendo-se a transformada de Fourier do sinal integrado proveniente do bloco 0 e do sinal do bloco 1, obtemos os espectros de frequências $\bar{S}_X(f)$ e $\bar{S}_Y(f)$. Dividindo o sinal $\bar{S}_X(f)$ por $\bar{S}_Y(f)$ obtêm-se as curvas de resposta em velocidade (mobili

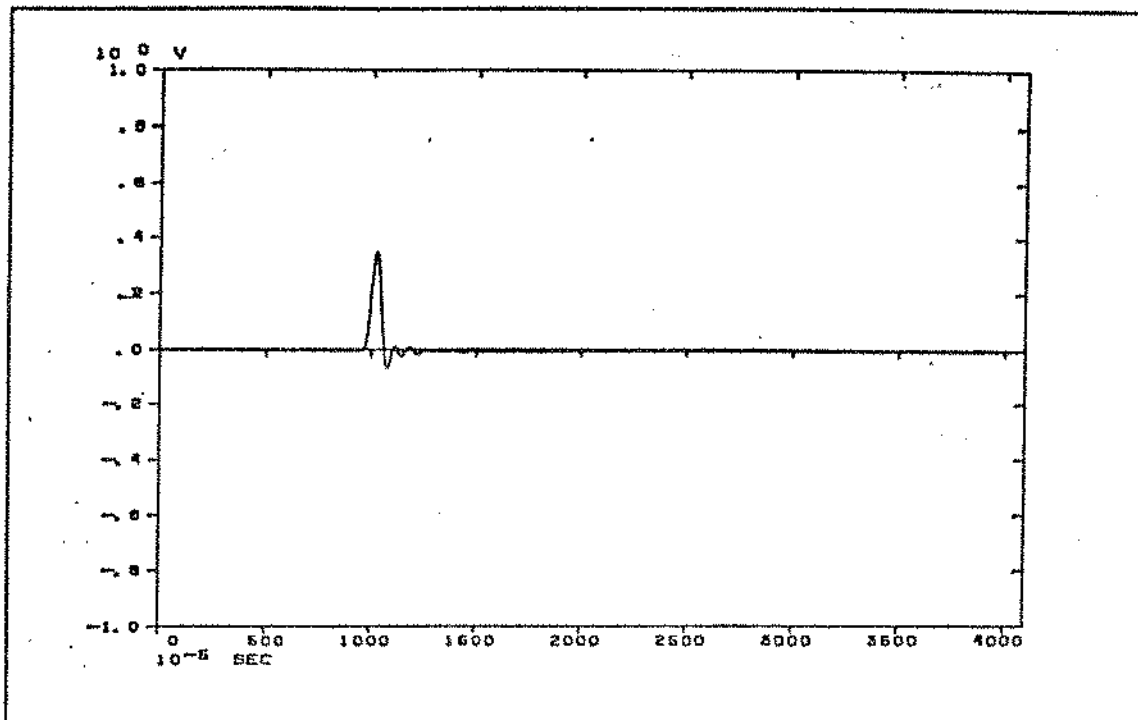


Fig. 3.7 - Curva de resposta do martelo no domínio do tempo, obtida com ponta de naylon excitando em alumínio

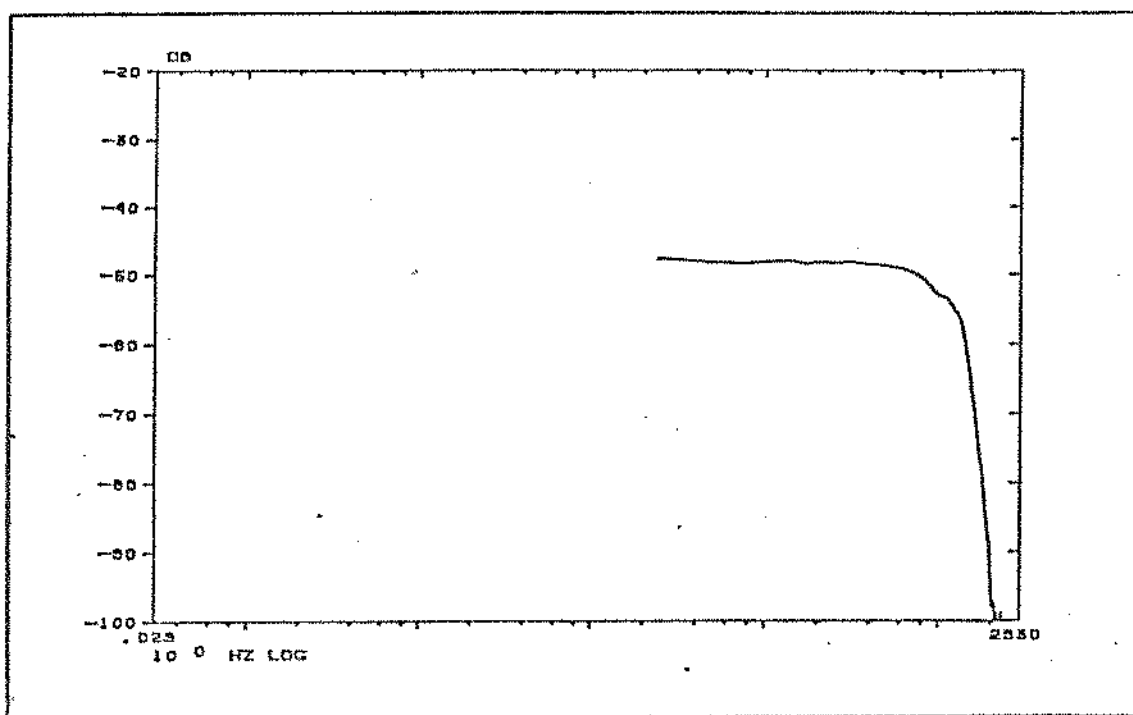


Fig. 3.8 - Curva de resposta do martelo no domínio de frequência, obtida com ponta de naylon excitando em alumínio

dade) dos dois modos de vibração, representadas nas Figs. 3.10 e 3.11.

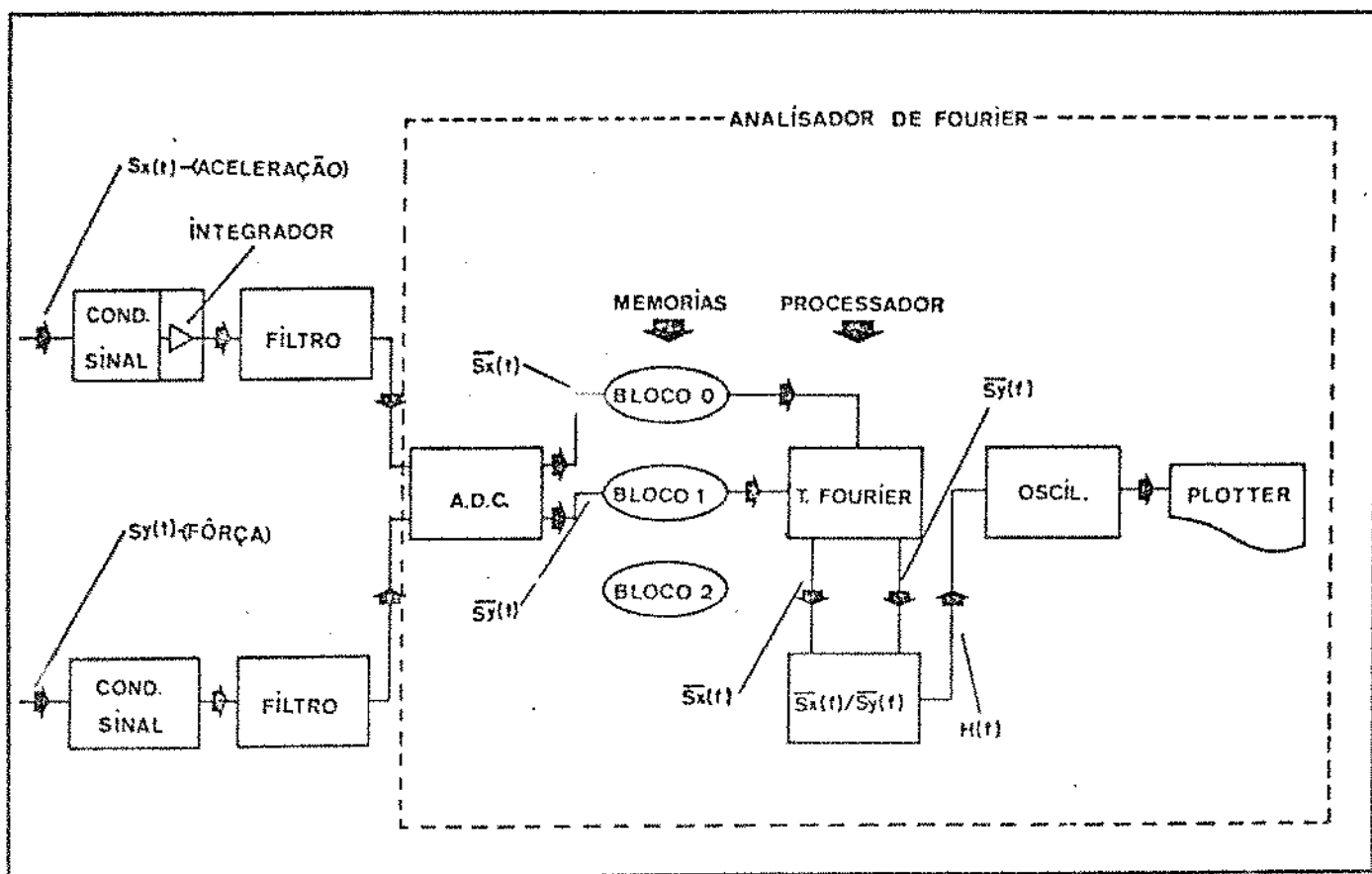


Fig. 3.9 - Processamento dos sinais do acelerômetro e do martelo excitador

O diagrama da Fig. 3.10 representa a curva de mobilidade de ponto de sistema, quando excitado axialmente. Observa-se nesta curva um pico em baixa frequência (menor que 2 Hz), proveniente da influência da suspensão flexível, uma antiressonância em 17,56 Hz e uma ressonância em 37,11 Hz.

O diagrama da Fig. 3.11 representa a curva de mobilidade de ponto do sistema, quando excitado radialmente. Analogamente, observa-

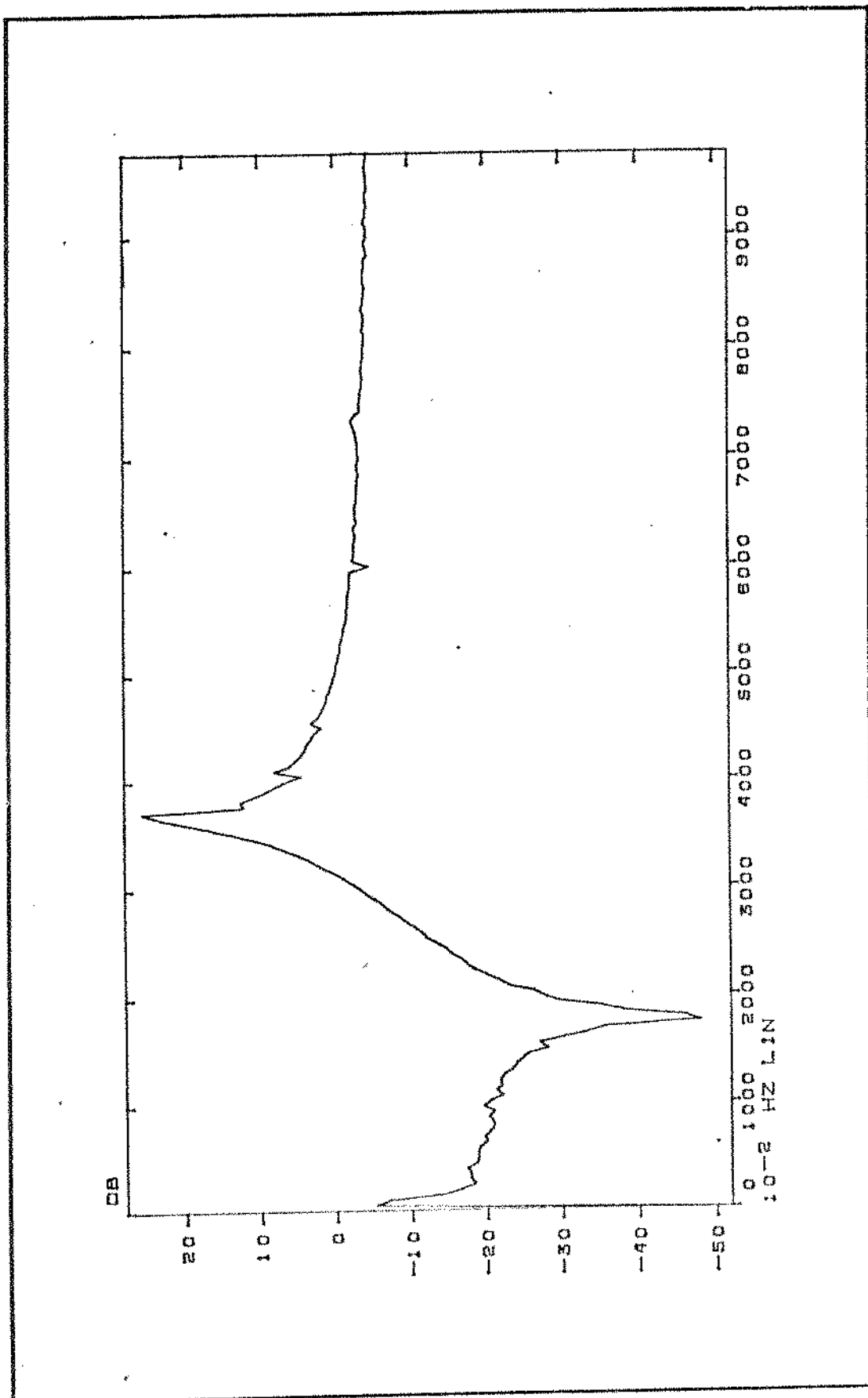


Fig. 3.10 - Curva de mobilidade de ponto do sistema, excitado de modo a se determinar K_A

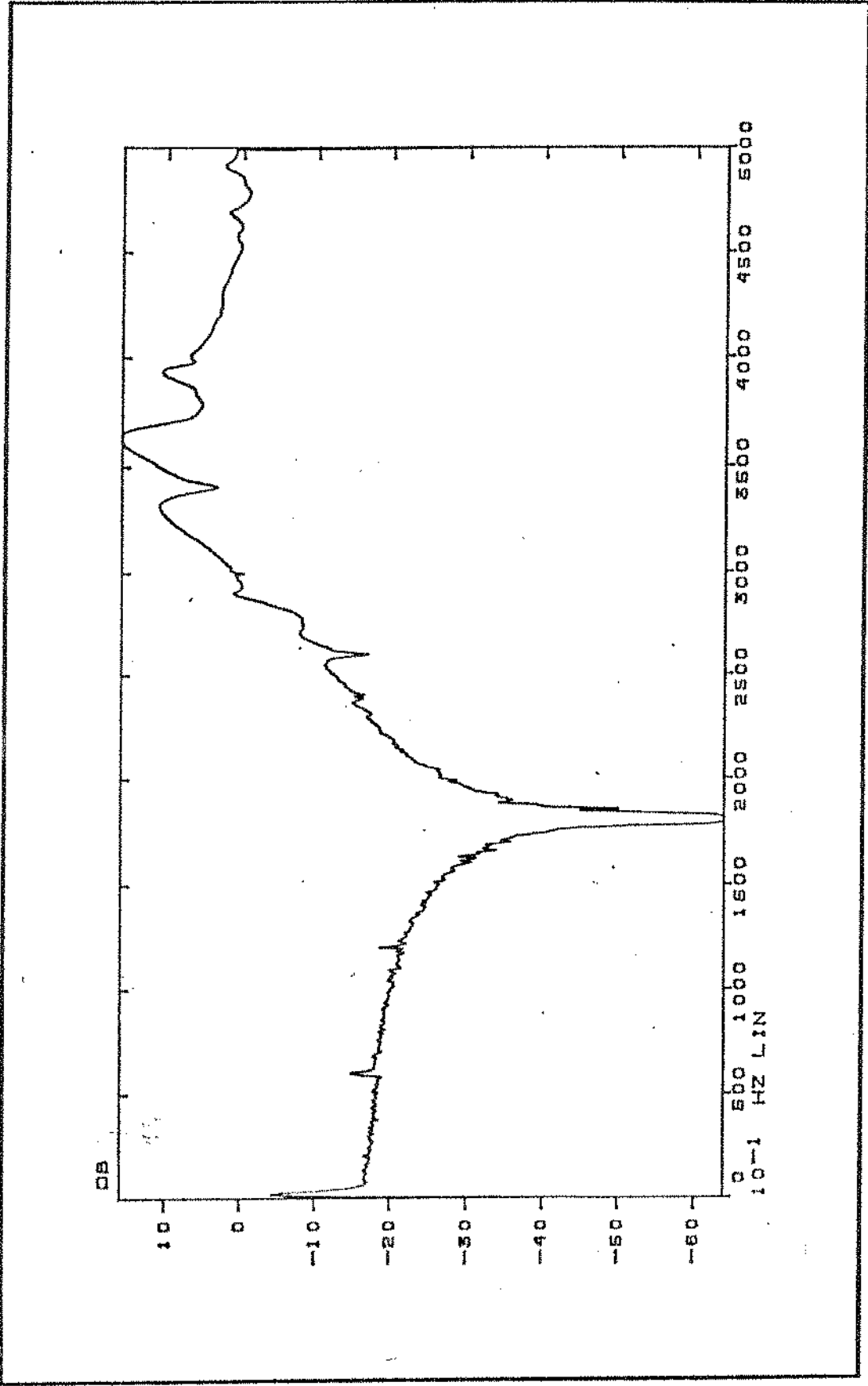


Fig. 3.11 - Curva de mobilidade de ponto do sistema, excitado de modo a se determinar K_T

-se um pico de em baixa frequência decorrente do problema de fixação a uma anti-ressonância em 180,7 Hz. Nota-se flutuações na curva de mobilidade devido às dificuldades de fixação do acelerômetro e de excitação na superfície curva do cubo.

Com os valores de frequências de ressonância e anti-ressonância, obtêm-se das eqs. (3.10) ou (3.11) as rigidez axial e radial das faixas do volante, ou seja:

$$K = \frac{(f_R \cdot 2\pi)^2 m_C \cdot m_A}{m_C + m_A} \quad (3.12)$$

ou

$$K = (f_A \cdot 2\pi)^2 \cdot m_A \quad (3.13)$$

sendo: $K = K_A$ no movimento axial

$K = K_R$ no movimento radial

A rigidez angular das faixas do volante K_γ , foi obtida por meio de ensaios estáticos devido a grande dificuldade de excitação deste modo.

Para estes ensaios, o volante foi fixado pelo cubo em uma estrutura bastante rígida. Foram colocados pesos aferidos sobre o anel e medido as deflexões através de um relógio comparador, conforme mostra a Fig. 3.12.

Para cada valor de peso P_i , colocado sobre o anel, tem-se de acordo com a Fig. 3.13:

$$\delta_T' = \delta_i + \delta_A \quad (3.14)$$

onde:

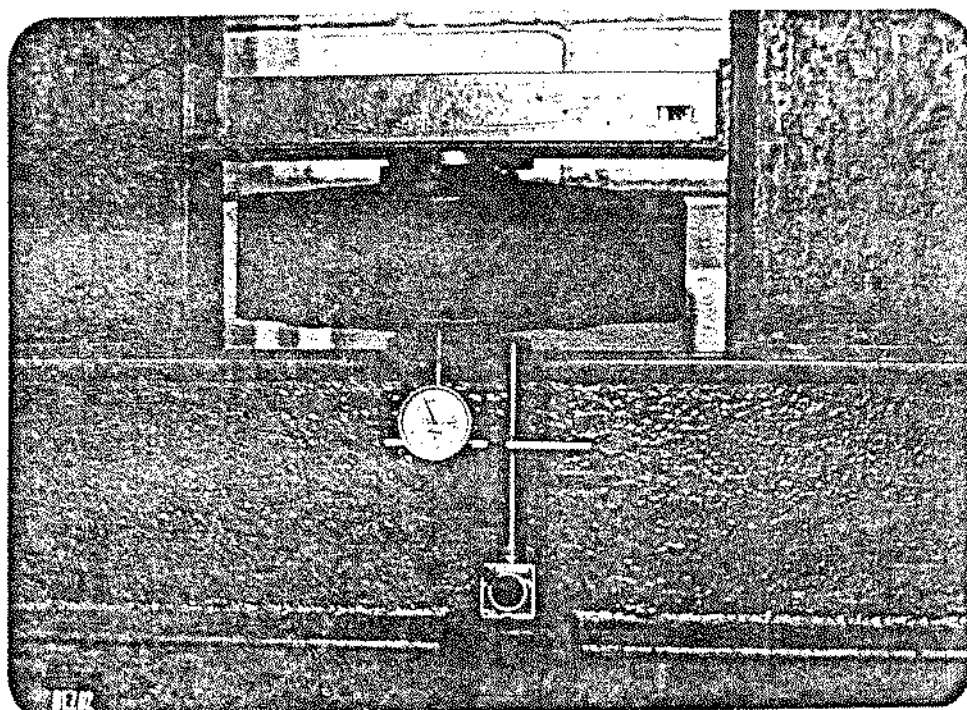


Fig. 3.12 - Montagem experimental para determinação da rigidez angular das faixas

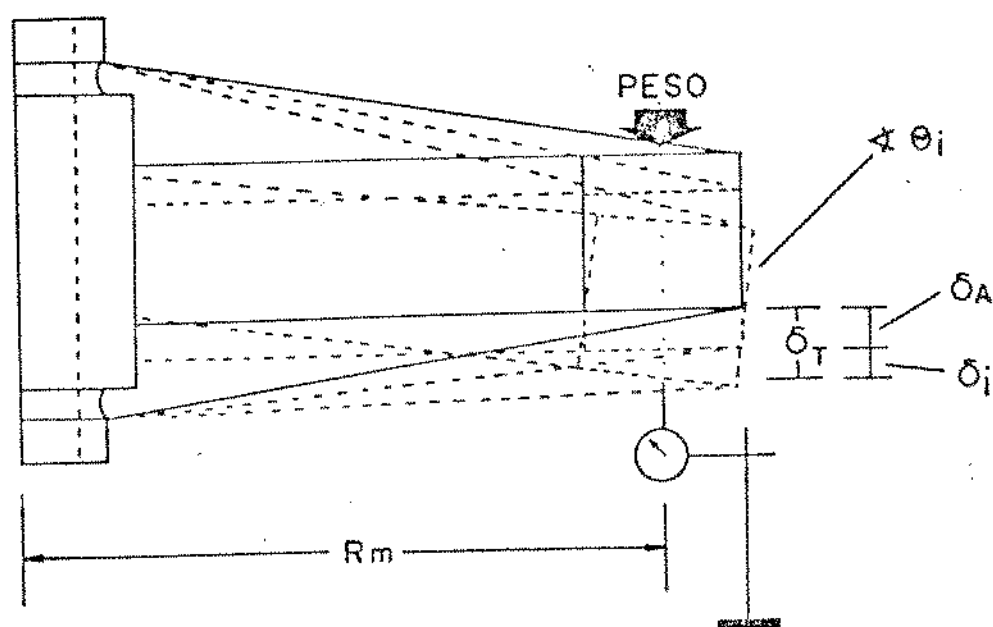


Fig. 3.13 - Diagrama das deflexões sofridas pelo anel em relação ao cubo

- δ_T - deflexão medida pelo relógio comparador
- δ_i - deflexão referente a inclinação do anel
- δ_A - deflexão axial do anel

A Tabela 3.1 mostra os valores computados para pesos variando de 1 a 8 Kgf.

Tabela 3.1 - Deflexão do anel em relação ao cubo para pesos colocados sobre o anel variando de 1 a 8 Kgf

P [N]	M [N.m]	δ_T [mm]	δ_A [mm]	δ_i [mm]	θ [rad]
9.8000E+00	1.7150E+00	8.0000E-02	6.3539E-02	1.6461E-02	1.6417E-06
1.9600E+01	3.4300E+00	1.6000E-01	1.2708E-01	3.2922E-02	3.2834E-06
2.9400E+01	5.1450E+00	2.4000E-01	1.9062E-01	4.9383E-02	4.9251E-06
3.9200E+01	6.8600E+00	3.3000E-01	2.5416E-01	7.5844E-02	7.5641E-06
4.9000E+01	8.5750E+00	4.1000E-01	3.1770E-01	9.2305E-02	9.2058E-06
5.8800E+01	1.0290E+01	4.8000E-01	3.8123E-01	9.8723E-02	9.8502E-06
6.8600E+01	1.2005E+01	5.6000E-01	4.4477E-01	1.1523E-01	1.1492E-05
7.8400E+01	1.3720E+01	6.3000E-01	5.0831E-01	1.2169E-01	1.2136E-05

Para cada valor de peso, P_i , colocado sobre o anel, o que corresponde a um momento $M_i = P_i \cdot R_m$, tem-se para inclinação do anel:

$$\theta_i = \arcsen \left(\frac{\delta_T - P_i/K_A}{R_m} \right) \quad (3.15)$$

onde:

$$\delta_A = P_i / K_A$$

R_m - raio medido do anel

Feito uma regressão linear dos valores de momento obtidos em função do ângulo de inclinação, Fig. 3.14, obtêm-se o valor de rigidez angular das faixas.

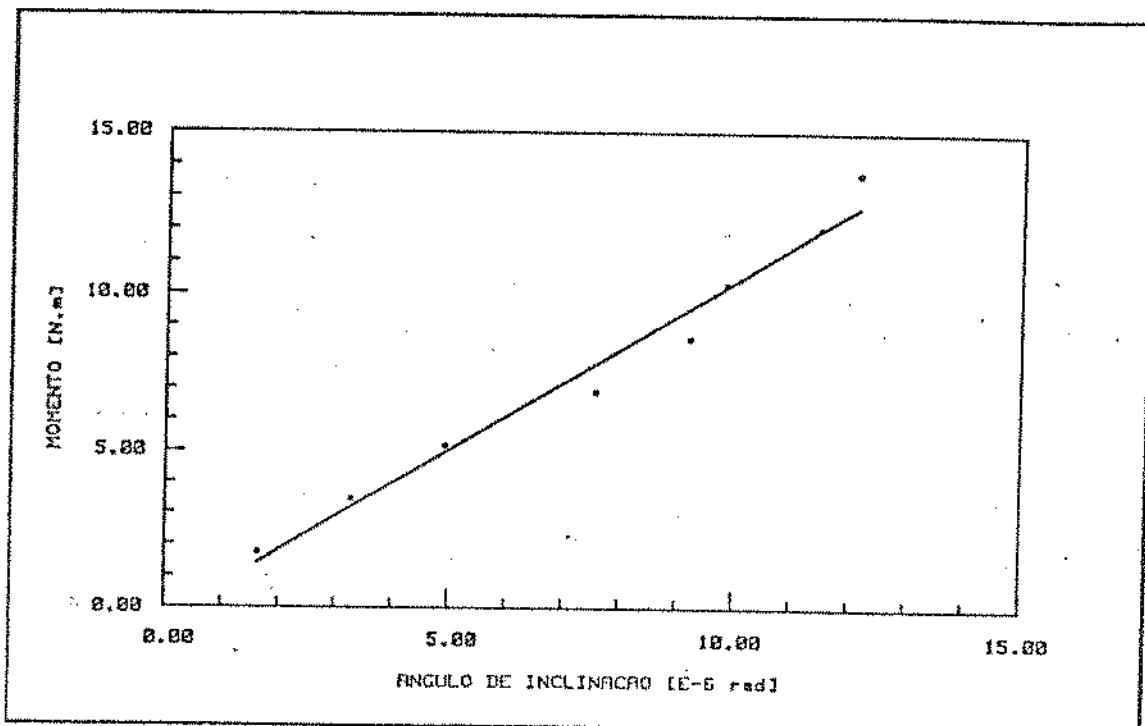


Fig. 3.14 - Diagrama de torque aplicado ao anel em função de sua inclinação

Os valores de rigidez dinâmica obtidas anteriormente, foram determinados para rotação nula do volante, considerando-se as faixas como corpos de massa desprezíveis. Nas referências [8] e [19] encontra-se um modelo matemático de rigidez expressas em função da rotação do volante admitindo as faixas como corpos de massas distribuídas uniformemente entre o cubo e o anel.

A Tabela 3.2 mostra todos os valores numéricos obtidos para os parâmetros característicos do volante, indicando em cada caso o método de obtenção utilizado na determinação de cada um deles.

Tabela 3.2 - Parâmetros Característicos do Volante

PARÂMETRO	VALOR NUMÉRICO	MÉTODO DE OBTENÇÃO
m_T	14,5 Kg	Balança de precisão
$*m_C$	1,83 Kg	Balança de precisão
m_A	12,67 Kg	Balança de precisão
J_C	$8 \cdot 10^{-3} \text{ Kg.m}^2$	como na referência[16]
J_A	$2,09 \cdot 10^{-1} \text{ Kg.m}^2$	eq. (3.1)
I_C	$5,8 \cdot 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$	eq. (3.4)
I_A	$3,96 \cdot 10^{-1} \text{ Kg.m}^2$	eq. (3.3)
I_T	$4,54 \cdot 10^{-1} \text{ Kg.m}^2$	eq. (3.2)
K_A	$1,542 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}$	eq. (3.12) ou (3.13)
K_R	$1,633 \cdot 10^7 \text{ N/m}$	eq. (3.12) ou (3.13)
K_I	$1,073 \cdot 10^6 \text{ N.m/rad}$	Fig. 3.14
R_m	$1,75 \cdot 10^{-1} \text{ m}$	Medido com escala

* Nos ensaios das Figs. 3.10 e 3.11 $m_C = 3,67 \text{ Kg}$.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS ANALÍTICOS

4.1. ANÁLISE DE "WHIRLING" LIVRE SEM AMORTECIMENTO

O modelo matemático desenvolvido anteriormente, eq. (2.33), permite calcular as frequências naturais do volante em função de sua velocidade de rotação.

Os valores numéricos dos parâmetros característicos do volante, ou sejam: massas, inércias e rigidez das faixas foram determinados experimentalmente e encontram-se listados na Tabela 3.2.

Desenvolve-se um conjunto de rotinas para o mini-computador HP 9845A que determinam os valores próprios da matriz de estado indicada na eq. (2.33). Devido ao mal condicionamento desta matriz, o conjunto de rotinas desenvolvido efetua um tratamento matricial de condicionamento para reduzir o tempo de processamento e consequentemente os erros do processo iterativo. Os detalhes de estruturação e uso das rotinas, encontram-se apresentados no Apêndice 2.

A Fig. 4.1 mostra os resultados obtidos para as frequências de "whirl" em função da rotação, para os quatro modos de vibração considerado no modelo físico de "whirling" livre.

Cada par de curvas de frequência de "whirl" corresponde a um modo de vibrar, indicados por um algarismo seguido das letras D ou R que indicam o sentido da precessão ("whirl") direta para uma precessão no mesmo sentido da rotação e retrógrada para uma precessão em sentido oposto.

A intersecção de cada par de curvas de frequências naturais com as retas $\omega = n\Omega$, determina as velocidades críticas de n-ésima ordem do modo correspondente, retrógrada ou direta dependendo do ramo de frequência.

