



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

RENATO FUZARO MIOTTO

*Cálculo numérico da resposta de um aerofólio a
um escoamento turbulento compressível*

CAMPINAS

2017

RENATO FUZARO MIOTTO

Cálculo numérico da resposta de um aerofólio a um escoamento turbulento compressível

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de Térmica e Fluidos.

Orientador: William Roberto Wolf

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO RENATO
FUZARO MIOTTO, E ORIENTADA PELO PROF. DR.
WILLIAM ROBERTO WOLF.

Assinatura do Orientador

Campinas
2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): FAPESP, 2015/19538-6

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7813-8873>

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

M669c Miotto, Renato Fuzaro, 1991-
Cálculo numérico da resposta de um aerofólio a um escoamento turbulento compressível / Renato Fuzaro Miotto. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: William Roberto Wolf.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Aerodinâmica. 3. Aviões - Ruído.
I. Wolf, William Roberto, 1980-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Numerical computation of the airfoil response to a turbulent compressible airstream

Palavras-chave em inglês:

Boundary element methods

Aerodynamic

Aeroacoustics

Área de concentração: Térmica e Fluídos

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

William Roberto Wolf [Orientador]

André Valdetaro Gomes Cavalieri

Flávio de Campos Bannwart

Data de defesa: 10-07-2017

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

*Cálculo numérico da resposta de um aerofólio a
um escoamento turbulento compressível*

Autor: Renato Fuzaro Miotto

Orientador: William Roberto Wolf

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta dissertação:

Prof. Dr. William Roberto Wolf

Instituição: UNICAMP

Prof. Dr. André Valdetaro Gomes Cavalieri

Instituição: ITA

Prof. Dr. Flávio de Campos Bannwart

Instituição: UNICAMP

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Campinas, 10 de Julho de 2017.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais por terem me ensinado o valor da dedicação e da educação. Todo suporte que eles me forneceram durante esses anos foi o melhor presente que eu poderia ter. Sem eles, eu não chegaria onde estou hoje.

Em seguida, gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Dr. William Roberto Wolf pelas as oportunidades e pela constante atenção e tempo para dividir o seu conhecimento com seus alunos. Todas as suas contribuições foram peças indispensáveis para minha formação. Agradeço o suporte fornecido pelos professores Prof. Dr. André V. G. Cavalieri e Prof. Dr. Leandro Dantas de Santana ao longo do meu mestrado. Um agradecimento especial também aos membros da banca de mestrado, Prof. Dr. André Cavalieri, Prof. Dr. Flávio C. Bannwart.

Agradeço também aos meus colegas do laboratório, que criaram uma ótima atmosfera para se trabalhar. Sou especialmente grato ao Luiz Augusto Camargo Aranha Schiavo, Túlio Rodarte Ricciardi, Jean Helder Marques Ribeiro, Cristiano Pimenta, e ao Walter Arias Ramirez, com quem estive desde o primeiro dia em que cheguei, e aos novos membros do laboratório, Brenner d'Leis e Lucas Mascagni.

Finalmente, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, pela bolsa de mestrado concedida sob o processo número 2015/19538-6.

"Se vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes."

Newton, Isaac

Resumo

Baseado na teoria de Amiet, esse trabalho propõe uma abordagem numérica para calcular a função de transferência aeroacústica para aerofólios de geometria realística. A função de transferência aeroacústica relaciona a amplitude e fase de uma rajada periódica incidente a sua respectiva resposta de sustentação não-estacionária, permitindo, então, a aplicação da analogia de Curle para predição do ruído radiado. A presente metodologia é focada no problema de bordo de ataque de aerofólios, que ocorre quando se tem um escoamento turbulento incidindo sobre uma asa. Essa abordagem é válida para escoamentos subsônicos e asas de elevado alongamento sujeitas a rajadas periódicas tridimensionais com velocidade de traço supersônica no bordo de ataque (*i.e.*, rajadas supercríticas). Ela também permite considerar o efeito de espalhamento secundário no bordo de fuga e, conseqüentemente, o efeito de aerofólios compactos. Esse trabalho propõe a aplicação iterativa do método de elementos de contorno para resolver numericamente o problema prescrito pela teoria de aerofólios linearizada no plano transformado de Prandtl-Glauert. Detalhes da implementação numérica são discutidos e incluem a aplicação de diferentes condições de contorno em cada passo do processo iterativo, o tratamento das derivadas numéricas na implementação da condição de Kutta e a representação acurada das singularidades presentes nos bordos de ataque e de fuga. O estudo valida a ferramenta numérica comparando os resultados com a teoria de Amiet obtida analiticamente para uma placa plana. Em seguida, efeitos de aerofólios realísticos no ruído são apresentados.

Palavras-chave: Teoria de Amiet, método de elementos de contorno, ruído de bordo de ataque, aeroacústica, função de transferência aeroacústica

Abstract

Based on Amiet's theory formalism, we propose a numerical framework to compute the aeroacoustic transfer function of realistic airfoil geometries. The aeroacoustic transfer function relates the amplitude and phase of an incoming periodic gust to the respective unsteady lift response permitting, therefore, the application of Curle's analogy to compute the radiated noise. The methodology is focused on the airfoil leading-edge noise problem being able to also consider the trailing-edge back-scattering and, consequently, airfoil compactness effects. The approach is valid for compressible subsonic flows and the airfoil blade is assumed of large aspect ratio subjected to three-dimensional periodic gusts with supersonic velocity trace at the airfoil leading edge (*i.e.* supercritical gusts). This work proposes the iterative application of the boundary element method to numerically solve the boundary value problem prescribed by the linearized airfoil theory. Details of the numerical implementation are discussed and include the application of boundary conditions in different steps of the iterative procedure, treatment of derivatives in the implementation of the Kutta condition and accurate representation of singularities present at the leading- and trailing-edges. This study validates the numerical approach by comparing results with Amiet's theory obtained analytically. Subsequently, effects of realistic airfoil geometries on the leading-edge airfoil radiated noise are presented.

Keywords: Amiet's theory, boundary element method, leading-edge noise, aeroacoustic, aeroacoustic transfer function

Lista de Figuras

2.1	Solução de d'Alembert para a equação de onda homogênea unidimensional.	25
2.2	Curvas das funções de Bessel para ordens $\alpha = 0, 1, 2$.	28
2.3	Comportamento de cada tipo de fonte para uma perturbação pontual.	32
2.4	Parâmetros característicos para a estimativa da ordem de grandeza do ruído de turbulência livre em jatos.	36
2.5	Superfície esférica para cálculo da potência acústica.	37
2.6	Esquema de um corpo delimitado pela superfície S imerso em um escoamento.	40
2.7	Sistema de coordenadas cilíndrico sobre o bordo de fuga.	45
2.8	Componentes de velocidade de uma rajada (adaptado de Graham (Graham, 1970)).	51
2.9	Vista do plano $x - y$ com o aerofólio de espessura infinitesimal e as rajadas oblíquas incidentes.	54
2.10	Números de onda hidrodinâmicos de uma rajada vertical senoidal oblíqua (adaptado de Graham (Graham, 1970)).	59
3.1	Domínio computacional S no qual o BEM é aplicado.	75
4.1	Componentes real e imaginário da correção do bordo de ataque $\Psi^{(1)}$ para diferentes extensões do domínio computacional ($k_1b = 25$, $k_2b = 0$ e $M_0 = 0.1$; $He = 5$).	80
4.2	Componentes real e imaginário da correção do bordo de ataque $\Psi^{(1)}$ para diferentes extensões do domínio computacional ($k_1b = 50$, $k_2b = 0$ e $M_0 = 0.2$; $He = 20$).	80
4.3	Magnitudes da solução de primeira-ordem $p^{(1)}$ e da correção do bordo de fuga $P^{(2)}$ para diferentes discretizações do domínio computacional ($k_1b = 50$, $k_2b = 0$ e $M_0 = 0.2$; $He = 20$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$).	81
4.4	Efeitos da resolução da malha na dissipação e dispersão numérica no cálculo da derivada espacial $\partial\phi^{(1)}/\partial x$ para a solução de primeira-ordem ($k_1b = 50$, $k_2b = 0$ e $M_0 = 0.2$; $He = 20$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$). As soluções presentes são obtidas pelo esquema explícito de baixa-ordem e de alta-ordem compacto.	82
4.5	Diretividade das correções de bordo de ataque e de fuga ($k_1b = 25$, $k_2b = 0$ e $M_0 = 0.1$; $He = 5$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$; $J = 1500$).	83

4.6	Diretividade das correções de bordo de ataque e de fuga ($k_1b = 50, k_2b = 0$ e $M_0 = 0.2; He = 20; -5 \leq \bar{x} \leq 7; J = 1500$).	83
4.7	Comparação entre as soluções analítica e numérica para uma rajada oblíqua ($k_1b = 50, k_2b = 6$ e $M_0 = 0.2; He = 20; -5 \leq \bar{x} \leq 7; J = 1500$).	84
4.8	Magnitudes da distribuição de carregamento para uma placa plana e um aerofólio NACA 0024 utilizando duas configurações de malha diferentes ($k_1b = 50, k_2b = 6$ e $M_0 = 0.2; -5 \leq \bar{x} \leq 7; J = 2500$).	85
4.9	Magnitude da distribuição de carregamento de primeira-ordem para um aerofólio NACA 0024 utilizando duas configurações geométricas diferentes para transição aerofólio-esteira ($k_1b = 50, k_2b = 6$ e $M_0 = 0.2; -5 \leq \bar{x} \leq 7; J = 2500$).	86
4.10	Magnitude da distribuição de carregamento para uma placa plana e vários aerofólios NACA ($k_1b = 50, k_2b = 0$ e $M_0 = 0.2; -5 \leq \bar{x} \leq 7; J = 2500$).	87
4.11	Diretividade para uma placa plana e para diversos aerofólios NACA ($k_1b = 50, k_2b = 0$ e $M_0 = 0.2; He = 20; -5 \leq \bar{x} \leq 7; J = 2500$).	88
4.12	Diretividade para um aerofólio NACA 0012 com e sem a correção do bordo de fuga ($k_1b = 50$ e $M_0 = 0.2; He = 20; -5 \leq \bar{x} \leq 7; J = 2500$).	89
4.13	Diretividade para um aerofólio NACA 0012 com e sem a correção do bordo de fuga ($k_1b = 2.5$ e $M_0 = 0.2; He = 1; -7 \leq \bar{x} \leq 9; J = 3300$).	89
4.14	Diretividade dada por rajadas oblíqua e normal numa placa plana e num NACA 0012 ($k_1b = 50$ e $M_0 = 0.2; He = 20; -5 \leq \bar{x} \leq 7; J = 2500$).	90
4.15	Comparação entre placas planas com e sem arqueamento em termos da solução de primeira-ordem e do respectivo espalhamento acústico ($k_1b = 50, k_2b = 0$ e $M_0 = 0.2; He = 20; -5 \leq \bar{x} \leq 7; J = 2500$).	91
4.16	Magnitude da distribuição de carregamento devido a uma rajada normal incidente para uma placa plana e um NACA 0012 ($He = 20; -5 \leq \bar{x} \leq 7; J = 2500$).	92
4.17	Diretividade da pressão acústica no campo distante dada por uma rajada normal incidente numa placa plana e num aerofólio NACA 0012 ($He = 20; -5 \leq \bar{x} \leq 7; J = 2500$).	92
4.18	Comparação entre os métodos iterativo e direto em termos do custo computacional.	93

Lista de Acrônimos

Letras Latinas

A	variável arbitrária; amplitude; área superficial
b	semi-corda do aerofólio
c	coeficiente livre
c_0	velocidade do som
d	envergadura do aerofólio
D	diâmetro do jato
E	energia total por unidade de massa; integral de Fresnel
f	função arbitrária
\mathbf{F}	força
f_j	componente do vetor força; função discreta
\mathbf{f}	força
g	função de transferência entre a velocidade do escoamento turbulento e o salto de pressão no aerofólio
G	função de Green
H	função de Heaviside
H_α^β	função de Hankel ordem α e tipo β
i	número imaginário $i = \sqrt{-1}$
I	intensidade acústica
J_α	função de Bessel de ordem α
k	número de onda acústico
k_1	número de onda hidrodinâmico na direção x Cartesiana
k_2	número de onda hidrodinâmico na direção y Cartesiana
K_1	número de onda hidrodinâmico específico na direção x Cartesiana
K_2	número de onda hidrodinâmico específico na direção y Cartesiana
K	número de onda modificado
l	força de sustentação no aerofólio
L_j	comprimento do painel j
m'	taxa de geração de massa por unidade de volume
M_0	número de Mach
\mathbf{n}	vetor normal

p	pressão
p'	flutuação de pressão
p''	amplitude complexa da flutuação de pressão
p_0	pressão média
q	amplitude do impulso
\mathbf{q}	fluxo de calor
r	distância entre observador e fonte
R	constante universal dos gases
s	entropia
S	superfície
S_{pp}	densidade espectral de potência para flutuação de pressão
S_{ll}	densidade espectral de potência para flutuação de força de sustentação
t	tempo
T	temperatura
T_{ij}	tensor de Lighthill
u	componente da velocidade do escoamento
u_0	velocidade média
\mathbf{u}	vetor velocidade
U	velocidade característica da saída do jato
V	volume
w_0	amplitude da rajada incidente
x	coordenada do plano Cartesiano
\mathbf{x}	posição do observador
\mathbf{x}_s	posição da fonte
y	coordenada do plano Cartesiano
\mathbf{y}	posição da fonte
Y_α	função de Neumann de ordem α
z	coordenada do plano Cartesiano

Letras Gregas

γ	constante de Euler-Mascheroni
δ	delta de Dirac
δ_{ij}	delta de Kronecker
λ	comprimento de onda
μ	viscosidade dinâmica
ν	viscosidade cinemática
ρ	densidade
σ	tensor de tensões viscosas
ϕ	potencial acústico; potencial de velocidade perturbada
ϕ'	amplitude complexa do potencial de velocidade perturbada
Φ	campo potencial de velocidades
φ	ângulo de diretividade
Ψ	correção do bordo de ataque
Π	potência acústica
ω	frequência angular
κ	condutividade térmica

Superíndices

$(\cdot)^*$	complexo conjugado
$(\cdot)'$	flutuação; amplitude complexa
$(\cdot)''$	amplitude complexa
$(\cdot)^{(\alpha)}$	variável de ordem α
$(\bar{\cdot})$	variável adimensional

Subíndices

r	componente radial
s	fonte
0	componente médio

Abreviações

BEM	método de elementos de contorno
CFD	fluidodinâmica computacional
PSD	densidade espectral de potência
Re	número de Reynolds
3D	tridimensional
2D	bidimensional

Outras Notações

\mathcal{F}	termo de fonte
\mathcal{L}	função de transferência aeroacústica
P	amplitude complexa da correção do bordo de fuga
\Re	parte real de um número
\Im	parte imaginária de um número

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Motivação e objetivos	18
1.2	Contribuições deste trabalho	20
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	22
2.1	Função de Green	26
2.2	Fontes acústicas elementares	29
2.3	Analogias acústicas	33
2.3.1	Analogia de Lighthill	34
2.3.2	Analogia de Curle	39
2.3.3	Analogia de Ffowcs-Williams & Hall	43
2.3.4	Teoria de Amiet	49
3	METODOLOGIA NUMÉRICA	71
4	RESULTADOS	79
4.1	Validação da ferramenta numérica	79
4.2	Resultados para aerofólios realísticos	84
4.3	Custo computacional	92
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	94
	Referências	97

1 INTRODUÇÃO

Aeroacústica é uma área de estudo que envolve a geração e propagação de ondas acústicas em escoamentos aerodinâmicos não-estacionários. Desde os trabalhos de Sir James Lighthill (Lighthill, 1952, 1954) no começo da década de 50, diversos estudos têm sido realizados a fim de se compreender os fenômenos de geração de ruído em escoamentos aerodinâmicos, bem como as formas de propagação desse ruído incluindo as interações de ondas acústicas com superfícies imersas no escoamento. Estudos de aeroacústica incluem aplicações em aeronaves, trens de alta velocidade, automóveis, foguetes, turbinas eólicas e a gás, rotores de helicópteros, sistemas de ar-condicionado, ventiladores industriais, instrumentos musicais, etc.

Recentemente, com o aumento do tráfego aéreo, regulamentações quanto à emissão de ruído na proximidade de aeroportos têm se tornado mais rigorosas, impulsionando as buscas por soluções de engenharia para a redução de ruído em aeronaves. Em condições de decolagem, a maior parte do ruído gerado pelas aeronaves é proveniente do grupo moto-propulsor, incluindo jatos e fans (Agarwal e Dowling, 2005, 2007). No entanto, durante a aterrissagem, as principais fontes de geração de ruído são os motores e, também, os trens de pouso, eslates e flapes (Dobrzynski, 2010). Essas últimas fontes se tornam importantes em condições de baixa velocidade e o mecanismo de geração de ruído é a interação entre o escoamento turbulento e as superfícies sólidas (Curle, 1955).

Ao longo das últimas quatro décadas, diversas melhorias foram realizadas em termos de eficiência (energética e de emissão de poluentes e ruído) do sistema moto-propulsor aeronáutico. Em turbofans modernos, por exemplo, uma maior razão entre os jatos frio e quente (a razão de *bypass*) permite reduzir o consumo de combustível e, conseqüentemente, aumentar a eficiência do grupo moto-propulsor (Lilley, 2001). No entanto, para se manter uma distância segura entre a pista e o turbofan, esse último teve que ser aproximado da asa, o que fez com que estruturas turbulentas que se desenvolvem ao longo do jato passassem a interagir com a superfície da asa sofrendo difração acústica e aumentando significativamente a emissão de ruído espalhado pelo bordo de fuga. Esse caso particular, denominado problema de instalação jato-asa, tem sido investigado recentemente por diversos pesquisadores. Essas investigações têm contribuído para o desenvolvimento de modelos confiáveis para a predição de ruído de instalação jato-asa e melhorar a compreensão dos fenômenos físicos envolvidos (Lilley, 2001; Cavalieri *et. al*, 2014; Lyu *et. al*, 2017).

O ruído dos componentes aeronáuticos, ou de *airframe*, não se restringem apenas ao

caso de instalação jato-asa. As configurações das superfícies hiper-sustentadoras como os flapes e eslates, dos trens de pouso, ou até mesmo da asa, também estão associadas a problemas aeroacústicos desafiadores (Storms *et. al.*, 1999). Nesse sentido, a compreensão dos mecanismos de geração e propagação de ruído em asas, incluindo efeitos de bordos de ataque e de fuga, é de grande importância para o projeto de configurações aerodinâmicas silenciosas. Por exemplo, uma camada limite turbulenta gera ruído de banda larga quando se desenvolve ao longo de um bordo de fuga. Diversos estudos de ruído de bordo de fuga foram realizados nos últimos anos e Brooks & Hodgson (Brooks e Hodgson, 1981) forneceram uma abrangente investigação experimental desse problema. Além disso, em números de Reynolds moderados, para os quais se observa o fenômeno de transição, a camada limite age como um meio eficiente de propagação da perturbação acústica emitida pelo bordo de fuga e, conseqüentemente, de retro-alimentação do sistema (Jones e Sandberg, 2011). Nesse último caso, o ruído emitido por um aerofólio apresenta um componente tonal principal sobreposto em um espectro de banda larga. Além disso, tons secundários podem surgir devido ao efeito de retro-alimentação. O desprendimento de vórtices que ocorre em bordos de fuga espessos é outro mecanismo de geração de ruído, que em concomitância com a espessura de deslocamento da camada limite, é responsável pela geração de ruídos tonais em aerofólios (Sandberg *et. al.*, 2009; Wolf *et. al.*, 2012; Ramirez e Wolf, 2015).

Os casos citados acima são relacionados ao ruído de bordo de fuga de aerofólios. Um caso particular de ruído ocorre quando um aerofólio está imerso em um escoamento turbulento. Nessas situações, o ruído do aerofólio é gerado principalmente pelo bordo de ataque. Esse tipo de problema é observado em dispositivos rotativos tais como rotores abertos contra-rotativos (CRORs, do inglês *counter-rotating open rotors*), ventiladores, rotores de helicópteros, turbinas eólicas, etc. Os CRORs, particularmente, representam uma alternativa potencial para o futuro da tecnologia de propulsão aeronáutica, visto que possuem uma maior eficiência em termos de consumo de combustível quando comparados aos motores turbofans de equivalente razão de *bypass*. No entanto, as hélices dos CRORs operam em campo aberto, o que amplifica demasiadamente o ruído produzido por esses motores, comprometendo até mesmo o conforto acústico dos passageiros dentro da cabine (Roger *et. al.*, 2014). Experimentos realizados em campo com turbinas eólicas (Oerlemans e López, 2005; Oerlemans, 2016) identificaram que as pás das turbinas são as principais fontes sonoras desses dispositivos sendo, portanto, outro exemplo relacionado ao ruído de bordo de ataque. Com a necessidade crescente de fontes sustentáveis de energia, os parques eólicos (ou *windfarms*) estão sendo contruídos cada vez mais próximos dos centros urbanos. Isso resulta em regulamentações mais rigorosas quanto a emissão de ruído. A importância dessa área de pesquisa cresceu tanto que, em

março de 2016, o periódico *Journal of the Acoustical Society of America* publicou uma seção especificamente relacionada ao ruído de turbinas eólicas.

O estudo dos fenômenos aeroacústicos é um tópico complexo pois geralmente envolve turbulência e acústica e, portanto, uma ampla faixa de escalas espaciais e de frequência. Os mecanismos aerodinâmicos de geração de ruído envolvem desde grandes escalas energéticas, como esteiras de vórtices em trens de pouso, até pequenas estruturas vorticais transportadas ao longo de camadas-limite que se formam na proximidade de bordos de fuga. Nesses casos, uma pequena parcela da energia do escoamento é convertida em energia acústica, que produz flutuações de pressão que se propagam e são interpretadas pelo ouvido como som. Em escoamentos com baixos números de Mach, como aqueles em situações de aterrissagem de aeronaves, as escalas de comprimento das ondas acústicas são muito maiores que as escalas turbulentas, porém, contêm bem menos energia. Isso dificulta e encarece a simulação numérica de problemas não-estacionários envolvendo a geração e propagação de ruído. Ao mesmo tempo, experimentos envolvendo medições aerodinâmicas e acústicas costumam apresentar um alto custo, inviabilizando estudos de otimização de múltiplas configurações ou etapas de projeto preliminar. Nesse sentido, métodos semi-analíticos de baixo custo se apresentam como uma solução mais viável para etapas de projeto preliminar. Esses métodos devem ser baseados em princípios físicos fundamentais.

Como descrito anteriormente, a área de pesquisa em aeroacústica é bastante abrangente e, neste trabalho, o foco será a geração e propagação de ruído em superfícies sólidas, incluindo bordos de ataque e de fuga. Primeiramente, algumas das principais formulações de analogia acústica serão apresentadas para condições de escoamentos envolvendo turbulência livre e, também, na proximidade de superfícies. Posteriormente, será discutido o problema de interação rajada-aerofólio, incluindo a física do problema e uma abordagem numérica desenvolvida para resolver esse problema. A metodologia discutida neste trabalho é fundamentada em princípios físicos fundamentais e a ferramenta numérica aqui proposta é baseada no método de elementos de contorno (BEM, do inglês *Boundary Element Method*). Essa ferramenta permite calcular o carregamento não-estacionário sobre a superfície de aerofólios sujeitos a uma rajada incidente dentro do limite supercrítico. A partir do carregamento aerodinâmico, é possível efetuar a predição aeroacústica do ruído gerado por um aerofólio imerso em um escoamento turbulento.

Motivação e objetivos

Em diversas aplicações tecnológicas envolvendo máquinas rotativas, tais como ventiladores, turbinas eólicas, motores contra-rotativos e rotores de helicópteros, a

interação entre o aerofólio e a turbulência incidente desempenha um papel importante na geração de ruído. Durante as fases preliminares do projeto de máquinas que visem baixa emissão de ruído, a disposição de ferramentas preditivas rápidas e de baixo custo computacional é desejável, pois possibilita a aplicação de rotinas de otimização no projeto. Nesse sentido, abordagens semi-analíticas baseadas em princípios físicos fundamentais representam uma alternativa interessante que combina acurácia e rapidez de cálculo.

Nesse sentido, Amiet (Amiet, 1975a) desenvolveu um modelo semi-analítico para a predição do ruído no campo acústico distante em termos da densidade espectral de potência da pressão, que depende da resposta não-estacionária do aerofólio a uma rajada incidente. Seguindo o trabalho de Landahl (Landahl, 1961), Amiet (Amiet, 1976a) também calculou analiticamente a distribuição de pressão no aerofólio necessária para a predição acústica. Todavia, frequentemente os métodos analíticos, tais como os mencionados acima, impõem drásticas simplificações na geometria do aerofólio, modelando-o como uma placa plana retangular de alongamento elevado sujeita a um escoamento uniforme incidente. De modo a relaxar essas considerações e resolver geometrias e escoamentos mais realísticos, pesquisadores propuseram métodos de segmentação para levar em conta a variação das propriedades uniformes e turbulentas ao longo da envergadura (Christophe *et. al.*, 2009; Kucukcoskun *et. al.*, 2013), métodos de segmentação com faixas não-retangulares para considerar a variação da corda ao longo da envergadura (Roger e Carazo, 2010), e a modificação do espectro de turbulência devido a um bordo de ataque espesso (Moreau *et. al.*, 2005). Por exemplo, no trabalho de Moreau *et al.* (Moreau *et. al.*, 2005), a resposta do aerofólio foi considerada a mesma de uma placa plana e uma correção foi aplicada para levar em conta o efeito geométrico do aerofólio no momento do cálculo do espalhamento acústico.

De modo a levar em consideração escoamentos incidentes de maior complexidade e geometrias mais realísticas, metodologias numéricas foram também propostas para a solução do escoamento (Gennaretti *et. al.*, 1997; Zhou e Joseph, 2007; Gennaretti *et. al.*, 2013). Glegg & Devenport (Glegg e Devenport, 2010) adotaram o método dos painéis para a predição de ruído no problema de interação turbulência-aerofólio, obtendo bons resultados com a teoria de Amiet para regimes em baixa frequência, no qual o aerofólio pode ser considerado uma fonte compacta. Apesar disso, a técnica apresentada não é apropriada para prever o ruído gerado em altas frequências visto que os efeitos de compressibilidade passam a exercer uma influência significativa na resposta não-estacionária do aerofólio. Essa limitação vem do modelo do escoamento que resolve a equação de Laplace para a velocidade potencial perturbada. Assim, a metodologia de Glegg & Devenport só é válida dentro do limite assintótico da incompressibilidade.

Mish e Devenport (Mish e Devenport, 2006a,b) realizaram uma extensa investigação

experimental da resposta do aerofólio devido a um escoamento turbulento incidente com o intuito de validar e melhorar os modelos analíticos e numéricos existentes. Efeitos de ângulo de ataque, variação do ponto de estagnação, distorção da turbulência e estol foram analisados em condições onde as considerações de uma placa plana não eram mais válidas. Esses autores demonstraram que a teoria de Amiet superestima o ruído de aerofólios com configurações realísticas. Nesse sentido, o efeito de espessura dos aerofólios realísticos parece ser um aspecto fundamental que não é tratado na teoria de Amiet.

Neste trabalho, o objetivo principal consiste em propor uma abordagem numérica para calcular a função de transferência aeroacústica relacionada à resposta não-estacionária de um aerofólio sujeito a uma rajada incidente. A presente metodologia permite estudar o ruído de bordo de ataque decorrente de um escoamento turbulento incidente levando em consideração o espalhamento acústico secundário que ocorre em um bordo de fuga, devido à corda finita. Essa abordagem é válida para pás com grande alongamento, geometrias arbitrárias de aerofólios, e escoamentos subsônicos compressíveis com rajadas supercríticas tridimensionais. A metodologia numérica proposta permite analisar o efeito de espessura de aerofólios realísticos e indica a redução da magnitude da função de transferência aeroacústica devido ao incremento de espessura. Outros objetivos deste trabalho incluem o estudo e análise da teoria de Amiet para o ruído gerado por bordos de ataque e a investigação dos efeitos de espessura, arqueamento e compressibilidade no problema de rajada incidente em aerofólios. Além disso, uma análise dos efeitos de rajadas normais e oblíquas também é apresentado.

Contribuições deste trabalho

A principal contribuição deste trabalho consiste na proposta de uma nova formulação numérica para o cálculo do carregamento não-estacionário sobre uma asa de alto alongamento sujeita a um escoamento turbulento incidente. A presente metodologia pode ser empregada para o estudo de rajadas em regime supercrítico para frequências altas e baixas. No segundo caso, diversas iterações da metodologia desenvolvida devem ser realizadas para a convergência do cálculo do carregamento aerodinâmico. A nova formulação permite analisar efeitos geométricos do aerofólio como a espessura, que age no sentido de reduzir a resposta do aerofólio ao escoamento perturbado incidente. Essa resposta representa um componente essencial para a determinação do ruído gerado por uma asa imersa em um escoamento turbulento, conforme apresentado na analogia de Curle (Curle, 1955) e pela teoria de Amiet (Amiet, 1975a).

Outras contribuições deste trabalho incluem a investigação de diversos parâmetros do escoamento turbulento incidente e da geometria do aerofólio na radiação de ruído. Esses

parâmetros incluem o número de Mach do escoamento, as componentes dos números de onda hidrodinâmicos nas direções da corda e envergadura do aerofólio, e o arqueamento do aerofólio. Uma ferramenta numérica foi desenvolvida para se realizar as análises citadas. Um estudo da aplicação de diferentes condições de contorno é apresentado incluindo os efeitos de estiramento de malha no cálculo de descontinuidades do carregamento aerodinâmico que surgem nos bordos de ataque e de fuga. Detalhes de implementação da ferramenta numérica também são discutidos e incluem, por exemplo, a solução numérica de derivadas da solução do escoamento potencial, necessária para a aplicação da condição de Kutta no bordo de fuga dos aerofólios. Além disso, os efeitos de discretização espacial na solução do problema são discutidos.

Este trabalho também apresenta uma validação dos resultados obtidos a partir da ferramenta numérica com a solução analítica do problema de Amiet, obtido para placas planas. A presente ferramenta pode ainda ser aliada à teoria de distorção rápida (Goldstein, 1978; de Santana *et. al*, 2016) e a métodos de segmentação, tal como o método das faixas invertido (Christophe *et. al*, 2009), para se realizar previsões de ruído com maior nível de acurácia em comparação aos modelos de ordem-reduzida já existentes para altas frequências, mantendo ainda o baixo custo computacional comparado às ferramentas de CFD.

