

Universidade Estadual de Campinas

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Fábio Argueira
Brandão E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 20, 12, 91.


ORIENTADOR

ALGORITMOS EM DIFERENÇAS FINITAS
PARA SOLUÇÃO DA CAMADA LIMITE
HIDRODINÂMICA LAMINAR COM
VARIÁVEIS PRIMITIVAS

069/91

Campinas, 20 de dezembro de 1991

ALGORITMOS EM DIFERENÇAS FINITAS
PARA SOLUÇÃO DA CAMADA LIMITE
HIDRODINÂMICA LAMINAR COM
VARIÁVEIS PRIMITIVAS

Dissertação de mestrado de Fabio Cerqueira Brandão
sob orientação do Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo

Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM) - Depto. de Engenharia (DE)

UNICAMP

“Retém o momento precioso com carinho...
ele é o único fruto da tua vida.”

Omar Khayam

Dedico este trabalho à minha esposa Rosaly, aos meus filhos Júlia e David e ao meu pai Sebastião. A eles, meus maiores incentivadores, o meu eterno apreço.

Homenagem

Ao amigo Roberto Joge **Ikoma** (in memoriam),
exemplo de honestidade e profissionalismo.

Agradecimentos

À Companhia Siderúrgica Paulista pelo suporte fornecido à realização deste trabalho.

É justo fazer aqui menção ao engenheiro Haroldo Rittmeister, preconizador da necessidade de especialistas da área de numéricas e ao engenheiro José Geraldo de Aguiar Faria pelo incentivo dado ao meu aperfeiçoamento técnico quando de sua gestão na Gerência de Engenharia de Manutenção.

Ao professor José Ricardo Figueiredo não só pela orientação da dissertação como também pela valorização demonstrada ao presente trabalho através de sua empolgação contagiante.

Ao professor Mário Roberto Granziera pela orientação no programa, durante a fase de créditos.

Aos amigos e professores dos Departamentos de Energia e Térmica e Fluidos que de forma direta ou indireta contribuíram para o encaminhamento deste trabalho.

Quero destacar a presteza do amigo Vicente Scalon que constituiu valiosa contribuição ao presente trabalho.

À moçada do "petróleo": André, Fernando e Telmo pelo apoio dado à impressão dos gráficos.

À Raquel pela assistência na utilização das Estações de Trabalho "Sun" que facilitaram sobremaneira a elaboração deste trabalho.

Ao amigo Martin Klettenhofer pelos "papers" conseguidos junto à U.S.P., pelo micro e principalmente pelo incentivo.

Ao amigo Nilson Bueno pelos desenhos e demais favores prestados durante este período de ausência da Usina.

Sumário

Este trabalho é voltado à investigação numérica do desempenho de diversos esquemas discretizantes em diferenças finitas, aplicados à solução da camada limite hidrodinâmica formada junto à superfície de corpos imersos em escoamento laminar uniforme de um fluido com propriedades constantes sob regime permanente. O desenvolvimento destes esquemas é apoiado em aplicações ao problema de Blasius com variáveis primitivas, após a devida normalização das equações de governo. Para isto, a equação de similaridade de Blasius é resolvida numericamente com boa margem de precisão com o auxílio de uma rotina de Runge-Kutta de 4^a ordem.

À equação da conservação da quantidade de movimento (momentum) aplica-se a diferenciação central para os termos da direção normal à superfície, em combinação com dois outros esquemas discretizantes para os termos da direção do escoamento principal, a saber: discretização à montante e discretização de três níveis. A discretização da equação da conservação da massa (continuidade) é obtida pelo emprego de esquemas à montante e de três níveis em ambas as direções. Além destes esquemas, o clássico esquema de Crank & Nicholson é desenvolvido com vistas a se ter um padrão comparativo entre este, que é o esquema mais amplamente aplicado nas soluções numéricas de problemas parabólicos sem solução similar, e os demais esquemas aqui propostos para o mesmo fim.

Para a resolução dos sistemas de equações, dois diferentes métodos iterativos de substituição sucessiva são avaliados: um método para resolução ponto-a-ponto e outro para resolução coluna-a-coluna (método matricial tridiagonal). A resolução ponto-a-ponto é aplicada ao problema com equações de governo acopladas de forma a acelerar a convergência.

A acuidade dos algoritmos é novamente investigada por aplicações na resolução de dois outros problemas de camada limite; o escoamento em torno de um cilindro circular e o escoamento linearmente retardado sobre placa plana (problema de Howarth).

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Apresentação	1
1.2	A separação da camada limite	4
1.3	A camada limite sobre placa plana paralela a um escoamento uniforme	6
1.4	Problemas não similares	7
2	Problemas aplicados	9
2.1	A solução exata para o problema de Blasius	9
2.1.1	A solução de similaridade de Blasius	10
2.1.1.1	Aplicação do método de Newton-Raphson para obtenção da condição de partida para resolução da equação de Blasius	12
2.2	A camada limite em torno de um corpo cilíndrico	15
2.2.1	A camada limite em torno de um cilindro de seção circular	16
2.2.1.1	O cilindro circular sujeito ao escoamento potencial	16
2.2.1.2	Outros resultados obtidos para o cilindro circular sujeito ao es- coamento potencial	16
2.2.1.3	O cilindro circular sujeito ao escoamento real	17
2.2.1.4	Outros resultados obtidos para o cilindro circular sujeito ao es- coamento real	18
2.3	A camada limite para o escoamento potencial linearmente retardado (Problema de Howarth)	23
2.3.1	Outros resultados obtidos para o problema de Howarth	25
2.4	Métodos numéricos para a camada limite	27
2.4.1	Apresentação	27

2.4.2	Diferenças finitas para a camada limite	28
2.4.2.1	Transformação de variáveis	28
2.4.2.2	Esquemas discretizantes	31
2.4.3	Métodos de resolução	32
2.4.4	Normalização das equações da camada limite	33
2.4.5	Parâmetros surgidos das equações discretizadas	36
2.5	Testes	37
2.5.1	Valores investigados no problema de Blasius	37
2.5.1.1	Avaliação dos erros entre perfis	38
2.5.1.2	Avaliação dos erros entre tangentes	38
2.5.2	Valores investigados nos problemas não similares	42
2.5.3	Estabelecimento das condições para avaliação dos algoritmos	42
2.5.3.1	O comportamento dos erros com a variação do parâmetro F_R	43
2.5.3.2	Estabilidade e oscilações	43
2.5.3.3	O comportamento dos erros com o refino da malha	43
3	Desenvolvimento de ADF's para a camada limite laminar	46
3.1	Apresentação	46
3.2	Características dos ADF's abordados	46
3.2.1	Discretização do espaço	47
3.2.2	Discretização das equações	47
3.2.2.1	Discretização do termo de pressão	47
3.3	Esquema básico 1 (B1)	48
3.3.1	Desenvolvimento	48
3.3.1.1	Discretização do espaço - Moléculas	48
3.3.1.2	Discretização dos termos das equações	48
3.3.1.3	Discretização da equação do momentum normalizada	49
3.3.1.4	Discretização da equação da continuidade normalizada	50
3.3.2	Resultados e comentários sobre o esquema B1	53
3.3.2.1	Estabilidade	53
3.3.2.2	Faixa ótima de F_R	53
3.3.2.3	Oscilações	53
3.3.2.4	Comportamento dos erros com o refino da malha	54

3.3.2.5	Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade	55
3.4	Esquema básico 2 (B2)	56
3.4.1	Desenvolvimento	56
3.4.1.1	Discretização do espaço - Moléculas	56
3.4.1.2	Discretização dos termos das equações	56
3.4.1.3	Discretização da equação do momentum normalizada	57
3.4.1.4	Discretização da equação da continuidade normalizada	58
3.4.2	Resultados e comentários sobre o esquema B2	61
3.4.2.1	Estabilidade	61
3.4.2.2	Faixa ótima de F_R	61
3.4.2.3	Oscilações	61
3.4.2.4	Comportamento dos erros com o refino da malha	61
3.4.2.5	Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade	62
3.5	Esquema básico 3 (B3)	65
3.5.1	Desenvolvimento	65
3.5.1.1	Discretização do espaço - Moléculas	65
3.5.1.2	Discretização dos termos das equações	65
3.5.1.3	Discretização da equação do momentum normalizada	66
3.5.1.4	Discretização da equação da continuidade normalizada	66
3.5.2	Resultados e comentários sobre o esquema B3	70
3.5.2.1	Estabilidade	70
3.5.2.2	Faixa ótima de F_R	70
3.5.2.3	Oscilações	70
3.5.2.4	Comportamento dos erros com o refino da malha	71
3.5.2.5	Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade	72
3.6	Esquema básico 4 (B4)	73
3.6.1	Desenvolvimento	73
3.6.2	Resultados e comentários sobre o esquema B4	76
3.6.2.1	Estabilidade	76
3.6.2.2	Faixa ótima de F_R	76
3.6.2.3	Oscilações	77
3.6.2.4	Comportamento dos erros com o refino da malha	77
3.6.2.5	Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade	77

3.7	Esquema híbrido 1 (H1)	80
3.7.1	Desenvolvimento	80
3.7.2	Resultados e comentários sobre o esquema H1	83
3.7.2.1	Estabilidade	83
3.7.2.2	Faixa ótima de F_R	83
3.7.2.3	Oscilações	83
3.7.2.4	Comportamento dos erros com o refino da malha	83
3.7.2.5	Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade	84
3.8	Esquema básico 5 (B5)	87
3.8.1	Desenvolvimento	87
3.8.1.1	Discretização do espaço - Moléculas	88
3.8.1.2	Discretização da equação do momentum normalizada	88
3.8.1.3	Discretização da equação da continuidade normalizada	89
3.8.2	Resultados e comentários sobre o esquema B5	97
3.8.2.1	Estabilidade e oscilações	97
3.8.2.2	Faixa ótima de F_R	98
3.8.2.3	Comportamento dos erros com o refino da malha	100
3.8.2.4	Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade	102
3.9	Esquema híbrido 2 (H2)	104
3.9.1	Desenvolvimento	104
3.9.2	Resultados e comentários sobre o esquema H2	107
3.9.2.1	Faixa ótima de F_R	112
3.9.2.2	Comportamento dos erros com o refino da malha	112
3.9.2.3	Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade	113
3.10	Esquema híbrido 3 (H3)	117
3.10.1	Desenvolvimento	117
3.10.1.1	Discretização do espaço - Moléculas	117
3.10.2	Resultados e comentários sobre o esquema H3	120
3.10.2.1	Estabilidade e oscilações	120
3.10.2.2	Faixa ótima de F_R	120
3.10.2.3	Comportamento dos erros com o refino da malha	120
3.10.2.4	Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade	121
3.11	Avaliação global dos ADF's na resolução do problema de Blasius	126

3.12	Otimização dos algoritmos	126
3.12.1	Sobre o perfil inicial assumido para as primeiras iterações da resolução coluna-a-coluna	126
3.12.2	O controle do crescimento da camada limite	128
3.13	Sobre o acoplamento das equações de governo na aceleração da convergência	129
4	Aplicações dos ADF's a problemas não-similares	131
4.1	Apresentação	131
4.1.1	O comportamento dos ADF's nas proximidades do ponto de separação	132
4.1.2	Sobre as diferenças surgidas face à mudança da geometria	132
4.2	Apresentação dos resultados obtidos pela aplicação dos ADF's a problemas não- similares	133
4.2.1	Apresentação dos resultados obtidos para o problema do cilindro circular sujeito ao escoamento potencial	133
4.2.2	Apresentação dos resultados obtidos para o problema do cilindro circular sujeito ao escoamento real	136
4.2.3	Apresentação dos resultados obtidos para o problema de Howarth	137
4.3	Avaliação global dos ADF's	140
4.3.1	Avaliação dos resultados obtidos para o cilindro circular sob escoamento potencial	140
4.3.2	Avaliação dos resultados obtidos para o problema de Howarth	145
5	Conclusões, comentários e sugestões	150
A	Desenvolvimento das propostas	152
A.1	Linearização da equação do momentum	152
A.2	Discretização de três níveis para malhas variáveis em x	154
A.2.1	Aplicação da malha variável em x ao esquema H1	156
A.3	Procedimento iterativo para substituição da radiciação envolvida na resolução ponto-a-ponto	159
B	Tabelas complementares	161
C	Desenvolvimento das discretizações utilizadas	171

D	Programas computacionais em FORTRAN	176
D.1	Comentários de ordem geral a respeito dos programas	176
D.2	Programa TOTAL.FOR	178
D.3	Programa PONTOTAL.FOR	208
D.4	Programa NEWTON.FOR	213
	Bibliografia	216

Lista de Tabelas

2.1	Comparação entre soluções para o problema de Blasius.	20
2.2	Valores obtidos por diversos pesquisadores para o ponto de separação do problema do cilindro circular sujeito a um escoamento potencial.	21
2.3	Valores obtidos por diversos pesquisadores para o ponto de separação do problema do cilindro circular sujeito a um escoamento real.	22
2.4	Valores obtidos por diversos pesquisadores para o ponto de separação do problema de Howarth (escoamento linearmente retardado onde $U(\bar{x}) = 1 - 0,125\bar{x}$).	26
4.1	Resultados obtidos para o ponto de separação do problema do cilindro circular sob escoamento potencial.	133
4.2	Quadro comparativo dos resultados obtidos para o problema do cilindro circular sob escoamento potencial.	134
4.3	Resultados obtidos para o ponto de separação do problema do cilindro circular sob escoamento real.	136
4.4	Resultados obtidos para o ponto de separação do problema de Howarth.	137
4.5	Quadro comparativo dos resultados obtidos para o problema de Howarth.	138
B.1	Comportamento dos erros com F_R - Esquema B1	161
B.2	Comportamento dos erros com F_R - Esquema B2	162
B.3	Comportamento dos erros com F_R - Esquema B3	163
B.4	Comportamento dos erros com F_R - Esquema B4	164
B.5	Comportamento dos erros com F_R - Esquema H1 - $IL = 2$	165
B.6	Comportamento dos erros com F_R - Esquema B5 - Continuidade 3 níveis	166
B.7	Comportamento dos erros com F_R - Esquema B5 - Continuidade Blottner	167

B.8	Comportamento dos erros com F_R - Esquema H2 - Continuidade 3 níveis	168
B.9	Comportamento dos erros com F_R - Esquema H2 - Continuidade Blottner	168
B.10	Comportamento dos erros com F_R - Esquema H3 - $IL = 2$	169
B.11	Comportamento dos erros com F_R - Esquema H3 - $IL = 0$	170

Lista de Figuras

1.1	Formação de camada limite sobre placa plana.	2
1.2	Separação da camada limite: (a) tipos de perfis; (b) evolução do gradiente adverso.	5
2.1	Aplicação da técnica de Newton-Raphson para obtenção da condição inicial $f''(0)$	12
2.2	Comportamento de $f''(\infty)$ em função do chute inicial $f''(0)$	14
2.3	Resultados de Schönauer para o cilindro circular sujeito ao escoamento potencial.	17
2.4	Comportamento do coeficiente de arrasto com a variação de Re	18
2.5	Comportamentos possíveis de $T \times x$: (a) $EAT = EIT$; (b) $EAT \neq EIT$ sem oscilações; (c) $EAT \neq EIT$ com oscilações.	42
2.6	Esquema de medição dos erros nos pontos da malha inicial (Δx e $\Delta y =$ Passos da malha inicial).	45
3.1	Comportamento dos erros com F_R : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.	53
3.2	Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b): refino a F_R constante.	54
3.3	Resultados obtidos: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.	55
3.4	Comportamento dos erros com F_R : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.	62
3.5	Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b): refino a F_R constante.	63
3.6	Resultados obtidos: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_w$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.	64
3.7	Comportamento dos erros com F_R : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.	70
3.8	Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b): refino a F_R constante.	71

3.9	Resultados obtidos: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\Big _w\right)$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.	72
3.10	Comportamento dos erros com F_R : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.	76
3.11	Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b): refino a F_R constante.	78
3.12	Resultados obtidos: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big _w\right)$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.	79
3.13	Comportamento da tangente junto à parede $\frac{\partial u}{\partial y}\Big _w$ no esquema H1 para alguns valores de IL .	82
3.14	Comportamento dos erros com F_R : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.	84
3.15	Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b): refino a F_R constante.	85
3.16	Resultados obtidos: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big _w\right)$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.	86
3.17	Comportamento oscilatório da tangente junto à parede para altos valores de FR .	97
3.18	Comportamento dos erros com F_R : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis - continuidade de 3 níveis.	98
3.19	Comportamento dos erros com F_R : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis - continuidade de Blottner.	99
3.20	Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b): refino a F_R constante.	100
3.21	Resultados obtidos: (a) tangente por três níveis junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big _w\right)$; (b) tangente por Blottner junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big _w\right)$.	102
3.22	Resultados obtidos: (a) perfis por três níveis a 1%, 50% e 100%; (b) perfis por Blottner a 1%, 50% e 100%.	103
3.23	Comportamento de $\frac{\partial v}{\partial y}\Big _w$ no esquema H2 (3 níveis) para alguns valores de IL .	108
3.24	Comportamento de $\frac{\partial v}{\partial y}\Big _w$ no esquema H2 (Blottner) para alguns valores de IL .	110
3.25	Comportamento oscilatório da tangente junto à parede devido ao alto valor de IL .	111
3.26	Comportamento dos erros com F_R para o esquema de 3 níveis: (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.	112
3.27	Comportamento dos erros com F_R para o esquema de Blottner: (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.	113

3.28	Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b): refino a F_R constante.	114
3.29	Tangente junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w$; : (a) continuidade de três níveis; (b) continuidade de Blottner.	115
3.30	Perfis a 1%, 50% e 100%: (a) continuidade de três níveis; (b) continuidade de Blottner.	116
3.31	Comportamento de $\frac{\partial v}{\partial y}\Big _w$ no esquema H3 para alguns valores de IL	119
3.32	Comportamento dos erros com F_R para $IL = 2$: (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.	121
3.33	Comportamento dos erros com F_R para $IL = 0$: (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.	122
3.34	Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b): refino a F_R constante.	123
3.35	Resultados obtidos com $IL = 2$: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_w$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.	124
3.36	Resultados obtidos com $IL = 0$: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_w$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.	125
3.37	Comparação entre os valores da tangente junto à parede $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_w$ obtidos para os diversos esquemas.	127
3.38	Aceleração de convergência conseguida pelo uso de perfis iniciais obtidos por extrapolações quadráticas	129
3.39	Influência do acoplamento na aceleração da convergência.	130
4.1	Resultados sintetizados do problema do cilindro potencial.	135
4.2	Resultados sintetizados do problema de Howarth.	139
4.3	Comparação entre os valores da tangente junto à parede $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_w$ obtidos para diversos esquemas para o problema do cilindro potencial.	141
4.4	Detalhe ampliado da região de pressão mínima do problema do cilindro potencial.	142
4.5	Comparação entre os valores de espessura de deslocamento obtidos para diversos esquemas para o problema do cilindro potencial.	143
4.6	Comparação entre os valores de espessura do momentum obtidos para os diversos esquemas para o problema do cilindro potencial.	144

4.7	Comparação entre os valores da tangente junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w$ obtidos para os diversos esquemas para o problema de Howarth.	146
4.8	Detalhe ampliado da porção inicial da placa para o problema de Howarth.	147
4.9	Comparação entre os valores de espessura de deslocamento obtidos para diversos esquemas para o problema de Howarth.	148
4.10	Comparação entre os valores de espessura do momentum obtidos para os diversos esquemas para o problema de Howarth.	149
A.1	Malha de passo variável na direção x	154

Nomenclatura

Abreviaturas

- ADF - algoritmo em diferenças finitas
 EIT - erro integral na tangente
 EAT - erro absoluto na tangente
 EAP - erro absoluto nos perfis
 N-R - referente ao método de Newton-Raphson
 R-K - referente ao método de Runge-Kutta

Variáveis e constantes

- p - pressão
 u - componente de velocidade na direção principal
 u - o "u" obtido da iteração anterior
 v - componente de velocidade na direção normal
 x - variável independente da direção principal
 y - variável independente da direção normal
 U - velocidade do escoamento externo (corrente livre)
 n - variável independente qualquer
 m - variável independente qualquer
 Re - número de Reynolds referente a L ou R
 Re_D - número de Reynolds referente a D
 g - função g qualquer
 f - função f qualquer
 F_D - parâmetro geométrico da malha
 F_R - parâmetro de estabilidade
 IL - n^{a} de colunas iniciais com aproxim. linear para $\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{j=1}$
 L - comprimento característico da placa plana
 PCL - pontos nodais no interior da camada limite

Variáveis e constantes (continuação)

R - raio do cilindro circular

D - diâmetro do cilindro circular

DIF - diferença

A, B, C, D - coeficientes

a, b, c - coeficientes

b_1 - coeficiente angular da distribuição de Howarth

b_0 - coeficiente linear da distribuição de Howarth

PO - constante que distingue as aproximações de 1^a e 2^a ordens

T - tangente junto à parede (coeficiente de arrasto)

NI - número de pontos da malha em y dentro da camada limite

F_n - parâmetro da malha variável

Símbolos matemáticos

Σ - somatória

∂ - derivada parcial

Gregas

β - força de corpo

ρ - massa específica

∞ - condição referente ao infinito (corrente livre)

ν - viscosidade cinemática

μ - viscosidade dinâmica

η - variável de similaridade de Blasius

Δ - passo da malha

ε - incremento

ψ - função corrente adimensionalizada

Superescritos

- - variável dimensional
- = - variável adimensional antes da readimensionalização por \sqrt{Re}
- * - variável modificada
- ' - derivada primeira
- " - derivada segunda
- ''' - derivada terceira

Subscritos

- w - junto à parede
- ϵ - referente ao valor exato
- n - referente ao valor numérico (no apêndice A usado para denotar a variação da malha e no capítulo 1 como representando uma variável independente qualquer)
- i - índice da malha para a direção principal (índice de colunas)
- j - índice da malha para a direção normal (índice de linhas)
- k - índice do número da iteração
- cte - constante
- s - referente ao ponto de separação

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

Até o final do século passado o tratamento teórico do escoamento de fluidos viscosos, salvo quando aplicado a alguns poucos casos particulares, esbarrava na dificuldade de recursos matemáticos que possibilitassem a resolução das equações completas de NAVIER-STOKES [74] - [75], que para escoamentos incompressíveis bidimensionais em regime permanente, são escritas, em coordenadas cartesianas, da seguinte forma ¹

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \quad (1.2)$$

Isto fez com que o desenvolvimento de soluções teóricas aplicáveis ao escoamento de fluidos mais importantes sob o ponto de vista prático, como os de ar e água, cuja viscosidade é muito pequena comparada às forças de inércia, ficasse estagnado por muito tempo. Em 1904, Ludwig Prandtl [25] propôs a solução para estes casos de maior importância prática. Embasado em considerações teóricas e em diversas experiências simples, Prandtl provou que o escoamento

¹Os termos de pressão $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}$ já incorporam a pressão estática pela aplicação de $\gamma^* = \bar{p} + \rho \beta_n n$.

sobre um corpo sólido pode ser dividido em duas regiões distintas: uma camada muito delgada formada junto à superfície, onde o atrito exerce fundamental influência, e a região restante, externa à esta camada, onde o atrito é desprezível. Esta fina região que confina os efeitos viscosos dos escoamentos de altos números de Reynolds [48] foi por ele denominada de *camada limite*.

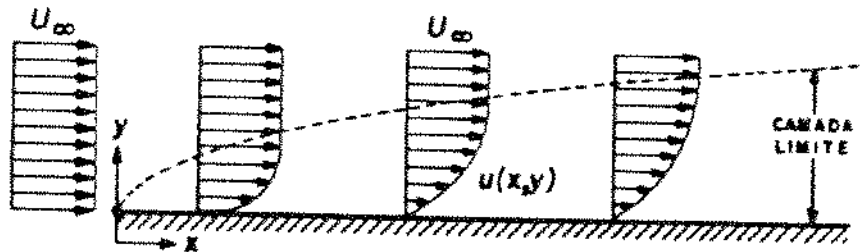


Figura 1.1: Formação de camada limite sobre placa plana.

Apesar de muito fina, a camada limite (figura 1.1) é responsável pelo controle de muitos processos de interesse na engenharia, como a força de arrasto exercida sobre corpos imersos em escoamentos de fluidos viscosos (presente nos casos da placa plana e do cilindro circular tratados teoricamente no presente trabalho e em casos mais práticos como o arrasto de um navio e de palhetas de turbinas) e a transferência de calor e massa (em forma dos mais variados tipos de problemas deste gênero). A camada limite ainda se aplica na resolução de diversos outros problemas teóricos, como o desenvolvimento dos perfis de velocidade no interior de dutos ($u(r)$), e práticos como a dispersão de poluentes na atmosfera. Neste sentido, objetiva-se para os problemas aqui abordados, além da obtenção dos perfis de velocidade, a distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da direção do escoamento principal, de modo a possibilitar a integração da força de arrasto exercida sobre o corpo, sendo ainda verificado o ponto de separação para os casos que envolvem gradientes de pressão (conforme explicado em ocasião mais oportuna).

O termo *teoria da camada limite*, conforme concebido por Prandtl, se aplica não só a regiões próximas a paredes, mas também a fronteiras entre duas porções de escoamento movendo-se com diferentes velocidades, finas esteiras entre corpos aerodinâmicos e jatos planos de fluido descarregando em grandes reservatórios. Também estas regiões são caracterizadas

por abruptos gradientes na velocidade normal ao escoamento principal (v), o que releva a importância dos efeitos viscosos, e mesmo quando turbulentas continuam podendo ser tratadas pela teoria da camada limite, cujo conceito necessita de poucas modificações para incluir as características turbulentas.

As simplificações introduzidas por Prandtl, baseadas em análise de escala (conforme demonstrado em [16] (cap.8) e mais recentemente por M. van Dyke [27] pelo emprego de métodos de perturbação), possibilitaram a conversão da equação da conservação da quantidade de movimento na direção principal do escoamento, originalmente elíptica, em parabólica, pelo desprezo do termo difusivo nesta direção.² Tais simplificações possibilitaram ainda o desprezo dos termos de variação da quantidade de movimento e de atrito viscoso na direção normal.

Assim, para a camada limite hidrodinâmica laminar de escoamentos planos incompressíveis com propriedades constantes em regime permanente, as equações da conservação da quantidade de movimento (momentum) em coordenadas cartesianas assumem a forma

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \quad \text{--- momentum em } \bar{x} \quad (1.3)$$

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \text{--- momentum em } \bar{y} \quad (1.4)$$

Analisando o comportamento da equação do momentum em \bar{x} (1.3) no final da camada limite ($\bar{y} \rightarrow \infty$), onde $\bar{u}(\bar{x}, \infty) \rightarrow \bar{U}(\bar{x})$ (e as derivadas em \bar{y} podem, portanto, ser desprezadas), obtém-se

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{y} \rightarrow \infty} = \bar{U} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} \quad (1.5)$$

Utilizando agora a informação disponível na equação do momentum em \bar{y} (1.4) de que a pressão não varia ao longo da espessura (\bar{y}) da camada limite, tem-se que

²Esta parabolização facilitou as soluções numéricas computacionais pela considerável redução no armazenamento de dados e de tempo computacional permitidos pelos processos de resolução em marcha.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \bar{U} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}}, \quad (1.6)$$

ou seja, que o gradiente de pressão é promovido pela variação de velocidade no escoamento externo.

Substituindo a equação (1.6) na equação do momentum em \bar{x} (1.3) garante-se uma forma alternativa mais útil ao seu tratamento numérico. Finalmente, as equações de governo, para este caso de camada limite em particular, podem ser apresentadas na forma

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{U} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} \quad \text{--- momentum} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \text{--- continuidade} \quad (1.8)$$

com condições de contorno

$$\bar{y} = 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0 \quad (\text{não deslizamento e impermeabilidade}) \quad (1.9)$$

e

$$\bar{y} \rightarrow \infty : \bar{u} \rightarrow \bar{U} \quad (\text{corrente livre}), \quad (1.10)$$

onde $\bar{U} = \bar{U}(x)$ é o valor local da velocidade do escoamento externo.

1.2 A separação da camada limite

A aplicação da equação do momentum (1.7) ao fluido adjacente à parede ($\bar{y} = 0$), onde $\bar{u} = \bar{v} = 0$, fornece

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right|_{\bar{y}=0} = \frac{1}{\mu} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \quad (1.11)$$

mostrando que a curvatura do perfil de velocidade junto à parede é diretamente afetada pelo gradiente de pressão impresso. Com auxílio da figura 1.2-a pode-se constatar que onde o valor do gradiente é negativo (favorável) o perfil tem uma curvatura negativa e onde o gradiente é zero o perfil não apresenta curvatura (como o caso do problema de Blasius tratado a posteriori). Nestes dois casos os perfis são estáveis, não apresentando, portanto, tendências à separação. Mas o terceiro caso, onde o gradiente é positivo (adverso), apresenta um comportamento bastante peculiar. Neste tipo de perfil a curvatura é positiva junto à parede, mas contém um ponto de inflexão conforme mostrado. O perfil é instável com respeito à criação de turbulência, e à medida que o gradiente de pressão aumenta, o ponto de inflexão se afasta mais e mais das proximidades da parede até que uma condição de contra-fluxo é atingida, conforme ilustrado na figura 1.2-b. Para satisfazer a continuidade, o escoamento pára junto à parede próximo ao ponto onde o gradiente $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w = 0$, ou seja, onde o contra-fluxo é incipiente. Este ponto é denominado de *ponto de separação*. Após este ponto o escoamento se descola da parede de forma tão acentuada que as velocidades normais se tornam muito altas invalidando as aproximações da camada limite. Em geral, as partículas de fluido situadas após o ponto de separação seguem o gradiente de pressão e movem-se em direção oposta à corrente externa.

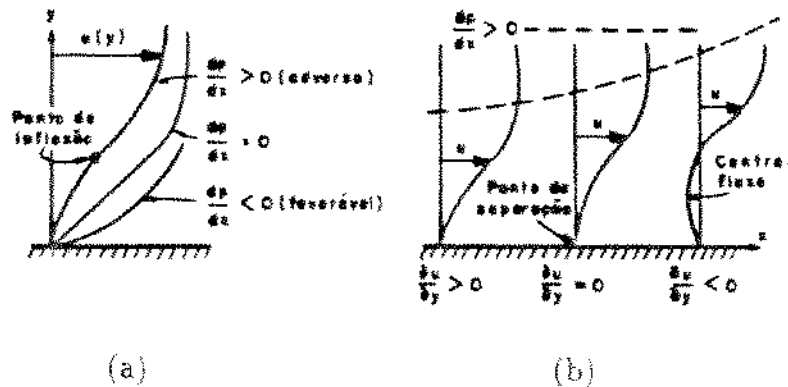


Figura 1.2: Separação da camada limite: (a) tipos de perfis; (b) evolução do gradiente adverso.

Os escoamentos com gradientes adversos de pressão (escoamentos retardados), presentes nos dois casos aplicativos aqui estudados (cilindro circular e problema de Howarth), são de grande importância prática. Neste aspecto a separação deve ser sempre evitada devido a alta perda de energia associada ao fenômeno da recirculação. Como em corpos bojudos a separação não

pode ser evitada, visa-se nestes casos, a minimização da área de recirculação de forma a reduzir o arrasto.

1.3 A camada limite sobre placa plana paralela a um escoamento uniforme

Com a simplificação das equações de Navier-Stokes começaram a surgir inúmeras propostas de soluções para os problemas de escoamentos viscosos de alto número de Reynolds. Provavelmente o mais simples e ao mesmo tempo mais célebre é o problema da camada limite hidrodinâmica laminar sobre placa plana cuja solução foi dada por H. Blasius [26], um dos primeiros alunos de Prandtl, em 1908. Este problema, que foi o primeiro a aplicar a teoria de Prandtl, consiste na resolução das equações da camada limite formada ao longo de uma fina placa plana semi-infinita imersa em um escoamento uniforme paralelo à mesma. Como, neste caso, a velocidade do escoamento potencial não varia, o termo de pressão não se justifica, o que vem a simplificar ainda mais o problema. Desta forma a equação do momentum (1.7) assume a forma

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (1.12)$$

sendo mantida a mesma forma anterior para a continuidade

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (1.8)$$

e as mesmas condições de contorno (1.9) e (1.10), respectivamente

$$\bar{y} = 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0 \text{ (não deslizamento e impermeabilidade)}$$

e

$$\bar{y} \rightarrow \infty : \bar{u} \rightarrow \bar{U} \text{ (corrente livre),}$$

onde \bar{U} é o valor local da velocidade do escoamento (uniforme) externo.

Para resolver seu problema Blasius reduziu a equação do momentum, originalmente parcial, a uma equação ordinária não-linear pela aplicação de uma variável de similaridade, valendo-se ainda do conceito de função corrente, conforme apresentado a posteriori. Esta equação foi então por ele próprio resolvida por expansão em série de potências.

A partir de então vários pesquisadores se dedicaram à resolução desta equação por expansão em séries como Bairstow [28] e Goldstein [29]; ou aplicando o método de Runge-Kutta [83] manualmente como Töpfer [30] e, mais recentemente, utilizando computação digital como Howarth [32], Smith [70], Rosenhead [71], Evans [33] e outros. Paralelamente, soluções de similaridade para outros casos mais complicados de escoamentos viscosos foram sendo obtidas.

1.4 Problemas não similares

Entretanto, conforme se verifica na literatura acerca de fenômenos de transporte, como os compêndios de Schlichting [16] e White [2] e alguns artigos isolados, são poucos os problemas com solução de similaridade, o que torna imperativa a evolução de técnicas numéricas de boa acuidade para o devido tratamento dos muitos outros problemas práticos da engenharia que não admitem solução de similaridade (como os dois problemas teste avaliados cujas soluções analíticas, dentre outras, são a seguir comentadas). No entanto, tais técnicas, sejam elas de integração por elementos finitos, diferenças finitas ou mesmo métodos integrais, costumam envolver problemas de estabilidade, acuidade e convergência se não devidamente adequadas ao emprego.

Este trabalho tem como objetivo investigar o desempenho de diversos algoritmos em diferenças finitas (ADF's) que poderão vir a ser aplicados a problemas parabólicos ainda sem solução, ou mesmo com solução de acuidade duvidosa. De forma a facilitar sua adequação a

outros problemas do gênero, os algoritmos se desenvolvem sobre as equações da camada limite hidrodinâmica laminar, mantidas as variáveis independentes em suas formas primitivas, a menos de transformações de natureza linear.

Os ADF's são primeiramente desenvolvidos para o caso particular do problema de Blasius visto que, como sua solução já é conhecida, fica garantida a fidelidade dos resultados dos testes comparativos exigidos para os mesmos. Para isto, a solução de similaridade é derivada e posteriormente desenvolvida com o auxílio do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, em paralelo ao método de Newton-Raphson, responsável pela obtenção da condição inicial faltante. Este procedimento é mostrado no próximo capítulo.

Conforme já comentado, objetiva-se aqui o desenvolvimento de algoritmos precisos aplicáveis a problemas sem solução similar, o que justifica a preocupação em se desenvolver os mesmos sobre um problema com solução exata como o de Blasius. Assim, uma vez consolidado o bom desempenho dos algoritmos são eles aplicados à solução de dois problemas não similares de camada limite hidrodinâmica laminar bastante investigados que são a seguir comentados: o escoamento uniforme em torno de um corpo cilíndrico circular e o escoamento linearmente retardado sobre uma placa plana (mais conhecido como problema de Howarth).

No desenrolar do trabalho são abordados cinco esquemas discretizantes básicos em diferenças finitas, sendo ainda analisado o comportamento de alguns esquemas híbridos resultantes de combinações de diversas naturezas entre estes esquemas básicos. Note-se que, das muitas combinações possíveis, apenas algumas daquelas que intuem melhorias significativas de acuidade são aqui tratadas.

Capítulo 2

Problemas aplicados

2.1 A solução exata para o problema de Blasius

Conforme comentado anteriormente, foi o próprio Blasius quem pela primeira vez resolveu analiticamente o problema da placa plana sem gradiente de pressão. Esta solução consistiu na representação da função corrente ψ por uma série similar em x com coeficientes dependentes de y (séries de Blasius). No entanto, como esta solução não é aqui utilizada para fins de comparação devido a sua baixa acuidade, e mesmo porque uma solução mais genérica e mais acurada, dada por Howarth (da qual o problema de Blasius é um caso particular) é posteriormente desenvolvida em detalhes, a solução analítica de Blasius não é aqui desenvolvida. Contudo, como ainda as soluções sugeridas por diversos autores para o problema de Blasius são apresentadas em forma de tabelas, e mediante a necessidade de se incorporar a solução exata no programa computacional elaborado para a avaliação dos *algoritmos em diferenças finitas (ADF's)*, um algoritmo de alta precisão é especialmente desenvolvido para tal fim. Conforme já comentado, este algoritmo, utilizado para a geração dos valores exatos utilizados para comparação, é desenvolvido sobre a equação de similaridade de Blasius, consistindo de um processo iterativo inicial para a descoberta da condição de partida $f''(\eta = 0)$, seguindo o método de Newton-Raphson, associado ao método de Runge-Kutta [83] de 4ª ordem. Este processo permite obter em poucas iterações, um valor convergido de alta precisão que será finalmente aplicado como a condição de contorno faltante para a obtenção do perfil final $f'(\eta)$.

2.1.1 A solução de similaridade de Blasius

Para resolver seu sistema de equações Blasius lançou mão da técnica de análise de similaridade auxiliado pela aplicação do conceito de função corrente, transformando a equação original, de variáveis primitivas (\bar{x} e \bar{y}), função de uma única variável de similaridade η , definida por:

$$\eta = \bar{y} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \bar{x}}} \quad (2.1)$$

A solução de similaridade de Blasius pode ser derivada da seguinte maneira:

Fazendo

$$g(\bar{x}) = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \bar{x}}} \quad (2.2)$$

tem-se

$$\eta = \bar{y} g \quad (2.3)$$

e ainda

$$\frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} = g \quad (2.4)$$

Adimensionalizando a função corrente $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ da forma

$$\psi = \sqrt{\nu \bar{x} U_\infty} f(\eta) \quad (2.5)$$

obtem-se para as velocidades \bar{u} e \bar{v} (pelo emprego da técnica de derivação em cadeia)

$$\bar{u} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} = \sqrt{\nu \bar{x} U_\infty} f' g \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= -\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \Big|_{\eta=cte} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\bar{x}=cte} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{y}=cte} = \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{\bar{x}}} f - \sqrt{\nu \bar{x} U_\infty} f' \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{y}=cte} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Procedendo de maneira análoga para as derivadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} &= \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right|_{\eta=cte} + \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right|_{\bar{x}=cte} \cdot \left. \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{y}=cte} = \\ &= f' \frac{\partial U_\infty}{\partial \bar{x}} + f'' U_\infty \left. \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{y}=cte}\end{aligned}\quad (2.8)$$

como $\frac{\partial U_\infty}{\partial \bar{x}} = 0$ para a placa plana sujeita a um escoamento uniforme, então

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = f'' U_\infty \left. \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{y}=cte} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right|_{\bar{x}=cte} \left. \frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{x}=cte} = f'' U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \bar{x}}} = f'' U_\infty g \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = f''' U_\infty g^2 \quad (2.11)$$

Substituindo estes termos na equação do momentum para a placa plana vem

$$\begin{aligned}&\sqrt{\nu \bar{x}} U_\infty f' g f' \frac{\partial U_\infty}{\partial \bar{x}} + f'' U_\infty \left. \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{y}=cte} + \\ &+ \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{\bar{x}}} f - \sqrt{\nu \bar{x}} U_\infty f' \left. \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{y}=cte} \right) f'' U_\infty g = f''' \nu U_\infty g^2\end{aligned}\quad (2.12)$$

que dividido por $\nu U_\infty g^2$ fornece

$$f''' + \frac{U_\infty g}{2\nu U_\infty g^2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{\bar{x}}} f f' = 0 \quad (2.13)$$

e como $g = \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{\bar{x}}}$, surge finalmente a equação de similaridade de Blasius

$$f f'' + 2 f''' = 0 \quad (2.14)$$

com condições de contorno

$$\eta = 0 : f = 0, f' = 0 \quad (2.15)$$

$$\eta \rightarrow \infty : f' \rightarrow 1 \quad (2.16)$$

2.1.1.1 Aplicação do método de Newton-Raphson para obtenção da condição de partida para resolução da equação de Blasius

Em se tratando de uma equação diferencial (ordinária não-linear) de terceira ordem, sua solução requer a especificação de três condições de contorno. Uma vez que uma delas é dada para $\eta = \infty$ e as outras duas para $\eta = 0$, faz-se necessário o emprego de um esquema de correção do chute inicial para obtenção da solução, ou melhor, para que a condição $f'(\infty) \rightarrow 1$ seja satisfeita. O valor da derivada da curva em $\eta = 0$ ($f''(0)$) deve ser suficientemente preciso para que o método de solução (Runge-Kutta 4ª ordem) realmente convirja ($f'(\infty) \rightarrow 1$), caso contrário a convergência se dará para um outro valor que não 1. O valor para o qual converge $f'(\infty)$ em função do chute inicial $f''(0)$ comporta-se da forma ilustrada na figura 2.2¹ onde o conjunto de pontos que forma esta curva é obtido pelo emprego do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Para aplicação do método de Newton-Raphson segue-se uma determinada seqüência ilustrada com o auxílio da figura 2.1:

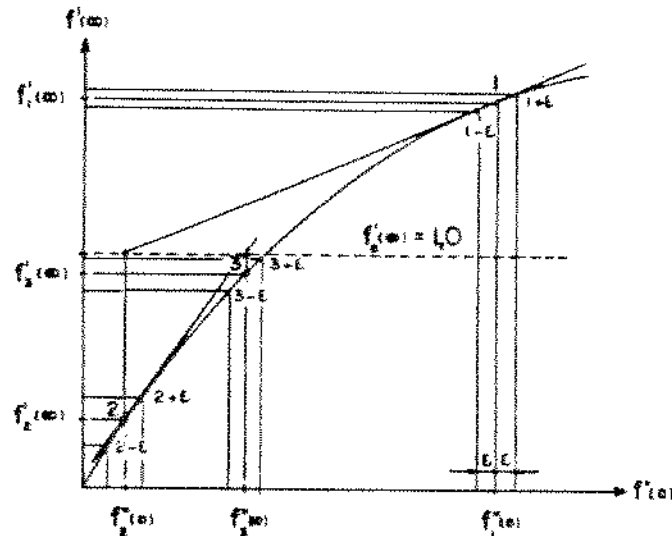


Figura 2.1: Aplicação da técnica de Newton-Raphson para obtenção da condição inicial $f''(0)$.

1) Chuta-se um valor inicial $f''(0)$, obtendo-se, através do Runge-Kutta, o valor para o qual tende $f'(\infty)$, no caso $f'_1(\infty)$.

2) Obtém-se a derivada $\frac{df'_1(\infty)}{df''(0)}$ numericamente através de diferenciação central, a partir dos valores $f'_{1+\epsilon}(\infty)$ e $f'_{1-\epsilon}(\infty)$, correspondentes aos pontos $1 + \epsilon$ e $1 - \epsilon$ das vizinhanças do ponto

¹Curva obtida através de adaptação do programa Newton.for - apêndice D.

1, previamente obtidos pela mesma rotina de Runge-Kutta. Assim

$$\frac{df'(\infty)}{df''(0)} = \frac{f'_{1+\varepsilon}(\infty) + f'_{1-\varepsilon}(\infty)}{2\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.17)$$

Nota: O valor de ε deve ser previamente determinado em função da precisão requerida para a derivada. No caso, como a curvatura da função é suave, não há necessidade de um valor muito pequeno para este incremento.

3) Estendendo-se uma secante até seu entroncamento com a reta $f'_\varepsilon(\infty) = 1$, obtém-se o próximo valor que realimentará o Runge-Kutta ($f''_2(0)$) resultando num valor mais próximo a 1. A obtenção deste valor é viabilizada pelo emprego da relação trigonométrica

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (2.18)$$

ou melhor

$$\left. \frac{df'(\infty)}{df''(0)} \right|_1 = \frac{f'_1(\infty) - 1}{f''_1(0) - f''_2(0)} \quad (2.19)$$

que resulta em

$$f''_2(0) = f''_1(0) + \frac{f'_1(\infty) - 1}{\left. \frac{df'(\infty)}{df''(0)} \right|_1} \quad (2.20)$$

4) Checa-se a convergência pela comparação da diferença $[f''_2(0) - f''_1(0)]$ com um padrão previamente estabelecido. Caso não ocorra a convergência, procede-se aos passos 2.3 e 4 até que o processo finalmente convirja.

Uma vez convergido o algoritmo de Newton-Raphson, aplica-se o valor resultante $f''(0)$ como a condição de contorno faltante para finalmente se obter a solução exata através do Runge-Kutta. No caso, obteve-se $f''(0) = 0,33205734$.

A tabela 2.1 permite uma comparação entre os valores obtidos pelo presente algoritmo e os valores obtidos por Howarth, empregando expansão em séries (segundo [16]). Vale salientar que os valores constantes da tabela 2.1-a foram obtidos para um incremento $\Delta\eta = 0,1$ e que não se consegue melhoria significativa de acuidade em se trabalhando com valores menores. Para um maior entendimento sobre este particular recomenda-se uma consulta ao cap.6 da referência [72].

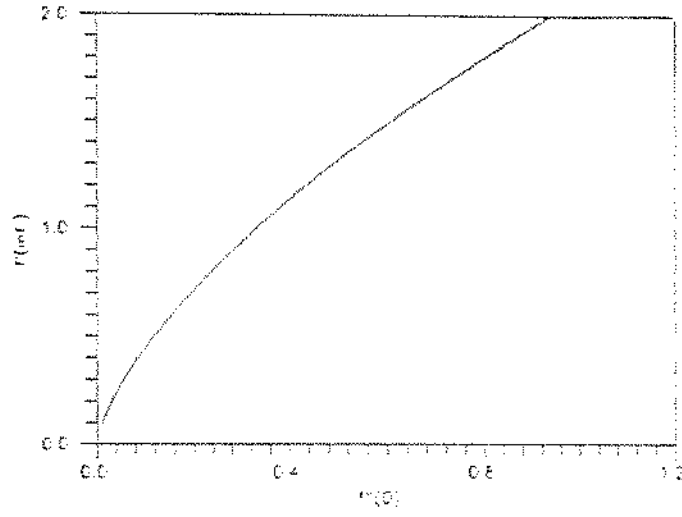


Figura 2.2: Comportamento de $f'(\infty)$ em função do chute inicial $f''(0)$.

2.2 A camada limite em torno de um corpo cilíndrico

O primeiro problema de camada limite não similar investigado pelos algoritmos propostos é o caso do escoamento em torno de um corpo cilíndrico circular. Considera-se a princípio o caso geral da camada limite formada sobre um corpo cilíndrico qualquer posicionado em uma corrente perpendicular a seu eixo. A solução deste problema foi primeiramente dada por H. Blasius [26] sendo ainda posteriormente desenvolvida por K. Hiemenz [34] e L. Howarth [31].

É necessário aqui distinguir dois casos em função da geometria do corpo cilíndrico:

caso simétrico - quando a seção transversal do corpo cilíndrico é simétrica em relação a um eixo, paralelo à corrente, que passa na altura do seu maior diâmetro e;

caso assimétrico - quando tal simetria não é observada.

Em ambos os casos a velocidade do escoamento externo é colocada na forma de uma série de potências em x , sendo x a distância medida a partir do ponto de estagnação ao longo do contorno. O perfil de velocidades na camada limite é também representado como uma série de potências similar em x , onde os coeficientes são, por hipótese, funções da coordenada y normal ao contorno (séries de Blasius).

Howarth encontrou uma substituição para o perfil de velocidades que conferiu validade universal aos coeficientes dependentes de y . Em outras palavras, por uma adequada hipótese em torno da série de potências, seus coeficientes foram feitos independentes das particularidades do corpo cilíndrico, de forma que as funções resultantes pudessem ser avaliadas e apresentadas na forma de tabelas. Desta maneira, o cálculo da camada limite para um dado formato torna-se bastante simples desde que a tabulação se estenda sobre um número suficientemente alto de termos das séries.

Pelo fato do método original de Blasius utilizar séries de potências com apenas três termos, sua utilidade é severamente restrita à medida de que, precisamente nos casos mais importantes de corpos com seção muito alongada (caso de uma elipse posicionada em uma corrente paralela ao seu maior eixo ou no caso de um aerofólio), um grande número de termos é requerido: na verdade este número é tão alto que torna-se impraticável tabular todos eles com uma razoável quantidade de trabalho numérico. Isto se deve ao fato de que, para corpos com tal geometria,

a velocidade da corrente externa próximo ao ponto de estagnação, nas imediações da borda de ataque, aumenta abruptamente para então variar muito suavemente ao longo de uma considerável distância a jusante, não podendo, uma função deste tipo, ser representada por uma série com poucos termos. Apesar desta limitação o método de Blasius é de fundamental importância porque, em casos onde sua convergência é insuficiente para atingir o ponto de separação, ele pode ser utilizado para calcular analiticamente e com grande acuidade a porção inicial da camada limite (próximo ao ponto de estagnação), podendo então ser o cálculo prosseguido com auxílio de um método de integração numérica adequado.

2.2.1 A camada limite em torno de um cilindro de seção circular

O escoamento em torno de um cilindro circular é um problema bastante investigado por diversos autores, costumando ser abordado de duas formas distintas no que diz respeito ao tipo de escoamento externo assumido; o escoamento resultante da teoria potencial e o obtido a partir de dados experimentais (real). Os valores obtidos da literatura para ambos os casos são confrontados com os ADF's aqui desenvolvidos.

2.2.1.1 O cilindro circular sujeito ao escoamento potencial

Dentre os trabalhos que tratam o problema do cilindro circular sujeito ao escoamento potencial dado por $U(x) = 2U_{\infty} \sin(x)$, merece destaque aquele conduzido por Schönauer [24] através da técnica de diferenças finitas aplicada sobre as equações da camada limite com variáveis transformadas. Lançando mão de uma discretização típica de Crank & Nicholson [41] (apesar de não referenciado em seu trabalho), Schönauer obteve o ponto de separação aos 104.473° . A figura 2.3 ilustra os resultados por ele obtidos para o coeficiente de arrasto e espessuras de deslocamento e momentum.

2.2.1.2 Outros resultados obtidos para o cilindro circular sujeito ao escoamento potencial

Coube a Tifford [69] uma solução para o problema da camada limite formada em torno de um corpo cilíndrico de seção circular com base na distribuição de pressões obtida da teoria potencial, que consistiu do desenvolvimento em uma série de potências (de Blasius) conduzida até o termo x^{11} . Como resultado da aplicação deste método, Tifford obteve para a posição do

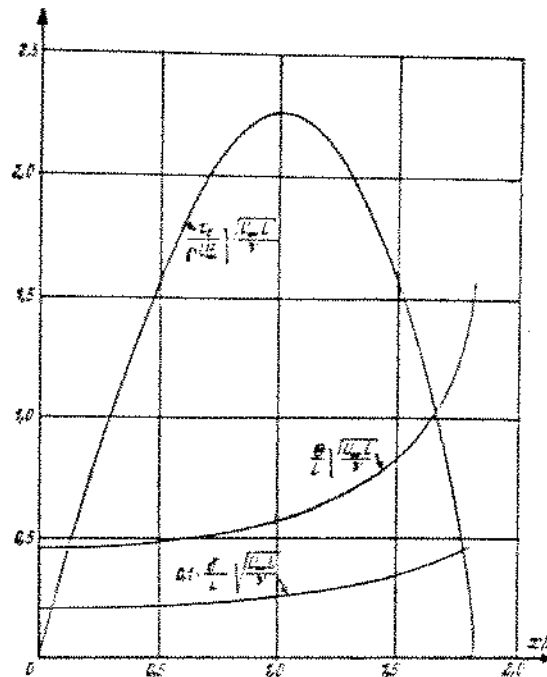


Figura 2.3: Resultados de Schönauer para o cilindro circular sujeito ao escoamento potencial.

ponto de separação o valor de $108,8^\circ$. Entretanto, comenta-se na literatura que se esta mesma série for truncada no termo x^8 obter-se-á a separação em $109,6^\circ$, fato que confirma a baixa acuidade dos métodos “analíticos” (séries) nas proximidades da separação, há pouco discutida.

Dentre os autores que abordaram este problema figuram aqueles cujos resultados são relacionados na tabela 2.2.

2.2.1.3 O cilindro circular sujeito ao escoamento real

A distribuição experimental de pressões ao redor do cilindro circular foi obtida por K. Hiemenz [34], por ocasião de sua tese, e utilizada em seus cálculos de camada limite. Estas medições mostravam que a separação ocorria aos 81° , ao passo que seus cálculos indicavam 82° . Mais tarde O. Flachsbart [68] publicou extensivos dados experimentais sobre a distribuição de pressão que apontavam para uma grande influência do número de Reynolds. Para valores de Reynolds abaixo do crítico a pressão mínima ocorre próximo de 70° , ficando a pressão praticamente constante ao longo de toda a porção a jusante do cilindro. Para Reynolds acima do crítico

a pressão mínima muda para 90° aproximadamente, coincidindo com a teoria do escoamento potencial e, no geral, a distribuição de pressão se afasta menos daquela resultante da teoria potencial do que no caso anterior. Entre estes valores, isto é, próximo ao número de Reynolds crítico (em torno de 300.000), o coeficiente de arraste do cilindro circular cai abruptamente indicando que a camada limite tornou-se turbulenta. A figura 2.4 ilustra este fato através das medições obtidas por Wieselberger [79].