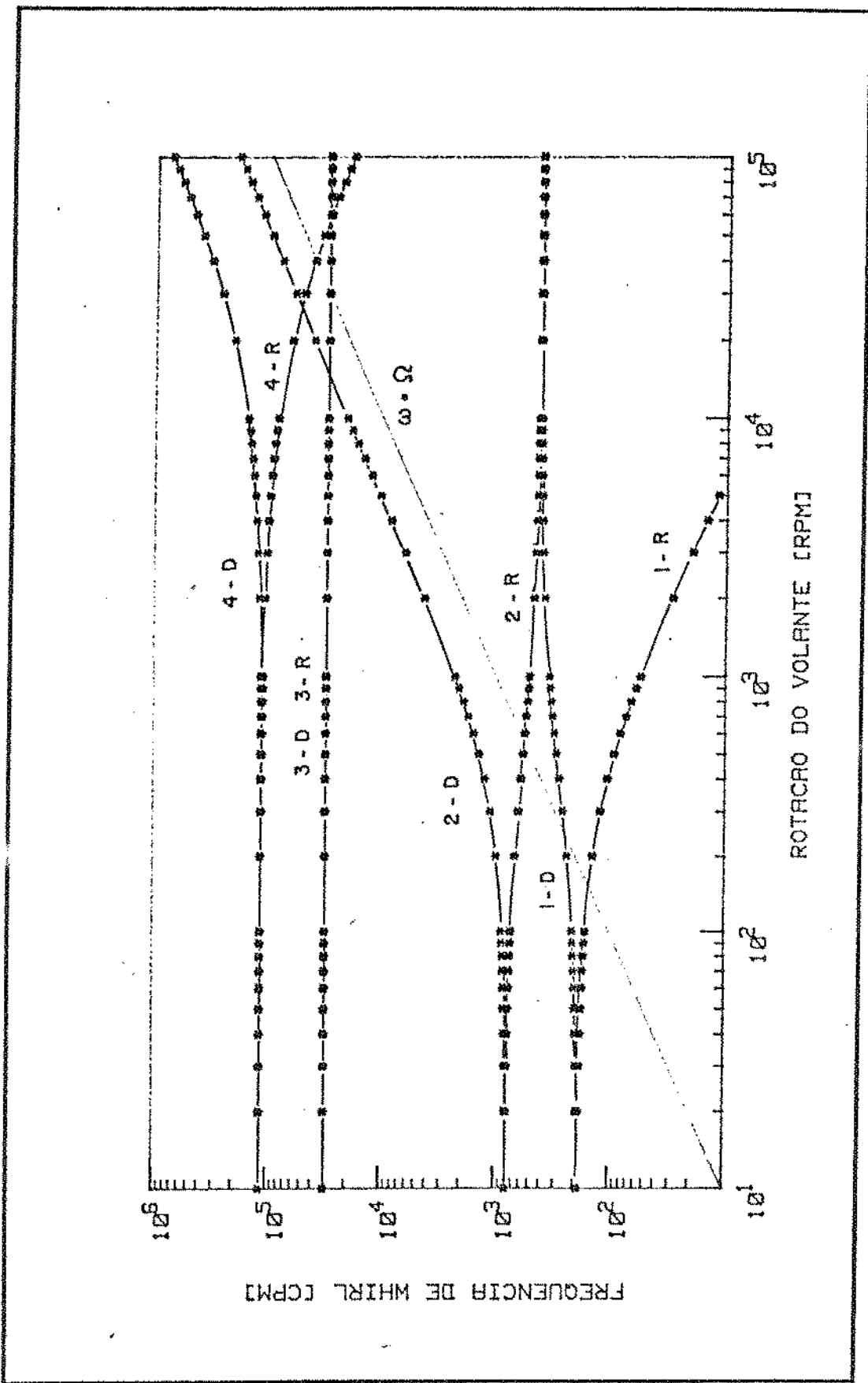


Fig. 4.1 - Frequências de "whirl" em função da rotação do volante

Na realidade não existe qualquer conceito definido sobre a prioridade de importância da ordem das velocidades críticas. Alguns autores [18] mencionam as velocidades críticas da primeira ordem processão direta, como mais importantes, outros indicam as de ordem superior, também diretas, como as mais perigosas.

A identificação de cada par de curvas de frequências naturais da Fig. 4.1 associada ao movimento correspondente de cada modo de vibração, foi feita com um método simples que consiste em variar um parâmetro que caracterize essencialmente um determinado modo de vibração e observar qual dos quatro pares de ramos de frequências é mais sensível a esta variação.

Os deslocamentos do anel e cubo do volante correspondentes aos quatro modos de vibração analisados no movimento de "whirling" estão ilustrados na Fig. 4.2. Nesta figura observa-se:

- 1º Modo - Deslocamento radial do anel e cubo do volante em fase
- 2º Modo - Inclinação do anel e cubo do volante em fase
- 3º Modo - Deslocamento radial do anel e cubo do volante em oposição de fase
- 4º Modo - Inclinação do anel e cubo do volante em oposição de fase

Na Fig. 4.1 observam-se seis velocidades críticas de primeira ordem das quais duas são diretas e quatro são retrôgradas. As diretas em 248 e 30450 r.p.m. correspondem respectivamente aos primeiro e terceiro modo de vibração. As retrôgradas em 160, 560, 30450 e 40000 r.p.m. refere-se aos primeiro, segundo, terceiro e quarto

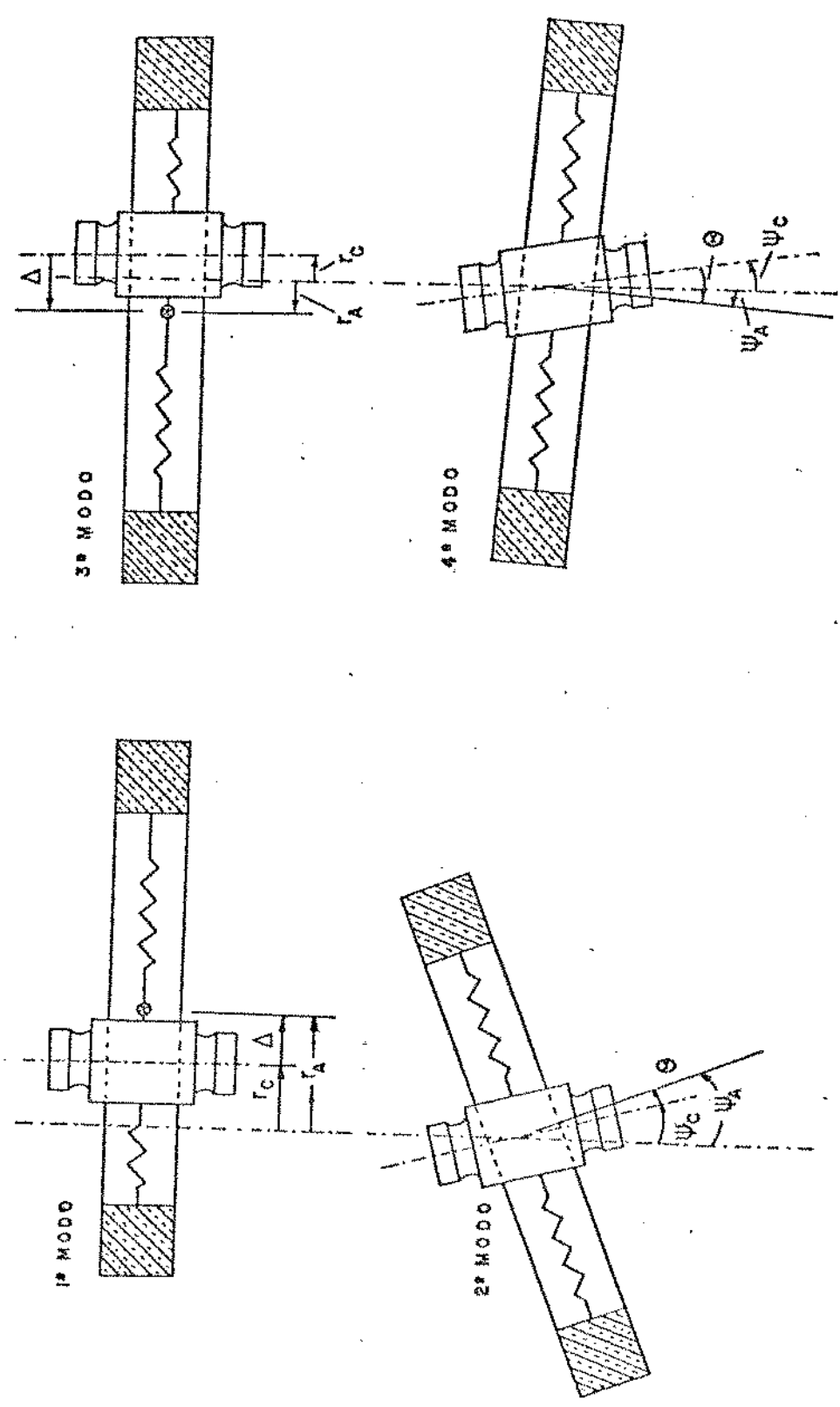


Figura 4.2 - Representação dos modos de vibração do volante, no movimento de "whirling"

modos de vibração respectivamente.

As frequências naturais do volante em função da velocidade de rotação, Fig. 4.1, foram obtidas utilizando os valores constaⁿtes de rigidez dinâmica das faixas determinadas experimentalmente conforme ilustrado no Capítulo 3. Em geral, a ação centrífuga das faixas faz com que suas rigidez variem em função da rotação do volante.

Neste trabalho estes valores de rigidez são admitidos como constantes, por razão de considerarmos as faixas como corpos elásticos de massas desprezíveis.

Na referência [19], encontra-se um modelo para obtenção das rigidez dinâmicas das faixas de volante em função de sua velocidade de rotação, características física dos materiais das faixas e parâmetros geométricos, além de sua diposição entre o anel e cubo.

4.2. INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DE SUSPENSÃO NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DO VOLANTE

O objetivo principal da análise de "whirling" livre é procurar deslocar as frequências naturais do volante de sua faixa de rotação nominal, variando-se os seus parâmetros característicos ou os da suspensão. Esta variação de velocidades críticas pode ser feita afastando-se as frequências naturais para valores inferiores às da faixa de rotação nominal tornando o volante mais supercrítico ou aproximando-se desta faixa, tornando menos supercrítico, até um determinado limite onde os níveis de vibração possam ser considera

dos adequados para o sistema.

Na realidade, o termo supercrítico é usado por alguns autores [8], para volantes operando numa faixa de rotação acima de todas suas velocidades críticas. Neste trabalho considera-se como supercrítico um volante que opere numa faixa de rotação a qual esteja acima de pelo menos uma de suas velocidades críticas.

No volante analisado, existem duas velocidades críticas de precessão retrógrada e uma de precessão direta que são sensivelmente alteradas por qualquer variação feita nos parâmetros de suspensão relacionados com a rigidez do eixo, ou sejam comprimento e inércia da seção transversal.

4.2.1. Comprimento do Eixo do Volante

A Fig. 4.3 mostra as variações das velocidades críticas do volante, para valores de comprimento do eixo variando de 50%, a menos, até 100% a mais do tamanho real ensaiado. Nota-se uma maior sensibilidade com relação a redução do comprimento do eixo, chegando a assumir valores de aumentos que correspondem a 91% para retrógrada do segundo modo, 278% para direta do primeiro modo e 71% para retrógrada do primeiro modo, ambas obtidas com uma redução de 50% do comprimento do eixo.

Para um aumento de 100% no comprimento do eixo, os valores destas velocidades críticas reduzem 44%, 69% e 56% respectivamente.

Observa-se ainda que para variações de comprimento do eixo acima de 100% do comprimento ensaiado, estas velocidades críticas ten

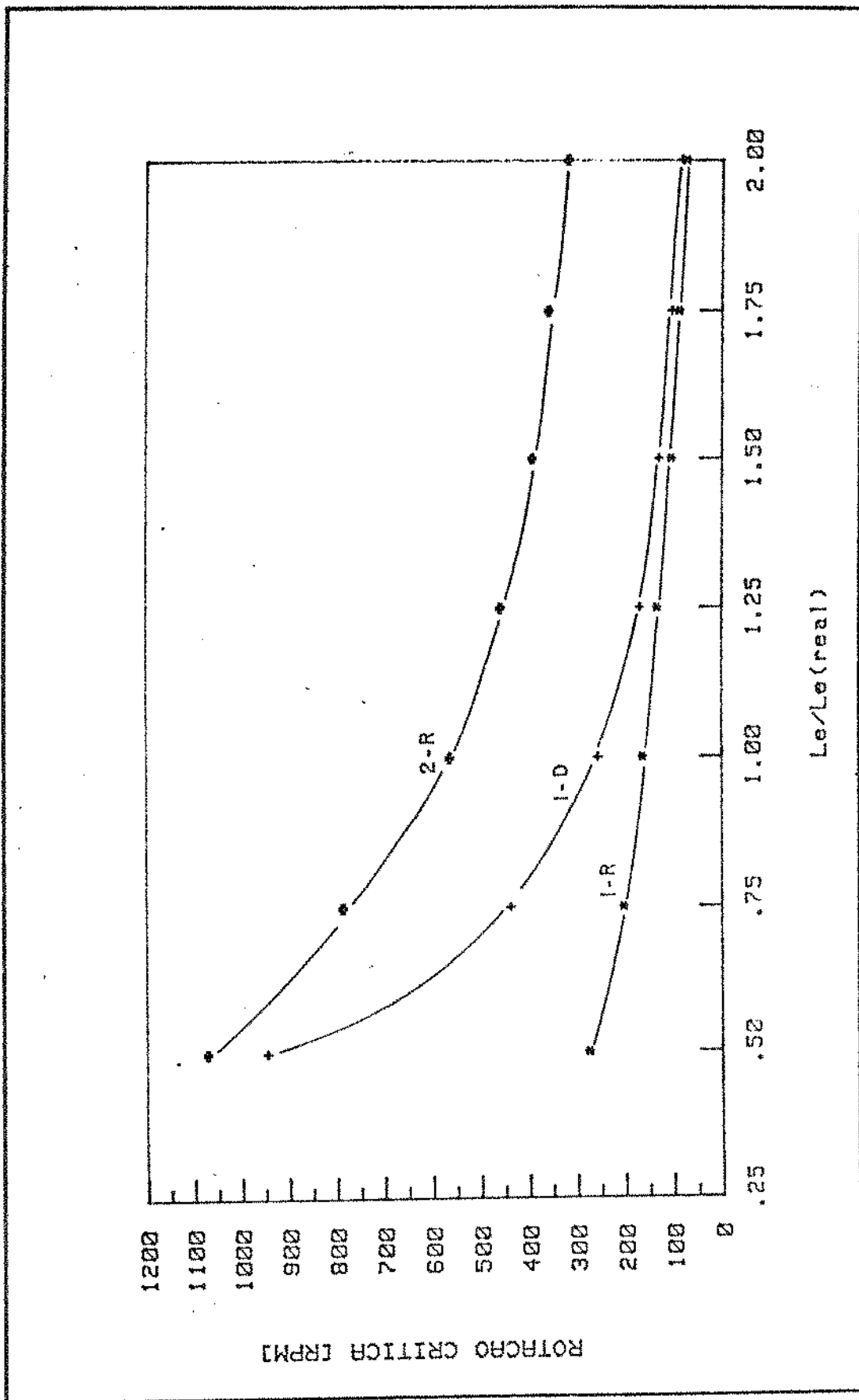


Figura 4.3 - Variação das velocidades críticas do primeiro e segundo modo de vibração com o comprimento do eixo

dem para valores relativamente constantes, ou seja, permanecem quase inalteradas para grandes gamas de variação de comprimento. Por outro lado, pequenas variações de reduções no comprimento do eixo correspondem a valores significativos de aumentos destas velocidades críticas.

4.2.2. Inércia da Seção Transversal do Eixo

O diagrama da Fig. 4.4 mostra a variação das velocidades críticas do primeiro e segundo modo de vibração, em relação a mudanças da inércia da seção transversal do eixo. Ao contrário do caso anterior, observa-se que a variação de 50% a menos de inércia da seção transversal do eixo, correspondem a reduções de 30% na retrógrada do segundo modo, 36% na direta do primeiro modo e 33% na retrógrada do primeiro modo.

Para variação de 100% de aumento na inércia da seção transversal do eixo, estes valores de rotações críticas passam a ser 43%, 41% e 30% maiores, respectivamente.

A retrógrada do quarto modo de vibração em 40000 r.p.m. e as retrógradas e direta do terceiro modo, ambas com 30450 r.p.m. são pouco afetadas com relação a esta gama de variações feita na suspensão.

A Fig. 4.5 mostra a variação das velocidades críticas, direta e retrógrada, do terceiro modo de vibração com relação a mudanças feitas na rigidez radial das faixas do volante. Observa-se que, uma redução de 80% desta rigidez, corresponde a uma redução de 56% nestas velocidades críticas.

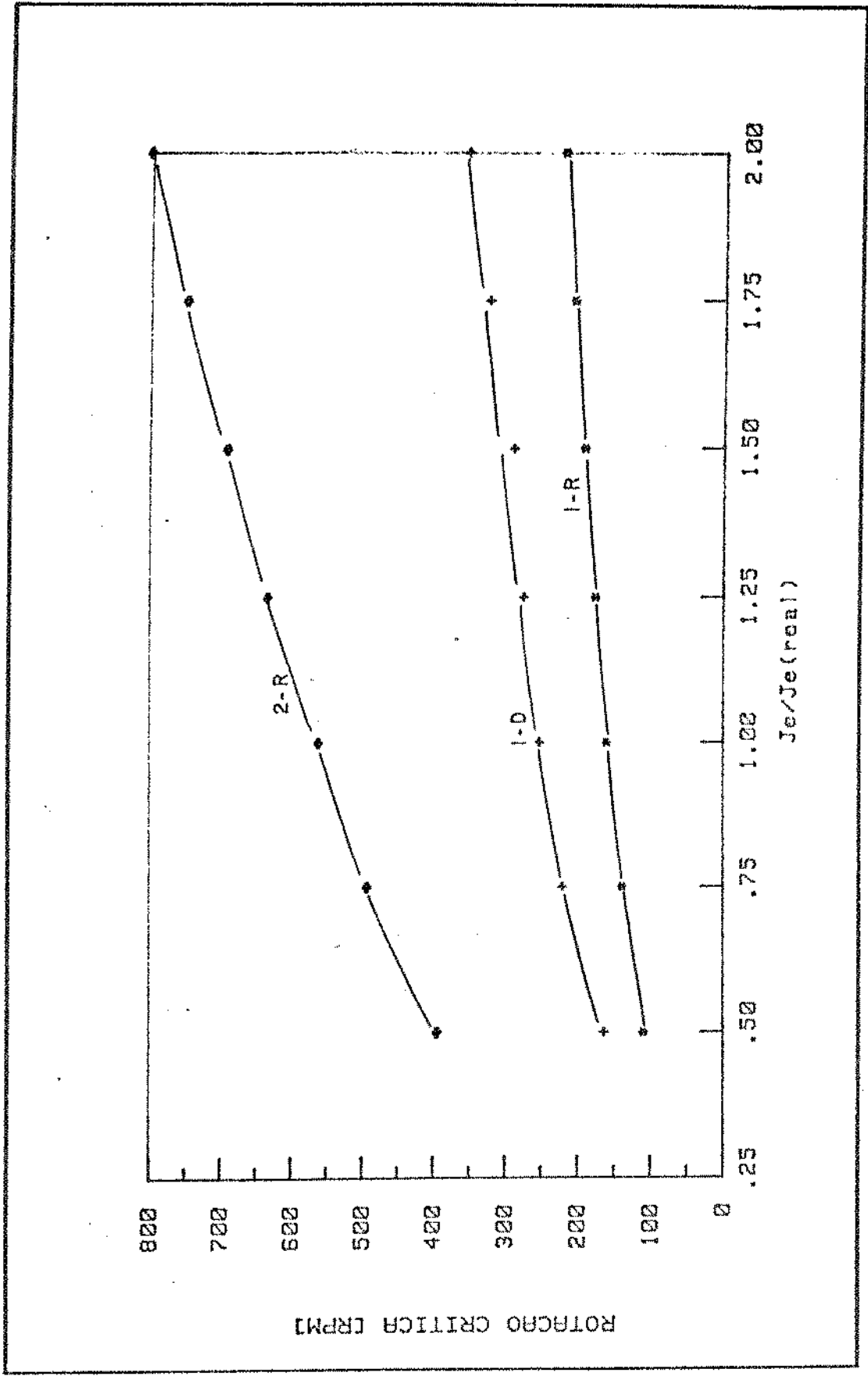


Figura 4.4 - Variação das velocidades críticas do primeiro e segundo modo de vibração com a inércia da seção transversal do eixo

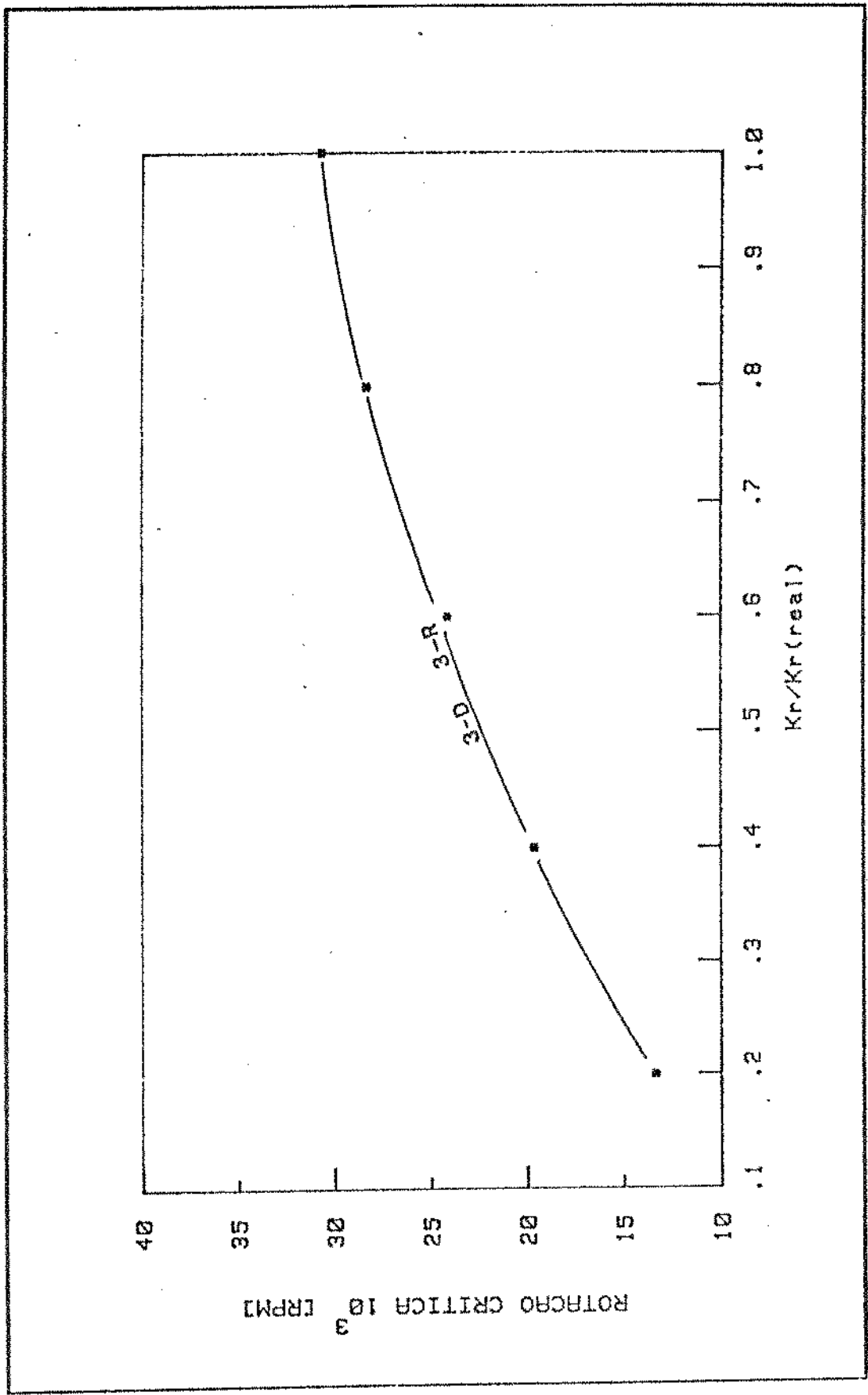


Figura 4.5 - Variação da velocidade crítica do terceiro modo de vibração com a rigidez radial das faixas do volante

4.3. ANÁLISE DO MOVIMENTO DE "WHIRLING" FORÇADO COM AMORTECIMENTO EXTERNO

Resolvendo a eq. (2.42) em um minicomputador HP 9854A, encontra-se as respostas do cubo e anel do volante ao desbalanceamento em função da velocidade de rotação do volante.

As Figs. 4.6 a 4.12 apresentam as respostas do movimento radial do cubo do volante por unidade de excentricidade ou de desalinhamento angular, induzidos por um desbalanceamento no cubo ou anel do volante. Um fato bastante interessante a ser observado nestas figuras é a relação existente com a Fig. 4.1 no terceiro e no primeiro modo de vibração.

Nas Figs. 4.6 e 4.7, observa-se que na ausência de amortecimento externo, $c = 0$, a amplitude de resposta do movimento radial do cubo do volante torna-se ilimitada na passagem pela velocidade crítica correspondente ao primeiro modo de vibração, acontecendo o mesmo na passagem pela velocidade crítica correspondente ao terceiro modo. Entretanto, a resposta do movimento radial do cubo do volante em decorrência da passagem do volante pela velocidade crítica correspondente ao terceiro modo de vibração, é de pouco interesse nesta análise, por motivo de só poder ser atingida com o volante acionado acima de sua faixa de rotação nominal.

As propriedades características do material do eixo permite uma deflexão máxima na extremidade do eixo até 5,6mm e uma inclinação máxima de 2,0 graus, correspondente a 9,6mm a 2,0 graus no centro de gravidade do cubo, sem que o mesmo atinja a faixa de plasticidade. Para limitar o deslocamento radial do cubo do volante em estudo, foi ins

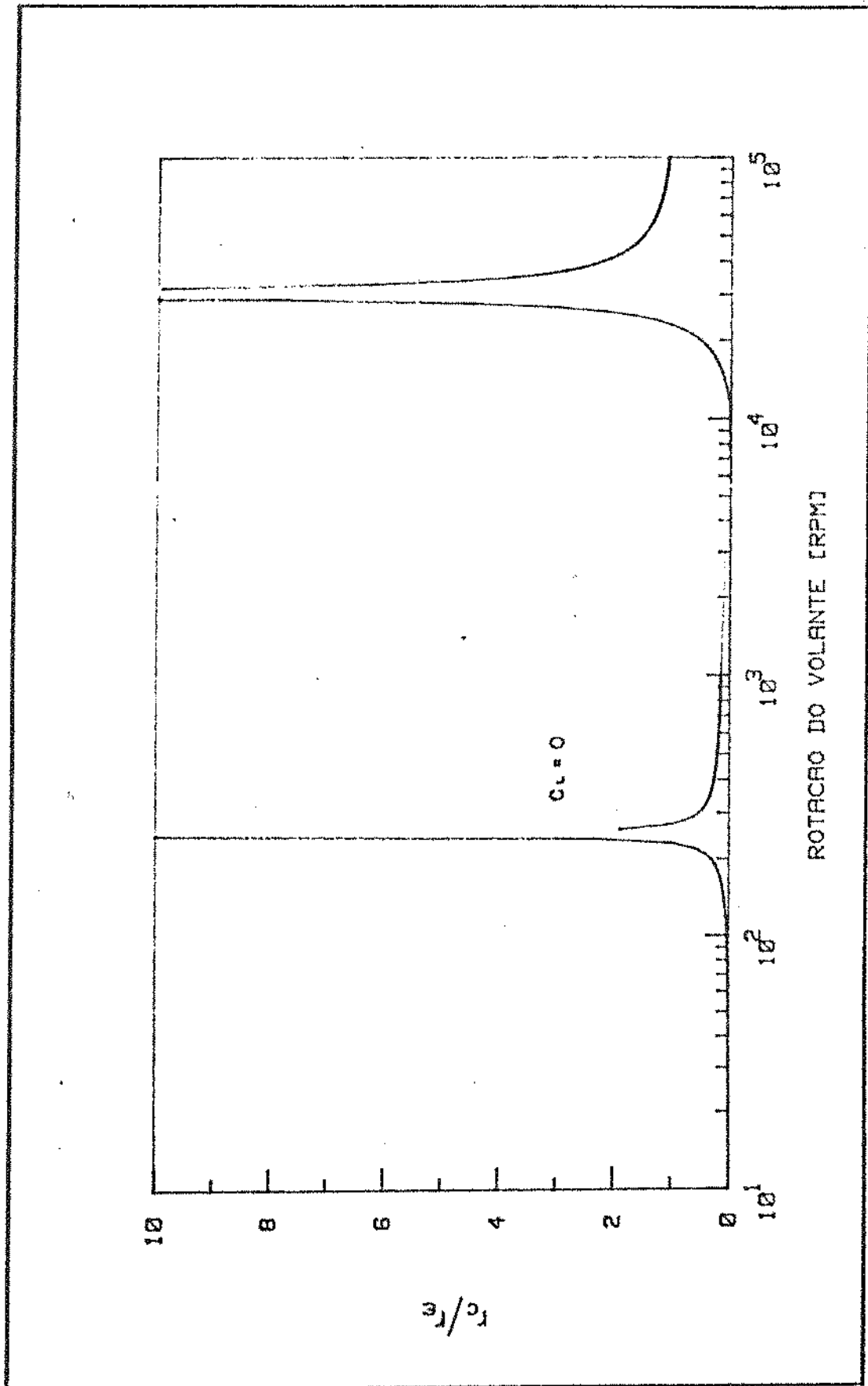


Fig. 4.6 - Resposta do eixo do volante com excentricidade no cubo, obtida com amortecimento externo nulo

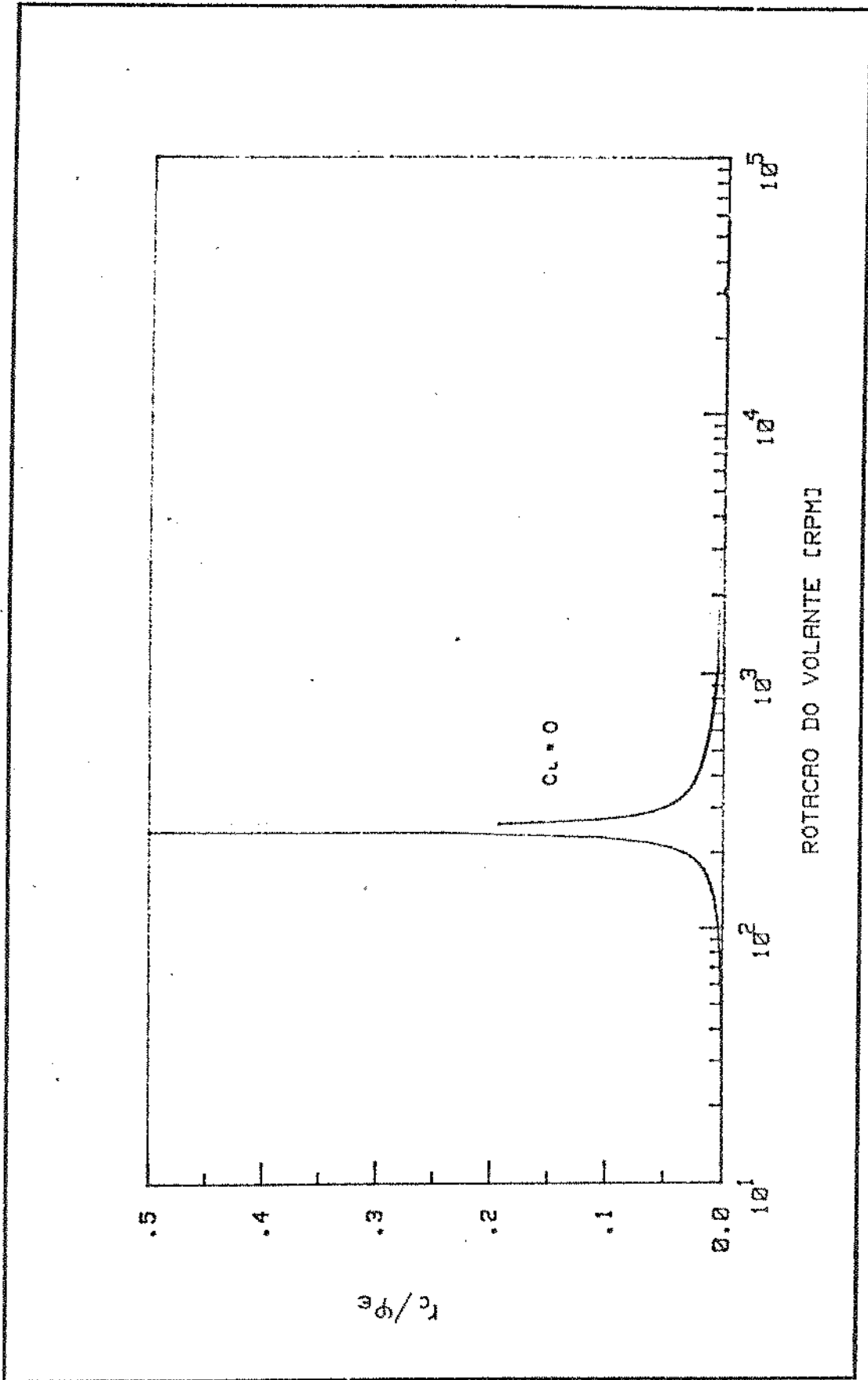


Figura 4.7 - Resposta do eixo do volante com desalinhamento angular no cubo, obtida com amortecimento externo nulo

talado um mancal na parte inferior do cubo, o qual limita este movimento do cubo de no máximo 3,5mm.