Como contribuição deste trabalho, foram feitas as seguintes publicações:

Artigos publicados em periódicos:

- MIOTTO, R.F.; WOLF, W.R.; e DE SANTANA, L.D. Numerical computation of aeroacoustic transfer function for realistic airfoils. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 407, 253 – 270, 2017

Artigos publicados em conferências:

- MIOTTO, R.F.; WOLF, W.R.; e DE SANTANA, L.D. Numerical computation of airfoil-gust lift response with applications to leading-edge noise generation, **AIAA Aviation Forum, 23rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference**, Denver, USA, 2017
- MIOTTO, R.F.; WOLF, W.R.; e DE SANTANA, L.D. Numerical computation of gust aerodynamic response for realistic airfoils: Application of Amiet's theory, **22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference**, Lyon, France, 2016

Capítulos de livro:

- MIOTTO, R.F.; WOLF, W.R. Introdução à Aeroacústica, **X Escola de Primavera de Transição e Turbulência**, Cadernos de turbulência da ABCM, vol. 10, 161 – 246, 2016

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Vamos considerar um escoamento aerodinâmico compressível que pode ser modelado pelas equações de conservação da massa (continuidade), quantidade de movimento (Navier-Stokes) e energia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad (2.2)$$

e

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E + p \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q}) = 0. \quad (2.3)$$

Nas equações acima, ρ , \mathbf{u} , p , $\boldsymbol{\sigma}$, E e \mathbf{q} representam a densidade, o vetor velocidade, a pressão, o tensor de tensões viscosas, a energia total por unidade de massa e o fluxo de calor, respectivamente. O termo \mathbf{I} representa a matriz identidade. Para o sistema de equações ser fechado, as seguintes relações constitutivas são utilizadas

$$p = \rho R T, \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) - 2/3 \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}, \quad (2.5)$$

e

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T. \quad (2.6)$$

As equações acima representam a lei de gases ideais, a hipótese de Stokes e a lei de Fourier para condução de calor. Nessa equações, R , T , μ e κ são a constante universal dos gases, a temperatura, o coeficiente de viscosidade dinâmico e a condutividade térmica, respectivamente. O termo $(\cdot)^T$ representa a matriz transposta de (\cdot) .

Na maior parte das aplicações de interesse em acústica, as intensidades das flutuações de propriedades que radiam como onda sonora são muito menores que as propriedades médias hidrodinâmicas e, portanto, todos os produtos não-lineares das quantidades perturbadas podem ser desprezados. Consequentemente, o campo acústico pode ser visto como linear e as implicações disso são que não há interação não-linear entre duas ondas

acústicas quaisquer. Dessa forma, o campo acústico total pode ser obtido pela simples soma do campo relativo a cada onda seguindo o princípio de superposição de soluções. Assim, as variáveis do campo acústico satisfazem as equações linearizadas do movimento do fluido e não é necessário resolver o conjunto de equações de continuidade, Navier-Stokes e energia em sua forma completa para se ter uma solução do problema de propagação acústica. No entanto, para se obter as fontes responsáveis pela geração de ruído em escoamentos turbulentos, as equações devem ser resolvidas na forma completa. Isso se deve às não-linearidades dos processos envolvidos nas fontes de geração de ruído.

Vamos considerar um meio onde pressão e densidade sejam dadas, respectivamente, por $p = p_0 + p'$ e $\rho = \rho_0 + \rho'$, no qual os termos p_0 e ρ_0 indicam componentes médias das propriedades e p' e ρ' indicam suas flutuações. O número de Reynolds relacionado às escalas acústicas, $Re_{ac} = \rho c_0 \lambda / \mu$, é muito alto para a maioria das frequências de interesse e, portanto, efeitos viscosos podem ser desprezados no campo acústico. Aqui, c_0 é a velocidade do som no campo acústico quiescente e λ é o comprimento de onda acústica, que varia com a frequência. Obviamente, se a propagação ocorre em longas distâncias, efeitos viscosos se tornam relevantes.

Em um meio quiescente, $\mathbf{u}_0 = 0$, a flutuação de velocidade do fluido é dada por \mathbf{u}' e, portanto, $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$. Assim, as equações de continuidade e quantidade de movimento linearizadas podem ser escritas como

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' = m', \quad (2.7)$$

e

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla p' = \mathbf{F}, \quad (2.8)$$

onde \mathbf{F} representa um vetor de força e, m' , uma taxa de geração de massa por unidade de volume.

Aplicando uma derivada temporal na primeira equação e um operador divergente na segunda, podemos eliminar a velocidade \mathbf{u}' entre as Eqs. 2.7 e 2.8, obtendo

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = \frac{\partial m'}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (2.9)$$

Ondas acústicas são ondas longitudinais que se propagam através de compressão e expansão adiabática. Assim, para a equação de energia, podemos considerar um meio isentrópico ($s = \text{constante}$) onde a velocidade do som é definida como

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \quad (2.10)$$

A pressão pode, então, ser escrita como uma função da entropia e da densidade

$$\underbrace{p_0 = p(\rho_0, s)}_{\text{não perturbado}},$$

$$\underbrace{p_0 + p' = p(\rho_0 + \rho', s) \approx p(\rho_0, s) + \left(\frac{\partial p(\rho, s)}{\partial \rho} \right)_s \rho'}_{\text{perturbado}}, \quad (2.11)$$

e a partir das Eqs. 2.11 e 2.10, chega-se em $\rho' = p'/c_0^2$. Substituindo na Eq. 2.9, temos

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p' = \frac{\partial m'}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (2.12)$$

Essa equação de onda não-homogênea representa a propagação de uma onda acústica na forma de uma flutuação de pressão devido à uma força externa não-estacionária, \mathbf{F} , e uma fonte de geração de massa, m' . Sabendo que o campo acústico é irrotacional e que, nessa região, $\mathbf{F} = 0$, a equação de quantidade de movimento linearizada pode ser escrita em termos de um potencial acústico, ϕ , no qual $\mathbf{u}' = \nabla\phi$. Assim, a flutuação de pressão pode ser escrita como

$$p' = -\rho_0 \frac{D\phi}{Dt} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{caso } \mathbf{u}_0 = 0), \quad (2.13)$$

e, a partir da Eq. 2.12, a equação de onda também é dada por

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = -m'. \quad (2.14)$$

Até então, as equações de onda foram escritas na forma não-homogênea, ou seja, elas incluíram tanto a região onde ocorre a geração de ruído ($m' \neq 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$), quanto a região onde ocorre propagação, sem geração, ($m' = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$). Vamos considerar a solução da equação de onda para o caso homogêneo, onde as fontes de ruído são nulas

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = 0. \quad (2.15)$$

Aplicando a o método de separação de variáveis nessa equação, temos

$$\phi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x})T(t), \quad (2.16)$$

e substituindo a solução acima na Eq. 2.15 e simplificando, obtém-se que

$$\frac{1}{c_0^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} - \frac{\nabla^2 A}{A} = 0, \quad (2.17)$$

onde os termos dependentes de \mathbf{x} e t estão separados. Observa-se que para satisfazer a igualdade nula, tais termos devem ser iguais a um valor constante que, por maior conveniência, pode ser escrito como $-k^2$. Tal procedimento, então, leva à equação de Helmholtz dada por

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0. \quad (2.18)$$

Uma outra forma de se obter a equação de Helmholtz se baseia nas transformadas integrais, tais como a transformada de Fourier, abaixo,

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt, \quad (2.19)$$

levando a Eq. 2.15 à seguinte forma

$$\nabla^2 \hat{\phi} + k^2 \hat{\phi} = 0, \quad (2.20)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $k = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda$ é o número de onda acústico. A equação de Helmholtz é, portanto, uma equação de onda no domínio da frequência e pode ser resolvida para cada número de onda acústico separadamente.

Uma solução geral para equações como a Eq. 2.15 foi desenvolvida por d'Alembert. Para o caso unidimensional, sendo $g(x) = \phi(x, 0)$ e $h(x) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0)$, tem-se a solução

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2}[g(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)] + \frac{1}{2c_0} \int_{x-c_0 t}^{x+c_0 t} h(\xi) d\xi. \quad (2.21)$$

A Fig. 2.1 apresenta a solução de d'Alembert para a equação diferencial parcial homogênea da propagação da onda. Nela, todas as propriedades (p' , ρ' , ϕ , etc.) são propagadas com velocidade característica uniforme, igual à velocidade do som.

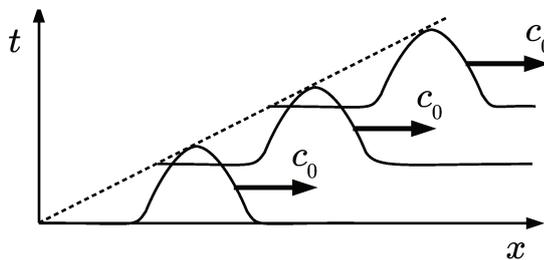


Figura 2.1: Solução de d'Alembert para a equação de onda homogênea unidimensional.

Retornando ao caso não-homogêneo, vamos escrever a Eq. 2.12 como

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p' = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \quad (2.22)$$

onde $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$ simboliza uma fonte de qualquer tipo. Agora, será possível explorar alguns

tipos de fontes práticas encontradas em problemas de engenharia, e discutidas neste documento.

A partir do princípio de Duhamel e da formula de d'Alembert, pode-se chegar à solução da Eq. 2.22 unidimensional completa, que contém uma soma da solução homogênea e particular.

$$p'(x, t) = \frac{1}{2}[g(x - c_0t) + g(x + c_0t)] + \frac{1}{2c_0} \int_{x-c_0t}^{x+c_0t} h(\xi) d\xi + \frac{1}{2c_0} \int_0^t \left(\int_{x-c_0(t-\eta)}^{x+c_0(t-\eta)} \mathcal{F}(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta. \quad (2.23)$$

De modo geral, existem diversas formas de se resolver equações hiperbólicas, tais como o método de separação de variáveis (para problemas lineares em certos domínios), método das características (para casos lineares ou não-lineares), métodos de equações integrais como a transformada de Fourier, entre outros. O método de separação de variáveis, quando aplicável, nos leva a uma série infinita que geralmente converge lentamente, o que resulta na preferência pelo método das características para se resolver problemas hiperbólicos. Uma outra abordagem é utilizar soluções fundamentais, como a função de Green, que nos permite representar a solução na forma integral.

Nesse sentido, a função de Green será um ponto fundamental para a resolução da equação diferencial parcial não-homogênea em questão. Após definida a função de Green, três tipos de fontes acústicas fundamentais serão tratadas. Fontes complexas compactas e não-compactas podem ser construídas a partir dessas fontes fundamentais. Fontes compactas são aquelas cujo comprimento característico é muito menor que o comprimento de onda acústico, e fontes não-compactas têm comprimentos característicos maiores que o comprimento de onda.

Função de Green

Em 1828, o matemático George Green (Green, 1828) desenvolveu o conceito de uma função de resposta ao impulso para uma equação diferencial parcial linear não-homogênea com condições de contorno especificadas. Tal função, que leva seu nome, é a solução fundamental da equação diferencial, a partir da qual facilmente se obtém a solução desejada da equação original. Soluções fundamentais desempenham um papel importante em metodologias numéricas como, por exemplo, o método de elementos de contorno que será visto mais adiante e, por isso, a função de Green será largamente utilizada neste trabalho.

Se um campo potencial ϕ é determinado pela função de Green, $G(\mathbf{x}|\mathbf{y})$, com um observador em \mathbf{x} e uma fonte em \mathbf{y} , é possível obter $\phi(\mathbf{x})$ integrando o elemento da fonte como

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\mathbf{y})G(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.24)$$

Isso significa que a solução é uma convolução $\phi = \mathcal{F} * G$ que ocorre justamente pelo fato dos coeficientes da equação diferencial serem constantes. A função de Green de espaço livre $G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau)$ é uma solução causal da equação de onda quando a fonte pontual é dada por $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau)$, ou seja, está localizada na posição \mathbf{y} e emite um pulso no instante de tempo τ ,

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau), \quad (2.25)$$

onde $G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) = 0$ quando $t < \tau$, pelo princípio da causalidade.

Para se resolver a Eq. 2.22 em um domínio qualquer, onde as ondas se propagam para um campo acústico distante, é preciso especificar uma condição de contorno no infinito, que é chamada de condição de radiação de Sommerfeld. Tal condição define que a energia radiada por uma fonte no espaço livre (onde não há fronteiras) se propaga para o infinito e não para seu ponto de partida. Para campos acústicos simples, o princípio da causalidade está diretamente relacionado ao requisito de Sommerfeld que é descrito abaixo para um campo tridimensional por

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + c_0 \frac{\partial p'}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.26)$$

A solução da Eq. 2.25 tridimensional representa um pulso de onda na forma esférica se expandindo a partir da fonte em \mathbf{y} na velocidade do som, com decaimento da sua intensidade com o inverso da distância $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$,

$$G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \delta \left(t - \tau - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{c_0} \right). \quad (2.27)$$

Uma solução fundamental similar àquela apresentada acima também pode ser escrita para a equação de Helmholtz em duas ou três dimensões. Como a solução é radialmente simétrica, pode ser conveniente expressar a função de Green em termos de coordenadas polares ou esféricas, dependendo do domínio ser bi ou tridimensional. Assim, a função de Green será escrita em termos das funções de Bessel ou das funções de Bessel esféricas.

A função de Bessel de primeiro tipo e ordem α , J_α , é uma solução canônica da equação diferencial de Bessel. A função de segundo tipo, Y_α , que recebe o nome

de função de Neumann, também é solução da equação de Bessel, porém, com uma singularidade na origem. A Fig. 2.2 mostra as curvas das funções mencionadas para diferentes ordens. Outra função importante corresponde à combinação das duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel, denominada função de Hankel. Existem, nesse caso, a de primeiro tipo, $H_\alpha^{(1)} = J_\alpha + iY_\alpha$, e a de segundo tipo, $H_\alpha^{(2)} = J_\alpha - iY_\alpha$.

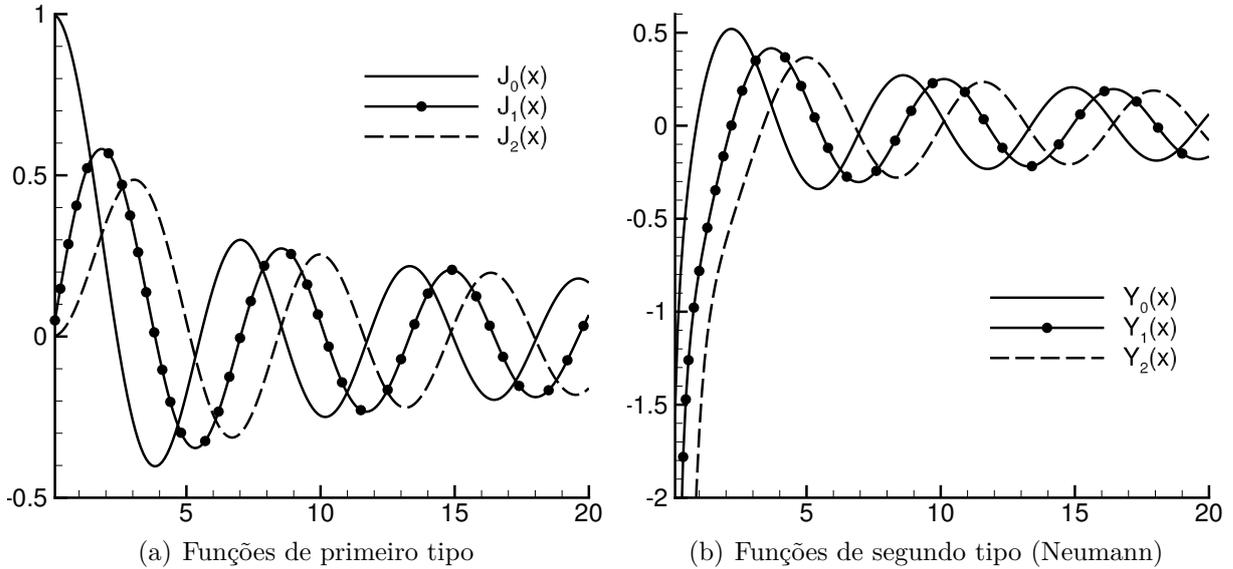


Figura 2.2: Curvas das funções de Bessel para ordens $\alpha = 0, 1, 2$.

Em termos do que foi dito acima, a função de Green para o caso bidimensional fica dada por

$$G_{2D} = -\frac{i}{4}H_0^{(2)}(kr), \quad (2.28)$$

onde a coordenada radial em um sistema polar de coordenadas, r , é a distância entre fonte e observador, $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Ao longo deste material veremos que fontes acústicas mais elaboradas podem ser escritas como derivadas da função de Green e, conseqüentemente, derivadas da função de Hankel. Essas derivadas podem ser calculadas através das relações de recorrência ou de suas combinações. Abaixo estão duas dessas relações

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^m \left[\frac{Z_\alpha(x)}{x^\alpha}\right] = (-1)^m \frac{Z_{\alpha+m}(x)}{x^{\alpha+m}}, \quad (2.29)$$

e

$$2 \frac{dZ_\alpha}{dx} = Z_{\alpha-1}(x) - Z_{\alpha+1}(x), \quad (2.30)$$

onde Z_α pode ser J_α , Y_α , $H_\alpha^{(1)}$ ou $H_\alpha^{(2)}$.

A função de Green para a equação de Helmholtz tridimensional pode ser escrita de

forma semelhante como

$$G_{3D} = \frac{ik}{4\pi} h_0^{(1)}(kr), \quad (2.31)$$

onde $h_0^{(1)} = j_0 + iy_0$ é a função de Hankel esférica de ordem 0 escrita como a soma de uma função de Bessel esférica e uma função de Neumann esférica, ambas de ordem 0. A função de Green tridimensional ainda pode ser escrita de forma simplificada como

$$G_{3D} = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad (2.32)$$

uma vez que

$$h_n^{(1)}(x) = (-i)^{n+1} \frac{e^{ix}}{x} \sum_{m=0}^n \frac{i^m}{m! (2x)^m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Se a fonte sonora for um impulso pontual, para $\tau = 0$, localizado na origem do sistema de coordenadas, então

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = \delta(\mathbf{x}) \delta(t),$$

cuja solução, radialmente simétrica, é

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}\|} \delta \left(t - \frac{\|\mathbf{x}\|}{c_0} \right).$$

Retornando à Eq. 2.22 com $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$ sendo um impulso, esse termo de fonte pode ser escrito como

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\mathbf{y}, \tau) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) d^3\mathbf{y} d\tau.$$

A solução da Eq. 2.22, fica, então

$$p'(\mathbf{x}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) d^3\mathbf{y} d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y}. \quad (2.33)$$

Fontes acústicas elementares

Em problemas práticos de engenharia, fontes de ruído podem ser modeladas utilizando-se combinações da função de Green e suas derivadas. Geralmente, fontes de ruído originárias de jatos turbulentos, ventiladores, asas, trens de pouso, combustão,

dentre outras, podem ser modeladas como distribuições de fontes tipo monopolo, dipolo e quadrupolo. Por exemplo, monopolos podem ser utilizados para a modelagem de problemas envolvendo flutuações de temperatura e adição de massa. Fontes tipo dipolo são utilizadas para se modelar problemas envolvendo forças aerodinâmicas não-estacionárias como aquelas que surgem em asas, pás de turbinas eólicas e trens de pouso. Finalmente, quadrupolos são utilizados para se modelar turbulência livre em jatos, esteiras e camadas-limite.

Monopolo

A fonte tipo monopolo pode ser idealizada por um impulso de amplitude $q = q(t)$ que irá gerar uma onda esfericamente simétrica no caso tridimensional e cuja equação de onda correspondente é

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p' = -q(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.34)$$

Na equação acima, a fonte monopolo está posicionada em \mathbf{y} . Utilizando a função de Green introduzida anteriormente, a solução geral da flutuação de pressão para uma distribuição de fontes tipo monopolo $q(\mathbf{y}, \tau)$ será dada por

$$p'(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y}. \quad (2.35)$$

Dipolo

Uma fonte tipo dipolo pode ser relacionada à presença de uma força não-estacionária como, por exemplo, sustentação e arrasto num aerofólio. Supondo que essa força é escrita como $\mathbf{F}(\tau, \mathbf{y}) = -\mathbf{f}(\tau)\delta(\mathbf{y})$, o termo fonte no lado direito da Eq. 2.22 terá a forma

$$\mathcal{F}(\mathbf{y}, \tau) = \nabla \cdot [\mathbf{f}(\tau)\delta(\mathbf{y})].$$

Assim, esse termo representa um dipolo pontual localizado em \mathbf{y} . Uma forma de se construir uma fonte tipo dipolo é aproximar dois monopolos em oposição de fase. A equação geral para o cálculo do ruído emitido por uma distribuição de fontes tipo dipolo é dada por

$$p'(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{f_j(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c_0)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y}.$$

Usando a relação que $\partial/\partial y_j = -\partial/\partial x_j$ para resolver a integral, chega-se em

$$p'(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_j(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c_0)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y}. \quad (2.36)$$

Supondo que a fonte dipolo é pontual, localizada em \mathbf{y} , podemos aplicar o operador divergente para o núcleo da integral acima, resultando em

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f_j(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c_0)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) = \\ & \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \frac{\partial}{\partial x_j} (f_j(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c_0)) + \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$f_j(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c_0) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right).$$

Utilizando o intercâmbio de derivadas temporal e espacial (ver Eq. 2.49), podemos escrever

$$p'(\mathbf{x}, t) = \frac{\cos\theta}{4\pi} \left(\underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial t} \frac{1}{c_0\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}}_{\text{campo distante}} + \underbrace{\frac{f_j}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}}_{\text{campo próximo}} \right), \quad (2.38)$$

onde θ é o ângulo entre o observador e o eixo do dipolo, medido a partir de seu centro.

Denominando r a distância entre observador e fonte $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, isso significa que:

- Para um observador distante ($r \rightarrow \infty$), $\frac{1}{r} \gg \frac{1}{r^2}$
- Para um observador próximo ($r \rightarrow 0$), $\frac{1}{r^2} \gg \frac{1}{r}$

e então, no campo distante, a amplitude do som gerado pelo dipolo decai com o inverso da distância, similar ao de um monopolo. No entanto, no campo próximo, o dipolo apresenta uma maior intensidade comparando-se com a fonte tipo monopolo.

A fim de compreender melhor a diferença de comportamento entre uma fonte monopolo e dipolo, vamos supor duas fontes harmônicas. Iremos comparar a razão de pressão para uma posição próxima, $r = \epsilon$, e para uma posição distante, $r = L$. Dessa forma, considerando $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = A \exp[i\omega(t - r/c_0)]$ teremos:

- Para o monopolo:

$$\frac{|p'(\epsilon)|}{|p'(L)|} = \frac{|\{A \exp[i\omega(t - \epsilon/c_0)]\} / (4\pi\epsilon)|}{|\{A \exp[i\omega(t - L/c_0)]\} / (4\pi L)|} = \frac{L}{\epsilon} \quad (2.39)$$

- Para o dipolo:

$$p' = \frac{\cos \theta}{4\pi} \left\{ \frac{1}{c_0 r} \frac{\partial}{\partial t} [A e^{i\omega(t-r/c_0)}] + \frac{A e^{i\omega(t-r/c_0)}}{r^2} \right\} = \frac{\cos \theta}{4\pi} \left\{ \frac{1}{c_0 r} A i\omega + \frac{A}{r^2} \right\} e^{i\omega(t-r/c_0)} \quad (2.40)$$

$$\text{quando } r = \epsilon \rightarrow 0 \quad \longrightarrow \quad p' \sim \frac{\cos \theta}{4\pi} \frac{A}{\epsilon^2}$$

$$\text{quando } r = L \gg 1 \quad \longrightarrow \quad p' \sim \frac{\cos \theta}{4\pi} \frac{A i\omega}{c_0 L}$$

$$\frac{|p'(\epsilon)|}{|p'(L)|} = \frac{L}{\epsilon} \frac{c_0}{\omega \epsilon} \quad (2.41)$$

Uma vez que $\frac{L}{\epsilon} \frac{c_0}{\omega \epsilon} \gg \frac{L}{\epsilon}$, isso significa que o dipolo possui muito mais energia do que o monopolo, porém, boa parte dessa energia não se propaga como som e fica restrita ao campo próximo. Assim, as fontes do tipo dipolo seriam uma possível representação das flutuações de pressão aerodinâmicas ocorrendo sobre superfícies, na qual o campo próximo (equivalente das proximidades do dipolo) possui uma magnitude de pressão muito maior do que as flutuações de pressão acústica, mas que é evanescente e decai exponencialmente. Esse decaimento exponencial faz com que a flutuação de pressão no campo próximo seja considerada como um pseudo-som.

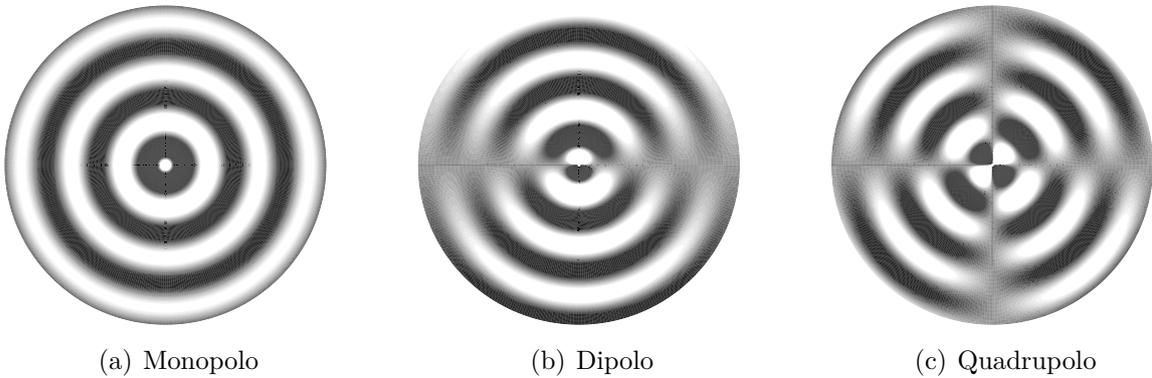


Figura 2.3: Comportamento de cada tipo de fonte para uma perturbação pontual.

Quadrupolo

Fontes de ruído do tipo quadrupolo são produzidas por turbilhões em escoamentos turbulentos. Uma fonte quadrupolo envolve uma segunda derivada espacial, equivalente à combinação de quatro fontes tipo monopolo, ou duas fontes tipo dipolo. Vamos considerar uma fonte quadrupolo dada por

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}, t), \quad (2.42)$$

em que T_{ij} é o tensor de tensões de Lighthill, que será discutido na seção 2.3.1. A pressão acústica correspondente a uma distribuição de fontes tipo quadrupolo é dada por

$$p'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{ij}(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y}. \quad (2.43)$$

Analogias acústicas

O ruído gerado por um escoamento aerodinâmico pode ser calculado diretamente através da solução das equações de Navier-Stokes, continuidade e energia. No entanto, dificilmente esse procedimento é adotado para se obter predições de ruído. Simulações numéricas diretas ou simulações de grandes escalas podem ser utilizadas para se resolver numericamente as equações acima, fornecendo tanto as fontes acústicas resultantes de escoamentos turbulentos quanto a propagação de ondas geradas por essas fontes. Esse tipo de metodologia, porém, requer esforços computacionais que incluem a utilização de computadores paralelos de alto desempenho e métodos numéricos de alta resolução e baixas dissipação e dispersão numéricas (Wagner *et. al*, 2007). Além disso, é necessário utilizar malhas computacionais capazes de capturar com precisão as pequenas escalas espaciais presentes nos escoamentos turbulentos e as escalas acústicas que se propagam até observadores distantes da região de geração de ruído.

Uma alternativa para se realizar cálculos aeroacústicos consiste na utilização de formulações de analogia acústica. Nesse tipo de formulação, as equações de Navier-Stokes são reescritas na forma de uma equação de onda não-homogênea onde o termo fonte dessas equações representa as fontes de ruído aerodinâmico. Dessa forma, é necessário resolver apenas uma equação linear para se propagar as ondas acústicas geradas pelas fontes, que podem ser obtidas através de simulações numéricas, modelos analíticos, ou resultados experimentais. Quando derivamos as formulações de analogia acústica, devemos saber que algumas simplificações são consideradas. Neste trabalho, apresentamos algumas das formulações de analogia acústica mais utilizadas na literatura para o cálculo de ruído

gerado por escoamentos turbulentos.

Analogia de Lighthill

Sir James Lighthill (Lighthill, 1952, 1954) realizou um trabalho pioneiro na teoria moderna de ruído gerado por escoamentos aerodinâmicos. Em 1952, ele investigou o mecanismo de geração de ruído em jatos, no qual uma intensa distribuição de flutuações de velocidades turbulentas produziam o ruído aeroacústico através da conversão de uma parcela da energia cinética rotacional do escoamento turbulento em ondas longitudinais, que se propagavam como som. Lighthill transformou as equações de Navier-Stokes e de continuidade em uma equação de onda não-homogênea cujos termos fonte são não-nulos somente na região turbulenta do escoamento

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) (c_0^2 \rho') = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.44)$$

Nessa equação, $T_{ij} = \rho u_i u_j + (p' - c_0^2 \rho') \delta_{ij} - \sigma_{ij}$ e é conhecido como o tensor de tensões de Lighthill. Nele, δ_{ij} representa o delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ para $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$), e σ_{ij} é o tensor de tensões viscosas de fluidos stokesianos.

Conforme pode-se observar, o termo fonte da Eq. 2.44 obtida por Lighthill representa uma fonte tipo quadrupolo. A conclusão, portanto, é de que calcular o som gerado por uma fonte turbulenta em um escoamento livre é equivalente a resolver a equação da onda gerada por uma distribuição de fontes do tipo quadrupolo se propagando em um meio estacionário. O tensor T_{ij} depende de três termos:

- $\rho u_i u_j$, associado às tensões de Reynolds e, portanto, às flutuações de velocidade em um escoamento turbulento,
- $p' - c_0^2 \rho'$, associado às flutuações de entropia (se o escoamento for isentrópico, $p' = c_0^2 \rho'$),
- σ_{ij} , referente às forças originárias de tensões viscosas.

Em simulações numéricas, podemos obter as fontes de ruído conhecendo a distribuição espacial e a variação temporal do tensor de Lighthill. Geralmente, essas fontes de ruído estão presentes em regiões de jatos, esteiras e camadas-limite. Conhecido o tensor de Lighthill, a solução da Eq. 2.44 é obtida por

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{ij}(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y}, \quad (2.45)$$

onde assumimos que as ondas acústicas se propagam das fontes para as posições de observadores. Quando resolvemos a equação acima, também consideramos que as ondas acústicas não modificam as fontes de ruído.

