

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR *Renan Moro*  
*Tápias* ..... E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM *24 / 02 / 2012*

*Roberto Luiz Serpa*  
.....  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Renan Moro Tápias

# Controle Ativo de Vibrações em Estruturas Flexíveis com Incertezas Paramétricas

Campinas, 2012.

19/2012

Renan Moro Tápias

# **Controle Ativo de Vibrações em Estruturas Flexíveis com Incertezas Paramétricas**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

Campinas  
2012



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

# Controle Ativo de Vibrações em Estruturas Flexíveis com Incertezas Paramétricas

Autor: Renan Moro Tápias

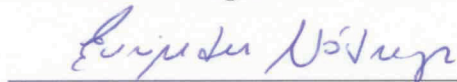
Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



---

Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, Presidente  
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP



---

Prof. Dr. Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega  
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP



---

Prof. Dr. Júlio Apolinário Cordioli  
Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC

Campinas, 24 de Fevereiro de 2012.

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente à minha família por estarem sempre ao meu lado, compartilhando felicidades e dando apoio nos momentos mais difíceis. Aos amigos do Departamento de Mecânica Computacional por estarem sempre presentes e aptos a ajudar em todos os momentos; agradeço a eles também, pela atmosfera criada dentro do laboratório trazendo um ambiente cheio de alegria e propício aos trabalhos.

Deixo também um agradecimento especial ao meu orientador, Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, pelo apoio e boa vontade sempre que necessário para o cumprimento dos trabalhos desenvolvidos.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

## Resumo

Tapias, Renan Moro. *Controle Ativo de Vibrações em Estruturas Flexíveis com Incertezas Paramétricas*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. 2012.

Esta dissertação aborda técnicas de controle robusto H-infinito para sistemas dinâmicos lineares com incertezas paramétricas. Para obtenção do modelo da estrutura em estudo, utiliza-se o método de elementos finitos. A partir do modelo da estrutura, consideram-se incertezas paramétricas, sendo elas, na frequência natural e no fator de amortecimento. As incertezas paramétricas quando consideradas para projeto do controlador H-infinito são tratadas pela abordagem politópica. Essa metodologia utiliza o conceito de Desigualdades Matriciais Lineares (LMI). Ainda na fase de projeto do controlador, filtros de ponderação são utilizados para impor uma certa forma em frequência. As incertezas dos sistemas em estudo são consideradas como sendo tanto variantes como invariantes no tempo. O controlador encontrado por essa metodologia se mostrou robusto a incertezas paramétricas, garantindo estabilidade e boa atenuação de vibração dos modos considerados em projeto.

*Palavras-chave:*

Controle H-infinito, Desigualdades Matriciais Lineares (LMI), Incertezas Paramétricas.

## **Abstract**

Tapias, Renan Moro. *Active Vibration Control of Flexible Structures with Parametric Uncertainties*. Master thesis. Faculty of Mechanical Engineering, University of Campinas. 2012.

The aim of this dissertation is to study the H-infinity robust control techniques for linear dynamic systems with parametric uncertainties. The finite element method was employed to find the model of the flexible structure. When dealing with the model, parametric uncertainties were considered for natural frequencies and for damping of the structure. The parametric uncertainties for the H-infinity controller design are handled in the polytopic approach. This methodology uses the concept of Linear Matrix Inequalities (LMI) for the controller project. Weighting filters were used to impose desired frequency response in the controller design. Systems with uncertainties were considered variant and invariant in time. The controller found using this methodology was robust to parametric uncertainties, ensuring stability and good attenuation of vibration in design the considered modes.

*Keywords:*

H-infinity Control, Linear Matrix Inequalities, Parametric Uncertainties.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução e referências bibliográficas</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução	1
1.2	Revisão Bibliográfica	2
1.3	Estrutura do Trabalho	4
<b>2</b>	<b>Estruturas flexíveis</b>	<b>5</b>
2.1	Introdução	5
2.2	Modelagem Nodal e Modal	5
2.2.1	Modelagem Nodal	6
2.2.2	Modelagem Modal	7
2.3	Modelagem por Elementos Finitos	9
2.3.1	Elemento de Viga	9
2.3.2	Elemento quadrilateral de placa	9
2.4	Amortecimento Proporcional	12
2.5	Programa de Elementos Finitos	12
<b>3</b>	<b>Controle <math>\mathcal{H}_\infty</math></b>	<b>13</b>
3.1	Introdução	13
3.2	Projeto $\mathcal{H}_\infty$	13
3.3	Breve Introdução sobre as Desigualdades Matriciais Lineares - LMI	16
3.4	Desigualdades Matriciais Lineares - LMI	17
3.5	Solução do problema $\mathcal{H}_\infty$ via LMI	17
<b>4</b>	<b>Filtros de ponderação</b>	<b>23</b>
4.1	Introdução	23
4.2	Modelo da Planta Aumentada em Espaço de Estados	24
4.3	Matriz de Transferência da Planta Aumentada	26
4.4	Escolha dos filtros de ponderação	28



<b>5</b>	<b>Projeto considerando incertezas paramétricas</b>	<b>29</b>
5.1	Introdução	29
5.2	Incertezas paramétricas - abordagem politópica	31
5.3	Sistema Linear Variante no Tempo	33
<b>6</b>	<b>Exemplo de aplicação 1: problema da viga engastada-livre</b>	<b>34</b>
6.1	Introdução	34
6.2	Modelo de elementos finitos	34
6.2.1	Incertezas consideradas	35
6.2.2	Modelo para Controle	36
6.2.3	Plantas com e sem Incertezas	37
6.2.4	Plantas Truncada - Filtros de ponderação	38
6.2.5	Controlador	39
6.3	Análise dos Resultados	40
6.4	Sistema Linear Variante no Tempo	49
6.5	Conclusões do Capítulo	50
<b>7</b>	<b>Exemplo de aplicação 2: vibração da placa livre</b>	<b>51</b>
7.1	Introdução	51
7.2	Modelo de elementos finitos	51
7.2.1	Incertezas consideradas	52
7.2.2	Modelo para Controle	53
7.2.3	Plantas com e sem Incertezas	53
7.2.4	Plantas Truncada - Filtros de ponderação	54
7.2.5	Controlador	55
7.3	Análise dos Resultados	56
7.4	Sistema Linear Variante no Tempo	65
7.5	Conclusões do Capítulo	66
<b>8</b>	<b>Conclusões e propostas para futuros trabalhos</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>O problema <math>\mathcal{H}_\infty</math> de otimização com restrição LMI</b>	<b>73</b>
A.1	Malha fechada com controlador dinâmico / realimentação de saída	75
A.1.1	Malha fechada para o caso geral	75
A.1.2	Caso particular de $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$	77
A.1.3	Caso de $\mathbf{D}_{22} \neq \mathbf{0}$ à partir do controlador projetado com $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$	77
A.1.4	Norma $\mathcal{L}_2$	79

A.1.5	Complemento de Schur	79
<b>B</b>	<b>Frequências naturais</b>	<b>80</b>
<b>C</b>	<b>Conjunto Convexo e Politopo, Definições</b>	<b>81</b>
<b>D</b>	<b>Criação do Sistema Linear Variante no Tempo</b>	<b>83</b>

## Lista de Figuras

2.1	Resposta em frequência típica de uma estrutura flexível.	6
2.2	Elemento de viga bidimensional.	9
2.3	Elemento em coordenadas naturais.	10
2.4	Graus de liberdade $(\theta_x, \theta_y, w)$ para cada nó - placa.	10
3.1	Representação do problema de controle na forma usual.	14
4.1	Exemplos de filtros de ponderação.	24
4.2	Exemplos de utilização de filtros de ponderação.	24
5.1	Diagrama de blocos de uma estrutura flexível.	29
5.2	Planta $P(s)$ .	30
5.3	Politopo formado pela variação de parâmetros do sistema.	31
5.4	Variação no tempo da matriz dinâmica $A$ .	33
6.1	Problema 1 - viga engastada-livre.	34
6.2	Graus de liberdade livres após a aplicação das condições de contorno.	35
6.3	Politopo formado pela variação de parâmetros do sistema.	36
6.4	Problema de controle considerado.	37
6.5	Resposta em frequência das plantas que formam os vértices do politopo.	37
6.6	Resposta em Frequência das plantas truncadas (1º modo) e dos filtros de ponderação.	39
6.7	Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 1.	41
6.8	Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 2.	41
6.9	Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 3.	42
6.10	Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 4.	42
6.11	Mapeamento dos pólos para os sistemas que formam os vértices do politopo.	43
6.12	Resposta em frequência da planta sem incertezas.	44
6.13	Mapeamento dos pólos para a planta sem incertezas.	44
6.14	Resposta temporal a uma varredura senoidal - Vértices do politopo.	46
6.15	Esforço de controle, resposta temporal a uma entrada de varredura senoidal - Vértices do politopo.	47

6.16	Resposta temporal a uma varredura senoidal - Planta sem incertezas.	48
6.17	Esforço de controle, resposta temporal a uma entrada de varredura senoidal - Planta sem incertezas.	48
6.18	Resposta temporal a uma varredura senoidal - Sistema linear variante e invariante no tempo.	49
7.1	Problema 2 - Vibração da placa livre.	51
7.2	Problema de controle.	53
7.3	Resposta em frequência das plantas que forma os vértices do politopo.	54
7.4	Resposta em Frequência das plantas truncadas e dos filtros de ponderação.	55
7.5	Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 1.	57
7.6	Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 2.	57
7.7	Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 3.	58
7.8	Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 4.	58
7.9	Mapeamento dos pólos para os sistemas que formam os vértices do politopo.	59
7.10	Resposta em frequência da planta sem incertezas.	60
7.11	Mapeamento dos pólos para a planta sem incertezas.	60
7.12	Resposta temporal a uma varredura senoidal - Vértices do politopo.	62
7.13	Esforço de controle, resposta temporal a uma entrada de varredura senoidal - Vértices do politopo.	63
7.14	Resposta temporal a uma varredura senoidal - Planta sem incertezas.	64
7.15	Esforço de controle, resposta temporal a uma entrada de varredura senoidal - Planta sem incertezas.	64
7.16	Resposta temporal a uma varredura senoidal - Sistema linear variante e invariante no tempo.	65
C.1	Exemplos de conjuntos convexos e não convexos e de envelope convexo.	82
D.1	Projeto em Simulink® para sistemas lineares variantes no tempo.	85
D.2	Criação da matriz dinâmica, $A$ , linear variante no tempo.	86
D.3	Sistema linear variante no tempo com controle.	87
D.4	Sistema linear variante no tempo sem controle.	88

## Lista de Tabelas

6.1	Valores aproximados para $w_n$ e $\xi$ dos 5 primeiros modos do sistema real sem incertezas.	35
6.2	Variação no $\xi$ e $w_n$ das plantas para o problema da viga engastada.	38
6.3	Valores utilizados em <i>options</i> do <i>mincx</i> na execução do problema.	40
6.4	Atenuação em relação ao sistema sem controle para cada umas das plantas consideradas.	45
7.1	Valores para $w_n$ e $\xi$ dos 5 primeiros modos do sistema real sem incertezas.	52
7.2	Variação no $\xi$ e $w_n$ das plantas para o problema da placa livre.	54
7.3	Atenuação em relação ao sistema sem controle para cada umas das plantas consideradas.	61

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Caracteres Arábicos

- $A$ : área
- $A$ : Matriz dinâmica
- $A_m$ : Matriz dinâmica modal
- $A_{mi}$ : Matriz dinâmica do modo  $i$
- $B$ : Matriz de entrada
- $B_m$ : Matriz de entrada modal
- $B_{mi}$ : Matriz entrada modal do modo  $i$
- $B_i$ : matriz de entrada nodal no modo  $i$
- $C$ : Matriz de saída
- $C_m$ : Matriz de saída modal
- $C_{mq}$ : Matriz de saída de deslocamento modal
- $C_{mv}$ : Matriz de saída de velocidade modal
- $D$ : Matriz de transmissão direta
- $\bar{D}$ : Matriz de amortecimento
- $E$ : módulo de elasticidade
- $G$ : módulo transversal
- $I$ : momento de inércia
- $K^e$ : Matriz de rigidez do elemento
- $M$ : Matriz de massa
- $M^e$ : Matriz de massa do elemento
- $P$ : planta a ser controlada
- $f$ : Vetor de forças externas
- $K$ : Matriz de rigidez
- $\kappa$ : Controlador
- $q$ : Vetor de deslocamentos
- $\dot{q}$ : Vetor de velocidades
- $Z$ : Matriz com o fator de amortecimento dos modos

**y**: Vetor de saídas de medição  
**u**: Esforço de controle  
**z**: Saída de desempenho  
**|J|**: Determinante da matriz Jacobiana  
**w**: Entradas exógenas

### Caracteres Gregos

**$\Omega$** : Matriz com as frequências naturais  
 **$\xi_i$** : fator de amortecimento do modo  $i$   
 **$\omega_i$** : frequência natural do modo  $i$   
 **$\rho$** : massa específica  
 **$\nu$** : coeficiente de poisson  
 **$\varphi$** : parâmetro utilizado para estimar o amortecimento proporcional - multiplica a matriz de massa  
 **$\beta$** : parâmetro utilizado para estimar o amortecimento proporcional - multiplica a matriz de rigidez  
 **$\lambda_i(\mathbf{G})$** : autovalor  $i$  de **G**  
 **$\Delta$** : matriz de incertezas estruturadas

### Definições

Matrizes são denotadas por letras maiúsculas em negrito. Vetores são denotados por letras minúsculas em negrito.

**$\mathbf{G}^*$** : matriz conjugada transposta  
 $\sup_w f(w)$ : supremo da função  $f(w)$   
 $\|\mathbf{G}(s)\|_\infty$ : Norma infinito da matriz **G**( $s$ )  
 **$\mathfrak{F}(\mathbf{P}, \bullet)$** : Transformação linear fracionária, sendo **P** é a matriz complexa particionada  
 $\sigma_i(\mathbf{P}(s)) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{P}^*(jw)\mathbf{P}(jw))}$ : valores singulares de **P**( $s$ )  
 **$\mathbf{A}'$** : transposta da matriz **A**  
Matlab® versão R2010b - 7.11.0: Software utilizado.

# Capítulo 1

## Introdução e referências bibliográficas

### 1.1 Introdução

Com o avanço tecnológico, principalmente na área de materiais, estruturas cada vez mais complexas tem sido construídas. A construção de equipamentos cada vez mais leves tem se tornado um objetivo crescente nos diferentes ramos da indústria. Nessa vertente se encontram as estruturas flexíveis. Exemplos de campos de aplicação destas estruturas estão na indústria aeronáutica, na de equipamentos de mecanização agrícola e robótica [15].

Por apresentarem flexibilidade, seu movimento oscilatório deve ser levado em conta no projeto. Em contrapartida, esse movimento oscilatório nem todas as vezes é desejado. Pode-se citar, apenas como exemplo, o ruído gerado pela vibração destas estruturas que é muitas vezes um incômodo às pessoas.

A utilização de controladores ativos de vibrações tem por finalidade reduzir as vibrações destas estruturas. O projeto de controladores baseados na norma  $\mathcal{H}_\infty$  tem alcançado grande destaque atualmente, principalmente em sistemas onde se deseja determinado desempenho em condições adversas, como erros de modelagem e rejeição de distúrbios [15].

Para o projeto do controlador, o modelo da estrutura em análise deve estar disponível ao projetista. O modelo matemático da estrutura pode ser encontrado através de algum método de identificação, caracterizando assim o modelo real; ou através de formulação matemática, o chamado modelo teórico. Como o tempo e o custo para a construção dessas estruturas pode ser muito elevado, trabalha-se muito com o modelo teórico. A abordagem matemática que se destaca para a obtenção do modelo teórico é o método de elementos finitos, sendo aplicado nos mais diversos campos de pesquisa e que será aplicado nos problemas neste estudo.

O modelo teórico apresenta quantas simplificações se queira, podendo-se ter, um modelo teórico extremamente simples, ou um modelo teórico extremamente complicado e difícil de lidar matematicamente. A escolha do modelo a ser utilizado depende do projetista e deve-se ter um bom conhecimento prévio do sistema a fim de se ter uma segurança na adoção de hipóteses simplificadas.



De qualquer forma, seja em maior ou menor grau, sempre existirá algum tipo de incerteza na modelagem destes sistemas. Pode-se citar, como exemplo: incertezas dinâmicas, geradas pelas imperfeições na estrutura do modelo; e incertezas paramétricas, pelo não conhecimento com exatidão dos parâmetros que compõem a matriz de transferência do sistema [21].

Dentre os métodos utilizados para incluir as incertezas do modelo em questão no projeto do controlador está a das LMI (Desigualdades Matriciais Lineares). As LMI [3], que nasceram com Lyapunov em 1890, e amadureceram para problemas de controle mais complexos no fim da década de 80, quando Nesterov e Nemirovskii desenvolveram métodos de ponto interior [24] que se aplicavam diretamente na solução de problemas convexos envolvendo LMI, serão aqui utilizadas [3].

O método das LMI tem despertado grande interesse por permitir que se incluam no projeto de controle várias condições de projeto de uma forma que o problema possa ser numericamente tratável [10, 31]. Neste trabalho, que tratará de incertezas paramétricas consideradas no projeto do controlador, a formulação utilizada para sua inclusão será a abordagem politópica. Esta formulação adiciona restrições LMI ao problema de controle considerado. Cada restrição representa um sistema com incertezas e representará um vértice, e cada um desses vértices contribui para formar um politopo. O controlador quando projetado com sucesso deve ser capaz de controlar qualquer planta dentro da região do politopo formado.

Ainda na fase de projeto do controlador, filtros de ponderação são utilizados para impor uma certa forma de resposta em frequência para os sinais de controle e de desempenho, explorando as características físicas do sistema e diminuindo o conservadorismo do projeto.

Neste trabalho serão considerados como exemplos de aplicação uma viga engastada-livre e uma placa livre-livre. Incertezas no fator de amortecimento e nas frequências naturais dessas estruturas serão consideradas no projeto do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ . Essas incertezas serão consideradas no projeto do controlador através da abordagem politópica, através da qual restrições LMI são adicionadas ao problema em estudo, formando a região pela qual se espera que o controlador atue.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Dentre os trabalhos que forneceram bases para o desenvolvimento desta dissertação, aqueles que apresentaram maior relevância serão brevemente apresentados neste tópico.

Para aplicar a teoria de controle do ponto de vista moderno (modelos de estados) deve-se ter o modelo da estrutura. Esse modelo pode ser obtido por métodos de identificação (ERA, por exemplo) [40] ou pelo método de elementos finitos [6, 17], método que será utilizado nesta dissertação.

De posse do modelo da estrutura a ser controlada, projeta-se o controlador para atenuação da vibração do sistema. O projeto que será utilizado para este trabalho é o do controlador baseado na

norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Esse controlador trabalha com a minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  da matriz de transferência das entradas exógenas para a saída de desempenho. Esse tipo de controlador é utilizado usualmente em sistemas onde se deseja um determinado desempenho em condições adversas, tais como erros de modelagem e rejeição de distúrbios [15,25].

Além disso, o controle  $\mathcal{H}_\infty$  aumenta a margem de estabilidade robusta da planta, ou seja, aumenta a quantidade de incertezas que podem ser admitidas sem perda de estabilidade [10], já que o controlador atua com o intuito de reduzir o valor de pico de maior magnitude no domínio da frequência entre a entrada de distúrbio e a saída de desempenho do sistema (objetivo do controle). Os principais conceitos do projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  podem ser verificados em [7,38,41].

Dentre as metodologias propostas para a solução do problema do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  está a de resolver um problema de otimização convexo com restrições LMI. As LMI são muito utilizadas pois têm a vantagem de combinar várias condições de projeto de uma forma que o problema possa ser numericamente tratável [10]. Extensa teoria sobre as LMI pode ser encontrada em [3,33].

É usual trabalhar com projeto sub-ótimo do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ , que dessa forma, apresenta menor custo computacional. O problema de se projetar um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  sub-ótimo a partir de um problema de otimização com restrições LMI está extensamente abordado em [8,31].

O caso em estudo consiste em se projetar um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  para atenuação de vibrações de estruturas flexíveis com incertezas paramétricas utilizando-se a metodologia politópica que é abordada em [13].

O método de controle  $\mathcal{H}_\infty$  para estruturas flexíveis é apresentado em [2,19,22]. Nestes trabalhos, não se consideravam incertezas no projeto do controlador, mas seu desempenho na presença de incertezas é analisado.

Dentre os trabalhos publicados que trataram do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  utilizando LMI e incertezas paramétricas na forma politópica se destacam [35,36] e [37].

O assunto de controle ativo de vibrações de estruturas flexíveis utilizando técnicas LMI já foi tratado dentro do grupo de pesquisa do Departamento de Mecânica Computacional da UNICAMP por [15,20,21] e [25]. Mais especificamente, o projeto considerando incertezas paramétricas na forma politópica foi abordado em [30], mas naquela situação para um modelo de suspensão ativa.

O controle  $\mathcal{H}_\infty$  a partir da abordagem politópica com estabilidade quadrática, que será utilizado neste trabalho, apresenta um conservadorismo por utilizar uma única função de Lyapunov para toda a região do politopo [32]. Buscando diminuir esse conservadorismo, modificações no projeto foram propostas por [5,18,39]. Nesses trabalhos são utilizadas variáveis extras (matrizes) e/ou funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, diminuindo assim o conservadorismo no projeto. Ao se escrever o problema dessa forma, não se considera uma única função de Lyapunov para toda a região formada pelo politopo, e sim uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que variam dentro da região politópica, diminuindo assim o conservadorismo do projeto porém

com aumento do custo computacional.

### 1.3 Estrutura do Trabalho

O Capítulo 2 apresenta uma introdução sobre as estruturas flexíveis, seu uso, e a importância crescente que estas estruturas têm apresentado nos dias de hoje. As formas de tratar o problema dinâmico destas estruturas, seja pela modelagem modal ou nodal e a inclusão do amortecimento proporcional são apresentados. Apresenta-se também, neste Capítulo, o modelo de elementos finitos utilizado para representar os problemas considerados, o elemento de viga e o elemento de placa.

O Capítulo 3 aborda o projeto de controladores baseados na norma  $\mathcal{H}_\infty$ , que é a base deste estudo. Demonstra-se a forma como o problema é tratado por esta abordagem e como é realizado o projeto deste controlador a partir de um problema de otimização com restrições LMI. Uma breve introdução sobre as LMI é apresentada e a sua utilização no projeto de controladores baseados na norma  $\mathcal{H}_\infty$  é discutida.

O Capítulo 4 apresenta a forma para inclusão dos filtros de ponderação no projeto, a imposição, a partir da escolha destes filtros, de uma certa resposta em frequência do sistema, evitando com isso o fenômeno de *spillover* e diminuindo o conservadorismo do projeto. Apresenta-se o modelo da planta aumentada, ou seja, o modelo da planta considerada após a inclusão destes filtros.

O Capítulo 5 discute a inclusão, para o projeto do controlador, das incertezas paramétricas a partir da abordagem politópica. Dessa forma obtêm-se um controlador robusto a incertezas paramétricas consideradas em projeto.

Os Capítulos 6 e 7 apresentam exemplos de aplicação. O caso de uma viga engastada-livre e uma placa livre-livre são estudados. Os resultados são obtidos a partir do projeto do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  pela abordagem politópica.

O Capítulo 8 apresenta as conclusões do trabalho e as propostas para trabalhos futuros.

Finalmente, a lista de referências bibliográficas é apresentada.

## Capítulo 2

### Estruturas flexíveis

#### 2.1 Introdução

Com o avanço tecnológico, e com a exigência do mercado em se obter estruturas cada vez mais leves, as estruturas flexíveis estão se tornando cada vez mais comuns, podendo ser encontradas em hastes de equipamentos agrícolas, torres metálicas, hastes de equipamentos de movimentação de cargas, estruturas aeronáuticas, pás de hélices em geradores eólicos etc.

Estruturas flexíveis apresentam, como o próprio nome diz, flexibilidade, e portanto, suas propriedades elásticas devem ser levadas em conta no projeto. Estas estruturas apresentam pequeno amortecimento e as frequências dos modos de vibrar são geralmente próximas umas das outras [1].

Para se estudar estas estruturas, pode-se, a partir da estrutura real e através de técnicas de identificação obter, por exemplo, o modelo de estado real da estrutura; ou utilizar uma formulação matemática e a partir dela obter o modelo de estado teórico. Devido aos custos envolvidos para a construção de protótipos, a modelagem matemática, por apresentar menor custo e velocidade de obtenção, tem sido muito utilizada atualmente. Dentre elas, destaca-se o método de elementos finitos, que será a utilizada neste trabalho.

A Figura 2.1 mostra a resposta em frequência do modelo de uma estrutura flexível, no caso uma viga engastada-livre.

#### 2.2 Modelagem Nodal e Modal

A escolha de coordenadas na qual o problema será estudado é, geralmente, arbitrária. Contudo, dois tipos se destacam e são mais utilizados. O modelo nodal, onde as coordenadas nodais são escolhidas em locais definidos, os nós da estrutura; e o modelo modal, que expressa os modos da estrutura escrito em coordenadas modais.

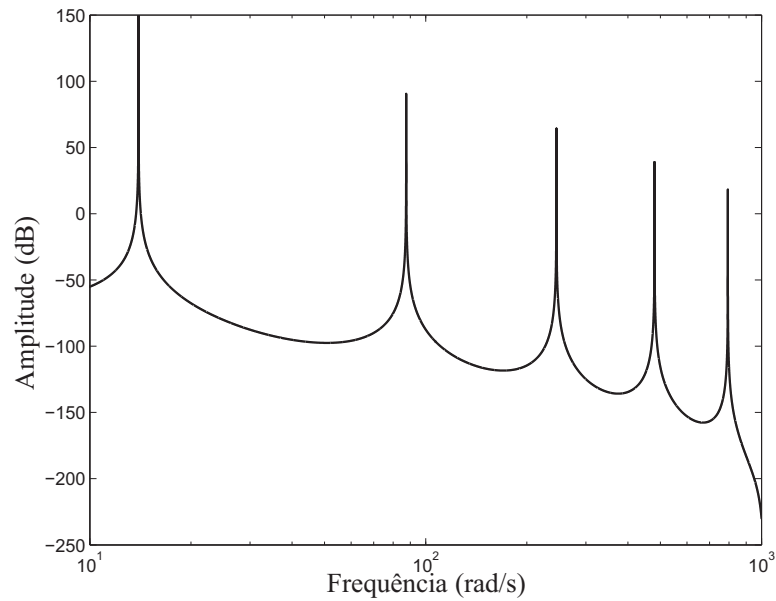


Figura 2.1: Resposta em frequência típica de uma estrutura flexível.

### 2.2.1 Modelagem Nodal

A equação dinâmica de uma estrutura em coordenadas nodais é dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} , \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{q}$  é o vetor que contém os deslocamentos dos graus de liberdade do sistema, no caso, os nós.

