

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Dinâmica Não Linear de Objetos no Espaço
Excitados pelo Potencial de Gravidade**

Autor: **Maira Rosine Bolla**
Orientador: **Prof. Dr. José Manoel Balthazar**
Co-orientador: **Helder Aníbal Hermini**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MÊCANICO

Dinâmica Não Linear de Objetos no Espaço Excitados pelo Potencial de Gravidade

Autora: **Maira Rosine Bolla**

Orientador: **Prof. Dr. José Manoel Balthazar**

Co-orientador: **Helder Aníbal Hermini**

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas - 2005
S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

B637d Bolla, Maira Rosine
Dinâmica Não Linear de Objetos no Espaço Excitado pelo Potencial de Gravidade / Maira Rosine Bolla. -- Campinas, SP: [s.n.], 2005.

Orientadores: Prof. Dr. José Manoel Balthazar e Helder Aníbal Hermini.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Teorias não-lineares. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Análise de sistemas. 4. Comportamento caótico em sistemas. I. Balthazar, José Manoel. II. Hermini, Helder Aníbal. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

J. M. B.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETOS MECÂNICOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Dinâmica Não-Linear de Objetos no Espaço,
Excitados pelo Potencial de Gravidade**

Autora: Maira Rosine Bolla

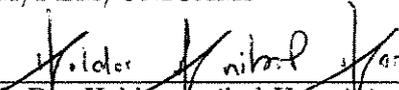
Orientador: Prof. Dr. José Manoel Balthazar

Co-Orientador: Prof. Dr. Helder Anibal Hermini

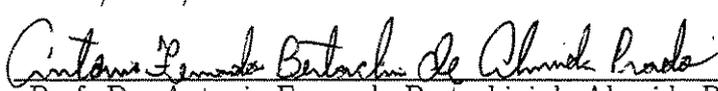
J. M. B.

200604079

Prof. Dr. José Manoel Balthazar, Presidente
DPM/FEM/UNICAMP


Prof. Dr. Helder Anibal Hermini
DPM/FEM/UNICAMP


Prof. Dr. Eder Lima Albuquerque
DPM/FEM/UNICAMP


Prof. Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado
INPE

Campinas, 28 de Julho de 2005.

Dedicatória

Aos meus pais, Abelino (in memoriam) e Ofélia, pelo apoio e incentivo que sempre me proporcionaram nos estudos e na vida.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por esta conquista.

Faço um agradecimento especial à meus pais, Abelino (in memorian) e Ofélia, pelo carinho, apoio e orientação que sempre forneceram a mim e a meus irmãos. Agradeço todos seus esforços para que pudesse chegar até aqui. Aos meus irmãos, Caroline e João Vítor, agradeço a amizade e o apoio que sempre me ofereceram.

Agradeço também à meus amigos de graduação pelos momentos alegres que compartilhamos. Deixo também um agradecimento especial ao Prof. José Ruidival dos Santos Filho, que me orientou em um projeto de iniciação científica, e desde então optei por seguir a carreira acadêmica.

Aos companheiros de sala, os alunos de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, Edna, Elvira, Jeferson e Karen, pela ajuda nos momentos difíceis e pelos momentos alegres.

Ao Vinicius, uma pessoa deveras especial, agradeço por todo carinho, compreensão, e por tornar minha vida muito mais alegre.

Agradeço ao Prof. Helder Anibal Hermini, pela amizade e co-orientação neste trabalho.

Ao Prof. José Manoel Balthazar, pela orientação, amizade, paciência, além da confiança que sempre depositou em mim.

Por fim, agradeço à FAPESP, processo número 03/08359-6, pelo apoio financeiro fornecido à este projeto.

Epígrafe

Ler torna um homem completo, ensinar lhe dá o preparo e escrever o torna consciente.

-Francis Bacon-

Resumo

BOLLA, Maira Rosine, *Dinâmica não-linear de objetos no espaço excitados pelo potencial de gravidade*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005, 202 pp. Dissertação (Mestrado)

Este trabalho consiste de duas partes, na primeira faremos o estudo da dinâmica de uma espaçonave de dupla rotação axial, modelada por um sistema mecânico simples, constituído de um rotor desbalanceado atachado num suporte elástico e governado por uma fonte de energia não-ideal.

Na segunda parte formularemos todas as equações diferenciais não-lineares que governam os movimentos não-lineares de uma viga com movimentos de curvatura e arfagem no espaço. A formulação é baseada num princípio variacional que leva em conta todas as não linearidades devido à deformação e efeitos de gradiente de gravidade. As não-linearidades devidas às deformações aparecem devido aos efeitos geométricos, que consiste dos termos não-lineares de curvatura e inércia. Equações expandidas que governam os movimentos perturbados não-lineares ao redor de um equilíbrio são também desenvolvidas para o caso em que a viga está em órbita circular. Tais equações são adaptadas para uma análise de perturbação do movimento, e não-linearidades até ordem cúbica são representados por um parâmetro.

Também é analisado o acoplamento não-linear da resposta de arfagem-curvatura de uma viga livre-livre em uma órbita circular, quando a viga está sujeita a uma excitação externa periódica. As não-linearidades presentes nas equações diferenciais do movimento são devidas às deformações da viga (isto é, não-linearidades de curvatura e de inércia) e também devido ao momento de gradiente de gravidade. Métodos de perturbações são usados para analisar o movimento. Vários movimentos de ressonância exibidos pelo sistema são analisados em detalhe, nomeados, res-

sonâncias harmônicas quando a frequência de excitação externa, Ω , está próxima da frequência natural de flexão ou do movimento de arfagem, e a ressonância super-harmônica quando Ω está próxima da metade da frequência natural do movimento de arfagem. As últimas duas ressonâncias estão associadas com excitações de baixa frequência.

Palavras Chave:

Teorias não-lineares, Teoria dos sistemas dinâmicos, Análise de sistemas, Comportamento caótico em sistemas.

Abstract

BOLLA, Maira Rosine, *Nonlinear dynamic of objects in space excited by the gravity potential*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005, 202 pp. Dissertação (Mestrado)

This work concerns of two parts, in the first we will make the study of the dynamics of dual-spin-spacecraft modeled by a simple mechanical system consisting of an unbalanced rotor attached to an elastic support and driven by non-ideal source.

In the second part we will formulate the complete nonlinear differential equations governing the nonlinear motions of a beam able to undergo bending and pitching in space. The formulation is based on a variational principle and accounts for all the nonlinearities due to deformation and gravity gradient effects. The nonlinearities due to deformation arise due to geometric effects, which consist of nonlinear curvature and nonlinear inertia terms. Expanded equations governing the nonlinear perturbed motions about an equilibrium are also developed for the case when the beam is in circular orbit. Such equations are suited for a perturbation analysis of the motion, and nonlinearities up to cubic order in a bookkeeping parameter are retained in them.

The coupled nonlinear pitch-bending response of a free-free beam in a circular orbit, when the beam is subjected to a periodic external excitation, is analysed too. The nonlinearities present in the differential equations of motion are due to deformations of the beam (i. e. curvature and inertia nonlinearities) and to the gravity-gradient moments. Perturbation methods are used to analyse the motion. Several resonant motions exhibited by the system are analysed in detail, namely, harmonic resonances when the frequency of the external excitations, Ω , is either near the natural frequency of the flexural or of the pitch motion, and a superharmonic

resonance when Ω is near one half of the natural frequency for the pitch motion. The latter two resonances are associated with very low excitation frequencies.

Key Words:

Nonlinear theories, Dynamic system theory, Systems analysis, Chaotic behavior in systems.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	vi
Lista de Tabelas	xi
Lista de Figuras	xii
1 Introdução	1
1.1 Algumas considerações sobre objetos no espaço	2
1.2 Objetivos e Estudos Futuros	5
1.3 Descrição dos capítulos	6
2 Busca da Solução Analítica de uma Espaçonave de Dupla Rotação Axial	9
2.1 As Equações que Governam o Movimento	13
2.2 Dinâmica Assintótica nas vizinhanças da Primeira Ressonância	17
2.3 Análise de Estabilidade	20
2.4 Algoritmo Algébrico	23
3 Fenômeno da Atitude	29
3.1 Atitude de satélites em órbita - Considerações Gerais	29
3.2 Estabilidade da atitude de satélites orientados pela Terra	35
3.3 Estabilidade da atitude de satélites simétricos rotativos	39
3.4 Controle de uma Espaçonave Particular	46
3.4.1 Controle Linear de uma Espaçonave Particular	46
3.4.2 Controle Não-Linear de uma Espaçonave Particular	52

4	Dinâmica não-linear de uma Viga no Espaço Sujeita à Atração Gravitacional	71
4.1	Modelagem Matemática e Hipóteses Básicas	71
4.2	Efeitos de Gradiente de Gravidade	72
4.3	Hipóteses	72
4.4	Notações	73
4.5	Equações do Movimento	75
4.6	Energia Cinética	75
4.7	Trabalho virtual específico devido à atração gravitacional da Terra . .	76
4.8	Princípio Extendido de Hamilton	78
4.9	Equações Expandidas para uma Viga em Órbita Circular	81
4.10	Normalização e Redução Modal das Equações	83
4.11	Estudo das Ressonâncias que Ocorrem com a Viga no Espaço	89
4.11.1	Ressonância super-harmônica com Ω próximo de $\frac{\sqrt{3}\omega_c}{2}$	93
4.11.2	Ressonância primária com Ω próximo de ω	98
4.11.3	Ressonância primária com Ω próximo de $\sqrt{3}\omega_c$	104
4.12	Simulações Numéricas das Equações da Viga no Espaço	110
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	118
5.1	Conclusões	118
5.2	Trabalhos Futuros	120
6	Súmula Curricular	122
	Referências Bibliográficas	124
A	Fundamentos de Mecânica Newtoniana	130
A.1	Leis de Newton	130
A.2	Momento e Impulso	131
A.3	Momento de uma Força e Momento Angular	132
A.4	Trabalho e Energia	133
A.5	Diagramas de Energia	137
A.6	Sistemas de Partículas	139
B	Teoria de vibrações Mecânicas	143
B.1	Sistemas com um grau de liberdade	144
B.2	Sistemas com dois graus de liberdade	147

C	Revisão de Dinâmica de Rotações	151
C.1	Movimento Relativo a um Referencial Rotacional	151
C.1.1	Transformação de coordenadas	151
C.1.2	Sistemas de coordenadas rotacionais	154
C.1.3	Expressões para o movimento em termos do referencial em movimento	157
C.1.4	Movimento relativo à rotação da Terra	159
C.1.5	Movimento de uma partícula livre relativo à rotação da Terra	162
C.2	Dinâmica de Corpos Rígidos	163
C.2.1	Cinemática de um corpo rígido	163
C.2.2	Momentos linear e angular de um corpo rígido	166
C.2.3	Teorema da translação para momento angular	169
C.2.4	Energia cinética de um corpo rígido	171
C.2.5	Eixo principal	173
C.2.6	Equação de movimento para um corpo rígido	175
C.2.7	Equação de movimento de Euler	177
C.2.8	Ângulos de Euler	178
D	Modelo da Dinâmica de um Rotor Desbalanceado atachado a um Suporte Elástico e Governado por um Torque Constante	182
D.1	Órbita Homoclínica do Sistema Integrável	186
D.2	Função de Melnikov-Poincaré	186
E	Simulações Numéricas Complementando o Capítulo 2	188
F	Equações Não-lineares de Vigas	197
F.1	Equações do Movimento	200
F.2	Movimentos Forçados	204
G	Alguns Conceitos Sobre a Pressão de Radiação Solar	209

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros do Dispositivo de Impressão	52
4.1	valores de ω, β_1, β_2 , e β_3 para o primeiro modo da viga em órbita circular .	91
4.2	valores de $f_v, f_{v\eta}, f_\theta$, e $f_{\theta\eta}$ para $0 \leq \omega_c \leq 1$ e ω para o primeiro modo . . .	92

Lista de Figuras

1.1	Ilustração da pressão de radiação solar e arrasto atmosférico atuantes numa viga em órbita	4
2.1	Modelo girostático de uma espaçonave de dupla rotação axial	10
2.2	Sistema constituído de um rotor desbalanceado, vinculado num suporte elástico e governado por torque constante	10
2.3	(a) Sistema não-ideal e seu respectivo modelo matemático (b)	11
2.4	Curva de Resposta em Freqüência das equações (2.33) e (2.37)	24
2.5	Curva Característica das equações (2.33) e (2.37)	25
2.6	Curva de Ressonância	26
2.7	Aumento de torque durante a passagem pela ressonância	27
3.1	Sistema de referência orbital, eixos a_1, a_2, a_3 com origem O no centro de massa do corpo, e eixos principais do corpo, x_1, x_2, x_3 , de um satélite em órbita	31
3.2	Uma orientação dos eixos x_i em relação aos eixos orbitais	33
3.3	Uma segunda orientação dos eixos x_i em relação aos eixos orbitais	34
3.4	Posições de Equilíbrio	39
3.5	Triedro de Referência VLHL para uma espaçonave	48
3.6	Espaçonave e giroscópios de controle	49
3.7	Estação Espacial Internacional	53
3.8	Sistemas de coordenadas inercial e esférico	56
3.9	Estruturas inerciais e vertical local/horizontal local	58
3.10	Resposta da condição inicial do eixo de pitch da estação espacial (sem controle de malha fechada) quando $I_3 > I_1$, mostrando resposta instável	69
3.11	Resposta da condição inicial do eixo de pitch da estação espacial (sem controle de malha fechada) quando $I_1 > I_3$, mostrando resposta marginalmente estável	70
4.1	Viga livre-livre sujeita a força da gravidade da Terra	74

4.2	Viga livre-livre em órbita circular	90
4.3	Resposta de amplitude-freqüência de arfagem para Ω próximo de $\sqrt{3}\omega_c/2$	98
4.4	Resposta de amplitude-freqüência de curvatura para Ω próximo de ω	103
4.5	Curva de resposta de amplitude-freqüência de arfagem para Ω próximo de $\sqrt{3}\omega_c$	107
4.6	Histórico de v no tempo	111
4.7	Histórico de \dot{v} no tempo	112
4.8	Plano de fase $v \times \dot{v}$	113
4.9	Histórico de θ no tempo	114
4.10	Histórico de $\dot{\theta}$ no tempo	115
4.11	Plano de fase $\theta \times \dot{\theta}$	116
4.12	Mapa de Poincaré	117
A.1	Força \mathbf{F} atuando numa partícula m a uma distância r da origem e com velocidade \dot{r}	133
A.2	Partícula m movendo-se numa curva s da posição r_1 para a posição r_2 sob ação de uma força \mathbf{F}	134
A.3	Oscilador harmônico	138
A.4	Sistemas de partículas	140
B.1	Sistema de um grau de liberdade e diagrama de corpo livre	144
B.2	Sistema de dois graus de liberdade	147
C.1	Sistemas de eixos x_1, x_2, x_3 e ξ_1, ξ_2, ξ_3	153
C.2	Rotação dos eixos ξ_1, ξ_2, ξ_3 sobre os eixos x_1, y_2, z_3 resultando os sistemas y_i, z_i, ξ_i , respectivamente	155
C.3	Vetor fixo \mathbf{r} em relação a um sistema coordenado ξ_i sofrendo variação Δ_r relativamente a um espaço inercial como resultado de uma rotação incremental $\Delta\theta_i, (i = 1, 2, 3)$ no sistema sobre o eixo ξ_i	157
C.4	O ponto \mathbf{P} expressado em termos das componentes x_i de um espaço inercial, sendo denotado por r , e em termos das componentes ξ_i de sistemas de rotação, sendo denotado por r'	158
C.5	Movimento de uma partícula m em relação a rotação da Terra	160
C.6	Corpo rígido com eixos x, y, z e origem O	167
C.7	Momento angular de um ponto A dentro do corpo	170
C.8	Ângulos de Euler	179
D.1	Sistema constituído de um rotor desbalanceado atachado a um suporte elástico e governado por torque constante	183

E.1	Histórico de y no tempo para o caso linear	189
E.2	Histórico de $\dot{\phi}$ no tempo para o caso linear	190
E.3	Plano de fase $y \times \dot{y}$ para o caso linear	191
E.4	Histórico de y no tempo para o caso não-linear	192
E.5	Histórico de $\dot{\phi}$ no tempo para o caso não-linear	193
E.6	Plano de fase $y \times \dot{y}$ para o caso não-linear	194
E.7	Mapa de Poincaré	195
E.8	Expoentes de Lyapunov	196
F.1	Sistema de coordenadas usado para desenvolver as equações que governam o movimento	198
F.2	As três rotações dos ângulos de Euler de um elemento diferencial de comprimento ds	200
F.3	Viga fixa-livre com excitação lateral distribuída	204
G.1	Intensidade de radiação	211
G.2	Sistema de referência do elemento	214
G.3	Radiação refletida difusamente	215

Capítulo 1

Introdução

O comportamento dinâmico de uma viga flexível é de interesse em engenharia, pois ela pode servir de modelo matemático para pás de helicópteros, manipuladores robóticos, antenas em espaçonaves, satélites flexíveis e outros sistemas que possuem movimentos flexíveis e angulares [1].

A formulação linear mostra que as vibrações de uma viga isotrópica nos dois planos principais são independentes uma das outras, logo um movimento forçado em um plano é sempre estável naquele plano; mas quando a amplitude de vibração é grande, vários efeitos não-lineares, tais como curvatura não-linear, forças axiais de inércia, amortecimento e não linearidades dos materiais (citam-se a título de complementação, o uso de estruturas laminadas feitas de materiais compósitos [2]), introduzem termos não-lineares nas equações do movimento e nas condições de contorno.

Ressalta-se que, embora a dinâmica não-linear de vigas tenha sido estudada por um longo tempo, muitos efeitos não lineares precisam ser estudados, identificados e controlados.

É de conhecimento geral que múltiplas soluções, ressonâncias sub e super-harmônica, bifurcações, caos, são fenômenos não-lineares que não podem ser previstos pela teoria linear [3].

1.1 Algumas considerações sobre objetos no espaço

Sabe-se que muitas estruturas de engenharia são construídas para serem operadas no ambiente espacial onde seu comportamento é afetado por momentos de gradiente de gravidade e por forças externas, tais como devido a aerodinâmica (para órbitas baixas), pressão de radiação solar, forças de controle, etc. Considerações sobre a flexibilidade de tais estruturas é de máxima importância na compreensão de sua dinâmica (ver por exemplo [5], [6]), assim como o material de que são constituídas [2]. Ressalta-se que muitos componentes dessas estruturas são constituídas por membros longos e podem ser modeladas para vigas em órbita.

Para uma viga em órbita, efeitos de gradiente de gravidade fazem com que ela oscile relativamente a um referencial orbital com frequências de arfagem (movimento em torno da órbita normal) que são da mesma grandeza da velocidade angular orbital.

Existem outras forças atuantes em objetos no espaço, que embora pequenas, modificam ao longo do tempo os elementos orbitais, como no caso dos satélites artificiais, dificultando desta forma seu rastreamento, ou seja, a determinação da sua verdadeira posição no espaço. Essas forças causam também torques sobre o centro de massa do satélite, podendo com isso alterar sua orientação (atitude) preestabelecida, na qual normalmente se deseja que o satélite permaneça. O conhecimento preciso desses torques, bem como sua variação com o tempo, é útil não só para estudar o controle e a estabilidade do satélite, como também para estimular a atitude.

Outra aplicação da determinação desses esforços é o de fornecer recursos para dimensionar certos componentes da estrutura de alguns satélites, assim como verificar seu comportamento e funcionamento quando submetidos a essas forças. É fundamental, portanto, quando se deseja determinar, conhecer, prever ou simular órbitas ou atitudes, a perfeita compreensão dos fenômenos que acarretam o aparecimento de tais forças. Dentre tais forças, citamos a pressão de radiação solar e o arrasto atmosférico [7].

Os efeitos causados por tais forças não serão abordados neste trabalho. Todavia, como pretendemos que este trabalho tenha uma continuidade, faremos algumas ob-

servações sobre o assunto nesta introdução, para entendimento por parte do leitor do trabalho que iremos desenvolver nesta dissertação.

A força aerodinâmica surge em decorrência do choque entre as moléculas da atmosfera com a superfície do satélite. Ela é predominante em satélites de baixa altitude (menor do que 1000 km). Embora seu módulo diminua exponencialmente com a altura (aproximadamente a 800 km iguala-se a pressão de radiação, e aos 1500 km seus efeitos são praticamente desprezíveis), é ainda a principal responsável pelo decaimento da órbita e, portanto, pelo tempo de vida do satélite. Além disso, é no perigeu que esta força atinge seu máximo e, por ter sua resultante atuando quase no sentido contrário à velocidade do satélite, ocorre uma perda de energia da órbita mais acentuada neste ponto. Perdendo velocidade no perigeu, a altura do apogeu decai numa proporção muito mais alta que o primeiro, diminuindo com isso a excentricidade da órbita, tornando-a gradativamente circular no decorrer do tempo de vida.

A radiação solar direta deriva da reflexão e absorção dos fótons solares pela superfície do satélite. Praticamente independe da altitude do satélite, sendo normalmente a maior componente a partir dos 1000 km. Por ser inversamente proporcional à distância da fonte emissora, a força atuante no satélite devido à radiação solar é 7 por cento menor quando a Terra passa do periélio para o afélio. Como praticamente independe da altitude (caso seja desprezada a parcela absorvida pela atmosfera e as pequenas variações na distância do Sol ao longo de uma órbita), a força de radiação solar atinge a magnitude da aerodinâmica, sob condições atmosféricas normais, a partir dos 700 km. Sua influência nos elementos orbitais é maior na excentricidade, mas, conforme a geometria da órbita, pode alterar também o semi-eixo maior. Chega mesmo a diminuir a altura do perigeu, contribuindo para o encurtamento do tempo de vida.

Ilustramos a pressão de radiação solar e o arrasto atmosférico atuantes numa viga em órbita na Figura 1.1.

Sob certas condições, os modelos matemáticos lineares não podem descrever a dinâmica de uma estrutura espacial, pois tais modelos não incluem sobre os vários tipos de fenômenos dinâmicos que são causados pelas não-linearidades nas equações

do movimento. Por exemplo, no caso da viga, mesmo para materiais lineares, as equações diferenciais do movimento devem conter um número de não-linearidades devido às deformações e pelos efeitos de gradiente de gravidade [8].

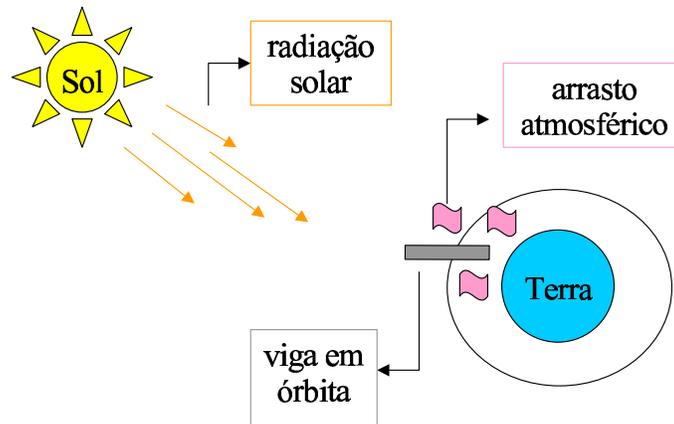


Figura 1.1: Ilustração da pressão de radiação solar e arrasto atmosférico atuantes numa viga em órbita

As equações do movimento devem envolver a inclusão de momentos e produtos de inércia, incluindo termos originados da expressão da curvatura da viga. Ela deve conter os termos não-lineares originados do gradiente de gravidade. Logo, deve-se tomar cuidado no sentido de que as não-linearidades sejam retiradas na formulação do problema de modo consistente.

Sabe-se que a linearização das equações do movimento em torno da configuração de equilíbrio conhecida, como estabilização por gradiente de gravidade, é uma hipótese razoável desde que o desalinhamento com a vertical local e as flexões elásticas sejam pequenos.

Vários autores estudaram modelos de espaçonaves flexíveis [5],[6],[9]-[20], aproximados por vigas livre-livre bem como modelos de veículos espaciais nas versões de corpos rígidos contendo apêndices flexíveis articulados. Boa parte destes estudos incluem a linearização das equações do movimento.

Em [9], foram assumidos pequenos movimentos e concluído que o movimento de arfagem está essencialmente desacoplado do movimento elástico, e que o movimento elástico é essencialmente governado pelas equações de Hill como o movimento de arfagem atuando como uma excitação paramétrica para o movimento elástico de curvatura.

Em [10]-[13] foram formuladas as equações diferenciais não-lineares do movimento de uma viga em órbita. Os resultados obtidos nesta dissertação corroboraram esta formulação.

A captura da posição nominal de equilíbrio de um satélite estabilizado por gradiente de gravidade foi estudada por [14], onde concluiu-se que a interação entre a flexibilidade e a libração leva a um aumento da frequência de oscilação juntamente com uma modulação em alta frequência da resposta em atitude.

Utilizamos as referências [15]-[18] para uma melhor compreensão de modelos de espaçonaves flexíveis.

Em [19], considerou-se pequenos os acoplamentos dos movimentos translacional-rotacional e rotacional-vibracional, onde deu-se particular importância ao movimento rotacional-vibracional, pois este afeta significativamente o movimento de atitude do veículo espacial. Além disso, fica claro nesta referência que deve-se tomar certo cuidado ao se considerar as contribuições dos deslocamentos elásticos como pequenas, uma vez que a utilização de apêndices longos podem caracterizar fortemente a dinâmica de atitude, tornando inconsistente tratar os efeitos da flexibilidade como perturbação do movimento rotacional do veículo não-deformado.

A dinâmica de uma espaçonave flexível estabilizada por gradiente de gravidade foi detalhada em [20], e utilizamos [21] e [22] para complementar o assunto.

1.2 Objetivos e Estudos Futuros

Os objetivos desta dissertação consistem no estudo da dinâmica não-linear de

uma espaçonave de dupla rotação axial e, posteriormente, a dinâmica não-linear de objetos no espaço considerando uma viga não-linear em órbita circular sujeita à atração gravitacional da Terra.

Num estudo posterior, no doutorado, pretende-se incluir efeitos, tais como a pressão de radiação solar, o arrasto atmosférico, etc. Para a completividade deste trabalho, incluímos apêndices que abordam a teoria básica utilizado no desenvolvimento deste projeto, a saber, fundamentos de mecânica Newtoniana, teoria de vibrações, além de uma revisão de dinâmica de rotações. Os apêndices D e E foram incluídos a fim de complementar a primeira parte desta dissertação, onde apresentamos o modelo da dinâmica de um rotor desbalanceado atachado a um suporte elástico e governado por um torque constante e, algumas simulações numéricas do movimento da espaçonave de dupla rotação axial tratada no capítulo 2.

Já para complementar a segunda parte desta dissertação incluímos o apêndice F, onde tratamos da dinâmica não-linear de vigas.

Visando uma continuação, dedicamos o apêndice G à pressão de radiação solar, que pretendemos abordar num estudo posterior no doutorado.

Esclarecem-se que se trata do primeiro trabalho em Dinâmica não-linear com aplicações aeroespaciais do grupo do Prof. Dr. José Manoel Balthazar aqui na UNICAMP.

Para atingir esses objetivos esta dissertação foi elaborada como descrito a seguir.

1.3 Descrição dos capítulos

Dividimos esta dissertação em duas partes.

Na primeira parte, pesquisamos a busca da solução analítica de uma espaçonave de dupla rotação axial, cujas principais referências foram [3],[23]-[38]. E complementamos esta parte com os apêndices D e E.

Na segunda parte, tratamos da atitude de satélites [39], e também mostramos os controles linear e não-linear de uma espaçonave particular [40]. Seguimos esta segunda parte com a dinâmica não-linear de uma viga no espaço sujeita à atração gravitacional ([12], [13]).

Para a completividade dos assuntos abordados no decorrer deste trabalho, apresentamos os apêndices assim distribuídos. No apêndice A, fazemos uma revisão de mecânica Newtoniana [39]. No apêndice B apresentamos os conceitos básicos de teoria de vibrações [41]. No apêndice C fazemos uma revisão de dinâmica de rotações [39], um conceito fundamental quando se deseja examinar o movimento de giro de um corpo rígido relativamente a um referencial fixo, como por exemplo, o movimento de uma partícula em relação ao movimento de rotação da Terra. Também abordamos neste apêndice a dinâmica de corpos rígidos, visto que podemos tratar a viga como tal. Fazemos nos apêndice D (cujas principais referências foram [42]-[45]) e E, uma complementação ao capítulo 3. No apêndice F, fazemos o estudo da dinâmica não-linear de vigas ([10], [11]). E, finalmente, dedicamos o apêndice G à pressão de radiação solar [7], assunto que abordaremos num futuro trabalho.

Esclarece-se ao leitor que os capítulos e apêndices foram organizados de maneira a facilitar a leitura dos dois tópicos citados nos objetivos.

PARTE 1

Pesquisamos nesta primeira parte a busca da solução analítica de uma espaçonave de dupla rotação axial, cujas principais referências foram [3], que aborda a teoria de Oscilações não-lineares e [23], onde faz-se uma introdução aos métodos de perturbação. Tivemos particular interesse no Método de Múltiplas Escalas, que utilizamos a fim de produzir um trabalho inédito. Além destas, destacamos as referências [24]-[38].

Fazemos uma complementação à esta pesquisa, nos apêndices D e E. No apêndice D apresentaremos um caso em que o comportamento do sistema apresenta caos mesmo com torque constante, isto é, ideal. Já no apêndice E, apresentamos algumas simulações numéricas do sistema analisado aqui.

Capítulo 2

Busca da Solução Analítica de uma Espaçonave de Dupla Rotação Axial

Uma espaçonave de rotação dupla consiste de dois corpos vinculados à rotação relativa de uma haste que conecta os corpos mas permite que estes rotacionem livremente no espaço. Os corpos são em geral flexíveis e dissipativos, bem como a conexão entre eles, e todas as espaçonaves estão sujeitas aos torques do ambiente, tais como o torque de gradiente de gravidade.

A Figura 2.1 modela uma espaçonave dual-spin, constituída de dois corpos rígidos conectados por uma haste também rígida e livre de torques externos; também é assumido que o eixo de simetria do corpo coincide com o eixo da rotação relativa. Tal modelo é chamado girostático. O corpo do eixo de simetria é chamado de rotor R , e o outro corpo é chamado plataforma P .

A Figura 2.2 representa a modelagem matemática de uma espaçonave. Este modelo foi proposto por Rand em [35]. Neste sistema, fez-se a hipótese de que o torque proporcionado pelo rotor é constante.

Um modelo mais realístico, é representado pela Figura 2.3 b, onde temos um sistema de vibração não-ideal, estudado por Balthazar e colaboradores. Este capítulo

será inteiramente dedicado ao estudo deste sistema, representado pela Figura 2.3b.

A fim de complementação, dedicamos dois apêndices a este capítulo, a saber, os apêndices D e E. No apêndice D apresentaremos um caso em que o comportamento do sistema apresenta caos mesmo com torque constante, isto é, ideal. Já no apêndice E, apresentamos algumas simulações numéricas do sistema representado pela Figura 2.3b.

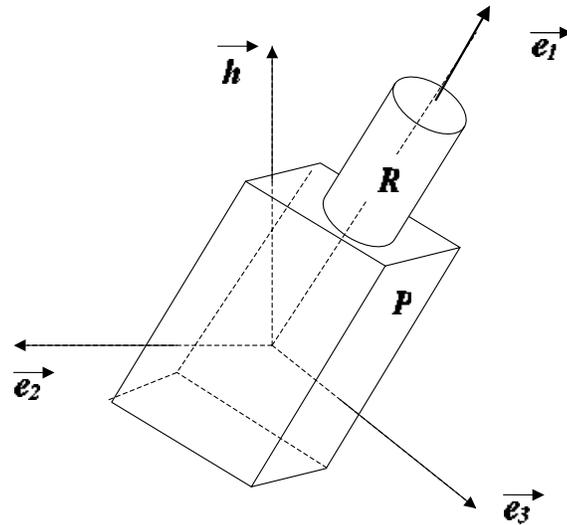


Figura 2.1: Modelo girostático de uma espaçonave de dupla rotação axial

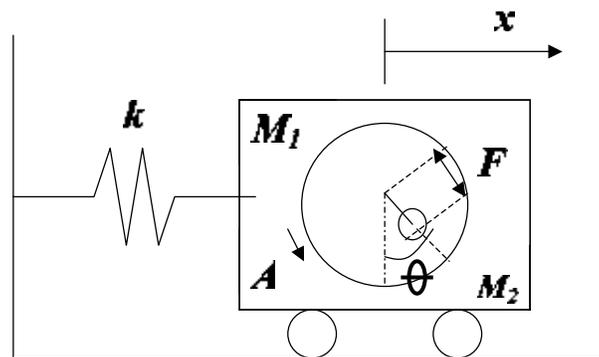


Figura 2.2: Sistema constituído de um rotor desbalanceado, vinculado num suporte elástico e governado por torque constante

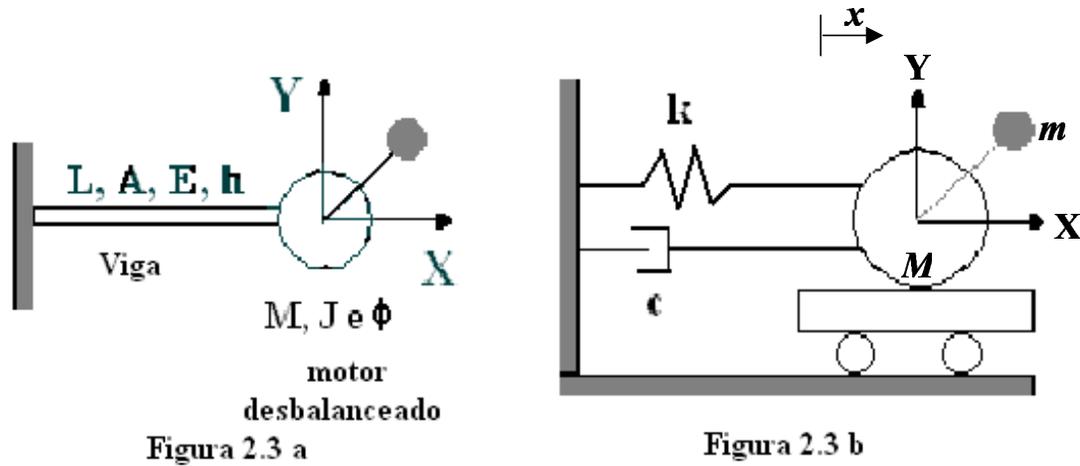


Figura 2.3: (a) Sistema não-ideal e seu respectivo modelo matemático (b)

Como se sabe, nos últimos anos, vários autores têm estudado exaustivamente a teoria de vibrações lineares. Contribuições significantes tem sido feitas para a teoria de vibrações não-lineares. Apesar do grande progresso da teoria de vibrações observamos que existem tipos especiais de vibrações que surgem da interação do sistema com a fonte de energia, que não podem ser completamente explicadas por meios da teoria atual. Então é conveniente usar a seguinte nomenclatura: Uma fonte de energia ideal atua na vibração do sistema, mas não sofre qualquer influência do sistema, já uma fonte de energia não-ideal atua na vibração do sistema e ao mesmo tempo sofre uma ação recíproca do sistema.

Alterações nos parâmetros do sistema podem ser notados por alterações nas condições de trabalho da fonte de energia. Estas interações podem tornar-se especialmente ativas quando a fonte de energia possui potência muito limitada e nas regiões de ressonância. Temos muito interesse no sistema dinâmico não-ideal: O que acontece para motor DC (ou motores DC): Potências (entrada) e RPM (saída), como muda a resposta do sistema?

Observamos que sistemas dinâmicos não-ideais possuem duas propriedades importantes: o fenômeno Salto e o aumento na potência devido à fonte de energia operando próximo à ressonância. Estas duas propriedades são conhecidas na literatura atual como efeito Sommerfeld [24]. Isto está descrito no livro clássico do Prof.

Kononenko [25], inteiramente devotado a este assunto.

Uma compreensível e completa revisão das diferentes aproximações é dada por [3],[26] Prof. Balthazar e Co-autores [27],[28], [30]. Anunciamos que o problema de controlar a passagem pela ressonância, usando técnicas ótimas de controle foi analisado pelo uso do método dos gradientes conjugados [29] ou pelo Método de Regularização de Tikhnov [30] ou ainda pela mudança de controle [31]. Um dos problemas da engenharia moderna está no projeto das estruturas e na escolha de máquinas rotativas (motores DC) para aplicações nestas estruturas evitando o efeito Sommerfeld.

Também é observado que o problema não-ideal constituído de uma viga de metal não-ideal suportando um motor desbalanceado na extremidade livre, que foi acionado por uma fonte de energia não-ideal, foi analisado pelos autores [3], [26], [32], [33]. Os autores em [34], usando aparelhos experimentais, detectaram a contribuição dos termos não-lineares para a resposta do sistema com não-linearidades quadráticas e cúbicas que são de mesma ordem e magnitude e em [35] observaram boas relações entre teoria e prática.

A Figura 2.3a ilustra este problema. O problema foi analisado, anteriormente por [4] e foi publicado em [3] considerando uma mola linear. Com o objetivo de analisar um sistema de vibração mais simples que não perdem as características não-lineares, consideramos o sistema mostrado na Figura 2.3b, o qual consiste de um motor desbalanceado fixo a uma mola não-linear e com amortecimentos linear e não-linear. Além do amortecimento representado pelo amortecedor mostrado na Figura 2.3b (amortecimento externo), também consideramos o amortecimento presente na rotação do rotor do motor (amortecimento externo) e o amortecimento devido ao "eddy current" (amortecimento interno). O movimento do motor está restrito ao eixo x . A dinâmica do sistema simplificado (definido pela Figura 2.3b) e do sistema mais complexo (Figura 2.3a) não estão muito distantes uma da outra. Simulações numéricas foram feitas em [34].

Notamos também que a dinâmica de rotação devido à ressonância pode ser modelada como um mecanismo simples constituído por um rotor desbalanceado fixado em um suporte elástico linear e com torque constante [35]. Além disso, observamos

que o controle não-linear para reduzir a ressonância durante a rotação de uma dupla rotação da nave espacial através da precessão de fase foi fechada por [36]. A condição para a ocorrência de caos é feita no apêndice C ([37]), onde considera-se apenas o caso em que a mola é linear e o torque é tomado como sendo constante, ideal. O caso não-ideal é estudado neste capítulo e complementado no apêndice E.

A meta desta seção é analisar, através do algoritmo do método de múltiplas escalas, a resposta do problema simplificado e verificar se ocorrem interações entre a dinâmica do motor e a dinâmica da fundação (mola, amortecimento e massa da fundação) tendo em vista as simulações numéricas feitas em [38].

Na seção 2.1 descrevemos o problema a ser analisado. A motivação e a modelagem matemática do problema representado pela Figura 2.3b encontra-se na seção 2.2. É na seção 2.3 que discutimos as equações do movimento. Analisamos a dinâmica assintótica próximo à ressonância na seção 2.4, que é seguida pela análise de estabilidade na seção 2.5. Na seção 2.6 faremos um algoritmo algébrico com os passos para obter uma solução analítica do problema estudado.

2.1 As Equações que Governam o Movimento

Um problema não-ideal constituído de uma viga de metal não-linear suportando um motor desbalanceado na extremidade livre excitada por uma fonte de energia não-ideal foi analisada pelos autores [27], [28], [29], [30]. A Figura 2.3a ilustra este problema. Os autores [27], [28], usando aparelhos experimentais detectaram a contribuição de termos não-lineares para a resposta do sistema, não-linearidades quadráticas e cúbicas que são da mesma ordem de magnitude. Em [29] observaram boas relações entre teoria e prática.

A fim de analisar um sistema vibrante mais simples que não perde as características não-lineares, consideremos o sistema mostrado na Figura 2.3b, que consiste de um motor desbalanceado fixo a uma mola não-linear e amortecimento linear. Além do amortecimento introduzido pelo amortecedor mostrado na Figura 2.3b (amortecimento externo), consideramos o amortecimento presente na rotação do rotor do motor (amortecimento externo também) e o amortecimento devido a

”eddy corrente” (amortecimento interno). O movimento do motor está restrito ao eixo x . A dinâmica do sistema simplificado proposto (definido pela Figura 2.1) e a dinâmica do sistema mais complexo apresentado em seguida (Figura 2.2) não são distantes uma da outra.

A energia potencial é dada por

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{4}k_2x^4 \quad (2.1)$$

onde as constantes k_1 e k_2 são os coeficientes elásticos linear e não linear, respectivamente, e x é o deslocamento horizontal do motor.

A energia cinética é dada por

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}e\phi \cos \phi)^2 + \frac{1}{2}m(e\phi \sin \phi)^2 \quad (2.2)$$

onde, e é a excentricidade da massa m , m é a massa desbalanceada, M é a massa do motor e da estrutura, J é o momento de inércia do motor, ϕ é o deslocamento angular do rotor (eixos do motor), e o ponto indica a derivada com respeito ao tempo.

Aplicando as equações de Lagrange, temos que as equações que governam o movimento são

$$\begin{aligned} (m + M)\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + K_2x^3 = \\ = me(\dot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$(L + e^2m)\ddot{\phi} - em\ddot{x} \cos \phi + c_2\dot{\phi} = \mathbf{L}(\dot{\phi}) \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{L}(\dot{\phi})$ é o torque ativo gerado pelo motor de circuito elétrico (Veja Figura 2.3b).

Lembramos que a hipótese feita sobre o amortecimento interno e o torque ativo está de acordo com a teoria clássica de motores elétricos, isto é, o amortecimento interno é uma função da velocidade angular do motor. Da mesma forma, o amorteci-

mento externo é mecânico, desta forma o amortecimento total no motor pode ser escrito apenas como função da velocidade angular.

Note que as equações acima são autônomas e não-lineares, contendo não-linearidades quadráticas e cúbicas de mesma ordem de magnitude. É conveniente reescrever as equações (2.3) e (2.4) em termos de variáveis adimensionais. Seja $x = ey$ e $\tau = \omega t$, onde $\omega^2 = \frac{k_1}{m+M}$, então temos a seguinte mudança de variáveis:

$$(x, t) \rightarrow (ey, \tau) \text{ e } (\phi, t) \rightarrow (\phi, \tau) \quad (2.5)$$

onde teremos:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \left[\frac{d(ey)}{d\tau} \right] \frac{d\tau}{dt} = \omega e \frac{dy}{d\tau} \omega ey' \quad (2.6)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d(ey)}{d\tau} \right] = \frac{d}{dt} \left[\omega e \frac{dy}{d\tau} \right] \frac{d\tau}{dt} = \omega^2 e \frac{d^2y}{d\tau^2} = \omega^2 ey'' \quad (2.7)$$

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega \phi' \quad (2.8)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{d\tau} \right] \frac{d\tau}{dt} = \omega^2 \phi'' \quad (2.9)$$

Substituindo as equações (2.6) a (2.9) nas equações (2.3) e (2.4), ficamos com:

$$(m + M)(\omega^2 ey'') + c_1(\omega ey') = k_1 ey + k_2 e^3 y^3 = m e (\omega^2 \phi'' \cos \phi - (\omega \phi')^2 \sin \phi) \quad (2.10)$$

$$(J + e^2 m)[\omega^2 \phi'''] = em[\omega^2 y'''] \cos \phi + c_2[\omega \phi']' = L(\omega \phi') \quad (2.11)$$

Dividindo a equação (2.10) por $e(M + m)$ e considerando $\frac{k_1}{M+m} = \omega^2$, $\frac{k_2}{M+m} = \frac{k_2}{k_1} \omega^2$ e $\frac{m}{M+m} = \varepsilon$, ficamos com a seguinte equação:

$$\omega^2 y'' + \frac{c_1}{m + M} \omega y' + \omega^2 y + \frac{k_2}{k_1} \omega^2 e^2 y^3 = \varepsilon (\omega^2 \phi'' \cos \phi - (\omega \phi')^2 \sin \phi) \quad (2.12)$$

Dividindo esta equação por ω^2 e considerando que $\frac{c_1}{\omega(M+m)} = 2\varepsilon\mu_1$ e $\frac{k_2}{k_1}e^2 = \alpha\varepsilon$ chegamos na forma adimensional da equação (2.3):

$$y'' + y = \varepsilon(-2\mu_1 y' - \alpha y^3 + \phi'' \cos \phi - (\phi')^2 \sin \phi) \quad (2.13)$$

Para chegarmos na forma adimensional da equação (2.11), vamos primeiramente dividi-la por $\omega^2(J + e^2m)$ e considerar $\frac{e^2m}{J+e^2m} = \varepsilon I$, obtendo assim:

$$\phi'' - \varepsilon I y'' \cos \phi + \frac{c_2}{\omega(J + \omega^2 m)} \phi' = \frac{L(\omega \phi')}{\omega(J + e^2 m)} \quad (2.14)$$

Para simplificar esta equação, consideramos $\frac{c_2}{\omega(J+e^2m)} = 2\varepsilon\mu_2$ e $\frac{L(\omega\phi')}{\omega(J+e^2m)} = \varepsilon E(\phi')$

E assim, chegamos na forma adimensional da equação (2.4):

$$\phi'' = \varepsilon(E(\phi') + I y'' \cos \phi - 2\mu_2 \phi') \quad (2.15)$$

Enfatizando, as equações na forma adimensional das equações (2.3) e (2.4) são respectivamente

$$y'' + y = \varepsilon(-2\mu_1 y' - \alpha y^3 + \phi'' \cos \phi - (\phi')^2 \sin \phi) \quad (2.16)$$

$$\phi'' = \varepsilon(E(\phi') + I y'' \cos \phi - 2\mu_2 \phi') \quad (2.17)$$

Note que nas equações (2.16) e (2.17), ε é um pequeno parâmetro deste problema. Se tomarmos $\varepsilon = 0$, obteríamos o movimento simples, isto é, as equações que descrevem uma vibração clássica com frequência 1 e rotação com frequência constante $\frac{d\phi}{dt}$. Lembremos que E contém $\mathbf{L}(\omega\phi')$ que é o torque ativo gerado pelo circuito elétrico do motor, veja Figura 2.3b.

A seguir, apresenta-se o estudo analítico das equações (2.16) e (2.17), e no apêndice E encontram-se algumas simulações numéricas para completar o estudo do sistema em questão.

2.2 Dinâmica Assintótica nas vizinhanças da Primeira Ressonância

Seja $\phi(\tau, \varepsilon) \approx \phi_0(T_0, T_1) + \varepsilon\phi_1(T_0, T_1)$ onde $T_0 = \tau$ e $T_1 = \varepsilon\tau$. Então temos

$$\phi' \approx D_0^2\phi_0 + \varepsilon(2D_0D_1\phi_0 + D_0^2\phi_1) \quad (2.18)$$

onde $D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}$ e $D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}$.

Próximo à ressonância, $\phi' \approx 1$, fazemos a seguinte escolha: $D_0\phi_0 = 1 + \varepsilon\sigma(T_1)$

Assim a equação (2.4) fica

$$D_0^2\phi_1 = -2D_1\sigma + E + Iy'' \cos(\phi_0 + \varepsilon\phi_1) \quad (2.19)$$

Agora, precisamos impor que $\phi_1 = O(1)$ com $t \rightarrow \infty$, obtendo então que $\cos(\phi_0 + \varepsilon\phi_1) = \cos(\phi_0) + O(\varepsilon) = \cos(T_0 + \sigma(T_1)) + O(\varepsilon)$. Sejam

$$y(\tau, \varepsilon) \approx y_0(T_0, T_1) + \varepsilon y_1(T_0, T_1) \quad (2.20)$$

$$y' \approx D_0 y_0 + \varepsilon(D_1 y_0 + D_0 y_1) \quad (2.21)$$

$$y'' \approx D_0^2 y_0 + \varepsilon(2D_0 D_1 y_0 + D_0^2 y_1) \quad (2.22)$$

Assim, da equação (2.3) obtemos duas equações:

$$D_0^2 y_0 + y_0 = 0 \quad (2.23)$$

$$D_0^2 y_1 + y_1 = -2D_0 D_1 y_0 - 2\mu D_0 y_0 - \alpha y_0^3 - (D_0 \phi_0)^2 \sin \phi_0 \quad (2.24)$$

Obtemos da equação (2.23) a seguinte solução:

$$y_0 = A(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}e^{-iT_0} \quad (2.25)$$

$$D_0^2 y_1 + y_1 = 2i(D_1 A + \mu A)e^{iT_0} - \alpha A^3 e^{i3T_0} - e\alpha A^2 \bar{A}e^{iT_0} + \frac{i}{2}e^{i(T_0 + \sigma(T_1))} + cc \quad (2.26)$$

onde \bar{A} é o complexo conjugado de A e cc são os complexos conjugados dos termos precedentes.

Substituindo (2.25) e (2.26) em (2.19) e tomando

$$A = \frac{\alpha(T_1)}{2} e^{i\beta(t_1)} \quad (2.27)$$

obteremos que

$$D_0^2 \phi_1 = -2D_1 \sigma + E - \frac{Ia}{2} \cos(\beta - \sigma(T_1)) + \frac{Ia}{2} \cos(2T_0 + \beta + \sigma(T_1)) \quad (2.28)$$

Com a intenção de que ϕ_1 seja limitada, põe-se $-2D_1\sigma + E - \frac{Ia}{2} \cos(\beta - \sigma(T_1)) = 0$ e então,

$$\phi_1 = -\frac{Ia}{8} \cos(2T_0 + \sigma(T_1) + \beta) \leq \frac{Ia}{8} \quad (2.29)$$

Agora queremos expandir E em torno de $\phi' = 1$. Então fazemos $E(\phi') = E(1 + \varepsilon\sigma) = E(1) + E'(1)\varepsilon\sigma = E_0 - E_1\sigma$, onde tomamos $E'(1) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Isto é necessário se o torque muda consideravelmente quando a frequência possui pequenas alterações, ou próximo à ressonância. Então,

$$\sigma' = E_0 - E_1\sigma - \frac{Ia}{2} \cos(\beta - \sigma(T_1)).$$

Agora eliminaremos os termos seculares de ϕ_1 na equação (2.26). Para isto tomamos:

$$2i(D_1A + \mu_1A) + 3\alpha A^2A - \frac{i}{2}e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (2.30)$$

e substituindo o valor de A na expressão acima conseguimos, separando a parte real e a parte imaginária:

$$a' + \mu_1a - \frac{1}{2} \cos(\beta - \sigma(T_1)) = 0 \quad (2.31)$$

$$-a\beta' + \frac{3\alpha a^3}{8} - \frac{1}{2} \sin(\beta - \sigma(T_1)) = 0 \quad (2.32)$$

Para um dado conjunto de potências (que determinam E_0 e E_1) devemos resolver (2.30), (2.31) e (2.32) para α , β e σ .

Quando $a' = 0$ e $\beta' = 0$ obtemos as equações em estado. Então temos:

$$\beta - \sigma(T_1) = cte = \gamma, \sigma' = 0, \beta' \sigma = 0 \Rightarrow \beta' = \sigma.$$

$$E_0 - E_1 \sigma - \frac{Ia}{2} \cos \gamma = 0 \quad (2.33)$$

$$\mu_1 a = \frac{1}{2} \cos \gamma \quad (2.34)$$

$$-a \left(\sigma - \frac{3\alpha a^2}{8} \right) = -\frac{1}{2} \sin \gamma \quad (2.35)$$

Elevando ao quadrado e somando as equações (2.34) e (2.35), obtemos

$$a^2 \left[\mu_1^2 + \left(\sigma - \frac{3\alpha a^2}{8} \right)^2 \right] = \frac{1}{4} \quad (2.36)$$

ou

$$\sigma = \frac{3\alpha a^2}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2} - \mu_1^2} \quad (2.37)$$

Lembrando que E_0 e E_1 são funções de σ , no conjunto de potências que eles representam, apenas um é desconhecido.

Para determinar a solução característica, necessitamos primeiro encontrar o local dos pontos singulares e então examinar o movimento nas vizinhanças.

2.3 Análise de Estabilidade

Trabalharemos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a' + \mu_1 a - \frac{1}{2} \cos \gamma = 0 \\ -a' \gamma' + \frac{3\alpha a^3}{8} - \frac{1}{2} \sin \gamma = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

onde $\gamma = \beta - \sigma(T_1)$.

Analisando o sistema no ponto de equilíbrio, onde $a' = 0$ e $\gamma' = 0$, temos

$$\begin{cases} \mu_1 a - \frac{1}{2} \cos \gamma = 0 \\ \frac{3\alpha a^3}{8} - \frac{1}{2} \sin \gamma = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

É das equações acima que obtemos a função de resposta em frequência:

$$a^2 \left[\mu_1^2 + \left(\sigma - \frac{3\alpha a^2}{8} \right) \right] = \frac{1}{4} \quad (2.40)$$

A equação (2.40) é uma equação implícita para a amplitude da resposta a como função do parâmetro de controle σ .

O gráfico de a versus σ é a curva de resposta em frequência. Para desenhar tal curva, podemos resolver uma equação cúbica para a^2 como uma função de σ . Pode-se resolver σ em termos de a . Do sistema (2.38), temos dois casos a considerar:

- Caso linear: toma-se $\alpha = 0$;
- Caso não-linear: quando toma-se $\alpha \neq 0$.

A estabilidade de (a, γ) é determinada pelos autovalores, λ_i , da matriz jacobiana:

$$D_x F = \begin{bmatrix} -\mu_1 & -a \left(\sigma - \frac{3\alpha a^2}{8} \right) \\ \frac{1}{a} \left(\sigma - \frac{9\alpha a^2}{8} \right) & -\mu_1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

cuja equação característica é

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \mu_1^2 + \left(\sigma - \frac{3\alpha a^2}{8}\right)\left(\sigma - \frac{9\alpha a^2}{8}\right) = 0 \quad (2.42)$$

Temos que a soma dos autovalores é $-2\mu_1$. Esta soma é negativa, pois $\mu_1 > 0$. Conseqüentemente, um dos autovalores terá parte real negativa. Este fato elimina a possibilidade de um par de autovalores imaginários puros, o que elimina a bifurcação de Hopf.

Porém, pode ocorrer bifurcação estática. Neste caso ocorre uma bifurcação sela-nó. Para este fim, devemos ter um problema de autovalor nulo. Então o produto dos autovalores é zero, daí temos:

$$\mu_1^2 + \left(\sigma - \frac{3\alpha a^2}{8}\right)\left(\sigma - \frac{9\alpha a^2}{8}\right) = 0 \quad (2.43)$$

Utilizando o critério de Routh-Herwitz, concluímos que há estabilidade assintótica quando $\mu_1 > 0$.

De fato, temos o polinômio característico $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

onde,

- $a_0 = 1$;
- $a_1 = 2\mu_1$;
- $a_2 = \mu_1^2 + \left(\sigma - \frac{3\alpha a^2}{8}\right)\left(\sigma - \frac{9\alpha a^2}{8}\right) = 0$.

Para que tenhamos estabilidade assintótica, devemos ter $\Delta_0 > 0$ e $\Delta_1 > 0$,

onde $\Delta_0 = a_0$ e $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$.

Diagramas de bifurcação tal como o da Figura 2.4 é chamado **curva de resposta em freqüência**.

Nesta figura são observados saltos que são os pontos de bifurcação sela-nó. Na Figura 2.5 exibem-se curvas características da fonte de energia, neste caso reta. A seguir, sintetizam-se os resultados analíticos obtidos.

2.4 Algoritmo Algébrico

Sumarizamos nossos resultados no algoritmo abaixo:

1. Atribua um valor inicial para a ;
2. Calcule σ da equação (2.37);
3. Calcule γ da equação (2.324);
4. Calcule o valor p da equação (2.33);
5. Gráfico de a versus σ ;
6. Conecte os pontos de mesmo p ;
7. Cheque a estabilidade.

No caso particular, quando $\alpha = 0$, o problema foi analisado por [3] pelo uso do método da média e os resultados são coincidentes com os do método de múltiplas escalas, neste caso particular. No caso analisado os resultados são mais abrangentes, como foi mostrado. As Figuras 2.4 e 2.5 abaixo foram construídas utilizando-se do software MatLab seguindo o algoritmo algébrico acima mencionado, com os seguintes valores: Para a figura 2.4, utilizamos $\alpha = 0.01$, $\mu_1 = 0.01$ e para a figura 2.5 utilizamos $\alpha = 0.01$, $\mu_1 = 0.01$, $E_1 = 0.5$, $I = 0.9$, $E_0 = 1$.

