



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Mecânica

HENRIQUE LEANDRO SILVEIRA

**Modelagem Não-Linear e Análise Dinâmica
de Sistemas de Transmissão por Correias
pela Formulação de Coordenadas Nodais
Absolutas**

CAMPINAS
2015

HENRIQUE LEANDRO SILVEIRA

**Modelagem Não-Linear e Análise Dinâmica
de Sistemas de Transmissão por Correias
pela Formulação de Coordenadas Nodais
Absolutas**

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Robson Pederiva

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO HENRIQUE LEANDRO SILVEIRA, E ORIENTADO PELO PROF. DR. ROBSON PEDERIVA.



ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS
2015

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 149904/2012-6

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

Si39m Silveira, Henrique Leandro, 1982-
Modelagem não-linear e análise dinâmica de sistemas de transmissão por correias pela formulação de coordenadas nodais absolutas / Henrique Leandro Silveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Robson Pederiva.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Correias e transmissão por correias. 3. Dinâmica não-linear. 4. Mecânica dos meios contínuos. I. Pederiva, Robson, 1957-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Nonlinear modeling and dynamic analysis of belt drive systems by absolute nodal coordinate formulation

Palavras-chave em inglês:

Finite element method

Belts and belt drives

Nonlinear dynamics

Continuum mechanics

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Robson Pederiva [Orientador]

Katia Lucchesi Cavalca Dedini

Paulo Sergio Graziano Magalhães

Domingos Alves Rade

Rodrigo Nicoletti

Data de defesa: 23-11-2015

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS INTEGRADOS

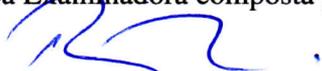
TESE DE DOUTORADO

**Modelagem Não-Linear e Análise Dinâmica
de Sistemas de Transmissão por Correias
pela Formulação de Coordenadas Nodais
Absolutas**

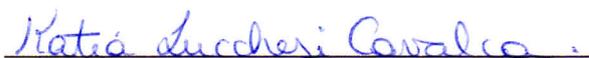
Autor: Henrique Leandro Silveira

Orientador: Robson Pederiva

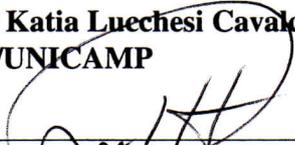
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:



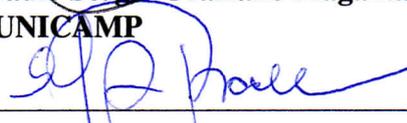
Prof. Dr. Robson Pederiva, Presidente
DSI/FEM/UNICAMP



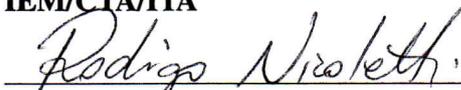
Prof.ª Dr.ª Katia Luechesi Cavalca Dedini
DSI/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Paulo Sergio Graziano Magalhães
FEAGRI/UNICAMP



Prof. Dr. Domingos Alves Rade
IEM/CTA/ITA



Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti
SEM/EESC/USP

Campinas, 23 de novembro de 2015.

Dedicatória

Aos meus pais Lucas e Eliana, e ao meu irmão e grande companheiro Rodrigo, dedico com gratidão este trabalho.

Agradecimentos

Ao Criador, pela simples existência da vida.

Ao meu orientador, Prof. Robson Pederiva, pela saudável amizade que foi construída e solidificada no transcorrer dos anos, pela paciência e apoio em cada uma das etapas deste trabalho. Agradeço também pelo estimulante tema proposto para estudo e por me conceder a oportunidade de aperfeiçoar a área que sempre tive grande admiração: o fascinante império da Dinâmica dos Sistemas Mecânicos. Os conhecimentos adquiridos durante o curso foram enormes, e renderão muitos frutos. A ele serei grato por toda a vida.

Ao Prof. Sergio Martins de Souza, do Departamento de Ciências Exatas da UFLA, ex-orientador de iniciação científica que durante a graduação direcionou de forma brilhante os meus estudos para os elegantes formalismos Newtoniano, Lagrangiano e Hamiltoniano da Dinâmica.

Aos membros das bancas de qualificação e defesa, pelas contribuições agregadas e dedicação na árdua tarefa de leitura e correção do texto.

Aos meus pais, Lucas e Eliana, pelo incentivo, dedicação, carinho e amor que sempre concederam. Ao meu irmão Rodrigo, pela eterna amizade e sempre agradável companhia desde a infância. À Mimi e toda a família, pelo amor, estímulo, paciência e contínuo apoio durante a jornada.

Aos professores da Faculdade de Engenharia Mecânica, Marco Lúcio, Katia Lucchesi, Milton Dias, Robson Pederiva e Renato Pavanello, pela amizade, admirável competência profissional e valiosos ensinamentos que foram transmitidos ao longo do curso. A minha trajetória acadêmica terá traços de inspiração na carreira de vocês.

Aos funcionários da oficina do departamento, Maurício, Ferreira, Mauro, Eli, Leandro, Oswaldo, Almiro e José Luis, pela amizade, aprendizado e apoio incondicional prestado em todas as etapas experimentais deste trabalho, sem a ajuda dos quais este não poderia ter sido concluído. À secretária do departamento, Regina, pelas agradáveis conversas, amizade e auxílio nas diversas tarefas cotidianas.

Aos amigos e companheiros de laboratório (LABVIB), Jakerson Gevinski, Vinícius Diniz, Diego Martins, Marcus Varanis, Fábio Dalmazzo, André Suetti, Pedro Grego, Clodoaldo Chagas, Wagner Rossi, Marcos Albuquerque e Lucas Carvalho, pela amizade que ficará para sempre e pelo grandioso edifício de conhecimento que foi gradativa e conjuntamente erguido.

Aos amigos do Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR) e do Laboratório de Dinâmica de Estruturas e Máquinas (LABDEM), pelas estimulantes conversas, ajudas e troca de conhecimentos.

À Cláudia Franulovic e Gisele Franco, pela dedicação e total apoio nos momentos mais difíceis.

Ao CNPq - Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento, pelo imprescindível apoio financeiro destinado à execução deste trabalho, à empresa MWM International®, pelo fornecimento dos componentes da bancada experimental e à Faculdade de Engenharia Mecânica, por toda a infraestrutura disponível.

*“If I have seen further, it is by standing
on the shoulders of giants.”*

Isaac Newton

Resumo

Sistemas de acionamento mecânico por correia serpentina são amplamente usados em aplicações automotivas e industriais para transmissão de torque e potência. Tais sistemas estão sujeitos a variações de tensão na correia devido à carga dinâmica nos acessórios, que levam ao desgaste prematuro e redução da vida útil dos componentes. A análise do comportamento dinâmico do conjunto é fundamental na fase de projeto e requer a modelagem não-linear do sistema incluindo polias, auto-tensionador, correia e fontes dinâmicas de excitação. A vibração transversal dos tramos da correia está acoplada ao movimento rotacional das polias e do auto-tensionador, incorporando diversos mecanismos de interação dinâmica no sistema. Este trabalho tem como proposta desenvolver um modelo matemático do sistema de transmissão por correia utilizando a abordagem de multicorpos híbridos, tratando as polias e o auto-tensionador como elementos rígidos e a correia como componente flexível. Na modelagem foi utilizada a Formulação de Coordenadas Nodais Absolutas (ANCF), método de elementos finitos não-linear que descreve o sistema através de gradientes e coordenadas de posição absolutas dos nós. Hipóteses de pequenas deformações e deslocamentos, geralmente assumidas na teoria clássica de elementos finitos linear, são automaticamente eliminadas neste método, que leva em consideração os tensores de deformação não-lineares da mecânica do contínuo. O Método de Newton-Euler foi utilizado na modelagem puramente rotacional do sistema para comparação com o modelo híbrido acoplado e cálculo das reações dinâmicas. Uma bancada de ensaios foi especialmente projetada, construída e instrumentada para fins de validação experimental, permitindo a análise do sistema de transmissão com e sem auto-tensionador em diferentes configurações. Os parâmetros do sistema, tais como propriedades viscoelásticas, de inércia e rigidez, foram identificados experimentalmente em ensaios independentes, e utilizados na simulação numérica. São apresentados os resultados de verificação teórico-experimental das forças de reação estática e dinâmica no mancal da polia movida, de análise modal dos sistemas em função do nível de tensão na correia nas condições estática e dinâmica, do efeito centrífugo atuante na correia e da configuração de equilíbrio estático e dinâmico devido à ação do auto-tensionador. Simulações numéricas são reportadas considerando o efeito de desbalanceamento das polias, flutuação de velocidade, amortecimento da correia, força centrífuga e presença de carga dinâmica no alternador. Diversas análises paramétricas são apresentadas, revelando a influência de cada parâmetro na resposta dinâmica do sistema. Os resultados numéricos indicaram satisfatória correlação com os resultados experimentais, permitindo validar os modelos propostos em uma ampla faixa de condições de operação.

Palavras-chave: ANCF, dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis, sistemas de transmissão por correia serpentina, método dos elementos finitos não-linear.

Abstract

Serpentine belt drive systems are widely used in automotive and industrial applications for torque and power transmission. Such systems are subject to variations in belt tension due to dynamic load of accessories, which lead to premature wear and life reduction of the components. The dynamic behavior analysis of belt drive systems is required in the design stage, and demands non-linear modeling of the system including pulleys, auto-tensioner, belt and dynamic excitation sources. The belt spans transverse vibration is coupled to rotational movement of the pulleys and auto-tensioner, incorporating different mechanisms of dynamic interaction in the system. This thesis aims to develop a mathematical model for the belt drive system using hybrid flexible multibody approach, treating pulleys as rigid elements and belt as flexible ones. The approach used was the Absolute Nodal Coordinate Formulation (ANCF), a nonlinear finite element method that describes the system through gradients and absolute nodal position coordinates. Assumptions of small strains and displacements, usually assumed in the classical linear finite element theory, are automatically eliminated in this method, which takes into account the continuum mechanics nonlinear strain tensor. The Newton-Euler method was used for purely rotational modeling of the system, for comparison with the coupled hybrid model and determination of dynamic forces. A test bench was specially designed, built and instrumented for purposes of experimental validation, allowing analysis of the transmission system with and without auto-tensioner in different configurations. The system parameters, such as viscoelastic, inertia and stiffness properties, were experimentally identified in individual tests and used in the numerical simulations. Results are presented to theoretical and experimental verification of static and dynamic reaction forces in the driven pulley bearing, modal analysis as function of the belt tension level on static and dynamic conditions, centrifugal effect acting on belt and static/dynamic configuration due to the auto-tensioner action. Numerical simulations are reported considering the unbalancing effect of the pulleys, speed fluctuation, belt damping, centrifugal force and presence of dynamic load in the alternator. Several parametric analysis are presented, showing the influence of each parameter in the dynamic response of the system. The numerical results indicated satisfactory correlation with experimental ones, allowing validate the proposed models in a wide range of operating conditions.

Keywords: ANCF, dynamic of flexible multibody systems, serpentine belt drive system, nonlinear finite element method.

Lista de Ilustrações

1.1	Motor automotivo com acionamento por correia serpentina. Fonte: Mercedes-Benz®	22
1.2	<i>Front-end</i> do motor MWM® MaxxForce 7.2H.	23
2.1	Modelo de viga tensionada com movimento axial. Fonte: Tang <i>et al.</i> (2013). . .	28
2.2	Efeito da tensão sobre o assentamento da correia nas polias movida (esquerda) e motora (direita). Fonte: Kim (2009).	32
2.3	Modelo com rigidez de flexão. Fonte: Kong (2003).	37
2.4	Modelo com rigidez de flexão, atrito de Coulomb e polia desacopladora. Fonte: Zhu (2006).	40
2.5	Modelo ANCF do sistema de transmissão constituído por duas polias. Fonte: Kerckänen (2006).	44
2.6	Modelo ANCF 3D de correia transportadora. Fonte: Yoon <i>et al.</i> (2012).	46
3.1	Coordenadas nodais absolutas para o elemento de viga ANCF.	52
3.2	Resposta do modelo ANCF.	59
3.3	Resposta não-linear do modelo ANCF.	60
3.4	Resposta não-linear do modelo ANCF excitado no primeiro modo.	61
3.5	Resposta não-linear do modelo ANCF excitado no segundo modo.	62
3.6	Resposta não-linear do modelo ANCF excitado no terceiro modo.	63
3.7	Modos de vibração da viga ANCF (a linha tracejada representa um arco de circunferência com raio igual ao comprimento indeformado da viga).	64
3.8	Diagrama de Campbell do modelo FEM (T=100 N).	71
3.9	Diagrama de Campbell do modelo ANCF (T=100 N).	72
3.10	Diagrama de Campbell do modelo ANCF para a correia poly-V (T=100.5 N). . .	73
4.1	Sistema de transmissão por correia com polias de centro fixo.	75
4.2	Sistema de transmissão por correia com auto-tensionador.	88
5.1	Projeto CAD da bancada experimental.	106
5.2	Bancada experimental do sistema de transmissão por correia.	107
5.3	Banco de resistores elétricos para aplicação de carga rotacional.	108
5.4	Extensômetros instalados no mancal da polia movida.	109
5.5	Curva de calibração dos sensores do mancal da polia movida.	110
5.6	Dispositivo para mensuração estática da força axial na correia.	111
5.7	Curva de calibração do sensor da correia.	112
5.8	Extensômetros fixados no eixo da polia movida.	113
5.9	Ensaio de calibração do sensor de torque.	113

5.10	Curva de calibração do sensor de torque.	114
5.11	Sensor óptico de rotação das polias.	115
6.1	Ensaio de tração uniaxial da correia.	117
6.2	Curva força-deslocamento experimental em função da frequência de excitação.	118
6.3	Curva força-deslocamento experimental em função da amplitude da força (regime linear).	119
6.4	Curva força-deslocamento experimental em função da amplitude da força (regime não-linear).	120
6.5	Curva de relaxação da correia.	120
6.6	Módulo complexo da correia: Fabricante "A".	122
6.7	Módulo complexo da correia: Fabricante "B".	123
6.8	Módulo complexo da correia: Fabricante "C".	123
6.9	Verificação teórico-experimental: Fabricante "B".	124
6.10	Pêndulo trifilar para identificação experimental do momento de inércia.	126
6.11	Ajuste de curva para a determinação do período natural de oscilação.	127
6.12	Auto-tensionador do sistema de transmissão por correia.	129
6.13	Bancada de ensaios para identificação da rigidez torcional do auto-tensionador.	129
6.14	Curva torque-deslocamento experimental do auto-tensionador.	130
6.15	Curva torque-deslocamento experimental na faixa de operação.	131
7.1	Bancada de ensaios com duas polias, sem auto-tensionador.	133
7.2	Configuração do sistema no instante $t=0$ s.	135
7.3	Velocidade não-amortecida da polia 1.	135
7.4	Amplitude de deslocamento angular das polias (caso amortecido).	136
7.5	Forças atuantes nos tramos.	136
7.6	Reações dinâmicas atuantes no mancal da polia 1.	137
7.7	Reações dinâmicas atuantes no mancal da polia 2.	137
7.8	Reações dinâmicas nos mancais na condição sem desbalanceamento e sem flutuação de velocidade.	139
7.9	Reações dinâmicas nos mancais na condição sem desbalanceamento e com flutuação de velocidade.	140
7.10	Reações dinâmicas nos mancais na condição com desbalanceamento e com flutuação de velocidade.	141
7.11	Velocidade angular das polias 1 e 2.	142
7.12	Momento atuante nas polias 1 e 2.	143
7.13	Força atuante nos tramos 1 e 2.	144
7.14	Reações dinâmicas teóricas atuantes no mancal da polia 1.	145
7.15	Reações dinâmicas experimentais atuantes no mancal da polia 1.	146
7.16	Nós do modelo de elementos finitos ANCF.	147

7.17	Resposta experimental ao impulso para $T=600$ N.	148
7.18	Espectro de frequência (experimental).	149
7.19	Formas modais do sistema ($T=600$ N).	153
7.20	Formas modais com momento aplicado no alternador.	154
7.21	Diagrama de Campbell ($T=200$ N).	156
7.22	Mapa de ordem do sistema ($T=200$ N).	156
7.23	Influência do parâmetro EA ($T=600$ N).	157
7.24	Influência do parâmetro EI ($T=600$ N).	158
7.25	Influência do parâmetro ρA ($T=600$ N).	159
7.26	Influência do parâmetro J_1 ($T=600$ N).	159
7.27	Resposta temporal em ressonância (modo 2, $f_n=52.3$ Hz, $T=600$ N).	160
7.28	Resposta temporal em ressonância (modo 4, $f_n=96.5$ Hz, $T=600$ N).	161
7.29	Bancada de ensaios com auto-tensionador.	162
7.30	Amplitude de deslocamento angular do auto-tensionador (caso amortecido).	164
7.31	Amplitude de deslocamento angular da polia do auto-tensionador (caso amortecido).	165
7.32	Amplitude de deslocamento angular da polia do alternador (caso amortecido).	165
7.33	Reações dinâmicas no mancal do auto-tensionador.	166
7.34	Reações dinâmicas no mancal da polia do auto-tensionador.	166
7.35	Reações dinâmicas no mancal da polia do alternador.	167
7.36	Reações dinâmicas no mancal da polia do virabrequim.	167
7.37	Momento devido à mola torcional do auto-tensionador.	168
7.38	Momento de reação atuante na polia do virabrequim.	168
7.39	Forças atuantes nos tramos da correia.	169
7.40	Configuração de equilíbrio estático do sistema de transmissão.	169
7.41	Velocidade angular da polia do virabrequim, com flutuação.	170
7.42	Momento externo aplicado na polia do alternador.	171
7.43	Amplitude de deslocamento angular amortecido do auto-tensionador.	171
7.44	Velocidade angular do auto-tensionador.	172
7.45	Velocidade angular da polia do auto-tensionador.	172
7.46	Velocidade angular da polia do alternador.	173
7.47	Reações dinâmicas no mancal do auto-tensionador.	174
7.48	Reações dinâmicas no mancal da polia do auto-tensionador.	174
7.49	Reações dinâmicas no mancal da polia do alternador.	175
7.50	Reações dinâmicas no mancal da polia do virabrequim.	175
7.51	Momento devido à mola torcional do auto-tensionador.	176
7.52	Momento de reação atuante na polia do virabrequim.	176
7.53	Forças atuantes nos tramos da correia.	177

7.54	Forças atuantes nos tramos T_2 e T_3 da correia, em detalhe.	177
7.55	Momento externo aplicado na polia do alternador.	178
7.56	Amplitude de deslocamento angular do auto-tensionador (caso amortecido). . .	179
7.57	Reações dinâmicas no mancal do auto-tensionador.	180
7.58	Reações dinâmicas no mancal da polia do auto-tensionador.	180
7.59	Reações dinâmicas no mancal da polia do alternador.	181
7.60	Reações dinâmicas no mancal da polia do virabrequim.	181
7.61	Momento devido à mola torcional do auto-tensionador.	182
7.62	Momento de reação atuante na polia do virabrequim.	182
7.63	Forças atuantes nos tramos da correia.	183
7.64	Forças atuantes nos tramos T_2 e T_3 da correia, em detalhe.	183
7.65	Nós do modelo de elementos finitos ANCF, com auto-tensionador.	184
7.66	Resposta experimental ao impulso no tramo 1 ($T=498$ N).	185
7.67	Resposta experimental ao impulso no tramo 3 ($T=498$ N).	185
7.68	Resposta experimental ao impulso no tramo 3, medido no auto-tensionador ($T=498$ N).	186
7.69	Resposta experimental ao impulso no tramo 3, medido na polia do alternador ($T=228$ N).	187
7.70	Formas modais do sistema com auto-tensionador ($T=228$ N).	190
7.71	Diagrama de Campbell ($T=228$ N).	192
7.72	Mapas de ordem do sistema ($T=228$ N).	193
7.73	Diagrama de Campbell ($T=498$ N).	194
7.74	Mapas de ordem do sistema ($T=228$ N).	195
7.75	Influência do parâmetro EA ($T=498$ N).	196
7.76	Influência do parâmetro EI ($T=498$ N).	197
7.77	Influência do parâmetro θ_0 ($T=498$ N).	197
7.78	Influência do parâmetro J_1 ($T=498$ N).	198
7.79	Influência do parâmetro J_3 ($T=498$ N).	199
7.80	Influência do parâmetro ρA ($T=498$ N).	199
7.81	Resposta temporal em ressonância (modo 3, $f_n=48.4$ Hz, $T=498$ N).	200
7.82	Resposta temporal em ressonância (modo 4, $f_n=68.5$ Hz, $T=498$ N).	201
7.83	Resposta temporal em ressonância (modo 6, $f_n=103.1$ Hz, $T=498$ N).	202
7.84	Resposta temporal em ressonância (modo 1, $f_n=22.0$ Hz, $T=498$ N).	202
A.1	Efeitos centrífugos atuantes na correia girante.	224

Lista de Tabelas

3.1	Propriedades de inércia e massa da viga	58
3.2	Frequências naturais da viga	58
3.3	Frequências naturais da viga (T=0 N)	65
3.4	Frequências naturais da viga (T=100 N)	66
3.5	Frequências naturais da viga (T=100 N e $c=20$ m/s)	66
3.6	Frequências naturais da viga (T=100 N e $c=30$ m/s)	67
3.7	Frequências naturais da viga (T=100 N e $c=10$ m/s)	71
5.1	Lista de equipamentos	116
6.1	Parâmetros experimentais do modelo de soma de potências	122
6.2	Módulo de rigidez axial EA (N)	124
6.3	Parâmetros geométricos da bancada	125
6.4	Parâmetros experimentais do pêndulo trifilar	126
6.5	Propriedades de inércia dos componentes da bancada	127
6.6	Parâmetros experimentais do sistema de transmissão	132
7.1	Reações atuantes em função da tensão na correia (N)	134
7.2	Frequências naturais do sistema para T=200 N	149
7.3	Frequências naturais do sistema para T=300 N	150
7.4	Frequências naturais do sistema para T=400 N	150
7.5	Frequências naturais do sistema para T=500 N	151
7.6	Frequências naturais do sistema para T=600 N	151
7.7	Frequências naturais do sistema considerando momento constante aplicado na polia 1	155
7.8	Reações atuantes em função da tensão na correia (N)	163
7.9	Frequências naturais do sistema para T=500 N	186
7.10	Frequências naturais do sistema para T=228 N	191

Lista de Abreviaturas e Siglas

*Matrizes, tensores e vetores*¹

$C(q,t)$	-	Vetor de vínculos geométricos e de acionamento
e	-	Vetor de coordenadas nodais do elemento finito
F_i	-	Vetor de força de reação
F_{ii}	-	Vetor de forças generalizadas escrito em função das coordenadas independentes
G	-	Matriz giroscópica
G_a	-	Matriz giroscópica do elemento finito
I	-	Matriz identidade
K, K_i	-	Matriz de rigidez
K_a	-	Matriz de rigidez do elemento finito
K_c	-	Matriz centrífuga do elemento finito
K_l	-	Matriz de rigidez associada à deformação longitudinal
K_t	-	Matriz de rigidez associada à deformação transversal
K_T	-	Matriz de rigidez tangente
M, M_i	-	Matriz de massa
M_a	-	Matriz de massa do elemento finito
M_{ii}	-	Matriz de massa escrita em função das coordenadas independentes
P, P_i	-	Vetor de força peso
q	-	Vetor de coordenadas generalizadas
q_d	-	Vetor de coordenadas generalizadas dependentes
q_i	-	Vetor de coordenadas generalizadas independentes
Q_{ext}, Q_p	-	Vetor de força nodal equivalente do elemento finito
Q_k	-	Vetor de força elástica do elemento finito
Q_l	-	Vetor de força elástica longitudinal do elemento finito
Q_{mi}	-	Vetor de momento externo aplicado na polia i representado na base inercial
Q_t	-	Vetor de força elástica transversal do elemento finito
r	-	Vetor posição descrito na base inercial
S	-	Matriz de função de forma

¹Entidades matemáticas grafadas em negrito.

\mathbf{S}_i	\mathbf{S}_{ti}	- Matriz de transformação de coordenadas associada à base i
${}_{B_i}\mathbf{r}_{AE}$		- Vetor posição descrito na base B_i com origem no ponto A e extremidade no ponto E
${}_{B_i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_j$		- Vetor de velocidade angular absoluta da base móvel B_j representado na base B_i
${}_{B_i}\mathbf{a}_A$		- Vetor de aceleração linear absoluta do ponto A representado na base B_i
${}_{B_i}\mathbf{a}_{B/A}^{rel}$		- Vetor de aceleração linear relativa do ponto B em relação ao ponto A representado na base B_i
${}_{B_i}\mathbf{I}_j^P$		- Tensor de inércia do corpo j calculado em relação ao ponto P e representado na base B_i
${}_{B_i}\mathbf{M}_j$		- Vetor de momento externo aplicado na polia j representado na base B_i
${}_{B_i}\mathbf{T}_j$		- Vetor de força total atuante no tramo j representado na base B_i
${}_{B_i}\mathbf{u}_j^{modal}$		- Vetor de deslocamentos nodais do tramo j representado na base B_i
${}_{B_i}\mathbf{v}_{B/A}^{rel}$		- Vetor de velocidade linear relativa do ponto B em relação ao ponto A representado na base B_i

Letras latinas

A	- Área da seção transversal
A_i	- Amplitude da força de excitação
c	- Velocidade axial da correia
c_i	- Coeficiente de amortecimento viscoso do tramo i
c_{ti}	- Coeficiente de amortecimento viscoso torcional do componente i
CA	- Parâmetro de amortecimento viscoso
d	- Diâmetro
E	- Módulo de elasticidade
e_i	- Componente i do vetor \mathbf{e}
EA	- Módulo de rigidez axial
EI	- Módulo de rigidez transversal
F_a	- Força alternada
F, F_{ap}	- Força aplicada
F_{ij}	- Componente j do vetor \mathbf{F}_i
F_m	- Força média
f, f_i	- Frequência de excitação forçada
f_n	- Frequência natural
g	- Aceleração da gravidade

G, \bar{G}	- Módulo complexo
I	- Momento de inércia de área
I_{ij}	- Componente ij do tensor de inércia
J_i	- Momento de inércia de massa da polia i
k_i	- Coeficiente de rigidez do tramo i
k_{ti}	- Coeficiente de rigidez torcional do componente i
L_0	- Comprimento indeformado da correia
L_i	- Comprimento do elemento/tramo i
L_i^d	- Comprimento deformado do elemento/tramo i
L_{si}	- Comprimento da correia ao longo do abraçamento da polia i
L_t	- Comprimento do auto-tensionador
me	- Momento de desbalanceamento
m, m_i	- Massa
M_a	- Momento devido ao amortecimento viscoso presente no auto-tensionador
M_e	- Momento devido à mola torcional do auto-tensionador
M_{ia}	- Componente alternada do momento aplicado na polia i
M_{im}	- Componente média do momento aplicado na polia i
M_{iz}	- Componente z do momento aplicado na polia i
ρA	- Densidade linear da correia
r_i	- Componente i do vetor \mathbf{r}
R_i	- Raio da polia i
s	- Deslocamento linear
s_i	- Polinômio interpolador i da função de forma \mathbf{S}
T	- Energia cinética; tensão na correia
t	- Tempo
T_{ai}	- Força de amortecimento viscoso do tramo i
T_{ap}	- Torque aplicado
T_c	- Força centrífuga atuante na correia
T_{ei}	- Força elástica do tramo i
U	- Energia de deformação total
U_l	- Energia de deformação longitudinal
U_t	- Energia de deformação devido à flexão
V	- Volume de contorno
$w(x,t)$	- Deslocamento transversal da viga, com dependência espacial e temporal
W	- Trabalho
x	- Posição de um ponto arbitrário na linha neutra do elemento finito
x_i, X_i	- Coordenada de posição horizontal do ponto i
y_i, Y_i	- Coordenada de posição vertical do ponto i

Letras gregas

- ϵ_l - Medida de deformação de Green-Lagrange
- ξ - Comprimento adimensional
- κ - Curvatura do elemento de viga
- ω - Frequência natural angular
- ϕ, ψ - Ângulo de fase
- ϕ_i^d - Coordenada angular na configuração deformada do elemento/tramo i
- ρ - Densidade de massa
- τ - Período natural de oscilação
- θ_0 - Posição angular que define a pré-carga torcional do auto-tensionador
- θ_i, ϕ_i - Coordenada angular

Siglas

- ANCF** - *Absolute Nodal Coordinate Formulation*
- FEA** - *Finite Element Analysis*
- FEM** - *Finite Element Method*
- FFRF** - *Floating Frame of Reference Formulation*
- FFT** - *Fast Fourier Transform*
- FRF** - *Frequency Response Function*
- GL** - Graus de Liberdade
- SFFT** - *Short-Time First Fourier Transform*

Outras notações

- $\dot{\mathbf{r}}$ - Derivada temporal do vetor \mathbf{r}
- \mathbf{r}' - Derivada espacial do vetor \mathbf{r}
- \mathbf{r}^T - Transposto do vetor \mathbf{r}
- δW - Trabalho virtual
- $|\mathbf{r}|$ - Módulo do vetor \mathbf{r}
- Δt - Intervalo de tempo
- \times - Produto vetorial
- el - Elemento
- e_{rel} - Erro relativo
- e_{abs} - Erro absoluto

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

Sumário

1	Introdução	22
1.1	O problema e a sua importância	22
1.2	Hipótese	25
1.3	Objetivos	25
1.3.1	Objetivos específicos	25
1.4	Contribuições originais	25
1.5	Organização da tese	26
2	Revisão da literatura	28
2.1	Considerações iniciais	28
2.2	Cordas e vigas tensionadas com movimento axial	28
2.3	Mecânica do contato correia-polia	31
2.4	Sistemas de transmissão por correia: modelos analíticos	32
2.5	Modelagem por elementos finitos de sistemas de transmissão	43
2.6	Caracterização das propriedades mecânicas da correia	46
2.7	Trabalhos realizados pelo grupo de pesquisa	48
2.8	Resumo do capítulo	48
3	Modelo de elementos finitos não-linear ANCF	50
3.1	Considerações iniciais	50
3.2	Elemento finito de viga ANCF	51
3.2.1	Modelos de força longitudinal and transversal	54
3.2.2	Análise numérica do elemento finito ANCF	57
3.2.2.1	Teste numérico 1	57
3.2.2.2	Teste numérico 2	60
3.2.2.3	Teste numérico 3	65
3.2.2.4	Teste numérico 4	66

3.3	Incorporação dos efeitos centrífugos e giroscópicos no elemento finito de viga ANCF	67
3.3.1	Teste numérico 5	70
3.4	Resumo do capítulo	73
4	Modelagem matemática do sistema de transmissão	74
4.1	Sistema de transmissão com 2 polias	74
4.1.1	Modelo multicorpos puramente rotacional	74
4.1.2	Modelo multicorpos híbrido	81
4.2	Sistema de transmissão com dispositivo auto-tensionador	87
4.2.1	Modelo multicorpos puramente rotacional	87
4.2.2	Modelo multicorpos híbrido	96
4.3	Resumo do capítulo	104
5	Bancada de ensaios	105
5.1	Projeto e construção	105
5.2	Instrumentação	109
5.2.1	Extensômetros do mancal	109
5.2.2	Extensômetros da correia	110
5.2.3	Extensômetros do eixo movido	112
5.2.4	Sensor de rotação	115
5.3	Equipamentos utilizados	115
5.4	Resumo do capítulo	116
6	Caracterização experimental dos componentes da bancada	117
6.1	Características viscoelásticas da correia	117
6.2	Propriedades geométricas e de inércia	125
6.3	Rigidez da mola torcional do auto-tensionador	128
6.4	Resumo do capítulo	131
7	Simulação numérica e validação experimental	133
7.1	Sistema de transmissão com 2 polias	133
7.1.1	Modelo puramente rotacional	133
7.1.1.1	Validação experimental das reações no mancal	134
7.1.1.2	Simulação 1	134
7.1.1.3	Simulação 2	138
7.1.1.4	Simulação 3	142
7.1.1.5	Simulação 4	144
7.1.2	Modelo ANCF híbrido	147

7.1.2.1	Validação estática	147
7.1.2.2	Validação dinâmica	155
7.1.2.3	Análise paramétrica	157
7.1.2.4	Simulação dinâmica	160
7.2	Sistema de transmissão com auto-tensionador	161
7.2.1	Modelo puramente rotacional	162
7.2.1.1	Validação experimental das reações no mancal	162
7.2.1.2	Simulação 1	163
7.2.1.3	Simulação 2	170
7.2.1.4	Simulação 3	178
7.2.2	Modelo ANCF híbrido	184
7.2.2.1	Validação estática	184
7.2.2.2	Validação dinâmica	191
7.2.2.3	Análise paramétrica	196
7.2.2.4	Simulação dinâmica	200
7.3	Resumo do capítulo	203
8	Conclusões	204
9	Sugestões para trabalhos futuros	206
	Referências	207
A	Anexos	224
A.1	Dedução matemática da força centrífuga na correia	224

1 Introdução

1.1 O problema e a sua importância

Sistemas de transmissão por correia têm sido amplamente utilizados para transmitir torque e potência tanto em aplicações automotivas quanto industriais. Grande parte dos atuais motores veiculares utilizam apenas uma correia do tipo poly-V para acionar simultaneamente diversos acessórios, tais como direção hidráulica, compressor do ar-condicionado, bomba d'água e alternador, conforme ilustrado na Figura 1.1.

Esta correia, devido à configuração de montagem no sistema envolvendo os diversos ângulos de abraçamento nas polias, é conhecida como correia serpentina, e substituiu as antigas múltiplas correias de perfil V.



Figura 1.1: Motor automotivo com acionamento por correia serpentina. Fonte: Mercedes-Benz[®].

A popularização da correia poly-V na indústria automotiva deve-se ao baixo nível de ruído quando comparado ao acionamento por engrenagens ou correntes, à facilidade de montagem e manutenção, custo reduzido, confiabilidade do sistema e flexibilidade de acionar os acessórios em diferentes posições do motor, resultando em economia de espaço físico no *front-end*.

Entretanto, tais sistemas podem apresentar comportamento dinâmico complexo, devido às não-linearidades de natureza geométrica e/ou material. As cargas dinâmicas aplicadas no sistema em geral resultam em vibração rotacional do auto-tensionador e das polias, além de

vibração transversal dos tramos da correia adjacentes aos mesmos, ocasionando a propagação de ruído estrutural, fadiga nos componentes, dentre outros problemas, motivando grande investimento em pesquisas por parte de universidades, centros de pesquisa e fabricantes. A compreensão dos efeitos dinâmicos envolvidos e condições de estabilidade têm sido objeto de estudo em diversos trabalhos.

A correia é mantida tensionada através de um dispositivo auto-tensionador passivo instalado no sistema, conforme mostrado na Figura 1.2. O auto-tensionador tem como função principal regular de forma automática a tensão nos tramos durante a aceleração do motor ou na presença de cargas dinâmicas rotacionais atuantes no sistema, condições críticas que levam à deformação elástica da correia.

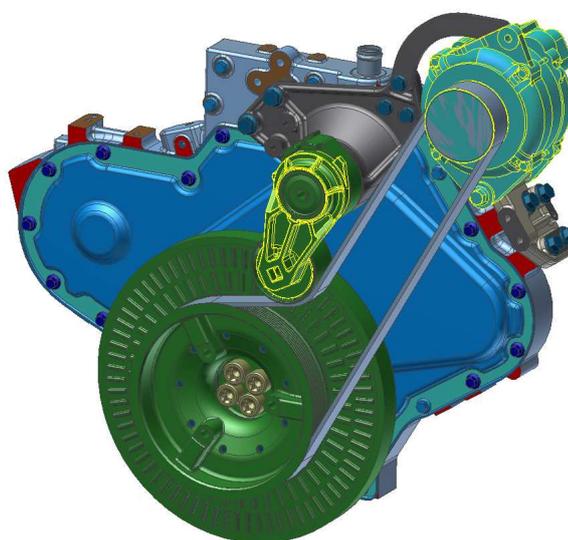


Figura 1.2: *Front-end* do motor MWM[®] MaxxForce 7.2H.

Duas abordagens têm sido até então empregadas no desenvolvimento de modelos para sistemas de transmissão. Uma delas procura modelar o sistema como sendo puramente rotacional, em que a correia atua como molas axiais que acoplam as polias, consideradas como elementos discretos rígidos. Neste tratamento, é desprezada a vibração transversal dos tramos e a sua influência na dinâmica do sistema. A segunda abordagem modela o sistema considerando os efeitos de inércia e vibração transversal dos tramos, incluindo a dependência das frequências naturais com a velocidade axial da correia. Este modelo analítico híbrido, composto por elementos discretos (polias) e contínuos (correia), é mais completo e realista, mas apresenta elevada complexidade de modelagem e análise, tanto do ponto de vista teórico quanto computacional. As principais contribuições científicas nesta área buscaram incorporar os efeitos da rigidez de flexão no modelo, a inclusão de dispositivos auto-tensionadores com atrito seco e viscoso no sistema, e efeitos de viscoelasticidade da correia.

Trabalhos recentes procuraram dar enfoque mais abrangente e numérico ao problema, abrindo uma nova e promissora linha de pesquisa. Propostas surgiram para a modelagem do sistema de transmissão pelo método clássico de elementos finitos, incluindo a interação do contato correia-polia, até então não considerado nos modelos e tratado de forma independente. Nesta abordagem, efeitos de deslizamento, perda de contato e *stick-slip* podem ser naturalmente observados. Os principais problemas apontados foram o negligenciamento dos efeitos não-lineares no modelo proposto e a necessidade de discretização da malha em um número muito grande de elementos, comprometendo o desempenho computacional.

Uma nova formulação não-linear de elementos finitos, baseada em coordenadas nodais absolutas, foi recentemente desenvolvida para aplicações em sistemas multicorpos flexíveis que apresentam grandes deslocamentos e deformações. Neste método, os deslocamentos nodais são diretamente descritos no sistema de referência inercial, e as inclinações dos nós, representadas por gradientes, não impõem qualquer restrição às deformações angulares. Pesquisas recentes têm revelado que a formulação proposta é bastante promissora e robusta para ser aplicada a sistemas de transmissão, uma vez que incorpora em um só modelo todos os efeitos dinâmicos presentes em tais sistemas.

Diversos trabalhos têm apresentado o uso da formulação de coordenadas nodais absolutas em aplicações de engenharia, especialmente aquelas envolvendo efeitos não-lineares, tais como pêndulo físico e vigas rotativas muito flexíveis, interação entre corpos rígidos deslizantes sobre cabos extensíveis, mecanismos deformáveis, dentre outras.

Este trabalho apresenta uma nova aplicação da formulação de coordenadas nodais absolutas (ANCF) na modelagem híbrida de sistemas de transmissão por correia. Os tramos são modelados como elementos flexíveis, enquanto as polias e o auto-tensionador como elementos discretos rígidos. Dois sistemas distintos são analisados, um com duas polias (tensionamento manual da correia), e outro com a inclusão do dispositivo auto-tensionador. As equações de movimento não-lineares são apresentadas em forma matricial, incluindo os efeitos centrífugos e giroscópicos presentes em tais sistemas. Um procedimento de linearização em torno da configuração de equilíbrio estacionário é empregado para proposta de análise modal e identificação das frequências naturais do sistema. Também é proposto neste trabalho um modelo puramente rotacional baseado no Método de Newton-Euler, para comparação com o modelo híbrido acoplado. Os resultados de diversas simulações numéricas dos modelos são suportados por experimentos conduzidos em bancada de ensaios, com o objetivo de validação teórico-experimental.

1.2 Hipótese

Utilizando técnicas de modelagem não-linear de sistemas multicorpos híbridos, a formulação de coordenadas nodais absolutas pode ser empregada para descrever o comportamento dinâmico de sistemas de transmissão por correia, incluindo os efeitos centrífugos e giroscópicos presentes em tais sistemas.

1.3 Objetivos

Os objetivos principais deste trabalho consistem em desenvolver, aplicar e validar modelos multicorpos híbridos baseado em ANCF para descrever o comportamento dinâmico de sistemas de transmissão por correia, nas condições estática e dinâmica.

1.3.1 Objetivos específicos

Para alcançar os objetivos propostos, os seguintes objetivos específicos são estabelecidos:

- Estudo, implementação computacional e análise dinâmica do modelo de viga ANCF não-linear proposto por Shabana (2013);
- Desenvolvimento e incorporação de componentes centrífugos e giroscópicos originais no modelo ANCF, para descrever os efeitos dinâmicos presentes em vigas tensionadas que se movem axialmente;
- Modelagem rotacional e híbrida do sistema de transmissão por correia, com e sem autotensionador;
- Construção e instrumentação de bancada de ensaios para verificação experimental;
- Caracterização experimental dos componentes da bancada em ensaios independentes;
- Simulação numérica dos modelos propostos para diferentes condições de operação, utilizando os parâmetros identificados experimentalmente;
- Comparação dos resultados e validação dos modelos.

1.4 Contribuições originais

Este trabalho apresenta as contribuições originais listadas a seguir, ainda não reportadas na literatura:

- Desenvolvimento inédito dos modelos ANCF de força centrífuga e giroscópica, para incorporação dos respectivos efeitos dinâmicos nos tramos flexíveis da correia;
- Modelagem inédita das reações dinâmicas atuantes nos acessórios do sistema de transmissão;
- Linearização das equações de movimento acopladas do modelo ANCF proposto em torno da posição de equilíbrio estático para análise modal do sistema de transmissão;
- Validação experimental dos modelos híbridos para diferentes níveis de tensão na correia, considerando as condições estática e dinâmica;
- Modelagem híbrida do sistema de transmissão negligenciando o contato de toda a interface correia-polia, que leva à simplificação das equações não-lineares de movimento ANCF e redução do custo computacional de simulação.

1.5 Organização da tese

A tese está organizada como segue.

No Capítulo 2 é apresentada uma ampla revisão de literatura e o estado da arte em sistemas de transmissão por correia. São considerados os modelos de viga com movimento axial, a mecânica do contato correia-polia, os modelos analíticos rotacionais e híbridos do sistema de transmissão, com a evolutiva incorporação dos diversos efeitos dinâmicos não-lineares. A aplicação do modelo clássico de elementos finitos é apresentada, bem como dos atuais modelos não-lineares baseados na formulação de coordenadas nodais absolutas. Estudos sobre a caracterização experimental da correia são reportados, bem como o portfólio de trabalhos realizados pelo grupo de pesquisa do Laboratório de Vibrações.

O Capítulo 3 trata do modelo de elementos finitos ANCF proposto neste trabalho para representar os tramos flexíveis da correia. Os modelos de força longitudinal e transversal são reportados, bem como as forças generalizadas e de inércia. Diversos testes numéricos são apresentados para ilustrar a aplicação do modelo, tanto no regime linear quanto no não-linear. É mostrado que o modelo não contempla os importantes efeitos centrífugos e giroscópicos presentes em vigas com movimento axial, como é o caso da correia. A energia cinética do elemento finito ANCF é então modificada, viabilizando a incorporação de tais efeitos no modelo de forma inédita. As matrizes giroscópica e centrífuga são apresentadas, e o modelo ANCF é validado em testes numéricos utilizando o modelo linear FEM como referência, através do diagrama de Campbell.

A modelagem do sistema de transmissão por correia é apresentada no Capítulo 4. Dois

sistemas de transmissão são analisados, um com duas polias e outro com a presença de auto-tensionador. São propostos dois modelos distintos: o puramente rotacional, baseado no Método de Newton-Euler, e o híbrido, que contempla de forma acoplada tanto os elementos rígidos quanto os flexíveis, fundamentado no método de elementos finitos não-linear ANCF. Os vínculos geométricos e as condições de contorno utilizadas no contato correia-polia são detalhadamente discutidos, bem como o procedimento de eliminação dos graus de liberdade dependentes. Uma técnica de linearização das equações de movimento em torno do ponto de equilíbrio estacionário é aplicada no problema, para viabilizar a análise modal do sistema.

A bancada de ensaios e seus componentes são apresentados no Capítulo 5. A instrumentação utilizada e as curvas de calibração dos sensores são reportadas, bem como a lista completa de equipamentos empregados nos experimentos.

O Capítulo 6 considera a caracterização experimental dos componentes da bancada, necessária para a identificação dos parâmetros a serem utilizados na simulação dos modelos propostos. São apresentadas as características viscoelásticas da correia, as propriedades geométricas e de inércia dos componentes, assim como o coeficiente de rigidez torcional da mola do auto-tensionador.

No Capítulo 7 são apresentadas as simulações numéricas dos modelos, assim como os resultados experimentais obtidos na bancada de ensaios. São reportadas análises nas condições estática e dinâmica, com e sem auto-tensionador. A validação teórico-experimental é feita no domínio da frequência por meio das frequências naturais do sistema e do diagrama de Campbell.

Finalmente, o Capítulo 8 destaca as principais conclusões da tese, enquanto o Capítulo 9 aponta as sugestões para trabalhos futuros.

2 Revisão da literatura

2.1 Considerações iniciais

As pesquisas desenvolvidas ao longo dos anos em sistemas de transmissão por correia costumam ser subdivididas em três grandes áreas: a) as que consideram separadamente a dinâmica do subsistema constituído pelos tramos da correia, polias e auto-tensionador, b) as que tratam especifica e isoladamente da mecânica do contato correia-polia, e c) aquelas que recentemente surgiram para descrever de forma unificada a resposta dinâmica do sistema completo. O objetivo principal é contemplar em um único modelo multicorpos a interação das duas áreas anteriores, de forma que os efeitos presentes na mecânica de contato sejam considerados na resposta dinâmica dos tramos, polias e auto-tensionador, e vice-versa. De forma geral, ainda que tratadas de forma independente, as duas primeiras frentes de pesquisa têm contribuído de forma expressiva para o desenvolvimento dos atuais modelos multicorpos híbridos, viabilizando procedimentos de verificação por meio de modelos experimentalmente validados dos dois subsistemas.

Muitos fenômenos dinâmicos importantes estão presentes nos sistemas de transmissão por correia, incorporando complexidades do ponto de vista da modelagem matemática, simulação computacional e análise, seja no domínio do tempo ou da frequência.

Nas seções seguintes, são apresentados os principais trabalhos relacionados à modelagem e análise de tais sistemas, dos precursores aos mais recentes.

2.2 Cordas e vigas tensionadas com movimento axial

Diversas aplicações de engenharia podem ser representadas por materiais que apresentam movimento axial: serras de fita, correias transportadoras, fitas magnéticas para armazenamento de dados, sistemas de transmissão por correia e correntes, bobinadores de papel, chapas finas e fios têxteis, veículos com esteiras rolantes, dentre outros sistemas. Um modelo mecânico representativo de tais sistemas é mostrado na Figura 2.1.

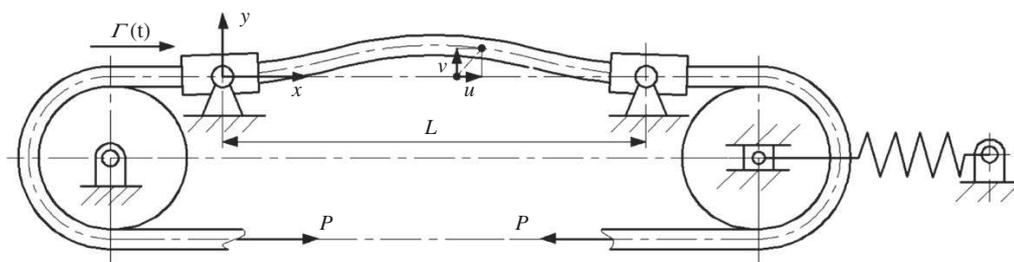


Figura 2.1: Modelo de viga tensionada com movimento axial. Fonte: Tang *et al.* (2013).

Os primeiros trabalhos sobre sistemas de transmissão abordaram o problema considerando a correia como um elemento de corda tensionada submetida a movimento axial. A análise era feita considerando a correia completamente desacoplada do sistema, desprezando a influência da rotação das polias e demais componentes na vibração longitudinal e transversal do elemento.

Elementos estruturais tensionados sujeitos a movimento axial experimentam efeitos centrífugos e giroscópicos, onde tanto a tensão axial quanto a velocidade de transporte impactam diretamente as frequências naturais de vibração transversal (Mote Jr., 1965; Sack, 1954). Quando efeitos giroscópicos e de amortecimento estão simultaneamente presentes, tais sistemas são classificados como não-auto-adjuntos, aumentando consideravelmente a complexidade de solução e análise das equações de movimento (Zhang, 1999).

Wickert e Mote Jr. (1990) e Wickert (1992) apresentaram o modelo analítico de corda e viga tensionada com velocidade axial constante. Foram reportados métodos de análise modal para tais sistemas, bem como a solução em forma fechada das equações de movimento.

Öz *et al.* (1998) e Ponomareva e van Horssen (2009) analisaram a resposta transiente de materiais com movimento axial sujeitos a aceleração. Os autores analisaram a influência da rigidez de flexão na resposta dinâmica, e sugeriram a descrição dos modos de baixa e alta frequência utilizando respectivamente os modelos de corda e viga.

Uma investigação do efeito da aceleração axial em vigas, considerando acoplamento de coordenadas longitudinal e transversal, foi feita por Ghayesh (2012). O sistema giroscópico parametricamente excitado foi analisado através de mapas de bifurcação (Ghayesh e Amabili, 2013). O acoplamento também foi considerado por Ghayesh *et al.* (2013), onde foi analisado o comportamento não-linear de uma viga viscoelástica com movimento axial por meio de simulação numérica.

Sloboda (2007) investigou a vibração transversal teórico-experimental de uma correia sob excitação axial paramétrica. O objetivo foi desenvolver um modelo analítico com acoplamento longitudinal/transversal e analisar o comportamento dinâmico do sistema. Um estudo paramétrico foi proposto para avaliar os efeitos da tensão inicial da correia, velocidade longitudinal, rigidez axial e amortecimento. Os resultados mostraram a ocorrência de ressonância paramétrica do tipo 1:2 na correia, confirmando os resultados reportados por Beikmann (1992), Riedel (2000) e Fujii *et al.* (2002).

Scurtu (2009) apresentou um modelo analítico não-linear para descrever o comportamento dinâmico de uma viga tensionada submetida a excitação longitudinal em uma extremidade e engastada na outra. O objetivo do trabalho foi descrever o acoplamento existente entre a vibração longitudinal com a transversal em correias, para aplicações em sistemas de transmis-

são. A solução do modelo foi obtida utilizando o Método da Equação Análoga. Os resultados mostraram que a vibração transversal é estável, mas apresenta transferência de energia com o movimento longitudinal devido à ressonância interna. A amplitude de vibração transversal mostrou forte dependência com o deslocamento transversal no ponto de excitação. Análises sobre a influência dos parâmetros da correia (tensão inicial, amplitude de vibração longitudinal, comprimento e módulo de rigidez axial) foram apresentadas e validadas experimentalmente. As principais conclusões foram (Scurtu *et al.*, 2012): a) o aumento na tensão longitudinal resulta em redução na amplitude de vibração transversal da correia, b) tramos com comprimentos maiores apresentam menores amplitudes de vibração transversal, mantidas a mesma tensão e amplitude de vibração longitudinal, c) um aumento da amplitude de excitação longitudinal resulta no incremento da amplitude de vibração transversal, d) o deslocamento transversal é muito maior que o deslocamento longitudinal, sendo originado a partir da variação da deformação longitudinal, e e) o módulo de rigidez transversal EI da correia é muito pequeno e sua influência pode ser negligenciada quando comparado com o módulo de rigidez axial EA . Estudos experimentais reportados por Musselman e Djurdjanovic (2011) também mostraram que a vibração transversal da correia é sensível à tensão inicial e ao comprimento do tramo.

Diversos pesquisadores têm se concentrado no estudo da estabilidade de vibração transversal de elementos estruturais tensionados submetidos a velocidade axial. Tais sistemas podem apresentar comportamento tanto estável quanto instável, em função dos parâmetros e condições de excitação a que são submetidos (Hwang e Perkins, 1994; Mockensturm *et al.*, 1996; Pakdemirli e Ulsoy, 1997; Parker e Lin, 2001; Pellicano *et al.*, 2004; Pellicano e Vestroni, 2000; Tang *et al.*, 2013).

As investigações mais recentes estão focalizadas no desenvolvimento de modelos não-lineares, tanto analíticos quanto por elementos finitos, nos quais são considerados principalmente efeitos de grandes deslocamentos e deformações do material, comportamento viscoelástico, condições de contorno não-lineares e acoplamento de vibração longitudinal/transversal/torcional (Brake e Wickert, 2010; Ding e Chen, 2011a,b; Čepon e Boltežar, 2007; Humer, 2013; Kurmyshev, 2003; Lee e Oh, 2005; Wang *et al.*, 2013; Yan *et al.*, 2015; Özhan e Pakdemirli, 2013). Uma abrangente revisão sobre o estado-da-arte em vibração de cordas, vigas e placas sujeitas a movimento axial pode ser encontrada em Marynowski e Kapitaniak (2014).

Dentro deste contexto, a formulação de coordenadas nodais absolutas (ANCF - *Absolute Nodal Coordinate Formulation*) proposta por Shabana (2013), tem se destacado atualmente por contemplar de forma abrangente todas estas características. Muitos trabalhos apresentam validação experimental dos modelos de viga ANCF aplicados em sistemas multicorpos, submetidos a grandes deslocamentos e deformações (Gerstmayr *et al.*, 2013). No entanto, apesar de bastante promissor devido à descrição eficiente de deformações longitudinais e transversais não-lineares,

este modelo ainda não tem recebido muita atenção nos trabalhos referentes a vigas com movimento axial. Uma equação de movimento para viga ANCF com velocidade axial foi proposta por Pechstein e Gerstmayr (2013), mas nenhuma análise foi reportada destacando a influência dos efeitos centrífugos e giroscópicos presentes em tais sistemas sobre as frequências naturais, tanto longitudinais quanto transversais. Também não foi mencionado a contribuição explícita dos termos centrífugos e giroscópicos na equação de movimento do elemento finito.

2.3 Mecânica do contato correia-polia

Fenômenos complexos ocorrem durante a interação correia-polia. Ao longo do arco de abraçamento da correia na polia, coexistem regiões onde ocorrem deformações elásticas cisalhantes e regiões em que prevalecem o deslizamento, dando origem a mecanismos de dissipação de energia.

A mecânica que descreve a interação correia-polia tem sido historicamente subdividida em duas áreas de concentração: aquelas fundamentadas na teoria de *creep* e aquelas baseadas no modelo *shear* (Firbank, 1970). A teoria *creep* é aplicável a correias isotrópicas, as quais são consideradas elasticamente deformáveis, e desta forma, dão origem a forças de atrito decorrentes do deslizamento no contato correia-polia. A teoria *shear* assume que a correia é inextensível, sendo aplicável a correias compósitas, como é o exemplo das poly-V utilizadas em aplicações automotivas típicas (Alciatore e Traver, 1995; Gerbert, 1991).

As principais pesquisas concentram-se em modelar, analisar e validar a distribuição de forças no contato correia-polia, para, dentre outras aplicações, predizer e maximizar a capacidade de torque transmitido em sistemas de transmissão por correia (Bechtel *et al.*, 2000; Čepou *et al.*, 2009a; Gerbert e De Maré, 1995; Kim *et al.*, 2011, 1991; Kim e Marshek, 1987, 1990; Kim *et al.*, 1987; Kong e Parker, 2005a, 2006).

Fenômenos importantes surgem quando são incluídas na dinâmica do sistema a interação do contato correia-polia. Na Figura 2.2 é mostrada a influência da tensão na correia sobre a compressão da mesma nos sulcos das polias, revelando o efeito de assentamento nas regiões de saída da correia nas polias. Pode ser notado que este efeito altera diretamente os ângulos de entrada e saída da correia nas polias, influenciando a resposta dinâmica do sistema.

Outros efeitos também presentes estão associados à deformação radial, axial e cisalhante que ocorre ao longo do abraçamento da correia na polia, e que variam em função do material da correia, da tensão aplicada nos tramos e da interação dos componentes do sistema (Čepou *et al.*, 2010; Gerbert, 1991).

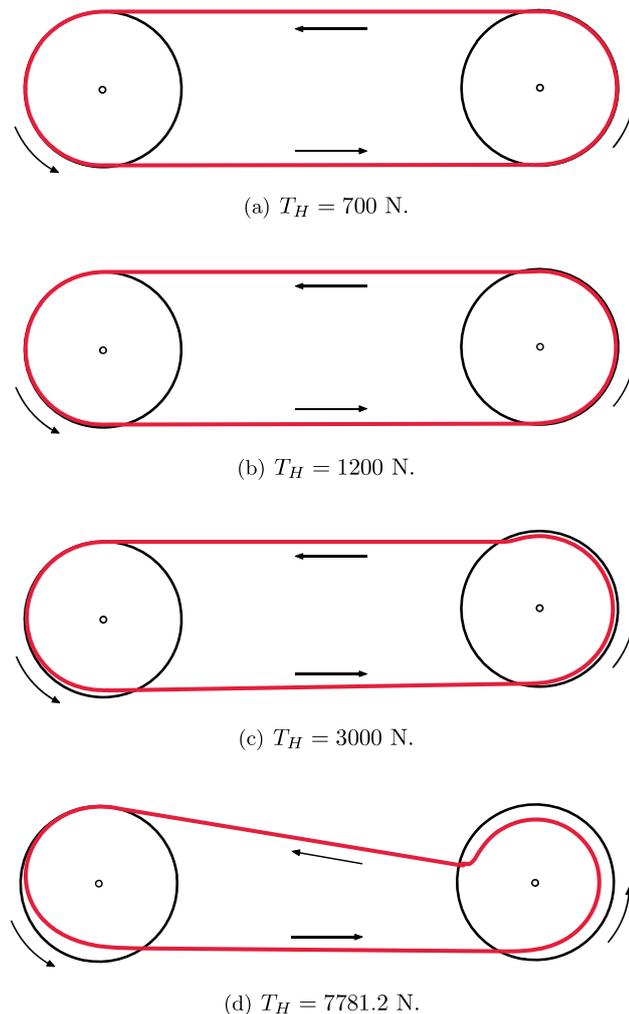


Figura 2.2: Efeito da tensão sobre o assentamento da correia nas polias movida (esquerda) e motora (direita). Fonte: Kim (2009).

2.4 Sistemas de transmissão por correia: modelos analíticos

Os modelos analíticos reportados na literatura se subdividem nos modelos puramente rotacionais, que desprezam o efeito dinâmico de vibração transversal da correia na resposta do sistema, e nos modelos híbridos, que incorporam os efeitos tanto da correia quanto das polias e auto-tensionador, permitindo uma análise dinâmica integrada de todos os componentes do sistema de transmissão.

Pesquisas conduzidas por Mote Jr. e Wu (1985) mostraram que em sistemas de transmissão por correia, a vibração transversal dos tramos pode excitar a vibração rotacional das polias, através do acoplamento originado pela rigidez de flexão da correia. Wang e Mote Jr. (1986) apresentaram um modelo analítico para um sistema de transmissão com duas polias, e sugeriram que diferenças significativas no espectro de vibração e nas respostas temporais podem

ocorrer se o acoplamento for negligenciado no modelo. Baseado no acoplamento dos tramos e polias, Wang (1990) propôs a concepção de um amortecedor posicionado em um dos tramos para dissipação de energia do sistema, com o objetivo de reduzir a amplitude de vibração do outro tramo da correia.

Ulsoy *et al.* (1985) descreveram diversos potenciais mecanismos de instabilidade devidos à presença de auto-tensionadores em sistemas de transmissão por correia serpentina. Foi apresentado um modelo matemático do subsistema correia/auto-tensionador e uma orientação de projeto para assegurar bom desempenho dinâmico. Os resultados de simulação, suportados por experimentos, mostraram que existem quatro mecanismos primários de instabilidade transversal da correia: a) ressonância do auto-tensionador, b) ressonância da correia, c) instabilidade de Mathieu decorrente da variação de tensão na correia e d) velocidade crítica da correia. Os autores concluíram que a redução da rigidez torcional da mola do auto-tensionador é efetiva no controle da instabilidade do sistema.

Um modelo rotacional do sistema de transmissão foi proposto por Barker *et al.* (1991) para simular as tensões nos tramos da correia durante rápida aceleração do motor. O modelo contempla a vibração do auto-tensionador, a carga dinâmica dos acessórios e os efeitos de tensão centrífuga atuantes nos tramos da correia. Os resultados teóricos tiveram boa acurácia e foram validados experimentalmente.

Hawker (1991) desenvolveu e validou experimentalmente o modelo rotacional de um sistema de transmissão por correia serpentina com auto-tensionador. O modelo é representado por um sistema discreto com múltiplos graus de liberdade, cujos parâmetros são as inércias das polias e os coeficientes de rigidez e amortecimento viscoso da correia. Os objetivos principais foram a determinação dos parâmetros modais do sistema, da resposta forçada e da variação de tensão na correia, uma vez que a flutuação de torque e a vibração rotacional estão associados a mecanismos de instabilidade (Ulsoy *et al.*, 1985). As principais conclusões foram: a) o módulo de rigidez axial da correia pode ser assumido como constante dentro da faixa de tensão tipicamente aplicada em sistemas de transmissão, b) as frequências naturais mais altas associadas aos modos predominantemente rotacionais do auto-tensionador não puderam ser encontradas experimentalmente, devido ao travamento por atrito interno do dispositivo, e c) a tensão inicial da correia tem efeito negligenciável sobre as frequências naturais rotacionais, confirmando a observação experimental de que os modos predominantemente rotacionais são pouco sensíveis às tensões dos tramos, diferentemente do que ocorre nos modos transversais da correia. As formas modais rotacionais, a resposta forçada e a tensão dinâmica da correia não foram investigadas experimentalmente. Foi reportado ainda a presença do modo de flexão dos eixos nos quais as polias são montadas (*wobble effect*). A frequência deste modo mostrou ser dependente da tensão na correia e da inércia das polias, aumentando com o incremento destes dois parâmetros

(Gaspar e Hawker, 1993).

O estado-da-arte em análise de vibração de sistemas de transmissão por correias foi apresentado por Abrate (1992). Foram discutidos os efeitos da tensão inicial, velocidade axial, rigidez de flexão, flexibilidade do suporte, grandes deslocamentos, imperfeições nas polias e correia, além de não-linearidades presentes. O trabalho descreve os modelos analíticos de cordas e vigas, e apresenta análises de vibração transversal, torcional e axial. As conclusões revelaram que a rigidez de flexão pode ter influência significativa no comportamento da correia, especialmente em modos de alta frequência. Foi mencionado a necessidade de desenvolvimento de modelos que contemplem o acoplamento transversal da correia com a rotação das polias, incluindo dispositivos auto-tensionadores.

Beikmann (1992) propôs e validou experimentalmente um modelo não-linear para descrever o acoplamento do movimento rotacional e transversal de sistemas de transmissão por correia serpentina com auto-tensionador. O modelo considera a correia elástica inclui o acoplamento do movimento do auto-tensionador com o movimento transversal dos tramos adjacentes ao mesmo. Os efeitos de velocidade axial da correia também foram considerados, através da incorporação de termos giroscópicos e centrífugos. Foram analisadas as configurações de equilíbrio do sistema na condição de operação (Beikmann *et al.*, 1997), pequenas vibrações considerando a influência da inércia da correia (Beikmann *et al.*, 1996a), e a presença de não-linearidades geométricas (Beikmann *et al.*, 1996b). As principais conclusões foram: a) a análise de vibração do sistema envolve o acoplamento linear entre componentes discretos (auto-tensionador) e contínuos (tramos adjacentes da correia), b) o acoplamento entre a vibração rotacional e transversal pode resultar em resposta dinâmica qualitativamente diferente daquela predita quando o acoplamento é ignorado, c) as frequências naturais do sistemas dependem da velocidade da correia, devido às alterações da geometria e tensões de equilíbrio, d) a orientação do auto-tensionador influencia ambos os modos transversais e rotacionais, e e) as frequências naturais dos modos rotacionamente dominantes são praticamente independentes da rotação, como também reportado por Hawker (1991). A análise não-linear revelou que pode ocorrer ressonância interna do tipo 1:1, 1:2 ou 1:3, resultando em instabilidade no sistema, e que vibrações transversais da correia na frequência ω resultam em flutuação de tensão na magnitude 2ω , podendo excitar modos rotacionais com frequências naturais próximas a este valor. As simulações teóricas tiveram boa correlação experimental. Os resultados experimentais mostraram a existência de acoplamento rotacional das polias com o movimento transversal dos tramos, inclusive dos tramos sem contato direto com o auto-tensionador, efeito este não considerado no modelo proposto. Desta forma, vibrações transversais dos tramos podem excitar vibrações rotacionais das polias e auto-tensionador.

Um modelo não-linear puramente rotacional, incluindo o auto-tensionador, foi apresen-

tado por Hwang *et al.* (1994) para prever o comportamento dinâmico e condições de deslizamento no contato correia-polia. O modelo foi linearizado na posição de equilíbrio estático e utilizado para análise de vibração livre e forçada. Os resultados mostraram que as tensões nos tramos da correia dependem do torque de pré-carga e da rigidez torcional do auto-tensionador, do torque estacionário aplicado pelos acessórios do sistema de transmissão nas polias e da rotação do motor (efeito centrífugo). Foi reportado que os modos rotacionais são muito pouco afetados pela rotação, uma vez que os comprimentos dos tramos são praticamente constantes. Simulações mostraram que pode ocorrer deslizamento no contato correia-polia durante a aceleração do motor, resultando em *squeal* e desgaste prematuro da correia.

Rim e Kim (1994) apresentaram e validaram um método para a estimativa das componentes de tensão estática e dinâmica de sistemas de transmissão, baseado na análise de vibração transversal da correia em regime transiente no domínio da frequência.

Uma metodologia para projeto e análise de sistema de transmissão foi proposta por Kraver (1995). O trabalho apresenta um modelo analítico para o contato correia-polia, com o objetivo de prever o fenômeno de *stick-slip* baseado nos parâmetros de projeto.

Moon e Wickert (1997) e Pellicano *et al.* (2001) investigaram o efeito da excentricidade das polias na estabilidade de vibração transversal da correia em sistemas de transmissão. Os resultados teórico-experimentais mostraram que a excentricidade dá origem à flutuação de tensão nos tramos da correia, que podem resultar em instabilidade paramétrica no sistema.

Um método para a derivar as equações de movimento lineares de sistemas de transmissão foi apresentado por Iwatsubo *et al.* (1997). O método foi implementado e o algoritmo usado para formular as equações de movimento e determinar a resposta transiente do sistema. A proposta é tratar sistemas de transmissão complexos a partir de combinações de elementos simples, como polias e molas lineares.

Leamy (1998) analisou a influência do atrito de Coulomb na resposta dinâmica não-linear de sistemas de transmissão por correia. Foi considerado atrito no auto-tensionador e no contato correia-polia, para previsão do efeito de *stick-slip* em condições transientes e estacionárias. O modelo proposto, baseado no modelo de Hwang *et al.* (1994), foi capaz de descrever os fenômenos observados experimentalmente, tais como componentes sub e super harmônicos na resposta, além de ressonâncias primárias e secundárias. O Método de Balanço Harmônico Incremental foi utilizado para a análise não-linear do sistema, reduzindo o custo computacional quando comparado com o método de integração direta das equações de movimento (Leamy e Perkins, 1999).

Kim e Lee (1999) apresentaram o modelo analítico de um sistema de transmissão constituído por duas polias suportadas por bases flexíveis. As equações de movimento foram obtidas

pelo Princípio de Hamilton e resolvidas pelos métodos de Galerkin e de Perturbação. Foram analisadas as respostas livre e forçada do sistema. Uma análise de sensibilidade paramétrica foi feita para investigar a influência da massa das polias e da tensão, comprimento, propriedades mecânicas e velocidade axial da correia na resposta dinâmica do sistema.

Os efeitos de viscoelasticidade da correia foram introduzidos nos sistemas de transmissão por Zhang (1999). Neste trabalho foi apresentado um modelo viscoelástico Kelvin para materiais com movimento axial e a sua incorporação no modelo analítico híbrido (com componentes discretos e contínuos) proposto por Beikmann (1992). O modelo é capaz de descrever os mecanismos viscoelásticos de amortecimento da correia e capturar o acoplamento entre a vibração rotacional e transversal. O Método de Escalas Múltiplas é empregado para a análise de vibração não-linear livre, forçada e paramétrica de sistemas giroscópicos viscoelásticos. A fonte de excitação é assumida ser originada pela excentricidade das polias. O Método de Análise Modal Complexa foi desenvolvida para análise de vibração de sistemas de transmissão por correia híbridos não-autoadjuntos, para a determinação dos autovalores e autofunções (Zhang e Zu, 1999; Zhang *et al.*, 2001). Estudos de estabilidade de sistemas viscoelásticos sob excitação paramétrica foram apresentados (Zhang e Zu, 2000). Uma abrangente revisão do estado-da-arte foi reportada no referido trabalho. As principais conclusões deste estudo foram: a) o amortecimento introduzido pelo modelo viscoelástico tem efeito pouco pronunciado sobre as frequências naturais não-lineares, mas é eficiente para reduzir a amplitude da resposta tanto de vibração longitudinal quanto transversal, b) as frequências naturais são reduzidas com o aumento da velocidade axial da correia, devido aos efeitos centrífugos e giroscópicos, c) a velocidade axial tem um efeito importante na resposta estacionária, desde que tanto as frequências naturais quanto a excitação são dependentes da rotação, d) a propriedade viscoelástica altera as regiões de estabilidade nos casos de excitação paramétrica, e) os modos rotacionais são independentes da velocidade de rotação, enquanto os transversais apresentam forte dependência, f) em baixas velocidades, o efeito da orientação do tensionador é desprezível sobre os modos transversais, mas em altas rotações, o efeito é considerável, g) os autovalores de sistemas não-autoadjuntos não são puramente imaginários, que são diferentes dos sistemas não-amortecidos, e h) interações não-lineares entre a vibração rotacional das polias e a transversal dos tramos podem causar ressonâncias paramétricas. Diretrizes baseadas neste estudo foram reportadas como recomendações importantes a serem consideradas na etapa de projeto. São sugeridos como trabalhos futuros a caracterização experimental viscoelástica da correia, o desenvolvimento de modelos viscoelásticos mais complexos incluindo a rigidez de flexão da correia.

Riedel (2000) investigou os efeitos de acoplamento não-linear da vibração transversal/longitudinal e transversal/torcional de sistemas de transmissão por correia. Os modelos analíticos de corda e viga com movimento axial foram utilizados para representar os tramos da correia. O principal objetivo foi analisar, através de técnicas de perturbação, as condições de estabilidade

do sistema quando submetido a excitação paramétrica. Os resultados foram validados experimentalmente através de bancada de ensaios. As conclusões do trabalho foram: a) as respostas dos modelos de corda e de viga podem exibir resultados diferentes, que dependem também do tipo de restrição, velocidade e tensão da correia, b) na presença de ressonância interna, em certas condições a vibração longitudinal contribui para estabilizar o sistema, c) a excitação paramétrica surge devido à flutuação de tensão longitudinal na correia, originada pelos pulsos de torque do virabrequim, d) a amplitude de vibração torcional foi pequena e modulada, indicando movimento quasi-estático, e e) as respostas torcional e transversal da correia contém componentes harmônicos da primeira frequência natural transversal, sendo a frequência torcional duas vezes a frequência transversal.

Estudos experimentais sobre a excitação paramétrica foram apresentados por Fujii *et al.* (2002), confirmando os resultados reportados por Beikmann (1992) e Riedel (2000) da ocorrência de ressonância do tipo 1:2. As conclusões citadas pelos autores foram: a) ressonância ocorre se a frequência de flutuação de tensão longitudinal na correia for igual a duas vezes a frequência natural de vibração transversal de um dos tramos e b) vibração transversal também ocorre se um dos tramos for excitado na frequência natural, sugerindo acoplamento de coordenadas.

A rigidez de flexão e seus principais efeitos na resposta dinâmica do sistema de transmissão foram apresentados por Kong (2003), que também investigou a distribuição de atrito e tensão no contato correia-polia. O objetivo principal foi desenvolver um modelo analítico incorporando a rigidez de flexão dos tramos e analisar os seus efeitos sobre o acoplamento não-linear da vibração longitudinal e transversal, com vista a explicar a ressonância que ocorre quando o sistema é excitado na frequência de combustão do motor. O modelo assume que existem momentos de flexão no contato dos tramos com as polias, conforme mostrado na Figura 2.3.

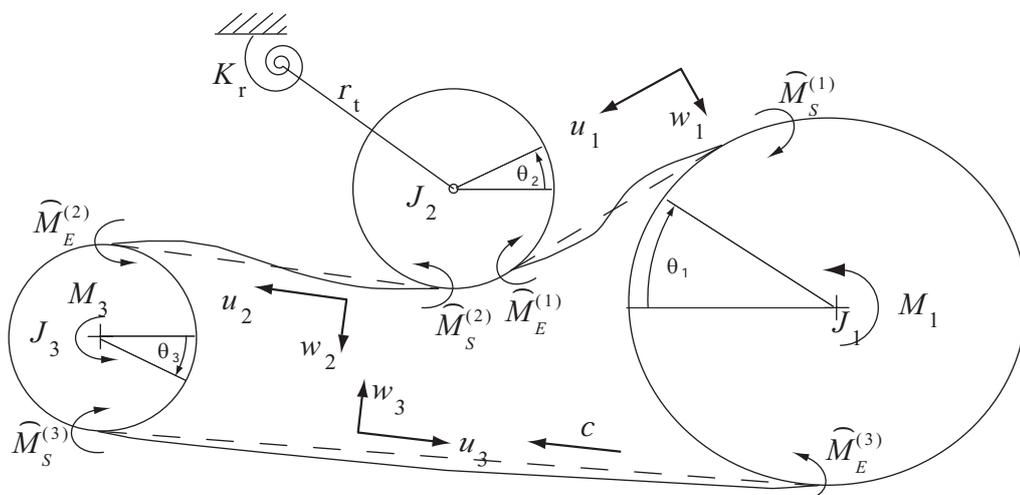


Figura 2.3: Modelo com rigidez de flexão. Fonte: Kong (2003).

O indicador do grau de acoplamento é definido por um parâmetro que está associado à flexão dos tramos. Desta forma, quanto maior o valor do parâmetro, maior o grau de acoplamento do sistema, sendo nulo quando a rigidez de flexão é desprezada. A inclusão da rigidez de flexão no contato correia-polia leva a acoplamentos não capturados pelo modelo de corda, resultando em respostas dinâmicas bastante diferentes quando a rigidez é elevada (Kong e Parker, 2003). Quando a rigidez de flexão é considerável, todos os componentes discretos e contínuos do sistema interagem fortemente, distanciando das respostas dinâmicas onde a rigidez é desprezada. Para rigidez nula, os resultados convergem para o modelo de corda. O modelo não-linear foi linearizado em torno da posição de equilíbrio estacionário e foram usados Métodos de Discretização por Galerkin para encontrar de forma eficiente os parâmetros modais do sistema. Uma análise foi apresentada correlacionando a variação das frequências naturais do sistema com a rigidez de flexão, resultando em comportamentos bastante distintos quando são comparadas à rigidez nula (Kong e Parker, 2004). Foi reportada uma expressão analítica para a estimativa do módulo de rigidez transversal de correias poly-V, em que $EI = (m - 1)2.867 \times 10^{-3} \text{ N.m}^2$, sendo m o número de sulcos da correia. As principais conclusões deste trabalho foram: a) a rigidez de flexão introduz acoplamento linear entre os tramos e as polias, com efeitos pronunciados nas condições de rigidez elevada ou de baixa tensão nos tramos, b) a velocidade da correia tem efeito atenuado sobre as frequências naturais quando a rigidez de flexão é incrementada, não diminuindo monotonicamente, e c) a rigidez de flexão introduz novas configurações de deflexão dos tramos, altera os ângulos de abraçamento dos tramos nas polias (Kong e Parker, 2005b), melhora a eficiência de transmissão, mas reduz o momento máximo transmissível (Kong e Parker, 2005c,d). O trabalho sugere como contribuições futuras a investigação dos efeitos de atrito na interação correia-polia e dos mecanismos envolvidos no contato de entrada/saída da correia nos sulcos das polias. Apesar de descrever efeitos de acoplamento importantes, o modelo não foi verificado experimentalmente no trabalho.

Schulz (2004) investigou a resposta transiente de sistemas de transmissão por correia utilizando modelo puramente rotacional e medida de deformação logarítmica. Os resultados mostraram melhor convergência da solução numérica e explicaram fenômenos não-lineares observados experimentalmente mas que não são descritos a partir da medida de deformação linear.

Um método eficiente baseado nos Multiplicadores de Lagrange foi apresentado por Parker (2004) para calcular os parâmetros modais e determinar a resposta dinâmica de sistemas de transmissão, a partir do modelo analítico híbrido proposto por Beikmann (1992). No trabalho foi reportado um estudo de sensibilidade paramétrica do sistema, onde são investigados os efeitos de rigidez e densidade da correia na resposta dinâmica, além da variação das frequências naturais em relação à inércia das polias e velocidade de transporte axial. Um método alternativo para a estimativa dos parâmetros modais do sistema de transmissão foi também apresentado por Xiangwu *et al.* (2009).

A dinâmica não-linear do sistema de transmissão com atrito de Coulomb e sujeito a excitações multifrequências foi introduzido por Cheng (2004). Foram investigados os efeitos do atrito seco do auto-tensionador na resposta dinâmica do sistema e as condições de *stick-slip*. O sistema é estudado através de modelo analítico puramente rotacional com dois tipos de excitação: duas forças externas com frequências distintas e força externa e outra paramétrica, levando a comportamentos que podem ser periódico, quasi-periódico ou caótico. Análises de bifurcação são apresentadas para ilustrar a influência das excitações sobre a resposta dinâmica do sistema e as condições de estabilidade (Cheng e Zu, 2005). As principais conclusões foram: a) o atrito de Coulomb tem impacto significativo na amplitude de resposta do sistema, b) o amortecimento da vibração do auto-tensionador aumenta com o torque de atrito, e c) em certas circunstâncias, o atrito seco pode aumentar a amplitude de vibração rotacional das demais polias do sistema.

Polias anti-vibração têm sido desenvolvidas para atenuar a vibração rotacional em sistemas rotativos em geral, e foram aplicadas em sistemas de transmissão por correia. Estas polias são geralmente acopladas no alternador e tornaram-se conhecidas comercialmente por OAP (*overrunning alternator pulleys*) ou OAD (*overrunning alternator decoupler*).

Utilizando modelagem rotacional, Balaji e Mockensturm (2005) apresentaram um estudo sobre o efeito de polias isoladoras/desacopladoras instaladas no sistema de transmissão. Os resultados mostraram que estas polias são capazes de reduzir a flutuação de tensão na correia, decorrente de excitações harmônicas originadas no virabrequim devido à sequência de combustão.

Zhu (2006) incorporou os efeitos não-lineares destas polias no modelo analítico híbrido do sistema de transmissão. Foram investigados ainda os efeitos combinados do atrito de Coulomb e da rigidez de flexão da correia na resposta dinâmica do sistema (Zhu e Parker, 2008a), com e sem a presença de auto-tensionador, incorporando contribuições dos trabalhos anteriores de Beikmann (1992), Kong (2003) e Cheng (2004). O autor utilizou os Métodos de Balanço Harmônico e Escalas Múltiplas para a análise de perturbação não-linear do sistema (Zhu e Parker, 2006). A polia anti-vibração foi modelada como uma mola linear com rigidez descontínua, que permite a transmissão de torque em apenas um sentido de rotação, desacoplando o sistema no sentido reverso quando ocorre vibração rotacional (Zhu e Parker, 2005). A análise baseia-se na velocidade relativa entre as polias motora e movida, acoplando ou desacoplando o sistema. O modelo proposto por Zhu (2006) é apresentado na Figura 2.4.