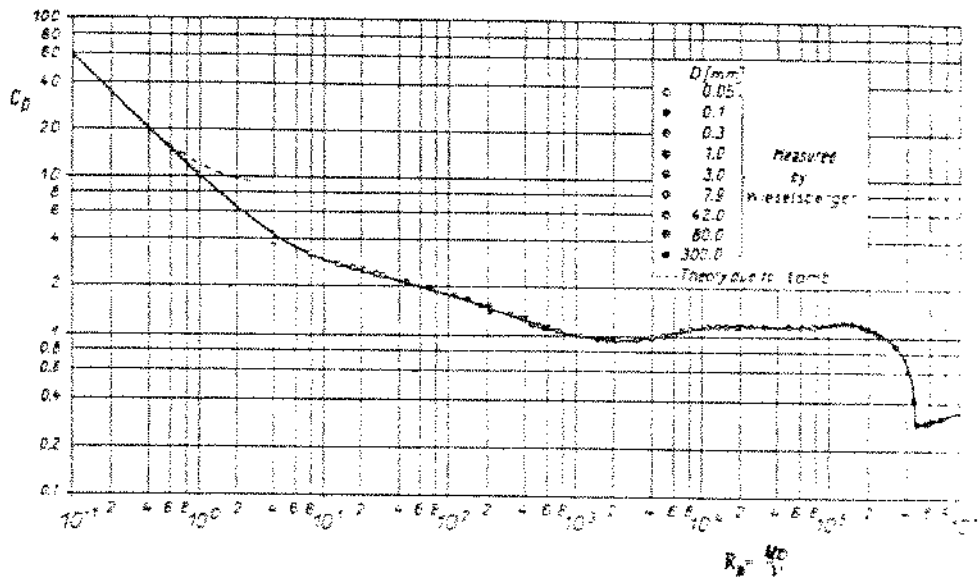


Figura 2.4: Comportamento do coeficiente de arraste com a variação de Re .

Dentre outros trabalhos sobre o comportamento da camada limite em torno de cilindros circulares como função da faixa do número de Reynolds pode-se ainda citar os de A. Thom [35], A. Fage [80] e L. Schiller & W. Linke [36].

2.2.1.4 Outros resultados obtidos para o cilindro circular sujeito ao escoamento real

Uma comparação entre os resultados dos cálculos aproximados para um cilindro circular e a solução de Hiemenz foi dada por K. Polhausen [40] em seu artigo original. Utilizando a função de distribuição de pressão experimental de Hiemenz para o cilindro circular, Polhausen compa-

rou seus resultados, obtidos com auxílio de um método aproximado, com a solução obtida pelo próprio Hiemenz, o qual levou em conta apenas os três primeiros termos das séries de Blasius. A solução de Hiemenz, conforme comentado anteriormente, mostrou que a separação ocorre a um ângulo de 82° , ao passo que o valor aproximado de Polhausen foi de $81,5^\circ$, sugerindo que o método aproximado leva a valores de espessura da camada limite, próximo ao ponto de separação, consideravelmente maiores que os obtidos por Hiemenz. Por outro lado tais comparações não podem ter um caráter conclusivo, haja visto que uma série de Blasius contendo apenas três termos é em si inadequada para representar a solução nas proximidades da separação.

Dentre os autores que abordaram este problema figuram aqueles cujos resultados são relacionados na tabela 2.3.

η	Howarth (series)			Presente método (R-K & N-R)		
	f	f'	f''	f	f'	f''
0.00	0.00000	0.00000	0.33206	0.00000000	0.00000000	0.33205734
0.20	0.00664	0.06641	0.33199	0.00664101	0.06640779	0.33198385
0.40	0.02656	0.13277	0.33147	0.02655990	0.13276416	0.33146985
0.60	0.05974	0.19894	0.33008	0.05973467	0.19893726	0.33007914
0.80	0.10611	0.26471	0.32739	0.10610826	0.26470914	0.32738928
1.00	0.16557	0.32979	0.32301	0.16557177	0.32978004	0.32300713
1.20	0.23795	0.39378	0.31659	0.23794877	0.39377611	0.31658920
1.40	0.32298	0.45627	0.30787	0.32298164	0.45626177	0.30786540
1.60	0.42032	0.51676	0.29667	0.42032084	0.51675678	0.29666347
1.80	0.52952	0.57477	0.28293	0.52951812	0.57475814	0.28293103
2.00	0.65003	0.62977	0.26675	0.65002445	0.62976573	0.26675156
2.20	0.78120	0.68132	0.24835	0.78119342	0.68131037	0.24835093
2.40	0.92230	0.72896	0.22809	0.92229022	0.72898192	0.22809178
2.60	1.07252	0.77246	0.20646	1.07250607	0.77245501	0.20645464
2.80	1.23099	0.81152	0.18401	1.23097740	0.81150960	0.18400661
3.00	1.39682	0.84605	0.16136	1.39680833	0.84604442	0.16136034
3.20	1.56911	0.87609	0.13913	1.56909506	0.87608143	0.13912808
3.40	1.74696	0.90177	0.11788	1.74695020	0.90176119	0.11787627
3.60	1.92954	0.92333	0.09809	1.92952528	0.92332963	0.09808631
3.80	2.11605	0.94112	0.08013	2.11602993	0.94111796	0.08012596
4.00	2.30576	0.95552	0.06424	2.30574654	0.95551819	0.06423418
4.20	2.49806	0.96696	0.05052	2.49803979	0.96695703	0.05051981
4.40	2.69238	0.97587	0.03897	2.69236107	0.97587078	0.03897269
4.60	2.88826	0.98269	0.02948	2.88824813	0.98268345	0.02948386
4.80	3.08534	0.98779	0.02187	3.08532079	0.98778947	0.02187128
5.00	3.28329	0.99155	0.01591	3.28327361	0.99154185	0.01590690
5.20	3.48189	0.99425	0.01134	3.48186775	0.99424548	0.01134189
5.40	3.68094	0.99616	0.00793	3.68091920	0.99615526	0.00792776
5.60	3.88031	0.99748	0.00543	3.88029082	0.99747772	0.00543205
5.80	4.07990	0.99838	0.00365	4.07988208	0.99837546	0.00364850
6.00	4.27964	0.99898	0.00249	4.27962106	0.99897284	0.00240211
6.20	4.47945	0.99937	0.00155	4.47945743	0.99936252	0.00155023
6.40	4.67938	0.99961	0.00098	4.67935675	0.99961168	0.00098067
6.60	4.87931	0.99977	0.00061	4.87929594	0.99976785	0.00068089
6.80	5.07928	0.99987	0.00037	5.07925990	0.99986381	0.00038960
7.00	5.27926	0.99992	0.00022	5.27923894	0.99992160	0.00022019
7.20	5.47925	0.99996	0.00013	5.47922697	0.99995571	0.00012859
7.40	5.67924	0.99998	0.00007	5.67922027	0.99997545	0.00007361
7.60	5.87924	0.99999	0.00004	5.87921659	0.99998665	0.00004130
7.80	6.07923	1.00000	0.00002	6.07921461	0.99999288	0.00002271
8.00	6.27923	1.00000	0.00001	6.27921356	0.99999627	0.00001224
8.20	6.47923	1.00000	0.00001	6.47921301	0.99999809	0.00000647
8.40	6.67923	1.00000	0.00000	6.67921273	0.99999904	0.00000335
8.60	6.87923	1.00000	0.00000	6.87921260	0.99999952	0.00000170
8.80	7.07923	1.00000	0.00000	7.07921253	0.99999977	0.00000085
9.00	-	-	-	7.27921250	0.99999989	0.00000041
9.20	-	-	-	7.47921248	0.99999995	0.00000020
9.40	-	-	-	7.67921247	0.99999998	0.00000009
9.60	-	-	-	7.87921247	0.99999999	0.00000004
9.80	-	-	-	8.07921247	1.00000000	0.00000002
10.00	-	-	-	8.27921247	1.00000000	0.00000001
10.20	-	-	-	8.47921247	1.00000000	0.00000000
10.40	-	-	-	8.67921247	1.00000000	0.00000000

Tabela 2.1: Comparação entre soluções para o problema de Blasius.

Autor	Método	α_s
Pohlhausen [40] (1921)	integral	109.5°
Ulrich [63] (1943)	séries até x^9	110.0°
Tifford [69] (1954)	séries até x^{11}	108.8°
Terrill [7] (1960)	séries	104.449232°
Schönauer [24] (1964)	diferenças finitas - implícito	104.4731°
Abbott & Bethel [64] (1968)	resíduos ponderados	104.5°

Tabela 2.2: Valores obtidos por diversos pesquisadores para o ponto de separação do problema do cilindro circular sujeito a um escoamento potencial.

Autor	Método	α_s
Hiemenz [34] (1911)	observação experimental	80,5°
Hiemenz [34] (1911)	séries até x^3	82°
Pohlhausen [40] (1921)	integral	81,5°
Thwaites [65](1949)	integral	78,5°
Howarth-Tifford [31]-[69] (1935-1954)	séries até x^{18}	83°
Smith & Clutter [3] (1963)	diferenças finitas - implícito	80,0°
Jaffe & Smith [47] (1972)	diferenças finitas - implícito	80,0°

Tabela 2.3: Valores obtidos por diversos pesquisadores para o ponto de separação do problema do cilindro circular sujeito a um escoamento real.

2.3 A camada limite para o escoamento potencial linearmente retardado (Problema de Howarth)

Uma maior família de soluções das equações da camada limite foi encontrada por L. Howarth [32] e I. Tani [37]. Estas soluções se referem ao escoamento potencial, sobre uma placa plana, dado por

$$\bar{U}(\bar{x}) = b_0 - b_1 \bar{x}^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.21)$$

o qual constitui uma forma generalizada do escoamento ao longo de uma placa plana sem gradiente de pressão (problema de Blasius), sendo idêntico quando $b_1 = 0$. No caso mais simples, com $n = 1$, conforme foi tratado por Howarth, o escoamento pode ser interpretado como aquele que ocorre em um canal que consiste de uma porção com paredes paralelas (velocidade b_0) seguido por uma seção convergente ($b_1 < 0$) ou divergente² ($b_1 > 0$). Este problema de Howarth é o segundo caso de camada limite não similar investigado pelos esquemas numéricos utilizados no presente trabalho.

Howarth introduziu uma nova variável independente

$$\eta = \frac{1}{2} \bar{y} \sqrt{\frac{b_0}{\nu \bar{x}}}. \quad (2.22)$$

que difere da de Blasius (eq. 2.1) apenas pelo fator $\frac{1}{2}$, assumindo ainda

$$x^* = \frac{b_1 \bar{x}}{b_0} \quad (2.23)$$

onde $x^* < 0$ para escoamento acelerado e $x^* > 0$ para escoamento retardado. Desta forma torna-se possível estipular uma série de potências em x^* para a função corrente, de maneira análoga ao caso do cilindro, sendo os coeficientes funções de \bar{y} :

²Quando a equação (2.21) é escrita na forma $\bar{U}(\bar{x}) = b_0(1 - \bar{x}/L)$ para $n = 1$, ela pode ser interpretada como representando o escoamento potencial ao longo de uma parede plana que começa em $\bar{x} = 0$ e termina em outra parede infinita a 90° quando $\bar{x} = L$ (ponto de estagnação).

$$\psi = \sqrt{b_0 x \nu} \cdot [f_0(\eta) - 8x^* f_1(\eta) + (8x^*)^2 f_2(\eta) - (8x^*)^3 f_3(\eta) + (8x^*)^4 f_4(\eta) - \dots] \quad (2.24)$$

Substituindo a função corrente nas equações da camada limite, as funções f_i separam-se sucessivamente em equações diferenciais ordinárias de terceira ordem, das quais os três primeiros termos são

$$f_0''' + f_0 f_0'' = 0 \quad (2.25)$$

$$f_1''' + f_0 f_1'' - 2f_0' f_1' + 3f_0'' f_1 = -1 \quad (2.26)$$

$$f_2''' + f_0 f_2'' - 4f_0' f_2' + 5f_0'' f_2 = -\frac{1}{8} + 2f_1'^2 - 3f_1 f_1'' \quad (2.27)$$

com condições de contorno

$$\eta = 0 \quad : \quad f_0 = f_0' = 0 \quad : \quad f_1 = f_1' = 0 \quad : \quad f_2 = f_2' = 0 \quad (2.28)$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad : \quad f_0' \rightarrow 2 \quad : \quad f_1' \rightarrow \frac{1}{4} \quad : \quad f_2' \rightarrow 0 \quad (2.29)$$

Nota-se que a equação para f_0 é idêntica à de Blasius para a placa plana sem gradiente de pressão, de solução conhecida. Esta é a única equação não-linear: as restantes são lineares em f_i , com coeficientes variáveis que dependem dos f_i anteriores.

Howarth resolveu as sete primeiras equações diferenciais (até f_6) e tabulou seus resultados. As séries convergem bem para $|x^*| \leq 0,1$ tornando-se inacuradas para outros valores.

Para o escoamento retardado ($x^* > 0$), conforme abordado por Howarth utilizando uma série de potências truncada após o termo x^6 , nota-se que a convergência se dá com muita lentidão nas vizinhanças de $8x^* = 1$. Segundo Howarth, pelo menos mais oito termos seriam necessários para determinar o ponto de separação (x_s^*) com precisão de tres casas decimais. Para evitar todo este cálculo Howarth optou pelo emprego de uma técnica de extrapolação que indicou estar o ponto de separação situado em torno de $x^* = 0,120$.

2.3.1 Outros resultados obtidos para o problema de Howarth

O método empregado por L. Howarth foi estendido por I. Tani [37] incluindo os casos em que $n \geq 1$ com $b_0 > 0$. No entanto, Tani não publicou quaisquer tabelas de coeficientes funcionais, limitando-se a fornecer os resultados finais para $n = 2, 4$ e 8 . No seu caso, também, a pobre convergência das séries não lhe permitiu determinar o ponto de separação com acuidade suficiente, sendo ele compelido a usar o esquema de continuação numérico de Howarth.

D. R. Hartree [43] repetiu estes cálculos pelo emprego de um esquema explícito em diferenças finitas obtendo valores bem próximos aos de Howarth.

O problema de Howarth para o caso de $\frac{b_0}{b_1} = 0,125$ (mesmo caso aplicativo investigado a posteriori) foi calculado com maior acuidade por D. C. F. Leigh [39] que deu especial atenção à região de separação, atingindo $x_*^* = 0,1198$ também com auxílio de um esquema explícito.

Diversos outros pesquisadores abordaram este caso particular utilizando os mais variados métodos e sugerindo novos valores para o provável ponto de separação, conforme mostra a tabela 2.4 (extraída de [2]).

Método e autor	τ_1^*	Erro %
1 Expansão em séries:		
Howarth [32] (1938)	0,125	+4,28
Görtler [61] (1957)	0,120	+0,11
Meksyn [62] (1961)	0,1229	+2,57
2 Diferenças finitas - explícito:		
Hartree [43] (1939)	0,1199	+0,01
Leigh [39] (1955)	0,1198	-0,05
Smith & Clutter [3] (1963)	0,1200	+0,11
3 Diferenças finitas - implícito:		
Schönauer [24] (1964)	0,12033	+0,39
Fussel & Helluns [49] (1965)	0,1210	+0,95
Wippermann [50] (1966)	0,119863	0,0
4 Resíduos ponderados:		
Loitsianskii [51] (1949)	0,1258	+4,97
van Ingen [52] (1965)	0,1210	+0,95
Bethel [53] (1968)	0,1204	+0,41
5 Similaridade por partes:		
Smith [54] (1956)	0,1053	-12,15
6 Integral de um parâmetro:		
Polhausen [40] (1921)	0,1545	+28,90
Timman [55] (1949)	0,1203	+0,36
Thwaites [65] (1949)	0,1158	-3,39
Truckenbrodt [56] (1952)	0,1036	-13,58
Tani [57] (1954)	0,1176	-1,90
Curle & Scan [58] (1957)	0,1231	+2,74
7 Integral de dois parâmetros:		
Head [59] (1957)	0,1202	+0,30
Geropp [60] (1963)	0,1195	-0,31

Tabela 2.4: Valores obtidos por diversos pesquisadores para o ponto de separação do problema de Howarth (escoamento linearmente retardado onde $U(\bar{x}) = 1 - 0,125\bar{x}$).

2.4 Métodos numéricos para a camada limite

2.4.1 Apresentação

Como os esquemas de séries se limitam à computação manual, exigindo doses substanciais de trabalho, eles se adequam apenas a usos ocasionais. Desta forma, e face aos recursos de informática disponíveis atualmente, os métodos numéricos vêm ganhando terreno no tratamento de problemas que requerem grande quantidade de operações.

Os métodos numéricos utilizados na literatura corrente para os problemas de camada limite podem, de uma forma geral, ser classificados como *métodos integrais*, *métodos de diferenças finitas* ou *métodos de elementos finitos*.

Os métodos integrais podem ser aplicados a uma ampla faixa de problemas de escoamentos laminares e turbulentos. Na verdade, qualquer problema que pode ser resolvido por diferenças finitas pode também ser resolvido por um método integral. Até a década de 60 os métodos integrais eram os mais avançados para a resolução de problemas complexos em mecânica dos fluidos e transferência do calor. O método integral transforma as equações diferenciais parciais em uma ou mais equações diferenciais ordinárias, por integração, através da eliminação de uma das variáveis independentes (usualmente a coordenada normal) com base em hipóteses firmadas sobre a forma geral dos perfis de velocidade como função de um determinado número de parâmetros. Muitos destes procedimentos podem ser agrupados como métodos de resíduos ponderados, cujas soluções se aproximam das soluções exatas a medida que o número de parâmetros se torna muito alto (conforme abordado por Shih & Huang [9]).

As versões modernas dos métodos integrais para problemas complexos fazem uso de computadores digitais. Na prática, a implementação de métodos integrais não é tão direta como para os métodos de diferenças finitas, requerendo maior intuição acerca do problema. Além disso, os métodos integrais não são tão flexíveis ou gerais como os métodos de diferenças finitas, no que maiores mudanças são geralmente requeridas no programa quando da alteração das condições de contorno ou de qualquer outra condição do problema. Mais recentemente a preferência da comunidade científica tem se deslocado em favor da utilização dos métodos de diferenças finitas, sem relegar, no entanto, a utilidade dos métodos integrais na solução de importantes problemas da área.

A aplicação da metodologia de elementos finitos às equações da camada limite tem sido observada apenas recentemente. Comentários sobre seu emprego em camada limite são apre-

sentados por Chung [82].

O objetivo de todos os três métodos é tornar algebricamente representáveis as equações diferenciais que regem o problema. Os métodos diferem nos procedimentos usados na implementação desta discretização.

A tendência natural de se aproveitar os aspectos mais fortes de cada método sugere para o futuro o desenvolvimento de esquemas computacionais híbridos. De maneira geral, independente da opção de método a ser utilizado, torna-se imprescindível um tratamento adequado ao problema em aplicação visando afastar os casos de instabilidade, inacuidade e divergência rotineiros nos tratamentos numéricos.

2.4.2 Diferenças finitas para a camada limite

É escopo do presente trabalho fornecer informações sobre alguns esquemas em diferenças finitas, de forma a se ter subsídios básicos para sua adequada aplicação a problemas parabólicos ainda sem solução, ou mesmo com solução duvidosa. Para um maior aprofundamento nas técnicas de diferenças finitas é recomendada a leitura dos artigos [3], [4], [8], [10], [12], [13] e [11] dentre outros, além de compêndios consagrados como [2], [20], [16] e [1].

O tratamento numérico dos problemas de camada limite através do emprego das técnicas de diferenças finitas pode ser abordado de forma bastante diversificada no tocante a três aspectos básicos de maior relevância:

- A transformação das variáveis
- O esquema discretizante
- O método de resolução

2.4.2.1 Transformação de variáveis

A forma preferida para as equações da camada limite varia de problema para problema. No caso de escoamentos laminares, as *transformações de variáveis* são usuais quando se visa, por exemplo, a manutenção de um número constante de pontos na direção normal ao longo do escoamento (conforme tratado em [8]). A equação da energia é usualmente escrita de maneira

diferente para escoamentos compressíveis daquela escrita para incompressíveis. Na prática é frequentemente necessário estender ou alterar um esquema de diferenças finitas estabelecido para uma equação diferencial parcial, de forma a acomodar uma outra similar mas diferente em algum detalhe. Otimizar a representação sempre constitui um processo de tentativa e erro.

O emprego de técnicas de transformação de variáveis permite a abordagem do problema de uma forma mais generalizada, podendo as variáveis transformadas ser do tipo de similaridade ou não. Vários pesquisadores propuseram transformações de variáveis para a resolução de problemas de camada limite podendo ser citadas, dentre as mais difundidas, as de Blasius [26], Falkner-Skan [42], von Mises [81], Crocco [44], Mangler [45], Howarth-Dorodnitsyn [32]-[46] e Levy-Lees (este último é referenciado em [5]). Como vantagens da utilização desta técnica a literatura costuma citar:

1. a eliminação da necessidade de crescimento do domínio de cálculo associado ao aumento da espessura da camada limite;
2. a obtenção de perfis de velocidade suavizados, variando lentamente no plano transformado, permitindo o uso de malhas mais grosseiras sem detrimento da acuidade;
3. a formulação das diferenças finitas torna-se virtualmente idêntica para escoamentos planos e axi-simétricos compressíveis e incompressíveis;
4. em se empregando passo variável na direção normal, é possível calcular tanto escoamentos turbulentos como laminares com apenas pequenas modificações na formulação.

A aplicação desta técnica é ainda útil na obtenção de equações linearizadas, o que contribui para a redução do processo iterativo envolvido na resolução dos sistemas de equações resultantes. Dependendo da transformação que se aplique pode-se ainda evitar o tratamento das descontinuidades de um problema. Esta técnica quando aplicada, por exemplo, a problemas não similares permite a fusão das variáveis dependentes (u e r) simplificando a equação diferencial resultante, o que pode vir a permitir o acoplamento das equações de governo, acelerando a convergência do processo numérico (como sugerido em alguns esquemas estudados por Blottner [12]).

Uma consulta à literatura disponível revela diversas formas de linearização, através de extrapolações, utilizadas na busca da aceleração da convergência. Aqui, no entanto, como não é

objetivada tal aceleração, e sim a exploração outros aspectos mais importantes para o desenvolvimento das discretizações, a linearização consiste simplesmente na convivência com uma defasagem de uma iteração entre as incógnitas. Assim, os **valores** aparentemente **incógnitos**, que surgem nos coeficientes, são na verdade aqueles já obtidos na iteração anterior, e são **escritos em negrito** ($u_{i+1,j}$) para que se distingam dos incógnitos. Este tratamento, apesar de exigir maior esforço computacional, é bastante consistente, visto que tal defasagem tende a zerar na convergência.

A abordagem de técnicas mais sofisticadas de linearização (como aquela obtida pelo emprego do método de Newton delineada em [20]), fica como proposta para trabalhos futuros, lembrando, no entanto, que algumas técnicas de linearização acabam por causar uma redução na acuidade, fruto das aproximações necessárias para tal. No apêndice A uma proposta de linearização, com base no comportamento do processo iterativo, é detalhada com vistas a se experimentar futuramente no desenvolvimento dos ADF's em questão.

Maiores informações sobre a técnica de transformações de variáveis e suas aplicações são ainda proporcionadas pela leitura de diversos outros trabalhos, dentre os quais [8], [16] (cap. 9-i) e [20] (cap. 7), sendo que este último propõe ainda um sistema de coordenadas alternativo que pode simplificar o tratamento do fim da camada limite.

Apesar das vantagens associadas aos métodos de transformações de variáveis, no presente trabalho optou-se pela conservação das variáveis primitivas, modificadas apenas para fins de normalização e implicitação do número de Reynolds. Em outros termos, admite-se apenas transformações do tipo proporcional. Procura-se com isto permitir uma visualização mais imediata do processo físico do escoamento, tornando a utilização dos algoritmos acessível a um público mais amplo na área de engenharia, conforme sugerido pelo professor Figueiredo. Este procedimento ainda é vantajoso no que facilitá a adequação dos algoritmos a outros problemas de camada limite, a exemplo do problema do perfil em desenvolvimento na entrada de dutos abordado por Gupta & Garg [73].

O sistema de coordenadas empregado vale-se de coordenadas ortogonais onde, à cada ponto, a abscissa é tangente à superfície e a ordenada normal à ela. Nos casos de placa plana este sistema coincide com o cartesiano.

2.4.2.2 Esquemas discretizantes

Os *esquemas discretizantes* aplicáveis a problemas de camada limite são semelhantes aos aplicados a problemas de condução de calor em regime transiente visto serem ambas as equações parabólicas. Esta classe de equações diferenciais tanto pode ser tratada através de formulações **explícitas**, onde o valor da incógnita pode ser diretamente expresso em termos de valores anteriormente conhecidos, ou de formulações **implícitas** que requerem a resolução de um sistema de equações simultaneamente para a obtenção dos valores incógnitos (maiores detalhes são fornecidos em [22]). Para problemas de condução transiente a abordagem explícita típica emprega o procedimento de Binder-Schmidt [77]-[78], ao passo que a formulação implícita normalmente empregada é a de Crank & Nicholson [41]. As vantagens e desvantagens são bem conhecidas: os métodos explícitos envolvem uma aritmética bastante simples mas têm restrições quanto à estabilidade, quando os implícitos, apesar de envolverem uma aritmética mais complicada pelo fato de requererem solução por inversão de matrizes ou por técnicas de substituição sucessiva (conforme abordado em detalhes no desenvolvimento do trabalho) para os sistemas de equações supra. são, em compensação, geralmente mais estáveis.

Em se tratando de problemas de condução transiente, a aplicação de formulação explícita ou implícita é uma questão de opinião pessoal. Para os problemas de camada limite, no entanto, a superioridade dos métodos implícitos é amplamente reconhecida pelo fato do método explícito apresentar uma limitação para o passo na direção do escoamento (Δx) que é diretamente proporcional à velocidade do fluido. Como esta velocidade pode se tornar bastante pequena próximo à superfície, o tamanho do passo tem que ser muito pequeno. Desta forma o método implícito, sendo livre desta restrição, requer muito menos tempo computacional que o explícito para resolução de problemas de camada limite.

Vale salientar que, apesar do método implícito normalmente requerer inversão de matrizes, a simplicidade das matrizes manuseadas, tridiagonais para os esquemas aqui tratados, evita este procedimento, de maneira que um algoritmo TDMA pode ser utilizado para resolução dos sistemas de equações através da eliminação de Gauss.

Dos esquemas discretizantes implícitos de segunda ordem mais amplamente empregados nos trabalhos sobre camada limite, predominam as variações em torno do método de Crank & Nicholson [41], conforme se pode constatar pela leitura dos mesmos. Aqui também este esquema é investigado com duas diferentes discretizações para a continuidade, além de quatro

outros esquemas implícitos³ básicos de segunda ordem, procedendo-se ainda à avaliação de alguns esquemas híbridos derivados de combinações de natureza variada entre os esquemas básicos.

2.4.3 Métodos de resolução

Face à característica parabólica da equação do momentum na direção x , o problema pode ser resolvido através de processos de marcha nesta direção, uma vez que os perfis a jusante não exercem influência sobre os de montante. Desta forma para a solução do sistema de equações em cada coluna, são utilizados e comparados dois métodos de resolução, aqui denominados de **ponto-a-ponto** e **coluna-a-coluna**.

O método de resolução ponto-a-ponto consiste na obtenção sucessiva dos perfis de velocidade longitudinal $u(y)$ a partir dos valores conhecidos dos contornos e de valores estimados para o ponto imediatamente acima, haja visto serem todos os esquemas implícitos. A coluna é dada por terminada quando a diferença entre a velocidade local do escoamento externo $U(x)$ e a velocidade dentro da camada limite que acaba de ser calculada tende a um determinado grau de convergência previamente estipulado (no caso $\varepsilon = 10^{-7}$). Os valores das velocidades normais $v(y)$, utilizados no cálculo do $u(y)$ em questão, são também passo a passo calculados pela equação da continuidade discretizada.

No que diz respeito aos *métodos de resolução* comentados, pode ser ainda acrescentado que o acoplamento das equações de governo requer mais trabalho quando do tratamento matricial (resolução coluna-a-coluna), necessitando o emprego de um algoritmo de resolução do tipo “TDMA modificado”, (conforme denominado por Blottner [10]) para sua viabilização, inconveniente que o método de resolução ponto-a-ponto não apresenta. Assim, este último (método de resolução ponto-a-ponto) é aqui também convenientemente explorado na busca de uma convergência mais rápida do processo iterativo; fruto do forte acoplamento existente entre as equações de governo e que se manifesta pela fusão das mesmas.

³Apesar de não contemplados no presente escopo recomenda-se ainda a leitura das referências [1],[22] e [15] dentre outras para um maior aprofundamento nos esquemas explícitos.

2.4.4 Normalização das equações da camada limite

Conforme abordado no capítulo anterior, as equações da conservação da quantidade de movimento (momentum) e da conservação da massa (continuidade), quando sujeitas às aproximações da camada limite e observadas as hipóteses de escoamento bidimensional laminar em regime permanente de fluido incompressível com propriedades constantes, assumem as respectivas formas

momentum (1.7)

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{U} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}}$$

continuidade (1.8)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

com condições de contorno, no caso de superfície impermeável (sem injeção ou sucção):

. para $\bar{y} = 0$ (junto à parede) ;

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = 0 \text{ - não deslizamento (1.9)}$$

$$\bar{v}(\bar{x}, 0) = 0 \text{ - impermeabilidade (1.9)}$$

. e na corrente livre, quando $\bar{y} \rightarrow \infty$

$$\bar{u}(\bar{x}, \infty) = \bar{U}(\bar{x}) \text{ - escoamento local externo à camada limite (1.10)}$$

Vale salientar que, como o componente em \bar{y} da equação do momentum é desprezado, nenhuma condição pode ser especificada para a velocidade transversal \bar{v} na região do escoamento externo à camada limite.

Como as hipóteses assumidas para obtenção das equações da camada limite são satisfeitas com um maior grau de acuidade conforme aumenta o número de Reynolds, a teoria da camada limite pode ser caracterizada como um processo assintótico de integração das equações de Navier-Stokes a altos números de Reynolds⁴, o que sugere uma relação entre este número e as características da camada limite formada sobre o corpo em estudo. Note-se que para a obtenção das equações da camada limite foram utilizadas quantidades adimensionais, sendo as velocidades referidas à velocidade da corrente livre U_∞ e os comprimentos reduzidos pelo comprimento característico do corpo L .

De maneira análoga procede-se à normalização das equações da camada limite segundo a adimensionalização das variáveis

$$x = \frac{\bar{x}}{L}, \bar{y} = \frac{\bar{y}}{L}, u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, \bar{v} = \frac{\bar{v}}{U_\infty} \text{ e } U = \frac{\bar{U}}{U_\infty} \quad (2.30)$$

o que resulta em

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} = U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.32)$$

com condições de contorno

$$\bar{y} = 0 : u = \bar{v} = 0 \quad (2.33)$$

e

$$\bar{y} \rightarrow \infty : u \rightarrow U(x) \quad (2.34)$$

onde $Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$

⁴Até o limite de Reynolds crítico que, em situações especiais, chega no máximo a $2 \cdot 10^6$.

Desta forma, fica claro que a solução da camada limite depende do número de Reynolds dada a geometria do corpo e a velocidade do escoamento potencial. Pelo emprego de uma nova transformação é ainda possível eliminar este parâmetro, bastando, para isto, readimensionalizar as variáveis da direção normal na forma

$$y = \bar{y} \sqrt{Re} \quad (2.35)$$

e

$$v = \bar{v} \sqrt{Re} \quad (2.36)$$

para finalmente obter

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.38)$$

com condições de contorno

$$y = 0 : u = v = 0 \quad (2.39)$$

e

$$y \rightarrow \infty : u \rightarrow U(x) \quad (2.40)$$

As equações agora não mais contêm o número de Reynolds, de forma que as soluções do sistema também independem deste parâmetro. Uma variação no número de Reynolds provoca uma transformação afim da camada limite, durante a qual as variáveis da direção normal \bar{y} e \bar{v} são multiplicadas por \sqrt{Re} . Em outras palavras, para um dado corpo, os componentes de

velocidade adimensionais $\frac{\bar{u}}{U_\infty}$ e $\frac{\bar{v}}{U_\infty} \sqrt{Re}$ são funções das coordenadas adimensionais $\frac{\bar{x}}{L}$ e $\frac{\bar{y}}{L} \sqrt{Re}$; as funções, no entanto, não mais dependem do número de Reynolds.

A importância prática deste princípio de similaridade com respeito ao número de Reynolds reside no fato de que, para uma determinada geometria, basta resolver o problema da camada limite apenas uma vez, em termos destas variáveis, para que esta mesma solução se estenda a qualquer número de Reynolds, dentro das hipóteses de escoamento laminar e espessura delgada da camada limite.⁵

No caso de escoamentos sobre corpos que exibem separação, como o cilindro circular e o problema de Howarth tratados a posteriori, conclui-se que a posição do ponto de separação independe do número de Reynolds e que o ângulo formado entre o corpo e a linha de corrente que passa pelo ponto de separação, decresce na razão $\frac{1}{\sqrt{Re}}$ com o aumento do número de Reynolds.

2.4.5 Parâmetros surgidos das equações discretizadas

Nos casos de discretizações das equações da camada limite com variáveis primitivas normalizadas de acordo com o procedimento aqui utilizado, como poderá ser constatado a partir do primeiro esquema desenvolvido, as equações de diferenças são sempre redutíveis a funções de um único parâmetro

$$F_R = \frac{\Delta x}{\Delta y^2}, \quad (2.41)$$

além daqueles derivados das condições de contorno. Assim, a solução $u_{i+1,j}$ e as características de estabilidade dos algoritmos dependem intimamente deste parâmetro.

É interessante observar a correlação entre F_R e o parâmetro de similaridade η , para o caso similar de Blasius:

$$\eta = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \sqrt{Re_x} = \sqrt{\frac{\bar{y}^2 U}{\nu \bar{x}}} = \sqrt{\frac{\bar{y}^2}{x}} = \sqrt{\frac{j^2 y^2}{i \Delta x}} = \frac{j}{\sqrt{i}} \sqrt{\frac{\Delta x}{\Delta y^2}} = \frac{j}{\sqrt{i}} \sqrt{F_R} \quad (2.42)$$

Logo

$$F_R = \frac{j^2}{i \eta^2} \quad (2.43)$$

⁵ Camada delgada: $\frac{\delta}{x} \approx \frac{1}{Re} \ll 1$ e escoamento laminar: $Re < 2 \cdot 10^6$.

Como resultado da discretização destas equações, surge também um outro parâmetro junto aos termos que envolvem a componente normal de velocidade v . Este parâmetro

$$F_D = \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad (2.44)$$

está diretamente relacionado com a geometria da malha, em se fixando um determinado número de Reynolds.

2.5 Testes

Conforme já comentado, objetiva-se aqui o desenvolvimento de algoritmos de boa precisão aplicáveis a problemas não similares. Para isto os algoritmos são primeiramente aplicados ao problema (similar) de Blasius visto que, como sua solução já é conhecida, pode-se garantir a fidelidade dos resultados dos testes comparativos exigidos para os mesmos. Esta solução “exata” utilizada para avaliação dos ADF’s é a solução de similaridade, já derivada anteriormente, resolvida pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Uma vez consolidado o bom desempenho dos algoritmos de maior acuidade, são eles aplicados na solução de dois problemas não similares:

- o escoamento em torno de um corpo cilíndrico circular (imerso em escoamento potencial e sujeito à distribuição experimental de Hiemenz [34]);
- e o escoamento linearmente retardado sobre uma placa plana, classicamente conhecido como problema de Howarth [32].

Estes dois casos envolvem gradientes de pressão responsáveis pelo já comentado fenômeno da separação da camada limite.

2.5.1 Valores investigados no problema de Blasius

No caso do problema de Blasius, são avaliados os erros dos perfis de velocidade na direção principal $u(y)$ e do coeficiente de arrasto $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_x$ (tangente junto à parede) obtidos pelo algoritmo de diferenças finitas (ADF), com auxílio da solução “exata”.

2.5.1.1 Avaliação dos erros entre perfis

A comparação entre perfis de velocidade exige que após a convergência de cada coluna (x) do ADF seja obtido o perfil “exato” correspondente para a integração das diferenças entre perfis medida da forma

$$DIF = \sum_{j=1}^{NCL} |u_{\epsilon_{i,j}} - u_{i,j}| \quad (2.45)$$

onde $u_{i,j}$ = valor ADF da velocidade

$u_{\epsilon_{i,j}}$ = valor “exato” da velocidade

NCL = último ponto da camada limite

Estas diferenças vão sendo integradas até o final da placa (coluna $i = NI$), onde o erro porcentual absoluto entre perfis (EAP) é finalmente obtido pela relação

$$EAP[\%] = \frac{\sum_{i=1}^{NI} DIF}{NPCL} 100 \quad (2.46)$$

onde $NPCL$ é o número total de pontos dentro da camada limite, que também veio sendo armazenado.

2.5.1.2 Avaliação dos erros entre tangentes

O cálculo da tangente numérica, efetuado através de uma aproximação de terceira ordem (independentemente da ordem do erro predominante do algoritmo), é a seguir derivado para os problemas com gradiente de pressão, dos quais o problema de Blasius é um caso particular onde o termo de pressão vale zero.

Sugerindo um polinômio de ordem três para representar os perfis de velocidade $u(y)$ da forma

$$u(y) = ay^3 + by^2 + cy + u_0. \quad (2.47)$$

tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3ay^2 + 2by + c \quad (2.48)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6ay + 2b \quad (2.49)$$

A equação do momentum normalizada (2.37)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + U \frac{dU}{dx}$$

permite especificar o coeficiente b , como se segue: para $y = 0$: $u = v = 0$, então

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_w = -U \frac{dU}{dx} = 2b \quad (2.50)$$

ou ainda

$$b = -\frac{U}{2} \frac{dU}{dx} \quad (2.51)$$

As demais variáveis podem ser obtidas por ajuste aos valores nodais; usando

$$y = 0 : u_0 = 0 \quad (2.52)$$

$$y = \Delta y : u_1 = a\Delta y^3 + b\Delta y^2 + c\Delta y \quad (2.53)$$

$$y = 2\Delta y : u_2 = 8a\Delta y^3 + 4b\Delta y^2 + 2c\Delta y \quad (2.54)$$

e diminuindo a equação (2.54) da equação (2.53) multiplicada por dois. Assim

$$a = \frac{u_2 - 2u_1 - 2b\Delta y^2}{6 \cdot \Delta y^3} \quad (2.55)$$

De (2.47) surge

$$c = \frac{u_1 - a\Delta y^3 - b\Delta y^2}{\Delta y} \quad (2.56)$$

Assim, finalmente, obtém-se o valor numérico da tangente (T_n)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w = c = \frac{8u_1 - u_2}{6\Delta y} + \frac{\Delta y}{3} U \frac{dU}{dx} = T_n \quad (2.57)$$

Assim, para o problema de Blasius com o desprezo do termo de pressão, a expressão usada para fins comparativos se resume à forma

$$T_n = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w = \frac{8u_1 - u_2}{6\Delta y} \quad (2.58)$$

O valor "exato" da tangente (T_e), usado na comparação com a do ADF, é obtido a partir da equação (2.10)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = f'' U \sqrt{\frac{U}{\nu \bar{x}}} \quad (2.59)$$

que normalizada por

$$x = \frac{\bar{x}}{L}, y = \frac{\bar{y}}{L} \sqrt{Re} \text{ e } u = \frac{\bar{u}}{U}$$

fornece

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{U Re}{L} = f'' U \sqrt{\frac{U}{\nu x L}} = f'' \frac{U}{L \sqrt{x}} \sqrt{\frac{U L}{\nu}} \quad (2.60)$$

Como $Re = \frac{UL}{\nu}$, obtém-se o valor “exato” da tangente (T_e)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\nu} = \frac{f_v''}{\sqrt{x}} = T_e \quad (2.61)$$

onde f_v'' é constante para qualquer x , não necessitando ser obtido a cada coluna, conforme se observa no programa Total.for - apêndice D.

Dois tipos de erros porcentuais são avaliados para as tangentes do perfil $u(y)$ junto à superfície:

1. o erro absoluto médio dado por

$$EAT[\%] = \frac{\sum_{i=0}^{N_I} |T_n - T_e|}{\sum_{i=0}^{N_I} T_e} 100, \quad (2.62)$$

onde todos os desvios (positivos e negativos) em relação ao valor exato são contabilizados como “prejudiciais”;

2. e o erro integral dado por

$$EIT[\%] = \frac{\sum_{i=0}^{N_I} (T_n - T_e)}{\sum_{i=0}^{N_I} T_e} 100, \quad (2.63)$$

onde há uma compensação entre os desvios positivos e negativos.

O erro absoluto EAT é mais exigente, ao passo que o erro integral EIT tem significado físico como o erro incorrido no cálculo da força de arraste exercida sobre o corpo, e conseqüentemente interesse direto para a engenharia. Os valores destes dois erros podem coincidir no caso da curva T x x obtida numericamente não cruzar a curva exata, conforme ilustrado na figura 2.5 (a). Para os demais comportamentos possíveis, esquematizados na figura 2.5 (b) e (c), a compensação de erros positivos e negativos, torna os EIT inferiores aos EAT .

O comportamento oscilante da curva T x x é uma característica de alguns ADF's (figura 2.5 (c)). Para os casos que apresentam este fenômeno, a avaliação do erro integral, mesmo que baixo, perde o significado físico.

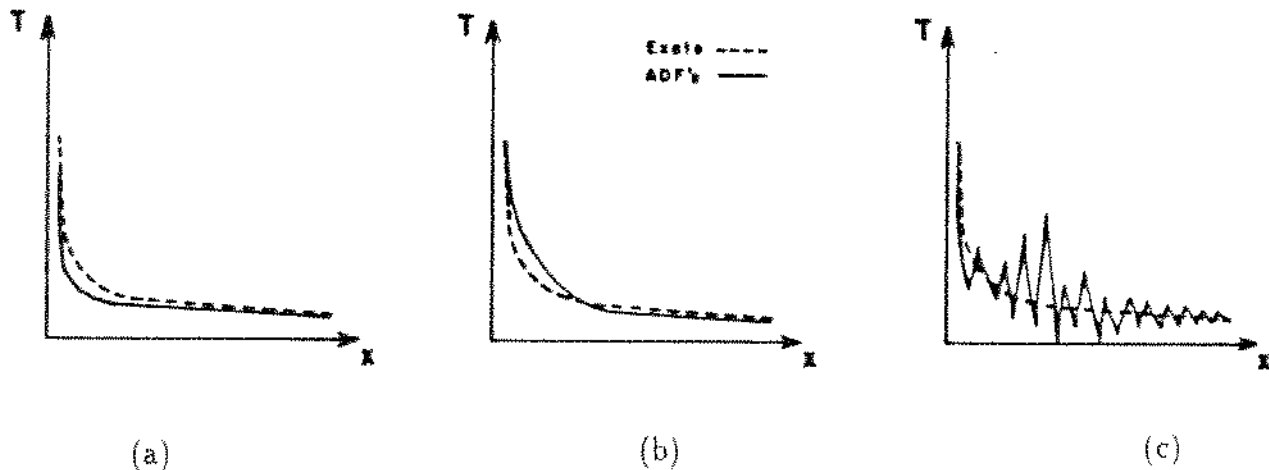


Figura 2.5: Comportamentos possíveis de T x x : (a) $EAT = EIT$; (b) $EAT \neq EIT$ sem oscilações; (c) $EAT \neq EIT$ com oscilações.

2.5.2 Valores investigados nos problemas não similares

Nos outros dois problemas de camada limite avaliados (cilindro circular e problema de Howarth), em se tratando de comparações entre resultados numéricos (já que os analíticos não são tão bons), não se dispõe de meios para a avaliação de erros com tanta eficiência (a menos que fossem desenvolvidos também os algoritmos comparativos, o que não é escopo do trabalho). Assim, para estes casos, são confrontados apenas alguns valores disponíveis de coeficiente de arrasto e espessuras de deslocamento e momentum, além, obviamente, dos valores dos pontos de separação.

2.5.3 Estabelecimento das condições para avaliação dos algoritmos

Para um melhor entendimento do desempenho dos ADF's e de seus campos ótimos de aplicação, é necessário o prévio estabelecimento das condições sob as quais os mesmos são avaliados. Para o presente trabalho tais condições se basearam na observação dos três aspectos comentados na seqüência:

- O comportamento dos erros com a variação do parâmetro F_R
- Estabilidade e oscilações
- O comportamento dos erros com o refino da malha

2.5.3.1 O comportamento dos erros com a variação do parâmetro F_R

Conforme observado heurísticamente, os erros dos valores investigados para o problema de Blasius (erros nos perfis $u(y)$ e na tangente $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_w$ junto à parede) variam com o parâmetro F_R , sugerindo pontos ou regiões de menor erro. Os valores constantes nos gráficos (capítulo 3) e tabelas (apêndice B) apresentados para o comportamento do erro com F_R foram obtidos para um passo $\Delta x = 0,01$.

2.5.3.2 Estabilidade e oscilações

A faixa de valores de F_R para a qual o ADF se apresenta estável é paralelamente investigada (também heurísticamente), bem como o valor limite deste mesmo parâmetro, acima do qual dá-se início a um comportamento oscilante da tangente junto à parede ao longo do comprimento do corpo. Este comportamento⁶, típico de alguns dos ADF's aqui investigados, mostra a inconveniência de se apoiar nos resultados dos erros integrais das tangentes, que, mesmo em presença de um comportamento altamente oscilante, apresentam-se bastante baixos, ao passo que os erros absolutos (EAT e EAP) tornam-se, neste caso, enormes.

2.5.3.3 O comportamento dos erros com o refino da malha

Face ao argumento recém exposto, o comportamento do erro integral da tangente (EIT) não é contemplado nesta avaliação. Desta forma, o comportamento dos demais erros (EAT e EAP) em função do refino da malha em x , é apresentado para cada um dos esquemas, em gráficos logarítmicos. Para cada ADF avaliado, duas curvas de refino são apresentadas; a primeira com F_P constante, onde o refino da malha é feito pela redução de ambos os passos (Δx e Δy) a metade, visa apenas identificar se o comportamento do esquema é de 1^a ou de 2^a ordem e a segunda com F_R constante, onde o refino da malha é feito pela redução apenas do passo Δx à

⁶No decorrer do desenvolvimento do trabalho, pode se ter uma idéia mais concreta deste comportamento através das ilustrações fornecidas.

metade. Neste último caso como $F_R = \frac{\Delta x}{\Delta y^2}$ é mantido no decorrer do refinamento, a divisão de Δx por 2 faz com que Δy decresça na razão de $\sqrt{2}$. Este fato faz com que este tipo de curva de refino se apresente com uma inclinação semelhante às dos esquemas de 1ª ordem com F_D constante. Na verdade a finalidade deste tipo de curva é mostrar real tendência do erro com o refino para o F_R ótimo do esquema, o qual deve ser usado nas aplicações práticas.

Como se terá oportunidade de constatar, as curvas de refino a F_R constante de alguns esquemas apresentam distorções. Este comportamento ocorre devido à variação de F_R ao longo do refino, o que, para os ADF's que apresentam uma faixa ótima de F_R muito estreita, significa que para as malhas mais finas acontece uma perda de precisão em decorrência do afastamento do ponto ótimo cujo refinamento não consegue sobrepujar. Por este motivo as curvas de refino a F_R constante devem ser usadas para orientar as aplicações dos ADF's.

Notas:

- 1) As curvas de F_D constante são levantadas para valores de F_R variando em torno do ponto de erro mínimo ao passo que as curvas de F_R constante são feitas para o valor ótimo de F_R (geralmente o valor para o qual EAT é mínimo).
- 2) Ambas as curvas são levantadas para o intervalo $\frac{1}{800} \leq \Delta x \leq \frac{1}{100}$.
- 3) O grau de convergência entre iterações $EPSIT$ (denominação usada no programa computacional) varia ao longo do refino segundo a proporção $EPSIT = 10^{-5} \Delta x$ de forma que haja uma compensação no acúmulo dos erros originados do próprio critério de convergência.

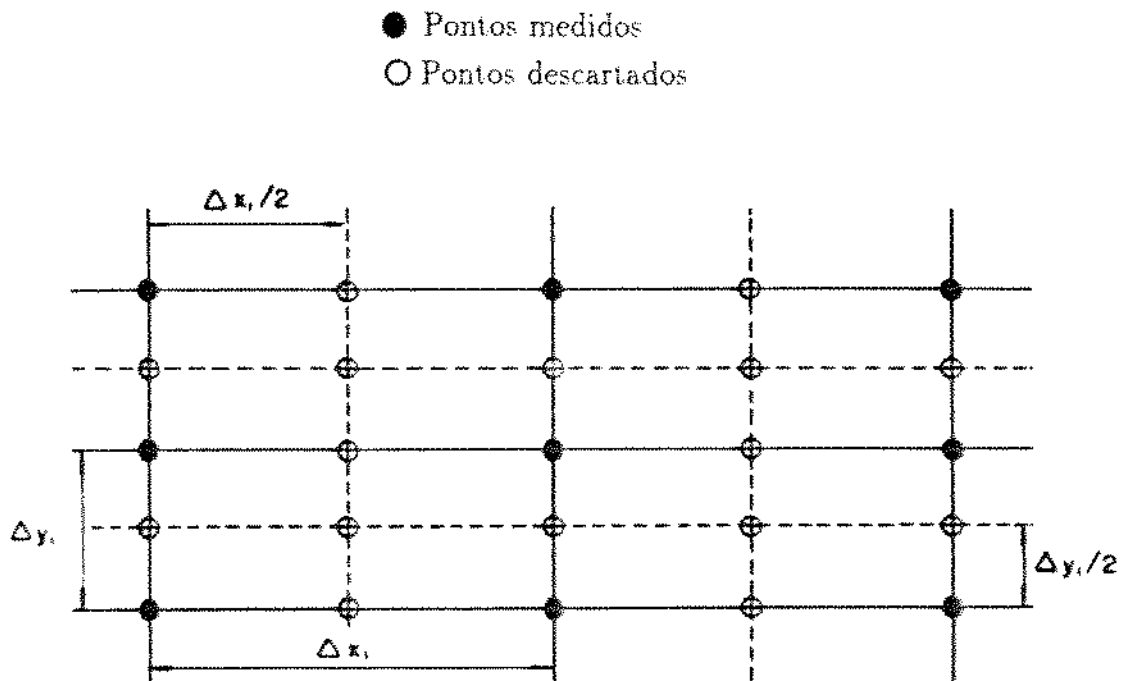


Figura 2.6: Esquema de medição dos erros nos pontos da malha inicial (Δx e $\Delta y \Rightarrow$ Passos da malha inicial).

4) O comportamento do erro com o refino para F_D constante, baseia-se na medição dos erros (sempre) dos mesmos pontos da malha inicial (mais grosseira), sendo os demais pontos descartados para este fim (ver figura 2.6). Por outro lado, o comportamento do erro com o refino para F_H constante, baseia-se na medição dos erros de todos os pontos de todas as malhas, uma vez que a variação da geometria da malha impossibilita o procedimento usado na obtenção da curva do erro com o refino para F_D constante.

5) Conforme já definido anteriormente, o final da camada limite é determinado para $u(y) = 0,9999999$.

Capítulo 3

Desenvolvimento de ADF's para a camada limite laminar

3.1 Apresentação

O aprimoramento de soluções numéricas para problemas de camada limite aqui objetivado, envolve a análise do desempenho de cinco esquemas discretizantes básicos em diferenças finitas. Algumas variações destes esquemas básicos são possibilitadas pelos programas elaborados em linguagem FORTRAN (apêndice D), permitindo avaliar o comportamento de esquemas híbridos de natureza variada, o que será elucidado ao longo do trabalho. A apresentação dos esquemas obedece a seqüência seguida durante seu desenvolvimento, estando contidos, ao final de cada um destes, os resultados e comentários que justificaram o seu aprimoramento (quando for o caso).

3.2 Características dos ADF's abordados

Além dos cinco esquemas básicos, outros três esquemas híbridos são também investigados. Por uma questão de facilidade visual em todos eles são ilustradas suas moléculas (espaço discretizado) e a seguir apresentadas as discretizações das equações do momentum e da continuidade em suas formas adimensionais.

3.2.1 Discretização do espaço

O plano x, y da camada limite é dividido com uma malha de dimensões Δx por Δy sendo utilizados os índices i e j para localização das colunas e linhas da malha, respectivamente, de forma que $x = i.\Delta x$ e $y = j.\Delta y$. Para compatibilidade com a característica implícita dos esquemas abordados, no desenvolvimento dos algoritmos as equações são avaliadas ao longo da coluna $i + 1$ sendo conhecidos os valores a montante ($\leq i$), conforme convenção usual na literatura.