Na Fig. 4.8 encontra-se a resposta do movimento radial do cubo do volante em função da velocidade de rotação do volante, obtida com um amortecedor externo de $c = 15 \text{ Kg.s}^{-1}$. Observa-se que para valores de rotação dentro da faixa nominal, o nível máximo de resposta do movimento radial do cubo do volante por unidade de excentricidade, no cubo, é de 3,5 aproximadamente. Em outras palavras, a máxima excentricidade permitida é de 1mm, correspondente a desbalanceamento localizado no cubo do volante, para que o movimento radial do cubo do volante não atinja o limite máximo de amplitude permissível pelo mancal limitador.

A Fig. 4.9 mostra a resposta do movimento radial do cubo do volante em função da velocidade de rotação do volante, para um desalinhamento angular, no cubo, obtida com um coeficiente de amortecimento de 15 Kg.s^{-1} . Observa-se que o nível de amplitude deste movimento é cerca de 10 vezes menor, com relação à resposta à excentricidade, na passagem do volante pela velocidade crítica correspondente ao primeiro modo de vibração, tornando-se desprezível na passagem do volante pela velocidade crítica correspondente ao terceiro modo, conforme mostra o diagrama em escala ampliada da Fig. 4.10.

A Fig. 4.11 mostra a resposta do movimento radial do cubo do volante em função da velocidade de rotação do volante, para desbalanceamento localizado no anel, obtidas com coeficientes de amortecimento de 15 Kg.s^{-1} e 100 Kg.s^{-1} . Observa-se que, com um amortecimento de coeficiente igual a 15 Kg.s^{-1} , o nível de amplitude do movimento radial do cubo do volante por unidade de excentricidade no

anel do volante é cerca de 21,5 , ou seja, a máxima excentricidade no anel para que o nível de amplitude do movimento radial do cubo não exceda o limite do mancal, é de 0,162mm. Para um amortecimento de 100 Kg.s^{-1} , este limite de excentricidade passa a ser 1mm.

A amplitude de resposta do movimento radial do cubo, decorrente do desalinhamento angular do anel, Fig. 4.12, é relativamente baixa comparada com as obtidas por excentricidade. Observa-se, comparando os diagramas das Figs. 4.9 e 4.12, que ambas as respostas possuem o mesmo nível de amplitude correspondente a aproximadamente $0,32 \text{ m/rad}$. Mantendo o amortecimento externo de 15 Kg.s^{-1} , será permitido um desalinhamento angular máximo no anel ou no cubo do volante de 0,6 graus, para que o deslocamento radial do cabo esteja abaixo do valor limitado pelo mancal.

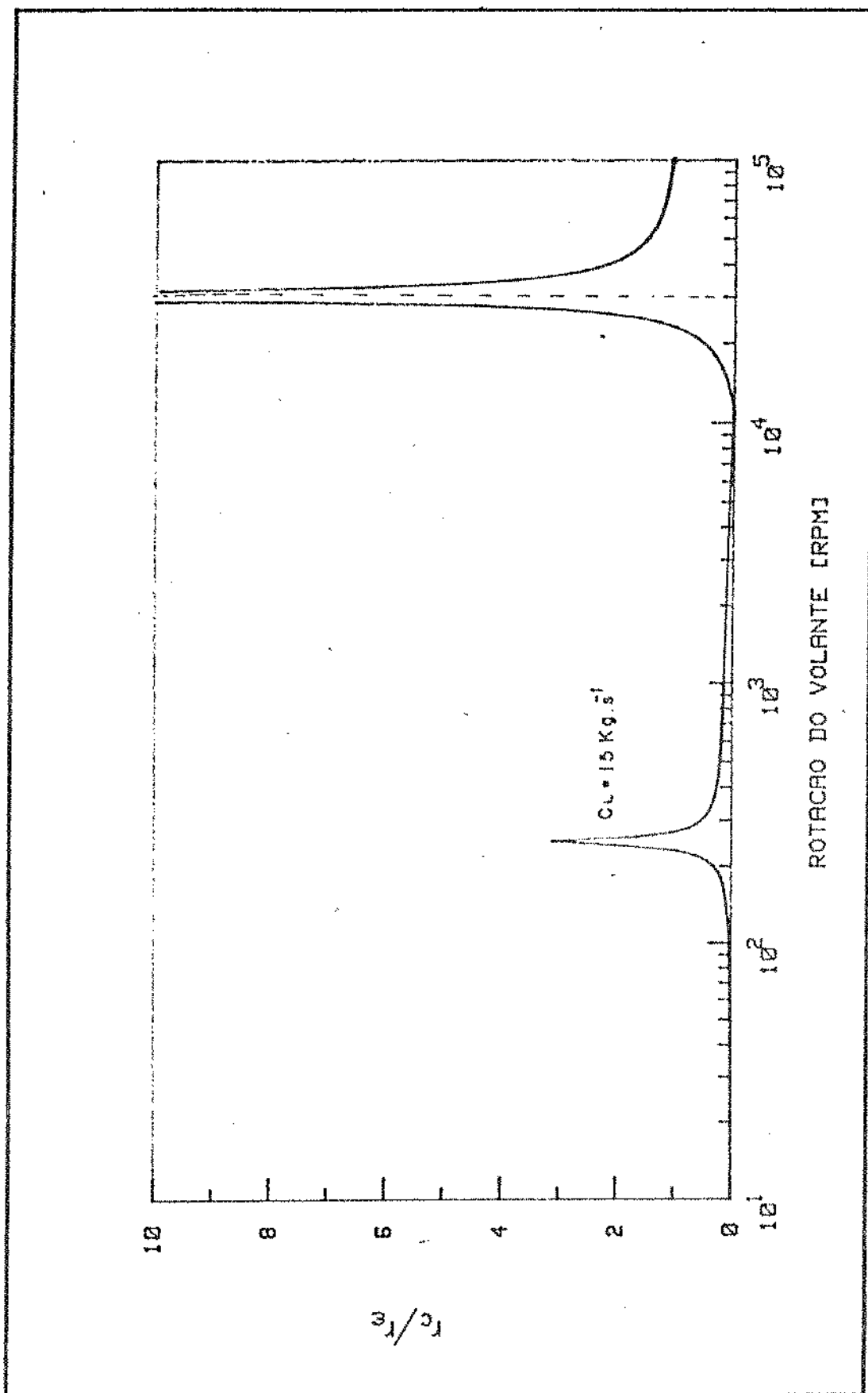


Figura 4.8 - Resposta do eixo do volante com excentricidade no cubo, obtida com amortecimento externo de 15 Kg.s^{-1}

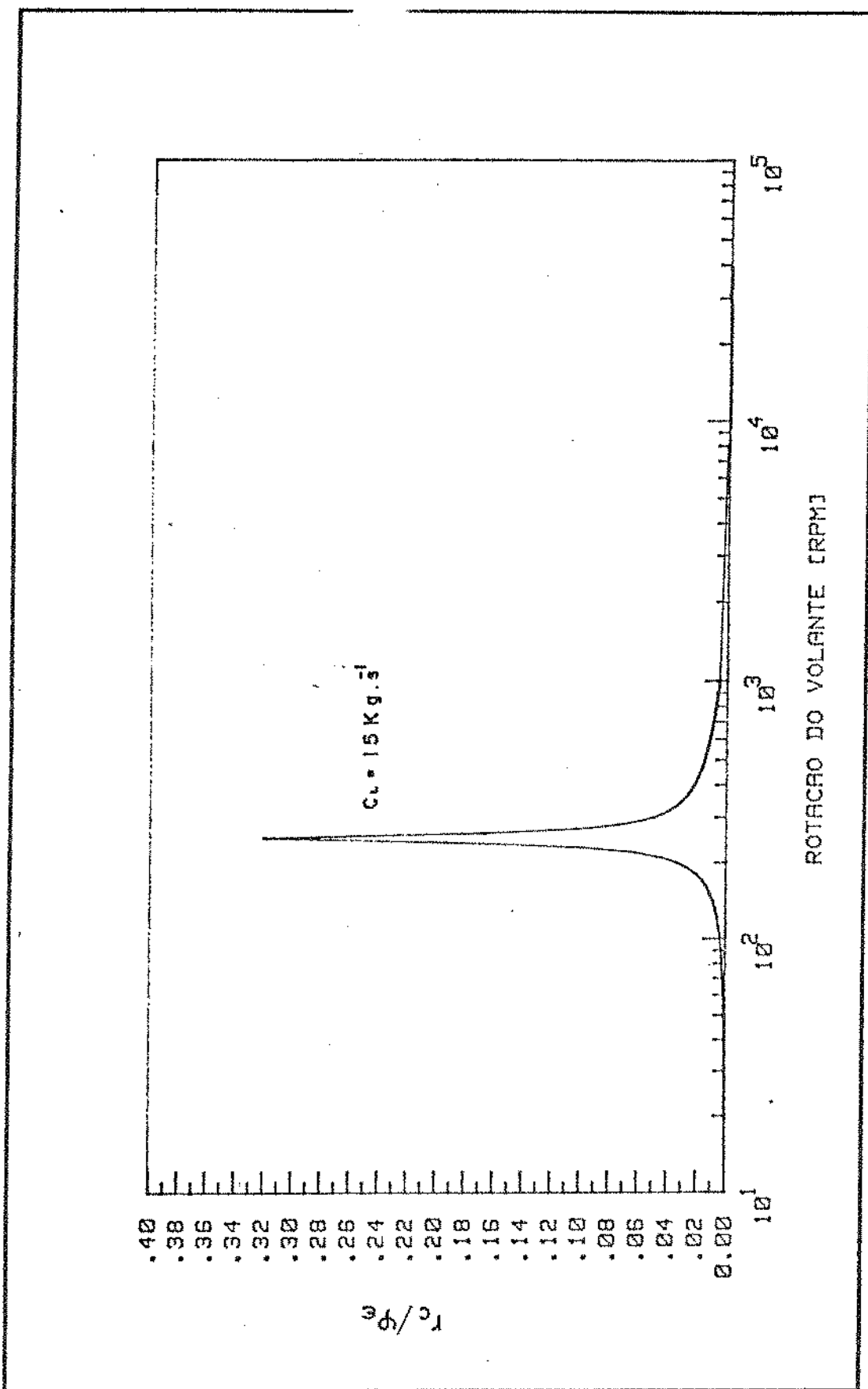


Figura 4.9 - Resposta do eixo do volante, com desalinhamento angular no cubo, obtida com amortecimento externo de 15 Kg.S^{-1}

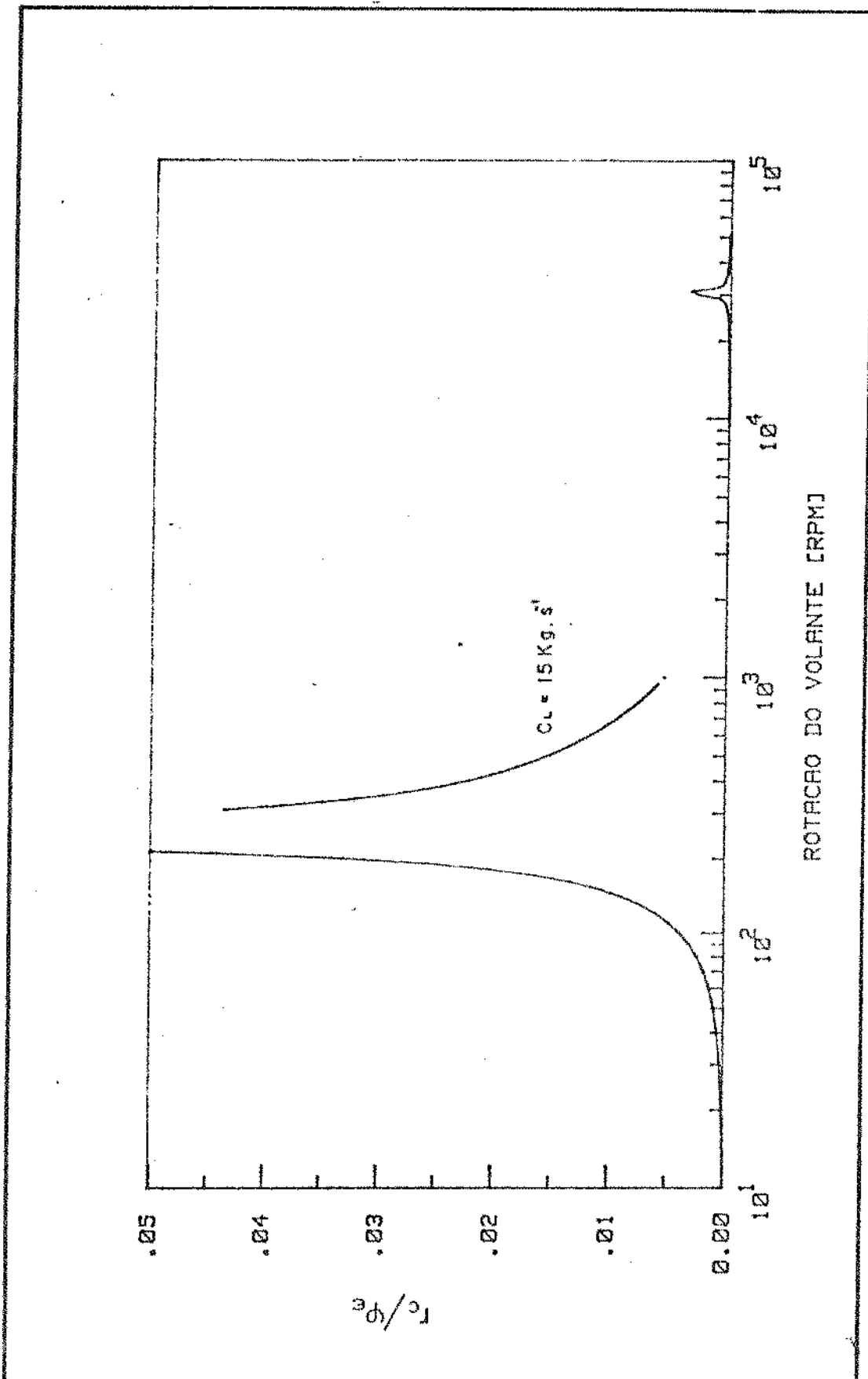


Figura 4.10 - Resposta do eixo do volante, com desalinamento angular no cubo, obtida com amortecimento externo de 15 Kg.S^{-1}

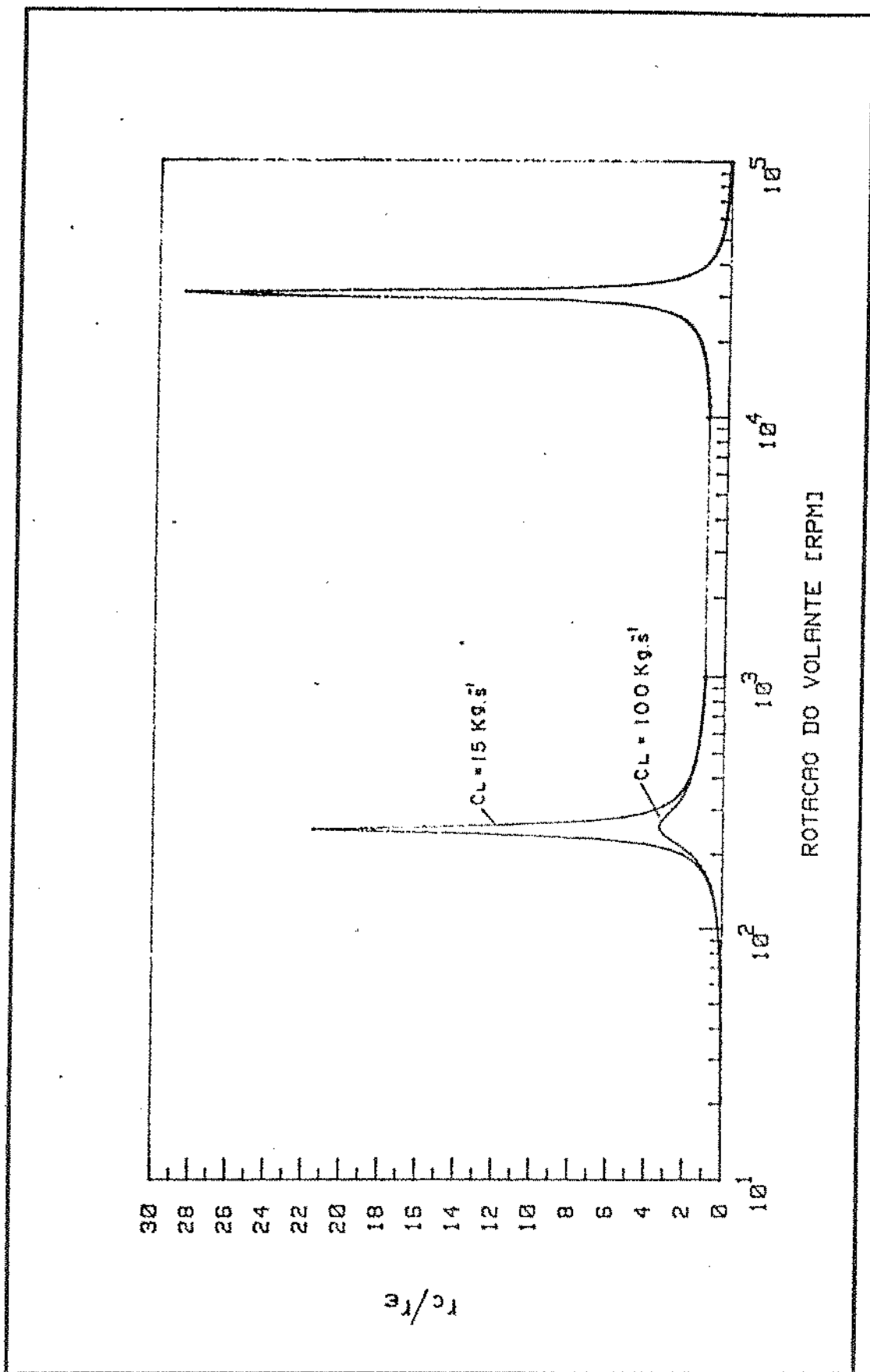


Figura 4.11 - Resposta do eixo do volante, com excentricidade no anel, obtida com amortecimento externo de 15 Kg.s^{-1} e 100 Kg.s^{-1}

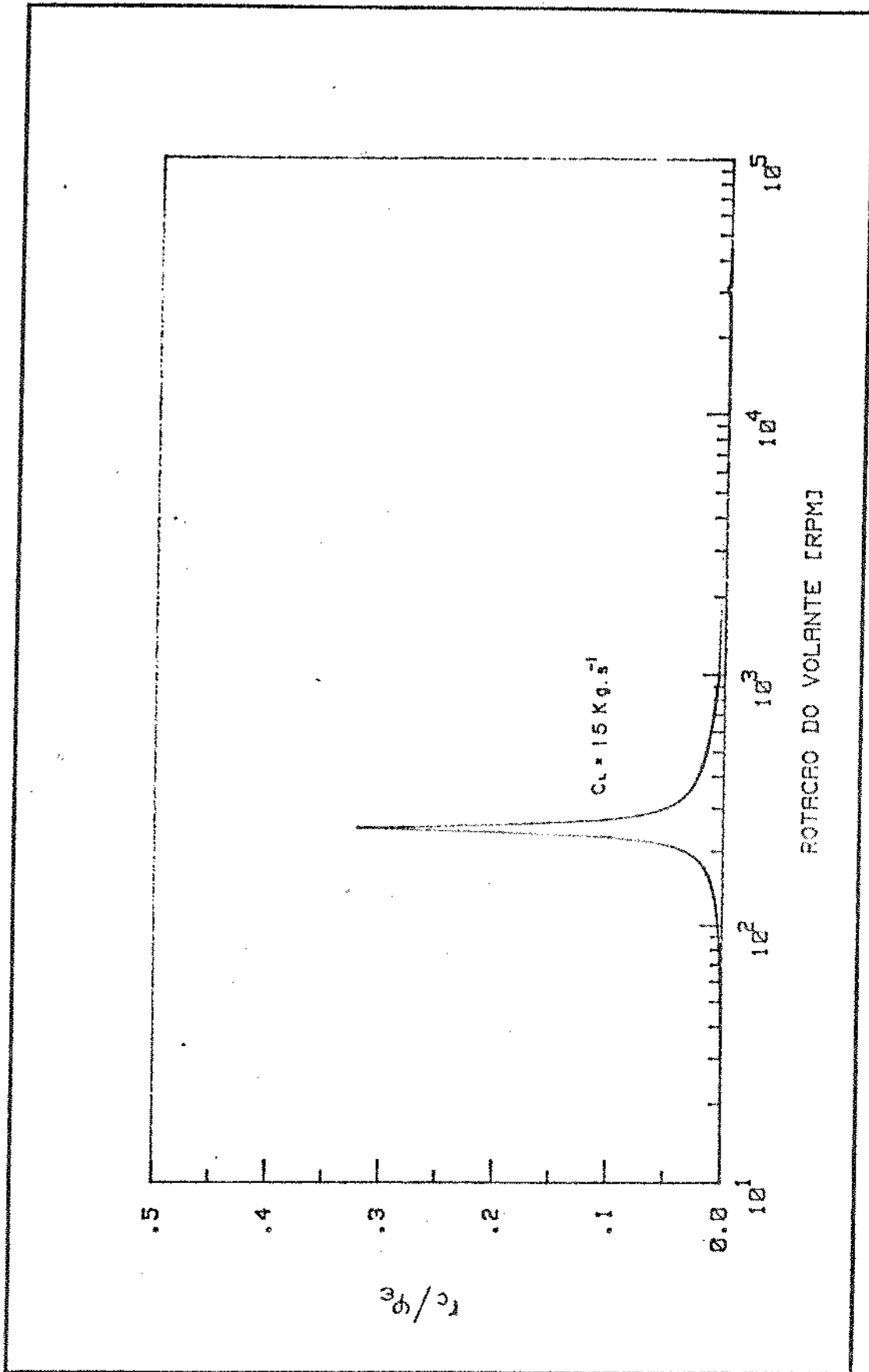


Figura 4.12 - Resposta do eixo do volante, com desalinhamento angular no anel, obtida com amortecimento externo de 15 Kg.s^{-1}

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DE ESTABILIDADE

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

5.1. MODELO MATEMÁTICO DO AMORTECIMENTO INTERNO DO MATERIAL DO EIXO E DAS FAIXAS

O amortecimento interno é o elemento principal na análise de estabilidade de rotores. Ele se faz sempre presente nestes sistemas, quando a velocidade de "whirling" é diferente da velocidade de rotação.

De um modo geral, num sistema mecânico rotativo, o amortecimento interno possui a característica de resistir à vibração do eixo, causando dissipação de energia e podendo instabilizar o sistema. Entretanto, quando em sistemas rotativos a velocidade está acima de uma frequência natural do modo de vibração responsável pelo deslocamento radial do eixo, as amplitudes de vibração deste modo podem crescer exponencialmente com o tempo caracterizando a instabilidade. Os seus efeitos são mais catastróficos na medida em que o amortecimento externo do sistema rotativo é de pequena relevância.

Existe uma grande quantidade de modelos matemáticos [20-21] que representam o amortecimento interno em materiais. Os mais simples destes modelos se baseiam de uma maneira elementar em sistemas elásticos equivalentes com mola e amortecedor associados em série, Fig. 5.1(a), como o idealizado por Maxwell, ou em paralelo, Fig. 5.1(b), proposto por Kelvin-Voigt é muito usado para representar o amortecimento interno em materiais viscoelásticos [23]. Na maioria dos modelos utilizados, a força de amortecimento é proporcional à velocidade e em consequência a energia dissipada por ciclo é proporcional à frequência. Em contraste, isto não é uma característica de alguns materiais de eixos com amortecimento histerético, onde a energia dissipada por ciclo é independente da frequência.

No presente trabalho, considera-se o modelo matemático de amortecimento estrutural [23] onde o fator de perda de energia por radiano, também conhecido como coeficiente de amortecimento estrutural, é definido como a razão entre a energia dissipada e a energia armazenada durante um ciclo. Neste caso, tem-se:

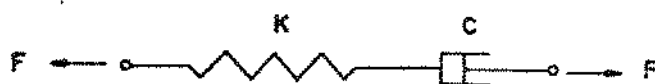
$$\gamma = \frac{W}{2\pi V}$$

onde:

γ - fator de perda de energia por radiano

W - energia dissipada por ciclo

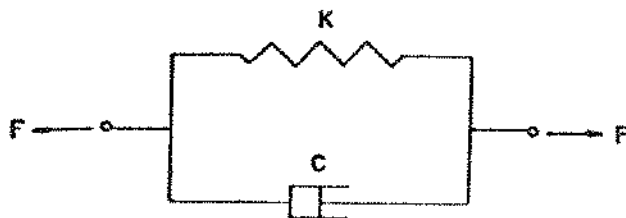
V - energia potencial disponível por ciclo



$$\dot{F}/K + F/C = \dot{\epsilon}$$

MODELO DE MAXWELL

(a)



$$K \cdot \epsilon + C \cdot \dot{\epsilon} = F$$

MODELO DE KELVIN-VOIGT

(b)

Fig. 5.1 - Modelo de amortecimento interno em materiais

Se C_i é o coeficiente de amortecimento viscoso equivalente ao amortecimento interno do material do eixo, que se movimenta num referencial girando com a velocidade de rotação Ω e com frequência $|\omega - \Omega|$ em relação ao sistema de coordenadas solidário ao eixo, Fig. 5.2, pode-se calcular a energia dissipada supondo um movimento harmônico $x = \bar{x} \cos |\omega - \Omega| t$, como:

$$W = \int_0^{2\pi/|\omega - \Omega|} C_i \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} dt = C_i \bar{x}^2 |\omega - \Omega| \pi \quad (5.2)$$

Para a energia potencial do sistema, tem-se:

$$V = \frac{1}{2} K \bar{x}^2 \quad (5.3)$$

onde K é a rigidez do eixo; substituindo as eqs. (5.3) e (5.2) na eq. (5.1), chega-se a:

$$C_i = \frac{\gamma K}{|\omega - \Omega|} \quad (5.4)$$

Para mostrar como o amortecimento interno é introduzido num sistema rotativo, usamos a equação do movimento de um rotor de Laval [23], representado na Fig. 5.2.

No lugar das deflexões x , y e ξ , η pode-se introduzir a notação complexa

$$\begin{aligned} x + iy &= r \\ \xi + i\eta &= \rho \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde: $i = \sqrt{-1}$

A relação entre r e ρ é dada por:

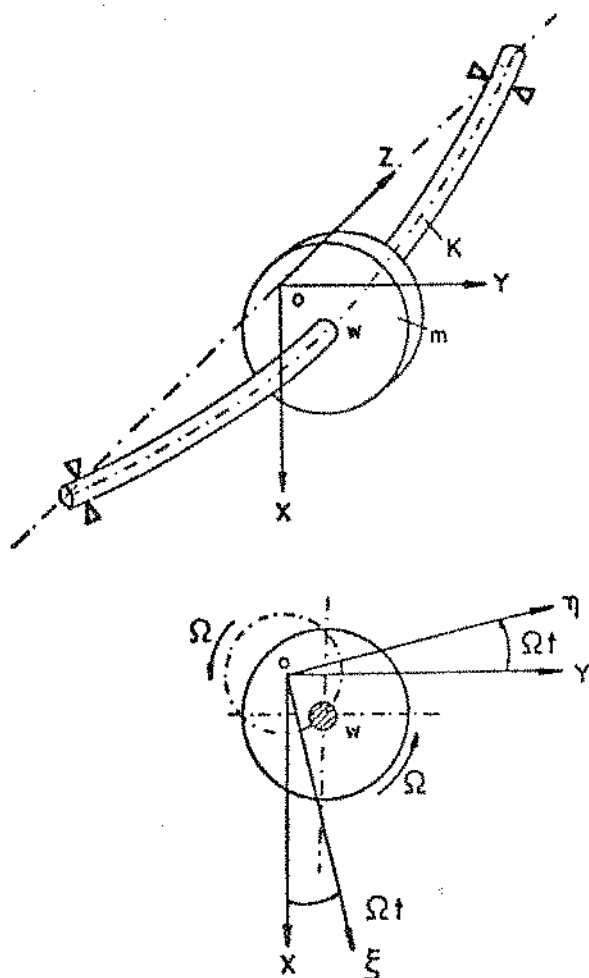


Figura 5.2 - Rotor de Laval

$$r = \rho e^{i\Omega t} \tag{5.6}$$

A equação do rotor no sistema de coordenadas x-y é:

$$m\ddot{r} + Kr = 0 \tag{5.7}$$

Transformando a eq. (5.7) para o sistema de coordenadas sólido ao rotor, obtém-se:

$$m(\ddot{\rho} + 2i\dot{\rho} - \Omega^2\rho) + K\rho = 0 \tag{5.8}$$

Introduzindo o amortecimento interno na eq. (5.8), escreve -

-se:

$$m(\ddot{\rho} + 2i\dot{\rho} - \Omega^2\rho) + C_1\dot{\rho} + K\rho = 0 \tag{5.9}$$

Transformando a eq. (5.9) para o sistema de coordenadas i nercial, obtém-se:

$$m\ddot{r} + Kr + C_i \dot{r} - i\Omega C_i r = 0 \quad (5.10)$$

Observa-se, na eq. (5.10), que a soma das forças elásticas F_e e de amortecimento interno F_a em relação ao sistema inercial é dada por:

$$F_e + F_a = Kr + C_i \dot{r} - i\Omega C_i r \quad (5.11)$$

Passando o segundo termo do segundo membro da eq. (5.11) para o domínio de frequência, escreve-se:

$$F_e + F_a = Kr + iC_i \omega r - i\Omega C_i r \quad (5.12)$$

Substituindo o valor de C_i obtido na eq. (5.4), na eq. (5.12) e rearranjando os termos, obtém-se:

$$F_e + F_a = Kr(1 + i \gamma \operatorname{sgn}(\omega - \Omega)) \quad (5.13)$$

onde:

$\operatorname{sgn}(\omega - \Omega)$ é a função sinal definida por:

$$\operatorname{sgn}(\omega - \Omega) = \begin{cases} 1 & \text{para } \Omega < \omega \\ -1 & \text{para } \Omega > \omega \end{cases}$$

O modelo matemático de amortecimento esturturel obtido na eq. (5.13), pode ser entendido como uma histerese interna do material do eixo. Esta histerese é um desvio da lei de Hooke de tensão-deformação e aparece em muitos materiais com carregamentos alternados. Como Kr é a força de rigidez elástica do material, pode-se interpretar o termo $i \gamma Kr \operatorname{sgn}(\omega - \Omega)$ como sendo a força que se opõe ao movimento de "whirling" do eixo.