As principais conclusões foram: a) a resposta de vibração transversal dos tramos contém harmônicos associados a efeitos não-lineares, b) as frequências naturais do sistema são sensíveis em relação ao acoplamento/desacoplamento das inércias das polias, apresentando o padrão característico de *curve veering* (Zhu e Parker, 2008b), c) o torque de atrito atenua a vibração do auto-tensionador, podendo ocasionar o seu travamento se a magnitude for muito elevada, d) a

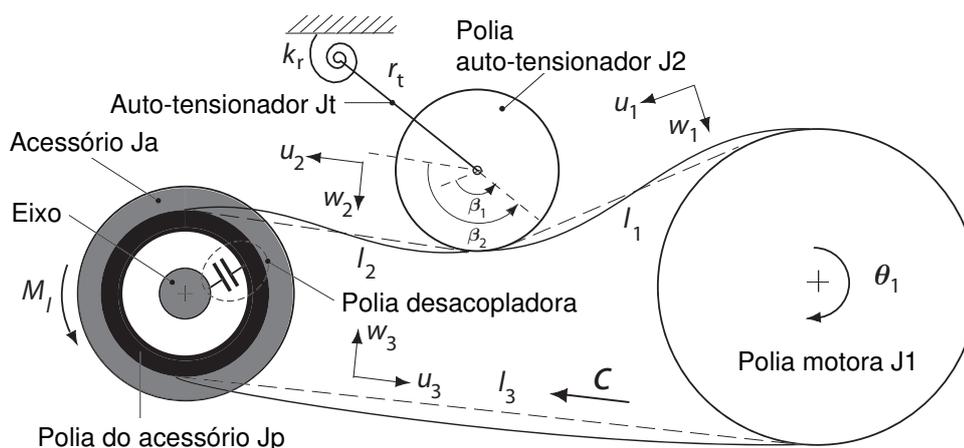


Figura 2.4: Modelo com rigidez de flexão, atrito de Coulomb e polia desacopladora. Fonte: Zhu (2006).

polia anti-vibração é efetiva na redução da amplitude de vibração dos modos rotacionais, mas pode não ser eficiente na atenuação da vibração transversal de todos os tramos da correia, e e) a flutuação de tensão nos tramos situados entre duas polias adjacentes é reduzida devido à presença das polias desacopladoras.

O efeito de *stick-slip* e histerese presente nos auto-tensionadores também tem sido alvo de investigação em diversos outros trabalhos (Bastien *et al.*, 2007; Chatelet *et al.*, 2008; Garcia, 2009; Grego, 2015; Michon *et al.*, 2005).

Análises do acoplamento induzido por auto-tensionador em sistemas de transmissão foram realizadas por Neward (2008). O objetivo foi confrontar os resultados dos modelos rotacional e híbrido, para verificar possíveis diferenças entre as duas abordagens. Foram comparados os modelos rotacional (desacoplado) e híbrido (acoplado) propostos respectivamente por Hwang *et al.* (1994) e Parker (2004), utilizando como parâmetro de validação os resultados experimentais obtidos por Beikmann (1992). As simulações indicaram que o movimento rotacional é afetado pelo deslocamento transversal dos tramos da correia. Os modos de baixa frequência são afetados pelo acoplamento do sistema, e a análise desacoplada é apenas adequada para os modos de alta frequência. A análise do sistema desacoplado não pode prever com acurácia as frequências naturais do sistema acoplado, que foram verificadas experimentalmente. O estudo revelou ainda que os modos rotacionais são insensíveis à rotação do sistema, e que as frequências naturais dos tramos adjacentes ao tensionador diminuem com a rotação devido aos efeitos centrífugos e giroscópicos, sendo esta queda menos pronunciada na análise do sistema acoplado (Neward e Boedo, 2008).

Li e Chen (2008) derivaram a equação característica explícita de sistemas de transmissão a partir das equações de movimento e das condições de contorno, viabilizando a análise modal do

sistema acoplado. As simulações numéricas mostraram que as frequências naturais diminuem com a rotação e aumentam em função da tensão inicial da correia, confirmando os resultados já reportados na literatura.

Uma fórmula genérica e explícita baseada nas matrizes do sistema de transmissão foi proposta por Hou *et al.* (2008) para a análise de sensibilidade paramétrica submetido à excitação harmônica. Foi utilizado nas análises o modelo híbrido proposto por Beikmann (1992). Simulações foram feitas para avaliar a sensibilidade dos parâmetros associados ao auto-tensionador sobre a resposta dinâmica do sistema. A partir do estudo paramétrico, foram propostas otimizações dos parâmetros com o objetivo de alterar as regiões de ressonância. Os resultados indicaram o real potencial de uso do método para o projeto otimizado de sistemas de transmissão. (Cheng e Zu, 2003).

Michon *et al.* (2008) investigaram a instabilidade paramétrica de sistemas de transmissão sob excitação multi-frequência. Os resultados teórico-experimentais mostraram que as características não-homogêneas da correia ao longo do seu comprimento, tais como rigidez axial e coeficiente de atrito com as polias são fontes de excitação, que podem originar instabilidade paramétrica.

Os motores mais recentes estão equipados com sistema de partida rápida, que permitem o seu desligamento durante paradas curtas (*start-stop engine*), para maior economia de combustível e redução dos níveis de poluentes lançados na atmosfera. Nestes veículos, o alternador convencional é substituído por um alternador/gerador de partida integrada (*ISG - integrated starter-generator*) (Cai, 2004). Este dispositivo é capaz de aplicar torque elevado no sistema de transmissão durante a re-partida do motor, originando alta tensão nos tramos adjacentes ao mesmo. Nesta condição, pode ocorrer tanto o deslizamento no contato correia-polia quanto a flutuação de tensão nos demais tramos do sistema (Olatunde, 2008), resultando em desgaste prematuro dos componentes. Dentro deste contexto, pesquisas têm sido reportadas abordando técnicas de controle ativo aplicadas a sistemas de transmissão, com o objetivo de minimizar a oscilação de tensão nos tramos (Chen, 2005; Chen e Zhang, 2006; Gorbet e Bortoff, 1999; Nouri, 2005; Okuda *et al.*, 2006; Olatunde e Zu, 2010; Zhu, 2011).

Ding e Zu (2013) analisaram a resposta estacionária não-linear de sistemas de transmissão com polias desacopladoras através de modelo analítico. O conjunto de equações de movimento integro-parcial-diferencial do modelo com duas polias foi transformada para equações diferenciais através do Método de Truncamento de Galerkin. O Método de Runge-Kutta foi utilizado para obter a resposta temporal do sistema, e regiões de ressonância foram determinadas através de excitação com varredura senoidal. Estudos paramétricos foram reportados para investigar o efeito dos parâmetros do sistema sobre a resposta estacionária não-linear. Os resultados revelaram que a polia desacopladora é eficiente para reduzir a amplitude de vibração tanto rotacional

quanto transversal do sistema.

Um método para a mensuração sem contato das tensões dinâmicas atuantes na correia de sistemas de transmissão também foi proposto por Neudorf (2013). As tensões médias nos tramos foram determinadas a partir das respectivas frequências naturais transversais, enquanto as tensões dinâmicas foram estimadas a partir da amplitude de deslocamento transversal dos tramos, da rotação das polias e do deslizamento que ocorre na interface correia-polia. O método foi validado experimentalmente em um sistema de transmissão com cinco polias e auto-tensionador. Os resultados obtidos por simulação mostraram acurácia em relação aos resultados experimentais. Foi reportado que a equação de movimento da correia contemplando a rigidez de flexão e condições de contorno de viga bi-articulada foi a que mostrou maior acurácia com os resultados experimentais.

Em trabalhos recentes, Shangguan *et al.* (2013) compararam a resposta dinâmica de uma corda viscoelástica tensionada sujeita a movimento axial com o modelo acoplado do sistema de transmissão. Os tramos analisados estavam entre duas polias, e portanto não tinham contato direto com o auto-tensionador. Os autores concluíram que as frequências naturais dos tramos podem ser estimadas a partir do modelo de corda viscoelástico desacoplado. A influência da rigidez e amortecimento da correia sobre a deflexão transversal dos tramos foi investigada. Os resultados teórico-experimentais mostraram que a amplitude de vibração transversal é reduzida com o aumento tanto da rigidez quanto do amortecimento.

O modelo rotacional de um sistema de transmissão com sete polias e auto-tensionador foi proposto e validado por Shangguan e Zeng (2013b). Os parâmetros utilizados na simulação foram obtidos experimentalmente por Shangguan e Zeng (2013a). O modelo considera a dependência da rigidez e amortecimento da correia com a frequência de excitação. A configuração de equilíbrio estático foi determinada a partir das equações de movimento, no qual foi negligenciada a deformação axial da correia. Foram apresentadas as frequências naturais do sistema, bem como a resposta temporal com as respectivas tensões na correia (Shangguan, 2011).

Recentemente Zeng e Wang (2014) apresentaram métodos experimentais para avaliar a performance dinâmica de auto-tensionador com efeito de *stick-slip*. Foram investigadas experimentalmente as influências da pré-carga torcional, amplitude e frequência de excitação sobre as características dinâmicas do dispositivo. Os parâmetros do modelo histerético proposto foram identificados experimentalmente e utilizados para simulação e validação de um sistema de transmissão com duas polias e auto-tensionador.

Ding e Hu (2014) analisaram a configuração de equilíbrio e a vibração livre de um sistema de transmissão com duas polias considerando o efeito de rigidez de flexão e polia desacopladora. O modelo analítico proposto contempla termos não-lineares para as tensões dinâmicas, resul-

tando em acoplamento da vibração rotacional com a transversal. A correia foi tratada como viga viscoelástica com movimento axial. As frequências naturais do sistema foram determinadas a partir do Método de Galerkin. A resposta temporal periódica em condição estacionária foi analisada por Ding e Li (2014), a partir da integração numérica das equações utilizando o Método de Runge-Kutta de quarta ordem. Os resultados mostraram que as frequências naturais são sensíveis à rigidez axial e de flexão, à tensão estática e às dimensões da correia. A aplicação de excitação multi-frequências neste modelo e seus efeitos foram investigados por Ding (2015a). O efeito de excitação pela base no sistema de transmissão, considerando modelo de corda, foi apresentado por Ding (2015b).

2.5 Modelagem por elementos finitos de sistemas de transmissão

Leamy e Wasfy (2005) introduziram uma nova abordagem por elementos finitos para a modelagem de sistemas de transmissão por correia. A proposta foi tratar tais sistemas de forma unificada, na qual são considerados tanto a mecânica do contato correia-polia quanto a resposta dinâmica dos tramos, polias e auto-tensionador. Neste modelo foi utilizado o elemento finito proposto por Wasfy (1996).

O elemento finito apresentado por Wasfy (1996) é considerado uma viga constituída por dois elementos de treliça conectados nos nós intermediários por molas torcionais, conferindo rigidez de flexão. Desta forma, tanto os efeitos axiais quanto os de flexão são contemplados pelo elemento. Os nós dos elementos são diretamente representados no sistema inercial, incorporando os modos de corpo rígido no sistema e viabilizando o seu uso em sistemas multicorpos. Neste elemento, é assumido que as coordenadas de posição nodais são as únicas responsáveis por descrever o movimento e a deformação do elemento. O elemento é aplicável a sistemas multicorpos sujeitos a grandes deslocamentos e pequenas deformações.

Leamy e Wasfy (2005) consideraram as forças normais de contato dos nós dos elementos finitos com as polias, bem como as forças de atrito tangenciais, viabilizando diretamente análises de *stick-slip* e condições de deslizamento no contato correia-polia em função do torque aplicado. Nesta abordagem, os nós do modelo de elementos finitos são continuamente monitorados para verificar os possíveis contatos com as polias. Em caso de contato, as forças normais e de atrito são adicionadas nos nós correspondentes, simulando a interação correia-polia. Foram reportadas simulações de resposta transiente e estacionária do sistema de transmissão, além de análises de resposta em frequência. Os resultados mostraram que o modelo é adequado para representar os efeitos presentes na interação correia-polia já apresentados na literatura (Leamy e Wasfy, 2002a), bem como a resposta dinâmica dos componentes rígidos e flexíveis do sistema (Elmaraghi, 2013). O efeito de polia desacopladora também foi incorporado no modelo de

elementos finitos do sistema de transmissão por Leamy e Wasfy (2002b).

Apesar do modelo geral proposto e dos bons resultados alcançados por Leamy e Wasfy (2005), é necessário um número muito grande de elementos para descrever com acurácia o contato correia-polia. Foi reportado o uso de 100 elementos (correspondente a 202 graus de liberdade) para descrever o contato de meia circunferência da polia (Leamy e Wasfy, 2002b), comprometendo o custo computacional de simulação do modelo.

Kerckänen (2006) foi o precursor na modelagem de sistemas de transmissão utilizando o modelo de elementos finitos baseado na formulação de coordenadas nodais absolutas. O autor desenvolveu um elemento de viga ANCF 2D de alta-ordem com efeito de cisalhamento, para aplicação em sistemas de transmissão. Foi desenvolvido também um elemento de placa ANCF para a modelagem tridimensional do sistema. O objetivo principal foi a incorporação dos efeitos não-lineares de deformação no modelo e a redução do número de elementos finitos necessários para descrever o abraçamento da correia nas polias. O sistema de transmissão analisado (Figura 2.5) é constituído por duas polias de raios iguais e considera a distribuição das forças de contato na interface correia-polia, que são incorporadas no elemento pelo Método das Penalidades. De forma semelhante ao proposto por Leamy e Wasfy (2005), neste modelo pontos internos do elemento finito são continuamente monitorados para a verificação de contato com as polias, viabilizando a distribuição da força sobre todo o elemento. Em caso de contato com algum destes pontos, forças normais e tangenciais de atrito são aplicadas sob a forma de forças nodais equivalentes.

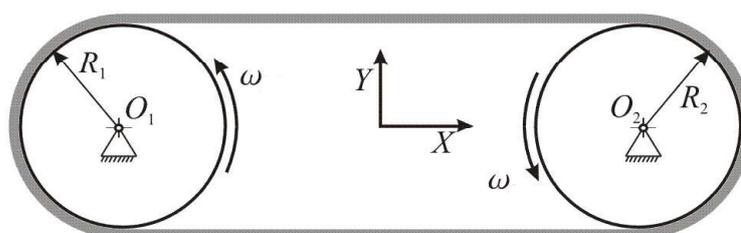


Figura 2.5: Modelo ANCF do sistema de transmissão constituído por duas polias. Fonte: Kerckänen (2006).

No entanto, as simulações foram realizadas considerando baixa rotação (abaixo de 150 rpm), onde efeitos centrífugos e giroscópicos têm pouca contribuição na resposta. As análises reportadas não mencionaram a influência destes termos no comportamento dinâmico do sistema. O foco do trabalho ficou concentrado especialmente na distribuição das forças no contato correia-polia (Kerckänen *et al.*, 2006). Os resultados mostraram que o elemento finito é adequado para representar os efeitos de grandes deslocamentos e grandes deformações presentes em sistemas multicorpos, revelando amplo potencial de uso em sistemas de transmissão por correia.

A dinâmica não-linear de sistemas de transmissão por correias tridimensionais foi investigada por Dufva *et al.* (2007), utilizando modelo ANCF. Foram utilizados os elementos de cabo e de placa para a modelagem, ambos contemplando os efeitos de grandes deslocamentos e deformações. Os modelos de força de contato, bem como a implementação do modelo multi-corpos foram detalhados. Análises das forças no contato correia-polia e a resposta temporal do sistema submetido a velocidade angular prescrita foram reportadas.

Čepon *et al.* (2009a) modelaram um sistema de transmissão com duas polias através da formulação de coordenadas nodais absolutas. Foi utilizado o modelo viscoelástico proposto por Garcida-Vallejo *et al.* (2005). O contato correia-polia foi formulado pelo Problema de Complementaridade Linear (LCP) associado ao Método da Penalidade, viabilizando a análise das forças de contato na interface correia-polia e a identificação das regiões de *stick-slip*.

Čepon *et al.* (2009b) apresentaram um modelo ANCF viscoelástico para representar o sistema de transmissão constituído por duas polias. O modelo foi integrado numericamente pelo método Adams–Bashforth–Moulton para obter a resposta temporal do sistema, e as frequências naturais determinadas através de algoritmo FFT. Os resultados teórico-experimentais foram confrontados no domínio da frequência, através de funções de resposta em frequência (FRF).

Um modelo foi apresentado por Hussein *et al.* (2010) para a análise das forças de contato presentes na interface correia-polia de sistemas de transmissão por correia. O modelo analítico proposto foi validado por comparação com modelo ANCF do sistema de transmissão, que leva em consideração a interação correia-polias. Os resultados mostraram que a distribuição das forças de contato, tanto normais quanto tangenciais, foram equivalentes nos dois modelos.

Čepon *et al.* (2011) validaram experimentalmente o modelo ANCF do sistema de transmissão descrito por Čepon *et al.* (2009a). Uma bancada de ensaios com duas polias de raios iguais e ajuste manual do nível de tensão na correia foi construída para a verificação dos resultados simulados. Foram reportados os resultados das forças de contato normal e tangencial na interface correia-polia, a diferença de velocidade angular entre as polias e a resposta de vibração transversal dos tramos da correia. Para ilustrar a aplicabilidade do método, um modelo ANCF do sistema de transmissão com três polias e dois auto-tensionadores foi simulado numericamente, considerando a prescrição de velocidade angular da polia motora. Os resultados de tensão nos tramos, bem como rotação das polias, foram apresentados graficamente.

Um modelo de casca ANCF tridimensional foi utilizado por Yoon *et al.* (2012) para simular o efeito de desalinhamento dos rolos de acionamento em correias transportadoras. O modelo multicorpos é constituído por dois rolos cilíndricos e uma correia contínua, conforme mostrado na Figura 2.6. As condições de possíveis contatos da correia com os rolos são verificadas a cada passo de integração numérica, para a incorporação das forças normais e tangenciais. Os resul-

tados foram investigados experimentalmente e numericamente, através do *software* comercial ANSYS®.

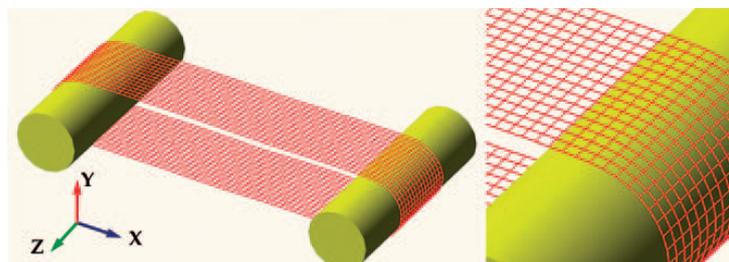


Figura 2.6: Modelo ANCF 3D de correia transportadora. Fonte: Yoon *et al.* (2012).

Jia e Song (2015) aplicaram a formulação de coordenadas absolutas proposta por Berzeri e Shabana (2000) para estudar sistemas de transmissão por correia sincronizadora. O objetivo do trabalho foi investigar a influência das forças de inércia, pré-tensionamento e amortecimento sobre o sistema. O modelo de amortecimento utilizado foi proposto por Garcida-Vallejo *et al.* (2005). Detalhes sobre a modelagem da interface de contato correia-polia foram apresentados e discutidos. Os resultados de simulação numérica do modelo foram comparadas com o *software* comercial RecurDyn®.

2.6 Caracterização das propriedades mecânicas da correia

Hawker (1991) determinou experimentalmente o módulo de rigidez axial de correia poly-V através de dois métodos: a) ensaio de tração conduzido em máquina de ensaios e b) ensaio com a correia montada no sistema de transmissão, fixando uma das polias e aplicando força de tração na outra. Os resultados indicaram que o primeiro método é mais preciso e confiável que o segundo, originando uma diferença de 32% no valor do módulo de rigidez axial. A diferença pode ser atribuída ao efeito presente no segundo método de compressão da correia nos sulcos das polias, revelando a importância da identificação das propriedades mecânicas em ensaios independentes.

Uma investigação das propriedades mecânicas de correia poly-V foi apresentada por Manin *et al.* (2008). Os parâmetros de rigidez axial, transversal e amortecimento foram determinados experimentalmente. Instabilidades transversais na correia em condição estática foram verificadas quando submetida a excitação axial paramétrica. Os métodos experimentais utilizados baseiam-se na análise de vibração livre e forçada de um sistema equivalente com um grau de liberdade. Foi verificada a presença de histerese na curva força-deslocamento e a dependência da rigidez axial da correia com a frequência de excitação. Os resultados revelaram a existência de acoplamento transversal-longitudinal e transversal-torcional, além da dependência temporal das condições de contorno no contato correia-polia.

Čepon *et al.* (2009b) também apresentaram resultados experimentais de rigidez axial/transversal e amortecimento de correia poly-V. O objetivo foi a identificação dos parâmetros do modelo viscoelástico proposto para representar o sistema de transmissão de duas polias, baseado na formulação de coordenadas nodais absolutas. Para a identificação do módulo de rigidez transversal da correia, o modelo analítico de viga bi-articulada com rigidez transversal submetida a tensão axial (Blevins, 1979) foi utilizado para ajustar as frequências naturais experimentais, pelo método de mínimos quadrados. Os parâmetros relacionados à força de atrito e força de contato radial entre correia e polia foram reportados por Čepon *et al.* (2010).

Uma caracterização experimental da correia foi apresentada por Nassiri (2010). O objetivo foi identificar os parâmetros hiperelásticos do material para ser utilizado no modelo de elementos finitos do contato correia-polia. A correia foi tratada como material compósito, onde foram caracterizados em ensaios independentes tanto o material de tração (cordoneis elásticos) quanto o de base (elastômero hiperelástico). Ensaios estáticos de compressão, tração e de cisalhamento da correia foram reportados, e todos revelaram a presença de histerese do material nas curvas de força-deslocamento. Não foram tratados ensaios em condições dinâmicas.

Shangguan e Zeng (2013a) identificaram experimentalmente as propriedades mecânicas de correia poly-V (perfil 6PK), utilizando martelo de impacto e máquina de ensaios. Uma bancada de testes foi utilizada para a determinação do coeficiente de atrito da interface correia-polia sob diferentes configurações. Foram apresentados ensaios de rigidez axial e transversal da correia (estática e dinâmica), coeficiente de amortecimento, rigidez transversal, bem como coeficiente de atrito entre polia e correia. Os resultados experimentais mostraram que a rigidez dinâmica da correia depende do comprimento, pré-tensão, amplitude e frequência de excitação, enquanto o coeficiente de amortecimento depende apenas da frequência de excitação. As curvas força-deslocamento apresentaram histerese durante a aplicação e retirada do carregamento. Dois modelos baseados em ajuste de curva (polinomial para a rigidez e exponencial para o amortecimento) foram apresentados para descrever o comportamento dinâmico da correia. Foi reportado que quanto menor o comprimento da correia, maiores são a rigidez e o amortecimento, e que a rigidez transversal da correia é sensivelmente aumentada com a redução do comprimento da mesma.

Zhu *et al.* (2014) apresentaram as propriedades de amortecimento histerético transversal de correia poly-V 6PK. Foi proposto um modelo com rigidez e amortecimento viscoso variável. As curvas de força-deslocamento obtidas experimentalmente foram usadas para ajustar o modelo teórico. Os resultados mostraram que tanto a rigidez quanto o amortecimento são dependentes da pré-tensão na correia, do comprimento do tramo e da frequência de excitação.

2.7 Trabalhos realizados pelo grupo de pesquisa

Este trabalho integra a sequência de pesquisas desenvolvidas no Laboratório de Vibrações na área de sistemas de transmissão por correias, e constitui a primeira tese de doutorado sobre o assunto desenvolvida no país.

Garcia (2009) deu início a esta linha de pesquisa, investigando experimentalmente o efeito de histerese e *stick-slip* presente nos auto-tensionadores de correias sincronizadoras, em função do torque de pré-carga e da frequência de excitação.

Um sistema de transmissão por correia, incluindo duas polias e auto-tensionador, foi analisado computacionalmente por Santos (2010), tendo como base o trabalho de Beikmann (1992).

Martins (2013) deduziu as equações de movimento híbridas do sistema de transmissão pelo método de Lagrange, utilizando o modelo de corda. Foram analisadas as respostas lineares e não-lineares do sistema, incluindo o efeito de atrito de Coulomb no auto-tensionador. Uma bancada de ensaios, representativa do *front-end* de motor diesel, foi utilizada para a verificação experimental dos resultados de simulação.

Diversos modelos de atrito foram investigados por Grego (2015) para incluir os efeitos de histerese e *stick-slip* no auto-tensionador. Foi proposto um modelo de coeficiente de atrito assimétrico e força normal variável para representar a assimetria da curva força-deslocamento do dispositivo. Análises sobre regiões de ocorrência de *stick-slip*, travamento e instabilidade foram reportadas.

2.8 Resumo do capítulo

Neste capítulo foram apresentados os modelos matemáticos utilizados para descrever o comportamento dinâmico de sistemas de transmissão por correia. O modelo de corda foi o precursor para a análise de vibração transversal da correia, ainda que tratado de forma desacoplado do sistema. Os modelos discretos surgiram para a análise de vibração rotacional das polias e auto-tensionador. Na sequência, foram desenvolvidos os primeiros modelos analíticos híbridos, que contemplam tanto os elementos discretos quanto contínuos. Diversos efeitos foram incorporados nos modelos, tais como amortecimento e rigidez de flexão da correia, atrito seco, polias desacopladoras e não-linearidades geométrica e material. Os trabalhos mais recentes tratam o sistema de transmissão pelo método de elementos finitos baseado em coordenadas nodais absolutas, que é capaz de descrever grandes deformações e a interação do contato correia-polia por meio da abordagem de sistemas multicorpos.

Não foram encontrados na literatura trabalhos apresentando um modelo que contemple

as reações dinâmicas nas polias dos acessórios do sistema. Os únicos trabalhos reportados que apresentam as reações dinâmicas nas polias resumem-se a aplicações diretas de *softwares* na análise do sistema (Lin *et al.*, 1997; Mashadi e Zakeri, 2011).

Também não há trabalhos reportados descrevendo: a) efeitos centrífugos e giroscópicos nos modelos de viga ANCF com movimento axial, b) aplicação a sistemas de transmissão de métodos apropriados de linearização do modelo ANCF em torno da configuração de equilíbrio estacionário, e c) metodologia de identificação modal do sistema a partir do modelo ANCF.

Existem poucas referências publicadas acerca das propriedades mecânicas de correias poly-V, e trabalhos bastante recentes têm sido apresentados propondo novos modelos teóricos e ensaios de caracterização experimental.

No próximo capítulo as características dos modelos de viga ANCF utilizados neste trabalho são apresentadas e detalhadamente discutidas, para serem aplicados na modelagem multi-corpos do sistema de transmissão por correia.

3 Modelo de elementos finitos não-linear ANCF

3.1 Considerações iniciais

Nos sistemas de transmissão por correia é conhecida a forte dependência das frequências naturais dos modos transversais dos tramos com o nível de tensão axial aplicada, conforme apresentado no Capítulo 2. Em tais sistemas, cargas dinâmicas aplicadas nas polias podem excitar os modos rotacionais, que por sua vez podem colocar os modos transversais em ressonância devido ao acoplamento dos graus de liberdade. Nestas circunstâncias, grandes deslocamentos laterais dos elementos flexíveis são esperados, realçando efeitos não-lineares na resposta do sistema.

O método de elementos finitos clássico não pode ser diretamente aplicado a sistemas multicorpos devido aos modos de corpo rígido presentes em tais sistemas (Wasfy, 1996). Diversas formulações conceitualmente diferentes foram apresentadas com o objetivo de incluir nos modelos de sistemas multicorpos flexíveis os modos de corpo rígido. Dentre elas, podem ser destacadas (Shabana, 1997):

- a) FFRF - *Floating Frame of Reference Formulation* (formulação do sistema de referência flutuante)
- b) *Incremental Finite Element Formulation* (formulação incremental de elementos finitos)
- c) *Linear Theory of Elastodynamics* (teoria da elastodinâmica linear)
- d) *Large Rotation Vector Formulation* (formulação vetorial de grandes rotações)
- e) ANCF - *Absolute Nodal Coordinate Formulation* (formulação de coordenadas nodais absolutas)

A formulação FFRF tem sido frequentemente aplicada com sucesso a diversos problemas de engenharia onde estão presentes grandes deslocamentos e pequenas deformações no regime elástico, como é o caso de elementos flexíveis com alta rigidez. Porém não contempla o acoplamento do movimento axial com o transversal, nem o efeito da tensão axial sobre as frequências naturais dos modos transversais. São reportadas na literatura diversas aplicações desta abordagem em mecanismos com componentes rígidos e deformáveis (Shabana, 2013). Este método é o mais amplamente utilizado para análise da dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis, e está implementado na maioria dos *softwares* comerciais, tais como ABAQUS®, ANSYS® e Simpack® (Vlasenko e Kasper, 2008). No entanto, a formulação se limita a análises onde apenas pequenas deformações estão presentes (Shabana, 2013; Wasfy, 1996), não sendo aplicável

à larga classe de problemas não-lineares que envolvem grandes deslocamentos associados a grandes deformações.

As formulações incrementais expressam grandes rotações como uma sequência de rotações infinitesimais que podem ser descritas utilizando o campo de deslocamento do elemento finito, permitindo análises de sistemas que sofrem grandes deformações. No entanto, esta abordagem não leva à descrição exata do movimento de corpo rígido do sistema.

A teoria da elastodinâmica linear analisa inicialmente o problema como rígido, obtém as respostas temporais e utiliza as reações dinâmicas para a análise de deformação dos elementos flexíveis do sistema. A partir da superposição do movimento rígido com as deformações, a resposta total é determinada. Nesta abordagem, o deslocamento e a deformação são tratadas de forma independente, podendo comprometer a acurácia dos resultados obtidos (Shabana, 2013).

A formulação de grandes rotações foi proposta para resolver os problemas associados ao uso das rotações infinitesimais como coordenadas nodais. Nesta abordagem, a rotação finita da seção transversal do elemento é descrita por um campo de deslocamentos aproximado por polinômios interpoladores. No entanto, esta formulação leva à redundância no uso de coordenadas.

O modelo proposto por Berzeri e Shabana (2000) consiste em um elemento finito de viga ANCF de alta ordem baseado na mecânica do contínuo, no qual os tensores de deformação estão relacionados ao campo de deslocamento levando em consideração os termos não-lineares (tensores de Green-Lagrange). Desta forma, grandes deslocamentos e deformações tanto longitudinais quanto transversais podem ser capturados por este elemento, relaxando a hipótese de deslocamentos e deformações infinitesimais previamente assumida no método FFRF. Outra característica importante deste elemento consiste no acoplamento dos graus de liberdade longitudinais com os transversais, permitindo que o movimento na direção transversal ou de inclinação dos tramos seja refletido na direção longitudinal, e vice-versa. O modelo então incorpora naturalmente os possíveis efeitos de não-linearidade geométrica presentes no sistema. A convergência do método é assegurada com um número reduzido de elementos, permitindo menor discretização da malha e maior eficiência computacional. Com tais características, o modelo apresentado tem amplo potencial para ser aplicado em sistemas de transmissão, viabilizando tanto análises lineares quanto não-lineares.

3.2 Elemento finito de viga ANCF

Na formulação de coordenadas nodais absolutas, as forças de inércia resultam de uma simples expressão, gerando matrizes de massa constantes que são de fácil implementação na

maioria dos integradores numéricos disponíveis e têm baixo custo computacional envolvido. Como a descrição é realizada diretamente no sistema inercial, as forças centrífugas naturalmente desaparecem e não há necessidade do uso de transformação de coordenadas. No entanto, as forças elásticas apresentam expressões bastante complexas, mesmo nos casos mais simples e quando são adotadas hipóteses de linearidade do modelo (Shabana, 2013).

A Figura 3.1 ilustra um elemento de viga de Euler ANCF com os respectivos graus de liberdade. O vetor posição \mathbf{r} de um ponto arbitrário da viga pode ser descrito no sistema inercial usando uma função de forma global - que inclui os modos de corpo rígido, e as coordenadas nodais absolutas (Berzeri e Shabana, 2000):

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{S}(x)\mathbf{e} \quad (3.1)$$

A função de forma global é dada por

$$\mathbf{S} = [s_1[\mathbf{I}] \quad s_2[\mathbf{I}] \quad s_3[\mathbf{I}] \quad s_4[\mathbf{I}]] \quad (3.2)$$

onde $[\mathbf{I}]$ é a matriz identidade de ordem 2. Os polinômios interpoladores de terceira ordem são definidos como

$$s_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad s_2 = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \quad s_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad s_4 = L(\xi^3 - \xi^2) \quad (3.3)$$

em que $\xi = x/L$ e L o comprimento da viga no estado indeformado. A variável x identifica a posição de um ponto arbitrário na linha neutra.

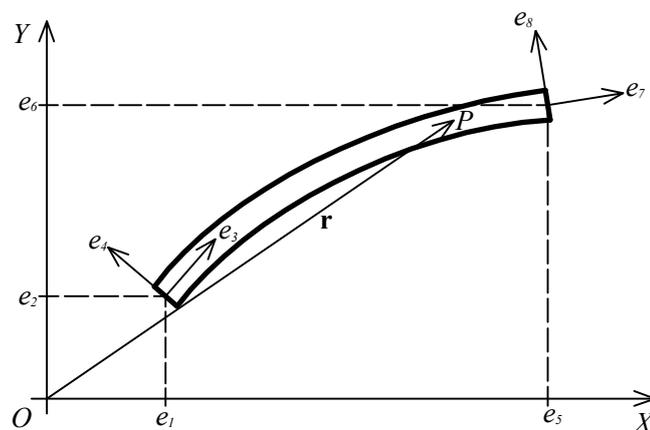


Figura 3.1: Coordenadas nodais absolutas para o elemento de viga ANCF.

O vetor de coordenadas nodais do elemento é definido por

$$\mathbf{e} = \{e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \ e_6 \ e_7 \ e_8\}^T \quad (3.4)$$

Neste vetor, os deslocamentos nodais são

$$e_1 = r_1|_{x=0}, \ e_2 = r_2|_{x=0}, \ e_5 = r_1|_{x=L}, \ e_6 = r_2|_{x=L} \quad (3.5)$$

e as inclinações absolutas dos nós, representadas pelos gradientes

$$e_3 = \left. \frac{\partial r_1}{\partial x} \right|_{x=0}, \ e_4 = \left. \frac{\partial r_2}{\partial x} \right|_{x=0}, \ e_7 = \left. \frac{\partial r_1}{\partial x} \right|_{x=L}, \ e_8 = \left. \frac{\partial r_2}{\partial x} \right|_{x=L} \quad (3.6)$$

Os gradientes contém informação tanto da orientação espacial do elemento quanto do seu estado de deformação (Shabana, 2013).

Diferenciando o vetor posição com respeito ao tempo, o vetor velocidade é obtido e a energia cinética do elemento finito pode ser escrita como

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}_a \dot{\mathbf{e}} \quad (3.7)$$

onde \mathbf{M}_a é a matriz de massa constante do elemento, definida por

$$\mathbf{M}_a = \int_V \rho (\mathbf{S}^T \mathbf{S}) dV \quad (3.8)$$

sendo ρ a densidade de massa. Utilizando a função de forma definida na Equação (3.2) e integrando no volume do elemento, a matriz de massa constante é dada por

$$\mathbf{M}_a = m \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & \frac{-13L}{420} & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & \frac{-13L}{420} \\ \frac{11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{-L^2}{140} & 0 \\ 0 & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{-L^2}{140} \\ \frac{9}{70} & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{13}{35} & 0 & \frac{-11L}{210} & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{13}{35} & 0 & \frac{-11L}{210} \\ \frac{-13L}{420} & 0 & \frac{-L^2}{140} & 0 & \frac{-11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 \\ 0 & \frac{-13L}{420} & 0 & \frac{-L^2}{140} & 0 & \frac{-11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

em que m é a massa do elemento finito.

As forças externas generalizadas, incluindo as forças de corpo e de superfície, são definidas usando o princípio dos trabalhos virtuais

$$\delta W_{ext} = \mathbf{Q}_{ext}^T \delta \mathbf{e} \quad (3.10)$$

O vetor de força nodal equivalente associado à força peso do elemento de viga é calculado com auxílio das Equações (3.1), (3.10) e da definição

$$\mathbf{P} = \int_V \{0 \quad -\rho g\}^T dV \quad (3.11)$$

resultando em (Omar e Shabana, 2001)

$$\delta W = \mathbf{P}^T \delta \mathbf{r} = \mathbf{P}^T \mathbf{S} \delta \mathbf{e} = \left(\int_V \{0 \quad -\rho g\}^T \mathbf{S} dV \right) \delta \mathbf{e} = \mathbf{Q}_p^T \delta \mathbf{e} \quad (3.12)$$

Avaliando a integral da Equação (3.12), tem-se

$$\mathbf{Q}_p = -mg \left\{ 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{L}{12} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{-L}{12} \right\}^T \quad (3.13)$$

sendo g a aceleração da gravidade.

O vetor de forças elásticas do elemento, que surge a partir da deformação longitudinal e transversal da viga, pode ser determinado utilizando a energia de deformação total U

$$\mathbf{Q}_k = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}} \right)^T \quad (3.14)$$

A equação de movimento do elemento finito pode então ser expressa como

$$\mathbf{M}_a \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{ext} \quad (3.15)$$

3.2.1 Modelos de força longitudinal and transversal

Para a determinação do vetor de forças elásticas, as expressões das energias de deformação tanto longitudinal quanto transversal precisam ser definidas. Em um dado ponto x no interior da viga, um segmento infinitesimal dx no estado indeformado se transforma no com-

primento ds quando deformado. Este comprimento é dado por

$$ds = \sqrt{\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'} dx, \quad \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dx} \quad (3.16)$$

Utilizando a definição da medida de deformação de Green-Lagrange (Bonet e Wood, 2008), a deformação longitudinal ϵ_l pode ser expressa como

$$ds^2 - dx^2 = 2dx\epsilon_l dx \quad (3.17)$$

Substituindo a Equação (3.16), resulta em

$$\epsilon_l = \frac{1}{2}(\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' - 1) \quad (3.18)$$

Logo, considerando o elemento de viga com módulo de rigidez axial constante EA , a energia de deformação longitudinal é calculada a partir de

$$U_l = \frac{1}{2} \int_0^L EA \epsilon_l^2 dx \quad (3.19)$$

Utilizando as Equações (3.14), (3.18) e (3.19), o vetor de forças elásticas longitudinais é obtido através da expressão

$$\mathbf{Q}_l = \left(\frac{\partial U_l}{\partial \mathbf{e}} \right)^T = \left[\int_0^L EA \epsilon_l \mathbf{S}'^T \mathbf{S}' dx \right] \mathbf{e} = \mathbf{K}_l(\mathbf{q}) \mathbf{e} \quad (3.20)$$

sendo $\mathbf{K}_l(\mathbf{q})$ a matriz de rigidez associada à deformação longitudinal. A matriz \mathbf{K}_l é representada como

$$\mathbf{K}_l = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 & \mathcal{B} & 0 & -\mathcal{A} & 0 & \mathcal{C} & 0 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 & \mathcal{B} & 0 & -\mathcal{A} & 0 & \mathcal{C} \\ \mathcal{B} & 0 & \mathcal{D} & 0 & -\mathcal{B} & 0 & \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} & 0 & \mathcal{D} & 0 & -\mathcal{B} & 0 & \mathcal{E} \\ -\mathcal{A} & 0 & -\mathcal{B} & 0 & \mathcal{A} & 0 & -\mathcal{C} & 0 \\ 0 & -\mathcal{A} & 0 & -\mathcal{B} & 0 & \mathcal{A} & 0 & -\mathcal{C} \\ \mathcal{C} & 0 & \mathcal{E} & 0 & -\mathcal{C} & 0 & \mathcal{F} & 0 \\ 0 & \mathcal{C} & 0 & \mathcal{E} & 0 & -\mathcal{C} & 0 & \mathcal{F} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Definindo convenientemente as quantidades abaixo em função do comprimento L e das

coordenadas nodais do elemento

$$\begin{aligned}
 d_x &= e_5 - e_1, \quad d_y = e_6 - e_2, \quad d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \\
 a_x &= Le_3, \quad a_y = Le_4, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\
 b_x &= Le_7, \quad b_y = Le_8, \quad b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

pode-se escrever os 6 elementos que aparecem na Equação (3.21) como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \frac{3}{70L^2}(a^2 + b^2 - 14L^2 - 6a_x d_x - 6b_x d_x - 6a_y d_y - 6b_y d_y + 24d^2) \\
 \mathcal{B} &= \frac{1}{280L}(b^2 - a^2 + 2a_x b_x + 2a_y b_y - 14L^2 - 24a_x d_x - 24a_y d_y + 36d^2) \\
 \mathcal{C} &= \frac{1}{280L}(a^2 - b^2 + 2a_x b_x + 2a_y b_y - 14L^2 - 24b_x d_x - 24b_y d_y + 36d^2) \\
 \mathcal{D} &= \frac{1}{420}(12a^2 + b^2 - 3a_x b_x - 3a_y b_y - 28L^2 + 3a_x d_x - 3b_x d_x + \\
 &\quad 3a_y d_y - 3b_y d_y + 18d^2) \\
 \mathcal{E} &= \frac{-1}{840}(3a^2 + 3b^2 - 4a_x b_x - 4a_y b_y - 14L^2 + 6a_x d_x + 6b_x d_x + \\
 &\quad 6a_y d_y + 6b_y d_y) \\
 \mathcal{F} &= \frac{1}{420}(a^2 + 12b^2 - 3a_x b_x - 3a_y b_y - 28L^2 - 3a_x d_x + 3b_x d_x - \\
 &\quad 3a_y d_y + 3b_y d_y + 18d^2)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Conforme observado, a matriz definida na Equação (3.21) é fortemente não-linear, dependente de todos os graus de liberdade do elemento.

A energia de deformação transversal é calculada a partir da curvatura do elemento de viga. O momento fletor é dado pela expressão $M = EI\kappa$, sendo EI o módulo de rigidez transversal constante. A curvatura κ pode ser determinada a partir do vetor posição global, através de (Berzeri *et al.*, 2001)

$$\kappa = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} \tag{3.24}$$

Desta forma, a energia de deformação devido à flexão da viga é calculada como

$$U_t = \frac{1}{2} \int_0^L EI \kappa^2 dx \tag{3.25}$$

Fazendo uso das Equações (3.14), (3.24) e (3.25), o vetor de forças elásticas transversais

é obtido por

$$\mathbf{Q}_t = \left(\frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{e}} \right)^T = \left[\int_0^L EIS''^T \mathbf{S}'' dx \right] \mathbf{e} = \mathbf{K}_t \mathbf{e} \quad (3.26)$$

sendo \mathbf{K}_t a matriz de rigidez associada à deformação transversal.

Ensaio de tração uniaxial realizados na correia (Seção 6.1) justificam a hipótese de pequenas deformações longitudinais a ser adotada no modelo de viga. Neste caso, ds pode ser aproximado por dx na Equação (3.24). A matriz \mathbf{K}_t é dada por:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6L & 0 & -12 & 0 & 6L & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 6L & 0 & -12 & 0 & 6L \\ 6L & 0 & 4L^2 & 0 & -6L & 0 & 2L^2 & 0 \\ 0 & 6L & 0 & 4L^2 & 0 & -6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & -6L & 0 & 12 & 0 & -6L & 0 \\ 0 & -12 & 0 & -6L & 0 & 12 & 0 & -6L \\ 6L & 0 & 2L^2 & 0 & -6L & 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & 6L & 0 & 2L^2 & 0 & -6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

A matriz de rigidez global do elemento finito é obtida somando as matrizes das Equações (3.21) e (3.27), resultando em

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_l + \mathbf{K}_t \quad (3.28)$$

Finalmente, o vetor total de forças elásticas \mathbf{Q}_k da Equação (3.14) é dado pela soma das Equações (3.20) e (3.26) (Berzeri e Shabana, 2002). Todo o desenvolvimento teórico de ambos os modelos de força pode ser encontrado com detalhes em Berzeri e Shabana (2000).

3.2.2 Análise numérica do elemento finito ANCF

Com o objetivo de avaliar as características do modelo proposto, são apresentadas análises numéricas lineares e não-lineares para um elemento finito de viga ANCF. As propriedades de inércia e massa do elemento são dadas na Tabela 3.1.

3.2.2.1 Teste numérico 1

Neste teste numérico é proposta a análise linear e não-linear de uma viga ANCF na condição engastada-livre. O elemento de viga foi discretizado com 10 elementos e a aceleração da gravidade desconsiderada. Na simulação, o incremento de tempo utilizado foi $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ s, com tempo máximo de 10 s. Para retirar o sistema da configuração de equilíbrio estático, foi

Tabela 3.1: Propriedades de inércia e massa da viga

Descrição	Parâmetro	Valor numérico	Unidade
Comprimento	L	0.637	m
Largura	b	0.015	m
Altura	h	0.0015	m
Área da seção transversal	A	22.5×10^{-6}	m^2
Momento de inércia de área	I	4.2188×10^{-12}	m^4
Módulo de elasticidade	E	210	GPa
Densidade do material	ρ	7860	kg/m^3
Massa	m	0.11265	kg

prescrita uma velocidade inicial de 2 m/s na coordenada vertical da extremidade livre.

A resposta temporal do modelo ANCF não-linear foi obtida utilizando o integrador de passo variável ode15s do MATLAB® (versão R2013a). Este integrador foi concebido especificamente para o tratamento numérico de equações diferenciais rígidas (*Stiff Differential Equations*), nas quais estão presentes diferentes escalas de tempo. O conteúdo espectral do sinal temporal foi obtido por meio de algoritmo FFT, disponível no próprio *software*.

A Figura 3.2 mostra a resposta temporal da amplitude de deslocamento da coordenada vertical da extremidade livre (G.L. $e42$), bem como o espectro do sinal. Pode ser observado que, devido à condição inicial prescrita, ocorre baixa amplitude do deslocamento e apenas termos lineares estão presentes na resposta.

O modelo clássico de elementos finitos linear (FEM) foi implementado para fins de comparação com o modelo proposto. Este elemento apresenta quatro graus de liberdade, dois de deslocamento transversal e dois de rotação. As frequências naturais obtidas pelo modelo FEM foram comparadas com o espectro do sinal temporal determinado a partir do modelo ANCF.

Na Tabela 3.2 estão listadas as frequências naturais obtidas a partir dos dois modelos.

Tabela 3.2: Frequências naturais da viga

Modo	FEM 50 el (Hz)	FEM 10 el (Hz)	ANCF 10 el (Hz)	Forma modal
1	3.1	3.1	3.1	1ª transversal
2	19.3	19.3	19.3	2ª transversal
3	54.2	54.2	54.2	3ª transversal
4	106.1	106.2	106.3	4ª transversal
5	175.5	175.9	175.9	5ª transversal
6	262.1	263.5	263.6	6ª transversal
7	366.1	369.7	369.9	7ª transversal
8	487.4	495.3	495.5	8ª transversal

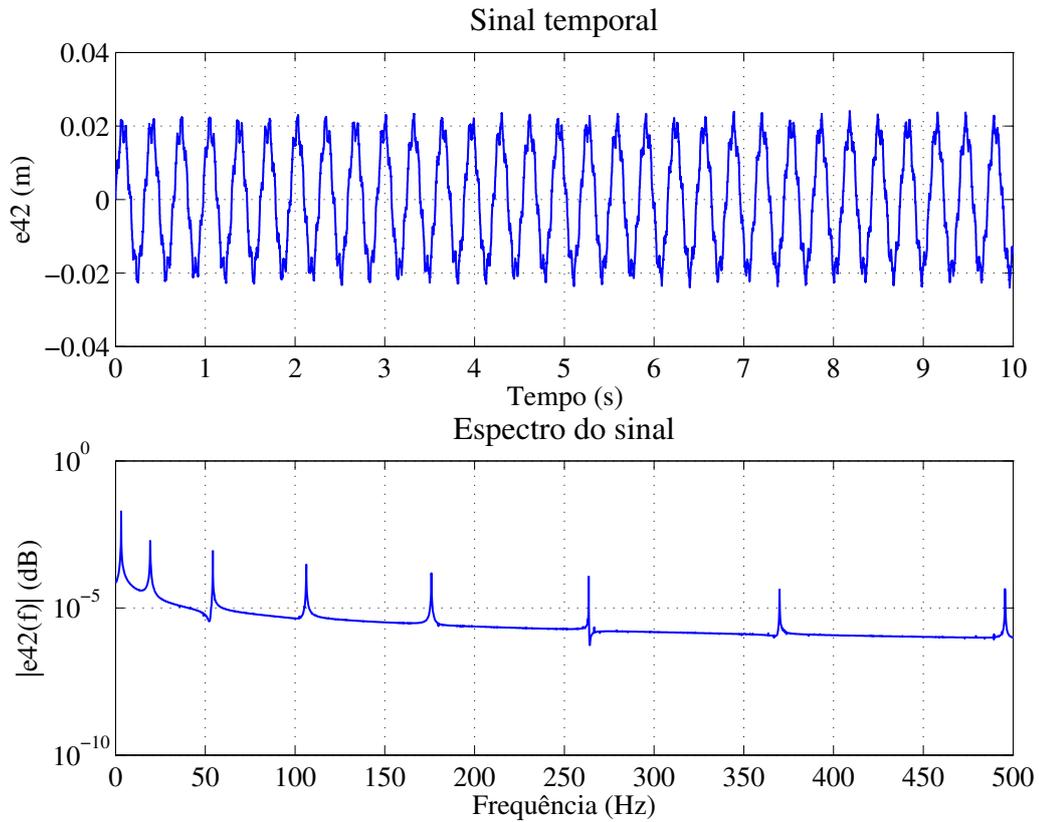


Figura 3.2: Resposta do modelo ANCF.

Como esperado, as frequências naturais de ambos os modelos são iguais, indicando que o modelo não-linear ANCF é capaz de representar o modelo linear de elementos finitos, cuja acurácia depende da discretização usada.

Com o objetivo de avaliar possíveis não-linearidades do sistema, a velocidade inicial prescrita à coordenada vertical da extremidade livre foi aumentada de 2 m/s para 10 m/s. A resposta temporal obtida e o espectro do sinal são apresentados na Figura 3.3.

A amplitude do deslocamento é maior (0.1 m), excitando os termos não-lineares na resposta temporal. No espectro aparecem os termos lineares da simulação anterior acrescidos de diversos componentes harmônicos e sub-harmônicos, indicando a presença de não-linearidades do sistema.

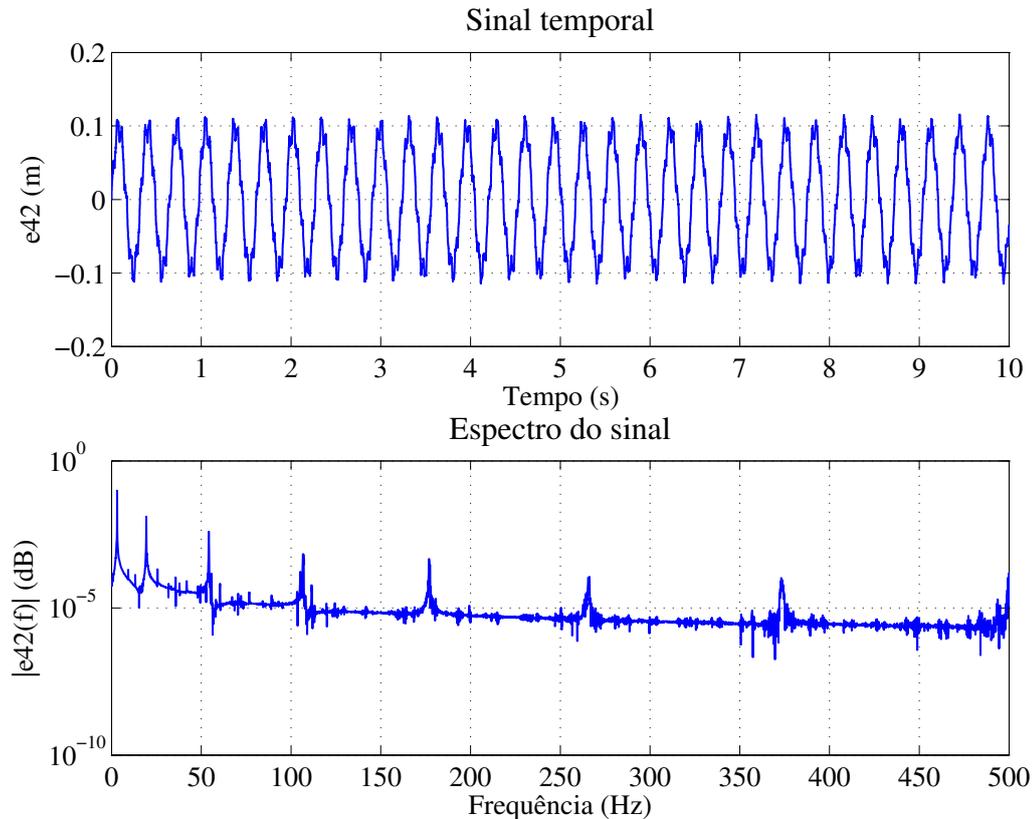


Figura 3.3: Resposta não-linear do modelo ANCF.

3.2.2.2 Teste numérico 2

Nesta seção são apresentados os resultados de simulação considerando a mesma viga engastada-livre, agora sujeita à excitação pela base no ponto de engaste na primeira frequência natural ($f_n=3.1$ Hz), induzindo grandes deformações. A amplitude de deslocamento prescrita foi de 0.00482 m. Neste modelo foi incorporado amortecimento proporcional à matriz de massa, para limitar a amplitude de deslocamento.

O gráfico da Figura 3.4 mostra a deflexão vertical da extremidade livre, cuja amplitude máxima chega a 0.192 m. O espectro do sinal contém a frequência de ressonância, bem como as demais frequências naturais do sistema, mas com baixa participação na resposta. A primeira forma modal está representada na Figura 3.7(a).

Na Figura 3.5 é apresentada a resposta temporal do sistema excitado no segundo modo de vibrar e o correspondente espectro do sinal. A deflexão total da extremidade da viga é aproximadamente 0.05 m, refletindo grandes deformações no elemento. Deve ser ressaltado que a coordenada horizontal também está sujeita a grandes deslocamentos, corretamente descrito por este modelo não-linear. A segunda forma modal está ilustrada na Figura 3.7(b).

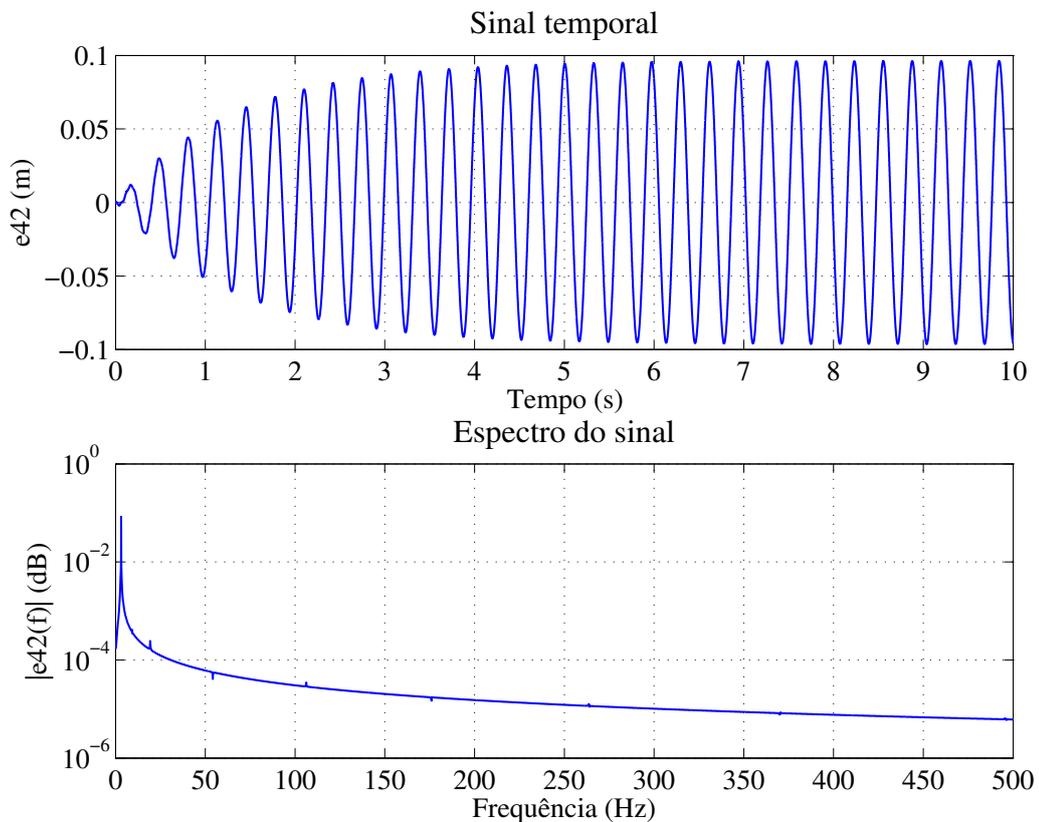


Figura 3.4: Resposta não-linear do modelo ANCF excitado no primeiro modo.

Pode ser observado a presença do segundo modo na resposta, bem como a participação dos demais modos mais próximos da frequência de excitação. É notado também a presença de diversos harmônicos e sub-harmônicos no espectro, não presentes no sistema linear. Desta forma, o modelo ANCF é apropriado para descrever o comportamento não-linear de componentes flexíveis.

A resposta temporal e o espectro associado ao terceiro modo são mostrados na Figura 3.6. É marcante a presença de harmônicos e sub-harmônicos no espectro. A Figura 3.7(c) apresenta a terceira forma modal.

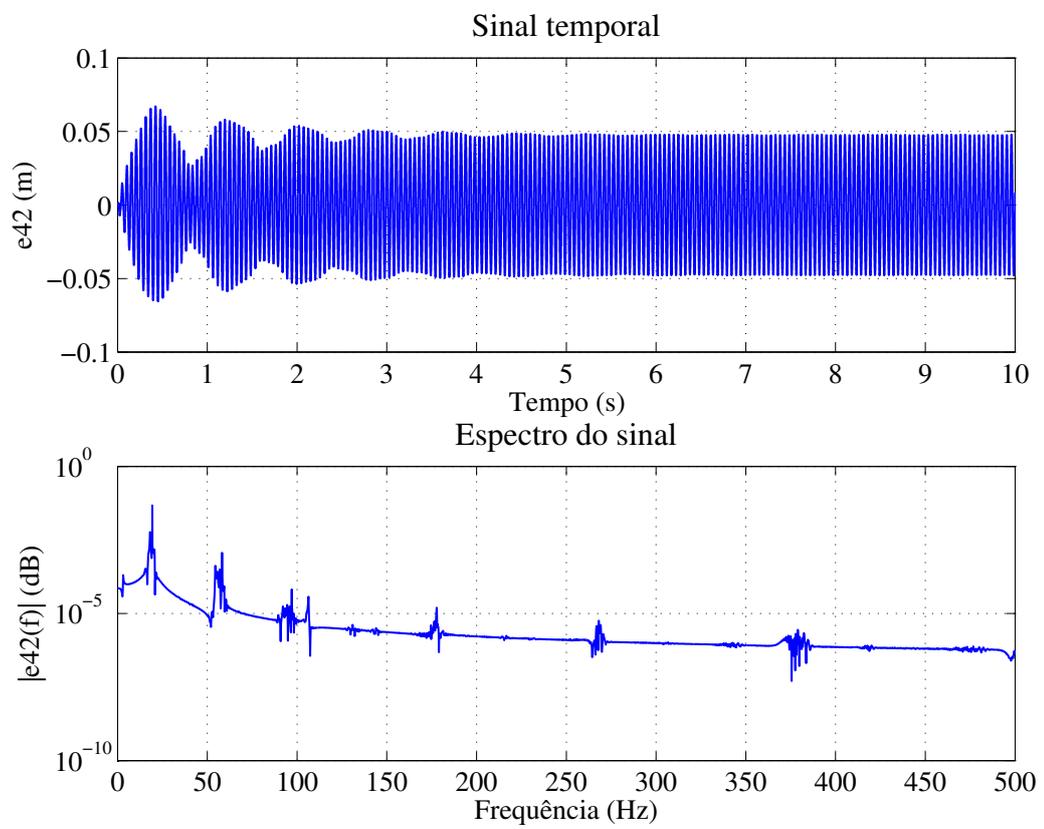


Figura 3.5: Resposta não-linear do modelo ANCF excitado no segundo modo.

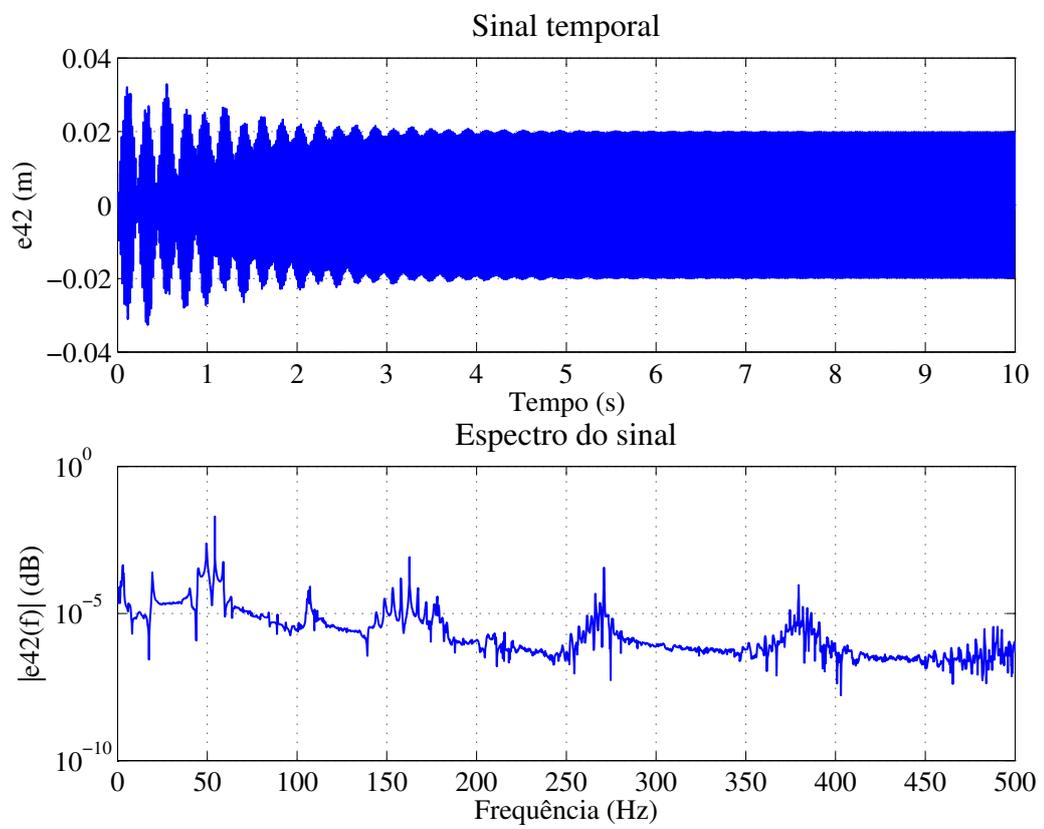
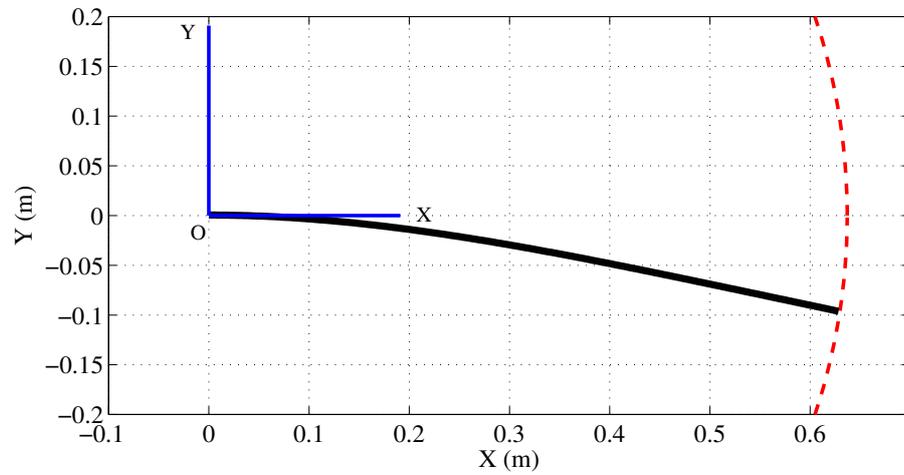
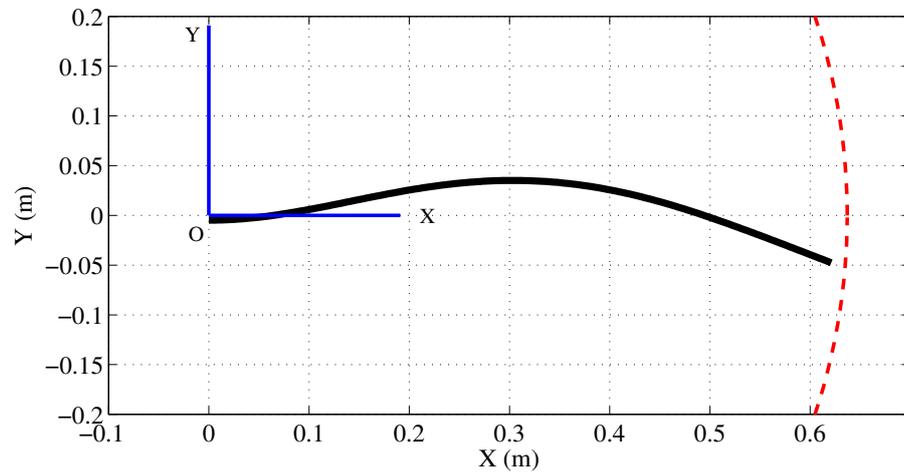


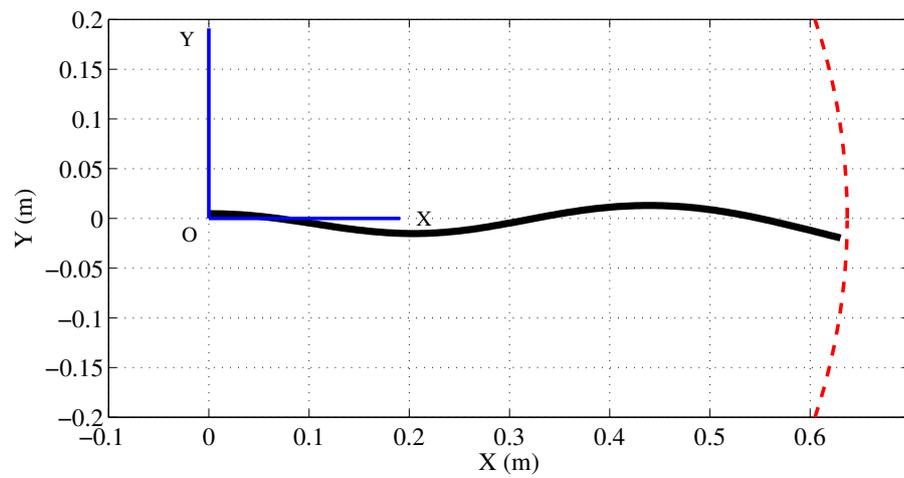
Figura 3.6: Resposta não-linear do modelo ANCF excitado no terceiro modo.



(a) Primeiro modo de vibrar (3.1 Hz)



(b) Segundo modo de vibrar (19.3 Hz)



(c) Terceiro modo de vibrar (54.2 Hz)

Figura 3.7: Modos de vibração da viga ANCF (a linha tracejada representa um arco de circunferência com raio igual ao comprimento indeformado da viga).

3.2.2.3 Teste numérico 3

O objetivo deste teste numérico é avaliar o efeito da força axial sobre as frequências naturais dos modos transversais. É conhecida a forte dependência das frequências naturais transversais de vigas em função do nível de força axial aplicada. A análise é feita utilizando o modelo de viga bi-articulada submetida a carregamento axial. Para proposta de validação do modelo ANCF, foi adotado o modelo analítico apresentado por Blevins (1979), bem como o modelo FEM com força axial proposto por Lee (2009).

A Tabela 3.3 apresenta o comparativo das frequências naturais a partir dos três modelos, utilizando força axial $T=0$ N como referência.

Tabela 3.3: Frequências naturais da viga ($T=0$ N)

Modo	Analítico (Hz)	FEM 20 el (Hz)	ANCF 20 el (Hz)	Forma modal
1	8.7	8.7	8.7	1ª transversal
2	34.6	34.6	34.6	2ª transversal
3	78.0	78.0	77.0	3ª transversal
4	138.6	138.6	138.6	4ª transversal
5	216.6	216.7	216.7	5ª transversal
6	311.9	312.1	312.1	6ª transversal
7	424.6	425.0	425.0	7ª transversal
8	554.5	555.4	555.4	8ª transversal

Os resultados de ambos os modelos de elementos finitos estão correlacionados com acurácia em relação ao modelo analítico, indicando que os três modelos são igualmente representativos.

Os resultados da influência do carregamento axial sobre as frequências naturais é mostrado na Tabela 3.4. Uma força axial de tração com magnitude $T=100$ N é aplicada na articulação da viga, aumentando as frequências naturais dos modos transversais.

Pode ser observado que os três modelos estão bem correlacionados, mostrando que o modelo ANCF é capaz de descrever com acurácia os efeitos de força axial na resposta do sistema.

Tabela 3.4: Frequências naturais da viga ($T=100$ N)

Modo	Análítico (Hz)	FEM 20 el (Hz)	ANCF 20 el (Hz)	Forma modal
1	20.6	20.6	20.6	1 ^a transversal
2	50.9	50.9	50.9	2 ^a transversal
3	96.0	96.0	96.0	3 ^a transversal
4	157.5	157.5	157.5	4 ^a transversal
5	235.9	235.9	235.9	5 ^a transversal
6	331.4	331.6	331.6	6 ^a transversal
7	444.2	444.6	444.6	7 ^a transversal
8	574.3	575.2	575.1	8 ^a transversal

3.2.2.4 Teste numérico 4

Nesta seção é analisado o efeito da velocidade axial sobre a viga bi-articulada do teste numérico anterior. A análise é feita considerando a viga tensionada ($T=100$ N), com duas velocidades diferentes. Os resultados com velocidade nula são os próprios dados da Tabela 3.4.

Na Tabela 3.5 são apresentadas as frequências naturais da viga sujeitas à velocidade axial de 20 m/s. É notado que o modelo FEM descreve corretamente a redução das frequências naturais, enquanto o modelo ANCF é insensível em relação à velocidade.

Tabela 3.5: Frequências naturais da viga ($T=100$ N e $c=20$ m/s)

Modo	FEM 20 el (Hz)	ANCF 20 el (Hz)	Forma modal
1	10.9	20.6	1 ^a transversal
2	40.1	50.9	2 ^a transversal
3	86.0	96.0	3 ^a transversal
4	148.2	157.5	4 ^a transversal
5	227.1	235.9	5 ^a transversal
6	323.0	331.6	6 ^a transversal
7	436.3	444.6	7 ^a transversal
8	567.1	575.1	8 ^a transversal

A velocidade axial da viga é aumentada de $c=20$ m/s para $c=30$ m/s, e os resultados mostrados na Tabela 3.6. Mais uma vez, o modelo ANCF não prediz a redução das frequências naturais, enquanto o modelo FEM revela a influência do efeito giroscópico na resposta do sistema.

Estes resultados sugerem que, apesar de eficiente para descrever diversos efeitos lineares e não-lineares, o modelo ANCF não contempla as forças dependentes da velocidade, tais como os termos giroscópicos e centrífugos. Desta forma, torna-se necessário o desenvolvimento teórico das forças/momentos centrífugos e giroscópicos no modelo ANCF não-linear, para ser utilizado

Tabela 3.6: Frequências naturais da viga ($T=100$ N e $c=30$ m/s)

Modo	FEM 20 el (Hz)	ANCF 20 el (Hz)	Forma modal
1	5.3	20.6	1 ^a transversal
2	24.5	50.9	2 ^a transversal
3	72.8	96.0	3 ^a transversal
4	136.2	157.5	4 ^a transversal
5	215.8	235.9	5 ^a transversal
6	312.3	331.6	6 ^a transversal
7	425.9	444.6	7 ^a transversal
8	557.0	575.1	8 ^a transversal

na modelagem do sistema de transmissão por correia.

Na próxima seção são deduzidos de forma inédita os termos centrífugos e giroscópicos do elemento finito de viga ANCF.

3.3 Incorporação dos efeitos centrífugos e giroscópicos no elemento finito de viga ANCF

Os efeitos centrífugos e giroscópicos serão incorporados no modelo ANCF através da reformulação da energia cinética do elemento finito, introduzindo a contribuição da velocidade axial constante. Os demais termos do modelo serão mantidos, uma vez que representam com acurácia o sistema físico flexível não-linear.

Os termos giroscópicos estão presentes em sistemas rotativos, bem como naqueles sujeitos a movimento linear, sendo importantes para representar a redução das frequências naturais em função da velocidade. As forças centrífugas são originadas em sistemas de transmissão a partir da aceleração normal sofrida pela correia ao percorrer a trajetória circular das polias. Estas forças modificam a tensão nos tramos, e desta forma, alteram a configuração de equilíbrio estacionário do sistema (Barker *et al.*, 1991; Beikmann, 1992; Kim e Marshek, 1987).

No presente modelo, é assumido a descrição Euleriana para a viga ANCF (Pechstein e Gerstmayr, 2013). Nesta abordagem, a viga não se move fisicamente no espaço devido à velocidade axial prescrita, mas tem uma configuração de referência Euleriana fixa, sujeita tanto aos efeitos centrífugos quanto os giroscópicos.

O Princípio de Hamilton, utilizado para deduzir a equação de movimento do elemento finito, é dado em sua forma expandida por (Goldstein, 1950)

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (3.29)$$

sendo T e U a energia cinética e de deformação, respectivamente. O trabalho virtual realizado por forças externas foi negligenciado.

As energias cinética e potencial do elemento finito sujeito a velocidade axial são dadas pelas expressões

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left[c^2 + (\dot{w}(x,t) + cw'(x,t))^2 \right] dx \\ U &= \frac{1}{2} \int_0^L EI [w''(x,t)]^2 dx \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde c e $w(x,t)$ representam a velocidade axial constante e o deslocamento transversal. Na expressão da energia potencial, foi considerada apenas a parcela associada à deformação transversal.

Substituindo a Equação (3.30) na Equação (3.29), aplicando integral por partes e assumindo condições de contorno nulas nas extremidades, tem-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L [-EIw'''' - \rho A (c^2w'' + 2c\dot{w}' + \ddot{w})] \delta w dx \right\} dt = 0 \quad (3.31)$$

em que $w \equiv w(x,t)$.

Considerando uma variação arbitrária de δw , a equação de movimento do elemento finito é dada por

$$EIw'''' + \rho Ac^2w'' + 2\rho Ac\dot{w}' + \rho A\ddot{w} = 0 \quad (3.32)$$

O primeiro termo desta equação está associado ao esforço de flexão; o segundo à força centrífuga; o terceiro à força giroscópica e o quarto à força de inércia.

A forma fraca no domínio do tempo da Equação (3.32) é representada como

$$\int_0^L [EIw''''\delta w'' - \rho Ac^2w'\delta w' + \rho Ac(\dot{w}'\delta w - \dot{w}\delta w') + \rho A\ddot{w}\delta w] dx = 0 \quad (3.33)$$

onde os esforços atuantes nas extremidades da viga foram negligenciados.

O campo de deslocamento transversal $w = r_2$ do elemento finito está contemplado no vetor posição \mathbf{r} , através da função de forma e do vetor de coordenadas nodais. Substituindo apropriadamente a componente de deslocamento transversal r_2 da Equação (3.1) na Equação (3.33) e considerando uma variação arbitrária no vetor de coordenadas nodais absolutas $\delta \mathbf{e}$, a equação

de movimento do elemento finito pode ser finalmente escrita em sua forma canônica como

$$\mathbf{M}_a \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{G}_a \dot{\mathbf{e}} + (\mathbf{K}_c + \mathbf{K}_t) \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

onde

$$\mathbf{M}_a = \int_0^L \rho A (\mathbf{S}^T \mathbf{S}) dx \quad (3.35)$$

$$\mathbf{G}_a = \int_0^L \rho A c (\mathbf{S}^T \mathbf{S}' - \mathbf{S}'^T \mathbf{S}) dx \quad (3.36)$$

$$\mathbf{K}_c = \int_0^L -\rho A c^2 (\mathbf{S}'^T \mathbf{S}') dx \quad (3.37)$$

$$\mathbf{K}_t = \int_0^L E I \mathbf{S}''^T \mathbf{S}'' dx \quad (3.38)$$

Pode ser observado que as matrizes resultantes de massa e de rigidez transversal são idênticas às matrizes originalmente apresentadas por Berzeri e Shabana (2000), apresentadas nas Equações (3.8) e (3.26). As matrizes \mathbf{G}_a e \mathbf{K}_c correspondem respectivamente à matrizes giroscópica (anti-simétrica) e centrífuga (simétrica) do modelo ANCF.

Substituindo a Equação (3.2) na Equação (3.36) e avaliando a integral, a matriz giroscópica \mathbf{G}_a do modelo ANCF é dada em sua forma expandida por

$$\mathbf{G}_a = \frac{mc}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{L}{5} & 0 & 1 & 0 & -\frac{L}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{5} & 0 & 1 & 0 & -\frac{L}{5} \\ -\frac{L}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{5} & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 \\ 0 & -\frac{L}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{5} & 0 & -\frac{L^2}{30} \\ -1 & 0 & -\frac{L}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{5} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{L}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{5} \\ \frac{L}{5} & 0 & \frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{5} & 0 & \frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Da mesma forma substituindo a Equação (3.2) na Equação (3.37) e integrando, a matriz

centrífuga \mathbf{K}_c do modelo ANCF é representada como

$$\mathbf{K}_c = \frac{-mc^2}{L^2} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 \\ 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} \\ -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 \\ 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Utilizando as matrizes giroscópica e centrífuga desenvolvidas nesta seção, a equação de movimento do elemento finito ANCF representado pela Equação (3.15), incluindo os efeitos dinâmicos associados ao movimento axial, é dada por

$$\mathbf{M}_a \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{G}_a \dot{\mathbf{e}} + (\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_t + \mathbf{K}_c) \mathbf{e} = \mathbf{Q}_{ext} \quad (3.41)$$

ou ainda

$$\mathbf{M}_a \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{G}_a \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_a \mathbf{e} = \mathbf{Q}_{ext} \quad (3.42)$$

sendo

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{K}_l + \mathbf{K}_t + \mathbf{K}_c \quad (3.43)$$

a matriz de rigidez completa do elemento finito.

3.3.1 Teste numérico 5

Nesta seção é apresentado um teste numérico para avaliar a influência dos termos centrífugos e giroscópicos propostos para o modelo ANCF. A estrutura analisada consiste na mesma viga biarticulada verificada na Seção 3.2.2.4. O diagrama de Campbell do modelo ANCF é comparado com o modelo FEM linear apresentado por Lee (2009), para fins de validação.

Na Tabela 3.7 são apresentadas as frequências naturais da viga considerando velocidade axial $c=10$ m/s.