Para apresentação dos esquemas utiliza-se a notação $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ e U_i , embora nenhum destes valores seja armazenado como matriz nos algoritmos, o que é comentado com mais pormenores no apêndice D.

3.2.2 Discretização das equações

As equações discretizadas são obtidas através de expansões em séries de Taylor, dos termos que constituem as equações de governo normalizadas. O desenvolvimento das discretizações utilizadas é apresentado no apêndice C.

3.2.2.1 Discretização do termo de pressão

Apesar do desenvolvimento dos algoritmos basear-se no problema de Blasius, onde não há variação na velocidade da corrente livre, os esquemas já contemplam a discretização do termo de pressão, uma vez que estes serão aplicados posteriormente a dois problemas que envolvem gradientes de pressão.

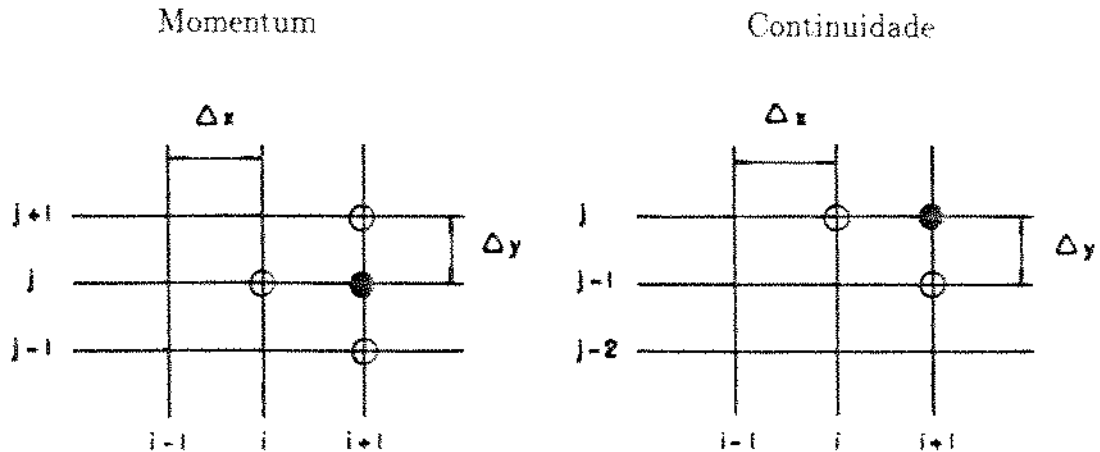
É indispensável comentar que, apesar de conhecido o valor analítico da pressão em cada ponto do escoamento externo ($U(x)$), faz-se necessária sua discretização, de forma a evitar o surgimento de resíduos causados pela inserção de um termo exato dentro de uma equação discreta. A utilização do valor exato só não resultaria em formação de resíduos no limite de refinamento da malha ($\Delta x \rightarrow 0$). A discretização do termo de pressão segue, desta forma, a mesma formulação empregada para o termo convectivo na direção principal do escoamento.

3.3 Esquema básico 1 (B1)

3.3.1 Desenvolvimento

O primeiro esquema básico estudado utiliza discretização a montante (primeira ordem) para as derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$, valendo-se de discretização central (segunda ordem) para as demais derivadas, $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, predominando, portanto, os erros de primeira ordem.

3.3.1.1 Discretização do espaço - Moléculas



Nota: O círculo cheio corresponde ao ponto nodal em torno do qual a discretização é aplicada e os vazios aos demais pontos envolvidos na discretização.

3.3.1.2 Discretização dos termos das equações

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+1, j} = \frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{\Delta x} + O[\Delta x] \quad (3.1)$$

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{i+1} = \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} + O[\Delta x] \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i+1, j} = \frac{v_{i+1, j} - v_{i+1, j-1}}{\Delta y} + O[\Delta y] \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} + \mathcal{O}[\Delta y^2] \quad (3.4)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i+1} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{\Delta y^2} + \mathcal{O}[\Delta y^2] \quad (3.5)$$

3.3.1.3 Discretização da equação do momentum normalizada

Desprezando os erros de truncamento pode-se escrever para a equação do momentum

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + v_{i+1,j} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} = \\ \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{\Delta y^2} + U_{i+1} \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} \end{aligned} \quad (3.6)$$

que desenvolvida fica na forma

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y} v_{i+1,j} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) = \\ \frac{\Delta x}{\Delta y^2} (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) + U_{i+1} (U_{i+1} - U_i) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Lançando mão dos parâmetros

$$F_D = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

e

$F_R = \frac{\Delta x}{\Delta y^2}$ definidos no capítulo anterior, obtém-se finalmente

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \frac{1}{2} F_D v_{i+1,j} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) = \\ F_R (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) + U_{i+1} (U_{i+1} - U_i) \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3.1.4 Discretização da equação da continuidade normalizada

Desprezando os erros de truncamento, de maneira análoga ao momentum, pode-se escrever para a continuidade

$$\frac{v_{i+1,j} - v_{i+1,j-1}}{\Delta y} = - \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad (3.9)$$

que com a aplicação do parâmetro F_D resulta finalmente em

$$v_{i+1,j} = v_{i+1,j-1} - \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{F_D} \quad (3.10)$$

Resolução coluna-a-coluna

Para aplicação do método de resolução coluna-a-coluna reescreve-se a equação (3.8)

$$\begin{aligned} u_{i+1,j-1} \left(-\frac{F_D}{2} v_{i+1,j} - F_R \right) + u_{i+1,j} (u_{i+1,j} + 2F_R) + \\ + u_{i+1,j+1} \left(\frac{F_D}{2} v_{i+1,j} - F_R \right) = u_{i,j} u_{i+1,j} + U_{i+1} (U_{i+1} - U_i) \end{aligned} \quad (3.11)$$

que de uma forma mais conveniente à aplicação do TDMA

$$A_j u_{i+1,j-1} + B_j u_{i+1,j} + C_j u_{i+1,j+1} = D_j \quad (3.12)$$

fornece os coeficientes

$$A_j = -\frac{F_D}{2} v_{i+1,j} - F_R$$

$$B_j = u_{i+1,j} + 2F_R$$

$$C_j = \frac{F_D}{2} v_{i+1,j} - F_R$$

$$D_j = u_{i,j} u_{i+1,j} + U_{i+1} (U_{i+1} - U_i)$$

Resolução ponto-a-ponto

Reescrevendo a equação (3.8) para aplicação do método de resolução ponto-a-ponto, surge

$$\begin{aligned}
 & u_{i+1,j} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \frac{1}{2} F_D v_{i+1,j} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) + \\
 & -F_R (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) - U_{i+1} (U_{i+1} - U_i) = 0
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde nota-se que, para a solução ponto-a-ponto, não há necessidade de se distinguir $u_{i+1,j}$ de $u_{i,j}$. Acoplando a continuidade (3.10) e desenvolvendo vem

$$\begin{aligned}
 & u_{i+1,j}^2 + u_{i+1,j} \left(2F_R - u_{i,j} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i+1,j+1}}{2} \right) - F_R (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1}) + \\
 & + \left(\frac{F_D v_{i+1,j-1} + u_{i,j}}{2} \right) (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) - U_{i+1} (U_{i+1} - U_i) = 0
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

E assim obtém-se uma equação algébrica de segundo grau

$$A u_{i+1,j}^2 + B u_{i+1,j} + C = 0 \tag{3.15}$$

da qual apenas a solução positiva fornece resultados fisicamente consistentes, ou seja,

$$u_{i+1,j} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{3.16}$$

cujos coeficientes valem

$$A = 1$$

$$B = 2F_R - u_{i,j} + \left(\frac{u_{i+1,j-1} - u_{i+1,j+1}}{2} \right)$$

$$C = -F_R (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1}) - U_{i+1} (U_{i+1} - U_i) \\ + \left(\frac{F_D v_{i+1,j-1} + u_{i,j}}{2} \right) \cdot (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1})$$

onde a única incógnita é $u_{i+1,j+1}$, que necessita de uma estimativa inicial (convenientemente o valor da velocidade na corrente livre), a qual vai sendo automaticamente corrigida no decorrer do processo iterativo até que a convergência seja atingida.

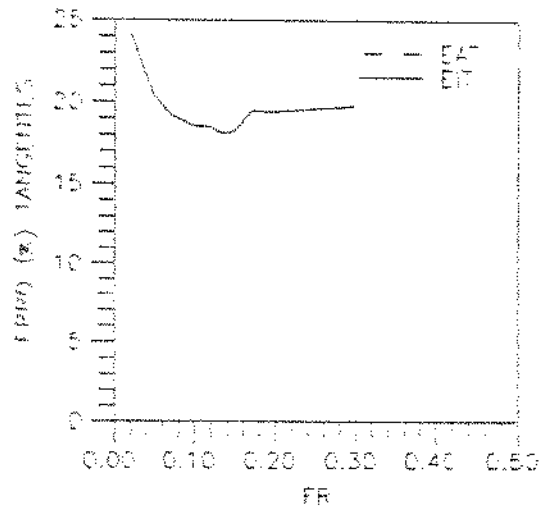
3.3.2 Resultados e comentários sobre o esquema B1

3.3.2.1 Estabilidade

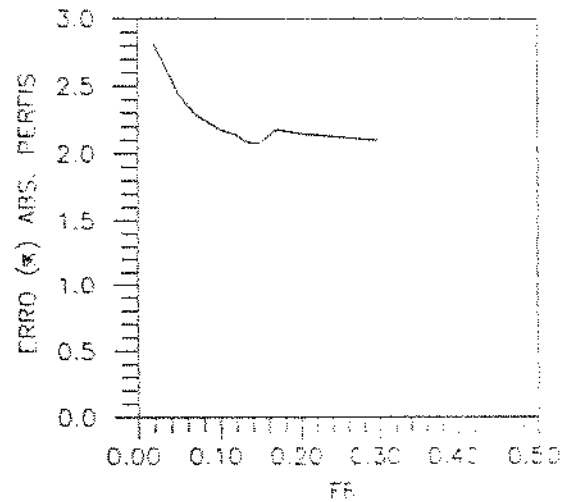
O esquema B1 mostrou-se estável através da utilização da resolução ponto-a-ponto, até $F_R = 0,32$, atingindo 0,48 pelo emprego do método coluna-a-coluna.

3.3.2.2 Faixa ótima de F_R

O comportamento dos erros porcentuais com F_R apresentado nas figuras 3.1-a e b (e tabela B.1 correspondente no apêndice B), sugere estar sua melhor faixa de utilização em torno de $F_R = 0,14$ tanto para os erros entre tangentes como para o erro entre perfis. Vale salientar que os erros *EIT* e *EAT* coincidem para qualquer valor de F_R .



(a)



(b)

Figura 3.1: Comportamento dos erros com F_R : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.

3.3.2.3 Oscilações

O esquema B1 não apresenta oscilações.

3.3.2.4 Comportamento dos erros com o refino da malha

O comportamento dos erros na tangente e perfis em função do refino da malha, conforme apresentado na figura 3.2-a para um valor de F_D constante e igual a 0,02236, é coerente com a ordem do esquema (1ª ordem).

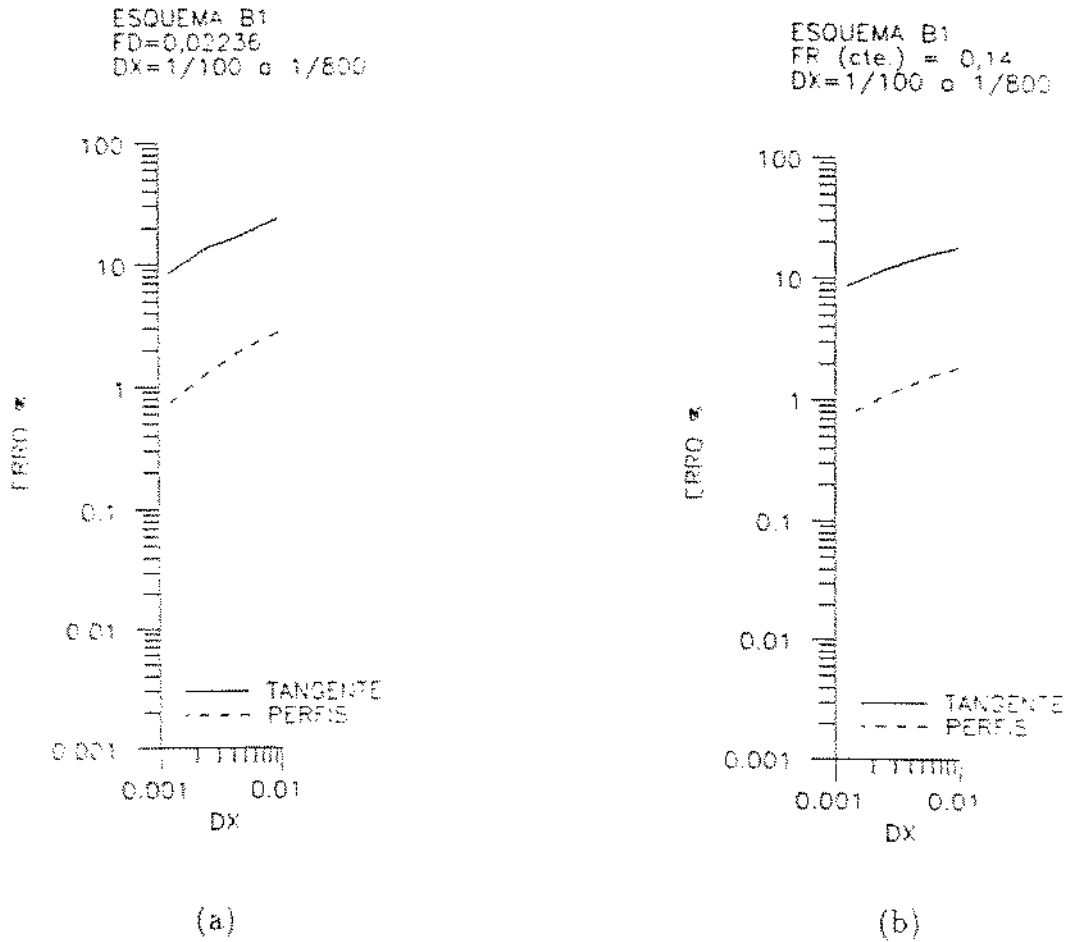
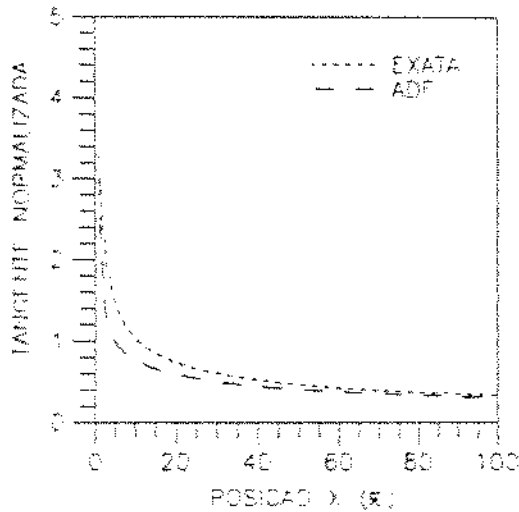


Figura 3.2: Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b): refino a F_R constante.

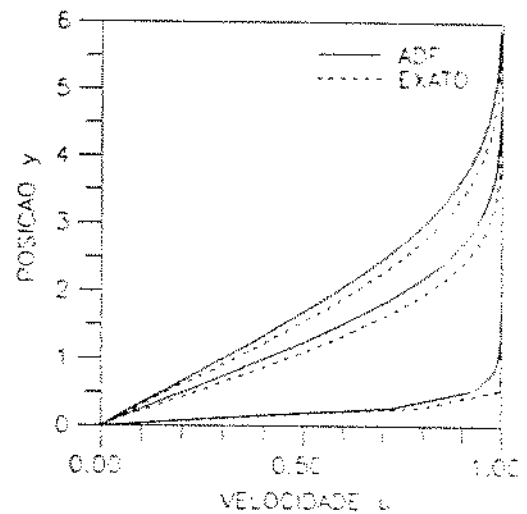
A figura 3.2-b mostra o comportamento do erro com o refino para um valor de F_R constante e igual a 0,14. Para a malha mais fina ($\Delta x = 0,00125$) os erros na tangente e nos perfis atingem valores em torno de 8,58% e 0,75%, respectivamente.

3.3.2.5 Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade

As figuras 3.3-a e 3.3-b fornecem comparações entre os resultados numérico e exato para a tangente junto à parede e para os perfis de velocidade a 1%, 50% e 100% do comprimento (x) da placa, respectivamente, para que se possa fazer um acompanhamento visual da evolução da acuidade destes perfis através do aperfeiçoamento dos ADF's. Estes gráficos foram obtidos para uma malha de passo $\Delta x = 0,01$ com $F_R = 0,14$.



(a)



(b)

Figura 3.3: Resultados obtidos: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_w\right)$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.

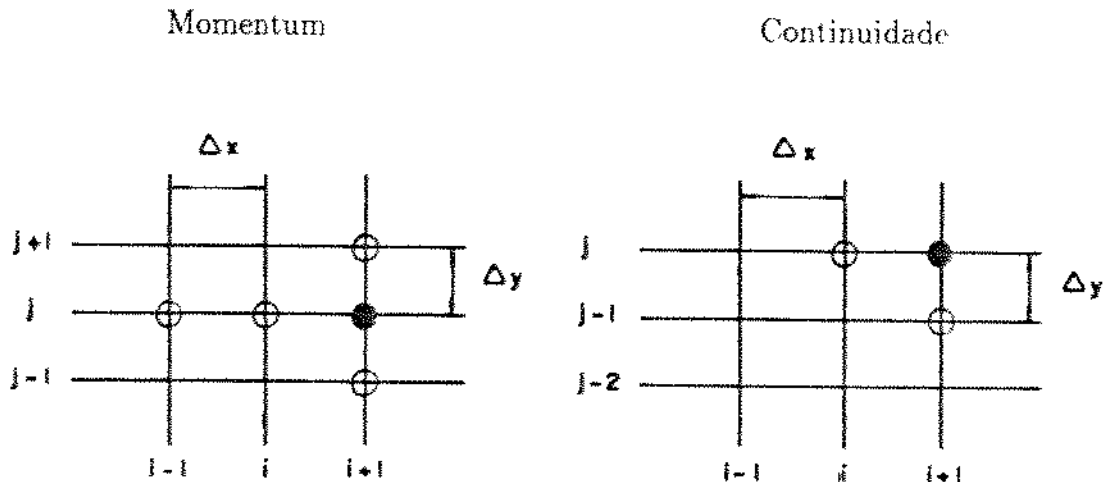
3.4 Esquema básico 2 (B2)

3.4.1 Desenvolvimento

O segundo esquema discretizante básico observa as moléculas propostas na referência [1], diferenciando do esquema B1 pela discretização do termo convectivo $\frac{\partial u}{\partial x}$ que, apenas para a equação do momentum, passa a ser feita em três níveis¹, da mesma forma que o termo do gradiente de pressão.

Neste esquema a discretização do termo $\frac{\partial u}{\partial x}$ assume formas distintas para as duas equações.

3.4.1.1 Discretização do espaço - Moléculas



3.4.1.2 Discretização dos termos das equações

Para o momentum tem-se uma nova discretização

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+1, j} = \frac{3u_{i+1, j} - 4u_{i, j} + u_{i-1, j}}{2\Delta x} + O[\Delta x^2] \quad (3.17)$$

e para a continuidade é mantida a discretização do esquema B1

¹O desenvolvimento deste tipo de discretização, bem como dos demais, são disponíveis no apêndice C.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \mathcal{O}[\Delta x]$$

O termo de pressão também se modifica

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{i+1} = \frac{3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}[\Delta x^2] \quad (3.18)$$

e os demais termos não se alteram

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i+1,j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i+1,j-1}}{\Delta y} + \mathcal{O}[\Delta y]$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i+1,j} = \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1}}{2\Delta y} + \mathcal{O}[\Delta y^2]$$

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{i+1,j} = \frac{v_{i+1,j+1} - 2v_{i+1,j} + v_{i+1,j-1}}{\Delta y^2} + \mathcal{O}[\Delta y^2]$$

3.4.1.3 Discretização da equação do momentum normalizada

Desprezando os erros de truncamento pode-se escrever para o momentum

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} \frac{3u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2\Delta x} + v_{i+1,j} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} &= \\ = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{\Delta y^2} + U_{i+1} \frac{3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (3.19)$$

que desenvolvida fica na forma

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} (3u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{\Delta x}{\Delta y} v_{i+1,j} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) &= \\ \frac{2\Delta x}{\Delta y^2} (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) + U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

E, novamente, fazendo $F_D = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ e $F_R = \frac{\Delta x}{\Delta y^2}$, tem-se finalmente

$$\begin{aligned} & u_{i+1,j} (3u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j}) + F_D v_{i+1,j} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) = \\ & 2F_R (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) + U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.4.1.4 Discretização da equação da continuidade normalizada

Como não houve alterações na discretização dos termos da continuidade a mesma equação (3.10) vale para $v_{i+1,j}$:

$$v_{i+1,j} = v_{i+1,j-1} - \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{F_D}$$

Resolução coluna-a-coluna

Desenvolvendo a equação (3.21) para aplicação do método de resolução coluna-a-coluna, vem

$$\begin{aligned} & u_{i+1,j-1} (-F_D v_{i+1,j} - 2F_R) + u_{i+1,j} (3u_{i+1,j} + 4F_R) + \\ & + u_{i+1,j+1} (F_D v_{i+1,j} - F_R) = \\ & u_{i+1,j} (4u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1}) + U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

que posta na forma

$$A_j u_{i+1,j-1} + B_j u_{i+1,j} + C_j u_{i+1,j+1} = D_j$$

fornece os coeficientes

$$A_j = -F_D v_{i+1,j} - 2F_R$$

$$B_j = 3 u_{i+1,j} + 4F_R$$

$$C_j = F_D v_{i+1,j} - 2F_R$$

$$D_j = u_{i+1,j} (4u_{i,j} - u_{i-1,j}) + U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1})$$

Resolução ponto-a-ponto

Desenvolvendo a equação (3.21) para aplicação do método de resolução ponto-a-ponto, vem

$$\begin{aligned} & u_{i+1,j} (3u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j}) + F_D v_{i+1,j} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) = \\ & 2F_R (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) + U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Acoplando a continuidade (3.10) obtém-se

$$\begin{aligned} & u_{i+1,j} (3u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \\ & + (F_D v_{i+1,j-1} - u_{i+1,j} + u_{i,j}) (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) + \\ & - 2F_R (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) + \\ & - U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

que desenvolvida fornece finalmente

$$\begin{aligned} & 3u_{i+1,j}^2 + u_{i+1,j} (-F_R - 4u_{i,j} + u_{i+1,j-1} - u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j}) + \\ & - 2F_R (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1}) + \\ & + (F_D v_{i+1,j-1} + u_{i,j}) (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) + \\ & - U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

É assim obtém-se a equação algébrica de segundo grau

$$A u_{i+1,j}^2 + B u_{i+1,j} + C = 0$$

da qual apenas a solução positiva fornece resultados fisicamente consistentes, ou seja,

$$u_{i+1,j} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.16)$$

onde os coeficientes valem

$$A = 3$$

$$B = 4F_R - 4u_{i,j} + u_{i+1,j-1} - u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j}$$

$$\begin{aligned} C = & -2F_R (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1}) + \\ & +(F_D v_{i+1,j-1} + u_{i-1,j}) (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) + \\ & -U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) \end{aligned}$$

3.4.2 Resultados e comentários sobre o esquema B2

3.4.2.1 Estabilidade

O esquema B2 apresenta estabilidade incondicional, independentemente do método de resolução aplicado.

3.4.2.2 Faixa ótima de F_R

Conforme ilustrado nas figuras 3.4-a e b (e tabela B.2 do apêndice B), a faixa ótima para utilização do esquema B2 na solução do problema de Blasius situa-se em torno de $F_R = 2,00$ para EIT , ao passo que para os demais erros (EAT e EAP), acontece uma estabilização em torno dos valores mínimos após um certo valor de F_R (por volta de $F_R = 5$). Cabe ressaltar, no entanto, que o ganho que pode ser obtido em termos de acuidade pelo uso de um F_R alto, dá-se em detrimento da velocidade de convergência, uma vez que, para um passo Δx constante, acontece uma redução em Δy conforme F_R aumenta. Por este motivo, um número cada vez maior de pontos surge dentro da camada limite, significando um aumento nos valores processados que não encontra uma compensação que o justifique na busca de uma melhoria significativa na acuidade deste ADF.

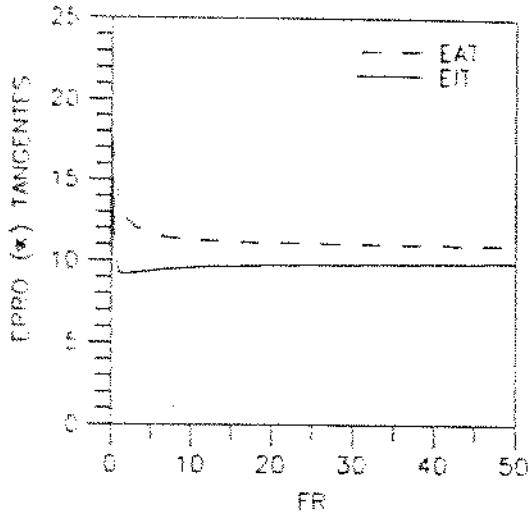
3.4.2.3 Oscilações

Este esquema também não apresenta oscilações.

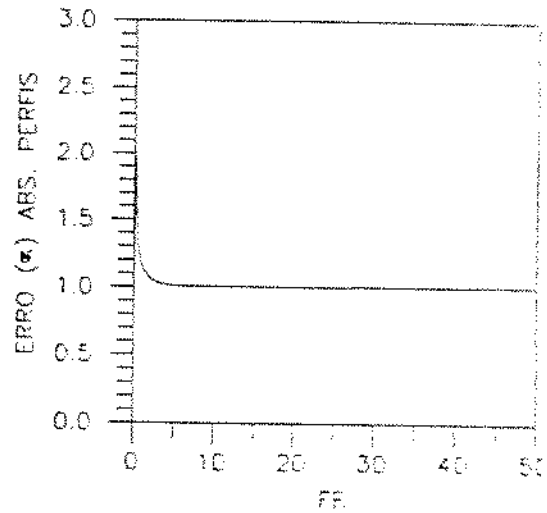
3.4.2.4 Comportamento dos erros com o refino da malha

O esquema B2 apresenta um comportamento típico de 1ª ordem. Entretanto, conforme mostra a figura 3.5-a, obtida pela aplicação deste esquema na solução do problema de Blasius com $F_D = 0.17321$, a discretização de 2ª ordem aplicada ao termo $\frac{\partial u}{\partial x}$ da equação do momentum resulta num salto de acuidade razoável. Como predominam os erros de 1ª ordem nas discretizações, o comportamento de 1ª ordem é mantido, conforme traduz a inclinação da curva de refino.

A figura 3.5-b mostra o comportamento do erro com o refino para um valor de F_R constante e igual a 2,00. Para a malha mais fina ($\Delta x = 0.00125$) os erros na tangente e nos perfis atingem valores em torno de 3,92% e 0,28%, respectivamente.



(a)



(b)

Figura 3.4: Comportamento dos erros com F_R : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.

3.4.2.5 Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade

Conforme ilustrado na figura 3.6-a, o uso do esquema B2 resulta num pequeno ganho de aproximação entre as curvas numérica e exata se examinado de uma forma integral. Em contrapartida, no início da placa acontece um desvio bastante acentuado em se comparando com os resultados do esquema B1 (figura 3.3-a). O comportamento dos perfis numéricos em relação aos exatos (figura 3.6-b) sustenta o comentário supra acerca da melhoria no aspecto geral. Estes resultados foram obtidos para u'a malha de passo $\Delta x = 0,01$ com $F_R = 2,00$.

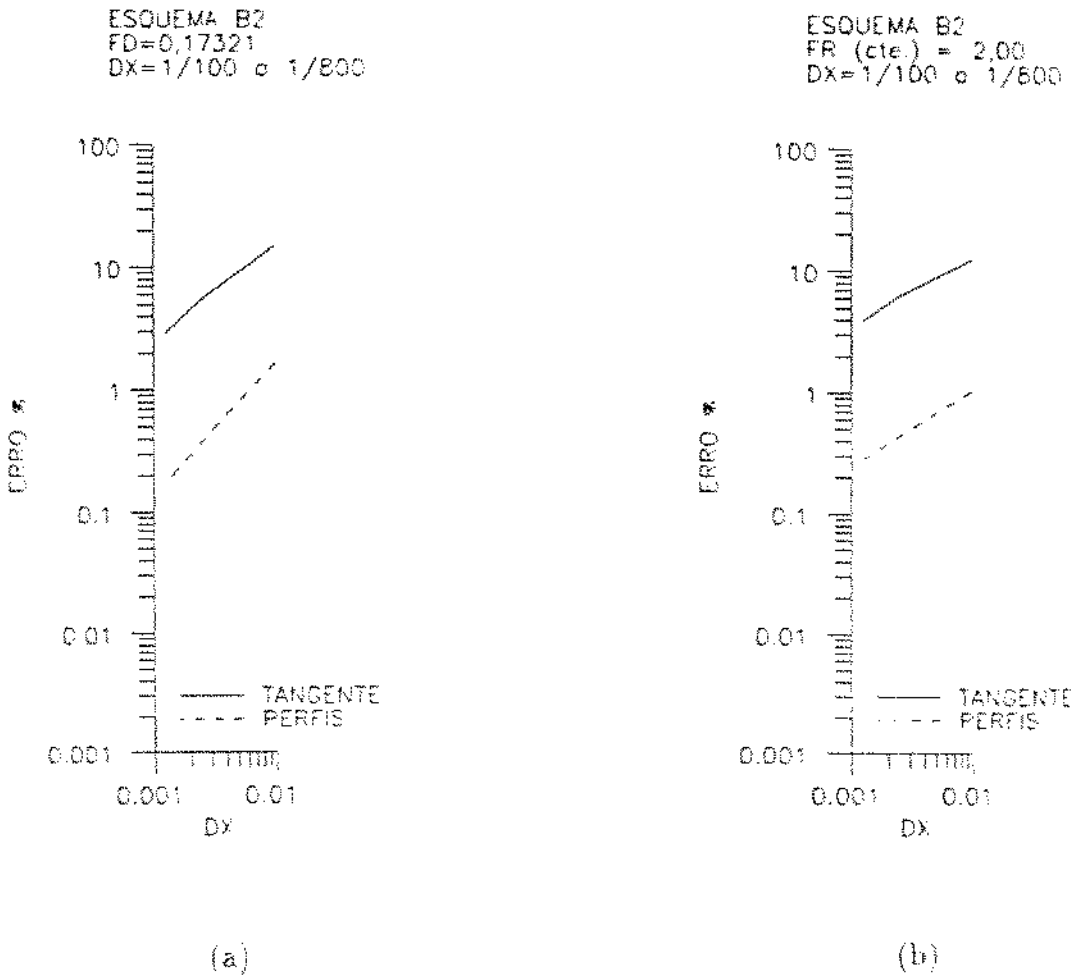
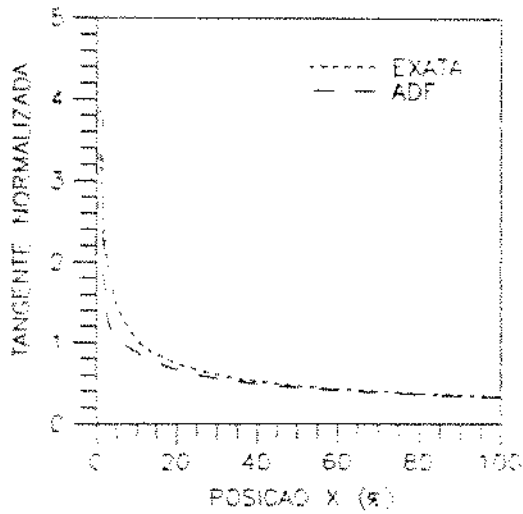
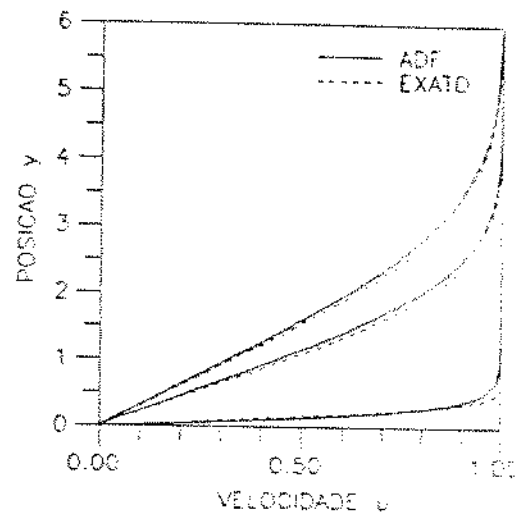


Figura 3.5: Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b) refino a F_R constante.



(a)



(b)

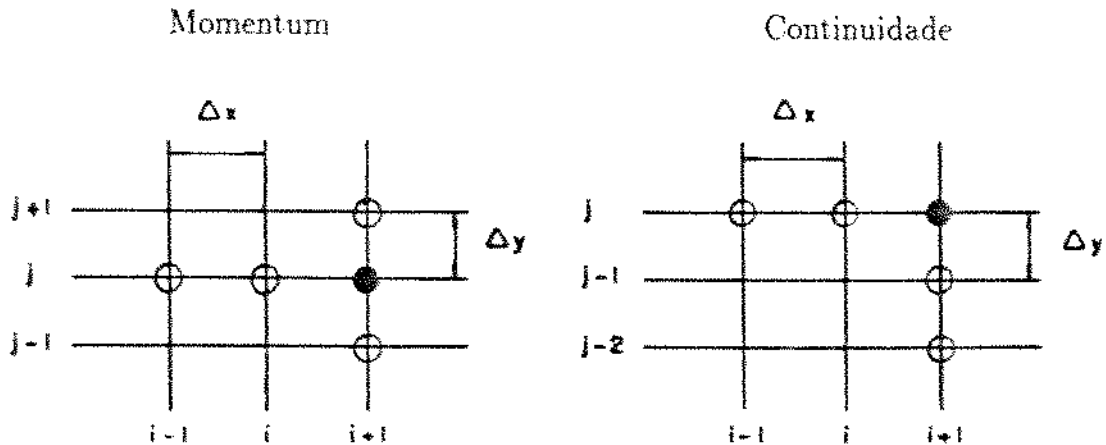
Figura 3.6: Resultados obtidos: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.

3.5 Esquema básico 3 (B3)

3.5.1 Desenvolvimento

O esquema básico 3 consiste numa evolução do esquema B2 no tocante à discretização da continuidade. Uma vez conseguida uma aproximação de segunda ordem para a equação do momentum, parte-se na busca de uma aproximação de mesma ordem também para a equação da continuidade. Desta forma apenas a equação (3.10) é alterada face à aplicação de uma nova molécula.

3.5.1.1 Discretização do espaço - Moléculas



3.5.1.2 Discretização dos termos das equações

Assim o termo $\frac{\partial v}{\partial x}$ passa a ser discretizado da forma

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{3v_{i+1,j} - 4v_{i,j} + v_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}[\Delta x^2]$$

agora também para a continuidade, sendo ainda, para $j > 1$ modificado o termo

$$\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i+1,j} = \frac{3v_{i+1,j} - 4v_{i+1,j-1} + v_{i+1,j-2}}{2\Delta y} + \mathcal{O}[\Delta y^2] \quad (3.26)$$

Os demais termos não se alteram

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} + \mathcal{O}[\Delta y^2]$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{\Delta y^2} + \mathcal{O}[\Delta y^2]$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{i+1} = \frac{3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}[\Delta x^2]$$

3.5.1.3 Discretização da equação do momentum normalizada

A discretização da equação do momentum é mantida

$$u_{i+1,j} (3u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j}) + F_D v_{i+1,j} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) = 2F_R (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) + U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1})$$

3.5.1.4 Discretização da equação da continuidade normalizada

Com as alterações na discretização dos termos da continuidade, tem-se agora

$$v_{i+1,j} = \frac{1}{3} \left[4 v_{i+1,j-1} - v_{i+1,j-2} + \frac{4u_{i,j} - 3u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{F_D} \right] \quad (3.27)$$

No entanto, como se pode observar na molécula, esta discretização só pode ser aplicada à valores de j maiores que 1, tornando-se necessária uma outra discretização do termo $\frac{\partial u}{\partial y}$ para o caso particular de $j = 1$, que é a mesma de primeira ordem (a montante) utilizada nos esquemas anteriores.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1}}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y)$$

Então, para o caso específico de $j = 1$, tem-se

$$v_{i+1,1} = v_{i+1,0} + \frac{4u_{i,1} - 3u_{i+1,1} - u_{i-1,1}}{2F_D} \quad (3.28)$$

mas como $v_{i+1,0} = 0$ (superfície impermeável)

$$v_{i+1,1} = \frac{4u_{i,1} - 3u_{i+1,1} - u_{i-1,1}}{2F_D} \quad (3.29)$$

Resolução coluna-a-coluna

Desenvolvendo a equação (3.21) para aplicação do método de resolução coluna-a-coluna, tem-se para coeficientes da equação (3.12), uma vez que o momentum não se altera, os mesmos coeficientes obtidos para o esquema anterior. Repetindo:

$$A_j = -F_D v_{i+1,j} - 2F_R$$

$$B_j = 3 u_{i+1,j} + 4F_R$$

$$C_j = F_D v_{i+1,j} - 2F_R$$

$$D_j = u_{i+1,j} (4u_{i,j} - u_{i-1,j}) + U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1})$$

onde apenas o valor de $v_{i+1,j}$ necessita ser alterado no algoritmo.

Resolução ponto-a-ponto

Desenvolvendo a equação (3.21) para aplicação do método de resolução ponto-a-ponto, vem

$$\begin{aligned} & u_{i+1,j} (3u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j}) + F_D v_{i+1,j} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) + \\ & -2F_R (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) - U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Acoplando a continuidade (3.29) obtém-se:

para $j = 1$

$$u_{i+1,1} (3u_{i+1,1} - 4u_{i,1} + u_{i-1,1}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4u_{i,1} - 3u_{i+1,1} - u_{i-1,1}}{2} (u_{i+1,2} - u_{i+1,0}) + \\
& - 2F_R (u_{i+1,2} - 2u_{i+1,1} + u_{i+1,0}) - U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) = 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

mas como $u_{i+1,0} = 0$, tem-se finalmente

$$\begin{aligned}
& 3u_{i+1,1}^2 + u_{i+1,1} \left(4F_R - 4u_{i,1} - \frac{3}{2} u_{i+1,2} + u_{i-1,1} \right) + \\
& + u_{i+1,2} \left(2u_{i,1} - \frac{1}{2} u_{i-1,1} - 2F_R \right) + \\
& - U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) = 0
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Assim, tem-se a equação algébrica de segundo grau

$$A u_{i+1,1}^2 + B u_{i+1,1} + C = 0 \tag{3.33}$$

da qual apenas a solução positiva fornece resultados fisicamente consistentes, ou seja,

$$u_{i+1,1} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{3.34}$$

com coeficientes

$$A = 3$$

$$B = 4F_R - 4u_{i,1} - \frac{3}{2} u_{i+1,2} + u_{i-1,1}$$

$$C = u_{i+1,2} \left(2u_{i,1} - \frac{1}{2} u_{i-1,1} - 2F_R \right) - U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1})$$

para $j > 1$

Substituindo (3.27) em (3.21) vem

$$\begin{aligned}
& u_{i+1,j} (3u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \\
& + \frac{1}{3} \left[4v_{i+1,j-1} - v_{i+1,j-2} + \left(\frac{4u_{i,j} - 3u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{F_D} \right) \right] (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) + \\
& - 2F_R (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) - U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) = 0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

que, rearranjada, fornece finalmente

$$\begin{aligned}
& 3u_{i+1,j}^2 + u_{i+1,j} \left[4F_R - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} - \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{F_D} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{3} \left[4v_{i+1,j-1} - v_{i+1,j-2} + \left(\frac{4u_{i,j} - u_{i-1,j}}{F_D} \right) \right] (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) + \\
& - 2F_R (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1}) + -U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) = 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Obtendo-se a mesma equação algébrica de segundo grau (3.15) cuja solução positiva fornece os coeficientes

$$A = 3$$

$$B = 4F_R - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} - \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{F_D} \right)$$

$$\begin{aligned}
C = & \frac{1}{3} \left[4v_{i+1,j-1} - v_{i+1,j-2} + \left(\frac{4u_{i,j} - u_{i-1,j}}{F_D} \right) \right] (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) + \\
& - 2F_R (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1}) + -U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1})
\end{aligned}$$

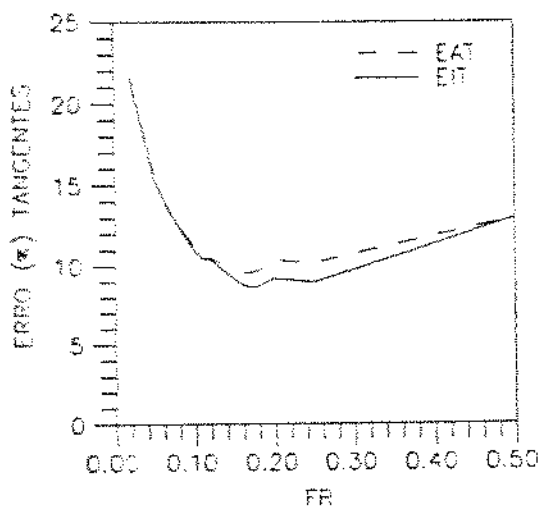
3.5.2 Resultados e comentários sobre o esquema B3

3.5.2.1 Estabilidade

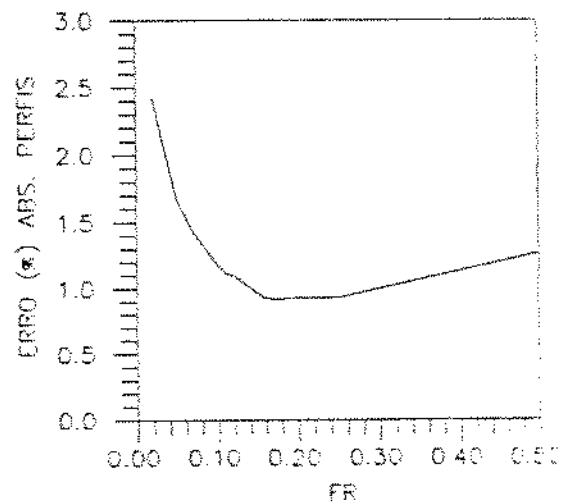
O esquema B3 é estável até $F_R = 0,69$ quando se aplica o método de resolução coluna-a-coluna e até $F_R = 0,43$ para o ponto-a-ponto.

3.5.2.2 Faixa ótima de F_R

O comportamento dos erros percentuais com a variação de F_R , apresentado nas figuras 3.7-a e b (ver também a tabela B.3 do apêndice B), indica estar sua faixa ótima situada em torno de $F_R = 0,17$ para todos os erros medidos.



(a)



(b)

Figura 3.7: Comportamento dos erros com F_R : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.

3.5.2.3 Oscilações

O esquema B3 não apresenta oscilações.

3.5.2.4 Comportamento dos erros com o refino da malha

A curva de refino apresentada na figura 3.8-a, foi levantada para um valor de $F_D = 0.02236$. Como pode ser observado, apesar de neste ADF só o termo $\frac{\partial r}{\partial y}$, para a primeira linha ($j = 1$), continuar mantendo um erro de 1ª ordem, a inclinação da curva de refino se altera muito pouco, insinuando que, nem mesmo com o predomínio dos termos de ordem 2, não se pode garantir um comportamento de 2ª ordem para o erro ao longo do refino da malha.

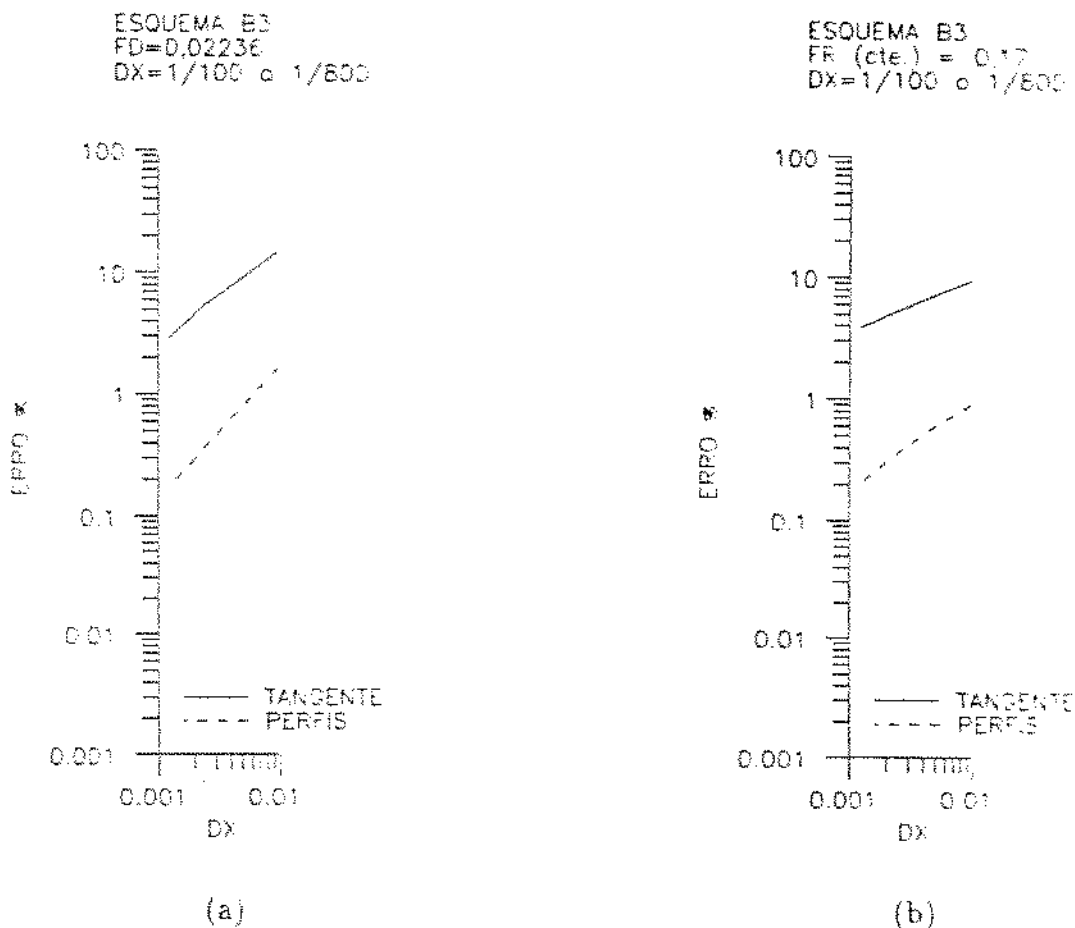


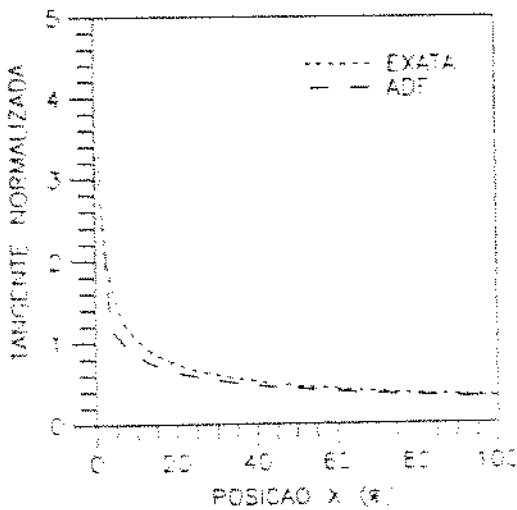
Figura 3.8: Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b): refino a F_R constante.

A figura 3.8-b mostra o comportamento do erro com o refino para um valor de F_R constante e igual a 0.17. Para a malha mais fina ($\Delta x = 0,00125$) os erros na tangente e nos perfis atingem

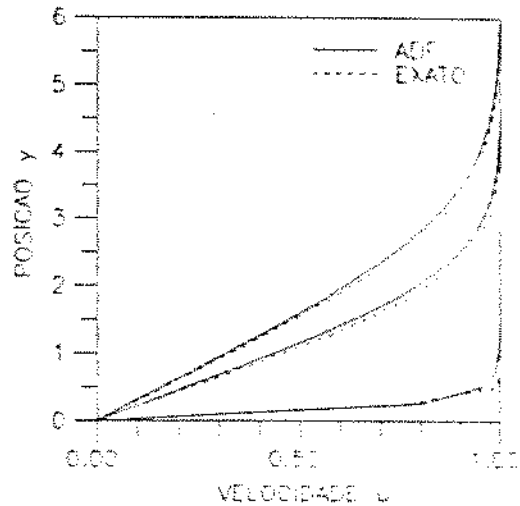
valores em torno de 3,84% e 0,21%, respectivamente.

3.5.2.5 Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade

Conforme mostram as figuras 3.9-a e 3.9-b, a melhoria introduzida na discretização da equação da continuidade permite sanar o problema do alto desvio entre os valores numérico e exato que o esquema B2 apresenta no início da placa. Estes gráficos foram obtidos para u'a malha de passo $\Delta x = 0,01$ e $F_R = 0,17$.



(a)



(b)

Figura 3.9: Resultados obtidos: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_w$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.

3.6 Esquema básico 4 (B4)

3.6.1 Desenvolvimento

Na busca de maior acuidade na resolução do problema, aplica-se no esquema B4 uma interpolação polinomial de segunda ordem (interpolação quadrática) ao único termo que ainda mantinha erro de primeira ordem $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{j=1}\right)$, obtendo-se, desta forma, um erro de $\mathcal{O}(\Delta y^2)$ para o termo em questão.

Interpolação quadrática para $\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{j=1}$

Seja

$$v(y) = \alpha y^2 + \beta y + v_0 \quad (3.37)$$

para o intervalo $0 \leq y \leq \Delta y$. Então²,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2\alpha y + \beta \quad (3.38)$$

que sujeita às condições de contorno

$$v(y=0) = 0 \quad (3.39)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad (3.40)$$

fornece: $v_0 = 0$ e $\beta = 0$.

Usando ainda

$$v(y = \Delta y) = \alpha \Delta y^2 = v_1. \quad (3.41)$$

²Para simplificação o índice i é omitido neste desenvolvimento.

vem que

$$\alpha = \frac{v_1}{\Delta y^2} \quad (3.42)$$

Substituindo os coeficientes

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2 v_1}{\Delta y^2} y \quad (3.43)$$

obtem-se finalmente a discretização de segunda ordem para o termo em questão:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=\Delta y} = \frac{2 v_1}{\Delta y} + \mathcal{O}[\Delta y^2] \quad (3.44)$$

A equação da continuidade discretizada para $j = 1$ ($y = \Delta y$) toma, então, a forma

$$v_{i+1,1} = \frac{4u_{i,1} - 3u_{i+1,1} - u_{i-1,1}}{4F_D} \quad (3.45)$$

que equivale à metade do valor obtido quando do uso de aproximação linear para $j = 1$ (equação (3.29))

Resolução coluna-a-coluna

Para a aplicação do método de resolução coluna-a-coluna no esquema B4 basta acrescentar no algoritmo a equação (3.45) para $j = 1$.

Resolução ponto-a-ponto

Acoplando a continuidade (3.45) ao momentum (3.21) para $j = 1$, vem

$$\begin{aligned} & u_{i+1,1} (3u_{i+1,1} - 4u_{i,1} + u_{i-1,1}) + \\ & + \frac{4u_{i,1} - 3u_{i+1,1} - u_{i-1,1}}{4} (u_{i+1,2} - u_{i+1,0}) + \\ & - 2F_R (u_{i+1,2} - 2u_{i+1,1} + u_{i+1,0}) - U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

mas como $u_{i+1,0} = 0$, tem-se finalmente

$$\begin{aligned}
 & 3u_{i+1,1}^2 + u_{i+1,1} \left(4F_R - 4u_{i,1} - \frac{3}{4}u_{i+1,2} + u_{i-1,1} \right) + \\
 & + u_{i+1,2} \left(2u_{i,1} - \frac{1}{4}u_{i-1,1} - 2F_R \right) + \\
 & - U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1}) = 0
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

obtendo-se a equação algébrica de segundo grau

$$A u_{i+1,1}^2 + B u_{i+1,1} + C = 0$$

cujas soluções positivas fornece a já citada equação 3.34)

$$u_{i+1,1} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

com coeficientes

$$A = 3$$

$$B = 4F_R - 4u_{i,1} - \frac{3}{4}u_{i+1,2} + u_{i-1,1}$$

$$C = u_{i+1,2} \left(2u_{i,1} - \frac{1}{4}u_{i-1,1} - 2F_R \right) - U_{i+1} (3U_{i+1} - 4U_i + U_{i-1})$$

Para $j > 1$ continua valendo a mesma solução já obtida para o esquema B3.