Definindo, então, o vetor de estados como  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$ , a Equação (2.1) reescrita na forma de estados é:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \end{bmatrix} , \quad (2.2)$$

com:

- $\mathbf{M}$ : matriz de massa;
- $\bar{\mathbf{D}}$ : matriz de amortecimento;
- $\mathbf{K}$ : matriz de rigidez do sistema;
- $\mathbf{I}$ : matriz identidade com a ordem compatível;
- $\mathbf{f}$ : vetor de forças externas aplicadas ao sistema.

Pode-se escrever o vetor de forças externas,  $\mathbf{f}$ , em termos dos graus de liberdade, e dessa forma, pode-se avaliar o efeito individual de cada força  $f_i$  na entrada do sistema. Essa forma é importante pois em sistemas de controle, os atuadores e os sensores são geralmente colocados em graus de liberdade específicos. Logo,

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} f_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} f_2 + \dots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} f_n = \sum_i^n \mathbf{s}_i f_i. \quad (2.3)$$

Os vetores  $\mathbf{s}_i$  definem o grau de liberdade no qual a força é aplicada. Para um grau de liberdade específico  $i$ , pode-se escrever que a força externa aplicada é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{s}_i f_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{s}_i \end{bmatrix} f_i = \mathbf{B} f_i. \quad (2.4)$$

Desta forma, o modelo de estados da estrutura pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} f_i; \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} f_i, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde:

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{bmatrix};$
- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{s}_i \end{bmatrix};$
- $\mathbf{C}$ : é a matriz de saída do sistema;
- $\mathbf{D}$ : é a matriz de transmissão direta;
- $\mathbf{y}$ : é o vetor de saídas de medição.

### 2.2.2 Modelagem Modal

O modelo nodal é necessário para encontrar as matrizes de massa e rigidez (através do modelo de elementos finitos, por exemplo). A matriz de amortecimento, por sua vez, é geralmente desconhecida. A modelagem modal permite estimar essa matriz com maior facilidade [12].

Outra vantagem no uso do modelo em espaço de estados modal é para o projeto de controladores, posicionamento ótimo de sensores e monitoramento da integridade estrutural, pois permite a análise dos modos de interesse separadamente [26].

Definindo a matriz  $\mathbf{D}$ , na Equação (2.5), como nula por simplicidade e reescrevendo as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  em coordenadas modais, têm-se que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Omega}^2 & -2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{mq} & \mathbf{C}_{mv} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{\Omega}$  é a matriz com as frequências naturais,  $\mathbf{Z}$  é a matriz que contém o fator de amortecimento dos modos,  $\mathbf{B}_m$  é a matriz de entrada modal,  $\mathbf{C}_{mq}$  e  $\mathbf{C}_{mv}$  são, respectivamente, a matriz de saída de deslocamento modal e a de saída de velocidade modal [12].

O modelo em espaço de estado modal se caracteriza por apresentar as matrizes de estado,  $\mathbf{A}_m$ ,  $\mathbf{B}_m$  e  $\mathbf{C}_m$ , com  $\mathbf{A}_m$  uma matriz bloco diagonal. O modelo em espaço de estados modal é mostrado em (2.7) [11].

$$\mathbf{A}_m = \text{diag}(\mathbf{A}_{mi}); \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m1} \\ \mathbf{B}_{m2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{B}_{mn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{m1} & \mathbf{C}_{m2} & \dots & \mathbf{C}_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

com  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n$  é o número de modos do sistema. As matrizes  $\mathbf{A}_{mi}$ ,  $\mathbf{B}_{mi}$  e  $\mathbf{C}_{mi}$  representam o estado de cada modo  $i$  e são, respectivamente, blocos  $2 \times 2$ ,  $2 \times s$  e  $r \times 2$ ;  $s$  é o número de entradas e  $r$  o número de saídas.

Existem diferentes formas de se representar os modos do sistema através da matriz dinâmica. Neste trabalho será utilizada a seguinte forma modal [11]:

$$\mathbf{A}_{mi} = \begin{bmatrix} -\xi_i \omega_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\xi_i \omega_i \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

onde  $\xi_i$  e  $\omega_i$  são respectivamente, o amortecimento modal e a frequência natural para cada modo  $i$ .

## 2.3 Modelagem por Elementos Finitos

### 2.3.1 Elemento de Viga

Foi adotado para este trabalho um elemento finito de viga bidimensional apresentando dois nós e dois graus de liberdade por nó (um transversal e uma rotação), como mostrado na Figura 2.2.

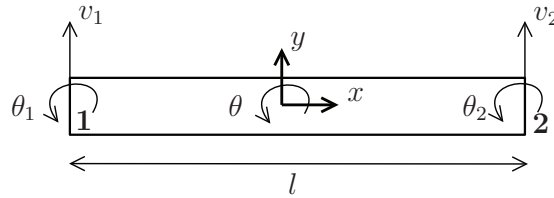


Figura 2.2: Elemento de viga bidimensional.

O elemento foi considerado com funções de forma Hermitiana e suas matrizes de massa e rigidez são mostradas em (2.9) e (2.10) [17].

$$\mathbf{M}^e = \rho A l \begin{bmatrix} 13/35 & (11/210)l & 9/70 & -(13/420)l \\ (11/210)l & (1/105)l^2 & (13/420)l & -(1/140)l^2 \\ 9/70 & (13/420)l & 13/35 & -(11/210)l \\ -(13/420)l^2 & -(1/140)l^2 & -(11/210)l & (1/105)l^2 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} 12I & 6Il & -12I & 6Il \\ 6Il & 4Il^2 & -6Il & 2Il^2 \\ -12I & -6Il & 12I & -6Il \\ 6Il & 2Il^2 & -6Il & 4Il^2 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

com  $A$ , área do elemento;  $I$ , momento de inércia da seção transversal;  $E$ , módulo de elasticidade e  $\rho$ , massa específica.

Para computar as matrizes de massa e rigidez do sistema é necessário fazer o *assembly*, somatório nas posições adequadas de cada elemento de viga considerado. Após encontradas as matrizes do sistema, são aplicadas as condições de contorno, em que as linhas e colunas referentes aos graus de liberdade que não apresentam mobilidade são removidas. Após a aplicação das condições de contorno têm-se as matrizes de massa e rigidez do problema considerado.

### 2.3.2 Elemento quadrilateral de placa

O modelo utilizado para discretização de uma placa foi considerado como aquele apresentado em [6]. Apenas os pontos principais da formulação apresentada na referência citada serão apresentados aqui.



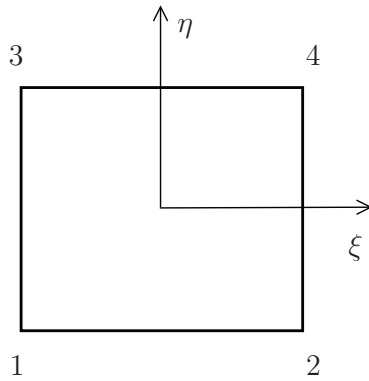


Figura 2.3: Elemento em coordenadas naturais.

É considerado um elemento quadrilateral de 4 nós em coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$ , Figura 2.3. As coordenadas são interpoladas como:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta)x_i; \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta)y_i, \quad (2.11)$$

onde  $N_i$  são as funções de forma lagrangianas, i.e.,

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta); \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta); \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta); \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Os deslocamentos,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $w$ , foram interpolados com as mesmas funções de forma  $N_i$  da geometria do elemento, i.e.,

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta)w_i; \quad \theta_x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta)\theta_{xi}; \quad \theta_y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta)\theta_{yi}, \quad (2.13)$$

onde  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são deslocamentos angulares, enquanto que  $w$  é o deslocamento perpendicular ao plano da placa, Figura 2.4.

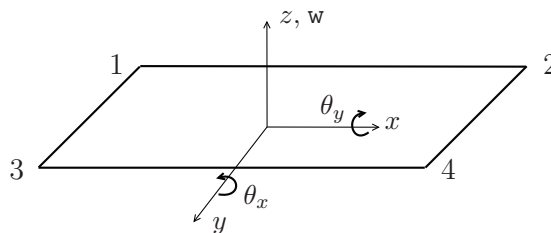


Figura 2.4: Graus de liberdade  $(\theta_x, \theta_y, w)$  para cada nó - placa.

A matriz de rigidez do elemento pode então ser computada - considerando flexão e cisalhamento [6]:

$$\mathbf{K}^e = \frac{h^3}{12} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}'_f \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f |\mathbf{J}| d\xi d\eta + \alpha h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}'_c \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c |\mathbf{J}| d\xi d\eta, \quad (2.14)$$

onde:

- $|\mathbf{J}|$  o determinante da matriz jacobiana;
- $h$ : espessura da placa;
- $\alpha$ : fator de correção, adotado como 5/6;
- $\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$ ;
- $\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & N_4 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix}$ ;
- $\mathbf{D}_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$ ;  $\nu$  é o coeficiente de poisson;
- $\mathbf{D}_c = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $G$  é o módulo de elasticidade transversal.

Analisando a Equação (2.14), pode-se notar que a energia devido ao cisalhamento, que corresponde ao segundo termo dessa Equação, apresentará maior peso do que àquela devido a flexão (primeiro termo da Equação) conforme a espessura da placa diminui com relação ao seu comprimento. Para resolver este problema, a integração numérica do termo devido ao cisalhamento é realizada com 1 ponto de Gauss, enquanto que para o termo devido a flexão, a integração numérica é realizada com 2 x 2 pontos de Gauss [17].

A matriz de massa do elemento é encontrada por [17]:

$$\mathbf{M}^e = \int_A \rho \mathbf{N}' \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \mathbf{N} dA, \quad (2.15)$$

onde  $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$ .

## 2.4 Amortecimento Proporcional

Uma forma de considerar a matriz de amortecimento para fins de simulação numérica é utilizar a matriz de massa e de rigidez multiplicadas por fatores,  $\varphi$  e  $\beta$ , que podem ser estimados por correlações experimentais [15]. Dessa forma, pode-se analisar o sistema não amortecido e incluir a matriz de amortecimento proporcional na análise. Deve-se notar que os modos de vibração do sistema são idênticos àquele do modelo sem amortecimento [12].

$$\bar{\mathbf{D}} = \varphi \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) mostra como incluir o amortecimento proporcional no problema em estudo. Os valores de  $\varphi$  e  $\beta$ , usualmente estimados por correlações experimentais, algumas vezes são difíceis de ser encontrados. Diferentes valores destas constantes são considerados por diferentes autores [20, 21, 25].

## 2.5 Programa de Elementos Finitos

Para este estudo, o programa de elementos finitos utilizado foi, para o modelo da viga, implementado pelo autor com base na teoria já exposta anteriormente. Para o outro caso em estudo, a modelagem de uma placa, o programa proposto por [6] foi estudado e utilizado. Com o auxílio destes programas, as matrizes de massa e rigidez foram encontradas e o amortecimento proporcional incluído através dos parâmetros  $\varphi$  e  $\beta$ .

## Capítulo 3

### Controle $\mathcal{H}_\infty$

#### 3.1 Introdução

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência  $f(s)$  é definida como [38]:

$$\|f(s)\|_\infty \triangleq \sup_w |f(jw)|. \quad (3.1)$$

O significado da definição é o supremo da função  $f(jw)$ , e corresponde à maior amplitude da resposta em frequência da função de transferência  $f(s)$ . Para um sistema SISO, o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  será o valor de maior amplitude do diagrama de Bode.

A finalidade do projeto  $\mathcal{H}_\infty$  é atenuar o pior caso de vibração, ou seja, o pico de maior magnitude da resposta em frequência da função de transferência considerada.

Para o caso MIMO, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é baseada no conceito nos valores singulares:

$$\|\mathbf{P}(s)\|_\infty \triangleq \sup_w \sigma_{max}(\mathbf{P}(jw)). \quad (3.2)$$

onde  $\sigma_{max}$  é o maior valor singular.

Nestes casos, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  corresponde ao valor de pico de maior magnitude no domínio da frequência dos valores singulares.

Os valores singulares,  $\sigma_i$ , são definidos como sendo a raiz quadrada positiva dos autovalores do produto  $\mathbf{P}^*(jw)\mathbf{P}(jw)$ , onde  $\mathbf{P}^*(jw)$  é a matriz complexa-conjugada transposta da matriz de transferência  $\mathbf{P}(jw)$ , ou seja [25]:

$$\sigma_i(\mathbf{P}(s)) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{P}^*(jw)\mathbf{P}(jw))}. \quad (3.3)$$

#### 3.2 Projeto $\mathcal{H}_\infty$

O projeto de controladores baseados na norma  $\mathcal{H}_\infty$  é usual em sistemas onde se deseja um determinado desempenho em condições adversas, tais como erros de modelagem e presença de

distúrbios externos [15].

Além disso, o controle  $\mathcal{H}_\infty$  aumenta a margem de estabilidade robusta da Planta,  $\mathbf{P}(s)$ , ou seja, aumenta a quantidade de incertezas que podem ser admitidas sem perda de estabilidade [10], haja visto que com a atuação do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ , ocorre a redução do pico de resposta em frequência entre a entrada de distúrbios e a saída de desempenho do sistema.

A forma usual do problema de controle é mostrada na Figura 3.1,

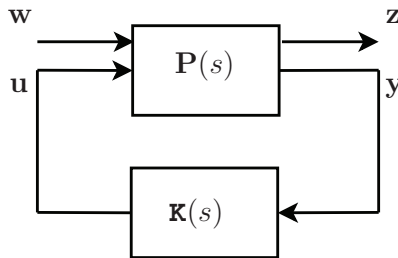


Figura 3.1: Representação do problema de controle na forma usual.

onde:

- $w$ : entradas exógenas;
- $u$ : esforço de controle;
- $z$ : saída de desempenho;
- $y$ : saídas de medição;
- $\mathbf{P}(s)$ : planta a ser controlada;
- $\mathbf{K}(s)$ : controlador a ser projetado.

A planta  $\mathbf{P}(s)$ , Figura 3.1, na sua forma usual de estados é escrita como [12, 14]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} ; \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} ; \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} .\end{aligned}\tag{3.4}$$

O controlador dinâmico  $\mathbf{K}(s)$  é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{y},\tag{3.5}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c\mathbf{y}.\tag{3.6}$$

A partir da Figura 3.1 é possível escrever:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{P}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{zw} & \mathbf{P}_{zu} \\ \mathbf{P}_{yw} & \mathbf{P}_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Para o esforço de controle vale:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}. \quad (3.8)$$

De (3.7) tem-se que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}_{yw}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{yu}\mathbf{u}. \quad (3.9)$$

De (3.8) em (3.9), têm-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{P}_{yw}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K}\mathbf{y} \Rightarrow \\ \mathbf{y}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K}) &= \mathbf{P}_{yw}\mathbf{w} \Rightarrow \\ \mathbf{y} &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

O esforço de controle,  $\mathbf{u}$ , pode ser escrito substituindo (3.10) em (3.8):

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}\mathbf{w}, \quad (3.11)$$

e o termo  $[\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}]$  é a matriz de transferência de  $\mathbf{u}$  para  $\mathbf{w}$  e denota-se por  $\mathbf{T}_{uw}$ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}_{uw}\mathbf{w}. \quad (3.12)$$

Com relação a  $\mathbf{z}$ , de (3.7) pode-se escrever que:

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}_{zw}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{u}, \quad (3.13)$$

e substituindo (3.11) em (3.13) tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{P}_{zw}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}\mathbf{w} \Rightarrow \\ \mathbf{z} &= [\mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}]\mathbf{w}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

com o termo  $[\mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw}]$  representando a matriz de transferência de  $\mathbf{z}$  para  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{T}_{zw}$ . Portanto:

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}_{zw}\mathbf{w}. \quad (3.15)$$

O objetivo do projeto  $\mathcal{H}_\infty$  ótimo consiste em encontrar o controlador  $\mathbf{K}(s)$  que minimize a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da matriz de transferência  $\mathbf{T}_{zw}$ , ou seja, da função de transferência da entrada de

distúrbios para a saída de desempenho, i.e.,

$$\min_{\mathbf{K}(s)} \|\mathbf{T}_{zw}\|_{\infty}.$$

Uma forma de tratar este problema é considerar um limite,  $\gamma$ , que seria um limite factível, um valor real e maior que zero, pois assim têm-se uma maior facilidade de solução computacional. O projeto passa a ser encontrar o controlador,  $\mathbf{K}(s)$ , sub-ótimo e é escrito como [41]:

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_{\infty} < \gamma. \quad (3.16)$$

Dentre as metodologias de solução propostas para resolver o problema (3.16), está a das Desigualdades Matriciais Lineares (LMI), que será utilizada neste trabalho [3].

### 3.3 Breve Introdução sobre as Desigualdades Matriciais Lineares - LMI

O método das LMI tem despertado grande interesse em problemas de controle por ser uma forma poderosa de projeto e análise de sistemas de controle [9].

As LMI surgiram primeiramente com Lyapunov, em 1890, com o conceito que ficou conhecido como o critério de estabilidade de Lyapunov [3]. Este critério, Equação (3.17), mostra que um sistema dinâmico  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  é estável se e somente se existe uma matriz positiva definida  $\mathbf{P}$  ( $\mathbf{P} > \mathbf{0}$ ), tal que:

$$\mathbf{A}^t\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} < \mathbf{0}. \quad (3.17)$$

A partir daí, os pesquisadores começaram a aplicar o conceito de Lyapunov em vários problemas de engenharia, especialmente os de estabilidade de sistemas. No início da década de 60, utilizando o teorema do Lema Real [3], a solução das LMI foram reduzidas a simples critérios gráficos. Este teorema estendeu a aplicação para sistemas de ordem maior, porém, ainda não aplicado em sistemas que continham mais de uma não linearidade.

Na década de 70 demonstrou-se que as LMI poderiam ser resolvidas não somente por meios gráficos, mas também por solução algébrica utilizando as equações de Riccati (ARE).

No início da década de 80, Pyatnitskii e Skorodinskii [29], reduziram o problema que admitia somente uma única não linearidade em um problema convexo de otimização envolvendo LMI (extendido ao caso de múltiplas não linearidades).

Em 1984, Karmarkar [16], apresentou um algoritmo de programação linear bastante eficiente para a solução das LMI.

Finalmente, em 1988, Nesterov e Nemirovskii, desenvolveram métodos de ponto interior [24] que se aplicavam diretamente na solução de problemas convexos envolvendo LMI.

### 3.4 Desigualdades Matriciais Lineares - LMI

Uma LMI é definida como sendo uma expressão da forma [10, 33]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \mathbf{x}_1\mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{x}_n\mathbf{F}_n < \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

onde:

- $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  é um vetor de  $n$  números reais, chamados de variáveis de decisão,
- $\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{F}_n$  são matrizes reais e simétricas,  $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j^t$ ,
- a desigualdade  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) < \mathbf{0}$  significa que  $\mathbf{F}(\mathbf{x})_j$  é negativa definida, ou seja,  $\mathbf{u}^t \mathbf{F}(\mathbf{x})_j \mathbf{u} < 0$  para qualquer  $\mathbf{u}$  diferente de zero.

Muitos problemas de controle podem ser colocados na forma de problemas LMI. Um deles, como já foi mencionado neste estudo, é o problema de encontrar o controlador  $\mathcal{H}_\infty$ .

De forma geral, um problema de otimização convexo com restrições na forma de LMI pode ser colocado na forma [10]:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{F}(\mathbf{x}) < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $\mu$  é a função objetivo linear,  $\mathbf{F}$  é uma matriz que depende das variáveis de otimização  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) < \mathbf{0}$  define a matriz como negativa definida. É interessante notar que minimizar uma função convexa com restrições LMI ainda é um problema convexo.

Colocar o problema desta forma, permite que se utilizem técnicas numéricas eficientes de solução, pois se tratam de problemas convexos, o que facilita a solução computacional.

Para este trabalho, será utilizado a função *mincx* do Matlab Control Toolbox® [10] para a solução do problema de otimização citado.

### 3.5 Solução do problema $\mathcal{H}_\infty$ via LMI

Seja um sistema em malha fechada descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{w}; \quad (3.20)$$

$$\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{w}, \quad (3.21)$$

onde as matrizes  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$  e  $\tilde{\mathbf{D}}$  dependem das matrizes do sistema sem controle e das matrizes do controlador.



O problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser colocado na forma de um problema de otimização com restrições LMI [3, 31] da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \min \quad \mu \\ & \text{sujeito a} \quad \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{C}}' \\ \tilde{\mathbf{B}}'\mathbf{P} & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}' \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

O apêndice A mostra como encontrar as inequações (3.22) e (3.23).

Este problema de otimização possui termos não lineares na restrição na forma de produtos de incógnitas, por exemplo,  $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}$ . Para que este problema possa ser resolvido na forma de um problema LMI utilizam-se transformações de variáveis para eliminar os termos não lineares, como descrito a seguir.

É possível escrever para a matriz simétrica  $\mathbf{P}$  que (solução proposta por [23]):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}' \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}' \\ \mathbf{V} & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix},$$

com  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  simétricas e  $\mathbf{V}\mathbf{U}' = \mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{Y}$ .

Verifica-se que

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}' \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}' \\ \mathbf{V} & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{Y} + \mathbf{U}'\mathbf{V} & \mathbf{X}\mathbf{V}' + \mathbf{U}'\hat{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{U}\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{X}}\mathbf{V} & \mathbf{U}\mathbf{V}' + \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}' \\ \mathbf{V} & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}' \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}\mathbf{X} + \mathbf{V}'\mathbf{U} & \mathbf{Y}\mathbf{U}' + \mathbf{V}'\hat{\mathbf{X}} \\ \mathbf{V}\mathbf{X} + \hat{\mathbf{Y}}\mathbf{U} & \mathbf{V}\mathbf{U}' + \hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Seja uma matriz de transformação  $\mathbf{T}$  dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Logo, é possível aplicar a seguinte transformação de congruência<sup>1</sup> na matriz  $\mathbf{P}$  da inequação (3.23):

$$\mathbf{P} > \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{T}'\mathbf{P}\mathbf{T} > \mathbf{0},$$

<sup>1</sup>Dado  $\mathbf{T}$  não singular, as matrizes simétricas  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  são congruentes se existir  $\mathbf{T} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{T}'\mathbf{B}\mathbf{T}$ . Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são congruentes, então  $\mathbf{A} > \mathbf{0}$  se e somente se  $\mathbf{B} > \mathbf{0}$ .

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}' \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}' \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (3.24)$$

Note que  $\mathbf{Y}$  é simétrica,  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'$ .

A seguinte transformação de congruência pode ser aplicada na restrição (3.22) do problema  $\mathcal{H}_\infty$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{C}}' \\ \tilde{\mathbf{B}}'\mathbf{P} & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}' \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(\tilde{\mathbf{A}}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}})\mathbf{T} & \mathbf{T}'\mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{T}'\tilde{\mathbf{C}}' \\ \tilde{\mathbf{B}}'\mathbf{P}\mathbf{T} & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}' \\ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{T} & \tilde{\mathbf{D}} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

Os termos da inequação (3.25) podem ser escritos através de variáveis auxiliares para eliminar os produtos que causam não linearidades conforme a seguir.

1. Termo  $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{T}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{T} &= [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c] \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ &= [(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2)\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c\mathbf{V} \quad \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2] = \\ &= [\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} \quad \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2], \end{aligned} \quad (3.26)$$

com  $\mathbf{F} = \mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{Y} + \mathbf{C}_c\mathbf{V}$  ou ainda  $\mathbf{C}_c = (\mathbf{F} - \mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{Y})\mathbf{V}^{-1}$ .

2. Termo  $\tilde{\mathbf{B}}'\mathbf{P}\mathbf{T}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}'\mathbf{P}\mathbf{T} &= [\mathbf{B}'_1 + \mathbf{D}'_{21}\mathbf{D}'_c\mathbf{B}'_2 \quad \mathbf{D}'_{21}\mathbf{B}'_c] \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}' \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ &= [\mathbf{B}'_1 + \mathbf{D}'_{21}\mathbf{D}'_c\mathbf{B}'_2 \quad \mathbf{D}'_{21}\mathbf{B}'_c] \begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{Y} + \mathbf{U}'\mathbf{V} & \mathbf{X} \\ \mathbf{U}\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{X}}\mathbf{V} & \mathbf{U} \end{bmatrix} = \\ &= [\mathbf{B}'_1 + \mathbf{D}'_{21}\mathbf{D}'_c\mathbf{B}'_2 \quad \mathbf{D}'_{21}\mathbf{B}'_c] \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \end{bmatrix} = \\ &= [\mathbf{B}'_1 + \mathbf{D}'_{21}\mathbf{D}'_c\mathbf{B}'_2 \quad \mathbf{B}'_1\mathbf{X} + \mathbf{D}'_{21}(\mathbf{D}'_c\mathbf{B}'_2\mathbf{X} + \mathbf{B}'_c\mathbf{U})] = \\ &= [\mathbf{B}'_1 + \mathbf{D}'_{21}\mathbf{D}'_c\mathbf{B}'_2 \quad \mathbf{B}'_1\mathbf{X} + \mathbf{D}'_{21}\mathbf{L}'], \end{aligned} \quad (3.27)$$

com  $\mathbf{L}' = \mathbf{D}'_c\mathbf{B}'_2\mathbf{X} + \mathbf{B}'_c\mathbf{U}$ , ou ainda  $\mathbf{B}_c = (\mathbf{U}')^{-1}(\mathbf{L}' - \mathbf{X}'\mathbf{B}'_2\mathbf{D}_c)$ .

### 3. Termo $\mathbf{T}'\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}'\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}' \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}' \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}\mathbf{X} + \mathbf{V}'\mathbf{U} & \mathbf{Y}\mathbf{U}' + \mathbf{V}'\hat{\mathbf{X}} \\ \mathbf{X} & \mathbf{U}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2)\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{V} & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{Y} + \mathbf{A}_c\mathbf{V} & \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X} & \mathbf{U}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2(\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{Y} + \mathbf{C}_c\mathbf{V}) & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{Y} + \mathbf{A}_c\mathbf{V} & \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{U}'\mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{Y} + \mathbf{U}'\mathbf{A}_c\mathbf{V} & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 + \mathbf{U}'\mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{M} & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 \end{bmatrix}, \tag{3.28}
\end{aligned}$$

com  $\mathbf{M} = \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{U}'\mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{Y} + \mathbf{U}'\mathbf{A}_c\mathbf{V}$ , ou ainda  $\mathbf{A}_c = (\mathbf{U}')^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{F} - \mathbf{U}'\mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{Y})\mathbf{V}^{-1}$ .

Com os termos anteriores e com as trocas de variáveis realizadas, é possível escrever a restrição (3.25) na forma de uma LMI conforme (3.30).

O problema de síntese do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  torna-se, então, o seguinte problema de otimização (3.29). Este problema pode ser resolvido, por exemplo, através da função *mincx* do Matlab Control Toolbox® [10].

$$\begin{aligned}
&\min \quad \mu \\
&\text{sujeito a} \quad (3.30) \\
&\quad\quad\quad (3.24)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

onde as variáveis de otimização são  $\mu$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{D}_c$ . Estas variáveis possuem as seguintes dimensões características:

- $\mu$ : escalar;
- $\mathbf{X}$ : matriz simétrica de ordem  $n$ ;
- $\mathbf{Y}$ : matriz simétrica de ordem  $n$ ;
- $\mathbf{F}$ : (número de colunas de  $\mathbf{B}_2$ )  $\times$   $n$ ;
- $\mathbf{L}$ :  $n \times$  (número de linhas de  $\mathbf{C}_2$ );
- $\mathbf{M}$ :  $n \times n$  (não simétrica);
- $\mathbf{D}_c$ : (número de colunas de  $\mathbf{B}_2$ )  $\times$  (número de linhas de  $\mathbf{C}_2$ ).