Para calcular a radiação sonora aplicando a Eq. 2.45, é preciso conhecer completamente o campo turbulento, algo que pode ser feito com aplicação da aeroacústica computacional. Outra possibilidade é assumir aproximações para a fonte utilizando modelos empíricos. Neste trabalho não estamos interessados em resolver um escoamento turbulento, mas sim, em obter uma estimativa do campo acústico gerado por escoamentos aerodinâmicos. Desse modo, vamos discutir as aproximações necessárias para se avaliar o som no campo distante a partir de algumas hipóteses e simplificações. Por exemplo, considere a pressão acústica dada por

$$p'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y} \quad (2.46)$$

que, após a aplicação da aproximação de Fraunhofer, fica escrita para um observador no campo distante como

$$p'(\mathbf{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}\|}{c_0} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{c_0\|\mathbf{x}\|}\right) d^3\mathbf{y}. \quad (2.47)$$

Considerando um escoamento turbulento com alto número de Reynolds, podemos desprezar os efeitos das tensões viscosas no tensor de Lighthill. Em escoamentos turbulentos em baixos números de Mach e sem efeitos de aquecimento, podemos considerar que $T_{ij} \sim \rho_0 u_i u_j$ (Lighthill, 1952). Além disso, assumindo um observador no campo distante ($\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \sim \|\mathbf{x}\|$) e utilizando a aproximação de Fraunhofer, a Eq. 2.45 se torna:

$$\begin{aligned} p'(\mathbf{x}, t) &\approx \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_0 u_i u_j(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c_0)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y} \\ &\approx \frac{x_i x_j}{4\pi c_0^2 \|\mathbf{x}\|^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 u_i u_j \left(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}\|}{c_0} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{c_0\|\mathbf{x}\|} \right) d^3\mathbf{y}, \quad \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Vale ressaltar que para se obter informações quantitativas a partir da Eq. 2.48, é preciso saber o comportamento do tensor de tensões de Reynolds. Outro aspecto importante a se destacar é a regra para o intercâmbio das derivadas de espaço e tempo utilizadas no

campo distante:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \longleftrightarrow -\frac{1}{c_0} \frac{x_j}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.49)$$

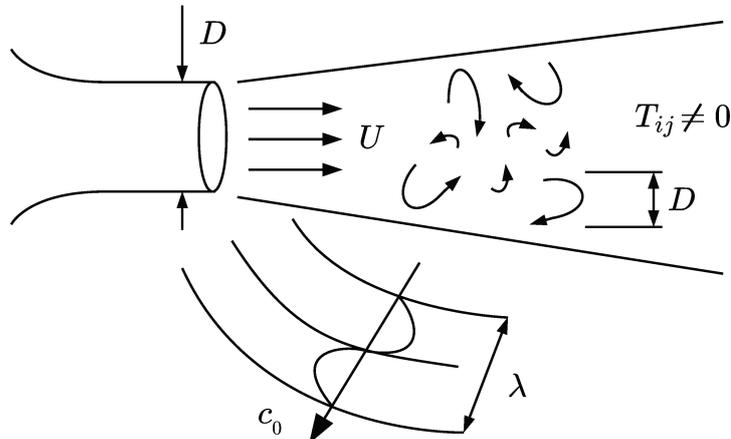


Figura 2.4: Parâmetros característicos para a estimativa da ordem de grandeza do ruído de turbulência livre em jatos.

A Fig.2.4 mostra os parâmetros característicos para se estimar a ordem de magnitude de p' devido à turbulência livre em um jato. Nela, o termo D representa a dimensão característica do problema (diâmetro do jato) e U , a velocidade característica (velocidade da saída do jato).

Na região de propagação (fora da região de escoamento turbulento), a dimensão e velocidade características são dadas pelo comprimento de onda acústico e velocidade do som, λ e c_0 , respectivamente. Deve-se mencionar que um componente fundamental da aeroacústica de jatos consiste no ruído gerado por estruturas coerentes. Nesse caso, a presente análise não pode ser diretamente aplicada. Informações sobre o ruído gerado por estruturas coerentes em jatos podem ser obtidas em (Cavalieri *et. al*, 2012).

Uma vez que a frequência com que o ruído é gerado é a mesma com que ele se propaga, pode-se definir uma frequência característica como $f_c = U/D = c_0/\lambda$. Isolando λ , concluímos que $\lambda = Dc_0/U = D/M_0$. Assim, em escoamentos subsônicos onde $M_0 \ll 1$, temos $\lambda \gg D$. Aplicando essa análise à Eq. 2.48, pode-se mostrar (Lighthill, 1952) que a pressão acústica no campo distante para um dado vórtice turbulento satisfaz

$$p' \sim \frac{D}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\rho_0 U^4}{c_0^2} = \frac{D}{\|\mathbf{x}\|} \rho_0 U^2 M_0^2 \quad (2.50)$$

Para longas distâncias $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ da região da fonte, podemos escrever a pressão acústica de forma generalizada como (Howe, 2003)

$$p'(\mathbf{x}, t) \sim \frac{\rho_0 \psi(\theta, \varphi, t - r/c_0)}{r}$$

em que ψ é uma função que depende do tempo e da natureza da distribuição de fontes, indicando os ângulos de diretividade sonora θ e φ . Uma vez que o ruído produzido por uma região de fonte consiste em partículas de fluido oscilando ao longo da direção de propagação do som, vamos considerar uma superfície esférica de raio $r \rightarrow \infty$, conforme ilustrado pela Fig. 2.5, e utilizar a componente radial da equação de quantidade de movimento linearizada para relacionar a pressão acústica com a velocidade radial em que a partícula de fluido oscila:

$$\frac{\partial u'_r}{\partial t} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial p'}{\partial r} \equiv \frac{\psi}{r^2} + \frac{1}{c_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

de modo que, para $r \rightarrow \infty$,

$$u'_r \sim \frac{\psi}{c_0 r} \equiv \frac{p'}{\rho_0 c_0}.$$

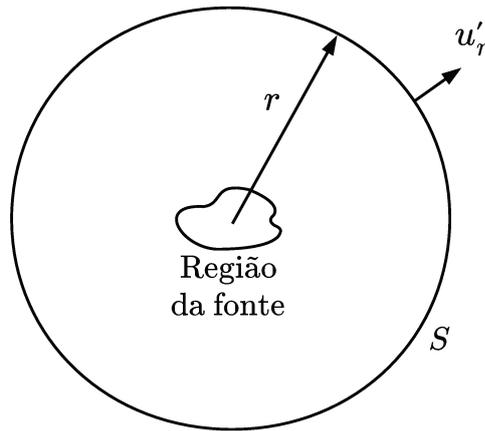


Figura 2.5: Superfície esférica para cálculo da potência acústica.

Assim, a potência acústica no campo distante radiada por um vórtice fica determinada através da expressão

$$\Pi = \oint_S I dS = \oint_S p' u'_r dS = \oint_S \frac{p'^2}{\rho_0 c_0} dS, \quad (2.51)$$

onde a integração é feita sobre a superfície S da esfera de raio r centrada na região da fonte, que no caso é o centro do vórtice. O termo I representa a intensidade acústica, que é a taxa de transmissão de energia acústica por unidade de área da frente de onda. A partir do valor de p' dado pela Eq. 2.50, a potência acústica gerada por um vórtice turbulento não-correlacionado fica

$$\Pi \sim 4\pi \|\mathbf{x}\|^2 \frac{p'^2}{\rho_0 c_0} \sim \frac{D^2 \rho_0 U^8}{c_0^5} = D^2 c_0^3 \rho_0 M_0^8, \quad (2.52)$$

que é conhecida como a lei da oitava potência (para velocidade) de Lighthill para o campo distante. Com a Eq. 2.52, Lighthill mostrou que, para baixos números de Mach, a turbulência num campo livre representa uma fonte sonora extremamente ineficiente, na qual apenas uma pequena parcela da energia do escoamento é convertida em som.

Conforme vimos, quando Lighthill desenvolveu os fundamentos teóricos para o estudo do ruído de jatos circulares e turbulência livre, ele assumiu uma distribuição estatística de vórtices não-correlacionados na região da fonte, numa premissa de que o comportamento dinâmico da turbulência fosse totalmente caótico no espaço e no tempo. Entretanto, previsões acústicas que utilizam modelos baseados na analogia de Lighthill não explicam todos os aspectos do ruído de jatos subsônicos - apesar disso não significar que sua teoria esteja errada! A lei de oitava potência, por exemplo, não se sustenta nas regiões a jusante sob baixos ângulos de emissão com relação ao eixo do jato e, além disso, o formato pontiagudo do espectro do jato geralmente não é recuperado. Isso sugere, então, que os modelos de fonte não são totalmente apropriados para representar os mecanismos físicos que atuam num jato turbulento.

Na década de 60, sob o pioneirismo de Erick Mollo-Christensen (Mollo-Christensen *et. al.*, 1964; Mollo-Christensen, 1967), a descoberta de estruturas coerentes no escoamento de jatos alterou a visão pré-existente da turbulência como sendo um fenômeno puramente estocástico. Mollo-Christensen identificou a intermitência temporal de estruturas com regularidade espacial na camada de cisalhamento de um jato que, de certa forma, estavam associadas ao campo acústico. Uma série de publicações subsequentes confirmaram suas observações e adotaram a teoria de instabilidade como possível base para construção de modelos cinemáticos e dinâmicos para as estruturas coerentes (Michalke, 1970; Crow, 1972; Crighton e Gaster, 1976; Tam e Morris, 1980; Laufer e Yen, 1983; Mankbadi e Liu, 1984; Crighton e Huerre, 1990; Cavalieri *et. al.*, 2011).

Nesse sentido, uma possível estrutura candidata para modelagem da fonte é a de um pacote de ondas estendido sobre o eixo do jato, no qual efeitos de não-linearidade e não-parallelismo do escoamento base são adotados. A consideração da leve divergência do escoamento médio resulta na amplificação e decaimento espacial das ondas de instabilidade, o que leva a formação do pacote de ondas. Essa modulação ajuda explicar a superdiretividade da radiação acústica (decaimento exponencial da pressão acústica com relação a $\phi = \text{acos}(\alpha c_0/\omega)$, onde α é o número de onda axial), decorrente da interferência acústica entre as partes positivas e negativas da fase da fonte (Jordan e Colonius, 2013).

A área de estudo de ruído de jatos turbulentos é muito vasta e até os dias atuais continua despertando o interesse de pesquisadores, visto que ainda não é claro como a turbulência pode ser manipulada de modo a reduzir o ruído produzido por ela (Koenig *et. al.*, 2016). Seria possível nos aprofundarmos no estado-da-arte dos jatos subsônicos,

entretanto, como o objetivo desse trabalho não é tratar sobre jatos especificamente, vamos nos ater apenas a essa breve introdução ao tema.

Analogia de Curle

A analogia de Curle (Curle, 1955) é uma extensão da formulação de Lighthill que permite compreender como o ruído é gerado na presença de corpos sólidos imersos em um escoamento.

Turbulência está geralmente presente nas camadas-limite, esteiras e camadas de cisalhamento formadas ao redor de corpos aerodinâmicos. Assim, nesses casos, irão existir forças não-estacionárias atuando sobre a superfície de tais corpos que estão diretamente associadas à geração de ruído na forma de distribuições de fontes do tipo dipolo. Na analogia de Curle, a abordagem matemática consiste em se considerar superfícies de controle ao redor dos corpos imersos no escoamento. Inicialmente, estaremos interessados no estudo de corpos estacionários na presença de um escoamento com baixo número de Mach ($M_0 \ll 1$) no qual o ruído dos dipolos acaba sendo maior do que aquele proveniente das fontes tipo quadrupolo. Como vimos, fontes tipo quadrupolo obedecem a lei da oitava potência demonstrada na analogia de Lighthill.

Vamos considerar uma função $f(\mathbf{x})$ que define a superfície de controle fechada S onde

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = 0 & , \text{ se } \mathbf{x} \text{ estiver sobre a superfície } S \\ f(\mathbf{x}) > 0 & , \text{ se } \mathbf{x} \text{ estiver na região do fluido } V \\ f(\mathbf{x}) < 0 & , \text{ se } \mathbf{x} \text{ estiver dentro do corpo sólido} \end{cases}$$

e a função de Heaviside

$$H(f) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \mathbf{x} \text{ estiver na região do fluido } V \\ 0 & , \text{ se } \mathbf{x} \text{ estiver dentro do corpo sólido } S \end{cases} \quad (2.53)$$

Então, pode-se provar que, para uma função arbitrária $\varphi(\mathbf{x})$ definida em V e S ,

$$\int_V \varphi(\mathbf{x}) \nabla H(f) d^3\mathbf{x} = \oint_S \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{n} dS \equiv \oint_S \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{S} \equiv \oint_S \varphi(\mathbf{x}) dS_j \quad (2.54)$$

apenas quando $f(\mathbf{x}) = 0$ (ou seja, quando \mathbf{x} estiver sobre a superfície S). Na equação acima, \mathbf{n} representa o vetor normal à superfície S no sentido direcionado ao interior de V . A Fig. 2.6 apresenta um corpo sólido delimitado pela superfície S e uma região de escoamento turbulento em sua proximidade, V_t .

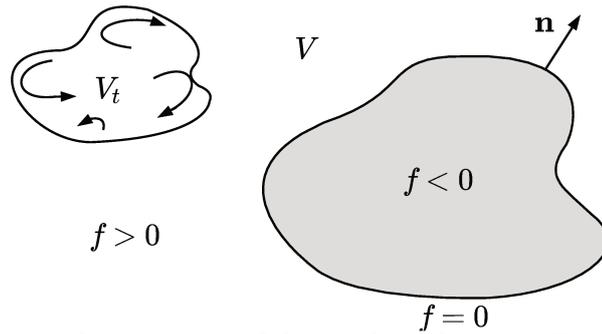


Figura 2.6: Esquema de um corpo delimitado pela superfície S imerso em um escoamento.

A formulação de Curle é obtida multiplicando-se ambos os lados da equação de quantidade de movimento por $H(f)$ e utilizando a definição do tensor de Lighthill,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i H) + \frac{\partial}{\partial x_i}(H c_0^2 \rho') = -\frac{\partial}{\partial x_j}(H T_{ij}) + (\rho u_i u_j + p'_{ij}) \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad (2.55)$$

em que $p'_{ij} = p' \delta_{ij} - \sigma_{ij}$. Repetindo o procedimento na equação da continuidade, temos também

$$\frac{\partial}{\partial t}(H \rho') + \frac{\partial}{\partial x_i}(H \rho u_i) = (\rho u_i) \frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (2.56)$$

Aplicando a transformação apresentada na Eq. 2.54, chega-se na forma diferencial da equação de Curle dada por

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) (H c_0^2 \rho') = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u_j \frac{\partial H}{\partial x_j} \right)}_{\text{monopolo}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left((\rho u_i u_j + p'_{ij}) \frac{\partial H}{\partial x_j} \right)}_{\text{dipolo}} + \underbrace{\frac{\partial^2 (H T_{ij})}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{quadrupolo}}. \quad (2.57)$$

Nessa equação, o termo do lado esquerdo representa a propagação de ondas de densidade (ou pressão, uma vez que no campo acústico $c_0^2 \rho' = p'$), enquanto que os termos do lado direito representam as fontes de ruído resultantes do escoamento ao redor da superfície sólida. Conforme pode-se observar, quando um corpo é imerso em um fluido, passam a existir três fontes de ruído distintas. Os termos do lado direito da equação podem ser modelados por uma fonte tipo monopolo que representa o deslocamento do volume de fluido ao longo da superfície de controle, uma fonte tipo dipolo que inclui os efeitos de carregamentos não-estacionários sobre a superfície de controle e, finalmente, uma fonte tipo quadrupolo, que representa os efeitos de turbulência livre no volume de fluido, como

apresentado na formulação de Lighthill.

Outro aspecto importante a se destacar é que a equação de Curle pode ser resolvida para qualquer superfície de controle, incluindo o volume dentro da superfície de controle S , onde $H(f)$ se torna nulo. Uma vez que a Eq. 2.57 é válida em todo espaço, sua solução é obtida a partir da Eq. 2.46, resultando na equação de Curle

$$Hc_0^2\rho' = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{T_{ij}}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y} - \frac{\partial}{\partial x_i} \oint_S \frac{\rho u_i u_j + p'_{ij}}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dS_j(\mathbf{y}) \\ + \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \frac{\rho u_j}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dS_j(\mathbf{y}). \quad (2.58)$$

Nesse momento, vale destacar que S é uma superfície de controle artificial que pode envolver uma região do fluido, o corpo rígido ou ambos, contendo ou não regiões de escoamento turbulento. Se S estiver envolvendo uma região de fluido, teremos fontes tipo monopolo e dipolo distribuídas ao longo da superfície, além de fontes tipo quadrupolo na região do fluido externamente à S . Assim, estaremos representando o efeito global da presença de corpos sólidos e turbulência dentro dentro de S e, também, os efeitos de geração de ruído fora de S . No entanto, se S for o contorno de um corpo sólido, existirão monopolos e dipolos representando, respectivamente, o som produzido pelas pulsações do volume do corpo (variações volumétricas de S) e as forças não-estacionárias que o corpo vai exercer sobre o fluido em V . Além disso, será necessário incluir todas as fontes tipo quadrupolo do escoamento, pois estas estarão localizadas fora da superfície de controle.

Tendo em vista a utilização da superfície de controle, podemos investigar o ruído produzido por corpos rígidos compactos e não-compactos. Um corpo é dito acusticamente compacto quando sua dimensão característica é pequena quando comparada ao comprimento de onda acústica que ele mesmo produz ou com que ele interage. Mostraremos a seguir uma estimativa de ruído produzido apenas para o caso de corpos compactos através do cálculo da ordem de magnitude da pressão acústica. O caso envolvendo corpos não-compactos possui uma complicação que é o fato do domínio de integração incluir também a região acústica, o que possivelmente envolve uma importante e desconhecida contribuição da pressão que desejamos calcular. Assim, uma simples análise de ordem da magnitude não é aplicável nesse caso. O problema relacionado aos corpos não-compactos foi contornado por Powell (Powell, 1960; Howe, 2003) através da aplicação de imagens especulares das fontes acústicas.

Se o corpo é rígido, então o termo de derivada temporal na Eq. 2.58 é nulo, assim como o termo de tensões de Reynolds na fonte tipo dipolo. Isso ocorre devido à condição de não-escorregamento na superfície sólida (considerando um corpo estacionário), e a

equação se reduz a

$$Hc_0^2\rho' = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{T_{ij}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y} - \frac{\partial}{\partial x_i} \oint_S \frac{p'}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS_j(\mathbf{y}). \quad (2.59)$$

É importante mencionar que estamos desprezando os termos de tensões viscosas.

Conforme visto na analogia de Lighthill, a magnitude dos termos tipo quadrupolo é muito pequena para escoamentos em baixos números de Mach, o que significa dizer que o ruído gerado por um corpo rígido imerso num escoamento se dá principalmente devido às fontes do tipo dipolo. Isso será demonstrado a seguir. Dessa forma, a pressão no campo distante, $p'(\mathbf{x}, t) = c_0^2\rho'(\mathbf{x}, t)$, será, portanto, calculada pela distribuição de dipolos ao longo da superfície sólida. As intensidades das fontes tipo dipolo são obtidas apenas em função das flutuações de pressão ao longo do corpo.

De modo análogo ao feito para a analogia de Lighthill, no qual se usou a representação do potencial retardado para chegar numa estimativa da ordem de grandeza do ruído produzido por um vórtice, aqui usaremos a aproximação de Fraunhofer (Eq. 2.47) no dipolo $\mathcal{F}(\mathbf{y}, \tau) = \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)$, de modo que

$$c_0^2\rho'(\mathbf{x}, t) \approx \frac{-x_j}{4\pi c_0|\mathbf{x}|^2} \frac{\partial}{\partial t} \oint_S f_j \left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{c_0|\mathbf{x}|} \right) dS(\mathbf{y}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

Na equação acima, se considerarmos o corpo como compacto, podemos desprezar as variações de tempo retardado $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}/(c_0|\mathbf{x}|)$.

Portanto, a estimativa da magnitude do ruído gerado pela distribuições de fontes tipo dipolo é obtida através de uma análise de grandeza. Vamos considerar um corpo cujo elemento de superfície tenha dimensão característica D que vai produzir turbulência cuja maior escala também será D . Vamos considerar uma velocidade hidrodinâmica característica U do escoamento ao redor do corpo. Assumiremos que a contribuição da viscosidade nas forças que atuam na superfície do corpo pode ser desprezada e, por fim, teremos

$$\rho' c_0^2 \sim \frac{M_0 \rho_0 U^2 D}{|\mathbf{x}|}, \quad \text{ou seja,} \quad \rho' \sim \frac{\rho_0 M_0^3 D}{|\mathbf{x}|} \quad (2.60)$$

ou ainda,

$$p' \sim \frac{\rho_0 c_0^2 M_0^3 D}{|\mathbf{x}|}. \quad (2.61)$$

A análise de ordem de grandeza acima demonstra que uma fonte tipo dipolo radia som de forma mais eficiente que um quadrupolo ($p'_{dip}/p'_{quad} = 1/M_0$) para escoamentos com

baixos números de Mach típicos de aplicações aeronáuticas em pouso e decolagem. Dessa forma, a intensidade acústica de um dipolo será proporcional a M_0^6 .

Se toda a área superficial A do corpo for coberta por tubulência, existem A/D^2 elementos de superfície independentes que estarão radiando som. A potência total radiada pelos dipolos fica

$$\Pi_{dip} \sim 4\pi ||\mathbf{x}'||^2 \left(\frac{p'^2}{\rho_0 c_0} \right) \sim A\rho_0 U^3 M_0^3. \quad (2.62)$$

Comparando a potência acústica gerada pelo dipolo com aquela gerada por um quadrupolo ($\Pi_{quad} \sim (V_t/D)\rho_0 U^3 M_0^5$), confirmamos a afirmação de que a potência acústica de um dipolo compacto é muito maior do que aquela de um quadrupolo. Na medida em que $M_0 \rightarrow 0$, a potência do dipolo excede a do quadrupolo por um fator de $\sim 1/M_0^2 \gg 1$.

Analogia de Ffowcs-Williams & Hall

O trabalho desenvolvido por Curle leva em consideração a geração e propagação de ruído por um corpo arbitrário sujeito à ação de forças não-estacionárias em sua superfície. Utilizando uma análise dimensional, mostramos que, em um regime cujo número de Mach é suficientemente baixo, a intensidade do som induzido por tais forças obedece a proporção da sexta potência da velocidade do escoamento médio enquanto que, para a turbulência livre, temos a lei da oitava potência dada por Lighthill. Isso significa que o som produzido devido à presença da superfície é dominante, gerando um problema considerável em aplicações aeronáuticas e marítimas.

Entretanto, existe uma classe de problemas onde bordos de fuga finos atuam como centros de espalhamento acústico devido aos efeitos de difração que ocorrem nessas regiões. Essa classe de problemas não é tratada pela análise de Curle, pois ela considera o ruído gerado por superfícies que atuam como fontes compactas. Nesse caso, o problema do espalhamento acústico que ocorre quando uma estrutura turbulenta se encontra próxima de um bordo de fuga requer uma abordagem que leve em consideração os detalhes do campo potencial nas proximidades da zona de espalhamento. Assim, vamos considerar o problema de difração acústica em um bordo de fuga de um aerofólio atuando como uma fonte não-compacta.

Um exemplo dessa classe de problemas considera o ruído de bordo de fuga que ocorre em uma placa fina semi-infinita, primeiramente estudado por Powell (Powell, 1960), onde fontes do tipo dipolo foram posicionadas na proximidade do bordo de fuga fornecendo uma estimativa da densidade espectral de potência sonora emitida, PSD, do inglês *Power*

Spectral Density. Seu modelo, porém, não permitia prever o formato do campo de radiação e também não incluía efeitos de voo.

Várias teorias subsequentes foram publicadas após os estudos de Powell, diferindo entre si principalmente quanto à forma em que ocorre a interação do bordo de fuga da placa com o escoamento perturbado. Howe (Howe, 1978), numa revisão das teorias sobre bordos de fuga, dividiu os trabalhos de diversos autores em três categorias: 1) teorias baseadas na analogia de Lighthill (na qual a analogia de Ffowcs-Williams & Hall se inclui), 2) teorias baseadas na solução das equações potenciais não-estacionárias linearizadas, e 3) modelos baseados em distribuições de fontes determinadas empiricamente.

Ffowcs-Williams & Hall (Williams e Hall, 1970) consideraram uma análise da equação de Lighthill para um escoamento com alto número de Reynolds onde turbulência se desenvolve em um ambiente em repouso, $\mathbf{u}_0 = 0$. Desse modo, $T_{ij} \approx \rho u_i u_j$, e a equação de Lighthill, Eq. 2.44, no domínio da frequência, fica:

$$\nabla^2 \hat{p}' + k^2 \hat{p}' = - \left[\widehat{\frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}} \right], \quad k = \frac{\omega}{c_0}. \quad (2.63)$$

A partir da função de Green G que é a solução fundamental da equação de Helmholtz para uma perturbação pontual dada por

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.64)$$

Ffowcs-Williams & Hall utilizaram o segundo teorema de Green

$$\int_V G \nabla^2 \hat{p}' - \hat{p}' \nabla^2 G dV = \oint_S G \frac{\partial \hat{p}'}{\partial \mathbf{n}} - \hat{p}' \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (2.65)$$

para escrever a pressão perturbada como

$$\hat{p}'(\mathbf{x}, \omega) = \underbrace{\oint_S G \frac{\partial \hat{p}'}{\partial \mathbf{n}} - \hat{p}' \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS}_{\text{ruído espalhado}} + \underbrace{\int_V G \widehat{\frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}} dV}_{\text{ruído incidente}}. \quad (2.66)$$

Na equação acima, o termo $\partial \hat{p}' / \partial \mathbf{n} = 0$ já que a placa é rígida, e a integral para o ruído incidente é não nula na região turbulenta e deve ser avaliada somente dentro dessa região. A ideia de Ffowcs-Williams & Hall foi a de que, uma vez que a equação acima é válida para qualquer função de Green, é possível eliminar a integral de superfície assumindo uma condição onde $\partial G / \partial \mathbf{n} = 0$. Dessa forma, o efeito do espalhamento acústico estará incluído em G , e basta conhecer informações sobre o tensor de Reynolds do campo turbulento para

se estimar a pressão no campo distante, de acordo com a equação abaixo:

$$\hat{p}'(\mathbf{x}, \omega) = \int_V \widehat{\rho u_i u_j} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} dV. \quad (2.67)$$

A Eq. 2.67 pode ser obtida através da aplicação do teorema de Gauss e na segunda integral em 2.66 e integrando por partes.

Vamos considerar um sistema de coordenadas cilíndrico tal que $(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_r, u_\theta, u_z)$ e que existe uma fonte localizada em (r_s, θ_s, z_s) e um observador em $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$, conforme mostrado na Fig. 2.7 abaixo.

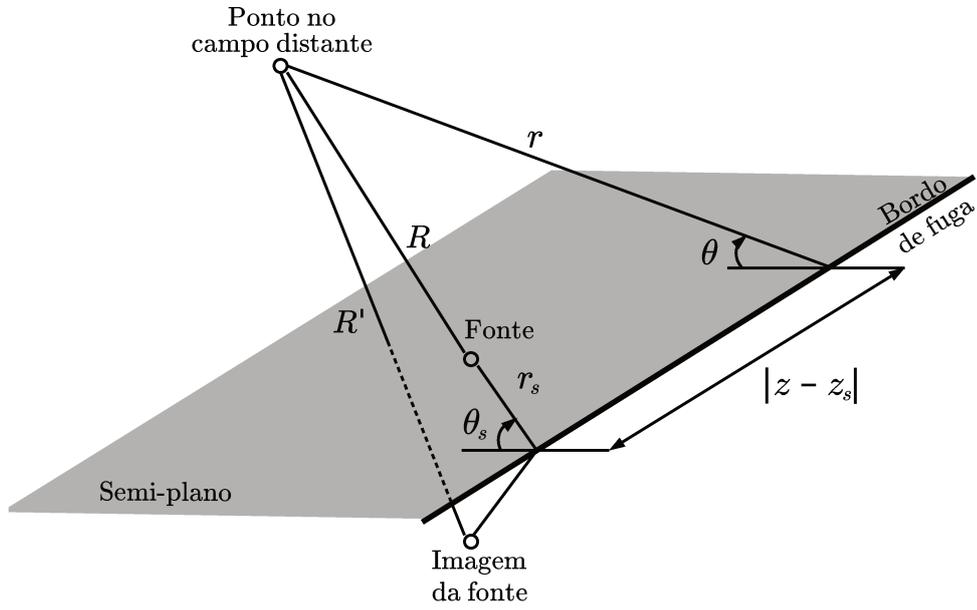


Figura 2.7: Sistema de coordenadas cilíndrico sobre o bordo de fuga.

Nesse sistema de coordenadas cilíndrico, a Eq. 2.67 se torna:

$$\begin{aligned} \hat{p}'(\mathbf{x}, \omega) = & \int_V \widehat{\rho u_r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial r_s^2} + \widehat{\rho u_z^2} \frac{\partial^2 G}{\partial z_s^2} + \widehat{\rho u_r u_z} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r_s \partial z_s} + \frac{\partial^2 G}{\partial z_s \partial r_s} \right) + \\ & \widehat{\rho u_\theta^2} \left(\frac{1}{r_s^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta_s^2} + \frac{1}{r_s} \frac{\partial G}{\partial r_s} \right) + \widehat{\rho u_z u_\theta} \left[\frac{1}{r_s} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta_s \partial z_s} + \frac{\partial}{\partial z_s} \left(\frac{1}{r_s} \frac{\partial G}{\partial \theta_s} \right) \right] + \\ & \widehat{\rho u_r u_\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r_s} \left(\frac{1}{r_s} \frac{\partial G}{\partial \theta_s} \right) + \frac{z}{r_s} \frac{\partial}{\partial \theta_s} \left(\frac{\partial G}{\partial r_s} \right) - \frac{1}{r_s^2} \frac{\partial G}{\partial \theta_s} \right] dV_s, \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde $dV_s = r_s dr_s d\theta_s dz_s$.

Vamos considerar que o ponto (r, θ, z) esteja distante do bordo do plano e da região turbulenta, *i.e.*, $kr \gg 1$ e $r \gg r_s$. Para esse campo distante, Macdonald (Macdonald,

1915) encontrou a função de Green adaptada satisfazendo $\partial G/\partial \mathbf{n} = 0$ para o semi-plano, sendo ela dada em termos de funções de Green de espaço livre ponderadas por uma combinação de integrais de Fresnel, conforme abaixo:

$$G = \frac{(1+i)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \int_{-\infty}^{\Lambda_R} e^{-i\xi^2} d\xi + \frac{e^{-ikR'}}{R'} \int_{-\infty}^{\Lambda_{R'}} e^{-i\xi^2} d\xi \right\}, \quad (2.69)$$

onde os limites de integração, que são argumentos das integrais de Fresnel, são

$$\Lambda_R = 2 \left(\frac{k r r_s}{D + R} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\theta - \theta_s}{2} \right)$$

e

$$\Lambda_{R'} = 2 \left(\frac{k r r_s}{D + R'} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\theta + \theta_s}{2} \right).$$

O termo R representa a distância entre a localização da fonte e do observador no campo distante

$$R = \{r^2 + r_s^2 - 2rr_s \cos(\theta - \theta_s) + (z - z_s)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

e R' é a distância entre a imagem especular da fonte com relação ao plano e o ponto no campo

$$R' = \{r^2 + r_s^2 - 2rr_s \cos(\theta + \theta_s) + (z - z_s)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

O termo D é dado por

$$D = \{(r + r_s)^2 + (z - z_s)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Quando G é substituído na Eq. 2.68 e suas derivadas são calculadas utilizando a regra de Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{g(x)}^{h(x)} F(t, x) dt \right\} = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} F(t, x) dx + F(h, x) \frac{dh}{dx} - F(g, x) \frac{dg}{dx},$$

os termos $(D + R)^{\frac{1}{2}}$ e $(D + R')^{\frac{1}{2}}$ presentes nos limites de integração ainda ficam remanescentes na equação e podem ser simplificados para o campo distante. Assim,

$$D + R \approx 2[r^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$$

e

$$D + R' \approx 2[r^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}},$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned} \Lambda_R &\approx \left\{ 2kr_s \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z - z_s)^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta - \theta_s}{2}\right) \\ &\approx (2kr_s)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta - \theta_s}{2}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda_{R'} &\approx \left\{ 2kr_s \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z - z_s)^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta + \theta_s}{2}\right) \\ &\approx (2kr_s)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta + \theta_s}{2}\right). \end{aligned}$$

No campo distante, ambos Λ_R e $\Lambda_{R'}$ são independentes de z_s , o que exclui a possibilidade do termo

$$\int_V \widehat{\rho u_z^2} \frac{\partial^2 G}{\partial z_s^2} dV_s$$

ter uma magnitude representativa. Portanto, uma conclusão imediata obtida por Ffowcs-Williams & Hall (Williams e Hall, 1970) foi a de que um quadrupolo longitudinal alinhado paralelamente ao bordo de fuga não influencia o som no campo distante. Eles também mostram que, no caso em que $\theta = \pi$, ou seja, na metade complementar do plano rígido onde $R = R'$, a função adaptada de Green retorna ao caso da função de Green de campo livre, o que é de se esperar já que as frentes de onda não "enxergariam" a espessura infinitesimal da placa que compõem o semi-plano neste caso.