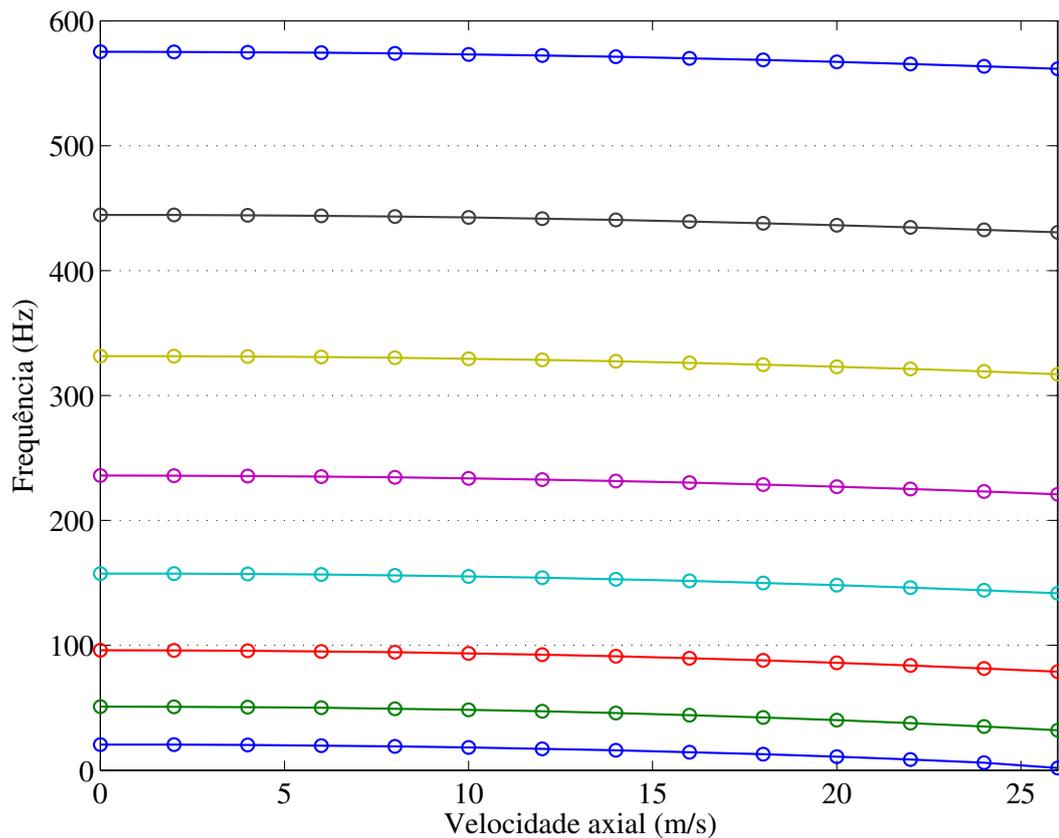
Os resultados mostram que somente quando são considerados ambos os efeitos giroscópico e centrífugo na equação de movimento do elemento finito ANCF, as frequências naturais

Tabela 3.7: Frequências naturais da viga ($T=100$ N e $c=10$ m/s)

Modo	FEM 20 el (Hz)	ANCF 20 el (Hz)	Forma modal
1	18.2	18.2	1ª transversal
2	48.3	48.3	2ª transversal
3	93.6	93.6	3ª transversal
4	155.2	155.2	4ª transversal
5	233.7	233.7	5ª transversal
6	329.4	329.4	6ª transversal
7	442.5	442.5	7ª transversal
8	573.2	573.2	8ª transversal

são corretamente descritas.

Os diagramas de Campbell para os modelos de viga FEM e ANCF são apresentados nas Figuras 3.8 e 3.9, respectivamente.

Figura 3.8: Diagrama de Campbell do modelo FEM ($T=100$ N).

Pode ser notado que ambos os diagramas são idênticos, validando os modelos centrífugo e giroscópico propostos para a viga ANCF com movimento axial.

Os efeitos centrífugos e giroscópicos podem ser bastante expressivos na resposta, va-

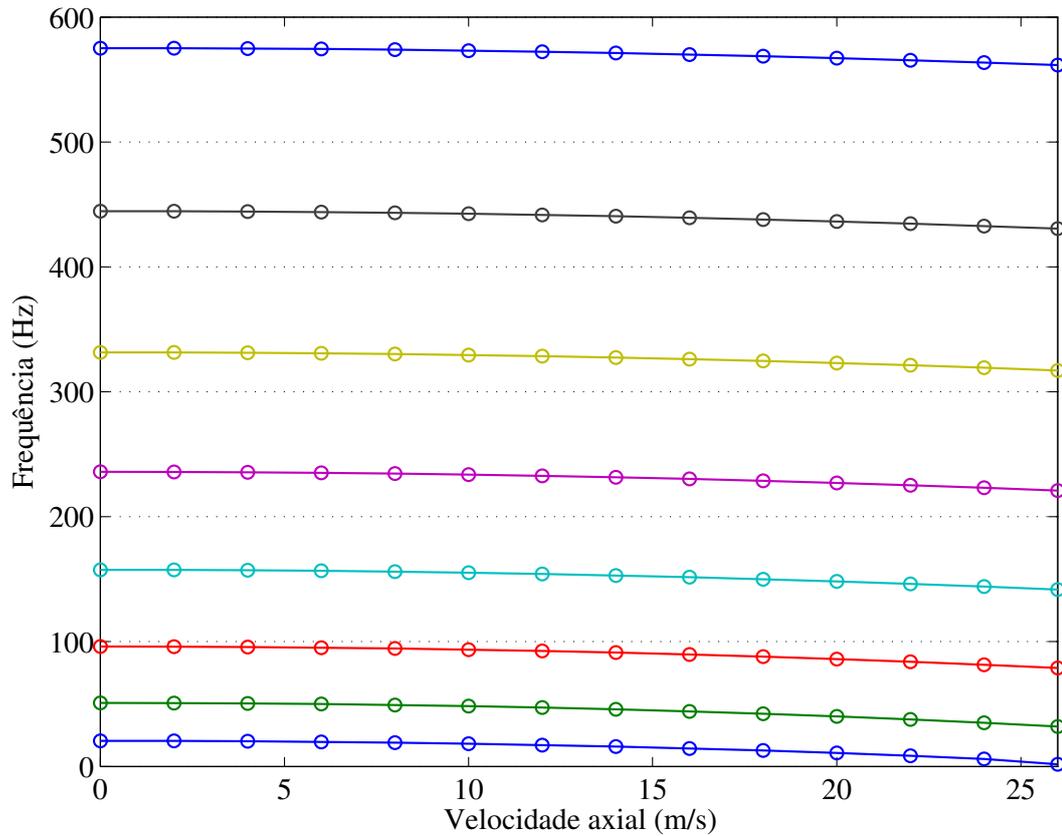


Figura 3.9: Diagrama de Campbell do modelo ANCF ($T=100$ N).

riando de acordo com os parâmetros do sistema. Para ilustrar este fenômeno, é mostrado na Figura 3.10 o diagrama de Campbell para uma viga flexível representativa do tramo da correia poly-V do sistema de transmissão, apresentando as seguintes propriedades: $L=0.67143$ m, $\rho A=0.12166$ kg/m, $EA=111190$ N, $EI=0.034$ N.m², na condição bi-articulada e tensionada axialmente com $T=100.5$ N.

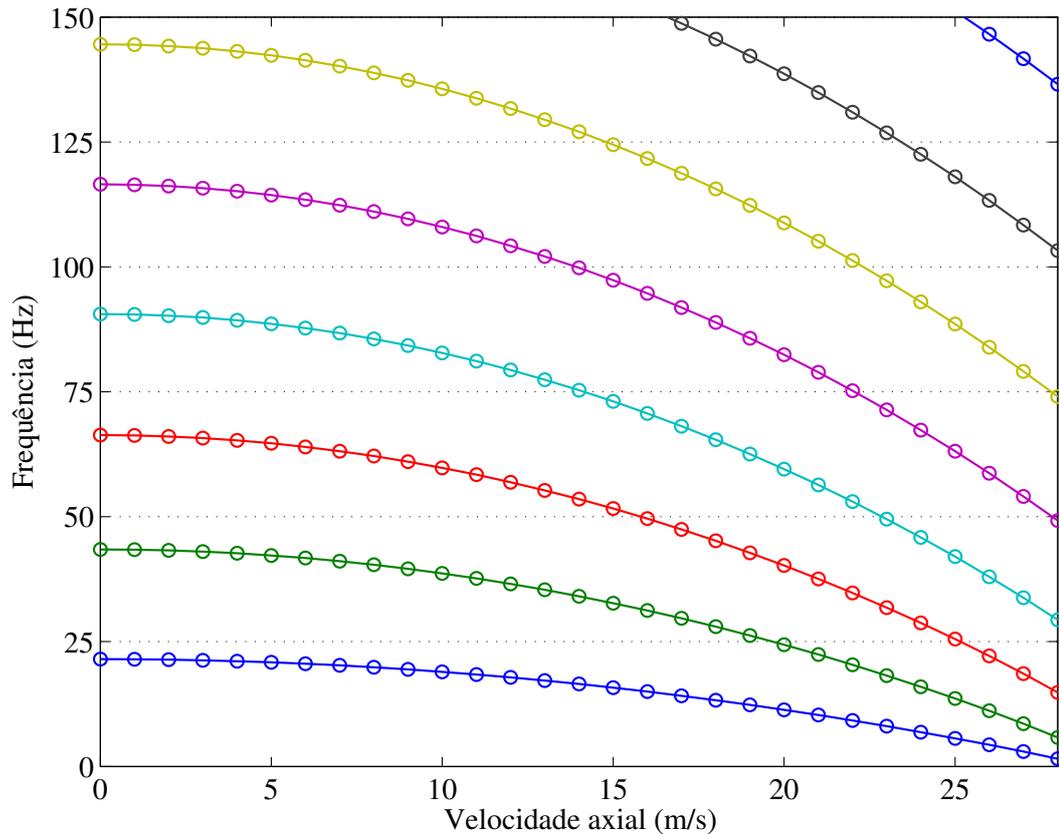


Figura 3.10: Diagrama de Campbell do modelo ANCF para a correia poly-V ($T=100.5$ N).

3.4 Resumo do capítulo

Neste capítulo, foi apresentado o modelo de elementos finitos para viga ANCF não-linear, inicialmente proposto por Berzeri e Shabana (2000). Os modelos de força longitudinal e transversal foram deduzidos, bem como os vetores de força externa aplicada.

Simulações numéricas mostraram que o modelo ANCF não incorpora na sua formulação os tradicionais efeitos dinâmicos de força centrífuga e giroscópica, presentes em vigas tensionadas com movimento axial. A equação do elemento finito considerando estes dois efeitos foi deduzida de forma inédita pelo Princípio de Hamilton, e as matrizes centrífuga e giroscópica apresentadas.

O modelo ANCF foi validado numericamente em torno do ponto de equilíbrio estacionário utilizando o modelo de elementos finitos linear clássico, por meio de comparação dos gráficos de Campbell.

No capítulo seguinte, o modelo de viga ANCF deduzido nesta seção será utilizado na modelagem híbrida do sistema de transmissão por correia, considerando os elementos rígidos e flexíveis acoplados.

4 Modelagem matemática do sistema de transmissão

Neste capítulo são apresentados os modelos matemáticos do sistema de transmissão por correia. A Seção 4.1 trata do sistema com duas polias, enquanto a Seção 4.2 considera o sistema com dispositivo auto-tensionador.

4.1 Sistema de transmissão com 2 polias

Nesta seção, são propostos dois modelos matemáticos do sistema de transmissão por correia constituído por duas polias. Nestes sistemas, não há a presença de dispositivo auto-tensionador, e o ajuste do nível de tensão da correia é feita através da posição da polia movida. O primeiro modelo é puramente rotacional, no qual a contribuição dos efeitos dinâmicos da correia na resposta do sistema é desprezada, enquanto o segundo é um modelo multicorpos híbrido, contemplando a dinâmica dos elementos rígidos (polias) e flexíveis (correia).

4.1.1 Modelo multicorpos puramente rotacional

O modelo mecânico do sistema de transmissão por correia analisado é representado na Figura 4.1. O Método de Newton-Euler será empregado na modelagem dinâmica deste sistema, viabilizando a incorporação das reações dinâmicas atuantes nas polias.

Os corpos estão identificados conforme a sequência abaixo:

- Corpo 1: polia 1 (movida - alternador)
- Corpo 2: polia 2 (motora - virabrequim)
- Corpo 3: tramo 1 da correia (superior)
- Corpo 4: tramo 2 da correia (inferior)

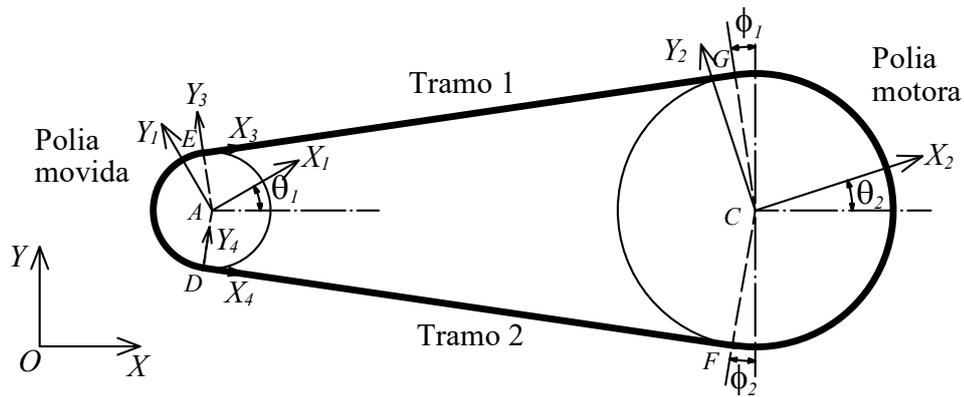


Figura 4.1: Sistema de transmissão por correia com polias de centro fixo.

As hipóteses simplificadoras deste modelo são:

- a resposta dinâmica transversal da correia é desprezível em relação à resposta rotacional das polias, e não tem influência no comportamento dinâmico rotacional do sistema;
- as polias e os mancais são considerados corpos rígidos;
- a rigidez da correia é representada por molas lineares, com comportamento puramente elástico;
- o amortecimento da correia pode ser assumido como puramente viscoso.

Para descrever o movimento rotacional das polias, dois sistemas de coordenadas móveis B_1 e B_2 são fixados no centro das polias 1 (movida) e 2 (motora) respectivamente, e giram solidários a elas. As orientações dos tramos da correia são obtidas com o auxílio de dois sistemas de coordenadas móveis (B_3 e B_4), com origem nos pontos E e D . O sistema inercial é usado como única referência absoluta para todos os sistemas móveis. As matrizes de transformação de coordenadas dos sistemas móveis para o inercial são dadas por (Santos, 2001; Schiehlen e Eberhard, 2004; Shabana, 2013)

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Os ângulos nas matrizes das Equações (4.1) e (4.2) são definidos como positivos no sentido anti-horário.

Os motores de combustão interna apresentam flutuação de velocidade angular do virabrequim devido à sequência de ignição, variando de acordo com o número de cilindros. Esta flutuação pode ser representada matematicamente através da prescrição paramétrica do movimento angular da polia motora, dada pela equação

$$\theta_2(t) = \theta_2(0) + \dot{\theta}_2(0)t + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_2 t^2 + A_2 \sin(2\pi f_2 t) \quad (4.3)$$

sendo $\theta_2(0)$ e $\dot{\theta}_2(0)$ a posição e velocidade angular inicial da polia 2, $\ddot{\theta}_2$ a aceleração angular constante, A_2 e f_2 a amplitude e a frequência de excitação harmônica.

Os vetores de posição que definem a configuração do sistema são escritos usando as respectivas bases apropriadas

$$\begin{aligned} {}_I\mathbf{r}_{OA} &= \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_I\mathbf{r}_{OC} &= \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_{B3}\mathbf{r}_{AE} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ R_1 \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_{B4}\mathbf{r}_{AD} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -R_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ {}_{B3}\mathbf{r}_{EG} &= \begin{Bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_{B4}\mathbf{r}_{DF} &= \begin{Bmatrix} L_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_{B3}\mathbf{r}_{CG} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ R_2 \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_{B4}\mathbf{r}_{CF} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -R_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que x_A , y_A , x_C e y_C definem a posição absoluta do centro das polias, L_3 e L_4 são os comprimentos dos tramos 1 e 2 e R_1 e R_2 indicam os raios das polias 1 e 2, respectivamente.

O efeito de desbalanceamento das polias pode ser incorporado no modelo definindo os vetores posição do centro de massa em relação ao centro geométrico das mesmas, nas respectivas bases locais

$${}_{B1}\mathbf{r}_{A-CM1} = \begin{Bmatrix} x_{cm1} \\ y_{cm1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_{B2}\mathbf{r}_{C-CM2} = \begin{Bmatrix} x_{cm2} \\ y_{cm2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

onde x_{cm1} , y_{cm1} , x_{cm2} e y_{cm2} indicam a posição do centro de massa das polias em relação à origem das bases locais B_1 e B_2 .

A configuração inicial do sistema pode ser obtida a partir de duas equações de *loop* vetorial fechado, que representam as restrições geométricas

$$\begin{aligned} \text{Loop 1} : & \quad {}_I\mathbf{r}_{OA} + \mathbf{S}_{3 \cdot B3}\mathbf{r}_{AE} + \mathbf{S}_{3 \cdot B3}\mathbf{r}_{EG} = {}_I\mathbf{r}_{OC} + \mathbf{S}_{3 \cdot B3}\mathbf{r}_{CG} \\ \text{Loop 2} : & \quad {}_I\mathbf{r}_{OA} + \mathbf{S}_{4 \cdot B4}\mathbf{r}_{AD} + \mathbf{S}_{4 \cdot B4}\mathbf{r}_{DF} = {}_I\mathbf{r}_{OC} + \mathbf{S}_{4 \cdot B4}\mathbf{r}_{CF} \end{aligned} \quad (4.6)$$

O comprimento total da correia L é determinado somando o comprimento dos tramos com os segmentos de abraçamento nas polias:

$$L = L_{s1} + L_{s2} + L_3 + L_4 \quad (4.7)$$

onde $L_{s1} = R_1(\pi - \phi_1 + \phi_2)$ e $L_{s2} = R_2(\pi + \phi_1 - \phi_2)$ são os comprimentos da correia nos abraçamentos das polias 1 e 2, respectivamente.

Dadas as coordenadas de centro e o raio das polias, a configuração indeformada do sistema pode ser determinada fazendo $L = L_0$ sujeito às equações de vínculo (4.6), onde L_0 é o comprimento inicial da correia. O sistema constituído por 5 equações algébricas não-lineares resultante pode ser resolvido pelo método de Newton-Raphson, fornecendo como saída os comprimentos indeformados dos tramos L_3 e L_4 , os ângulos de inclinação ϕ_1 e ϕ_2 e a posição inicial $X_{A0} < x_A$ da polia 1, que corresponde à posição de perfeito ajuste da correia no sistema, sem que ocorra afrouxamento ou esticamento da mesma.

De forma semelhante, os comprimentos e ângulos na configuração deformada também podem ser obtidos a partir das Equações (4.6), resolvendo diretamente o sistema de 4 equações para as 4 variáveis, aqui diferenciadas pelo sobrescrito d (L_3^d, L_4^d, ϕ_1^d e ϕ_2^d).

Os vetores de velocidade angular absoluta das polias são dados por

$${}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} \quad {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

em que $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ representam as velocidades angulares das polias 1 e 2.

Da mesma forma, os vetores de aceleração angular absoluta de ambas as polias podem ser obtidos derivando as Equações (4.8) com respeito ao tempo, resultando

$${}_{B1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} \quad {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

onde $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$ são respectivamente as acelerações angulares das polias 1 e 2.

Os vetores de aceleração linear do centro de massa das polias, necessários para a deter-

minação das equações de movimento do sistema, são dados por

$$\begin{aligned}
 {}_{B1}\mathbf{a}_{CM1} &= {}_{B1}\mathbf{a}_A + {}_{B1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_{B1}\mathbf{r}_{A-CM1} + {}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 \times {}_{B1}\mathbf{r}_{A-CM1}) + \\
 &\quad + 2{}_{B1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_{B1}\mathbf{v}_{CM1/A}^{rel} + {}_{B1}\mathbf{a}_{CM1/A}^{rel} \\
 {}_{B2}\mathbf{a}_{CM2} &= {}_{B2}\mathbf{a}_C + {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}_{B2}\mathbf{r}_{C-CM2} + {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}_{B2}\boldsymbol{\omega}_2 \times {}_{B2}\mathbf{r}_{C-CM2}) + \\
 &\quad + 2{}_{B2}\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}_{B2}\mathbf{v}_{CM2/C}^{rel} + {}_{B2}\mathbf{a}_{CM2/C}^{rel}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

O primeiro e os dois últimos termos do lado direito da Equação 4.10 são identicamente nulos, decorrente da origem da base local estar fixa e da hipótese de corpo rígido assumida para as polias.

Os vetores peso das polias 1 e 2 são representados diretamente na base inercial

$$\mathbf{P}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_1g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_2g \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.11}$$

Os parâmetros g , m_1 e m_2 denotam a aceleração da gravidade e as massas das polias 1 e 2.

As forças atuantes nos mancais 1 e 2 são definidas pelos vetores

$$\mathbf{F}_1 = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}_2 = \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.12}$$

sendo F_{1x} , F_{1y} , F_{2x} e F_{2y} as componentes de reação dinâmica a serem determinados no problema.

A rigidez dos tramos da correia é dependente tanto do módulo de rigidez axial do material (EA) quanto do comprimento dos tramos. As relações são dadas por

$$\begin{aligned}
 k_3 &= EA/L_3 \\
 k_4 &= EA/L_4
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

sendo k_3 e k_4 os coeficientes de rigidez dos tramos 1 e 2 da correia. Desta forma, as forças devidas à elasticidade dos tramos no estado deformado são definidas como

$$\begin{aligned}
 T_{e3} &= k_3 (L_3^d - L_3 + R_1\theta_1 - R_2\theta_2) \\
 T_{e4} &= k_4 (L_3^d - L_3 + R_2\theta_2 - R_1\theta_1)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Da mesma forma, os coeficientes de amortecimento viscoso podem ser expressos através de

$$\begin{aligned} c_3 &= CA/L_3 \\ c_4 &= CA/L_4 \end{aligned} \quad (4.15)$$

sendo CA o parâmetro que define o amortecimento do sistema (Čepon *et al.*, 2009b; Leamy e Wasfy, 2005).

As correspondentes forças de amortecimento dos tramos são determinadas por

$$\begin{aligned} T_{a3} &= c_3 \left(R_1 \dot{\theta}_1 - R_2 \dot{\theta}_2 \right) \\ T_{a4} &= c_4 \left(R_2 \dot{\theta}_2 - R_1 \dot{\theta}_1 \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Forças centrífugas surgem devido à componente de aceleração normal da correia ao passar pelas polias. Estas forças alteram a tensão nos tramos, e desta forma, modificam a configuração de equilíbrio estacionário do sistema (Barker *et al.*, 1991; Beikmann, 1992; Kim e Marshek, 1987). A força centrífuga é deduzida no Anexo A.1 a partir do diagrama de corpo livre de um segmento da correia submetido à aceleração normal, sendo definida como

$$T_c = \rho A c^2 \quad (4.17)$$

em que ρA e c representam a densidade linear e a velocidade axial da correia. A velocidade c pode ser calculada a partir da rotação da polia motora, fazendo $c = R_2 \dot{\theta}_2$.

Desta forma, a força total em cada tramo é determinada a partir das Equações (4.14), (4.16) e (4.17), com o auxílio das bases locais B_3 e B_4 :

$${}_{B_3}\mathbf{T}_3 = \begin{Bmatrix} T_{e3} + T_{a3} - T_c \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_{B_4}\mathbf{T}_4 = \begin{Bmatrix} T_{e4} + T_{a4} - T_c \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Os momentos externos aplicados nas polias são representados através dos vetores

$${}_{B_1}\mathbf{M}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{1z} \end{Bmatrix} \quad {}_{B_2}\mathbf{M}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{2z} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

O momento M_{1z} aplicado na polia 1 pode ser representado por uma componente de tor-

que médio com amplitude M_{1m} associado a uma componente alternada de amplitude M_{1a} e frequência f_1 , simulando o efeito de carga rotacional originado pelo alternador. Pode ser assumido também a presença de amortecimento nos mancais de rolamento. Assim, tem-se:

$$M_{1z} = M_{1m} + M_{1a}\sin(2\pi f_1 t) - c_{t1}\dot{\theta}_1 \quad (4.20)$$

onde c_{t1} é o coeficiente de atrito viscoso equivalente.

O momento M_{2z} aplicado na polia 2 representa o torque dinâmico necessário para a prescrição do movimento do virabrequim, definido pela Equação 4.3.

A partir da cinemática definida pelas Equações (4.1) a (4.10) e dos vetores de força dados pelas Equações (4.11) a (4.19), o Método de Newton-Euler (Santos, 2001; Tenenbaum, 2006) pode ser empregado para obter as equações de movimento do sistema de transmissão. As equações dinâmicas são dadas por

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = m_j \mathbf{a}_{CMj} \quad (4.21)$$

$$\sum_{i=1}^N {}_{Bn}\mathbf{M}_i^P = {}_{Bn}\mathbf{I}_j^P {}_{Bn}\dot{\boldsymbol{\omega}}_j + {}_{Bn}\boldsymbol{\omega}_j \times ({}_{Bn}\mathbf{I}_j^P {}_{Bn}\boldsymbol{\omega}_j) + m_j ({}_{Bn}\mathbf{r}_{P-CM} \times {}_{Bn}\mathbf{a}_P)$$

onde N representa o número de forças/momentos externos atuantes no corpo j e P indica a origem do sistema de coordenadas local B_n . O tensor de inércia ${}_{Bn}\mathbf{I}_j^P$ do corpo em relação à base local é representado pela matriz

$${}_{Bn}\mathbf{I}_j^P = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Os vetores das Equações (4.21) podem ser facilmente representados nas bases locais ou inercial utilizando apropriadamente as matrizes de transformação de coordenadas definidas nas Equações (4.1) e (4.2).

Aplicando as Equações (4.21) para a polia 1, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 &= m_1 \mathbf{a}_{CM1} \\ {}_{B1}\mathbf{M}_1 + ({}_{B1}\mathbf{r}_{A-CM1} \times {}_{B1}\mathbf{P}_1) + ({}_{B1}\mathbf{r}_{AE} \times {}_{B1}\mathbf{T}_1) + ({}_{B1}\mathbf{r}_{AD} \times {}_{B1}\mathbf{T}_2) &= \\ {}_{B1}\mathbf{I}_1 {}_{B1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + {}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}_{B1}\mathbf{I}_1 {}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1) + m_1 ({}_{B1}\mathbf{r}_{A-CM1} \times {}_{B1}\mathbf{a}_A) & \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para a polia 2, resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 + \mathbf{P}_2 - \mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_4 &= m_2 \mathbf{a}_{CM2} \\ {}_{B2}\mathbf{M}_2 + ({}_{B2}\mathbf{r}_{C-CM2} \times {}_{B2}\mathbf{P}_2) + [{}_{B2}\mathbf{r}_{CF} \times -({}_{B2}\mathbf{T}_1)] + [{}_{B2}\mathbf{r}_{CG} \times -({}_{B2}\mathbf{T}_2)] &= \\ {}_{B2}\mathbf{I}_2 {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}_{B2}\mathbf{I}_2 {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_2) + m_2 ({}_{B2}\mathbf{r}_{C-CM2} \times {}_{B2}\mathbf{a}_C) & \end{aligned} \quad (4.24)$$

As Equações (4.23) e (4.24) representam um conjunto de 6 equações acopladas a serem resolvidas para as 6 variáveis do problema: F_{1x} , F_{1y} , F_{2x} , F_{2y} , $\ddot{\theta}_1$ e M_{2z} .

Definidos os parâmetros do sistema e as 2 condições iniciais de movimento, a equação diferencial $\ddot{\theta}_1$ pode ser integrada numericamente para obter as respostas temporais e as reações dinâmicas.

4.1.2 Modelo multicorpos híbrido

O modelo multicorpos híbridos proposto baseia-se na dinâmica de corpos rígidos para descrever o comportamento dinâmico das polias, e na dinâmica de corpos flexíveis utilizando o modelo de viga ANCF descrito na Seção 3.3. Desta forma, o modelo incorpora os efeitos centrífugos e giroscópicos presentes no sistema de transmissão. São assumidas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- apenas pequenas deformações longitudinais ocorrem na correia (justificado na Seção 6.1);
- o material da correia é isotrópico, perfeitamente elástico e invariante no tempo;
- a rigidez dos mancais das polias é muito maior que a rigidez axial da correia, permitindo considerá-los como rígidos;
- não ocorre deslizamento no contato polia-correia;
- o centro de massa das polias coincide com o centro geométrico das mesmas.

Assumindo que as origens das bases locais B_1 e B_2 coincidem com o centro de massa e o centro geométrico das polias, as matrizes de massa destes componentes não apresentam acoplamento dinâmico, sendo, portanto, diagonais. Estas matrizes são expressas como (Shabana, 2013)

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

sendo m_i e J_i a massa e o momento de inércia de massa da polia i , respectivamente.

Fazendo uso das Equações (3.9) e (4.25), a matriz de massa global do sistema é obtida montando-se as submatrizes de cada componente:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{a3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{a4} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

sendo \mathbf{M}_{a3} e \mathbf{M}_{a4} as matrizes de massa dos tramos 1 e 2 da correia, definidas pela Equação (3.9)

A matriz giroscópica do sistema é dado pela Equação (3.39):

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{a3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{a4} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

em que \mathbf{G}_{a3} e \mathbf{G}_{a4} correspondem às matrizes giroscópicas dos tramos 1 e 2.

De forma semelhante, somando as Equações (3.21), (3.27) e (3.40), a matriz de rigidez global é dada por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{a3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{a4} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde \mathbf{K}_{a3} e \mathbf{K}_{a4} são as matrizes de rigidez dos tramos 1 e 2.

Os vetores de força peso das polias são definidos como

$$\mathbf{Q}_{p1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_1g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{p2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_2g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

O vetor forças nodais equivalentes correspondente à força peso do tramo 1 é dado pela Equação (3.13):

$$\mathbf{Q}_{p3} = -m_3g \left\{ 0 \frac{1}{2} 0 \frac{L_3}{12} 0 \frac{1}{2} 0 \frac{-L_3}{12} \right\}^T \quad (4.30)$$

sendo m_3 e L_3 a massa e o comprimento do tramo 1.

Da mesma forma, o vetor de força peso do tramo 2 é dado por

$$\mathbf{Q}_{p4} = -m_4 g \left\{ 0 \frac{1}{2} 0 \frac{L_4}{12} 0 \frac{1}{2} 0 \frac{-L_4}{12} \right\}^T \quad (4.31)$$

onde m_4 e L_4 são a massa e o comprimento do tramo 2.

O comprimento indeformado e as orientações iniciais dos tramos 1 e 2 são obtidos diretamente a partir das Equações (4.6) e (4.7), através de procedimento numérico iterativo.

Os momentos externos totais atuantes nas polias são definidos a partir de

$$\mathbf{Q}_{m1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{1z} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{m2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{2z} \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

O vetor que representa todas as forças e momentos externos atuantes no sistema é dado pela soma das Equações (4.29) a (4.32):

$$\mathbf{Q}_{ext} = \mathbf{Q}_{p1} + \mathbf{Q}_{p2} + \mathbf{Q}_{p3} + \mathbf{Q}_{p4} + \mathbf{Q}_{m1} + \mathbf{Q}_{m2} \quad (4.33)$$

Fazendo uso das Equações (4.26) a (4.28) e (4.33), a equação de movimento global do sistema de transmissão contendo todos os graus de liberdade é dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_{ext} \quad (4.34)$$

ou ainda

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} \quad (4.35)$$

em que $\mathbf{F} = \mathbf{Q}_{ext} - \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}$.

Nesta equação, o vetor de coordenadas generalizadas é representado por

$$\mathbf{q} = \{x_A \ y_A \ \theta_1 \ x_C \ y_C \ \theta_2 \ \mathbf{e}_3^T \ \mathbf{e}_4^T\}^T \quad (4.36)$$

onde \mathbf{e}_3 e \mathbf{e}_4 representam os vetores com os graus de liberdade dos tramos flexíveis definido na Equação (3.4), cuja ordem varia de acordo com a discretização usada na malha.

Os vínculos entre os graus de liberdade precisam ser devidamente estabelecidos e agrupados convenientemente na forma de um vetor $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$. As polias têm centros fixos, resultando em $x_A = X_A$, $y_A = Y_A$, $x_C = X_C$, $y_C = Y_C$, em que X_A , Y_A , X_C , Y_C são as coordenadas numéricas dos centros das polias 1 e 2. Para os tramos da correia, são usadas condições de

contorno de viga bi-articulada (Čepon *et al.*, 2009b; Neudorf, 2013), respeitando a tangência de contato em ambas as polias. Desta forma, as coordenadas nodais absolutas do nó 1 do tramo 1 são restringidas a se moverem ao longo do eixo X_3 em torno do ponto E devido à rotação da polia 1, pela quantidade $R_1\theta_1$. O nó 2 do elemento também é restrito a movimento linear ao longo do eixo X_3 no ponto G , pela quantidade $R_2\theta_2$. De forma semelhante, os vínculos do tramo 2 são escritos para ambos os nós.

Desta forma, os vetores de deslocamentos nodais ${}_{B_3}\mathbf{u}_1^{nodal}$ e ${}_{B_4}\mathbf{u}_2^{nodal}$ dos tramos 1 e 2 são definidos respectivamente nas bases B_3 e B_4 :

$${}_{B_3}\mathbf{u}_1^{nodal} = \{-R_1\theta_1 \ 0 \ -R_2\theta_2 \ 0\}^T \quad (4.37)$$

$${}_{B_4}\mathbf{u}_2^{nodal} = \{R_1\theta_1 \ 0 \ R_2\theta_2 \ 0\}^T \quad (4.38)$$

Usando a Equação (4.2), as matrizes de rotação que transformam os vetores definidos nas bases B_3 e B_4 para a base inercial são dadas por

$$\mathbf{S}_{t1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}_3 \end{bmatrix} \mathbf{S}_{t2} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}_4 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

onde $\hat{\mathbf{S}}_3$ e $\hat{\mathbf{S}}_4$ são as submatrizes de ordem 2x2 obtidas removendo-se a terceira linha e coluna das matrizes \mathbf{S}_3 e \mathbf{S}_4 , respectivamente.

Usando as Equações (4.37) a (4.39), os deslocamentos nodais absolutos dos tramos 1 e 2 podem finalmente ser representados na base inercial

$${}_I\mathbf{u}_1^{nodal} = \mathbf{S}_{t1 \cdot B_3} \mathbf{u}_1^{nodal} \quad (4.40)$$

$${}_I\mathbf{u}_2^{nodal} = \mathbf{S}_{t2 \cdot B_4} \mathbf{u}_2^{nodal} \quad (4.41)$$

Os vetores de posição dos pontos de tangência dos tramos com as polias são dados por

$${}_I\mathbf{r}_{OE} = \{r_x^E \ r_y^E \ 0\}^T = {}_I\mathbf{r}_{OA} + \mathbf{S}_{3 \cdot B_3} \mathbf{r}_{AE} \quad (4.42)$$

$${}_I\mathbf{r}_{OG} = \{r_x^G \ r_y^G \ 0\}^T = {}_I\mathbf{r}_{OC} + \mathbf{S}_{3 \cdot B_3} \mathbf{r}_{CG} \quad (4.43)$$

$${}_I\mathbf{r}_{OD} = \{r_x^D \ r_y^D \ 0\}^T = {}_I\mathbf{r}_{OA} + \mathbf{S}_{4 \cdot B_4} \mathbf{r}_{AD} \quad (4.44)$$

$${}_I\mathbf{r}_{OF} = \{r_x^F \ r_y^F \ 0\}^T = {}_I\mathbf{r}_{OC} + \mathbf{S}_{4 \cdot B_4} \mathbf{r}_{CF} \quad (4.45)$$

A partir das restrições previamente descritas e usando as Equações (4.42) a (4.45), o vetor

de vínculos é escrito como

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \left\{ \begin{array}{c} x_A - X_A \\ y_A - Y_A \\ x_C - X_C \\ y_C - Y_C \\ e1 - [r_x^E + I \mathbf{u}_1^{nodal}(1)] \\ e2 - [r_y^E + I \mathbf{u}_1^{nodal}(2)] \\ e5 - [r_x^G + I \mathbf{u}_1^{nodal}(3)] \\ e6 - [r_y^G + I \mathbf{u}_1^{nodal}(4)] \\ e9 - [r_x^D + I \mathbf{u}_2^{nodal}(1)] \\ e10 - [r_y^D + I \mathbf{u}_2^{nodal}(2)] \\ e13 - [r_x^F + I \mathbf{u}_2^{nodal}(3)] \\ e14 - [r_y^F + I \mathbf{u}_2^{nodal}(4)] \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (4.46)$$

onde o número entre parênteses indica o componente do vetor correspondente. Caso o movimento da polia 2 seja prescrito, incorpora-se a equação paramétrica correspondente sob forma de vínculo de acionamento no vetor $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t)$, como exemplificado na Equação (4.113).

Para eliminar os graus de liberdade dependentes das equações de movimento (Shabana, 2013; Shabana *et al.*, 2011), o vetor \mathbf{q} é particionado em coordenadas dependentes \mathbf{q}_d e coordenadas independentes \mathbf{q}_i

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_d^T \mathbf{q}_i^T\}^T \quad (4.47)$$

em que \mathbf{q}_d é dado por

$$\mathbf{q}_d = \{x_A \ y_A \ x_C \ y_C \ e_1 \ e_2 \ e_5 \ e_6 \ e_9 \ e_{10} \ e_{13} \ e_{14}\}^T \quad (4.48)$$

Neste vetor, as variáveis e_1, e_2, e_5 e e_6 representam os deslocamentos nodais do tramo 1 e e_9, e_{10}, e_{13} e e_{14} os deslocamentos do tramo 2 (ver Figura 3.1).

Derivando a Equação (4.46) com respeito ao tempo, tem-se

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = \mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_t = \mathbf{0} \quad (4.49)$$

Diferenciando novamente a Equação (4.49), tem-se as restrições a nível de aceleração (Shabana, 2013):

$$\ddot{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{C}_{q_t} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{tt} = \mathbf{0} \quad (4.50)$$

Levando em consideração que não há dependência temporal explícita no vetor de restri-

ções e que a matriz C_q é constante para o problema analisado, a Equação (4.50) é simplificada como

$$C_q \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.51)$$

Usando a Equação (4.47) e particionando adequadamente a Equação (4.51), tem-se

$$C_{q_d} \ddot{\mathbf{q}}_d + C_{q_i} \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0} \quad (4.52)$$

Logo,

$$\ddot{\mathbf{q}}_d = -C_{q_d}^{-1} C_{q_i} \ddot{\mathbf{q}}_i = C_{d_i} \ddot{\mathbf{q}}_i \quad (4.53)$$

Com a Equação (4.53), o vetor $\ddot{\mathbf{q}}$ pode ser reescrito como

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_d \\ \ddot{\mathbf{q}}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{d_i} \ddot{\mathbf{q}}_i \\ \ddot{\mathbf{q}}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{d_i} \\ \mathbf{I} \end{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{B}_{d_i} \ddot{\mathbf{q}}_i \quad (4.54)$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade cuja ordem é determinada a partir do número total de graus de liberdade do sistema e do vetor de restrições. Reordenando a equação de movimento (4.35) de acordo com o particionamento empregado e substituindo a Equação (4.54), resulta

$$\mathbf{M} \mathbf{B}_{d_i} \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F} \quad (4.55)$$

Pré-multiplicando a Equação (4.55) por $\mathbf{B}_{d_i}^T$, tem-se as equações de movimento escritas unicamente em função das coordenadas independentes

$$\mathbf{M}_{ii} \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_{ii} \quad (4.56)$$

em que

$$\mathbf{M}_{ii} = \mathbf{B}_{d_i}^T \mathbf{M} \mathbf{B}_{d_i} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{B}_{d_i}^T \mathbf{F} \quad (4.58)$$

A Equação (4.56) representa a forma final da equação de movimento não-linear do sistema de transmissão. A resposta temporal do sistema pode ser obtida numericamente, utilizando integradores específicos para equações diferenciais rígidas. Uma vez obtidas as respostas temporais das coordenadas independentes, as coordenadas dependentes podem ser determinadas através da Equação (4.52). Fazendo uso dos multiplicadores de Lagrange, as forças de vínculo podem ser facilmente encontradas a partir do vetor de coordenadas generalizadas do sistema

(Shabana, 2013).

A configuração de equilíbrio estático pode também ser calculada eliminando as forças de inércia na Equação (4.56) e resolvendo o sistema para as coordenadas generalizadas independentes. Nesta etapa, um solver não-linear deve ser empregado em virtude das não-linearidades geométricas presentes.

O procedimento de análise modal (Maqueda *et al.*, 2008) pode ser feito a partir da linearização das equações de movimento em torno da configuração de equilíbrio, com o emprego da matriz de rigidez tangente (Bonet e Wood, 2008; Zhao *et al.*, 2011). Fazendo uso da Equação (4.58), tem-se:

$$\mathbf{K}_T = -\frac{\partial \mathbf{F}_{ii}}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (4.59)$$

sendo \mathbf{K}_T uma matriz associada às coordenadas independentes e que pode ser usada juntamente com a matriz de massa reduzida \mathbf{M}_{ii} para a determinação dos parâmetros modais do sistema (Shabana, 2010).

4.2 Sistema de transmissão com dispositivo auto-tensionador

4.2.1 Modelo multicorpos puramente rotacional

Nesta seção, o Método de Newton-Euler será utilizado para encontrar as equações de movimento e as reações dinâmicas do sistema de transmissão com auto-tensionador. Neste modelo, apenas a dinâmica rotacional é considerada, negligenciando a vibração transversal dos tramos da correia. A Figura 4.2 apresenta o modelo mecânico do sistema analisado.

Os corpos estão identificados conforme segue:

- Corpo 1: auto-tensionador
- Corpo 2: polia 2 (polia do auto-tensionador)
- Corpo 3: polia 3 (móvel - alternador)
- Corpo 4: polia 4 (motora - virabrequim)
- Corpo 5: tramo 1 da correia (superior)
- Corpo 6: tramo 2 da correia (inferior direita)
- Corpo 7: tramo 3 da correia (inferior esquerda)

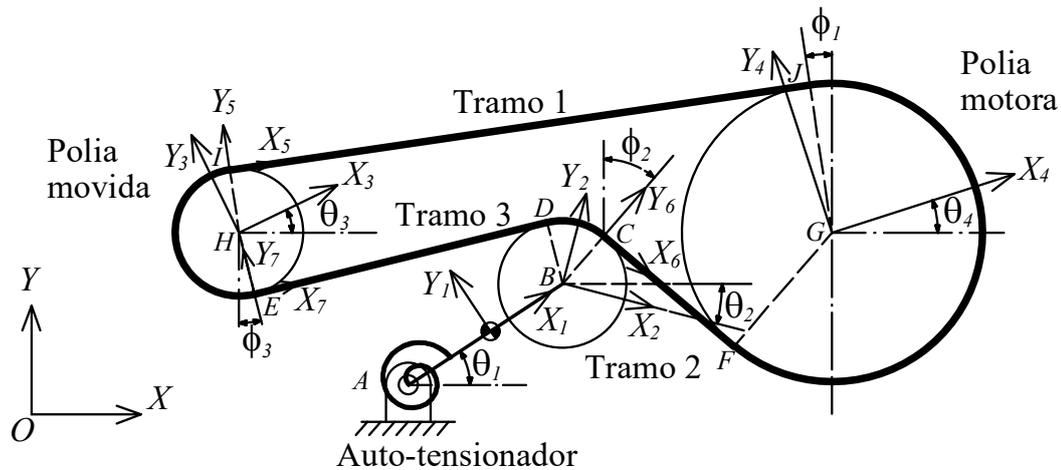


Figura 4.2: Sistema de transmissão por correia com auto-tensionador.

As hipóteses simplificadoras adotadas para este modelo são:

- a vibração transversal dos tramos tem influência desprezível sobre a resposta rotacional das polias e auto-tensionador;
- as polias, os mancais e o auto-tensionador são considerados corpos rígidos;
- a rigidez da correia pode ser representada por molas lineares elásticas;
- a correia e o auto-tensionador apresentam amortecimento viscoso;
- o atrito seco do auto-tensionador é negligenciado;
- a mola torcional do auto-tensionador é assumida linearmente elástica.

Para descrever o comportamento dinâmico do sistema, são utilizadas no total sete bases locais e uma inercial. A base B_1 é solidária ao auto-tensionador, com origem no centro de massa do mesmo. As bases B_2 , B_3 e B_4 são fixas às polias 2, 3 e 4, respectivamente, também com origens no centro de massa das mesmas, que coincide com o centro geométrico. As bases B_5 , B_6 e B_7 definem a orientação dos tramos 1, 2 e 3, tendo origens respectivamente nos pontos I , C e E , tangentes às polias. A base inercial define a referência absoluta dos demais sistemas de coordenadas.

As matrizes de transformação de coordenadas deste sistema, responsáveis pela comuni-

cação entre as diversas bases adotadas, são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{S}_2 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_3 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{S}_4 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_5 &= \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{S}_6 &= \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_7 &= \begin{bmatrix} \cos \phi_3 & -\sin \phi_3 & 0 \\ \sin \phi_3 & \cos \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Todos os ângulos nas matrizes das Equações (4.60) e (4.61) são definidos como positivos no sentido anti-horário.

A polia motora tem o movimento prescrito através da seguinte equação paramétrica

$$\theta_4(t) = \theta_4(0) + \dot{\theta}_4(0)t + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_4 t^2 + A_4 \sin(2\pi f_4 t) \quad (4.62)$$

onde $\theta_4(0)$ e $\dot{\theta}_4(0)$ definem a posição e velocidade angular inicial da polia 4, $\ddot{\theta}_4$ a aceleração angular constante, A_4 e f_4 são a amplitude e a frequência de excitação harmônica devido à flutuação de velocidade angular do virabrequim. Desta forma, o sistema em análise apresenta 4 graus de liberdade, associados à rotação do auto-tensionador e das polias 2, 3 e 4.

A configuração do sistema é especificada através dos vetores de posição definidos nas

respectivas bases apropriadas

$$\begin{aligned}
{}_I\mathbf{r}_{OA} &= \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_{B1}\mathbf{r}_{AB} &= \begin{Bmatrix} L_t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_{B6}\mathbf{r}_{BC} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ R_2 \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_{B7}\mathbf{r}_{BD} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ R_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
{}_I\mathbf{r}_{OH} &= \begin{Bmatrix} x_H \\ y_H \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_I\mathbf{r}_{OG} &= \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_{B5}\mathbf{r}_{HI} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ R_3 \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_{B7}\mathbf{r}_{HE} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -R_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
{}_{B5}\mathbf{r}_{GJ} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ R_4 \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_{B6}\mathbf{r}_{GF} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -R_4 \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_{B5}\mathbf{r}_{IJ} &= \begin{Bmatrix} L_5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & {}_{B6}\mathbf{r}_{CF} &= \begin{Bmatrix} L_6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
{}_{B7}\mathbf{r}_{ED} &= \begin{Bmatrix} L_7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

onde x_A e y_A definem as coordenadas do mancal do auto-tensionador e x_H, y_H, x_G e y_G são as coordenadas absolutas de posição dos mancais das polias 3 e 4, respectivamente. Os parâmetros L_5, L_6 e L_7 são os comprimentos dos tramos 1, 2 e 3, enquanto R_2, R_3 e R_4 indicam os raios das polias 2, 3 e 4, respectivamente. Finalmente, L_t representa o comprimento do auto-tensionador, correspondente à distância entre os pontos A e B .

O vetor posição do centro de massa do auto-tensionador precisa ser definido para incluir o efeito das forças de inércia nas equações de movimento:

$${}_{B1}\mathbf{r}_{A-CM1} = \begin{Bmatrix} x_{cm1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_{B1}\mathbf{r}_{CM1-B} = \begin{Bmatrix} (L_t - x_{cm1}) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.64}$$

onde x_{cm1} é o parâmetro que indica a posição do centro de massa do auto-tensionador em relação ao mancal A , em relação à origem da base local B_1 .

Tanto a geometria inicial quanto a deformada do sistema podem ser expressas matematicamente a partir das equações de vínculo, determinadas com o auxílio de três equações de *loop* vetorial fechado:

$$\begin{aligned}
\text{Loop 1} : & \quad {}_I\mathbf{r}_{OH} + \mathbf{S}_{5 \cdot B5}\mathbf{r}_{HI} + \mathbf{S}_{5 \cdot B5}\mathbf{r}_{IJ} = {}_I\mathbf{r}_{OG} + \mathbf{S}_{5 \cdot B5}\mathbf{r}_{GJ} \\
\text{Loop 2} : & \quad {}_I\mathbf{r}_{OA} + \mathbf{S}_{1 \cdot B1}\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{S}_{6 \cdot B6}\mathbf{r}_{BC} + \mathbf{S}_{6 \cdot B6}\mathbf{r}_{CF} = {}_I\mathbf{r}_{OG} + \mathbf{S}_{6 \cdot B6}\mathbf{r}_{GF} \\
\text{Loop 3} : & \quad {}_I\mathbf{r}_{OA} + \mathbf{S}_{1 \cdot B1}\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{S}_{7 \cdot B7}\mathbf{r}_{BD} = {}_I\mathbf{r}_{OH} + \mathbf{S}_{7 \cdot B7}\mathbf{r}_{HE} + \mathbf{S}_{7 \cdot B7}\mathbf{r}_{ED}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

A equação vetorial de *loop 1* contém os parâmetros L_5 e ϕ_1 , a de *loop 2* os parâmetros L_6 , ϕ_2 e a variável θ_1 , e a de *loop 3* os parâmetros L_7 , ϕ_3 e também a variável θ_1 . Desta forma, pode ser verificado que os comprimentos L_6 e L_7 , bem como os ângulos de inclinação ϕ_2 e ϕ_3 , são dependentes da posição angular θ_1 , revelando a não-linearidade geométrica do sistema.

O comprimento total da correia L é obtido somando o comprimento dos tramos com os segmentos de abraçamento nas polias:

$$L = L_{s2} + L_{s3} + L_{s4} + L_5 + L_6 + L_7 \quad (4.66)$$

em que $L_{s2} = R_2(\phi_3 - \phi_2)$, $L_{s3} = R_3(\pi + \phi_3 - \phi_1)$ e $L_{s4} = R_4(\pi + \phi_1 - \phi_2)$ são respectivamente os comprimentos da correia nos abraçamentos das polias 2, 3 e 4.

Estabelecidos os parâmetros numéricos do comprimento indeformado da correia L_0 , dos raios das polias, comprimento do auto-tensionador e das coordenadas de centro das polias e do mancal do auto-tensionador, a configuração indeformada do sistema é obtida fazendo $L = L_0$ sujeito às restrições das Equações (4.65). O Método de Newton-Raphson pode ser utilizado para resolver numericamente o sistema de 7 equações algébricas não-lineares resultantes, para as variáveis θ_1 , L_5 , L_6 , L_7 , ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 . Desta forma, o comprimento e a inclinação dos tramos, bem como a posição inicial do auto-tensionador, são obtidos de forma direta a partir desta formulação. Deve ser ressaltado que esta configuração corresponde à geometria de perfeito ajuste da correia indeformada no sistema, e não à de equilíbrio estático, que deve ser determinada a partir do equilíbrio de forças e momentos.

Os comprimentos e ângulos dos tramos em contato com o auto-tensionador dependem da posição angular θ_1 do dispositivo, podendo ser determinados utilizando as equações de *loop 2* e 3 da Equação (4.65) e resolvendo o sistema de 4 equações para as 4 variáveis, aqui identificadas através do sobrescrito d (L_6^d , L_7^d , ϕ_6^d e ϕ_7^d).

A velocidade angular absoluta do auto-tensionador e das polias são dados pelos vetores

$${}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} \quad {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad {}_{B3}\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \quad {}_{B4}\boldsymbol{\omega}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} \quad (4.67)$$

sendo $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$ e $\dot{\theta}_4$ as velocidades angulares do auto-tensionador e das polias 2, 3 e 4.

Os vetores de aceleração angular absoluta dos componentes rígidos são determinados a

partir da diferenciação temporal das Equações (4.67):

$${}_{B1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} \quad {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad {}_{B3}\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \quad {}_{B4}\dot{\boldsymbol{\omega}}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

em que $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$, $\ddot{\theta}_3$ e $\ddot{\theta}_4$ correspondem respectivamente às acelerações angulares do auto-tensionador e das polias 2, 3 e 4.

As acelerações lineares absolutas do centro de massa do auto-tensionador e da polia 2 são dadas pelos vetores

$$\begin{aligned} {}_{B1}\mathbf{a}_{CM1} &= {}_{B1}\mathbf{a}_A + {}_{B1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_{B1}\mathbf{r}_{A-CM1} + {}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 \times {}_{B1}\mathbf{r}_{A-CM1}) + \\ &\quad + 2{}_{B1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_{B1}\mathbf{v}_{CM1/A}^{rel} + {}_{B1}\mathbf{a}_{CM1/A}^{rel} \\ {}_{B2}\mathbf{a}_{CM2} &\equiv {}_{B2}\mathbf{a}_B = {}_{B2}\mathbf{a}_A + {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_{B2}\mathbf{r}_{AB} + {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}_{B2}\boldsymbol{\omega}_2 \times {}_{B2}\mathbf{r}_{AB}) + \\ &\quad + 2{}_{B2}\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}_{B2}\mathbf{v}_{B/A}^{rel} + {}_{B2}\mathbf{a}_{B/A}^{rel} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Dadas as hipóteses assumidas para o modelo, o primeiro e os dois últimos termos do lado direito da Equação 4.69, respectivamente associados à translação dos mancais e de deformação dos corpos, são vetores identicamente nulos. Uma vez que o centro de massa e geométrico das polias 3 e 4 são coincidentes, ${}_{B3}\mathbf{a}_{CM3} = {}_{B4}\mathbf{a}_{CM4} = \mathbf{0}$.

A força peso dos componentes rígidos do sistema são representados pelos vetores escritos diretamente na base inercial:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_1g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_2g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_3g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_4g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

sendo g , m_1 , m_2 , m_3 e m_4 a aceleração da gravidade e as massas do auto-tensionador e das polias 2, 3 e 4.

As forças de reação atuantes nos mancais do auto-tensionador e nas demais polias são dadas pelos vetores

$$\mathbf{F}_1 = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}_2 = \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}_3 = \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}_4 = \begin{Bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

onde as componentes de força dos vetores são variáveis a serem determinadas pelo problema.

A rigidez dos tramos é calculada a partir do módulo de rigidez axial da correia (EA) e do comprimento, que neste caso, é dependente da posição do auto-tensionador de forma não-linear:

$$\begin{aligned} k_5 &= EA/L_5 \\ k_6 &= EA/L_6 \\ k_7 &= EA/L_7 \end{aligned} \quad (4.72)$$

em que k_5 , k_6 e k_7 são os coeficientes de rigidez dos tramos 1, 2 e 3 da correia.

A partir dos coeficientes de rigidez dos tramos, as forças elásticas da correia podem ser determinadas como

$$\begin{aligned} T_{e5} &= k_5 (R_3\theta_3 - R_4\theta_4) \\ T_{e6} &= k_6 (L_6^d - L_6 + R_4\theta_4 + R_2\theta_2) \\ T_{e7} &= -k_7 (L_7^d - L_7 + R_2\theta_2 + R_3\theta_3) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Os coeficientes de amortecimento viscoso da correia são definidos por

$$\begin{aligned} c_5 &= CA/L_5 \\ c_6 &= CA/L_6 \\ c_7 &= CA/L_7 \end{aligned} \quad (4.74)$$

em que CA indica o parâmetro de amortecimento da correia.

As forças de amortecimento nos tramos são escritas como

$$\begin{aligned} T_{a5} &= k_5 (R_3\dot{\theta}_3 - R_4\dot{\theta}_4) \\ T_{a6} &= k_6 (\dot{L}_6^d + R_4\dot{\theta}_4 + R_2\dot{\theta}_2) \\ T_{a7} &= -k_7 (\dot{L}_7^d + R_2\dot{\theta}_2 + R_3\dot{\theta}_3) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Fazendo uso da força centrífuga definida pela Equação (4.17) e utilizando as Equações (4.73) e (4.75), os vetores de força nos tramos podem ser determinados com o auxílio das bases locais B_5 , B_6 e B_7 como

$${}_{B5}\mathbf{T}_5 = \begin{Bmatrix} T_{e5} + T_{a5} - T_c \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_{B6}\mathbf{T}_6 = \begin{Bmatrix} T_{e6} + T_{a6} - T_c \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_{B7}\mathbf{T}_7 = \begin{Bmatrix} T_{e7} + T_{a7} - T_c \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.76)$$

O momento devido à mola torcional do auto-tensionador é composto por duas componen-

tes: uma está associada à deflexão elástica da mola e a outra relacionada ao torque constante de pré-carga. Desta forma, tem-se:

$$M_e = -k_{t1} (\theta_1 - \theta_0) \quad (4.77)$$

onde k_{t1} é o coeficiente de rigidez torcional e θ_0 corresponde ao ângulo de pré-carga do dispositivo.

O auto-tensionador utilizado neste trabalho foi fisicamente desmontado (procedimento descrito na Seção 6.3), com o objetivo de retirar o componente de atrito seco, por não estar contemplado nos modelos matemáticos aqui propostos. Desta forma, é incluído no modelo apenas uma força de amortecimento viscoso do tipo:

$$M_a = -c_{t1} \dot{\theta}_1 \quad (4.78)$$

sendo c_{t1} a constante de amortecimento torcional.

Utilizando as Equações (4.77) e (4.78), o momento total exercido pelo auto-tensionador é dado por

$${}_{B1}\mathbf{M}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_e + M_a \end{Bmatrix} \quad (4.79)$$

Para simular o efeito de amortecimento presente nos mancais de esferas rolantes lubrificadas, são incorporados momentos de atrito viscoso em cada uma das polias. O momento exercido pelo alternador M_{3z} é assumido ser do tipo harmônico com componente média M_{3m} e alternada M_{3a} , com frequência f_3 , conforme a Equação (4.20). A prescrição do movimento angular da polia 4 de acordo com a Equação (4.62) é feita pelo momento externo M_{4z} , originado no virabrequim. Assim, tem-se

$${}_{B2}\mathbf{M}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{t2} \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad {}_{B3}\mathbf{M}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{3z} - c_{t3} \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \quad {}_{B4}\mathbf{M}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{4z} - c_{t4} \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} \quad (4.80)$$

sendo c_{t1} , c_{t2} e c_{t3} a constante de amortecimento torcional das polias 2, 3 e 4.

Aplicando o Método de Newton-Euler definido pelas Equações (4.21) em cada componente, as equações de movimento do sistema de transmissão com auto-tensionador podem ser sistematicamente determinadas. O último termo destas equações foi omitido pelo fato das origens das bases locais serem coincidentes com o centro de massa dos corpos, anulando vetor posição deste termo. Desta forma, tem-se:

Auto-tensionador:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \mathbf{P}_1 - \mathbf{F}_2 &= m_1 \mathbf{a}_{CM1} \\ {}_{B1}\mathbf{M}_1 + ({}_{B1}\mathbf{r}_{CM1-A} \times {}_{B1}\mathbf{F}_1) + [{}_{B1}\mathbf{r}_{CM1-B} \times -({}_{B1}\mathbf{F}_2)] &= \\ {}_{B1}\mathbf{I}_1 {}_{B1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + {}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}_{B1}\mathbf{I}_1 {}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1) & \end{aligned} \quad (4.81)$$

Polia 2 (polia do auto-tensionador):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{T}_6 - \mathbf{T}_7 &= m_2 \mathbf{a}_{CM2} \\ {}_{B2}\mathbf{M}_2 + ({}_{B2}\mathbf{r}_{BC} \times {}_{B2}\mathbf{T}_6) + [{}_{B2}\mathbf{r}_{BD} \times -({}_{B2}\mathbf{T}_7)] &= \\ {}_{B2}\mathbf{I}_2 {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}_{B2}\mathbf{I}_2 {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_2) & \end{aligned} \quad (4.82)$$

Polia 3 (alternador):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_3 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{T}_5 + \mathbf{T}_7 &= m_3 \mathbf{a}_{CM3} \\ {}_{B3}\mathbf{M}_3 + ({}_{B3}\mathbf{r}_{HI} \times {}_{B3}\mathbf{T}_5) + ({}_{B3}\mathbf{r}_{HE} \times {}_{B3}\mathbf{T}_7) &= \\ {}_{B3}\mathbf{I}_3 {}_{B3}\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 + {}_{B3}\boldsymbol{\omega}_3 \times ({}_{B3}\mathbf{I}_3 {}_{B3}\boldsymbol{\omega}_3) & \end{aligned} \quad (4.83)$$

Polia 4 (virabrequim):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_4 + \mathbf{P}_4 - \mathbf{T}_5 - \mathbf{T}_6 &= m_4 \mathbf{a}_{CM4} \\ {}_{B4}\mathbf{M}_4 + [{}_{B4}\mathbf{r}_{GJ} \times (-{}_{B4}\mathbf{T}_5)] + [{}_{B4}\mathbf{r}_{GF} \times -({}_{B4}\mathbf{T}_6)] &= \\ {}_{B4}\mathbf{I}_4 {}_{B4}\dot{\boldsymbol{\omega}}_4 + {}_{B4}\boldsymbol{\omega}_4 \times ({}_{B4}\mathbf{I}_4 {}_{B4}\boldsymbol{\omega}_4) & \end{aligned} \quad (4.84)$$

As Equações (4.81) a (4.84) formam um sistema de 12 equações não-lineares acopladas para as 12 variáveis do problema: $F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}, F_{3x}, F_{3y}, F_{4x}, F_{4y}, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3$ e M_{4z} . A não-linearidade do modelo surge devido ao deslocamento angular do auto-tensionador, que modifica dinamicamente a configuração do sistema.

A partir dos parâmetros do sistema e das 6 condições iniciais de movimento, as equações diferenciais $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ e $\ddot{\theta}_3$ podem ser numericamente integradas para obter as respostas temporais, e com estas, as reações dinâmicas resultantes.

O modelo apresentado emprega uma formulação mista de dinâmica inversa com direta, decorrente da prescrição de movimento da polia 4 e das equações de movimento obtidas para os demais componentes. O modelo de dinâmica direta pode ser obtido retirando-se o movimento prescrito para polia 4 e substituindo o momento M_{4z} pela correspondente equação diferencial $\ddot{\theta}_4$.

4.2.2 Modelo multicorpos híbrido

O modelo de viga ANCF com efeito centrífugo e giroscópico incorporado apresentado na Seção 3.3 é utilizado conjuntamente com o modelo de corpos rígidos para compor o modelo multicorpos híbridos do sistema de transmissão com auto-tensionador. As hipóteses assumidas para este modelo são:

- a) a correia está sujeita a pequenas deformações longitudinais, decorrente do elevado módulo de rigidez axial (ver Seção 6.1);
- b) o material da correia é elástico, isotrópico e permanece invariante no tempo;
- c) os mancais do sistema, as polias e o auto-tensionador são considerados elementos rígidos;
- d) não há deslizamento na interface de contato polia-correia;
- e) os centros geométricos e de massa das polias coincidem;
- f) apenas pequenos deslocamentos angulares em torno da posição de equilíbrio estacionário ocorrem no auto-tensionador.

Para eliminar o acoplamento dinâmico das matrizes de massa, as origens dos sistemas de coordenadas locais são posicionadas no centro de massa dos componentes rígidos do sistema (Shabana, 2009). Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_1 &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_2 &= \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{M}_3 &= \begin{bmatrix} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_4 &= \begin{bmatrix} m_4 & 0 & 0 \\ 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

em que m_i e J_i são, respectivamente, a massa e o momento de inércia de massa do componente i .

A partir das submatrizes dos componentes rígidos (Equação (4.85)) e flexíveis (Equação (3.9)) do sistema de transmissão, a matriz de massa global do sistema pode ser determinada

como

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{a5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{a6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{a7} \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

onde \mathbf{M}_{a5} , \mathbf{M}_{a6} e \mathbf{M}_{a7} são as matrizes de massa correspondentes aos tramos 1, 2 e 3 da correia.

A matriz giroscópica global do sistema é obtida pelas submatrizes definidas na Equação (3.39)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{G}_{a5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{G}_{a6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{G}_{a7} \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

sendo \mathbf{G}_{a5} e \mathbf{G}_{a6} e \mathbf{G}_{a7} as matrizes giroscópicas dos tramos 1, 2 e 3.

A matriz de rigidez do auto-tensionador é dada por

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{t1} \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

O torque de pré-carga do auto-tensionador é representado sob a forma vetorial, sendo

$$\mathbf{Q}_{m1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{t1}\theta_0 \end{Bmatrix} \quad (4.89)$$

Utilizando as submatrizes de rigidez de cada componente, incluindo os rígidos (Equa-

ção (4.88)) e flexíveis (Equação (3.28)), a matriz de rigidez global é dada por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{a5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{a6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{a7} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

sendo \mathbf{K}_{a5} , \mathbf{K}_{a6} e \mathbf{K}_{a7} as matrizes de rigidez dos tramos 1, 2 e 3 da correia.

Os vetores de força peso do auto-tensionador e das polias são dados por

$$\mathbf{Q}_{p1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_1g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{p2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_2g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{p3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_3g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{p4} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_4g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.91)$$

Os vetores de forças nodais equivalentes correspondente à força peso dos tramos 1, 2 e 3 são dados pela Equação (3.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{p5} &= -m_5g \left\{ 0 \frac{1}{2} 0 \frac{L_5}{12} 0 \frac{1}{2} 0 \frac{-L_5}{12} \right\}^T \\ \mathbf{Q}_{p6} &= -m_6g \left\{ 0 \frac{1}{2} 0 \frac{L_6}{12} 0 \frac{1}{2} 0 \frac{-L_6}{12} \right\}^T \\ \mathbf{Q}_{p7} &= -m_7g \left\{ 0 \frac{1}{2} 0 \frac{L_7}{12} 0 \frac{1}{2} 0 \frac{-L_7}{12} \right\}^T \end{aligned} \quad (4.92)$$

Tanto o comprimento indeformado quanto a orientação inicial dos tramos 1, 2 e 3 são determinados por meio das Equações (4.65) e (4.66), utilizando análise numérica iterativa.

Os momentos externos totais atuantes nas polias são definidos por

$$\mathbf{Q}_{m3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{3z} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{m4} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{4z} \end{Bmatrix} \quad (4.93)$$

Somando as Equações (4.89), (4.91), (4.92) e (4.93), tem-se o vetor resultante de todas as

forças e momentos externos atuantes no sistema

$$\mathbf{Q}_{ext} = \mathbf{Q}_{p1} + \mathbf{Q}_{p2} + \mathbf{Q}_{p3} + \mathbf{Q}_{p4} + \mathbf{Q}_{p5} + \mathbf{Q}_{p6} + \mathbf{Q}_{p7} + \mathbf{Q}_{m1} + \mathbf{Q}_{m3} + \mathbf{Q}_{m4} \quad (4.94)$$

Utilizando as Equações (4.86), (4.90) e (4.94), a equação de movimento global do sistema de transmissão com auto-tensionador contendo todos os graus de liberdade é expressa por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_{ext} \quad (4.95)$$

A Equação (4.95) pode ser reescrita como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} \quad (4.96)$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}_{ext} - \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} \quad (4.97)$$

é o vetor que contém todas as forças/momentos externos, além das forças elásticas, giroscópica e centrífuga do sistema.

O vetor de coordenadas generalizadas do sistema global é dado por

$$\mathbf{q} = \{x_A \ y_A \ \theta_1 \ x_B \ y_B \ \theta_2 \ x_H \ y_H \ \theta_3 \ x_G \ y_G \ \theta_4 \ \mathbf{e}_5^T \ \mathbf{e}_6^T \ \mathbf{e}_7^T\}^T \quad (4.98)$$

onde \mathbf{e}_5 , \mathbf{e}_6 e \mathbf{e}_7 representam os vetores com os graus de liberdade dos tramos flexíveis definidos pela Equação (3.4), cuja ordem depende do número de elementos usados para a discretização da malha.

A Equação (4.96) da forma como está definida, apresenta os graus de liberdade de todos os componentes do sistema desacoplados. A fim de estabelecer os vínculos geométricos do sistema de transmissão responsáveis pelo acoplamento das coordenadas, uma equação vetorial de restrição $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$ é definida. As coordenadas numéricas de posição do centro das polias e do mancal do auto-tensionador são prescritas, resultando em $x_A = X_A$, $y_A = Y_A$, $x_H = X_H$, $y_H = Y_H$, $x_G = X_G$ e $y_G = Y_G$.

Os elementos flexíveis que representam os tramos da correia são submetidos a condições de contorno de viga bi-articulada no contato correia-polia, conforme verificado experimentalmente por Čepon *et al.* (2009b). Assim, o primeiro nó do tramo 1 é prescrito ao deslocamento ao longo do eixo X_5 em torno do ponto I da quantidade $R_3\theta_3$, enquanto o último nó do tramo 1 está restrito ao deslocamento linear em torno do ponto J da quantidade $R_4\theta_4$. O primeiro nó do tramo 2 está sujeito ao deslocamento absoluto do ponto C ao longo do eixo X_6 , que contempla

tanto a rotação da polia 2 ($R_2\theta_2$) quanto a deflexão angular do auto-tensionador, incorporando não-linearidade geométrica ao sistema. O último nó do tramo 2 é restrito ao deslocamento tangente em torno do ponto F , da quantidade $R_4\theta_4$. Da mesma forma, o primeiro nó do tramo 3 apresenta deslocamento linear em torno do ponto E da quantidade $R_3\theta_3$, com o último nó tangenciando o ponto D , incorporando a rotação da polia 2 ($R_2\theta_2$) bem como a deflexão angular do auto-tensionador.

Para auxiliar na construção do vetor $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t)$, os vetores de deslocamentos nodais ${}_{B5}\mathbf{u}_1^{nodal}$, ${}_{B6}\mathbf{u}_2^{nodal}$ e ${}_{B7}\mathbf{u}_3^{nodal}$ dos tramos 1, 2 e 3 são respectivamente definidos utilizando as bases B_5 , B_6 e B_7 . Estes vetores definem os deslocamentos do primeiro e último nó dos tramos nas bases locais. Assim, tem-se:

$${}_{B5}\mathbf{u}_1^{nodal} = \{-R_3\theta_3 \ 0 \ -R_4\theta_4 \ 0\}^T \quad (4.99)$$

$${}_{B6}\mathbf{u}_2^{nodal} = \{-R_2\theta_2 \ 0 \ R_4\theta_4 \ 0\}^T \quad (4.100)$$

$${}_{B7}\mathbf{u}_3^{nodal} = \{R_3\theta_3 \ 0 \ -R_2\theta_2 \ 0\}^T \quad (4.101)$$

As matrizes globais de transformação de coordenadas das bases B_5 , B_6 e B_7 para a inercial são obtidas removendo-se a terceira linha e coluna das matrizes \mathbf{S}_5 , \mathbf{S}_6 e \mathbf{S}_7 (Equação (4.2)), resultando em

$$\mathbf{S}_{t5} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}_5 \end{bmatrix} \mathbf{S}_{t6} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_6 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}_6 \end{bmatrix} \mathbf{S}_{t7} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_7 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}_7 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Desta forma, os deslocamentos nodais absolutos dos tramos 1, 2 e 3 podem ser representados na base inercial com o auxílio das Equações (4.99) a (4.102):

$${}_I\mathbf{u}_1^{nodal} = \mathbf{S}_{t5} \cdot {}_{B5}\mathbf{u}_1^{nodal} \quad (4.103)$$

$${}_I\mathbf{u}_2^{nodal} = \mathbf{S}_{t6} \cdot {}_{B6}\mathbf{u}_2^{nodal} \quad (4.104)$$

$${}_I\mathbf{u}_3^{nodal} = \mathbf{S}_{t7} \cdot {}_{B7}\mathbf{u}_3^{nodal} \quad (4.105)$$

O vetor posição do centro da polia 2 é dado por

$${}_I\mathbf{r}_{OB} = \{r_x^B \ r_y^B \ 0\}^T = {}_I\mathbf{r}_{OA} + \mathbf{S}_{1 \cdot B1} \mathbf{r}_{AB} \quad (4.106)$$

Os vetores que definem os pontos de tangência da correia nas polias são escritos como

$${}^I\mathbf{r}_{OI} = \{r_x^I \ r_y^I \ 0\}^T = {}^I\mathbf{r}_{OH} + \mathbf{S}_{5 \cdot B5}\mathbf{r}_{HI} \quad (4.107)$$

$${}^I\mathbf{r}_{OJ} = \{r_x^J \ r_y^J \ 0\}^T = {}^I\mathbf{r}_{OG} + \mathbf{S}_{5 \cdot B5}\mathbf{r}_{GJ} \quad (4.108)$$

$${}^I\mathbf{r}_{OC} = \{r_x^C \ r_y^C \ 0\}^T = {}^I\mathbf{r}_{OB} + \mathbf{S}_{6 \cdot B6}\mathbf{r}_{BC} \quad (4.109)$$

$${}^I\mathbf{r}_{OF} = \{r_x^F \ r_y^F \ 0\}^T = {}^I\mathbf{r}_{OG} + \mathbf{S}_{6 \cdot B6}\mathbf{r}_{GF} \quad (4.110)$$

$${}^I\mathbf{r}_{OE} = \{r_x^E \ r_y^E \ 0\}^T = {}^I\mathbf{r}_{OH} + \mathbf{S}_{7 \cdot B7}\mathbf{r}_{HE} \quad (4.111)$$

$${}^I\mathbf{r}_{OD} = \{r_x^D \ r_y^D \ 0\}^T = {}^I\mathbf{r}_{OB} + \mathbf{S}_{7 \cdot B7}\mathbf{r}_{BD} \quad (4.112)$$

Utilizando as Equações (4.62) e (4.106) a (4.112), o vetor de restrições geométricas e de acionamento do sistema é definido como:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \left\{ \begin{array}{c} x_A - X_A \\ y_A - Y_A \\ x_B - r_x^B \\ y_B - r_y^B \\ x_H - X_H \\ y_H - Y_H \\ x_G - X_G \\ y_G - Y_G \\ e1 - [r_x^I + {}^I\mathbf{u}_1^{nodal}(1)] \\ e2 - [r_y^I + {}^I\mathbf{u}_1^{nodal}(2)] \\ e5 - [r_x^J + {}^I\mathbf{u}_1^{nodal}(3)] \\ e6 - [r_y^J + {}^I\mathbf{u}_1^{nodal}(4)] \\ e9 - [r_x^C + {}^I\mathbf{u}_2^{nodal}(1)] \\ e10 - [r_y^C + {}^I\mathbf{u}_2^{nodal}(2)] \\ e13 - [r_x^F + {}^I\mathbf{u}_2^{nodal}(3)] \\ e14 - [r_y^F + {}^I\mathbf{u}_2^{nodal}(4)] \\ e17 - [r_x^E + {}^I\mathbf{u}_3^{nodal}(1)] \\ e18 - [r_y^E + {}^I\mathbf{u}_3^{nodal}(2)] \\ e21 - [r_x^D + {}^I\mathbf{u}_3^{nodal}(3)] \\ e22 - [r_y^D + {}^I\mathbf{u}_3^{nodal}(4)] \\ \theta_4(t) - \left[\theta_4(0) + \dot{\theta}_4(0)t + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_4 t^2 + A_4 \sin(2\pi f_4 t) \right] \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (4.113)$$

Na Equação (4.113), o número entre parênteses indica o componente do vetor correspondente. As variáveis e_1 , e_2 , e_5 e e_6 indicam as coordenadas nodais absolutas do tramo 1

(conforme Figura 3.1); e_9, e_{10}, e_{13} e e_{14} as coordenadas nodais absolutas do tramo 2 e e_{17}, e_{18}, e_{21} e e_{22} representam as coordenadas nodais absolutas do tramo 3. A vínculo de acionamento prescrito à polia 4 por meio da equação paramétrica, confere uma abordagem mista de dinâmica direta e inversa ao problema. Caso a restrição seja removida, libera-se o correspondente grau de liberdade rotacional da polia 4, conforme exemplificado na Equação (4.46).

Os graus de liberdade dependentes são removidos das equações de movimento através do particionamento de coordenadas proposto por Shabana (2013). Esta abordagem é conhecida por *embedding technique*, onde apenas as coordenadas independentes estão presentes nas equações diferenciais do sistema. Desta forma, particionando o vetor \mathbf{q} em coordenadas dependentes \mathbf{q}_d e coordenadas independentes \mathbf{q}_i , tem-se:

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_d^T \mathbf{q}_i^T\}^T \quad (4.114)$$

sendo \mathbf{q}_d dado por

$$\mathbf{q}_d = \{x_A \ y_A \ x_B \ y_B \ x_H \ y_H \ x_G \ y_G \ e_1 \ e_2 \ e_5 \ e_6 \ e_9 \ e_{10} \ e_{13} \ e_{14} \ e_{17} \ e_{18} \ e_{21} \ e_{22} \ \theta_4\}^T \quad (4.115)$$

Diferenciando a Equação (4.113) com respeito ao tempo, tem-se

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = \mathbf{C}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_t = \mathbf{0} \quad (4.116)$$

Em nível de aceleração, a Equação (4.116) é dada por (Shabana, 2013)

$$\ddot{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{C}_{\mathbf{q}t} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{tt} = \mathbf{0} \quad (4.117)$$

A Equação (4.117) pode ser reescrita como

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_d \quad (4.118)$$

onde \mathbf{Q}_d é dado por

$$\mathbf{Q}_d = - [(\mathbf{C}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{C}_{\mathbf{q}t} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{tt}] \quad (4.119)$$

De acordo com o particionamento de coordenadas empregado, a Equação (4.118) pode ser escrita como

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}_d} \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}_{\mathbf{q}_i} \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{Q}_d \quad (4.120)$$

Isolando o vetor de coordenadas dependentes, tem-se

$$\ddot{\mathbf{q}}_d = -\mathbf{C}_{\mathbf{q}d}^{-1} (\mathbf{C}_{\mathbf{q}i} \ddot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{Q}_d) = \mathbf{C}_{di} \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_d \quad (4.121)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{di} &= -\mathbf{C}_{\mathbf{q}d}^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{q}i} \\ \mathbf{C}_d &= -\mathbf{C}_{\mathbf{q}d}^{-1} [(\mathbf{C}_{\mathbf{q}i} \dot{\mathbf{q}})_i \dot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{C}_{\mathbf{q}t} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{tt}] \end{aligned} \quad (4.122)$$

Fazendo uso da Equação (4.114), o vetor $\ddot{\mathbf{q}}$ pode ser reescrito como

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_d \\ \ddot{\mathbf{q}}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_{di} \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_d \\ \ddot{\mathbf{q}}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_{di} \\ \mathbf{I} \end{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_i + \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{di} \ddot{\mathbf{q}}_i + \boldsymbol{\gamma}_i \quad (4.123)$$

sendo

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.124)$$

Na Equação (4.123), a ordem da matriz identidade \mathbf{I} é determinada a partir do número total de graus de liberdade do sistema e da ordem do vetor de vínculo.

Reordenando a equação de movimento (Equação (4.96)) de acordo com o particionamento de coordenadas proposto e fazendo uso da Equação (4.123), tem-se

$$\mathbf{M} (\mathbf{B}_{di} \ddot{\mathbf{q}}_i + \boldsymbol{\gamma}_i) = \mathbf{F} \quad (4.125)$$

As equações de movimento podem ser escritas em função das coordenadas independentes fazendo a pré-multiplicando da Equação (4.124) por \mathbf{B}_{di}^T , com o objetivo de eliminar as coordenadas dependentes (e as possíveis forças de vínculo):

$$\mathbf{M}_{ii} \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_{ii} \quad (4.126)$$

sendo

$$\mathbf{M}_{ii} = \mathbf{B}_{di}^T \mathbf{M} \mathbf{B}_{di} \quad (4.127)$$

$$\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{B}_{di}^T \mathbf{F} - \mathbf{B}_{di}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\gamma}_i \quad (4.128)$$

A equação de movimento não-linear do sistema de transmissão com auto-tensionador é dada pela Equação (4.126). As equações diferenciais resultantes podem ser resolvidas no domínio do tempo a partir de integradores numéricos de passo variável, adequadamente escolhi-

dos para equações diferenciais rígidas. A partir das respostas temporais para as coordenadas independentes, as coordenadas dependentes podem ser diretamente obtidas utilizando a Equação (4.120).

Com as forças de inércia eliminadas da Equação (4.126), a configuração de equilíbrio estático pode ser determinada resolvendo o sistema de equações resultante para as coordenadas generalizadas independentes. Em função das não-linearidades geométricas do sistema, é requerido um solver não-linear para encontrar iterativamente a solução numérica.