De posse das variáveis de otimização, pode-se construir as matrizes do controlador. Foi considerado inicialmente que  $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$  (ver Apêndice A):

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}_c &= (\mathbf{U}')^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{F} - \mathbf{U}'\mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{Y})\mathbf{V}^{-1}, \\ \hat{\mathbf{B}}_c &= (\mathbf{U}')^{-1}(\mathbf{L} - \mathbf{X}'\mathbf{B}_2\mathbf{D}_c), \\ \hat{\mathbf{C}}_c &= (\mathbf{F} - \mathbf{D}_c\mathbf{C}_2\mathbf{Y})\mathbf{V}^{-1}.\end{aligned}$$

A correção para  $\mathbf{D}_{22} \neq \mathbf{0}$ , a partir do resultado obtido com  $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$ , é dada por [30]:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_c &= \hat{\mathbf{A}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c\mathbf{D}_{22}(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{C}}_c, \\ \mathbf{B}_c &= \hat{\mathbf{B}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c\mathbf{D}_{22}(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{D}}_c, \\ \mathbf{C}_c &= (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{C}}_c, \\ \mathbf{D}_c &= (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{D}}_c.\end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{c|c|c}
\left[ \begin{array}{cc} \mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{M} & \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{YA}' + \mathbf{F}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{M}' \\ \mathbf{A}' + \mathbf{C}'_2\mathbf{D}'_c\mathbf{B}'_2 & \mathbf{A}'\mathbf{X} + \mathbf{C}'_2\mathbf{L}' \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \mathbf{YC}'_1 + \mathbf{F}'\mathbf{D}'_{12} \\ \mathbf{C}'_1 + \mathbf{C}'_2\mathbf{D}'_c\mathbf{D}'_{12} \end{array} \right] \\
\hline
\text{sim.} & -\mathbf{I} & \mathbf{D}'_{11} + \mathbf{D}'_{21}\mathbf{D}'_c\mathbf{D}'_{12} \\
\hline
\text{sim.} & \text{sim.} & -\mu\mathbf{I}
\end{array} \right] < 0 \quad (3.30)$$

## Capítulo 4

### Filtros de ponderação

#### 4.1 Introdução

Filtros de ponderação podem ser colocados na entrada ou na saída de sistemas na etapa de projeto do controlador. Sua função é impor uma certa forma de frequência para estes sinais, explorando as características físicas do sistema e diminuindo o conservadorismo do projeto.

O conhecimento prévio do sistema é uma ferramenta importante na escolha dos filtros, uma vez que de posse da resposta em frequência da estrutura, pode-se visualizar sua forma após a inclusão dos filtros de ponderação. Muitas vezes, os filtros são escolhidos pelo método de tentativa e erro e o conhecimento prévio da resposta em frequência auxilia na sua escolha. É uma ferramenta apenas de projeto, não sendo incluídos no problema físico.

No projeto de controladores em estruturas flexíveis, os modelos são usualmente truncados em uma faixa espectral de frequência. Dessa forma, a faixa de frequência que não é importante para o projeto é desconsiderada. O truncamento de sistemas acaba por gerar uma diferença entre a planta considerada em projeto (truncada) daquela real. Essa diferença é tratada como uma incerteza dinâmica e em alguns casos pode gerar um efeito denominado *spillover*, efeito este que se caracteriza pela excitação, quando da incorporação do controlador à planta real, dos modos não considerados em projeto.

O efeito do *spillover* é, em alguns casos, o de instabilizar o sistema. A fim de amenizar os efeitos do *spillover*, utilizam-se filtros de ponderação que são projetados para enfatizar a faixa de frequência que é importante para o controlador. Sabendo-se que um dado distúrbio exógeno afeta com maior intensidade a saída de desempenho na região de baixas frequências (região de interesse), é desejado que o esforço de controle atue nesta região de frequências de forma preponderante e que não atue na região de alta frequência [4].

A Figura 4.1 mostra a caracterização do filtro passa baixa,  $W_z$ , que pondera, com maior peso na região de baixa frequência, o sinal de desempenho,  $z$ . O filtro passa alta,  $W_u$ , pondera com maior peso na região de alta frequência o sinal do esforço de controle  $u$ . Dessa forma, deseja-se que não exista sinal de controle acima da frequência de corte,  $w_c$ , e que os distúrbios exógenos

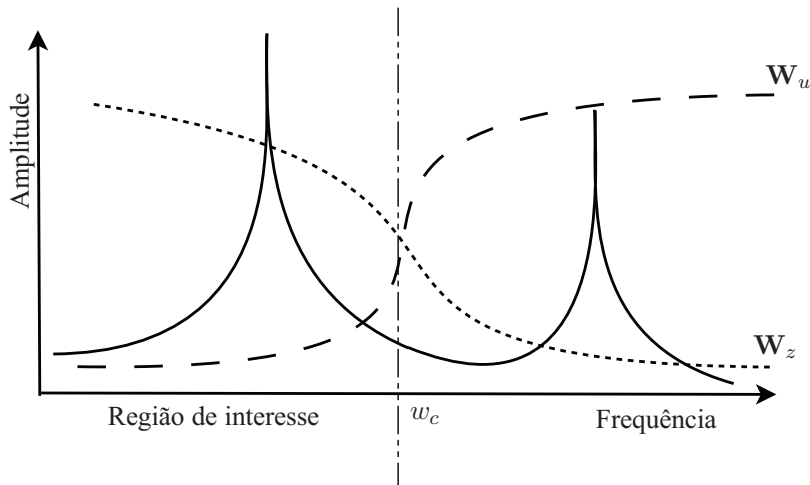


Figura 4.1: Exemplos de filtros de ponderação.

sejam atenuados com maior eficácia na faixa de frequências até  $w_c$ .

Em outras palavras, como o controlador é projetado a partir da minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , um peso alto em alguma região, significa um interesse grande na minimização do sinal naquela região. Portanto, ocorrerá atenuação de vibração, devido ao peso de  $W_z$ , até a frequência de corte,  $w_c$ , e redução do sinal de controle, depois de  $w_c$  e através do peso de  $W_u$ , a fim de evitar o *spillover*.

A planta, após a adição dos filtros de ponderação passa a ser denominada planta aumentada.

## 4.2 Modelo da Planta Aumentada em Espaço de Estados

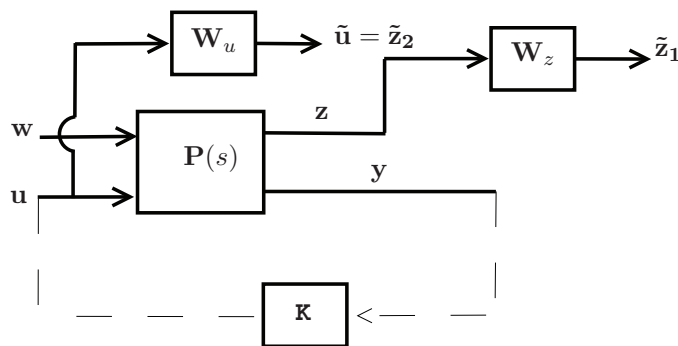


Figura 4.2: Exemplos de utilização de filtros de ponderação.

A função de transferência dos filtros considerados para este estudo são:

$$W_u(s) = C_u(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_u)^{-1}\mathbf{B}_u + \mathbf{D}_u; \quad (4.1)$$

$$\mathbf{W}_z(s) = \mathbf{C}_z(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_z)^{-1}\mathbf{B}_z + \mathbf{D}_z. \quad (4.2)$$

O papel dos filtros expostos na Figura 4.2 são:

- $\mathbf{W}_u$ : Procura eliminar o esforço de controle fora da região de interesse.
- $\mathbf{W}_z$ : Procura uma maior atenuação de vibração na região de interesse.

A planta  $\mathbf{P}(s)$  pode ser definida em espaço de estados como:

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p\mathbf{x}_p + \mathbf{B}_{1p}\mathbf{w} + \mathbf{B}_{2p}\mathbf{u}; \quad (4.3)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_{1p}\mathbf{x}_p + \mathbf{D}_{11p}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12p}\mathbf{u}; \quad (4.4)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{2p}\mathbf{x}_p + \mathbf{D}_{21p}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22p}\mathbf{u}. \quad (4.5)$$

O modelo de estado do filtro  $\mathbf{W}_z$  é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}_z = \mathbf{A}_z\mathbf{x}_z + \mathbf{B}_z\mathbf{z}; \quad (4.6)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{C}_z\mathbf{x}_z + \mathbf{D}_z\mathbf{z}. \quad (4.7)$$

Substituindo o termo  $\mathbf{z}$  das equações (4.6) e (4.7) por (4.4), encontra-se:

$$\dot{\mathbf{x}}_z = \mathbf{A}_z\mathbf{x}_z + \mathbf{B}_z\mathbf{C}_{1p}\mathbf{x}_p + \mathbf{B}_z\mathbf{D}_{11p}\mathbf{w} + \mathbf{B}_z\mathbf{D}_{12p}\mathbf{u}; \quad (4.8)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{C}_z\mathbf{x}_z + \mathbf{D}_z\mathbf{C}_{1p}\mathbf{x}_p + \mathbf{D}_z\mathbf{D}_{11p}\mathbf{w} + \mathbf{D}_z\mathbf{D}_{12p}\mathbf{u}. \quad (4.9)$$

O modelo de estados do filtro  $\mathbf{W}_u$  é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}_u = \mathbf{A}_u\mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u\mathbf{u}; \quad (4.10)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{C}_u\mathbf{x}_u + \mathbf{D}_u\mathbf{u}. \quad (4.11)$$

O sinal recebido pelo controlador,  $\mathbf{y}$ , Equação (4.5), é:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{2p}\mathbf{x}_p + \mathbf{D}_{21p}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22p}\mathbf{u}. \quad (4.12)$$

O modelo de estado da planta aumentada pode então ser descrito, como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{\mathbf{x}}_u \\ \dot{\mathbf{x}}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_z\mathbf{C}_{1p} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1p} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_z\mathbf{D}_{11p} \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2p} \\ \mathbf{B}_u \\ \mathbf{B}_z\mathbf{D}_{12p} \end{bmatrix} \mathbf{u}; \quad (4.13)$$



$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_z C_{1p} & 0 & C_z \\ 0 & C_u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_u \\ x_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_z D_{11p} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} D_z D_{12p} \\ D_u \end{bmatrix} \mathbf{u}; \quad (4.14)$$

$$\mathbf{y} = [ C_{2p} \ 0 \ 0 ] \begin{bmatrix} x_p \\ x_u \\ x_z \end{bmatrix} + D_{21p} \mathbf{w} + D_{22p} \mathbf{u}. \quad (4.15)$$

Comparando o modelo de estados encontrado com a forma usual de controle, Equação (3.4), redefine-se o modelo da planta aumentada como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ B_z C_{1p} & 0 & A_z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{1p} \\ 0 \\ B_z D_{11p} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} B_{2p} \\ B_u \\ B_z D_{12p} \end{bmatrix}; \quad (4.16)$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} D_z C_{1p} & 0 & C_z \\ 0 & C_u & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} D_z D_{11p} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} D_z D_{12p} \\ D_u \end{bmatrix}; \quad (4.17)$$

$$\mathbf{C}_2 = [ C_{2p} \ 0 \ 0 ]; \quad \mathbf{D}_{21} = D_{21p}; \quad \mathbf{D}_{22} = D_{22p}. \quad (4.18)$$

### 4.3 Matriz de Transferência da Planta Aumentada

Pode-se escrever para  $\mathbf{P}(s)$  da Figura 4.2 que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbf{P}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{yw} & P_{yu} \\ P_{zw} & P_{zu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

A partir da Equação (4.19) é possível escrever que:

$$\mathbf{y} = P_{yw} \mathbf{w} + P_{yu} \mathbf{u}. \quad (4.20)$$

$$\mathbf{z} = P_{zw} \mathbf{w} + P_{zu} \mathbf{u}. \quad (4.21)$$

Da análise da Figura 4.2, é possível escrever que:

$$\tilde{z}_1 = \mathbf{W}_z \mathbf{z}; \quad (4.22)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{W}_u \mathbf{u}. \quad (4.23)$$

De (4.21) em (4.22) tem-se:

$$\tilde{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{W}_z \mathbf{P}_{zw} \mathbf{w} + \mathbf{W}_z \mathbf{P}_{zu} \mathbf{u}. \quad (4.24)$$

A função de transferência em malha aberta pode ser escrita com base nas equações já mostradas:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_1 \\ \tilde{\mathbf{z}}_2 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_z \mathbf{P}_{zw} & \mathbf{W}_z \mathbf{P}_{zu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_u \\ \mathbf{P}_{yw} & \mathbf{P}_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

O esforço de controle escrito a partir da Figura 4.2 vale:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{y}. \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.20) e rearranjando os termos tem-se:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw} \mathbf{w}. \quad (4.27)$$

Substituindo (4.26) juntamente com (4.27) em (4.24) tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}_1 &= \mathbf{W}_z \mathbf{P}_{zw} \mathbf{w} + \mathbf{W}_z \mathbf{P}_{zu} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw} \mathbf{w} \Rightarrow \\ \tilde{\mathbf{z}}_1 &= \mathbf{W}_z [\mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw}] \mathbf{w} = \mathbf{W}_z \mathbf{N}_1 \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

com  $\mathbf{N}_1 = \mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw}$ .

De (4.26) e (4.27) em (4.23) obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{W}_u \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw} \mathbf{w} = \mathbf{W}_u \mathbf{N}_2 \mathbf{w}, \quad (4.29)$$

com  $\mathbf{N}_2 = \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw}$ .

Assim, é possível escrever que:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_1 \\ \tilde{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_z \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{W}_u \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \mathbf{w}. \quad (4.30)$$

O problema de encontrar o controlador sub-ótimo,  $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$ , minimizando  $\gamma$  torna-se:

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{W}_z \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{W}_u \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma. \quad (4.31)$$

Portanto, a relação (4.31) é o problema a ser resolvido após a inclusão dos filtros de ponderação. A partir dessa relação escreve-se as LMI mostradas no Capítulo 3.

#### **4.4 Escolha dos filtros de ponderação**

Para esse estudo, a escolha dos filtros de ponderação foi realizada ainda na fase de projeto do controlador buscando satisfazer as condições de atenuação de vibração em baixas frequências e estabilidade em malha fechada. Se os resultados encontrados forem satisfatórios, o projeto fica assim definido. Caso contrário, modificam-se os filtros de ponderação e se repete o projeto.

## Capítulo 5

### Projeto considerando incertezas paramétricas

#### 5.1 Introdução

O diagrama de blocos de uma estrutura flexível, descrita pela Equação 5.1, é apresentado na Figura 5.1:

$$M\ddot{q} + \bar{D}\dot{q} + Kq = s_i w + s_j u. \quad (5.1)$$

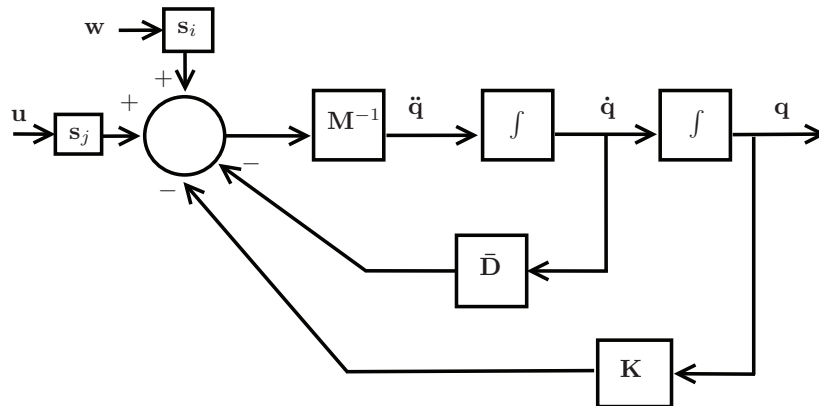


Figura 5.1: Diagrama de blocos de uma estrutura flexível.

Os termos presentes na Figura 5.1 são novamente citados:

- $u$ : esforço de controle;
- $w$ : entradas exógenas;
- $M^{-1}$ : inversa da matriz de massa;
- $\bar{D}$ : matriz de amortecimento;
- $K$ : matriz de rigidez;
- $q$ : coordenada espacial/nodal;

- $s_i, s_j$ : matrizes que definem o grau de liberdade onde são aplicadas as entradas.

Já foi mostrado no Capítulo 3 que o sistema, escrito na forma usual de controle, Equação (3.4), apresenta as matrizes de estado:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{s}_j \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{s}_i \end{bmatrix}; \quad (5.2)$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{z1} & \mathbf{C}_{z2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{z1} & \mathbf{D}_{z2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{z3} & \mathbf{D}_{z4} \end{bmatrix}; \quad (5.3)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{y1} & \mathbf{C}_{y2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{y1} & \mathbf{D}_{y2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{y3} & \mathbf{D}_{y4} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

com  $\mathbf{C}_1, \mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{12}, \mathbf{C}_2, \mathbf{D}_{21}, \mathbf{D}_{22}$  matrizes que definem a saída de desempenho  $\mathbf{z}$  e a saída de medição  $\mathbf{y}$ . A planta  $\mathbf{P}(s)$  a ser controlada pode ser representada na forma compacta como:

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

e representada pela Figura 5.2.

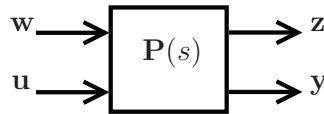


Figura 5.2: Planta  $\mathbf{P}(s)$ .

Se a planta de (5.5) fosse considerada para projeto do controlador, teríamos um projeto sem considerar incertezas, o que muitas vezes é difícil de ocorrer na prática, haja visto que o modelo matemático apresenta, quase sempre, diferenças em relação ao modelo real.

Para tentar aproximar o sistema físico do modelo matemático, incertezas podem ser adicionadas ao projeto. Sua inclusão no projeto depende do bom conhecimento do modelo físico, para que se reconheçam as fontes de incertezas e a forma com que elas podem ser incluídas no modelo matemático.

Existem dois tipos básicos de incertezas: dinâmicas e paramétricas. As incertezas dinâmicas são resultado das imperfeições na estrutura do modelo, por hipóteses simplificadoras ou por ausência na representação de algum fenômeno físico. Já as incertezas paramétricas, são aquelas devido à falta de conhecimento, com exatidão, dos parâmetros que compõem a matriz de transferência do sistema [21].

## 5.2 Incertezas paramétricas - abordagem politópica

Na abordagem politópica, escrevem-se as matrizes de estado do sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  para os extremos da região que se deseja considerar. Note que os extremos são conhecidos já que a variação dos parâmetros pode ser estabelecida pelo projetista.

O conjunto de todas as plantas admissíveis forma um conjunto de plantas possíveis, ou um conjunto admissível de plantas, que pode ser representado pelo conjunto convexo  $\phi$  (ver Apêndice C):

$$\phi = \{(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \sum_{i=1}^j \alpha_i (\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i) \mid \sum_{i=1}^j \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\}, \quad (5.6)$$

onde  $j$  é o número de sistemas incertos e  $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i$  e  $\mathbf{D}_i$  cada uma das matrizes de estado.

Uma forma de ilustrar um politopo formado pela variação de parâmetros do sistema é através da visualização da Figura 5.3. Para esse sistema, escolhe-se variar o fator de amortecimento nominal  $\bar{\xi}$  e a frequência natural nominal  $\bar{w}_n$ . Como ilustração, considera-se uma variação de  $\pm 20\%$  tanto para  $\bar{\xi}$  quanto para  $\bar{w}_n$ . A região formada pelos 4 vértices, que representam cada um dos sistemas possíveis, forma o politopo a ser considerado para projeto.

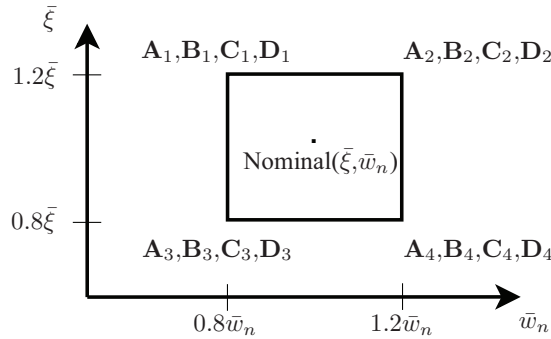


Figura 5.3: Politopo formado pela variação de parâmetros do sistema.

A estabilidade de cada um dos vértices que formam o politopo pode ser garantida pelo critério de estabilidade de Lyapunov, Equação (5.7). Essa condição de estabilidade pode ser escrita para cada um dos vértices desse politopo e incluídas no projeto, Equação (5.8):

$$\mathbf{A}^t \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0} \text{ com } \mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{A}_i^t \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < \mathbf{0} \text{ com } \mathbf{P} > \mathbf{0}, i = 1, \dots, j. \quad (5.8)$$

Supondo um sistema qualquer interno ao politopo, e escrevendo sua matriz de estado,  $\mathbf{A}$ ,

como uma combinação convexa dos vértices:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^j \alpha_i \mathbf{A}_i, \text{ para } \alpha_i > 0.$$

e substituindo na equação de Lyapunov:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^j \alpha_i \mathbf{A}_i \right)^t \mathbf{P} + \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^j \alpha_i \mathbf{A}_i \right) < \mathbf{0} \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^j \alpha_i (\mathbf{A}_i^t \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i) < \mathbf{0} \end{aligned}$$

como  $\alpha_i > 0$ , temos:

$$\mathbf{A}_i^t \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < \mathbf{0}, i = 1, \dots, j.$$

Dessa forma, demonstra-se que qualquer sistema interno ao politopo é estável quando existe  $\mathbf{P}$  que garante a estabilidade de todos os vértices.

A abordagem politópica, por considerar uma única função de Lyapunov para toda a região formada pelo politopo, Equação (5.8), fornece um controlador conservador [30,32]. Quando projetado dessa forma, o controlador obtido deve ser capaz de garantir a estabilidade de todas as plantas presentes no politopo, ou seja, para toda a faixa de incertezas consideradas.

Dessa forma, o problema de otimização que deve ser resolvido a fim de encontrar o controlador, passa a ser:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_i^t \mathbf{P} + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}}_i & \mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}}_i & \tilde{\mathbf{C}}_i^t \\ \tilde{\mathbf{B}}_i^t \mathbf{P} & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}_i^t \\ \tilde{\mathbf{C}}_i & \tilde{\mathbf{D}}_i & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, j. \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

onde  $\tilde{\mathbf{A}}_i$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_i$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_i$  e  $\tilde{\mathbf{D}}_i$  são as matrizes em malha fechada de cada um dos sistemas que formam os vértices do politopo. Aplicando a transformação de variáveis citada no Capítulo 3, a restrição (5.9) é escrita como (3.30) para cada um dos vértices e a restrição (5.10), escrita como (3.24). Logo, o problema de otimização se torna:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{sujeito a} \quad & (3.30) \quad i = 1, \dots, j. \\ & (3.24) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Para este trabalho será utilizado a função *mincx* do Matlab Control Toolbox® [10] para a

solução de problemas envolvendo restrições na forma de LMI.

### 5.3 Sistema Linear Variante no Tempo

Com o intuito de verificar a metodologia politópica para sistemas lineares variantes no tempo e analisar se nessa condição a estabilidade do sistema ainda se mantém, o módulo Simulink® do aplicativo Matlab® foi utilizado para criar um sinal que provoca a variação contínua no tempo da matriz dinâmica,  $\mathbf{A}$ , mas mantendo-a sempre dentro do politopo considerado em projeto. O conceito utilizado para mudar continuamente a matriz  $\mathbf{A}$  e mantê-la sempre dentro do politopo considerado em projeto, é escrevê-la como uma combinação convexa dos vértices, i.e.,

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^j \alpha_i(t) \mathbf{A}_i, \text{ para } \alpha_i(t) > 0 \text{ com } \sum_{i=1}^j \alpha_i(t) = 1.$$

Os vértices que formam o politopo são definidos pelos termos  $\mathbf{A}_i$ , e são considerados constantes durante a análise. Para criação do fator  $\alpha_i(t)$ , diferentes velocidades foram consideradas para cada um dos vértices. Para isso, diferentes sinais de varredura linear senoidal, sinal este que define a variação temporal do termo  $\alpha_i(t)$ , são criados. No apêndice D é mostrado em detalhes a configuração montada em Simulink® para obter o modelo do sistema linear variante no tempo.

Uma representação da matriz  $\mathbf{A}$  variando continuamente no tempo é mostrada na Figura 5.4.

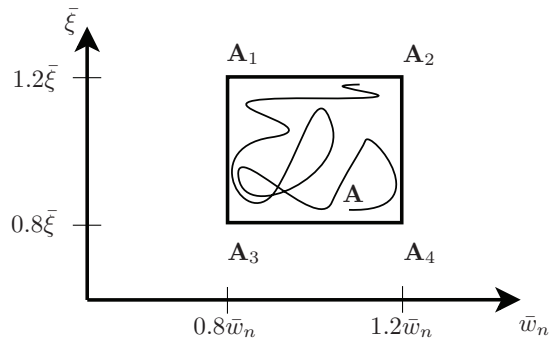


Figura 5.4: Variação no tempo da matriz dinâmica  $\mathbf{A}$ .



## Capítulo 6

### Exemplo de aplicação 1: problema da viga engastada-livre

#### 6.1 Introdução

O problema proposto consiste em projetar um sistema de controle, utilizando o controlador  $\mathcal{H}_\infty$ , para atenuar a vibração do primeiro modo de vibrar de uma viga de alumínio engastada-livre. O problema em questão é mostrado na Figura 6.1.

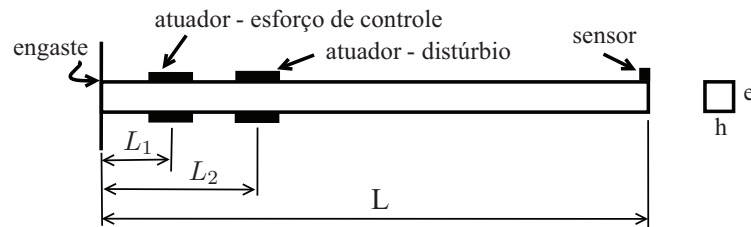


Figura 6.1: Problema 1 - viga engastada-livre.

Os parâmetros considerados são:  $L_1=0.15$  m,  $L_2=0.20$  m,  $L=1.0$  m,  $h=0.032$  m,  $e=0.003$  m,  $E_{Al}=70$  GPa e  $\rho_{Al}=2710$  kg/m<sup>3</sup>.

Para o projeto, serão consideradas incertezas no fator de amortecimento,  $\xi$ , e nas frequências naturais,  $w_n$ . O controlador encontrado deve ser robusto o suficiente para garantir a estabilidade de todas as plantas possíveis, ou seja, deve controlar todas as plantas dentro do politopo considerado.