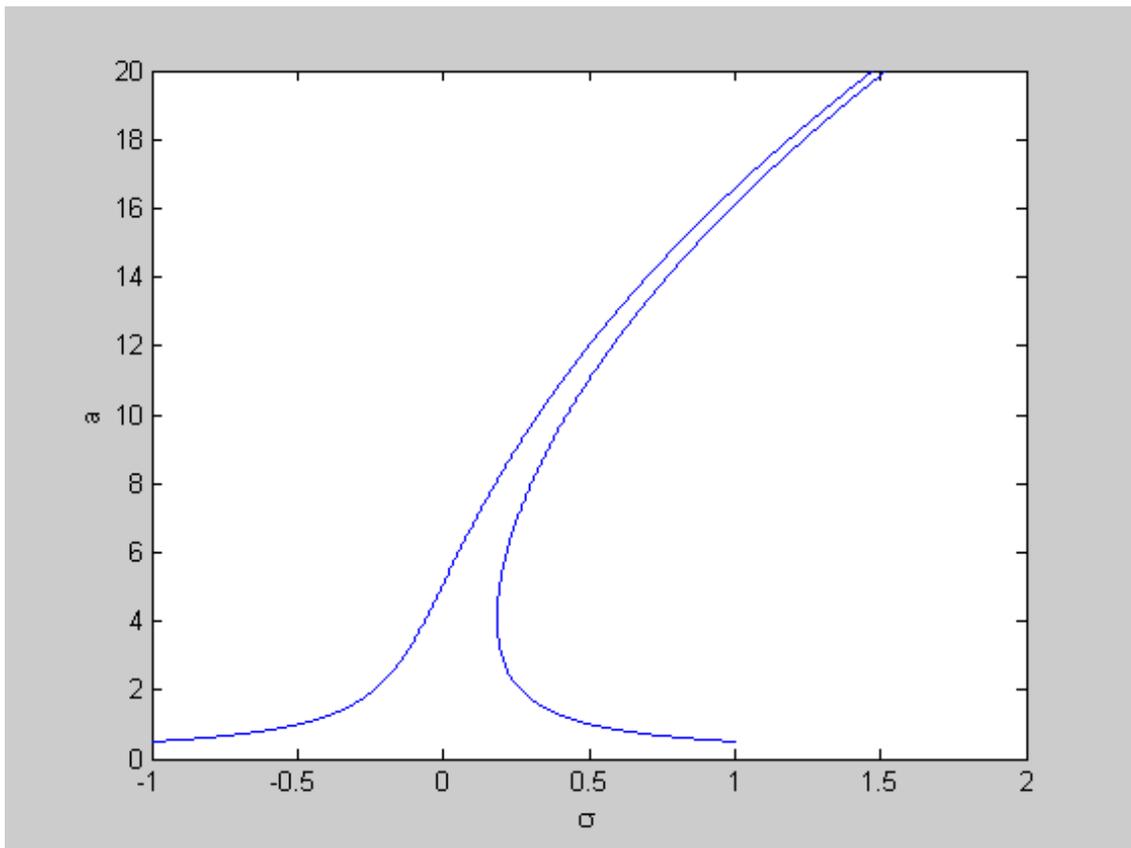


Figura 2.4: Curva de Resposta em Freqüência das equações (2.33) e (2.37)

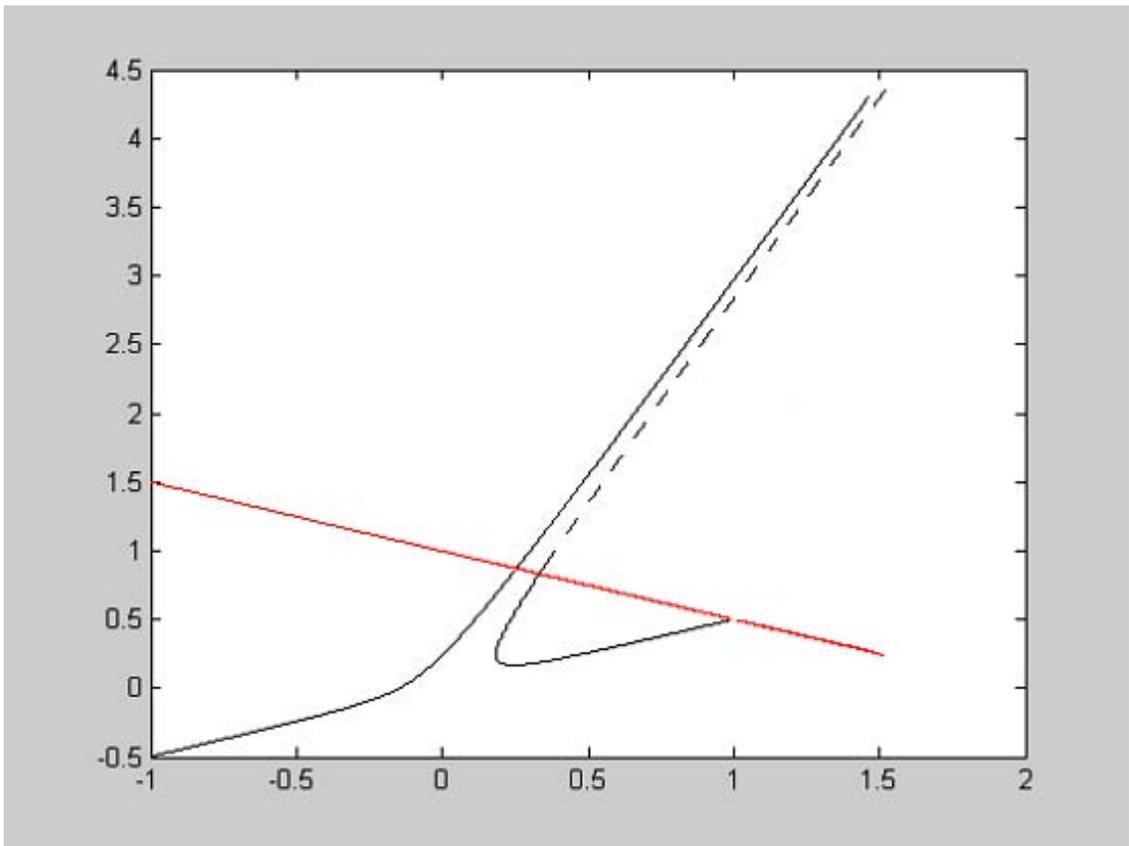


Figura 2.5: Curva Característica das equações (2.33) e (2.37)

As Figuras 2.6 e 2.7, a seguir, são referentes à simulação numérica das equações (2.16) e (2.17), onde foram utilizados os seguintes valores: $E_1 = 1.5$, $\varepsilon = 0.05$, $\alpha = 0.01$, $\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 0$, $I = 0.9$ e com o torque constante E_0 (tensão aplicado ao motor ou parâmetro de controle) variando no intervalo $[1 \ 2.5]$.

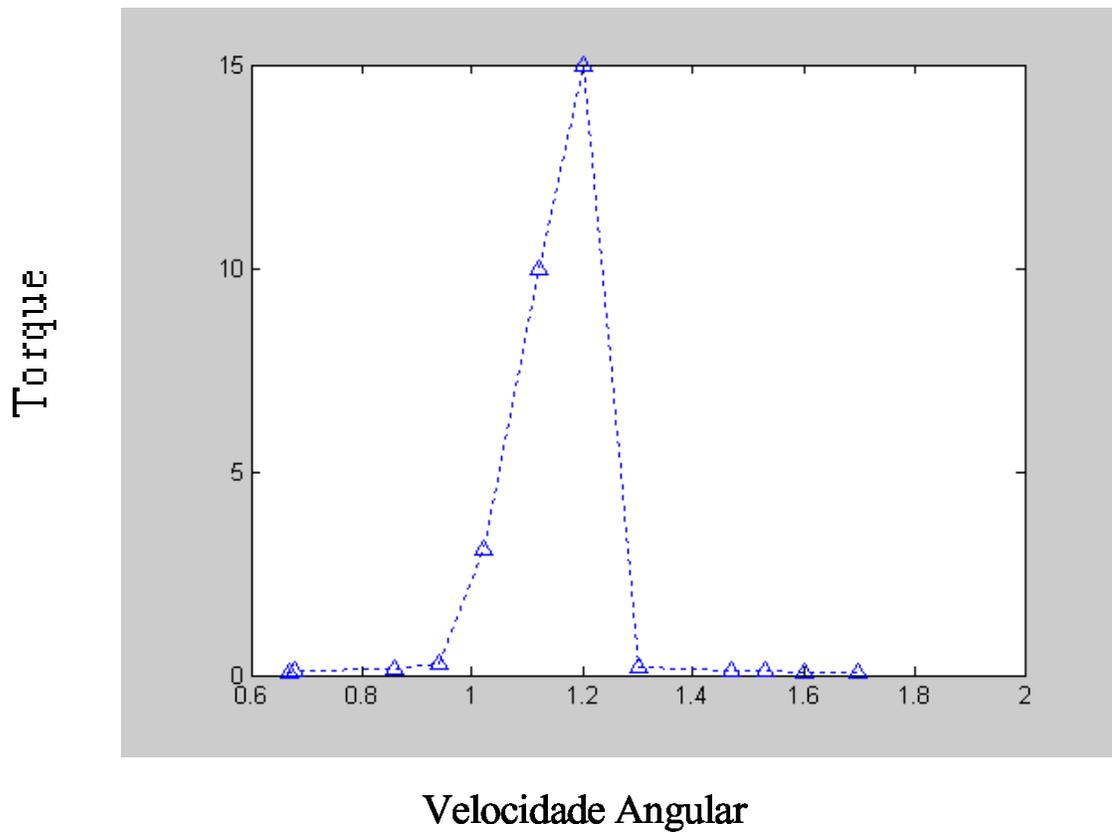


Figura 2.6: Curva de Ressonância

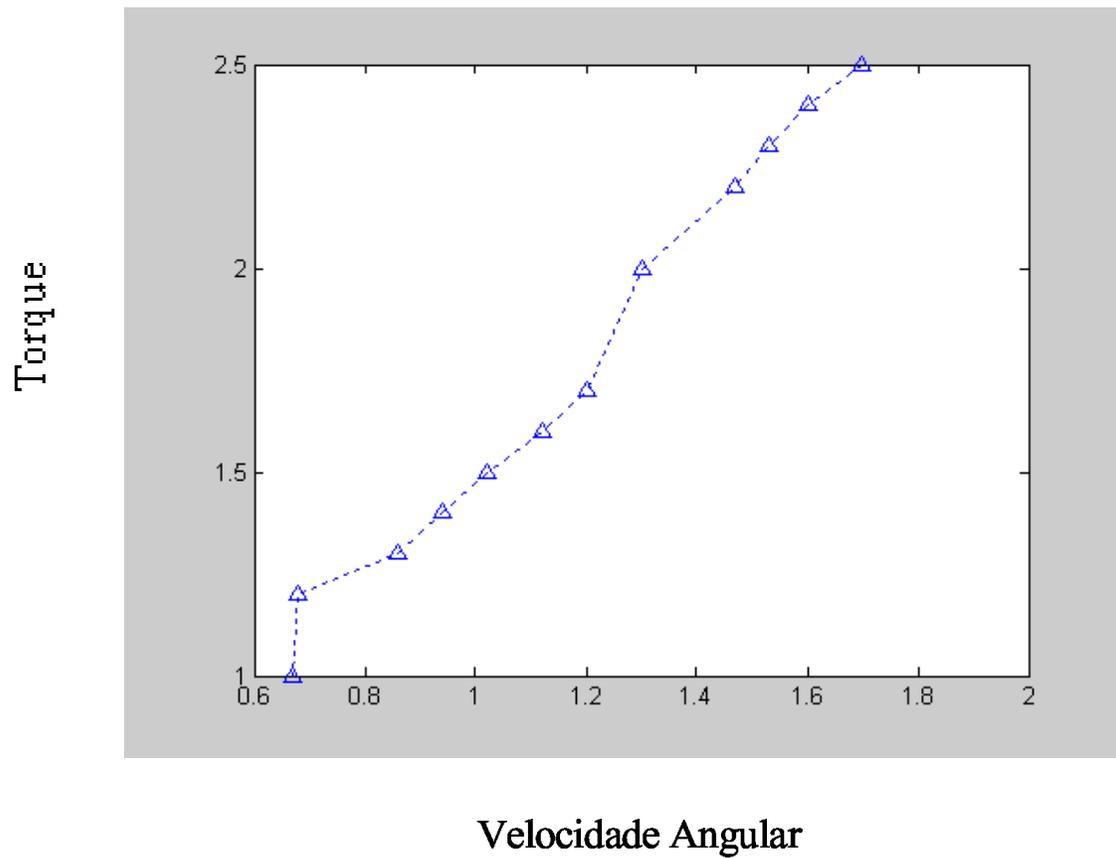


Figura 2.7: Aumento de torque durante a passagem pela ressonância

PARTE 2

Na segunda parte deste trabalho, tratamos do fenômeno da atitude de satélites artificiais, [39], além de mostramos os controles linear e não-linear de uma espaçonave particular [40].

Finalizamos esta segunda parte com a dinâmica não-linear de uma viga no espaço sujeita à atração gravitacional, onde formulamos as equações diferenciais não-lineares do movimento, que corroboraram com a teoria feita por [12], [13].

Apresentamos também nesta segunda parte da dissertação as simulações numéricas das equações governando o movimento da viga em órbita circular.

Capítulo 3

Fenômeno da Atitude

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos básicos de atitude, pois este trata da orientação de satélites no espaço, e serão utilizados no presente trabalho nos capítulos posteriores. Apresenta-se aqui também os métodos de estabilização, a saber, estabilização por gradiente de gravidade e estabilização de rotação. Finalizamos este capítulo com o controle de uma espaçonave particular.

Os conceitos básicos de mecânica que são utilizados aqui, são descritos nos apêndices A, B e C.

3.1 Atitude de satélites em órbita - Considerações Gerais

A precessão e nutação dos eixos polares da Terra são resultados diretos da aplicação dos torques gravitacionais exercidos pela Terra, pela Lua e pelo Sol. Estes torques são devidos ao fato de a Terra não possuir simetria inercial. O problema da orientação do satélite no espaço, referido como **atitude**, é em geral mais envolvente por várias razões. Entre elas, devemos mencionar que os momentos de inércia dos satélites podem ser todos diferentes e seu movimento de rotação pode não ser uma rotação alta, uniforme e simples, como no caso da Terra.

A situação pode ser complicada se o satélite contém partes internas móveis, ou se a órbita não é circular. Além disso, adicionando as forças devido ao campo gravitacional da Terra, as forças atuando sobre um satélite terrestre podem partir de uma variedade de outras fontes, tais como o arrasto atmosférico, a pressão de radiação solar, os campos elétricos e magnéticos da Terra, bombardeamento de meteoros e raios cósmicos, etc. Em geral o fator mais significativo é o campo gravitacional da Terra.

Graças às múltiplas aplicações, o problema do movimento de atitude de satélites tem recebido considerável atenção, como o engenho pela abundância de artigos, livros e relatórios relacionados a este assunto. Devido às considerações funcionais, os satélites terrestres são geralmente apontados ou para a Terra ou para um ponto fixo num espaço inercial. Pode ser realizado por sistema de controle ativo ou por meios passivos, a estabilização neste último caso sendo provida pelo torque gravitacional ou pelo movimento de rotação inicialmente dado para o satélite. Por conseguinte, os dois métodos de estabilização são referidos como **gradiente de gravidade e estabilização de rotação**.

Para muitos propósitos práticos, um satélite pode ser considerado como sendo um corpo rígido, cujas dimensões são pequenas em relação ao centro da força. Como um resultado geral, o movimento de atitude não tem efeito sobre o movimento orbital do centro de massa do satélite, quando o movimento orbital do satélite é governado pela lei primária de força central com o inverso do quadrado das distâncias. O interesse particular é o caso em que a órbita de um satélite sobre a simetria esférica da Terra é considerada como sendo circular. O modelo matemático constituído de um corpo rígido em uma órbita circular tem a vantagem de ser seu próprio volante para um hábil tratamento analítico, enquanto descreve muito bem uma situação física comum (normal).

Para discutir a **atitude** de um satélite rígido em órbita circular é conveniente introduzir um referencial orbital com eixos a_1, a_2, a_3 com origem O no centro de massa do corpo; eixo a_1 na direção do raio, eixo a_2 tangente à órbita na direção do movimento, eixo a_3 normal ao plano da órbita, como mostrado na Figura 3.1. Os eixos principais do corpo, x_1, x_2, x_3 , são obtidos por meio de três rotações independentes, especificadas mais adiante.

A relação entre os dois conjuntos de eixos x_i e a_j podem ser escritos em termos dos cossenos diretores l_{ij} na forma de matriz compacta $\{x\} = [L]\{a\}$, onde os cossenos diretores dependem das três rotações independentes. As equações do movimento sobre o eixo do corpo x_1, x_2, x_3 podem ser escritas da seguinte forma

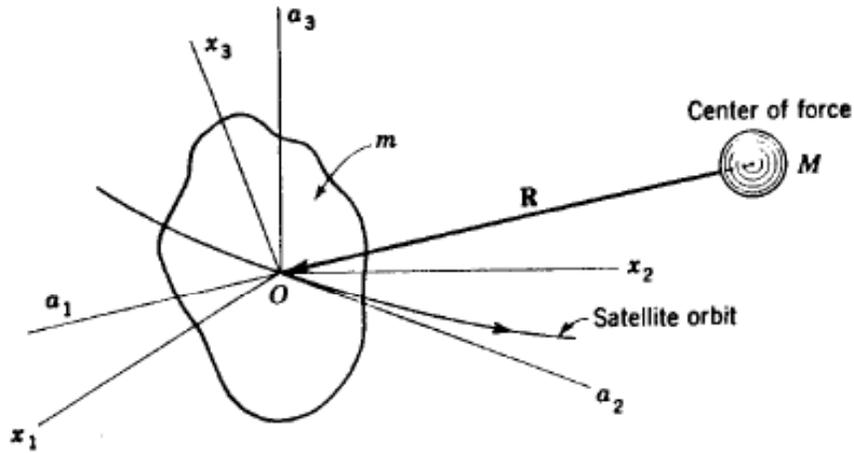


Figura 3.1: Sistema de referência orbital, eixos a_1, a_2, a_3 com origem O no centro de massa do corpo, e eixos principais do corpo, x_1, x_2, x_3 , de um satélite em órbita

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \omega} \right\} + [\omega] \left\{ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \omega} \right\} = \{\mathbf{N}\} \quad (3.1)$$

onde \mathbf{T} é a energia cinética; $\left\{ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \omega} \right\}$ é a matriz coluna das derivadas parciais relativas à velocidade angular do corpo ω_i , ($i = 1, 2, 3$); $[\omega]$ é a matriz anti-simétrica associada com ω_i ; $\{\mathbf{N}\}$ é o torque sobre os eixos do corpo.

As componentes de $\{\mathbf{N}\}$ são:

$$N_1 = 3\Omega^2(C - B)l_{13}l_{21} \quad (3.2)$$

$$N_2 = 3\Omega^2(A - C)l_{11}l_{31} \quad (3.3)$$

$$N_3 = 3\Omega^2(B - A)l_{21}l_{11} \quad (3.4)$$

onde Ω é a velocidade angular orbital e A, B, C são, respectivamente, os momentos de inércia sobre os eixos x_1, x_2, x_3 do corpo, escolhendo coincidir com o eixo principal. Além disso, substituiremos $\Omega^2 = \frac{\mu}{R^3} \approx \frac{GM}{R^3}$ nas equações acima, devido à massa do satélite ser muito pequena comparada com a massa M da Terra.

Vamos definir a orientação dos eixos do corpo x_i relativamente aos eixos orbitais a_j de duas maneiras, como descritas nas Figuras 3.2 e 3.3. A razão para introduzir dois conjuntos de rotação será esclarecida mais adiante, quando a posição de equilíbrio específico for discutida. Mas para discutir uma equação particular apenas um dos dois conjuntos de rotação será usado.

No primeiro caso, mostrado na Figura 2.2, as três rotações são: θ_2 sobre a_2 , θ_1 sobre b_1 e ψ sobre c_3 . No segundo caso, mostrado na Figura 3.3, as rotações são dadas pelos ângulos de Euler: ϕ sobre a_3 , θ sobre b_1 e ψ sobre c_3 .

As componentes da velocidade angular do corpo sobre os eixos x_1, x_2, x_3 , para os dois conjuntos de rotações, são

$$\omega_1 = \Omega l_{13} + \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \sin \psi + \dot{\theta}_1 \cos \psi = \Omega l_{13} + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad (3.5)$$

$$\omega_2 = \Omega l_{23} + \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \psi - \dot{\theta}_1 \sin \psi = \Omega l_{23} + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad (3.6)$$

$$\omega_3 = \Omega l_{33} - \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 + \dot{\psi} = \Omega l_{33} + \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (3.7)$$

De forma similar os cossenos diretores entre os eixos x_i e a_j tem as expressões:

$$l_{11} = \cos \theta_2 \cos \psi + \sin \theta_2 \sin \theta_1 \sin \psi = \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi \quad (3.8)$$

$$l_{12} = \cos \theta_1 \sin \psi = \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi \quad (3.9)$$

$$l_{13} = -\sin \theta_2 \cos \psi + \cos \theta_2 \sin \theta_1 \sin \psi = \sin \theta \sin \psi \quad (3.10)$$

$$l_{21} = -\cos \theta_2 \sin \psi + \sin \theta_2 \sin \theta_1 \cos \psi = -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi \quad (3.11)$$

$$l_{22} = \cos \theta_1 \cos \psi = -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi \quad (3.12)$$

$$l_{23} = \sin \theta_2 \sin \psi + \cos \theta_2 \sin \theta_1 \cos \psi = \sin \theta \cos \psi \quad (3.13)$$

$$l_{31} = \sin \theta_2 \cos \theta_1 = \sin \phi \sin \theta \quad (3.14)$$

$$l_{32} = -\sin \theta_1 = -\cos \phi \sin \theta \quad (3.15)$$

$$l_{33} = \cos \theta_2 \cos \theta_1 = \cos \theta \quad (3.16)$$

As equações de (3.1) a (3.17) definem totalmente as equações diferenciais da atitude referente aos casos mostrados nas Figuras 3.2 e 3.3.

Às vezes é mais conveniente trabalhar com as equações Lagrangeanas de movimento. Por isto, estamos interessados em derivar expressões para as energias cinética e potencial. Usando as equações de (3.6) a (3.8) podemos escrever

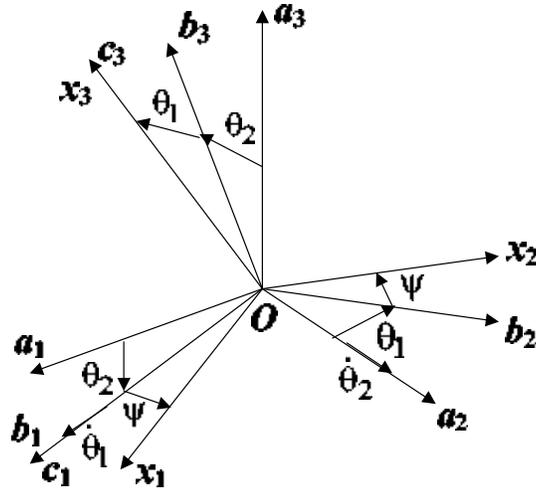


Figura 3.2: Uma orientação dos eixos x_i em relação aos eixos orbitais

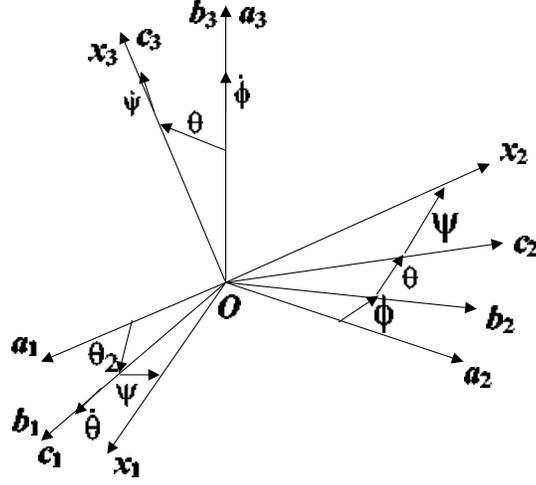


Figura 3.3: Uma segunda orientação dos eixos x_i em relação aos eixos orbitais

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) = \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_0 \quad (3.17)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 = \frac{1}{2} \left[A(\dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \sin \psi + \dot{\theta}_1 \cos \psi)^2 + B(\dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \psi + \dot{\theta}_1 \sin \psi)^2 + \right. \\ \left. + C(\dot{\psi} - \dot{\theta}_2 \sin \theta_1)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[A(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \right. \\ \left. + B(\dot{\phi} \sin \theta_1 \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi)^2 + C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \right] \quad (3.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 = \Omega \left[Al_{13}(\dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \psi \dot{\theta}_1 \cos \psi) + B(\dot{\phi} \cos \theta_1 \cos \psi - \dot{\theta}_1 \sin \psi) + \right. \\ \left. + Cl_{33}(\dot{\psi} - \dot{\theta}_2 \sin \theta_1) \right] = \Omega \left[Al_{13}(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) + \right. \\ \left. + Bl_{23}(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) + Cl_{33}(\dot{\psi} - \dot{\phi} \cos \theta) \right] \quad (3.19) \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_0 = \frac{1}{2} \Omega (Al_{13}^2 + Bl_{23}^2 + Cl_{33}^2) \quad (3.20)$$

Além disso, a energia potencial pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{V} = -\frac{3}{4}\Omega^2 [l_{11}^2(B + C - A) + l_{21}^2(A + C - B) + l_{31}^2(A + B - C)] \quad (3.21)$$

Das equações (3.18) a (3.22) concluímos que o Lagrangeano $L = T - V$ não depende explicitamente do tempo t , sendo assim, não é um sistema natural, segue que o sistema possui uma integral de Jacobi na forma Hamiltoniana

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_0 + \mathbf{V} = \mathbf{h} = cte,$$

em vez da energia total do sistema \mathbf{E} . Se os momentos de inércia são todos diferentes, esta é a única integral de movimento analisada.

As equações diferenciais descrevendo o movimento rotacional de um satélite são não-lineares. Sob estas circunstâncias devemos nos satisfazer com informações acerca do comportamento do sistema nas vizinhanças de movimentos conhecidos. Em particular, estamos interessados em saber se as soluções do sistema são estáveis ou instáveis.

3.2 Estabilidade da atitude de satélites orientados pela Terra

Satélites apontando em direção a Terra todo o tempo enquanto o centro de massa move-se em órbita circular ao redor da Terra são de grande interesse, devido sua grande utilidade. Do ponto de vista da dinâmica, um satélite apontando para a Terra pode ser visto como um bloco rígido rotacionando sobre um eixo normal ao plano da órbita com velocidade angular igual à velocidade angular orbital. Isto é equivalente ao corpo partindo do repouso com respeito ao referencial orbital a_1, a_2, a_3 , introduzido na seção anterior. Sob certas circunstâncias este movimento pode ser realizado pela ação de torques gravitacionais, razão pela qual tais satélites são estabilizados por **gradiente de gravidade**. Note que o sistema dinâmico é autônomo, neste caso.

Matematicamente, a posição na qual o satélite está sempre apontando em direção a Terra corresponde a posição de equilíbrio do sistema. Isto representa a posição desejada sobre a qual o corpo oscila se perturbado, e a posição do corpo se o equilíbrio é estável. Para estudar a estabilidade do movimento nas vizinhanças do ponto de equilíbrio, usaremos o método direto de Lyapunov.

Vamos considerar o satélite da Figura 3.1 e examinar a estabilidade segundo Lyapunov nas vizinhanças do ponto de equilíbrio, na qual o corpo está em repouso relativamente ao referencial orbital, de modo que $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 = \dot{\psi} = 0$ ou $\dot{\phi} = \dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$, dependendo do conjunto de rotações usados (vide Figuras 3.2 e 3.3). Para definir completamente a posição de equilíbrio, resta examinar o valor das coordenadas angulares correspondentes a estes pontos. Sendo o sistema canônico, estas equações são dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} = 0 \quad (3.22)$$

na qual as coordenadas generalizadas q_i ($i = 1, 2, 3$) são θ_2, θ_1, ψ ou ϕ, θ, ψ . Na seção anterior mostramos que para o tipo de sistemas considerados a hamiltoniana é constante, $\mathbf{H} = \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_0 + \mathbf{V} = \mathbf{h} = cte$, que representa a integral de Jacobi associada com este sistema não natural. Mas \mathbf{T}_2 é quadrático nas velocidades generalizadas, as quais são nulas nos pontos de equilíbrio considerados, de forma que as posições de equilíbrio relativamente ao referencial orbital satisfazem

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.23)$$

que usando as expressões (3.18) (3.19) e (3.20), obtemos

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} - \mathbf{T}_0 = -\frac{1}{2}\Omega^2 [A(l_{13}^2 - 3l_{11}^2) + B(l_{23}^2 - 3l_{21}^2) + C(l_{33}^2 - 3l_{31}^2)] \quad (3.24)$$

que é uma função dependente apenas das coordenadas generalizadas. Substituindo as equações de (3.9) a (3.17) em (3.25) e usando (3.24) obtemos as seguintes equações, definindo a posição dos pontos de equilíbrio para o conjunto θ_2, θ_1, ψ :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta_2} = 4\Omega^2 (Al_{11}l_{13} + Bl_{21}l_{23} + Cl_{31}l_{33}) = 0 \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta_1} = -\Omega^2 [& A \cos \theta_1 \sin \psi (l_{13} \cos \theta_2 - 3l_{11} \sin \theta_2) \\ & + B \cos \theta_1 \cos \psi (l_{23} \cos \theta_2 - 3l_{21} \sin \theta_2) \\ & - C \sin \theta_1 (l_{33} \cos \theta_2 - 3l_{31} \sin \theta_2)] = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \psi} = -\Omega^2 (A - B)(l_{13}l_{23} - 3l_{11}l_{21}) = 0 \quad (3.27)$$

ao passo que a posição de equilíbrio para o conjunto ϕ, θ, ψ deve satisfazer

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \phi} = -3\Omega^2 (Al_{11}l_{12} + Bl_{21}l_{22} + Cl_{31}l_{32}) = 0 \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} = -\Omega^2 [& A \sin \psi (l_{13} \cos \theta - 3l_{11} \sin \phi \sin \theta) \\ & + B \cos \psi (l_{23} \sin \theta - 3l_{21} \sin \phi \sin \theta) \\ & - C (l_{33} \sin \theta - 3l_{31} \sin \phi \cos \theta)] = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \psi} = -\Omega^2 (A - B)(l_{13}l_{23} - 3l_{11}l_{21}) = 0 \quad (3.30)$$

As posições de equilíbrio revelam-se ser aquelas em que os eixos principais do corpo estão alinhados com os eixos orbitais. Estas posições denotadas por E_1, E_2, E_3 estão mostradas nas Figuras 3.4 *a, b* e *c* respectivamente. Note que nos dois primeiros casos usamos o conjunto θ_2, θ_1, ψ , enquanto no último usamos ϕ, θ, ψ . Nas três posições de equilíbrio E_i as velocidades angulares são perpendiculares uma a outra, de modo que é suficiente checar a estabilidade somente em uma delas.

Como a hamiltoniana é constante, a derivada total $\dot{\mathbf{H}}$ é zero, de modo que se \mathbf{H} é definida positiva num ponto de equilíbrio, a hamiltoniana pode ser considerada como uma função de Lyapunov e o ponto de equilíbrio correspondente é estável. Mas \mathbf{T}_2 é positiva definida por definição, de modo que o sistema é estável se \mathbf{U} é

positiva definida. Daí o problema se reduz em testar a função \mathbf{U} positiva definida. Para determinar se \mathbf{U} é positiva definida ou não, necessitaremos calcular a matriz hessiana associada. Os elementos desta matriz para as coordenadas θ_2, θ_1, ψ são:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \theta_2^2} = 4\Omega^2 [A(l_{13}^2 - l_{11}^2) + B(l_{23}^2 - l_{21}^2) + C(l_{33}^2 - l_{31}^2)] \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} = & 4\Omega^2 [A \cos \theta_1 \sin \psi (l_{11} \cos \theta_2 + l_{13} \sin \theta_2) + \\ & + B \cos \theta_1 \cos \psi (l_{21} \cos \theta_2 + l_{23} \sin \theta_2) - C \sin \theta_1 (l_{31} \cos \theta_2 + l_{33} \sin \theta_2)] \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \theta_2 \partial \psi} = -\Omega^2 (A - B) (l_{11} l_{23} + l_{13} l_{21}) \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \theta_1^2} = & -\Omega^2 [(A - B) \cos 2\theta_2 \sin \theta_2 \sin 2\psi + \\ & + (A \sin^2 \psi + B \cos^2 \psi - C) (\cos^2 \theta_2 - 3 \sin^2 \theta_2) \cos 2\theta_1] \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \theta_1 \partial \psi} = & \Omega^2 (A - B) \cos \theta_1 [\cos \psi (l_{13} \cos \theta_2 - 3l_{11} \sin \theta_2) \\ & + \sin \psi (l_{23} \cos \theta_2 - 3l_{21} \sin \theta_2)] \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \psi^2} = -\Omega^2 (A - B) [l_{23}^2 - l_{13}^2 - 3(l_{21}^2 - l_{11}^2)] \quad (3.36)$$

Usando as equações de (3.32) a (3.37), a matriz hessiana correspondendo ao ponto de equilíbrio $E_1, \theta_2, \theta_1, \psi = 0$ tem a forma

$$[\hbar]_{E_1} = \begin{bmatrix} 4\Omega^2(C - A) & 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2(C - B) & 0 \\ 0 & 0 & -3\Omega^2(A - B) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

de forma que a matriz é positiva definida e o equilíbrio na posição E_1 é estável se

$$C > B > A \quad (3.38)$$

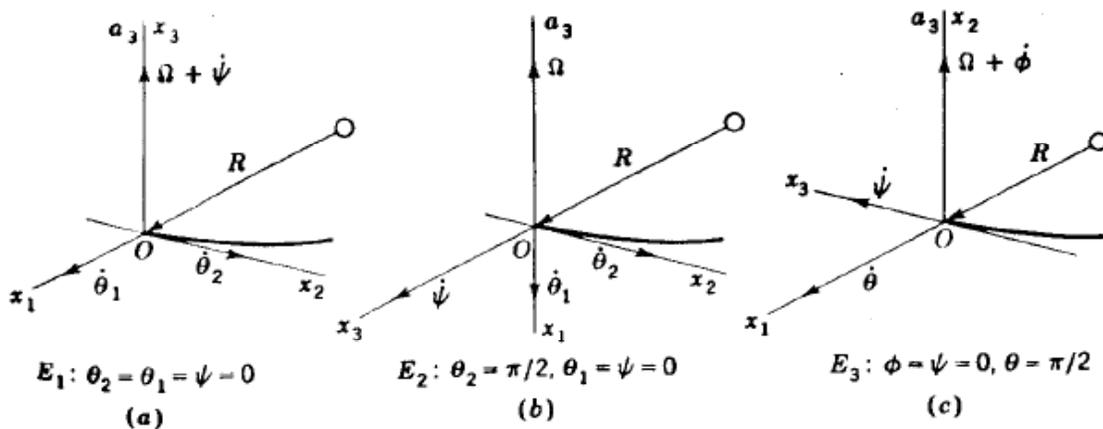


Figura 3.4: Posições de Equilíbrio

cujo significado físico é o eixo de momento de inércia mínimo estar alinhado com a direção radial, e o eixo de inércia máximo ser normal ao plano da órbita. A interpretação desse resultado é que uma pequena perturbação da posição de equilíbrio do corpo, quando este está com o eixo de menor momento de inércia segundo a vertical local, levará ao aparecimento de um conjugado gravitacional, que irá restaurar a posição original do corpo. Se, no entanto, houver amortecimento no sistema, tal que $\dot{H} \leq 0$, então a configuração dada pela expressão (3.42) é assintoticamente estável.

O mesmo problema pode ser tratado por meio de análise infinitesimal, que consiste em linearizar as equações de movimento do corpo na vizinhança da posição de equilíbrio e resolver a equação característica resultante.

3.3 Estabilidade da atitude de satélites simétricos rotativos

Quando dois dos momentos de inércia de um satélite são iguais, a inequação (3.38) não pode ser satisfeita. Assim, vamos definir a estabilidade em termos da orientação de eixos de simetria, chamada **estabilização de rotação**.

O movimento do satélite é definido como na seção 3.1, mas, devido a simetria, não precisamos trabalhar com o conjunto de eixos x_1, x_2, x_3 , sendo mais vantajoso usar os eixos c_1, c_2, c_3 . Sob estas circunstâncias, devemos distinguir entre as velocidades angular do sistema c_1, c_2, c_3

$$\omega_1 = -\Omega \sin \theta + \dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \quad (3.39)$$

$$\omega_2 = \Omega \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 = (\Omega + \dot{\phi}) \sin \theta \quad (3.40)$$

$$\omega_3 = \Omega \cos \theta_2 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 = (\Omega + \dot{\phi}) \cos \theta \quad (3.41)$$

e as componentes da velocidade angular do corpo sobre os eixos

$$\mathbf{\Omega}_1 = \omega_1 \quad (3.42)$$

$$\mathbf{\Omega}_2 = \omega_2 \quad (3.43)$$

$$\mathbf{\Omega}_3 = \omega_3 \quad (3.44)$$

Os cossenos diretores entre os eixos c_1, c_2, c_3 e os eixos orbitais a_1, a_2, a_3 são obtidos fazendo $\psi = 0$ nas equações de (3.9) a (3.17).

Denotando os momentos de inércia sobre o eixo de simetria por C e qualquer eixo transversal normal ao eixo de simetria por A , a energia cinética de rotação toma a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{2} \left\{ A \left[(\mathbf{\Omega} \sin \theta_2 - \dot{\theta}_1)^2 (\mathbf{\Omega} \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C (\mathbf{\Omega} \cos \theta_2 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 + \dot{\psi}^2) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ A \left[\dot{\theta}^2 + (\mathbf{\Omega} + \dot{\phi})^2 \sin^2 \theta \right] + C \left[(\mathbf{\Omega} + \dot{\phi}) \cos \theta + \dot{\psi} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde a energia potencial é simplesmente

$$\mathbf{V} = \frac{3}{2} (C - A) \mathbf{\Omega}^2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_1 = \frac{3}{2} (C - A) \mathbf{\Omega}^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta \quad (3.46)$$

As equações (3.46) e (3.47) revelam que a hamiltoniana é uma integral de Jacobi (que também é verdade para corpos não simétricos) e que ψ é uma coordenada cíclica. O momento angular conservado correspondente pode ser escrito

$$\begin{aligned}\beta_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = C(\boldsymbol{\Omega} \cos \theta_2 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 + \dot{\psi}) \\ &= C \left[(\boldsymbol{\Omega} + \dot{\phi}) \cos \theta + \dot{\psi} \right] = C_n = cte\end{aligned}\quad (3.47)$$

onde n é a velocidade angular constante sobre o eixo de simetria. Como ψ é cíclico, podemos reduzir o problema para dois graus de liberdade.

A hamiltoniana do problema pode ser escrita em termos das coordenadas das velocidades associadas, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{\theta}_2} \dot{\theta}_2 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{\theta}_1} \dot{\theta}_1 - \mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \mathbf{R} \\ &= \frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{1}{2} A \boldsymbol{\Omega}^2 \sin^2 \theta + \\ &+ \frac{3}{2} (C - A) \boldsymbol{\Omega}^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta - \beta_\psi \boldsymbol{\Omega} \cos \theta + \frac{1}{2} \beta_\psi^2 = cte\end{aligned}\quad (3.48)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{L} - \beta_\psi \dot{\psi} = \frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + A \boldsymbol{\Omega} \dot{\phi} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} A \boldsymbol{\Omega}^2 \sin^2 \theta \\ &- \frac{3}{2} (C - A) \boldsymbol{\Omega}^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta - \frac{1}{2C} \beta_\psi [\beta_\psi - 2C(\boldsymbol{\Omega} + \dot{\phi}) \cos \theta]\end{aligned}\quad (3.49)$$

A equação (3.47) representa as duas versões da integral de Jacobi na qual está sendo usada a conservação do momento angular sobre o eixo de simetria. Desta maneira, precisamos nos preocupar apenas com um sistema de quarta ordem ao invés de um sistema de sexta ordem.

A integral de Jacobi, chamada Hamiltoniana, pode ser escrita na forma geral

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_2^* + \mathbf{U} = \mathbf{h} = cte \quad (3.50)$$

onde \mathbf{T}_2^* é uma função quadrática positiva definida nas velocidades $\dot{\theta}_2$, e $\dot{\theta}_1$ ou $\dot{\phi}$ e $\dot{\theta}$ e \mathbf{U} é uma função que depende apenas das coordenadas θ_2 e θ_1 ou ϕ e θ , respectivamente. A função \mathbf{U} tem a forma explícita

$$\mathbf{U} = -\frac{1}{2}A\Omega^2 \sin^2 \theta - \beta_\psi \Omega \cos \theta + \frac{3}{2}(C - A\Omega^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta) \quad (3.51)$$

O sistema possui posições de equilíbrio relativas ao referencial orbital nos pontos onde $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 = 0$ e θ_2 e θ_1 satisfazem as equações

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta_2} = [(3C - 4A)\Omega \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \beta_\psi] \Omega \sin \theta_2 \cos \theta_1 = 0 \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta_1} = & - [A\Omega \cos^2 \theta_2 \cos \theta_1 - \beta_\psi \cos \theta_2 \\ & + 3(C - A)[\Omega \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_1] \Omega \sin \theta_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

ou para os pontos onde $\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$ e ϕ e θ são as soluções de

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \phi} = 3(C - A)\Omega^2 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta = 0 \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} = - [A\Omega \cos \theta \beta_\psi - 2(C - A)\Omega \sin^2 \phi \cos \theta] \Omega \sin \theta = 0 \quad (3.55)$$

Embora geometricamente o número de posições de equilíbrio seja relativamente grande, algumas das posições são dinamicamente equivalentes, e conduzem a mesma estabilidade. Por esta razão concentraremos em três posições que descrevem completamente o comportamento dinâmico do sistema. Estes pontos de equilíbrio, em termos de θ_2 e θ_1 , são

$$E_1 : \quad \theta_2 = \theta_1 = 0 \quad (3.56)$$

$$E_2 : \quad \theta_2 = 0, \quad \theta_1 = \arccos\left(\frac{\beta_\psi}{A\Omega}\right) \quad (3.57)$$

$$E_3 : \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \arccos\left(-\frac{\beta_\psi}{(3C - 4A)\Omega}\right) \quad (3.58)$$

ao passo que em termos de ϕ e θ são:

$$E_1 : \quad \theta = 0, \quad \phi \text{ arbitrário} \quad (3.59)$$

$$E_2 : \quad \phi = 0, \quad \theta = \arccos\left(\frac{\beta_\psi}{A\Omega}\right) \quad (3.60)$$

$$E_3 : \quad \phi = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{\beta_\psi}{(3C - 4A)\Omega}\right) \quad (3.61)$$

Não é difícil ver que ambas as expressões de (3.57) a (3.59) e de (3.60) a (3.62) representam geometricamente a mesma posição de equilíbrio. Como para $\theta = 0$ as velocidades angular $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ são colineares, usaremos as rotações θ_2 e θ_1 para testar a estabilidade do ponto de equilíbrio E_1 e ϕ e θ para os pontos E_2 e E_3 .

Investigaremos a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema por meio do método direto de Lyapunov, com a hamiltoniana como uma função de Lyapunov. Como $\dot{\mathbf{H}}$ é zero, podemos esperar estabilidade mais simples, já que estabilidade assintótica não é possível. O problema se reduz em testar H com sinais definidos, e como \mathbf{T}_2^* é positiva definida por definição, o problema reduz mais testando se \mathbf{U} é positiva definida. Novamente usaremos o critério de Sylvester, pois necessitamos calcular a matriz hessiana $[\hbar]$.

Note que $[\hbar]$ calculada em um ponto de equilíbrio podem ser considerada como uma matriz de coeficientes de uma forma quadrática, nomeada de função \mathbf{U} na vizinhança do ponto de equilíbrio em questão. A função \mathbf{U} pode ser vista como

uma superfície tri-dimensional no espaço euclidiano, definida por $z = \mathbf{U}, \theta_2$, e θ_1 ou $z = \mathbf{U}, \phi$, e θ . Quando $[\hbar]$ é positiva definida num dado ponto de equilíbrio, a função \mathbf{U} possui ponto mínimo, e conseqüentemente se \mathbf{U} não é positiva definida, então possui ponto máximo.

Se $[\hbar]$ possui sinal variante num ponto de equilíbrio, então \mathbf{U} possui um ponto de sela. Os elementos que dependem dos parâmetros do sistema, e a matriz $[\hbar]$ muda com a mudança destes parâmetros. Num ponto de equilíbrio onde o determinante de $[\hbar]$ é zero, existe um ponto de bifurcação. Todavia, devemos lembrar que a função de Lyapunov \mathbf{H} é definida não somente pelas coordenadas mas também pelas velocidades. Daí, como \mathbf{T}_2^* é positiva definida num ponto de equilíbrio para o qual \mathbf{U} tem um máximo, \mathbf{H} tem um ponto de sela.

Os elementos da matriz hessiana $[\hbar]$, correspondendo as coordenadas θ_2 e θ_1 , são:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \theta_2^2} = [(3C - 4A)\Omega \cos(2\theta_2) + \beta_\psi \cos \theta_2] \Omega \cos \theta_1 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} = -[2(3C - 4A)\Omega \cos \theta_2 \cos \theta_1 - \beta_\psi] \Omega \sin \theta_2 \sin \theta_1 \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \theta_1^2} = -[A \cos^2 \theta_2 - 3(C - A) \sin^2 \theta_2] \Omega^2 \cos(2\theta_1) + \beta_\psi \Omega \cos \theta_2 \cos \theta_1 \quad (3.64)$$

de modo que a matriz hessiana para o ponto de equilíbrio E_1 é

$$[\hbar]_{E_1} = \begin{bmatrix} (3C - 4A)\Omega^2 + \beta_\psi & 0 \\ 0 & -A\Omega^2 + \beta_\psi \Omega \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Daí, o ponto E_1 é estável se as condições

$$\beta_\psi > (4A - 3C)\Omega, \quad \beta_\psi > 4\Omega \quad (3.66)$$

são satisfeitas. As condições (3.66) indicam que é possível estabilizar uma posição de equilíbrio, que seria instável, contanto que o satélite tenha uma rotação suficientemente alta sobre os eixos de simetria. O número de rotações depende proporcional-

mente do momento de inércia. Isto prova a conveniência de introduzir parâmetros não dimensionais

$$b = \frac{\beta_\psi}{C\Omega} = \frac{n}{\Omega}, \quad \mathbf{r} = \frac{C}{A} \quad (3.67)$$

De modo que a condição (3.66) torna-se

$$b > \frac{4}{\mathbf{r}} - 3, \quad b > \frac{1}{\mathbf{r}} \quad (3.68)$$

Isto nos permite visualizar um parâmetro plano b versus \mathbf{r} com as inequações (3.69), definindo uma região plana onde o ponto de equilíbrio E_1 é estável.

Para investigar o restante dos pontos de equilíbrio, escrevemos os elementos da matriz Hessiana

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \phi^2} = 3(C - A)\Omega^2 \cos(2\phi) \sin^2 \theta \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \phi \partial \theta} = \frac{3}{2}(C - A)\Omega^2 \sin(2\phi) \sin(2\theta) \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \theta^2} = - [A - 3(C - A) \sin^2 \phi] \Omega^2 \cos(2\theta) + \beta_\psi \Omega \cos \theta \quad (3.71)$$

Isto nos permite calcular a matriz hessiana associada com o ponto de equilíbrio E_2 , definido pelo segundo conjunto de condições em (3.60), (3.61) e (3.62):

$$[\hbar]_{E_2} = \begin{bmatrix} 3(C - A)\Omega^2 \left(1 - \frac{\beta_\psi^2}{A^2\Omega^2}\right) & 0 \\ 0 & A\Omega^2 \left(1 - \frac{\beta_\psi^2}{A^2\Omega^2}\right) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Em termos dos parâmetros b e \mathbf{r} , concluímos que o ponto de equilíbrio E_2 é estável se

$$b < \frac{1}{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} > 1 \quad (3.73)$$

A matriz hessiana correspondente ao ponto E_3 tem a forma

$$[\tilde{h}]_{E_2} = \begin{bmatrix} -3(C - A)\Omega^2 \left[1 - \frac{\beta_\psi^2}{(3C-4A)^2\Omega^2}\right] & 0 \\ 0 & -(3C - 4A)\Omega^2 \left[1 - \frac{\beta_\psi^2}{(3C-4A)^2\Omega^2}\right] \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

estabelecendo as condições de estabilidade.

$$\mathbf{r} < 1, \quad b < \frac{4}{\mathbf{r}} - 3 \quad (3.75)$$

3.4 Controle de uma Espaçonave Particular

Faremos nesta seção um exemplo de controle de uma espaçonave particular, utilizando o conceito de **gradiente de gravidade**, com o objetivo de completar o presente capítulo. Analisaremos dois casos: Controle Linear e Controle Não-linear. A principal referência utilizada nesta seção foi [40].

3.4.1 Controle Linear de uma Espaçonave Particular

Nesta seção, as equações de movimento são apresentadas para uma espaçonave supostamente rígida controlada por volantes de inércia (CMG - Control Moment Gyros) em uma órbita circular ao redor da Terra. O Modelo não-linear da espaçonave inclui a cinemática de atitude da espaçonave, a dinâmica rotacional e o momento cinético do volante de inércia. As equações de atitude são expressas em termos dos ângulos de Euler relacionando um triedro com eixos vinculados ao corpo a um triedro ortogonal de referência que inclui a vertical local e a horizontal local (VLHL).

Admite-se que a espaçonave esteja em uma órbita circular com velocidade angular orbital n . Os sistemas de coordenadas de interesse são o triedro ortogonal direto, que inclui a vertical local e a horizontal local e a horizontal local (VLHL), e o triedro com eixos vinculados ao corpo. O VLHL tem sua origem localizada no centro de

massa da espaçonave e é definido na Figura 3.4.1. O plano $X_L - Z_L$ é o plano orbital instantâneo. O eixo Z_L se desenvolve ao longo do vetor momento angular orbital instantâneo e é negativo na direção do vetor momento angular. O eixo X_L completa o triedro ortogonal direto.

Ao definir a orientação angular dos eixos ligados ao corpo da espaçonave com relação a um triedro de referência, uma série de rotações dos ângulos de Euler é executada para determinar a orientação, de forma unívoca. Há três rotações principais: em torno dos eixos X, Y e Z . A seqüência de ângulos de Euler associada ao sistema em pauta é guinada, arfagem, e rolamento (vide Figura 3.4.1). Na seqüência, $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ são os ângulos de Euler de rolamento, de arfagem e de guinada do corpo com relação ao triedro ortogonal VLHL de referência, e $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ são as velocidades angulares absolutas segundo os eixos do corpo.

A cinemática da atitude da espaçonave é dada por

$$\dot{\theta} = \mathbf{R}(\theta)\omega + \mathbf{n} \quad (3.76)$$

onde,

$$\mathbf{R}(\theta) = \frac{1}{\cos \theta_3} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\cos \theta_1 \sin \theta_3 & \sin \theta_1 \sin \theta_3 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 \cos \theta_3 & \cos \theta_1 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

A equação do momento cinético da espaçonave é:

$$\dot{\mathbf{H}} + \omega \times \mathbf{H} = \tau_{ext} \quad (3.79)$$

onde \mathbf{H} indica o vetor momento cinético no triedro ligado ao corpo e τ_{ext} é o vetor torque externo (por exemplo, torques de gradiente de gravidade, torques

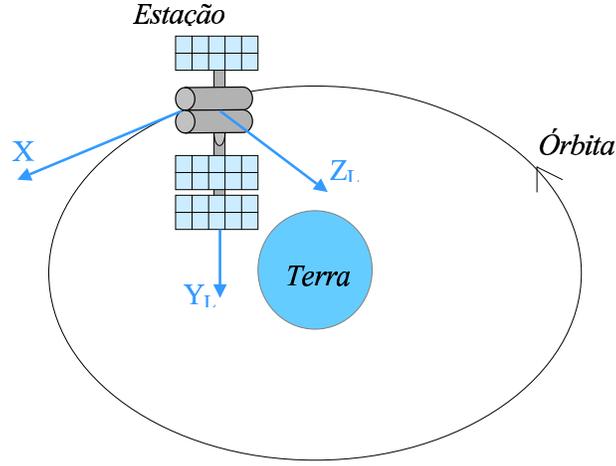


Figura 3.5: Triedro de Referência VLHL para uma espaçonave

aerodinâmicos e torques de controle). Visto que a espaçonave é rígida por hipótese, tem-se $\mathbf{H} = \mathbf{I}\omega$, onde \mathbf{I} é a matriz de inércia da espaçonave

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_2 & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_3 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

O torque externo inclui o torque de **gradiente de gravidade** e o torque de controle do volante de inércia. Na ausência de perturbações externas (por exemplo, torques aerodinâmicos), a equação (3.79) se torna

$$\mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I}\omega = \tau_{gg} - \mathbf{u} \quad (3.81)$$

onde τ_{gg} é o vetor torque de **gradiente de gravidade** e $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ é o vetor torque de controle do volante de inércia.

O torque de gradiente de gravidade é devido ao fato de o campo gravitacional da Terra não ser uniforme sobre o corpo da espaçonave. Como o campo gravitacional da Terra é o quadrado do inverso das distâncias, o torque de **gradiente de gravidade** pode ser expresso segundo os eixos ligados ao corpo como

$$\tau_{gg} = 3n^2 \mathbf{c} \times \mathbf{Ic} \quad (3.82)$$

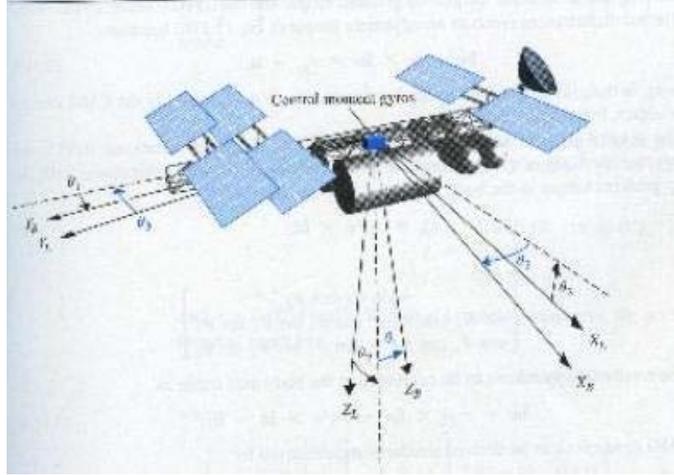


Figura 3.6: Espaçonave e giroscópios de controle

onde

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

A dinâmica de rotação pode ser expressa no triedro ligado ao corpo como

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + 3n^2\mathbf{c} - \mathbf{u} \quad (3.84)$$

A dinâmica do volante de inércia pode ser reduzida de forma semelhante e é dada por

$$\dot{\mathbf{h}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} + \mathbf{u} \quad (3.85)$$

onde \mathbf{h} é o momento cinético do volante de inércia e \mathbf{u} é o torque de controle do volante de inércia.

A abordagem convencional para o controle de atitude da espaçonave e para o projeto de gerenciamento do momento cinético consiste em desenvolver um modelo

linear representando a atitude da espaçonave e o momento cinético do volante de inércia linearizando-se o modelo não-linear nas equações (3.77), (3.78), (3.84) e (3.85). Esta linearização é efetuada por uma aproximação em série de Taylor comum. Os métodos de projeto de controle linear podem ser facilmente aplicados.

Linearizar o modelo não-linear de espaçonave admitindo pequenos desvios de atitude, pequenas velocidades angulares, pequenos valores de momento de inércia do volante de inércia e produtos de inércia insignificantes (isto é, $I_{ij} = 0, i \neq j$) resulta em um desacoplamento do eixo de arfagem e dos eixos de guinada e rolamento. As equações linearizadas para os eixos de arfagem:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3n^2\Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \omega_2 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{I_2} \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (3.86)$$

onde, $\Delta_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}$.

As equações linearizadas para os eixos de rolamento e guinada são

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -n & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3n^2\Delta_1 & 0 & 0 & -n\Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n\Delta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \omega_1 \\ \omega_3 \\ h_1 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{I_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

onde, $\Delta_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}$ e $\Delta_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}$.

Convém observar que o problema de controle do eixo de arfagem é um problema de uma única entrada, enquanto que o problema de controle de rolamento e guinada é um problema de entradas múltiplas.

Valores de parâmetros típicos para a estação espacial são:

$$I_1 = 50,2810^6(\text{slug} - \text{ft}^2), \quad (3.88)$$

$$I_2 = 10,8010^6, \quad (3.89)$$

$$I_3 = 58,5710^6, \quad (3.90)$$

e $n = 0,0011\text{rad/s}$. Com estes parâmetros típicos, a representação no espaço de estados do eixo de arfagem é dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3.91)$$

onde,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \omega_2 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2,710^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9,210^{-8} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Geralmente o objetivo operacional é manter a espaçonave próxima de uma atitude apontando para a Terra, o que acarreta $\theta_1 \approx 0$, $\theta_2 \approx 0$ e $\theta_3 \approx 0$. Fisicamente, isto significa que se deseja que o triedro ligado ao corpo esteja aproximadamente alinhado com o triedro VLHL.

Deseja-se também manter o momento cinético do volante de inércia pequeno (isto é, que \mathbf{h} seja pequeno), porque quando o limite físico do momento cinético máximo for alcançado os volantes de inércia não podem mais gerar torque, e a espaçonave ficará descontrolada (obviamente esta não é uma condição desejável).

Massa	$m = 0.2kg$
Sensor luminoso	$k_1 = 1V/m$
Raio	$r = 0.15m$
Motor	
Indutância	$L = 0$
Atrito	$b = 0.25N - ms/rad$
Resistência	$R = 2\Omega$
Constante	$K_m = 2N - m/A$
Inércia	$J = J_{motor} + J_{potia} : J = 0.01kg - m^2$

Tabela 3.1: Parâmetros do Dispositivo de Impressão

Logo, linearizar as equações não-lineares por meio de uma série de Taylor supondo pequenos os ângulos, as velocidades angulares, e o momento cinético faz sentido em engenharia. Entretanto, a sensibilidade à suposição de produtos de inércia pequenos (isto é, $I_{ij} = 0$ para $i \neq j$) depende altamente da configuração particular da espaçonave.