Para facilitar a compreensão da interpretação acima, considere o volante girando com uma precessão direta $\underline{\omega}$ e excentricidade \underline{r} , Fig. 5.3(a), com o centro do eixo \underline{c} descrevendo um círculo em torno do ponto 0, da linha que passa pelo mancal.

Se não existir precessão, o ponto \underline{c} coincide com 0. Caso exista a precessão com $\underline{\omega}$, o eixo flexiona de modo que a linha que passa por P_3P_6 divide a seção transversal do eixo, Fig. (5.3(c)), em duas zonas de deformação, ou seja, acima da linha P_3P_6 as fibras do eixo sofrem alongação enquanto que abaixo da linha P_3P_6 as fibras sofrem encurtamento. A linha P_3P_6 pode ser chamada de linha neutra de deformação, que ao se considerar o desvio da lei de Hooke, Fig. 5.3(b), não coincide com a linha neutra de tensão P_2P_5 .

Admite-se que no ponto P_1 de alongação máxima, exista uma marca. No caso da precessão direta "whirl" ser igual a rotação do volante, a marca está sempre posicionada no ponto P_1 da Fig.5.3(c). Se a rotação do volante for maior que a rotação de "whirl", a marca em P_1 ultrapassa a velocidade de \underline{c} e conseqüentemente atinge em seqüência as posições $P_2P_3P_4P_5P_6$, ou seja, a fibra marcada sofre uma variação de tensão gerando uma força elástica que se apõe ao movimento de "whirl". Se a rotação do volante for menor que a de "whirl", tem-se um taciocínio análogo agora com a seqüência $P_6P_5P_4P_3P_2$.

Sendo a força de rigidez elástica de um material proporcional ao módulo de elasticidade, pode-se escrever:

$$E^* = E(1 + i \gamma \operatorname{sgn}(\omega - \Omega)) \quad (5.14)$$

A equação (5.14) representa o módulo complexo de elasticidade equivalente para o material do eixo do volante com precessão $\underline{\omega}$ e velocidade angular Ω , bastando para isso considerar o valor do coe

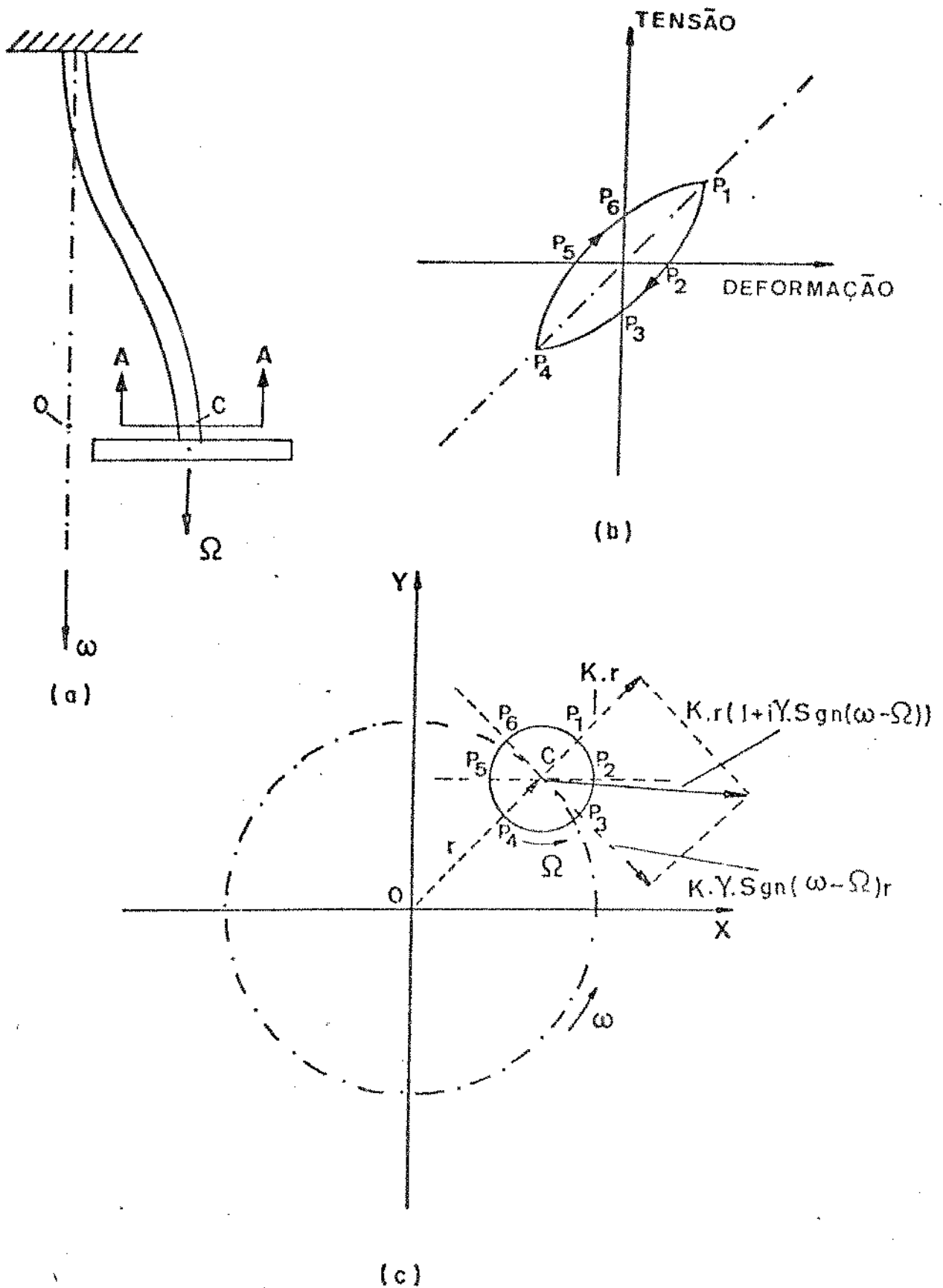


Figura 5.3 - a) Configuração de um sistema volante-suspensão com movimento de "whirling"
b) Loop de Tensão-Deformação sofrido pelo eixo
c) Secção transversal do eixo com movimento de "whirling"

ficiente de amortecimento estrutural γ adequado para o material do eixo.

Da eq. (5.13) pode-se extrair uma versão complexa para rigidez do material. Neste caso, tem-se:

$$K^* = K(1 + i \gamma \operatorname{sgn}(\omega - \Omega)) \quad (5.15)$$

5.2. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE "WHIRLING" LIVRE COM AMORTECIMENTO EXTERNO E INTERNO

No volante analisado, não existe amortecimento externo para estabilizar os movimentos referentes a deslocamento radial do cubo e anel na faixa de rotação nominal. Entretanto, generalizando esta análise teórica considera-se inicialmente o movimento amortecido por um amortecedor radial simétrico de massa desprezível localizado no plano do volante.

Pode-se portanto introduzir diretamente o amortecimento externo no modelo matemático de "whirling" livre obtido no Capítulo 2, considerado como força adicional ao deslocamento radial do cubo. Da eq. (2.21), obtém-se:

$$\begin{aligned} M_C &= J_C \ddot{\psi}_C - i I_C \Omega \dot{\psi}_C \\ M_A &= J_A \ddot{\psi}_A - i I_A \Omega \dot{\psi}_A \\ F_C &= m_C \ddot{r}_C + C \dot{r}_C \\ F_A &= m_A \ddot{r}_A \\ F_{ZA} &= m_A \ddot{z}_A \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde: C é o coeficiente de amortecimento viscoso

O amortecimento interno do material do eixo e das faixas do volante pode ser introduzido na matriz de rigidez, usando o módulo de elasticidade e a rigidez complexa obtidos nas eqs. (5.14) e (5.15) respectivamente.

Para o eixo, tem-se:

$$E^* = E(1 + i \gamma_e \operatorname{sgn}(\omega - \Omega)) \quad (5.17)$$

Para as faixas, tem-se:

$$K^* = K(1 + i \gamma_f \operatorname{sgn}(\omega - \Omega)) \quad (5.18)$$

Substituindo as eqs. (5.16), (5.17) e (5.18) na eq. (2.25) e rearranjando, tem-se:

$$- \begin{pmatrix} m_C \ddot{r}_C + C \dot{r}_C \\ m_A \ddot{r}_A \\ J_C \ddot{\psi}_C - i I_C \dot{\psi}_C \Omega \\ J_A \ddot{\psi}_A - i I_A \dot{\psi}_A \Omega \end{pmatrix} = [K_{ij}^*] \begin{pmatrix} r_C \\ r_A \\ \psi_C \\ \psi_A \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

onde:

$[K_{ij}^*]$ é a versão complexa da matriz de rigidez obtida de acordo com as eqs. (5.17) e (5.18).

A equação matricial (5.19) representa as equações de movimento de "whirling" livre com amortecimento externo e interno.

Assumindo-se para equação matricial (5.19) uma solução do tipo

$$\left\{ q_i \right\} = \left\{ \bar{q}_i \right\} e^{\lambda t} \quad (5.20)$$

e usando-se a definição

$$\left\{ \hat{p}_i \right\} = \left\{ \bar{q}_i \right\} \lambda \quad (5.21)$$

chega-se a:

$$\left[\begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} I \\ \vdots \\ I \end{array} \right] \\ \hline \left[\begin{array}{c} A_{1ij}^* \\ \vdots \\ A_{1ij}^* \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} A_{2ij}^* \\ \vdots \\ A_{2ij}^* \end{array} \right] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \bar{q}_i \right\} \\ \vdots \\ \left\{ \bar{q}_i \right\} \\ \hline \left\{ \hat{p}_i \right\} \\ \vdots \\ \left\{ \hat{p}_i \right\} \end{array} \right\} = \lambda \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \bar{q}_i \right\} \\ \vdots \\ \left\{ \bar{q}_i \right\} \\ \hline \left\{ \hat{p}_i \right\} \\ \vdots \\ \left\{ \hat{p}_i \right\} \end{array} \right\} \quad (5.22)$$

onde:

$\left[A_1^* \right]$ e $\left[A_2^* \right]$ são matrizes complexas de ordem 4x4 de finidas por:

$$\left[A_{2ij}^* \right] = \left[M_{ij} \right]^{-1} \left[N_{ij}^* \right]$$

$$\left[A_{1ij}^* \right] = \left[M_{ij} \right]^{-1} \left[K_{ij}^* \right]$$

A equação matricial (5.22) constitui um problema padrão de autovalores e autovetores de matrizes complexas.

5.3. RESULTADOS ANALÍTICOS

O objetivo específico da análise de estabilidade é determinar o coeficiente de amortecimento externo C , para o amortecedor de massa desprezível considerado no item 5.2, capaz de estabilizar os modos de vibração do volante até uma faixa de rotação de aproximadamente 30.000 r.p.m.

Para atingir o objetivo acima, desenvolveu-se rotinas para o mesmo minicomputador HP 9845A, que determina os autovalores da matriz complexa de estado do sistema representada na equação matricial (5.22). De um modo geral, estes autovalores são números complexos da forma $\lambda = \sigma + i\omega$.

A parte imaginária dos autovalores, ω , representa as frequências naturais amortecidas do volante, enquanto que a parte real, σ , fornece o grau de amortecimento do sistema.

A solução admitida na eq. (5.20) pode ser escrita em função de σ e ω . Obtém-se portanto:

$$\left\{ q_i \right\} = \left\{ \tilde{q}_i \right\} e^{-\sigma t} \cdot e^{i\omega t} \quad (5.23)$$

Observa-se na eq. (5.23) que se a parte real do autovalor for positiva, $\sigma < 0$, a amplitude do movimento cresce exponencialmente com o tempo e leva o sistema à instabilidade.

Os valores dos coeficientes de amortecimento estrutural, γ_e e γ_f , para o eixo e as faixas do volante, foram assumidos conforme a referência [20] como $5 \cdot 10^{-3}$ e $1.7 \cdot 10^{-2}$ correspondendo a aço e fibra de vidro respectivamente.

Na ausência de amortecimento externo, $C = 0$, o volante instabiliza-se logo após passar pela primeira velocidade crítica em 248 r.p.m., correspondente ao primeiro modo de vibração, precessão direta.

O diagrama da Fig. 5.4 mostra o grau de amortecimento do primeiro modo de vibração do volante em função da velocidade de rotação. Neste diagrama, os valores entre parênteses indicam um fator multiplicativo usado para facilitar a representação.

Observa-se na Fig. 5.4, que um aumento no coeficiente de amortecimento externo desloca a região de instabilidade do volante para direita, aumentando-se conseqüentemente a região de estabilidade. Além do mais, nota-se que somente um pequeno valor de coeficiente de amortecimento externo igual a $1,62 \text{ Kg.S}^{-1}$, foi suficiente para estabilizar este primeiro modo de vibração na faixa de até aproximadamente 30.000 r.p.m.

Por outro lado, observa-se que quando o volante está operando do acima da frequência natural que representa a velocidade crítica do primeiro modo de vibração precessão direta, o amortecimento interno tem efeito instabilizante não ocorrendo o mesmo com as componentes de vibrações livres amortecidas de precessão retrógradadas.

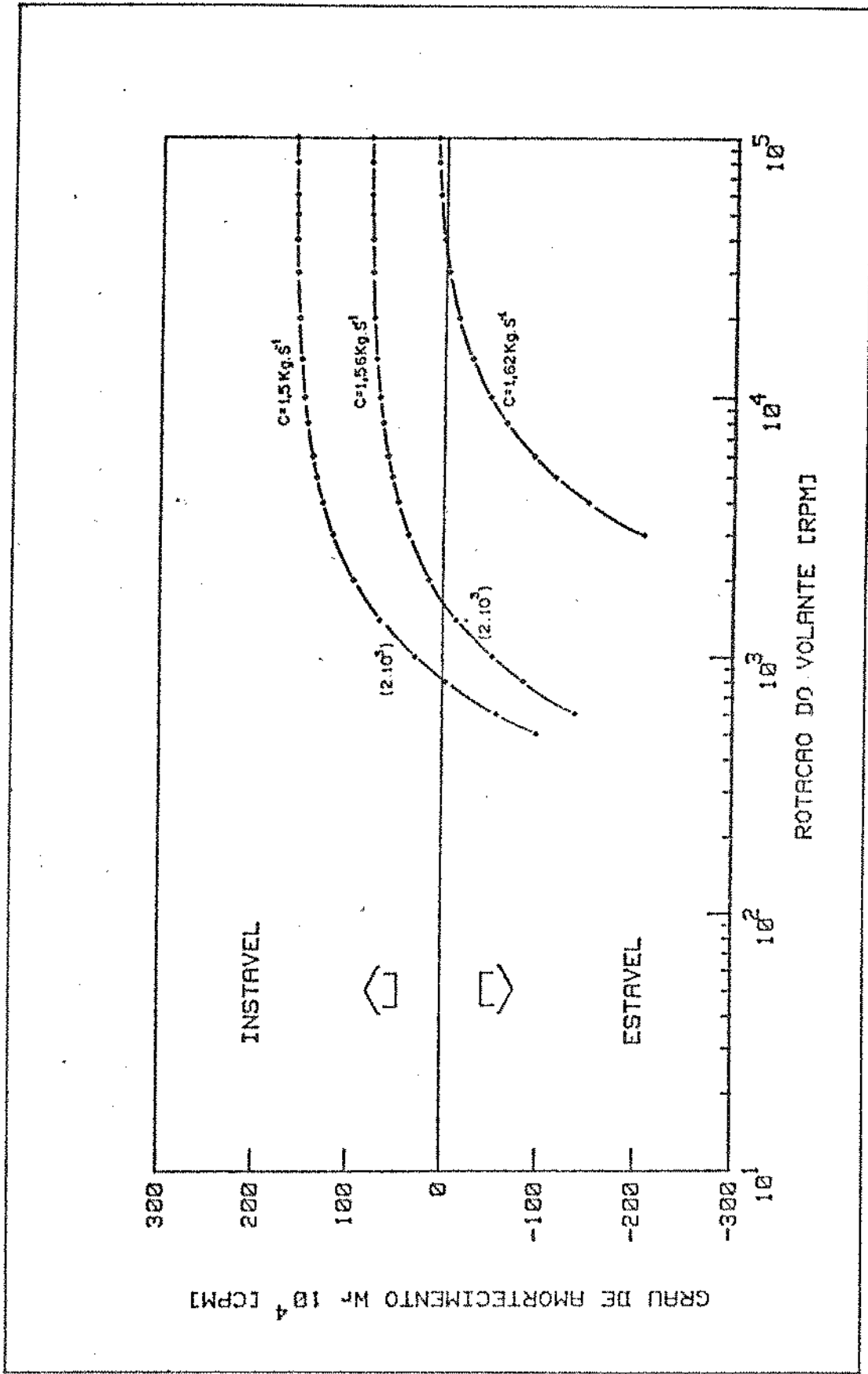


Figura 5.4 - Grau de amortecimento do primeiro modo de vibraçao do volante em funçao da velocidade de rotaçao

CAPÍTULO 6

ANÁLISE EXPERIMENTAL DO VOLANTE

6.1. CARACTERÍSTICA DO MODELO EXPERIMENTAL

Na análise experimental desenvolvida procura-se determinar a representatividade do modelo matemático de cinco graus de liberdade adotado para analisar dinamicamente o volante. Determina-se com este fim as frequências naturais do volante acionando-o em uma faixa de rotação selecionada e observa-se também o fenômeno de instabilidade previsto no modelo teórico.

Para atingir o objetivo proposto acima, fixou-se o volante com sua suspensão, Fig. 6.1, em uma estrutura rígida adaptada em um poço de prova. Para simular o engaste considerado no modelo teórico, optou-se por dois mancais de rolamentos do tipo radial de esfera, próximos um dos outros, localizados na parte superior da estrutura. Os desenhos anexos no Apêndice 4, apresentam os detalhes da estrutura de fixação e de todo o conjunto posicionado no poço de prova.

No acionamento do volante, usou-se um motor de corrente contínua com excitação independente, rotação máxima de 3000 r.p.m. e 25 Hp de potência acoplado a uma transmissão multiplicadora de velocidade por correias em V, tipo B, de duplo estágio, projetada com capacidade de aumentar a rotação do motor em cinco vezes.

Apesar do tipo de transmissão escolhida não ser a melhor [24] para acionamento de volantes em altas rotações, o seu uso torna-se viável na faixa de rotação selecionada para análise experimental, motivado pelos seus custos reduzidos e simplicidade de montagem, além de perdas de potência relativamente pequenas. Sabe-se entretanto da referência [6] que devido às características de perdas aerodinâmicas em volantes com rotações elevadas, existem torques resistivos que são

suficientes para provocar deslizamento nos sistemas de acionamento por correias.

Para evitar que excitações provenientes do conjunto motor-transmissão viessem mascarar os resultados experimentais, adaptou-se um acoplamento bastante flexível, o qual podia ser desecoplado totalmente da transmissão em funcionamento, permitindo-se assim medir o sinal de desaceleração do volante isento de qualquer efeito externo.

As Figs. 6.2 e 6.3 mostram a montagem do volante do poço de prova e do sistema de transmissão utilizado para acionar o volante.

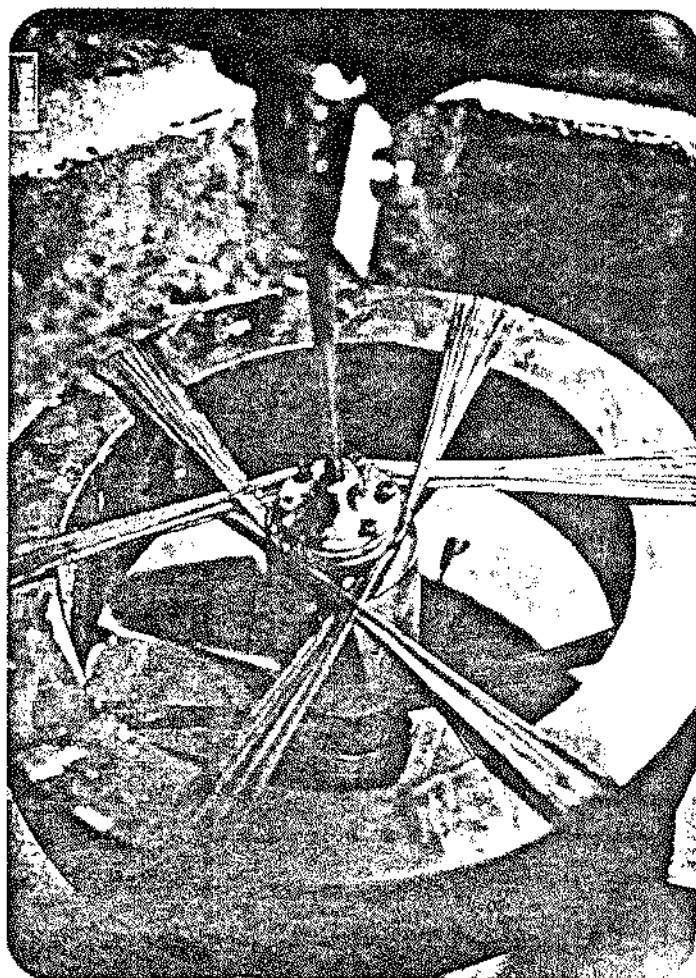


Figura 6.1 - Detalhe da fixação do volante na sua suspensão

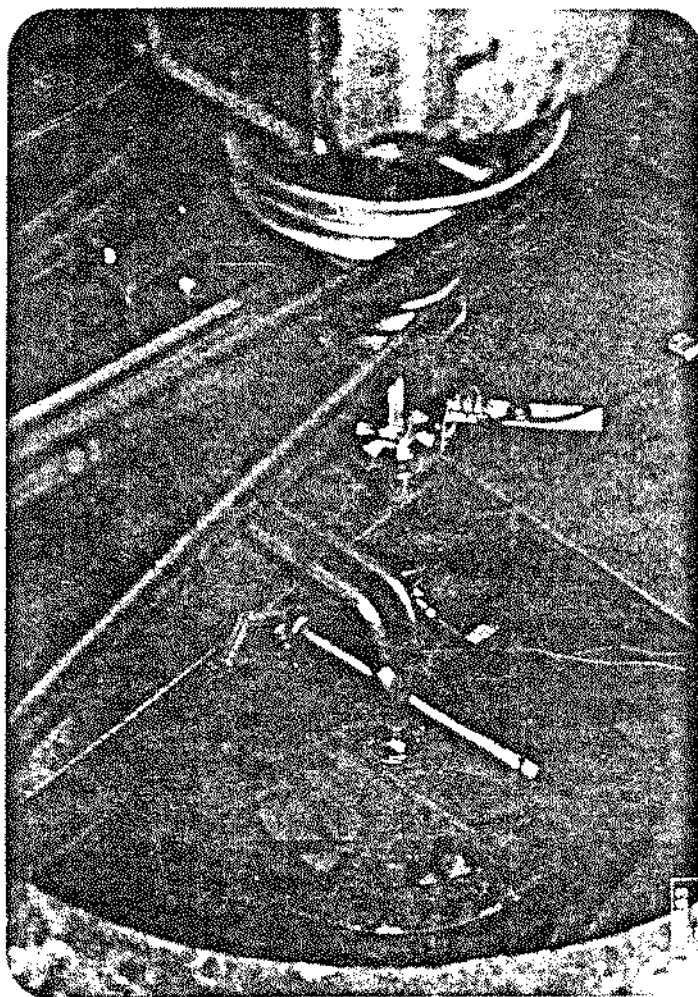


Figura 6.2 - Detalhe da fixação do sistema volante-suspensão no poço de prova

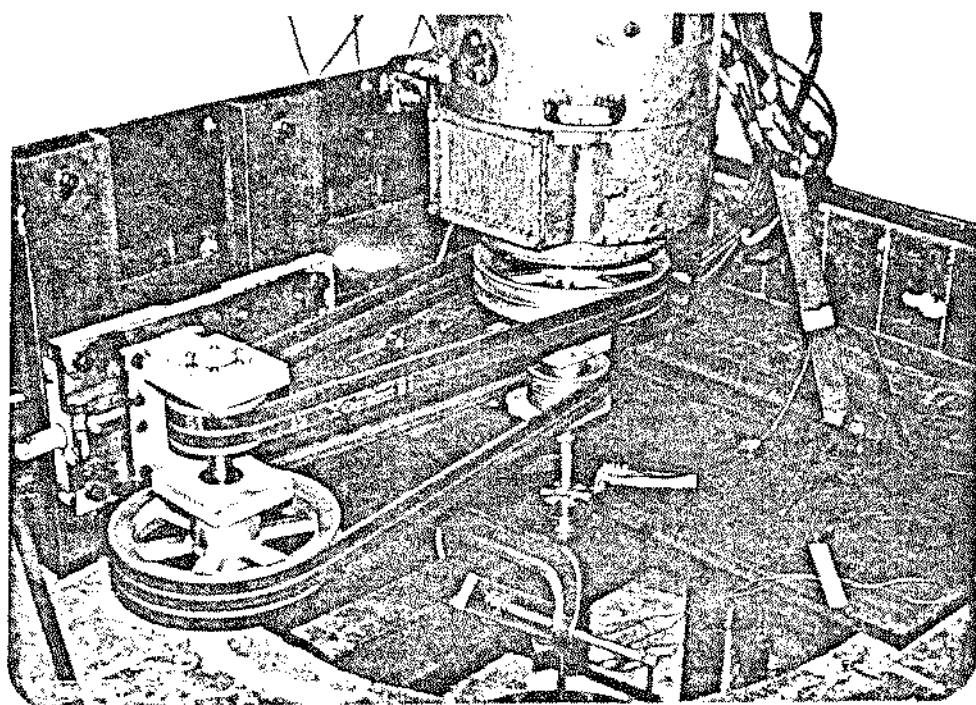


Figura 6.3 - Detalhe da transmissão usada para acionamento do volante

6.2. BANCADA PARA ENSAIO DO VOLANTE

A Fig. 6.4 mostra a instrumentação utilizada para ensaiar o volante de forma a se obter o sinal de resposta de um determinado ponto do eixo em função da velocidade de rotação do volante. Para captar este sinal de resposta usou-se dois sensores magnéticos perpendiculares, posicionados conforme ilustra a Fig. 6.5. Os sensores magnéticos emitem sinais de velocidade radial nas direções x_R e y_R , permitindo-se assim verificar a órbita do movimento de "whirling" do eixo em função da rotação.

A velocidade de rotação do volante foi medida por sensor ótico que produz seis pulsos de tensão por rotação do volante, correspondendo a cada entalhe de um disco em alumínio fixado ao eixo.

Os sinais, obtidos dos sensores ótico e magnéticos, foram inicialmente registrados em gravador de fita magnética de instrumentação para serem posteriormente processados em um analisador de Fourier.

Além dos instrumentos de medidas citados, observa-se na Fig. 6.4 vários equipamentos utilizados como um osciloscópio, filtro, frequenciómetros, plotter e multímetros analógicos e digital.

6.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os diagramas das Figs. 6.6 a 6.9, apresentados nesta seção, foram processados com o intuito de se verificar a compatibilidade entre os modelos teóricos de "whirling" livre, forçado e estabilidade e a

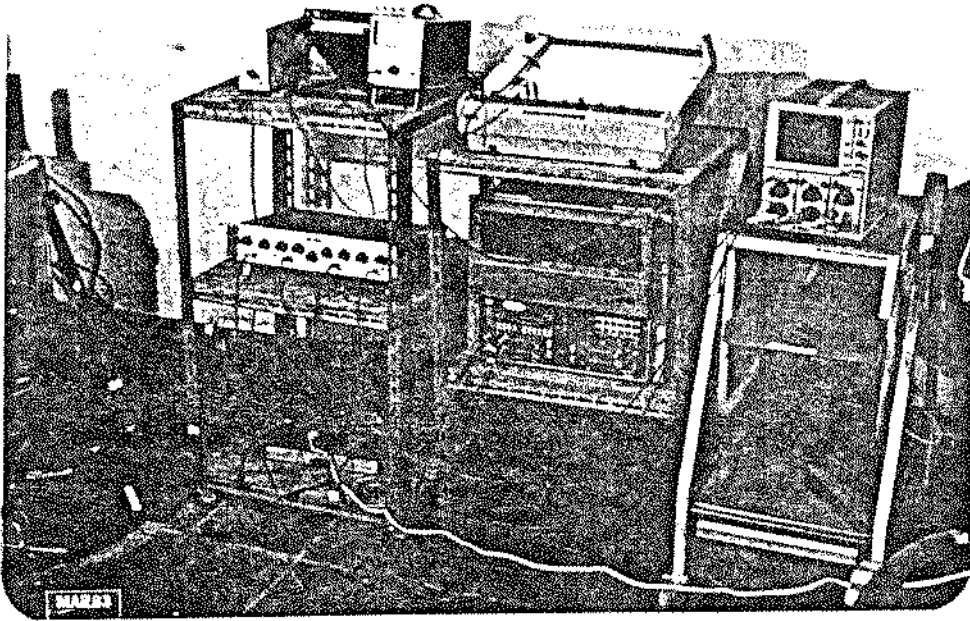


Figura 6.4 - Vista da bancada de instrumentação

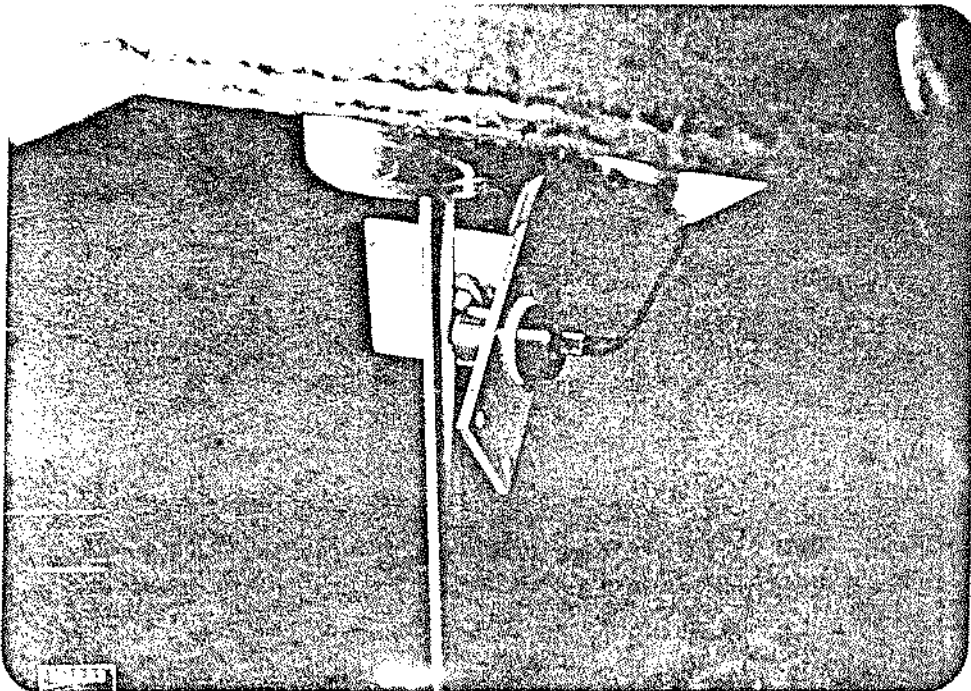


Figura 6.5 - Detalhe de fixação dos sensores magnéticos de velocidade

realização experimental. Os valores de amplitudes dos picos mostrados não estão convertidos em unidades físicas uma vez que nesta análise o interesse principal é a comparação entre as frequências naturais determinadas experimentalmente e as obtidas pelo modelo teórico. Nas duas análises realizadas procurou-se relacionar os modelos fazendo-se também alguns comentários adicionais a respeito de outros trabalhos.