#### 6.2 Modelo de elementos finitos

Para encontrar a matriz de massa,  $\mathbf{M}$ , e a matriz de rigidez,  $\mathbf{K}$ , foi utilizado o método de elementos finitos - Capítulo 2. A discretização escolhida foi com 24 nós, utilizando elemento de viga (2 nós por elemento, 2 graus de liberdade por nó), totalizando 48 graus de liberdade.

Após a aplicação das condições de contorno, têm-se um problema com 44 graus de liberdade (22 de deslocamento transversal e 22 em rotação) e 22 nós, Figura 6.2. Este problema é truncado em seus 12 primeiros modos através da função *modreal* do Matlab® e passa a ser chamado de

sistema/planta real. O truncamento em seus 12 primeiros modos permite uma análise em frequência em até aproximadamente  $6 \times 10^3$  rad/s.

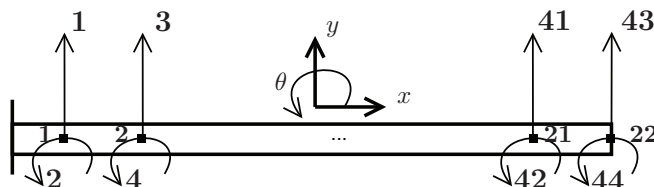


Figura 6.2: Graus de liberdade livres após a aplicação das condições de contorno.

A matriz de amortecimento,  $\bar{D}$ , é construída utilizando amortecimento proporcional, Equação (2.16), com os valores de  $\varphi$  e  $\beta$  respectivamente de 5 e  $1 \times 10^{-6}$ , baseados em [34] que desenvolveu um trabalho utilizando uma viga engastada-livre, também em alumínio, e procurou validar a resposta em frequência do modelo experimental comparando com o modelo teórico. Têm-se, portanto, que a matriz de amortecimento apresenta a forma:

$$\bar{D} = 5M + 10^{-6}K.$$

Apenas como ilustração do que estes valores representam para o problema, a Tabela 6.1 mostra as 5 primeiras frequências naturais do sistema real sem incertezas, e seus respectivos fatores de amortecimento, encontrados com o comando *damp* do Matlab®. A título de comparação, as frequências naturais encontradas pela forma analítica podem ser verificadas no Apêndice B.

Tabela 6.1: Valores aproximados para  $w_n$  e  $\xi$  dos 5 primeiros modos do sistema real sem incertezas.

Modo	$\xi$	$w_n$ (rad/s)	$w_{n,analítica}$ (rad/s)
1	0.178	13.97	14.03
2	0.028	87.97	87.96
3	0.010	246.31	246.30
4	0.005	482.69	482.66
5	0.003	797.99	797.88

### 6.2.1 Incertezas consideradas

As variações consideradas para validação do algoritmo de solução para o problema em questão foram de  $\left[ 0.85w_n \quad 1.15w_n \right]$  para as frequências naturais e de  $\left[ 0.10\xi \quad 1.90\xi \right]$  para o fator de amortecimento. O fator de amortecimento é um parâmetro conhecido com menor precisão para estruturas flexíveis [28], por isso uma maior variação foi adotada.

Na abordagem politópica, onde cada sistema incerto formará um vértice do politopo (uma restrição LMI), o número de vértices do problema a ser resolvido é dado por  $2^c$ , onde  $c$  representa a quantidade de parâmetros variados, no caso em questão  $c = 2$ , gerando 4 possíveis combinações, Figura 6.3. Dessa forma, a matriz dinâmica modal  $\mathbf{A}_m$  dos vértices do politopo formado, para cada modo  $i$ , é dada por:

$$\mathbf{V}_{1,i} = \begin{bmatrix} -\xi_i^{\min} w_{n,i}^{\min} & w_{n,i}^{\min} \\ -w_{n,i}^{\min} & -\xi_i^{\min} w_{n,i}^{\min} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{vértice 1}; \mathbf{V}_{2,i} = \begin{bmatrix} -\xi_i^{\max} w_{n,i}^{\min} & w_{n,i}^{\min} \\ -w_{n,i}^{\min} & -\xi_i^{\max} w_{n,i}^{\min} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{vértice 2};$$

$$\mathbf{V}_{3,i} = \begin{bmatrix} -\xi_i^{\min} w_{n,i}^{\max} & w_{n,i}^{\max} \\ -w_{n,i}^{\max} & -\xi_i^{\min} w_{n,i}^{\max} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{vértice 3}; \mathbf{V}_{4,i} = \begin{bmatrix} -\xi_i^{\max} w_{n,i}^{\max} & w_{n,i}^{\max} \\ -w_{n,i}^{\max} & -\xi_i^{\max} w_{n,i}^{\max} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{vértice 4}.$$

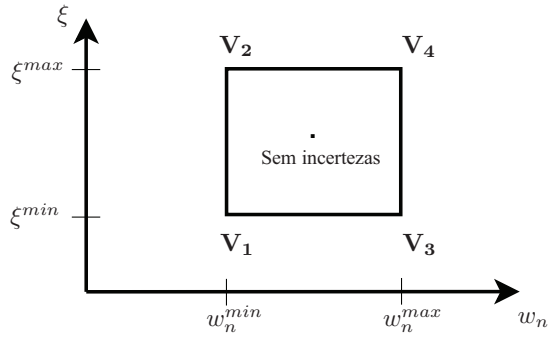


Figura 6.3: Politopo formado pela variação de parâmetros do sistema.

## 6.2.2 Modelo para Controle

O modelo considerado para controle, Figura 6.4, é dado por:

- Entrada exógena (distúrbio),  $w$ , considerado como sendo um momento aplicado ao grau de liberdade 6, ou seja, no nó 3;
- Esforço de controle,  $u$ , também considerado como sendo um momento, aplicado ao grau de liberdade 8, no nó 4;
- Saída de medição,  $y$ , deslocamento vertical, grau de liberdade 43, no nó 22;
- Saída de desempenho,  $z$ , deslocamento vertical, também no grau de liberdade 43.

O distúrbio e o esforço de controle são considerados como momentos aplicados pela suposição do emprego de um par de elementos PZT, gerando um momento aplicado [36].

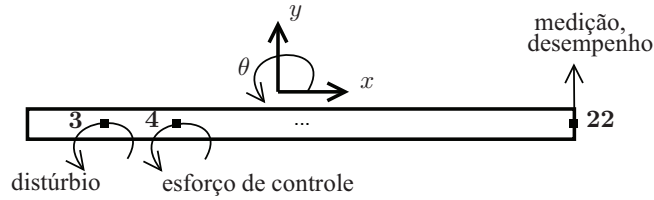


Figura 6.4: Problema de controle considerado.

### 6.2.3 Plantas com e sem Incertezas

A Figura 6.5 mostra a resposta em frequência de cada um dos vértices formados pela aplicação das incertezas no projeto.

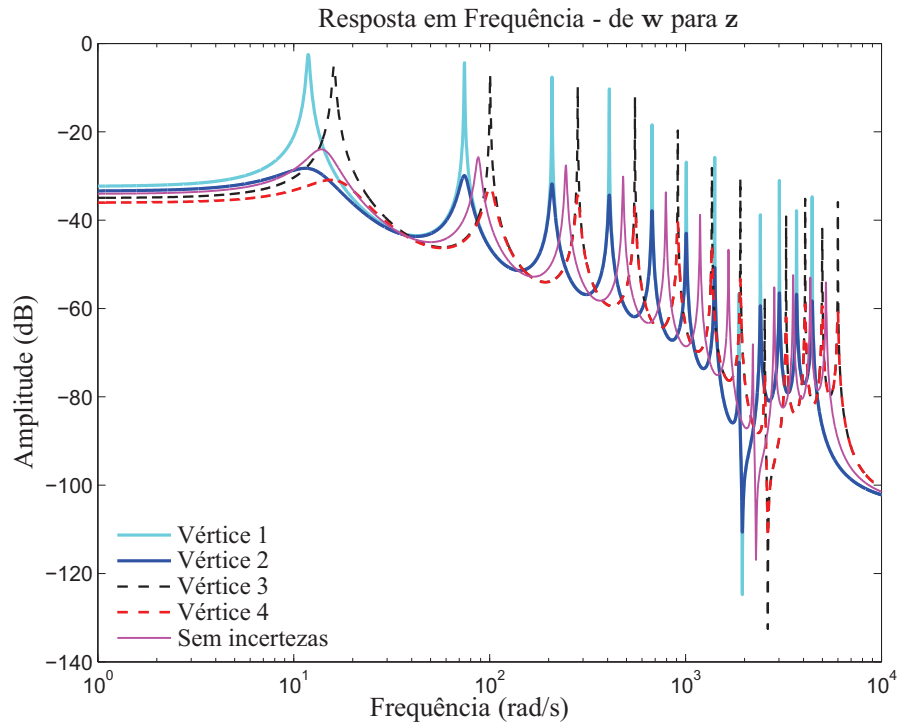


Figura 6.5: Resposta em frequência das plantas que formam os vértices do politopo.

A Tabela 6.2 mostra a magnitude da menor e da maior frequência natural para as plantas com incertezas (vértices) e para a planta sem considerar incertezas. Pode-se perceber que existe uma flutuação de aproximadamente 15% em torno da frequência natural do sistema sem incertezas (como imposto). O controlador  $\mathcal{H}_\infty$  projetado deve ser capaz de controlar todas as plantas dentro desta faixa. Se isso for possível, diz-se que o controlador é robusto a incertezas paramétricas [34].

Tabela 6.2: Variação no  $\xi$  e  $w_n$  das plantas para o problema da viga engastada.

		Limite inferior	Sem incertezas (nominal)	Limite Superior
1º modo	$w_n$ (rad/s)	11.90	13.97	16.05
	$\xi$	0.018	0.178	0.322
2º modo	$w_n$ (rad/s)	74.40	87.97	100.62
	$\xi$	0.003	0.028	0.054
3º modo	$w_n$ (rad/s)	208.25	246.31	281.74
	$\xi$	0.001	0.010	0.019

#### 6.2.4 Plantas Truncada - Filtros de ponderação

No projeto politópico, todas as 4 plantas com incertezas são truncadas em seu primeiro modo, pois cada uma delas contribuirá formando um vértice do politopo (Figura 6.3). O truncamento no primeiro modo foi realizado com o intuito de obter um controlador de baixa ordem para o controle do sistema e que ainda garantisse a estabilidade de todos os vértices considerados.

A partir da planta(s) truncada(s) e da escolha dos filtros de ponderação  $\mathbf{W}_u$  e  $\mathbf{W}_z$ , pode-se construir o modelo da planta aumentada (Capítulo 4) para as 4 plantas. Os filtros utilizados, foram encontrados com o intuito de satisfazer as condições de projeto: atenuação de vibração no primeiro modo de vibrar e estabilidade em malha fechada,

$$\mathbf{W}_z = \frac{4.57}{s + 10}; \mathbf{W}_u = \frac{2s + 20}{0.01s + 1000}. \quad (6.1)$$

A Equação (6.1) mostra a função de transferência dos filtros escolhidos. Vale ressaltar que a escolha dos filtros foi realizada buscando satisfazer as condições projeto especificadas. Podem, entretanto, existir diferentes filtros que também satisfaçam as condições de projeto.

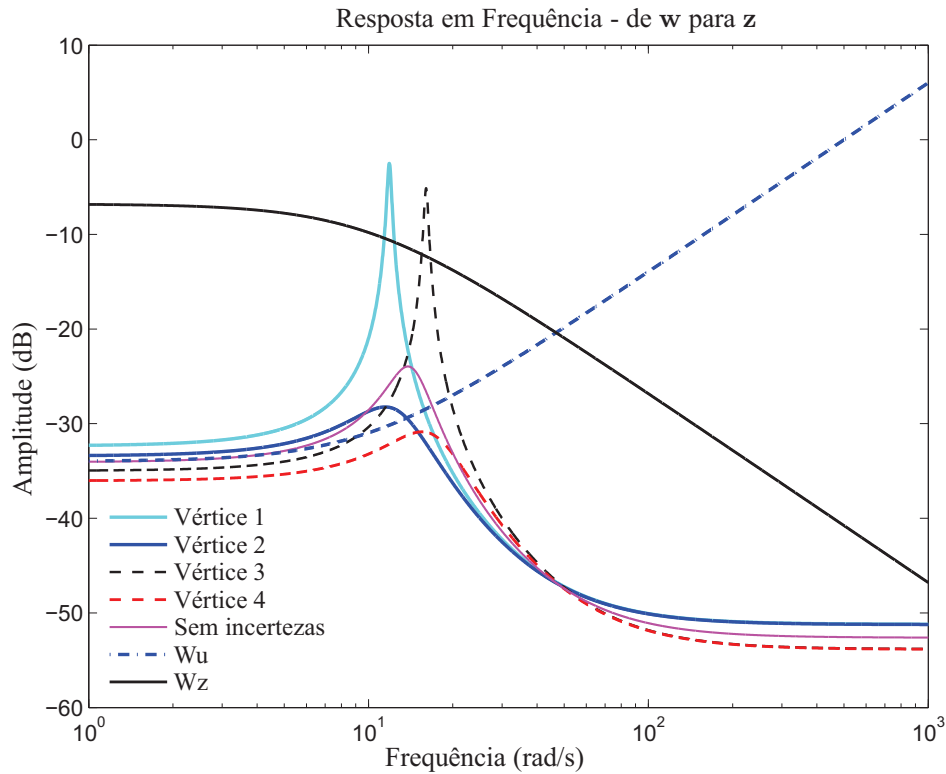


Figura 6.6: Resposta em Frequência das plantas truncadas (1º modo) e dos filtros de ponderação.

### 6.2.5 Controlador

A metodologia utilizada para encontrar o controlador foi a solução do problema mostrado em (3.29). Na abordagem politópica este problema se torna (5.11).

Como já explicitado anteriormente, a função *mincx* do Matlab Control Toolbox® [10] foi utilizada para resolver o problema de otimização com restrições LMI. A função *mincx* apresenta alguns parâmetros para controle da solução do problema de otimização (*options*):

- *options(1)*: determina a acurácia nos objetivos, critério de parada em termos da variação da função objetivo. *Default* =  $10^{-2}$ ;
- *options(2)*: determina o número máximo de iterações para o problema. *Default* = 100;
- *options(3)*: Determina o valor de  $R$ .

$R$  é o valor dentro do qual a norma euclidiana do vetor de decisão  $\mathbf{y}$  deve permanecer.

$$\sum_{i=1}^N |\mathbf{y}_i|^2 < R^2. \text{ Default} = 10^9;$$

- *options(4)*: Valor inteiro  $L$ . Termina a operação após ter alcançado a acurácia desejada, no caso definida pela *options(1)*, após  $L$  iterações. *Default*  $L = 10$ ;
- *options(5)*: traço de execução, mostra os passos da execução na *Command Window*. *Default*= 0 (desligado) ;

Para o problema em questão, as *options* utilizadas como entrada para a função *mincx* foram os próprios valores *Default* do Matlab Control Toolbox® e são mostrados na Tabela 6.3.

Tabela 6.3: Valores utilizados em *options* do *mincx* na execução do problema.

<i>options(1)</i>	<i>options(2)</i>	<i>options(3)</i>	<i>options(4)</i>	<i>options(5)</i>
$10^{-2}$	100	$10^9$	1	0

O controlador encontrado nesse caso apresenta o seguinte modelo de estados:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -3.798e + 05 & -1.126e + 06 & 0.3441 & 0.9449 \\ 1.281e + 05 & 3.797e + 05 & -0.1161 & -0.3187 \\ 1.74e + 07 & 5.159e + 07 & -34.09 & -5.188 \\ -7.186e + 05 & -2.13e + 06 & 0.6509 & -8.213 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 4.789e + 08 \\ -1.615e + 08 \\ -3686 \\ -2.825e + 07 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} -8.422e - 06 & -2.497e - 05 & -4.884e - 08 & 2.885e - 12 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} 1.834e - 09 \end{bmatrix}.$$

### 6.3 Análise dos Resultados

A resposta em frequência da malha aberta (sem controle) e da malha fechada (com controle) de cada um dos vértices que formam o polítopo se encontram nas Figuras 6.7 a 6.10. É possível notar pela análise dessas figuras que o objetivo de controle, atenuação do primeiro modo de vibrar dos sistemas, foi atingido. Os pólos de cada um dos vértices, com e sem controle, podem ser analisados pela Figura 6.11. Observa-se que todos os pólos do sistema com e sem controle encontram-se no semiplano esquerdo, garantindo assim, a estabilidade dos sistemas considerados.

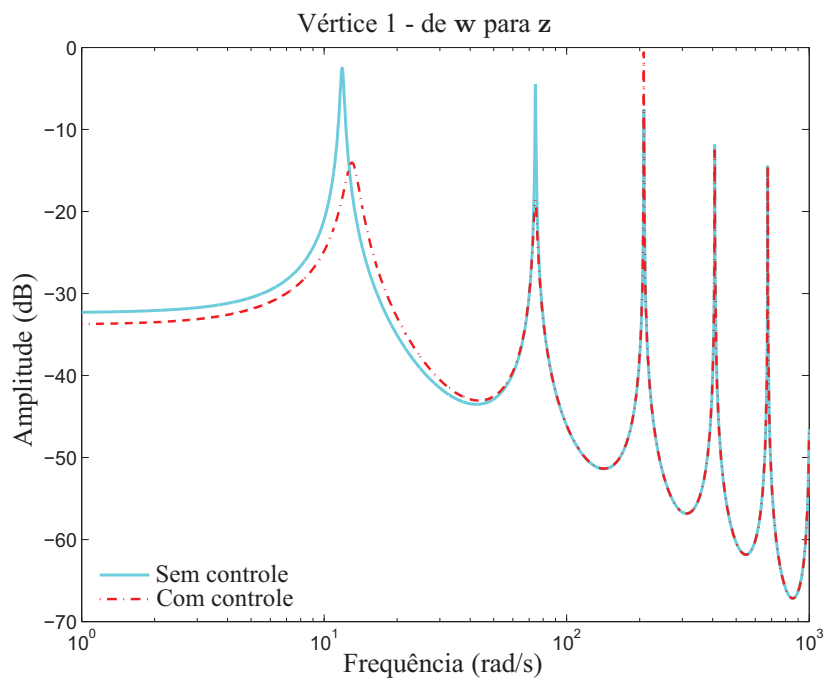


Figura 6.7: Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 1.

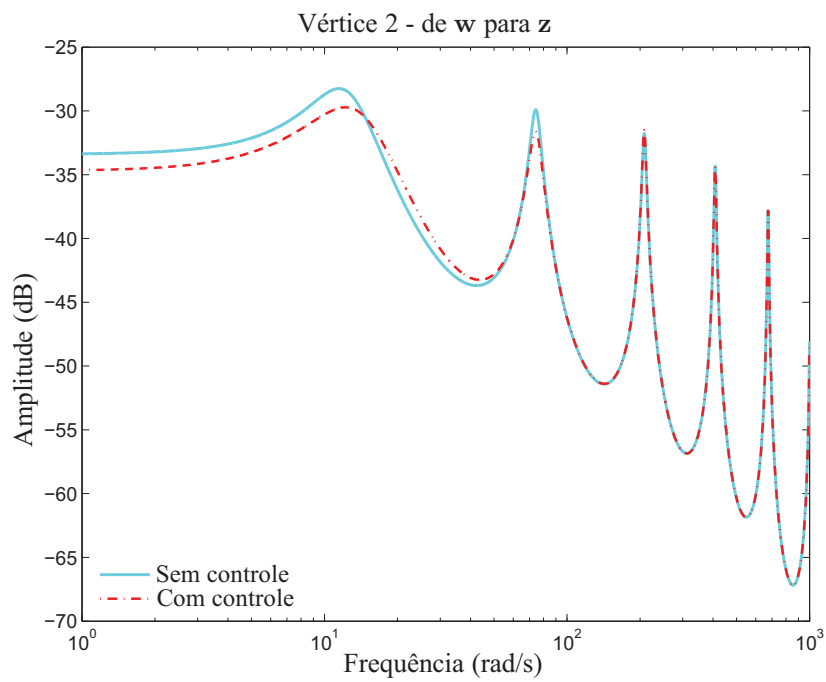


Figura 6.8: Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 2.



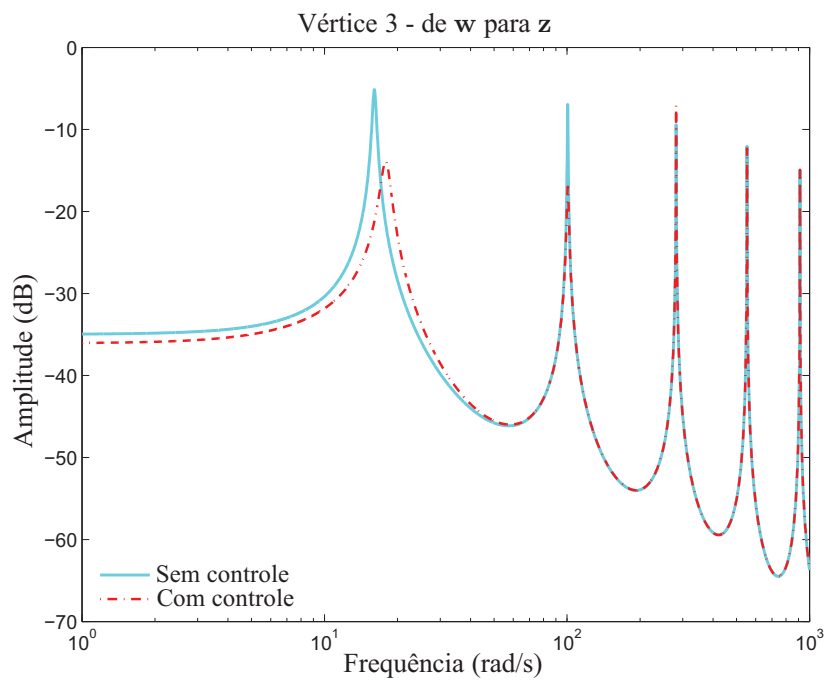


Figura 6.9: Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 3.

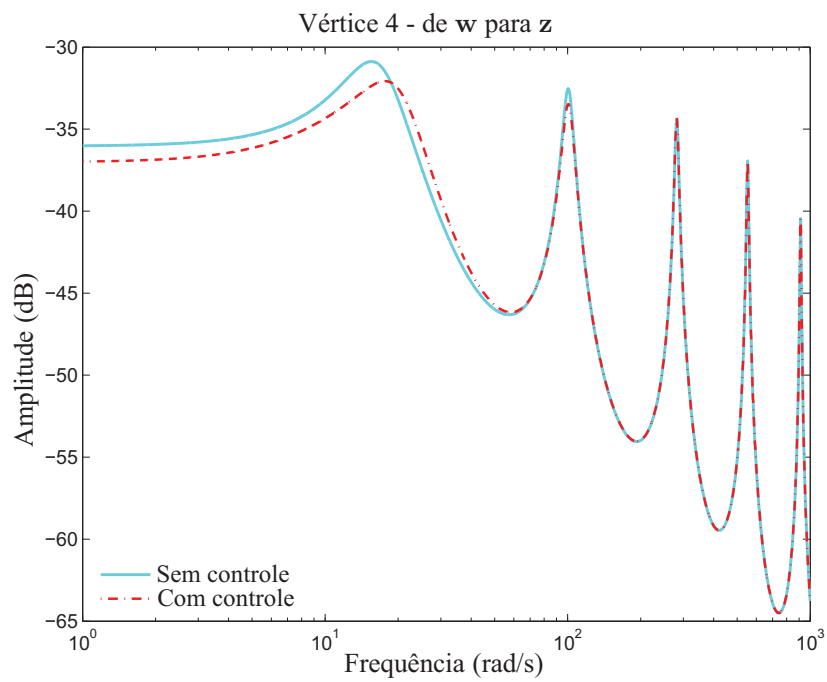


Figura 6.10: Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 4.

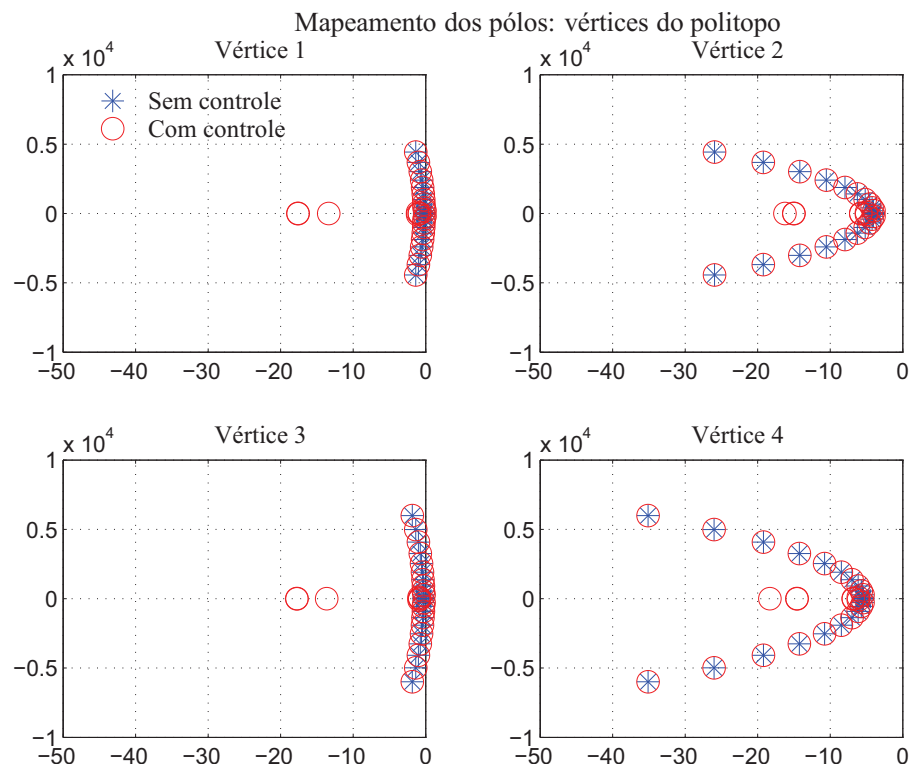


Figura 6.11: Mapeamento dos pólos para os sistemas que formam os vértices do politopo.

Com o intuito de realizar uma verificação com uma planta interior ao politopo considerado, a planta sem incertezas foi simulada em malha fechada com o controlador encontrado. A resposta em frequência dessa planta, com e sem controle, pode ser visualizada na Figura 6.12. Pode-se perceber pela análise dessa figura que ocorreu atenuação no primeiro modo de vibrar. O mapeamento dos pólos para esse sistema pode ser visualizado na Figura 6.13.

