

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Identificação de Modos Operacionais e
Naturais de Vibração em Máquinas Rotativas
Utilizando Coordenadas Complexas**

Autor: **Alexandre Luiz Amarante Mesquita**
Orientador: **Milton Dias Jr.**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Identificação de Modos Operacionais e Naturais de Vibração em Máquinas Rotativas Utilizando Coordenadas Complexas

Autor: **Alexandre Luiz Amarante Mesquita**
Orientador: **Milton Dias Jr.**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2004
S.P. – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M562i Mesquita, Alexandre Luiz Amarante
Identificação de modos operacionais e naturais de
vibração em máquinas rotativas utilizando coordenadas
complexas / Alexandre Luiz Amarante Mesquita.--
Campinas, SP: [s.n.], 2004.

Orientador: Milton Dias Jr.
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Rotores. 2. Máquinas. 3. Análise modal. 4.
Vibração. I. Jr. Dias, Milton. II. Universidade Estadual
de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III.
Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

TESE DE DOUTORADO

**Identificação de Modos Operacionais e
Naturais de Vibração em Máquinas Rotativas
Utilizando Coordenadas Complexas**

Autor: **Alexandre Luiz Amarante Mesquita**
Orientador: **Milton Dias Jr.**

Prof. Dr. Milton Dias Jr, Presidente
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Prof. Dr. Paulo Sergio Varoto
Universidade Estadual de São Paulo – EESC - USP

Prof. Dr. José Carlos Pereira
Universidade Federal de Santa Catarina –UFSC

Prof. Dr. Robson Pederiva
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP

Prof. Dra. Kátia Lucchesi Dedini
Universidade Estadual de Campinas -UNICAMP

Campinas, 12 de Março de 2004

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais João Batista de Carvalho Mesquita (*in memoriam*) e Maria Hosana Amarante Mesquita, como uma singela homenagem pelo amor, carinho e esforços que fizeram para garantir a educação a mim e aos meus irmãos.

Agradecimentos

A Deus por estar sempre presente.

Aos meus pais João Batista de Carvalho Mesquita e Maria Hosana Amarante Mesquita, que nunca mediram esforços no sentido de auxiliar-me.

Ao Professor Dr. Milton Dias Jr. por sua orientação, ensinamentos e amizade durante o meu doutoramento.

Ao Departamento de Projeto Mecânico (DPM), Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM) da UNICAMP e ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pará (UFPA) por terem me dado a oportunidade de realizar este trabalho.

Aos profissionais do DPM pela atenção e esforços no sentido de atender às necessidades do trabalho.

Ao programa PICDT da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro.

Ao doutorando Sérgio Junichi Idehara pela amizade e grande contribuição a esta tese. Aos amigos Hilton, Ubatan, Darley, Pompeu, Orofino, Abdon, Carlos, Vinícius e Roberto, enfim, a todos os amigos e pessoas que contribuíram de forma direta ou indireta na conclusão deste trabalho.

Resumo

MESQUITA, Alexandre Luiz Amarante, *Identificação de Modos Operacionais e Naturais de Vibração em Máquinas Rotativas Utilizando Coordenadas Complexas*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004. 133 p. Tese (Doutorado).

Neste trabalho são apresentadas metodologias de identificação de modos operacionais e modos naturais de vibração em máquinas rotativas. Em relação aos modos operacionais, é identificado um especial tipo de movimento no qual algumas estações da máquina possuem movimentos de precessão direta e outras possuem movimento de precessão retrógrada, de forma simultânea. Inicialmente, são investigadas, através de análises numérica e experimental, as variáveis que influenciam no surgimento e no desaparecimento deste tipo de movimento. Visando uma rápida identificação experimental da(s) frequência(s) de rotação em que ocorre o fenômeno dos modos operacionais mistos, faz-se uma análise durante a partida de uma máquina rotativa através da técnica de *order tracking* adaptada para tratar com sinais complexos. A segunda parte do trabalho tem como objetivo a identificação dos modos naturais de vibração de sistemas rotativos. Nesta segunda etapa, inicialmente, é feita uma revisão de duas metodologias de análise modal em rotores: a tradicional e a análise modal complexa, que trata os sinais de resposta e de excitação do sistema como sinais complexos. Finalmente, apresenta-se um procedimento de análise modal que identifica os modos naturais através da metodologia tradicional de vibração, fazendo-se uso de particularidades do sistema medido - sistema giroscópico pouco amortecido.

Palavras Chave

Abstract

MESQUITA, Alexandre Luiz Amarante, *Identification of Operational and Natural Modes of Vibration in Rotating Machinery Using Complex Coordinates*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1993. 133 p. Tese (Doutorado).

This work presents methodologies for identification of operational and natural modes of vibration in rotating machinery. First, a special type of operational movement is identified, called mixed modes, which occurs when some stations of the rotating machine describe their precessional movement in the forward direction while others move in the backward direction simultaneously. Numerical and experimental results are presented, where the parameters which affect the appearance of the mixed mode are investigated. Then, in order to obtain a faster identification of the frequencies corresponding to operational mixed modes, an order tracking technique is applied to run-up vibration data of the machine. The second part of this work is concerning to the identification of natural modes of vibration. First, two modal test methodologies are revised: the traditional and the complex modal analysis. Finally, a procedure to identify the natural modes is proposed. This procedure is applied to gyroscopic and lightly damped systems.

Key Words

Rotors, Machinery, Modal Analysis, Operational Modes, Order Tracking

Índice

Índice	i
Lista de Figuras	ii
Lista de Tabelas	ix
Nomenclatura	x
1. Introdução	1
1.1. Considerações Gerais e Objetivo	1
1.2. Revisão de Literatura	3
1.2.1. Sobre Modos Operacionais Mistos	3
1.2.2. Sobre <i>Order Tracking</i>	4
1.2.3. Sobre Análise Modal em Máquinas Rotativas	5
1.3. Divisão do Trabalho	6
2. Utilização da Notação Complexa no Estudo da Dinâmica de Rotores	8
2.1. Introdução	8
2.2. Rotor De Laval e Resposta ao Desbalanceamento	9
2.2.1. Rotor Isotrópico	9
2.2.2. Rotor Anisotrópico	13
2.3. Análise da Resposta em Frequência Devido a Excitação Periódica – Espectro Total	20
2.4. Equações do Movimento com Efeito Giroscópico	24
3. Identificação de Modos Operacionais Mistos	29
3.1. Introdução	29
3.2. Resposta ao Desbalanceamento do Sistema Rotativo de N Estações em Coordenadas Complexas	30
3.3. Modos Operacionais Mistos - Análise Numérica	35

3.3.1. Modelo I – Disco Central em Eixo Flexível Suportado por Mancais Flexíveis	35
3.3.2. Modelo II – Rotor com Dois Discos Iguais Eqüidistantes aos Mancais Flexíveis	
3.3.3 Modelo III – Rotor Usado por Lallane & Ferraris (1998)	48
3.4. Modos Operacionais Mistos - Resultados Experimentais	51
4. Identificação de Modos Operacionais Mistos em Máquinas Rotativas Operando em Regime Transiente	54
4.1. Introdução	54
4.2. Métodos Seguidores de Ordem (<i>Order Tracking Methods</i>)	54
4.3. <i>Order Tracking</i> Aplicada a Identificação de Modos Operacionais Mistos	65
4.3.1. Aplicação do Método - Resultados de Simulação Numérica no Rotor De Laval	66
4.3.2. Aplicação do Método - Resultados Experimentais	68
5. Análise Modal Complexa em Máquinas Rotativas – Teoria	73
5.1. Introdução	73
5.2. Análise Modal Clássica – Teoria	74
5.3. Análise Modal Complexa	79
5.4. Funções de Respostas em Frequência Direcionais (dFRFs) Levando-se em Conta os Deslocamentos Angulares	87
5.5. Exemplo de Simulação Numérica de Análise de Directividade de Modos através das FRFs e dFRFs	91
5.6. Procedimento Proposto para Identificação dos Modos Naturais e suas Directividades em Sistemas Levemente Amortecidos	94
6. Análise Modal Complexa em Rotores – Resultados Numéricos e Experimentais	100
6.1. Introdução	100
6.2. Medição das Respostas na Análise Modal em Máquinas Rotativas	100
6.3. Métodos de Excitação na Análise Modal em Máquinas Rotativas	101
6.4. Descrição da Bancada Experimental e Modelo Numérico	103
6.5. Obtenção dos Modos Naturais	106
6.6. Resultados Experimentais e Identificação de Parâmetros Modais	109
6.7. Sobre a Existência de Modos Naturais Mistos	114
7. Conclusões e Sugestões para Futuros Trabalhos	116

7.1. Conclusões	116
7.2. Sugestões para Futuros trabalhos	118
Referências Bibliográficas	120
Apêndice A - Autovalores e Autovetores de Matrizes Complexas Com Forma Especial	127
Apêndice B - Técnicas de Excitação com o Uso do Shaker na Análise Modal Complexa e Estimativa das dFRFs ao se Utilizar Excitação Estacionária Bidirecional	129

Lista de Figuras

Figura 2.1: Rotor De Laval (Lee, 1993).	10
Figura 2.2: Gráfico de $ P /\varepsilon$ versus r , e a influência do fator de amortecimento.	13
Figura 2.3: Relação $ P_f / P_b $ em função da rotação para rotor De Laval não-amortecido.	18
Figura 2.4: Função de resposta ao desbalanceamento mostrando as contribuições de P_f e P_b .	18
Figura 2.5: Órbitas do rotor para diferentes valores de velocidade de rotação do rotor cuja resposta ao desbalanceamento está apresentada na Figura 2.4.	19
Figura 2.6: Faixas de frequências mostrando variação do formato e direção da órbita do disco.	19
Figura 2.7: Órbita (movimento de $p(t)$) de uma estação de um rotor anisotrópico descrita pela soma de dois vetores rotativos.	22
Figura 2.8: (a) Órbita de uma estação composta por duas frequências; (b) Órbita filtrada na primeira frequência (1X); (c) Órbita filtrada na segunda frequência (2X); (d) Espectro total.	23
Figura 2.9: (a) Espectro total da resposta ao desbalanceamento mostrando as componentes retrógradas e diretas praticamente com o mesmo nível nas ressonâncias; (b) Superposição das componentes mostrando que fora das ressonâncias há diferença entre os níveis das componentes.	24
Figura 2.10: (a) Diagrama de Campbell com frequências positivas e negativas; (b) Diagrama de Campbell com frequências positivas mostrando as velocidades críticas.	28
Figura 3.1: Elemento finito de viga.	31
Figura 3.2: Ilustração do mapa <i>SDI Plot</i> .	34
Figura 3.3: Modelo de elementos finitos do rotor I.	35

Figura 3.4: Diagrama de Campbell.	36
Figura 3.5: (a) Gráfico de <i>SDI Plot</i> e (b) função resposta ao desbalanceamento direcional para rotor isotrópico.	36
Figura 3.6: (a) Gráfico do <i>SDI Plot</i> e (b) FRDD para rotor anisotrópico com $k_{zz} = 2000$ N/m.	37
Figura 3.7: Gráfico de <i>SDI Plot</i> e FRDD para rotor anisotrópico com $k_{zz} = 2000$ N/m.	37
Figura 3.8: (a) Gráfico do <i>SDI Plot</i> e (b) FRDD do rotor com $k_{zz} = 2000$ N/m e $c_{yy} = c_{zz} = 8$ Ns/m.	
Figura 3.9: Gráfico de <i>SDI Plot</i> e FRDD para rotor com mancais dissimilares e faixa até 1500rpm.	
Figura 3.10: Gráfico de <i>SDI Plot</i> e FRDD o rotor com mancais dissimilares e faixa até 4500 rpm.	
Figura 3.11: (a) Gráfico do <i>SDI Plot</i> , na faixa de 0 a 1500 rpm, mostrando a ocorrência do modo operacional misto; (b) Gráfico do <i>SDI Plot</i> , na faixa de 0 a 4500 rpm.	40
Figura 3.12: Função de resposta ao desbalanceamento direcional do nó 1.	40
Figura 3.13: FRDD do nó 1 com $m\varepsilon = 1e-5$ kgm.	41
Figura 3.14: <i>SDI Plot</i> para $c_{zz} = 4$ Ns/m.	42
Figura 3.15: <i>SDI Plot</i> para $c_{zz} = 8$ Ns/m.	42
Figura 3.16: Gráfico de <i>SDI Plot</i> e FRDD para rotor com mancais com valores de rigidez equivalentes nas direções y e z iguais.	43
Figura 3.17: Modelo com disco não central.	43
Figura 3.18: <i>SDI Plot</i> para modelo com disco não central.	43
Figura 3.19: Modelo de elementos finitos do rotor II.	44
Figura 3.20: (a) Diagrama de Campbell e (b) <i>SDI Plot</i> para o modelo 2.	45
Figura 3.21: Gráfico de <i>SDI Plot</i> e FRDD para rotor anisotrópico com $k_{zz} = 0.6 \times 10^6$ N/m.	46
Figura 3.22: <i>SDI</i> para giro de 30° no disco I.	47
Figura 3.23: <i>SDI</i> para giro de 100° no disco I.	47
Figura 3.24: (a) <i>SDI Plot</i> para sistema com desbalanceamento $m\varepsilon_I = 2 \times 10^{-5}$ kg.m e $m\varepsilon_{II} = 1 \times 10^{-5}$ kg.m e (b) sistema com desbalanceamento $m\varepsilon_I = 10^{-5}$ kg.m e $m\varepsilon_{II} = 0,5 \times 10^{-5}$ kg.m.	48
Figura 3.25: (a) <i>SDI Plot</i> para $c_{yy} = c_{zz} = 250$ Ns/m; (b) <i>SDI Plot</i> para $c_{yy} = c_{zz} = 500$ Ns/m.	48
Figura 3.26: Modelo de elementos finitos do rotor III.	49
Figura 3.27: <i>SDI Plot</i> para o rotor III.	49

Figura 3.28: Modos operacionais em (a) 3508,7rpm, (b) 6093,4 rpm e (c) 9006,7rpm.	50
Figura 3.29: (a) Bancada experimental estudada, e (b) detalhe dos dois discos do rotor.	51
Figura 3.30: Resultados mostrando a influência da distribuição espacial do desbalanceamento.	52
Figura 3.31: Progressão das órbitas das estações para alguns valores de velocidade de rotação.	53
Figura 4.1: Efeito do espalhamento. (a) sinal senoidal e (b) espectro de freqüências correspondente; (c) sinal senoidal de varredura rápida e (d) espectro correspondente.	56
Figura 4.2: (a) Freqüência constante do sinal e amostragens nos domínios do tempo e do ângulo constantes; (b) Freqüência variável com amostragem no tempo constante resultando numa amostragem no domínio do ângulo variável; (c) Freqüência variável com amostragem no tempo variável e no domínio do ângulo constante (Blough, 1998).	57
Figura 4.3: Representação do sinal no domínio angular.	57
Figura 4.4: (a) Sinal não estacionário com Δt variável sincronizado com a variação da freqüência do sinal; (b) O mesmo sinal amostrado no domínio do ângulo.	58
Figura 4.5: Mapa espectral ou diagrama em cascata.	59
Figura 4.6: Mapa espectral de ordem.	59
Figura 4.7: Etapas da reamostragem digital.	62
Figura 4.8: Respostas ao desbalanceamento.	66
Figura 4.9: Mapa espectral direcional – mapa de ordem contendo ordens negativa e positiva.	67
Figura 4.10: Amplitude e ângulo de fase da ordem em função do tempo.	67
Figura 4.11: Gráfico do SDI em função do tempo e da rotação.	67
Figura 4.12: Rotor Bently usado nas análises de <i>order tracking</i> direcional.	68
Figura 4.13: Bancada experimental e aparato instrumental.	68
Figura 4.14: (a) Mapa de ordem direcional e (b) amplitude das componentes de precessão direta e retrógrada em função do tempo e da rotação. Gráficos referentes à estação 1 durante uma variação de rotação de 52 Hz (3120 rpm) a 57 Hz (3420 rpm).	69
Figura 4.15: Gráficos referentes à estação 1 durante uma variação de rotação de 52,13 Hz (3128rpm) a 58,6 Hz (3518 rpm). Disco II girado de 90°.	70
Figura 4.16: Gráficos referentes à estação 3 durante uma variação de rotação de 52,13 Hz (3128rpm) a 58,6 Hz (3518 rpm). Disco II girado de 90°.	70

Figura 4.17: Gráficos referentes à estação 1 durante uma variação de rotação de 52,58 Hz (3155rpm) a 59,25 Hz (3555 rpm). Disco II girado de 180°.	71
Figura 4.18: Gráficos referentes à estação 2 durante uma variação de rotação de 52,58 Hz (3155rpm) a 59,25 Hz (3555 rpm). Disco II girado de 180°.	71
Figura 4.19: Resultados obtidos para a estação 3 na faixa III.	72
Figura 4.20: Resultados obtidos para a estação 4 na faixa III.	72
Figura 5.1: Elemento finito de viga. (a) graus de liberdade adotados por Nelson and McVaugh; e (b) graus de liberdade adotados por Lee.	87
Figura 5.2: Modelo de elementos finitos de um rotor flexível.	91
Figura 5.3: (a) FRF de <i>driving-point</i> 15y; (b) dFRF de <i>driving-point</i> no ponto 15.	92
Figura 5.4: (a) FRF de <i>driving-point</i> 15y; (b) FRF de <i>driving-point</i> 15z; (c) FRF cruzada 15z 15y; (d) dFRF de <i>driving-point</i> 15.	93
Figura 5.5: As formas dos quatro modos na faixa de frequência de análise.	94
Figura 6.1: Sensor de proximidade conectado ao seu oscilador-demodulador (Vance, 1988).	101
Figura 6.2: Bancada experimental II.	104
Figura 6.3: Modelo de Elementos Finitos.	104
Figura 6.4: Diagrama de Campbell.	104
Figura 6.5: Quatro primeiros modos do modelo da bancada.	105
Figura 6.6: Gráficos de algumas FRFs obtidas através do modelo da bancada experimental.	106
Figura 6.7: Vetores modais exatos contendo os deslocamentos dos cinco nós usados na análise.	
Figura 6.8: Vetores modais estimados.	108
Figura 6.9: MAC entre os modos numéricos regenerados e os modos numéricos exatos.	108
Figura 6.10: Representação da instrumentação utilizada nos testes modais.	109
Figura 6.11: (a) Detalhe da bucha e transdutor de força utilizados nos experimentos; (b) Visão expandida da utilização da bucha e dos sensores de vibração.	110

Figura 6.12: (a) Detalhe da instrumentação utilizada: (a) Vista do motor elétrico e <i>shaker</i> ; (b) Sensores de proximidade, cabos e os condicionadores dos sensores.	110
Figura 6.13: Algumas funções de resposta em frequência obtidas nos testes modais.	112
Figura 6.14: FRF depois de filtrada digitalmente em 40 Hz. Esta FRF corresponde a excitação vertical e resposta vertical no segundo disco.	112
Figura 6.15: As três primeiras formas modais do sistema rotativo na direção horizontal. A quarta forma modal é igual a zero.	113
Figura 6.16: – Primeira, segunda e quarta formas modais do sistema rotativo na direção vertical. A terceira forma modal é igual a zero.	113
Figura 6.17 – Modelo de elementos finitos e diagrama de Campbell.	114
Figura 6.18: Formas modais naturais nas velocidades críticas.	115
Figura B.1: Modelo sem ruído, com duas entradas complexas/uma saída complexa.	131

Lista de Tabelas

Tabela 3.1: Dimensões dos discos do rotor.

49

Nomenclatura

Letras Latinas

$\{a\}$ e $\{b\}$ – Vetores modais reais no plano $y-x$ e n plano $z-x$, respectivamente

$[A],[B]$ - Matrizes do sistema em espaço de estado

$[D]$ – Matriz que representa o amortecimento os termos giroscópicos

$[G]$ - Matriz giroscópica

$[M], [K]$ - Matriz de massa e de rigidez

$[T]$ - Matriz de transformação de coordenadas reais para coordenadas complexas

$\{\ell\}$ - Autovetor à esquerda do autoproblema de primeira ordem,

$\{f\}$ - Força de excitação

$\{g\}$ - Força de excitação complexa

$\{q\}$ - Vetor das coordenadas generalizadas

$\{Q\}$ - Vetor da forças de excitação

C, c – Amortecimento

e_{ij} - Contribuição de ortogonalidade cruzada da ordem i na estimativa da ordem j ,

f_{\max} - Frequência máxima do sinal

f_s - Taxa de amostragem,

G_f, G_b – Componente direta e retrógrada da força de excitação

$H(\omega)$ – Função de resposta em frequência

$H_{pg}(\omega), H_{\hat{p}\hat{g}}(\omega)$ - Função de resposta em frequência direcionais normais

$H_{p\hat{g}}(\omega), H_{\hat{p}g}(\omega)$ - Função de resposta em frequência direcionais reversas

J – Momento de Inércia de massa

j – Número complexo

K, k - Rigidez

m – Massa

N - Número de amostras

\tilde{o}_i - Valor estimado da ordem i obtida usando a TVDFT

o_i - Valor corrigido da ordem i ,

O_m - Ordem analisada

O_{\max} - Ordem máxima a ser analisada

O_s - Ordem de amostragem (taxa de amostragem angular) do sinal

p - Deflexão do eixo (coordenada complexa)

P_f, P_b – Componente de precessão direta e retrógrada

R - Número total de revoluções analisadas

T - Registro temporal (*time record*)

t – Tempo

$\{u\}, \{v\}$ - Autovetores à direita e à esquerda do autoproblema de segunda ordem

y_c – Coordenada do centro do eixo na direção y

z_c – Coordenada do centro do eixo na direção z

Letras Gregas

λ - Autovalor

ε - Excentricidade de desbalanceamento

ω - Frequência

Ω - Rotação do eixo

$\Delta\theta$ - Intervalo de discretização angular das amostras

Δf - Resolução em frequência

ω_n – Frequência natural

Δo - Intervalo de discretização no espectro de ordem

Δt - Intervalo de discretização;

$\{\phi_y\}, \{\phi_z\}$ - Vetores dos graus de liberdade de rotação em torno dos eixos y e z

$\{\psi\}$ - Autovetor à direita do autoproblema de primeira ordem,

Abreviações

COT - *Computed Order Tracking*

dFRF - Função de Resposta em Frequência Direcional

dFRM – Matriz de Funções de Resposta em Frequência Direcionais

FFT –Fast Fourier Transform

FRDD - Função de Resposta ao Desbalanceamento Direcional

FRF – Função de Resposta em Frequência

OCM - *Orthogonality Compensation Matrix*

SDI - *Shape and Directivity Index*

SDI Plot – Gráfico do SDI em 3D

TVDFFT - *Time Variant Discrete Fourier Transform*

Capítulo 1

Introdução

1.1. Considerações Gerais e Objetivo

A área de dinâmica de rotores pode ser considerada como um caso especial dentro do estudo das vibrações mecânicas. Nos problemas de dinâmica de rotores, os deslocamentos de resposta forçada (modos operacionais) e os modos naturais de vibração são todos associados com movimentos rotativos. Mais precisamente, o movimento resultante de um sistema rotativo (rotor, eixo e mancais) é composto por dois movimentos rotativos superpostos: a rotação própria em torno de si próprio (rotação própria ou *spin*) e a rotação do eixo defletido em torno de sua configuração não defletida (precessão ou *whirl*). A órbita (do centro geométrico) do eixo pode ter sua trajetória descrita no mesmo sentido da direção do movimento de rotação própria, constituindo um modo de precessão direta, ou pode ter sentido oposto, constituindo um modo de precessão retrógrada. Esta composição de movimentos descreve tanto os modos operacionais do sistema (a forma da resposta forçada em uma determinada rotação) quanto os modos naturais de vibração, obtidos por análise modal.

Existe uma grande necessidade em se identificar a direcionalidade (se direto ou retrógrado) dos modos de vibração do sistema rotativo, pois estes movimentos podem afetar diretamente a vida útil do sistema. Os movimentos de precessão retrógrada causam alternância das tensões no eixo, o que pode levá-lo à ruptura por fadiga. Neste contexto, o uso de coordenadas complexas na descrição destes movimentos rotativos têm-se mostrado uma alternativa muito eficiente em

relação ao uso de coordenadas reais. O uso das coordenadas complexas traz a vantagem de possibilitar a identificação da direção do modo além de poder fornecer outras vantagens, tais como, a redução da ordem do problema, acarretando em redução de memória computacional, e também a redução do tempo computacional (Chen, 1998).

Dentre as formas de movimento de precessão dos modos operacionais existe a possibilidade de ocorrência de um fenômeno já conhecido, mas pouco investigado na literatura, que é a da ocorrência simultânea de movimentos de precessão direta e retrógrada no sistema rotativo, ou seja, quando algumas partes do sistema precessionam na direção direta e outras precessionam na direção retrógrada, ao mesmo tempo. Este fenômeno é definido no trabalho como movimento de precessão misto ou modo operacional misto.

Neste trabalho, são investigadas as variáveis que influenciam no surgimento e no desaparecimento deste especial tipo de movimento, descrito por variáveis complexas. O estudo é realizado numericamente através de um código de elementos finitos escrito em ambiente Matlab®, o X-Rotor. Em seguida, o fenômeno é verificado experimentalmente em uma bancada de laboratório. Esta verificação experimental é realizada analisando as direções das órbitas de estações do rotor e do eixo da bancada, para alguns valores de frequências de rotação (em situação de regime permanente).

Visando uma rápida identificação experimental da(s) frequência(s) de rotação em que ocorre o fenômeno dos modos operacionais mistos, faz-se uma análise do movimento, durante a partida da máquina rotativa. Neste caso, como o sinal medido é um sinal não-estacionário, aplica-se uma técnica de *order tracking*, a TVDFT (*Time Variant Discrete Fourier Transform*) adaptada para tratar com sinais complexos. Novamente, verifica-se o surgimento do modo operacional misto e com essa nova abordagem identifica-se o início de sua ocorrência.

Após as análises dos modos operacionais, a segunda parte do trabalho trata da identificação dos modos naturais de vibração de sistemas rotativos. Nesta segunda etapa, inicialmente, é feita uma revisão de duas metodologias de análise modal em sistemas rotativos: a tradicional, usada em sistemas não-rotativos, que é adaptada para sistemas rotativos e a análise modal complexa,

desenvolvida por Chong-Won Lee (1990, 1991), que trata os sinais de resposta e de excitação do sistema como sinais complexos. Esta última metodologia, ainda não é muito utilizada na comunidade científica. Neste trabalho, esta formulação é revista e apresentada em uma maneira de mais fácil entendimento. Finalmente, apresenta-se um procedimento de análise modal que identifica os modos naturais de vibração através da metodologia tradicional de vibração, fazendo-se uso de particularidades do sistema medido - sistema giroscópico pouco amortecido.

Desta forma, o objetivo global do trabalho pode ser descrito como a identificação da forma e direção dos modos operacionais e dos modos naturais de vibração através da utilização de coordenadas complexas na descrição do movimento de sistemas rotativos.

1.2. Revisão de Literatura

A seguir é feita uma revisão bibliográfica dos assuntos envolvidos nesta tese. Esta revisão é novamente discutida nos capítulos referentes a cada assunto.

1.2.1. Sobre Modos Operacionais Mistos

A existência de movimentos de precessão simultânea, brevemente mencionada em alguns livros textos (Vance, 1988; Lee, 1993), foi provada experimentalmente por alguns autores. Lund (1974) apresentou vários resultados experimentais em que é verificada a existência dos modos operacionais mistos, mas o autor não comenta a respeito destes resultados. Rajalingham et al (1989) e Rao *et al* (1996,1997) analisaram um rotor de Jeffcott suportado por mancais hidrodinâmicos idênticos e dissimilares. Os autores mostraram que a folga nos mancais e as dissimilaridades entre os mancais afetam a existência dos modos operacionais mistos. Foi verificado nesses estudos que, entre duas velocidades críticas, o centro do rotor precessiona na direção retrógrada enquanto as extremidades, onde se situam os mancais, precessionam na direção direta, simultaneamente. Muszynska (1996) analisou um rotor em balanço, vertical, desbalanceado, empenado e suportado por mancais anisotrópicos. Neste estudo, a autora concluiu que os efeitos combinados de desbalanceamento e de empenamento podem levar o rotor a possuir

movimentos de precessão direta e retrógrada de forma simultânea em diferentes estações do rotor. Apesar destes trabalhos tratarem da matéria, este assunto é pouco discutido na literatura.

1.2.2. Sobre *Order Tracking*

A *order tracking* é uma técnica aplicável em sinais de vibração (ou ruído) de máquinas rotativas operando em regime não-estacionário, como por exemplo, durante a partida ou parada da máquina. Os primeiros artigos publicados sobre *order tracking* computacional (*Computed Order Tracking* - COT) foram escritos por Potter e Gribler (1989) e Potter (1990). A denominação de *order tracking* computacional serve para diferenciação da metodologia obsoleta de *order tracking*, que utilizava equipamentos analógicos para realizar a reamostragem do sinal (Potter, 1990; Blough, 1998). No método da COT assume-se que a aceleração angular é constante e cada dado amostrado de vibração no domínio do ângulo é obtido após cada aquisição de três pulsos do tacômetro. No artigo de Fyfe e Munck (1997) este método é analisado com detalhes. Outros artigos que também discutem este método são os trabalhos de McDonald e Gribler (1991), Bosley et al. (1999), Mesquita et al. (2002), Idehara et al. (2003) e Idehara (2003). Uma variação do COT é o método da reamostragem digital. Neste método, a restrição da aceleração angular ser constante é relaxada. Os métodos de *order tracking* baseado na reamostragem digital são os mais comumente implementados em analisadores de sinais comerciais (Blough, 1998). Recentemente, novos métodos foram desenvolvidos, tais como os métodos baseados no filtro de Kalman (Vold e Leuridan, 1993; Vold, 1997) e o método da TVDFT (*Time Variant Discrete Fourier Transform*) (Blough et al, 1996; Blough, 1998). O método da TVDFT não necessita da reamostragem do sinal, ou seja, não há a necessidade de converter os dados de vibração no domínio do tempo para o domínio do ângulo. O método é aplicado diretamente nos dados de vibração que são amostrados com intervalo de tempo constante, o que reduz consideravelmente o esforço e o tempo computacional (Blough, 1998; Idehara et al, 2003; Idehara, 2003).

Neste trabalho, a TVDFT é adaptada para tratar com sinais transientes complexos, ou seja, formado a partir dos sinais reais da partida da máquina medidos em direções perpendiculares entre si (direções y e z). O sinal de resposta medido na direção y forma a parte real e o sinal medido na direção z forma a parte imaginária no sinal complexo. Aplicando-se a técnica de *order*

tracking no sinal complexo obtém-se o mapa de ordem direcional, ou seja, um diagrama em cascata contendo ordens negativas e positivas. Através das magnitudes das ordens em cada velocidade de rotação, para várias estações do rotor, é possível identificar os modos operacionais mistos e em que frequência inicia a ocorrência deste.

1.2.3. Sobre Análise Modal em Máquinas Rotativas

Os conceitos de análise modal em estruturas não-rotativas têm sido aplicados na análise de estruturas rotativas (Nordmann, 1984, Roger e Ewins, 1989). Contudo, a análise requer um desenvolvimento teórico mais geral, pois devido a rotação, surge o efeito giroscópico fazendo com que algumas matrizes do sistema não sejam simétricas. A consequência disto é que diferentes autovetores, que são referidos como autovetores à direita e à esquerda, são necessários para se obter o model modal completo da estrutura rotativa. Para isto, é necessário medir pelo menos uma linha e uma coluna da matriz das FRFs (funções de resposta em frequência), aumentando o número de medições que seriam requeridas no caso de estruturas não-rotativas. Na análise modal tradicional aplicada em máquinas rotativas, a identificação dos modos de precessão direta e retrógrada é dificultada devido ao forte acoplamento destes nas FRFs, principalmente quando o rotor possui pouco efeito giroscópico e/ou com os mancais poucos anisotrópicos. Devido a este problema Chong-Won Lee (1990, 1991) desenvolveu a análise modal complexa.

A análise modal complexa refere-se à aplicação dos princípios de análise modal em sistemas rotativos em que as entradas e saídas são descritas por variáveis complexas. A vantagem desta metodologia, em relação à análise modal clássica em rotores, é a capacidade de incorporar direcionalidade. Em particular, o método separa as contribuições dos modos de precessão direta e de precessão retrógrada nas FRFs. Esta técnica também foi tratada em vários outros artigos de Lee e de seus colaboradores (Lee e Joh, 1993; Joh e Lee, 1993; Jei e Kim, 1993). Nos trabalhos de Kessler e Kim (1998, 1999, 2001, 2002) esta metodologia é apresentada de uma forma mais compreensível, contudo, mais simplificada. Neste trabalho, é descrito o procedimento da análise modal complexa, com algumas modificações e um detalhamento maior, com o intuito de fornecer um melhor entendimento do mesmo.

1.3. Divisão do Trabalho

Este trabalho está dividido em sete Capítulos. Os Capítulos 2, 3 e 4 estão relacionados com o estudo dos modos operacionais enquanto que os Capítulos 5 e 6 estão relacionados com o estudo da análise modal em máquinas rotativas. A seguir, apresenta-se uma descrição sucinta de cada capítulo, excetuando-se a introdução (Capítulo 1), conclusões e sugestões para trabalhos futuros (Capítulo 7) e os dois Apêndices apresentados no final do trabalho.

O Capítulo 2 mostra um resumo da teoria de dinâmica de rotores dando a ênfase na utilização de coordenadas complexas, com o intuito de se obter uma melhor compreensão física dos movimentos de precessão do rotor. Verifica-se que, com o uso destas coordenadas torna-se possível a determinação das componentes de precessão direta e de precessão retrógrada, e desta forma, possibilita-se determinar o formato da órbita e a direcionalidade do movimento de precessão. Com esta metodologia, as frequências negativas possuem significado físico, tornando mais fácil a compreensão do comportamento dinâmico do sistema rotativo sob estudo.

Os estudos realizados no Capítulo 2 são aplicados analisando-se a resposta de apenas uma estação do sistema, mais precisamente no rotor, representado por um disco. No Capítulo 3, o estudo é extrapolado para várias estações e os movimentos simultâneos de precessão destas estações são analisados de forma numérica e experimental. As análises de simulação numérica são realizadas através do XRotor, no qual os movimentos de precessão das estações do rotor são analisados através do gráfico do *SDI Plot*, que é um gráfico que mostra o índice *SDI* (*Shape and Directivity Index*) em função da rotação para cada estação do rotor (nós do modelo). O índice *SDI* indica a forma e a direção da órbita de uma determinada estação.

No Capítulo 4 é apresentado um método para se identificar as faixas de frequências em que ocorrem os modos operacionais mistos, durante uma variação da velocidade de rotação do sistema. O método é baseado na análise do mapa de ordem direcional, obtido através da aplicação da técnica de *order tracking* nos sinais complexos de vibração do sistema rotativo. Sendo então este procedimento definido como *order tracking* direcional. A metodologia da técnica é descrita através de uma simulação numérica da partida de um rotor De Laval e em seguida o método é

aplicado em um caso experimental. Neste caso experimental foram identificadas faixas de frequências em que ocorrem os modos mistos, dependendo da distribuição espacial de desbalanceamento de massa no rotor da bancada. No início do capítulo é feita uma revisão das técnicas tradicionais de *order tracking*.

No Capítulo 5, primeiramente é apresentada uma revisão da metodologia tradicional de obtenção das FRFs de sistemas rotativos. São discutidos aspectos do surgimento de matrizes não simétricas devido ao efeito giroscópico, aparecimento na formulação do autovetor à esquerda e número de medições para identificar todos os parâmetros modais da estrutura rotativa. Em seguida uma outra metodologia de análise modal em sistemas rotativos é revisada. Esta metodologia é baseada na descrição das respostas e forças de excitação como sendo sinais complexos. A função de resposta em frequência obtida a partir destes sinais complexos é definida como função de resposta em frequência direcional (dFRF). Através dos gráficos das dFRFs (que possuem parte negativa de frequências diferente da parte positiva de frequências) é possível identificar o sentido da direção dos modos presentes na faixa utilizada. Finalmente um método de identificação de modos naturais é apresentado. O método é aplicável em sistemas pouco amortecidos e consiste na realização de uma análise modal SIMO ou duas análises modais SISO, sendo estas realizadas em direções perpendiculares entre si. Neste método as FRFs são medidas através dos procedimentos tradicionais de análise modal.

No Capítulo 6 são mostradas aplicações do método proposto no Capítulo 5. Primeiramente, são realizadas análises de simulação numérica a partir de FRFs geradas de modelo de sistema rotor-mancais implementado no X-Rotor, e em seguida, o método é aplicado em uma bancada de ensaios experimentais. Finalmente, a matéria sobre a existência de modos naturais mistos é discutida.

Capítulo 2

Utilização da Notação Complexa no Estudo da Dinâmica de Rotores

2.1. Introdução

Segundo definição da ISO, um rotor é um corpo (cuja forma mais simples é um eixo) suportado por mancais que o permite girar livremente em torno de um eixo fixo no espaço. Eixos de transmissão, partes de máquinas alternativas, que possuem apenas movimento de rotação, são alguns exemplos de rotores (Genta, 1998).

Muitas vezes os rotores podem estar sujeitos a excessivas vibrações. Portanto, para compreender a dinâmica dos rotores, estuda-se o comportamento destes através de análises em seus modelos. O modelo mais simples é o chamado rotor de De Laval, também chamado de rotor Jeffcott¹. Neste capítulo, este modelo será usado para se estudar o fenômeno do movimento de precessão, também conhecido como rotação secundária ou “whirling”. Este movimento é definido como a rotação da linha de centro do eixo rotativo em relação a linha que une os mancais. Este fenômeno deve-se, principalmente, ao desbalanceamento de massa, contudo, outros fatores contribuem para este efeito, tais como: amortecimento histerético no eixo, forças giroscópicas, etc. (Thomson & Dahleh, 1998). O movimento de precessão pode ocorrer na

¹ Segundo Dimarogonas (1996), a denominação rotor de Jeffcott não é correta. O termo preciso é o rotor De Laval, em homenagem aos estudos do pesquisador sueco Carl Gustaf De Laval, que foram publicados por August Föppl, anteriormente aos trabalhos de Jeffcott.

mesma direção² da velocidade de rotação, sendo então denominada de precessão direta (*forward whirl*), ou pode ocorrer na direção contrária à velocidade de rotação, então denominada de precessão retrógrada ou reversa (*backward whirl*). A velocidade de rotação precessional pode ser igual à velocidade de rotação do eixo, desta forma chamada de velocidade de precessão síncrona; caso contrário, a velocidade de precessão é assíncrona.

Inicialmente, neste capítulo, analisa-se o modelo de rotor De Laval com coeficientes de rigidez dos mancais iguais nas direções horizontal e vertical (sistema isotrópico), sujeito à força de desbalanceamento. Em seguida, o estudo estende-se para o caso em que a rigidez do mancal na direção horizontal é diferente da rigidez do mancal na direção vertical (sistema anisotrópico). As análises são feitas utilizando tanto coordenadas reais como coordenadas complexas, verificando-se as vantagens da segunda abordagem, através da qual o fenômeno físico pode ser mais facilmente visualizado. Em seguida, faz-se um estudo da resposta do rotor sujeito a uma excitação qualquer. São mostradas vantagens com o uso do espectro total da resposta complexa (espectro contendo as partes positiva e negativa). Finalmente, estuda-se o caso em que o rotor possui o disco com momento de inércia considerável, posicionado fora do centro do eixo, ocasionando, quando em rotação, o surgimento do efeito giroscópico. Nesta análise, são apresentadas as equações do movimento utilizando tanto as coordenadas reais quanto as coordenadas complexas, discutindo-as, objetivando uma melhor visualização física do movimento precessional.

2.2. Rotor De Laval e Resposta ao Desbalanceamento

2.2.1. Rotor Isotrópico

Primeiramente, considera-se o rotor De Laval possuindo mancais rígidos em relação ao eixo, ou seja, a rigidez dos mancais é muito maior que a rigidez do eixo, k . O eixo possui massa desprezível, com seção transversal circular e o disco circular é assumido permanecer perpendicular ao eixo de rotação. Inicialmente, é desprezado o efeito giroscópico, o qual será

² O termo correto seria “sentido”, contudo, na literatura é bastante usado o termo “direção” para indicar o sentido do movimento de precessão. Desta forma, ao longo do trabalho serão usados os termos “direção” e “direcionalidade”.

visto posteriormente. A Figura 2.1 mostra este tipo de modelo de rotor, sendo, O o ponto de interseção entre a linha que une os mancais e o plano de rotação, C o centro geométrico do disco, G o centro de massa, m a massa do disco, ε a excentricidade, p a deflexão do eixo (amplitude de vibração) e Ω a rotação do eixo.

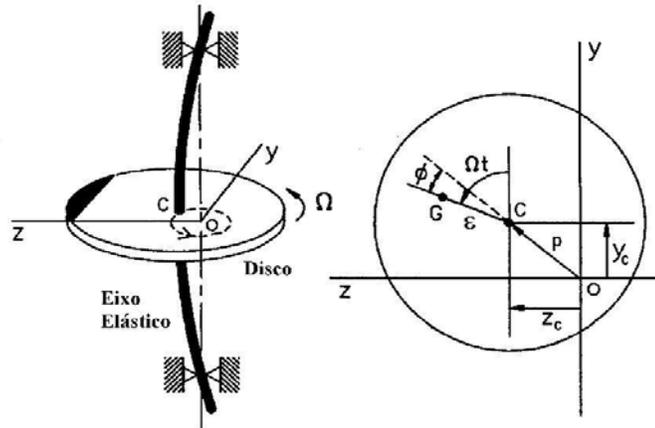


Figura 2.1 – Rotor De Laval (Lee, 1993).

Para se determinar as equações do movimento, assume-se que as forças atuantes no disco são a força elástica restauradora do eixo e a força de amortecimento viscoso. Estas forças estão atuando no centro do disco de coordenadas y_c e z_c . As equações do movimento são dadas por (Gash e Pfützner, 1975):

$$m\ddot{y}_c + c\dot{y}_c + ky_c = m\varepsilon \Omega^2 \cos\Omega t \quad (2.1)$$

$$m\ddot{z}_c + c\dot{z}_c + kz_c = m\varepsilon \Omega^2 \sin\Omega t \quad (2.2)$$

As Equações 2.1 e 2.2 mostram que o movimento do sistema pode ser descrito por dois movimentos independentes nas duas direções y e z . As soluções destas equações em regime permanente, são:

$$y_c(t) = Y_c \cos(\Omega t - \phi) \quad (2.3)$$

$$z_c(t) = Z_c \sin(\Omega t - \phi) \quad (2.4)$$

Substituindo as soluções propostas e suas derivadas nas Equações 2.1 e 2.2 obtém as amplitudes e o ângulo de fase, dados por:

$$Y_c = Z_c = \frac{\varepsilon r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad ; \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1-r^2} \right) \quad (2.5)$$

sendo, r a razão de freqüências, ζ o fator de amortecimento viscoso e ω_n a freqüência natural de ambos os movimentos nas direções y e z , dados respectivamente por:

$$r = \Omega / \omega_n \quad ; \quad \zeta = c / 2\sqrt{km} \quad ; \quad \omega_n = \sqrt{k/m} \quad (2.5)$$

Portanto, como as amplitudes Y_c e Z_c são iguais, o movimento de C é uma órbita circular em torno da linha que une os mancais, ou seja em torno de O . Este movimento de C é chamado de movimento de precessão (*whirl*). Quando C movimenta-se no mesmo sentido da rotação, o movimento é denominado de precessão direta (*forward whirl*), caso contrário o movimento é denominado de precessão retrógrada (*backward whirl*). A resposta do rotor isotrópico devido a ação de uma excitação de desbalanço de massa será sempre de precessão direta (Gash, 1975), logo, a velocidade angular com que o ponto C precessiona é igual a velocidade angular do eixo (rotação do eixo). Por este motivo, o movimento de precessão é denominado de precessão síncrona.

Uma formulação alternativa para a descrição do movimento do rotor é obtida através da utilização da coordenada complexa definida por:

$$p(t) = y_c(t) + j z_c(t) \quad (2.7)$$

O significado físico desta coordenada torna-se claro quando se observa a Figura 2.1: $p(t)$ é o vetor posição do centro geométrico do disco, C , em relação ao ponto O (inercial), em qualquer instante de tempo. Esta coordenada complexa é capaz de fornecer diretamente duas informações

que só poderiam ser obtidas combinando-se, a cada instante de tempo, as coordenadas y_c e z_c , que são: a posição de C em relação a O e o sentido do movimento de precessão de C . Esta característica torna a coordenada complexa $p(t)$ propícia para análise do comportamento dinâmico de máquinas rotativas.

Para obter a equação do movimento em coordenadas complexas, multiplica-se a Equação 2.2 pelo número complexo j e soma-se com a Equação 2.1., obtendo-se a equação resultante:

$$m(\ddot{y}_c + j\ddot{z}_c) + c(\dot{y}_c + j\dot{z}_c) + k(y_c + jz_c) = m\varepsilon\Omega^2(\cos\Omega t + j\sin\Omega t) \quad (2.8)$$

Utilizando a definição da coordenada complexa e a equação de Euler, pode-se escrever:

$$m\ddot{p} + c\dot{p} + kp = m\varepsilon\Omega^2 e^{j\Omega t} \quad (2.9)$$

Supondo solução harmônica do tipo $p = P e^{j(\Omega t - \phi)}$ e substituindo na Equação 2.9, tem-se:

$$(-m\Omega^2 + j\Omega c + k)P e^{j\Omega t} = m\varepsilon\Omega^2 e^{j\Omega t} \quad (2.10)$$

ou seja,

$$P = \frac{m\varepsilon\Omega^2}{-m\Omega^2 + j\Omega c + k} = \frac{\varepsilon r^2}{(1-r^2) + j2\zeta r} \quad (2.11)$$

O coeficiente P é complexo. Portanto, pode ser expresso em termos de sua amplitude e ângulo de fase:

$$|P| = \frac{\varepsilon r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad \text{e} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1-r^2} \quad (2.12)$$

Na Figura 2.2 está apresentado o gráfico da magnitude de P normalizada pela excentricidade, para vários valores de fator de amortecimento.

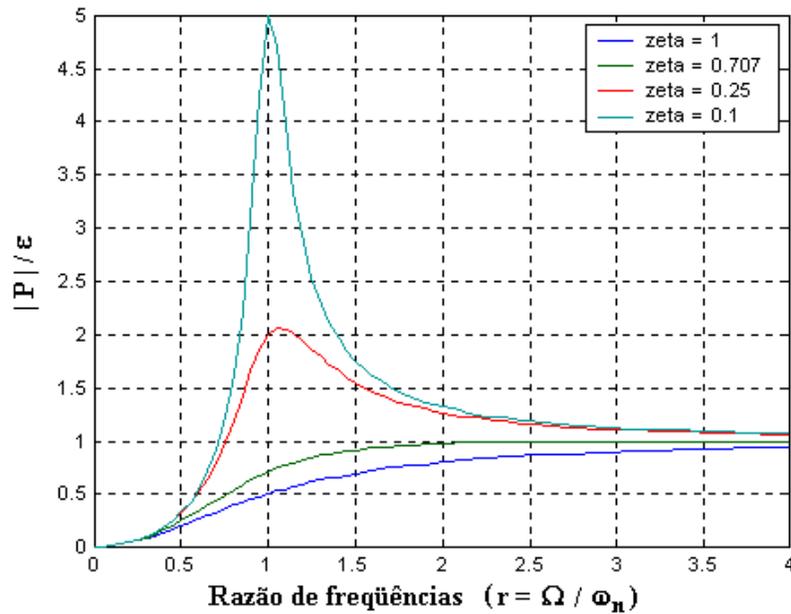


Figura 2.2 - Gráfico de $|P|/\varepsilon$ versus r , e a influência do fator de amortecimento.