Um conjunto consistente de unidades para este problema é $\theta(rad)$, $\omega(rad/s)$, $\mathbf{h}(ft - lb - s)$, $\mathbf{u}(ft - lb)$, $\tau_{gg}(ft - lb)$ e $\mathbf{I}(slug - ft^2)$. É claro que uma configuração equivalente de unidades SI pode ser obtida usando as conversões da tabela 3.1.

3.4.2 Controle Não-Linear de uma Espaçonave Particular

A estação espacial internacional, mostrada na Figura 3.4.2, é um bom exemplo de uma espaçonave multifuncional que pode operar em configurações muito diferentes. Um primeiro passo no processo do modelo do sistema de controle é desenvolver um modelo matemático do movimento da espaçonave. Em geral, este modelo descreve os movimentos de translação e atitude da espaçonave sob a influência de forças e torques externos, e controlador e atuador de forças e torques.

Devemos decidir sobre o sistema de coordenadas e as notações utilizadas na derivação das equações do movimento. Para o problema modelando a espaçonave,

um sistema de coordenadas relevante pode incluir uma estrutura referencial inercial; uma estrutura de coordenadas esféricas; uma referência vertical local/horizontal local (ou estrutura de apontamento terrestre); e uma estrutura vinculada na espaçonave.



Figura 3.7: Estação Espacial Internacional

Com um apropriado sistema de coordenadas, podemos desenvolver as equações dinâmicas do movimento para uma espaçonave rígida em órbita. O modelo dinâmico resultante da espaçonave é um conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares altamente acopladas. Nosso objetivo é simplificar o modelo mantendo as características importantes do sistema. Isto não é uma tarefa trivial, mas é uma tarefa importante.

Muitas espaçonaves (tais como a estação espacial internacional) manterão uma atitude de apontamento terrestre. Isto significa que câmeras e outros instrumentos científicos apontarão para a Terra. Por outro lado, instrumentos científicos que não apontam para a Terra, verão o espaço profundo, como esperado.

Para alcançar a atitude de apontamento terrestre a espaçonave necessita de um sistema de controle de atitude capaz de aplicar os torques necessários para rotacionar o veículo. A estação espacial internacional utiliza controle por volantes de inércia (CMGs - Control Moment Gyros) e reação a controle de jatos como principais atuadores. Os CMGs são permutações de momentos e são preferíveis para controle de

reação de jatos, pois eles não gastam combustível. Precisamos minimizar missões de reabastecimento na estação espacial internacional o máximo possível.

Entretanto, quando o CMG torna-se saturado, eles não podem proporcionar controle de torques por muito tempo e sendo assim, sem a reação de controle de jatos, a espaçonave estaria fora de controle. Claramente queremos evitar a saturação CMG. Manter a atitude desejada requer contínuas permutações de momentos entre os CMGs e a estação espacial, pois distúrbios (tais como torques aerodinâmicos) movem a espaçonave para longe da atitude desejada. Controle contínuo de CMG não é possível sem dessaturação periódica.

Muitos métodos para dessaturação de CMGs são utilizáveis, mas usando a existência de torques ambientais naturais é preferido o método que minimiza a reação de controle de jatos. Precisamos de um sistema de controle que possa manter a orientação desejada da espaçonave, bem como simultaneamente realize o gerenciamento do momento para CMGs. Uma idéia inteligente é utilizar torques de gradiente de gravidade (que ocorrem naturalmente e o custo é grátis) para dessaturar continuamente o mecanismo de permutação de momento.

Devido à variação do campo gravitacional da Terra sobre a estação espacial internacional, o momento total gerado pelas forças gravitacionais sobre o centro de massa da espaçonave é diferente de zero. Este momento diferente de zero é chamado de **torque de gradiente de gravidade**. Uma mudança na atitude, provoca uma mudança no torque de gradiente de gravidade atuando no veículo.

Infelizmente utilizando torques de gradiente de gravidade como dessaturador de CMG pode levar a orientação da espaçonave para longe da atitude de apontamento terrestre. Assim, combinando controle de atitude e gerenciamento de momento dá-se o problema de compromisso.

3.4.2.1 Sistemas de Coordenadas Inerciais

Em geral todo o modelo desenvolvido requer uma especificação de uma estrutura referencial inercial (ou não-acelerada). A estação espacial está sendo projetada com uma estrutura inercial originando no centro de massa da Terra, como mostra as

Figuras 3.4.2.2 e 3.4.2.4. O eixo Z_G esta alinhado ao longo do eixo polar na direção do vetor momento angular da Terra, onde efeitos de nutação da rotação da Terra são desprezados.

A nutação é uma oscilação de baixa-amplitude e curto-período do eixo de rotação da Terra. Assume-se que o eixo polar está orientado tal que o eixo X_G aponta para o centro de massa da Terra com respeito ao Sol. O eixo Y_G é orientado tal que o sistema de coordenadas complete um triedro ortogonal direto. Os vetores unitários i_G, j_g e k_g são constantes e a origem não é acelerada.

3.4.2.2 Sistema de Coordenadas Esféricas

Considere a espaçonave em órbita na Terra como mostrado na Figura 3.4.2.2. A posição da espaçonave, \mathbf{r} para um dado tempo é dada por:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{i}_S \quad (3.95)$$

onde r é a distancia radial do centro de massa da Terra ao centro de massa da espaçonave, e \mathbf{i}_S é o vetor unitário apontando na direção radial. As coordenadas dadas por r, ψ e ϕ caracterizam o sistema de coordenadas esféricas originando no centro de massa da Terra. Os vetores unitários $\mathbf{i}_S, \mathbf{j}_S$ e \mathbf{k}_S são relacionados com os vetores unitários inerciais fixos $\mathbf{i}_G, \mathbf{j}_G$ e \mathbf{k}_G pela relação:

$$\mathbf{i}_S = \cos \psi \cos \phi \mathbf{i}_G + \sin \psi \cos \phi \mathbf{j}_G + \sin \phi \mathbf{k}_G \quad (3.96)$$

$$\mathbf{j}_S = -\sin \psi \mathbf{i}_G + \cos \psi \mathbf{j}_G \quad (3.97)$$

$$\mathbf{k}_S = -\cos \psi \sin \phi \mathbf{i}_G - \sin \psi \sin \phi \mathbf{j}_G + \cos \phi \mathbf{k}_G \quad (3.98)$$

$$(3.99)$$

Podemos utilizar estas relações na forma da matriz de transformação

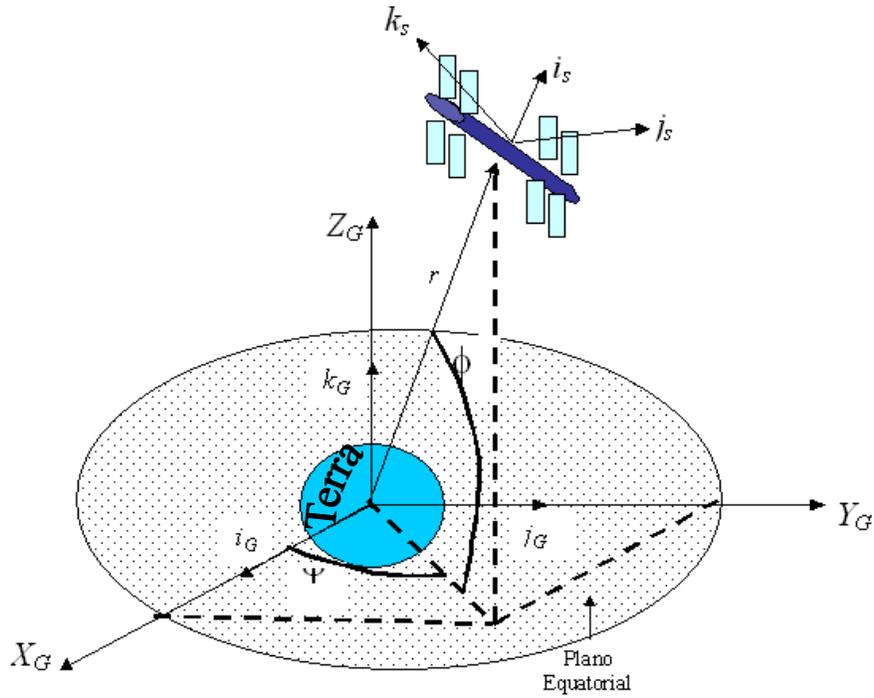


Figura 3.8: Sistemas de coordenadas inercial e esférico

$$\mathbf{T}^{SG} \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ -\cos \psi \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

que transforma vetores na estrutura inercial em vetores na estrutura esférica.

3.4.2.3 sistema de Coordenadas Vertical Local/Horizontal Local

O sistema de coordenadas vertical local/horizontal local origina no centro de massa da estação espacial mas não rotaciona com o corpo da espaçonave. Como mostrado na Figura 3.4.2.4, o eixo Z_L origina no centro de massa da estação espacial passando pelo centro de massa da Terra.

O plano X_L-Z_L corresponde ao plano de órbita inclinada instantâneo. O eixo Y_L

aponta na direção oposta do vetor momento angular orbital instantâneo. A direção de X_L é escolhida para completar um triedro ortogonal direto, e esta na direção da velocidade da estação espacial. Quando a órbita da espaçonave é circular, o eixo X_L está alinhado com o vetor velocidade.

3.4.2.4 Sistema de Coordenada do Corpo

O sistema de coordenada do corpo origina no centro de massa da estação espacial e rotaciona com a espaçonave com velocidade angular ω . A estrutura do corpo está relacionada com a estrutura vertical local/horizontal local por uma seqüência de três rotações ordenadas: arfagem, guinada e rolamento. Esta (não única) seqüência de rotações resulta a seqüência de transformações da estrutura vertical local/horizontal local para a estrutura do corpo dada por

$$\mathbf{T}^{BL} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_2 \quad (3.101)$$

onde,

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

e onde θ_1 é rolamento, θ_2 é arfagem e θ_3 é guinada. Após multiplicar as matrizes, podemos escrever a transformação \mathbf{T} , que leva vetores na estrutura vertical local/horizontal local para vetores na estrutura do corpo, como:

$$\mathbf{T}^{BL} = \begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_3 & s\theta_3 & -s\theta_2 c\theta_3 \\ s\theta_1 s\theta_2 - c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 & c\theta_1 c\theta_3 & s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\ c\theta_1 s\theta_2 + s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 & -s\theta_1 c\theta_3 & c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

onde, $s\theta \equiv \sin \theta$ e $c\theta \equiv \cos \theta$

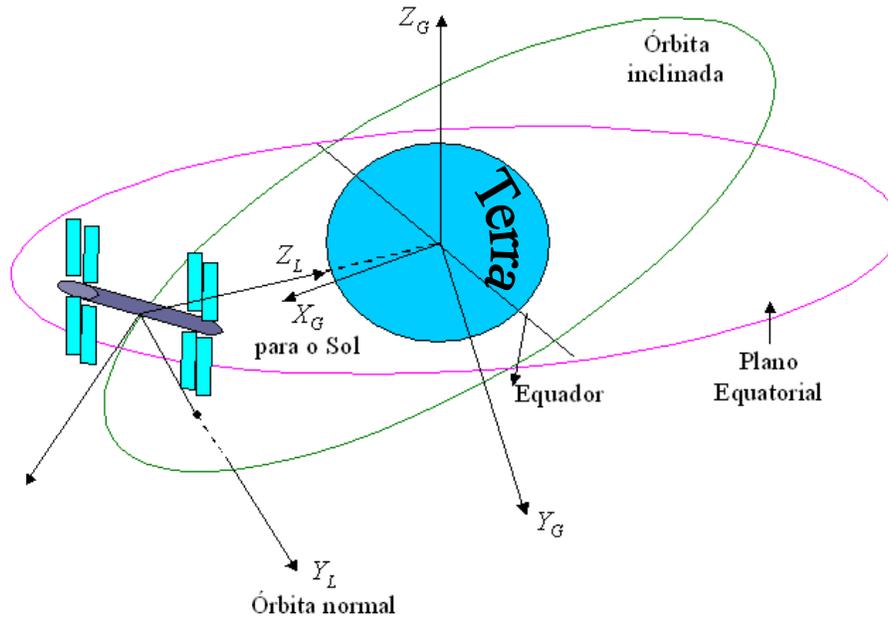


Figura 3.9: Estruturas inerciais e vertical local/horizontal local

Quando $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$, a estrutura do corpo está alinhada com a estrutura vertical local/horizontal local. Nesta situação a estação espacial está com apontamento terrestre. Para manter uma atitude de apontamento terrestre, a estação espacial internacional deve girar ou rotacionar sobre o eixo Y_B de tal maneira que mantenha o eixo Z_B apontando na direção da Terra, em outras palavras, queremos manter os eixos do corpo alinhados com os eixos da vertical local/horizontal local.

3.4.2.5 Algumas Observações sobre Forças Externas

A estrutura esférica é usada pois podemos descrever muito naturalmente forças gravitacionais na estação espacial internacional com esta estrutura de referência. A força induzida pelo campo gravitacional da Terra é a primeira força atuando numa espaçonave orbitando. Portanto, não podemos ignorar forças gravitacionais na dinâmica orbital. Entretanto, podemos fazer certas hipóteses sobre a distribuição da massa da Terra que nos permite simplificar a expressão para a força devido à gravidade.

Podemos tratar a Terra como uma massa pontual. Esta hipótese é equivalente a dizer que a Terra é uma esfera cuja massa está distribuída uniformemente. De fato, a Terra parece mais uma esfera achatada nos pólos com maior saliência no equador. Para problemas que requerem alta precisão de atitude e controle de trajetória devemos levar em conta com precisão a não esfericidade da Terra. Por exemplo, a posição radial da espaçonave TOPEX/Poseidon foi conhecida dentro de 3-5 cm! Obter esta órbita de precisão necessitou de um modelo de gravidade muito exato.

É claro que tal precisão foi necessária para a missão, pois o objetivo da missão era avaliar significativamente o nível do mar para tentar caracterizar o aquecimento global. A estação espacial internacional não requer a mesma alta precisão. Utilizando a hipótese da Terra ser esférica, podemos escrever a força da gravidade como:

$$\mathbf{f}_g = -\frac{\mu m}{r^2} \mathbf{i}_s, \quad (3.106)$$

onde, $\mu = 3.986032 \times 10^{14} m^3/s^2$ para a Terra e m é a massa da estação espacial internacional. A mudança na órbita devido ao fato de a Terra não ser uma esfera com massa uniformemente distribuída não é significativa para o nosso controle de atitude. Podemos assumir que um sistema de controle de trajetória está mantendo a trajetória orbital desejada e levando em conta os efeitos da não esfericidade da Terra.

Depois do curso de muitos meses, a mudança causada na órbita devido ao arrasto atmosférico atuante na estação espacial internacional é grande. Visto que o

problema de controle de atitude considerado aqui resulta de intervalos de tempos de apenas algumas horas, podemos ignorar a mudança na dinâmica causada pelo arrasto atmosférico atuante na estação espacial internacional.

Podemos também ignorar os efeitos gravitacionais do Sol, da Lua e de outros planetas. Isto é razoável desde que assumimos que o sistema de controle de trajetória está tratando do controle da órbita e levará em conta estes distúrbios na órbita. Relembrando que nosso assunto principal é controle de atitude e gerenciamento de momento, e não controle de trajetória. Ignoramos também os efeitos do campo magnético da Terra, radiação e ventos solares e ação e reação de partículas - eles possuem efeitos menores no movimento de atitude.

Visto que queremos manter os eixos do corpo alinhados com a vertical local/horizontal local, nosso objetivo de controle é manter θ_1 , θ_2 e θ_3 pequenos, apesar da presença de distúrbios externos persistentes. Ao mesmo tempo devemos manter o CMGs ao que se diz saturando. Portanto a meta de controle pode ser enunciada como:

Meta de Controle: MINIMIZAR OS ÂNGULOS DE ARFAGEM, GUINADA E ROLAMENTO NA PRESENÇA DE DISTÚRBIOS EXTERNOS PERSISTENTES E SIMULTANEAMENTE MINIMIZAR O MOMENTO CMG.

A taxa de variação no tempo do momento angular de um corpo sobre seu centro de massa é igual a soma dos torques externos atuando sobre o corpo. Então a dinâmica de atitude de uma estação espacial é governada pelos torques atuantes externamente. O principal torque externo atuando na estação espacial é devido à gravidade. Como mencionado anteriormente, a variação da gravidade sobre a estação espacial internacional (algumas partes do veículo são mais próximas da Terra do que outras partes) geram um momento no veículo denominado torque de gradiente de gravidade.

Visto que tratamos a Terra como uma massa pontual, o torque de gradiente de gravidade atuando na espaçonave é dado por:

$$\mathbf{T}_g = 3n^2 \mathbf{c} \times \mathbf{Ic} \quad (3.107)$$

onde n é a velocidade angular orbital ($n = 0.0011 \text{rad/s}$ para a estação espacial), e \mathbf{c} é a terceira coluna de \mathbf{T}^{BL} na equação (3.106):

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

A matriz \mathbf{I} é a matriz de inércia da espaçonave e é uma função da configuração da estação espacial. Então o torque de gradiente de gravidade dado pela equação (3.108) é uma função da configuração da espaçonave. Por exemplo, suponha que a espaçonave é uma esfera com

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_x \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

Então o torque de gradiente de gravidade atuando na espaçonave esférica é zero! Claramente, visto que queremos usar torques de gravidade para dessaturar nosso CMGs, queremos uma configuração de veículo capaz de gerar grandes torques de **gradiente de gravidade**.

Segue também da equação (3.108) que o torque de gradiente de gravidade é função da atitude θ_1, θ_2 e θ_3 . Queremos manter uma atitude prescrita (que é apontamento terrestre $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$), mas as vezes devemos desviar desta atitude de modo que possamos gerar torques de gradiente de gravidade que auxiliem no gerenciamento do momento CMG.

Outro fato muito importante é que o torque de gradiente de gravidade não está em função da velocidade ou posição da estação espacial. Na realidade o movimento de translação está acoplado ao movimento de atitude, e vice-versa. Mas, pelas hipóteses simplificadoras, temos um desacoplamento dos movimentos de translação e atitude.

Agora vamos examinar o efeito do torque aerodinâmico atuando na estação espacial. O torque aerodinâmico afeta o movimento de atitude da estação espacial. É gerado pela força de arrasto atmosférico que atua através do centro de pressão.

Em geral o centro de pressão e o centro de massa não são coincidentes, então é desenvolvido torques aerodinâmicos. O torque aerodinâmico é uma função senoidal que tende a oscilar ao redor de pequenas inclinações.

Como a estação espacial viaja em torno da Terra (uma volta a cada 90 minutos ou mais), ela move-se através de várias densidades de ar, causando então um torque aerodinâmico cíclico. Além disso, painéis solares da estação espacial rotacionam como ela a caminho do Sol. Este resultado entra em outra componente cíclica do torque aerodinâmico. O torque aerodinâmico é geralmente muito menor do que o torque de gradiente de gravidade. Portanto, para o projeto, podemos desprezar o arrasto atmosférico e vê-lo apenas como um distúrbio. Gostaríamos de um controlador para minimizar os efeitos dos distúrbios no movimento de atitude da espaçonave.

Torques causados pela gravidade de outros corpos planetários, campos magnéticos, pressão e ventos solares, e outros fenômenos menos significantes são muito menores do que a gravidade da Terra - que produz torques e torques aerodinâmicos. Podemos ignorar estes torques no modelo dinâmico e vê-los como distúrbios.

Finalmente, precisamos discutir o CMGs entre eles. Primeiro, poderíamos juntar todos os CMGs e vê-los como uma fonte de energia simples de torque, mas ao invés disto, veremos cada momento de giro CMG individualmente. Representamos o momento total CMG com a variável \mathbf{h} . Precisamos saber e entender a dinâmica CMG nesta fase do projeto, para gerenciar seus momentos angulares. Mas desde que o tempo constante associado com estas dinâmicas são muito mais curtos do que a dinâmica de atitude, podemos ignorar as dinâmicas CMG e assumir que os CMGs podem produzir precisamente (e sem atraso de tempo) o torque demandado para o sistema de controle.

Numa nota prática, se insistirmos em incluir a dinâmica CMG na simulação computacional da espaçonave, teríamos de usar pequenos passos de tempo na integração numérica das equações do movimento para ver os efeitos da dinâmica CMG. Entretanto, para um passo de tempo pequeno, necessitaríamos que as constantes associadas com a dinâmica CMG fossem dependentes do tempo.

3.4.2.6 Simplificando o Modelo Não-Linear

Já discutimos numerosas hipóteses que fazem a dinâmica das equações do movimento mais significantes para o proposto projeto. Um resultado para estas hipóteses é que a cinemática e a dinâmica são independentes da dinâmica orbital (translação). Portanto, podemos excluir as equações do movimento de translação da espaçonave do modelo dinâmico para o controle e gerenciamento do momento deste projeto. Um modelo simplificado que podemos utilizar como base do projeto de controle é:

$$\dot{\Theta} = \mathbf{R}\Omega + \mathbf{n} \quad (3.110)$$

$$\mathbf{I}\dot{\Omega} = -\Omega \times \mathbf{I}\Omega + 3n^2\mathbf{c} \times \mathbf{Ic} - \mathbf{u} \quad (3.111)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = -\Omega \times \mathbf{h} + \mathbf{u} \quad (3.112)$$

onde,

$$\mathbf{R}(\Theta) = \frac{1}{c\theta_3} \begin{bmatrix} c\theta_3 & -c\theta_2s\theta_3 & s\theta_1s\theta_3 \\ 0 & c\theta_1 & -s\theta_1 \\ 0 & s\theta_1c\theta_3 & c\theta_1c\theta_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

onde u é a entrada do torque CMG. Lembramos que \mathbf{I} é a matriz de inércia e não a matriz identidade.

A equação (3.111) representa a cinemática - a relação entre os ângulos de Euler, denotados por Θ e o vetor velocidade angular do corpo, Ω . A equação (3.112) representa a dinâmica de atitude da estação espacial. Os termos do lado direito representam a soma dos torques externos atuando na espaçonave.

O primeiro torque é devido ao produto cruzado de inércia, que é um resultado da rotação dos eixos do corpo relativamente à estrutura referencial (visto que é a estrutura em que eles ocorrem naturalmente), então devemos levar em conta o movimento relativo do corpo e estruturas inerciais.

O segundo termo representa o torque de gradiente de gravidade, e o último termo é o torque aplicado na espaçonave pelos atuadores, que é o CMGs. Os torques de perturbação (devido à fatores como a atmosfera) não estão incluídos no modelo apresentado aqui, mas são adicionados diretamente no lado direito da equação (3.112).

A equação (3.113) representa o momento CMG total, no qual a taxa de variação no tempo do momento angular contida no CMGs é igual a \mathbf{u} , torque de interação entre a espaçonave e CMGs. O movimento relativo do corpo e da estrutura inercial é levado em conta pelo termo $-\Omega \times \mathbf{h}$.

3.4.2.7 Linearização

Um sistema de controle e gerenciamento de momento requer um controlador projetado que possa simultaneamente prescrever o controle \mathbf{u} , que mantém a orientação de apontamento terrestre da espaçonave e minimizam \mathbf{b} , que é o momento CMG. O controlador deveria simultaneamente realizar o controle de atitude e o gerenciamento de momento.

O gerenciador de momento busca o torque de equilíbrio de atitude (torque equilibrium attitude - TEA), que fazem com que a soma dos torques atuantes na espaçonave seja zero (ou pelo menos minimizados). Nesta atitude os torques CMG são também nulos (ou mínimos). O principal fator influenciando o TEA são a configuração da espaçonave (dada pela matriz de inércia) e as perturbações aerodinâmicas.

Para a linearização assumimos que a espaçonave tem produtos de inércia nulos (isto é, que a matriz de inércia é diagonal) e as perturbações aerodinâmicas são negligenciadas. Sob tais condições, um TEA é:

$$\Theta = 0 \tag{3.113}$$

$$\Omega = (0, -n, 0) \tag{3.114}$$

$$\mathbf{h} = 0 \tag{3.115}$$

Uma aproximação convencional para o projeto de gerenciamento de momento da espaçonave é desenvolver um modelo linear, representando a atitude da espaçonave e o momento CMG pela linearização do modelo não-linear sobre o TEA. Esta linearização é realizada pelo critério de aproximação em séries de Taylor. Os métodos para projetos de controle linear podem então serem prontamente aplicados.

Linearizando o modelo não-linear da espaçonave nas equações (3.111)-(3.113), assumindo pequenos desvios de atitude, pequenas variações, pequenos estados de momento CMG, produtos cruzados de inércia iguais a zero e negligenciando perturbações aerodinâmicas, resultam em um desacoplamento dos eixos de arfagem, rolamento e guinada. As equações linearizadas para o eixo de arfagem são:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3n^2\Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \omega_2 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{I_2} \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (3.116)$$

onde, $\Delta_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}$.

O subscrito 2 refere-se aos termos do eixo de arfagem, o subscrito 1 designa os termos referentes ao eixo de rolamento e o subscrito 3 representa os termos do eixo de guinada. As equações linearizadas para os eixos de rolamento/guinada são:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -n & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3n^2\Delta_1 & 0 & 0 & -n\Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n\Delta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \omega_1 \\ \omega_3 \\ h_1 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{I_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

onde $\Delta_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}$ e $\Delta_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}$.

3.4.2.8 Análise do Eixo de Arfagem (Pitch)

Definiremos o vetor de estado como:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \theta_2(t) \\ \omega_2(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.118)$$

e a saída como:

$$y(t) = \theta_2(t) = (1 \ 0 \ 0) \mathbf{x}(t) \quad (3.119)$$

Estamos considerando aqui a atitude da espaçonave, $\theta_2(t)$, como a saída de interesse. Nosso modelo de variável de estado é

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3.120)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \quad (3.121)$$

onde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3n^2\Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{I_2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0], \mathbf{D} = [0]$$

e onde u é o torque CMG no eixo de arfagem. A solução das equações diferenciais de estado, dada pela equação (3.121) é;

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad (3.122)$$

onde,

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \exp(\mathbf{A}t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{\sqrt{3n^2\Delta_2}t} + e^{-\sqrt{3n^2\Delta_2}t}) & \frac{1}{2\sqrt{3n^2\Delta_2}}(e^{\sqrt{3n^2\Delta_2}t} - e^{-\sqrt{3n^2\Delta_2}t}) & 0 \\ \frac{1}{2}(e^{\sqrt{3n^2\Delta_2}t} - e^{-\sqrt{3n^2\Delta_2}t}) & \frac{1}{2}(e^{\sqrt{3n^2\Delta_2}t} + e^{-\sqrt{3n^2\Delta_2}t}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Podemos ver que se $\Delta_2 > 0$, então alguns elementos da matriz de estado de translação serão termos da forma e^{at} , onde $a > 0$. Como veremos isto indica que nosso sistema é instável. Além disso, se estivermos interessados na saída, $y(t) = \theta_2(t)$, temos

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (3.123)$$

Com $\mathbf{x}(t)$ dado por

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \phi(t - \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad (3.124)$$

e segue que,

$$y(t) = \mathbf{C}\phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}\phi(t - \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad (3.125)$$

A função de transferência relacionando a saída $Y(s)$ com a entrada $U(s)$ é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = -\frac{1}{I_2(s^2 - 3n^2\Delta_2)}. \quad (3.126)$$

Os fatores da equação característica são:

$$s^2 - 3n^2\Delta_2 = (s + \sqrt{3n^2\Delta_2})(s - \sqrt{3n^2\Delta_2}) = 0. \quad (3.127)$$

Se $\Delta_2 > 0$ (isto é, se $I_3 > I_1$), então temos dois pólos reais, um na parte esquerda do plano e outro na parte direita. Para uma espaçonave com $I_3 > I_1$, podemos dizer que uma atitude de apontamento terrestre é uma orientação instável.

Por outro lado, se $\Delta_2 < 0$ (isto é, quando $I_1 > I_3$), a equação característica possui duas raízes imaginárias:

$$s = \pm j\sqrt{3n^2(I_1 - I_2)} \quad (3.128)$$

O programa em **MatLab**TM usado para simular a resposta de condição inicial do eixo de arfagem da estação espacial quando $I_1 > I_3$, são mostrados na Figura 3.11. Este tipo de espaçonave está marginalmente estável. Na ausência de alguns torques CMG, a espaçonave oscilará ao redor da orientação de apontamento terrestre para pequenos desvios iniciais da atitude desejada.

```
% Parâmetros
I1 = 50.28e + 06;
I2 = 10.80e + 06;
I3 = 58.57e + 06;
Delta2 = (I3 - I1)/I2;
n = 0.0011;

% Modelo de Espaço de Estado
A = [0 10; 3 * n^2 * Delta2; 0 0];
B = [0 - 1/I2]';
C = [100];
D = [0];

% Resposta Simulada
x0 = [10 * pi/18000];
t = [0 : 1 : 1000];
u = 0 * t;
lsim(A, B, C, D, u, t, x0)
```

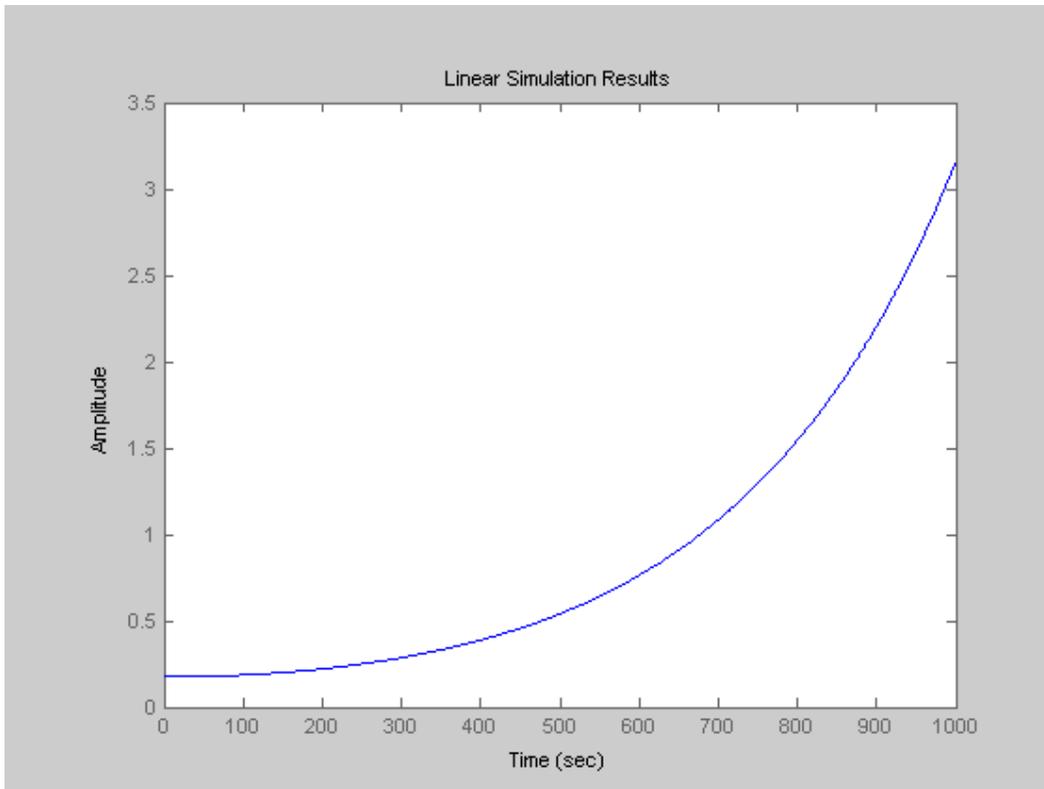


Figura 3.10: Resposta da condição inicial do eixo de pitch da estação espacial (sem controle de malha fechada) quando $I_3 > I_1$, mostrando resposta instável

% Parâmetros

$$I1 = 67.28e + 06;$$

$$I2 = 10.28e + 06;$$

$$I3 = 58.57e + 06;$$

$$Delta2 = (I3 - I1)/I2;$$

$$n = 0.0011;$$

% Modelo de Espaço de Estado

$$A = [010; 3 * n^2 * Delta20; 000];$$

$$B = [0 - 1/I21]';$$

$$C = [100];$$

$$D = [0];$$

```

% Resposta Simulada
x0 = [10 * pi/18000];
t = [0 : 1 : 1000];
u = 0 * t;
lsim(A, B, C, D, u, t, x0)

```

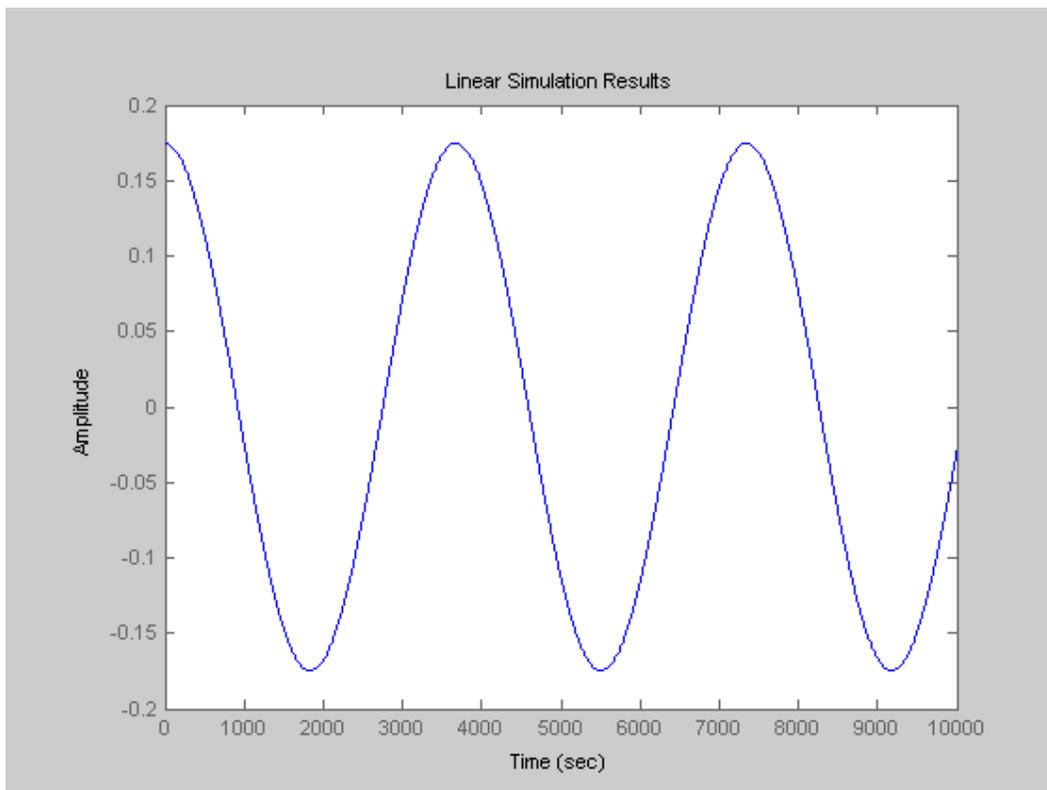


Figura 3.11: Resposta da condição inicial do eixo de pitch da estação espacial (sem controle de malha fechada) quando $I_1 > I_3$, mostrando resposta marginalmente estável

Segue agora o capítulo 4, onde apresentamos a dinâmica não-linear de uma viga no espaço, sujeita à atração gravitacional.

Para deduzir as equações não-lineares da viga no espaço, utilizamos um ferramental, que detalhamos no apêndice F.

Capítulo 4

Dinâmica não-linear de uma Viga no Espaço Sujeita à Atração Gravitacional

Utilizamos aqui o ferramental detalhado no apêndice F para deduzir as equações não-lineares da viga no espaço.

4.1 Modelagem Matemática e Hipóteses Básicas

Serão formuladas aqui as equações diferenciais não-lineares que governam o movimento da viga no plano do movimento de seu centro de massa. As equações aqui desenvolvidas, são aplicáveis no caso quando a viga está sujeita à forças de atração central de um ponto \mathbf{E} , que representa o centro de massa de um planeta esférico de raio \mathbf{R}_E e massa muito grande m_E . \mathbf{E} será tratado como um ponto inercial, ou seja, desprezaremos os efeitos do movimento de \mathbf{E} ao redor de qualquer corpo atrator. A viga pode estar sujeita a pequenas forças distribuídas e/ou concentradas. Assumiremos que estas forças são pequenas, de modo que seu efeito no movimento de seu centro de massa devido ao inverso do quadrado na lei de atração gravitacional de \mathbf{E} será negligenciado.

Trata-se de um modelo não-linear devido aos seguintes fatos:

- Deformação da estrutura;
- Efeito de gradiente de gravidade;
- Curvatura e termos de inércia (presentes na deformação elástica).

4.2 Efeitos de Gradiente de Gravidade

Conforme foi mostrado no capítulo 2, os efeitos de gradiente de gravidade:

- Causam oscilações relativas a um referencial orbital com frequência de pitch, que são da mesma ordem da velocidade angular orbital;
- São representados por termos não lineares nas equações do movimento;
- Dependem da orientação e da deformação da viga no espaço.

4.3 Hipóteses

- A viga em questão, sujeita a atração gravitacional da Terra e também sujeita a forças distribuídas e/ou concentradas;
- Livre-Livre de comprimento $L \ll R_E \rightarrow$ raio do planeta;
- Reta quando não deformada;
- Straight com massa específica $m = cte$;
- Material Hookeano;
- Do tipo Euler-Bernoulli com rigidez axial \overline{EA} muito grande \Rightarrow viga inextensível.

4.4 Notações

As notações aqui apresentadas, referem-se a Figura 4.1

- \mathbf{C} representa o centro de massa da viga que se move no espaço;
- $\mathbf{R}_c(t)$ e $\phi(t)$ fornecem a localização de \mathbf{C} em relação a E ;
- $\overline{\mathbf{EC}}$ rotaciona no espaço com velocidade angular ϕ ;
- $\overline{\mathbf{AB}}$ viga não deformada e eixo principal da viga deformada;
- $\overline{\mathbf{A}^*\mathbf{B}^*}$ viga deformada;
- (x_0, y_0) - eixos inerciais;
- (η, ζ) - eixos principais da seção transversal da viga, normal ao eixo ξ na posição s ;
- s comprimento ao longo da viga deformada.;

Antes da deformação, os eixos ξ e η estão alinhados com x e y . O eixo x é orientado ao longo de $\overline{\mathbf{AB}}$ que é girado por um ângulo de pitch θ com respeito ao vetor unitário de referência orbital \mathbf{x}_1 na direção de \mathbf{E} para \mathbf{C} .

Já durante a deformação, um ponto arbitrário na linha de referência da viga move-se para posição M^* pelo deslocamento elástico

$$u(s, t)\mathbf{i} + v(s, t)\mathbf{j} \quad (4.1)$$

sendo \mathbf{i} e \mathbf{j} os vetores unitários dos eixos x e y .

Para $s = 0$ esta equação corresponde a A^* , e para $s = L$ corresponde a B^* . Adotando a notação $x_c = |AC|$ temos

$$\int_{viga} AM^* m ds \equiv \int_{s=0}^L [(s+u)\mathbf{i} + v\mathbf{j}] m ds = (x_c\mathbf{i}) \int_{s=0}^L m ds \quad (4.2)$$

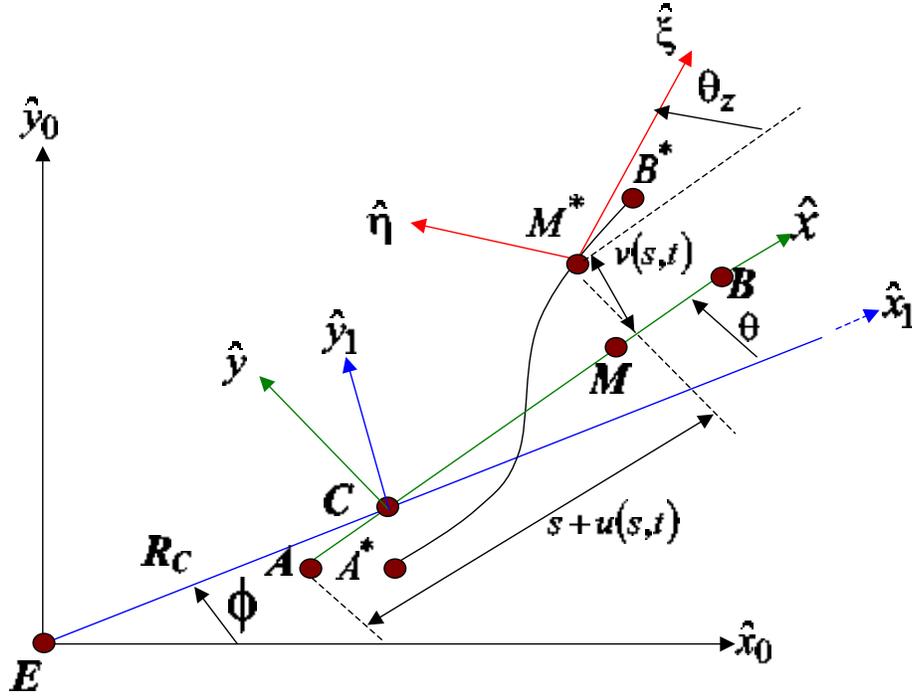


Figura 4.1: Viga livre-livre sujeita a força da gravidade da Terra

Sendo C o centro da viga não deformada, então (4.2) é válida para $u = v = 0$, assim, temos as seguintes relações para os deslocamentos elásticos $u(s, t)$ e $v(s, t)$

$$\int_0^L u(s, t)m(s)ds = 0 \quad (4.3)$$

$$\int_0^L v(s, t)m(s)ds = 0 \quad (4.4)$$

Como a linha de referência \overline{AB} é um dos eixos principais da viga deformada, o produto cruzado de inércia é nulo, ou seja,

$$I_{xy} = \int_0^L (s - x_c + u)vmds = 0 \quad (4.5)$$

Fazendo uso de (4.3) a equação (4.5) é reduzida à

$$\int_0^L (s + u)vmds = 0 \quad (4.6)$$

Como a viga é modelada como do tipo Euler-Bernoulli com rigidez axial muito grande, esta pode ser aproximada por uma viga inextensível; daí as quantidades u e v estão relacionadas pela seguinte equação

$$(1 + u')^2 + v'^2 = 1 \quad (4.7)$$

onde a "linha" denota a diferenciação parcial com respeito a s .

4.5 Equações do Movimento

As equações do movimento são encontradas via princípio extendido de Hamilton, assim serão necessários a energia cinética e o trabalho virtual feito pelas forças aplicadas na viga.

4.6 Energia Cinética

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{M^*} = & [\mathbf{R}_c \mathbf{i}_1 + (s - x_c + u)\mathbf{i} + v\mathbf{j}]^\bullet = \\ & \left[\dot{u} - (\dot{\phi} + \dot{\theta})v + \dot{\mathbf{R}}_c \cos \theta + \dot{\phi} \mathbf{R}_c \sin \theta \right] \mathbf{i} + \\ & + \left[\dot{v} + (\dot{\phi} + \dot{\theta})(s - x_c + u) - \dot{\mathbf{R}}_c \sin \theta + \dot{\phi} \mathbf{R}_c \cos \theta \right] \mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde \mathbf{i}_1 é o vetor unitário do eixo x_1 .

Com isto calculamos a energia cinética:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} = & \frac{1}{2}m\mathbf{v}_{\mathbf{M}^*}^2 + \frac{1}{2}j_\zeta(\dot{\theta}_z + \dot{\theta} + \dot{\phi})^2 = \frac{1}{2}j_\zeta(\dot{\theta}_z + \dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + \\
& + \frac{m}{2} \left\{ \left[\dot{u} - (\dot{\phi} + \dot{\theta})v \right]^2 + \left[\dot{v} + (\dot{\phi} + \dot{\theta})(s - x_c + u) \right]^2 + \right. \\
& + \dot{\mathbf{R}}_c^2 + \dot{\phi}^2 \mathbf{R}_c^2 + 2 \left[\dot{u} - (\dot{\phi} + \dot{\theta})v \right] \left[\dot{\mathbf{R}}_c \cos \theta + \dot{\phi} \mathbf{R}_c \sin \theta \right] + \\
& \left. + 2 \left[\dot{v} + (\dot{\phi} + \dot{\theta})(s - x_c + u) \right] \left[\dot{\phi} \mathbf{R}_c \cos \theta - \dot{\mathbf{R}}_c \sin \theta \right] \right\} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

onde $\theta'_z = \arctan\left(\frac{v'}{1+u'}\right)$ e j_ζ é a massa específica do momento de inércia da seção transversal da viga sobre o eixo ξ . O trabalho virtual é igual a $-D_\zeta \theta'_z \delta \theta'_z$.

4.7 Trabalho virtual específico devido à atração gravitacional da Terra

$$(\delta \mathbf{W})_{\mathbf{g}} = \frac{Gm_E}{\mathbf{r}_{\mathbf{M}^*}^2} \cong Q_{ug} \delta u + Q_{vg} \delta v + Q_{\theta g} \delta \theta + Q_{\mathbf{R}_c \mathbf{g}} \delta \mathbf{R}_c \quad (4.10)$$

onde G é a constante de gravitação universal e $\mathbf{r}_{\mathbf{M}^*} = |\overline{\mathbf{EM}^*}|$ é a distancia de \mathbf{E} até \mathbf{M}^* . Fazendo uso da seguinte expressão para $\delta \mathbf{r}_{\mathbf{M}^*}$

$$\delta \mathbf{r}_{\mathbf{M}^*} \equiv \frac{\delta \mathbf{r}_{\mathbf{M}^*}^2}{2\mathbf{r}_{\mathbf{M}^*}} = \frac{\delta \left[\mathbf{R}_c^2 + (s - x_c + u)^2 + v^2 + 2\mathbf{R}_c \mathbf{i}_1 \cdot \overline{\mathbf{CM}^*} \right]}{2\mathbf{r}_{\mathbf{M}^*}} \quad (4.11)$$

e notando que $\overline{\mathbf{CM}^*} = (s - x_c + u)(\mathbf{i}_1 \cos \theta + \mathbf{j}_1 \sin \theta) + v(\mathbf{j}_1 \cos \theta - \mathbf{i}_1 \sin \theta)$ são obtidas as forças gravitacionais generalizadas específicas:

$$Q_{ug} = -\frac{Gm_E m}{\mathbf{R}_c^3} (s - x_c + u + \mathbf{R}_c \cos \theta) \left(\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{M}^*}}{\mathbf{R}_c} \right)^{-3} \quad (4.12)$$

$$Q_{vg} = \frac{Gm_E m}{\mathbf{R}_c^3} (\mathbf{R}_c \sin \theta - v) \left(\frac{\mathbf{r}_{\mathbf{M}^*}}{\mathbf{R}_c} \right)^{-3} \quad (4.13)$$

$$Q_{\theta_g} = \frac{Gm_{EM}}{\mathbf{R}_c^3} \mathbf{R}_c [(s + u - x_c) \sin \theta + v \cos \theta] \left(\frac{\mathbf{r}_{M^*}}{\mathbf{R}_c} \right)^{-3} \quad (4.14)$$

$$Q_{R_{cg}} = -\frac{Gm_{EM}}{\mathbf{R}_c^3} \mathbf{R}_c [\mathbf{R}_c + (s + u - x_c) \cos \theta - v \sin \theta] \left(\frac{\mathbf{r}_{M^*}}{\mathbf{R}_c} \right)^{-3} \quad (4.15)$$

onde,

$$\left(\frac{\mathbf{r}_{M^*}}{\mathbf{R}_c} \right)^{-3} = \left\{ 1 + \frac{(s - x_c + u)^2 + v^2}{\mathbf{R}_c^3} \right\}^{-2} \approx 1 - 3 \frac{(s - x_c + u) \cos \theta - v \sin \theta}{\mathbf{R}_c} \quad (4.16)$$

Agora, expressando todas as outras forças distribuídas que podem estar atuando na viga como

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_\eta \boldsymbol{\eta} + F_\xi \boldsymbol{\xi} = (F_\xi \cos \theta_z - F_\eta \sin \theta_z) \mathbf{i} + (F_\xi \sin \theta_z + F_\eta \cos \theta_z) \mathbf{j} = \\ &= [(1 + u') F_\xi - v' F_\eta] \mathbf{i} + [v' F_\xi + (1 + u') F_\eta] \mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.17)$$

e modelando o trabalho virtual devido ao amortecimento estrutural como $-c\dot{v}\delta v$, o trabalho virtual realizado pelas forças não gravitacionais, que será denotado por δW_0 é obtido como

$$\begin{aligned} \delta W_0 &= -c\dot{v}\delta v + \mathbf{F} \cdot \delta (\mathbf{R}_c \mathbf{x}_1 + \overline{\mathbf{CM}^*}) + Q_{\mathbf{R}_c}^* \delta \mathbf{R}_c + Q_\phi^* = \\ &= [(1 + u') F_\xi - v' F_\eta] \delta u + [v' F_\xi + (1 + u') F_\eta - c\dot{v}] \delta v + \\ &+ \{(s + u - x_c)[(1 + u') F_\eta + v' F_\xi] + v[v' F_\eta - (1 + u') F_\xi]\} \delta \theta + \\ &+ \{(s + u - x_c)[(1 + u') F_\eta + v' F_\xi] + v[v' F_{eta} - (1 + u') F_\xi] + \\ &\quad + \mathbf{R}_c [F_\xi \sin(\theta + \theta_z) + F_\eta \cos(\theta + \theta_z)] + Q_\phi^*\} \delta \phi + \\ &\quad + [F_\xi \cos(\theta + \theta_z) - F_\eta \sin(\theta + \theta_z) + Q_{\mathbf{R}_c}^*] \delta \mathbf{R}_c \\ &= Q_{u_0} \delta u + (Q_{v_0} - c\dot{v}) \delta v + Q_{\theta_0} \delta \theta + Q_\phi \delta \phi + Q_{\mathbf{R}_{c_0}} \delta \mathbf{R}_c. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Assim, o trabalho virtual específico total realizados pelas forças distribuídas atuando sobre a viga é obtido pela soma de (4.10) e (4.18), ou seja,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{W} = \delta \mathbf{W}_{\mathbf{g}} + \delta \mathbf{W}_{\mathbf{0}} = & -D_{\zeta} \theta'_z \delta \theta'_z + (Q_{u_g} + Q_{u_0}) \delta u + (Q_{v_g} + Q_{v_0} - c\dot{v}) \delta v + \\ & + (Q_{\theta_g} + Q_{\theta_0}) \delta \theta + Q_{\phi} \delta \phi + (Q_{\mathbf{R}_{c_g}} + Q_{\mathbf{R}_{c_0}}) \delta \mathbf{R}_{\mathbf{c}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.8 Princípio Extendido de Hamilton

As equações diferenciais do movimento, e as condições de contorno, são obtidas diretamente do princípio estendido de Hamilton, dado por:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{I} = \int_{t=t_1}^{t_2} \int_{s=0}^L \left\{ \delta(\mathbf{T}) + \delta(\mathbf{W}) + \frac{1}{2} \lambda [1 - (1 + u')^2 - v'^2] \right\} ds dt + \\ + \int_{t=t_1}^{t_2} \delta(\mathbf{W}_{\mathbf{B}}) dt = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange utilizado para tratar do vínculo, equação (4.7), e $\delta \mathbf{W}_{\mathbf{B}}$ é o trabalho virtual associado com qualquer força que pode ser aplicada nas limitações tais como, "follower forces", que requerem uma integração por partes na equação (4.20). Para simplificar, será assumido aqui que a viga não está sujeita a tais forças.

Tomando a variação da energia cinética \mathbf{T} , e pela integração por partes da equação (4.20), as seguintes equações do movimento e condições de contorno são prontamente obtidas após fazer uso das equações (4.3), (4.4) e (4.6), e depois negligenciando os termos j_{ζ}

$$\left(\int_0^L m ds \right) \left(\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{c}} - \dot{\phi}^2 \mathbf{R}_{\mathbf{c}} \right) = -\frac{Gm_E}{\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^2} \int_0^L m ds + \int_0^L Q_{\mathbf{R}_{c_0}} ds \quad (4.21)$$

$$\left(\int_0^L m ds \right) \left(\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^2 \dot{\phi} \right)^{\bullet} = \int_0^L Q_{\phi} ds \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L m \left\{ (s - x_c + u) \left(\ddot{\theta} + \ddot{\phi} + 3 \frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} \sin \theta \cos \theta \right) \right. \\
& + (s - x_c + u) \left[\ddot{v} + 3 \frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} v \cos(2\theta) \right] + 2(\dot{\phi} + \dot{\theta})(s - x_c + u)\dot{u} - \ddot{u}v \\
& \left. + [(\dot{\phi} + \dot{\theta})v^2]^{\bullet} - 3 \frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} v^2 \sin \theta \cos \theta \right\} ds = \int_0^L Q_{\theta_0} ds \quad (4.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(D_\zeta \theta'_z)v' + \lambda(1 + u)']' = G'_u = m \left\{ \ddot{u} - 2(\dot{\phi} + \dot{\theta})\dot{v} - (\ddot{\phi} + \ddot{\theta})v - \right. \\
& \left. - (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2(s - x_c + u) + (\ddot{\mathbf{R}}_c - \dot{\phi}^2 \mathbf{R}_c^2) \cos \theta - \frac{1}{\mathbf{R}_c} (\mathbf{R}_c^2 \dot{\phi})^{\bullet} \sin \theta \right\} - Q_{u_0} + \\
& + \frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} m (s - x_c + u + \mathbf{R}_c \cos \theta) \left[1 - 3 \frac{(s - x_c + u) \cos \theta - v \sin \theta}{\mathbf{R}_c} \right] \approx \\
& \approx m \left\{ \ddot{u} - 2(\dot{\phi} + \dot{\theta})\dot{v} - (\ddot{\phi} + \ddot{\theta})v - (2\dot{\phi} + \dot{\theta})(s - x_c + u)\dot{\theta} + \right. \\
& + \left(\frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} - \dot{\phi}^2 \right) (s - x_c + u) - 3 \frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} [(s - x_c + u) \cos \theta - v \sin \theta] \cos \theta + \\
& \left. + \left[\ddot{\mathbf{R}}_c + \left(\frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} - \dot{\phi}^2 \right) \mathbf{R}_c \right] \cos \theta - \frac{1}{\mathbf{R}_c} (\mathbf{R}_c^2 \dot{\phi})^{\bullet} \sin \theta \right\} - Q_{u_0} \quad (4.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [-(D_\zeta \theta'_z)'(1 + u') + \lambda v'] = G'_v = m \left\{ \ddot{v} + 2(\dot{\phi} + \dot{\theta})\dot{u} + \right. \\
& \left. + (\ddot{\phi} + \ddot{\theta})(s - x_c + u) - (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 v - \right. \\
& \left. (\ddot{\mathbf{R}}_c - \dot{\phi}^2 \mathbf{R}_c^2) \sin \theta + \frac{1}{\mathbf{R}_c} (\mathbf{R}_c^2 \dot{\phi})^{\bullet} \cos \theta \right\} \\
& - \frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} m (\mathbf{R}_c \sin \theta - v) \left[1 - 3 \frac{(s - x_c + u) \cos \theta + v \sin \theta}{\mathbf{R}_c} \right] + c\dot{v} - Q_{v_0} \approx \\
& \approx m \left\{ \ddot{v} + 2(\dot{\phi} + \dot{\theta})\dot{u} + (\ddot{\phi} + \ddot{\theta})(s - x_c + u) - (2\dot{\phi} + \dot{\theta})\dot{\theta}v \right. \\
& + \left(\frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} - \dot{\phi}^2 \right) v - \left[\ddot{\mathbf{R}}_c + \left(\frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} - \dot{\phi}^2 \right) \mathbf{R}_c \right] \sin \theta + \frac{1}{\mathbf{R}_c} (\mathbf{R}_c^2 \dot{\phi})^{\bullet} \cos \theta \\
& \left. + 3 \frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} [(s - x_c + u) \cos \theta - v \sin \theta] \sin \theta \right\} + c\dot{v} - Q_{v_0} \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Nas equações acima, os termos de pequena grandeza inversamente proporcionais à distância \mathbf{R}_c de \mathbf{E} (centro de massa do corpo atrator) até \mathbf{C} , como $\frac{v \sin \theta}{\mathbf{R}_c}$, foram negligenciados.