Ffowcs-Williams & Hall também analisaram o caso quando um vórtice é posicionado próximo ao bordo, ou seja, $2kr_s \ll 1$, o que seria representativo, por exemplo, de uma camada limite turbulenta escoando sobre o bordo de fuga de uma asa com alto alongamento. Para isso, partiram de uma aproximação da função de Green via expansão em séries da integral de Fresnel e substituíram G na Eq. 2.68 verificando quais eram os termos dominantes da equação resultante. Nesse caso, dentre os termos $(2kr_s)^{-\frac{3}{2}}$, $(2kr_s)^{-\frac{1}{2}}$

e $2kr_s$ que aparecem na equação, aquele que apresenta o fator $(2kr_s)^{-\frac{3}{2}}$ é dominante, visto que $2kr_s \ll 1$, o que nos leva a equação:

$$\widehat{p}'(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{\sqrt{2} k^2 (1 + i)}{4\pi\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z - z_s)^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \int_V \left(\widehat{\rho u_r^2} \cos \frac{\theta_s}{2} - \widehat{\rho u_\theta^2} \cos \frac{\theta_s}{2} - 2\widehat{\rho u_r u_\theta} \sin \frac{\theta_s}{2} \right) \frac{e^{ikR}}{R} (2kr_s)^{-3/2} dV_s. \quad (2.70)$$

A consequência direta disso é a de que a contribuição das tensões ρu_r^2 , ρu_θ^2 e $\rho u_r u_\theta$ são amplificadas de acordo com $(2kr_s)^{-\frac{3}{2}}$ para o ruído no campo distante. Vale ressaltar que a integração no volume deve ser feita para as estruturas turbulentas satisfazendo $2kr_s \ll 1$.

Através da Eq. 2.70, é possível estimar a intensidade acústica no campo distante para o caso de um vórtice próximo do bordo de fuga. Denominando 2δ como o diâmetro característico de uma estrutura turbulenta, então temos que

$$\widehat{p}' \sim k^2 k^{-\frac{3}{2}} u^2 = k^{\frac{1}{2}} u^2 = \left(\frac{2\pi}{c_o} \frac{u}{2\delta} \right)^{\frac{1}{2}} u^2 \approx u^{2.5} \quad (2.71)$$

e, conseqüentemente, a intensidade acústica no campo distante tem ordem proporcional à quinta potência da velocidade do fluido, $I \sim M_0^5$. Ao compararmos esse resultado com a lei da oitava potência de Lighthill para turbulência livre, ou com a lei da sexta potência para os dipolos de uma superfície compacta de Curle, vemos que a presença de bordos finos impacta consideravelmente o aumento do ruído aerodinâmico gerado em baixos números de Mach.

É importante ressaltar que no trabalho de Ffowcs-Williams & Hall, nenhuma consideração foi feita para se estimar a influência da placa plana no escoamento turbulento. Além disso, os autores argumentam que a ordem de quinta potência encontrada é consequência de uma singularidade que aparece no campo potencial na região do bordo e que, se a condição de Kutta fosse introduzida na formulação, limitando o efeito dessa singularidade, o resultado poderia ser diferente. Uma última consideração a se fazer é a de que, para frequências suficientemente baixas, a hipótese de alto número de Reynolds perde a validade em regiões próximas ao bordo de fuga. Assim, os efeitos viscosos passam a ser significativos nessa região, tornando difícil a justificativa da presença da singularidade. Embora forças viscosas pudessem ser consideradas para remover a singularidade, a esteira de vórtices não-estacionários que surgiria do bordo de fuga resultaria em um aumento da geração de flutuações turbulentas no escoamento. No entanto, Ffowcs-Williams & Hall não consideram a influência da reação da placa no escoamento turbulento (Howe, 1978).

Teoria de Amiet

Conforme vimos anteriormente, os trabalhos sobre bordos de fuga podem ser classificados em três grupos, sendo que a teoria de Ffowcs-Williams & Hall se enquadra no grupo baseado na analogia acústica de Lighthill. Nesta seção, a teoria de Amiet (Amiet, 1975a, 1976a) será apresentada para o cálculo de ruído gerado por bordos de ataque. Deve-se mencionar que uma teoria similar à apresentada nesta seção pode ser desenvolvida também para bordos de fuga (Amiet, 1976b, 1978). Na teoria de Amiet, a solução da equação potencial não-estacionária linearizada é abordada diretamente, resolvendo-se um problema de valor de contorno.

Equações fundamentais

Amiet desacoplou o cálculo de distribuição do carregamento no aerofólio (*i.e.*, as fontes acústicas) da predição de ruído no campo distante (Amiet, 1975a, 1976a). Sendo assim, primeiramente, mostraremos a expressão teórica para a densidade espectral de potência no campo distante produzida pelo aerofólio em termos das quantidades características turbulentas, bem como a simplificação da análise para números de onda particulares de um escoamento turbulento. Uma vez tratados os aspectos relevantes para predição do ruído no campo distante, mostraremos o cálculo de distribuição do carregamento sobre o aerofólio. Tal cálculo procede de um problema aerodinâmico não-estacionário mais simples, que corresponde à passagem de uma asa sobre uma rajada cuja velocidade local possui direção e magnitude arbitrárias. Um escoamento turbulento é composto por rajadas que incidem paralelamente e obliquamente sobre a asa, na direção de sua corda.

Pelo fato da presente teoria lidar diretamente com o problema de valor de contorno, derivadas parciais aparecerão com frequência e, portanto, a partir deste momento, é mais conveniente alternarmos algumas das notações utilizadas neste trabalho. Assim, a posição espacial será representada por: $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$. Além disso, subíndices serão utilizados para denotar o operador de derivação parcial. Por exemplo: $\partial(\cdot)/\partial x_1 = (\cdot)_x$, $\partial(\cdot)/\partial x_2 = (\cdot)_y$ e, por fim, $\partial(\cdot)/\partial x_3 = (\cdot)_z$.

A base para a dedução da equação da velocidade potencial para pequenas perturbações é a equação da continuidade

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.72)$$

Vamos assumir que o escoamento é compressível, não-viscoso, irrotacional e composto por um escoamento livre não-perturbado \mathbf{u}_0 com uma flutuação de velocidade $\mathbf{u}' = \nabla \phi$ tal que $\phi_x/|\mathbf{u}_0|$, $\phi_y/|\mathbf{u}_0|$, $\phi_z/|\mathbf{u}_0| \ll 1$. Considerando a corrente livre direcionada ao

longo do eixo x positivo, *i.e.*, $\mathbf{u}_0 = (u_0, 0, 0)$, podemos escrever que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \nabla\phi = [(u_0 + \phi_x), \phi_y, \phi_z] = \nabla\Phi$ e a equação da continuidade se torna

$$\rho_t + [\rho(u_0 + \phi_x)]_x + (\rho\phi_y)_y + (\rho\phi_z)_z = 0. \quad (2.73)$$

De modo a remover as derivadas de ρ , vamos utilizar a equação da quantidade de movimento na forma da equação de Euler linearizada

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p, \quad (2.74)$$

e vamos utilizar também a seguinte relação para o cálculo da velocidade do som

$$\frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = c_0^2, \quad (2.75)$$

onde c_0 é a velocidade do som do escoamento livre. Assim, obtemos a seguinte equação

$$dp = -\rho d(\Phi_t + \Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 + 2\Phi_x\Phi_y + 2\Phi_y\Phi_z + 2\Phi_x\Phi_z) = c_0^2 d\rho. \quad (2.76)$$

Substituindo a forma diferencial acima nas derivadas da densidade na Eq. 2.73, obtemos uma equação diferencial parcial não-linear para Φ . Essa equação não-linear é estritamente válida para escoamentos isentrópicos mas é, também, uma boa aproximação para escoamentos com a presença de ondas de choque fracas, embora seja inconsistente manter todos os termos de mais alta ordem na equação visto que a vorticidade induzida pelos choques teria uma contribuição da mesma ordem que os termos de ordem mais alta na equação (Landahl, 1961).

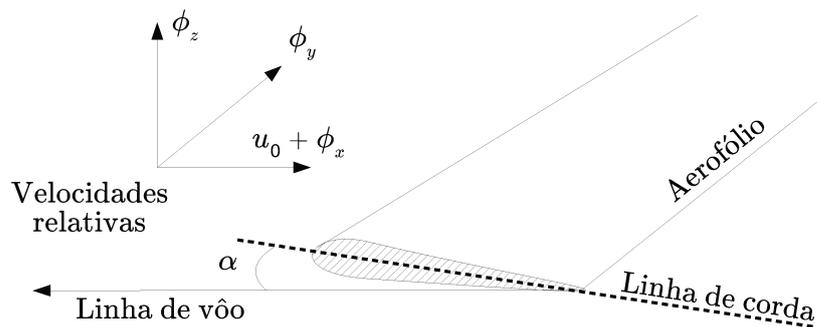
Como no presente trabalho não estamos interessados no regime transônico ou em velocidades próximas à $M = 1$, vamos considerar que a perturbação do escoamento é sempre pequena de modo que os termos de alta ordem na perturbação podem ser desprezados em comparação com os termos lineares e, então, qualquer discussão mais detalhada sobre a retenção dos termos de mais alta ordem pode ser desconsiderada (é importante ressaltar apenas que é preciso tomar um cuidado especial com Φ_x já que derivadas lineares para ϕ podem vir desse termo mesmo quando ele é multiplicado por outra derivada de Φ). Desse procedimento obtemos a seguinte equação de onda com efeitos de convecção

$$(1 - M_0^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} - (2M_0/c_0)\phi_{xt} - (1/c_0^2)\phi_{tt} = 0. \quad (2.77)$$

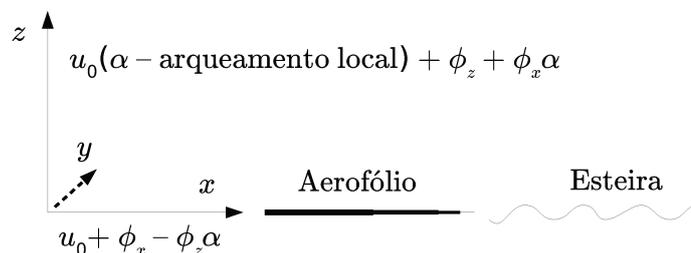
Um caminho mais fácil para se chegar na mesma equação de pequenas perturbações seria utilizando a equação de Bernoulli. Tal desenvolvimento pode ser encontrado em (Dowell, 2015).

A Eq. 2.77 é válida para aerofólios finos já que é necessário que tanto a espessura do aerofólio quanto a amplitude do movimento transversal não-estacionário sejam pequenas comparadas com a unidade para que as perturbações do escoamento também sejam pequenas. Deve-se mencionar que a teoria linearizada não se sustenta nas proximidades das discontinuidades da superfície do aerofólio.

No escopo da teoria de aerofólios finos, todos os componentes de \mathbf{u} , ângulo de incidência α e arqueamento são assumidos pequenos e o efeito da velocidade na direção da envergadura ϕ_y pode ser desprezado. Dessa forma, os componentes do vetor de velocidades podem ser divididos em três grupos: um componente estacionário devido ao *upwash* médio relativo proveniente da incidência e arqueamento $u_0(\alpha - \text{arqueamento local})$, um componente quasi-estacionário referente à velocidade na direção da corda $u_0 + \phi_x$, e componentes não-estacionários resultantes do *upwash* ϕ_z e de quantidades pequenas de segunda ordem $\phi_x\alpha$ e $\phi_z\alpha$. Assumindo que $|\phi_z| \ll |\phi_x|$, o único componente de segunda-ordem não-estacionário restante será $\phi_x\alpha$, que pode ser tratado como ϕ_z . Essa situação é mostrada na Fig. 2.8.



(a) Componentes de velocidades relativas



(b) Componentes de velocidades linearizadas

Figura 2.8: Componentes de velocidade de uma rajada (adaptado de Graham (Graham, 1970)).

Quando as escalas temporais de dissipação viscosa e difusão turbulenta forem muito maiores que aquelas relativas à advecção do escoamento médio, as mudanças na esteira

aerodinâmica e no padrão de *upwash* no plano do aerofólio ocorrerão apenas em distâncias muito maiores que a corda. Nesse caso, podemos considerar que a hipótese de Taylor (Taylor, 1938) é válida e a turbulência passando sobre o aerofólio é estacionária em um sistema de referência que se move com o escoamento médio.

Uma vez que os efeitos de pequenas perturbações sobre um aerofólio fino representam um problema linear, eles podem ser tratados utilizando uma análise de Fourier. O componente de Fourier mais simples de ser estudado é o de uma rajada vertical senoidal bidimensional, na qual as frentes de onda são paralelas ao bordo de ataque. Esse problema foi estudado por Sears (Sears, 1941) que considerou um escoamento turbulento incompressível onde a hipótese de Taylor de turbulência congelada foi aplicada. Frequentemente, esse tipo de rajada é referida como rajada de Sears. Em seu modelo, Sears adotou uma distribuição de singularidades de vórtices ao longo do aerofólio e na esteira para conservar a vorticidade em todo o campo, e a solução foi encontrada satisfazendo a condição de contorno de *upwash* na direção da corda em termos dessas singularidades. Diversas outras análises de problemas incompressíveis bidimensionais similares foram realizadas em seguida e muitas delas levam a expressões analíticas para coeficientes de sustentação em termos de funções tabeladas (Graham e Kullar, 1977).

No entanto, para os casos em que a frente de onda da rajada é oblíqua ao aerofólio ou o escoamento é compressível e subsônico, não existe uma solução analítica em termos de um número finito de funções conhecidas, ou seja, recai-se sempre num processo iterativo. Um desses casos foi investigado por Possio (Possio, 1938), que desenvolveu uma extensão da solução de Sears para um escoamento bidimensional compressível no contexto de um problema de *flutter* aeroelástico. Possio calculou os coeficientes aerodinâmicos de um escoamento não-estacionário causado pela oscilação da asa ao invés de uma rajada utilizando uma integral para a distribuição de pressão na direção da corda. Subsequentemente, diversos autores estenderam o trabalho de Possio para encontrar outros métodos aproximados para a solução de sua equação integral (Frazer, 1941; Schade, 1946; Dietze, 1947; Fettis, 1952a,b).

Outra forma de se abordar o caso estudado por Possio lida diretamente com o problema de valor de contorno da equação diferencial da velocidade potencial. Nesse sentido, Reissner and Sherman (Reissner e Sherman, 1944) encontraram uma solução explícita para o problema em termos de funções de Mathieu, introduzindo um sistema de coordenadas curvilíneas adequado. Independentemente, outros autores desenvolveram métodos analíticos, diferindo entre si em detalhes, usando séries infinitas de funções de Mathieu e funções modificadas de Mathieu para resolver o problema de contorno equivalente da equação de onda (ver Timman (Timman, 1946), Haskind (Haskind, 1947), Billington (Billington, 1949) and Reissner (Reissner, 1951)). Particularmente, Reissner

(Reissner, 1951) transformou a equação potencial linearizada de pequenas perturbações na equação de Helmholtz formando a base de regras de similaridade apresentada por Graham (Graham, 1970), que simplificou o problema generalizado de uma rajada compressível oblíqua relacionando-o a um ou outro de dois problemas mais simples de ordem reduzida. Esses casos mais simples são: 1) escoamento incompressível com rajadas oblíquas e 2) escoamento compressível bidimensional com rajadas paralelas.

Cálculos acústicos

Conforme vimos na analogia de Curle, um aerofólio imerso em um escoamento turbulento irá presenciar flutuações de carregamento que irão resultar na geração de ruído. Assim, o carregamento sobre um aerofólio fica descrito por uma distribuição de fontes tipo dipolo sobre sua superfície.

Para uma fonte pontual, vimos que é possível encontrar p' a partir da função de Green. No caso da Eq. 2.77, a função de Green de campo livre é a solução fundamental de

$$(1 - M_0^2)G_{xx} + G_{yy} + G_{zz} - (2ikM_0)G_x + k^2G = \delta(x - x_s)\delta(y - y_s)\delta(z - z_s),$$

onde,

$$G = -\frac{1}{4\pi r} \exp\{-ik[r - M_0(x - x_s)]/\beta^2\},$$

$r = \sqrt{(x - x_s)^2 + \beta^2[(y - y_s)^2 + (z - z_s)^2]}$ é a distância entre a fonte e o observador considerando os efeitos de compressibilidade, e o subíndice $(\cdot)_s$ faz referência aos componentes da posição \mathbf{y} da fonte. O termo M_0 corresponde ao número de Mach e $\beta = \sqrt{1 - M_0^2}$ é o fator de compressibilidade. Portanto, a pressão no campo distante no domínio da frequência decorrente de uma fonte dipolo pontual na superfície do aerofólio, considerando os efeitos convectivos, é obtida através da Eq. 2.38 e da função de Green, apresentada acima, como

$$\hat{p}'(\mathbf{x}, \omega) = \frac{ik \mathbf{x}_c \cdot \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \omega)}{4\pi r^2} \left(1 + \frac{1}{ikr}\right) \exp\{-ik[r - M_0(x - x_s)]/\beta^2\}, \quad (2.78)$$

onde $\mathbf{x}_c = \left([(x - x_s) - M_0 r]/\beta^2, y - y_s, z - z_s\right)$ representa a posição relativa entre fonte e observador corrigida pelo efeito de compressibilidade. Deve-se mencionar que a função de Green e a equação acima são escritas no domínio da frequência, com um fator $\exp(i\omega t)$ implícito.

Vamos considerar que uma asa possui espessura infinitesimal, corda $2b$, envergadura $2d$ e esteja imersa em um escoamento turbulento. Esse escoamento será representado por

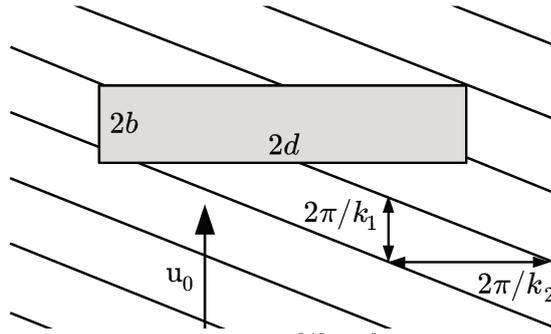


Figura 2.9: Vista do plano $x - y$ com o aerofólio de espessura infinitesimal e as rajadas oblíquas incidentes.

uma rajada periódica oblíqua cuja velocidade média é u_0 na direção positiva do eixo x , conforme mostra a Fig. 2.9. Além disso, vamos admitir que o sistema de coordenadas tenha sua origem posicionada no centro da asa.

Dessa forma, $\mathbf{x}_c \cdot \hat{\mathbf{f}} = z\hat{l}$, onde \hat{l} representa a sustentação por elemento de superfície no domínio da frequência, e o ruído radiado pode ser calculado integrando-se a superfície da asa:

$$\begin{aligned} \hat{p}'(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{y}) &= \int_{-d}^d \int_{-b}^b \frac{ikz\hat{l}(\mathbf{y}, \omega)}{4\pi r^2} \left(1 + \frac{1}{ikr}\right) \exp\{-ik[r - M_0(x - x_s)]/\beta^2\} dx_s dy_s \\ &\equiv \int_S \frac{ikz\hat{l}(\mathbf{y}, \omega)}{4\pi r^2} \left(1 + \frac{1}{ikr}\right) e^{-ik\sigma} dS, \end{aligned} \quad (2.79)$$

sendo que escrevemos $[r - M_0(x - x_s)]/\beta^2 = \sigma$ por motivo de simplificação na escrita.

De acordo com a Fig. 2.9, ou ainda com a Fig. 2.10, onde k_1 e k_2 são os números de onda hidrodinâmicos nas direções da corda e da envergadura, respectivamente, vamos expressar a velocidade de uma rajada vertical senoidal oblíqua como sendo

$$\phi_z \equiv w = \hat{\hat{w}}(k_1, k_2) \exp\{i[k_1(u_0 t - x_s) - k_2 y_s]\}, \quad (2.80)$$

onde o termo $\hat{\hat{w}}$ representa uma dupla transformada de Fourier no espaço definida como

$$\hat{\hat{w}}(k_1, k_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-N}^N w(x_s, y_s) \exp[-i(k_1 x_s + k_2 y_s)] dx_s dy_s.$$

Nessa definição, N é um número grande, porém finito, visto que $w(x_s, y_s)$ não vai para zero quando x_s e y_s tendem para o infinito, resultando em problemas de convergência da integral.

A componente de sustentação no domínio da frequência \hat{l} presente na Eq. 2.79, no

caso de uma placa plana, está relacionada ao salto de pressão na placa, $\Delta\hat{p}'$. Podemos encontrar na literatura (Amiet, 1974, 1975b) expressões analíticas para a distribuição do salto de pressão $\Delta\hat{p}'$ em uma placa plana de envergadura infinita sujeita a uma rajada incidente. No caso da rajada considerada neste trabalho, a distribuição de pressão para números de onda hidrodinâmicos específicos k_1 e k_2 fica escrita como

$$\Delta p'(\mathbf{y}, t) = 2\pi\rho_0 u_0 \hat{w}(k_1, k_2) g(x_s, k_1, k_2) e^{i(k_1 u_0 t - k_2 y_s)}. \quad (2.81)$$

O salto de pressão devido a todos os comprimentos de onda hidrodinâmicos é obtido através da seguinte integração

$$l(\mathbf{y}, t) = \Delta p' = 2\pi\rho_0 u_0 \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{w}(k_1, k_2) g(x_s, k_1, k_2) e^{i(k_1 u_0 t - k_2 y_s)} dk_1 dk_2,$$

que, após a aplicação da transformada de Fourier no tempo, se torna

$$\begin{aligned} \hat{l}(\mathbf{y}, \omega) &= 2\pi\rho_0 \times \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{w}(k_1, k_2) g(x_s, k_1, k_2) e^{-ik_2 y_s} \left(\frac{u_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_1 u_0 - \omega)t} dt \right) dk_1 dk_2 \\ &= 2\pi\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}(K_1, k_2) g(x_s, K_1, k_2) e^{-ik_2 y_s} dk_2. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Na equação acima, g é a função de transferência entre a velocidade do escoamento turbulento e o salto de pressão no aerofólio e $K_1 = \omega/u_0$ é um número de onda particular na direção da corda. Note que o termo entre parênteses na equação acima é a transformada de Fourier de uma exponencial complexa que resulta em um delta de Dirac $\delta(k_1 u_0 - \omega)$. A importância desse resultado na teoria é que o ruído produzido por uma determinada frequência acústica ω está relacionado com um componente único K_1 do número de onda da perturbação na direção da corda.

Uma vez que a turbulência é um processo estocástico, é mais conveniente trabalharmos com quantidades estatísticas como a densidade espectral de potência, S_{pp} , ao invés de quantidades determinísticas. Nesse sentido, a densidade espectral de potência em dois pontos distintos $\mathbf{y}_{(1)}$ e $\mathbf{y}_{(2)}$ da superfície é escrita como uma função do operador estatístico valor esperado, $E[\cdot \cdot \cdot]$, como

$$S_{pp} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi}{T} E[\hat{p}'(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{y}_{(1)}) \hat{p}'^*(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{y}_{(2)})] \right\},$$

onde $(\cdot)^*$ denota o operador complexo conjugado. Então, para uma distribuição de fontes tipo dipolo, temos

$$S_{pp}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{S_{(1)}} \int_{S_{(2)}} \left(\frac{kz}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{r_{(1)}^2 r_{(2)}^2} \left(1 + \frac{1}{ikr_{(1)}} \right) \left(1 + \frac{1}{ikr_{(2)}} \right)^* \times$$

$$S_u(\mathbf{y}_{(1)}, \mathbf{y}_{(2)}, \omega) e^{-ik(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})} dS_{(2)} dS_{(1)}, \quad (2.83)$$

onde S_u é a densidade espectral de potência para a flutuação da força de sustentação que, de forma similar ao caso da pressão, é definida como

$$S_u = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi}{T} E[\hat{l}(\mathbf{y}_{(1)}, \omega) \hat{l}^*(\mathbf{y}_{(2)}, \omega)] \right\}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi}{T} E[\hat{l}(x_{s(1)}, y_{s(1)}, \omega) \hat{l}^*(x_{s(2)}, y_{s(2)}, \omega)] \right\},$$

e está relacionada com o cálculo da distribuição de cargas não-estacionárias sobre o aerofólio. Sendo assim,

$$S_u(\mathbf{y}_{(1)}, \mathbf{y}_{(2)}, \omega) = (2\pi\rho_0)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{w}(K_1, k_{2(1)}) \hat{w}^*(K_1, k_{2(2)}) g(x_{s(1)}, K_1, k_{2(1)}) \times$$

$$g^*(x_{s(2)}, K_1, k_{2(2)}) e^{-ik_{2(1)}y_{(1)}} e^{ik_{2(2)}y_{(2)}} dk_{2(1)} dk_{2(2)}. \quad (2.84)$$

Assumindo que a turbulência é isotrópica, é possível utilizarmos a propriedade de ortogonalidade estatística dos autovetores (Hinze, 1975) para escrever

$$\hat{w}(K_1, k_{2(1)}) \hat{w}^*(K_1, k_{2(2)}) = u_0 \delta(k_{2(1)} - k_{2(2)}) \Phi_{ww}(K_1, k_{2(1)}),$$

onde Φ_{ww} pode ser modelado utilizando o espectro de energia de von Kármán para turbulência, e conseqüentemente,

$$S_u(\mathbf{y}_{(1)}, \mathbf{y}_{(2)}, \omega) = (2\pi\rho_0)^2 u_0 \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ww}(K_1, k_2) g(x_{s(1)}, K_1, k_2) g^*(x_{s(2)}, K_1, k_2) e^{-ik_2(y_{(1)} - y_{(2)})} dk_2. \quad (2.85)$$

Substituindo a Eq. 2.85 na Eq. 2.83, temos

$$S_{pp}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{S_{(1)}} \int_{S_{(2)}} \left(\frac{\rho_0 kz}{2} \right)^2 u_0 \frac{1}{r_{(1)}^2 r_{(2)}^2} \left(1 + \frac{1}{ikr_{(1)}} \right) \left(1 + \frac{1}{ikr_{(2)}} \right)^* \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ww}(K_1, k_2) g(x_{s(1)}, K_1, k_2) g^*(x_{s(2)}, K_1, k_2) \times \quad (2.86)$$

$$e^{-ik_2(y(1)-y(2))} e^{-ik(\sigma(1)-\sigma(2))} dk_2 dS_{(2)} dS_{(1)}.$$

Se assumirmos um observador no campo distante ($\|\mathbf{x}_c\| \gg \lambda$), podemos fazer $r^2 \approx x^2 + \beta^2(y^2 + z^2)$ e a equação Eq. 2.86 pode ser simplificada ao se desprezar os termos $1/(ikr)$ relativos ao campo próximo, resultando em

$$S_{pp}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{S_{(1)}} \int_{S_{(2)}} \left(\frac{\rho_0 k z}{2} \right)^2 u_0 \frac{1}{r^4} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ww}(K_1, k_2) g(x_{s(1)}, K_1, k_2) g^*(x_{s(2)}, K_1, k_2) \times$$

$$e^{-ik_2(y(1)-y(2))} e^{-ik(\sigma(1)-\sigma(2))} dk_2 dS_{(2)} dS_{(1)}. \quad (2.87)$$

Essa equação pode ser reescrita de modo equivalente como

$$S_{pp}(\mathbf{x}, \omega) = \left(\frac{\rho_0 k z b}{2} \right)^2 u_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ww}(K_1, k_2) \times$$

$$\left[\iint_{-d}^d \frac{1}{r^4} e^{-i(k_2/r - k_2)(y(2)-y(1))} dy_{s(1)} dy_{s(2)} \right] \times$$

$$\left\{ \frac{1}{b} \int_{-b}^b g(x_{s(1)}, K_1, k_2) e^{ik x_{s(1)}(x - M_0 r)/(\beta^2 r)} dx_{s(1)} \right\} \times$$

$$\left\{ \frac{1}{b} \int_{-b}^b g^*(x_{s(2)}, K_1, k_2) e^{ik x_{s(2)}(x - M_0 r)/(\beta^2 r)} dx_{s(2)} \right\} dk_2, \quad (2.88)$$

onde os termos entre $\{\cdot\}$ evidenciam a função de transferência aeroacústica, definida como (Amiet, 1975a)

$$\mathcal{L}(x, K_1, k_2) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b g(x_s, K_1, k_2) e^{-ik x_s / \beta^2 (M_0 - x/r)} dx_s. \quad (2.89)$$

Sendo assim, S_{pp} pode ser reescrita em termos da função de transferência aeroacústica

$$\begin{aligned}
S_{pp}(\mathbf{x}, \omega) &= \left(\frac{\rho_0 k z b}{2} \right)^2 u_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ww}(K_1, k_2) |\mathcal{L}(x, K_1, k_2)|^2 \\
&\quad \left[\iint_{-d}^d \frac{1}{r^4} e^{-i(k_2/r - k_2)(y_{(2)} - y_{(1)})} dy_{s(1)} dy_{s(2)} \right] dk_2 \\
&= \left(\frac{\rho_0 k z b}{2} \right)^2 u_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ww}(K_1, k_2) |\mathcal{L}(x, K_1, k_2)|^2 \\
&\quad \left[\frac{4\pi d \operatorname{sen}^2[(K_2 - k_2)d]}{r (K_2 - k_2)^2 \pi d} \right] dk_2, \tag{2.90}
\end{aligned}$$

com $K_2 = yk/r$. No caso de um aerofólio com alongamento elevado ($d \gg b$), o seno cardinal tende à função delta de Dirac

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \left(\frac{\operatorname{sen}^2[(K_2 - k_2)d]}{(K_2 - k_2)^2 \pi d} \right) = \delta(K_2 - k_2).$$

Segundo Amiet, para um valor de k_2 fixo, se tomarmos K_1 grande o suficiente, o ponto de intersecção entre a frente de onda da rajada e o bordo de ataque vai se mover supersonicamente (na direção da envergadura) com relação ao fluido. O problema, então, se torna similar ao problema de um escoamento compressível bidimensional, o que significa que a resposta do aerofólio à rajada é independente de k_2 e, conseqüentemente, Φ_{ww} e \mathcal{L} se tornam independentes de k_2 e podem sair da integral. Por fim,

$$S_{pp}(\mathbf{x}, \omega) = \left(\frac{\rho_0 k z b}{r^2} \right)^2 \pi u_0 d \Phi_{ww}(K_1, K_2) |\mathcal{L}(x, K_1, K_2)|^2. \tag{2.91}$$

A conclusão obtida por Amiet é a de que não é preciso integrar todos os números de onda hidrodinâmicos de modo a calcular o ruído em um ponto distante. Ao invés disso, para pequenas escalas de turbulência, o ruído no campo distante está relacionado a apenas um componente particular do número de onda da turbulência, o que permite a simplificação do problema.