A análise do sistema no domínio da frequência é viabilizada a partir da linearização das equações de movimento em torno da configuração de equilíbrio estacionário, utilizando a matriz de rigidez tangente (Bonet e Wood, 2008; Maqueda *et al.*, 2008; Zhao *et al.*, 2011). Fazendo uso da Equação (4.128), tem-se:

$$\mathbf{K}_T = -\frac{\partial \mathbf{F}_{ii}}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (4.129)$$

onde \mathbf{K}_T é uma matriz associada às coordenadas independentes e que, juntamente com a matriz de massa reduzida \mathbf{M}_{ii} , pode ser utilizada para a determinação dos parâmetros modais do sistema (Shabana, 2010).

4.3 Resumo do capítulo

Neste capítulo foram apresentados os modelos matemáticos propostos para o sistema de transmissão. Dois modelos para o sistema constituído por duas polias de centro fixos foram propostos, um puramente rotacional, no qual foi negligenciada a influência da vibração transversal dos tramos na resposta das polias, e o outro híbrido não-linear, contemplando o sistema com acoplamento de coordenadas rotacionais, transversais e longitudinais.

Foram apresentados também dois modelos não-lineares do sistema de transmissão com auto-tensionador, um rotacional e outro híbrido, constituído por elementos rígidos e flexíveis. O modelo rotacional incorpora as reações dinâmicas atuantes no auto-tensionador e nas polias, ainda não reportadas na literatura.

Técnicas para linearização do modelo não-linear na configuração estacionária foram apresentadas, bem como uma metodologia para eliminação das coordenadas dependentes das equações de movimento, a fim de obter a representação do modelo exclusivamente em função dos graus de liberdade independentes.

No próximo capítulo, a bancada de ensaios é apresentada e suas características detalhadamente discutidas.

5 Bancada de ensaios

5.1 Projeto e construção

Uma bancada de ensaios foi projetada e construída para verificação experimental e validação dos modelos teóricos propostos, conforme mostrado nas Figuras 5.1 e 5.2.

Nesta bancada, o mancal da polia motora tem centro fixo e o eixo é acionado por um motor elétrico com potência de 2 cv, cuja rotação é controlada por inversor de frequência. O eixo movido foi acoplado a um alternador Mitsubishi[®] de 24 V e 80 A, que está conectado a um banco de resistores (Figura 5.3) com controle eletrônico de potência, viabilizando a aplicação de carga dinâmica rotacional com componentes média e alternada de frequência variável no sistema.

Todo o conjunto movido está montado sobre uma base com ajuste linear milimétrico da posição horizontal, permitindo avaliar diversas configurações de montagem sob diferentes níveis de tensão na correia. Um suporte também milimetricamente ajustável está posicionado entre as duas polias, viabilizando a instalação de dispositivo auto-tensionador no sistema. Desta forma, é possível analisar o sistema de transmissão com e sem auto-tensionador. As posições lineares absolutas de cada componente são obtidas a partir de uma escala graduada devidamente fixada na base da bancada, atuando como sistema de referência inercial.

As polias motora e movida, bem como o auto-tensionador e o alternador, são componentes originais do *front-end* de um motor diesel modelo MaxxForce 7.2H[®] de 6 cilindros em linha, com potência de 326 cv e torque máximo de 1300 N.m, destinado a aplicações em ônibus e caminhões médios/pesados. Todos estes componentes foram gentilmente fornecidos pela empresa MWM International[®].

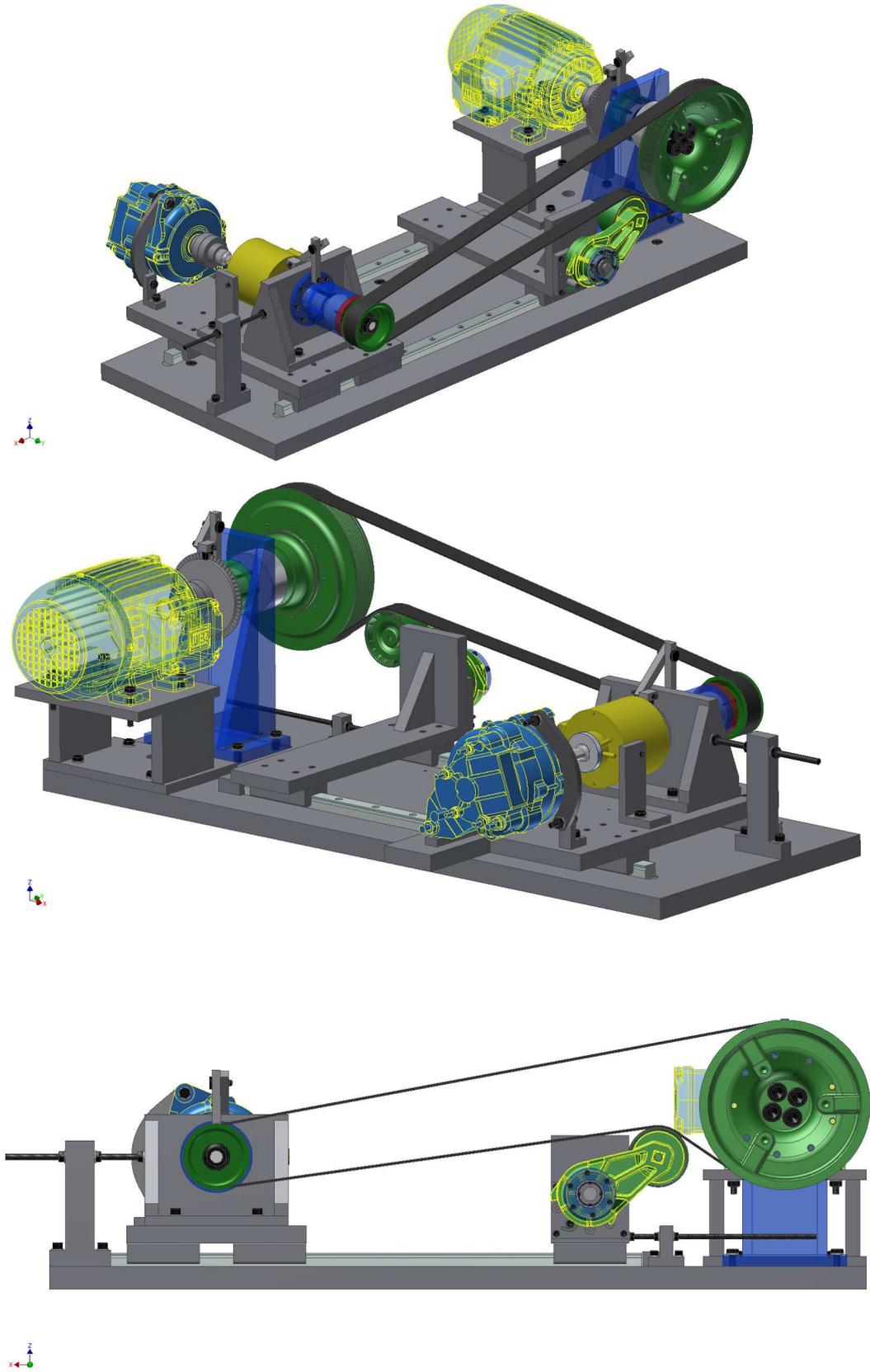
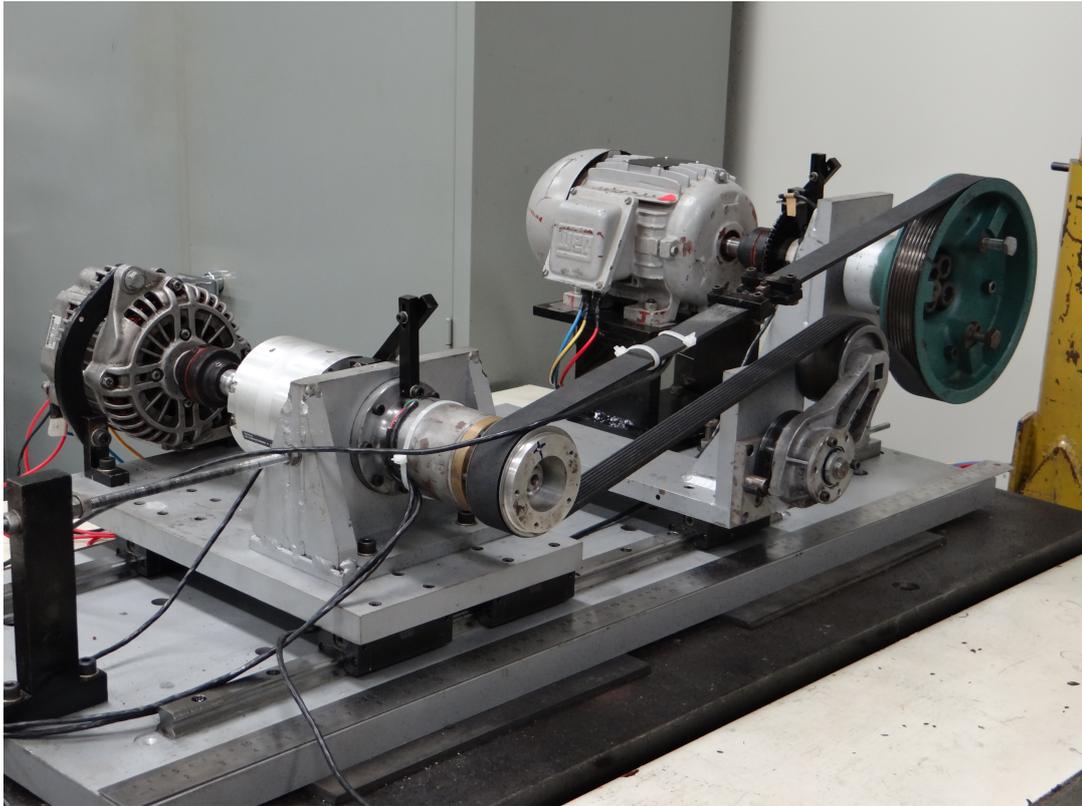
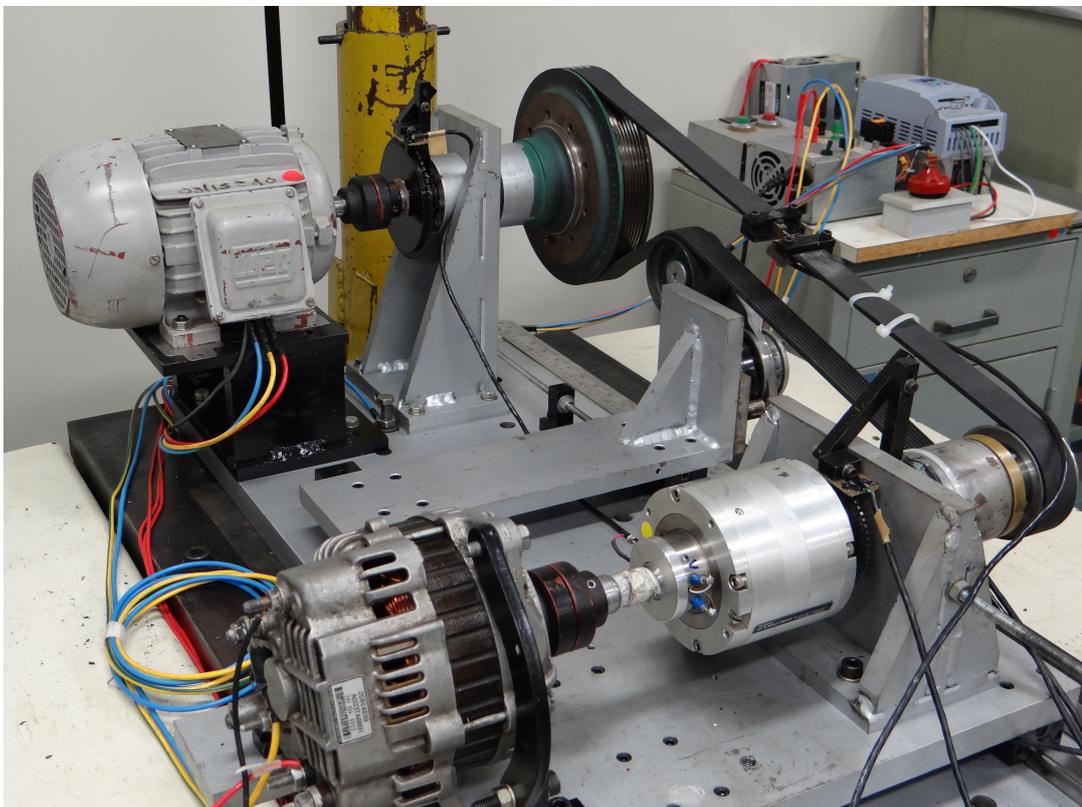


Figura 5.1: Projeto CAD da bancada experimental.

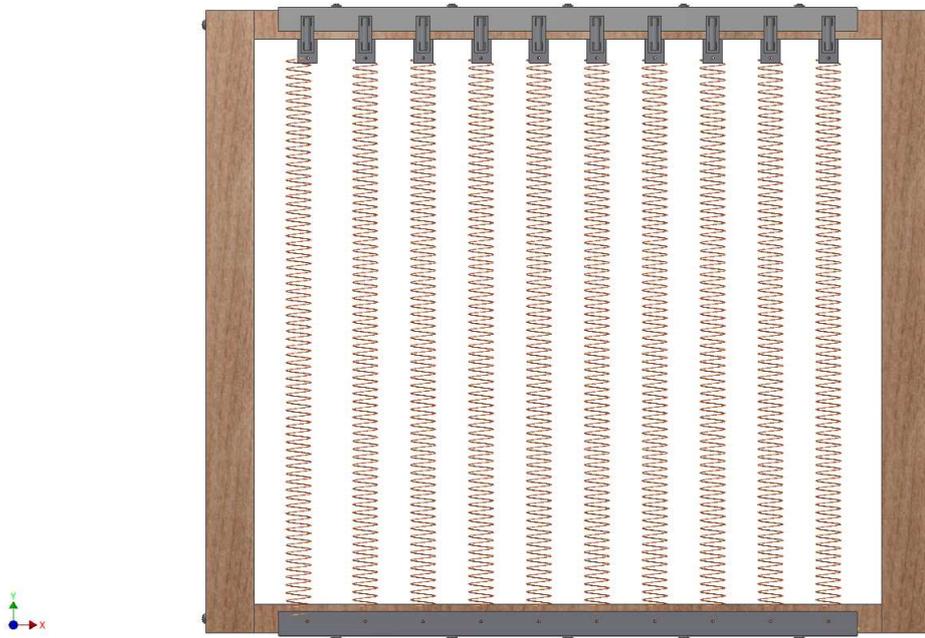


(a) Vista isométrica frontal

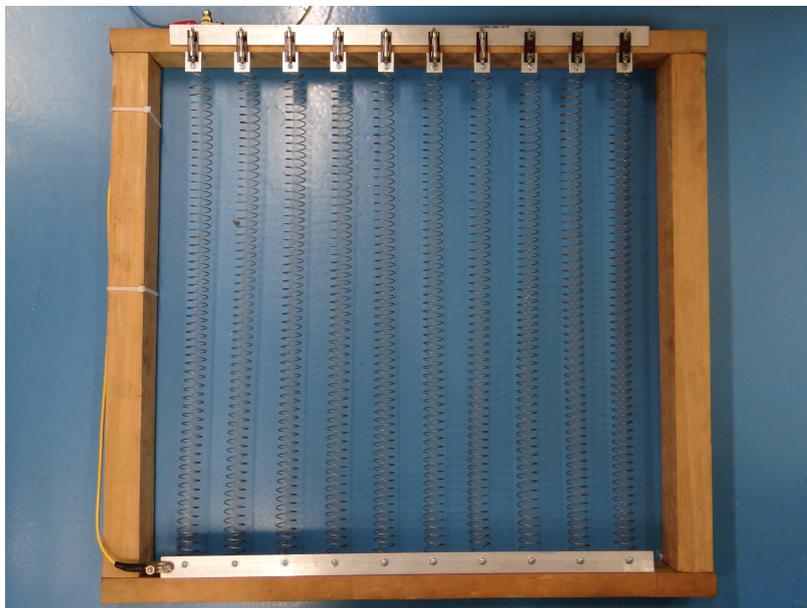


(b) Vista isométrica traseira

Figura 5.2: Bancada experimental do sistema de transmissão por correia.



(a) Projeto CAD do banco de resistores



(b) Banco de resistores construído

Figura 5.3: Banco de resistores elétricos para aplicação de carga rotacional.

5.2 Instrumentação

A bancada está equipada com diversos sensores destinados à mensuração das diferentes quantidades físicas. Nas seções seguintes são detalhados cada um dos sensores, com os seus respectivos objetivos.

5.2.1 Extensômetros do mancal

A caixa do mancal da polia movida foi devidamente projetada para a fixação de extensômetros elétricos, com o objetivo de mensurar as componentes horizontal e vertical das reações dinâmicas. Na região próxima ao suporte de engaste, o diâmetro da caixa foi reduzido de forma a conferir maior deformação do componente, para aumentar a sensibilidade do transdutor mas sem comprometer a função estrutural. O cálculo da deformação foi feito através de análise por elementos finitos (FEA). Na Figura 5.4 é mostrado em detalhe o extensômetro posicionado no rebaixamento da caixa do mancal.

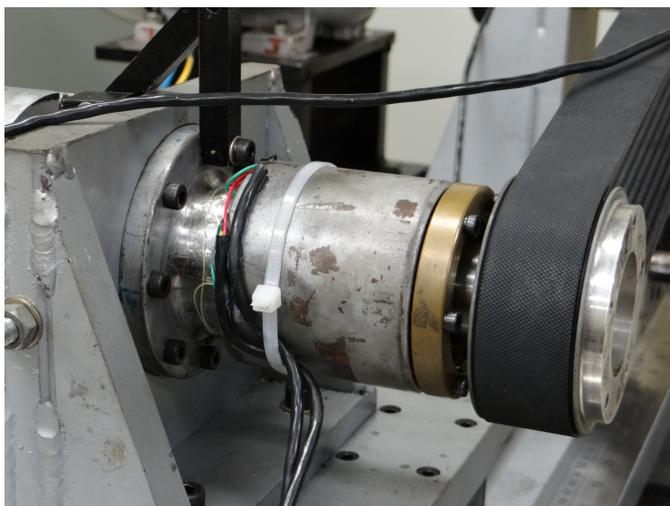


Figura 5.4: Extensômetros instalados no mancal da polia movida.

Os dois extensômetros horizontais, posicionados em lados opostos, estão ligados no esquema de $1/2$ ponte, permitindo a mensuração dos esforços dinâmicos na direção horizontal com compensação dos efeitos de variação de temperatura. A mesma arquitetura de montagem foi utilizada para medir os esforços verticais.

Os extensômetros utilizados são do tipo resistivo uniaxial, da fabricante HBM[®]. A calibração dos sensores foi feita com massas-padrão aplicadas na própria polia movida com o auxílio da correia, de forma a representar a real distribuição de forças. As curvas de calibração de ambos os sensores são apresentadas na Figura 5.5, e foram identificadas por ensaios inde-

pendentes realizados nas direções horizontal e vertical. Durante a calibração vertical, os dados do sensor horizontal foram coletados para verificação de acoplamento cruzado dos sensores, e vice-versa. Os resultados mostraram que ambos os sensores estão desacoplados, ou seja, a aplicação de força vertical não é sentida pelo sensor horizontal e vice-versa.

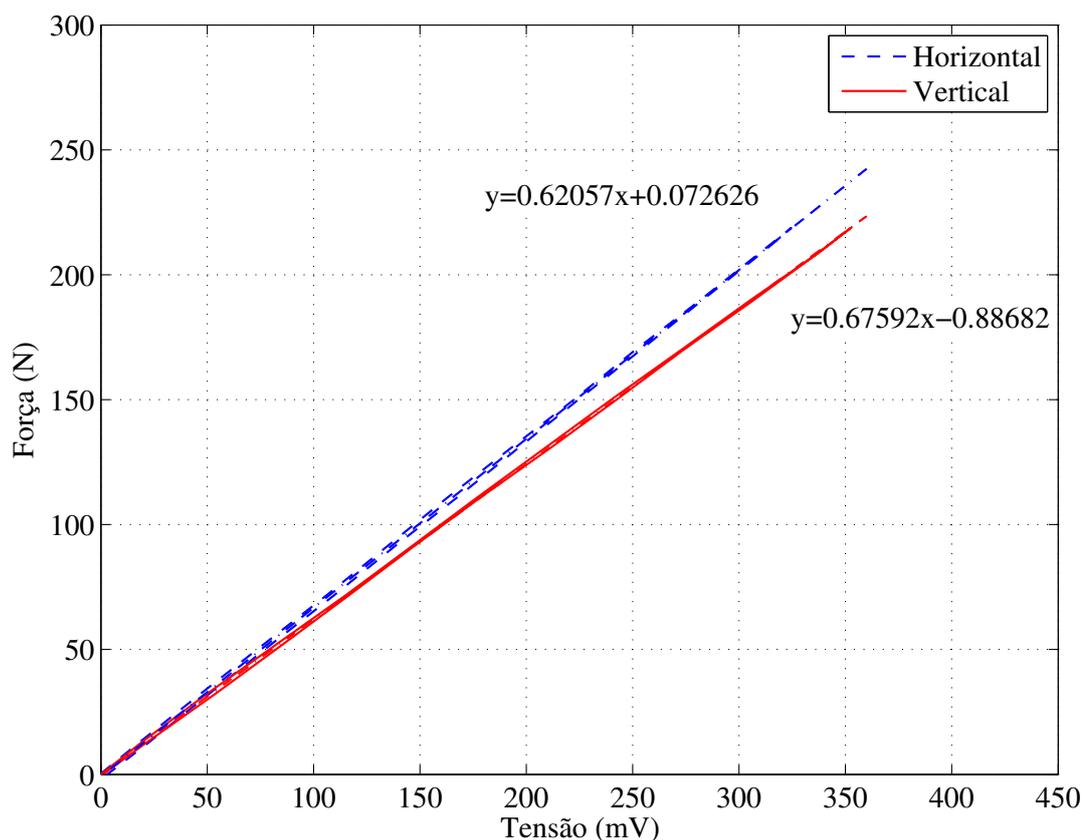


Figura 5.5: Curva de calibração dos sensores do mancal da polia movida.

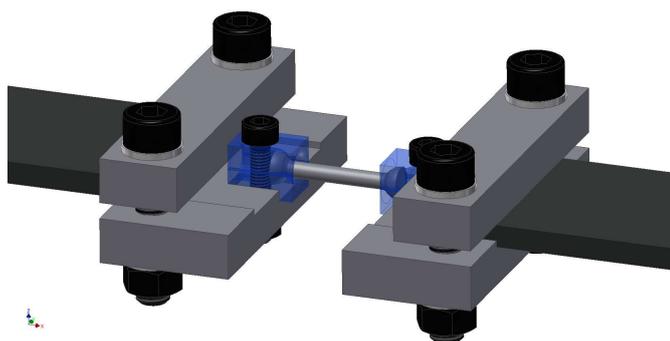
5.2.2 Extensômetros da correia

A força axial desenvolvida na correia está fortemente associada tanto à configuração do sistema de transmissão quanto às características do auto-tensionador e da correia. Desta forma, torna-se importante avaliá-la experimentalmente, ainda que de forma estática, para a validação dos modelos matemáticos em função dos parâmetros do sistema.

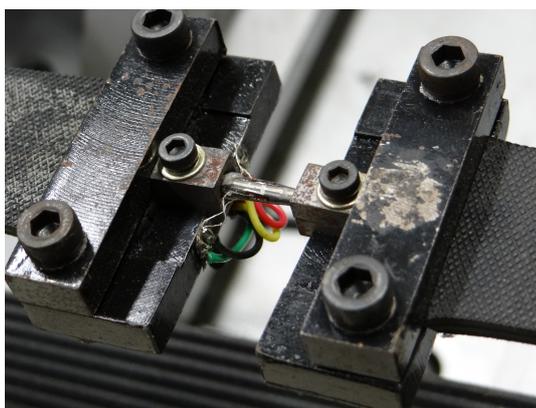
Um transdutor foi especialmente projetado e construído para avaliar a força estática na correia. O dispositivo é constituído por uma pequena barra cilíndrica de aço, na qual foram fixados dois extensômetros elétricos uniaxiais ligados em esquema de ramos opostos, que permitem a compensação dos esforços de flexão. As extremidades da barra possuem diâmetro levemente maior que o corpo e são inseridas em dois suportes abaulados, de forma a mantê-los sempre

alinhados, sem impor qualquer esforço de flexão. Os suportes são então utilizados para unir as duas partes de uma correia poly-V previamente cortada, conforme mostrado na Figura 5.6.

Os extensômetros utilizados são também do tipo resistivo uniaxial, da fabricante HBM[®]. A Figura 5.7 apresenta a curva de calibração do sensor, identificada em ensaio independente através da aplicação de massas-padrão na correia. O procedimento de descarregamento sucessivo das massas foi feito para a verificação de histerese na curva.



(a) Projeto CAD do transdutor de força



(b) Transdutor construído

Figura 5.6: Dispositivo para mensuração estática da força axial na correia.

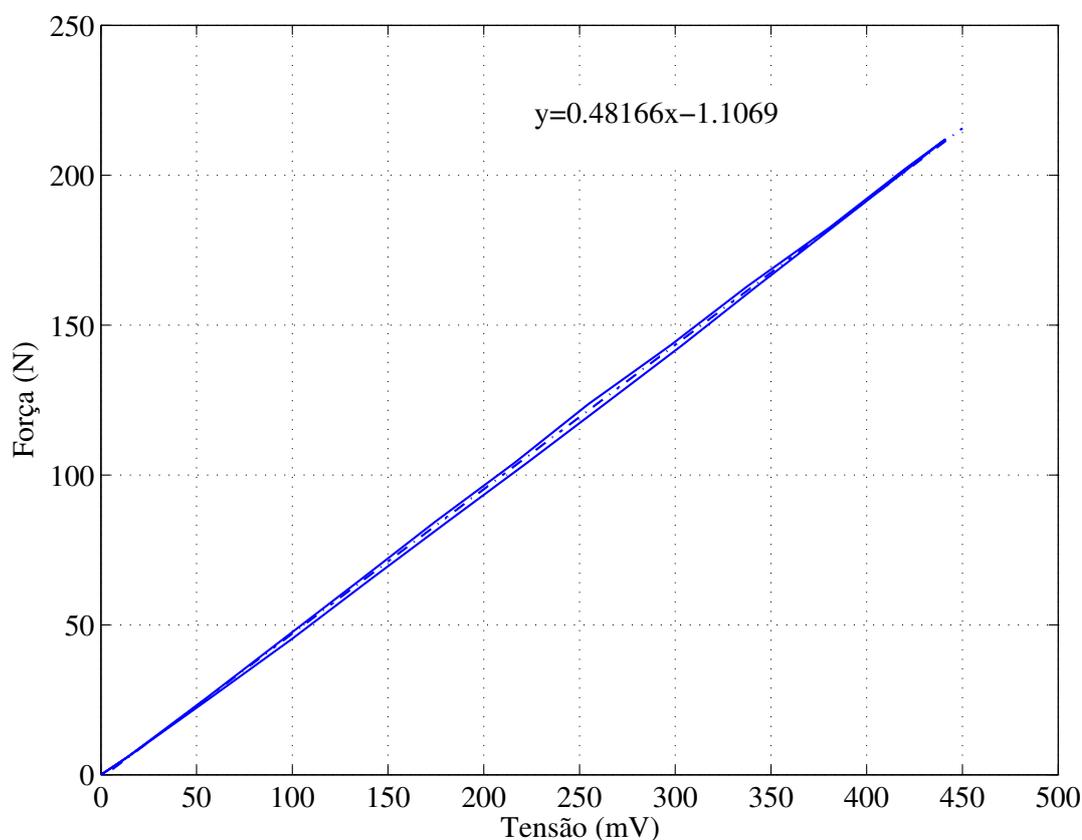


Figura 5.7: Curva de calibração do sensor da correia.

5.2.3 Extensômetros do eixo movido

Para a mensuração do torque aplicado na polia movida, dois extensômetros do tipo *espinha de peixe* foram fixados no eixo movido, entre a polia e o alternador, utilizando esquema de ligação em ponte completa. O diâmetro do eixo no local de fixação do extensômetro também foi reduzido, com o objetivo de aumentar a sensibilidade do transdutor. O sinal do extensômetro foi coletado a partir de um transformador indutivo de rotação, instalado no próprio eixo movido (Figura 5.8). Os extensômetros são do tipo resistivo uniaxial a 45°, da fabricante Kyowa®.

A calibração do sensor foi feita aplicando carregamento torcional no eixo com o auxílio de massas-padrão, conforme mostrado na Figura 5.9. O raio efetivo de aplicação de carga foi cuidadosamente medido, para a conversão da força peso em torque. A curva de calibração do sensor é apresentada na Figura 5.10.

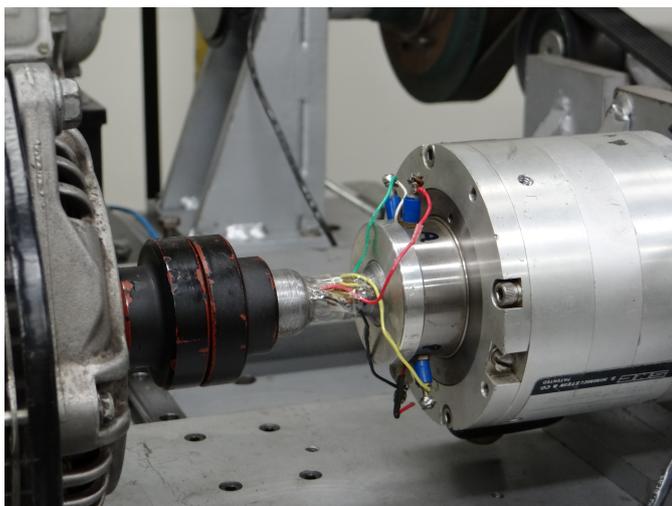


Figura 5.8: Extensômetros fixados no eixo da polia movida.

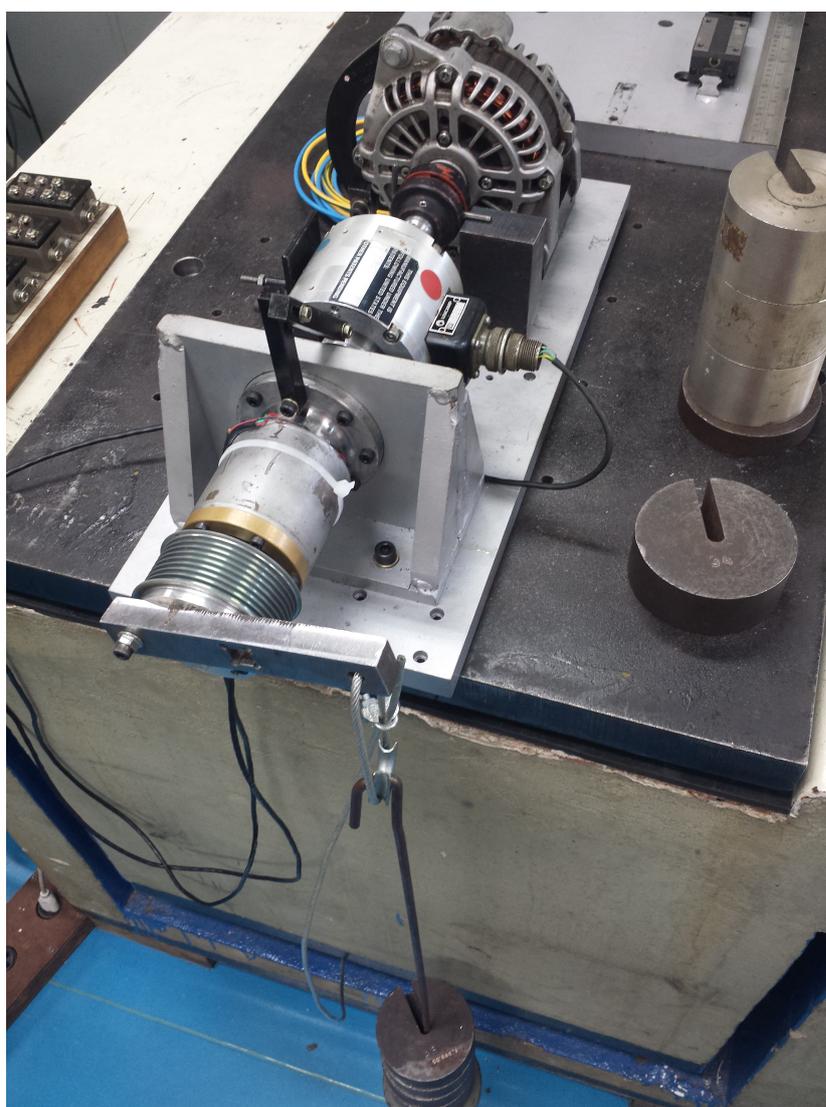


Figura 5.9: Ensaio de calibração do sensor de torque.

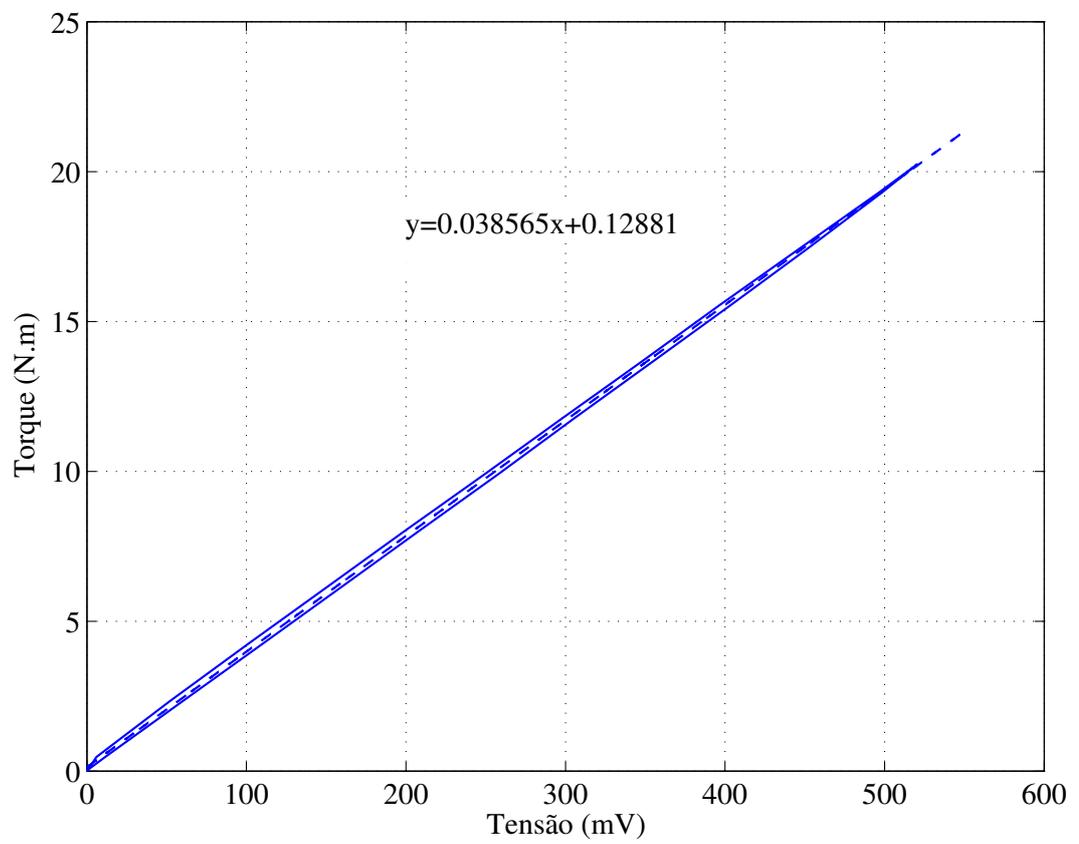


Figura 5.10: Curva de calibração do sensor de torque.

5.2.4 Sensor de rotação

As rotações das polias foram obtidas por meio de rodas dentadas e sensores ópticos, instalados nos eixos motor e movido, conforme ilustrado na Figura 5.11.

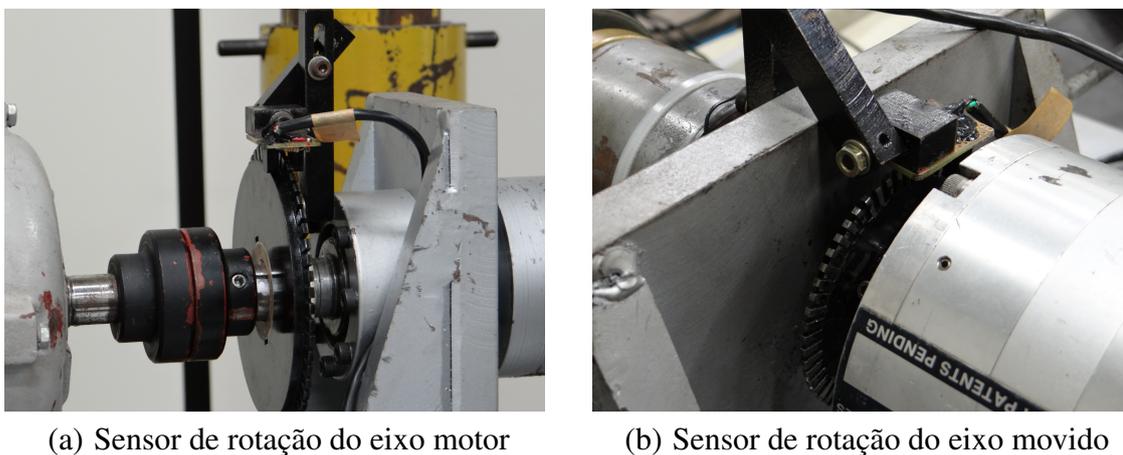


Figura 5.11: Sensor óptico de rotação das polias.

Ambas as rodas dentadas apresentam 60 dentes, resultando em 60 pulsos por rotação.

Este método foi também utilizado por Neudorf (2013) para medir a rotação das polias.

5.3 Equipamentos utilizados

Os equipamentos utilizados na etapa experimental deste trabalho estão listados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Lista de equipamentos

Equipamento	Modelo	Fabricante	Sensibilidade
Gerador de ruído aleatório	Type 1381	General Radio Company [©]	-
Microfone uniaxial	Type 1962-9611	General Radio Company [©]	90.157 Pa/V
Placa de aquisição de dados	NI-USB 6251	National Instruments [©]	-
Transformador rotativo	MCRT 6-02	Himmelstein & Co. [©]	-
Analizador de espectro	SD385 NOMAD	Scientific Atlanta [©]	-
Shaker eletromagnético	Type 4808	Brüel & Kjær [©]	-
Transdutor de força	Type 8200	Brüel & Kjær [©]	3.80 pC/N
Acelerômetro uniaxial	Type 4508	Brüel & Kjær [©]	10.07 mV/m/s ²
Amplificador de potência	Type 2706	Brüel & Kjær [©]	-
Condicionador de sinal	Nexus	Brüel & Kjær [©]	-
Estroboscópio	Type 4911	Brüel & Kjær [©]	-
Sensor laser	YP06MGVL80	Wenglor [©]	1 mm/V
Sensor de proximidade	IWA NT25	Dornier [©]	0.5 mm/V
Amplificador de deformação	PR 9330	Phillips [©]	-
Amplificador de deformação	DPM-6H	Kyowa [©]	-
Ponte de Wheatstone	DB-120	Kyowa [©]	-
Gerador de função	TR-0458/D	EMG [©]	-
Transdutor de força	661.19	MTS [©]	500 N/V
Atuador hidráulico	252.25 A-01	MTS [©]	-
Martelo de impacto	-	-	-

5.4 Resumo do capítulo

Neste capítulo foi apresentada a bancada de ensaios experimentais e suas características, bem como a instrumentação detalhada e os equipamentos usados. Foi mostrado que o projeto da bancada é bastante versátil, permitindo a análise de diversas configurações do sistema de transmissão. No próximo capítulo serão considerados a caracterização experimental de todos os componentes da bancada.

6 Caracterização experimental dos componentes da bancada

Este capítulo trata especificamente da caracterização experimental dos componentes da bancada. São consideradas as características viscoelásticas da correia, as propriedades geométricas e de inércia e, por fim, a caracterização da mola torcional do auto-tensionador. Os parâmetros aqui identificados serão utilizados na simulação numérica dos modelos propostos.

6.1 Características viscoelásticas da correia

A identificação experimental do módulo de rigidez axial da correia foi feita a partir de ensaio de tração uniaxial, utilizando máquina de testes MTS[®]. Um segmento da correia com comprimento L foi fixado pelas extremidades em dois mordentes, conforme mostrado na Figura 6.1. Um dos mordentes (estacionário) está em contato com um transdutor de força, enquanto o outro (móvel) está conectado diretamente no atuador hidráulico, que tem o deslocamento prescrito. A amplitude do deslocamento é obtida por meio de sensor de proximidade indutivo. Desta forma, é possível aplicar combinações de carregamento médio e alternado sob diversas frequências de excitação, simulando as condições operacionais do sistema de transmissão. Três correias de fabricantes diferentes foram utilizadas nos ensaios, aqui denominados Fabricante "A", Fabricante "B" e Fabricante "C". Todas as correias são do tipo poly-V, perfil 8PK.

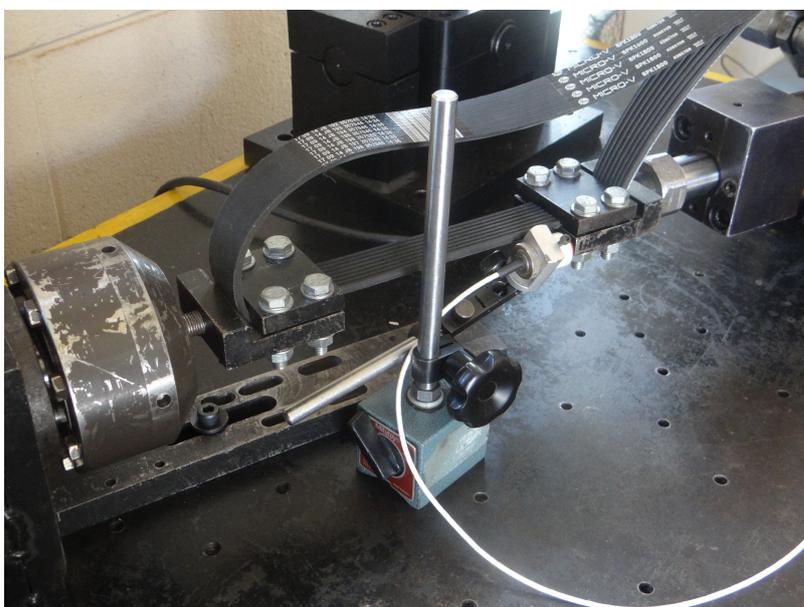


Figura 6.1: Ensaio de tração uniaxial da correia.

Ensaio preliminares foram conduzidos para avaliar o comportamento dinâmico da correia, com o objetivo de auxiliar a definição do modelo teórico mais apropriado. A correia (fabricante "A") foi pré-carregada com uma força média $F_m=400$ N, e submetida a uma força

alternada (senoidal) $F_a=160$ N. Diferentes frequências de excitação foram utilizadas. Posteriormente, as amplitudes de pré-carga e de força alternada foram também modificadas, para verificar a influência destes parâmetros na resposta dinâmica.

A Figura 6.2 apresenta o comportamento dinâmico da correia em função da frequência de excitação (2 Hz a 150 Hz), mantidas as forças de pré-carga e alternada constantes. Neste gráfico, o valor mínimo de força de cada curva foi normalizado em zero, para fins de comparação em termos de amplitude e inclinação.

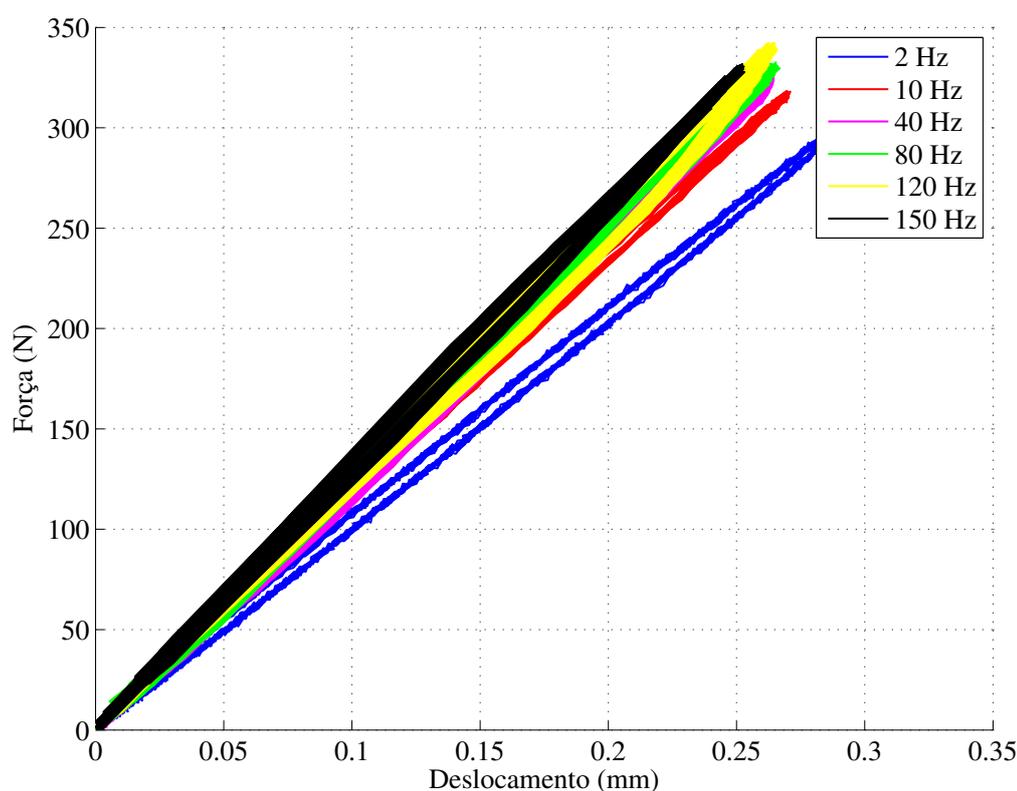


Figura 6.2: Curva força-deslocamento experimental em função da frequência de excitação.

Os resultados indicam uma forte dependência da curva força-deslocamento em função da frequência de excitação, bem como a presença de histerese, sugerindo comportamento viscoelástico do material. Deve ser ressaltado que a temperatura é uma variável importante a ser considerada em tais materiais, a qual foi mantida constante (temperatura ambiente) durante os ensaios.

A influência da amplitude de força é apresentada nas Figuras 6.3 e 6.4. Os resultados mostram que em baixas amplitudes de força, o comportamento do material é linear, enquanto para altas amplitudes, efeitos não-lineares se destacam. Em sistemas de transmissão automotivos típicos, o nível de força média aplicada pelo auto-tensionador na correia situa-se na faixa de 400 N a 500 N, resultando em deformação abaixo de 0.8%. Nestas condições, pode ser adotada

a hipótese de pequenas deformações longitudinais para o modelo teórico.

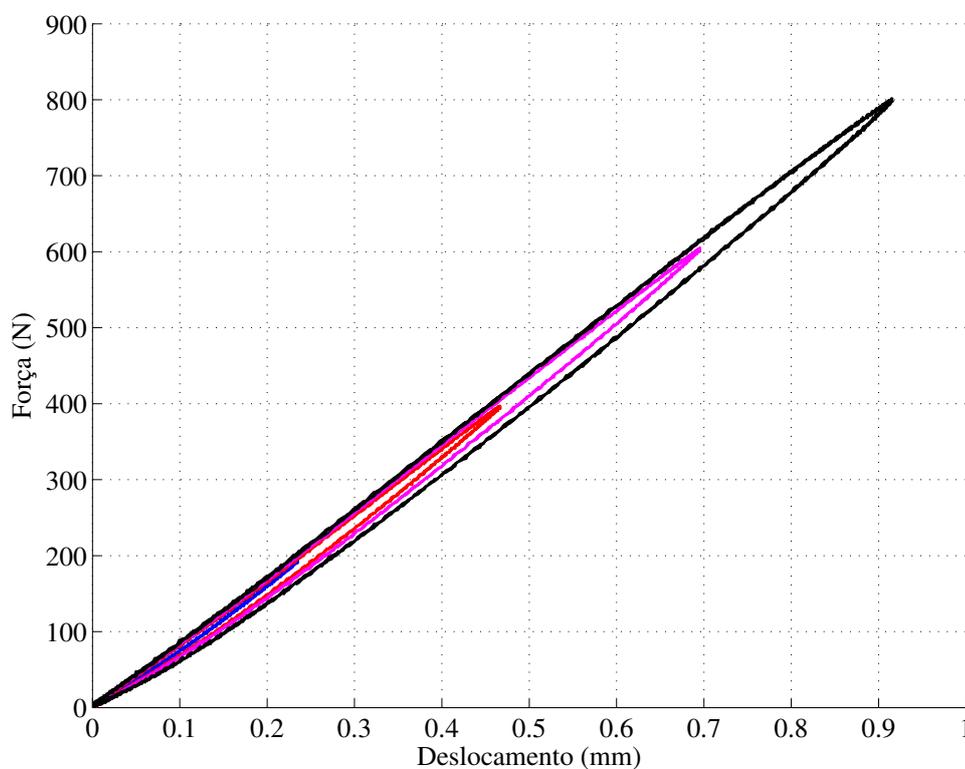


Figura 6.3: Curva força-deslocamento experimental em função da amplitude da força (regime linear).

Para avaliar a presença de relaxação no material, o deslocamento no atuador foi prescrito com onda quadrada de período 110 s, enquanto a força foi continuamente registrada. A Figura 6.5 mostra o resultado do ensaio de relaxação da correia.

Pode ser observado que a força medida apresenta uma redução de 10% (correspondente a $\Delta F=105$ N) do valor inicial, no intervalo $\Delta t=55$ s. A relaxação da correia tem efeitos diretos no longo prazo, e deve ser considerada no projeto para definir a configuração estática de montagem.

O modelo fracional, atualmente empregado para descrever o comportamento viscoelástico no domínio da frequência (Celauro *et al.*, 2012; Fecarotti *et al.*, 2012; Lu, 2006; Paola *et al.*, 2011), foi avaliado neste trabalho. No entanto, os resultados mostraram que apesar do modelo descrever satisfatoriamente a variação da rigidez axial em função da frequência, o amortecimento ficou comprometido, uma vez que o ajuste de curva deste modelo não leva em consideração a parte imaginária do módulo complexo, que é responsável pela histerese e também depende da frequência.

Para representar adequadamente o comportamento dinâmico da correia no domínio da frequência, foi proposto um modelo de soma de potências para o módulo complexo $G(i\omega)$, da

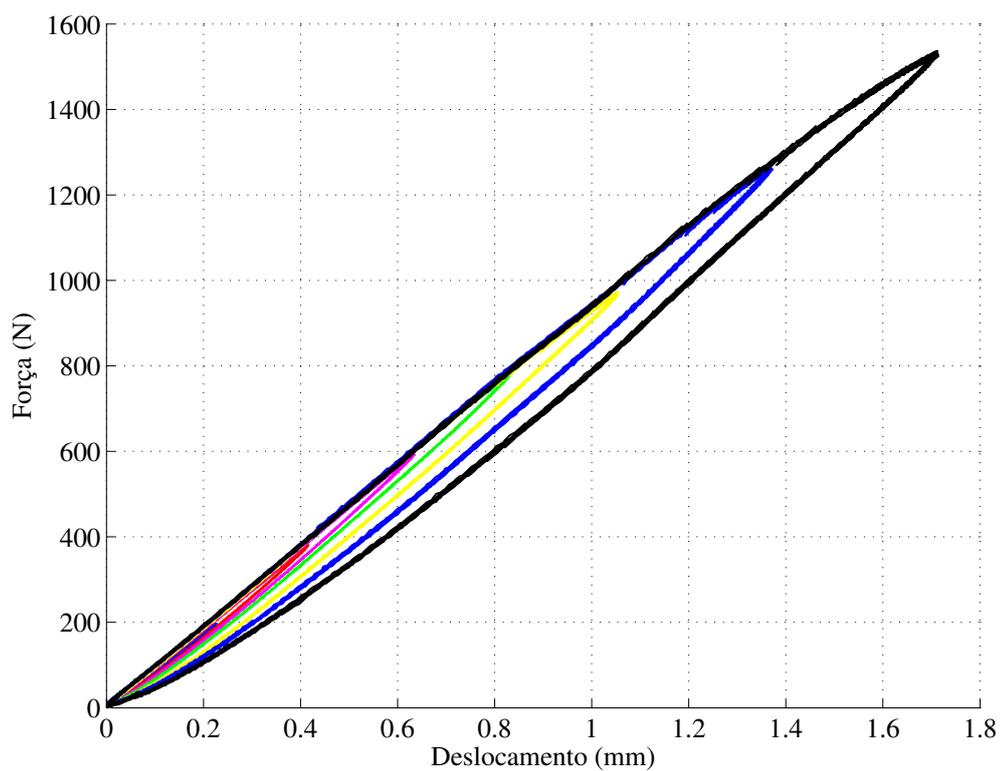


Figura 6.4: Curva força-deslocamento experimental em função da amplitude da força (regime não-linear).

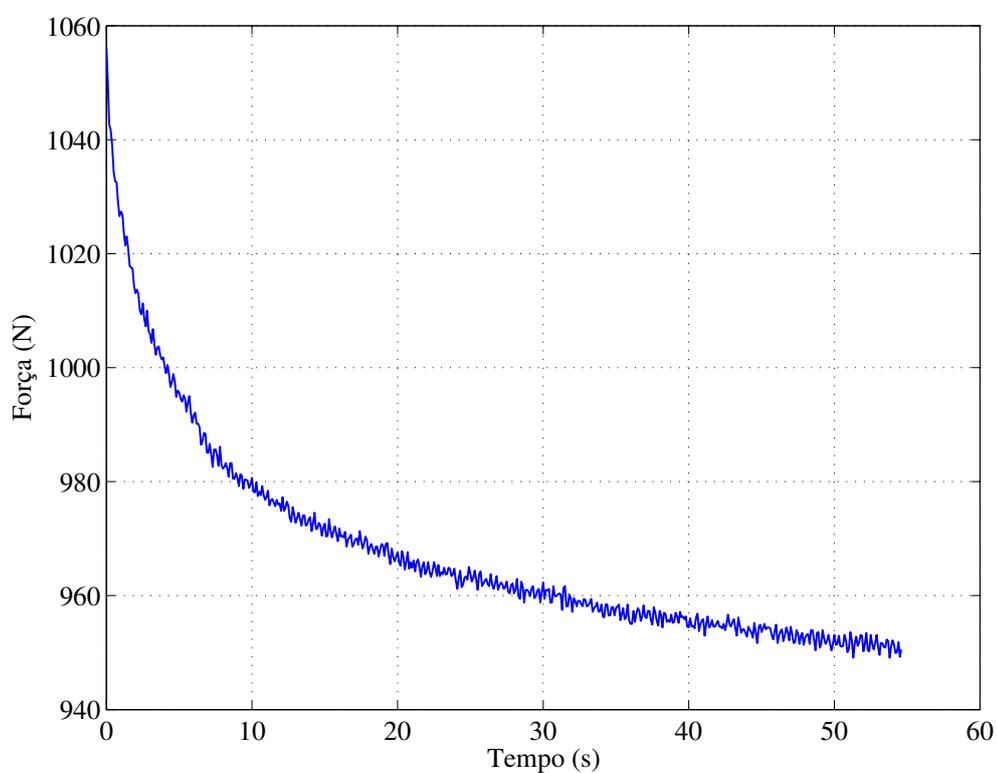


Figura 6.5: Curva de relaxação da correia.

forma

$$G(i\omega) = a_1\omega^{b_1} + a_2\omega^{b_2} \quad (6.1)$$

onde os parâmetros a_1 , a_2 , b_1 e b_2 são obtidos por ajuste de curva experimental.

Simulações numéricas mostraram que este modelo é capaz de descrever corretamente a variação tanto da rigidez axial quanto da histerese em função da frequência de excitação.

Seja $x(t)$ um deslocamento harmônico prescrito a um material viscoelástico expresso como

$$x(t) = X \sin(\omega t + \phi) \implies x^* = X e^{i(\omega t + \phi)} \quad (6.2)$$

A força resultante experimentada por este material é dada por

$$f(t) = F \sin(\omega t + \psi) \implies f^* = F e^{i(\omega t + \psi)} \quad (6.3)$$

O módulo complexo, expresso por $G(i\omega)$, é definido pela relação (Christensen, 1971)

$$G(i\omega) = \frac{f^*}{x^*} = \frac{F e^{i(\omega t + \psi)}}{X e^{i(\omega t + \phi)}} \quad (6.4)$$

Considerando uma frequência específica e simplificando, tem-se

$$G(i\omega) = \frac{F e^{i\psi}}{X e^{i\phi}} = \bar{G} e^{i\theta} = G_1 + iG_2 \quad (6.5)$$

sendo

$$\begin{aligned} \bar{G} &= \frac{F}{X} \\ \theta &= \psi - \phi \end{aligned} \quad (6.6)$$

O módulo de armazenamento (*storage modulus*) e o módulo de perda (*loss modulus*) são representados pelos parâmetros G_1 e G_2 , respectivamente (Mase, 1970).

Os parâmetros da Equação (6.1) estão listados na Tabela 6.1 e podem ser determinados a partir da identificação experimental de F , X , ψ e ϕ para cada frequência de excitação, utilizando o Método de Mínimos Quadrados em cada uma das Equações (6.2) e (6.3). Este procedimento gera as curvas mostradas nas Figuras 6.6 a 6.8, que representam o valor em módulo da Equação (6.5).

O módulo de rigidez axial EA e a propriedade de amortecimento viscoelástico DA (Čepón *et al.*, 2009b; Leamy e Wasfy, 2005) podem ser calculados a partir do comprimento ensai-

Tabela 6.1: Parâmetros experimentais do modelo de soma de potências

Parâmetro	Fabricante "A"	Fabricante "B"	Fabricante "C"
a_1	1023.1- i 27.77	713.8- i 20.44	804.16 - i 17.808
a_2	-0.0066787+ i 1.2314	0.91657 - i 1.0476	0.52831 - i 1.4372
b_1	0.010773+ i 0.0015702	0.014517 + i 0.001465	0.010882 - i 0.0010379
b_2	-0.56854- i 0.38349	0.22412 - i 0.68635	-0.50589 + i 0.087445
L (m)	0.1463	0.1462	0.149

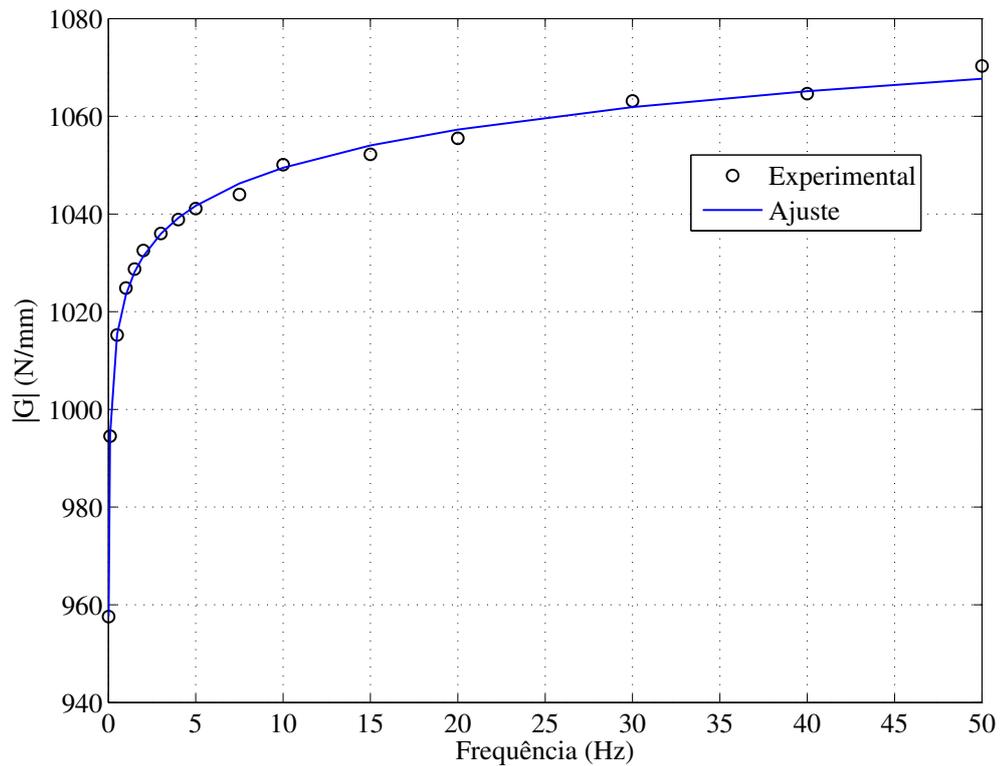


Figura 6.6: Módulo complexo da correia: Fabricante "A".

ado da correia como

$$\begin{aligned}
 k &= \text{real}[G(i\omega)] = EA/L \implies EA = \text{real}[G(i\omega)] L \\
 |\text{imag}[(G(i\omega))]| &= DA/L \implies DA = |\text{imag}[G(i\omega)]| L
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

A Tabela 6.2 apresenta o módulo de rigidez axial da correia para cada fabricante, em função da frequência de excitação.

Nos ensaios experimentais conduzidos na bancada, foi utilizada a correia do Fabricante "B", cujo módulo de rigidez axial situa-se na faixa de 97500 N a 110000 N. É apresentado no Capítulo 7 que a frequência do modo rotacional dos sistemas com e sem auto-tensionador situa-se próximo a 100 Hz, sendo escolhido o valor médio $EA=111190$ N correspondente à 97 Hz. É

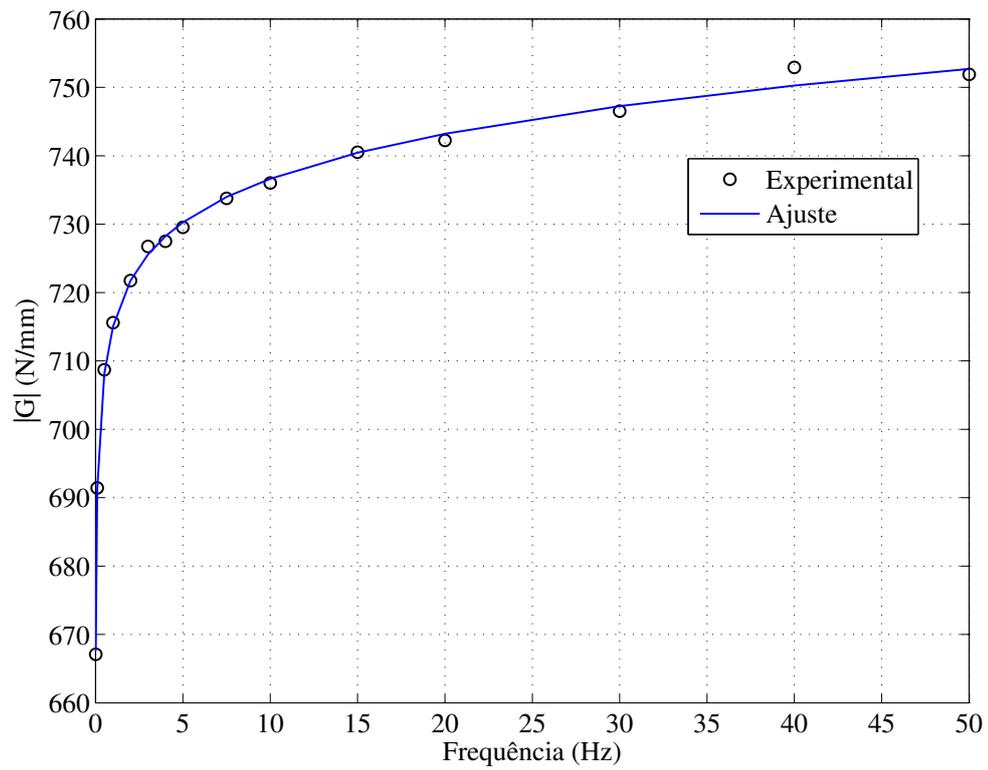


Figura 6.7: Módulo complexo da correia: Fabricante "B".

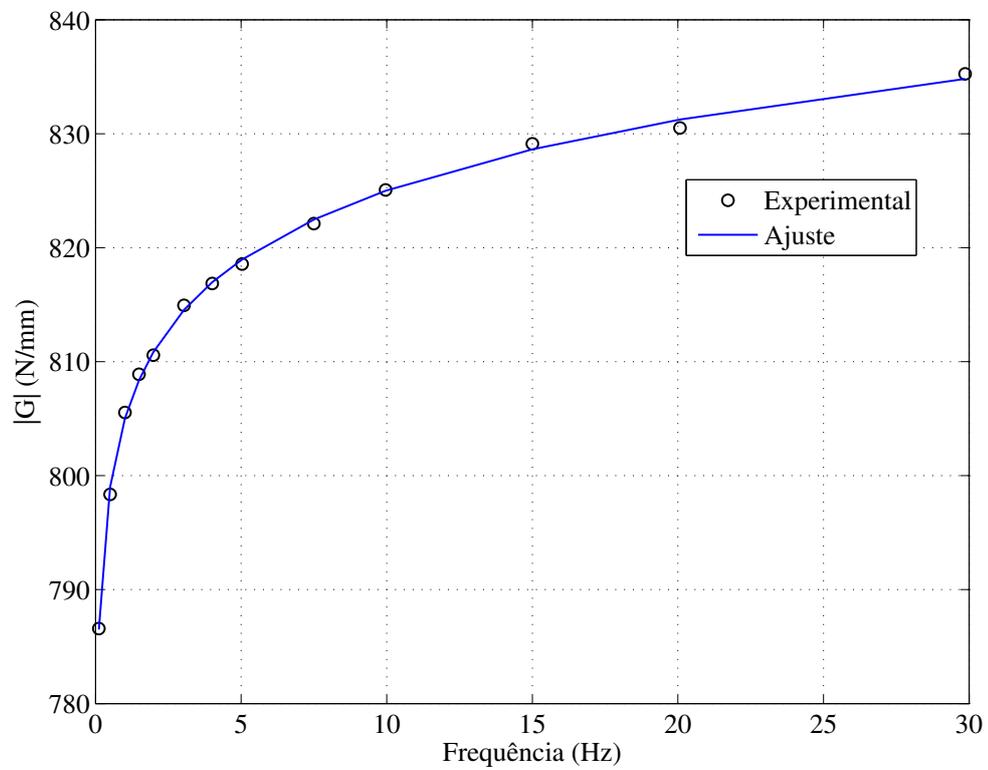


Figura 6.8: Módulo complexo da correia: Fabricante "C".

Tabela 6.2: Módulo de rigidez axial EA (N)

Fabricante	f=0.01 Hz	f=10 Hz	f=60 Hz
"A"	139980	153490	156470
"B"	97539	107660	110320
"C"	113940	122930	125330

mostrado nas Seções 7.1.2.3 e 7.2.2.3 que a resposta dinâmica do sistema é pouco afetada nesta faixa de variação do módulo de rigidez axial, especialmente em baixas frequências.

Na Figura 6.9 é mostrada a verificação teórico-experimental da curva força-deslocamento para duas frequências distintas (0.01 Hz a 20 Hz), no qual a força média é $F_m=400$ N e a força alternada $F_a=200$ N.

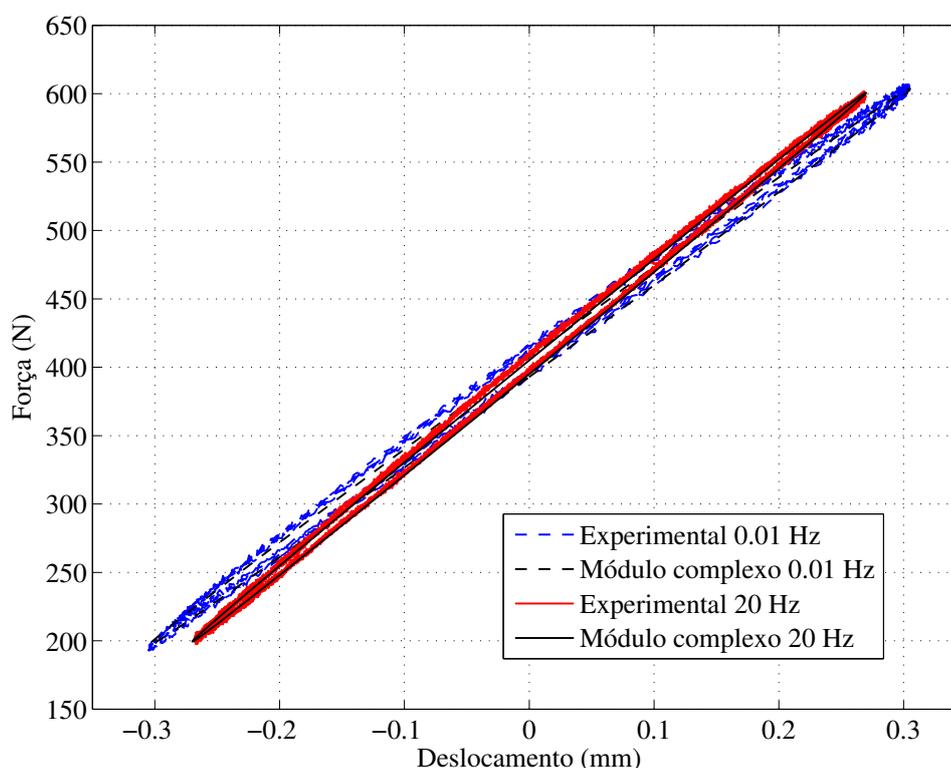


Figura 6.9: Verificação teórico-experimental: Fabricante "B".

Pode ser observado que o modelo foi capaz de descrever com acurácia o comportamento viscoelástico da correia, tanto em função da inclinação da curva quanto em termos de histerese. As demais curvas (Fabricantes "A" e "C"), apesar de não reportadas, apresentaram a mesma qualidade de ajuste.

O módulo de rigidez transversal EI da correia foi inicialmente estimado a partir da expressão teórica fornecida por Kong e Parker (2004), que leva em consideração o perfil e o nú-

mero de sulcos da correia. O valor teórico $EI=0.02 \text{ N.m}^2$ foi então posteriormente refinado para ajuste das frequências naturais do modelo analítico de viga bi-articulada (Blevins, 1979) com os dados experimentais, resultando em $EI=0.034 \text{ N.m}^2$. Um procedimento de ajuste semelhante foi feito por Shangguan e Zeng (2013a).

6.2 Propriedades geométricas e de inércia

A bancada de ensaios foi projetada para trabalhar com correia poly-V perfil 8PK, nos comprimentos que variam de 1230 mm a 1800 mm. As dimensões dos componentes foram determinadas com o auxílio de paquímetro, e as coordenadas destes na bancada a partir de escala graduada fixa e altímetro. Na Tabela 6.3 estão listadas as propriedades geométricas dos componentes.

Tabela 6.3: Parâmetros geométricos da bancada

Descrição	Valor numérico	Unidade
Coordenada X do eixo motor	0.8973	m
Coordenada Y do eixo motor	0.2	m
Coordenada X do eixo movido	ajustável	m
Coordenada Y do eixo movido	0.135	m
Coordenada X do mancal do auto-tensionador	ajustável	m
Coordenada Y do mancal do auto-tensionador	0.0884	m
Raio da polia do eixo motor	0.1015	m
Raio da polia do eixo movido	0.0375	m
Raio da polia do auto-tensionador	0.037	m
Comprimento do auto-tensionador	0.0940	m
Comprimento indeformado da correia (nominal)	1.8	m

A identificação dos momentos de inércia dos conjuntos motor e movido foi feita pelo Método do Pêndulo Trifilar, disponível no Laboratório de Vibrações (Figura 6.10). Este método foi também utilizado por Hawker (1991) para a determinação de propriedades inerciais.

O dispositivo consiste em uma plataforma suspensa por três longos cabos, formando um pêndulo torcional. A partir da mensuração do período natural do conjunto formado pela plataforma e componente, o momento de inércia do corpo pode ser estimado pela equação (du Bois *et al.*, 2009)

$$J_1 = \frac{[(m_0 + m_1) \tau_1^2 - m_0 \tau_0^2] g R^2}{4\pi^2 L} \quad (6.8)$$

cujos parâmetros estão descritos na Tabela 6.4.

A Equação (6.8) é a versão linearizada da equação de movimento não-linear do pêndulo

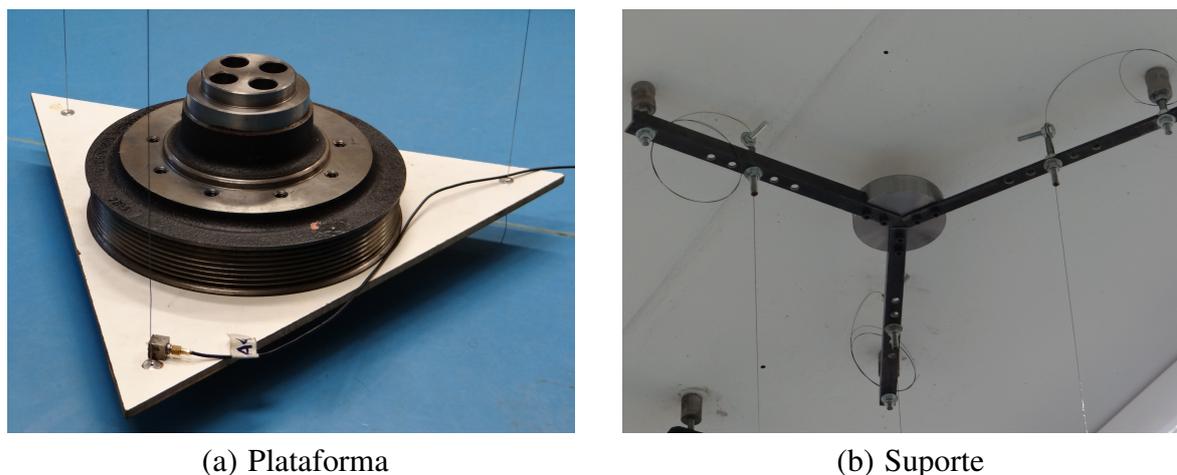


Figura 6.10: Pêndulo trifilar para identificação experimental do momento de inércia.

Tabela 6.4: Parâmetros experimentais do pêndulo trifilar

Descrição	Parâmetro	Valor numérico	Unidade
Massa da plataforma	m_0	0.382	kg
Massa do componente	m_1	variável	kg
Raio efetivo da base	R	0.1865	m
Altura do pêndulo	L	2.885	m
Aceleração da gravidade	g	9.81	$m.s^2$
Período de oscilação da base	τ_0	2.0	s
Período de oscilação do conjunto	τ_1	variável	s

torcional, válida apenas para pequenas amplitudes de vibração em torno da posição de equilíbrio.

As massas da plataforma e da polia foram obtidas com balança de precisão. Os períodos de oscilação foram determinados experimentalmente a partir de acelerômetro fixado na periferia da plataforma, na direção tangencial (Figura 6.10(a)). Ajustes de curva nos sinais de aceleração pelo Método de Mínimos Quadrados forneceram as frequências naturais do sistema, que foram convertidas para os períodos de oscilação (Figura 6.11).

Para avaliar a precisão e confiabilidade do método, o momento de inércia experimental da polia do virabrequim foi confrontado com o respectivo valor obtido por CAD (Autodesk Inventor[®]). A massa da polia e o período de oscilação foram respectivamente $m_1=5.7$ kg e $\tau_1=1.4$ s, resultando em $J_{1(exp)}=0.0306$ $m.s^2$. O valor obtido por CAD foi $J_{1(CAD)}=0,0300$ $m.s^2$, indicando uma diferença de 2% nos resultados.

As propriedades de inércia¹ da correia, do auto-tensionador, bem como dos eixos motor

¹Momentos de inércia expressos em relação ao centro de massa dos corpos.

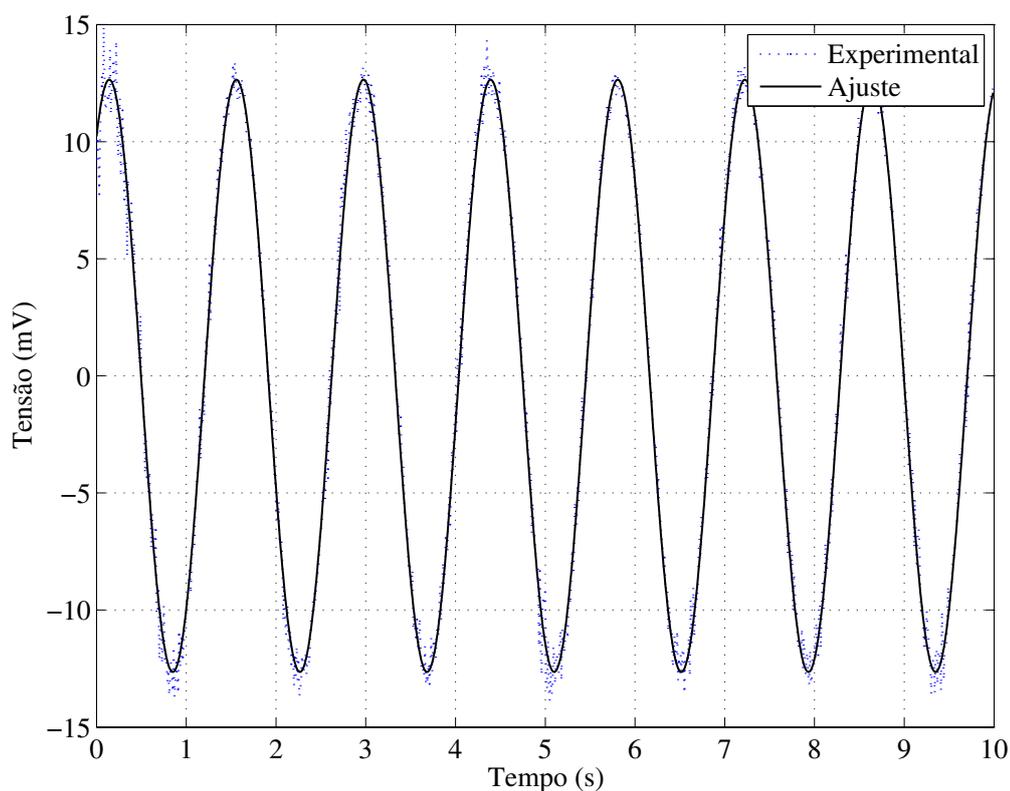


Figura 6.11: Ajuste de curva para a determinação do período natural de oscilação.

e movido, estão listadas na Tabela 6.5. Nos eixos estão incluídos todos os elementos montados nos mesmos, bem como o motor e o alternador².

Tabela 6.5: Propriedades de inércia dos componentes da bancada

Descrição	Valor numérico	Unidade
Massa da correia	0.2178	kg
Massa do eixo motor	7.8269	kg
Massa do eixo movido	2.1543	kg
Massa do auto-tensionador	1.0554	kg
Massa da polia do auto-tensionador	0.2638	kg
Momento de inércia do eixo motor	32.651×10^{-3}	kg.m ²
Momento de inércia do eixo movido	1.7019×10^{-3}	kg.m ²
Momento de inércia do auto-tensionador	0.9969×10^{-3}	kg.m ²
Momento de inércia da polia do auto-tensionador	0.1806×10^{-3}	kg.m ²

²Parâmetros obtidos nos respectivos catálogos dos fabricantes.

6.3 Rigidez da mola torcional do auto-tensionador

O auto-tensionador original do sistema de transmissão é um elemento mecânico de simples construção, mas que apresenta grande complexidade devido ao atrito seco presente nos componentes internos. Grego (2015) desenvolveu recentemente um trabalho teórico com o objetivo de avaliar diversos modelos de atrito interno do auto-tensionador, considerando a influência da força normal variável em função da posição angular.