Na primeira análise, o volante foi acionado até uma rotação de 1200 r.p.m. aproximadamente e em seguida desacoplado do sistema de transmissão para evitar a influência tanto de massas quanto excitação externa ao sistema, volante-suspensão, não consideradas no modelo teórico.

A vibração do eixo na desaceleração do volante foi registrada em fita magnética e logo após processada em um analisador de Fourier HP 5451C, de onde foi extraído uma análise de assinatura do sinal, obtida com vinte valores de rotação variando na faixa de frequências de 0 Hz e 50 Hz.

O resultado desta análise é mostrado na Fig. 6.6. Nela pode-se facilmente constatar picos na frequência de rotação do volante, como também nas frequências harmônicas de ordem dois, três e quatro, todos decorrentes de desbalanceamento residual no volante.

O pico de frequência natural correspondente à velocidade crítica de primeira ordem, do primeiro modo de vibração do volante, precessão direta, observada com os resultados do modelo teórico em 248 r.p.m., conforme mostra a Fig. 4.1, não foi detectada diretamente nesta análise. A razão que levou o não aparecimento deste pico de frequência na análise obtida, foi a redução brusca de velocidade de

rotação do volante, próximo à ressonância do primeiro modo de vibração, quando a extremidade inferior do cubo do volante atinge o limitador de amplitude do movimento radial. Esta redução brusca na velocidade do volante impossibilitou o processamento do sinal de vibração nas rotações de 200 a 250 r.p.m., pelo analisador de Fourier, no tempo de aquisição estabelecido. Este problema pode ser eliminado com a inclusão de um amortecedor externo, para limitar o nível de amplitude radial na passagem pela velocidade crítica do primeiro modo de vibração, precessão direta, conforme análise apresentada no Capítulo 4.

Apesar de não ter se conseguido processar o sinal na passagem pela ressonância do primeiro modo de vibração do volante, pode-se garantir em observação à Fig. 6.6 que a velocidade crítica do primeiro modo de vibração, precessão direta está compreendido no intervalo de relação entre 150 e 300 r.p.m.

Na Tabela 6.1 mostra-se uma comparação feita entre alguns valores de frequências naturais, dos modelos teórico e experimental, em função da rotação do volante, para o primeiro modo de vibração, precessão direta.

Observa-se, apesar do processo iterativo utilizado, na obtenção das frequências naturais teóricas, pequenos valores de desvios de frequências naturais, os quais podem ser justificados em virtude da boa coerência entre os modelos teórico e experimental e devido à precisão numérica do algoritmo empregado na determinação dos autovalores do sistema.

Um fato bastante curioso nesta primeira análise, é a não observação das frequências naturais de rotação excêntrica inversa de

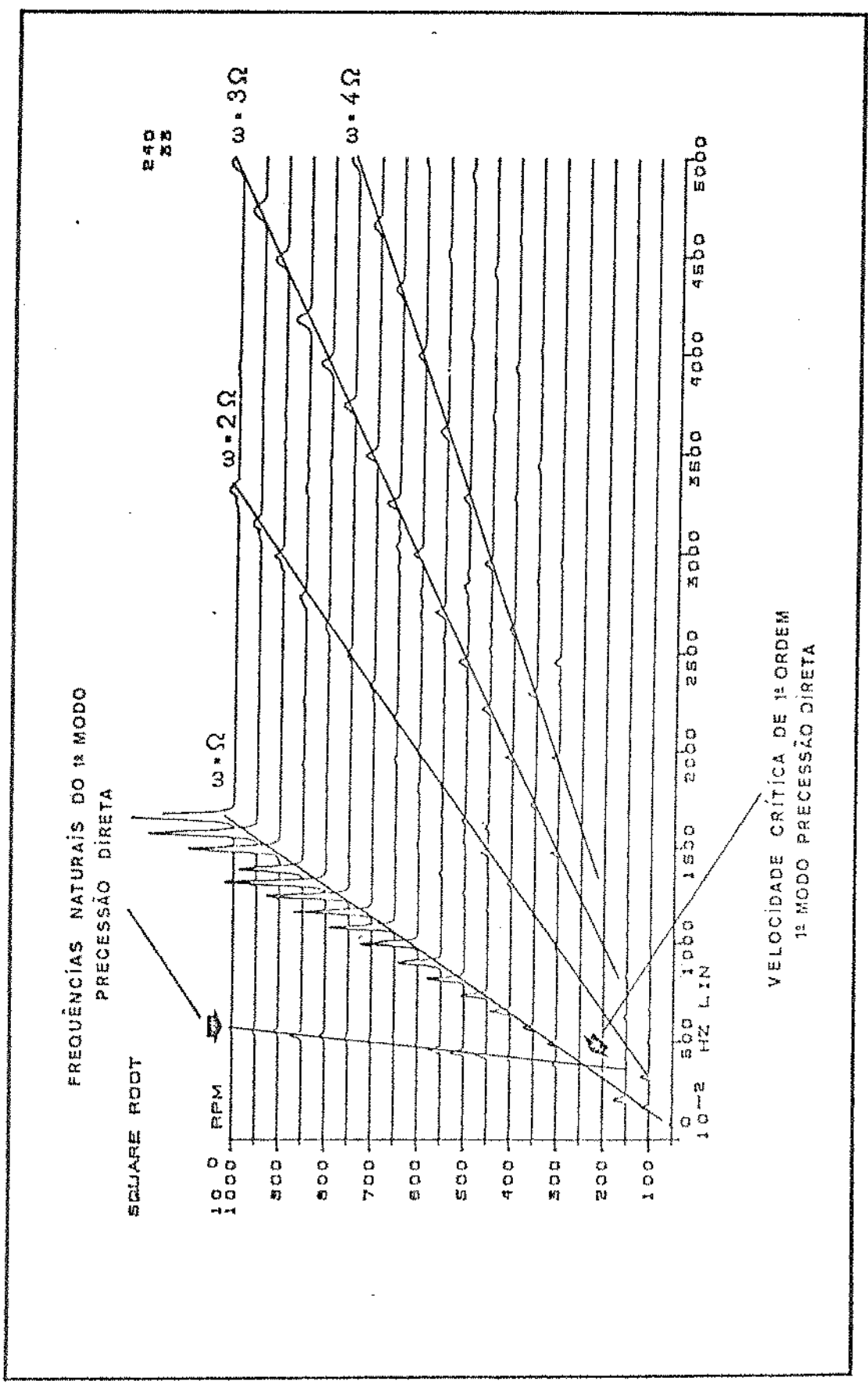


Figura 6.6 - Análise de assinaturas do primeiro modo de vibração do volante obtida na desaceleração, sem efeito do motor e da transmissão

nominada neste trabalho como frequências naturais de precessão retrógrada, Den Hartog [18] em seu livro se refere à precessão retrógrada como um fenômeno ainda parcialmente inexplicado e extremamente raro de ser observado. Entretanto, trabalhos mais recentes [25] mostram que quando os mancais têm simetria radial as forças devido a desbalanceamento rotativo não são capazes de excitar os modos de vibração correspondentes a precessão retrógrada, não importando como este desbalanceamento esteja distribuído.

Tabela 6.1 - Frequências Naturais do primeiro modo de vibração, precessão direta

Rotação (r.p.m)	Frequências Naturais (Hz)		Desvios (%)
	Teórica	Experimental	
400	4.1	3.9	+ 4.9
500	4.3	4.2	+ 2.3
600	4.7	4.5	+ 4.2
700	4.9	4.8	+ 2.0
800	5.2	5.1	+ 1.9
900	5.5	5.4	+ 1.8
1000	5.8	5.7	+ 1.7

Além do mais, se os mancais são levemente anisotrópicos, os modos de vibração relacionados com a precessão retrógrada são excitados junto com os modos de vibração correspondentes a precessão direta. Estas frequências naturais de precessão retrógrada, ainda segundo a referência [25], tornam-se tão críticas quanto as de precessão direta se o sistema não tem amortecimento externo.

Outra conclusão curiosa que Pedersen [25] observou nos seus trabalhos, é que as forças de amortecimento interno podem simplesmente reduzir a amplitude dos modos de vibração precessão retrógrada, enquanto que as forças de amortecimento externo podem igualar os modos de vibração precessão retrógrada com os de precessão direta.

Na segunda análise, o volante foi acionado acima da frequência natural do primeiro modo de vibração precessão direta, numa rotação de 600 r.p.m. aproximadamente, e excitado com uma força de impulso diretamente aplicada sobre o seu eixo.

Os sinais de vibração no tempo, antes e depois da excitação, foram registrados em fita magnética e posteriormente processado no analisador de Fourier, de onde foi obtida a representação em frequência do sinal via transformada de Fourier rápida.

A Fig. 6.7 mostra os espectros de frequência dos sinais, até uma frequência máxima de 25 Hz. Observa-se neste figura, que os dois sinais apresentam picos com o mesmo nível de amplitude na frequência de rotação, aproximadamente 10 Hz, que correspondem ao desbalanceamento do volante, e dois picos com níveis de amplitude diferentes na frequência de 4,8 Hz. Nota-se, portanto, que na frequência de 4,8 Hz o sinal correspondente a vibração excitada pela força de impulso apresenta maior nível de amplitude comparado com o da vibração não excitada. Pode-se entretanto concluir que esta é a frequência natural de vibração do primeiro modo, precessão direta, compatível com a frequência de 288 cpm, observada no diagrama da Fig. 4.1, em 600 r.p.m.

O diagrama da Fig. 6.8 representa o espectro de frequência de vibração do eixo, até uma frequência máxima de 2500 Hz, quando o

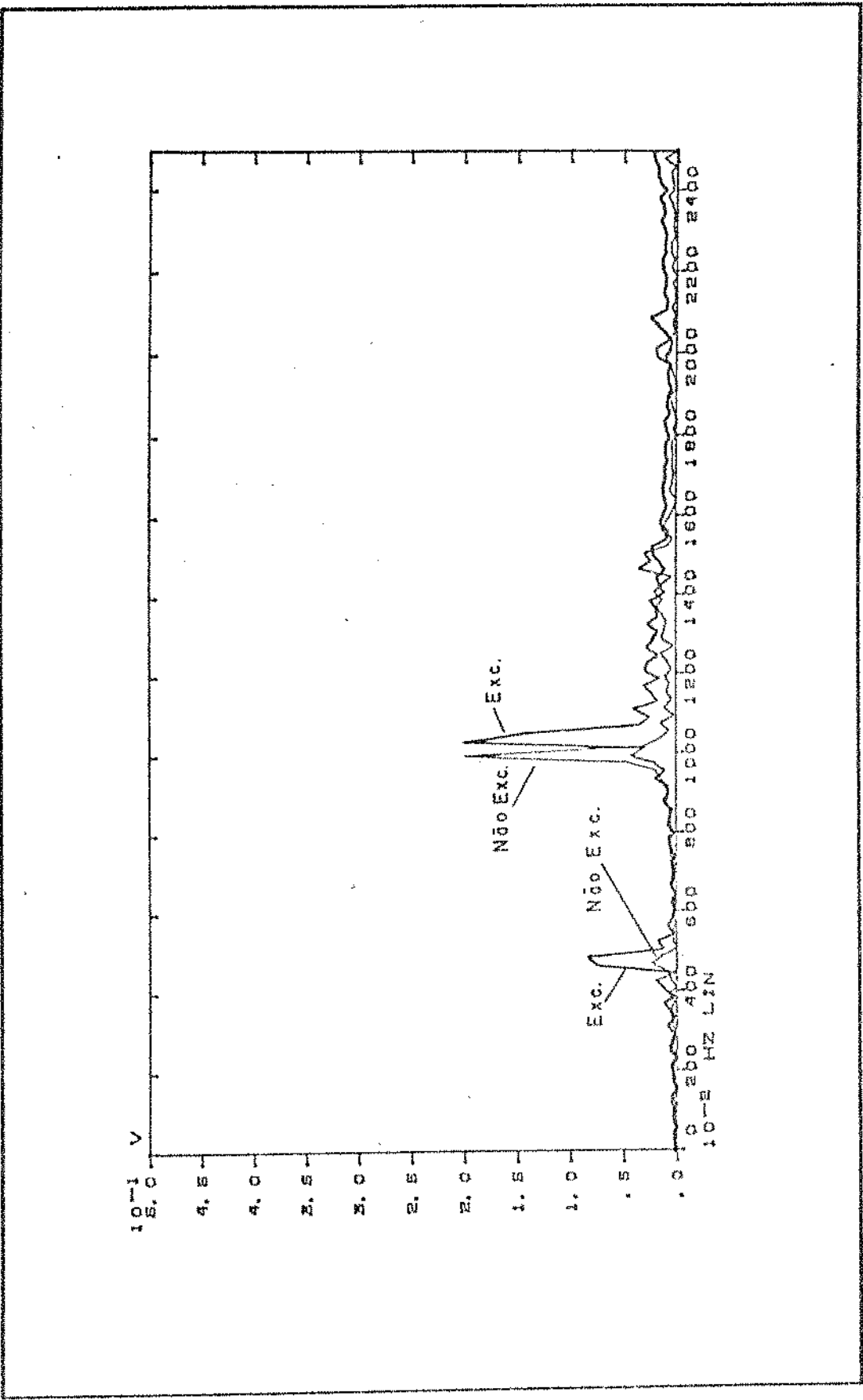


Figura 6.7 - Resposta do eixo do volante com e sem excitação, obtida na rotação de 600 r.p.m.

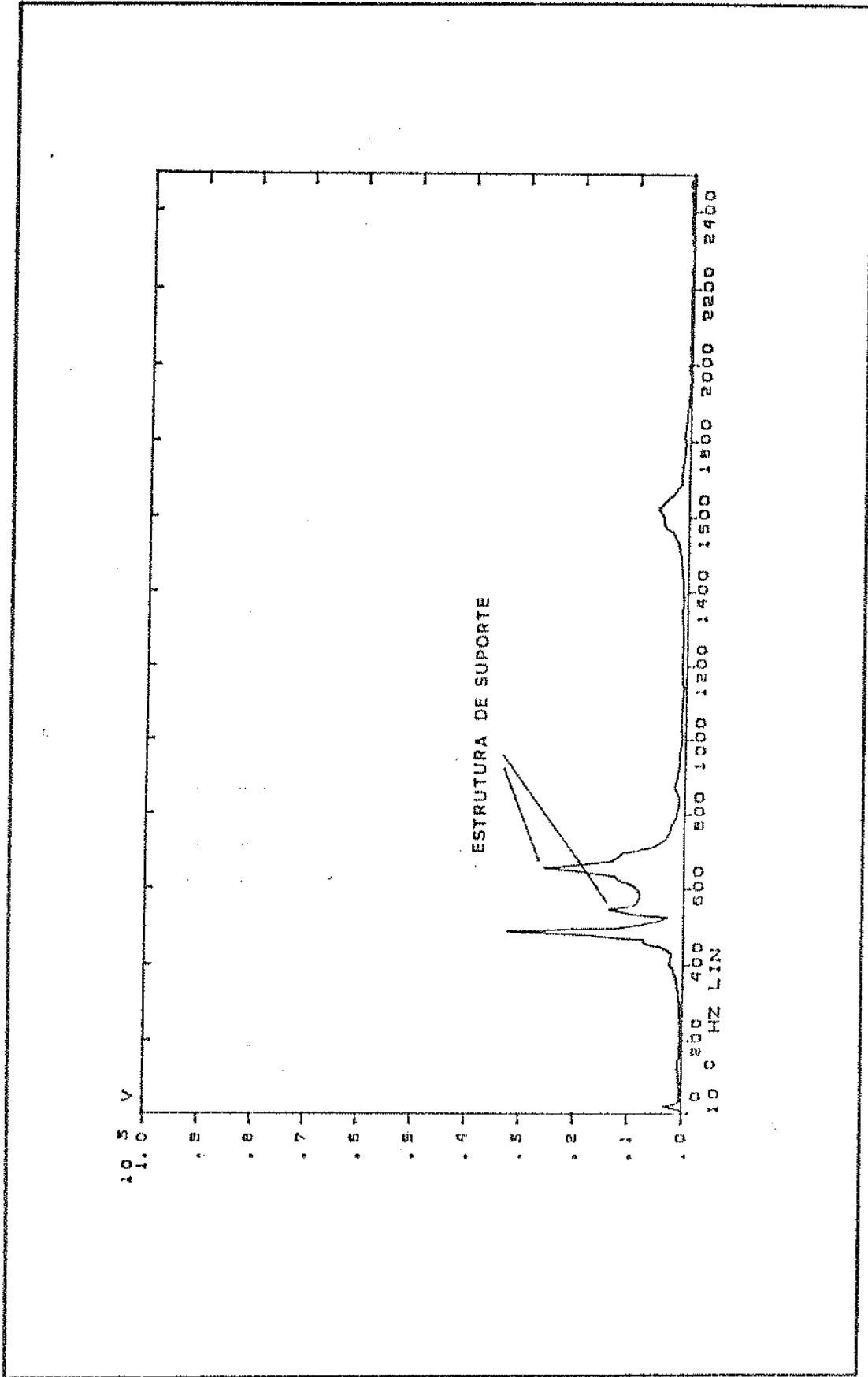


Figura 6.8 - Resposta do eixo do volante, obtida com a rotação de 600 r.p.m.

volante, na rotação de 600 r.p.m., é excitado por uma força de impulso aplicada diretamente no sentido radial sobre o seu anel. Observa-se portanto um pico de baixo nível de amplitude em aproximadamente 10 Hz, que corresponde a resposta do eixo ao desbalanceamento do volante, uma com maior nível de amplitude em 500 Hz que representa a frequência natural de vibração do terceiro modo de vibração compatível com a frequência natural de 30000 cpm, observada na Fig. 4.1 na rotação de 600 r.p.m. Além destas respostas de vibração obtidas, observa-se ainda um pico de baixo nível de amplitude em 1667 Hz, que corresponde a frequência natural de vibração do quarto modo compatível com a frequência de 10^5 cpm, observada também na Fig. 4.1, na rotação de 600 r.p.m.

A excitação do quarto modo de vibração do volante, quando se excita diretamente o anel com forças aplicada radialmente, deve-se tanto ao acoplamento existente entre o terceiro e o quarto modo de vibração do volante, prevista no modelo teórico, quanto a boa sensibilidade de resposta entre os movimentos radial e angular do anel quando apenas um deles é excitado. Esta forte superposição de movimentos do anel é justificada pelo grande efeito de membrana exercido pelas faixas entre o anel e cubo do volante.

Observa-se, ainda na Fig. 6.8, picos nas frequências de 500 Hz e 650 Hz, ambos correspondentes a vibração da estrutura de fixação do volante. A comprovação desta afirmação pode ser vista na Fig. 6.9, onde apresenta-se um espectro de frequência de vibração da estrutura de suporte do volante, obtida com uma força de excitação por impulso.

A frequência natural do segundo modo de vibração do volante e a frequência natural do movimento axial do anel, eq. (2.28), não foi

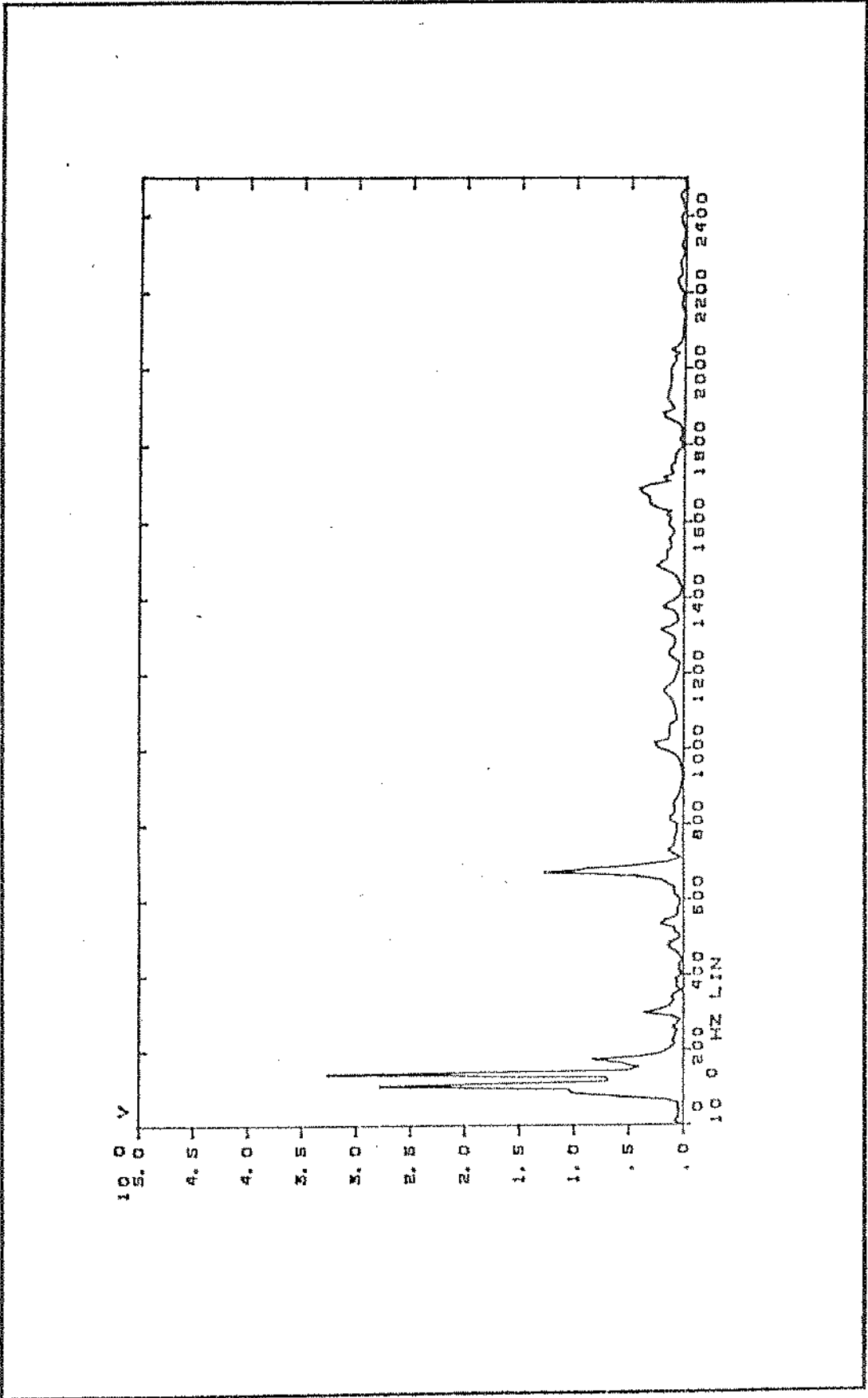


Figura 6.9 - Resposta da estrutura de fixação de fixação do sistema volante-suspensão, a uma excitação por impacto.

observada nos experimentos descritos acima. A primeira delas pode ser justificada pela pequena correlação entre os movimentos radial e angular do cubo do volante com as condições de excitação aplicada, quando que a frequência natural correspondente ao movimento axial do anel justifica-se exclusivamente pelo desacoplamento existente entre este movimento e o movimento de "whirling" do volante, conforme previsto no modelo teórico. Por outro lado, existe uma grande dificuldade de excitar e instrumentar os referidos movimentos de vibração com o volante em funcionamento.

Acima de 2500 r.p.m., o volante apresentou fenômenos de instabilidade provocados por amortecimento interno do eixo nesta faixa. Estes fenômenos, também observados nas referências [4,5,8] podem ser eliminados pelo menos na faixa de rotação nominal com a inclusão de amortecedores externos ao sistema.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA
TRABALHOS POSTERIORES

7.1. CONCLUSÕES

Nas análises de "whirling" livre e forçado e de estabilidade de apresentadas neste trabalho mostram que o modelo matemático proposto nos Capítulos 2 e 5 foi suficiente para estudo do comportamento dinâmico do volante, conforme resultados da análise experimental, apesar das limitações devido as dificuldades no acionamento e instabilidade no sistema.

Embora as comparações feitas entre os resultados do modelo teórico e experimental tenham sido obtidas com condições especiais de excitação, pelas quais excitam diretamente apenas o primeiro e terceiro modos de vibração do volante, constatou-se aparentemente a não influência do movimento axial do anel nos movimentos de "whirling" do volante, como previsto no modelo teórico, como também a frequência natural do terceiro modo de vibração do volante obtida com os resultados do modelo teórico foi observada no modelo experimental na mesma rotação, reforçando ainda mais a compatibilidade entre os dois modelos.

O tipo de acoplamento e disposições dos mancais utilizados para evitar que os efeitos da transmissão e do motor interferissem nos movimentos do volante e simular um engaste da suspensão respectivamente, o que complicaria bastante o modelo matemático, se mostraram convenientes para este tipo de análise.

As técnicas usadas na determinação dos valores de rigidez dinâmica das faixas do volante desenvolvidas experimentalmente, como apresentadas no Capítulo 3, mostraram-se suficientemente precisas. Por outro lado, podem ser desenvolvidos modelos matemáticos que determinem estes valores de rigidez dinâmica em função da rotação do

volante, como as obtidas na referência [19], para que se realize estudos prévios de otimização de parâmetros de volantes com características análogas ao volante analisado neste trabalho, antes de serem construídos.

Pelas análises obtidas, mostrou-se de um modo geral que o volante analisado além de necessitar de um amortecedor externo para estabilizar o primeiro modo de vibração do volante na região de rotação nominal e limitar os níveis de amplitudes de vibração na passagem pelas velocidades críticas, evitando batidas no limitador, pode ser melhorado pela mudança de alguns parâmetros da sua suspensão.

A rotação crítica em 248 r.p.m. pode ser aumentada reduzindo-se o comprimento do eixo ou aumentando-se o seu diâmetro, enquanto que a de 30000 r.p.m. pode ser alterada modificando-se os valores de massa do anel ou a flexibilidade nas faixas. Por outro lado, um aumento de diâmetro do eixo do volante evita problemas de empenamento decorrentes do processo de fabricação, bem como da montagem do volante, devida à sua grande flexibilidade.

Uma redução de 30% no comprimento do eixo combinada com um aumento de 50% de diâmetro, o que corresponde a 406% de aumento na inércia diametral da seção transversal do eixo, transfere a frequência natural de 248 r.p.m., que corresponde a velocidade crítica do primeiro modo de vibração, para um valor em torno de 840 r.p.m. A Fig. 7.1 mostra a variação nas frequências naturais obtidas com as condições acima. Este novo valor de velocidade crítica ainda garante uma boa flexibilidade da suspensão e não compromete as hipóteses feitas no modelo físico de considerar-se o eixo do volante como corpo de massa desprezível.

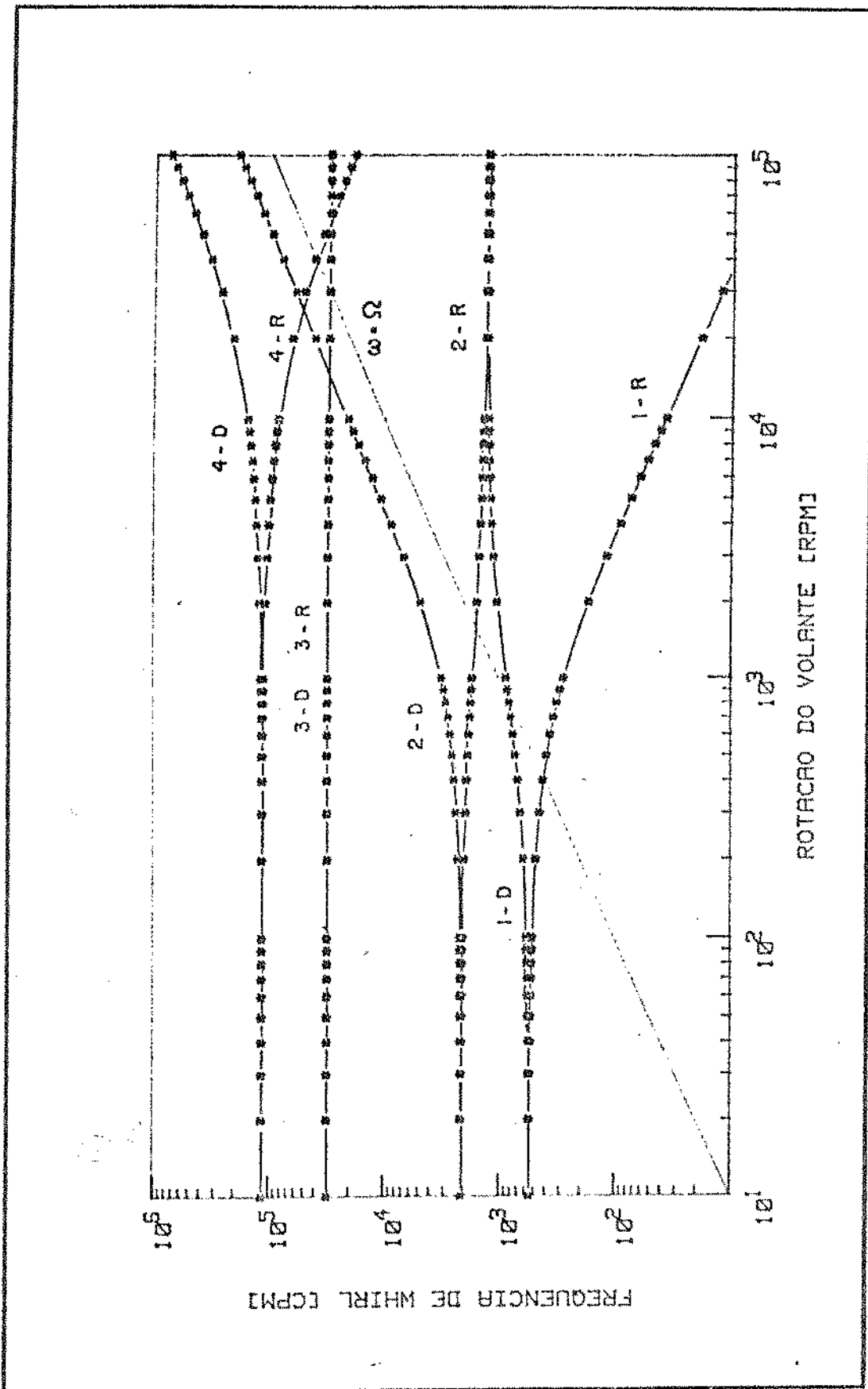


Figura 7.1 - Frequências de "whirl" em função da rotação, obtida com uma redução de 30% no comprimento do eixo e um aumento de 50% de diâmetro, simultaneamente.

