



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Mecânica

Rafael Esteves Albieri

Regras de Empacotamento para Leilão Combinatório: Aplicação no Setor Elétrico Brasileiro

CAMPINAS
2021

Rafael Esteves Albieri

Regras de Empacotamento para Leilão Combinatório: Aplicação no Setor Elétrico Brasileiro

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Planejamento de Sistemas Energéticos.

Orientador: Prof. Dr. Paulo de Barros Correia

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO RAFAEL ESTEVES ALBIERI, E ORIENTADO PELO PROF. DR. PAULO DE BARROS CORREIA

CAMPINAS
2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

Al14r Albieri, Rafael Esteves, 1991-
Regras de empacotamento para leilão combinatório : aplicação no setor elétrico brasileiro / Rafael Esteves Albieri. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Paulo de Barros Correia.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Leilões. 2. Programação linear. 3. Leilões reversos. 4. Setor elétrico. 5. Programação linear inteira. I. Correia, Paulo de Barros, 1954-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Packing rules for combinatorial auction : implementation in the Brazilian electricity sector

Palavras-chave em inglês:

Auctions

Linear programming

Reverse auctions

Electricity sector

Integer linear programming

Área de concentração: Planejamento de Sistemas Energéticos

Titulação: Mestre em Planejamento de Sistemas Energéticos

Banca examinadora:

Paulo de Barros Correia [Orientador]

Igor Alexandre Walter

Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Data de defesa: 23-02-2021

Programa de Pós-Graduação: Planejamento de Sistemas Energéticos

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-7019-9399>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/7674208655648624>

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Regras de Empacotamento para Leilão Combinatório: Aplicação no Setor Elétrico Brasileiro

Autor: Rafael Esteves Albieri

Orientador: Prof. Dr. Paulo de Barros Correia

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. Paulo de Barros Correia, Presidente
Departamento de Energia/FEM/UNICAMP

Dr. Igor Alexandre Walter
ANEEL

Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira
Departamento de Matemática Aplicada/IMECC/UNICAMP

A ata de defesa com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão julgadora, encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica.

Campinas, 23 de fevereiro de 2021.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais e amigos, que sempre acreditaram em meu potencial e apoiaram em muitos momentos difíceis desta trajetória.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Paulo de Barros Correia, pelo convite para participar do projeto de pesquisa que motivou o tema deste trabalho. Também gostaria de agradecer pela sua orientação, ensinamentos e confiança no trabalho realizado.

Aos colegas do grupo de pesquisa, Laura, Fernanda e Olívia, que participaram de forma muito próxima no convívio e no aprendizado diário ao longo do projeto. Também agradeço à Profa. Dra. Kelly, representando os professores que nos auxiliaram no projeto.

Aos amigos que fiz ao longo destes anos, que deram apoio em momentos difíceis, muitas vezes sem saber o quanto estavam ajudando. Em especial gostaria de agradecer à Laura, que foi uma excelente colega de trabalho e ao longo do tempo se tornou uma amiga muito especial.

À Lívia pela parceria de muitos anos, por estar presente nos momentos mais difíceis e por me ensinar a acreditar no meu potencial.

À minha família que sempre esteve presente, dando todo o tipo de suporte que necessitei durante toda a minha vida.

A todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a melhoria do trabalho e deram o suporte emocional necessário para a conclusão desta etapa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001, e com apoio da Fundação de Desenvolvimento da Unicamp (FUNCAMP) - Código do Projeto de P&D Aneel PD-00063-3042/2018.

Esta tese foi desenvolvida no âmbito de um Convênio de P&D ANEEL: CPFL-Paulista, Enercan, Foz do Chapecó, Unicamp, Funcamp, UFPe e FADE. O objetivo do projeto foi conceber e propor alternativas para um novo formato de leilão combinatório conjunto de geração e transmissão, que garanta a conexão dos novos empreendimentos de geração com a Rede Básica. Neste contexto, foram desenvolvidas duas dissertações de mestrado e duas teses de doutorado, a saber:

- Albieri, R. E. *Regras de Empacotamento para Leilão Combinatório: Aplicação no Setor Elétrico Brasileiro*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, 2021.
- Del-Puppo, O. *Aplicação de Regras de Atividade na Etapa Aberta do Leilão Reverso Combinatório: Nova Sistemática para o Setor Elétrico Brasileiro*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, 2021.
- Kazama, F. N. *Leilão Combinatório de Energia e Linha de Transmissão: Resolução por Algoritmos Evolucionários*. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, 2021.
- Silva G, L. *Nova Sistemática de Leilão Combinatório para o Setor Elétrico Brasileiro: proposta para mitigação do descasamento na contratação dos serviços de Geração e de Transmissão*. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, 2021.

Resumo

Os leilões combinatórios permitem que os participantes explorem as sinergias de itens complementares sem que incorram no risco de vencer apenas parte dos itens desejados. Por se permitir a realização de lances em pacotes de itens é necessário resolver o Problema de Identificação do Vencedor (PIV), que consiste em identificar os melhores lances vencedores do leilão sem que um mesmo empreendimento seja atribuído em mais de um pacote vencedor e, para leilões reversos, que a demanda do leilão seja atendida. O PIV é um problema combinatório classificado como \mathcal{NP} -hard, tratável apenas para instâncias pequenas do problema. O desafio para implementação do Leilão Combinatório (LC) é garantir que o PIV resultante seja uma instância tratável. A aplicação de regras de empacotamento visa atingir uma instância tratável, restringindo os pacotes permitidos do leilão e, conseqüentemente, o tamanho do problema resultante. Este trabalho enumera algumas das regras de empacotamento propostas para LC padrão e realiza experimentos com aplicações dessas regras em Leilão Reverso Combinatório (LRC). Nos experimentos são testadas duas das regras de empacotamento identificadas como mais promissoras para aplicação no setor elétrico, e comparadas com a regra que permite todos os pacotes possíveis. Os experimentos são realizados em dois tipos de leilão: Leilões de Geração e Leilão de Transmissão. Esses leilões possuem dois tipos de restrição para o atendimento da demanda do leilão: atendimento de uma capacidade de geração e uma restrição de particionamento, com a possibilidade da inclusão de algumas restrições específicas. Os tempos de formulação e de resolução dos PIVs são avaliados e apresentam um crescimento polinomial em relação ao número de pacotes permitidos. As regras de empacotamento testadas podem ser aplicadas em um LRC para permitir uma quantidade maior de itens leiloados, uma vez que sem a aplicação destas regras o aumento exponencial do número de pacotes permitidos rapidamente torna o PIV intratável.

Palavras-chave: Leilões, Programação Inteira, Regras de Empacotamento, Leilão Reverso Combinatório, Problema de Identificação dos Vencedores, Setor Elétrico Brasileiro.

Abstract

Combinatorial auctions allow participants to exploit synergies of complementary items without the risk of winning only part of the desired items. As it allows bidding on packages of items, it is necessary to solve the *Winner Determination Problem* (WDP), which consists of identifying the best winning bids of the auction without the same item being assigned in more than one winning package and, for reverse auctions, that an auction demand is met. The WDP is a combinatorial problem classified as \mathcal{NP} -hard and is treatable only for small instances of the problem. The challenge for the implementation of the combinatorial auction is to ensure that the resulting WDP is a treatable instance. The application of packing rules aims to reach a treatable instance, restricting the allowed packages of the auction and, consequently, the size of the resulting problem. This work lists some of the packing rules proposed for standard combinatorial auction and performs some experiments with applications of these rules in a reverse combinatorial auction. In the experiments, two packing rules identified as the most promising for application in the electric sector are tested and compared to the rule that allows all possible packages. These experiments are carried out in two auction formats: Generation Auctions and Transmission Auction. These auctions have two types of constraints to meet the auction's demand: meeting a generation capacity and partitioning constraints, with the possibility of including some specific constraints. The elapsed times to formulate and solve the WDPs are evaluated and present polynomial growth with the number of allowed packages. The tested packaging rules can be applied to a reverse combinatorial auction to allow a larger quantity of items to be auctioned since without the application of these rules the exponential increase in the number of allowed packages quickly makes the WDP intractable.

Key-words: Auctions, Integer Programming, Packing Rules, Combinatorial Reverse Auction, Winner Determination Problem, Brazilian Electricity Sector.

Lista de Ilustrações

3.1	Exemplo de restrições de partição com dois itens e três pacotes	38
3.2	Matriz Totalmente Unimodular (TU) com verificação para subconjunto com todas as linhas	40
3.3	Matriz TU atendendo condição suficiente	41
3.4	Exemplo de matriz sequencial TU	41
3.5	Representação de um plano de corte válido	44
3.6	Representação do método <i>Branch and Bound</i>	44
3.7	Exemplo de grafo (G_1) e grafo direcionado (G_2). Adaptado de West (2001)	47
3.8	Matriz de adjacência A e matriz de incidência C para grafo (G_1) e grafo direcionado (G_2). Adaptado de West (2001)	47
3.9	(a) Grafo simples (G), (b) Grafo completo, (c) Grafo complementar $H_{(G)}$ e (d) Grafo Vazio	48
3.10	Exemplo de um Grafo Bipartido (a) e de uma Floresta composta por duas Árvores (b)	49
3.11	Exemplo de um Grafo Perfeito (a) e seu Grafo Complementar(b)	50
3.12	Exemplo de um grafo de interseção	50
3.13	Exemplo de Problema de Fluxo de Custo Mínimo (PFCM)	51
3.14	Construção da matriz reduzida	53
3.15	Matriz reduzida indicando solução ótima	53
3.16	Método húngaro	53
3.17	Exemplo de Problema de Maximização de Conjunto Independente	54
3.18	Exemplo de hipergrafo (\mathcal{H}) e sua matriz de incidência	55
3.19	Exemplo de grafo de interseção $L_{(\mathcal{H})}$ de um hipergrafo	55
4.1	Exemplo de pacotes de itens divididos em dois conjuntos	58
4.2	Exemplo de pacotes de itens sequenciais de uma lista	59
4.3	Exemplo de pacotes de itens sequenciais de uma lista	59
4.4	Pacotes de itens sequenciais e conectados	60
4.5	Exemplo de pacotes de itens sequenciais e conectados	60
4.6	Exemplo de pacotes de itens formando uma sub-árvore	61
4.7	Exemplo de matriz de empacotamento para pacotes com no máximo dois itens (a), pacotes com um item ou de alta cardinalidade (b) e pacotes que permitem as duas regras simultaneamente (c)	63
4.8	Exemplo de pacotes de itens em linhas ou colunas inteiras	63
4.9	Exemplo de pacotes de itens em uma estrutura aninhada	64
4.10	Exemplo de pacotes de itens com restrições de sobreposição	65
5.1	Tempo para formulação do PIV em relação ao número de itens - $G1$	81
5.2	Tempo para formulação do PIV do leilão de geração por regra de empacotamento - $G1$	82
5.3	Tempo para resolução do PIV do leilão de geração por regra de empacotamento - $G1$	83
5.4	Tempo para formulação do PIV do leilão de geração por regra de empacotamento - $G2$	84
5.5	Tempo para resolução do PIV do leilão de geração por regra de empacotamento - $G2$	85

5.6	Tempo para formulação do PIV do leilão de geração por regra de empacotamento - $G3$	86
5.7	Tempo para resolução do PIV do leilão de geração por regra de empacotamento - $G3$	87
5.8	Quantidade de variáveis do PIV da geração em relação ao número de pacotes	88
5.9	Número de posições não nulas nas matrizes que formam as restrições do PIV: a) $G1$, b) $G2$ e c) $G3$	90
5.10	Tempos de formulação do PIV comparando os três problemas de geração para cada regra de empacotamento: a) SEM REGRA, b) ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e c) MÁXIMO 2 ITENS	92
5.11	Tempos de resolução do PIV comparando os três problemas de geração para cada regra de empacotamento: a) SEM REGRA, b) ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e c) MÁXIMO 2 ITENS	93
5.12	Tempo para formulação do PIV do leilão de transmissão por regra de empacotamento - $T1$	94
5.13	Tempo para resolução do PIV do leilão de transmissão por regra de empacotamento - $T1$	95
5.14	Tempo para formulação do PIV do leilão de transmissão por regra de empacotamento - $T2$	96
5.15	Tempo para resolução do PIV do leilão de transmissão por regra de empacotamento - $T2$	97
5.16	Quantidade de variáveis do PIV da transmissão em relação ao número de pacotes	99
5.17	Número de posições não nulas nas matrizes que formam as restrições do PIV: a) $T1$ e b) $T2$	100
5.18	Tempos de formulação do PIV comparando os dois problemas de transmissão para cada regra de empacotamento: a) SEM REGRA, b) ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e c) MÁXIMO 2 ITENS	101
5.19	Tempos de resolução do PIV comparando os dois problemas de transmissão para cada regra de empacotamento: a) SEM REGRA, b) ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e c) MÁXIMO 2 ITENS	102

Lista de Tabelas

5.1	Características dos exemplos de Geração	76
5.2	Quantidade de variáveis e de restrições dos PIVs de Geração	77
5.3	Características dos exemplos de Transmissão	78
5.4	Quantidade de variáveis e de restrições dos PIVs de Transmissão	79
5.5	Tempos de formulação em relação ao número de pacotes permitidos - $G1$.	82
5.6	Tempos de resolução em relação ao número de pacotes permitidos - $G1$. .	83
5.7	Tempos de formulação em relação ao número de pacotes permitidos - $G2$.	84
5.8	Tempos de resolução em relação ao número de pacotes permitidos - $G2$. .	85
5.9	Tempos de formulação em relação ao número de pacotes permitidos - $G3$.	87
5.10	Tempos de resolução em relação ao número de pacotes permitidos - $G3$. .	88
5.11	Tempos de formulação em relação ao número de pacotes permitidos - $T1$.	95
5.12	Tempos de resolução em relação ao número de pacotes permitidos - $T1$. .	96
5.13	Tempos de formulação em relação ao número de pacotes permitidos - $T2$.	97
5.14	Tempos de resolução em relação ao número de pacotes permitidos - $T2$. .	98

Lista de Abreviaturas e Siglas

- ACL** Ambiente de Contratação Livre
- ACR** Ambiente de Contratação Regulado
- ANEEL** Agência Nacional de Energia Elétrica
- CCA** *Combinatorial Clock Auction*
- CCEAR** Contrato de Comercialização de Energia no Ambiente Regulado
- CCEE** Câmara de Comercialização de Energia Elétrica
- CVU** Custo Variável Unitário
- EOL** Usina Eólica
- EPE** Empresa de Pesquisa Energética
- FCC** *Federal Communications Commission*
- LC** Leilão Combinatório
- LE** Leilão Estruturante
- LEN** Leilão de Energia Nova
- LER** Leilão de Energia de Reserva
- LET** Leilão de Empreendimentos de Transmissão
- LFA** Leilão de Fontes Alternativas
- LRC** Leilão Reverso Combinatório
- PAUSE** *Progressive Adaptive User Selection Environment*
- PCH** Pequena Central Hidrelétrica
- PLD** Preço de Liquidação das Diferenças
- PFCM** Problema de Fluxo de Custo Mínimo
- PIV** Problema de Identificação do Vencedor
- PMCI** Problema de Maximização de Conjunto Independente
- PLI** Programação Linear Inteira
- PLIM** Programação Linear Inteira Mista
- RAP** Receita Anual Permitida

SEB Setor Elétrico Brasileiro

SIN Sistema Interligado Nacional

TU Totalmente Unimodular

UFV Usina Solar Fotovoltaica

UHE Usina Hidrelétrica

UTE Usina Termelétrica

VCG Vickrey-Clarke-Groves

WDP *Winner Determination Problem*

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Contribuição do Trabalho	18
1.2	Estrutura dos Capítulos	18
2	TEORIA DE LEILÕES	20
2.1	Leilões de Bens Únicos	21
2.1.1	Leilão Inglês	21
2.1.2	Leilão Holandês	21
2.1.3	Leilão Fechado de Primeiro Preço	22
2.1.4	Leilão Fechado de Segundo Preço	22
2.1.5	Relações entre os leilões básicos	23
2.2	Leilões de Bens Múltiplos	23
2.2.1	Sequencial	24
2.2.2	Simultâneo	24
2.2.3	Combinatório	26
2.3	Leilões no Setor Elétrico Brasileiro	30
2.3.1	Empreendimentos de Geração	30
2.3.2	Empreendimentos de Transmissão	33
2.3.3	Complementaridades entre Empreendimentos	34
3	INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE IDENTIFICAÇÃO DO VENCEDOR	35
3.1	Problemas de Otimização	35
3.2	Caso 1: Leilão reverso com todos itens leiloados	37
3.2.1	Programação Linear	39
3.2.2	Matriz Totalmente Unimodular	40
3.3	Caso 2: Leilão reverso com atendimento de uma demanda	42
3.3.1	Programação Linear Inteira	42
3.4	Outras Representações do Problema de Identificação do Vencedor	46
3.4.1	Conceitos Básicos de Grafos	46
3.4.2	Otimização em Grafos	50
3.4.3	Hipergrafos	54
4	REGRAS DE EMPACOTAMENTO	57
4.1	Regras baseadas em matrizes totalmente unimodulares	57
4.1.1	Pacotes de itens divididos em dois conjuntos	57
4.1.2	Pacotes de itens sequenciais de uma lista	58
4.1.3	Pacotes de itens sequenciais de uma lista circular	59
4.2	Regras baseadas em grafos de interseção	59
4.2.1	Pacotes de itens sequenciais e conectados	60
4.2.2	Pacotes de itens formando uma sub-árvore	61
4.3	Regras baseadas em hipergrafos	61
4.3.1	Pacotes de itens baseados na cardinalidade	62
4.3.2	Pacotes de itens em linhas ou colunas inteiras	62
4.3.3	Pacotes de itens em uma estrutura aninhada	64
4.3.4	Pacotes de itens com restrições de sobreposição	65
5	EXPERIMENTOS EM UM LEILÃO REVERSO COMBINATÓRIO	66
5.1	Leilão Reverso Combinatório proposto	66

5.1.1	Definição dos Produtos	66
5.1.2	Sistemática do Leilão	67
5.1.3	Modelagem matemática do Problema de Identificação do Vencedor	69
5.2	Metodologia	75
5.3	Resultados	80
5.3.1	Problema 1 do Leilão Geração - G1	80
5.3.2	Problema 2 do Leilão Geração - G2	83
5.3.3	Problema 3 do Leilão Geração - G3	86
5.3.4	Comparação entre os resultados dos leilões de geração . .	88
5.3.5	Problema 1 do Leilão Transmissão - T1	93
5.3.6	Problema 2 do Leilão Transmissão - T2	96
5.3.7	Comparação entre os resultados dos leilões de transmissão	98
5.4	Considerações finais	103
6	CONCLUSÃO	104
	REFERÊNCIAS	108

1 INTRODUÇÃO

Os leilões são a principal ferramenta para contratação de energia elétrica e dos serviços de transmissão no Brasil, sendo cruciais para a expansão do Sistema Interligado Nacional (SIN). O foco dos leilões do Setor Elétrico Brasileiro (SEB) é realizar estas contratações em um ambiente competitivo e que incentive a modicidade tarifária.

Os leilões de novos empreendimentos de geração são realizados para contratar energia elétrica necessária para atender o crescimento da demanda do Ambiente de Contratação Regulado (ACR). Os Leilões de Empreendimentos de Transmissão (LETs) são realizados para expandir o sistema de transmissão do SEB, de modo a aumentar a eficiência na transmissão de energia, juntamente com a segurança e confiabilidade do sistema, além de interligar zonas isoladas e novos empreendimentos de geração ao SIN.

Apesar de ambos leilões estimularem a concorrência, a forma de realização dos leilões de forma sequencial visa a otimização de construção dos empreendimentos de maneira segmentada. Como os empreendimentos de geração de energia muitas vezes dependem da expansão da rede de transmissão, estes deveriam ser analisados conjuntamente para garantir a otimalidade da expansão do SIN.

Se houver complementaridade entre os empreendimentos, um formato de leilão que permita aos licitantes explorar essas complementaridades será mais eficiente. A complementaridade pode ser percebida quando dois ou mais empreendimentos juntos têm um maior valor para um participante do que a soma dos valores de se obter esses mesmos empreendimentos isoladamente. Com o formato atual dos leilões os participantes que desejam construir empreendimentos complementares se portam de maneira mais conservadora, por não existir uma garantia de conseguir todo o pacote de empreendimentos desejado ou nenhum deles.

Como uma solução para os problemas mencionados acima se propõe a implementação de um Leilão Reverso Combinatório (LRC) no setor elétrico. Este leilão deve permitir aos participantes realizarem lances em diferentes combinações dos empreendimentos de geração ou de transmissão. Para a identificação dos vencedores do leilão deve ser resolvido um problema de otimização combinatório, de forma a identificar qual é a combinação de lances vencedores que minimize o pagamento total dos pacotes, classificando empreendimentos de geração suficientes para atender a demanda e não classificando nenhum dos empreendimentos em mais de um pacote vencedor. Este problema de otimização é conhecido como Problema de Identificação do Vencedor (PIV).

Com a possibilidade de realizar LRCs outros problemas enfrentados no SEB podem ser minimizados, como os ilhamentos de ativos de geração. Os ilhamentos ocorrem quando um gerador está apto a operar, mas não consegue entregar energia ao SIN devido às restrições na transmissão, geralmente causadas por atraso da obra de transmissão ou descasamento das datas de conclusão devido a falta de coordenação da expansão. Os

ilhamentos de ativos de geração ocorridos a partir de 2010 já somam prejuízos superiores a R\$ 3 bilhões, que foram arcados pelo consumidor final de energia (CORREIA et al., 2020). Os riscos ligados a ocorrência de ilhamentos podem ser reduzidos se existir uma garantia que o empreendimento de geração não conectado só será declarado vencedor em um leilão caso o empreendimento de transmissão necessário para a conexão no SIN também seja. Esta garantia pode ser incluída como forma de restrição do PIV a ser resolvido no leilão.

1.1 Contribuição do Trabalho

A implementação de um LRC no SEB pode contribuir para a coordenação da expansão do SIN, considerando o conjunto de empreendimentos de geração e transmissão. Também deve tornar possível que os participantes demonstrem suas preferências em forma de lances nos pacotes desejados. Entretanto, dependendo do número de empreendimentos no leilão, o aumento do número de possíveis combinações de itens é exponencial, tornando o PIV intratável para instâncias maiores. Nestes casos, se mostra necessária a aplicação de regras de empacotamento para restringir o problema a instâncias tratáveis.

O aumento do número de possíveis pacotes também gera um problema de elicitação de preferências por parte dos participantes, já que a quantidade de pacotes que os participantes conseguem analisar para definir qual lance deve ser realizado é limitada.

O objetivo deste trabalho é propor regras de empacotamento para utilização em LRCs visando principalmente a aplicação no SEB, mas que também podem ser utilizadas ou adaptadas para outras aplicações. Algumas destas regras limitam a quantidade de pacotes possíveis para garantir uma boa estrutura do PIV, enquanto outras visam dar mais liberdade na formação dos pacotes, limitando apenas o tamanho do problema a ser tratado.

1.2 Estrutura dos Capítulos

O Capítulo 2 mostra uma visão geral das caracterizações de leilões de forma a contextualizar a utilização de um leilão combinatório. Também são apresentadas características dos leilões atuais do setor elétrico e é evidenciado como os empreendimentos podem ter as características de complementaridade.

A utilização das regras de empacotamento influencia diretamente na formulação do PIV a ser resolvido no LRC, portanto é necessário um aprofundamento de como este problema pode ser formulado e os possíveis métodos de solução que podem ser aplicados para encontrar a solução ótima. Além disso, um leilão reverso necessita que uma demanda do leilão seja atendida. No Capítulo 3 são identificados dois casos de leilão reverso que apresentam diferentes formas de atender uma demanda do leilão. A partir

desses casos é evidenciado o embasamento matemático para entender a proposição de algumas das regras de empacotamento.

As regras de empacotamento são enumeradas no Capítulo 4, apontando as principais características, quantidade de pacotes permitidos em relação ao número de itens leiloados e estrutura da matriz de empacotamento resultante.

No Capítulo 5 é apresentada a sistemática do leilão proposto, a modelagem matemática dos PIVs a serem testados e os experimentos para as regras de empacotamento mais promissoras.

Finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões deste trabalho e sugestões para futuros trabalhos relativos a LRCs.

2 TEORIA DE LEILÕES

Leilão é um mecanismo de mercado para negociar itens (serviços ou produtos), utilizado principalmente quando não existe um preço para o item. Desta forma, também serve como um mecanismo de revelação de preço.

Cada participante do leilão tem um valor para o item leiloado. Assumindo que os participantes dão seus lances de maneira racional em um leilão padrão, estes irão buscar estratégias para realizarem lances de forma a maximizar seu benefício. Se o valor do lance realizado for muito inferior à sua valoração, visando o aumento do benefício, o participante pode não ser vencedor do item. Se o valor do lance for superior à sua valoração, o participante pode cair na “maldição do vencedor”, quando realiza um lance vencedor, mas que lhe trará prejuízo. Desta forma, os leilões devem ser estudados como jogos de informações incompletas, onde os participantes não têm informações sobre a valoração e estratégias de seus concorrentes.

Ao se desenhar um leilão é preciso se levar em conta o objetivo do leiloeiro e as características dos itens. Para obtenção de melhores resultados é importante incentivar a competição entre os participantes. A incerteza de vencer é o que motiva os participantes a aceitarem diminuir seus benefícios. Também é necessário o aporte de uma garantia financeira e assinatura de termos de participação para assegurar que os participantes honrem os lances realizados.

Os leilões podem ser classificados segundo a intenção do leiloeiro, como leilão padrão, reverso ou duplo. O leilão padrão ocorre quando o leiloeiro quer vender um ou mais itens aos participantes com o objetivo de maximizar a arrecadação. Este tipo é o mais observado na literatura e é muito utilizado em leilões de obras de arte, gado, bens confiscados e produtos vendidos online. Já o leilão reverso tem como objetivo a aquisição pelo leiloeiro de um ou mais itens ao menor valor possível. Os leilões reversos são utilizados em licitações, onde os participantes ofertam os valores de suas receitas desejadas para entregar o item, sendo vencedor o participante com menor preço. Geralmente, o leiloeiro estabelece pré-requisitos de compra os quais devem ser cumpridos pelos itens ofertados pelos participantes. O leilão duplo é caracterizado pelo fato de os participantes vendedores e compradores realizarem lances simultaneamente. Este leilão pode ocorrer com a intermediação de um leiloeiro, centralizando todas as negociações dos itens, ou sem esta intermediação, onde os participantes compradores realizam negociações diretamente com um participantes vendedores.

Os leilões também podem ser classificados segundo a quantidade de bens a serem leiloados, que são evidenciadas nas Seções 2.1 e 2.2. Estas seções explicam as sistemáticas dos modelos como leilões padrão, tendo em vista que são os mais comuns na literatura. Entretanto, todos os modelos podem ser aplicados aos leilões reversos, sendo necessário apenas a reversão dos conceitos.

2.1 Leilões de Bens Únicos

Os leilões de bens únicos são caracterizados pela disputa entre vários participantes para se adquirir um único item indivisível. O item pode ser formado por mais de um produto, porém o leiloeiro opta por leiloar o conjunto inteiro ou nada, sendo tratado como indivisível. Segundo McAfee e McMillan (1987) existem quatro tipos básicos de leilões: inglês, holandês, fechado de primeiro preço e fechado de segundo preço, ou de Vickrey. Entretanto, os leilões também podem ser formatados de forma híbrida, incorporando conceitos de mais de uma das formas básicas.

2.1.1 Leilão Inglês

O leilão inglês padrão, ou leilão aberto progressivo, é o modelo de leilão mais conhecido. Se inicia com um preço de abertura e segue com os participantes dando lances abertos de maneira ascendente. O item não é leiloado se nenhum participante realizar um lance com valor maior que o preço de reserva, que é o preço mínimo pelo qual o leiloeiro aceita vender o item. O leilão tem continuidade até que apenas um participante esteja interessado no item ao valor do último lance realizado, sendo declarado vencedor e devendo pagar o valor de seu lance. Todos os lances dados pelos participantes são informações públicas, desta forma todos os participantes sabem o valor do maior lance corrente no decorrer de todo o leilão.

A progressão de submissão dos lances pode ser realizada com os participantes declarando seus valores de lance ou aceitando os preços indicados pelo leiloeiro ao longo das rodadas. Na primeira maneira, deve-se estipular regras de incremento mínimo nos lances, de modo a acelerar o processo de convergência do preço do item e regras para evitar o *jump bidding*¹.

Vickrey (1961) menciona que o resultado esperado deste tipo de leilão é que o participante com maior valoração seja vencedor e pague pelo item o preço da segunda maior valoração. O leilão deve acabar quando o participante com segundo maior valor de lance desistir da concorrência, que deve ocorrer quando este não tiver mais chance de obter benefício.

2.1.2 Leilão Holandês

O leilão holandês padrão inicia com um preço de lance relativamente alto de maneira que nenhum participante aceite a proposta. O preço do item é continuamente reduzido até que o primeiro participante aceite comprar o item pelo preço corrente, encerrando o leilão. Caso o preço corrente atinja o preço de reserva antes que algum participante

¹*Jump bidding* ocorre quando um participante realiza um lance substancialmente melhor que o preço corrente para sinalizar aos outros participantes que o item tem alto valor e desincentivar a concorrência pelo item.

realize um lance, o item não é leiloado.

Cada participante deve ajustar sua estratégia para submeter o lance, pois o aumento de seu benefício implica na redução das suas chances de obter o item. Desta maneira, o participante deve balancear o seu lance considerando qualquer conhecimento que se tenha sobre os concorrentes (VICKREY, 1961).

Este tipo de leilão foi muito utilizado no comércio atacado de flores na Holanda, de onde se origina o nome, e se mostrou muito eficiente por ser simples e proporcionar um resultado rápido (VICKREY, 1961). Nestes leilões de flores, caso o preço atingisse o preço de reserva o lote inteiro era triturado na frente de todos, de forma a incentivar a compra dos próximos lotes por preços mais elevados. Segundo McAfee e McMillan (1987) o leilão holandês também foi utilizado para comercialização de peixe em Israel e tabaco no Canadá.

2.1.3 Leilão Fechado de Primeiro Preço

No leilão fechado de primeiro preço todos os participantes devem submeter seu lance em um envelope fechado. Assim que todos os lances forem recebidos, o leiloeiro abre os envelopes e declara como vencedor o participante com maior lance. O vencedor deve pagar pelo item o seu valor ofertado. O leiloeiro deve estabelecer uma regra para o caso de empate neste tipo de leilão. Este modelo é muito utilizado para se realizar licitações de bens públicos, porém como um leilão reverso.

2.1.4 Leilão Fechado de Segundo Preço

O leilão fechado de segundo preço foi idealizado por William Vickrey e por isso também é conhecido por leilão de Vickrey. Este funciona de maneira semelhante ao leilão fechado de primeiro preço com a diferença que o vencedor é o participante que realizou o maior lance, porém deverá pagar o preço do segundo maior lance.

Segundo Vickrey (1961) a estratégia dominante é que cada participante realize lance igual à sua valoração. Desta forma, é esperado que o participante com maior valoração seja vencedor e obtenha benefício correspondente à diferença entre a maior e a segunda maior valoração (assumindo que não haja colusão entre os participantes). Essa estratégia é dominante, pois realizar um lance inferior à sua valoração apenas diminui a chance do participante de ser vencedor, sendo indiferente para seu benefício. Por outro lado, realizar um lance superior à sua valoração aumenta sua chance de vencer apenas na circunstância em que ele obtenha prejuízo.

Vickrey (1961) menciona que o leilão holandês também pode ser modificado para funcionar como um leilão de segundo preço. O primeiro participante a aceitar o preço corrente é o vencedor. O leilão continua sem que os participantes saibam que já está definido um vencedor, até que um segundo participante aceite o preço corrente.

Desta forma, o participante com maior valor de lance é o vencedor do item pagando o preço aceito pelo participante com segundo maior valor de lance. A estratégia dominante do participante também é aceitar o preço corrente apenas quando este chegar em sua valoração.

2.1.5 Relações entre os leilões básicos

Os leilões básicos mencionados acima apresentam algumas relações, como formas semelhantes de comportamento dos participantes e resultados esperados.

Nos leilões holandês e fechado de primeiro preço os participantes não têm nenhuma informação de aprendizado durante o leilão. Desta forma, cada participante tem um valor de lance pelo qual estará disposto a aceitar o item, e este valor deve ser inferior à sua valoração para que o participante obtenha benefício. O vencedor não será necessariamente o participante com maior valoração, mas sim o participante com maior valor de lance, e pagará este pelo item. Segundo Easley e Kleinberg (2010) essas afirmações podem ser comprovadas matematicamente.

Para participantes racionais também são esperados resultados similares para os leilões inglês e fechado de segundo preço (EASLEY; KLEINBERG, 2010). No leilão inglês o participante deve sair do leilão caso o preço corrente seja superior à sua valoração, pois não terá mais a possibilidade de obter benefício, e deve se manter na concorrência caso contrário. O resultado esperado do leilão é que o participante com maior valoração seja vencedor pagando pelo item o preço da segundo maior valoração.

À primeira vista pode parecer que o leilão fechado de primeiro preço gera maiores benefícios para o leiloeiro do que o de segundo preço, dado que o leiloeiro recebe o valor do melhor lance ao invés do segundo melhor. Entretanto, deve-se levar em conta que as estratégias dos participantes para realizar os lances variam de acordo com as regras do leilão, sendo esperado que os valores de lance no leilão de primeiro preço sejam inferiores aos de segundo preço (EASLEY; KLEINBERG, 2010).