A Eq. 2.91 nos fornece o ruído no campo distante em termos da densidade espectral de potência da pressão, porém, ainda é preciso conhecer a função de transferência aeroacústica. Dada a conclusão de que o ruído decorre de apenas um certo comprimento de onda hidrodinâmico específico, vamos retornar à Eq. 2.81 com $k_1 = K_1$ e $k_2 = K_2$ para encontrar a função de transferência g e, em seguida, calculamos \mathcal{L} através da Eq. 2.89.

Para uma rajada vertical senoidal oblíqua com velocidade expressa como

$$\phi_z = w_0 \exp[i(\omega t - k_1 x - k_2 y)], \quad (2.92)$$

e tendo em vista que em uma placa plana, $\Delta p' = 2p'$, temos que

$$g(x_s, k_1, k_2) = \frac{p'(\mathbf{y}, t) e^{ik_2 y_s} e^{-i\omega t}}{\pi \rho_0 u_0 w_0}. \quad (2.93)$$

Cálculo analítico do carregamento não-estacionário em aerofólios

Seguindo Amiet (Amiet, 1976a), desse momento em diante, mostraremos o procedimento para o cálculo do carregamento em um aerofólio fino, *i.e.*, o cálculo de p' . Para tanto, vamos considerar um sistema de coordenadas posicionado sobre o bordo de ataque de um aerofólio de envergadura infinita e corda $2b$, conforme mostrado na Fig. 2.10.

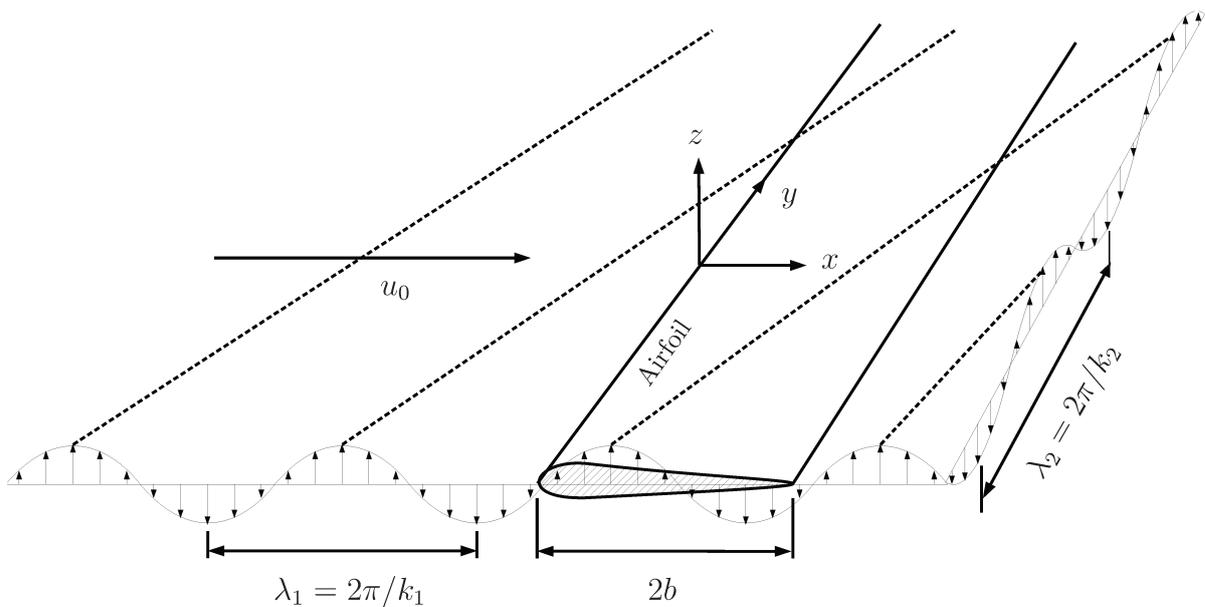


Figura 2.10: Números de onda hidrodinâmicos de uma rajada vertical senoidal oblíqua (adaptado de Graham (Graham, 1970)).

A partir de uma rajada cuja velocidade é descrita pela Eq. 2.92, a velocidade do escoamento fica expressa como

$$\mathbf{u} = \{u_0, 0, w_0 \exp[i(\omega t - k_1 x - k_2 y)]\} \quad , \quad \text{em que } \omega = k_1 u_0, \quad (2.94)$$

e a condição de contorno de não-penetração sobre a superfície do aerofólio fica dada por

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \phi_z) = 0 \quad , \quad z = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 2b. \quad (2.95)$$

Das Eqs. 2.94 e 2.95, concluimos que uma velocidade de rajada oposta deve ser adicionada de modo a cancelar a rajada incidente e garantir a condição de contorno de não-penetração. Nesse caso, a Eq. 2.95 se torna:

$$\phi_z = -w_0 \exp[i(\omega t - k_1 x - k_2 y)] \quad , \quad z = 0 \quad , \quad 0 < x \leq 2b. \quad (2.96)$$

Conforme mencionado anteriormente, podemos aplicar uma análise de Fourier na velocidade potencial uma vez que o problema é linear. Assim, uma dupla transformada de Fourier (uma com respeito ao tempo e outra espacial) do carregamento induzido pela turbulência pode ser representado pelo carregamento induzido pela rajada oblíqua. Então, vamos supor um potencial de velocidades perturbado ϕ de forma

$$\phi(x, y, z, t) = \phi'(x, z) \exp \left[i \left(\omega t + \frac{k M_0}{\beta^2} x - k_2 y \right) \right], \quad (2.97)$$

onde $\beta = \sqrt{1 - M_0^2}$ é o fator de compressibilidade e $k = \omega/c_0 = k_1 M_0$ é o número de onda acústico. É importante destacar que na Eq. 2.97 o modo espacial é dividido em dois componentes ortogonais (um na direção do eixo x e outro em y). Seus valores são escolhidos apropriadamente com a finalidade de se obter simplificações nos desenvolvimentos seguintes.

Substituindo a Eq. 2.97 na Eq. 2.77 e lembrando que a velocidade na direção da envergadura ϕ_y pode ser desprezada, depois de algumas simplificações, obtemos a seguinte equação

$$\beta^2 \phi'_{xx} + \phi'_{zz} + (k^2/\beta^2 - k_2^2) \phi' = 0. \quad (2.98)$$

Seguindo Reissner (Reissner, 1951), vamos fazer uma mudança de variáveis de modo a obtermos a equação de Helmholtz em sua forma não-dimensional para o plano de Prandtl-Glauert transformado. Assim, utilizaremos

$$\bar{x} = \frac{x}{b}, \quad \bar{y} = \frac{\beta y}{b}, \quad \bar{z} = \frac{\beta z}{b},$$

e, então, temos

$$\phi'_{\bar{x}\bar{x}} + \phi'_{\bar{z}\bar{z}} + \frac{b^2}{\beta^2} \left(\frac{k^2}{\beta^2} - k_2^2 \right) \phi' = 0,$$

ou como $k = \omega/c_0 = k_1 M_0$, reescrevemos a equação acima como

$$\phi'_{\bar{x}\bar{x}} + \phi'_{\bar{z}\bar{z}} + A^2(1 - 1/\theta^2) \phi' = 0 \quad (2.99)$$

em que

$$A = \frac{bk_1M_0}{\beta^2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{k_1M_0}{k_2\beta}.$$

O parâmetro θ acima define a natureza do problema representado pela Eq. 2.99. Se $\theta > 1$, a solução representa a propagação de ondas acústicas e a rajada é denominada supercrítica. Nesse tipo de problema, uma perturbação inicial não é notada no mesmo instante em todas as posições do escoamento, porém, ela é propagada como uma onda com velocidade finita ao longo das linhas características (considerando a solução de um problema hiperbólico). No caso de $\theta \leq 1$, a rajada é denominada subcrítica e as ondas são evanescentes (rajadas subcríticas contribuem para o campo distante apenas para aerofólios com envergadura finita) (Roger e Moreau, 2005).

Uma vez que o escoamento é não-estacionário, o potencial perturbado do escoamento livre é descontínuo ao longo do aerofólio e através da esteira, a qual se assume estar localizada a jusante do aerofólio no plano $z = 0$. Portanto, não basta definirmos a condição de contorno ao longo do aerofólio, mas também na esteira e no infinito.

A primeira condição de contorno no aerofólio já foi dada (ver Eq. 2.96) e, na forma adimensional fica

$$\phi'_z = -\frac{w_0b}{\beta} \exp\left(\frac{-ik_1\bar{x}b}{\beta^2}\right), \quad 0 < \bar{x} \leq 2, \quad \bar{z} = 0. \quad (2.100)$$

A segunda condição de contorno é a de que a descontinuidade de pressão ao longo de $z = 0$ é nula na esteira e no bordo de fuga para garantir a condição de Kutta. Então $D\phi/Dt = 0$ para $x \geq 2b$ e, na forma adimensional, a equação para a condição de contorno na esteira e bordo de fuga se torna

$$\phi'_{\bar{x}} + \frac{ik_1b}{\beta^2}\phi' = 0, \quad \bar{x} \geq 2, \quad \bar{z} = 0. \quad (2.101)$$

A terceira condição de contorno é a de que as perturbações devem desaparecer no infinito, *i.e.*, a condição de radiação de Sommerfeld deve ser satisfeita. Porém, essa última condição de contorno depende da equação potencial (Eq. 2.99) ser elíptica ($\theta \leq 1$) ou hiperbólica ($\theta > 1$). No primeiro caso ($\theta \leq 1$), temos que

$$\phi' \rightarrow 0 \quad \text{na medida em que} \quad (\bar{x}^2 + \bar{z}^2) \rightarrow \pm\infty. \quad (2.102)$$

No segundo ($\theta > 1$), é preciso assumir que a radiação ocorre no sentido do aerofólio

para o infinito, sem reflexões. Assim,

$$\phi' \exp \left[iA \sqrt{(1 - 1/\theta^2)(\bar{x}^2 + \bar{z}^2)} \right] \rightarrow 0 \quad (2.103)$$

na medida em que $(\bar{x}^2 + \bar{z}^2) \rightarrow \pm\infty$.

A rigor, essa deve ser a condição de contorno para o problema, mas, de modo a utilizar a solução de Schwarzschild (será discutida em breve), devemos impor o potencial nulo para o semi-plano $\bar{x} \leq 0$ ao invés do infinito.

Assim, a equação potencial para o campo de escoamento (Eq. 2.99) tem a forma $\phi'_{\bar{x}\bar{x}} + \phi'_{\bar{z}\bar{z}} \pm K^2 \phi' = 0$, onde $K \in \mathbb{R}$. Podemos, então, dividir o problema em três classes

- Escoamentos subcríticos: $\phi'_{\bar{x}\bar{x}} + \phi'_{\bar{z}\bar{z}} - K^2 \phi' = 0$ ($\theta < 1$)
- Escoamentos críticos: $\phi'_{\bar{x}\bar{x}} + \phi'_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ ($\theta = 1$)
- Escoamentos supercríticos: $\phi'_{\bar{x}\bar{x}} + \phi'_{\bar{z}\bar{z}} + K^2 \phi' = 0$ ($\theta > 1$).

Para cada classe de problemas, o campo de escoamento surge da mesma equação potencial sujeita às mesmas condições de contorno. De acordo com Graham (Graham, 1970), esses escoamentos similares devem estar localizados no espaço (M, kb, k_2b) sob as linhas $K = \text{constante}$ e $k/\beta = \text{constante}$.

Os membros de um escoamento subcrítico são similares àqueles da superfície $\theta = 0$, que consiste no problema incompressível oblíquo. Os escoamentos críticos, onde $\theta = 1$, são similares aos incompressíveis bidimensionais cuja solução foi dada por Sears (Sears, 1941). Por fim, se fizermos $\theta \rightarrow \infty$, temos o grupo compressível bidimensional, similar ao caso supercrítico.

Adamczyk (Adamczyk, 1974) derivou soluções para uma rajada sob a hipótese de Taylor de turbulência congelada para ambos os casos bidimensional compressível e tridimensional incompressível usando a técnica de Wiener-Hopf. Entretanto, os resultados numéricos de Adamczyk, eram de certo modo inconvenientes, pois requeriam diversos cálculos computacionais e integrações e, também, porque não revelavam explicitamente a importância dos vários parâmetros envolvidos. Amiet (Amiet, 1976a), por sua vez, encontrou uma abordagem mais simples para o método de Adamczyk, fornecendo soluções equivalentes através do uso das regras de similaridade de Graham, que relacionam as rajadas compressíveis e oblíquas a um único problema. Essa metodologia será apresentada a seguir através da solução de Schwarzschild.

Solução de Schwarzschild

Schwarzschild (Schwarzschild, 1901) desenvolveu um procedimento para a solução da equação de Helmholtz com as seguintes condições de contorno

$$\phi'_{\bar{x}\bar{x}} + \phi'_{\bar{z}\bar{z}} + K^2\phi' = 0,$$

$$\phi'_{\bar{z}}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{x} < 0,$$

$$\phi'(\bar{x}, 0) = f(\bar{x}), \quad \bar{x} \geq 0.$$

Então, para qualquer $\bar{x} < 0$ e $\bar{z} = 0$, a solução pode ser escrita como

$$\phi'(\bar{x}, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\bar{x}, \xi, \bar{z}) f(\xi) d\xi, \quad \text{em que,} \quad G(\bar{x}, \xi, 0) = \frac{e^{-iK(\xi-\bar{x})}}{\xi - \bar{x}} \sqrt{\frac{-\bar{x}}{\xi}}. \quad (2.105)$$

A primeira aplicação do teorema de Schwarzschild em aerodinâmica foi feita por Landahl (Landahl, 1961) para estudar distribuições de sustentação em uma asa oscilante em velocidades transônicas para a predição de *flutter*. Neste trabalho, aplicaremos a solução de Schwarzschild para resolver a metodologia de Amiet que aborda o ruído de bordo de ataque em um aerofólio.

Solução analítica do carregamento não-estacionário para uma placa plana

Na teoria de Amiet, para frequências elevadas, o aerofólio se torna uma fonte não-compacta e, portanto, podemos separar os efeitos do bordo de ataque daqueles relacionados ao bordo de fuga. Então, podemos obter a solução do bordo de ataque como se o bordo de fuga fosse inexistente, o que significa considerar um aerofólio com bordo de ataque e uma corda semi-infinita. Uma vez que a solução para bordo de ataque é encontrada, podemos calcular a correção para o bordo de fuga de forma similar, continuando o processo iterativo até a convergência da solução. Outra razão para o uso de tal procedimento iterativo é o fato da solução de Schwarzschild considerar apenas duas das três condições de contorno requeridas para a solução do problema de um aerofólio imerso em um escoamento não-estacionário.

Landahl (Landahl, 1961) aplicou a solução de Schwarzschild para um problema compressível bidimensional hiperbólico. Esse mesmo procedimento, equivalente ao escoamento supercrítico descrito anteriormente, foi adotado por Amiet (Amiet, 1976a) seguido pela extensão do problema para o caso de uma rajada oblíqua utilizando uma

pequena modificação em termos de separação de variáveis que também poderia ser substituída pelo uso das regras de similaridade de Graham. Neste trabalho, vamos analisar diretamente o caso de uma rajada oblíqua incidente no bordo de ataque de um aerofólio.

O processo iterativo é realizado de modo a se obter a solução da equação de Helmholtz com as seguintes condições de contorno:

$$\phi'_{\bar{x}\bar{x}} + \phi'_{\bar{z}\bar{z}} + K^2\phi' = 0, \text{ em que } K^2 = \frac{b^2}{\beta^2} \left(\frac{k^2}{\beta^2} - k_2^2 \right), \quad (2.106)$$

$$\phi'(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{x} \leq 0, \quad (2.107a)$$

$$\phi'_{\bar{z}}(\bar{x}, 0) = -\frac{w_0 b}{\beta} \exp\left(-\frac{ik_1 b \bar{x}}{\beta^2}\right), \quad 0 < \bar{x} < 2, \quad (2.107b)$$

e

$$\phi'_{\bar{x}} + \frac{ik_1 b}{\beta^2} \phi' = 0, \quad \bar{x} \geq 2. \quad (2.107c)$$

De acordo com Amiet, o primeiro passo consiste em se encontrar a solução potencial de ordem zero, $\phi'^{(0)}$, que satisfaz a condição de contorno de não-penetração na superfície do aerofólio antes mesmo de aplicar a solução de Schwarzschild. Nesse primeiro passo não existe restrição quanto ao limite da extensão do aerofólio bem como as condições de contorno a montante e a jusante do aerofólio não são consideradas, *i.e.*, $\phi'^{(0)}$ satisfaz a Eq. 2.106 com a condição de contorno dada pela Eq. 2.107b, mas não satisfaz as Eqs. 2.107a e 2.107c.

A solução para a Eq. 2.106 é então escrita como

$$\phi'^{(0)}(\bar{x}, \bar{z}) = C_1 \exp\left(C_2 \bar{x} - i\bar{z}\sqrt{K^2 + C_2^2}\right)$$

na qual C_1 e C_2 são constantes a serem determinadas pela condição de não penetração, Eq. 2.107b. Dessa forma, encontramos que $C_1 = -w_0/\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ e que $C_2 = -ik_1 b/\beta^2$. Portanto,

$$\phi'^{(0)}(\bar{x}, \bar{z}) = -\frac{w_0}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \exp\left(-\frac{ik_1 b \bar{x}}{\beta^2} - \frac{b\bar{z}}{\beta} \sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right). \quad (2.108)$$

A solução de primeira-ordem $\phi'^{(1)}$ leva em conta a correção do bordo de ataque, considerando as seguintes condições de contorno

$$\phi'_{\bar{x}\bar{x}} + \phi'_{\bar{z}\bar{z}} + K^2\phi'^{(1)} = 0,$$

$$\phi'^{(1)}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{x} \leq 0,$$

e

$$\phi'_{\bar{z}}^{(1)}(\bar{x}, 0) = -\frac{w_0 b}{\beta} \exp\left(-\frac{ik_1 b \bar{x}}{\beta^2}\right), \quad \bar{x} > 0.$$

Note que, acima, o aerofólio se estende de seu bordo de ataque $\bar{x} = 0$ até o infinito a jusante do mesmo. Embora existam as duas condições de contorno, elas não se enquadram exatamente nas requeridas para utilizarmos a solução de Schwarzschild. Para contornarmos esse problema, encontramos o potencial de primeira-ordem $\phi'^{(1)}$ usando $\phi'^{(0)}$ e adicionando a correção do bordo de ataque $\Psi^{(1)}$ que cancela $\phi'^{(0)}$ para $\bar{x} < 0$ e, então, coincide com as condições de contorno do teorema de Schwarzschild. Essa é a razão pela qual é necessário calcular o potencial de ordem zero antes de iniciar o procedimento iterativo. As equações para a correção do bordo de ataque são escritas como

$$\Psi_{\bar{x}\bar{x}}^{(1)} + \Psi_{\bar{z}\bar{z}}^{(1)} + K^2 \Psi^{(1)} = 0,$$

$$\Psi^{(1)}(\bar{x}, 0) = -\phi'^{(0)}, \quad \bar{x} \leq 0,$$

e

$$\Psi_{\bar{z}}^{(1)}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{x} > 0.$$

Da Eq. 2.105, podemos substituir \bar{x} por $-\bar{x}$ para inverter o domínio em que cada condição de contorno deve ser satisfeita. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(\bar{x}, 0) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iK(\xi+\bar{x})}}{\xi+\bar{x}} \sqrt{\frac{\bar{x}}{\xi}} \phi'^{(0)}(-\xi, 0) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{w_0}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} e^{-iK\bar{x}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\bar{x}}{\xi}} \frac{e^{-i\xi(K-k_1b/\beta^2)}}{\xi+\bar{x}} d\xi. \end{aligned} \tag{2.111}$$

A avaliação da integral complexa acima é complicada e, por isso, seu desenvolvimento será apresentado adiante. Gradshteyn e Ryzhik (Gradshteyn e Ryzhik's, 2007) mostram

que

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi^{\nu-1} e^{-\mu\xi}}{\xi + \vartheta} d\xi = \vartheta^{\nu-1} e^{\vartheta\mu} \Gamma(\nu) \Gamma(1 - \nu, \vartheta\mu) \quad (2.112)$$

$$|\arg \vartheta| < \pi, \quad \Re(\mu) \geq 0, \quad \Re(\nu) > 0,$$

onde Γ é a função gama. Fazendo $\vartheta = \bar{x}$, $\nu = 1/2$ e $\mu = i(K - k_1 b/\beta^2)$, e substituindo na Eq. 2.112, temos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi^{-1/2} e^{-i(K-k_1 b/\beta^2)\xi}}{\xi + \bar{x}} d\xi = \bar{x}^{-1/2} e^{i\bar{x}(K-k_1 b/\beta^2)} \Gamma(1/2) \Gamma[1/2, i\bar{x}(K - k_1 b/\beta^2)]. \quad (2.113)$$

Sabendo que

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$$

e que a função gama incompleta é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma[1/2, iA] &= \int_{iA}^{\infty} t^{1/2-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt - \int_0^{iA} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \\ &= \sqrt{\pi} - \int_0^{iA} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi} + \int_0^A \frac{i e^{-it'}}{\sqrt{it'}} dt' = \sqrt{\pi} + \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \int_0^A \frac{e^{-it'}}{\sqrt{t'}} dt', \end{aligned}$$

reescrevemos a Eq. 2.113 como

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i(K-k_1 b/\beta^2)\xi}}{\sqrt{\xi}(\xi + \bar{x})} d\xi &= \frac{\pi}{\sqrt{\bar{x}}} e^{i\bar{x}(K-k_1 b/\beta^2)} \left(1 + (1+i) \int_0^{\bar{x}(K-k_1 b/\beta^2)} \frac{e^{-it'}}{\sqrt{2\pi t'}} dt' \right) = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\bar{x}}} e^{i\bar{x}(K-k_1 b/\beta^2)} \left\{ 1 + (1+i) E^*[\bar{x}(K - k_1 b/\beta^2)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.114)$$

onde E é a combinação de integrais de Fresnel definida abaixo e E^* representa seu complexo conjugado.

$$E(x) = \int_0^x \frac{e^{it}}{\sqrt{2\pi t}} dt.$$

A Eq. 2.111 é definida para $\bar{x} > 0$, então o argumento das integrais de Fresnel na

Eq. 2.114 será sempre negativo já que $K - k_1 b / \beta^2 < 0$ para o regime subsônico. Porém, podemos utilizar a relação $(1 + i)E^*(-x) = -(1 - i)E(x)$ para escrever a correção do bordo de ataque (Eq. 2.111) como

$$\Psi^{(1)}(\bar{x}, 0) = \frac{w_0}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} e^{-i\bar{x}k_1 b / \beta^2} \left\{ 1 - (1 - i)E[\bar{x}(k_1 b / \beta^2 - K)] \right\}, \quad (2.115)$$

para $\bar{x} > 0$.

Conforme mencionado anteriormente, a solução de primeira-ordem é a superposição $\phi^{(1)} = \phi^{(0)} + \Psi^{(1)}$ que resulta em

$$\phi^{(1)}(\bar{x}, 0) = -\frac{w_0}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} e^{-i\bar{x}k_1 b / \beta^2} (1 - i) E[\bar{x}(k_1 b / \beta^2 - K)], \quad (2.116)$$

para $\bar{x} > 0$.

A segunda iteração leva em conta a região a jusante do aerofólio, onde a condição de Kutta $D\phi/Dt = 0$ deve ser satisfeita. Uma vez que a pressão é relacionada com a velocidade potencial pela equação de Euler linearizada ($p' = -\rho_0 D\phi/Dt$), é mais conveniente trabalharmos diretamente com a pressão. Para isso, vamos reescrever a solução de primeira-ordem novamente no domínio do tempo, lembrando que $\phi^{(1)} = \phi^{(1)} \exp[i(\omega t + kM_0 x / \beta^2 - k_2 y)]$. Assim, temos

$$p^{(1)}(x, 0) = \frac{\rho_0 w_0 u_0 (1 - i)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left\{ E \left[\left(\frac{k_1 b}{\beta^2} - K \right) \frac{x}{b} \right] \right\}_x e^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y)}, \quad (2.117)$$

para $\bar{x} > 0$.

Aplicando a regra de Leibniz para calcular a derivada em x ,

$$\left[\int_{g(x)}^{h(x)} F(t, x) dt \right]_x = \int_{g(x)}^{h(x)} \left[F(t, x) \right]_x dx + F(h, x) \frac{dh}{dx} - F(g, x) \frac{dg}{dx},$$

obtemos a expressão final para a pressão como $p^{(1)} = p^{(1)}(x, y, z, t)$ válida para $x > 0$ e $z = 0$:

$$p^{(1)} = \frac{\rho_0 w_0 u_0 (1 - i)}{\sqrt{2\pi (k_1^2 + k_2^2) (k_1 / \beta^2 - K/b) x}} \left(\frac{k_1}{\beta^2} - \frac{K}{b} \right) e^{i[\omega t + (k_1 / \beta^2 - K/b - k_1)x - k_2 y]} =$$

$$\frac{\rho_0 w_0 u_0 (1 - i)}{\sqrt{2\pi (k_1 + \beta^2 K/b) x}} \exp \left\{ i \left[\omega t + \left(\frac{k_1 M_0^2}{\beta^2} - \frac{K}{b} \right) x - k_2 y \right] \right\}. \quad (2.118)$$

Escrevendo a pressão também para os modos de Fourier

$p'(x, y, z, t) = p''(x, z) \exp[i(\omega t + k_1 M_0^2 / \beta^2 x - k_2 y)]$, temos que

$$p''^{(1)} = \frac{\rho_0 w_0 u_0 (1 - i)}{\sqrt{2\pi} (k_1 + \beta^2 K / b) x} \exp\left(\frac{-iKx}{b}\right). \quad (2.119)$$

As duas condições de contorno que são consideradas na segunda iteração são dadas pelas Eqs. 2.107b e 2.107c. É importante enfatizar que, durante a primeira iteração, havíamos considerado um aerofólio semi-infinito se estendendo de seu bordo de ataque $\bar{x} = 0$ até $+\infty$. No entanto, para a segunda iteração, o aerofólio deve ser considerado variando de seu bordo de fuga $\bar{x} = 2$ até $-\infty$. O problema, então, se reduz a resolver as seguintes equações

$$p''_{\bar{x}\bar{x}}^{(2)} + p''_{\bar{z}\bar{z}}^{(2)} + K^2 p''^{(2)} = 0,$$

$$p''_{\bar{z}}^{(2)}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{x} < 2,$$

e

$$p''^{(2)}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{x} \geq 2.$$

Para utilizar a solução de Schwarzschild, $p''^{(2)}$ é obtido pela superposição $p''^{(2)} = p''^{(1)} + P^{(2)}$, na qual $P^{(2)}$ é a variável que cancela $p''^{(2)}$ para $\bar{x} \geq 2$ e pode ser encontrada utilizando a solução de Schwarzschild.

$$P_{\bar{x}\bar{x}}^{(2)} + P_{\bar{z}\bar{z}}^{(2)} + K^2 P^{(2)} = 0,$$

$$P_{\bar{z}}^{(2)}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{x} < 2,$$

e

$$P^{(2)}(\bar{x}, 0) = -p''^{(1)}, \quad \bar{x} \geq 2.$$

Portanto, da Eq. 2.105 temos o seguinte resultado válido para $\bar{x} < 2$ e $\bar{z} = 0$

$$\begin{aligned} P^{(2)}(\bar{x} - 2, 0) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iK(\xi - \bar{x} + 2)}}{\xi - \bar{x} + 2} \sqrt{\frac{-\bar{x} + 2}{\xi}} p''^{(1)}(\xi + 2, 0) d\xi = \\ &= -\frac{\rho_0 w_0 u_0 (1 - i)}{\pi \sqrt{2\pi} (k_1 b + \beta^2 K)} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{-\bar{x} + 2}{\xi}} \frac{e^{-iK(\xi - \bar{x} + 2)}}{\xi - \bar{x} + 2} \frac{e^{-iK(\xi + 2)}}{\sqrt{\xi + 2}} d\xi. \end{aligned}$$

A integral acima não possui solução analítica e Amiet (Amiet, 1976a) contornou esse

problema assumindo uma aproximação para $\sqrt{\xi + 2} \approx \sqrt{2}$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(2)}(\bar{x} - 2, 0) &\approx -\frac{\rho_0 w_0 u_0 (1 - i) \sqrt{\bar{x} + 2}}{\pi \sqrt{4\pi(k_1 b + \beta^2 K)}} e^{-iK(-\bar{x}+4)} \int_0^\infty \frac{e^{-i2K\xi}}{\sqrt{\xi}(\xi - \bar{x} + 2)} d\xi \\ &= -\frac{\rho_0 w_0 u_0 (1 - i)}{\sqrt{4\pi(k_1 b + \beta^2 K)}} e^{-iK\bar{x}} \{1 - (1 - i)E[2K(\bar{x} - 2)]\}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Ambas as correções de bordo de ataque e de fuga foram, portanto, consideradas. No entanto, $p^{(2)} = p''^{(2)} \exp[i(\omega t + k_1 M_0^2/\beta^2 x - k_2 y)]$ não satisfaz completamente a condição de Sommerfeld e um potencial residual sempre estará presente na região a montante do bordo de ataque do aerofólio. Devido a esse fato, a solução de Schwarzschild deve ser aplicada utilizando um processo iterativo com sucessivas correções de bordo de ataque e de fuga. Roger & Moreau (Roger e Moreau, 2005) mostram que, para altas frequências, esse potencial pode ser desprezado depois de duas iterações e de Santana (Santana *et. al.*, 2016) mostra que em regimes de baixa frequência, esse efeito ainda é relevante para o cálculo do ruído. A função de transferência que relaciona a rajada de amplitude w_0 , a velocidade do escoamento uniforme u_0 , e a densidade ρ_0 ao salto de pressão Δp é calculada pela Eq. 3.2.

Finalmente, para um observador posicionado no campo distante $\mathbf{x} = (x, y, z)$, a função de transferência aeroacústica para uma placa plana é dada analiticamente por $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, onde de acordo com Christophe (Christophe, 2011),

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{x}, k_1, k_2) = \frac{(1 - i) \exp[ikb(M_0 - x/r)/\beta^2]}{\pi \sqrt{\Upsilon_1(k_1 b + \beta^2 K)}} E^*(2\Upsilon_1). \quad (2.121)$$

A solução acima corresponde à solução da técnica de Schwarzschild para o bordo de ataque, e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\mathbf{x}, k_1, k_2) &\approx \frac{\exp[ikb(M_0 - x/r)/\beta^2]}{2\pi \Upsilon_1 \sqrt{\pi(k_1 b + \beta^2 K)}} \left\{ (1 + i) [1 - \exp(-i2\Upsilon_1)] - \right. \\ &\quad \left. 2i \left[E^*(4K) - \sqrt{\frac{2K}{\Upsilon_2}} \exp(-i2\Upsilon_1) E^*(2\Upsilon_2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.122)$$

se refere à correção de difração secundária que ocorre no bordo de fuga, com $\Upsilon_1 = K - kb x / (\beta^2 r)$ e $\Upsilon_2 = K + kb x / (\beta^2 r)$.

A solução analítica da teoria de Amiet para o problema de ruído de bordo de ataque em um aerofólio foi apresentada nesta seção. Essa solução foi desenvolvida assumindo-se que um escoamento turbulento isotrópico incide em um aerofólio representado como uma placa plana. Escoamentos turbulentos com maior complexidade também podem ser empregados

na solução da teoria de Amiet (ver, por exemplo, (de Santana *et. al*, 2016)). Além disso, efeitos de geometrias de aerofólios realísticos também podem ser considerados. Para isso, soluções numéricas são necessárias e Miotto e coautores (Miotto *et. al*, 2016, 2017) apresentam uma metodologia numérica para o cálculo de funções de transferência aeroacústica no caso de aerofólios realísticos. Essa metodologia emprega o método de elementos de contorno, BEM, que é bastante utilizado para a solução de problemas de espalhamento acústico. Na próxima seção, mostraremos essa abordagem.