Quanto ao problema de estabilidade, não deve sofrer alterações muito significativas com este aumento de rigidez da suspensão. A tendência da região de estabilidade neste caso é aumentar com relação ao aumento da rigidez da suspensão, como observado em [19]. Por outro lado, ainda faz-se necessário o uso de um amortecedor externo para garantir a estabilidade na região de rotação nominal.

Observa-se também pelas análises apresentadas que o amortecimento mínimo requerido para evitar que os níveis de amplitude do movimento radial do cubo esteja abaixo do limite permitido pelo mancal limitador é bem maior que o necessário para estabilizar o primeiro modo de vibração do volante até 30000 r.p.m. Esta diferença de amortecimento pode ser reduzida à medida que se reduz o desbalanceamento residual provocado por excentricidade no cubo ou anel do volante. Pode-se entretanto reduzir ao máximo estes níveis de desbalanceamento utilizando-se técnicas de refinamento e procurar minimizar o amortecimento externo de modo que possa atender as duas situações.

Por exemplo, as Figs. 7.2 e 7.3 mostram que, para um amortecimento externo de 1.62 Kg s^{-1} , necessário para estabilizar o volante em até 30000 r.p.m., o nível máximo de excentricidade para evitar batidas do cubo no limitador é de 0.3mm quando o desbalanceamento é no cubo e de 0.04mm quando o desbalanceamento é no anel.

7.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS POSTERIORES

As conclusões apresentadas na seção anterior mostram a necessidade de estudos futuros tanto de natureza teórica quanto de na

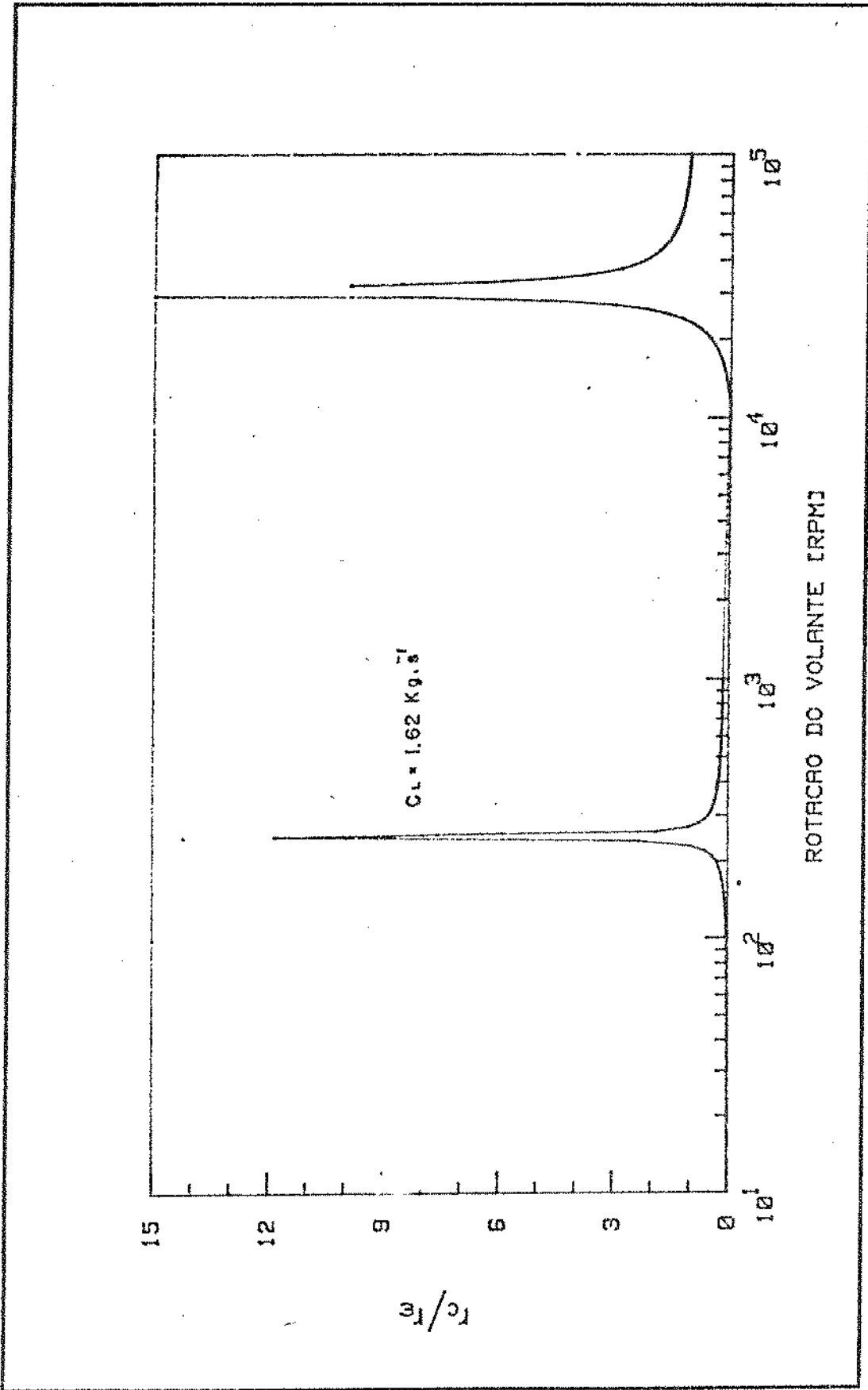


Figura 7.2 - Resposta do eixo do volante, com excentricidade no cubo, obtida com amortecimento externo de 1.62 Kg s^{-1}

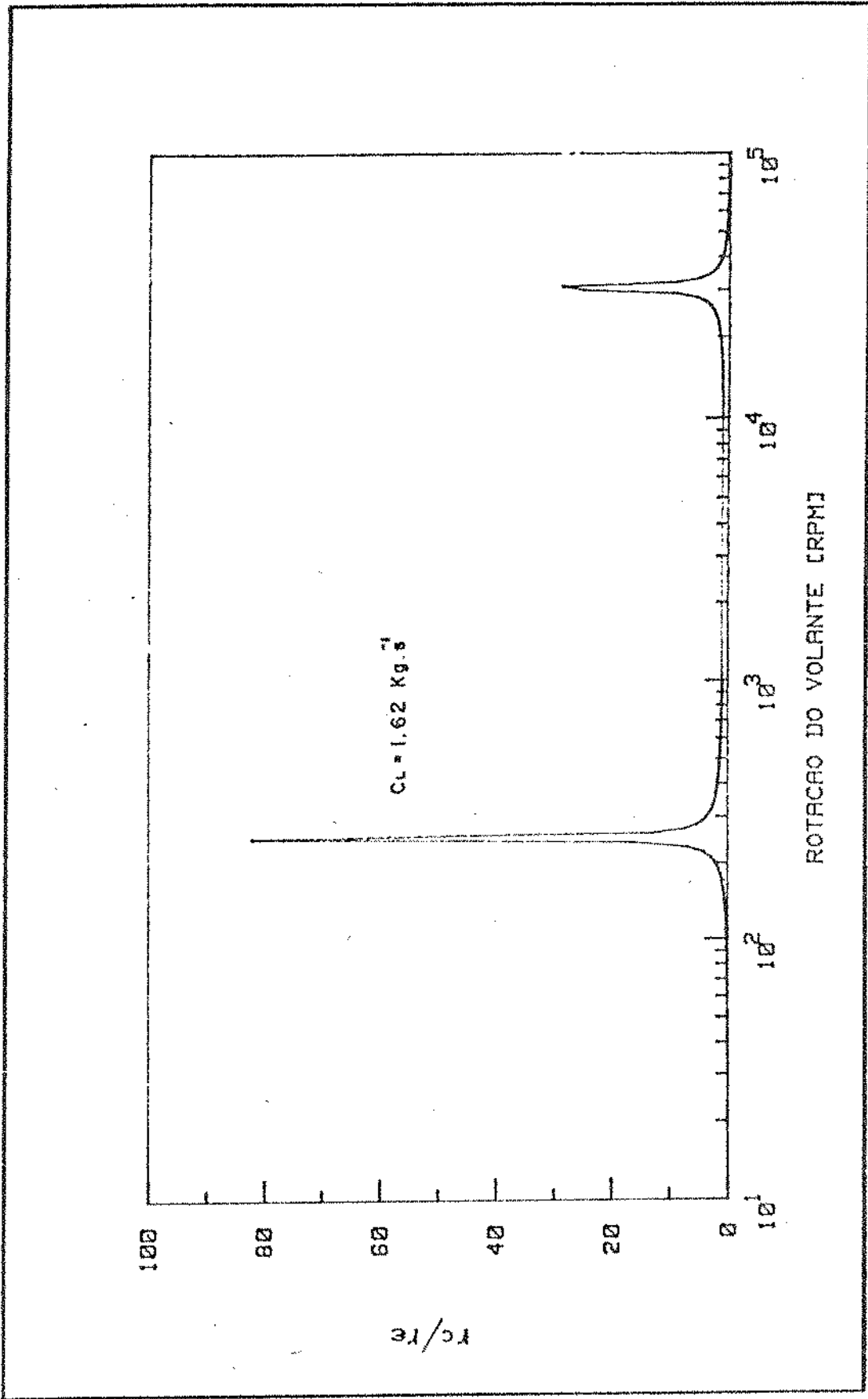


Figura 7.3 - Resposta do eixo do volante, com excentricidade no anel, obtida com amortecimento externo de 1.62 Kg S^{-1}

tureza experimental. Entretanto, são indispensáveis algumas modificações na instalação experimental, o que considero pendente neste trabalho, para continuação com novas frentes de pesquisas.

Dentre as modificações que se fazem necessárias, pode-se destacar:

- a) Redução no comprimento do eixo para 170mm
- b) Aumento do diâmetro do eixo para 15mm
- c) Colocação de um amortecedor externo posicionado na extremidade inferior do cubo.

O amortecedor externo destacado acima, pode ser magnético, que consiste simplesmente de um disco de cobre se movimentando radialmente entre um campo magnético, Fig. 7.3, ou pode ser um disco de um material qualquer submerso em um reservatório com óleo ou graxa, Fig. 7.4.

Com estas modificações, consegue-se em princípio melhorar a parte experimental no que diz respeito a possibilidades de ensaios em uma faixa de rotação mais ampla sem riscos de fenômenos de instabilidade.

Quanto a continuação do estudo com novas frentes de pesquisas, cita-se a formulação de modelos físicos mais completos para o volante, considerando a influência de fatores atuando isoladamente ou simultaneamente, como:

- a) Tipos de mancais especiais
- b) Posicionamento ótimo de um mancal amortecedor ao longo do eixo para reduzir os níveis de vibração
- c) Alívio magnético que possibilita a redução dos esforços nos mancais

d) Turbina a ar para acionamento em toda a faixa de rotação nominal.

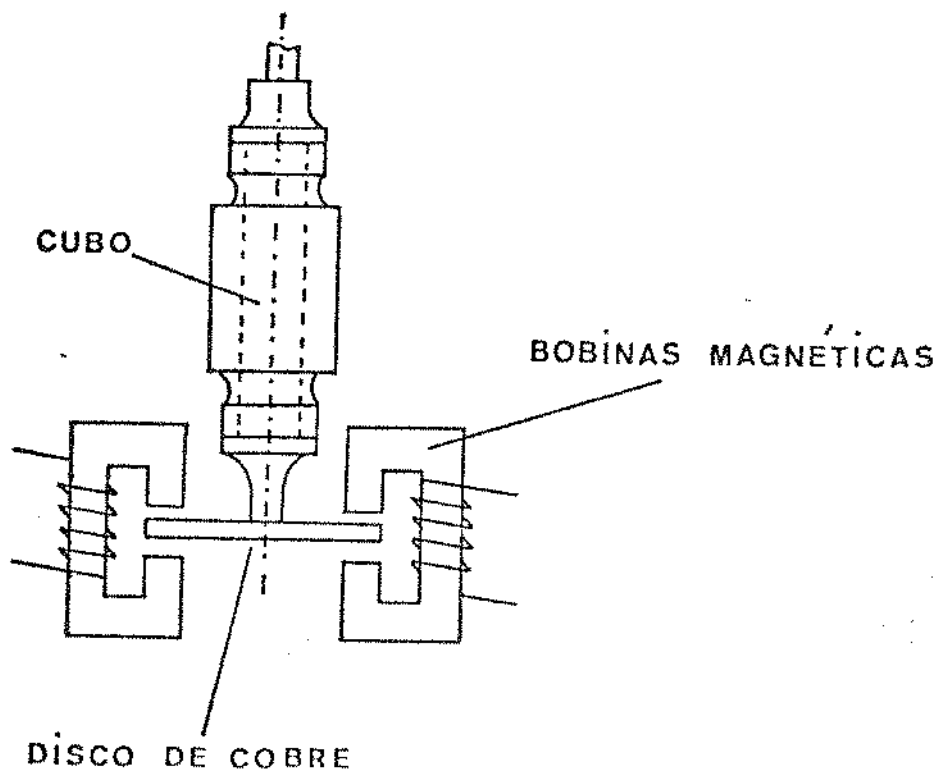


Figura 7.4 - Amortecedor externo composto por quatro bobinas magnéticas a 90°

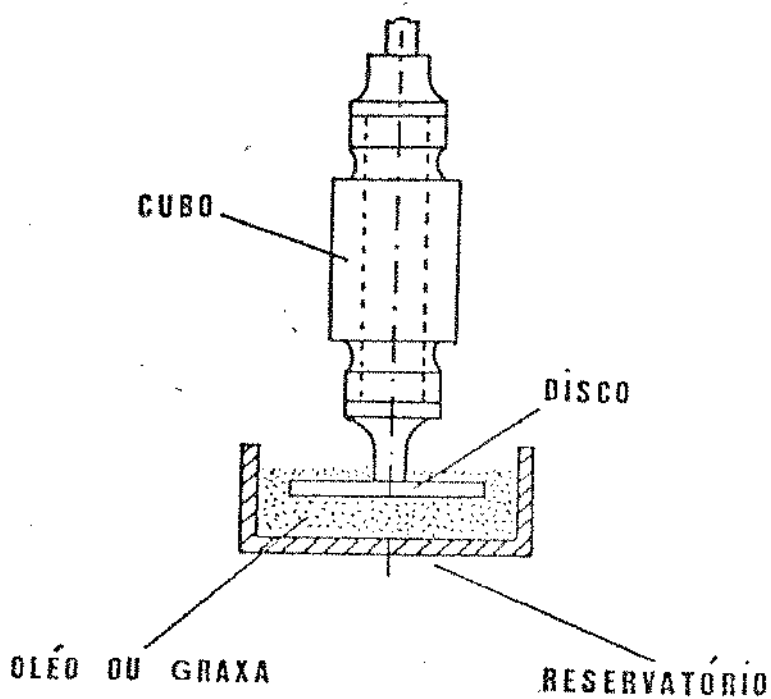


Figura 7.5 - Amortecedor externo composto de um disco submerso em óleo ou graxa

APÉNDICE 1

PROGRAMAS COMPUTACIONAIS

```

10      ! #####
20      ! ##ANALISE DE WHIRLING LIVRE SEM AMORTECIMENTO##
30      ! #####
40      OPTION BASE 1
50      DIM K(4,4),M(4,4),N(4,4),M1(4,4),A1(4,4),A2(4,4),A(8,8),D(8),Int(8),Wr(8)
, Wi(8),Cnt(8),Autovalores(8,37)
60      ! **DADOS DO EIXO DO VOLANTE**
70      Le=.243
80      Lb=.105
90      Ee=2.05947E11
100     Je=4.91E-10
110     ! **DADOS DO VOLANTE**
120     Kr=16332499.620
130     Ka=154235.865
140     Ki=1073321.251
150     Ma=12.67
160     Mc=1.83
170     Ja=.209
180     Jc=.008
190     Ia=.396
200     Ic=.058
210     N=8
220     Omr1=10
230     Omr2=100
240     Omr3=10
250     Omr4=10
260     Omr5=1
270     FOR Omr=Omr1 TO Omr2 STEP Omr3
280     PRINT "ROTACAO DO VOLANTE =";Omr;"RPM"
290     K(1,1)=12*Ee*Je/Le^3+Kr
300     K(1,2)=-6*Ee*Je/Le^2-12*Ee*Je*Lb/Le^3
310     K(1,3)=-Kr
320     K(1,4)=0
330     K(2,1)=-6*Ee*Je/Le^2-12*Ee*Je*Lb/Le^3
340     K(2,2)=4*Ee*Je/Le+Ki+12*Ee*Je*Lb/Le^2+12*Ee*Je*Lb^2/Le^3
350     K(2,3)=0
360     K(2,4)=-Ki
370     K(3,1)=-Kr
380     K(3,2)=0
390     K(3,3)=Kr
400     K(3,4)=0
410     K(4,1)=0
420     K(4,2)=-Ki
430     K(4,3)=0
440     K(4,4)=Ki
450     M(1,1)=Mc
460     M(2,2)=Jc
470     M(3,3)=Ma
480     M(4,4)=Ja
490     N(2,2)=Ic*Omr*2*PI/60
500     N(4,4)=Ia*Omr*2*PI/60
510     NAT M1=INV(M)
520     NAT A1=M1*K
530     NAT A2=M1*N
540     J=N/2+1
550     FOR I=1 TO N/2 STEP 1
560     A(I,J)=1
570     J=J+1
580     NEXT I

```

```

590 FOR I=N/2+1 TO N STEP 1
600 FOR J=1 TO N/2 STEP 1
610 A(I,J)=A1(I-4,J)
620 NEXT J
630 NEXT I
640 FOR I=N/2+1 TO N STEP 1
650 FOR J=N/2+1 TO N STEP 1
660 A(I,J)=A2(I-4,J-4)
670 NEXT J
680 NEXT I
690 CALL Vsbamr(A(*),D(*),N,Low,Hi)
700 CALL Vsfher(A(*),Int(*),N,Low,Hi)
710 CALL Vsaamr(A(*),V(*),D(*),Int(*),Cnt(*),Wr(*),Hi(*),N,Low,Hi)
720 T1=1
730 P1=-10000
740 FOR I=T1 TO N STEP 1
750 IF P1>Wr(I) THEN GOTO 780
760 P1=Wr(I)
770 C1=I
780 NEXT I
790 A=Wr(T1)
800 Wr(T1)=Wr(C1)
810 Wr(C1)=A
820 T1=T1+1
830 IF T1>=N THEN GOTO 850
840 GOTO 730
850 FOR I=1 TO N STEP 1
860 Autovalores(I,Omr5)=Wr(I)
870 PRINT "Autovalores (;I;Omr5;)"="";Autovalores(I,Omr5)
880 NEXT I
890 Omr5=Omr5+1
900 FOR I=1 TO 8 STEP 1
910 FOR J=1 TO 8 STEP 1
920 A(I,J)=A(I,J)*0
930 NEXT J
940 NEXT I
950 NEXT Omr
960 IF Omr2=100000 THEN 1020
970 Omr2=Omr2*10
980 Omr3=Omr3*10
990 Omr4=Omr4*10
1000 Omr1=2*Omr4
1010 GOTO 270
1020 GOSUB Leixos
1030 FOR I=1 TO N
1040 Omr1=10
1050 Omr2=100
1060 Omr3=10
1070 Omr4=10
1080 Omr5=1
1090 LOG 5
1100 CSIZE 2
1110 FOR Omr=Omr1 TO Omr2 STEP Omr3
1120 IF ABS(Autovalores(I,Omr5)*30/PI)>1000000 THEN 1280
1130 IF ABS(Autovalores(I,Omr5)*30/PI)<10 THEN 1280
1140 IF Autovalores(I,Omr5)<0 THEN 1170
1150 MOVE LGT(Omr),LGT(Autovalores(I,Omr5)*30/PI)
1160 GOTO 1190
1170 PEN,3

```

```

1180 MOVE LGT(Omr),LGT(-Autovalores(:,Omr5)*30/PI)
1190 LABEL USING "1A";"*"
1200 Omr5=Omr5+1
1210 NEXT Omr
1220 IF Omr2=100000 THEN 1280
1230 Omr2=Omr2*10
1240 Omr3=Omr3*10
1250 Omr4=Omr4*10
1260 Omr1=2*Omr4
1270 GOTO 1110
1280 NEXT I
1290 PEN 4
1300 X=Y=1
1310 PLOT X,Y
1320 X=Y=5
1330 PLOT X,Y
1340 PEN 1
1350 DIGITIZE Xp,Yp
1360 PRINTER IS 0
1370 PRINT "FREQUENCIA DE WHIRL=";10^Yp;"CPM","ROTACAO=";10^Xp;"RPM"
1380 PRINTER IS 16
1390 GOTO 1340
1400 PENUP
1410 PEN 0
1420 END
1430 Leixos: !
1440 PLOTTER IS 7,5,"9872A"
1450 LIMIT 2,289,6,186
1460 PEN 4
1470 LOCATE 22,142,16.5,83.5
1480 FRAME
1490 SCALE 1,5,1,6
1500 AXES 1,1,1,1,1,1,5
1510 CSIZE 3
1520 LDIR 0
1530 LORG 6
1540 FOR X1=1 TO 5 STEP 1
1550 MOVE X1,.85
1560 LABEL USING "D";X1
1570 NEXT X1
1580 FOR X1=1 TO 5
1590 X2=X1-.075
1600 MOVE X2,.75
1610 LABEL USING "2A";"10"
1620 NEXT X1
1630 LORG 2
1640 MOVE 2.3,.35
1650 LABEL USING "24A";"ROTACAO DO VOLANTE (RPM)"
1660 X1=10
1670 X2=100
1680 X3=10
1690 X4=10
1700 CSIZE 1
1710 LORG 4
1720 FOR X=X1 TO X2 STEP X3
1730 X5=LGT(X)
1740 MOVE X5,1.01
1750 LABEL USING "1A";"|"
1760 NEXT X

```



```
1770 IF X2=100000 THEN 1830
1780 X2=X2*10
1790 X3=X3*10
1800 X4=X4*10
1810 X1=2*X4
1820 GOTO 1720
1830 LORG 8
1840 CSIZE 3
1850 FOR Y1=2 TO 6
1860 MOVE .95,Y1
1870 LABEL USING "D";Y1
1880 NEXT Y1
1890 FOR Y1=2 TO 6
1900 Y2=Y1-.1
1910 MOVE .9,Y2
1920 LABEL USING "2A";"10"
1930 NEXT Y1
1940 DEG
1950 LDIR 90
1960 Y1=10
1970 Y2=100
1980 Y3=10
1990 Y4=10
2000 CSIZE 1
2010 LORG 6
2020 FOR Y=Y1 TO Y2 STEP Y3
2030 Y5=LGT(Y)
2040 MOVE 1.01,Y5
2050 LABEL USING "1A";"|"
2060 NEXT Y
2070 IF Y2=1000000 THEN 2130
2080 Y2=Y2*10
2090 Y3=Y3*10
2100 Y4=Y4*10
2110 Y1=2*Y4
2120 GOTO 2020
2130 CSIZE 3
2140 LORG 2
2150 MOVE .6,1.85
2160 LABEL USING "25A";"FREQUENCIA DE WHIRL [CPM]"
2170 PENUP
2180 RETURN
```

```

10      ! #####
20      ! ##ANALISE DE WHIRLING FORCADO COM AMORTECIMENTO##
30      ! #####
40      OPTION BASE 1
50      DIM K(4,4),N(4,4),N(4,4),Fr(4,2),Fi(4,1),Ar(4,4),Ai(4,4),A(8,8),Q(8,1),F
(8,1),A1(8,8)
60      ! **DADOS DO EIXO DO VOLANTE**
70      Le=.243
80      Lb=.105
90      Ee=2.05947E11
100     Je=4.91E-10
110     ! **DADOS DO VOLANTE**
120     Kro=16332499.620
130     Kao=154235.865
140     Kio=1873321.251
150     Ma=12.67
160     Mc=1.83
170     Ja=.209
180     Jc=.008
190     Ia=.396
200     Ic=.058
210     N=4
220     INPUT "Re - SIN(1) ; Fe - SIN(2)",P
230     IF P<>1 THEN GOTO 270
240     Fe=0
250     Re=P
260     GOTO 290
270     Re=0
280     Fe=P/2
290     INPUT "COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO EXTERNO C1",C1
300     INPUT "PLOTAR EIXOS ? NAO(0) - SIM(1)",Eixos
310     IF Eixos=0 THEN 330
320     GOSUB Leixos
330     Omr1=10
340     Omr2=1000
350     Omr3=10
360     FOR Omr=Omr1 TO Omr2 STEP Omr3
370     K(1,1)=12*Ee*Je/Le^3+Kro
380     K(1,2)=-6*Ee*Je/Le^2-12*Ee*Je*Lb/Le^3
390     K(1,3)=-Kro
400     K(1,4)=0
410     K(2,1)=-6*Ee*Je/Le^2-12*Ee*Je*Lb/Le^3
420     K(2,2)=4*Ee*Je/Le+Kio+12*Ee*Je*Lb/Le^2+12*Ee*Je*Lb^2/Le^3
430     K(2,3)=0
440     K(2,4)=-Kio
450     K(3,1)=-Kro
460     K(3,2)=0
470     K(3,3)=Kro
480     K(3,4)=0
490     K(4,1)=0
500     K(4,2)=-Kio
510     K(4,3)=0
520     K(4,4)=Kio
530     Omr=Omr*2*PI/60
540     N(1,1)=Mc*Omr^2
550     N(2,2)=(Jc-Ic)*Omr^2
560     N(3,3)=Ma*Omr^2
570     N(4,4)=(Ja-Ia)*Omr^2
580     N(1,1)=C1*Omr

```

```

590   Fr(1,1)=Mc*Re*Omr^2
600   Fr(2,1)=(Jc-Ic)*Fe*Omr^2
610   FOR I=1 TO N STEP 1
620   FOR J=1 TO N STEP 1
630   Ar(I,J)=M(I,J)-K(I,J)
640   Ai(I,J)=N(I,J)
650   NEXT J
660   NEXT I
670   FOR I=1 TO N STEP 1
680   FOR J=1 TO N STEP 1
690   A(I,J)=Ar(I,J)
700   A(I,J+4)=-Ai(I,J)
710   A(I+4,J)=Ai(I,J)
720   A(I+4,J+4)=Ar(I,J)
730   F(I,1)=Fr(I,1)
740   F(I+4,1)=Fi(I,1)
750   NEXT J
760   NEXT I
770   MAT A1=INV(A)
780   MAT Q=A1*F
790   X=SQR(Q(1,1)^2+Q(6,1)^2)
800   Y=LGT(Omr*30/PI)
810   PEN 4
820   PLOT Y,X
830   Omr=Omr*60/(2*PI)
840   NEXT Omr
850   IF Omr2=100000 THEN 900
860   Omr1=10000
870   Omr2=100000
880   Omr3=1000
890   GOTO 360
900   PENUP
910   PEN 0
920   END
930   Letixos: !
940   PLOTTER IS 7,5,"9872A"
950   LIMIT 2,289,6,186
960   PEN 4
970   LOCATE 22,142,16.5,83.5
980   FRAME
990   SCALE 1,5,0,10
1000  AXES 1,1,1,0,1,2,5
1010  CSIZE 3
1020  LDIR 0
1030  LORG 6
1040  FOR X1=1 TO 5 STEP 1
1050  MOVE X1,-.3
1060  LABEL USING "D";X1
1070  NEXT X1
1080  FOR X1=1 TO 5
1090  X2=X1-.075
1100  MOVE X2,-.55
1110  LABEL USING "2A";"10"
1120  NEXT X1
1130  LORG 2
1140  MOVE 2.3,-1.5
1150  LABEL USING "24A";"ROTACAO DO VOLANTE [RPM]"
1160  X1=10
1170  X2=100

```

```
1180 X3=10
1190 X4=10
1200 CSIZE 1
1210 LORG 4
1220 FOR X=X1 TO X2 STEP X3
1230 X5=LGT(X)
1240 MOVE X5,.08
1250 LABEL USING "1A";"|"
1260 NEXT X
1270 IF X2=100000 THEN 1330
1280 X2=X2*10
1290 X3=X3*10
1300 X4=X4*10
1310 X1=2*X4
1320 GOTO 1220
1330 LORG 8
1340 CSIZE 3
1350 FOR Y=0 TO 10 STEP 2
1360 MOVE .9,Y
1370 LABEL USING "DD";Y
1380 NEXT Y
1390 RETURN
```

```

10      ! #####
20      ! ##ANALISE DE ESTABILIDADE DO VOLANTE##
30      ! #####
40      OPTION BASE 1
50      DIM M(4,4),M1(4,4),Nr(4,4),Ni(4,4),Kr(4,4),Ki(4,4),A1r(4,4),A1i(4,4),A2r
(4,4),A2i(4,4)
60      DIM Ar(8,8),Ai(8,8),Vr(8,8),Vi(8,8),D(8),Int(8),Wr(8),Wi(8)
70      ! **DADOS DO EIXO DO VOLANTE**
80      Le=.243
90      Lb=.105
100     Ee=2.05947E11
110     Je=4.91E-10
120     Cinte=-.005
130     ! **DADOS DO VOLANTE**
140     Kro=16332499.620
150     Kao=154235.865
160     Kio=1073321.251
170     Ma=12.67
180     Mc=1.83
190     Ja=.209
200     Jc=.008
210     Ia=.396
220     Ic=.058
230     Cintf=-.017
240     N=8
250     INPUT "COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO EXTERNO",Cext
260     INPUT "PLOTAR EIXOS ? : SIM(1),NAO(0)",Eixos
270     IF Eixos=0 THEN 370
280     GOSUB Leixos
290     X=1
300     Y=0
310     PLOT X,Y
320     X=5
330     Y=0
340     PLOT X,Y
350     PENUP
360     PEN 0
370     INPUT "ROTACAO DO VOLANTE =",Onr
380     PRINT "ROTACAO DO VOLANTE =" ; Onr ; "RPM"
390     Kar=Kao
400     Krr=Kro
410     Kir=Kio
420     Kai=Kar+Cintf
430     Kri=Krr+Cintf
440     Kii=Kir+Cintf
450     Kr(1,1)=12*Ee*Je/Le^3+Krr
460     Kr(1,2)=-6*Ee*Je/Le^2-12*Ee*Je*Lb/Le^3
470     Kr(1,3)=-Krr
480     Kr(2,1)=-6*Ee*Je/Le^2-12*Ee*Je*Lb/Le^3
490     Kr(2,2)=4*Ee*Je/Le+Kir+12*Ee*Je*Lb/Le^2+12*Ee*Je*Lb^2/Le^3
500     Kr(2,4)=-Kir
510     Kr(3,1)=-Krr
520     Kr(3,3)=Krr
530     Kr(4,2)=-Kir
540     Kr(4,4)=Kir
550     Ki(1,1)=12*Ee*Je*Cinte/Le^3+Kr
560     Ki(1,2)=-6*Ee*Je*Cinte/Le^2-12*Ee*Je*Lb*Cinte/Le^3
570     Ki(1,3)=-Kri
580     Ki(2,1)=-6*Ee*Je*Cinte/Le^2-12*Ee*Je*Lb*Cinte/Le^3