Finalmente, a resposta em regime permanente do sistema rotativo escrita nas coordenadas complexas é dada por:

$$p(t) = \frac{\varepsilon r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} e^{(j\Omega t - \phi)} \quad \text{e} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1-r^2} \quad (2.13)$$

Percebe-se que este resultado poderia ser obtido substituindo as Equações 2.3, 2.4 e 2.5 na Equação 2.7. Através da resposta ao desbalanceamento, descrita nas coordenadas complexas, percebe-se que o movimento do disco é circular, pois a amplitude da resposta é constante, o que era esperado já que o rotor é isotrópico.

2.2.2. Rotor Anisotrópico

Após a análise no rotor isotrópico, estuda-se agora o rotor anisotrópico, isto é, suportado por mancais elásticos com rigidezes diferentes (K_y e K_z) nas duas direções perpendiculares y e z .

A rigidez equivalente em cada uma das direções é dada pela associação em série da rigidez do eixo (k_e) e da rigidez dos dois mancais, ou seja:

$$k_y = \frac{2K_y k_e}{2K_y + k_e} \quad \text{e} \quad k_z = \frac{2K_z k_e}{2K_z + k_e} \quad (2.14)$$

De maneira similar, obtém-se os valores de coeficientes de amortecimento viscoso equivalentes em cada uma das direções y e z :

$$c_y = \frac{2C_y c_e}{2C_y + c_e} \quad \text{e} \quad c_z = \frac{2C_z c_e}{2C_z + c_e} \quad (2.15)$$

Utilizando-se procedimento similar ao caso isotrópico, obtém-se as seguintes equações do movimento:

$$m\ddot{y}_c + c_y \dot{y}_c + k_y y_c = m\epsilon\Omega^2 \cos\Omega t \quad (2.16)$$

$$m\ddot{z}_c + c_z \dot{z}_c + k_z z_c = m\epsilon\Omega^2 \sin\Omega t \quad (2.17)$$

Ainda neste caso, as equações do movimento são desacopladas e o sistema, em cada direção, comporta-se como um sistema de um grau de liberdade. Contudo, as frequências naturais do sistema (em cada uma das direções) não são mais iguais e são dadas por:

$$\omega_{ny} = \sqrt{\frac{k_y}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_{nz} = \sqrt{\frac{k_z}{m}} \quad (2.18)$$

Utilizando as coordenadas complexas para descrever o movimento do rotor anisotrópico, procede-se da seguinte maneira: multiplicando a equação (2.2) pelo número complexo j e somando com (2.1), obtém-se:

$$m(\ddot{y}_c + j\ddot{z}_c) + (c_y\dot{y}_c + jc_z\dot{z}_c) + (k_y y_c + jk_z z_c) = m\epsilon\Omega^2(\cos\Omega t + j\text{sen}\Omega t) \quad (2.19)$$

Manipulando-se o termo correspondente à rigidez, tem-se:

$$k_y y_c + jk_z z_c = \frac{k_y y_c}{2} + \frac{k_y y_c}{2} + j\frac{k_z z_c}{2} + j\frac{k_z z_c}{2} + \left(\frac{k_z y_c}{2} - \frac{k_z y_c}{2} + j\frac{k_y z_c}{2} - j\frac{k_y z_c}{2}\right) \quad (2.20)$$

e, definindo k_m e k_d como

$$k_m = \frac{k_y + k_z}{2} \quad \text{e} \quad k_d = \frac{k_y - k_z}{2} \quad (2.21)$$

pode-se escrever:

$$\begin{aligned} k_y y_c + jk_z z_c &= k_m y_c + k_d y_c + jk_m z_c - jk_d z_c \\ &= k_m (y_c + jz_c) + k_d (y_c - jz_c) = k_m p(t) + k_d \bar{p}(t), \end{aligned} \quad (2.22)$$

sendo $\bar{p}(t)$ o complexo conjugado de $p(t)$. De forma análoga, para o amortecimento, tem-se:

$$c_y y_c + jc_z z_c = c_m \dot{p}(t) + c_d \dot{\bar{p}}(t) \quad (2.23)$$

Substituindo as Equações 2.22 e 2.23 na Equação 2.19, obtém-se a equação do movimento do rotor De Laval anisotrópico escrito em coordenadas complexas:

$$m\ddot{p} + c_m \dot{p} + k_m p + c_d \dot{\bar{p}} + k_d \bar{p} = m\epsilon\Omega^2 e^{j\Omega t} \quad (2.24)$$

Como será visto na seção 2.3, para um rotor anisotrópico sujeito à ação de uma força de excitação cíclica de frequência Ω , a resposta em regime permanente é do tipo:

$$p(t) = P_f e^{j\Omega t} + P_b e^{-j\Omega t} \quad (2.25)$$

Substituindo a solução proposta (Equação 2.25), seu complexo conjugado e suas respectivas derivadas na Equação 2.24, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& -m\Omega^2(P_f e^{j\Omega t} + P_b e^{-j\Omega t}) + j\Omega c_m(P_f e^{j\Omega t} - P_b e^{-j\Omega t}) - j\Omega c_d(\bar{P}_f e^{-j\Omega t} - \bar{P}_b e^{j\Omega t}) + \\
& + k_m(P_f e^{j\Omega t} + P_b e^{-j\Omega t}) + k_d(\bar{P}_f e^{-j\Omega t} + \bar{P}_b e^{j\Omega t}) = m\varepsilon\Omega^2 e^{j\Omega t}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Agrupando os termos em $e^{j\Omega t}$ e $e^{-j\Omega t}$, pode-se escrever:

$$e^{j\Omega t} \left[P_f (-m\Omega^2 + j\Omega c_m + k_m) + \bar{P}_b (j\Omega c_d + k_d) \right] = m\varepsilon\Omega^2 e^{j\Omega t} \tag{2.27a}$$

$$e^{-j\Omega t} \left[\bar{P}_f (-j\Omega c_d + k_d) + P_b (-m\Omega^2 - j\Omega c_m + k_m) \right] = 0 \tag{2.27b}$$

Calculando-se o complexo conjugado da Equação 2.27b e agrupando as equações na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} (-m\Omega^2 + j\Omega c_m + k_m) & (j\Omega c_d + k_d) \\ (j\Omega c_d + k_d) & (-m\Omega^2 + j\Omega c_m + k_m) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_f \\ \bar{P}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\varepsilon\Omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.28}$$

Resolvendo este sistema de equações algébricas obtém-se as expressões para P_f e \bar{P}_b :

$$P_f = \frac{(-m\Omega^2 + j\Omega c_m + k_m)(m\varepsilon\Omega^2)}{(-m\Omega^2 + j\Omega c_m + k_m)^2 - (j\Omega c_d + k_d)^2} \tag{2.29a}$$

$$\bar{P}_b = \frac{-(j\Omega c_d + k_d)^2 (m\varepsilon\Omega^2)}{(-m\Omega^2 + j\Omega c_m + k_m)^2 - (j\Omega c_d + k_d)^2} \tag{2.29b}$$

No caso de não haver amortecimento, P_f e \bar{P}_b tornam-se:

$$P_f = \frac{\left(-\Omega^2 + \frac{k_m}{m}\right)\left(\varepsilon\Omega^2\right)}{\left(-\Omega^2 + \frac{k_m}{m}\right)^2 - \left(\frac{k_d}{m}\right)^2} = \frac{\left(\omega_{ny}^2 + \omega_{nz}^2 - 2\Omega^2\right)\left(\varepsilon\Omega^2\right)}{2\left(\Omega^2 - \omega_{ny}^2\right)\left(\Omega^2 - \omega_{nz}^2\right)} \quad (2.30a)$$

$$\bar{P}_b = P_b = \frac{-\left(\frac{k_d}{m}\right)\left(\varepsilon\Omega^2\right)}{\left(-\Omega^2 + \frac{k_m}{m}\right)^2 - \left(\frac{k_d}{m}\right)^2} = \frac{-\left(\omega_{ny}^2 - \omega_{nz}^2\right)\left(\varepsilon\Omega^2\right)}{2\left(\Omega^2 - \omega_{ny}^2\right)\left(\Omega^2 - \omega_{nz}^2\right)} \quad (2.30b)$$

Na expressão de P_b (Equação 2.29b ou 2.30b) pode-se verificar que se o rotor é isotrópico, ou seja $k_y = k_z$ ou $\omega_{ny} = \omega_{nz}$, esta componente P_b torna-se zero. Portanto, verifica-se que para rotores isotrópicos não há movimento de precessão retrógrada.

Substituindo os valores de P_f e P_b na Equação 2.25, obtém-se a resposta em regime permanente do sistema rotativo, apoiado sobre mancais anisotrópicos, quando submetido à ação de força de desbalanceamento. As Equações 2.29a e 2.29b ou 2.30a e 2.30b indicam que o centro geométrico do disco move-se em uma órbita elíptica em torno do centro de rotação O . Considerando $k_y > k_z$, e de acordo com as Equações 2.30a e 2.30b:

$$\begin{aligned} \Omega < \omega_{nz} < \omega_{ny} &\Rightarrow |P_f| > |P_b| \quad (\text{Precessão Direta}) \\ \omega_{nz} < \Omega < \omega_{ny} &\Rightarrow |P_f| < |P_b| \quad (\text{Precessão Retrógrada}) \\ \Omega > \omega_{ny} &\Rightarrow |P_f| > |P_b| \quad (\text{Precessão Direta}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Então, segundo as relações acima, quando o rotor opera a uma velocidade acima ou abaixo das duas velocidades críticas, o disco e o centro geométrico giram na mesma direção com a mesma velocidade, resultando em uma órbita elíptica síncrona direta. Quando o rotor opera em uma velocidade entre as duas velocidades críticas, o disco e o centro geométrico giram em direções opostas, resultando em uma órbita elíptica síncrona retrógrada. Próximo às velocidades críticas, as órbitas tendem a ser retilíneas, o que corresponde a transição do movimento

retrógrado para o direto e vice-versa. A Figura 2.3 apresenta o gráfico da relação $|P_f| / |P_b|$ para um rotor De Laval não amortecido. Neste gráfico percebe-se as faixas de frequências que o rotor precessiona na direção direta e retrógrada. A Figura 2.4 mostra um gráfico de função de resposta ao desbalanceamento de um rotor De Laval amortecido (não correspondente ao rotor da Figura 2.3), mostrando separadamente as contribuições de P_f e P_b . No gráfico pode-se visualizar as duas frequências de ressonâncias (ω_{nz} e ω_{ny}), fato que não ocorreria no caso de um gráfico de resposta ao desbalanceamento utilizando coordenadas reais para o modelo sob estudo, pois as equações em y e em z são desacopladas. Neste caso para visualizar as duas ressonâncias seriam necessários dois gráficos de resposta ao desbalanceamento, um correspondendo a $Y_c(\Omega)$ e outro a $Z_c(\Omega)$. Na Figura 2.5 estão apresentadas cinco órbitas em diferentes rotações, referentes à resposta ao desbalanceamento da Figura 2.4. Nesta Figura 2.5 o asterisco representa o início da órbita e a trajetória de rotação do eixo é no sentido anti-horário.

Um fator importante a ser considerado é que quando o rotor está sob movimento de precessão direta, o lado de compressão do eixo permanece em compressão e o lado de tração permanece em tração (Figura 2.6). Quando o movimento é de precessão retrógrada, o eixo fica sujeito a dois ciclos de alternância de tensão por revolução (ver Figura 2.6). Esta situação pode levar o eixo a uma ruptura por fadiga.

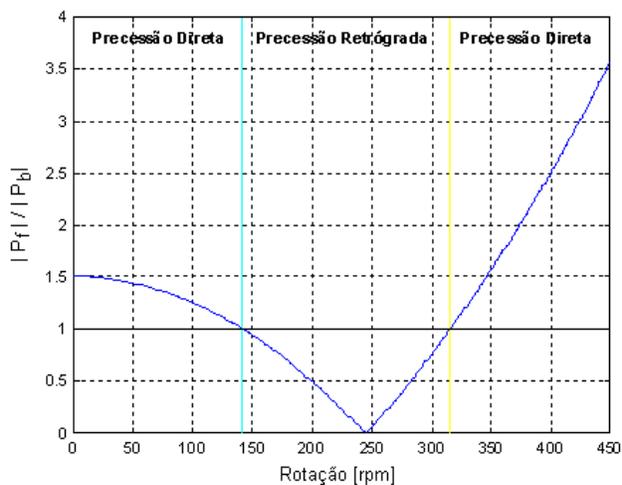


Figura 2.3 - Relação $|P_f| / |P_b|$ em função da rotação para rotor De Laval não-amortecido.

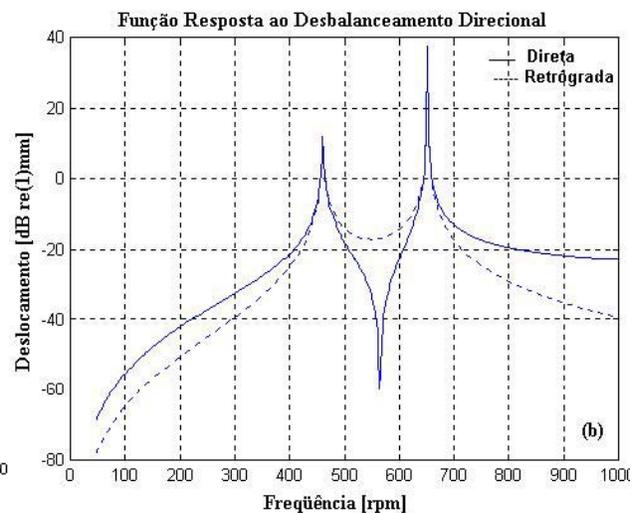


Figura 2.4 – Função de resposta ao desbalanceamento mostrando as contribuições de P_f e P_b .

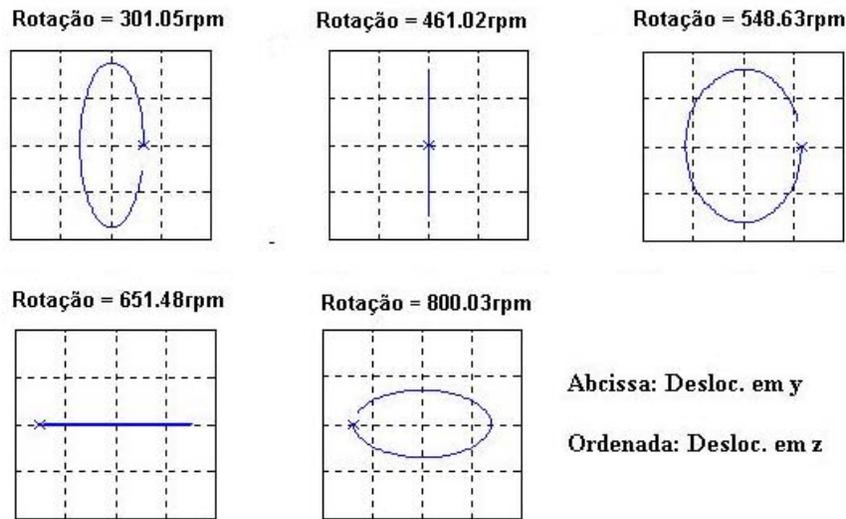


Figura 2.5 – Órbitas do rotor para diferentes valores de velocidade de rotação do rotor cuja resposta ao desbalanceamento está apresentada na Figura 2.4.

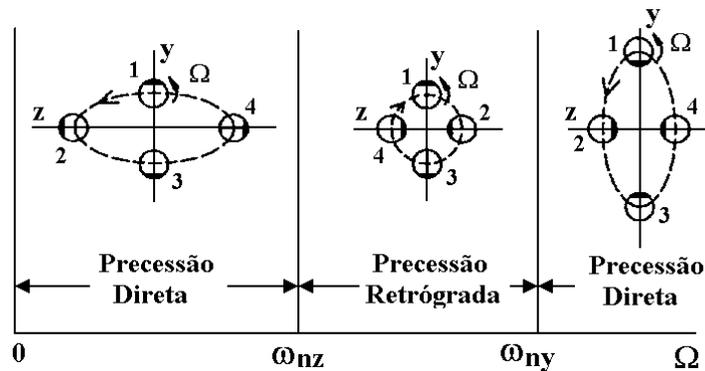


Figura 2.6 – Faixas de freqüências mostrando a variação do formato e direção da órbita do disco.

Uma maneira para evitar o surgimento de precessão retrógrada (sem reduzir a anisotropia dos mancais) é através da introdução de amortecimento no sistema. Desta forma há a diminuição da faixa de rotações em que o rotor descreve o movimento de precessão retrógrada. Esta faixa será tanto menor quanto maior for o amortecimento, até que para um determinado nível de amortecimento, o movimento de precessão retrógrado não existirá mais. Souto (2000), em sua dissertação de mestrado discute com maiores detalhes o efeito do amortecimento no rotor De Laval.

2.3. Análise da Resposta em Frequência Devido a Excitação Periódica – Espectro Total

Na seção anterior foram mostradas as respostas dos rotores De Laval isotrópico e anisotrópico, devido à ação de força de desbalanceamento. Esta força caracteriza-se por ser uma excitação cíclica direta, com frequência igual a da rotação. Nesta seção, é apresentada a expressão geral da resposta, em coordenadas complexas, de uma determinada estação do sistema devido à ação de qualquer tipo de excitação. Esta resposta complexa pode ser visualizada como um somatório de vetores rotativos, no mesmo e no sentido contrário ao da rotação. Em seguida, mostra-se a vantagem, através de um exemplo, em se utilizar as coordenadas complexas para a geração do espectro total (*full spectrum*, espectro contendo parte positiva e negativa de frequências) com o intuito de identificar a forma da órbita e a direcionalidade do movimento de precessão.

Expandindo $y(t)$ e $z(t)$ em séries de Fourier complexa na expressão de $p(t)$, obtém-se:

$$p(t) = y(t) + j z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(Y_k e^{j\omega_k t} + j Z_k e^{j\omega_k t} \right) \quad (2.32)$$

Como o espectro do sinal real nas frequências negativas é igual ao complexo conjugado deste sinal nas frequências positivas, então a Equação 2.32 torna-se:

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(Y_k e^{j\omega_k t} + \bar{Y}_k e^{-j\omega_k t} \right) + j \left(Z_k e^{j\omega_k t} + \bar{Z}_k e^{-j\omega_k t} \right) \right] \\ p(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(Y_k + j Z_k \right) e^{j\omega_k t} + \left(\bar{Y}_k + j \bar{Z}_k \right) e^{-j\omega_k t} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(P_{f_k} e^{j\omega_k t} + P_{b_k} e^{-j\omega_k t} \right) \\ p(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(|P_{f_k}| e^{j(\omega_k t + \alpha_k)} + |P_{b_k}| e^{-j(\omega_k t + \beta_k)} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

A Equação 2.33 mostra que qualquer movimento de uma estação, ou seja, qualquer resposta da estação pode ser considerada como uma superposição de vários movimentos harmônicos

complexos com frequências diferentes. Os termos em $e^{j\omega_k t}$ representam as componentes no sentido direto (na direção da rotação), e os termos em $e^{-j\omega_k t}$ representam as componentes no sentido retrógrado (na direção oposta da rotação).

No caso de um rotor isotrópico com velocidade de rotação Ω sujeito a uma força de desbalanceamento, o deslocamento de uma estação deste rotor é igual a:

$$p_k(t) = P_{f_k} e^{j\Omega t} + 0 = |P_{f_k}| e^{j(\Omega t + \alpha_k)} \quad (2.34)$$

pois, neste caso não há o surgimento de componentes retrógradas (ver seção 2.2, Equação 2.30b).

No caso de um rotor anisotrópico com velocidade de rotação Ω sujeito a uma força de desbalanceamento, o deslocamento de uma estação deste rotor é igual a:

$$p_k(t) = P_{f_k} e^{j\Omega t} + P_{b_k} e^{-j\Omega t} = |P_{f_k}| e^{j(\Omega t + \alpha_k)} + |P_{b_k}| e^{-j(\Omega t + \beta_k)}, \quad (2.35)$$

em que as componentes direta e retrógrada podem ser representadas por dois vetores circulares girando em sentidos opostos na mesma frequência, mas com amplitudes e ângulos de fase diferentes. A soma destes dois vetores resulta em uma elipse no plano complexo conforme ilustra a Figura 2.7, isto é, a forma elíptica é a soma de duas órbitas circulares: uma direta e outra retrógrada. As magnitudes $|P_f|$ e $|P_b|$ são os raios das órbitas diretas e retrógradas, respectivamente; e α_k e β_k são os ângulos de fase das respostas direta e retrógrada, respectivamente. O eixo maior da elipse é igual a $(|P_f| + |P_b|)$ e o eixo menor é igual a $(|P_f| - |P_b|)$. Precessão direta da órbita elíptica significa que $|P_f| > |P_b|$, enquanto que precessão retrógrada significa que $|P_f| < |P_b|$. A elipse se degenera para uma órbita circular direta se $|P_b| = 0$ ou para uma órbita circular retrógrada se $|P_f| = 0$. Se a elipse se degenera para uma órbita retilínea, então $|P_f| = |P_b|$.

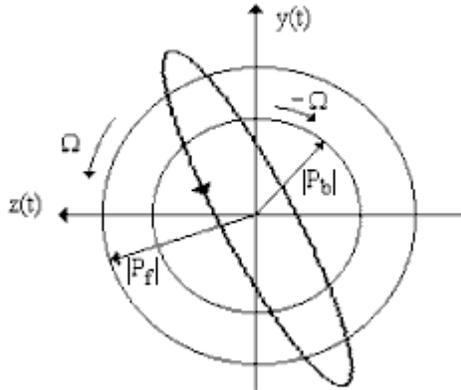


Figura 2.7 – Órbita (movimento de $p(t)$) de uma estação de um rotor anisotrópico descrita pela soma de dois vetores rotativos.

Uma das vantagens em se usar coordenadas complexas ao invés de coordenadas reais na descrição do movimento rotativo é que no espectro da resposta complexa, a parte de frequências negativas não é meramente o espelho da parte positiva, como seria o caso do espectro de um sinal (resposta) descrita por coordenadas reais. Através do espectro total (*full spectrum*), pode-se determinar se as componentes que formam a órbita de uma determinada estação são de precessão direta ou retrógrada e também qual o formato da elipse formada por estas componentes. Isto porque o espectro total separa as componentes de precessão direta das componentes de precessão retrógrada. As componentes de precessão retrógrada apresentam-se na parte negativa de frequências e as componentes de precessão direta surgem na parte de frequência positiva. Se para uma determinada frequência, a amplitude na parte positiva for maior que amplitude correspondente ao valor desta frequência negativa, conclui-se que esta órbita é de precessão direta. Estas amplitudes correspondem às magnitudes dos vetores rotativos mostrados na Figura 2.7.

O exemplo da Figura 2.8 ilustra o que foi descrito no parágrafo anterior: seja um sinal de vibração de um rotor composto por duas frequências, 6 Hz e 12 Hz. Na Figura 2.8 a órbita apresentada é resultante da composição das duas órbitas individuais elípticas, as quais estão apresentadas nas Figuras 2.8b e 2.8c. Através do espectro total do sinal complexo (Figura 2.8d) pode-se visualizar que as componentes de precessão retrógradadas (amplitudes em -12 Hz e -6 Hz) são menores que as respectivas componentes de precessão direta na região de componentes

positivas (amplitudes em 12 Hz e 6 Hz), concluindo assim que as duas órbitas são de precessão direta.

Um outro exemplo em que o espectro total fornece informação a respeito da órbita é no gráfico da função da resposta forçada devido ao desbalanço de massa em função da rotação. Na seção anterior foi visto que, para o rotor De Laval não amortecido, próximo às ressonâncias as órbitas tendem a ser retilíneas, pois é a faixa de transição de movimento de precessão direta para retrógrada e vice-versa. O gráfico da Figura 2.9 mostra a função de resposta ao desbalanço com as componentes diretas e retrógradas para um determinado rotor De Laval.

Vale a pena ressaltar, para evitar dúvidas, que o espectro total no primeiro exemplo desta seção corresponde à resposta de um determinado sistema a uma rotação fixa e no segundo exemplo é mostrada a resposta ao desbalanceamento de um outro sistema em função da rotação.

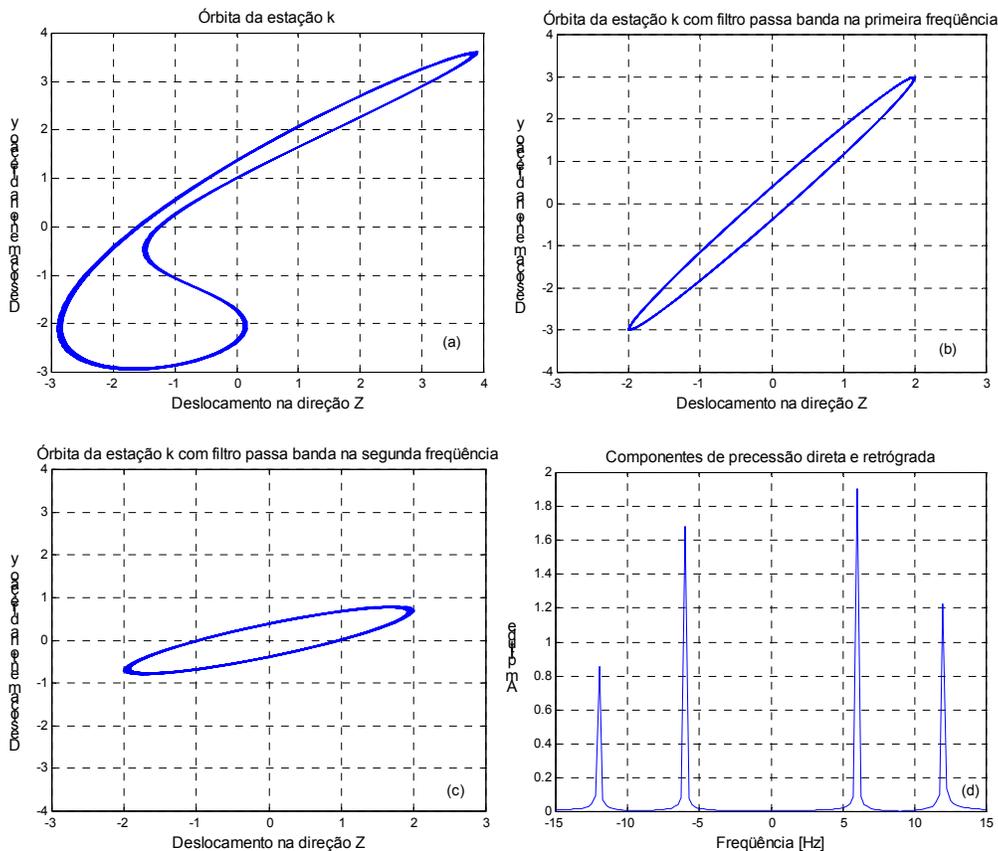


Figura 2.8 - (a) Órbita de uma estação composta por duas frequências; (b) Órbita filtrada na primeira frequência (1X); (c) Órbita filtrada na segunda frequência (2X); (d) Espectro total.

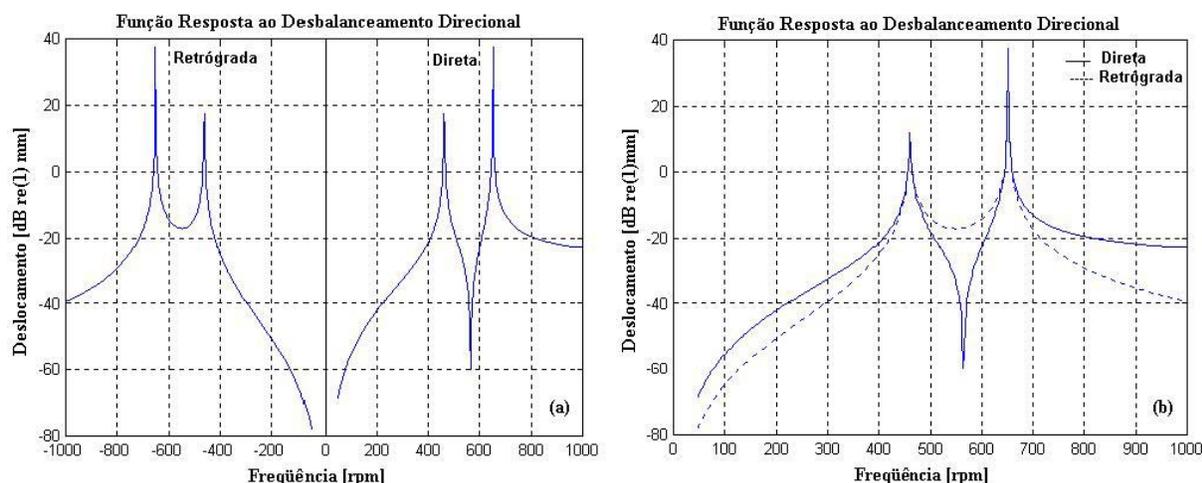


Figura 2.9 – (a) Espectro total da resposta ao desbalanceamento mostrando as componentes retrógradas e diretas praticamente com o mesmo nível nas ressonâncias; (b) Superposição das componentes mostrando que fora das ressonâncias há diferença entre os níveis das componentes.

2.4. Equações do Movimento com Efeito Giroscópico

Na seção 2.2, o efeito giroscópico foi desprezado na formulação do modelo matemático do sistema rotativo. As equações do movimento obtidas para o rotor De Laval não diferem das equações do movimento de um sistema não-rotativo, com a exceção da natureza da excitação agindo no sistema (no caso presente a excitação é cíclica). Nesta seção, o modelo incluirá o efeito giroscópico e a inércia de rotação, e as novas equações do movimento descritas nas coordenadas reais e complexas são apresentadas.

O efeito giroscópico surgirá quando o disco, por algum motivo, não permanecer perpendicular ao eixo de rotação própria inicial, isto é, quando se modifica a posição angular do disco. Como consequência deste efeito, os parâmetros modais tornam-se dependentes da velocidade de rotação. Neste caso, a posição do disco é definida através de quatro graus de liberdade: dois de translação y e z e dois de rotação, ϕ_y e ϕ_z (rotação em torno de y e de z , respectivamente). As equações do movimento de um rotor, sem amortecimento, com efeito giroscópico, descritas em coordenadas reais, pode ser escrita na forma da Equação 2.36 (Krammer, 1993).

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\phi}_z \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi}_y \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\phi}_z \\ \dot{z} \\ \dot{\phi}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{y\phi_z} & 0 & 0 \\ k_{\phi_z y} & k_{\phi_z \phi_z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} & -k_{z\phi_y} \\ 0 & 0 & -k_{\phi_y z} & k_{\phi_y \phi_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \phi_z \\ z \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \\ M_z \\ F_z \\ M_y \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

sendo J_d e J_p os momentos de inércia diametral e polar do disco, respectivamente.

Para facilitar a análise considera-se o rotor como sendo isotrópico, logo:

$$k_{yy} = k_{zz} = k_{pp} \quad , \quad k_{\phi_y \phi_y} = k_{\phi_z \phi_z} = k_{\beta\beta} \quad \text{e} \quad k_{z\phi_y} = k_{y\phi_z} = k_{p\beta} \quad (2.37)$$

e $k_{p\beta} = k_{\beta p}$. Desta forma, a Equação 2.36 torna-se:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\phi}_z \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi}_y \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\phi}_z \\ \dot{z} \\ \dot{\phi}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{pp} & k_{p\beta} & 0 & 0 \\ k_{\beta p} & k_{\beta\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{pp} & -k_{p\beta} \\ 0 & 0 & -k_{\beta p} & k_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \phi_z \\ z \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \\ M_z \\ F_z \\ M_y \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

que podem ser escritas de forma compacta como:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (2.39)$$

De forma a calcular as frequências naturais do sistema, considera-se o problema livre ($\{Q\} = \{0\}$). Desta forma, assumindo soluções harmônicas do tipo: $\{q\} = \{\chi\}e^{\lambda t}$ e substituindo esta expressão (juntamente com suas derivadas) na Equação 2.39 chega-se a:

$$([M]\lambda^2 + [G]\lambda + [K])\{\chi\} = \{0\} \quad (2.40)$$

Para $\{\chi\} \neq \{0\}$, o determinante da matriz $[[M]\lambda^2 + [G]\lambda + [K]]$ deve ser zero. Como consequência, a equação característica fica do tipo (Krämmer, 1993):

$$a_4\lambda^8 + a_3\lambda^6 + a_2\lambda^4 + a_1\lambda^2 + a_0 = \{0\} \quad (2.41)$$

As raízes da equação surgem em quatro pares de autovalores complexos conjugados. Portanto, é suficiente calcular apenas os valores positivos dos autovalores. Em outras palavras, os autovalores possuem a seguinte forma geral:

$$\lambda_k = j\omega_{nk}, \quad \bar{\lambda}_k = -j\omega_{nk} \quad (k = 1, \dots, 4) \quad (2.42)$$

sendo ω_{nk} as freqüências naturais. Contudo, não há informação sobre a direção dos modos de precessão nos valores de ω_{nk} . Esta direcionalidade somente seria obtida após a obtenção do Diagrama de Campbell, que é o gráfico das freqüências naturais em função da freqüência de rotação.

A introdução de coordenadas complexas para a descrição do movimento acarreta na redução da ordem do modelo e a informação sobre a direcionalidade do movimento de precessão. Introduzindo as variáveis complexas: $p(t) = y(t) + jz(t)$ e $\beta(t) = \phi_z(t) - j\phi_y(t)$, as equações diferenciais na Equação 2.38 tornam-se:

$$\begin{aligned} m\ddot{p} + k_{pp}p + k_{p\beta}\beta &= 0 \\ J_d\ddot{\beta} - jJ_p\Omega\dot{\beta} + k_{p\beta}p + k_{\beta p}\beta &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Supondo soluções harmônicas do tipo $p(t) = P e^{j\omega t}$ e $\beta(t) = \alpha e^{j\omega t}$, e substituindo estas funções e suas derivadas na Equação 2.43, tem-se:

$$\begin{bmatrix} k_{pp} - m\omega^2 & k_{p\beta} \\ k_{p\beta} & -J_d\omega^2 + J_p\Omega\omega + k_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

Nesta forma, a equação característica é dada por:

$$mJ_d\omega^4 - mJ_p\Omega\omega^3 - (mk_{\beta\beta} + J_d k_{pp})\omega^2 + J_p\Omega k_{pp}\omega + k_{pp}k_{\beta\beta} - k_{p\beta}^2 = 0 \quad (2.45)$$

que resulta em quatro valores de freqüências naturais. O sinal negativo para a freqüência natural possui um significado físico que é a direção do movimento de precessão. Portanto, as freqüências positivas correspondem às freqüências naturais de precessão direta e as freqüências negativas às freqüências naturais retrógradas. Em um diagrama de Campbell, o gráfico destas freqüências em função da rotação possui a forma mostrada na Figura 2.10.

Multiplicando por (-1) as freqüências naturais retrógradas, o diagrama de Campbell é apresentado apenas com o seu primeiro quadrante, em que as freqüências naturais retrógradas decrescem com o aumento da rotação e as freqüências naturais diretas aumentam com o aumento da rotação, ou melhor, $-\omega_{n1}(\Omega)$ e $\omega_{n2}(\Omega)$ representam as freqüências naturais retrógradas e diretas para os graus de liberdades de translação e $-\omega_{n3}(\Omega)$ e $\omega_{n4}(\Omega)$ representam as freqüências naturais retrógradas e diretas para os graus de liberdade de rotação, respectivamente.

A força de desbalanceamento é síncrona, portanto, as velocidades críticas ocorrerão quando a linha de $(1 \times \Omega)$ interceptar as linhas de freqüências naturais. No Diagrama de Campbell da Figura 2.10b, a linha de força de desbalanceamento intercepta as linhas de freqüências naturais nos pontos A, B e C. Contudo, como o rotor é isotrópico, os pontos A e C não podem ser considerados como velocidades críticas, pois a força de desbalanceamento não excita os modos de precessão retrógrada. Para rotores anisotrópicos todas as intercepções da linha de força com as de freqüências naturais são consideradas como velocidades críticas. No exemplo da Figura 2.10b, a linha de força não intercepta a linha de freqüência natural $\omega_{n4}(\Omega)$, devido ao rotor possuir um disco fino, ou seja $(J_p > J_d)$. Isto porquê a assíntota de $\omega_{n4}(\Omega)$ é igual a $(J_p / J_d) \times \Omega$. Portanto

se a relação entre (J_p / J_d) for maior que 1, a assíntota sempre estará inclinada mais próxima do eixo das ordenadas do que a linha de força de desbalanceamento ($1 \times \Omega$) e portanto estas nunca se cruzarão.

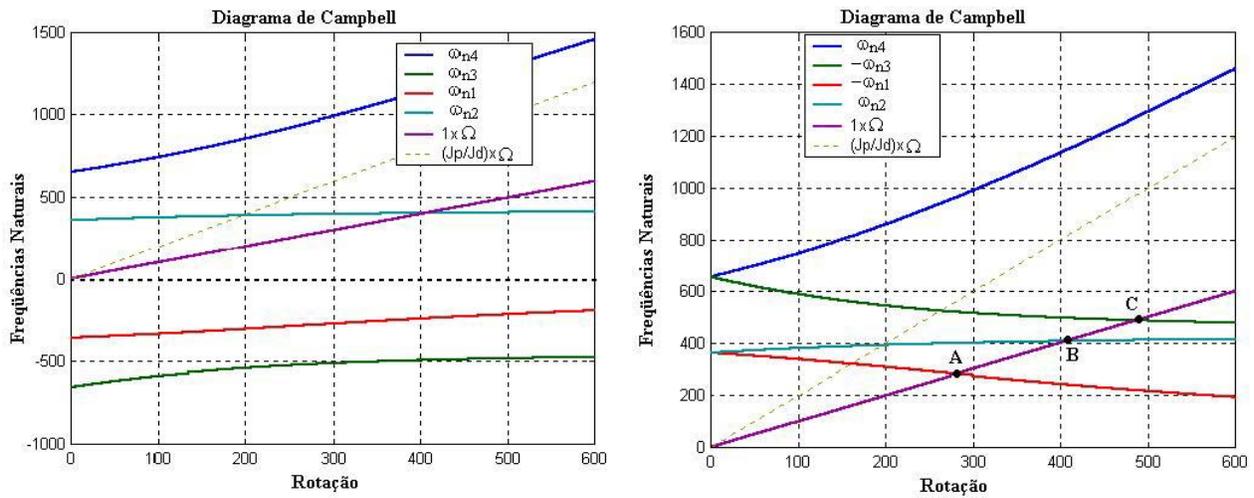


Figura 2.10 – (a) Diagrama de Campbell com frequências positivas e negativas; (b) Diagrama de Campbell com frequências positivas mostrando as velocidades críticas.

Capítulo 3

Identificação de Modos Operacionais Mistos

3.1. Introdução

No Capítulo 2 analisou-se o movimento de precessão de uma estação (o centro do disco) do rotor De Laval. O disco poderia estar em movimento de precessão direta ou retrógrada dependendo da faixa de rotação e da anisotropia dos mancais. Neste capítulo, analisa-se, através de simulação numérica o movimento de precessão de várias estações de rotores, para várias frequências, com o objetivo de verificar a existência do fenômeno do modo operacional misto. O modo operacional ocorre quando algumas estações possuem movimentos de precessão direta e outras possuem movimentos de precessão retrógrada, de forma simultânea.

A existência de movimentos de precessão simultânea, brevemente mencionada em alguns livros textos (Vance, 1988; Lee, 1993), foi provada experimentalmente por Lund (1974), Rajalingham et al (1986), Rao et al. (1996, 1997) e Muszynska (1996). Mas, em geral, este assunto é pouco discutido na literatura. Dias Jr et al. (2002) e Miranda et al. (2002) mostraram experimentalmente a existência de modos operacionais mistos para um rotor contendo dois discos sendo que o primeiro mostrou numericamente quais os parâmetros que influenciam no surgimento, ou não, do fenômeno. Tais parâmetros são a amplitude e a distribuição espacial do desbalanceamento, a anisotropia dos coeficientes de rigidez dos mancais, o efeito giroscópico e o amortecimento nos mancais. Neste capítulo, esta análise numérica dos parâmetros será revista em mais detalhes para sistemas rotativos com um e dois discos, e em seguida, resultados experimentais são apresentados para a verificação do fenômeno.

Para se realizar a análise numérica, utilizou-se um programa baseado no método dos elementos finitos e escrito em linguagem MATLAB®, o *XRotor*. Antes das análises, apresenta-se um resumo da teoria da resposta ao desbalanceamento em coordenadas complexas de um sistema rotativo com N estações e em seguida mostra-se o conceito do índice *SDI*, que define a forma da órbita e a direção do movimento de uma determinada estação do rotor.

3.2. Resposta ao Desbalanceamento do Sistema Rotativo de N Estações em Coordenadas Complexas

Seja um sistema rotor-mancais com N estações. A equação do movimento deste sistema rotativo de $4N$ graus de liberdade é dada por:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (3.1)$$

sendo $[M]$ a matriz de massa, simétrica, e $[D]$ e $[K]$ são, em geral, matrizes dependentes da velocidade de rotação sendo não-simétricas, nestes casos. A matriz $[D]$ representa o amortecimento e os efeitos giroscópicos e a matriz $[K]$ inclui os termos de rigidez (do eixo e mancais) e amortecimento interno. O vetor $\{q\}$ é o vetor das coordenadas generalizadas e $\{Q\}$ o vetor das forças de excitação.

Um conveniente meio de definir o vetor de deslocamento $\{q\}$ em um código de elementos finitos é a seguinte (Genta, 1998):

$$\{q\} = \left\{ \{y\}^T \{ \phi_z \}^T \{z\}^T \{ \phi_y \}^T \right\}^T, \quad (3.2)$$

sendo $\{y\}$ e $\{z\}$ os vetores deslocamentos, de todos os nós, em cada uma das duas direções perpendiculares ao eixo de rotação do rotor, e $\{ \phi_y \}$ e $\{ \phi_z \}$ são os vetores dos graus de liberdade de rotação de todos os nós em torno dos eixos Y e Z , respectivamente. Na Figura 3.1, estão apresentadas as coordenadas generalizadas de um elemento de viga: as coordenadas generalizadas q_1, q_2, q_5 e q_6 correspondem aos graus de liberdade y, ϕ_y, z e ϕ_z do nó 1 (nó mais

próximo da origem do sistema de coordenadas na Figura 3.1) e as coordenadas q_3, q_4, q_7 e q_8 correspondem aos graus de liberdade y, ϕ_y, z e ϕ_z do nó 2. O vetor de forças generalizadas é dado por $\{Q\} = \left\{ \{f_y\}^T \{f\phi_z\}^T \{f_z\}^T \{f\phi_y\}^T \right\}^T$. Ressalta-se que os graus de liberdade de deslocamento axial e rotação em torno do eixo de rotação própria não são considerados, pois, para sistemas operando em rotação fixa (não acelerando) estes graus de liberdades são desacoplados dos graus de liberdade de flexão (Genta, 1998).

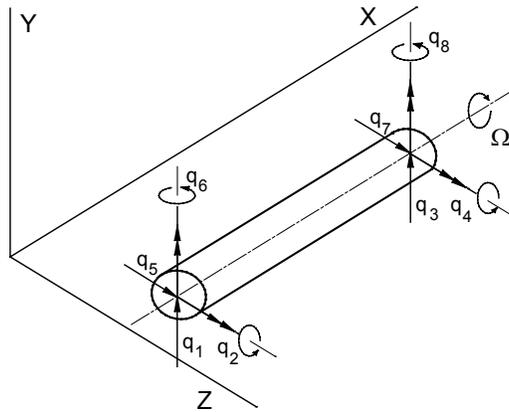


Figura 3.1 – Elemento finito de viga.

De acordo com o capítulo anterior, a direção do movimento rotativo do sistema será obtida através da análise em coordenadas complexas. As expressões para transformar os deslocamentos do nó k em suas correspondentes coordenadas complexas são (Genta, 1998):

$$p_{1k}(t) = y_k(t) + jz_k(t) \quad \text{e} \quad p_{2k}(t) = \phi_{zk}(t) - j\phi_{yk}(t) \quad (3.3)$$

Da mesma forma para as expressões das forças de excitação agindo nestas coordenadas:

$$g_{1k}(t) = f_{y_k}(t) + j f_{z_k}(t) \quad \text{e} \quad g_{2k}(t) = f\phi_{z_k}(t) - j f\phi_{y_k}(t) \quad (3.4)$$

Considerando todos os nós do modelo de elementos finitos, tem-se que o vetor de resposta complexa é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \{p\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{p_1\} \\ \{p_2\} \\ \{\bar{p}_1\} \\ \{\bar{p}_2\} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \{y\} \\ \{\phi_z\} \\ \{z\} \\ \{\phi_y\} \end{Bmatrix}, \quad \text{sendo} \quad (3.5)$$

$$[T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [I] & [0] & [I] & [0] \\ [0] & [I] & [0] & [I] \\ -j[I] & [0] & j[I] & [0] \\ [0] & j[I] & [0] & -j[I] \end{bmatrix}, \quad [T]^{-1} = \begin{bmatrix} [I] & [0] & j[I] & [0] \\ [0] & [I] & [0] & -j[I] \\ [I] & [0] & -j[I] & [0] \\ [0] & [I] & [0] & j[I] \end{bmatrix}$$

Aplicando a mesma transformação $[T]$ no vetor de força, substituindo ambas transformações (de resposta e força complexas) na Equação (3.1), e pré-multiplicando o resultado pela inversa de $[T]$, obtém-se:

$$[T]^{-1}[M][T] \begin{Bmatrix} \{\ddot{p}\} \\ \{\ddot{\bar{p}}\} \end{Bmatrix} + [T]^{-1}[D][T] \begin{Bmatrix} \{\dot{p}\} \\ \{\dot{\bar{p}}\} \end{Bmatrix} + [T]^{-1}[K][T] \begin{Bmatrix} \{p\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[T] \begin{Bmatrix} \{g\} \\ \{\bar{g}\} \end{Bmatrix}, \quad (3.6)$$

ou, de forma mais compacta

$$[M_a] \begin{Bmatrix} \{\ddot{p}\} \\ \{\ddot{\bar{p}}\} \end{Bmatrix} + [D_a] \begin{Bmatrix} \{\dot{p}\} \\ \{\dot{\bar{p}}\} \end{Bmatrix} + [K_a] \begin{Bmatrix} \{p\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{g\} \\ \{\bar{g}\} \end{Bmatrix}, \quad (3.7)$$

sendo $[M_a]$, $[D_a]$ e $[K_a]$ as matrizes complexas de massa, de amortecimento/gyroscópica e de rigidez, respectivamente. $\{g\}$ é o vetor de força complexo.