Considerando o caso onde $\delta \mathbf{W}_B = \mathbf{0}$, a seguinte equação de condições de contorno é obtida dos termos que foram integrados por partes na equação (4.20):

$$\{G_u \delta u + G_v \delta v + D_\zeta \theta'_z \delta \theta'_z\}_{s=0}^L = 0 \quad (4.26)$$

Para uma viga livre-livre, as seguintes condições de contorno foram obtidas da equação acima:

$$G_u(s=0, t) = G_u(s=L, t) = 0 \quad (4.27)$$

$$\theta'_z(0, t) = \theta'_z(L, t) = 0 \Rightarrow v''(0, t) = v''(L, t) = 0 \quad (4.28)$$

$$[(D_\zeta \theta'_z)']_{s=0; s=L} = 0 \Rightarrow v'''(0, t) = v'''(L, t) = 0 \quad (4.29)$$

O deslocamento elástico $u(s, t)$ pode ser eliminado das equações do movimento. Para isto, (4.7) é primeiro resolvida para $u'(s, t)$ e o resultado integrado de $s = L$ à $s = s$ para resultar:

$$u(s, t) = u(L, t) + \int_L^s [\sqrt{1 - v'^2} - 1] ds \quad (4.30)$$

Uma expressão para $u(L, t)$ pode ser obtida fazendo uso da seguinte identidade:

$$\int_0^L umds \equiv \left[u \int_0^L mds \right]_{s=0}^L - \int_0^L u' \left[\int_0^L mds \right] ds \quad (4.31)$$

e do resultado dado pela equação (4.3). Resolvendo a equação (4.31) para $u(L, t)$ a seguinte expressão para $u(s, t)$ para uma viga livre-livre é então obtida:

$$u(s, t) = \frac{1}{\int_0^L mds} \int_0^L [\sqrt{1 - v'^2} - 1] \left[\int_0^s mds \right] ds + \int_L^s [\sqrt{1 - v'^2} - 1] ds \quad (4.32)$$

As equações de (4.21) a (4.25) são as equações diferenciais que governam completamente o movimento de uma viga livre-livre sujeita a forças de gradiente de gravidade devido ao corpo atrator e a forças externas distribuídas.

A equação (4.25) pode ser reduzida a uma equação diferencial parcial integral que não envolve o deslocamento elástico $u(s, t)$ e o multiplicador de Lagrange $\lambda(s, t)$. Para isto, ambos os lados da equação (4.24) são integrados de $s = L$ a $s = s$, e a equação resultante é resolvida para λ . A solução para λ é então substituída na equação (4.25) para obter uma expressão alternativa para G_v . Com $u(s, t)$ dado por (4.31), a nova expressão para G_v é obtida como:

$$\begin{aligned}
G_v = \frac{1}{\sqrt{1-v'^2}} & \left\{ -(D_\zeta \theta'_z)' + v' \int_L^s m \left[\ddot{u} - 2(\dot{\phi} + \dot{\theta})\dot{v} - (\ddot{\phi} + \ddot{\theta})v - \right. \right. \\
& - (2\dot{\phi} + \dot{\theta})(s - x_c + u)\dot{\theta} + \left(\frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} - \dot{\phi}^2 \right) (s - x_c + u) - \\
& \left. \left. - 3 \frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} [(s - x_c + u) \cos \theta - v \sin \theta] \cos \theta + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left[\ddot{\mathbf{R}}_c + \left(\frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} - \dot{\phi}^2 \right) \mathbf{R}_c \right] \cos \theta - \frac{1}{\mathbf{R}_c} (R_c^2 \dot{\phi})^\bullet \sin \theta \right] ds - v' \int_L^s Q_{u_0} ds \right\} \quad (4.33)
\end{aligned}$$

4.9 Equações Expandidas para uma Viga em Órbita Circular

Para produzir tantas informações quanto possíveis sobre o comportamento dinâmico da viga, é preciso uma investigação analítica do movimento governado pelas equações (4.21)-(4.23) e (4.25) com G_v dado por (4.33).

Para isto, todavia, faz-se necessário que restrinjamos os tipos de movimentos a serem investigados tal que estas equações sejam convenientes para tais análises. O primeiro passo é determinar as soluções de equilíbrio das equações (4.21)-(4.23) e (4.25), com G_v dado por (4.33).

Para "pequenos" movimentos perturbados, sobre as soluções de equilíbrio, pode-se expandir as equações diferenciais não-lineares em séries de Taylor sobre suas soluções de equilíbrio e conservar as não-linearidades polinomiais resultantes para desejados graus de perturbações.

As equações geradas dessa maneira são apropriadas para a análise de perturbação do movimento não-linear. Tais análises revelam enormes informações sobre o comportamento do sistema. Desenvolveremos tais equações para o caso em que $v(s, t)$ e $\theta(t)$ são pequenos e quando a viga está em órbita circular, ou seja,

$$R_c = cte \quad \text{e} \quad \dot{\phi} = \frac{Gm_E}{\mathbf{R}_c^3} = \Omega_c \quad (4.34)$$

Inspecionando (4.23) e (4.25) concluí-se que $v = 0$ e $\theta = 0$ ou π , são as soluções de equilíbrio destas equações quando $Q_{v_0} = 0$ e $Q_{\theta_0} = 0$. Aqui as equações (4.23) e (4.25) são expandidas sobre o estado de equilíbrio $v = \theta = 0$ que é o equilíbrio estável do sistema.

Para gerar as equações perturbadas para pequenos v e θ , considera-se um pequeno parâmetro ε , apenas para manter a ordem de magnitude. Com $v = O(\varepsilon)$ e $\theta = O(\varepsilon)$, as seguintes expansões são obtidas para $u(s, t)$, que é dada pela equação (4.32), e para $\theta_z(s, t)$:

$$u(s, t) = -\frac{1}{2 \int_0^L m ds} \int_0^L v'^2 \left[\int_0^s m ds \right] ds - \frac{1}{2} \int_L^s v'^2 ds + O(\varepsilon^4) \quad (4.35)$$

$$\theta_z = \arcsin(v') = v' \left(1 + \frac{v'^2}{6} \right) + O(\varepsilon^4) \quad (4.36)$$

Com G_v dado pela equação (4.33), a forma expandida de $O(\varepsilon)$ da equação (4.25) é obtida como:

$$\begin{aligned}
m \left\{ \ddot{v} + \ddot{\theta}(s + u - x_c) + 2(\Omega_c + \dot{\theta})\dot{\theta}v + 3\Omega_c^2 \left[(s - x_v) \left(\theta - \frac{2}{3}\theta^3 \right) + \right. \right. \\
\left. \left. + u\theta - v\theta^2 \right] \right\} + (D_\zeta v'')'' + c\dot{v} + \left\{ v'(1 + \frac{1}{2}v'^2) \int_L^s Q_{u_0} ds + \right. \\
\left. + v'(D_\zeta v' v'')' + \frac{3}{2}\Omega_c^2 v^3 \int_L^s m(s - x_c) ds \right\}' - \\
- \left\{ v' \int_L^s m[\ddot{u} - 2(\Omega_c + \dot{\theta})\dot{v} - \ddot{\theta}v - (\dot{\theta} + 2\Omega_c)(s - x_c)\dot{\theta} - \right. \\
\left. - 3\Omega_c^2(s + u - x_c - \theta^2(s - x_c) - v\theta)] ds \right\}' = Q_{v_0} \quad (4.37)
\end{aligned}$$

onde $u(s, t)$ é dado pela equação (4.35). Procedendo de maneira similar, a forma expandida de $O(\varepsilon)$ da equação (4.23) é obtida como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}
\int_0^L m \{ (s - x_c)^2 (\ddot{\theta} + 3\Omega_c^2 \theta - 2\Omega_c^2 \theta^3) + 2(s - x_c) u (\ddot{\theta} + 3\Omega_c^2 \theta) \\
(s - x_c) (\ddot{v} + 3\Omega_c^2 v - 6\Omega_c^2 v \theta^2) + u (\ddot{v} + 3\Omega_c^2 v) \\
+ 2(\Omega_c + \dot{\theta})(s - x_c) \dot{u} - \ddot{u}v + [(\Omega_c + \dot{\theta})v^2]^\bullet - 3\Omega_c^2 v^2 \theta \} ds = \int_0^L Q_{\theta_0} ds \quad (4.38)
\end{aligned}$$

As equações (4.37) e (4.38) com u dado por (4.35) são as equações não-lineares de $O(\varepsilon)$ que governam o acoplamento do movimento curvatura-pitching de uma viga flexível em órbita circular sobre um corpo atrator central, como por exemplo a Terra.

Uma solução aproximada para as equações (4.37) e (4.38), pode ser obtida via técnicas de perturbações. Para isto, técnicas de redução modal podem ser aplicadas para converter estas equações num conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares que são então analisadas sucessivamente para diferentes níveis de aproximação.

4.10 Normalização e Redução Modal das Equações

Para analisar o movimento da viga deve-se adimensionalizar as equações diferenciais do movimento. Assim fazemos:

$$s^* = \frac{s}{L}; \quad v^* = \frac{v}{L}; \quad u^* = \frac{u}{L}; \quad x_c^* = \frac{x_c}{L} \quad (4.39)$$

$$\mu(s^*) = \frac{m(s^*)}{\int_0^1 m(s^*) ds^*}; \quad \beta_\zeta(s^*) = \frac{D_\zeta(s^*)}{\int_0^1 D_\zeta(s^*) ds^*} \quad (4.40)$$

$$t^* = t \sqrt{\frac{1}{L^4} \frac{\left[\int_0^1 D_\zeta(s^*) ds^* \right]}{\int_0^1 m(s^*) ds^*}} \quad (4.41)$$

$$\omega_c^* = \Omega_c L^2 \sqrt{\frac{\int_0^1 m(s^*) ds^*}{\int_0^1 D_\zeta(s^*) ds^*}} \quad (4.42)$$

$$Q_{\alpha_0}^* = \frac{L^3 Q_{\alpha_0}}{\int_0^1 D_\zeta(s^*) ds^*} \quad (\alpha = u, v); \quad Q_\theta^* = \frac{L^2 Q_\theta}{\int_0^1 D_\zeta(s^*) ds^*} \quad (4.43)$$

$$c^* = \frac{cL^2}{\sqrt{\left[\int_0^1 m(s^*) ds^* \right] \left[\int_0^1 D_\zeta(s^*) ds^* \right]}} \quad (4.44)$$

As equações normalizadas são da mesma forma que as equações (4.37) e (4.38). Para escrevê-las, necessita-se simplesmente substituir a massa distribuída m por μ e a rigidez D_ζ por β_ζ nestas equações. Para simplificar, omitiremos o sobreescrito $*$.

Para aplicar a redução modal para equações normalizadas vamos primeiro olhar suas soluções de $O(\varepsilon)$ em contrapartida na ausência de excitação e de amortecimento. Neste caso, a solução para $O(\varepsilon)$ partindo de $v(s, t)$ é da forma:

$$v(s, t) = \sum_{i=1}^n F_i(s) v_{t_i}(t) \quad (4.45)$$

Da equação (4.4) e da parte $O(\varepsilon)$ da equação (4.6) tem-se que:

$$\int_0^1 \mu(s) F_i(s) ds = 0 \quad (4.46)$$

e que

$$\int_0^1 s\mu(s)F_i(s)ds = 0 \quad (4.47)$$

E pode ser facilmente verificado que, com $v_{t_i} = A \cos(\omega_i t + B)$, e com Q_{u_g} sendo pelo menos de $O(\varepsilon)$ a autofunção $F_i(s)$ satisfaz a seguinte condição diferencial, que é obtida das equações (4.37) e (4.38) com as equações de contorno para uma viga livre-livre:

$$(\beta_\zeta F_i'')'' - \mu\omega_i^2 F_i + 3\omega_c^2 \left[F_i' \int_1^s (s - x_c)\mu ds \right]' = 0 \quad (4.48)$$

A equação (4.48) com condições de contorno $F_i''(0) = F_i''''(0) = F_i''(1) = F_i''''(1) = 0$, constituem um problema de valor de contorno de dois pontos, que pode ser resolvido numericamente para determinar a autofunção $F_i(s)$ e a frequência ω_i ($i = 1, 2, \dots$) para o caso geral quando μ e β_ζ são funções de s . Pode ser facilmente verificado que as autofunções são ortogonais no sentido de que $\int_0^1 \mu(s)F_i(s)ds = 0$ para $i \neq j$. Convenientemente normalizaremos a autofunção $F_i(s)$ tal que $\int_0^1 \mu(s)F_i^2 ds = 1$.

Uma solução aproximada para as equações (4.37) e (4.38) podem ser obtidas fazendo:

$$v(s, t) = \sum_{i=1}^n F_i(s)v_{t_i}(t) \quad (4.49)$$

nestas equações, multiplicando a equação- δv resultante (equação (4.37)) por $F_j(s)$ e então integrando o resultado de $s = 0$ até $s = 1$. Isto resulta num conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares para as partes temporal de resposta, $v_{t_i}(t)$. Para isto, por simplicidade apenas um modo de aproximação será apresentado aqui. Então, omitindo o subscrito i , a aproximação de $O(\varepsilon^3)$ para $u(s, t)$ dado pela equação (4.35) é:

$$u(s, t) = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\int_0^1 \mu ds} \int_0^1 F'^2 \left(\int_0^s \mu ds \right) ds - \int_s^1 F'^2 ds \right] v_t^2(t) = K_2(s)v_t^2 \quad (4.50)$$

De maneira similar, visto que as componentes de forças externas F_η e F_ξ são no mínimo de $O(\varepsilon)$ a aproximação $O(\varepsilon^3)$ para as forças generalizadas $Q_{u_0}, Q_{v_0}, Q_{\theta_0}$ dadas pela equação (4.18) é:

$$Q_{u_0} = \left[1 - \frac{F'^2(s)}{2} v_t^2(s) \right] F_\zeta(s, t) - F'(s) F_\eta(s, t) v_t(t) \quad (4.51)$$

$$Q_{v_0} = F'(s) F_\xi(s, t) v_t(t) + \left[1 - \frac{F'^2(s)}{2} v_t^2(s) \right] F_\eta(s, t) \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} Q_{\theta_0} &= (s - x_c) \left\{ F'(s) F_\xi(s, t) v_t(t) + \left[1 - \frac{F'^2(s)}{2} v_t^2(s) \right] F_\eta(s, t) \right\} \\ &+ K_2(s) = F_\eta(s, t) v_t^2(t) - [F_\zeta(s, t) - F'(s) F_\eta(s, t) v_t(t)] v_t(t) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Introduzimos agora as seguintes constantes, que serão como coeficientes na equação diferencial reduzida:

$$\beta_1 = \int_0^1 F \left[F' \int_1^s (s - x_c) \mu ds \right]' ds = - \int_0^1 F'^2 \int_1^s (s - x_c) \mu ds ds \quad (4.54)$$

$$\beta_2 = - \int_0^1 F \left[F' \int_1^s \mu K_2(s) ds \right]' ds = \int_0^1 F'^2 \int_1^s \mu K_2(s) ds ds \quad (4.55)$$

$$\beta_3 = \int_0^1 F \left\{ F' (\beta_\zeta F' F'')' + \frac{3}{2} \omega_c^2 \left[F'^3 \int_1^s (s - x_c) \mu ds \right]' \right\} ds - 3\omega_c^2 \beta_2 \quad (4.56)$$

e notando que

$$\int_0^1 \mu(s) K_2(s) F(s) ds = 0 \quad (4.57)$$

como requerido pela parte (ε^3) da equação (4.6), e que

$$\int_0^1 F \left[F' \int_1^s \mu F ds \right]' ds = 0 \quad (4.58)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F \left[F' \int_1^s \mu F ds \right]' ds &= \underbrace{\left[F F' \int_1^s \mu F ds \right]_{s=0}^1}_{=0} - \int_0^1 F'^2 \int_1^s \mu F ds ds \\
&= \underbrace{\left[\int_1^s \mu F ds \int_1^s F'^2 ds \right]_{s=0}^1}_{=0} + \int_0^1 \mu F \left(\int_1^s F'^2 ds \right) ds \\
&= \int_0^1 \mu F ds \left\{ -2K_2 - \frac{1}{\int_0^1 \mu ds} \int_0^1 F'^2 \left(\int_0^s \mu ds \right) ds \right\} ds = 0
\end{aligned}$$

A seguinte equação diferencial não-linear ordinária reduzida é obtida da equação (4.37):

$$\begin{aligned}
&\ddot{v}_t + c\dot{v} + \omega^2 v_t + (\beta_1 - 1)(2\omega_c + \dot{\theta})\dot{\theta}v_t - \\
&- 3\omega_c^2(\beta_1 + 1)\theta^2 v_t + \beta_2 v_t (v_t^2)^{\bullet\bullet} + \beta_3 v_t^3 = \\
&= \int_0^1 F F_\eta ds - v_t \int_0^1 F F'' \left[\int_1^s F_\xi ds \right] ds + \\
&+ v_t^2 \int_0^1 F \left[F'' \int_1^s F' F_\eta ds + \frac{1}{2} F'^2 F_\eta \right] ds \tag{4.59}
\end{aligned}$$

Deve ser notado que a equação (4.48) foi usada para eliminar o termo $\int_0^1 F(\beta_\zeta F'')'' ds$ que aparece no lado direito da equação acima.

Além disso, introduzindo a seguinte relação

$$\int_0^1 (s - x_c) \mu K_2 ds = \frac{\beta_1}{2} \tag{4.60}$$

De fato,

$$\beta_1 = - \int_0^1 F'^2 \int_1^s (s - x_c) \mu ds ds$$

$$\begin{aligned}
&= - \underbrace{\left[\left(\int_1^s (s-x_c) \mu ds \right) \int_1^s F'^2 ds \right]_{s=0}^1}_{=0} + \int_0^1 (s-x_c) \mu \left(\int_1^s F'^2 ds \right) ds \\
&= \int_0^1 (s-x_c) \mu \left\{ -2K_2 - \frac{1}{\int_0^1 \mu ds} \int_0^1 F'^2 \left(\int_0^s \mu ds \right) ds \right\} ds \\
&= -2 \int_0^1 (s-x_c) \mu K_2 ds
\end{aligned}$$

A equação (4.38) resulta na seguinte equação diferencial reduzida:

$$\begin{aligned}
&\left[\int_0^1 (s-x_c)^2 \mu ds \right] (\ddot{\theta} + 3\omega_c^2 \theta - 2\omega_c^3) - \beta_1 [v_t^2 (\theta + \ddot{3}\omega_c^2 \theta) + (\omega_c + \dot{\theta})(v_t^2)^\bullet] \\
&+ [(\omega_c + \dot{\theta})v_t^2]^\bullet - 3\omega_c^2 v_t^2 \theta = \int_0^1 (s-x_c) F_\eta ds + v_t \int_0^1 [(s-x_c)F' - F] F_\zeta ds \\
&\quad + v_t^2 \int_0^1 [K_2 + FF' - \frac{1}{2}(s-x_c)F'^2] F_\eta ds \quad (4.61)
\end{aligned}$$

As equações (4.59) e (4.61) são as equações diferenciais reduzidas para $v_t(t)$ e $\theta(t)$, com não-linearidades superiores a ordem cúbica nas variáveis perturbadas. Estas equações diferenciais incluem todas as não-linearidades devido à deformação da viga e devido ao efeito de gradiente de gravidade. As não-linearidade devido a deformação consistem dos termos de inércia e de curvatura. Vale a pena notar que as equações (4.59) e (4.61) desfecham que o movimento acoplando $v_t - \theta$ exibe ressonância interna quando ω_θ está próximo da frequência natural de curvatura ω_i , ou quando ω_θ está próximo de $2\omega_i$.

Entretando, como $\omega_i > \omega_\theta$ [isto é, qualquer frequência natural é sempre maior do que a frequência natural de pitch $\omega_\theta = \sqrt{3}\omega_c$], ressonâncias internas que requerem $\omega_i \leq \omega_\theta$ não são fisicamente possíveis.

4.11 Estudo das Ressonâncias que Ocorrem com a Viga no Espaço

O sistema considerado nesta seção é o mesmo considerado até agora, ou seja, uma viga livre-livre homogênea de comprimento L e massa específica constante $mKg\,m^{-1}$, e rigidez $D_\zeta Nm^2$, cujo centro de massa C está em órbita circular ao redor do centro de atração E . Como mostrado na Figura 4.2, o movimento é descrito em termos da deformação elástica $v(s, t)$ (normalizada pelo comprimento da viga) e do ângulo de pitch $\theta(t)$ entre a "local vertical" e o eixo principal da viga deformada.

As quantidades s e t são, respectivamente, o comprimento do arco ao longo da viga, normalizado por L , e o tempo normalizado. Considerando que a viga está sujeita a força periódica distribuída $F_\eta(s, t) = E_\eta(s) \cos(\Omega t)$ aplicada ao longo da direção $\hat{\eta}$, mostrado na Figura 4.2. Com $v(s, t)$ aproximadamente como $v(s, t) = F(s)v_t(t)$ e os pontos denotando diferenciação com respeito ao tempo normalizado t , as equações diferenciais do movimento normalizadas de (ε^3) , obtidas diretamente das equações (4.59) e (4.61) são:

$$\begin{aligned} \ddot{v}_t + c\dot{v}_t + \omega^2 v_t + (\beta_1 - 1)(2\omega_c + \dot{\theta})\dot{\theta}v_t - 3\omega_c^2(\beta_1 + 1)\theta^2 v_t \\ + \beta_2 v_t (v_t^2)^{\bullet\bullet} + \beta_3 v_t^3 = f_v \cos(\Omega t) + v_t^2 f_{v\eta} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + 3\omega_c^2 \theta - 2\omega_c^2 \theta^3 - 12\beta_1 [v_t^2 (\ddot{\theta} + 3\omega_c^2 \theta) + (\omega_c + \dot{\theta})(v_t^2)^{\bullet}] + 12[(\omega_c + \dot{\theta})v_t^2]^{\bullet} \\ - 36\omega_c^2 v_t^2 \theta = f_\theta \cos(\Omega t) + v_t^2 f_{\theta\eta} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (4.63)$$

As equações diferenciais não-lineares completas do movimento foram expandidas para que métodos de perturbação fossem utilizados para analisar o movimento. Nas equações (4.62) e (4.63) temos:

- c é o coeficiente de amortecimento estrutural;
- ω é a frequência natural não amortecida para o movimento de flexão;
- ω_c é a velocidade angular da órbita circular do centro de massa da viga;

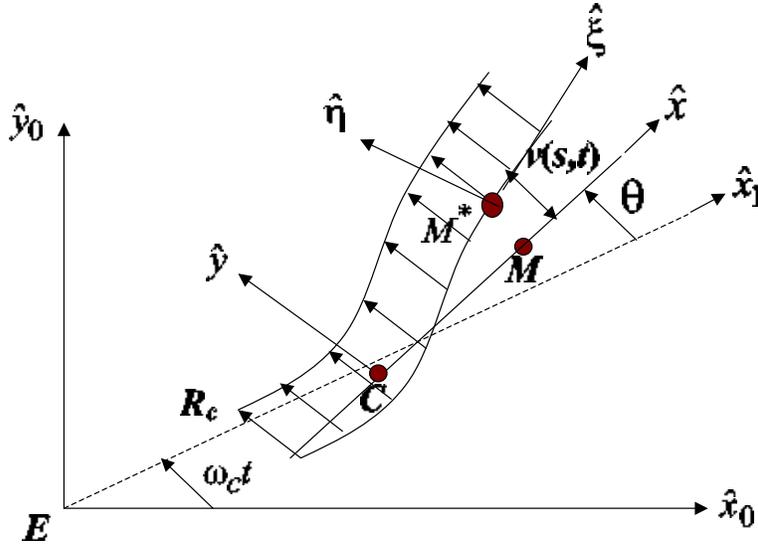


Figura 4.2: Viga livre-livre em órbita circular

- $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ são os coeficientes de Galerkin definidos por (4.54), (4.55) e (4.56)

As autofunções $F(s)$ e a frequência natural ω são obtidas numericamente resolvendo a seguinte equação diferencial iterativamente com as condições de contorno $F''(0) = F'''(0) = F''(1) = F'''(1) = 0$

$$F^{iv} - w^2 F + \frac{3}{2} w_c^2 [(s^2 - s)F']' = 0 \quad (4.64)$$

Note que para $0 < w_c \leq 1$, os valores das constantes mostradas são até 1% de seus valores para o caso limite $w_c = 0$ (que correspondem a uma viga livre-livre que não está em órbita). Estes valores numéricos serão usados para gerar um número de resultados para ilustrar o movimento acoplado flexão-pitching da viga orbitando.

As quantidades $f_v, f_{v\eta}, f_\theta$ e $f_{\theta\eta}$ que aparecem nas equações (4.62) e (4.63) são definidas por:

$$f_v = \int_0^1 F(s)E_\eta ds \quad (4.65)$$

$$f_{v\eta} = \int_0^1 F(s) \left[F''(s) \int_1^s F'(s)E_\eta(s)ds + \frac{1}{2}F'^2(s)E_\eta(s) \right] ds \quad (4.66)$$

$$f_\theta = 12 \int_0^1 \left(s - \frac{1}{2} \right) E_\eta(s)ds \quad (4.67)$$

$$f_{\theta\eta} = 12 \int_0^1 \left[K_2(s) + F(s)F'(s) - \frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{2} \right) F'^2(s) \right] E_\eta(s)ds \quad (4.68)$$

onde,

$$K_2(s) = \frac{\left[\int_s^1 F'^2 ds - \int_0^1 sF'^2 ds \right]}{2} \quad (4.69)$$

As equações (4.62) e (4.63) exibem um número de condições de ressonâncias envolvendo as frequências naturais $w_\theta = \sqrt{3\omega_c}$ e a frequência de excitação externa. Estas incluem as ressonâncias internas $\omega_\theta \approx \omega$ e $\omega_\theta \approx 2\omega$. Como mostrado anteriormente e como indicado pela tabela 4.1 estas ressonâncias internas não são fisicamente possíveis devido ao fato de que $w > w_\theta$. Aqui serão investigadas em detalhes as respostas das ressonâncias harmônicas não-lineares quando a frequência de excitação externa, Ω , está próxima de ω ou de ω_θ , e a ressonância super-harmônica quando Ω esté próximo de $\frac{\omega_\theta}{2}$.

ω_c	ω	β_1	β_2	β_3
0	22.373	3.0498	61.2	20,581
0.02	22.373	3.0498	61.2	20,581
1	22.577	3.0496	61.2	20,689
5	27.03	3.0463	61.208	23,306

Tabela 4.1: valores de ω, β_1, β_2 , e β_3 para o primeiro modo da viga em órbita circular

Para analisar o movimento acoplado governado por (4.62) e (4.63) adicionamos um pequeno parâmetro, ε , usado para manter as diferentes ordens de aproximação.

É procurada uma solução aproximada das equações do movimento em termos de uma série de potências em ε . Será usado o Método de Múltiplas Escalas para gerar soluções aproximadas válidas para valores arbitrariamente grandes de tempo.

Para as equações diferenciais de $O(\varepsilon^3)$ são necessárias as escalas de tempo $t_0 = t$, $t_1 = \varepsilon t$ e $t_2 = \varepsilon^2 t$. As coordenadas generalizadas $v_t(t)$ e $\theta(t)$ são expressas como:

$$v_t(t_0, t_1, t_2; \varepsilon) = \varepsilon v_{t1}(t_0, t_1, t_2) + \varepsilon^2 v_{t2}(t_0, t_1, t_2) + \varepsilon^3 v_{t3}(t_0, t_1, t_2) + \dots \quad (4.70)$$

$$\theta(t_0, t_1, t_2; \varepsilon) = \varepsilon \theta_1(t_0, t_1, t_2) + \varepsilon^2 \theta_2(t_0, t_1, t_2) + \varepsilon^3 \theta_3(t_0, t_1, t_2) + \dots \quad (4.71)$$

$E_\eta(s)$	f_v	$v_{v\eta}$	f_θ	$f_{\theta\eta}$
F(s)	1	44.96	0	$6.07 * 10^{-7} \approx 0$
1	0	-54.34	0	≈ 0
$s - \frac{1}{2}$	0	-12.3	1	-37.9
$(s - \frac{1}{2})^2$	-0.07427	-7.87	0	≈ 0
s^2	-0.07427	-33.76	1	-37.9

Tabela 4.2: valores de $f_v, f_{v\eta}, f_\theta$, e $f_{\theta\eta}$ para $0 \leq \omega_c \leq 1$ e ω para o primeiro modo

O coeficiente de amortecimento estrutural c é considerado pequeno e transferido para fora de $O(\varepsilon)$ fazendo:

$$c = \varepsilon^2 c_2 \quad (4.72)$$

Usando a regra da cadeia nas equações (4.62) e (4.63):

$$\frac{d(\)}{dt} = (d_0 + \varepsilon d_1 + \varepsilon^2 d_2 + \dots)(\) \quad (4.73)$$

$$\frac{d^2(\)}{dt^2} = (d_0^2 + 2\varepsilon d_0 d_1 + \varepsilon^2 (d_1^2 + 2d_0 d_2) + \dots)(\) \quad (4.74)$$

$$\text{onde } d_i^n(\) = \frac{\partial^n(\)}{\partial t_i^n} \quad (4.75)$$

Na seqüência para analisar os diferentes movimentos ressonantes, sem perder os efeitos dos termos da excitação paramétrica que aparecem do lado direito das equações (4.62) e (4.63), as quantidades f_v , $f_{v\eta}$, f_θ e $f_{\theta\eta}$ serão tratadas como se fossem independentes umas das outras. Para a ressonância primária, quando a frequência de excitação externa Ω está próxima da frequência natural ω , por exemplo, a excitação $f_v \cos(\Omega t)$ é tirada da aproximação de $O(\varepsilon)$ fazendo $f_v = \varepsilon^3 f_{v3}$ enquanto todas as outras excitações são tratadas como $O(\varepsilon)$ na análise deste caso.

Estuda-se agora a solução analítica para várias ressonâncias, descritas a seguir nas seções 4.11.1, 4.11.2 e 4.11.3.

4.11.1 Ressonância super-harmônica com Ω próximo de $\frac{\sqrt{3}\omega_c}{2}$

Visto que a frequência de excitação neste caso está sempre longe de $\sqrt{3}\omega_c$ e ω as funções $f_v \cos(\Omega t)$ e $f_\theta \cos(\Omega t)$ nas equações (4.62) e (4.63) não resultam termos seculares de $O(\varepsilon)$ e, portanto, são tratadas como quantidades de $O(\varepsilon)$ na análise de perturbação.

Para este caso escrevemos:

$$f_v = \varepsilon f_{v1}, \quad f_\theta = \varepsilon f_{\theta1}, \quad f_{v\eta} = \varepsilon f_{v\eta1}, \quad f_{\theta\eta} = \varepsilon f_{\theta\eta1} \quad (4.76)$$

Substituindo (4.70), (4.71) e (4.72) nas equações (4.62) e (4.63) obtemos as seguintes equações diferenciais parciais desacopladas para cada nível de aproximação: $O(\varepsilon)$

$$d_0^2 v_{t1} + \omega^2 v_{t1} = f_{v1} \cos(\Omega t_0) \quad (4.77)$$

$$d_0^2 \theta_1 + 3\omega_c^2 \theta_1 = f_{\theta1} \cos(\Omega t_0) \quad (4.78)$$

$O(\varepsilon^2)$

$$d_0^2 v_{t2} + \omega^2 v_{t2} = -2d_0 d_1 v_{t1} - 2\omega_c^2 (\beta_1 - 1) v_{t1} d_0 \theta_1 \quad (4.79)$$

$$d_0^2 \theta_2 + 3\omega_c^2 \theta_2 = -2d_0 d_1 \theta_1 + 12\omega_c^2 (\beta_1 - 1) d_0 (v_{t1}^2) \quad (4.80)$$

$O(\varepsilon^3)$

$$\begin{aligned}
d_0^2 v_{t3} + \omega^2 v_{t3} = & -d_1^2 v_{t1} - 2d_0 d_2 v_{t1} - 2d_0 d_1 v_{t2} - c_2 d_0 v_{t1} - \beta_3 v_{t1}^3 \\
& - 2\omega_c(\beta_1 - 1)[v_{t1}(d_0 \theta_2 + d_1 \theta_1) + v_{t2} d_0 \theta_1] - (\beta_1 - 1)v_{t1}(d_0 \theta_1)^2 \\
& + 3\omega_c^3(\beta_1 + 1)v_{t1} \theta_1^2 - \beta_2 v_{t1} d_0^2 (v_{t1})^2 + v_{t1}^2 f_{v\eta_1} \cos(\Omega t_0)
\end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned}
d_0^2 \theta_3 + 3\omega_c^2 \theta_3 = & -d_1^2 \theta_1 - 2d_0 d_2 \theta_1 - 2d_0 d_1 \theta_2 + \\
& + 12\omega_c(\beta_1 - 1)[d_1(v_{t1}^2) + 2d_0(v_{t1} v_{t2})] + 2\omega_c^2 \theta_1^3 + \\
& + 12\beta_1[v_{t1}^2(d_0^2 \theta_1 + 3\omega_c^2 \theta_1) + (d_0 \theta_1)d_0 v_{t1}^2] \\
& - 12d_0(v_{t1}^2 d_0 \theta_1) + 36\omega_c^2 v_{t1}^2 \theta_1 + v_{t1}^2 f_{\theta\eta_1} \cos(\Omega t_0)
\end{aligned} \tag{4.82}$$

A solução das equações diferenciais de $O(\varepsilon)$ é dada pelas equações abaixo:

$$v_{t1} = A_v(t_1, t_2) \cos \phi_v + \frac{f_{v1}}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t_0), \quad \phi_v = \omega t_0 + B_v(t_1, t_2) \tag{4.83}$$

$$\theta_1 = A_\theta(t_1, t_2) \cos \phi_\theta + \frac{f_{\theta 1}}{3\omega_c^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t_0), \quad \phi_\theta = \sqrt{3}\omega_c t_0 + B_\theta(t_1, t_2) \tag{4.84}$$

Em seguida, substituímos as equações acima nas equações (4.81) e (4.82), e definimos um parâmetro de sintonia $\varepsilon\sigma_1$ e uma quantidade $\gamma(t_1, t_2)$ da seguinte forma:

$$\Omega = \frac{\sqrt{3}\omega_c}{2}(1 + \varepsilon\sigma_1) \tag{4.85}$$

$$\gamma(t_1, t_2) = \sqrt{3}\omega_c \sigma_1 t_1 - B_\theta(t_1, t_2) \tag{4.86}$$

são obtidas as seguintes condições para a eliminação dos termos seculares do nível $O(\varepsilon^2)$:

$$d_1 A_v = d_1 B_v = 0 \quad (4.87)$$

$$2\sqrt{3}\omega_c d_1 A_\theta + 12\Omega_c(1 - \beta_1) \frac{\Omega f_{v1}^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2} \sin \gamma = 0 \quad (4.88)$$

$$2\sqrt{3}\omega_c A_\theta(\sqrt{3}\sigma_1 - d_1 \gamma) + 12\omega_c(1 - \beta_1) \frac{\Omega f_{v1}^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2} \sin \gamma = 0 \quad (4.89)$$

obtemos ainda soluções particulares para v_{t2} e θ_2 também para o nível $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned} v_{t2} = & \sqrt{3}(\beta_1 - 1)\omega_c^2 A_v A_\theta \left\{ \frac{\sin(\phi_v + \phi_\theta)}{\omega^2 - (\omega + \sqrt{3}\omega_c)^2} - \frac{\sin(\phi_v - \phi_\theta)}{\omega^2 - (\omega - \sqrt{3}\omega_c)^2} \right\} \\ & + \frac{(\beta_1 - 1)\omega_c \Omega A_v A_\theta f_{\theta 1}}{3\omega_c^2 - \Omega^2} \left\{ \frac{\sin(\phi_v + \Omega t_0)}{\omega^2 - (\Omega + \omega)^2} - \frac{\sin(\phi_v - \Omega t_0)}{\omega^2 - (\Omega - \omega)^2} \right\} \\ & + \frac{\sqrt{3}(\beta_1 - 1)\omega_c^2 A_\theta f_{v1}}{\omega^2 - \Omega^2} \left\{ \frac{\sin(\phi_\theta + \Omega t_0)}{\omega^2 - (\sqrt{3}\omega_c + \Omega)^2} + \frac{\sin(\phi_\theta - \Omega t_0)}{\omega^2 - (\sqrt{3}\omega_c - \Omega)^2} \right\} \\ & + \frac{(\beta_1 - 1)\omega_c \Omega f_{v1} f_{\theta 1}}{(\omega^2 - \Omega^2)(3\omega_c^2 - \Omega^2)} \sin(2\Omega t_0) \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 = & 12\omega_c(1 - \beta_1)A_v \left\{ \frac{\omega A_v \sin(2\phi_v)}{3\omega_c^2 - 4\omega^2} \right. \\ & \left. + \frac{f_{v1} \sin(\phi_v - \Omega t_0)}{(\omega - \Omega)[3\omega_c^2 - (\omega + \Omega)^2]} + \frac{f_{v1} \sin(\phi_v - \Omega t_0)}{(\omega + \Omega)[3\omega_c^2 - (\omega - \Omega)^2]} \right\} \end{aligned} \quad (4.91)$$

Para o nível $O(\varepsilon^3)$, encontramos que uma das condições para a eliminação dos termos seculares é obtida como:

$$2d_2 A_v + c_2 A_v = 0 \quad (4.92)$$

Assim, a equação (4.87) e (4.92) finalizam que a solução de equilíbrio para o movimento de curvatura corresponde a $A_v = 0$ e que o equilíbrio é assintoticamente estável. Então, exceto para "small higher harmonics", o movimento de curvatura é essencialmente dado pela solução linear com uma amplitude proporcional à "excitation strength" εf_{v1} como indicado pela equação (4.83). Por conveniência na apresentação, colocaremos $A_v = 0$ nas condições adicionais para a eliminação dos termos

seculares do nível $O(\varepsilon^3)$. Tais condições são obtidas como mostrado nas equações abaixo:

$$2\sqrt{3}\omega_c d_2 A_\theta + 2(d_1 A_\theta)(\sqrt{3}\omega_c \sigma_1 - d_1 \gamma) - A_\theta d_1^2 \gamma = 0 \quad (4.93)$$

$$2A_\theta \sqrt{3}\omega_c d_2 \gamma + d_1^2 A_\theta - A_\theta (d_1 \gamma)^2 - 3A_\theta \omega_c^2 \left[\frac{A_\theta^2}{2} + \frac{16}{81} \left(\frac{f_{\theta 1}^2}{\omega_c^2} \right)^2 \right] - \omega_c^2 \frac{36}{(\omega^2 - \Omega^2)^2} \left\{ 1 + \omega_c^2 (1 - \beta_1)^2 \left[\frac{1}{\omega^2 - (\sqrt{3}\omega_c + \Omega)^2} + \frac{1}{\omega^2 - (\sqrt{3}\omega_c - \Omega)^2} \right] \right\} f_{v1}^2 A_\theta = 0 \quad (4.94)$$

Combinando as equações (4.87), (4.88), (4.89) e (4.93) são finalmente obtidas as seguintes equações diferenciais ordinárias para a amplitude A_θ e a fase γ da solução de $O(\varepsilon)$ para o movimento de arfagem:

$$\dot{A}_\theta = \varepsilon d_1 A_\theta + \varepsilon^2 d_2 A_\theta + \dots = -\frac{\varepsilon \sigma_1}{2\sqrt{3}\omega_c} \left(1 - \frac{\varepsilon \sigma_1}{2} \right) f_{v1}^2 \cos \gamma \quad (4.95)$$

$$2\sqrt{3}\omega_c A_\theta \frac{\dot{\gamma}}{\omega_c} = 6\varepsilon \sigma_1 A_\theta + \varepsilon \alpha_1 \left(1 - \frac{\varepsilon \sigma_1}{2} \right) f_{v1}^2 \sin \gamma + \varepsilon^2 \left\{ 3A_\theta \left[\frac{A_\theta^2}{2} + \frac{16}{81} \left(\frac{f_{\theta 1}^2}{\omega_c^2} \right)^2 \right] + \alpha_2 A_\theta f_{v1}^2 \right\} \quad (4.96)$$

onde,

$$\alpha_1 = \frac{12(1 - \beta_1)\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 \omega_c} \approx \frac{6(1 - \beta_1)}{\left(\frac{\omega^2 - 3\omega_c^2}{4}\right)^2} \quad (4.97)$$

$$\alpha_2 = \frac{36}{(\omega^2 - \Omega^2)^2} \left\{ 1 + \omega_c^2(1 - \beta_1)^2 \left[\frac{1}{\omega^2 - (\sqrt{3}\omega_c + \Omega)^2} + \frac{1}{\omega^2 - (\sqrt{3}\omega_c - \Omega)^2} \right] \right\} \quad (4.98)$$

Obtém-se diretamente das equações (4.95) e (4.96) a seguinte relação de amplitude-freqüência para o movimento de estado estacionário, isto é,

$$A_\theta = cte = A_{\theta_e} \text{ e } \gamma = cte = \gamma_e = \frac{\pi}{2} \text{ e } -\frac{\pi}{2}$$

$$6\varepsilon\sigma_1 \pm \frac{\alpha_1(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\sigma_1)(\varepsilon f_{v1})^2}{\varepsilon A_{\theta_e}} + \varepsilon^2 \left[\frac{3}{2} A_{\theta_e}^2 + \frac{16}{27} \left(\frac{f_{\theta_1}}{\omega_c^2} \right)^2 + \alpha_2 f_{v1}^2 \right] = 0 \quad (4.100)$$

A relação de amplitude-freqüência que caracteriza o movimento de arfagem superharmônico está indicada na Figura 4.3 que retrata a curva resposta de amplitude-freqüência de pitch para Ω próximo de $\sqrt{3}\omega_c/2$, com $0 \leq \omega_c \leq 1$ ($\omega \approx 22.373$) e $\varepsilon f_{v1}/(\omega^2 - 3\omega_c^2/4) = 0.02$ ($\approx 10/22.373^2$) e os dois valores de $\frac{\varepsilon f_{\theta_1}}{\omega_c^2}$ indicados na Figura 4.3.

Como indicado pelas equações (4.84), (4.85) e (4.86), o movimento de arfagem para este caso consiste de uma oscilação com amplitude igual a $\frac{4\varepsilon f_{\theta_1}}{9\omega_c^2}$, e freqüência Ω , sobreposta numa oscilação com amplitude εA_{θ_e} e freqüência igual a 2Ω . A amplitude εA_{θ_e} da componente com freqüência 2Ω depende das não-linearidades e é determinada pela equação (4.100).

A componente com freqüência Ω é zero para excitações com $f_\theta = 0$.

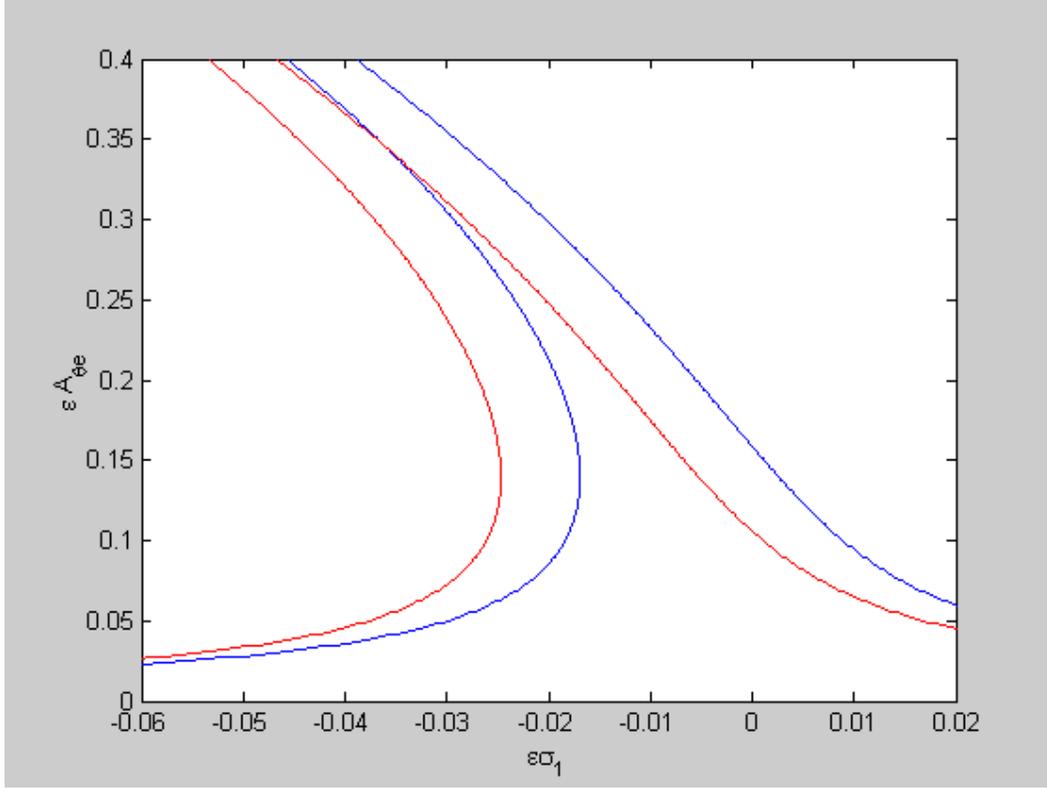


Figura 4.3: Resposta de amplitude-freqüência de arfagem para Ω próximo de $\sqrt{3}\omega_c/2$

4.11.2 Ressonância primária com Ω próximo de ω

Para analisar este caso faremos

$$f_v = \varepsilon^3 f_{v3}, \quad f_\theta = \varepsilon f_{\theta1}, \quad f_{v\eta} = \varepsilon f_{v\eta1}, \quad f_{\theta\eta} = \varepsilon f_{\theta\eta1} \quad (4.101)$$

As soluções para as equações diferenciais de $O(\varepsilon)$ para este caso são obtidas como $v_{t1} = A_v(t_1, t_2) \cos[\omega t_0 + B_v(t_1, t_2)] = A_v \cos(\phi_v)$ e θ_1 como mostrado na equação (4.84) com $\Omega = \omega$ naquela equação. As condições para a eliminação dos termos seculares do nível $O(\varepsilon^2)$ são agora:

$$d_1 \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha(t_2), \quad \alpha = A_v, B_v, A_\theta, B_\theta \quad (4.102)$$

As soluções para v_{t_2} e θ_2 são obtidas como mostrado nas equações abaixo. Depois, por conveniência, a solução homogênea é incluída na expressão para θ_2 na seqüência para transferir as condições iniciais para o movimento de pitch para aproximação $O(\varepsilon)$, então fazendo $\theta_2(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) = 0$:

$$v_{t_2} = (1 - \beta_1)\omega_c A_v \left\{ A_\theta \left[\frac{\sin(\phi_v + \phi_\theta)}{2\omega + \sqrt{3}\omega_c} + \frac{\sin(\phi_v - \phi_\theta)}{2\omega - \sqrt{3}\omega_c} \right] - \frac{f_{\theta_1}}{\omega(\omega^2 - 3\omega_c^2)} \left[\frac{\sin(\phi_v + \Omega t_0)}{3} + \sin(\phi_v - \Omega t_0) \right] \right\} \quad (4.103)$$

$$\theta_2 = K[A_v^2(t_2) \sin(2\phi_v) + C \cos(\phi_\theta)] \quad (4.104)$$

Na equação (4.104), temos:

$$K = \frac{12(\beta_1 - 1)\omega_c\omega}{4\omega^2 - 3\omega_c^2} \quad \text{e} \quad C = \text{constante} \quad (4.105)$$

Para expressar a proximidade da freqüência de excitação com a freqüência natural de curvatura, um parâmetro de sintonia é introduzido agora como:

$$\Omega = \omega(1 + \epsilon^2\sigma_v) \quad (4.106)$$

A substituição da solução das equações $O(\varepsilon)$ e $O(\varepsilon^2)$ nas equações diferenciais $O(\varepsilon^3)$, equações (4.81) e (4.82), resulta em um número de termos com freqüências (medidas na escala t_0) igual a freqüência natural do sistema. Em seguida, para obter uma solução que é uniformemente válida para $t \rightarrow \infty$, os coeficientes de tais termos ressonantes são igualados a zero. Isto resulta quatro equações diferenciais para as variáveis $A_v(t_2)$, $B_v(t_2)$, $A_\theta(t_2)$ e $B_\theta(t_2)$. E definindo a quantidade $\gamma_v(t_2)$ como:

$$\gamma_v(t_2) = \omega\sigma_v t_2 - B_v(t_2) \quad (4.107)$$

são obtidas as seguintes condições para a eliminação dos termos seculares das equações (4.81) e (4.82):

$$\begin{aligned} & \omega(2d_2A_v + c_2A_v) - \left[f_{v3} + \frac{1}{4}f_{v\gamma_1}A_v^2 \right] \sin(\gamma_v) - \frac{1}{(\omega^2 - 3\omega_c^2)^2} * \\ & * \left[\frac{(\beta_1 - 1)\omega^2 + 3(\beta_1 + 1)\omega_c^2}{4} - (\beta_1 - 1)^2\omega_c^2 \right] A_v f_{\theta_1}^2 \sin(2\gamma_v) = 0 \end{aligned} \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} & 2\omega A_v(\omega\sigma_v - d_2\gamma_v) + \left[f_{v3} + \frac{3}{4}f_{v\eta_1}A_v^2 \right] \cos(\gamma_v) + \\ & + 3\omega_c^2 \left[1 + \frac{2\omega_c^2(1 - \beta_1)^2}{4\omega^2 - 3\omega_c^2} \right] A_v A_\theta^2 + \left[\beta_2\omega^2 - \frac{3}{4}\beta_3 - \frac{24\omega_c^2\omega^2(1 - \beta_1)^2}{4\omega^2 - 3\omega_c^2} \right] * \\ & * A_v^3 + \frac{1}{(\omega^2 - 3\omega_c^2)^2} \left[\frac{(\beta_1 - 1)\omega^2 + 3(\beta_1 + 1)\omega_c^2}{4} - (\beta_1 - 1)^2\omega_c^2 \right] * \\ & * A_v f_{\theta_1}^2 \cos(2\gamma_v) - \frac{1}{(\omega^2 - 3\omega_c^2)^2} * \\ & * \left[\frac{(\beta_1 - 1)\omega^2 - 3(\beta_1 + 1)\omega_c^2}{2} - \frac{2(\beta_1 - 1)^2\omega_c^2}{3} \right] A_v f_{\theta_1}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.109)$$

$$d_2A_\theta = 0 \Rightarrow A_\theta = cte \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} A_\theta \left\{ 2\sqrt{3}\omega_c d_2B_\theta + \frac{3}{2}\omega_c^2 A_\theta^2 + 36\omega_c \left[1 + \frac{2\omega_c^2(1 - \beta_1)^2}{4\omega^2 - 3\omega_c^2} \right] A_v^2 + \right. \\ \left. + \frac{3\omega_c^2 f_{\theta_1}}{(\omega^2 - 3\omega_c^2)^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.111)$$

O valor de A_θ é determinado pelas condições iniciais do movimento.

Pela regra da cadeia, a derivada em relação ao tempo das quantidades A_v, γ_v, A_θ e B_θ são obtidas como $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \varepsilon d_1\alpha + \varepsilon^2 d_2\alpha + \dots$ ($\alpha = A_v, \gamma_v, A_\theta, B_\theta$) são obtidos com $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \varepsilon d_1\alpha + \varepsilon^2 d_2\alpha + \dots = \varepsilon^2 d_2\alpha + \dots$ ($\alpha = A_v, \gamma_v, A_\theta, B_\theta$). Uma vez que estas quantidades não dependem da escala de tempo t_1 as equações diferenciais para elas são da mesma forma que as equações (4.108)-(4.111). Aquelas equações diferenciais admitem a solução de equilíbrio $A_v = constante = A_{ve}$ e $\gamma_v = constante = \gamma_{ve}$.

Uma solução de equilíbrio para as equações (4.108)-(4.111) corresponde a uma solução periódica do estado estacionário para o movimento de curvatura $v_{t1}(t)$. Uma vez que os termos que são proporcionais a $f_{\theta 1}^2$ naquelas equações são multiplicados por um coeficiente desprezível, sua contribuição para a solução de equilíbrio é desprezível. Se não fosse pelo pequeno efeito do termo de excitação paramétrica nas equações (4.108) e (4.109), i.e. os termos proporcionais a $f_{v\eta 1}A_v^2$, aquelas equações também poderiam ter sido obtidas para uma análise de perturbação mais simples fazendo $E_\eta = O(\varepsilon^3)$ (i.e. com $f_v = \varepsilon^3 f_{v3}$ e $f_\theta = \varepsilon^3 f_{\theta 3}$). O pequeno efeito da excitação paramétrica poderiam ter sido perdidos nesta análise.

A relação amplitude-freqüência para a resposta em estado estacionário da curvatura da viga é obtida resolvendo as equações (4.108) e (4.109) numericamente. Se $f_{v\eta 1}A_{ve}^2/4 \ll f_{v3}$, a relação de amplitude-freqüência para a resposta harmônica quando Ω está próximo de ω é essencialmente dada como mostrado na equação abaixo:

$$(\omega_{c2})^2 \left\{ 2\omega^2 \sigma_v + 3\omega_c^2 \left[1 + \frac{2\omega_c^2(1-\beta_1)^2}{4\omega^2 - 3\omega_c^2} \right] A_\theta^2 + \left[\beta_2\omega_2 - \frac{3}{4}\beta_3 - \frac{24\omega_c^2\omega^2(1-\beta_1)^2}{4\omega^2 - 3\omega_c^2} \right] A_{ve}^2 \right\}^2 \approx \left(\frac{f_{v3}}{A_{ve}} \right)^2 \quad (4.112)$$

Os valores dos coeficientes de A_θ^2 e A_{ve}^2 para o primeiro modo, são indicados na equação (4.112). Uma vez que o valor de A_{ve}^2 é muito maior que aquele do coeficiente de A_θ^2 , a resposta amplitude-freqüência para um movimento de curvatura diretamente excitado é essencialmente o mesmo da resposta clássica do oscilador de Duffing com uma suave não-linearidade.

Os pequenos termos de $f_{v\eta 1}A_{ve}^2$ e $A_{ve}f_{\theta 1}^2$ nas equações (4.108) e (4.109) causam uma pequena mudança na resposta dada pela equação (4.112) para valores maiores de A_{ve} . A Figura 4.4 mostra a dependência da amplitude-freqüência para a resposta de curvatura para $\varepsilon^2 c_2 = 0.05$, $\omega_c = 1$, $\omega = 22.577$, e os dois valores de $\varepsilon^3 f_{v3}$ indicados na figura. O resultado mostrado na Figura 4 foi obtido resolvendo numericamente as equações (4.108) e (4.109) com $A_v = A_{ve}$ e $\gamma = \gamma_e$. As curvas de resposta amplitude-freqüência para $0 < \omega_c < 1$ são essencialmente indistinguíveis daquelas mostradas na Figura 4.4, enquanto aquelas para valores maiores de ω_c são

similares àquelas mostradas na figura.

A amplitude máxima da resposta de curvatura determinada pela equação (4.112) é igual a $\varepsilon^3 f_{v3}/(\omega\varepsilon^2 c_2)$. O valor da amplitude máxima (e, desta forma, da frequência quando ocorre o fenômeno de salto) é pouco afetado pelos pequenos termos comentados acima. Diminuindo o valor da força de excitação $\varepsilon^3 f_{v3}$, pode-se eventualmente eliminar o fenômeno de salto de modo que a resposta se assemelha à resposta linear.

O estado estacionário do movimento- v para o caso considerado nesta seção é essencialmente uma oscilação com frequência Ω dada como $v = \varepsilon A_{ve} \cos(\Omega t - \gamma_{ve}) + O(\varepsilon^2)$, com A_{ve} determinado das equações (4.108) e (4.109). Por outro lado, o movimento- θ não-amortecido depende das condições iniciais e do movimento- v . Depois que o movimento- v alcança o estado estacionário o movimento- θ é dado como:

$$\theta = \varepsilon A_\theta \cos \phi_\theta + K[(\varepsilon A_{ve})^2 \sin[2(\Omega t - \gamma_{ve})]_\varepsilon^2 C \cos \phi_\theta] + O(\varepsilon^3) \quad (4.113)$$

com $\phi_\theta = \omega_\theta^* t + B_{\theta 0}$ onde $B_{\theta 0}$ é uma constante e a frequência ω_θ^* é determinada como:

$$\omega_\theta^* t = \sqrt{3}\omega_c \left\{ 1 - \frac{(\varepsilon A_\theta)^2}{4} - 6 \left[1 + \frac{2\omega_c^2(1 - \beta_1)^2}{4\omega^2 - 3\omega_c^2} \right] (\varepsilon A_{ve})^2 - \frac{(\varepsilon f_{\theta 1})^2}{2(\omega^2 - 3\omega_c^2)^2} \right\} + O(\varepsilon^2) \quad (4.114)$$

Na Figura 4.4, exibimos a curva de resposta de amplitude-frequência de curvatura para Ω próximo de ω , com $\omega_c = 1, \omega = 22.577$ (ou $0 \leq \omega_c \leq 1$) e $\varepsilon^2 c_2 = 0.05$.

