

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação apresentada à
Faculdade de Engenharia Mecânica
como requisito parcial à obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

ANÁLISE DAS OPERAÇÕES DE FRATURAMENTO
HIDRÁULICO ATRAVÉS DO COMPORTAMENTO

DA PRESSÃO DURANTE O BOMBEIO

ESTE EXEMPLO COMPOZENDO ANEXOS FICHA DA
TESE DEFENDIDA POR ENGE PAULO DORE FERNANDES E APROVADA
P.O.A. COMISSÃO JULGADORA EM 11/11/91

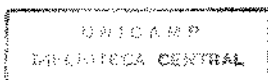
Kelsen V. Serra

45/91

Autor : PAULO DORE FERNANDES

Orientador : Kelsen Valente Serra†

Novembro de 1991



45/91

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

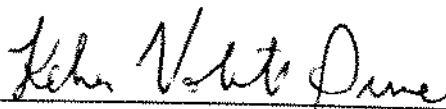
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

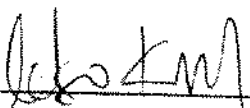
A dissertação "Análise das Operações de Fraturamento Hidráulico Através do Comportamento da Pressão Durante o Bombeio", elaborada por Paulo Dore Fernandes e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora, foi aceita pela Sub-Comissão de Pós Graduação como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 12 de novembro de 1991

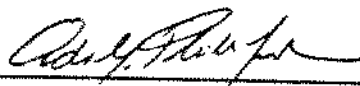
Banca Examinadora



Kelsen Valente Serra, PhD



Celso Kazuyuki Morooka, PhD



Adolfo Polillo Filho, PhD

Para : Déia
Mariana
Eric

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Kelsen Valente Serra pela sugestão do tema deste trabalho, pelo estímulo e pela liberdade que me foi dada para conduzir o estudo.

Sou grato, também, ao Prof. João Candido Baptista de Campos, pelas sugestões, comentários e material bibliográfico, que foram de muita valia na realização deste trabalho.

Agradeço ao colega Luiz Augusto Ivo Metzker, da RPBA/DIRCRES, pelos relatórios de campo utilizados neste estudo.

Por fim, gostaria de expressar minha gratidão à PETROBRÁS, pela oportunidade, que me foi dada, de participar do curso de mestrado em Engenharia de Petróleo que, tenho certeza, será de grande importância no desempenho das minhas atribuições na empresa.

SUMÁRIO

A estimulação através de fraturamento hidráulico é uma técnica cada vez mais utilizada na indústria do petróleo e cujo custo, dependendo do poço, mostra-se como um fator substancial, motivo pelo qual a operação deve ser muito bem planejada.

O projeto de um fraturamento hidráulico é feito baseando-se na premissa de que a fratura criada na rocha reservatório é semelhante a um dos modelos clássicos de fratura, dos quais se conhece as equações de geometria e o comportamento de pressão.

O modelo de fratura a ser escolhido para o dimensionamento do tratamento dependerá, basicamente, do conhecimento prévio do campo e da experiência acumulada através de outros fraturamentos ali realizados.

Este trabalho descreve um método de análise da operação de fraturamento, a fim de que se possa verificar, após concluído o tratamento, se a fratura criada corresponde àquela prevista no projeto e investigar as causas de eventuais insucessos.

O estudo foi conduzido de forma a detalhar a geometria e o comportamento de pressão dos modelos de fratura mais usados nos projetos de fraturamento. Foram deduzidas equações de cada modelo com e sem filtração, para fluidos newtonianos e power-law.

Este trabalho não propõe uma nova metodologia de análise de operações de fraturamento mas, de forma detalhada, discute as limitações práticas de cada modelo e sua aplicação ao método de análise de pressão de tratamento proposto por K. G. Nolte em alguns de seus artigos.

Ao final do trabalho são apresentados alguns exemplos de aplicação do método de análise.

ABSTRACT

Hydraulic fracturing is a common stimulation technique used in petroleum industry. It needs to be very well planned because of the costs of the treatment that, depending on the well, may be very substantial.

The design of a hydraulic fracture is based upon classical fracture models with very known geometry equations and pressure behavior.

The fracture model used in a design of a treatment depends most on the field experience, obtained in the fracturing operations performed in the area.

This thesis reports a methodology to analyse hydraulic fracturings taking account the accordance between the real fracture obtained in the field operation and the fracture model used to design it.

In this study it is shown full details of the fracture classical models geometry and pressure behavior. Equations for each model, considering leak off of newtonian and power-law fluids are developed.

The motivation of this study was not to propose a new method for analysing hydraulic fracturing, but to show the restrictions of the models and their applicability to the analysis method of the treatment pressure proposed by K. G. Nolte in some publications.

Finally, few examples of hydraulic fracturing pressure analysis are presented.

ÍNDICE

	Página
LISTA DE ANEXOS	ix
LISTA DE FIGURAS	x
NOMENCLATURA	xii
 CAPÍTULO	
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 O processo do fraturamento hidráulico	1
1.2 Aspectos Operacionais	2
1.3 Aspectos Econômicos	5
1.4 Motivação do Estudo	6
1.5 Objetivo do Estudo	7
1.6 Forma de Apresentação	7
 2. ELEMENTOS DE MECÂNICA DAS ROCHAS E PROPAGAÇÃO DE FRATURAS	 9
2.1 Comportamento Elástico	9
2.2 Materiais Elásticos Lineares	9
2.3 Algumas Propriedades das Rochas	11
2.4 Aspectos Relativos à Mecânica do Fraturamento	13
2.5 Mecanismos de Propagação e Estabilidade de Fratura	15
2.6 Equações Fundamentais da Propagação de Fraturas ..	17
 3. MODELOS CLÁSSICOS DE GEOMETRIA DE FRATURA	 21
3.1 Modelo PK de Propagação Linear	21
3.2 Modelo KGD de Propagação Linear	25
3.3 Modelos de Propagação Radial	33
3.4 Efeito da Filtração na Geometria da Fratura	50
3.5 Adaptação da Solução de Carter aos Modelos Radiais	58

4.	INFLUÊNCIA DOS FLUIDOS DE POTÊNCIA NA GEOMETRIA DA FRATURA	65
4.1	Equações Básicas	65
4.2	Aplicação ao modelo PK de propagação Linear	66
4.3	Aplicação ao Modelo PK de Propagação Radial	68
4.4	Aplicação ao Modelo KGD de Propagação Linear	69
4.5	Aplicação ao modelo KGD de Propagação Radial	70
5.	CRESCIMENTO VERTICAL DA FRATURA DURANTE A PROPAGAÇÃO	72
5.1	Considerações Iniciais	72
5.2	Contraste de Tensões	72
5.3	Equações para o Cálculo da Penetração da Fratura	73
5.4	Escorregamento entre Zonas Adjacentes	78
6.	COMPORTAMENTO DA PRESSÃO COM O TEMPO DE TRATAMENTO	80
6.1	A relação entre pressão e tempo	80
6.2	Equações de Pressão Versus Tempo de Propagação ...	80
7.	ANÁLISE DE COMPORTAMENTO DA PRESSÃO DURANTE O TRATAMENTO	85
7.1	Análise da magnitude da pressão de propagação	85
7.2	Análise do comportamento da pressão de propagação	86
8.	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	92
8.1	Poço 7-RBU-022-BA	92
8.2	Poço 7-FAV-107-BA	97
9.	CONCLUSÕES	101
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	102
	ANEXOS	104

LISTA DE ANEXOS

ANEXO		PÁGINA
1.	Largura média da fratura modelo PK de propagação linear	104
2.	Largura média de uma fratura modelo KGD de propagação linear	105
3.	Largura média de uma fratura modelo PK de propagação radial	106
4.	Largura média de uma fratura modelo KGD de propagação radial	107
5.	Altura média de uma fratura radial	108

LISTA DE FIGURAS

Figura	Título	Página
1.1	Esquema operacional simplificado de um fraturamento hidráulico	3
1.2	Esquema geral de um sistema computadorizado de monitoramento de operações de estimulação	4
1.3	Otimização de um projeto de fraturamento hidráulico	5
2.1	Curva de tensão-deformação de dois ciclos	10
2.2	Caracterização da tensão de ruptura	11
2.3	Representação esquemática da Condição de Barenblatt	16
3.1	Perfil de pressão e geometria horizontal do modelo de Perkins & Kern	24
3.2	Esquema da geometria do modelo de Perkins & Kern	24
3.3	Representação gráfica da equação (3.17)	27
3.4	Distribuição de pressão no interior de uma fratura segundo o modelo KGD	29
3.5	Esquema da geometria do modelo KGD de fratura	31
3.6	Distribuição de pressão proposta por Geertsma e DeKlerk para uma fratura de geometria radial	44
3.7	Distribuição de pressão no interior da fratura radial segundo a equação (3.68)	47

3.8	Esquema da geometria de uma fratura horizontal, segundo Geertsma & DeKlerk	49
5.1	Contraste de tensões tipo "step"	73
5.2	Esquema de penetração de uma fratura vertical nas zonas adjacentes	76
5.3	Geometria vertical de uma fratura modelo PK	77
8.1	Carta de registro dos parâmetros de tratamento do poço 7-RBU-022-BA	94
8.2	Curvas de pressão de propagação do poço 7-RBU-022-BA	95
8.3	Gráfico log-log da pressão de propagação versus tempo do poço 7-RBU-022-BA	96
8.4	Carta de registro dos parâmetros de tratamento do poço 7-FAV-107-BA	98
8.5	Curva de pressão de propagação do poço 7-FAV-107-BA	99
8.6	Gráfico log-log da pressão de propagação versus tempo do poço 7-FAV-107-BA	100

NOMENCLATURA

SÍMBOLO	DEFINIÇÃO
A	- Área da face da fratura
C	- Coeficiente global de filtração
C_D	- Coeficiente de descarga
C_R	- Compressibilidade da rocha
C_T	- Compressibilidade total (rocha + fluido)
c	- Complacência da fratura
E	- Módulo de Elasticidade Linear
E'	- Módulo de deformação plana $\left(E' = E / (1 - \nu^2) \right)$
f_1, f_2, f_l	- Frações do comprimento da fratura
f_{l_0}	- Fração do comprimento da fratura atingida pelo fluido fraturante
f_r	- Fração do raio da fratura
f_{r_0}	- Fração do raio da fratura atingida pelo fluido fraturante
f_{r_w}	- Fração do raio da fratura na parede do poço
G	- Módulo de elasticidade ao cisalhamento

H	-	Altura da fratura
H_R	-	Altura da rocha reservatório
ISIP	-	Pressão instantânea de fechamento
K	-	Módulo de Coesão de Barenblatt
K_c	-	Fator de intensidade crítico de tensões
k'	-	Índice de consistência de um fluido de potência
L	-	Comprimento da fratura
N	-	Número de furos do intervalo canhoneado ativos durante o tratamento
n'	-	Índice de comportamento de um fluido de potência
P	-	Pressão de propagação no interior da fratura
\bar{P}	-	Pressão média no interior da fratura
P_e	-	Pressão estática da formação
P_H	-	Pressão hidrostática
P_p	-	Pressão de poros
P_s	-	Pressão de propagação na superfície
P_w	-	Pressão de propagação no poço
q	-	Vazão em uma asa da fratura ($q = Q/2$)
Q	-	Vazão de tratamento

R	- Raio da fratura
R_T	- Resistência da rocha à tração
r	- Distância de um ponto no interior da fratura ao eixo do poço
s	- Variável de Laplace
t	- Tempo de propagação da fratura
v	- Velocidade de fluxo na fratura
\bar{v}	- Velocidade média no interior da fratura
v_l	- Velocidade de filtração nas faces da fratura
V	- Volume da fratura
V_{sp}	- Volume perdido por filtração nas faces da fratura antes da formação de reboco
V_l	- Volume perdido por filtração durante a propagação da fratura
W	- Largura da fratura
\bar{W}	- Largura média da fratura
W_{ap}	- Largura aparente da fratura
W_w	- Largura da fratura na parede do poço
x, y, z	- Coordenadas cartesianas
α	- Parâmetro da solução de Carter

$\bar{\Delta P}$	- Pressão efetiva média da fratura
ΔP_{col}	- Perda de carga na coluna
ΔP_f	- Perda de carga nos canhoneados
ΔP_w	- Pressão efetiva de propagação
ϵ	- Deformação
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	- Deformações nas direções cartesianas
ϕ	- Parâmetro da solução do modelo KGD
ϕ_c	- Diâmetro dos furos ativos do canhoneado
γ	- Coeficiente de energia de superfície
η	- Eficiência volumétrica do fluido fraturante
ψ	- Parâmetro da solução do modelo KGD
λ	- Constante de Lamé
μ	- Viscosidade absoluta
μ_f	- Coeficiente de atrito estático
ν	- Módulo de Poisson
ρ	- Peso específico
σ	- Tensão
σ_c	- Tensão de confinamento
σ_{cr}	- Tensão crítica de propagação da fratura

σ_h	-	Tensão horizontal
σ_n	-	Tensão normal
σ_r	-	Tensão radial
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	-	Tensões nas direções cartesianas
σ_θ	-	Tensão tangencial
τ	-	Tempo para a fratura atingir um determinado ponto da formação
τ_f	-	Tensão cisalhante de fricção
T	-	Tensão de cisalhamento do fluido

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 O PROCESSO DO FRATURAMENTO HIDRÁULICO

À medida em que os recursos naturais se tornam mais escassos ou menos acessíveis, a ciência e a tecnologia buscam novas maneiras de facilitar ao homem a exploração desses recursos. Desta forma, ao mesmo tempo em que novas jazidas portadoras de petróleo vão sendo descobertas e acrescidas às reservas mundiais, cresce a dificuldade e a complexidade para sua exploração. A Engenharia do Petróleo busca o aprimoramento de técnicas que possibilitem não só o aproveitamento cada vez maior das reservas de petróleo, como também a exploração e desenvolvimento das novas jazidas descobertas.

As operações de estimulação representam uma significativa parcela de contribuição neste contexto, sendo importante fator de viabilidade econômica em grande número de poços de petróleo.

Denomina-se operação de estimulação, na indústria do petróleo, a técnica de aumentar-se a produtividade dos poços produtores de hidrocarbonetos ou a injetividade dos poços injetores de fluidos, através do estabelecimento de um canal de alta condutividade entre a jazida e o poço.

O Fraturamento Hidráulico é uma técnica de estimulação em que, através do bombeio de um fluido pressurizado, cria-se e propaga-se uma fratura na rocha reservatório ao mesmo tempo em que, através deste mesmo fluido, é introduzido na fratura um material granular, denominado agente de sustentação, de tal forma que, cessado o bombeio, a fratura permaneça aberta, criando-se assim, um caminho de alta permeabilidade entre a formação e o poço.

A primeira operação de fraturamento hidráulico da qual se tem notícia na indústria do petróleo ocorreu no campo de gás de Hugoton, EUA, no poço Kelpner 1, em julho de 1947 (8).

Estima-se que, até os dias atuais, aproximadamente 1,1 milhão de operações de fraturamento tenham sido realizadas em todo o mundo (8). Cerca de 40% dos poços perfurados atualmente são estimulados através de fraturamento hidráulico.

Com o passar dos anos, a tecnologia envolvida nas operações de fraturamento hidráulico tem evoluído significativamente. Diferentes tipos de fluidos e agentes de sustentação têm sido desenvolvidos para uma grande variedade de formações, que vão desde formações rasas, de baixa temperatura, até aquelas a grandes profundidades e tensões de confinamento. Os modelos de projeto e métodos de análise e diagnóstico de comportamento das formações fraturadas vêm sendo cada vez mais aperfeiçoados, bem como os equipamentos utilizados nestas operações.

Contudo, apesar de todo esse desenvolvimento, as técnicas de obtenção de dados de formações, tais como tensões in situ, dimensões e orientação de fraturas e propriedades mecânicas e permo-porosas de rochas ainda são um tanto incipientes. Em consequência disso, cresce o interesse da engenharia do petróleo em aprimorar técnicas de análise e diagnóstico de propagação de fraturas, a fim de que se possa conhecer com precisão a influência de cada parâmetro envolvido na operação, e, deste modo, melhorar a qualidade dos projetos de fraturamento hidráulico.

1.2 ASPECTOS OPERACIONAIS

A Figura 1.1 retrata, de forma simplificada, o esquema operacional de fraturamento hidráulico. O sistema consiste de unidades (tanques) de armazenamento de fluido, unidades de mistura e preparo de fluidos ("blenders"), que adicionam ao fluido base contido nos tanques os aditivos necessários para fornecer ao fluido as propriedades químicas e reológicas requeridas para a operação. Após preparado o fluido e adicionado o agente de sustentação, ele é enviado pelo "blender" às unidades de bombeio, de onde é bombeado para o poço sob pressão e vazão adequados para iniciar e propagar a fratura hidráulica programada. Inicialmente, é bombeado um fluido isento de sólidos, denominado colchão, cuja função é iniciar a fratura, resfriar a formação para

preservar as propriedades reológicas do fluido fraturante e estabelecer a propagação da fratura. Após o colchão, é bombeada uma pasta composta de fluido gelificado e um agente granular, denominada fluido carreador, com a finalidade de continuar a propagar a fratura e, ao mesmo tempo, introduzir no interior da mesma o agente de sustentação, que vai manter a fratura aberta após concluído o bombeio. Terminada a operação, o fluido fraturante injetado na formação degrada-se e perde as propriedades reológicas iniciais, sendo facilmente retirado do poço, permanecendo na fratura apenas o agente de sustentação (propante), que estabelece um canal de alta condutividade para o escoamento do fluido da rocha reservatório para o poço, ou vice-versa, no caso de poços injetores.

O monitoramento dos parâmetros de tratamento, tais como pressão, vazão e propriedades do fluido tem se constituído num elemento de vital importância na análise da propagação da fratura e no diagnóstico de possíveis problemas que possam vir a ocorrer durante a operação. Atualmente, a utilização de sofisticados equipamentos de registro dos parâmetros operacionais tornou-se uma necessidade nas operações de fraturamento hidráulico, tão importante quanto os próprios equipamentos de bombeio. A Figura 1.2 mostra um moderno sistema computadorizado de monitoramento para operações de estimulação.

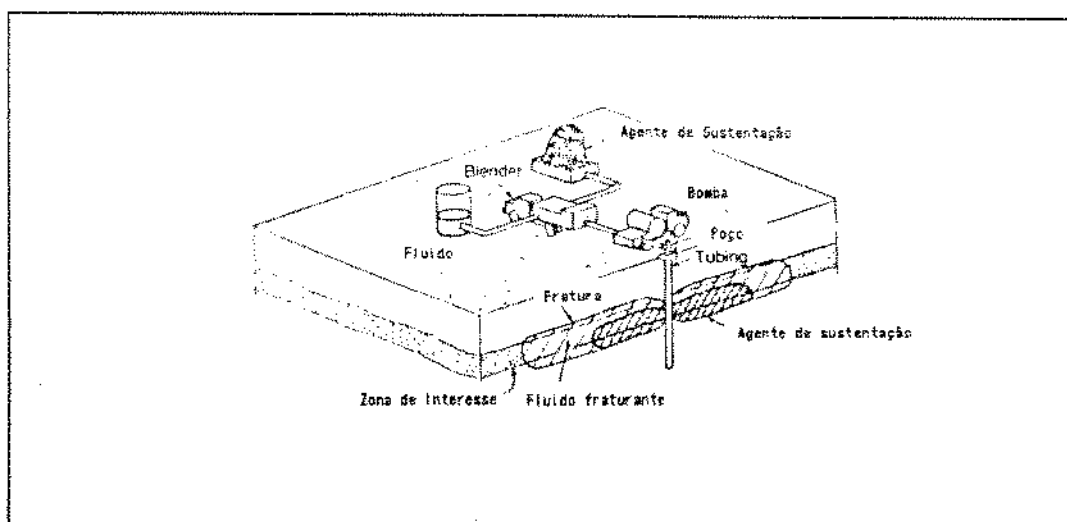


Figura 1.1 - Esquema operacional simplificado de um fraturamento hidráulico (8)

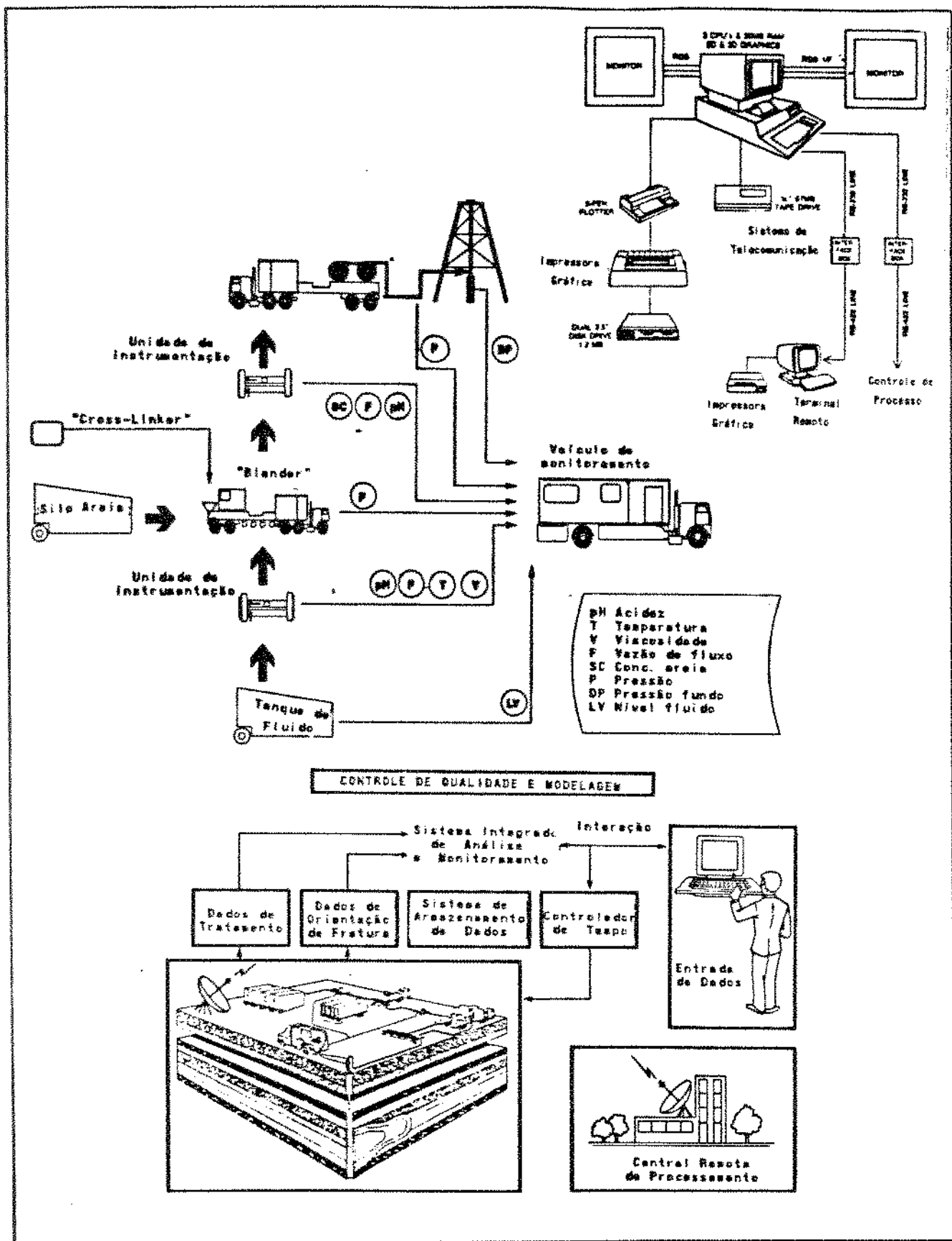


Figura 1.2 - Esquema geral de um sistema computadorizado de monitoramento de operações de estimulação e seus periféricos (8)

1.3 ASPECTOS ECONÔMICOS

A decisão de submeter um poço a um fraturamento hidráulico, geralmente, é tomada com base em estudos de produtividade da formação, a fim de verificar se a resposta da rocha reservatório ao tratamento torna o mesmo economicamente viável.

O projeto de um fraturamento hidráulico deve, portanto, seguir algumas etapas de estudos de viabilidade econômica :

- determinar a produção de hidrocarbonetos esperada para cada comprimento e condutividade de fratura possíveis para um dado reservatório;

- determinar o custo do tratamento necessário para produzir fraturas com os comprimentos e condutividades desejados;

- fazer um balanço entre custo e benefício, determinando, assim, o tratamento mais adequado, economicamente, àquela formação.

A otimização do projeto consistirá na escolha do tratamento que possa produzir maior lucro, ou seja, maior produtividade com o menor custo possível. A Figura 1.3 ilustra o estudo de viabilidade econômica de uma operação de fraturamento hidráulico.

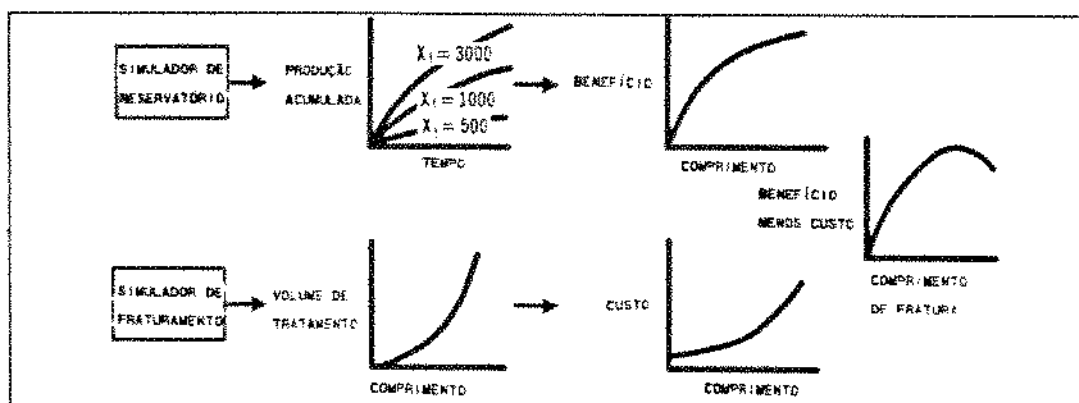


Figura 1.3 - Otimização de um projeto de fraturamento hidráulico (8)

Um simulador de comportamento de reservatório fornece os dados necessários à análise do aumento de produtividade possível de ser obtido para vários comprimentos e condutividades de fratura. A partir desses dados, pode-se fazer uma análise econômica do benefício gerado por cada tipo de fratura.

Um simulador de fraturamento fornece os volumes de tratamento, tipos de fluido e parâmetros operacionais requeridos para obtenção de fraturas para cada comprimento e condutividade desejados. Com isso, pode-se analisar o custo do tratamento necessário à obtenção de cada tipo de fratura.

O último passo é estabelecer uma curva de ganho líquido versus comprimento e condutividade da fratura, escolhendo-se o projeto que forneça lucro máximo.

Na prática, nem sempre se dispõe de todos os elementos necessários para que se faça uma análise completa de viabilidade econômica, contudo, é sempre feita uma análise preliminar ao projeto, envolvendo custo e benefício gerado pelo tratamento.

1.4 MOTIVAÇÃO DO ESTUDO

A frequente utilização das operações de fraturamento hidráulico para aumentar a produtividade dos poços de petróleo e o alto custo representado por essa técnica de estimulação em relação ao custo total de completação do poço, devido à tecnologia nela envolvida, exigem um grande conhecimento a respeito das características da formação e do fenômeno de propagação da fratura. Como já foi citado anteriormente, a tecnologia do fraturamento hidráulico tem evoluído muito no que diz respeito à monitoração dos parâmetros de tratamento, fornecendo assim uma importante ferramenta no estudo da operação e no diagnóstico do comportamento da formação fraturada. É importante que sejam desenvolvidos métodos analíticos que possam utilizar os dados coletados durante a operação na interpretação do fenômeno físico. O comportamento da pressão durante o tratamento, em particular, é um aspecto relevante no estudo de propagação de fratura, que já vem sendo utilizado por alguns autores, destacando-se Keneth G. Nolte (5,8,9), entre outros. A principal justificativa do presente trabalho é que um detalhamento dos métodos de análise empregados no estudo de comportamento de pressão de fraturamento e a discussão da validade das hipóteses básicas de cada modelo de geometria de fratura empregado nos projetos de fraturamento, mesmo sem a pretensão de criar uma nova metodologia de análise, pode

contribuir para um melhor entendimento do fenômeno de propagação da fratura e, sobretudo, mostrar as limitações de cada um dos modelos clássicos de geometria de fratura, quando confrontados com resultados de campo.