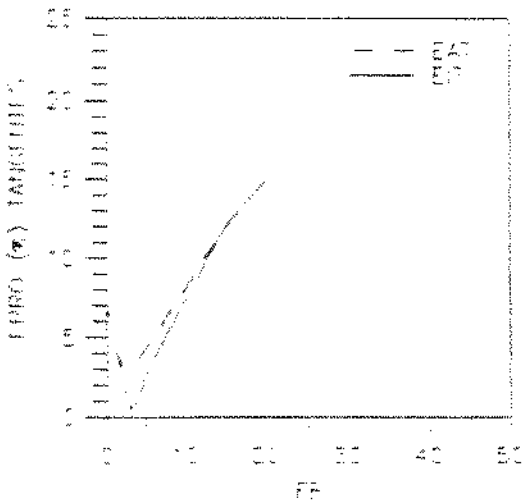
3.6.2 Resultados e comentários sobre o esquema B4

3.6.2.1 Estabilidade

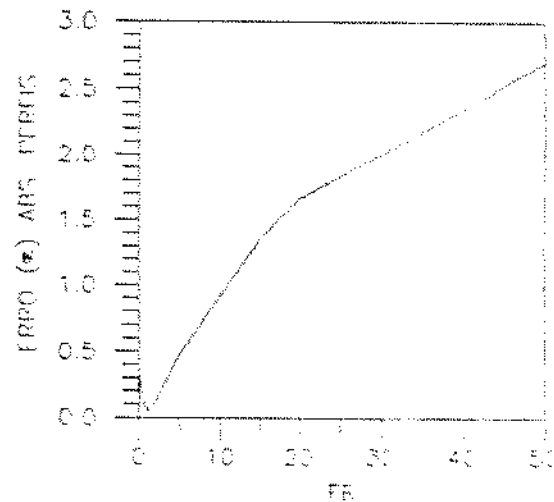
O esquema B4 mostrou-se incondicionalmente estável para ambos os métodos de resolução.

3.6.2.2 Faixa ótima de F_R

As figuras 3.10-a e b (e a tabela B.4 do apêndice B) mostram que o esquema B4, apesar de apresentar um nível bastante reduzido de erros, possui, em contrapartida, uma faixa ótima muito estreita, o que restringe sua aplicação em torno destes valores de F_R para a obtenção de resultados acurados. O erro mínimo para os perfis de velocidade (*EAP*) acontece em torno de $F_R = 1.20$, ao passo que para as tangentes, situa-se por volta de $F_R = 2.75$ para *EAT* e de $F_R = 3.0$ para *EIT*.



(a)



(b)

Figura 3.10: Comportamento dos erros com F_R : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.

3.6.2.3 Oscilações

O esquema B4, a exemplo dos anteriores, também não apresenta comportamento oscilatório para nenhum valor de F_R .

3.6.2.4 Comportamento dos erros com o refino da malha

Com a discretização de 2ª ordem aplicada ao único termo que ainda mantinha discretização de 1ª ordem $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{j=1}$, obtém-se, finalmente, um ADF com comportamento característico de 2ª ordem. Esta característica é registrada na inclinação da curva de refino (figura 3.11-a), obtida pelo refino de malhas com geometria $F_D = 0,03162$.

A figura 3.11-b mostra o comportamento do erro com o refino para um valor de F_R constante e igual a 3,00. Para a malha mais fina ($\Delta x = 0,00125$) os erros na tangente e nos perfis atingem valores em torno de 0,60% e 0,04%, respectivamente.

3.6.2.5 Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade

Os gráficos comparativos entre tangentes e perfis numéricos e exatos (figuras 3.12-a e 3.12-b), obtidos para u'a malha de passo $\Delta x = 0,1$ e $F_R = 3,0$, revelam o sensível ganho de acuidade resultante do emprego de uma aproximação quadrática para o termo $\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{j=1}$ da equação da continuidade. No entanto, volta a ocorrer neste esquema o mesmo desvio inicial que acontece no esquema B2 entre os valores exato e numérico das tangentes junto à parede. Nota-se ainda que para o esquema B4, a curva da tangente numérica passa a se posicionar acima da curva exata, ao contrário do ocorrido nos esquemas anteriores. Estes resultados são comentados mais pormenorizadamente no desenvolvimento do próximo esquema.

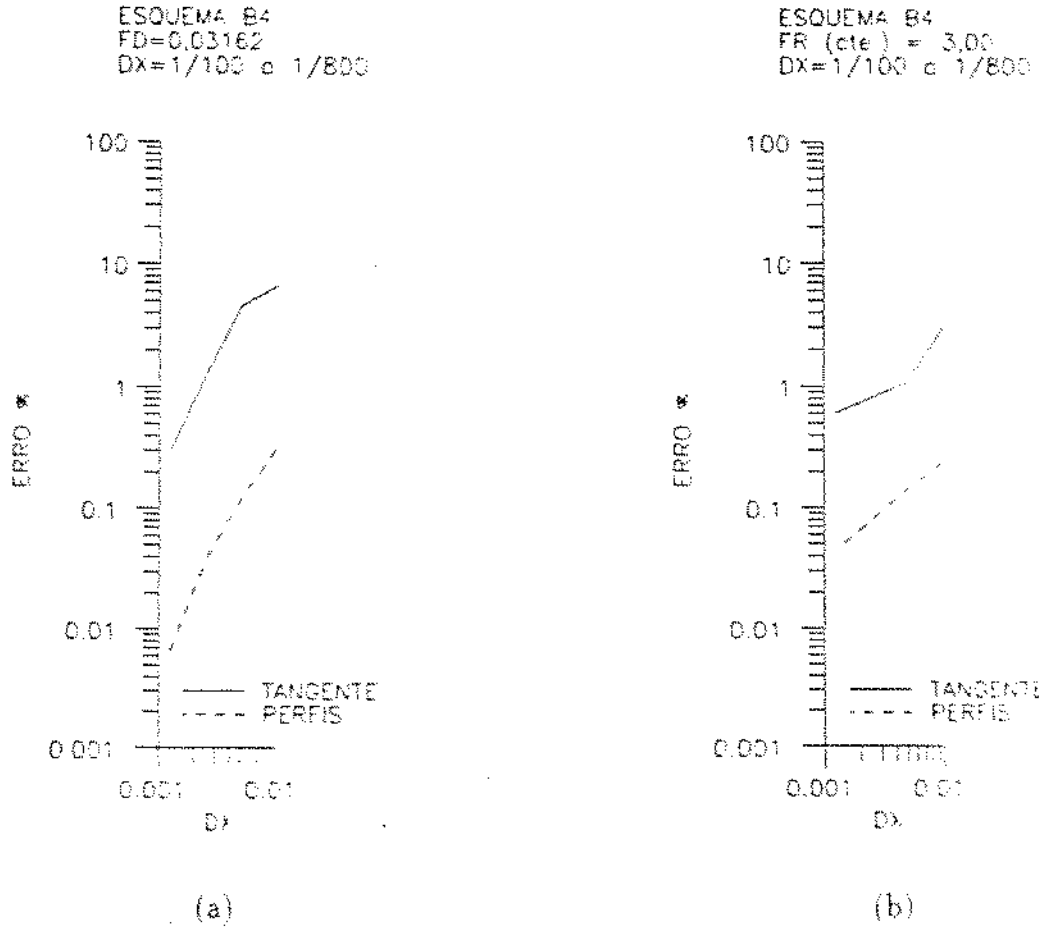
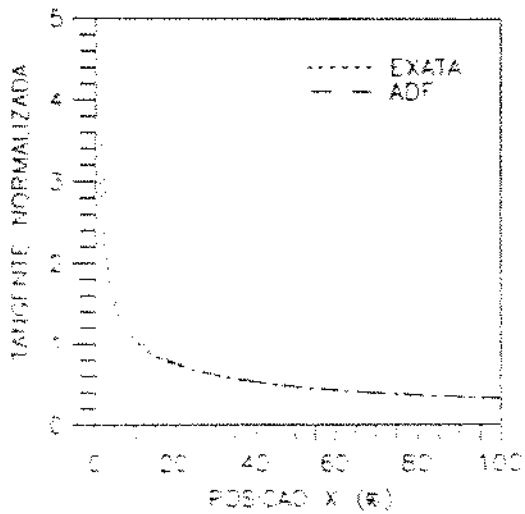
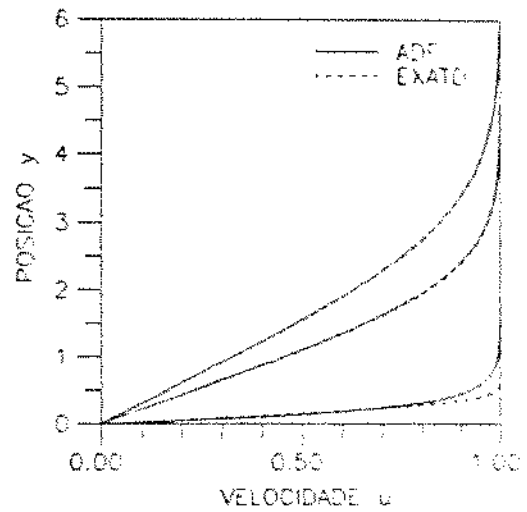


Figura 3.11: Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b) refino a F_R constante.



(a)



(b)

Figura 3.12: Resultados obtidos: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.

3.7 Esquema híbrido 1 (H1)

3.7.1 Desenvolvimento

As curvas obtidas para a tangente $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w$ (tensão de cisalhamento junto à parede) resultantes dos dois últimos esquemas (B3 e B4), comparadas com a solução exata, mostram nitidamente as regiões de melhor desempenho de cada um destes esquemas.

O esquema B3, que usa aproximação linear para $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{j=1}$, se mostra mais acurado no início da placa (figura 3.9-a), ao passo que o esquema B4, com aproximação quadrática, é mais adequado para o restante da placa (figura 3.12-a). Este fato sugere a investigação de um novo ADF resultante da composição dos esquemas B3 e B4 que consiste na aplicação de aproximação linear para o termo $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{j=1}$ da equação da continuidade em algumas das colunas iniciais, passando a partir daí à aplicação de aproximação quadrática para este mesmo termo.

A figura 3.13 mostra o comportamento da tangente (para os 15% iniciais da placa) em função do número de colunas iniciais que utilizam aproximação linear para $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{j=1}$. Como se pode constatar o número ótimo de colunas (IL) é 2.³

³Note-se que, como o esquema H1 é mais geral, na figura 3.13, a curva de $IL = 100$ corresponde ao esquema B3, onde, para todas as colunas, se aplica aproximação linear para $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{j=1}$. Por outro lado, a curva de $IL = 0$ corresponde ao esquema B4.

Os desenvolvimentos dos algoritmos para os dois métodos de resolução são os mesmos já contemplados nos esquemas B3 e B4, bastando apenas uma composição destes para a obtenção do programa computacional para este novo esquema.

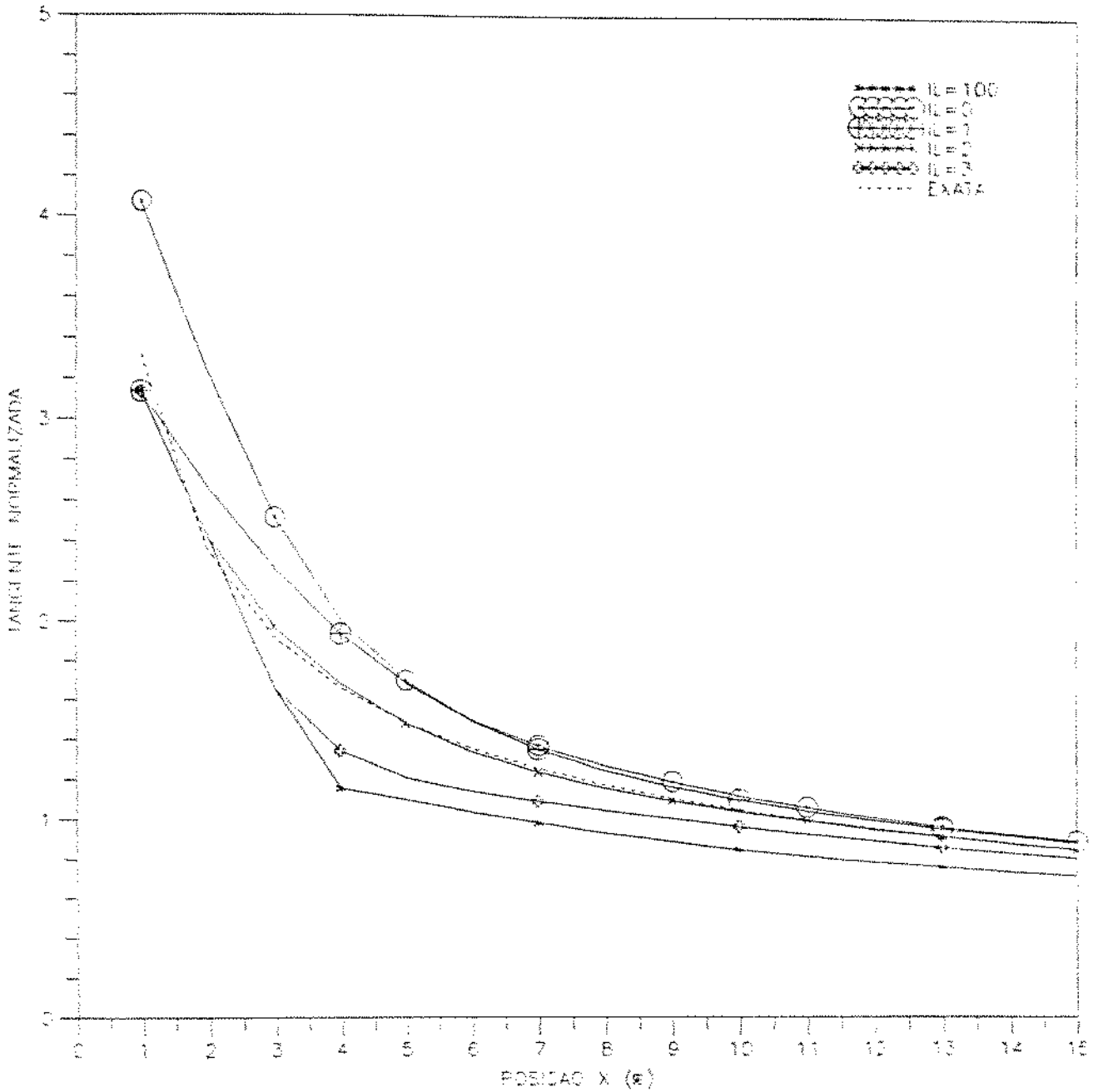


Figura 3.13: Comportamento da tangente junto à parede $\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{w}$ no esquema H1 para alguns valores de IL .

3.7.2 Resultados e comentários sobre o esquema H1

Nota: Os resultados e comentários apresentados são feitos para $IL = 2$ (IL ótimo).

3.7.2.1 Estabilidade

O limite de estabilidade para o esquema H1 para o emprego do método de resolução coluna-a-coluna situa-se em $F_R = 0,72$ e para o ponto-a-ponto em $F_R = 0,43$. Acima destes valores não se consegue convergência.

3.7.2.2 Faixa ótima de F_R

Conforme sugerido pelas figuras 3.14-a e b (e tabela B.5 do apêndice B), este esquema fornece erros muito pequenos para valores baixos de F_R . Isto significa que o número de pontos dentro da camada limite é bem menor que o dos esquemas anteriores, o que vem associar ao esquema H1 mais uma vantagem; a redução do tempo de processamento. A faixa ótima de F_R para este esquema situa-se em torno de 0,10.

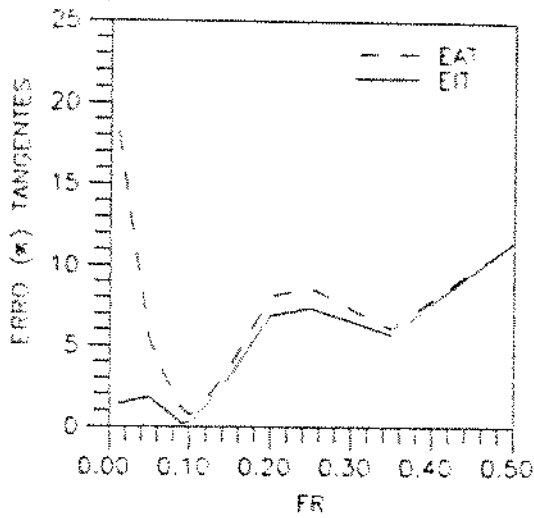
3.7.2.3 Oscilações

Este esquema também não apresenta oscilações.

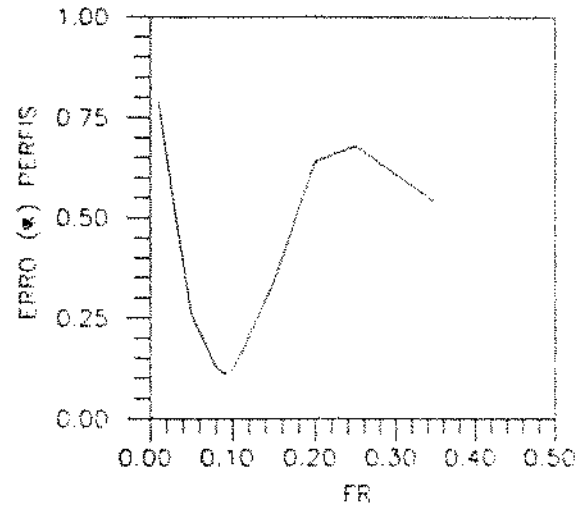
3.7.2.4 Comportamento dos erros com o refino da malha

A curva de refino levantada para uma malha de geometria $F_D = 0,01225$, ilustrada na figura 3.15-a, confirma a alta acuidade inerente a este primeiro esquema híbrido. É importante observar que, apesar da introdução de alguns poucos termos de 1ª ordem, no início da placa, o esquema H1 mantém um comportamento de 2ª ordem, conforme caracteriza sua curva de refino para F_D constante.

A figura 3.15-b mostra o comportamento do erro com o refino para um valor de F_R constante e igual a 0,10. Para a malha mais fina ($\Delta x = 0,00125$) os erros na tangente e nos perfis atingem valores em torno de 0,25% e 0,02%, respectivamente.



(a)



(b)

Figura 3.14: Comportamento dos erros com FR : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.

3.7.2.5 Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade

Como se percebe pela observação das figuras 3.16-a e b, o esquema H1 com $IL = 2$ e $FR = 0.10$ fornece curvas muito próximas às exatas. Para estas condições o erro integral na tangente (EIT), que tem relação direta com a força de arrasto, é de apenas 0,25% e o erro absoluto entre perfis de 0,12%.

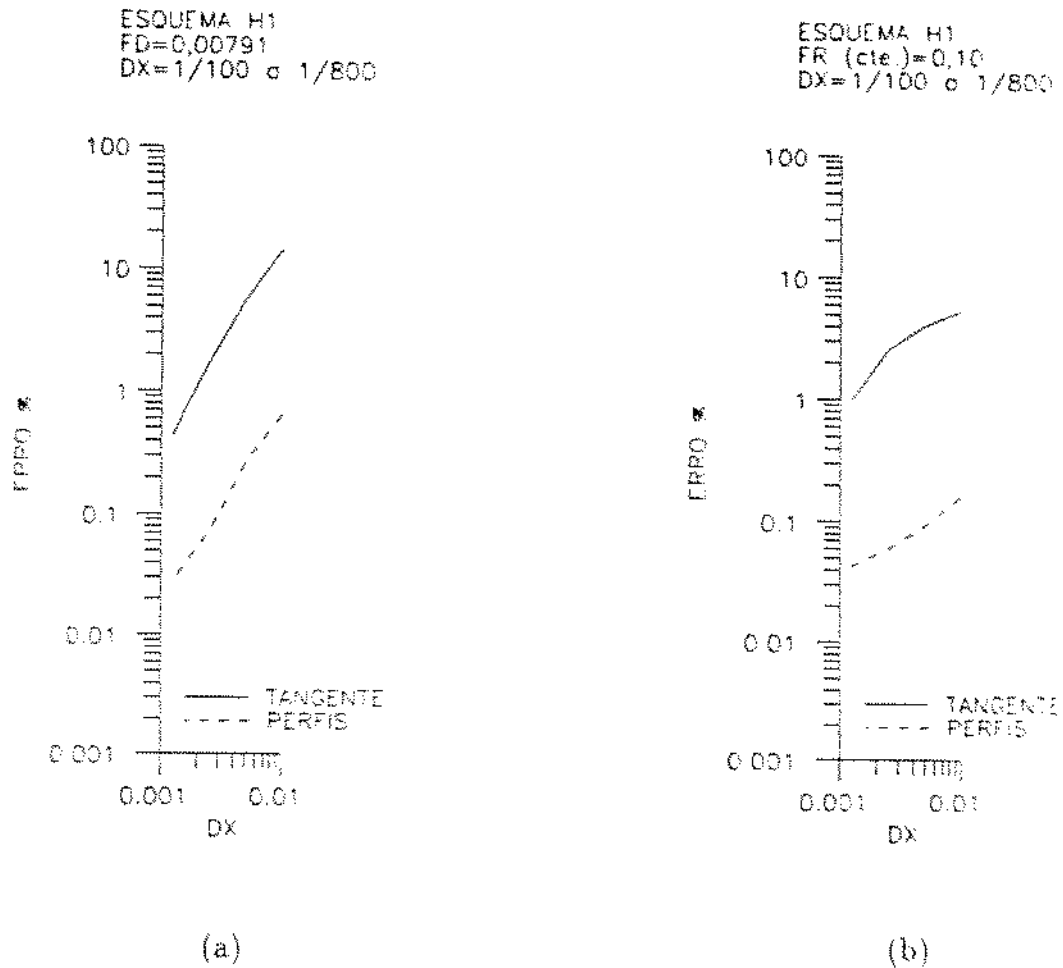
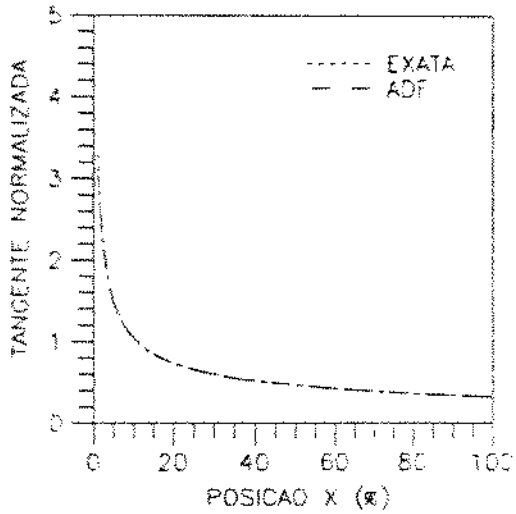
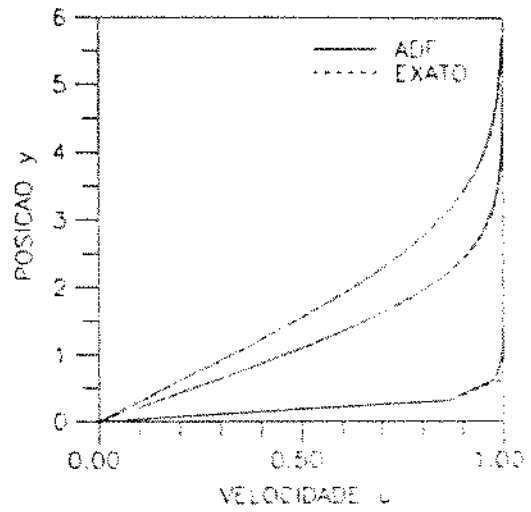


Figura 3.15: Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b): refino a F_R constante.



(a)



(b)

Figura 3.16: Resultados obtidos: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_u$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.

3.8 Esquema básico 5 (B5)

3.8.1 Desenvolvimento

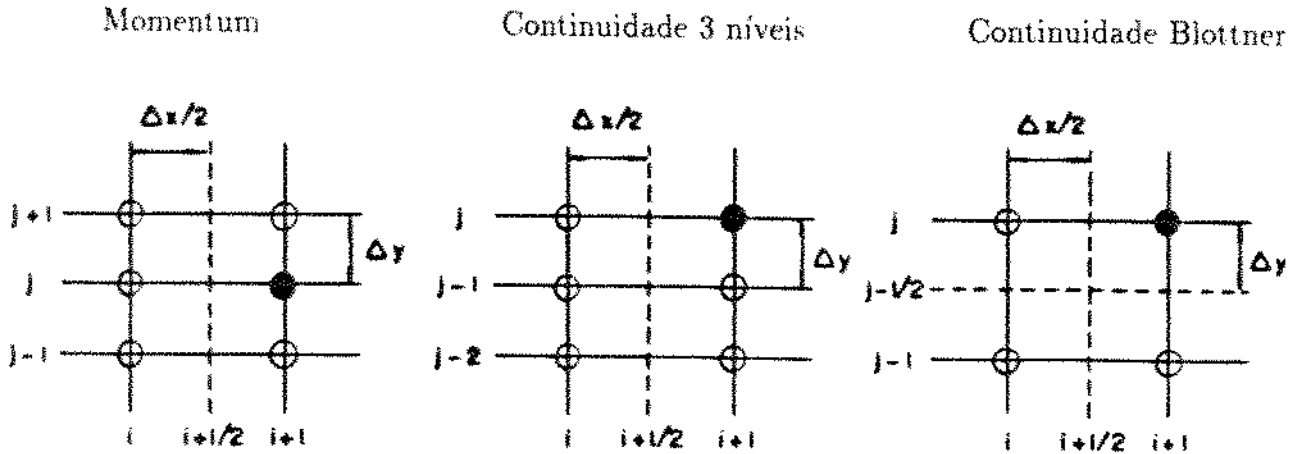
O último esquema discretizante básico investigado é o esquema idealizado por Crank & Nicholson [41] para a equação da difusão transiente unidimensional, posteriormente adaptado às equações da camada limite. Este método de discretização proporciona aproximações de segunda ordem para todos os termos das equações de governo. Os trabalhos clássicos que empregam técnicas de diferenças finitas na abordagem de problemas de camada limite *mais amplos* (modelos turbulentos com propriedades variáveis) costumam utilizar variações deste esquema, como se constata pela leitura de Patankar & Spalding [8] e F. G. Blottner & Flugge-Lotz [4].

No esquema discretizante proposto por Crank & Nicholson as derivadas e as variáveis dependentes u e v são avaliadas em " $i + \frac{1}{2}, j$ ", através da média aritmética de seus valores nos pontos $i + 1, j$ e i, j .

Para a equação da continuidade duas variedades de esquemas do tipo Crank & Nicholson são avaliados; um de três níveis em " y " seguindo a linha do esquema B4 e outro central em " y ", conforme também abordado por Blottner [5].

O esquema de Crank & Nicholson tem o inconveniente de abordar o ponto de descontinuidade (origem) no caso de problemas de camada limite sobre placa plana, como os problemas de Blasius e Howarth aqui investigados. Para contornar este problema leva-se em conta a expectativa de comportamento das derivadas em x e y junto à borda de ataque, conforme se comenta no desenrolar do desenvolvimento.

3.8.1.1 Discretização do espaço - Moléculas



3.8.1.2 Discretização da equação do momentum normalizada

Isolando as variáveis independentes (x e y)

$$u_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\partial u}{\partial x} + U_{i+\frac{1}{2}} \frac{dU}{dx} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - v_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.48)$$

Aplicando a discretização de Crank & Nicholson e desprezando os erros de truncamento, pode-se escrever para o momentum

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2} \right) \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{U_{i+1} + U_i}{2} \right) \left(\frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{\Delta y^2} \right) + \left(\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \right] + \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{i+1,j} + v_{i,j}}{2} \right) \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} \right) + \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

equação que pode ser reduzida à forma

$$\begin{aligned}
& (u_{i+1,j} + u_{i,j}) (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \\
& -F_R (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \\
& + \frac{F_D}{4} (v_{i+1,j} + v_{i,j}) (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + U_{i+1}^2 - U_i^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Nota: É importante salientar que quando esta equação é aplicada ao ponto (1,1) em problemas com descontinuidade na origem, é preciso que se adote um valor para $u_{0,0}$, uma vez que a equação (3.50) depende dos $u_{i,j-1}$. Como o valor da derivada segunda $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ em (1,1) é zero, adota-se para a descontinuidade $u_{0,0} = 1$ na equação do momentum.

3.8.1.3 Discretização da equação da continuidade normalizada

Isolando as variáveis independentes (x e y), vem

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.51}$$

. Esquema de três níveis em y

Desprezando os erros de truncamento e aplicando a discretização de Crank & Nicholson, em torno do ponto $i + \frac{1}{2}, j$, pode-se escrever para a continuidade, quando $j > 1$

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} = \frac{1}{2} \left(\frac{3v_{i+1,j} - 4v_{i+1,j-1} + v_{i+1,j-2}}{2\Delta y} + \frac{3v_{i,j} - 4v_{i,j-1} + v_{i,j-2}}{2\Delta y} \right) \tag{3.52}$$

ou melhor,

$$3v_{i+1,j} - 4v_{i+1,j-1} + v_{i+1,j-2} = \frac{4}{F_D} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) - 3v_{i,j} - 4v_{i,j-1} + v_{i,j-2} \tag{3.53}$$

então, finalmente

$$v_{i+1,j} = \frac{\frac{4}{F_D} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) - 3v_{i,j} - 4v_{i,j-1} + v_{i,j-2} + 4v_{i+1,j-1} + v_{i+1,j-2}}{3} \tag{3.54}$$

Para a linha $j = 1$ continua valendo o mesmo princípio da aproximação quadrática, desenvolvida anteriormente (esquema B4), com as devidas adaptações.

Como foi visto para $i + 1, 1$

$$\left. \frac{\partial v_{i+1}}{\partial y} \right|_{j=1} = \frac{2 v_{i+1,1}}{\Delta y} + \mathcal{O}[\Delta y^2] \quad (3.55)$$

Da mesma forma, para $i, 1$

$$\left. \frac{\partial v_i}{\partial y} \right|_{j=1} = \frac{2 v_{i,1}}{\Delta y} + \mathcal{O}[\Delta y^2] \quad (3.56)$$

Assumindo a continuidade com aproximação quadrática para o esquema de Crank & Nicholson em três níveis para $j = 1$, a forma

$$v_{i+1,1} = \frac{u_{i,1} - u_{i+1,1}}{F_D} - v_{i,1} \quad (3.57)$$

. Esquema centrado em y (Blottner)

Desprezando os erros de truncamento e aplicando a discretização de Crank & Nicholson, em torno do ponto $i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}$, pode-se escrever para os termos da continuidade, quando $j > 1$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{\Delta x} \right) + \mathcal{O}[\Delta x^2] \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i+1,j-1}}{\Delta y} + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y} \right) + \mathcal{O}[\Delta y^2] \quad (3.59)$$

que após o devido desenvolvimento fornece, em se desprezando os erros

$$v_{i+1,j} = v_{i+1,j-1} - v_{i,j} + v_{i,j-1} - \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j} + u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{F_D} \quad (3.60)$$

Assim, para os problemas sem descontinuidade a equação (3.60) pode ser aplicada a todo o domínio. Mas para os problemas com descontinuidade na origem, em se tratando do ponto (1,1) (ponto mais próximo à descontinuidade), o uso de aproximação quadrática evita o envolvimento da descontinuidade (ponto $u_{0,0}$).

Vale notar que o uso da aproximação quadrática para o ponto 1,1 (equação (3.57)), equivale a aplicar o esquema de Blottner para a equação da continuidade adotando $u_{0,0} = 0$. Este fato pode ser melhor visualizado pela aplicação de tal discretização ao ponto (1,1)

$$v_{i+1,1} = \frac{u_{i,1} - u_{i+1,1} + u_{i,0} - u_{i+1,0}}{F_D} + v_{i,1} - v_{i+1,0} + v_{i,0} \quad (3.61)$$

Neste caso $u_{i+1,0}$, $v_{i+1,0}$ e $v_{i,0}$ valem zero (para problemas sem sucção ou injeção) resultando em

$$v_{i+1,1} = \frac{u_{i,1} - u_{i+1,1} - u_{i,0}}{F_D} - v_{i,1} \quad (3.62)$$

Nota: Comparando (3.57) com (3.62) visualiza-se que para igualar estas duas equações, deve-se fazer $u_{i,0} = 0$. De fato, para que a continuidade seja satisfeita no ponto (1,0) da superfície, como $\frac{\delta v_{i+1}}{\delta y}|_{j=0}$ vale 0, também $\frac{\delta u_{i+1}}{\delta x}|_{j=0}$ tem que valer 0, o que fornece um significado físico à hipótese assumida para efeitos numéricos. É interessante o fato de se ter que assumir para um mesmo ponto dois valores diferentes: para o momentum $u_{0,0} = 1$ e para a continuidade $u_{0,0} = 0$.

Para os demais pontos da primeira linha ($i,1$) também prevalece a mesma expressão para os $v_{i+1,j}$, ao passo que para as demais linhas ($j > 1$) tem-se a expressão geral (3.60).

Resolução coluna-a-coluna

Desenvolvendo a equação (3.50) para aplicação do método de resolução coluna-a-coluna, vem

$$\begin{aligned} & u_{i+1,j-1} \left(-F_R - \frac{F_D}{4} (v_{i+1,j} + v_{i,j}) \right) + u_{i+1,j} (u_{i+1,j} + u_{i,j} + 2F_R) + \\ & + (u_{i+1,j+1} \left(-F_R + \frac{F_D}{4} (v_{i+1,j} + v_{i,j}) \right)) = \\ & F_R (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + U_i^2 - U_{i+1}^2 \\ & \frac{F_D}{4} (v_{i+1,j} + v_{i,j}) (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + u_{i,j} (u_{i+1,j} + u_{i,j}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

que posta na forma

$$A_j u_{i+1,j-1} + B_j u_{i+1,j} + C_j u_{i+1,j+1} = D_j$$

fornece os coeficientes

$$A_j = -F_R - \frac{F_D}{4} (v_{i+1,j} + v_{i,j})$$

$$B_j = u_{i+1,j} + u_{i,j} + 2F_R$$

$$C_j = -F_R + \frac{F_D}{4} (v_{i+1,j} + v_{i,j})$$

$$D_j = F_R (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \frac{F_D}{4} (v_{i+1,j} + v_{i,j}) \cdot (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + u_{i,j} (u_{i+1,j} + u_{i,j}) + U_i^2 - U_{i+1}^2$$

Resolução ponto-a-ponto

Desenvolvendo a equação (3.50) para aplicação do método de resolução ponto-a-ponto, tem-se:

- Pela aplicação do esquema de três níveis em y

Acoplando as equações (3.57) e (3.50), obtém-se para $j = 1$ a equação

$$\begin{aligned} & u_{i+1,1}^2 - u_{i,1}^2 - F_R (u_{i+1,2} - 2u_{i+1,1} + u_{i+1,0} + u_{i,2} - 2u_{i,1} + u_{i,0}) + \\ & + \frac{1}{4} (u_{i,1} - u_{i+1,1}) (u_{i+1,2} - u_{i+1,0} + u_{i,2} - u_{i,0}) + U_{i+1}^2 - U_i^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Como $v_{i+1,0} = 0$, a equação (3.64) desenvolvida fornece

$$u_{i+1,1}^2 + u_{i+1,1} (2F_R - \frac{PO}{4} (u_{i+1,2} + u_{i,2} - u_{i,0}) +$$

$$\begin{aligned}
& -F_R (u_{i+1,2} + u_{i,2} - 2u_{i,1} + u_{i,0}) + \\
& + \frac{1}{4} u_{i,1} (u_{i+1,2} + u_{i,2} - u_{i,0}) + U_{i+1}^2 - U_i^2 - u_{i,1}^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.65}$$

E, da mesma forma, como efetuado para os demais esquemas, obtém-se a equação algébrica de segundo grau $A u_{i+1,j}^2 + B u_{i+1,j} + C = 0$ da qual apenas a solução positiva ($u_{i+1,j} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$) é fisicamente consistente, e seus coeficientes valem

$$\begin{aligned}
A &= 1 \\
B &= 2F_R - \frac{1}{4} (u_{i+1,2} + u_{i,2} - u_{i,0}) \\
C &= -F_R (u_{i+1,2} + u_{i,2} - 2u_{i,1} + u_{i,0}) + \\
& + \frac{1}{4} u_{i,1} (u_{i+1,2} + u_{i,2} - u_{i,0}) + U_{i+1}^2 - U_i^2 - u_{i,1}^2
\end{aligned}$$

É importante lembrar que, no caso de problemas com descontinuidade na origem deve-se adotar $u_{i,0} = 1$, face à hipótese assumida para os termos $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ da equação do momentum.

Seguindo para $j > 1$ um procedimento análogo, tem-se, pelo acoplamento das equações (3.54) e (3.50)

$$\begin{aligned}
& (u_{i+1,j} + u_{i,j}) (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \\
& -F_R (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \\
& + \left[\frac{F_D}{4} \left(\frac{\frac{4}{F_L} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) - 4 v_{i,j-1} + v_{i,j-2} + 4 v_{i+1,j-1} + v_{i+1,j-2}}{3} \right) \right] \\
& \cdot (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + U_{i+1}^2 - U_i^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Desenvolvendo esta equação para a aplicação da resolução ponto-a-ponto vem

$$\begin{aligned}
& u_{i+1,j}^2 + u_{i+1,j} \left(2F_R - \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{3} \right) + \\
& -F_R (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \\
& +(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}), \\
& \cdot \left[\frac{u_{i,j} + \frac{F_D}{4} (4v_{i,j-1} + 4v_{i+1,j-1} - v_{i,j-2} - v_{i+1,j-2})}{3} \right] + U_{i+1}^2 - U_i^2 - u_{i,j}^2 = 0 \quad (3.67)
\end{aligned}$$

cujos coeficientes

$$A = 1$$

$$B = 2F_R - \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{3}$$

$$C = -F_R (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) +$$

$$+(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}).$$

$$\cdot \left[\frac{u_{i,j} + \frac{F_D}{4} (4v_{i,j-1} + 4v_{i+1,j-1} - v_{i,j-2} - v_{i+1,j-2})}{3} \right] + U_{i+1}^2 - U_i^2 - u_{i,j}^2$$

são utilizados para a solução positiva da equação (3.16)

$$u_{i+1,j} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

- e pela aplicação do esquema de Blottner ...

Acoplando as equações (3.57) e (3.50), obtém-se para $j = 1$ os mesmos coeficientes anteriormente obtidos para o esquema de três níveis em y , conforme comentado na última **“Nota”**.

Repetindo:

$$A = 1$$

$$B = 2F_R - \frac{1}{4} (u_{i+1,2} + u_{i,2} - u_{i,0})$$

$$C = -F_R (u_{i+1,2} + u_{i,2} - 2u_{i,1} + u_{i,0}) + \frac{1}{4} u_{i,1} (u_{i+1,2} + u_{i,2} - u_{i,0}) \\ + U_{i+1}^2 - U_i^2 - u_{i,1}^2$$

Para $j > 1$, os coeficientes da solução ponto-a-ponto para o esquema de Blottner são obtidos pelo acoplamento das equações (3.60) e (3.50)

$$(u_{i+1,j} + u_{i,j}) (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \\ -F_R (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \\ + \frac{F_D}{4} \left(-v_{i,j} + v_{i,j-1} - \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j} + u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{F_D} \right). \\ \cdot (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + U_{i+1}^2 - U_i^2 = 0 \quad (3.68)$$

Desenvolvendo esta equação para a aplicação da resolução ponto-a-ponto vem

$$u_{i+1,j}^2 + u_{i+1,j} \left(2F_R - \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{4} \right) + \\ -F_R (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \\ + (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \left[\frac{u_{i,j} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1} + F_D (v_{i,j-1} - v_{i,j})}{4} \right] + \\ + U_{i+1}^2 - U_i^2 - u_{i,j}^2 = 0 \quad (3.69)$$

cujos coeficientes

$$A = 1$$

$$B = 2F_R - \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{4} \right)$$

$$C = -F_R (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + U_{i+1}^2 - U_i^2 - u_{i,j}^2 \\ + (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \\ \cdot \left[\frac{u_{i,j} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1} + F_D (v_{i,j-1} - v_{i,j})}{4} \right]$$

são utilizados para a solução positiva da equação $u_{i+1,j} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ (3.16).

3.8.2 Resultados e comentários sobre o esquema B5

3.8.2.1 Estabilidade e oscilações

O esquema B5 é incondicionalmente estável, no entanto, começa a apresentar oscilações a partir de $FR = 0,56$ para ambos os esquemas utilizados na discretização da equação da continuidade (3 níveis e Blottner). A figura 3.17 exemplifica o comportamento altamente oscilatório da tangente $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w$ para um valor de $FR = 2,00$, utilizando o esquema de Blottner para discretização da continuidade.

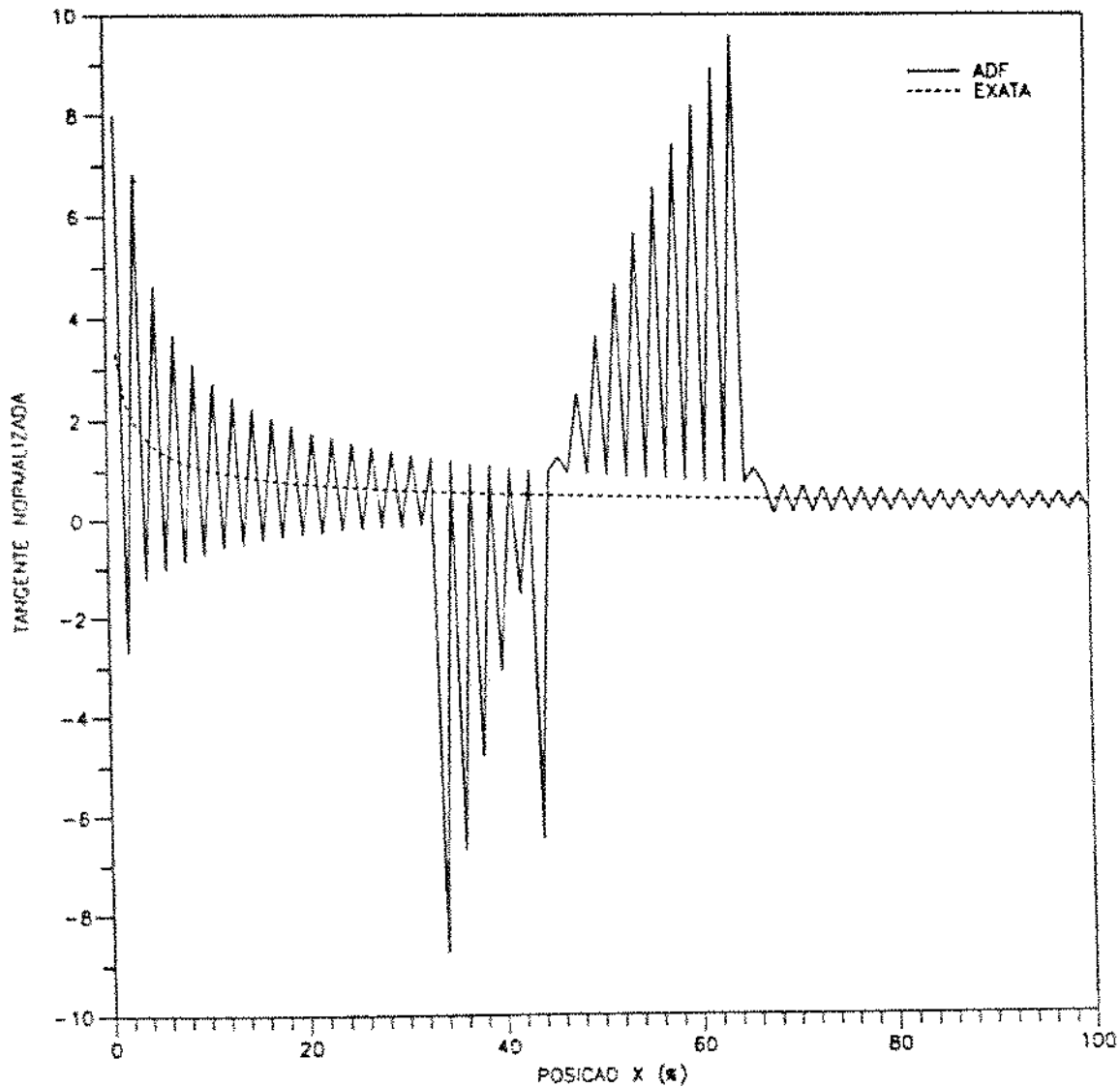
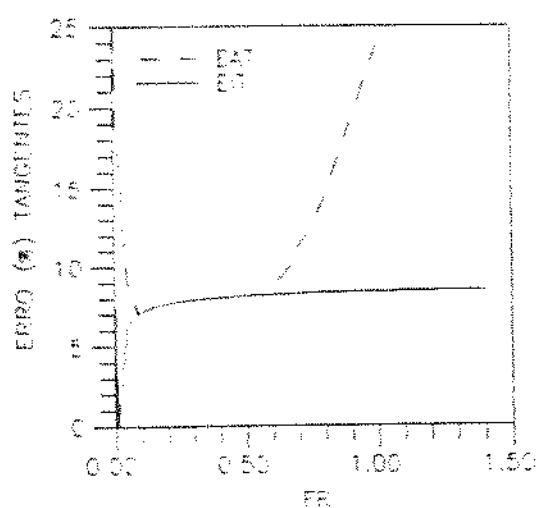


Figura 3.17: Comportamento oscilatório da tangente junto à parede para altos valores de FR .

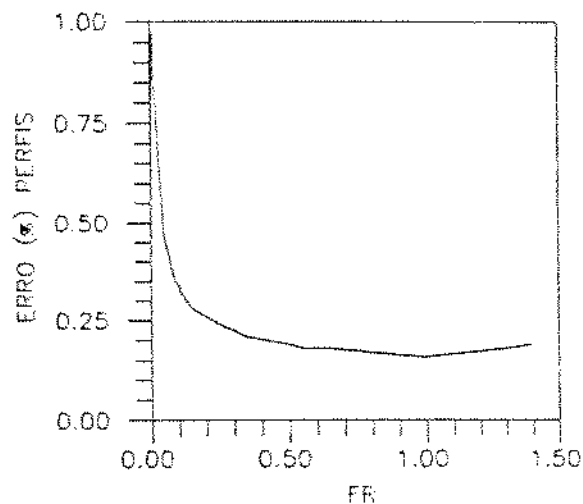
É importante, ainda, observar que para o esquema B5 torna-se possível a opção pela variável $u_{i+1,j}$ incógnita, dentre as duas que compõem a equação (3.49). Entretanto, somente a opção que aqui foi feita leva o ADF à convergência, a opção restante (escolha do $u_{i+1,j}$ incógnito originário da discretização do termo $\frac{\partial v}{\partial x}$) não conduz à convergência.

3.8.2.2 Faixa ótima de F_R

As figuras 3.18-a e b e 3.19-a e b (e tabelas B6 e B7 do apêndice B), mostram, para ambos os esquemas utilizados na discretização da equação da continuidade (3 níveis e Blottner), uma faixa ótima bastante ampla para a aplicação deste ADF, evidenciando ainda o crescimento do erro EAT a partir de $F_R = 0,56$, face ao surgimento do comportamento oscilatório já aludido. Outro aspecto importante a ser salientado reside no fato do erro integral (EIT) não se abalar com a presença deste comportamento, levando a se admitir que o fenômeno revela-se de natureza “compensatória”. É fácil notar que a continuidade de Blottner fornece resultados melhores que a de 3 níveis.

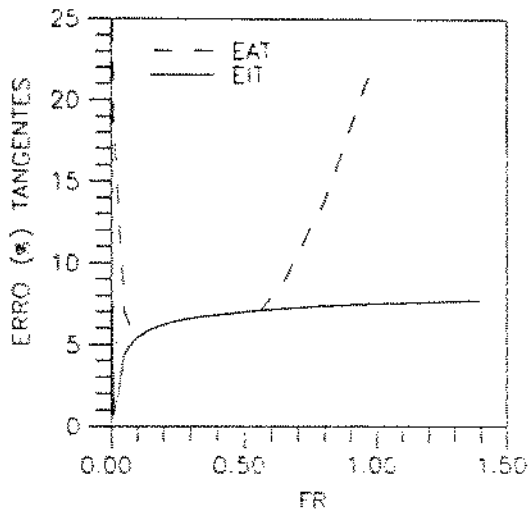


(a)

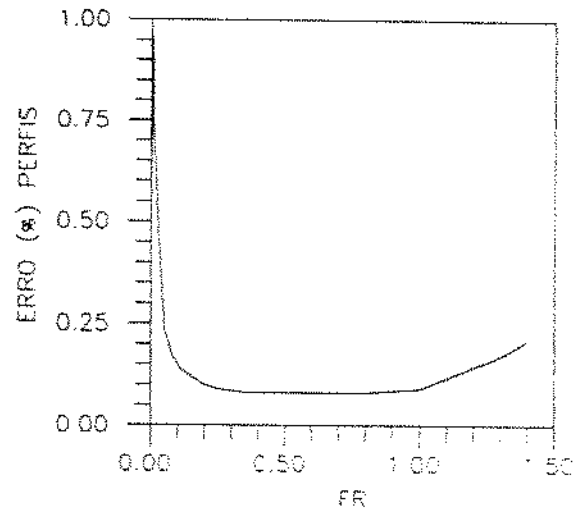


(b)

Figura 3.18: Comportamento dos erros com F_R : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis - continuidade de 3 níveis.



(a)



(b)

Figura 3.19: Comportamento dos erros com F_R : (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis - continuidade de Blottner.

3.8.2.3 Comportamento dos erros com o refino da malha

A curva de refino levantada para uma malha de geometria $F_D = 0,01414$, ilustrada na figura 3.20-a, confirma o comportamento de 2ª ordem peculiar dos esquemas de Crank & Nicholson. Aqui também se percebe que a continuidade de Blottner fornece resultados melhores que a de 3 níveis.

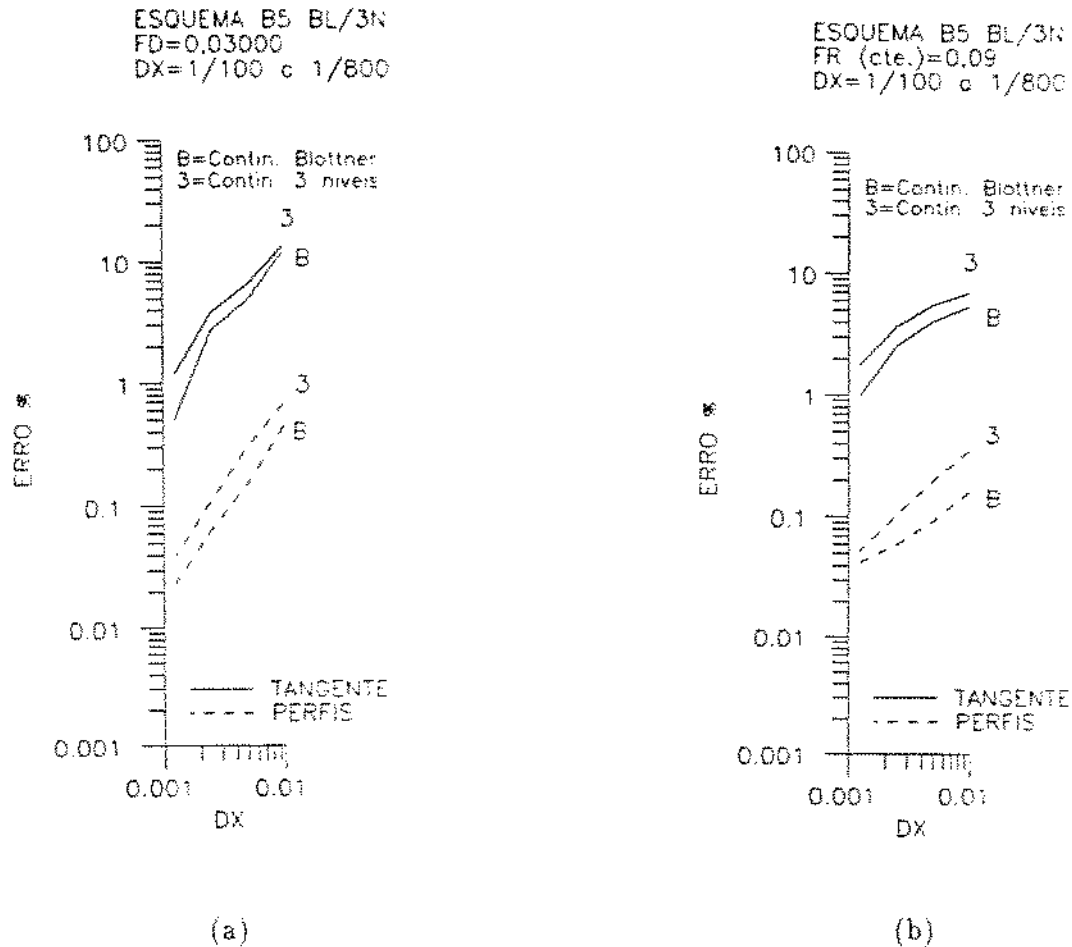


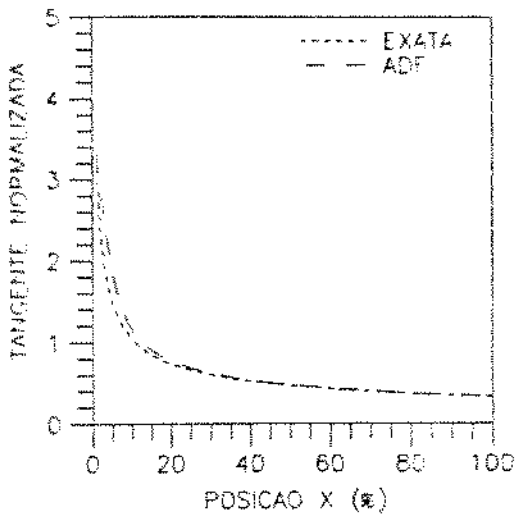
Figura 3.20: Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b): refino a F_R constante.