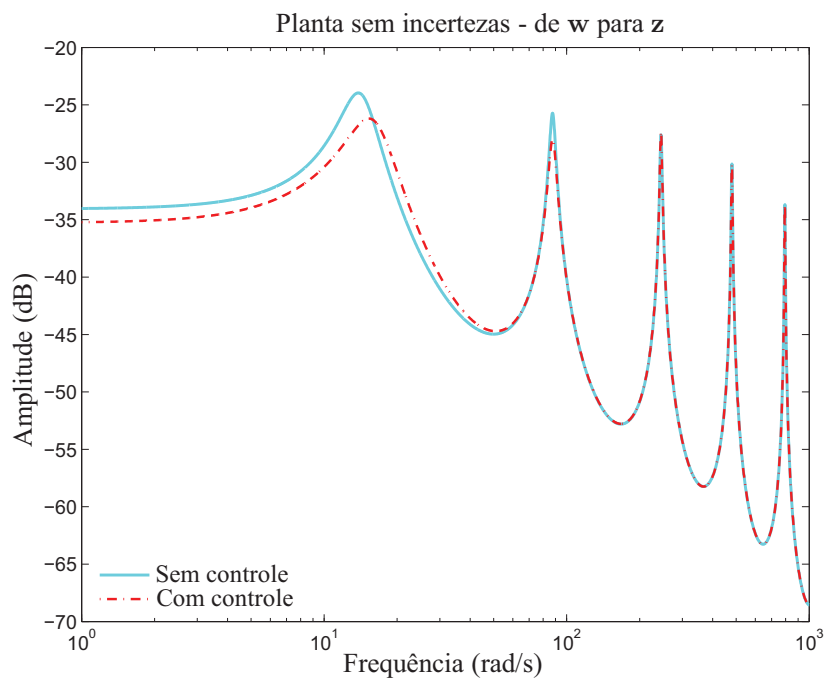


Figura 6.12: Resposta em frequência da planta sem incertezas.

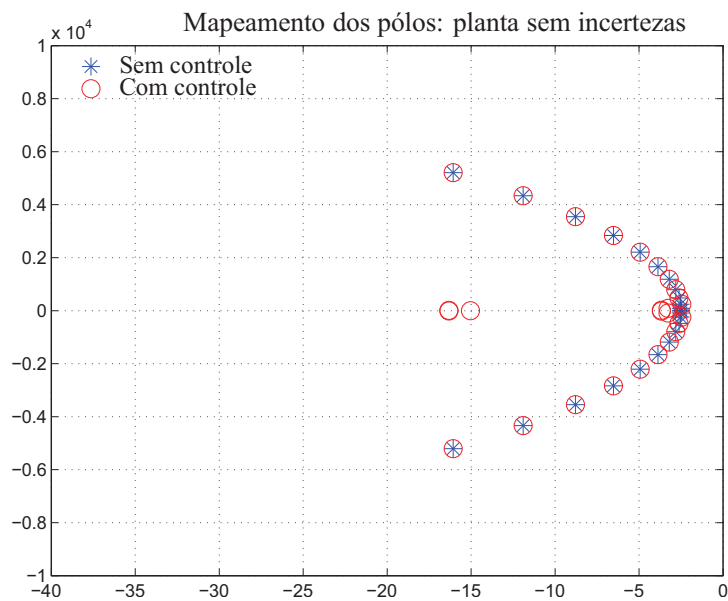


Figura 6.13: Mapeamento dos pólos para a planta sem incertezas.

A Tabela 6.4 mostra a magnitude da atenuação em malha fechada, nos 5 primeiros modos, para cada um dos vértices do polítopo formado e para a planta sem incertezas. Pode-se visualizar,

a partir dessa tabela, que além de atenuação no 1º modo, ocorreu também atenuação de vibração no 2º modo e uma ampliação de vibração no 3º modo dos vértices considerados. Os demais modos apresentaram atenuações pouco significativas. A ampliação de vibração no 3º modo não traz grandes problemas ao projeto, pois considera-se que a frequência na qual o sistema será excitado corresponde somente à faixa do 1º modo de vibração.

Os vértices que apresentaram menor atenuação de vibração, vértices 2 e 4, são referentes aos sistemas com maior fator de amortecimento (ver Figura 6.3) e apresentam, devido ao maior amortecimento, menor amplitude na resposta oscilatória.

Tabela 6.4: Atenuação em relação ao sistema sem controle para cada umas das plantas consideradas.

Vértice	Atenuação(dB)				
	1º pico	2º pico	3º pico	4º pico	5º pico
-					
1	-11.54	-14.27	+6.03	-0.76	-0.33
2	-1.46	-1.71	+0.25	-0.20	-0.01
3	-8.76	-10.04	+1.90	-0.47	-0.01
4	-1.19	-0.94	+0.09	-0.30	-0.80
Planta sem incertezas	-2.23	-2.27	+0.28	-0.20	-0.26

A Figura 6.14 mostra a resposta temporal do sinal de desempenho de cada um dos vértices, com e sem controle, para uma entrada *chirp*, varredura linear senoidal de 0 a 500 rad/s em 50 segundos, módulo de 0.050 Nm e taxa de amostragem de  $3.14 \times 10^4$  rad/s. Verifica-se uma atenuação de vibração principalmente no primeiro modo de vibrar das estruturas consideradas. No caso dos vértices 1 e 3 uma boa atenuação pode ser observada também no segundo modo.

A Figura 6.15 mostra o esforço de controle para cada um dos vértices para a mesma entrada *chirp*. A partir da análise dessa figura é possível notar que o Vértice 3 apresenta o valor de maior magnitude do esforço de controle, de 0.040 Nm.

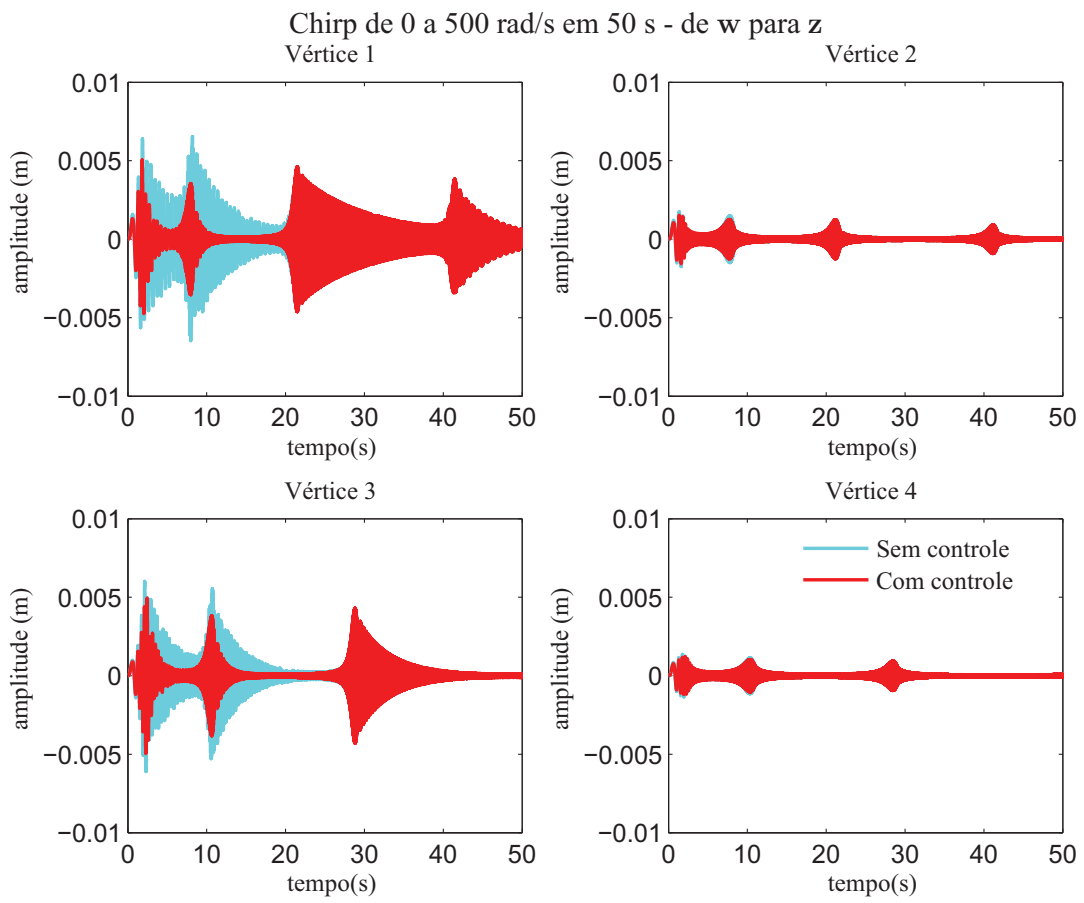


Figura 6.14: Resposta temporal a uma varredura senoidal - Vértices do politopo.

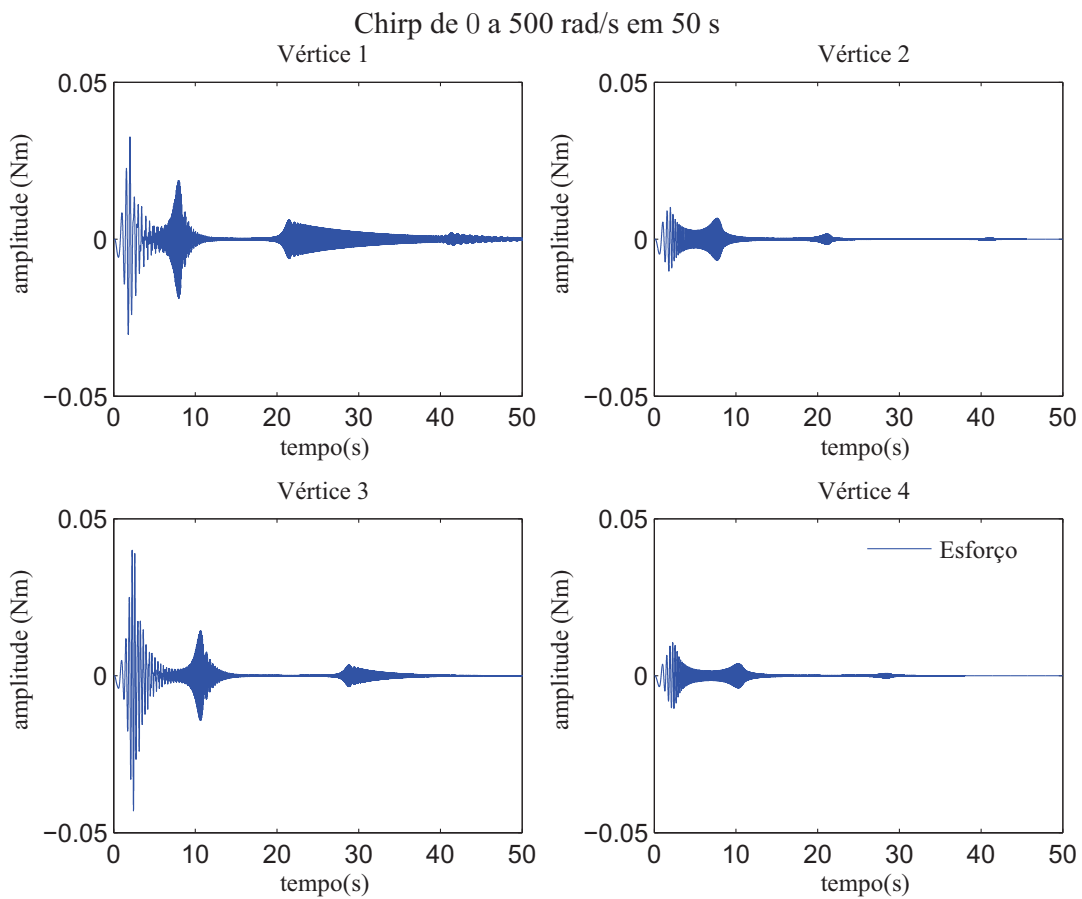


Figura 6.15: Esforço de controle, resposta temporal a uma entrada de varredura senoidal - Vértices do politopo.

A Figura 6.16 mostra a resposta temporal da planta sem incertezas, com e sem controle, para a mesma entrada *chirp*. É possível verificar que ocorre atenuação de vibração nos dois primeiros modos de vibrar da estrutura.

A Figura 6.17 mostra o esforço de controle da planta sem incertezas para a mesma entrada *chirp*. O valor de 0.017 Nm representa o pico do esforço para o controle da estrutura considerada.

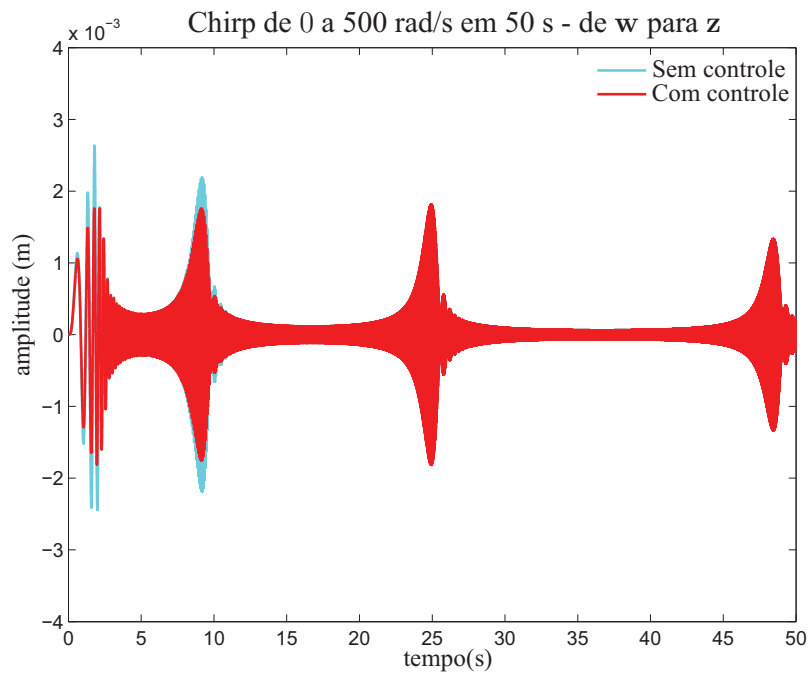


Figura 6.16: Resposta temporal a uma varredura senoidal - Planta sem incertezas.

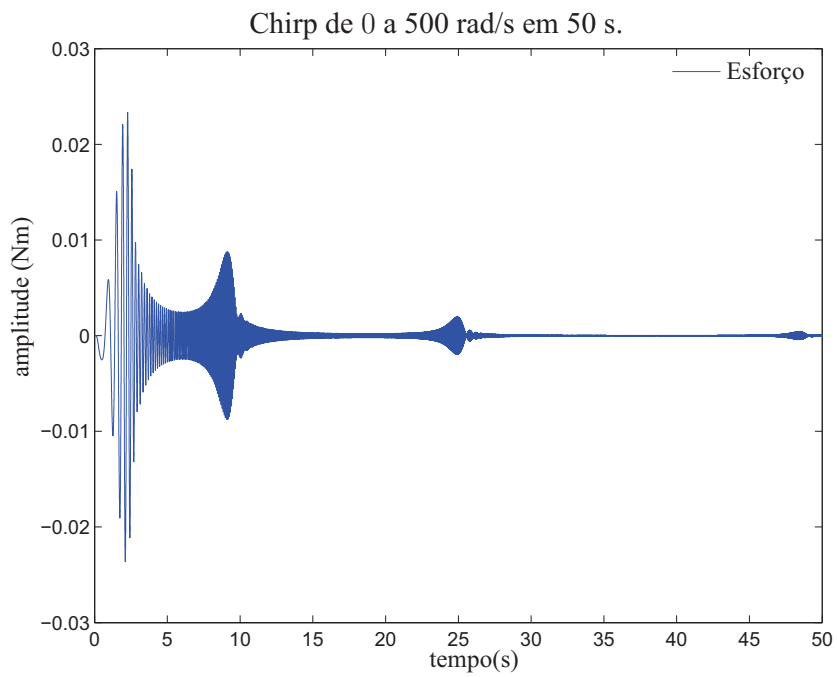


Figura 6.17: Esforço de controle, resposta temporal a uma entrada de varredura senoidal - Planta sem incertezas.

## 6.4 Sistema Linear Variante no Tempo

A Figura 6.18 demonstra a resposta temporal dos sistemas a uma entrada *chirp* de 0 a 500 rad/s em 100 s. Nesta figura é possível verificar a resposta temporal quando a matriz dinâmica,  $A$ , varia no tempo e a comparação na resposta temporal para a mesma entrada para o sistema sem incertezas.

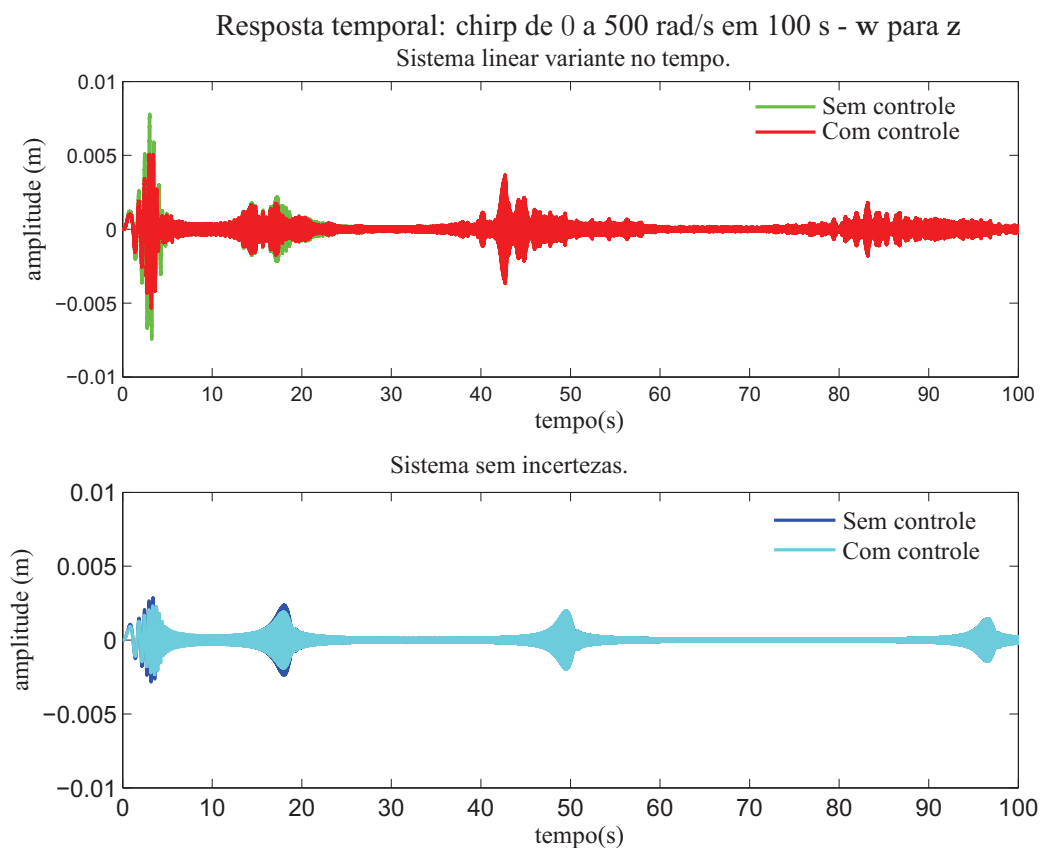


Figura 6.18: Resposta temporal a uma varredura senoidal - Sistema linear variante e invariante no tempo.

Quando considerado sistemas invariantes no tempo, os principais resultados de atenuação de vibração ocorreram nos 1º e 2º modos de vibrar dos sistemas. Para o sistema variante no tempo, essa faixa de frequências também sofreu atenuação de vibração, como pode ser observado a partir da Figura 6.18, satisfazendo assim o objetivo de controle, também nesse caso.

Já a estabilidade do sistema, quando esse varia continuamente no tempo dentro do politopo, também é mantida, validando os resultados já obtidos para sistemas invariantes no tempo.



## 6.5 Conclusões do Capítulo

Nesse Capítulo procurou-se projetar um controlador utilizando abordagem politópica para atenuação de vibração do primeiro modo de vibrar da estrutura em estudo e estabilidade em malha fechada. Utilizou-se para o controle dos sistemas considerados um controlador de baixa ordem, utilizando para isso, um modelo truncado do sistema com apenas o 1º modo de vibrar de cada um dos sistemas que formam o politopo para projeto do controlador.

Os sistemas com controle apresentaram bons resultados de atenuação de vibração, principalmente no primeiro modo. Os valores de atenuação podem ser verificados na Tabela 6.4. Dentre os sistemas considerados em estudo, aquele que apresentava a maior magnitude de vibração, no caso o Vértice 1, apresentou uma atenuação em 11.54 dB no primeiro modo.

O 2º modo de vibrar dos sistemas, que não são explicitamente considerados em projeto, também apresentaram atenuação de vibração. Em alguns dos vértices uma atenuação bastante significativa foi alcançada nesse modo, como exemplo, o Vértice 1 onde uma atenuação de 14.27 dB foi alcançada.

A Figura 6.15 demonstra o esforço de controle para cada um dos vértices do politopo formado. Um valor de 0.040 Nm é suficiente para atenuar em 8.76 dB o primeiro modo de vibrar do Vértice 3 do politopo, e representa o valor de maior esforço de controle dentre os vértices.

Uma análise foi realizada para o caso de sistemas lineares variantes no tempo quando os parâmetros variam dentro da faixa de incertezas consideradas em projeto. Os resultados demonstraram que a abordagem politópica, estendida para esse tipo de sistemas, se mantém válida, com atenuação de vibração nas mesmas faixas de frequência do que em sistemas invariantes no tempo. A estabilidade em malha fechada também foi mantida.

## Capítulo 7

### Exemplo de aplicação 2: vibração da placa livre

#### 7.1 Introdução

O problema da proposto, neste caso, consiste em projetar um controlador para atenuar a vibração do primeiro modo de vibrar trabalhando com controle  $\mathcal{H}_\infty$ , em uma placa livre de alumínio, ou seja, sem engaste, nem apoios. O problema considerado é mostrado na Figura 7.1.

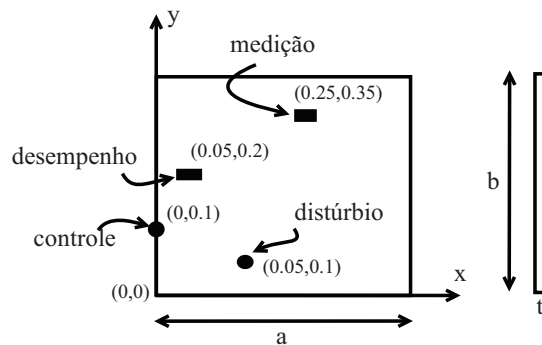


Figura 7.1: Problema 2 - Vibração da placa livre.

Os parâmetros da placa são:  $a=0.40$  m,  $b=0.45$  m,  $h=0.002$  m,  $E_{Al}=70$  GPa,  $\rho_{Al}=2710$  kg/m<sup>3</sup> e  $\nu=0.3$ .

#### 7.2 Modelo de elementos finitos

A matriz de massa  $M$  e a matriz de rigidez  $K$  foram encontradas utilizando o programa de elementos finitos proposto por [6]. A discretização utilizada foi feita com  $8 \times 9$  elementos e 90 nós, 3 graus de liberdade por nó (dois de deslocamento angular e um perpendicular ao plano - ver Capítulo 2), totalizando 270 graus de liberdade.

O modos de corpo rígido ( $w_n = 0$ ) foram retirados do modelo usando o conceito de separação de cada modo no respectivo modelo modal (comando *modreal* do Matlab®) para que a planta utilizada em controle fosse aquela sem esses modos. De posse desta planta, foi realizado

o truncamento nos 12 primeiros modos de vibração utilizando também o comando *modreal* do Matlab®. Assim como no problema da viga engastada, essa planta passa a ser considerada como o sistema/planta real. O truncamento nestas bases permite a análise até frequências de aproximadamente  $4 \times 10^3 \text{ rad/s}$ .

A matriz de amortecimento,  $\bar{\mathbf{D}}$ , é construída utilizando o conceito de amortecimento proporcional, Equação (2.16), os valores de  $\varphi$  e  $\beta$  valem respectivamente:  $5 \times 10^{-5}$  e  $5 \times 10^{-3}$ , e têm-se portanto o amortecimento proporcional na forma:

$$\bar{\mathbf{D}} = 5 \times 10^{-5} \mathbf{M} + 5 \times 10^{-3} \mathbf{K}$$

As frequências naturais e o fator de amortecimento para os cinco primeiros modos do sistema real, considerando as hipóteses acima, se encontram na Tabela 7.1.

Tabela 7.1: Valores para  $w_n$  e  $\xi$  dos 5 primeiros modos do sistema real sem incertezas.

Modo	$\xi$	$w_n$ (rad/s)
1	0.0057	228.27
2	0.0080	321.46
3	0.0114	454.75
4	0.0156	579.04
5	0.0251	627.28

### 7.2.1 Incertezas consideradas

Assim como no problema da viga, as incertezas consideradas para solução do problema foram  $\left[ 0.85w_n \quad 1.15w_n \right]$  para as frequências naturais e de  $\left[ 0.10\xi \quad 1.90\xi \right]$  para o fator de amortecimento, Figura 6.3. O politopo formado terá a mesma forma que no problema anterior. Têm-se então que a matriz dinâmica modal  $\mathbf{A}_m$ , para cada modo  $i$ , em cada um dos vértices será dada por:

$$\mathbf{V}_{1,i} = \begin{bmatrix} -\xi_i^{\min} w_{n,i}^{\min} & w_{n,i}^{\min} \\ -w_{n,i}^{\min} & -\xi_i^{\min} w_{n,i}^{\min} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{vértice 1}; \mathbf{V}_{2,i} = \begin{bmatrix} -\xi_i^{\max} w_{n,i}^{\min} & w_{n,i}^{\min} \\ -w_{n,i}^{\min} & -\xi_i^{\max} w_{n,i}^{\min} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{vértice 2};$$

$$\mathbf{V}_{3,i} = \begin{bmatrix} -\xi_i^{\min} w_{n,i}^{\max} & w_{n,i}^{\max} \\ -w_{n,i}^{\max} & -\xi_i^{\min} w_{n,i}^{\max} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{vértice 3}; \mathbf{V}_{4,i} = \begin{bmatrix} -\xi_i^{\max} w_{n,i}^{\max} & w_{n,i}^{\max} \\ -w_{n,i}^{\max} & -\xi_i^{\max} w_{n,i}^{\max} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{vértice 4}.$$

## 7.2.2 Modelo para Controle

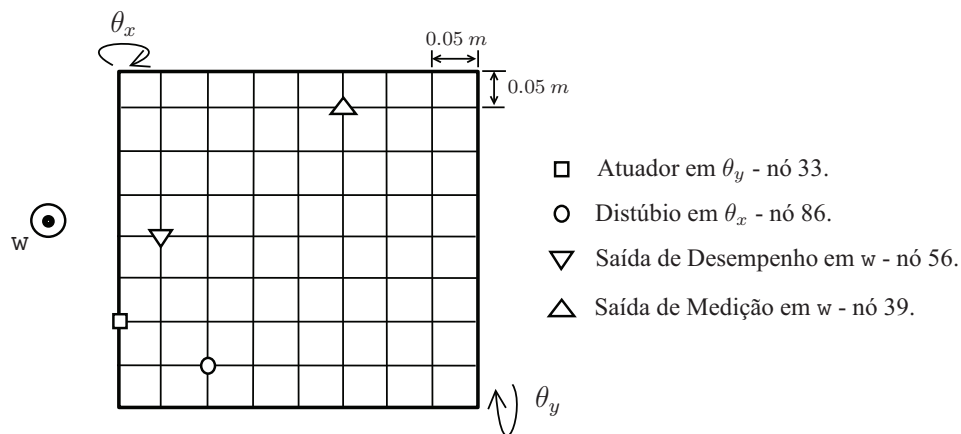


Figura 7.2: Problema de controle.