```

```

590      Ki(2,2)=4*Ee*Je*Cinte/Le+Kii+12*Ee*Je*Cinte*Lb/Le^2+12*Ee*Je*Cinte*Lb^2/
Le^3
600      Ki(2,4)=-Kii
610      Ki(3,1)=-Kri
620      Ki(3,3)=Kri
630      Ki(4,2)=-Kii
640      Ki(4,4)=Kii
650      M(1,1)=-Mc
660      M(2,2)=-Jc
670      M(3,3)=-Ma
680      M(4,4)=-Ja
690      Ni(2,2)=-Ic*Omr*2*PI/60
700      Ni(4,4)=-Ia*Omr*2*PI/60
710      Nr(1,1)=Cext
720      Nr(3,3)=Cext
730      MAT M1=INV(M)
740      MAT A1r=M1*Kr
750      MAT A1i=M1*Ki
760      MAT A2r=M1*Nr
770      MAT A2i=M1*Ni
780      J=N/2+1
790      FOR I=1 TO N/2 STEP 1
800      Ar(I,J)=1
810      J=J+1
820      NEXT I
830      FOR I=N/2+1 TO N STEP 1
840      FOR J=1 TO N/2 STEP 1
850      Ar(I,J)=A1r(I-4,J)
860      Ai(I,J)=A1i(I-4,J)
870      NEXT J
880      NEXT I
890      FOR I=N/2+1 TO N STEP 1
900      FOR J=N/2+1 TO N STEP 1
910      Ar(I,J)=A2r(I-4,J-4)
920      Ai(I,J)=A2i(I-4,J-4)
930      NEXT J
940      NEXT I
950      CALL Vsbamc(Ar(*),Ai(*),D(*),N,Low,Hi)
960      CALL Vsfhec(Ar(*),Ai(*),Int(*),N,Low,Hi)
970      CALL Vsaamc(Ar(*),Ai(*),Vr(*),Vi(*),D(*),Int(*),Wr(*),Ni(*),N,Low,Hi)
980      PRINT Wr(*);
990      FOR I=1 TO N STEP 1
1000     IF Wi(I)<0 THEN 1030
1010     IF Omr<Wi(I)*30/PI THEN 1030
1020     PRINT "AUTOVALOR P/REAL Wr(";I;")=";Wr(I)*30/PI
1030     NEXT I
1040     CSIZE 1
1050     LORG 5
1060     PEN 4
1070     INPUT "PLOTAR ALGUM AUTOVALOR ? : SIM(1),NAO(0)",Aut
1080     IF Aut=0 THEN 1170
1090     INPUT "QUAL AUTOVALOR ? ",In
1100     MOVE LGT(Omr),Wr(In)*30*10000/PI
1110     IF (Wr(In)*30*10000/PI>300) OR (Wr(In)*30*10000/PI<-300) THEN 1130
1120     LABEL USING "1A";"+"
1130     INPUT "PLOTAR MAIS ALGUM AUTOVALOR ? :SIM(1),NAO(0)",Au
1140     IF Au=0 THEN 1170
1150     INPUT "QUAL AUTOVALOR ? ",In
1160     GOTO 1100

```

```
1170   FOR I=1 TO N STEP 1
1180   FOR J=1 TO N STEP 1
1190   Ar(I,J)=Ai(I,J)=Vr(I,J)=Vi(I,J)=0
1200   D(I)=Int(I)=Wr(I)=Ni(I)=0
1210   NEXT J
1220   NEXT I
1230   Low=Hi=0
1240   GOTO 370
1250   END
1260 Leixos:   !
1270   PLOTTER IS 7,5,"9872A"
1280   LIMIT 2,289,6,186
1290   PEN 4
1300   LOCATE 22,142,16.5,83.5
1310   FRAME
1320   SCALE 1,5,-300,300
1330   AXES 1,100,1,-300,1,1,5
1340   CSIZE 3
1350   LDIR 0
1360   LORG 6
1370   FOR X1=1 TO 5 STEP 1
1380   MOVE X1,-315
1390   LABEL USING "D";X1
1400   NEXT X1
1410   FOR X1=1 TO 5 STEP 1
1420   X2=X1-.075
1430   MOVE X2,-330
1440   LABEL USING "2A";"10"
1450   NEXT X1
1460   LORG 2
1470   MOVE 2.3,-375
1480   LABEL USING "24A";"ROTACAO DO MOLANTE [RPM]"
1490   MOVE 1.5,200
1500   LABEL USING "8A";"INSTAVEL"
1510   MOVE 1.5,-200
1520   LABEL USING "7A";"ESTAVEL"
1530   X1=10
1540   X2=100
1550   X3=10
1560   X4=10
1570   CSIZE 1
1580   LORG 4
1590   FOR X=X1 TO X2 STEP X3
1600   X5=LGT(X)
1610   MOVE X5,-299
1620   LABEL USING "1A";"|"
1630   NEXT X
1640   IF X2=100000 THEN 1700
1650   X2=X2*10
1660   X3=X3*10
1670   X4=X4*10
1680   X1=2*X4
1690   GOTO 1590
1700   LORG 8
1710   CSIZE 3
1720   FOR Y=-300 TO 300 STEP 100
1730   MOVE .95,Y
1740   LABEL USING "DDDD";Y
1750   NEXT Y
```

```
1760 DEG
1770 LDIR 90
1780 LORG 2
1790 MOVE .5,-280
1800 LABEL USING "34A";"GRAU DE AMORTECIMENTO Nr 10 [CPM]"
1810 MOVE .45,160
1820 LABEL USING "1A";"4"
1830 PENUP
1840 RETURN
```


APÊNDICE 2

ALGORÍTMO PARA DETERMINAÇÃO DE AUTOVALORES DE
MATRIZES MAL CONDICIONADAS

Este Apêndice fornece detalhes do algoritmo utilizado para determinação de autovalores de matrizes mal condicionadas. Para melhor compreensão, o algoritmo se divide em três partes correspondentes a condicionamento de matrizes, transformação de uma matriz na forma de Hessenberg e finalmente triangularização da matriz de Hessenberg.

As transformações usadas tanto no condicionamento quanto na modificação para forma de Hessenberg, a triangularização são de similaridade [10], que assegura os mesmos autovalores da matriz original em qualquer etapa do processo de transformação.

Mostra-se facilmente de [10] que se [A] é uma matriz similar de A, então pode-se escrever para relacionar os autovalores e autovetores de A e A_1

$$\lambda = \lambda_1 \quad (\text{Ap.2.1})$$

$$[D]\{X_1\} = \{X\}$$

onde:

λ - autovalor de [A]

λ_1 - autovalor de $[A_1]$

$\{X_1\}$ - autovetor de $[A_1]$

$\{X\}$ - autovetor de [A]

[D] - produto de todas as matrizes de transformação usada para obter $[A_1]$

As eqs.(Ap.2.1) são a base fundamental do todo algoritmo , detalhado a seguir:

Ap.2.1. Condicionamento de Matrizes

O condicionamento de matrizes é baseado no trabalho de Osborne [26], que observou a existência de programas que determinam os autovalores e autovetores de matrizes, processados com erros de pelo menos $\epsilon \|A\| E$, onde ϵ é a precisão do computador e $\|A\| E$ é a norma euclidiana da matriz A. Estes erros são decorrentes da baixa velocidade de convergência do processo iterativo.

Ap.2.1.1. Permutações Preliminares

Se a linha i ou a coluna i de uma matriz [A] exceto o termo da diagonal é nula, então a_{ii} é um autovalor de [A]. Os cálculos que prosseguem para determinar os demais autovalores de [A] podem ser feitos na submatriz de [A] obtida por eliminação da i -ésima coluna e i -ésima linha. No presente algoritmo estas colunas são deslocadas para o lado esquerdo enquanto que a correspondente linha são deslocadas para a parte inferior de [A], por transformação de similaridade.

Após esta fase de Permutação, tem-se:

$$[A_K] = [P_K]^{-1} \dots [P_1]^{-1} [A] [P_1] \dots [P_K]$$

$$[A_K] = [P]^{-1} [A] [P] \quad [\text{Ap.2.2}]$$

onde:

$[A_K]$ - matriz similar de [A] obtida por K permutações nas linhas ou colunas

[P] - matriz formada pelo produto de todas as transformações similares de permutações entre linhas e colunas

Ap.2.1.2. Condicionamento

Após feitas as permutações preliminares, pode-se efetuar as operações de condicionamento na submatriz de $[A_K]$, para posterior transformação na forma de Hessenberg.

Seja R_K e C_K a norma de ordem 1, da linha i e coluna i da submatriz de $[A_K]$ respectivamente, determinada pelas permutações preliminares.

Nesta fase, sabe-se, da seção anterior, que $R_K C_K \neq 0$. Assim, se β é a base do sistema computacional, existe um único inteiro $\sigma = \sigma_K$ tal que:

$$\beta^{2\sigma-1} < R_K/C_K \leq \beta^{2\sigma+1} \quad (\text{Ap.2.3})$$

Definindo-se $f = f_K$ por $f = \beta^\sigma$ tem-se:

$$[\bar{D}_K] = \begin{cases} [I] + (f-1)[e_i][e_i]^T & \text{se } (C_K f) + (R_K/f) < (C_K + R_K) \\ [I] & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{Ap.2.4})$$

onde: $[I] = [e_1, \dots, e_n]$ é a matriz identidade

Assim tem-se:

$$[D_K] = [\bar{D}_K][D_{K-1}] \quad (\text{Ap.2.5})$$

$$[A_K] = [\bar{D}_K]^{-1}[A_{K-1}][\bar{D}_K]$$

Quando a matriz A é complexa, é mais conveniente usar $|x+iy|$ por $|x| + |y|$.

Ap.2.2. Transformação de uma Matriz na Forma de Hessenberg

Com vários algoritmos para encontrar os autovalores e auto vetores de uma matriz, o volume de trabalho é bastante reduzido se a matriz $[A]$ é primeiro transformada na forma superior de Hessenberg. Isto é $A_{ij} = 0$ para $i > j + 1$.

A redução pode ser encontrada de uma maneira simples pelo uso de matrizes elementar estabilizadas.

Os passos a seguir foram usados para transformar a matriz condicionada A na forma de Hessenberg superior.

- i) Determinar a máxima quantidade $|a_{ir}|$ para $i = r+1 \dots n$, Quando este valor não é único, escolhe-se o primeiro deles, Se o máximo é nulo, o r -ésimo passo está completo. Caso contrário, denotar este elemento por $|a_{(r+1),r}|$.
- ii) Permutar a linhas e colunas $(r+1)$ e $(r+1)$
- iii) Para cada valor i de $r+2$ até n :
 - compute $n_{i,r+1} = a_{ir}/a_{r+1,r}$
 - subtrair $n_{i,r+1}$ x linha $r+1$ da linha i e adicionar $n_{i,r+1}$ x coluna i da coluna $r+1$

Pode-se expressar as relações entre $[A_r]$ e $[A_{r+1}]$ da forma:

$$[A_{r+1}] = [N_{r+1}]^{-1} [I_{r+1, (r+1)},] [A_r] [I_{r+1, (r+1)},] [N_{r+1}] \quad (\text{Ap.2.6})$$

onde:

$[I_{r+1, (r+1)},]$ é uma matriz de permutação elementar e $[N_{r+1}]$ é uma matriz elementar definida por:

$$(N_{r+1})_{i,r+1} = \eta_{i,r+1} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Ap.2.7})$$

$$(N_{r+1})_{ij} = 1 \quad \text{em caso contrário}$$

Para matrizes complexas, usa-se o mesmo procedimento para as partes reais e imaginária simultaneamente.

Ap.2.3. Determinação de Autovalores de Matrizes Complexas na Forma de Hessenberg

O método de determinação de autovalores e autovetores de matrizes complexas, usado no presente trabalho, consiste na triangularização da matriz complexa de Hessenberg [27].

Se [H] representa a matriz na forma de Hessenberg obtida por transformação de similaridade da matriz de estado [A] ou [A_K] condicionada, pode-se escrever:

$$[D]^{-1} [A] [D] = [H] \quad \text{sem condicionamento} \quad (\text{Ap.2.8})$$

$$[D]^{-1} [S]^{-1} [A] [S] [D] = [H] \quad \text{com condicionamento}$$

onde: [D] e [S] são os produtos de todas as transformações usadas para transformar na forma de Hessenberg e condicionar a matriz de estado respectivamente.

Se [T] é a matriz triangular obtida de [H], por [P] transformações de similaridade, pode-se escrever:

$$[P]^{-1} [D]^{-1} [A] [D] [P] = [T] \quad \text{sem condicionamento} \quad (\text{Ap.2.9})$$

$$[P]^{-1} [D]^{-1} [S]^{-1} [A] [S] [D] [P] = [T] \quad \text{com condicionamento}$$

Os autovalores de [A] são lidos na diagonal da matriz triangular [T], $\lambda_i = t_{ii}$, e os autovetores de [T], $\{\bar{x}_i\}$, associados com λ_i são dados por:

$$\bar{x}_{ji} = 0 \quad j = i+1, \dots, n$$

$$\bar{x}_{ii} = 1$$

$$\bar{x}_{ji} = \sum_{K=j+1}^i t_{jK} \bar{x}_{Ki} / (\lambda_j - \lambda_i) \quad j = i-1, \dots, 1$$

Neste caso os correspondentes autovetores da matriz de estado A são dadas por:

$$\{x_i\} = [P][D]\{\bar{x}_i\} \quad \text{sem condicionamento}$$

(Ap.2.10)

$$\{x_i\} = [P][D][S]\{\bar{x}_i\} \quad \text{com condicionamento}$$

Estas subrotinas encontram-se gravadas, na linguagem "BASIC", em fitas magnéticas no Laboratório de Projetos Mecânicos da Universidade Estadual de Campinas, GEPRON.

Para utilizá-las, é necessário seguir os fluxogramas das Figs. Ap.2.1 e Ap.2.2 e usar os comandos abaixo, no Programa Principal.

Call Vsbamr(A(*),D(*),N,Low,H_i)

Call Vsbamc(A_r(*),A_i(*),D(*),N,Low,H_i)

Call Vsfher(A(*),Int(*),N,Low,H_i)

Call Vsfhec(A_r(*),A_i(*),Int(*),N,Low,H_i)

Call Vsaamr(A(*),V(*),D(*),Int(*),Cnt(*),W_r(*),W_i(*),N,Low,H_i)

Call Vsaamc(A_r(*),A_i(*),V_r(*),V_i(*),D(*),Int(*),W_r(*),W_i(*),N,Low,H_i)

```
Call Vsambr (V(*),D(*),N,M,Low,H1)  
Call Vsambc (Vr(*),Vi(*),D(*),N,M,Low,H1)  
Call Vsnamr (V(*),Wr(*),Wi(*),N)  
Call Vsnamc (Vr(*),Vi(*),Wr(*),Wi(*),N)
```

A descrição de cada subrotina, utilizada no processamento dos autovalores e autovetores são:

VSNAMR - Faz o balanceamento de matrizes reais
VSBAMC - Faz o balanceamento de matrizes complexas
VSFHER - Transforma uma matriz real na forma de Hessemberg
VSFHEC - Transforma uma matriz complexa na forma de Hessemberg
VSAAMR - Determina os autovalores da matriz original e os autovetores da matriz real triangular obtida da forma de Hessemberg
VSAAMC - Determina os autovalores da matriz complexa original e os autovetores da matriz complexa triangular obtida da forma de Hessemberg
VSAMBR - Determina os autovetores da matriz real original
VSAMBC - Determina os autovetores da matriz complexa original
VSNAMR - Normaliza os autovetores da matriz real original
VSNAMC - Normaliza os autovetores da matriz complexa original

Além das subrotinas anteriores, duas subrotinas podem ser utilizadas no processo.

CDIV - Determina a divisão de números complexos
CSQRT - Determina o módulo de números complexos

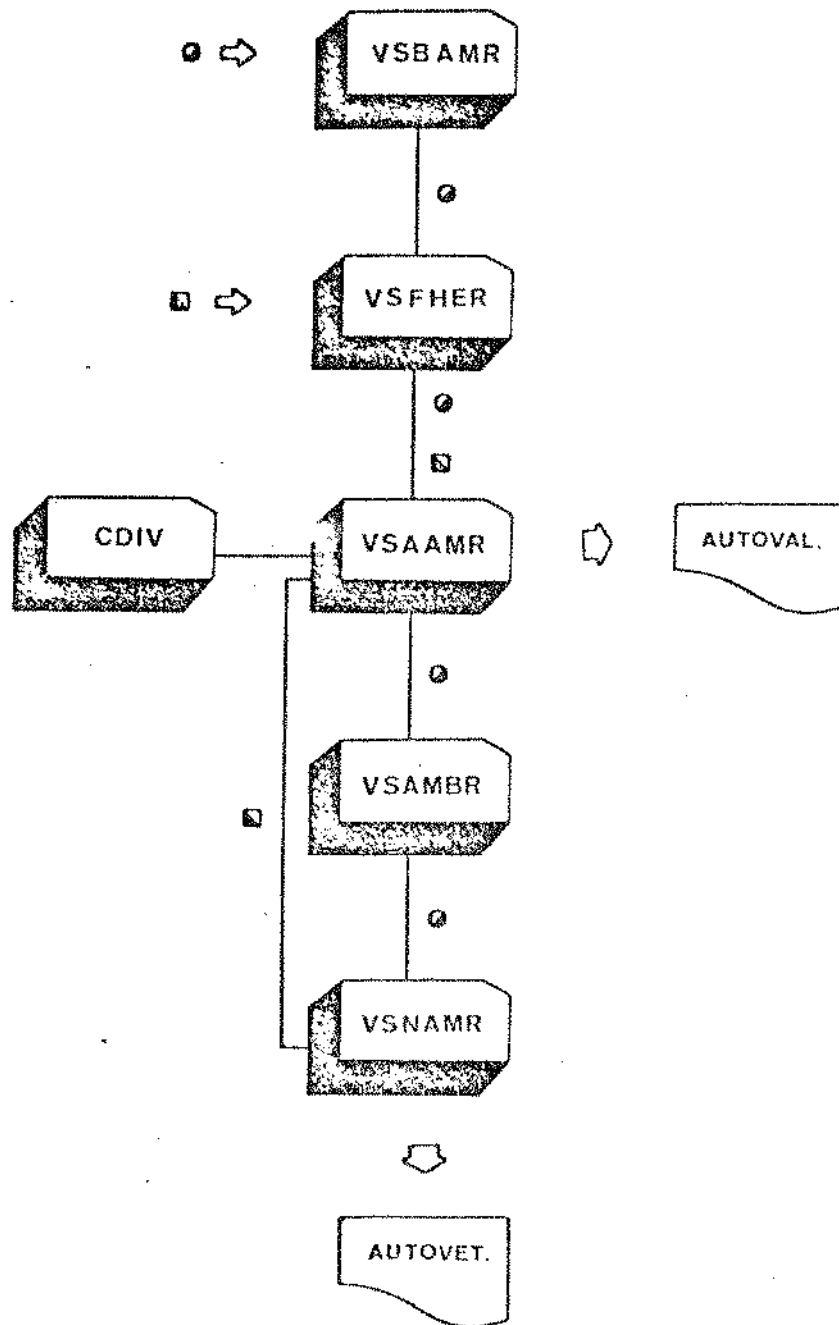


Figura Ap.2.1 - Sequência de subrotinas necessárias para obtenção de autovalores e autovetores de matrizes reais mal condicionadas.

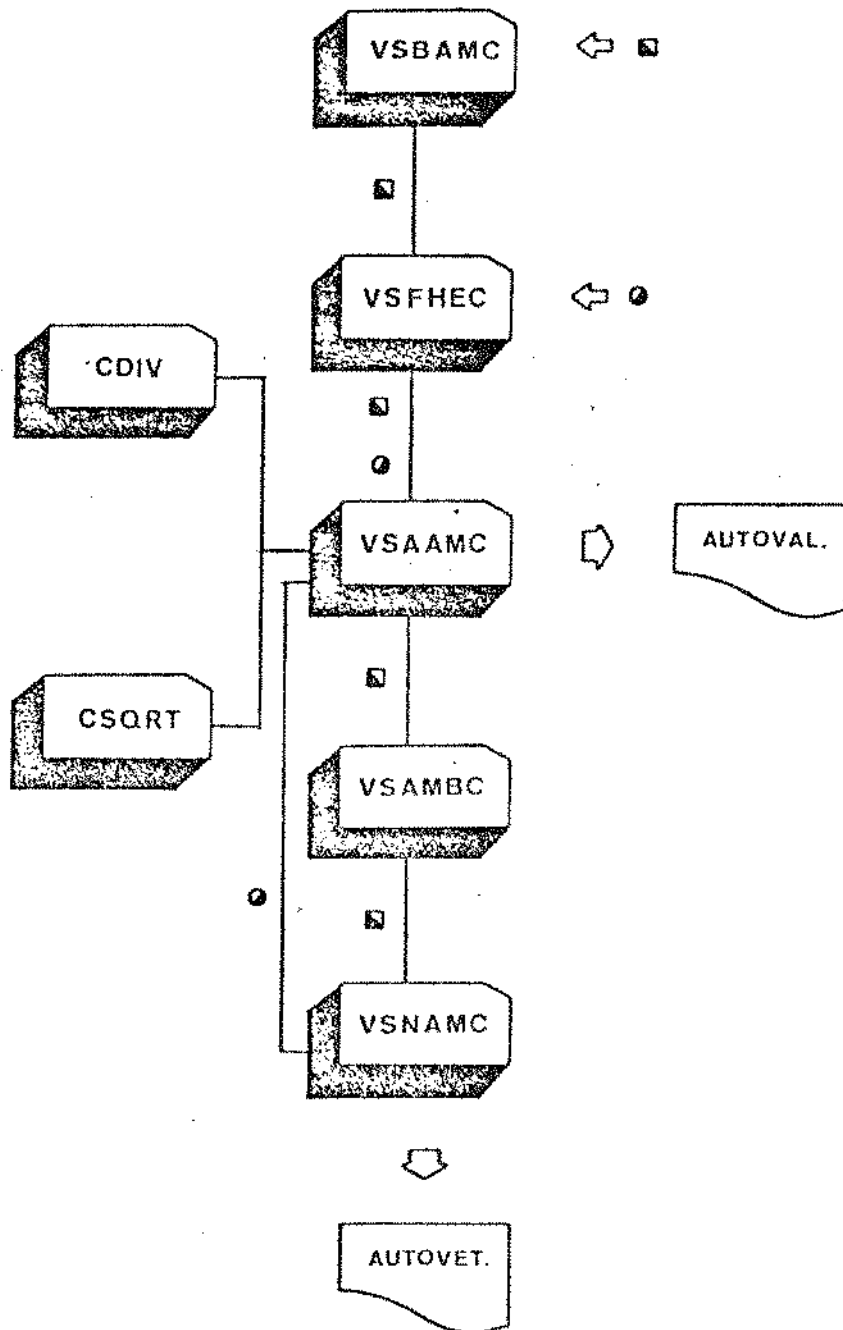


Figura Ap.2.2 - Sequência de subrotinas necessárias para obtenção de autovalores e autovetores de matrizes complexas mal condicionadas.

APÊNDICE 3

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE
RIGIDEZ DO SISTEMA

A matriz de rigidez do sistema é obtida da inversa da matriz de flexibilidade representada na eq.(2.27). Entretanto, para reduzir o volume de trabalho na obtenção desta matriz, pode-se inicialmente permutar as linhas 2 e 3 e, em seguida, as colunas correspondentes. Após estas permutações, aplica-se a técnica de inversão de matrizes particionadas [29].

Permutando-se as linhas e colunas sugeridas acima, obtém-se de (2.26):

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 + 1/K_r & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_3 + 1/K_i \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.3.1})$$

Particionando a matriz (Ap.3.1) em quatro submatrizes de ordem dois, tem-se:

$$\begin{bmatrix} [A_1] & [A_1] \\ [A_1] & [A_2] \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.3.2})$$

Dada uma matriz [A] na forma particionada, onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.3.3})$$

obtém-se, de [29], para inversa de [A], uma matriz [B] particionada de finida por:

$$[A]^{-1} = [B] = \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.3.4})$$

onde:

$$[B_{11}] = [A_{11}]^{-1} + [A_{11}]^{-1} [A_{12}] ([A_{22}] - [A_{21}] [A_{11}]^{-1} [A_{12}])^{-1} [A_{21}] [A_{11}]^{-1}$$

$$[B_{12}] = -[A_{11}]^{-1} [A_{12}] ([A_{22}] - [A_{21}] [A_{11}]^{-1} [A_{12}])^{-1} \quad (\text{Ap.3.5})$$

$$[B_{21}] = -([A_{22}] - [A_{21}] [A_{11}]^{-1} [A_{12}])^{-1} [A_{21}] [A_{11}]^{-1}$$

$$[B_{22}] = ([A_{22}] - [A_{21}] [A_{11}]^{-1} [A_{12}])^{-1}$$

Substituindo em (Ap.3.5):

$$[A_{11}] = [A_{12}] = [A_{21}] = [A_1] \quad (\text{Ap.3.6})$$

$$[A_{22}] = [A_2]$$

$$[B_{11}] = [A_1]^{-1} + ([A_2] - [A_1])^{-1}$$

ou

$$[B_{11}] = \begin{bmatrix} \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2} + \begin{bmatrix} K_r & 0 \\ 0 & K_i \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.3.7})$$

$$[B_{21}] = [B_{12}] = -([A_2] - [A_1])^{-1}$$

ou

$$[B_{12}] = [B_{21}] = \begin{bmatrix} -K_r & 0 \\ 0 & -K_i \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.3.8})$$

$$[B_{22}] = [A_2] - [A_1]^{-1}$$

ou

$$[B_{22}] = \begin{bmatrix} K_r & 0 \\ 0 & K_i \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.3.9})$$

Substituindo (Ap.3.7), (Ap.3.8) e (Ap.3.9) em (Ap.3.4), e efetuando novas permutações entre as linhas e colunas 3, obtém-se a matriz de rigidez procurada.