2.2 Leilões de Bens Múltiplos

Nos leilões de bens múltiplos são negociados conjuntamente vários bens e podem ser: sequenciais, simultâneos ou combinatórios. O sequencial se formata como vários leilões de bens únicos realizados de forma consecutiva, onde o apregoamento de um item se inicia após terminado o apregoamento do item anterior. No simultâneo, os itens são leiloados paralelamente e a definição dos vencedores ocorre de forma simultânea. Já o leilão combinatório permite que o participante realize lances em pacotes de itens, de forma que trate todo o pacote como um único item. Existe a possibilidade de realizar leilões híbridos, que contenham características dos diferentes formatos.

Ao se realizar leilões com múltiplos itens torna-se importante a análise da

relação entre os itens oferecidos, para se obter maior eficiência. Os itens podem ser substitutos, complementares ou indiferentes, e essa caracterização pode ser percebida de maneira diferente pelos participantes.

Itens são substitutos quando a soma da valoração de cada item, analisados separadamente, é superior a valoração do conjunto dos itens. Isto ocorre, por exemplo, quando dois itens têm a mesma função, sendo desejável a obtenção de apenas um deles. De maneira oposta, itens complementares têm valoração do conjunto superior à soma da valoração dos itens separados. Exemplos de percepção de complementaridade entre empreendimentos do setor elétrico são explicitados na Seção 2.3.3. Itens que são indiferentes não geram nenhuma relação de complementaridade ou de substituição.

2.2.1 Sequencial

Este modelo de leilão de múltiplos itens é o mais comum devido à sua fácil aplicação. Em geral, são utilizados os modelos de bens únicos de forma sequencial, onde o segundo item é leiloado após o resultado do primeiro item ser divulgado, o terceiro após o segundo, e assim por diante. A ordem em que os itens serão leiloados pode afetar o resultado final do leilão, pois a aquisição de um item anterior ou a expectativa de ser vencedor de um item posterior pode influenciar a estratégia dos participantes.

Krishna (2010) analisa o equilíbrio de lances para leilões sequenciais de primeiro e de segundo preço com diversos itens idênticos. Apesar de os modelos teóricos indicarem que os preços tendem a ser constantes ou crescentes, existem evidências que mostram preços decrescentes em leilões de arte e de vinhos. Este fato foi nomeado como *the declining price anomaly* ou anomalia do preço decrescente, em tradução livre. McAfee e Vincent (1993) estudam as implicações da aversão ao risco dos participantes em um leilão sequencial para explicar esta anomalia, e indicam que esse evento pode ocorrer quando um participante com maior riqueza tem maior aversão ao risco.

2.2.2 Simultâneo

O leilão simultâneo se caracteriza por definir os ganhadores e os preços a serem pagos de forma simultânea. Nos leilões simultâneos fechados se realizam lances em todos os itens do leilão em um único envelope fechado. Nos leilões simultâneos abertos existe uma aprendizagem no decorrer do leilão, desta forma o resultado tende para um equilíbrio de mercado.

Um exemplo de leilão simultâneo aberto é o silencioso, utilizado em alguns leilões de eventos de caridade. Os convidados podem dar lances em todos os itens escrevendo no papel a frente do item seu valor de lance e sua identificação. O leilão finaliza em um horário pré-determinado, sendo vencedores os participantes que realizarem o maior lance em cada item. Neste modelo é comum os participantes esperarem os momentos

finais para realizar seus lances.

Em 1994 a *Federal Communications Commission* (FCC) realizou um leilão ascendente simultâneo para vender licenças para uso de bandas de espectro de rádio nos Estados Unidos (CATON, 1994). Este formato de leilão é realizado em várias rodadas de lances fechados. A cada rodada é divulgado pelo menos o maior lance realizado em cada item, podendo também ser identificado o participante responsável pelo lance. Conforme as rodadas vão progredindo, os participantes aumentam os valores dos lances nos itens. O leilão é encerrado para todos os itens simultaneamente quando não há novo lance. Os vencedores são os participantes detentores dos maiores lances em cada item, pagando o valor do seu lance (MILGROM, 2000).

Para o bom funcionamento do leilão ascendente simultâneo é necessário definir um incremento mínimo dos lances, regras de atividades e regra para retirada do lance. Incremento mínimo ajuda a agilizar a convergência do leilão, enquanto as regras de atividade incentivam os participantes a realizarem os lances ativamente, aumentando a informação disponível no leilão (MILGROM, 2000). A regra de retirada de lance dá maior liberdade aos participantes para alterarem suas estratégias no decorrer do leilão, porém ela penaliza o participante caso o item seja vendido por um preço inferior ao lance retirado, sendo necessário pagar pela diferença.

O leilão do tipo *clock* também é um leilão simultâneo aberto. Inicialmente são estipulados preços da rodada para todos os itens e os participantes devem dar lances aceitando ou rejeitando os itens. Os preços para um leilão padrão começam relativamente baixos e, somente para os itens em que há excesso de demanda na rodada, aplica-se uma regra de incremento de preço. Novas rodadas são realizadas com os preços sendo atualizados até que uma regra de parada seja atingida, por exemplo, quando todos os itens tiverem demanda menor ou igual a oferta. Como os participantes não indicam o valor de seus lances diretamente, este tipo de leilão evita que participantes sinalizem itens desejados através de *jump bidding*. Uma característica importante para o bom andamento deste leilão é a definição da regra de incremento. Incrementos muito pequenos nos valores podem levar a um número muito grande de rodadas, enquanto incrementos muito grandes podem levar a ineficiências deixando itens com demanda menor que oferta (AUSUBEL; CRAMTON; MILGROM, 2006).

Para reduzir essas ineficiências, o leilão do tipo *clock* pode ser utilizado em um leilão híbrido como uma primeira fase para o descobrimento de preços dos itens. Para melhorar a descoberta de preços pode-se incluir algumas regras de atividade, como as regras de: Milgrom-Wilson, também chamada de regra de elegibilidade; monotonicidade; revelação da preferência (AUSUBEL; CRAMTON; MILGROM, 2006). Para maiores informações sobre regras de atividade pode ser consultado o trabalho de Del-Puppo (2021, no prelo).

2.2.3 Combinatório

Os leilões combinatórios são caracterizados por permitir que os participantes realizem lances em pacotes de itens, garantindo que, ou receberão todos os itens do pacote, ou nenhum dos itens. Com isto, os participantes conseguem indicar suas preferências nos pacotes de itens em forma de lances. A possibilidade de realizar lances em pacotes gera um problema de identificar quais são os lances vencedores. Este problema é conhecido como Problema de Identificação do Vencedor (PIV), e se caracteriza como um problema de otimização que visa maximizar o benefício do leiloeiro, tendo como restrição que cada item não esteja contido em mais de um pacote vencedor.

A dificuldade de resolução do PIV faz com que organizadores de leilões evitem a implementação de leilões combinatórios. A FCC reconhece no quinto relatório os benefícios que os lances combinatórios poderiam trazer, mas reporta que o leilão ascendente simultâneo poderia trazer muitos dos benefícios esperados pelo leilão combinatório, mas sem precisar lidar com a complexidade do PIV (CATON, 1994). A comissão indica que, em um leilão simultâneo, o risco de o participante não ser vencedor em todos os itens desejados em seu pacote é limitado por se permitir que as licenças sejam transacionadas após o término do leilão e pela possibilidade de retirar o lance, mediante a regra previamente mencionada na Seção 2.2.2.

Para se garantir a transparência do leilão combinatório devem ser divulgadas todas as informações necessárias para que os participantes possam confirmar o resultado do leilão, resolvendo o PIV quando necessário. Em alguns tipos de leilões a transparência é inerente da própria sistemática do leilão, enquanto em outros, como leilões com lance fechado, é necessário a divulgação de informações posteriormente ao leilão, como todos os lances válidos realizados.

Os leilões combinatórios podem ser interessantes para itens complementares, podendo aumentar a receita total do leiloeiro sem prejudicar os participantes, que só realizarão lances melhores caso tenham um benefício esperado pela complementaridade entre os itens. Como os participantes têm valorações diferentes para os itens e os pacotes, a combinação ótima pode ser tanto o pacote de itens de um participante, quanto a alocação dos itens de forma separada para os participantes com melhores lances.

Para a inserção de preços de reserva, pode-se considerar o leiloeiro como um participante que realiza lances em todos os pacotes simples (contendo apenas um item) com valor igual ao respectivo preço de reserva. O PIV deve considerar esses lances para realizar a otimização dos pacotes vencedores e, caso o leiloeiro seja vencedor de algum lance, o item correspondente não é leilado.

A seguir são apresentados diferentes formatos de leilões combinatórios como: *Progressive Adaptive User Selection Environment* (PAUSE), iterativo, *clock* combinatório, fechado de primeiro preço e fechado de segundo preço.

2.2.3.1 *Progressive Adaptive User Selection Environment (PAUSE)*

O leilão PAUSE apresentado por Kelly e Steinberg (2000) é um leilão descentralizado, retirando do leiloeiro a necessidade de resolver o PIV e dividindo a complexidade do Leilão Combinatório (LC) entre os participantes. Este leilão é dividido em duas etapas. Na primeira etapa é permitido que os participantes realizem lances apenas nos itens, como ocorre em um leilão simultâneo aberto e todos os lances realizados são adicionados na lista de lances válidos. A segunda etapa do leilão ocorre em estágios e rodadas.

No primeiro estágio os participantes realizam lances em pacotes de dois itens, porém o lance deve ser realizado como parte de uma oferta composta. Esta oferta deve gerar uma solução factível, formada pelo lance realizado juntamente com a indicação de outros lances contidos na lista de lances válidos, sendo que estes não são necessariamente deste mesmo participante. Uma vez que o lance em um pacote é aceito, este entra na lista de lances válidos. Desta forma, o leiloeiro precisa apenas verificar a cada rodada se todos os lances dos participantes são válidos e avaliar se o valor da oferta composta é melhor que a oferta composta da rodada anterior. São permitidas várias rodadas até que nenhum participante submeta um novo lance. Em seguida inicia-se o segundo estágio onde são permitidos pacotes de três itens, com o mesmo procedimento do estágio anterior. O leilão segue até o estágio em que são permitidos a realização de lances no pacote com todos os itens.

Para evitar um grande número de rodadas é necessário um bom ajuste dos incrementos mínimos no resultado para o lance ser aceito como válido. Também é aconselhável impor um incremento máximo para impedir a sinalização dos participantes através do *jump bidding*.

O PAUSE é um leilão transparente por permitir que todos participantes comparem seus lances na oferta composta indicada com a solução final. Neste modelo a realização dos lances compostos por parte dos participantes pode se tornar complexo, pois idealmente o lance deve ser otimizado para indicar a melhor combinação de lances válidos que complemente o novo lance realizado. A complexidade aumenta progressivamente conforme são realizados os estágios e vão se acumulando o número de lances válidos.

2.2.3.2 *Leilão Combinatório Iterativo*

Neste tipo de leilão os participantes realizam lances em pacotes de forma iterativa. A cada nova rodada, os participantes podem ajustar seus lances tendo como base as informações sobre os lances provisoriamente vencedores, relativas à rodada anterior.

Segundo Parkes (2006) o LC iterativo é transparente por divulgar a cada rodada as informações dos pacotes parcialmente vencedores e, como os lances vão melhorando gradativamente, o participante não precisa indicar suas valorações reais para cada

pacote em uma única rodada, revelando parcialmente ou indiretamente suas informações privadas. Apesar dos benefícios, este leilão gera oportunidades para os participantes tentarem manipular o resultado. Para contornar estes problemas devem ser aplicadas regras de atividades que incentivem a realização de lances ativamente e a demonstração das preferências.

O LC iterativo facilita o problema de elicitação das preferências por parte dos participantes, uma vez que reduz o custo de valorar e enviar lances para todos os diferentes pacotes desejados, sendo enviados de acordo com a progressão do leilão. Apesar de ajudar a distribuir o custo computacional da resolução do PIV entre os participantes é necessário que o PIV seja resolvido a cada rodada.

2.2.3.3 Leilão *Clock* Combinatório

O leilão *clock* combinatório, ou *Combinatorial Clock Auction* (CCA), difere de um leilão simultâneo *clock*, mencionado na Seção 2.2.2, pela realização de lances em pacotes. Dados os preços dos itens na rodada, o participante pode realizar lances em diferentes pacotes. É permitido que o participante indique lances em pacotes misturando os valores de itens em rodadas anteriores, desde que pelo menos um dos itens do pacote tenha o valor da rodada atual (PORTER et al., 2003). Para realizar a contagem da demanda de cada item deve-se garantir que cada participante seja contado apenas uma vez, não permitindo contagem dupla caso o mesmo participante inclua um item em mais de um dos seus pacotes da rodada. Após contabilizada a demanda dos itens da rodada, são aplicados os incrementos de preços nos itens de acordo com a regra estipulada e uma nova rodada é realizada. O leilão termina quando todos os itens tem demanda menor ou igual à oferta.

Todos os lances nas rodadas são elegíveis para a consideração do leiloeiro. No caso específico de a última rodada terminar com todos os itens inclusos em lances não conflitantes, então todos os lances são aceitos. Caso contrário, deve-se realizar a otimização do PIV com todos os lances elegíveis de forma a encontrar a melhor solução para o leiloeiro. Como no leilão tipo *clock*, o CCA também pode ser utilizado em um leilão híbrido como uma primeira fase para descoberta de preços, indicando todos os lances elegíveis para serem utilizados na próxima fase.

2.2.3.4 Leilão Combinatório Fechado de Primeiro Preço

Este leilão se assemelha muito ao fechado de primeiro preço descrito na Seção 2.1.3 com a diferença de os lances serem realizados em pacotes. Todos os participantes devem realizar lances fechados em todos os pacotes que desejam indicando os itens e o valor de lance. Após o recebimento de todos os lances o leiloeiro deve resolver o PIV. Os participantes com os lances aceitos são classificados como vencedores e pagam o valor de

seus lances pelo pacotes vencedores.

2.2.3.5 Leilão Combinatório Fechado de Segundo Preço: Mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves (VCG)

O LC fechado de segundo preço utiliza o mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves (VCG) para definir os valores a serem pagos pelos participantes vencedores. A sistemática do leilão é exatamente igual ao LC fechado de primeiro preço.

Após todos os lances serem listados é realizada a otimização do PIV. São definidos os participantes vencedores e quais são os pacotes aceitos. A solução deste PIV será chamada de resultado principal e a soma dos lances aceitos é W . O equacionamento do valor do resultado principal é mostrado na Equação 2.1

$$W = \sum_{s \in S} \sum_{i: p_i \in P^*} b_{is} x_{is} \quad (2.1)$$

onde b_{is} representa o valor de lance do participante p_i no pacote s , x_{is} indica se o lance foi aceito ou não, S é o conjunto de pacotes permitidos do leilão e P^* o conjunto de participantes vencedores no resultado principal do leilão.

O pagamento de cada participante vencedor v_i é o valor de seus lances aceitos menos o benefício que este traz ao leiloeiro ao participar do leilão. Este benefício é a soma dos lances aceitos no resultado principal W menos o resultado do PIV caso o participante p_i não participasse do leilão W_{-i} . O equacionamento do resultado do PIV desconsiderando os lances do participante p_i é evidenciado na Equação 2.2

$$W_{-i} = \sum_{s \in S} \sum_{j: p_j \in P_{-i}^*} b_{js} x_{js} \quad (2.2)$$

onde b_{js} representa o valor de lance do participante p_j no pacote s , x_{js} indica se o lance foi aceito ou não, S é o conjunto de pacotes permitidos do leilão e P_{-i}^* o conjunto de participantes vencedores no leilão desconsiderando os lances realizados pelo participante p_i .

A quantidade de participantes vencedores no resultado principal indica o número de vezes adicionais em que o PIV deve ser resolvido, de forma a calcular o valor do resultado excluindo cada um dos participantes vencedores. A formulação do valor v_i a ser pago pelo participante vencedor p_i é mostrada na Equação 2.3.

$$\begin{aligned}
v_i &= \sum_{s \in S} b_{is} x_{is} - (W - W_{-i}) & \forall i : p_i \in P^* \\
&= W_{-i} - (W - \sum_{s \in S} b_{is} x_{is}) & (2.3)
\end{aligned}$$

Com o rearranjo de termos da Equação 2.3 pode-se notar que o termo entre parênteses representa o somatório de todos os valores de lances vencedores excluindo os lances vencedores do participante p_i . Como o primeiro termo representa a soma dos lances aceitos caso o participante p_i não participasse do leilão, pode-se concluir que o valor a ser pago por cada participante não depende dos valores de seus próprios lances. O valor de seu lance serve apenas para definir se será declarado vencedor no(s) pacote(s) desejado(s). Desta forma a estratégia ótima de lance é realizar os lances sinceros nos pacotes desejados (AUSUBEL; CRAMTON; MILGROM, 2006).

A utilização do mecanismo de VCG funciona bem quando os participantes realizam lances sinceros, porém a possibilidade de colusão entre os participantes pode gerar uma baixa receita ao leiloeiro (podendo até chegar a zero). Para evitar este tipo de resultado o leiloeiro deve estabelecer preços de reserva para todos os itens, de forma a receber pelo menos a soma dos preços de reserva dos itens contidos no pacote.

2.3 Leilões no Setor Elétrico Brasileiro

2.3.1 Empreendimentos de Geração

Os leilões ocorridos no setor elétrico para viabilizar a construção de novos empreendimentos de geração tem sido, nos últimos anos, do tipo Leilão de Energia Nova (LEN), Leilão de Energia de Reserva (LER), Leilão de Fontes Alternativas (LFA) ou Leilão Estruturante (LE). Estes leilões são do tipo reverso, pois a energia é contratada pelo menor preço e deve atender uma demanda de energia a ser contratada. Ao final do leilão são firmados contratos de venda de energia para o Ambiente de Contratação Regulado (ACR) para garantir uma fonte de receita e viabilizar a construção dos empreendimentos. Em geral, os empreendedores reservam uma parte da geração de energia para venda no Ambiente de Contratação Livre (ACL), visando uma maior lucratividade.

2.3.1.1 Leilão de Energia Nova (LEN)

O objetivo dos LENs é garantir o suprimento de energia para atender o crescimento da demanda de energia do ACR. Os LENs podem ser do tipo A-3, A-4, A-5, A-6 ou A-7, indicando quantos anos o empreendedor tem para entregar energia ao sistema. Por exemplo, um leilão A-4 ocorrido em 2020 indica que o início de suprimento de energia pelos empreendimentos vencedores deverá ser em 2024. A modalidade de contrato

firmado varia conforme a fonte a ser contratada e podem ser contratos por quantidade ou por disponibilidade.

Nos contratos por quantidade o empreendedor é recompensado segundo a quantidade de energia ofertada no leilão. Este assume os riscos de ter uma geração maior ou menor ao estipulado no contrato, sendo essa diferença compensada com base no Preço de Liquidação das Diferenças (PLD). Já nos contratos por disponibilidade o empreendedor é remunerado com uma quantidade fixa para estar disponível ao sistema e uma quantidade variável que dependerá da quantidade de energia gerada para o sistema. A parcela fixa é destinada à construção e a cobertura de custos fixos do empreendimento, enquanto a parcela variável está relacionada ao Custo Variável Unitário (CVU) do empreendimento, associado aos custos da geração da energia.

As sistemáticas utilizadas nos leilões têm sofrido algumas modificações, mas em geral são utilizados leilões híbridos, combinando características de diferentes leilões. Nos últimos leilões A-4, como o leilão de geração Nº 003/2019, ocorreu uma etapa para classificação dos empreendimentos segundo a capacidade de escoamento da energia pelo sistema de transmissão, para permitir que apenas projetos que a rede tem capacidade de absorver sejam declarados vencedores. Em seguida ocorre uma etapa contínua, onde os empreendimentos disputam para atender uma demanda de energia para cada produto (diferenciado por fonte de energia). Esta segunda etapa é um leilão aberto simultâneo onde os participantes podem verificar se seus lances estão parcialmente classificados entre os vencedores e a partir dessa informação realizar novos lances.

Já os leilões A-6 são utilizados para contratar energia de empreendimentos que necessitam prazos de construção mais longos. Na primeira fase deste leilão são ofertados exclusivamente os empreendimentos Usina Hidrelétrica (UHE) de maior porte. Na primeira etapa é realizado a disputa do direito de outorga das usinas de forma sequencial. Inicialmente é realizada uma etapa com leilão reverso e fechado de primeiro preço. Caso o segundo melhor lance for superior a 105% do melhor lance, o empreendedor se classifica para etapa discriminatória. Caso contrário inicia-se uma etapa simultânea aberta onde os participantes podem realizar lances inferiores ao lance corrente. O participante com menor lance se classifica para uma etapa discriminatória. Após indicar direito de outorga de todas as UHE é realizada uma etapa fechada, ou discriminatória, onde cada participante realiza um lance fechado associado a uma quantidade de energia. Os empreendimentos são organizados em ordem crescente de preço e são classificados como vencedores os que atendem a demanda estipulada na fase.

Na segunda fase são ofertados novos empreendimentos divididos em produtos (diferenciado por fonte de energia) e cada participante deve realizar um lance fechado de quantidade e preço nos seus empreendimentos. Com estes lances os empreendimentos são parcialmente classificados como vencedores de forma a atender a demanda dos produtos. Em seguida é iniciada uma etapa simultânea aberta onde os participantes podem realizar

lances de preço inferiores ao lance do último empreendimento parcialmente classificado, de acordo com a demanda de cada produto. São vencedores os empreendimentos classificados ao final da etapa simultânea, que se encerra por inatividade dos participantes.

2.3.1.2 Leilão de Energia de Reserva (LER)

O LER foi criado para contratar uma capacidade de reserva, proporcionando uma maior segurança energética. O contrato de venda de energia desses empreendimentos é realizado com a Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE) que por sua vez realiza contratos de uso da energia de reserva com cada usuário de energia elétrica. Os contratos realizados têm sido em sua maioria por quantidade. O último LER ocorreu em 2016 e utilizava uma sistemática híbrida, utilizando um leilão *clock* na primeira etapa, que tinha como regra de parada o atingimento de uma oferta de energia em cada produto, superior à demanda. Na segunda etapa foi permitida a realização de um lance fechado nos empreendimentos classificados. Os empreendimentos eram então classificados conforme o lance fechado para atender a demanda com regra de pagamento de primeiro preço.

2.3.1.3 Leilão de Fontes Alternativas (LFA)

Estes leilões são realizados para aumentar a oferta de energia a partir de fontes alternativas. É instrumento de realização de políticas energéticas para incentivar utilização de fontes renováveis. Ocorreram apenas três LFAs sendo o último em 2015. A sistemática utilizada se assemelha à sistemática utilizada no LER realizando uma etapa *clock* e posteriormente uma etapa fechada de primeiro preço. Dependendo do produto ofertado foi realizada uma etapa inicial, antes da etapa *clock*, para classificar apenas os empreendimentos com capacidade de escoamento para rede de transmissão.

2.3.1.4 Leilão Estruturante (LE)

Os LEs são realizados para leiloar grandes empreendimentos de geração de caráter estratégico e de interesse público. Até hoje foram realizados apenas três LEs, da UHE Santo Antônio, UHE Jirau e UHE Belo Monte. A sistemática utilizada é de um leilão reverso híbrido. Primeiro é realizada uma etapa fechada de primeiro preço. Caso os melhores lances sejam competitivos, inicia-se uma etapa *clock* onde ocorre um decremento de preço aplicado no preço corrente em cada rodada. No caso de os últimos participantes rejeitarem o preço na mesma rodada, é permitido que estes realizem um novo lance fechado com regra de primeiro preço. O leilão pode terminar em qualquer rodada caso exista apenas um participante com proposta válida, seja na primeira etapa por apresentar uma proposta melhor que os concorrentes (segundo menor lance superior a 105% do melhor lance), na segunda etapa por sobrar apenas um participante que aceite o preço corrente da rodada ou na terceira etapa por apresentar o melhor lance fechado.

2.3.2 Empreendimentos de Transmissão

Os Leilões de Empreendimentos de Transmissão (LETs) são realizados para expandir a rede de transmissão com objetivo de permitir conexão de novos empreendimentos de geração e expandir a malha para garantir qualidade de confiabilidade no sistema. O leilão é de responsabilidade da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) que firma contratos de concessão dos empreendimentos com os participantes vencedores, onde estes são responsáveis pela construção, operação e manutenção do empreendimento por um período de 30 anos e têm o direito de receber a Receita Anual Permitida (RAP) estipulada no LET em que foi vencedor. O leilão é do tipo reverso e o participante que aceitar receber a menor RAP para oferecer o serviço é declarado vencedor.

A sistemática do LET é sequencial e pode ser considerada híbrida por utilizar conceitos de mais de um tipo de leilão. Para o primeiro lote a ser considerado, os participantes realizam um lance fechado de primeiro preço. O melhor lance pode ser declarado vencedor caso o segundo melhor lance não for competitivo (lance superior a 105% do melhor lance). Caso contrário os participantes com lances competitivos participam de uma etapa viva-voz, que é um leilão do tipo inglês. Após a identificação do vencedor do lote inicia-se o apregoamento do lote seguinte, até que o último lote seja apregoado.

Já ocorreram iniciativas de Leilão Reverso Combinatório (LRC) no LET, como o LET nº 04 de 2014. Foi permitida a realização de lances em pacotes pré estipulados, sendo considerados os lotes individuais e o pacote com todos os lotes. Devido ao pequeno número de pacotes o PIV é trivial. A sistemática utilizada comparava o resultado dos lances no pacote e a soma dos valores de lances nos lotes analisados separadamente. Caso o valor de lance do pacote não se mostrasse competitivo com os lotes separados, o leilão prosseguia apenas com os lances nos lotes separados, desconsiderando o pacote, e vice-versa. Após a decisão de como os lotes seriam estruturados o leilão prosseguia seguindo a sistemática descrita anteriormente. Apenas no caso de as duas formas serem competitivas entre si seria realizada uma etapa cruzada, sendo um LRC iterativo, onde cada participante realiza um lance no seu pacote desejado e a cada rodada o resultado parcial seria divulgado. A resolução do PIV indica qual seria a forma ótima de aceitar os lances, como pacote ou como lotes individuais.

Apesar do LRC ocorrer com poucos pacotes permitidos, já foi possível identificar complementaridade entre os lotes de transmissão. No LET nº 04 de 2014 foi possível realizar lances no pacote *A* e nos lotes *A1*, *A2*, *A3*, *A4* que o formavam. O lance realizado no lote *A* foi declarado vencedor ao fim do leilão e a economia com a escolha do lance no pacote em comparação com os lances nos lotes separados foi de R\$8,3 milhões por ano, em valores correspondentes ao ano de 2014, representando uma economia de 2,4% (ANEEL, 2014).

2.3.3 Complementaridades entre Empreendimentos

A complementaridade é percebida pelos participantes quando a aquisição de dois ou mais empreendimentos tem valor maior para o participante que a soma dos valores de se obter estes mesmos empreendimentos de forma separada. De forma geral, o participante percebe um maior valor por observar economia de escopo, economia de escala e/ou redução de riscos associados aos empreendimentos.

A economia de escopo ocorre quando a obtenção conjunta de mais de um produto ou serviço causa uma redução do custo médio. Para exemplificar, pode ser percebida quando dois empreendimentos próximos utilizam a mesma estrutura para alocação dos trabalhadores ou quando é possível utilizar os mesmos trabalhadores de forma a reduzir custos de treinamento de pessoal.

Já a economia de escala ocorre quando um aumento de produção causa uma redução do custo médio do produto ou serviço. Esta pode ser percebida com a compra de maior quantidade de equipamentos, permitindo uma melhor negociação com fornecedores.

Ao realizar os estudos dos empreendimentos é necessário analisar os riscos destes, que estão associados às incertezas do empreendimento, tanto na fase de construção como de operação. Com a redução de riscos o empreendedor pode também diminuir a reserva necessária para cobrir custos inesperados associados ao empreendimento.

Alguns exemplos de redução de risco podem ser considerados nas fases de construção e operação dos empreendimentos. Na fase de construção um atraso na entrega da obra pode ser custoso devido às multas de contrato. Desta forma, pode-se obter uma receita esperada maior ao realizar um gasto extra para acelerar a construção e garantir a entrega, ao invés de manter o ritmo de construção com um maior risco de atraso. Na fase de operação, a redução de risco pode estar associada com a realização de manutenção periódica, diminuindo a probabilidade de indisponibilidade do empreendimento.

Para o caso de empreendimentos de geração, a diversificação de produtos, ou produtos que tenham geração complementar podem ser vistos como fatores que diminuem o risco. O empreendedor poderia compensar o deficit de entrega de energia de um empreendimento com a sobra de geração de outro, estando menos propenso a ter que praticar suas transações com PLD.

Empreendimentos de geração não conectados do Sistema Interligado Nacional (SIN) podem ser complementares a seus respectivos empreendimentos de conexão. A entrega da energia, e portanto o recebimento de receita, estará associada à conclusão da obra de conexão. Ter o controle sobre a administração da obra de conexão pode reduzir os riscos associados à entrada de operação da geração, evitando os ilhamentos.

Esta seção demonstra que tanto empreendimentos de geração como empreendimentos de transmissão podem gerar pacotes percebidos como complementares pelos participantes, indicando que a utilização de um LRC traria ganhos de eficiência do leilão.

3 INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE IDENTIFICAÇÃO DO VENCEDOR

A resolução do Problema de Identificação do Vencedor (PIV) se mostra necessária em leilões fechados. Após o recebimento de todos os lances, deve-se informar quais são os lances vencedores. Em um leilão padrão que não permite lance combinatório a solução do PIV é trivial, bastando identificar o maior valor de lance para cada um dos itens. Como o objetivo neste caso é maximizar a receita do leiloeiro, a tendência é a de leiloar todos os itens.

Já no caso de leilões reversos o objetivo é minimizar os custos para o leiloeiro. Portanto, dentro das restrições do problema deve-se ter algum mecanismo que evite a solução trivial de não adquirir nenhum dos itens, totalizando um custo de zero para o leiloeiro. Considerando um leilão reverso que não permite lance combinatório em que todos os itens do leilão devem ser leiloados, a resposta também é trivial, sendo vencedores os respectivos menores valores lances nos itens. Este leilão se assemelha ao leilão padrão, apenas com a reversão dos conceitos. Considerando um segundo caso, um leilão reverso que não permite lance combinatório e que deve atender a uma demanda do leiloeiro, a solução do PIV já deixa de ser um problema trivial.

Na Seção 3.1 são apresentadas características de problemas de otimização para um melhor esclarecimento sobre a característica do problema tratado nos casos. Nas Seções 3.2 e 3.3 são apresentados uma análise do PIV dos dois casos de leilão reverso, estendendo para Leilão Reverso Combinatório (LRC).

3.1 Problemas de Otimização

Um problemas de otimização consiste em encontrar a melhor solução viável, isto é, encontrar o conjunto de variáveis que otimize a função objetivo satisfazendo todas as restrições apresentadas. O modelo de um problema é a representação matemática deste, podendo ter uma ou mais funções objetivo e ter ou não funções de restrições.

Deve-se ter em vista que os modelos representam abstrações do problema real. Formular todos os fatores que possam influenciar a resposta real muitas vezes exige um grau de complexidade que é desnecessário. Algumas variáveis podem ser omitidas ou restrições desconsideradas por não influenciarem tanto na resposta. Neste caso, deve ser feita uma análise de como a simplificação do problema pode afetar no atendimento das outras restrições, na função objetivo e se este causaria um erro aceitável. Variáveis e restrições que não são formuladas por não serem previstas, e são descobertas apenas após a implementação real da solução, devem ser atualizadas no modelo visando melhorar a representação matemática do problema real.

A função objetivo indica o que deve ser otimizado, maximizando ou minimi-

zando uma função. Esta pode representar a minimização do custo de produção de diversos produtos ou a maximização da produção, por exemplo. Quando um problema tem mais de uma função objetivo, por exemplo minimizar um custo e maximizar a produção, este é chamado de multiobjetivo.

Restrições devem representar as limitações do problema real. Podem ser, por exemplo, restrições orçamentárias, de produção de uma máquina ou necessidade de atendimento de demandas de produtos. Estas restrições são representados por equações ou inequações.

As variáveis representam as escolhas que devem ser feitas para obter uma solução. Ao se atribuir valores para as variáveis que atendem todas as restrições diz-se que a solução é factível ou viável, indicando que é possível implementá-la. Quando uma solução factível faz com que a função objetivo atinja seu melhor valor, sendo máximo ou mínimo, a solução é ótima. Dependendo do problema pode existir mais de uma solução ótima, onde diferentes soluções ótimas chegam no mesmo valor para a função objetivo.

Um problema de otimização geralmente tem restrições que permitem várias soluções factíveis e uma função objetivo que indica o sentido de melhoria da solução, contendo uma ou múltiplas soluções ótimas. Quando são incluídas restrições que se contradizem, o espaço de busca é vazio e o problema é infactível. Como exemplo, as restrições $x_1 \geq 4$ e $x_1 \leq 3$ são antagônicas e a solução é inexistente. Para casos em que restrições não limitam o valor da função objetivo, o problema é ilimitado. Como exemplo, um problema com função objetivo de maximizar $z = x_1 + x_2$ e restrições $x_1 \geq 3$ e $x_2 \leq 2$ tem valor máximo de $x_2 = 2$, mas não limita o valor de x_1 . Este tipo de problema têm soluções factíveis, mas não apresenta uma solução ótima. Existe ainda casos em que as restrições permitem apenas uma solução factível, e por ser a única solução possível esta é considerada a solução ótima.