1.5 OBJETIVO DO ESTUDO

O objetivo deste estudo é detalhar os métodos de análise de comportamento da pressão durante o bombeio nas operações de fraturamento hidráulico, de forma a associar a geometria da fratura criada com as geometrias de fratura propostas pelos modelos clássicos utilizados nos projetos de tratamento e, mais importante, diagnosticar possíveis problemas operacionais ocorridos durante a operação e identificar as causas de eventuais insucessos nas operações, contribuindo para a melhoria da qualidade dos projetos de fraturamento hidráulico.

A simplicidade com que o assunto é aqui abordado torna o método de análise de fácil entendimento, de forma a viabilizar a sua aplicação às situações de campo.

A discussão sobre a validade de algumas hipóteses básicas dos modelos clássicos de fratura visa unicamente o melhor entendimento das suas aplicações práticas, podendo, todavia, ser estudadas de maneira mais profunda em trabalhos futuros.

1.6 FORMA DE APRESENTAÇÃO

A fim de apresentar o estudo dentro de uma sequência lógica, este trabalho mostra primeiramente alguns conceitos elementares de mecânica das rochas e propagação de fraturas.

No capítulo seguinte são apresentados os modelos clássicos de geometria de fratura, com as deduções matemáticas e a extensão destes modelos à solução de Carter para "leak off".

Em seguida, é destinado um capítulo para discutir a influência da utilização de fluidos de potência nos modelos de fratura estudados.

No capítulo 5 são feitas algumas considerações a respeito dos

parâmetros que controlam o crescimento vertical da fratura durante a propagação.

A seguir, no capítulo 6, são deduzidas as equações de pressão versus tempo de propagação para cada um dos modelos clássicos de fratura.

No capítulo posterior, essas equações são comparadas aos comportamentos típicos de pressão de tratamento, a fim de se estabelecer uma analogia entre os dados de tratamento e os modelos utilizados no seu dimensionamento.

No capítulo 8, o estudo é ilustrado com alguns exemplos de aplicação do método de análise à situações de campo.

Finalmente, as conclusões, no capítulo 9, encerram o estudo, seguidas das referências bibliográficas e de alguns anexos necessários à compreensão do trabalho.

CAPÍTULO 2

ELEMENTOS DE MECÂNICA DAS ROCHAS E PROPAGAÇÃO DE FRATURAS

2.1 COMPORTAMENTO ELÁSTICO

Denomina-se elasticidade à propriedade física apresentada por certos materiais que, ao sofrerem algum tipo de deformação pela ação de forças externas, retomam sua forma inicial quando essas forças deixam de atuar.

A grande maioria dos materiais utilizados na engenharia apresentam, até um certo grau, um comportamento elástico. Neste estudo, serão considerados apenas os materiais elásticos homogêneos e isotrópicos. Por homogeneidade entenda-se que qualquer ponto do corpo apresente as mesmas propriedades físicas específicas, e por isotropia, que as propriedades elásticas sejam as mesmas em todas as direções.

As rochas, em geral, não satisfazem completamente as hipóteses acima, mas a experiência mostra que as soluções da Teoria da Elasticidade baseadas nas hipóteses da homogeneidade e isotropia podem ser aplicadas à Mecânica das Rochas com razoável precisão.

2.2 MATERIAIS ELÁSTICOS LINEARES

A descrição matemática mais elementar para o comportamento elástico de um material é a relação matemática determinada empiricamente por Robert Hooke, no final do século XVII, conhecida por Lei de Hooke :

$$\sigma = E \cdot \epsilon \dots\dots\dots (2.1)$$

onde σ é a tensão efetiva atuante no corpo, E é um coeficiente de proporcionalidade denominado módulo de elasticidade ou módulo de Young, sendo uma característica de cada material, e ϵ é a deformação adimensional do corpo.

A Figura 2.1 mostra o diagrama tensão versus deformação de um corpo submetido a um teste de carregamento uniaxial, realizado em dois ciclos (12). Através deste diagrama pode-se caracterizar o comportamento do material em cada etapa do teste.

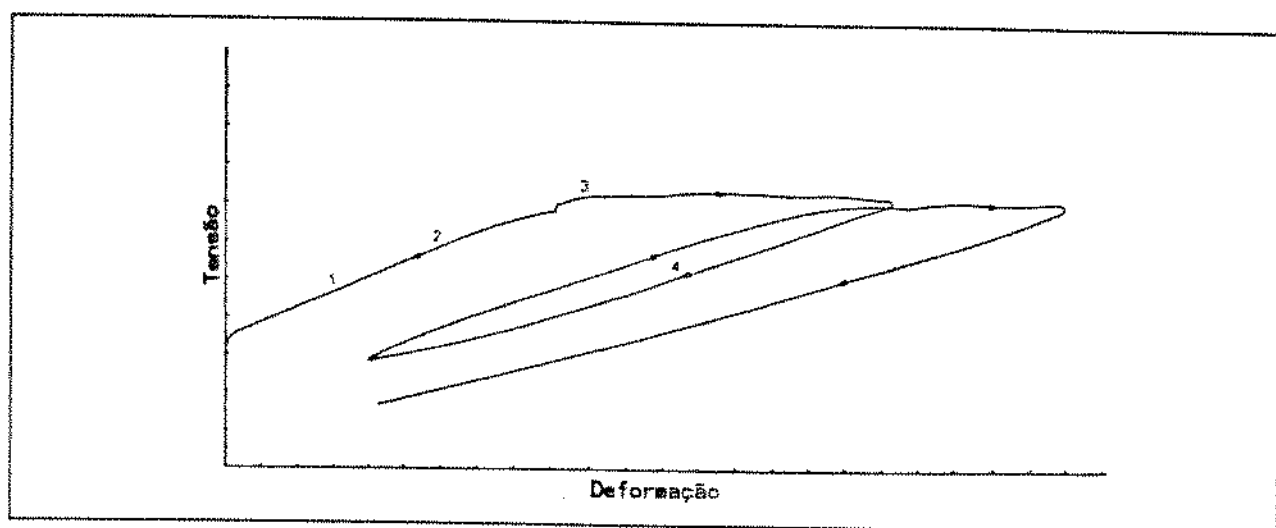


Figura 2.1 - Curva de tensão - deformação de dois ciclos (12)

O trecho 1 representa uma relação de proporcionalidade entre a tensão efetiva e a deformação do corpo. Nesse trecho, o módulo de elasticidade pode ser determinado através da declividade da reta. Os materiais submetidos a tal tipo de carregamento são ditos de comportamento linearmente elástico ou elástico-linear.

A partir de um certo ponto, chamado limite de proporcionalidade, a declividade da curva passa a ser decrescente, conforme observa-se no trecho 2 do diagrama. Esse comportamento prossegue até um determinado ponto, chamado limite de escoamento do material. Os materiais submetidos a carregamentos menores que o seu limite de escoamento apresentam, portanto, o chamado comportamento elástico. Esse comportamento é representado no diagrama pelos trechos 1 e 2.

A partir do limite de escoamento (ponto 3), o material passa a ter comportamento inelástico, ou seja, passa a sofrer deformações de caráter permanente.

A região 4 do diagrama é denominada "loop de histerese" e o valor da sua área corresponde, numericamente, à energia dissipada pelo material durante o ciclo de carregamento.

No presente trabalho, as rochas serão consideradas, sempre,

materiais linearmente elásticos, ou seja, seu comportamento será regido pela lei de Hooke.

A Figura 2.2 mostra um outro tipo de carregamento, onde é atingido o limite de ruptura, ocorrendo a falha do material (7).

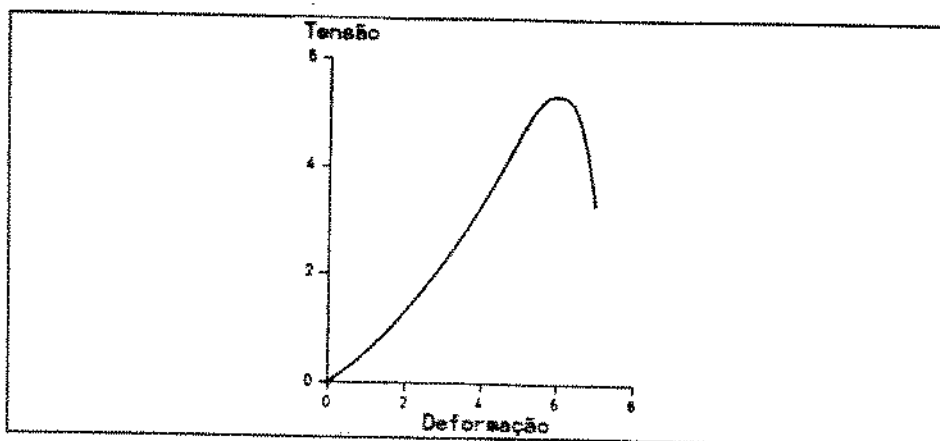


Figura 2.2 - Caracterização da tensão de ruptura (7)

2.3 ALGUMAS PROPRIEDADES DAS ROCHAS

2.3.1 RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO EM MATERIAIS ELÁSTICOS LINEARES

A hipótese de comportamento linearmente elástico das rochas facilita a aplicação da teoria da elasticidade à resolução analítica dos problemas relativos à propagação de fraturas hidráulicas.

Segundo a própria definição de elasticidade linear, as componentes normais de tensão são funções lineares das componentes de deformação, podendo ser expressas pelas seguintes equações :

$$\sigma_x = (\lambda + 2G)\epsilon_x + \lambda\epsilon_y + \lambda\epsilon_z \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

$$\sigma_y = \lambda\epsilon_x + (\lambda + 2G)\epsilon_y + \lambda\epsilon_z \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\sigma_z = \lambda\epsilon_x + \lambda\epsilon_y + (\lambda + 2G)\epsilon_z \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

onde λ e G são chamadas constantes de Lamé.

2.3.2 MÓDULO DE YOUNG (E)

O módulo de Young ou de elasticidade linear é definido como

a relação entre tensão e deformação uniaxial. Das equações (2.2), (2.3) e (2.4), tem-se :

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{G (3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \dots\dots\dots (2.5)$$

2.3.3 MÓDULO DE POISSON (ν)

Chama-se módulo de Poisson ao coeficiente resultante da razão entre as deformações lateral e longitudinal de uma rocha submetida a um carregamento uniaxial. A partir das equações (2.2), (2.3) e (2.4), pode-se escrever :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \dots\dots\dots (2.6)$$

2.3.4 MÓDULO DE ELASTICIDADE AO CISALHAMENTO (G)

O módulo de elasticidade ao cisalhamento ou módulo de rigidez é definido através da relação entre tensão cisalhante e deformação angular. Pode ser expresso a partir das equações (2.5) e (2.6) :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \dots\dots\dots (2.7)$$

2.3.5 COEFICIENTE DE FILTRAÇÃO (C)

O coeficiente de filtração é um parâmetro que caracteriza a rocha e o fluido fraturante. É utilizado para quantificar a perda de fluido por filtração através da rocha.

Esse coeficiente é determinado experimentalmente, através de ensaios de laboratório, onde são medidos volumes de filtração versus tempo de exposição da rocha ao fluido, chegando-se à uma equação do tipo :

$$V_l = V_{sp} + C \sqrt{t} \dots\dots\dots (2.8)$$

onde :

- V_l - perda de fluido por unidade de área da rocha
- V_{sp} - perda de fluido inicial (antes de formar reboco)
- C - coeficiente de filtração do fluido em relação à rocha
- t - tempo de exposição da rocha ao fluido

2.3.6 TENSÕES EFETIVAS NA PAREDE DO POÇO

As tensões atuantes nas vizinhanças do poço são influenciadas por três efeitos (15):

- efeito de poço, que ao ser perfurado provoca uma mudança no estado de tensões original da formação;
- efeito da pressão do fluido atuando nas paredes do poço;
- efeito de fluxo de fluido entre o poço e a formação.

O estado de tensões na rocha pode ser definido pelas tensões principais, através da superposição desses três efeitos :

$$\sigma_r = P_w - P_p \dots\dots\dots (2.9)$$

$$\sigma_\theta = 2\sigma_h - (P_w - P_e) + (P_e - P_p) \left[1 - \left(1 - \frac{C_R}{C_T} \right) \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \right] \dots (2.10)$$

$$\sigma_z = \sigma_v + (P_e - P_p) \left[1 - \left(1 - \frac{C_R}{C_T} \right) \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \right] \dots\dots\dots (2.11)$$

2.4 ASPECTOS RELATIVOS À MECÂNICA DO FRATURAMENTO

2.4.1 DEFINIÇÃO DE FRATURA

Sob o ponto de vista mecânico, a fratura produzida em uma rocha pela pressão exercida por um fluido, caracteriza uma falha do material por tração. Para que haja a quebra ou ruptura da formação, é necessário que uma das tensões principais efetivas seja maior que a resistência da rocha à tração. No caso mais simples de fratura vertical, com fluido não penetrante, tem-se :

$$|\sigma_\theta| = |R_T| \dots\dots\dots (2.12)$$

Convencionando-se as tensões de tração como positivas e as de compressão como negativas e aplicando-se a equação (2.10) na equação (2.12), com $P_p = P_e$ (fluido não penetrante), vem :

$$P_w - P_e - 2\sigma_h = R_T$$

$$P_w = P_e + 2\sigma_h + R_T \dots\dots\dots (2.13)$$

2.4.2 PRESSÃO OU TENSÃO DE CONFINAMENTO (σ_c)

É a pressão mínima necessária para propagar uma fratura. Essa pressão é igual à tensão perpendicular ao plano da fratura e deve ser igual à menor das tensões principais.

No caso de fratura vertical aberta por fluido não penetrante, pode-se escrever :

$$\sigma_c = \sigma_h + P_e \dots\dots\dots (2.14)$$

2.4.3 PRESSÃO DE PROPAGAÇÃO (P_w)

É a pressão de fundo exercida pelo fluido fraturante durante a propagação da fratura. Seu comportamento durante o tratamento será regido pelas propriedades do fluido e da formação e pelo modelo de geometria da fratura. Pode ser calculada a partir da pressão de bombeio, na superfície.

$$P_w = P_s + P_H - \Delta P_f - \Delta P_{col} \dots\dots\dots (2.15)$$

2.4.4 PRESSÃO INSTANTÂNEA DE FECHAMENTO (ISIP)

É a pressão de tratamento, medida na superfície, imediatamente após cessado o bombeio. É utilizada para estimativas de perdas de carga na coluna e canhoneados.

Se considerarmos a equação (2.15) após cessado o bombeio, teremos :

$$P_w = ISIP + P_H, \text{ logo,}$$

$$ISIP = P_s - \Delta P_f - \Delta P_{col} \dots\dots\dots (2.16)$$

2.4.5 CÁLCULO DOS FUROS ATIVOS DURANTE O TRATAMENTO

A determinação do número de furos do intervalo canhoneado que se encontram ativos durante o fraturamento é feita através da seguinte expressão (10):

$$N = \left(\frac{\rho \cdot Q^2}{C_D \cdot \phi_c^4 \cdot \Delta P_f} \right)^{0,5} \dots\dots\dots (2.17)$$

onde ΔP_f é calculado a partir da equação (2.16).

2.5 MECANISMOS DE PROPAGAÇÃO E ESTABILIDADE DE FRATURA

2.5.1 TEORIA DE GRIFFITH

Griffith (7,8) estudava a baixa resistência à tração apresentada por materiais vitreos, quando concluiu que a causa dessa baixa resistência era a presença de microfraturas na estrutura do material. Ele observou que essas fraturas tinham a forma geométrica de uma elipse de excentricidade aproximadamente igual a 1. Griffith concluiu que, devido à presença dessas microfraturas, quando a tensão aplicada ao corpo atingia um valor crítico, ocorria a ruptura do material, provavelmente porque esse valor de tensão crítico desencadeava a propagação das microfraturas.

A fim de estudar matematicamente o fenômeno, Griffith introduziu o conceito de energia de superfície, que seria a energia dissipada pelo material para aumentar a área da fratura, quando a mesma se propagasse. A energia de superfície gasta para produzir uma variação igual a dL no comprimento de uma elipse de eixo igual a $2L$, submetida a um carregamento uniforme σ , em condições de deformação plana, é calculado pela expressão :

$$dw = - \frac{\pi \sigma^2 (1 - \nu^2) L dL}{E} \dots\dots\dots (2.18)$$

A nova energia de superfície, armazenada pela microfratura após a deformação, segundo Griffith, é calculada por :

$$dw = 2 \cdot \gamma \cdot dL \dots\dots\dots (2.19)$$

Para que haja conservação da energia do sistema, supondo não haver nenhum tipo de dissipação, a soma das equações (2.18) e

(2.19) deve ser igual a zero.

Logo, pode-se determinar o valor da tensão mínima ou tensão crítica capaz de produzir a energia necessária à propagação da fratura :

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{2 E \gamma}{\pi (1-\nu)^2 L}} \dots\dots\dots (2.20)$$

2.5.2 TEORIA DE BARENBLATT

Barenblatt (7,8), analisando a estabilidade das fraturas em propagação, observou que a hipótese de Griffith de que as fraturas deveriam ser perfeitamente elípticas tornava impossível a sua contenção, fazendo com que as mesmas se propagassem indefinidamente, independente da tensão de confinamento. A única maneira de deter o crescimento da fratura seria a existência de tensões de confinamento infinitas na ponta da fratura, hipótese que Barenblatt julgou inadequada.

Ele sugeriu, então, a existência de forças intermoleculares na ponta da fratura, que denominou forças de coesão, que tenderiam a fechar a fratura. Devido a essas forças de coesão, a geometria da fratura seria alterada próxima às extremidades, fugindo da forma elíptica proposta por Griffith e passando a ter um fechamento suave. Matematicamente, essa condição pode ser expressa pela seguinte expressão :

$$\left. \frac{\delta W}{\delta X} \right|_{x=l} = 0 \dots\dots\dots (2.21)$$

Essas forças de coesão foram caracterizadas por Barenblatt através de uma propriedade específica do material, denominada por ele de módulo de coesão (K).

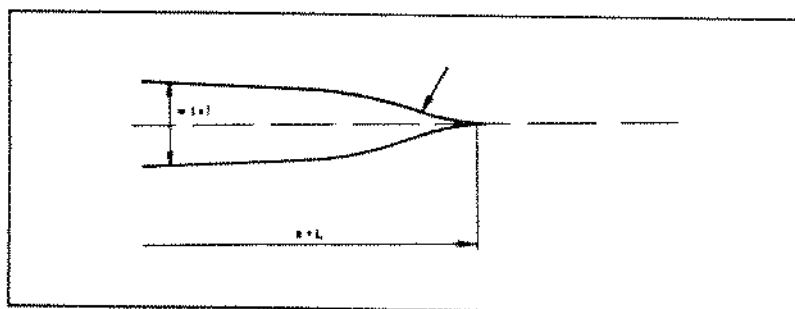


Figura 2.3 - Representação esquemática da Condição de Barenblatt

A força de coesão atuante na extremidade da fratura é calculada pela seguinte expressão :

$$\sigma = \frac{K}{\pi} \sqrt{\frac{2}{L}} \dots\dots\dots (2.22)$$

A energia gerada pela ação das forças de coesão é :

$$\gamma = \frac{(1 - \nu^2) K^2}{\pi E} \dots\dots\dots (2.23)$$

Para que haja propagação da fratura, segundo o critério de Barenblatt, a tensão efetiva deve ter um valor mínimo ou crítico, maior do que as forças de coesão, que tendem a fechar a fratura.

Logo :

$$\sigma_{cr} = \left(\frac{2 E \gamma}{\pi (1-\nu^2) L} \right)^{0.5} \dots\dots (2.24)$$

2.6 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DE PROPAGAÇÃO DE FRATURAS

2.6.1 EQUAÇÕES DE GEOMETRIA DE FRATURA

A equação fundamental de geometria de fratura utilizada em todos os trabalhos clássicos sobre teoria de fraturamento foi proposta por England e Green, em 1962. Esta equação calcula a largura de uma fratura cuja dimensão principal varia de $-L$ a $+L$, aberta através de uma distribuição de pressão de fluido em um meio homogêneo contendo uma fratura inicial de forma aproximadamente elíptica, com uma tensão de confinamento σ_c . Esta equação é, na sua forma mais completa, escrita da seguinte forma :

$$W(x) = \frac{4(1-\nu)L}{\pi G} \left[\int_{f_1}^1 \frac{f_2 df_2}{(f_2^2 - f_1^2)^{0.5}} \int_0^{f_2} \frac{P(f_1) df_1}{(f_2^2 - f_1^2)^{0.5}} + \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} \sigma_c (1 - f_1^2)^{0.5} \right] \dots\dots (2.25)$$

No caso mais simples da sua aplicação, que seria uma distribuição uniforme de pressão, tem-se $P(z)$ constante ao longo da fratura, e a solução da equação seria :

$$W(f_1) = \frac{2(1-\nu)L \Delta P}{G} \sqrt{1-f_1^2} \dots\dots\dots (2.26)$$

onde $\Delta P = P(z) - \sigma_c$

Neste caso a fratura tem, portanto, a forma de uma elipse de eixos $2L$ e $W(0)$.

2.6.2 EQUAÇÕES DE FLUXO

As equações de fluxo utilizadas na teoria de propagação de fraturas baseiam-se na hipótese de regime de fluxo laminar em condutos elípticos ou entre placas planas paralelas, a depender da geometria da fratura, para fluidos newtonianos ou de potência.

Fluidos newtonianos são aqueles cujo comportamento reológico apresenta uma linearidade entre a tensão de cisalhamento (T) e a taxa de deformação ($-dv/dr$). A constante de proporcionalidade desta relação é denominada viscosidade absoluta do fluido.

A grande maioria dos fluidos de fraturamento, entretanto, tem comportamento reológico não linear, sendo que a relação entre a tensão cisalhante e a taxa de deformação é descrita por uma equação do tipo $T = k' (-dv/dr)^{n'}$, onde o parâmetro k' é chamado índice de consistência do fluido e o parâmetro n' é o índice de comportamento.

Para fluxo entre placas planas paralelas (10), tem-se :

fluidos newtonianos $\frac{dp}{dx} = - \frac{12 \mu q}{H W^3} \dots\dots\dots (2.27)$

fluidos de potência : $\frac{dp}{dx} = - 2 k' \left[\frac{2n'+1}{n'} \right]^{n'} \left[\frac{2q}{H} \right]^{n'} \left[\frac{1}{W} \right]^{2n'+1}$
 (2.28)

Para fluxo em condutos elípticos (3), tem-se :

fluidos newtonianos $\frac{dp}{dx} = - \frac{64 \mu q}{\pi H W^3} \dots\dots\dots (2.29)$

fluidos de potência : $\frac{dp}{dx} = - \frac{32}{3\pi} k' \left[\frac{2n'+1}{n'} \right]^{n'} \left[\frac{2q}{H} \right]^{n'} \left[\frac{1}{W} \right]^{2n'+1}$
 (2.30)

2.6.3 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A última equação fundamental a ser utilizada no escopo deste trabalho é a equação da continuidade na fratura, que é obtida através de um balanço de massa envolvida no processo de propagação da fratura.

Utiliza-se algumas hipóteses simplificadoras na formulação do balanço de massa :

- o fluido fraturante é incompressível, o que permite que se faça um balanço de volume;
- a altura da fratura é constante durante todo o processo de propagação da fratura, ao longo de toda sua extensão;
- a vazão de injeção é constante durante o tratamento.

Fazendo o balanço de volume para um elemento de fratura de comprimento Δx , pode-se escrever :

volume injetado = volume filtrado + expansão + volume que sai
 $q(x,t) \cdot \Delta t = 2 \cdot v_f \cdot h \cdot \Delta x \cdot \Delta t + [W(x,t+\Delta t) - W(x,t)] h \cdot \Delta x + q(x+\Delta x,t) \Delta t$
 tomando-se o limite para $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se :

$$\frac{\partial q}{\partial x} + 2.v_1.h + h \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.31)$$

onde o parâmetro v_1 é definido como velocidade de filtração :

$$v_1 = \frac{V_1}{(t - \tau)} \quad \dots\dots\dots (2.32)$$

e V_1 é o volume de filtração determinado pela equação (2.8).

τ é o tempo necessário para a fratura atingir um certo ponto e varia para cada ponto no interior da fratura.

Definire-se complacência como a razão entre a abertura média da fratura e a pressão necessária para manter essa abertura.

$$c = \frac{\bar{W}}{P} \quad \dots\dots\dots (2.33)$$

O volume da fratura pode ser expresso como :

$$V = L.P.c.H \quad \dots\dots\dots (2.34)$$

Fazendo-se, agora, o balanço de volume para a fratura como um todo, pode-se escrever :

vazão injetada = vazão de filtração + variação do volume da fratura

$$q = q_1 + \frac{dV}{dt} \quad \dots\dots\dots (2.35)$$

$$q = q_1 + L.P.c.H \left(\frac{dL}{L} + \frac{dP}{P} + \frac{dc}{c} + \frac{dH}{H} \right) \cdot \frac{1}{dt} \quad \dots\dots(2.36)$$

onde a vazão de filtração $q_1 = 2LH.v_1 \quad \dots\dots\dots (2.37)$

A equação (2.36) representa a equação da continuidade modificada, e equivale à equação (2.31).

CAPÍTULO 3

MODELOS CLÁSSICOS DE GEOMETRIA DE FRATURA

3.1 MODELO DE PERKINS & KERN (PK) PARA PROPAGAÇÃO LINEAR

3.1.1 HIPÓTESES BÁSICAS

- a rocha é um meio homogêneo e isotrópico;
- o fluido fraturante é newtoniano;
- o regime de fluxo na fratura é laminar;
- a altura da fratura é constante no tempo e ao longo da direção de propagação;
- não existe escorregamento entre a formação fraturada e as adjacentes;
- o intervalo canhoneado cobre grande extensão da formação fraturada, de modo a configurar uma fonte linear de injeção;
- a vazão de injeção é constante;
- não há filtração nas faces da fratura.

3.1.2 CONCEPÇÃO DO MODELO

Perkins e Kern utilizaram a equação (2.26) para determinar a geometria das seções verticais da fratura, e adotaram a direção ortogonal a essas seções como sendo a direção de propagação da fratura. A partir disso, associando ao modelo a equação de fluxo em condutos elípticos, resolveram o problema da determinação da largura da fratura ao longo do seu comprimento, definindo, assim, a sua geometria horizontal.

3.1.3 DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

De acordo com a equação (2.26), pode-se calcular o valor da largura máxima da fratura elíptica :

$$W(0,t) = \frac{2L(1-\nu)\Delta P}{G} (1-0)^{1/2}$$

Adotando a direção horizontal de propagação, $2L = H$, logo :

$$W(x,t) = \frac{H(1-\nu)\Delta P}{G} \dots\dots\dots (3.1)$$

Substituindo a equação (3.1) na equação (2.29), vem :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d\Delta p}{dx} = - \frac{64 \mu q}{\pi H} \left(\frac{G}{H(1-\nu)\Delta p} \right)^3$$

$$\Delta P^3 d\Delta P = - \frac{64 \mu q G^3}{\pi H^4 (1-\nu)^3} dx$$

$$\left. \frac{\Delta P^4}{4} \right]_{\Delta P}^0 = - \frac{64 \mu q G^3}{\pi H^4 (1-\nu)^3} x \left. \right]_x^L$$

$$\Delta P(x) = \left[\frac{256 q \mu G^3 (L-x)}{\pi H^4 (1-\nu)^3} \right]^{1/4} \dots\dots\dots (3.2)$$

$$\text{em } x = 0, \Delta P = \Delta P_w = \left[\frac{256 q \mu G^3 L}{\pi H^4 (1-\nu)^3} \right]^{1/4} \dots\dots\dots (3.3)$$

$$(3.2) : (3.3) \rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta P_w} = (1-f_l)^{1/4} \dots\dots\dots (3.4)$$

onde $f_l = x/L$

A equação (3.4) representa a distribuição de pressão ao longo do comprimento da fratura.

Substituindo (3.2) em (3.1) :

$$W(x,t) = 3 \left[\frac{(1-\nu)\mu q (L-x)}{G} \right]^{1/4} \dots\dots\dots (3.5)$$

$$\text{em } x = 0, \quad W(0,t) = W_w = 3 \left[\frac{(1 - \nu) \mu q L}{G} \right]^{1/4} \dots\dots (3.6)$$

A equação da geometria horizontal da fratura será :

$$\frac{W(x,t)}{W(0,t)} = (1 - f_1)^{1/4} \dots\dots\dots (3.7)$$

De acordo com a equação (3.7), as seções horizontais do modelo de fratura de Perkins e Kern são parabólicas. O mesmo aspecto terá, também, a curva de distribuição de pressão ao longo da fratura, conforme a equação (3.4).