Considerando o sistema operando em rotação constante, pode-se decompor o deslocamento complexo $\{p\}$ e a força externa complexa $\{g\}$ em suas componentes diretas, $\{P_f\}$ e $\{G_f\}$, e retrógradadas, $\{P_b\}$ e $\{G_b\}$, (de maneira similar vista no Capítulo 2) segundo:

$$\{p(t)\} = \{P_f\}e^{j\Omega t} + \{P_b\}e^{-j\Omega t}, \quad \{g(t)\} = \{G_f\}e^{j\Omega t} + \{G_b\}e^{-j\Omega t}, \quad (3.8)$$

sendo Ω a velocidade de rotação do rotor. Substituindo a Equação (3.8) e seus complexos conjugados em (3.7), obtém-se:

$$\left(-\Omega^2[M_a] + j\Omega[D_a] + [K_a] \right) \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Como já foi mencionado (Capítulo 2), a força de desbalanceamento possui somente a componente direta, ou seja, a componente de precessão retrógrada da força de desbalanceamento é nula. Portanto, a resposta ao desbalanceamento em regime permanente do sistema rotativo é obtida através da solução do seguinte conjunto de equações algébricas:

$$\left(-\Omega^2[M_a] + j\Omega[D_a] + [K_a] \right) \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{G_f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

A relação entre as amplitudes das componentes direta, $\{P_f\}$, e retrógrada, $\{P_b\}$, da resposta ao desbalanceamento define se o movimento precessional de uma específica estação do rotor será direto ou retrógrado, circular, elíptica ou retilínea (ver Equação 2.31). Estas duas componentes podem ser combinadas em um parâmetro, chamado *Shape and Directivity Index* ou *SDI*, definido por Han e Lee (1999) pela expressão:

$$-1 \leq SDI = \frac{|P_f| - |P_b|}{|P_f| + |P_b|} \leq 1 \quad (3.11)$$

As relações entre os valores do *SDI*, a forma da órbita de uma estação do rotor e a direção do movimento de precessão são:

$$\begin{aligned}
SDI = -1 & \Rightarrow \text{Movimento de precessão circular retrógrado} \\
-1 < SDI < 0 & \Rightarrow \text{Movimento de precessão elíptico retrógrado} \\
SDI = 0 & \Rightarrow \text{Movimento retilíneo} \\
0 < SDI < 1 & \Rightarrow \text{Movimento de precessão elíptico direto} \\
SDI = 1 & \Rightarrow \text{Movimento de precessão circular direto}
\end{aligned}
\tag{3.12}$$

O sinal do *SDI* define a direção do movimento de precessão enquanto a forma da órbita é definida pelo seu valor absoluto. Uma forma conveniente de visualizar o tipo de precessão de cada estação do rotor é através do *SDI Plot* ou *SDI 3D* (Dias Jr. & Allemang, 2000). O *SDI Plot* é um mapa que apresenta os valores do *SDI* de todas as estações do rotor (de todos os nós do modelo de elementos finitos) para cada valor de velocidade de rotação. Neste gráfico, cores são associadas aos valores de *SDI* de forma a facilitar a distinção entre os movimentos de precessão direta e retrógrada, bem como identificar as formas das órbitas. A Figura 3.2 mostra um exemplo de *SDI Plot* e uma escala mostrando o significado das cores utilizadas neste gráfico. Esta ferramenta será utilizada na Seção 3.3 para analisar a existência de modos operacionais em máquinas rotativas modeladas pelo método dos elementos finitos.

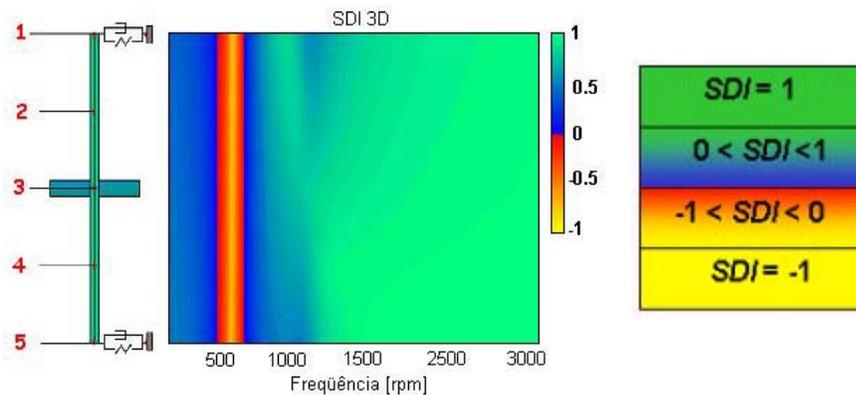


Figura 3.2 – Ilustração do mapa *SDI Plot*.

3.3. Modos Operacionais Mistos - Análise Numérica

3.3.1. Modelo I – Disco Central em Eixo Flexível Suportado por Mancais Flexíveis

O modelo usado na análise possui 7 nós e 7 elementos (Figura 3.3) e as seguintes características: comprimento do eixo = 0,3066m, raio do eixo = 0,0075m, raio do disco = 0,0695m, espessura do disco = 0,0145 m. Assume-se que o eixo e disco são feitos do mesmo material (aço), possuindo módulo de elasticidade = $2,06 \times 10^{11}$ N/m², coef. de Poisson = 0,3 e massa específica = 7833kg/m³.

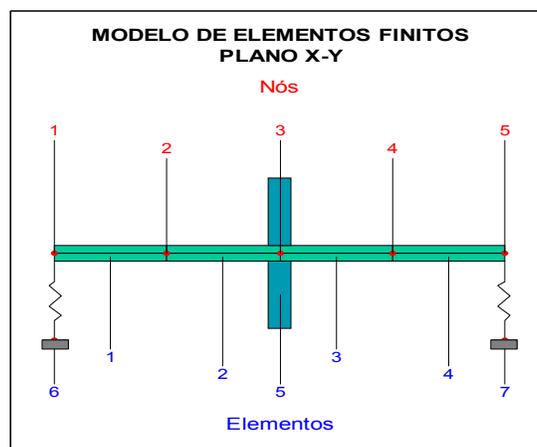


Figura 3.3 - Modelo de elementos finitos do rotor I.

Neste modelo são analisados os efeitos da variação de alguns parâmetros no *SDI Plot*. Os parâmetros analisados para este modelo são: anisotropia da rigidez dos mancais e efeito giroscópico, amortecimento nos mancais, amplitude do desbalanceamento e posição do disco.

Primeiramente considera-se o rotor isotrópico, sem amortecimento, todos os mancais com rigidez igual a 5000 N/m e desbalanceamento ($m\varepsilon$) igual a 1×10^{-7} kg.m. O diagrama de Campbell para este sistema é apresentado na Figura 3.4 e mostra que, para velocidade de rotação nula, o sistema apresenta (na faixa de 0 até 80 Hz) duas frequências naturais iguais a 10.85 Hz e outras duas iguais a 32.96 Hz. Os gráficos do *SDI Plot* e da função de resposta ao desbalanceamento direcional (gráfico que mostra as componentes de precessões diretas e retrógradas em função da frequência), estão apresentados na Figura 3.5a 3.5b, respectivamente. Nestes gráficos percebe-se

que, devido a isotropia dos mancais, não há componentes retrógradas e as órbitas são sempre circulares. Devido ao disco ser central com mancais idênticos, a segunda frequência de precessão direta não é excitada.

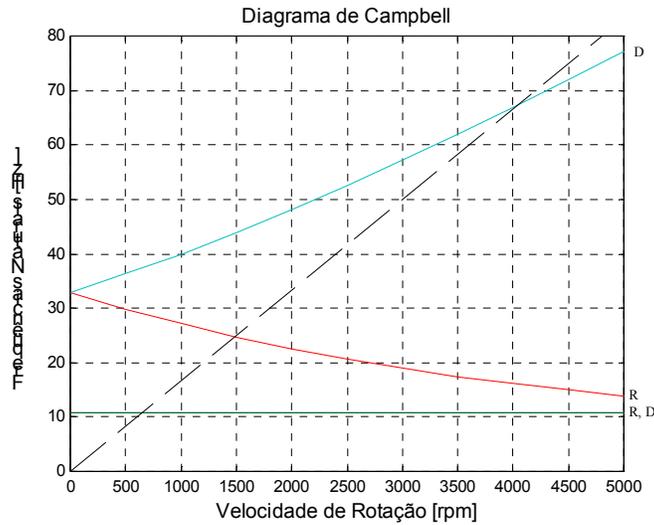


Figura 3.4 - Diagrama de Campbell.

Diminuindo-se a rigidez na direção z para $k_{zz} = 4000$ N/m, os gráficos resultantes de *SDI Plot* e de função de resposta ao desbalanceamento direcional (FRDD) do rotor, agora anisotrópico (mas, com mancais ainda idênticos) são mostrados na Figura 3.6:

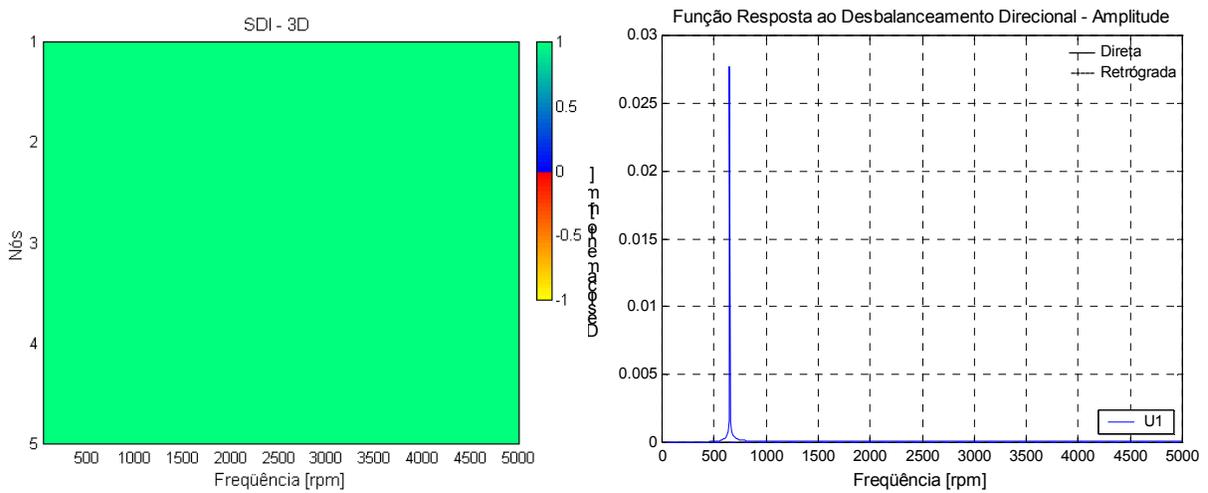


Figura 3.5 – (a) Gráfico de *SDI Plot* e (b) função resposta ao desbalanceamento direcional para rotor isotrópico.

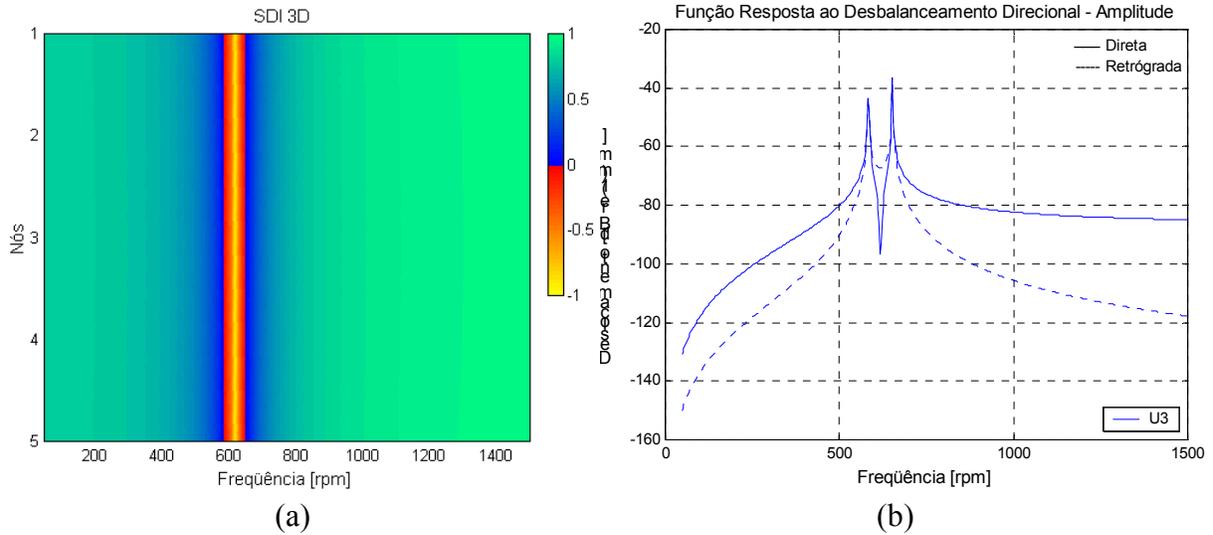


Figura 3.6 – (a) Gráfico do *SDI Plot* e (b) FRDD para rotor anisotrópico com $k_{zz} = 4000$ N/m.

Como diminuiu-se a rigidez na direção z , a frequência natural correspondente a esta direção tem seu valor reduzido, fazendo surgir o segundo pico no gráfico de resposta ao desbalanceamento. Entre as frequências naturais a órbita é retrógrada e fora das duas a órbita é direta, de acordo com a literatura (Lee, 1993, Krämer, 1993) e conforme visto no Capítulo 2.

Diminuindo-se mais a rigidez em z para $k_{zz} = 2000$ N/m, as frequências naturais se afastam mais, conforme ilustra a Figura 3.7. Antes da primeira frequência natural, a órbita, que era elíptica, vai tendendo a ser uma reta, devido a grande diferença entre k_{yy} e k_{zz} . Porém, para altas frequências, após a segunda frequência natural, a órbita tende a ser direta e circular novamente.

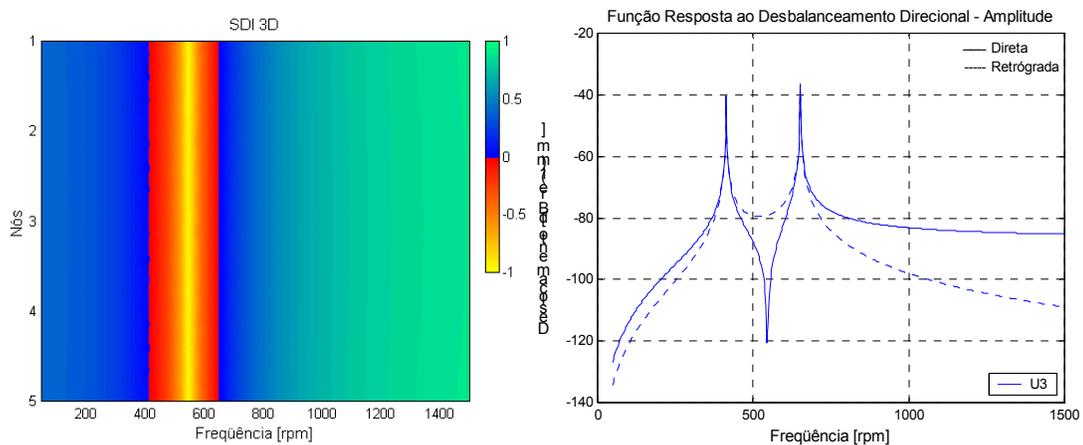


Figura 3.7 – Gráfico de *SDI Plot* e FRDD para rotor anisotrópico com $k_{zz} = 2000$ N/m.

Inserindo-se amortecimento nos mancais, as amplitudes das respostas diminuem e também diminui a faixa de frequências em que ocorre movimento de precessão retrógrada. Nos gráficos do *SDI Plot* e da FRDD (Figura 3.8), esta diminuição da faixa de frequências de movimento retrógrado é quase imperceptível, mas pode-se notar claramente na FRDD (Figura 3.8b) o decréscimo das amplitudes. Pode-se perceber no gráfico do *SDI Plot* (Figura 3.8a) que, exatamente entre as velocidades críticas, a órbita deixou de ser circular retrógrada para tender a ser elíptica retrógrada. Neste caso, o amortecimento inserido foi de 8 Ns/m.

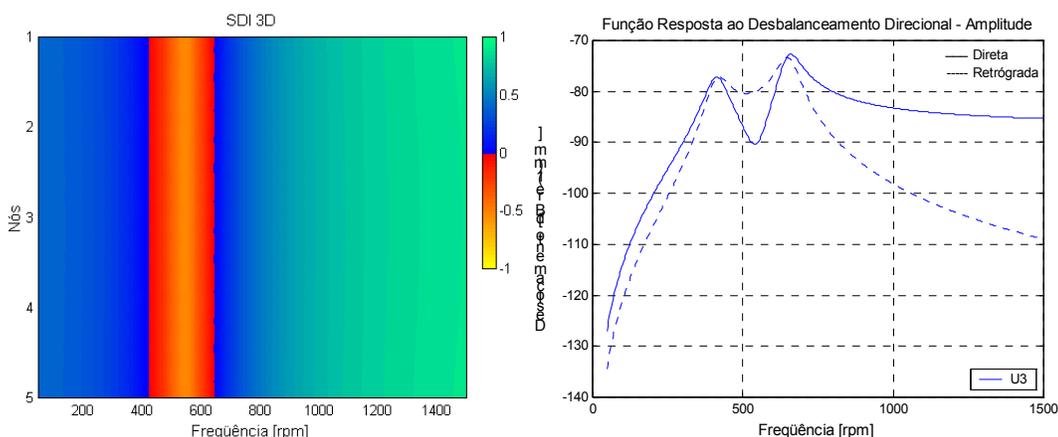


Figura 3.8 – (a) Gráfico do *SDI Plot* e (b) FRDD do rotor com $k_{zz}=2000$ N/m e $c_{yy}=c_{zz}=8$ Ns/m.

A seguir, são considerados os mancais sendo dissimilares, ou seja, os mancais são anisotrópicos e diferentes. Primeiramente, será analisado o caso não-amortecido em que os valores de rigidez dos mancais posicionado no nó 1 (mancal A) são $k_{yy}=5000$ N/m e $k_{zz}=4000$ N/m, enquanto que para o mancal B (posicionado no nó 5) os valores de rigidez são $k_{yy}=5000$ N/m e $k_{zz}=3500$ N/m. Na Figura 3.9 estão apresentados os gráficos do *SDI Plot* e de FRDD para uma faixa de frequências até 1500 rpm e nos gráficos da Figura 3.10 para uma faixa de 4500 rpm.

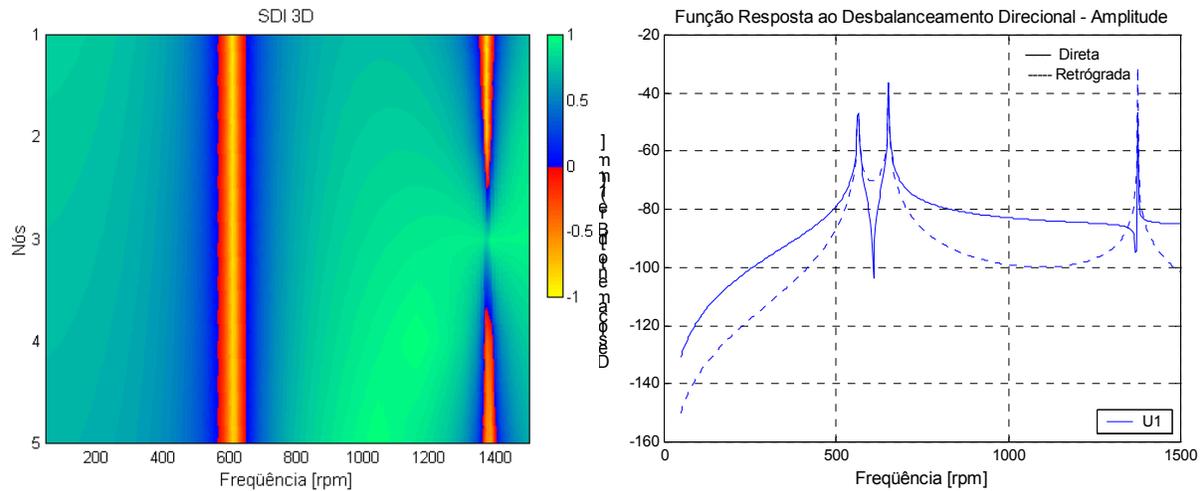


Figura 3.9 – Gráfico de *SDI Plot* e FRDD para rotor com mancais dissimilares e faixa até 1500rpm.

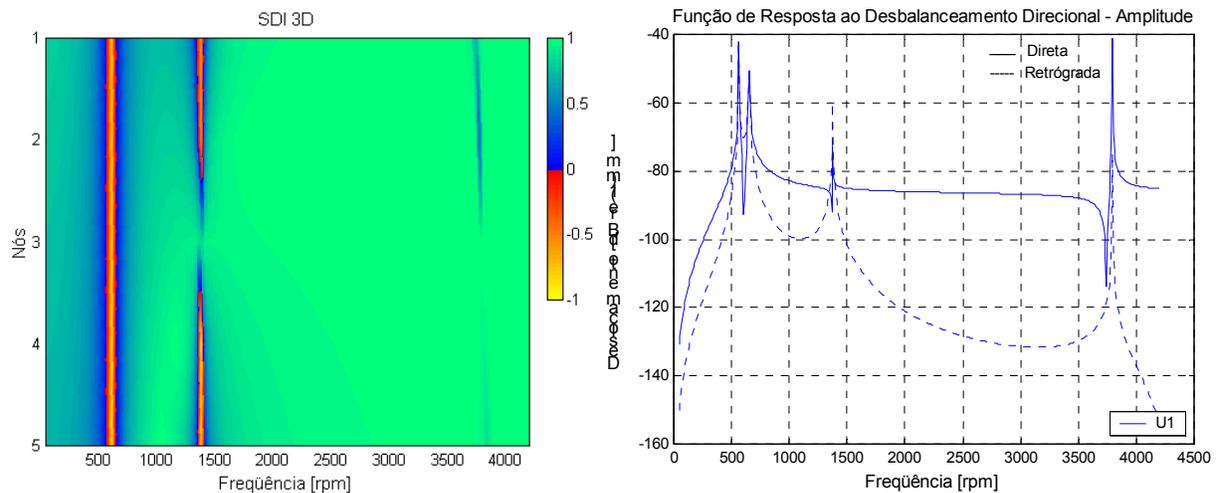


Figura 3.10 – Gráfico de *SDI Plot* e FRDD o rotor com mancais dissimilares e faixa até 4500rpm.

De acordo com os gráficos da Figuras 3.9 e 3.10, percebe-se que a dissimilaridade entre os mancais, influencia nos resultados. Houve o surgimento da terceira e quarta velocidades críticas (neste caso, a 3^a e 4^a frequências naturais foram excitadas), e mais ainda, observa-se que os nós das extremidades estão em precessão retrógrada, enquanto que o nó central, onde situa-se o disco, está em movimento de precessão direta! Em outras palavras, ocorre o fenômeno do modo operacional misto. Pode-se ainda perceber que a nova faixa de frequências de precessão retrógrada está situada em torno da terceira velocidade crítica, que é de precessão retrógrada. Ressalta-se, que no trabalho de Rao et al (1996,1997), estes identificaram o modo misto de uma

maneira diferente: o disco precessionava na direção retrógrada e os mancais precessionavam na direção direta.

Diminuindo-se mais ainda a rigidez do mancal B na direção z percebe-se, de acordo com a Figura 3.11, que aumenta mais a faixa de frequências de movimento de precessão retrógrada em torno da terceira velocidade crítica. Para $k_{zz} = 1500$ N/m, no mancal B, todos os nós estão em precessão retrógrada na terceira crítica, sendo que para os nós das extremidades a faixa de movimento de precessão retrógrada é maior, principalmente para o mancal A. Quanto mais diminui-se a rigidez em z do mancal B, maior é a faixa de frequências retrógradadas da estação oposta a este mancal. A Figura 3.12 mostra a FRDD para este caso.

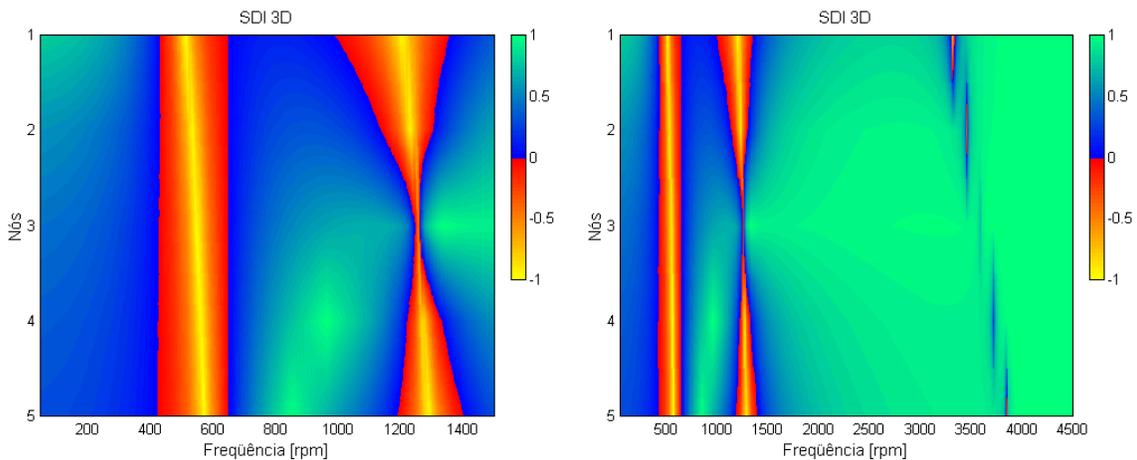


Figura 3.11 – (a) Gráfico do *SDI Plot*, na faixa de 0 a 1500 rpm, mostrando a ocorrência do modo operacional misto; (b) Gráfico do *SDI Plot*, na faixa de 0 a 4500 rpm.

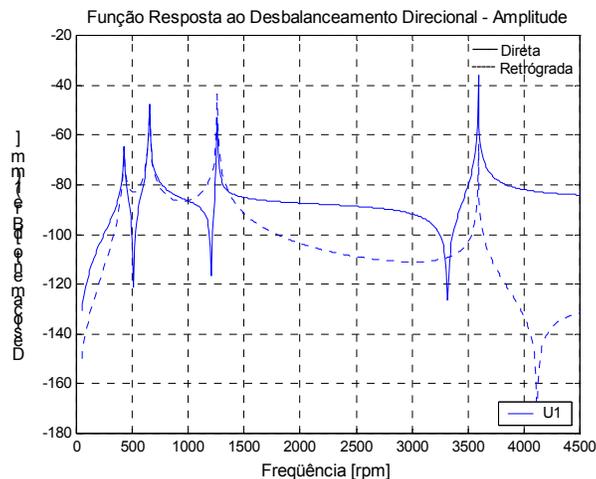


Fig. 3.12 – Função de resposta ao desbalanceamento direcional do nó 1.

De acordo com a Figura 3.12, após a terceira velocidade crítica, o nó 1 precessiona na direção direta até em torno de 3320 rpm (um pouco antes da quarta velocidade crítica de 3591,74rpm), quando o movimento torna-se de precessão retrógrada e, após esta faixa em torno de 3320 rpm, retorna ao movimento de precessão direta. Este fato deve-se a uma anti-ressonância na função de resposta ao desbalanceamento direta. O valor em frequência desta anti-ressonância, nas FDRRs, aumenta para cada estação, no sentido do mancal A (nó 1) para o mancal B (nó 6). Para os nós 4 e 5 esta anti-ressonância situa-se após a quarta crítica, mas, para o nó 3 ela não surge e para esta velocidade crítica não há a ocorrência de modo operacional misto.

A influência do desbalanceamento na ocorrência do modo operacional misto para este tipo de rotor é verificada comparando-se a Figura 3.12 com a Figura 3.13. A Figura 3.13 mostra a FRDD para o nó 1 nas mesmas condições de valores de rigidez do caso da Figura 3.12, mas, com um desbalanceamento maior. No caso exemplificado pela Figura 3.12 o desbalanceamento do rotor é igual a $1e-7$ kgm, e na Figura 3.13 o rotor possui um desbalanceamento é igual a $1e-5$ kgm. Comparando-se as duas Figuras, percebe-se que as faixas de frequência de movimentos de precessão direta e retrógrada continuam as mesmas, somente havendo alteração nas amplitudes das respostas. Desta forma, verifica-se, juntamente com análises em outros gráficos (não mostrados aqui) que o aumento (diminuição) do desbalanceamento não interfere no surgimento dos modos mistos para este tipo de rotor, apenas aumenta (diminui) a amplitude nas FRDD.

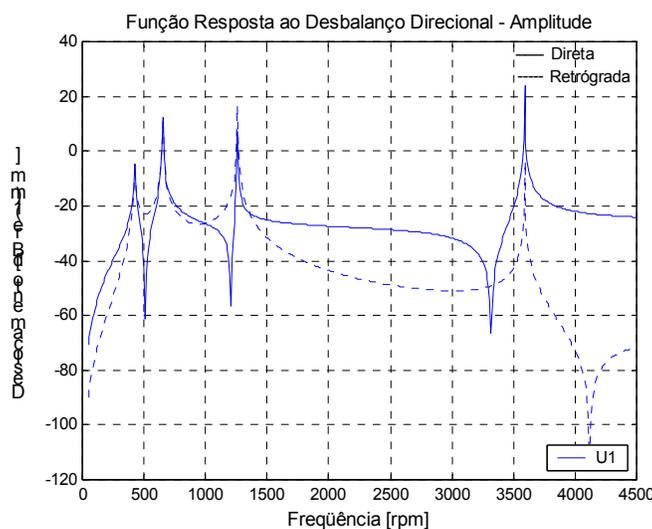


Figura 3.13 – FRDD do nó 1 com $m\epsilon = 1e-5$ kgm.

Com a inclusão do amortecimento no sistema, há a diminuição da ocorrência de movimento de precessão retrógrada, como mostram as Figuras 3.14 e 3.15. Para um nível de amortecimento de $c_{yy} = c_{zz} = 8 \text{ Ns/m}$ não há a ocorrência de modos mistos.

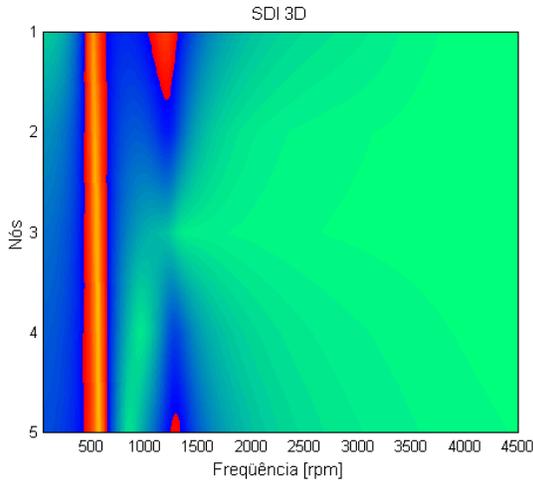


Figura. 3.14 – *SDI Plot* para $c_{zz} = 4 \text{ Ns/m}$.

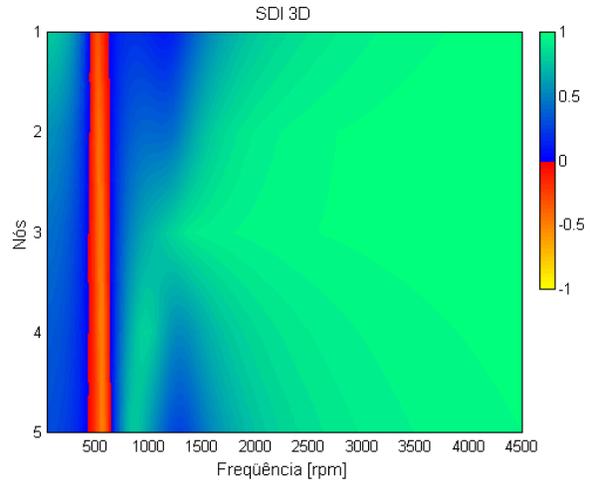


Figura. 3.15 – *SDI Plot* para $c_{zz} = 8 \text{ Ns/m}$.

Nas diversas análises para vários valores dos parâmetros de rigidez, amortecimento e desbalanceamento, um resultado interessante ocorre quando os rotores são anisotrópicos e dissimilares, mas com valores que resultam em coeficientes de rigidez equivalentes iguais nas direções y e z , ou seja, a soma dos valores de rigidez dos mancais A e B na direção z é igual a soma dos valores de rigidez dos mancais na direção y . Como exemplo, a Figura 3.16 mostra os gráficos do *SDI Plot* e *FRDD* para o modelo com parâmetros de amortecimento nulos, desbalanceamento de $1 \times 10^{-7} \text{ kg.m}$ e valores de rigidez do mancal A iguais a $k_{yy} = 5000 \text{ N/m}$ e $k_{zz} = 4500 \text{ N/m}$; e do mancal B iguais a $k_{yy} = 4500 \text{ N/m}$ e $k_{zz} = 5000 \text{ N/m}$. De acordo com os gráficos da Figura 3.16 para o primeiro par de frequências naturais, o resultado é similar ao caso de rotor isotrópico, ou seja, nesta faixa somente há uma velocidade crítica com movimento de precessão direta e órbita circular. Contudo, neste caso, a terceira velocidade crítica é excitada, diferentemente do caso isotrópico.

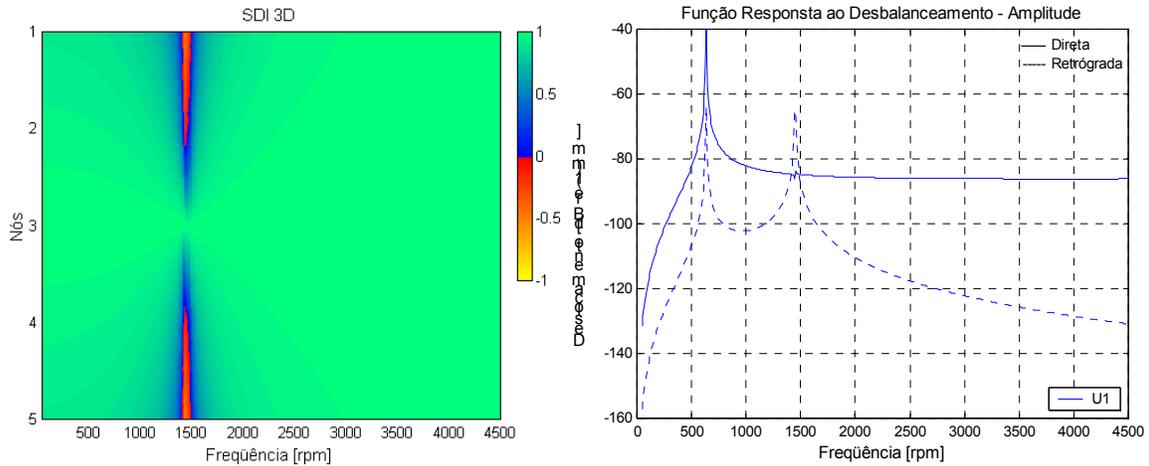


Figura 3.16 – Gráfico de *SDI Plot* e FRDD para rotor com mancais com valores de rigidez equivalentes nas direções y e z iguais.

Até o momento foi visto que para haver os modos operacionais mistos no rotor com disco central, os mancais devem ser anisotrópico dissimilares, para que haja o efeito giroscópico. Caso o disco não seja central, mancais idênticos anisotrópico fazem surgir os modos mistos, pois nesta configuração há o efeito giroscópico. A Figura 3.17 mostra o disco no nó 2 do modelo com valores de rigidez dos mancais anisotrópico idênticos iguais a $k_{yy} = 5000$ N/m e $k_{zz} = 2500$ N/m. A Figura 3.18 mostra o gráfico do *SDI Plot* apresentando modos operacionais mistos.

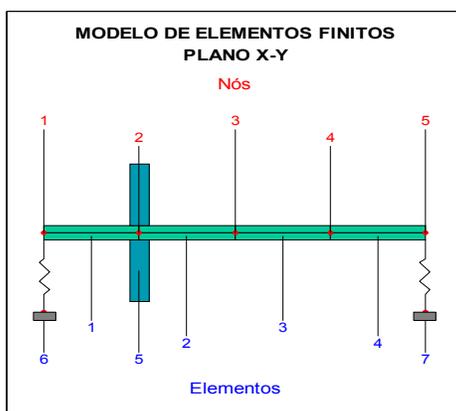


Fig. 3.17 – Modelo com disco não central.

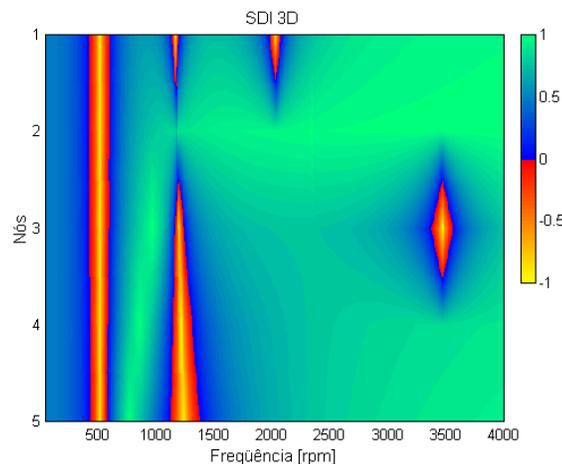


Fig. 3.18 – *SDI Plot* para modelo com disco não central.

Nesta nova configuração também verifica-se que o desbalanceamento não possui influência na alteração da faixa de precessão retrógrada e que, com o aumento de amortecimento esta faixa diminui.

Em suma, nesta análise de simulação numérica, para o sistema contendo um disco, verifica-se que existem modos operacionais mistos quando há anisotropia dos mancais e efeito giroscópico. O nível de desbalanceamento não influencia nos gráficos do *SDI Plot*, enquanto que o aumento do amortecimento no sistema faz diminuir as faixas de frequência correspondente ao movimento de precessão retrógrada.

3.3.2. Modelo II – Rotor com Dois Discos Iguais Equidistantes aos Mancais Flexíveis

O modelo possui 9 nós e 10 elementos, conforme Figura 3.19, e as seguintes características: comprimento do eixo = 1,5 m, raio do eixo = 0,025 m, raio dos discos = 0,175 m, espessura dos discos = 0,07 m, eixo e disco com o mesmo material (aço), tendo módulo de elasticidade = $2,11 \times 10^{11}$ N/m², coeficiente de Poisson = 0,3 e massa específica = 7800 kg/m³.

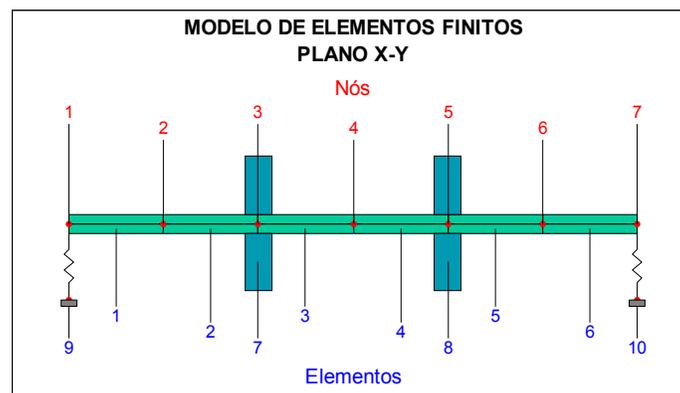


Figura 3.19 - Modelo de elementos finitos do rotor II.

Neste modelo são analisados os efeitos da variação dos seguintes parâmetros no *SDI Plot*: anisotropia da rigidez dos mancais e efeito giroscópico, distribuição espacial do desbalanceamento, amplitude do desbalanceamento e amortecimento nos mancais.

Primeiramente, consideram-se os mancais anisotrópicos idênticos com $k_{yy} = 1 \times 10^6$ N/m e $k_{zz} = 0.8 \times 10^6$ N/m, sem amortecimento, amplitude dos desbalanceamentos dos discos iguais a 1×10^{-5} kg.m e defasagem angular nula entre os desbalanceamentos, ou seja, os pontos pesados dos discos estão situados na mesma posição angular. O diagrama de Campbell para este sistema é apresentado na Figura 3.20a e mostra que, para frequência de rotação nula, o sistema apresenta as quatro primeiras frequências naturais iguais a 12,10 Hz e 12,68 Hz, para o primeiro par de frequências, e 37,02 Hz e 39,83 Hz para o segundo par de frequências.

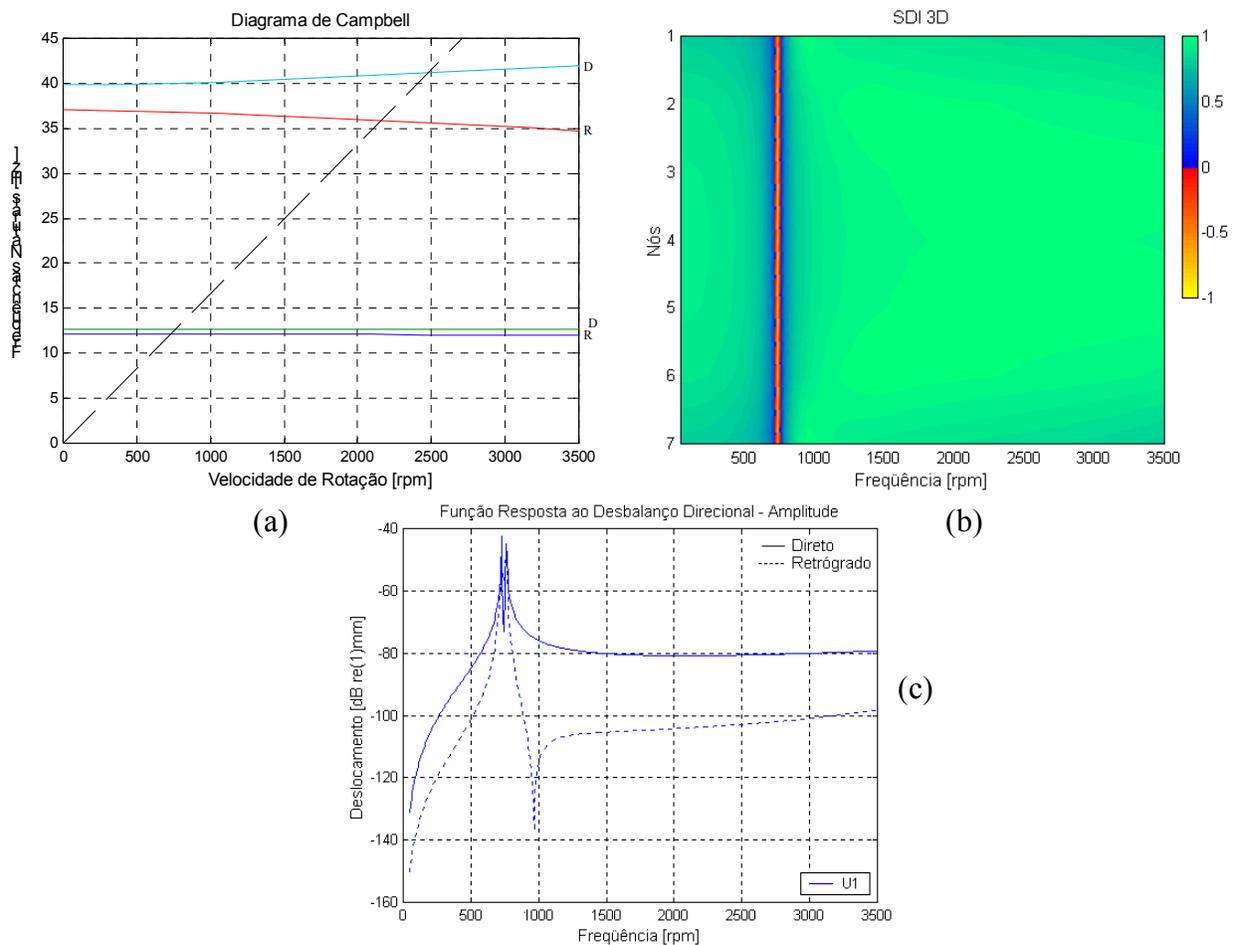


Figura 3.20 – (a) Diagrama de Campbell; (b) *SDI Plot* para o modelo 2; (c) FRDD para o nó 1..

Como o rotor possui discos iguais e equidistantes dos mancais anisotrópicos idênticos, o efeito é similar ao caso do modelo 1 com disco central e mancais anisotrópicos idênticos, ou seja, o terceiro e quarto modos não são excitados (ver Figura 3.20b e 3.20c).

Para uma diminuição da rigidez do mancal B (situado no nó 7) na direção z para $k_{zz}=0,6\times 10^6$ N/m, ou seja, tornando os mancais dissimilares e mantendo-se os valores dos demais parâmetros os mesmos, os gráficos resultantes de *SDI Plot* e de função de resposta ao desbalanceamento direcional (FRDD) do rotor para o nó 1 são mostrados na Figura 3.21.

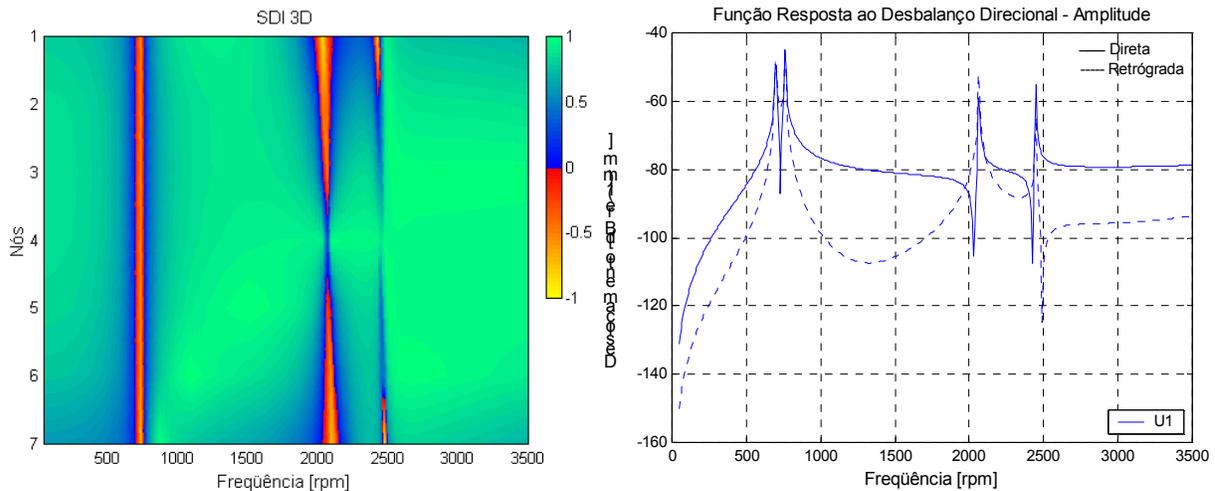


Figura 3.21 - Gráfico de *SDI Plot* e FRDD para rotor anisotrópico com $k_{zz} = 0.6\times 10^6$ N/m.

Neste caso (mancais diferentes e anisotrópicos), surge o segundo par de frequências no gráfico do *SDI Plot*. Há também a ocorrência de modo operacional misto. Na terceira velocidade crítica, o centro do sistema precessiona na direção direta e as demais estações do modelo precessionam na direção retrógrada. O movimento retrógrado é mais acentuado nas extremidades do eixo. As extremidades também precessionam na direção retrógrada um pouco antes da quarta velocidade crítica, enquanto que a parte central continua em precessão direta com órbita circular.

Com os mesmos parâmetros de coeficientes de rigidez, amortecimento e amplitude de desbalanceamento da análise anterior, faz-se a análise da variação dos ângulos dos desbalanceamentos dos discos no *SDI Plot*. Primeiramente, efetua-se um giro de 30° somente no disco I e em seguida um giro de 100° no mesmo disco. Estes resultados estão apresentados nas Figuras 3.22 e 3.23, respectivamente. Verifica-se que a distribuição espacial do desbalanceamento influencia no surgimento do modo operacional misto. Neste caso específico, para um giro de 30° , a faixa de frequências retrógradadas, próximo a 200 rpm, se alarga mais (em relação ao caso anterior da Figura 3.20), e quanto mais se gira o disco, mais a parte central do rotor tende a se movimentar em precessão retrógrada.