A Figura 7.2 mostra a configuração de controle utilizada para o problema em questão:

- Entradas exógenas (distúrbio),  $w$ : considerado como sendo um momento aplicado na direção  $\theta_x$  no nó 86.
- Esforço de controle,  $u$ , momento na direção  $\theta_y$  aplicado ao nó 33.
- Saída de medição,  $y$ , deslocamento perpendicular ao plano,  $w$ , no nó 39.
- Saída de desempenho,  $z$ , deslocamento perpendicular ao plano,  $w$ , no nó 56.

## 7.2.3 Plantas com e sem Incertezas

A Tabela 7.2 mostra a magnitude da menor e da maior frequência natural para as plantas com incertezas (vértices) e para a planta sem considerar incertezas. O controlador  $\mathcal{H}_\infty$  projetado deve ser capaz de controlar todas as plantas dentro desta faixa, sendo assim robusto a variações paramétricas [34].

Tabela 7.2: Variação no  $\xi$  e  $w_n$  das plantas para o problema da placa livre.

		Limite inferior	Sem incertezas (nominal)	Limite Superior
1º modo	$w_n$ (rad/s)	194.03	228.27	262.51
	$\xi$	0.0005	0.0057	0.0108
2º modo	$w_n$ (rad/s)	273.32	321.46	369.72
	$\xi$	0.0008	0.0080	0.0152
3º modo	$w_n$ (rad/s)	386.54	454.78	522.96
	$\xi$	0.0011	0.0113	0.0216

A Figura 7.3 mostra a resposta em frequência da entrada de distúrbio  $w$  para a saída de desempenho  $z$ , para cada um dos vértices formados pela aplicação das incertezas no projeto.

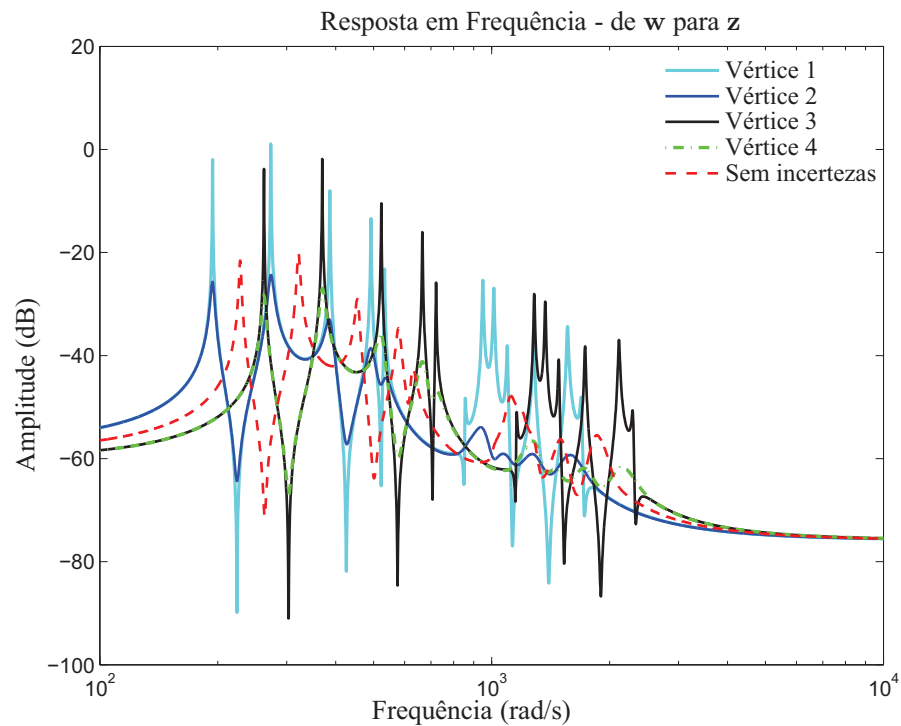


Figura 7.3: Resposta em frequência das plantas que forma os vértices do politopo.

#### 7.2.4 Plantas Truncada - Filtros de ponderação

Para projeto do controlador, as plantas que formam os vértices do politopo foram truncadas utilizando a função *modreal* em seu 1º modo de vibrar e passam, a partir de então, a serem chamadas

de plantas truncadas, Figura 7.4. O truncamento no primeiro modo foi realizado com o intuito de obter um controlador de baixa ordem para controle do primeiro modo do sistema e que ainda garanta a estabilidade de todos os vértices considerados.

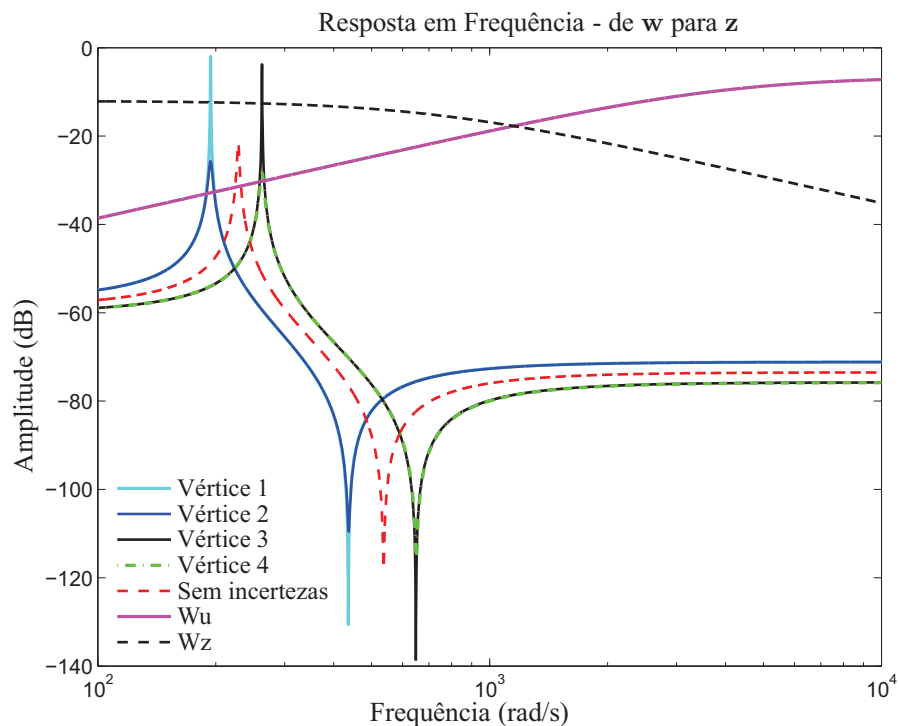


Figura 7.4: Resposta em Frequência das plantas truncadas e dos filtros de ponderação.

$$\mathbf{W}_z = \frac{0.0005s + 175}{s + 700} ; \mathbf{W}_u = \frac{0.47s + 0.188}{s + 4000}. \quad (7.1)$$

A função de transferência dos filtros utilizados para projeto são mostrados em (7.1) - Figura 7.4. Com a escolha dos filtros de ponderação, buscou-se satisfazer as condições de estabilidade do sistema em malha fechada e atenuação de vibração do primeiro modo. Salienta-se que existem diferentes filtros que também satisfazem as condições de projeto.

### 7.2.5 Controlador

As opções de entrada para o algoritmo de solução utilizado são os mesmos do *Default* do Matlab Control Toolbox® e podem ser visualizados na Tabela 6.3.

O controlador encontrado neste caso apresenta o seguinte modelo de estados:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 1648 & 5280 & -1.116 & 9.764 \\ -1325 & -3711 & 0.5132 & -5.573 \\ 4191 & 9929 & -11.31 & 18.08 \\ -818.2 & -2787 & 1.38 & -705.5 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 4.738e + 08 \\ -1.812e + 08 \\ -1.313e + 04 \\ -6.723e + 05 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} -8.602e - 06 & -2.038e - 05 & -8.262e - 06 & -3.708e - 08 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} 2.77e - 05 \end{bmatrix}.$$

### 7.3 Análise dos Resultados

A resposta em frequência da malha aberta (sem controle) e da malha fechada (com controle) de cada um dos vértices que formam o politopo se encontram nas Figuras 7.5 a 7.8. É possível notar pela análise dessas figuras que o objetivo de controle, atenuação do primeiro modo de vibrar dos sistemas, foi atingido. A análise dos pólos de cada um dos vértices é mostrada na Figura 7.9. Observa-se que todos os pólos do sistema encontram-se no semiplano esquerdo, garantindo assim, a estabilidade dos sistemas considerados.

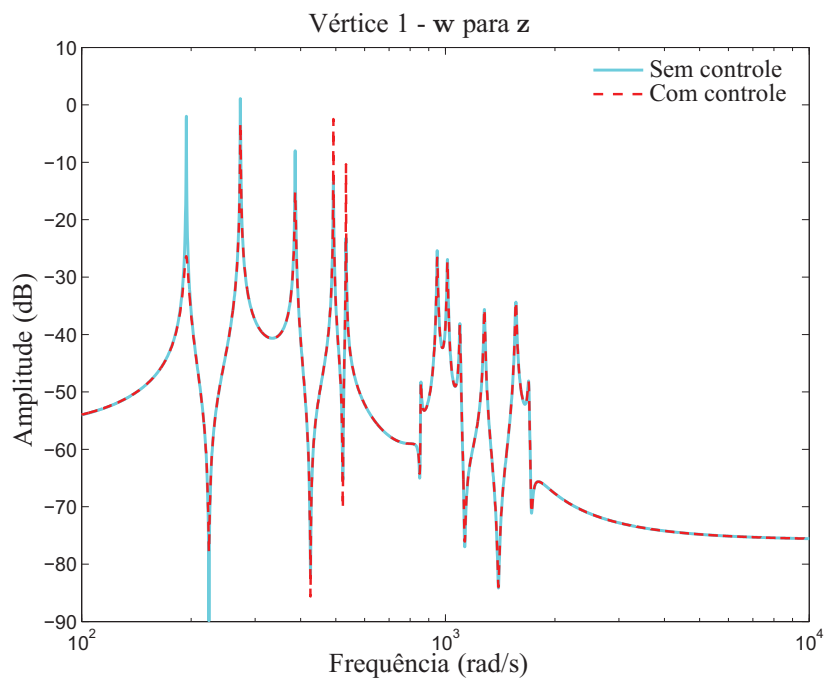


Figura 7.5: Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 1.

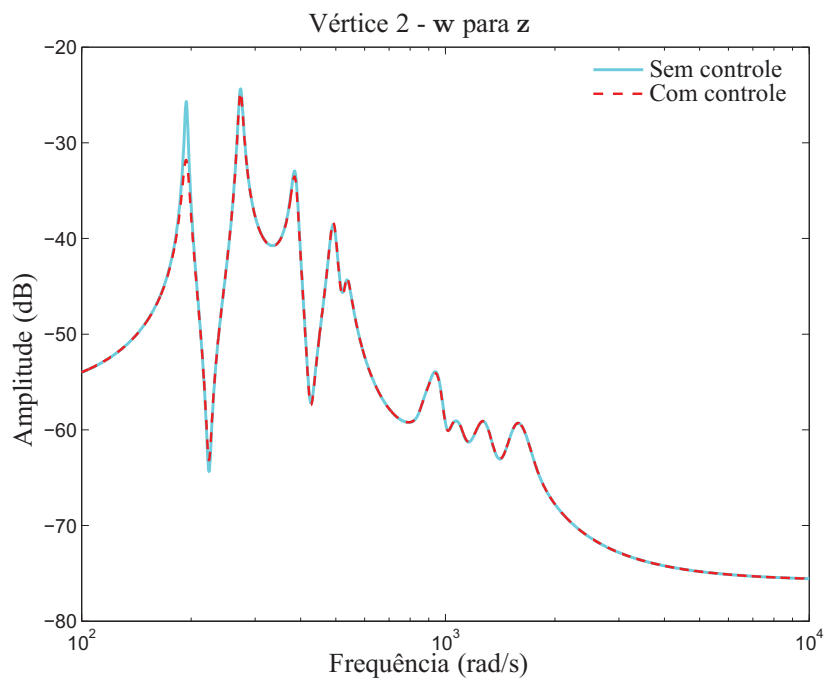


Figura 7.6: Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 2.



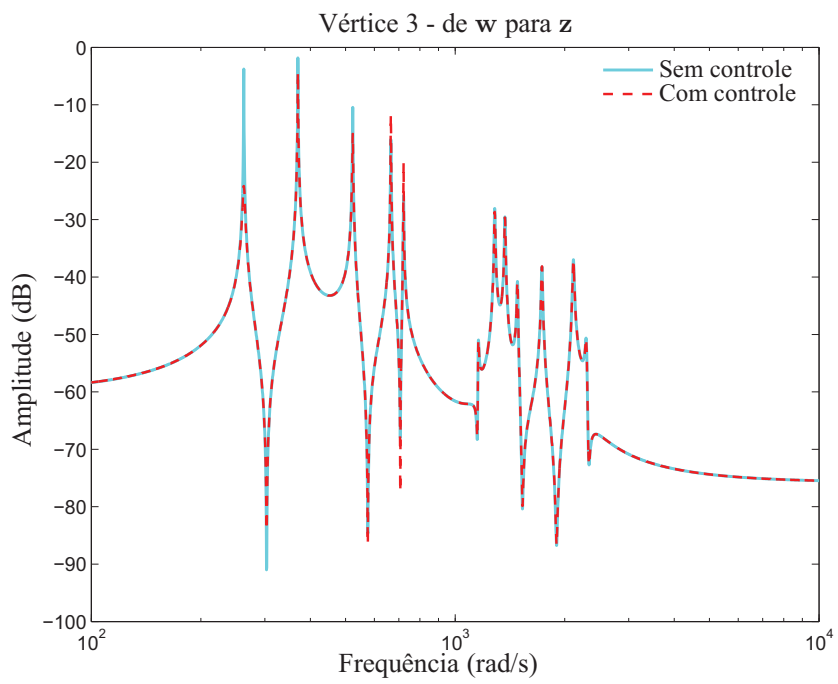


Figura 7.7: Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 3.

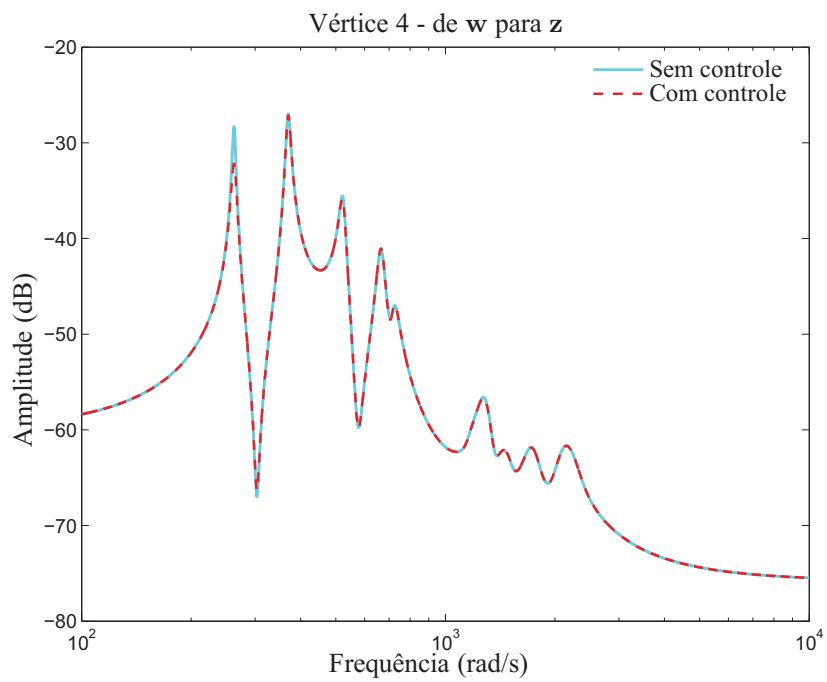


Figura 7.8: Resposta em frequência da planta com incertezas - Vértice 4.

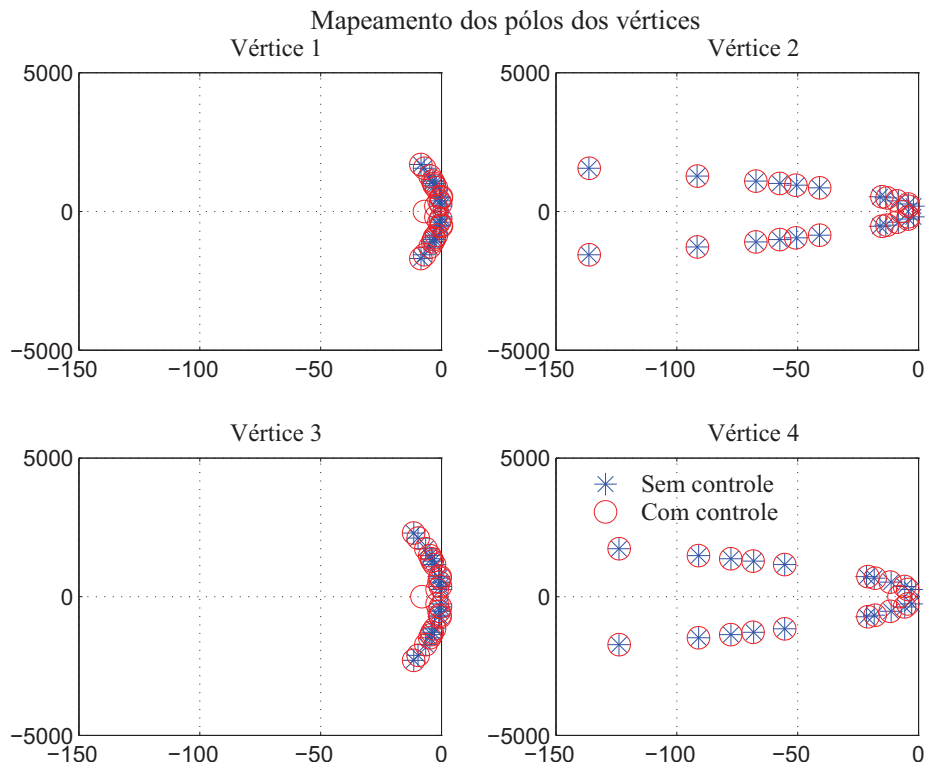


Figura 7.9: Mapeamento dos pólos para os sistemas que formam os vértices do politopo.

Com o intuito de realizar uma análise com uma planta interior ao politopo considerado, a planta sem incertezas foi simulada em malha fechada com o controlador encontrado. A resposta em frequência dessa planta, sem e com controle, pode ser visualizada na Figura 7.10. É possível notar que o requisito de projeto, atenuação do primeiro modo de vibrar, foi alcançado. A estabilidade em malha fechada pode ser comprovada pelo mapeamento dos pólos, Figura 7.11.

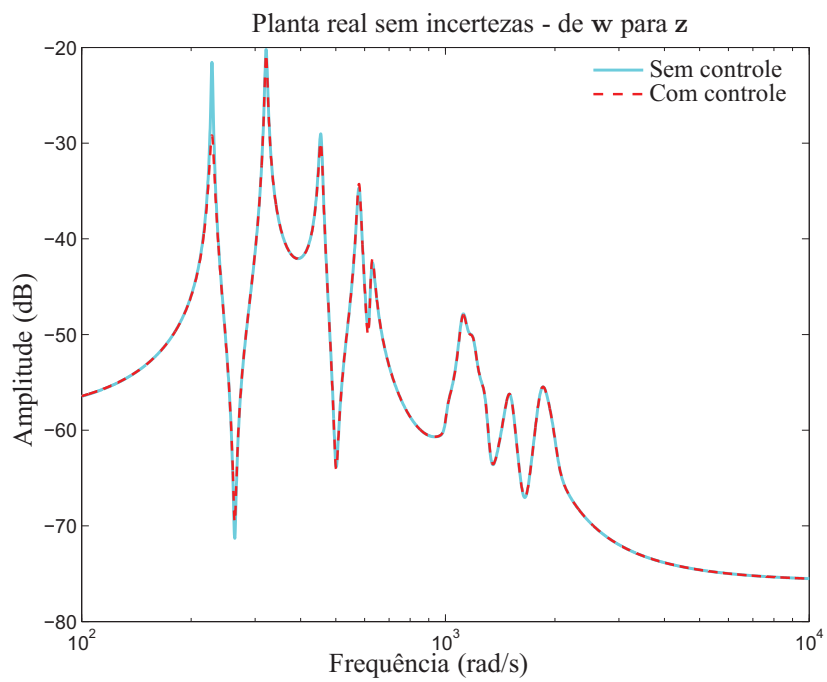


Figura 7.10: Resposta em frequência da planta sem incertezas.

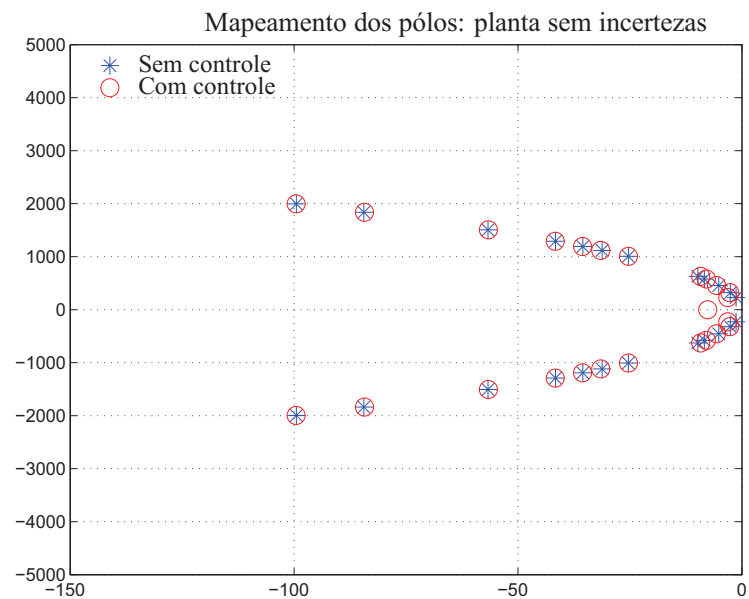


Figura 7.11: Mapeamento dos pólos para a planta sem incertezas.

A Tabela 7.3 mostra a diferença na magnitude de vibração, com e sem controle, para os 6 primeiros modos de vibrar das plantas com incertezas e da planta sem incertezas. A partir da

análise dessa tabela, pode-se notar que o objetivo principal de controle, atenuação no 1º modo de vibrar da estrutura, foi atingido com sucesso. É possível notar também uma atenuação no 2º e no 3º modo de vibrar dos sistemas considerados. Ocorre, contudo, uma amplificação da resposta do 4º e do 5º modo em alguns dos vértices considerados.

Tabela 7.3: Atenuação em relação ao sistema sem controle para cada umas das plantas consideradas.

Vértice	Atenuação(dB)					
	1º pico	2º pico	3º pico	4º pico	5º pico	6º pico
-						
1	-19.68	-1.87	-7.36	+11.32	+12.90	-0.90
2	-6.04	-0.28	-0.58	+0.25	-0.30	-0.20
3	-21.23	-2.60	-4.72	+4.25	-0.75	-0.68
4	-3.87	-0.15	-0.32	+0.12	-0.50	-0.50
Planta sem incertezas	-7.64	-0.38	-0.78	+0.40	+0.32	-0.16

A Figura 7.12 mostra a resposta temporal de cada um dos vértices, com e sem controle, para uma entrada *chirp*, varredura linear senoidal de 0 a 1000 rad/s em 100 segundos, módulo de 0.045 Nm e taxa de amostragem de  $3.14 \times 10^4$  rad/s. Demonstra-se a atenuação de vibração mais significativa principalmente nos três primeiros modos de vibrar para os vértices 1 e 3. Os sistemas que apresentaram menor amplitude de atenuação de vibração, ou seja, os vértices 2 e 4, correspondem aos sistemas com maior fator de amortecimento.

A Figura 7.13 mostra o esforço de controle para cada um dos vértices a mesma entrada *chirp*. A partir da análise dessa figura é possível notar que o Vértice 1 apresenta o maior valor no esforço de controle para o 1º modo, 0.021 Nm.

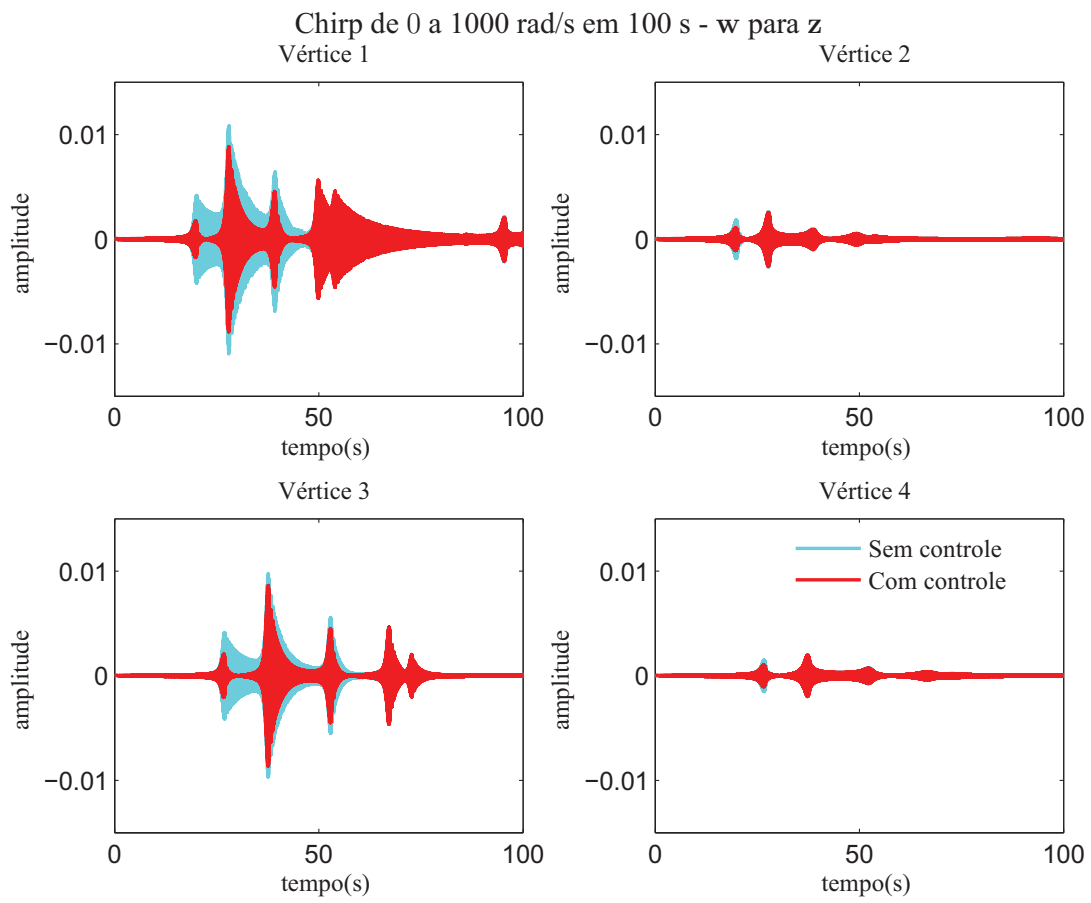


Figura 7.12: Resposta temporal a uma varredura senoidal - Vértices do politopo.