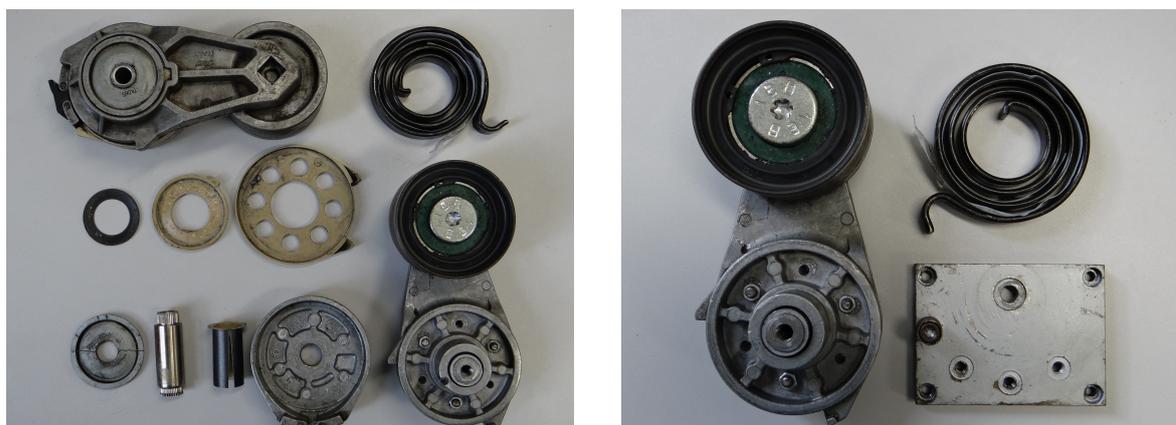
O dispositivo é essencialmente constituído por uma base fixa na qual o corpo do auto-tensionador é articulado. A parte móvel é caracterizada por uma estrutura de alumínio com uma polia montada em mancal de esferas rolantes na extremidade oposta, conforme mostrado na Figura 6.12(a). Esta polia fica constantemente em contato com a correia, mantendo o sistema tensionado de forma passiva. No interior da base fixa estão alojadas uma mola torcional e buchas para dissipação de energia. A mola encontra-se inicialmente deformada, conferindo ao auto-tensionador uma pré-carga torcional de montagem.

Existem dois mecanismos de amortecimento presentes no auto-tensionador: o atrito seco, que ocorre devido às buchas internas de *nylon* presentes no interior do dispositivo, e o atrito viscoso, decorrente de uma fita plástica com lubrificante instalada no interior da mola, destinada a evitar o contato direto entre as espiras e possível travamento.

Em trabalho prévio desenvolvido por um dos integrantes do grupo de pesquisa (Martins, 2013), foi verificado grande dificuldade em excitar o modo predominantemente rotacional do auto-tensionador em virtude do elevado atrito seco presente no dispositivo, prejudicando assim as análises experimentais. Com o objetivo de contornar esta dificuldade experimental e devido ao fato do atrito seco não estar contemplado nos modelos teóricos propostos, o auto-tensionador foi desmontado para a retirada das buchas internas, mantendo-se apenas a fita plástica no interior da mola, para garantir a ausência de contato direto das espiras. Uma nova base de montagem foi construída, considerando duas novas configurações de pré-carga da mola (Figura 6.12(b)). Desta forma, além da configuração de pré-carga original do dispositivo, outras duas foram projetadas (uma maior e outra menor), permitindo avaliar a influência deste parâmetro nas análises.

Uma bancada de ensaios foi construída para a determinação experimental da rigidez torcional da mola do auto-tensionador. A base do dispositivo foi mantida estacionária em uma estrutura de suporte, enquanto a parte móvel foi deslocada em uma ampla faixa angular por meio de cabo de aço conectado a um atuador hidráulico. Um disco foi fixado no corpo do auto-tensionador para viabilizar a aplicação de força tangencial pelo cabo, conforme apresentado na Figura 6.13.

A força aplicada F_{ap} pelo atuador hidráulico foi registrada por meio de transdutor de



(a) Auto-tensionador e seus componentes internos

(b) Auto-tensionador modificado

Figura 6.12: Auto-tensionador do sistema de transmissão por correia.



Figura 6.13: Bancada de ensaios para identificação da rigidez torcional do auto-tensionador.

força. O deslocamento linear do atuador foi obtido por sensor LVDT, presente no interior do equipamento. O torque efetivo T_{ap} atuante no auto-tensionador foi obtido a partir do diâmetro d do disco e da força aplicada (Equação (6.9)), enquanto o deslocamento angular θ foi correlaci-

onado com o deslocamento linear s do atuador (Equação (6.10)).

$$T_{ap} = \frac{F_{ap} \times d}{2} \quad (6.9)$$

$$\theta = \frac{2 \times s}{d} \quad (6.10)$$

Os ensaios foram feitos prescrevendo o deslocamento do atuador com onda senoidal de frequência $f=0.1$ Hz. Esta frequência estabelece condição de ensaio quasi-estático, permitindo desconsiderar os efeitos dinâmicos.

A influência do ângulo de pré-carga torcional do auto-tensionador é mostrada na Figura 6.14, onde a curva 2 corresponde à configuração original do dispositivo. O auto-tensionador foi deslocado em cerca de 80° , conferindo um amplo intervalo de deflexão angular.

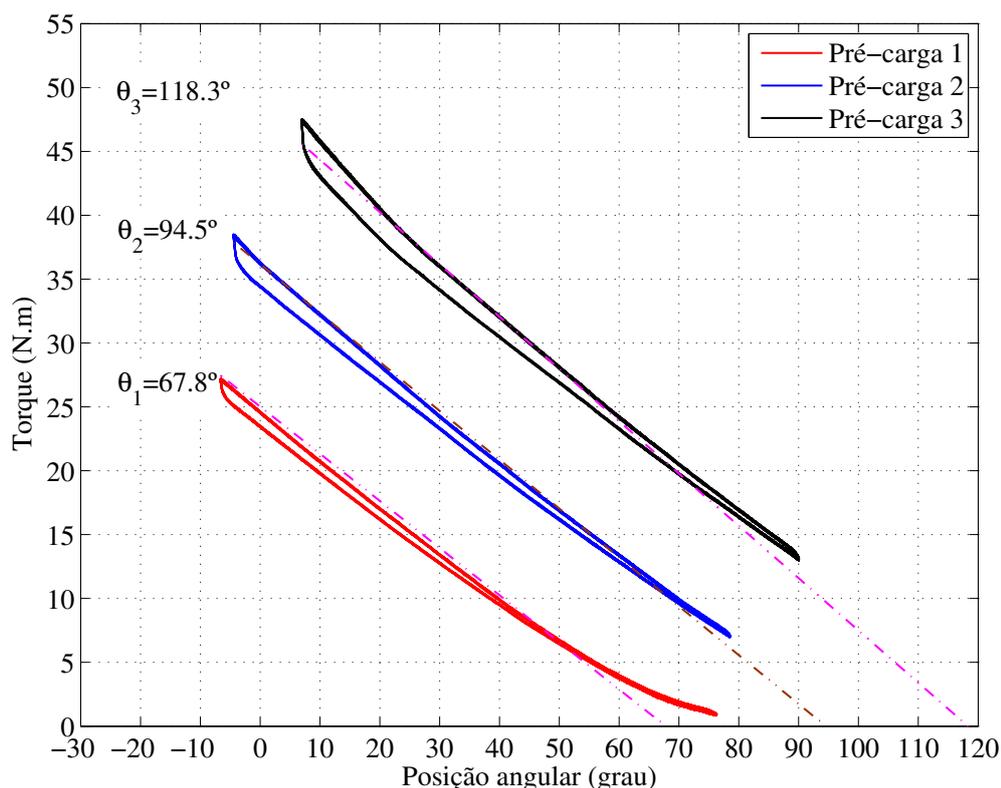


Figura 6.14: Curva torque-deslocamento experimental do auto-tensionador.

Pode ser observado na curva torque-deslocamento a presença de histerese, que aumenta à medida que o ângulo de pré-carga é incrementado. A histerese apresenta comportamento assimétrico, sendo mais expressiva na região de maior torque, possivelmente devido a intensidade do atrito interno. Na terceira curva aparecem efeitos de não-linearidade na curva, sendo atri-

buída ao fechamento das espiras decorrente do torque elevado.

Na Figura 6.15 é apresentada a curva torque-deslocamento na faixa de operação do tensionador. A deflexão angular total do auto-tensionador original é de 57° , e a configuração de operação do dispositivo situa-se na faixa de 30° a 45° . A rigidez torcional experimental é calculada diretamente pela inclinação das curvas torque-deslocamento angular.

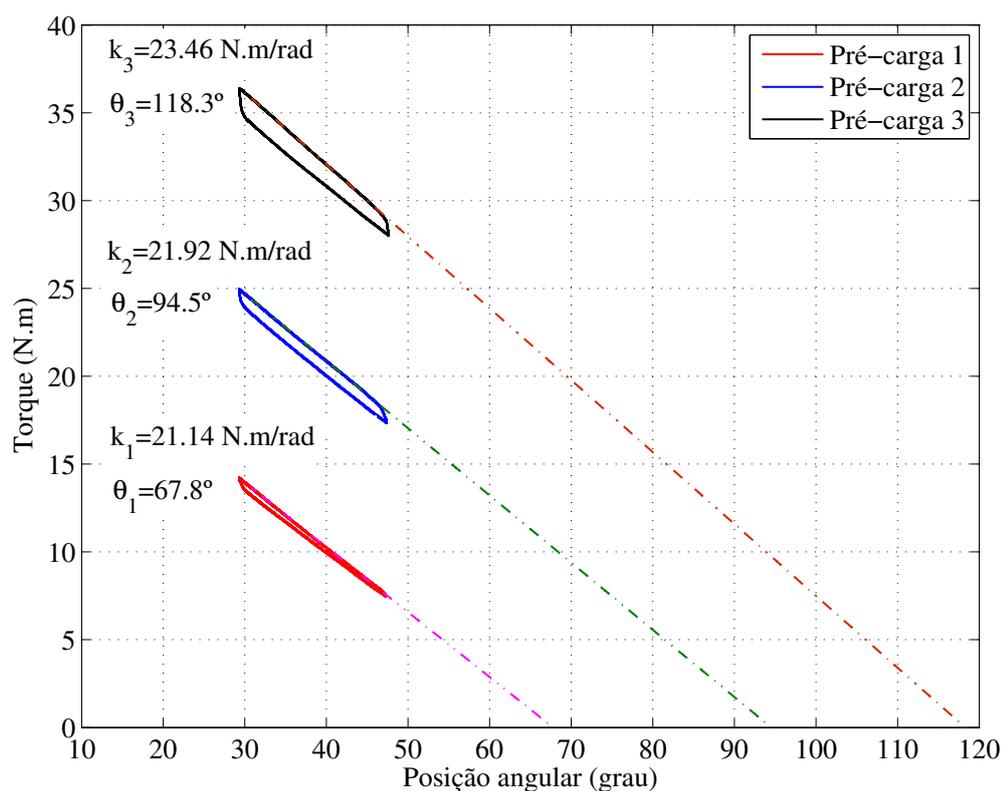


Figura 6.15: Curva torque-deslocamento experimental na faixa de operação.

A rigidez torcional para as três curvas é aproximadamente constante. Nota-se o padrão típico de *stick-slip* no *loop* de histerese. Apesar das buchas terem sido removidas, ainda há a presença de atrito seco no contato das partes móvel e fixa.

Com base nos resultados obtidos, é assumido que a mola torcional do auto-tensionador apresenta comportamento linear, com valor adotado para a rigidez de $k_{t1}=21.14$ N.m/rad. Os ângulos de pré-carga são 67.8° , 94.5° e 118.3° , dependendo do ponto de ancoragem da mola.

6.4 Resumo do capítulo

Neste capítulo foram considerados os ensaios de caracterização experimental dos componentes da bancada. Foi mostrado que a correia apresenta comportamento viscoelástico, cujo

módulo de rigidez axial depende da frequência de excitação. A bancada foi projetada para permitir ensaios com diversos comprimentos de correia, acomodando correias de perfil 8PK com tamanhos que variam de 1230 a 1800 mm. Os momentos de inércia dos elementos rotativos foram identificados pelo Método do Pêndulo Trifilar. O auto-tensionador foi desmontado para a retirada dos elementos de atrito seco, para maior controle experimental e aproximação do modelo teórico proposto. A rigidez torcional da mola do auto-tensionador foi também identificada em função das posições angulares de pré-carga, e apresentou comportamento linear para pequenas deflexões.

Na Tabela 6.6 estão resumidos todos os parâmetros experimentais identificados da bancada, para fins de referência.

Tabela 6.6: Parâmetros experimentais do sistema de transmissão

Descrição	Valor numérico	Unidade
Coordenada X do eixo motor	0.8973	m
Coordenada Y do eixo motor	0.2	m
Coordenada X do eixo movido	ajustável	m
Coordenada Y do eixo movido	0.135	m
Coordenada X do mancal do auto-tensionador	ajustável	m
Coordenada Y do mancal do auto-tensionador	0.0884	m
Raio da polia do eixo motor	0.1015	m
Raio da polia do eixo movido	0.0375	m
Raio da polia do auto-tensionador	0.037	m
Comprimento do auto-tensionador	0.094	m
Comprimento indeformado da correia (nominal)	1.8	m
Massa da correia	0.2178	kg
Massa do eixo motor	7.8269	kg
Massa do eixo movido	2.1543	kg
Massa do auto-tensionador	1.0554	kg
Massa da polia do auto-tensionador	0.2638	kg
Momento de inércia do eixo motor	32.651×10^{-3}	kg.m ²
Momento de inércia do eixo movido	1.7019×10^{-3}	kg.m ²
Momento de inércia do auto-tensionador	0.9969×10^{-3}	kg.m ²
Momento de inércia da polia do auto-tensionador	0.1806×10^{-3}	kg.m ²
Rigidez torcional do auto-tensionador (k_{t1})	21.14	N.m/rad
Módulo de rigidez axial (EA)	111190	N
Módulo de rigidez transversal (EI)	0.034	N.m ²
Densidade linear da correia (ρA)	0.12101	kg/m

7 Simulação numérica e validação experimental

Neste capítulo são apresentados os resultados experimentais e de simulação numérica dos modelos rotacional e híbrido do sistema de transmissão. Na Seção 7.1, são discutidos os resultados para o sistema com 2 polias, enquanto na Seção 7.2 o sistema com auto-tensionador é investigado.

7.1 Sistema de transmissão com 2 polias

A bancada analisada nesta seção é mostrada na Figura 7.1. Nesta configuração, o auto-tensionador não está instalado no sistema, e o tensionamento da correia é feito manualmente através do posicionamento horizontal do conjunto movido, que está montado sobre guias lineares. Diversos equipamentos industriais importantes são acionados por este tipo de transmissão, justificando a aplicação do modelo proposto a tais sistemas. A Seção 7.1.1 apresenta os resultados do modelo puramente rotacional, enquanto a Seção 7.1.2 discute os resultados do modelo híbrido.

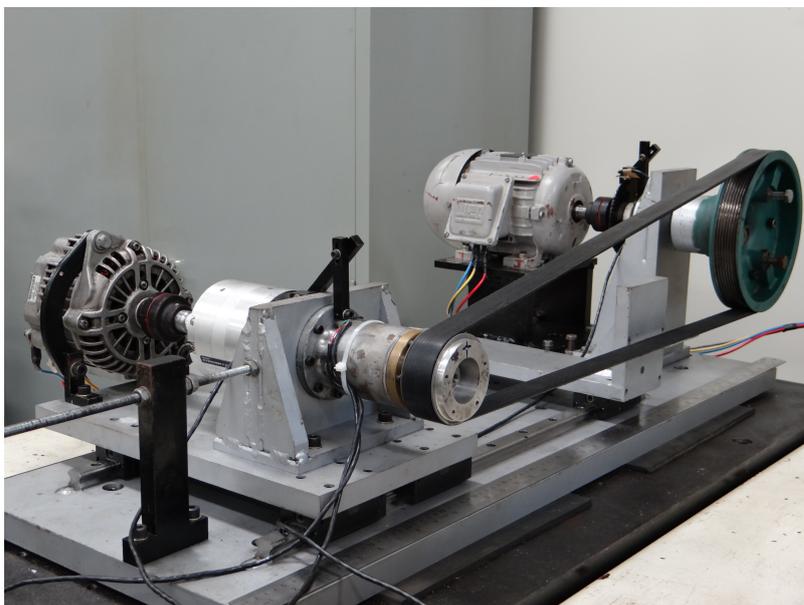


Figura 7.1: Bancada de ensaios com duas polias, sem auto-tensionador.

7.1.1 Modelo puramente rotacional

Nesta seção são considerados os resultados teórico-experimentais das forças de reação no mancal da polia 1, bem como análises numéricas para diversas condições de operação. Para integrar as equações de movimento foi utilizado o integrador numérico ode15s do MATLAB[®],

com $\Delta t=1 \times 10^{-4}$ s, tolerância relativa $e_{rel}=1 \times 10^{-8}$ e tolerância absoluta $e_{abs}=1 \times 10^{-10}$.

7.1.1.1 Validação experimental das reações no mancal

A Tabela 7.1 apresenta os resultados teórico-experimentais das reações F_{1x} e F_{1y} atuantes no mancal da polia 1 em função da tensão na correia T , na configuração estática.

Tabela 7.1: Reações atuantes em função da tensão na correia (N)

Teórico			Experimental		
T	F_{1x}	F_{1y}	T	F_{1x}	F_{1y}
201.6	399.5	38.5	200.4	401.6	30.0
301.9	598.3	57.6	299.7	607.2	51.4
402.1	796.8	76.7	400.1	812.2	73.5
502.9	996.6	95.8	500.5	1025.9	96.1
601	1191	114.4	599.7	1216.8	115.5

Pode ser observado que os resultados preditos pelo modelo de Newton-Euler apresentam boa acurácia em relação aos resultados experimentais, em vários níveis de tensão na correia.

7.1.1.2 Simulação 1

O objetivo desta simulação é analisar numericamente a resposta do sistema amortecido sujeito à condição de deslocamento inicial prescrito à polia 1. O sistema em análise não possui vínculo de acionamento prescrito à polia motora, e portanto, apresenta dois graus de liberdade. Existem duas frequências naturais, uma de corpo rígido e outra de corpo flexível, em oposição de fase.

A polia movida foi posicionada em $X_a=0.2208$ m, que corresponde à tensão $T=600$ N na correia. Um deslocamento de 2° (0.034907 rad) foi prescrito à polia 1, resultando em um diferencial de tensão nos tramos de $T_1=813$ N e $T_2=389$ N, conforme mostrado na Figura 7.2.

A Figura 7.3 apresenta a resposta temporal da velocidade não-amortecida da polia 1 e o espectro do sinal, revelando uma frequência natural de $f_n=96.7$ Hz.

O efeito do amortecimento da correia pode ser analisado na Figura 7.4, e revela ser efetivo na dissipação de energia das polias em um curto espaço de tempo.

Pode ser observado na Figura 7.5 que ambos os tramos retornam à tensão estática original ($T=600$ N), uma vez que não há momentos atuantes nas polias.

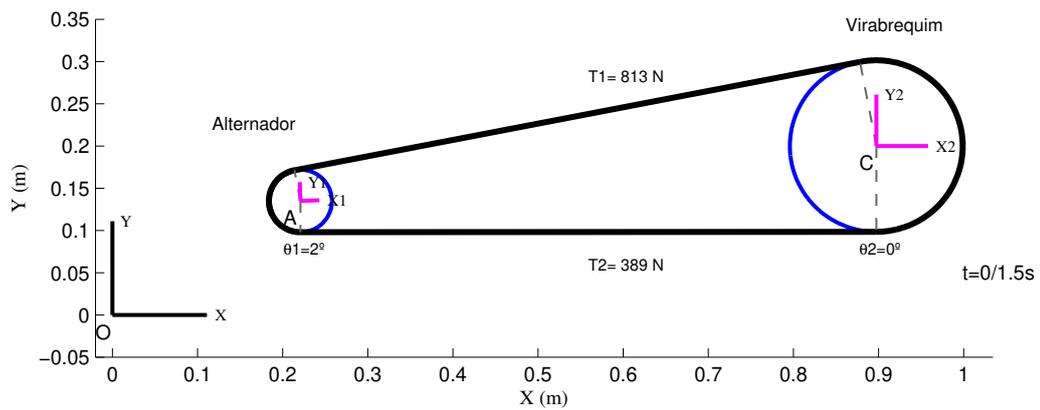


Figura 7.2: Configuração do sistema no instante $t=0$ s.

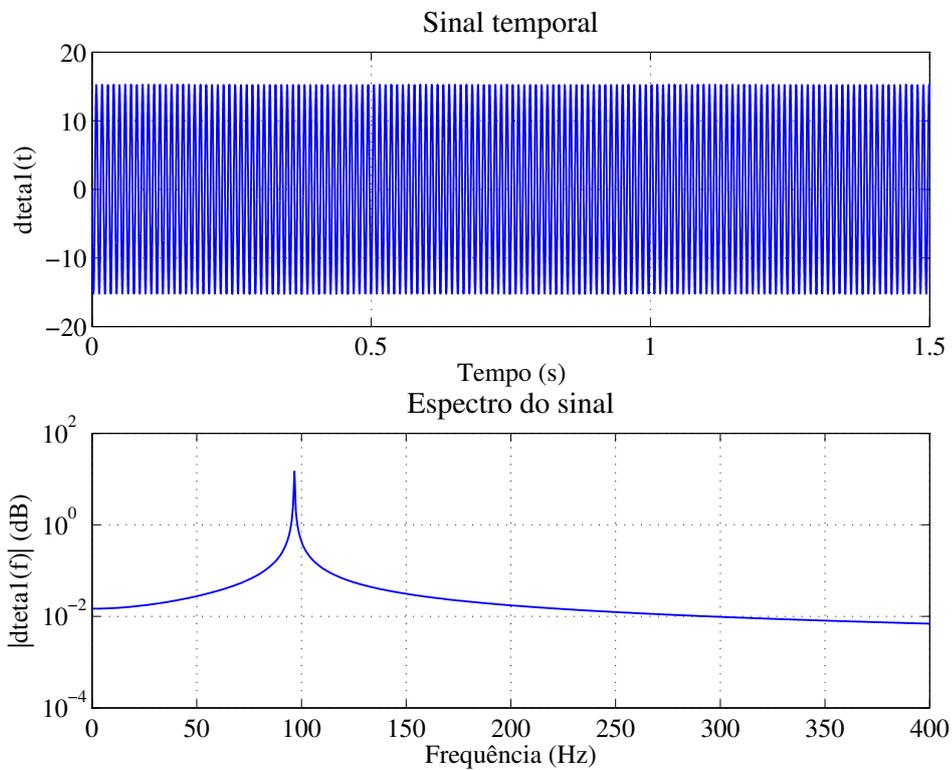


Figura 7.3: Velocidade não-amortecida da polia 1.

As reações dinâmicas em ambos os mancais são apresentados nas Figuras 7.6 e 7.7, e coincidem com o último valor da Tabela 7.1.

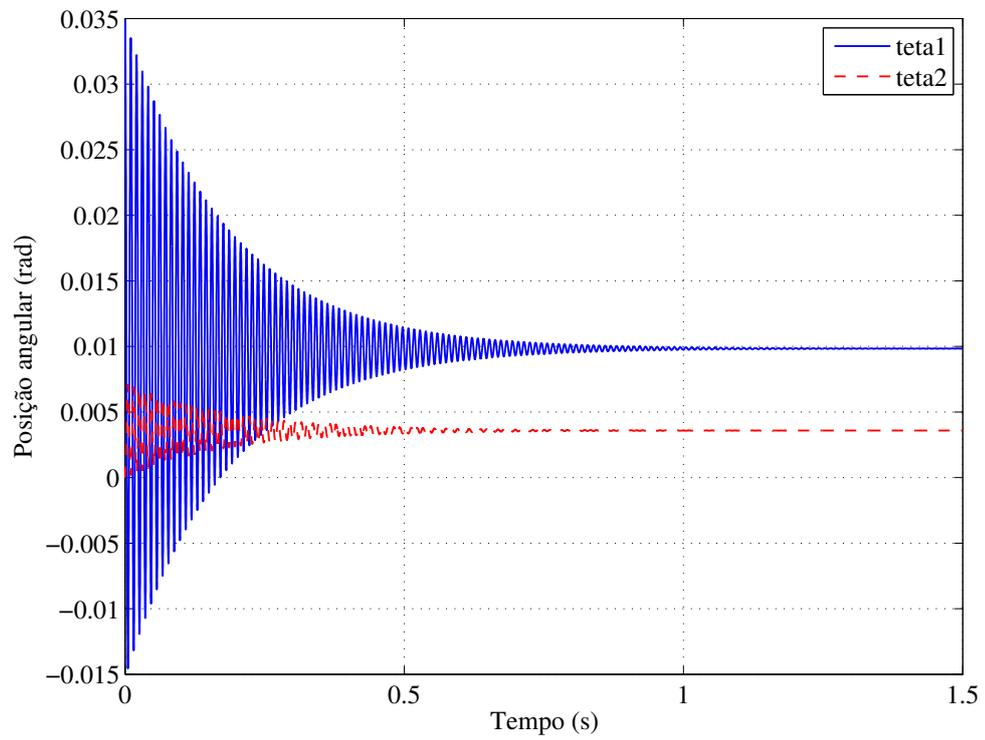


Figura 7.4: Amplitude de deslocamento angular das polias (caso amortecido).

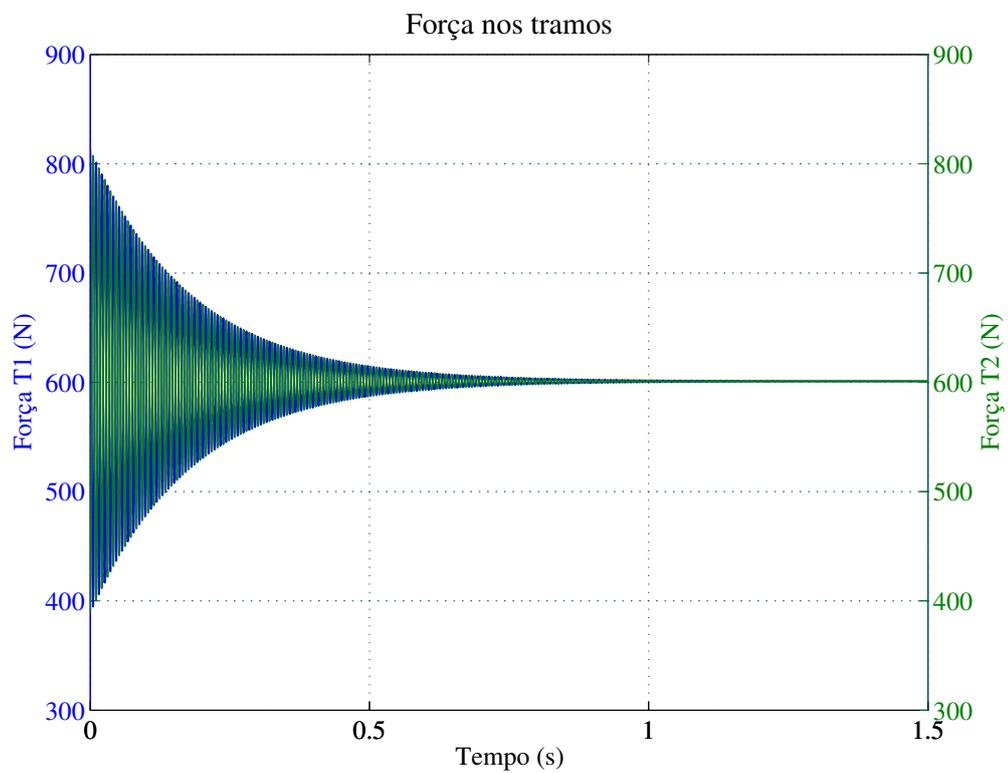


Figura 7.5: Forças atuantes nos tramos.

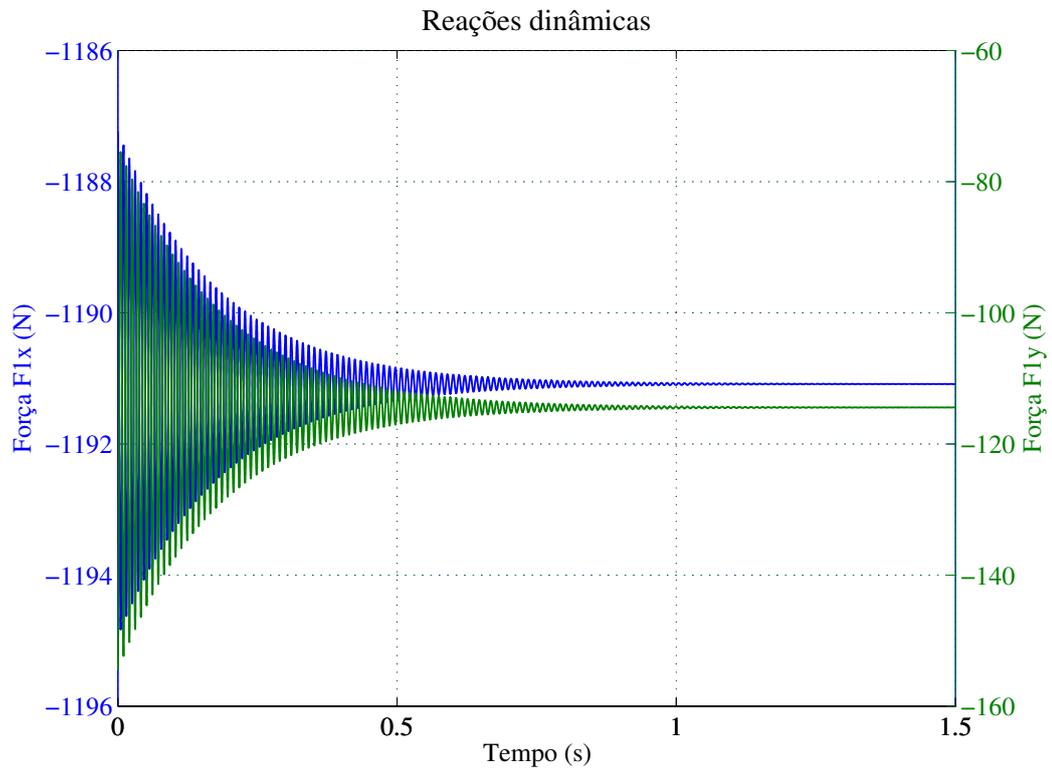


Figura 7.6: Reações dinâmicas atuantes no mancal da polia 1.

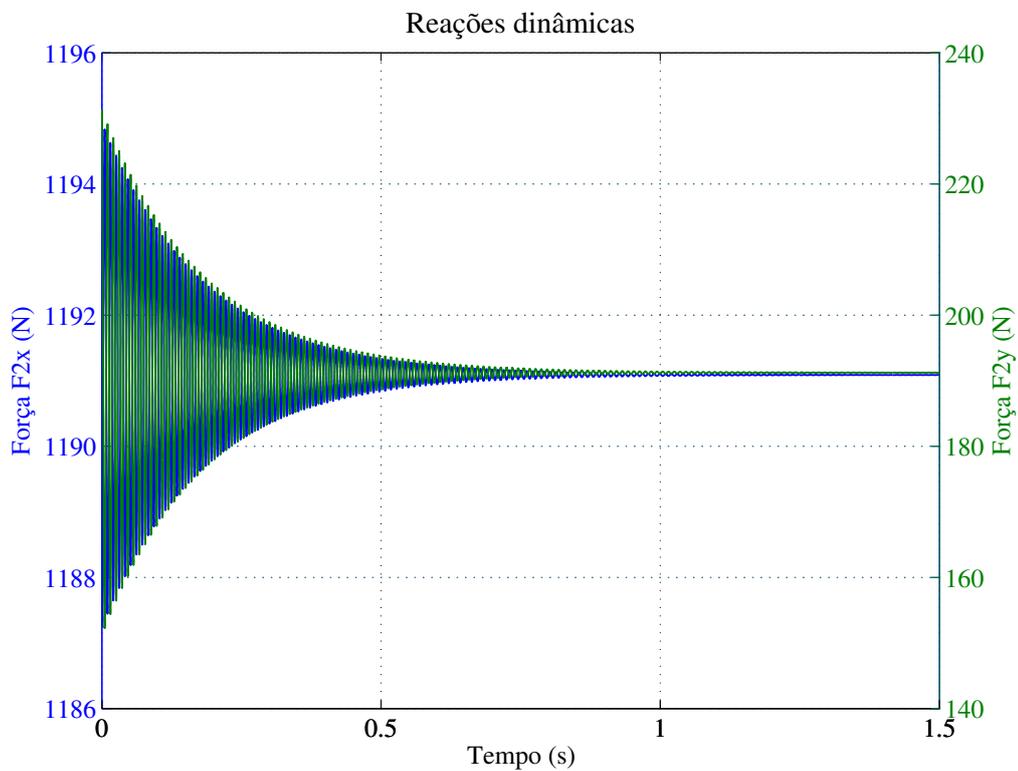


Figura 7.7: Reações dinâmicas atuantes no mancal da polia 2.

7.1.1.3 Simulação 2

O objetivo desta análise numérica é analisar os efeitos do desbalanceamento e da flutuação de velocidade angular nas reações dinâmicas dos mancais. O vínculo de acionamento foi estabelecido para a polia 2 (Equação (4.3)), removendo um grau de liberdade do sistema. A nova frequência natural não-amortecida deste sistema é $f_n=81.8$ Hz.

Uma velocidade angular constante $\dot{\theta}_2=600$ rpm (10 Hz) foi prescrita à polia 2, no sentido anti-horário, sem incorporar desbalanceamento e flutuação de velocidade.

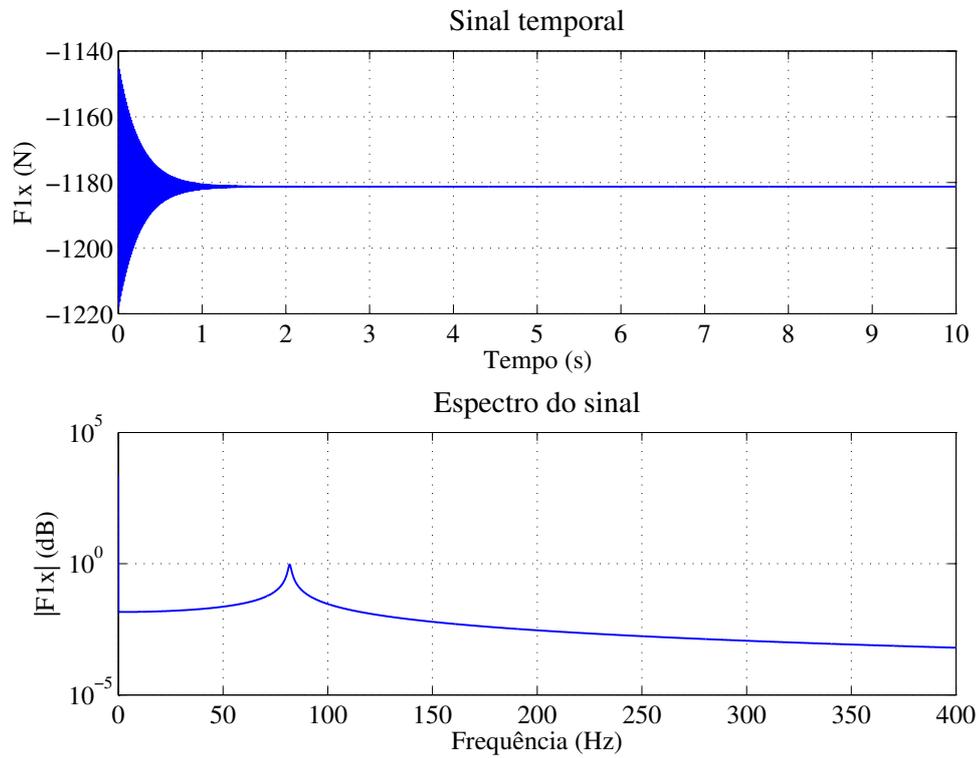
Na Figura 7.8 são apresentadas as componentes horizontais das reações dinâmicas F_{1x} e F_{2x} de ambos os mancais. Pode ser notado que na ausência de desbalanceamento e de flutuação de velocidade, o espectro da resposta apresenta apenas a frequência natural do sistema, excitada pela condição inicial. A dissipação de energia ocorre devido exclusivamente ao amortecimento da correia, por suas propriedades viscoelásticas.

O efeito de flutuação de velocidade angular na resposta dinâmica é mostrado na Figura 7.9. A flutuação geralmente ocorre devido à sequência de ignição dos motores de combustão, e são dependentes do número de cilindros. Neste caso, foi usado uma flutuação de $2x$ a rotação, correspondente a um motor de quatro cilindros. A amplitude de deslocamento da Equação (4.3) foi $A_2 = 1^\circ$ (0.0174 rad), resultando em uma amplitude de flutuação $\Delta\omega=41.9$ rpm (0.698 Hz) na velocidade angular.

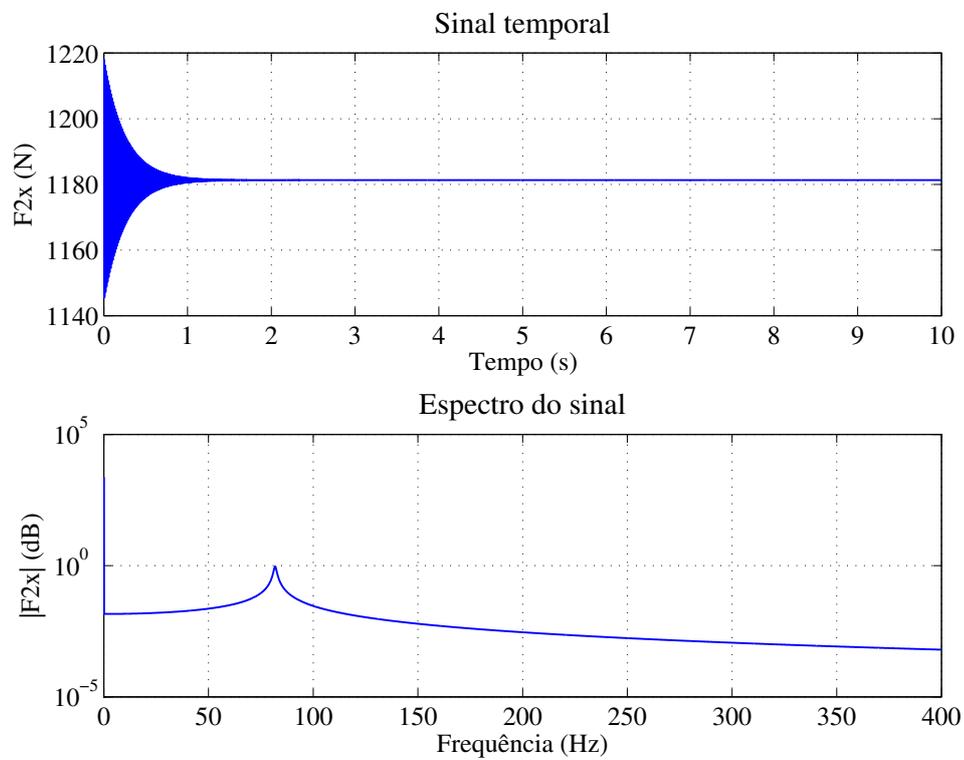
Os resultados mostram que quando a flutuação de velocidade angular está presente, aparecem no espectro as correspondentes frequências (2×10 Hz=20 Hz) e a primeira harmônica (40 Hz).

A Figura 7.10 apresenta os resultados considerando simultaneamente os efeitos de desbalanceamento e flutuação de velocidade angular. Foi considerado $x_{cm1}=0.001$ m, $x_{cm2}=0.0005$ m e $y_{cm1}=y_{cm2}=0$ m na Equação (4.5), correspondendo a um momento de desbalanceamento de $me_1=0.00215$ kg.m e $me_2=0.00391$ kg.m, respectivamente.

Na presença combinada de desbalanceamento e flutuação, pode ser observado a presença de harmônicos e sub-harmônicos na componente F_{1x} , decorrente de ambos os fenômenos. O espectro da reação dinâmica F_{2x} contém a presença de harmônicos tanto de balanceamento quanto de flutuação. É também notável a maior amplitude de tensão alternada nos mancais.

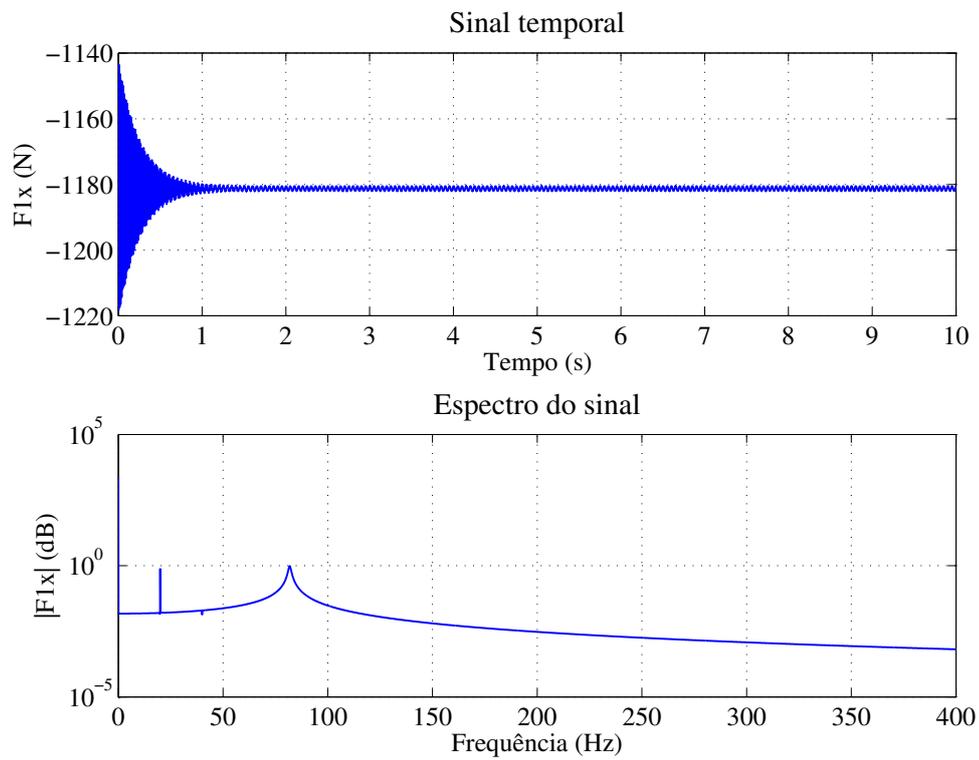


(a) Reação dinâmica no mancal da polia 1

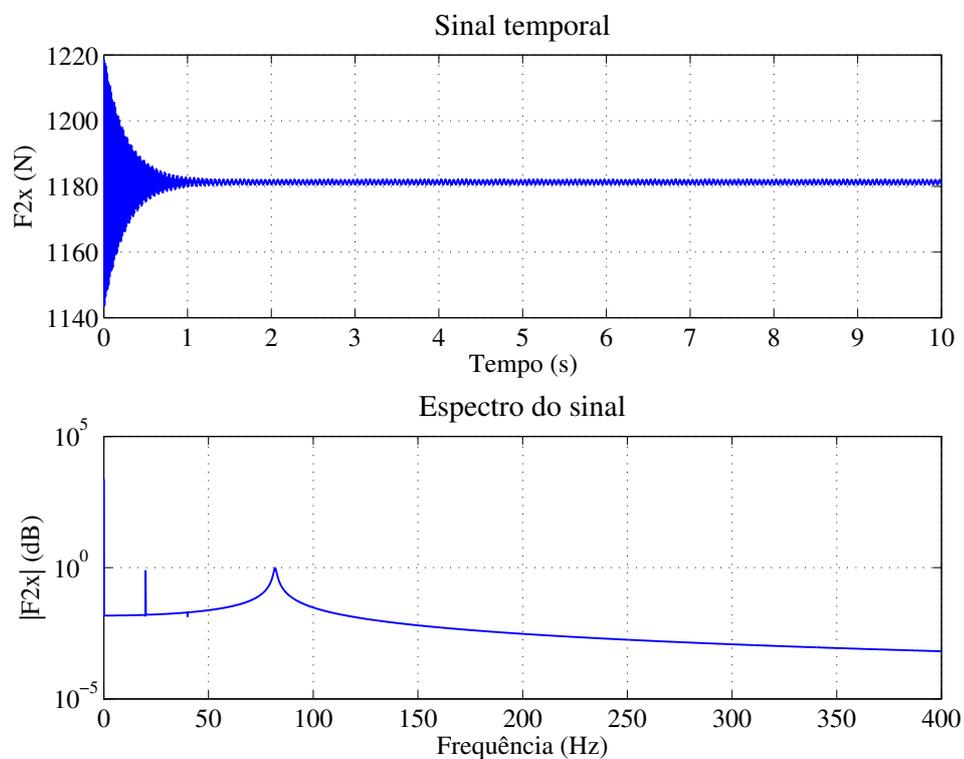


(b) Reação dinâmica no mancal da polia 2

Figura 7.8: Reações dinâmicas nos mancais na condição sem desbalanceamento e sem flutuação de velocidade.



(a) Reação dinâmica no mancal da polia 1



(b) Reação dinâmica no mancal da polia 2

Figura 7.9: Reações dinâmicas nos mancais na condição sem desbalanceamento e com flutuação de velocidade.

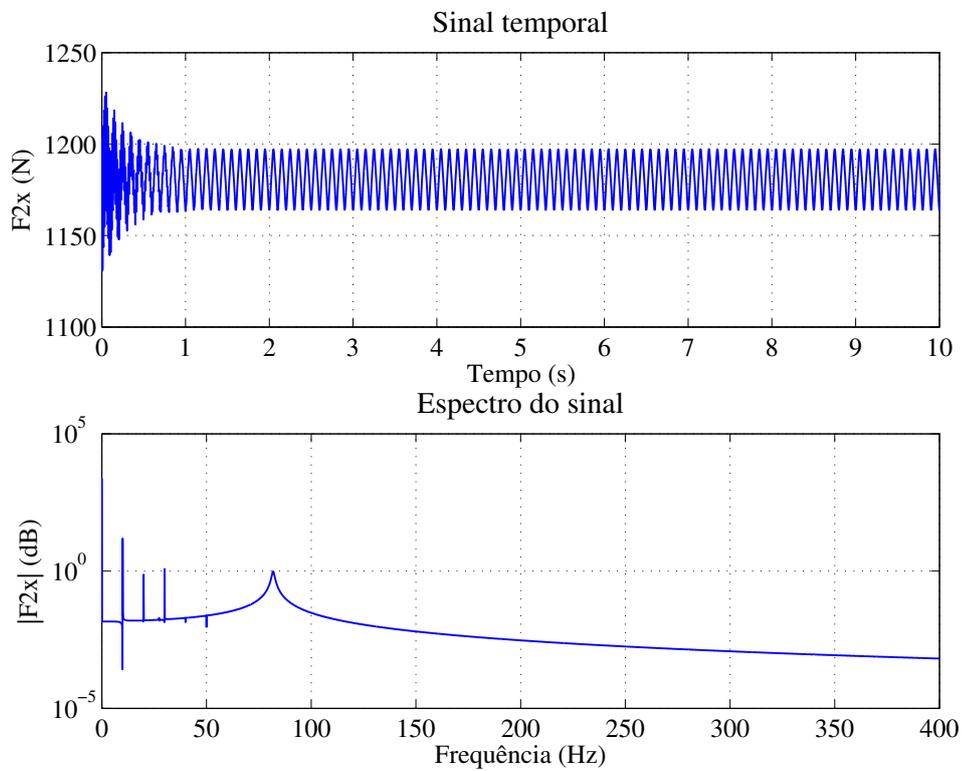
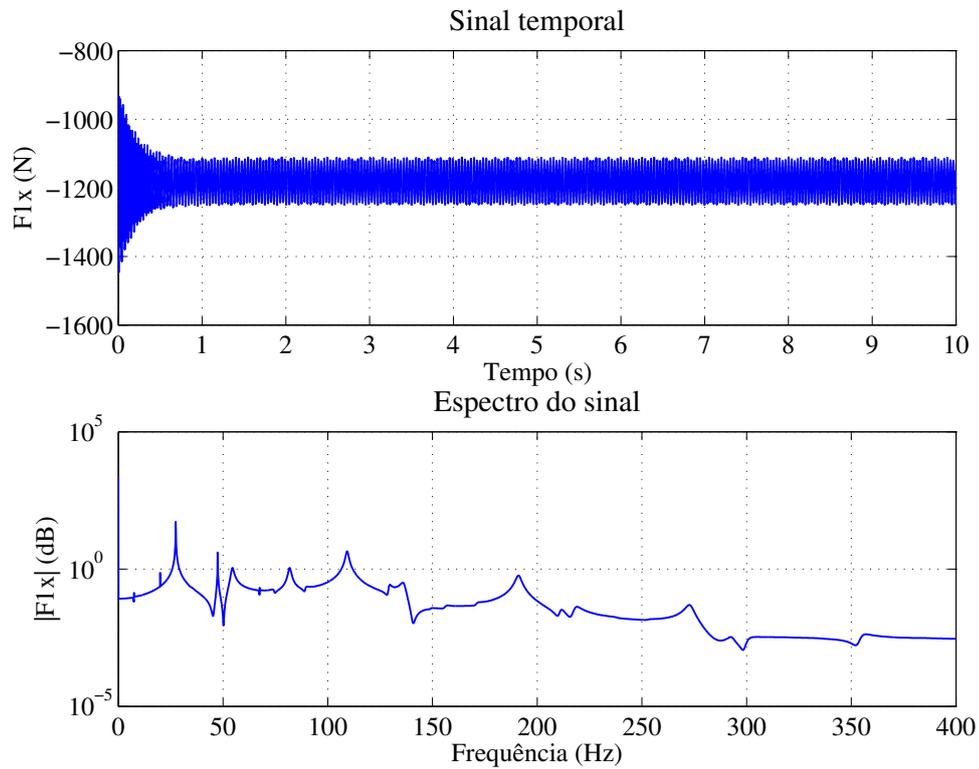


Figura 7.10: Reações dinâmicas nos mancais na condição com desbalanceamento e com flutuação de velocidade.

7.1.1.4 Simulação 3

É proposta nesta simulação numérica a investigação dos efeitos de carga média e alternada transiente aplicada no alternador, bem como o efeito da força centrífuga atuante na correia. A polia do virabrequim foi submetida a aceleração constante de $\ddot{\theta}_2=68 \text{ rad/s}^2$, até a velocidade de $\dot{\theta}_2=6493.5 \text{ rpm}$ (680 rad/s), conforme mostrado na Figura 7.11. Não foi considerado qualquer forma de amortecimento torcional nas polias e a flutuação de velocidade foi negligenciada.

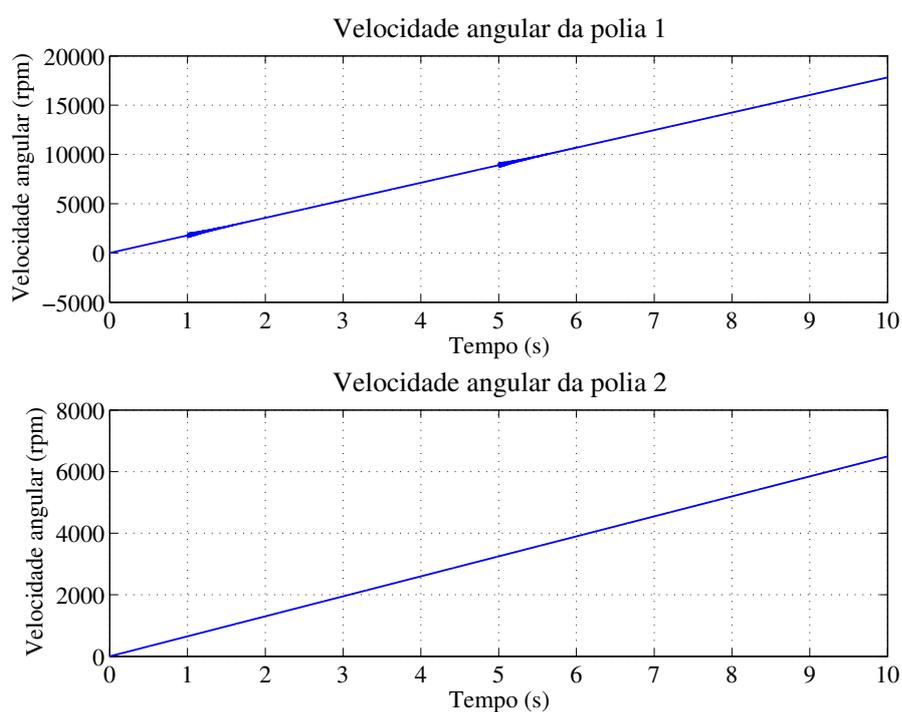


Figura 7.11: Velocidade angular das polias 1 e 2.

O momento aplicado no alternador é mostrado na Figura 7.12, e atua apenas no intervalo de 1 a 5 s. O momento médio é $M_{1m}=-20 \text{ N.m}$ e o alternado $M_{1a}=-5 \text{ N.m}$, com frequência de excitação $f_2=2 \text{ Hz}$ (Equação (4.20)).

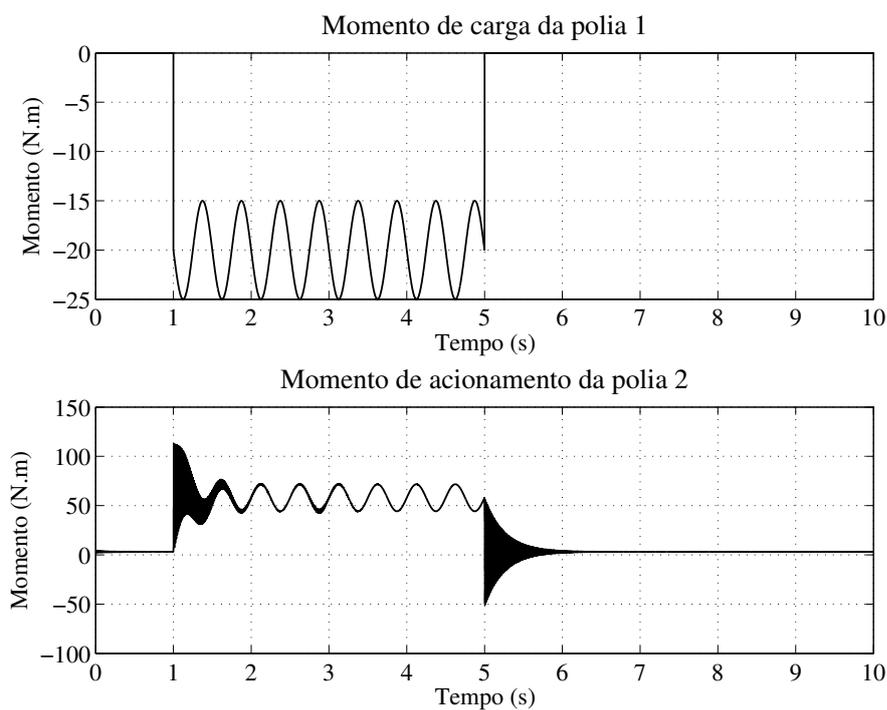


Figura 7.12: Momento atuante nas polias 1 e 2.

É notado que o momento externo de acionamento da polia do virabrequim aumenta para atender à demanda de carga da polia do alternador, apresentando oscilação com a mesma frequência de excitação após o regime transiente. Com a remoção da carga, o momento retorna ao valor inicial.

As forças atuantes nos tramos 1 e 2 são mostradas na Figura 7.13.

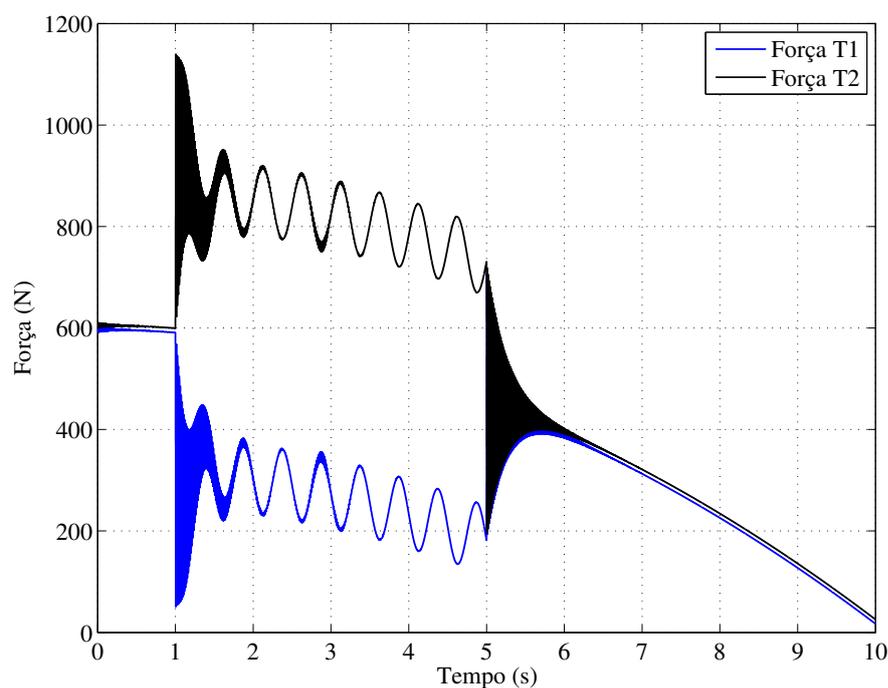


Figura 7.13: Força atuante nos tramos 1 e 2.

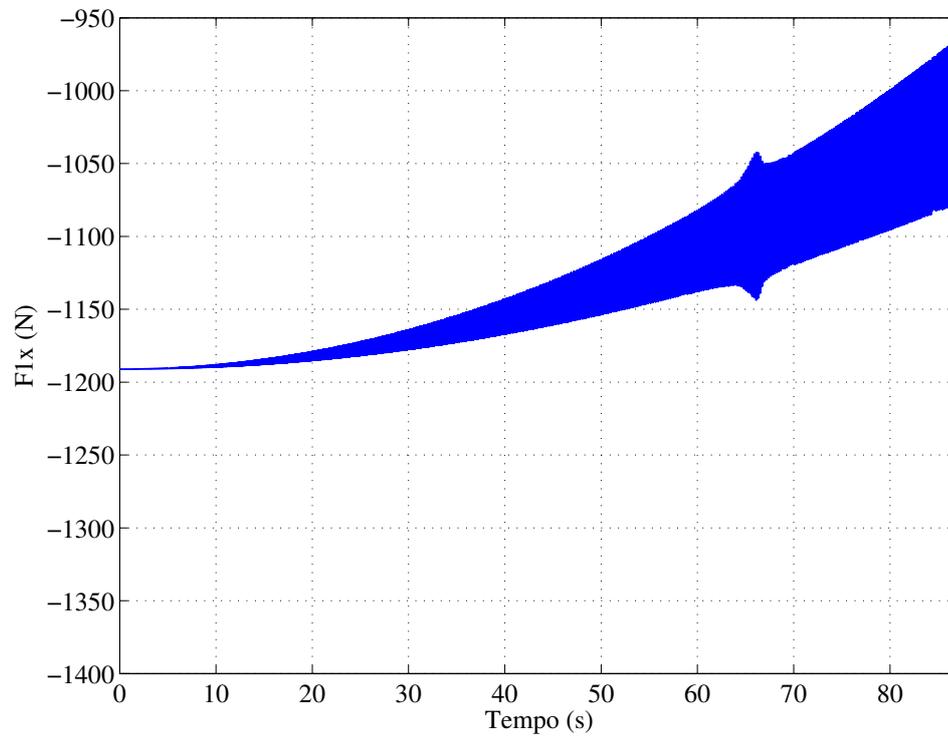
Ambos os tramos passam a apresentar o gradiente de tensão necessário para atender ao momento aplicado na polia do alternador, sendo também solicitados dinamicamente na mesma frequência de excitação da carga alternada. Em especial, é notado que a tensão nos tramos é reduzida quando a velocidade aumenta, devido ao efeito centrífugo atuante na correia. Esta tensão pode chegar a zero em rotações elevadas, comprometendo a transmissão de torque e potência no sistema.

7.1.1.5 Simulação 4

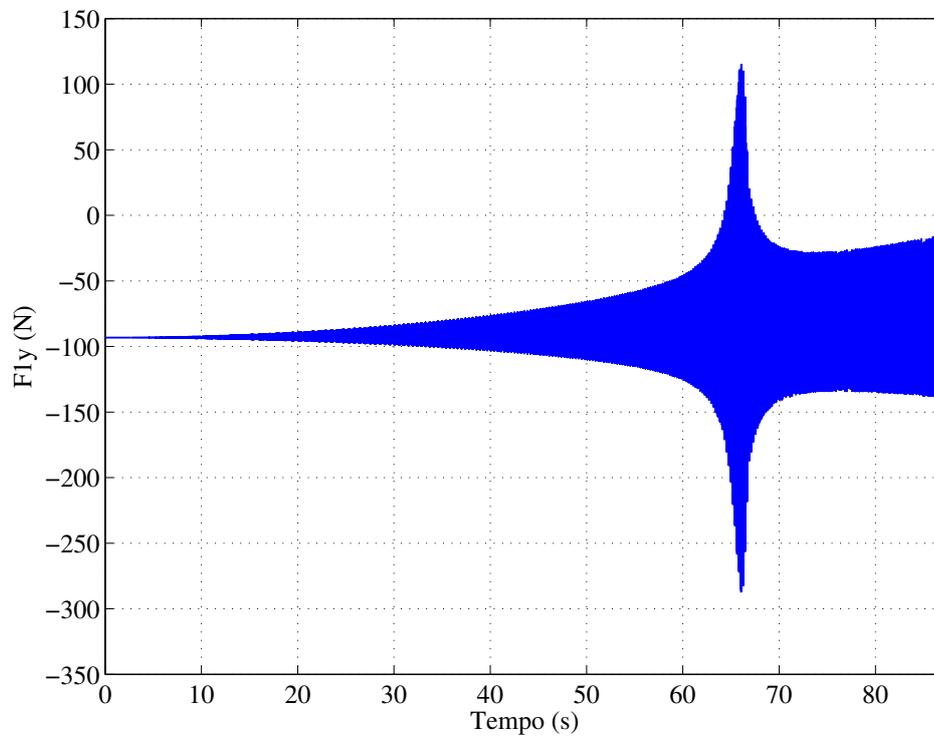
Com o objetivo de validar as forças centrífugas atuantes na correia, a polia 2 foi acelerada do repouso até a velocidade $\dot{\theta}_2=2500$ rpm (41.7 Hz). Foram incluídos os momentos de desbalanceamento $me_1=0.00010772$ kg.m e $me_2=0.0039135$ kg.m.

A Figura 7.14 apresenta as componentes teóricas F_{1x} e F_{1y} de reação dinâmica atuantes no mancal, enquanto na Figura 7.15 são mostrados os resultados experimentais obtidos na bancada.

A força centrífuga aumenta com o quadrado da rotação (Equação (4.17)), e ainda que a densidade da correia seja baixa ($\rho A=0.12101$ kg/m), a força pode ser expressiva em altas velocidades. Esta força é responsável por reduzir as reações dinâmicas dos mancais de centro fixo. Os resultados teórico-experimentais ilustram a importância de incorporar o efeito centrífugo na modelagem do sistema.

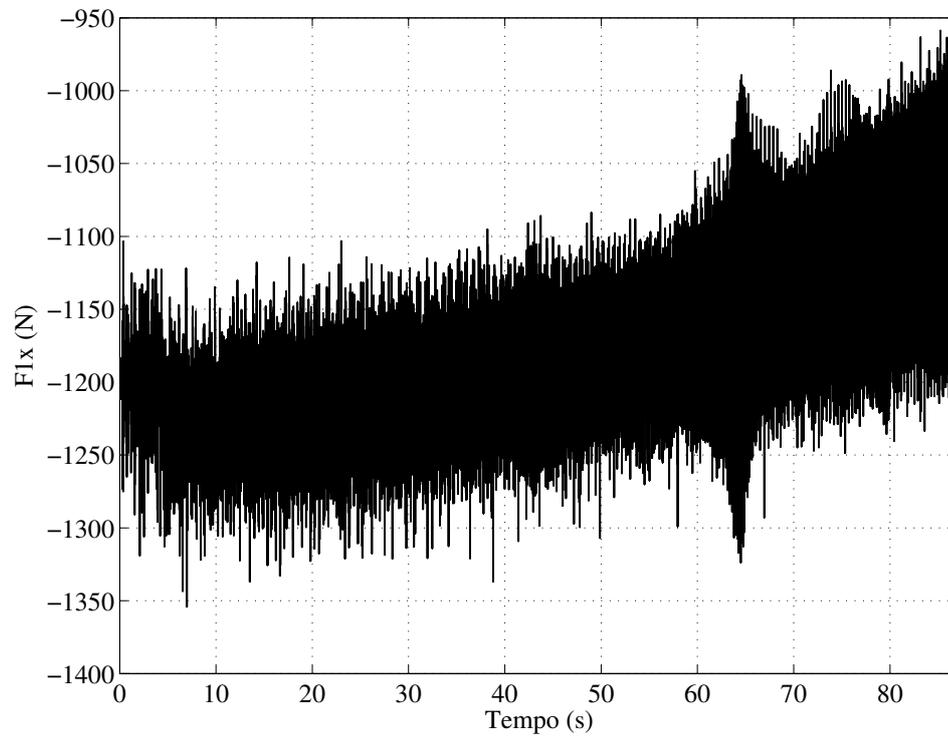


(a) Componente horizontal de força no mancal

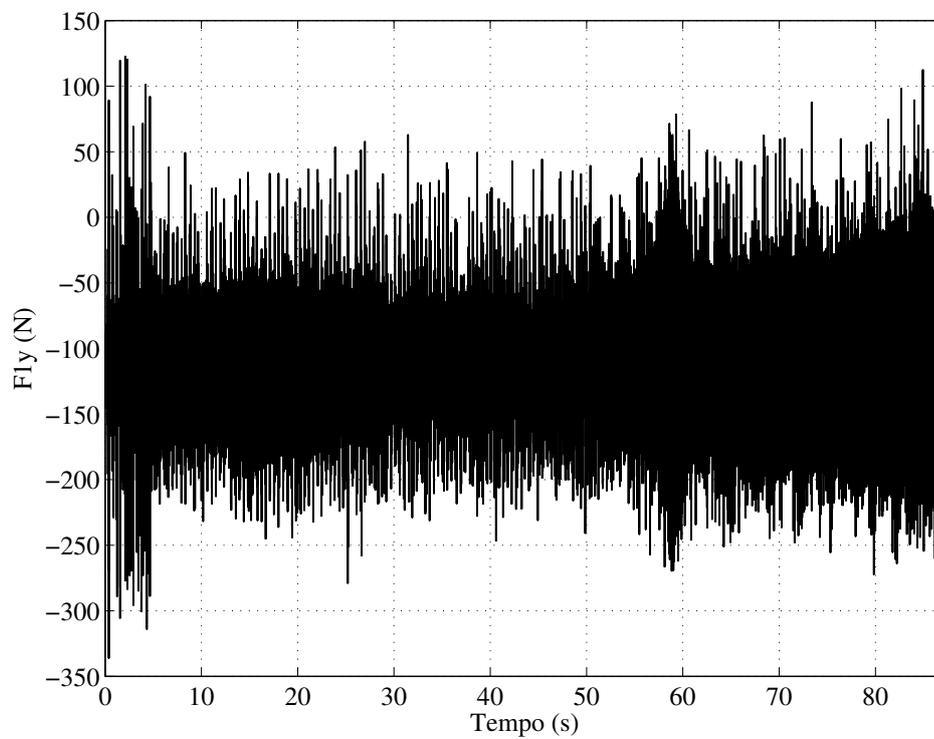


(b) Componente vertical de força no mancal

Figura 7.14: Reações dinâmicas teóricas atuantes no mancal da polia 1.



(a) Componente horizontal de força no mancal



(b) Componente vertical de força no mancal

Figura 7.15: Reações dinâmicas experimentais atuantes no mancal da polia 1.

7.1.2 Modelo ANCF híbrido

Os resultados teórico-experimentais considerando o modelo híbrido do sistema de transmissão com duas polias é apresentado nesta seção. O caso estático é analisado considerando diferentes níveis de tensão na correia, enquanto o caso dinâmico é avaliado através do diagrama de Campbell e de mapa de ordem experimental.

7.1.2.1 Validação estática

A validação estática do modelo ANCF foi feita considerando níveis diferentes de tensão na correia. Para cada nível de tensão avaliado, foi usado martelo para aplicar impacto na correia no nó 16 do tramo 1, enquanto a resposta foi medida no nó 4 do mesmo tramo. A posição dos nós dos elementos finitos estão indicadas na Figura 7.16. As respostas temporais foram obtidas usando microfone uniaxial, posicionado perpendicularmente à correia à distância de 12 mm. Os espectros no domínio da frequência foram determinados para cada tensão na correia através de análise FFT dos sinais temporais, permitindo identificar as frequências naturais do sistema em condição estática.

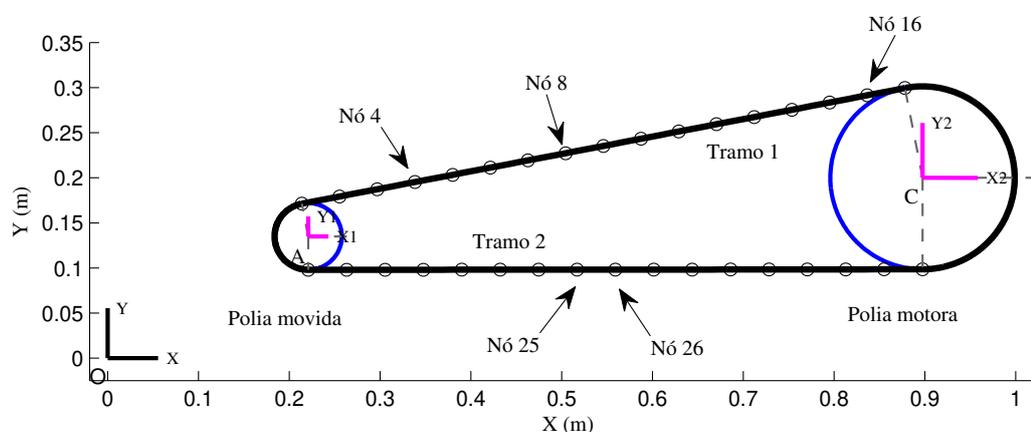


Figura 7.16: Nós do modelo de elementos finitos ANCF.

Nas simulações realizadas, os tramos da correia foram discretizados em uma malha com 16 elementos finitos, resultando em um sistema com 142 graus de liberdade (68 GL por tramo e 3 GL por polia). Para verificar a convergência do método, testes numéricos com 24 elementos (206 GL, sendo 100 por tramo e 3 GL por polia) mostraram uma diferença de 0.64% no valor numérico da 31ª frequência natural, indicando acurácia nos resultados mesmo com um número relativamente reduzido de elementos.

A Figura 7.17 mostra o resultado experimental da resposta temporal ao impulso e o correspondente espectro, para a correia tensionada em $T=600$ N. O gráfico *waterfall* da Figura 7.18

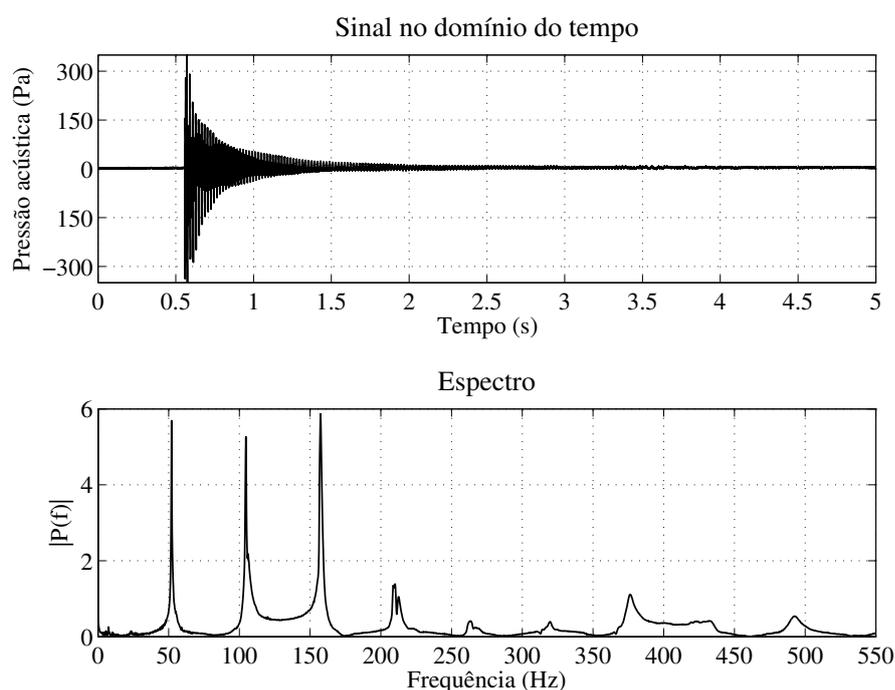


Figura 7.17: Resposta experimental ao impulso para $T=600$ N.

foi obtido a partir da sobreposição do espectro das respostas nas tensões $T=200$ a 600 N. A amplitude de cada espectro foi normalizada em relação à amplitude máxima, para realçar as frequências naturais mais altas, que aparecem em menor amplitude.

As frequências naturais dos tramos são bastante sensíveis em relação ao nível de tensão aplicada, e aumentam com o incremento da tensão. Este resultado é esperado e já conhecido na literatura, conforme reportado por Čepon *et al.* (2009b).

Para avaliar a capacidade do modelo teórico em prever a variação das frequências naturais em função da tensão na correia, simulações numéricas foram realizadas utilizando os mesmos parâmetros experimentais dos ensaios conduzidos em bancada. Nas Tabelas 7.2 a 7.6, estão apresentados os resultados teóricos juntamente com os experimentais, onde foi representado apenas os modos do tramo 1, uma vez que as frequências do tramo 2 são iguais por estarem sob mesma tensão. O modo 3, por exemplo, foi omitido, visto que tem a mesma frequência natural e forma modal que o modo 2, conforme observado experimentalmente. Os resultados reportados permitem a verificação teórico-experimental até o 9º modo de vibração transversal dos tramos. A variável que controla a posição do conjunto movido (X_A), indicada nas respectivas tabelas, foi medida *in loco* na bancada e utilizada em cada uma das simulações para o cálculo dos parâmetros modais.

Pode ser observado que as frequências naturais previstas pelo modelo estão bem correlacionadas com as experimentais, apresentando boa acurácia em todos os níveis de tensão avaliados.

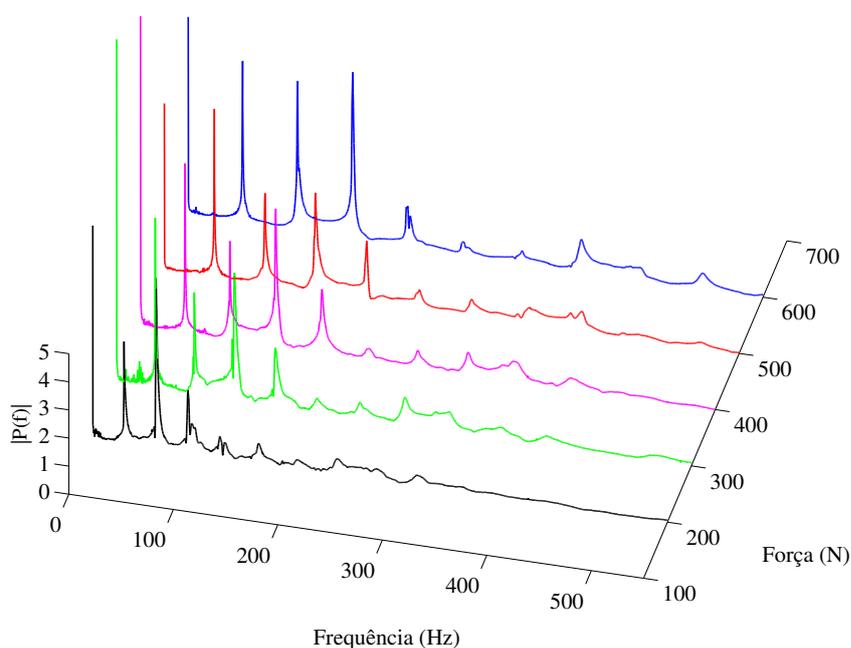


Figura 7.18: Espectro de frequência (experimental).

Os modos rotacionais das polias, bem como os longitudinais dos tramos, também são automaticamente previstos pelo modelo.

Tabela 7.2: Frequências naturais do sistema para $T=200$ N

T=200 N, $X_A=0.2232$ m			
Modo	Teórico (Hz)	Experimental (Hz)	Forma modal
1	0.0	-	corpo rígido
2	30.2	30.0	1ª transversal
4	60.8	60.6	2ª transversal
6	92.0	92.2	3ª transversal
8	96.0	-	1ª rotacional
9	124.2	125.2	4ª transversal
11	157.7	157.8	5ª transversal
13	192.8	192.6	6ª transversal
15	229.7	230.2	7ª transversal
17	268.7	269.4	8ª transversal
19	310.1	310.0	9ª transversal
35	712.9	-	1ª longitudinal+transversal
51	1425.7	-	2ª longitudinal
61	2138.7	-	3ª longitudinal

As formas modais simuladas para o sistema estão apresentadas na Figura 7.19. Os cinco primeiros modos de vibrar transversais dos tramos foram verificados experimentalmente por meio de estroboscópio. Em geral os modos apresentam acoplamento linear, resultando em vi-

Tabela 7.3: Frequências naturais do sistema para $T=300$ N

T=300 N, $X_A=0.2226$ m			
Modo	Teórico (Hz)	Experimental (Hz)	Forma modal
1	0.0	-	corpo rígido
2	37.0	37.0	1ª transversal
4	74.3	74.2	2ª transversal
6	96.1	-	1ª rotacional
7	112.1	112.6	3ª transversal
9	150.7	151.6	4ª transversal
11	190.4	191.0	5ª transversal
13	231.4	233.4	6ª transversal
15	274.0	275.6	7ª transversal
17	318.3	319.0	8ª transversal
19	364.8	363.2	9ª transversal
33	713.8	-	1ª longitudinal
49	1427.7	-	2ª longitudinal
61	2141.5	-	3ª longitudinal

bração predominantemente transversal, rotacional ou longitudinal, cujo grau de acoplamento é diretamente afetado pelos parâmetros do sistema.

Tabela 7.4: Frequências naturais do sistema para $T=400$ N

T=400 N, $X_A=0.2220$ m			
Modo	Teórico (Hz)	Experimental (Hz)	Forma modal
1	0.0	-	corpo rígido
2	42.7	42.6	1ª transversal
4	85.7	85.4	2ª transversal
6	96.2	-	1ª rotacional
7	129.1	129.4	3ª transversal
9	173.2	173.6	4ª transversal
11	218.2	218.4	5ª transversal
13	264.5	265.6	6ª transversal
15	312.0	312.4	7ª transversal
17	361.2	361.4	8ª transversal
19	412.3	413.4	9ª transversal
31	714.7	-	1ª longitudinal
49	1429.6	-	2ª longitudinal
59	2144.4	-	3ª longitudinal

Não houve variação expressiva nos modos rotacionais, sugerindo pouca sensibilidade em relação à tensão nos tramos, resultado também já reportado na literatura (Beikmann *et al.*,

Tabela 7.5: Frequências naturais do sistema para T=500 N

T=500 N, $X_A=0.2214$ m			
Modo	Teórico (Hz)	Experimental (Hz)	Forma modal
1	0.0	-	corpo rígido
2	47.8	47.8	1ª transversal
4	95.8	96.2	2ª transversal
6	96.3	-	1ª rotacional
7	144.2	144.6	3ª transversal
9	193.3	193.6	4ª transversal
11	243.2	244.2	5ª transversal
13	294.1	294.8	6ª transversal
15	346.3	347.4	7ª transversal
17	399.9	400.4	8ª transversal
19	455.2	456.4	9ª transversal
29	715.7	-	1ª longitudinal
47	1431.5	-	2ª longitudinal
59	2147.3	-	3ª longitudinal

1996b; Kong e Parker, 2004). Apenas dois modos rotacionais estão presentes, o primeiro de corpo rígido (0 Hz) e o segundo de corpo flexível com oposição de fase (96 Hz), como mostrado na Figura 7.19 (modo 4). A frequência natural teórica do sistema puramente rotacional, obtida quando as inércias dos tramos são desprezadas, é $f_n=96.7$ Hz, conforme mostrado na Seção 7.1.1.2. A proximidade dos valores é justificada pela baixa inércia da correia.