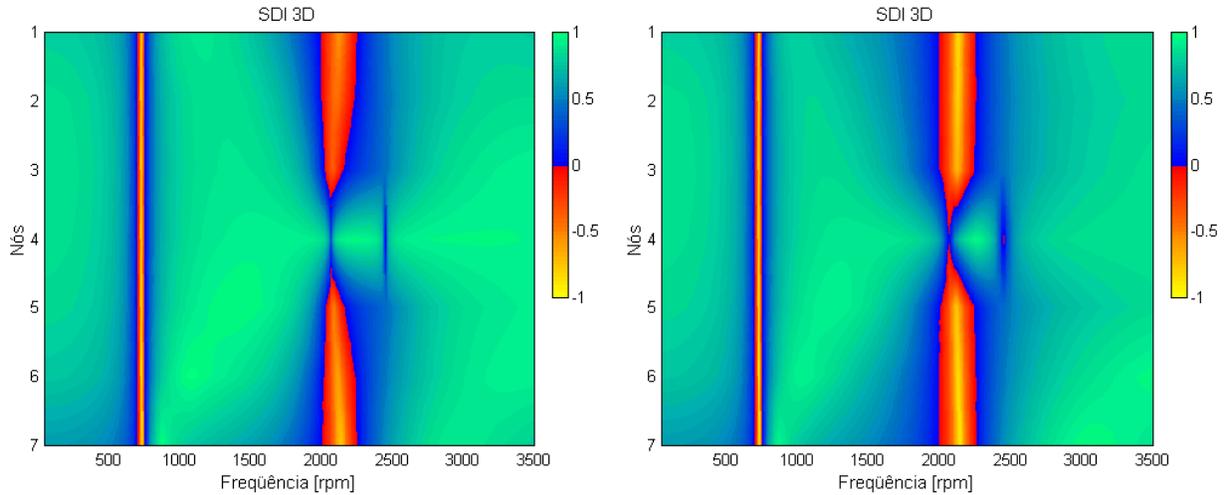


Figura 3.22 – *SDI* para giro de 30° no disco I. Figura 3.23 – *SDI* para giro de 100° no disco I.

Mantendo-se os mesmos parâmetros de rigidez da análise anterior, com os pontos pesados dos discos situados na mesma posição angular, ou seja, ambos em 0° , analisa-se o efeito da magnitude do desbalanceamento na ocorrência dos modos mistos. Na Figura 3.24a está apresentado o gráfico do *SDI Plot* para o sistema possuindo um desbalanceamento de $m\varepsilon=2\times 10^5$ kg.m no disco I e $m\varepsilon = 1\times 10^{-5}$ kg.m no disco II. Comparando o gráfico da Figura 3.24a com o gráfico da Figura 3.21, nota-se que a mudança do desbalanceamento alterou a aparência do último gráfico. Por outro lado, foi verificado que se os desbalanceamentos forem modificados de forma igual, ou seja, ambos diminuídos ou aumentados na mesma proporção, o gráfico resultante do *SDI Plot* não irá se modificar. Conclui-se que não é a amplitude de desbalanceamento, mas a distribuição espacial do desbalanceamento que realmente influencia na ocorrência do modo operacional misto (além do efeito giroscópico). Na Figura 3.24b está apresentado o *SDI Plot* para o sistema possuindo $m\varepsilon=1\times 10^{-5}$ kg.m no disco I e $m\varepsilon = 0,5\times 10^{-5}$ kg.m no disco II e os demais parâmetros idênticos ao caso da Figura 3.24. Percebe-se que não há diferenças entre as Figura 3.24a e 3.24b.

Finalmente, analisa-se a influência do amortecimento. A Figura 3.25a mostra o *SDI Plot* do sistema com amortecimento nos mancais nas direções horizontal e vertical igual a 250 Ns/m. Na Figura 3.25b o nível de amortecimento é aumentado para 500 Ns/m, em todas as direções, em ambos os mancais. De acordo com estes dois gráficos percebe-se que quanto mais amortecimento é inserido no sistema, menores são as faixas de frequências de movimento retrógrado.

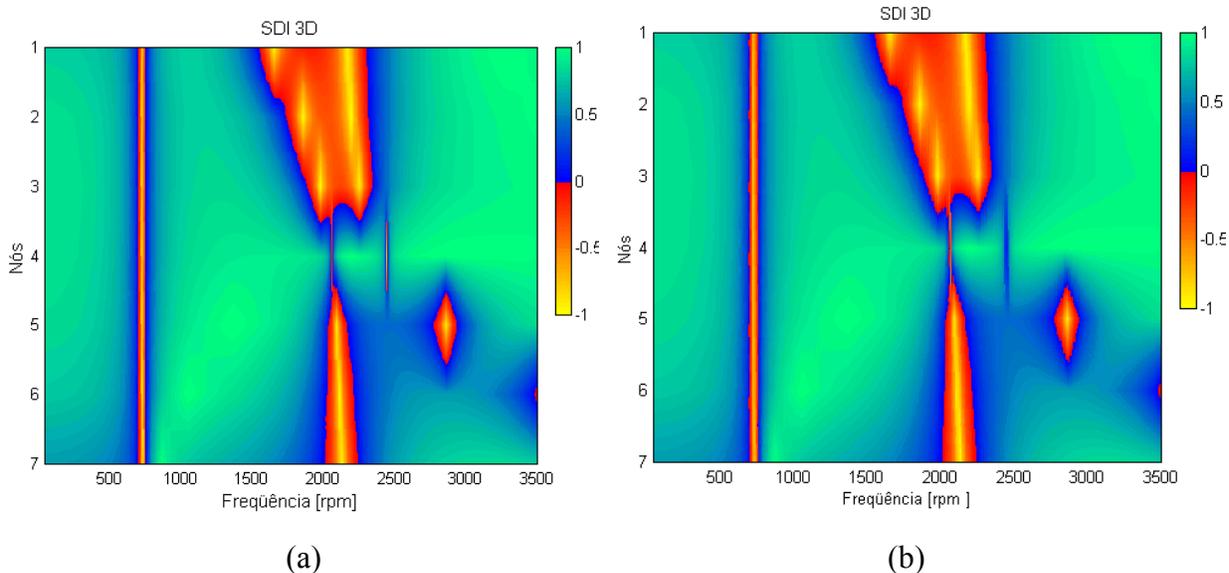


Figura 3.24 – (a) *SDI Plot* para sistema com desbalanceamento $m\epsilon_I = 2 \times 10^{-5}$ kg.m e $m\epsilon_{II} = 1 \times 10^{-5}$ kg.m e (b) sistema com desbalanceamento $m\epsilon_I = 10^{-5}$ kg.m e $m\epsilon_{II} = 0,5 \times 10^{-5}$ kg.m.

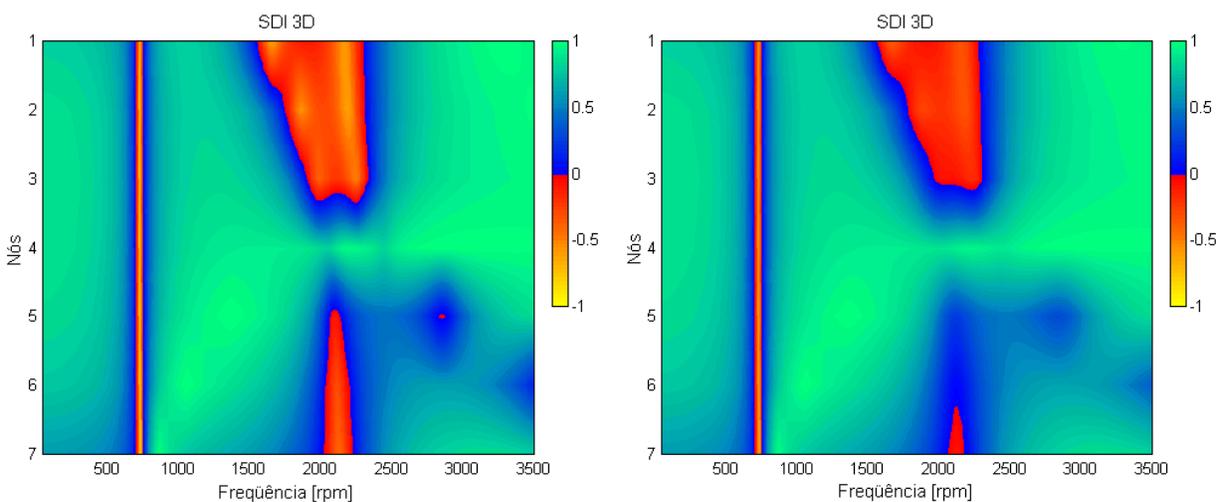


Figura 3.25 – (a) *SDI Plot* para $c_{yy}=c_{zz}=250$ Ns/m; (b) *SDI Plot* para $c_{yy}=c_{zz}=500$ Ns/m.

3.3.3. Modelo III – Rotor Usado por Lallane & Ferraris (1998)

O terceiro rotor usado na análise é o mesmo usado em Lallane & Ferraris (1997, pg 126). O modelo deste rotor (Figura 3.26) possui as seguintes características: 31 elementos finitos, 29 nós, distância entre o mancal A e o disco D1 = 0,2m, distância; entre os discos D2 e D3 = 0,3m, distância entre D3 e D4 = 0,3 m, disco e eixos feito de aço (módulo de

elasticidade= $2,11 \times 10^{11}$ N/m², coeficiente de Poisson = 0,3 e massa específica = 7800 kg/m³), raio da seção transversal do eixo=0,05 m, mancais anisotrópicos idênticos com parâmetros iguais a $k_{yy}=7 \times 10^7$ N/m, $k_{zz}=5 \times 10^7$ N/m, $c_{yy}=7 \times 10^2$ Ns/m, $c_{zz}=5 \times 10^2$ Ns/m, $k_{yz}=k_{zy}=c_{yz}=c_{zy}=0$, e as dimensões dos discos dados na Tabela 3.1. Para um desbalanceamento de 200 g mm no disco D2, o resultado do *SDI Plot* é mostrado na Figura 3.27.

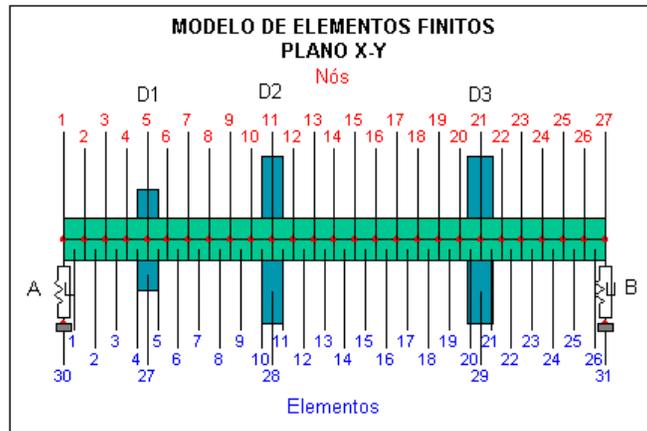


Figura 3.26 – Modelo de elementos finitos do rotor III.

Tabela 3.1 – Dimensões dos discos do rotor III.

Disco	D1	D2	D3
Espessura [m]	0,05	0,05	0,06
Raio interno [m]	0,05	0,05	0,05
Raio externo [m]	0,12	0,2	0,2

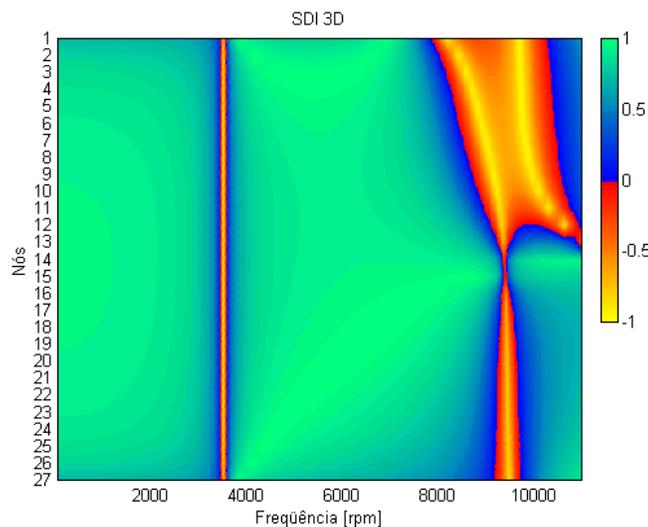


Figura 3.27 – *SDI Plot* para o rotor III.

De acordo com a Figura 3.27 ocorrem modos mistos a partir de 8000 rpm. A Figura 3.28 mostra três modos operacionais, nas rotações de 3508,7rpm, 6093,4 rpm e de 9006,7rpm. No primeiro caso, a velocidade de rotação situa-se entre as duas primeiras velocidades críticas, neste modo todas as estações do rotor estão em movimento de precessão retrógrada e órbita circular. No segundo caso, todas as estações do rotor estão em movimento de precessão direta e órbita circular. No terceiro caso, o modo é misto: os primeiros nós (nós 1 ao 11) movem-se em precessão retrógrada e os demais movem-se em precessão direta, conforme mostra o *SDI plot* da Figura 3.27 e o valor de *SDI* da Figura 3.28c.

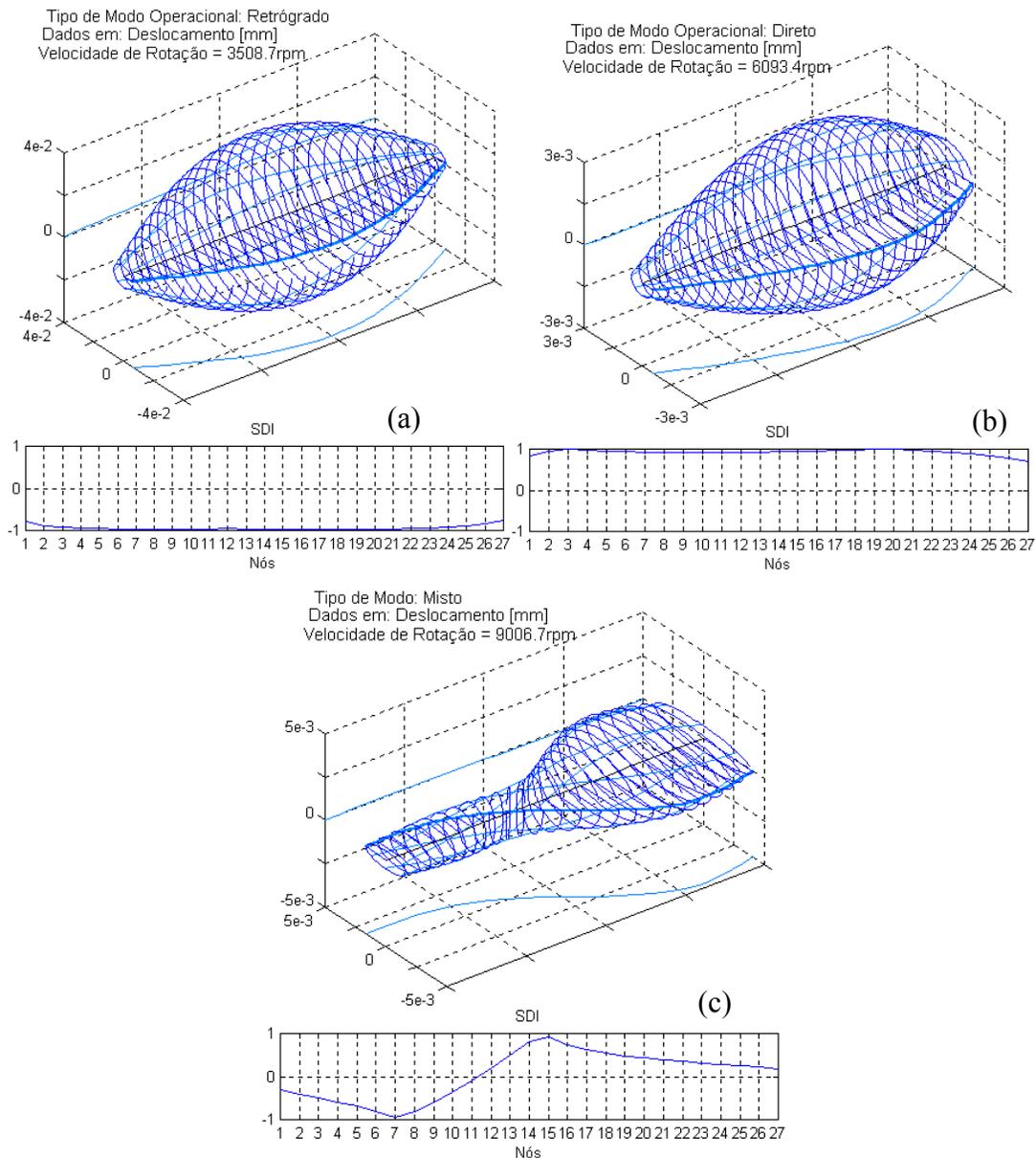


Figura 3.28 – Modos operacionais em (a) 3508,7rpm, (b) 6093,4 rpm e (c) 9006,7rpm.

3.4. Modos Operacionais Mistos - Resultados Experimentais

Para a verificação experimental do fenômeno de modos operacionais mistos, foi usada a bancada experimental mostrada na Figura 3.29a. Esta bancada experimental é de fabricação da *Bently Nevada Corporation* e consiste de um rotor flexível com dois discos de aço de 75,40 mm de diâmetro por 25,4 mm de espessura, um eixo circular de aço de 10 mm de diâmetro e 60,48cm de comprimento entre os mancais (Figura 3.29b) e dois mancais de rolamento, sendo que o mancal situado na extremidade oposta ao motor elétrico é suportado por molas helicoidais com diferentes coeficientes de rigidez, para que se possa controlar a anisotropia deste mancal. As respostas ao desbalanceamento nas direções horizontal e vertical foram medidas simultaneamente em quatro estações do rotor. A primeira estação localiza-se no eixo, próximo ao motor elétrico, a segunda estação corresponde ao primeiro disco, a terceira estação é próxima ao centro do eixo (entre os discos) e a quarta estação corresponde ao segundo disco, mais próximo da extremidade final do eixo onde se situa o mancal anisotrópico.

Os sinais de resposta foram medidos por oito sensores de proximidade e enviados a uma placa de aquisição de dados da “National Instruments”, controlada por um código computacional escrito em linguagem do MATLAB®. Estes sinais foram adquiridos em várias velocidades de rotação e filtrados com o intuito de reter predominantemente a faixa de frequência da resposta causada pelas forças de desbalanceamento. Para cada velocidade de rotação, a posição angular do ponto pesado de cada disco foi variada, para verificar a influência da distribuição espacial das forças de desbalanceamento na existência dos movimentos de precessão direta e retrógrada simultâneos.

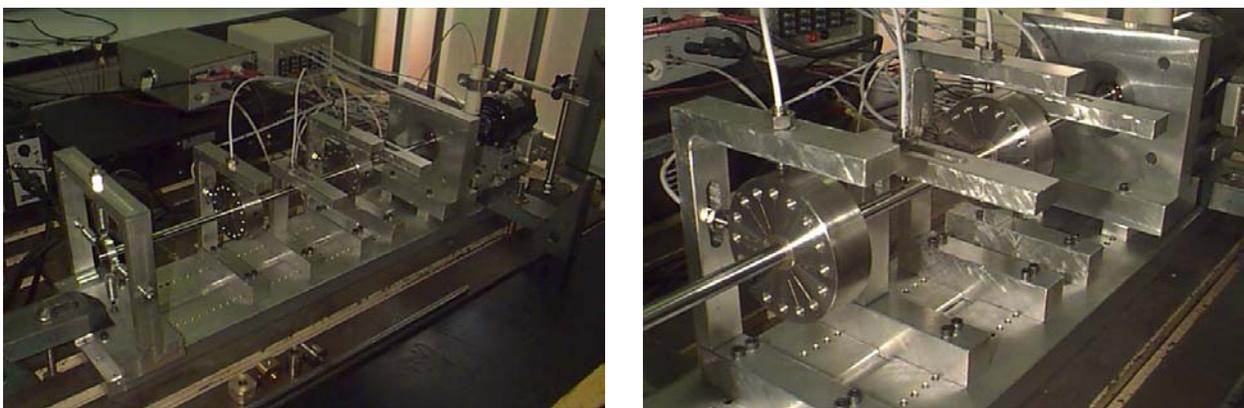


Figura 3.29- (a) Bancada experimental estudada, e (b) detalhe dos dois discos do rotor.

Depois de vários testes realizados, observou-se a existência de modos operacionais mistos, para algumas velocidades de rotação e certas distribuições de desbalanceamento. Alguns resultados estão apresentados nas Figuras 3.30 e 3.31. Nestas figuras, o asterisco marca o ponto inicial da órbita da estação.

A Figura 3.30 mostra a influência da distribuição espacial das forças de desbalanceamento (através do giro nos discos) na ocorrência do fenômeno. Neste caso, o sistema está operando a 3540 rpm. Pode ser visto que, se ambos os discos (onde a maior parte do desbalanceamento do rotor está localizado) são posicionados com suas posições angulares originais, o sistema exhibe movimentos de precessão mistos, onde a estação 3 precessiona na direção retrógrada e as outras três na direção direta. Se o disco (i.e., ponto pesado do disco) mais próximo do motor elétrico for girado por 90° , todas as estações precessionam na direção direta. Contudo, se este for girado novamente por mais 90° (180° de sua posição original), duas estações (estações 1 e 2) descrevem seu movimento de precessão na direção retrógrada e as outras duas na direção direta.

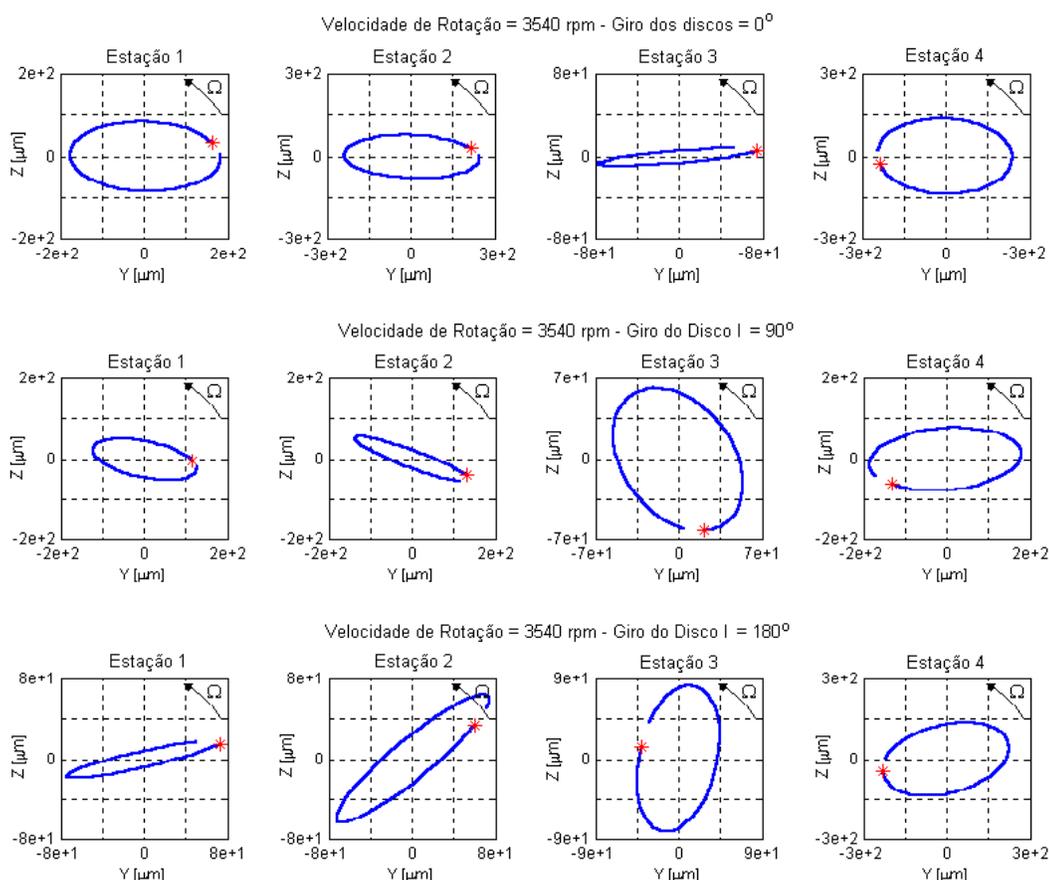


Figura 3.30 – Resultados mostrando a influência da distribuição espacial do desbalanceamento.

A Figura 3.31 apresenta a progressão da precessão direta para precessão retrógrada da órbita da estação 2, para valores crescentes da velocidade de rotação. No entanto, vale ressaltar que cada medição foi realizada com o rotor operando em regime permanente. De acordo com os gráficos, para todas as velocidades de rotação, a estação 1 precessiona na direção retrógrada, enquanto as estações 3 e 4 precessionam na direção direta. Contudo, a estação 2 apresenta um comportamento completamente diferente: quando o rotor está girando em 3300 rpm (não mostrado), esta estação move-se na direção direta, quando o rotor alcança 3438 rpm, a órbita da estação 2 degenera-se para uma linha reta e, para velocidades de rotação mais altas, a estação movimenta-se em precessão direta.

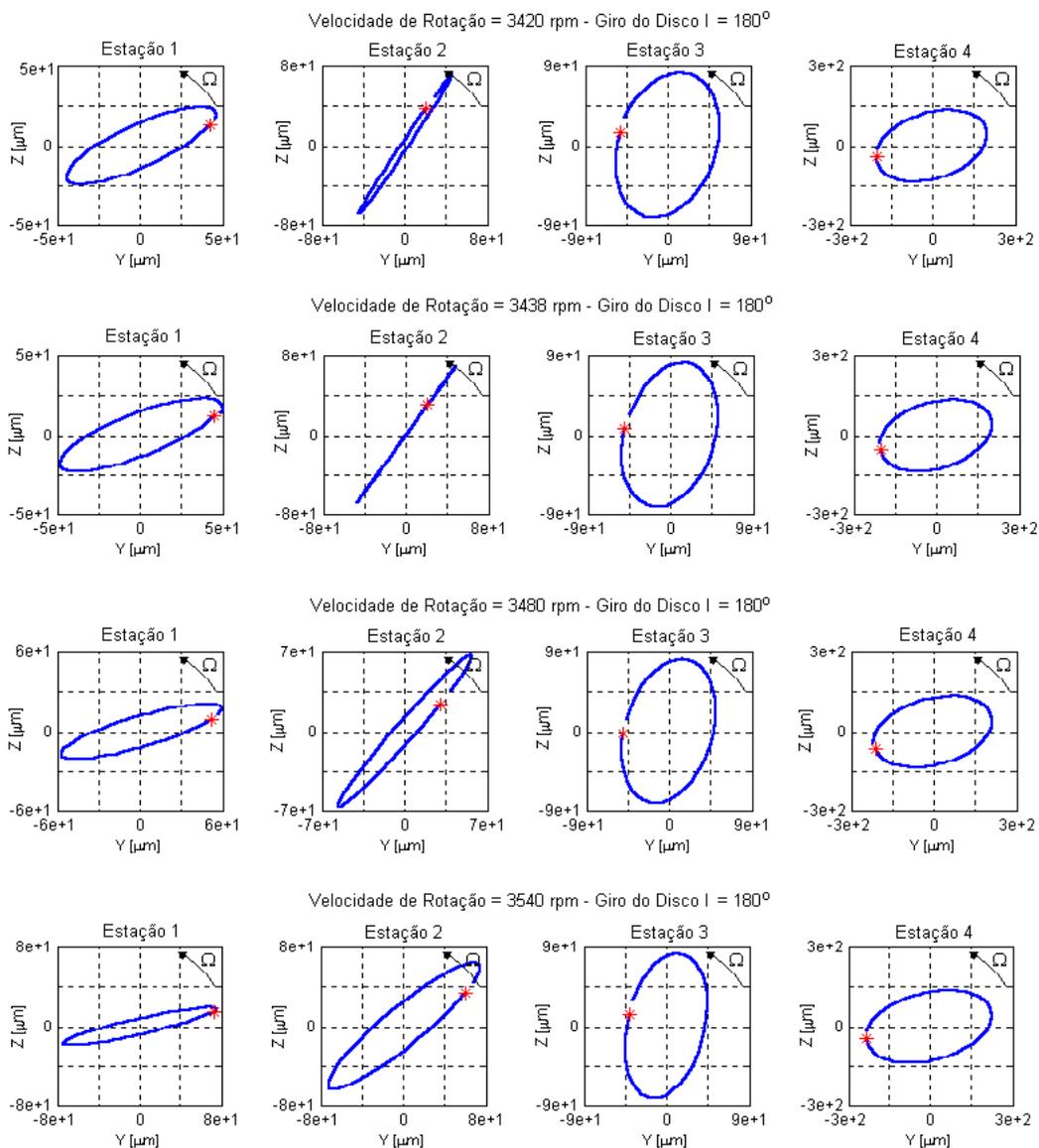


Figura 3.31 – Progressão das órbitas das estações para alguns valores de velocidade de rotação.

Capítulo 4

Identificação de Modos Operacionais Mistos em Máquinas Rotativas Operando em Regime Transiente

4.1. Introdução

No Capítulo 3 foi visto que podem existir faixas de frequências em que ocorrem os modos operacionais mistos em sistemas rotor-mancais. Sem a informação de modelos numéricos, a identificação experimental destas faixas torna-se um processo demorado, sendo realizado por tentativas. Neste capítulo propõe-se um método para identificar estas faixas de frequências de uma maneira mais eficaz. O método é baseado na análise do mapa de ordem direcional (mapa de ordens negativas e positivas) do sistema, que fornece as componentes de precessão direta e retrógrada de uma determinada estação do rotor durante sua partida ou parada. Primeiramente, a metodologia de *order tracking* é revisada e, em seguida, o método proposto é aplicado a um exemplo numérico e em um caso real (experimental).

4.2. Métodos Seguidores de Ordem (*Order Tracking Methods*)

Componentes harmônicas do sinal de vibração de uma máquina rotativa, operando em rotação constante, surgem como picos no espectro deste sinal. Esses picos correspondem a frequências naturais ou frequências de excitações cíclicas, que geralmente são múltiplas da rotação do eixo.

Para uma máquina com velocidade variável, vários espectros podem ser obtidos em função da rotação do eixo. Esses espectros podem ser agrupados em um só gráfico tridimensional denominado de mapa espectral ou diagrama em cascata (*waterfall plot*). Contudo, para sinais não-estacionários, o conteúdo espectral é variante no tempo e a análise espectral usando a tradicional FFT geralmente não apresenta bons resultados. Efeitos de *aliasing* e espalhamento (*smearing*) podem surgir.

O problema de *aliasing* ocorre quando o intervalo de discretização, Δt , é muito grande, ou seja, tem-se uma baixa taxa de amostragem. Nesta situação, componentes de altas frequências presentes no sinal surgem no espectro como sendo baixas frequências. Para não ocorrer este efeito, é necessário que a taxa de amostragem, f_s , seja, no mínimo duas vezes o valor da mais alta frequência contida no sinal, f_{max} . Esta condição é conhecida como teorema de Nyquist-Shannon (Ewins, 1984; Maia e Silva, 1997). Ao se analisar sinais de vibração medidos, por exemplo, durante a partida de uma máquina, o fenômeno de *aliasing* pode ocorrer se a taxa de amostragem for mantida constante. Neste caso, as frequências contidas no sinal irão aumentando com o aumento da rotação, podendo então ultrapassar o valor limite de não ocorrência de *aliasing*.

O espalhamento é resultado da aplicação da FFT em um sinal não-estacionário. Devido à variação da frequência das componentes dependentes da rotação ao longo do registro temporal, cada componente aparecerá no espectro representada por uma banda de frequência e com amplitude menor que a real. Um exemplo de espalhamento está apresentado na Figura 4.1, que mostra um sinal senoidal com frequência constante (Figura 4.1a) e a sua respectiva transformada de Fourier (Figura 4.1b). Na Figura 4.1c é mostrado um sinal senoidal de varredura rápida (*chirp*) (similar ao sinal da resposta ao desbalanceamento durante a partida de uma máquina) e na Figura 4.1d é apresentado seu espectro. Percebe-se, nesta última figura, um erro significativo na amplitude do espectro quando comparado com a amplitude real do sinal.

Uma maneira de se usar efetivamente a FFT em sinais de vibração de rotores com velocidade variável é através da sincronização da taxa de amostragem com a rotação do eixo. Neste caso o sinal no domínio do tempo pode ser visualizado no domínio do ângulo de revolução, sendo, neste domínio, um sinal estacionário.

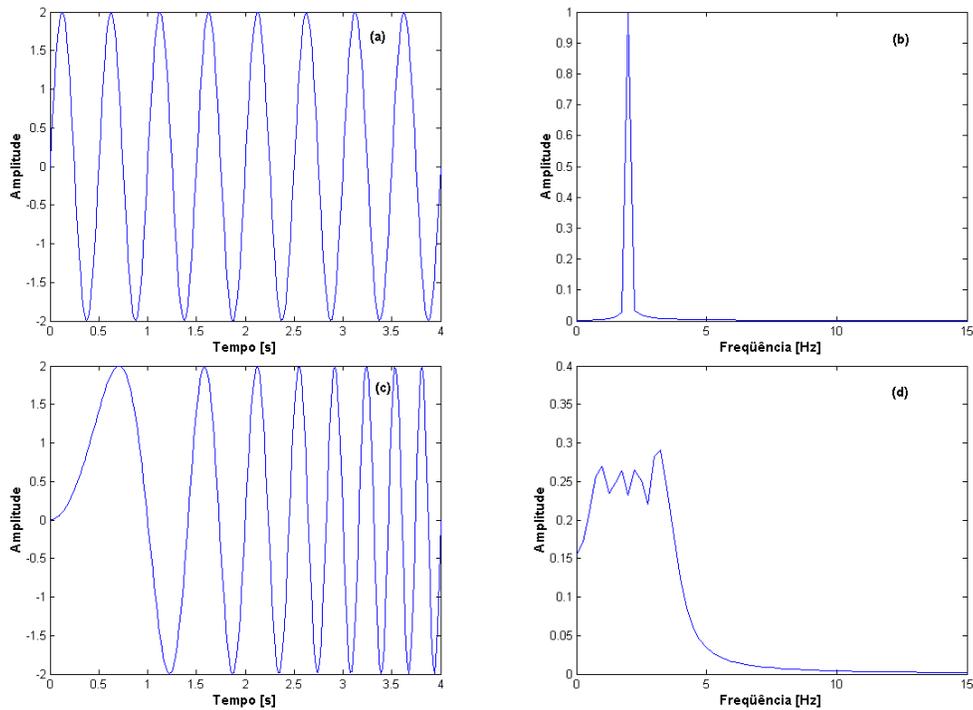


Figura 4.1 – Efeito do espalhamento. (a) sinal senoidal e (b) espectro de frequências correspondente; (c) sinal senoidal de varredura rápida e (d) espectro correspondente.

Exemplos de sinais amostrados nos domínios do tempo e do ângulo são mostrados nas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4. Na Figura 4.2a, a frequência do sinal senoidal é constante ao longo do tempo. Assim, uma amostragem no tempo com intervalo de discretização constante, Δt , resulta numa amostragem no domínio do ângulo de revolução ($\Delta\theta$) também constante. Neste caso, em ambos os domínios o sinal é estacionário e pode-se aplicar a FFT sem incorrer em erros (com exceção daqueles causados por *leakage*). Este caso ocorre na análise espectral de máquinas com velocidade de rotação constante.

Na Figura 4.2b, a frequência do sinal senoidal é variável (linearmente crescente) no tempo. Se a amostragem for feita com um Δt constante, isto resulta em $\Delta\theta$ não constante e o sinal continuará a ser não estacionário em ambos os domínios. No entanto, se a taxa de amostragem for sincronizada com a frequência do sinal, os intervalos de tempo Δt serão variáveis (Figura 4.2c), mas, $\Delta\theta$, será constante e então o sinal será estacionário no domínio do ângulo de revolução.

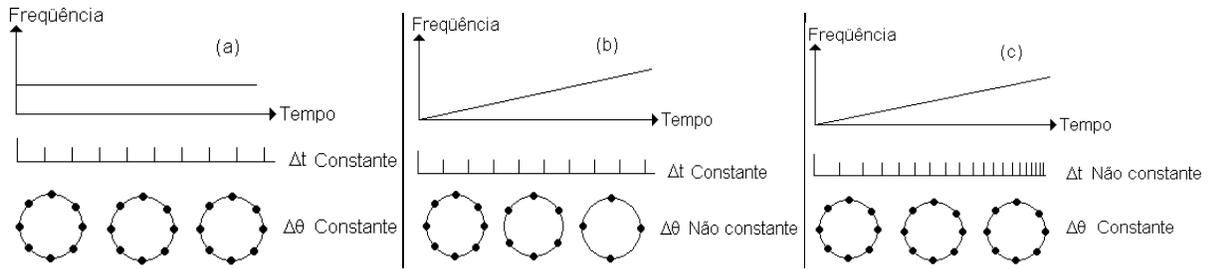


Figura 4.2 – (a) Frequência constante do sinal e amostragens nos domínios do tempo e do ângulo constantes; (b) Frequência variável com amostragem no tempo constante resultando numa amostragem no domínio do ângulo variável; (c) Frequência variável com amostragem no tempo variável e no domínio do ângulo constante (Blough, 1998).

O sinal amostrado de forma síncrona com a rotação terá suas amostras localizadas nas mesmas posições na forma de onda do sinal, em um ciclo de revolução. Então, cada intervalo entre as amostras no domínio do tempo corresponde a um mesmo incremento de ângulo de revolução, conforme exemplo da Figura 4.3. Na Figura 4.4a e 4.4b isto é exemplificado para um Δt variável correspondente a 1/8 da revolução, ou seja, $\Delta\theta=45^\circ=\pi/4\text{rad}$.

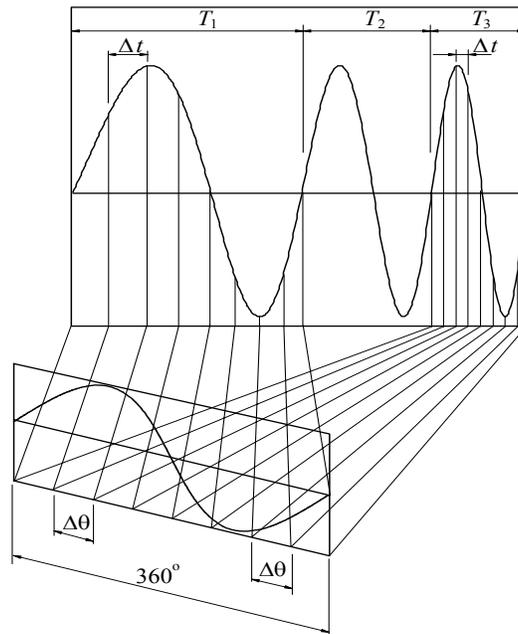


Figura 4.3 - Representação do sinal no domínio angular.

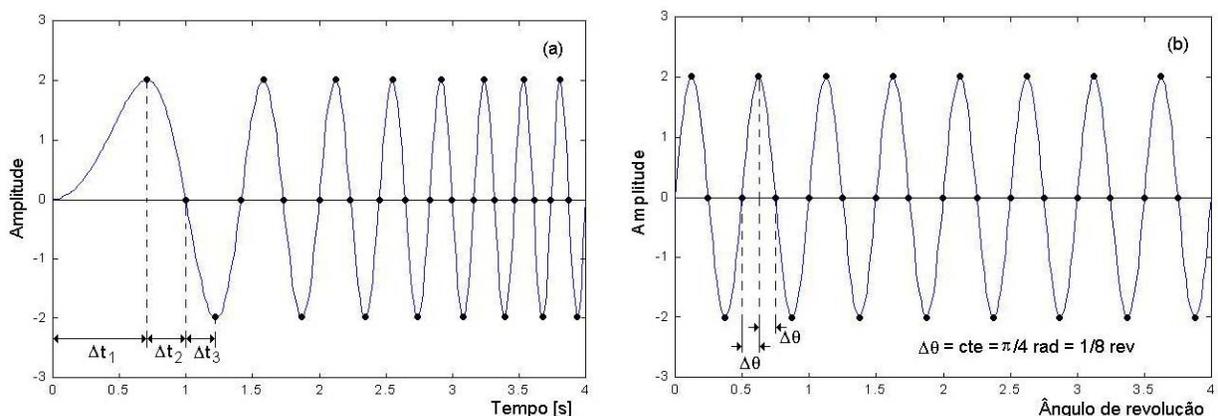


Figura 4.4 – (a) Sinal não estacionário com Δt variável sincronizado com a variação da frequência do sinal; (b) O mesmo sinal amostrado no domínio do ângulo.

No mapa espectral de um sinal com taxa de amostragem sincronizada com a frequência do sinal, por exemplo, um sinal de vibração de uma máquina cuja taxa de amostragem esteja sincronizada com a rotação da mesma, os harmônicos da rotação estarão indicados por linhas retas inclinadas no mapa espectral (Figura 4.5a). Para se ter a sincronização do sinal de vibração com a velocidade de rotação da máquina, é necessário medir os valores instantâneos da velocidade de rotação do eixo. Tradicionalmente, isto é feito usando o sinal de um tacômetro como referência, que consiste de um pulso por revolução ou múltiplos pulsos por cada revolução. Depois de capturar dois pulsos do tacômetro, pode-se determinar a velocidade de rotação calculando o inverso do tempo entre estes pulsos.

A partir deste mapa espectral, pode-se obter um gráfico de cada ordem individual em função da rotação. Entretanto, ao invés de visualizar as componentes do sinal no domínio da frequência, as componentes podem ser visualizadas no domínio da ordem. Ordens são múltiplos da frequência de rotação do eixo e a análise de vibração no domínio da ordem é chamada Análise de Ordem. O gráfico tridimensional com ordens ao invés de frequências em Hz, na abscissa, denomina-se mapa espectral de ordem ou simplesmente mapa de ordem (Figura 4.6). Este gráfico é o mesmo da Figura 4.5, com a diferença que o eixo das abscissas é normalizado pela frequência de rotação.

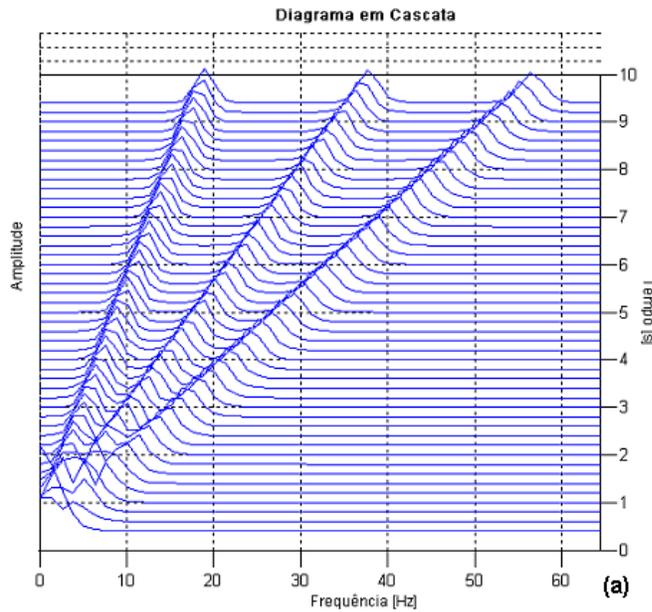


Figura 4.5 –Mapa espectral ou diagrama em cascata.

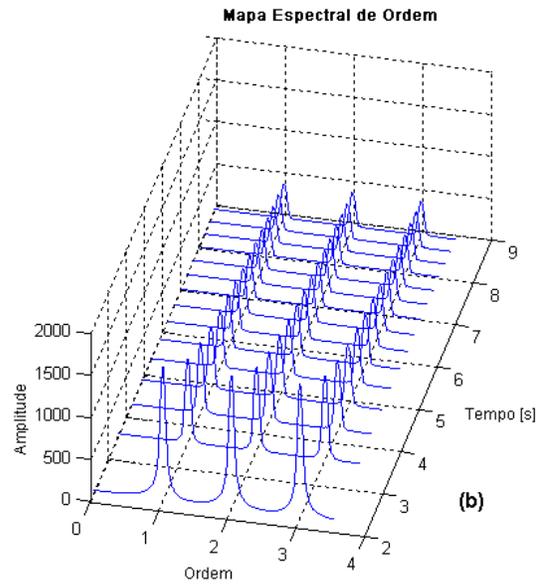


Figura 4.6 - Mapa espectral de ordem.

Neste mapa de ordem, as informações de frequências que não variem com a rotação do eixo (tal como as frequências naturais) surgirão como linhas inclinadas e as frequências dependentes da rotação – frequências devido ao desbalanceamento, desalinhamento, etc. – surgirão como linhas retas verticais (paralelas ao eixo da rotação em rpm), tornando mais fácil a identificação destas componentes.

Como já mencionado anteriormente, cada ordem pode ser isolada em função da rotação do eixo. Em outras palavras, a magnitude e fase de cada ordem individualmente podem ser determinadas em função da rotação ou do tempo. Este processo de determinação do mapa de ordem e conseqüentemente a determinação da magnitude e fase das ordens é definido como *order tracking*.

As expressões de amostragem nos domínios do ângulo de revolução e da ordem são semelhantes às expressões de amostragem nos domínios do tempo e da frequência. Sinais que são periódicos no domínio do tempo aparecem como picos no espectro de frequências. Na *order tracking*, a FFT transforma dados no domínio do ângulo de revolução para dados no domínio de ordens, criando um espectro de ordem. Sinais que são periódicos no domínio do ângulo de revolução aparecerão como picos no domínio da ordem. Por exemplo, se um pico de vibração

ocorre duas vezes a cada revolução na mesma posição do eixo, este pico surgirá na segunda ordem no espectro de ordem.

As equações de amostragem escritas no domínio do tempo e frequência são dadas por:

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} \geq 2f_{\max} \quad T = N \times \Delta t \quad \Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \times \Delta t} \quad (4.1)$$

sendo:

f_s → frequência de amostragem (taxa de amostragem) do sinal em [Hz];

Δt → intervalo de discretização em [s];

f_{\max} → frequência máxima do sinal em [Hz];

T → registro temporal (*time record*) em [s];

N → número de amostras (tamanho do bloco de dados); e

Δf → resolução em frequência do espectro resultante da FFT em [Hz].

Nos domínios do ângulo de revolução e da ordem, as equações de amostragem são dadas de forma similar por:

$$O_s = \frac{1}{\Delta \theta} \geq 2 O_{\max} \quad ; \quad R = N \times \Delta \theta \quad ; \quad \Delta o = \frac{1}{R} = \frac{1}{N \times \Delta \theta} \quad ; \quad \Delta \theta \cdot O_{\max} = \Delta t \cdot f_{\max} \quad (4.2)$$

sendo:

O_s → ordem de amostragem (taxa de amostragem angular) do sinal;

$\Delta \theta$ → intervalo de discretização angular das amostras em [rev];

O_{\max} → ordem máxima a ser analisada;

R → número total de revoluções analisadas em [rev];

N → número de amostras; e

Δo → intervalo de discretização no espectro de ordem resultante da FFT.

A transformada de Fourier aplicada no sinal no domínio do ângulo resulta em um espectro com resolução Δo constante; e qualquer ordem que tenha um número inteiro de ciclos dentro do período de análise R se situará em uma linha espectral Δo , evitando assim o *leakage*. O erro de

leakage (ou vazamento) ocorre quando o sinal no domínio do tempo não contém um número inteiro de ciclos dentro do período de análise. Este efeito faz com que a energia do pico seja espalhada em linhas espectrais adjacentes e a amplitude seja reduzida (Ewins, 1984; Maia e Silva, 1997).

Os primeiros artigos publicados sobre *order tracking* computacional (*Computed Order Tracking* - COT) foram escritos por Potter e Gribler (1989) e Potter (1990). A denominação de *order tracking* computacional serve para diferenciação da metodologia obsoleta de *order tracking*, que utilizava equipamentos analógicos para realizar a reamostragem do sinal (Potter, 1990; Blough, 1998). No método da COT assume-se que a aceleração angular é constante e cada dado de vibração no domínio do ângulo é obtido após cada aquisição de três pulsos do tacômetro. No artigo de Fyfe e Munck (1997) este método é analisado com detalhes. Outros artigos que também discutem este método são os trabalhos de McDonald e Gribler (1991), Bosley et al. (1999), Mesquita et al. (2002), Idehara et al. (2003) e Idehara (2003).

Uma variação do COT é o método da reamostragem digital. Neste método, a curva de velocidade de rotação em função do tempo é estimada através da medição do sinal do tacômetro, e então, integrando-se esta curva obtém-se a curva do deslocamento angular em função do tempo, independentemente se a aceleração angular é constante ou não. Através desta curva de deslocamento angular, define-se um intervalo angular constante e em seguida identificam-se os tempos que correspondem aos múltiplos deste intervalo angular. Desta forma, ficam definidos os tempos de reamostragem.