Os problemas de otimização podem ser classificados como lineares, quando todas as funções são equações (ou inequações) lineares, ou não-lineares, quando pelo menos umas das funções de restrições ou função objetivo é uma equação (ou inequação) não-linear. Os métodos de solução de problemas não-lineares podem variar conforme a característica do problema apresentado, com métodos que funcionam bem para alguns tipos de problema mas não conseguem ser aplicados em outros. Os problemas de programação linear serão apresentados na Seção 3.2.1.

Outra classificação dos problemas de otimização são quando as variáveis pertencem ao conjunto dos números inteiros. Quando todas as variáveis são inteiras o modelo é denominado como Programação Inteira Pura e quando apenas parte das variáveis são inteiras ele é classificado como Programação Inteira Mista. Uma variável pode ser inteira para representar, por exemplo, quantos caminhões são necessários para realizar a entrega dos produtos. Quando todas as variáveis representam decisões dicotômicas, de aceitar ou não uma situação, estas são formuladas com variáveis binárias e seu problema pode ser

classificado como Programação Inteira Binária.

Como os PIVs do leilão proposto recairá em problemas lineares, contendo somente variáveis inteiras e com apenas uma função objetivo, não são aprofundados os temas de problemas multiobjetivos e de programação não-linear. Os problemas de Programação Linear Inteira (PLI) serão apresentados na Seção 3.3.1.

3.2 Caso 1: Leilão reverso com todos itens leiloados

Para o caso de leilão reverso sem a permissão de formação de pacotes, o PIV em que todos os itens devem ser leiloados é um problema com solução trivial, bastando identificar o melhor lance para cada um dos itens. Para compatibilizar com a formulação de um leilão combinatório com n itens, pode-se afirmar que este caso permite apenas pacotes com um item, portanto, a matriz de empacotamento corresponde a uma matriz identidade com tamanho igual ao número de itens $I_{n \times n}$.

Em um leilão combinatório é permitido a realização de lances em pacotes, onde cada pacote é uma composição dos itens do leilão. A matriz de empacotamento $A_{n \times l}$ é uma matriz binária, onde cada componente pode corresponder a um valor de 0 ou 1, indicando um valor de 1 se um item n está presente em um pacote l e 0 caso contrário. Pode-se representar o PIV de um LRC em que todos os itens devem ser leiloados como:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & B_{1 \times l} \cdot x_{l \times 1} \\ \text{s.a.} \quad & A_{n \times l} \cdot x_{l \times 1} = \mathbf{1}, \\ & x_{l \times 1} \in \mathbb{B}_+^l \end{aligned}$$

onde $B_{1 \times l}$ representa a matriz dos melhores valores de lances nos l pacotes, e $x_{l \times 1}$ a matriz de variáveis que indicará quais são os pacotes vencedores.

O PIV do leilão combinatório se caracteriza por ser um problema de PLI. Ao se permitir a formação de todos os pacotes possíveis, existe um crescimento exponencial do número de pacotes em relação ao número de itens do leilão ($2^n - 1$). A maior parte dos PIVs de um leilão combinatório são classificados como um problema \mathcal{NP} -Hard, o que significa que com o aumento do número de itens o problema rapidamente se torna intratável em tempo computacional aceitável (MÜLLER, 2006).

Para leilões do tipo padrão o conjunto de restrições de um PIV de Leilão Combinatório (LC) é do tipo $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$. Estas restrições formam um politopo convexo, que representa uma região convexa no espaço n-dimensional \mathbb{R}^n . Para restrições definidas no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 as restrições formam um poliedro convexo. Em problemas lineares, pode-se garantir que se existe uma solução ótima, também existe um ponto extremo desta região que é uma solução ótima (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2010). Hoffman

e Kruskal (1956) provaram que todos os vértices de um polítopo convexo formado pelo sistema de inequações $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ são pontos inteiros se o vetor \mathbf{b} for composto por valores inteiros e a matriz \mathbf{A} for Totalmente Unimodular (TU). Sendo assim, um problema de PLI pode ser resolvido por métodos de programação linear caso apresente as características mencionadas acima. As características das matrizes TU são apresentadas na Seção 3.2.2.

Para o LRC Caso 1 estudado nesta seção, ou seja, o leilão reverso com todos itens leiloados, o conjunto de restrições são do tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Cada restrição representa um hiperplano no espaço n -dimensional, ou um sub-espaço de dimensão $n - 1$. Ao atender uma segunda restrição o conjunto de restrições deve gerar sub-espaços de dimensão $n - 2$, diminuindo a dimensão do sub-espaço a cada restrição adicional atendida. Como exemplo, pode-se considerar um espaço tridimensional representando um problema com três variáveis, ou três pacotes. Cada restrição gera um plano neste espaço, de forma que uma solução factível deve estar sobre o plano. Atender uma restrição adicional gera uma reta como espaço formado pelas restrições, sendo a intersecção destes dois planos. A Figura 3.1 mostra como ficariam restrições de um problema com dois itens e três pacotes.

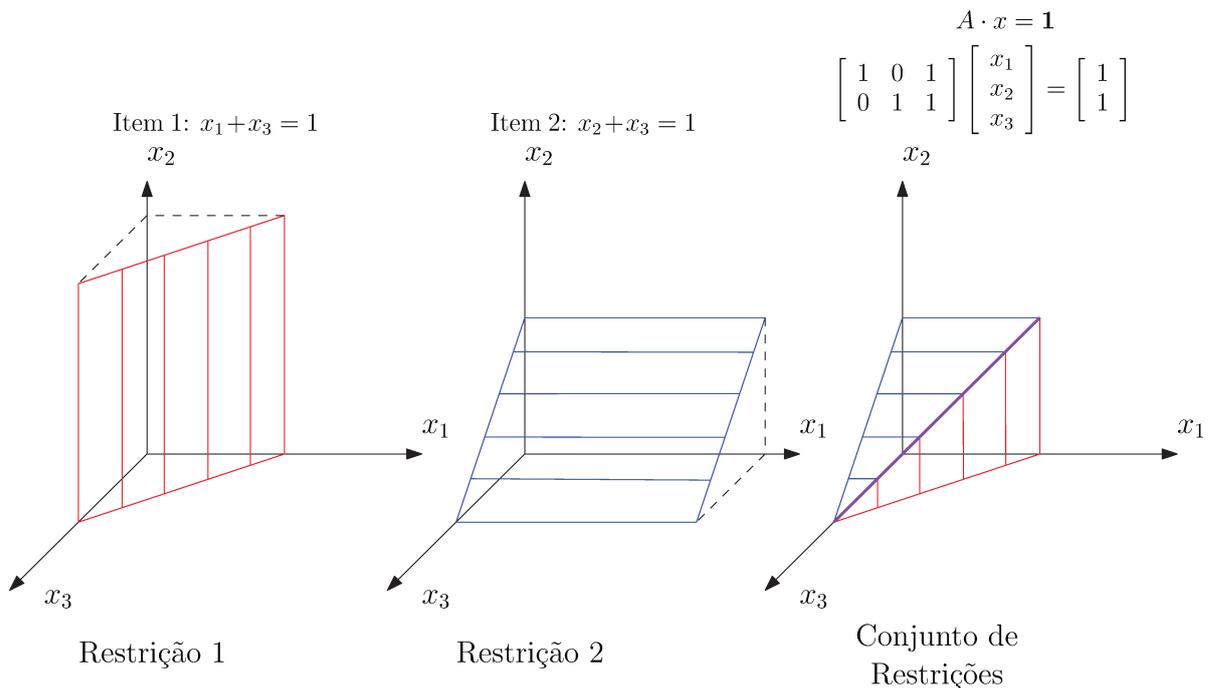


Figura 3.1: Exemplo de restrições de partição com dois itens e três pacotes

Ao se garantir que a matriz \mathbf{A} é TU e o vetor \mathbf{b} composto por valores inteiros, pode-se afirmar que todos os vértices correspondem a valores inteiros. Como o conjunto de restrições deve gerar um polítopo convexo de dimensão inferior à do espaço dimensional das variáveis, é possível afirmar que sempre que houver uma solução factível, também existirá uma solução em um ponto extremo deste polítopo. Sendo assim, é importante

identificar uma solução factível para garantir a existência de uma solução ótima de valores inteiros. No exemplo da Figura 3.1 os pontos extremos factíveis correspondem aos pontos $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Para resolver o PIV com as restrições de empacotamento formando uma matriz TU basta resolver a relaxação linear deste problema. A relaxação linear do problema de PLI relaxa as restrições de integralidade. Por ter restrições desconsideradas no problema relaxado, pode-se chegar a um resultado tão bom quanto, ou melhor que o do problema original. Como a solução relaxada encontrada deve atender as restrições de integralidade, sendo uma solução factível no problema original, pode-se garantir que o problema de PLI tem a mesma solução ótima do problema relaxado.

A seguir são apresentados a estrutura de um problema de programação linear, os métodos de resolução mais utilizados e as características das matrizes TU.

3.2.1 Programação Linear

Os problemas de programação linear são formados por função objetivo e equações ou inequações lineares. Tendo em vista que é simples transformar equações em inequações, e vice-versa, o problema pode ser representado de uma forma geral, como apresentado pelo Sistema de Equações 3.1.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2.1.1 Métodos de Programação Linear

O estudo dos métodos de solução para os problemas de programação linear é fundamental por servir de base para solução de outros problemas de otimização, inclusive os de PLI. Os métodos de solução mais utilizados são o Método Simplex e o Método de Pontos Interiores.

O método Simplex parte de uma solução factível e visita os vértices do polítopo formado pelas restrições na direção de melhoria da função objetivo do problema. O método interrompe quando não há direção de melhoria, identificando uma solução ótima, ou quando a solução é ilimitada. Este método é amplamente utilizado por apresentar bons resultados para grande parte dos problemas. O detalhamento do método pode ser encontrado no livro de Bazarra, Jarvis e Sherali (2010).

Apesar de funcionar bem para maioria dos problemas, o algoritmo Simplex não garante encontrar a solução em tempo polinomial. Em 1979 Khachiyan propôs um algoritmo de elipsóide que garante a solução em tempo polinomial, porém a aplicação em problemas práticos se mostrou ineficiente por estarem relacionados ao limite teórico dos

piores cenários e apresentarem problemas de estabilidade numérica. Em 1984 Karmarkar propôs um novo algoritmo de tempo polinomial para programação linear, sendo um dos métodos de pontos interiores (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2010).

Métodos de pontos interiores partem de uma solução factível no interior da região e realiza passos em um sentido de melhoria da função objetivo, com norma pequena suficiente para se manter no interior da região factível. O método interrompe quando a solução apresenta um erro suficientemente pequeno. Os métodos de pontos interiores mais utilizados atualmente são os do tipo primal dual (GONDZIO, 2012).

3.2.2 Matriz Totalmente Unimodular

Uma matriz é TU quando toda submatriz quadrada tem determinante igual a 1, -1 ou 0. Matrizes TU só podem ser formadas por valores 0, 1 e -1 , uma vez que cada submatriz 1×1 é uma submatriz quadrada. Se uma matriz \mathbf{A} for TU, então sua transposta também é TU, já que o determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta. Segundo o teorema da Ghouila-Houri (1962), uma matriz $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ é TU se e somente se para todo $\mathbf{R} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ existe \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 , com $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$, tal que:

$$\left| \sum_{i \in \mathbf{R}_1} a_{ij} - \sum_{i \in \mathbf{R}_2} a_{ij} \right| \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

Este teorema indica que uma matriz só é TU se, para qualquer subconjunto de linhas da matriz, existe uma forma de dividir este subconjunto em dois (\mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2) e, para cada coluna, a soma dos valores de \mathbf{R}_1 menos a soma de valores de \mathbf{R}_2 for igual a 0, 1 ou -1 . A Figura 3.2 mostra o exemplo de uma matriz TU com a verificação de atendimento da equação para o subconjunto contendo todas as linhas.

$$A = \begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & R_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & R_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & R_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & R_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & R_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \end{array}$$

Figura 3.2: Matriz TU com verificação para subconjunto com todas as linhas

Baseado neste teorema pode-se identificar algumas condições suficientes para determinar que uma matriz é TU. O primeiro caso indica que a matriz é TU se cada

coluna tiver no máximo dois valores não nulos e a matriz \mathbf{A} puder ser dividida em dois subconjuntos de forma a atender as seguintes regras:

- Se os valores não nulos tiverem mesmo sinal, então devem estar em subconjunto de linhas diferente
- Se os valores não nulos tiverem sinais opostos, então devem estar no mesmo subconjunto de linhas

Com esta condição suficiente sendo atendida, nota-se que cada linha já faz parte de um subconjunto \mathbf{R}_1 ou \mathbf{R}_2 e qualquer subconjunto de linhas atende à equação 3.2. Na Figura 3.3 pode-se observar a aplicação da condição suficiente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_2 \\ R_2 \\ R_1 \end{matrix}$$

Figura 3.3: Matriz TU atendendo condição suficiente

Outro tipo de matriz TU que atende a condição suficiente é uma matriz binária sequencial (WOLSEY; NEMHAUSER, 1988). A matriz $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{B}^{m \times n}$ é uma matriz sequencial se em todas as linhas da matriz os valores 1 aparecerem de forma consecutiva, ou seja, se $j \leq k \leq l$ e $a_{ij} = a_{il} = 1$, então $a_{ik} = 1$.

Como a transposta de uma matriz TU também é TU, pode-se analisar as linhas como colunas e vice-versa. Ao se retirarem colunas de uma matriz sequencial tem-se outra matriz sequencial, desta forma, como a classificação de colunas de forma alternada em dois subconjuntos atende a equação 3.2, demonstra-se que a matriz \mathbf{A} segue o teorema da Ghouila-Houri. A Figura 3.4 indica um exemplo de matriz sequencial.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix}$$

$C_1 \quad C_2 \quad C_1 \quad C_2 \quad C_1$

Figura 3.4: Exemplo de matriz sequencial TU

3.3 Caso 2: Leilão reverso com atendimento de uma demanda

Para o caso de leilão reverso sem a permissão de formação de pacotes, o PIV em que os itens devem atender a uma demanda do leiloeiro não tem uma solução trivial. Para compatibilizar com a formulação de um leilão combinatório com n itens, pode-se afirmar que este caso permite apenas pacotes com um item, portanto, a matriz de empacotamento corresponde a uma matriz identidade de tamanho igual ao número de itens $I_{n \times n}$.

Em um leilão combinatório é permitido a realização de lances em pacotes, onde cada pacote é uma composição dos itens do leilão. A matriz de empacotamento $A_{n \times l}$ é uma matriz binária que indica se um item n está presente em um pacote l . Pode-se representar o PIV de um LRC em que todos os itens devem ser leiloados como:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & B_{1 \times l} \cdot x_{l \times 1} \\ \text{s.a.} \quad & A_{n \times l} \cdot x_{l \times 1} \leq \mathbf{1}, \\ & C_{1 \times l} \cdot x_{l \times 1} \geq D, \\ & x_{l \times 1} \in \mathbb{B}_+^l \end{aligned}$$

onde $B_{1 \times l}$ representa a matriz dos melhores valores de lances nos l pacotes, e $x_{l \times 1}$ a matriz de variáveis que indicará quais são os pacotes que serão vencedores, $C_{1 \times l}$ a quantidade que cada pacote contribui para atender a demanda D do leiloeiro.

Neste caso de leilão reverso, não é possível utilizar a estrutura de matriz TU como é proposto na Seção 3.2. Mesmo se a matriz de empacotamento $A_{n \times l}$ for TU, a restrição de demanda deve invalidar essa propriedade na matriz com todas as restrições. Isso deve ocorrer pois, em geral, o valor da característica do pacote $C_{1 \times l}$ deve ser calculado pela soma das características de cada item contido nele e não é possível garantir que resultará em um vetor composto somente por valores binários.

O LRC em que deve-se atender uma demanda inevitavelmente resulta em problemas de PLI. A seguir serão apresentados a formulação e alguns métodos de solução de PLI.

3.3.1 Programação Linear Inteira

Os modelos de PLI são formados por função objetivo linear, restrições lineares e restrições que indicam que todas as suas variáveis pertencem ao conjunto dos números inteiros. O problema pode ser representado de uma forma geral, como apresentado pelo Sistema de Equações 3.3.

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}\mathbf{x} \\
& \text{s.a.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\
& \quad \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Problemas de PLI são bem mais complicados de encontrar uma solução ótima que os problemas de programação linear. Dependendo do tamanho e da estrutura, um método exato de resolução pode encontrar uma solução ótima em tempo computacional aceitável. Para problemas em que métodos exatos não garantem uma solução em tempo computacional razoável, recomenda-se encontrar uma solução factível boa por métodos heurísticos.

Métodos exatos utilizam técnicas para garantir que a solução encontrada é ótima, podendo realizar a enumeração completa, passando por todos os pontos factíveis, ou uma enumeração implícita, analisando todos os pontos factíveis implicitamente. Métodos heurísticos usam uma lógica para encontrar uma boa solução para o problema em tempo computacional razoável, não garantindo que a solução encontrada seja uma solução ótima. Os métodos de solução para PLI também podem ser aplicados à Programação Linear Inteira Mista (PLIM).

3.3.1.1 Métodos Exatos de Programação Linear Inteira

A realização de enumeração completa só é viável para problemas pequenos, pois o crescimento do número de variáveis acarreta em um crescimento muito rápido do número de soluções possíveis, inviabilizando o uso desta técnica em tempo computacional aceitável.

Alguns métodos exatos utilizam limitantes para fazer uma análise dos limites de valor da solução ótima. Considerando o caso de problemas de minimização, uma solução factível gera um limitante superior, enquanto a solução de um problema relaxado gera um limitante inferior. Existem alguns tipos de relaxação, sendo as principais a relaxação linear e a relaxação lagrangiana. A primeira foi mencionada na Seção 3.2, já a relaxação lagrangiana relaxa algumas restrições complicadoras do problema e aplica uma penalidade na função objetivo caso essas restrições sejam violadas. O detalhamento da relaxação lagrangiana pode ser encontrado no livro dos autores Arenales et al. (2007).

O método do plano de corte aplica a relaxação linear. Caso a solução ótima do problema relaxado seja inteira esta já é um limitante superior e inferior do problema, e é considerada uma solução ótima. Quando a solução não for inteira, adiciona-se restrições na forma de inequações, que excluam a solução encontrada, mas não exclua nenhuma das soluções factíveis do problema. Desta forma, a região factível do problema relaxado começa a se assemelhar com a envoltória convexa na região próxima das soluções relaxadas.

As restrições adicionadas são os planos de corte, e devem ser adicionados até que se encontre uma solução inteira. Uma representação de um corte válido é evidenciado na Figura 3.5. O procedimento de Chvátal-Gomory é o mais utilizado para a criação dos planos de corte (ARENALES et al., 2007).

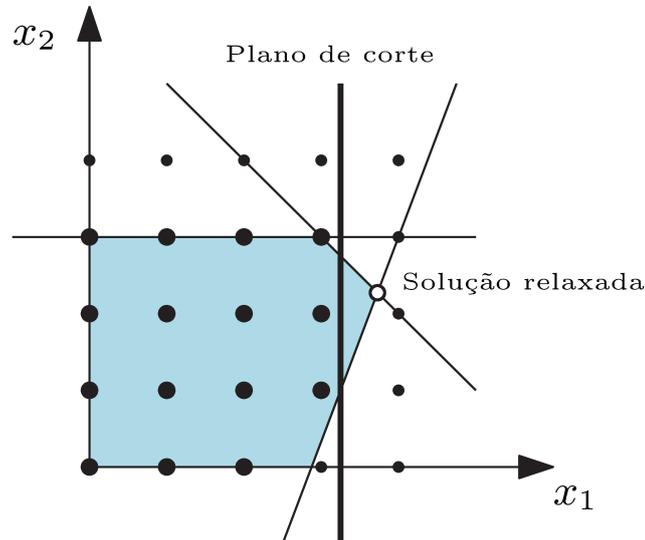


Figura 3.5: Representação de um plano de corte válido

O método de *Branch and Bound* utiliza uma técnica de ramificação para realizar uma enumeração implícita. Caso a solução de uma relaxação não for inteira ramifica-se o problema em dois subproblemas. Escolhe-se uma das variáveis com valor não inteiro e acrescenta-se uma restrição a cada subproblema criado. No primeiro a restrição é que a variável é menor ou igual ao piso do valor desta variável na solução relaxada. No segundo esta variável é maior ou igual ao teto do valor da variável na solução relaxada. A Figura 3.6 indica como são geradas as ramificações do método.

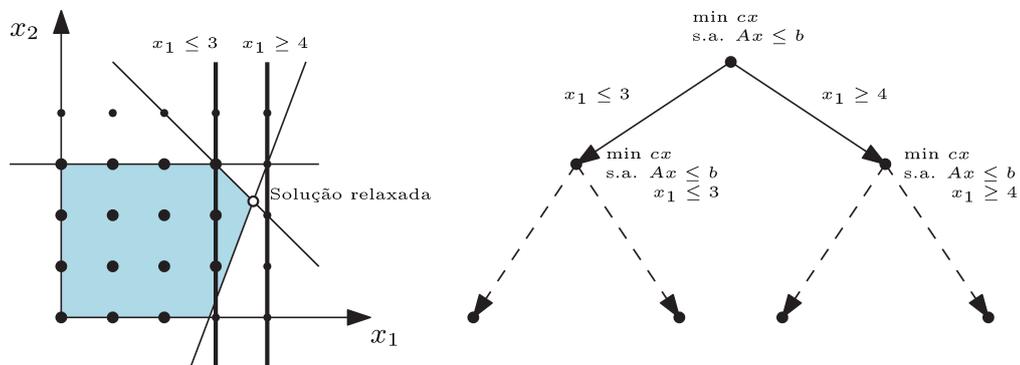


Figura 3.6: Representação do método *Branch and Bound*

Em um problema de minimização, cada solução inteira de um subproblema é um limitante superior. Como busca-se a menor solução inteira factível, o limitante

superior só será atualizado quando uma solução inteira resultar em um valor inferior ao atual limitante superior. Deve-se parar de ramificar quando a solução do subproblema for infactível, indicando que não existe uma solução; quando for inteiro, atualizando o limitante superior do problema, se for o caso; ou caso tiver resultado superior que um limitante superior, que indica que a região factível do subproblema só consegue gerar soluções piores que uma solução já encontrada. O limitante inferior de um problema também pode ser atualizado, sendo o menor valor de limitante inferior dos subproblemas diretamente gerados por este. Para se atualizar o limitante inferior do problema principal é necessário analisar todas as ramificações filhas até se chegar no problema original. Com a análise dos dois limitantes o algoritmo tem a possibilidade de parar antes de analisar todas as soluções implicitamente, quando uma solução encontrada for suficientemente próxima do limitante inferior do problema original.

O método de *Branch and Cut* utiliza estratégias dos últimos métodos apresentados. Este segue a mesma lógica do *Branch and Bound* com a diferença de sempre aplicar uma restrição de plano de corte antes de realizar a ramificação em subproblemas. Este método se beneficia das vantagens dos dois métodos aplicados, resultando em um algoritmo com vasta aplicação.

A programação dinâmica não se restringe a um método de PLI, podendo ser aplicado em diversos tipo de problemas. Consiste na resolução sequencial de subproblemas mais simples que resulta no problema original. O princípio da otimalidade de Bellman estabelece que: “Para um dado estado do sistema, a política ótima para os estados remanescentes é independente da política de decisão adotada em estados anteriores”. Portanto, um conjunto de decisões ótimas de um problema é formado por subconjuntos de decisões ótimas. Desta forma, a resolução de subproblemas mais simples pode auxiliar na otimização do problema original. Este método é muito eficiente para a resolução do problema da mochila, um problema clássico da literatura em que deve se escolher quais itens colocar na mochila para maximizar o valor dos bens sem que a soma dos pesos dos itens ultrapasse o peso máximo da mochila (ARENALES et al., 2007).

3.3.1.2 Métodos Heurísticos de Programação Linear Inteira

Os métodos heurísticos se caracterizam por utilizar procedimentos lógicos para identificar soluções factíveis do problema. Os métodos heurísticos geralmente são utilizados quando o problema é intratável por métodos exatos em um tempo computacional aceitável, entretanto não garantem uma solução ótima. Métodos heurísticos geralmente definem um número máximo de iterações que o algoritmo pode realizar de forma a restringir o tempo computacional para encontrar uma melhor solução. Também podem interromper a rotina quando garantir que foi encontrada uma resposta factível suficientemente próxima de uma resposta ótima, que pode ser verificado pelos limitantes gerados a partir de soluções relaxadas.

Alguns dos métodos heurísticos são baseados em procedimentos encontrados na natureza. Como exemplo pode-se citar o algoritmo genético, que utiliza um processo de seleção natural para selecionar os indivíduos mais adaptados, ou seja, soluções com melhores valores de função objetivo. Como cada indivíduo representa uma solução, novas soluções podem ser criadas a partir de soluções mais aptas através de métodos de cruzamento, quando mais de um indivíduo fornece dados para gerar um novo indivíduo, ou de mutação, quando ocorre mudança de parte da informação de um indivíduo. A criação de uma nova geração de indivíduos deve gerar diversidade de soluções e dar continuidade no processo de solução natural.

Métodos heurísticos também podem utilizar procedimentos lógicos originados de outros métodos, como ocorre em heurísticas lagrangianas. Estas se baseiam em soluções encontradas na relaxação lagrangiana, que podem ser factíveis ou não, e, caso sejam infactíveis, aplicam metodologias para tornar a solução viável. Com a atualização dos limitantes superiores e inferiores é possível calcular o erro máximo da solução encontrada com o valor ótimo da função objetivo. Para maior detalhamento de métodos heurísticos pode ser consultado o livro do Talbi (2009).

3.4 Outras Representações do Problema de Identificação do Vencedor

A representação do PIV de um LRC pode ser feita matematicamente, como apresentada nas seções anteriores, mas também através de grafos e hipergrafos. A seguir serão apresentados os conceitos de grafos necessários para o entendimento da proposição de algumas das regras de empacotamento mencionadas no Capítulo 4. Também são apresentados alguns dos problemas de otimização em grafos. Na Seção 3.4.3 será evidenciado como o PIV pode ser representado por hipergrafos e convertidos em grafos de interseção.

3.4.1 Conceitos Básicos de Grafos

Grafos $G = (V, E)$ são formados por um conjunto não vazio de nós ou vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, e um conjunto de arestas $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ que ligam dois vértices. Cada aresta $e_k = (v_i, v_j)$, tal que $v_i, v_j \in V$, é uma ligação entre dois vértices, podendo ser arestas simples, arestas múltiplas, ou um *loop*. Como pode ser observado na Figura 3.7, e_1 representa aresta simples, e_3 e e_4 arestas múltiplas e e_6 um *loop*. O grau de um vértice corresponde à quantidade de arestas que contém o vértice, como exemplo, o grau do vértice $v_3 = 4$. Dependendo do problema a ser modelado pode-se impor valores para vértices e arestas ou utilizar arestas direcionadas. Neste último caso são chamados de grafos direcionados, ou dígrafos, como o grafo G_2 da Figura 3.7.

Outra representação para os grafos pode ser obtida através de matrizes. Em uma matriz de adjacência $\mathbf{A}_{(\mathbf{G})_{m \times m}}$, o termo a_{ij} representa o número de arestas que ligam

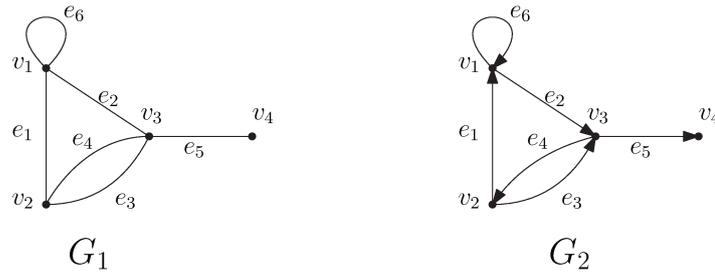


Figura 3.7: Exemplo de grafo (G_1) e grafo direcionado (G_2). Adaptado de West (2001)

o vértice v_i ao vértice v_j . Em uma matriz de incidência $\mathbf{C}_{(\mathbf{G})_{m \times n}}$, o termo c_{ij} é igual a 1 se o vértice v_i for um ponto da aresta e_j e igual a zero caso contrário (WILSON, 1996). Para um grafo direcionado o termo a_{ij} na matriz de adjacência representa o número de arestas direcionadas que partem do vértice v_i para o vértice v_j , e o termo c_{ij} é igual a 1 se o vértice v_i for um ponto de partida da aresta e_j , igual a -1 se o vértice v_i for um ponto de chegada da aresta e_j e zero caso não seja um vértice da aresta (WEST, 2001).

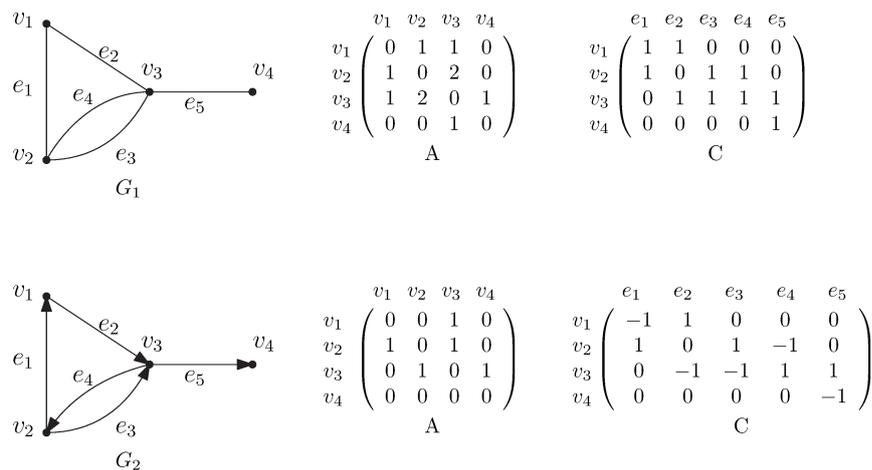


Figura 3.8: Matriz de adjacência A e matriz de incidência C para grafo (G_1) e grafo direcionado (G_2). Adaptado de West (2001)

Um grafo simples é caracterizado por não possuir arestas direcionadas e apresentar apenas arestas simples, sem *loops* ou arestas múltiplas. Um grafo completo $K = (V^K, E^K)$ é um grafo simples em que cada vértice está ligado a todos os outros vértices do grafo, portanto todo grafo completo têm $n = \frac{m(m-1)}{2}$ arestas, sendo m o número de vértices do grafo. Já o grafo complementar $H_{(G)} = (V^H, E^H)$ de um grafo simples $G = (V, E)$ possui o mesmo conjunto de vértices ($V^H = V$), porém as arestas são formadas por toda dupla de vértices que não continha arestas, ou que não eram adjacentes. Desta forma $E \cup E^H = E^K$ e $E \cap E^H = \emptyset$. O grafo vazio apresenta um conjunto de vértices, porém não apresenta arestas (BONDY; MURTY, 2008). A Figura 3.9 apresenta os quatro tipos de grafos mencionados acima.

Um subgrafo G' de um grafo G tem todos os vértices contidos no conjunto de vértices do grafo ($V' \subseteq V$) e todas as arestas contidas no conjunto de arestas do grafo

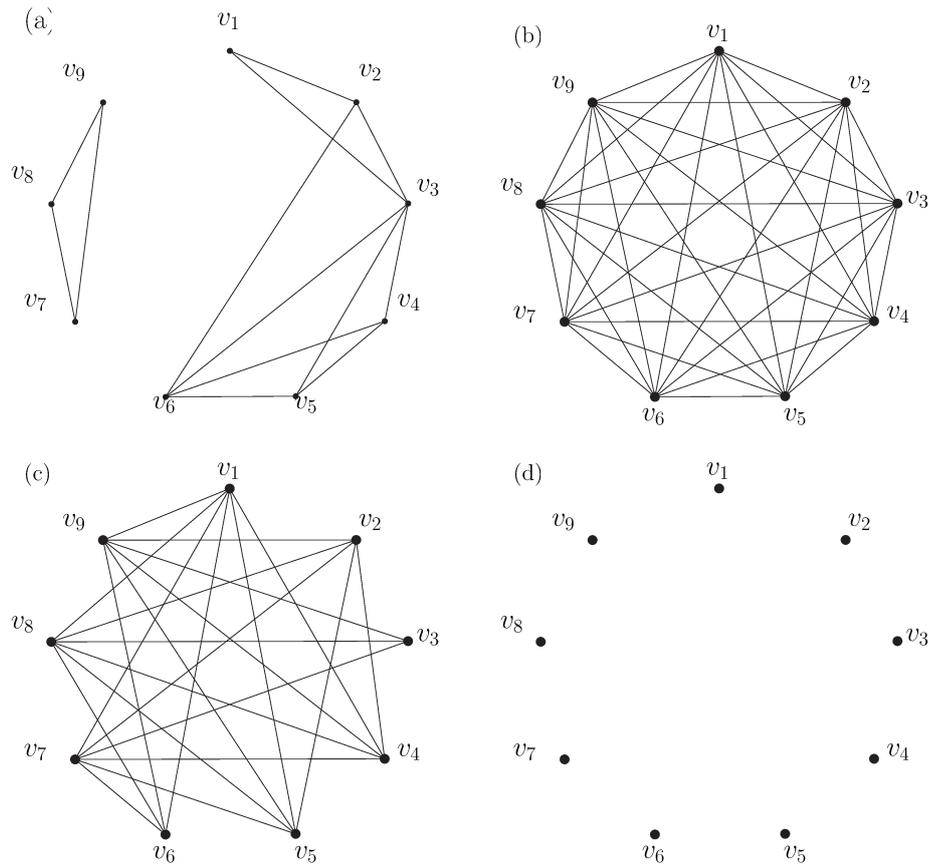


Figura 3.9: (a) Grafo simples (G) , (b) Grafo completo, (c) Grafo complementar $H_{(G)}$ e (d) Grafo Vazio

($E' \subseteq E$). Na Figura 3.9 pode-se identificar que os grafos representados em (a), (c) e (d) são subgrafos do grafo completo (b). Um subgrafo induzido de um grafo G corresponde a um subconjunto dos vértices do grafo com todos as arestas de G que conectavam os vértices permanentes.