Conhecendo-se a geometria da fratura, pode-se calcular o volume de um elemento dV da fratura como :

$$dV = \frac{\pi}{4} H W(x,t) dx \quad , \text{ ou seja,}$$

$$dV = \frac{\pi}{4} H L W(0,t) (1 - f_1)^{1/4} df_1$$

$$\int_0^V dV = \frac{\pi}{4} H L W(0,t) \int_0^1 (1-f_1)^{1/4} df_1$$

$$V = \frac{\pi}{5} H L W(0,t) \dots\dots\dots (3.7)$$

A equação (3.7) calcula o volume de um lado da fratura, que corresponde à metade do seu volume total.

$$\text{onde, } V = q \cdot t \dots\dots\dots (3.8)$$

Fazendo (3.7) = (3.8), vem :

$$q \cdot t = \frac{\pi}{5} H L W(0,t) \dots\dots\dots (3.9)$$

e substituindo o valor de $W(0,t)$ da equação (3.6) pela equação (3.6), tem-se :

$$L(t) = \frac{5}{\pi} \frac{q \cdot t}{3 H \left[\frac{(1 - \nu) \mu q L}{G} \right]^{1/4}}$$

donde se conclui que :

$$L(t) = 0,6 \left[\frac{G \cdot q^3}{(1 - \nu) \mu H^4} \right] \cdot t^{4/5} \dots\dots (3.10)$$

Substituindo a equação (3.10) na equação (3.6), vem :

$$W_v(t) = 2,64 \left[\frac{(1 - \nu) \mu q^2}{G H} \right] \cdot t^{1/5} \dots\dots (3.11)$$

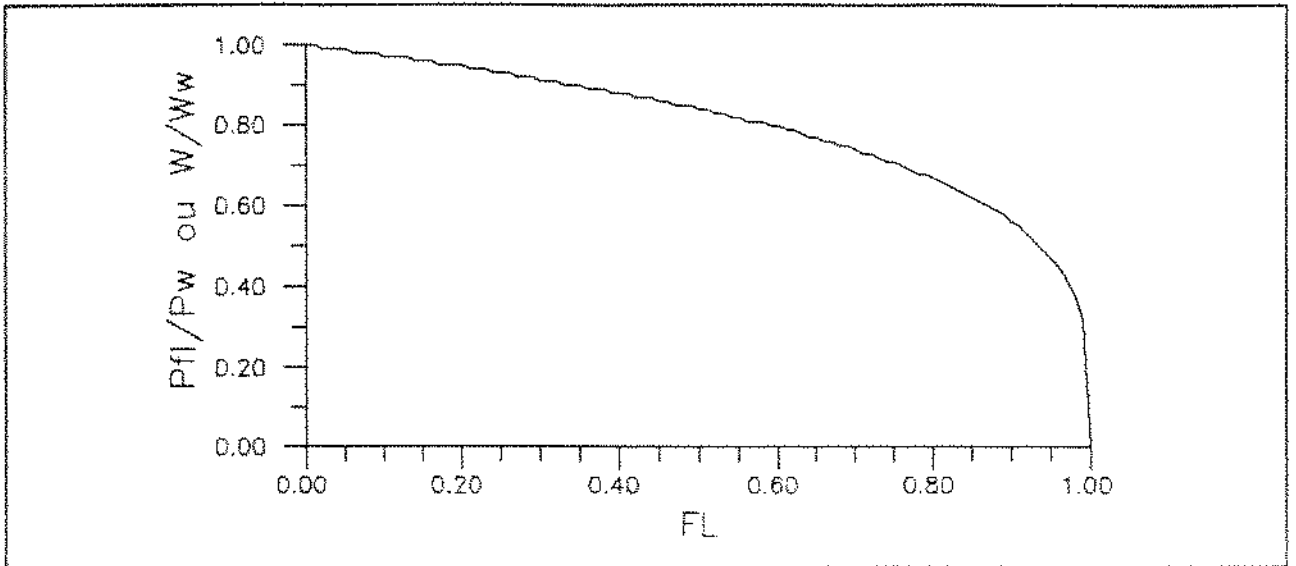


Figura 3.1 - Perfil de pressão e geometria horizontal do modelo de Perkins & Kern

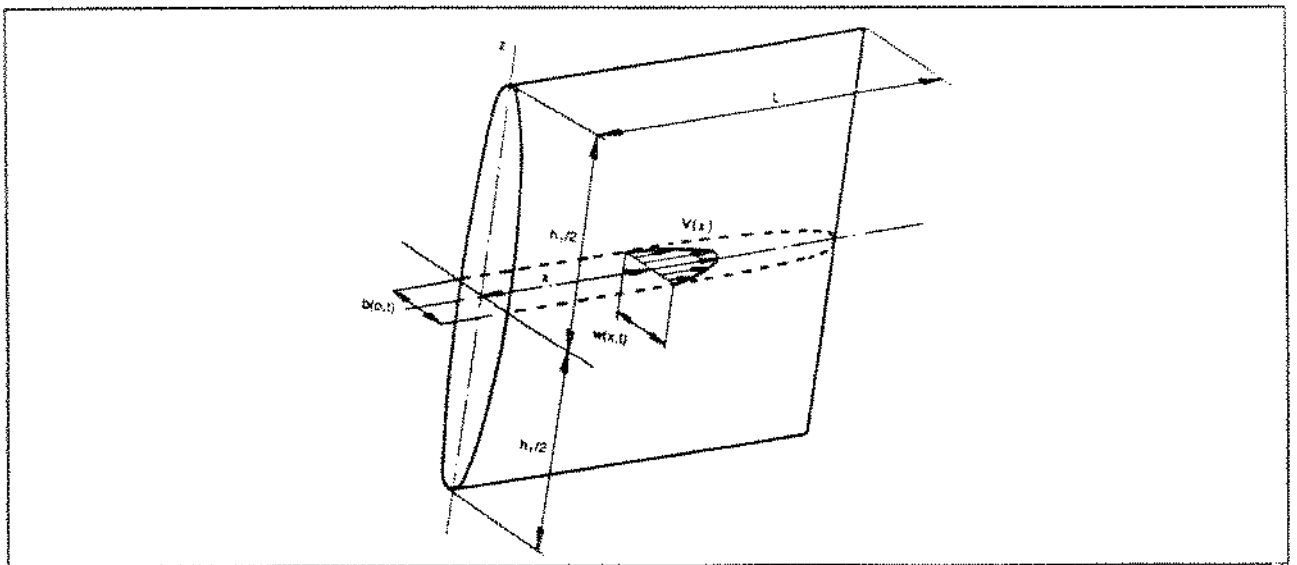


Figura 3.2 - Esquema da geometria do modelo Perkins & Kern (2;3)

3.2 MODELO DE GEERTSMA & DeKLERK (KGD) PARA PROPAGAÇÃO LINEAR

3.2.1 HIPÓTESES BÁSICAS

- a rocha é um meio homogêneo e isotrópico;
- o fluido fraturante é newtoniano;
- o regime de fluxo na fratura é laminar;
- a altura da fratura é constante ao longo da direção de propagação e não varia com o tempo de tratamento;
- existe escorregamento na interface entre a formação fraturada e as formações adjacentes;
- as seções da fratura ortogonais à direção de propagação são retangulares, ou seja, apresentam abertura constante, caracterizando um estado de deformação horizontal plana;
- o intervalo canhoneado cobre grande extensão da formação fraturada, configurando uma fonte linear de injeção;
- a vazão de injeção é constante;
- não há filtração nas faces da fratura.

3.2.2 CONCEPÇÃO DO MODELO

Geertsma e DeKlerk, assumindo um estado de deformação horizontal plana na fratura, propuseram a existência de escorregamento relativo entre a formação de interesse e as formações adjacentes, admitindo, como consequência, seções verticais retangulares, caracterizando um estado de deformação horizontal plana.

A geometria horizontal da fratura é, então, determinada pela resolução do sistema formado pelas equações (2.25) e (2.27), através de método numérico.

O modelo KGD, ao contrário do modelo PK, leva em consideração a hipótese de Barenblatt, descrita pela equação (2.21), que determina o fechamento suave na ponta da fratura.

3.2.3 DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

Aplicando-se a equação (2.21) na equação (2.25), pode-se

escrever :

$$\int_0^1 \frac{P(f_l) df_l}{(1 - f_l^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \sigma_c \dots\dots\dots (3.12)$$

De forma a simplificar a resolução da equação (2.25), o modelo propõe a seguinte distribuição de pressão na fratura :

$$P(f_l) = \bar{P} , \quad 0 \leq f_l < f_{l_0} \dots\dots\dots (3.13)$$

$$P(f_l) = 0 , \quad f_{l_0} \leq f_l \leq 1 \dots\dots\dots (3.14)$$

A equação (3.14) representa uma pequena região próxima à ponta da fratura, não molhada pelo fluido fraturante.

Aplicando essa distribuição de pressão na equação (3.12), tem-se :

$$\int_0^{f_{l_0}} \frac{\bar{P} df_l}{(1 - f_l^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \sigma_c \dots\dots\dots (3.15)$$

Resolvendo a integral, vem :

$$\bar{P} \cdot \left[\text{arc sen } f_l \right]_0^{f_{l_0}} = \frac{\pi}{2} \sigma_c$$

$$\bar{P} \cdot \text{arc sen } f_{l_0} = \frac{\pi}{2} \sigma_c$$

$$f_{l_0} = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_c}{\bar{P}} \right) \dots\dots\dots (3.16)$$

A equação (3.16) calcula a extensão de fratura atingida pelo fluido fraturante.

Resolvendo-se, agora, a equação (2.25) com a distribuição de pressão proposta pelo modelo, tem-se :

$$W(f_l, t) = \frac{2(1-\nu)}{\pi G} \bar{P} L \left[f_l \ln \left| \frac{1 - \frac{f_{l0}}{f_l} \left(\frac{1 - f_l^2}{1 - f_{l0}^2} \right)^{1/2}}{1 + \frac{f_{l0}}{f_l} \left(\frac{1 - f_l^2}{1 - f_{l0}^2} \right)^{1/2}} \right| - f_{l0} \ln \left| \frac{1 - \left(\frac{1 - f_l^2}{1 - f_{l0}^2} \right)^{1/2}}{1 + \left(\frac{1 - f_l^2}{1 - f_{l0}^2} \right)^{1/2}} \right| \right] \dots \dots \dots (3.17)$$

A representação gráfica da equação (3.17) é mostrada na Figura 3.3, onde pode-se observar uma geometria aproximadamente elíptica com fechamento suave na sua extremidade. Foram utilizados valores hipotéticos de ν , G , \bar{P} , L e f_{l0} .

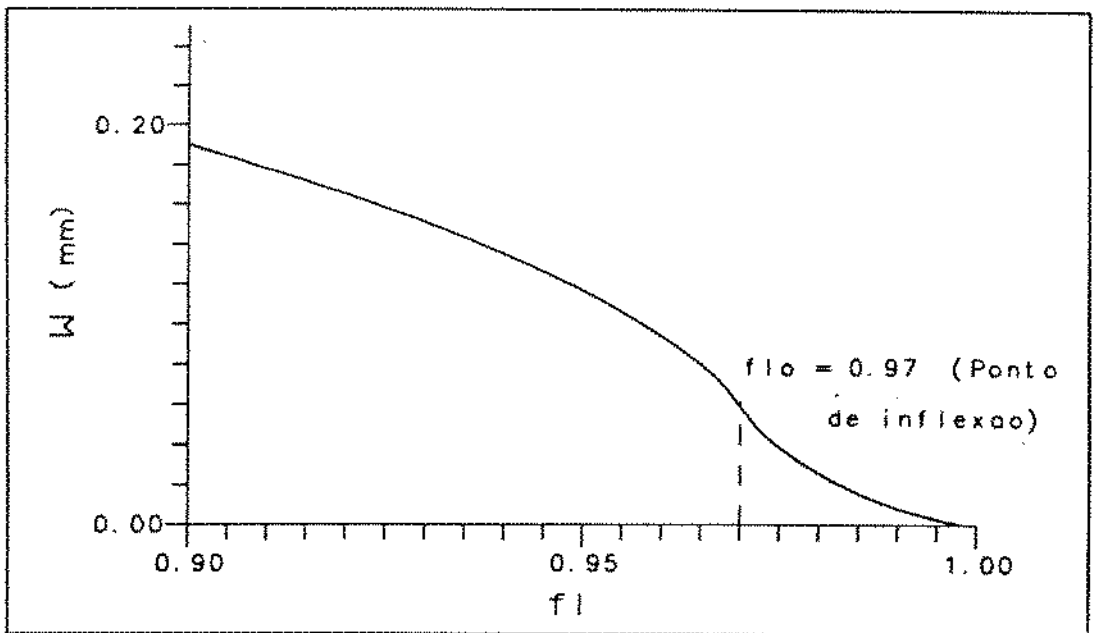


Figura 3.3 - Representação gráfica da equação (3.17)

Quando $f_{l_0} \rightarrow 1$, pode-se escrever :

$$W(0,t) = \frac{4(1-\nu)}{\pi G} \bar{P} L f_{l_0} \sqrt{1 - f_{l_0}^2}$$

Por outro lado, expandindo a equação (3.16) em série, tem-se a seguinte aproximação :

$$\Delta \bar{P} \cong \frac{2}{\pi} \bar{P} f_{l_0} \sqrt{1 - f_{l_0}^2}$$

Donde conclui-se que :

$$W(0,t) = \frac{2(1-\nu)L}{G} \Delta \bar{P} \dots\dots\dots (3.18)$$

Utilizando a equação (2.27), que trata do fluxo entre placas planas paralelas, pode-se, em conjunto com a equação (3.17), determinar a distribuição de pressão ao longo da fratura.

$$\int_{P_w}^0 dP = - \frac{12 \mu q L}{H} \int_0^{f_{l_0}} \frac{df_l}{W^3}$$

$$P_w = \frac{12 \mu q L}{H} \int_0^{f_{l_0}} \frac{df_l}{W^3} \dots\dots\dots (3.19)$$

Integrando, agora de f_l a f_{l_0} , vem :

$$P(f_l) = \frac{12 \mu q L}{H} \int_{f_l}^{f_{l_0}} \frac{df_l}{W^3} \dots\dots\dots (3.20)$$

Dividindo-se a equação (3.20) pela equação (3.19), teremos :

$$\frac{P(f_l)}{P_w} = \frac{\int_{f_l}^{f_{l0}} \frac{df_l}{W^3}}{\int_0^{f_{l0}} \frac{df_l}{W^3}} \dots\dots\dots (3.21)$$

Substituindo-se a equação (3.17) na equação (3.21) e resolvendo-se numericamente, para alguns valores de f_{l0} , obtemos a curva mostrada na figura (3.4), que representa a distribuição de pressão no interior de uma fratura modelo KGD.

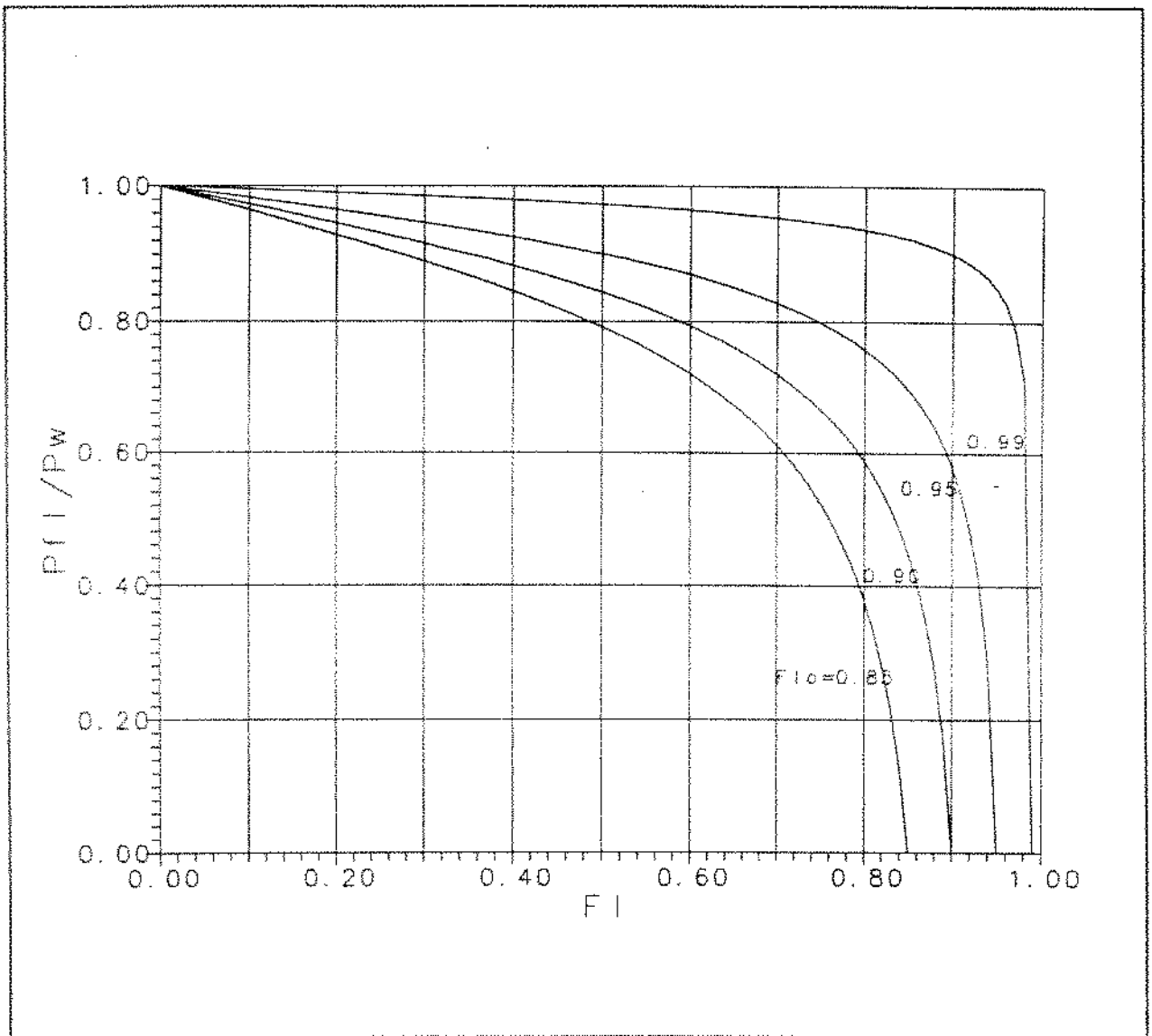


Figura 3.4 - Distribuição de pressão ao longo da fratura KGD

A equação (3.19) pode ser reescrita na seguinte forma :

$$P_w = \frac{12 \mu q L}{H W_w^3} \int_0^{f_{l_0}} \left(\frac{W(0,t)}{W(f_l,t)} \right)^3 df_l \dots\dots\dots (3.22)$$

Geertsma e DeKlerk, através de método numérico, determinaram uma boa aproximação para a integral da equação (3.22) :

$$\int_0^{f_{l_0}} \frac{W(0,t)^3}{W(f_l,t)^3} df_l \cong \frac{7}{4 (1 - f_{l_0}^2)^{1/2}}$$

Substituindo em (3.22), tem-se :

$$P_w = \frac{21 \mu q L}{W_w^3 H (1 - f_{l_0}^2)^{1/2}} \dots\dots\dots (3.23)$$

Expandindo a equação (3.16) e desprezando os termos de ordem maior que 1, tem-se :

$$(1 - f_{l_0}^2)^{1/2} = \frac{\pi}{2} \frac{\bar{P} - \sigma_c}{\bar{P}} \dots\dots\dots (3.24)$$

Substituindo (3.18) e (3.24) em (3.23), vem :

$$\Delta \bar{P} = \bar{P} - \sigma_c = \left[\frac{21 \mu q}{4\pi H L^2} \left(\frac{G}{(1 - \nu)} \right)^3 \frac{\bar{P}}{P_w} \right]^{1/4} \dots\dots (3.25)$$

Considerando que $\bar{P} \cong P_w$, pode-se escrever :

$$\Delta \bar{P} = \Delta P_w = \left[\frac{21 \mu q}{4\pi H L^2} \left(\frac{G}{(1 - \nu)} \right)^3 \right]^{1/4} \dots\dots\dots (3.26)$$

Substituindo (3.26) em (3.18) :

$$W_w = 2,27 \left[\frac{\mu q L^2}{H} \frac{(1 - \nu)}{G} \right]^{1/4} \dots\dots\dots (3.27)$$

A figura 3.5 representa um esquema da geometria de fratura do

modelo KGD de propagação linear.

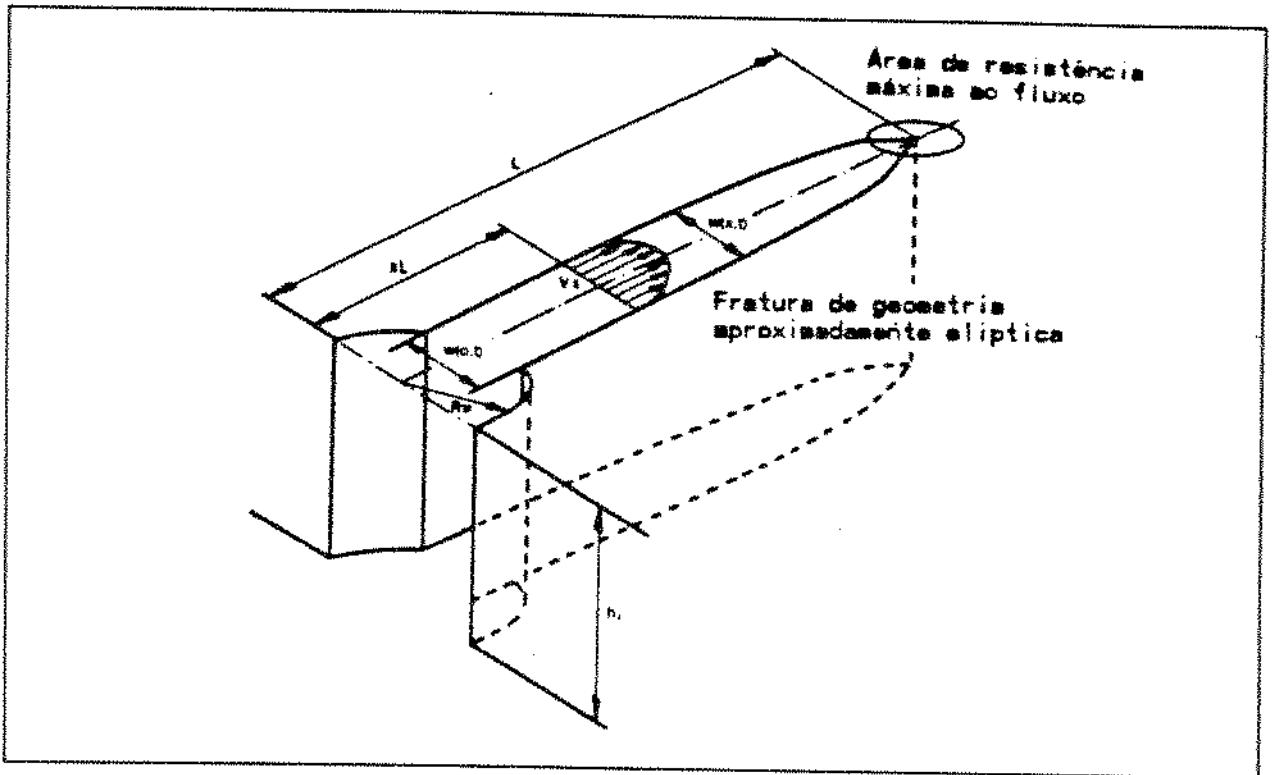


Figura 3.5 - Esquema da geometria do modelo de fratura KGD

O volume de um elemento da fratura pode ser calculado pela seguinte expressão :

$$dV = H \cdot W(x) \cdot dx \quad \dots\dots\dots (3.28)$$

Substituindo a equação (3.19) na equação (3.28), vem :

$$V = \int_0^L H \cdot W_w \sqrt{1 - (x/L)^2} \, dx = \frac{H W_w}{L} \int_0^L \sqrt{L^2 - x^2} \, dx$$

$$V = \frac{H W_w}{L} \left[\frac{x}{2} \sqrt{L^2 - x^2} + \frac{L^2}{2} \arcsen \frac{x}{L} \right]_0^L$$

$$V = \frac{\pi}{4} H.L.W_w = q.t$$

Explicitando-se o valor de L, vem :

$$L(t) = \frac{4 q t}{\pi H W_w} \dots\dots\dots (3.29)$$

Substituindo a equação (3.27) na equação (3.29) :

$$L(t) = \frac{4 q t}{\pi H} \left(\frac{\pi H G}{84 \mu q L^2 (1-\nu)} \right)^{1/4}$$

Donde se conclui :

$$L(t) = 0,68 \left(\frac{q^3 G}{H^3 \mu (1-\nu)} \right)^{1/6} \cdot t^{2/3} \dots\dots\dots (3.30)$$

Substituindo a equação (3.30) na equação (3.27), tem-se :

$$W_w(t) = 1,87 \left(\frac{(1-\nu) \mu q^3}{G H^3} \right)^{1/6} \cdot t^{1/3} \dots\dots\dots (3.31)$$

3.3 MODELOS DE PROPAGAÇÃO RADIAL

3.3.1 HIPÓTESES BÁSICAS

- a rocha é um meio homogêneo e isotrópico;
- o fluido fraturante é newtoniano;
- o fluxo na fratura se processa radialmente e em regime laminar;
- o intervalo canhoneado cobre uma pequena extensão da zona fraturada, configurando uma fonte pontual de injeção;
- a vazão de injeção é constante;
- não existe filtração nas faces da fratura.

3.3.2 CONCEPÇÃO DO MODELO

O problema da propagação radial de fraturas hidráulicas é tratado pelos modelos PK e KGD de propagação radial, com algumas diferenças nas equações de fluxo e de geometria da fratura em relação à propagação linear, porém, com a mesma linha de raciocínio.

A equação (2.25), modificada para fluxo radial (2), determina a largura de uma fratura que se propaga radialmente :

$$W(f_r, t) = \frac{4(1-\nu)R}{\pi G} \left(\int_{f_r}^1 \frac{df_2}{(f_2^2 - f_r^2)^{1/2}} \int_{f_{rw}}^{f_2} \frac{f_1 \cdot P(f_1) df_1}{(f_2^2 - f_1^2)^{1/2}} - \sigma_c \sqrt{1 - f_r^2} \right) \dots\dots\dots (3.32)$$

onde : $f_r = \frac{r}{R}$;
 r = distância ao centro do poço;
 R = raio total da fratura

A equação (2.27), que descreve a variação de pressão no fluxo entre placas planas paralelas, pode ser escrita na forma :

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{12 \mu \bar{v}}{\bar{W}^2} \dots\dots\dots (3.33)$$

onde, no caso de fluxo radial :

$$\bar{v} = \frac{Q}{2\pi r \bar{W}} \dots\dots\dots (3.34)$$

\bar{v} é a velocidade média no interior do conduto;
 \bar{W} é a distância entre as placas.

Substituindo (3.34) em (3.33), tem-se :

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{6 \mu Q}{\pi r \bar{W}^3} \dots\dots\dots (3.35)$$

A equação (3.35) é a equação de fluxo radial entre placas planas paralelas.

O modelo PK é desenvolvido analiticamente e suas equações de raio e largura de fratura têm o mesmo aspecto do modelo KGD, diferindo apenas em relação às constantes.

O modelo KGD de propagação radial, a exemplo do modelo de propagação linear, leva em conta a condição de Barenblatt de fechamento suave e é desenvolvido através de método numérico.

3.3.3 MODELO PK - DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

A partir da equação (3.35), pode-se escrever :

$$dP = - \frac{6 \mu Q}{\pi \bar{W}^3} \frac{dr}{r}$$

$$\int_{P_w}^P dP = - \frac{6 \mu Q}{\pi \bar{W}^3} \int_{r_w}^r \frac{dr}{r}$$

resolvendo a integral, vem :

$$P(r) = P_w - \frac{6 \mu Q}{\pi \bar{W}^3} \text{Ln} \left(\frac{r}{r_w} \right) \dots\dots\dots (3.36)$$

Na ponta da fratura, o modelo PK, que não considera fechamento suave, assume $P = \sigma_c$. Logo :

$$\sigma_c = P_w + \frac{6 \mu Q}{\pi W^3} \text{Ln } f_{rw} \dots\dots\dots (3.37)$$

Para facilitar a resolução da equação (3.32), utiliza-se o valor da pressão média no interior da fratura (\bar{P}), que é calculada com base na equação (3.36).