Neste método, o sinal de vibração medido passa por um filtro passa-baixa de frequência de corte fixa, para evitar o *aliasing*, e é amostrado em intervalo de tempo constante, Δt . Em seguida, o sinal é reamostrado, e então, interpolado, para obter as amplitudes de vibração nos intervalos irregulares de tempos de reamostragem, que correspondem a um intervalo constante de ângulo de revolução, $\Delta \theta$.

Os passos básicos deste método estão ilustrados no diagrama de blocos da Figura 4.7. O sinal do tacômetro é medido e a curva de velocidade de rotação é obtida (etapa 1a). Então, esta

curva de velocidade é integrada para fornecer o deslocamento angular (passo 2a). Desta última curva, a desejada resolução (constante) no domínio de ângulo define os intervalos de tempo (os tempos de reamostragem) aos quais os dados de vibração devem ser reamostrados (etapa 3a).

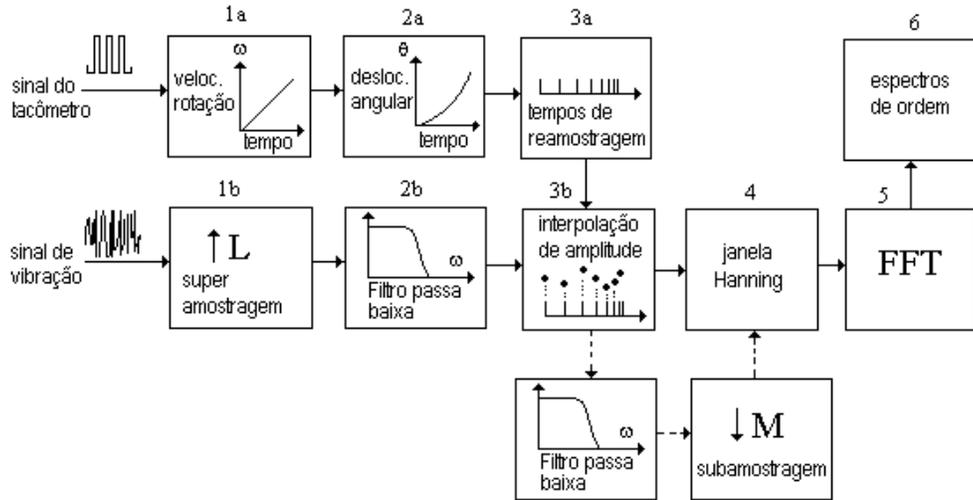


Figura 4.7 – Etapas da reamostragem digital.

Por outro lado, o sinal discretizado de vibração é superamostrado (Crochiere e Rabiner, 1983), de modo a melhorar o processo de interpolação de amplitude assim como a relação sinal/ruído (Blough, 1998) (passo 1b). Então, os dados são filtrados por um filtro passa-baixa para eliminar as imagens espectrais devido ao processo de superamostragem (passo 2b). O próximo passo (3b) é o processo de interpolação de amplitude, isto é, a estimação das amplitudes de vibração correspondentes aos tempos de reamostragem.

Depois das amplitudes serem determinadas, algum tipo de função janela é aplicada aos dados para evitar *leakage* (quando o número de revoluções não for um número inteiro dentro do período de análise) (passo 4); e, finalmente, os dados reamostrados são transformados do domínio de ângulo de revolução para o domínio da ordem por meio da FFT (passos 5 e 6). Deve ser notado que uma operação de decimação (Crochiere e Rabiner, 1983) (filtragem *anti-aliasing* e subamostragem) pode ser executada para obter certa taxa de amostra desejada no domínio de ângulo. O procedimento de decimação é feito entre os passos 3b e 4.

Este método, assim como também todos os métodos de *order tracking*, são muito susceptíveis à precisão do sinal de referência, ou seja, o sinal do tacômetro, o qual dá informação sobre a variação da velocidade de rotação.

Os métodos de *order tracking* baseados na reamostragem digital são os mais comumente implementados em analisadores de sinais comerciais (Blough, 1998). Recentemente, novos métodos foram desenvolvidos, tais como os métodos baseados no filtro de Kalman (Vold e Leuridan, 1993; Vold, 1997) e o método da TVDFT (*Time Variant Discrete Fourier Transform*) (Blough et al, 1996; Blough, 1998).

O método da TVDFT não necessita da reamostragem do sinal, ou seja, não há a necessidade de converter os dados de vibração no domínio do tempo para o domínio do ângulo. O método é aplicado diretamente nos dados de vibração que foram amostrados com intervalo de tempo constante, o que reduz consideravelmente o esforço e o tempo computacional (Blough, 1998; Idehara et al, 2003; Idehara, 2003).

A TVDFT é definida como uma transformada de Fourier discreta com um núcleo (*kernel*) cuja frequência varia com o tempo ou neste caso, com a rotação da máquina. Este núcleo é uma função seno ou co-seno de amplitude unitária com uma frequência instantânea ajustada à ordem que se deseja seguir, a cada instante de tempo. A TVDFT é baseada nas seguintes equações (Blough, 1998):

$$a_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n.\Delta t) \cos\left(2\pi \int_0^{n.\Delta t} (O_m.\Delta t.\frac{rpm}{60})dt\right), \quad (4.3a)$$

$$b_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n.\Delta t) \sin\left(2\pi \int_0^{n.\Delta t} (O_m.\Delta t.\frac{rpm}{60})dt\right), \quad (4.3b)$$

sendo que O_m ($m\Delta\omega$) é a ordem que está sendo analisada, x é vetor de dados de vibração, N é o tamanho do bloco da transformada, Δt é o intervalo de amostragem, a_m os coeficientes de Fourier

do termo co-senoidal para O_m , b_m os coeficientes de Fourier do termo senoidal para O_m , e rpm a rotação instantânea da máquina.

De forma a se obter melhores resultados quando ordens são muito próximas um das outras ou quando se cruzam, uma matriz de compensação de ortogonalidade (*orthogonality compensation matrix* - OCM) pode ser aplicada. A aplicação da OCM também permite que sinais com altas taxas de aceleração sejam analisados mais precisamente. A OCM deve ser aplicada em uma etapa posterior à estimativa da ordem através da TVDFT. Ordens muito próximas são geralmente difíceis de serem separadas usando os métodos de reamostragem digital e da TVDFT. Contudo, se a OCM for usada, a ordem sob análise pode ser seguida de forma mais precisa. (Blough, 1998).

A correção das ordens com a matriz OCM consiste na solução de um conjunto de equações lineares que são resolvidas para cada valor de rotação:

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & \cdots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & & e_{2m} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & & e_{3m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ e_{m1} & & \cdots & & e_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \\ \vdots \\ o_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{o}_1 \\ \tilde{o}_2 \\ \tilde{o}_3 \\ \vdots \\ \tilde{o}_m \end{Bmatrix}, \quad (4.4)$$

sendo que e_{ij} é a contribuição de ortogonalidade cruzada da ordem i na estimativa da ordem j , o_i é o valor corrigido da ordem i , e \tilde{o}_i é o valor estimado da ordem i obtida usando a TVDFT.

Os termos de ortogonalidade cruzada, e_{ij} , são calculados aplicando o núcleo da ordem i ao núcleo da ordem j , como mostrado na Equação (4.5) (Blough, 1998):

$$e_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left\{ \exp\left(2\pi \int_0^{n \cdot \Delta t} (O_i \cdot \Delta t \cdot \frac{Rpm}{60}) dt\right) \cdot (\text{janela}) \cdot \exp\left(2\pi \int_0^{n \cdot \Delta t} (O_j \cdot \Delta t \cdot \frac{Rpm}{60}) dt\right)^* \right\} \quad (4.5)$$

A Equação (4.4) é solucionada multiplicando ambos lados pela inversa da OCM. As estimativas das ordens resultantes são linearmente independentes uma das outras (Blough, 1998), e são dadas pela expressão:

$$\begin{Bmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \\ \vdots \\ o_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & \cdots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & & e_{2m} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & & e_{3m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ e_{m1} & & \cdots & & e_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{o}_1 \\ \tilde{o}_2 \\ \tilde{o}_3 \\ \vdots \\ \tilde{o}_m \end{Bmatrix}. \quad (4.6)$$

Como todo método de *order tracking*, a precisão da TVDFT depende da qualidade do sinal da frequência instantânea medida, ou seja, depende da qualidade do processamento do sinal do tacômetro. Nos trabalhos de Idehara (2003) e Idehara et al.(2003a), as técnicas descritas neste capítulo são comparadas. Segundo os autores, a melhor estimativa da magnitude e fase de uma ordem individual é obtida através da TVDFT com o uso da matriz OCM, levando-se em conta precisão e velocidade de processamento.

4.3. Order Tracking Aplicada a Identificação de Modos Operacionais Mistos

A técnica de *order tracking* pode ser utilizada para a identificação da(s) frequência(s) de rotação em que ocorre(m) modo(s) misto(s) de um sistema rotativo operando em regime não-estacionário. O método consiste em aplicar a técnica de *order tracking* no sinal não-estacionário e complexo. Este sinal complexo não-estacionário no domínio do tempo será estacionário no domínio do ângulo e a transformada de Fourier deste sinal o transforma para o domínio da ordem. Desta forma, obtém-se um mapa de ordem direcional, ou seja, um mapa de ordem contendo ordens negativas e positivas. Nas ordens negativas estão presentes as componentes de movimento de precessão retrógrada e nas ordens positivas, as componentes de movimento de precessão direta. Conhecendo-se os valores de P_f e P_b em função da frequência, de uma determinada estação do rotor, pode-se verificar quais as frequências em que ocorre o fenômeno de modos operacionais mistos.

Nas seções seguintes são mostradas aplicações do método. Primeiramente, apresenta-se um exemplo numérico de obtenção do SDI de uma estação de um rotor De Laval, durante a partida deste. Neste exemplo não é identificado modo misto, pois a análise é feita em apenas uma estação. Em seguida, o método é aplicado em um caso real em que as componentes de precessão direta e retrógrada são obtidas para várias estações, durante uma varredura em frequência, e então é verificada a existência ou não de modos mistos para o sistema rotativo analisado.

4.3.1 Aplicação do Método – Resultados de Simulação Numérica no Rotor De Laval

Seja um rotor De Laval, conforme ilustra a Figura 2.1. Este rotor é submetido a uma rampa de partida com uma aceleração angular constante (20 rad/s^2). Assume-se que a única excitação atuante neste rotor é a força de desbalanceamento. As respostas ao desbalanceamento nas direções y e z , obtidas através da integração numérica no modelo do rotor, são apresentadas na Figura 4.8. Compondo-se o sinal complexo não estacionário na forma já conhecida $p(t) = y(t) + jz(t)$ e aplicando-se a técnica da TVDFT & OCM no sinal resultante, obtém-se o mapa de ordem direcional, apresentado na Figura 4.9. Neste mapa de ordem direcional, pode ser verificado o momento em que as duas frequências naturais do sistema são excitadas.

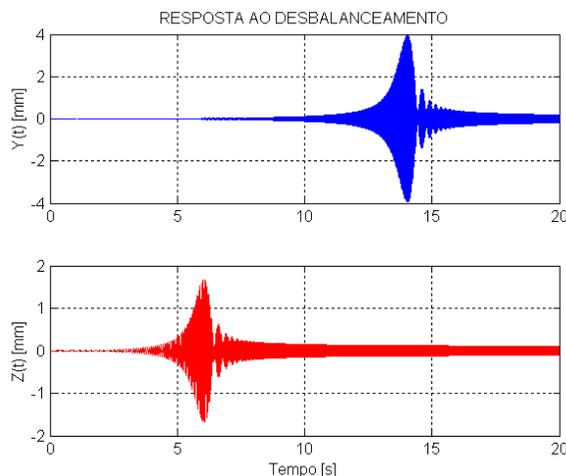


Figura 4.8 – Respostas ao desbalanceamento.

A TVDFT fornece a amplitude e ângulo de fase da ordem em termos de suas componentes de precessão direta (P_f) e de precessão retrógrada (P_b) como função do tempo ou da rotação. Na

Figura 4.10 estão mostrados os gráficos da amplitude e ângulo de fase da ordem positiva (correspondente a componente de precessão direta) e da ordem negativa (correspondente a componente de precessão retrógrada). A amplitude foi obtida com a TVDFT e corrigida pelo OCM. No gráfico da amplitude das ordens, verifica-se que o movimento de precessão retrógrada do rotor só existe entre as duas velocidades críticas, o que já era esperado, conforme discussão apresentada no Capítulo 2. Conhecendo-se $P_f(\Omega)$ e $P_b(\Omega)$, pode-se também calcular os valores de SDI em função da rotação ou do tempo, como mostra a Figura 4.11. De acordo com o gráfico do SDI, a faixa de freqüências correspondente a movimento de precessão retrógrada situa-se entre 1086,1 e 2573,5 rpm.

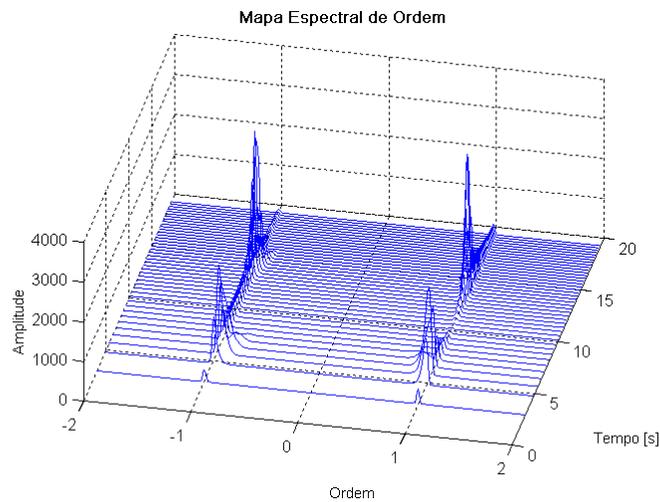


Figura 4.9 – Mapa espectral direcional – mapa de ordem contendo ordens negativa e positiva.

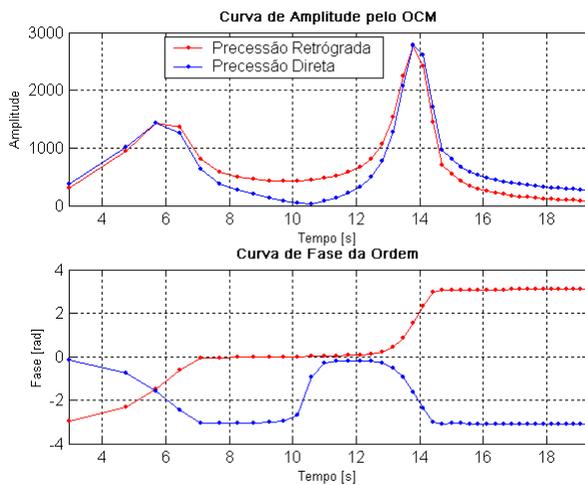


Figura 4.10 – Amplitude e ângulo de fase da ordem em função do tempo.

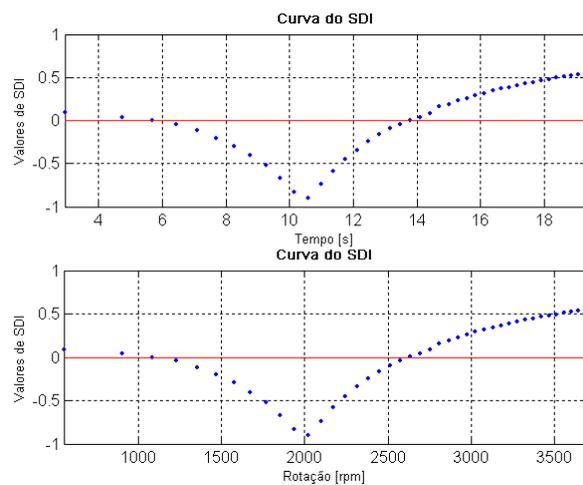


Figura 4.11 – Gráfico do SDI em função do tempo e da rotação.

4.3.2. Aplicação do Método - Resultados Experimentais

O método proposto, exemplificado na análise numérica anterior, é aplicado nas respostas ao desbalanceamento de quatro estações do rotor da bancada experimental apresentada no Capítulo 3 e mostrada novamente na Figura 4.12. Contudo, vale ressaltar que o sistema não é exatamente o mesmo, devido a algumas mudanças na bancada, tais como, posição dos discos, mudança de eixo e alteração do desbalanceamento espacial devido a retirada de parafusos (pontos pesados) nos discos. A Figura 4.13 ilustra o aparato instrumental usado nos ensaios.

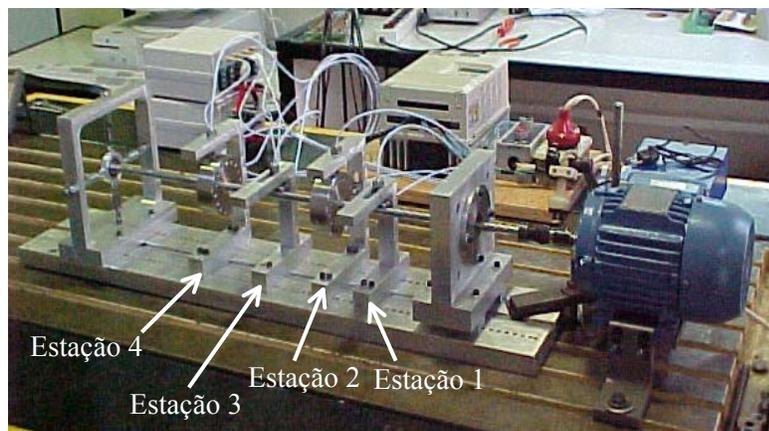


Figura 4.12 – Rotor Bently usado nas análises de *order tracking* direcional.

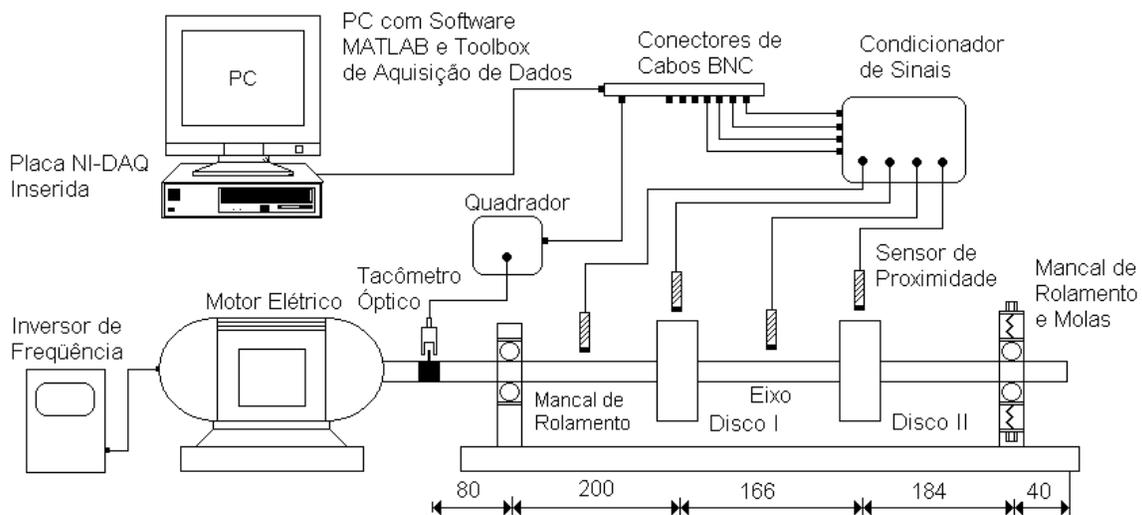


Figura 4.13 – Bancada experimental e aparato instrumental.

As respostas foram medidas nas quatro estações do rotor (ver Figura 4.12) através de dois sensores de deslocamento, posicionados em direções perpendiculares entre si, para cada estação. Portanto, foram usados oito sensores de proximidade. Na Figura 4.13 estão apenas ilustrados os sensores dispostos em uma direção. Os sinais de resposta medidos passam pelo condicionador de sinal (oscilador/demodulador, cujo funcionamento será visto no Capítulo 6), e então, estes sinais são enviados à placa de aquisição e disponíveis para serem tratados com o MATLAB. A velocidade de rotação, controlada pelo inversor de frequência é medida através do sinal de um tacômetro óptico.

Na aquisição de dados foram medidos sinais de três faixas de rotação. As faixas medidas foram: faixa I: de 32 a 40 Hz, faixa II de 41 a 50 Hz, faixa III de 52 a 58 Hz. Cada uma sendo medida durante 10s. Em uma primeira análise, em todas as faixas, verificou-se que os movimentos de todas as estações eram de precessão direta, como exemplifica a Figura 4.14, que mostra os resultados da estação 1 para a faixa III. Nesta Figura estão apresentados o mapa de ordem direcional e o gráfico de P_f e P_b em função do tempo e também da rotação.

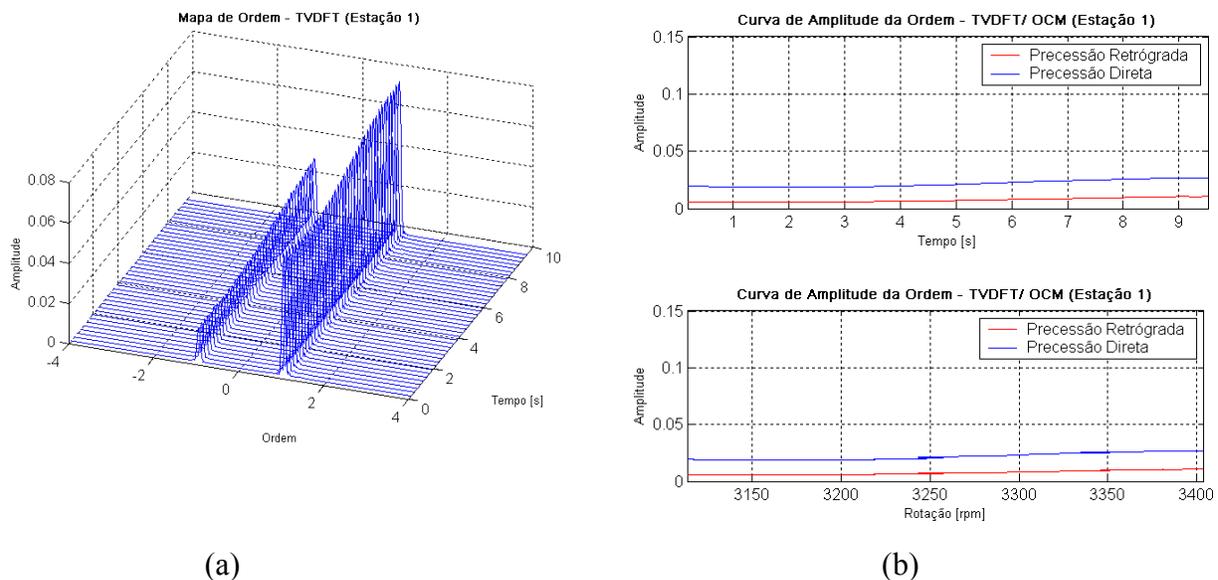


Figura 4.14 – (a) Mapa de ordem direcional e (b) amplitude das componentes de precessão direta e retrógrada em função do tempo e da rotação. Gráficos referentes à estação 1 durante uma variação de rotação de 52 Hz (3120 rpm) a 57 Hz (3420 rpm).

Em uma segunda análise, efetuou-se um giro no disco II de 90° em relação ao disco I. Os resultados obtidos na faixa III mostraram que as estações 1, 2 e 4 movem-se em precessão direta. Contudo, verifica-se que para a estação 3, há a mudança no sentido da precessão em 3270rpm. Nesta estação 3, o movimento passa de precessão direta para retrógrada em torno de 3270 rpm. As Figuras 4.15 e 4.16 mostram os mapas de ordem direcional e amplitudes das ordens para as estações 1 e 3, respectivamente. Portanto, na faixa de 3270 rpm (54,5 Hz) a 3518 rpm (58,6 Hz), o sistema possui modos operacionais mistos.

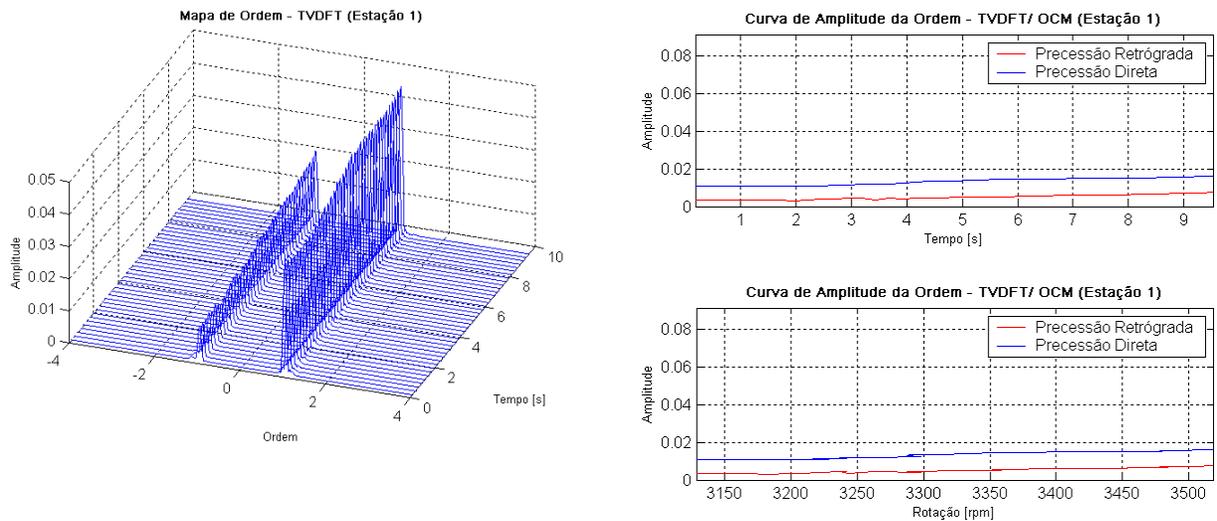


Figura 4.15 - Gráficos referentes à estação 1 durante uma variação de rotação de 52,13 Hz (3128rpm) a 58,6 Hz (3518 rpm). Disco II girado de 90° .

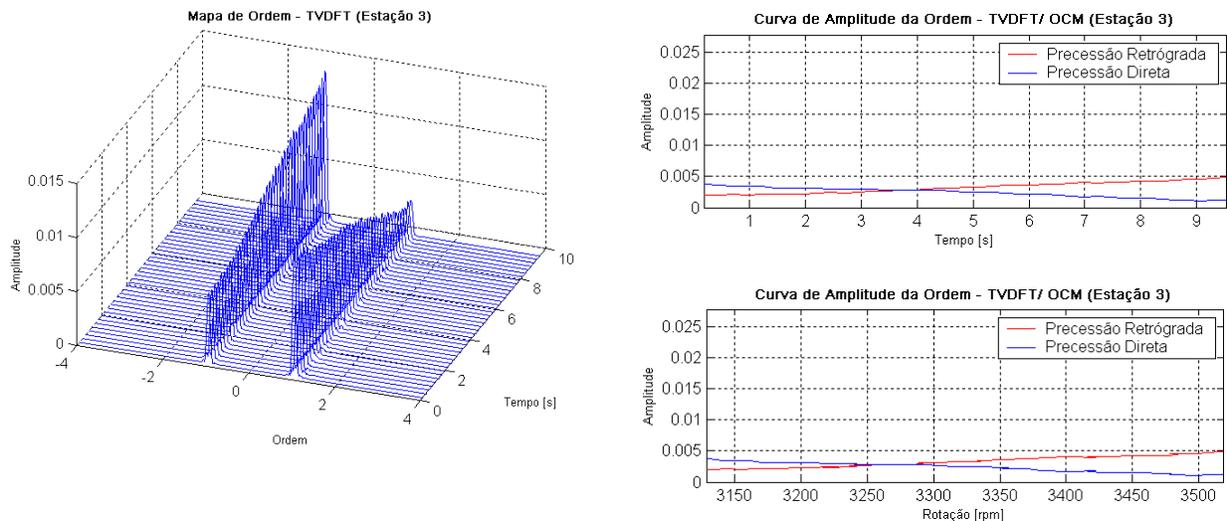


Figura 4.16 - Gráficos referentes à estação 3 durante uma variação de rotação de 52,13 Hz (3128rpm) a 58,6 Hz (3518 rpm). Disco II girado de 90° .

Na terceira análise, efetuou-se mais um giro de 90° no disco II em relação ao disco I, ou seja, o disco II foi girado 180° em relação à sua posição inicial na primeira análise. Os resultados obtidos para as estações na faixa III são apresentados nas Figura 4.17 a 4.20. De acordo com os gráficos das quatro estações, pode-se observar que durante toda a faixa de 52,58 a 59,25 Hz, as duas primeiras estações precessionam no sentido retrógrado, enquanto que as estações 3 e 4 precessionam no sentido direto, caracterizando modos mistos nesta faixa de frequência.

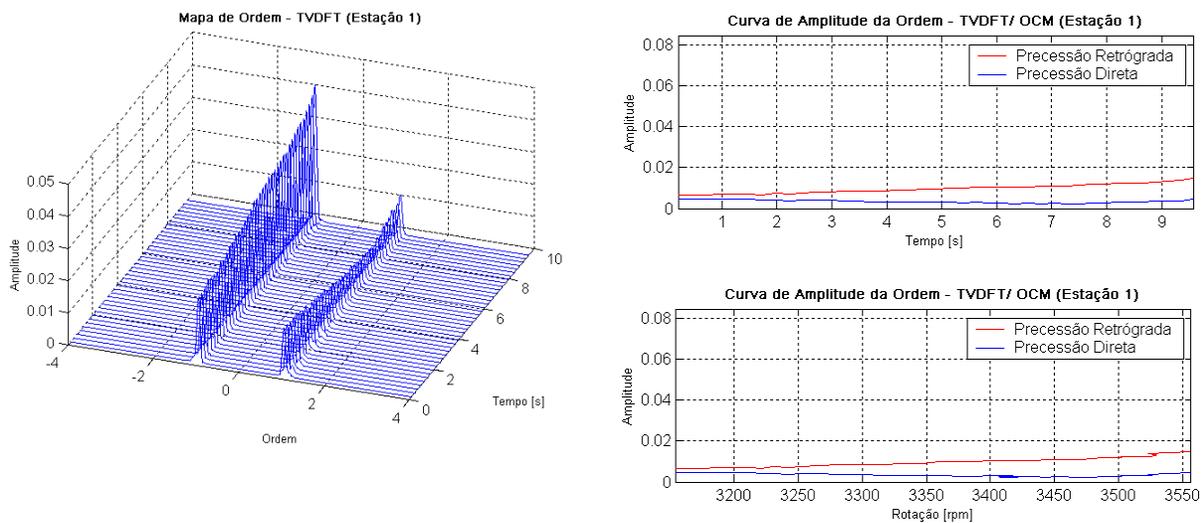


Figura 4.17 - Gráficos referentes à estação 1 durante uma variação de rotação de 52,58 Hz (3155rpm) a 59,25 Hz (3555 rpm). Disco II girado de 180° .

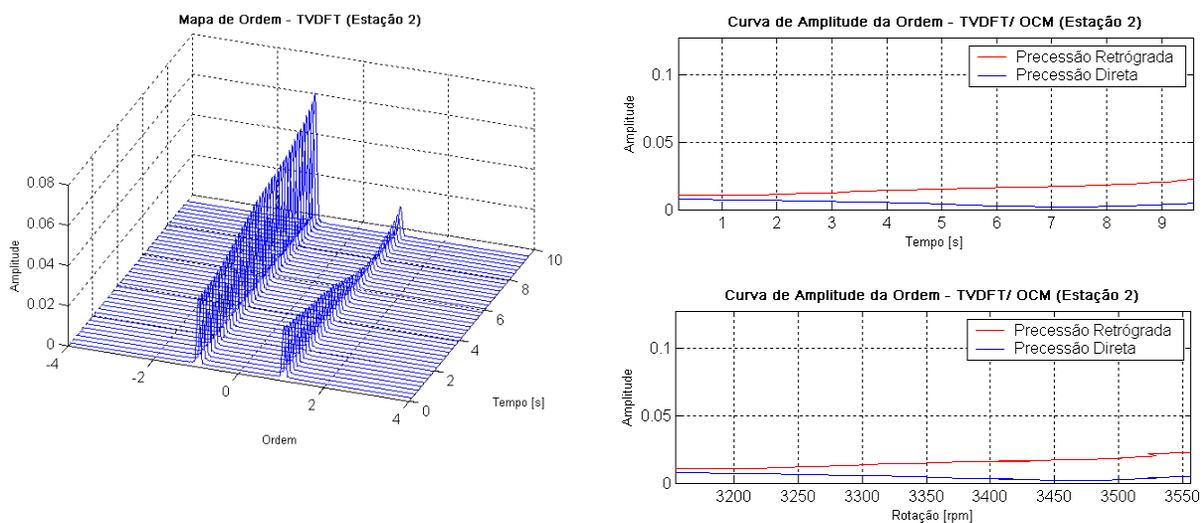


Figura 4.18 - Gráficos referentes à estação 2 durante uma variação de rotação de 52,58 Hz (3155rpm) a 59,25 Hz (3555 rpm). Disco II girado de 180° .

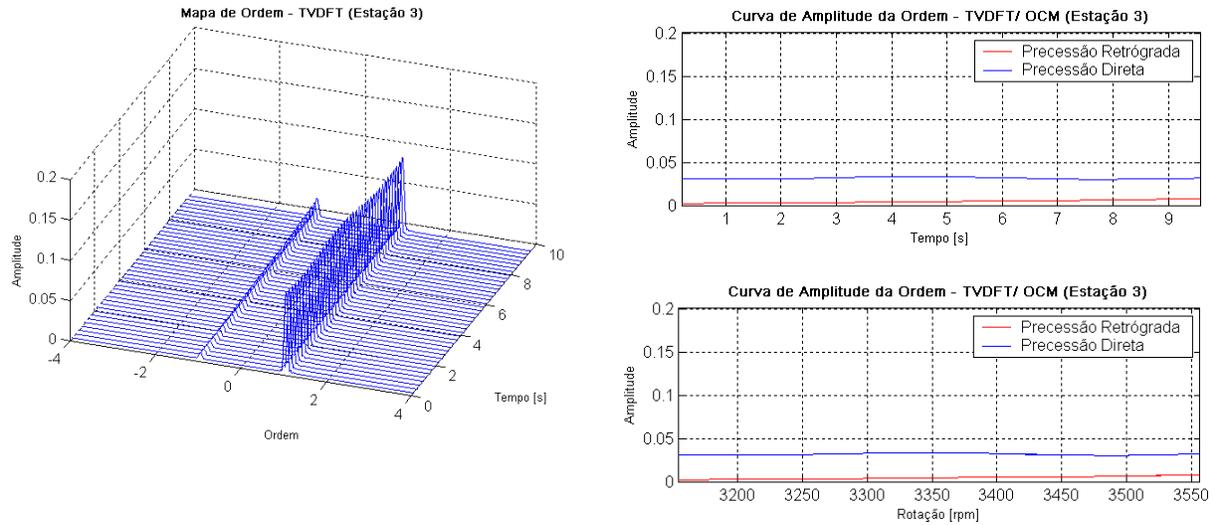


Figura 4.19 – Resultados obtidos para a estação 3 na faixa III.

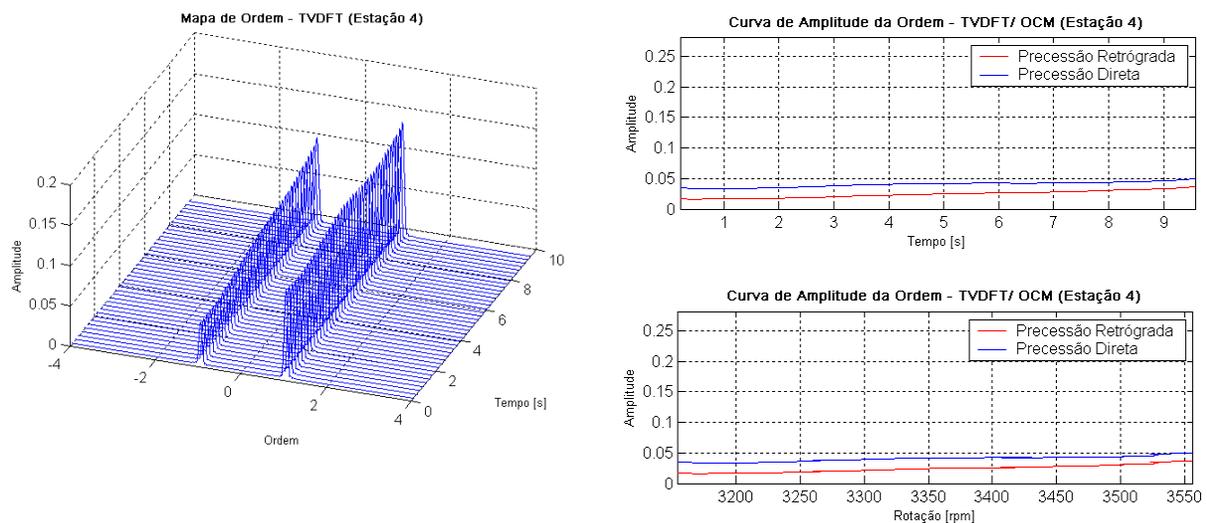


Figura 4.20 - Resultados obtidos para a estação 4 na faixa III.

De acordo com os resultados obtidos, conclui-se que a metodologia proposta é capaz de identificar as frequências de rotação em que ocorrem modos operacionais mistos. Observa-se novamente a influência da distribuição do desbalanceamento no surgimento destes modos. Quanto às desvantagens, pode-se citar o uso da alta taxa de amostragem para que o sinal do tacômetro seja bem estimado e, conseqüentemente, para que a curva de rotação instantânea e o método de “order tracking” sejam bem precisos. Devido a esta alta taxa de amostragem, os dados de vibração que são amostrados com esta mesma taxa, possuem um número de amostras bastante grande, acarretando em um maior esforço computacional para realizar a análise.

Capítulo 5

Análise Modal em Máquinas Rotativas – Teoria

5.1. Introdução

Os conceitos de análise modal em estruturas não-rotativas têm sido aplicados no estudo de estruturas rotativas. Contudo, esta análise requer um desenvolvimento teórico mais geral, pois devido a rotação, surge o efeito giroscópico fazendo com que algumas matrizes do sistema não sejam simétricas. A consequência disto é que as funções de respostas em frequência (FRFs) do sistema linear não mais obedecem o teorema da reciprocidade de Maxwell. Embora cada coluna da matriz das FRFs ainda contenha informação para se obter a forma modal (os autovetores à direita do sistema), cada linha contém informações sobre diferentes autovetores, que são referidos como autovetores à esquerda. Com o intuito de caracterizar as propriedades do sistema, ambos autovetores devem ser obtidos. Assim sendo, será necessário medir pelo menos uma linha e uma coluna da matriz, aumentando o número de medições que seriam requeridas no caso de estruturas não-rotativas (Roger e Ewins, 1989).

A análise modal complexa refere-se à aplicação dos princípios de análise modal em sistemas rotativos onde as entradas e saídas são descritas por variáveis complexas. A vantagem desta metodologia, em relação à análise modal clássica em rotores, é a capacidade de incorporar a direcionalidade dos modos (Lee, 1990, 1991). Em particular, o método separa as contribuições dos modos de precessão direta e de precessão retrógrada nas FRFs, que, no caso de relacionar entradas e saídas complexas, estas funções são denominadas de FRFs Direcionais ou dFRF (“directional frequency response function”). Esta separação é desejável, pois a diferença em

freqüência de cada par destes modos geralmente é pequena, dificultando a identificação dos parâmetros modais em uma FRF convencional devido ao forte acoplamento destes modos. Outra vantagem da análise modal complexa em relação à convencional é que, para sistemas isotrópicos não há a necessidade de testes adicionais para determinar os autovetores à direita e à esquerda (Lee, 1991).

Apesar dos trabalhos publicados nesta área, o método da análise modal complexa não é muito utilizado na comunidade científica. Neste capítulo, visa-se descrever passo a passo, de forma clara, a metodologia para se obter as FRFs de rotores usando a formulação real (clássica) e as dFRFs usando a formulação complexa, e também mostrar a relação entre elas. Em seguida, apresenta-se um procedimento de obtenção das FRFs, dos parâmetros modais e das dFRFs de sistemas rotativos levemente amortecidos. Este procedimento agrupa as vantagens da metodologia da análise modal clássica (formulação real) e da análise modal complexa.

5.2. Análise Modal Clássica – Teoria

A equação do movimento de um sistema rotor-mancais, com N estações, pode ser escrita como:

$$[M] \begin{Bmatrix} \{\ddot{y}\} \\ \{\ddot{z}\} \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} \{\dot{y}\} \\ \{\dot{z}\} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} \{y\} \\ \{z\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_y\} \\ \{f_z\} \end{Bmatrix}, \quad (5.1)$$

sendo que $[M]$ é a matriz de massa, a matriz $[D]$ representa os termos de amortecimento e de efeitos giroscópicos e a matriz $[K]$ inclui os termos de rigidez e de amortecimento interno. O vetor de resposta de ordem $2N \times 1$ é dividido em dois vetores ortogonais $\{y\}$ and $\{z\}$, que representam os deslocamentos nestas duas direções. Estes vetores definem o movimento em um plano ortogonal ao eixo da linha que une os mancais em cada uma das N estações do rotor. Os vetores $\{f_y\}$ e $\{f_z\}$ são os vetores de força agindo nas direções y e z , respectivamente.

A Equação do movimento 5.1 pode ser reescrita como:

$$[A]\{\dot{w}\} - [B]\{w\} = \{Q\}, \quad (5.2)$$

sendo:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [D] \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[K] \end{bmatrix}, \{Q\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}, \{F\} = \begin{Bmatrix} \{f_y\} \\ \{f_z\} \end{Bmatrix}, \{w\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{Bmatrix}, \{q\} = \begin{Bmatrix} \{y\} \\ \{z\} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

As matrizes $[A]$ e $[B]$ são reais e não-simétricas, resultando em um problema de autovalor não auto-adjunto. Os problemas de autovalores associados com a Equação 5.2 são:

$$(\lambda[A] - [B])\{\psi\} = \{0\} \text{ e } (\lambda[A]^T - [B]^T)\{\ell\} = \{0\} \quad (5.4)$$

Os $4N$ autovalores, λ , dos dois autoprobemas acima são os mesmos. Se o sistema é subamortecido, os autovalores e os autovetores aparecem em pares complexos conjugados (Lancaster, 1966). Os autovetores dos autoprobemas da Equação 5.4 são os vetores $\{\psi\}$ e $\{\ell\}$ e são conhecidos como autovetores à direita e à esquerda do autoprobema de primeira ordem, respectivamente, e dados por:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \lambda\{u\} \\ \{u\} \end{Bmatrix} \text{ e } \{\ell\} = \begin{Bmatrix} \lambda\{v\} \\ \{v\} \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Os vetores $\{u\}$ e $\{v\}$ são os autovetores dos autoprobemas de segunda ordem $(\lambda^2[M] + \lambda[D] + [K])\{u\} = \{0\}$ e $(\lambda^2[M]^T + \lambda[D]^T + [K]^T)\{v\} = \{0\}$, respectivamente.

Enquanto os autovetores à direita representam as formas modais naturais do sistema, os autovetores à esquerda estão associados com a excitabilidade de cada modo para diferentes graus de liberdade, ou seja, os maiores elementos de um autovetor à esquerda correspondem aos graus de liberdade nos quais a ação da força de excitação produz as maiores contribuições do modo associado à resposta total do sistema (Gutiérrez-Wing e Ewins, 2002). A necessidade do uso dos autovetores à esquerda é devido a não simetria das matrizes $[A]$ e $[B]$. Estas matrizes não serão diagonalizadas através da pré e pós-multiplicação com a matriz contendo somente os autovetores

à direita, como no caso de sistemas não-rotativos. No caso de sistemas rotativos giroscópicos, os dois conjuntos de autovetores devem ser usados.

Os autovetores à direita e à esquerda, do problema de primeira ordem, podem ser biortonormalizados por:

$$\begin{cases} \{\ell\}_i^T [A] \{\psi\}_r = \delta_{ir} \\ \{\ell\}_i^T [B] \{\psi\}_r = \lambda_r \delta_{ir} \end{cases}, \quad \delta_{ir} = \begin{cases} 1; & i = r \\ 0; & i \neq r \end{cases} \quad (5.6)$$

Para desacoplar as Equações do movimento 5.2, a seguinte transformação de coordenadas é feita:

$$\{w\} = [\Psi] \{\eta\} = \sum_{r=1}^{4N} \{\psi\}_r \eta_r \quad (5.7)$$

sendo que $[\Psi] = [\{\psi\}_1 \ \{\psi\}_2 \ \dots \ \{\psi\}_{4N}]$. O vetor $\{\eta\}$ é conhecido como o vetor de coordenadas principais de estado. Substituindo a Equação 5.7 na Equação 5.2 e pré-multiplicando por $[L]^T$, sendo $[L] = [\{\ell\}_1 \ \{\ell\}_2 \ \dots \ \{\ell\}_{4N}]$, tem-se as equações do movimento desacopladas nas coordenadas principais de estados:

$$\dot{\eta}_r - \lambda_r \eta_r = \{\ell\}_r^T \{Q\}, \quad (5.8a)$$

Considerando resposta harmônica, as respostas da Equação 5.8a, no domínio da frequência, são dadas por:

$$\eta_r = \frac{\{\ell\}_r^T \{Q\}}{(j\omega - \lambda_r)} \quad (5.8b)$$

Substituindo a resposta dada na Equação 5.8 na Equação 5.7, tem-se:

$$\{w\} = \sum_{r=1}^{4N} \frac{\{\psi\}_r \{\ell\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} \{Q\} \quad \text{ou} \quad \{g\} = \sum_{r=1}^{4N} \frac{\{u\}_r \{v\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} \{F\}, \quad (5.9)$$

que no domínio da frequência é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \{Y(\omega)\} \\ \{Z(\omega)\} \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{4N} \frac{\{u\}_r \{v\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} \begin{Bmatrix} \{F_y(\omega)\} \\ \{F_z(\omega)\} \end{Bmatrix} = [H(\omega)] \begin{Bmatrix} \{F_y(\omega)\} \\ \{F_z(\omega)\} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Desta forma, pode-se definir a matriz de função de resposta em frequência como:

$$\begin{aligned} [H(\omega)] &= \sum_{r=1}^{4N} \frac{\{u\}_r \{v\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} = \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{\{u\}_r \{v\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\bar{u}\}_r \{\bar{v}\}_r^T}{(j\omega - \bar{\lambda}_r)} \right) \\ &= \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{\begin{Bmatrix} \{u_y\} \\ \{u_z\} \end{Bmatrix}_r \begin{Bmatrix} \{v_y\}^T \\ \{v_z\}^T \end{Bmatrix}_r}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\begin{Bmatrix} \{\bar{u}_y\} \\ \{\bar{u}_z\} \end{Bmatrix}_r \begin{Bmatrix} \{\bar{v}_y\}^T \\ \{\bar{v}_z\}^T \end{Bmatrix}_r}{(j\omega - \bar{\lambda}_r)} \right), \end{aligned} \quad (5.11)$$

sendo que os elementos de $\{u_y\}$ estão relacionados com o deslocamento de cada grau de liberdade na direção y e os elementos de $\{u_z\}$ estão relacionados deslocamento de cada grau de liberdade na direção z . A expressão para cada FRF individual é dada por:

$$H_{ik}(\omega) = \sum_{r=1}^{4N} \frac{u_{ir} v_{kr}}{(j\omega - \lambda_r)} = \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{u_{ir} v_{kr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\bar{u}_{ir} \bar{v}_{kr}}{(j\omega - \bar{\lambda}_r)} \right) \quad (5.12)$$

Uma outra forma de visualizar a matriz de FRF é mostrada a seguir:

$$[H(\omega)] = \begin{bmatrix} [H_{yy}(\omega)] & [H_{yz}(\omega)] \\ [H_{zy}(\omega)] & [H_{zz}(\omega)] \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

De acordo com a Equação 5.11, as sub-matrizes em $[H(\omega)]$ de ordens $N \times N$ podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
[H_{yy}] &= \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{\{u_y\}_r \{v_y\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\bar{u}_y\}_r \{\bar{v}_y\}_r^T}{(j\omega - \bar{\lambda}_r)} \right); [H_{yz}] = \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{\{u_y\}_r \{v_z\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\bar{u}_y\}_r \{\bar{v}_z\}_r^T}{(j\omega - \bar{\lambda}_r)} \right) \\
[H_{zy}] &= \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{\{u_z\}_r \{v_y\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\bar{u}_z\}_r \{\bar{v}_y\}_r^T}{(j\omega - \bar{\lambda}_r)} \right); [H_{zz}] = \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{\{u_z\}_r \{v_z\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\bar{u}_z\}_r \{\bar{v}_z\}_r^T}{(j\omega - \bar{\lambda}_r)} \right)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

De acordo com as Equações 5.14, cada coluna no numerador contém o mesmo vetor modal (autovetor à direita) multiplicado por um componente do autovetor à esquerda e cada linha contém o mesmo autovetor à esquerda multiplicado por um componente do vetor modal. Desta forma, a informação modal é completamente identificada se uma linha e uma coluna da matriz da FRF $2N \times 2N$ tiverem sido identificadas. Portanto, o número de medições é maior do que na análise modal tradicional em estruturas não-rotativas, isto é, é necessário medir pelo menos $4N-1$ FRFs em um rotor com N estações. Contudo, alguns métodos foram desenvolvidos para determinar relações entre os autovetores à direita e à esquerda. Estas relações podem simplificar o procedimento experimental e, portanto requerer um número menor de medições para a identificação de todos os parâmetros modais do sistema (Zhang e Lallement, 1985; Zhang et al., 1988; Bucher e Ewins, 2001).