A figura 3.20-b mostra o comportamento do erro com o refino para um valor de F_R constante e igual a 0.09. O esquema de Blottner confirma sua superioridade acusando um nível inferior de erros. Para a malha mais fina ($\Delta x = 0.00125$) os erros na tangente e nos perfis atingem, para o esquema de Blottner, os valores de 0,99% e 0,04%, respectivamente, ao passo que para o esquema de 3 níveis

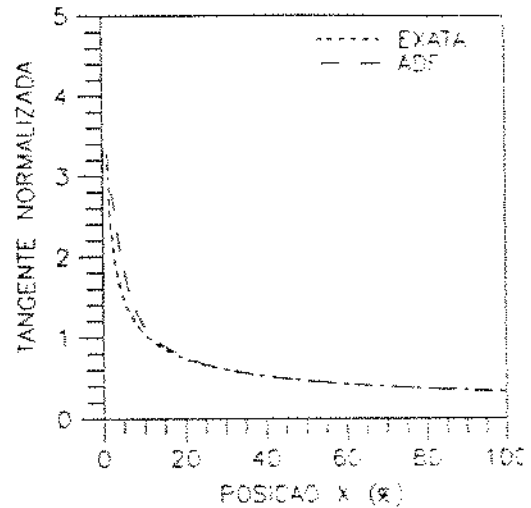
estes mesmos erros sobem para 1,79% e 0,05%, respectivamente.

3.8.2.4 Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade

As figuras 3.21-a e b e 3.22-a e b, mostram que o esquema B5, para $F_R = 0,09$ (F_R ótimo) com malha de $\Delta x = 0,01$, tem um nível de acuidade compatível com o esquema B4, principalmente quando aplicada a continuidade de Blottner.

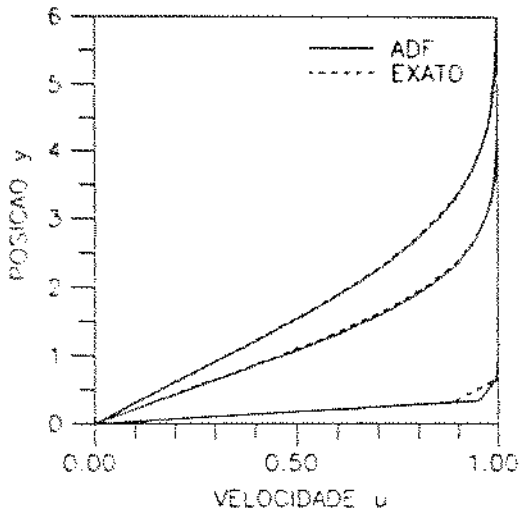


(a)

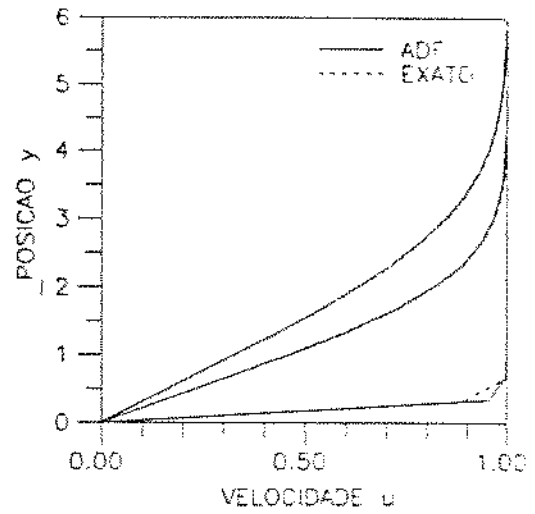


(b)

Figura 3.21: Resultados obtidos: (a) tangente por três níveis junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w$; (b) tangente por Blottner junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w$.



(a)



(b)

Figura 3.22: Resultados obtidos: (a) perfis por três níveis a 1%, 50% e 100%; (b) perfis por Blottner a 1%, 50% e 100%.

3.9 Esquema híbrido 2 (H2)

3.9.1 Desenvolvimento

Este segundo esquema híbrido constitui uma modificação do esquema B5, baseado em argumento análogo ao usado para o esquema H1, consistindo, como este, no emprego da aproximação linear do termo $\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{j=1}$ para as IL primeiras colunas, e de aproximação quadrática, deste mesmo termo, para as demais colunas.

Como a aproximação linear para este termo fornece para $(i+1, 1)$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{i+1,1} = \frac{v_{i+1,1} - v_{i+1,0}}{\Delta y} + \mathcal{O}[\Delta y] \quad (3.70)$$

e para $(i, 1)$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{i,1} = \frac{v_{i,1} - v_{i,0}}{\Delta y} + \mathcal{O}[\Delta y] \quad (3.71)$$

para $j = 1$ a continuidade com aproximação linear para o esquema H2, tanto para a discretização de três níveis como para a de Blottner, assume a forma

$$v_{i+1,1} = 2 \frac{u_{i,1} - u_{i+1,1}}{F_D} - v_{i,1} \quad (3.72)$$

Para generalização, escrever-se-á para a velocidade normal na primeira linha

$$v_{i+1,1} = PO \frac{u_{i,1} - u_{i+1,1}}{F_D} - v_{i,1} \quad (3.73)$$

onde $PO = 1$ para aproximação de segunda ordem e $PO = 2$ para aproximação de primeira ordem (do termo $\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{j=1}$).

Resolução coluna-a-coluna

A única modificação a ser feita no programa computacional para o emprego deste método de resolução, a exemplo do esquema H1, consiste na aplicação desta equação (3.73) à primeira linha para $i \leq IL$.

Resolução ponto-a-ponto

Acoplando as equações (3.54) e (3.73), obtém-se para $j = 1$ a equação

$$u_{i+1,1}^2 - u_{i,1}^2 - F_R (u_{i+1,2} - 2u_{i+1,1} + u_{i+1,0} + u_{i,2} - 2u_{i,1} + u_{i,0}) + \frac{PO}{4} (u_{i,1} - u_{i+1,1}) (u_{i+1,2} - u_{i+1,0} + u_{i,2} - u_{i,0}) + U_{i+1}^2 - U_i^2 = 0 \quad (3.74)$$

Como $u_{i+1,0} = 0$, a equação (3.64) desenvolvida fornece

$$u_{i+1,1}^2 + u_{i+1,1} \left(2F_R - \frac{PO}{4} (u_{i+1,2} + u_{i,2} - u_{i,0}) \right) - F_R (u_{i+1,2} + u_{i,2} - 2u_{i,1} + u_{i,0}) + \frac{PO}{4} u_{i,1} (u_{i+1,2} + u_{i,2} - u_{i,0}) + U_{i+1}^2 - U_i^2 - u_{i,1}^2 = 0 \quad (3.75)$$

E, da mesma forma, como efetuado para os demais esquemas, obtém-se para $j = 1$ a equação algébrica de segundo grau $A u_{i+1,1}^2 + B u_{i+1,1} + C = 0$ da qual apenas a solução positiva ($u_{i+1,1} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$) é fisicamente consistente, e seus coeficientes valem

$$A = 1$$

$$B = 2F_R - \frac{PO}{4} (u_{i+1,2} + u_{i,2} - u_{i,0})$$

$$C = -F_R (u_{i+1,2} + u_{i,2} - 2u_{i,1} + u_{i,0}) + \frac{PO}{4} u_{i,1} (u_{i+1,2} + u_{i,2} - u_{i,0}) + U_{i+1}^2 - U_i^2 - u_{i,1}^2$$

Para $j > 1$ valem os mesmos coeficientes obtidos no esquema B5 para a continuidade de Blottner e de três níveis.

É importante lembrar que, no caso de problemas com descontinuidade na origem deve-se adotar $u_{i,0} = 1$, face à hipótese assumida para os termos $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ da equação do momentum.

3.9.2 Resultados e comentários sobre o esquema H2

O comportamento deste esquema face à variação de IL , conforme mostrado nas figuras 3.23 e 3.24 (continuidade 3 níveis e Blottner respectivamente) para uma faixa de $0 \leq IL \leq 4$ com $F_R = 0,09$, aponta para um valor ótimo de $IL = 3$, podendo se adiantar que para valores de IL superiores a 4, já dá-se início a um processo oscilatório que independe do valor do parâmetro F_R usado. Desta forma, os resultados e comentários aqui apresentados são feitos para $IL = 3$ (IL ótimo).

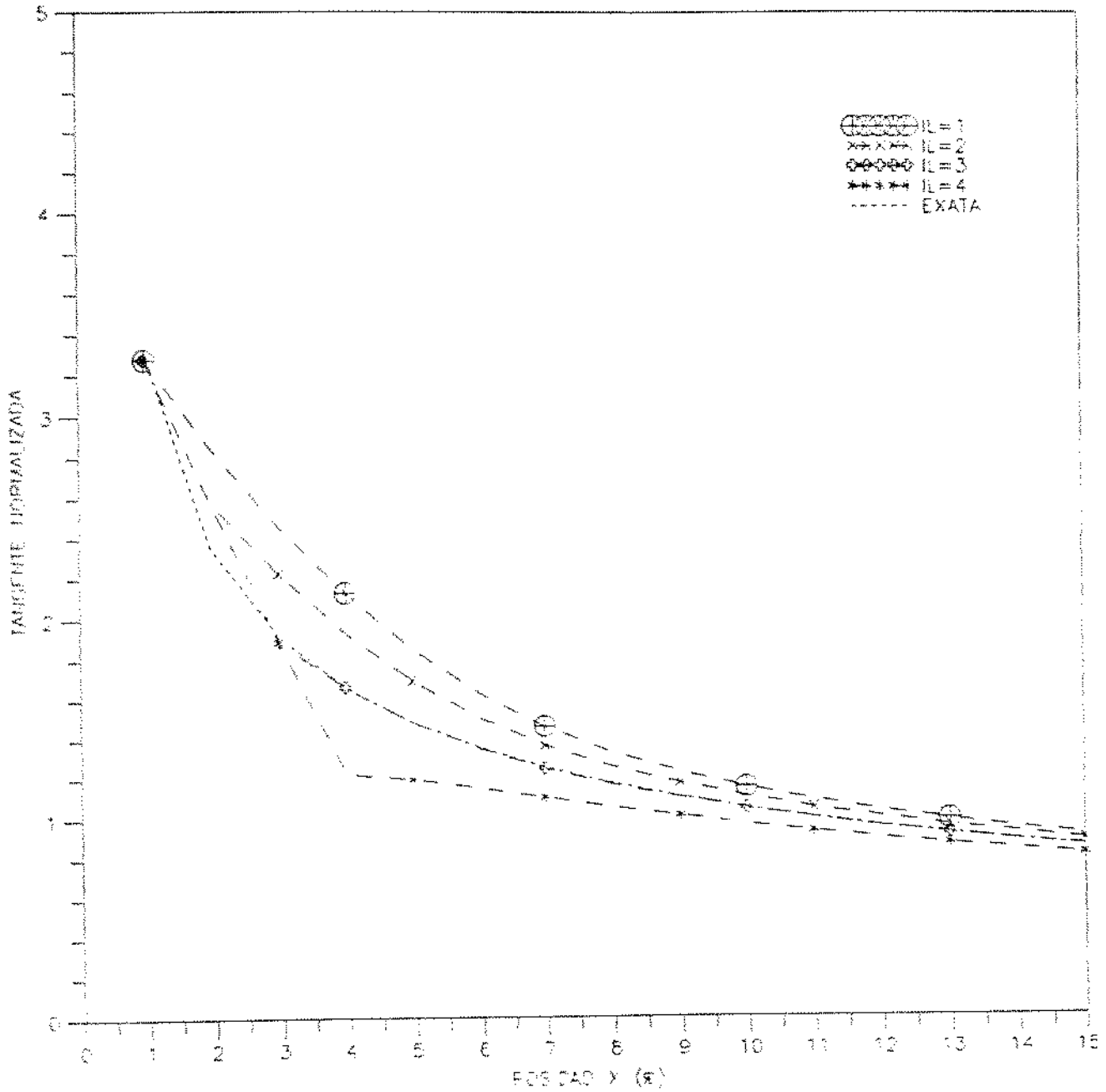


Figura 3.23: Comportamento de $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_u$ no esquema H2 (3 níveis) para alguns valores de IL .

.Estabilidade e oscilações

O esquema H2, a exemplo do esquema B5, também é incondicionalmente estável para ambos os métodos de resolução, iniciando, no entanto, mais precocemente seu comportamento oscilatório. Neste esquema o fenômeno se apresenta a partir de $F_R = 0,14$ para ambos os esquemas utilizados na discretização da equação da continuidade (3 níveis e Blottner).

A figura 3.25 comprova o comportamento oscilatório que surge com o aumento de IL para o esquema em questão, conforme comentado anteriormente. No caso, a curva apresentada emprega a continuidade de Blottner, tendo sido obtida para o caso extremo de $IL = 100$ a partir de um passo $\Delta\tau = 0,01$ e um valor de $F_R = 0,09$.

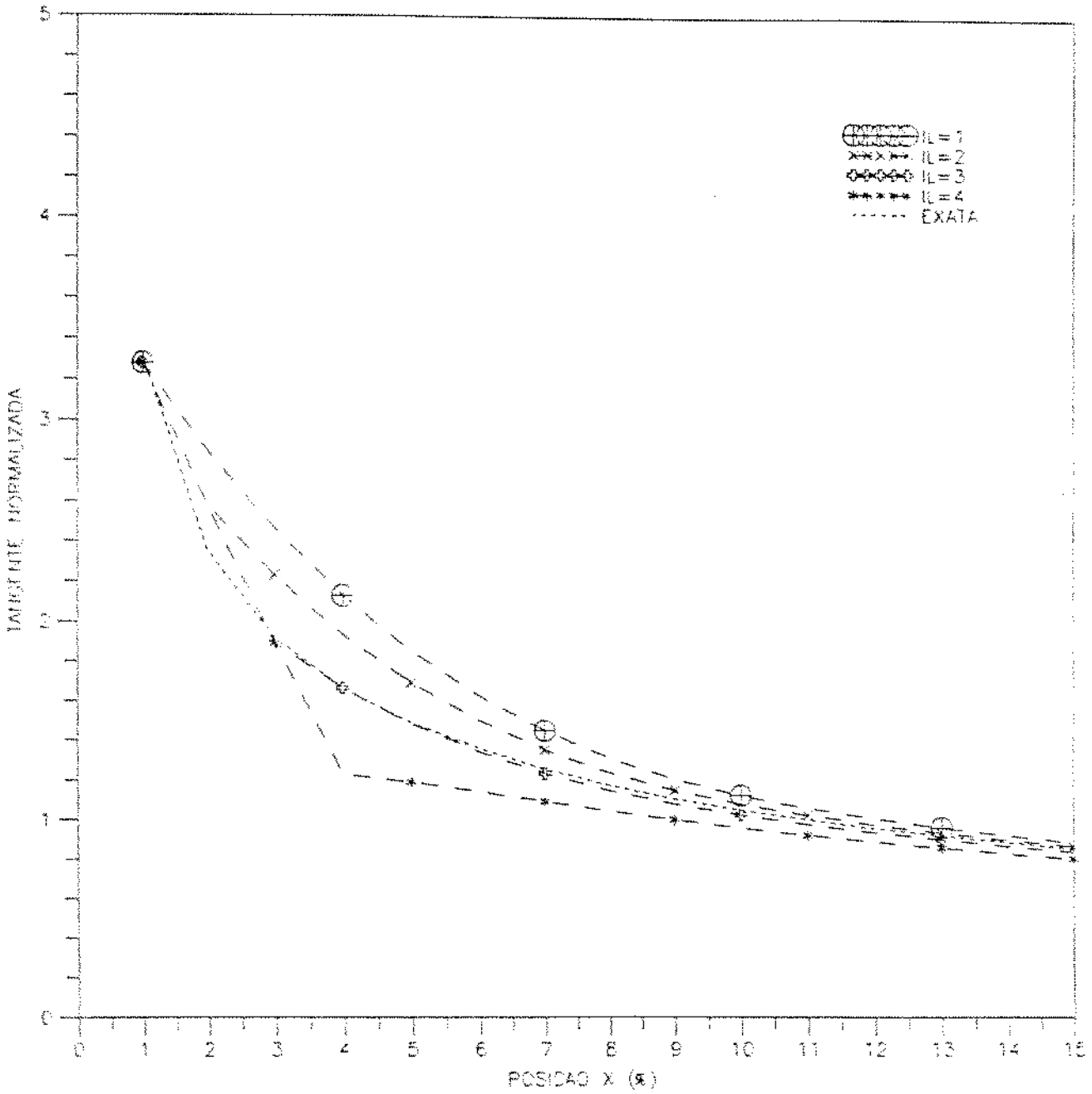


Figura 3.24: Comportamento de $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w$ no esquema H2 (Blottner) para alguns valores de IL .

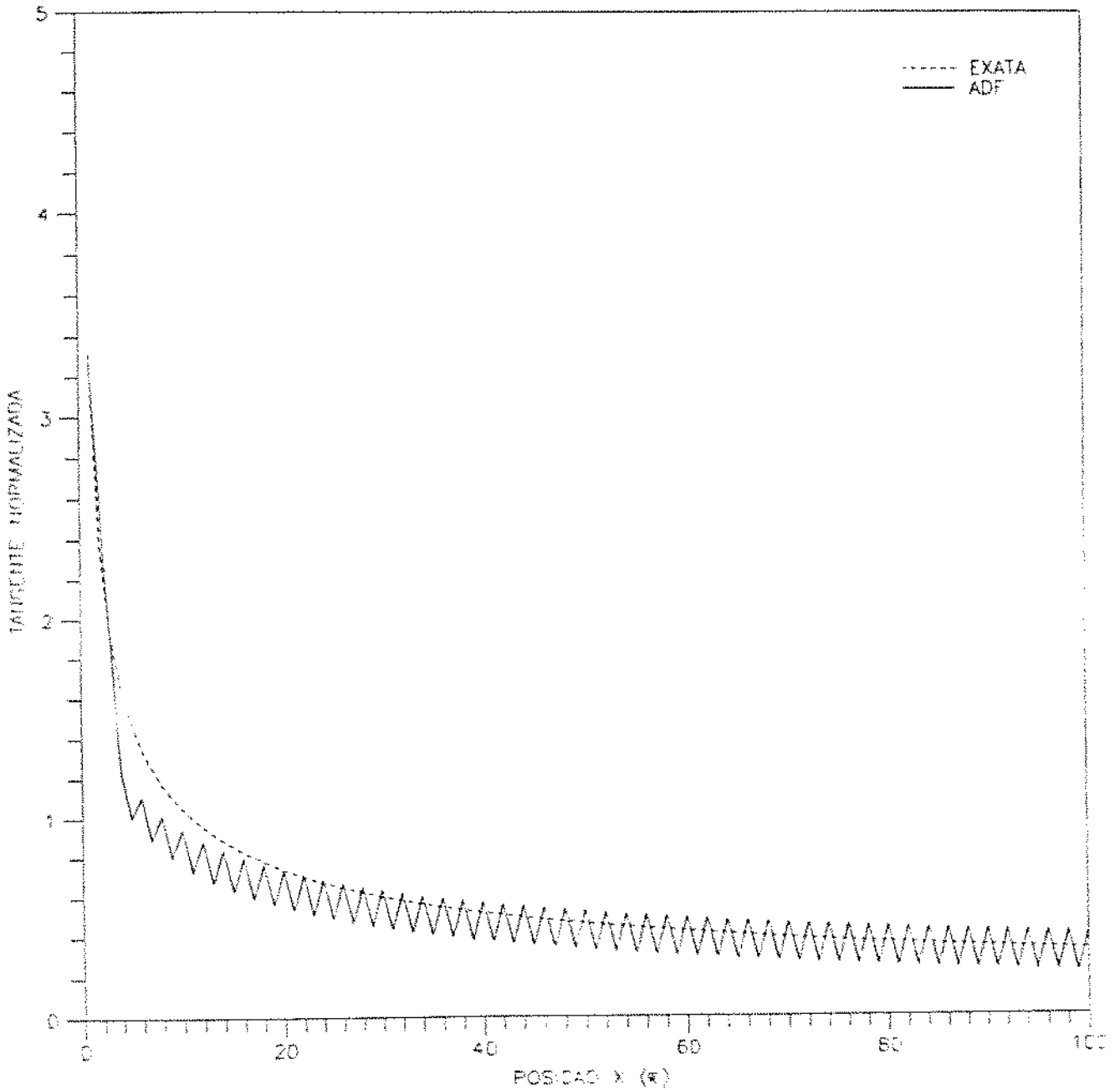


Figura 3.25: Comportamento oscilatório da tangente junto à parede devido ao alto valor de IL .

3.9.2.1 Faixa ótima de F_R

Conforme sugerido pelas figuras 3.26-a e b e 3.27-a e b (e tabelas B.8 e B.9 do apêndice B), este esquema fornece erros muito pequenos para valores baixos de F_R . Observa-se ainda que o esquema H2 apresenta dois patamares ótimos para utilização como peculiaridade.

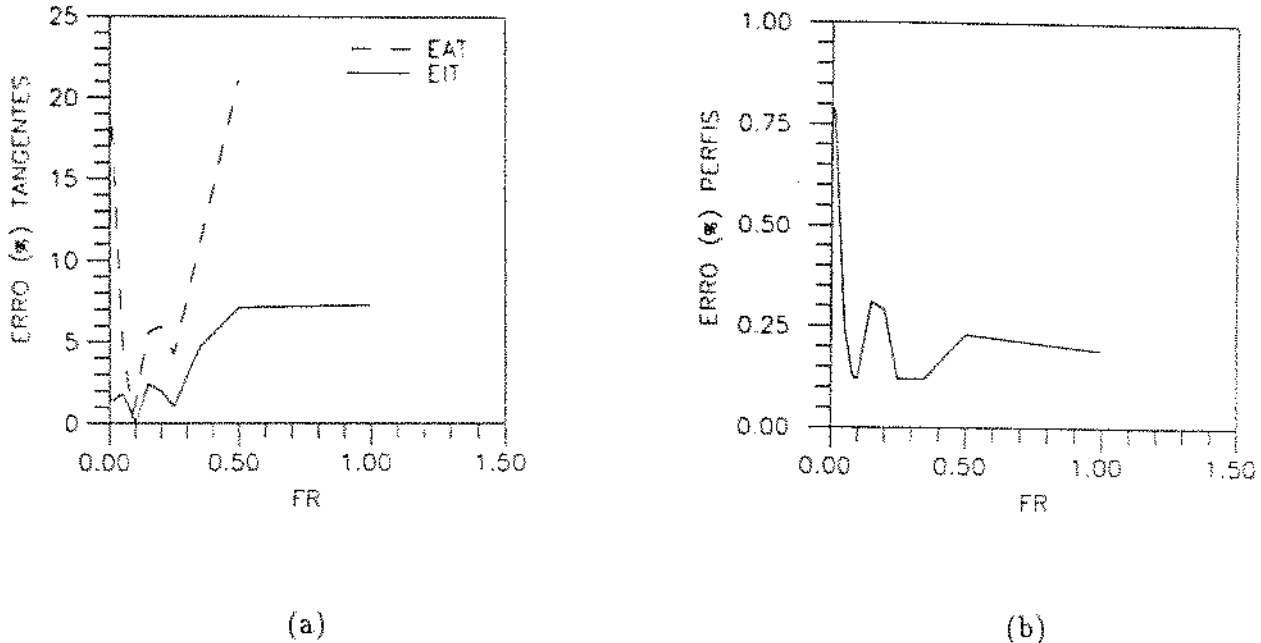
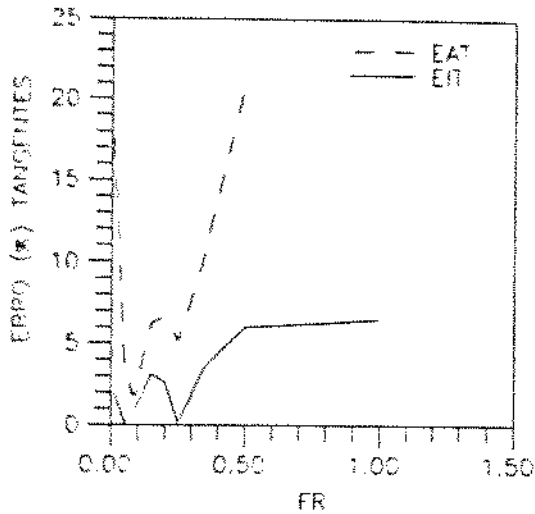


Figura 3.26: Comportamento dos erros com F_R para o esquema de 3 níveis: (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.

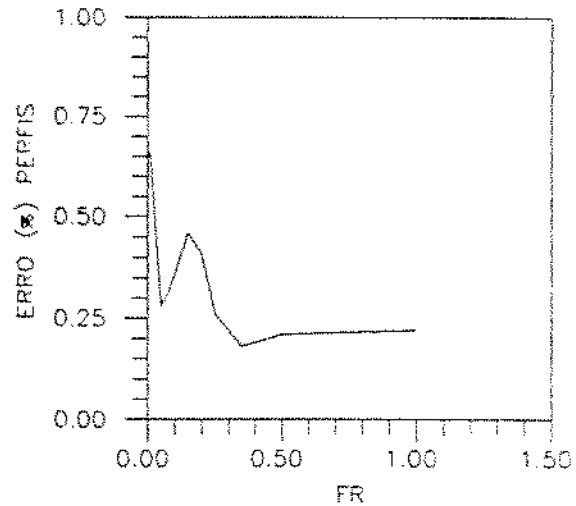
3.9.2.2 Comportamento dos erros com o refino da malha

As curvas de refino levantadas para uma malha de geometria $F_D = 0,01414$, ilustradas na figura 3.28-a, confirmam a boa acuidade inerente a este segundo esquema híbrido para as duas discretizações utilizadas para a equação da continuidade (3 níveis e Blottner). Como no esquema H1, pode-se observar que, apesar da introdução de alguns poucos termos de 1^a ordem, no início da placa, o esquema H2 mantém o comportamento de 2^a ordem, caracterizado pela curva de refino apresentada para F_D constante.

A figura 3.28-b mostra o comportamento do erro com o refino para um valor de F_R constante e igual a 0,09. O esquema de Blottner confirma sua superioridade acusando um nível inferior de erros.



(a)



(b)

Figura 3.27: Comportamento dos erros com FR para o esquema de Blottner: (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.

Para a malha mais fina ($\Delta x = 0,00125$) os erros na tangente e nos perfis atingem valores em torno de 0,13% e 0,02%, respectivamente, para o esquema de Blottner, ao passo que para o esquema de 3 níveis estes mesmos erros sobem para 0,88% e 0,09%, também respectivamente.

3.9.2.3 Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade

Como se percebe pela observação das figuras 3.29-a e b e 3.30-a e b, o esquema H2 com $IL = 3$ e $FR = 0,09$ fornece curvas muito próximas às exatas. Para estas condições o erro integral na tangente (EIT), que tem relação direta com a força de arrasto, é de 5,27 e 7,01% sendo o erro absoluto entre perfis (EAP) de 0,16 e 0,35%, respectivamente para a continuidade 3 níveis e de Blottner.

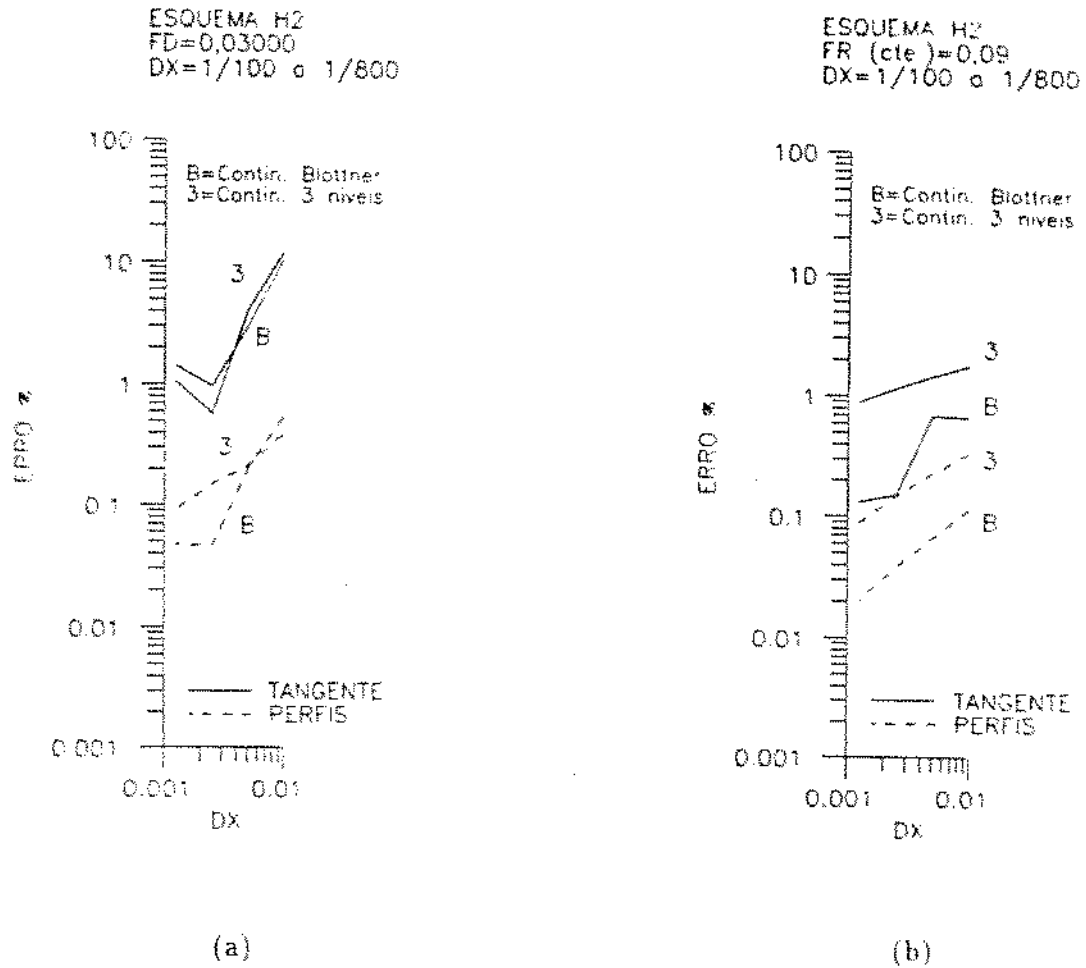
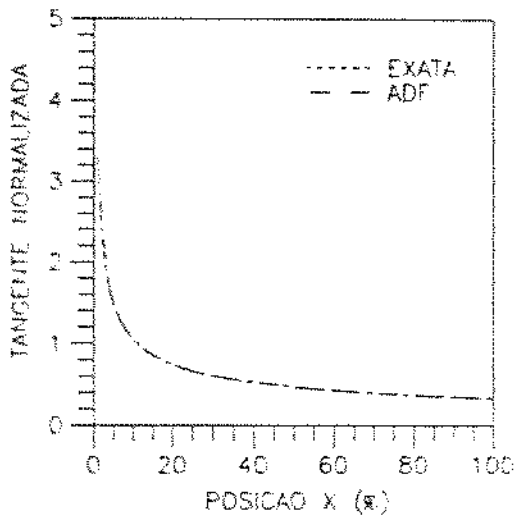
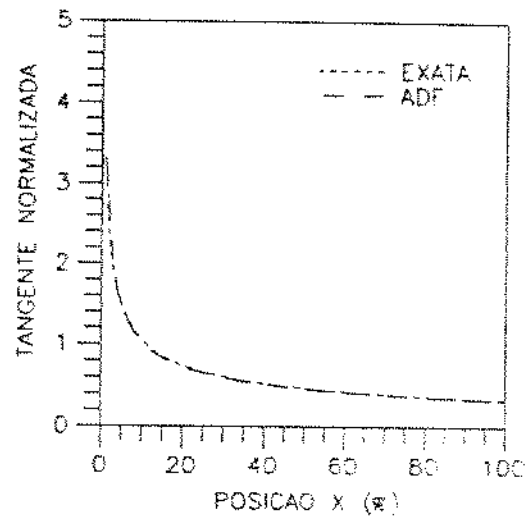


Figura 3.28: Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b): refino a F_R constante.

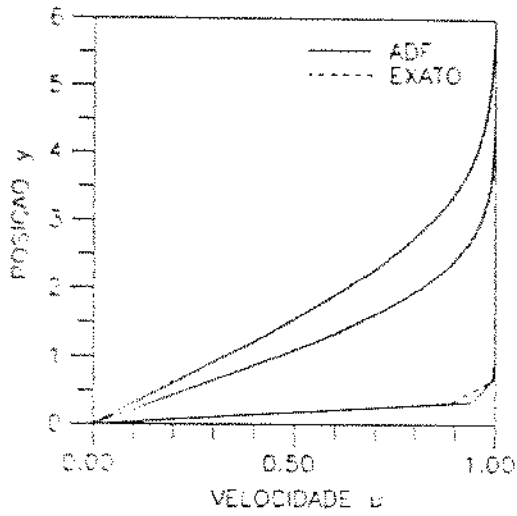


(a)

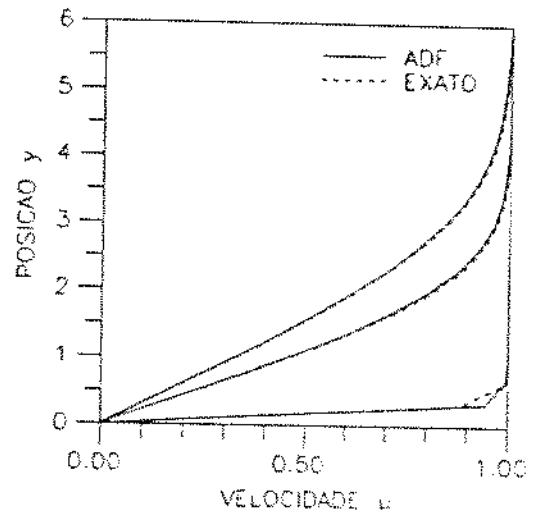


(b)

Figura 3.29: Tangente junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{u=0}$: (a) continuidade de três níveis; (b) continuidade de Blottner.



(a)



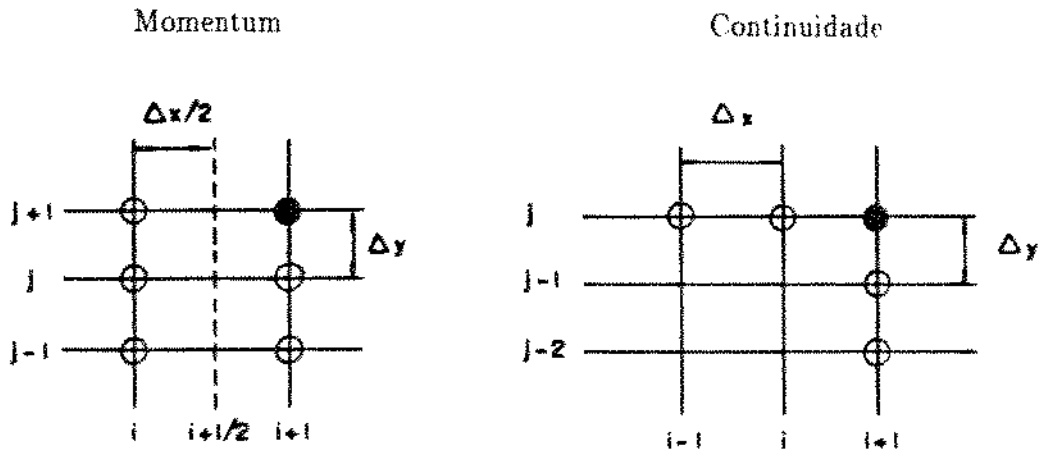
(b)

Figura 3.30: Perfis a 1%, 50% e 100%: (a) continuidade de três níveis; (b) continuidade de Blottner.

3.10 Esquema híbrido 3 (H3)

3.10.1 Desenvolvimento

3.10.1.1 Discretização do espaço - Moléculas



O último ADF avaliado origina-se da combinação de discretizações diferentes para cada uma das equações de governo. As combinações aqui utilizadas baseiam-se nas discretizações de maior acuidade obtidas para as equações do momentum e da continuidade (esquemas B4 e B5).

Das duas combinações possíveis, mostra-se incondicionalmente instável o esquema híbrido resultante da aplicação da discretização do momentum concebida no esquema B4 em combinação com a discretização da continuidade concebida para o esquema B5, restando a avaliação do esquema híbrido resultante da outra combinação possível; discretização do momentum do esquema B5 associada à discretização da continuidade do esquema B4 (ver moléculas). Este esquema é aqui tratado como *esquema híbrido 3*.

Ainda neste esquema, como nos esquemas híbridos anteriores (H1 e H2), avalia-se também o resultado da introdução de aproximação linear para o termo $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{j=1}$ à algumas (IL) colunas iniciais, conforme ilustrado na figura 3.31.

Desta forma pode-se dizer que o esquema H3 surge, na verdade, da combinação do momentum B5 com a continuidade H1.⁴

Toda esta gama de variedades permitida para este esquema, acaba por complicar bastante o desenvolvimento do algoritmo para o método de resolução ponto-a-ponto que, por medida de simplificação, não é aqui apresentado, sendo os resultados fornecidos a partir da resolução coluna-a-coluna, cujo programa (apêndice D) permite variações de diversas naturezas.⁵

⁴Este esquema apresenta uma natureza híbrida associada, tanto à combinação entre discretizações diferentes para as equações de governo, quanto ainda à combinação entre discretizações diferentes (linear e quadrática) para o termo $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1}$.

⁵Vale lembrar que os resultados são, no entanto, idênticos para os dois métodos de resolução.

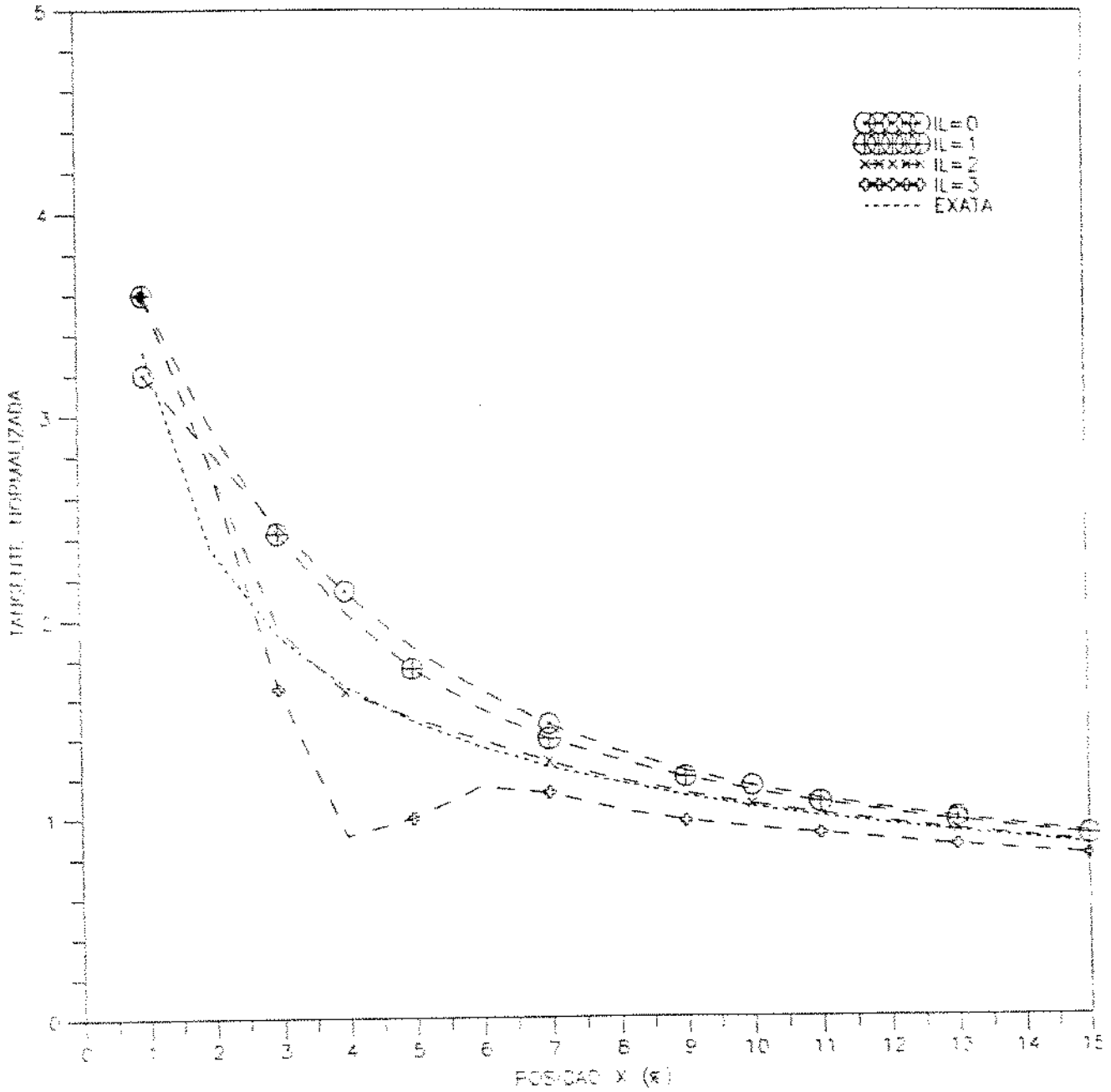


Figura 3.31: Comportamento de $\frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{w}$ no esquema H3 para alguns valores de IL .

3.10.2 Resultados e comentários sobre o esquema H3

O esquema H3 é, como pode ser constatado pela figura 3.31, apresenta um IL ótimo igual a 2. No entanto, devido ao bom desempenho mostrado quando de sua aplicação ao problema do cilindro circular, conforme apresentado em capítulos posteriores, são também apresentados os resultados referentes a $IL = 0$.

3.10.2.1 Estabilidade e oscilações

Para $IL = 2$ este esquema se comporta incondicionalmente estável, apresentando, no entanto, oscilações a partir de $F_R = 0,14$. Para o caso particular de $IL = 0$ acontece um retardamento no valor inicial de F_R para o qual o fenômeno se inicia, passando a $F_R = 0,40$.

Acima de um determinado valor de IL , este esquema apresenta limitações de F_R para estabilidade. Quando o valor de IL , por exemplo, é igual ao número de colunas da malha (caso particular de aplicação de aproximação linear a todas as colunas da primeira linha), a estabilidade se restringe à $F_R \approx 0,0045$, sem ocorrência de oscilações.

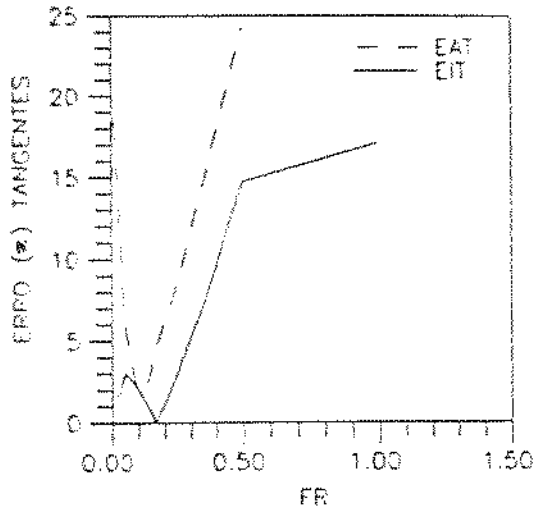
3.10.2.2 Faixa ótima de F_R

O comportamento dos erros porcentuais com a variação de F_R , apresentado para o IL ótimo nas figuras 3.32-a e b (ver também a tabela B.10 do apêndice B), indica estar sua faixa ótima situada em torno de $F_R = 0,11$ para o erro EAT . Os demais erros medidos (EIT e EAP) também situam-se em torno deste valor. Para $IL = 0$ (figuras 3.33-a e b e tabela B.11 do apêndice B) a faixa ótima de F_R apresenta-se bastante larga para os erros absolutos.

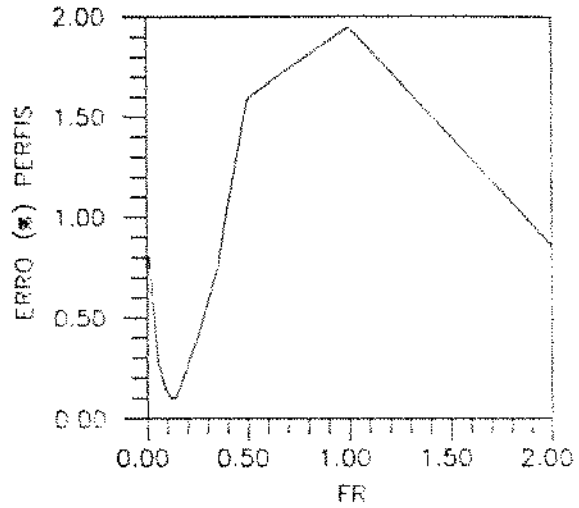
3.10.2.3 Comportamento dos erros com o refino da malha

As curvas de refino obtidas para malhas de geometria $F_D = 0,01414$, ilustrada na figura 3.34-a para ambos os valores de IL , confirmam o comportamento de 2ª ordem esperado para um ADF resultante da composição de dois outros ADF's de mesma ordem. Estas curvas comprovam a maior acuidade obtida na solução do problema de Blasius pelo emprego deste esquema com $IL = 2$.

A figura 3.34-b mostra o comportamento do erro com o refino para um valor de F_R constante e igual a 0,09 obtido para $IL = 2$, e de $F_R = 0,11$ para o caso de $IL = 0$. Também neste gráfico, constata-se a superioridade de $IL = 0$ traduzida por sua inclinação mais acentuada.



(a)

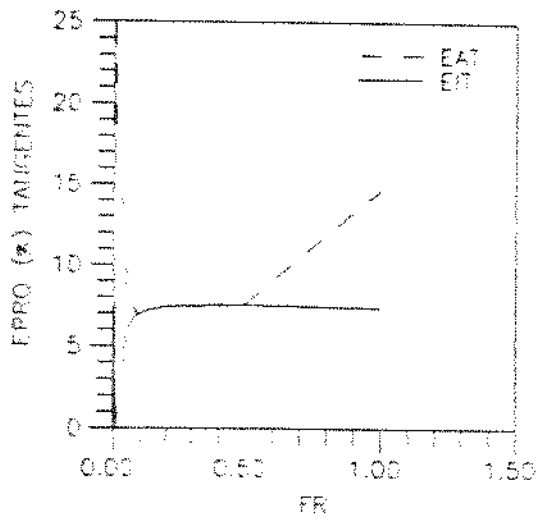


(b)

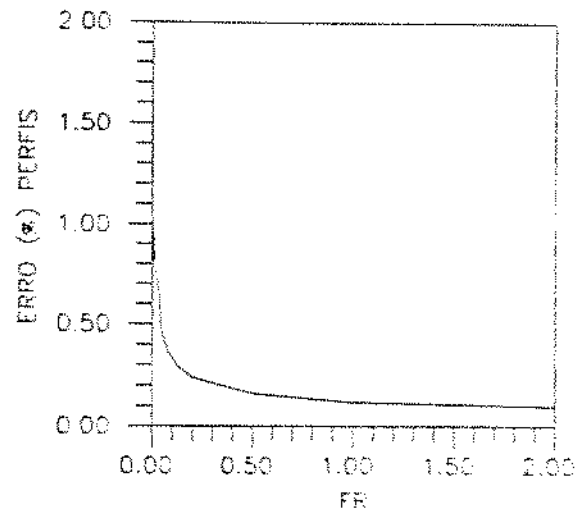
Figura 3.32: Comportamento dos erros com F_R para $IL = 2$: (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.

3.10.2.4 Resultados obtidos para a tangente e perfis de velocidade

As curvas ilustradas nas figuras 3.35-a e b e 3.36-a e b, obtidas para u'a malha de passo $\Delta z = 0,01$ com $F_R = 0,09$ para $IL = 2$ e $F_R = 0,11$ para $IL = 0$, mostram que o primeiro caso fornece curvas mais precisas para a solução do problema de Blasius.



(a)



(b)

Fig. ra 3.33: Comportamento dos erros com F_R para $IL = 0$: (a) erro na tangente; (b) erro nos perfis.

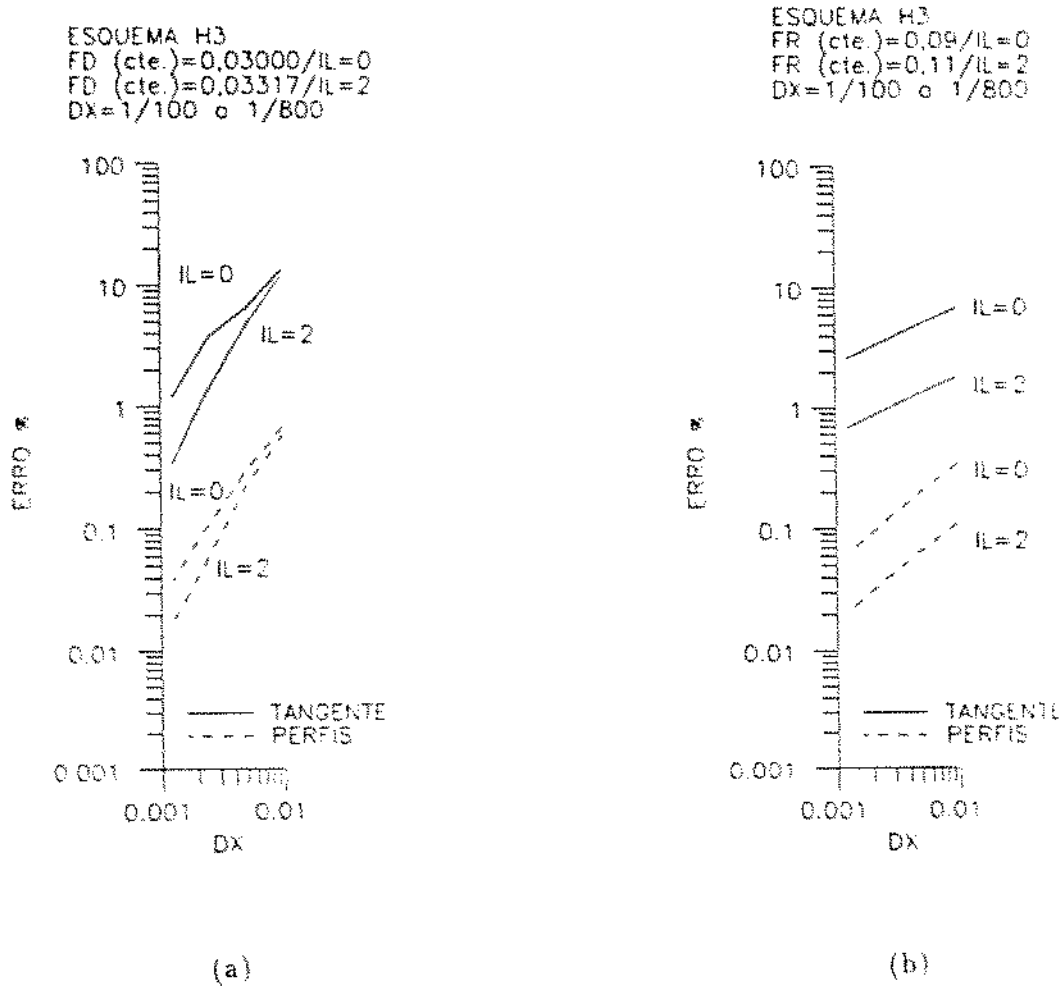
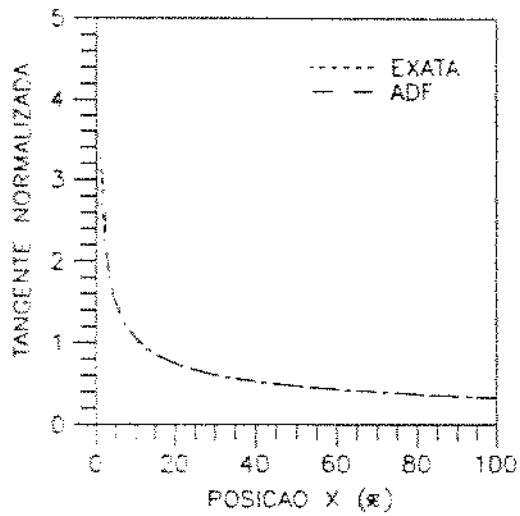
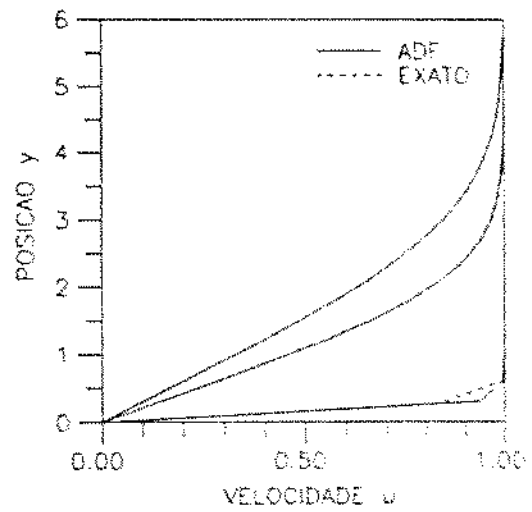


Figura 3.34: Comportamento do erro com o refino da malha: (a) refino a F_D constante; (b) refino a F_R constante.