A pressão média atuante nas faces da fratura será :

$$\bar{P} = \frac{1}{A_T} \int P \, dA \dots\dots\dots (3.38)$$

onde :

A_T = área total da fratura

dA = área de um elemento infinitesimal de fratura

pode-se escrever :

$$A_T = \pi \cdot R^2 \dots\dots\dots (3.39)$$

$$A = \pi \cdot r^2 \quad \rightarrow \quad dA = 2\pi \cdot r \cdot dr \dots\dots (3.40)$$

logo :

$$\bar{P} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R P \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$\bar{P} = \frac{1}{\pi R^2} \left(\int_0^{r_w} P_w \cdot 2\pi r \cdot dr + \int_{r_w}^R P \cdot 2\pi r \cdot dr \right)$$

$$\bar{P} = \frac{\pi r_w^2 P_w + \int_{r_w}^R 2\pi \left[P_w - \frac{6 \mu Q}{\pi W^3} \text{Ln} \left(\frac{r}{r_w} \right) \right] r \cdot dr}{\pi \cdot R^2} \dots\dots\dots (3.41)$$

fazendo : $r = R \cdot f_r$

$$r_w = R \cdot f_{rw}$$

$$dr = R \cdot df_r ,$$

e substituindo em (3.41), tem-se :

$$\bar{P} = P_w - \frac{12 \mu Q}{\pi \bar{W}^3} \int_{f_{rw}}^1 f_r \cdot \text{Ln} \left(\frac{f_r}{f_{rw}} \right) df_r$$

$$\bar{P} = P_w - \frac{12 \mu Q}{\pi \bar{W}^3} \int_{f_{rw}}^1 f_r \cdot \text{Ln} \left(\frac{f_r}{f_{rw}} \right) df_r$$

$$\bar{P} = P_w - \frac{12 \mu Q}{\pi \bar{W}^3} \left[\frac{f_r^2}{2} \text{Ln} f_r - \frac{f_r^2}{4} - \frac{f_r^2}{2} \text{Ln} f_{rw} \right]_{f_{rw}}^1$$

Como $f_{rw} \rightarrow 0$, tem-se :

$$\bar{P} = P_w + \frac{12 \mu Q}{\pi \bar{W}^3} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \text{Ln} f_{rw} \right] \dots \dots \dots (3.42)$$

Substituindo-se o valor de \bar{P} na equação (3.32) e fazendo-se $\Delta\bar{P} = \bar{P} - \sigma_c$, chega-se facilmente à equação da largura da fratura radial em função da pressão média :

$$W(f_r, t) = \frac{4(1-\nu) R \Delta\bar{P}}{\pi G} \sqrt{1 - f_r^2} \dots \dots \dots (3.43)$$

A equação (3.43) corresponde à geometria de um elipsóide de revolução.

No poço, $f_r = f_{rw} \cong 0$, logo :

$$W_w = \frac{4(1-\nu) R \Delta\bar{P}}{\pi G} \dots \dots \dots (3.44)$$

onde $\Delta\bar{P} = \bar{P} - \sigma_c \dots \dots \dots (3.45)$

Substituindo as equações (3.42) e (3.37) na equação (3.45),
chega-se a:

$$\Delta \bar{P} = P_w + \frac{12 \mu Q}{\pi \bar{W}^3} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \text{Ln } f_{rw} \right) - P_w - \frac{12 \mu Q}{\pi \bar{W}^3} \text{Ln } f_{rw}$$

$$\Delta \bar{P} = \frac{3 \mu Q}{\pi \bar{W}^3} \dots \dots \dots (3.46)$$

Substituindo (3.46) em (3.44) :

$$W_w = \frac{4 (1-\nu) R}{G} \left(\frac{3 \mu Q}{\pi \bar{W}^3} \right)$$

onde, $\bar{W} = \frac{2}{3} W_w$ (Apêndice 3). Logo :

$$W_w = 1,42 \left(\frac{(1-\nu) \mu Q R}{G} \right)^{1/4} \dots \dots \dots (3.47)$$

Substituindo-se o valor de \bar{W} na equação (3.35), pode-se
determinar a distribuição de pressão na fratura :

$$dP = - 2,25 \left(\frac{\mu Q G^3}{R^3 (1-\nu)^3} \right)^{1/4} \frac{df_r}{f_r}$$

$$P = - 2,25 \left(\frac{\mu Q G^3}{R^3 (1-\nu)^3} \right)^{1/4} \text{Ln } f_r + \text{cte}$$

fazendo $P = 0$ em $f_r = 1$:

$$P = - 2,25 \left(\frac{\mu Q G^3}{R^3 (1-\nu)^3} \right)^{1/4} \cdot \text{Ln } f_r \dots \dots \dots (3.48)$$

fazendo $P = P_w$ em $f_r = f_{rw}$:

$$P_w = - 2,25 \left(\frac{\mu Q G^3}{R^3 (1-\nu)^3} \right)^{1/4} \cdot \text{Ln } f_{rw} \dots \dots \dots (3.49)$$

Das equações (3.38) e (3.49), tem-se :

$$\frac{P}{P_w} = \frac{\text{Ln } f_r}{\text{Ln } \frac{f_r}{f_{rw}}} \dots\dots\dots (3.50)$$

A equação (3.50), que representa a distribuição de pressão numa fratura radial de acordo com o modelo PK, foi deduzida considerando a largura média da fratura, calculada em relação ao seu volume, igual a 2/3 da largura máxima. Essa premissa utilizada pelo modelo é, no entanto, duvidosa, uma vez que a largura média, nesse caso, deveria ser calculada com base na perda de carga equivalente, e não em relação ao volume. Desse modo, pela equação (3.35), pode-se escrever :

$$dP = - \frac{6 \mu Q}{\pi W^3} \cdot \frac{df_r}{f_r}$$

Integrando-se de f_{rw} a f_r , vem :

$$P - P_w = \frac{6 \mu Q}{\pi W^3} \cdot \text{Ln } \frac{f_{rw}}{f_r} \dots\dots\dots (3.51)$$

Por outro lado, se na equação (3.35) for utilizado o valor da largura local, ao invés da largura média, teremos :

$$W(f_r) = W_w \cdot \sqrt{1 - f_r^2}, \text{ obtida a partir da equação (3.43)}$$

$$dP = - \frac{6 \mu Q}{\pi W_w^3} \cdot \frac{df_r}{f_r (1 - f_r^2)^{3/2}}$$

Integrando novamente de f_{rw} a f_r , vem :

$$\int_{P_w}^P dP = - \frac{6 \mu Q}{\pi W_w^3} \int_{f_{rw}}^{f_r} \frac{df_r}{f_r (1 - f_r^2)^{3/2}}$$

$$P - P_w = - \frac{6 \mu Q}{\pi W_w^3} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - f_r^2}} - \text{Ln} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - f_r^2}}{f_r} \right) \right]_{f_{rw}}^{f_r}$$

$$P - P_w = \frac{6 \mu Q}{\pi W_w^3} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - f_{rw}^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - f_r^2}} + \text{Ln} \left(\frac{f_{rw} (1 + \sqrt{1 - f_r^2})}{f_r (1 + \sqrt{1 - f_{rw}^2})} \right) \right]$$

..... (3.52)

Nota-se que a equação (3.52) apresenta descontinuidade no ponto $f_r = 1$. Isto significa que a hipótese adotada pelo modelo de que a pressão na ponta de fratura é igual à tensão de confinamento não é compatível com a distribuição de pressão na fratura.

Igualando-se as equações (3.51) e (3.52), obtém-se a expressão para a largura média da fratura em relação à pressão, que é o valor mais correto a ser utilizado para os cálculos de distribuição de pressão na fratura :

$$\bar{W} = \left[\frac{W_w^3 \cdot \text{Ln} \left(\frac{f_{rw}}{f_r} \right)}{\frac{1}{\sqrt{1 - f_{rw}^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - f_r^2}} + \text{Ln} \left(\frac{f_{rw} (1 + \sqrt{1 - f_r^2})}{f_r (1 + \sqrt{1 - f_{rw}^2})} \right)} \right]^{1/3}$$

..... (3.53)

O volume da fratura pode ser calculado pela expressão :

$$V = \bar{W} \cdot \pi R^2 = \frac{2}{3} W_w \cdot \pi R^2$$

onde, $V = Q t$. Logo :

$$R = \left(\frac{3}{2 \pi} \frac{Q t}{W_w} \right)^{1/2} \dots \dots \dots (3.54)$$

Substituindo a equação (3.47) em (3.54) :

$$R = 0,62 \left(\frac{G Q^3}{(1-\nu)\mu} \right)^{1/9} t^{4/9} \dots\dots\dots (3.55)$$

Substituindo, agora, a equação (3.55) na equação (3.47) :

$$W_w = 1,26 \left[\left(\frac{1-\nu}{G} \right)^2 \mu^2 Q^3 \right]^{1/9} t^{1/9} \dots\dots\dots (3.56)$$

3.3.4 MODELO KGD - DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

Aplicando-se a condição de Barenblatt (equação 2.21) na equação (3.32), tem-se :

$$\int_{f_{rw}}^1 \frac{f_r \cdot P(f_r) \cdot df_r}{(1 - f_r^2)} = \sigma_c \dots\dots\dots (3.57)$$

A pressão no interior da fratura será igual àquela calculada pela equação (3.36), exceto numa pequena região próxima à ponta da fratura, que não é molhada pelo fluido fraturante, onde a pressão será nula. Isso ocorre devido ao fechamento suave na ponta da fratura. Pode-se, então, definir a distribuição de pressão na fratura :

$$P(f_r) = P_w - \frac{6 \mu Q}{\Pi W^3} \ln \left(\frac{f_r}{f_{rw}} \right) , \quad f_{rw} \leq f_r \leq f_{ro}$$

$$P(f_r) = 0 , \quad f_{ro} \leq f_r \leq 1$$

Utilizando essa distribuição de pressão na equação (3.57), vem :

$$\int_{f_{rw}}^{f_{ro}} \frac{f_r P(f_r) df_r}{(1 - f_r^2)^{1/2}} = \sigma_c$$

Resolvendo a integral, teremos :

$$\int_{f_{rw}}^{f_{ro}} \frac{f_r P(f_r) df_r}{(1 - f_r^2)^{1/2}} = \frac{(P_w + \phi \ln f_{rw} - \phi \ln f_r) f_r df_r}{(1 - f_r^2)^{1/2}}$$

onde $\phi = \frac{6 \mu Q}{\Pi W^3}$

$$\int_{f_{rw}}^{f_{ro}} \frac{f_r P(f_r) df_r}{(1 - f_r^2)^{1/2}} = \int_{f_{rw}}^{f_{ro}} \frac{(P_w + \phi \ln f_{rw}) f_r df_r}{(1 - f_r^2)^{1/2}} + \int_{f_{rw}}^{f_{ro}} \frac{\phi \ln f_r f_r df_r}{(1 - f_r^2)^{1/2}}$$

Resolvendo separadamente as integrais do segundo membro :

I) $\int_{f_{rw}}^{f_{ro}} \frac{(P_w + \phi \ln f_{rw}) f_r df_r}{(1 - f_r^2)^{1/2}}$

II) $\int_{f_{rw}}^{f_{ro}} \frac{\phi f_r \ln f_r df_r}{(1 - f_r^2)^{1/2}}$

Resolvendo I, tem-se :

$$\int_{f_{rw}}^{f_{ro}} \frac{(P_w + \phi \ln f_{rw}) f_r df_r}{(1 - f_r^2)^{1/2}} = (P_w + \phi \ln f_{rw}) \left[-\sqrt{1 - f_r^2} \right]_{f_{rw}}^{f_{ro}}$$

$$I = (P_w + \phi \ln f_{rw}) \left(\sqrt{1 - f_{rw}^2} - \sqrt{1 - f_{ro}^2} \right)$$

Resolvendo-se II, tem-se :

$$\int_{f_{rw}}^{f_{ro}} \frac{\phi f_r \ln f_r df_r}{(1 - f_r^2)^{1/2}} = \phi \left[-\ln f_r \sqrt{1 - f_r^2} + \sqrt{1 - f_r^2} + \right. \\ \left. - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - f_r^2}}{f_r} \right) \right]_{f_{rw}}^{f_{ro}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II} = \phi & \left[- \text{Ln } f_{r_0} \sqrt{1 - f_{r_0}^2} + \text{Ln } f_{r_w} \sqrt{1 - f_{r_w}^2} + \sqrt{1 - f_{r_0}^2} + \right. \\
 & \left. - \sqrt{1 - f_{r_w}^2} - \text{Ln} \left| \frac{1 + \sqrt{1 - f_{r_0}^2}}{f_{r_0}} \right| + \text{Ln} \left| \frac{1 + \sqrt{1 - f_{r_w}^2}}{f_{r_w}} \right| \right]
 \end{aligned}$$

$$\int_{f_{r_w}}^{f_{r_0}} \frac{f_r P(f_r) df_r}{(1 - f_r^2)^{1/2}} = \text{I} + \text{II} = \sigma_c$$

Fazendo : $f_{r_w} \ll 1$

$$\psi = \sqrt{1 - f_{r_0}^2} \ll 1 \quad (f_{r_0} \cong 1), \quad \text{tem-se :}$$

$$(1 - \psi) P_w = \sigma_c - \phi \text{Ln } f_{r_w} \dots \dots \dots (3.58)$$

Resolvendo-se, agora, a equação (3.32), utilizando as equações (3.36) e (3.58), pode-se escrever :

$$\begin{aligned}
 W(f_r, t) = & \frac{4(1-\nu)R}{\pi G} \left\{ (P_w + \phi) \int_{f_r}^1 \left(\frac{f_1^2 - f_{r_w}^2}{f_1^2 - f_r^2} \right)^{1/2} df_1 + \right. \\
 & - \left(P_w + \phi \cdot \text{Ln} \frac{f_{r_w}}{f_r} \right) \int_{f_{r_0}}^1 \left(\frac{f_1^2 - f_{r_0}^2}{f_1^2 - f_r^2} \right)^{1/2} df_1 + \\
 & + \phi \left[\int_{f_r}^1 \left(\frac{f_1^2 - f_r^2}{f_1^2 - f_{r_w}^2} \right)^{1/2} df_1 - \int \left(\frac{f_1^2 - f_r^2}{f_1^2 - f_{r_w}^2} \right)^{1/2} df_1 \right] + \\
 & \left. + \phi \sqrt{1 - f_r^2} \left[\text{Ln} \left(\frac{1 - \psi}{1 - (1 - f_{r_w}^2)^{1/2}} \left(\frac{f_{r_w}}{f_r} \right) \right) + \frac{\sigma_c}{\phi} \right] \right\} \\
 & \dots \dots \dots (3.59)
 \end{aligned}$$

No poço, tem-se $f_r = f_{rw} \ll 1$, logo :

$$W_w = \frac{4(1-\nu)R}{\pi G} \left[(1-\psi) \cdot \phi + \frac{\psi}{1-\psi} (\sigma_c + \phi \ln 2) \right] \dots (3.60)$$

Na equação (3.59), pode-se, ainda, fazer as seguintes simplificações :

i) Se $f_{rw} \rightarrow 0$, $f_1^2 - f_{rw}^2 \cong f_1^2$;

ii) Se $f_{ro} \rightarrow 1$, e $f_{ro} \leq f_1 \leq 1$, então $f_1 \rightarrow 1$. Logo :

$$\int_{f_{ro}}^1 \left(\frac{f_1^2 - f_{ro}^2}{f_1^2 - f_r^2} \right)^{1/2} df_1 = \int_{f_{ro}}^1 \left(\frac{f_1 - f_{ro}}{f_1 - f_r} \right)^{1/2} \left(\frac{1 + f_{ro}}{1 + f_r} \right)^{1/2} df_1$$

Substituindo a equação (3.54) e as aproximações (i) e (ii) na equação (3.59) e resolvendo as integrais, vem :

$$\begin{aligned}
 W = W_w & \left[\sqrt{1-f_r^2} - \sqrt{\frac{1-f_r}{1+f_r}} + \frac{f_{ro} - f_r}{\left[(1-f_{ro}) \cdot (1+f_r) \right]^{1/2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1-f_r} + \sqrt{1-f_{ro}}}{\sqrt{f_{ro} - f_r}} \right) \right] + \\
 & + \frac{4(1-\nu)R}{\pi G} \phi \left[\frac{\psi}{2} \sqrt{1-f_r^2} + (1-\psi) \sqrt{\frac{1-f_r}{1+f_r}} - f_r \arccos f_r + \right. \\
 & \left. - (f_{ro} - f_r) \left(\sqrt{\frac{1+f_r}{2}} + \frac{1-\psi}{\psi} \sqrt{\frac{2}{1+f_r}} \right) \ln \left(\frac{\sqrt{1-f_r} + \sqrt{1-f_{ro}}}{\sqrt{f_{ro} - f_r}} \right) \right] \\
 & \dots \dots \dots (3.61)
 \end{aligned}$$

Expandindo e simplificando os termos logarítmicos, para $f_r < f_{ro}$, pode-se escrever :

$$\left(f_{r0} - f_r \right) \cdot \text{Ln} \left(\frac{\sqrt{1-f_r} + \sqrt{1-f_{r0}}}{\sqrt{f_{r0} - f_r}} \right) \approx \psi \sqrt{\frac{1 - f_r}{2}} \dots \dots \dots (3.62)$$

Substituindo (3.62) em (3.61), tem-se :

$$W = W_w \sqrt{1-f_r^2} - \frac{4(1-\nu)R}{\pi G} \phi \cdot f_r \cdot \text{arc cos } f_r \dots \dots \dots (3.63)$$

A primeira vista, conclui-se que a fratura terá forma aproximadamente elíptica, onde o termo $\left[4(1-\nu)R/\pi G \right] \phi \cdot f_r \cdot \text{arc cos } f_r$ é uma parcela de correção da geometria para atender a condição de Barenblatt.

A Figura (3.6) mostra a distribuição de pressão na fratura, apresentada originalmente pelos autores do modelo (1), obtida através da integração da equação (3.35) utilizando o valor de W fornecido pela equação (3.61).

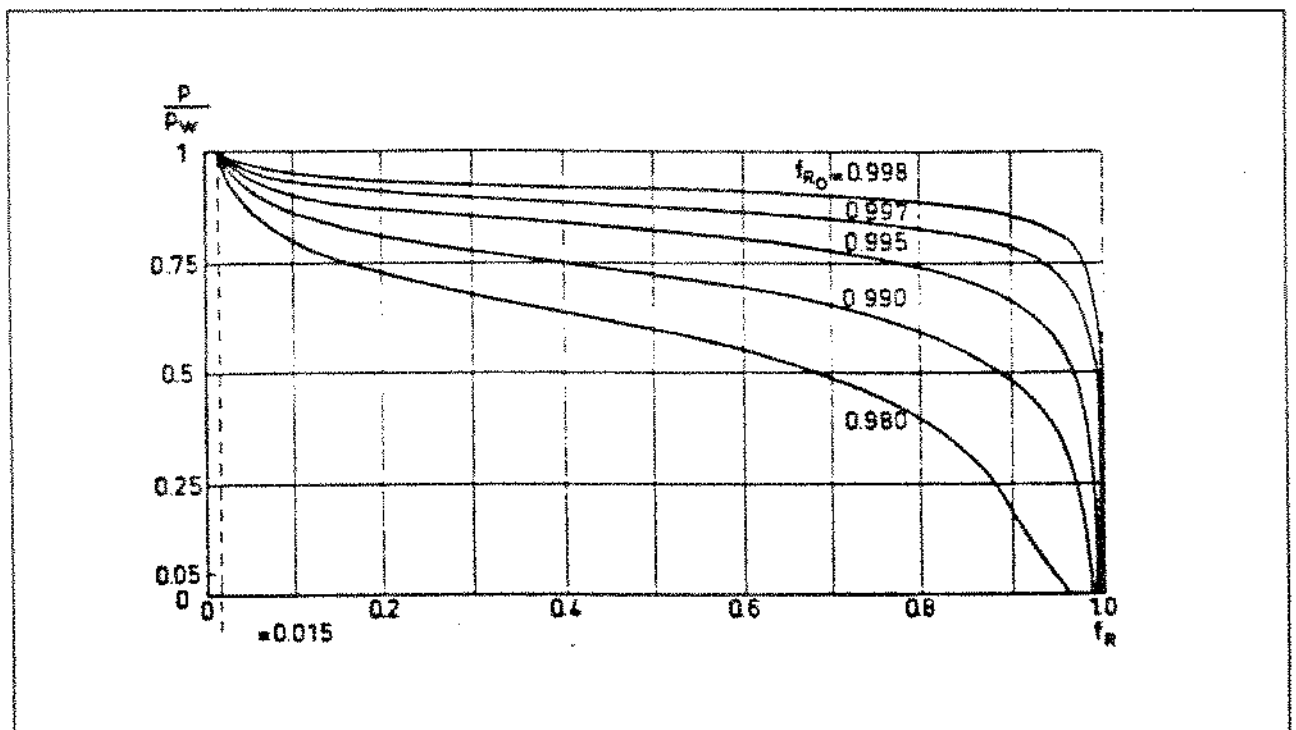


Figura 3.6 - Distribuição de pressão proposta por Geertsma e DeKlerk para uma fratura de geometria radial (1;2)

Devido à natureza implícita do sistema formado pelas equações de geometria e pressão do modelo, sua resolução analítica é extremamente difícil. Geertsma e DeKlerk, através de um método numérico, calcularam uma série de valores para os parâmetros de geometria e pressão de fratura e chegaram às seguintes equações :

$$W_w = 2.15 \left(\frac{(1-\nu) \mu Q R}{G} \right)^{1/4} \dots\dots\dots (3.64) ;$$

$$W(f_r) = W_w \sqrt{1 - f_r} \dots\dots\dots (3.65) ;$$

sugerindo uma geometria de parabolóide de revolução.

As equações (3.64) e (3.65) são, portanto, equações empíricas. O range para o qual essas equações são válidas é :

$$i) \quad 4,5 \leq \sigma_c^4 \cdot \left(\frac{R^3}{G^3 \mu Q} \right) \leq 32$$

ii) $0,005 \leq f_{rw} \leq 0,095$, que são os valores para os quais o método numérico foi empregado.

Similarmente ao caso do modelo KGD de propagação linear, o comprimento da região não atingida pelo fluido fraturante independe do tamanho da fratura :

$$1 - f_{ro} = \frac{2}{15} \frac{G}{R} \left(\frac{\mu Q}{\sigma_c^4} \right)$$

Conhecendo-se as equações de geometria de fratura pode-se, então, determinar uma distribuição de pressão mais correta, para a fratura. Aplicando-se as equações (3.64) e (3.65) na equação (3.35), tem-se :

$$\frac{dP}{df_r} = - \frac{6 \mu Q}{31,22 \left(\frac{(1-\nu) \mu Q R}{G} \right)^{3/4} (1 - f_r)^{3/2}} \frac{1}{f_r}$$

$$\int dP = - 0,192 \left[\frac{\mu Q G^3}{(1-\nu)^3 R^3} \right] \int \frac{df_r}{f_r (1 - f_r)^{3/2}}$$

Integrando de f_{rw} a f_{ro} , temos :

$$P \int_0^{P_w} = 0,192 \left[\frac{\mu Q G^3}{(1-\nu)^3 R^3} \right]^{1/4} \left[\frac{2}{\sqrt{1-f_r}} - \text{Ln} \left(\frac{1 + \sqrt{1-f_r}}{1 - \sqrt{1-f_r}} \right) \right]_{f_{rw}}^{f_{ro}}$$

$$P_w = 0,192 \left[\frac{\mu Q G^3}{(1-\nu)^3 R^3} \right]^{1/4} \left[\frac{2}{\sqrt{1-f_{ro}}} - \frac{2}{\sqrt{1-f_{rw}}} - \text{Ln} \left(\frac{1 + \sqrt{1-f_{ro}}}{1 - \sqrt{1-f_{ro}}} \right) + \right. \\ \left. + \text{Ln} \left(\frac{1 + \sqrt{1-f_{rw}}}{1 - \sqrt{1-f_{rw}}} \right) \right] \dots\dots\dots (3.66)$$

Integrando, agora, de f_r a f_{ro} , vem :

$$P = 0,192 \left[\frac{\mu Q G^3}{(1-\nu)^3 R^3} \right]^{1/4} \left[\frac{2}{\sqrt{1-f_{ro}}} - \frac{2}{\sqrt{1-f_r}} - \text{Ln} \left(\frac{1 + \sqrt{1-f_{ro}}}{1 - \sqrt{1-f_{ro}}} \right) + \right. \\ \left. + \text{Ln} \left(\frac{1 + \sqrt{1-f_r}}{1 - \sqrt{1-f_r}} \right) \right] \dots\dots\dots (3.67)$$

Dividindo-se a equação (3.67) pela equação (3.66), temos :

$$\frac{P}{P_w} = \frac{\frac{2}{\sqrt{1-f_{ro}}} - \frac{2}{\sqrt{1-f_r}} - \text{Ln} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{1-f_{ro}}}{1 - \sqrt{1-f_{ro}}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{1-f_r}}{1 + \sqrt{1-f_r}} \right) \right]}{\frac{2}{\sqrt{1-f_{ro}}} - \frac{2}{\sqrt{1-f_{rw}}} - \text{Ln} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{1-f_{ro}}}{1 - \sqrt{1-f_{ro}}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{1-f_{rw}}}{1 + \sqrt{1-f_{rw}}} \right) \right]} \dots\dots\dots (3.68)$$

A Figura (3.7) mostra a distribuição de pressão na fratura baseada na equação (3.68).

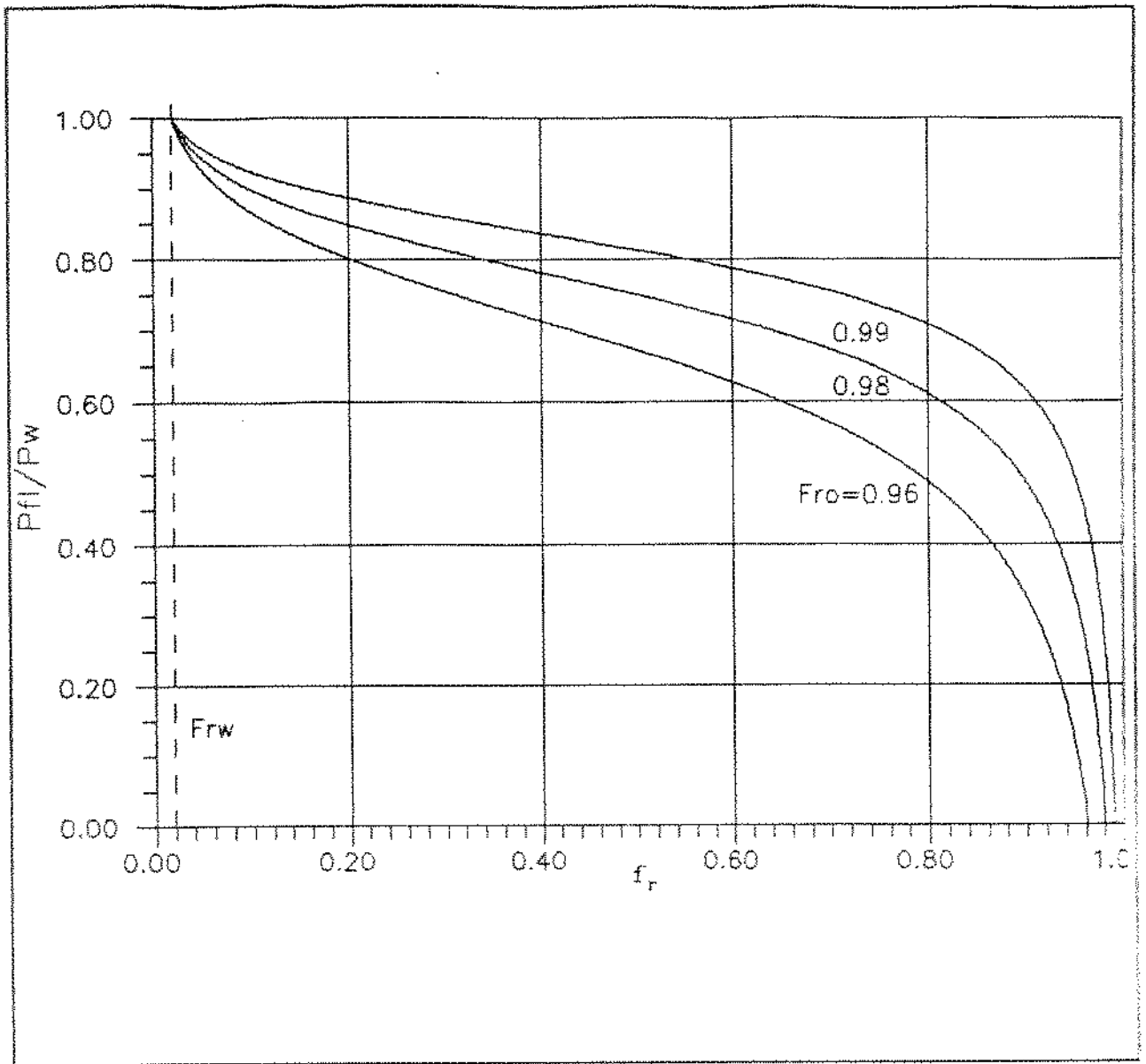


Figura 3.7 - Distribuição de pressão para o modelo KGD de propagação radial conforme a equação (3.68)

Da equação (3.58), pode-se escrever :

$$P_w = \frac{\sigma_c - \phi \text{Ln } f_{rw}}{1 - \psi}$$

Quando $f_{r0} \rightarrow 1$, $\psi \rightarrow 0$. Logo :

$$P_w \cong \sigma_c - \frac{6 \mu Q}{\pi \bar{W}^3} \text{Ln } f_{rw} \dots\dots\dots (3.69)$$

Onde $\bar{W} = \frac{8}{15} W_w$ (Anexo 4) $\dots\dots\dots (3.70)$

Substituindo as equações (3.70) e (3.64) na equação (3.69), vem :

$$P_w = \sigma_c - 0,59 \cdot \left[\left(\frac{G}{1-\nu} \right) \frac{W_w}{R} \right] \text{Ln } f_{rw} \dots\dots (3.71)$$

A equação (3.71) determina o comportamento da pressão de fundo em função dos parâmetros de geometria da fratura.