De acordo com a Equação 5.12, percebe-se que:

$$H_{ij}(-\omega) = \bar{H}_{ij}(\omega) \therefore [H(-\omega)] = [\bar{H}(\omega)] \tag{5.15}$$

A Equação 5.15 implica que a região de frequência negativa da FRF é meramente uma duplicação da região de frequência positiva. Portanto, é necessário apenas tratar com uma região da FRF, que convencionalmente é a região positiva, pois possui um significado físico mais claro. Desta forma, a direcionalidade de um modo tal como precessão direta ou retrógrada não é identificável facilmente no domínio da frequência na metodologia da análise modal clássica em rotores.

5.3. Análise Modal Complexa

A técnica da análise modal complexa foi desenvolvida por Chong-Won Lee (1990, 1991) e tratada em vários outros artigos de Lee e de seus colaboradores (Lee e Joh, 1993; Joh e Lee, 1993; Jei e Kim, 1993). Nos trabalhos de Kessler e Kim (1998, 1999, 2001, 2002) a metodologia da técnica é apresentada de uma forma mais compreensível, contudo, mais simplificada. Nesta seção é descrita a metodologia da análise modal complexa, com algumas modificações e um detalhamento maior, com o intuito de fornecer um melhor entendimento da técnica.

Como mostrado em capítulos anteriores, o movimento planar de uma estação do rotor pode ser descrita pela coordenada complexa $p(t) = y(t) + j z(t)$. Considerando também o complexo conjugado de $p(t)$, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} p(t) \\ \bar{p}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p(t) \\ \bar{p}(t) \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Para N estações, a Equação 5.16 torna-se:

$$\begin{Bmatrix} \{y(t)\} \\ \{z(t)\} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [I] & [I] \\ -j[I] & j[I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p(t)\} \\ \{\bar{p}(t)\} \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} \{y(t)\} \\ \{z(t)\} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \{p(t)\} \\ \{\bar{p}(t)\} \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Desta forma, $[T]$ é definida como a matriz de transformação entre as representações reais e complexas e $[I]$ denota a matriz identidade $N \times N$.

Similarmente, a excitação em coordenadas complexas é escrita como $g(t) = f_y(t) + j f_z(t)$. Em forma matricial, esta se torna:

$$\begin{Bmatrix} \{f_y(t)\} \\ \{f_z(t)\} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [I] & [I] \\ -j[I] & j[I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{g(t)\} \\ \{\bar{g}(t)\} \end{Bmatrix}, \text{ sendo } [T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [I] & [I] \\ -j[I] & j[I] \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Substituindo as Equações 5.17 e 5.18 na Equação de movimento 5.1, obtém-se:

$$[T]^{-1}[M][T]\begin{Bmatrix} \{\ddot{p}\} \\ \{\ddot{\bar{p}}\} \end{Bmatrix} + [T]^{-1}[D][T]\begin{Bmatrix} \{\dot{p}\} \\ \{\dot{\bar{p}}\} \end{Bmatrix} + [T]^{-1}[K][T]\begin{Bmatrix} \{p\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[T]\begin{Bmatrix} \{g\} \\ \{\bar{g}\} \end{Bmatrix}, \quad (5.19a)$$

ou, de forma mais compacta,

$$[M_a]\begin{Bmatrix} \{\ddot{p}\} \\ \{\ddot{\bar{p}}\} \end{Bmatrix} + [D_a]\begin{Bmatrix} \{\dot{p}\} \\ \{\dot{\bar{p}}\} \end{Bmatrix} + [K_a]\begin{Bmatrix} \{p\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{g\} \\ \{\bar{g}\} \end{Bmatrix}, \quad (5.19b)$$

sendo que $[M_a]$, $[D_a]$ e $[K_a]$, compostas por elementos complexos, são dadas por:

$$[M_a] = [T]^{-1}[M][T] = \begin{bmatrix} [I] & j[I] \\ [I] & -j[I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [M_{yy}] & [M_{yz}] \\ [M_{zy}] & [M_{zz}] \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [I] & [I] \\ -j[I] & j[I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_f] & [M_b] \\ [\bar{M}_b] & [\bar{M}_f] \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$[D_a] = \begin{bmatrix} [D_f] & [D_b] \\ [\bar{D}_b] & [\bar{D}_f] \end{bmatrix} \quad ; \quad [K_a] = \begin{bmatrix} [K_f] & [K_b] \\ [\bar{K}_b] & [\bar{K}_f] \end{bmatrix},$$

sendo que

$$\begin{aligned} 2[M_f] &= ([M_{yy}] + [M_{zz}]) - j([M_{yz}] - [M_{zy}]) \\ 2[M_b] &= ([M_{yy}] - [M_{zz}]) + j([M_{yz}] + [M_{zy}]) \end{aligned} \quad (5.21)$$

e a mesma estrutura da Equação 5.21 é válida para $[D_f]$, $[D_b]$, $[K_f]$ e $[K_b]$.

A transformada de Fourier de $\{p(t)\}$, $\{\bar{p}(t)\}$, $\{g(t)\}$ e $\{\bar{g}(t)\}$ são $\{P(\omega)\}$, $\{\hat{P}(\omega)\}$, $\{G(\omega)\}$ e $\{\hat{G}(\omega)\}$, respectivamente. Desta forma, a Equação 5.19b pode ser escrita como:

$$\left(-\omega^2[M_a] + i\omega[D_a] + [K_a] \right) \begin{Bmatrix} \{P(\omega)\} \\ \{\hat{P}(\omega)\} \end{Bmatrix} = [B(\omega)] \begin{Bmatrix} \{P(\omega)\} \\ \{\hat{P}(\omega)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{G(\omega)\} \\ \{\hat{G}(\omega)\} \end{Bmatrix}. \quad (5.22)$$

logo,

$$\begin{Bmatrix} \{P(\omega)\} \\ \{\hat{P}(\omega)\} \end{Bmatrix} = [B(\omega)]^{-1} \begin{Bmatrix} \{G(\omega)\} \\ \{\hat{G}(\omega)\} \end{Bmatrix} = [H^c(\omega)] \begin{Bmatrix} \{G(\omega)\} \\ \{\hat{G}(\omega)\} \end{Bmatrix}, \quad (5.23)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \{P(\omega)\} \\ \{\hat{P}(\omega)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{pg}(\omega)] & [H_{p\hat{g}}(\omega)] \\ [H_{\hat{p}g}(\omega)] & [H_{\hat{p}\hat{g}}(\omega)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{G(\omega)\} \\ \{\hat{G}(\omega)\} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

As sub-matrizes na matriz de resposta em frequência complexa $[H^c(\omega)]$ são chamadas matrizes de resposta em frequência direcionais (dFRMs) e seus elementos são chamados de funções de resposta em frequência direcionais (dFRFs), pois estas funções incluem informação sobre a direcionalidade dos modos. As dFRMs $[H_{pg}(\omega)]$ e $[H_{\hat{p}\hat{g}}(\omega)]$ relacionam excitações e respostas na mesma direção e seus elementos são referidos como “dFRFs normais” (normais diretas e normais retrógradas, respectivamente). As dFRMs $[H_{p\hat{g}}(\omega)]$ e $[H_{\hat{p}g}(\omega)]$ relacionam excitações e respostas em direções opostas e seus elementos são referidos como “dFRFs reversas”.

De acordo com as Equações 5.17, 5.18 e 5.24, obtém-se as seguintes relações entre as FRFs e as dFRFs:

$$\begin{bmatrix} [H_{pg}(\omega)] & [H_{p\hat{g}}(\omega)] \\ [H_{\hat{p}g}(\omega)] & [H_{\hat{p}\hat{g}}(\omega)] \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} [H_{yy}(\omega)] & [H_{yz}(\omega)] \\ [H_{zy}(\omega)] & [H_{zz}(\omega)] \end{bmatrix} [T] \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} 2[H_{pg}(\omega)] &= [H_{yy}(\omega)] + [H_{zz}(\omega)] - j([H_{yz}(\omega)] - [H_{zy}(\omega)]) \\ 2[H_{p\hat{g}}(\omega)] &= [H_{yy}(\omega)] - [H_{zz}(\omega)] + j([H_{yz}(\omega)] + [H_{zy}(\omega)]) \\ 2[H_{\hat{p}g}(\omega)] &= [H_{yy}(\omega)] - [H_{zz}(\omega)] - j([H_{yz}(\omega)] + [H_{zy}(\omega)]) \\ 2[H_{\hat{p}\hat{g}}(\omega)] &= [H_{yy}(\omega)] + [H_{zz}(\omega)] + j([H_{yz}(\omega)] - [H_{zy}(\omega)]) \end{aligned} \quad (5.26)$$

De acordo com as Equações 5.15 e 5.26, conclui-se que:

$$[H_{\hat{p}\hat{g}}(\omega)] = [\overline{H}_{pg}(-\omega)] \quad \text{and} \quad [H_{\hat{p}g}(\omega)] = [\overline{H}_{p\hat{g}}(-\omega)] \quad (5.27)$$

Portanto, pode-se concluir que se apenas frequências positivas são consideradas, as quatro sub-matrizes são necessárias para fornecer toda a informação modal. Contudo, se as frequências negativas são consideradas também, apenas duas sub-matrizes são suficientes para fornecer toda a informação modal. Neste último caso, $[H_{pg}(\omega)]$ e $[H_{p\hat{g}}(\omega)]$ são usualmente as consideradas. Desta forma, considerando as dFRFs *two sided*, pode-se reescrever a Equação 5.24 como:

$$\begin{Bmatrix} \{P(\omega)\} \\ \{\hat{P}(\omega)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{pg}(\omega)] & [H_{p\hat{g}}(\omega)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{G(\omega)\} \\ \{\hat{G}(\omega)\} \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

A equação 5.19b pode ser reescrita como:

$$[A_a]\{\dot{w}_a\} - [B_a]\{w_a\} = \{Q_a\} \quad (5.29)$$

$$[A_a]_{4N \times 4N} = \begin{bmatrix} [0] & [M_a] \\ [M_a] & [D_a] \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} [M_a] & [0] \\ [0] & -[K_a] \end{bmatrix}, \{Q_a\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_a\} \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\{F_a\} = \begin{Bmatrix} \{g(t)\} \\ \{\bar{g}(t)\} \end{Bmatrix}, \{w_a\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{q}_a\} \\ \{q_a\} \end{Bmatrix}, \{q_a\} = \begin{Bmatrix} \{p(t)\} \\ \{\bar{p}(t)\} \end{Bmatrix}$$

As matrizes complexas $[A_a]$ e $[B_a]$ são indefinidas, e não-Hermetianas em geral, resultando em um problema não auto-adjunto. Os problemas de autovalores associados com a Equação 5.29 são:

$$(\lambda[A_a] - [B_a])\{\psi_a\} = \{0\} \text{ e } (\lambda[A_a]^T - [B_a]^T)\{\ell_a\} = \{0\} \quad (5.31)$$

sendo que os autovetores à direita e à esquerda são:

$$\{\psi_a\} = \begin{Bmatrix} \lambda\{u_a\} \\ \{u_a\} \end{Bmatrix} \text{ e } \{\ell_a\} = \begin{Bmatrix} \lambda\{v_a\} \\ \{v_a\} \end{Bmatrix}. \quad (5.32)$$

Os vetores $\{u_a\}$ e $\{v_a\}$ são os autovetores dos seguintes problemas de autovalores:

$$\begin{aligned}
(\lambda^2[M_a] + \lambda[D_a] + [K_a])\{u_a\} &= \{0\} \\
(\lambda^2[M_a]^T + \lambda[D_a]^T + [K_a]^T)\{v_a\} &= \{0\}
\end{aligned}
\tag{5.33}$$

Devido à $[A_a]$ e $[B_a]$ (assim como as matrizes $[M_a]$, $[D_a]$ e $[K_a]$) serem complexas e não-Hermitianas, tem-se o caso mais geral de problema de autovalor. Agora, as questões são: o princípio da superposição ainda é válido? Em outras palavras, as propriedades de ortogonalidade dos autovetores em relação à $[A_a]$ e $[B_a]$ ainda são válidas? Os autovalores e autovetores aparecerão em complexos conjugados? As respostas foram achadas no livro de Lancaster (1966), onde o autor informa que, neste caso, as propriedades de ortogonalidade e, conseqüentemente, o princípio da superposição são válidos. Lancaster também diz que os autovalores aparecerão em pares complexos conjugados, mas não necessariamente isto ocorrerá com os autovetores!

No trabalho de Joh e Lee (1993) e no Apêndice A é mostrado que neste caso os autovetores à direita e à esquerda correspondentes aos autovalores λ_r e $\bar{\lambda}_r$ do autoproblema da Equação 5.33 são:

$$\lambda_r \Rightarrow \{u_a\} = \begin{Bmatrix} \{u_c\} \\ \{\hat{u}_c\} \end{Bmatrix}; \{v_a\} = \begin{Bmatrix} \{v_c\} \\ \{\hat{v}_c\} \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \bar{\lambda}_r \Rightarrow \begin{Bmatrix} \{\hat{u}_c\} \\ \{\bar{u}_c\} \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \{\bar{v}_c\} \\ \{v_c\} \end{Bmatrix}
\tag{5.34}$$

O símbolo (^) denota que os elementos complexos em $\{\hat{u}_c\}$ são os mesmos de $\{u_c\}$ com a exceção do sinal da parte imaginária, como será visto mais adiante. Neste caso, e como será visto na Equação 5.38, o autovetor correspondente ao complexo conjugado do autovalor não é meramente o complexo conjugado do autovetor original $\{u_a\}$, e sim é composto pelos complexos conjugados dos vetores $\{u_c\}$ e $\{\hat{u}_c\}$ estando os mesmos em posições trocadas, em relação às suas posições em $\{u_a\}$.

Desta forma, em procedimento similar aos da Equação 5.7 até a Equação 5.11, obtém-se a matriz de função de resposta em frequência complexa escrita em termos de parâmetros modais:

$$[H^c(\omega)] = \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{\begin{Bmatrix} \{u_c\} \\ \{\hat{u}_c\} \end{Bmatrix}_r \begin{Bmatrix} \{v_c\}^T \\ \{\hat{v}_c\}^T \end{Bmatrix}_r}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\begin{Bmatrix} \{\bar{u}_c\} \\ \{\bar{\hat{u}}_c\} \end{Bmatrix}_r \begin{Bmatrix} \{\bar{v}_c\}^T \\ \{\bar{\hat{v}}_c\}^T \end{Bmatrix}_r}{(j\omega - \bar{\lambda}_r)} \right) \quad (5.35)$$

De acordo com as Equações 5.24 e 5.35 as submatrizes dFRM são dadas por:

$$[H_{pg}] = \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{\{u_c\}_r \{v_c\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\bar{u}_c\}_r \{\bar{v}_c\}_r^T}{(j\omega - \bar{\lambda}_r)} \right); [H_{p\hat{g}}] = \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{\{u_c\}_r \{\hat{v}_c\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\bar{u}_c\}_r \{\bar{\hat{v}}_c\}_r^T}{(j\omega - \bar{\lambda}_r)} \right) \quad (5.36)$$

$$[H_{\hat{p}g}] = \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{\{\hat{u}_c\}_r \{v_c\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\bar{\hat{u}}_c\}_r \{\bar{v}_c\}_r^T}{(j\omega - \bar{\lambda}_r)} \right); [H_{\hat{p}\hat{g}}] = \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{\{\hat{u}_c\}_r \{\hat{v}_c\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\bar{\hat{u}}_c\}_r \{\bar{\hat{v}}_c\}_r^T}{(j\omega - \bar{\lambda}_r)} \right)$$

Analisando as Equações 5.36, pode ser mostrado (Lee e Joh, 1993) que para identificar todos os parâmetros modais, é necessário medir pelo menos uma coluna (linha) de $[H_{pg}(\omega)]$ assim como uma linha (coluna) de $[H_{p\hat{g}}(\omega)]$, que são arbitrariamente escolhidas. Isto implica que para um rotor anisotrópico com N estações, é necessário medir $2N$ dFRFs para a identificação de todos os parâmetros modais.

As relações entre os elementos dos vetores modais de ambas metodologias (real e complexa) podem ser determinadas substituindo a Equação 5.14 e 5.36 na Equação 5.26. Usando a primeira relação em 5.26, obtém-se (omitindo-se o sub-índice r):

$$2 \left(\frac{\{u_c\} \{v_c\}^T}{(j\omega - \lambda)} + \frac{\{\bar{u}_c\} \{\bar{v}_c\}^T}{(j\omega - \bar{\lambda})} \right) = \frac{\{u_y\} \{v_y\}^T + \{u_z\} \{v_z\}^T - j(\{u_y\} \{v_z\}^T - \{u_z\} \{v_y\}^T)}{(j\omega - \lambda)} + \frac{\{\bar{u}_y\} \{\bar{v}_y\}^T + \{\bar{u}_z\} \{\bar{v}_z\}^T - j(\{\bar{u}_y\} \{\bar{v}_z\}^T - \{\bar{u}_z\} \{\bar{v}_y\}^T)}{(j\omega - \bar{\lambda})} \quad (5.37)$$

e da Equação 5.37, tem-se que

$$\{u_c\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\{u_y\} + j\{u_z\}) \quad \text{e} \quad \{v_c\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\{v_y\} - j\{v_z\}) \quad (5.38a)$$

$$\{\hat{u}_c\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\{u_y\} - j\{u_z\}) \quad \text{e} \quad \{\hat{v}_c\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\{v_y\} + j\{v_z\}) \quad (5.38b)$$

Portanto, de acordo com as Equações 5.38 o vetor $\{\hat{u}_c\}$ é diferente do vetor $\{u_c\}$ apenas em relação ao sinal da parte imaginária, como previamente mencionado. Como os vetores $\{u_y\}$ e $\{u_z\}$ são complexos, então o vetor $\{\hat{u}_c\}$ não é o complexo conjugado de $\{u_c\}$.

Se o rotor é isotrópico suas propriedades dinâmicas são as mesmas em qualquer direção.

Portanto:

$$\begin{aligned} [M_{yy}] &= [M_{zz}] = [M_1] & [M_{yz}] &= -[M_{zy}] = [M_2] \\ [D_{yy}] &= [D_{zz}] = [D_1] & [D_{yz}] &= -[D_{zy}] = [D_2] \\ [K_{yy}] &= [K_{zz}] = [K_1] & [K_{yz}] &= -[K_{zy}] = [K_2] \end{aligned} \quad (5.39)$$

Então, de acordo com a Equação 5.21, tem-se:

$$[M_b] = [D_b] = [K_b] = [0] \quad (5.40)$$

Reescrevendo as Equações 5.33 usando as Equações 5.20, 5.34 e 5.40:

$$\left(\lambda^2 \begin{bmatrix} [M_f] & [0] \\ [0] & [\bar{M}_f] \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} [D_f] & [0] \\ [0] & [\bar{D}_f] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_f] & [0] \\ [0] & [\bar{K}_f] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u_c\} \\ \{\hat{u}_c\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.41a)$$

$$\left(\lambda^2 \begin{bmatrix} [M_f] & [0] \\ [0] & [\bar{M}_f] \end{bmatrix}^T + \lambda \begin{bmatrix} [D_f] & [0] \\ [0] & [\bar{D}_f] \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} [K_f] & [0] \\ [0] & [\bar{K}_f] \end{bmatrix}^T \right) \begin{Bmatrix} \{v_c\} \\ \{\hat{v}_c\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.41b)$$

Desta forma, isto conduz a:

$$\{\hat{u}_c\} = 0 \Rightarrow \{u_y\} - j \{u_z\} = \{0\} \quad \text{and} \quad \{\hat{v}_c\} = 0 \Rightarrow \{v_y\} + j \{v_z\} = \{0\}, \quad (5.42)$$

e usando as Equações 5.38a e 5.42, obtém-se:

$$\{u_c\} = \sqrt{2} \{u_y\} = \sqrt{2} \{u_0\} \quad \text{and} \quad \{v_c\} = \sqrt{2} \{v_y\} = \sqrt{2} \{v_0\} \quad (5.43)$$

Substituindo as Equações 5.42 e 5.43 na Equação 5.36, obtém-se:

$$[H_{pg}(\omega)] = 2 \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{\{u_0\}_r \{v_0\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} \right) \quad \text{e} \quad [H_{p\hat{g}}(\omega)] = 0, \quad (5.44)$$

e a Equação 5.44 pode ser reescrita como:

$$[H_{pg}] = 2 \sum_{r=1}^N \left(\frac{\{u_0\}_r \{v_0\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} \right)_r^F \quad \text{para } \omega > 0 \quad \text{e} \quad [H_{p\hat{g}}] = 2 \sum_{r=1}^N \left(\frac{\{u_0\}_r \{v_0\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} \right)_r^B \quad \text{para } \omega < 0 \quad (5.45)$$

sendo que os sobre-índices F e B denotam precessão direta e retrógrada, respectivamente.

As Equações 5.45 mostram que, para sistemas isotrópicos, os modos de precessão direta são excitados por apenas excitações diretas, desta forma, os modos de precessão direta aparecerão apenas na região de frequências positivas. Se alguma anisotropia existe nos mancais, então modos de precessão retrógrada serão excitados por excitações rotativas diretas. Ainda para sistemas isotrópicos, os modos de precessão retrógrada são excitados por apenas excitações retrógradas, assim, os modos de precessão retrógrada aparecerão apenas na região de frequências negativas. Se alguma anisotropia existe nos mancais, então modos de precessão direta serão excitados por excitações rotativas retrógradas.

Para sistemas anisotrópicos, a magnitude na dFRF da componente direta na região de frequências negativas indica o grau de anisotropia no sistema. Mesmo com uma grande

anisotropia, as magnitudes da dFRF dos modos de precessão direta na região de frequências positivas são maiores ou iguais aos respectivos modos na região de frequência negativa. De forma análoga, as magnitudes da dFRF dos modos de precessão retrógrada na região de frequências positivas são menores ou iguais aos respectivos modos na região de frequência negativa. Isto é similar ao caso do espectro total da resposta complexa ao desbalanceamento, mostrado no Capítulo 2.

5.4. Funções de Respostas em Frequência Direcionais (dFRFs) Levando-se em Conta os Deslocamentos Angulares

A metodologia descrita até aqui, baseada na formulação de Lee, na verdade pode incluir os deslocamento angulares ϕ_y e ϕ_z , o que é necessário para implementação da técnica em um código computacional (método dos elementos finitos, por exemplo). Contudo, para que se possa incluir estes graus de liberdade no vetor de coordenadas generalizadas e usar a matriz de transformação (mostrada nas Equações 5.17 e 5.18), é necessário usar um sistema de coordenadas diferente do apresentado na Figura 3.1 (e repetido na Figura 5.1a), que foi utilizado por Nelson e McVaugh (1976) e que geralmente é adotado por muitos outros autores. Lee adota um sistema de orientação dos graus de liberdade diferente deste usual, como mostra a Figura 5.1b.

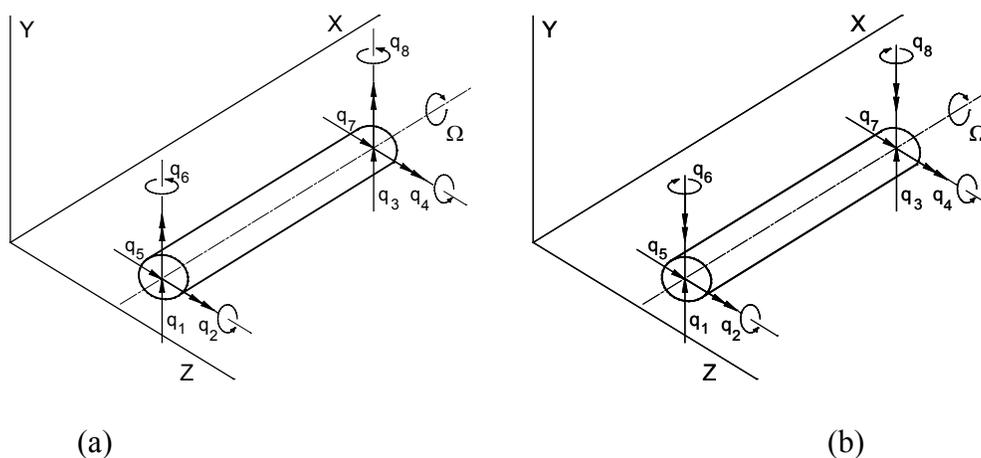


Figura 5.1 – Elemento finito de viga. (a) graus de liberdade adotados por Nelson and McVaugh; e (b) graus de liberdade adotados por Lee.

Portanto, como neste trabalho o sistema de coordenadas adotado para os graus de liberdade é o da Figura 3.1 ou 5.1a, a matriz de transformação usada para transformar os graus de liberdade reais para complexos é a apresentada na Equação 3.5 e repetida na Equação 5.46 a seguir.

$$[T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [I] & [0] & [I] & [0] \\ [0] & [I] & [0] & [I] \\ -j[I] & [0] & j[I] & [0] \\ [0] & j[I] & [0] & -j[I] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T]^{-1} = \begin{bmatrix} [I] & [0] & j[I] & [0] \\ [0] & [I] & [0] & -j[I] \\ [I] & [0] & -j[I] & [0] \\ [0] & [I] & [0] & j[I] \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Então,

$$\begin{Bmatrix} \{p(t)\} \\ \{\bar{p}(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{p_1(t)\} \\ \{p_2(t)\} \\ \{\bar{p}_1(t)\} \\ \{\bar{p}_2(t)\} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \{y(t)\} \\ \{\phi_z(t)\} \\ \{z(t)\} \\ \{\phi_y(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{y(t)\} + j\{z(t)\} \\ \{\phi_z(t)\} - j\{\phi_y(t)\} \\ \{y(t)\} - j\{z(t)\} \\ \{\phi_z(t)\} + j\{\phi_y(t)\} \end{Bmatrix} \quad (5.47)$$

Considerando todos os nós do modelo de elementos finitos e a nova matriz de transformação, a Equação 5.19 é reescrita como:

$$[T]^{-1}[M][T] \begin{Bmatrix} \{\ddot{p}\} \\ \{\ddot{\bar{p}}\} \end{Bmatrix} + [T]^{-1}[D][T] \begin{Bmatrix} \{\dot{p}\} \\ \{\dot{\bar{p}}\} \end{Bmatrix} + [T]^{-1}[K][T] \begin{Bmatrix} \{p\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[T] \begin{Bmatrix} \{g\} \\ \{\bar{g}\} \end{Bmatrix} \quad (5.48a)$$

$$[M_n] \begin{Bmatrix} \{\ddot{p}\} \\ \{\ddot{\bar{p}}\} \end{Bmatrix} + [D_n] \begin{Bmatrix} \{\dot{p}\} \\ \{\dot{\bar{p}}\} \end{Bmatrix} + [K_n] \begin{Bmatrix} \{p\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{g\} \\ \{\bar{g}\} \end{Bmatrix} \quad (5.48b)$$

sendo que $[M_n]$ é composta por elementos complexos e dada por:

$$[M_n] = [T]^{-1}[M][T] \quad (5.49a)$$

ou

$$[M_n] = \begin{bmatrix} [I][0] & j[I] & [0] \\ [0][I] & [0] & -j[I] \\ [I][0] & -j[I] & [0] \\ [0][I] & [0] & j[I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [M_{yy}] & [M_{y\phi_z}] & [M_{yz}] & [M_{y\phi_y}] \\ [M_{\phi_z y}] & [M_{\phi_z \phi_z}] & [M_{\phi_z z}] & [M_{\phi_z \phi_y}] \\ [M_{zy}] & [M_{z\phi_z}] & [M_{zz}] & [M_{z\phi_y}] \\ [M_{\phi_y y}] & [M_{\phi_y \phi_z}] & [M_{\phi_y z}] & [M_{\phi_y \phi_y}] \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [I][0] & [I] & [0] \\ [0][I] & [0] & [I] \\ -j[I][0] & j[I] & [0] \\ [0] & j[I] & [0] & -j[I] \end{bmatrix} \quad (5.49b)$$

$$[M_n] = \begin{bmatrix} [M_{11}^n] & [M_{12}^n] & [M_{13}^n] & [M_{14}^n] \\ [M_{21}^n] & [M_{22}^n] & [M_{23}^n] & [M_{24}^n] \\ [M_{31}^n] & [M_{32}^n] & [M_{33}^n] & [M_{34}^n] \\ [M_{41}^n] & [M_{42}^n] & [M_{43}^n] & [M_{44}^n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_{fn}] & [M_{bn}] \\ [\bar{M}_{bn}] & [\bar{M}_{fn}] \end{bmatrix}, \quad (5.49c)$$

sendo que

$$\begin{aligned} 2[M_{11}^n] &= [M_{yy}] + [M_{zz}] - j([M_{yz}] - [M_{zy}]); & 2[M_{12}^n] &= [M_{y\phi_z}] - [M_{z\phi_y}] + j([M_{y\phi_y}] + [M_{z\phi_z}]) \\ 2[M_{13}^n] &= [M_{yy}] - [M_{zz}] + j([M_{yz}] + [M_{zy}]); & 2[M_{14}^n] &= [M_{y\phi_z}] + [M_{z\phi_y}] - j([M_{y\phi_y}] - [M_{z\phi_z}]) \\ 2[M_{21}^n] &= [M_{\phi_z y}] - [M_{\phi_y z}] - j([M_{\phi_z z}] + [M_{\phi_y y}]); & 2[M_{22}^n] &= [M_{\phi_z \phi_z}] + [M_{\phi_y \phi_y}] + j([M_{\phi_z \phi_y}] - [M_{\phi_y \phi_z}]) \\ 2[M_{23}^n] &= [M_{\phi_z y}] + [M_{\phi_y z}] + j([M_{\phi_z z}] - [M_{\phi_y y}]); & 2[M_{24}^n] &= [M_{\phi_z \phi_z}] - [M_{\phi_y \phi_y}] - j([M_{\phi_z \phi_y}] + [M_{\phi_y \phi_z}]) \end{aligned} \quad (5.50)$$

e lembrando que $[\bar{M}_{bn}]$ e $[\bar{M}_{fn}]$ (na Equação 5.49c) são os complexos conjugados de $[M_{bn}]$ e $[M_{fn}]$, respectivamente.

Comparando as Equações 5.20 e 5.21 com as Equações 5.49c e 5.50 pode-se perceber que as matrizes de massa $[M_a]$ e $[M_n]$ possuem a mesma estrutura. As expressões dos elementos de $[D_n]$ e $[K_n]$ são determinadas da mesma maneira que para $[M_n]$.

De maneira similar, a matriz de FRF é reescrita como:

$$[H^n(\omega)] = \begin{bmatrix} [H_{yy}] & [H_{y\phi_z}] & [H_{yz}] & [H_{y\phi_y}] \\ [H_{\phi_z y}] & [H_{\phi_z\phi_z}] & [H_{\phi_z z}] & [H_{\phi_z\phi_y}] \\ [H_{zy}] & [H_{z\phi_z}] & [H_{zz}] & [H_{z\phi_y}] \\ [H_{\phi_y y}] & [H_{\phi_y\phi_z}] & [H_{\phi_y z}] & [H_{\phi_y\phi_y}] \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Então, a matriz de dFRF torna-se:

$$[H_n^c] = [T_n]^{-1} [H_n] [T_n] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [H_{p_1 g_1}^{c,n}] & [H_{p_1 g_2}^{c,n}] \\ [H_{p_2 g_1}^{c,n}] & [H_{p_2 g_2}^{c,n}] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [H_{p_1 \hat{g}_1}^{c,n}] & [H_{p_1 \hat{g}_2}^{c,n}] \\ [H_{p_2 \hat{g}_1}^{c,n}] & [H_{p_2 \hat{g}_2}^{c,n}] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} [H_{\hat{p}_1 g_1}^{c,n}] & [H_{\hat{p}_1 g_2}^{c,n}] \\ [H_{\hat{p}_2 g_1}^{c,n}] & [H_{\hat{p}_2 g_2}^{c,n}] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [H_{\hat{p}_1 \hat{g}_1}^{c,n}] & [H_{\hat{p}_1 \hat{g}_2}^{c,n}] \\ [H_{\hat{p}_2 \hat{g}_1}^{c,n}] & [H_{\hat{p}_2 \hat{g}_2}^{c,n}] \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{pg}^n] & [H_{p\hat{g}}^n] \\ [H_{\hat{p}g}^n] & [H_{\hat{p}\hat{g}}^n] \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

E as matrizes que compõem $[H_{pg}^n(\omega)]$ são iguais a:

$$\begin{aligned} 2[H_{p_1 g_1}^{c,n}] &= [H_{yy}] + [H_{zz}] - j([H_{yz}] - [H_{zy}]) \\ 2[H_{p_1 g_2}^{c,n}] &= [H_{y\phi_z}] - [H_{z\phi_y}] + j([H_{y\phi_y}] + [H_{z\phi_z}]) \\ 2[H_{p_2 g_1}^{c,n}] &= [H_{yy}] - [H_{zz}] + j([H_{yz}] + [H_{zy}]) \\ 2[H_{p_2 g_2}^{c,n}] &= [H_{y\phi_z}] + [H_{z\phi_y}] - j([H_{y\phi_y}] - [H_{z\phi_z}]) \end{aligned} \quad (5.53)$$

As expressões das outras matrizes ($[H_{p\hat{g}}^n]$, $[H_{\hat{p}g}^n]$ e $[H_{\hat{p}\hat{g}}^n]$) não estão mostradas aqui, mas suas formulações são óbvias. Como pode-se perceber na Equação 5.53, a formulação das submatrizes de $[H_n^c]$ possui a mesma estrutura das submatrizes em $[H^c]$, mostradas em 5.26.

Na seção seguinte são mostrados exemplos em que se verifica a vantagem de usar uma dFRF em relação a FRF para a identificação da direção do modo, ou seja, se o mesmo é direto ou retrógrado.

capacidade de separar os modos retrógrados e diretos, enquanto no gráfico da FRF estes modos estão acoplados, resultando em maior dificuldade no processo de identificação de parâmetros.

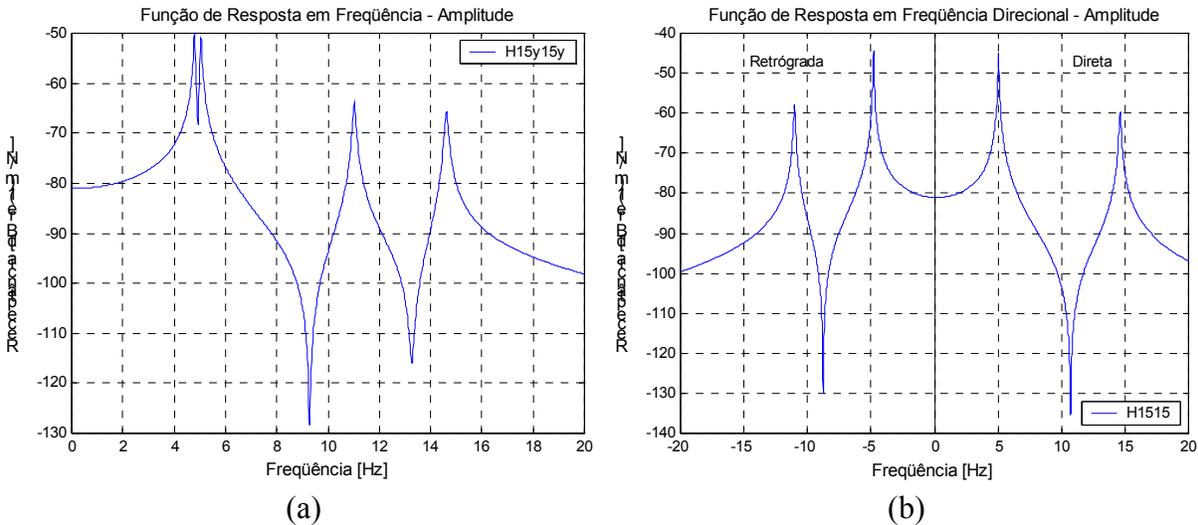


Figura 5.3 - (a) FRF de *driving-point* 15y; (b) dFRF de *driving-point* no ponto 15.

Se o sistema é anisotrópico, componentes de modos retrógrados (diretos) podem aparecer na região de frequência positiva (negativa). Para verificar esta situação, as rigidezes do elemento 19 são modificadas para $K_{yy}=1,5 \times 10^4$ N/m e $K_{zz}=8,0 \times 10^3$ N/m, e no elemento 20 a rigidez em z é modificada para $K_{zz}=80$ N/m. O gráfico da FRF de *driving-point* 15y deste sistema modificado é apresentado na Figura 5.4a. Neste gráfico percebem-se três modos significantes, 5,69Hz, 11,19Hz, e 14,84Hz, e um modo que quase não aparece em 4,49Hz. Na Figura 5.4b, tem-se o gráfico da FRF de *driving-point* 15z, que mostra que o modo em 5,96Hz quase desaparece e o modo em 4,49 Hz é aumentado. Desta forma conclui-se que o primeiro modo possui deslocamento significativo na direção y , com uma órbita sendo quase uma linha reta, e que o segundo modo possui deslocamento significativo na direção z , com uma órbita sendo quase uma linha reta também.

O gráfico da FRF cruzada 15z15y, na Figure 5.4c, mostra todos os modos na faixa de 20Hz, mas ainda não fornece informação sobre a direcionalidade do modo. A Figura 5.4d mostra o gráfico da dFRF de *driving-point* 15. Neste gráfico pode-se perceber que a amplitude do primeiro modo (em 4,49Hz) na região de frequência positiva é um pouco menor que a amplitude na

freqüência de -4.49Hz. Isto indica que este modo é retrógrado e sua órbita é quase uma linha reta (pois as amplitudes retrógrada e direta são quase do mesmo nível). Contudo, não se pode afirmar nada em relação se o modo possui deslocamento significativo na direção y ou z . Em relação ao segundo modo (em 5,69Hz), a análise é a mesma, com a diferença que, neste caso, o modo é direto. Mas, com o terceiro modo (em 11,19 Hz), facilmente pode ser notado que o modo é retrógrado. A amplitude deste modo é muito maior na região de freqüência negativa do que na região positiva. O surgimento da componente de amplitude muito baixa na região de freqüência positiva indica que a órbita é quase um círculo. O mesmo ocorre com o quarto modo, mas na direção oposta, isto é, o modo é direto. As formas dos quatro modos estão mostradas na Figura 5.5.

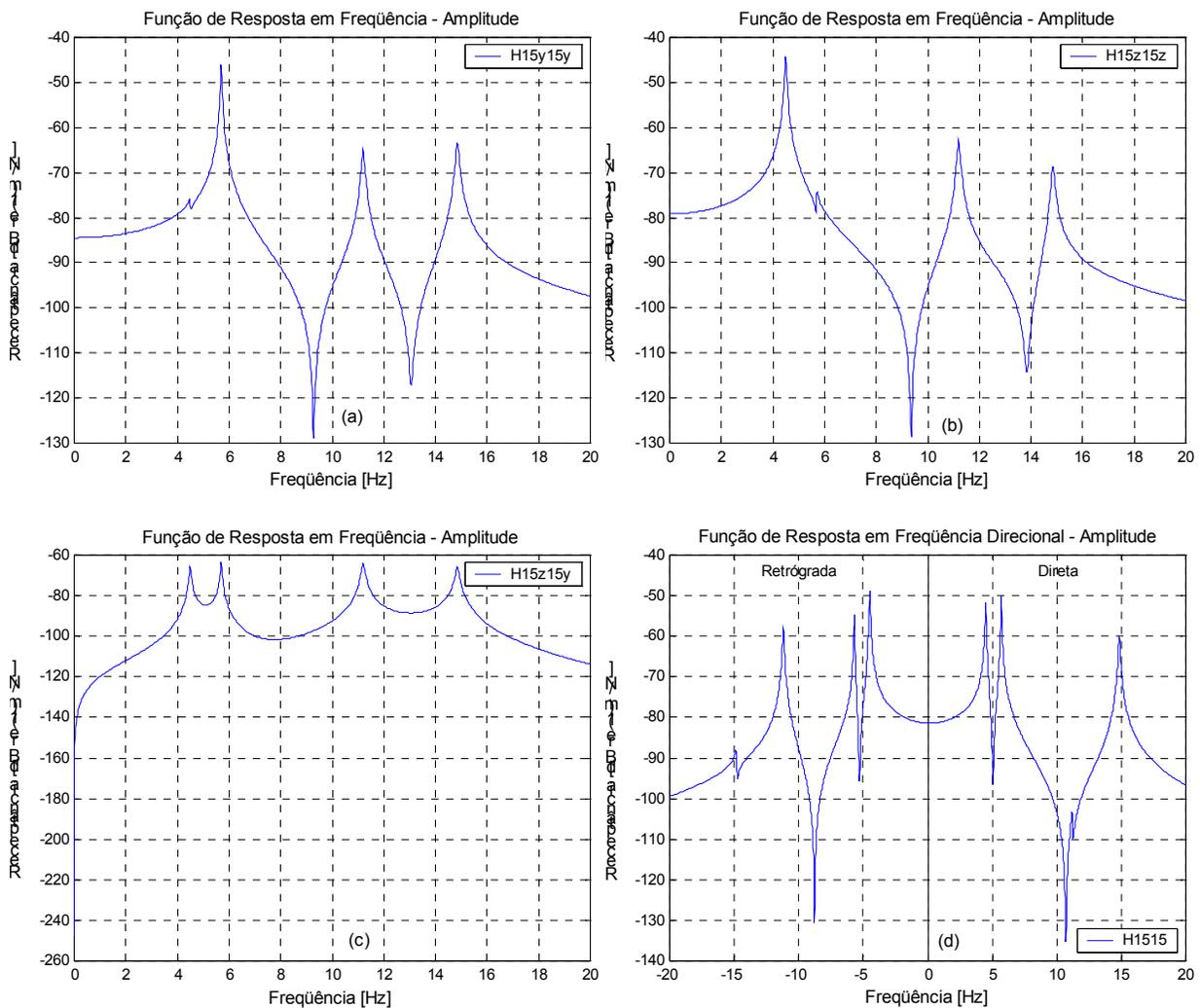


Figura 5.4: (a) FRF de *driving-point* 15y; (b) FRF de *driving-point* 15z; (c) FRF cruzada 15z 15y; (d) dFRF de *driving-point* 15.

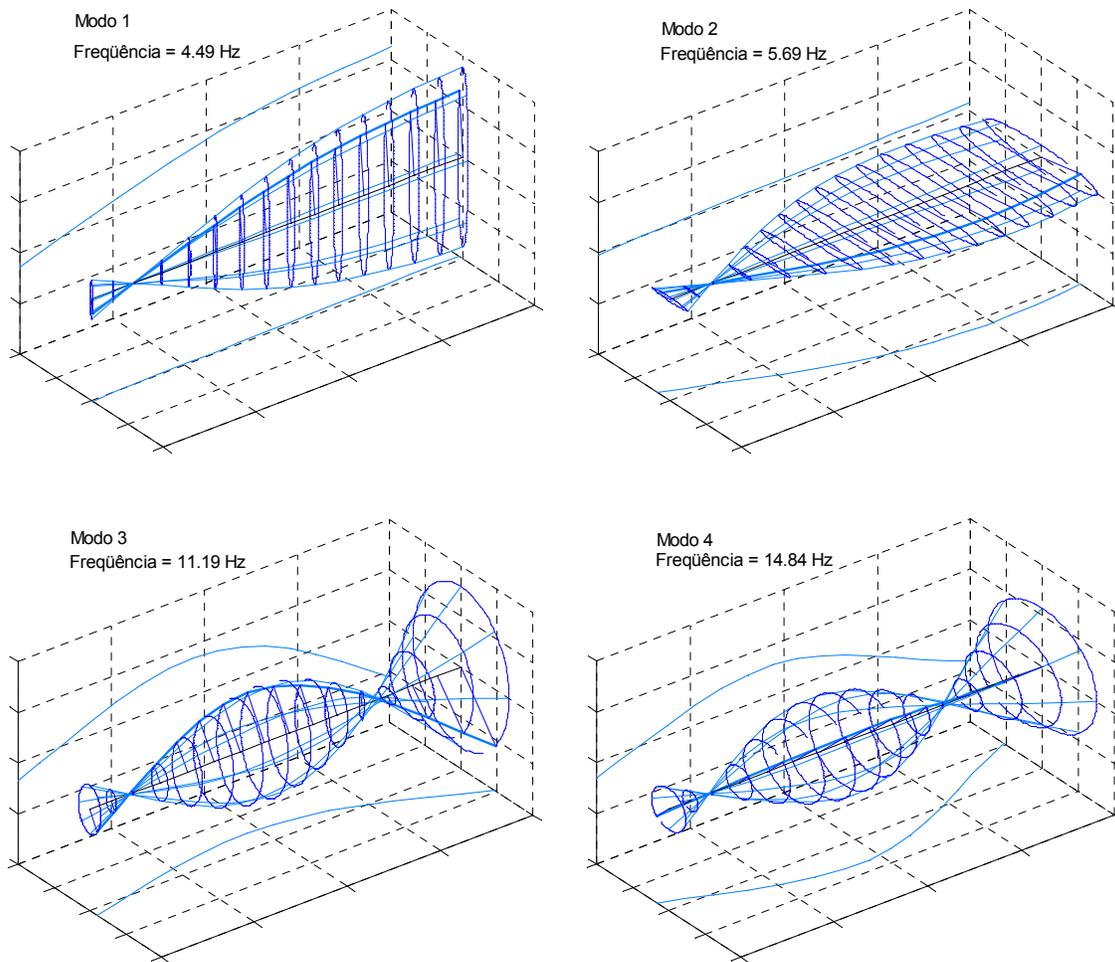


Figura 5.5 - As formas dos quatro modos na faixa de frequência de análise.