A parte de $O(\varepsilon)$ do movimento de arfagem dada pela equação (4.113) consiste de uma componente de frequência 2Ω , cuja amplitude é proporcional ao quadrado da amplitude do estado estacionário do movimento de curvatura, e uma componente com frequência ω_θ^* , cuja amplitude é igual a $\varepsilon^2 C$. Impondo a condição $\theta_2(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$, a constante $\varepsilon^2 C$ é obtida como segue:

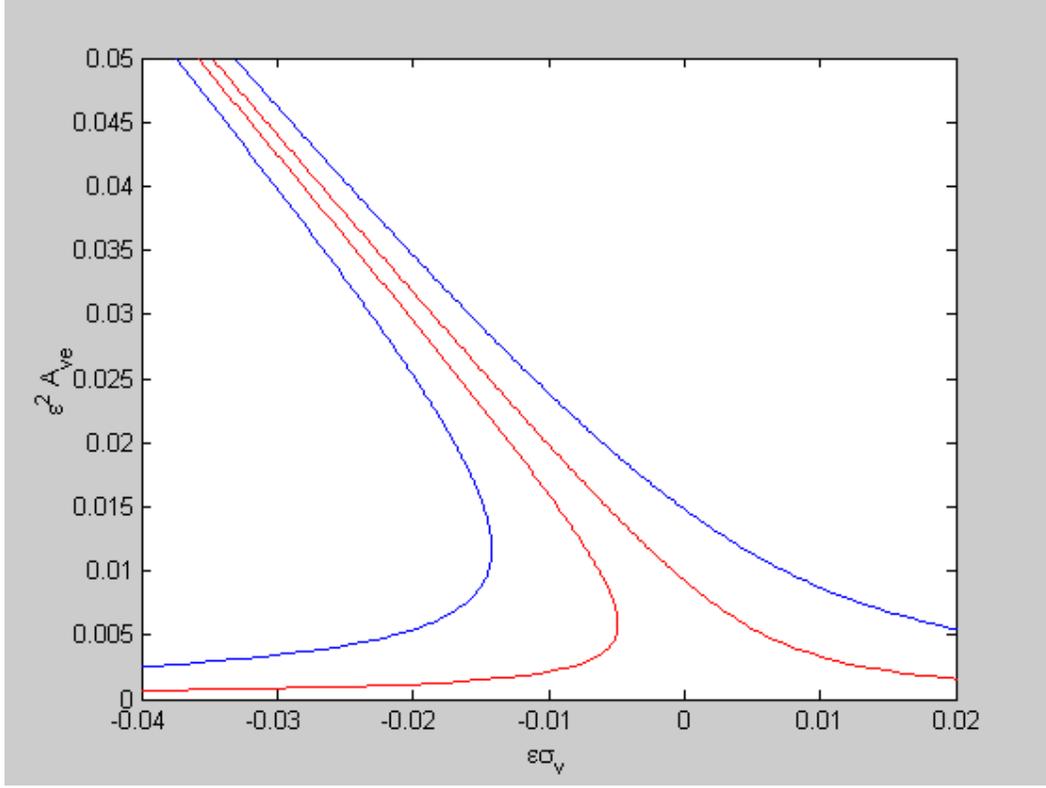


Figura 4.4: Resposta de amplitude-freqüência de curvatura para Ω próximo de ω

$$\epsilon^2 C = \pm \sqrt{\left(\frac{v_0 \dot{v}_0}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\sqrt{3}\omega_c}\right)^2 \left[v_0^2 - \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega}\right)^2\right]^2} \quad (4.115)$$

onde, $v_0 = v_t(0)$ e $\dot{v}_0 = \dot{v}_t(0)$. Então o movimento de pitch depende não apenas da amplitude de estado estacionário do movimento de curvatura, mas também das condições iniciais dos movimentos de curvatura e pitch da viga. Para o caso especial, quando $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, o movimento de arfagem resultante depende do movimento de curvatura apenas. Se, além disso tivermos $A_\theta = 0$, o movimento de curvatura é iniciado com $\dot{v}_t(0) = 0$, o movimento de arfagem resultante é dado como:

$$\theta(t) = K \left[(\epsilon A_{ve})^2 \sin(2\Omega t) - \frac{2\omega}{\sqrt{3}\omega_c} \epsilon^2 v_{t1}^2(0) \sin \omega_\theta^* \right] + O(\epsilon^3) \quad (4.116)$$

Para os casos quando $\frac{2\omega v_t^2(0)}{\sqrt{3}\omega_c} \gg (\varepsilon A_{re})^2$, o movimento de pitch de estado estacionário consiste essencialmente de uma oscilação de frequência ω_θ^* cuja amplitude é proporcional ao quadrado da amplitude inicial do movimento de flexão oscilando rapidamente. Para tais casos, a amplitude de estado estacionário do movimento de pitch correspondendo ao primeiro modo de curvatura é aproximadamente igual a $\frac{2K\omega v_0^2}{\sqrt{3}\omega_c} \approx 7.1v_0^2$ quando $0 \leq \omega_c \leq 1$.

Integrações numéricas das equações (4.62) e (4.63) confirmam estes resultados. O movimento de curvatura resultante para este caso é essencialmente uma senóide como descrito acima. Como $v_t(0)$ aproxima-se de zero, as componentes de $O(\varepsilon^3)$ na equação (4.113) com frequência 2Ω , e as componentes de ordem superior, começam a afetar os vários pequenos movimentos resultantes, que consistirão então de altas frequências de oscilação com frequência 2Ω cuja amplitude de modulação é modulada pelas baixas frequências das componentes de alta ordem.

4.11.3 Ressonância primária com Ω próximo de $\sqrt{3}\omega_c$

O movimento para este caso é analisado fazendo:

$$f_\theta = \varepsilon^3 f_{\theta 3}, \quad f_v = \varepsilon f_{v1}, \quad f_{v\eta} = \varepsilon f_{v\eta 1}, \quad f_{\theta\eta} = \varepsilon f_{\theta\eta 1} \quad (4.117)$$

e a solução para equações diferenciais de $O(\varepsilon)$ são obtidas como:

$$\begin{aligned} v_{t1} &= A_v(t_1, t_2) \cos[\omega t_0 + B_v(t_1, t_2)] + \frac{f_{v1}}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t_0) \\ &= A_v \cos \phi_v + K_v \cos(\Omega t_0) \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$\theta_1 = A_\theta(t_1, t_2) \cos[\sqrt{3}\omega_c t_0 + B_\theta(t_1, t_2)] = A_\theta \cos \phi_\theta \quad (4.119)$$

As condições para a eliminação dos termos seculares neste caso são as mesmas que na equação (4.102) e as soluções das equações diferenciais de $O(\varepsilon^2)$ são as análogas as equações (4.90) e (4.91), com $f_{\theta 1} = 0$ naquelas equações.

Para o nível $O(\varepsilon^3)$ encontramos também que uma das equações para eliminar os termos seculares é obtida como:

$$2d_2A_v + c_2A_v = 0 \quad (4.120)$$

Então, como na ressonância super-harmônica com Ω próximo de $\frac{\sqrt{3}\omega_c}{2}$, $A_v \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$, e a solução de $O(\varepsilon)$ para o movimento de curvatura consiste apenas de uma solução particular devido à excitação externa.

Expressando a proximidade de Ω com $\sqrt{3}\omega_c$ como:

$$\Omega = \sqrt{3}\omega_c(1 + \varepsilon^2\sigma_\theta) \quad (4.121)$$

e definindo uma quantidade $\gamma_\theta(t_2)$ como

$$\gamma_\theta(t_2) = \sqrt{3}\omega_c\sigma_\theta t_2 - B_\theta(t_2) \quad (4.122)$$

as condições para a eliminação dos termos seculares nas equações diferenciais de $O(\varepsilon^3)$ são obtidas como mostrado nas duas equações abaixo:

$$2\sqrt{3}\omega_c d_2 A_\theta - \alpha_4 A_\theta f_{v1}^2 \sin(2\gamma_\theta) - [f_{\theta 3} + \alpha_5 f_{\theta \eta 1} f_{v1}^2] \sin \gamma_\theta = 0 \quad (4.123)$$

$$2\sqrt{3}\omega_c A_\theta \frac{\sqrt{3}\omega_c \sigma_\theta - d_2 \gamma_\theta}{\omega_c} + \frac{3}{2} a_\theta^3 + [\alpha_3 + \alpha_4 \cos(2\gamma_\theta)] A_\theta f_{v1}^2 + \left[\frac{f_{\theta 3} + \alpha_5 f_{\theta \eta 1} f_{v1}^2}{\omega_c^2} \right] \cos \gamma_\theta = 0 \quad (4.124)$$

onde,

$$\alpha_3 = \frac{36}{(\omega^2 - 3\omega_c^2)^2} \left\{ 1 + \omega_c^2(\beta_1 - 1)^2 \left[\frac{1}{\omega^2 - 12\omega_c^2} + \frac{1}{\omega^2} \right] \right\} \quad (4.125)$$

$$\alpha_4 = \frac{18}{(\omega^2 - 3\omega_c^2)^2} \left[\beta_1 - \frac{2\omega_c^2(\beta_1 - 1)^2}{\omega^2} \right] \quad (4.126)$$

$$\alpha_5 = \frac{3}{4(\omega^2 - 3\omega_c^2)^2} \quad (4.127)$$

Para o primeiro modo obtém-se $\alpha_3 \approx 1.43 * 10^{-4}$, $\alpha_4 \approx 2.19 * 10^{-4}$ e $\alpha_5 \approx 2.92 * 10^{-6}$ quando $0 \leq \omega \leq 1$ e $\alpha_3 = 1.167 * 10^{-4}$, $\alpha_4 = 1.16 * 10^{-4}$ e $\alpha_5 = 1.753 * 10^{-6}$ quando $\omega_c = 5$.

As equações para α_3 , α_4 e α_5 admitem as seguintes equações de equilíbrio, que correspondem a $A_\theta = \text{constante} = A_{\theta_e}$ e $\gamma_\theta = \text{constante} = \gamma_{\theta_e}$.

Equilíbrio E_1 :

$$\sin \gamma_{\theta_e} = 0 \Rightarrow \cos \gamma_{\theta_e} = \pm 1 \quad (4.128)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{4}A_{\theta_e}^2 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{6}f_{v1}^2 \pm \frac{f_{\theta 3} + \alpha_5 f_{\theta \eta 1} f_{v1}^2}{6\omega_c^2 A_{\theta_e}} \quad (4.129)$$

Equilíbrio E_2 :

$$\cos \gamma_{\theta_e} = -\frac{1}{A_{\theta_e}} \left[\frac{f_{\theta 3}}{2\alpha_4 f_{v1}^2} + \frac{\alpha_5}{2\alpha_4} f_{\theta \eta 1} \right] \quad (4.130)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{4}A_{\theta_e}^2 + \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{6}f_{v1}^2 \quad (4.131)$$

O equilíbrio E_2 existe apenas na região onde os valores de $|\cos \gamma_\theta|$, determinado pela equação (4.130), não é maior do que a unidade.

A resposta de amplitude-freqüência do estado estacionário de arfagem caracterizada pelo equilíbrio E_1 , são essencialmente análogas àquelas para o Oscilador de Duffing com uma não-linearidade suave, enquanto que a resposta de estado estacionário para o equilíbrio E_2 , que é independente dos parâmetros de excitação que aparecem na equação (4.63), é caracterizada por uma oscilação paramétrica do Oscilador de Duffing. Na Figura 4.5, exibimos a curva de resposta amplitude-freqüência de arfagem para Ω próximo de $\sqrt{3}\omega_c$, com $\omega_c = 1$ ($0 \leq \omega_c \leq 1$), $\omega = 22.577$, $f_v = 15$ e vários valores de $f = \frac{f_\theta + \alpha_5 f_v^2 f_{\theta\eta}}{\omega_c^2}$.

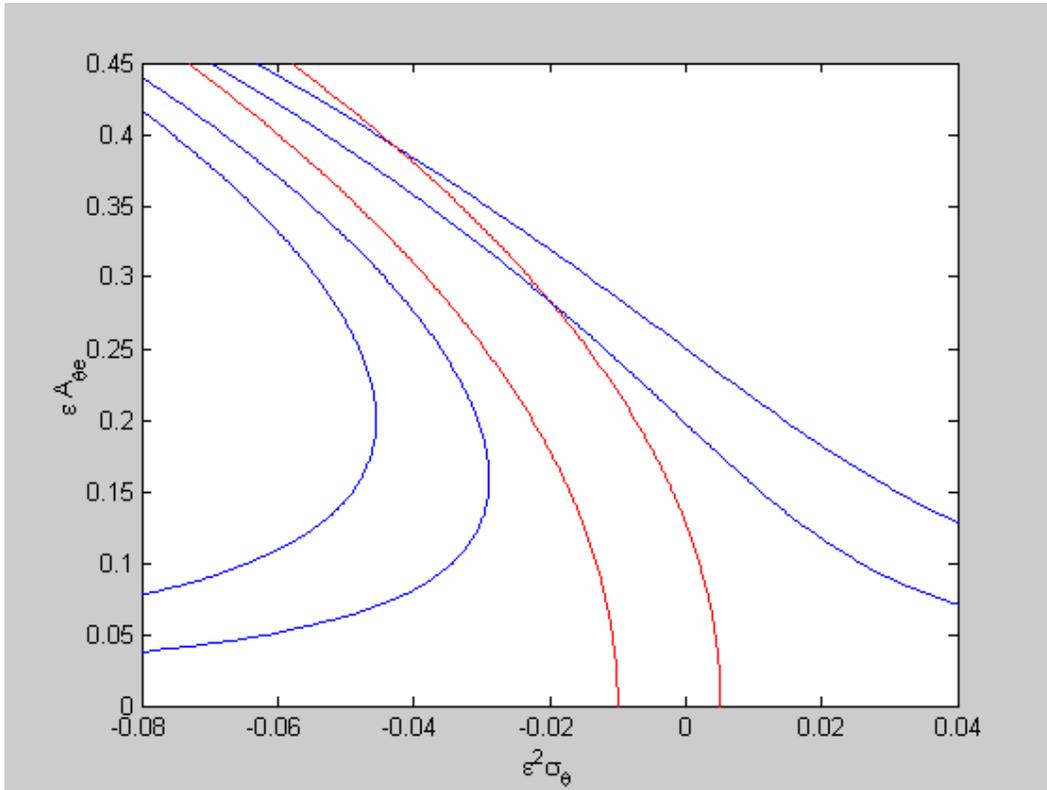


Figura 4.5: Curva de resposta de amplitude-freqüência de arfagem para Ω próximo de $\sqrt{3}\omega_c$

Na seqüência, para adicionar a investigar o efeito que qualquer movimento de curvatura tem sobre o movimento de arfagem, considere o caso especial quando a distribuição da excitação E_η é tal que resulte $f_\theta = 0$ e que $f_{\theta\eta}$ esteja também próximo de zero. Neste caso as equações diferenciais para A_θ e γ_θ obtida das equações (4.123)

e (4.124) podem ser escritas como:

$$\frac{\sqrt{3}\dot{A}_\theta^2}{\omega_c} = \varepsilon^2 \alpha_4 A_\theta^2 f_{v1}^2 \sin(2\gamma_\theta) \quad (4.132)$$

$$2\sqrt{3}\frac{A_\theta\dot{\gamma}_\theta}{\omega_c} = \varepsilon^2 A_\theta \left[6\sigma_\theta + \frac{3}{2}A_\theta^2 + (\alpha_3 + \alpha_4 \cos(2\gamma_\theta))f_{v1}^2 \right] \quad (4.133)$$

Multiplicando a equação (4.132) pela expressão dada pelo lado direito da equação (4.133), e multiplicando a equação (4.133) pelo lado direito da equação (4.132), obtemos a seguinte integral do movimento das equações diferenciais resultantes:

$$3A_\theta^2 \left(2\sigma_\theta + \frac{1}{4}A_\theta^2 \right) + f_{v1}^2 (\alpha_3 + \alpha_4 \cos(2\gamma_\theta)) A_\theta^2 = \text{constante} = H \quad (4.134)$$

Resolvendo a equação (4.134), é obtida a seguinte equação diferencial governando a amplitude A_θ para o primeiro modo de aproximação para o movimento de arfagem:

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\frac{\dot{A}_\theta^2}{\omega_c} &= \pm \varepsilon^2 f_{v1}^2 A_\theta^2 \sqrt{\alpha_4^2 - \left[\frac{\frac{H}{A_\theta^2} - 3 \left(2\sigma_\theta + \frac{A_\theta^2}{4} \right)}{f_{v1}^2} - \alpha_3 \right]^2} \\ &= \pm \varepsilon^2 f_{v1}^2 A_\theta^2 \sqrt{g(A_\theta^2)} \end{aligned} \quad (4.135)$$

A integral do movimento da equação (4.135) dada pela equação (4.134) proporciona a condição sob a qual a energia está mudando entre os movimentos de curvatura e arfagem da viga quando a excitação é somente o termo $f_v \cos(\Omega t)$ na equação (4.62). Os fenômenos não-lineares representados pela equação (4.135) ocorre quando $g(A_\theta^2) \geq 0$, e o valor extremo de A_θ^2 corresponde a $g(A_\theta^2) = 0$. O especial interesse é a causa pela qual o movimento de arfagem é iniciado com condições iniciais pequenas $\theta(0)$ e $\dot{\theta}(0)$ de modo que $H \approx 0$. Para este caso, a função $g(A_\theta^2)$ reduz para:

$$g(A_\theta^2) = \frac{9}{16f_{v1}^4} (A_{\theta m1}^2 - A_\theta^2)(A_\theta^2 - A_{\theta m2}^2) \quad (4.136)$$

onde,

$$A_{\theta m1}^2 = -\frac{4(\alpha_4 + \alpha_3)f_{v1}^2}{3} - 8\sigma_\theta \quad (4.137)$$

$$A_{\theta m2}^2 = \frac{4(\alpha_4 - \alpha_3)f_{v1}^2}{3} - 8\sigma_\theta = A_{\theta max}^2 \quad (4.138)$$

As quantidades $A_{m\theta 1}^2$ e $A_{m\theta 2}^2$ são as raízes do polinômio $g(A_\theta^2)$. A raiz $A_{m\theta 1}^2$ é nula quando $\sigma_\theta = \sigma_{\theta 1}$, enquanto a raiz $A_{m\theta 2}^2$ é zero quando $\sigma_\theta = \sigma_{\theta 2}$ onde,

$$\sigma_{\theta 1} = \sigma_\theta(A_{\theta m1}^2 = 0) = -\frac{(\alpha_4 + \alpha_3)f_{v1}^2}{6} \quad (4.139)$$

$$\sigma_{\theta 2} = \sigma_\theta(A_{\theta m2}^2 = 0) = \frac{(\alpha_4 - \alpha_3)f_{v1}^2}{6} \quad (4.140)$$

Com α_3 e α_4 maiores que zero, e $\alpha_4 > \alpha_3$, segue que $\sigma_{\theta 1} < 0$ e $\sigma_{\theta 2} > 0$. Quando $\varepsilon^2\sigma_{\theta 1} < \varepsilon^2\sigma_\theta < \varepsilon^2\sigma_{\theta 2}$ a função $g(A_\theta^2)$ é positiva e então a amplitude do movimento de pitch $\theta(t) \approx \varepsilon\theta_1(t)$ cresce para grandes valores que é igual a $\varepsilon A_{\theta max}$ como mostrado na equação (4.138) o valor máximo $\varepsilon A_{\theta max}$ do movimento de arfagem na região de ressonância é independente das condições iniciais em arfagem.

Formulamos neste capítulo as equações diferenciais não-lineares, matematicamente consistentes, governando o acoplamento do movimento de flexão-arfagem para uma viga em órbita. A formulação usada aqui, relacionou a dinâmica não-linear de vigas, levando em conta todas as não-linearidades geométricas no sistema, além das não-linearidades devido à efeitos orbitais.

As equações não-lineares do movimento formuladas e expandidas para conter não-linearidades polinomiais de terceira ordem, foram aplicadas para estudar a ressonância do acoplamento dos movimentos de flexão e arfagem da viga em órbita circular sobre o centro de massa de um corpo atrator. As não-linearidades nas equações são devido à curvatura não-linear e efeitos de inércia, bem como devidas ao acoplamento entre os movimentos de curvatura e arfagem, além da contribuição do momento de gradiente de gravidade.

Consideramos três tipos de ressonâncias:

Para a ressonância super-harmônica de arfagem, foi encontrado que a primeira aproximação para a resposta de arfagem consiste de duas componentes harmônicas, com a amplitude de uma das componentes sendo afetada pelas não-linearidades.

Para a ressonância primária de curvatura, foi determinado que enquanto a resposta de amplitude-freqüência do movimento de curvatura é caracterizada por um oscilador de Duffing clássico, a componente de arfagem da resposta consiste de freqüências baixas de oscilação, cuja amplitude depende das condições iniciais e de uma componente de alta freqüência, cuja amplitude depende da amplitude de curvatura no estado estacionário.

Para a resposta da ressonância primária de arfagem foi mostrado que ela exibe características de um oscilador de Duffing com não-linearidades suaves e de um oscilador de Duffing excitado parametricamente. Também foi encontrado que se o movimento de arfagem é iniciado com pequenas condições iniciais em uma certa região no espaço $(f_v^2, \varepsilon^2 \sigma_\theta)$ o movimento de arfagem cresce para um valor máximo que é independente das condições iniciais de arfagem.

4.12 Simulações Numéricas das Equações da Viga no Espaço

Apresentamos aqui as simulações numéricas das equações da viga no espaço (equações (4.62) e (4.63)). Os parâmetros utilizados nesta simulação foram: $f_{v1} = 1$, $f_{\theta1} = 44.96$, $f_{v\eta1} = 0$, $f_{\theta\eta} = 0$, $\omega_c = 5$, $\omega = 27.03$, $\Omega = \frac{\sqrt{3}\omega}{2}$, $c = 0.5$, $\beta_1 = 3.0463$, $\beta_2 = 61.208$ e $\beta_3 = 23306$.

A seguir apresentamos as conclusões do presente trabalho. Fazemos também um breve apanhado sobre os trabalhos futuros.

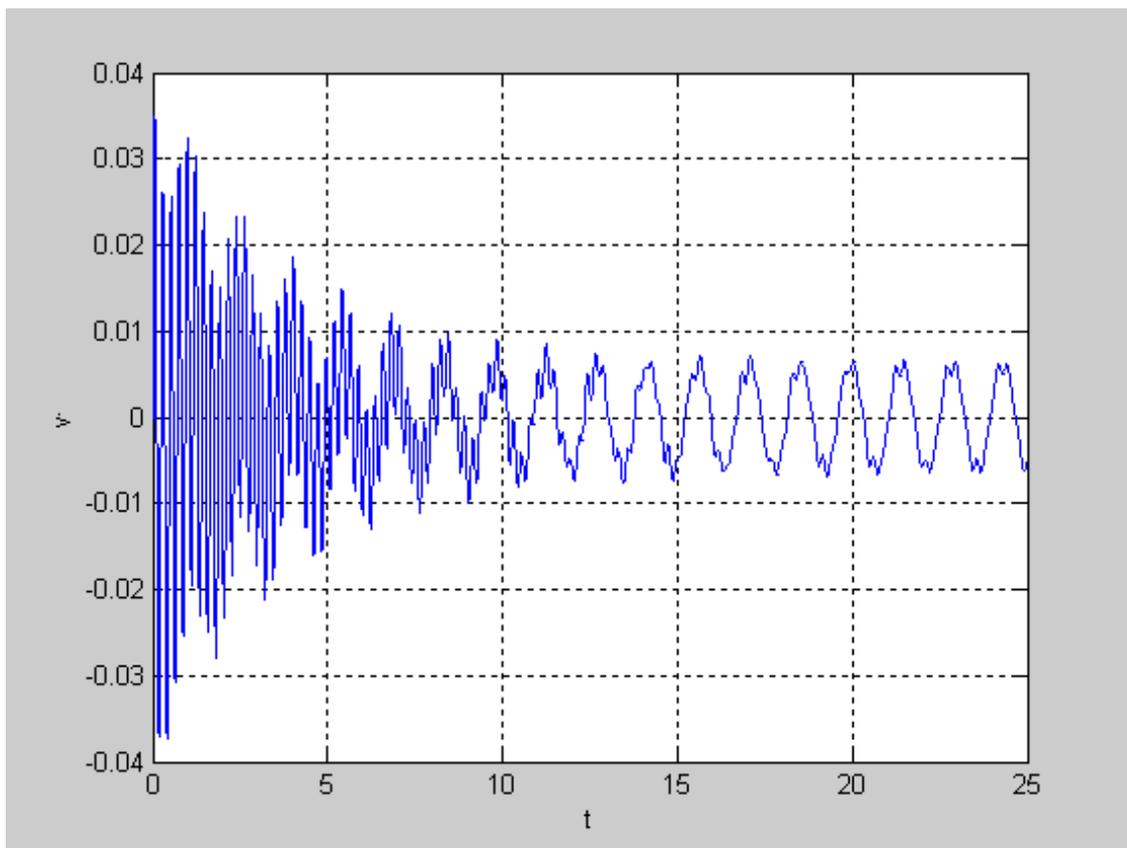


Figura 4.6: Histórico de v no tempo

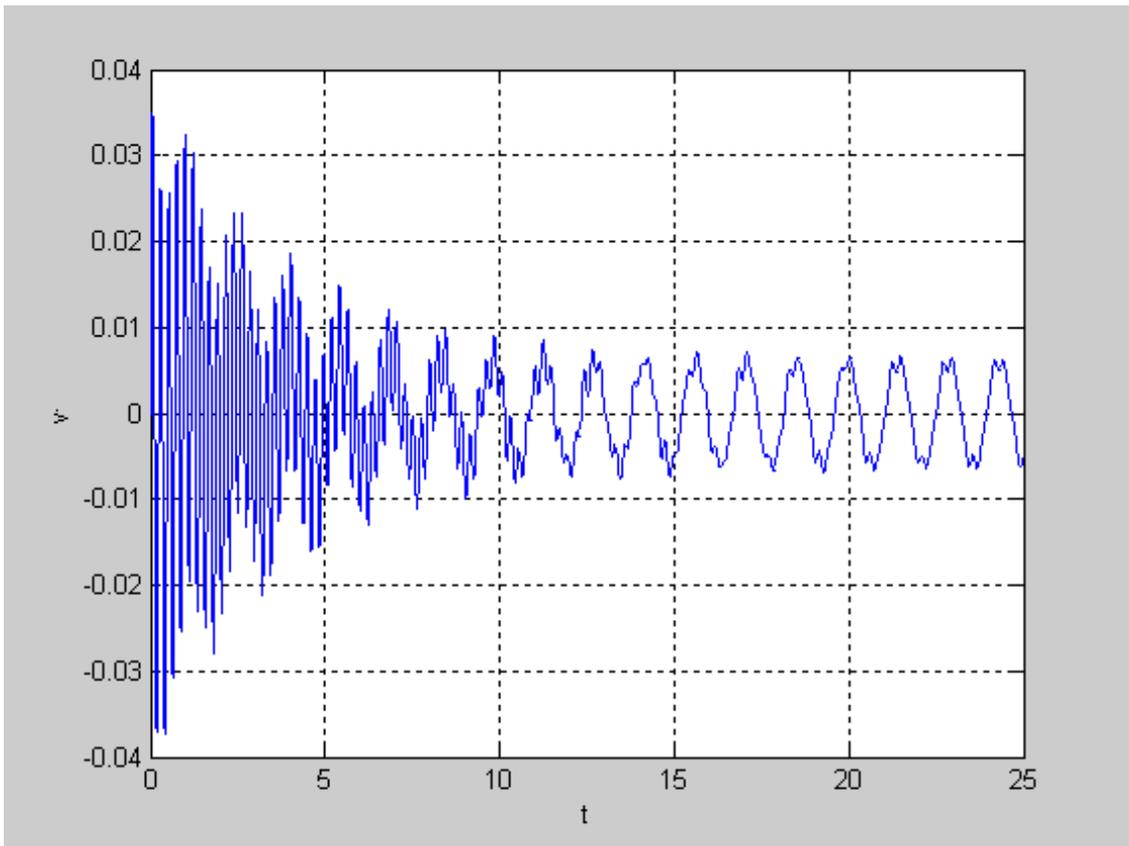


Figura 4.7: Histórico de \dot{v} no tempo

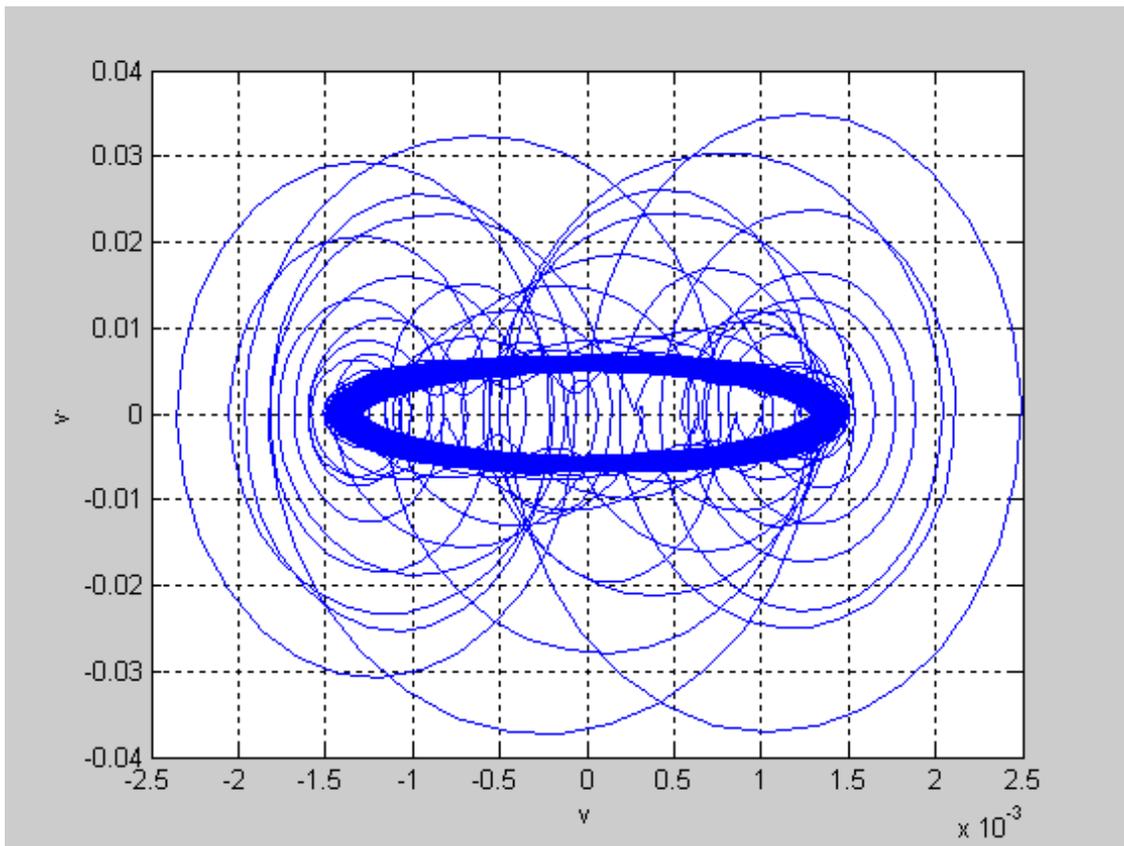


Figura 4.8: Plano de fase $v \times \dot{v}$

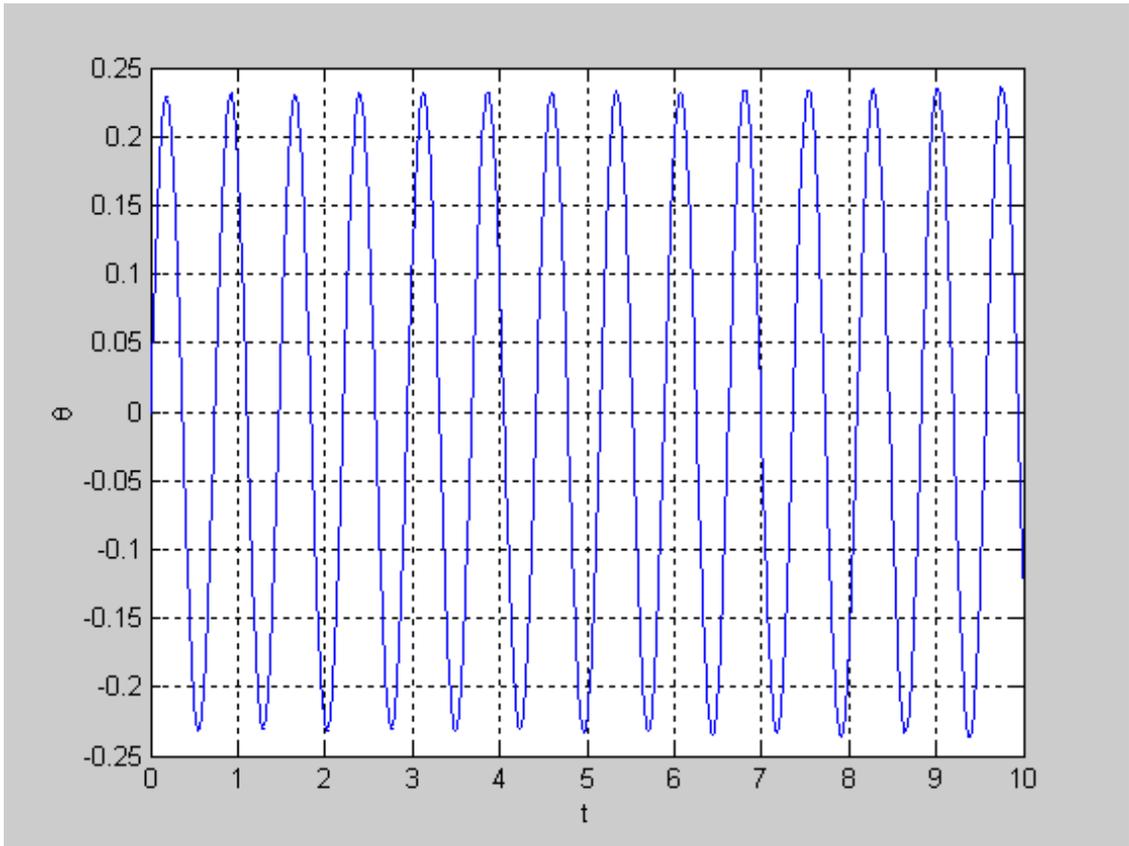


Figura 4.9: Histórico de θ no tempo

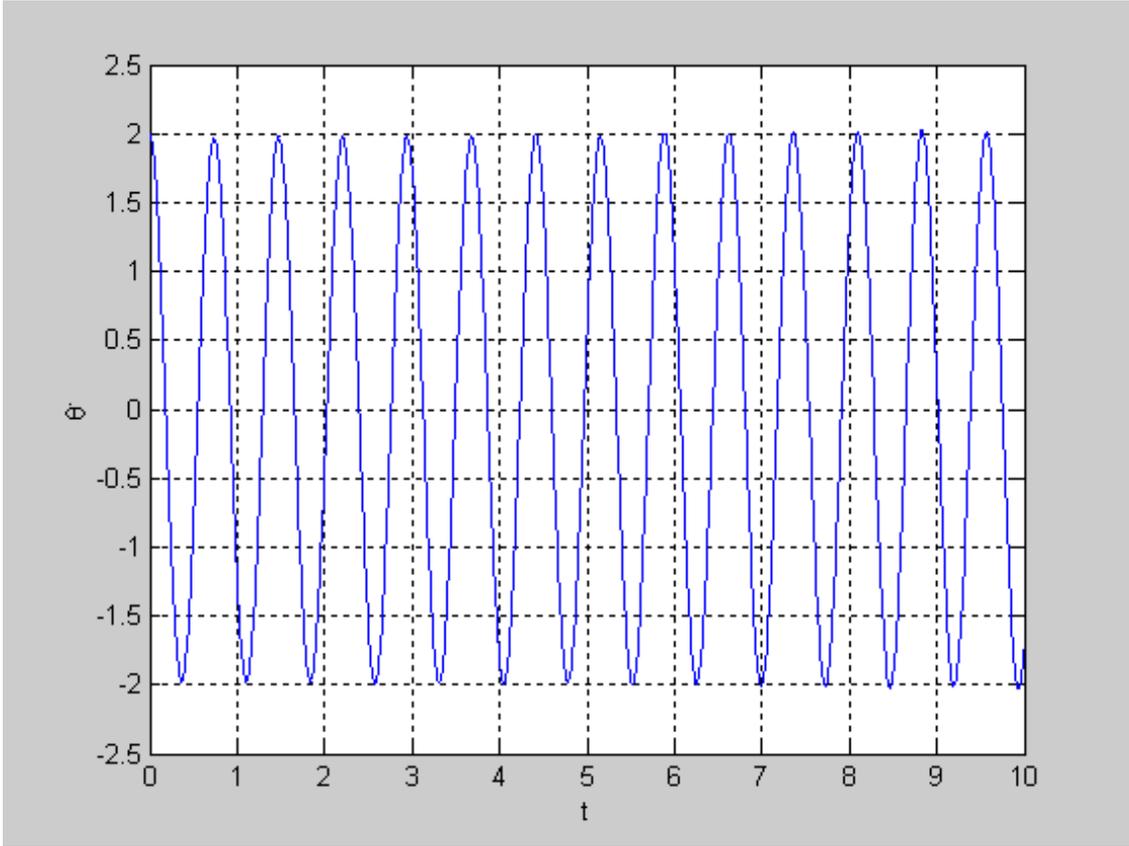


Figura 4.10: Histórico de $\dot{\theta}$ no tempo

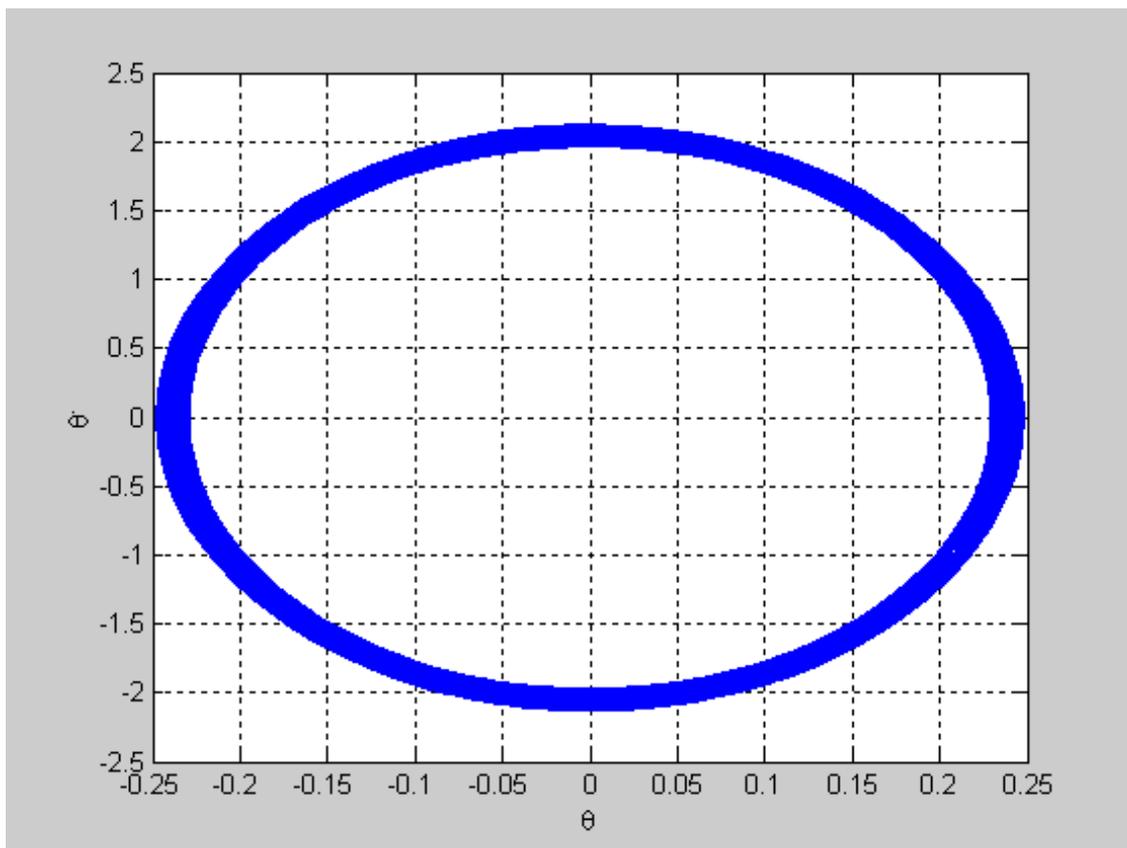


Figura 4.11: Plano de fase $\theta \times \dot{\theta}$

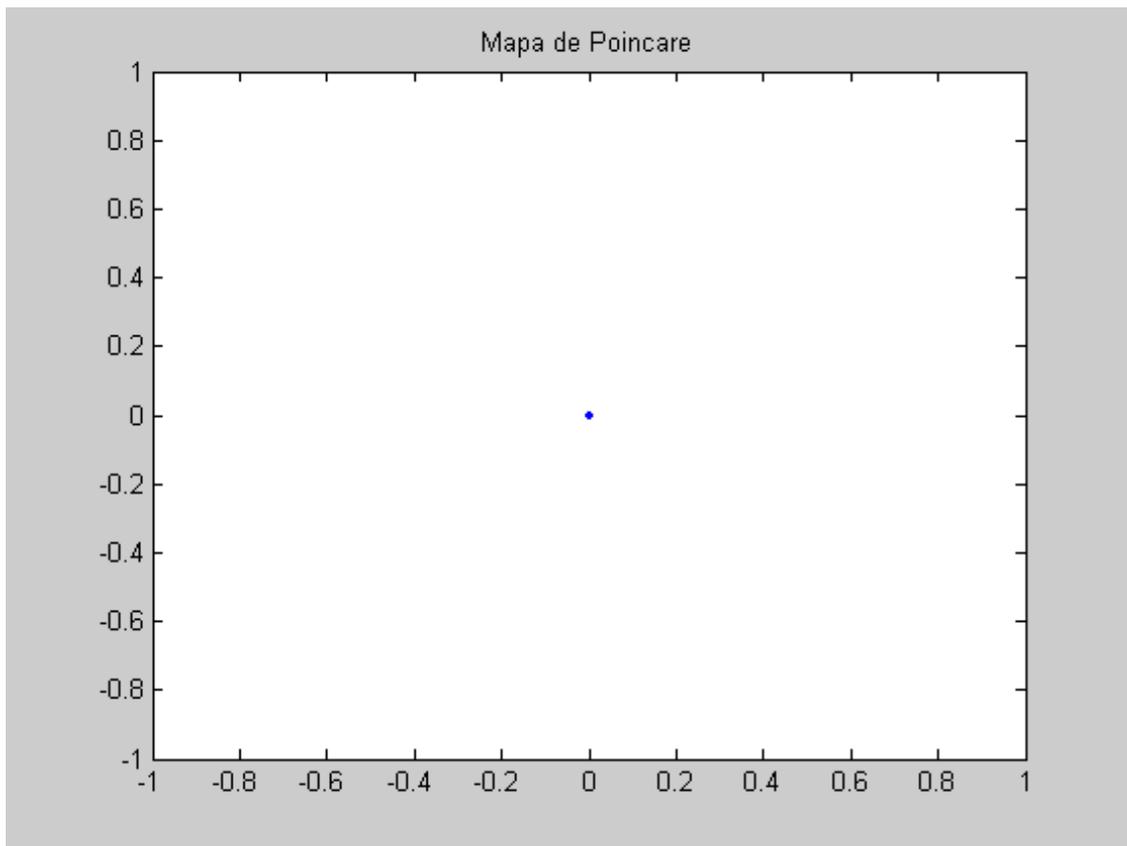


Figura 4.12: Mapa de Poincaré

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

5.1 Conclusões

Desenvolvemos na primeira parte desta dissertação, um algoritmo algébrico para a solução analítica de uma espaçonave de dupla rotação axial. O enfoque desta parte da dissertação foi a utilização do Método de Múltiplas Escalas, visto que o problema já havia sido tratado em [3], num caso particular em que considerava-se $\alpha = 0$, através do Método da Média. O algoritmo desenvolvido nesta parte, foi utilizado também para plotar as curvas de resposta amplitude-freqüência nas três ressonâncias que ocorrem com uma viga em órbita.

Formulamos na segunda parte desta dissertação as equações diferenciais não-lineares, matematicamente consistentes, governando o acoplamento do movimento de flexão-arfagem para uma viga em órbita. A formulação usada aqui, relacionou a dinâmica não-linear de vigas, levando em conta todas as não-linearidades geométricas no sistema, além das não-linearidades devido à efeitos orbitais.

As equações não-lineares completas, para uma viga em órbita, foram expandidas para que fossem incluídas todas as não-linearidades até ordem cúbica em um parâmetro contabilizante ε .

O material que constitui a viga foi assumido ser linear e, portanto, as não-linearidades devido as deformações foram causadas pelas mudanças na geometria

do sistema. Estas deformações incluem não-linearidades de inércia, e termos não-lineares devido a curvatura da viga.

As equações também contêm segundo e terceiro graus, isto é, $O(\varepsilon^2)$ e $O(\varepsilon^3)$, de termos não-lineares do acoplamento entre os movimentos de arfagem e curvatura da viga. Alguns dos termos não-lineares nas equações do movimento são multiplicados pelos coeficientes de Galerkin β_1, β_2 e β_3 .

Muitos, mas não todos, os termos não-lineares que aparecem na equação (4.37) foram também encontradas no trabalho publicado por [9]. Os termos ausentes na equação (49) em [9] envolvem a deformação elástica $u(t)$ e também termos devido as não-linearidades presentes na expressão da curvatura da viga. É fato também que a equação (48) em [9], não contém todos os termos não-lineares mostrados na equação (4.38) desenvolvida nesta dissertação. Entretanto, é interessante notar que os termos que não aparecem na equação (48) em [9] não contribuem para a equação reduzida, equação (4.61), após ser aplicado o método de Galerkin.

As equações não-lineares do movimento formuladas e expandidas para conter não-linearidades polinomiais de terceira ordem, foram aplicadas para estudar a ressonância do acoplamento dos movimentos de flexão e arfagem da viga em órbita circular sobre o centro de massa de um corpo atrator. As não-linearidades nas equações são devido à curvatura não-linear e efeitos de inércia, bem como devidas ao acoplamento entre os movimentos de curvatura e arfagem, além da contribuição do momento de gradiente de gravidade.

Consideramos três tipos de ressonâncias:

- Ressonância super-harmônica de arfagem ($\Omega \approx \frac{\sqrt{3}\omega_c}{2}$);
- ressonância primária de curvatura ($\Omega \approx \omega$);
- e ressonância primária de arfagem ($\Omega \approx \sqrt{3}\omega_c$).

Para a ressonância super-harmônica de arfagem, foi encontrado que a primeira aproximação para a resposta de arfagem consiste de duas componentes harmônicas, com a amplitude de uma das componentes sendo afetada pelas não-linearidades.

Para a ressonância primária de curvatura, foi determinado que enquanto a resposta de amplitude-frequência do movimento de curvatura é caracterizada por um oscilador de Duffing clássico, a componente de arfagem da resposta consiste de baixas frequências de oscilação, cuja amplitude depende das condições iniciais e de uma componente de alta frequência, além da amplitude de curvatura no estado estacionário.

Para a resposta da ressonância primária de arfagem foi mostrado que ela exibe características de um oscilador de Duffing com não-linearidades suaves e de um oscilador de Duffing excitado parametricamente. Também foi encontrado que se o movimento de arfagem é iniciado com pequenas condições iniciais em uma certa região no espaço $(f_v^2, \varepsilon^2 \sigma_\theta)$ o movimento de arfagem cresce para um valor máximo que é independente das condições iniciais de arfagem.

Mostramos que ressonâncias internas não são fisicamente possíveis, pois qualquer frequência natural é sempre maior do que a frequência natural de arfagem $\omega_\theta = \sqrt{3}\omega_c$.

As equações do movimento envolveram a inclusão de momentos e produtos de inércia, incluindo termos que são originados da expressão da curvatura da viga. Conteve também termos não-lineares originados do gradiente de gravidade. Logo, tomamos cuidado no sentido de que as não-linearidades fossem retiradas da formulação do problema de modo consistente.

A linearização das equações do movimento em torno da configuração de equilíbrio conhecida como estabilização por gradiente de gravidade foi realmente uma hipótese razoável, desde que o desalinhamento com a vertical local e as flexões elásticas fossem pequenos.

5.2 Trabalhos Futuros

Continuaremos os estudos aqui iniciados, no Doutorado, incluindo os efeitos da

pressão de radiação solar nas equações do movimento da viga em órbita, já que esta proporciona perturbações no movimento.

Pelas características deste trabalho, à convite da ESA, devemos também participar de parte do projeto de contrato n° 12540/97/NL/ PA(SC), sob título **Dynamic Analysis of Tethered Systems using Continuum Modelling for the Tether**, in Technical University of Veinna, Institute for Mechanics, Vienna, Austria, liderado pelo prof. Dr. H. Troger numa cooperação com o grupo do prof. Dr. J.M. Balthazar da UNICAMP.

Apresentamos a seguir, a súmula curricular da autora.

Capítulo 6

Súmula Curricular

Formação: 2003 - Universidade Federal de São Carlos - São Carlos/SP
Licenciatura Plena em Matemática

Trabalhos de Pesquisa:

1. Melhor Aproximação Polinomial: Caracterização e Unicidade, DM-UFSCar, 2001.
2. O Exemplo de Runge, DM-UFSCar, 2002.

Publicações:

1. Bolla MR, Balthazar JM, Mook DT, Solução Analítica para um Problema de Vibração Não-Ideal usando o Método de Múltiplas Escalas, CD-ROM-Dincon 2005, p.319-324.
2. Bolla MR, Balthazar JM, Mook DT, On Dynamic Behaviour of a Non-Ideal Spacecraft with Double Axial Rotation Through Resonance, CD-ROM-ICONNE 2005, p. 94-95.
3. Bolla MR, Balthazar JM, Mook DT, On Analytical Solution to a Non-Ideal Vibration Problem using Multiple Scales Method, trabalho aceito a ser apresentado e publicado nos anais da 8th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, 12-15 dezembro de 2005, Lódz, Polônia.

4. Bolla MR, Balthazar JM, Mook DT, On Analytical Solution to a Non-Ideal Vibration Problem using Multiple Scales Method, submetido à Nonlinear Dynamics.

Segue agora as principais referências utilizadas na realização deste trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] Fenili A, Modelagem Matemática e Análise dos Comportamentos Ideal e Não Ideal de Estruturas Flexíveis de Rastreamento, tese de doutorado, Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP, 2000

- [2] Pai PJ, F. Nonlinear Flexural-Flexural Torsional - Dynamics of Metallic and Composite Beams, Dissertation PhD, presented at Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg VA, 1990.

- [3] Nayfeh AH, Mook DT. Nonlinear Oscillations, Wiley, 1979.

- [4] Nayfeh AH, Balachandran B. Nonlinear Dynamics, Wiley, 1994.

- [5] Modi VJ, Attitude Dynamics of Satellites with Flexible Appendages. A Review, J. Spacecraft Rockets II, 743-751, 1974.

- [6] Modi VJ, Ng AC. Dynamic of Axisymmetric Satellites under the Influence of Solar Radiation. J. Astronautical Sci, 37, pp. 17-41, 1989.

- [7] Carrara V. Modelagem das forças e torques atuantes em satélites, INPE, 1982.

- [8] Freitas Oliveira JR, Estudo de vários aspectos da estabilização passiva de satélites por gradiente de gravidade, Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial, INPE, 1981.
- [9] Ashley H, Observations on the Dynamic Behavior of Large Flexible Bodies in Orbit. AIAA Journal, 460-469, 5 , 1967.
- [10] Crespo da Silva, MRM, Glynn CC, Nonlinear Flexural-Torsional Dynamics of Inextentional Beams-I: Equations of Motion. Int. J.Solids and Structures 6, pp. 437-448, 1978.
- [11] Crespo da Silva, MRM, Glyn CC, Nonlinear Flexural-Torsional Dunamics of Inextentional Beams-II: Forced Motions. Int. J. Solids and Structures 6, pp. 449-461, 1978.
- [12] Crespo da Silva, MRM, Zaretzki, CL. Nonlinear Dynamics of a Flexible Beam in a Central Gravitational Field-I: Equations of Motion. Int. J. Solids and Structures, Vol 30, N 17, pp. 2287-2299, 1993.
- [13] Crespo da Silva, MRM, Zaretzki, CL. Nonlinear Dynamics of a Flexible Beam in a Central Gravitational Field-II: Nonlinear Motions in Circular Orbit. Int. J. Solids and Structures, Vol. 30, N 17, pp. 2031-2036, 1993.
- [14] Ferreira DL, Análise do Problema de Captura de um Satélite Estabilizado por Gradiente de Gravidade com Mastro Extensível Durante e Após a Fase de Esticamento, Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial, INPE, 1984.
- [15] Guangqian X, Bainum PM. The Optimal LQG Digital Control of Orbiting Large Flexible Beams, The Journal of Astronomical

Sciences, Vol. 37, N 1, 59-78, 1989.

- [16] Krishna R, Bainum, PM. Effect of Solar Radiation Disturbance on a Flexible Beam in Orbit. AIAA Journal, Vol. 22, N 5, pp. 677-682, 1984.
- [17] Grewal A, Soudack AC, Modi VJ. A Closed Form Solutions to the Planar Dynamics of a Flexible Space Station Model. Int. J. Nonlinear Mechanics, 29(5), 703-721, 1994.
- [18] Lips KW, Modi VJ. Transient Attitude Dynamics of Satellites with Deploying Flexible Appendages. Acta Astronautica, Vol. 5, pp. 797-815, 1978.
- [19] Fonseca IM, Equações Canônicas do Movimento de um Satélite Artificial com Apêndices Flexíveis Sujeito ao Campo Gravitacional Terrestre, Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1986.
- [20] Meirovitch L and Jaung J. Dynamics of a gravity gradient stabilized flexible spacecraft, J., NASA, CR-2456, Aug. 1974.
- [21] Hughes, PC. Spacecraft Attitude Dynamics, Wiley, pp. 281-354, 1986.
- [22] Newton RR. Damping of a Gravitationally Stabilized Satellite, AIAA Journal, Vol 2, N 1, Jan. 1964.
- [23] Nayfeh AH. Introduction to Perturbation Methods, Wiley, 1971.

- [24] Sommerfeld A. Naturwissenschaftliche Ergebnisse der Neuren Technischen Mechanik, Verein Deutscher Ingenieur Zeitschrift, number 18, p. 631-636, 1904.
- [25] Kononenko VO. Vibrating Problems with a Limited Power Supply, life, 1969.
- [26] Evan-Iwanowski RM. Resonance Oscillators in Mechanical Systems, Elsevier, 1976.
- [27] Balthazar Jm, Mook DT, Weber HI, Reyolando MLRF, Fenili A, Belato D, Felix JLP. "Recent results on vibrating problems with limited power supply" In: Sixth Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, Lodz, Poland, December 10-12, 2001, Edited by Awrejwicz J., Brabiski, J. Nowakowski, J., p. 27-50.
- [28] Balthazar JM, Mook DT, Weber HI, Reyolando MLRF, Fenili A, Belato D, Felix JLP. "An overview on non-ideal vibrations" Meccanica, Vol. 38, p. 613-621, 2003.
- [29] Yamakawa H., Murakami S., Optimum Designs of Operating Curves for Rotating Shaft System, H. Chung, ed., PVP-Vol. 179, ASME, New York, 1989.
- [30] Balthazar JM, Mook DT, Weber HI, Reyolando MLRF, Fenili A, Belato D, Felix JLP, Garzeri FJ, 2004 "A review on new vibration issues due to non-ideal energy sources." In: Dynamics systems and control, edited by Udwadia FE, Weber HI, Leitman G, Stability and control: theory, methods and applications, Vol. 22, Chapman & Hallick, p. 237-258.

- [31] Dimentberg M F, McGovern L, Norton R L, Chapdelaine J e Harrison R, Dynamics of an Unbalanced Shaft Interacting with a Limited Power Supply, *Nonlinear Dynamics* (13), 1997, 171-187.
- [32] De Mattos, M. C., J. M. Balthazar, S. Wieczorek, D. T. Mook, An Experimental Study of Vibrations of Non Ideal Systems. In: ASME PAPER. VIB-4011 Paper, CD-ROM, 1997.
- [33] De Mattos, M. C., J. M. Balthazar, On the Dynamics of an Armature Controlled DC Motor Mounted on an Elastically Supported Table. In: 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Session S9, Paper: AAACGI, CD-ROM, 1999.
- [34] Balthazar, J. M., Rente, M. L. and Davi, V. M., 1997, "Some Remarks on the Behaviour of a Non Ideal Dynamical System", *Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences*, Vol. 1, 97-104.
- [35] Rand, R. H., kinsey, R. J., Mangier, D. L., 1992, "Dynamics of Spin up Through Resonance", *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol.27, pp.489-502.
- [36] Kinsey, R. J., Mingori, D. L., 1992, Nonlinear Controller to Reduce Resonance Effects During Despin of a Dual Spacecraft Through Precision Phase Lock, *Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona, USA, December 16-18, p.3025-3030.
- [37] Cassiano J, Balthazar JM, On Integrability Conditions of a Vibrating System, submitted, 2004.
- [38] Balthazar JM, Felix JLP, Brasil R, On Nonlinear Dynamic and Control of a Particular Portal Frame Foundation Model, Excited by

a Non-Ideal Motor, Materials Science Forum, 2003.

- [39] Meirovitch L, Methods of Analytical Dynamics, McGraw Hill, 1970.
- [40] Bishop R H, Modern Control Analysis & Design, using MatLab & Simulink, Addison Wesley, 1997.
- [41] Meirovitch L. Analytical Methods in Vibrations, Macmillian Publishy Co, 1971.
- [42] Guckenheimer J, Holmes P, 1983, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New Yorke.
- [43] Kinsey RJ, Mingori DL, 1992, "Nonlinear Controller to Reduce Resonance Effects During Despin of a Dual Spacecraft Through Precession Phase Lock", Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona, USA, December 16-18, p. 3025-3030.
- [44] Mel'nikov VK, 1963, On the Stability of the Center for Time Periodic Perturbations. Trans. Moscow Math. Soc. Vol. 12, pp. 1-57.
- [45] Rand RH, Kinsey RJ, Mingiorgi DL, 1992, "Dynamics of Spinup Through Resonance", Int. J. Nonlinear Mechanics, Vol. 27, pp. 489-502.