Para a introdução da variável tempo, o volume pode ser calculado, desprezando-se o valor de r_w , pela seguinte equação diferencial :

$$dV = \pi r^2 \cdot dW \dots\dots\dots (3.72)$$

Da equação (3.65), temos :

$$W = W_w \sqrt{1 - f_r} \text{ , portanto :}$$

$$f_r = \left[1 - \left(\frac{W}{W_w} \right)^2 \right] \text{ , ou seja :}$$

$$r = R \cdot \left[1 - \left(\frac{W}{W_w} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (3.73)$$

Substituindo (3.73) em (3.72), vem :

$$dV = \pi R^2 \cdot \left(1 - \frac{2W^2}{W_w^2} + \frac{W^4}{W_w^4} \right) dW$$

$$V = \pi R^2 \int_0^{W_w} \left(1 - \frac{2W^2}{W_w^2} + \frac{W^4}{W_w^4} \right) dW$$

$$V = \frac{8 \pi R^2 W_w}{15} = Q \cdot t$$

Logo :

$$R = \sqrt[4]{\frac{15 Q t}{8 \pi W_w}} \dots\dots\dots (3.74)$$

Substituindo a equação (3.64) na equação (3.74), teremos :

$$R = 0,57 \left[\frac{Q^3 G}{(1-\nu)\mu} \right]^{1/9} \cdot t^{4/9} \dots\dots\dots (3.75)$$

Substituindo, agora, a equação (3.75) na equação (3.64) :

$$W_w = 1,87 \cdot \left[\left(\frac{1-\nu}{G} \right)^2 \cdot \mu^2 \cdot Q^3 \right]^{1/9} \cdot t^{1/9} \dots\dots\dots (3.76)$$

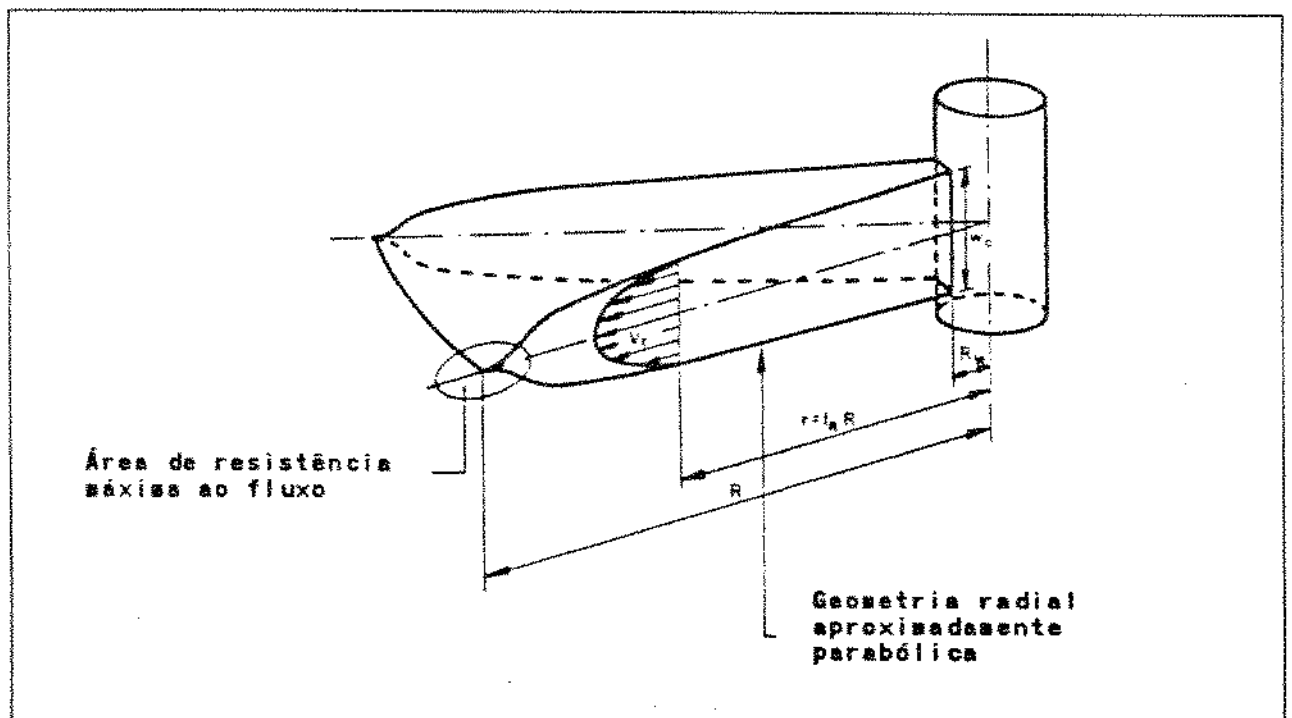


Figura 3.8 - Esquema da geometria de uma fratura horizontal, segundo Geertsma & DeKlerk (1)

3.4 EFEITO DA FILTRAÇÃO NA GEOMETRIA DA FRATURA

3.4.1 SOLUÇÃO DE CARTER

A solução básica do problema do efeito da perda de fluido por filtração nas faces da fratura foi proposta por Carter (1,2,8,9), em 1957, através de um modelo simples de geometria de fratura, onde a largura é constante ao longo do comprimento e da altura e não varia com o tempo de propagação. O modelo não leva em conta o comportamento mecânico da rocha, assumindo, de antemão, uma geometria conhecida.

As hipóteses básicas do modelo de Carter são :

- a altura da fratura é constante com o tempo e com o comprimento;
- a largura da fratura é constante com o tempo, ao longo da altura e do comprimento;
- a vazão de injeção é constante ;
- o fluido fraturante é incompressível ;

A solução de Carter consiste em fazer um balanço de massa na fratura, a fim de determinar a variação da vazão ao longo da direção de propagação e seu efeito na geometria que, nessa solução, reflete-se apenas no cálculo do comprimento. A largura será calculada com base no comprimento e no volume injetado, uma vez que a geometria é conhecida.

3.4.2 BALANÇO DE MASSA NA FRATURA

Pela equação (2.35), podemos escrever :

$$\frac{dV}{dt} = q - q_l - v_{sp} \frac{dA}{dt} \dots\dots\dots (3.77)$$

onde, por definição :

$$q_l = \int_0^A v_l dA = \int_0^A v_l \frac{dA}{d\tau} d\tau = c \int_0^t \frac{dA}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \dots\dots (3.78)$$

$$\text{sendo } A = 2.H.L \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2.H. \frac{dL}{dt} \dots\dots\dots (3.79)$$

$$V = H.W.L \Rightarrow \frac{dV}{dt} = H.W. \frac{dL}{dt} \dots\dots\dots (3.80)$$

Substituindo (3.80), (3.79) e (3.78) em (3.77), tem-se :

$$H.W. \frac{dL}{dt} = q - c \int_0^t \frac{dA}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - v_{sp} \frac{dA}{dt}$$

$$H.W. \frac{dL}{dt} = q - 2.H.C \int_0^t \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - 2.H.v_{sp} \cdot \frac{dL}{dt}$$

$$\left(W + 2.V_{sp} \right) \frac{dL}{dt} = \frac{q}{H} - 2.C. \int_0^t \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{q}{\left(W + 2V_{sp} \right).H} - \frac{2 C}{\left(W + 2V_{sp} \right)} \cdot \int_0^t \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \dots\dots (3.81)$$

A integral do 2º. membro da equação (3.81) é uma integral do tipo $\int_0^t F(\tau).G(t-\tau) d\tau = F * G$, e é dita integral de convolução, apresentando a seguinte propriedade :

$$\mathcal{L} (F * G) = \mathcal{L} (F) \cdot \mathcal{L} (G)$$

Aplicando Transformadas de Laplace à equação (3.81), teremos, então:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dL}{dt} \right\} = \frac{q}{\left(W + 2V_{sp} \right)} \cdot \frac{1}{s} - \frac{2C}{\left(W + 2V_{sp} \right)} \left[\mathcal{L} \left\{ \frac{dL}{dt} \right\} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \right\} \right]$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dL}{dt} \right\} \left(1 + \frac{2 C}{\left(W + 2V_{sp} \right)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \right) = \frac{q}{\left(W + 2V_{sp} \right) H} \frac{1}{s}$$

$$g \left\{ \frac{dL}{dt} \right\} = \frac{\frac{q}{(W + 2V_{sp}) \cdot H} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{2C}{(W + 2V_{sp})} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}}$$

Dessa forma, podemos escrever :

$$\frac{dL}{dt} = g^{-1} \left\{ \frac{\frac{q}{(W + 2V_{sp}) \cdot H}}{\sqrt{s} \left[\sqrt{s} + \frac{2C}{(W + 2V_{sp})} \sqrt{\pi} \right]} \right\}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{q}{(W + 2V_{sp})} \cdot e^{\alpha^2 \cdot t} \operatorname{erfc} \alpha$$

$$\text{onde } \alpha = \frac{2C \sqrt{\pi}}{(W + 2V_{sp})} \sqrt{t} \dots\dots\dots (3.82)$$

$\operatorname{erfc} \alpha$ é a função erro complementar, definida da seguinte maneira :

$$\operatorname{erfc} (\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$L (t) = \frac{q}{(W + 2V_{sp}) \cdot H} \int e^{\alpha^2 \cdot t} \operatorname{erfc} \alpha dt \dots\dots (3.83)$$

Substituindo o valor de α , resolvendo a equação (3.83) através de integração por partes e aplicando a condição de contorno , $L = 0$ em $t = 0$, teremos :

$$L(t) = \frac{q (W + 2V_{sp})}{4 \pi H C^2} \left(e^{\alpha^2} \cdot \operatorname{erfc} \alpha + \frac{2 \alpha}{\sqrt{\pi}} - 1 \right) \dots (3.84)$$

Fazendo-se $W + 2V_{sp} = W_{ap}$, ou seja, considerando esse valor como uma largura aparente da fratura, a equação (3.84) pode ser reescrita da seguinte forma :

$$L(t) = \frac{q t}{H W_{ap}} \left[\frac{e^{\alpha^2} \cdot \operatorname{erfc} \alpha + \frac{2 \alpha}{\sqrt{\pi}} - 1}{\alpha^2} \right] \dots (3.85)$$

onde,
$$\frac{e^{\alpha^2} \cdot \operatorname{erfc} \alpha + \frac{2 \alpha}{\sqrt{\pi}} - 1}{\alpha^2} = \eta \dots (3.86)$$

então,
$$L(t) = \frac{q t}{H W_{ap}} \cdot \eta \dots (3.87)$$

O parâmetro η é dito eficiência volumétrica do fluido.

Substituindo, agora, a equação (3.87) na equação (3.80), vem :

$$V = H \cdot W \cdot \frac{q t}{H W_{ap}} \cdot \eta = \frac{W}{W_{ap}} \cdot q \cdot t \cdot \eta \dots (3.88)$$

No caso particular $V_{sp} = 0$, $W_{ap} = W$, a equação (3.88) fica :

$$V = q \cdot t \cdot \eta \dots (3.89)$$

Nesse caso, a eficiência volumétrica representa a razão entre o volume da fratura e o volume de fluido fraturante injetado. Como a eficiência volumétrica não leva em conta a perda inicial instantânea ("spurt loss"), o fator W/W_{ap} na equação (3.88) é um termo de correção para o volume da fratura quando $V_{sp} \neq 0$.

Devido à grande variedade de fluidos fraturantes utilizados na prática, torna-se interessante estudar a geometria da fratura para dois casos extremos de filtração.

i) Baixos valores de α

Ocorre para pequenos coeficientes de filtração (C) ou para pequenos tempos de tratamento (t). Aplicando a regra de L'Hopital na equação (3.86), teremos, quando α tender para zero :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \eta = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha - e^{\alpha^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_0(\alpha) e^{-\alpha^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}}{2\alpha}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \eta = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha - \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_0(\alpha) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}}{2\alpha}$$

onde $H_0(\alpha) = 1$ é o Polinômio de Hermite de ordem zero. Logo :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \eta = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{\alpha^2} \cdot \operatorname{erfc} \alpha = 1$$

Então, para pequenos valores de α , a eficiência volumétrica tende para 1, o que representa um modelo sem filtração.

Neste caso, assumindo $V_{sp} = 0$, teremos $W_{ap} = W$.

A equação (3.87), então, fica :

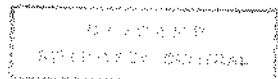
$$L(t) = \frac{q \cdot t}{W \cdot H} \dots \dots \dots (3.90)$$

ii) Altos valores de α

Ocorre para grandes valores do coeficiente de filtração (C) ou para grandes tempos de tratamento. Nesse caso, tem-se :

$$-1 + e^{\alpha^2} \cdot \operatorname{erfc} \alpha \ll \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{Logo : } \eta \rightarrow \frac{2}{\alpha \sqrt{\pi}} \dots \dots \dots (3.91)$$



A equação (3.87) ficará, então :

$$L(t) = \frac{q \sqrt{t}}{\pi C H} \dots\dots\dots (3.92)$$

3.4.3 APLICAÇÃO AO MODELO PK DE PROPAGAÇÃO LINEAR

A aplicação da solução de Carter ao modelo PK foi feita por Nordgren, utilizando as equações básicas do modelo sem filtração.

Como o modelo de Carter assume uma fratura de largura constante, para que a solução seja aplicada ao modelo de Perkins & Kern é necessário utilizar o valor médio da largura da fratura.

Para o modelo PK de propagação linear a largura média da fratura é calculada pela seguinte expressão (Anexo 1):

$$\bar{W} = \frac{\pi}{5} W_w$$

Logo, $W_{sp} = \frac{\pi}{5} W_w + 2.V_{sp}$

$$\alpha = \frac{2.C.\sqrt{\pi}}{W_{ap}} \sqrt{t} = \frac{10.C.\sqrt{\pi}}{\pi + 10 \frac{V_{sp}}{W_w}} \sqrt{t} \dots\dots\dots (3.93)$$

A equação (3.87) fica da seguinte forma :

$$L(t) = \frac{5 q t}{H \left(\pi W_w + 10 V_{sp} \right)} \cdot \eta \dots\dots\dots (3.94)$$

i) No caso de $\eta \rightarrow 1$, teremos, assumindo $V_{sp} = 0$ na equação (3.94):

$$L(t) = \frac{5 q t}{\pi H W_w} \dots\dots\dots (3.95)$$

Substituindo a equação (3.95) na equação (3.6), temos :

$$W_w = 2,64 \left[\frac{(1-\nu) \mu q^2}{G H} \right]^{1/5} t^{1/5} \dots\dots\dots (3.96)$$

Substituindo, agora, a equação (3.96) na equação (3.95) :

$$L(t) = 0,6 \left[\frac{q G^3}{(1-\nu) \mu H^4} \right]^{1/5} t^{4/5} \dots\dots (3.97)$$

Observa-se que as equações (3.96) e (3.97) coincidem com as equações (3.11) e (3.10), respectivamente, que foram deduzidas para o modelo PK sem filtração.

ii) No caso de α assumir grandes valores, ou seja, baixa eficiência volumétrica, teremos, substituindo (3.91) em (3.94) :

$$L(t) = \frac{5 q t}{H (\pi \cdot W_w + 10 \cdot V_{sp})} \cdot \frac{2}{\alpha \sqrt{\pi}} \dots\dots (3.98)$$

Substituindo (3.93) em (3.98), vem :

$$L(t) = \frac{q \sqrt{t}}{\pi C H} \dots\dots\dots (3.99)$$

Substituindo, agora, a equação (3.99) na equação (3.6), temos :

$$W_w(t) = 2,25 \left[\left(\frac{1-\nu}{G} \right) \frac{\mu q^2}{C \cdot H} \right]^{1/4} t^{1/8} \dots\dots\dots (3.100)$$

A equação (3.99) coincide com o comprimento de fratura do modelo de Carter na equação (3.92).

3.4.4 APLICAÇÃO AO MODELO KGD DE PROPAGAÇÃO LINEAR

Para o modelo KGD de propagação linear a abertura média da fratura é calculada pela seguinte expressão (Anexo 2) :

$$\bar{W} = \frac{\pi}{4} \cdot W_w, \text{ Logo : } W_{ap} = \frac{\pi}{4} \cdot W_w + 2 \cdot V_{sp}$$

$$\alpha = \frac{8 \cdot C \cdot \sqrt{\pi}}{\pi \cdot W_w + 8 \cdot V_{sp}} \sqrt{t} \dots\dots\dots (3.101)$$

A equação (3.87) ficará da seguinte forma :

$$L(t) = \frac{4 \cdot q \cdot t}{H \left(\pi \cdot W_w + 8 \cdot V_{sp} \right)} \cdot \eta \dots\dots\dots (3.102)$$

i) No caso particular de ausência de filtração, ou seja, $\eta \rightarrow 1$, teremos, assumindo $V_{sp} = 0$ na equação (3.102) :

$$L(t) = \frac{4 \cdot q \cdot t}{H \pi W_w} \dots\dots\dots (3.103)$$

Substituindo a equação (3.103) na equação (3.27), vem :

$$W_w(t) = 1,87 \left[\frac{(1-\nu) \mu q^3}{G H^3} \right]^{1/6} t^{1/3} \dots\dots\dots (3.104)$$

Substituindo, agora, a equação (3.104) na equação (3.103), temos :

$$L(t) = 0,68 \left[\frac{q^3 G}{H^3 (1-\nu) \mu} \right]^{1/6} \cdot t^{2/3} \dots\dots\dots (3.105)$$

As equações (3.104) e (3.105), logicamente, coincidem com as equações (3.31) e (3.30), deduzidas para o modelo KGD sem filtração.

ii) No caso de alta filtração, ou seja, baixa eficiência volumétrica, teremos, substituindo a equação (3.91) em (3.102) :

$$L(t) = \frac{4 \cdot q \cdot t}{H \left(\pi \cdot W_w + 8 \cdot V_{sp} \right)} \cdot \frac{2}{\alpha \sqrt{\pi}} \dots\dots\dots (3.106)$$

Substituindo a equação (3.101) na equação (3.106), vem :

$$L(t) = \frac{q \cdot \sqrt{t}}{\pi C H} \dots\dots\dots (3.107)$$

Substituindo a equação (3.107) na equação (3.27), temos :

$$W_w(t) = 1,28 \left[\left(\frac{1 - \nu}{G} \right) \frac{\mu q^3}{C^2 \cdot H^3} \right]^{1/4} \cdot t^{1/4} \dots\dots (3.108)$$

3.5 ADAPTAÇÃO DA SOLUÇÃO DE CARTER AOS MODELOS RADIAIS

3.5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Adaptaremos a solução de Carter aos modelos de propagação radial, a fim de conhecer a influência da filtração na geometria de tais modelos.

A exemplo da solução para propagação linear, será utilizado um modelo de geometria simples, pré-estabelecida sem considerar o comportamento mecânico da rocha, com largura constante ao longo do raio da fratura e constante com o tempo.

As hipóteses básicas do modelo são, portanto :

- a fratura se propaga com a mesma velocidade em todas as direções, o que é uma consequência da isotropia da rocha;
- a largura da fratura é constante com o tempo e ao longo do seu raio;
- a vazão de injeção é constante ;
- o fluido fraturante é incompressível.

3.5.2 BALANÇO DE MASSA NA FRATURA

Para um modelo radial, pode-se descrever a área de filtração e o volume da fratura através das seguintes equações :

$$A = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \Rightarrow \frac{dA}{d\tau} = 4 \cdot \pi \cdot R \frac{dR}{dt} \dots\dots (3.109)$$

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot W \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot W \cdot R \frac{dR}{dt} \dots\dots (3.110)$$

Substituindo as equações (3.109) e (3.110) nas equações (3.78) e (3.77), teremos :

$$2 \cdot \pi \cdot W \cdot R \frac{dR}{dt} = Q - C \int_0^t 4 \cdot \pi \cdot R \frac{dR}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - 4 \cdot \pi \cdot V_{sp} \cdot R \frac{dR}{dt}$$

$$\left(2 \cdot \pi \cdot R \cdot W + 4 \cdot \pi \cdot V_{sp} \cdot R \right) \frac{dR}{dt} = Q - 4 \cdot \pi \cdot C \int_0^t R \frac{dR}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$R \frac{dR}{dt} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot (W + 2 \cdot V_{sp})} - \frac{2 \cdot C}{(W + 2 \cdot V_{sp})} \int_0^t R \frac{dR}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

..... (3.111)

Onde a integral do 2.º membro da equação (3.111) é uma integral de convolução. Aplicando transformadas de Laplace, teremos :

$$\mathcal{L} \left\{ R \frac{dR}{dt} \right\} \left(1 + \frac{2 \cdot C}{W + 2 \cdot V_{sp}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \right) = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot (W + 2 \cdot V_{sp})} \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L} \left\{ R \frac{dR}{dt} \right\} = \frac{\frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot (W + 2 \cdot V_{sp}) \cdot s}}{\frac{\sqrt{s} \cdot (W + 2 \cdot V_{sp}) + 2 \cdot C \cdot \sqrt{\pi}}{(W + 2 \cdot V_{sp}) \cdot \sqrt{s}}}$$

$$\mathcal{L} \left\{ R \frac{dR}{dt} \right\} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot (W + 2 \cdot V_{sp}) \cdot \sqrt{s} \cdot \left(\sqrt{s} + \frac{2 \cdot C \cdot \sqrt{\pi}}{(W + 2 \cdot V_{sp})} \right)}$$

$$R \frac{dR}{dt} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot (W + 2 \cdot V_{sp})} e^{\alpha_r^2 \cdot t} \cdot \operatorname{erfc} \alpha_r$$

$$\text{onde } \alpha_r = \frac{2 \cdot C \cdot \sqrt{\pi}}{(W + 2 \cdot V_{sp})} \cdot \sqrt{t}$$

$$R \cdot dR = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot (W + 2 \cdot V_{sp})} e^{\alpha_r^2 \cdot t} \cdot \operatorname{erfc} \alpha_r \cdot dt \dots\dots (3.112)$$

Resolvendo-se a equação (3.110) através de integração por partes e aplicando a condição inicial $R = 0$ em $t = 0$, temos :

$$\frac{R^2}{2} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot (W + 2 \cdot V_{sp})} \left(\frac{W + 2 \cdot V_{sp}}{2 \cdot C \cdot \sqrt{\pi}} \right)^2 \left(e^{\alpha_r^2} \operatorname{erfc} \alpha_r + \frac{2 \cdot \alpha_r}{\sqrt{\pi}} - 1 \right)$$

Utilizando a definição de η dada pela equação (3.86) e substituindo $W + 2 \cdot V_{sp}$ por W_{ap} , podemos escrever :

$$R = \sqrt{\frac{Q \cdot t}{\pi \cdot W_{ap}}} \eta \dots\dots\dots (3.113)$$

Novamente, é interessante fazer uma análise do comportamento do raio da fratura nos dois casos extremos de filtração :

i) Pequenos valores de α

Nesse caso, como já visto na solução para propagação linear, teremos $\eta \rightarrow 1$, o que significa ausência de filtração. Assumindo $V_{sp} = 0$, a equação (3.113) ficará :

$$R = \sqrt{\frac{Q \cdot t}{\pi \cdot W}} \dots\dots\dots (3.114)$$

ii) Grandes valores de α

Neste caso, como visto na equação (3.91), $\eta \rightarrow \frac{2}{\alpha_r \cdot \sqrt{\pi}}$.

Então a equação (3.113) fica :

$$R = \sqrt{\frac{Q \cdot t}{\pi \cdot \bar{W}_{sp}} \frac{2}{\alpha_r \cdot \sqrt{\pi}}} \dots \dots \dots (3.115)$$

Substituindo o valor de α_r na equação (3.115), teremos :

$$R = \frac{1}{\pi} \left(\frac{Q^2 \cdot t}{C^2} \right)^{1/4} \dots \dots \dots (3.116)$$

3.5.3 APLICAÇÃO AO MODELO PK DE PROPAGAÇÃO RADIAL

Para o modelo PK de propagação radial, a abertura média é dada pela seguinte expressão (Anexo 3) :

$$\bar{W} = \frac{2}{3} W_w$$

$$\text{logo, } W_{sp} = \frac{2}{3} W_w + 2 \cdot V_{sp}$$

$$\alpha_r = \frac{6 \cdot C \cdot \sqrt{\pi}}{2 \cdot W_w + 6 \cdot V_{sp}} \dots \dots \dots (3.117)$$

A equação (3.113) pode, então, ser reescrita da seguinte forma :

$$R = \sqrt{\frac{3 \cdot Q \cdot t}{\pi (2 \cdot W_w + 6 \cdot V_{sp})} \eta} \dots \dots \dots (3.118)$$

i) No caso de $\eta \rightarrow 1$, teremos, assumindo $V_{sp} = 0$ na equação (3.118):

$$R = \sqrt{\frac{3 \cdot Q \cdot t}{2 \cdot \pi \cdot W_w}} \dots \dots \dots (3.119)$$

Substituindo a equação (3.47) na equação (3.119), vem :

$$R = 0,62 \left(\frac{G \cdot Q^3}{(1-\nu)\mu} \right)^{1/9} \cdot t^{4/9} \dots\dots\dots (3.120)$$

Substituindo, agora, a equação (3.120) na equação (3.47), temos :

$$W_w = 1,26 \left[\left(\frac{1-\nu}{G} \right)^2 \mu^2 \cdot Q^3 \right]^{1/9} \cdot t^{1/9} \dots\dots\dots (3.121)$$

ii) Quando α assume grandes valores, ou seja, o fluido apresenta baixa eficiência volumétrica, temos, substituindo a equação (3.91) na equação (3.118) :

$$R = \sqrt[3]{ \frac{3 \cdot Q \cdot t}{\pi \cdot (2 \cdot W_w + 6 \cdot V_{sp})} \cdot \frac{2}{\alpha_r \cdot \sqrt{\pi}} } \dots\dots\dots (3.122)$$

Substituindo a equação (3.117) na equação (3.122), temos :

$$R = \frac{1}{\pi} \left(\frac{Q^2 \cdot t}{C^2} \right)^{1/4} \dots\dots\dots (3.123)$$

Substituindo a equação (3.123) na equação (3.47), temos :

$$W_w(t) = 1,07 \left[\left(\frac{1-\nu}{G} \right)^4 \frac{\mu^4 \cdot Q^6}{C^2} \right]^{1/16} \cdot t^{1/16} \dots\dots\dots (3.124)$$

3.5.4 APLICAÇÃO AO MODELO KGD DE PROPAGAÇÃO RADIAL

Para o modelo KGD de propagação radial, a largura média é calculada pela seguinte expressão (Anexo 4) :

$$\bar{W} = \frac{8}{15} W_w$$

Então, podemos escrever :

Então, podemos escrever :

$$W_{sp} = \frac{8}{15} W_w + 2.V_{sp}$$

$$\alpha_r = \frac{30.C.\sqrt{\pi}}{8.W_w + 30.V_{sp}} \sqrt{t} \dots\dots\dots (3.125)$$

A equação (3.113) pode, então, ser reescrita da seguinte forma :

$$R = \sqrt{\frac{15.Q.t}{\pi.(8.W_w + 30.V_{sp})}} \eta \dots\dots\dots (3.126)$$

i) No caso de ausência de filtração ($\eta \rightarrow 1$), teremos, assumindo $V_{sp} = 0$ na equação (3.126) :

$$R = \sqrt{\frac{15.Q.t}{8.\pi.W_w}} \dots\dots\dots (3.127)$$

Substituindo a equação (3.64) na equação (3.127), temos :

$$R(t) = 0,57 \cdot \left[\left(\frac{G}{1-\nu} \right) \frac{Q^3}{\mu} \right]^{1/9} \cdot t^{4/9} \dots\dots\dots (3.128)$$

Substituindo, agora, a equação (3.128) na equação (3.64), teremos :

$$W_w(t) = 1,87 \cdot \left[\left(\frac{1-\nu}{G} \right)^2 \cdot \mu^2 \cdot Q^3 \right]^{1/9} \cdot t^{1/9} \dots\dots\dots (3.129)$$

ii) Quando o parâmetro α assumir grandes valores, ou seja, a eficiência volumétrica for baixa, teremos, substituindo a equação (3.91) na equação (3.126) :

$$R(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{Q^2.t}{C^2} \right)^{1/4} \dots\dots\dots (3.130)$$

Substituindo a equação (3.130) na equação (3.64), tem-se :

$$W_w(t) = 1,61 \left[\left(\frac{1 - \nu}{G} \right)^2 \frac{\mu^2 Q^3}{C} \right]^{1/8} \cdot t^{1/16} \dots\dots\dots (3.131)$$

CAPÍTULO 4

INFLUÊNCIA DOS FLUIDOS DE POTÊNCIA NA GEOMETRIA DA FRATURA

4.1 EQUAÇÕES BÁSICAS

Os modelos clássicos de fratura estudados no capítulo anterior assumem como hipótese básica que o fluido fraturante é do tipo newtoniano, ou seja, tem comportamento reológico linear, sendo que a viscosidade absoluta é a constante de proporcionalidade entre a tensão cisalhante e a taxa de deformação.