5.6. Procedimento Proposto para Identificação dos Modos Naturais e suas Direcionalidades em Sistemas Levemente Amortecidos

Nas seções anteriores foram revisadas as metodologias de obtenção das FRFs e das dFRFs. Foi visto que em uma dFRF pode-se determinar a direcionalidade do modo, ao passo que na FRF isto não se verifica. Por outro lado, a formulação matemática da FRF descrita em função dos parâmetros modais é relativamente simples em comparação com a formulação da dFRF. Por estas razões, apresenta-se aqui um método que leva em conta as vantagens das duas metodologias. Esta metodologia consiste em identificar, através das FRFs medidas, os parâmetros modais de uma

estrutura rotativa e então com as FRFs regeneradas determinam-se as dFRFs, pelas quais a direcionalidade dos modos é identificada. O método também possui a vantagem de ser realizado com apenas dois testes modais SISO (uma entrada e uma saída – “single input - single output”). Contudo, possui a restrição de ter sua precisão inversamente proporcional ao nível de amortecimento no sistema, ou seja, aplica-se para sistemas giroscópicos com amortecimento desprezível ou levemente amortecidos e também requer que a única causa de acoplamento entre os graus de liberdade seja devido ao efeito giroscópico. O método é descrito em detalhes a seguir.

A Equação do movimento 5.1 pode ser reescrita, no caso livre, como:

$$[M] \begin{Bmatrix} \{\ddot{y}\} \\ \{\ddot{z}\} \end{Bmatrix} + ([C] + [G(\Omega)]) \begin{Bmatrix} \{\dot{y}\} \\ \{\dot{z}\} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} \{y\} \\ \{z\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (5.54)$$

em que $[C]$ é a matriz de amortecimento e $[G(\Omega)]$ representa a matriz giroscópica.

Considerando o sistema sem amortecimento e que o acoplamento entre as equações seja devido unicamente às forças giroscópicas presentes, a Equação 5.54 pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} [M_{yy}] & [0] \\ [0] & [M_{zz}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{y}\} \\ \{\ddot{z}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [G_0(\Omega)] \\ -[G_0(\Omega)]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{y}\} \\ \{\dot{z}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{yy}] & [0] \\ [0] & [K_{zz}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{y\} \\ \{z\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.55)$$

Pode-se mostrar que os autovalores do sistema giroscópico não-amortecido são puramente imaginários e surgem em pares complexos conjugados (Géradin e Rixen, 1997; Ginsberg, 2001). Neste caso, Wang e Kirkhope (1994) mostraram que cada autovetor à direita deste sistema pode ser escrito como $\{u\} = \begin{Bmatrix} \{a\} \\ j\{b\} \end{Bmatrix}$, sendo $\{a\}$ e $\{b\}$ vetores contendo valores reais. A demonstração desta formulação dos autovetores é descrita a seguir.

A forma modal de um sistema giroscópico, em geral, pode ser escrita como:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{a_R\} + j\{a_I\} \\ \{b_R\} + j\{b_I\} \end{Bmatrix} \quad (5.56)$$

Logo, o problema de autovalor do sistema da Equação 5.55 pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} [K_{yy}] - \omega^2[M_{yy}] & j\omega[G_0(\Omega)] \\ -j\omega[G_0(\Omega)]^T & [K_{zz}] - \omega^2[M_{zz}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a_R\} + j\{a_I\} \\ \{b_R\} + j\{b_I\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (5.57)$$

a qual fornece quatro equações matriciais:

$$([K_{yy}] - \omega^2[M_{yy}]) \{a_R\} - \omega[G_0(\Omega)] \{b_I\} = \{0\} \quad (5.58)$$

$$([K_{yy}] - \omega^2[M_{yy}]) \{a_I\} + \omega[G_0(\Omega)] \{b_R\} = \{0\} \quad (5.59)$$

$$([K_{zz}] - \omega^2[M_{zz}]) \{b_R\} + \omega[G_0(\Omega)]^T \{a_I\} = \{0\} \quad (5.60)$$

$$([K_{zz}] - \omega^2[M_{zz}]) \{b_I\} - \omega[G_0(\Omega)]^T \{a_R\} = \{0\} \quad (5.61)$$

Das Equações 5.60 e 5.61, obtém-se:

$$\{b_R\} = -\omega([K_{zz}] - \omega^2[M_{zz}])^{-1} [G_0(\Omega)]^T \{a_I\} \quad (5.62)$$

$$\{b_I\} = \omega([K_{zz}] - \omega^2[M_{zz}])^{-1} [G_0(\Omega)]^T \{a_R\} \quad (5.63)$$

Substituindo as Equações 5.62 e 5.63 nas Equações 5.58 e 5.59, obtém-se:

$$\left([K_{yy}] - \omega^2[M_{yy}] - \omega^2[G_0(\Omega)]([K_{zz}] - \omega^2[M_{zz}])^{-1}[G_0(\Omega)]^T \right) \{a_R\} = \{0\} \quad (5.64)$$

$$\left([K_{yy}] - \omega^2[M_{yy}] - \omega^2[G_0(\Omega)]([K_{zz}] - \omega^2[M_{zz}])^{-1}[G_0(\Omega)]^T \right) \{a_I\} = \{0\} \quad (5.65)$$

Comparando-se as Equações 5.64 e 5.65, percebe-se que as soluções são proporcionais entre si, ou seja.

$$\{a_I\} = \alpha \{a_R\} \quad (5.66)$$

Substituindo a Equação 5.66 na Equação 5.62, e comparando com a Equação 5.63, obtém-se:

$$\{b_R\} = -\alpha \{b_I\} \quad (5.67)$$

Introduzindo a Equação 5.66 e 5.67 na Equação 5.56, chega-se a:

$$\{u\} = (1 + j\alpha) \begin{Bmatrix} \{a_R\} \\ j\{b_I\} \end{Bmatrix}, \quad (5.68)$$

e dividindo $\{u\}$ por $(1+j\alpha)$, tem-se:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{a\} \\ j\{b\} \end{Bmatrix}, \quad (5.69)$$

sendo que $\{a\}$ e $\{b\}$ são vetores reais de dimensão N . Analisando a Equação 5.69, verifica-se que os autovetores são reais no plano $y-x$ e puramente imaginários no plano $z-x$, respectivamente (Wang e Kirkhope, 1994).

Segundo Ewins (2000) e Ginsberg (2001), os autovetores à esquerda do sistema giroscópico não-amortecido são iguais aos complexos conjugados do autovetor à direita. Portanto, o autovetor à esquerda do sistema descrito pela Equação 5.55 pode ser escrito como:

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} \{a\} \\ -j\{b\} \end{Bmatrix} \quad (5.70)$$

Substituindo as Equações 5.69 e 5.70 na Equação 5.11, tem-se:

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^{4N} \frac{\begin{Bmatrix} \{a\}_r \\ j\{b\}_r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\}_r^T \\ -j\{b\}_r^T \end{Bmatrix}^T}{(j\omega - \lambda_r)} = \sum_{r=1}^{4N} \frac{\begin{bmatrix} \{a\}_r \{a\}_r^T & -j\{a\}_r \{b\}_r^T \\ j\{b\}_r \{a\}_r^T & \{b\}_r \{b\}_r^T \end{bmatrix}}{(j\omega - \lambda_r)} \quad (5.71)$$

Logo,

$$[H_{yy}(\omega)] = \sum_{r=1}^{4N} \frac{\{a\}_r \{a\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} \quad ; \quad [H_{zz}(\omega)] = \sum_{r=1}^{4N} \frac{\{b\}_r \{b\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} \quad (5.72a)$$

$$[H_{yz}(\omega)] = \sum_{r=1}^{4N} \frac{-j\{a\}_r \{b\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} \quad ; \quad [H_{zy}(\omega)] = \sum_{r=1}^{4N} \frac{j\{b\}_r \{a\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} \quad (5.72b)$$

Portanto, obtendo-se uma linha ou uma coluna da matriz $[H_{yy}(\omega)]$, determinam-se os elementos dos vetores $\{a\}_r$. Da mesma forma, obtendo-se uma linha ou uma coluna da matriz $[H_{zz}(\omega)]$, determinam-se os elementos dos vetores $\{b\}_r$. Assim sendo, conhecendo-se $\{a\}_r$ e $\{b\}_r$, pode-se determinar as matrizes $[H_{yz}(\omega)]$ e $[H_{zy}(\omega)]$, pois estas são funções de $\{a\}_r$ e $\{b\}_r$, conforme Equações 5.72b. Então, com uma análise modal SIMO ou com duas análises modais SISO (uma na direção y e outra na direção z) pode-se determinar toda a matriz de FRF do sistema rotativo sob estudo.

Após a obtenção das matrizes $[H_{yy}(\omega)]$, $[H_{zz}(\omega)]$, $[H_{yz}(\omega)]$ e $[H_{zy}(\omega)]$, as matrizes de FRF direcionais $[H_{pg}(\omega)]$ e $[H_{p\hat{g}}(\omega)]$ são determinadas usando as Equação 5.26 e então a direcionalidade dos modos, estimados previamente, pode ser identificada visualmente pelos gráficos das dFRFs.

As restrições do método descrito nos parágrafos anteriores são que este se aplica de forma exata em sistemas não-amortecidos e que a única causa de acoplamento entre os graus de liberdade seja devido ao efeito giroscópico. Por outro lado, para sistemas levemente amortecidos,

esta técnica ainda fornece resultados satisfatórios, através da transformação de vetores complexos para reais, como descrito no parágrafo a seguir.

No caso de sistemas levemente amortecidos, o procedimento de obtenção dos vetores modais é feito da seguinte maneira: após as FRFs serem medidas em uma análise modal realizada em uma direção, direção y , por exemplo; aplica-se um método de estimação de parâmetros para a identificação dos resíduos destas FRFs. Os resíduos ($a_{kr} \times a_{kr}$) estimados da FRF de *driving-point* na análise modal realizada não serão número reais, sendo que a_{kr} é o k -ésimo elemento do modo r . A partir da FRF de *driving-point* encontra-se o valor de a_{kr} complexo através da raiz quadrada dos resíduos estimados desta FRF. Em seguida, todos os outros elementos dos vetores modais são identificados a partir do conhecimento de a_{kr} . Porém, todos os elementos identificados serão números complexos, desta forma, realiza-se um procedimento de transformação de números complexos para reais. Nesta etapa, utiliza-se o procedimento usado tradicionalmente na análise modal de estruturas levemente amortecidas (Ibrahim, 1983), ou seja, usa-se a magnitude do elemento complexo com o sinal do co-seno de sua fase. Com este procedimento, encontra-se uma aproximação dos vetores reais $\{a\}_r$. O mesmo procedimento é realizado para a obtenção da estimativa dos vetores $\{b\}_r$, após análise modal na direção z . No Capítulo 6, são mostrados exemplos de aplicação desta técnica.

Capítulo 6

Análise Modal Complexa em Máquinas Rotativas – Resultados Numéricos e Experimentais

6.1. Introdução

Neste capítulo, inicialmente, será revisada a instrumentação utilizada para a realização da análise modal em máquinas rotativas, ou seja, serão discutidas as formas de medir a resposta e a excitação na análise modal tradicional e complexa em máquinas rotativas. Em seguida, são apresentados resultados de simulação numérica de análise modal utilizando o método proposto no Capítulo 5, e então esta metodologia é aplicada em resultados experimentais obtidos de uma bancada rotor-eixo-mancais. Finalmente, discute-se o assunto da existência de modos naturais mistos.

6.2. Medição das Respostas na Análise Modal em Máquinas Rotativas

Os transdutores usados para medir as respostas em um sistema rotor-mancais são geralmente os acelerômetros e sensores de proximidade indutivos (“eddy current probes”). Os primeiros são usados para medir as respostas nos mancais e também no eixo, caso sejam usadas buchas. Os sensores de proximidade (Figura 6.1) são transdutores sem contato usados para medir o deslocamento de uma estrutura vibrante (rotativa ou não). A operação destes sensores baseia-se em princípios eletromagnéticos. Basicamente, um sinal de alta frequência, em torno de 1,5 MHz (Ehrich, 1992), é gerado no Oscilador-Demodulador (denominado em inglês por “probe driver” ou “proximitor”) e enviado à ponta do sensor gerando um campo magnético na mesma. Com

aproximação de uma superfície metálica (do eixo, por exemplo) há a geração de correntes parasitas (“eddy currents”) na superfície metálica dissipando energia no campo magnético, enfraquecendo o sinal do oscilador-demodulador. Esta mesma unidade (“proximitor”) lineariza este sinal dentro de uma certa faixa de operação. Este sinal linearizado possui componentes AC e DC. A componente AC representa o movimento da superfície metálica em relação à ponta do sensor (isto é, uma vibração relativa), ao passo que a componente DC representa a distância média entre a superfície metálica e o sensor. Ambas as componentes fornecem informações importantes. No entanto, a componente AC é realmente a de interesse para medição de vibração (Lin, 1997; Vance, 1988). Neste caso, o sinal DC pode se eliminado com a inclusão de um filtro passa-alta ou de um “subtrator” de voltagem na cadeia de medição.

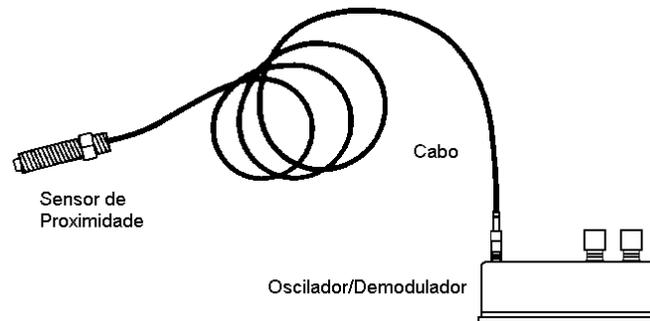


Figura 6.1 - Sensor de proximidade conectado ao seu oscilador-demodulador (Vance, 1988).

6.3. Métodos de Excitação na Análise Modal em Máquinas Rotativas

Nesta seção é apresentado um resumo dos mecanismos e formas de aplicação da força de excitação nos rotores tanto para análise modal tradicional quanto para a análise modal complexa.

Os métodos de excitação usados na análise modal em estruturas estacionárias podem ser usados, com restrições, na análise modal em estruturas rotativas. Nordmann (1984) utilizou excitação impulsiva com um martelo de impacto e sensores de proximidade ao longo do rotor para a medição das FRFs. Embora a excitação com o martelo de impacto permita facilidade na locomoção da excitação em uma estação à outra, além de não ser necessário que nenhum dispositivo fique em contato permanente com o rotor, o seu uso possui algumas desvantagens, tais como: problemas com a repetibilidade e precisão dos impactos; insuficiência de energia no

sistema; possibilidade de excitar não-linearidades; e a probabilidade de causar forças de entrada tangenciais, que pode resultar em erros na medição das FRFs (Corelli e Brown, 1984; Roger e Ewins, 1989; e Joh e Lee, 1993). Por outro lado, Kessler e Kim (1999) usaram um martelo de impacto com um sensor de força triaxial em sua ponta de modo que a força tangencial induzida por atrito também fosse medida. As forças axial e tangencial foram combinadas para formar a excitação complexa na análise modal complexa. Para o controle da direção, foi confeccionado um mecanismo de pêndulo simples para alcançar boa repetibilidade.

O uso do excitador eletromagnético (*shaker*) requer a inserção de um dispositivo tal como um rolamento ou uma bucha entre o eixo do rotor e o transdutor de força, devido a não possibilidade do transdutor ser fixado diretamente ao eixo. O transdutor de força é fixado à parte estacionária da bucha e ao *stinger*, que por sua vez está fixado ao excitador. A principal vantagem do uso do *shaker* é o controle do sinal de excitação. Por outro lado, como desvantagens, têm-se as dificuldades em se mover a excitação de uma estação a outra, a inserção da bucha no sistema, que poderá mudar as características dinâmicas do mesmo, e o compromisso contraditório deste dispositivo entre permitir o livre deslizamento do rotor e minimizar o espaço entre o mesmo para garantir a transmissibilidade integral da força aplicada pelo *shaker* (Roger e Ewins, 1989; e Joh e Lee, 1993).

Muszynska (1986) e Bently e Muszynska (1986) desenvolveram uma técnica de excitação não-síncrona para a identificação de parâmetros. A técnica é baseada no uso de uma força circular não-síncrona com limitada largura de banda de frequência e independente da frequência de rotação do eixo. Esta força circular é gerada em um rotor auxiliar que possui um disco com um desbalanceamento ajustável. Embora este mecanismo auxiliar permita o fácil controle da força em magnitude e fase, ele é limitado em largura de banda de frequência e também não há uma praticidade no manuseio do mesmo.

O mancal magnético ativo é um dispositivo sofisticado, recente, que substitui mancais convencionais em algumas máquinas de alta velocidade. Este tipo de mancal pode ser usado para aplicar e medir a força no eixo ao mesmo tempo em que o suporta. Possui a vantagem de não estar em contato com o rotor e permitir uma precisa medição da força. Tipicamente, duas forças

por mancal podem ser aplicadas (excitação bidirecional), logo, este mecanismo de excitação pode ser usado na análise modal complexa. Como desvantagens têm-se, além da dificuldade de locomoção da excitação, há a possibilidade de haver a variação da força de excitação devido a força eletromagnética ser afetada pela dinâmica do eixo (Bucher e Ewins, 2001)

No caso da análise modal complexa com o uso do excitador eletromagnético, existem diferentes formas de aplicação da força de excitação, devido a análise modal complexa requerer o uso de excitações complexas. Nos trabalhos de Joh e Lee (1993) e Lee e Joh (1993) são analisadas três técnicas de excitação em um rotor: excitação unidirecional, excitação rotativa bidirecional e excitação estacionária bidirecional. Estas técnicas de excitação são descritas no Apêndice B, que também mostra a metodologia de obtenção da estimativa da dFRF ao se usar a excitação estacionária bidirecional.

6.4. Descrição da Bancada Experimental e Modelo Numérico

A bancada usada para a análise modal (Figura 6.2) consiste de um motor elétrico de 3 CV, um acoplamento, rotor consistindo de dois discos idênticos, um eixo flexível e dois mancais de rolamento. As dimensões e características destes elementos são: comprimento do eixo = 0,720 m, raio do eixo = 0,0085 m, raio do disco = 0,090 m, espessura do disco = 0,020 m, discos afastados de 0,0360 m e distantes 0,180 m de cada mancal.

Com estes dados, foi feito um modelo de elementos finitos (Figura 6.3) da bancada no X-Rotor com as seguintes características: 23 elementos, 22 nós, eixo e disco possuindo módulo de elasticidade (aço) = $2,11 \times 10^{11}$ N/m², coeficiente de Poisson = 0,3 e massa específica = 7800 kg/m³.

De acordo com algumas medidas experimentais de resposta ao desbalanceamento e de FRFs para rotação nula (Mesquita *et al*, 2003), os coeficientes de rigidez e amortecimento foram identificados serem iguais a: coeficiente de rigidez no acoplamento: $k_{yy} = 4 \times 10^5$ N/m e $k_{zz} = 4 \times 10^5$ N/m; coeficientes de rigidez nos mancais: $k_{yy} = 1 \times 10^7$ N/m e $k_{zz} = 5 \times 10^6$ N/m; coeficientes de amortecimento no acoplamento e nos mancais: $c_{yy} = 2$ N/sm e $c_{zz} = 2$ N/sm. Com estes valores de rigidez e amortecimento, o modelo forneceu o Diagrama de Campbell mostrado

na Figura 6.4. Na figura seguinte (Figura 6.5) estão apresentados os quatro primeiros modos naturais de vibração do sistema na rotação de 40 Hz.

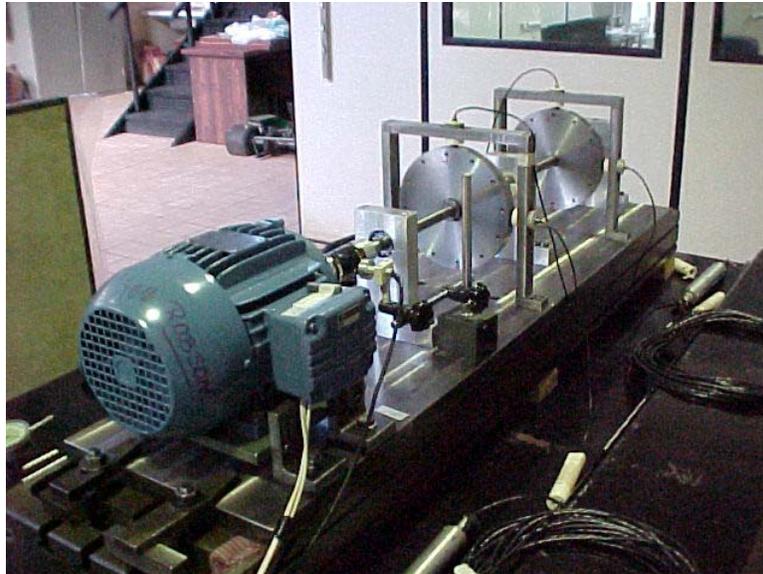


Figura 6.2 – Bancada experimental II.

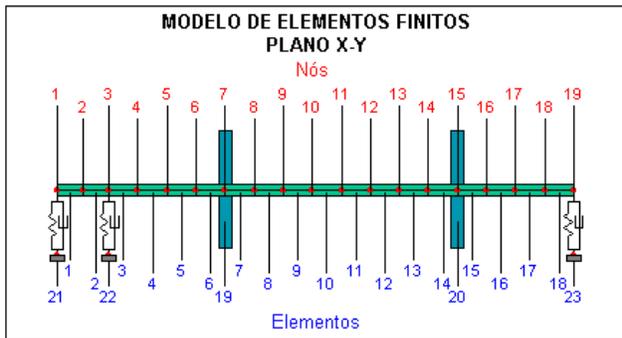


Figura 6.3 – Modelo de Elementos Finitos.

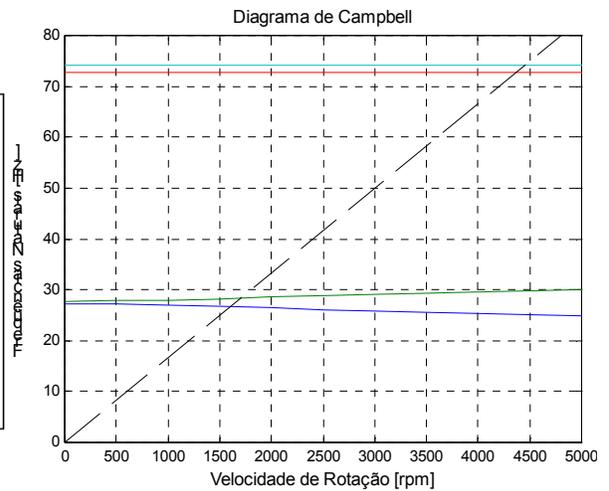


Figura 6.4 – Diagrama de Campbell.

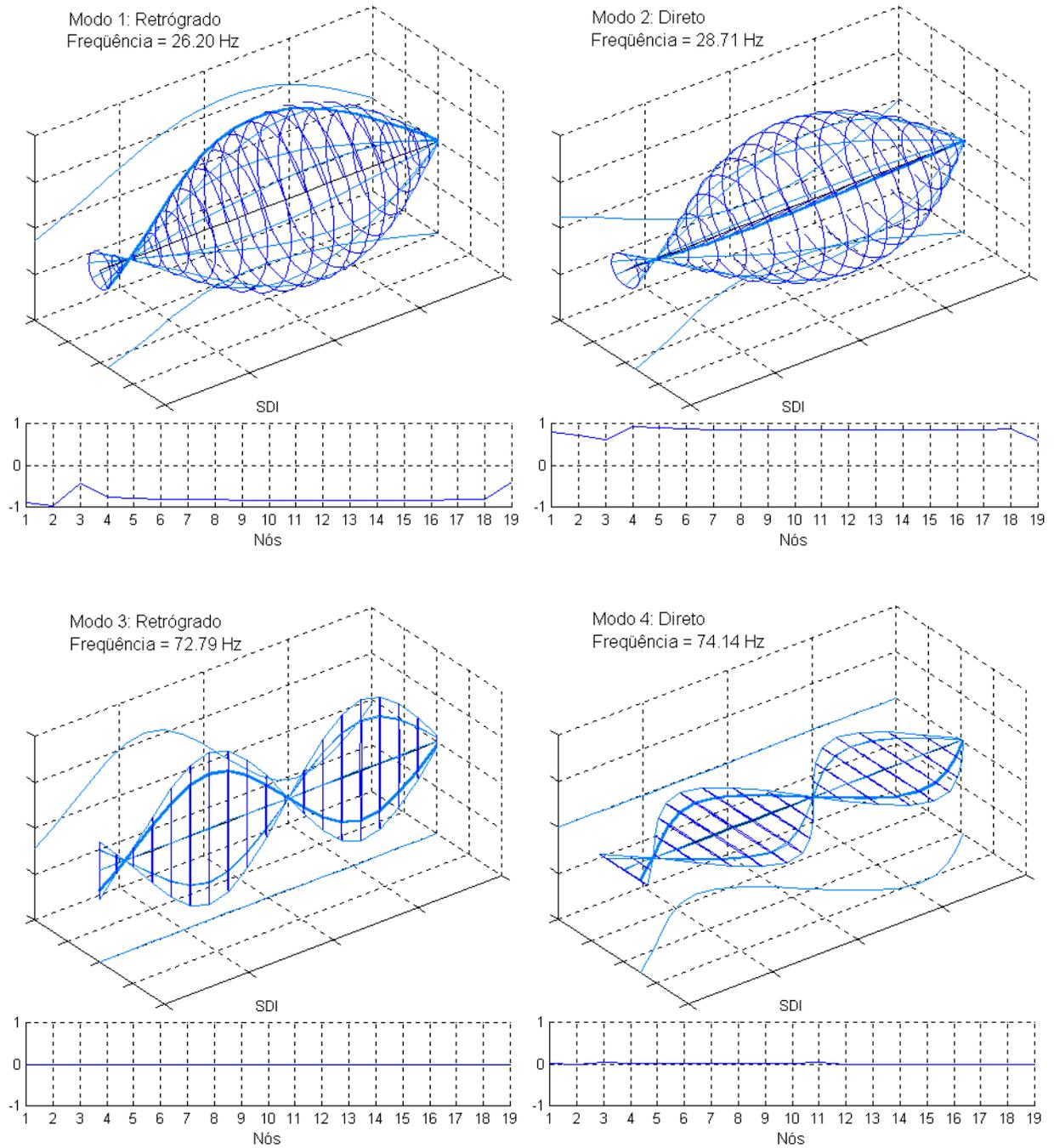


Figura 6.5 – Quatro primeiros modos do modelo da bancada.

De acordo com as formas modais da Figura 6.5, pode-se verificar que o terceiro modo possui deslocamento significativo em uma direção (direção z) e o quarto modo possui deslocamento predominante na direção perpendicular (direção y). Os dois primeiros modos

possuem deslocamentos significativos em ambas direções. Pode-se também verificar que o nó 11 (nó central, entre os discos) é quase um ponto nodal para o terceiro e quarto modos.

6.5. Obtenção dos Modos Naturais

De posse do modelo ajustado, foram obtidas algumas FRFs deste modelo para aplicação da metodologia apresentada na seção 5.6 do Capítulo 5 (método baseado no trabalho de Wang e Kirkhope (1994)). As FRFs obtidas simulam dois testes modais SISO: o primeiro realizado na direção y e o segundo na direção z . Em ambos casos, utilizou-se como *drive-point* (para simulação de excitação) o nó 5 e para as respostas foram usados os nós 5, 7, 11, 15 e 17 (ver localização dos nós na Figura 6.3). Na Figura 6.6 estão mostradas algumas destas FRFs.

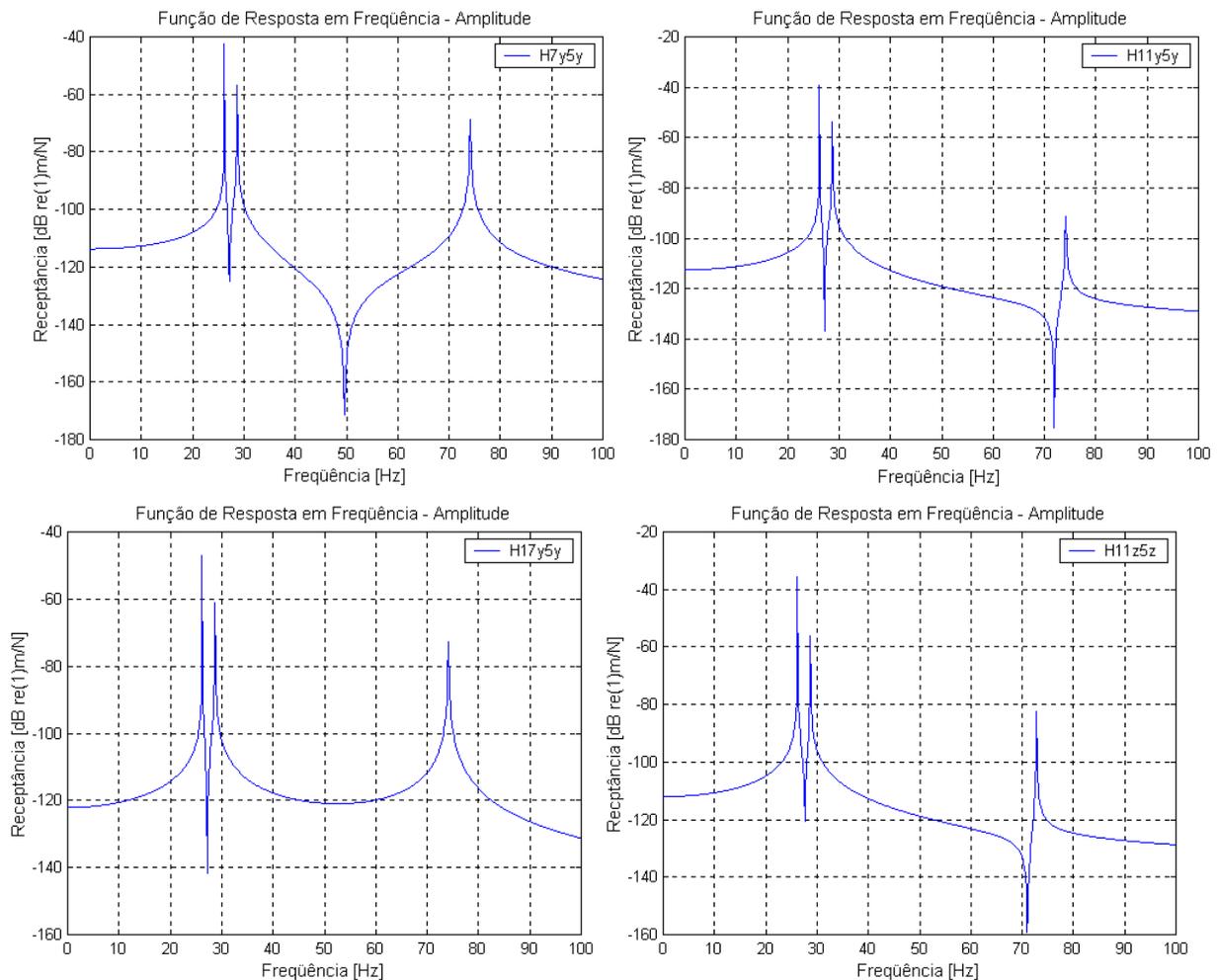


Figura 6.6 – Gráficos de algumas FRFs obtidas através do modelo da bancada experimental.

Nos gráficos das FRFs que envolvem o nó 11 (H_{11z5z} e H_{11y5y}), pode-se notar que estas funções possuem baixa amplitude para o terceiro e quarto modos. Estes não surgiriam, caso o nó 11 fosse exatamente um ponto nodal.

De posse dos dados destas FRFs aplicou-se o método de identificação de parâmetros RFP (“Rational Fraction Polynomial Method”) (Richardson e Fomenti, 1982) para a identificação dos pólos e resíduos das FRFs. De posse dos resíduos complexos, aplicou-se o método proposto na Seção 5.6 e então os vetores modais foram estimados. Na Figura 6.7 estão apresentados os vetores modais exatos contendo apenas os deslocamentos dos nós usados na análise, e na Figura 6.8 estão mostrados os vetores modais estimados utilizando o método proposto.

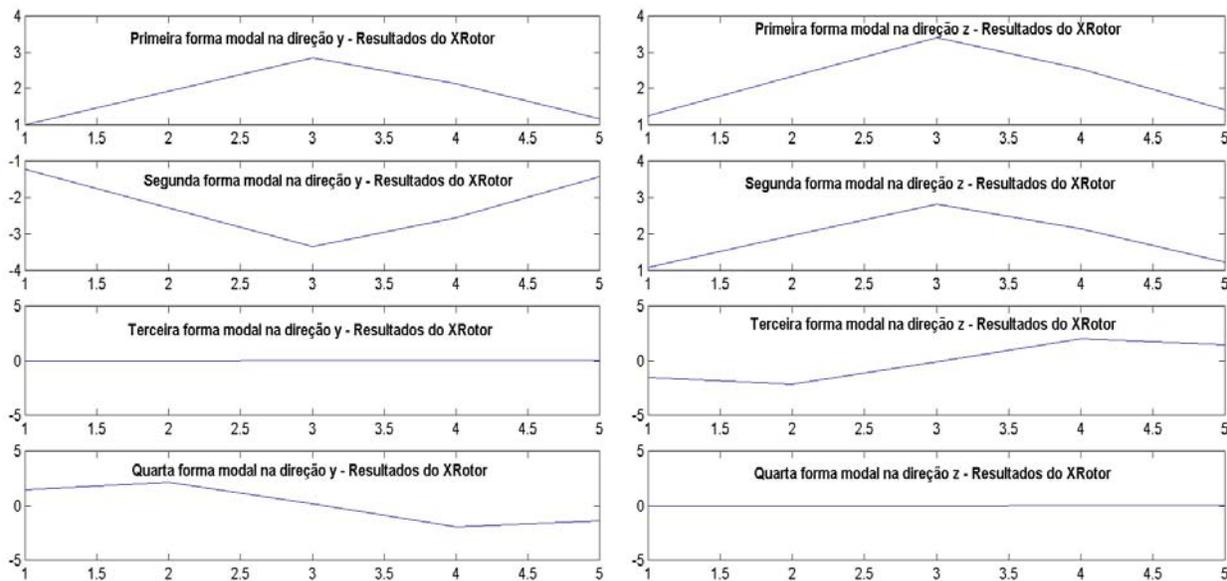


Figura 6.7 – Vetores modais exatos contendo os deslocamentos dos cinco nós usados na análise.

Pode-se perceber que há uma boa concordância entre os vetores modais exatos e os estimados. Esta boa correlação entre os vetores pode-se ser visualizada qualitativamente através do gráfico do MAC (Allemang e Brown, 1982) mostrado na Figura 6.9.

No gráfico do MAC, pode-se perceber que além da alta correlação na diagonal principal, há também alta correlação entre os 1^o e 2^o modos e também com o 3^o e 4^o modos. Isto é óbvio, pois as formas modais destes modos são bem parecidas (como mostra a Figura 6.5), mas, diferindo no sentido da direção da rotação.

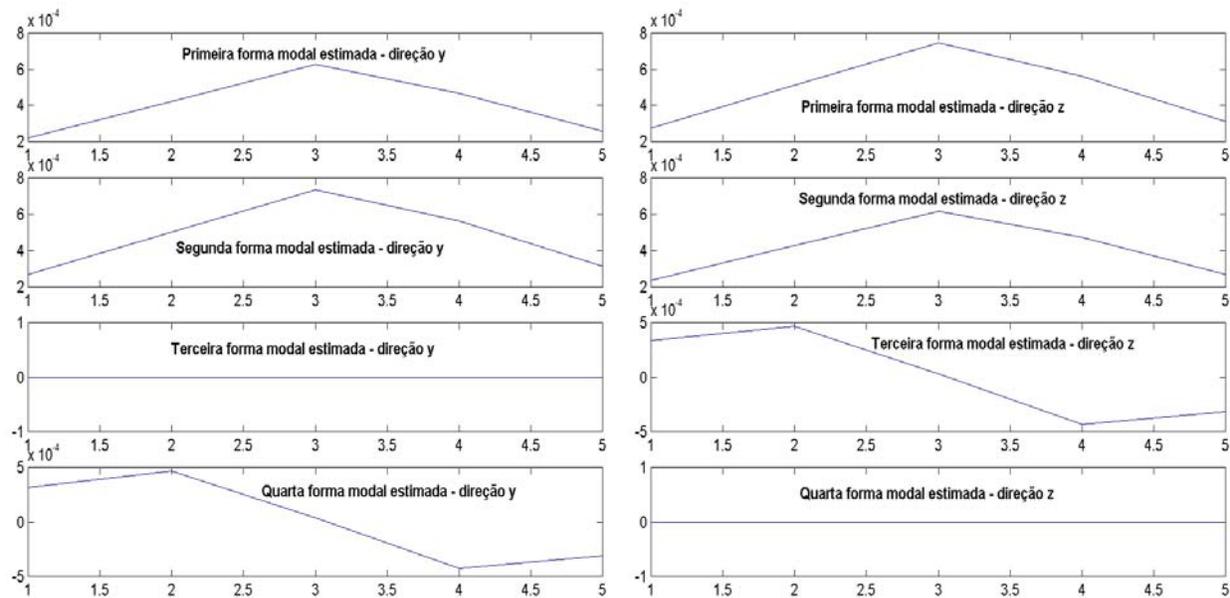


Figura 6.8 – Vetores modais estimados.

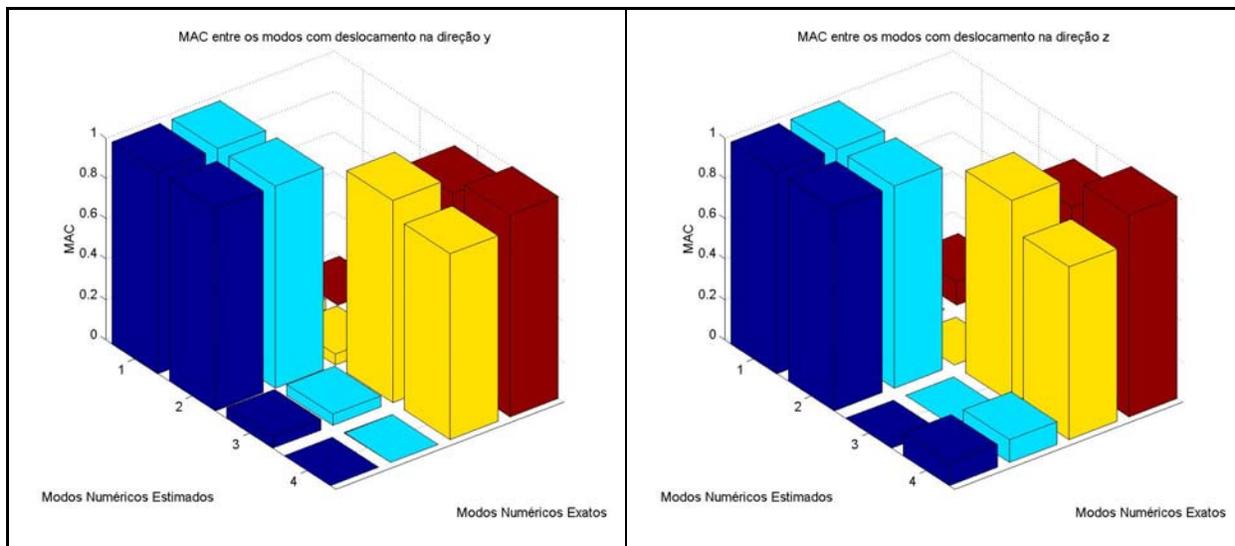


Figura 6.9 – MAC entre os modos numéricos regenerados e os modos numéricos exatos.

De posse dos vetores modais estimados, regenera-se as FRFs (de acordo com as Equações 5.72) e então pode-se obter as dFRFs através das expressões mostradas nas Equações 5.26 e 6.1. Através dos gráficos destas dFRFs é possível identificar a direção dos modos.

6.6. Resultados Experimentais e Identificação de Parâmetros Modais

A instrumentação utilizada nas análises modais na bancada mostrada na Figura 6.2 estão representadas na Figura 6.10.

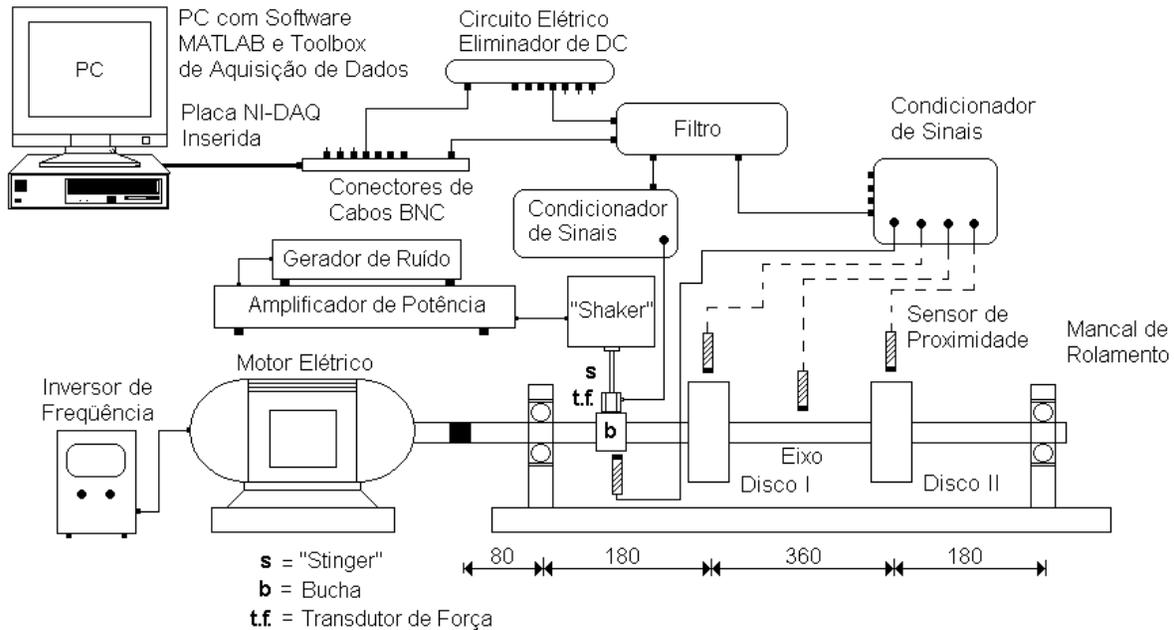


Figura 6.10 – Representação da instrumentação utilizada nos testes modais.

Nos experimentos, por meio de um gerador de sinais, um sinal aleatório era enviado ao excitador, passando antes por seu amplificador de potência. Para que o *shaker* pudesse excitar o eixo rotativo, foi utilizada uma bucha de acrílico com um anel interno de bronze grafitado. O transdutor de força era fixado na peça estacionária de acrílico, enquanto que o eixo girava internamente ao anel de bronze. Detalhes da bucha e do transdutor de força são visualizados nas Figuras 6.11a e 6.11b.

Foram realizadas duas análises modais SISO: primeiramente a excitação era aplicada na direção vertical e as respostas sendo captadas uma a uma nas cinco estações também na direção vertical; depois os experimentos foram repetidos, porém utilizando a direção horizontal. Os pontos de medição correspondem aos mesmos citados na análise numérica da seção anterior. As Figuras 6.12a e 6.12b mostram mais detalhes da instrumentação utilizada.

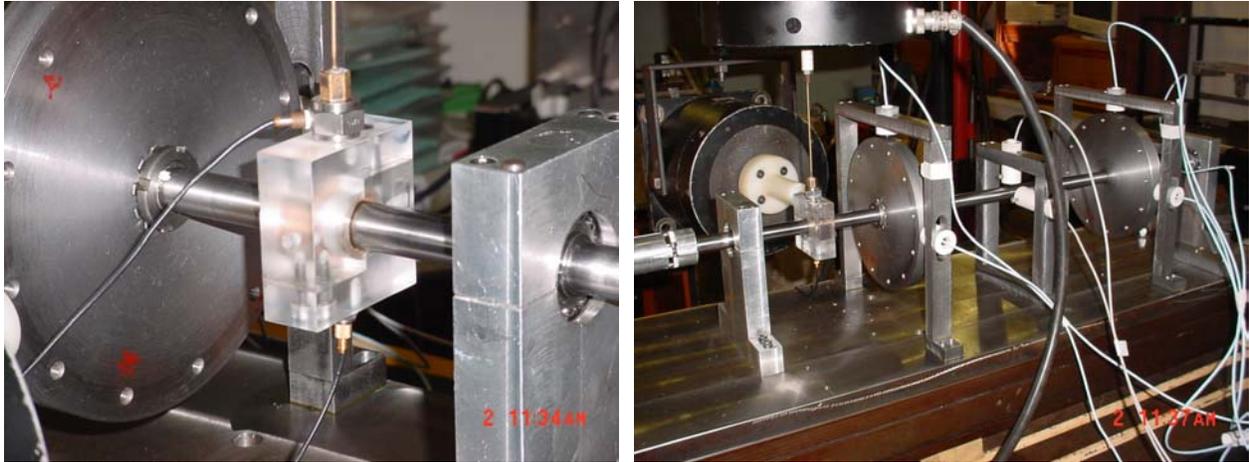


Figura 6.11 – (a) Detalhe da bucha e transdutor de força utilizados nos experimentos; (b) Visão expandida da utilização da bucha e dos sensores de vibração.



Figura 6.12 – (a) Detalhe da instrumentação utilizada: (a) Vista do motor elétrico e *shaker*; (b) Sensores de proximidade, cabos e os condicionadores dos sensores.

A rotação do eixo da bancada era controlada por um inversor de frequência *Newtronic* – FVR040E7S-2EX conectado ao motor elétrico WEG de 3 CV / 2,2 kW. Nos experimentos sempre foi mantida a rotação em 40 Hz.

O sinal de força medido pelo transdutor de força B&K 8200, após condicionado, era então filtrado em 400 Hz por um filtro passa baixa Kemo –VBF/8. Após filtrado, o sinal era enviado a placa de aquisição da *National Instruments* para então ser digitalizado e gravado através de comandos da *toolbox* de aquisição de dados do *Matlab*®.

Os sinais de resposta foram medidos por sensores de proximidade da *Bently Nevada*. Estes sinais de resposta, após condicionados, eram enviados ao filtro passa-baixa, para evitar *aliasing*. Em seguida, os sinais eram enviados a um circuito elétrico, o qual minimizava o nível DC dos sinais. Finalmente, os sinais eram adquiridos através da placa de aquisição e então disponíveis para serem tratados no *Matlab*®.

Na aquisição de dados foram escolhidos os seguintes parâmetros:

- Frequência de amostragem: 1024 Hz
- Janelas Utilizadas nos Sinais: *Hanning*
- Faixa de frequência utilizada: 100 Hz
- Frequência de Corte do Filtro Anti-Aliasing: 400 Hz
- Período de análise (*time record*): 3 s
- Número de pontos: 3072
- % de “overlapping”: 90
- Velocidade de rotação: 40 Hz (2400 rpm)
- *Drive-Point*: Na estação 1: Estação localizada antes do primeiro disco.
- Pontos de medição de resposta: *Drive-point*, Disco 1, Entre os discos, Disco 2 e Próximo ao segundo mancal. Pontos estes correspondentes aos pontos usados nas análises numéricas.

Depois de processadas as funções de densidades espectrais obteve-se os dados experimentais das FRFs através do estimador H1 (Ewins, 2000). Algumas destas FRFs estão mostradas na Figura 6.13. Os pontos de medição foram escolhidos serem coincidentes com os usados na simulação numérica. Nestas FRFs pode-se perceber o pico correspondente à frequência de rotação (40 Hz), que corresponde à resposta ao desbalanceamento. Este pico trouxe problemas na etapa de identificação de parâmetros, ou seja, quando se aplicava o método da RFP (*Rational Fraction Polynomial Method*) (Richardson e Fomenti, 1982), este considerava o pico como sendo um modo de vibração. Para eliminar este problema fez-se uma filtragem digital nos dados das FRFs. Como este pico ficava distante dos modos de interesse, esta filtragem não afetou a qualidade dos resultados. A Figura 6.14 mostra a primeira FRF da Figura 6.13 depois de filtrada em 40 Hz.