3 METODOLOGIA NUMÉRICA

Neste trabalho, uma abordagem numérica é proposta para calcular a função de transferência aeroacústica devido à resposta não-estacionária de um aerofólio sujeito a uma rajada incidente. A presente metodologia permite estudar o ruído de bordo de ataque decorrente de um escoamento turbulento incidente levando em consideração o espalhamento acústico secundário devido à corda finita. Essa abordagem é válida para pás com elevado alongamento, geometrias arbitrárias de aerofólios, e escoamentos subsônicos compressíveis com rajadas supercríticas tridimensionais, permitindo levar em consideração a redução da magnitude da função de transferência aeroacústica devido ao incremento de espessura do aerofólio.

Conforme vimos na Seção 2.3.4 (Eq. 2.91), a PSD da pressão acústica para um observador no campo distante se relaciona com a função de transferência aeroacústica compressível \mathcal{L} através da equação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, k_1, k_2) &= \frac{1}{b} \int_{-b}^b g(x_s, k_1, k_2) e^{-ikx_s(M_0-x/r)/\beta^2} dx_s \\ &= \int_0^2 g(x'_s, k_1, k_2) e^{-ikb(x'_s-1)(M_0-x/r)/\beta^2} dx'_s, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$ é a posição da fonte dipolo na superfície e $g(x_s, k_1, k_2)$ é a função de transferência que relaciona a rajada incidente de amplitude w_0 – representativa do modo de Fourier da turbulência incidente – com o salto de pressão no aerofólio ($\Delta p' = p^{lower} - p^{upper}$), escrita como

$$g(x_s, k_1, k_2) = \frac{\Delta p'(x_s, y_s, t) e^{-i\omega t} e^{ik_2 y}}{2\pi \rho_0 u_0 w_0}. \quad (3.2)$$

Aqui, o problema de valor de contorno prescrito pela teoria de aerofólio linearizada é reescrito como uma equação de Helmholtz no plano transformado de Prandtl-Glauert que, por sua vez, é calculada utilizando um processo iterativo. A metodologia proposta é baseada numa solução de Schwarzschild equivalente obtida através do método de elementos de contorno (BEM, do inglês *Boundary Element Method*). Os efeitos de bordo de ataque e de fuga são considerados ao se resolver duas iterações com o BEM. A solução numérica, então, permite encontrar os valores de salto de pressão $\Delta p'$ num aerofólio realístico e, conseqüentemente, uma função de transferência aeroacústica mais precisa.

Nesta seção, serão apresentadas a ferramenta numérica, sua validação e os resultados para aerofólios realísticos.

O método de elementos de contorno apresenta algumas vantagens sobre métodos de diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos. Por exemplo, pode-se citar a geração de malhas simplificadas (o BEM requer somente a utilização de superfícies de contorno para a sua solução) e a facilidade de implementação de condições de contorno (condições de contorno não-reflexivas não são necessárias uma vez que a condição de Sommerfeld é naturalmente satisfeita para uma formulação BEM – no entanto, na formulação de Amiet, teremos que impor a condição de Sommerfeld na forma de potencial nulo a montante do aerofólio, conforme veremos mais adiante). Além disso, métodos que resolvem integrais de contorno não apresentam problemas de dispersão e dissipação numéricas.

A equação de Helmholtz representativa da equação linearizada de pequenas perturbações é descrita por:

$$\nabla^2 \varphi + K^2 \varphi = 0, \quad (3.3)$$

onde φ pode ser tanto a pressão quanto o potencial acústico e K é o número de onda modificado.

De forma análoga, a mesma equação pode ser escrita para uma perturbação pontual como

$$\nabla^2 G + K^2 G = \delta(\mathbf{x}). \quad (3.4)$$

A solução da equação acima representa a solução fundamental (função de Green) do campo acústico para uma fonte pontual do tipo monopolo. Para se obter as condições de contorno do problema analisado, escrevemos as equações de Euler linearizadas como

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p. \quad (3.5)$$

Multiplicando ambos os lados pelo vetor normal à superfície (sempre apontando no sentido interno da geometria), a equação acima fica

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{\partial t} = -\nabla p \cdot \mathbf{n}. \quad (3.6)$$

Dessa forma, a condição de contorno na parede rígida é dada por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, o que significa que não existe escoamento entrando na parede. Assim, $\partial p / \partial \mathbf{n} = 0$, ou ainda, $\partial \phi / \partial \mathbf{n} = 0$.

O BEM é desenvolvido a partir do segundo teorema de Green, de modo que possibilita resolver o problema integrando a superfície de contorno ao invés de integrar todo o volume

de fluido. O segundo teorema de Green é escrito como

$$\int_V G \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 G dV = \oint_S G \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (3.7)$$

e a função de Green, para o caso bidimensional, é definida como

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_s) \equiv -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(K|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(Kr), \quad (3.8)$$

sendo $H_0^{(1)}$ a função de Hankel de ordem 0 e tipo 1, definida por $H_0^{(1)} = J_0 + iY_0$, a soma da função de Bessel e Neumann. Os vetores \mathbf{x} e \mathbf{x}_s representam a posição do observador e da fonte, respectivamente, a partir de um referencial de origem.

O uso de uma formulação de BEM bidimensional é justificada pelo fato de que o efeito de rajadas oblíquas depende apenas do número de onda modificado K aparecendo na Eq. 2.106. Além disso, o modelo presente assume asas com elevado alongamento, de modo que os efeitos de bordos laterais podem ser negligenciados.

Substituindo a equação de Helmholtz, Eq. 3.3, na equação do segundo teorema de Green, tem-se

$$\int_V \varphi \delta(\mathbf{x}) dV = \varphi(\mathbf{x}) = \oint_S G \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (3.9)$$

onde a derivada normal (apontando para dentro da superfície) da solução fundamental $\partial G/\partial \mathbf{n}$ tem a forma

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = \frac{iK}{4} H_1^{(2)}(Kr) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}.$$

Para se obter a equação que contém apenas os valores no contorno, a fonte pontual \mathbf{x}_s tem que ser movida para a superfície, um processo que requer atenção visto que a propriedade da filtragem da distribuição delta de Dirac passa a não ser mais definida. Assim, para ordens inteiras positivas ν , a função $J_\nu(z)$ é definida pela equação

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{1}{2}z)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}, \quad (3.10)$$

e $Y_\nu(z)$ é dada pela equação

$$\begin{aligned} Y_\nu(z) = & \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{1}{2}z\right) + \gamma \right] J_\nu(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\nu-1} \frac{(\nu - m - 1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{1}{2}z)^{\nu+2m}}{m! (\nu + m)!} \left\{ \sum_{n=1}^{\nu+m} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \right\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni (0.5772156649...) e Γ se refere à função Gamma.

Na vizinhança dos pontos de fonte, $r \rightarrow 0$ e $Kr \ll 1$. Então, as Eqs. 3.10 e 3.11 podem ser ambas aproximadas por seus termos dominantes. Para ν igual a zero, proveniente da função de Green (Eq. 3.8), as formas limites das funções de Bessel e Neumann assumem

$$J_0(Kr) \sim 1 \quad \text{e} \quad Y_0(Kr) \sim \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{1}{2}Kr\right) + \gamma \right] .$$

É possível verificar que o comportamento assintótico da função de Hankel bidimensional para argumentos suficientemente pequenos é logarítmica. Isso significa que na vizinhança dos pontos de fonte, quando $Kr \ll 1$, a equação de Helmholtz pode ser aproximada pela equação de Laplace.

Depois de se discretizar o domínio computacional em J elementos Γ_j , a Eq. 3.9 é escrita na forma geral como

$$c(\mathbf{x})\varphi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J \int_{\Gamma_j} G \left(\sum_{m=1}^M \Theta_m \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_m \right) d\Gamma_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \int_{\Gamma_j} \left(\sum_{m=1}^M \Theta_m \varphi_m \right) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma_j , \quad (3.12)$$

onde Θ_m é a função de forma e o índice m está associado ao valor nodal de cada ponto de colocação. O termo $c(\mathbf{x})$ é o coeficiente livre, que será discutido logo adiante. Nesse trabalho, a formulação do BEM foi implementada utilizando as distribuições constante e linear da função de forma. Foi verificado que a distribuição linear não mostrou nenhuma melhora da solução comparada com a distribuição constante e, portanto, os resultados serão apresentados para $\Theta_m = 1$ e $M = 1$.

Quando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_s$, a integral da função de Green é fracamente singular e é dada por

$$\int_{\Gamma_j} G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_s) d\Gamma_j = \left(\frac{1 - \gamma - \ln\left(\frac{1}{4}KL_j\right)}{2\pi} - \frac{i}{4} \right) L_j ,$$

onde L_j é o comprimento do elemento Γ_j . Por outro lado, a integral de $\partial G/\partial \mathbf{n}$ é fortemente singular e sua avaliação geralmente depende do valor principal de Cauchy. No caso do BEM com função de forma constante, a contribuição do valor principal de Cauchy é nula e então,

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_s)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma_j = - \frac{\alpha}{2\pi} \Big|_0^\pi = -\frac{1}{2} .$$

A integral acima justifica o coeficiente livre $c(\mathbf{x})$ da Eq. 3.12 que assume o valor $c(\mathbf{x}) = 1/2$ para contornos suaves na equação integral de contorno.

Para se impor a técnica de Schwarzschild numericamente, o domínio computacional (que chamaremos de S) deve se estender para além dos limites da geometria do aerofólio. Nesse sentido, uma placa plana finita deve ser colocada a montante e a jusante do aerofólio,

conforme mostrado na Fig. 3.1. Vale a pena ressaltar que a extensão e espessura dessa placa plana devem ser escolhidas de forma a garantir a convergência da solução.



Figura 3.1: Domínio computacional S no qual o BEM é aplicado.

Ambos os bordos de ataque e de fuga apresentam descontinuidades na resposta de sustentação em $x = 0$ e $x = 2b$. Mostraremos que capturar acuradamente essas descontinuidades melhora a solução numérica e, portanto, um refino de malha é empregado nas extremidades da superfície do aerofólio para verificação. Considerando um dado número de pontos de malha entre a posição x_L e x_M , o estiramento de malha pode ser empregado utilizando a seguinte função das Refs. (Roberts, 1971; Eiseman, 1979):

$$s = P\eta^* + (1 - P) \left(1 - \frac{\tanh [Q(1 - \eta^*)]}{\tanh Q} \right). \quad (3.13)$$

Na equação acima, os parâmetros P e Q são utilizados para prover controle dos pontos da malha e são escolhidos como 1.9 e 2.0, respectivamente. O termo $\eta^* = (\eta - \eta_M)/(\eta_L - \eta_M)$ é uma variável independente normalizada do domínio computacional. Então, na malha estirada, a posição x é dada por

$$x = x_M + s(x_L - x_M).$$

Na implementação atual, x_L é admitido como sendo o bordo de ataque ($\bar{x} = 0$) e x_M , como a meia-corda ($\bar{x} = 1$). O estiramento de malha é, então, espelhado para compor a malha da meia-corda até o bordo de fuga do aerofólio ($\bar{x} = 2$). Os mesmos parâmetros P e Q são utilizados para impor uma resolução de malha fina além dos limites físicos do aerofólio, *i.e.*, nos domínios computacionais a montante e a jusante do aerofólio. Uma comparação entre os resultados com e sem o estiramento de malha será apresentado nas Seções 4.1 e 4.2, revelando a importância de se capturar as descontinuidades que surgem em cada processo da solução de Schwarzschild.

O cálculo numérico de cada iteração da técnica de Schwarzschild requer a solução de um sistema linear que vem da Eq. 3.9 com condições de contorno específicas. Admitindo S_A como sendo parte do domínio computacional S onde a condição de não-penetração é satisfeita para cada iteração, vamos considerar a função discreta $f_j(\mathbf{x}_s)$ definida como

$$f_j(\mathbf{x}_s) \begin{cases} = 1 & , \text{ se a localização do } j\text{-ésimo elemento } \mathbf{x}_s \in S_A \\ = 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Então, após discretizar o domínio computacional em J elementos Γ_j , o sistema linear para

cada iteração da solução de Schwarzschild fica dado por

$$\left[\mathbf{H} \right] \left\{ \mathbf{X} \right\} = \left[\mathbf{D} \right] \left\{ \mathbf{B} \right\} . \quad (3.14)$$

Aqui, os coeficientes das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{D} , denominados h_{ij} e d_{ij} respectivamente, são escritos como

$$h_{ij} = f_j \left[\delta_{ij} \frac{1}{2} + (1 - \delta_{ij}) \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_{ij}}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma_j \right] + \\ (f_j - 1) \left[\delta_{ij} \left(\frac{1 - \gamma - \ln(\frac{1}{4}KL_j)}{2\pi} - \frac{i}{4} \right) L_j + (1 - \delta_{ij}) \int_{\Gamma_j} G_{ij} d\Gamma_j \right]$$

e

$$d_{ij} = (f_j - 1) \left[\delta_{ij} \frac{1}{2} + (1 - \delta_{ij}) \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_{ij}}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma_j \right] + \\ f_j \left[\delta_{ij} \left(\frac{1 - \gamma - \ln(\frac{1}{4}KL_j)}{2\pi} - \frac{i}{4} \right) L_j + (1 - \delta_{ij}) \int_{\Gamma_j} G_{ij} d\Gamma_j \right] ,$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. A integral sobre cada painel Γ_j é computada numericamente utilizando a técnica de quadratura de Gauss. É importante mencionar que nas equações acima o comportamento assintótico da função de Hankel bidimensional, na medida em que \mathbf{x}_s se aproxima da superfície, já foi considerado.

Inicialmente, o sistema linear fornece a correção do bordo de ataque $\Psi^{(1)}$. Nesse caso, os vetores \mathbf{X} e \mathbf{B} , denominados x_i e b_i , são dados por

$$x_i = f_j \Psi^{(1)} + (1 - f_j) \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} ,$$

$$b_i = (f_j - 1) \phi'^{(0)} .$$

A segunda iteração fornece a correção para a difração secundária que ocorre no bordo de fuga do aerofólio, onde a condição de Kutta é satisfeita

$$x_i = f_j \mathbf{P}^{(2)} + (1 - f_j) \frac{\partial \mathbf{P}^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} ,$$

$$b_i = (f_j - 1) p''^{(1)} .$$

Para o vetor \mathbf{B} na segunda iteração, a condição de contorno referente à solução de primeira ordem deve ser especificada em termos da pressão $p''^{(1)}$, que é obtida através da equação de Euler linearizada. Para evitar efeitos de dispersão e dissipação numéricas, as derivadas dos modos espaciais e temporais de Fourier são tomadas analiticamente. Dessa forma, a equação para $p''^{(1)}$ é escrita como

$$p''^{(1)} = -\rho_0 \left[i\omega\phi'^{(1)} + u_0 \left(\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial x} + \frac{ik_1 M_0}{\beta^2} \phi'^{(1)} \right) \right], \quad (3.15)$$

onde o termo $\partial\phi'^{(1)}/\partial x$ na Eq. 3.15 é calculado numericamente. Duas formulações são implementadas para o cálculo numérico dessa derivada, sendo elas: (a) esquema explícito de diferenças finitas com estêncil centrado e (b) esquema compacto de alta-ordem. Para o esquema explícito, o seguinte estêncil é utilizado

$$\left. \frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial x} \right|_i = \frac{\phi'_{i+1} - \phi'_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}},$$

que, devido ao estiramento de malha, fornece primeira-ordem de precisão. A desvantagem da presente formulação de diferenças finitas explícita recai na lenta convergência para a solução verdadeira. De fato, a formulação requer um refino de malha com muitos pontos para atingir um nível de acurácia desejável. Esquemas compactos, por outro lado, requerem uma implementação mais sofisticada, mas fornecem melhor resolução, especialmente para números de onda elevados. Uma generalização dos esquemas clássicos de Padé numa malha uniforme foi proposta por Lele (Lele, 1992).

A função de estiramento adotada nesse trabalho (Eq. 3.13) fornece uma variação do espaçamento de malha suave o suficiente para aplicar a seguinte transformação Jacobiana para implementação do esquema compacto

$$\frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial\phi'^{(1)}}{\partial\eta} \left(\frac{\partial x}{\partial\eta} \right)^{-1}.$$

O termo $\partial x/\partial\eta$ pode ser avaliado analiticamente para o nó dos elementos e é dado por

$$\frac{\partial x}{\partial\eta} = \frac{x_M - x_L}{\eta_M - \eta_L} \left\{ P + \frac{(1-P)Q}{\tanh Q} \operatorname{sech}^2 \left[Q \left(1 - \frac{\eta - \eta_M}{\eta_L - \eta_M} \right) \right] \right\}.$$

Então, uma função de interpolação deve ser utilizada para computar $\partial x/\partial\eta$ no centróide do elemento, onde o potencial de velocidade é definido.

Finalmente, $\partial\phi'^{(1)}/\partial\eta$ é aproximado utilizando o seguinte esquema compacto de

diferenças finitas

$$A \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \eta} \Big|_{i-2} + B \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \eta} \Big|_{i-1} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \eta} \Big|_i + B \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \eta} \Big|_{i+1} + A \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \eta} \Big|_{i+2} =$$

$$C \frac{\phi_{i+1}^{(1)} - \phi_{i-1}^{(1)}}{2\Delta\eta} + D \frac{\phi_{i+2}^{(1)} - \phi_{i-2}^{(1)}}{4\Delta\eta} + E \frac{\phi_{i+3}^{(1)} - \phi_{i-3}^{(1)}}{6\Delta\eta},$$

onde os coeficientes para 10^a-ordem de precisão são $A = \frac{1}{20}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{17}{12}$, $D = \frac{101}{150}$ e $E = \frac{1}{100}$. No domínio computacional, o espaçamento de malha é adotado como $\Delta\eta = 1$. Esse esquema particular leva a um sistema linear com uma matriz pentadiagonal a ser resolvida. O tratamento dos contornos não-periódicos ao longo dos limites do aerofólio e na região da esteira foi feito utilizando estênceis telescópicos de acordo com a Ref. (Olson, 2012).

Métodos diretos, como fatoração LU, podem ser utilizados para resolver o sistema linear da Eq. 3.14, levando a uma complexidade aritmética de $O(J^3)$. Para reduzir o custo computacional global do algoritmo, métodos baseados em subespaços de Krylov foram experimentados. A convergência desses métodos iterativos depende fortemente da distribuição dos autovalores e autovetores de \mathbf{H} . Nesse sentido, a matriz \mathbf{H} requer um condicionamento para se obter um sistema linear bem comportado.

Neste trabalho, um algoritmo do tipo Bi-CGstab(l) formado pela combinação do método Bi-CG(Fokkema, 1996) com um método polinomial (Sleijpen e Van der Vorst, 1995) e resíduos atualizados (Sleijpen e van der Vorst, 1996) permitiu, aliado a um simples condicionamento que inverte apenas a diagonal principal de \mathbf{H} , a convergência da solução numérica. Tal processo de condicionamento não requer muitos cálculos visto que ele apenas considera a diagonal principal, obtendo-se uma complexidade aritmética de ordem $O(J)$. A aplicação de condicionadores mais eficientes poderia ser estudada para melhorar a convergência, no entanto, isso está fora do escopo desse trabalho. Uma comparação entre o método direto e iterativo para resolver o sistema linear de cada passo da solução de Schwarzschild (Eq. 3.14) é apresentada na Seção 4.3 em termos do custo computacional.

4 RESULTADOS

Neste capítulo estão contidas a validação da metodologia numérica proposta e os resultados da resposta compressível de aerofólios realísticos à rajadas incidentes, bem como a predição do campo acústico distante gerado pela interação rajada-aerofólio.

Validação da ferramenta numérica

Antes de avaliar a resposta do aerofólio à rajada incidente para configurações geométricas realísticas, uma comparação entre a solução do BEM para uma placa plana e a analítica descrita na Seção 2.3.4 é apresentada. Isso permite validar a ferramenta numérica e estudar como os parâmetros de espessura da placa, extensão do domínio computacional e refino de malha influenciam a solução.

Primeiramente, a espessura da placa t foi assumida muito menor do que o comprimento de onda acústico λ ($t \ll \lambda < 2b$), como usualmente adotado em problemas de espalhamento acústico para fontes não-compactas. Com essa consideração, observamos que a espessura da placa não exerce influência na solução numérica do problema de interação rajada-aerofólio. A espessura adimensionalizada é assumida como $t/b = 0.01$ nos resultados que se seguem para a o processo de validação e a semi-corda b é unitária.

As Figs. 4.1 e 4.2 apresentam os valores reais e imaginários da correção do bordo de ataque $\Psi^{(1)}$ para uma rajada normal incidente em regimes de baixa- ($He = 2kb = 5$) e alta-frequência ($He = 20$), respectivamente. Ambas as figuras mostram uma comparação entre as soluções analíticas e numéricas, revelando como a extensão do domínio computacional S contribui para o comportamento do resultado numérico. Uma acurácia razoável é obtida para todos os regimes de frequência estudados assumindo $\{\bar{x} \in S | -5 \leq \bar{x} \leq 7\}$. O número de elementos é admitido de modo a garantir resoluções de malha equivalentes em todos os casos analisados, sendo 3200 elementos para $-1 \leq \bar{x} \leq 3$, 4850 elementos para $-2 \leq \bar{x} \leq 4$ e, 10000 elementos para $-5 \leq \bar{x} \leq 7$.

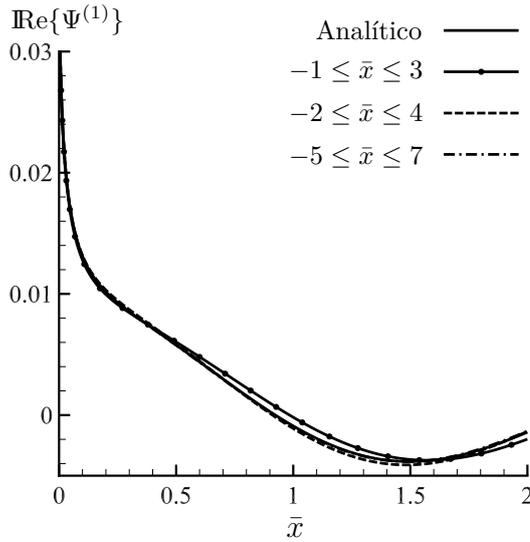
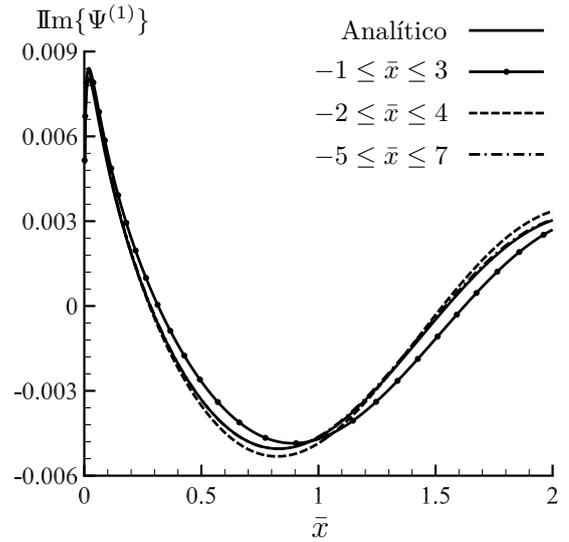
(a) Parte real de $\Psi^{(1)}$.(b) Parte imaginária de $\Psi^{(1)}$.

Figura 4.1: Componentes real e imaginário da correção do bordo de ataque $\Psi^{(1)}$ para diferentes extensões do domínio computacional ($k_1b = 25$, $k_2b = 0$ e $M_0 = 0.1$; $He = 5$).

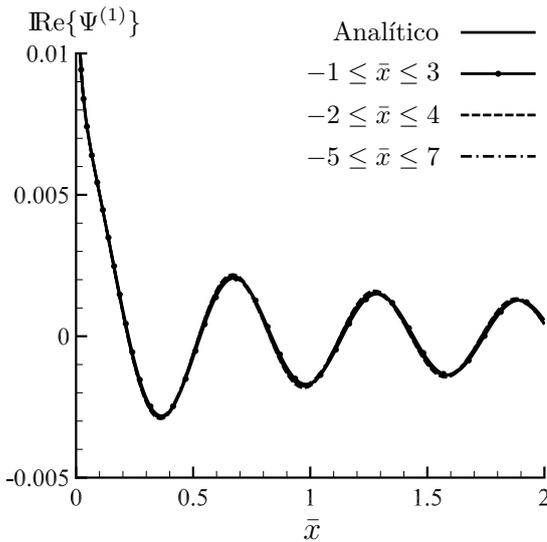
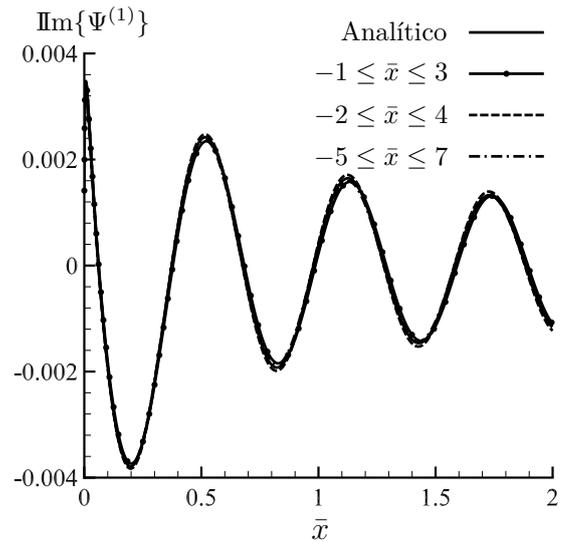
(a) Parte real de $\Psi^{(1)}$.(b) Parte imaginária de $\Psi^{(1)}$.

Figura 4.2: Componentes real e imaginário da correção do bordo de ataque $\Psi^{(1)}$ para diferentes extensões do domínio computacional ($k_1b = 50$, $k_2b = 0$ e $M_0 = 0.2$; $He = 20$).

O estudo de convergência em termos do refino de malha é conduzido fixando os limites do domínio computacional como $-5 \leq \bar{x} \leq 7$ e variando o número total de elementos. Uma vez que a convergência da solução de primeira-ordem escrita em termos da pressão pode ainda ser afetada pelo impacto de uma malha grosseira na derivada numérica $\partial\phi^{(1)}/\partial x$, é mais conveniente proceder com o estudo do refino de malha em termos de $p''^{(1)}$. Essa situação é mostrada na Fig. 4.3, onde a magnitude da solução de primeira-ordem $p''^{(1)}$ e da correção do bordo de fuga $P^{(2)}$ são apresentadas utilizando o esquema compacto de 10^a-ordem descrito no Capítulo 3. Na Fig. 4.3 observamos que, empregando 800

elementos na discretização da malha, oscilações começam a aparecer na vizinhança de $\bar{x} = 0$ para $|p''^{(1)}|$. Isso é atribuído ao elevado gradiente de pressão da solução aliado com o tratamento do contorno não-periódico do esquema numérico na região do bordo de ataque (o leitor pode consultar a Ref. (Olson, 2012) para detalhes). Um resultado suficientemente acurado é obtido com 1500 elementos em termos de convergência e para eliminar as oscilações em $p''^{(1)}$. A mesma conclusão também se sustenta para o segundo passo da técnica de Schwarzschild, *i.e.*, $P^{(2)}$.

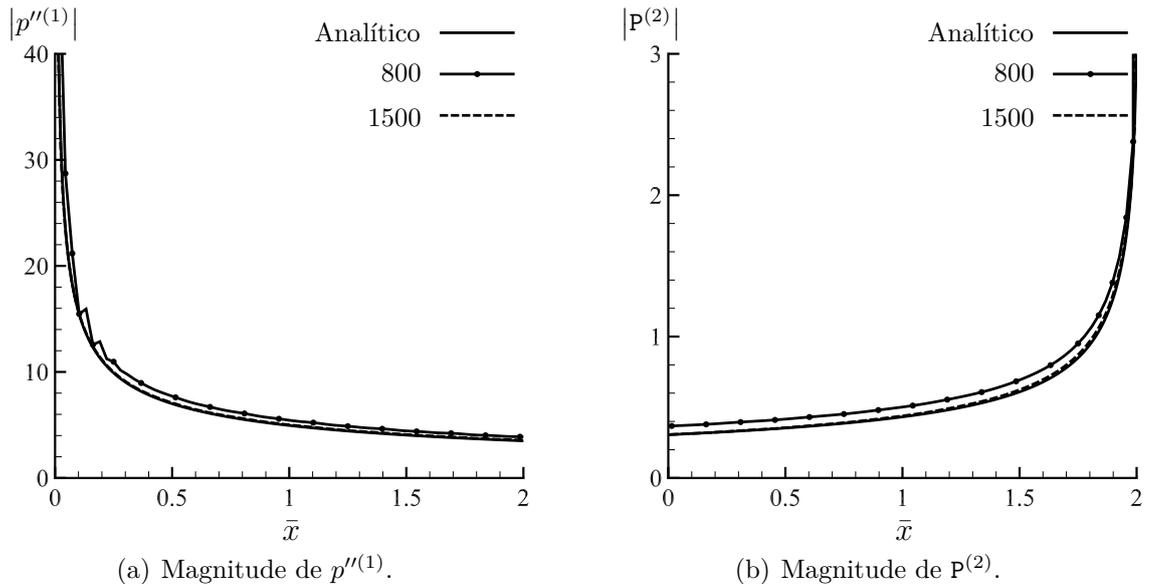


Figura 4.3: Magnitudes da solução de primeira-ordem $p''^{(1)}$ e da correção do bordo de fuga $P^{(2)}$ para diferentes discretizações do domínio computacional ($k_1 b = 50$, $k_2 b = 0$ e $M_0 = 0.2$; $He = 20$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$).

A importância de se utilizar um esquema de diferenças finitas de alta resolução para calcular a derivada espacial do potencial pode ser vista na Fig. 4.4, onde o esquema explícito de baixa-ordem e implícito de alta-ordem são empregados. Três níveis de refinamento de malha são considerados para efeitos de comparação. Verificamos a presença de um comportamento oscilatório de mesma frequência que $\partial\phi^{(1)}/\partial x$ na magnitude de $p''^{(1)}$ quando o cálculo da derivada não é suficientemente acurado. Uma discretização grosseira do domínio computacional leva a uma dissipação numérica mais pronunciada, indicando que uma malha extremamente refinada deveria ser empregada para alcançar o nível de acurácia desejado da solução. Entretanto, mesmo elevando o número de elementos para $J = 10000$, ainda observamos oscilações de baixa amplitude em $|p''^{(1)}|$. Assim, podemos afirmar que a solução de primeira-ordem é altamente dependente do cálculo acurado da derivada numérica, e portanto, esquemas compactos são preferíveis para essa tarefa com relação aos esquemas explícitos de baixa-ordem.