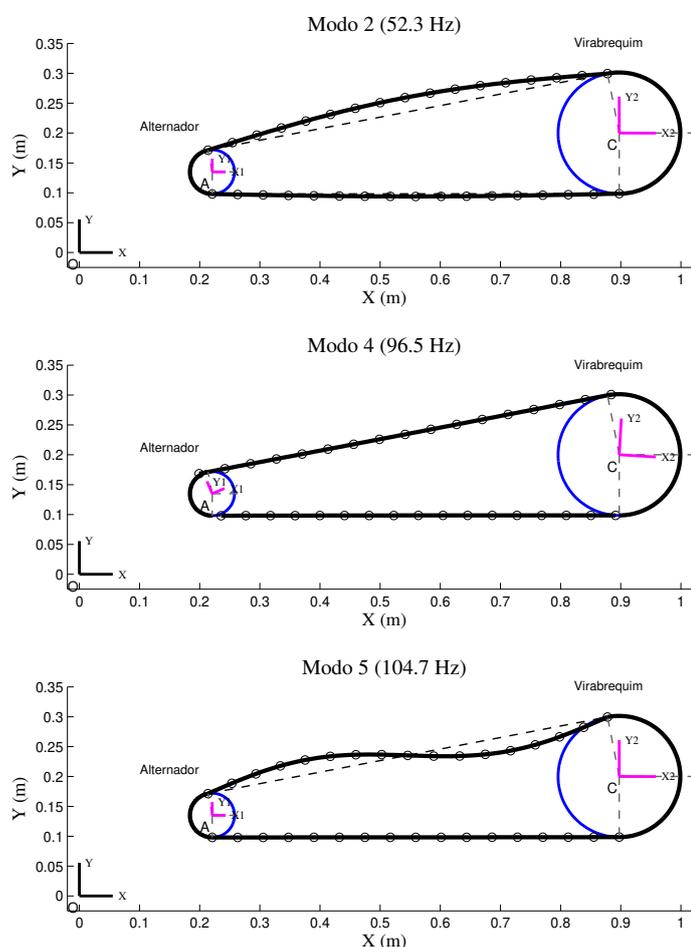
Tabela 7.6: Frequências naturais do sistema para T=600 N

T=600 N, $X_A=0.2208$ m			
Modo	Teórico (Hz)	Experimental (Hz)	Forma modal
1	0.0	-	corpo rígido
2	52.3	52.0	1ª transversal
4	96.5	-	1ª rotacional
5	104.7	104.8	2ª transversal
7	157.6	157.4	3ª transversal
9	211.0	211.2	4ª transversal
11	265.2	265.0	5ª transversal
13	320.4	320.8	6ª transversal
15	376.7	376.8	7ª transversal
17	434.3	435.6	8ª transversal
19	493.5	492.8	9ª transversal
27	716.7	-	1ª longitudinal
45	1433.4	-	2ª longitudinal
57	2150.1	-	3ª longitudinal

Os modos longitudinais dos tramos aparecem sempre em alta frequência, devido ao elevado módulo de rigidez axial da correia. Na Figura 7.19 (modo 27) é mostrado o primeiro modo longitudinal, onde pode ser notado a aproximação dos nós de ambos os tramos em direção às polias. O segundo modo longitudinal (modo 45), apresenta um nó modal no centro dos tramos, também representado pela aproximação dos nós na região central. Foi observado nas simulações que os modos longitudinais são sensíveis à tensão nos tramos, e aumentam conforme a intensidade de tensão na correia.

Na Tabela 7.2 é visto que o modo longitudinal da correia (modo 51) está acoplado ao modo transversal dos tramos (modo 50, não apresentado). Esta condição é devido à proximidade das frequências naturais destes dois modos, resultando em interação modal.

Em função dos resultados obtidos, o modelo híbrido proposto apresentou correlação teórico-experimental com acurácia satisfatória, mostrando ser representativo do protótipo construído. Análises não-lineares são possíveis através das equações de movimento não-lineares, de acordo com a Eq. (4.58). Quando linearizado em torno da posição de equilíbrio estático, o modelo pode ser utilizado para análise de vibração, o qual incorpora todos os modos de vibrar do sistema.



Continua na próxima página...

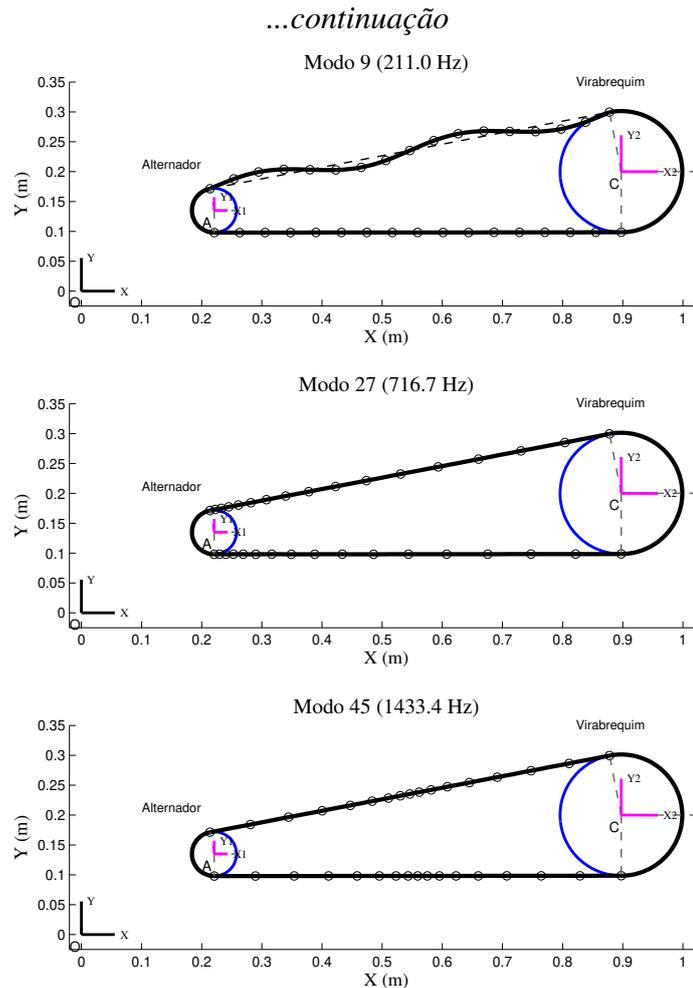


Figure 7.19: Formas modais do sistema ($T=600$ N).

A Tabela 7.7 apresenta as frequências naturais do sistema sujeito a momento constante $M_{1z}=50$ N.m aplicado na polia 1. Nesta configuração, ocorre um gradiente de tensão nos tramos em relação à tensão original de equilíbrio ($T=400$ N), resultando em $T_1=499.6$ N e $T_2=295.9$ N. Desta forma, é esperado que as frequências naturais de ambos os tramos sejam distintas.

Como pode ser observado, o tramo submetido à menor tensão apresenta frequências naturais inferiores quando comparadas às do tramo mais tensionado, revelando que o modelo é capaz de prever adequadamente o efeito dos momentos aplicados nos acessórios sobre a resposta transversal dos tramos. A Figura 7.20 mostra as formas modais dos três primeiros modos de vibrar do sistema.

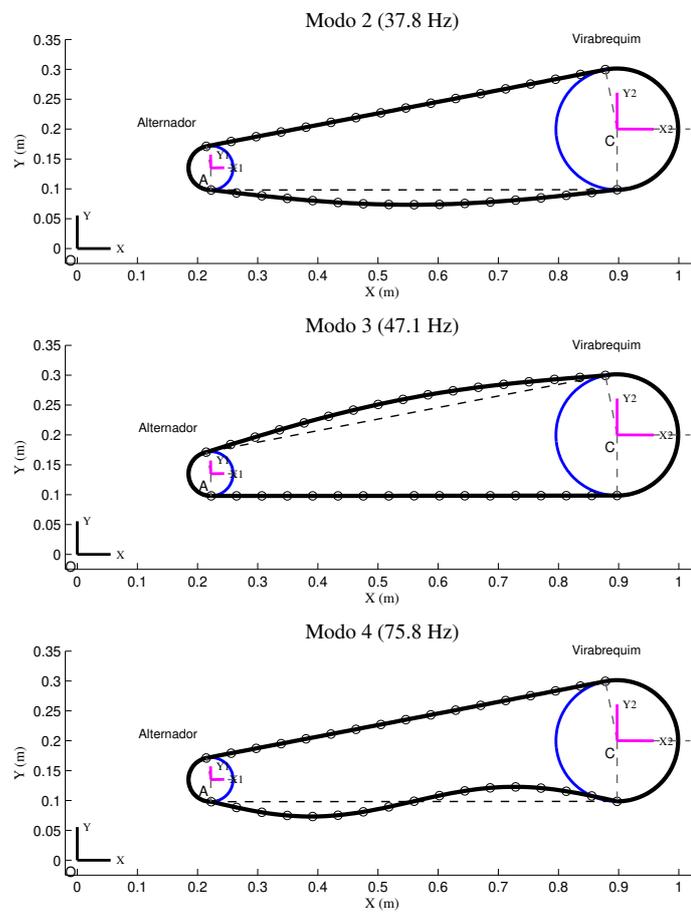


Figura 7.20: Formas modais com momento aplicado no alternador.

Tabela 7.7: Frequências naturais do sistema considerando momento constante aplicado na polia 1

Modo	Teórico (Hz)	Forma modal
1	0.0	corpo rígido
2	37.8	1 ^a transversal T2
3	47.1	1 ^a transversal T1
4	75.8	2 ^a transversal T2
5	94.5	2 ^a transversal T1
6	96.2	1 ^a rotacional
7	114.3	3 ^a transversal T2
8	142.3	3 ^a transversal T1
9	153.7	4 ^a transversal T2
10	190.7	4 ^a transversal T1
11	194.1	5 ^a transversal T2
12	235.8	6 ^a transversal T2
13	240.0	5 ^a transversal T1
14	279.0	7 ^a transversal T2
15	290.3	6 ^a transversal T1
16	324.0	8 ^a transversal T2
17	341.9	7 ^a transversal T1
18	371.1	9 ^a transversal T2
19	395.0	8 ^a transversal T1
20	420.4	10 ^a transversal T2
21	449.7	9 ^a transversal T1
22	472.3	11 ^a transversal T2

7.1.2.2 Validação dinâmica

A validação dos modelos ANCF de força centrífuga e giroscópica foi feita por meio de comparação do diagrama de Campbell com o mapa de ordem do sistema.

O diagrama de Campbell mostrado na Figura 7.21, foi construído a partir do modelo híbrido, calculando as frequências naturais para cada rotação. A linha inclinada representa a rotação (1x) do sistema.

O mapa de ordem foi obtido com auxílio de sensor laser posicionado perpendicularmente ao tramo 1 no nó 4, à distância de 50 mm. A polia motora foi acelerada do repouso à velocidade $\dot{\theta}_2=2500$ rpm (41.7 Hz) (teste *run up*). A resposta temporal obtida foi processada para extrair o espectro, utilizando SFFT (*Short-Time First Fourier Transforms*).

O mapa experimental do sistema é mostrado na Figura 7.22.

Os resultados teóricos estão de acordo com os experimentais, apresentando acurácia no

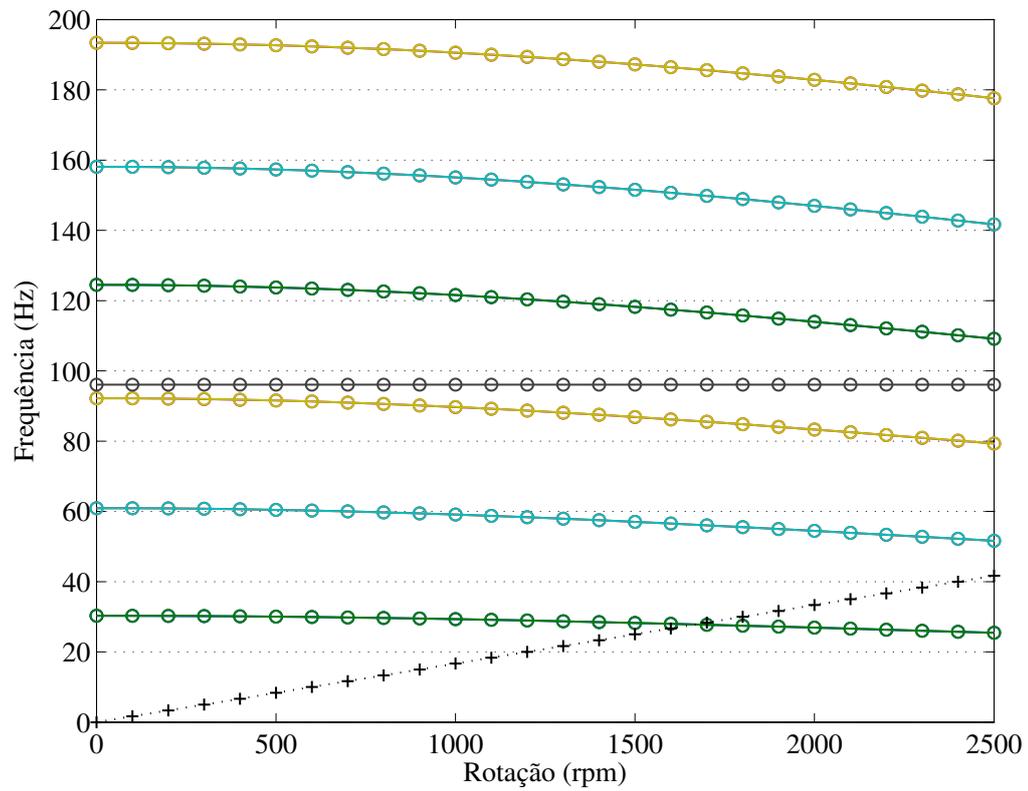


Figura 7.21: Diagrama de Campbell ($T=200$ N).

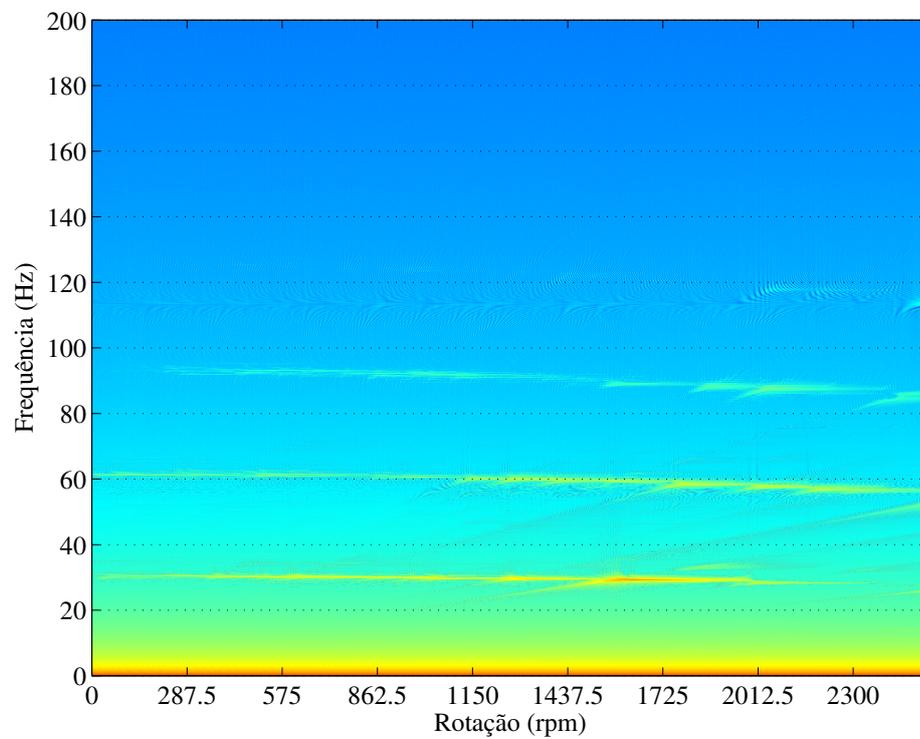


Figura 7.22: Mapa de ordem do sistema ($T=200$ N).

intervalo de rotação analisado. As frequências acima de 100 Hz não foram identificadas no mapa, em função da faixa de operação do sensor, limitado a esta frequência.

7.1.2.3 Análise paramétrica

Com o objetivo de avaliar a sensibilidade das frequências naturais em relação aos parâmetros do sistema, uma análise paramétrica é proposta. Este estudo é especialmente importante e justificado para a concepção de projeto. Foi utilizada como referência a simulação da correia tensionada em $T=600$ N. O modelo usado nesta análise foi discretizado em 24 elementos finitos, para eliminar a influência de possíveis erros numéricos de aproximação nos resultados.

A Figura 7.23 apresenta a influência do módulo de rigidez axial EA sobre as frequências naturais. O intervalo avaliado foi de $EA=80000$ a 180000 N, uma vez que estes valores são representativos das correias comerciais utilizadas em aplicações automotivas típicas.

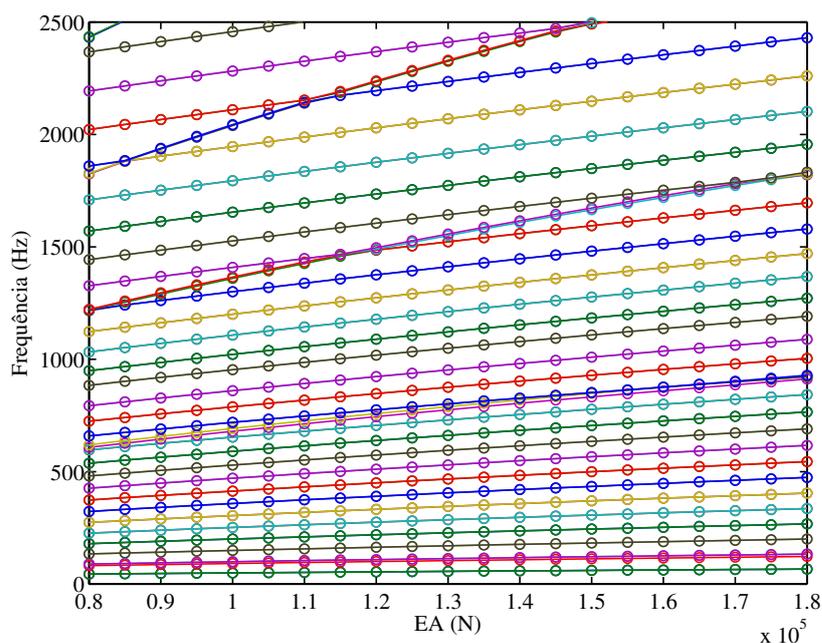


Figura 7.23: Influência do parâmetro EA ($T=600$ N).

Pode ser observado que os modos de mais baixa frequência são pouco afetados pelo módulo EA , enquanto os de mais alta frequência demonstram ser mais sensíveis à variação deste parâmetro. As simulações mostraram que com o incremento do módulo de rigidez, a rigidez axial da correia também é aumentada, elevando a tensão em ambos os tramos e com isso acarretando o aumento nas frequências naturais dos modos transversais da correia. Desta forma, para uma determinada configuração do sistema, correias com maior módulo de rigidez resultam em tensões nos tramos maiores e modos com frequências naturais mais elevadas, como esperado.

O estudo paramétrico revela que os modos de mais alta frequência tendem à aproximação, sugerindo investigações futuras sobre possível cruzamento ou *veering* das curvas.

Na Figura 7.24 a análise paramétrica é feita considerando o módulo de rigidez transversal EI . Este parâmetro é diretamente responsável pela rigidez de flexão dos tramos, indicando que quanto maior o módulo de rigidez transversal, maiores serão as frequências naturais de vibração lateral da correia. No modelo de corda, $EI=0 \text{ N.m}^2$, conforme o modelo proposto por Beikmann (Beikmann *et al.*, 1996b; Martins, 2013). As correias poly-V de perfil PK utilizadas nas aplicações automotivas, apresentam EI da ordem de 0.02 a 0.05 N.m^2 , que varia de acordo com o número de sulcos (Kong e Parker, 2004).

Os resultados simulados mostraram que os três primeiros modos são pouco sensíveis a este parâmetro, podendo ser bem representados pelos tradicionais modelos de corda. No entanto, os modos de mais alta frequência são fortemente sensíveis à rigidez transversal, e resultados bastante diferentes podem ser obtidos se o módulo EI for desprezado nas análises, mesmo para os reduzidos valores de rigidez transversal das correias poly-V.

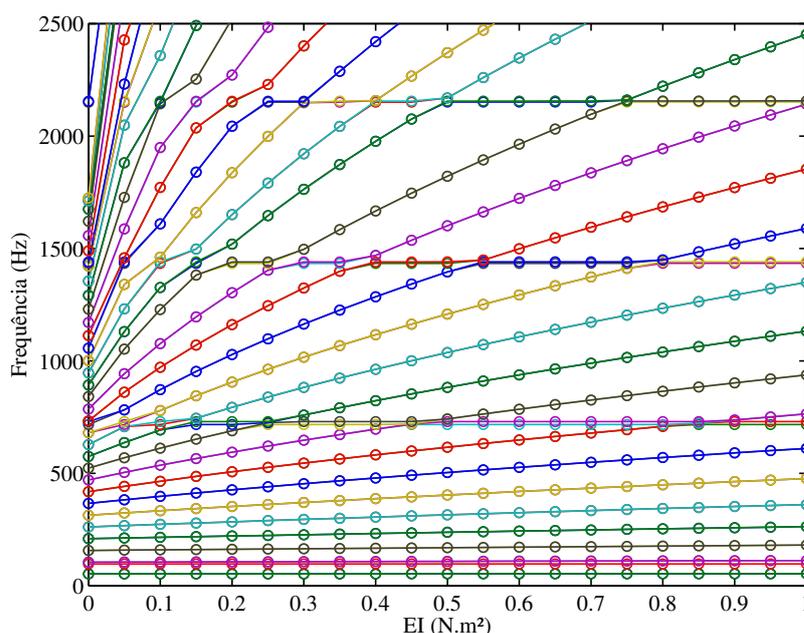


Figura 7.24: Influência do parâmetro EI ($T=600 \text{ N}$).

A influência da densidade da correia sobre as frequências naturais do sistema é apresentada na Figura 7.25, e mostra-se bastante expressiva. Como esperado, todas as frequências sofrem redução quando a massa da correia é aumentada. Os modos de vibração predominantemente transversais dos tramos são mais sensíveis a este parâmetro. Os modos rotacionais também são afetados, mas em menor intensidade, uma vez que são dominados pelas inércias das polias.

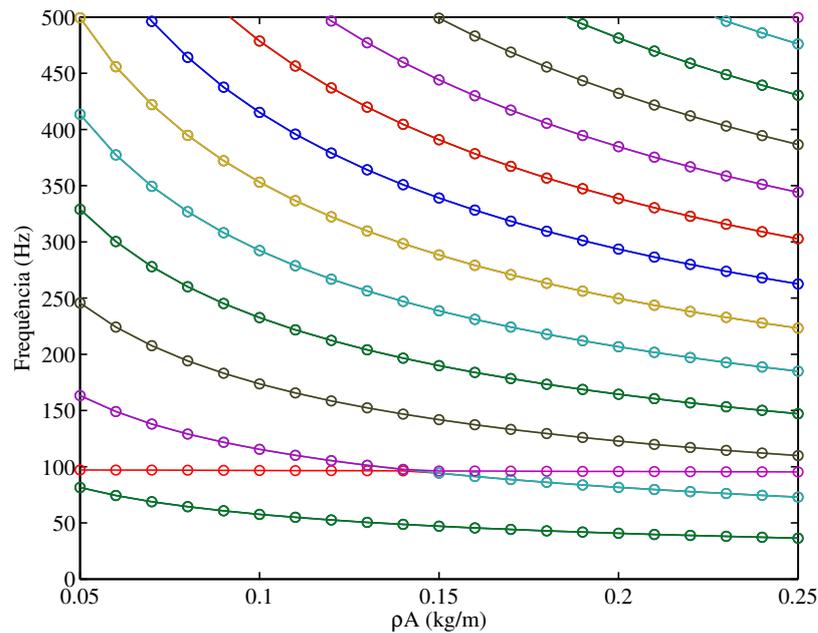


Figura 7.25: Influência do parâmetro ρA ($T=600$ N).

Na Figura 7.26 é avaliada a sensibilidade das frequências naturais do sistema frente à variação do momento de inércia da polia 1. É notado que os únicos modos afetados são os rotacionais das polias e os longitudinais dos tramos, como pode ser visto nas três primeiras e três últimas curvas. Todos os modos transversais da correia são insensíveis à inércia da polia, uma vez que dependem essencialmente dos parâmetros EA , EI e ρA , como visto nas simulações já apresentadas.

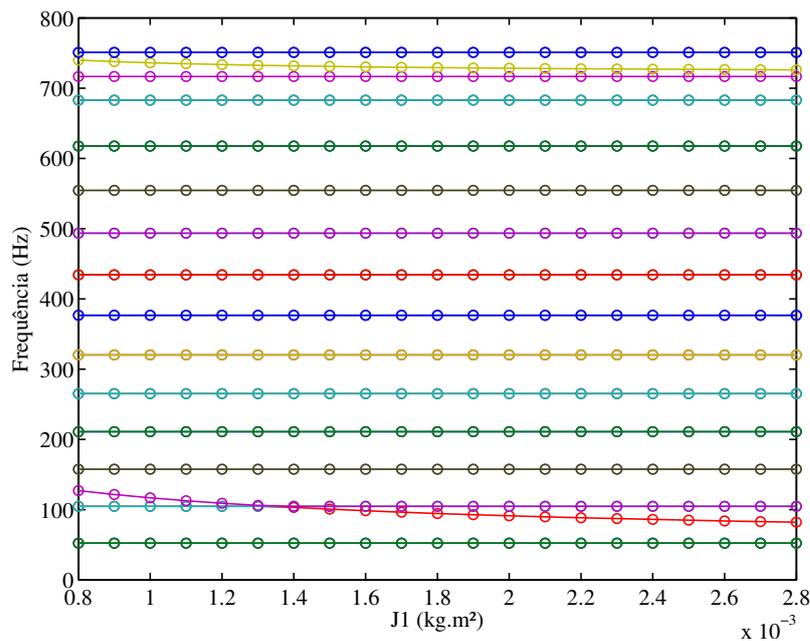


Figura 7.26: Influência do parâmetro J_1 ($T=600$ N).

7.1.2.4 Simulação dinâmica

A verificação do acoplamento dos graus de liberdade pode também ser obtida a partir da resposta temporal do sistema. As equações de movimento foram integradas numericamente utilizando o integrador de passo variável ode15s do MATLAB®, desenvolvido para aplicações em equações diferenciais rígidas, com incremento $\Delta t=1 \times 10^{-4}$ s.

No primeiro teste numérico, uma força excitadora externa com amplitude $F=0.02$ N e frequência $f=52.3$ Hz, correspondente ao primeiro modo de vibrar transversal, é aplicada perpendicularmente ao tramo 2 no nó 25 (correspondente à coordenada $e98$), conforme representado na Figura 7.16.

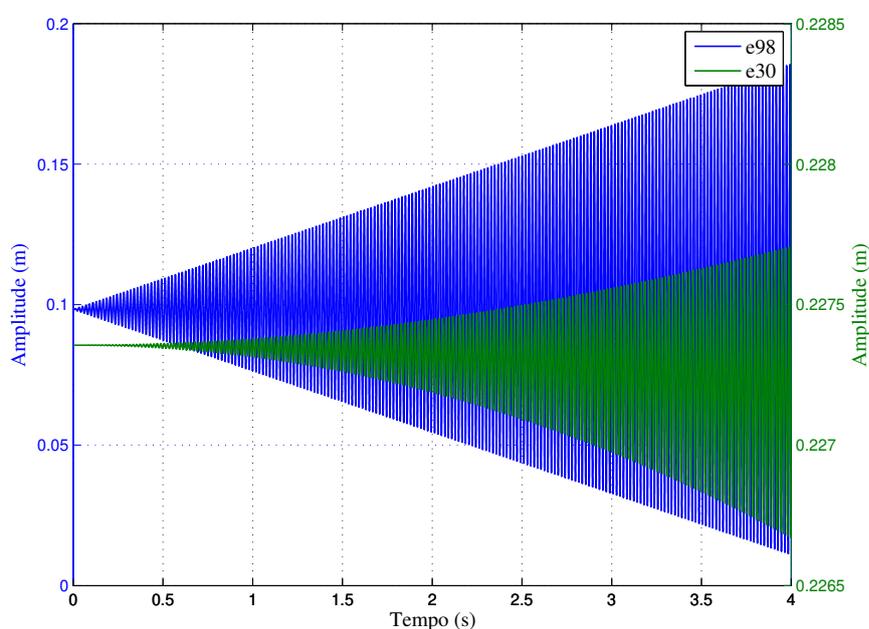


Figura 7.27: Resposta temporal em ressonância (modo 2, $f_n=52.3$ Hz, $T=600$ N).

A resposta temporal do deslocamento vertical do nó 8 do tramo 1 (correspondente ao grau de liberdade $e30$), é apresentada na Figura 7.27, juntamente com a resposta da coordenada de excitação ($e98$). Os resultados mostram que a excitação aplicada perpendicularmente no tramo 2 é transferida axialmente para as polias através do acoplamento das coordenadas até alcançar o tramo 1, que também entra em ressonância. Este resultado simulado reproduz o mesmo efeito observado experimentalmente, em que ambos os tramos estão acoplados através das polias.

No segundo teste numérico, a força excitadora é mantida no mesmo grau de liberdade ($e98$), mas com amplitude $F=0.2$ N e frequência $f=96.5$ Hz, correspondente ao segundo modo de vibrar rotacional. Na Figura 7.28 é mostrada a resposta temporal para as coordenadas angulares das polias θ_1 e θ_2 . Pode ser observado que o sistema entra em ressonância no segundo modo

rotacional, a partir de uma força excitadora aplicada perpendicularmente no tramo 2, revelando mais uma vez o acoplamento dos graus de liberdade do modelo observado experimentalmente.

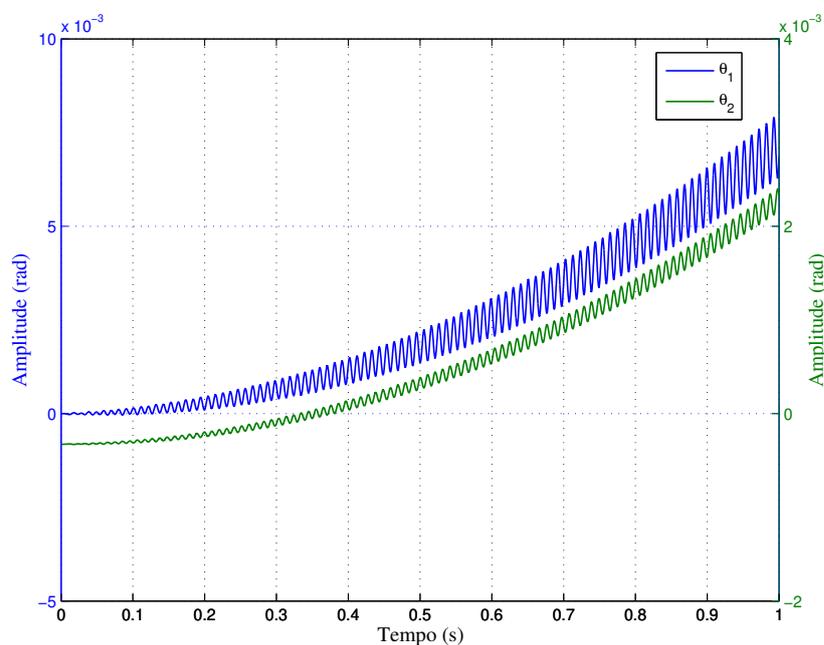


Figura 7.28: Resposta temporal em ressonância (modo 4, $f_n=96.5$ Hz, $T=600$ N).

7.2 Sistema de transmissão com auto-tensionador

A Figura 7.29 ilustra a bancada analisada nesta seção. O auto-tensionador está instalado no sistema na posição $X_A=0.64335$ m, situado entre as duas polias. O centro da polia movida está localizado em $X_H=0.2425$ m. Os demais parâmetros estão listados na Tabela 6.6.

A Seção 7.2.1 discute os resultados do modelo puramente rotacional, enquanto a Seção 7.2.2 apresenta a validação teórico-experimental do modelo híbrido, nas condições estática e dinâmica.

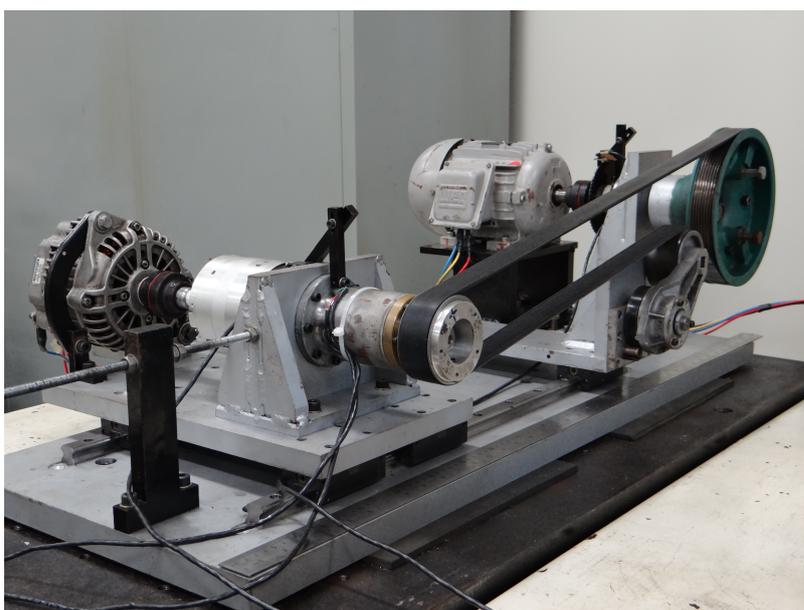


Figura 7.29: Bancada de ensaios com auto-tensionador.

7.2.1 Modelo puramente rotacional

Nesta seção são reportados os resultados teórico-experimentais relativos às forças de reação no mancal da polia 3, bem como o ângulo do auto-tensionador na configuração de equilíbrio. A integração das equações de movimento foi feita pelo integrador numérico ode15s do MATLAB®, com $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ s, tolerância relativa $e_{rel} = 1 \times 10^{-5}$ e tolerância absoluta $e_{abs} = 1 \times 10^{-6}$.

7.2.1.1 Validação experimental das reações no mancal

A análise das reações no mancal e da configuração do auto-tensionador é feita considerando dois níveis de tensão na correia. A tensão $T = 228$ N na correia é obtida quando o ângulo de pré-carga da mola torcional está posicionada no estágio 1 ($\theta_0 = 67.8^\circ$), enquanto a tensão $T = 498$ N é alcançada para o ângulo de pré-carga posicionado no estágio 2 ($\theta_0 = 94.5^\circ$), de acordo com a Figura 6.14. No primeiro estágio, o ângulo de equilíbrio estático do auto-tensionador foi $\theta_1 = 40.1^\circ$, enquanto no segundo estágio o ângulo foi $\theta_1 = 46.8^\circ$, resultando em maior deformação da correia e conseqüentemente elevando a tensão.

O resultado teórico-experimental das reações F_{3x} e F_{3y} atuantes no mancal da polia 1 em função da tensão na correia T é apresentado na Tabela 7.8, na configuração estática.

As forças de reação no mancal e a posição angular do auto-tensionador previstas pelo modelo estão bem correlacionadas com os resultados experimentais, permitindo validar estati-

Tabela 7.8: Reações atuantes em função da tensão na correia (N)

Teórico			Experimental		
T	F_{3x}	F_{3y}	T	F_{3x}	F_{3y}
226.9	453.9	88.3	227.2	464.7	101.5
497.0	973.2	199.3	499.0	971.4	207.5

camente o modelo de Newton-Euler proposto.

Desta forma, o modelo matemático pode ser utilizado para prever a configuração de equilíbrio em função da posição das polias, do auto-tensionador e dos parâmetros do sistema, permitindo estimar as forças nos tramos e nos mancais.

7.2.1.2 Simulação 1

O objetivo desta simulação é analisar a configuração de equilíbrio estático e a distribuição de esforços no sistema. Para instalar a correia, é aplicado no auto-tensionador um momento externo no sentido horário, enquanto a mesma é posicionada em contato com as polias. O momento do auto-tensionador é aliviado até que a sua polia toque a correia sem esticá-la, mantendo o comprimento indeformado original. Nesta configuração, não há qualquer esforço nos mancais do sistema. O momento do auto-tensionador é então completamente removido, e a configuração de equilíbrio determinada pelo modelo, bem como os esforços nos mancais.

Nesta simulação foi considerado amortecimento da correia e amortecimento viscoso torsional aplicado no auto-tensionador, com valor estimado em $c_{t1}=0.1$ N.m.s/rad.

A Figura 7.30 apresenta a posição angular do auto-tensionador em função do tempo. A posição de instalação da correia indeformada é $\theta_{1i}=44.3^\circ$ (0.774 rad), menor que o ângulo da configuração de equilíbrio estático.

As Figuras 7.31 e 7.32 mostram a resposta temporal das polias 2 e 3. A polia 2 gira no sentido horário devido à deflexão angular do auto-tensionador, enquanto a polia 3 no sentido anti-horário. Como a deformação longitudinal da correia é baixa, os ângulos de equilíbrio são também reduzidos.

As forças de reação atuante nos mancais do auto-tensionador e das polias são mostrados nas Figuras 7.33 a 7.36. É notado que as reações F_{3x} e F_{3y} são as mesmas apresentadas na Tabela 7.8 e que o sentido das forças é corretamente descrito pelo modelo.

Os momentos atuantes no auto-tensionador e na polia 4 são ilustrados nas Figuras 7.37 e 7.38. O momento externo mínimo a ser aplicado no auto-tensionador para instalação

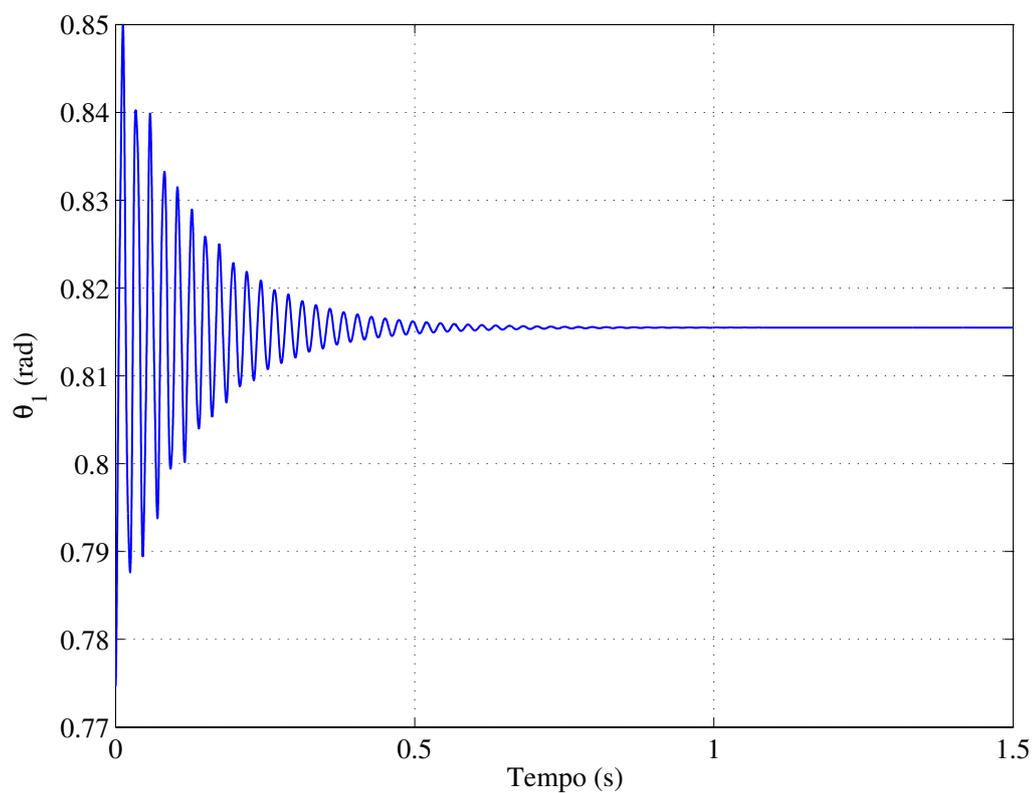


Figura 7.30: Amplitude de deslocamento angular do auto-tensionador (caso amortecido).

da correia no sistema é $M_{ti}=20.6$ N.m.

Na Figura 7.39 é mostrado que todos os tramos convergem para a mesma tensão ($T=498$ N). A configuração estática do sistema é ilustrada esquematicamente na Figura 7.40.

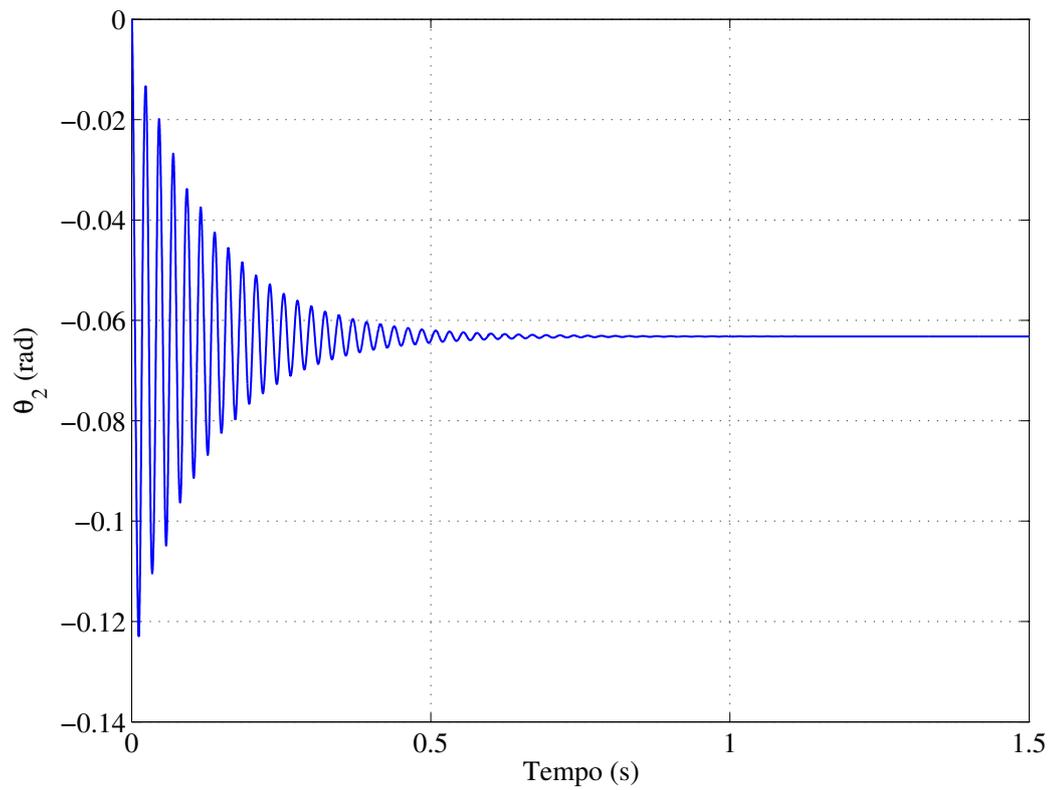


Figura 7.31: Amplitude de deslocamento angular da polia do auto-tensionador (caso amortecido).

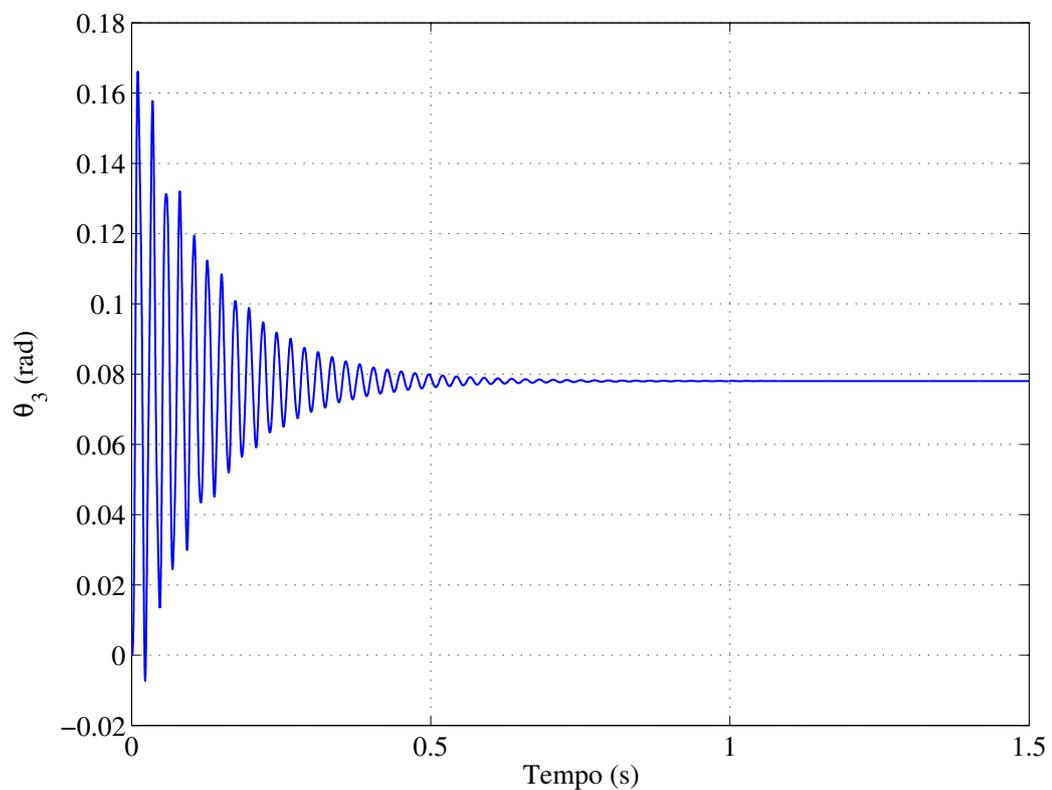


Figura 7.32: Amplitude de deslocamento angular da polia do alternador (caso amortecido).

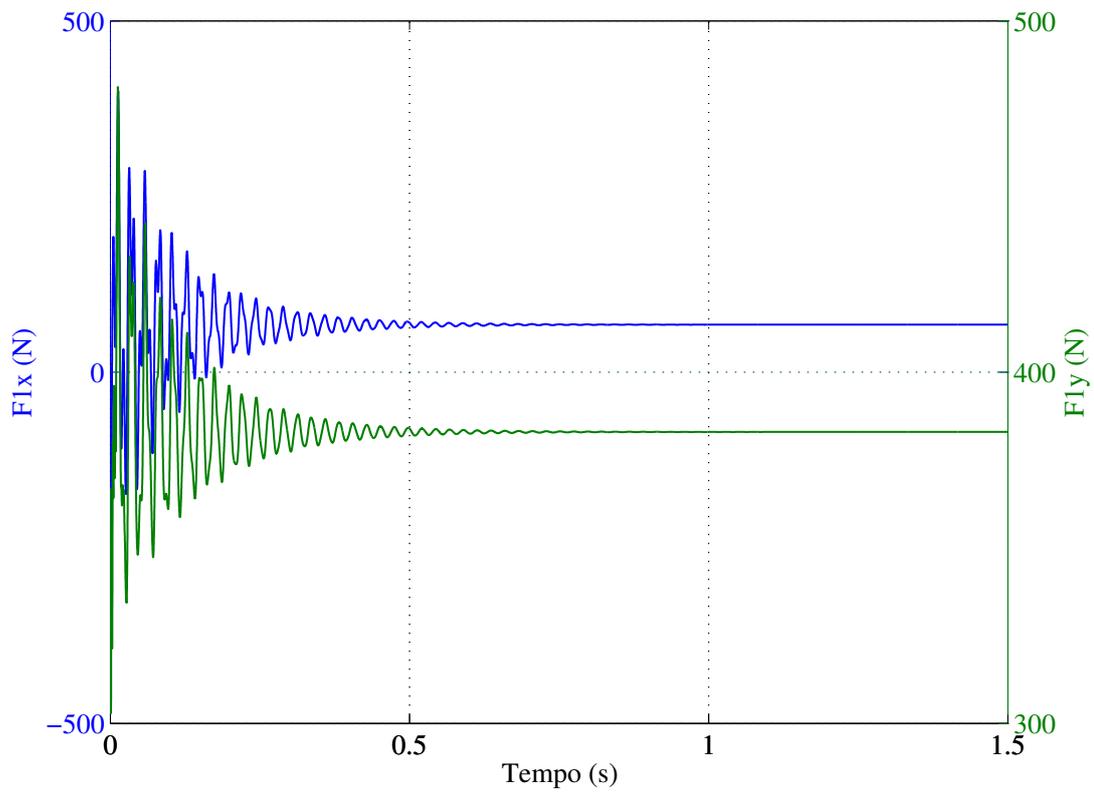


Figura 7.33: Reações dinâmicas no mancal do auto-tensionador.

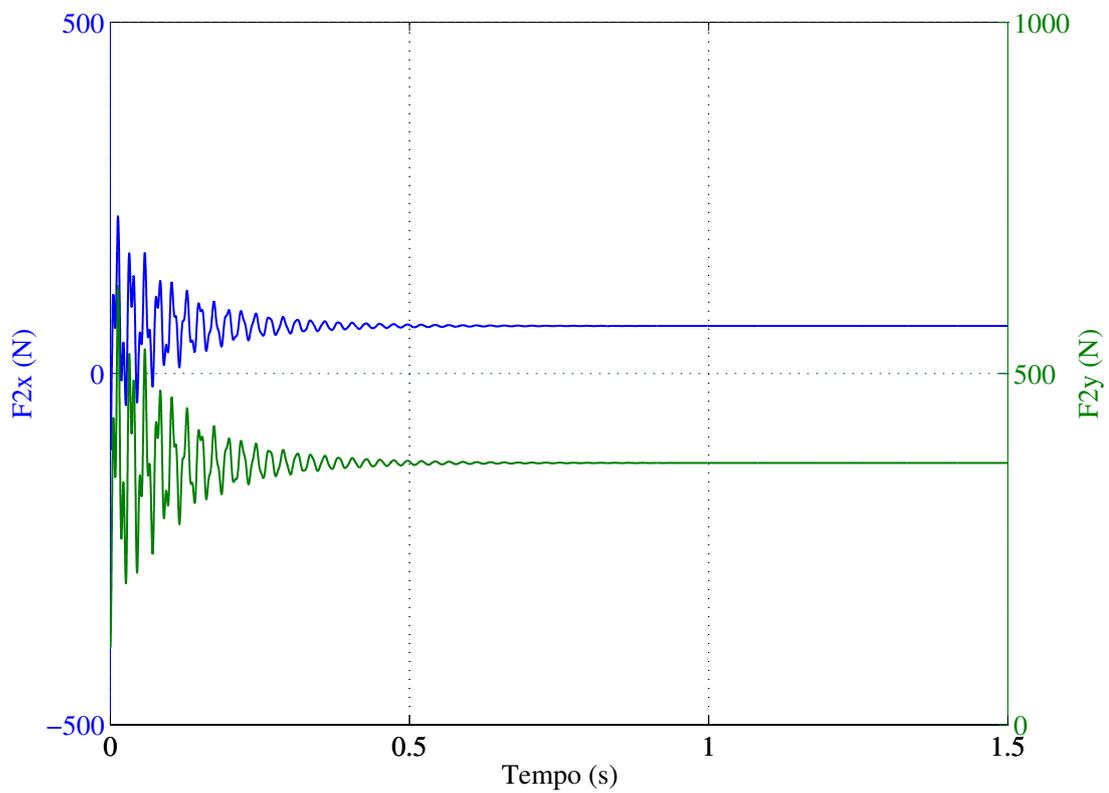


Figura 7.34: Reações dinâmicas no mancal da polia do auto-tensionador.

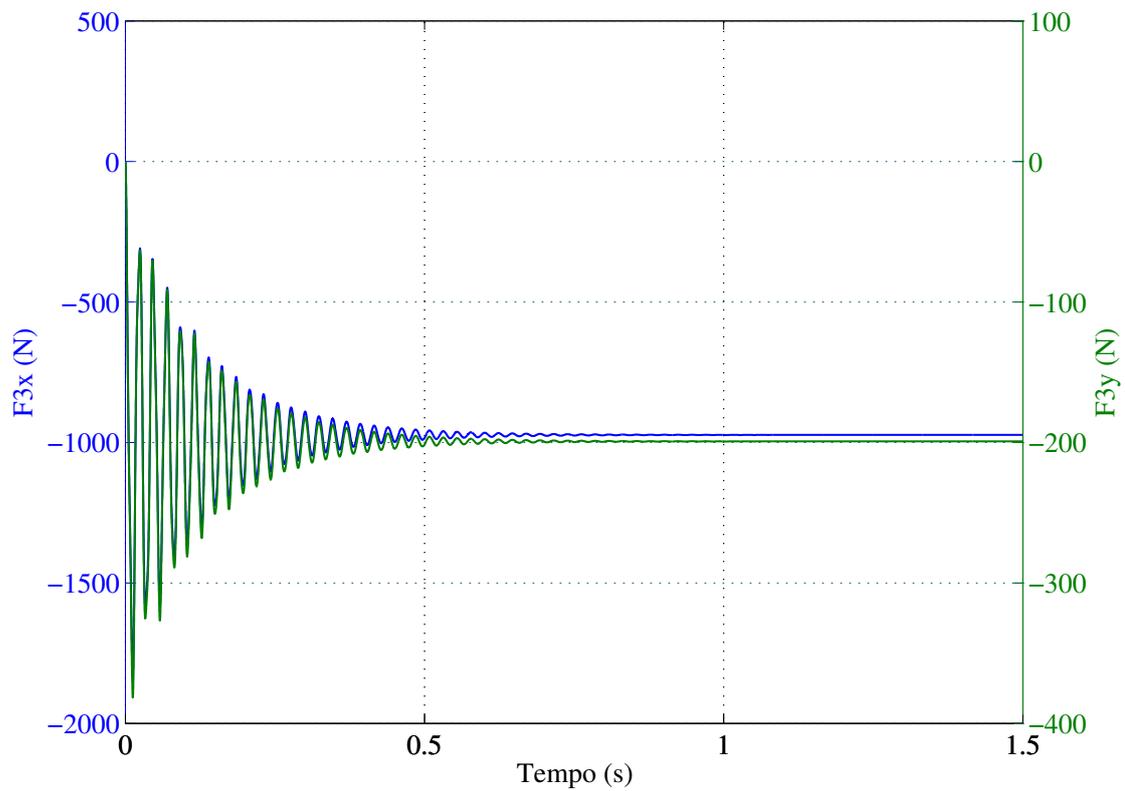


Figura 7.35: Reações dinâmicas no mancal da polia do alternador.

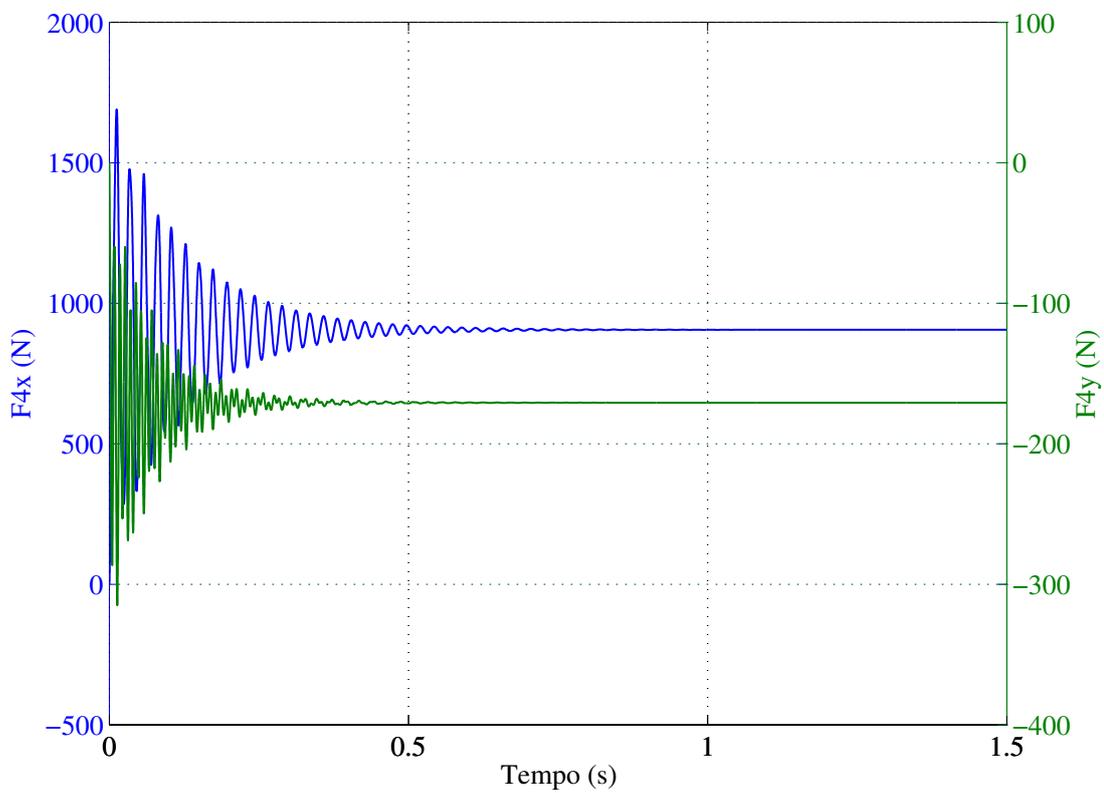


Figura 7.36: Reações dinâmicas no mancal da polia do virabrequim.

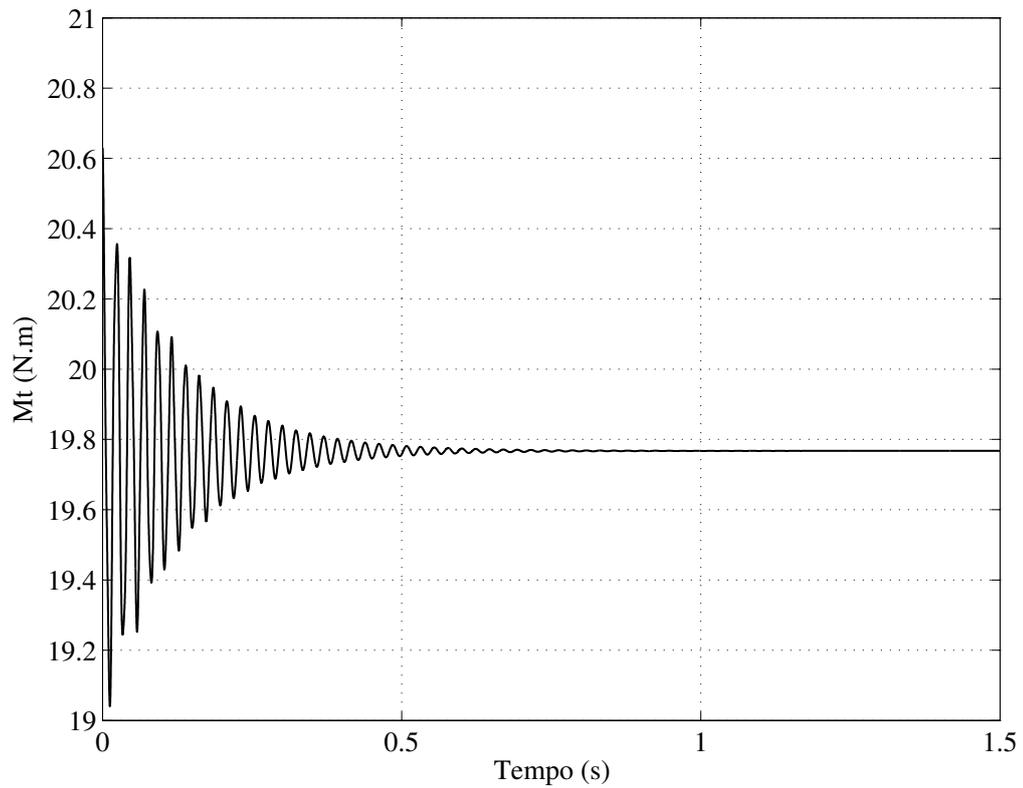


Figura 7.37: Momento devido à mola torcional do auto-tensionador.

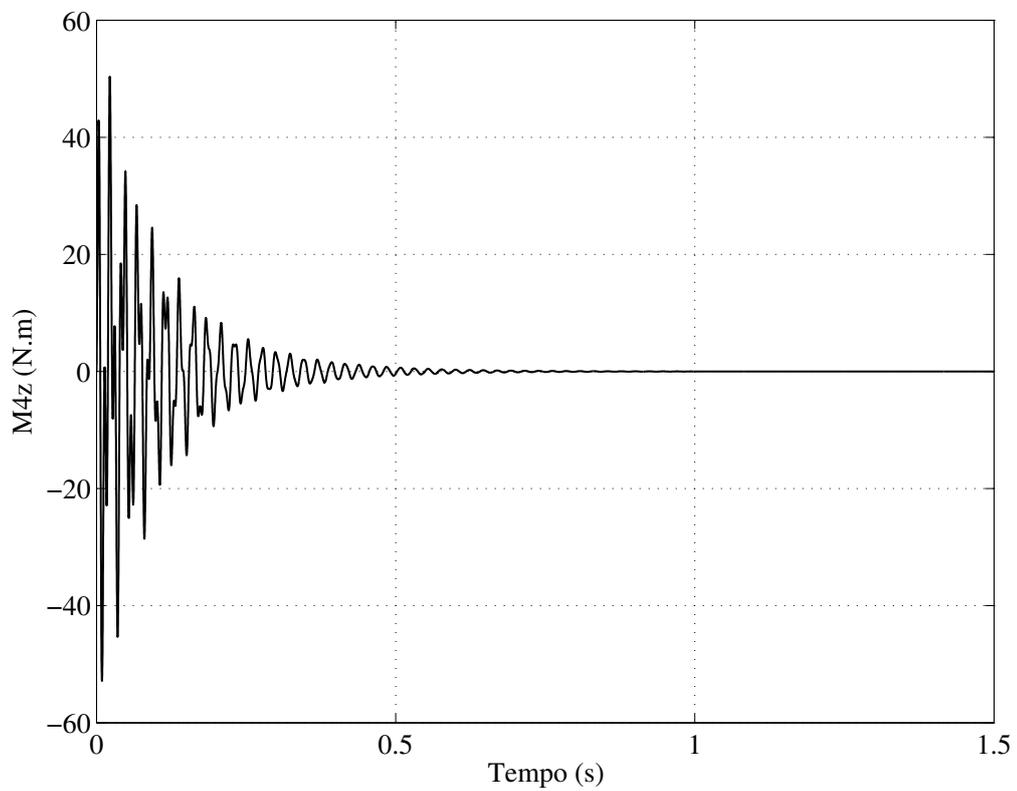


Figura 7.38: Momento de reação atuante na polia do virabrequim.

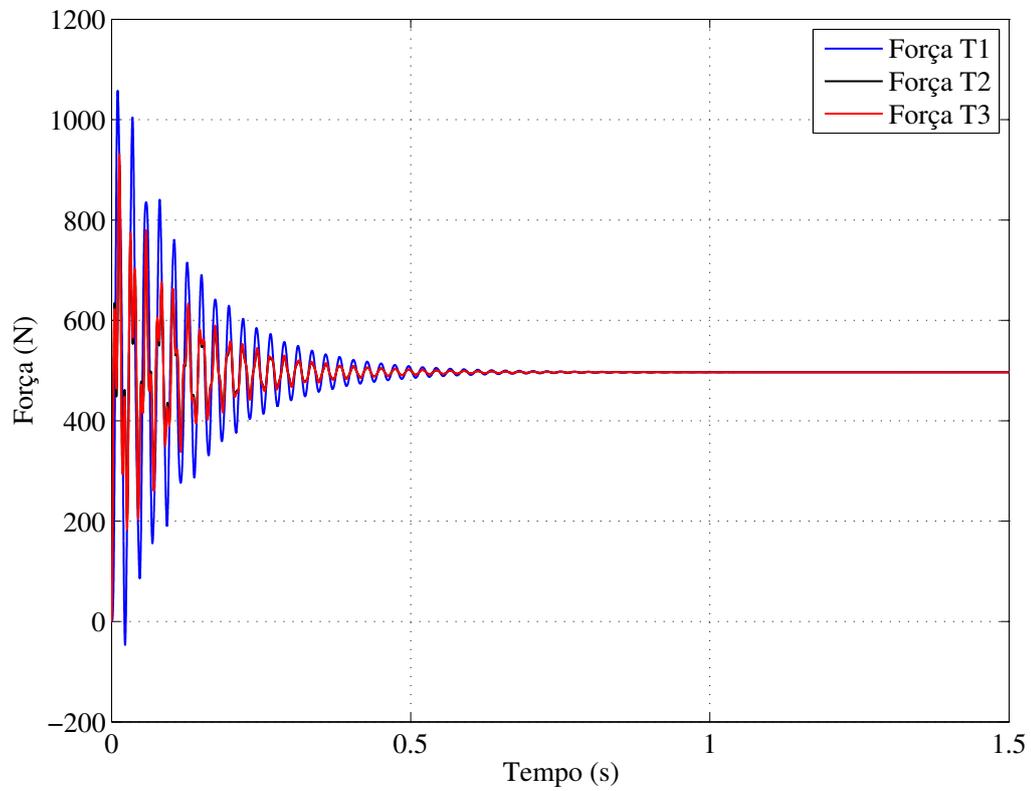


Figura 7.39: Forças atuantes nos tramos da correia.

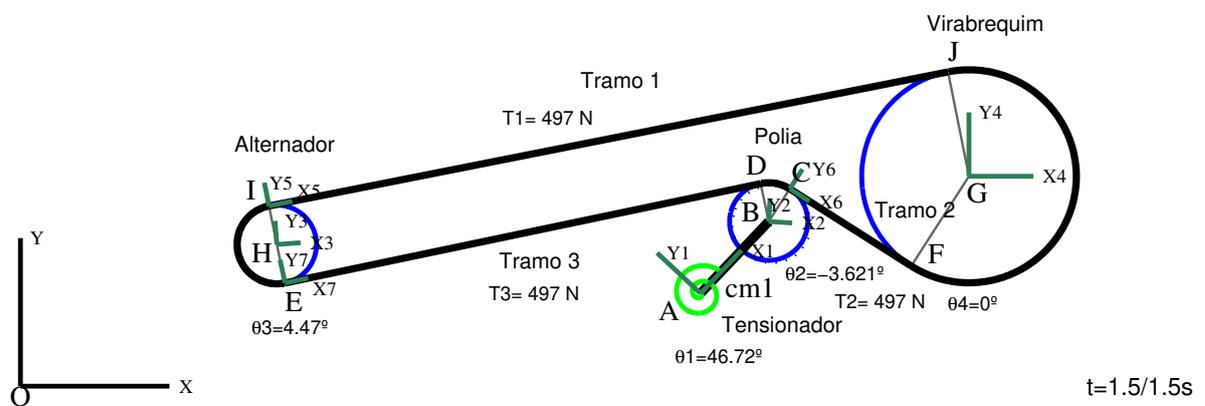


Figura 7.40: Configuração de equilíbrio estático do sistema de transmissão.

7.2.1.3 Simulação 2

Nesta simulação, é analisada a influência de momento constante aplicado no alternador associado à flutuação de velocidade angular atuante na polia do virabrequim.

A rotação prescrita à polia é $\dot{\theta}_4 = -600$ rpm (62.8 rad/s), sujeita à amplitude de flutuação $\Delta\omega = 41.9$ rpm (4.4 rad/s) com frequência correspondente à 2x a rotação, conforme Figura 7.41. O momento constante aplicado no alternador é $M_{3m} = 30$ N.m, e atua em pulsos nos intervalos de 1 a 3 s e depois de 5 a 7 s, como mostrado na Figura 7.42.

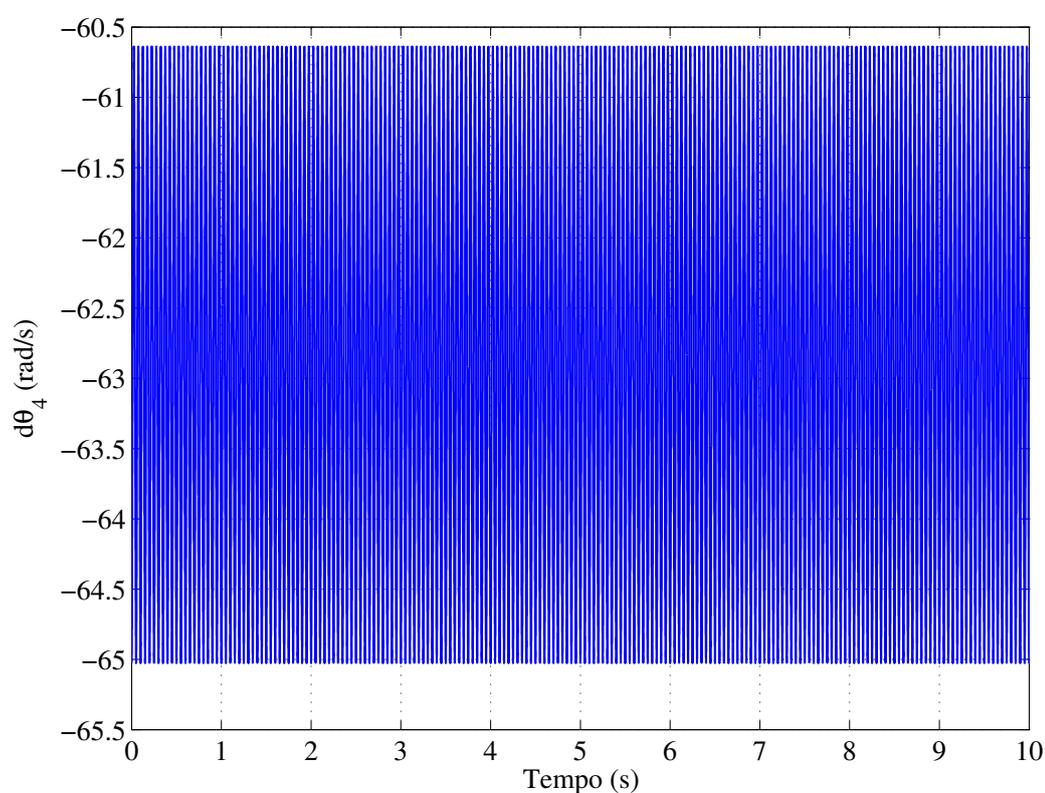


Figura 7.41: Velocidade angular da polia do virabrequim, com flutuação.

O auto-tensionador está sujeito à vibração na mesma frequência da flutuação de velocidade, como ilustrado na Figura 7.43. O dispositivo sofre deflexão angular a cada pulso de momento. Como o momento M_{3m} é positivo, o tramo T_1 estica enquanto os tramos T_2 e T_3 se afrouxam, fazendo com que o auto-tensionador aumente o ângulo de inclinação.

Pode ser notado pelas Figuras 7.44 a 7.46 que a flutuação de velocidade angular presente na polia do virabrequim se transmite às demais polias do sistema, sendo mais expressivas nas polias do auto-tensionador e do alternador, uma vez que não foi considerado amortecimento torcional. O amortecimento presente no auto-tensionador contribui para atenuar a amplitude de vibração, minimizando os efeitos de flutuação de velocidade.

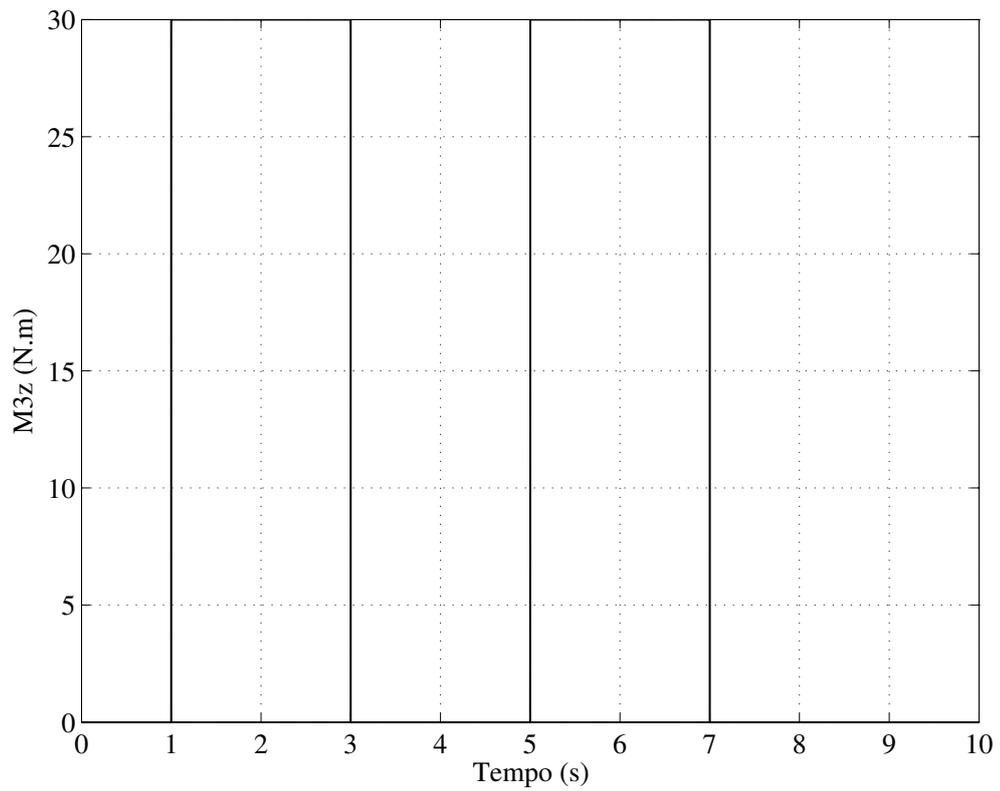


Figura 7.42: Momento externo aplicado na polia do alternador.

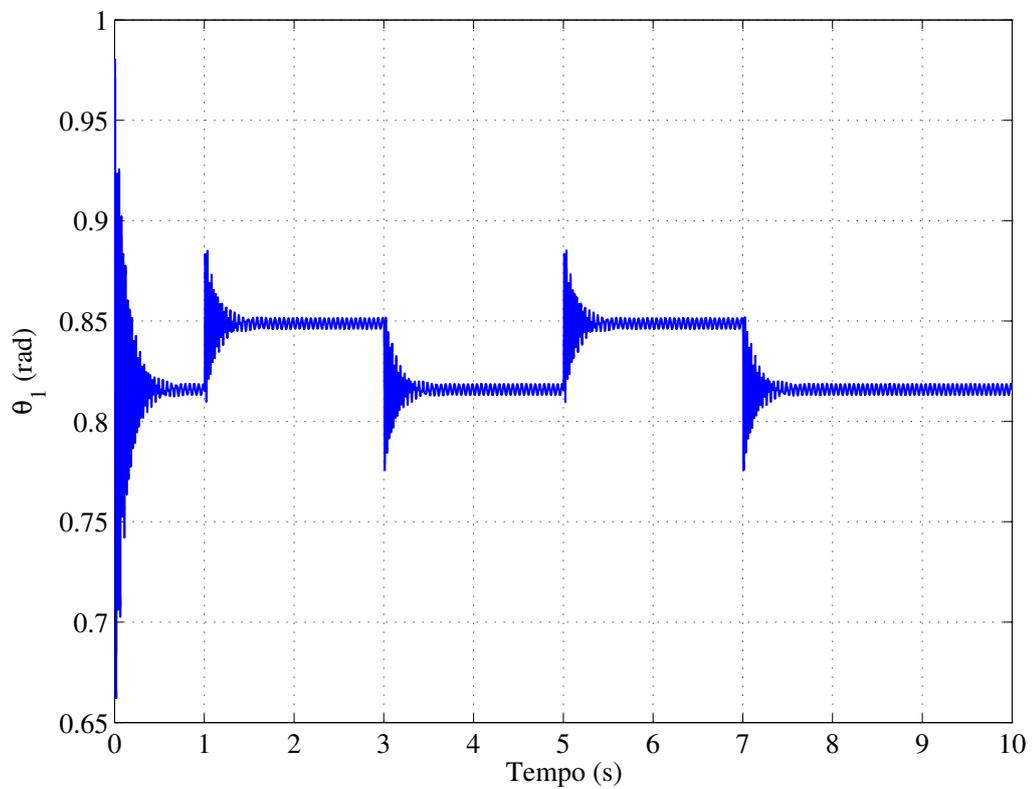


Figura 7.43: Amplitude de deslocamento angular amortecido do auto-tensionador.

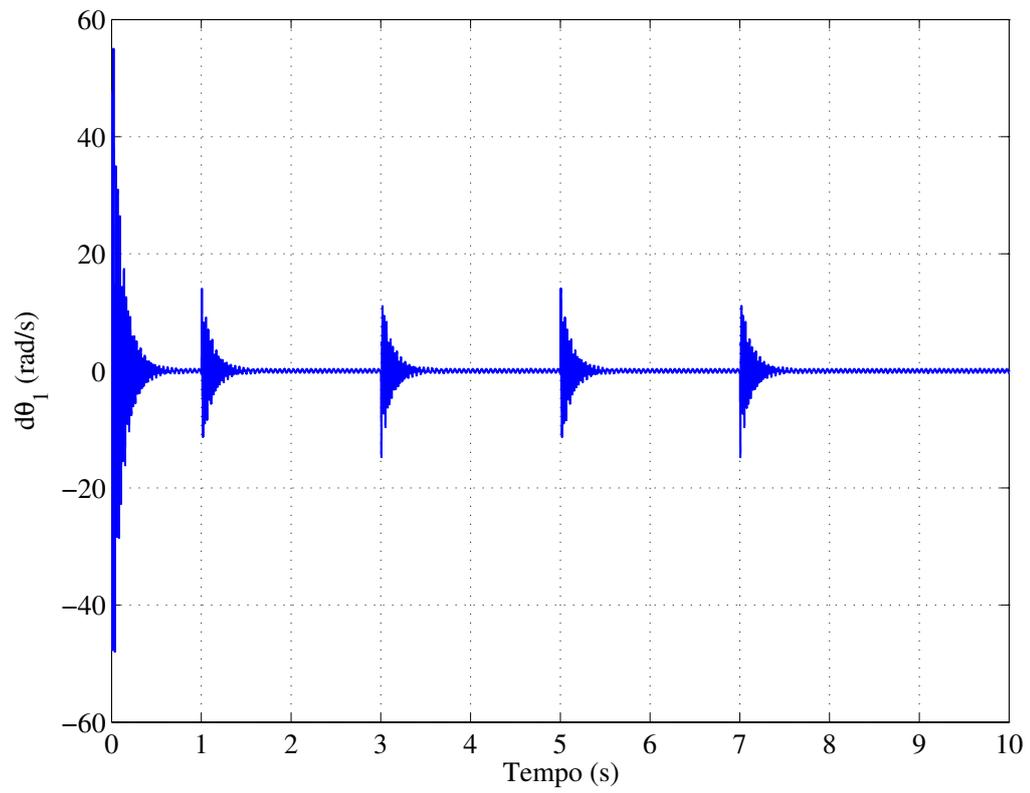


Figura 7.44: Velocidade angular do auto-tensionador.