Apêndice A

Fundamentos de Mecânica Newtoniana

Neste apêndice fazemos uma revisão de mecânica Newtoniana, cujas as notações e conceitos básicos foram abordados neste trabalho e com o objetivo de completar o presente trabalho, principalmente no quesito notações.

A.1 Leis de Newton

A Mecânica Newtoniana está baseada em três leis fundamentais formuladas por Sir Isaac Newton em seu *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Princípios Matemáticos das Ciências Naturais)*, publicado em 1687. Alguns cientistas que precederam Newton destacaram-se no campo da mecânica, porém Newton foi consideravelmente beneficiado pelos trabalhos, especialmente os de Galileu e de Kepler. Embora a primeira e segunda leis fossem conhecidas de Galileu, Newton foi o primeiro a formular as leis claramente. Tais leis foram formuladas para partículas simples, estas pressupõem a existência de referenciais inerciais, que representam uma classe de sistemas referenciais como repouso ou movimento uniforme. Newton nomeou suas leis de axiomas do movimento. Estes são formulados da seguinte forma:

Primeira Lei: SE NÃO HOVER FORÇAS ATUANDO SOBRE UMA PARTÍCULA, ESTA MOVER-SE-Á EM LINHA RETA COM VELOCIDADE CONSTANTE.

Uma partícula é a idealização de um corpo material cujas dimensões são muito pequenas comparadas com a distancia entre outros corpos e cujos movimentos internos não afetam o movimento do corpo. Matematicamente é representada como um ponto com massa e sem extensão no espaço. Denotando por \mathbf{F} a força e por \mathbf{v} a velocidade medida relativamente num espaço inercial, a primeira lei pode ser matematicamente formulada:

$$\text{Se } \mathbf{F} = \mathbf{0}, \text{ então } \mathbf{v} = \textit{constante} \quad (\text{A.1})$$

Segunda Lei: UMA PARTÍCULA MOVE-SE DEVIDO À AÇÃO DE UMA FORÇA, CUJA INTENSIDADE É IGUAL À VARIAÇÃO DO MOMENTO LINEAR.

O momento linear é definido como o produto da massa pela velocidade da partícula, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, de modo que a segunda lei pode ser escrita:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (\text{A.2})$$

Terceira Lei: QUANDO DUAS PARTÍCULAS EXERCEM FORÇAS UMA SOBRE A OUTRA, ESTAS FORÇAS SÃO COLINEARES, POSSUEM MESMA INTENSIDADE E SENTIDO CONTRÁRIO.

Denotando por \mathbf{F}_{12} a força que a partícula 1 exerce sobre a partícula 2 e por \mathbf{F}_{21} a força que a partícula 2 exerce sobre 1, temos $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Esta lei é a conhecida *Lei da ação e reação*.

Lei da gravitação universal:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (\text{A.3})$$

onde, G é a constante de gravitação, \mathbf{r} é a distância entre as partículas, m_1 e m_2 são as massas das partículas 1 e 2, respectivamente.

A.2 Momento e Impulso

Multiplicando a equação (A.2) por dt e integrando com respeito ao tempo entre os instantes t_1 e t_2 obtemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (m\mathbf{v})_2 - (m\mathbf{v})_1 \quad (\text{A.4})$$

A integral (A.4) é chamada impulso linear e $p = mv$ é definido como momento linear, então a diferença

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (m\mathbf{v})_2 - (m\mathbf{v})_1 = \Delta(m\mathbf{v}) \quad (\text{A.5})$$

é simplesmente a variação do momento linear associada com o intervalo de tempo entre t_1 e t_2 . Daí, o impulso linear (ou simplesmente impulso) é igual a integral do momento linear. Não devemos esquecer que tanto impulso quanto o momento são vetores quantitativos. Na ausência de forças sobre uma partícula, $\mathbf{F} = 0$, da equação (A.4) resulta

$$(m\mathbf{v})_2 = (m\mathbf{v})_1 = m\mathbf{v} = \text{constante} \quad (\text{A.6})$$

que implica que o momento dos instantes t_1 a t_2 ou em qualquer tempo arbitrário t , tem o mesmo valor. A equação (A.6) é a representação matemática do teorema da conservação do momento linear.

A.3 Momento de uma Força e Momento Angular

Considere um sistema inercial x, y, z fixo no espaço e uma partícula de massa m a uma distância \mathbf{r} da origem O (Figura A.1), e denote por $\dot{\mathbf{r}}$ a velocidade de m relativa ao espaço inercial, onde o ponto indica diferenciação com respeito ao tempo. O momento angular de m com respeito ao ponto O é definido como o produto vetorial do vetor posição \mathbf{r} pelo momento linear \mathbf{p} . Denotando o momento angular por \mathbf{L} temos

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} \quad (\text{A.7})$$

para m constante, mas em geral, $\mathbf{r} \times (m\dot{\mathbf{r}})$.

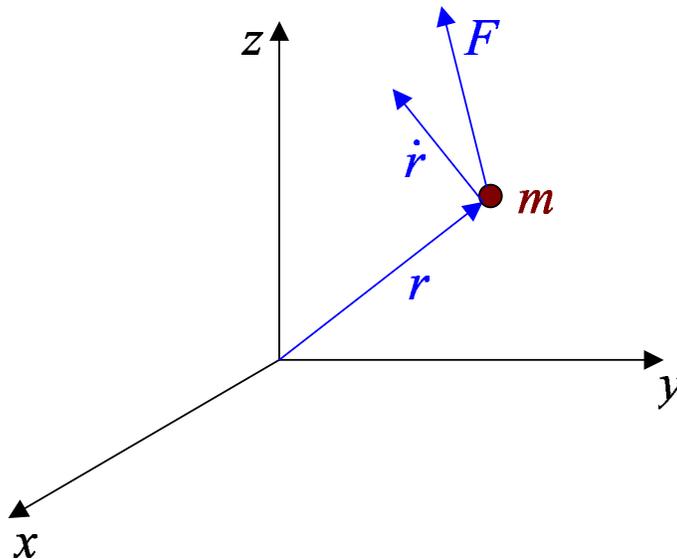


Figura A.1: Força \mathbf{F} atuando numa partícula m a uma distância r da origem e com velocidade $\dot{\mathbf{r}}$

A.4 Trabalho e Energia

Vamos considerar uma partícula de massa m movendo-se ao longo de uma curva s quando começa a atuar sobre ela uma força \mathbf{F} (Figura A.2). Por definição, o trabalho associado com o deslocamento de m da posição \mathbf{r} para a posição $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ é dado pelo produto escalar

$$\overline{d\mathbf{W}} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{A.8})$$

Pela segunda lei de Newton temos $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ de modo que substituindo na equação (A.8) podemos escrever:

$$\overline{d\mathbf{W}} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m\ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = m\dot{\mathbf{r}} \cdot d\dot{\mathbf{r}} = d\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right) = d\mathbf{T} \quad (\text{A.9})$$

onde $d\mathbf{T}$ representa a derivada da *energia cinética* dada por $\mathbf{T} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$, onde $\dot{\mathbf{r}}$ é a velocidade da partícula. Se a partícula move-se da posição \mathbf{r}_1 para a posição \mathbf{r}_2 sob

a ação de uma força \mathbf{F} , o trabalho correspondente é simplesmente:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_2 - \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1 \quad (\text{A.10})$$

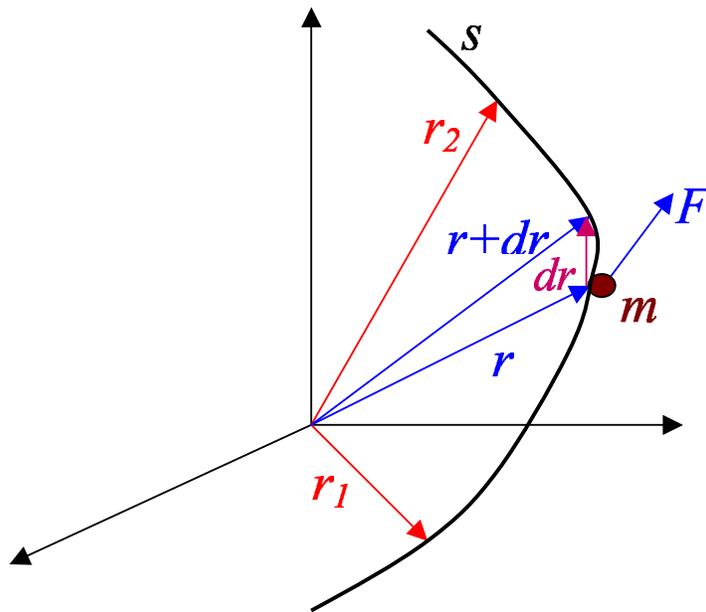


Figura A.2: Partícula m movendo-se numa curva s da posição r_1 para a posição r_2 sob ação de uma força \mathbf{F}

Daí a equação (A.10) implica que o trabalho realizado pelo movimento da partícula da posição \mathbf{r}_1 para \mathbf{r}_2 é responsável por um aumento na energia cinética de \mathbf{T}_1 para \mathbf{T}_2 .

Em muitos problemas físicos, a força depende apenas da posição, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ podendo ser expressa na forma de um diferencial perfeito:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -dV(\mathbf{r}) \quad (\text{A.11})$$

onde a função $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ depende apenas da posição do vetor \mathbf{r} , não dependendo explicitamente da velocidade $\dot{\mathbf{r}}$ ou do tempo t . Tal campo de forças é dito **conservativo**, e a função $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ é conhecida como **energia potencial**. Podemos expressar a energia potencial por uma integral:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{A.12})$$

que depende apenas das posições inicial e final. A posição inicial \mathbf{r}_0 serve como uma posição de referência. É claro que a integral fechada de (A.12) é zero, sendo uma maneira diferente de dizer que um campo de força é conservativo. Como esta integral fechada envolve uma integral de linha, não é muito conveniente para verificar se um campo de força é conservativo ou não. Assim, usando o teorema de Stokes, a integral fechada resulta em:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (\text{A.13})$$

como a condição do campo de força ser conservativo, onde ∇ é o operador *Nabla*. Este operador pode ser escrito em termos das componentes x, y, z assim,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{A.14})$$

onde \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} são os correspondentes vetores unitários. A equação (A.13) sendo portanto mais simples que a equação envolvendo a integral de linha.

As diversas direções de \mathbf{F} desaparecem se, e somente se, é o gradiente de alguma função escalar. Denotando esta função por $-\mathbf{V}$ temos:

$$\mathbf{F} = -\nabla \mathbf{V} \quad (\text{A.15})$$

onde \mathbf{V} é a mesma função energia potencial definida pela equação (A.11). A equação (A.15) nos fornece uma maneira de derivar as componentes conservativas de uma força se a energia potencial for conhecida. Estas componentes são simplesmente:

$$\mathbf{F}_x = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}, \quad \mathbf{F}_y = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}, \quad \mathbf{F}_z = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \quad (\text{A.16})$$

Portanto a equação (A.11) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -d\mathbf{V} = -\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} dz \right) = -\nabla \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{A.17})$$

Consideremos agora a derivada de \mathbf{T} em relação ao tempo, que pode ser obtida da equação (A.9) na forma:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{A.18})$$

Por outro lado, da equação (A.17) temos para um campo de força conservativo:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{A.19})$$

de modo que adicionando as equações (A.18) e (A.19) temos $\frac{d}{dt}(\mathbf{T} + \mathbf{V}) = 0$, que pode ser integrada resultando $\mathbf{T} + \mathbf{V} = \mathbf{E} = \text{constante}$, onde a constante de integração \mathbf{E} refere-se a energia total do sistema.

Se a força \mathbf{F} não depende apenas de \mathbf{r} mas também do tempo t , ainda existe a possibilidade de expressarmos $\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ na forma de um diferencial perfeito:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = -d\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \Big|_{t=cte} \quad (\text{A.20})$$

Tal campo vetorial de força é não-rotacional, e é reduzido a um campo de força conservativo se \mathbf{F} é independente do tempo. Da equação (A.20) concluímos que:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T} + \mathbf{V}) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \quad (\text{A.21})$$

de modo que a expressão $\mathbf{E} = \mathbf{T} + \mathbf{V}$ não existe para um campo vetorial não-rotacional que não seja conservativo. Em geral um campo de força consiste de uma força \mathbf{F}_p derivável da função potencial $-\mathbf{V}$ e uma força \mathbf{F}_{np} que não o é, de modo que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{np}$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T} + \mathbf{V}) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{F}_{np} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{A.22})$$

Quando a energia potencial \mathbf{V} não depende explicitamente do tempo, a força potencial pode ser identificada como a **força conservativa** \mathbf{F}_c e a força não-potencial como a **força não-conservativa** \mathbf{F}_{nc}

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T} + \mathbf{V}) = \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{F}_{nc} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{A.23})$$

cujo significado é que o trabalho realizado pelas forças não-conservativas é igual a taxa de variação da energia total do sistema.

A.5 Diagramas de Energia

As análises qualitativas de problemas dinâmicos podem ser analisadas por meio de diagramas de energia. É o caso do oscilador harmônico da figura A.5.

O oscilador consiste de uma massa m presa a uma mola de rigidez k . O problema é unidimensional. A posição de equilíbrio corresponde fisicamente quando a mola

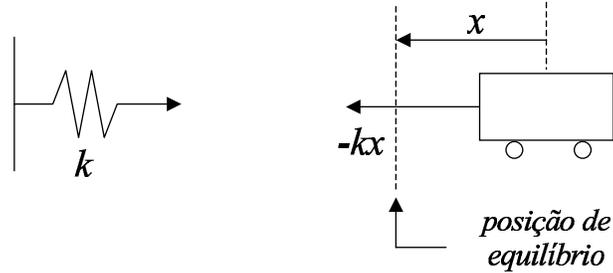


Figura A.3: Oscilador harmônico

está relaxada. Denotando por \dot{x} a velocidade de translação da massa quando na posição x , a energia cinética do corpo é:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (\text{A.24})$$

Existe uma força de resistência da mola atuando sobre a massa. Esta é proporcional ao deslocamento. Para qualquer posição intermediária ζ onde, $0 < \zeta < x$, a força de resistência é:

$$\mathbf{F} = -k\zeta \quad (\text{A.25})$$

E usando como posição de referência o ponto $x = 0$, quando a mola está relaxada, a energia potencial correspondente à posição x é:

$$\mathbf{V} = \int_x^0 \mathbf{F}d\zeta = -k \int_x^0 \zeta d\zeta = -\frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{A.26})$$

Desde que não haja forças não-conservativas presentes, a energia total é constante, tendo o valor $\mathbf{E} = \mathbf{T} + \mathbf{V} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}kx^2 = cte$, que é igual a energia total inicial.

A.6 Sistemas de Partículas

As leis de Newton foram formuladas para partículas simples. Entretanto, podem ser estendidas sem dificuldades para sistemas de partículas e corpos de dimensões finitas. Na extensão dos conceitos das seções precedentes para sistemas de partículas, devemos distinguir entre forças externas e internas. A primeira está em fontes fora do sistema e a segunda está na interação entre as partículas.

Vamos considerar um sistema de n partículas de massa $m_j (j = 1, 2, \dots, n)$ como mostrado na Figura A.6. A posição do centro de massa do sistema é definida por:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j \quad (\text{A.27})$$

onde, $M = \sum_{j=1}^n m_j$ é a massa total do sistema. Fisicamente o centro de massa pode ser interpretado como a posição média do peso do sistema de partículas. No caso especial de um campo gravitacional uniforme o centro de massa coincide com o centro de gravidade.

Seja \mathbf{F}_j a força externa atuando sobre a partícula j e sejam \mathbf{f}_{jk} as forças internas representando a ação da partícula j sobre a partícula k . A segunda lei de Newton aplicada na partícula j resulta:

$$\mathbf{F}_j = \sum \delta_{jk}^* \mathbf{f}_{jk} = m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \quad (\text{A.28})$$

onde δ_{jk}^* é o delta complementar de Kronecker definido por:

$$\delta_{jk}^* = 1 - \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{para } j = k, \\ 1 & \text{para } j \neq k. \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

Então para o sistema de partículas, obtemos:

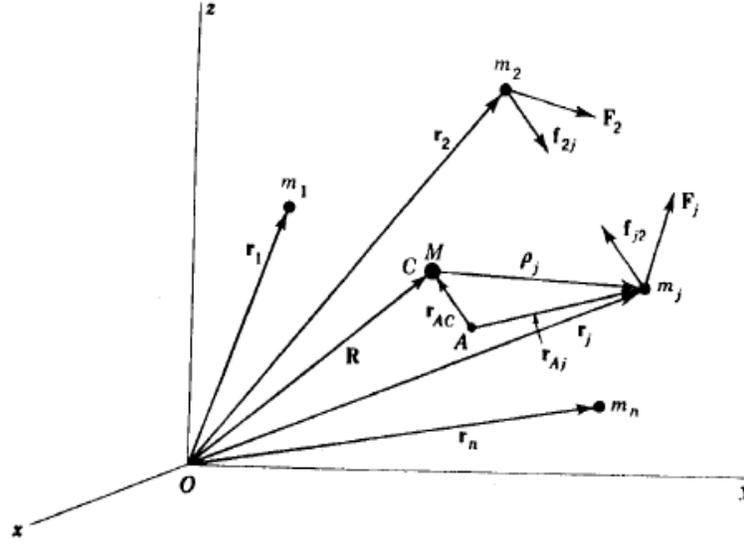


Figura A.4: Sistemas de partículas

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{jk}^* \mathbf{f}_{jk} = \sum_{j=1}^n m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \quad (\text{A.30})$$

Mas sabemos que pela terceira lei de Newton, $\mathbf{f}_{jk} = -\mathbf{f}_{kj}$ de modo que o somatório duplo da equação (A.30) é zero. Além disso, sendo \mathbf{F} a resultante de todas as forças externas atuando sobre o sistema temos $\mathbf{F} = \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j$ e recordando a definição (A.27) do centro de massa obtemos:

$$\sum_{j=1}^n m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = M \ddot{\mathbf{R}} \quad (\text{A.31})$$

Fazendo as devidas substituições ficamos com $\mathbf{F} = M \ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{P}}$, onde $\mathbf{P} = M \dot{\mathbf{R}}$ é o momento linear do sistema de partículas. Como podemos observar, o movimento do centro de massa do sistema é análogo ao movimento de um corpo fictício com massa igual a massa do sistema, e mesma resultante de forças externas.

O momento angular de um sistema de partículas com respeito a qualquer ponto móvel \mathbf{A} é definido por

$$\mathbf{L}_{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_{\mathbf{A}_j} = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_{\mathbf{A}_j} \times m_j \dot{\mathbf{r}}_j \quad (\text{A.32})$$

Diferenciando (A.32) com respeito ao tempo e assumindo que as massas m_j não variam com o tempo temos:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^n \dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{A}_j} \times m_j \dot{\mathbf{r}}_j + \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_{\mathbf{A}_j} \times m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \quad (\text{A.33})$$

Mas da figura 2.4 temos $\mathbf{r}_{\mathbf{A}_j} = \mathbf{r}_{\mathbf{AC}} + \rho_j$ e $\mathbf{r}_j = \mathbf{R} + \rho_j$ onde, $\mathbf{r}_{\mathbf{AC}}$ é o comprimento do vetor do ponto \mathbf{A} ao centro de massa \mathbf{C} da partícula j , de modo que substituindo as equações (A.28) e os valores de $\mathbf{r}_{\mathbf{AC}}$ e \mathbf{r}_j na equação (A.33) e ainda lembrando que $\mathbf{f}_{jk} = -\mathbf{f}_{kj}$ juntamente com o fato destas forças serem colineares obtemos:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^n (\dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{AC}} + \dot{\rho}_j) \times m_j (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\rho}_j) + \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_{\mathbf{A}_j} \times \mathbf{F}_j = \dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{AC}} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{N}_{\mathbf{A}} \quad (\text{A.34})$$

onde, $\mathbf{N}_{\mathbf{A}}$ é o torque produzido pelas forças externas com respeito ao ponto \mathbf{A} . Caso o ponto \mathbf{A} coincida com a origem O , $\mathbf{r}_{\mathbf{AC}} = \mathbf{R}$, equação (A.34) reduz a seguinte forma: $\dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}} = \mathbf{N}_{\mathbf{O}}$, agora caso o ponto \mathbf{A} coincida com o centro de massa \mathbf{C} , $\mathbf{r}_{\mathbf{AC}} = \mathbf{0}$ e a equação (A.34) fica $\dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{C}} = \mathbf{N}_{\mathbf{C}}$. Daí a taxa de variação do momento angular com respeito a origem O fixa ou com respeito ao centro de massa móvel \mathbf{C} é igual a resultante dos torques externos sobre O ou \mathbf{C} , respectivamente.

Voltando à equação (A.32) escrevemos o momento angular sobre \mathbf{A} na forma

$$\mathbf{L}_{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_{\mathbf{A}_j} \times m_j \dot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{r}_{\mathbf{AC}} \times M \dot{\mathbf{R}} + \sum_{j=1}^n \rho_j \times m_j \dot{\rho}_j = \mathbf{r}_{\mathbf{AC}} \times \mathbf{P} + \mathbf{L}'_{\mathbf{C}} \quad (\text{A.35})$$

onde $\mathbf{L}'_{\mathbf{C}} = \sum_{j=1}^n \rho_j \times m_j \dot{\rho}_j$ é o momento angular do movimento sobre o centro de massa, que as vezes é referido como momento angular aparente.

A energia cinética de um sistema de partículas merece atenção especial. É claro que a energia cinética possui uma expressão simples

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \dot{\mathbf{r}}_j \quad (\text{A.36})$$

mas demonstra o interesse em derivar uma expressão em termos do centro de massa do sistema. Para ilustrar isto, introduzimos a equação $\mathbf{r}_j = R + \rho_j$ na equação (A.33) e temos:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\rho}_j) \cdot (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\rho}_j) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} \sum_{j=1}^n m_j + \dot{\mathbf{R}} \cdot \sum_{j=1}^n m_j \dot{\rho}_j + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{\rho}_j^2 \quad (\text{A.37})$$

Assim, a energia cinética do sistema de partículas é igual a energia cinética obtida pela massa total do sistema concentrada no centro de massa adicionando a energia cinética do movimento relativo ao centro de massa das partículas.

Seguimos agora com o apêndice B, no qual abordamos a teoria de vibrações mecânicas.

Apêndice B

Teoria de vibrações Mecânicas

Neste apêndice apresentamos a teoria básica de vibrações, que foram fundamentais no desenvolver deste trabalho, principalmente quando do uso das técnicas de bifurcação para várias ressonâncias.

Qualquer movimento que se repete, exatamente após determinado intervalo de tempo, pode ser chamado **vibração**. As vibrações podem ser livres ou forçadas. Um elemento de máquina é dito de **vibração livre**, se o movimento periódico continua após a remoção da causa ou perturbação original, mas se um movimento vibratório persiste por causa da existência de uma força de perturbação, então o chamamos de **vibração forçada**. Qualquer vibração livre de um sistema mecânico, eventualmente cessará devido a perda de energia. Na análise de vibração, usualmente consideramos as perdas de energia, usando um simples fator, chamado de **fator de amortecimento** ou **constante de amortecimento**. Assim um sistema altamente amortecido é aquele em que a vibração decresce rapidamente. O **período** de uma vibração é o tempo de um ciclo simples; a **freqüência** é o número de ciclos que ocorre na unidade de tempo. A **freqüência natural** é a freqüência de uma vibração livre. Se a freqüência forçada se torna igual a freqüência natural de um sistema, diz-se então que ocorre a **ressonância**.

Devemos também utilizar os termos **vibração em regime permanente** para indicar que um movimento se repete exatamente em cada ciclo sucessivo; e **vibração transiente** para indicar que um movimento do tipo vibratório está mudando de

caráter.

Se uma força periódica opera sobre um sistema mecânico, o movimento resultante será de caráter transiente quando inicia a ação da força mas, após um intervalo de tempo, desaparece a parte transiente (devido ao amortecimento), e o movimento resultante é denominado de vibração em regime permanente.

Resumindo: Qualquer objeto material tem uma ou mais frequências nas quais "gosta" de vibrar: são as frequências naturais de vibração do objeto. Quando o objeto é "excitado" por algum agente externo em uma de suas frequências naturais dá-se a ressonância: o objeto vibra nesta frequência com amplitude máxima, só limitada pelos inevitáveis amortecimentos.

B.1 Sistemas com um grau de liberdade

A figura abaixo representa um sistema vibratório idealizado. A massa m move-se apenas na direção x sendo assim, possui um grau de liberdade pois a posição da massa pode ser definida completamente por uma simples coordenada. Uma força externa $\mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{t})$ atua sobre a massa. Assim, este sistema é classificado como de um grau de liberdade com vibração forçada.

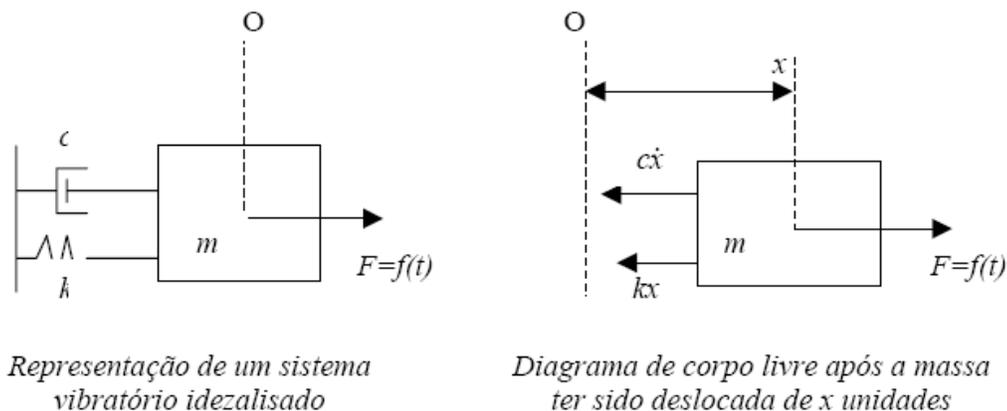


Figura B.1: Sistema de um grau de liberdade e diagrama de corpo livre

- A mola e o amortecedor não possuem massas;
- A massa é absolutamente rígida;
- Todo o amortecimento está concentrado no amortecedor.

Os resultados de muitas experiências mostram que grande número de sistemas mecânicos, pode ser analisado com boa precisão utilizando-se as premissas acima.

a elasticidade do sistema da Figura A1a é representada completamente pela mola. A rigidez da mola é designada por k e definida por $k = \frac{\mathbf{F}}{x}$, onde \mathbf{F} é a força requerida para defletir a mola de uma distância x .

De maneira análoga, o atrito ou amortecimento é admitido como sendo completamente viscoso, ou seja, resistente proporcionalmente a velocidade, este é designado por c . Assim $c = \frac{\mathbf{F}}{\dot{x}}$, onde \mathbf{F} é a força requerida para mover a massa com uma velocidade \dot{x} .

Para descrever a equação do movimento da massa da Figura (B.1), escolhamos como origem do sistema de coordenadas a posição da massa quando a força da mola é zero. Seja x o deslocamento da massa desta posição considerando-se positivo o sentido para a direita. Também é conveniente escolher a mesma direção para os valores positivos da velocidade, aceleração e força.

Então, se a massa é deslocada na direção positiva, a força da mola sobre a massa é na direção negativa. Se a velocidade da massa é na direção negativa, a força de amortecimento é negativa. (Estas forças estão mostradas no diagrama de corpo livre da massa, após esta ter sido deslocada na direção positiva dos x 's).

Usando a segunda lei de Newton obtemos:

$$-kx - c\dot{x} + \mathbf{f}(\mathbf{t}) + (-m\ddot{x}) = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}\mathbf{f}(\mathbf{t}) \quad (\text{B.1})$$

Quando o atrito ou amortecimento presente na vibração das máquinas é pequeno, podemos desprezá-lo, obtendo ainda resultados bastante precisos no final da análise.

Fazendo os termos de amortecimento e de força externa iguais a zero na equação acima, obtemos a equação diferencial do movimento para a vibração livre:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (\text{B.2})$$

A solução geral da equação é bem conhecida e tem a forma $x = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$, onde A e B são as constantes de integração e $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Os valores das constantes de integração dependem de como a vibração teve origem, ou seja, das condições iniciais. a quantidade $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é chamada frequência natural de vibração livre não amortecida.

Como um ciclo de movimento é completado em um ângulo de 2π radianos, o período de uma vibração livre é dado pela seguinte equação:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{B.3})$$

A frequência é o inverso do período, logo:

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{B.4})$$

Se para $t = 0$ tivermos $x = x_0$ e $\dot{x} = 0$ como condições iniciais, então o movimento é descrito por $x = x_0 \cos(\omega_n t)$. Agora se para $t = 0$ as condições iniciais forem $x = 0$ e $\dot{x} = v_0$, o movimento será descrito por $x = \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$.

Um método mais geral de se provocar vibração, consiste em deixar a massa ter ambas as condições iniciais, deslocamento e velocidade. Com isso a solução é dada por $x = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$.

B.2 Sistemas com dois graus de liberdade

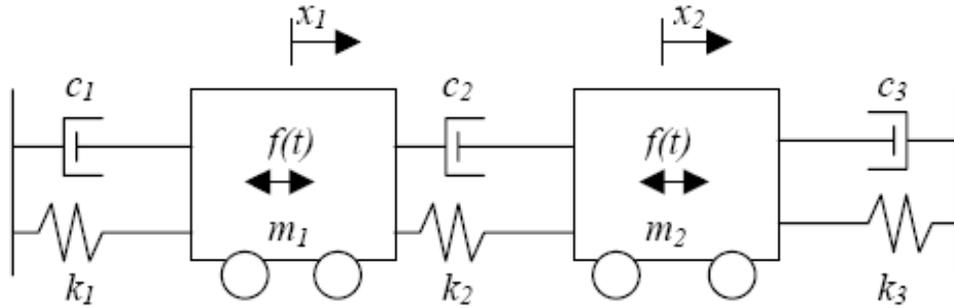


Figura B.2: Sistema de dois graus de liberdade

Do diagrama de corpo livre do sistema representado acima, e utilizando a segunda lei de Newton, obtemos a equação do movimento:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = \mathbf{f}_1(\mathbf{t}) \quad (\text{B.5})$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{t}) \quad (\text{B.6})$$

Escrevendo em forma matricial:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{\mathbf{f}\} \quad (\text{B.7})$$

onde, $[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ é a matriz de massa, $[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$ é a matriz de amortecimento e $[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$ é a matriz de rigidez.

Fazendo $\mathbf{f}_1(\mathbf{t}) = \mathbf{F}_1 e^{j\omega t}$ e $x_i(t) = X_i e^{j\omega t}$, com $i = 1, 2$ temos:

$$D_{11}X_1 + D_{12}X_2 = \mathbf{F}_1 \quad (\text{B.8})$$

$$D_{21}X_1 + D_{22}X_2 = \mathbf{F}_2 \quad (\text{B.9})$$

onde, D_{ip} é a rigidez dinâmica dada por $D_{ip} = k_{ip} - m_{ip}\omega^2 + jc_{ip}\omega$, com $i = 1, 2$ e $p = 1, 2$.

Para a vibração livre, $C_{ip} = 0$ e $\mathbf{F}_1 = 0$ então,

$$D'_{11}X'_1 + D'_{12}X'_2 = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$D'_{21}X'_1 + D'_{22}X'_2 = 0 \quad (\text{B.11})$$

onde X'_1 e X'_2 são as amplitudes de vibração livre não amortecida. As "linhas" indicam que estamos tratando de uma vibração livre. Para que X'_1 e X'_2 não sejam nulos, $\Delta' = D'_{11}D'_{22} - D'_{12}D'_{21} = m_1m_2(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)$, onde ω_1 e ω_2 são as frequências naturais. As amplitudes de vibração livre devem satisfazer uma razão para cada frequência natural tal que:

$$\frac{X'_2}{X'_1} = -\frac{D'_{11}}{D'_{12}} = -\frac{D'_{21}}{D'_{22}} = u_{2i}, \text{ com } i = 1, 2. \quad (\text{B.12})$$

onde u_{2i} é o parâmetro modal para a segunda coordenada e a i -ésima frequência natural relativo a amplitude X'_1 . A solução para a vibração livre fica então:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = B_1 \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{22} \end{Bmatrix} e^{j\omega_1 t} + B_2 \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix} e^{j\omega_2 t} \quad (\text{B.13})$$

onde B_1 e B_2 são as amplitudes modais de movimento e dependem das condições iniciais de movimento, ou seja, $x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0)$ e $\dot{x}_2(0)$. Os vetores $\{u\}$ representam o primeiro e o segundo modo de vibrar do sistema que podem ser agrupados na *matriz modal* para dois graus de liberdade:

$$[u] = \left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} u_{11} \\ u_{22} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} u_{12} \\ u_{22} \end{array} \right\} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{array} \right] \quad (\text{B.14})$$

Agora para a vibração forçada temos:

$$\{f(t)\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{array} \right\} e^{j\omega t} \quad (\text{B.15})$$

$$x_1 = \left(\frac{D_{22}}{\Delta} \right) \mathbf{F}_1 e^{j\omega t} + \left(-\frac{D_{12}}{\Delta} \right) \mathbf{F}_2 e^{j\omega t} \quad (\text{B.16})$$

$$x_2 = \left(\frac{D_{21}}{\Delta} \right) \mathbf{F}_1 e^{j\omega t} + \left(-\frac{D_{21}}{\Delta} \right) \mathbf{F}_2 e^{j\omega t} \quad (\text{B.17})$$

reformulando as equações de x_1 e x_2 :

$$x_1 = H_{11}F_1e^{j\omega t} + H_{12}F_2e^{j\omega t} \quad (\text{B.18})$$

$$x_2 = H_{21}F_1e^{j\omega t} + H_{22}F_2e^{j\omega t} \quad (\text{B.19})$$

onde H_{11} e H_{22} são as receptâncias pontuais e H_{12} e H_{21} são as receptâncias de trasferências. Vejamos agora a solução no espaço modal. Substituindo $\{x(t)\} = [u]\{q(t)\}$ na equação do movimento e em seguida multiplicando tudo por $[u(t)]^T$, ficamos com a seguinte equação desacoplada:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\}e^{j\omega t} \quad (\text{B.20})$$

e temos pra o p -ésimo modo de vibrar

$$\ddot{q}_p + 2\zeta_p\dot{q}_p + \omega_p^2q_p = \mu e^{j\omega t} \quad (\text{B.21})$$

onde $\omega_p = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}}$ é a frequência natural do modo p , $\zeta_p = \frac{c_p}{2\sqrt{k_p m_p}}$ é o fator de amortecimento modal do modo p e $\mu_p = \frac{1}{m_p} [u]_p^T \{f_0\}$ é a força de excitação modal do modo p .

A solução para a amplitude do modo p fica:

$$Q_p = \frac{\mu_p}{\omega_p^2 - \omega^2 + j2\zeta_p\omega}. \quad (\text{B.22})$$

E a solução nas coordenadas geométricas é dada por:

$$\{x\} = \{u_1\}Q_1 + \{u_2\}Q_2 = \sum_{r=1}^N \{u_r\}Q_r \quad (\text{B.23})$$

$$\{x\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{u_r\}\{u_r\}^T \{f_0\}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega)} e^{j\omega t} \quad (\text{B.24})$$

Desta última equação obtemos a matriz de função de resposta em frequência de receptância do sistema, dada por:

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{\{u_r\}\{u_r\}^T}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + j\zeta_r\omega)} \quad (\text{B.25})$$

Seguimos agora no apêndice C com uma revisão de dinâmica de rotações.

Apêndice C

Revisão de Dinâmica de Rotações

O objetivo deste apêndice é o de apresentar uma revisão de dinâmica de rotações pois é um conceito fundamental quando se deseja examinar o movimento de giro de um corpo rígido relativamente a um referencial fixo, como por exemplo, o movimento de uma partícula em relação ao movimento de rotação da Terra. Esta revisão traz conceitos usados no texto.

C.1 Movimento Relativo a um Referencial Rotacional

As leis de Newton implicam o uso de referenciais inerciais. No entanto, em muitas ocasiões é mais conveniente utilizar sistemas não inerciais, tais como sistema de coordenadas rotacionais. Este é o caso, por exemplo, quando se deseja examinar o movimento de giro de um corpo rígido relativamente a um referencial fixo. Como exemplos temos o movimento de uma partícula em relação ao movimento de rotação da terra, o movimento de um giroscópio ou o movimento de um braço robótico em relação a um referencial fixo.

C.1.1 Transformação de coordenadas

Qualquer vetor \mathbf{r} pode ser expresso em mais de um sistema de coordenadas. Em muitos problemas de dinâmica, a relação das componentes de \mathbf{r} em vários sistemas de coordenadas é muito utilizada. Para tais relações, vamos considerar a Figura C.1 e escrever o vetor \mathbf{r} em termos das componentes de dois conjuntos de eixos x_i e ξ_i para $i = 1, 2, 3$. Os vetores unitários de tais eixos são denotados por $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ e $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ respectivamente, de modo que

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = \xi_1\mathbf{i}' + \xi_2\mathbf{j}' + \xi_3\mathbf{k}' \quad (\text{C.1})$$

Como estes são dois modos de expressar o mesmo vetor \mathbf{r} , evidentemente estão relacionados. A relação entre ξ_1 e as componentes x_i é obtida pelo produto escalar de \mathbf{r} por \mathbf{i}' que resulta:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i})x_1 + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j})x_2 + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k})x_3 = \\ &= x_1 \cos(\xi_1, x_1) + x_2 \cos(\xi_1, x_2) + x_3 \cos(\xi_1, x_3) = \\ &= l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + l_{13}x_3 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

onde $l_{1j} = \cos(\xi_1, x_j)$, com $j = 1, 2, 3$. Analogamente expressamos ξ_2 e ξ_3 em termos das componentes x_j de modo que (C.2) pode ser generalizada como

$$\xi_i = l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + l_{i3}x_3 = \sum_{j=1}^3 l_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C.3})$$

Representando em termos matriciais temos

$$\{\xi\} = [l]\{x\} \quad (\text{C.4})$$

onde $\{\xi\}$ e $\{x\}$ são matrizes colunas 3×1 representando o vetor r e $[l]$ é uma matriz quadrada de ordem 3, denominada matriz dos cossenos diretores, que pode ser vista como um operador que transforma o vetor $\{x\}$ no vetor $\{\xi\}$. No caso de uma

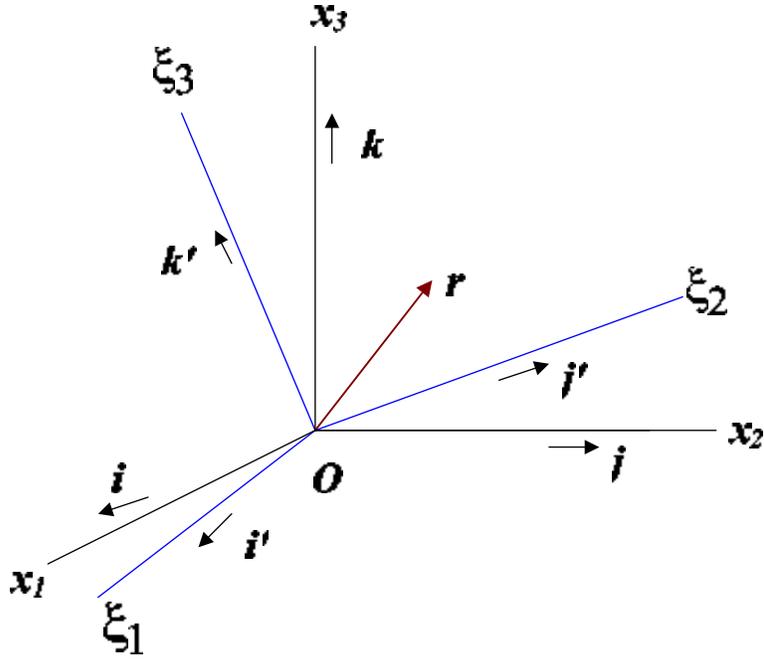


Figura C.1: Sistemas de eixos x_1, x_2, x_3 e ξ_1, ξ_2, ξ_3

transformação linear, $\{y\} = [a]\{x\}$, onde $[a]$ é uma matriz quadrada de coeficientes a_{ij} , podemos obter o vetor $\{x\}$ pré-multiplicando ambos os lados por $[a]^{-1}$, obtendo $\{x\} = [a]^{-1}\{y\}$, desde que a matriz $[a]$ não seja singular. Porém, em nosso caso, na matriz de transformação $[l]$ os coeficientes l_{ij} não são independentes. Para mostrar isto, vamos escrever os produtos escalares de r por i, j e k em sequência e obter a relação

$$x_r = \sum_{s=1}^3 l_{sr} \xi_s, \quad r = 1, 2, 3 \quad (\text{C.5})$$

que assume a forma matricial $\{x\} = [l]^T \{\xi\}$. Substituindo equação (C.5) na forma matricial da equação (C.4) obtemos $[l]^T [l] = [I] = [d_{ij}]$, onde d_{ij} é o delta de Kronecker. Assim temos que a matriz dos cossenos diretores l_{ij} possui a inversa igual à transposta, ou seja é uma matriz ortonormal. A matriz $[l]$ pode ser vista como sendo resultado de três rotações sucessivas "saindo" do sistema $\{x\}$ e "chegando" no sistema $\{\xi\}$ como veremos na próxima seção.

C.1.2 Sistemas de coordenadas rotacionais

Nesta seção vamos desenvolver expressões explícitas dos cossenos diretores entre os sistemas de coordenadas inerciais x_i e rotacionais ξ_i . Estas são obtidas por meio de três rotações sucessivas ξ_1, ξ_2, ξ_3 sobre os eixos x_1, y_2, z_3 , resultando nos sistemas y_i, z_i, ξ_i , respectivamente. Da Figura C.2, concluímos que a relação entre os sistemas x_i e y_i é como segue

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \cos \theta_1 + x_3 \sin \theta_1 \\ y_3 = -x_2 \sin \theta_1 + x_3 \cos \theta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow \{y\} = [R_1(\theta_1)]\{x\} \quad (\text{C.6})$$

A matriz $[R_1(\theta_1)]$ representa a rotação do sistema de eixos originalmente coincidentes com os eixos x_i por um ângulo θ_1 sobre o eixo x_1 . Analogamente escrevemos

$$\{z\} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \{y\} = [R_2(\theta_2)]\{y\} \quad (\text{C.7})$$

$$\{\xi\} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{y\} = [R_3(\theta_3)]\{z\} \quad (\text{C.8})$$

Combinando as equações de (C.6) a (C.8) obtemos:

$$\{\xi\} = [R_3(\theta_3)][R_2(\theta_2)][R_1(\theta_1)]\{x\} = [l]\{x\} \quad (\text{C.9})$$

onde $[l]$ é a matriz dos cossenos diretores e tem a forma:

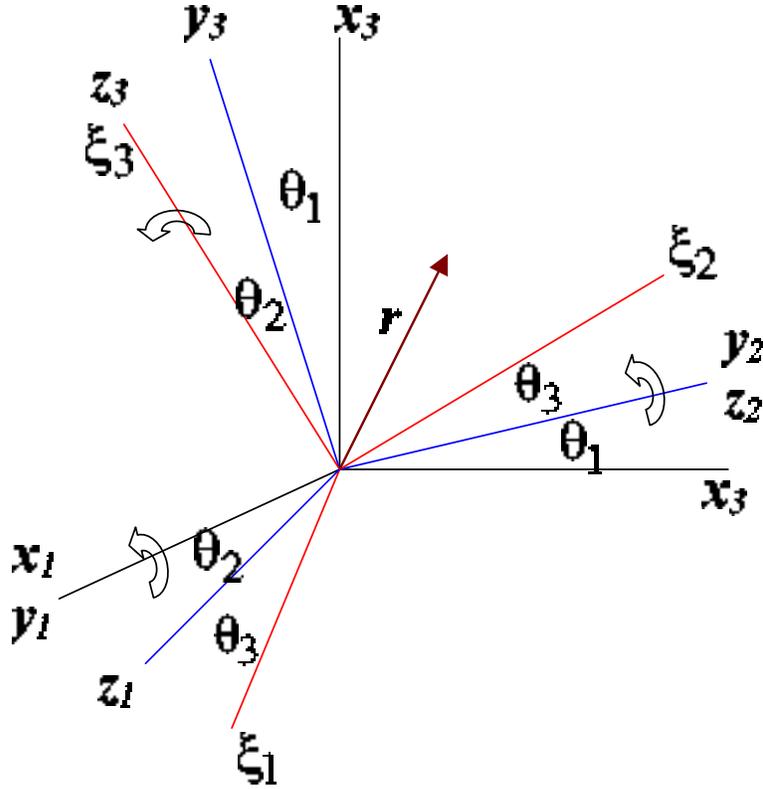


Figura C.2: Rotação dos eixos ξ_1, ξ_2, ξ_3 sobre os eixos x_1, y_2, z_3 resultando os sistemas y_i, z_i, ξ_i , respectivamente

$$[l] = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_1 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ -\cos \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 & \sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Sabemos que $\{z\} = [R_2(\theta_2)][R_1(\theta_1)]\{x\}$, mas se rotacionarmos o eixo x_2 de um ângulo θ_2 seguido pela rotação de y_1 de um ângulo θ_1 obtemos $\{z\} = [R_1(\theta_1)][R_2(\theta_2)]\{x\}$. Sabemos que o produto entre duas matrizes não é comutativo então $[R_2(\theta_2)][R_1(\theta_1)] \neq [R_1(\theta_1)][R_2(\theta_2)]$. Assim, para resolver este problema, consideraremos uma rotação infinitesimal, pois os ângulos de rotação, $\Delta\theta_i$, são suficientemente pequenos permitindo obter os mesmos resultados, logo $[R_2(\Delta\theta_2)][R_1(\Delta\theta_1)] = [R_1(\Delta\theta_1)][R_2(\Delta\theta_2)]$.

Sendo $\Delta\theta_i$ suficientemente pequeno:

$$\begin{cases} \cos \Delta\theta_i \approx 1 \\ \sin \Delta\theta_i \approx \Delta\theta_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C.11})$$

Multiplicando ambos os lados de (C.9) por $[l]^T$ chegamos a

$$\begin{aligned} \{x\} &= [l]^T \{\xi\} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_3 & \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 & 0 & -\Delta\theta_1 \\ -\Delta\theta_2 & \Delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \{\xi\} \\ &= [l] \{\xi\} + \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_3 & \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 & 0 & -\Delta\theta_1 \\ -\Delta\theta_2 & \Delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Esta equação resulta em

$$\{\Delta\xi\} = [\Delta\theta] \{\xi\}, \quad \text{onde } [\Delta\theta] = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_3 & \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 & 0 & -\Delta\theta_1 \\ -\Delta\theta_2 & \Delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

Um vetor fixo \mathbf{r} em relação a um sistema de coordenado ξ_i sofrerá uma variação $\Delta_{\mathbf{r}}$ relativo a um espaço inercial como resultado de uma rotação incremental $\Delta\theta_i$ ($i = 1, 2, 3$) no sistema sobre o eixo ξ_i , como mostra a Figura C.3:

Dividindo as equações (C.13) por Δt , e fazendo Δt tender a zero

$$\{\dot{\xi}\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta\xi}{\Delta t} \right\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right] \{\xi\} = [\omega] \{\xi\} \quad (\text{C.14})$$

onde $[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$, na qual ω_i ($i = 1, 2, 3$) são as componentes da velocidade angular do sistema ξ_i relativo ao sistema x_i . É fácil mostrar que o vetor

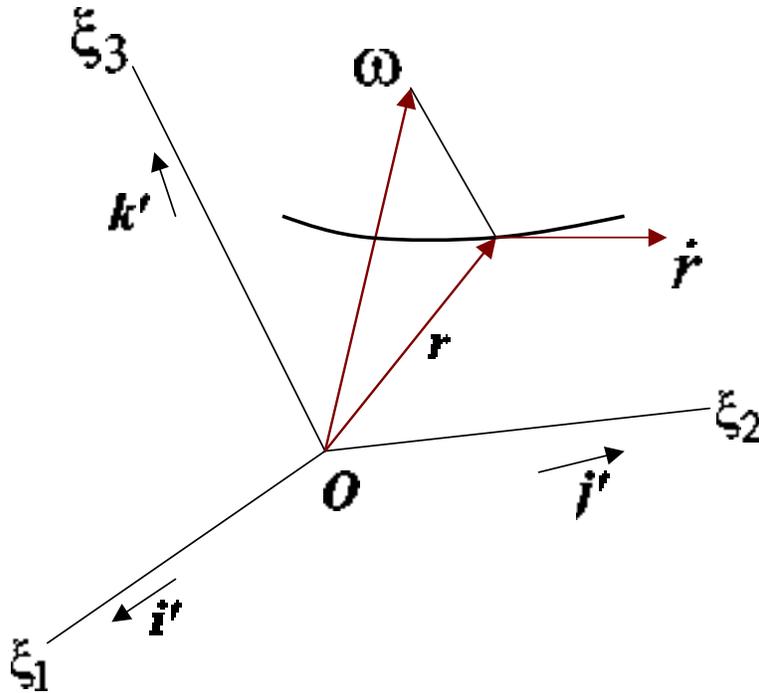


Figura C.3: Vetor fixo \mathbf{r} em relação a um sistema coordenado ξ_i sofrendo variação Δ_r relativamente a um espaço inercial como resultado de uma rotação incremental $\Delta\theta_i$, ($i = 1, 2, 3$) no sistema sobre o eixo ξ_i

da equação (C.14) é $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{i}' + \xi_2 \mathbf{j}' + \xi_3 \mathbf{k}'$ e $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i}' + \omega_2 \mathbf{j}' + \omega_3 \mathbf{k}'$. O vetor $\dot{\mathbf{r}}$ pode ser fisicamente interpretado pela Figura C.3, na qual \mathbf{r} representa a posição do vetor, $\boldsymbol{\omega}$ e a velocidade angular do vetor que coincide com a rotação instantânea dos eixos, $\dot{\mathbf{r}}$ é o vetor normal a \mathbf{r} e $\boldsymbol{\omega}$ e na direção mostrada.

C.1.3 Expressões para o movimento em termos do referencial em movimento

Nas seções anteriores foram considerados sistemas de coordenadas rotacionais relativas a sistemas inerciais. Agora, obter-se-á uma expressão para a derivada do tempo de um vetor cujas componentes ao longo do sistema de movimento variam ao longo do tempo.

Referindo-se à Figura C.4 e denotando por \mathbf{r} a posição do ponto \mathbf{P} relativa a O

quando expressadas em termos das componentes x_i de um espaço inercial e por \mathbf{r}' quando expressas em termos das componentes ξ_i de sistemas de rotação, é claro que representam o mesmo vetor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' = \xi_1 \mathbf{i}' + \xi_2 \mathbf{j}' + \xi_3 \mathbf{k}' \quad (\text{C.15})$$

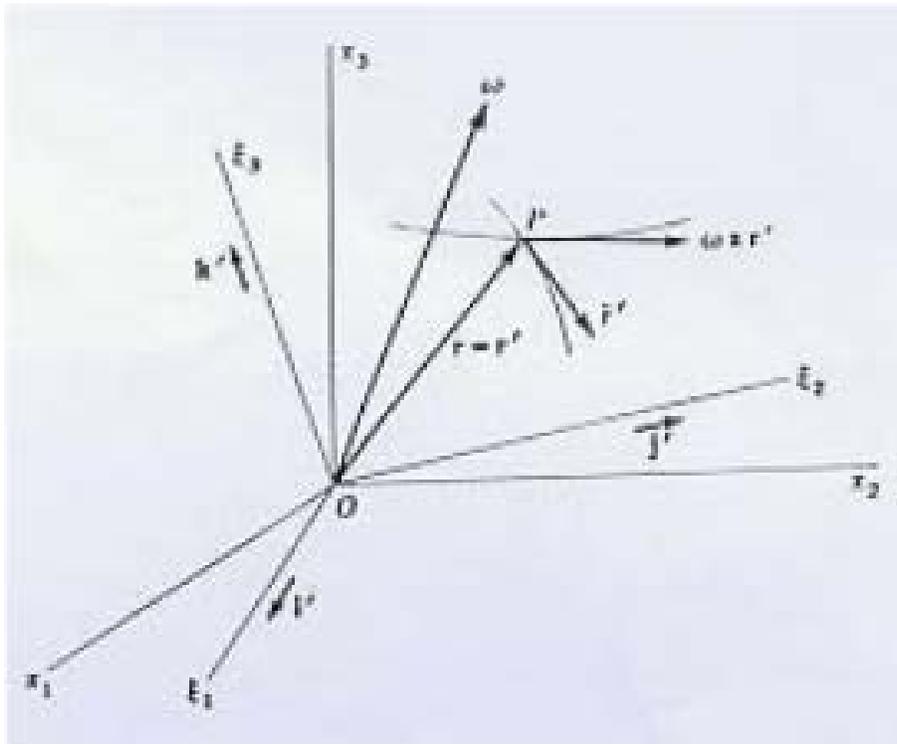


Figura C.4: O ponto \mathbf{P} expressado em termos das componentes x_i de um espaço inercial, sendo denotado por r , e em termos das componentes ξ_i de sistemas de rotação, sendo denotado por r'

Diferenciando (C.15) com respeito ao tempo, obtemos

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\xi_1}{dt} \mathbf{i}' + \frac{d\xi_2}{dt} \mathbf{j}' + \frac{d\xi_3}{dt} \mathbf{k}' + \xi_1 \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \xi_2 \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \xi_3 \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (\text{C.16})$$

onde $\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\xi}_1 \mathbf{i}' + \dot{\xi}_2 \mathbf{j}' + \dot{\xi}_3 \mathbf{k}'$ denota a variação de r' relativo ao sistema ξ_1, ξ_2, ξ_3 e $\omega \times \mathbf{r}'$ denota a taxa de variação de \mathbf{r}' devido à rotação do sistema ξ_1, ξ_2, ξ_3 . A equação (C.16) representa a derivada no tempo do vetor \mathbf{r} no espaço inercial quando o vetor \mathbf{r} é expresso em termos de um referencial rotacional, e é válido para qualquer vetor, tal como os vetores velocidade ou momento angular. Sob essas circunstâncias, a segunda derivada assume a forma:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}') + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r}' + \omega \times \frac{d}{dt}(\mathbf{r}') \\ &= \ddot{\mathbf{r}}' + \omega \times \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\omega} \times \mathbf{r}' + (\omega \times \omega) \times \mathbf{r}' + \omega \times \dot{\mathbf{r}}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') \\ &= \ddot{\mathbf{r}}' + 2\omega \times \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\omega} \times \mathbf{r}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

onde $\ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{\xi}_1 \mathbf{i}' + \ddot{\xi}_2 \mathbf{j}' + \ddot{\xi}_3 \mathbf{k}'$ é a segunda derivada de \mathbf{r}' relativo ao sistema rotacional. Em termos de aceleração:

- $\ddot{\mathbf{r}}$ é a aceleração de \mathbf{P} num espaço inercial;
- $\ddot{\mathbf{r}}'$ é a aceleração de \mathbf{P} relativo à rotação;
- $2\omega \times \dot{\mathbf{r}}'$ é conhecido como aceleração de Coriolis;
- $\dot{\omega} \times \mathbf{r}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}')$ é a aceleração do ponto coincidente;
- $\omega \times \omega \times \mathbf{r}'$ é a chamada aceleração centrípeta e está dirigida na direção de rotação do eixo.

Agora se a origem O translada com velocidade \mathbf{v}_0 e aceleração \mathbf{a}_0 com respeito ao espaço inercial, a velocidade absoluta e a aceleração do ponto \mathbf{P} serão

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{r}} \text{ e } \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \ddot{\mathbf{r}}$$

C.1.4 Movimento relativo à rotação da Terra

Seja um ponto se movendo nas vizinhanças da superfície da Terra com sistema coordenado atachado à superfície da Terra. Tal referencial, no entanto é não inercial, por que o centro da Terra gira ao redor do Sol e a Terra gira em seu próprio eixo.

Embora o eixo da Terra esteja se movendo ao redor do Sol, a aceleração é relativamente pequena comparada com a aceleração da gravidade ou, igualmente, a aceleração de um ponto na superfície da Terra devido ao seu spin.

Então, pode-se escolher como sistema inercial um conjunto X, Y, Z com origem no centro da Terra C e Z alinhado com o eixo de rotação da Terra. Os eixos X e Y estão no plano equatorial.

A Terra gira com uma velocidade angular Ω , que para toda suposição prática assume-se constante e igual a uma rotação por dia.

Preocupa-se com o movimento de uma partícula nas vizinhanças da superfície da Terra, assumindo a Terra ser esférica. Para expressar o movimento da partícula relativo à Terra, atacha-se um sistema coordenado x, y, z na superfície da Terra com origem O a uma dada latitude λ . Os correspondentes vetores unitários são \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} . Como o sistema x, y, z está atachado à Terra, possui sua mesma velocidade angular Ω .