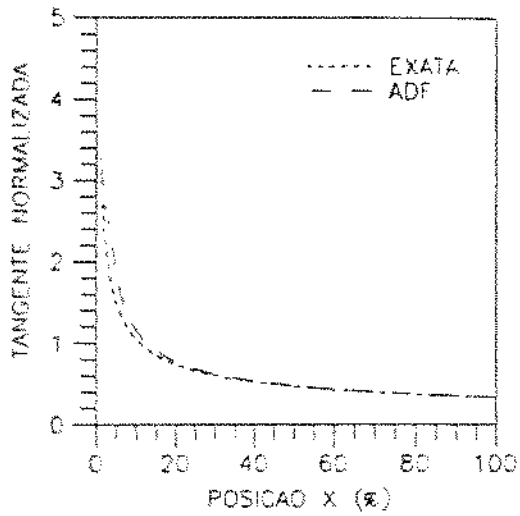


(a)

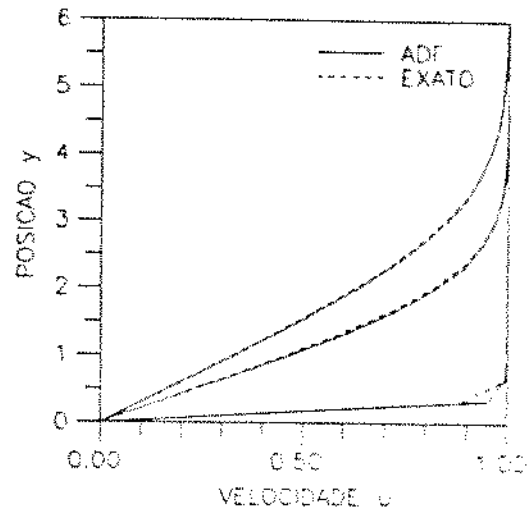


(b)

Figura 3.35: Resultados obtidos com $IL = 2$: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.



(a)



(b)

Figura 3.36: Resultados obtidos com $IL = 0$: (a) tangente junto à parede $\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)_w$; (b) perfis a 1%, 50% e 100%.

3.11 Avaliação global dos ADF's na resolução do problema de Blasius

Uma idéia comparativa entre o desempenho dos diversos algoritmos abordados na solução do problema de Blasius é fornecida na figura 3.37, onde são suprimidos os esquemas que utilizam a continuidade de 3 níveis de forma a evitar um maior congestionamento das curvas, e mesmo porque a continuidade de Blottner se mostra mais simples e mais acurada. Por este último motivo nos problemas abordados a posteriori tal supressão é mantida.

Esta figura reúne as curvas que foram apresentadas isoladamente no decorrer do desenvolvimento de cada ADF, dando ênfase ao comportamento nas proximidades da descontinuidade (apenas os 10% iniciais do domínio são mostrados), uma vez que para a porção restante da placa a maioria dos esquemas é bastante acurada. Assim, como a malha não é muito fina ($\Delta x = \frac{1}{100}$), os resultados são apresentados de maneira puntual.

Conforme se constata, dentre os esquemas mais acurados para o problema de Blasius destacam-se os esquemas híbridos H1, H2 e H3 com $IL = 2$, sendo que o H2 é o que mais se aproxima da curva exata no ponto inicial (coluna 1).

É interessante observar ainda que as curvas dos esquemas de 1ª ordem situam-se abaixo da curva exata, ao passo que as dos esquemas de 2ª ordem situam-se acima desta.

3.12 Otimização dos algoritmos

Esta seção relata algumas melhorias inerentes aos programas computacionais apresentados no apêndice D, voltadas à redução de armazenamento de dados e de tempo computacional.

3.12.1 Sobre o perfil inicial assumido para as primeiras iterações da resolução coluna-a-coluna

Conforme comprovado a posteriori, os perfis iniciais $u(y)$ e $v(y)$ adotados para dar partida ao processo iterativo de cada coluna exercem influência muito forte sobre a convergência. Para a primeira coluna, é usual adotar-se como perfis de partida os perfis da corrente livre (para o problema de Blasius por exemplo: $u(y) = 1$ e $v(y) = 0$). Já para as demais colunas, o usual é adotá-los como sendo iguais aos perfis convergidos da coluna anterior.

Uma forma aqui encontrada para acelerar a convergência consiste na aplicação de uma extrapolação quadrática para os perfis iniciais conforme desenvolvido na seqüência.

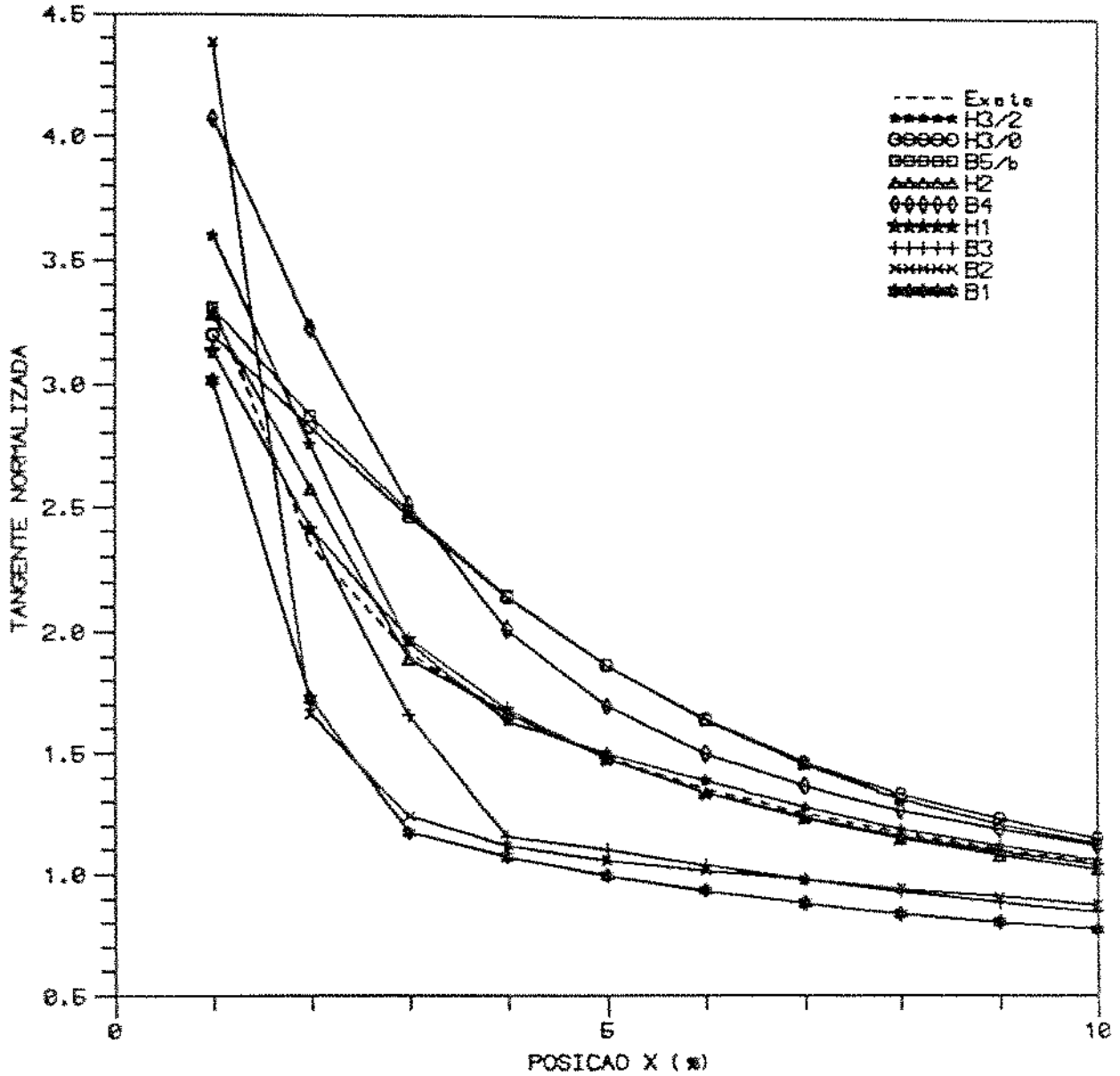


Figura 3.37: Comparação entre os valores da tangente junto à parede $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{|w}$ obtidos para os diversos esquemas.

Pela aplicação de discretização de 3 níveis ao termo $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{i+1,j}$, tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{i+1,j} = \frac{3u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}[\Delta x^2] \quad (3.76)$$

Por outro lado, tem-se para a mesma derivada, pelo emprego de discretização central

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{i+1,j} = \frac{u_{i+2,j} - u_{i,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}[\Delta x^2] \quad (3.77)$$

Desprezando os erros e igualando (3.76) a (3.77), tem-se finalmente o perfil de partida para a próxima coluna

$$u_{i+2,j} = 3(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + u_{i-1,j} \quad (3.78)$$

O perfil inicial $v(y)$ é imediatamente obtido pela aplicação da equação da continuidade sobre o perfil $u(y)$ recém-calculado. Vale lembrar que, como são necessários três pontos para se conseguir uma extrapolação de 2ª ordem, para a segunda coluna ainda se convive com uma extrapolação linear.

Como conseqüência da implementação deste procedimento, advém uma redução substancial do número de iterações requerido para a convergência de cada coluna em se comparando com aquele que consiste apenas na repetição do perfil da coluna anterior. A figura 3.38 demonstra esta aceleração através de um exemplo aplicado na solução do problema de Blasius com o esquema B4 para um valor de $F_R = 1.0$ com passo de $\Delta x = \frac{1}{100}$.

Vale salientar que, conforme sugerido pelo comportamento desta curva, conforme o número de colunas aumenta (malhas mais refinadas), a partir de uma determinada coluna a convergência passa a se dar em apenas uma iteração, significando uma redução considerável de tempo.

3.12.2 O controle do crescimento da camada limite

O procedimento usual na resolução de problemas de camada limite por diferenças finitas é a divisão do espaço discretizado através de u'ia malha com um número pré-determinado de pontos nas direções x e y . Este procedimento implica num gasto adicional de tempo pela computação desnecessária de pontos que já se encontram fora da camada limite (região do escoamento externo). Neste caso também

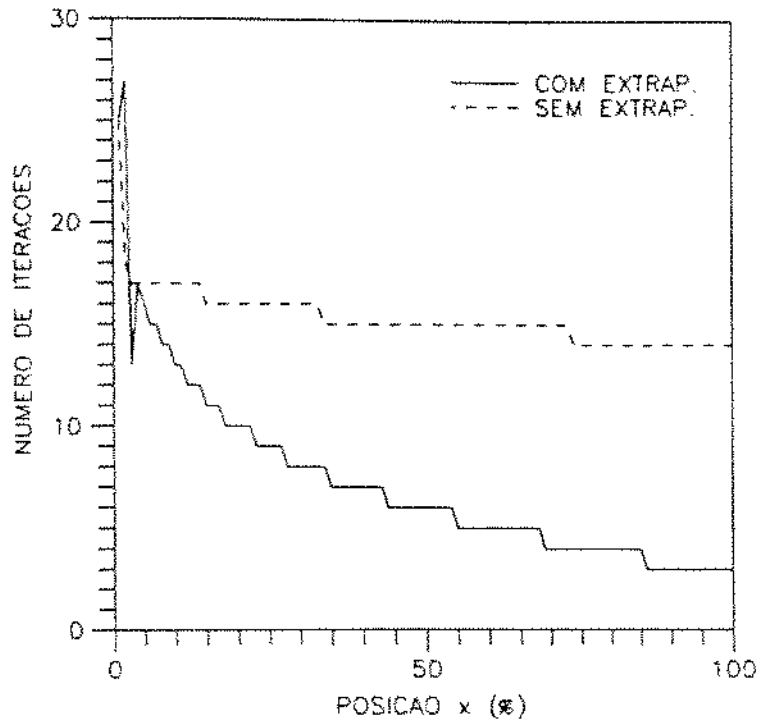


Figura 3.38: Aceleração de convergência conseguida pelo uso de perfis iniciais obtidos por extrapolações quadráticas.

torna-se necessário que se preveja a espessura da camada limite no final do domínio, o que a princípio nem mesmo se conhece, para que se possa estipular o número mínimo de linhas da malha.

Para contornar estes problemas os programas computacionais elaborados para o presente trabalho são providos de mecanismos que controlam a variação da espessura da camada limite a cada iteração de cada coluna.

Comentários de ordem geral a respeito dos programas computacionais e suas respectivas listagens são fornecidos no apêndice D.

3.13 Sobre o acoplamento das equações de governo na aceleração da convergência

Através das curvas apresentadas na figura 3.39, resultantes da aplicação do esquema B2 na solução do problema de Blasius com $F_R = 0,10$ e $\Delta\tau = \frac{1}{160}$, pode-se ver a redução do número de iterações

viabilizada pelo acoplamento das equações de governo permitida pelo método de resolução ponto-a-ponto.

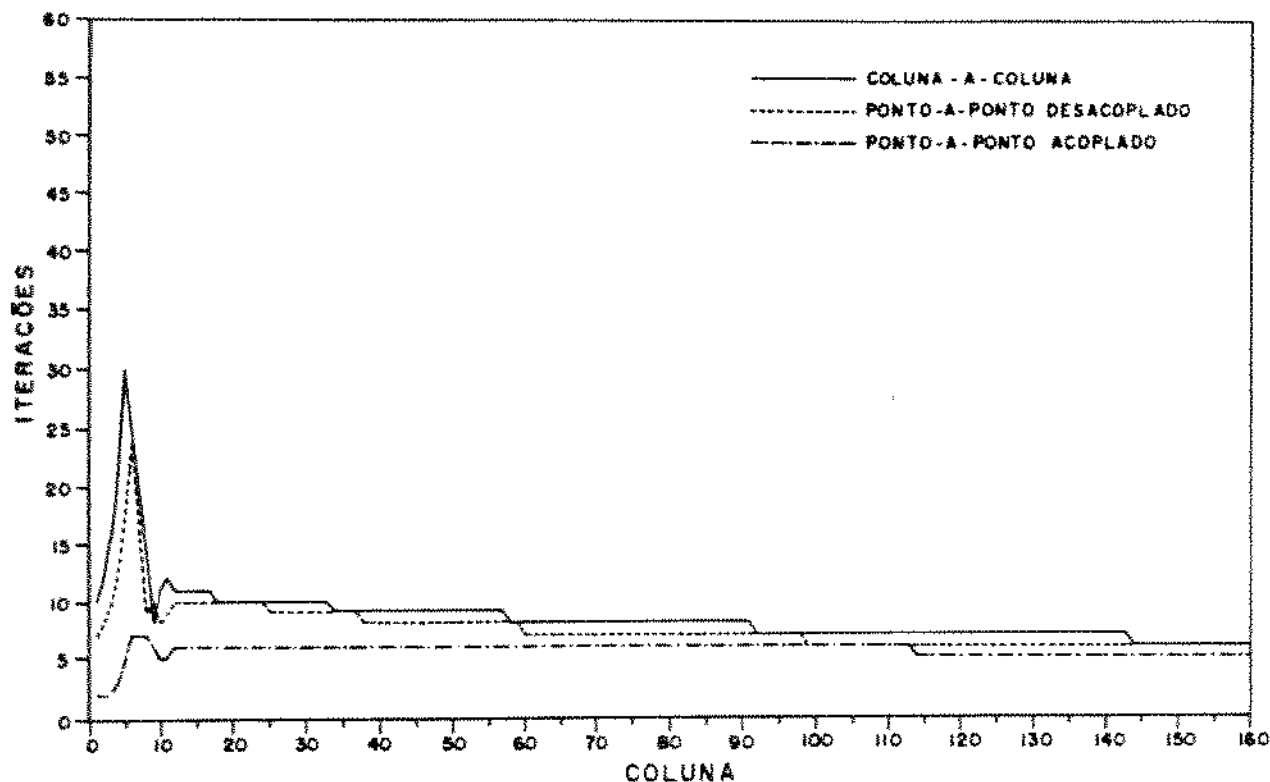


Figura 3.39: Influência do acoplamento na aceleração da convergência.

Apesar do método de solução ponto-a-ponto envolver uma lógica bastante simples e de convergir em poucas iterações, ele requer um maior tempo computacional, o que, dentre outros fatores, pode-se atribuir também à operação de radiciação envolvida na resolução dos sistemas de equações. Por isto é muito importante a proposta delineada no apêndice A na busca da redução do tempo empregado para a resolução dos sistemas de equações.

Outros prováveis fatores que contribuem para este aumento do tempo de CPU devem ser também investigados por ocasião de outros trabalhos nesta linha.

Nota: Vale ressaltar que em nenhum dos três métodos contemplados na figura 3.39 foram usadas extrapolações para obtenção dos perfis iniciais.

Capítulo 4

Aplicações dos ADF's a problemas não-similares

4.1 Apresentação

Uma vez desenvolvidos os ADF's, parte-se para a aplicação, daqueles que se mostraram mais acurados no problema de Blasius, aos dois problemas sem solução similar; o escoamento sobre um corpo cilíndrico circular sujeito ao escoamento potencial e ao escoamento real e o escoamento linearmente retardado sobre uma placa plana, mais conhecido como *problema de Howarth*.¹

Nesta instância de aplicação, os ADF's de 1^a ordem (esquemas B1, B2 e B3) são excluídos, restringindo-se ainda à utilização do método de resolução coluna-a-coluna, o qual até então, mostrou-se mais eficiente em matéria de esforço computacional (conforme comentado mais detalhadamente no capítulo 5). Para os esquemas B5 e H2 aplica-se apenas a discretização da equação da continuidade na forma sugerida por Blottner, devido à superioridade apresentada em relação à de três níveis na abordagem do problema de Blasius.

¹Para o problema de Howarth aplicou-se o valor de 0,125 para o coeficiente b_1 , que é o caso mais investigado na literatura.

4.1.1 O comportamento dos ADF's nas proximidades do ponto de separação

Em se tratando de problemas que abordam o fenômeno de separação da camada limite, algumas alterações são feitas neste sentido de forma a viabilizar o emprego do programa computacional elaborado para os ADF's. Face aos argumentos expostos em 1.2, conclui-se que quando a condição de contra-fluxo é atingida os algoritmos não mais conseguem convergência, a menos que adaptações sejam utilizadas para contornar esta situação tais como a implementação de métodos inversos de diferenças finitas que possibilitam o tratamento da região de contra-fluxo, conforme explanado no cap.7 da referência [20]. Como tais adaptações não são aqui visadas, o dispositivo empregado para indicar a proximidade do ponto de separação é o controle do número de iterações (denominado de *NIT* nos programas). Desta forma, baseado no comportamento normal (aproximadamente exponencial) deste número (até próximo ao ponto de separação), estipulou-se que quando ele atinge um valor de 1500 iterações o programa deve parar de rodar. Desta forma os resultados apresentados para o ponto de separação são valores aproximados que, na verdade, correspondem à posição da última coluna convergida.² Para a obtenção de valores mais precisos seria necessário um refino muito alto da malha, uma vez que neste trabalho não se prevê a aplicação de nenhum artifício de extrapolação para a obtenção do valor "exato".

4.1.2 Sobre as diferenças surgidas face à mudança da geometria

Quanto aos sistemas de coordenadas utilizados, pode-se dizer que, para os problemas de Howarth e de Blasius (que envolvem uma geometria plana), o sistema é o cartesiano e para o caso do cilindro circular emprega-se um sistema de eixos ortogonais que acompanha a superfície. Para efeitos de programação, entretanto, não há diferenças.

No que concerne à normalização, pode-se adiantar que para o problema do cilindro circular a única alteração necessária em relação à normalização desenvolvida para os outros problemas, é a troca do comprimento característico L da placa, para o raio R do cilindro. Esta mudança também não implica em nenhuma alteração no programa.

Assim, pode-se dizer que, as únicas alterações necessárias para rodar todos os casos abordados, inclusive o problema de Blasius que constitui um caso particular de Howarth no qual $b_1 = 0$, consistem na readequação das condições de contorno.

²Para a maioria dos esquemas a divergência ocorre antes da região de contra-fluxo ser atingida.

4.2 Apresentação dos resultados obtidos pela aplicação dos ADF's a problemas não-similares

Esta seção se limita a apresentar os resultados obtidos pela aplicação dos ADF's aos problemas não-similares, sendo a avaliação dos resultados comentada na seção seguinte.

4.2.1 Apresentação dos resultados obtidos para o problema do cilindro circular sujeito ao escoamento potencial

Para o cilindro circular sujeito ao escoamento potencial, o valor aqui utilizado para comparação dos valores obtidos para o ponto de separação é o de Terril [7], que vale $x_s = 1,822983$ ($104,449232^\circ$). A tabela 4.1 apresenta os valores obtidos pelos ADF's e seus respectivos erros percentuais para o ponto de separação, em confronto com este valor "exato". Estes valores foram obtidos a partir de u'a malha de passo $\Delta x = \frac{1}{1257}$ mantidos os respectivos valores ótimos de F_R obtidos para o problema de Blasius. Nos esquemas H1 e H2 são também mantidos os IL ótimos obtidos para o problema de Blasius.

	Terril	Esq. B4	Esq. H1	Esq. B5/B	Esq. H2/B	Esq. H3/2	Esq. H3/0
x_s	1,822983	1,819	1,824	1,824	1,824	1,829	1,829
Erro %	0,00	-0,06	+0,09	+0,09	+0,09	+0,33	+0,33
F_R	-	3,0	0,1	0,09	0,09	0,11	0,09

Tabela 4.1: Resultados obtidos para o ponto de separação do problema do cilindro circular sob escoamento potencial.

Os demais valores investigados: tangente junto à parede, perfis de velocidade, espessura de deslocamento e espessura do momentum são comparados aos obtidos por Terril [7] e Schönauer [24] e são mostrados na tabela 4.2 e sintetizados na figura 4.1. Estes resultados, fornecidos pelos ADF's, foram obtidos pela utilização dos mesmos parâmetros utilizados na obtenção do ponto de separação.

z_s	Valor	Método							
		B4	H1	B5/b	H2/b	H3/2	H3/2	Terril	Schönauer
0.10	T	0,350980	0,367981	0,368820	0,368820	0,366473	0,368487	-	-
	δ	0,459172	0,462908	0,462349	0,462349	0,462573	0,463316	-	-
	θ	0,207187	0,209843	0,209605	0,209605	0,209602	0,210137	-	-
0.30	T	1,019934	1,068189	1,071797	1,071797	1,065047	1,070896	1,0095	1,009466
	δ	0,466489	0,470107	0,469589	0,469589	0,469781	0,470503	0,4663	0,465771
	θ	0,210231	0,212828	0,212612	0,212612	0,212591	0,213116	0,2101	0,209586
0.50	T	1,592700	1,664961	1,670603	1,670603	1,660594	1,669415	1,5768	1,576848
	δ	0,481834	0,485211	0,484783	0,484783	0,484902	0,485583	0,4818	0,481186
	θ	0,216570	0,219050	0,218882	0,218882	0,218823	0,219326	0,2164	0,215950
0.80	T	2,154542	2,241683	2,248247	2,248247	2,236719	2,247483	2,1355	2,134850
	δ	0,526552	0,526391	0,526391	0,526301	0,526858	0,463316	0,5238	0,523259
	θ	0,233611	0,235788	0,235756	0,235756	0,235586	0,236033	0,2336	0,232992
1.00	T	2,274602	2,355550	2,360985	2,360985	2,351087	2,361216	2,2568	2,255953
	δ	0,569737	0,571742	0,571904	0,571904	0,571550	0,571975	0,5697	0,569292
	θ	0,251699	0,253571	0,253694	0,253694	0,253395	0,253785	0,2517	0,251094
1.20	T	2,166496	2,229452	2,232334	2,232334	2,226114	2,234187	2,1527	2,151302
	δ	0,638457	0,639359	0,640068	0,640068	0,639260	0,639480	0,6386	0,638305
	θ	0,277663	0,279115	0,279479	0,279479	0,278975	0,279285	0,2777	0,277115
1.50	T	1,565900	1,587423	1,584059	1,584059	1,586449	1,589726	1,5613	1,558463
	δ	0,825668	0,823128	0,825745	0,825745	0,823317	0,822894	0,8263	0,826537
	θ	0,341142	0,341596	0,342653	0,342653	0,341539	0,341660	0,3413	0,340755
1.60	T	1,244675	1,251443	1,245261	1,245261	1,251253	1,252864	1,2434	1,239982
	δ	0,935394	0,930326	0,934403	0,934403	0,930723	0,929827	0,9368	0,937058
	θ	0,207187	0,209843	0,209605	0,209605	0,209602	0,210137	0,3734	0,372857
1.70	T	0,847431	0,841365	0,831459	0,831459	0,841799	0,842083	-	0,845417
	δ	0,459172	0,462908	0,462349	0,462349	0,462573	0,463316	-	1,104713
	θ	0,207187	0,209843	0,209605	0,209605	0,209602	0,210137	-	0,413940
1.80	T	0,293474	0,287542	0,268155	0,268155	0,287932	0,289056	0,2967	0,295571
	δ	1,433022	1,401739	1,419763	1,419763	1,403810	1,398273	1,4373	1,438892
	θ	0,4682667	0,466207	0,469421	0,469421	0,466267	0,465916	0,4687	0,467963
z_s	T	0,350980	0,367981	0,368820	0,368820	0,366473	0,368487		
	δ	0,459172	0,462908	0,462349	0,462349	0,462573	0,463316	"	"
	θ	0,207187	0,209843	0,209605	0,209605	0,209602	0,210137		

Tabela 4.2: Quadro comparativo dos resultados obtidos para o problema do cilindro circular sob escoamento potencial.

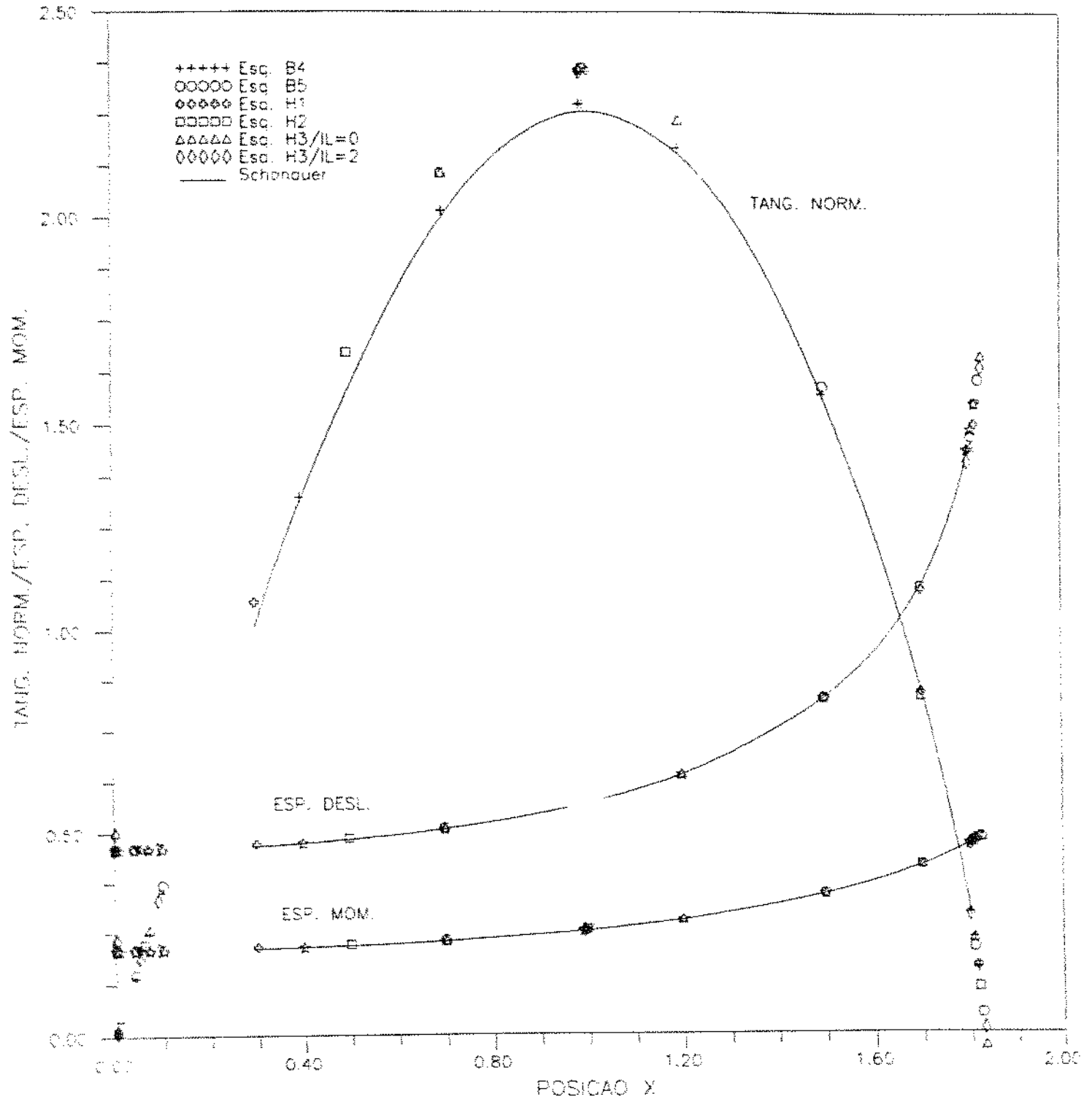


Figura 4.1: Resultados sintetizados do problema do cilindro potencial.

4.2.2 Apresentação dos resultados obtidos para o problema do cilindro circular sujeito ao escoamento real

Para o cilindro circular sujeito ao escoamento real, somente é avaliado o ponto de separação, uma vez que não se dispõe dos demais valores comparados nos demais problemas. Desta forma, o valor usado para comparação com aqueles obtidos pelos ADF's para o ponto de separação é o de Smith & Clutter [3], que vale $\alpha_s = 1,396$ ($80,0^\circ$). A tabela 4.3 apresenta os valores obtidos pelos ADF's e seus respectivos erros percentuais para o ponto de separação, em confronto com este valor "exato". Estes valores foram obtidos, a partir de u'a malha de passo $\Delta x = \frac{1}{1257}$ mantidos os respectivos valores ótimos de F_R obtidos para o problema de Blasius.³

	Terril	Esq. B4	Esq. H1	Esq. B5/B	Esq. H2/B	Esq. H3/2	Esq. H3/0
α_s	1,396	1,387	1,390	1,390	1,390	1,395	1,395
Erro %	0,00	-0,64	-0,43	-0,43	-0,43	-0,07	-0,07
F_R	-	3,0	0,1	0,09	0,09	0,11	0,09

Tabela 4.3: Resultados obtidos para o ponto de separação do problema do cilindro circular sob escoamento real.

³Nos esquemas H1 e H2 são também mantidos os IL ótimos obtidos para o problema de Blasius.

4.2.3 Apresentação dos resultados obtidos para o problema de Howarth

Conforme a tabela 2.4 (cap.2) extraída do compêndio de White [2], o valor assumido como "exato" (erro=0%) por este autor para o ponto de separação do problema de Howarth é o de Wippermamm [50], que vale $x_s^* = 0,119863$, ou seja, $x_s = 0,958904$. A tabela 4.4 fornece os resultados obtidos pelos ADF's e seus respectivos erros porcentuais para o ponto de separação, em confronto com este valor "exato". Estes valores são apresentados para u'a malha de passo $\Delta x = \frac{1}{1000}$, mantidos os respectivos valores ótimos de F_R obtidos para o problema de Blasius. Nos esquemas H1 e H2 são também mantidos os IL ótimos obtidos para o problema de Blasius.

	Wippermamm	Esq. B4	Esq. H1	Esq. B5/B	Esq. H2/B	Esq. H3/2	Esq. H3/0
x_s	0.958904	0.956	0.958	0.960	0.959	0.964	0.965
Erro %	0.00	-0,30	-0,09	+0,11	+0,01	+0,53	+0,64
F_R	-	3,0	0,1	0,09	0,09	0,11	0,09

Tabela 4.4: Resultados obtidos para o ponto de separação do problema de Howarth.

Os demais valores investigados; tangente junto à parede, perfis de velocidade, espessura de deslocamento e espessura do momentum, são comparados aos obtidos por Howarth [31] e Schönauer [24], face à dificuldade de obtenção destes valores da tese de Wippermamm, e são mostrados na tabela 4.5 e sintetizados na figura 4.2. Estes resultados fornecidos pelos ADF's foram obtidos com os mesmos parâmetros utilizados para obtenção do ponto de separação.

z	Valor	Método							
		B4	H1	B5/B	H2/B	H3/2	H3/0	Howarth	Schönauer
0.10	T	0.961694	0.965008	0.963482	0.954618	0.967932	0.976814	0.968	-
	δ	0.566425	0.564738	0.565328	0.570091	0.562524	0.558039	-	-
	θ	0.216037	0.216944	0.217062	0.218779	0.215662	0.214347	-	-
0.20	T	0.623322	0.622852	0.621141	0.617897	0.614203	0.627446	0.627	0.6271
	δ	0.827835	0.826035	0.826358	0.830113	0.823037	0.819405	0.826	0.8228
	θ	0.312647	0.311829	0.311115	0.312480	0.309744	0.308667	0.311	0.3086
0.30	T	0.460599	0.459104	0.477796	0.455949	0.460127	0.461711	0.463	-
	δ	1.052667	1.050688	1.049908	1.052965	1.045882	1.042764	-	-
	θ	0.389501	0.389906	0.388002	0.388856	0.386270	0.385540	-	-
0.40	T	0.355592	0.353679	0.352694	0.351426	0.354631	0.355608	0.357	0.3578
	δ	1.266859	1.264615	1.262014	1.265235	1.257468	1.254205	1.264	1.2609
	θ	0.460127	0.460427	0.456845	0.457874	0.454950	0.454077	0.458	0.4571
0.60	T	0.214879	0.212695	0.212187	0.211382	0.213760	0.214252	0.217	0.2168
	δ	1.710084	1.706917	1.697124	1.700940	1.689279	1.686456	1.706	1.7024
	θ	0.591632	0.591777	0.582013	0.583265	0.577920	0.577826	0.591	0.5880
0.80	T	0.109703	0.107617	0.107522	0.106822	0.109087	0.109470	0.111	0.1119
	δ	2.253805	2.248219	2.228439	2.233345	2.217881	2.215155	2.246	2.2415
	θ	0.720560	0.720254	0.703229	0.704363	0.699383	0.700427	0.718	0.7159
0.96	T	-	-	0.000579	-	0.007860	0.009881	0.000	0.0107
	δ	-	-	3.087602	-	3.018517	2.999299	3.140	3.0287
	θ	-	-	0.805969	-	0.800520	0.802036	0.820	0.8208
z_s	T	0.005072	0.03441		-0.001893	-0.001332	-0.000015		
	δ	3.097817	3.085750	"	3.110547	3.104199	3.091483	"	"
	θ	0.823723	0.824818		0.806316	0.802279	0.804934		

Tabela 4.5: Quadro comparativo dos resultados obtidos para o problema de Howarth.

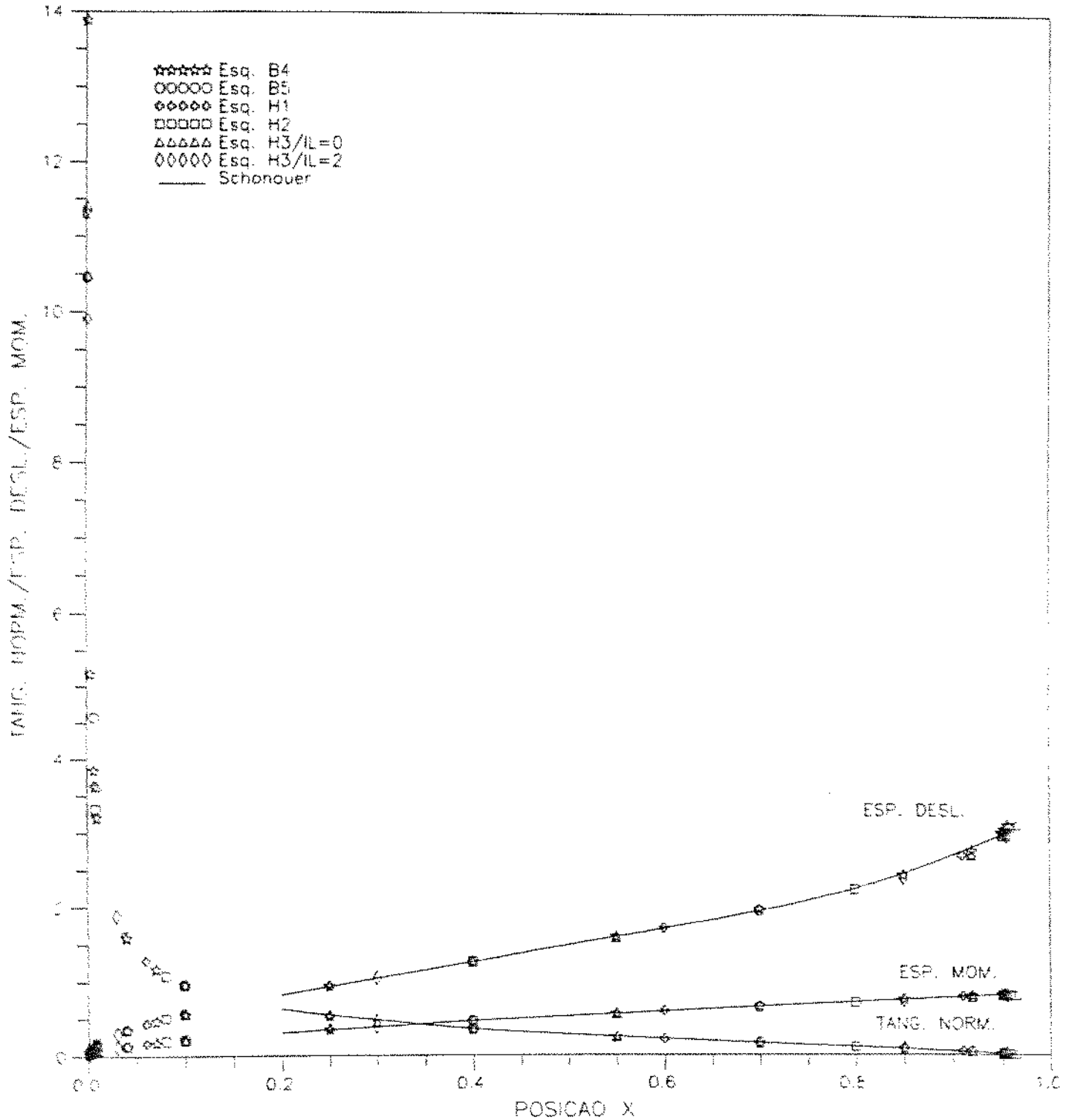


Figura 4.2: Resultados sintetizados do problema de Howarth.

4.3 Avaliação global dos ADF's

Uma idéia comparativa entre o desempenho dos diversos algoritmos de 2ª ordem abordados é fornecida através da observação das figuras 4.3, 4.4, 4.7 e 4.8, ilustradas na seqüência, onde são suprimidos os esquemas que utilizam a continuidade de 3 níveis pelos mesmos motivos justificados no capítulo anterior. Estas figuras reúnem as curvas das tangentes de cada um dos problemas não-similares obtidas isoladamente para cada ADF, dando ênfase, no caso do cilindro, ao comportamento em torno do ponto de velocidade externa máxima e no caso de Howarth à porção inicial da placa, regiões onde se constata as maiores discrepâncias em relação às soluções "exatas".

4.3.1 Avaliação dos resultados obtidos para o cilindro circular sob escoamento potencial

Para o caso do cilindro circular sob escoamento potencial os resultados dos ADF's são comparados aos de Terril e Schönauer, que são coincidentes nos gráficos. Conforme se constata, o esquema mais acurado para este problema de cilindro circular é o B4 sendo que os esquemas derivados de Crank & Nicholson mostram-se menos precisos. Por outro lado, deve-se lembrar que os valores obtidos por Schönauer, e aqui tomados como "exatos", foram obtidos à partir de um esquema típico de Crank & Nicholson através do emprego de variáveis transformadas, usando malhas bastante grosseiras (quando comparadas às aqui empregadas). A associação destes argumentos leva a conclusão de que a técnica de transformação de variáveis deve merecer mais predicados do que até então à ela se atribuiu no que se refere à redução do tempo computacional.

O comportamento da espessura de deslocamento e momentum para o caso do escoamento potencial são disponíveis nas figuras 4.5 e 4.6 respectivamente.

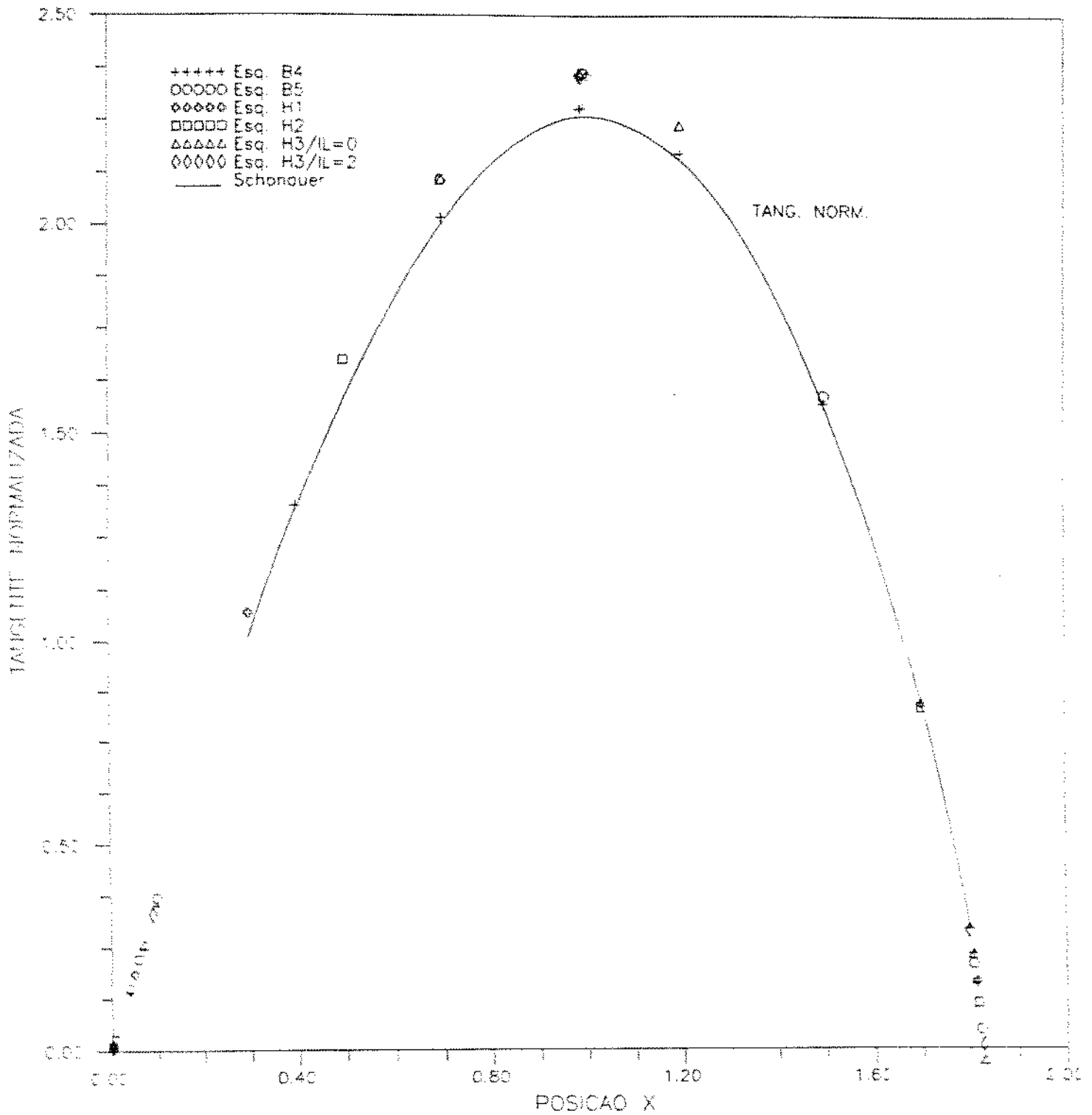


Figura 4.3: Comparação entre os valores da tangente junto à parede $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_u$ obtidos para diversos esquemas para o problema do cilindro potencial.

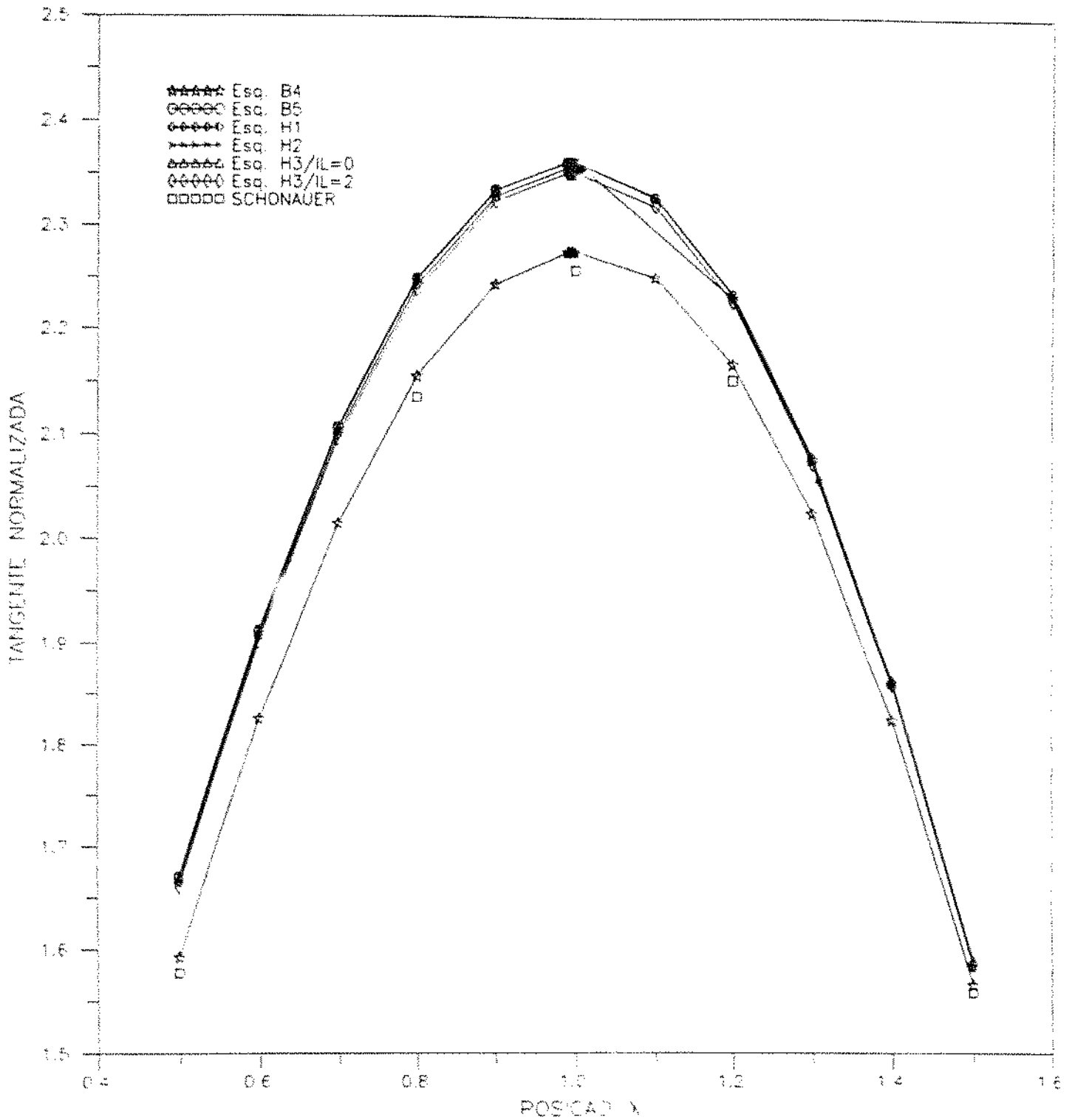


Figura 4.4: Detalhe ampliado da região de pressão mínima do problema do cilindro potencial.

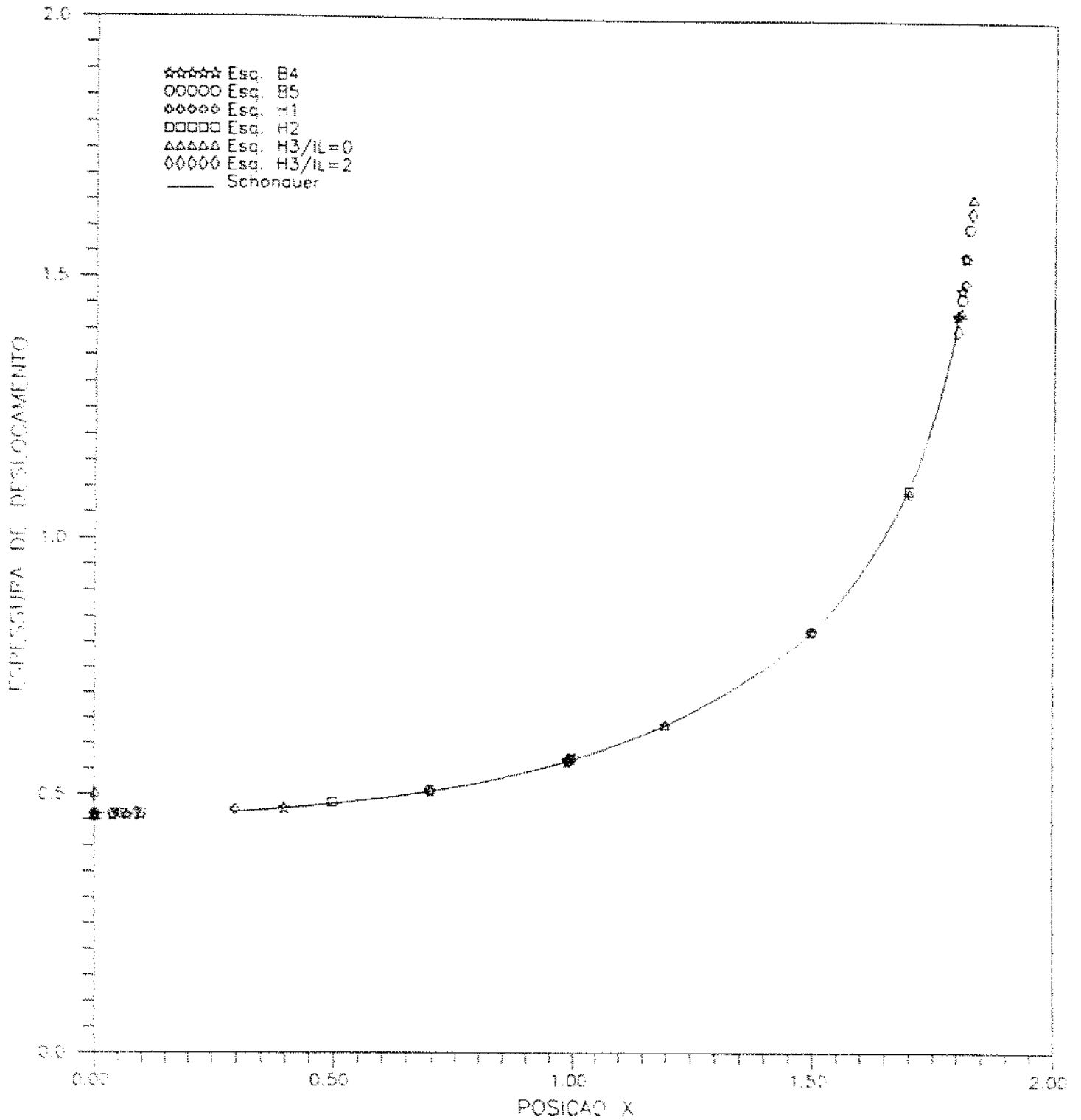


Figura 4.5: Comparação entre os valores de espessura de deslocamento obtidos para diversos esquemas para o problema do cilindro potencial.