Os fluidos de fraturamento utilizados na prática, entretanto, têm, na sua grande maioria, um comportamento reológico de acordo com o modelo de potência. Os fluidos que seguem este modelo reológico apresentam uma relação entre tensão cisalhante e taxa de deformação do tipo :

$$T = K' \left(- \frac{dv}{dr} \right)^{n'}$$

onde K' é dito índice de consistência do fluido e o parâmetro n' é chamado índice de comportamento.

O fluxo de um fluido newtoniano entre placas planas paralelas é descrito pela seguinte equação (10) :

$$\frac{dP}{dx} = - \frac{12 \mu \bar{v}}{W^2} \dots\dots\dots (4.1)$$

No caso de fluxo linear, temos :

$$\bar{v} = \frac{q}{W.H} \dots\dots\dots (4.2)$$

Substituindo (4.2) em (4.1), tem-se :

$$\frac{dP}{dx} = - \frac{12 \mu q}{H.W^3} \dots\dots\dots (4.3)$$

Para um fluido de potência, temos a seguinte equação para descrever o fluxo entre placas planas paralelas (3):

$$\frac{dP}{dx} = - \frac{2.K'.(4 + 2/n')^{n'}}{W^{n'+1}} \cdot \bar{v}^{n'} \dots\dots\dots (4.4)$$

Substituindo (4.2) em (4.4) :

$$\frac{dP}{dx} = - 2.K' \left(\frac{2n'+1}{n'} \right)^{n'} \cdot \left(\frac{2q}{H} \right)^{n'} \cdot \left(\frac{1}{W} \right)^{2n'+1} \dots\dots (4.5)$$

Igualando-se as equações (4.3) e (4.5), pode-se definir uma viscosidade aparente :

$$\mu_{ap} = K_a \left(\frac{6.Q}{H.W^2} \right)^{n'-1} \dots\dots\dots (4.6)$$

onde :

$$K_a = K' \left(\frac{2n'+1}{3n'} \right)^{n'} \dots\dots\dots (4.7)$$

A equação (4.6) também pode ser obtida utilizando-se as equações para fluxo em condutos elípticos.

No caso de fluxo radial, a equação (4.6) pode ser reescrita da seguinte forma (Anexo 5) :

$$\mu_{ap} = K_a \left(\frac{12.Q}{\pi.R.W^2} \right)^{n'-1} \dots\dots\dots (4.8)$$

4.2 APLICAÇÃO AO MODELO PK DE PROPAGAÇÃO LINEAR

O modelo PK de propagação linear, devido à simplicidade do seu tratamento matemático, pode ser resolvido analiticamente para o caso de fluidos de potência.

O fluxo de um fluido de potência em um conduto elíptico é

descrito pela equação (2.30).

Substituindo-se a equação (3.1) na equação (2.30), tem-se :

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial x} = - \frac{32}{3\pi} K_a \left(\frac{6 \cdot q}{H} \right)^{n'} \left[\frac{G}{(1-\nu) \cdot H} \right] \Delta P^{-2n'-1}$$

$$\int_0^{\Delta P_w} d\Delta P = - \frac{32}{3\pi} K_a \left(\frac{6 \cdot q}{H} \right)^{n'} \left[\frac{G}{(1-\nu) \cdot H} \right] \int_L^0 dx$$

$$\Delta P_w = \left[\frac{64}{3\pi} (n'+1) K_a \left(\frac{6 \cdot q}{H} \right)^{n'} L \right]^{\frac{1}{2n'+2}} \left[\left(\frac{G}{1-\nu} \right) \cdot \frac{1}{H} \right]^{\frac{2n'+1}{2n'+2}} \dots (4.9)$$

Substituindo a equação (4.9) na equação (3.1), temos :

$$W_w = \left[\frac{64}{3\pi} (n'+1) K_a \left(\frac{1-\nu}{G} \right) \cdot H \cdot L \right]^{\frac{1}{2n'+2}} \left(\frac{6 \cdot q}{H} \right)^{\frac{n'}{2n'+2}} \dots (4.10)$$

Analisando os casos extremos de filtração, teremos :

i) Ausência de filtração ($\eta \rightarrow 1$)

Neste caso, como já visto, o comprimento da fratura será dado pela equação (3.95):

$$L(t) = \frac{5 \cdot q \cdot t}{\pi \cdot H \cdot W_w}$$

Substituindo a equação (4.10) em (3.95), vem :

$$L(t) = \left(\frac{5}{6\pi} \right)^{\frac{2n'+2}{2n'+3}} \left[\frac{64}{3\pi} (n'+1) \cdot K_a \cdot \left(\frac{1-\nu}{G} \right) \cdot H \right]^{\frac{-1}{2n'+3}} \cdot \left(\frac{6q}{H} \right)^{\frac{n'+2}{2n'+3}} \cdot t^{\frac{2n'+2}{2n'+3}} \dots (4.11)$$

ii) Alta perda por filtração ($\eta \rightarrow 0$)

Nesse caso, conforme visto na equação (3.99) :

$$L(t) = \frac{q \sqrt{t}}{\pi \cdot C \cdot H}$$

ou seja, o comprimento da fratura independe da reologia do fluido quando a eficiência volumétrica é baixa.

4.3 APLICAÇÃO AO MODELO PK DE PROPAGAÇÃO RADIAL

No caso de propagação radial, usaremos a viscosidade aparente definida na equação (4.8). Como a viscosidade aparente é utilizada como um parâmetro de equivalência à viscosidade absoluta, é interessante que o seu valor seja constante para qualquer ponto da fratura, a fim de simplificar o desenvolvimento matemático do modelo. Portanto, substituiremos a largura local utilizada na equação (4.8) pela largura média da fratura.

Como já visto na dedução do modelo, no caso de um elipsóide a largura média é igual a 2/3 da largura máxima (Anexo 3).

A equação (4.8) pode ser reescrita :

$$\mu_{ap} = K_a \left(\frac{12 \cdot Q}{\pi \cdot R \cdot \bar{W}^2} \right)^{n'-1} \dots \dots \dots (4.12)$$

Substituindo (4.12) em (3.46) :

$$\Delta \bar{P} = \frac{3 \cdot K_a \cdot 6^{n'-1} \cdot Q^{n'}}{\pi \cdot \pi^{n'-1} \cdot R^{n'-1} \cdot \bar{W}^{2n'+1}} \dots \dots \dots (4.13)$$

Substituindo, agora, (4.13) em (3.44), temos :

$$\frac{3}{2} \bar{W} \cdot \bar{W}^{2n'+1} = \frac{4(1-\nu)R}{\pi \cdot G} \cdot \frac{3 \cdot K_a \cdot 6^{n'-1} \cdot Q^{n'}}{\pi \cdot \pi^{n'-1} \cdot R^{n'-1}}$$

Donde se conclui que :

$$W_w = \frac{3}{2} \left[\frac{2.K_a}{3.\pi} \left(\frac{1-\nu}{G} \right) \right]^{\frac{1}{2n'+2}} \cdot \left(\frac{12.Q}{\pi} \right)^{\frac{n}{2n'+2}} \cdot R^{\frac{2-n}{2n'+2}} \dots (4.14)$$

Analisando os casos particulares de filtração, temos :

i) Baixa filtração ($\eta \rightarrow 1$)

Da equação (3.119), temos :

$$R(t) = \sqrt{\frac{3.Q.t}{2.\pi.W_w}}$$

Substituindo (4.14) em (3.119), teremos :

$$R(t) = \left[\frac{K_a}{216.\pi} \left(\frac{1-\nu}{G} \right) \right]^{\frac{-1}{3n'+6}} \left(\frac{Q}{12.\pi} \right)^{\frac{n'+2}{3n'+6}} t^{\frac{2n'+2}{3n'+6}} \dots (4.15)$$

ii) Alta perda por filtração ($\eta \rightarrow 0$)

Neste caso, conforme a equação (3.123), teremos :

$$R(t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{Q}{C}} \cdot t^{1/4}$$

isto é, no caso de baixa eficiência volumétrica do fluido, o raio da fratura vai independer do modelo reológico.

4.4 APLICAÇÃO AO MODELO KGD DE PROPAGAÇÃO LINEAR

Como o modelo KGD apresenta equações empíricas, a solução analítica para fluidos de potência torna-se extremamente complicada. Usaremos, portanto, a viscosidade aparente dada pela equação (4.6), utilizando o valor da largura média da fratura, igual a $\pi/4$ da largura máxima (Anexo 2).

Substituindo a equação (4.6) na equação (3.27), tem-se

$$W_w = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{\frac{-n'+1}{n'+1}} \left[\frac{4,4 (1-\nu) L^2 K_a}{G} \right]^{\frac{1}{2(n'+1)}} \left(\frac{6.Q}{H} \right)^{\frac{n'}{2(n'+1)}} \dots\dots\dots (4.16)$$

Analisando os casos particulares de filtração, teremos :

i) Baixa filtração ($\eta \rightarrow 1$)

Da equação (3.103), temos, quando a eficiência volumétrica tende a 1 :

$$L(t) = \frac{4.Q.t}{\pi.H.W_w}$$

Substituindo a equação (4.16) na equação (3.103), vem :

$$L(t) = \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{n'+1}{n'+2}} \cdot \left(\frac{6.Q}{H} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1,67 \frac{(1-\nu)}{G} K_a \right]^{\frac{-1}{2(n'+2)}} \cdot t^{\frac{n'+1}{n'+2}} \dots\dots\dots (4.17)$$

ii) Alta perda por filtração ($\eta \rightarrow 0$)

Neste caso, como já visto no modelo PK, o comprimento da fratura vai independer do modelo reológico do fluido fraturante.

Da equação (3.107), temos :

$$L(t) = \frac{Q}{\pi.C.H} \cdot \sqrt{t}$$

4.5 APLICAÇÃO AO MODELO KGD DE PROPAGAÇÃO RADIAL

Neste caso, usaremos a largura média igual a 8/15 da largura máxima da fratura, que corresponde à geometria de um parabolóide (Anexo 4).

Sendo assim, substituindo a equação (4.8) na equação (3.64),

temos :

$$W_w = 1,87 \cdot \left[0,46 \cdot K_a \left(\frac{1-\nu}{G} \right) \right]^{\frac{1}{2n'+2}} \cdot \left(\frac{12Q}{\pi} \right)^{\frac{n'}{2n'+2}} \cdot R^{\frac{-n'+2}{2n'+2}}$$

..... (4.18)

Analisando os casos extremos de filtração, teremos :

i) Baixa filtração ($\eta \rightarrow 1$)

Pela equação (3.127), teremos :

$$R = \sqrt{\frac{15 \cdot Q \cdot t}{8 \cdot \pi \cdot W_w}}$$

Substituindo a equação (4.18) na equação (3.127), vem :

$$R(t) = \left[0,003 K_a \left(\frac{1-\nu}{G} \right) \right]^{\frac{-1}{3n'+6}} \cdot \left(\frac{Q}{12\pi} \right)^{\frac{n'+2}{3n'+6}} \cdot t^{\frac{2n'+2}{3n'+6}}$$

..... (4.19)

ii) Alta perda por filtração ($\eta \rightarrow 0$)

Neste caso, temos, pela equação (3.130) :

$$R(t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{Q}{C}} \cdot t^{1/4}$$

CAPÍTULO 5

CRESCIMENTO VERTICAL DA FRATURA DURANTE A PROPAGAÇÃO

5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os modelos de geometria de fratura atualmente utilizados na grande maioria dos simuladores de fraturamento têm sua origem nas teorias de fraturas por tração, de Griffith, depois estendidas para as fraturas hidráulicas, por Sneddon e Barenblatt.

Os modelos PK e KGD de propagação linear, que consideram a altura da fratura constante durante a sua propagação, são ditos modelos de geometria 2-D e, muitas vezes, representam boas aproximações da realidade, dependendo das tensões de confinamento e das propriedades mecânicas das formações adjacentes à zona fraturada.

Será feita, nesse capítulo, uma breve análise da influência das tensões de confinamento no crescimento da altura da uma fratura vertical, para que se possa estudar a limitação dos modelos de geometria 2-D em casos práticos.

5.2 CONTRASTE DE TENSÕES

Vamos considerar, neste estudo, um contraste de tensões tipo "step" entre a formação fraturada e as adjacentes, conforme a Figura 5.1.

O contraste adimensional de tensões ($\Delta\sigma_{CA}$) será definido pela seguinte expressão :

$$\Delta\sigma_{CA} = \frac{\sigma_{c2} - \sigma_{c1}}{P_w - \sigma_{c1}} \dots\dots\dots (5.1)$$

Onde P_w é a pressão de fundo durante a propagação da fratura e a fratura é supostamente vertical.

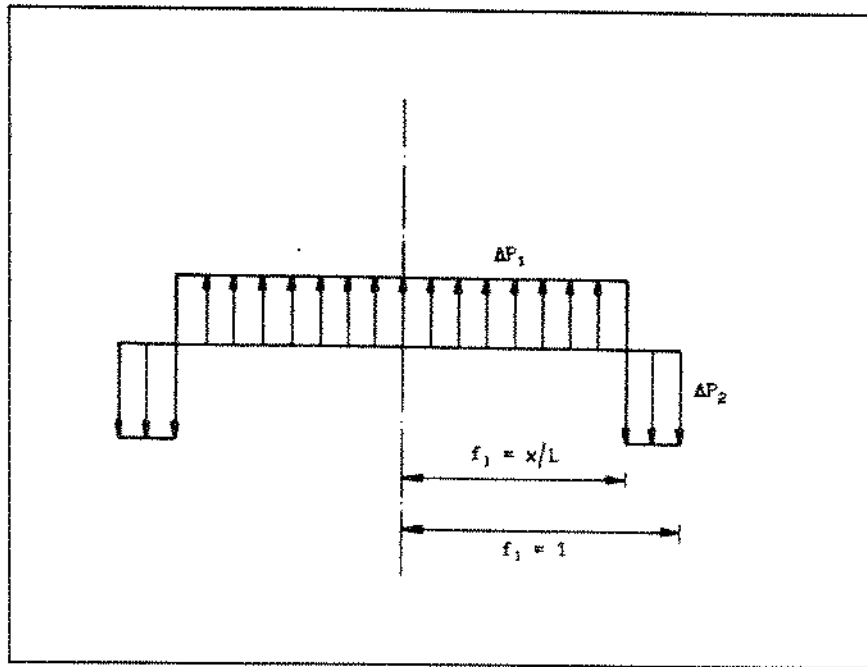


Figura 5.1 - Contraste de tensões tipo step com interface em $f_1 = x/L$

5.3 EQUAÇÕES PARA O CÁLCULO DA PENETRAÇÃO DA FRATURA

Levando-se em conta as forças de coesão propostas por Barenblatt, a equação (2.25) pode ser reescrita da seguinte forma :

$$W(f_1) = \frac{4(1-\nu)L}{\pi G} \int_{f_1}^1 \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} \int_0^{f_2} \frac{\Delta P(f_1) df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} \dots \dots \dots (5.2)$$

onde : $\Delta P = P - \sigma_c - \frac{K}{\sqrt{2L}}$

A parcela $K/\sqrt{2L}$ representa a força de coesão que, juntamente com a tensão de confinamento, atua no sentido de fechar a fratura.

Aplicando-se a condição de Barenblatt (equação 2.21) na

equação (5.2), chega-se à seguinte expressão :

$$\int_0^1 \frac{\Delta P(f_l) df_l}{\sqrt{1 - f_l^2}} = \frac{K}{\sqrt{2L}} \dots\dots\dots (5.3)$$

Resolvendo-se a integral da equação (5.3) para um valor constante de ΔP , teremos :

$$\int_0^1 \frac{\Delta P(f_l) df_l}{\sqrt{1 - f_l^2}} = \Delta P \cdot \left[\text{arc sen } f_l \right]_0^1 = \Delta P \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

Logo :

$$\int_0^1 \frac{\Delta P(f_l) df_l}{\sqrt{1 - f_l^2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \Delta P \dots\dots\dots (5.4)$$

Igualando as equações (5.3) e (5.4) :

$$\Delta P = \frac{K_c}{\sqrt{L}} \dots\dots\dots (5.5)$$

onde $K_c = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot K$

O parâmetro K_c (fator de intensidade crítico de tensões) é uma propriedade específica do material (8).

Como K_c é constante, analisando a equação (5.5), conclui-se que quanto maior for o comprimento da fratura menor será a pressão mínima necessária à sua propagação.

Substituindo-se a equação (5.5) na equação (5.4) e considerando um contraste de tensões de confinamento semelhante ao da figura (5.2), pode-se escrever :

$$\Delta P_1 \int_0^{f_l} \frac{df_l}{\sqrt{1-f_l^2}} + \Delta P_2 \int_{f_l}^1 \frac{df_l}{\sqrt{1-f_l^2}} = \frac{\pi}{2} \frac{K_c}{\sqrt{L}} \dots (5.6)$$

onde : $\Delta p_1 = P_w - \sigma_{c1} \dots \dots \dots (5.7)$

$\Delta P_2 = P_w - \sigma_{c2} \dots \dots \dots (5.8)$

Resolvendo a equação (5.6), temos :

$$\Delta P_1 \left(\text{arc sen } f_l \right) + \Delta P_2 \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc sen } f_l \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{K_c}{\sqrt{L}} \dots (5.9)$$

Como estamos tratando da propagação vertical da fratura, façamos $H = 2L$ e $f_l = H_R / H$. A equação (5.10), então, fica :

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 + \frac{\frac{\sqrt{2} K_c}{\sqrt{H}} - \Delta P_2}{\frac{2}{\pi} \text{arc sen } \frac{H_R}{H}} \dots \dots \dots (5.10)$$

Substituindo (5.8) e (5.9) em (5.11), pode-se escrever :

$$H_R = H \cdot \text{sen} \left[\frac{\pi}{2} \frac{K_c \sqrt{2} + \sqrt{H} (\sigma_{c2} - P_w)}{\sqrt{H} \cdot (\sigma_{c2} - \sigma_{c1})} \right] \dots (5.11)$$

Na prática, $K_c \ll (\sigma_{c2} - P_w)$ (8), portanto, a equação (5.11) fica :

$$\frac{H}{H_R} = \frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\Delta \sigma_{CA}} \right)} \dots \dots \dots (5.12)$$

Analisando as expressões (5.1) e (5.12) pode-se tirar algumas conclusões interessantes :

i) Quando $\Delta\sigma_{CA}$ é maior que 1, a penetração da fratura na zona adjacente terá um valor finito. A fratura, então, terá seu crescimento vertical contido, desde que P_w seja constante com o tempo.

ii) Quando $\Delta\sigma_{CA}$ é igual a 1, ou seja, $P_w = \sigma_{c2}$, o valor de H/H_R tende para infinito. Isto significa que não existe contenção ao crescimento vertical da fratura.

O mesmo ocorrerá quando $\Delta\sigma_{CA} < 1$, isto é, $P_w > \sigma_{c2}$.

iii) A equação (5.12) não se aplica a valores negativos de $\Delta\sigma_{CA}$, uma vez que, neste caso teríamos duas hipóteses; a primeira seria $P_w < \sigma_{c1}$, que implicaria na impossibilidade de haver fratura. A segunda seria $\sigma_{c2} < \sigma_{c1}$, que significaria a inexistência de contenção ao crescimento vertical.

Portanto, a utilização da equação (5.12) para valores negativos do contraste adimensional de tensões levaria a resultados irreais.

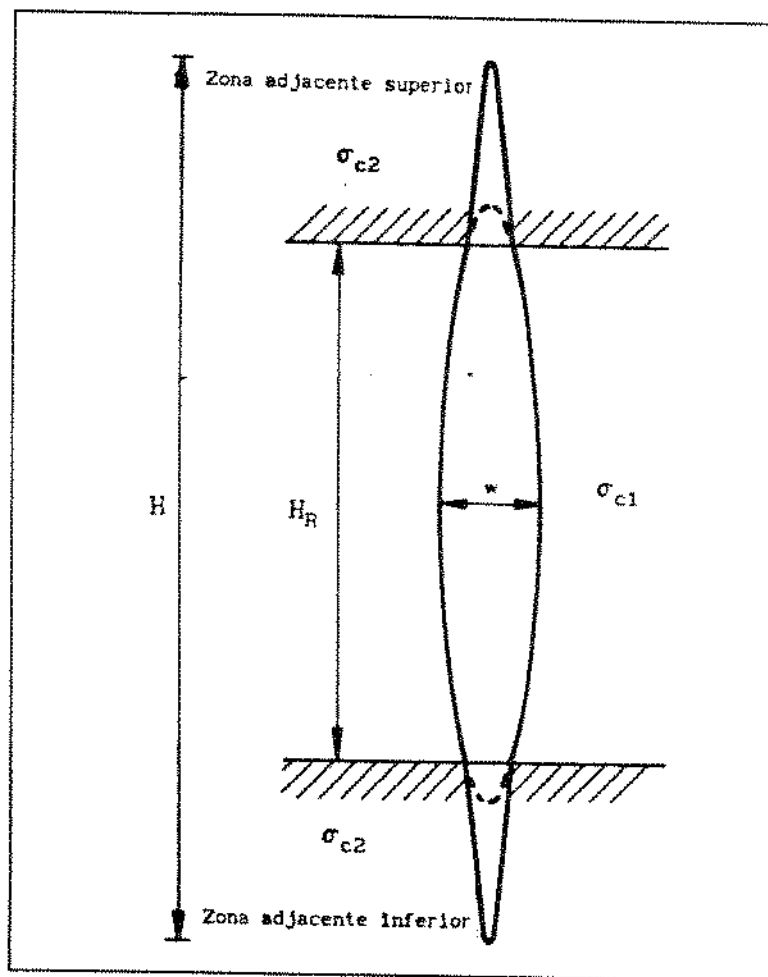


Figura 5.2 - Esquema da penetração de uma fratura vertical nas zonas adjacentes, com contraste de tensões positivo (8)

Para o modelo PK de propagação linear, temos a seguinte distribuição de pressão na fratura, dada pela equação (3.4) :

$$\Delta P (f_l) = \Delta P_w \cdot (1 - f_l)^{1/4}$$

Substituindo esta relação na equação (5.1), teremos :

$$\Delta \sigma_{CA} = \frac{\sigma_{c2} - \sigma_{c1}}{\Delta P_w (1 - f_l)^{1/4}} = \frac{\Delta \sigma_{CA}}{(1 - f_l)^{1/4}} \dots \dots \dots (5.13)$$

Substituindo a equação (5.13) na equação (5.12), temos :

$$\frac{H}{H_r} = \frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1 - f_l)^{1/4}}{\Delta \sigma_{CA}} \right)} \dots \dots \dots (5.14)$$

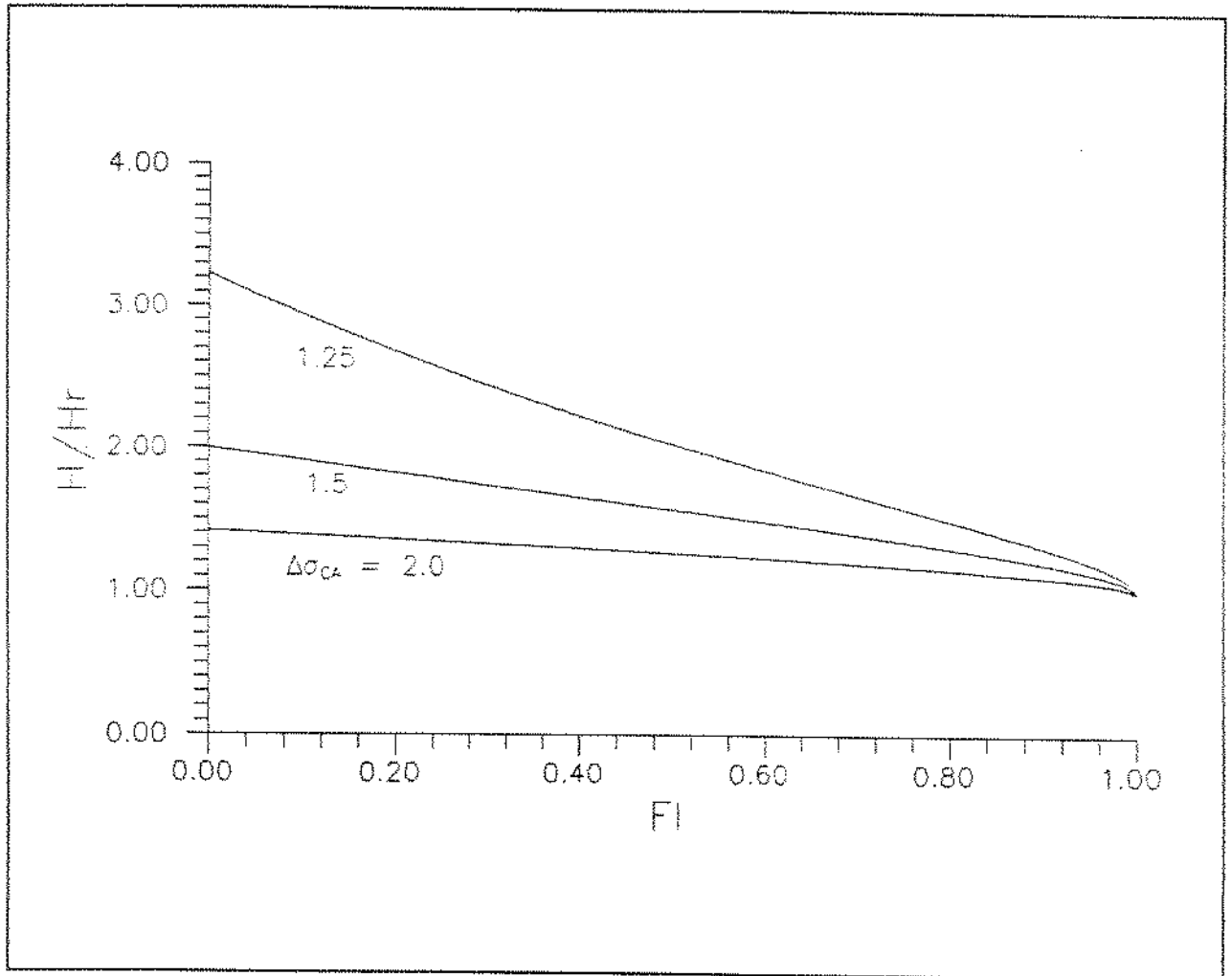


Figura 5.3 - Geometria vertical de uma fratura modelo PK

A figura 5.3 mostra curvas de H/H_R versus f_1 para alguns valores de $\Delta\sigma_{CA}$ de uma fratura modelo PK, para um determinado instante.

5.4 ESCORREGAMENTO ENTRE ZONAS ADJACENTES

Quando existe contenção do crescimento vertical de uma fratura, seja por contraste das tensões de confinamento entre a zona de interesse e as adjacentes ou por um outro mecanismo natural, existirá uma certa penetração da fratura nas zonas adjacentes até que seja alcançado o equilíbrio e o crescimento vertical seja contido.

No caso de haver escorregamento entre a zona de interesse e as zonas adjacentes, conforme assume o modelo KGD, o crescimento vertical da fratura cessa imediatamente após alcançada a interface entre as zonas. O escorregamento atua, portanto, como um eficiente meio de contenção vertical.

O fenômeno de escorregamento entre duas superfícies é controlado pelas forças de atrito que atuam na interface dessas duas superfícies (8). Se as forças de atrito são de pouca intensidade, haverá pouca aderência entre as superfícies e a deformação provocada pela fratura na zona de interesse não será capaz de se transmitir à zona adjacente, ocorrendo, então, o escorregamento relativo entre as duas superfícies.

Se, ao contrário, as forças de atrito forem de grande intensidade, haverá grande transmissibilidade de deformação da zona de interesse para a zona adjacente.