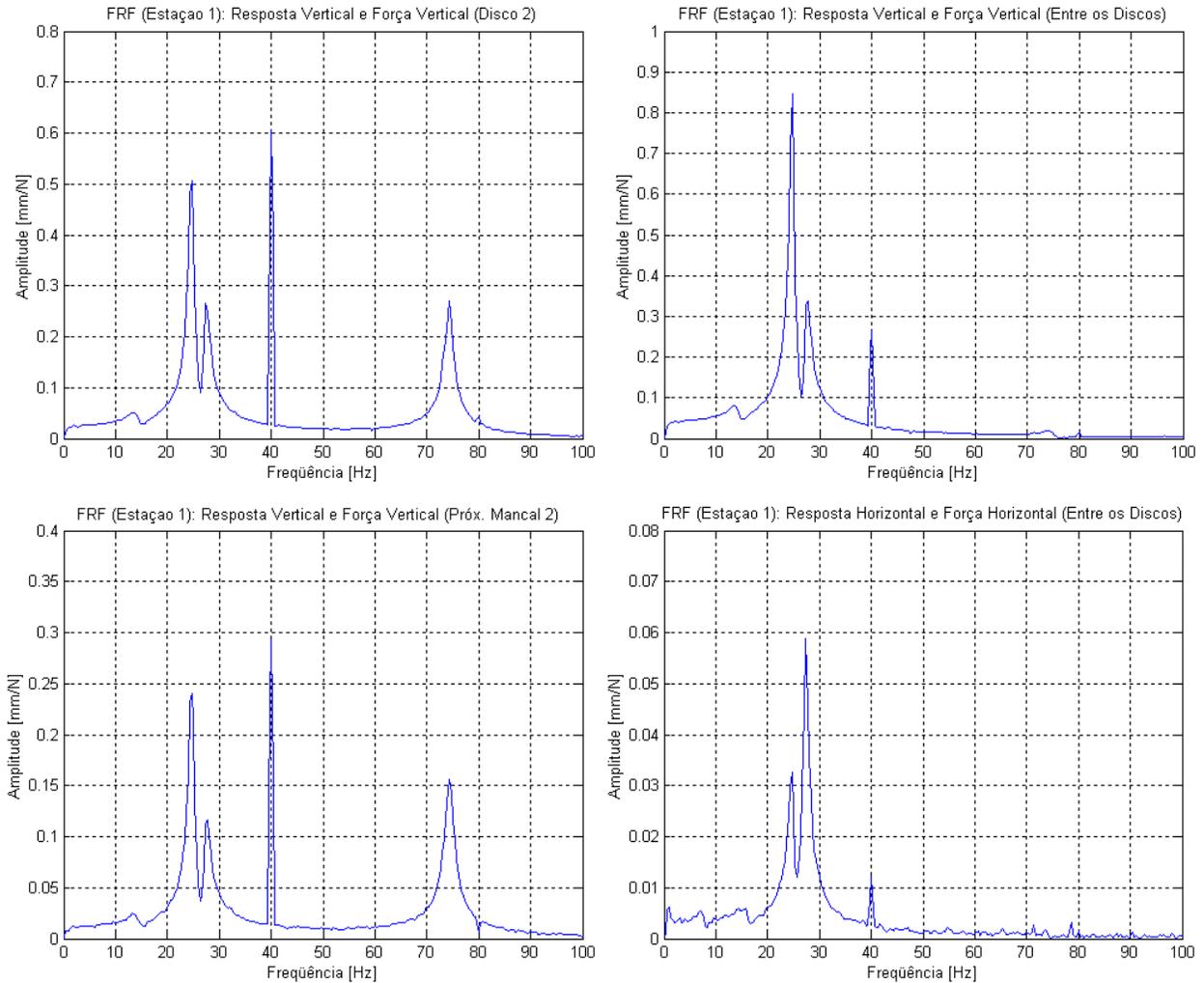


Figura 6.13 – Algumas funções de resposta em frequência obtidas nos testes modais.

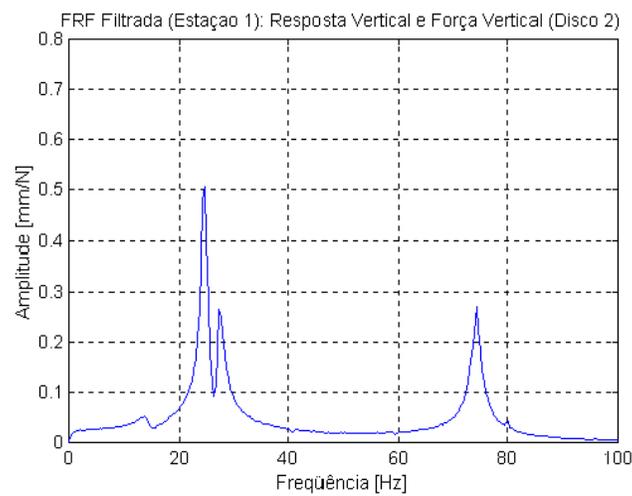


Figura 6.14 – FRF depois de filtrada digitalmente em 40 Hz. Esta FRF corresponde a excitação vertical e resposta vertical no segundo disco.

De posse dos dados destas FRFs, analogamente ao caso numérico da seção anterior, aplicou-se o método de identificação de parâmetros RFP para a identificação dos pólos e resíduos das FRFs. De posse dos resíduos complexos, aplicou-se o método descrito no Capítulo 5 (método baseado no trabalho de Wang e Kirkhope (1994)) e então as frequências naturais e os vetores modais foram estimados. As frequências naturais obtidas foram: 24,73 Hz, 27,37 Hz, 73, 84 Hz e 74,45 Hz. Os vetores modais estimados para cada direção estão mostrados nas Figuras 6.15 e 6.16.

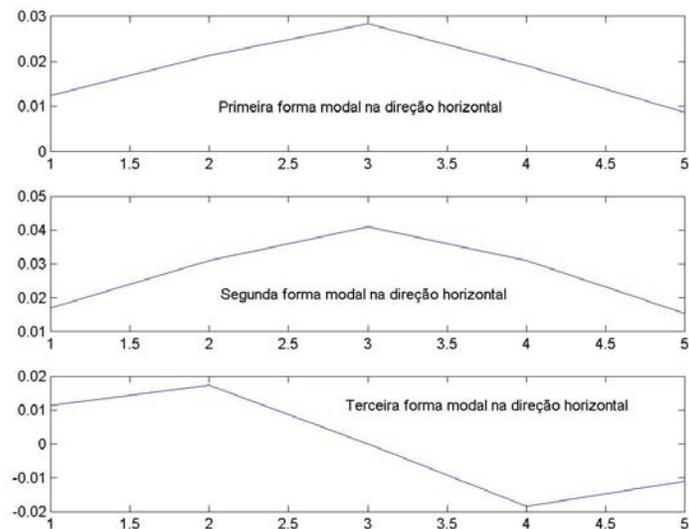


Figura 6.15 – As três primeiras formas modais do sistema rotativo na direção horizontal. A quarta forma modal é igual a zero.

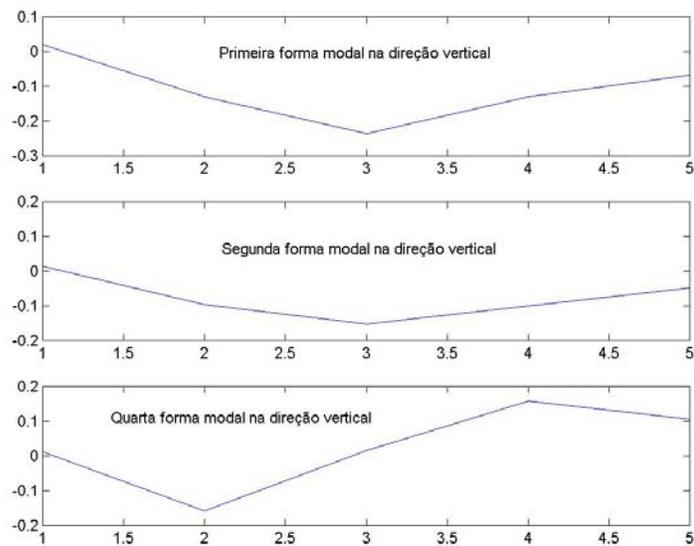


Figura 6.16 – Primeira, segunda e quarta formas modais do sistema rotativo na direção vertical. A terceira forma modal é igual a zero.

6.7. Sobre a Existência de Modos Naturais Mistos

Até o presente momento não se tem conhecimento na literatura científica a respeito do surgimento de modos naturais mistos - modos com algumas estações com movimento natural no sentido direto e outras estações com movimento natural no sentido retrógrado - em sistemas rotor-mancais, com a exceção dos trabalhos de Mircea Rades (1994,1995). Contudo, ambos os trabalhos tratam com resultados de simulação numérica. Em Rades (1994) são apresentados os modos naturais nas velocidades críticas de um rotor em balanço. Para verificação dos resultados, fez-se aqui a mesma análise. Na Figura 6.17 estão mostrados o modelo do sistema e o respectivo diagrama de Campbell.

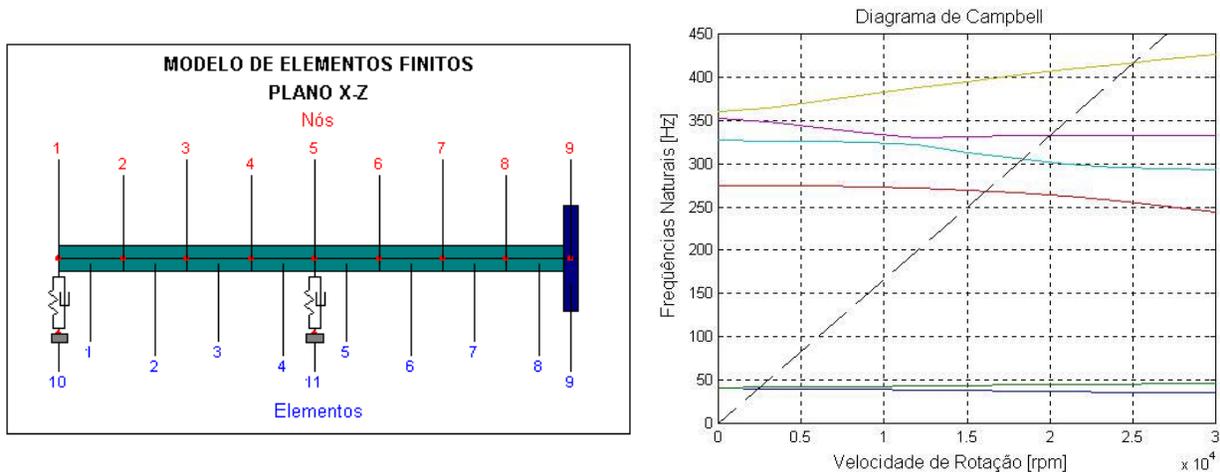


Figura 6.17 – Modelo de elementos finitos e diagrama de Campbell.

Na Figura 6.18 estão mostrados os modos naturais em cada velocidade crítica, obtidos através do X-Rotor. Além das formas modais, também são mostrados os valores do *SDI* das estações para cada modo, sendo que, neste caso, o *SDI* relaciona os movimentos de precessão direta e retrógrada como resposta do sistema livre (ver Equação 3.11, no Capítulo 3) e não mais como resposta ao desbalanceamento, como foi inicialmente definido o *SDI*. Pode-se perceber que no 3^o, 4^o e 5^o modos existem estações com movimentos naturais na direção retrógrada e direta simultaneamente, conforme mostram os valores do *SDI*. Portanto, nesta simulação numérica, modos naturais mistos ocorrem.

Os modelos numéricos das bancadas utilizadas nos experimentos ao longo deste trabalho não mostraram o surgimento de modos naturais mistos. Portanto, não foi possível identificar este tipo de modo experimentalmente. Para este fim deverá ser construída uma bancada em que previamente já se saiba da existência de tais modos.

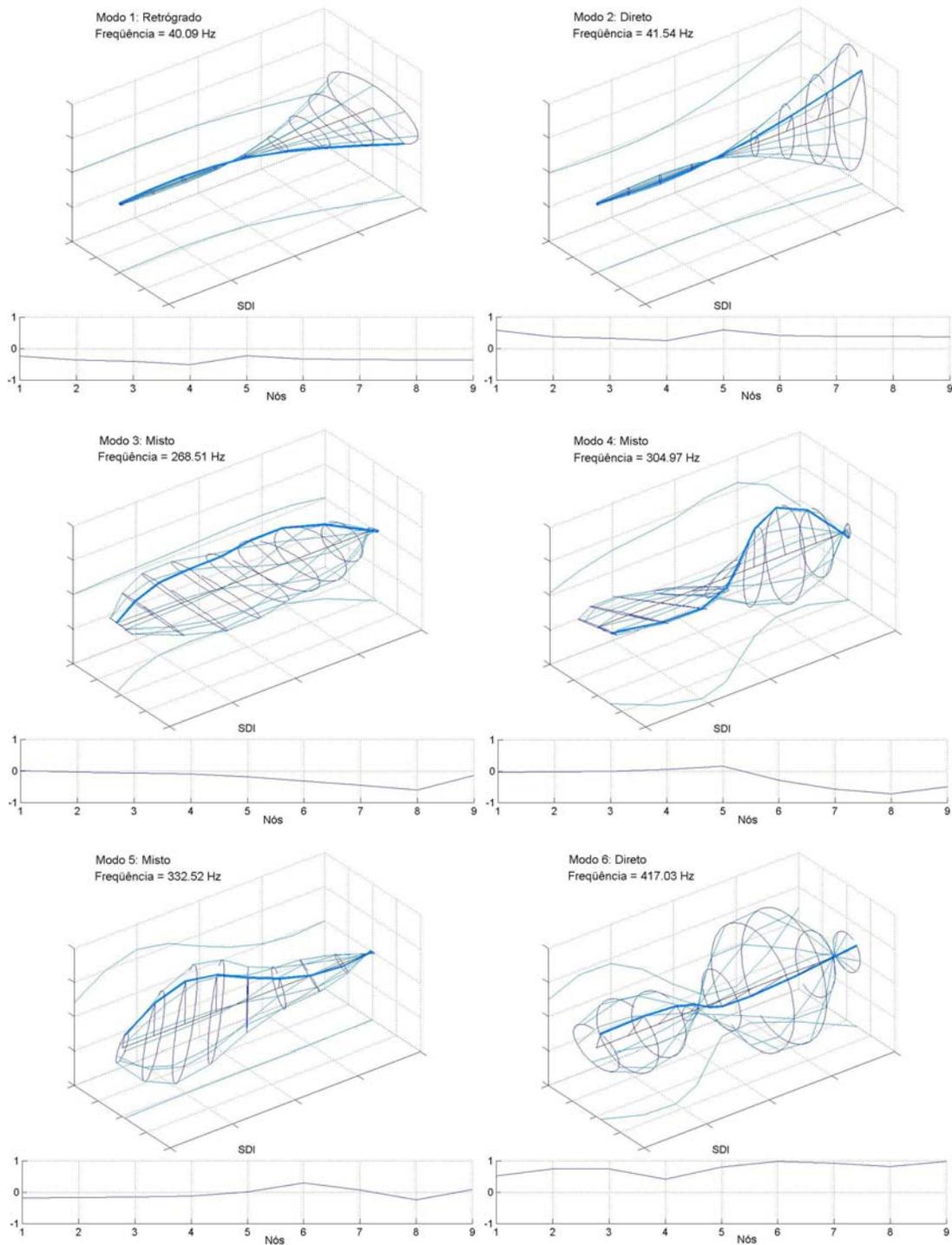


Figura 6.18 - Formas modais naturais nas velocidades críticas.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Futuros Trabalhos

7.1. Conclusões

Neste trabalho, inicialmente, foram mostradas as vantagens em se usar as coordenadas complexas na descrição do movimento de sistemas rotativos. Com o uso destas coordenadas, torna-se possível a determinação das componentes de precessão direta e de precessão retrógrada, e desta forma possibilita-se determinar o formato da órbita e direção do movimento de precessão. Com esta abordagem, as frequências negativas possuem significado físico, tornando mais fácil a compreensão do comportamento dinâmico do sistema rotativo sob estudo.

Em seguida, apresentou-se uma metodologia de identificação dos movimentos de precessão, de modelos de máquinas rotativas, baseada no gráfico do *SDI* em função da rotação. Através deste gráfico, pôde-se identificar a ocorrência dos modos operacionais mistos. Nesta análise numérica, vários parâmetros foram avaliados de forma a identificar a influência destes na ocorrência deste especial tipo de modo operacional. Concluiu-se que, além da anisotropia dos mancais e do efeito giroscópico, a distribuição espacial do desbalanceamento também influencia no surgimento dos modos mistos. Por outro lado, o aumento do amortecimento no sistema faz diminuir as faixas de frequência correspondentes a movimentos de precessão retrógrada e conseqüentemente, pode vir a eliminar o movimento de precessão misto. A ocorrência dos modos operacionais mistos foi identificada experimentalmente em uma bancada de testes. Nesta análise experimental, foi verificada a influência da distribuição espacial do desbalanceamento no surgimento dos modos mistos

Para se identificar experimentalmente as faixas de frequência em que ocorrem os modos mistos é vantajoso obter resultados prévios de simulações numéricas. Sem a informação de modelos numéricos, a identificação experimental pode se tornar um processo demorado, sendo realizado por tentativas. Neste trabalho, é proposto um método para se identificar estas faixas de frequências de uma maneira mais eficaz. O método é baseado na análise do mapa de ordem direcional (mapa de ordens negativas e positivas) do sistema, ou seja, analisa-se o movimento do sistema, descrito por coordenadas complexas, durante sua partida através da aplicação da técnica da TVDFT (*Time Variant Discrete Fourier Transform*) de *order tracking*, modificada para tratar sinais complexos. A metodologia é descrita através de uma simulação numérica da partida de um rotor De Laval. Em seguida o método é aplicado em um sistema real, e neste caso, foram identificadas algumas faixas de frequências em que ocorrem modos mistos. Verificou-se novamente a influência da distribuição do desbalanceamento no surgimento destes modos. Quanto às desvantagens do método, pode-se citar o uso da alta taxa de amostragem para que o sinal do tacômetro seja bem estimado, e conseqüentemente, para que a curva de rotação instantânea seja bem precisa. Devido a esta alta taxa de amostragem, os dados de vibração possuem um número de amostras bastante grande, acarretando em um maior esforço computacional para realizar a análise.

Após as análises dos modos operacionais, analisam-se as teorias envolvidas na realização de teste modal em sistemas rotativos, tanto da análise modal tradicional, usada em sistemas não-rotativos, adaptada para sistemas rotativos, como da análise modal complexa, desenvolvida por Chong-Won Lee (1990, 1991), que trata os sinais de resposta e de excitação do sistema como sinais complexos. Esta última metodologia, não muito utilizada na comunidade científica, é revista e apresentada em uma maneira de mais fácil entendimento. No desenvolvimento da teoria da análise modal complexa, pôde ser verificado o interessante caso em que o sistema apresenta pares de autovetores complexos, mas não conjugados, devido às matrizes do sistema serem complexas e não-hermetianas. Em seguida, faz-se uma análise comparativa entre as FRFs e as dFRFs visando a identificação da direcionalidade dos modos naturais de vibração. Finalmente, é proposto um método que leva em conta as vantagens das duas metodologias de análise modal. Este método consiste em identificar, através das FRFs medidas, os parâmetros modais de uma estrutura rotativa e então, com as FRFs regeneradas, determinam-se as dFRFs, pelas quais a

direcionalidade dos modos é identificada. O método também possui a vantagem de ser realizado com apenas dois testes modais SISO (uma entrada e uma saída – *single input - single output*). Contudo, possui a restrição de ter sua precisão inversamente proporcional ao nível de amortecimento no sistema, assim, ela é adequada para aplicação em sistemas giroscópicos com amortecimento desprezível ou levemente amortecidos e também requer que a única causa de acoplamento entre os graus de liberdade seja devido ao efeito giroscópico. Este procedimento é verificado através de aplicação em casos numérico e experimental.

Finalmente, pode-se resumir e concluir que as principais contribuições deste trabalho foram:

- Mostrar a identificação do modo operacional misto e a análise dos parâmetros que influenciam na ocorrência e desaparecimento destes modos;
- Apresentar uma metodologia de identificação da ocorrência dos modos operacionais mistos durante a partida da máquina. O método proposto é baseado na adaptação da técnica TVDFT de *order tracking* para tratar com sinais complexos;
- Apresentar a fundamentação matemática da análise modal complexa, a qual não é mostrada em detalhes na literatura, e compará-la com a teoria clássica da análise modal em máquinas rotativas;
- Apresentar um método de identificação de parâmetros modais adequado para aplicação em rotores com amortecimento desprezível ou levemente amortecidos, possuindo efeito giroscópico.

7.2. Sugestões para Futuros Trabalhos

A seguir, são citadas algumas sugestões para futuros trabalhos relacionados com a pesquisa desenvolvida neste trabalho.

- Analisar o *SDI Plot* para rotores suportados por mancais hidrodinâmicos, cujos parâmetros de rigidez e amortecimento são variáveis com a rotação da máquina;
- Modelar o eixo levando-se em conta um possível empenamento deste, para avaliar o seu efeito na ocorrência dos modos mistos;

- Realizar uma análise de sensibilidade dos parâmetros que influenciam na ocorrência dos modos operacionais mistos;
- Realizar a modelagem do rotor com elemento sólido a fim de avaliar os níveis de tensão envolvidos;
- Implementar a técnica de aplicação de uma distribuição tempo-frequência (*Wigner-Ville*, por exemplo) nos dados não estacionários de vibração da máquina durante sua partida e assim determinar a curva de velocidade instantânea. Desta forma, dispensa-se o uso do tacômetro, eliminando a necessidade de amostrar os sinais com altas taxas de amostragem na técnica da *order tracking*;
- Implementar numericamente a estimação da dFRF e o algoritmo de identificação de parâmetros modais nestas dFRFs. Em seguida realizar a análise modal complexa utilizando diversos métodos de excitação para efeito de análise de comparação;
- Implementar a inversa de Transformada de Fourier das dFRF, e analisar o significado físico do sinal resultante. Em seguida, adaptar os métodos de identificação de parâmetros no domínio do tempo para tratar com sinais complexos;
- Introduzir materiais compostos em eixos dos rotores e introdução de amortecimento interno no eixo para a diminuição das faixas de frequências de precessão retrógrada;
- Confeccionar uma bancada de máquinas rotativas cujo modelo apresente modos naturais mistos, para que estes possam ser medidos experimentalmente.

Referências Bibliográficas

- Allemang, R. J., Brown, D. L., A correlation coefficient for modal vector analysis. *Proceedings of the 1st IMAC*, v.2, pp. 110-116, 1982.
- Alvarado, A., *Concepção de uma bancada para análise de fenômenos rotativos*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica (PUC), 1999, Dissertação de Mestrado.
- Beer, F., Johnston, *Vector mechanics for engineers*. 4th Edition, New York: McGraw-Hill, 1984.
- Bently, D., Muszynska, A., Modal testing and parameter identification of rotating shaft/lubricated bearing system. *Proceedings of the 4th IMAC*, v.2, pp. 1393-1402, 1986.
- Blough, J., Brown, D., Vold, H., Order tracking with the time variant discrete Fourier transform. *Proc. Int. Sem. of Modal Analysis*, Belgium, pp.1515-1525, 1996.
- Blough, J., *Improving the analysis of operating data on rotating automotive components*. Cincinnati: University of Cincinnati, 1998, Ph.D. Dissertation.
- Bossley, K., McKendrick, R., Harris, C. e Mercer, C., Hybrid computed order tracking. *Mechanical Systems Signal Processing*, Vol.13(4), pp.627-641, 1999.
- Bucher, I., Ewins, D. J., Modal analysis and testing of rotating structures. *The Royal Society, Philosophical Transactions: Mathematical, Physical & Engineering Sciences*, January, v. 359(1778), pp.61-96, 2001.
- Chen, W. J., A note on computational rotor dynamics, *Transaction of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, January, Vol 120, pp 228-233, 1998.

- Cohen, L., *Time-frequency analysis*. New York: Prentice Hall, 1995.
- Crochiere, R., Rabiner, L., *Multirate digital signal processing*. New Jersey: Prentice Hall, 1983.
- Dias Jr., M., Allemang, R. J., Some insights into the simultaneous forward and backward whirling of rotors. *Proceedings of the 20th IMAC*, 2000.
- Dias Jr., M., Idehara, S. J., Mesquita, A. L. A., Miranda, U. A., On the simultaneous forward and backward whirling of flexible rotors: numerical analysis and experimental verification. *IFTToMM, 6th International Conference on Rotor Dynamics*, Sydney, Austrália, pp. 496-503, 2002.
- Dimarogonas, A., *Vibration for engineers*. 2th Edition, Prentice-Hall, 1996.
- Ehrich, F. F. (editor), *Handbook of rotordynamic*. New York: McGraw-Hill, 1992.
- Ewins, D.J., *Modal testing: theory and practice*. New York: John Wiley & Sons, 2000.
- Fyfe, K., Munck, D., Analysis of computed order tracking. *Mechanical System and Signal Processing*, v.11(2), pp. 187-205, 1997.
- Gash, R., Pützener, H. *Rotordynamik – Eine Einführung*. Springer-Verlag, 975
- Genta, G., *Vibration of structures and machines*. 3rd Edition, New York: Spring – Verlag, 1998.
- Géradin, M., Rixen, D., *Mechanical and structural vibrations – theory and application to structural dynamics*. John Wiley & Sons, 1997.
- Ginsberg, J., *Mechanical and structural vibrations: theory and applications*. John Wiley & Sons, 2001.
- Goldman, P., Muszynska, A., Application of full spectrum to rotating machinery diagnostics. *Orbit Magazine, First Quarter*, pp.17-21, 1999.
- Gutierrez-Wing, E. S., Ewins, D.J., Characterisation of rotating machinery dynamics within limited frequency interval using modal analysis. *IFTToMM, 6th International Conference on Rotor Dynamics*, Sydney, Austrália, pp. 486-495, 2002.

- Han, Y.S., Lee, C.W., Directional Wigner distribution for order analysis in rotating/reciprocating machines. *Mechanical System and Signal Processing*, 13(5), pp. 723-737, 1999.
- Hibeller, R.C., *Mecânica – dinâmica*. Editora Campus, 1985.
- Ibrahim, S. R., Computation of normal modes from identified complex modes. *AIAA Journal*, 21(3), pp. 446-451, 1983.
- Idehara, S. J., *Aplicação de técnicas de order tracking para a análise de máquinas e componentes rotativos*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), 2003, Dissertação de Mestrado.
- Jei, Y. G., Kim, Y. J., Modal testing theory of rotor-bearing system. *Trans. of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, v.115, pp.165-176, 1993.
- Joh, Y. D., Lee, C. W., Excitation methods and modal parameter identification in complex modal testing of rotating machinery. *Modal Analysis: The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, v.8(3), pp.179-203, 1993.
- Joh, Y.D., Lee, C.W., Excitation methods and modal parameter identification in complex modal testing of rotating machinery. *Int. J. Anal. Exp. Modal Anal.*, v.(3), pp. 179-203, 1993.
- Kessler, C., Kim, J., Complex modal analysis and interpretation for rotating machinery. *Proceedings of the 16th Int. Modal Analysis Conf.*, pp.782-787, 1998.
- Kessler, C., Kim, J., Complex modal analysis superposition for rotating machinery. *Proc. of the 17th Int. Modal Analysis Conf.*, pp.1930-1937. 1999.
- Kessler, C., Kim, J., Vibration analysis of rotors utilizing implicit directional information of complex variable descriptions. *Transaction of The ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, v.124, July, pp.340-349, 2002.
- Kessler, C., Kim, J., Concept of directional natural mode for vibration analysis of rotors using complex variable descriptions. *Journal of Sound and Vibration*, v.239(3), pp.545-555, 2001.

- Krämer, E., *Dynamics of rotor and foundations*. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- Lalanne, M., Ferraris, G., *Rotordynamics predictions in engineering, 2nd edition*. Chichester: John Wiley & Sons, 1998
- Lancaster, P., *Lambda-Matrices and vibrating systems*, Pergamon Press, 1966.
- Lee, C. W., A new test theory in rotating machinery. *Proceedings of the 8th IMAC*, pp.148-154, 1990.
- Lee, C. W., *Vibration analysis of rotors*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- Lee, C. W., Complex modal testing theory for rotating machinery. *Mechanical System and Signal Processing*, v.5(2), pp.119-137, 1991.
- Lee, C. W., Jei, Y. G., Modal analysis of a continuous rotor-bearing system. *Journal of Sound and Vibration*, v.126, pp.345-361, 1988.
- Lee, C. W., Joh, Y. D., Theory and excitation methods and estimation of frequency response function in complex modal testing of rotating machinery. *Mechanical System and Signal Processing*, v.7(1), pp.57-74, 1993.
- Lund, J. W., Modal response of a flexible rotor in fluid-film bearing. *Transaction of the ASME – Journal of Engineering for Industry*, pp.525-532, 1974.
- Maia, N. e Silva, J. (editores), *Theoretical and experimental modal analysis*. Research Studies Press, 1997.
- McDonald, D., Gribler, M., Digital resampling—a viable alternative for order domain measurements of rotating machinery. *Proceedings of International Modal Analysis Conference 9*, Italy, pp. 1270–1275, 1991.
- Meirovitch, L., *Element of vibration analysis*. McGraw-Hill, 1986.
- Mesquita, A.L.A., Idehara, S.J., Dias JR., M., Fundamentos da Reamostragem Digital na Análise de Ordem de Máquinas Rotativas. *1º Congresso Mundial de Manutenção & 17º Congresso Brasileiro de Manutenção*, Abraman, Salvador-Bahia, 2002.

- Mesquita, A. L. A, Santiago, D. F. A., Idehara, S. J., Pederiva, R., Dias JR., M., Validação de Modelo de Elementos Finitos de um Sistema Rotativo Através da Resposta ao Desbalanceamento e Função de Resposta em Freqüência, *VI Congresso Ibero-Americano de Engenharia Mecânica (CIBEM6)*, Coimbra, Portugal, 2003.
- Miranda, U. A., *Aplicação de métodos de análise tempo-freqüência ao estudo de sistemas rotativos*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), 2002, Dissertação de Mestrado.
- Miranda, U. A., Dias Jr., Mesquita, A. L. A., Idehara, S. J., On the application of directional time-frequency distribution to the identification of simultaneous forward and backward whirling in flexible rotors. *IFTOMM, 6th International Conference on Rotor Dynamics*, Sydney, Austrália, pp. 504-511, 2002.
- Muszynska, A., Forward and backward precession of a vertical anisotropically supported rotor. *Journal of Sound and Vibration*, v.192(1), pp.207-222, 1996.
- Muszynska, A., Modal testing of rotor/bearing systems. *Int. J. Anal. Exp. Modal Anal.*, v.1(3), pp. 15-34, 1986.
- Nelson, H. D., McVaugh, J. M., The dynamics of rotor-bearing system using finite element. *Journal of Engineering for Industry*, pp.593-600, 1976.
- Nordmann, R., Identification of modal parameter identification of an elastic rotor with oil film bearings. *Journal of Vib. Acoust. Stress Reliab. and Design, Trans of the ASME*, v.106, Jan, pp. 107-112, 1984.
- Potter, R., A new order tracking method for rotating machinery. *Sound and Vibration Magazine*, v.24(9), pp.30-34, 1990.
- Potter, R., Gribler, M., Computed order tracking obsoletes older methods. *Proc. of the SAE, SAE paper 891131*, pp. 63-67, 1989.
- Rades, M., Mixed precession modes of rotor-bearing systems, *Schwingungen in rotierenden Maschinen III*, Referate der Tagung an der Universität Kaiserslautern, 1995.

- Rades, M., Modal analysis of rotor-bearing systems using monophasic modal vectors. *Proceedings of 21 ISMA - Noise and Vibration International Conference*, Leuven, Belgium, pp. 1541-1541-1549, 1994.
- Rajalingham, C., Ganesan, N., Prabhu, B.S., Conditions for backward whirling motion of a flexible rotor supported on hydrodynamic journal bearings, *Journal of Sound and Vibration*, 111, 1986, pp. 29-36.
- Rao, C., Bhat, R. B., Xistris, G. D., Experimental verification of simultaneous forward and backward whirling at different points of a Jeffcott rotor supported on identical journal bearings. *Journal of Sound and Vibration*, v.128(3), pp.379-388, 1996.
- Rao, C., Bhat, R. B., Xistris, G. D., Simultaneous forward and backward whirling in a Jeffcott rotor supported on dissimilar hydrodynamic bearings. *Journal of Sound and Vibration*, v.203(4), pp.707-716, 1997.
- Richardson, M. H., Fomenti, D. L., Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomial. *Proceedings of the 1st IMAC*, pp.167-181, 1982.
- Rogers, P. J., Ewins, D. J., Modal testing of an operating rotor system using a structural dynamics approach. *Proceedings of the 7th IMAC*, pp.466-473, 1989.
- Souto, C. d'A., *Estudo do comportamento dinâmico de máquinas rotativas através da análise modal complexa*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), 2000, Dissertação de Mestrado.
- Thomson, W., Dahleh, M., *Theory of vibration with applications*. New Jersey: Prentice-Hall, 5th Edition, 1998.
- Wang, W., Kirkhope, J., New eigensolutions and modal analysis for gyroscopic/rotor system, part 1: undamped systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 175(2), pp. 159-170, 1994.
- Vance, J. M., *Rotordynamics of turbomachinery*. New York: John Wiley & Sons, 1988.

Vold, H., Leuridan, J., High resolution order tracking at extreme slew rates using Kalman tracking filters. *Proc. of the SAE, Noise and Vibration Conference, SAE Paper 931288*, pp.219-226, 1993.

Vold, H., Multi axle order tracking with the Vold-Kalman tracking filter. *Sound and Vibration Magazine*, May, pp.30-34, 1997.

Zhang, Q., Lallement, G., Experimental determination of eigensolutions of non self-adjoint mechanical structures. *Proceedings of the 3rd IMAC*, pp.466-473, 1985.

Zhang, Q., Lallement, G., Fillod, R., Relations between the right and left eigenvectors of non-symmetric structural models. Application to rotors. *Mechanical System and Signal Processing*, v.2(1), pp.97-103, 1988.

Apêndice A

Autovalores e Autovetores de Matrizes Complexas com Forma Especial

Seja o seguinte problema de autovalores em que o vetor $\{u\}$ é o autovetor associado ao autovalor λ :

$$(\lambda^2[M] + \lambda[D] + [K])\{u\} = \{0\} \quad (\text{A.1})$$

Se as matrizes $[M]$, $[D]$ and $[K]$ são reais (simétricas ou não), sabe-se que os autovalores e os autovetores, do sistema subamortecido, surgem em pares complexos conjugados. Contudo, se as matrizes são complexas com suas submatrizes dispostas como mostra a Equação A.2

$$\left(\lambda^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [M_2] \\ [\bar{M}_2] & [\bar{M}_1] \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} [D_1] & [D_2] \\ [\bar{D}_2] & [\bar{D}_1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] \\ [\bar{K}_2] & [\bar{K}_1] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \{u_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

verifica-se que os autovetores não mais surgem como complexos conjugados. A demonstração deste caso é apresentada a seguir.

Na equação (A.2), o vetor $\{\{u_1\} \{u_2\}\}^T$ é o autovetor associado ao autovalor λ . No entanto, deseja-se saber qual o autovetor associado com o complexo conjugado de λ . Para responder esta questão, primeiramente, decompõe-se a equação (A.2) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lambda^2([M_1]\{u_1\} + [M_2]\{u_2\}) + \lambda([D_1]\{u_1\} + [D_2]\{u_2\}) + ([K_1]\{u_1\} + [K_2]\{u_2\}) &= \{0\} \\ \lambda^2([\bar{M}_2]\{u_1\} + [\bar{M}_1]\{u_2\}) + \lambda([\bar{D}_2]\{u_1\} + [\bar{D}_1]\{u_2\}) + ([\bar{K}_2]\{u_1\} + [\bar{K}_1]\{u_2\}) &= \{0\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Fazendo o complexo conjugado da equação (A.3):

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^2([\bar{M}_1]\{\bar{u}_1\} + [\bar{M}_2]\{\bar{u}_2\}) + \bar{\lambda}([\bar{D}_1]\{\bar{u}_1\} + [\bar{D}_2]\{\bar{u}_2\}) + ([\bar{K}_1]\{\bar{u}_1\} + [\bar{K}_2]\{\bar{u}_2\}) &= \{0\} \\ \bar{\lambda}^2([M_2]\{\bar{u}_1\} + [M_1]\{\bar{u}_2\}) + \bar{\lambda}([D_2]\{\bar{u}_1\} + [D_1]\{\bar{u}_2\}) + ([K_2]\{\bar{u}_1\} + [K_1]\{\bar{u}_2\}) &= \{0\} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ou

$$\left(\bar{\lambda}^2 \begin{bmatrix} [\bar{M}_1] & [\bar{M}_2] \\ [M_2] & [M_1] \end{bmatrix} + \bar{\lambda} \begin{bmatrix} [\bar{D}_1] & [\bar{D}_2] \\ [D_2] & [D_1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\bar{K}_1] & [\bar{K}_2] \\ [K_2] & [K_1] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\bar{u}_1\} \\ \{\bar{u}_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Invertendo-se a ordem das submatrizes nas linhas e nas colunas (A.5), assim como invertendo a ordem dos subvetores no autovetor, não se altera o problema, logo:

$$\left(\bar{\lambda}^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [M_2] \\ [\bar{M}_2] & [\bar{M}_1] \end{bmatrix} + \bar{\lambda} \begin{bmatrix} [D_1] & [D_2] \\ [\bar{D}_2] & [\bar{D}_1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] \\ [\bar{K}_2] & [\bar{K}_1] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\bar{u}_2\} \\ \{\bar{u}_1\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Verifica-se que as matrizes de massa, rigidez e amortecimento da equação (A.6) são as mesmas da equação (A.2), portanto, correspondem ao mesmo sistema. Comparando as equações (A.2) e (A.6), por inspeção, verifica-se que o autovetor correspondente ao complexo conjugado do autovalor do problema (A.6) não é o complexo conjugado do autovetor em (A.2). Desta forma, provando, que neste caso especial de matrizes, os autovetores não aparecem em pares complexos conjugados.

Apêndice B

Técnicas de Excitação com o Uso do *Shaker* na Análise Modal Complexa e Estimativa das dFRFs ao se Utilizar Excitação Estacionária Bidirecional

A técnica de *excitação unidirecional* não difere das técnicas comumente usadas na análise modal clássica, em que as FRFs são obtidas a partir de sinais reais, tais como $H_{y_k y_i}$, $H_{y_k z_i}$, $H_{z_k y_i}$ e $H_{z_k z_i}$. As dFRFs H_{pg}^c e $H_{p\hat{g}}^c$ são determinadas usando as relações

$$\begin{aligned} 2[H_{pg}^c(\omega)] &= [H_{yy}(\omega)] + [H_{zz}(\omega)] - j([H_{yz}(\omega)] - [H_{zy}(\omega)]) \\ 2[H_{p\hat{g}}^c(\omega)] &= [H_{yy}(\omega)] - [H_{zz}(\omega)] + j([H_{yz}(\omega)] + [H_{zy}(\omega)]) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Portanto, o método necessita de $8N-4$ FRFs para um rotor anisotrópico, com N estações, para obter uma linha (coluna) de $[H_{pg}^c]$ e uma coluna (linha) de $[H_{p\hat{g}}^c]$. Ressalta-se que o método requer FRFs “two sided”. Por outro lado, para um rotor isotrópico com N estações, a direta transformação requer $2N$ FRFs convencionais para a obtenção de uma linha e uma coluna de $[H_{pg}^c]$, pois

$$\begin{aligned} H_{y_k y_i}(j\omega) &= H_{z_k z_i}(j\omega) \\ H_{y_k z_i}(j\omega) &= -H_{z_k y_i}(j\omega) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Desde que $H_{p_k g_i}^c$ e $H_{p_k \hat{g}_i}^c$ são obtidas a partir de duas excitações unidirecionais independentes, as funções de coerência associadas com estas duas dFRFs não são prontamente disponíveis e desta forma a qualidade das dFRFs pode não ser explicitamente verificada durante o experimento.

Excitação rotativa bidirecional é a excitação da frequência (frequências) de precessão direta ou retrógrada gerada por dois excitadores unidimensionais postos perpendicularmente um ao outro. Nesta técnica, a excitação direta ou retrógrada é aplicada em uma estação do rotor, enquanto os pares de resposta são medidos perpendicularmente na mesma e nas demais estações para a obtenção das dFRFs. A excitação circular de uma simples frequência rotativa direta ou retrógrada pode ser realizada através de uma excitação harmônica em uma direção e a outra com um atraso de fase de 90° na direção perpendicular. Isto é similar à técnica de perturbação não-síncrona desenvolvida por Muszynska e Bently (1986). Esta técnica não permite excitação simultânea de uma largura de banda negativa e positiva. Para obter dFRFs “two sided”, as excitações direta e retrógrada devem ser aplicadas sucessivamente e é necessário um especial mecanismo que possa gerar estas forças de precessão direta e retrógrada. O controle preciso das excitações direta e retrógrada não é tarefa fácil em muitos casos (Lee e Joh, 1993).

A *excitação estacionária bidirecional* é gerada por dois excitadores unidimensionais independentes colocados perpendicularmente em uma estação. Esta técnica, em essência, não difere da técnica clássica de duas entradas, em y e em z , exceto pelo uso de quantidades espectrais associadas a sinais complexos. Neste método, é necessário que as forças nas direções y e z não sejam completamente correlacionadas. No trabalho de Lee e Joh (1993) foi concluído que com esta forma de excitação, obteve-se a melhor estimativa da dFRF entre sinais complexos na presença de ruído. Esta excitação estacionária bidirecional é também conhecida como *Excitação Aleatória Bidirecional*, pois os sinais usados nos dois excitadores são aleatórios, ou também *Excitação Aleatória Isotrópica Não-Correlacionada*, pois as duas fontes aleatórias são independentes não-correlacionadas com igual densidade espectral (mesmo nível rms). Quando a anisotropia do sistema vem a ser nula, isto é, o sistema é isotrópico, apenas a excitação unidirecional é suficiente, com a resposta sendo medida nas direções perpendiculares.

Apesar das dFRFs obtidas na parte experimental deste trabalho não terem sido obtidas com a técnica de excitação estacionária bidirecional, neste Apêndice será apresentada a forma de obter a expressão das dFRFs utilizando este mecanismo de excitação, visando uma futura implementação.

No caso da técnica de excitação bidirecional estacionária, As expressões das estimativas das dFRFs são baseadas em um simples modelo de duas entradas complexas e uma saída complexa, como mostra o modelo da Figura B.1.

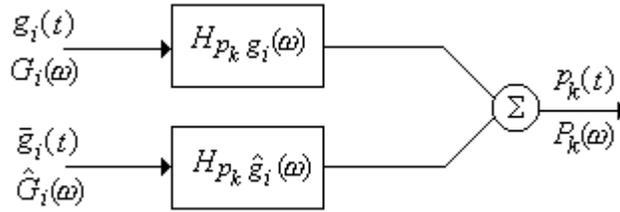


Figura B.1 – Modelo sem ruído, com duas entradas complexas / uma saída complexa.

Assumindo que as entradas complexas não são completamente correlacionadas e que não haja ruído, a relação entrada/saída é dada por:

$$P_k(\omega) = \{H_{p_k g_i}^c(\omega) \quad H_{p_k \hat{g}_i}^c(\omega)\} \begin{Bmatrix} G_i(\omega) \\ \hat{G}_i(\omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Pós-multiplicando a Equação (B.3) por $\{\overline{G}_i(\omega) \quad \overline{\hat{G}}_i(\omega)\}$ vem:

$$\{\overline{G}_i(\omega)P_k(\omega) \quad \overline{\hat{G}}_i(\omega)P_k(\omega)\} = \{H_{p_k g_i}^c(\omega) \quad H_{p_k \hat{g}_i}^c(\omega)\} \begin{bmatrix} \overline{G}_i(\omega)G_i(\omega) & \overline{\hat{G}}_i(\omega)G_i(\omega) \\ \overline{G}_i(\omega)\hat{G}_i(\omega) & \overline{\hat{G}}_i(\omega)\hat{G}_i(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Omitindo a dependência da frequência, a Equação (B.5) torna-se:

$$\{S_{g_i p_k}^c \ S_{\hat{g}_i p_k}^c\} = \{H_{p_k g_i}^c \ H_{p_k \hat{g}_i}^c\} \begin{bmatrix} S_{g_i g_i}^c & S_{\hat{g}_i g_i}^c \\ S_{g_i \hat{g}_i}^c & S_{\hat{g}_i \hat{g}_i}^c \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$\{H_{p_k g_i}^c \ H_{p_k \hat{g}_i}^c\} = \{S_{g_i p_k}^c \ S_{\hat{g}_i p_k}^c\} \begin{bmatrix} S_{g_i g_i}^c & S_{\hat{g}_i g_i}^c \\ S_{g_i \hat{g}_i}^c & S_{\hat{g}_i \hat{g}_i}^c \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{B.6})$$

$$\{H_{p_k g_i}^c \ H_{p_k \hat{g}_i}^c\} = \{S_{g_i p_k}^c \ S_{\hat{g}_i p_k}^c\} \frac{1}{(S_{g_i g_i}^c S_{\hat{g}_i \hat{g}_i}^c - S_{g_i \hat{g}_i}^c S_{\hat{g}_i g_i}^c)} \begin{bmatrix} S_{\hat{g}_i \hat{g}_i}^c & -S_{\hat{g}_i g_i}^c \\ -S_{g_i \hat{g}_i}^c & S_{g_i g_i}^c \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

A expressão para a dFRF direta $H_{p_k g_i}^c$ é igual a:

$$H_{p_k g_i}^c = \frac{S_{g_i p_k}^c S_{\hat{g}_i \hat{g}_i}^c - S_{\hat{g}_i p_k}^c S_{g_i \hat{g}_i}^c}{S_{g_i g_i}^c S_{\hat{g}_i \hat{g}_i}^c - |S_{g_i \hat{g}_i}^c|^2} \quad (\text{B.8})$$

Sabendo-se que a função de coerência direcional é dada por (Lee e Joh, 1993):

$$\gamma_{ik}^{c2}(\omega) = \frac{|S_{ik}^c(\omega)|^2}{S_{ii}^c(\omega) S_{kk}^c(\omega)} ; \quad i, k = r, \hat{r}, s, \hat{s}, \quad (\text{B.9})$$

logo,

$$H_{p_k g_i}^c = \frac{S_{g_i p_k}^c}{S_{g_i g_i}^c} \times \frac{1 - \frac{S_{\hat{g}_i p_k}^c S_{g_i \hat{g}_i}^c}{S_{g_i p_k}^c S_{\hat{g}_i \hat{g}_i}^c}}{1 - \gamma_{g_i \hat{g}_i}^{c2}} \quad (\text{B.10})$$

De modo análogo a dFRF retrógrada $H_{p_k \hat{g}_i}^c$ é dada por:

$$H_{pk\hat{g}_i}^c = \frac{S_{\hat{g}_i p_k}^c}{S_{\hat{g}_i \hat{g}_i}^c} \times \frac{1 - \frac{S_{g_i p_k}^c S_{\hat{g}_i g_i}^c}{S_{\hat{g}_i p_k}^c S_{g_i g_i}^c}}{1 - \gamma_{g_i \hat{g}_i}^{c2}} \quad (\text{B.11})$$

sendo que $\gamma_{g_i \hat{g}_i}^{c2} \neq 1$

Maiores detalhes acerca da fundamentação matemática de funções de densidade espectrais direcionais e dos métodos de estimação das dFRFs podem ser encontrados nos trabalhos de Joh e Lee (1993), Lee e Joh (1993) e também na dissertação de Souto (2000).