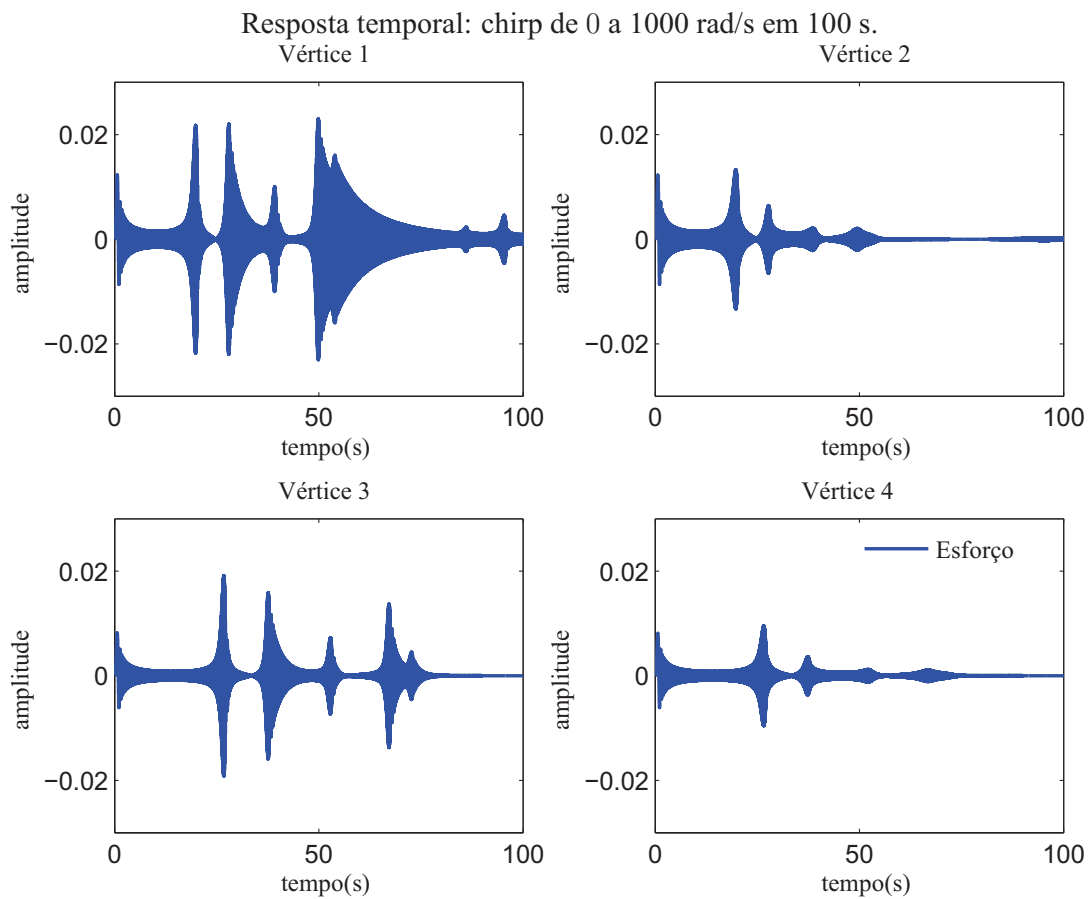


Figura 7.13: Esforço de controle, resposta temporal a uma entrada de varredura senoidal - Vértices do politopo.

A Figura 7.14 mostra a resposta temporal da planta sem incertezas, com e sem controle, para a mesma entrada *chirp*. A análise dessa figura demonstra a atenuação de vibração principalmente no 1º e 2º modo de vibrar da estrutura. Já a Figura 7.15 mostra o esforço de controle para a planta sem incertezas, o valor de maior magnitude é de 0.015 Nm.

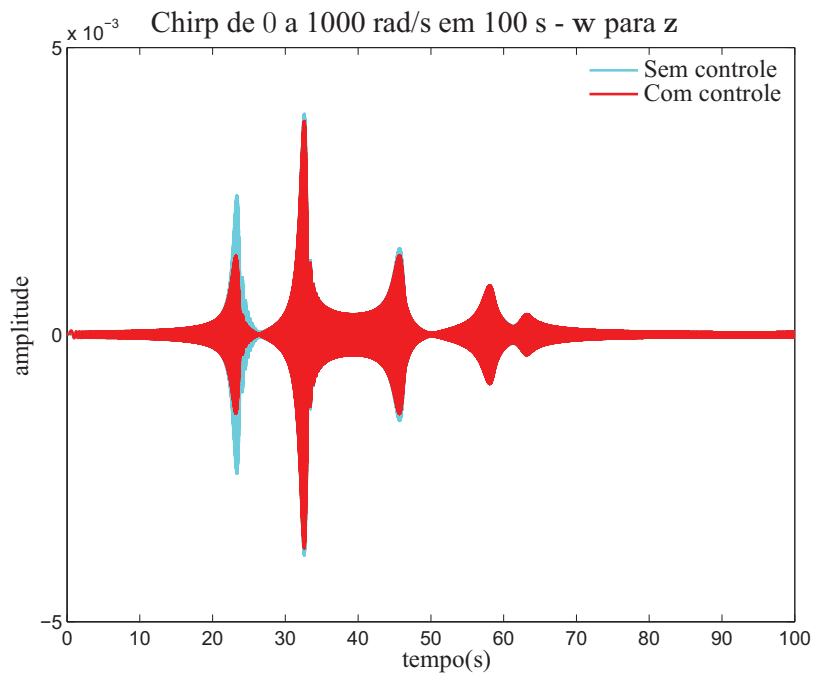


Figura 7.14: Resposta temporal a uma varredura senoidal - Planta sem incertezas.

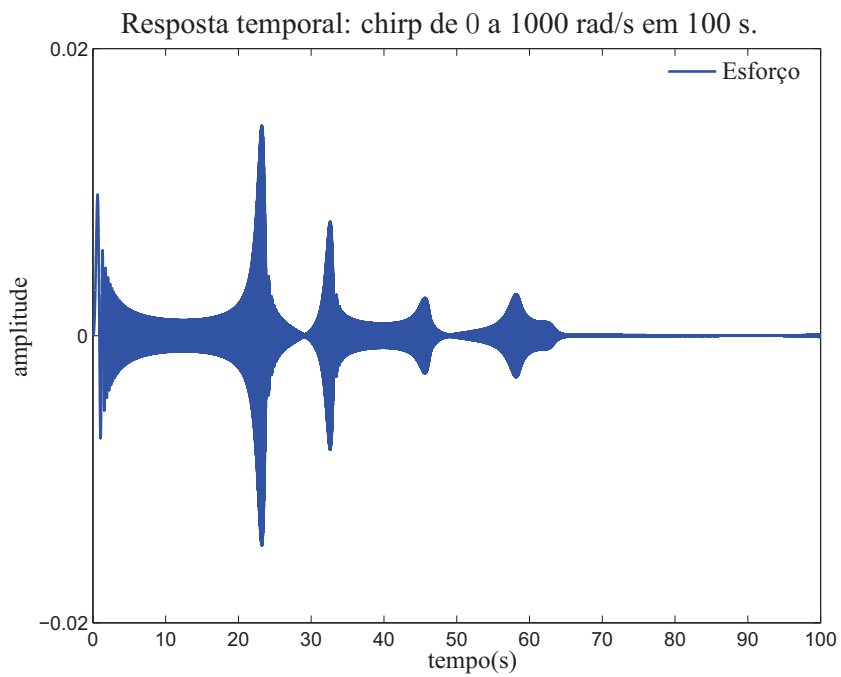


Figura 7.15: Esforço de controle, resposta temporal a uma entrada de varredura senoidal - Planta sem incertezas.

## 7.4 Sistema Linear Variante no Tempo

A Figura 7.16 demonstra a resposta temporal dos sistemas a uma entrada *chirp* de 0 a 1000 rad/s em 100 s. Nesta figura é possível verificar a resposta temporal quando a matriz dinâmica,  $A$ , varia no tempo e a comparação na resposta temporal a mesma entrada para o sistema sem incertezas.

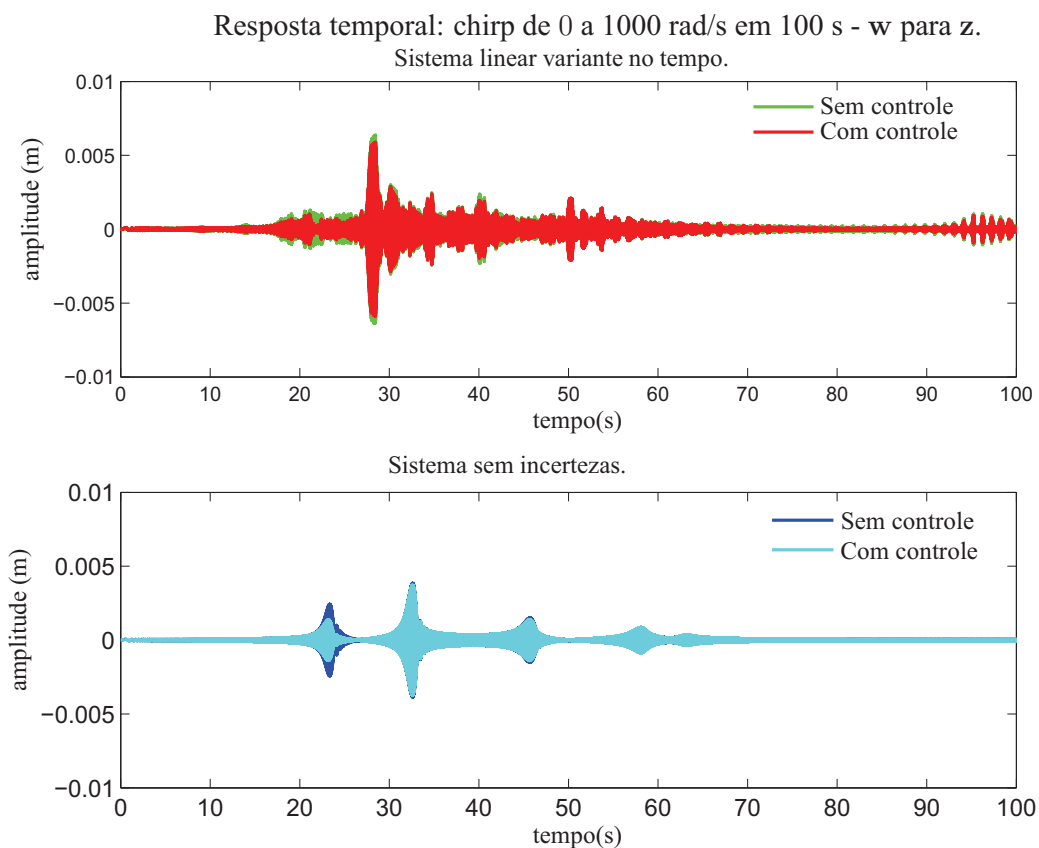


Figura 7.16: Resposta temporal a uma varredura senoidal - Sistema linear variante e invariante no tempo.

Quando considerado o sistema invariante no tempo, os principais resultados de atenuação de vibração ocorreram nos 1º, 2º e 3º modos de vibrar dos sistemas. Para o sistema variante no tempo, essa faixa de frequência também sofreu atenuação de vibração, como pode ser observado a partir da Figura 7.16, satisfazendo assim o objetivo de controle.

Já a estabilidade do sistema, quando esse varia continuamente no tempo dentro do politopo, também é mantida, validando os resultados já obtidos para sistemas invariantes no tempo.



## 7.5 Conclusões do Capítulo

Nesse Capítulo projetou-se um controlador utilizando abordagem politópica para atenuação de vibração do primeiro modo de vibrar da estrutura e estabilidade em malha fechada. Utilizou-se para controle dos sistemas considerados um controlador de baixa ordem, utilizando para isso, um modelo truncado do sistema com apenas o 1º modo de vibrar de cada um dos sistemas que formam o politopo para projeto do controlador.

Os sistemas com controle apresentaram bons resultados de atenuação de vibração em baixas frequências. Os valores de atenuação podem ser verificados na Tabela 7.3. Dentre os sistemas considerados em estudo, aquele que apresentava a maior magnitude de vibração no 1º modo, no caso o Vértice 1, apresentou, neste modo, uma atenuação em 19.68 dB.

O 2º e 3º modo de vibrar dos sistemas considerados, mesmo não sendo objetivo explícitos de controle, apresentaram bons resultados de atenuação de vibração. Para o Vértice 1, ocorreu atenuação em 1.87 dB no 2º modo e 7.36 dB no 3º modo.

A Figura 7.13 demonstra o esforço para controle em cada um dos vértices do politopo formado. Um valor de 0.021 Nm é suficiente para atenuar em 19.68 dB o 1º modo de vibrar do Vértice 1 do politopo. Esse valor representa o maior esforço de controle dentre os vértices do politopo e sua estabilização se dá em aproximadamente 40 segundos.

Uma análise foi realizada para o caso de sistemas lineares variantes no tempo quando os parâmetros variam dentro da faixa de incertezas consideradas em projeto. Os resultados demonstraram que a abordagem politópica, estendida para esse tipo de sistemas se mantém válida, com atenuação de vibração nas mesmas faixas de frequência e estabilidade em malha fechada.

## Capítulo 8

### Conclusões e propostas para futuros trabalhos

Neste trabalho foi abordado o tema de controle de vibrações de estruturas flexíveis considerando incertezas paramétricas no projeto. Buscou-se, utilizando controlador baseado na norma  $\mathcal{H}_\infty$ , atenuar a vibração do primeiro modo de vibrar das estruturas consideradas.

Para projeto do controlador, é necessário que se tenha o modelo da estrutura em análise. Este modelo pode ser identificado experimentalmente, utilizando algum método de identificação experimental ou através da modelagem de elementos finitos por exemplo. No caso em estudo, o método de elementos finitos foi utilizado para obtenção do modelo dos sistemas, que consistem em uma viga engastada-livre e uma placa livre-livre, ambos em alumínio.

Algumas vezes, não se conhecem com precisão desejada alguns dos parâmetros que compõe a matriz de transferência do sistema em questão. Dessa forma pode-se incluir no projeto do controlador a faixa dentro da qual se acredita que os valores imprecisos estejam. Para sua inclusão em projeto, foi utilizada a abordagem na forma de restrições LMI politópicas.

O controle  $\mathcal{H}_\infty$  utilizando essa abordagem, se mostrou eficiente para a atenuação de vibração das plantas presentes dentro da faixa de incertezas consideradas. O projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$  encontrado a partir da solução de um problema de otimização com restrições LMI foi utilizado. A utilização das LMI foi especialmente importante para o projeto, por ser capaz de incluir, através de seu uso, várias restrições tornando o problema matematicamente tratável.

Para o primeiro caso em estudo, o problema da viga engastada, utilizou-se para o controle do primeiro modo do sistema um controlador de ordem baixa. Uma vez fixados os filtros de ponderação, o controlador projetado utiliza para projeto um modelo truncado do sistema com apenas o 1º modo da resposta em frequência. Esse controlador foi capaz de atenuar o primeiro modo da resposta em frequência das plantas que formam os vértices do politopo, satisfazendo as condições de projeto. O 2º modo de vibrar dos sistemas, que não são explicitamente considerados em projeto, também apresentaram atenuação de vibração. Em alguns dos vértices uma atenuação bastante significativa foi alcançada nesse modo, como exemplo, o Vértice 1 onde houve atenuação de 14.27 dB.

Para o segundo caso em estudo, o problema da placa livre, utilizou-se também para controle

do primeiro modo do sistema um controlador de ordem baixa. Fixados os filtros, utiliza-se para projeto do controlador um modelo truncado do sistema com apenas o 1º modo da resposta em frequência. Assim como no problema da viga, para toda a faixa de incertezas considerada, boa atenuação de vibração no primeiro modo foi obtida. Já para esse caso, o 2º e 3º modos também apresentaram resultados de atenuação de vibração. Para o Vértice 1, uma atenuação em 7.36 dB foi alcançada no 3º modo de vibrar do sistema.

Foram considerados ainda que os sistemas poderiam variar no tempo, ou seja, durante o tempo de resposta o sistema poderia variar continuamente dentro do politopo considerado no projeto do controlador. Para ambos os casos em estudo, tanto para o problema da viga em balanço quanto para a placa livre, a resposta temporal para esse tipo de sistema apresentou atenuação de vibração nas mesmas faixas de frequência do que os sistemas invariantes no tempo. A estabilidade em malha fechada também foi mantida.

O controle ativo de vibrações considerando incertezas paramétricas e controlador  $\mathcal{H}_\infty$ , se mostrou em ambos os casos eficiente quando se deseja boa atenuação de vibração em baixas frequências e robustez às faixas de incertezas consideradas em projeto. Algumas propostas para se obter melhores resultados no futuro são listadas a seguir.

Uma análise mais profunda pode ser feita nos parâmetros dos algoritmos de solução utilizados pelo Matlab®. Esses parâmetros são especialmente importantes nos projetos de controlador, uma vez que permitem encontrar, pela sua escolha adequada, controladores mais eficientes e robustos.

Os filtros de ponderação utilizados no projeto, foram escolhidos para que a estabilidade em malha fechada e atenuação do pico de maior magnitude da resposta em frequência fossem garantidas. Como já citado, podem existir diferentes filtros que também garantam as características desejadas, mas com melhor desempenho do controlador. Um estudo sobre os filtros de ponderação pode ser realizado de forma a otimizar sua escolha e garantir a melhor performance do controlador nestas situações.

A utilização de variáveis extras (matrizes) nas restrições do problema e utilização de mais de uma função de Lyapunov para os vértices do politopo formado, podem ser aplicados futuramente. Neste trabalho, o controle  $\mathcal{H}_\infty$  foi realizado a partir da abordagem politópica, onde é utilizada uma única função de Lyapunov para toda a região do politopo [32]. Pode-se escrever uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que variam dentro da região politópica, diminuindo assim o conservadorismo do projeto porém com aumento do custo computacional. Trabalhos recentes têm mostrado redução no conservadorismo do controlador projetado quando se utilizam essas modificações no projeto [5, 18, 39].

Uma formulação utilizando controle misto,  $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ , pode ser aplicada ao problema para comparação com os resultados encontrados com a utilização do controle  $\mathcal{H}_\infty$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] BALAS, G. J., Robust control of flexible structures: Theory and experiments. Master's thesis, California Institute of Technology, 1990.
- [2] BANAVAR, R., E DOMINIC, P., An LQG/H-infinity controller for a flexible manipulator. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 3, 4 (dec 1995), 409–416.
- [3] BOYD, S., GHAOUI, L. E., FERON, E., AND BALAKRISHNAN, V., *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Theory, 1994.
- [4] CHAIT, Y., E RADCLIFFE, C. J., Control of distributed parameter systems with spillover using an augmented observer. *American Control Conference* (1987), 1193–1198.
- [5] CHANG, X. H., H-infinity controller design for linear systems with time-invariant uncertainties. *International Journal of Control, Automation, and Systems* 9(2) (2011), 391–395.
- [6] FERREIRA, A. J. M., *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*. Ed. Springer-Verlag, 2009.
- [7] FRANCIS, B. A., *A Course in H-infinity Control Theory*. Ed. Springer-Verlag, 1987.
- [8] GAHINET, P., E APKARIAN, P., A linear matrix inequality approach to H-infinity control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 4 (1994), 421–448.
- [9] GAHINET, P., E NEMIROVSKI, A., The projective method for solving linear matrix inequalities. *Mathematical Programming* 77 (1997), 163–190.
- [10] GAHINET, P., NEMIROVSKI, A., LAUB, A. J., E CHILALI, M., *LMI Control Toolbox for use with MATLAB*, first ed. The MathWorks, 1995.
- [11] GAWRONSKI, W. K., *Dynamics and Control of Structures*. Ed. Springer-Verlag, 1998.
- [12] GAWRONSKI, W. K., *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures*. Ed. Springer-Verlag, 2004.

- [13] GEROMEL, J. C., PERES, P. L. D., E BERNUSSOU, J., On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *Journal on Control and Optimization* 29 (1991), 381–402.
- [14] GU, D. W., PETKOV, P. H., E KONSTANTINOV, M. M., *Roboust Control Design with Matlab*. Ed. Springer-Verlag, 2005.
- [15] SARRACINI JR, F., Síntese de controladores H-infinito de ordem reduzida com aplicação no controle ativo de estruturas flexíveis. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2006.
- [16] KARMARKAR, N., A new polinomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica* 4 (1984), 373–395.
- [17] KWON, Y. M., E BANG, H., *The Finite Element Method using MATLAB*. Ed. CRC Press, 1997.
- [18] LEITE, V. J. S., MONTAGNER, V. A.-C. F., OLIVEIRA, P. J. D., OLIVEIRA, R. C. L. F., RAMOS, D. C. W., E PERES, P. L. D., Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Revista de Controle e Automação* 15 (03 2004), 24 – 40.
- [19] LIM, K. B., MAGHAMI, P. G., E JOSHI, S. M., Comparison of controller designs for an experimental flexible structure. *IEEE Control Systems Technology* 12 (1992), 108–118.
- [20] LOPES, J. C., Controle H2 / H-infinito de estruturas flexíveis através de desigualdades matriciais lineares com alocação de pólos. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2005.
- [21] MAZONI, A. F., Estudo das técnicas de controle H-infinito para estruturas flexíveis com incertezas. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2008.
- [22] MOSER, A., Designing controllers for flexible structures with H-infinity/ $\mu$ -synthesis. *IEEE Control Systems* 13, 2 (apr 1993), 79–89.
- [23] NESTEROV, Y., E NEMIROVSKII, A., *Inteiror-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. SIAM Studies in Applied Theory Mathematics, 1994.
- [24] PAIVA, M. Z., Controle de estruturas flexíveis levando em conta o projeto simultâneo da estrutura e do controlador. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2009.

- [25] PALMA, P. H. T., Identificação experimental e controle ativo de vibrações aplicadas em estruturas inteligentes. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, 2007.
- [26] PILKEY, W. D., *Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices*. Ed. John Wiley and Sons, 2005.
- [27] PREUMONT, A., E SETO, K., *Active Control of Structures*. Ed. John Wiley and Sons, 2008.
- [28] PYATNITSKII, E. S., E SKORODINSKII, V. I., Numerical methods of lyapunov function construction and their applications to the absolute stability problem. *Systems Control Letters* 2 (1982), 130–135.
- [29] SÁNCHEZ-PEÑA, R. S. E SZNAIER, M., *Roboust Systems Theory and Applications*. Ed. John Wiley and Sons, 1995.
- [30] SANTOS, M. M., Controle H-infinito em suspensões ativas aplicando técnicas baseadas em desigualdades matriciais lineares. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2010.
- [31] SCHERER, C., GAHINET, P., E CHILALI, M., Multi-objective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control* 42 (1997), 896–911.
- [32] SHAKED, U., Improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control* 46 (2001), 652–656.
- [33] SHERER, C., E WEILAND, S., Linear matrix inequalities in control, 2004. <http://www.dsc.tudelft.nl/cscherer/lmi/notes05.pdf> - acessado em 25/05/2011.
- [34] SILVA, S., Projeto de controladores robustos para aplicações em estruturas inteligentes utilizando desigualdades matriciais lineares. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, 2005.
- [35] SILVA, S., LOPES JR., V., E ASSUNÇÃO, E., Linear matrix inequalities for vibration attenuation in smart structures. *3rd National Congress of Mechanical Engineering* (2004).
- [36] SILVA, S., LOPES JR., V., ASSUNÇÃO, E., Robust control to parametric uncertainties in smart structures using linear matrix inequalities. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering XXVI(4)* (2004), 430–437.

- [37] SILVA, S., LOPES JR., V., E BRENNAN, M. J., Design of a control system using linear matrix inequalities for the active vibration control of a plate. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 17 (2006), 81–93.
- [38] SKOGESTAD, S., E POSTLETHWAITE, I., *Multivariable Feedback Control, Analysis and Design*. Ed. John Wiley and Sons, 1996.
- [39] XEI, W., An equivalent LMI representation of bounded real lemma for continuous-time systems. *Journal of Inequalities and Applications* 2008 (2008).
- [40] YAMAGUCHI, I., KIDA, T., E KASAI, T., Experimental demonstration of LSS system identification by eigensystem realization algorithm. *Proceedings of the American Control Conference 1* (1995), 407–411.
- [41] ZHOU, K., DOYLE, J. C., E GLOVER, K., *Roboust and Optimal Control*. Ed. Prentice Hall, 1996.

## Apêndice A

### O problema $\mathcal{H}_\infty$ de otimização com restrição LMI

Seja um sistema dado pelo modelo de estados [23]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t), \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t). \quad (\text{A.2})$$

Este sistema possui a matriz de transferência entre a entrada  $\mathbf{w}(t)$  e a saída  $\mathbf{z}(t)$  dada por

$$\frac{\mathbf{Z}(s)}{\mathbf{W}(s)} = \mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

É possível escrever que

$$\|\mathbf{H}(s)\|_\infty^2 = \lambda_{\max}(\mathbf{H}^*(jw)\mathbf{H}(jw)),$$

ou ainda,

$$\|\mathbf{H}(s)\|_\infty^2 = \max \frac{\mathbf{W}^*(jw)\mathbf{H}^*(jw)\mathbf{H}(jw)\mathbf{W}(jw)}{\mathbf{W}(jw)^*\mathbf{W}(jw)} = \max \frac{\mathbf{Z}^*(jw)\mathbf{Z}(jw)}{\mathbf{W}(jw)^*\mathbf{W}(jw)} \geq \frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2},$$

onde foi usada a definição de norma  $\mathcal{L}_2$ .