A tensão de cisalhamento por fricção é descrita pela seguinte relação (8) :

$$\tau_f = \mu_f \cdot \sigma_n \dots\dots\dots (5.15)$$

onde μ_f é o coeficiente de atrito estático entre as duas superfícies e σ_n é a tensão normal à interface.

A partir da equação (5.15), conclui-se que só haverá escorregamento entre as duas superfícies no caso de pequenas tensões normais ou baixos valores do coeficiente de atrito.

Supondo que as fraturas sejam verticais, as tensões normais à interface deverão ser verticais, iguais ao overburden.

Normalmente, o escorregamento entre formações vai ocorrer a baixas profundidades, onde a tensão de overburden é pequena.

Anormalmente, pode ocorrer escorregamento a altas profundidades, quando a pressão de poros for muito alta, fazendo com que a tensão normal efetiva seja pequena, ou ainda, em formações que apresentem alto teor de argila próximo à interface, onde o coeficiente de atrito será muito pequeno.

CAPÍTULO 6

COMPORTAMENTO DA PRESSÃO COM O TEMPO DE TRATAMENTO

6.1 A RELAÇÃO ENTRE PRESSÃO E TEMPO

Nos Capítulos 3 e 4, foram deduzidas as equações relativas à geometria de fratura para os modelos PK e KGD, de propagação linear e radial, com e sem filtração através das faces da fratura, para fluidos fraturantes do tipo newtoniano e power-law (modelo de potência).

Neste capítulo serão deduzidas as equações que governam o comportamento da pressão de fundo em função do tempo de propagação da fratura, para cada modelo de fratura, supondo que o fluido fraturante segue o modelo de potência e levando em conta os casos particulares do efeito da filtração. Obviamente, os casos de fluido newtoniano e ausência de filtração serão casos particulares das equações apresentadas.

Definidas estas equações, teremos caracterizado o comportamento de cada modelo de fratura durante a sua propagação, o que será de fundamental importância na análise da operação de fraturamento.

6.2 EQUAÇÕES DE PRESSÃO VERSUS TEMPO DE PROPAGAÇÃO

6.2.1 MODELO PK DE PROPAGAÇÃO LINEAR

i) No caso de baixa filtração ($\eta \rightarrow 1$)

Substituindo a equação (4.11) na equação (4.9), tem-se :

$$\Delta P_w = \left[\frac{320}{18 \cdot \pi^2} (n'+1) \cdot K_a \cdot \left(\frac{6 \cdot q}{H} \right)^{n'+1} \left(\frac{G}{(1-\nu)H} \right)^{2n'+2} \right]^{\frac{1}{2n'+3}} \cdot t^{\frac{1}{2n'+3}}$$

..... (6.1)

ii) No caso de alta perda por filtração ($\eta + 0$)

Substituindo-se a equação (3.99) na equação (4.9), temos :

$$\Delta P_w = \left[\frac{64}{18 \cdot \pi^2 \cdot C} (n'+1) \cdot K_a \cdot \left(\frac{6 \cdot q}{H} \right)^{n'+1} \left(\frac{G}{(1-\nu)H} \right)^{2n'+1} \right]^{\frac{1}{2n'+2}} \cdot t^{\frac{1}{4n'+4}}$$

..... (6.2)

6.2.2 MODELO PK DE PROPAGAÇÃO RADIAL

Da equação (3.37), pode-se escrever :

$$\Delta P_w = - \frac{6 \cdot \mu \cdot Q}{\pi \cdot \bar{W}^3} \text{Ln } f_{rw} \dots\dots\dots (6.3)$$

Substituindo-se as equações (4.8) e (4.14) na equação (6.3) e lembrando que a largura média do modelo é igual a 2/3 da abertura máxima :

$$\Delta P_w = - \frac{K_a}{2} \left(\frac{12Q}{\pi} \right)^{\frac{n'}{2n'+2}} \left[\frac{2}{3\pi} \cdot K_a \cdot \left(\frac{1-\nu}{G} \right) \right]^{\frac{-2n'-1}{2n'+2}} \cdot R^{\frac{-3n'}{2n'+2}} \text{Ln } f_{rw}$$

..... (6.4)

i) No caso de baixa filtração ($\eta + 1$)

Substituindo-se a equação (4.15) na equação (6.4), teremos :

$$\Delta P_w = - K_a \left[\frac{6^{n'}}{2^{2n'+1}} \frac{1}{3^{\frac{n'}{n'+2}}} \right]^{\frac{1}{n'+1}} \cdot \left[\frac{K_a (1-\nu)}{3 \cdot \pi \cdot G} \right]^{\frac{-n'-1}{n'+2}} \text{Ln } f_{rw} t^{\frac{-n'}{n'+2}}$$

..... (6.5)

ii) No caso de alta filtração ($\eta + 0$)

Substituindo-se a equação (3.123) na equação (6.4), temos :

$$\Delta P_w = - K_a \left(\frac{\pi^4 \cdot C^3}{Q} \right)^{\frac{n'}{2n'+2}} \left[\frac{4 K_a (1-\nu)}{3 \cdot \pi \cdot G} \right]^{\frac{-2n'-1}{2n'+2}} \cdot \text{Ln } f_{rw} \cdot t^{\frac{-3n'}{8n'+8}}$$

..... (6.6)

6.2.3 MODELO KGD DE PROPAGAÇÃO LINEAR

Utilizando a equação (4.6) na equação (3.26) e lembrando que para este modelo a largura média da fratura é igual a $\pi/4$ vezes a largura máxima, teremos :

$$\Delta P_w = 1,14 \left[1,17 \cdot \frac{q}{L^2 \cdot H} \cdot \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^2 \right]^{\frac{n'}{2n'+2}} \left[0,86 K_a \left(\frac{G}{1-\nu} \right) \right]^{\frac{1}{2n'+2}}$$

..... (6.7)

i) No caso de baixa filtração ($\eta + 1$)

Substituindo-se a equação (4.17) na equação (6.7), temos :

$$\Delta P_w = 1,14 \left(1,17 \cdot 0,86^{1/n'} \cdot 4,4^{\frac{1}{n'+2}} \cdot 6^{\frac{1}{n'(n'+2)}} \right)^{\frac{n'}{2n'+2}} \times$$

$$\times \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{\frac{n'+1}{n'+2}} \left(2,45^{n'-1} \cdot 0,78^{n'} \cdot K_a \right)^{\frac{1}{n'+2}} \cdot t^{\frac{-n'}{n'+2}} \dots (6.8)$$

ii) No caso de alta filtração ($\eta + 0$)

Substituindo a equação (3.107) na equação (6.7), tem-se :

$$\Delta P_w = 1,14 \left(11,55 \cdot 0,86^{1/n'} \right)^{\frac{n'}{2n'+2}} \left(\frac{q}{H} \right)^{\frac{-n'}{2n'+2}} \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{\frac{2n'+1}{2n'+2}} \times$$

$$\times \left(K_a \cdot C^{2n'} \right)^{\frac{1}{2n'+2}} \cdot t^{\frac{-n'}{2n'+2}} \dots (6.9)$$

6.2.4 MODELO KGD DE PROPAGAÇÃO RADIAL

Da equação (3.71), pode-se escrever :

$$\Delta P_w = - 0,59 \left[\frac{G \cdot W_w}{(1-\nu) \cdot R} \right] \cdot \text{Ln } f_{rw} \dots\dots\dots (6.10)$$

Substituindo as equações (3.64) e (4.8) na equação (6.10) e lembrando que a largura média do modelo é igual a 8/15 da largura máxima, teremos :

$$\Delta P_w = - 1,1 \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{\frac{2n'+1}{2n'+2}} \left(0,44 K_a \right)^{\frac{1}{2n'+2}} \left(\frac{6 \cdot Q}{\pi} \right)^{\frac{n'}{2n'+2}} R^{\frac{-3n'}{2n'+2}} \text{Ln } f_{rw} \dots\dots\dots (6.11)$$

i) No caso de baixa filtração ($\eta \rightarrow 1$)

Substituindo a equação (4.19) na equação (6.11), temos :

$$\Delta P_w = - 1,1 \left(0,46 \frac{n'+2}{n'} \cdot 0,003 \cdot 12^{2n'+4} \right)^{\frac{n'}{2(n'+1)(n'+2)}} \times$$

$$\times K_a^{\frac{1}{n'+2}} \cdot \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{\frac{n'+1}{n'+2}} \cdot \text{Ln } f_{rw} \cdot t^{\frac{-n'}{n'+2}} \dots\dots\dots (6.12)$$

ii) No caso de alta filtração ($\eta \rightarrow 0$)

Substituindo a equação (3.130) na equação (6.11), teremos :

$$\Delta P_w = - 1,1 \left(\frac{G}{1-\nu} \right)^{\frac{2n'+1}{2n'+2}} \left(0,44 K_a \right)^{\frac{1}{2n'+2}} \left(\frac{0,01Q}{144C^3} \right)^{\frac{-n'}{4n'+4}} \text{Ln } f_{rw} t^{\frac{-3n'}{8n'+8}} \dots\dots\dots (6.13)$$

Observações :

i) Os modelos PK e KGD de propagação radial apresentam equações de pressão semelhantes no que diz respeito ao expoente da variável tempo, diferindo apenas em relação ao fator multiplicativo.

ii) Nos modelos de propagação radial, a equação de pressão em função do tempo apresenta o fator $\ln f_{rw}$, que será considerado neste trabalho como aproximadamente constante, uma vez que quando comparado com o tempo elevado à potência, apresenta uma menor sensibilidade.

CAPÍTULO 7

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DA PRESSÃO DURANTE O TRATAMENTO

7.1 ANÁLISE DA MAGNITUDE DA PRESSÃO DE PROPAGAÇÃO

Normalmente, para um determinado estado de tensões em uma rocha, a tensão vertical ou tensão de overburden é maior do que as tensões horizontais. Isto pode ser explicado pela ação tectônica, responsável pela configuração das tensões de sub superfície, sendo um fato comprovado pelos estudos de mecânica das rochas (8,9).

Como a fratura é iniciada e propagada através de um plano perpendicular à menor tensão efetiva, é normal que a maioria das fraturas hidráulicas sejam verticais.

Um valor bastante usual do gradiente de "overburden" é em torno de 1 psi/pé [22,6 kPa/m]. A pressão de propagação, por definição, deve ser maior que a tensão de confinamento, perpendicular ao plano de fratura. Portanto, se a pressão de propagação é menor que a tensão de overburden, a fratura se propaga em um plano vertical. Por outro lado, se a pressão de propagação atinge valores maiores do que a tensão de overburden, a fratura está, provavelmente, num plano horizontal. Isso pode ocorrer a baixas profundidades, onde a ação tectônica houver produzido tensões horizontais maiores do que as tensões verticais, ou em formações de baixo coeficiente de elasticidade ao cisalhamento, onde as tensões horizontais e verticais terão valores próximos.

Outra forma de ocorrer uma fratura horizontal é o aumento excessivo da pressão de propagação de uma fratura vertical atingir o valor da tensão de overburden, criando, assim, fraturas combinadas (9).

A magnitude da pressão de propagação, portanto, fornece uma interpretação a respeito do plano de fratura, quando se conhece a tensão de overburden.

7.2 ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DA PRESSÃO DE PROPAGAÇÃO

7.2.1 DIAGRAMA DE PRESSÃO DE PROPAGAÇÃO VERSUS TEMPO

Como visto no capítulo 6, as equações que relacionam pressão e tempo de propagação para os diversos modelos de fratura são expressas em forma de potência da variável tempo. Dessa forma, a análise do comportamento de pressão fica mais fácil quando feita num gráfico log log, onde a declividade da curva fornecerá o valor do expoente da variável tempo.

Assim, se temos $\Delta P = C \times t^m$, num gráfico log log, teremos:

$\text{Log } \Delta P = C_1 + m \text{ Log } t$, linearizando, dessa forma, a equação.

Baseado no diagrama log log de pressão de propagação versus tempo, podemos analisar os diversos tipos de comportamento possíveis.

7.2.2 PRESSÃO DECRESCENTE COM O TEMPO

Normalmente, no início da propagação, a pressão se mostra decrescente com o tempo. De acordo com as equações deduzidas no Capítulo 6, os modelos que admitem pressão decrescente são os modelos radiais e o modelo KGD de propagação linear.

Neste caso, teremos as seguintes possibilidades :

i) Propagação radial vertical

O intervalo canhoneado, nesse caso, deve configurar uma fonte pontual de injeção de fluido para a fratura, devendo cobrir uma pequena extensão em relação à altura da zona de interesse. A forma geométrica da fratura deverá ser, como já discutido em capítulos anteriores, aproximadamente circular, desde que não haja heterogeneidades ou anisotropia da formação fraturada e que a tensão de confinamento seja constante para toda a extensão da formação. Isso equivale a dizer que a velocidade de propagação da fratura será a mesma em todas as direções, que é a principal característica do modelo radial.

O período de duração desse comportamento vai depender das

dimensões da zona de interesse e do volume de fluido fraturante injetado. Isso determina o tempo que a fratura levará para atingir as zonas adjacentes. No caso de formações de pequena extensão vertical ou grandes volumes de tratamento, a fratura irá atingir as formações adjacentes e, a partir daí, o crescimento da fratura vai depender do contraste das tensões de confinamento das zonas de interesse e adjacentes.

Caso o contraste seja maior do que 1 (equação 5.1), haverá confinamento vertical. Neste caso, a velocidade de crescimento vertical será drasticamente reduzida e a propagação passará a ser linear. O comportamento da pressão de propagação poderá ser crescente ou decrescente, dependendo da fratura apresentar uma geometria do modelo PK ou KGD, respectivamente.

Caso o contraste de tensões seja menor do que 1, a fratura não terá seu crescimento vertical contido e a pressão de propagação continuará decrescente com o tempo. A geometria, no entanto, será aleatória, uma vez que as velocidades de propagação vertical e horizontal serão, agora, diferentes.

No caso de formações de grande extensão vertical ou fraturas pouco extensas, o crescimento poderá se manter de forma radial até o fim do tratamento, mantendo o comportamento da pressão de propagação decrescente.

ii) Propagação radial horizontal

Neste caso, a fratura vai se propagar de forma radial durante todo o tratamento, apresentando, portanto, pressão decrescente com o tempo. A pressão de propagação deverá ser maior que no caso de fratura vertical, devido à tensão de confinamento vertical.

iii) Propagação linear de acordo com o modelo KGD

Para que a fratura apresente propagação linear, o intervalo canhoneado deve se estender ao longo da zona de interesse, configurando uma fonte linear de injeção. Nesse caso, haverá escorregamento entre a zona fraturada e as adjacentes, mantendo a fratura limitada à altura da zona de interesse durante todo o tratamento.

7.2.3 PRESSÃO CRESCENTE COM BAIXA DECLIVIDADE

Como visto no Capítulo 5, quando uma fratura se propaga através de uma formação, ao encontrar as interfaces com as formações adjacentes, pode apresentar um dos seguintes comportamentos :

i) Se $\Delta\sigma_{CA} < 0$ ($\sigma_{c2} < \sigma_{c1}$). Nesse caso, não haverá restrição ao crescimento vertical. A fratura terá, então, um crescimento radial com velocidade de propagação vertical maior que a horizontal, supondo que as formações adjacentes tenham propriedades físicas semelhantes à zona de interesse.

ii) Se $\Delta\sigma_{CA} > 1$ ($\sigma_{c2} > P_w > \sigma_{c1}$), a fratura terá o seu crescimento vertical contido pelas formações com contraste de tensões positivo. Nesse caso, o modelo de propagação será semelhante ao de Perkins e Kern, com a diferença de que a altura não será constante como o modelo pressupõe, mas terá seu crescimento controlado pelo contraste de tensões, conforme equação (5.12). A geometria da fratura, para cada instante, será definida pela equação (5.14). No gráfico log-log o comportamento da pressão será crescente com o tempo, apresentando uma pequena declividade, conforme as equações (6.1) e (6.2).

Se a pressão continuar crescendo até um valor tal que $0 < \Delta\sigma_{CA} < 1$, deixa de haver contenção ao crescimento vertical da fratura, uma vez que $P_w > \sigma_{c2}$. Nesse caso a propagação passa a ser radial e a pressão muda o seu comportamento e passa a ser decrescente com o tempo.

7.2.4 PRESSÃO CRESCENTE COM DECLIVIDADE MAIOR QUE 1

Uma declividade igual ou maior que 1 indica que a pressão aumenta proporcionalmente ao tempo e, por extensão, ao volume bombeado, supondo que a vazão de tratamento é constante. Isso indica a existência de alguma restrição impedindo a propagação da fratura, ou seja, parte do volume bombeado está sendo acumulado e comprimido dentro da fratura. A essa ocorrência dá-se o nome de embuchamento ("screen out"), que é causado pela deposição de

agente de sustentação, que forma plugs dentro da fratura que impedem o fluxo de fluido fraturante. O prosseguimento do bombeio de fluido, neste caso, provocaria o "inchamento" da fratura, ou seja, o aumento da sua largura, uma vez que o seu crescimento na direção de propagação é drasticamente reduzido.

Analisando-se a equação (2.36), se a vazão de tratamento é constante, o aumento de dP/dt deve ser compensado por um decréscimo em dL/dt , uma vez que não existe motivo para variação nos outros parâmetros da equação. Isso mostra que ocorre uma redução na velocidade de propagação da fratura, provavelmente devido à existência de restrição ao fluxo no seu interior.

Podemos reescrever a equação (2.36), fazendo algumas simplificações. Supondo $\eta = 1$ e que a complacência (c), a altura (H) e o comprimento da fratura (L) fiquem aproximadamente constantes com o tempo, no caso de embuchamento, pode-se escrever :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{(q - q_l)}{c \cdot L \cdot H} \dots\dots\dots (7.1)$$

Para o modelo PK, aplicando a equação (3.1) na equação (2.33) e lembrando que a largura média é, para esse modelo, igual a $\pi/4$ da largura máxima, teremos :

$$c = \frac{\pi H (1-\nu)}{4 G} \dots\dots\dots (7.2)$$

Substituindo (7.2) em (7.1), temos :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{4 G (q - q_l)}{\pi (1-\nu) L H^2} \dots\dots\dots (7.3)$$

Explicitando o valor de L, teremos :

$$L = \frac{4 \cdot G \cdot (q - q_l)}{\pi \cdot (1-\nu) \cdot H^2 \cdot \frac{dP}{dt}} \dots\dots\dots (7.4)$$

A equação (7.4) calcula a extensão atingida pela fratura até o momento do embuchamento. Observa-se que quanto mais rápido for o crescimento da pressão, mais próximo ao poço ocorre o embuchamento.

7.2.5 PRESSÃO CONSTANTE COM O TEMPO

Substituindo-se a equação (7.2) na equação (4.9), podemos escrever :

$$\Delta P_w = \left[\frac{64}{3\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^{2n'+1} (n'+1) c^{n'} \right]^{\frac{1}{2n'+2}} \cdot \left(\frac{K_a \cdot q^{n'} \cdot L}{H^{n'} \cdot c^{2n'+1}} \right)^{\frac{1}{2n'+2}}$$

..... (7.5)

Analisando a equação (7.5), verifica-se que, se ΔP_w é constante, para que haja propagação da fratura, ou seja, para que o valor de L aumente com o tempo, deve haver um crescimento nos valores de H e c. Como n' é normalmente menor que 1, o aumento em H deve ser maior que o aumento em L, para manter a expressão constante. Supondo que o valor de c permanece constante, o crescimento da altura da fratura deverá ser igual ao crescimento do comprimento elevado à potência $1/n'$. Isto caracteriza um caso particular de crescimento radial.

Se, por outro lado, os parâmetros L, H e c permanecerem constantes com o tempo, o volume da fratura não estará variando também. Conseqüentemente, todo o volume de fluido injetado na fratura estará se perdendo através de filtração, caso a eficiência volumétrica do fluido seja baixa, ou através de fraturas secundárias. Isto tenderá a bloquear a fratura, devido à deposição do agente de sustentação.

O significado de um período de pressão constante, portanto, vai depender do comportamento da pressão após esse período.

Se a pressão passar a apresentar comportamento decrescente com o tempo, significa que o período de pressão constante foi uma fase de transição entre propagação linear e radial, quando o contraste adimensional de tensões atingiu valor igual a 1, deixando de haver restrição ao crescimento vertical da fratura.

Se, por outro lado, houver um súbito crescimento de pressão após o período de pressão constante, significa que o excesso de filtração nas faces da fratura provocou a formação de plugs de agentes de sustentação no seu interior, levando ao embuchamento.

CAPÍTULO 8

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

8.1 POÇO 7-RBU-022-BA

Analisando as curvas de comportamento da pressão efetiva de propagação versus tempo (Figura 8.2), nota-se que houve quatro comportamentos distintos durante o tratamento : pressão crescente, pressão constante, pressão decrescente e, por fim, crescimento súbito da pressão.

Através do diagrama log-log (Figura 8.3), pode-se fazer uma análise mais detalhada de cada trecho.

i) Trecho de 0 a 8 minutos

Neste trecho, o gráfico apresentou pequena declividade positiva, igual a $1/8$, caracterizando um comportamento similar ao modelo PK de propagação linear.

ii) Trecho de 8 a 12 minutos

A partir de 8 minutos de propagação, a pressão passou a apresentar comportamento constante com o tempo. Como o trecho seguinte foi de pressão decrescente, pode-se dizer que o trecho de pressão constante representou um período de transição entre a propagação linear e a propagação sem contenção vertical, provavelmente devido à pressão de propagação ter atingido um valor igual à tensão de confinamento da zona adjacente.

iii) Trecho de 12 a 19 minutos

Neste trecho, a pressão passou a apresentar comportamento decrescente com o tempo, indicando que a fratura passou a crescer também no sentido vertical. Com isso, a penetração da fratura na zona de interesse deverá ser menor do que aquela prevista no projeto.

iv) Trecho a partir de 19 minutos

A partir de 19 minutos, a fratura passa a crescer rapidamente, caracterizando o embuchamento. Pode-se calcular o ponto aproximado onde ocorreu o embuchamento, utilizando-se os seguintes dados :

$$\text{Módulo de deformação plana } E' = \frac{2G}{(1-\nu)} = 6.10^6 \text{ psi } [4,1 .10^4 \text{ MPa}]$$

$$\text{Vazão } q = 12,5 \text{ BPM} = 70 \text{ ft}^3/\text{min} \quad [0,033 \text{ m}^3/\text{s}] \quad (\text{da figura 8.1})$$

$$\frac{dP}{dt} = 600 \text{ psi/min} \quad [68 \text{ kPa/s}] \quad (\text{da figura 8.2})$$

$$\text{Altura da formação } H_f = 32 \text{ ft} \quad [9,75 \text{ m}]$$

A altura da fratura será, certamente, maior que H_f , uma vez que houve crescimento vertical. Assim sendo, a equação (7.4) pode ser escrita da seguinte forma, supondo $\eta = 1$:

$$L \leq \frac{2.E'.q}{\pi.H^2 . \frac{dP}{dt}}$$

Substituindo os valores numéricos na equação (8.1), teremos :