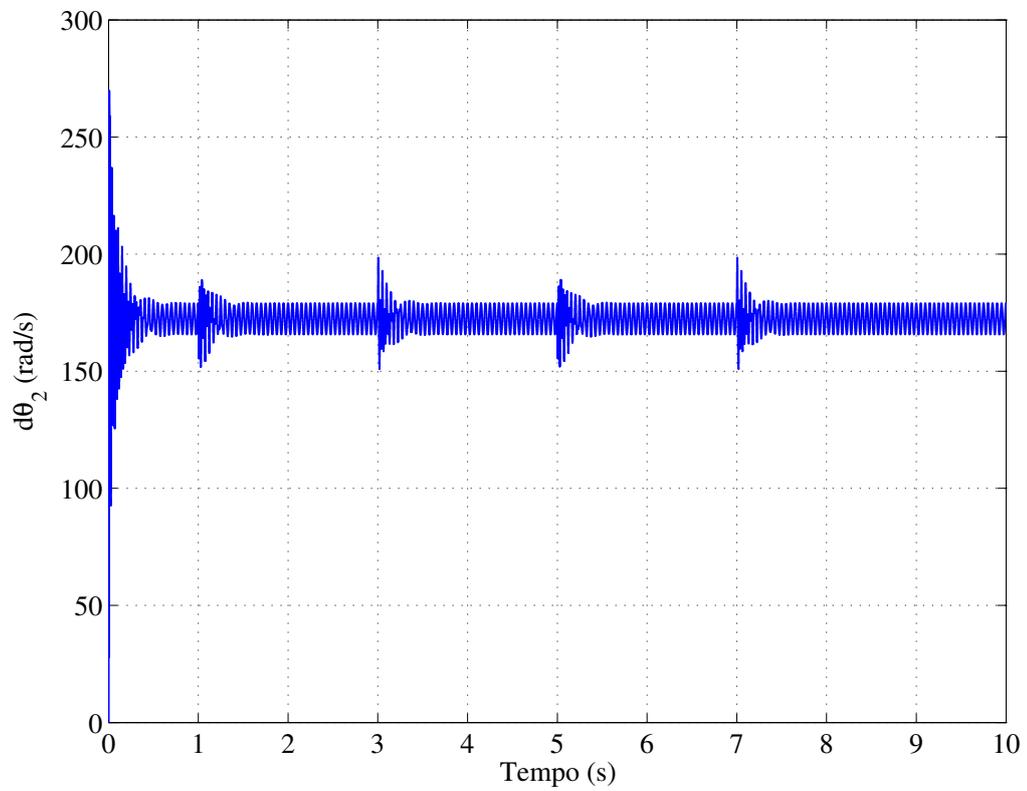


Figura 7.45: Velocidade angular da polia do auto-tensionador.

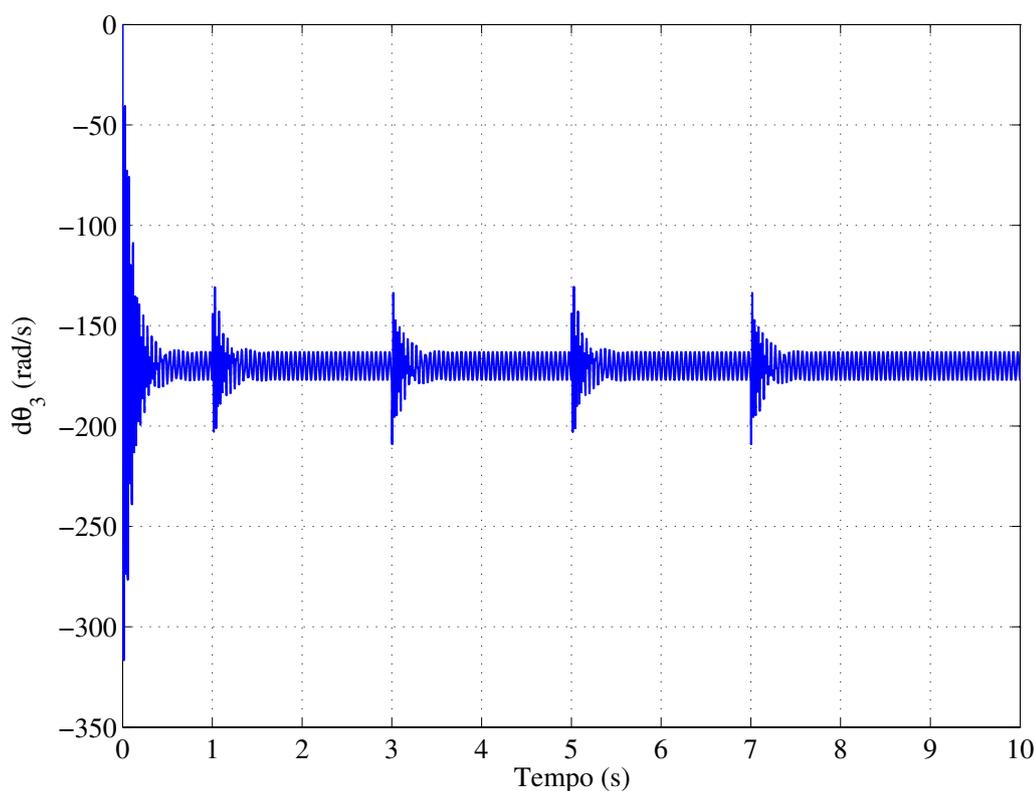


Figura 7.46: Velocidade angular da polia do alternador.

As Figuras 7.47 a 7.50 revelam que a flutuação de velocidade se transmite também aos mancais de todo o sistema. Pode ser notado que os pulsos de momento são sentidos por cada um dos mancais.

O momento exercido pela mola torcional do auto-tensionador e o momento aplicado pela polia do virabrequim para a prescrição da velocidade são mostrados respectivamente nas Figuras 7.51 e 7.52. A demanda de torque do virabrequim aumenta proporcionalmente quando o momento no alternador é acionado.

As tensões nos tramos da correia são apresentadas na Figura 7.53. Pode ser observado que o tramo T_1 , que não está em contato com o auto-tensionador, sofre o maior aumento de tensão devido ao momento aplicado no alternador. Deve ser ressaltado que a amplitude de flutuação de tensão neste tramo é maior que nos tramos T_2 e T_3 , que estão continuamente em contato com o auto-tensionador. O dispositivo atua mantendo o nível de tensão original e reduzindo a amplitude de flutuação, como mostrado em detalhe na Figura 7.54.

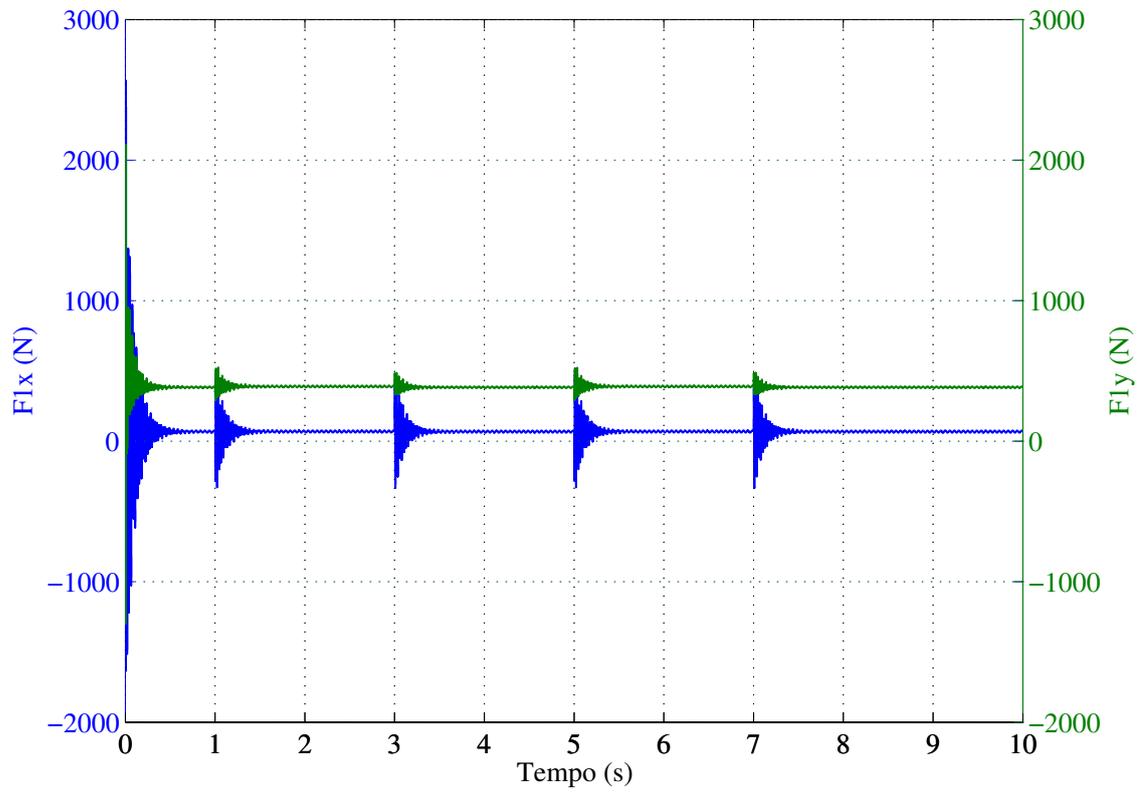


Figura 7.47: Reações dinâmicas no mancal do auto-tensionador.

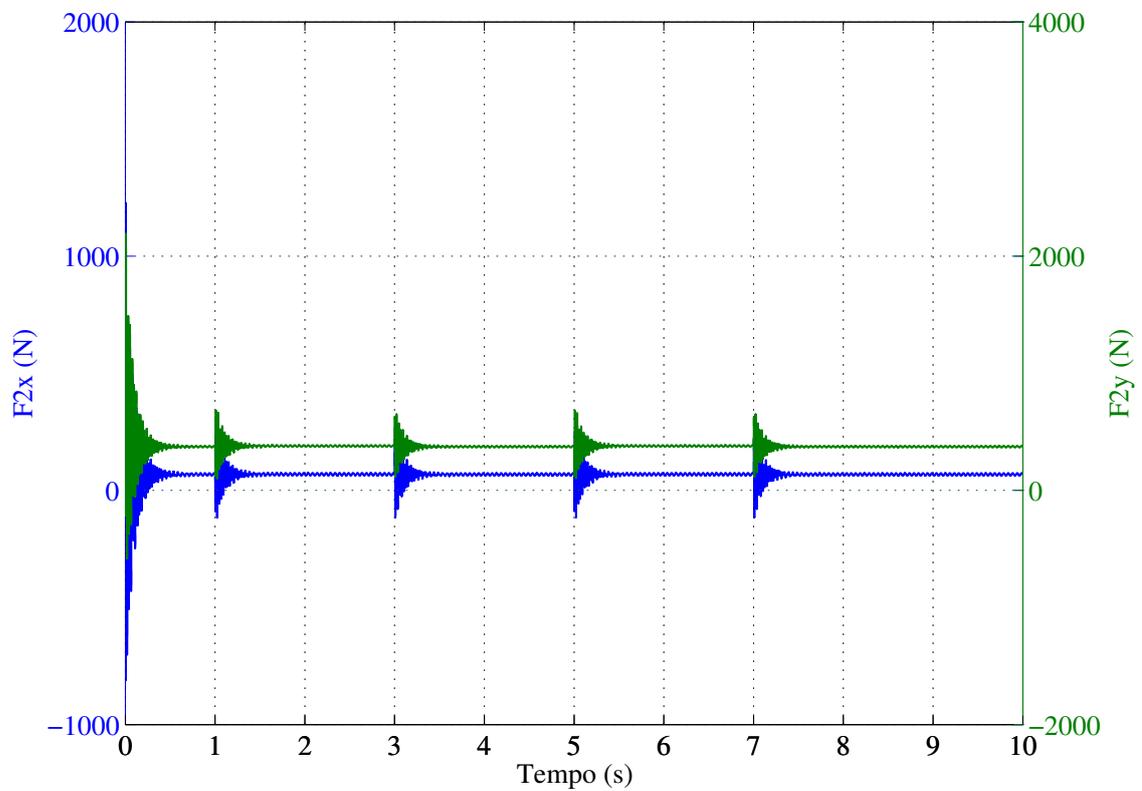


Figura 7.48: Reações dinâmicas no mancal da polia do auto-tensionador.

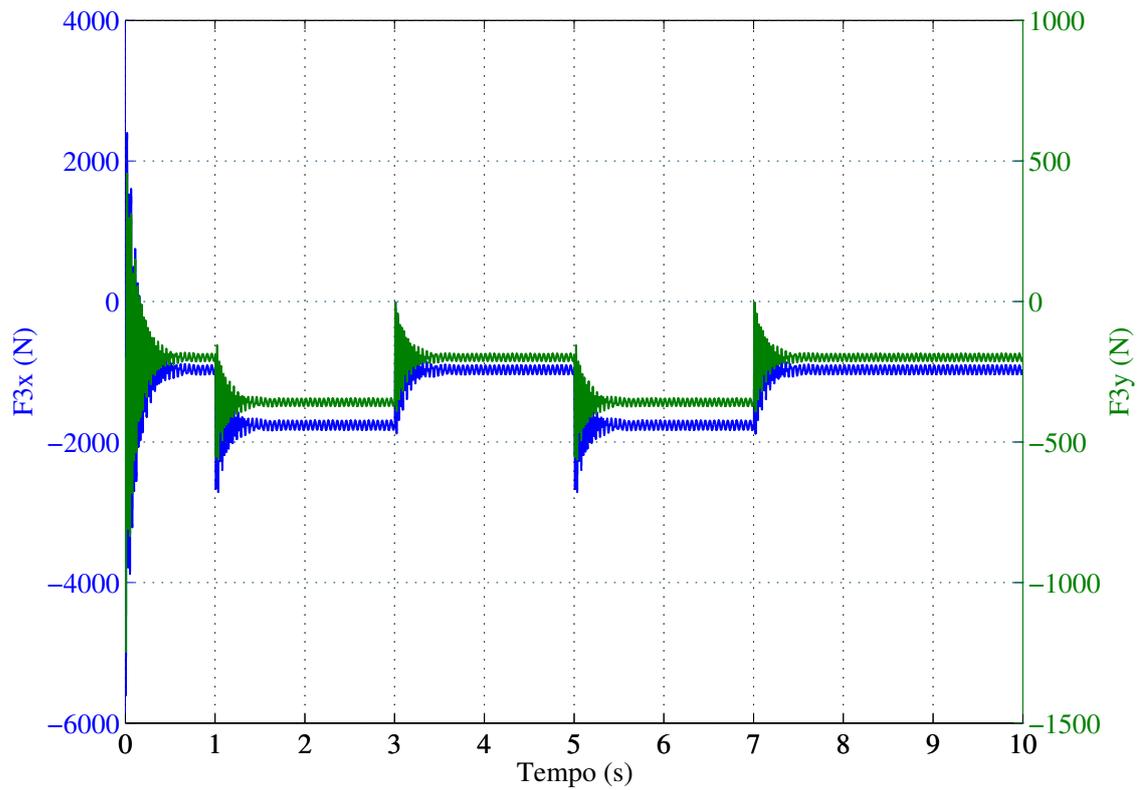


Figura 7.49: Reações dinâmicas no mancal da polia do alternador.

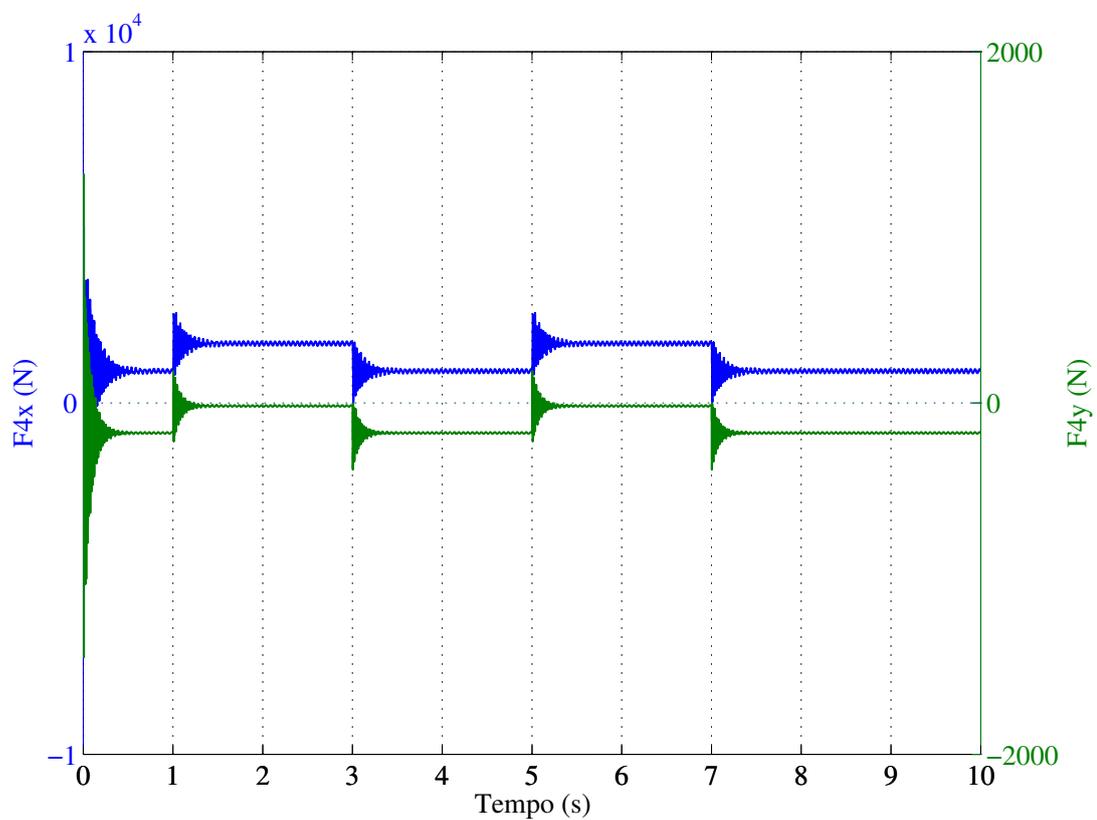


Figura 7.50: Reações dinâmicas no mancal da polia do virabrequim.

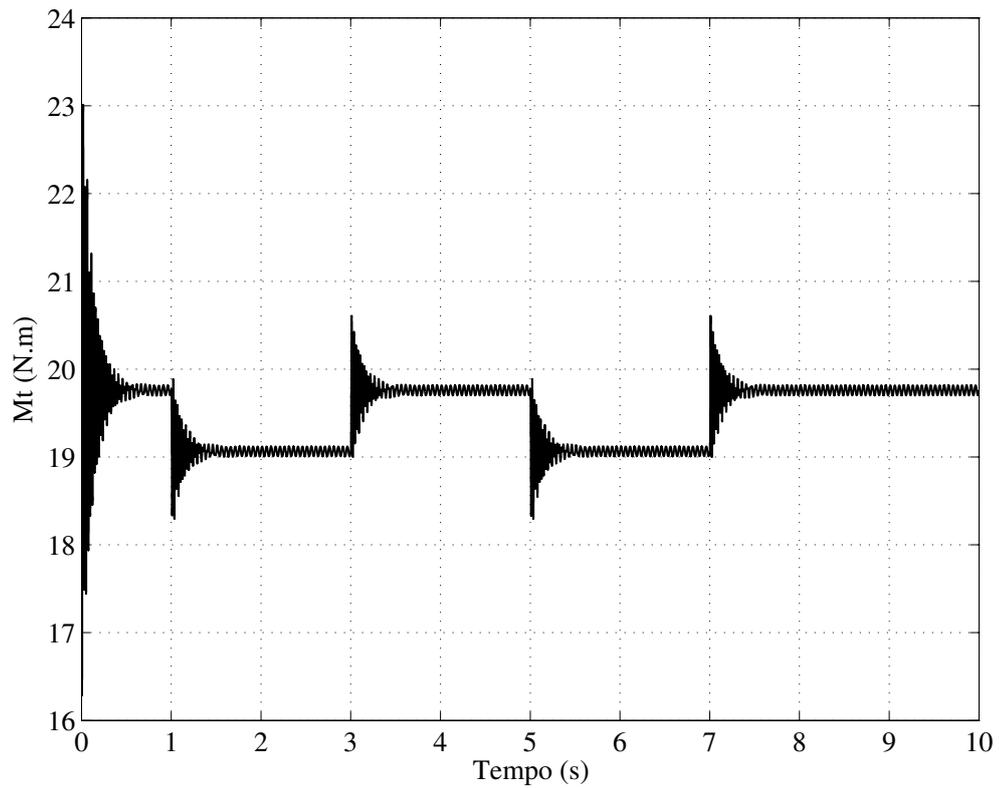


Figura 7.51: Momento devido à mola torcional do auto-tensionador.

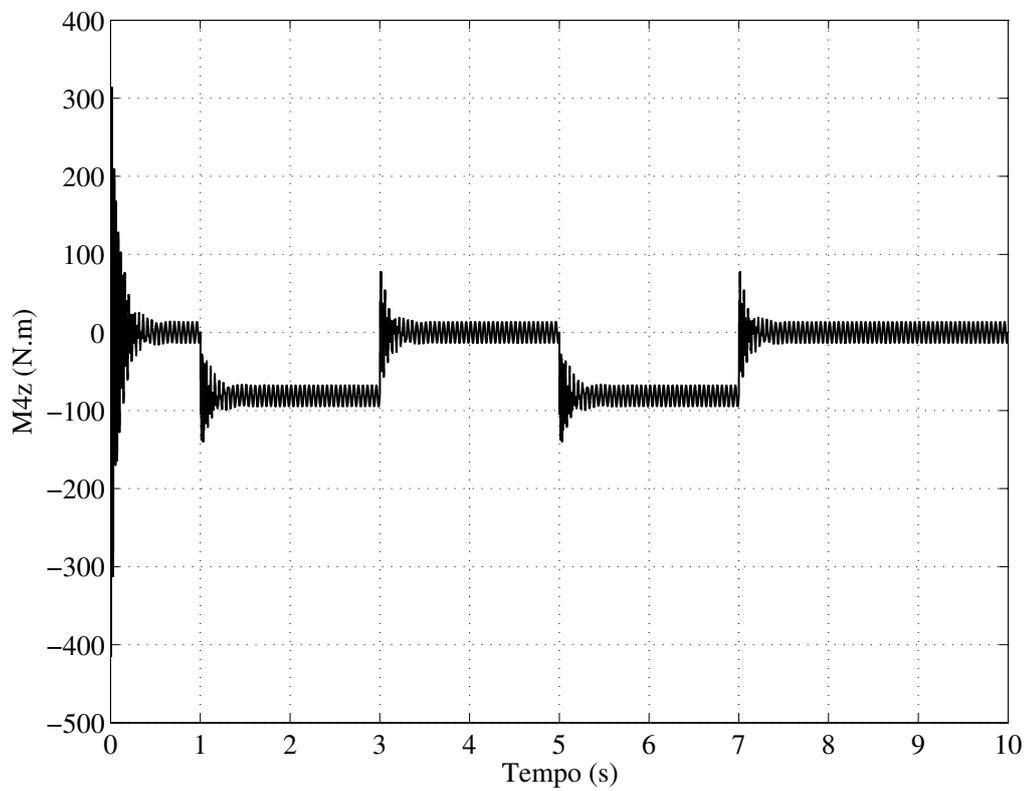


Figura 7.52: Momento de reação atuante na polia do virabrequim.

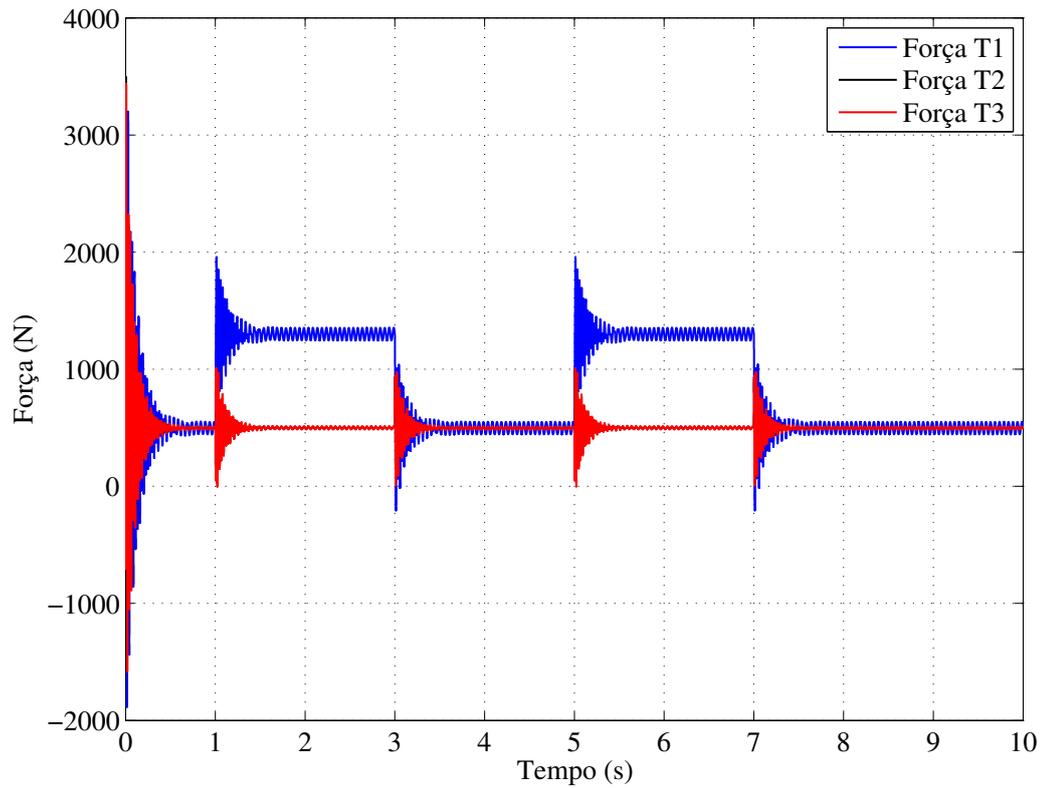
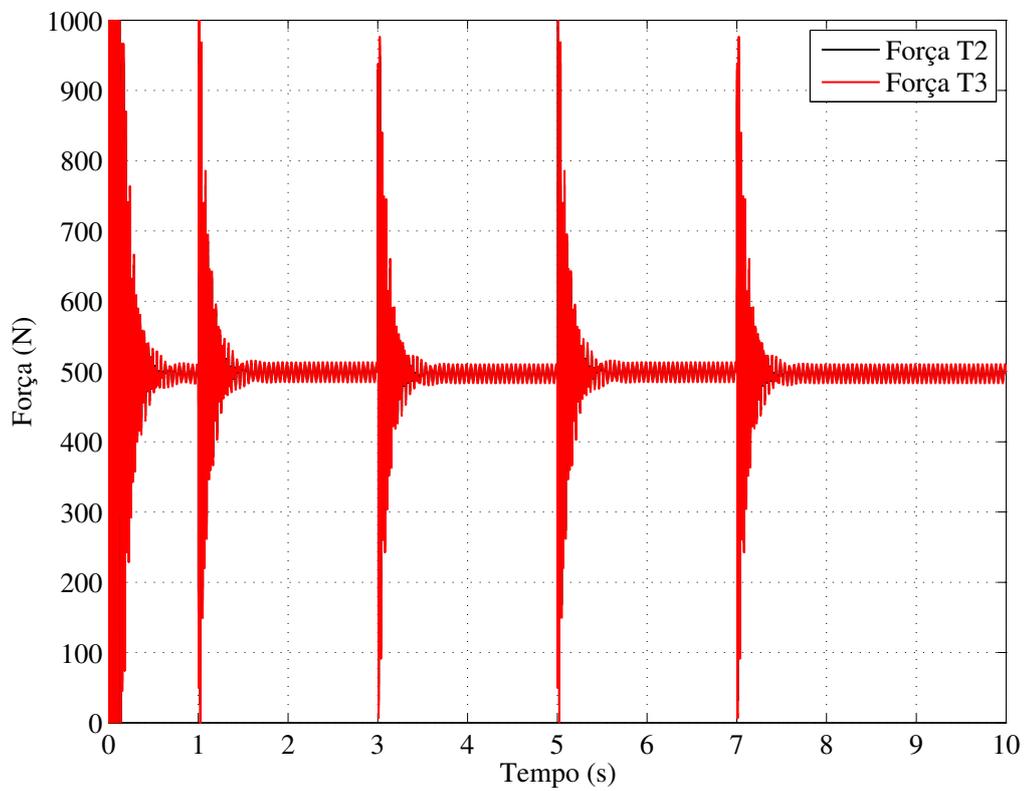


Figura 7.53: Forças atuantes nos tramos da correia.

Figura 7.54: Forças atuantes nos tramos T_2 e T_3 da correia, em detalhe.

7.2.1.4 Simulação 3

Nesta análise numérica é investigado o efeito combinado de torque médio e alternado no alternador, bem como o efeito centrífugo na resposta dinâmica do sistema.

A aceleração prescrita à polia do virabrequim foi $\ddot{\theta}_4=100 \text{ rad/s}^2$, com velocidade inicial nula. A flutuação de velocidade angular não foi considerada nesta simulação. O momento aplicado pelo alternador tem componentes média $M_{3m}=20 \text{ N.m}$ e alternada $M_{3a}=5 \text{ N.m}$ com frequência $f_3=3 \text{ Hz}$, como mostrado na Figura 7.55. A duração da carga torcional ocorre entre os instantes de 1 a 5 s.

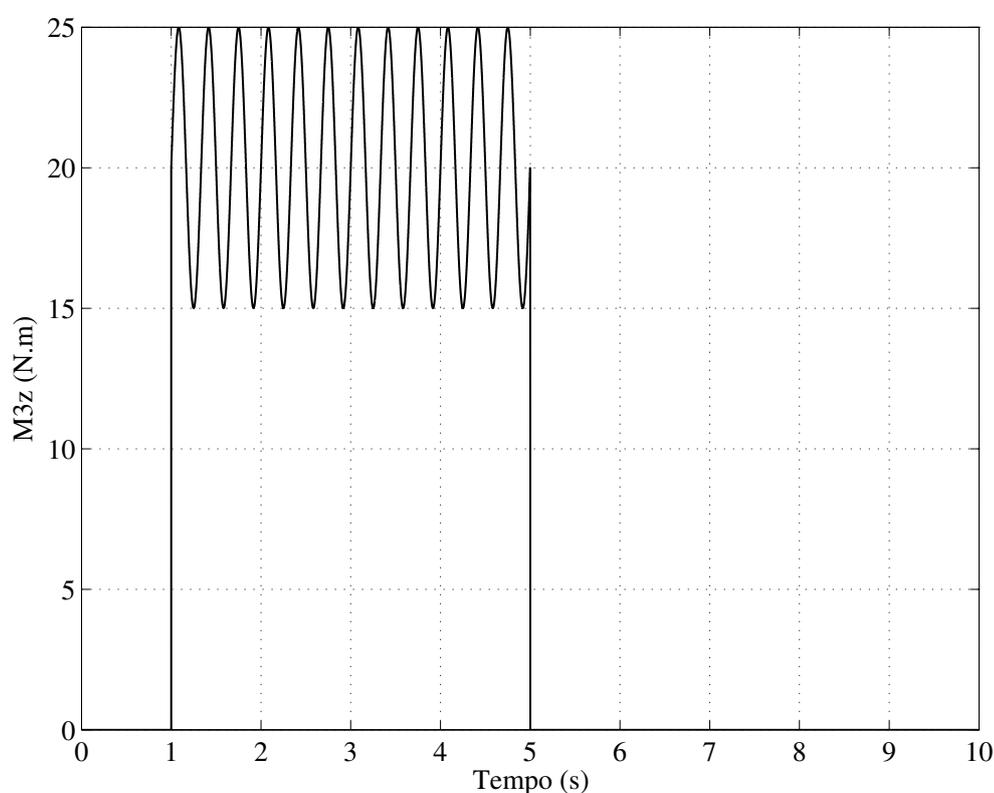


Figura 7.55: Momento externo aplicado na polia do alternador.

A Figura 7.56 apresenta a posição angular do auto-tensionador em função do tempo. O dispositivo sofre deflexão na presença do momento aplicado pelo alternador, vibrando em torno da nova posição de equilíbrio com a mesma frequência de excitação, e retorna à posição quando o momento é removido. No entanto, devido ao efeito centrífugo da correia, a posição angular aumenta continuamente, uma vez que a correia se deforma elasticamente com o incremento da tensão.

As Figuras 7.57 a 7.60 mostram as reações dinâmicas atuantes nos mancais do sistema. É observado que todos os esforços dinâmicos são afetados pelo momento do alternador e pelo

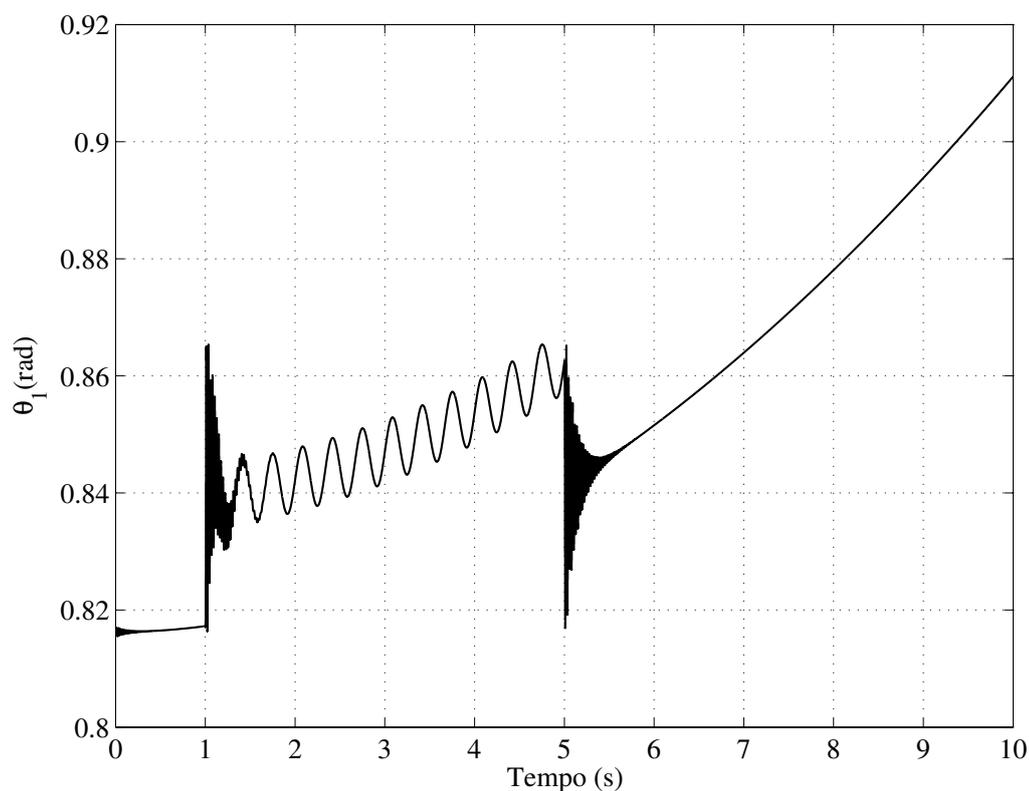


Figura 7.56: Amplitude de deslocamento angular do auto-tensionador (caso amortecido).

efeito centrífugo da correia, em especial as reações do próprio mancal do alternador e do virabrequim. Estas condições são críticas e devem ser consideradas na definição de projeto.

Os momentos aplicados pela mola do auto-tensionador e pelo virabrequim são apresentados nas Figuras 7.61 e 7.62. Como a correia se deforma com o aumento da rotação, o momento aplicado pelo auto-tensionador é proporcionalmente decrescente. A demanda de momento no virabrequim para a prescrição do movimento é também afetada em função da carga rotacional atuante no alternador.

As forças nos tramos da correia são mostradas na Figura 7.63. O tramo T_1 é solicitado dinamicamente com a mesma frequência de excitação da carga rotacional aplicada no alternador, com alta amplitude de tensão. Os tramos T_2 e T_3 , que estão em contato com o auto-tensionador, apresentam pouca variação de tensão, como mostrado em detalhe na Figura 7.64. Pode ser notado que o efeito centrífugo da correia aumenta a tensão nos tramos, diferentemente do que ocorre no sistema com polias de centros fixos, uma vez que nesta configuração a correia é livre para se deformar. Este resultado foi também reportado por Beikmann (1992) e Mote Jr. (1965), que definem uma rigidez de suporte equivalente para o sistema.

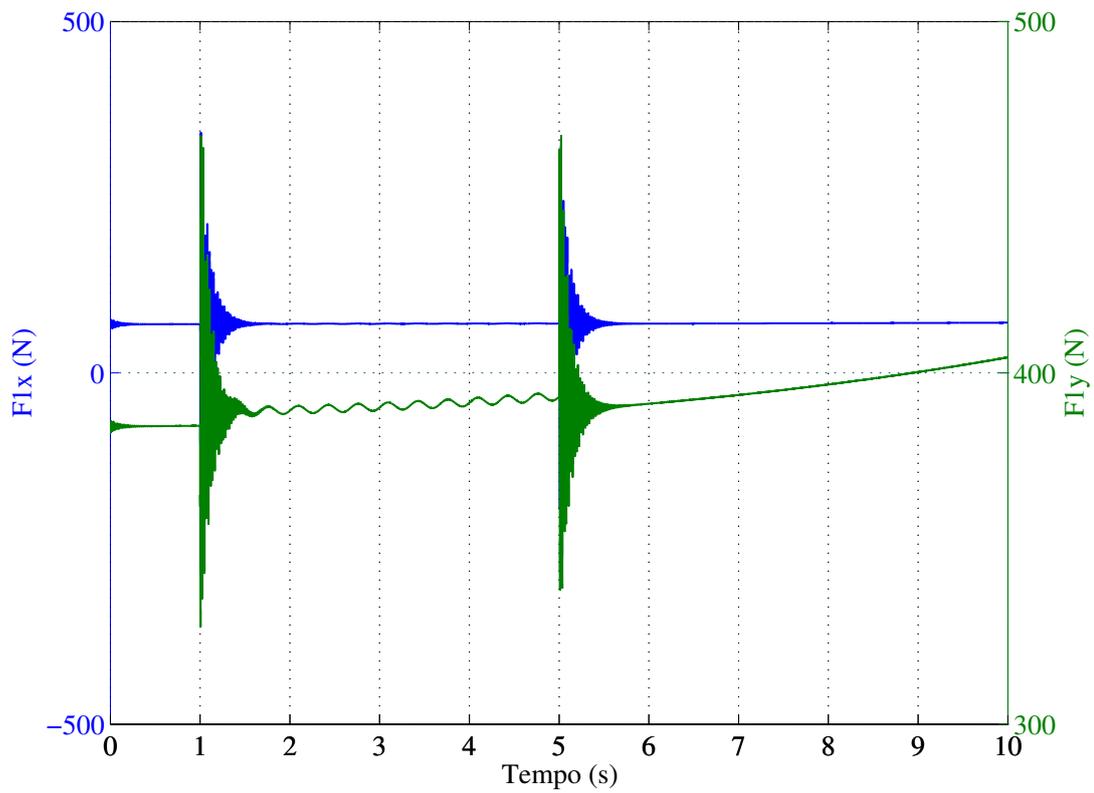


Figura 7.57: Reações dinâmicas no mancal do auto-tensionador.

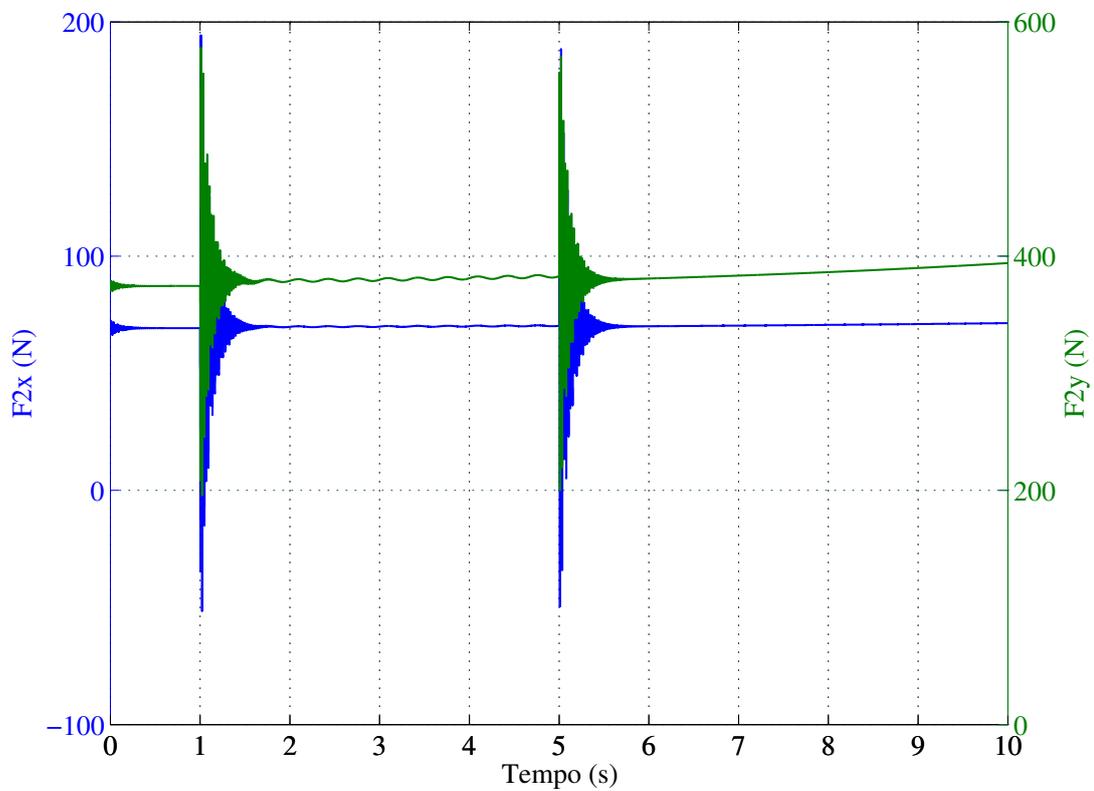


Figura 7.58: Reações dinâmicas no mancal da polia do auto-tensionador.

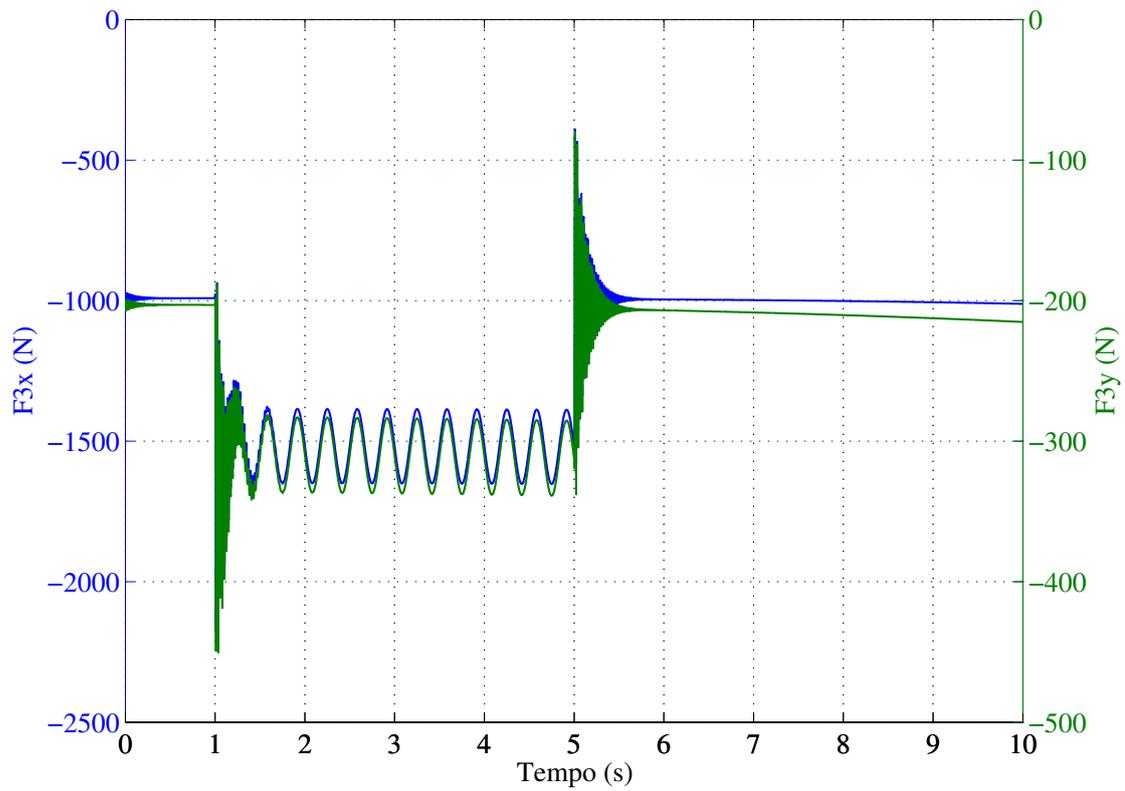


Figura 7.59: Reações dinâmicas no mancal da polia do alternador.

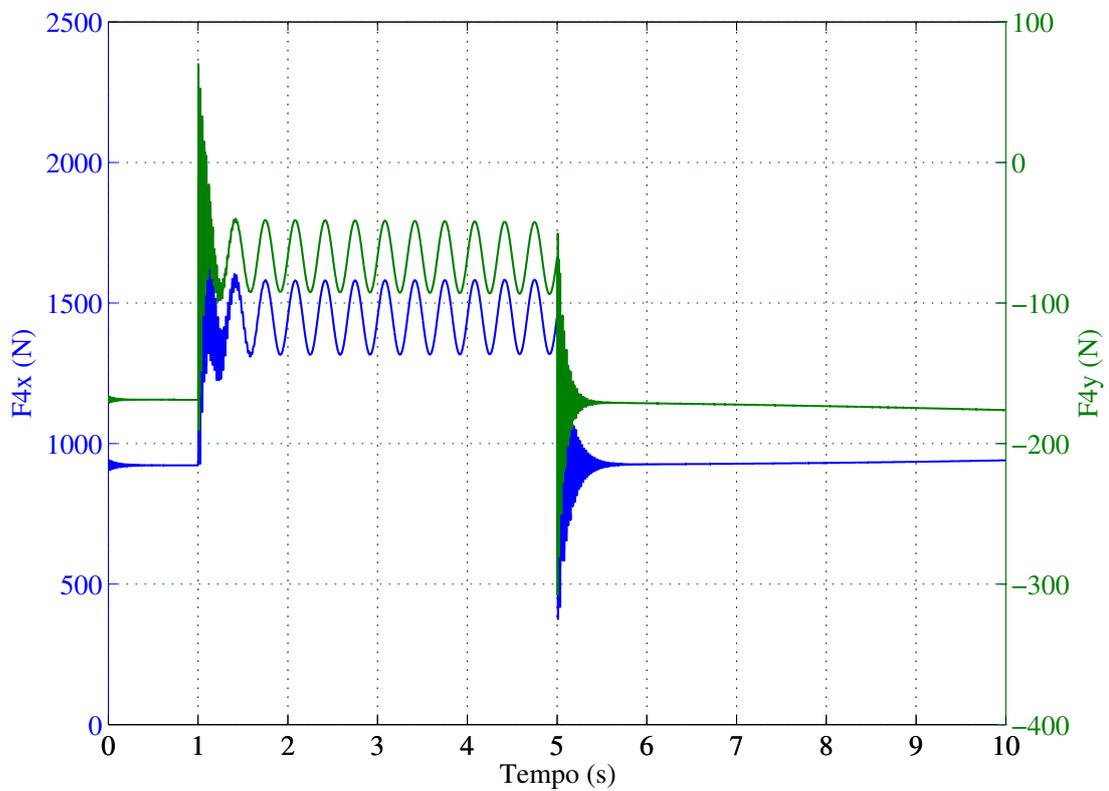


Figura 7.60: Reações dinâmicas no mancal da polia do virabrequim.

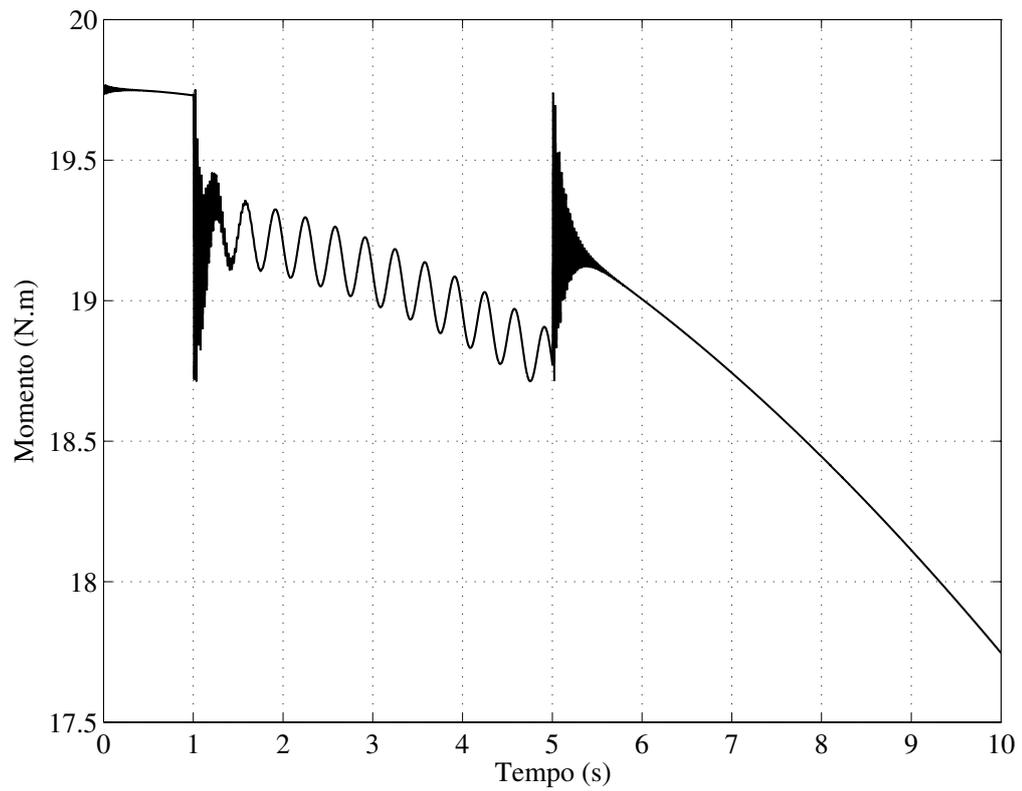


Figura 7.61: Momento devido à mola torcional do auto-tensionador.

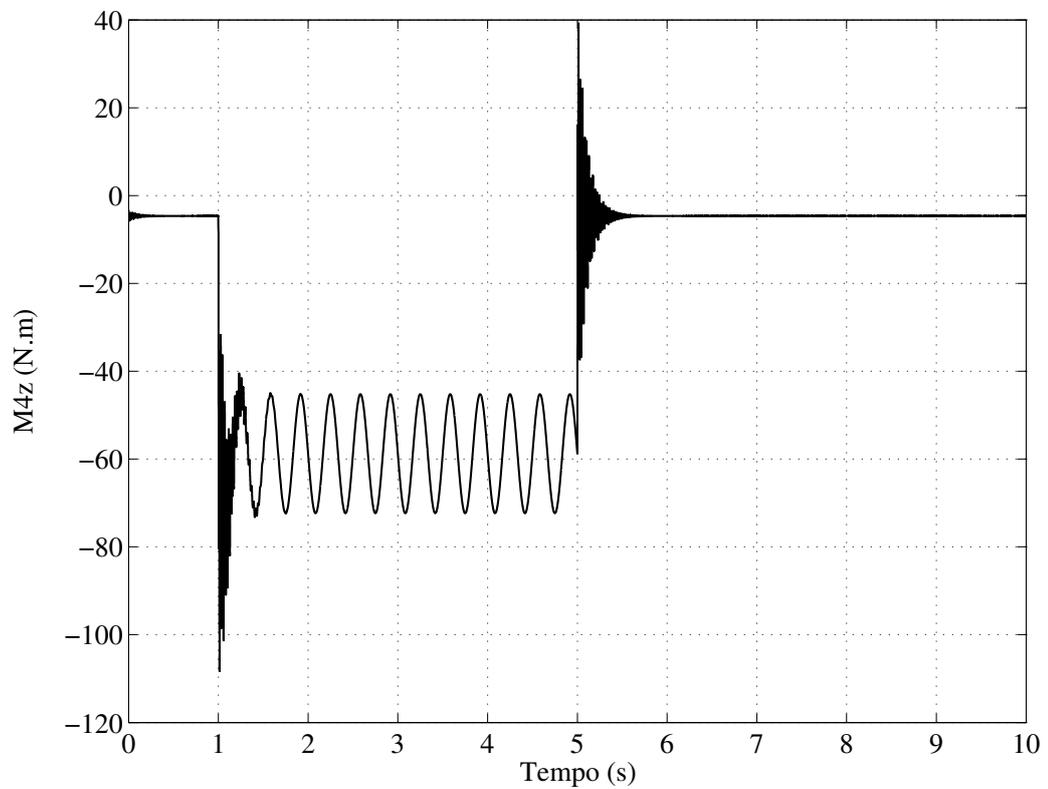


Figura 7.62: Momento de reação atuante na polia do virabrequim.

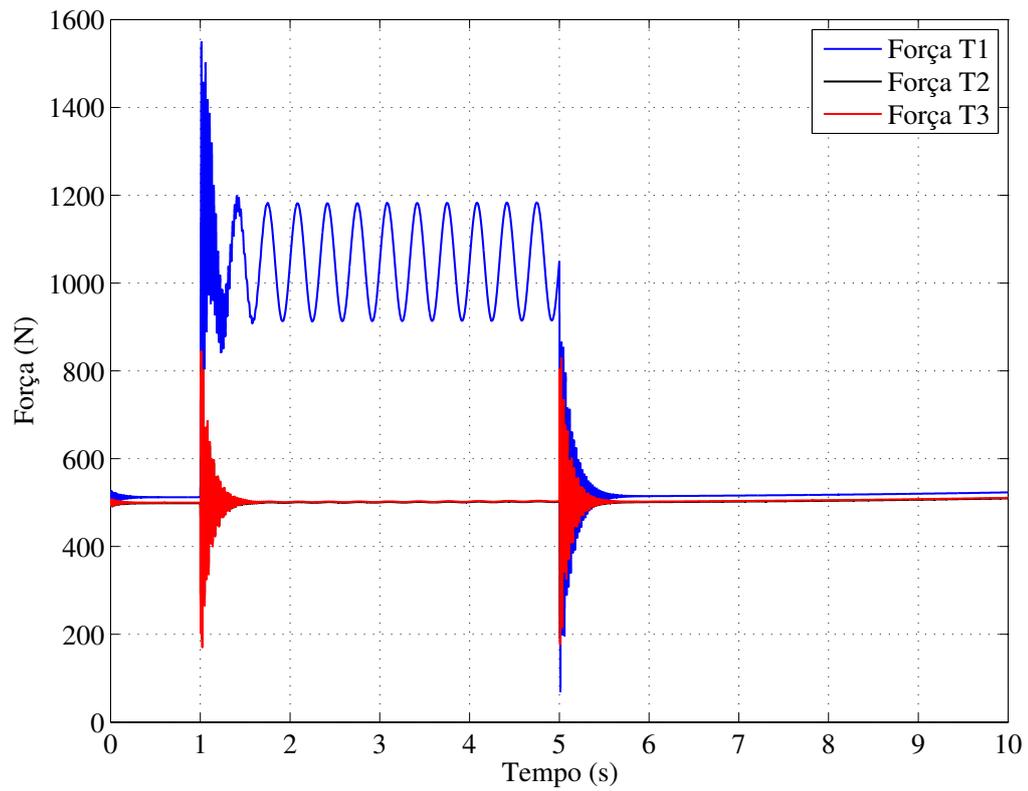
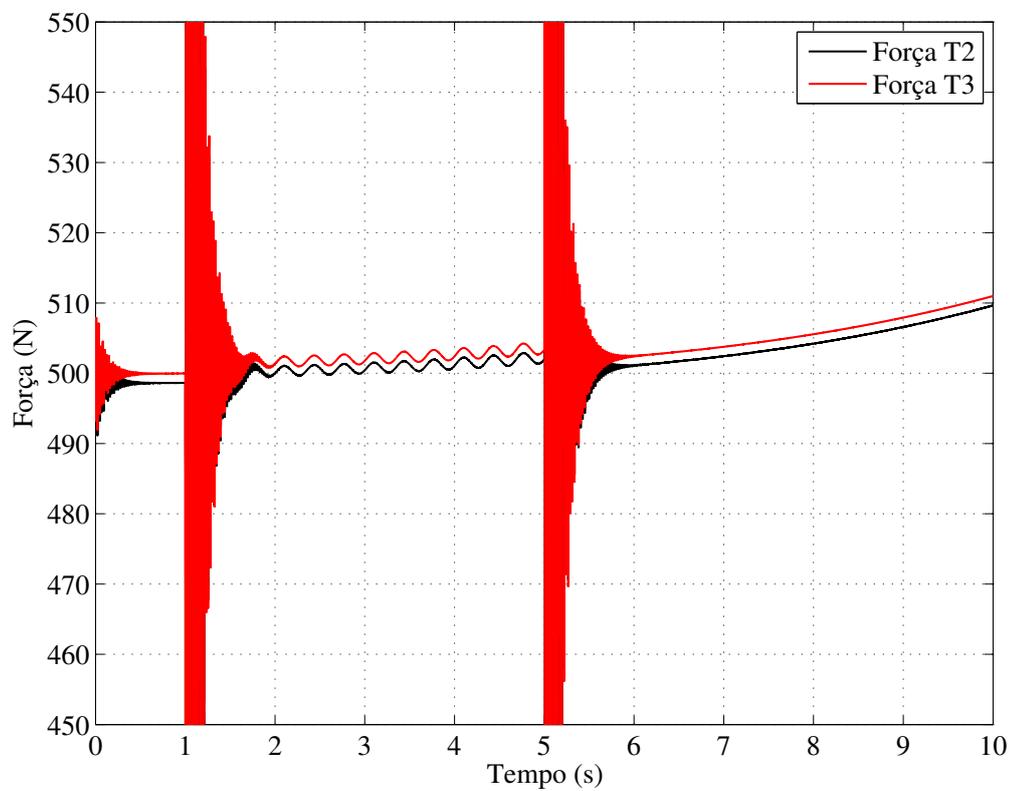


Figura 7.63: Forças atuantes nos tramos da correia.

Figura 7.64: Forças atuantes nos tramos T_2 e T_3 da correia, em detalhe.

7.2.2 Modelo ANCF híbrido

Os resultados teórico-experimentais do modelo híbrido do sistema com auto-tensionador é reportado nesta seção. São analisadas duas configurações estáticas, correspondendo a dois níveis de tensão na correia. O caso dinâmico é considerado em termos do diagrama de Campbell e de mapa de ordem experimental.

7.2.2.1 Validação estática

Para a determinação das frequências naturais de vibração transversal dos tramos, um microfone uniaxial foi posicionado perpendicularmente aos tramos à distância de 12 mm nos nós 2, 13 e 19, conforme Figura 7.65. A resposta ao impacto em cada tramo foi registrada, e o conteúdo espectral dos sinais extraído por meio de algoritmo FFT. Dois ângulos de pré-carga da mola do auto-tensionador foram usados, como descrito na Seção 7.2.1.1, conferindo dois níveis distintos de tensão nos tramos, $T=228$ N e $T=498$ N.

Nas simulações, os tramos da correia foram discretizados com uma malha de 8 elementos finitos, resultando em um sistema com 120 graus de liberdade (36 GL por tramo e 3 GL por cada elemento rígido).

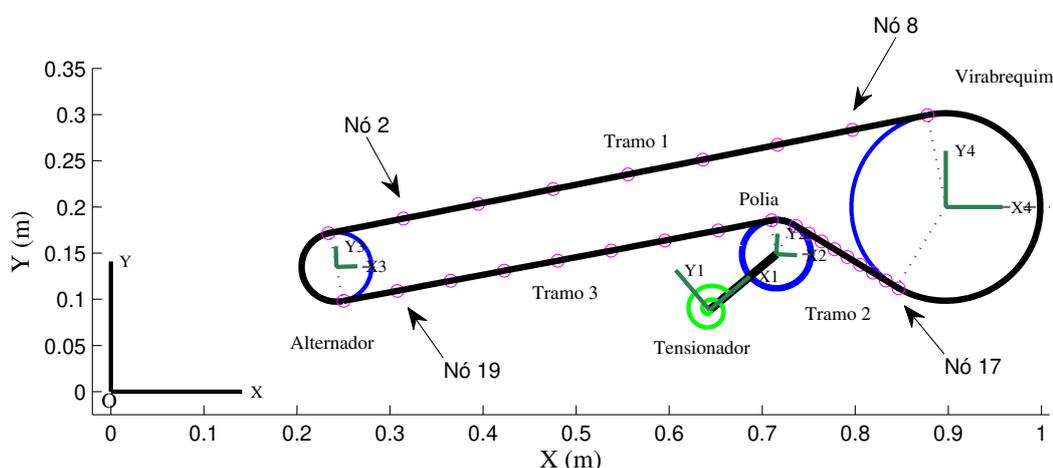


Figura 7.65: Nós do modelo de elementos finitos ANCF, com auto-tensionador.

A resposta temporal e o espectro do sinal dos tramos T_1 e T_3 são mostrados nas Figuras 7.66 e 7.67, com a correia tensionada em $T=498$ N.

A frequência natural correspondente ao primeiro modo de vibrar, com deslocamento predominante do auto-tensionador, foi obtido por meio de acelerômetro fixado no dispositivo, na direção tangencial. O espectro do sinal é mostrado na Figura 7.68.

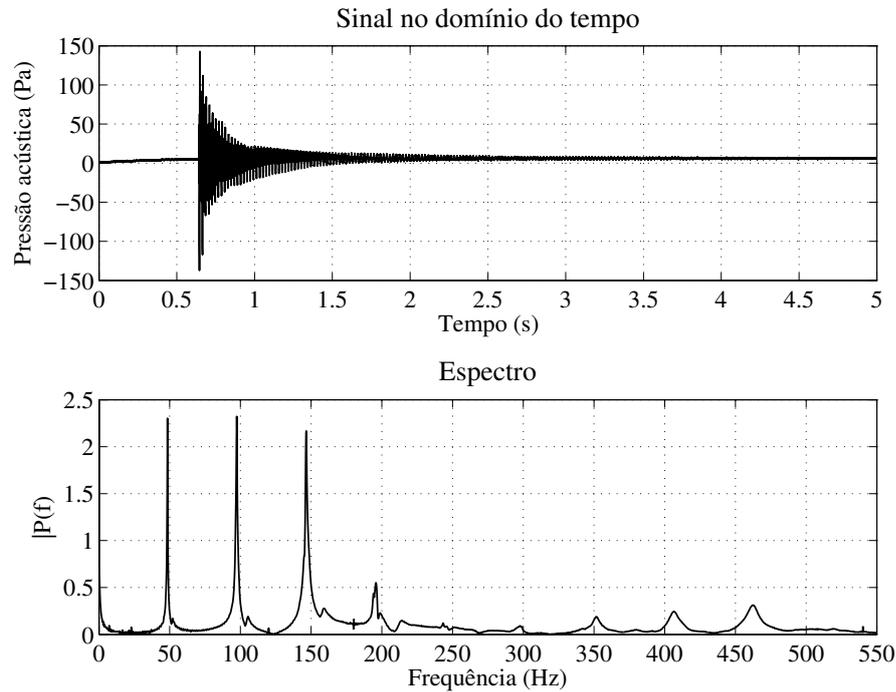


Figura 7.66: Resposta experimental ao impulso no tramo 1 ($T=498$ N).

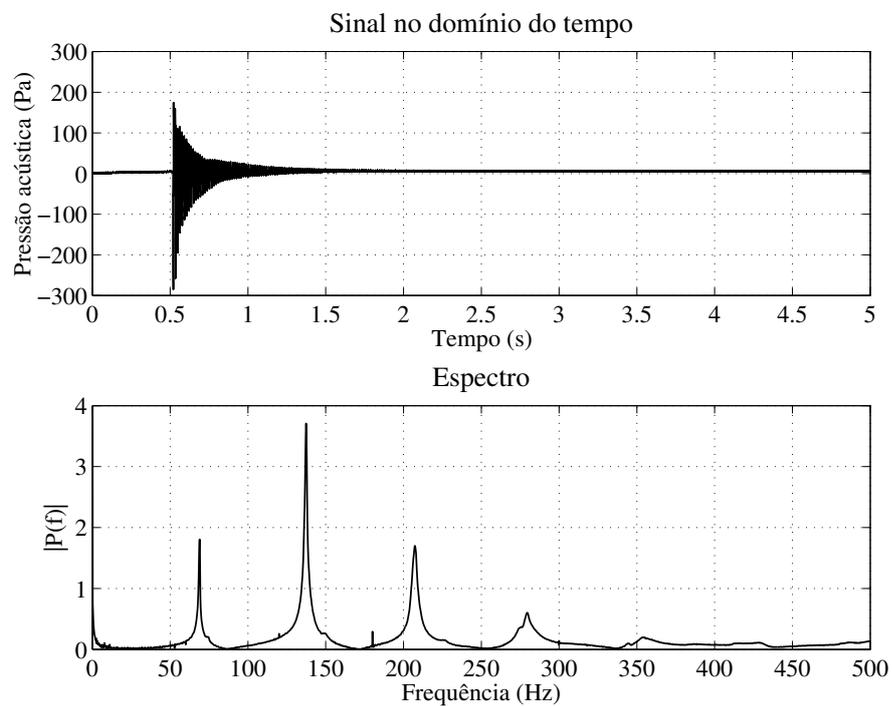


Figura 7.67: Resposta experimental ao impulso no tramo 3 ($T=498$ N).

A Tabela 7.9 apresenta os modos do sistema com auto-tensionador, sendo $T=498$ N. A posição do auto-tensionador é $\theta_1=46.5^\circ$ (teórico e experimental), correspondente ao estágio 2 de pré-carga da mola torcional.

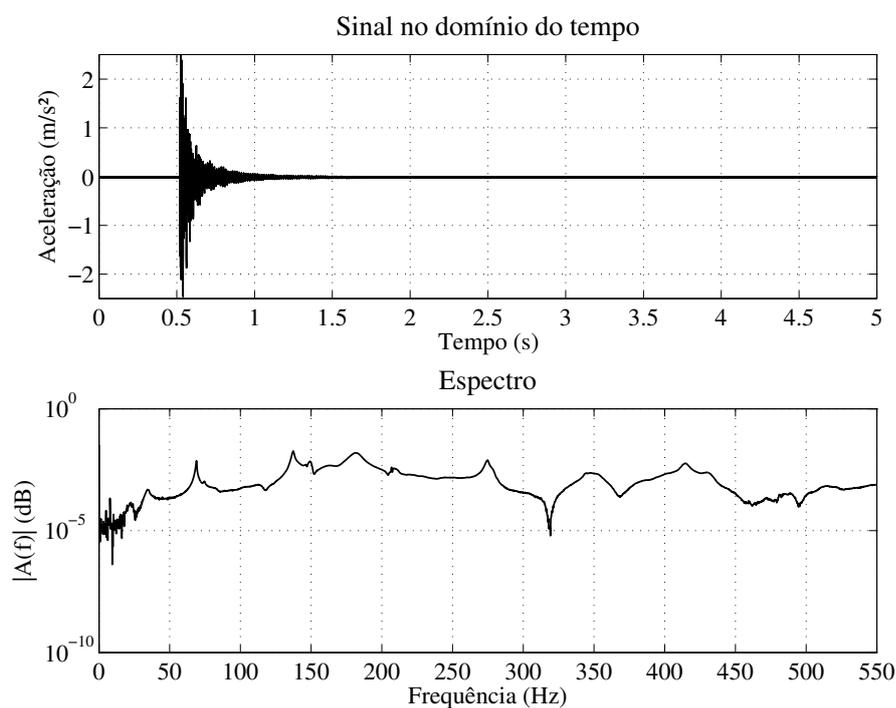


Figura 7.68: Resposta experimental ao impulso no tramo 3, medido no auto-tensionador ($T=498$ N).

Tabela 7.9: Frequências naturais do sistema para $T=500$ N

$T=498$ N, $\theta_1=46.5^\circ$			
Modo	Teórico (Hz)	Experimental (Hz)	Forma modal
1	0.0	-	corpo rígido
2	22.0	22.4	1ª rotacional (auto-tensionador)
3	48.4	48.4	1ª transversal (T1)
4	68.5	68.8	1ª transversal (T3)
5	97.1	97.4	2ª transversal (T1)
6	103.1	103.4	2ª rotacional (polias, auto-tensionador)
7	136.8	137.4	2ª transversal (T3)
8	146.1	146.4	3ª transversal (T1)
9	196.0	196.8	4ª transversal (T1)
10	206.6	207.4	3ª transversal (T3)
11	246.9	247.2	5ª transversal (T1)
12	249.9	254.8	1ª transversal (T2)
13	278.3	279.4	4ª transversal (T3)
14	299.1	300.0	6ª transversal (T1)
15	352.8	353.4	5ª transversal (T3)
16	353.2	352.8	7ª transversal (T1)

Pode ser observado que as frequências naturais dos modos transversais dos tramos adjacentes ao auto-tensionador (T_2 e T_3) estão presentes no espectro da Figura 7.68, revelando o

acoplamento de coordenadas experimental.

A Figura 7.69 apresenta o espectro do sinal de aceleração tangencial do auto-tensionador para $T=228$ N, correspondente ao primeiro estágio da posição de pré-carga da mola torcional, enquanto a Tabela 7.10 lista as frequências naturais do sistema. A posição de equilíbrio estático do auto-tensionador nesta configuração é $\theta_1=40^\circ$, tanto teórico quanto experimental.

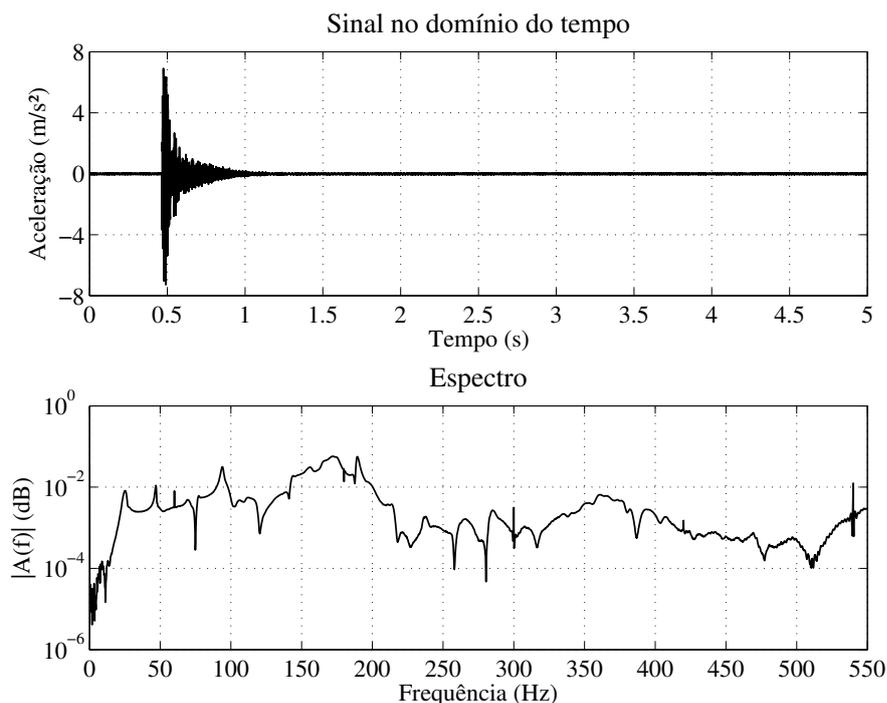
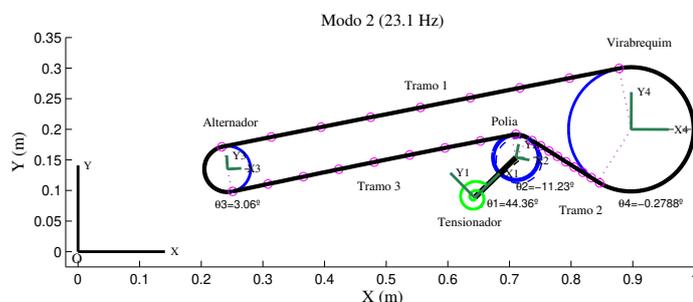


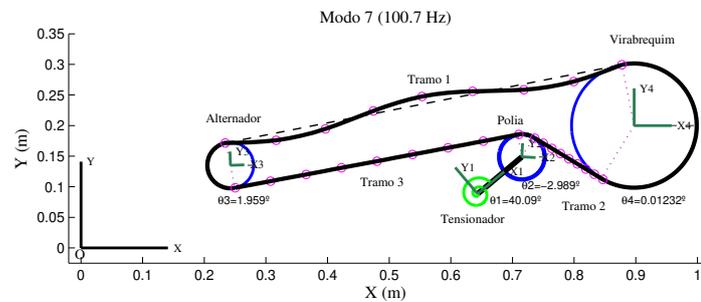
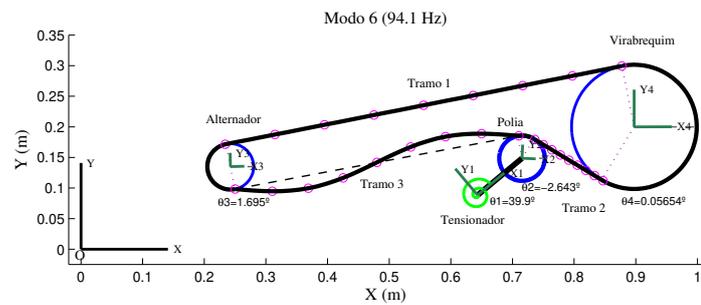
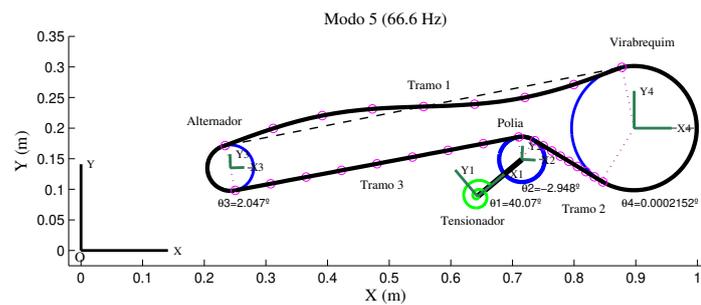
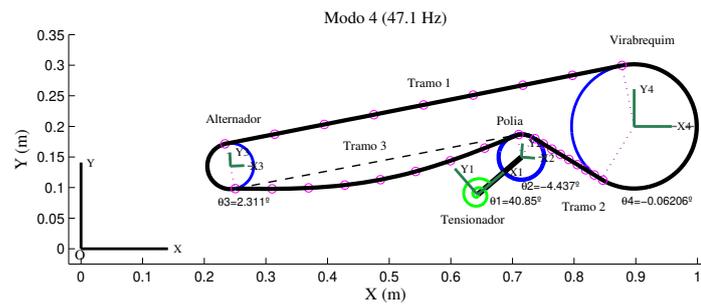
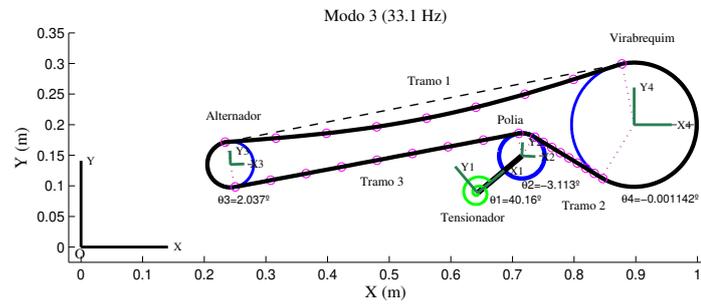
Figura 7.69: Resposta experimental ao impulso no tramo 3, medido na polia do alternador ($T=228$ N).

As formas modais do sistema para $T=228$ N são apresentadas na Figura 7.70. Os modos de vibrar de mais baixa frequência foram observados experimentalmente através de estroboscópio.



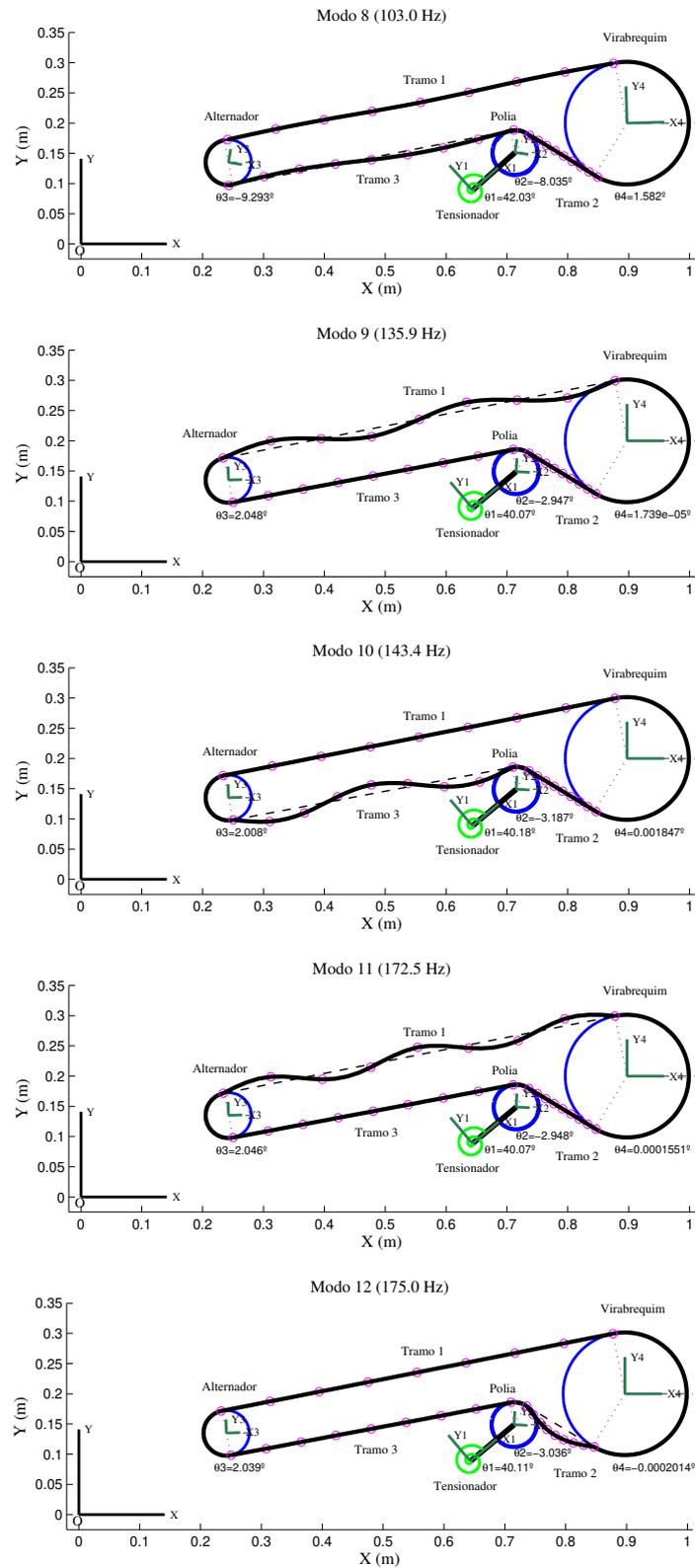
Continua na próxima página...

...continuação



Continua na próxima página...

...continuação



Continua na próxima página...

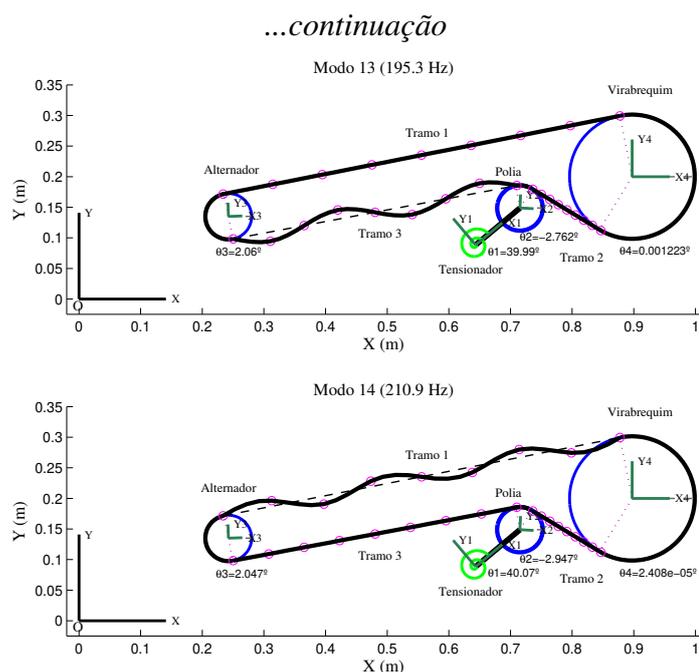


Figure 7.70: Formas modais do sistema com auto-tensionador ($T=228$ N).