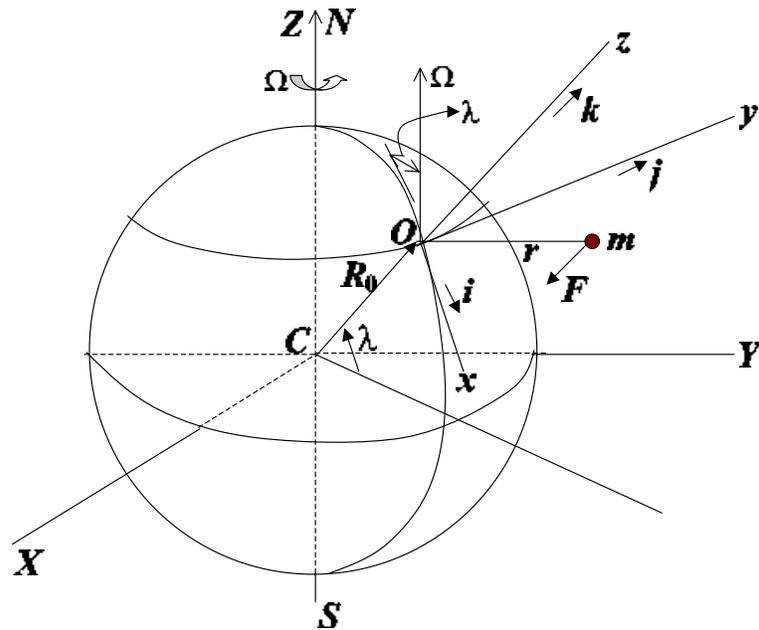


Figura C.5: Movimento de uma partícula m em relação a rotação da Terra

Observando a Figura C.5, concluimos que a velocidade angular pode ser expressada em termos das componentes ao longo dos eixos x, y, z da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\Omega} = -(\Omega \cos \lambda)\mathbf{i} + (\Omega \sin \lambda)\mathbf{j} = cte \quad (\text{C.18})$$

A posição de uma massa m relativa ao sistema x, y, z é denotada por \mathbf{r} e o raio da Terra \overline{OC} por \mathbf{R}_0 . Então, usando a equação $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \ddot{\mathbf{r}}$, temos que a aceleração de m em um espaço inercial é:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_0 + \ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \\ &= \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_0) + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

onde \mathbf{v}' e \mathbf{a}' são, respectivamente, a velocidade e a aceleração de m relativo ao sistema x, y, z . Considere atuando sobre m as forças da gravidade e forças de fontes não especificadas. Para movimentos nas vizinhanças de O , o efeito da curvatura da Terra pode ser desprezado e o campo gravitacional é considerado uniforme. Sob essas circunstâncias a segunda lei de Newton toma a forma:

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F} - mg\mathbf{k} = m\mathbf{a} = m[\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_0) + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] \quad (\text{C.20})$$

O último termo do lado direito de (C.20) é geralmente muito pequeno, podendo ser desprezado. Assim as equações diferenciais de movimento tornam-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{F}_x}{m} = \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} \sin \lambda - \Omega^2 \mathbf{R}_0 \sin \lambda \cos \lambda \\ \frac{\mathbf{F}_y}{m} = \ddot{y} + 2\Omega(\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \\ -g + \frac{\mathbf{F}_z}{m} = \ddot{z} - 2\Omega\dot{y} \cos \lambda - \Omega^2 \mathbf{R}_0 \cos^2 \lambda \end{array} \right. \quad (\text{C.21})$$

C.1.5 Movimento de uma partícula livre relativo à rotação da Terra

Por simplicidade, consideraremos nesta seção uma partícula livre desprezando a resistência do ar e qualquer outra força, exceto a gravidade, $\mathbf{F}_x = \mathbf{F}_y = \mathbf{F}_z = 0$. Devido à rotação da Terra ser muito baixa, $\Omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{rad/s}$, os termos Ω de segunda ordem podem ser desprezados. Assim as equações (C.21) torna-se:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} \sin \lambda = 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega(\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) = 0 \\ \ddot{z} - 2\Omega\dot{y} \cos \lambda + g = 0 \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

As condições iniciais são:

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad z(0) = h$$

$$\dot{x}(0) = u_0 \quad \dot{y}(0) = v_0 \quad \dot{z}(0) = w_0$$

Integrando (C.22)

$$\begin{cases} \dot{x} - 2\Omega y \sin \lambda = u_0 \\ \dot{y} + 2\Omega(x \sin \lambda + z \cos \lambda) = v_0 \\ \dot{z} - 2\Omega y \cos \lambda + gt = 0 \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

substituindo a primeira e a terceira equação de C.23 na segunda equação de (C.22), e desprezando os termos Ω^2 obtemos $\dot{y} + 2\Omega(u_0 \sin \lambda + w_0 \cos \lambda) - 2\Omega gt \cos \lambda = 0$ que integrando duas vezes resulta

$$y = v_0 t - \Omega t^2 (u_0 \sin \lambda + w_0 \cos \lambda) + \frac{1}{3} \Omega g t^3 \cos \lambda \quad (\text{C.24})$$

Substituindo (C.24) na primeira e terceira equações de (C.23) e integrando com respeito ao tempo resulta

$$x = u_0 t + \Omega v_0 t^2 \sin \lambda \quad (\text{C.25})$$

$$z = h + w_0 t + \Omega v_0 t^2 \cos \lambda - \frac{1}{2} g t^2 \quad (\text{C.26})$$

onde novamente os termos Ω^2 são desprezados. Se uma partícula parte do repouso, $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ de uma altura h , atingirá a superfície da Terra no intervalo de tempo $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

As coordenadas na Terra são $x = y = 0, z = \frac{2}{3} \Omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} \cos \lambda$, onde o sinal positivo de y indica que a partícula cai em um ponto a leste da origem. Isto é explicado devido à partícula estar sendo desviada de sua trajetória pelo efeito de Coriolis.

Visto que podemos tratar a viga como um corpo rígido, estudamos a dinâmica de corpos rígidos, detalhada a seguir.

C.2 Dinâmica de Corpos Rígidos

Corpos Rígidos são sistemas de partículas em que a distância entre duas partículas quaisquer permanece constante durante o movimento em todo tempo.

Um corpo deformável de dimensões finitas pode ser considerado como sendo composto por um número infinito de partículas, logo, possuindo um número infinito de graus de liberdade.

Por definição, considera-se que um corpo rígido não sofre deformações, e pode-se mostrar que possui somente seis graus de liberdade. Isto resulta do fato de que a distância entre qualquer par de partículas é considerada constante. A maioria dos conceitos estudada no capítulo anterior é válida para corpos rígidos.

C.2.1 Cinemática de um corpo rígido

O movimento mais geral de um corpo rígido é descrito por seis coordenadas, tal que um corpo rígido se movendo livremente no espaço possua seis graus de liberdade. De fato, considere uma dada partícula se movendo livremente no espaço, tal que haja três graus de liberdade associados com essa partícula. Suponha que seja adicionada uma segunda partícula dentro do corpo rígido, então teremos apenas mais dois graus de liberdade em nosso sistema, pois um grau de liberdade está associado ao confinamento cinemático com a primeira partícula. Se uma terceira partícula.

Se uma terceira partícula adicionada, nosso sistema aumentará em apenas um grau de liberdade, pois os outros dois estão associados ao confinamento cinemático das partículas. Isto resulta em seis graus de liberdade que descreve o movimento completo do corpo rígido.

Freqüentemente é conveniente escrever os seis sistemas coordenados como sendo três translações de um certo ponto dentro do corpo e três rotações sobre aquele ponto. Para este fim, um sistema de eixos é encaixado dentro do corpo e descreverá tal translação e rotação da origem O do eixo do corpo.

A descrição do movimento de um corpo rígido se torna simples por que não há movimento dos pontos de massa com respeito ao corpo, o que nos permite usar as equações de rotação definidas no apêndice A.

Assim, obtemos as equações de velocidade e aceleração absolutas, de um corpo rígido dadas por $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ e $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \ddot{\mathbf{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}')$ respectivamente, onde $\dot{\mathbf{r}}' = \ddot{\mathbf{r}}' = 0$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ é o raio do vetor em questão medido com relação ao eixo do corpo.

A orientação do corpo pode ser definida em termos de uma transformação ortogonal dada pela matriz $3 \times 3[l(t)]$ relacionando o eixo do corpo com o sistema inercial. Inicialmente se o eixo do corpo coincidir com o sistema inercial, então $[l(0)] = [I]$, que é a matriz unitária.

Verifica-se que o deslocamento geral de um corpo rígido com um ponto fixado é uma rotação sobre um eixo através do ponto fixado. Isto implica que no espaço inercial há um eixo no corpo rígido que não é afetado pela rotação, que é equivalente a

dizer que os componentes de um vetor coincidindo com o eixo de rotação permanecem como antes da rotação. Usando a equação (C.24) representada em termos matriciais.

$$\{\xi\} = [l]\{x\} = \{x\} \quad (\text{C.27})$$

Considerando o problema de autovalor

$$[l]\{x\} = \lambda\{x\} \quad (\text{C.28})$$

A equação homogênea de (C.28) tem soluções não triviais para somente certos valores de λ . Estas constantes são denominadas de autovalores e são denotadas por λ_r , e os vetores correspondentes são denominados autovetores e denotados por $\{x^{(r)}\}$ ($r = 1, 2, 3$).

Em geral, (C.28) tem três autovalores distintos λ_r , que pode ser arranjado em uma matriz diagonal $[\lambda]$, e três autovetores associados $\{x^{(r)}\}$, formando a matriz quadrada $\{x\}$, tal que (C.28) torna-se

$$[l][x] = [x][\lambda] \quad (\text{C.29})$$

Pré-multiplicando (C.29) por $[x]^{-1}$, obtem-se

$$[x]^{-1}[l][x] = [\lambda] \quad (\text{C.30})$$

tal que, a solução do problema de autovalores se reduz a encontrar uma matriz $\{x\}$ que transforma $[l]$ em uma matriz diagonal. Uma transformação do tipo (C.30) é conhecida como uma transformação de similaridade.

As matrizes $[l]$ e $[\lambda]$ de (C.30) são ditas ser similares, isto implica que seus autovalores são iguais e assim, são iguais os valores dos determinantes característicos

correspondentes. Disto e das propriedades de transformação similar, pode-se escrever:

$$|l_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = |(\lambda_{ij} \lambda) \delta_{ij}| = 0,$$

onde d_{ij} é o delta de Kronecker.

Expandindo os dois determinantes, conclui-se que $|l| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, onde $|l|$ é real.

A direção de rotação pode ser obtida resolvendo o problema de autovalores específico da equação (C.27). O ângulo de rotação também pode ser encontrado por meio de uma transformação de similaridade em $[l]$, escolhidos de forma que os eixos, digamos x_1 , coincidam com o eixo de rotação. Mas a rotação sobre o eixo x_1 pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{C.31})$$

e devido à transformação de similaridade mantem o traço da matriz inalterado, então o traço da matriz acima deve ser igual ao traço de $[l]$ antes e depois da transformação. Daí,

$$1 + 2 \cos \phi = \sum_{i=1}^3 l_{ii} \quad (\text{C.32})$$

C.2.2 Momentos linear e angular de um corpo rígido

Seja um corpo rígido, como definido anteriormente, de massa total m e seja x, y, z um eixo do corpo com origem O como mostrado na Figura C.6. Ele também pode ser representado como um sólido contínuo a cada ponto definido por um elemento de massa dm .

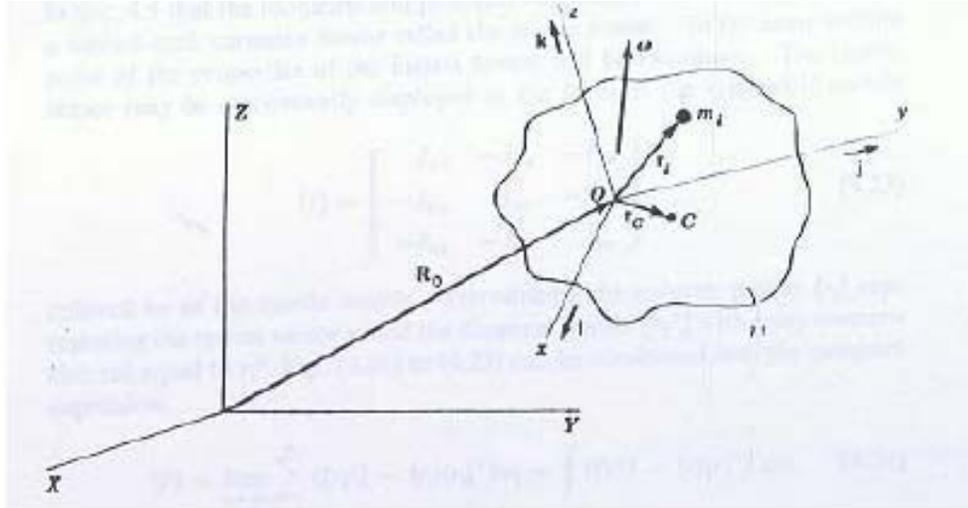


Figura C.6: Corpo rígido com eixos x, y, z e origem O

O raio do vetor, da origem O ao centro de massa C é definido por:

$$\mathbf{r}_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{m} \int_{\text{corpo}} \mathbf{r} dm \quad (\text{C.33})$$

Se a origem coincidir com o centro de massa $\int \mathbf{r} dm = 0$.

O momento linear do corpo rígido tem a expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}_i) \\ &= \mathbf{v}_0 \int dm + \omega \times \int \mathbf{r} dm = m(\mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}_c) \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

que pode ser reescrita como $m\mathbf{v}_C$, já que a quantidade entre parênteses em (C.34) representa a velocidade do centro de massa C . Se escolhermos a origem O de forma a coincidir com o centro de massa C , a equação (C.34) possui a mesma forma, mas a velocidade \mathbf{v}_C não envolve a velocidade angular ω pois \mathbf{r}_C é zero.

O momento angular de um corpo rígido com relação à origem O é definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i &= \int \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \\ &= -\mathbf{v}_0 \times \int \mathbf{r} dm + \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Mas se a origem O está fixa, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, e se O coincide com o centro de massa segue que $\int \mathbf{r} dm = 0$. Assim, o momento angular de um corpo rígido com relação ao ponto O , o qual está fixo ou coincide com o centro de massa é

$$\mathbf{L}_0 = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \int (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})) dm \quad (\text{C.36})$$

cujas três componentes são:

$$L_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \quad (\text{C.37})$$

$$L_y = -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \quad (\text{C.38})$$

$$L_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y - I_{zz}\omega_z \quad (\text{C.39})$$

Onde as quantidades $I_{xx} = \int (\mathbf{r}^2 - x^2) dm$, $I_{yy} = \int (\mathbf{r}^2 - y^2) dm$, $I_{zz} = \int (\mathbf{r}^2 - z^2) dm$ são conhecidos como momentos de inércia e as quantidades $I_{xy} = I_{yx} = \int xy dm$, $I_{xz} = I_{zx} = \int xz dm$, $I_{yz} = I_{zy} = \int yz dm$ são conhecidas como produtos de inércia, que são agrupados na matriz de inércia

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{C.40})$$

Introduzindo a matriz coluna $\{r_i\}$ representando o raio \mathbf{r}_i e a matriz diagonal $[r]$, as equações dos momentos e dos produtos de inércia e equação (C.40) podem ser compactadas na forma:

$$[\mathbf{I}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ([\mathbf{r}_i^2] - \mathbf{r}_i \{\mathbf{r}_i\}^T) m_i = \int [\mathbf{r}^2] - \{\mathbf{r}\} \{\mathbf{r}\}^T dm \quad (\text{C.41})$$

Como por definição, os eixos do corpo são fixo neles próprios, os elementos da matriz de inércia são constantes. No caso de escolher-se como referencial um sistema girante com relação ao corpo, os elementos de $[\mathbf{I}]$ não são constantes.

Tendo em vista as equações (C.40), (C.37), (C.38) e (C.39), podemos escrever \mathbf{L} em forma matricial da seguinte forma

$$\{\mathbf{L}\} = [\mathbf{I}]\{\omega\} \quad (\text{C.42})$$

Donde podemos interpretar a matriz $[\mathbf{I}]$ como um operador que transforma o vetor $\{\omega\}$ no vetor $\{\mathbf{L}\}$.

C.2.3 Teorema da translação para momento angular

O que interessa nessa sessão, é calcular o momento angular em qualquer ponto \mathbf{A} em movimento, podendo \mathbf{A} estar dentro ou fora do corpo, como mostra a Figura C.7.

Através da Figura C.7, pode-se escrever a expressão do momento angular:

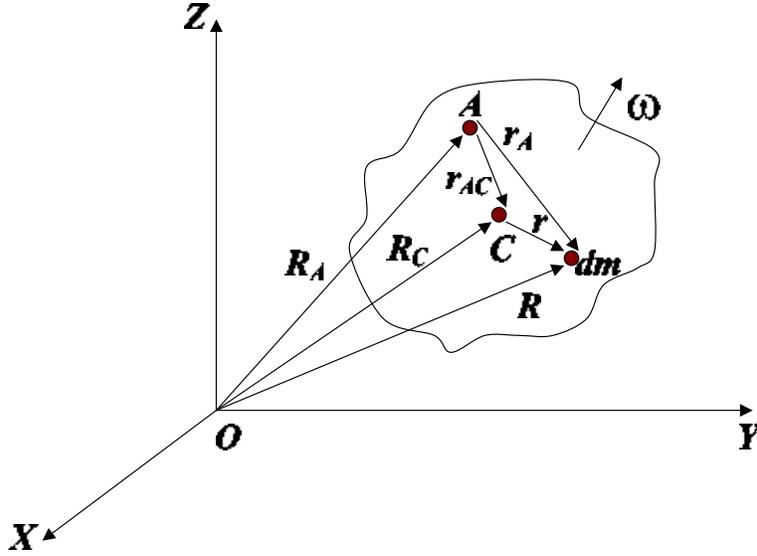


Figura C.7: Momento angular de um ponto A dentro do corpo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_A &= \int \mathbf{r}_A \times \mathbf{v} dm = \int \mathbf{r}_A \times (\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \\
 &= \int (\mathbf{r}_{AC} + \mathbf{r}) \times (\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \mathbf{r}_{AC} \times m\mathbf{v}_C + \\
 &\qquad \qquad \qquad \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \qquad \qquad \qquad (C.43)
 \end{aligned}$$

onde, a posição de dm depende só de \mathbf{r} e $\int \mathbf{r} dm = 0$. Mas $m\mathbf{v}_C = \mathbf{p}$ é o momento linear do corpo, e

$$\int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \mathbf{L}_C \qquad \qquad \qquad (C.44)$$

é o momento linear do corpo sobre o centro de massa.

Introduzindo $m\mathbf{v}_C$ e (C.44) em (C.43), temos:

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_C + \mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{p} \quad (\text{C.45})$$

que é a formulação conhecida do teorema da translação do centro de massa. Em outras palavras, o momento angular de um corpo rígido sobre qualquer ponto \mathbf{A} é igual a soma do momento angular sobre o centro de massa e do momento linear sobre \mathbf{A} , onde o vetor momento linear deve passar por \mathbf{C} .

C.2.4 Energia cinética de um corpo rígido

Através da Figura C.7, vamos calcular a energia cinética de um corpo por meio de um conjunto de eixos x, y e z com origem em O . Tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{2} \int (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} dm) + \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Há dois casos de interesse particular:

Caso 1: Origem O fixa a um referencial inercial. Neste caso, temos $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ e (C.46) torna-se

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \quad (\text{C.47})$$

Tal que a energia cinética do corpo pode ser considerada como sendo devido ao movimento rotacional do corpo sobre o ponto fixado.

Caso 2: Origem O coincide com o centro de massa \mathbf{C} . Neste caso, temos $\int \mathbf{r} dm = 0$, logo (C.47) torna-se

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \quad (\text{C.48})$$

onde $\frac{1}{2}m\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C dm =$ energia cinética de translação e $\frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) =$ energia cinética de rotação.

A energia cinética de translação pode ser escrita na forma matricial

$$\mathbf{T}_{\text{tr}} = \frac{1}{2} \{\mathbf{v}_C\}' \{\mathbf{v}_C\} m \quad (\text{C.49})$$

onde \mathbf{v}_C é a matriz coluna da componente velocidade do centro de massa.

A energia cinética rotacional também pode ser escrita de uma forma relativamente simples. Relembrando (C.14)

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \{\mathbf{r}\}^T [\boldsymbol{\omega}]^T [\boldsymbol{\omega}] \{\mathbf{r}\} \\ &= \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \\ &= (\mathbf{r}^2 - x^2)\omega_x^2 + (\mathbf{r}^2 - y^2)\omega_y^2 + (\mathbf{r}^2 - z^2)\omega_z^2 \\ &\quad - 2xy\omega_x\omega_y - 2xz\omega_x\omega_z - 2yz\omega_y\omega_z \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

Substituindo (C.49) em (C.48), integrando e relembrando as definições de momento e produto de inércia, obtemos:

$$\mathbf{T}_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{xz}\omega_x\omega_z - 2I_{yz}\omega_y\omega_z) \quad (\text{C.51})$$

onde $\{\boldsymbol{\omega}\}$ é a matriz coluna da velocidade angular do corpo correspondente e $[\mathbf{I}]$ é a matriz simétrica de inércia.

C.2.5 Eixo principal

A equação (C.51) expressa a energia cinética rotacional de um corpo rígido em termos das componentes da velocidade angular do corpo e momentos e produto de inércia.

Devido ao movimento se referir a um conjunto de eixos solidários, o momento e produto de inércia não depende do tempo, tal que (C.51) tenha forma de uma função quadrática homogênea com coeficientes constantes.

A direção do conjunto de eixos usados, embora fixos em relação ao corpo, é arbitrário. Logo, (C.51) pode ser simplificada pela escolha de um conjunto particular de eixos, denominado eixo principal. Assim, a matriz de inércia se reduz a uma forma diagonal e os termos perpendiculares da velocidade desaparecem na energia cinética.

Antes de discutir o método de obtenção de eixo principal, será examinado a relação entre produto e momento de inércia expressas em dois sistemas coordenados diferentes, nos eixos x e x' . Usando a transformação de coordenadas, vista na seção C.1.1:

$$\omega'_i = \sum_{j=1}^3 l_{ij} \omega_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C.52})$$

Escrevendo na forma matricial:

$$\{\omega'\}[l]\{\omega\} \quad (\text{C.53})$$

onde $[l]$ é a matriz dos cossenos diretores entre x_i e x'_i .

A energia cinética no conjunto de sistemas coordenados é:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \{\omega\}^{\mathbf{T}} [\mathbf{I}] \{\omega\} = \frac{1}{2} \{\omega'\}^{\mathbf{T}} [\mathbf{I}] \{\omega'\} \quad (\text{C.54})$$

Substituindo (C.53) em (C.54)

$$[\mathbf{I}'] = [l][\mathbf{I}][l]^T \quad (\text{C.55})$$

Escrevendo (C.55) em notação indicial

$$I'_{ij} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 l_{ir} l_{js} l_{rs}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{C.56})$$

Por definição, o eixo principal é um conjunto de eixos em que os produtos de inércia sejam zero. Assim, para obter a direção dos eixos principais, deve-se buscar uma matriz $[l]$ que reduza $[\mathbf{I}]$ à forma diagonal.

$$[\mathbf{I}'] = [l][\mathbf{I}][l]^T \quad (\text{C.57})$$

Isto é equivalente a resolver o problema de autovalores

$$[\mathbf{I}][u] = [u][\lambda] \quad (\text{C.58})$$

Para este fim, pode-se escrever (C.58) na forma:

$$[\mathbf{I}][u] = \lambda[u] \quad (\text{C.59})$$

pré-multiplicando por u^T

$$[u]^T [\mathbf{I}][u] = \lambda [u]^T [u] \quad (\text{C.60})$$

normalizando $\{u\}$

$$[u]^{\mathbf{T}}[u] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i^2 = 1 \quad (\text{C.61})$$

que é equivalente a dizer que o comprimento de $\{u\}$ é unitário. Assim, (C.60) pode ser escrito da seguinte forma

$$\frac{1}{\lambda}(I_{11}u_1^2 + I_{22}u_2^2 + I_{33}u_3^2 - I_{12}u_1u_2 - 2I_{13}u_1u_3 - 2I_{23}u_2u_3) = 1 \quad (\text{C.62})$$

que é a equação de uma superfície quadrática com centro na origem do sistema cartesiano u_i . O problema de encontrar o autovalor de (C.62) pode ser interpretado como o problema de encontrar as direções para que a um certo ponto, o raio de u e a normal n da elipsóide sejam paralelos.

Estas direções são o eixo da elipsóide e corresponde ao eixo do corpo para que a matriz de inércia torne-se diagonal. Assim, a equação na forma canônica da elipsóide é

$$\frac{1}{\lambda}(I_1u_1'^2 + I_2u_2'^2 + I_3u_3'^2) = 1 \quad (\text{C.63})$$

em que I_1, I_2, I_3 , são os momentos principais de inércia do corpo.

Assim, tendo encontrado o eixo de rotação, a energia cinética de rotação pode ser reduzida à simples expressão:

$$\mathbf{T}_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\{\omega\}^{\mathbf{T}}[\mathbf{I}']\{\omega\} = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \quad (\text{C.64})$$

C.2.6 Equação de movimento para um corpo rígido

Não é difícil perceber que a equação do movimento para um sistema de partículas também é válida para um corpo rígido, pois um corpo rígido é considerado um sistema de partículas.

De acordo com a segunda lei de Newton: UMA PARTÍCULA MOVE-SE DEVIDO A AÇÃO DE UMA FORÇA, CUJA INTENSIDADE É IGUAL A TAXA DE VARIAÇÃO DO MOMENTO LINEAR.

Logo, a equação da força é obtida como:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{R}}_{\mathbf{C}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_{\mathbf{C}}) = \dot{\mathbf{p}} \quad (\text{C.65})$$

onde,

- $m\mathbf{v}_{\mathbf{c}} = \mathbf{p}$ = momento linear do centro de massa do corpo;
- m = massa total
- $\mathbf{v}_{\mathbf{c}}$ = velocidade do centro de massa do corpo

Analogamente, a equação do momento com respeito ao centro de massa \mathbf{C} tem a forma $\mathbf{N}_{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{C}}$, e no caso do corpo rígido, o momento angular $\mathbf{L}_{\mathbf{C}}$ é dado pela equação C.36. A equação, para movimentos rotacionais sobre o centro de massa, pode ser tratada independentemente do movimento de translação do centro de massa.

Podemos detalhar a equação expressando $\mathbf{N}_{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{C}}$ em $\mathbf{L}_{\mathbf{C}}$ termos das componentes de eixos do corpo como $\mathbf{L}_{\mathbf{C}} = L_x\mathbf{i} + L_y\mathbf{j} + L_z\mathbf{k}$, onde L_x, L_y e L_z são dados pelas equações (C.37), (C.38) e (C.39). Como L_C está expressado em termos das componentes dos eixos do corpo, as quais são rotações com velocidade angular ω relativamente a um espaço inercial, $\mathbf{N}_{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{C}}$ toma a forma $\mathbf{N}_{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{L}}'_{\mathbf{C}} + \omega \times \mathbf{L}_{\mathbf{C}}$.

Se o movimento ocorrer sobre um ponto fixo O , a equação para o torque de um corpo rígido toma a forma $\mathbf{N}_O = \dot{\mathbf{L}}_O$ cuja expressão pode ser expandida em termos das componentes ao longo do conjunto de eixos do corpo com origem O .

C.2.7 Equação de movimento de Euler

Nesta seção considerar-se-á o movimento de rotação sobre um ponto.

A equação do torque em relação ao momento angular é:

$$\{\mathbf{N}\} = \{\dot{\mathbf{L}}'\} + [\omega]\{\mathbf{L}\} \quad (\text{C.66})$$

Embora a direção do eixo do corpo seja arbitrária, a equação de movimento pode ser consideravelmente simplificada, fazendo-a coincidir com o eixo principal.

Assim sendo, o produto de inércia desaparece, de modo que a matriz coluna do momento angular reduz-se a

$$\{\mathbf{N}\} = [\mathbf{I}]\{\dot{\omega}'\} + \{\omega\}[\mathbf{I}]\{\omega\} \quad (\text{C.67})$$

Substituindo (C.67) em (C.66) obtemos

$$\{\mathbf{L}\} = [\mathbf{I}]\{\omega\} \quad (\text{C.68})$$

que é conhecida como **equação de Euler de Movimento**. Denotando o eixo principal por 1,2,3 e o momento principal de inércia por A, B, C, a equação de Euler torna-se:

$$\begin{cases} N_1 = A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 \\ N_2 = B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 \\ N_3 = C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 \end{cases} \quad (\text{C.69})$$

Deve-se distinguir entre velocidade angular ω do referencial, da velocidade angular Ω do corpo. Considerando-se o momento angular

$$\{\mathbf{L}\} = [\mathbf{I}]\{\boldsymbol{\Omega}\} \quad (\text{C.70})$$

tem-se o torque no corpo $\{\mathbf{N}\} = [\mathbf{I}]\{\dot{\boldsymbol{\Omega}}'\} + \{\boldsymbol{\omega}\}[\mathbf{I}]\{\boldsymbol{\Omega}\}$ que é a **equação de Euler modificada**.

C.2.8 Ângulos de Euler

As componentes da velocidade angular $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sobre o eixo do corpo não podem ser integradas para obterem os deslocamentos angulares, e são insatisfatórias como meio de descrever a orientação de um corpo rígido.

Para conhecer-se a orientação de um corpo rígido no espaço, precisa-se de três coordenadas independentes, como visto na seção C.1.

Um conjunto que descreve toda a orientação do corpo é o conjunto dos chamados **ângulos de Euler**. Estes são três deslocamentos angulares sucessivos que levam adequadamente à transformação de um sistema coordenado em outro, embora as rotações não sejam sobre três eixos ortogonais. No entanto, os três componentes angulares podem ser expressos em termos do ângulo de Euler e sua derivada no tempo. A notação mais comum dos ângulos de Euler é: ϕ, θ, ψ .

Considera-se inicialmente o sistema X, Y, Z , onde a orientação inicial do corpo coincida com este sistema cartesiano.

Uma rotação de um ângulo ϕ sobre o eixo Z , leva esta tríade à ξ', η', ζ' . Após isso, uma rotação θ sobre ξ' leva o corpo à orientação ξ, η, ζ onde ξ é conhecido como o eixo modal, permanecendo no plano horizontal todo tempo. Finalmente uma rotação ψ sobre ζ faz a tríade coincidir com x, y, z (Figura C.8).

$R_1(\phi)$ representa a rotação que leva X, Y, Z à ξ', η', ζ' .

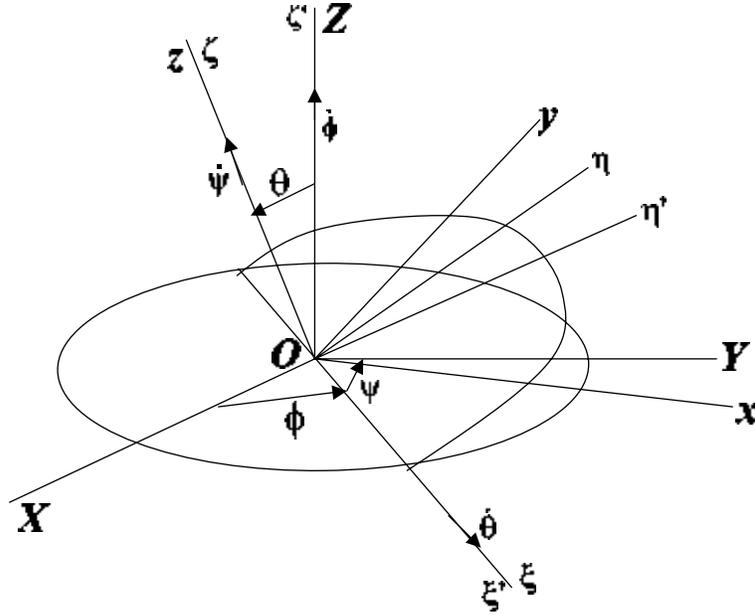


Figura C.8: Ângulos de Euler

$$\{\xi'\} = [R_1(\phi)]\{X\}, \quad [R_1(\phi)] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.71})$$

Analogamente:

$$\{\xi\} = [R_2(\theta)]\{\xi'\}, \quad [R_2(\theta)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{C.72})$$

$$\{x\} = [R_3(\psi)]\{\xi\}, \quad [R_3(\psi)] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.73})$$

Daí, $\{x\}$ pode ser escrito diretamente

$$\{x\} = [R_3(\psi)][R_2(\theta)][R_1(\phi)]\{X\} = [R]\{X\} \quad (\text{C.74})$$

onde

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{C.75})$$

Como $[\mathbf{R}]$ representa uma transformação ortonormal entre dois sistemas cartesianos $\{\mathbf{X}\} = [\mathbf{R}]^T \{\mathbf{x}\}$.

A seguir, será estabelecida a expressão da componente velocidade angular para vários sistemas coordenados em termos das velocidades $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$, que são conhecidas como precessão, rotação e spin, respectivamente. Assim sendo, deve-se distinguir entre velocidade angular ω de um sistema coordenado e a velocidade angular Ω do corpo em termos de componentes do mesmo sistema.

Mostra-se a partir da Figura B.8 que as componentes da velocidade angular do sistema ξ, η, ζ são:

$$\Omega_\xi = \dot{\theta} \quad (\text{C.76})$$

$$\Omega_\eta = \dot{\phi} \quad (\text{C.77})$$

$$\Omega_\zeta = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (\text{C.78})$$

É claro, não há distinção a ser feita entre o eixo do corpo x, y, z e o sistema de eixos de mesma velocidade, tal que

$$\Omega_x = \omega_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad (\text{C.79})$$

$$\Omega_y = \omega_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad (\text{C.80})$$

$$\Omega_z = \omega_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (\text{C.81})$$

Escrevendo na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.82})$$

Nota-se que a matriz de transformação não é ortogonal, pois as velocidades $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ estão sobre eixos que não formam um sistema de coordenadas retangular.

No ponto $\theta = 0$ os ângulos de Euler podem ser considerados singulares, pois não há maneira de se distinguir entre as velocidades $\dot{\phi}$, e $\dot{\psi}$ naquele ponto.

Quando interessa estudar o movimento nas vizinhanças dessa configuração, é mais adequado descreve-lo por um conjunto de ângulos diferentes, como foi mostrado na seção C.1.

Assim, se x, y, z for obtida por meio de três sucessivas rotações $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sobre X, η' e ζ , respectivamente, então (C.74) pode ser escrita como

$$\{\mathbf{x}\} = [\mathbf{R}_e(\theta_3)][\mathbf{R}_2(\theta_2)][\mathbf{R}_1(\theta_1)]\{\mathbf{X}\} \quad (\text{C.83})$$

onde $[\mathbf{R}]$ é a matriz dos cossenos diretores, como foi visto na seção C.1. A velocidade angular do corpo pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.84})$$

Segue agora o apêndice D, no qual abordamos um modelo da dinâmica de um rotor desbalanceado atachado a um suporte elástico e governado por um torque constante, a fim de complementar o capítulo 2.

Apêndice D

Modelo da Dinâmica de um Rotor Desbalanceado atachado a um Suporte Elástico e Governado por um Torque Constante

Sabe-se que sistemas integráveis para os quais as soluções da equação de Newton podem ser reduzidas à solução de um conjunto de equações simultâneas, seguido de integrações de variáveis simples. Se restringirmos para sistemas Hamiltonianos o problema é simplificado. Pode-se dizer que um sistema completamente integrável é aquele onde existe N analítica simples independente - estimada das primeiras integrais. Observamos que todos os sistemas de soluções exatas na mecânica clássica são integráveis neste mesmo sentido. Se utilizar o critério de Melnikov (Melnikov, 1963) a fim de concluir a existência de caos Homoclínico num sistema dinâmico podemos concluir a presença de uma ferradura Smale e então a não-integrabilidade do sistema considerado (Guckenheimer and Holmes, 1983).

O objetivo desta nota é apresentar uma discussão sobre a integrabilidade de um problema dinâmico simples, ainda não explorado. Dando uma excelente idéia de sua integrabilidade. Organizamos esta nota como segue. Na seção E.2 discutimos a integrabilidade de um modelo simples relacionado à dinâmica de um rotor desbalanceado atachado a um suporte elástico e governado por um torque constante. Na

seção E.3, as observações conclusivas desta nota.

Para investigar a dinâmica de "spinup" durante a ressonância, consideraremos um modelo simples relacionando a dinâmica de um rotor desbalanceado atachado a um suporte elástico e governado por um torque constante como na Figura D (Rand et al., 1992) e (Kinsey et al., 1992) onde M_1 é a massa do suporte; M_2 é a massa da parte desbalanceada do rotor; I é o momento de inércia da parte desbalanceada do rotor sobre o eixo de rotação; E é a distância da massa M_2 do eixo de rotação; k é a constante da mola do suporte e A é a magnitude do torque aplicado.

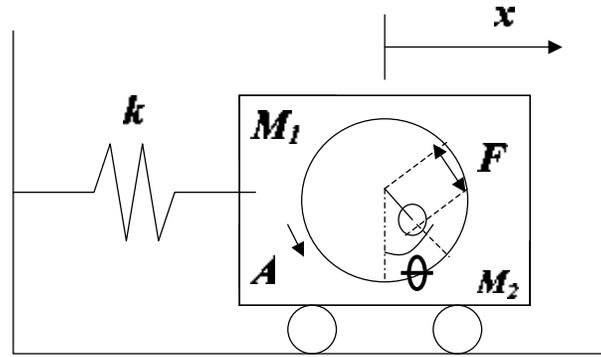


Figura D.1: Sistema constituído de um rotor desbalanceado atachado a um suporte elástico e governado por torque constante

Se negligenciarmos a gravidade e a fricção, as energias cinética e potencial para este sistema vibrante são:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}M_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M_2(\dot{x}_1 + 2E\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + E^2\dot{\theta}^2) \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}kx^2 - A\theta \quad (\text{D.2})$$

Então as equações de Lagrange do movimento são:

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} + M_2E(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + kx = 0 \quad (\text{D.3})$$

$$(I + M_2E^2)\ddot{\theta} + M_2E\ddot{x}\cos\theta = 0 \quad (\text{D.4})$$

Este sistema pode ser escrito em variáveis adimensionais fazendo

$$\tau = \sqrt{\frac{k}{M_1 + M_2}} \quad (\text{D.5})$$

$$z = x \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{I + M_2 E^2}} \quad (\text{D.6})$$

$$L = \frac{(M_1 + M_2)A}{k(l + M_2 E^2)} \quad (\text{D.7})$$

$$e = \frac{M_2 E}{\sqrt{M_1 + M_2 E^2}} \quad (\text{D.8})$$

O que resulta

$$z'' + z + e(\theta'' \cos \theta - \theta'^2 \sin \theta) = 0 \quad (\text{D.9})$$

$$\theta'' + e z'' \cos \theta = L \quad (\text{D.10})$$

Integrações numéricas realizadas por (Rand et al., 1992) e (Kinsey et al., 1992) mostram que quando $\dot{\theta}$ aproxima-se da frequência de ressonância do oscilador suporte, isto é, o movimento em θ é capturado ou passa através da ressonância. Fazendo uma série de transformações de coordenadas usadas pelos autores, reescrevemos as equações adimensionais das equações do movimento na forma conveniente:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + w(t) = u^2 \quad (\text{D.11})$$

$$w(t) = w(0) + \varepsilon h(t) \quad (\text{D.12})$$

$$\text{e denotando } w(0) = w \quad (\text{D.13})$$

Observamos que no paper referido o autor usa $h(t) = t$. Sabe-se que t é o primeiro termo da expansão em série da função Seno. Este ponto será significativo para o comportamento da análise dinâmica não-linear do problema considerado aqui.

Note que a equação (D.13) pode ser escrita como:

$$f : M^2 \times \mathfrak{R} \rightarrow T$$

$$(M^2), \left(\begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}, t \right) \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{u} \\ u^2 - w(t) \end{bmatrix} \quad (\text{D.14})$$

Assumindo que $w(t) = w(0) + \varepsilon h(t)$ e denotando $w(0) = w$ obtém-se que

$$f(x, t) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x, t) = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ u^2 - w \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ -h(u, \dot{u}, t) \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

Tomando-se $\varepsilon = 0$ obtém-se um sistema integrável associado. Sua primeira integral é dada por:

$$\mathcal{H} : M^2 \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\dot{u}^2}{2} - \frac{u^3}{3} + wx \quad (\text{D.16})$$

cujos pontos fixos são $x_1 = [w^{1/2} \ 0]^t$ e $x_2 = [-w^{1/2} \ 0]^t$. Se $w < 0$ não existe pontos fixos. Sua matriz Jacobiana e sua polinomial característica são dadas por:

$$Df_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2u & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.17})$$

$$\lambda^2 - 2u = 0 \quad (\text{D.18})$$

Para x_1 tem-se que $\lambda = \pm(2w^{1/2})^{1/2}$ e para x_2 , $\lambda = \pm j(2w^{1/2})^{1/2}$, onde $j^2 = -1$.

Note que para $w = 0$ os autovalores são zero pois $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^t$ é um ponto de bifurcação com co-dimensão 1, e para o caso analisado, o interesse está em 0 sendo x_1 um ponto de sela hiperbólica e x_2 é um centro elíptico.

D.1 Órbita Homoclínica do Sistema Integrável

Tomando o sistema integrável a função Hamiltoniana associada à órbita homoclínica é:

$$\mathcal{H}_t = \frac{(2w^{3/2})}{3} \quad (\text{D.19})$$

Onde a órbita homoclínica é dada pela equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{u^3}{3} - wu + \frac{2w^{3/2}}{3}} \quad (\text{D.20})$$

Cuja solução considerando a condição inicial $u(0) = 0$ é (Rand et al., 1992)

$$\begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{w}}{1 + \sec h(tw^{1/4}\sqrt{2})} \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 5 \sec h(tw^{1/4}\sqrt{2}) \\ \frac{w^{1/4}\sqrt{2} \tan h(tw^{1/4}\sqrt{2}) \sec h(tw^{1/4}\sqrt{2})}{1 + \sec h(tw^{1/4}\sqrt{2})} \end{bmatrix} \quad (\text{D.22})$$

D.2 Função de Melnikov-Poincaré

Os autores mencionados, na saída do problema utilizaram $h(t) = t$. Sabe-se que t é o primeiro termo da expansão em série da função Seno, que será utilizada para uma perturbação periódica para determinar a função de Melnikov-Poincaré.

Então consideraremos:

$$h(t) = \sin(\omega t) \quad (\text{D.23})$$

Então a função de Melnikov-Poincaré é:

$$M(t) = -\sqrt{w} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tan h\eta \sec h\eta \sin \left[\omega \left(t + \frac{\eta}{w^{1/4}\sqrt{2}} \right) \right]}{(1 + \sec h\eta)^2} \quad (\text{D.24})$$

Ou

$$M(t) = -K \cos(\omega t) \quad (\text{D.25})$$

Onde

$$K = \frac{\pi\omega^2}{2} \csc h \left[\frac{\pi\omega}{2^{3/2}w^{1/4}} \right] \sec h \left[\frac{\pi\omega}{2^{3/2}w^{1/4}} \right] \quad (\text{D.26})$$

Nesta maneira pode-se checar se esta função possui zero simples então o sistema o sistema dinâmico possui um mapa de ferradura e então não é integrável. Nota-se que a derivada de M é dada por:

$$M'(t) = \omega k \sin(\omega t) \quad (\text{D.27})$$

Nesta maneira para a perturbação da mesma espécie de (D.23), o sistema dinâmico perderá integrabilidade e apresentará comportamento caótico para todos os valores de w .

Ainda a fim de complementar o capítulo 2, segue o apêndice E, com algumas simulações numéricas do sistema representado pela Figura 2.3b.

Apêndice E

Simulações Numéricas Complementando o Capítulo 2

A fim de complementar os resultados obtidos no capítulo 2, exibiremos aqui algumas simulações numéricas para o problema descrito pela Figura 2.3b.

As Figuras E.1, E.2 e E.3, representam a simulação numérica das equações (3.5) e (3.6) para o caso linear ($\alpha = 0$) enquanto que as Figuras E.4 a E.6 representam a simulação numérica das equações (2.5) e (2.6) para o caso não-linear ($\alpha \neq 0$).

Para as simulações numéricas do caso linear utilizamos para os parâmetros os seguintes valores: $y_0 = [000.50.5]$, $\varepsilon = 0.05$, $\mu = 0.01$, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0$, $I = 0.9$, $\alpha = 0$, $E_0 = 4$, $E_1 = 1.5$, $f = 45$, $\Omega = 1.2$, $\tau = 10$.

Já para as simulações numéricas do caso não-linear foram utilizados os valores $y_0 = [000.50.5]$, $\varepsilon = 0.05$, $\mu = 0.01$, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0$, $I = 0.9$, $\alpha = 0.01$, $E_0 = 4$, $E_1 = 1.5$, $f = 45$, $\Omega = 1.2$, $\tau = 10$.

O Mapa de Poincaré, Figura E.7, mostra a presença de caos no sistema analisado. Os valores dos parâmetros para esta simulação foram: $y_0 = [000.50.5]$, $\varepsilon = 0.05$, $\mu = 0.01$, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0$, $I = 0.9$, $\alpha = 0.01$, $E_0 = 4$, $E_1 = 1.5$, $f = 45$, $\Omega = 1.2$, $\tau = 10$.

A Figura E.8 retrata os expoentes de Lyapunov para o mesmo sistema, utilizando para os parâmetros os seguintes valores: $y_0 = [000.50.5]$, $\varepsilon = 0.05$, $\mu = 0.01$, $\mu_1 =$

$0.1, \mu_2 = 0, I = 0.9, \alpha = 0.01, E_0 = 4, E_1 = 1.5, f = 45, \Omega = 1.2, \tau = 10.$