Na teoria de grafos um clique é caracterizado por ser um subgrafo e um grafo completo, e seu tamanho é dado pelo número de vértices deste subgrafo. Na Figura 3.9, o subgrafo induzido do grafo G (a) composto pelas vértices v_7 , v_8 e v_9 e as três arestas que os ligam formam um clique de tamanho 3. A noção complementar de um clique é um conjunto independente, que se caracteriza por ser um subgrafo que também é um grafo vazio. Pode-se notar que no grafo complementar $H_{(G)}$ (c), o subgrafo formado pelos mesmos vértices v_7 , v_8 e v_9 geram um conjunto independente de tamanho 3 (BONDY; MURTY, 2008).

A classificação de um grafo como conexo ocorre quando a partir de qualquer vértice for possível estabelecer um caminho, através das arestas, de modo a chegar em outro vértice qualquer. Se o grafo permanecer conexo mesmo após a remoção de um número k de arestas, este é caracterizado como k -conexo. O grafo é desconexo quando existir dois vértices que não podem ser ligados através de um caminho passando pelas

arestas, e também pode ser classificado como 0-conexo (BONDY; MURTY, 2008). Na Figura 3.9 os grafos (a) e (d) são desconexos enquanto os grafos (b) e (c) são conexos.

Um grafo $G = (V, E)$ é bipartido quando for possível separar o conjunto de vértices V em dois subconjuntos, de forma que qualquer aresta do grafo conecte um vértice do primeiro subconjunto com um vértice do segundo subconjunto. Na teoria de grafos, uma floresta é caracterizada por ser um conjunto de árvores, e estas por sua vez são caracterizadas por ser um grafo acíclico e conexo. Na Figura 3.10 são apresentados um exemplo de um grafo bipartido (a) e de um grafo caracterizado como uma floresta (b), composta por duas árvores (subgrafos induzidos com $G_1 = \{v_1, \dots, v_6\}$ e $G_2 = \{v_7, \dots, v_{10}\}$).

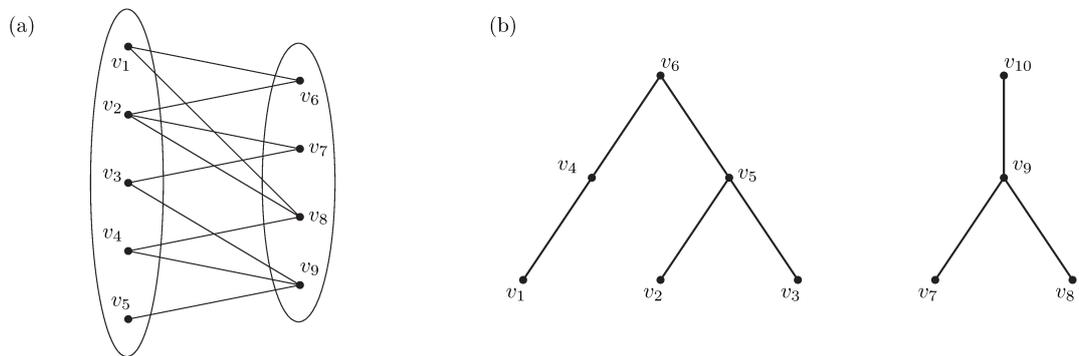


Figura 3.10: Exemplo de um Grafo Bipartido (a) e de uma Floresta composta por duas Árvores (b)

Para definir um grafo perfeito é necessário primeiro entender o problema de coloração de vértices. Este problema implica em descobrir o número mínimo de cores que os vértices podem ser coloridos de forma que todos os vértices adjacentes tenham cores diferentes, ou o número cromático do grafo. Por exemplo, em um grafo bipartido é possível colorir os vértices com apenas duas cores, sendo cada subconjunto dos vértices de uma cor. Quando todos subgrafos induzidos de um grafo tiverem o tamanho do maior clique igual ao número cromático, este grafo é perfeito. Portanto, os grafos bipartidos são sempre grafos perfeitos.

Lovász (1972) provou que todo grafo complementar de um grafo perfeito também é perfeito. Desta forma é possível verificar se o grafo é perfeito se, para cada subgrafo induzido, o tamanho do maior conjunto independente for igual ao menor número de cliques necessário para cobrir todos os vértices do grafo. A Figura 3.11 mostra um grafo perfeito e seu grafo complementar, também perfeito.

Uma forma de representar o PIV através de grafos é utilizando grafos de interseção. Neste caso, os vértices do grafo representam o pacote, os valores relativos aos vértices representam os lances realizados e dois vértices são conectados sempre que os dois pacotes correspondentes não possam ser vencedores simultaneamente. Desta forma o problema de resolver o PIV se torna um problema de otimização de conjuntos independentes em grafos. A Figura 3.12 indica o grafo de interseção de um exemplo contendo alguns

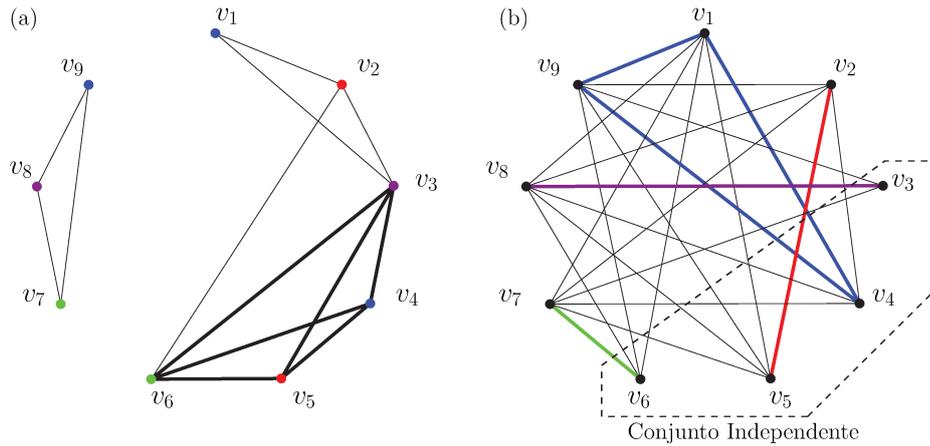


Figura 3.11: Exemplo de um Grafo Perfeito (a) e seu Grafo Complementar(b)

pacotes de itens, onde cada item não pode estar presente em mais de um pacote vencedor.

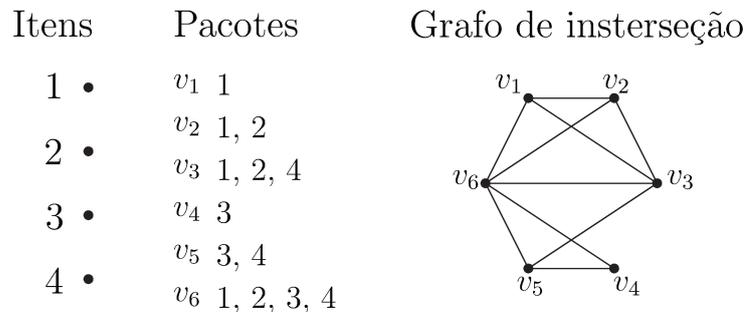


Figura 3.12: Exemplo de um grafo de interseção

3.4.2 Otimização em Grafos

A seguir são apresentados problemas de otimização que podem ser modelados com grafos, identificando algoritmos eficientes para sua resolução.

3.4.2.1 Problema de Fluxo de Custo Mínimo

O Problema de Fluxo de Custo Mínimo (PFCM) é um problema que visa minimizar o custo de um fluxo para atender o fornecimento e demanda dos vértices. São dadas as possíveis rotas de fluxo com seus custos unitários e capacidades máximas. Para a formulação deste problema utiliza-se um grafo direcionado $D = (V, E)$, onde V é o conjunto de pontos de fornecimento e demanda e E o conjunto de rotas. Uma rota é representada por um arco $e_k = (v_i, v_j)$. A capacidade do arco e_k é dada por $d_{ij} : E \rightarrow \mathbb{R}_+^n$. O custo unitário de um arco é dada por $w_{ij} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. A variável que indica a quantidade de fornecimento do nó é dada por $b_i : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ (quando for nó de demanda, $b_i < 0$). A condição $\sum_{i \in V} b_i = 0$ garante a igualdade entre o fornecimento e a demanda. Wolsey e Nemhauser (1988) formulam o PFCM como:

$$\begin{aligned}
\min_x \quad & \sum_{i,j:(v_i,v_j) \in E} w_{ij} x_{ij} \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{j \in \delta_{(i)}^+} x_{ij} - \sum_{j \in \delta_{(i)}^-} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in V, \\
& x_{ij} \leq d_{ij} \quad \forall i, j : (v_i, v_j) \in E, \\
& x_{ij} \in \mathbb{R}_+^n
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde x_{ij} denota o fluxo em cada rota, o conjunto de vértices de chegada de todas rotas que partem do vértice v_i é representado por $\delta_{(i)}^+ = j : (v_i, v_j) \in E$, e o conjunto de vértices de saída de todas as rotas que chegam no vértice v_i é representado por $\delta_{(i)}^- = j : (v_j, v_i) \in E$. A Figura 3.13 indica a representação de um exemplo de PFCM.

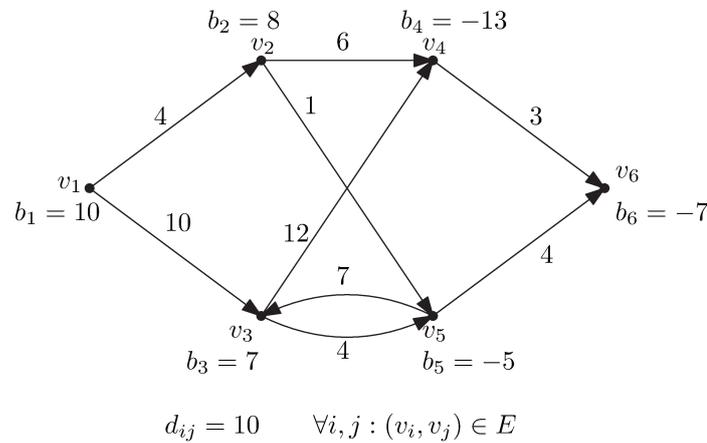


Figura 3.13: Exemplo de Problema de Fluxo de Custo Mínimo (PFCM)

Este problema tem a mesma estrutura de um problema de programação linear, e portanto pode ser resolvido pelo método simplex. A formulação matricial pode ser representado como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
\min_x \quad & wx \\
\text{s.a.} \quad & Cx = b, \\
& Ix \leq d, \\
& x \in \mathbb{R}_+^n
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Note que a matriz C representa a matriz de adjacência do grafo representado na Figura 3.13 e os outros vetores devem seguir a ordenação das arestas e vértices. A seguir observa-se como seriam montados os vetores e matrizes do exemplo.

$$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_5, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_6)\}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$w = [4, 10, 6, 1, 12, 4, 7, 3, 4]$$

$$b' = [10, 8, 7, -13, -5, -7]$$

$$d' = [10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]$$

3.4.2.2 Problema de Designação

O problema de designação tem o objetivo de designar m trabalhos para m pessoas pelo menor custo possível, de forma que cada trabalho seja designado a exatamente uma pessoa. Desta forma, metade dos vértices deve ser designado a outra metade dos vértices, com o objetivo de minimizar o custo.

Este problema é visto como um caso específico do PFCM onde o conjunto de vértices pode ser dividido em dois, as rotas só partem de vértices de fornecimento e só chegam um vértices de demanda (dígrafo bipartido) e cada vértice fornece ou demanda apenas uma unidade. Este problema pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i,j:(v_i,v_j) \in E} w_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_j^m x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & \sum_i^m x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, m, \\ & x \in \mathbb{B}_+^n \end{aligned} \tag{3.6}$$

O problema de designação pode ser resolvido utilizando o algoritmo húngaro, que pode ser consultado no livro de Bazaraa, Jarvis e Sherali (2010). Este algoritmo trabalha com uma matriz de custo $A_{m \times m}$, onde o valor de a_{ij} representa o custo de designar o trabalho i à pessoa j . Este algoritmo analisa que existe um custo inerente à realização do trabalho i , portanto, deve-se subtrair de cada linha o menor valor dela. Como

também existe um custo inerente ao trabalho da pessoa j , deve-se subtrair o menor valor de cada coluna da matriz resultante da primeira etapa. A matriz resultante é chamada de matriz reduzida. A Figura 3.14 apresenta um exemplo da construção da matriz reduzida.

7	-1	17	9	-1	→	8	0	18	10	→	8	0	18	9
22	12	16	13	12		10	0	4	1		10	0	4	0
8	18	-2	14	-2		10	20	0	16		10	20	0	15
8	21	16	17	8		0	13	8	9		0	13	8	8
					0	0	0	1						

Figura 3.14: Construção da matriz reduzida

Se o número mínimo de linhas possíveis, verticais ou horizontais, que passem por todos os zeros da matriz reduzida for igual a m , então a alocação ótima pode ser visualizada na matriz reduzida. Para identificar quais trabalhos foram designados para quais pessoas, basta escolher as m designações com custo zero na matriz reduzida, de forma que cada linha e cada coluna contenha apenas uma designação. Na Figura 3.15 observa-se a alocação ótima do exemplo anterior indicada por asteriscos. O custo da solução ótima é calculada pela soma dos valores que foram subtraídos das linhas e das colunas. Para o exemplo anterior o custo da solução ótima é $(-1 + 12 - 2 + 8 + 1) = 18$.

8	0*	18	9
10	0	4	0*
10	20	0*	15
0*	13	8	8

$l = 4 \rightarrow$ solução ótima

Figura 3.15: Matriz reduzida indicando solução ótima

Caso o menor número de linhas que cubram os zeros da matriz reduzida for menor que m , identifica-se o menor elemento não coberto pelas linhas, e subtrai-se seu valor de todos os elementos não cobertos. De forma adicional, deve-se acrescentar este valor nos elementos que foram cobertos por duas linhas, como apresentado na Figura 3.16.

8	0	18	9	→	8 ⁻²	0	18	9 ⁻²	→	6	0*	18	7
10	0	4	2		10 ⁻²	0	4	2 ⁻²		8	0	4	0*
10	20	0	15		10 ⁻²	20	0	15 ⁻²		8	20	0*	13
0	13	8	0		0	13 ⁺²	8 ⁺²	0		0*	15	10	0
				$l = 3$					$l = 4 \rightarrow$ solução ótima				

Figura 3.16: Método húngaro

O método deve seguir até que o menor número de linhas que cubram os zeros seja igual a m , e uma alocação ótima será dada pelos valores zeros de forma a se ter apenas um zero em cada linha e em cada coluna. O custo da solução ótima será dado pelo custo obtido ao se construir a matriz reduzida mais a soma dos valores que foram

subtraídos utilizando o método. No exemplo da Figura 3.16, o custo ótimo seria dado pela adição de 2 à solução obtida com a matriz reduzida.

3.4.2.3 Problema de Maximização de Conjunto Independente

A partir de um grafo $G = (V, E)$ não direcionado em que cada vértice tem um peso w_i , o Problema de Maximização de Conjunto Independente (PMCI) corresponde a identificar o conjunto independente do grafo cuja soma dos os pesos dos vértices seja máxima.

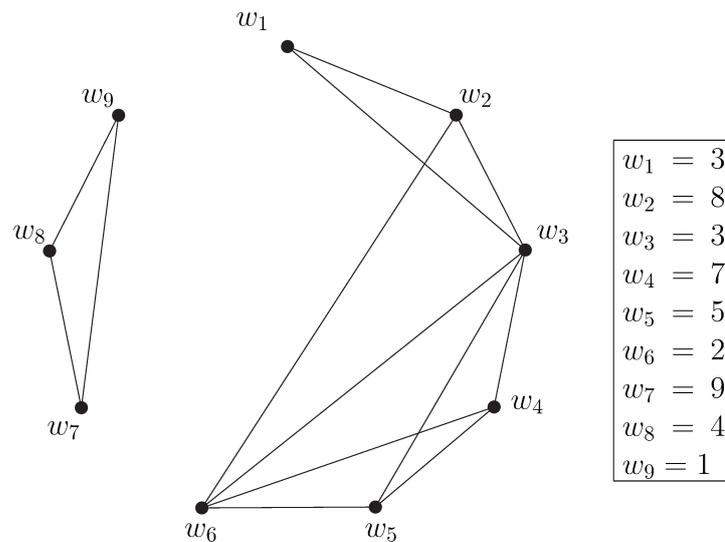


Figura 3.17: Exemplo de Problema de Maximização de Conjunto Independente

Este problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & \sum_{i: v_i \in V} w_i x_i \\
 \text{s.a.} \quad & x_i + x_j \leq 1 \quad \forall i, j : (v_i, v_j) \in E, \\
 & x \in \mathbb{B}_+^m
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Grötschel, Lovász e Schrijver (1981) propuseram um algoritmo que resolve o PMCI em tempo polinomial se o grafo for perfeito, porém Müller (2006) indica que podem existir algoritmos mais eficientes para diferentes classes de grafos perfeitos. Na Seção 3.4.3 será evidenciado como PIV de um leilão combinatório pode ser representado na forma de um PMCI.

3.4.3 Hipergrafos

Hipergrafo é uma generalização de grafo e pode ser representado por $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, onde $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ representa o conjunto de vértices, e $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ o con-

junto de hiperarestas. Estas se caracterizam por ser um subconjunto dos vértices, não se limitando a ser um subconjunto de no máximo dois vértices como ocorre nos grafos. Um hipergrafo também pode ser representado por matriz de incidência, como observado na Figura 3.18.

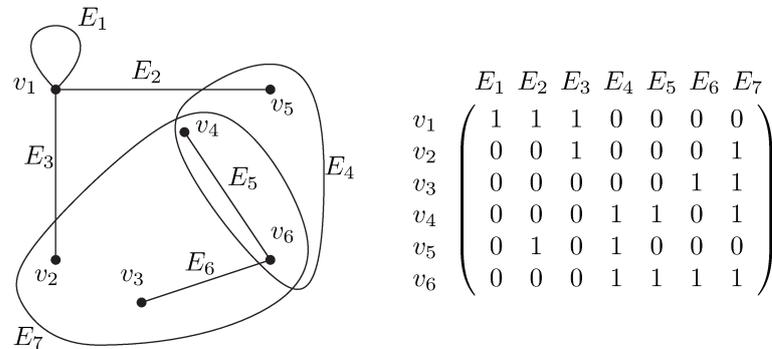


Figura 3.18: Exemplo de hipergrafo (\mathcal{H}) e sua matriz de incidência

A noção de hipergrafos permite a representação de problemas mais complexos, como o PIV de um leilão combinatório, que pode ser formulado com os vértices representando os itens do leilão e hiperarestas representando os pacotes. Para resolução do PIV será necessário identificar quais hiperarestas devem ser selecionadas para maximizar o benefício do leiloeiro (associado ao peso das hiperarestas), de forma que nenhum vértice esteja em duas hiperarestas selecionadas.

Para alguns problemas modelados com hipergrafos, é possível representar utilizando grafos de interseção, como é o caso do PIV. Os vértices em um grafo de interseção representam as arestas do hipergrafo e dois vértices são adjacentes se as duas hiperarestas que estes representam tiverem algum vértice em comum. O grafo de interseção de outro grafo também pode ser chamado de grafo de linha $L(G)$ (BONDY; MURTY, 2008). A Figura 3.19 indica o grafo de interseção do hipergrafo mostrado na Figura 3.18.

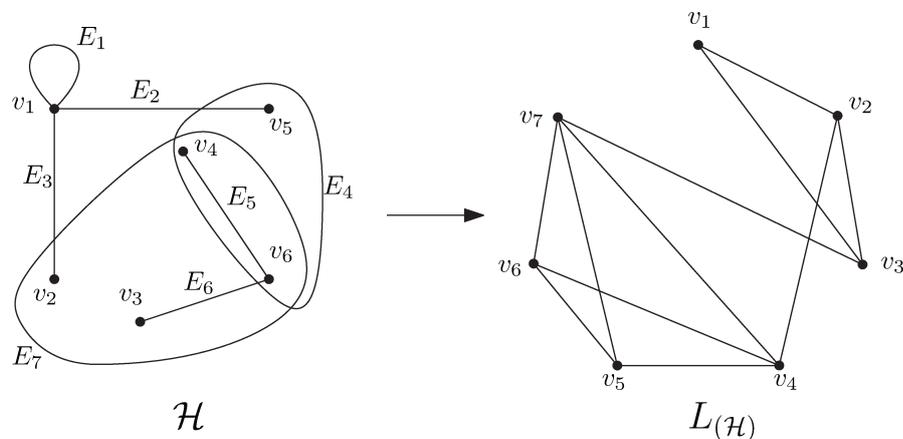


Figura 3.19: Exemplo de grafo de interseção $L(\mathcal{H})$ de um hipergrafo

Com esta representação, o PIV de um leilão combinatório se torna um pro-

blema de otimização de conjuntos independentes em grafos, ou seja, encontrar o conjunto independente no grafo de interseção cuja soma dos pesos dos vértices maximize o benefício para o leiloeiro.

As regras de empacotamento, foco desta dissertação, são fundamentadas na teoria de matrizes unimodulares, grafos e hipergrafos, apresentados neste capítulo, e são propostas para serem utilizadas na sistemática de LRC apresentada no Capítulo 5. A fundamentação destas regras de empacotamento são apresentadas com mais detalhe no Capítulo 4.

4 REGRAS DE EMPACOTAMENTO

As regras de empacotamento propostas neste capítulo utilizam como base os conceitos apresentados no Capítulo 3, sendo propostas regras baseadas em matrizes totalmente unimodulares, em grafos de interseção e em hipergrafos.

As regras propostas devem afetar apenas a matriz de empacotamento A dos Problema de Identificação do Vencedors (PIVs). Sendo assim, as regras de empacotamento que serão expostas a seguir são focadas na solução do PIV de um Leilão Reverso Combinatório (LRC) Caso 1, apenas com restrições de partição. Para LRC Caso 2 a aplicação das mesmas regras pode melhorar na busca de uma solução ótima por restringir o número de pacotes possíveis, mesmo não garantindo encontrar uma solução em tempo polinomial. Também pode ser estudada a aplicação de métodos, como exemplo a relaxação lagrangiana, onde se garante que o subproblema contendo apenas as restrições com a matriz de empacotamento possa ser resolvido em tempo computacional polinomial.

4.1 Regras baseadas em matrizes totalmente unimodulares

As regras de empacotamento baseadas em matrizes Totalmente Unimodular (TU) são propostas pois a relaxação linear do problema encontra resultados inteiros, sendo também respostas do problema original. Assim, pode-se garantir encontrar uma solução utilizando métodos de solução de problemas lineares.

Os métodos de solução dos problemas lineares se iniciam a partir de uma solução factível já conhecida. Para garantir a existência de uma solução factível do PIV, deve-se incluir o leiloeiro como um participante do leilão realizando lance nos preços de reserva dos produtos. Desta forma a solução em que o leiloeiro é vencedor em todos os pacotes de único item se torna a solução trivial. A indicação do pacote de item único ser vencedor com valor de lance igual ao preço de reserva indica que o item não será atribuído a nenhum dos participantes do leilão.

4.1.1 Pacotes de itens divididos em dois conjuntos

Nesta regra de empacotamento os itens de um leilão devem ser divididos em dois conjuntos. É permitido que um pacote tenha no máximo dois itens. Caso seja formado por dois itens, cada item deve estar em um conjunto diferente. A divisão dos itens nos conjuntos deve ser estipulada antes do início do leilão e deve estimular que itens que possam apresentar complementaridades estejam em conjuntos distintos.

O número de pacotes possíveis formados com esta regra de empacotamento depende de como são subdivididos os conjuntos. Para uma quantidade n de itens, o número máximo l de pacotes é:

- Se n for par: $l = \frac{n^2}{4} + n$

- Se n for ímpar: $l = \frac{n^2-1}{4} + n$

A matriz de empacotamento $A_{n \times l}$ resultante de pacotes formados por esta regra é a junção de uma matriz identidade, indicando os pacotes formados por apenas um item, com a matriz de incidência do respectivo grafo bipartido. A matriz de empacotamento atende o teorema da Ghouila-Houri, mencionado na Seção 3.2.2 e portanto é uma matriz TU. A divisão dos itens em dois conjuntos já indica como as linhas da matriz de empacotamento devem ser divididas de modo a atender a Equação 3.2. A Figura 4.1 mostra um exemplo com 5 itens, representados pelos vértices do grafo v_n , divididos em dois conjuntos, juntamente com a sua respectiva matriz de empacotamento indicando os 11 pacotes permitidos.

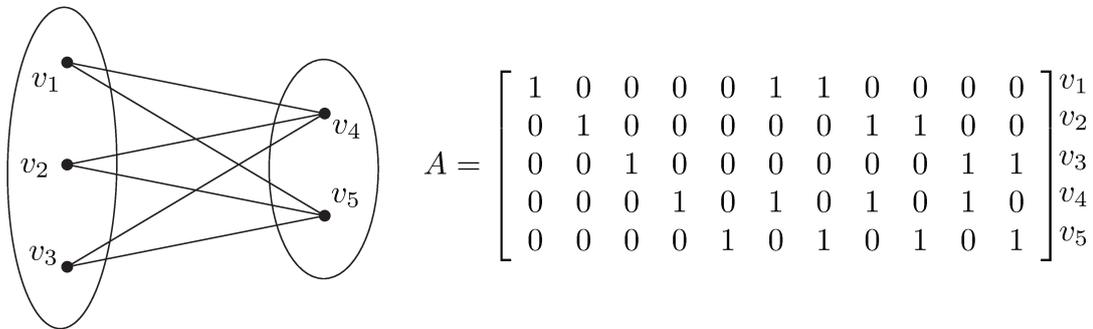


Figura 4.1: Exemplo de pacotes de itens divididos em dois conjuntos

4.1.2 Pacotes de itens sequenciais de uma lista

Para esta regra os itens devem ser organizados em forma de uma lista. A formatação desta lista deve ser feita antes do início do leilão e deve estimular que itens que possam apresentar complementaridades estejam próximos. Os pacotes permitidos são os que tenham apenas itens em sequência, de forma que se um participante deseja incluir dois itens no mesmo pacote, este deve incluir todos os itens que estejam entre eles na lista.

O número máximo l de pacotes que podem ser formados de acordo com essa regra é $l = \frac{n^2 + n}{2}$, considerando uma quantidade n de itens.

A matriz de empacotamento formada por essa regra gera uma matriz sequencial. Foi demonstrado na Seção 3.2.2 que as matrizes sequenciais são TU e seguem o teorema de Ghouila-Houri. A Figura 4.2 mostra um exemplo de 5 itens organizados em uma lista, representados por v_n , e a respectiva matriz de empacotamento com todos os pacotes permitidos.

LISTA
- v_1
- v_2
- v_3
- v_4
- v_5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}$$

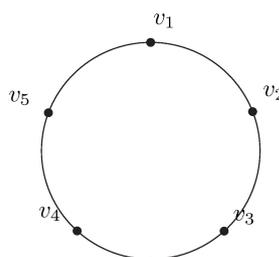
Figura 4.2: Exemplo de pacotes de itens sequenciais de uma lista

4.1.3 Pacotes de itens sequenciais de uma lista circular

A regra de empacotamento que permite itens sequenciais de uma lista circular se assemelha à regra de itens sequenciais em uma lista. Esta regra é menos restritiva por permitir que também sejam formados pacotes gerando duas sequências, desde que a primeira inicie com o primeiro item e a segunda termine com o último item. Na prática seria uma lista circular em que o primeiro item também é sequencial ao último item.

Com esta regra de empacotamento são permitidos $l = n^2 - n + 1$ pacotes, para uma quantidade n de itens. Para solucionar o PIV com esta regra deve-se resolver n vezes o problema equivalente ao de pacotes em itens sequenciais em uma lista, de forma que em cada problema um item diferente é o primeiro item da lista. Como é possível encontrar uma solução ótima em tempo polinomial para pacotes de itens em uma lista, também é possível encontrar para uma lista circular (ROTHKOPF; PEKEC; HARSTAD, 1998).

A Figura 4.3 indica um exemplo com 5 itens em uma lista circular, representados por v_n , e a respectiva matriz de empacotamento.



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}$$

Figura 4.3: Exemplo de pacotes de itens sequenciais de uma lista

4.2 Regras baseadas em grafos de interseção

Conforme mencionado na Seção 3.4.3, o PIV de um leilão combinatório pode ser representado através de grafos de interseção e se torna um problema de otimização de conjuntos independentes em grafos. Em um grafo de interseção os vértices representam os pacotes, os valores associados aos vértices representam os valores do melhor lance realizado

no pacote e dois vértices serão conectados se estes contêm algum item em comum.

4.2.1 Pacotes de itens sequenciais e conectados

Para regra de empacotamento com pacotes de itens que sejam sequenciais e conectados, os itens devem estar organizados geometricamente em diversas fileiras. A formatação geométrica dos itens é definida antes do início do leilão e deve ser estimulado que itens que possam apresentar complementaridades fiquem geometricamente próximos. Pacotes são sequenciais caso, para mesma fileira, dois itens só estejam presentes no mesmo pacote se todos os itens entre eles também estejam. Pacotes são conectados se todos os itens do pacotes puderem se ligar geometricamente atravessando apenas fronteiras de itens contidos no pacote. A Figura 4.4 mostra um exemplo de como os itens devem ser organizados geometricamente e as características dos lances sequenciais e conectados.

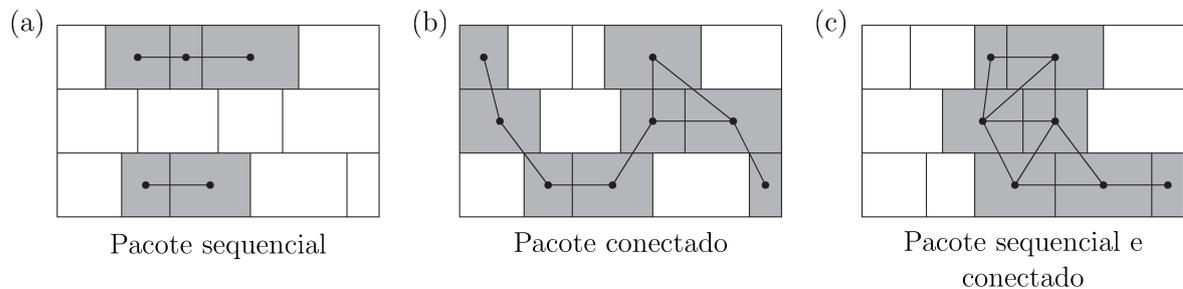


Figura 4.4: Pacotes de itens sequenciais e conectados

O número de pacotes possíveis depende muito da forma como os itens são alocados na estrutura. A Figura 4.5 mostra um exemplo com 5 itens, representados por v_n , divididos em duas fileiras e a respectiva matriz de empacotamento contendo todos os 25 pacotes permitidos.

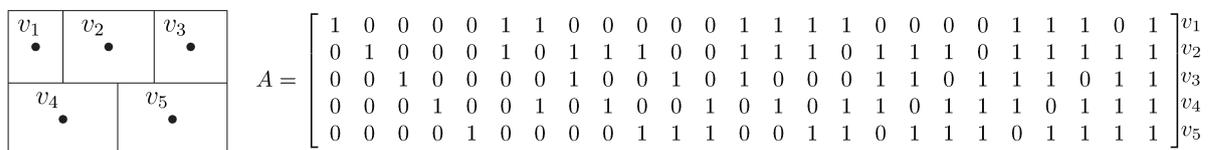


Figura 4.5: Exemplo de pacotes de itens sequenciais e conectados

A regra se fundamenta no trabalho de Vangerven, Goossens e Spieksma (2017) que apresentam um algoritmo utilizando método de programação dinâmica para resolver um problema de encontrar o conjunto independente de peso máximo em um grafo de interseção geométrico. Em seu trabalho consideram um leilão padrão e não um reverso, entretanto o algoritmo também pode ser aplicado para descobrir o conjunto independente de peso mínimo. Seus resultados indicam que é possível encontrar resultados ótimos em

tempo polinomial caso os pacotes sejam sequenciais e conectados uma vez que o número de fileiras não seja um dado de entrada. Também garantem resultados em tempo polinomial para pacotes que sejam apenas conectados, desde que o número de fileiras seja menor ou igual a três.

4.2.2 Pacotes de itens formando uma sub-árvore

Para a aplicação desta regra os itens devem ser representados como vértices de um grafo caracterizado como uma floresta. A formatação do grafo é definida antes do início do leilão e deve ser estimulado que itens que possam apresentar complementaridades estejam ligados por arestas. Só serão permitidos pacotes se o subgrafo induzido contendo os vértices correspondentes aos itens do pacote forme um grafo caracterizado como uma árvore, ou seja, o pacote representa uma sub-árvore do grafo principal.

O número de pacotes possíveis depende muito da forma como os itens são alocados na estrutura. A Figura 4.6 mostra um exemplo com 5 itens formando um grafo caracterizado como uma árvore e a respectiva matriz de empacotamento contendo todos os 20 pacotes possíveis.