A dificuldade em se avaliar a resposta do aerofólio à rajada decorre das discontinuidades da função resposta nas extremidades do aerofólio. De modo a

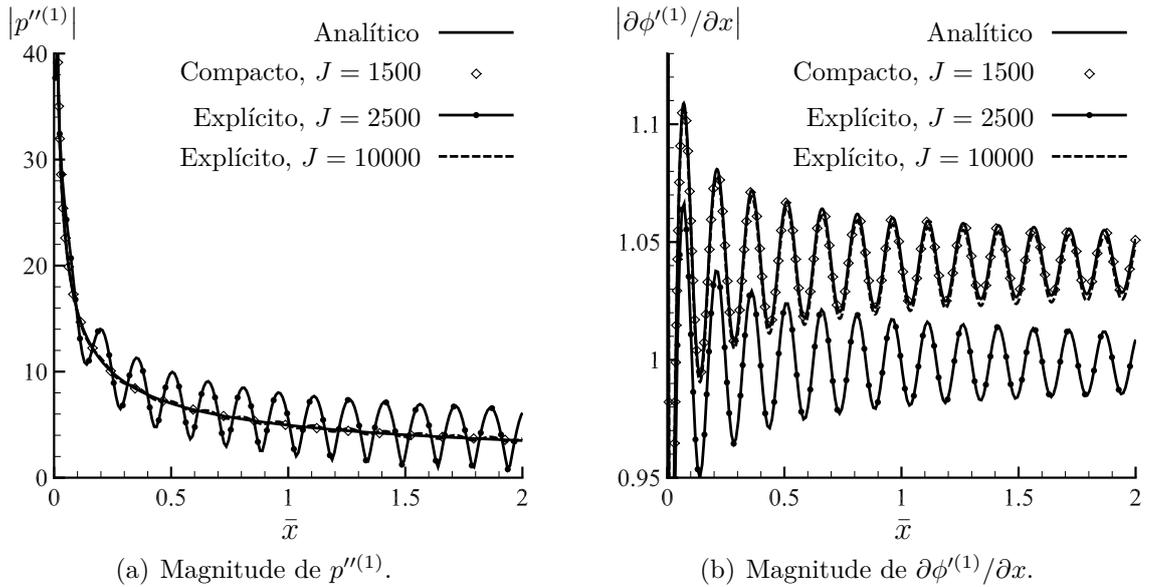


Figura 4.4: Efeitos da resolução da malha na dissipação e dispersão numérica no cálculo da derivada espacial $\partial\phi'(1)/\partial x$ para a solução de primeira-ordem ($k_1b = 50$, $k_2b = 0$ e $M_0 = 0.2$; He = 20; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$). As soluções presentes são obtidas pelo esquema explícito de baixa-ordem e de alta-ordem compacto.

verificar a influência dessas discontinuidades provenientes de cada iteração da técnica de Schwarzschild na função de transferência aeroacústica \mathcal{L} , um refinamento de malha local é empregado fazendo o uso da função de estiramento descrita no Capítulo 3. Com os resultados obtidos das malhas uniformes e estiradas, é possível fazer uma comparação entre as soluções analítica e numérica para as diretividades num campo-distante dada por $|2kbz\mathcal{L}/r_o|$.

Depois de aplicar a malha estirada para a placa plana, nenhuma melhoria foi observada para a distribuição de carregamento induzida. Entretanto, as singularidades conforme $\bar{x} \rightarrow 0^+$ e $\bar{x} \rightarrow 2^-$ são melhor capturadas, aumentando a resposta do aerofólio após a integração da superfície. Se as discontinuidades não são propriamente resolvidas, a função de transferência aeroacústica é subestimada. As Figs 4.5 e 4.6 ilustram o problema discutido acima através de uma comparação entre os resultados analítico e numérico em termos da diretividade $|2kbz\mathcal{L}/r_o|$ para regimes de alta- e baixa-frequência. Os observadores no campo distante são posicionados a uma distância de $r_o/b = 100$ do bordo de ataque e o termo z é dado por $z = r_o \sin \varphi$, onde φ é o ângulo de diretividade. A solução obtida pela malha estirada provê uma melhor representação dos lóbulos secundários na correção do bordo de ataque, conforme mostrado pela Fig. 4.6 (a).

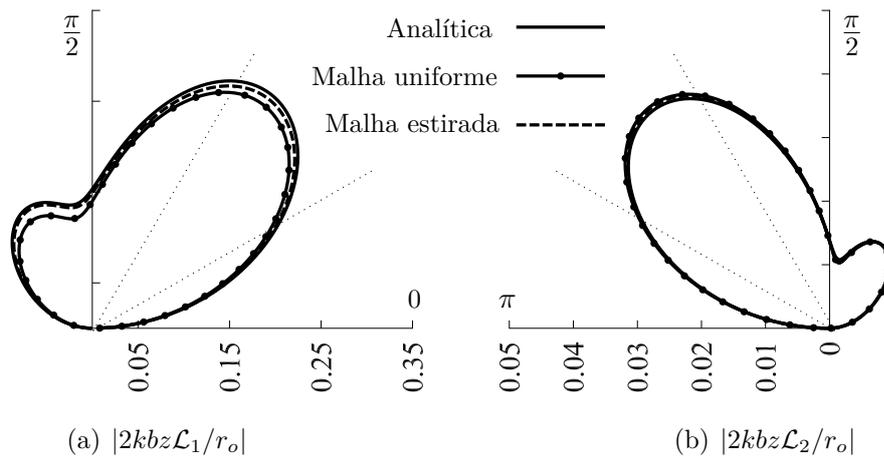


Figura 4.5: Diretividade das correções de bordo de ataque e de fuga ($k_1b = 25$, $k_2b = 0$ e $M_0 = 0.1$; $He = 5$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$; $J = 1500$).

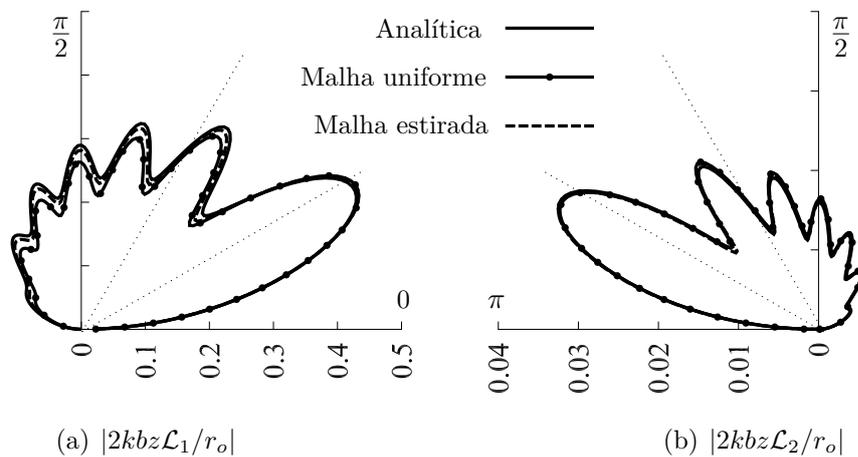


Figura 4.6: Diretividade das correções de bordo de ataque e de fuga ($k_1b = 50$, $k_2b = 0$ e $M_0 = 0.2$; $He = 20$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$; $J = 1500$).

Por fim, a Fig. 4.7 mostra um caso com rajadas oblíquas supercríticas. As soluções analítica e numérica possuem uma excelente concordância, validando a presente metodologia numérica. Rajadas oblíquas próximas do limite de hiperbolicidade do problema (não mostradas aqui) também revelam excelente concordância.

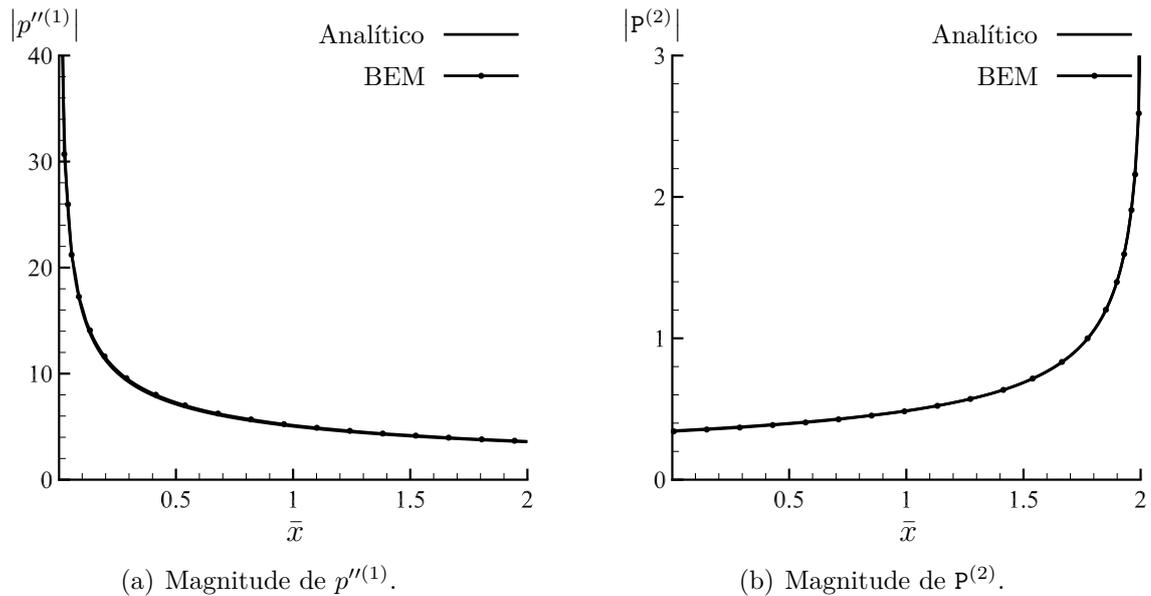


Figura 4.7: Comparação entre as soluções analítica e numérica para uma rajada oblíqua ($k_1 b = 50$, $k_2 b = 6$ e $M_0 = 0.2$; He = 20; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$; $J = 1500$).

Resultados para aerofólios realísticos

Nesta seção, apresentaremos os resultados obtidos através da metodologia proposta para aerofólios realísticos. Um estudo equivalente em termos de extensão do domínio computacional e discretização da superfície foi conduzido para os casos de aerofólio de espessura finita, visto que esses parâmetros poderiam exibir influências diferentes nas soluções. As conclusões foram as mesmas que as anteriores quanto à extensão do domínio, entretanto, existe uma exceção com relação à discretização da superfície próxima ao bordo de ataque do aerofólio, que agora possui um efeito de curvatura. Testes numéricos mostram que se a malha uniforme for adotada, um excessivo número de elementos é requerido para que a solução apresente convergência. Por outro lado, a função de estiramento discutida no Capítulo 3 fornece resolução suficiente próxima dos bordos de ataque e de fuga, melhorando a solução sem custo computacional adicional do refinamento de malha. A Fig. 4.8 mostra as magnitudes da solução de primeira-ordem $|p''^{(1)}|$ e a correção do bordo de fuga $|p^{(2)}|$ para uma placa plana e um aerofólio NACA 0024 com diferentes configurações de malha, resumindo a discussão acima. Quando a malha uniforme é empregada, a solução numérica apresenta oscilações ao longo do aerofólio. Já a malha estirada permite uma distribuição de carregamento mais suave visto que ela permite capturar os altos gradientes da região do bordo de ataque.

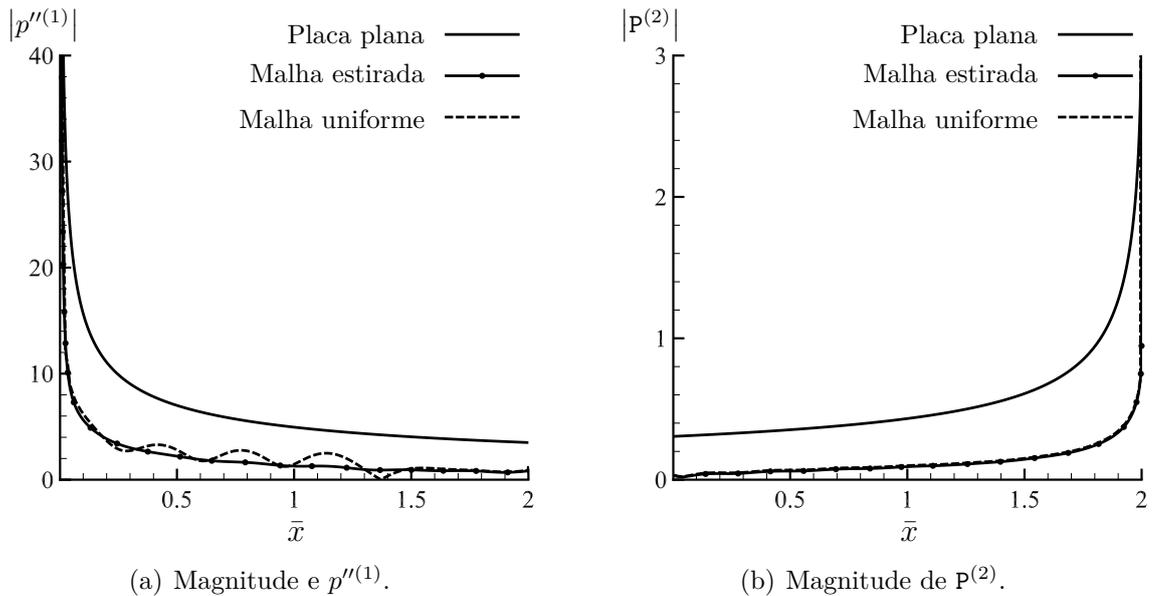


Figura 4.8: Magnitudes da distribuição de carregamento para uma placa plana e um aerofólio NACA 0024 utilizando duas configurações de malha diferentes ($k_1 b = 50$, $k_2 b = 6$ e $M_0 = 0.2$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$; $J = 2500$).

Neste trabalho, estamos negligenciando a condição de Kutta não-estacionária e permitindo que a pressão seja singular no bordo de fuga. Para uma placa plana, a condição de Kutta é automaticamente satisfeita uma vez que não há mudança na força em que a esteira é submetida na medida em que a rajada passa pelo bordo de fuga (Amiet, 1990). Entretanto, conforme demonstrado por Ayton *et al.* (Ayton *et al.*, 2016), o ruído no campo distante pode ser afetado quando a condição de Kutta estacionária é imposta para aerofólios de espessura finita devido ao espalhamento de um campo de pressão não-físico pelo bordo de fuga. Uma discussão referente à condição de Kutta em escoamentos não estacionários é apresentada por Crighton (Crighton, 1985). A influência do espalhamento secundário do bordo de fuga no som radiado será discutida mais adiante nesta seção.

Independentemente da condição de Kutta imposta, a região de transição entre o bordo de fuga do aerofólio e a região do domínio computacional a jusante desempenha um papel importante na obtenção de uma solução numérica bem comportada. Para ilustrar esse ponto, a Fig. 4.9 apresenta resultados numéricos em termos de $|p''^{(1)}|$ para duas configurações geométricas diferentes, A e B. A primeira corresponde a uma transição suave no bordo de fuga, enquanto a última possui uma mudança abrupta no tamanho e orientação dos elementos (os pontos em ambas as configurações correspondem aos nós dos elementos). Um erro local aparece na solução de $\Psi^{(1)}$ quando a transição entre essas duas regiões não é suave. Esse erro é posteriormente amplificado na solução da pressão pelo cálculo da derivada na Eq. 3.15, o que explica o pico e as oscilações da distribuição de pressão aparecendo na Fig. 4.9 quando a configuração B é utilizada. Com o incremento do número de elementos ao longa da superfície, esse erro diminui, porém

permanece não desprezível. Para contornar esse problema, podemos aumentar a espessura da placa até definirmos a configuração A de modo a garantir uma transição suave, o que é justificável visto que o perfil do bordo de fuga é acusticamente compacto para as frequências estudadas aqui. Outra possibilidade seria aplicar localmente um filtro numérico em $\Psi^{(1)}$ para eliminar os erros locais antes de computar a derivada espacial. Vale a pena ressaltar que a configuração A foi utilizada nos resultados da Fig. 4.8 e nos casos que se seguem.

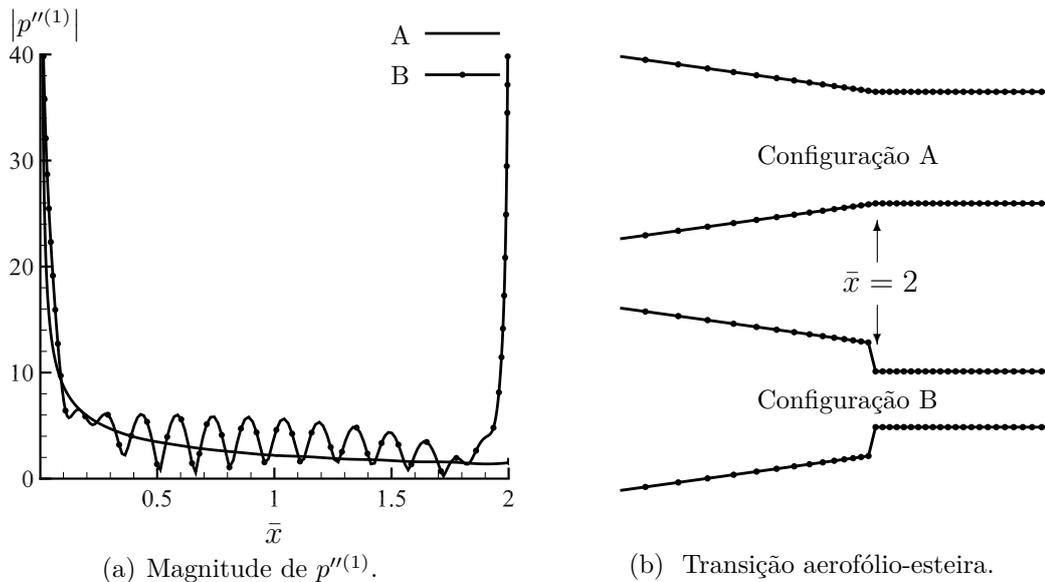


Figura 4.9: Magnitude da distribuição de carregamento de primeira-ordem para um aerofólio NACA 0024 utilizando duas configurações geométricas diferentes para transição aerofólio-esteira ($k_1b = 50$, $k_2b = 6$ e $M_0 = 0.2$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$; $J = 2500$).

A Fig 4.10 mostra a redução da distribuição de carregamento devido ao incremento da espessura do aerofólio, onde as magnitudes da solução de primeira-ordem e a correção do bordo de fuga são plotadas. Concomitantemente, a Fig. 4.11 apresenta as respectivas diretividades computadas utilizando \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 . Observamos que uma significativa redução do ruído radiado na direção do lóbulo principal para ambas as correções de bordo de ataque e de fuga. A amplitude é menos afetada pelo incremento de espessura para os ângulos de diretividade $\frac{\pi}{2}$ ou maiores para \mathcal{L}_1 . O típico padrão de cardióide esperado para uma fonte não-compacta se aproxima àquele de uma fonte tipo dipolo para \mathcal{L}_1 . É importante mencionar que uma cardióide perfeita não será obtida para a radiação sonora devido à corda finita dos aerofólios analisados.

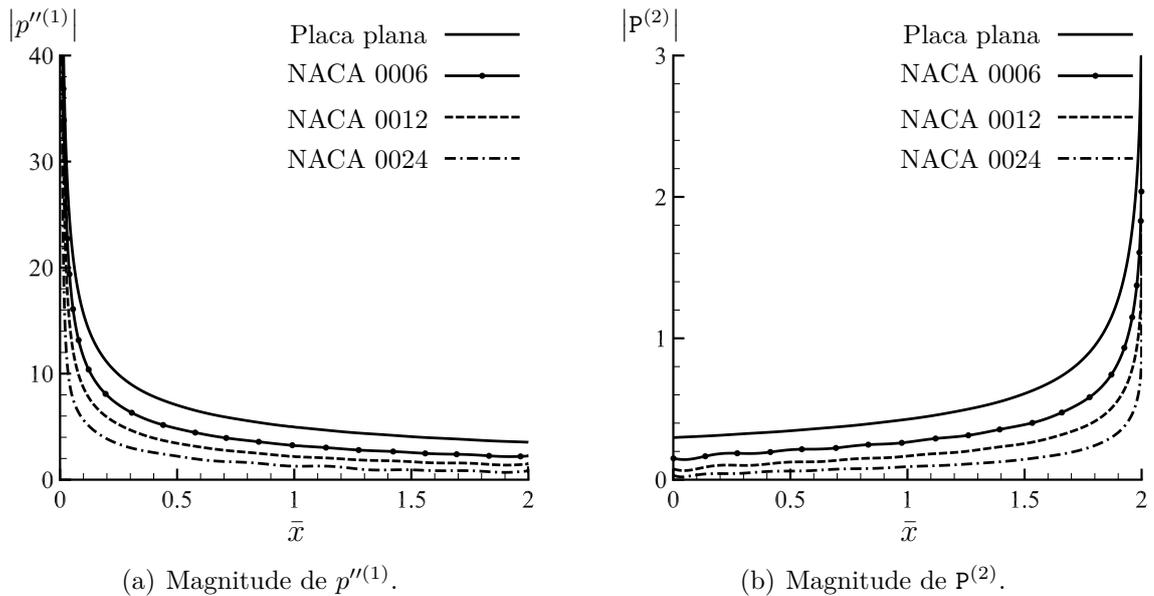


Figura 4.10: Magnitude da distribuição de carregamento para uma placa plana e vários aerofólios NACA ($k_1b = 50$, $k_2b = 0$ e $M_0 = 0.2$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$; $J = 2500$).

No trabalho de Devenport *et al.* (Devenport *et al.*, 2010), resultados de um método numérico, dados experimentais e a solução de Amiet para baixas frequências reduzidas foram comparados entre si. Foi demonstrado que o modelo de placa plana de Amiet superestima o nível de pressão sonora em comparação com aerofólios espessos conforme a frequência é aumentada. Embora esse trabalho fosse focado num regime de frequências menores que as estudadas aqui, os resultados apresentados são consistentes com as observações de Devenport *et al.*, mas com uma menor redução de ruído. Na Fig. 4.11, observamos uma redução de ruído por um fator de 0.2 (equivalente a redução de 2 dB) entre as soluções da placa e do NACA 0012 para um observador posicionado perpendicularmente ao aerofólio, e por um fator de 0.5 (que corresponde a uma redução de 6 dB) na direção do lóbulo primário para uma rajada incidente normal e $M_0 = 0.2$. Para frequências mais altas, os resultados presentes são consistentes com aqueles estudados por Gill *et al.* (Gill *et al.*, 2013).

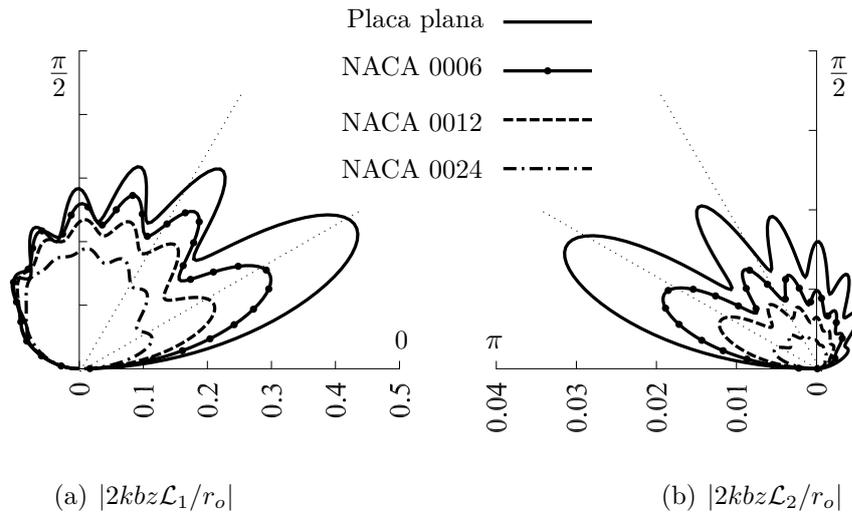


Figura 4.11: Diretividade para uma placa plana e para diversos aerofólios NACA ($k_1b = 50$, $k_2b = 0$ e $M_0 = 0.2$; $\text{He} = 20$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$; $J = 2500$).

Conforme mencionado anteriormente, quando a condição de Kutta estacionária é empregada na solução do escoamento da interação rajada-aerofólio, uma pressão acústica não-física é radiada da singularidade do bordo de fuga. De acordo com Ayton *et al.* (Ayton *et al.*, 2016), os efeitos da singularidade devem crescer com a espessura do aerofólio e com a frequência, afetando a radiação total ao longo da região a montante do escoamento visto que a diretividade da singularidade não-física é proporcional a $\sin(\varphi/2)$. Embora os resultados da Ref. (Ayton *et al.*, 2016) pudessem ser utilizados para corrigir a solução subtraindo o efeito da singularidade do bordo de fuga, observamos que esse espalhamento secundário afeta minimamente o campo de pressão acústico total para as altas frequências, conforme mostrado na Fig. 4.12. Nessa figura, mostramos soluções para um problema de alta-frequência incluindo o espalhamento do bordo de ataque com e sem a correção do bordo de fuga. Conforme esperado, a solução do bordo de fuga tem uma menor contribuição na radiação acústica total para as altas frequências e, portanto, a aplicação da condição de Kutta estacionária leva a resultados razoáveis.

Por outro lado, a influência do bordo de fuga no espalhamento acústico total pode ser mais relevante em baixas-frequências, conforme mostrado na Fig. 4.13, onde a diretividade da pressão acústica para um NACA 0012 e $\text{He} = 1$ é mostrada. Conforme esperado, os efeitos dos bordos de ataque e de fuga ficam mais acoplados conforme a frequência diminui. Os resultados sugerem que uma correção para a singularidade pode ser necessária na predição acústica em regimes de baixa-frequência, especialmente para o caso de rajadas oblíquas. Vale ressaltar que mais iterações são necessárias para a convergência da solução nas baixas frequências visto que o potencial residual que se propaga a montante do bordo de ataque continua relevante com apenas duas iterações do procedimento de Schwarzschild (Santana *et al.*, 2016).

se $M_0 k_1 \gg k_2$, a função de transferência aeroacústica se torna praticamente independente de k_2 , e o efeito de obliquidade se relaciona aos efeitos destrutivos da onda acústica numa posição de observador diferente de $y = 0$. Roger & Moreau (Roger e Moreau, 2005) observaram resultados similares para o modelo de predição de ruído de bordo de ataque proposto.

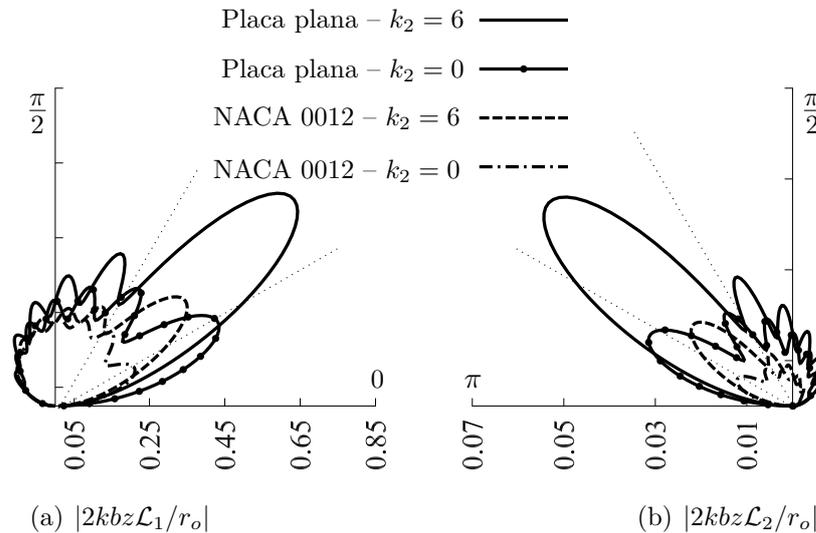
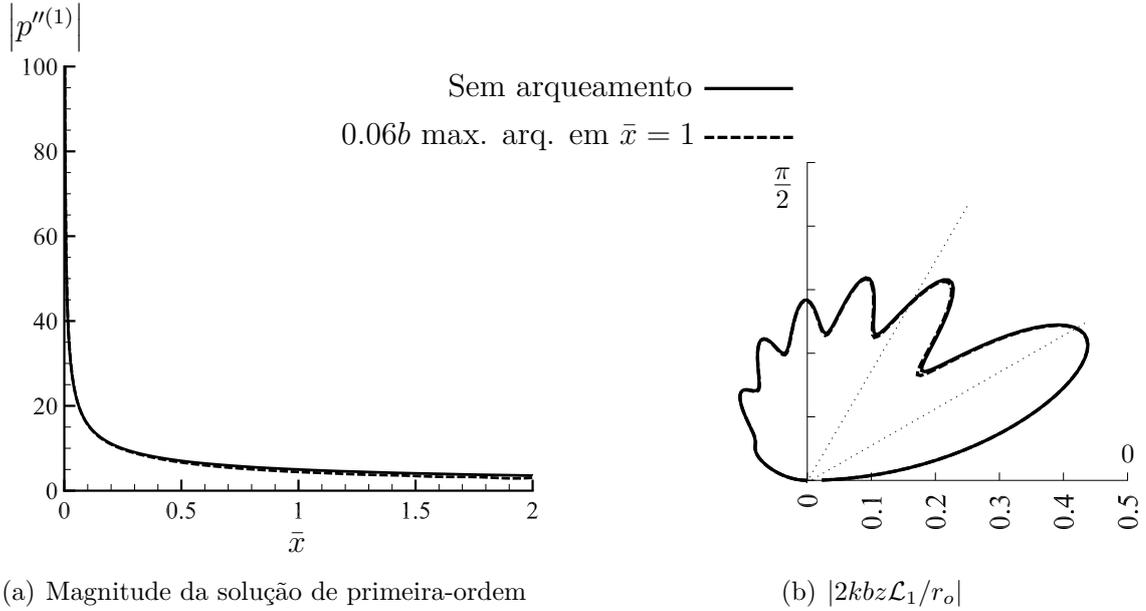


Figura 4.14: Diretividade dada por rajadas oblíqua e normal numa placa plana e num NACA 0012 ($k_1 b = 50$ e $M_0 = 0.2$; $He = 20$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$; $J = 2500$).

A presente metodologia numérica também foi testada em geometrias não-simétricas para estudar a influência do arqueamento na função de transferência aeroacústica e, conseqüentemente, na predição de ruído de aerofólios. Para tanto, soluções para geometrias simétricas e arqueadas foram comparadas entre si. Os resultados mostram que a distribuição de carregamento das geometrias arqueadas possui pequenas variações quando comparada àquela obtida com seus respectivos casos simétricos, porém, essas variações não são capazes de afetar o campo acústico distante. Ilustrando essa discussão, a Fig. 4.15 mostra uma comparação entre placas planas sem arqueamento e com $0.06b$ de arqueamento máximo (localizado na meia-corda) em termos da solução de primeira-ordem e da predição de ruído no campo distante. Para composição da placa arqueada, foi utilizada a fórmula para série de aerofólios NACA de 4-dígitos com espessura nula. A partir dessa figura, observamos que o efeito do arqueamento no campo acústico distante é desprezível. Essa mesma tendência também foi observada para aerofólios espessos testados com o presente método numérico e nos resultados experimentais de Devenport *et al.* (Devenport *et al.*, 2010).



(a) Magnitude da solução de primeira-ordem (b) $|2kbz\mathcal{L}_1/r_o|$
 Figura 4.15: Comparação entre placas planas com e sem arqueamento em termos da solução de primeira-ordem e do respectivo espalhamento acústico ($k_1b = 50$, $k_2b = 0$ e $M_0 = 0.2$; $\text{He} = 20$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$; $J = 2500$).