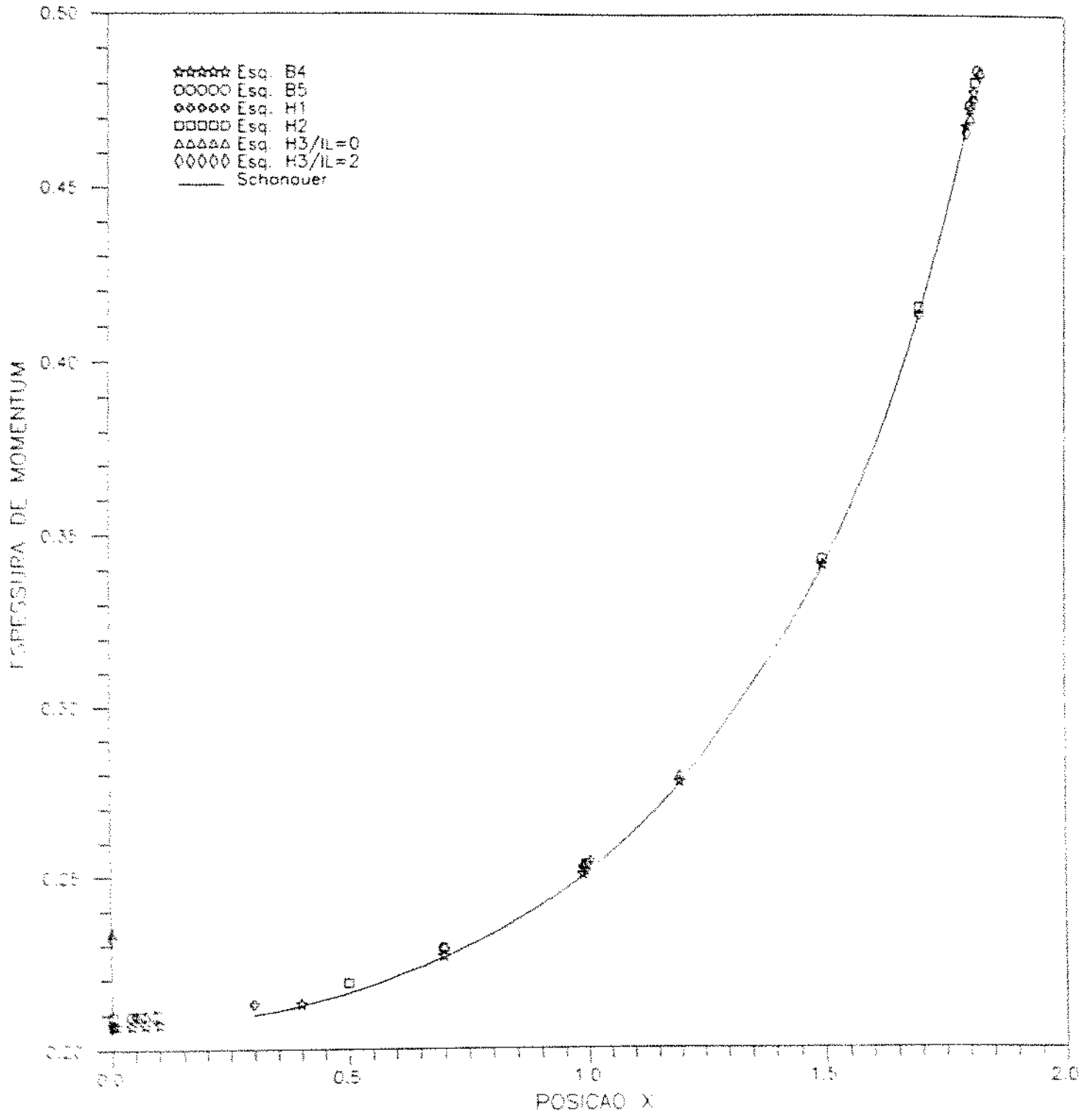


Figura 4.6: Comparação entre os valores de espessura do momentum obtidos para os diversos esquemas para o problema do cilindro potencial.

É importante citar que para o caso particular da abordagem dos problemas do cilindro ocorre uma ampliação nos limites de estabilidade e oscilação, fato certamente relacionado à modificação das condições de contorno face à ausência de descontinuidade na origem.

Outra questão interessante deve-se ao fato de alguns ADF's ultrapassarem o ponto de separação, conforme se constata pela análise da tabela 4.2. No entanto, não cabe neste trabalho o estudo destas particularidades, o que pode ser objeto de estudos posteriores.

4.3.2 Avaliação dos resultados obtidos para o problema de Howarth

Para o problema de Howarth as soluções usadas para comparação (Howarth e Terril), também coincidentes, só são fornecidas a partir de $x = 0,2$, região onde todos os ADF's se comportam muito bem.

As figuras 4.7 e 4.8 mostram em detalhe o comportamento dos ADF's no que concerne aos valores obtidos para os coeficientes de arrasto para o problema de Howarth, ao passo que as figuras 4.9 e 4.10 ilustram os comportamentos das espessuras de deslocamento e momentum respectivamente.

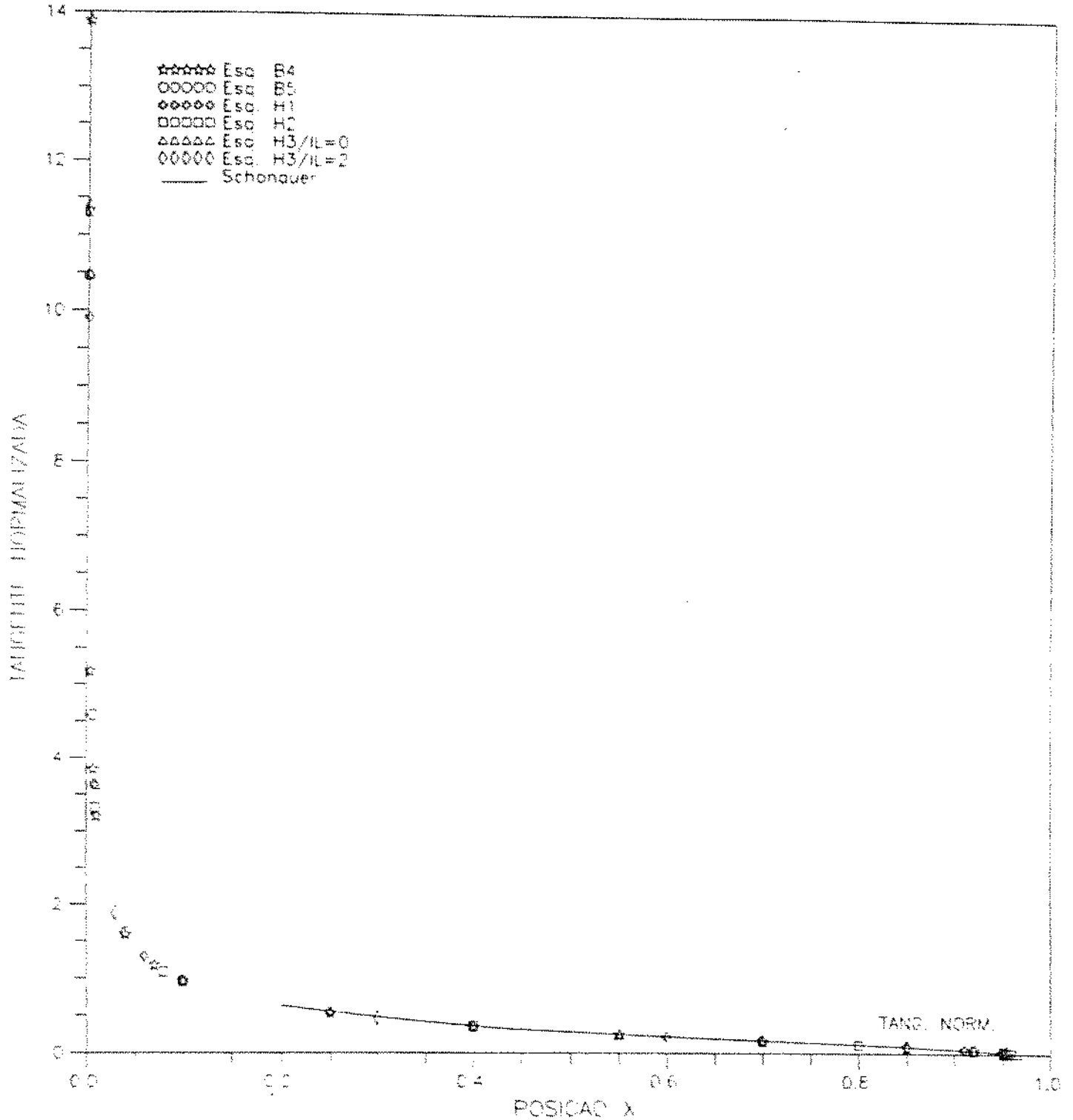


Figura 4.7: Comparação entre os valores da tangente junto à parede $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_w$ obtidos para os diversos esquemas para o problema de Howarth.

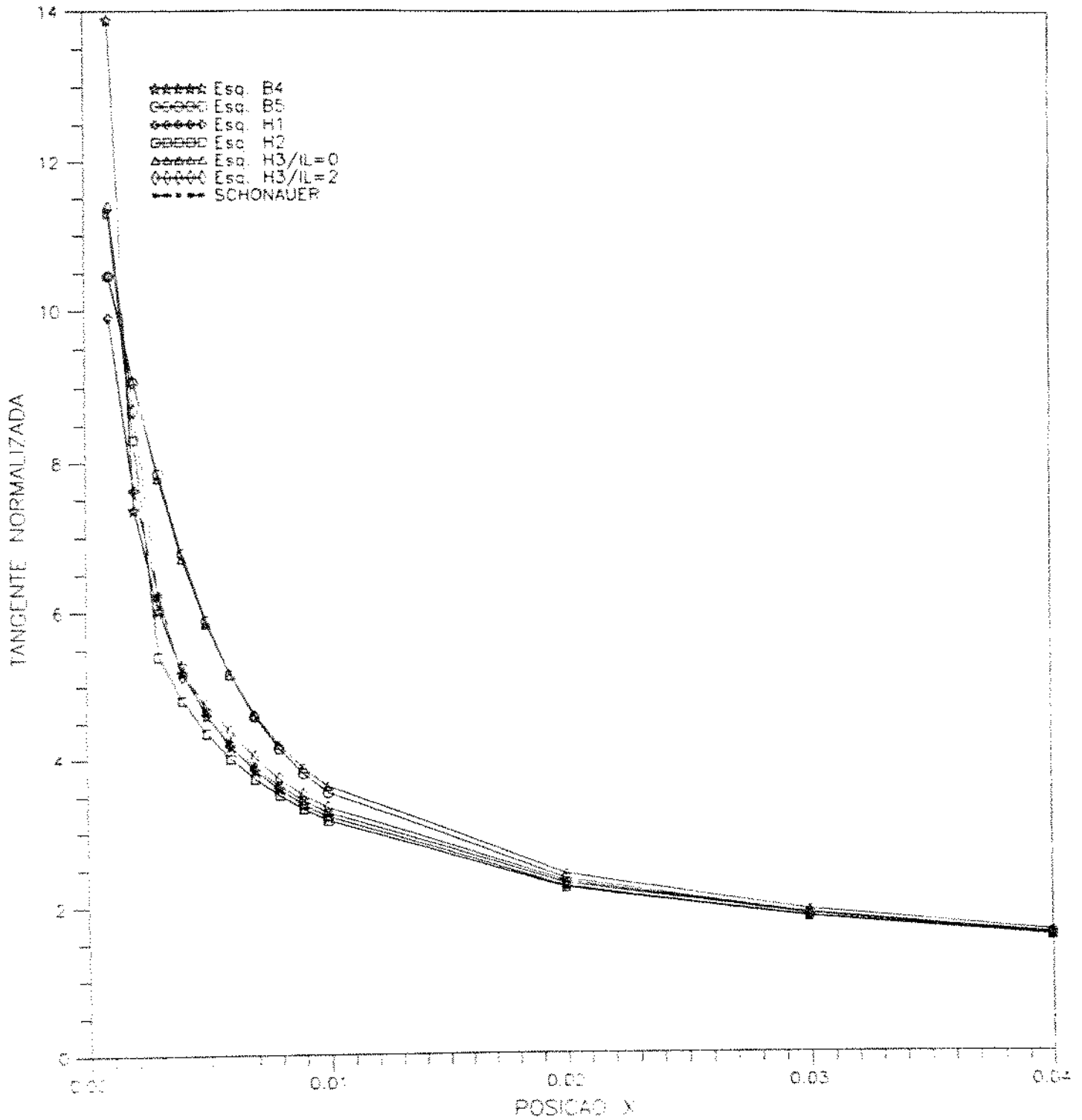


Figura 4.8: Detalhe ampliado da porção inicial da placa para o problema de Howarth.

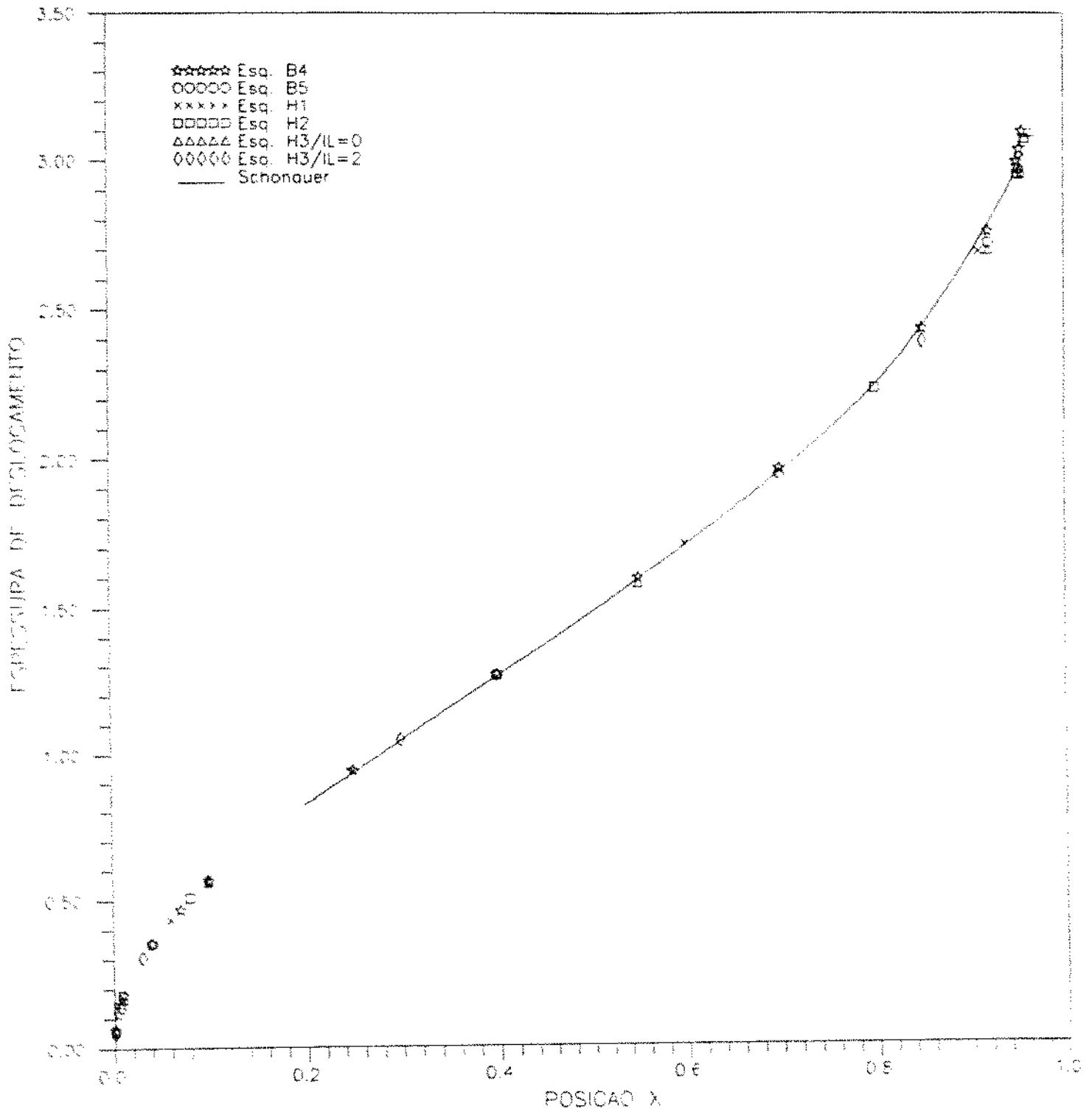


Figura 4.9: Comparação entre os valores de espessura de deslocamento obtidos para diversos esquemas para o problema de Howarth.

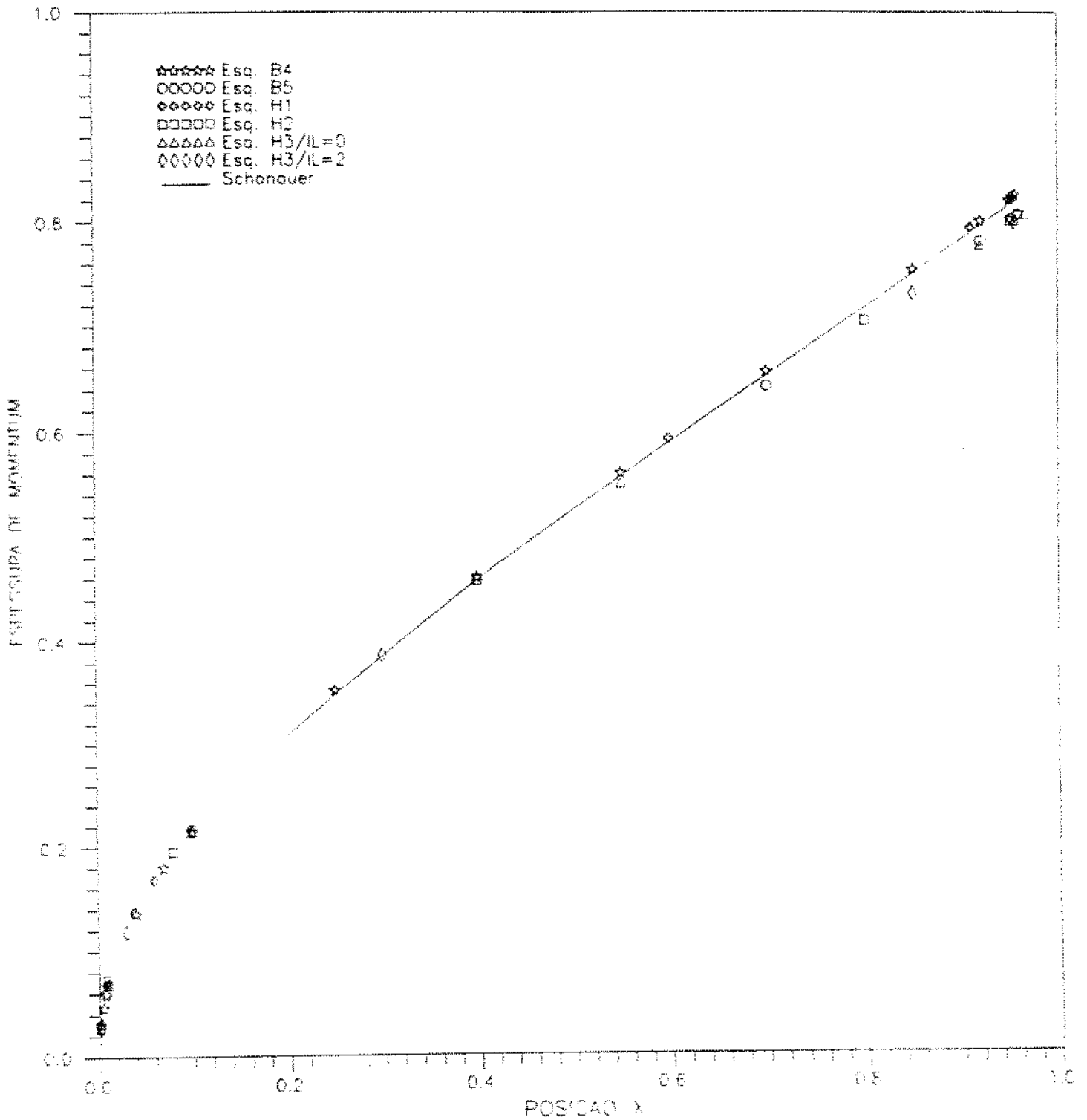


Figura 4.10: Comparação entre os valores de espessura do momentum obtidos para os diversos esquemas para o problema de Howarth.

Capítulo 5

Conclusões, comentários e sugestões

Como resultado do presente trabalho, evidencia-se a existência de esquemas opcionais no trato com os problemas de camada limite em soma aos até então consagrados esquemas baseados no trabalho de Crank & Nicholson. Esta opção mostra-se ainda mais vantajosa quando aplicada aos problemas com descontinuidade na origem onde os de Crank & Nicholson apresentam, quase sempre¹, problemas de oscilação. Um argumento utilizado em favor do esquema de Crank & Nicholson é a simplicidade de sua adaptação a malhas irregulares ao longo da direção do escoamento principal, sem perda da acuidade de segunda ordem. No entanto, conforme se mostra no apêndice A, o esquema de 3 níveis também pode ser facilmente adaptado à esta irregularidade, mantendo, da mesma forma, a acuidade de segunda ordem.

De uma maneira geral, em termos de acuidade, todos os esquemas têm boa precisão. No caso do cilindro potencial, no entanto, evidencia-se a supremacia do esquema B4.

Quanto aos chamados esquemas híbridos, também fica claro que quando bem empregados podem conseguir resultados muito mais acurados que os esquemas básicos pelo emprego de um menor tempo computacional, uma vez que têm em comum faixas ótimas de F_R situadas em torno de valores menores que alguns básicos. Para orientar este emprego, uso deve ser feito das tabelas da variação do erro com F_R , disponíveis no apêndice B.

Nota: Os ADF's que apresentam faixas ótimas situadas em torno de baixos valores de F_R requerem menores tempos de processamento, uma vez que tais valores implicam em maiores Δy 's para um mesmo Δx e, conseqüentemente, em um número menor de pontos dentro da camada limite.

As possíveis vantagens da utilização de variáveis transformadas vistas ao longo do trabalho, sugere

¹A presença de oscilações restrita aos ADF's que aplicam a discretização de Crank & Nicholson à equação do momentum, sugere uma associação entre tais fatos.

rem o merecimento de que se as aplique em trabalhos futuros a partir dos esquemas aqui desenvolvidos. Esta continuidade é imperativa no sentido de se "unir o útil ao agradável", pelo emprego simultâneo desta valiosa técnica das transformações de variáveis em conjunto com o potencial dos melhores esquemas aqui apresentados.

Um outro aspecto bastante importante que merece ser ressaltado é o ganho proporcionado pelo emprego dos perfis iniciais obtidos por extrapolação quadrática. Propõem-se ainda para futuros trabalhos, no entanto, a investigação de seu comportamento nas proximidades da separação.

Apesar do método de solução ponto-a-ponto envolver uma lógica bastante simples e de convergir em poucas iterações, ele peca por empregar um maior tempo computacional devido à operação de radiciação envolvida na resolução dos sistemas de equações. Assim, outro aspecto que merece uma investigação mais pormenorizada é a tentativa de substituição da operação de radiciação pelo esquema iterativo delineado no apêndice A. Em se conseguindo u'a maior rapidez com tal artifício deve-se partir para a extrapolação dos perfis iniciais das colunas a frente podendo ser que se suplante o método coluna-a-coluna em termos de velocidade de convergência.

Para finalizar, recomenda-se ainda, para trabalhos posteriores, a aplicação da linearização proposta no apêndice A.

Apêndice A

Desenvolvimento das propostas

A.1 Linearização da equação do momentum

Seja o superescrito k o indicador do número da iteração, de forma que:

$$\begin{aligned} u_{i+1,j}^{k+1} &= \text{valor de } u_{i+1,j} \text{ na iteração atual,} \\ u_{i+1,j}^k &= \text{valor de } u_{i+1,j} \text{ na iteração passada e} \\ u_{i+1,j}^{k-1} &= \text{valor de } u_{i+1,j} \text{ na iteração retrazada} \end{aligned}$$

Aplicando a mesma técnica utilizada para a extrapolação quadrática do perfil inicial (ver cap.3), tem-se para o comportamento de $u_{i+1,j}$ ao longo do processo iterativo:

- por discretização de três níveis em k :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial k} \right|_{i+1,j}^{k+1} = \frac{3u_{i+1,j}^{k+1} - 4u_{i+1,j}^k + u_{i+1,j}^{k-1}}{2\Delta k} \quad (\text{A.1})$$

- e por discretização central em k em se estimando, para a próxima iteração, o valor de $u_{i+1,j}^{k+2}$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial k} \right|_{i+1,j}^{k+1} = \frac{u_{i+1,j}^{k+2} - u_{i+1,j}^k}{2\Delta k} \quad (\text{A.2})$$

Igualando as equações (A.1) e (A.2), obtém-se finalmente

$$u_{i+1,j}^{k+2} = 3(u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^k) + u_{i+1,j}^{k-1} \quad (\text{A.3})$$

valor que pode substituir a incógnita $u_{i+1,j}$, linearizando a equação do momentum.

A.2 Discretização de três níveis para malhas variáveis em x

Sejam

Δx o passo entre a coluna passada (i) e retrazada ($i - 1$);

Δx_n o passo entre a coluna atual ($i + 1$) e a passada (i), conforme ilustrado na figura A.1 e;

$F_n = \frac{\Delta x}{\Delta x_n}$ a relação entre os passos.

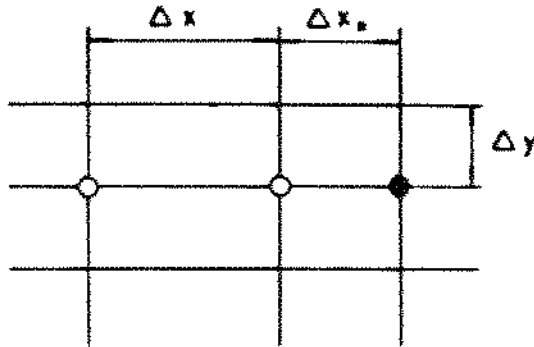


Figura A.1: Malha de passo variável na direção x .

Desta forma pode-se dizer que o espaçamento entre a coluna atual e a retrazada vale

$$\Delta x_n + \Delta x = \Delta x_n(F_n + 1) \quad (\text{A.4})$$

Desenvolvendo em séries de Taylor, de maneira análoga ao apêndice C mas desconsiderando-se a direção normal (para simplificação), tem-se

$$f(x - \Delta x_n) = f(x) - f'(x) \Delta x_n + f''(x) \frac{\Delta x_n^2}{2} + \mathcal{O}[\Delta x_n^3] \quad (\text{A.5})$$

$$f(x - \Delta x_n(F_n + 1)) = f(x) - f'(x) \Delta x_n(F_n + 1) + f''(x) \frac{\Delta x_n^2}{2} (F_n + 1)^2 + \mathcal{O}[\Delta x_n(F_n + 1)^3] \quad (\text{A.6})$$

Multiplicando-se a equação (A.5) por $(F_n + 1)^2$ e subtraindo-a da equação (A.6), vem

$$\begin{aligned} & f(x - \Delta x_n)(F_n + 1)^2 - f(x - \Delta x_n(F_n + 1)) = \\ & = f(x)(F_n + 1)^2 - f(x) - f'(x)\Delta x_n(F_n + 1)\Delta x_n + \mathcal{O}[\Delta x_n^3] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Aplicando a substituição:

$$\begin{aligned} f(x) &= u_{i+1,j} \\ f(x - \Delta x_n) &= u_{i,j} \\ f(x - \Delta x_n(F_n + 1)) &= u_{i-1,j} \\ f'(x) &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+1,j} \end{aligned}$$

pode-se escrever para o termo para o termo convectivo em x

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+1,j} = \frac{(F_n + 1)^2(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + u_{i-1,j}}{F_n(F_n + 1)\Delta x_n} + \mathcal{O}[\Delta x_n^2] \quad (\text{A.8})$$

Para o caso específico de $F_n = 1$ (malha regular em x), verifica-se, como era de se esperar, que

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+1,j} = \frac{3u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}[\Delta x^2] \quad (\text{A.9})$$

ou seja, que a malha constante em x é um caso particular de malha variável onde $\Delta x = \Delta x_n$.

A.2.1 Aplicação da malha variável em x ao esquema H1

Aqui desenvolve-se o algoritmo de malha variável para o esquema H1 (visto ser este um esquema geral que apresenta um bom comportamento além de incluir os esquemas B3 e B4).

Discretização da equação do momentum

Desprezando os erros de truncamento pode-se escrever para o momentum

$$\begin{aligned} & u_{i+1,j} \left[\frac{(F_n^2 + 2F_n)u_{i+1,j} - (F_n + 1)^2 u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(F_n + 1)\Delta x} \right] + v_{i+1,j} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} \right) = \\ & = \left(\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{\Delta y^2} \right) + U_{i+1} \left[\frac{(F_n^2 + 2F_n)U_{i+1} - (F_n + 1)^2 U_i + U_{i-1}}{(F_n + 1)\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

e ainda

$$\begin{aligned} & u_{i+1,j} \left[(F_n^2 + 2F_n)u_{i+1,j} - (F_n + 1)^2 u_{i,j} + u_{i-1,j} \right] + \\ & + \frac{(F_n + 1)\Delta x}{\Delta y} v_{i+1,j} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) = \\ & = \frac{(F_n + 1)\Delta x}{\Delta y^2} (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) + \\ & + U_{i+1} \left[(F_n^2 + 2F_n)U_{i+1} - (F_n + 1)^2 U_i + U_{i-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Fazendo $F_D = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ e $F_R = \frac{\Delta x}{\Delta y^2}$, vem

$$\begin{aligned} & u_{i+1,j} \left[(F_n^2 + 2F_n)u_{i+1,j} - (F_n + 1)^2 u_{i,j} + u_{i-1,j} \right] + \\ & + (F_n + 1)F_D v_{i+1,j} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) = \\ & = (F_n + 1)F_R (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) + \\ & + U_{i+1} \left[(F_n^2 + 2F_n)U_{i+1} - (F_n + 1)^2 U_i + U_{i-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Discretização da equação da continuidade1) Para $j = 1$:Com *aproximação linear* para $\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i+1,1}$

$$\frac{v_{i+1,1} - v_{i+1,0}}{\Delta y} + \frac{(F_n^2 + 2F_n)u_{i+1,1} - (F_n + 1)^2 u_{i,1} + u_{i-1,1}}{(F_n + 1)\Delta x} = 0 \quad (\text{A.13})$$

donde

$$v_{i+1,1} = - \frac{(F_n^2 + 2F_n)u_{i+1,1} - (F_n + 1)^2 u_{i,1} + u_{i-1,1}}{(F_n + 1)F_D} \quad (\text{A.14})$$

Com *aproximação quadrática* para $\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i+1,1}$ Como, neste caso, $\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i+1,1} = \frac{2v_{i+1,1}}{\Delta y}$, então

$$v_{i+1,1} = - \frac{(F_n^2 + 2F_n)u_{i+1,1} - (F_n + 1)^2 u_{i,1} + u_{i-1,1}}{2(F_n + 1)F_D} \quad (\text{A.15})$$

2) Para $j > 1$:

$$\frac{3v_{i+1,j} - 4v_{i+1,j-1} + v_{i+1,j-2}}{2\Delta y} + \frac{(F_n^2 + 2F_n)u_{i+1,j} - (F_n + 1)^2 u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(F_n + 1)\Delta x} = 0 \quad (\text{A.16})$$

donde

$$v_{i+1,j} = \left(\frac{4v_{i+1,j-1} - v_{i+1,j-2}}{3} \right) - 2 \left[\frac{(F_n^2 + 2F_n)u_{i+1,j} - (F_n + 1)^2 u_{i,j} + u_{i-1,j}}{3(F_n + 1)F_D} \right] \quad (\text{A.17})$$

.RESOLUÇÃO COLUNA-A-COLUNAIsolando as variáveis $u_{i+1,j-1}$, $u_{i+1,j}$ e $u_{i+1,j+1}$, da equação (A.12) obtém-se

$$\begin{aligned}
& u_{i+1,j-1} [-(F_n + 1)(-F_D v_{i+1,j} - F_R)] + u_{i+1,j} (u_{i+1,j}(F_n^2 + 2F_n) + (F_n + 1)F_R) + \\
& + u_{i+1,j+1} [(F_n + 1)(-F_D v_{i+1,j} - F_R)] = \\
& = u_{i+1,j} ((F_n + 1)^2 u_{i,j} - u_{i-1,j}) + U_{i+1} [(F_n^2 + 2F_n)U_{i+1} - (F_n + 1)^2 U_i + U_{i-1}] \quad (A.18)
\end{aligned}$$

que escrita de forma conveniente ao emprego do TDMA

$$A_j u_{i+1,j-1} + B_j u_{i+1,j} + C_j u_{i+1,j+1} = D_j \quad (A.19)$$

fornece os coeficientes

$$\begin{aligned}
A_j &= -(F_n + 1)(-F_D v_{i+1,j} - F_R) \\
B_j &= u_{i+1,j}(F_n^2 + 2F_n) + (F_n + 1)F_R \\
C_j &= (F_n + 1)(-F_D v_{i+1,j} - F_R) \\
D_j &= u_{i+1,j} ((F_n + 1)^2 u_{i,j} - u_{i-1,j}) + \\
& + U_{i+1} [(F_n^2 + 2F_n)U_{i+1} - (F_n + 1)^2 U_i + U_{i-1}]
\end{aligned}$$

.RESOLUÇÃO PONTO-A-PONTO (equações acopladas)

. Substituindo (A.14) ou (A.15) em (A.12) ($u_{i+1,j} \equiv u_{i+1,j}$) obtém-se na linha $j = 1$, para $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i+1,1}$

$$\begin{aligned}
& u_{i+1,1} [(F_n^2 + 2F_n)u_{i+1,1} - (F_n + 1)^2 u_{i,1} + u_{i-1,1}] + \\
& - \frac{1}{PO} [(F_n^2 + 2F_n)u_{i+1,1} - (F_n + 1)^2 u_{i,1} + u_{i-1,1}](u_{i+1,2} - u_{i+1,0}) + \\
& - (F_n + 1)F_R(u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) + \\
& + U_{i+1} [(F_n^2 + 2F_n)U_{i+1} - (F_n + 1)^2 U_i + U_{i-1}] = 0 \quad (A.20)
\end{aligned}$$

onde PO vale 1 para aproximação linear e 2 para quadrática.

. Coeficientes da equação $Au_{i+1,1}^2 + Bu_{i+1,1} + C = 0$ para $j = 1$

$$A = F_n^2 + 2F_n$$

$$B = 2(F_n + 1)F_R - (F_n + 1)^2 u_{i,1} + u_{i-1,1} - \frac{(F_n^2 + 2F_n)(u_{i+1,2} - u_{i+1,0})}{PO}$$

$$C = U_{i+1} [(F_n^2 + 2F_n)U_{i+1} - (F_n + 1)^2 U_i + U_{i-1}] + \\ + [(F_n + 1)^2 (u_{i,1} + u_{i-1,1})] \frac{(u_{i+1,2} - u_{i+1,0})}{PO} + (F_n + 1)F_R(u_{i+1,2} + u_{i+1,0})$$

. Substituindo (A.17) em (A.12) obtém-se para o termo $\left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_{i+1,1}$ os coeficientes da equação $Au_{i+1,j}^2 + Bu_{i+1,j} + C = 0$ para as demais linhas ($j > 1$)

$$A = F_n^2 + 2F_n$$

$$B = 2(F_n + 1)F_R - (F_n + 1)^2 u_{i,j} + u_{i-1,j} - \frac{2}{3}(F_n^2 + 2F_n)(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1})$$

$$C = U_{i+1} [(F_n^2 + 2F_n)U_{i+1} - (F_n + 1)^2 U_i + U_{i-1}] + \\ + \frac{(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1})}{3} 2[(F_n + 1)^2 u_{i,j} + u_{i-1,j}] + (F_n + 1)F_D(4v_{i+1,j-1} - v_{i+1,j-2}) + \\ - (F_n + 1)F_R(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1})$$

A.3 Procedimento iterativo para substituição da radiciação envolvida na resolução ponto-a-ponto

O método de solução ponto-a-ponto, apesar de convergir em poucas iterações, emprega um maior tempo computacional o que se deve, por parte, à operação de radiciação envolvida na resolução dos sistemas de equações. Como proposta para futuros trabalhos visando a redução do tempo empregado

para a resolução ponto-a-ponto, sugere-se seja investigada a substituição desta operação pela aplicação de um procedimento iterativo permitido através do desenvolvimento a seguir:

Seja

$$A u_{i+1,j}^2 + B u_{i+1,j} + C = 0 \quad (\text{A.21})$$

Evidenciando a incógnita $u_{i+1,j}$

$$u_{i+1,j}(A u_{i+1,j} + B) + C = 0 \quad (\text{A.22})$$

obtém-se finalmente

$$u_{i+1,j} = \frac{-C}{A u_{i+1,j} + B} \quad (\text{A.23})$$

Apêndice B

Tabelas complementares

COMPORTAMENTO DOS ERROS COM F_R PARA $\Delta x = 0,01$.

FR	EAT%	EIT%	EAP%	PCL
0.02	24.14	24.14	2.81	1336
0.05	20.34	20.34	2.44	1869
0.07	19.25	19.25	2.29	2140
0.10	18.54	18.54	2.18	2492
0.12	18.49	18.49	2.14	2712
0.13	18.16	18.16	2.10	2796
0.14	18.08	18.08	2.08	2896
0.15	18.26	18.26	2.08	2998
0.17	19.47	19.47	2.18	3252
0.20	19.43	19.43	2.15	3512
0.30	19.80	19.80	2.10	4285

Tabela B.1: Comportamento dos erros com F_R - Esquema B1

Nota: PCL = número de pontos nodais processados dentro da camada limite.

FR	EAT%	EIT%	EAP%	PCL
0.10	17.57	15.85	2.04	2311
0.50	15.21	10.23	1.32	4676
1.00	13.83	9.28	1.15	6459
2.00	12.60	9.16	1.06	8955
3.00	12.10	9.24	1.03	10897
5.00	11.68	9.39	1.01	13901
7.00	11.48	9.49	1.01	16383
9.00	11.37	9.56	1.01	18515
10.00	11.33	9.59	1.01	19498
11.00	11.30	9.61	1.01	20416
13.00	11.24	9.66	1.01	22125
15.00	11.20	9.69	1.01	23721
20.00	11.13	9.76	1.01	27228
50.00	10.99	9.92	1.02	42406

Tabela B.2: Comportamento dos erros com F_R - Esquema B2

FR	EAT%	EIT%	EAP%	PCL
0.02	21.71	21.71	2.42	1316
0.05	15.22	15.22	1.66	1783
0.07	13.25	13.25	1.43	2026
0.10	11.22	11.00	1.18	2322
0.11	10.68	10.50	1.12	2418
0.12	10.51	10.42	1.1	2523
0.15	9.78	9.16	0.97	2756
0.16	9.61	8.83	0.93	2836
0.17	9.59	8.68	0.92	2911
0.18	9.72	8.70	0.92	3006
0.20	10.38	9.22	0.93	3190
0.25	10.20	8.95	0.93	3524
0.50	12.96	12.96	1.27	5551

Tabela B.3: Comportamento dos erros com F_R - Esquema B3

FR	EAT%	EIT%	EAP%	PCL
0.10	6.62	6.62	0.32	2172
0.50	6.17	6.17	0.12	4491
0.80	5.35	5.35	0.08	5623
0.90	5.08	5.08	0.07	5954
1.00	4.80	4.80	0.06	6272
1.10	4.54	4.54	0.05	6544
1.30	4.08	4.02	0.05	7104
1.50	3.74	3.53	0.07	7628
2.00	3.22	2.39	0.12	8820
2.30	3.06	1.77	0.16	9461
2.40	3.03	1.57	0.17	9670
2.50	3.00	1.37	0.18	9884
2.60	2.98	1.18	0.19	10086
2.70	2.96	0.99	0.20	10274
2.80	2.96	0.80	0.22	10473
2.90	2.99	0.62	0.23	10676
3.00	3.05	0.44	0.24	10870
4.00	3.65	1.21	0.36	12672
5.00	4.25	2.65	0.48	14303
15.00	11.92	11.92	1.35	28339
20.00	14.93	14.93	1.66	34794
50.00	29.94	25.94	2.70	73515

Tabela B.4: Comportamento dos erros com F_R - Esquema B4

FR	EAT%	EIT%	EAP%	PCL
0.01	18.24	1.36	0.79	924
0.05	5.37	1.79	0.26	1662
0.08	2.04	0.69	0.13	2023
0.09	1.18	0.23	0.11	2130
0.10	0.72	0.25	0.12	2234
0.11	0.95	0.75	0.16	2331
0.15	3.69	3.07	0.34	2699
0.20	8.05	6.88	0.64	3167
0.25	8.64	7.39	0.68	3501
0.35	6.08	5.71	0.54	4076
0.50	11.49	11.49	1.22	5533

Tabela B.5: Comportamento dos erros com F_R - Esquema H1 - $IL = 2$

FR	EAT%	EIT%	EAP%	PCL
0.005	24.89	7.37	1.02	731
0.007	22.19	3.01	0.97	812
0.009	18.98	0.72	0.91	879
0.010	19.05	0.07	0.87	912
0.050	8.80	6.19	0.46	1622
0.080	7.46	6.87	0.37	1962
0.090	7.04	7.01	0.35	2060
0.100	7.12	7.12	0.34	2150
0.110	7.21	7.21	0.32	2237
0.150	7.48	7.48	0.28	2560
0.200	7.68	7.68	0.26	2906
0.250	7.82	7.82	0.24	3213
0.350	8.00	8.00	0.21	3743
0.500	8.17	8.17	0.19	4415
0.550	8.21	8.21	0.18	4608
0.560	8.22	8.22	0.18	4656
0.650	9.55	8.28	0.18	4495
0.800	14.40	8.36	0.17	5516
1.000	23.85	8.43	0.16	6135
1.300	43.56	8.50	0.18	6971
1.400	51.28	8.51	0.19	7236

Tabela B.6: Comportamento dos erros com F_R - Esquema B5 - Continuidade 3 níveis

FR	EAT%	EIT%	EAP%	PCL
0.005	24.82	7.43	0.96	756
0.007	21.91	3.29	0.88	839
0.009	19.41	1.28	0.77	910
0.010	18.36	0.62	0.72	979
0.050	7.01	4.40	0.24	1654
0.080	5.72	5.11	0.17	1994
0.090	5.33	5.27	0.16	2088
0.100	5.43	5.41	0.15	2184
0.110	5.54	5.52	0.14	2271
0.150	5.90	5.88	0.12	2590
0.200	6.19	6.19	0.10	2937
0.250	6.41	6.41	0.09	3237
0.350	6.72	6.72	0.08	3771
0.500	7.01	7.01	0.08	4442
0.550	7.09	7.09	0.08	4647
0.560	7.10	7.10	0.08	4682
0.650	8.95	7.21	0.08	5022
0.800	13.82	7.36	0.08	5550
1.000	22.78	7.52	0.09	6183
1.300	41.32	7.69	0.17	7039
1.400	48.71	7.73	0.21	7309

Tabela B.7: Comportamento dos erros com F_R - Esquema B5 - Continuidade Blottner

FR	EAT%	EIT%	EAP%	PCL
1.00	18.20	1.36	0.79	920
0.05	4.86	1.83	0.25	1653
0.08	1.46	0.79	0.13	2004
0.09	0.67	0.37	0.12	2108
0.10	1.29	0.07	0.12	2203
0.11	2.26	0.53	0.16	2229
0.15	5.60	2.46	0.31	2649
0.20	5.99	1.99	0.29	3001
0.25	4.24	1.02	0.12	3293
0.35	10.92	4.67	0.12	3879
0.50	21.12	7.14	0.23	4969
1.00	43.47	7.31	0.19	6593

Tabela B.8: Comportamento dos erros com F_R - Esquema H2 - Continuidade 3 níveis

FR	EAT%	EIT%	EAP%	PCL
0.01	17.49	2.07	0.66	947
0.05	3.80	0.14	0.28	1682
0.08	1.86	0.71	0.32	2029
0.09	1.78	1.04	0.34	2127
0.10	2.59	1.37	0.36	2228
0.11	3.46	1.72	0.38	2321
0.15	6.27	3.12	0.46	2662
0.20	6.59	2.59	0.41	3016
0.25	5.12	0.14	0.26	3314
0.35	10.41	3.55	0.18	3905
0.50	21.12	6.02	0.21	5009
1.00	42.18	6.52	0.22	6638

Tabela B.9: Comportamento dos erros com F_R - Esquema H2 - Continuidade Blottner

FR	EAT%	EIT%	EAP%	PCL
0.01	18.42	0.99	0.81	919
0.05	5.91	3.01	0.30	1640
0.08	3.13	2.50	0.18	1990
0.09	2.35	2.27	0.15	2092
0.10	2.01	2.01	0.13	2184
0.11	1.83	1.74	0.11	2279
0.12	1.92	1.45	0.10	2371
0.13	2.25	1.16	0.10	2451
0.14	2.79	0.85	0.10	2534
0.15	3.44	0.53	0.13	2615
0.16	4.06	0.21	0.15	2692
0.17	4.66	0.13	0.18	2767
0.18	5.22	0.47	0.21	2839
0.19	5.77	0.83	0.23	2916
0.20	6.28	1.18	0.26	2987
0.25	8.59	3.09	0.40	3329
0.35	14.6	7.15	0.75	3986
0.50	24.28	14.71	1.59	5059
1.00	47.35	17.12	1.95	7368
2.00	91.25	6.33	0.86	9122

Tabela B.10: Comportamento dos erros com F_R - Esquema H3 - $IL = 2$

FR	EAT%	EIT%	EAP%	PCL
0.005	24.28	7.38	1.02	731
0.007	22.18	3.03	0.96	812
0.009	19.96	0.75	0.91	879
0.010	19.04	0.05	0.87	912
0.050	8.69	6.11	0.45	1622
0.080	7.33	6.75	0.36	1962
0.090	6.89	6.88	0.35	2060
0.100	6.98	6.98	0.33	2150
0.110	7.06	7.06	0.32	2238
0.120	7.13	7.13	0.30	2325
0.130	7.19	7.19	0.29	2408
0.140	7.24	7.24	0.28	2484
0.150	7.28	7.28	0.28	2562
0.200	7.42	7.42	0.24	2907
0.500	7.63	7.54	0.16	4416
1.000	14.69	7.36	0.12	6131
2.000	58.57	6.94	0.10	8569

Tabela B.11: Comportamento dos erros com F_R - Esquema H3 - $IL = 0$

Apêndice C

Desenvolvimento das discretizações utilizadas

As discretizações empregadas na construção dos ADF's são obtidas pela expansão em séries de Taylor em torno do ponto genérico (n, m) .

1) DISCRETIZAÇÃO À MONTANTE

Para a direção n :

$$f(n - \Delta n, m) = f(n, m) - f'(n, m) \Delta n + f''(n, m) \frac{\Delta n^2}{2} + \mathcal{O}[\Delta n^3] \quad (\text{C.1})$$

donde,

$$f'(n, m) = \frac{f(n, m) - f(n - \Delta n, m)}{\Delta n} + \mathcal{O}[\Delta n^2] \quad (\text{C.2})$$

Para a direção \underline{m} (analogamente):

$$f'(n, m) = \frac{f(n, m) - f(n, m - \Delta m)}{\Delta m} + \mathcal{O}\Delta m^2 \quad (\text{C.3})$$

2) DISCRETIZAÇÃO CENTRAL

-Derivada primeira em n :

$$f(n + \Delta n, m) = f(n, m) + f'(n, m) \Delta n + f''(n, m) \frac{\Delta n^2}{2} + \mathcal{O}[\Delta n^3] \quad (\text{C.4})$$

$$-f(n - \Delta n, m) = -f(n, m) + f'(n, m) \Delta n - f''(n, m) \frac{\Delta n^2}{2} + \mathcal{O}[\Delta n^3] \quad (\text{C.5})$$

Somando (C.4) com (C.5), tem-se

$$f(n + \Delta n, m) - f(n - \Delta n, m) = 2 f'(n, m) \Delta n + \mathcal{O}[\Delta n^3] \quad (\text{C.6})$$

E, finalmente

$$f'(n, m) = \frac{f(n + \Delta n, m) - f(n - \Delta n, m)}{2 \Delta n} + \mathcal{O}[\Delta n^2] \quad (\text{C.7})$$

-Derivada segunda em n :

$$f(n + \Delta n, m) = f(n, m) + f'(n, m) \Delta n + f''(n, m) \frac{\Delta n^2}{2} + \mathcal{O}[\Delta n^3] \quad (\text{C.8})$$

$$f(n - \Delta n, m) = f(n, m) - f'(n, m) \Delta n + f''(n, m) \frac{\Delta n^2}{2} + \mathcal{O}[\Delta n^3] \quad (\text{C.9})$$

Somando (C.8) com (C.9), tem-se

$$f(n + \Delta n, m) + f(n - \Delta n, m) = 2f(n, m) + f''(n, m) \Delta n^2 + \mathcal{O}[\Delta n^3] \quad (\text{C.10})$$

E, finalmente

$$f''(n, m) = \frac{f(n + \Delta n, m) - 2f(n, m) + f(n - \Delta n, m)}{\Delta n^2} + \mathcal{O}[\Delta n^2] \quad (\text{C.11})$$

3) DISCRETIZAÇÃO EM TRÊS NÍVEIS

Para a direção \underline{n} :

$$f(n - \Delta n, m) = f(n, m) - f'(n, m) \Delta n + f''(n, m) \frac{\Delta n^2}{2} + \mathcal{O}[\Delta n^3] \quad (\text{C.12})$$

$$-f(n - 2\Delta n, m) = -f(n, m) + 2f'(n, m) \Delta n - f''(n, m) \frac{(2\Delta n)^2}{2} + \mathcal{O}[\Delta n^3] \quad (\text{C.13})$$

Multiplicando (C.12) por 4 e somando o resultado a (C.13), obtém-se

$$4f(n - \Delta n, m) - f(n - 2\Delta n, m) = 3f(n, m) - 2f'(n, m)\Delta n + \mathcal{O}[\Delta n^3] \quad (\text{C.14})$$

E, finalmente

$$f'(n, m) = \frac{3f(n, m) - 4f(n - \Delta n, m) + f(n - 2\Delta n, m)}{2\Delta n} + \mathcal{O}[\Delta n^2] \quad (\text{C.15})$$

Para a direção \underline{m} (analogamente):

$$f'(n, m) = \frac{3f(n, m) - 4f(n, m - \Delta m) + f(n, m - 2\Delta m)}{2\Delta m} + \mathcal{O}[\Delta m^2] \quad (\text{C.16})$$

4) DISCRETIZAÇÃO DE CRANK & NICHOLSON

O método idealizado por Crank & Nicholson, que só se aplica às derivadas primeiras, consiste no emprego de discretização central em torno de $(n + \frac{\Delta n}{2}, m)$ ou $(n, m + \frac{\Delta m}{2})$.

Para a direção \underline{n} :

$$\begin{aligned} f(n, m) &= f\left(n - \frac{\Delta n}{2}, m\right) + f'\left(n - \frac{\Delta n}{2}, m\right) \frac{\Delta n}{2} + \\ &+ f''\left(n - \frac{\Delta n}{2}, m\right) \frac{(\Delta n/2)^2}{2} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{\Delta n}{2}\right)^3\right] \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned}
-f(n - \Delta n, m) &= -f\left(n - \frac{\Delta n}{2}, m\right) + f'\left(n - \frac{\Delta n}{2}, m\right) \frac{\Delta n}{2} + \\
&-f''\left(n - \frac{\Delta n}{2}, m\right) \frac{(\Delta n/2)^2}{2} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{\Delta n}{2}\right)^3\right]
\end{aligned} \tag{C.18}$$

Somando (C.17) com (C.18), tem-se

$$f(n, m) - f(n - \Delta n, m) = f'\left(n - \frac{\Delta n}{2}, m\right) \Delta n + \mathcal{O}\left[\left(\frac{\Delta n}{2}\right)^3\right] \tag{C.19}$$

e finalmente

$$f'\left(n - \frac{\Delta n}{2}, m\right) = \frac{f(n, m) - f(n - \Delta n, m)}{\Delta n} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{\Delta n}{2}\right)^2\right] \tag{C.20}$$

Para a direção \underline{m} tem-se, por analogia:

$$f'\left(n, m - \frac{\Delta m}{2}\right) = \frac{f(n, m) - f(n, m - \Delta m)}{\Delta m} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{\Delta m}{2}\right)^2\right] \tag{C.21}$$

Apêndice D

Programas computacionais em FORTRAN

D.1 Comentários de ordem geral a respeito dos programas

O objetivo deste apêndice é elucidar as eventuais dúvidas surgidas da leitura dos programas em anexo, de forma a orientar sua aplicação ou as modificações necessárias ao tratamento de outros problemas.

1) Os programas foram elaborados em linguagem FORTRAN com dupla precisão sendo que as versões de simples precisão forneceram resultados que diferem na 4ª casa decimal para os valores dos erros percentuais.

2) O programa Total.for está apto a resolver o problema de Howarth para qualquer valor de coeficiente angular (b_1) da distribuição da corrente livre, e logicamente, seus casos particulares como o problema de Blasius onde é feito $b_1 = 0$. Outro problema contemplado neste programa é o escoamento em torno de um corpo cilíndrico circular submetido ao escoamento real ou potencial. As únicas alterações necessárias para tal, se concentram nas condições de contorno.