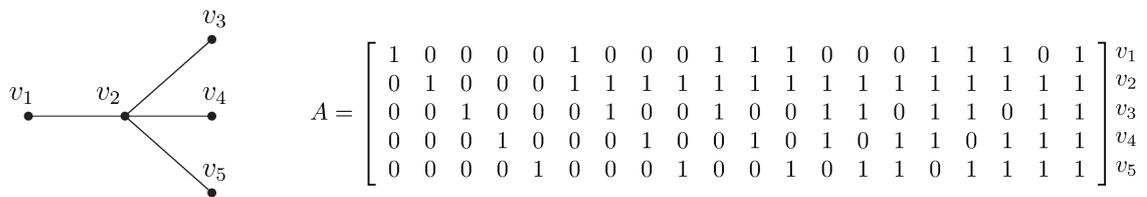


Figura 4.6: Exemplo de pacotes de itens formando uma sub-árvore

Grötschel, Lovász e Schrijver (1981) propuseram um algoritmo para resolver um problema de encontrar o conjunto independente de peso máximo para um grafo perfeito, com os valores dos pesos dos vértices inteiros e não negativos. Müller (2006) indica a existência outros algoritmos para resolver problemas de otimização de conjuntos independentes ponderados (*weighted stable sets problem*). Müller (2006) também aponta que os grafos de interseção gerados por sub-árvores são grafos perfeitos.

4.3 Regras baseadas em hipergrafos

O PIV de um LRC pode ser representado por um hipergrafo, conforme apresentado na Seção 3.4.3. Vértices representam os itens, enquanto hiperarestas os pacotes. Os valores de lance são representados pelos pesos das hiperarestas. A partir desta representação foram identificados algumas formas de restringir os pacotes de forma a garantir a resolução do problema em tempo polinomial.

4.3.1 Pacotes de itens baseados na cardinalidade

Esta regra de empacotamento se baseia apenas na cardinalidade dos pacotes, ou seja, restringe a quantidade de itens que um pacote pode ter. Desta forma, não é necessário realizar uma organização prévia dos itens. Serão apontadas três possibilidades de restrição:

- Pacotes com no máximo dois itens.
- Pacotes de um item e pacotes com cardinalidade maior que $\frac{n}{k}$, com n sendo o número total de itens e k um número maior que zero.
- Pacotes com no máximo dois itens e pacotes com cardinalidade maior que $\frac{n}{k}$.

Com a regra de empacotamento com no máximo dois itens são permitidos um número de pacotes igual a $l = \frac{n^2 + n}{2}$. Rothkopf, Pekec e Harstad (1998) afirmam que este problema pode ser resolvido em tempo polinomial para um leilão combinatório padrão, por ser o equivalente a resolver um problema de acoplamento de máximo peso (*maximum weighted matching*) em um grafo.

Para o segundo caso é permitida a formação de um número de pacotes igual a $l = n + \sum_{i=q+1}^n \binom{n}{i}$, sendo q o quociente da divisão de $\frac{n}{k}$. Esta regra limita o número máximo de pacotes com cardinalidade maior que $\frac{n}{k}$ em uma solução para $k - 1$, uma vez que um mesmo item não pode ser alocado em pacotes vencedores diferentes (ROTHKOPF; PEKEC; HARSTAD, 1998). Como exemplo, um problema com cinco itens e $k = 2$ são permitidos apenas pacotes de itens únicos e pacotes com pelo menos três itens. Em uma solução do problema é permitido apenas um pacote de alta cardinalidade, restringindo o número de combinações dos pacotes para encontrar uma solução.

O último caso permite a formação de pacotes unificando as duas regras anteriores. O número máximo de pacotes é igual a $l = \frac{n^2 + n}{2} + \sum_{i=q+1}^n \binom{n}{i}$. Rothkopf, Pekec e Harstad (1998) indicam que essa regra não aumenta significativamente a dificuldade computacional e que uma solução deve ser encontrada em tempo polinomial.

A Figura 4.7 indica um exemplo de matriz de empacotamento para cada uma das três regras considerando $n = 5$ itens e $k = 2$.

4.3.2 Pacotes de itens em linhas ou colunas inteiras

Para aplicação desta regra é necessário se organizar os itens geometricamente em uma matriz. Os elementos da matriz devem representar os itens a ser leiloados, e a organização deve ser feita de tal forma que todos os elementos da matriz representem exatamente um item. Os pacotes permitidos são pacotes de apenas um item, pacotes que

$$\begin{aligned}
\text{a) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \\
\text{b) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \\
\text{c) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}
\end{aligned}$$

Figura 4.7: Exemplo de matriz de empacotamento para pacotes com no máximo dois itens (a), pacotes com um item ou de alta cardinalidade (b) e pacotes que permitem as duas regras simultaneamente (c)

contenham uma linha inteira ou pacotes que contenham uma coluna inteira. A organização dos itens é definida antes do início do leilão e deve ser estimulado que itens que possam apresentar complementaridades estejam nas mesmas linhas ou colunas.

Um arranjo dos n itens em i linhas e j colunas deve atender a equação $n = i \times j$, e o número máximo de pacotes possíveis é $l = i + j + n$. A Figura 4.8 mostra um exemplo com 12 itens, representados por v_n , organizados em 4 linhas e 3 colunas e sua respectiva matriz de empacotamento.

v_1	v_5	v_9
v_2	v_6	v_{10}
v_3	v_7	v_{11}
v_4	v_8	v_{12}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{matrix}$$

Figura 4.8: Exemplo de pacotes de itens em linhas ou colunas inteiras

Uma vez que um pacote linha não pode estar presente na mesma solução de um pacote coluna, o PIV principal pode ser subdividido em dois sub-problemas: Sub-problema Linha e Sub-problema Coluna. No primeiro considera-se apenas os lances realizados em pacotes de único item e pacotes linha, enquanto no segundo considera os lances em pacotes de um item e pacotes coluna. Esses subproblemas são triviais, uma vez que basta comparar se é preferível formar a solução com um pacote linha ou os pacotes de itens únicos que estão presentes nele, e assim por diante. Por exemplo, se valor de lance no

pacote $p_{16} = (v_1, v_5, v_9)$ for preferível do que a soma dos valores de lance dos pacotes $p_1 = (v_1)$, $p_5 = (v_5)$ e $p_9 = (v_9)$, então o pacote fará parte da solução ótima para o Sub-problema Linha. A solução do problema principal resulta no melhor resultado entre os dois subproblemas (ROTHKOPF; PEKEC; HARSTAD, 1998).

4.3.3 Pacotes de itens em uma estrutura aninhada

Nesta regra de empacotamento considera-se um conjunto A contendo todos os itens. É permitido formar dois ou mais subconjuntos disjuntos de itens, por exemplo B e C ($B \cap C = \emptyset$), de forma que a união desses conjuntos seja o conjunto principal ($B \cup C = A$). Os subconjuntos podem ter decomposições sucessivas até que se chegue em conjuntos com apenas um item. Os pacotes permitidos nessa regra de empacotamento são todos os conjuntos e subconjuntos gerados. A estrutura deve ser formada previamente ao início do leilão e itens que possam ser complementares devem ser estimulados a estarem em mesmos subconjuntos no decorrer do processo de decomposição.

O número máximo de pacotes permitidos para essa regra ocorre quando os pacotes maiores sempre forem decompostos em apenas dois outros pacotes, totalizando um número de $l = 2n - 1$. A Figura 4.9 indica um exemplo de 5 itens, representados por v_n , com a decomposição em 9 diferentes pacotes, representados pelos retângulos. a respectiva matriz de empacotamento A e uma matriz de valores de lances realizados nos pacotes B também são apresentadas na figura.

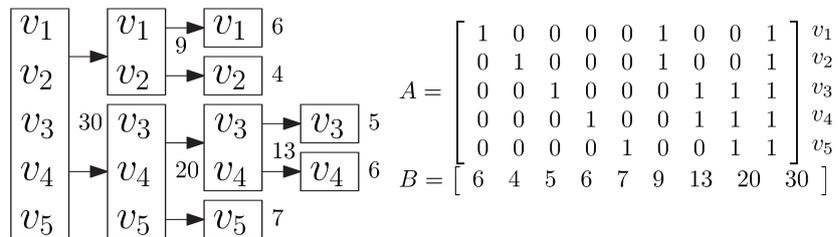


Figura 4.9: Exemplo de pacotes de itens em uma estrutura aninhada

A resolução do PIV com formação de pacotes através dessa decomposição se torna um problema simples. Deve-se iniciar comparando a soma dos valores dos lances em pacotes de itens únicos (B e C) com o valor de lance no pacote que os originou (A). Caso o pacote A se mostre mais benéfico ao leiloeiro os pacotes de itens únicos são desconsiderados, caso contrário o pacote de origem é desconsiderado. O processo de comparação deve fazer o caminho reverso da decomposição feita, até que se chegue no pacote com todos os itens (ROTHKOPF; PEKEC; HARSTAD, 1998).

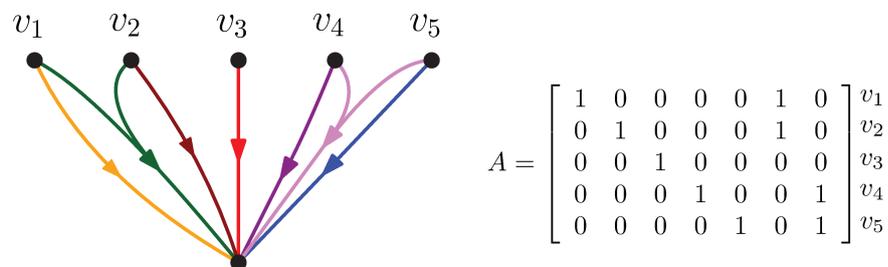
Analisando o exemplo da Figura 4.9 para um leilão reverso, observa-se que os lances no pacote $p_6 = (v_1, v_2)$ é preferível ao dos pacotes $p_1 = (v_1)$ e $p_2 = (v_2)$ e dos pacotes $p_3 = (v_3)$ e $p_4 = (v_4)$ preferíveis ao pacote $p_7 = (v_3, v_4)$. Desta forma pode-se desconsiderar

os pacotes p_1 , p_2 e p_7 . Valores de lances dos pacotes p_3 , p_4 e $p_5 = (v_5)$ somados tem resultado de 18, inferior ao valor do lance no pacote $p_8 = (v_3, v_4, v_5)$, permitindo também desconsiderar o pacote p_8 como parte da solução ótima. Finalmente ao somar os valores de lance dos pacotes p_3 , p_4 e p_5 e p_6 soma-se 27, inferior ao valor de lance do pacotes com todos os itens. Desta forma, conclui-se que o resultado do PIV para este exemplo é selecionar os pacotes p_3 , p_4 e p_5 e p_6 totalizando um pagamento de 27.

4.3.4 Pacotes de itens com restrições de sobreposição

Para esta regra de empacotamento é permitida a formação de qualquer pacote desde que cada um dos pacotes permitidos não tenha uma sobreposição com mais do que outros dois pacotes. A sobreposição ocorre quando dois pacotes tem pelo menos um item em comum.

O número de pacotes depende da forma em que são permitidos os lances, entretanto esta regra é bastante restritiva. Ao se permitir um lance em pacote com cardinalidade 3 já impossibilita a realização de lances em todos os pacotes com apenas um item. A Figura 4.10 indica um exemplo com 5 itens, representados pelos vértices v_n , onde de geração de pacotes respeita a regra de empacotamento mostrada, evidenciado pelas hiperarestas do hipergrafo. As hiperarestas são direcionadas apenas para se ter uma visualização mais clara dos pacotes sobrepostos, e deve ser considerado a sobreposição apenas dos vértices de partida das hiperarestas.



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}$$

Figura 4.10: Exemplo de pacotes de itens com restrições de sobreposição

Pane (2017) apresenta um algoritmo para a resolução do PIV em tempo polinomial considerando esta regra de empacotamento. Em seu trabalho considera que os vértices representam os itens e o valores atribuídos aos vértices indicam o valor base do item. As hiperarestas representam os pacotes formados e seus valores representam o benefício ou perda marginal ao se obter o conjunto de itens.

5 EXPERIMENTOS EM UM LEILÃO REVERSO COMBINATÓRIO

Neste capítulo são realizados experimentos para verificar a eficiência da aplicação das regras de empacotamento em uma sistemática de Leilão Reverso Combinatório (LRC) aplicado no setor elétrico brasileiro.

5.1 Leilão Reverso Combinatório proposto

O LRC proposto a seguir foi desenvolvido por um grupo de trabalho de um projeto de P&D da ANEEL, com o propósito de apresentar uma sistemática de leilão combinatório de geração e transmissão de energia que possa ser utilizado no setor elétrico brasileiro.

5.1.1 Definição dos Produtos

Para os empreendimentos de geração serão contratados capacidade de geração, independente da fonte em que será gerada. Já para os empreendimentos de transmissão será contratada a construção, operação e manutenção dos empreendimentos, da mesma maneira em que é realizado atualmente.

Os produtos oferecidos no leilão são:

- capacidade de geração Usina Hidrelétrica (UHE) Tipo 1
- capacidade de geração UHE Tipo 2
- capacidade de geração Usina Eólica (EOL)
- capacidade de geração Usina Solar Fotovoltaica (UFV)
- capacidade de geração Usina Termelétrica (UTE) à Biomassa
- capacidade de geração UTE à Gás Natural
- lote de Conexão
- lote de Transmissão

Os empreendimentos de geração UHE Tipo 1 são usinas hidrelétricas com potência superior a 50 MW que pode ser objeto de outorga de concessão. UHE Tipo 2 são hidrelétricas que são objetos de autorização, onde se enquadram Pequena Central Hidrelétrica (PCH), UHE com potência inferior ou igual a 50 MW ou ampliação de hidrelétricas existentes.

Cada um dos produtos de capacidade de geração estará associado a uma usina, que por sua vez pode ser considerada como pertencente à rede de transmissão ou não conectada à rede. Esta caracterização dependerá da proximidade de onde a usina será instalada com o ponto de conexão com o Sistema Interligado Nacional (SIN). Caso a usina seja considerada como não conectada à rede, esta deve estar associada a um lote de conexão que realizará a ligação entre a subestação da usina com o SIN. Desta forma, o leilão deve garantir que todos os empreendimentos de geração só serão considerados vencedores caso exista previsão de ligação com o SIN.

5.1.2 Sistemática do Leilão

Foi desenvolvida uma sistemática de leilão inspirada nas regras dos leilões atuais. O leilão é dividido em três fases, sendo a primeira fase para o apregoamento dos empreendimentos com outorga (UHE Caso 1), a segunda relativa aos demais empreendimentos de geração e a terceira fase para definir os vencedores dos lotes de transmissão. Na primeira e segunda fase são considerados os empreendimentos de conexão relativos às usinas classificadas como não conectada à rede, classificando para a terceira fase somente as conexões necessárias para conectar os empreendimentos vencedores. A seguir estrutura-se a sistemática em forma de pseudocódigo:

INÍCIO DO LEILÃO

INÍCIO PRIMEIRA FASE (Empreendimentos com Outorga)

ETAPA ABERTA (Leilão *Combinatorial Clock Auction* (CCA))

ETAPA FECHADA (LRC Fechado de Primeiro Preço)

FIM DA PRIMEIRA FASE

INÍCIO SEGUNDA FASE (Demais Empreendimentos de Geração)

ETAPA ABERTA (Leilão CCA)

ETAPA FECHADA (LRC Fechado de Primeiro Preço)

FIM DA SEGUNDA FASE

INÍCIO TERCEIRA FASE (Empreendimentos Transmissão + Conexão)

ETAPA ABERTA (Leilão CCA)

ETAPA FECHADA (LRC Fechado de Primeiro Preço)

FIM DA TERCEIRA FASE

FIM DO LEILÃO

Algoritmo 1: Sistemática do LRC de Geração e Transmissão

Na primeira e segunda fase os participantes podem realizar lances em pacotes de geração. Os empreendimentos de conexão são considerados nas mesmas fases dos empreendimentos de geração não conectados que os necessitam. Sempre que um participante realizar lance em pacote que contém um empreendimento de geração não conectado, deve também realizar um lance em um pacote contendo apenas o empreendimento de conexão correspondente. Nas duas primeiras fases devem ser consideradas as restrições de

conexão no Problema de Identificação do Vencedor (PIV) a ser solucionado na etapa fechada. Estas restrições garantem que um empreendimento não conectado só estará em um pacote vencedor se a sua respectiva conexão também estiver em um pacote vencedor. Estas restrições serão evidenciadas na Seção 5.1.3. Após solução do PIV os pacotes vencedores que contêm apenas empreendimentos de geração são considerados vencedores nas respectivas fases. As conexões que foram vencedoras nas duas primeiras fases por serem necessárias para os empreendimentos de geração não conectados considerados vencedores, serão classificadas para a terceira fase do leilão.

A regra de realizar lances nas respectivas conexões caso realize lance em algum pacote com empreendimento não conectado serve para garantir que exista lance na conexão, permitindo uma solução factível contendo os empreendimentos não conectados. Lances realizados nas conexões serão considerados na terceira fase, portanto, vencer o lote de conexão nas primeiras fases não garante a concessão do lote, sendo apenas uma forma de classificação para participar da terceira fase.

Na terceira fase concorrerão os lotes de conexão classificadas nas fases anteriores e os lotes de transmissão. Os lances vencedores nos lotes de conexão das fases anteriores serão considerados como preços iniciais dos empreendimentos na etapa aberta. Após o fim da etapa aberta, serão permitidos a realização de lances fechados em pacotes. Nesta fase serão consideradas apenas as restrições de partição, que garantem que cada um dos lotes esteja contido em exatamente um pacote vencedor. A formulação do PIV para esta fase será mais detalhada na Seção 5.1.3. Para maior detalhamento da sistemática desenvolvida recomenda-se consultar o trabalho de Silva (2021, no prelo).

5.1.2.1 Etapa Aberta

O modelo de leilão das etapas abertas é um LRC do tipo CCA. Nessa etapa são estipulados preços iniciais para cada item a ser leiloadado na fase. Os participantes devem realizar um lance em um pacote considerando a regra de empacotamento e as regras de atividade que estão ativas em cada fase. Os preços devem cair a cada rodada de acordo com a regra de decremento, e as rodadas se encerram assim que a regra de parada seja atingida. Para maior detalhamento desta etapa e das regras de atividade pode ser consultado a dissertação de Del-Puppo (2021, no prelo).

Cada uma das fases tem uma peculiaridade, e portanto regras de parada e de decremento se alteram para cada uma das fases. Na Primeira Fase, de empreendimentos de geração com outorga de concessão, vários participantes disputam o direito de construção de UHE Tipo 1. Na etapa aberta não são consideradas as conexões necessárias para os empreendimentos não conectados, sendo necessária realização de lances nelas apenas na etapa fechada. A regra de decremento indica que o empreendimento terá um decremento percentual pré-determinado para a próxima rodada caso mais de um participante inclua a UHE nos seus pacotes. As rodadas prosseguem até que a primeira das duas regras

de paradas seja atendida. A primeira regra de parada estipula que as rodadas devem ser finalizadas caso a soma da capacidade dos empreendimentos que tem participantes interessados na rodada seja inferior a um excesso da demanda pré-estipulada que deve ser atendida na Primeira Fase. A segunda regra de parada indica que as rodadas finalizem caso exista no máximo um participante interessado em cada um dos empreendimentos a serem leiloados. Todos os empreendimentos são classificados para a etapa fechada.

A Segunda Fase tem o objetivo de leiloar os demais empreendimentos de geração, que necessitam de outorga de autorização. Sendo assim, cada empreendimento pode estar presente apenas nos pacotes do participante responsável pelo empreendimento. A regra de decremento indica um decremento percentual pré-determinado de todos os empreendimentos. A regra de parada para esta fase é igual à primeira regra de parada da Primeira Fase. Apenas os empreendimentos que foram inclusos em pacotes na última rodada são classificados para a etapa fechada.

Na Terceira Fase vários participantes disputam o direito de construção dos empreendimentos de transmissão. As conexões necessárias para empreendimentos não conectados, uma vez classificadas para a Terceira Fase, são tratadas como lotes de transmissão. A regra de decremento para esta fase impõe um decremento percentual pré-determinado para empreendimentos com mais de dois participantes interessados. A regra de parada para esta fase indica que as rodadas finalizem caso, para todos os empreendimentos a serem leiloados, exista no máximo dois participantes interessados na rodada. Todos os empreendimentos são classificados para a etapa fechada.

5.1.2.2 Etapa Fechada

A etapa fechada deve ocorrer como um LRC fechado de primeiro preço. Após o fim da etapa aberta os participantes poderão realizar lances fechados nos pacotes desejados. O lance será válido se estiver condizente com a regra de empacotamento escolhida e as regras de atividades ativas para a fase. Ao final da realização dos lances é resolvido o PIV considerando todos os lances válidos. Os lances realizados na etapa aberta também são considerados como lances válidos no PIV.

A etapa fechada deve funcionar da mesma forma para as três fases, com inserção de lances, verificação de atendimento às regras e resolução do PIV considerando os lances válidos. A formulação do PIV, entretanto, deve variar conforme a fase. A Seção 5.1.3 evidencia a diferença entre as formulações com mais detalhe.

5.1.3 Modelagem matemática do Problema de Identificação do Vencedor

O PIV é caracterizado por ser um problema de Programação Linear Inteira (PLI), onde objetiva-se encontrar uma solução ótima que atenda a todas as restrições. Para um leilão reverso a função objetivo corresponde a minimizar o pagamento do lei-

loeiro, e o principal conjunto de restrições são as restrições de empacotamento. Como os participantes realizam lances em pacotes de itens, deve-se garantir que o mesmo item não seja alocado em mais de um pacote vencedor. Por ser um leilão reverso é necessário incluir restrições para evitar a solução trivial de não contratação de nenhum dos empreendimentos.

Nas duas primeiras fases utiliza-se uma restrição de atendimento à demanda de capacidade de geração desejada pelo leiloeiro, enquanto para a terceira fase será utilizada um conjunto de restrições de forma a garantir que cada lote considerado esteja presente em um pacote vencedor, ou seja, garanta uma partição. Ainda podem existir outras restrições particulares do problema a ser tratado, como será visto nos PIVs das primeiras fases.

5.1.3.1 Primeira e segunda fases

A seguir são definidas algumas denominações utilizadas na modelagem:

i	índice dos empreendimentos de geração da rede básica
j	índice dos empreendimentos de geração não conectados
k	índice dos empreendimentos de conexão
l	índice dos pacotes de empreendimentos
m	índice dos participantes
I	quantidade de empreendimentos de geração da rede básica
J	quantidade de empreendimentos de geração não conectados
K	quantidade de empreendimentos de conexão
L	quantidade de pacotes de empreendimentos
M	quantidade de participantes
\mathbb{I}	conjunto dos empreendimentos de geração da rede básica
\mathbb{J}	conjunto dos empreendimentos de geração não conectados
\mathbb{K}	conjunto dos empreendimentos de conexão
\mathbb{L}	conjuntos dos pacotes de empreendimentos
\mathbb{M}	conjunto dos participantes
D	demanda de capacidade total estabelecida
α_m	participante
$\mathbf{cr}_{1 \times I}$	vetor que indica a capacidade do gerador $GR_i \forall i \in \mathbb{I}$
$\mathbf{ci}_{1 \times J}$	vetor que indica a capacidade do gerador $GI_j \forall j \in \mathbb{J}$
$\mathbf{GR}_{I \times L}$	matriz binária que indica se o pacote $P_l \forall l \in \mathbb{L}$ contém a geração $GR_i \forall i \in \mathbb{I}$
$\mathbf{GI}_{J \times L}$	matriz binária que indica se o pacote $P_l \forall l \in \mathbb{L}$ contém a geração $GI_j \forall j \in \mathbb{J}$
$\mathbf{CI}_{K \times L}$	matriz binária que indica se o pacote $P_l \forall l \in \mathbb{L}$ contém a conexão $CI_k \forall k \in \mathbb{K}$
$\mathbf{AI}_{J \times K}$	matriz binária que indica se a conexão $CI_k \forall k \in \mathbb{K}$ está associado ao gerador $GI_j \forall j \in \mathbb{J}$

$\mathbf{B}_{\mathbb{L} \times \mathbb{M}}$	matriz que indica o lance ofertado pelo $\alpha_m \forall m \in \mathbb{M}$ no pacote $P_l \forall l \in \mathbb{L}$
$\mathbf{X}_{\mathbb{L} \times \mathbb{M}}$	matriz binária que indica se o $\alpha_m \forall m \in \mathbb{M}$ ganhou o $P_l \forall l \in \mathbb{L}$
$\mathbf{e}_{\mathbb{M} \times \mathbb{1}}$	vetor que indica os pontos de elegibilidade do participante $\alpha_m \forall m \in \mathbb{M}$
$\mathbf{e}_{\mathbb{1} \times \mathbb{I}}$	vetor que indica os pontos de elegibilidade da geração $GR_i \forall i \in \mathbb{I}$
$\mathbf{e}_{\mathbb{1} \times \mathbb{J}}$	vetor que indica os pontos de elegibilidade da geração $GI_j \forall j \in \mathbb{J}$
$\mathbf{e}_{\mathbb{1} \times \mathbb{K}}$	vetor que indica os pontos de elegibilidade da conexão $CI_k \forall k \in \mathbb{K}$

São oferecidos I empreendimentos de geração da Rede Básica GR_i , onde $i = 1, \dots, I$; J empreendimentos de geração não conectada GI_j , onde $j = 1, \dots, J$; e K empreendimentos de conexão CI_k , onde $k = 1, \dots, K$. Cada empreendimento de geração não conectada está associado a um empreendimento de conexão. Essa associação é indicada pela matriz binária $\mathbf{A}_{\mathbb{J} \times \mathbb{K}}$ em que cada linha deve somar 1. Cada empreendimento de geração, seja da rede básica ou não conectada, tem associada uma potência de geração cr_i e ci_j , respectivamente. Os participantes α_m , onde $m = 1, \dots, M$, estão habilitados para submeter lances em pacotes P_l , com um valor de lance B_{lm} , onde $l = 1, \dots, L$ e $m = 1, \dots, M$. Os participantes adquirem pontos de elegibilidade antes do início do leilão \mathbf{e}_m , que podem se manter ou diminuir conforme o andamento da etapa aberta. Cada geração GR_i , GI_j e conexão CI_k também têm pontos de elegibilidade associados a eles, \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_j e \mathbf{e}_k respectivamente.

O objetivo do leiloeiro é garantir o atendimento da demanda de capacidade de geração ao menor custo possível. Para isto foi usada uma variável binária de decisão X_{lm} , sendo que $X_{lm} = 1$ indica que o participante m venceu o pacote l , e $X_{lm} = 0$ o contrário. A função objetivo e a restrição de ATENDIMENTO À DEMANDA podem ser definidas como a seguir:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L B_{lm} \cdot X_{lm} \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I cr_i \cdot GR_{il} \cdot X_{lm} + \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J ci_j \cdot GI_{jl} \cdot X_{lm} \geq D, \\
& X_{lm} \in \mathbb{B}_+^{(l,m)}
\end{aligned}$$

Para que não seja permitido que um mesmo produto ou item seja alocado em mais de um pacote vencedor devem ser acrescentadas as restrições de EMPACOTAMENTO. Existirá uma restrição para cada item, acrescentando $I + J + K$ restrições ao PIV.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^M \sum_{l=1: P_l \ni GR_i}^L GR_{il} \cdot X_{lm} &\leq 1 & \forall i \in \mathbb{I} \\
\sum_{m=1}^M \sum_{l=1: P_l \ni GI_j}^L GI_{jl} \cdot X_{lm} &\leq 1 & \forall j \in \mathbb{J} \\
\sum_{m=1}^M \sum_{l=1: P_l \ni CI_k}^L CI_{kl} \cdot X_{lm} &\leq 1 & \forall k \in \mathbb{K}
\end{aligned}$$

As restrições de CONEXÃO são particulares para este LRC. Esta indica que, toda vez que um empreendimento de geração não conectado GI_j estiver alocado em um pacote vencedor, então seu empreendimento de conexão associado também deve estar alocado em um pacote vencedor. Desta forma serão acrescentados mais J restrições ao problema, uma para cada empreendimento não conectado.

$$\sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L GI_{jl} \cdot X_{lm} - \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K AI_{jk} \cdot CI_{kl} \cdot X_{lm} \leq 0 \quad \forall j \in \mathbb{J}$$

Pode-se adicionar restrições de ASSOCIAÇÃO entre empreendimentos de conexão e geração não conectado. Esta restrição deve garantir que se um participante ganhar um pacote contendo uma conexão, este deve ter pelo menos uma das gerações não conectadas associadas a esta conexão também dentro de um pacote vencedor. Desta forma, evita-se que um participante do leilão de geração perca o interesse no lance da conexão a ser considerado na terceira fase, caso não tenha geração não conectada associada a conexão classificadas como vencedora. São acrescentadas mais K restrições ao problema, que seguem a formulação a seguir:

$$\sum_{l=1}^L CI_{kl} \cdot X_{lm} - \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J AI_{jk} \cdot GI_{jl} \cdot X_{lm} \leq 0 \quad \forall k \in \mathbb{K}, m : \sum_{l=1}^L CI_{kl} \cdot X_{lm} = 1$$

Na formulação acima a primeira somatória indica se o participante α_m ganha um pacote contendo o empreendimento CI_k e o outro somatório indica a quantidade de empreendimentos não conectados contidos em pacotes vencedores do participante α_m que estão associados a este empreendimento CI_k .

As restrições de ELEGIBILIDADE são o último conjunto de restrições específicas do leilão, e só deve ser adicionada se a regra de atividade de elegibilidade estiver ativa no leilão. Esta restrição considera que a soma dos pontos de elegibilidade dos pacotes vencedores do participante α_m não pode exceder os pontos de elegibilidade do próprio participante. Sendo assim, são acrescentados mais M restrições ao problema.

$$\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \epsilon r_i \cdot GR_{il} \cdot X_{lm} + \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \epsilon i_j \cdot GI_{jl} \cdot X_{lm} \leq e_m \quad \forall m \in \mathbb{M}$$

5.1.3.2 Terceira fase

A seguir são definidas algumas denominações utilizadas na modelagem:

k	índice dos empreendimentos de conexão
l	índice dos pacotes de empreendimentos
m	índice dos participantes
t	índice dos empreendimentos de transmissão
K	quantidade de empreendimentos de conexão
L	quantidade de pacotes de empreendimentos
M	quantidade de participantes
T	quantidade de empreendimentos de transmissão
\mathbb{K}	conjunto dos empreendimentos de conexão
\mathbb{L}	conjuntos dos pacotes de empreendimentos
\mathbb{M}	conjunto dos participantes
\mathbb{T}	conjunto dos empreendimentos de transmissão
α_m	participante
$\mathbf{CI}_{\mathbb{K} \times \mathbb{L}}$	matriz binária que indica se o pacote $P_l \forall l \in \mathbb{L}$ contém a conexão $CI_k \forall k \in \mathbb{K}$
$\mathbf{LT}_{\mathbb{T} \times \mathbb{L}}$	matriz binária que indica se o pacote $P_l \forall l \in \mathbb{L}$ contém a transmissão $LT_t \forall t \in \mathbb{T}$
$\mathbf{B}_{\mathbb{L} \times \mathbb{M}}$	matriz que indica o lance ofertado pelo $\alpha_m \forall m \in \mathbb{M}$ no pacote $P_l \forall l \in \mathbb{L}$
$\mathbf{X}_{\mathbb{L} \times \mathbb{M}}$	matriz binária que indica se o $\alpha_m \forall m \in \mathbb{M}$ ganhou o $P_l \forall l \in \mathbb{L}$
$\mathbf{e}_{\mathbb{M} \times 1}$	vetor que indica os pontos de elegibilidade do participante $\alpha_m \forall m \in \mathbb{M}$
$\mathbf{\epsilon c}_{1 \times \mathbb{K}}$	vetor que indica os pontos de elegibilidade da conexão $CI_k \forall k \in \mathbb{K}$
$\mathbf{\epsilon t}_{1 \times \mathbb{T}}$	vetor que indica os pontos de elegibilidade da transmissão $LT_t \forall t \in \mathbb{T}$

São oferecidos K empreendimentos de conexão CI_k , onde $k = 1, \dots, K$ e T empreendimentos de transmissão LT_t , onde $t = 1, \dots, T$. Os participantes α_m , onde $m = 1, \dots, M$, estão habilitados para submeter lances em pacotes P_l , com um valor de

lance B_{lm} , onde $l = 1, \dots, L$ e $m = 1, \dots, M$. Os participantes adquirem pontos de elegibilidade antes do início do leilão e_m , que podem se manter ou diminuir conforme o andamento da etapa aberta. Cada conexão CI_k e transmissão LT_t também tem pontos de elegibilidade associados a eles, ϵc_k e ϵt_t respectivamente.

Para a terceira fase o objetivo do leiloeiro é garantir que cada produto classificado para a etapa fechada esteja alocado em um pacote vencedor, minimizando a quantia a ser paga pelo leiloeiro. A função objetivo do problema se mantém igual ao das primeiras fases. As restrições de PARTIÇÃO garante que cada item considerado na etapa fechada seja alocado em um pacote vencedor, sendo uma restrição mais forte que as restrições de EMPACOTAMENTO. Desta forma são incluídas $K + T$ restrições ao problema.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L B_{lm} \cdot X_{lm} \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L CI_{kl} \cdot X_{lm} = 1 & \forall k \in \mathbb{K}, \\
& \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L LT_{tl} \cdot X_{lm} = 1 & \forall t \in \mathbb{T}, \\
& X_{lm} \in \mathbb{B}_+^{(l,m)}
\end{aligned}$$

As restrições de ELEGIBILIDADE pode ser considerada caso a regra de atividade estiver ativa no leilão. Esta restrição considera que a soma dos pontos de elegibilidade dos pacotes vencedores do participante α_m não pode exceder os pontos de elegibilidade do próprio participante. Sendo assim, são acrescentados mais M restrições ao problema.

$$\sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \epsilon c_k \cdot CI_{kl} \cdot X_{lm} + \sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^T \epsilon t_t \cdot LT_{tl} \cdot X_{lm} \leq e_m \quad \forall m \in \mathbb{M}$$

Apenas os empreendimentos de transmissão que mostram ter participantes interessados na etapa aberta são classificados na etapa fechada. Como os lances realizados na rodada da etapa aberta são os feitos em pacotes, não é garantido uma solução factível. Uma forma de garantir uma solução factível com as restrições de partição é que todos os lotes considerados tenha um lance em pacotes únicos.