Os resultados apresentados nas Tabelas 7.9 e 7.10 mostram que o modelo é capaz de descrever com acurácia os resultados experimentais, tanto em termos de tensão quanto de configuração do sistema.

Foi observado tanto experimentalmente quanto por meio de simulação numérica que os modos rotacionais estão acoplados aos modos transversais dos tramos da correia. Desta forma, os modos são predominantemente rotacionais, mas com a presença de vibração de outros elementos do sistema. No modo 8 da Figura 7.70 é possível verificar tal acoplamento de coordenadas. Os modos transversais dos tramos, por sua vez, estão associados a deslocamentos angulares das polias e auto-tensionador.

Os resultados de simulação mostraram que quando os tramos transversais vibram, ocorrem vibração nos demais componentes, ainda que em pequena amplitude, revelando acoplamento de coordenadas de todo o sistema. Em baixas frequências, este acoplamento pode ser observado experimentalmente na bancada de ensaios.

Tabela 7.10: Frequências naturais do sistema para $T=228$ N

T=228 N, $\theta_1=40^\circ$			
Modo	Teórico (Hz)	Experimental (Hz)	Forma modal
1	0.0	-	corpo rígido
2	23.1	25.2	1ª rotacional (auto-tensionador)
3	33.1	33.0	1ª transversal (T1)
4	47.1	47.0	1ª transversal (T3)
5	66.6	66.2	2ª transversal (T1)
6	94.1	94.6	2ª transversal (T3)
7	100.7	99.6	3ª transversal (T1)
8	103.0	103.6	2ª rotacional (polias, auto-tensionador)
9	135.9	136.4	4ª transversal (T1)
10	143.4	144.6	3ª transversal (T3)
11	172.5	172.6	5ª transversal (T1)
12	175.0	174.6	1ª transversal (T2)
13	195.3	196.8	4ª transversal (T3)
14	210.9	211.4	6ª transversal (T1)

7.2.2.2 Validação dinâmica

Os modelos ANCF de força centrífuga e giroscópica propostos neste trabalho podem ser verificados por meio do diagrama de Campbell e de mapas de ordem. A Figura 7.71 apresenta o diagrama de Campbell do sistema de transmissão sujeito à tensão $T=228$ N.

Os mapas de ordem mostrados nas Figuras 7.72(a) e 7.72(b) foram determinados experimentalmente através da resposta temporal do sistema submetido a aceleração constante (*run up*), partindo do repouso e atingindo a rotação de 2500 rpm no intervalo de 0 a 87 s. Um acelerômetro foi fixado no tensionador na direção tangencial, e a resposta registrada em sistema de aquisição de dados. O conteúdo espectral do sinal temporal foi obtido por meio de algoritmo SFFT (*Short-Time First Fourier Transforms*).

O diagrama de Campbell da Figura 7.73 corresponde ao sistema de transmissão sujeito à tensão $T=498$ N (estágio 2 da pré-carga do auto-tensionador).

Nas Figuras 7.74(a) e 7.74(b) são mostrados os mapas de ordem associados aos tramos T_1 e T_3 , também na tensão $T=498$ N.

Os resultados indicam que os modelos ANCF de força giroscópica e centrífuga são capazes de descrever com acurácia satisfatória os resultados experimentais do sistema de transmissão, contemplando a variação das frequências naturais do sistema com a rotação. Deve ser ressaltado que somente quando os dois fenômenos estão simultaneamente presentes no modelo,

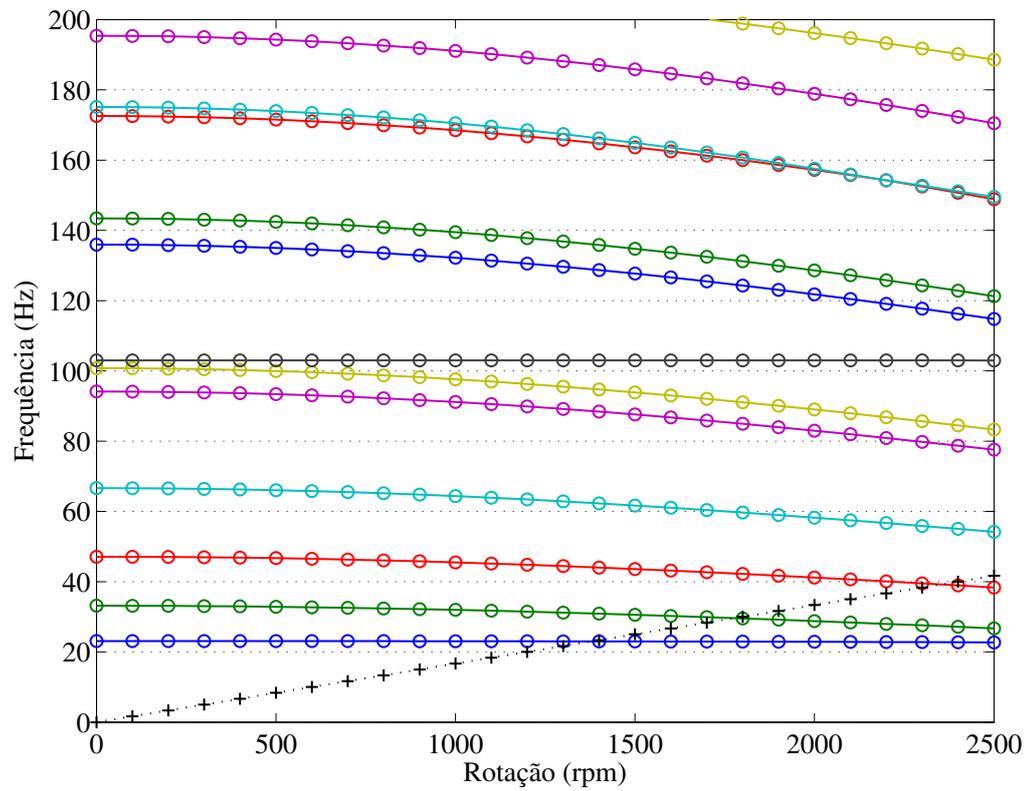
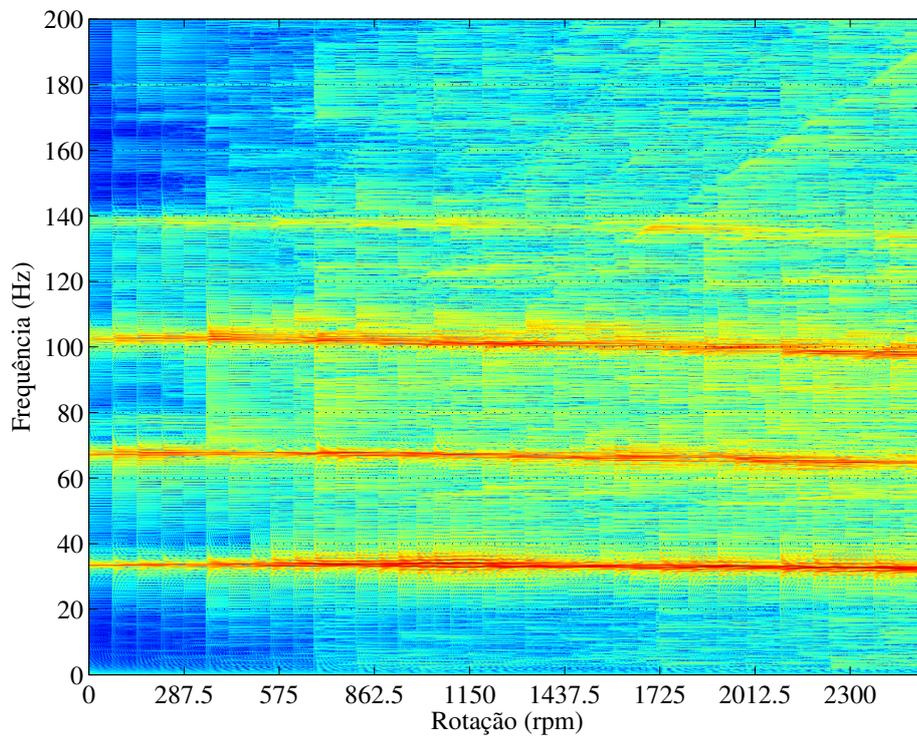
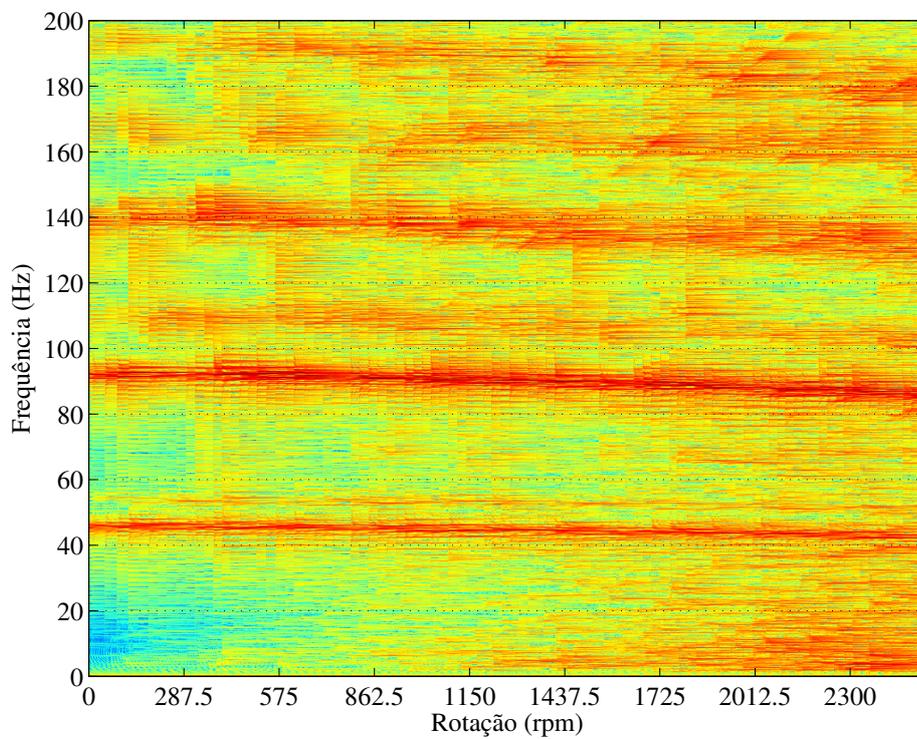


Figura 7.71: Diagrama de Campbell (T=228 N).

os resultados teóricos e experimentais coincidem.



(a) Tramo 1



(b) Tramo 3

Figura 7.72: Mapas de ordem do sistema ($T=228$ N).

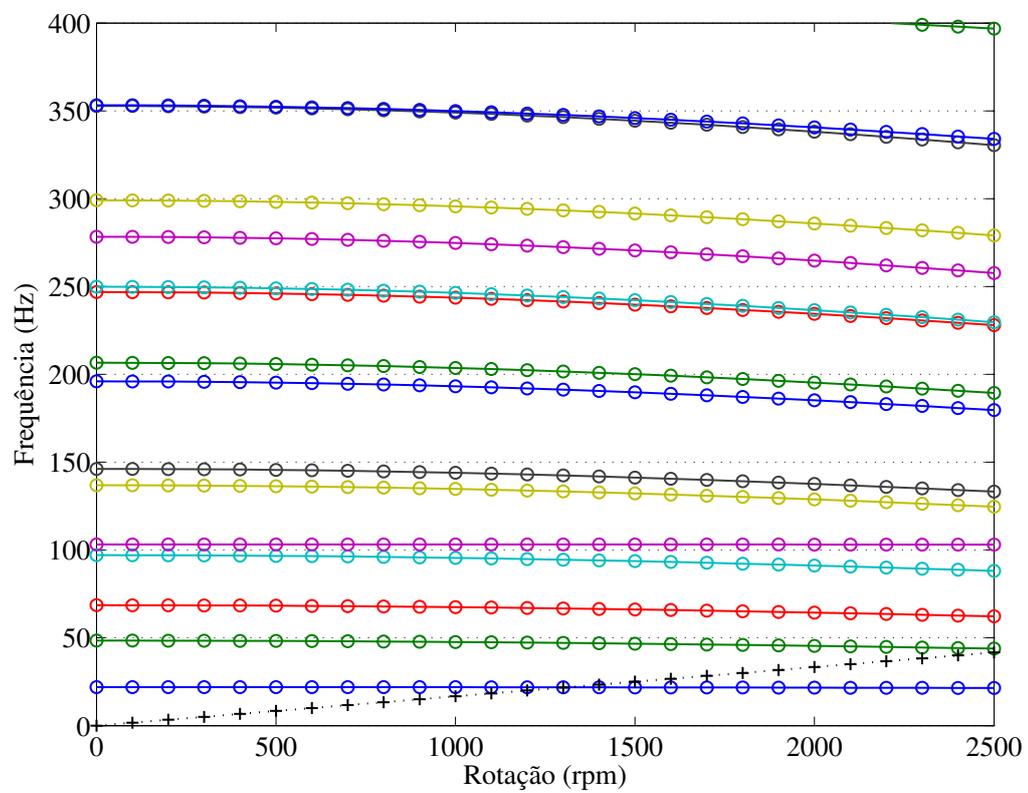
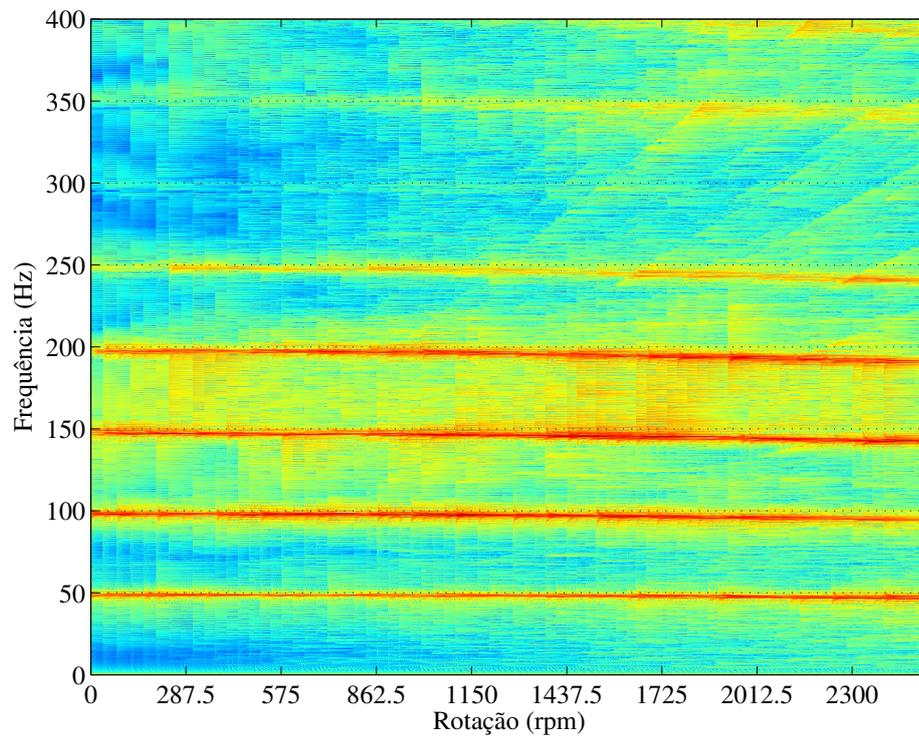
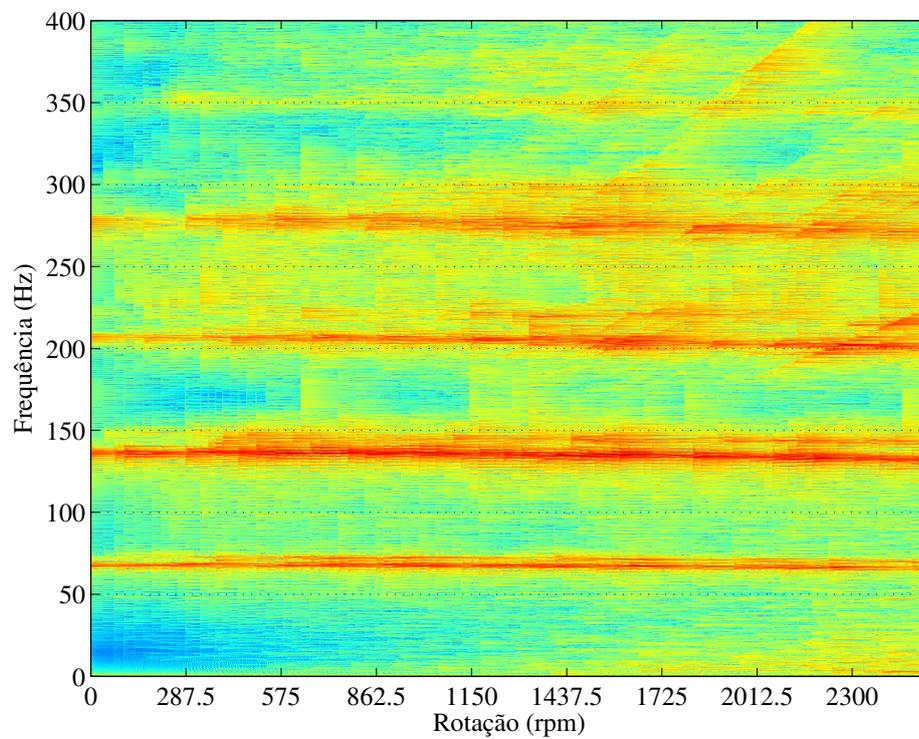


Figura 7.73: Diagrama de Campbell (T=498 N).



(a) Tramo 1



(b) Tramo 3

Figura 7.74: Mapas de ordem do sistema ($T=228$ N).

7.2.2.3 Análise paramétrica

Um estudo paramétrico é apresentado nesta seção com o objetivo de avaliar a influência dos parâmetros de projeto na resposta dinâmica do sistema de transmissão. Estas informações são úteis para auxiliar nas fases de concepção, que frequentemente envolvem a necessidade de ajustar as frequências naturais do sistema a fim de evitar condições de ressonância quando em regime de operação.

A análise é feita considerando o sistema tensionado em $T=498$ N, e estudos semelhantes podem ser conduzidos para outras faixas de tensão ou configuração. Na Figura 7.75 é apresentada a influência do módulo de rigidez axial EA nas frequências naturais do sistema.

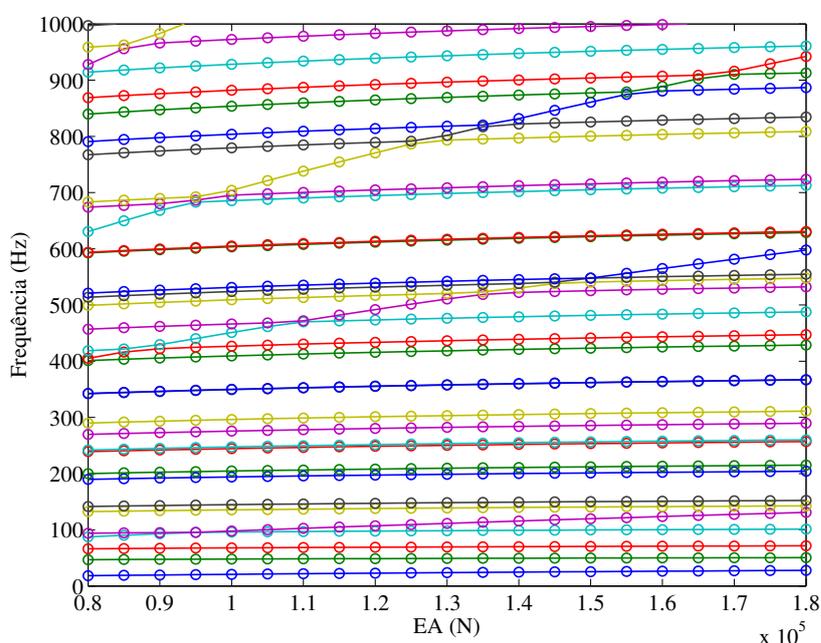


Figura 7.75: Influência do parâmetro EA ($T=498$ N).

Os resultados mostram que a resposta dinâmica apresenta pouca sensibilidade em função deste parâmetro, especialmente em baixas frequências.

A influência do módulo de rigidez transversal EI é avaliada na Figura 7.76.

Os modos de mais baixa frequência são pouco afetados por este parâmetro, mas a partir do modo 7, pode-se perceber que as frequências naturais são bastante sensíveis à rigidez transversal. A estimativa de tais frequências a partir do modelo simplificado de corda pode resultar em diferenças significativas, não correspondendo aos resultados experimentais.

O efeito decorrente da variação do ângulo de pré-carga do auto-tensionador é reportado na Figura 7.77.

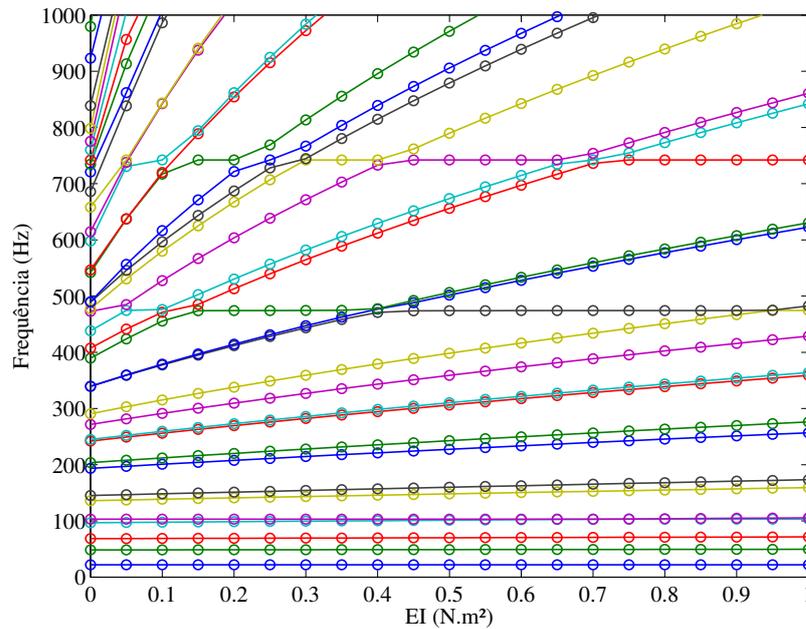


Figura 7.76: Influência do parâmetro EI ($T=498$ N).

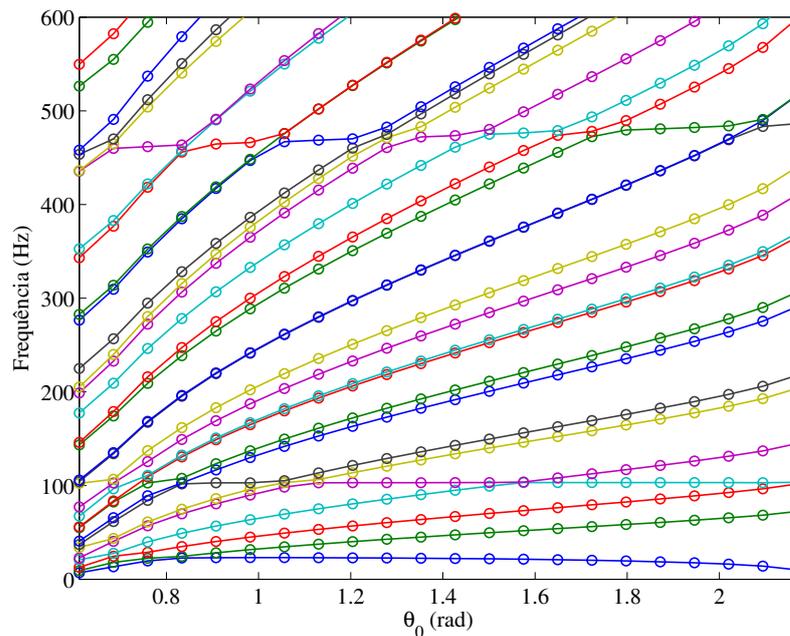


Figura 7.77: Influência do parâmetro θ_0 ($T=498$ N).

Um ângulo maior de pré-carga da mola torcional está associado à maior tensão nos tramos e maior deflexão angular do auto-tensionador, alterando completamente todo o estado de tensão e a configuração de equilíbrio estático. Consequentemente, é esperado que a resposta dinâmica seja bastante sensível a este parâmetro.

Deve ser observado que o primeiro modo do sistema, correspondente ao deslocamento predominante do auto-tensionador, apresenta elevação da frequência natural, estabilização

em um longo intervalo, e depois uma nova queda. Este resultado pode ser visto nas Tabelas 7.10 e 7.9, no qual a frequência do primeiro modo rotacional é maior para o caso $T=228$ N (θ_0 intermediário) e menor para o caso $T=498$ N (θ_0 maior).

A Figura 7.78 apresenta o efeito de variação da inércia do auto-tensionador.

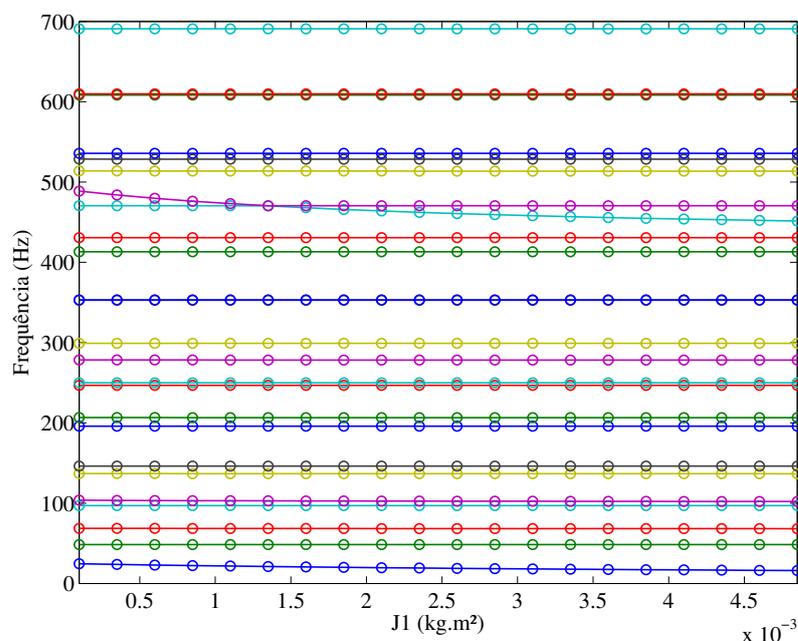


Figura 7.78: Influência do parâmetro J_1 ($T=498$ N).

Os resultados indicam que somente os modos rotacionais são afetados por este parâmetro, os transversais permanecendo inalterados em toda a faixa analisada. Beikmann (1992) também encontrou resultados experimentais semelhantes, reportando que os modos associados aos deslocamentos transversais dos tramos são insensíveis à variação da inércia do auto-tensionador.

A influência do momento de inércia da polia do alternador é apresentado na Figura 7.79. Este estudo é importante uma vez que nos sistemas de transmissão automotivos típicos, diversos acessórios podem ser acoplados ou desacoplados através de embreagem magnética, alterando o comportamento dinâmico do sistema.

Pode ser verificado que a inércia da polia do alternador afeta diretamente o modo rotacional associado, reduzindo as frequências naturais com o aumento da inércia, como esperado. Os modos transversais permanecem inalterados.

A Figura 7.80 apresenta os resultados de influência da densidade linear da correia na resposta dinâmica.

Como esperado, todas as frequências naturais associadas à vibração transversal dos tramos são reduzidas com o aumento da densidade. O primeiro modo (rotacional) é pouco afetado

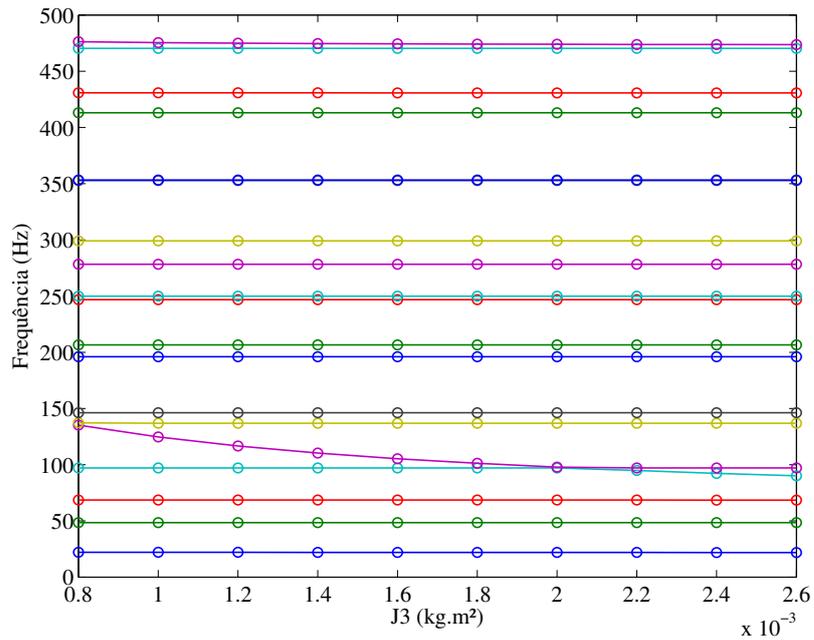


Figura 7.79: Influência do parâmetro J_3 ($T=498$ N).

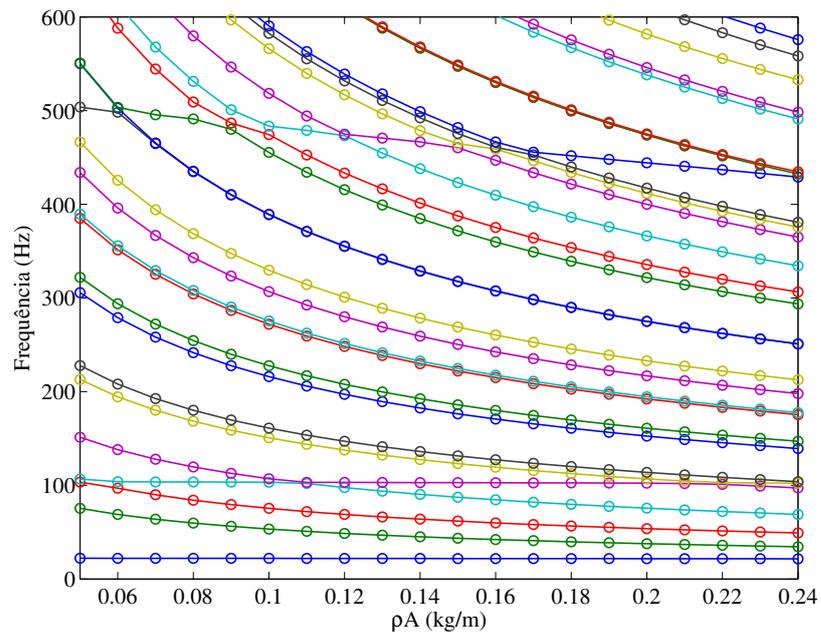


Figura 7.80: Influência do parâmetro ρA ($T=498$ N).

pela variação deste parâmetro.

7.2.2.4 Simulação dinâmica

O objetivo desta simulação numérica é verificar o acoplamento de coordenadas do modelo multicorpos híbrido.

É observado experimentalmente que excitações aplicadas na polia do virabrequim podem excitar os modos transversais dos tramos, e vice-versa. Este fenômeno ocorre devido ao acoplamento de coordenadas do sistema, sendo importante que o modelo matemático contemple tais características.

O integrador ode15s do MATLAB® foi utilizado para o tratamento numérico das equações de movimento, com incremento de tempo $\Delta t=1 \times 10^{-4}$ s. Uma fonte de excitação senoidal foi adicionada ao auto-tensionador, e a resposta avaliada em diferentes posições do sistema de transmissão.

A Figura 7.81 apresenta a resposta temporal da coordenada vertical $e22$ do nó 4 (tramo 1), no qual a frequência de excitação aplicada é a primeira do modo transversal.

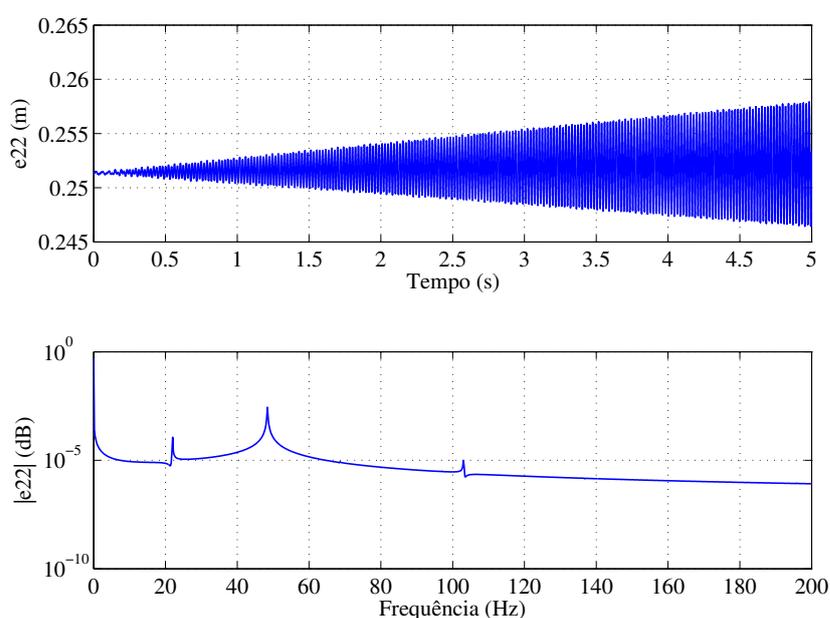


Figura 7.81: Resposta temporal em ressonância (modo 3, $f_n=48.4$ Hz, $T=498$ N).

Pode ser observado que o tramo 1 entra em ressonância, ou seja, uma excitação aplicada no auto-tensionador na mesma frequência natural do primeiro modo transversal é transferida axialmente através das polias 3 e 4 até chegar ao tramo superior, revelando o acoplamento de coordenadas observado experimentalmente. O modelo proposto por Beikmann (1992) e os demais trabalhos derivados não considera tal acoplamento.

Na Figura 7.82 é mostrada a resposta temporal de vibração transversal da coordenada vertical e_{90} do nó 22 (tramo 3), sujeito à frequência de excitação correspondente ao primeiro modo transversal deste tramo.

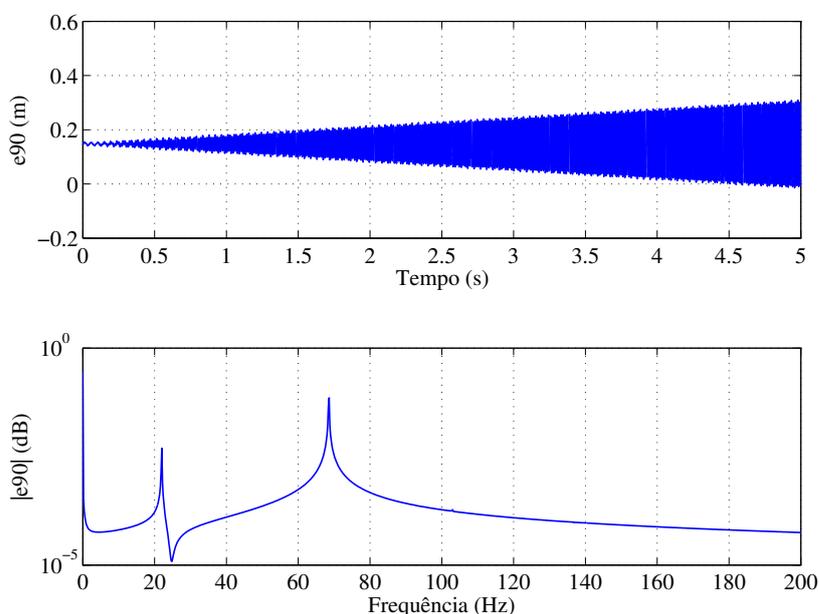


Figura 7.82: Resposta temporal em ressonância (modo 4, $f_n=68.5$ Hz, $T=498$ N).

Os resultados mostram que o tramo também entra em ressonância, indicando que o deslocamento angular do auto-tensionador é transferido para a polia do auto-tensionador e deste para o tramo 3. Desta forma, pode ser observado que as coordenadas rotacionais, longitudinais e transversais estão mutuamente acopladas no modelo.

O modo rotacional 2 pode ser excitado diretamente pelo auto-tensionador, quando este é submetido à frequência natural correspondente. A Figura 7.83 mostra a resposta temporal da coordenada angular θ_3 na ressonância.

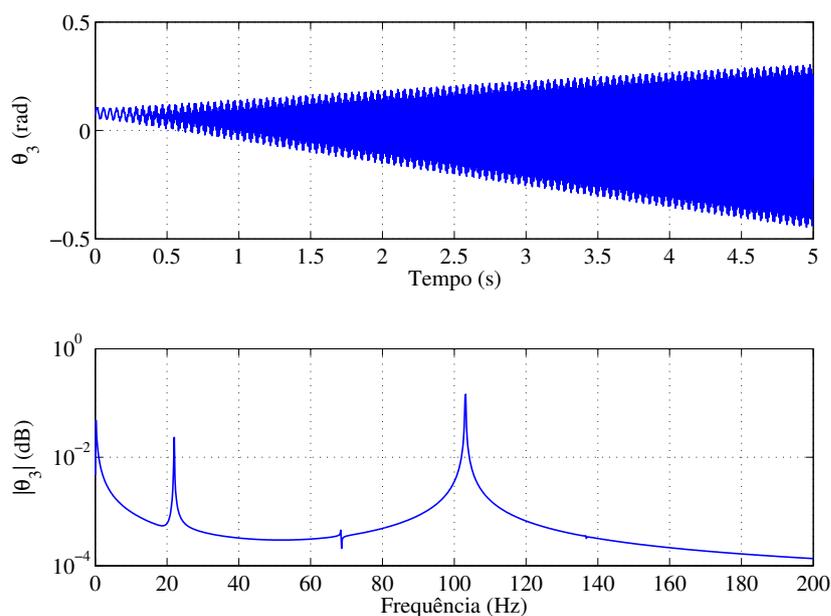


Figura 7.83: Resposta temporal em ressonância (modo 6, $f_n=103.1$ Hz, $T=498$ N).

Finalmente, uma excitação é prescrita à coordenada vertical e_{90} do nó 22 (tramo 3), na frequência correspondente ao primeiro modo rotacional (deslocamento predominante do auto-tensionador).

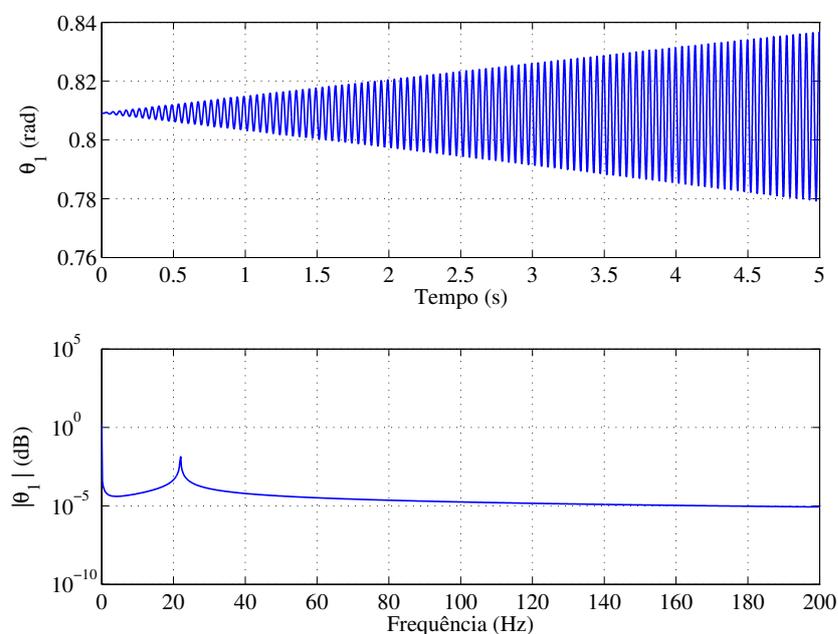


Figura 7.84: Resposta temporal em ressonância (modo 1, $f_n=22.0$ Hz, $T=498$ N).

Pode ser verificado que o auto-tensionador entra em ressonância, mostrando que os graus de liberdade rotacionais estão acoplados aos transversais dos tramos.

7.3 Resumo do capítulo

Neste capítulo foram apresentados diversos resultados teórico-experimentais do sistema de transmissão por correia, com e sem auto-tensionador, considerando tanto o modelo puramente rotacional quanto o híbrido.

As forças de reação atuantes no mancal da polia movida foram avaliadas, e corresponderam às forças experimentais obtidas em bancada.

Simulações numéricas mostraram a influência dos efeitos de desbalanceamento, flutuação de velocidade, efeito centrífugo, carga rotacional média e alternada, além do amortecimento axial da correia na resposta do sistema.

O modelo híbrido foi validado experimentalmente em função do nível de tensão na correia e da configuração de equilíbrio estático do sistema. Os resultados teóricos apresentaram acurácia em relação aos experimentais, para uma ampla faixa de tensão analisada.

Os modelos ANCF de força centrífuga e giroscópica foram verificados por meio do diagrama de Campbell e de mapas de ordem, e apresentaram satisfatória correlação.

Análises paramétricas foram reportadas, indicando a influência de cada parâmetro na resposta dinâmica do sistema.

Por fim, uma análise temporal mostrou o acoplamento de coordenadas do modelo híbrido proposto, indicando que a abordagem é eficiente para descrever os acoplamentos observados experimentalmente em bancada.

O próximo capítulo apresenta as conclusões do trabalho.

8 Conclusões

Neste trabalho foi proposto um modelo não-linear de multicorpos flexíveis para análise do comportamento dinâmico de um sistema de transmissão por correia, com e sem auto-tensionador. Um modelo puramente rotacional baseado no Método de Newton-Euler foi também proposto, para comparação com o modelo híbrido e determinação das reações dinâmicas. Foi apresentado de forma inédita o desenvolvimento teórico dos modelos ANCF de força centrífuga e giroscópica, para incorporação de tais fenômenos em sistemas com movimento axial. Uma bancada de ensaios foi construída para avaliação experimental dos resultados obtidos pela simulação numérica dos modelos propostos. Ensaios de caracterização experimental dos componentes da bancada foram conduzidos para a identificação paramétrica, permitindo a alimentação do modelo matemático com parâmetros reais. Os resultados mostraram que os modelos propostos foram representativos do sistema físico construído, sendo validados em uma ampla faixa de tensão na correia e configuração de equilíbrio do sistema. Foi comprovado experimentalmente que o modelo reproduziu com acurácia a variação das frequências naturais em função da rotação, da configuração de equilíbrio estacionário e do nível de tensão na correia, comprovando a hipótese do trabalho e apresentando-se como uma ferramenta robusta e promissora para auxiliar nas fases de projeto e análise.

As principais conclusões deste trabalho são:

- O modelo híbrido proposto foi capaz de capturar o acoplamento de coordenadas entre os tramos e as polias, observado experimentalmente em bancada;
- A correta descrição de variação das frequências naturais do sistema em função da rotação é somente alcançada incorporando os efeitos centrífugos e giroscópicos no modelo ANCF;
- Os modelos puramente rotacionais podem ser utilizados para estimar os esforços estáticos e dinâmicos nas fases preliminares de projeto, enquanto o modelo ANCF é necessário para o projeto definitivo, com o objetivo de prever as frequências naturais do sistema e evitar condições de ressonância quando em regime de operação;
- A força centrífuga atuante na correia pode ser expressiva quando a rotação é elevada, e precisa estar incluída no modelo matemático;
- A correia apresenta comportamento viscoelástico, sendo fortemente afetado em função da frequência de excitação;
- O tensionador é efetivo na atenuação da amplitude de vibração dos tramos adjacentes ao mesmo;

- A orientação do auto-tensionador tem forte influência nas frequências naturais do sistema, apresentando-se como um parâmetro a ser apropriadamente ajustado nas fases de projeto;
- O amortecimento da correia é efetivo para reduzir a amplitude de vibração do sistema, ao lado do amortecimento incorporado no auto-tensionador;
- A análise paramétrica do sistema revelou que os tramos da correia apresentam diferentes níveis de sensibilidade em relação à densidade linear e aos módulos de rigidez axial e transversal, mas são pouco sensíveis às inércias das polias. Este estudo mostrou que grandes diferenças podem ocorrer se o modelo de corda for usado para prever os modos de mais altas frequências dos tramos;
- A resposta temporal simulada demonstrou o acoplamento dos graus de liberdade do modelo híbrido, mostrando que excitações nos tramos ou nas polias podem colocar o sistema em ressonância.

9 Sugestões para trabalhos futuros

A seguir são listadas as sugestões de trabalhos futuros:

- Análise de estabilidade do sistema utilizando o modelo ANCF;
- Análise não-linear, confrontando com os resultados obtidos pela linearização do modelo;
- Inclusão do efeito de amortecimento transversal na correia;
- Incorporação de atrito seco no auto-tensionador e investigação das condições de *stick-slip* do modelo não-linear acoplado;
- Verificação experimental em bancada das simulações apresentadas considerando carregamento dinâmico atuante no alternador;
- Análises modificando o posicionamento do auto-tensionador e do alternador;
- Incorporação de polias de outros acessórios nos modelos do sistema de transmissão com auto-tensionador e simulação da resposta dinâmica do sistema;
- Inclusão do comportamento viscoelástico da correia no modelo ANCF, e desenvolvimento das novas expressões das forças giroscópicas e centrífugas;
- Otimização da configuração do sistema com o objetivo de ajustar as frequências naturais de forma a não haver condições de ressonâncias durante a operação.

Referências

ABRATE, S. Vibrations of belts and belt drives. **Mechanism and Machine Theory**, v. 27, n. 6, 645 – 659, 1992.

ALCIATORE, D. and TRAVER, A. Multipulley belt drive mechanics: creep theory vs shear theory. **Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME**, v. 117, n. 4, 506–511, 1995.

BALAJI, R. and MOCKENSTURM, E.M. Dynamic analysis of a front-end accessory drive with a decoupler/isolator. **International Journal of Vehicle Design**, v. 39, n. 3, 208 – 231, 2005.

BARKER, C.; OLIVER, L. and BREIG, W. Dynamic analysis of belt drive tension forces during rapid engine acceleration. **SAE Technical Papers**, 1991.

BASTIEN, J.; MICHON, G.; MANIN, L. and DUFOUR, R. An analysis of the modified dahl and masing models: Application to a belt tensioner. **Journal of Sound and Vibration**, v. 302, n. 4-5, 841–864, 2007.

BECHTEL, S.; VOHRA, S.; JACOB, K. and CARLSON, C. The stretching and slipping of belts and fibers on pulleys. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, v. 67, n. 1, 197–206, 2000.

BEIKMANN, R.; PERKINS, N. and ULSOY, A. Free vibration of serpentine belt drive systems. **Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME**, v. 118, n. 3, 406 – 413, 1996a.

BEIKMANN, R.; PERKINS, N. and ULSOY, A. Design and analysis of automotive serpentine belt drive systems for steady state performance. **Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME**, v. 119, n. 2, 162 – 168, 1997.

BEIKMANN, R.S. **Static and dynamics behavior of serpentine belt drive systems**. 1992. PhD thesis. University of Michigan.

BEIKMANN, R.S.; PERKINS, N.C. and ULSOY, A.G. Nonlinear coupled vibration response of serpentine belt drive systems. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 118, 567–574, 1996b.

BERZERI, M.; CAMPANELLI, M. and SHABANA, A.A. Definition of the elastic forces in the finite-element absolute nodal coordinate formulation and the floating frame of reference formulation. **Multibody System Dynamics**, v. 5, n. 1, 21–54, 2001.

BERZERI, M. and SHABANA, A.A. Development of simple models for the elastic forces in the absolute nodal coordinate formulation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 235(4), 539–565, 2000.

BERZERI, M. and SHABANA, A.A. Study of the centrifugal stiffening effect using the finite element absolute nodal coordinate formulation. **Multibody System Dynamics**, v. 7, n. 4, 357 – 387, 2002.

BLEVINS, R.D. **Formulas for Natural Frequency and Mode Shape**. Van Nostrand Reinhold Company, 1st ed., 1979.

BONET, J. and WOOD, R.D. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. 2nd ed., 2008.

BRAKE, M. and WICKERT, J. Modal analysis of a continuous gyroscopic second-order system with nonlinear constraints. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, n. 7, 893–911, 2010.

CAI, W. Comparison and review of electric machines for integrated starter alternator applications. **Conference Record - IAS Annual Meeting (IEEE Industry Applications Society)**, v. 1, 386–393, 2004.

CELAURO, C.; FECAROTTI, C.; PIRROTTA, A. and COLLOP, A. Experimental validation of a fractional model for creep/recovery testing of asphalt mixtures. **Construction and Building Materials**, v. 36, 458–466, 2012.

CHATELET, E.; MICHON, G.; MANIN, L. and JACQUET, G. Stick/slip phenomena in dynamics: Choice of contact model. numerical predictions & experiments. **Mechanism and Machine Theory**, v. 43, n. 10, 1211–1224, 2008.

CHEN, L.Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings. **Applied Mechanics Reviews**, v. 58, n. 1-6, 91 – 115, 2005.

CHEN, L.Q. and ZHANG, W. Adaptive vibration reduction of an axially moving string via a tensioner. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 48, n. 12, 1409–1415, 2006.

CHENG, G. **Dynamics of dry friction damped systems subjected to multi-frequency excitations**. 2004. PhD thesis. University of Toronto.

CHENG, G. and ZU, J. A numerical study of a dry friction oscillator with parametric and external excitations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 287, n. 1-2, 329–342, 2005.

CHENG, G. and ZU, J.W. Nonstick and stick-slip motion of a coulomb-damped belt drive system subjected to to multifrequency excitations. **Journal of Applied Mechanics**, v. 70, 871–884, 2003.

CHRISTENSEN, R. **Theory of Viscoelasticity: An Introduction**. Academic Press, 1971. ISBN 9780121742508.

DING, H. Periodic responses of a pulley-belt system with one-way clutch under inertia excitation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 353, 308–326, 2015a.

DING, H. Steady-state responses of a belt-drive dynamical system under dual excitations. **Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao**, pp. 1–14, 2015b.

DING, H. and CHEN, L.Q. Natural frequencies of nonlinear vibration of axially moving beams. **Nonlinear Dynamics**, v. 63, n. 1-2, 125–134, 2011a.

DING, H. and CHEN, L.Q. Nonlinear models for transverse forced vibration of axially moving viscoelastic beams. **Shock and Vibration**, v. 18, n. 1-2, 281–287, 2011b.

DING, H. and LI, D.P. Static and dynamic behaviors of belt-drive dynamic systems with a one-way clutch. **Nonlinear Dynamics**, v. 78, n. 2, 1553–1575, 2014.

DING, H. and ZU, J.W. Effect of one-way clutch on the nonlinear vibration of belt-drive systems with a continuous belt model. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, 6472–6487, 2013.

DING, J. and HU, Q. Equilibria and free vibration of a two-pulley belt-driven system with belt bending stiffness. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2014, 1 – 17, 2014.

DU BOIS, J.; LIEVEN, N. and ADHIKARI, S. Error analysis in trifilar inertia measurements. **Experimental Mechanics**, v. 49, n. 4, 533–540, 2009.

DUFVA, K.; KERKKÄNEN, K.; MAQUEDA, L. and SHABANA, A. Nonlinear dynamics of three-dimensional belt drives using the finite-element method. **Nonlinear Dynamics**, v. 48, n. 4, 449–466, 2007.

ELMARAGHI, O.A. **Integrated multibody dynamics and fatigue models for predicting the fatigue life of poly-V ribbed belts**. 2013. Master's thesis. Purdue University.

ČEPON, G. and BOLTEŽAR, M. Computing the dynamic response of an axially moving continuum. **Journal of Sound and Vibration**, v. 300, n. 1-2, 316–329, 2007.

ČEPON, G.; MANIN, L. and BOLTEŽAR, M. Dynamics of a belt-drive system using a linear complementarity problem for the belt-pulley contact description. **Journal of Sound and Vibration**, v. 319, 1119–1035, 2009a.

ČEPON, G.; MANIN, L. and BOLTEŽAR, M. Introduction of damping into the flexible multibody belt-drive model: A numerical and experimental investigation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 324, 283–296, 2009b.

ČEPON, G.; MANIN, L. and BOLTEŽAR, M. Experimental identification of the contact parameters between a v-ribbed belt and a pulley. **Mechanism and Machine Theory**, v. 45, n. 10, 1424–1433, 2010.

ČEPON, G.; MANIN, L. and BOLTEŽAR, M. Validation of a flexible multibody belt-drive model. **Journal of Mechanical Engineering**, v. 57, 539–546, 2011.

FECAROTTI, C.; CELAURO, C. and PIRROTTA, A. Linear viscoelastic (lve) behaviour of pure bitumen via fractional model. **Procedia - Social and Behavioral Sciences**, v. 53, 450 – 461, 2012. SIIV-5th International Congress - Sustainability of Road Infrastructures 2012.

FIRBANK, T.C. Mechanics of the belt drive. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 12, n. 12, 1053 – 1063, 1970.

FUJII, A.; YONEMOTO, S.; MIYAZAKI, K.; FURUMATA, S.; OKUDA, K. and MIYAZAWA, H. Analysis of the accessory belt lateral vibration in automotive engines. **JSAE Review**, v. 23, n. 1, 41–47, 2002.

GARCIA, U. **Study of vibration on tensioner of transmission by belts**. 2009. Master's thesis. University of Campinas, Campinas, São Paulo.

GARCIDA-VALLEJO, D.; VALVERDE, J. and DOMINGUEZ, J. An internal damping model for the absolute nodal coordinate formulation. **Nonlinear Dynamics**, v. 42, n. 4, 347 – 369, 2005.

GASPAR, R. and HAWKER, L.E. Automotive accessory drive system modelling. v. 21, n. 3, 2, 1993.

GERBERT, G. On flat belt slip. **Tribology Series**, v. 18, 333–340, 1991.

GERBERT, G. and DE MARÉ, J. Tension distribution in multiple v-belt drives. **Mechanism and Machine Theory**, v. 30, n. 8, 1279–1294, 1995.

GERSTMAYR, J.; SUGIYAMA, H. and MIKKOLA, A. Review on the absolute nodal coordinate formulation for large deformation analysis of multibody systems. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, v. 8, 031016–1–031016–12, 2013.

GHAYESH, M. Coupled longitudinal-transverse dynamics of an axially accelerating beam.

Journal of Sound and Vibration, v. 331, n. 23, 5107–5124, 2012.

GHAYESH, M. and AMABILI, M. Nonlinear vibrations and stability of an axially moving timoshenko beam with an intermediate spring support. **Mechanism and Machine Theory**, v. 67, 1–16, 2013.

GHAYESH, M.; AMABILI, M. and FAROKHI, H. Coupled global dynamics of an axially moving viscoelastic beam. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 51, 54–74, 2013.

GOLDSTEIN, H. **Classical Mechanics**. Addison-Wesley Press, 1950.

GORBET, R. and BORTOFF, S. A novel approach to vibration reduction in flexible belt drives. In D. Miller and L. Qiu, editores, **Topics in Control and its Applications**, pp. 67–80. Springer London, 1999. ISBN 978-1-4471-1158-0.

GREGO, P. **Dynamics of a belt-tensioner subjected to dry friction**. 2015. Master's thesis. University of Campinas, Campinas, São Paulo.

HAWKER, L.E. **A vibration analysis of automotive serpentine accessory drive systems**. 1991. PhD thesis. University of Windsor.

HOU, Z.C.; LAO, Y.X. and LU, Q.H. Sensitivity analysis and parameter optimization for vibration reduction of undamped multi-ribbed belt drive systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 317, n. 3-5, 591–607, 2008.

HUMER, A. Dynamic modeling of beams with non-material, deformation-dependent boundary conditions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, n. 3, 622–641, 2013.

HUSSEIN, M.M.; METWALLI, S.M.; MOHAMED, A.N.A. and SHABANA, A.A. Belt drive mechanics with absolute nodal coordinate formulation element verification. In **Proceedings of the ASME 2010 International Mechanical Engineering Congress & Exposition**. Vancouver, British Columbia, Canada, 2010.

HWANG, S. and PERKINS, N. High speed stability of coupled band/wheel systems. theory and experiment. **Journal of Sound and Vibration**, v. 169, n. 4, 459–483, 1994.

HWANG, S.J.; PERKINS, N.C.; ULSOY, A.G. and MECKSTROTH, R.J. Rotational response and slip prediction of serpentine belt drive systems. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 116, 71–78, 1994.

IWATSUBO, T.; HASEGAWA, K.; ARII, S. and SHIOHATA, K. The formulation and dynamic analysis of a multiple belt system. **Journal of Sound and Vibration**, v. 205, n. 3, 293 – 307, 1997.

JIA, S.S. and SONG, Y.M. Elastic dynamic analysis of synchronous belt drive system using absolute nodal coordinate formulation. **Nonlinear Dynamics**, v. 81, n. 3, 1393 – 1410, 2015.

KERKKÄNEN, K. **Dynamic analysis of belt-drives using the absolute nodal coordinate formulation**. 2006. PhD thesis. Lappeenranta University of Technology.

KERKKÄNEN, K.S.; GARCÍA-VALLEJO, D. and MIKKOLA, A.M. Modeling of belt-drives using a large deformation finite element formulation. **Nonlinear Dynamics**, v. 43, 239–256, 2006.

KIM, D. **Dynamic modeling of belt drives using the elastic/perfectly-plastic friction law**. 2009. Master's thesis. Georgia Institute of Technology.

KIM, D.; LEAMY, M. and FERRI, A. Dynamic modeling and stability analysis of flat belt drives using an elastic/perfectly plastic friction law. **Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME**, v. 133, n. 4, 2011.

KIM, H.; AHN, H. and MARSHEK, K. Friction characteristics for concentrated load area in a flat belt drive. **Mechanism and Machine Theory**, v. 26, n. 4, 351–358, 1991.

KIM, H. and MARSHEK, K. The effect of belt velocity on flat belt drive behavior. **Mechanism and Machine Theory**, v. 22, n. 6, 523–527, 1987.

KIM, H. and MARSHEK, K. Force distribution for a flat belt drive with a concentrated contact load. **Mechanism and Machine Theory**, v. 25, n. 6, 667–677, 1990.

KIM, H.; MARSHEK, K. and NAJI, M. Forces between an abrasive belt and pulley. **Mechanism and Machine Theory**, v. 22, n. 1, 97–103, 1987.

KIM, S. and LEE, J. Analysis of the non-linear vibration characteristics of a belt-driven system. **Journal of Sound and Vibration**, v. 223, n. 5, 723–740, 1999.

KONG, L. **Coupled belt-pulley mechanics in serpentine belt drives**. 2003. PhD thesis. The Ohio State University.

KONG, L. and PARKER, R. Equilibrium and belt-pulley vibration coupling in serpentine belt drives. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, v. 70, n. 5, 739–750, 2003.

KONG, L. and PARKER, R. Microslip friction in flat belt drives. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 219, n. 10, 1097–1106, 2005a.

KONG, L. and PARKER, R. Vibration of an axially moving beam wrapping on fixed pulleys. **Journal of Sound and Vibration**, v. 280, n. 3-5, 1066–1074, 2005b.

KONG, L. and PARKER, R. Mechanics and sliding friction in belt drives with pulley grooves. **Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME**, v. 128, n. 2, 494–502, 2006.

KONG, L. and PARKER, R.G. Coupled belt-pulley vibration in serpentine drives with belt bending stiffness. **Journal of Applied Mechanics**, v. 71, 109–119, 2004.

KONG, L. and PARKER, R.G. Mechanics of serpentine belt drives with tensioner assemblies and belt bending stiffness. **Journal of Mechanical Design**, v. 127, 957–966, 2005c.

KONG, L. and PARKER, R.G. Steady mechanics of belt-pulley systems. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, v. 72, n. 1, 25 – 34, 2005d.

KRAVER, T.C. **Development of flat belt power transmission design methodology and analysis techniques**. 1995. PhD thesis. Arizona State University.

KURMYSHEV, E. Transverse and longitudinal mode coupling in a free vibrating soft string. **Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics**, v. 310, n. 2-3, 148–160, 2003.

LEAMY, M. and WASFY, T. Analysis of belt-drive mechanics using a creep-rate-dependent friction law. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, v. 69, n. 6, 763–771, 2002a.

LEAMY, M.J. **Influence of dry friction in the dynamic response of accessory belt drive systems**. 1998. PhD thesis. University of Michigan.

LEAMY, M.J. and PERKINS, N.C. Nonlinear periodic response of engine accessory drives with dry friction tensioners. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 120, 909–916, 1999.

LEAMY, M.J. and WASFY, T.M. Transient and steady state dynamic finite element modeling of belt drives. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 124, 575–581, 2002b.

LEAMY, M.J. and WASFY, T.M. Time-accurate finite element modelling of the transient, steady-state, and frequency responses of serpentine and timing belt-drives. **International Journal of Vehicle Design**, v. 39, 272–297, 2005.

LEE, U. **Spectral Element Method in Structural Dynamics**. 1st ed., 2009.

LEE, U. and OH, H. Dynamics of an axially moving viscoelastic beam subject to axial tension. **International Journal of Solids and Structures**, v. 42, n. 8, 2381–2398, 2005.

LI, X.J. and CHEN, L.Q. Modal analysis of coupled vibration of belt drive systems. **Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)**, v. 29, n. 1, 9–13, 2008.

LIN, Y.; DEPAUW, T. and JIANG, Y. Analysis of the dynamics effects of an elastic belt in a general mechanical system. In **12rd European ADAMS User's Conference**. Marburg/Germany,

1997.

LU, Y. Fractional derivative viscoelastic model for frequency-dependent complex moduli of automotive elastomers. **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, v. 3, n. 4, 329–336, 2006.

MANIN, L.; BESSON, F.; MICHON, G. and DUFOUR, R. Experimental investigation on the dynamic characteristics and transverse vibration instabilities of transmission belts. In **16 Colloque "Vibrations Chocs et Bruits"**. Ecully, France, 2008.

MAQUEDA, L.G.; BAUCHAU, O.A. and SHABANA, A.A. Effect of the centrifugal forces on the finite element eigenvalue solution of a rotating blade: A comparative study. **Multibody System Dynamics**, v. 19, n. 3, 281 – 302, 2008.

MARTINS, D.R. **Nonlinear dynamic analysis of belt drive system**. 2013. Master's thesis. University of Campinas, São Paulo, Brazil.

MARYNOWSKI, K. and KAPITANIAK, T. Dynamics of axially moving continua. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 81, 26–41, 2014.

MASE, G. **Schaum's Outline of Continuum Mechanics**. Schaum's outline of theory and problems. McGraw-Hill Education, 1970. ISBN 9780070406636.

MASHADI, B. and ZAKERI, E. Dynamical analysis and design of front engine accessory drive system. **International Journal of Automotive Engineering**, v. 1, 2011.

MICHON, G.; MANIN, L. and DUFOUR, R. Hysteretic behavior of a belt tensioner: Modeling and experimental investigation. **JVC - Journal of Vibration and Control**, v. 11, n. 9, 1147–1158, 2005.

MICHON, G.; MANIN, L.; REMOND, D.; DUFOUR, R. and PARKER, R. Parametric instability of an axially moving belt subjected to multifrequency excitations: Experiments and analytical validation. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, v. 75, n. 4, 0410041–0410048, 2008.

MOCKENSTURM, E.; PERKINS, N. and ULSOY, A. Stability and limit cycles of parametrically excited, axially moving strings. **Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME**, v. 118, n. 3, 346–351, 1996.

MOON, J. and WICKERT, J. Non-linear vibration of power transmission belts. **Journal of Sound and Vibration**, v. 200, n. 4, 419–431, 1997.

MOTE JR., C. A study of band saw vibrations. **Journal of the Franklin Institute**, v. 279, n. 6, 430–444, 1965.

MOTE JR., C. and WU, W. Vibration coupling in continuous belt and band systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 102, n. 1, 1–9, 1985.

MUSSELMAN, M. and DJURDJANOVIC, D. Improvement of belt tension monitoring in a belt-drive automated material handling system. In G. Seliger; M.M. Khraisheh and I. Jawahir, editores, **Advances in Sustainable Manufacturing**, pp. 135–140. Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN 978-3-642-20182-0.

NASSIRI, F. **New approach in characterizing accessory drive belts for finite element applications**. 2010. Master's thesis. University of Toronto.

NEUDORF, T.J. **Non-contact measurement of dynamic belt span tension in automotive FEAD systems**. 2013. Master's thesis. University of Toronto.

NEWARD, R. **Analysis of tensioner induced coupling in serpentine belt drive systems**. 2008. Master's thesis. Rochester Institute of Technology.

NEWARD, R. and BOEDO, S. Analysis of tensioner induced coupling in serpentine belt drive systems. **SAE Technical Papers**, 2008.

NOURI, M. **Design optimization and active control of serpentine belt drive systems with two-pulley tensioners**. 2005. PhD thesis. University of Toronto.

OKUDA, K.; KOMATSU, Y. and NAKAHARA, Y. Research and analysis of isg belt-drive

system for idling stop system. **SAE Technical Papers**, 2006.

OLATUNDE, A. and ZU, J. Optimization of twin tensioner performance in a belt-driven integrated starter-generator system for micro-hybrids. **Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference 2009, DETC2009**, v. 6, 951–957, 2010.

OLATUNDE, A.O. **Design & analysis of a tensioner for a belt-driven integrated starter generator system of micro-hybrid vehicles**. 2008. Master's thesis. University of Toronto, Toronto, Canada.

OMAR, M. and SHABANA, A. A two-dimensional shear deformable beam for large rotation and deformation problems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 243, n. 3, 565 – 576, 2001.

PAKDEMIRLI, M. and ULSOY, A. Stability analysis of an axially accelerating string. **Journal of Sound and Vibration**, v. 203, n. 5, 815–832, 1997.

PAOLA, M.D.; PIRROTTA, A. and VALENZA, A. Visco-elastic behavior through fractional calculus: An easier method for best fitting experimental results. **Mechanics of Materials**, v. 43, n. 12, 799 – 806, 2011.

PARKER, R. Efficient eigensolution, dynamic response, and eigensensitivity of serpentine belt drives. **Journal of Sound and Vibration**, v. 270, n. 1-2, 15–38, 2004.

PARKER, R. and LIN, Y. Parametric instability of axially moving media subjected to multifrequency tension and speed fluctuations. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, v. 68, n. 1, 49–57, 2001.

PECHSTEIN, A. and GERSTMAYR, J. A lagrange-eulerian formulation of an axially moving beam based on the absolute nodal coordinate formulation. **Multibody System Dynamics**, v. 30, n. 3, 343–358, 2013.

PELLICANO, F.; CATELLANI, G. and FREGOLENT, A. Parametric instability of belts: Theory and experiments. **Computers and Structures**, v. 82, n. 1, 81–91, 2004.

PELLICANO, F.; FREGOLENT, A.; BERTUZZI, A. and VESTRONI, F. Primary and parametric non-linear resonances of a power transmission belt: Experimental and theoretical analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 244, n. 4, 669–684, 2001.

PELLICANO, F. and VESTRONI, F. Nonlinear dynamics and bifurcations of an axially moving beam. **Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME**, v. 122, n. 1, 21 – 30, 2000.

PONOMAREVA, S. and VAN HORSSSEN, W. On the transversal vibrations of an axially moving continuum with a time-varying velocity: Transient from string to beam behavior. **Journal of Sound and Vibration**, v. 325, n. 4-5, 959–973, 2009.

RIEDEL, C. **Coupled vibration and stability of automotive serpentine belt drives**. 2000. PhD thesis. Wayne State University.

RIM, W.T. and KIM, K.J. Identification of tension in a belt-driven system by analysing flexural vibrations. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 8, n. 2, 199–213, 1994.

SACK, R. Transverse oscillations in travelling strings. **British Journal of Applied Physics**, v. 5, n. 6, 224–226, 1954.

SANTOS, B.S.B. **Dynamic analysis of serpentine belt drivers and tensioner**. 2010. Master's thesis. University of Campinas, Campinas, São Paulo.

SANTOS, I.F. **Dinâmica de sistemas mecânicos: modelagem, simulação, visualização, verificação**. Makron, 2001. ISBN 9788534611107.

SCHIEHLEN, W. and EBERHARD, P. **Technische Dynamik: Modelle für Regelung und Simulation**. Lehrbuch: Mechanik. Teubner, 2004. ISBN 9783519123651.

SCHULZ, M. Elastic creep in serpentine belt drives and adopting a suitable strain measure. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 218, n. 12, 1421–1434, 2004.

SCURTU, P.; CLARK, M. and ZU, J. Coupled longitudinal and transverse vibration of automotive belts under longitudinal excitations using analog equation method. **JVC/Journal of Vibration and Control**, v. 18, n. 9, 1336–1352, 2012.

SCURTU, P.R. **Experimental and theoretical study of coupled longitudinal and transverse vibration of automotive belts**. 2009. PhD thesis. University of Toronto.

SHABANA, A.A. Flexible multibody dynamics: Review of past and recent developments. **Multibody System Dynamics**, v. 1, n. 2, 189 – 222, 1997.

SHABANA, A.A. **Computational Dynamics, 3rd Edition**. Wiley, 2009. ISBN 9780470686867.

SHABANA, A.A. On the definition of the natural frequency of oscillations in nonlinear large rotation problems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, n. 15, 3171 – 3181, 2010.

SHABANA, A.A. **Dynamics of Multibody Systems**. Cambridge University Press, New York, 4rd edition ed., 2013.

SHABANA, A.A.; ZAHER, M.H.; RECUERO, A.M. and RATHOD, C. Study of nonlinear system stability using eigenvalue analysis: Gyroscopic motion. **Journal of Sound and Vibration**, v. 330, n. 24, 6006 – 6022, 2011.

SHANGGUAN, W.B. Experimental and calculation analysis of rotational vibration for an engine front end accessory drive system. **SAE International Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems**, v. 4, n. 2, 1000–1017, 2011.

SHANGGUAN, W.B.; FENG, X.; LIN, H. and YANG, J. A calculation method for natural frequencies and transverse vibration of a belt span in accessory drive systems. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 227, n. 10, 2268–2279, 2013.

SHANGGUAN, W.B. and ZENG, X.K. Modeling and validation of rotational vibration responses for accessory drive systems - part i: experiments and belt modeling. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 135, 031002–1–031002–13, 2013a.

SHANGGUAN, W.B. and ZENG, X.K. Modeling and validation of rotational vibration responses for accessory drive systems - part ii: simulations and analyses. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 135, 031003–1–031002–13, 2013b.

SLOBODA, A.R. **Experimental and theoretical study of coupled axial and transverse moving belt vibration**. 2007. Master's thesis. University of Toronto.

TANG, Y.Q.; CHEN, L.Q.; ZHANG, H.J. and YANG, S.P. Stability of axially accelerating viscoelastic timoshenko beams: Recognition of longitudinally varying tensions. **Mechanism and Machine Theory**, v. 62, 31–50, 2013.

TENENBAUM, R.A. **Dinâmica aplicada**. Manole, 2006. ISBN 9788520415184.

ULSOY, A.; WHITESELL, J. and HOOVEN, M. Design of belt-tensioner systems for dynamic stability. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design**, v. 107, n. 3, 282 – 290, 1985.

VLASENKO, D. and KASPER, R. Generation of equations of motion in reference frame formulation for fem models. **Engineering Letters**, v. 16, 537–544, 2008.

WANG, K. Indirect damping analysis and synthesis of band/wheel mechanical systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 143, n. 1, 75–91, 1990.

WANG, K. and MOTE JR., C. Vibration coupling analysis of band/wheel mechanical systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 109, n. 2, 237–258, 1986.

WANG, L.; HU, Z. and ZHONG, Z. Non-linear dynamical analysis for an axially moving beam with finite deformation. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 54, 5–21, 2013.

WASFY, T. A torsional spring-like beam element for the dynamic analysis of flexible multibody systems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, n. 7, 1079–1096, 1996.

WICKERT, J. Non-linear vibration of a traveling tensioned beam. **International Journal of**

Non-Linear Mechanics, v. 27, n. 3, 503–517, 1992.

WICKERT, J. and MOTE JR., C. Classical vibration analysis of axially moving continua. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, v. 57, n. 3, 738–744, 1990.

XIANGWU, W.; JIANGHUA, G. and ZHICHAO, H. Research on methods for eigen-solution of serpentine belt drive systems. In **3rd International Conference on Integrity, Reliability and Failure**. Porto/Portugal, 2009.

YAN, Q.; DING, H. and CHEN, L. Nonlinear dynamics of axially moving viscoelastic timoshenko beam under parametric and external excitations. **Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)**, v. 36, n. 8, 971–984, 2015.

YOON, J.; CHOI, J.; SUZUKI, T. and CHOI, J. Numerical and experimental analysis for the skew phenomena on the flexible belt and roller contact systems. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 226, n. 5, 1365–1381, 2012.

ÖZ, H.; PAKDEMIRLI, M. and ÖZKAYA, E. Transition behaviour from string to beam for an axially accelerating material. **Journal of Sound and Vibration**, v. 215, n. 3, 571–576, 1998.

ZENG, X.K. and WANG, H.Y. Experimental and modelling analysis of dynamic characteristic for automatic tensioner in a two pulley-belt drive system. **International Journal of Vehicle Noise and Vibration**, v. 10, n. 4, 302 – 314, 2014.

ÖZHAN, B. and PAKDEMIRLI, M. Effect of viscoelasticity on the natural frequencies of axially moving continua. **Advances in Mechanical Engineering**, v. 2013, 2013.

ZHANG, L. **Dynamic analysis of viscoelastic serpentine belt drive systems**. 1999. PhD thesis. University of Toronto, Canada.

ZHANG, L. and ZU, J. Modal analysis of serpentine belt drive systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 222, n. 2, 259 – 279, 1999.

ZHANG, L. and ZU, J. One-to-one auto-parametric resonance in serpentine belt drive systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 232, n. 4, 783–806, 2000.

ZHANG, L.; ZU, J. and HOU, Z. Complex modal analysis of non-self-adjoint hybrid serpentine belt drive systems. **Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME**, v. 123, n. 2, 150–156, 2001.

ZHAO, J.; TIAN, Q. and HU, H. Modal analysis of a rotating thin plate via absolute nodal coordinate formulation. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, v. 6, 041013–1041013–8, 2011.

ZHU, F. **Nonlinear dynamics of one-way clutches and dry friction tensioners in belt-pulley systems**. 2006. PhD thesis. The Ohio State University.

ZHU, F. and PARKER, R. Non-linear dynamics of a one-way clutch in belt-pulley systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 279, n. 1-2, 285–308, 2005.

ZHU, F. and PARKER, R. Perturbation analysis of a clearance-type nonlinear system. **Journal of Sound and Vibration**, v. 292, n. 3-5, 969–979, 2006.

ZHU, F. and PARKER, R. Influence of tensioner dry friction on the vibration of belt drives with belt bending stiffness. **Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME**, v. 130, n. 1, 2008a.

ZHU, F. and PARKER, R. Piece-wise linear dynamic analysis of serpentine belt drives with a one-way clutch. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 222, n. 7, 1165 – 1176, 2008b.

ZHU, H.; HU, Y. and PI, Y. Transverse hysteretic damping characteristics of a serpentine belt: Modeling and experimental investigation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 333, n. 25, 7019 – 7035, 2014.

ZHU, S. **Modeling, system identification and control of a belt drive system**. 2011. Master's thesis. McMaster University, Hamilton, Ontario.

A Anexos

A.1 Dedução matemática da força centrífuga na correia

Nesta seção, a expressão da força centrífuga desenvolvida na correia é deduzida.

A Figura A.1(a) mostra uma correia deformável submetida à velocidade angular constante de magnitude ω em torno do próprio eixo. Devido à trajetória circular percorrida, a correia está sujeita à aceleração normal, originando forças axiais que se distribuem uniformemente ao longo da mesma.

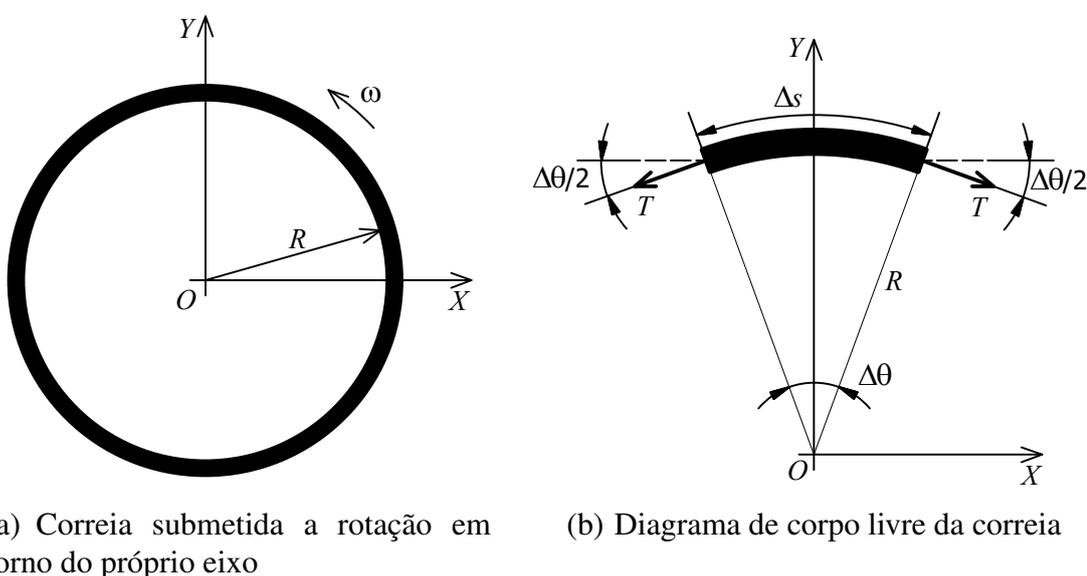


Figura A.1: Efeitos centrífugos atuantes na correia girante.

O diagrama de corpo livre de um segmento da correia é ilustrado na Figura A.1(b). Este segmento de comprimento Δs tem massa infinitesimal $\Delta m = \rho A \Delta s = \rho A (R \Delta \theta)$, e está sollicitado por duas forças axiais T de mesma magnitude. A velocidade linear c da correia é determinada através de

$$c = R\omega \quad (\text{A.1})$$

A aceleração normal à qual o segmento de correia está sujeito é dada por

$$a_c = -R\omega^2 \quad (\text{A.2})$$

que pode ser reescrita utilizando a Eq. (A.1) como

$$a_c = -\frac{c^2}{R} \quad (\text{A.3})$$

O sinal negativo indica que a aceleração está apontada para o centro da trajetória.

Aplicando a 2ª Lei de Newton ao segmento de correia e considerando apenas a direção vertical devido à simetria, tem-se

$$\begin{aligned} \sum \Delta F &= \Delta m a_c \\ -2 T \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) &= -(\rho A R \Delta\theta) \frac{c^2}{R} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Considerando infinitesimal a quantidade $\Delta\theta$, pode-se adotar a aproximação $\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \approx \frac{\Delta\theta}{2}$, resultando em

$$-2 T \frac{\Delta\theta}{2} = -(\rho A R \Delta\theta) \frac{c^2}{R} \quad (\text{A.5})$$

Fatorando o termo infinitesimal e simplificando, tem-se

$$(T - \rho A c^2) \Delta\theta = 0 \quad (\text{A.6})$$

o que resulta finalmente em

$$T = \rho A c^2 \quad (\text{A.7})$$