Assim:

$$K_{11} = 12 \frac{Ee Je}{L_e^3} + K_r$$

$$K_{22} = K_r$$

$$K_{33} = 4 \frac{Ee Je}{Le} + 12 \frac{Ee Je \lambda}{Le^3} + 12 \frac{Ee Je \lambda^2}{Le^3} + K_i$$

$$K_{44} = K_i$$

$$K_{12} = -K_r$$

$$K_{13} = -6 \frac{Ee Je}{Le^3} - 12 \frac{Ee Je \lambda}{Le^3}$$

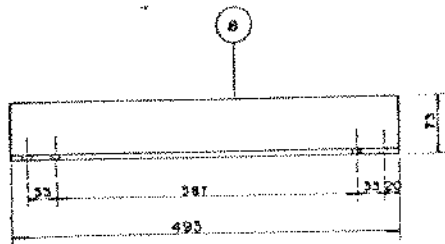
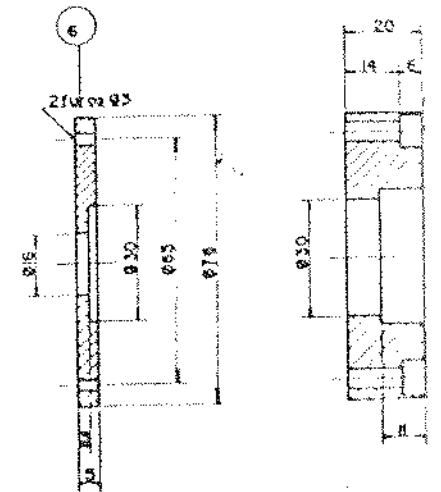
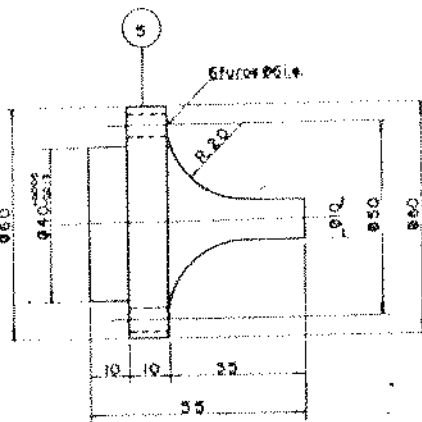
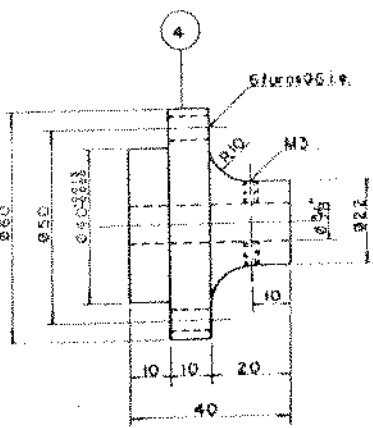
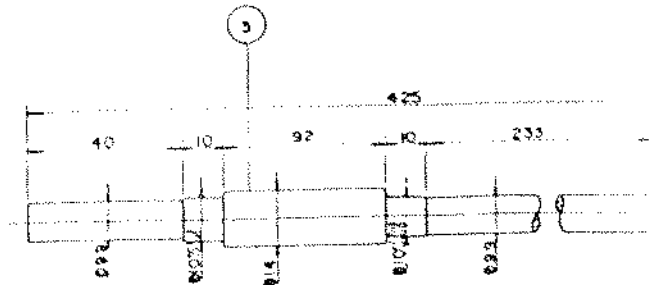
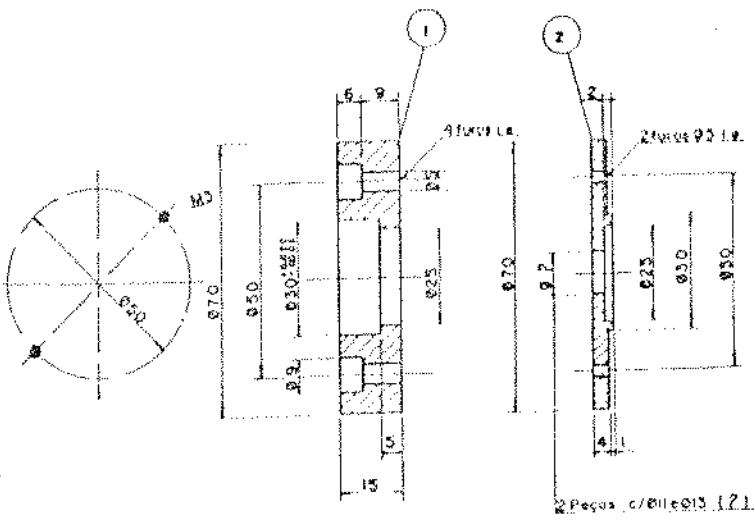
$$K_{14} = K_{23} = K_{24} = 0$$

$$K_{34} = -K_i$$

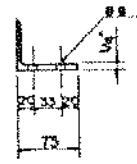
$$K_{ij} = K_{ji} \quad \text{para} \quad i, j = 1, \dots, 4$$

APÊNDICE 4

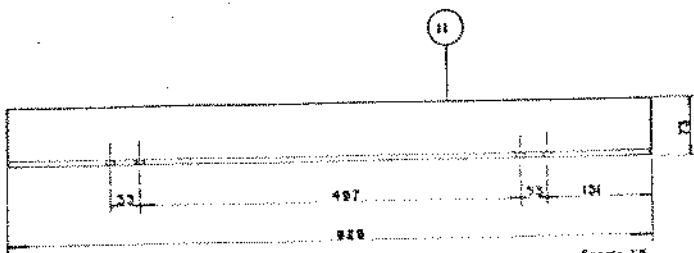
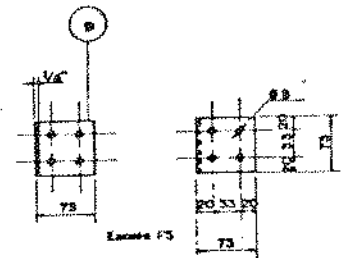
DESENHOS EM DETALHES E CONJUNTO DO
SISTEMA VOLANTE-SUSPENSÃO NO POÇO DE PROVA



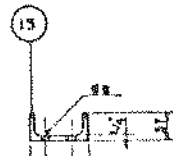
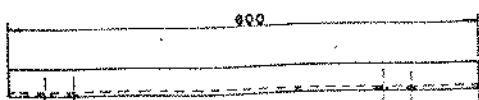
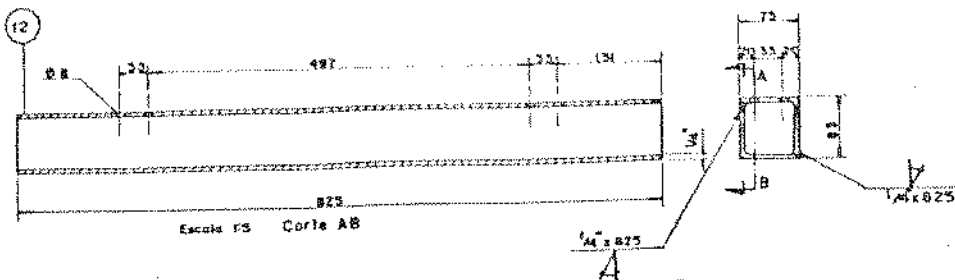
Exemplo 15

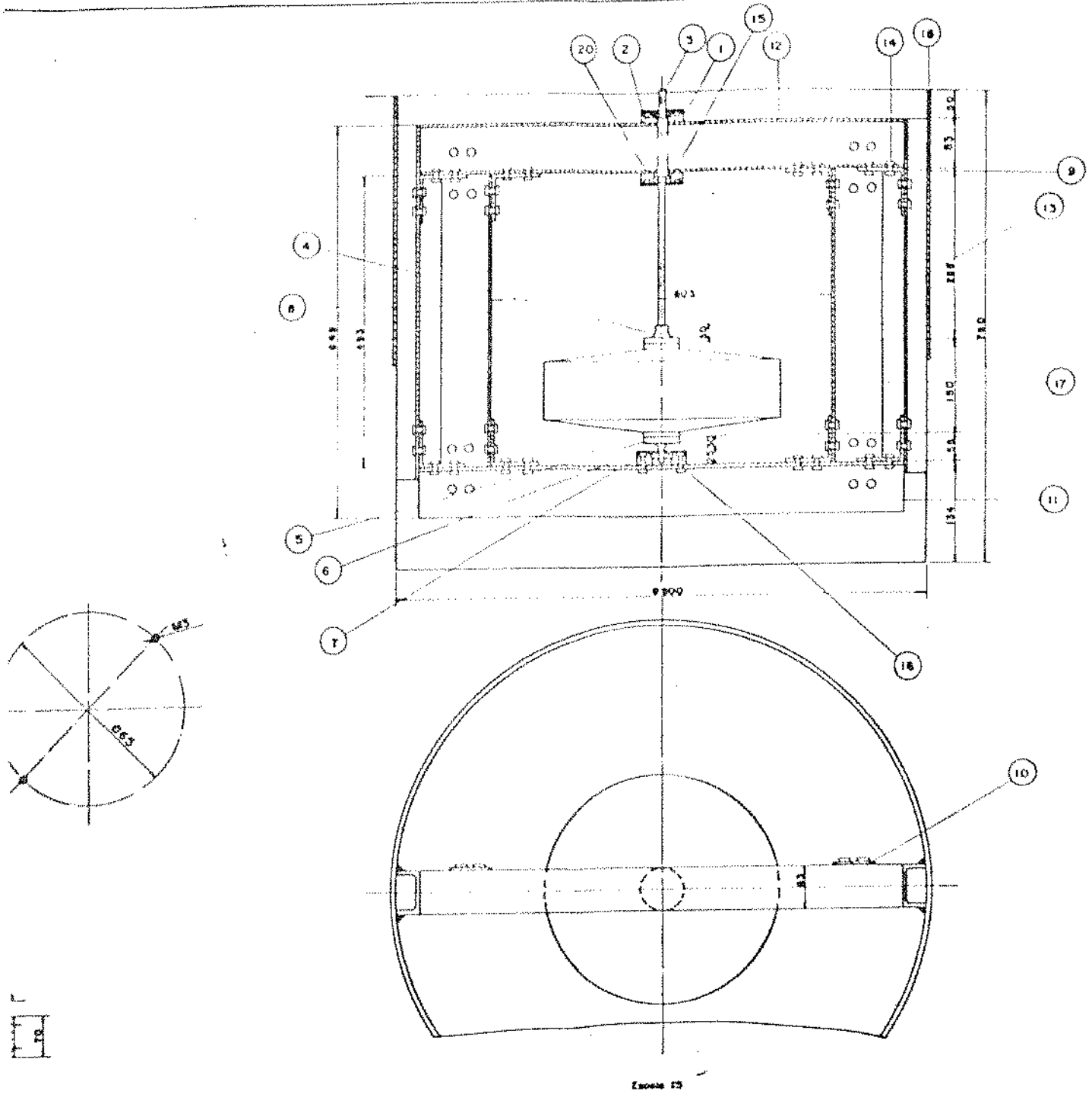


Exemplo 16



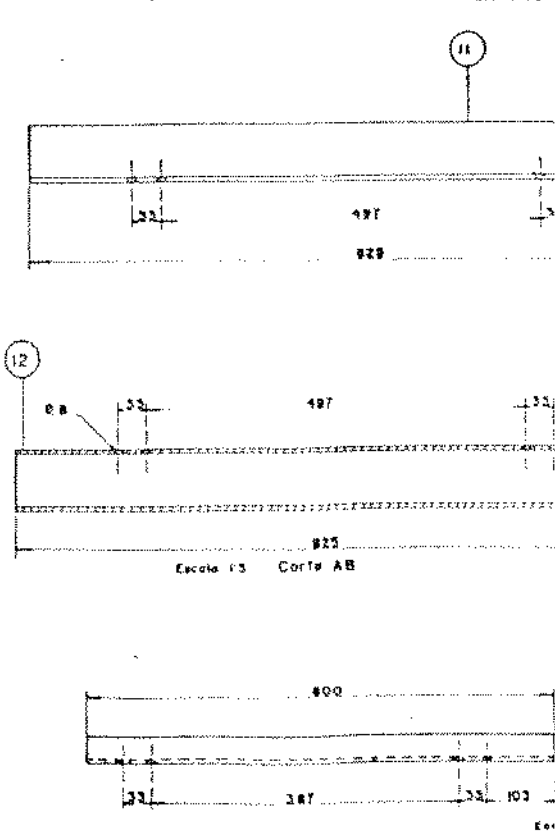
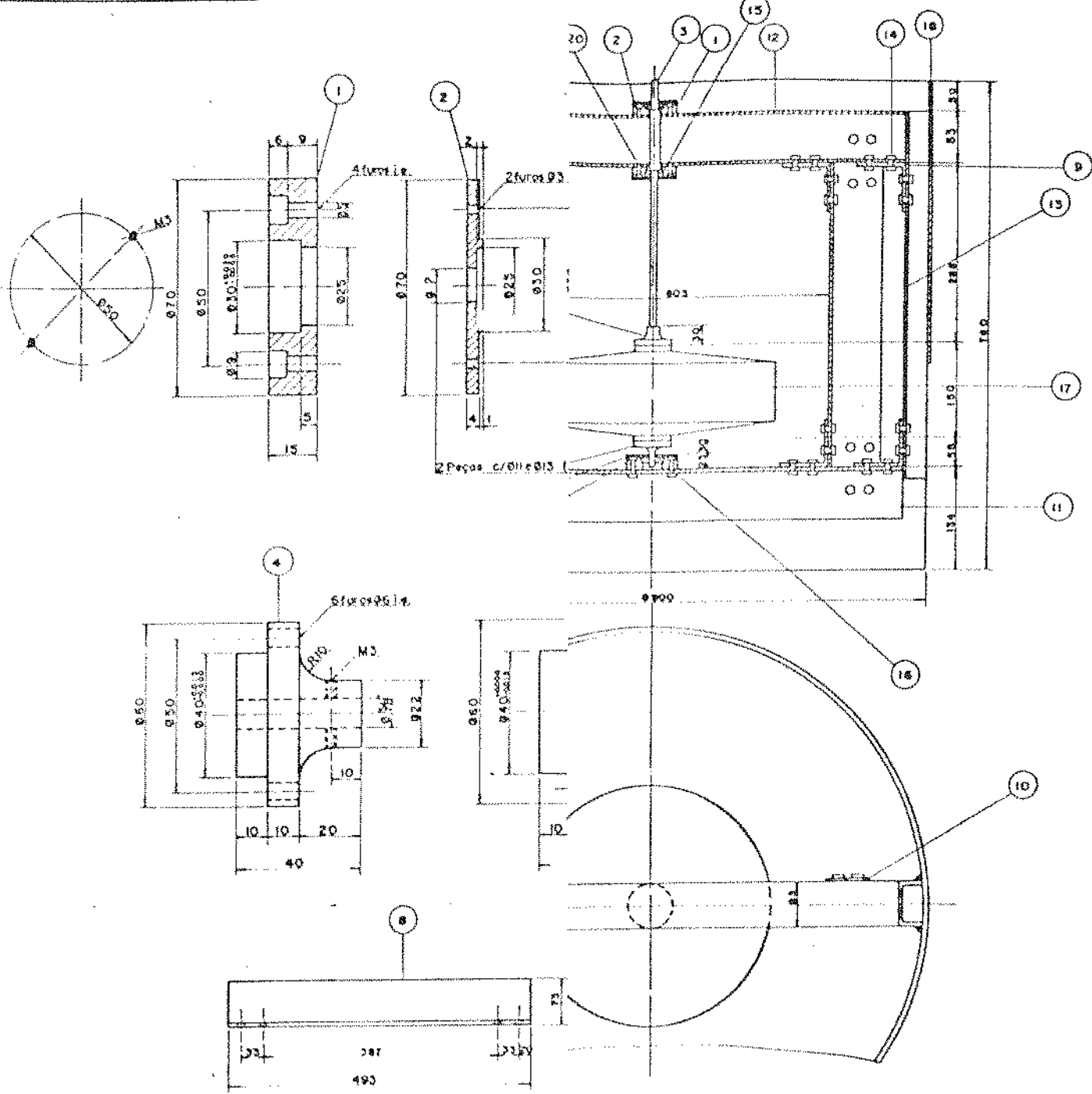
Exemplo 17





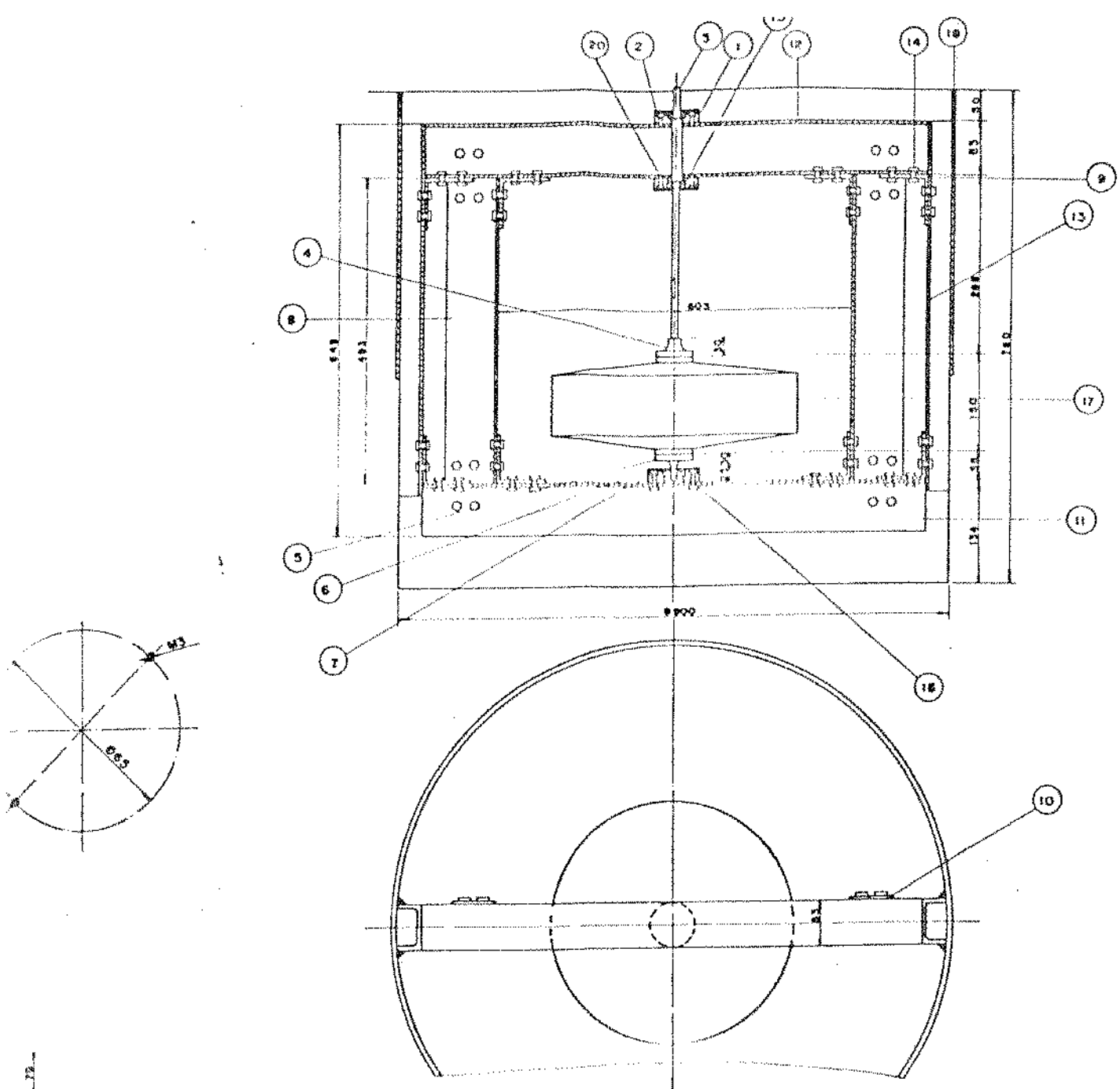
Escola 13

20	Parafuso M5 Alem	12		
19	" M3	6		
18	Anel de Proteção	1	Aço	
17	Volante	1		
16	Reolmento 6202	1		
15	" 6200	2		
14	Parafuso M8 C/Forca	88		
13	Viga U	2	Aço	
12	" L	2	"	
11	" L	1	"	
10	Chapa de Reforço de V4	4	"	
9	Contênedora	8	"	
8	Viga L	2	"	
7	Mancal	1	"	
6	Tampa de Mancal	1	"	
5	Flange	1	"	
4	"	1	"	
3	Eixo	1	"	
2	Tampa de Mancal	2	"	
1	Mancal	2	"	
Nº	Nome	Quant	Material	Observações
Data	10-01-80	Elabto		g&prom
Código		Desenho	esquema	F&C-Unicamp
Ref		Aprovado		
Escola	FIPEC-ULTRAVOLANTES			Substituído e nº
13	CAIXA DE TESTE			nº
	CONJUNTO E DETALHES			24



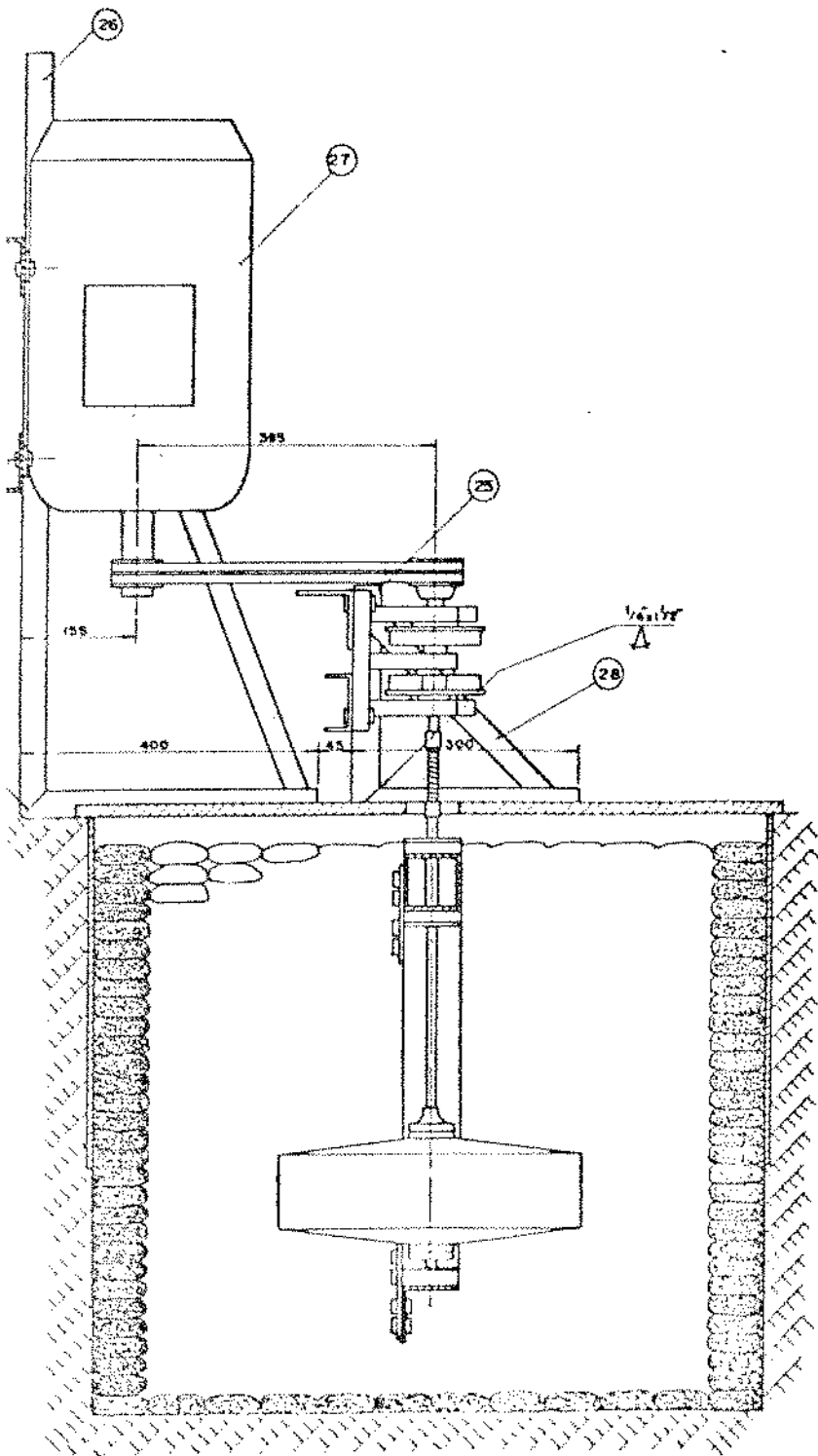
20	Parafuso M5 Alem	12		
19	" M3	8		
18	Anel de Proteção	1	Aço	
17	Volante	1		
16	Rolamento 6202	1		
15	" 6200	2		
14	Parafuso M8 C/Parca	88		
13	Viga U	2	Aço	
12	" L	2	"	
11	" L	1	"	
10	Chapa de Reforço de V	4	"	
9	Conteneiros	8	"	
8	Viga L	2	"	
7	Mancal	1	"	
6	Tampa de Mancal	1	"	
5	Flange	1	"	
4	"	1	"	
3	Eixo	1	"	
2	Tampa de Mancal	2	"	
1	Mancal	2	"	

№	Name	Quant	Material	Observações
Data	10-01-80	Projeto		g8prom Fm. Unconw
Código		Desenho	<i>assinado</i>	
Ref		Aprovado		
Escala	FIPEC-ULTRAVOLANTES CAIXA DE TESTE CONJUNTO E DETALHES			Substituído de № 24
11				UV9-1

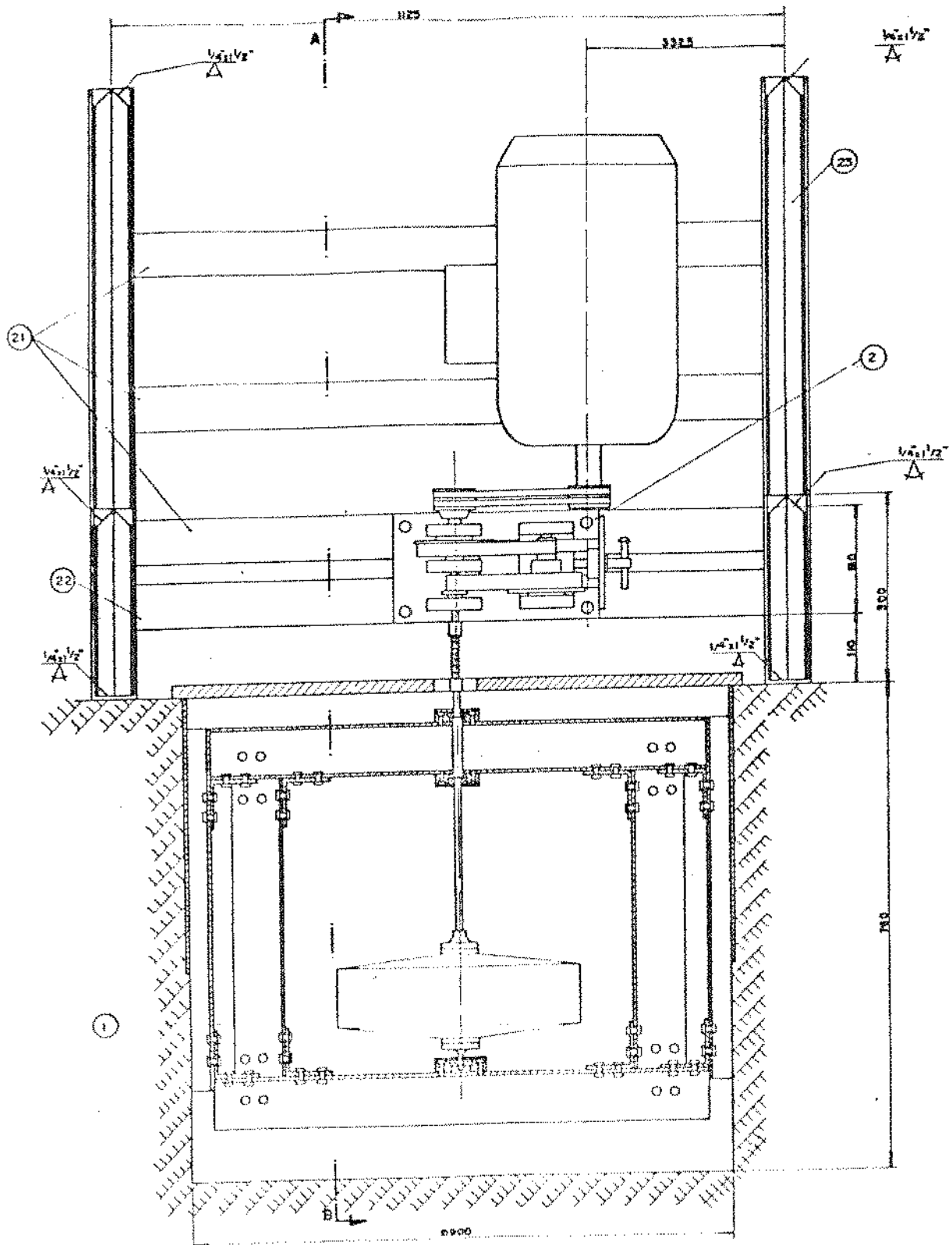


Esquema 15

20	Parafuso	M5 Alem	12		
19	"	M3	6		
18	Anel de Proteção		1	Aço	
17	Volante		1		
16	Rolamento	6202	1		
15	"	6200	2		
14	Parafuso	M8 C/Parca	88		
13	Viga U		2	Aço	
12	"	L	2	"	
11	"	L	1	"	
10	Chapa de Reforço de V		4	"	
9	Contadores		8	"	
8	Viga L		2	"	
7	Mancal		1	"	
6	Tampa de Mancal		1	"	
5	Flange		1	"	
4	"		1	"	
3	Eixo		1	"	
2	Tampa de Mancal		2	"	
1	Mancal		2	"	
NP	Nome		Quant	Material	Observações
Data	10-01-80	Projeto			G&PROM Fec. Unicone
Código		Desenho			
Ref		Aprovado			
Escola	FIPEC-ULTRAVOLANTES				Substituído de
11	CAIXA DE TESTE				NP
	CONJUNTO E DETALHES				Nº 24
					UVS-1



28	Contoneira 400x125x125	2	Aço	
27	Motor	1		
26	Viga U 300x12	2	Aço	
25	Viga U 300x12	2	"	
24	Parafuso M12	16	"	
23	Contoneira 200x125x125	2	"	
22	Viga U 120x12	1	"	
21	Contoneira 120x12	3	"	
2	Subconjunto	1		Des. Nº
1	"	1		"
Nº	Nome	Quant.	Material	Observações
Data	20-12-79	Projeto		gãprom
Ordem		Direção	<i>Amador</i>	
Ref.		Aprovado		
Escala	FPEC- UL TRAVOLANTES			Substitui o de Nº
1:3	SISTEMA DE TESTE DE VOLANTES			Nº 25
	CONJUNTO			UV 9



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LEPORE NETO, F.P., "Comportamento Dinâmico de um Veículo com Ultravolante para Armazenamento de Energia", Dissertação de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas, UNICAMP, 1979.
- [2] BARLOW, T.M. et alii, "Mechanical Energy Storage Technology Project: Annual Report for Calendar Year 1980", Lawrence Livermore Mat. Lab., May 1, 1981.
- [3] RABENHORST, D.W., "Low Cost Flywheel Energy Storage System Demonstration", 14th. Intersociety Energy Conversion Eng. Conference, Boston, 1979.
- [4] THOMSON, W.T.; YOUNGER, F.C.; GORDON, H.S., "Whirl Stability of the Pendulously Supported Flywheel System", Journal of Applied Mechanics, Vol. 44, Trans, ASME, Vol. 99E, June 1977, pp. 99-111.
- [5] WOLFF, F.H.; MOLNAR, A.J.; SANKEY, G.P.; BITZER, J.H., "Lateral Instability During Spin Tests of a Pendulously Supported Disc", The Shock and Vibration Bulletin, Part 3, Set. 1980, pp. 201-208.
- [6] OLIVEIRA, U.C., "Uma Contribuição ao Estudo de Perda por Atrito em Sistemas de Armazenamento de Energia por Ultravolantes", Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas, UNICAMP, 1979.

.../.

- [7] BERT,C.W.; CHEN,T.L.C., "On Vibration of a Thick Flexible Ring Rotating at High Speed", Journal of Sound and Vibration, Vol. 61(4), 1978, pp. 517-570.
- [8] BERT,C.W.; CHEN,T.L.C.; KOCAY,C.A., "Critical Speeds and Natural Frequencies of Rim-Type Composite - Material Flywheel", School of Aerospace Mechanical and Nuclear Engineering, The University of Oklahoma, 1978.
- [9] MEIROVITCH,L., "Methods of Analytical Dynamics", McGraw-Hill, 1969.
- [10] WILKINSON,J.H., "The Algebraic Eigenvalue Problem", Oxford, 1965.
- [11] RANDAL,R.B.; OLSESEN,H.P., "A Guide to Mechanical Impedance and Structural Response Techniques", Brüel & Kjaer.
- [12] EWINS,D.J., "Measurement and Application of Mechanical Impedance Data", Journal of Society of Environmental Engineers, Part I, Dec.1975, pp. 3-12.
- [13] EWINS,D.J., "Measurement and Application of Mechanical Impedance Data", Journal of Society of Environment Engineers, Part II, March 1976, pp. 23-33.
- [14] EWINS,D.J., "Measurement and Application of Mechanical Impedance Data", Journal of Society of Environment Engineers, Part III, June 1976, pp. 7-17.

.../.

- [15] SALTER, J.P., "Steady-State Vibration", Kenneth Mason, 1969.
- [16] DUBBEL, H., "Manual del Constructor de Máquina", Vol. I, Editorial Labor S.A., Barcelona, Madrid, 1967.
- [17] CHURCH, A.H., "Mechanical Vibration", John Wiley & Sons, Jus, 1957.
- [18] HARTOG, D.P.J., "Vibrações nos Sistemas Mecânicos", Edgard Blücher, 1957.
- [19] CHEN, T.L.C.; BERT, C.W., "Whirling Response and Stability of Flexibly Mounted, Ring-Type Flywheel Systems", Dissertation for the Doctor of Philosophy Degree in Mechanical Engineering The University of Oklahoma, 1979.
- [20] LAZAN, B.J., "Damping of Materials and Members in Structural Mechanics", Pergamon Press, 1968.
- [21] TONDL, A., "Some Problems of Rotor Dynamics", C. Hall, 1965.
- [22] CRANDALL, S.H., "The Role of Damping in Vibration Theory", Journal Sound Vibration, Vol. 11, 1970, pp. 3-18.
- [23] GASCH, R.; PFÜTZNER, H., "Rotordynamik", Springer Verlag, 1975.
- [24] SHIGLEY, J.E., "Mechanical Engineering Design", McGraw-Hill, N.Y., 1977.

- [25] PEDERSEN, P.T., "On Forward and Backward Precession of Rotor",
Ingenieur-Archiv, Vol. 42, 1972, pp. 26-41.
- [26] PARLETT, B.N.; REINSCH, C., "Balancing a Matrix for Calculation
of Engenvalues and Eigenvectors", Num. Math., Vol. 12, 1969,
pp. 293-304.
- [27] PETERS, G.; WILNINSON, J.H., "The QR Algorithm for Real Hessenberg
Matrices", Num. Math., Vol. 14, 1970, pp. 219-231.
- [28] TIMOSHENKI, S.; YOUNG, D.H., "Vibration Problems in Engineering",
John Wiley & Sons, 19.
- [29] PRZEMIENIECKI, I.S., "Theory of Matrix Structural Analysis",
McGraw-Hill, 1968.

...