Para garantir a existência de lances nos pacotes únicos dos lotes de transmissão, o leiloeiro será considerado como o participante α_{M+1} . O leiloeiro realizará lances em todos os pacotes que contenham apenas um empreendimento de transmissão LT_t com valor de lance igual ao preço de reserva dos respectivos empreendimentos. Como já existe lances

das fases anteriores nos pacotes que contêm apenas um empreendimento de conexão, para todas as conexões consideradas na terceira fase, a solução trivial contendo apenas os pacotes com um empreendimento é factível. No caso de a solução ótima indicar que o leiloeiro como vencedor de algum pacote, o respectivo empreendimento não será atribuído a nenhum participante.

5.2 Metodologia

O experimento é focado apenas na resolução do PIV da Etapa Fechada das três fases. Como as duas primeiras fases são similares quanto à formulação, os leilões são diferenciados apenas entre Leilão de Geração (Fases 1 e 2) e Leilão de Transmissão (Fase 3). São analisados os comportamentos dos tempos de formulação e resolução do problema para três diferentes regras de empacotamento:

- SEM REGRA
- ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA
- MÁXIMO 2 ITENS (baseado na cardinalidade)

A primeira permite todos as combinações de pacotes possíveis, de modo a se obter um ponto de comparação. As outras duas regras de empacotamento foram escolhidas por apresentarem características favoráveis à aplicação no setor elétrico, serem de fácil compreensão e verificação, contribuindo para a transparência do leilão, e permitirem uma certa flexibilidade para gerar uma diversidade de pacotes.

Em cada exemplo a ser analisado são resolvidos 10 experimentos de forma a se obter os tempos médios de formulação e resolução dos PIV. O tempo de formulação corresponde ao período decorrido para a associação das matrizes que formam o problema, definindo função objetivo e restrições. O tempo de resolução corresponde ao intervalo necessário para o *solver* indicar a solução do problema.

No Leilão de Geração são analisados três problemas, diferenciados pelas restrições que são incluídas. O Problema 1 ($G1$) é um caso simplificado onde são desconsiderados se os empreendimentos são não conectados da rede ou pertencentes a rede de transmissão. Desta forma, as restrições do problema são apenas a restrição de ATENDIMENTO À DEMANDA e as restrições de EMPACOTAMENTO. No Problema 2 ($G2$) são consideradas também as restrições de CONEXÃO e as de ASSOCIAÇÃO. Finalmente, no Problema 3 ($G3$) são consideradas todas as restrições, inclusive as restrições de ELEGIBILIDADE.

O Problema 1 poderia ser aplicado em um leilão combinatório considerando apenas empreendimentos de geração. Entretanto, para a sistemática do leilão proposto

pode-se utilizar os Problemas 2 ou 3, dependendo se a regra de atividade elegibilidade for considerada no leilão.

A Tabela 5.1 indica, para cada uma das simulações realizadas, a quantidade total de empreendimentos de geração, o número de pacotes permitidos, as divisões entre empreendimentos conectados à rede e não conectados, indicando o respectivo número de conexões associadas, o número total de participantes do leilão e a demanda de capacidade requerida. Uma vez que também são considerados os pacotes contendo apenas empreendimentos de conexão nos leilões de geração, o número de pacotes depende da quantidade calculada segundo a regra de empacotamento somado do número de conexões.

Tabela 5.1: Características dos exemplos de Geração

Emp. Ger.	Pacotes	Emp. da Rede	Emp. não Conectados	Conexões	Part.	Demanda
SEM REGRA						
1	2	0	1	1	5	50
5	35	1	4	4	10	100
8	260	3	5	5	20	500
11	2.052	6	5	5	30	1.000
13	8.196	8	5	5	35	1.200
14	16.388	9	5	5	40	1.500
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA						
1	2	0	1	1	5	50
50	1.290	27	23	15	10	2.500
100	5.069	51	49	19	20	5.000
150	11.345	76	74	20	30	7.500
175	15.420	86	89	20	35	8.500
200	20.120	95	105	20	40	10.000
MÁXIMO 2 ITENS						
1	2	0	1	1	5	50
50	1.290	27	23	15	10	2.500
100	5.069	51	49	19	20	5.000
150	11.345	76	74	20	30	7.500
175	15.420	86	89	20	35	8.500
200	20.120	95	105	20	40	10.000

Na Tabela 5.2 são evidenciados as quantidade de variáveis binárias, que é calculada com o número de pacotes permitidos e de participantes do leilão, e do número de restrições para cada um dos problemas de geração.

Tabela 5.2: Quantidade de variáveis e de restrições dos PIVs de Geração

Emp. Ger.	Variáveis	Restrições		
		G1	G2	G3
SEM REGRA				
1	10	3	5	10
5	350	10	18	28
8	5.200	14	24	44
11	61.560	17	27	57
13	286.860	19	29	64
14	655.520	20	30	70
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA				
1	10	3	5	10
50	12.900	66	104	114
100	101.380	120	188	208
150	340.350	171	265	295
175	539.700	196	305	340
200	804.800	221	346	386
MÁXIMO 2 ITENS				
1	10	3	5	10
50	12.900	66	104	114
100	101.380	120	188	208
150	340.350	171	265	295
175	539.700	196	305	340
200	804.800	221	346	386

Já no caso de Leilão de Transmissão são considerados dois problemas, o Problema 1 ($T1$) considerando apenas as restrições de PARTIÇÃO e o Problema 2 ($T2$) também considerando as restrições de ELEGIBILIDADE.

A Tabela 5.3 indica, para cada uma das simulações realizadas, a quantidade total de empreendimentos de transmissão, o número de pacotes permitidos e o número total de participantes do leilão.

Tabela 5.3: Características dos exemplos de Transmissão

Emp. Transm.	Pacotes	Part.
SEM REGRA		
1	1	5
5	31	10
8	255	20
11	2.052	30
13	8.196	35
14	16.388	40
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA		
1	1	5
50	1.275	10
100	5.050	20
150	11.325	30
175	15.400	35
200	20.100	40
MÁXIMO 2 ITENS		
1	1	5
50	1.275	10
100	5.050	20
150	11.325	30
175	15.400	35
200	20.100	40

Na Tabela 5.4 são apresentadas as quantidades de variáveis binárias e de restrições para cada um dos problemas de transmissão.

Tabela 5.4: Quantidade de variáveis e de restrições dos PIVs de Transmissão

Emp. Transm.	Variáveis	Restrições	
		T1	T2
SEM REGRA			
1	5	2	7
5	310	6	16
8	5.100	9	29
11	61.410	12	42
13	286.685	14	49
14	655.320	15	55
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA			
1	5	2	7
50	12.750	51	61
100	101.000	101	121
150	339.750	151	181
175	539.000	176	211
200	804.000	201	241
MÁXIMO 2 ITENS			
1	5	2	7
50	12.750	51	61
100	101.000	101	121
150	339.750	151	181
175	539.000	176	211
200	804.000	201	241

A criação dos dados utilizados nas simulações foram baseadas nos Resultados Consolidados dos Leilões de Energia Nova (LENs) apresentados pela Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE) e nos Resultados Consolidado dos Leilões de Empreendimentos de Transmissão (LETs) apresentado pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), com os preços atualizados para setembro de 2019. Para os empreendimentos de geração, os dados de capacidade (MW) são criados a partir da distribuição normal geradas por média e desvio padrão das capacidade dos empreendimentos de geração vencedores em leilões anteriores. Os pontos de elegibilidade do empreendimento é associado com sua capacidade de geração. O cálculo do preço de referência ($R\$/ano$) do empreendimento é realizado considerando o investimento necessário e um tempo de amortização. O investimento é calculado com base nas capacidades dos empreendimentos e na distribuição normal da razão ente investimento e capacidade dos empreendimentos vencedores de leilões anteriores. Finalmente, é feito um sorteio para classificar o empreendimento como pertencente a rede ou não conectado.

Para cada empreendimento de conexão e transmissão é atribuído um preço de referência ($R\$/ano$) baseado na distribuição normal das Receita Anual Permitidas (RAPs)

de empreendimentos de transmissão vencedores. Os pontos de elegibilidade do empreendimento são associados com seu preço de referência.

Os lances realizados pelos participantes consideram os preços dos pacotes ao fim da Etapa Aberta, as valorações dos participantes nos pacotes e um valor de risco associado ao participante. Como não é realizada a Etapa Aberta na simulação, o preço do pacote ao fim da Etapa Aberta é a soma dos preços de referência dos empreendimentos contidos no pacote. As valorações dos participantes são calculadas baseado nestes preços de referência dos pacotes, aplicando um desconto. Os descontos em cada pacote são aplicados segundo curvas de distribuição normal geradas por participante, onde são sorteados valores de média $(0,5 - 0,9)$ e de desvio padrão $(0,002 - 0,005)$ para cada participante.

O valor de risco do participante indica a agressividade do lance realizado na Etapa Fechada. Valores de risco próximos de 0 indica um perfil mais conservador realizando lance mais próximo de sua valoração no pacote, enquanto risco mais próximo de 1 indica perfil mais agressivo, realizando lances com valores mais próximo do preços dos pacotes ao fim da Etapa Aberta. Caso a valoração do participante seja superior ao preço do pacote ao fim da Etapa Aberta o participante não realiza lance no pacote em questão.

Adicionalmente, são gerados pontos de elegibilidade dos participantes como um valor sorteado entre valores mínimo e máximo, associados ao valor do empreendimento com menor quantidade de pontos de elegibilidade e a somatória dos pontos de elegibilidade de todos os empreendimentos da fase, respectivamente.

5.3 Resultados

Os experimentos foram realizados em um computador com processador Intel® Core™ i7-8565U e 16 GB RAM. Os dados foram criados no *software* Microsoft Excel 2010 para Windows. O algoritmo para leitura dos dados e formulação do PIV foi codificado no *software* JuliaPro 1.1.1-1 com a utilização do *solver* comercial IBM ILOG CPLEX v12.9.

A seguir são analisados os resultados dos tempos decorridos para o Leilão de Geração, com três formulações de PIV diferentes, e para o Leilão de Transmissão, com duas formulações. Nota-se que todos os problemas serão comparados em relação ao número de pacotes permitidos nas diferentes regras, como será evidenciado a seguir.

5.3.1 Problema 1 do Leilão Geração - G1

O Problema 1 do leilão de geração formula o PIV apenas com as restrições de ATENDIMENTO À DEMANDA e de EMPACOTAMENTO. Com essa formulação nenhum empreendimento de conexão deve estar presente em pacote vencedor, uma vez que estas não contribuem para o aumento da capacidade de geração e não são incluídas as restrições de CONEXÃO. Entretanto, os empreendimentos de conexão foram considerados nessa formulação para manter a mesma quantidade de variáveis dos Problemas 2 e 3.

5.3.1.1 Tempo Formulação

Os tempos decorridos para a formulação dos problemas estão relacionados à quantidade de variáveis binárias e às formulações da função objetivo e das restrições. Os tempos decorridos para a formulação dos problemas são indicados na Figura 5.1, para uma comparação com a quantidade de itens leiloados.

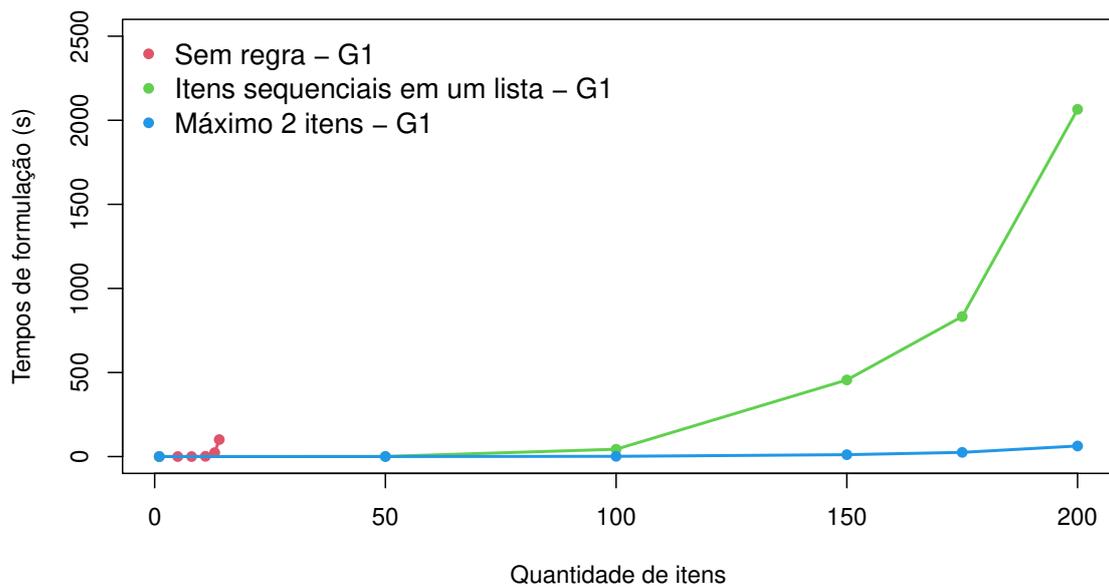


Figura 5.1: Tempo para formulação do PIV em relação ao número de itens - G1

Ao utilizar a regra de empacotamento SEM REGRA os tempos de formulação apresentam um crescimento repentino. Isso ocorre devido ao aumento exponencial do número de pacotes permitidos com o aumento do número de itens leiloados para essa regra de empacotamento. A fim de comparar os tempos de formulação e de resolução dos problemas utilizando todas as regras propostas é utilizado o número de pacotes permitidos como base de comparação, pois este influencia diretamente na quantidade de variáveis do PIV a ser resolvido. Desta forma, deve-se notar que a quantidade de itens leiloados para a regra SEM REGRA é bastante inferior ao das outras regras. A Figura 5.2 indica os mesmos tempos indicados na figura anterior, mas comparando em relação ao número de pacotes permitidos.

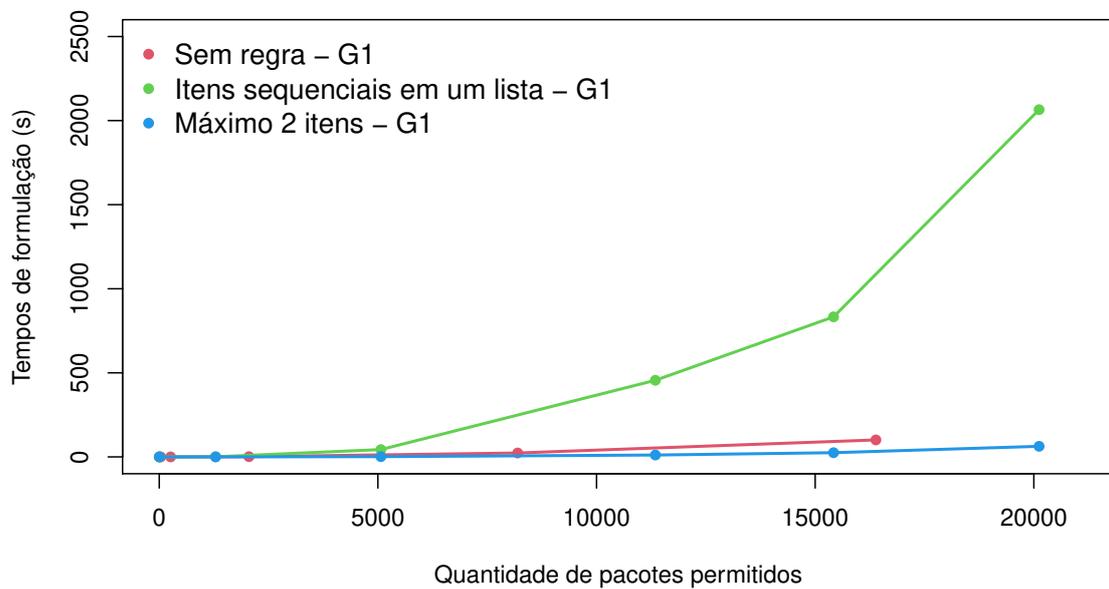


Figura 5.2: Tempo para formulação do PIV do leilão de geração por regra de empacotamento - G1

Observa-se que os tempos de formulação para a regra de empacotamento ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA são superiores, apresentando um crescimento mais acentuado e valor médio acima de 2.000s no exemplo com 200 empreendimentos de geração. O exemplo com mesmo número de empreendimentos utilizando a regra de empacotamento MÁXIMO 2 ITENS tem um valor médio de 63s, e com 14 empreendimentos e regra SEM REGRA o valor médio é de 101 s.

A regressão polinomial de ordem dois se ajusta bem às curvas formadas. As equações destas regressões e o respectivo valor do coeficiente de determinação (R^2) são mostrados na tabela a seguir:

Tabela 5.5: Tempos de formulação em relação ao número de pacotes permitidos - G1

Regra de Empacotamento	Regressão Polinomial	R^2
SEM REGRA	$t_f = 4.10^{-7}x^2 - 0,0004x + 0,1403$	1
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA	$t_f = 8.10^{-6}x^2 - 0,0547x + 51,493$	0,9867
MÁXIMO 2 ITENS	$t_f = 2.10^{-7}x^2 - 0,002x + 1,9948$	0,9874

5.3.1.2 Tempo Resolução

Os tempos decorridos para a resolução dos problemas são indicados na Figura 5.3. Este tempo está relacionado à aplicação do método de resolução do solver para indicar a solução do problema. As curvas da figura indicam os tempos em função do número de

pacotes do problema por regra de empacotamento.

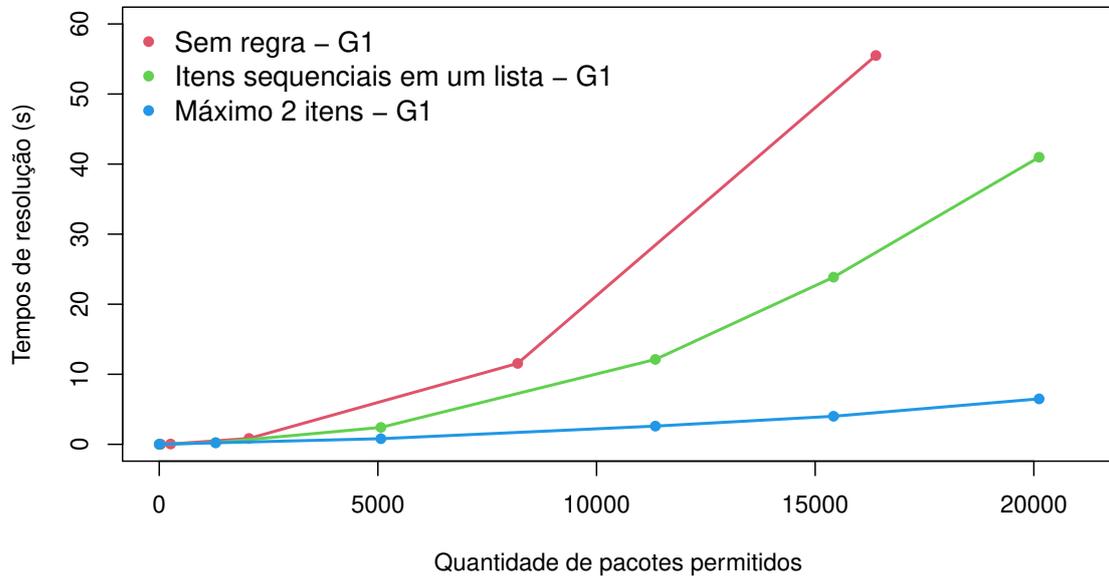


Figura 5.3: Tempo para resolução do PIV do leilão de geração por regra de empacotamento - G1

Os tempos de resolução para a regra de empacotamento SEM REGRA são superiores. Para o exemplo com 14 empreendimentos de geração esta regra tem um tempo médio de 55s para resolução do problema. Considerando o exemplo com 200 empreendimentos, as regras ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e MÁXIMO 2 ITENS apresentam tempos médios de 41s e 6s respectivamente.

As equações das linhas de regressão polinomial de ordem dois e o respectivo valor do coeficiente de determinação (R^2) são mostrados a seguir:

Tabela 5.6: Tempos de resolução em relação ao número de pacotes permitidos - G1

Regra de Empacotamento	Regressão Polinomial	R^2
SEM REGRA	$t_r = 2.10^{-7}x^2 - 0,0005x + 0,2221$	0,9997
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA	$t_r = 1.10^{-7}x^2 - 0,0001x + 0,1505$	0,9998
MÁXIMO 2 ITENS	$t_r = 1.10^{-8}x^2 + 9.10^{-5}x + 0,0499$	0,9992

5.3.2 Problema 2 do Leilão Geração - G2

O PIV do Problema 2 do leilão de geração corresponde ao Problema 1 com a inclusão das restrições de CONEXÃO e de ASSOCIAÇÃO. Ao adicionar as restrições específicas do setor elétrico garante-se a conexão dos empreendimentos de geração não conectados, caracterizando o leilão como combinatório de geração e transmissão.

5.3.2.1 Tempo Formulação

Os tempos decorridos para a formulação dos PIVs em função do número de pacotes são indicados na Figura 5.4.

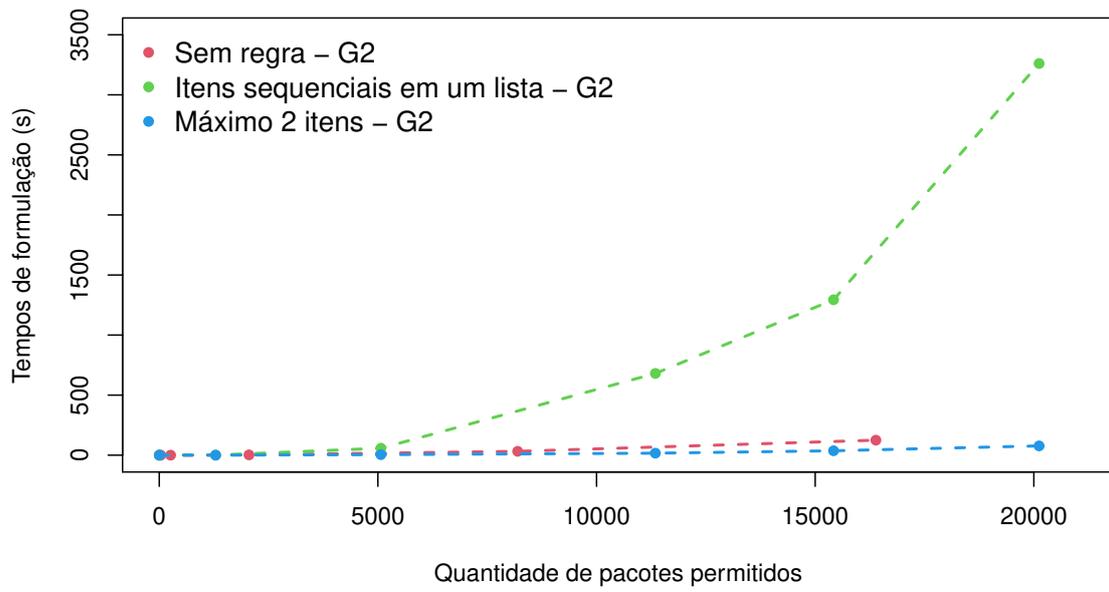


Figura 5.4: Tempo para formulação do PIV do leilão de geração por regra de empacotamento - $G2$

Observa-se que os tempos de formulação para a regra de empacotamento ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA são superiores, apresentando crescimento mais acentuado. O valor médio no exemplo com 200 empreendimentos de geração para esta regra é de 3.260 s, enquanto para a regra MÁXIMO 2 ITENS é de 77 s. O exemplo com 14 empreendimentos e regra de empacotamento SEM REGRA apresenta valores médios de 125 s

A regressão polinomial de ordem dois se ajusta bem às curvas formadas, e suas equações são mostradas na Tabela 5.7, juntamente com o respectivo valor do coeficiente de determinação (R^2).

Tabela 5.7: Tempos de formulação em relação ao número de pacotes permitidos - $G2$

Regra de Empacotamento	Regressão Polinomial	R^2
SEM REGRA	$t_f = 5.10^{-7}x^2 + 0,0002x + 0,0122$	1
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA	$t_f = 1.10^{-5}x^2 - 0,093x + 86,255$	0,9866
MÁXIMO 2 ITENS	$t_f = 3.10^{-7}x^2 - 0,0016x + 1,8085$	0,9935

5.3.2.2 Tempo Resolução

Os tempos decorridos para a resolução dos problemas de acordo com as regras de empacotamento são indicados na Figura 5.5.

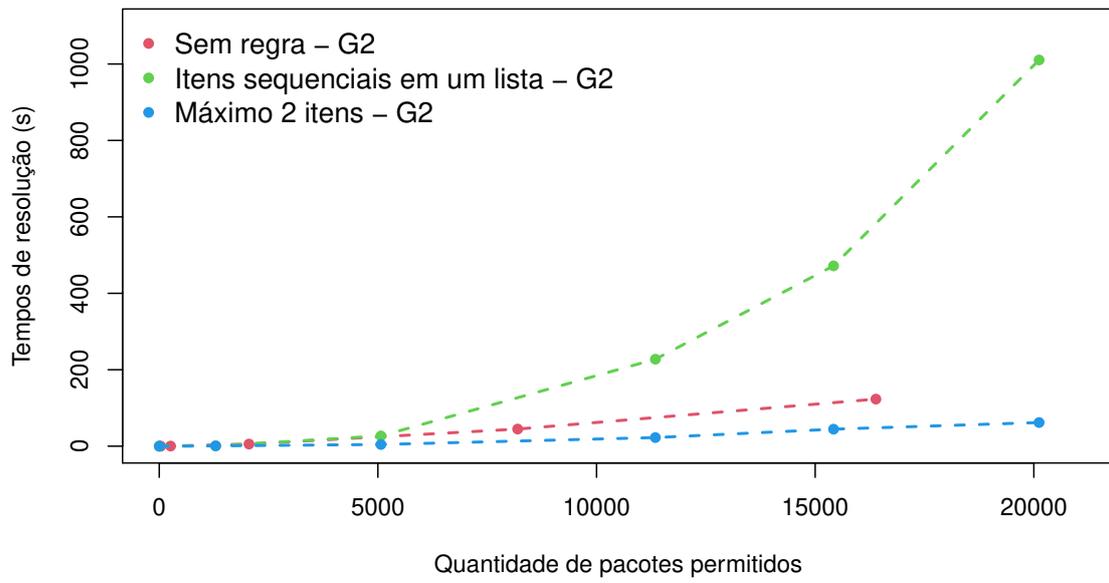


Figura 5.5: Tempo para resolução do PIV do leilão de geração por regra de empacotamento - $G2$

A curva dos tempos de resolução para a regra de empacotamento ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA mostra um crescimento mais acentuado quando comparada às outras regras, similar à curva do tempo de formulação. Os maiores exemplos das regras de empacotamento SEM REGRA, ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e MÁXIMO 2 ITENS são formulados com 14, 200 e 200 empreendimentos de geração e resultam em tempos médios de resolução de 123s, 1.010s e 62s respectivamente.

As equações das linhas de regressão polinomial de ordem dois e o respectivo valor do coeficiente de determinação (R^2) são evidenciados na tabela a seguir:

Regra de Empacotamento	Regressão Polinomial	R^2
SEM REGRA	$t_r = 3.10^{-7}x^2 + 0,0033x - 0,6096$	0,9996
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA	$t_r = 7.10^{-6}x^2 - 0,073x + 76,88$	0,9622
MÁXIMO 2 ITENS	$t_r = 1.10^{-7}x^2 + 0,0009x - 0,927$	0,9913

5.3.3 Problema 3 do Leilão Geração - G3

O Problema 3 do leilão de geração corresponde ao PIV com todas as restrições mencionadas, inclusive as de ELEGIBILIDADE. Com a adição destas restrições específicas garante-se que cada participante seja vencedor apenas de pacotes que correspondam à sua quantidade de pontos de elegibilidade, estabelecida antes do início da Fase Fechada.

5.3.3.1 Tempo Formulação

Os tempos de formulação dos PIVs em função do número de pacotes são indicados na Figura 5.6.

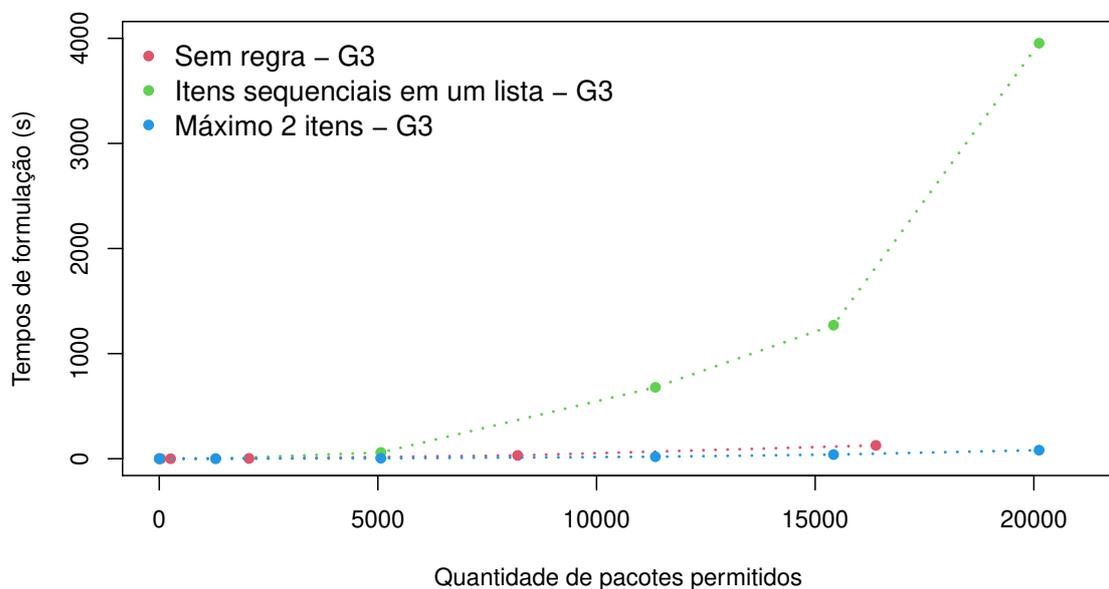


Figura 5.6: Tempo para formulação do PIV do leilão de geração por regra de empacotamento - G3

Observa-se que os tempos de formulação para a regra de empacotamento ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA são superiores. O valor médio no exemplo com 200 empreendimentos de geração é de 3.953s, enquanto para a regra MÁXIMO 2 ITENS e mesma quantidade de empreendimentos o tempo médio é de 81 s. Para o maior exemplo com regra de empacotamento SEM REGRA são 14 empreendimentos correspondendo a um tempo médio de 127 s.

As regressões polinomiais de ordem dois que se ajustam às curvas são evidenciadas na Tabela 5.9, juntamente com o respectivo valor do coeficiente de determinação (R^2).

Tabela 5.9: Tempos de formulação em relação ao número de pacotes permitidos - G3

Regra de Empacotamento	Regressão Polinomial	R^2
SEM REGRA	$t_f = 5.10^{-7}x^2 - 8.10^{-5}x + 0,1113$	1
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA	$t_f = 2.10^{-5}x^2 - 0,1511x + 153,06$	0,9705
MÁXIMO 2 ITENS	$t_f = 3.10^{-7}x^2 - 0,0015x + 1,5785$	0,9956

5.3.3.2 Tempo Resolução

Os tempos de resolução dos problemas são indicados na Figura 5.7.

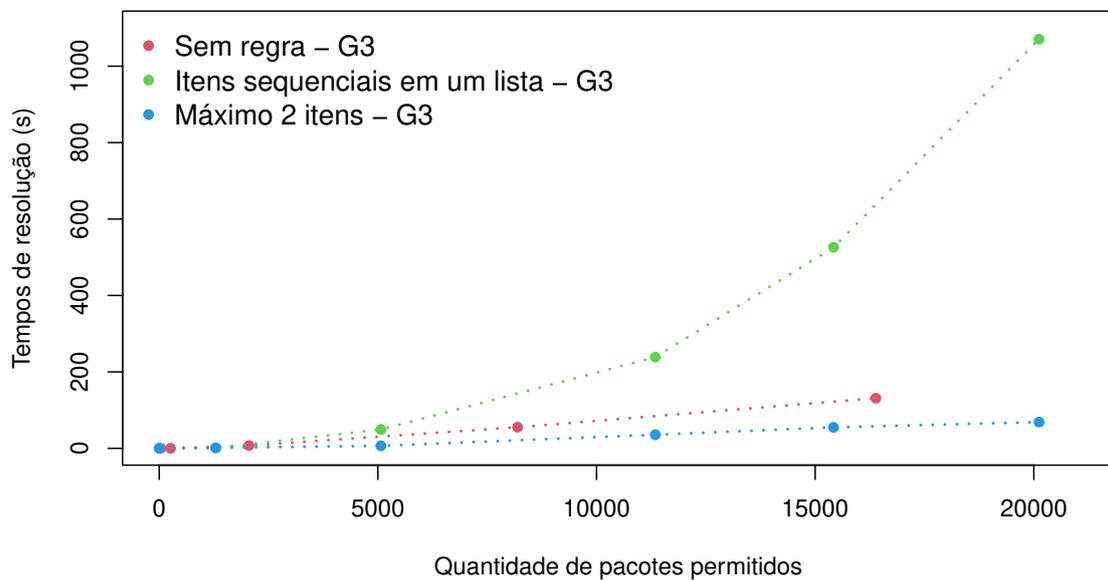


Figura 5.7: Tempo para resolução do PIV do leilão de geração por regra de empacotamento - G3

A regra de empacotamento ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA apresenta a curva com crescimento mais acentuado. Os maiores exemplos das regras de empacotamento SEM REGRA, ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e MÁXIMO 2 ITENS são formulados com 14, 200 e 200 empreendimentos de geração e resultam em tempos médios de resolução de 131 s, 1.070 s e 68 s respectivamente.