Considere que  $\|\mathbf{H}(s)\|_\infty < \gamma$ . Conseqüentemente é possível escrever que

$$\frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2} < \gamma^2 \Rightarrow \mathbf{z}'(t)\mathbf{z}(t) - \gamma^2\mathbf{w}'(t)\mathbf{w}(t) < \mathbf{0}. \quad (\text{A.3})$$

Do critério de estabilidade de Lyapunov escreve-se que

$$\dot{\mathbf{x}}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} < \mathbf{0}. \quad (\text{A.4})$$



Combinando (A.3) e (A.4) tem-se

$$\dot{\mathbf{x}}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{z}'\mathbf{z} - \gamma^2\mathbf{w}'\mathbf{w} < \mathbf{0}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo as equações de estado (A.1) e (A.2) em (A.5) escreve-se que

$$(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w})'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w}) + (\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{w})'(\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{w}) - \gamma^2\mathbf{w}'\mathbf{w} < \mathbf{0},$$

que pode ser escrita matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}'\mathbf{C} & \mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{C}'\mathbf{D} \\ \mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{D}'\mathbf{C} & -\gamma^2 + \mathbf{D}'\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

e que leva a seguinte condição matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}'\mathbf{C} & \mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{C}'\mathbf{D} \\ \mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{D}'\mathbf{C} & -\gamma^2 + \mathbf{D}'\mathbf{D} \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

ou também

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} & \mathbf{P}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}'\mathbf{P} & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < - \begin{bmatrix} \mathbf{C}' \\ \mathbf{D}' \end{bmatrix} [\mathbf{C} \ \mathbf{D}]. \quad (\text{A.6})$$

Aplicando o complemento de Schur em (A.6) tem-se

$$\left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} & \mathbf{P}\mathbf{B} & \mathbf{C}' \\ \mathbf{B}'\mathbf{P} & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{D}' \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\mathbf{I} \end{array} \right] < \mathbf{0}. \quad (\text{A.7})$$

É possível aplicar a seguinte transformação de congruência em (A.7):

$$\begin{bmatrix} \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} & \mathbf{P}\mathbf{B} & \mathbf{C}' \\ \mathbf{B}'\mathbf{P} & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{D}' \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

cujo resultado é

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}'\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} & \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B} & \mathbf{C}' \\ \mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} & -\mathbf{I} & \mathbf{D}' \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (\text{A.8})$$

com  $\bar{\mathbf{P}} = \mu^{-1}\mathbf{P}$  e  $\mu = \gamma^2$ .

O problema de cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser então colocado como um problema de otimi-

zação da seguinte forma

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{sujeito a} \quad & (A.8) \\ & \bar{\mathbf{P}} > \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Uma outra transformação de congruência usual é

$$\begin{bmatrix} \gamma^{-1/2}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1/2}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^{1/2}\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} & \mathbf{P}\mathbf{B} & \mathbf{C}' \\ \mathbf{B}'\mathbf{P} & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{D}' \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1/2}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \gamma^{-1/2}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^{1/2}\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

cujo resultado é

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}'\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} & \mathbf{X}\mathbf{B} & \mathbf{C}' \\ \mathbf{B}'\mathbf{X} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}' \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (A.9)$$

com  $\mathbf{X} = \gamma^{-1}\mathbf{P}$ .

## A.1 Malha fechada com controlador dinâmico / realimentação de saída

### A.1.1 Malha fechada para o caso geral

Seja um sistema  $\mathbf{P}$  descrito por [23]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, \quad (A.10)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}, \quad (A.11)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}, \quad (A.12)$$

onde  $\mathbf{x}$  são os estados,  $\mathbf{w}$  é a entrada de distúrbio,  $\mathbf{u}$  é a entrada de controle,  $\mathbf{z}$  é a saída de desempenho e  $\mathbf{y}$  é a saída medida.

Seja um controlador dinâmico  $\mathbf{K}(s)$  a ser projetado dado por

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{y}, \quad (A.13)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c\mathbf{y}. \quad (A.14)$$

Substituindo (A.12) em (A.14) tem-se

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c(\mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}),$$

ou ainda

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22}) \mathbf{u} = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w},$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} = \\ &= \mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

com  $\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1}$ .

A equação (A.10) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 (\mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}) = \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2) \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}) \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A equação (A.11) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} (\mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}) = \\ &= (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2) \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + (\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}) \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Substituindo (A.12) e (A.15) em (A.13) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c (\mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}) = \\ &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} (\mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}) = \\ &= (\mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2) \mathbf{x} + (\mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{C}_c) \mathbf{x}_c + (\mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}) \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

As equações (A.16), (A.17) e (A.18) podem ser agrupadas matricialmente, caracterizando a equação de malha fechada como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{C}_c] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + [\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}] \mathbf{w} \end{aligned}$$

Portanto, as matrizes do sistema de malha fechada são:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{C}_c \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{C}_c],$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}.$$

### A.1.2 Caso particular de $\mathbf{D}_{22} = 0$

Um caso particular é quando  $\mathbf{D}_{22} = 0$  e conseqüentemente  $\mathbf{N} = \mathbf{I}$ . Neste caso, as matrizes de malha fechada tornam-se

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c],$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}.$$

### A.1.3 Caso de $\mathbf{D}_{22} \neq 0$ à partir do controlador projetado com $\mathbf{D}_{22} = 0$

O interesse neste caso particular é que o controlador pode ser projetado com  $\mathbf{D}_{22} = 0$  o que permite tratar o problema mais convenientemente do ponto de vista matemático, e posteriormente é possível fazer uma correção do controlador projetado conforme descrito a seguir [30].

Considere o sistema  $\hat{\mathbf{P}}$  dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}, \quad (\text{A.20})$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}. \quad (\text{A.21})$$

Considere o controlador  $\hat{\mathbf{K}}$  correspondente dado por

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \hat{\mathbf{A}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c \hat{\mathbf{y}}, \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{C}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{D}}_c \hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{A.23})$$

Comparando o sistema  $\mathbf{P}$  com o sistema  $\hat{\mathbf{P}}$ , ou (A.12) com (A.21) verifica-se que

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}, \quad (\text{A.24})$$

ou

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}. \quad (\text{A.25})$$

Substituindo a equação (A.25) nas equações (A.22) e (A.23) do controlador tem-se

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \hat{\mathbf{A}}_c\mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}}_c\mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c(\mathbf{y} - \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}), \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{C}}_c\mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{D}}_c\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{C}}_c\mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{D}}_c(\mathbf{y} - \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}). \quad (\text{A.27})$$

Isolando  $\mathbf{u}$  na equação (A.27) tem-se

$$(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})\mathbf{u} = \hat{\mathbf{C}}_c\mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{y},$$

ou ainda

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{C}}_c\mathbf{x}_c + (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{y}. \quad (\text{A.28})$$

Substituindo (A.27) na equação (A.26) juntamente com (A.28) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \hat{\mathbf{A}}_c\mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c\mathbf{y} - \hat{\mathbf{B}}_c\mathbf{D}_{22}\mathbf{u} = \\ &= \hat{\mathbf{A}}_c\mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c\mathbf{y} - \hat{\mathbf{B}}_c\mathbf{D}_{22}[(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{C}}_c\mathbf{x}_c + (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{y}] = \\ &= [\hat{\mathbf{A}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c\mathbf{D}_{22}(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{C}}_c]\mathbf{x}_c + [\hat{\mathbf{B}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c\mathbf{D}_{22}(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{D}}_c]\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Consequentemente, as matrizes de estado do controlador para o caso de  $\mathbf{D}_{22} \neq \mathbf{0}$ , em função das matrizes do controlador  $\hat{\mathbf{K}}$ , podem ser escritas de (A.28) e (A.29) como

$$\mathbf{A}_c = \hat{\mathbf{A}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c\mathbf{D}_{22}(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{C}}_c,$$

$$\mathbf{B}_c = \hat{\mathbf{B}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c\mathbf{D}_{22}(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{D}}_c,$$

$$\mathbf{C}_c = (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{C}}_c,$$

$$\mathbf{D}_c = (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c\mathbf{D}_{22})^{-1}\hat{\mathbf{D}}_c.$$

#### A.1.4 Norma $\mathcal{L}_2$

Seja um sinal  $\mathbf{g}(t)$ . A norma  $\mathcal{L}_2$  é definida como [3]:

$$\|\mathbf{g}(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} \mathbf{x}'(t)\mathbf{x}(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{X}^*(jw)\mathbf{X}(jw)dw},$$

onde se utilizou o teorema de Parseval.

#### A.1.5 Complemento de Schur

Sejam as matrizes simétricas  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Z}$ . A desigualdade [38]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y}' \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

é equivalente a

$$\mathbf{Z} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{X} - \mathbf{Y}'\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y} > \mathbf{0}.$$

## Apêndice B

### Frequências naturais

As frequências naturais podem ser encontradas, para uma viga engastada livre, pela Equação (B.1) [27]:

$$w_{ni} = \left(\frac{\beta_i}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \text{ com } I = \frac{eh^3}{12}; A = eh, \quad (\text{B.1})$$

$$\text{com } \beta_i = \begin{bmatrix} 1.87510407 \\ 4.69409113 \\ 7.85475744 \\ 10.99554073 \\ 14.13716839 \\ (2i - 1)/\pi/2 \quad i > 5 \end{bmatrix}.$$

## Apêndice C

### Conjunto Convexo e Politopo, Definições

Para que fique clara a abordagem politópica, é interessante relembrar os seguintes conceitos:

- Conjunto convexo. Um conjunto  $S$  é convexo se e somente se para quaisquer pontos  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2 \in S$ , um segmento de reta em  $E^n$ :

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \lambda \mathbf{a}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{a}_2; \lambda \in [0, 1],$$

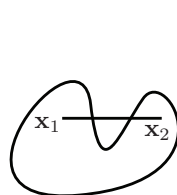
também pertencerá a  $S$  [30].

- Envelope convexo. Seja  $Y \in E^n$ . O envelope convexo de  $Y$  é a coleção de todas as combinações convexas de  $Y$ , ou seja:

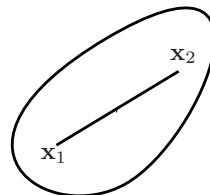
$$\mathbf{x} \in Y \mapsto \mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{x}_j; \sum_{j=1}^k \alpha_j = 1,$$

$\alpha_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, k; k$  inteiro e  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \in Y$  [30].

- Politopo: É um envelope convexo de um número finito de pontos  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{k+1}$  em  $E^n$  [30].

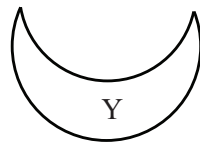


(a) Conjunto não convexo.

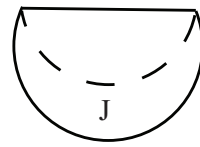


(b) Conjunto convexo.





(c) Conjunto  $Y$ .



(d) Envelope convexo do conjunto  $Y$ .

Figura C.1: Exemplos de conjuntos convexos e não convexos e de envelope convexo.

## Apêndice D

### Criação do Sistema Linear Variante no Tempo

Para a criação dos sistemas lineares variantes no tempo, o Simulink® do aplicativo Matlab® foi utilizado. Nesta seção é apresentada a configuração montada no aplicativo para a criação da matriz dinâmica  $\mathbf{A}$  variante no tempo.

Como já mostrado no Capítulo 5, a formulação utilizada para criação da matriz dinâmica  $\mathbf{A}$  variante no tempo e interna ao politopo, é o conceito de combinação convexa dos vértices, i.e.,

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^j \alpha_i(t) \mathbf{A}_i, \text{ para } \alpha_i(t) > 0 \text{ e } \sum_{i=1}^j \alpha_i(t) = 1. \quad (\text{D.1})$$

A matriz  $\mathbf{A}$  é criada multiplicando-se cada um dos vértices por um fator  $\alpha_i(t)$ , com  $\sum_{i=1}^j \alpha_i(t) = 1$ . Como os vértices do politopo,  $\mathbf{A}_i$ , são previamente definidos, pode-se criar qualquer combinação dos termos  $\alpha_i(t)$  para a construção do sistema linear variante no tempo (desde que D.1 seja respeitada).

Dessa forma, foram criados diferentes sinais lineares de varredura em frequência (*chirp*), com uma faixa de frequência diferente para cada um dos vértices do politopo. As faixas de frequências foram diferentes para cada um dos  $\alpha_i(t)$  para que seus valores variassem no tempo com diferentes velocidades. O sinal *chirp* apresenta, por default, uma magnitude que varia de  $[-1,1]$ , para corrigi-lo, e mantê-lo dentro do intervalo de  $[0,1]$ , soma-se ao sinal valor 1, ver Figura D.2.

A Figura D.1 mostra a configuração montada em Simulink® para obter o modelo do sistema linear variante no tempo. Este diagrama está dividido em módulos para facilitar o entendimento. No Módulo 1 é criada a matriz dinâmica  $\mathbf{A}$  variante no tempo, como já explicitado, são criados sinais de varredura linear com diferentes faixas de frequências, uma para cada vértice do politopo. Para garantir que o sistema criado permaneça dentro do politopo considerado, um display é criado para verificar se a relação D.1 é respeitada (ver Figura D.2).

No Módulo 2, Figura D.3, aplica-se ao sistema variante no tempo o modelo de controle. O controlador encontrado pela abordagem politópica é incorporado ao sistema e o sinal do sistema variante no tempo com controle é obtido. No Módulo 3, Figura D.4, obtém-se a resposta ao mesmo

sistema porém sem a incorporação do controlador encontrado, ou seja, apresenta-se o sistema variante no tempo sem controle.

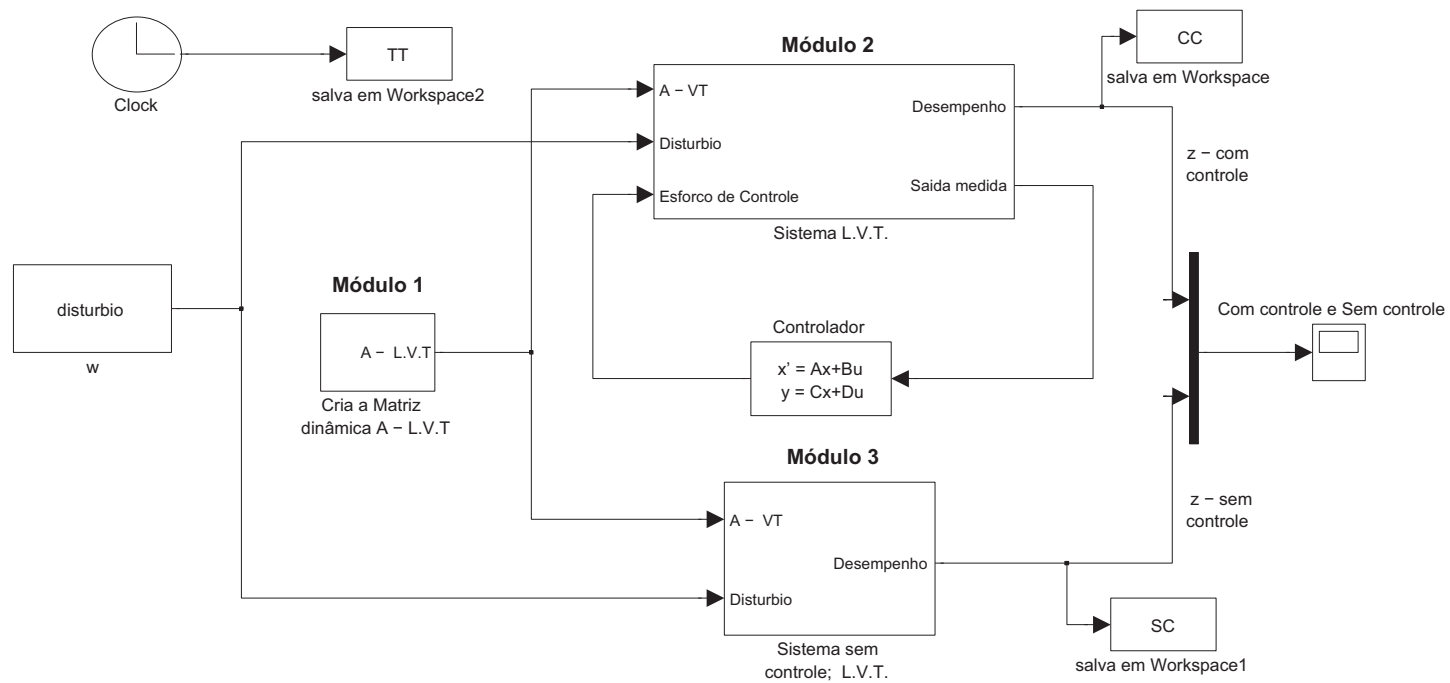


Figura D.1: Projeto em Simulink® para sistemas lineares variantes no tempo.

MÓDULO 1: CRIAÇÃO DA MATRIZ DINÂMICA A - LINEAR VARIANTE NO TEMPO

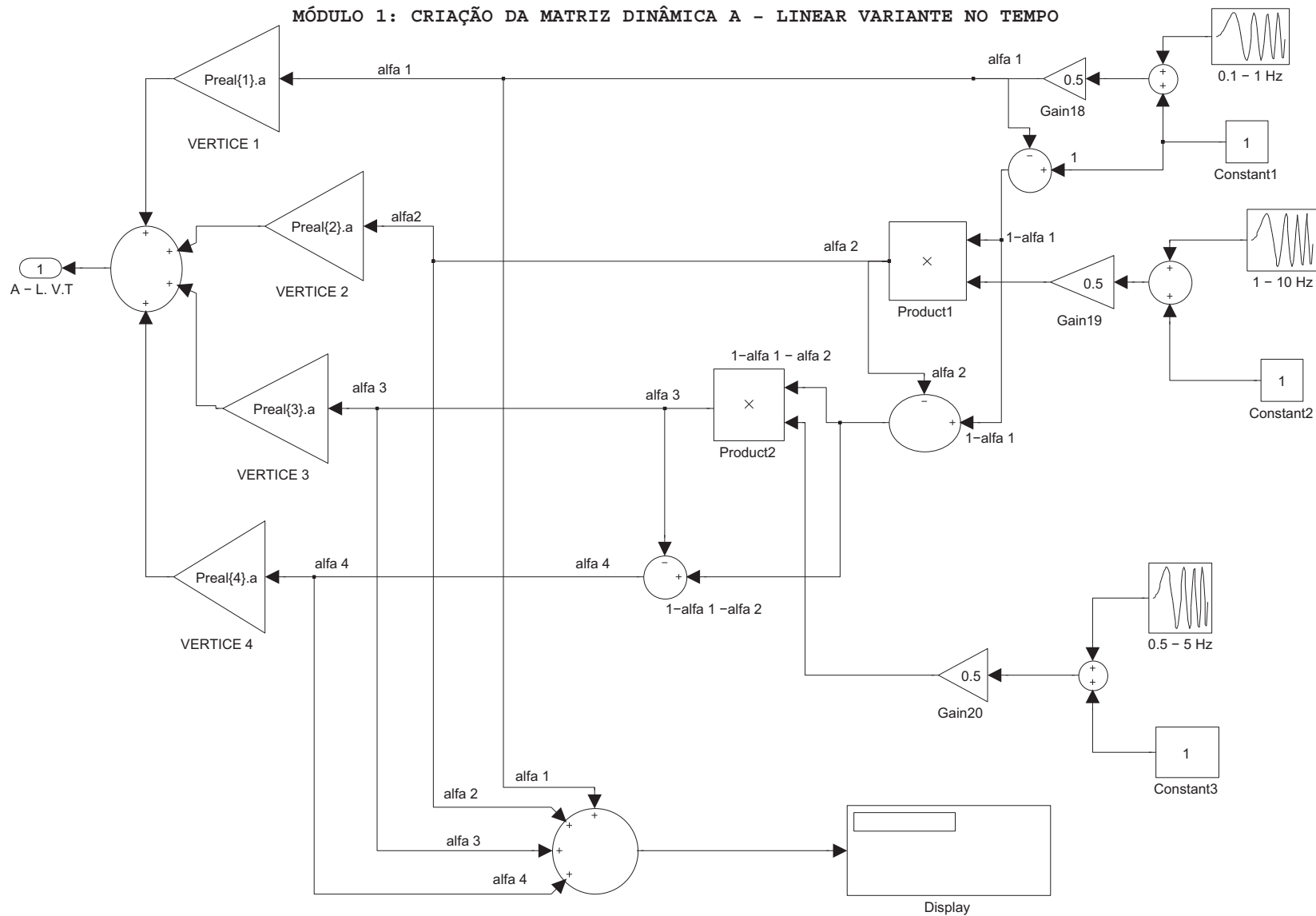


Figura D.2: Criação da matriz dinâmica, A, linear variante no tempo.

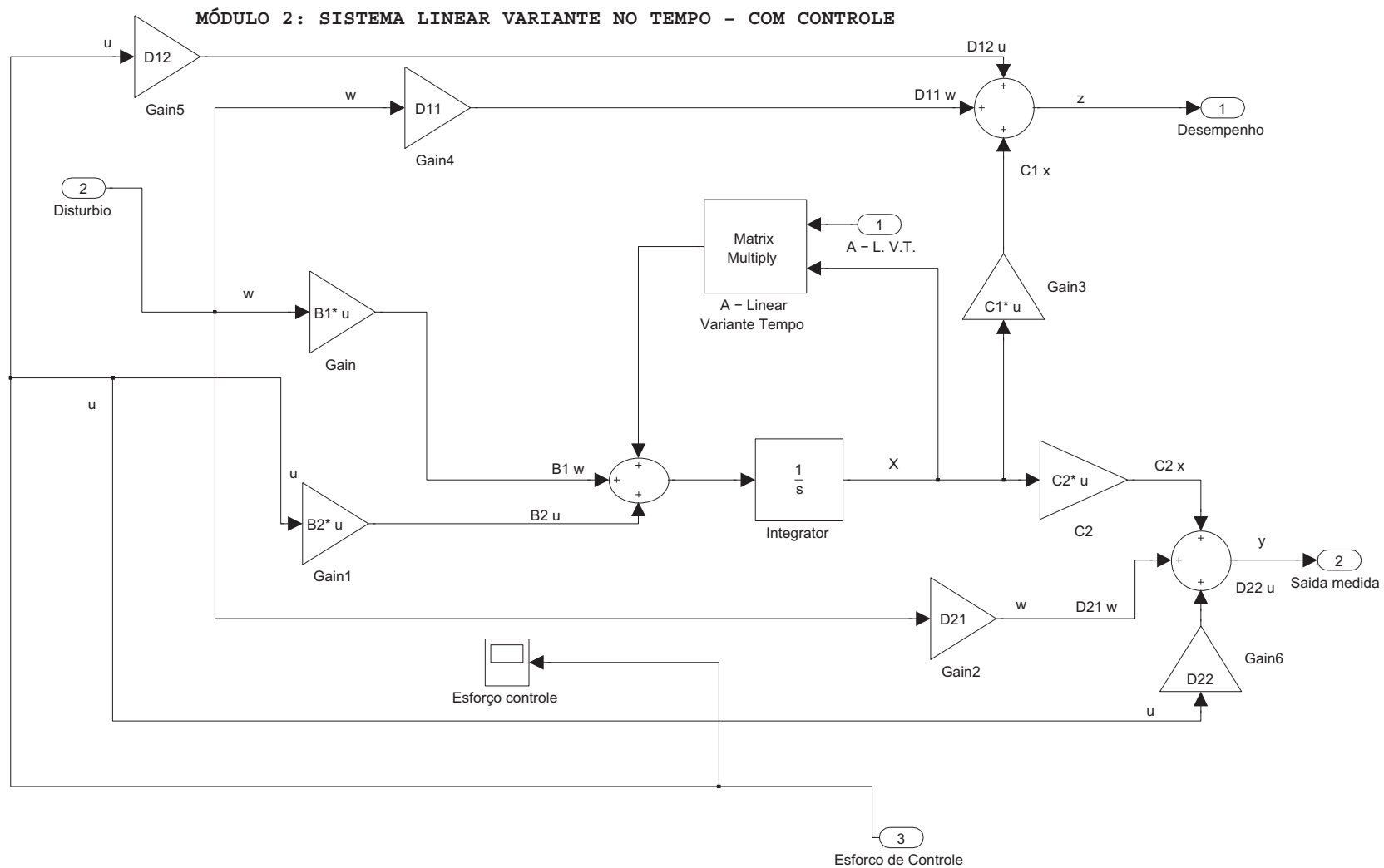


Figura D.3: Sistema linear variante no tempo com controle.

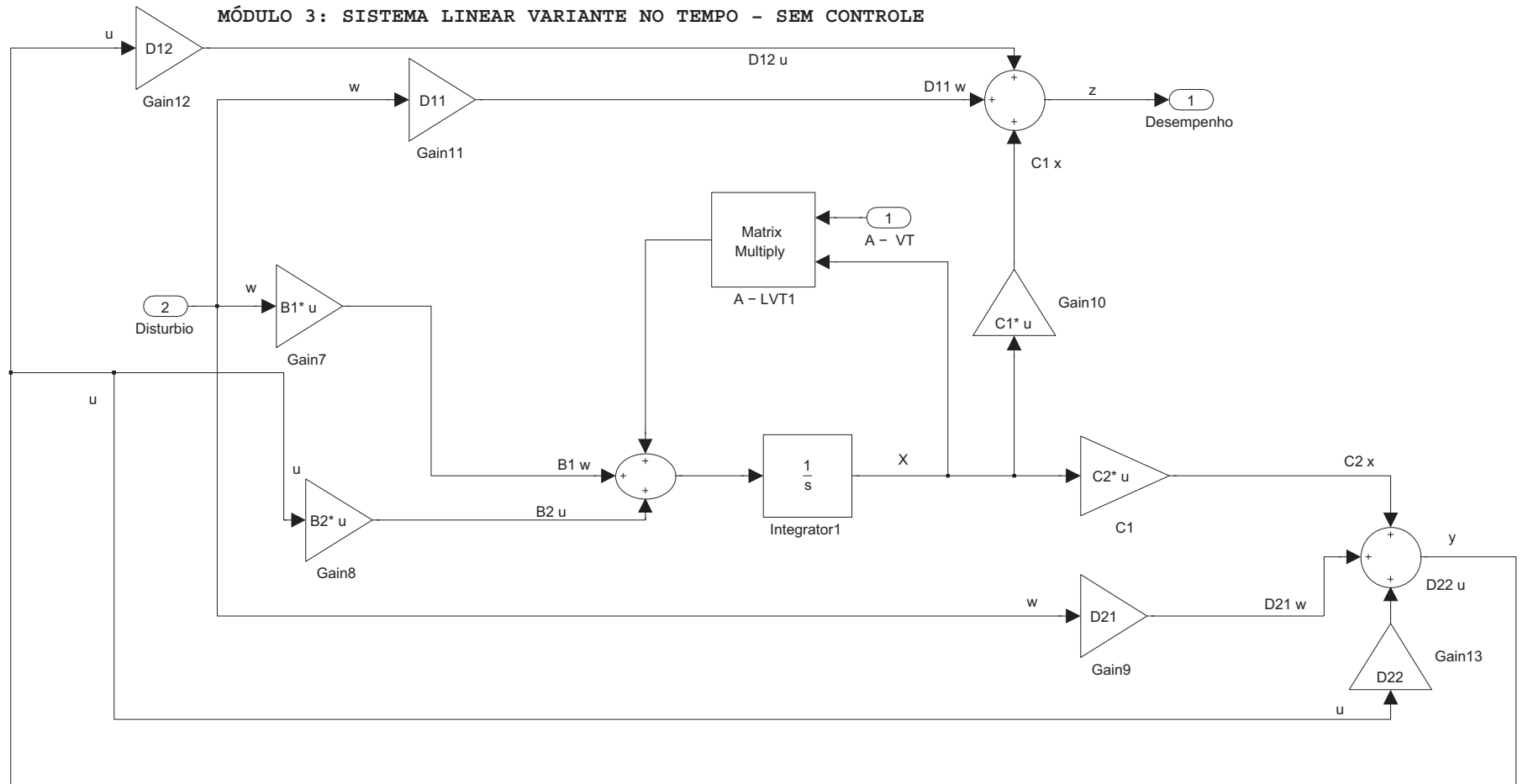


Figura D.4: Sistema linear variante no tempo sem controle.