É esperado que, conforme aumentamos o número de Mach do escoamento médio para um dado número de Helmholtz fixo, a resposta do aerofólio à rajada também aumente em termos de amplitude devido a uma maior contribuição de U_0 e redução de k_1 nos termos complexos $p''(1)$ e $\mathbf{P}^{(2)}$. O efeito do número de Mach para problemas com equivalente número de Helmholtz é mostrado na Fig. 4.16, onde uma placa plana e um aerofólio NACA 0012 são submetidos a uma rajada normal com $\text{He} = 20$. O efeito de compressibilidade pode ser melhor observado em termos da pressão no campo distante. Sendo assim, a Fig. 4.17 mostra a diretividade para os mesmos casos da Fig. 4.16. Embora a magnitude da resposta rajada-aerofólio ali mostrada seja modificada de acordo com a velocidade do escoamento médio, o formato do campo acústico permanece similar e sua magnitude é proporcional à velocidade. Verificamos que quando $M_0 \gtrsim 0.3$ para o perfil NACA 0012, o efeito de espessura do aerofólio tende a aumentar, com relação à placa plana, a radiação acústica para ângulos de diretividade $\varphi \gtrsim \pi/2$, enquanto reduz significativamente o ruído para ângulos a jusante. Essa tendência também foi observada experimentalmente por Paterson & Amiet (Paterson e Amiet, 1977) para o aerofólio NACA 0012. Então, a mudança da radiação no campo distante devido ao efeito de espessura finita depende do efeito de compressibilidade. Para baixos números de Mach, o ruído é reduzido para todos os ângulos de observadores, enquanto que, em números de Mach moderados, o ruído é reduzido apenas na região a jusante, principalmente na direção do lóbulo principal.

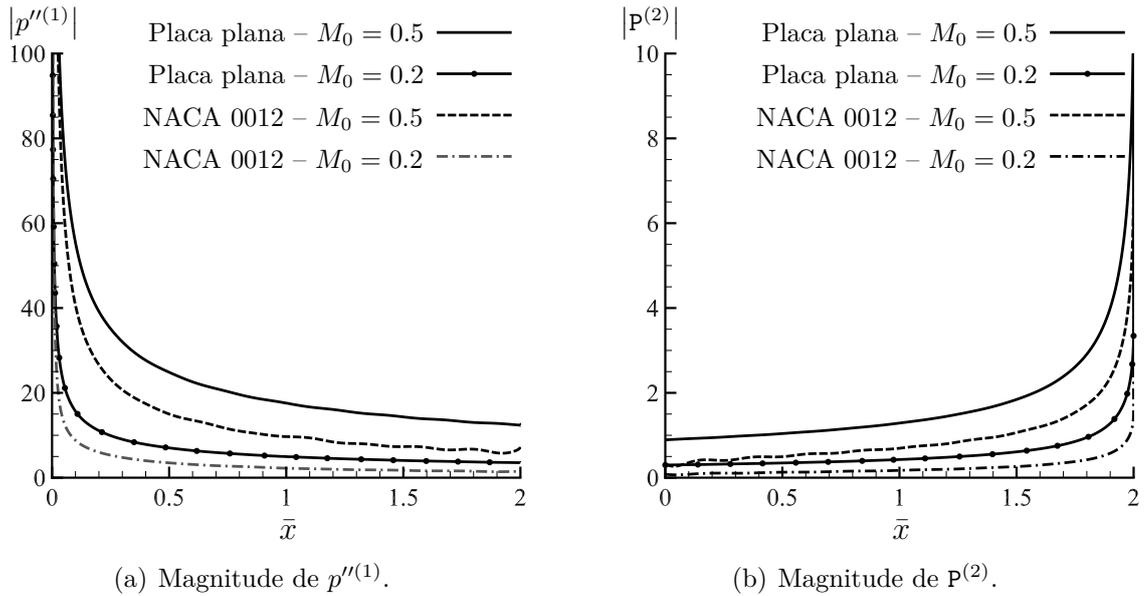


Figura 4.16: Magnitude da distribuição de carregamento devido a uma rajada normal incidente para uma placa plana e um NACA 0012 ($He = 20$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$; $J = 2500$).

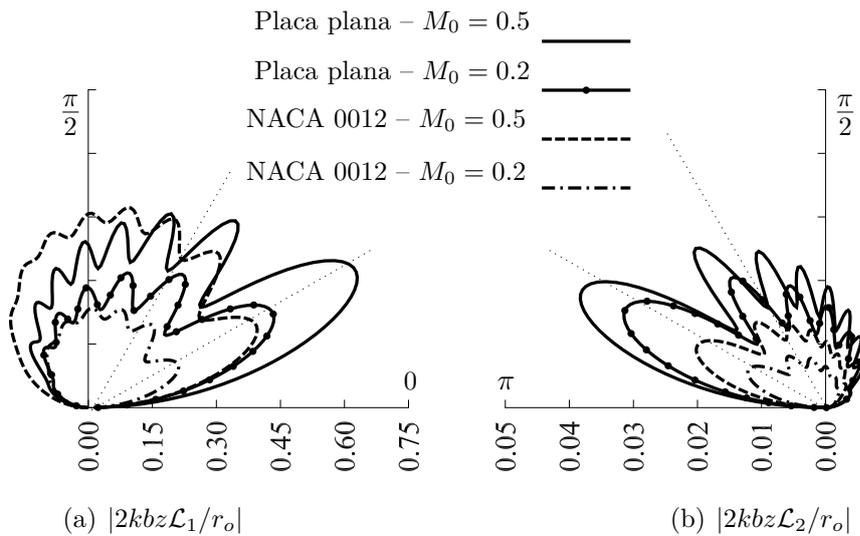


Figura 4.17: Diretividade da pressão acústica no campo distante dada por uma rajada normal incidente numa placa plana e num aerofólio NACA 0012 ($He = 20$; $-5 \leq \bar{x} \leq 7$; $J = 2500$).

Custo computacional

Para estimar o custo computacional da solução do sistema linear da formulação do BEM, simulações foram executadas utilizando um Intel® Xeon® Processor E5-2670 v2 (25M Cache, 2.50 GHz). O tempo para resolver o sistema linear em função do número de elementos de contorno utilizados na discretização do domínio computacional é mostrado na Fig. 4.18. Nela, as curvas relativas aos métodos direto (triângulos) e iterativo para

ambas as correções do bordo de ataque (círculos) e de fuga (quadrados) são plotadas. De modo a oferecer uma melhor visualização do custo computacional, as curvas J^2 e J^3 são também apresentadas. Vale ressaltar que a solução inicial do procedimento iterativo foi um vetor nulo e que a tolerância do resíduo foi assumida como 10^{-6} para uma norma de erro L_2 .

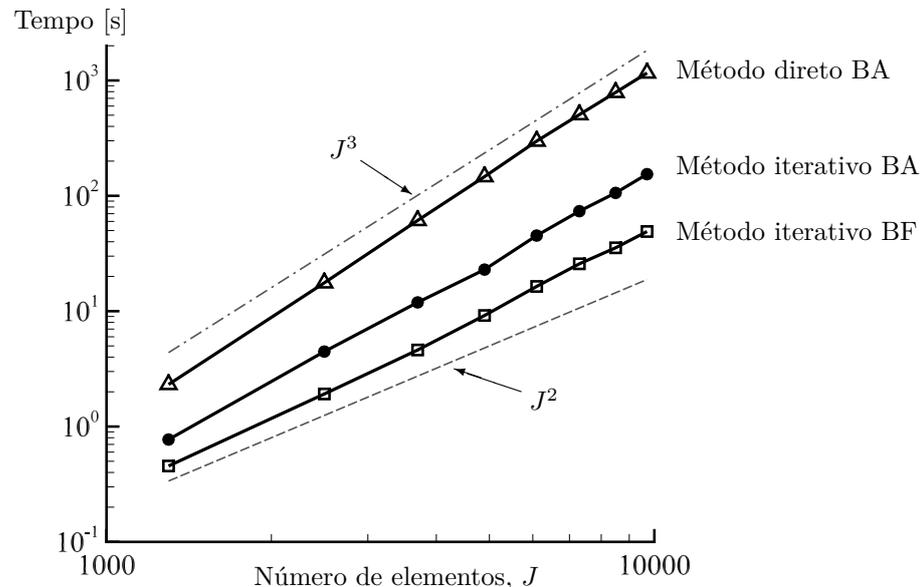


Figura 4.18: Comparação entre os métodos iterativo e direto em termos do custo computacional.

Conforme observado na Fig. 4.18, a complexidade aritmética do método iterativo reside entre J^2 e J^3 . Isso é esperado, visto que a convergência depende do número de iterações. Conforme discutido no Capítulo 3, o número de iterações poderia ser reduzido se um preconditionador mais eficiente fosse implementado. Quando o método iterativo é utilizado, a solução do bordo de ataque apresenta um custo computacional maior comparado àquela do bordo de fuga porque mais iterações foram requeridas para convergir a solução. O método direto apresenta o mesmo custo computacional para ambas as soluções de bordo de ataque e de fuga, e portanto, apenas uma curva computacional para um caso é apresentada aqui. O custo total do método direto deve ser multiplicado por dois para incluir as soluções do bordo de ataque e de fuga.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Uma abordagem numérica baseada no método de elementos de contorno (BEM) é proposta para calcular a função de transferência aeroacústica de aerofólios realísticos. A metodologia é válida para asas de alto alongamento, escoamentos subsônicos e perturbações supercríticas tridimensionais, permitindo a análise de regimes de alta- e baixa-frequência através da inclusão de correções de bordo de ataque e de fuga. A ferramenta numérica adota a conhecida técnica do BEM, que pode ser modificada ou adaptada em códigos comerciais ou científicos já existentes, e permite o cálculo rápido para o estudo de ruído e rotinas de otimização de projetos preliminares de engenharia onde o ruído de bordo de ataque é um problema a ser mitigado.

Resultados analíticos da teoria de Amiet são comparados com as soluções numéricas obtidas com a presente metodologia com o propósito de validação. Detalhes da implementação numérica são fornecidos, incluindo a importância de se resolver acuradamente a derivada espacial do potencial de velocidades na equação de Euler linearizada quando a solução é escrita na forma de pressão. Assim, dissipação e dispersão numérica devem ser evitadas, revelando a importância de se utilizar esquemas de diferenças finitas compactos de alta-ordem.

A importância de capturar as singularidades da resposta de sustentação nas extremidades do aerofólio também é discutida. Uma resolução pobre nas proximidades dos bordos do aerofólio resulta numa resposta de sustentação efetiva subestimada, bem como pode levar a erros numéricos provenientes da curvatura da superfície presente em aerofólios realísticos. A aplicação de estiramento de malha se mostrou uma solução eficiente para contornar esse problema sem requerer um número maior de elementos na discretização do domínio computacional. A função de estiramento de malha combinada com o esquema compacto para a solução da derivada numérica contribuem para a redução do custo computacional da metodologia proposta.

As condições de contorno do problema em questão são aplicadas num domínio computacional que se estende a partir dos limites físicos da geometria do aerofólio. Essas zonas estendidas não precisam ser proporcionalmente grandes em comparação com o tamanho da corda do aerofólio, especialmente em regimes de alta-frequência. Entretanto, a transição entre a região da esteira e a superfície do aerofólio deve ser suave (ou um filtro numérico deve ser utilizado) para minimizar oscilações espúrias na solução numérica. Além disso, no presente método, utilizamos a condição de Kutta estacionária na correção do bordo de fuga. A condição de Kutta não-estacionária poderia ser aplicada para se

obter uma formulação mais acurada, no entanto, resultados demonstram que para altas frequências a correção do bordo de fuga exerce uma influência mínima na predição de ruído no campo distante.

Para altas-frequências, rajadas oblíquas e normais apresentam respostas de carregamento similares, conforme esperado pela teoria de Amiet (Amiet, 1975a). Além disso, rajadas oblíquas apresentam uma radiação acústica mais pronunciada em alguns ângulos de observadores, que tende a aumentar conforme a componente do número de onda hidrodinâmico na direção da envergadura se aproxima do limite supercrítico. Nesse sentido, a espessura do aerofólio drasticamente reduz a magnitude global do padrão de diretividade de uma rajada oblíqua, fazendo com que o espalhamento tenha uma forma mais parecida com a de um dipolo compacto. O efeito de arqueamento, por outro lado, não exerce efeitos significativos na resposta de sustentação efetiva do aerofólio e, conseqüentemente, no espalhamento acústico.

Simulações realizadas com a ferramenta numérica proposta mostram que a espessura do aerofólio contribui para a redução da distribuição de carregamento na superfície e, conseqüentemente, a redução de ruído. No entanto, essa asserção só é válida quando os efeitos de compressibilidade são pequenos. Para um aerofólio NACA 0012, um aumento da radiação acústica é observado para ângulos de diretividade $\varphi \gtrsim \pi/2$ quando $M_0 \gtrsim 0.3$. Mas, para todos os números de Mach estudados, uma redução de ruído é evidenciada na direção dos lóbulos principais do ruído de bordo de ataque. Todos os resultados são consistentes com observações experimentais provenientes de outros autores (Gill *et. al.*, 2013; Mish e Devenport, 2006a,b; Paterson e Amiet, 1977; Devenport *et. al.*, 2010). Aliado com a teoria de distorção rápida (de Santana *et. al.*, 2016) e com métodos de segmentação, tal como o método das faixas invertido (Christophe *et. al.*, 2009), a presente abordagem numérica pode ser utilizada para calcular funções de transferência aeroacústica levando em conta efeitos geométricos do aerofólio e efeitos de compressibilidade, levando a uma predição de ruído mais acurada.

No futuro, pretendemos utilizar essa ferramenta numérica desenvolvida com dados experimentais a serem realizados na Universidade de Twente, na Holanda, com aerofólios realísticos para verificar se os resultados obtidos com esse método semi-analítico são similares às medições de microfones no campo distante. Para tanto, pretendemos utilizar a teoria de distorção rápida e o método das faixas invertido (Christophe *et. al.*, 2009) para, respectivamente, levar em conta os efeitos da distorção da turbulência na medida em que os vórtices passam pelo aerofólio e os efeitos da variação do escoamento na direção da envergadura.

A extensão do método para geometrias tridimensionais, na qual a hipótese de alto alongamento não se sustenta, também é uma possibilidade de trabalho futuro. No caso

de um BEM tridimensional, o custo computacional aumenta significativamente dada a ordem de complexidade aritmética com proporcionalidade entre J^2 e J^3 , e nesse sentido, o método de multipolos rápidos (Wolf e Lele, 2011) pode ser adotado para contornar esse problema. No entanto, além da complicação advinda do maior custo computacional, as rajadas frequentemente irão incidir subcriticamente nos bordos laterais da asa, o que pode resultar em problemas no método. Portanto, a extensão tridimensional da presente metodologia ainda é um tópico que precisa ser estudado.

Porosidade e elasticidade são mecanismos bem conhecidos relacionados à redução de ruído. O conceito físico por detrás da porosidade é que parte da energia acústica é dissipada como calor devido às interações viscosas que ocorrem nos poros. Em asas de corujas, por exemplo, esse aparato, junto com franjas serrilhadas e penas elásticas, contribuem para a quietude de seu vôo. Recentemente, autores propuseram metodologias que consideram efeitos de porosidade em ruído de aerofólios (Cavaleri *et. al*, 2016). Mas, apesar disso, praticamente inexitem modelos que abordem esses efeitos num caso de interação rajada-aerofólio. Pretendemos, no futuro, incluir efeitos de porosidade e elasticidade nessa formulação e validar essa nova ferramenta com experimentos em túnel de vento para uma placa plana.

Referências

ADAMCZYK, J.J. Passage of a swept airfoil through an oblique gust. **Journal of Aircraft**, vol. 11, n. 5, 281–287, 1974.

AGARWAL, A. e DOWLING, A.P. The calculation of acoustic shielding of engine noise by the silent aircraft airframe. In **11 th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (26 th Aeroacoustics Conference)**, pp. 1–17. 2005.

AGARWAL, A. e DOWLING, A.P. Low-frequency acoustic shielding by the silent aircraft airframe. **AIAA Journal**, vol. 45, n. 2, pp. 358–365, 2007.

AMIET, R. Acoustic radiation from an airfoil in a turbulent stream. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 41, n. 4, 407 – 420, 1975a.

AMIET, R.K. Compressibility effects in unsteady thin-airfoil theory. **AIAA Journal**, vol. 12, 252–255, 1974.

AMIET, R.K. Effects of compressibility in unsteady airfoil lift theories. **Proceedings of a Symposium on Unsteady Aerodynamics**, pp. 631–653, 3 1975b.

AMIET, R.K. High frequency thin-airfoil theory for subsonic flow. **AIAA Journal**, vol. 14, n. 8, 1076–1082, 1976a.

AMIET, R.K. Noise due to turbulent flow past a trailing edge. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 47, n. 3, 387–393, 1976b.

AMIET, R.K. Effect of the incident surface pressure field on noise due to turbulent flow past a trailing edge. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 57, n. 2, 305–306, 1978.

AMIET, R.K. Gust response for flat-plate airfoils and the Kutta condition. **AIAA Journal**, vol. 28, n. 10, 1718–1727, 1990.

AYTON, L.J.; GILL, J. e PEAKE, N. The importance of the unsteady Kutta condition when modelling gust–aerofoil interaction. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 378, 28 – 37, 2016.

BILLINGTON, A.E. Harmonic oscillations of an aerofoil in subsonic flow. Technical Report A 65, Australian Aeronautical Research Lab, 1949.

BROOKS, T. e HODGSON, T. Trailing edge noise prediction from measured surface pressures. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 78, n. 1, 69 – 117, 1981.

CAVALIERI, A.V.; JORDAN, P.; AGARWAL, A. e GERVAIS, Y. Jittering wave-packet models for subsonic jet noise. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 330, n. 18–19, 4474 – 4492, 2011.

CAVALIERI, A.V.; JORDAN, P.; WOLF, W.R. e GERVAIS, Y. Scattering of wavepackets by a flat plate in the vicinity of a turbulent jet. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 333, n. 24, 6516 – 6531, 2014.

CAVALIERI, A.V.G.; JORDAN, P.; COLONIUS, T. e GERVAIS, Y. Axisymmetric superdirectivity in subsonic jets. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 704, 388–420, 8 2012.

CAVALIERI, A.V.G.; WOLF, W.R. e JAWORSKI, J. Numerical solution of acoustic scattering by finite perforated elastic plates. **Proceedings of the Royal Society A**, vol. 472, 1–19, 2016.

CHRISTOPHE, J., **Application of hybrid methods to high frequency aeroacoustics**, PhD Thesis, von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2011.

CHRISTOPHE, J.; ANTHOINE, J. e MOREAU, S. Amiet’s theory in spanwise-varying flow conditions. **AIAA Journal**, vol. 47, n. 3, 788 – 790, March 2009.

CRIGHTON, D.G. The Kutta condition in unsteady flow. **Annual Review of Fluid Mechanics**, vol. 17, n. 1, 411–445, 1985.

CRIGHTON, D.G. e GASTER, M. Stability of slowly diverging jet flow. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 77, n. 2, 397–413, 1976.

CRIGHTON, D.G. e HUERRE, P. Shear-layer pressure fluctuations and superdirective acoustic sources. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 220, 355–368, 1990.

CROW, S.C. Acoustic gain of a turbulent jet. In **Physiological Society Meeting**, vol. 6 of *University of Colorado, Boulder, Paper IE*, pp. 229–237. 1972.

CURLE, N. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, vol. 231, n. 1187, pp. 505–514, 1955.

DE SANTANA, L.D.; CHRISTOPHE, J.; SCHRAM, C. e DESMET, W. A rapid distortion theory modified turbulence spectra for semi-analytical airfoil noise prediction. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 383, 349 – 363, 2016.

DEVENPORT, W.J.; STAUBS, J.K. e GLEGG, S.A. Sound radiation from real airfoils in turbulence. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 329, n. 17, 3470 – 3483, 2010.

DIETZE, F. I. the air forces of the harmonically vibrating wing in a compressible medium at subsonic velocity. ii. numerical tables and curves. Technical Report F-TS-506-RE and F-TS-948-RE, Air Materiel Command, U.S. Air Force, 1947.

DOBZYNSKI, W. Almost 40 years of airframe noise research: What did we achieve? **Journal of Aircraft**, vol. 47, n. 2, pp. 353–367, 2010.

DOWELL, E.H. **A Modern Course in Aeroelasticity**. Springer International Publishing, 5th ed., 2015.

EISEMAN, P.R. A multi-surface method of coordinate generation. **Journal of Computational Physics**, vol. 33, 118–150, october 1979.

FETTIS, H.E. An approximate method for the calculation of nonstationary air forces at subsonic speeds. Technical Report 52-56, Wright Air Development Center, 1952a.

FETTIS, H.E. Comments on aerodynamic coefficients of an oscillating airfoil in two-dimensional subsonic flow. **Journal of the Aeronautical Sciences**, vol. 19, n. 5, 353 – 354, 1952b.

FOKKEMA, D.R., **Subspace methods for linear, nonlinear, and eigen problems**, PhD Thesis, Utrecht University, 1996.

FRAZER, R.A. Possio's derivative theory for an infinite aerofoil moving at subsonic speeds. Technical Report 4932, Aeronautical Research Council, 1941.

GENNARETTI, M.; LUCERI, L. e MORINO, L. A unified boundary integral methodology for aerodynamics and aeroacoustics of rotors. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 200, n. 4, 467 – 489, 1997.

GENNARETTI, M.; TESTA, C. e BERNARDINI, G. An unsteady aerodynamic formulation for efficient rotor tonal noise prediction. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 332, 6743–6754, 2013.

GILL, J.; ZHANG, X. e JOSEPH, P. Symmetric airfoil geometry effects on leading edge noise. **The Journal of the Acoustical Society of America**, vol. 134, n. 4, 2669–2680, 2013.

GLEGG, S.A. e DEVENPORT, W.J. Panel methods for airfoils in turbulent flow. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 329, n. 18, 3709 – 3720, 2010.

GOLDSTEIN, M.E. Unsteady vortical and entropic distortions of potential flows around arbitrary obstacles. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 89, n. 3, 433–468, 1978.

GRADSHTEYN, I.S. e RYZHIK'S, I.M. **Table of Integrals, Series, and Products**. Academic Press, 7th ed., 2007.

GRAHAM, J.M.R. Similarity rules for thin aerofoils in non-stationary subsonic flows. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 43, 753–766, 1970.

GRAHAM, J.M.R. e KULLAR, I. Small perturbation expansions in unsteady aerofoil theory. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 83, n. 2, 209–224, 1977.

GREEN, G. **An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism**. author, 1828.

HASKIND, M.D. Oscillation of a wing in a subsonic gas flow. **Appl. Math. Mech.** [Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Mech.], vol. 11, 129–146, 1947.

HINZE, J.O. **Turbulence**. McGraw-Hill, 1975.

HOWE, M. **Theory of Vortex Sound**. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2003. ISBN 9780521012232.

HOWE, M.S. A review of the theory of trailing edge noise. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 61, n. 3, 437 – 465, 1978.

JONES, L.E. e SANDBERG, R.D. Numerical analysis of tonal airfoil self-noise and acoustic feedback-loops. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 330, n. 25, 6137 – 6152, 2011.

JORDAN, P. e COLONIUS, T. Wave packets and turbulent jet noise. **Annual Review of Fluid Mechanics**, vol. 45, n. 1, 173–195, 2013.

KUCUKCOSKUN, K.; CHRISTOPHE, J. and TOURNOUR, C.S.M. Broadband scattering of the turbulence-interaction noise of a stationary airfoil: experimental validation of a semi-analytical model. **International Journal of Aeroacoustics**, vol. 12, 1–12, 2013.

KœNIG, M.; SASAKI, K.; CAVALIERI, A.V.G.; JORDAN, P. e GERVAIS, Y. Jet-noise control by fluidic injection from a rotating plug: linear and nonlinear sound-source mechanisms. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 788, 358–380, 2016.

LANDAHL, M.T. **Unsteady Transonic Flow**. Pergamon Press, New York, 1961.

LAUFER, J. e YEN, T.C. Noise generation by a low-mach-number jet. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 134, 1–31, 1983.

LELE, S.K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. **Journal of Computational Physics**, vol. 103, n. 1, 16–42, 1992.

LIGHTHILL, M.J. On sound generated aerodynamically. i. general theory. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, vol. 211, n. 1107, 564–587, 1952.

LIGHTHILL, M.J. On sound generated aerodynamically. ii. turbulence as a source of sound. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, vol. 222, n. 1148, 1–32, 1954.

LILLEY, G. The prediction of airframe noise and comparison with experiment. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 239, n. 4, 849 – 859, 2001.

LYU, B.; DOWLING, A.P. e NAQAVI, I. Prediction of installed jet noise. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 811, 234–268, 2017.

MACDONALD, H.M. A class of diffraction problems. **Proceedings of the London Mathematical Society**, vol. 14, n. 1, 410 – 427, 1915.

MANKBADI, R. e LIU, J.T.C. Sound generated aerodynamically revisited: Large-scale structures in a turbulent jet as a source of sound. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, vol. 311, n. 1516, 183–217, 1984.

MICHALKE, A. A wave model for sound generation in circular jets. Technical report, Deutsche Forschungs-und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt, November 1970.

MIOTTO, R.F.; WOLF, W.R. e DE SANTANA, L.D. Numerical computation of gust aerodynamic response for realistic airfoils: Application of Amiet's theory. In **22th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference**. 2016.

MIOTTO, R.F.; WOLF, W.R. e DE SANTANA, L.D. Numerical computation of aeroacoustic transfer functions for realistic airfoils. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 407, 253 – 270, 2017.

MISH, P.F. e DEVENPORT, W.J. An experimental investigation of unsteady surface pressure on an airfoil in turbulence part 1: Effects of mean loading. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 296, n. 3, 417 – 446, 2006a.

MISH, P.F. e DEVENPORT, W.J. An experimental investigation of unsteady surface pressure on an airfoil in turbulence part 2: Sources and prediction of mean loading effects. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 296, n. 3, 447 – 460, 2006b.

MOLLO-CHRISTENSEN, E.L. Jet noise and shear flow instability seen from an experimenter's viewpoint (similarity laws for jet noise and shear flow instability as suggested by experiments). **Journal of Applied Mechanics**, vol. 34, 1–7, 1967.

MOLLO-CHRISTENSEN, E.L.; KOLPIN, M.A. e MARTUCCELLI, J.R. Experiments on jet flows and jet noise far-field spectra and directivity patterns. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 18, 285–301, 1964.

MOREAU, S.; ROGER, M. e JURDIC, V. Effect of angle of attack and airfoil shape on turbulence-interaction noise. In **11 th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (26 th Aeroacoustics Conference)**, pp. 1–20. 2005.

OERLEMANS, S. Reduction of wind turbine noise using blade trailing edge devices. In **22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference**. 2016.

OERLEMANS, S. e LÓPEZ, B.M. Acoustic array measurements on a full scale wind turbine. In 11th **AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference**. 2005.

OLSON, B.J., **Large-eddy simulation of multi-material mixing and over-expanded nozzle flow**, PhD Thesis, Stanford University, 2012.

PATERSON, R.W. e AMIET, R.K. Noise and surface pressure response of an airfoil to incident turbulence. **Journal of Aircraft**, vol. 14, n. 8, 729–736, 1977.

POSSIO, C. Determinazione dell'azione aerodinamica corrispondente alle piccole oscillazioni del velivolo. **L'Aerotecnica**, vol. 18, 1323–1351, 1938.

POWELL, A. Aerodynamic noise and the plane boundary. **Journal of the Acoustical Society of America**., vol. 32, pp. 962–990, 1960.

RAMIREZ, W.A. e WOLF, W.R. The effects of suction and blowing on tonal noise generation by blunt trailing edges. In 21th **AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference**. 2015.

REISSNER, E. On the application of Mathieu functions in the theory of subsonic compressible flow past oscillating airfoils. Technical Report NACA Tech. Note 2363, National Advisory Committee for aeronautics, May 1951.

REISSNER, E. e SHERMAN, S. Compressibility effects in flutter. Technical Report SB-240-S-1, Curtiss-Wright Research Lab, 1944.

ROBERTS, G.O. Computational meshes for boundary layer problems. In M. Holt, editor, **Numerical methods in fluid dynamics**, vol. 8 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, pp. 171–177. 1971.

ROGER, M. e CARAZO, A. Blade-geometry considerations in analytical gust-airfoil interaction noise models. **AIAA paper 2010**, vol. 3799, 47, 2010.

ROGER, M. e MOREAU, S. Back-scattering correction and further extensions of Amiet's trailing-edge noise model, part 1: Theory. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 286, n. 3, 477–506, 2005.

ROGER, M.; SCHRAM, C. e MOREAU, S. On vortex–airfoil interaction noise including span-end effects, with application to open-rotor aeroacoustics. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 333, n. 1, 283 – 306, 2014.

SANDBERG, R.; JONES, L.; SANDHAM, N. e JOSEPH, P. Direct numerical simulations of tonal noise generated by laminar flow past airfoils. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 320, n. 4–5, 838 – 858, 2009.

SANTANA, L.D.; SCHRAM, C. e DESMET, W. Low-frequency extension of Amiet's theory for compact airfoil noise predictions. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 372, 342–356, 2016.

SCHADE, T. Numerische losung des possioschen integralgleichung der schwingenden tragflache in ebener unterschallstromung. Technical Report 9506 and 10108, Aeronautical Research Council, 1946.

SCHWARZSCHILD, K. Die beugung und polarisation des lichts durch einen spalt. I. **Mathematische Annalen**, vol. 55, n. 2, 177–247, 1901.

SEARS, W.R. Some aspects of non-stationary airfoil theory and its practical application. **Journal of the Aeronautical Sciences**, vol. 8, n. 3, 104–108, 1941.

SLEIJPEN, G.L. e VAN DER VORST, H.A. Maintaining convergence properties of BiCGstab methods in finite precision arithmetic. **Numerical Algorithms**, vol. 10, n. 2, 203–223, 1995.

SLEIJPEN, G.L. e VAN DER VORST, H.A. Reliable updated residuals in hybrid Bi-CG methods. **Computing**, vol. 56, n. 2, 141–163, 1996.

STORMS, B.; HAYES, J.; ROSS, J. e MORIARTY, P. Aeroacoustic measurements of slat noise on a three-dimensional high-lift system. In *5th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit*. 1999.

TAM, C.K.W. e MORRIS, P.J. The radiation of sound by the instability waves of a compressible plane turbulent shear layer. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 98, n. 2, 349–381, 1980.

TAYLOR, G.I. The spectrum of turbulence. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, vol. 164, n. 919, 476–490, 1938.

TIMMAN, R., **Beschouwingen over de luchtkrachten op trillende vliegtuigvleugels**, PhD Thesis, Technische Hogeschool te Delft, 1946.

WAGNER, C.; HÜTTL, T. e SAGAUT, P. **Large-Eddy Simulation for Acoustics**. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9781139463164.

WILLIAMS, J.E.F. e HALL, L.H. Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half plane. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 40, 657–670, 3 1970.

WOLF, W.R.; AZEVEDO, J.A.L.F. e LELE, S.K. Convective effects and the role of quadrupole sources for aerofoil aeroacoustics. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 708, 502–538, 2012.

WOLF, W.R. e LELE, S.K. Wideband fast multipole boundary element method: Application to acoustic scattering from aerodynamic bodies. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 67, n. 12, 2108–2129, 2011.

ZHOU, Q. e JOSEPH, P. A frequency domain numerical method for airfoil broadband self-noise prediction. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 3, 504–519, 2007.