As equações das linhas de regressão polinomial de ordem dois e o respectivo valor do coeficiente de determinação (R^2) são mostrados a seguir:

Tabela 5.10: Tempos de resolução em relação ao número de pacotes permitidos - *G3*

Regra de Empacotamento	Regressão Polinomial	R^2
SEM REGRA	$t_r = 2.10^{-7}x^2 + 0,0053x - 1,119$	0,999
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA	$t_r = 6.10^{-6}x^2 - 0,0477x + 51,176$	0,9806
MÁXIMO 2 ITENS	$t_r = 5.10^{-8}x^2 + 0,0027x - 2,5271$	0,9848

5.3.4 Comparação entre os resultados dos leilões de geração

A partir das equações de regressão polinomial e do número de pacotes x , pode-se determinar os tempos estimados de formulação t_f e de resolução t_r de problemas intermediários de acordo com a regra de empacotamento utilizada. Estas equações também podem ser utilizadas para estimar tempos para exemplo maiores, tendo em mente que os erros das estimativas podem ser maiores.

Os tempos decorridos para a formulação do problema correspondem à indicação das variáveis, formulação da função objetivo e das restrições.

O número de variáveis é dado pela multiplicação do número de pacotes permitidos pelo número de participantes. Para as regras de empacotamento ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e MÁXIMO 2 ITENS a quantidade de variáveis é exatamente igual para a mesma quantidade de pacotes. O número de variáveis para a regra SEM REGRA é superior quando comparado com uma mesma quantidade de pacotes.

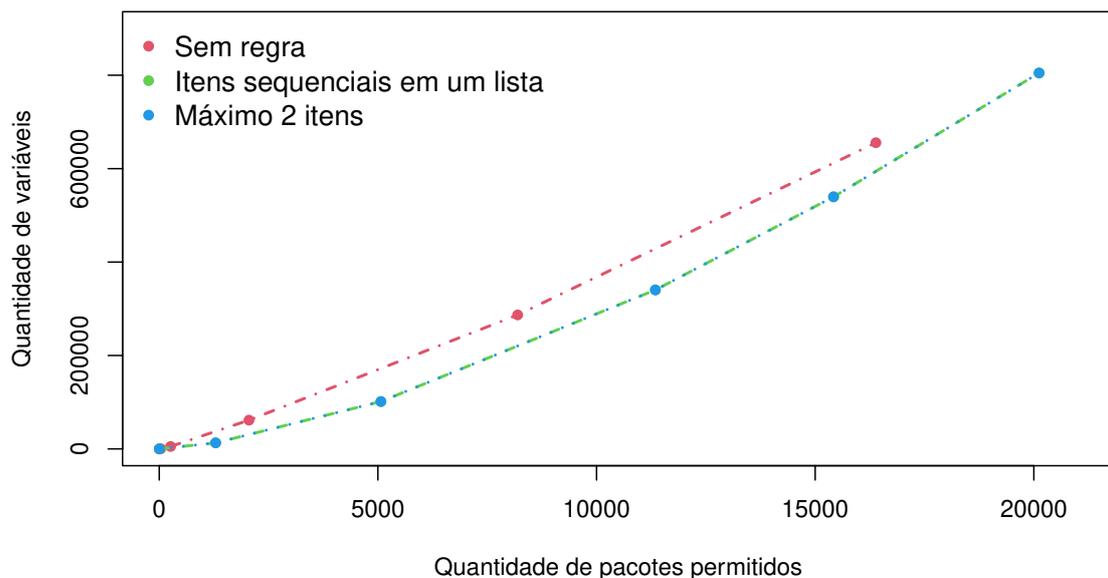


Figura 5.8: Quantidade de variáveis do PIV da geração em relação ao número de pacotes

Tanto as equações da função objetivo como de cada restrição do problema

podem ser representadas por um vetor, e têm uma quantidade de posições correspondente ao número de pacotes permitidos. Para função objetivo são criados uma quantidade de vetores igual ao número de participantes do leilão, e todas as posições são preenchidas com informação, correspondente ao lance da cada participante em cada um dos pacotes. Como existe informação em todas as posições da matriz da função objetivo, o tempo decorrido para formulação deve ser similar dado uma mesma quantidade de variáveis, independente da regra de empacotamento.

Para a restrição de ATENDIMENTO À DEMANDA os tempos de formulação também devem ser similares para uma mesma quantidade de pacotes, independente da regra de empacotamento utilizada. Isto deve ocorrer pois o vetor que gera essa restrição indica as capacidades de geração dos pacotes e apresenta informação em todas as posições.

As restrições de EMPACOTAMENTO, CONEXÃO e ASSOCIAÇÃO são formuladas através de matrizes declarados como esparsas. Desta forma, dependendo da regra de empacotamento utilizada, a quantidade de informação armazenada nas matrizes será diferente. Já nas restrições de ELEGIBILIDADE a matriz tem informação em todas as posições, devido a todos os pacotes terem pontos de elegibilidade associados. A Figura 5.9 indica a quantidade de posições não nulas das matrizes que formam as restrições dos PIV dos três leilões de geração considerados. No Problema 1 são considerados apenas restrições de ATENDIMENTO À DEMANDA e EMPACOTAMENTO, no Problema 2 são considerados também as restrições de CONEXÃO e ASSOCIAÇÃO e, finalmente, no Problema 3, também se considera as restrições de ELEGIBILIDADE.

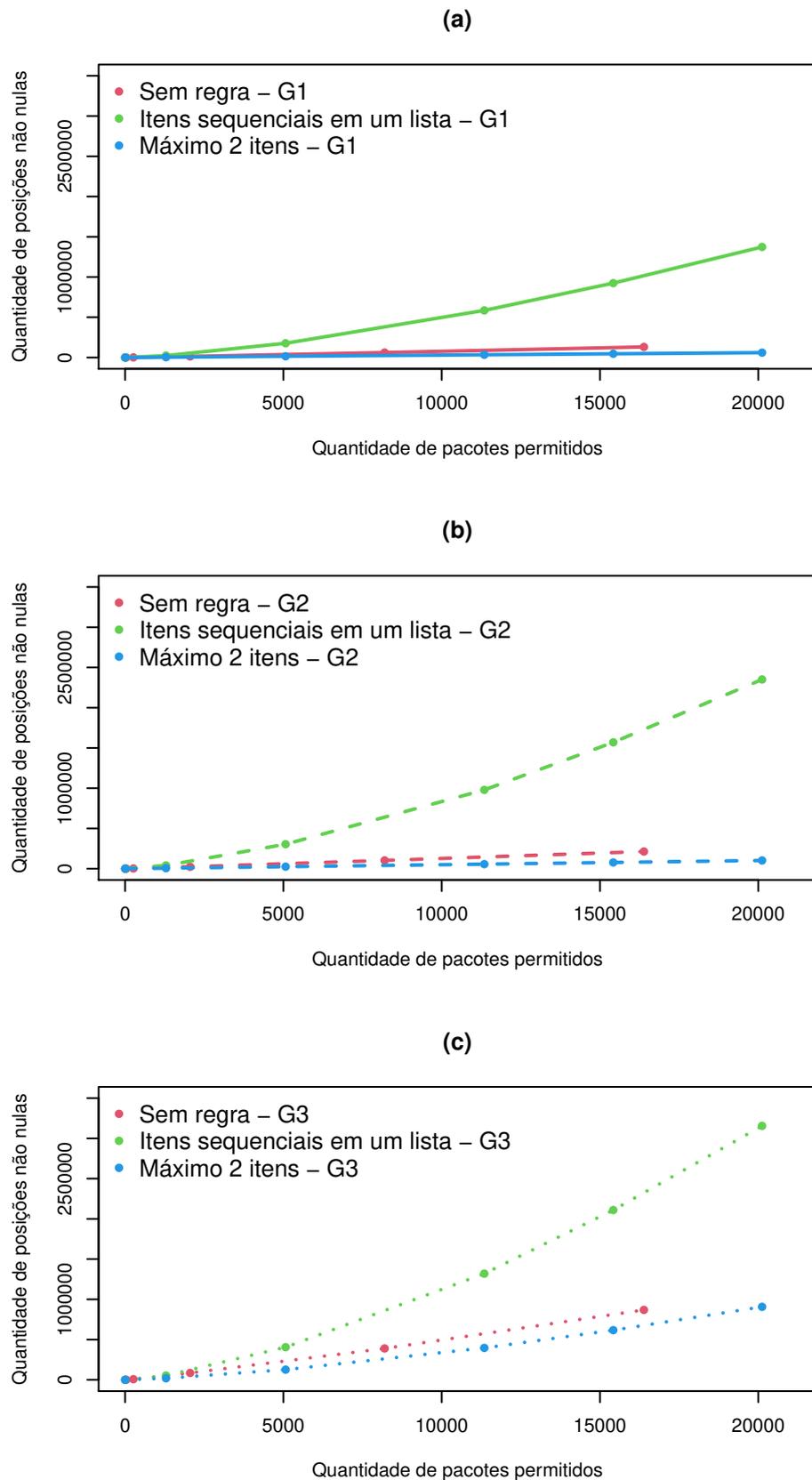


Figura 5.9: Número de posições não nulas nas matrizes que formam as restrições do PIV:
a) G_1 , b) G_2 e c) G_3

Esta figura mostra que as curvas da quantidade de posições não nulas das matrizes que geram as restrições do PIV são similares às curvas dos tempos de formulação do problema, indicando uma forte correlação principalmente para os Problemas 1 e 2, indicado nas Figuras 5.2 e 5.4. Para o Problema 3 a quantidade de posições não nulas utilizando as regras de empacotamento SEM REGRA e MÁXIMO 2 ITENS aumentam percentualmente em relação regra ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA, o que não é notado nos tempos de formulação evidenciados na Figura 5.6. Este comportamento indica um menor consumo de tempo para formulação das restrições de ELEGIBILIDADE, e pode ser explicado pela matriz que gera estas restrições ser composto pelo mesmo vetor correspondendo aos pontos de elegibilidade de cada pacote permitido.

A Figura 5.10 indica para cada uma das regras de empacotamento os tempos necessários para formulação dos Problemas 1, 2 e 3 do leilão de geração. Nota-se que para todas as regras de empacotamento a formulação dos problemas com mais restrições levam mais tempo. O Problema 1 apresenta tempos inferiores(50–80% dos tempos do Problema 3), enquanto os Problemas 2 e 3 apresentam tempos similares.

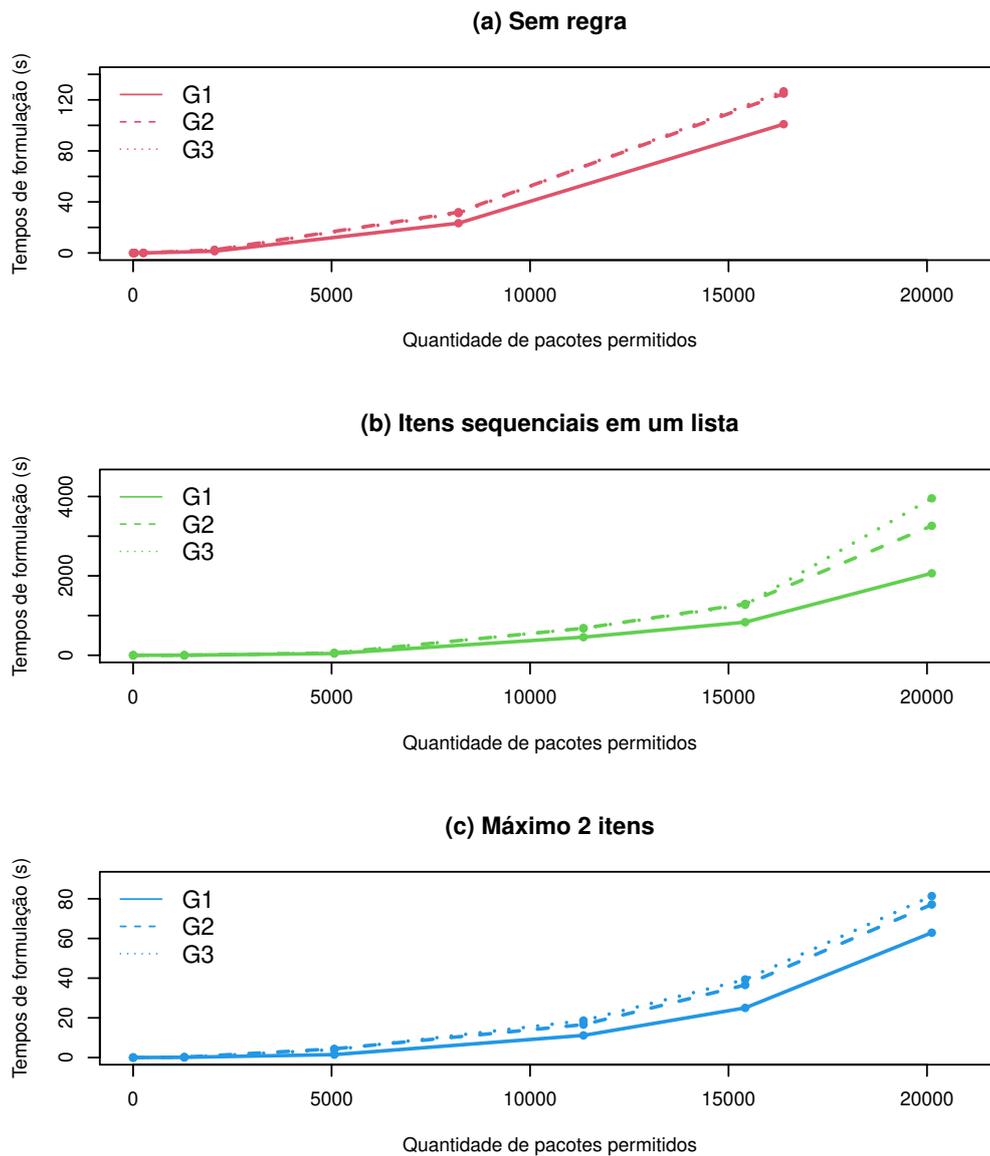


Figura 5.10: Tempos de formulação do PIV comparando os três problemas de geração para cada regra de empacotamento: a) SEM REGRA, b) ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e c) MÁXIMO 2 ITENS

Os tempos de resolução do problema correspondem ao tempo decorrido para, uma vez formulado o problema, o solver comercial indicar a solução do PIV.

A Figura 5.11 indica os tempos necessários para resolução dos Problemas 1, 2 e 3 do leilão de geração para cada uma das regras de empacotamento. Observa-se que, assim como ocorre para os tempo de formulação, para todas as regras de empacotamento a resolução dos problemas com mais restrições levam mais tempo.

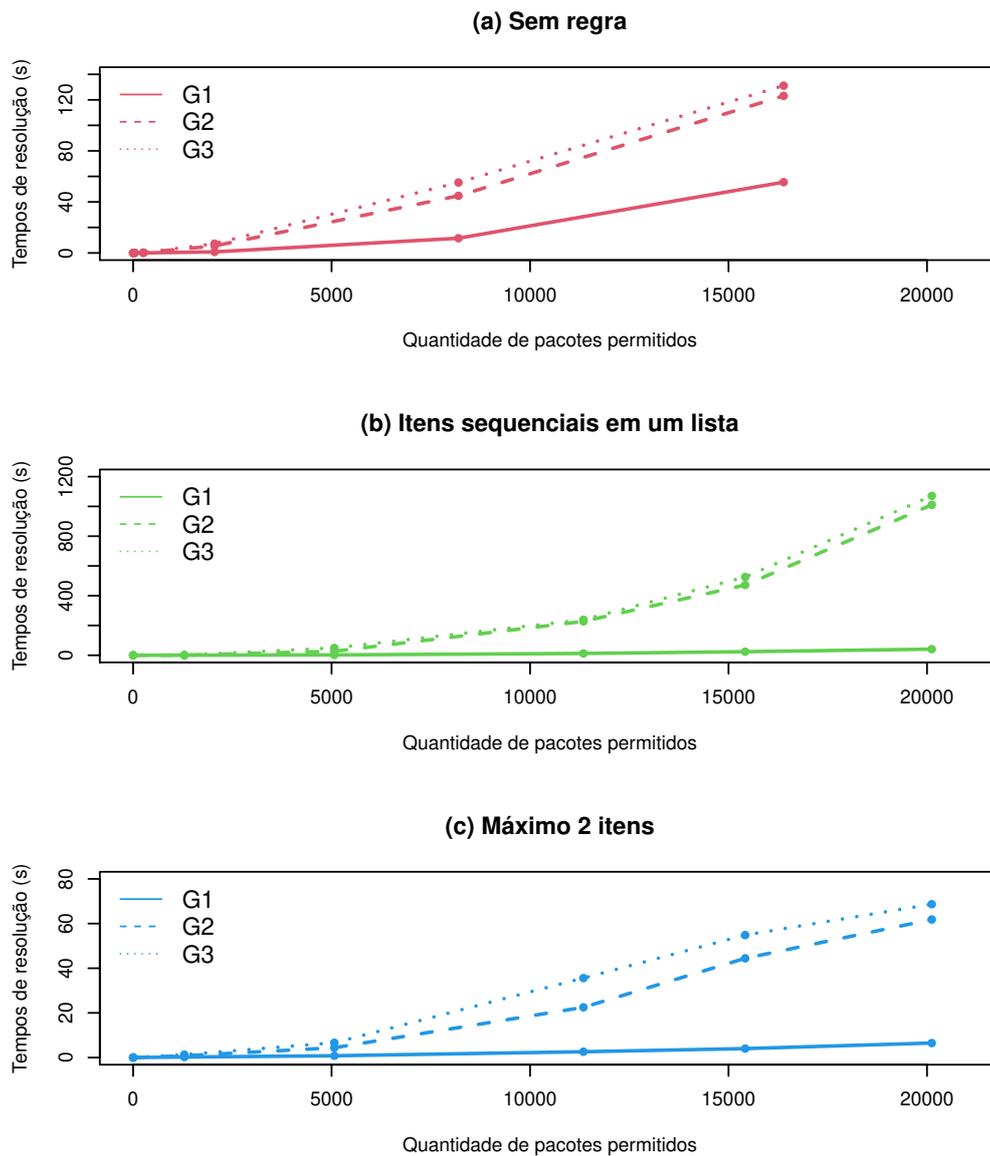


Figura 5.11: Tempos de resolução do PIV comparando os três problemas de geração para cada regra de empacotamento: a) SEM REGRA, b) ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e c) MÁXIMO 2 ITENS

Os Problemas 2 e 3 também apresentam tempos de resolução similares para todas as regras, enquanto o Problema 1 apresenta tempos bastante inferiores. Este comportamento indica um aumento de dificuldade na resolução dos PIVs ao se adicionar as restrições de CONEXÃO e ASSOCIAÇÃO.

5.3.5 Problema 1 do Leilão Transmissão - T1

O Problema 1 do leilão de transmissão formula o PIV apenas com as restrições de PARTIÇÃO, que garante que cada um dos empreendimentos estarão presentes em exatamente um pacote vencedor. Para este problema e utilizando a regra de empacotamento

ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA, a matriz que forma as restrições é Totalmente Unimodular (TU), permitindo que o PIV seja resolvido por métodos de programação linear. Neste caso, permite-se que as variáveis do problema assumam valores reais entre 0 e 1.

5.3.5.1 Tempo Formulação

Os tempos de formulação dos PIVs em função do número de pacotes são indicados na Figura 5.12. As curvas da figura indicam os tempos em função do número de pacotes do problema por regra de empacotamento.

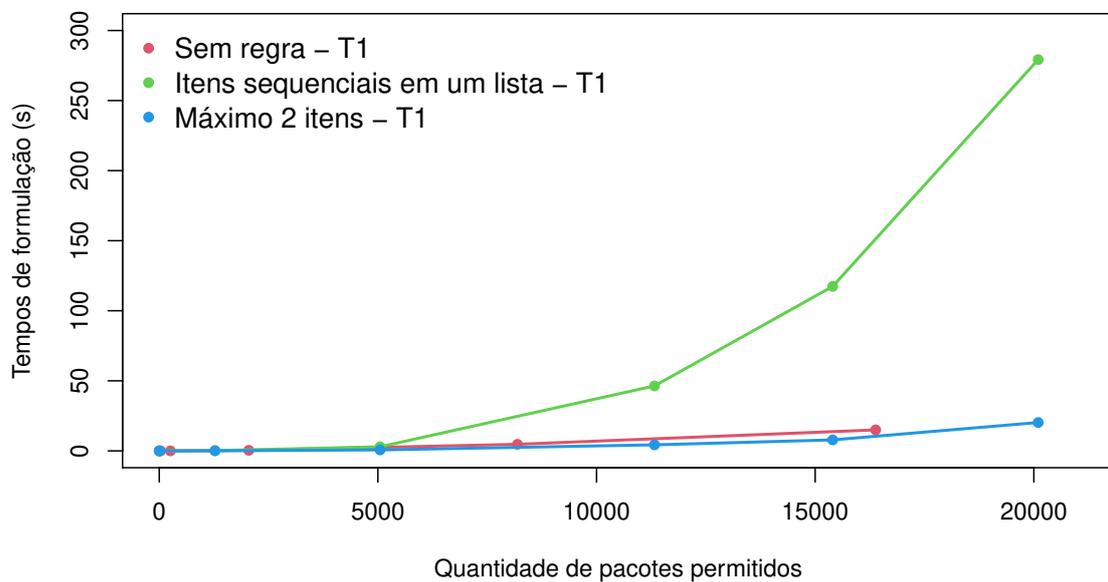


Figura 5.12: Tempo para formulação do PIV do leilão de transmissão por regra de empacotamento - T_1

Observa-se que os tempos de formulação para a regra de empacotamento ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA são superiores. O valor médio no exemplo com 200 empreendimentos de geração é de 280s, enquanto para a regra MÁXIMO 2 ITENS e mesma quantidade de empreendimentos o tempo médio é de 20s. O maior exemplo com regra de empacotamento SEM REGRA são 14 empreendimentos correspondendo a um tempo médio de 14s.

As regressões polinomiais de ordem dois que se ajustam às curvas formadas são mostradas na Tabela 5.11, juntamente com o respectivo valor do coeficiente de determinação (R^2).

Tabela 5.11: Tempos de formulação em relação ao número de pacotes permitidos - $T1$

Regra de Empacotamento	Regressão Polinomial	R^2
SEM REGRA	$t_f = 4.10^{-8}x^2 + 0,0002x - 0,0369$	0,9999
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA	$t_f = 1.10^{-6}x^2 - 0,0091x + 8,0215$	0,9926
MÁXIMO 2 ITENS	$t_f = 8.10^{-8}x^2 - 0,0006x + 0,65$	0,9823

5.3.5.2 Tempo Resolução

Os tempos decorridos para a resolução dos problemas são indicados na Figura 5.3. As curvas da figura indicam os tempos em função do número de pacotes do problema por regra de empacotamento.

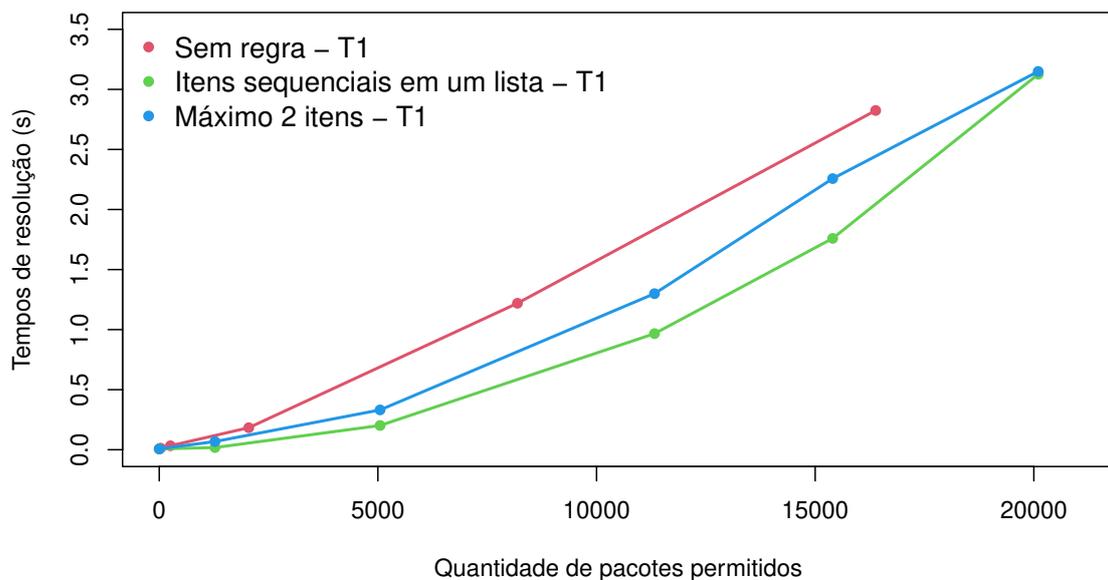


Figura 5.13: Tempo para resolução do PIV do leilão de transmissão por regra de empacotamento - $T1$

Os tempos de resolução para a regra de empacotamento SEM REGRA são superiores quando comparado com mesmo número de pacotes. Nota-se que este é o único exemplo em que a regra ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA apresenta tempos de resolução inferiores, o que se deve ao fato de utilizar métodos de programação linear. Os maiores exemplos das regras de empacotamento SEM REGRA, ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e MÁXIMO 2 ITENS são formulados com 14, 200 e 200 empreendimentos de transmissão e resultam em tempos médios de resolução de 2,8 s, 2,9 s e 3,2 s respectivamente.

As equações das linhas de regressão polinomial de ordem dois e o respectivo valor do coeficiente de determinação (R^2) são mostrados a seguir:

Tabela 5.12: Tempos de resolução em relação ao número de pacotes permitidos - $T1$

Regra de Empacotamento	Regressão Polinomial	R^2
SEM REGRA	$t_r = 3.10^{-9}x^2 + 0,0001x - 0,0045$	0,9992
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA	$t_r = 7.10^{-9}x^2 + 8.10^{-6}x - 0,0043$	0,9981
MÁXIMO 2 ITENS	$t_r = 5.10^{-9}x^2 + 6.10^{-5}x - 0,0315$	0,9978

5.3.6 Problema 2 do Leilão Transmissão - T2

O Problema 2 do leilão de transmissão corresponde ao PIV com as restrições mencionadas no Problema 1, adicionando as restrições de ELEGIBILIDADE. Com a adição destas restrições específicas garante-se que cada participante seja vencedor apenas de pacotes que correspondam à sua quantidade de pontos de elegibilidade, estabelecida antes do início da Fase Fechada.

5.3.6.1 Tempo Formulação

Os tempos decorridos para a formulação dos PIVs em função do número de pacotes são indicados na Figura 5.14.

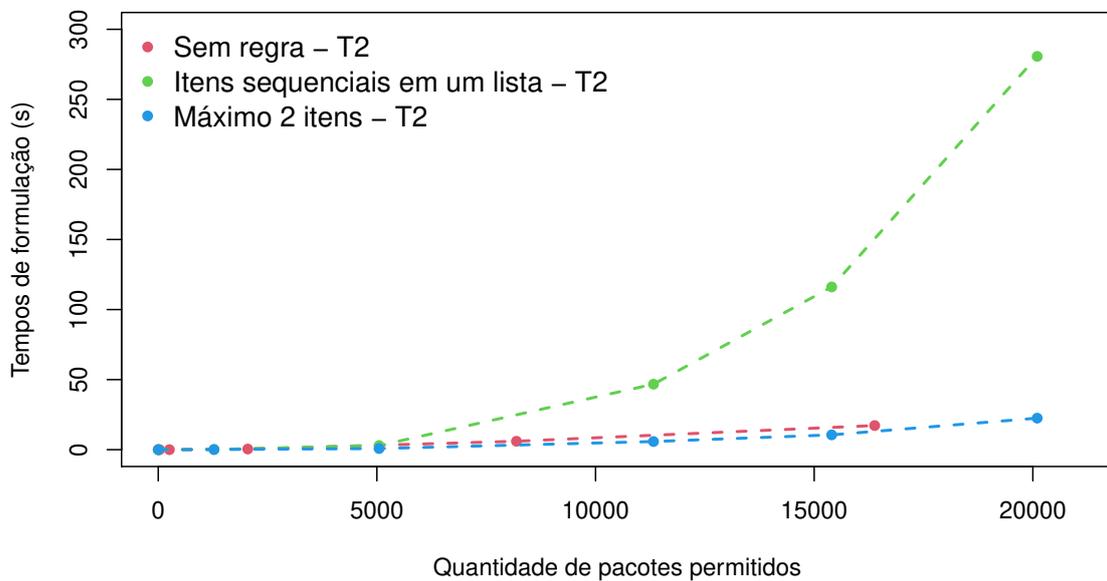


Figura 5.14: Tempo para formulação do PIV do leilão de transmissão por regra de empacotamento - $T2$

O valor médio no exemplo com 200 empreendimentos de geração para as regras ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e MÁXIMO 2 ITENS são de 275 s e 22 s, respectiva-

mente. Já para a regra SEM REGRA o tempo médio de formulação é de 17s com 14 empreendimentos considerados.

A regressão polinomial de ordem dois se ajusta bem às curvas formadas, e suas equações são mostradas na Tabela 5.13, juntamente com o respectivo valor do coeficiente de determinação(R^2).

Tabela 5.13: Tempos de formulação em relação ao número de pacotes permitidos - T_2

Regra de Empacotamento	Regressão Polinomial	R^2
SEM REGRA	$t_f = 3.10^{-8}x^2 + 0,0006x - 0,1867$	0,998
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA	$t_f = 1.10^{-6}x^2 - 0,0086x + 7,5143$	0,9935
MÁXIMO 2 ITENS	$t_f = 6.10^{-8}x^2 - 7.10^{-5}x - 0,0514$	0,9996

5.3.6.2 Tempo Resolução

Os tempos de resolução dos PIVs segundo as regras de empacotamento são indicados na Figura 5.15.

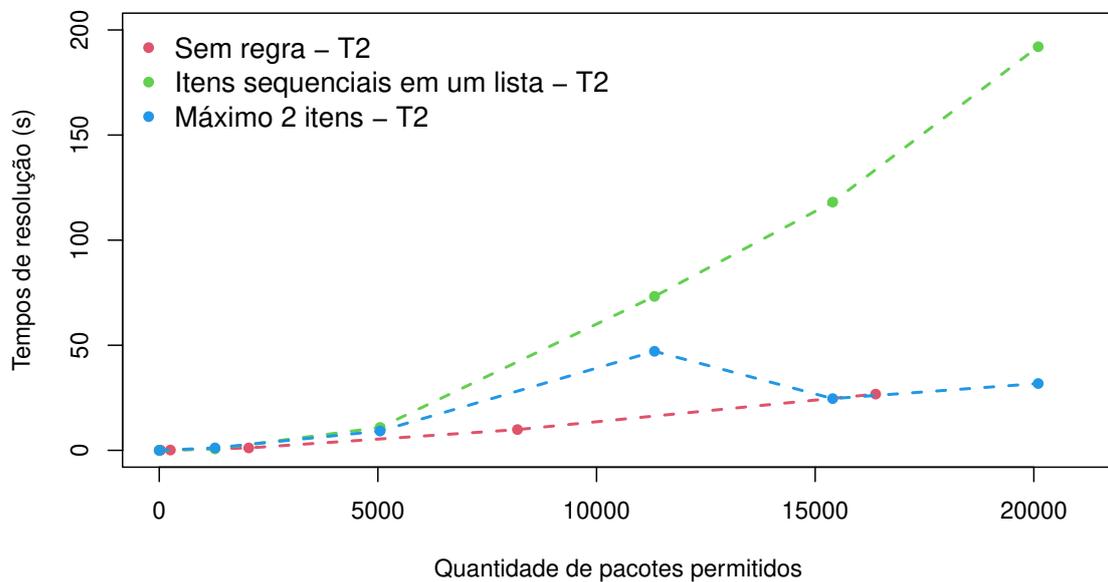


Figura 5.15: Tempo para resolução do PIV do leilão de transmissão por regra de empacotamento - T_2

Os maiores exemplos das regras de empacotamento SEM REGRA, ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e MÁXIMO 2 ITENS são formulados com 14, 200 e 200 empreendimentos de geração e resultam em tempos médios de resolução de 27s, 192s e 31s respectivamente. Neste gráfico observa-se um comportamento anormal para a regra de

empacotamento MÁXIMO 2 ITENS, onde o exemplo com 150 empreendimentos apresenta tempos médios de resolução superiores, com valor médio de 47 s.

As equações das linhas de regressão polinomial de ordem dois e o respectivo valor do coeficiente de determinação (R^2) são mostrados na Tabela 5.14. A regressão para a regra MÁXIMO 2 ITENS não apresenta um bom ajuste.