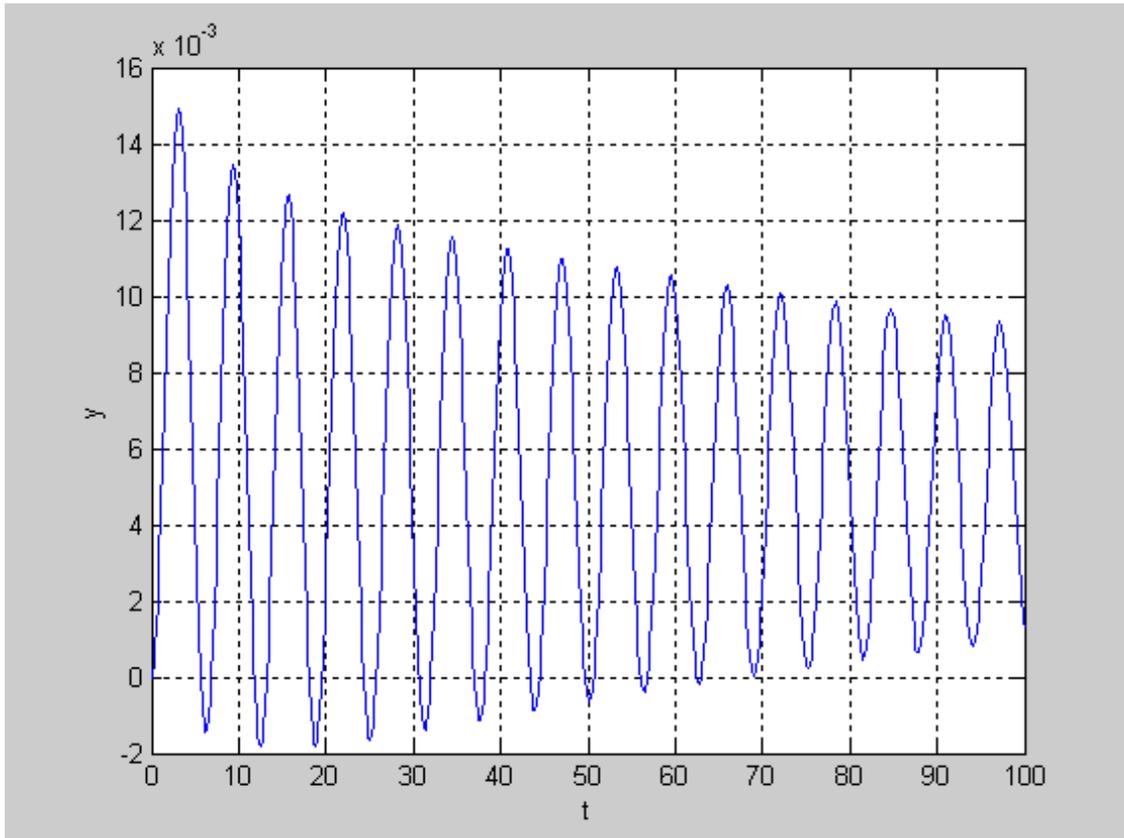


Figura E.1: Histórico de y no tempo para o caso linear

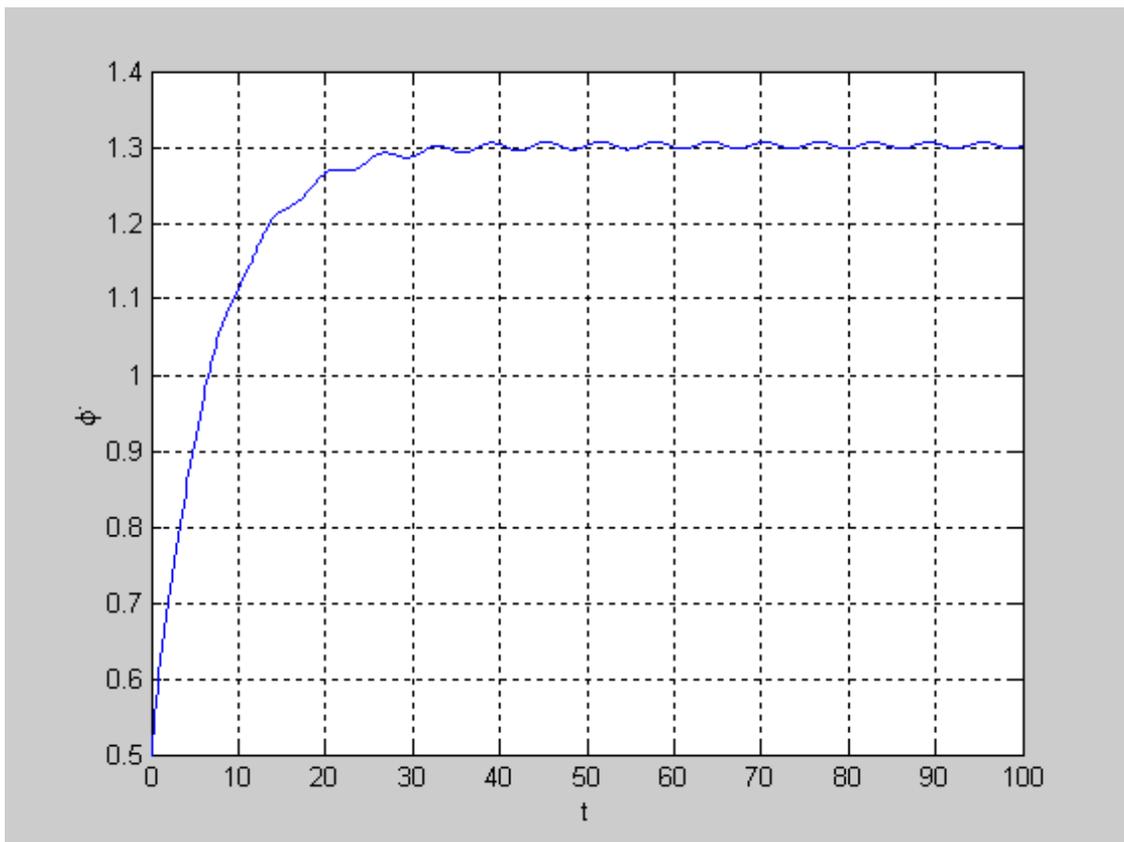


Figura E.2: Histórico de ϕ no tempo para o caso linear

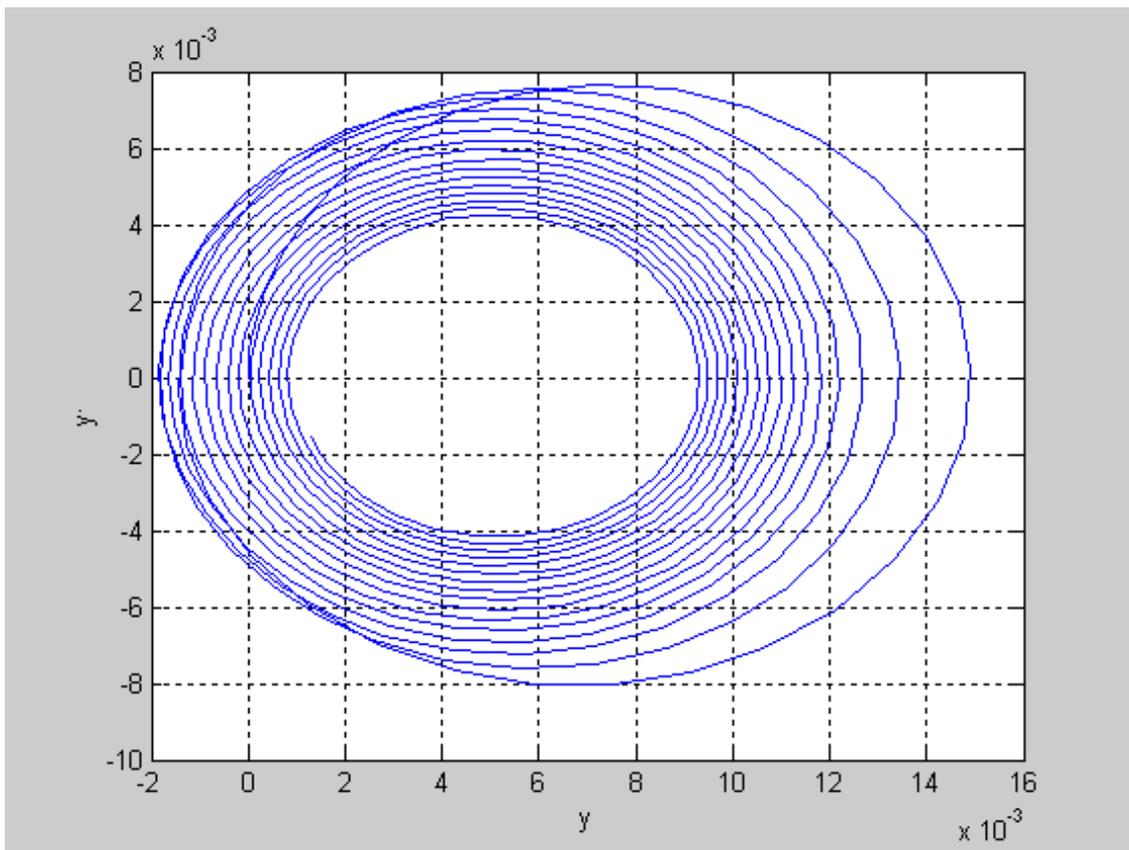


Figura E.3: Plano de fase $y \times \dot{y}$ para o caso linear

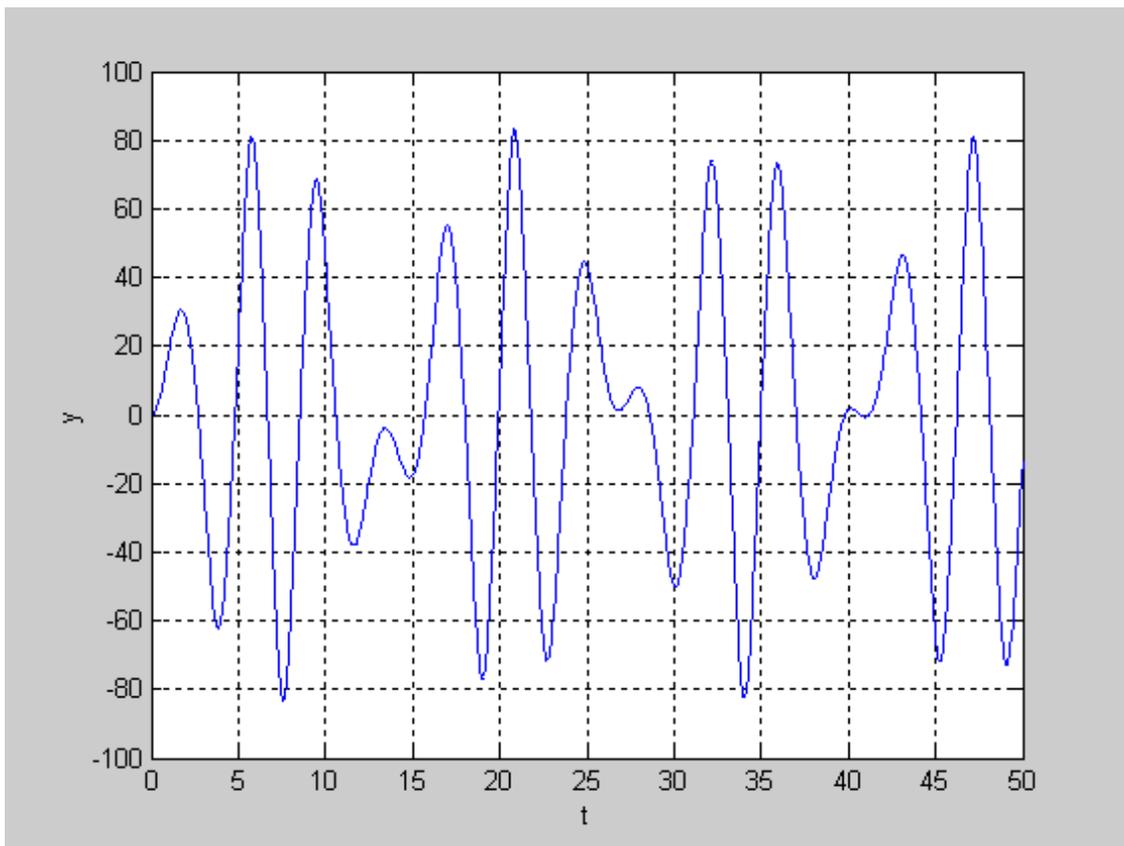


Figura E.4: Histórico de y no tempo para o caso não-linear

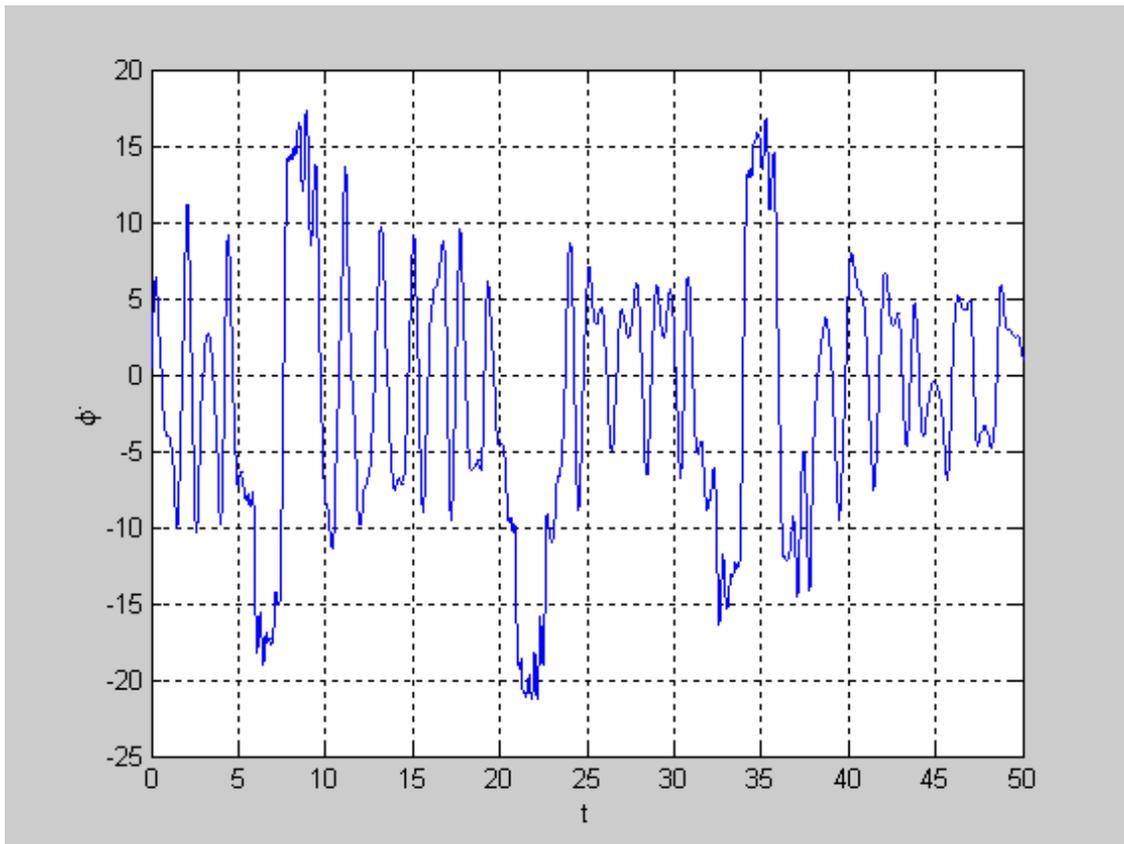


Figura E.5: Histórico de $\dot{\phi}$ no tempo para o caso não-linear

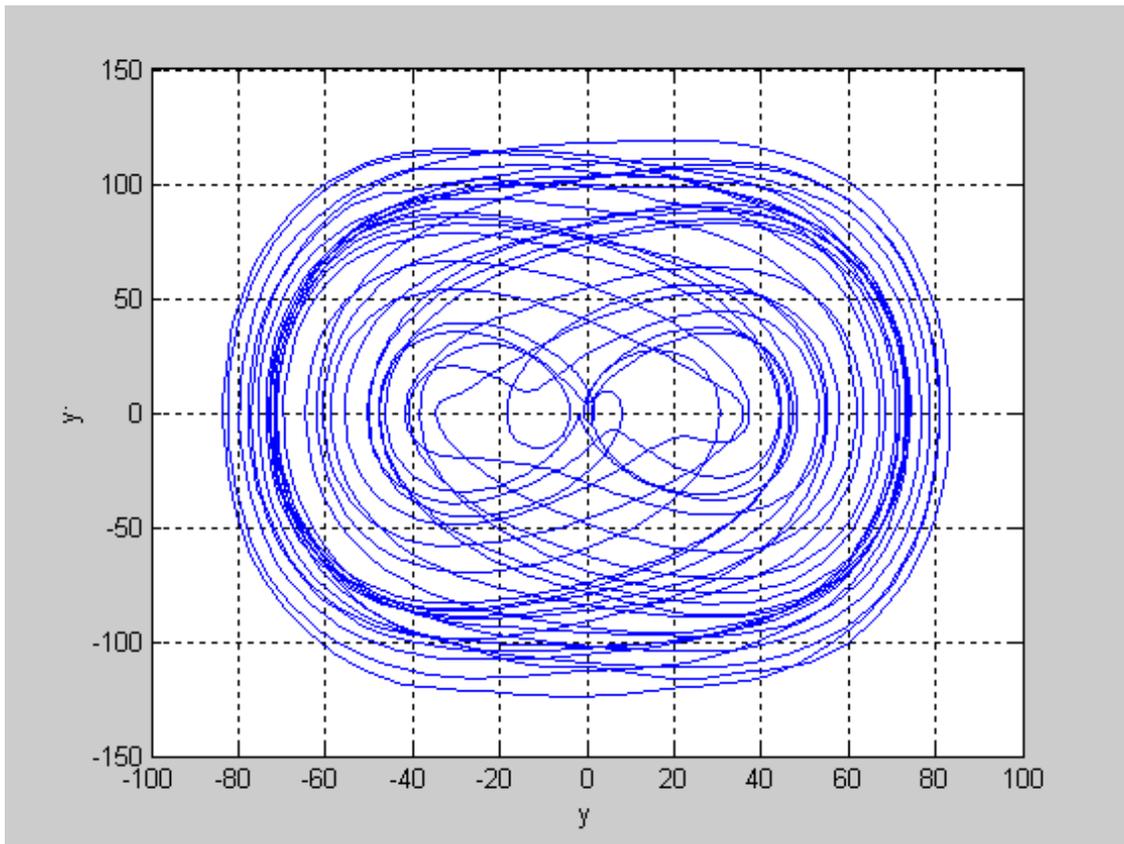


Figura E.6: Plano de fase $y \times \dot{y}$ para o caso não-linear

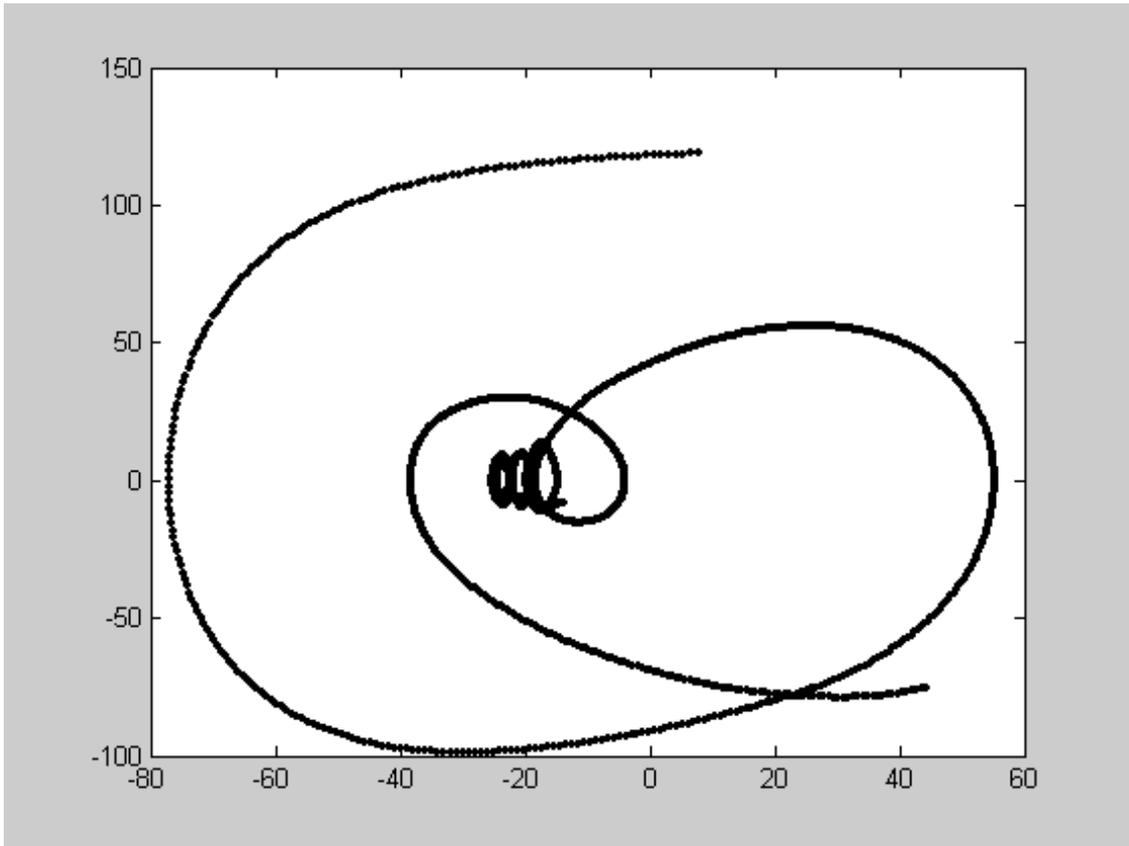


Figura E.7: Mapa de Poincaré

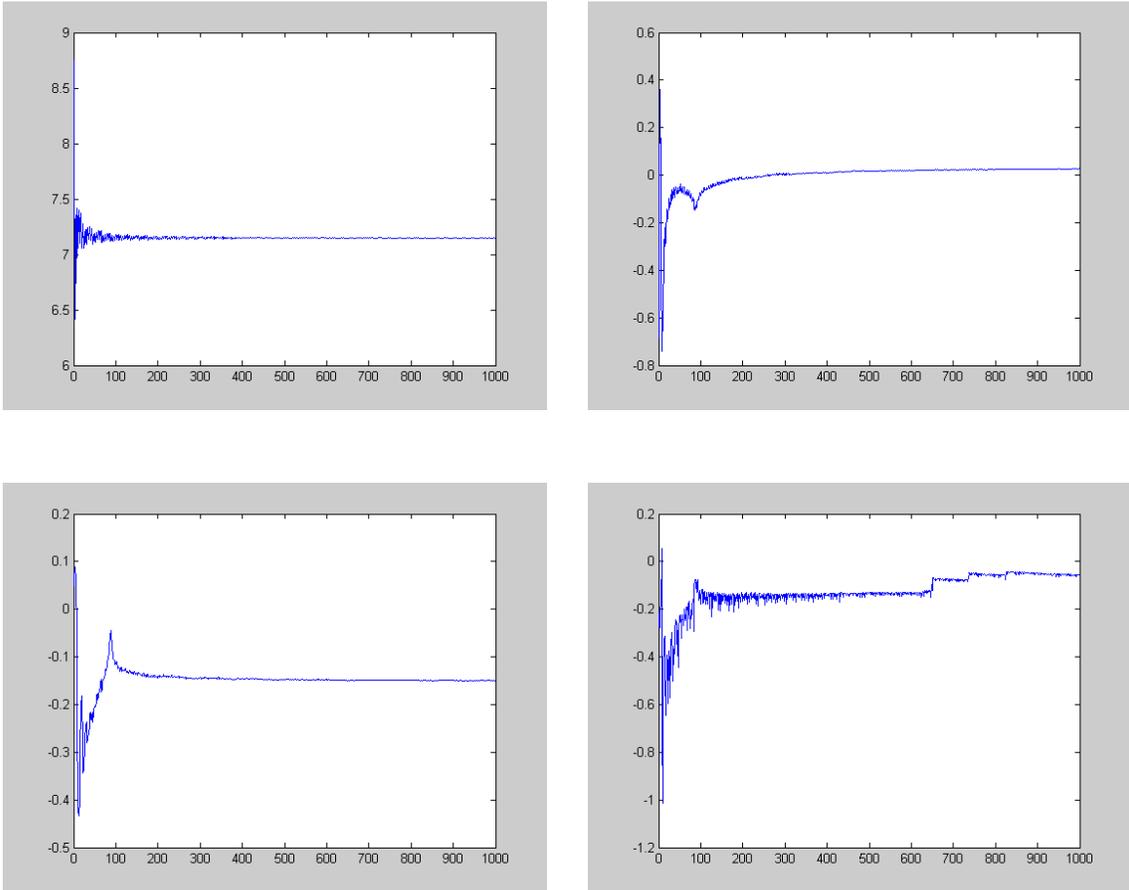


Figura E.8: Expoentes de Lyapunov

Apêndice F

Equações Não-lineares de Vigas

O objetivo deste apêndice é desenvolver as equações para entender a dinâmica não-linear de vigas para que possamos posteriormente escrever as equações da viga no espaço excitada pelo potencial da Terra, que é o ponto central de nossa pesquisa pois futuramente devemos incluir outros efeitos na dinâmica.

Adotaremos aqui (x, y, z) como sendo o sistema inercial e (ξ, η, ζ) como os eixos principais da seção transversal da viga na posição s . Será assumido que o equilíbrio estático da viga corresponde a situação onde o eixo ξ e x são coincidentes e que os outros dois eixos principais η e ζ são paralelos a y e z , respectivamente. Em geral, cada seção transversal da viga tem um deslocamento elástico e uma rotação do seu centro C .

Denotaremos as componentes do vetor deslocamento por $u(s, t)$, $v(s, t)$ e $w(s, t)$, onde t denota o tempo. Veja Figura F.1. A orientação dos eixos principais (ξ, η, ζ) da seção transversal da viga em s relativamente ao sistema inercial (x, y, z) são descrito por três rotações sucessivas dos ângulos de Euler.

A sequência $\psi(s, t)$, $\theta(s, t)$ e $\phi(s, t)$, veja Figura F.2, resulta em um conjunto de equações diferenciais que foi apropriada para uma análise de perturbação do acoplamento flexão-flexão-torção, movimentos não-lineares da viga.

A velocidade angular do sistema (ξ, η, ζ) com respeito ao referencial inercial, denotada por $\omega(s, t)$ foi obtida diretamente da Figura F.2 como

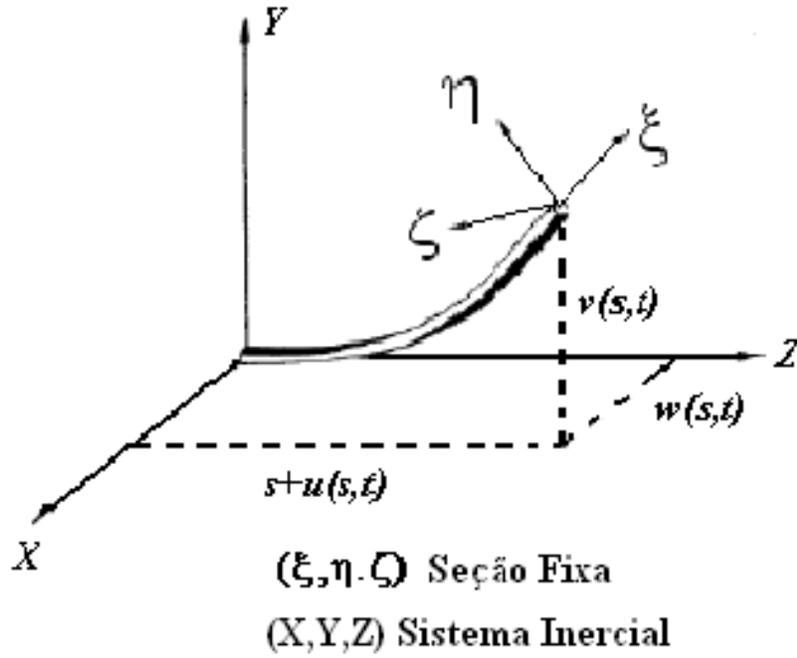


Figura F.1: Sistema de coordenadas usado para desenvolver as equações que governam o movimento

$$\begin{aligned}
 \omega(s, t) &= \dot{\Psi} \mathbf{z} + \dot{\theta} \mathbf{y}_1 + \dot{\phi} \xi = \\
 &= (\dot{\phi} - \dot{\Psi} \sin \theta) \xi + (\psi \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi) \eta + \\
 &\quad + (\dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \phi) \zeta = \\
 &= \omega_{\xi} \xi + \omega_{\eta} \eta + \omega_{\zeta} \zeta
 \end{aligned} \tag{F.1}$$

Tém-se então um total de seis variáveis dependentes (u, v, w) e (ψ, θ, ϕ) . A "linha" denota a diferenciação parcial com respeito ao arco s . A rigidez de inextensibilidade implica que

$$(1 + u')^2 + v'^2 + w'^2 = 1 \tag{F.2}$$

Da Figura F.2 também é visto que os ângulos $\psi(s, t)$ e $\theta(s, t)$ estão relacionados com as derivadas espaciais de $u(s, t)$, $v(s, t)$, $w(s, t)$ como

$$\tan \psi = \frac{v'}{1 + u'} \quad (\text{F.3})$$

$$\tan \theta = \frac{-w'}{[(1 + u')^2 + v'^2]^{1/2}} \quad (\text{F.4})$$

Para obter as equações do movimento, será usado o **Princípio Extendido de Hamilton**, com a rigidez de inextensibilidade juntamente com o **Lagangeano** do movimento pelo **multiplicador de Lagrange** $\lambda(s, t)$.

Sejam p_ξ, p_η, p_ζ respectivamente a curvatura torsional e a "bending curvature" da viga na posição s , o lagrangeano específico l associado com os movimentos elásticos da viga é dado por:

$$l = \frac{1}{2}m (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (j_\xi \omega_\xi^2 + j_\eta \omega_\eta^2 + j_\zeta \omega_\zeta^2) - \frac{1}{2} (D_\xi p_\xi^2 + D_\eta p_\eta^2 + D_\zeta p_\zeta^2) \quad (\text{F.5})$$

onde, j_ξ, j_η, j_ζ são os principais momentos de inércia da massa da viga e D_ξ, D_η, D_ζ são as principais rigidez; D_ξ é a rigidez torsional e D_η, D_ζ as rigidez flexural.

Analogamente, p_ξ, p_η, p_ζ são as componentes da curvatura do vetor $p(s, t)$, Crespo da Silva [21]. Então,

$$\begin{aligned} p(s, t) &= (\phi' - \psi' \sin \theta)\xi + (\psi' \cos \theta \sin \phi + \theta' \cos \phi)\eta \\ &\quad + (\psi' \cos \theta \cos \phi - \theta' \sin \phi)\zeta \\ &= p_\xi \xi + p_\eta \eta + p_\zeta \zeta \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

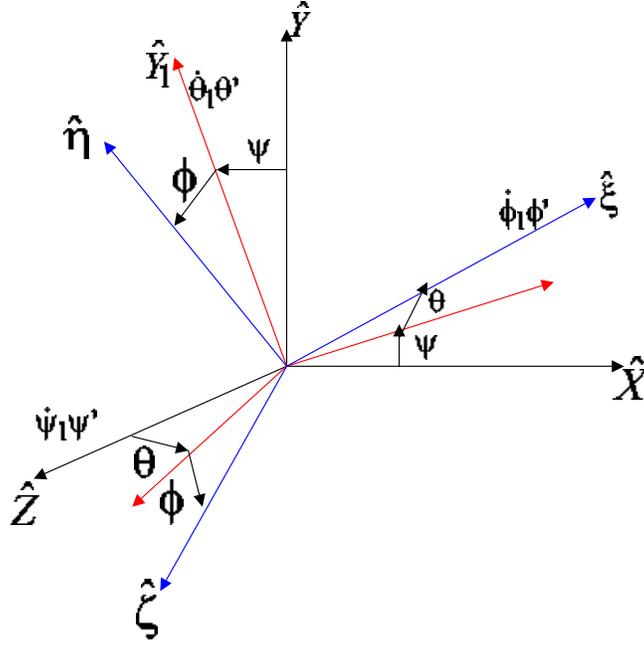


Figura F.2: As três rotações dos ângulos de Euler de um elemento diferencial de comprimento ds

F.1 Equações do Movimento

Tomamos agora todas as equações do vínculo, equações (F.2), (F.3) e (F.4), para se obter as equações diferenciais do movimento em termos dos deslocamentos $v(s, t)$, $w(s, t)$ e do ângulo $\phi(s, t)$, provaremos a conveniencia de eliminar a dependencia da variação do lagrangeano l ou as variações $\delta\theta(s, t)$ e $\delta\psi(s, t)$ Isto pode ser feito pelo uso das equações (F.3) e (F.4), juntamente com a equação (F.2) para l pela definição do multiplicador de Lagrange $\lambda(s, t)$.

Das equações (F.3) e (F.4), a variação virtual $\delta\theta(s, t)$ e $\delta\psi(s, t)$, são obtidas como

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \frac{\delta\theta}{\delta u'}\delta u' + \frac{\delta\theta}{\delta v'}\delta v' + \frac{\delta\theta}{\delta w'}\delta w' \\ &= w' \frac{(1+u')\delta u' + v'\delta v'}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} - \delta w' \sqrt{(1+u')^2 + v'^2} \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial\psi}{\partial v'}\delta v' = \frac{-v'\delta u' + (1+u')\delta v'}{(1+u')^2 + v'^2} \quad (\text{F.8})$$

Sejam

- δW_B o trabalho virtual associado com qualquer movimento da limitação $s = 0$ e $s = L$.
- Q_u, Q_v, Q_w, Q_ϕ qualquer generalização de força associada com o deslocamento virtual $\delta u, \delta v, \delta w, \delta\phi$, respectivamente e em conta pelo lagrangeano (tal como amortecimento e forças externas).

A forma estendida do Princípio de Hamilton requer que

$$\begin{aligned} \delta l = & \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ l + \frac{\lambda}{2} [1 - (1+u')^2 - v'^2 - w'^2] \right\} ds dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta W_B + \int_0^L (Q_u \delta u + Q_v \delta v + Q_w \delta w + Q_\phi \delta\phi) ds \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Das equações (F.7) e (F.8) são obtidas as seguintes equações diferenciais e condições de contorno, após a realização das integrais por partes na equação (F.9):

$$G'_u = \left[A_\psi \frac{\partial\psi}{\partial u'} + A_\theta \frac{\partial\theta}{\partial u'} + \lambda(1+u') \right]' = m\ddot{u} - Q_u \quad (\text{F.10})$$

$$G'_v = \left[A_\psi \frac{\partial\psi}{\partial v'} + A_\theta \frac{\partial\theta}{\partial v'} + \lambda v' \right]' = m\ddot{v} - Q_v \quad (\text{F.11})$$

$$G'_w = \left[A_\theta \frac{\partial\theta}{\partial w'} + \lambda w' \right]' = m\ddot{w} - Q_w \quad (\text{F.12})$$

$$A_\phi = Q_\phi \quad (\text{F.13})$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial l}{\partial\phi'} \delta\phi - G_u \delta u - G_v \delta v - G_w \delta w + \delta W_B \right. \\ & \left. + [H_v - H_u(1+u')^{-1}v'] \delta v' + [H_w - H_u(1+u')^{-1}w'] \right\} \Big|_{s=0}^L = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Nas equações de (F.10) a (F.14) as funções A_α e H_α com $\alpha = \psi, \theta, \phi$ são dadas por:

$$A_\alpha = \frac{\partial 2l}{\partial t \partial \dot{\alpha}} + \frac{\partial 2l}{\partial s \partial \alpha'} + \frac{\partial l}{\partial \alpha} \quad (\alpha = \psi, \theta, \phi) \quad (\text{F.15})$$

$$H_\alpha = \frac{\partial l}{\partial \psi'} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'} + \frac{\partial l}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha'} \quad (\alpha = u, v, w) \quad (\text{F.16})$$

Como as equações básicas de (F.10) a (F.14) são válidas para deformações arbitrariamente grandes, elas não são apropriadas para analisar qualitativamente grandes movimentos oscilatórios da viga, pois em geral, eles não são controlados pela análise de perturbação. Daí, com o apoio das hipóteses de elasticidade elas são derivadas sem recurso de comparação a priori das importâncias relativas dos vários termos não lineares envolvidos. Todavia, um conjunto consistente matematicamente de equações aproximadas com não linearidades polinomial que ainda contém relevantes informações sobre o movimento, como os efeitos da ressonância não linear, pode ser prontamente obtido delas. Isto é demonstrado na seção F.2. Apenas não linearidades de terceira ordem, que descrevem a ressonância primária não linear no sistema, serão retratadas em equações aproximadas.

Para examinar o comportamento não linear do movimento, com não linearidades polinomial de ordem 3 para $\psi(s, t)$ e $\theta(s, t)$ que são usadas para eliminar estes ângulos das equações finais do movimento são obtidas como

$$\psi = v' \left(1 + \frac{v'^2}{6} + \frac{w'^2}{2} \right) \quad (\text{F.17})$$

$$\theta \approx -w' \left(1 + \frac{w'^2}{6} \right) \quad (\text{F.18})$$

Fazendo uso das equações (F.17) e (F.18), a expansão para os termos A_ψ, A_θ e A_ϕ aparecendo nas equações diferenciais (F.10) a (F.14) e dados pela equação (F.15) podem ser obtidos.

Omitindo as manipulações algébricas envolvidas naquelas expansões, e considerando Q_α^* a expansão polinomial de ordem 3 para Q_α , ($\alpha = u, v, w, \phi$) as equações diferenciais do movimento para a viga com não linearidades da ordem considerada, e usados na seção F.2, são obtidas como

$$G'_u = m\ddot{u} - Q_u^* \quad (\text{F.19})$$

$$G'_v = m\ddot{v} - Q_v^* \quad (\text{F.20})$$

$$G'_w = m\ddot{w} - Q_w^* \quad (\text{F.21})$$

$$\begin{aligned} & - [D_\zeta(\phi' + w' + v'')] + (D_\eta - D_\zeta) [(v''^2 - w''^2)\phi - v''w''] \\ & + j_\xi(\dot{\phi}' + w'v'') - (j_\eta - j_\zeta) [(\dot{v}'^2 - \dot{w}'^2)\phi - \dot{v}'\dot{w}'] = Q_\phi^* \end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

$$u' = -\frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \quad (\text{F.23})$$

A expansão das condições de contorno para as equações de (F.19)a (F.23), são obtidas da equação (F.14) com as funções G_u, G_v, G_w dadas como mostrada nas equações de (F.19)a (F.23) e as funções $\frac{\partial l}{\partial \phi'}$, $H_v - H_u(1+u')^{-1}v'$ e $H_w - H_u(1+u')^{-1}w'$ escritas como:

$$\frac{\partial l}{\partial \phi'} = -D_\zeta(\phi' + v''w') \quad (\text{F.24})$$

$$\begin{aligned} H_v - H_u(1+u')^{-1}v' & \approx -D_\xi(\phi' + v''w') - (D_\eta - D_\zeta)(v''\phi^2 - w''\phi) \\ & - D_\xi[v'' + v'(v'v'' + w'w'')] \end{aligned} \quad (\text{F.25})$$

$$\begin{aligned} H + w - H_u(1+u')^{-1}w' & \approx (D_\eta - D_\zeta)(w''\phi^2 + v''\phi) \\ & - D_\eta w'' - w'(D_\zeta v'v'' + D_\eta w')w'' \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

F.2 Movimentos Forçados

A Figura F.3 ilustra o sistema a ser analisado. Assumimos que existe uma distribuição periódica da frequência Ω , dada como $Q(s) \cos(\Omega t + \tau)$ e que esta atua na direção- v da viga.

O amortecimento do sistema será assumido viscoso com coeficiente de amortecimento c e trabalho virtual igual a $-c(\dot{v}\delta v + \dot{w}\delta w)$, onde o ponto indica a diferenciação parcial com respeito ao tempo t .

Para simplificar será assumido que a distribuição da massa do momento de inércia da viga não exerce influência sobre seu movimento; esta hipótese implica que devem ser consideradas apenas vigas em que frequências de oscilações torsionais são maiores do que frequências de oscilações fexurais.

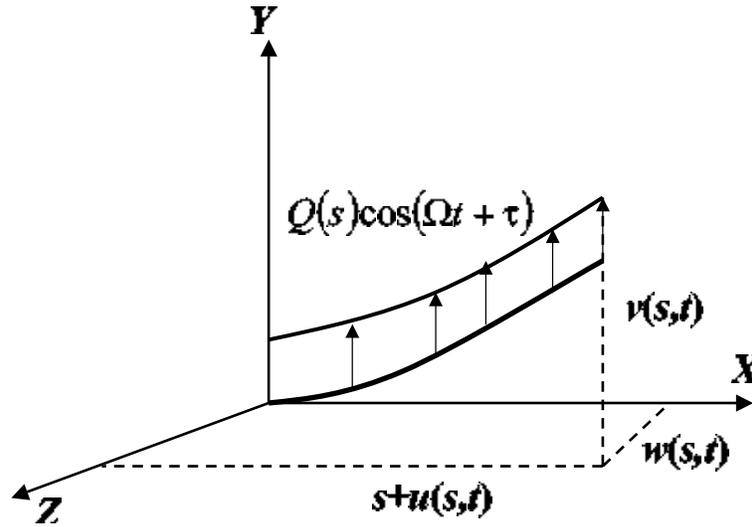


Figura F.3: Viga fixa-livre com excitação lateral distribuída

Considerando os vínculos D_ξ, D_η, D_ζ como sendo constantes e definindo o ângulo γ como

$$\gamma = \phi + \int_0^s v'' w' ds = \phi - \int_0^s v' w'' ds + v' w' \quad (\text{F.27})$$

onde ϕ é um dos ângulos de Euler definidos no apêndice C (seção C.2.8) e seção F.1, as equações do movimento de (F.19) a (F.23) da seção F.1, para não linearidades de ordem 3 reduz para $Q_u = Q_\phi = 0$, $Q_v = Q(s) \cos(\Omega t + \tau) - c\dot{v}$ e $Q_w = -c\dot{w}$ a

$$D_\xi \gamma'' - (D_\eta - D_\zeta)[\gamma(v''^2 - w''^2) - v''w''] = 0 \quad (\text{F.28})$$

$$\begin{aligned} & \{D_\xi \gamma'(w''v' - v''w') - (D_\eta - D_\zeta)[w'(v''\gamma')' + v'(w''\gamma)'] + \\ & + D_\zeta v'''v' + D_\eta w'''w' + \lambda(1 + u')\}' = G'_u = m\ddot{u} \quad (\text{F.29}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ -D_\xi \gamma' w'' + (D_\eta - D_\zeta)[(w''\gamma)'] - (v''\gamma^2)' + \int_0^s v' dw'' ds \right\} - \\ & - D_\zeta [v''' + v'(v''^2 + w''^2)] + \lambda v' \}' = G'_v = m\ddot{v} + c\dot{v} - Q(s) \cos(\Omega t + \tau) \quad (\text{F.30}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ D_\xi \gamma' v'' + (D_\eta - D_\zeta)[(v''\gamma)'] + (w''\gamma^2)' - v''' \int_0^s w' v'' ds \right\} - \\ & D_\eta [w''' + w'(v''^2 + w''^2)] + \lambda w' \}' = G'_w = m\ddot{w} + c\dot{w} \quad (\text{F.31}) \end{aligned}$$

$$u' = -\frac{v'^2 + w'^2}{2} \quad (\text{F.32})$$

As condições de contorno para as equações de (F.28) a (F.32) são obtidas diretamente das equações (F.14), (F.24) (F.25) e (F.26), sendo dadas por

$$\alpha(0, t) = 0 \quad (\alpha = u, v, w, \gamma, v', w') \quad (\text{F.33})$$

$$\alpha(L, t) = 0 \quad (\alpha = H_v - H_u(1 + u')^{-1}v', H_w - H_u(1 + u')^{-1}w', \gamma') \quad (\text{F.34})$$

$$G_\alpha(L, t) = 0 \quad (\alpha = u, v, w) \quad (\text{F.35})$$

onde as funções $H_v - H_u(1 + u1)^{-1}v'$ e $H_w - H_u(1 + u')^{-1}w'$, são dadas pelas equações (F.25) e (F.26).

As equações de (F.28) a (F.32) podem ser escritas na forma adimensional normalizando o comprimento do arco s e os deslocamentos elásticos u, v e w através do comprimento L da viga, e definindo

$$t^* = t\sqrt{\frac{D_\eta}{mL^4}}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda L^2}{D_\eta}, \quad c^* = \frac{cL^2}{\sqrt{mD_\eta}}, \quad Q^* = \frac{QL^3}{D_\eta}, \quad (\text{F.36})$$

$$\Omega^* = \Omega L^2 \sqrt{\frac{m}{D_\eta}}, \quad G_x^* = \frac{G_x L^2}{D_\eta} \quad (x = u, v, w) \quad (\text{F.37})$$

Será usada apenas a forma normalizada das variáveis, dessa forma omitiremos o sobrescrito $*$ para facilitar a escrita.

As equações (F.28), (F.29) e (F.30) indicam que γ, λ e u podem ser tratadas como variáveis de segunda ordem. As condições de contorno $u(0, t) = \gamma(0, t) = 0, \gamma'(1, t) = 0$ e $G_u(1, t) = 0$ podem ser usadas para obter γ, u, λ :

$$\gamma = - \left[\frac{1 - \beta_y}{\beta_\gamma} \right] \int_0^s \int_1^s v'' w'' ds ds \quad (\text{F.38})$$

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \quad (\text{F.39})$$

$$\lambda = -\beta_y v' v'' - w' w'' - \frac{1}{2} \int_1^s \left[\int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right]'' ds \quad (\text{F.40})$$

onde,

$$\beta_y = \frac{D_\zeta}{D_\eta} \quad \beta_\gamma = \frac{D_\xi}{D_\eta} \quad (\text{F.41})$$

as linhas e pontos denotam diferenciação parcial com respeito as variáveis normalizadas s^* e t^* , respectivamente.

Quando as equações (F.39) a (F.41) são substituídas nas equações (F.30) e (F.31), o resultado é um conjunto de duas equações integro-diferencial que nos deslocamentos laterais v, w são dadas por

$$\ddot{v} + c\dot{v} + \beta_\gamma v'''' = \left\{ (1 - \beta_\gamma) \left[w'' \int_1^s v'' w'' ds - w'' \int_0^s v'' w'' ds \right] - \left[\frac{(1 - \beta_\gamma)^2}{\beta_\gamma} \right] \left(w'' \int_0^s \int_0^s v'' w'' ds ds \right)' \right\}' + Q(s) \cos(\Omega t + \tau) \quad (\text{F.42})$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} + c\dot{w} + w'''' = & - \left\{ (1 - \beta_\gamma) \left[v'' \int_1^s v'' w'' ds - v'' \int_0^s w' v' ds \right] + \right. \\ & + \frac{(1 - \beta_\gamma)^2}{\beta_\gamma} \left(v'' \int_0^s \int_1^s v'' w'' ds ds \right)' \left. \right\}' - \{ w'(v'v'' + w'w'')' \} - \\ & - \frac{1}{2} \left\{ w' \int_1^s \left[\int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right]'' \right\}' \end{aligned} \quad (\text{F.43})$$

Os primeiros dois termos $\{ \}$ no lado direito das equações (F.42) e (F.43) são devido às expressões não-lineares para a curvatura da viga, enquanto que o terceiro $\{ \}$, que envolve dupla derivação, é o familiar momento de inércia não linear.

Os termos representando o acoplamento não linear entre os deslocamentos lateral e torsional estão incluídos no primeiro $\{ \}$ de cada equação.

As condições de contorno para as equações (F.42) e (F.43), como obtidas diretamente das equações (F.33) a (F.35) e das equações (F.24) a (F.26) na seção F.1 são dadas por:

$$v(0, t) = w(0, t) = v'(0, t) = w'(0, t) = 0 \quad (\text{F.44})$$

$$v''(1, t) = w''(1, t) = v'''(1, t) = w'''(1, t) = 0 \quad (\text{F.45})$$

Ressalta-se que os três movimentos livres da viga com $c = 0$ nas equações (F.42) e (F.43) foram analisados por Crespo da Silva, no caso em que os movimentos v e

w entravam em ressonância não linear. Foi encontrado que quando tais movimentos eram iniciados por uma das direções principais da viga, digamos a direção- v , com condições iniciais infinitesimais na direção- w , o modo- w foi predito crescer para valores finitos, essencialmente independentes das condições iniciais, para β_γ numa região próximo a unidade. A região dos valores da rigidez proporcional β_γ para o qual o acoplamento não-linear entre os movimentos v e w não podem ser negligenciados (isto é, a região de ressonância para o sistema), bem como os valores máximos da variação lenta das amplitudes dos movimentos, foram determinados por Crespo da Silva [2] pela análise de perturbação das equações do movimento.

Aqui o problema de determinar a resposta harmônica de uma viga ressonante não-linear para a qual β_γ unidade considerada.

Sob tais condições, os termos com coeficientes $1-\beta_\gamma$ e $(1-\beta_\gamma)^2$ nas equações (F.42) e (F.43) são de alta ordem que resultam na ordem da análise de perturbação; então, como encontrado em Crespo da Silva [2], tais termos exercem influência fundamental no movimento nos casos em que ressonância não-linear entre o movimento v e w não está próxima $\beta_\gamma = 1$ (quando a viga apoiada em $s = 0$ não é simétrica).

Ressalto que no caso vertical linear a equação (F.42) se reduz a seguinte equação:

$$\ddot{v} + c\dot{v} + \beta_\gamma v'''' = Q(s) \cos(\Omega t + \tau) \quad (\text{F.46})$$

Na seqüência, apresentamos o apêndice G, onde abordamos alguns conceitos sobre pressão de radiação solar, já que pretendemos abordá-la em trabalho futuro.

Apêndice G

Alguns Conceitos Sobre a Pressão de Radiação Solar

Apresentamos neste apêndice a pressão de radiação solar que será levada em conta na continuação deste trabalho, no doutorado.

Os fótons, ao incidirem na superfície externa do satélite, são refletidos ou absorvidos por este; neste processo ocorre uma mudança na quantidade de movimento, que se traduz por uma força e um torque no satélite.

As hipóteses que serão feitas para a radiação solar serão mais bem compreendidas introduzindo-se o conceito de radiação. Considere-se então um elemento de área dA_1 , fixo num sistema de eixos, tal que sua normal coincida com a direção \mathbf{k} , Figura D.1. Seja d^5E a quantidade de energia que deixa dA_1 num intervalo de tempo d_t , numa direção Ω , confinada num ângulo sólido $d\Omega$ centrado em P . O versor normal, \mathbf{k} , faz com Ω um ângulo θ . Resultados experimentais indicam que a razão

$$\frac{d^5E}{\cos \theta dA_1 d\Omega d_t} \quad (\text{G.1})$$

tende a um valor finito para um dado ponto P e para uma dada direção Ω , quando dA_1 , $d\Omega$ e d_t tendem a se anular em qualquer ordem.

Este limite será denominado intensidade de radiação no ponto P , na direção Ω , e denotado por I . Então,

$$I = \lim_{dA \rightarrow 0 d\Omega \rightarrow 0 dt \rightarrow 0} \frac{d^5 E}{\cos \theta dA_1 d\Omega dt} \quad (\text{G.2})$$

Note-se aqui que a energia é emitida ao longo de uma faixa de comprimento de onda; portanto I representa a integral da intensidade de radiação monocromática sobre o comprimento de onda. Cabe observar também que $dA_1 d \cos \theta$ representa a projeção da área dA_1 numa direção normal à Ω , tornando dessa forma a definição de I independente da orientação de dA_1 . A quantidade de energia por unidade de tempo e de área que deixa dA , S_1 vale portanto:

$$S_1 = \int_H I \cos \theta d\Omega \quad (\text{G.3})$$

onde H indica integração sobre um hemisfério. Usando-se coordenadas esféricas, Figura D.1, tem-se:

$$S_1 = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} I(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{G.4})$$

Neste ponto é comum supor que a intensidade de radiação, I , é isotrópica, ou seja, não depende de θ ou ϕ . Logo,

$$S_1 = \pi I \quad (\text{G.5})$$

O fato de a intensidade de radiação independe da direção de emissão faz com que o Sol se assemelhe a um disco de luminosidade uniforme, tanto no centro quanto nos bordos, quando visto da Terra. Essa característica, associada à pequena distância angular do Sol medida na superfície terrestre (aproximadamente 0.53° no equador solar), fornece elementos para considerar o Sol como um elemento de área plano que irradia uniformemente. Assim, por simetria, este elemento está sempre com sua face voltada para o elemento receptor. A potência incidente por unidade de área numa superfície perpendicular à linha que une seu centro ao centro do Sol, situado a uma distância \mathbf{R} do disco solar, vale:

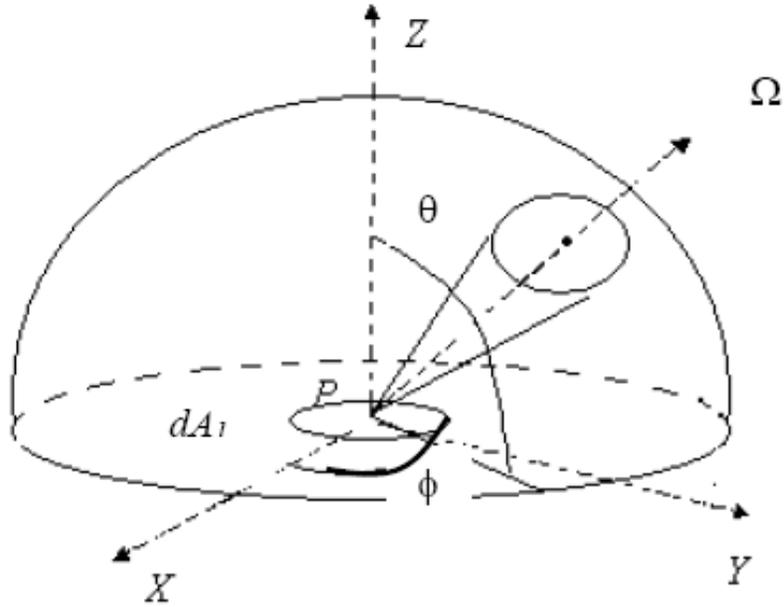


Figura G.1: Intensidade de radiação

$$S = \frac{S_1 A_2}{\pi R^2} \quad (\text{G.6})$$

onde S_1 é a potência por unidade de área emitida pelo disco solar, de área A_1 .

A potência S é chamada *constante solar*; para a distância média a Terra ao Sol, $\mathbf{R}_0 = 149 * 10^9 m$ vale:

$$S_0 = 1353 \text{ watts}/m^2 \quad (\text{G.7})$$

Esse valor se mantém aproximadamente constante, sofrendo apenas variações conforme a atividade solar. A potência por unidade de área num ponto qualquer do espaço, cuja distância ao Sol é \mathbf{R} metros, pode ser obtida em função de S_0 :

$$S = S_0 \frac{\mathbf{R}_0^2}{\mathbf{R}^2} \quad (\text{G.8})$$

A pressão devida à radiação solar incidente que atua neste ponto é dada por

$$P_s = \frac{S_0 \mathbf{R}_0}{c} \frac{1}{R^2} = \frac{\mathbf{K}}{R^2} \quad (\text{G.9})$$

onde c é a velocidade da luz. A constante \mathbf{K} vale $1.011 * 10^{17} \text{ N}$.

Num caso genérico, a radiação incidente é parte refletida e parte absorvida (supõe-se aqui que a superfície seja opaca); a parcela refletida pode ainda ser refletida especular ou difusamente. Diz-se que a reflexão é especular quando o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, como raios incidentes, refletidos e normais contidos num mesmo plano; diz-se que ela é difusa quando não há uma direção preferencial para a radiação emergente da superfície. As superfícies reais comportam-se aproximadamente como uma combinação de ambas as reflexões, especular e difusa. Baseando-se nisto, pode-se afirmar que uma parcela γ da radiação incidente é refletida, e uma parcela ρ desta é refletida na forma especular. Os coeficientes γ e ρ , embora variem com a temperatura da superfície, frequência da radiação incidente, ângulo de incidência, entre outros, serão considerados constantes aqui.

Têm-se assim dos casos limites: reflexão especular quando $\rho = 1$ e reflexão difusa quando $\rho = 0$.

A força que age num elemento de área dA , cuja normal forma um ângulo η com a direção de incidência \mathbf{s}^s , Figura D.2, será proporcional à área do elemento projetada nesta direção, ou seja:

$$d\mathbf{F}_1 = P_s dA \cos \eta = d\mathbf{F}_N \cos \eta \quad (\text{G.10})$$

onde $d\mathbf{F}_N$ é a força na direção normal.

Decompondo-se a expressão (G.10) nas componentes normal e tangencial à superfície, têm-se:

$$dP_1 = -\mathbf{dF}_N \cos^2 \eta \quad (\text{G.11})$$

$$dT_1 = -\mathbf{dF}_N \cos \eta \sin \eta \quad (\text{G.12})$$

A força devida à radiação emergente na forma especular possui o mesmo módulo da incidente, diminuindo por um fator $\gamma\rho$, que é a parcela dos fótons refletidos especularmente:

$$dP_E = -\gamma\rho \mathbf{dF}_N \cos^2 \eta \quad (\text{G.13})$$

$$dT_E = \gamma\rho \mathbf{dF}_N \cos \eta \sin \eta \quad (\text{G.14})$$

onde os sinais negativos nas forças indicam que estas atuam em direções contrárias aos eixos. A intensidade de radiação da parcela refletida difusamente (supondo-se que sua distribuição seja uniforme em todas as direções) será então:

$$I + \frac{\gamma}{\pi}(1 - \rho)S \cos \eta \quad (\text{G.15})$$

A força que age na superfície devida à radiação refletida numa direção θ subtendida num ângulo sólido $\frac{dA_2}{r^2}$, Figura D.3, torna-se:

$$\mathbf{dF}_D = dA \frac{I}{c} \cos \theta \frac{dA_2}{r^2} \quad (\text{G.16})$$

que, decomposta nas direções X^e Y^e Z^e , resulta respectivamente em:

$$\mathbf{dP}_D = -\frac{\gamma}{\pi}(1 - \rho)\mathbf{dF}_N \cos \eta \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{G.17})$$

$$\mathbf{dT}_D = -\frac{\gamma}{\pi}(1 - \rho)\mathbf{dF}_N \cos \eta \cos \theta \sin \theta \cos \phi d\theta d\phi \quad (\text{G.18})$$

$$\mathbf{dL}_D = -\frac{\gamma}{\pi}(1 - \rho)\mathbf{dF}_N \cos \eta \cos \theta \sin \theta \sin \phi d\theta d\phi \quad (\text{G.19})$$

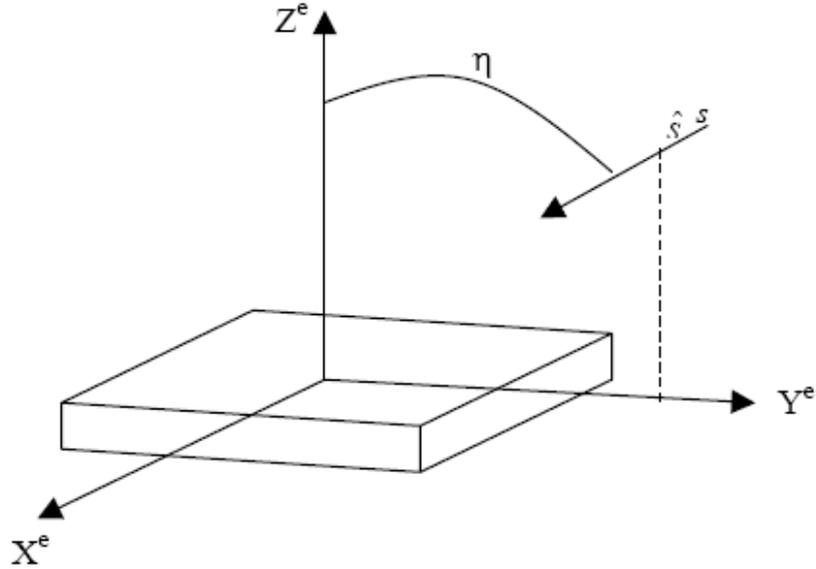


Figura G.2: Sistema de referência do elemento

Integrando-se as componentes, com θ variando de 0 a $\frac{\pi}{2}$ e com ϕ variando de 0 a 2π , as forças \mathbf{T}_D e \mathbf{L}_D tornam-se nulas, e a componente normal resulta em:

$$P_D = -\frac{2}{3}\gamma(1 - \rho)\mathbf{dF}_N \cos \eta \quad (\text{G.20})$$

A energia emitida difusamente pela superfície será proporcional à quarta potência de sua temperatura absoluta, T_W , de acordo com a equação de Stefan-Boltzmann:

$$S_I = \varepsilon\sigma T_W^4 \quad (\text{G.21})$$

onde ε é a emissividade da superfície e σ é a constante de Stefan-Boltzmann.

A radiação reemitida, da mesma forma que a refletida defusamente, causa uma força apenas na direção normal:

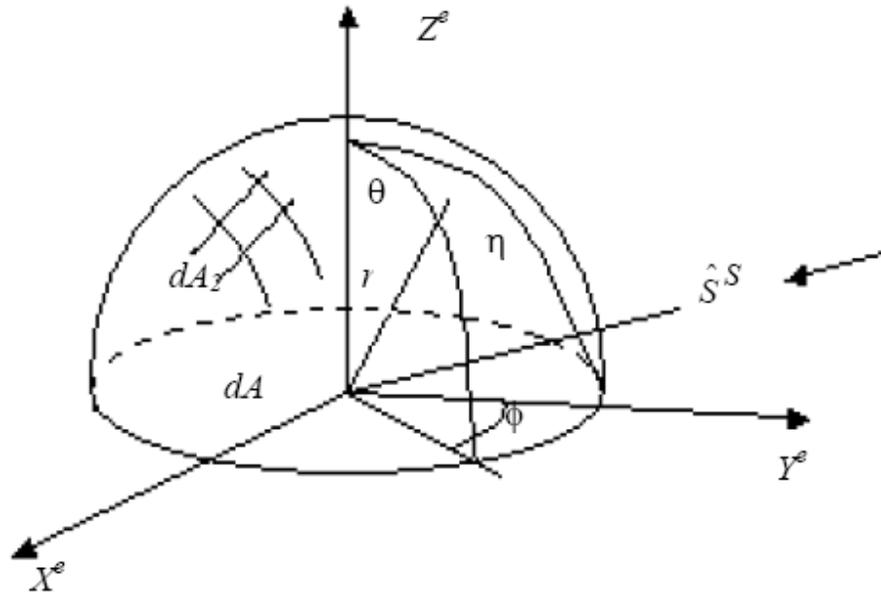


Figura G.3: Radiação refletida difusamente

$$dP_R = -\frac{2}{3} \frac{\varepsilon \sigma T_W^4}{c} dA \quad (\text{G.22})$$

A obtenção de T_W , porém, envolve a resolução de equações diferenciais de troca de calor, onde fontes tais como radiação solar, atrito atmosférico, dissipação de correntes elétricas em condutores, etc, deverão ser consideradas.

[7] sugere a multiplicação da radiação absorvida por um coeficiente k , que depende das emissividades e temperaturas nos dois lados (frente e trás) da superfície. Nas superfícies adiabáticas $k = 1$, e nas superfícies que possuem a mesma emissividade de temperatura em ambos os lados $k = 0$. Entretanto, ainda assim permanece a dificuldade de obter T_W . Entretanto, a hipótese de superfícies adiabáticas é comum em satélites que não possuam painéis ou não tenham alta velocidade de rotação, já que em ambos os casos haverá uma grande diferença de temperatura entre as partes

expostas à radiação e as partes encobertas. Pode-se admitir, assim, que toda a energia absorvida é reemitida instantaneamente pela superfície, com uma emitância igual à absorptância, $1 - \gamma$, o que resulta para a força na direção normal em:

$$dP_R = -\frac{2}{3}(1 - \gamma)\mathbf{dF}_N \cos \eta \quad (\text{G.23})$$

A resultante das forças na direção normal será a soma de suas componentes

$$\mathbf{dP}_N = -\mathbf{dF}_N \cos \eta \left\{ (1 + \gamma\rho) \cos \eta + \frac{2}{3} [\gamma(1 - \rho) + v(1 - \gamma)] \right\} \quad (\text{G.24})$$

onde o coeficiente v aqui introduzido vale

$$v = \frac{\sigma T_W^4 dA}{c dF_N \cos \eta} \quad (\text{G.25})$$

caso se conheça a temperatura do elemento, ou $v = 1$, como melhor aproximação caso T_W seja desconhecido (não calculado). Aqui também foi suposto que a emissividade da superfície é igual à sua absorptância, e embora a grande parte dos materiais não possua esta característica, pode-se sempre adotar um valor médio para γ sem se esquecer, porém que a influência da absorptância $(1 - \gamma)$ no cálculo das forças é maior do que a emitância.

Na direção tangencial a força vale:

$$\mathbf{dP}_T = -\mathbf{dF}_N \cos \eta (1 - \gamma\rho) \sin \eta \quad (\text{G.26})$$

Obtêm-se, assim, a expressão resultante, Figura D.2:

$$\overline{\mathbf{dF}}_R^S = \mathbf{dP}_N \mathbf{k}^e + \mathbf{dP}_T \mathbf{j}^e \quad (\text{G.27})$$

Substituindo-se as equações (G.24), (G.26) na equação (G.27) e tirando-se a direção \mathbf{j}^e em função de \mathbf{s}^s e \mathbf{k}^e , obtém-se que:

$$\overline{d\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}^S = -\mathbf{P}_S dA \cos \eta \left\{ \left[2\gamma\rho \cos \eta + \frac{2}{3}(\gamma(1-\rho) + v(1-\gamma)) \right] \mathbf{k}^e + (1-\gamma\rho)\mathbf{s}^s \right\} \quad (\text{G.28})$$

Esta resultante deverá ser integrada sobre toda a superfície externa do satélite, com a condição de que os elementos estejam iluminados, isto é,

$$\cos \eta = -\mathbf{s}^s \cdot \mathbf{k}^e \geq 0 \quad (\text{G.29})$$

Deve-se integrar o lado não-iluminado do satélite apenas quando se conhece a temperatura de cada elemento. Neste caso,

$$\overline{d\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}^S = \frac{2}{3}(1-\gamma)\frac{\sigma}{c}T_W^4 dA \mathbf{k}^e \quad (\text{G.30})$$

para $\cos \eta \leq 0$.

O torque elementar resulta em:

$$\overline{d\mathbf{M}}_{\mathbf{R}}^S = (\bar{\mathbf{r}}_e^s - \bar{\mathbf{r}}_{\text{cg}}^s) \times \overline{d\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}^S \quad (\text{G.31})$$

onde $\bar{\mathbf{r}}_e^s$ e $\bar{\mathbf{r}}_{\text{cg}}^s$ são respectivamente, os vetores posição do centro do elemento e centro de massa do satélite.

Analogamente à força aerodinâmica, podem ser definidos dos coeficientes; C_{RS} e C_{RL} , que representam respectivamente o coeficiente da força de radiação na direção do Sol-Terra e na direção perpendicular a esta

$$C_{RS} = \frac{\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}^S \cdot \mathbf{s}^s}{P_s \cdot A_r} \quad (\text{G.32})$$

$$C_{RL} = \frac{|\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}^S \times \mathbf{s}^s|}{P_s \cdot A_r} \quad (\text{G.33})$$

onde $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}^S$ é a força devida à radiação integrada sobre toda a superfície do satélite, e A_r é uma área de preferência qualquer.

Da mesma forma, podem ser definidos coeficientes de torques análogos aos aerodinâmicos:

$$C_{MRX} = \frac{\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{R}}^S \cdot \mathbf{i}^s}{P_s A_r L_r} \quad (\text{G.34})$$

$$C_{MRY} = \frac{\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{R}}^S \cdot \mathbf{j}^s}{P_s A_r L_r} \quad (\text{G.35})$$

$$C_{MRZ} = \frac{\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{R}}^S \cdot \mathbf{k}^s}{P_s A_r L_r} \quad (\text{G.36})$$

onde $\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{R}}^S$ é integrado sobre toda a superfície e L_r é um comprimento característico do satélite.

A integração analítica de C_{RS} e C_{RL} em corpos convexos é mais fácil que a integração dos coeficientes aerodinâmicos, em virtude de não possuírem função exponencial e função erro no integrando.

Quanto a corpos côncavos, freqüentemente desprezam-se múltiplas reflexões embora o sombreamento ou ocultação de partes do satélite por outras partes deva ser considerado.

Uma última observação refere-se à obtenção da direção de incidência, \mathbf{s}^s , no sistema do satélite. Esta é calculada a partir da posição do Sol no sistema inercial, \mathbf{s}^i , utilizando-se das rotações relativas ao sistema inercial e ao sistema do satélite. Quanto ao valor \mathbf{s}^i , este pode ser tirado diretamente de tabelas (Anuário Astronômico 1974) ou procedimentos computacionais.