$$L \leq 128 \text{ m}$$

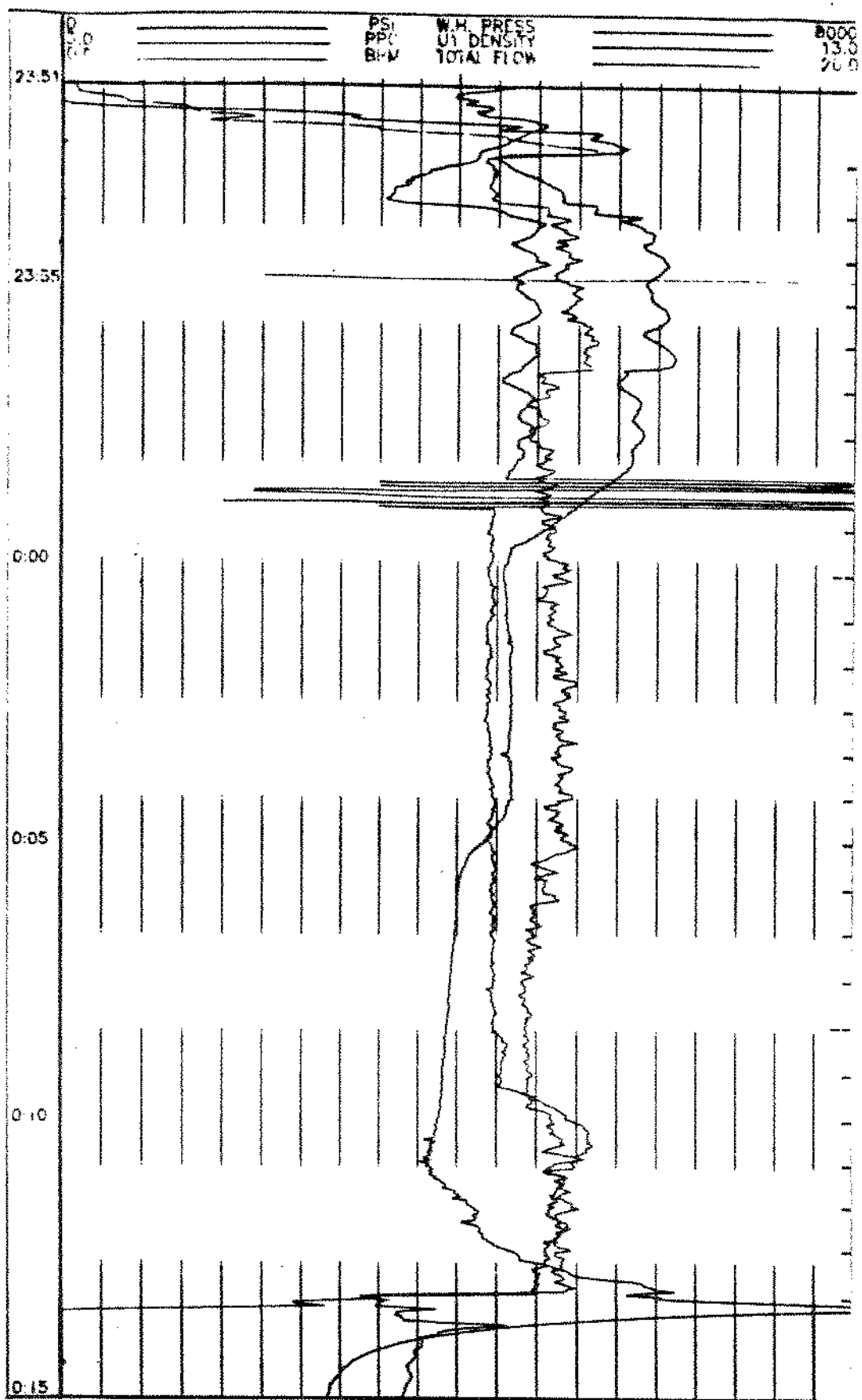


Figura 8.1 - Carta de registro dos parâmetros de tratamento do poço 7-RBU-022-BA

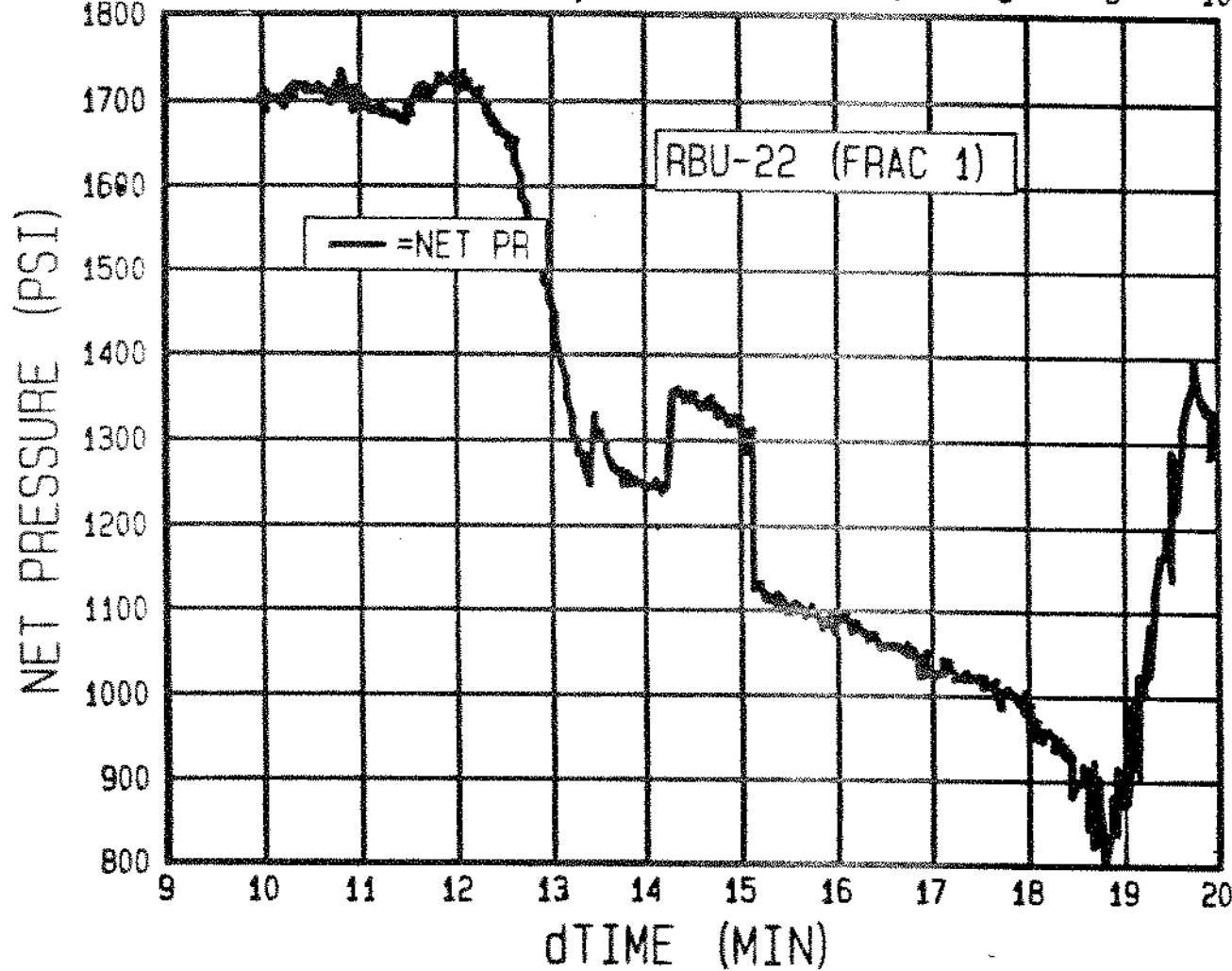
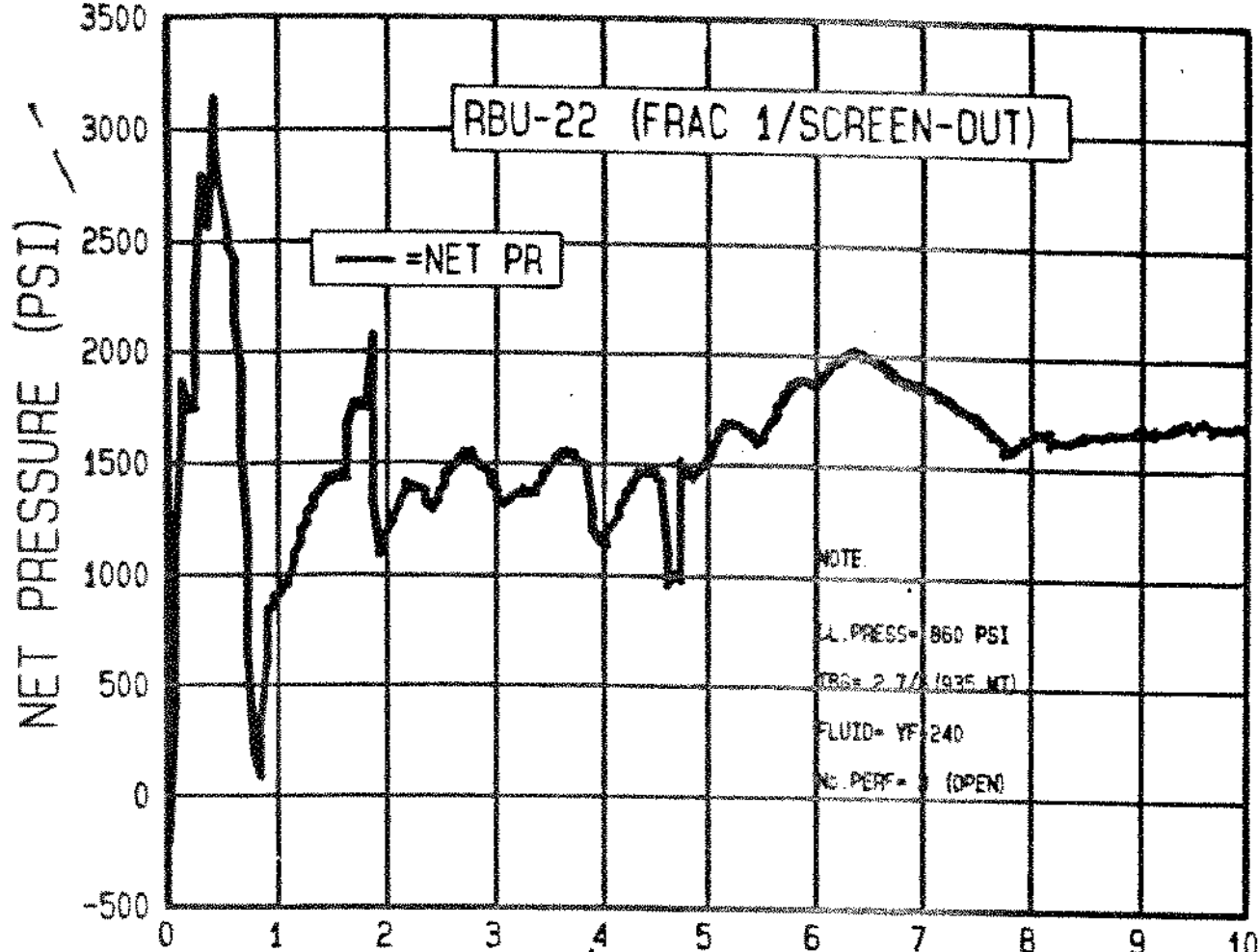


Figura 8.2 - Curvas de pressão de propagação do poço 7-RBU-022-BA

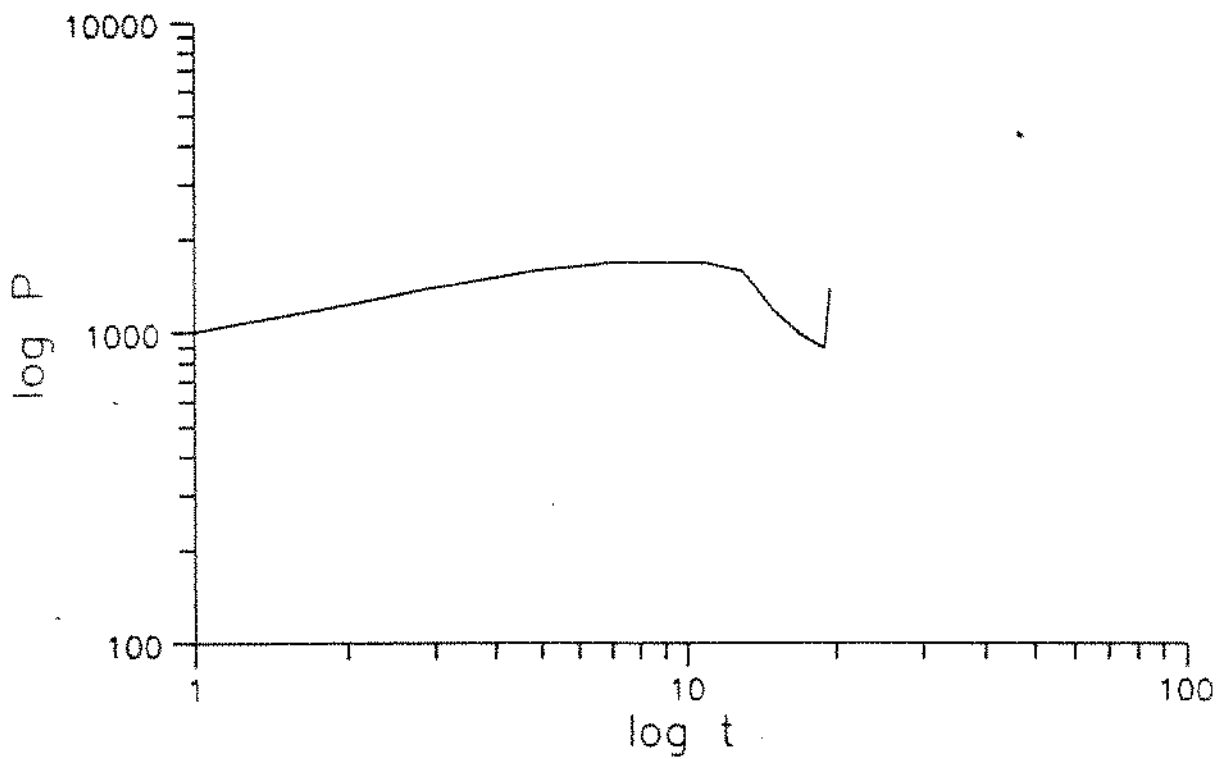


Figura 8.3 - Gráfico log log da pressão de propagação versus tempo do poço 7-RBU-022-BA

8.2 POÇO 7-FAV-107-BA

Dados do tratamento :

Vazão : 20 BPM [0,053 m³/s]

Profundidade da zona de interesse : 413,0 m - 460,0 m

Número de furos abertos ao fluxo : 18

Tensão de Confinamento = 0,76 psi/ft (determinada pela análise de declínio de pressão)

Analisando as figuras (8.5) e (8.6), nota-se que o tratamento apresentou um pequeno período de pressão crescente, no início do bombeio, provavelmente devido ao aumento da vazão. Após isso, a pressão passou a se apresentar decrescente, até o final da operação.

A princípio, existem duas alternativas para esse comportamento :

i) Fratura radial

Como a altura da zona de interesse é pequena em relação ao volume bombeado, fica afastada a hipótese de fratura radial vertical.

O baixo valor encontrado para o gradiente da tensão de confinamento, por sua vez, afasta a hipótese de fratura radial horizontal.

ii) Propagação linear de fratura de acordo com o modelo KGD

Como a formação encontra-se à baixa profundidade, é provável a ocorrência de escorregamento relativo entre a zona de interesse e as adjacentes.

Portanto, conclui-se, pela análise do tratamento, que a fratura propagou-se de acordo com o modelo KGD de propagação linear.

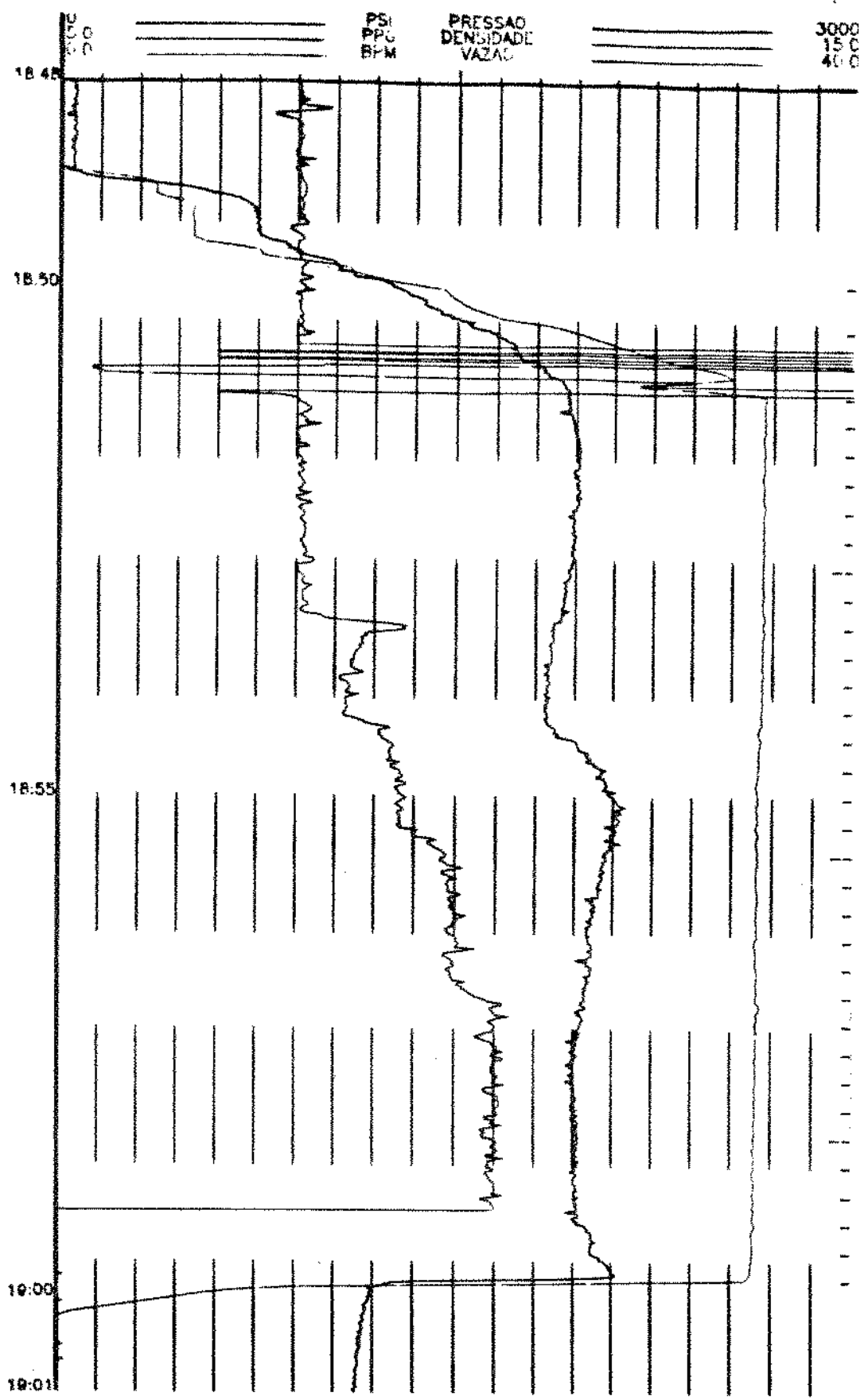


Figura 8.4 - Carta de registro dos parâmetros de tratamento do poço 7-FAV-107-BA

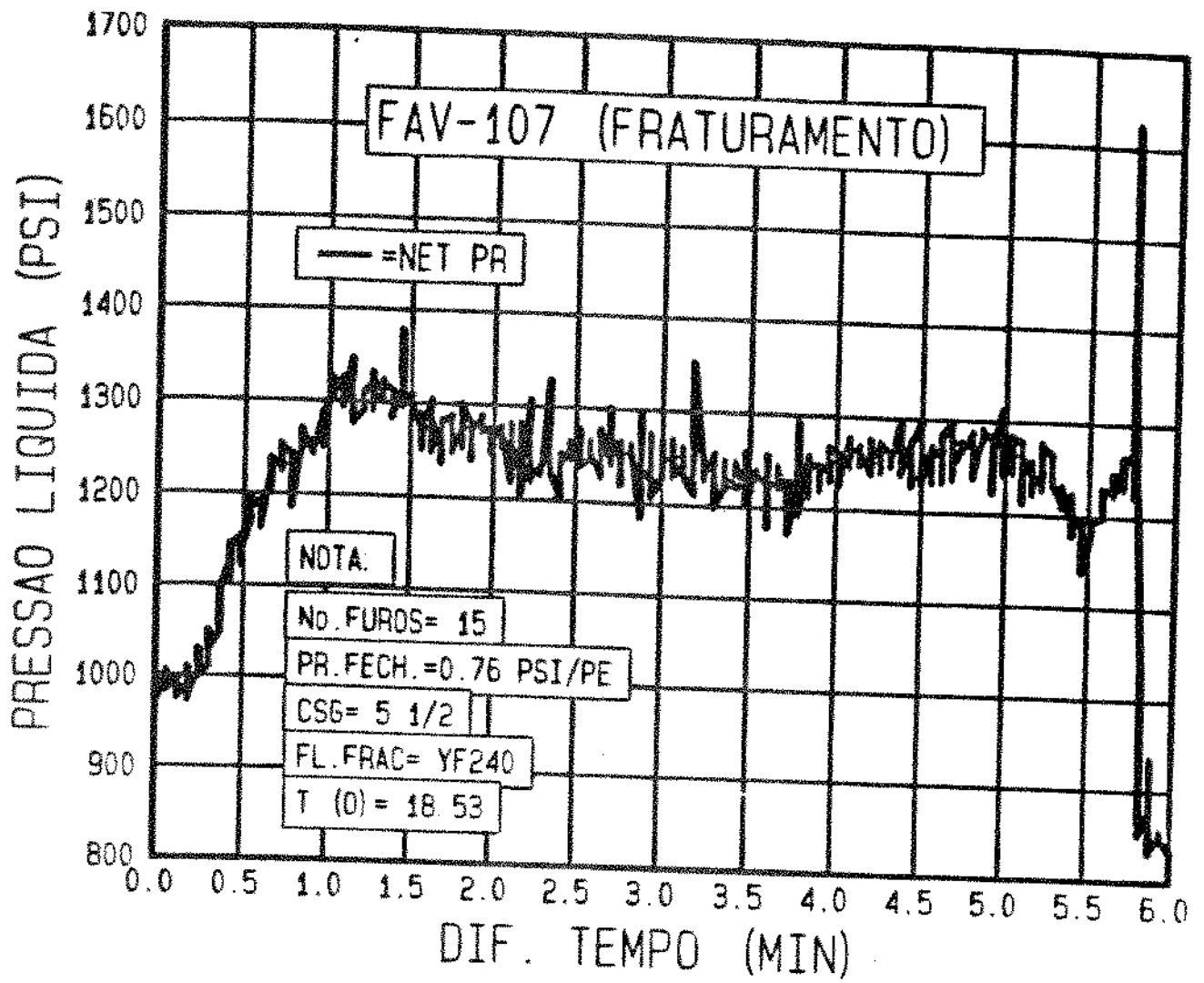


Figura 8.5 - Curva de pressão de propagação do poço 7-FAV-107-BA

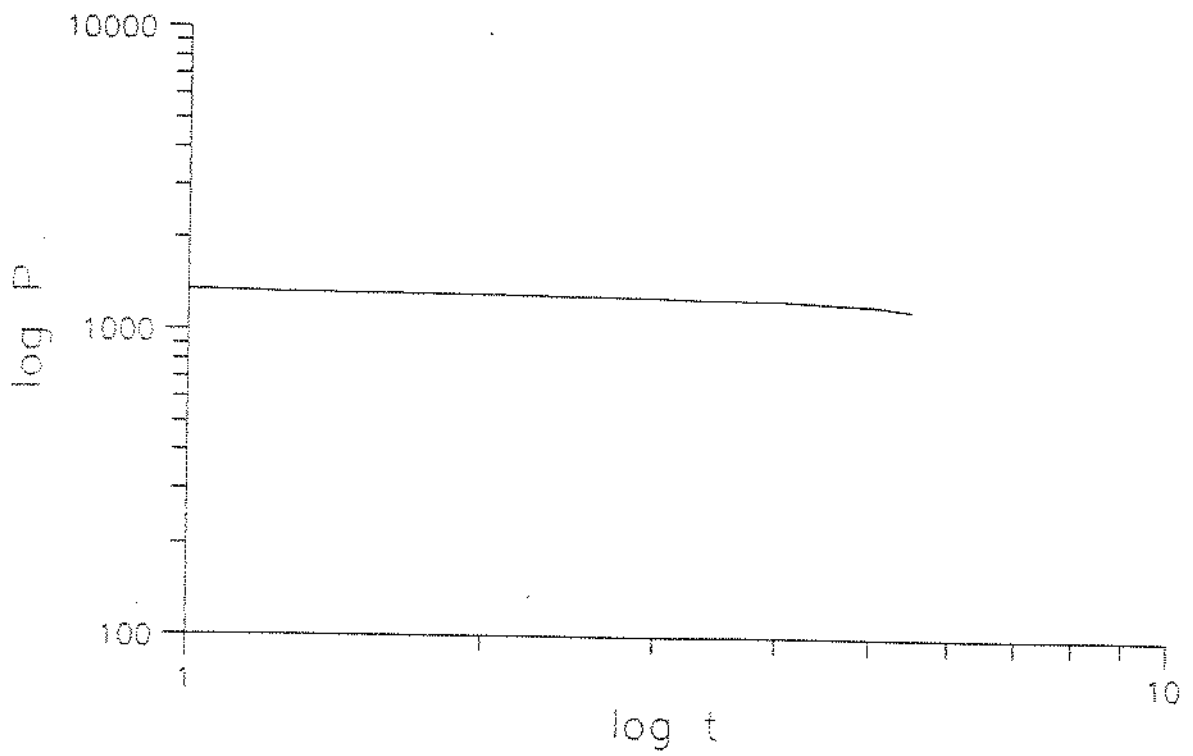


Figura 8.6 - Gráfico log log da pressão de propagação versus tempo do poço 7-FAV-107-BA

CAPÍTULO 9

CONCLUSÕES

9.1 A hipótese básica de altura constante, utilizada no desenvolvimento do modelo PK de propagação linear, é uma aproximação muito grosseira, uma vez que a dimensão vertical da fratura varia tanto em relação ao tempo, uma vez que a pressão cresce durante a propagação, quanto em relação ao seu comprimento, já que a pressão decresce do poço para a ponta da fratura. O fator determinante do comportamento da altura da fratura será o contraste de tensões existente entre a zona de interesse e as adjacentes, que por sua vez depende das propriedades mecânicas.

9.2 No modelo KGD, ao contrário, a hipótese de altura confinada é válida, uma vez que o escorregamento relativo entre as rochas constitui-se num eficiente mecanismo de contenção ao crescimento vertical.

9.3 O modelo PK de propagação linear pode mudar de comportamento durante o tratamento. Isso ocorre devido ao rompimento das barreiras de contenção vertical, quando o contraste adimensional de tensões, devido ao crescimento da pressão de propagação, atinge um valor igual a 1.

9.4 O modelo KGD de propagação linear, pelo fato de ter sua altura confinada durante toda a propagação da fratura, mantém comportamento de pressão de propagação decrescente durante todo o tempo de tratamento, a não ser que ocorra plugueamento da fratura pela deposição de agente de sustentação, quando, então, haverá uma situação de rápido aumento da pressão.

9.5 Quanto mais brusco for o aumento de pressão por ocasião do embuchamento, mais próximo do poço deverá estar o ponto onde ocorreu a obstrução.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Geertsma, J. e DeKlerk, F. , A Rapid Method of Predicting Width and Extent of Hydraulically Induced Fractures , JPT (Dec., 1969) 1571;
2. Geertsma, J. e Haafkens, R. , A Comparision of the Theories for Predicting Width and Extent of Vertical Hydraulically Induced Fractures , Trans. ASME (Mar., 1979) 8;
3. Perkins, T.K. e Kern, L.R. , Widths of Hidraulic Fractures , JPT (Sept., 1961) 937;
4. Biot, M.A. , Medlin, W.L. e Massé, L. , Fracture Penetration Through an Interface , SPEJ (Dec., 1983) 857;
5. Nolte, K.G. e Smith, M.B. , Interpretation of Fracturing Pressures , SPE of AIME (Sept., 1981) 1767 ;
6. Settari, A. , Quantitative Analysis of Factors Influencing Vertical and Lateral Fracture Growth , SPE/DOE 13862, 117;
7. Jaeger, J.C. e Cook, N.G.W. ; Fundamentals of Rock Mechanics, Chapman and Hall, London, 1976 ;
8. Gidley, J.G.; Holditch, S.A. ; Nierode, D.E. e Veatch Jr., R. Recent Advances in Hidraulic Fracturing , Monograph, Vol. 12, SPE, 1989 ;
9. Economides, M.J. e Nolte, K.G. ; Reservoir Stimulation , Prentice Hall, New Jersey, 1989 ;
10. Bourgoyne Jr, A.T.; Milheim, K.K.; Chenevert, M.E. e Young Jr., F.S. , Applied Drilling Engineering , SPE Textbook, 2nd Edition, 1986 ;
11. Abramowitz, M. e Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions , Dover Publications, Inc., New York, 1972 ;

12. Gould, P.L., Introduction to Linear Elasticity , Springer Verlag Inc., New York, 1983 ;
13. Ugural, A.C. e Fenster, S.K. , Advanced Strength and Applied Elasticity , Elsevier North Holland, Inc., New York, 1981;
14. Timoshenko, S.P. e Goodier, J.N., Teoria da Elasticidade , Editora Guanabara 2, Rio de Janeiro, 1980 ;
15. Campos, J.C.B., Tensões na Parede de um Poço Circular Segundo a Teoria da Elasticidade , Boletim Técnico da Petrobrás, 1984 ;
16. Dowell Schlumberger do Brasil, Relatórios de Operações de Fraturamento.

ANEXO 1

LARGURA MÉDIA DE UMA FRATURA MODELO PK DE PROPAGAÇÃO LINEAR

i) Largura média da seção horizontal

Para a seção horizontal, tem-se a seguinte equação :

$$W(f_l, t) = \bar{W}_w (1 - f_l)^{1/4}$$

A largura média será, então :

$$\bar{W} = \bar{W}_w \cdot \int_0^1 (1 - f_l)^{1/4} df_l$$

$$\bar{W} = \frac{4}{5} \cdot \bar{W}_w$$

ii) Largura média da seção vertical

Para a seção vertical, temos :

$$W(f_l, t) = W_w (1 - f_l^2)^{1/2}$$

A largura média será, então :

$$\bar{W}_w = W_w \cdot \int_0^1 (1 - f_l^2) \cdot df_l$$

$$\bar{W}_w = \frac{\pi}{4} \cdot W_w$$

iii) A largura média total será :

$$\bar{W} = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot W_w \right)$$

$$\bar{W} = \frac{\pi}{5} \cdot W_w$$

ANEXO 2

LARGURA MÉDIA DE UMA FRATURA MODELO KGD DE PROPAGAÇÃO LINEAR

A geometria horizontal do modelo KGD é descrita pela seguinte equação :

$$W(f_l, t) = \sqrt{1 - f_l^2}$$

A largura média será calculada pela seguinte expressão :

$$\bar{W} = \int_0^1 \sqrt{1 - f_l^2} \cdot df_l$$

$$\bar{W} = \frac{\pi}{4} \cdot W_w$$

LARGURA MÉDIA DE UMA FRATURA MODELO PK DE PROPAGAÇÃO RADIAL

O modelo PK de propagação radial apresenta geometria de um elipsóide de revolução, onde cada seção radial é descrita pela seguinte equação :

$$W(r,t) = W_w \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{1/2}$$

O volume de um elemento infinitesimal de fratura é :

$$dV = \pi r^2 dW = \pi R^2 \left(1 - \frac{W^2}{W_w^2} \right) \cdot dW$$

$$V = \pi R^2 \int_0^{W_w} \left(1 - \frac{W^2}{W_w^2} \right) \cdot dW = \pi R^2 \left[W - \frac{W^3}{3 W_w^2} \right]_0^{W_w}$$

$$V = \frac{2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot W_w}{3} \dots \dots \dots (1)$$

O volume equivalente de uma fratura radial de largura constante e' :

$$V_{eq} = \pi \cdot R^2 \cdot \bar{W} \dots \dots \dots (2)$$

Igualando-se as expressões (1) e (2) :

$$\bar{W} = \frac{2}{3} \cdot W_w$$

LARGURA MÉDIA DE UMA FRATURA MODELO KGD DE PROPAGAÇÃO RADIAL

O modelo PK de propagação radial apresenta geometria de um parabolóide de revolução, onde cada seção radial é descrita pela seguinte equação :

$$W(r,t) = W_w \sqrt{1 - \frac{r}{R}}$$

O volume de um elemento infinitesimal de fratura é :

$$dV = \pi r^2 dW = \pi R^2 \left[1 - \left(\frac{W}{W_w} \right)^2 \right]^2$$

$$dV = \pi R^2 \left(1 - \frac{2W^2}{W_w^2} + \frac{W^4}{W_w^4} \right) \cdot dW$$

$$V = \pi R^2 \int_0^{W_w} \left(1 - \frac{2W^2}{W_w^2} + \frac{W^4}{W_w^4} \right) \cdot dW$$

$$V = \frac{8 \pi}{15} R^2 \cdot W_w \quad \dots \dots (1)$$

O volume equivalente de uma fratura radial de largura constante e' :

$$V_{eq} = \pi \cdot R^2 \cdot \bar{W} \quad \dots \dots (2)$$

Igualando-se as expressões (1) e (2) :

$$\bar{W} = \frac{8}{15} \cdot W_w$$

ANEXO 5

ALTURA MÉDIA DE UMA FRATURA RADIAL

O problema consiste em determinar uma altura média que possa ser utilizada no cálculo da viscosidade aparente, quando o fluido fraturante é modelo de potência.

Para uma fratura de diâmetro igual a $2R$, teremos:

$$\bar{H} = \frac{1}{R} \int_{-R}^R (R^2 - x^2)^{1/2} dx$$

$$\bar{H} = \frac{1}{R} \cdot \left[\frac{x}{2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} \arcsen \frac{x}{R} \right]_{-R}^R$$

$$\bar{H} = \frac{\pi}{2} \cdot R$$