Tabela 5.14: Tempos de resolução em relação ao número de pacotes permitidos - T_2

Regra de Empacotamento	Regressão Polinomial	R^2
SEM REGRA	$t_r = 5.10^{-8}x^2 + 0,0007x - 0,1117$	0,9994
ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA	$t_r = 4.10^{-7}x^2 + 0,0018x - 2,2883$	0,9979
MÁXIMO 2 ITENS	$t_r = -2.10^{-7}x^2 + 0,0052x - 3,9009$	0,7673

5.3.7 Comparação entre os resultados dos leilões de transmissão

As equações de regressão polinomial indicadas nas tabelas podem ser utilizadas para se estimar os tempos de formulação t_f e de resolução t_r dos PIVs segundo as regras de empacotamento utilizadas e as restrições impostas, assim como para os leilões de geração.

Os tempo de formulação do problema, assim como nos leilões de geração, correspondem aos tempos decorridos para indicação das variáveis, formulação da função objetivo e das restrições.

O número de variáveis do problema é calculado pela multiplicação do número de pacotes permitidos pelo número de participantes do leilão de transmissão. O número de pacotes é calculado segundo a regra de empacotamento, já o número de participantes é estabelecido em cada exemplo. A regra de empacotamento SEM REGRA apresenta uma quantidade de variáveis superior quando comparado às outras regras, quando comparado em relação ao número de pacotes permitidos. O número de variáveis dos exemplos testados de acordo com as regras de empacotamento seguem as curvas apresentadas na Figura 5.16.

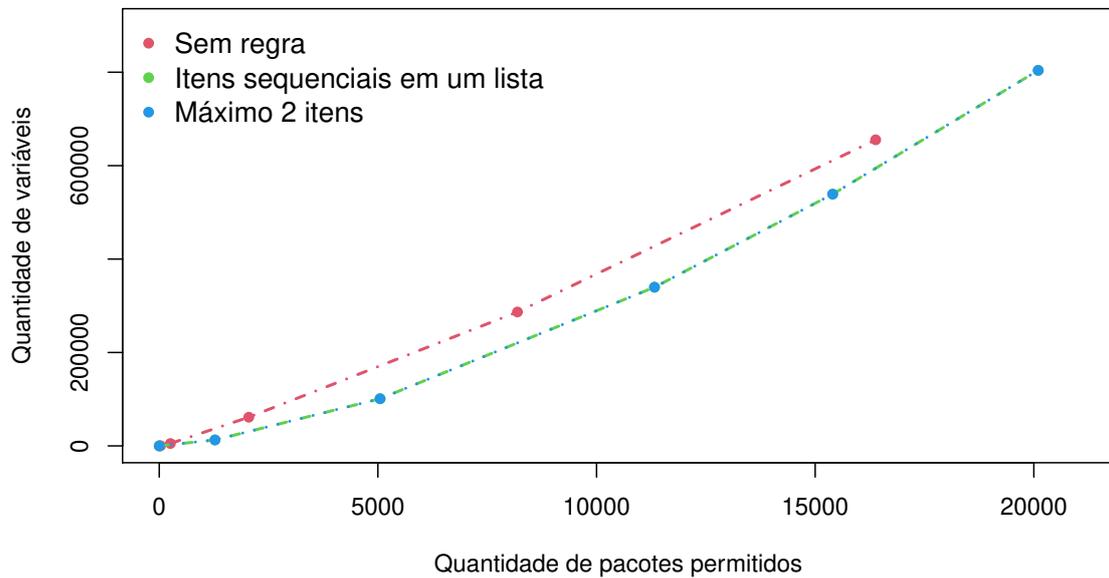


Figura 5.16: Quantidade de variáveis do PIV da transmissão em relação ao número de pacotes

As equações da função objetivo e de cada uma das restrições pode ser representada por um vetor, que tem uma quantidade de posições igual ao número de pacotes permitidos do exemplo. Para função objetivo são criados uma quantidade de vetores igual ao número de participantes do leilão, e todas as posições são preenchidas com informação, correspondente ao lance da cada participante em cada um dos pacotes.

As restrições de PARTIÇÃO são formuladas através de matrizes declaradas como esparsas. Desta forma, a quantidade de informação armazenada nas matrizes será diferente dependendo da regra de empacotamento utilizada. Já nas restrições de ELEGIBILIDADE a matriz tem informação em todas as posições, por todos os pacotes terem pontos de elegibilidade associado. A Figura 5.17 indica a quantidade de posições não nulas das matrizes que formam as restrições dos PIV dos dois leilões de transmissão considerados. No Problema 1 são considerados apenas restrições de PARTIÇÃO, enquanto no Problema 2 também se considera as restrições de ELEGIBILIDADE.

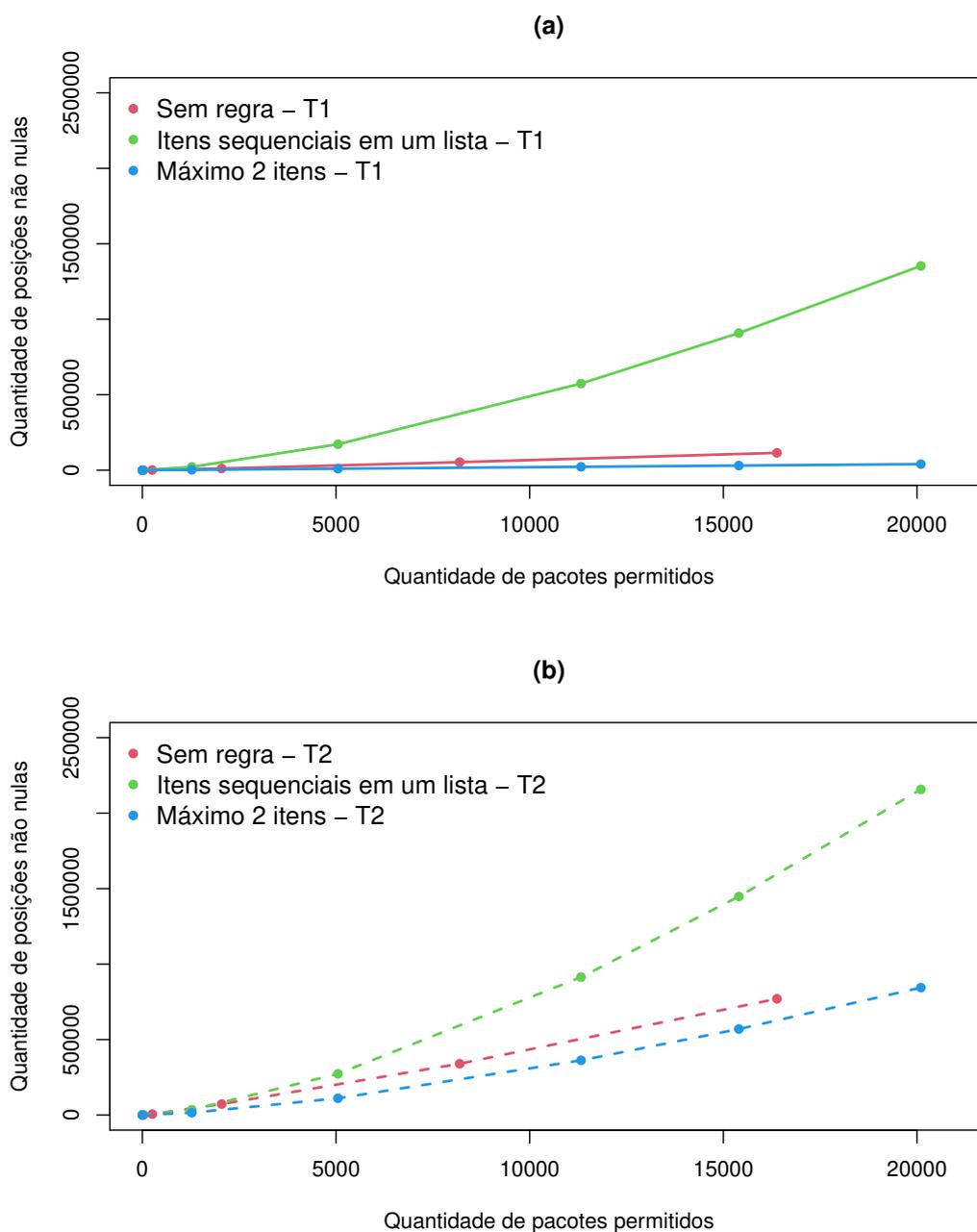


Figura 5.17: Número de posições não nulas nas matrizes que formam as restrições do PIV: a) T1 e b) T2

A figura acima indica que existe uma forte correlação entre as informações armazenada nas matrizes e os tempos para formulação do Problema 1, apresentados na Figura 5.12, uma vez que as curvas são similares quando comparados para uma mesma regra de empacotamento. Já para o Problema 2 a quantidade de posições não nulas nas matrizes que geram as restrições aumenta expressivamente, enquanto os tempos de formulação não apresentam mesmo comportamento, como indica a Figura 5.14. Este comportamento indica que, assim como ocorre para o leilão de geração, as restrições de ELEGIBILIDADE não aumentam expressivamente os tempos de formulação.

Os tempos necessários para formulação dos Problemas 1 e 2 do leilão de transmissão para cada uma das regras de empacotamento é indicada na Figura 5.18. Nota-se que para as regras de empacotamento SEM REGRA e MÁXIMO 2 ITENS a formulação dos problemas com mais restrições levam mais tempo. Já para a regra ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA os tempos se mostraram aproximadamente iguais. Uma vez que o Problema 1 utilizando esta regra é o único formulado como um problema linear, pode-se concluir que o tempo necessário para se formular variáveis lineares é superior ao de se formular variáveis binárias, uma vez que o tempo necessário para se formular as restrições extras no Problema 2 é compensado pela redução no tempo para declaração das variáveis binárias.

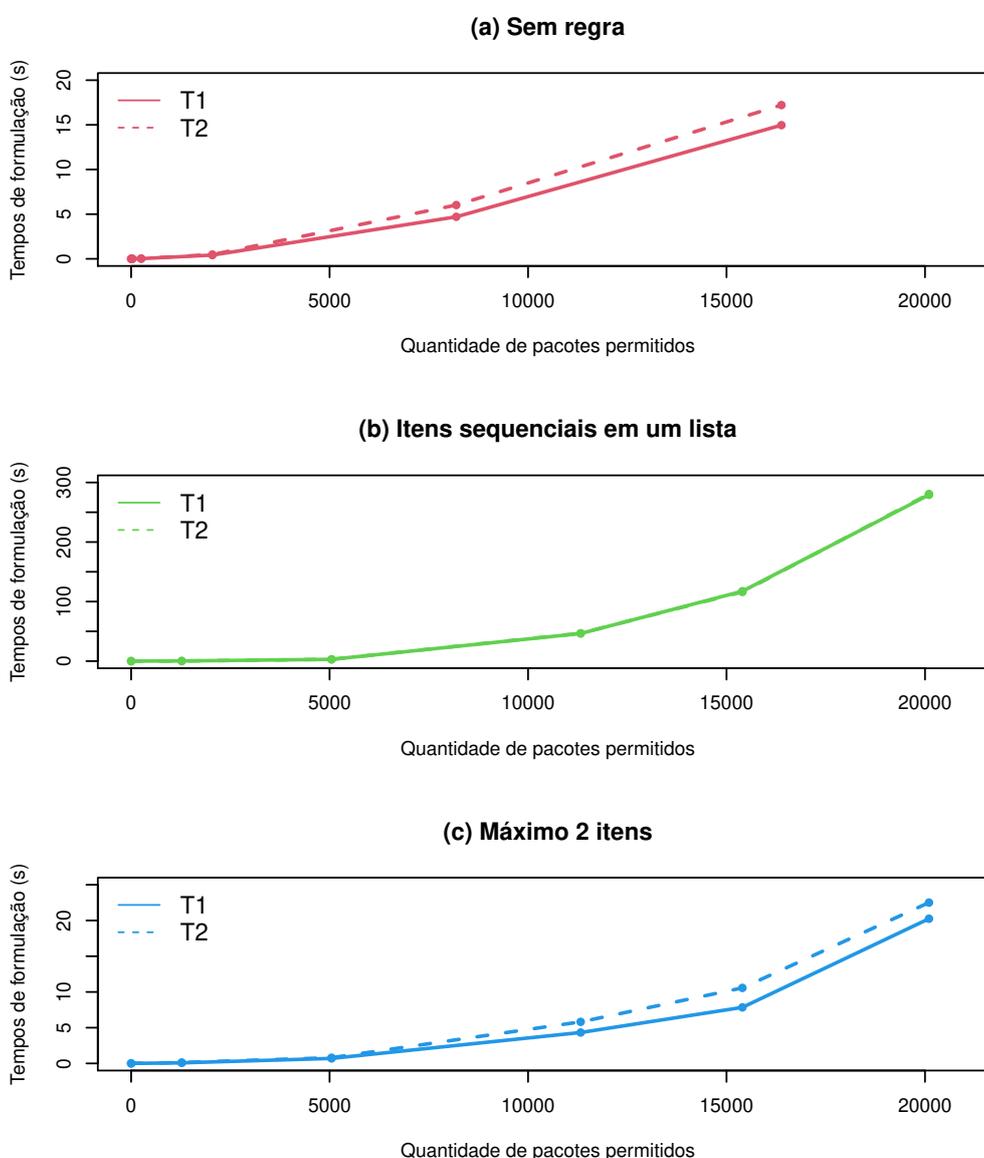


Figura 5.18: Tempos de formulação do PIV comparando os dois problemas de transmissão para cada regra de empacotamento: a) SEM REGRA, b) ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e c) MÁXIMO 2 ITENS

A Figura 5.19 indica os tempos necessários para resolução dos Problemas 1 e 2 do leilão de transmissão para cada uma das regras de empacotamento. Observa-se que, assim como ocorre para os tempo de formulação, para todas as regras de empacotamento a resolução dos problemas com mais restrições levam mais tempo. O aumento expressivo dos tempos de resolução indica que, ao contrário do que ocorre para os leilões de geração, a inclusão das restrições de ELEGIBILIDADE dificulta a resolução do PIV.

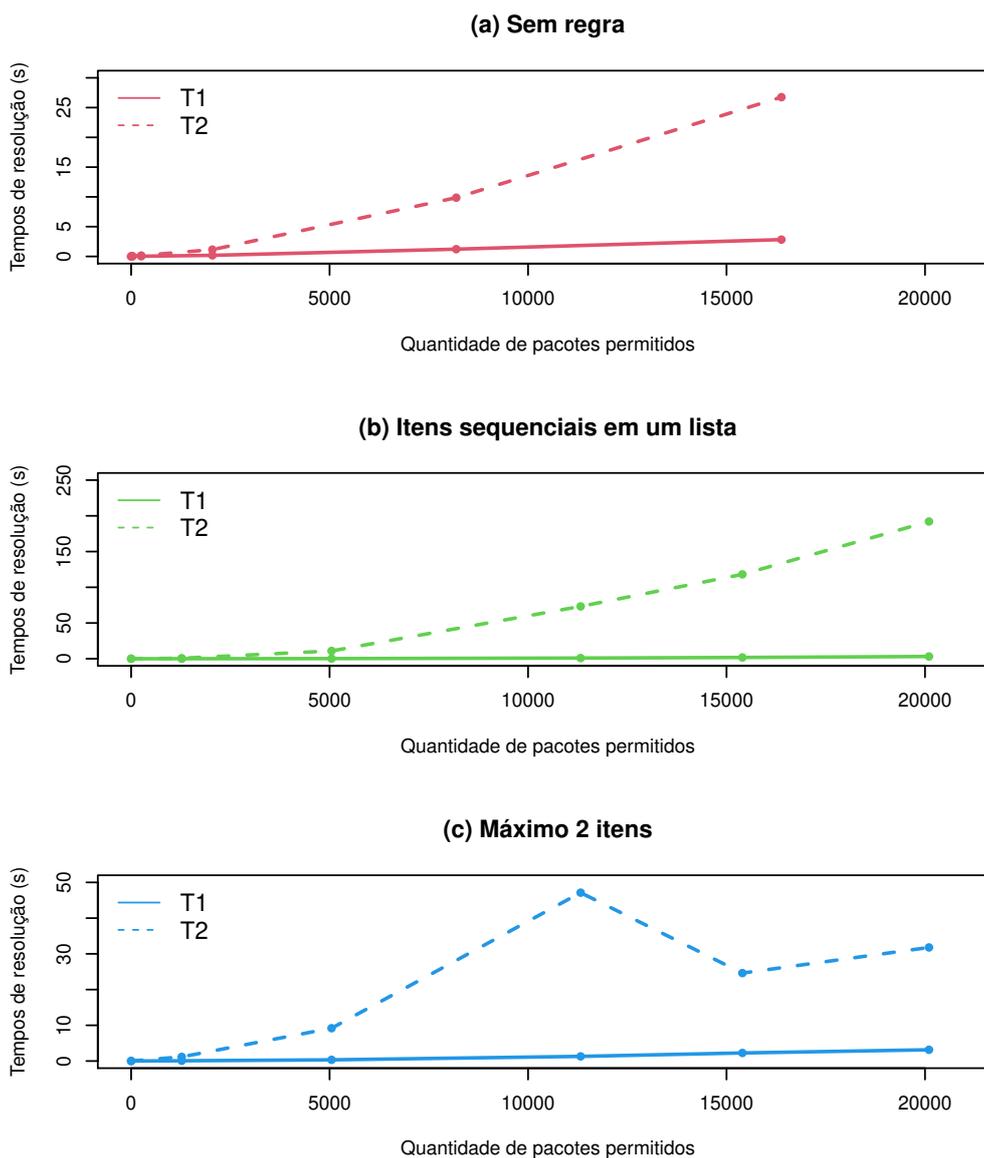


Figura 5.19: Tempos de resolução do PIV comparando os dois problemas de transmissão para cada regra de empacotamento: a) SEM REGRA, b) ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e c) MÁXIMO 2 ITENS

5.4 Considerações finais

Os resultados tanto para os leilões de geração como para os leilões de transmissão, independente das restrições consideradas e da regra de empacotamento utilizada, apresentaram tempos de formulação e de resolução com crescimento polinomial em relação ao número de pacotes permitidos.

O crescimento do número de pacotes possíveis sem a utilização de regra de empacotamento é exponencial em relação ao número de itens leiloados, portanto, no caso SEM REGRA, o número de itens leiloados para se obter um problema tratável deve ser muito reduzido.

A utilização de regras de empacotamento limita a quantidade de pacotes permitidos e aumenta expressivamente a quantidade de itens que podem ser leiloados de forma a ainda se obter problemas tratáveis. Entretanto, esta solução pode não permitir que alguns pacotes vistos como complementares pelos participantes sejam formados.

Para aprimorar a permissividade de formação de pacotes, uma nova regra pode ser aplicada ao leilão para limitar diretamente a quantidade de pacotes permitidos. Desta forma, cada participante tem o direito de incluir um número pré-estipulado de pacotes no leilão, sem ser necessário seguir uma regra de empacotamento. Para se implementar esta regra deve ser estudado qual a quantidade máxima de pacotes que cada participante pode incluir no leilão, considerando o número de itens a serem leiloados e de participantes do leilão. Para isto, pode ser importante determinar a densidade de informação das matrizes de empacotamento e de outras matrizes que gerem restrições específicas do leilão, por influenciar diretamente nos tempos de formulação, e realizar testes de análise de sensibilidade para identificar como os tempos de resolução do problema se comportam em relação à quantidade de participantes e itens a serem leiloados.

Esta nova regra deve ser vantajosa para os participantes por estes não terem restrições quanto à formação de pacotes. A quantidade de pacotes em que os participantes conseguem realizar lances já é naturalmente limitada, devido à necessidade de recursos para se valorar os pacotes, também conhecido como problema de elicitación de preferências. Para esta regra se mostrar eficiente, a quantidade de pacotes que um participante pode incluir no leilão deve ser superior ou igual ao número de pacotes em que os participantes conseguem realizar valoração.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho foi desenvolvido como parte do projeto “Leilão Combinatório de Geração e Transmissão – LC G+T” com objetivo de conceber e propor alternativas para um novo formato de leilão combinatório conjunto de geração e transmissão, que garanta a conexão dos novos empreendimentos de geração com o Sistema Interligado Nacional (SIN). O projeto foi realizado por meio de um Convênio de P&D Aneel: CPFL–Paulista, Enercan, Foz do Chapecó, Unicamp, Funcamp, UFPe e FADE. O grupo de trabalho desenvolveu a sistemática com três fases, de acordo com os produtos a serem leiloados. Cada fase é composta por duas etapas, uma para descobrimento de preços e outra para determinação dos vencedores.

No Capítulo 2 são apresentados os diferentes tipos de leilões de forma a explicitar suas vantagens e desvantagens. Explica-se como são realizados os leilões de novos empreendimentos de geração e de transmissão atualmente no setor, além de mostrar algumas possibilidades de complementaridade entre os empreendimentos.

No Capítulo 3 é apresentado como se caracteriza o Problema de Identificação do Vencedor (PIV), cuja resolução é necessária para a implementação de um Leilão Reverso Combinatório (LRC) fechado. Primeiramente explica-se como o PIV deve ser formulado como um problema de otimização. Foca-se então no leilão reverso, onde são identificados dois casos possíveis para atendimento de uma demanda do leilão, de forma a evitar que se obtenha a solução trivial de não contratação de nenhum pacote. Neste capítulo também são apresentados conceitos relevantes que embasam a proposição das regras de empacotamento.

As regras de empacotamento podem ser necessárias para se garantir que o PIV resultante, uma vez realizados todos os lances em pacotes do leilão, seja uma instância tratável. Ao se permitir todas as combinações de itens, a quantidade de pacotes possíveis cresce exponencialmente com o número de itens, o que gera problemas intratáveis mesmo para um pequeno número de itens. A solução proposta é a de estabelecer regras de empacotamento dos itens leiloados que sejam restritivas o suficiente para garantir a tratabilidade do PIV resultante, mas que ainda permitam que os participantes realizem lances em pacotes complementares.

No Capítulo 4 foram enumeradas regras de empacotamento originalmente propostas para leilão padrão, uma vez que não foram encontradas regras de empacotamento para LRC na literatura. Esta enumeração serve como base para a escolha da melhor regra de acordo com as características dos itens a serem leiloados. Para a utilização na sistemática foram identificadas as regras de empacotamento ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e MÁXIMO 2 ITENS como mais promissoras, esta última sendo baseada nos pacotes de itens baseados na cardinalidade.

O Capítulo 5 apresenta o experimento visando comparar os tempos para formu-

leilão e resolução dos PIVs com e sem a aplicação das regras de empacotamento na etapa fechada do LRC proposto pelo grupo de trabalho. Inicialmente indica-se o funcionamento da sistemática proposta e apresenta os PIVs para o leilão de novos empreendimentos de geração (Fases 1 e 2) e para o leilão de transmissão (Fase 3). Por fim, são apresentados a metodologia e resultados do experimento.

O resultado obtido mostra um crescimento polinomial dos tempos de formulação e de resolução dos PIV em relação ao número de pacotes permitidos. As curvas de regressão polinomial ajustadas aos pontos obtidos dos tempos em relação ao número de pacotes permitidos são de ordem 2. Estas têm bom ajuste na maior parte dos exemplos, indicado pelo valor do R^2 . Os tempos de formulação do problema mostraram não ser desprezíveis, indicando que devem ser considerados na análise para implementação do leilão. Estes tempos indicaram estar correlacionados à quantidade de posições não nulas das matrizes que geram as restrições, sendo estas declaradas como matrizes esparsas.

Em relação às questões específicas da expansão do setor elétrico conclui-se que, para os leilões de geração, a inclusão das restrições de CONEXÃO e ASSOCIAÇÃO indicam um aumento considerável nos tempos de resolução, enquanto a inclusão das restrições de ELEGIBILIDADE não geraram um grande aumento. Para os leilões de transmissão, o acréscimo das restrições de ELEGIBILIDADE ocasionaram um aumento expressivo dos tempos de resolução para todas as regras de empacotamento consideradas. Para nenhum dos leilões, entretanto, as restrições de ELEGIBILIDADE aumentaram consideravelmente os tempos de formulação do PIV.

Os exemplos do leilão de transmissão que consideram a regra de empacotamento ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA e resolvem o PIV apenas com as restrições de particionamento (Problema 1) indicaram uma redução no tempo de resolução quando o problema é resolvido por métodos de programação linear.

Os cenários que consideram as duas regras testadas e o cenário com ausência de regras apresentaram tempos de formulação e resolução com mesma ordem de grandeza quando comparados com número de pacotes permitidos. Entretanto, o crescimento do número de pacotes permitidos com aplicação das regras apresentam um crescimento quadrático em relação ao número de itens, enquanto sem a aplicação de regras o crescimento é exponencial. Desta forma, a utilização das regras de empacotamento no LRC permite que uma maior quantidade de itens seja leiloados.

Algumas recomendações devem ser consideradas no processo de escolha da regra de empacotamento a ser aplicada. A análise para indicar se é necessário a aplicação de regras deve considerar: o tempo necessário para se anunciar uma solução após a realização dos lances, *hardware* e *software* que devem realizar a otimização do PIV, quantidade de itens a serem leiloados e quantidade de pacotes em que os participantes conseguem realizar lances. Deve-se considerar a não utilização de regras sempre que seja possível garantir a resolução do PIV em tempo razoável, dando mais liberdade aos participantes.

Porém esta opção só deve ser viável quando o número de itens a ser ofertado em um leilão seja consideravelmente pequeno. A escolha da regra de empacotamento deve considerar as características dos itens ofertados e o possível aproveitamento de complementaridades entre os itens.

Para a aplicação da regra ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA deve-se realizar previamente ao leilão a organização dos itens em uma lista, de forma a decidir quais são os pacotes permitidos. Quando os participantes são proprietários dos itens pode-se permitir que eles indiquem a ordem de seus itens na lista, sendo esta lista incluída na forma de um bloco na lista principal. Isto dá uma maior liberdade para o participante indicar itens complementares próximos na lista. Já quando todos os participantes podem concorrer por um mesmo item, o próprio leiloeiro deve gerar a lista. A regra MÁXIMO 2 ITENS limita o aproveitamento de complementaridade em no máximo dois itens, entretanto permite que quaisquer dois itens leiloados estejam no mesmo pacote. Dependendo da característica dos itens a serem leiloados esta regra se mostra suficiente para o aproveitamento das complementaridades.

Na sistemática proposta, as recomendações de utilização de regras de empacotamento diferem de acordo com as fases. Na Fase 1 são leiloados grandes empreendimentos hidrelétricos, o que normalmente implica em um baixo número de empreendimentos ofertados. Desta forma, pode não ser necessário a utilização de regras de empacotamento, mas, caso necessário, recomenda-se a regra MÁXIMO 2 ITENS. Essa escolha se deve ao fato de não ser desejável que um mesmo participante seja vencedor da maior parte dos itens, pois a diversificação contribui para a segurança energética. Nas Fases 2 e 3, a quantidade de itens leiloados geralmente não garante uma solução do PIV caso não seja utilizada uma regra de empacotamento. Na Fase 2 são leiloados empreendimentos proprietários, desta forma recomenda-se a utilização da regra ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA. Na Fase 3 são leiloados empreendimentos de transmissão e de conexão, e deve ser feita uma análise sobre a regra a ser utilizada. Com a regra ITENS SEQUENCIAIS DE UMA LISTA o leiloeiro permite que mais itens sejam incluídos em um mesmo pacote. Entretanto, deve deixar claro qual o critério utilizado para a geração da lista que definirá os pacotes permitidos, de forma a evitar conflitos previamente ao leilão. Caso esta regra não tenha aceitabilidade, a regra MÁXIMO 2 ITENS pode ser utilizada.

Sugere-se a realização de dois estudos adicionais de forma a complementar o presente trabalho. O primeiro é a implementação demandas flexíveis nas Fases 1 e 2 da sistemática proposta. Esta demanda poderia ser ajustada através da aplicação da relaxação lagrangiana na restrição de demanda. Um estudo inicial foi realizado com um leilão simplificado, apenas com restrições de EMPACOTAMENTO e de ATENDIMENTO À DEMANDA (ALBIERI et al., 2020). Outra sugestão de estudo é uma regra que restringe diretamente a quantidade de pacotes no leilão. Cada participante poderia incluir uma quantidade máxima de pacotes, estipulada antes do início do leilão, de forma a garantir

que o PIV resultante seja tratável.

Como explicitado acima, a utilização das regras de empacotamento se mostra um fator crucial para a viabilização de um LRC com uma quantidade de itens comparável aos leilões atuais do setor elétrico brasileiro. O LRC com a sistemática proposta evidencia-se como uma ferramenta propícia para a realização de leilões mais eficientes. São esperados melhores resultados pela possibilidade de explorar sinergias e, com a inclusão das restrições de CONEXÃO e ASSOCIAÇÃO, permite uma melhor coordenação da expansão da geração e transmissão de energia elétrica. Esses fatores levam à expansão mais eficiente do setor, contribuindo para o desenvolvimento do país.

Referências

- ALBIERI, R. E.; GRANADA, L. S.; CORREIA, P. B.; POLDI, K. C. Lagrangian relaxation applied to combinatorial reverse auctions for the electricity sector: Variation of sub-gradient method parameters. *Proceedings CILAMCE*, 2020.
- ANEEL. *Resultado do Leilão 04/2014*, 2014.
- ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. *Pesquisa Operacional*. ELSEVIER, 2007.
- AUSUBEL, L. M.; CRAMTON, P.; MILGROM, P. The clock-proxy auction: A practical combinatorial auction design. MIT Press, 2006. cap. Chapter 5, p.212–259.
- BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. *Linear Programming and Network Flows, Fourth Edition*. Wiley, 2010.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. *Graph theory*. Springer, 2008.
- CATON, W. F. *Implementation of Section 309 of the Communications Act - Competitive Bidding - Fifth Report and Order*. 1994.
- CORREIA, P.; SILVA, L.; KAZAMA, F.; ALBIERI, R.; DEL PUPPO, O.; POLDI, K.; HIDALGO, I. *Leilão combinatório de geração e transmissão - LC G+T: perspectivas de aplicação no setor elétrico brasileiro*. 2020.
- DEL-PUPPO, O. *Aplicação de Regras de Atividade na Etapa Aberta do Leilão Reverso Combinatório: Nova Sistemática para o Setor Elétrico Brasileiro*. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, 2021. No prelo.
- EASLEY, D.; KLEINBERG, J. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*. 2010.
- GHOUILA-HOURI, A. Caractérisation des matrices totalement unimodulaires. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, n. 254, p. 1192–1194, 1962.
- GONDZIO, J. Interior point methods 25 years later. *European Journal of Operational Research*, v. 218, p. 587–601, 2012.
- GRÖTSCHEL, M.; LOVÁSZ, L.; SCHRIJVER, A. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, n. 1, p. 169–197, 1981.
- HOFFMAN, A. J.; KRUSKAL, J. B. Integral boundary points of convex polyhedra. *Linear Inequalities and Related Systems*, 1956.
- KELLY, F.; STEINBERG, R. A combinatorial auction with multiple winners for universal service. *Management Science*, v. 46, n. 4, p. 586–596, 2000.

- KRISHNA, V. *Auction Theory - 2nd Edition*. Academic Press, 2010.
- LOVÁSZ, L. Normal hypergraphs nad the weak perfect graph conjecture. *Discrete Mathematics*, v. 21, p. 29–42, 1972.
- MCAFEE, R. P.; MCMILLAN, J. Auctions and Bidding. *Journal of Economic Literature*, Vol. 25, No. 2 (Jun., 1987), pp. 699-738, 1987.
- MCAFEE, R. P.; VINCENT, D. The Declining Price Anomaly. *Journal of Economic Theory*, 1993.
- MILGROM, P. Putting Auction Theory to Work: The Simultaneous Ascending Auction. *The Journal of Political Economy*, 2000.
- MÜLLER, R. Tractable cases of the winner determination problem. MIT Press, 2006. cap. Chapter 13, p.597–632.
- PANE, G. *Hypergraph Valuations with Restricted Overlapping*. Dissertação (Mestrado) — Brown University, 2017.
- PARKES, D. C. Iterative combinatorial auctions. MIT Press, 2006. cap. Chapter 2, p. 96–149.
- PORTER, D.; RASSENTI, S.; ROOPNARINE, A.; SMITH, V. Combinatorial auction design. *National Academy of Sciences*, 2003.
- ROTHKOPF, M. H.; PEKEC, A.; HARSTAD, R. M. Computationally Manageable Combinational Auctions. *Management Science*, Vol. 44, No. 8 (Aug., 1998), pp. 1131-1147, 1998.
- SILVA, L. G. *Nova Sistemática de Leilão Combinatório para o Setor Elétrico Brasileiro: proposta para mitigação do descasamento na contratação dos serviços de Geração e de Transmissão*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, 2021. No prelo.
- TALBI, E.-G. *Mataheuristics: From Design to Implementation*. Wiley, 2009.
- VANGERVEN, B.; GOOSSENS, D. R.; SPIEKSMAN, F. C. R. Winner determination in geometrical combinatorial auctions. *European Journal of Operational Research*, n. 258, p. 254–263, 2017.
- VICKREY, W. Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders. *The Journal of Finance*, Vol. 16, No. 1 (Mar., 1961), pp. 8-37, 1961.
- WEST, D. B. *Introduction to graph theory*. Pearson Education, 2001.
- WILSON, R. J. *Introduction to graph theory*. Addison Wesley, 1996.
- WOLSEY, L. A.; NEMHAUSER, G. L. *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley-Interscience, 1988.