3) Para reduzir o armazenamento de dados, utiliza-se o tratamento vetorial (monoindexação) para os valores das variáveis u e v envolvidas na resolução de cada coluna. Conforme foi comentado, isto é possibilitado pela característica parabólica da equação do momentum. Assim, a medida que a solução avança no sentido do escoamento, os valores das variáveis não utilizáveis

são substituídos por novos valores. Para isto a seguinte equivalência é aplicada:

$$u_{i+1,j} \Rightarrow U_j \quad ; \quad v_{i+1,j} \Rightarrow V_j$$

$$u_{i,j} \Rightarrow UA_j \quad ; \quad v_{i,j} \Rightarrow VA_j$$

$$u_{i-1,j} \Rightarrow UAA_j \quad ; \quad v_{i-1,j} \Rightarrow VAA_j$$

4) Comentários a respeito do controle do crescimento da camada limite (NCL) são proporcionados no final do capítulo 3.

D.2 Programa TOTAL.FOR

Programa com *resolução coluna-a-coluna*, contemplando *todos os esquemas*, podendo ser aplicado à solução de *todos os problemas*. A solução exata para o problema de Blasius também está incluída.

```

C
C
C                                     *****
C      PROGRAMA DA CAMADA LIMITE HIDRODINAMICA * TOTAL.FOR-04/09/91 *
C      PROBLEMAS      : Todos          *****
C      NORMALIZACAO   : Convencional
C      DISCRETIZACAO : Todas
C      RESOLUCAO      : Coluna-a-coluna
C
C
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C      DIMENSION UAA(0:5000),UA(0:5000),U(0:5000),UV(0:5000),
C      !VA(0:5000),V(0:5000),A(0:5000),B(0:5000),C(0:5000),D(0:5000)
C
C      ARQUIVOS DE SAIDA PARA AS TANGENTES (NUM. e R-K)
C
C      WRITE(*,'(//,A)')' QUER ABRIR ARQUIVOS PARA AS TANGENTES ?
C      *...(SIM = 1/NAO = 2)...?'
C      READ(*,*)MT
C      IF(MT.EQ.2) GOTO 1
C      OPEN(13,FILE='TTN.DAT',STATUS='UNKNOWN')
C      OPEN(14,FILE='TTR.DAT',STATUS='UNKNOWN')
C
C      ARQUIVOS DE SAIDA PARA OS PERFIS DE VELOCIDADE U(Y) (NUM.)
C
C      1 WRITE(*,'(/,A)')' QUER ABRIR ARQUIVOS PARA AS VELOCIDADES ?
C      *...(SIM = 1/NAO = 2)...?'

```



```
READ(*,*)MV
IF(MV.EQ.2) THEN
```

```
    IESP=1
```

```
    GOTO 2
```

```
ENDIF
```

```
OPEN(15,FILE='TVN1.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
OPEN(16,FILE='TVN2.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
OPEN(17,FILE='TVN3.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
OPEN(18,FILE='TVN4.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
OPEN(19,FILE='TVN5.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
C
```

```
C
```

```
    ARQUIVOS DE SAIDA PARA OS PERFIS DE VELOCIDADE ZI (R-K)
```

```
C
```

```
OPEN(21,FILE='TVR1.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
OPEN(22,FILE='TVR2.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
OPEN(23,FILE='TVR3.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
OPEN(24,FILE='TVR4.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
OPEN(25,FILE='TVR5.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
C
```

```
C
```

```
    ARQUIVOS DE SAIDA PARA A SOLUCAO NUMERICA DA EQUACAO DE BLASIUS
```

```
C
```

```
c
```

```
OPEN(28,FILE='TBN1.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
c
```

```
OPEN(29,FILE='TBN2.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
c
```

```
OPEN(30,FILE='TBN3.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
c
```

```
OPEN(31,FILE='TBN4.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
c
```

```
OPEN(32,FILE='TBN5.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
C
```

```
C
```

```
    ARQUIVO DE SAIDA PARA A SOLUCAO EXATA DA EQUACAO DE BLASIUS
```

```
C
```

```
OPEN(33,FILE='TBEX.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
C
```

```
C
```

```
    ABERTURA DO ARQUIVO DE SAIDA PARA OS ERROS ENTRE TANGENTES
```

```
C
```

```
2 WRITE(*, '(/,A)') ' QUER ABRIR ARQUIVO PARA OS ERROS ? ... (SIM =
* 1/NAO = 2)...?'
```

```
READ(*,*)ME
```

```
IF(ME.EQ.2) GOTO 3
```

```
OPEN(26,FILE='TERT.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

C

C

```
ABERTURA DO ARQUIVO DE SAIDA PARA OS ERROS ENTRE PERFIS
```

C

```
OPEN(34,FILE='TERV.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

C

C

```
ABERTURA DO ARQUIVO DE SAIDA PARA O NUMERO DE ITERACOES
```

C

```
3 WRITE(*, '(/,A)') ' QUER ABRIR ARQUIVO PARA O NUMERO DE ITERACOES
*?... (SIM = 1/NAO = 2)...?'
```

```
READ(*,*)MI
```

```
IF(MI.EQ.2) GOTO 4
```

```
OPEN(27,FILE='TIT.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

C

C

```
ABERTURA DO ARQUIVO DE SAIDA P/ A ESP. DE DESLOC. E MOMENTUM
```

C

```
4 OPEN(35,FILE='TEDM.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

C

C

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

C

```
C ENTRADA DE DADOS C
```

C

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

C

```
WRITE(*, '(//,28X,A)') '-ENTRADA DE DADOS-'
```

```
WRITE(*, '(28X,A)') '*****'
```

C

C

```
ESCOLHA DO PROBLEMA
```

C

```
WRITE(*, '(//,5X,A)') 'BLASIUS = 1, HOWARTH = 2, CILINDRO CIRCULAR
```

```
! = 3 ?'
```

```
READ(*,*)IP
```

```
C
```

```
C
```

```
ESCOLHA DA DISTRIBUICAO NA CORRENTE LIVRE PARA O CILINDRO
```

```
C
```

```
IF(IP.EQ.3) THEN
```

```
WRITE(*,'(//,5X,A)')'TEORIA POTENCIAL = 1, EXPERIMENTAL (HIEMENZ
```

```
!) = 2 ? '
```

```
READ(*,*) ICL
```

```
C
```

```
C
```

```
VALORES DAS CONSTANTES DA DISTRIBUICAO DE HIEMENZ
```

```
C
```

```
IF (ICL.EQ.2) THEN
```

```
ALFA = 3.1657D-2
```

```
BETA = 1.4383D-6
```

```
GAMA = 7.6247D-11
```

```
ENDIF
```

```
GOTO 42
```

```
ENDIF
```

```
C
```

```
C
```

```
ESCOLHA DO VALOR DE b0 PARA O PROBLEMA DE HOWARTH
```

```
C
```

```
IF (IP.EQ.1) THEN
```

```
B0 = .0D00
```

```
GOTO 42
```

```
ENDIF
```

```
WRITE(*,'(//,5X,A)')'QUAL O VALOR DE b0 ?'
```

```
READ(*,*)B0
```

```
C
```

```
C
```

```
ESCOLHA DO ESQUEMA PARA O MOMENTUM
```

```
C
```

```
42 WRITE(*,'(//,5X,A)')'ESQUEMA 1 = 0, JALURIA = 1, ESQUEMA 2 = 2, CR
```

```
ANK-NICHOLSON = 3 ?'
```

```

READ(*,*)IO
C
C     ESCOLHA DO ESQUEMA P/ A CONTINUIDADE NO CASO DE ESQ.2 OU C-N
C
IF (IO.GT.1) THEN
      WRITE(*,'(//,5X,A)')'CONTINUIDADE ESQUEMA 2 = 2
! ,CONTINUIDADE CRANK-NICHOLSON = 3 ? '
      READ(*,*)IC
      WRITE(*,*)IC
      IF (IC.EQ.3) THEN
      WRITE(*,'(//,5X,A)')'CONTINUIDADE C-N BLOTNER =
!1,CONTINUIDADE C-N 3 NIVEIS = 2 ? '
      READ(*,*)ICC
      WRITE(*,*)ICC
      ENDIF
      ENDIF
      WRITE(*,'(//,5X,A,I10)')'ENTRE COM O NI INICIAL (OS SEGUINTEs TE
!RAO SEUS VALORES DOBRADOS !)'
      READ(*,*)NII
      IF (IP.NE.1) THEN
      NILIM=NII
      GOTO 43
      ENDIF
      WRITE(*,'(//,5X,A,I10)')'ENTRE COM O NI FINAL '
      READ(*,*)NILIM
      WRITE(*,'(/,A)')' QUER MANTER A PROPORCAO DA MALHA ? ... (SIM =1/
*NAO = 2)...?'
      READ(*,*)MM
      IF (MM.EQ.2) GOTO 43
      WRITE(*,'(/,A)')' QUER MEDIR O ERRO SEMPRE NOS MESMOS PONTOS DA
!MALHA MAIS GROSSA (SIM =1/NAO = 2)...?'
      READ(*,*)MP
43 IF (MV.EQ.2) THEN

```

```

        IESP=1
        GOTO 45
    ENDIF
    WRITE(*, '(/,A)') ' QUAL O ESPACAMENTO ENTRE PERFIS ? '
    READ(*,*) IESP
45 WRITE(*, '(//,A)') '          FR'
    READ(*,*) FR
    IF (IO.LT.2) GOTO 48
    WRITE(*, '(//,5X,A,/,5X,A,/,5X,A,/,5X,A)')
    ! 'ESCOLHA DO VALOR DE IL: ',
    ! 'IL = 0 > APROX. QUADR. P/ dv/dy EM J=1 EM TODAS AS COLUNAS',
    ! 'IL = NI > APROX. LINEAR P/ dv/dy EM J=1 EM TODAS AS COLUNAS',
    ! '0<IL<NI > APROX. LINEAR ATE A COLUNA IL + QUADR. APOS IL (HIBR)'
    WRITE(*, '(/,5X,A)') 'IL = '
    READ(*,*) IL
    ILT=0
    IF (IL.EQ.NII) ILT=1
C
C     GRAU DE TOLERANCIA PARA O FINAL DA CAMADA LIMITE
C
48 EPS=1.D-7
    LESP=IESP
    NI=NII
    KP=0
    KSEP=0
    XDIF=0.D00
    GOTO 10
5 KP=2
    NI=2*NI
    IF (ILT.EQ.1) IL=NI
    IF (MM.EQ.1) THEN
        DX=1.D00/NI
        DY=DX/FD

```

```
FR=DX/DY/DY
ELSE
  GOTO 15
ENDIF

C
C   CALCULO DA MALHA
C
10 IF (IP.EQ.3) THEN
      DX=180.D00/NI
      IF (ICL.EQ.1) DX=DX*2.D00*DASIN(1.D00)/180.D00
      ELSE
      DX=1.D00/NI
      ENDIF
      DY=DSQRT(DX/FR)
      FD=DX/DY
15 LME=NI/NII
      IPONTO=LME
      WRITE(*,'(//,A)') '          DX          DY'
      WRITE(*,*) DX,DY
C
C   INICIALIZACAO DE VARIAVEIS
C
      PI=2.D00*DASIN(1.D00)
      IF (MV.NE.1) LESP=1
      INTEGJ=0
      SOMAD=0.D00
      SOMAZ=0.D00
      ST=0.D00
      KOM=0
      KODER=0
      XMAX=0.D00
      DMAX=0.D00
      SVEX=0.D00
```

```

SE2=0.D00
SE3=0.D00
DRAGNM=0.D00
DRAGEX=0.D00

```

C
C
C
C

```

      GRAU DE CONVERGENCIA PARA AS DIFERENCAS ENTRE OS PERFIS
      DAS DUAS ULTIMAS ITERACOES

```

```

EPSIT=1.D-5/NI

```

```

IF (KP.EQ.2) GOTO 20
WRITE(*,'(//,A)')' QUER QUE IMPRIMA OS PARCIAIS (SIM = 1/NAO = 2
*)... ?'
READ(*,*)KPARC
WRITE(*,'(//,A)')' QUER QUE IMPRIMA OS FINAIS (SIM = 1/NAO = 2).
*... ?'
READ(*,*)KODE
IF(KODE.EQ.2) GOTO 20
WRITE(*,'(//,37X,A)')'RESULTADOS'
WRITE(*,'(37X,A)')'*****'

```

```

20 NCL=1

```

C
C
C

```

      VALORES DE U NO INFINITO PARA AS CONDICOES INICIAIS

```

```

IF (IP.EQ.3) THEN
      IF (ICL.EQ.1) THEN
            UINF=2.D00*DSIN(DX)
            ELSE
            UINF=ALFA*DX-BETA*DX*DX*DX-GAMA*DX*DX*DX*DX*DX
            ENDIF
      UAINF=0.D00
      UAAINF=-UINF
    ELSE

```

```
                UINF=1.D00-B0*DX
                UAINF=1.D00
                UAAINF=1.D00
            ENDIF
C
C          CONDICÕES DE CONTORNO EM Y=0 (NAO DESLIZAM. + IMPERMEABILIDADE)
C
                U(0)=0.D00
                V(0)=0.D00
                VA(0)=0.D00
C
C          VALOR ADOTADO PARA A DESCONTINUIDADE PARA O MOMENTUM ESQ. C-N
C
                UA(0)=UAINF
C
C          CONDICÕES DE CONTORNO EM X=0
C
                DO 50 J=1,NCL
                UA(J)=UAINF
                VA(J)=0.D00
C
C          PERFIL DE VELOCIDADES NA CORRENTE LIVRE (X=-DX OU I=-1) PARA OS
C          PROBLEMAS DE BLASIUS E DE HOWARTH
C
                IF (IP.LE.2) UAA(J)=1.D00
C
C          CHUTE INICIAL PARA A PRIMEIRA COLUNA
C
                U(J)=UINF
                50 CONTINUE
C
C          INICIO DAS COLUNAS
C
```



```

      IF (ICL.EQ.1) THEN
          UINF=2.D00*DSIN(X)
      ELSE
          UINF=ALFA*X-BETA*X*X-X-GAMA*X*X*X*X*X
      ENDIF
    ELSE
      UINF=1.D00-BO*X
    ENDIF
86 IF ((IO.EQ.1).OR.(IO.EQ.2)) THEN
          UDU=UINF*(3.D00*UINF-4.D00*UAINF+
!           UAAINF)
      ELSE
          IF (IO.EQ.3) THEN
              UDU=UINF*UINF-
!               UAINF*UAINF
          ELSE
              UDU=UINF*(UINF-
!               UAINF)
          ENDIF
      ENDIF
    ENDIF

    KS=LESP-I
    GOTO 121

C
C     IMPRESSAO DOS RESULTADOS PARCIAIS
C
120 IF (KPARC.EQ.2) GOTO 1205
    WRITE (*,'(/,A,/)' )' *****'
! *****'
    WRITE (*,'(/,35X,A)')'U(J)'
    WRITE (*,2000) (U(J),J=0,K)
    WRITE (*,'(/,35X,A,2X,A,1X,F5.3)')'V(J)', 'PARA FD=',FD
    WRITE (*,2000) (V(J),J=0,K)
    WRITE (*,'(/,35X,A)')'UA(J)'

```



```

V(J)=V(J-1)+(UA(J)-U(J))/FD
122    CONTINUE
C
C    OBTENCAO DOS COEFICIENTES PARA ESQUEMA 1 E JALURIA (TDMA)
C
      DO 123 J=1,NCL
        IF (IO.EQ.1) THEN
C
C    ( JALURIA )
C
          A(J)=-V(J)*FD-2.D00*FR
          B(J)=3.D00*U(J)+4.D00*FR
          C(J)=V(J)*FD-2.D00*FR
          D(J)=U(J)*(4.D00*UA(J)-UAA(J))+UDU
        ELSE
C
C    ( ESQUEMA 1 )
C
          A(J)=-V(J)*FD/2.D00-FR
          B(J)=U(J)+2.D00*FR
          C(J)=V(J)*FD/2.D00-FR
          D(J)=U(J)*UA(J)+UDU
        ENDIF
123    CONTINUE
      D(NCL)=D(NCL)-C(NCL)*UINF
C
C    CALCULO DOS NOVOS V'S P/ ESQ.2 E CRANK-NICHOLSON (CONTINUIDADE)
C
      ELSE
C
C    !!!! APROXIMACAO QUADRATICA "IMEDIATAMENTE" JUNTO A PLACA:
C
C

```

```

C      SE I FOR MAIOR QUE IL (LONGE DA BORDA DE ATAQUE) USO 20 ORDEM;
C
C 125      IF (IC.EQ.2) THEN
C
C      ( CONTINUIDADE ESQUEMA 2 )
C
C          V(1)=(4.D00*UA(1)-3.D00*U(1)-UAA(1))/(4.D00*FD)
C      ELSE
C
C      ( CONTINUIDADE CRANK-NICHOLSON ESQ. 3 NIVEIS E ESQ. BLOTTNER )
C
C          V(1)=(UA(1)-U(1))/FD-VA(1)
C      ENDIF
C
C      SE I FOR MENOR OU IGUAL A IL (MUITO PROX. A BORDA) USO 10 ORDEM
C
C          IF (I.LE.IL) THEN
C
C      ( ESQUEMA 2 )
C
C          V(1)=V(1)*2.D00
C
C      ( CRANK-NICHOLSON )
C
C          IF (IC.EQ.3) V(1)=V(1)+VA(1)
C      ENDIF
C
C      SE J E MAIOR QUE 1...
C
C          DD 130 J=2,NCL
C          IF (IC.EQ.2) THEN
C
C      ( ESQUEMA 2 )

```

```

C
      V(J)=(4.D00*V(J-1)-V(J-2)+(4.D00*UA(J)-3.D00*U(J)
!      -UAA(J))/FD)/3.D00
      ELSE
C
C      ( CRANK-NICHOLSON )
C
      IF (ICC.EQ.2) THEN
          V(J)=(4.D00*((UA(J)-U(J))/FD+V(J-1)+VA(J-1))
!          -V(J-2)-3.D00*VA(J)-VA(J-2))/3.D00
          ELSE
          V(J)=(UA(J)-U(J)+UA(J-1)-U(J-1))/FD+V(J-1)+
!          VA(J-1)-VA(J)
          ENDIF
      ENDIF
130      CONTINUE
C
C      OBTENCAO DOS COEFICIENTES P/ ESQUEMA 2 E CRANK-NICHOLSON (TDMA)
C
      DO 140 J=1,NCL
          IF (ID.EQ.2) THEN
C
C      ( ESQUEMA 2 )
C
          FR2=FR*2.D00
          A(J)=-V(J)*FD-FR2
          B(J)=3.D00*U(J)+4.D00*FR
          C(J)=V(J)*FD-FR2
          D(J)=U(J)*(4.D00*UA(J)-UAA(J))+UDU
          ELSE
C
C      ( CRANK-NICHOLSON )
C

```

$$FS4V=FD/4.D00*(V(J)+VA(J))$$

$$A(J)=-FR-FS4V$$

$$B(J)=2.D00*FR+U(J)+UA(J)$$

$$C(J)=-FR+FS4V$$

$$D(J)=UA(J)*(U(J)+UA(J))+FR*(UA(J+1)-2.D00*UA(J)+$$

$$UA(J-1))-FS4V*(UA(J+1)-UA(J-1))+UDU$$

ENDIF

140 CONTINUE

$$D(NCL)=D(NCL)-C(NCL)*UINF$$

C

C

O RESTANTE DO PROGRAMA E COMUM A TODOS OS ESQUEMAS ...

C

ENDIF

C

C

REGISTRO DO PERFIL DA IT. ANTERIOR P/ FUTURA COMPARACAO

C

IF (IT.EQ.0) GOTO 150

DO 145 L=1,NCL

UV(L)=U(L)

145 CONTINUE

C

C

RESOLUCAO DA MATRIZ TRIDIAGONAL (SUBROT. TDMA)

C

150 CALL TDMA(A,B,C,D,NCL,U)

C

C

AVERIGUACAO DA ESPESSURA DA CAMADA LIMITE

C

DER=UINF-U(NCL)

IF (DER.GT.EPS) THEN

K=NCL+1

UAA(K)=UAINF

UA(K)=UAINF

U(K)=UINF

```

C
C      E AINDA PARA O ESQUEMA DE C-N APLICAVEL AO MOMENTUM
C
C              UA(K+1)=UAINF
C              GOTO 120
C      ENDIF
C
C      VERIFICACAO DA CONVERGENCIA ENTRE AS 2 ULTIMAS ITERACOES
C
C      IF (IT.EQ.0) GOTO 120
C      DO 270 J=1,NCL-1
C      DIF=DABS(U(J)-UV(J))
C      IF (DIF.GT.EPSIT) GOTO 120
C 270 CONTINUE
C
C      CALCULO DA TANGENTE (du/dy;y=0) " DE ORDEM 3 "
C
C 275 T=(8.D00*U(1)-U(2)+2.D00*UDU/FR)/(6.D00*DY)
C
C      CALCULO DA ESPESSURA DE DESLOCAMENTO (ED)
C
C      IF ((IP.EQ.3).AND.(I.EQ.1)) UA(0)=0.D00
C      DO 277 JD=1,NCL
C      UM=(U(JD-1)+U(JD))/2.D00
C      EDIF=UINF-UM
C      ED=ED+EDIF
C
C      CALCULO DA ESPESSURA DO MOMENTUM (EM)
C
C      EMIF=UM*EDIF
C      EM=EM+EMIF
C 277 CONTINUE
C      ED=ED*DY/UINF

```



```
EM=EM*DY/UINF/UINF
```

```
C
```

```
C     REGISTRO DAS ESPESSURAS (DESL. E MOM.) NO ARQUIVO DE SAIDA
```

```
C
```

```
WRITE(35,'(F5.3,2X,2(F11.8,2X))') X,ED,EM
```

```
C
```

```
C     SOMATORIA DA FORCA DE ARRASTE NUMERICA
```

```
C
```

```
DRAGNM=DRAGNM+T
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
C
```

```
C     CALCULO DA DERIVADA DA TANGENTE (dT/dX)
```

```
C
```

```
C     IF ((IP.EQ.2).AND.(KODER.NE.1)) THEN
```

```
C
```

```
IF (I.EQ.1) GOTO 278
```

```
C
```

```
DTDX=(T-TA)/DX
```

```
C
```

```
IF (I.GT.2) THEN
```

```
C
```

```
DIFDT=DTDXA-DTDX
```

```
C
```

```
IF (DIFDT.GE.0.D00) KODER=1
```

```
C
```

```
ENDIF
```

```
C 278
```

```
TA=T
```

```
C
```

```
IF (I.GT.1) DTDXA=DTDX
```

```
C
```

```
ENDIF
```

```
C
```

```
IF ((I.EQ.1).OR.(I.EQ.NI)) GOTO 280
```

```
C
```

```
IF (KS.NE.0) GOTO 288
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
C
```

```
C     REGISTRO DA TANGENTE NUMERICA NO ARQUIVO DE SAIDA
```

```
C
```

```
280 XP=REAL(I)
```

```
IF(MT.EQ.2) GOTO 281
```

```
IF ((I.EQ.1).AND.(IP.EQ.3)) WRITE(13,*) 0.D00,0.D00
```

```
IF (IP.EQ.3) THEN
```

```

WRITE (13,*) XC,T
ELSE
WRITE (13,*) X,T
ENDIF
281 IF (IESP.EQ.1) GOTO 282
IF (I.EQ.1) GOTO 283
282 LESP=LESP+IESP
C
C       IMPRESSAO DO PERFIL NUMERICO DE VELOCIDADES NA TELA
C
283 IF (KODE.EQ.2) GOTO 284
WRITE (*, '(/,A)') ' *****'
!*****'
284 IF (KSEP.NE.0) GOTO 285
WRITE (*,1000) I,NI
IF(KODE.EQ.2) GOTO 285
WRITE (*, '(27X,A,/)' ) 'PERFIL NUMERICO DE VELOCIDADES'
WRITE (*,2000) (U(J),J=1,NCL)
WRITE (*, '(/,35X,A)') 'V(J)'
WRITE (*,2000) (V(J),J=0,K)
WRITE (*, '(/,35X,A)') 'UA(J)'
WRITE (*,2000) (UA(J),J=0,K)
C
C       IMPRESSAO DA TANGENTE NUMERICA NA TELA
C
285 IF (KODE.NE.1) GOTO 2855
WRITE(*, '(/,3X,A,F13.6)') 'TANGENTE NUMERICA      =' ,T
2852 IF (IP.EQ.2) WRITE(*, '(20X,A,F10.5,/)' ) 'DTDX =' ,DTDX
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C       WRITE(*,*)IT
C       IF (T.LT.0.D00) THEN
C           KSEP=1
C           CALL PERFIN (NCL,KODER,UV,U,UA,UAA,V,VA)

```

```
c          GOTO 80
c          ENDIF
c      IF (KSEP.NE.0) THEN
c          XDIF=DABS(X-XA)
c          IF (T.LE.EPS) GOTO 320
c          KSEP=2
c          ENDIF
c
c
c
c
c          REGISTRO DOS 5 PERFIS NUMERICOS DE VELOC. (0%,25%,50%,75%,100%)
c          NOS ARQUIVOS DE SAIDA.
c
c
c      2855 KOM=KOM+1
c          IF(MV.EQ.2) GOTO 287
c          DO 286 J=0,NCL
c          Y=DY*J
c          ETA=Y/DSQRT(X)
c          IF (KOM.EQ.1) THEN
c          WRITE(15,*)U(J),Y
c          WRITE(28,*)ETA,U(J)
c          GOTO 286
c          ENDIF
c          IF (KOM.EQ.2) THEN
c          WRITE(16,*)U(J),Y
c          WRITE(29,*)ETA,U(J)
c          GOTO 286
c          ENDIF
c          IF (KOM.EQ.3) THEN
c          WRITE(17,*)U(J),Y
c          WRITE(30,*)ETA,U(J)
c          GOTO 286
c          ENDIF
c          IF (KOM.EQ.4) THEN
```

```

WRITE(18,*)U(J),Y
WRITE(31,*)ETA,U(J)
GOTO 286
ENDIF
IF (KOM.EQ.5)THEN
WRITE(19,*)U(J),Y
WRITE(32,*)ETA,U(J)
ENDIF
286 CONTINUE
C
C     FORMATAÇAO
C
500 FORMAT(//,30X,'DRAG NUMERICO = ',F11.6)
600 FORMAT(/,30X,'DRAG EXATO = ',F11.6)
700 FORMAT(//,15X,'DX = ',F9.6,/,15X,'ERRO MAXIMO DA TANGENTE = ',F9
*.6,2X,'NA COLUNA ',I5,/,15X,'ERRO ACUMULADO DA TANGENTE = ',
*F9.6,/,15X,'ERRO INTEGRAL DA TANGENTE = ',F9.6,/,15X,'ERRO MEDIO
* ENTRE PERFIS = ',F9.6,/,15X,'ERRO MEDIO REL. ENTRE PERFIS = ',
*,F9.6,/,15X,'ERRO MAXIMO ENTRE PERFIS = ',F9.6,/)
750 FORMAT(//,15X,'LOG.DX = ',F9.5,/,15X,'LOG.ERRO MAXIMO = ',F9.5,
*/,15X,'LOG.ERRO TIPO 1 = ',F9.5,/,15X,'LOG.ERRO TIPO 2 = ',F9.
*5)
1000 FORMAT(28X,'C O L U N A # ',I7,' DE ',I7,/)
2000 FORMAT(7(2X,F9.6))
C
C     RESOLUCAO POR RUNGE-KUTTA
C
287 IK=NCL-1
IF ((IP.GT.1).OR.((MP.EQ.1).AND.(IPONTO.NE.I))) GOTO 288
CALL RUNGE (MT,MV,IK,DY,X,KOM,KODE,XP,TR,U,SOMAD,DMAX,LME,
!INTEGJ,SOMAZ,MP)
C
C     SOMATORIA DA FORÇA DE ARRASTE EXATA

```

```
C
DRAGEX=DRAGEX+TR
C
C
C   PROXIMA COLUNA A VERIFICAR O ERRO
C
IPONTO=I+LME
C
C   CALCULO DOS ERROS LOCAIS E SOMATORIAS DAS TANGENTES
C
EREL=T-TR
AEREL=DABS(EREL)
SVEX=SVEX+TR
SE2=SE2+AEREL
SE3=SE3+EREL
C
C   OBTENCAO DO ERRO MAXIMO RELATIVO DAS TANGENTES
C
XMAXN=AEREL/TR
IF (XMAXN.GT.XMAX) THEN
XMAX=XMAXN
LOCAL=I
ENDIF
C
C   REGISTRO DO NUMERO DE ITERACOES DA COLUNA
C
IF (MI.EQ.2) GOTO 288
WRITE(27,*)I,IT
C
C   EXTRAPOLACAO DE 2º ORDEM PARA O PERFIL INICIAL DA PROXIMA
C   COLUNA (UTILIZANDO O VETOR UV)
C
288 CALL PERFIN (NCL,KODER,UV,U,UA,UAA,V,VA)
```



```

c 320 IF (KSEP.NE.0) THEN
c                               WRITE(*, '(A)') ' ACABOU !!!!!'
c                               WRITE (*,*) XP,T
c                               ENDIF
c
c
c
c
c
c
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
340 IF (MT.EQ.2) GOTO 350
    ENDFILE UNIT=13
    ENDFILE UNIT=14
350 IF (MV.EQ.2) GOTO 360
    ENDFILE UNIT=15
    ENDFILE UNIT=16
    ENDFILE UNIT=17
    ENDFILE UNIT=18
    ENDFILE UNIT=19
    ENDFILE UNIT=21
    ENDFILE UNIT=22
    ENDFILE UNIT=23
    ENDFILE UNIT=24
    ENDFILE UNIT=25
    ENDFILE UNIT=28
    ENDFILE UNIT=29
    ENDFILE UNIT=30
    ENDFILE UNIT=31
    ENDFILE UNIT=32
    ENDFILE UNIT=33
360 IF (ME.EQ.2) GOTO 365
    ENDFILE UNIT=26
    ENDFILE UNIT=34
365 IF (MI.EQ.2) GOTO 370
    ENDFILE UNIT=27
    ENDFILE UNIT=35
370 STOP
    END

```

C
C
C
C
C

SUBRTINA TDMA PARA RESOLUCAO DA MATRIZ TRIDIAGONAL

SUBROUTINE TDMA(A,B,C,D,NCL,U)
 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
 DIMENSION A(0:500),B(0:500),C(0:500),D(0:500),U(0:500)

C
C
C

ELIMINACAO DE GAUSS

C(1)=C(1)/B(1)
 D(1)=D(1)/B(1)
 DO 6 N=2,NCL
 DIVI=B(N)-C(N-1)*A(N)
 IF (N.EQ.NCL) GOTO 5
 C(N)=C(N)/DIVI
 5 D(N)=(D(N)-D(N-1)*A(N))/DIVI
 6 CONTINUE

C
C
C

RETROSUBSTITUICAO

U(NCL)=D(NCL)
 DO 7 N=NCL-1,1,-1
 U(N)=D(N)-C(N)*U(N+1)
 7 CONTINUE
 RETURN
 END

C
C
C
C

SUBRTINA PERFIN PARA OBTENCAO DOS PERFIS INICIAIS U e V
 PARA A PROXIMA COLUNA

SUBROUTINE PERFIN(NCL,KODER,UV,U,UA,UAA,V,VA)


```

    IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
    DIMENSION UV(0:500),U(0:500),UA(0:500),UAA(0:500),V(0:500),
!VA(0:500)
    DO 200 J=1,NCL

```

C

C

```

    EXTRAPOLACAO DE SEGUNDA ORDEM

```

C

```

    IF (KODER.EQ.0) UV(J)=3.D00*(U(J)-UA(J))+UAA(J)

```

C

C

```

    REGISTRO DAS NOVAS COLUNAS ANTERIDRES (UA e UAA), MANTENDO O
    NOVO PERFIL OBTIDO COMO CHUTE INICIAL PARA A PROX. COLUNA

```

C

C

```

    UAA(J)=UA(J)

```

```

    UA(J)=U(J)

```

```

    VA(J)=V(J)

```

```

    IF (KODER.EQ.0) U(J)=UV(J)

```

```

200 CONTINUE

```

```

    RETURN

```

```

    END

```

C

C

C

```

    SUBROTINA RUNGE PARA RESOLUCAO DA EQUACAO DE BLASIUS

```

C

```

    SUBROUTINE RUNGE(MT,MV,K,DY,X,KOM,KODE,XP,TR,U,SOMAD,DMAX,
!LME,INTEGJ,SOMAZ,MP)

```

```

    IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

```

```

    DIMENSION U(0:500)

```

```

    JPONTO=LME

```

```

    IF (KODE.EQ.2) GOTO 2

```

```

    WRITE(*,'(//,23X,A,/)' )'PERFIL DE VELOCIDADES POR RUNGE-KUTTA'

```

```

2 HM=.1D00

```

```

    ZI=0.D00

```

C

C VALOR DA CONDICAO INICIAL PARA A SOLUCAO EXATA
C DO PROBLEMA DE BLASTIUS
C

```
WI=0.33205734D00
WO=WI
YI=0.D00
HT=0.D00
DE=DY/DSQRT(X)
IF (DE.GE.HM) GOTO 5
HM=DE
H=DE
GOTO 10
5 H=HM
10 L=1
ET=DE
GOTO 30
20 IF (DH.LT.HM) H=DH
30 YK1=H*ZI
ZK1=H*WI
WK1=-.5D00*H*YI*WI
Z=ZI+ZK1/2.D00
W=WI+WK1/2.D00
Y=YI+YK1/2.D00
YK2=H*Z
ZK2=H*W
WK2=-.5D00*H*Y*W
Z=ZI+ZK2/2.D00
W=WI+WK2/2.D00
Y=YI+YK2/2.D00
YK3=H*Z
ZK3=H*W
WK3=-.5D00*H*Y*W
Z=ZI+ZK3
```

```

W=WI+WK3
Y=YI+YK3
YK4=H*Z
ZK4=H*W
WK4=-.5D00*H*Y*W
YD=(YK1+2.D00*YK2+2.D00*YK3+YK4)/6.D00
ZD=(ZK1+2.D00*ZK2+2.D00*ZK3+ZK4)/6.D00
WD=(WK1+2.D00*WK2+2.D00*WK3+WK4)/6.D00
YI=YI+YD
ZI=ZI+ZD
WI=WI+WD
HT=HT+H
IF ((X.EQ.1.D00).AND.(MV.EQ.1)) WRITE(33,*)HT,ZI
IF (HT.NE.ET) GOTO 40
YL=L*DY
XP=X*100.D00

```

C

C

CALCULO DAS DIFERENCAS ENTRE OS PERFIS DE VELOCIDADE EX. x NUM.

C

```

IF ((MP.EQ.1).AND.(L.NE.JPONTO)) GOTO 31
JPONTO=JPONTO+LME
D=DABS(ZI-U(L))*100.D00
IF (D.GT.DMAX) DMAX=D
SOMAD=SOMAD+D
SOMAZ=SOMAZ+ZI
INTEGJ=INTEGJ+1

```

C

C

REGISTRO DA VELOCIDADE R-K NO ARQUIVO DE SAIDA

C

```

31 IF (MV.EQ.2) GOTO 33
IF (KOM.EQ.1) THEN
WRITE(21,*)ZI,YL
GOTO 33

```

```
ENDIF
IF (KOM.EQ.2) THEN
WRITE(22,*)ZI,YL
GOTO 33
ENDIF
IF (KOM.EQ.3) THEN
WRITE(23,*)ZI,YL
GOTO 33
ENDIF
IF (KOM.EQ.4) THEN
WRITE(24,*)ZI,YL
GOTO 33
ENDIF
IF (KOM.EQ.5) WRITE(25,*)ZI,YL
C
C     IMPRESSAD DA VEL. R-K NA TELA
C
33 IF (KODE.EQ.2) GOTO 34
   WRITE(*,1500)ZI
34 IF (L.GT.K) GOTO 60
   IF (L.NE.1) GOTO 35
C
C     REGISTRO DA TANGENTE R-K NO ARQUIVO DE SAIDA
C
   TR=WO/DSQRT(X)
   IF (MT.EQ.2) GOTO 35
   WRITE(14,*)XP,TR
C
C     CALCULO DA VELOCIDADE PARA O PROX. Z
C
35 L=L+1
   ET=DE*L
   H=HM
```

```
      IF (H.EQ.0D00) H=HM
40  DH=ET-HT
      GOTO 20
C
C      IMPRESSAO DA TANG. R-K NA TELA
C
60  IF (KODE.EQ.2) GOTO 80
      WRITE(*,'(//,3X,A)')'TANGENTE POR RUNGE-KUTTA = '
      WRITE(*,'(F12.5)')TR
1500 FORMAT(2X,F8.5)
80  RETURN
      END
```

D.3 Programa PONTOTAL.FOR

Programa com *resolução ponto-a-ponto* (equações acopladas), contemplando *todos os esquemas, com exceção do H3*, para aplicação exclusiva à solução do *problema de Blasius*.

```

C
C      PROGRAMA PONTOTAL.FOR - 08/09/91 - ESTACOES DE TRABALHO "SUN"
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION UAA(0:5000),UA(0:5000),U(0:5000),VA(0:5000),V(0:5000)
C      CHARACTER*3 VAI
      CHARACTER*2 QT,QP
      OPEN(13,FILE='PSETF.DAT',STATUS='UNKNOWN')
      OPEN(14,FILE='PSEIT.DAT',STATUS='UNKNOWN')
C
C      ESCOLHA DO ESQUEMA PARA O MOMENTUM
C
      WRITE(*,'(//,5X,A)')'ESQUEMA 1 = 0, JALURIA = 1, ESQUEMA 2 = 2, CR
!ANK-NICHOLSON = 3 ?'
      READ(*,*)IO
      WRITE(*,*)IO
      WRITE(*,'(//,A,\)')' QUER QUE IMPRIMA OS RESULTADOS PARCIAIS
!(S/N) ? '
      READ(*,'(A)')QP
      WRITE(*,*)QP
      WRITE(*,'(//,A,\)')' QUER QUE IMPRIMA OS RESULTADOS FINAIS
!(S/N)? '
      READ(*,'(A)')QT
      WRITE(*,*)QT
      WRITE(*,'(//,A)')'          FR          NI'
      READ(*,*)FR,NI
      WRITE(*,*)FR,NI

```

```

IF (IO.LT.2) GOTO 3
WRITE(*,'(//,5X,A/,5X,A/,5X,A/,5X,A)')
!'ESCOLHA DO VALOR DE IL:',
!'IL = 0 > APROX. QUADR. P/ dv/dy EM J=1 EM TODAS AS COLUNAS',
!'IL = NI > APROX. LINEAR P/ dv/dy EM J=1 EM TODAS AS COLUNAS',
!'0<IL<NI > APROX. LINEAR ATE A COLUNA IL + QUADR. APOS IL (HIBR)'
WRITE(*,'(/,5X,A)')'IL = '
READ(*,*)IL
WRITE(*,*)IL
3 EPS=1.D-7
EPSIT=1.D-5/NI
DX=1.D00/NI
DY=DSQRT(DX/FR)
FD=DX/DY
WRITE(*,'(//,A)')'          DX          DY'
WRITE(*,*)DX,DY
ULIM=1.D00-EPS
U(0)=0.D00
V(0)=0.D00
DO 100 I=1,NI
X=I*DX
J=0
IT=0
GOTO 6
5 IF (QP.EQ.'N') GOTO 55
WRITE (*,'(/,A,/)')' *****
!*****'
WRITE (*,'(/,35X,A)')'U(J)'
WRITE (*,2500) (U(L),L=0,J)
WRITE (*,'(/,35X,A)')'V(J)'
WRITE (*,2500) (V(L),L=0,J)
WRITE (*,'(/,35X,A)')'UA(J)'
WRITE (*,2500) (UA(L),L=0,J)

```

```

C      WRITE (*, '(/,35X,A)') 'VA(J)'
C      WRITE (*,2500) (VA(L),L=0,J)
C      WRITE (*, '(/,35X,A)') 'UAA(J)'
C      WRITE (*,2500) (UAA(L),L=0,J)
C      READ(*, '(A)') VAI
55 LIM=J-1
      KONT=0
      IT=IT+1
      J=0
6  J=J+1
      IF (IT.NE.0) GOTO 10
      IF (I.NE.1) GOTO 20
7  UA(J)=1.D00
      UAA(J)=1.D00
8  U(J+1)=1.D00
      GOTO 30
10 VIA=U(J)
      IF (J.GT.LIM) GOTO 7
      GOTO 30
20 IF (J.GT.LIM) GOTO 7
      UAA(J)=UA(J)
      UA(J)=U(J)
      VA(J)=V(J)
      IF (J.GT.LIM) GOTO 8
30 IF (ID.EQ.2) THEN
      IF (J.EQ.1) GOTO 35
      A=3.D00
      B=4.D00*(FR-UA(J))+UAA(J)+U(J-1)-U(J+1)
      C=((4.D00*UA(J)-UAA(J))+FD*(4.D00*V(J-1)-V(J-2)))*(U(J+1)-U(J-1))/
      ! 3.D00-2.D00*FR*(U(J+1)+U(J-1))
      GOTO 38
35 IF (I.LE.IL) THEN
      PO=2.D00

```



```

        ELSE
            PO=1.D00
        ENDIF

A=3.D00
B=UAA(1)+4.D00*(FR-UA(1))-PO*.75D00*U(2)
C=U(2)*(PO*UA(1)-PO*.25D00*UAA(1)-2.D00*FR)
    ELSE
        IF (IO.EQ.0) THEN
            A=1.D00
            B=2.D00*FR-UA(J)+(U(J-1)-U(J+1))/2
            C=(FD*V(J-1)+UA(J))/2.D00*(U(J+1)-U(J-1))-FR*(U(J+1)+U(J-1))
        ELSE
            A=3.D00
            B=UAA(J)-4.D00*UA(J)-U(J+1)+U(J-1)+4.D00*FR
            C=(FD*V(J-1)+UA(J))*(U(J+1)-U(J-1))-2.D00*FR*
!           (U(J+1)+U(J-1))
        ENDIF
    ENDIF

38 U(J)=(-B+DSQRT(B*B-4.D00*A*C))/(2.D00*A)
    IF (IT.EQ.0) GOTO 40
    DIF=DABS(UA-U(J))
    IF (DIF.LE.EPSIT) KONT=KONT+1
    IF (KONT.EQ.LIM) GOTO 1
40 IF (U(J).GT.ULIM) GOTO 5
    IF (IO.EQ.2) THEN
        IF (J.EQ.1) THEN
            V(1)=PO*(4.D00*UA(1)-3.D00*U(1)-UAA(1))/(4.D00*FD)
        ELSE
            V(J)=(4.D00*V(J-1)-V(J-2)+(4.*UA(J)-3.D00*U(J)-
!           UAA(J))/FD)/3.D00
        ENDIF
    ELSE
        V(J)=V(J-1)-(U(J)-UA(J))/FD

```

```

ENDIF
GOTO 6
1 WRITE(14,*)I,IT
  WRITE(*,2000) I
  IF(QT.EQ.'N') GOTO 2
  WRITE(*,1000) (U(J),J=1,LIM)
  WRITE(*,1000) (V(J),J=1,LIM)
  WRITE(*,1000) (UA(J),J=1,LIM)
C
C      CALCULO DA TANGENTE (du/dy;y=0) " DE ORDEM 3 "
C
2 T=(8.D00*U(1)-U(2))/(6.D00*DY)
  XP=X*100.D00
C      WRITE(*,'(/,10X,A,F11.7) ') 'TANGENTE = ',T
  WRITE(13,*) XP,T
  LIM=J
  KONT=0
100 CONTINUE
  CLOSE(13,STATUS='KEEP')
  CLOSE(14,STATUS='KEEP')
  STOP
1000 FORMAT(8(F8.5,2X))
2000 FORMAT(///,31X,'C O L U N A # ',I3,/)
2500 FORMAT(7(2X,F9.6))
  END

```

D.4 Programa NEWTON.FOR

Programa para a solução de similaridade de Blasius através da aplicação do método de Runge-Kutta de 4ª ordem em paralelo ao método de Newton-Raphson para obtenção da condição de partida $f''(0)$.

```

C
C      PROGRAMA PARA OBTENCAO DO VALOR EXATO DA TANGENTE DA FUNCAO
C      DE BLASIUS EM ETA=0
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      WRITE(*,'(//,10X,A,\)')'ENTRE COM O GRAU DE CONVERG.DO NEWT/RAPH '
      READ(*,*)GRAU
      E=.001D00
      WRITE(*,'(//,10X,A,\)')'ENTRE COM O INCREMENTO DO RUNGE-KUTTA      '
      READ(*,*)H
C      WRITE(*,'(F8.5)')H
      WRITE(*,'(//,10X,A,\)')'CHUTE INICIAL PARA A TANGENTE EM ETA=0 ?'
      READ(*,*)FL2
10  FL2C=FL2
      CALL RUNGE(FL2, GRAU, H, FL)
      WRITE(*,'(/,F13.10,5X,F13.10,/)' )FL2C,FL
      DESIG=1.D00-FL
      IF(DESIG.LE.GRAU) GO TO 15
      FL2E=FL2C-E
C      WRITE(*,'(10X,A,\,F8.5)')'VALOR DA TANGENTE A ESQUERDA =' ,FL2E
      CALL RUNGE(FL2E, GRAU, H, FLE)
      FL2D=FL2C+E
C      WRITE(*,'(10X,A,\,F8.5)')'VALOR DA TANGENTE A DIREITA =' ,FL2D
      CALL RUNGE(FL2D, GRAU, H, FLD)
      TG=(FLD-FLE)/2.D00/E
      FL2=FL2C+DESIG/TG

```

```

C      WRITE(*,'(//,10X,A,F10.7,5X,A,F10.7,5X,A,F10.7,/)' )
C      !'FLE=',FLE,'FL =',FL,'FLE =',FLE
C      WRITE(*,'(//10X,A,F10.7,5X,A,F10.7,/)' )'TG =',TG,'NOVO FL2 =',FL2
      GO TO 10
15 WRITE(*,'(///,30X,A)' )'RESULTADO FINAL:'
      WRITE(*,'(30X,A,/)' )'*****'
      WRITE(*,'(/,20X,A,F13.10,\,2X,A,F13.10,///)' )
      !'fII(0) =',FL2C,'fI(%) =',FL
      STOP
      END

```

```

C
C      SUBROTINA RUNGE PARA RESOLUCAO DA EQUACAO DE BLASIUS
C

```

```

      SUBROUTINE RUNGE (WI, GRAU, H, ZI)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      OPEN(5, FILE='NEWTON.DAT', STATUS='UNKNOWN')
      ETA=.0D00
      ZI=0.D00
      YI=0.D00
20 WRITE(5,'(F13.10,F13.10)' )ETA,ZI
      ZIA=ZI
      ETA=ETA+H
      YK1=H*ZI
      ZK1=H*WI
      WK1=-.5D00*H*YI*WI
      Z=ZI+ZK1/2.D00
      W=WI+WK1/2.D00
      Y=YI+YK1/2.D00
      YK2=H*Z
      ZK2=H*W
      WK2=-.5D00*H*Y*W
      Z=ZI+ZK2/2.D00
      W=WI+WK2/2.D00

```

```

Y=YI+YK2/2.D00
YK3=H*Z
ZK3=H*W
WK3=-.5D00*H*Y*W
Z=ZI+ZK3
W=WI+WK3
Y=YI+YK3
YK4=H*Z
ZK4=H*W
WK4=-.5D00*H*Y*W
YD=(YK1+2.D00*YK2+2.D00*YK3+YK4)/6.D00
ZD=(ZK1+2.D00*ZK2+2.D00*ZK3+ZK4)/6.D00
WD=(WK1+2.D00*WK2+2.D00*WK3+WK4)/6.D00
YI=YI+YD
ZI=ZI+ZD
WI=WI+WD
C   WRITE(*,'(F10.7)')ZI
   DFR=DABS(ZI-ZIA)/H
C   IF (DFR.LE..00001) WRITE(*,'(10X,A,\,F10.7,10X,A,\,F10.7)')
C   !'DFR =',DFR,'GRAU =',GRAU
   IF(DFR.LE.GRAU) GO TO 50
   GO TO 20
   CLOSE(5)
50 RETURN
   END

```

Bibliografia

- [1] JALURIA, Y. & TORRANCE, K. E. - Computational heat transfer, Hemisphere Publishing Corporation, New York (1986)
- [2] WHITE, F. M. - Viscous fluid flow, Mc Graw-Hill Book Company, New York (1974)
- [3] SMITH, A. M. O. & CLUTTER, D. W. - Solution of the incompressible laminar boundary-layer equations, AIAA Journal vol.1, no.9 (1963)
- [4] BLOTTNER, F. G. & FLÜGGE-LOTZ, I. - Finite-difference computation of the boundary layer with displacement thickness iteration, Journal de Mécanique vol.2, no.4 (Dec. 1963)
- [5] BLOTTNER, F. G. - Investigation of some finite-difference techniques for solving the bl equations, Comp. Meth. App. Mech. & Eng. 6, 1-30 (1975)
- [6] MacDONALD, D. A. - Solution of the incompressible boundary-layer equations via the Galerkin Kantorovich technique, J. Inst. Maths Applies vol.6, pp.115-130 (1970)
- [7] TERRILL, R. M. - Laminar boundary-layer flow near separation with and without suction, Phil. Trans. A253, pp.55-100 (1960)
- [8] PATANKAR, S. V. - A finite-difference procedure for solving the equations of the two-dimensional boundary layer, J. Heat Mass Transfer vol.10, pp.1389-1411 (1967)
- [9] SHIH, T. M. & HUANG, H. J. - Numerical method for solving the nonlinear ordinary and partial differential equations for boundary-layer flows, Num. Heat Transfer vol.4, pp.159-178 (1981)
- [10] BLOTTNER, F. G. - Finite difference methods of solution of the laminar boundary-layer equations, AIAA Journal vol.8, no.2 (Feb. 1970)
- [11] ROSENFELD, M. & ISRAELI, M. - Numerical solution of incompressible flows by a marching multigrid nonlinear method, AIAA Journal vol.25, no.5 (May 1987)

- [12] BLOTTNER, F. G. - Investigation of some finite-difference techniques for solving the boundary layer equations, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* vol.6, pp.1-30 (1975)
- [13] TAKEMITSU, N. - An implicit finite-difference method to solve incompressible fluid flow, *Bull. ASME* vol.29, no.256 (Oct. 1986)
- [14] WANG, J. C. T. - On the numerical methods for the singular parabolic equations in fluid dynamics, *J. Comp. Phys.* vol.52, pp.464-479 (1983)
- [15] RICHTMEYER, R. D. & MORTON, K. W. - Difference methods for initial-value problems. John Wiley & Sons, New York, 2a ed. (1967)
- [16] SCHLICHTING, H. - Boundary-Layer Theory, McGRAW-HILL Book Company, New York, 7a ed. (1979)
- [17] POOTS, G. & RAGGETT, G. F. - Theoretical results for variable property, laminar boundary layers in water, *Int. J. Heat Mass Transfer* vol.10, pp. 597-610 (1967)
- [18] POOTS, G. & ROGERS, M. H. - Laminar flow between parallel flat plates, with heat transfer, of water with variable physical properties, *Int. J. Heat Mass Transfer* vol.8, pp. 1515-1535 (1965)
- [19] PANTON, R. L. - Incompressible Flow, John Wiley & Sons, New York (1984)
- [20] PLETCHER, R. H.; TANNEHILL, J. C. & ANDERSON, D. A. - Computational fluid mechanics and heat transfer, McGRAW-HILL Book Company, New York (1984)
- [21] KOPCHENOVA, N. V. & MARON, I. A. - COMPUTATIONAL MATHEMATICS, Mir Publishers, Moscow, 4a ed. (1987)
- [22] SMITH, G. D. - Numerical solution of partial differential equations, Clarendon Press., Oxford, 2a ed. (1978)
- [23] THIELE, F. - Accurate numerical solutions of boundary layer flows by the finite-difference method of hermitian type, *J. Comp. Phys.* - pp.138-159 (1978)
- [24] SCHÖNAUER, Von W. - Ein Differenzenverfahren zur lösung der grenzschichtgleichung für stationäre, laminare, inkompressible strömung, *Ing. Arch.* vol.33, pp.173-189 (1964)
- [25] PRANDTL, L. - Über flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner reibung, *Proc. of the third intern. math. congr.*, Heidelberg (1904)

- [26] BLASIUS, H. - Grenzsichten in flüssigkeiten mit kleiner reibung, Z. Math. u. phys. vol.50, 1-37 (1908)
- [27] van DYKE, M. - Perturbation methods in fluid mechanics, Academic Press. N.Y. (1964)
- [28] BAIRSTOW, L. - Skin friction, Jour. Roy. Aero. Soc. vol.19, 3 (1925)
- [29] GOLDSTEIN, S. - Concerning some solutions of the boundary- layer equations in hydrodynamics, Proc. Cambr. Phil. Soc. vol.26, 1-30 (1930)
ver também: Modern Developments in fluid dynamics I - 135, Oxford (1938)
- [30] TÖPFER, C. - Bemerkungen zu dem Aufsatz von H. Blasius, "Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner reibung", Z. Math. u. phys. vol.60, 397-398 (1912)
- [31] HOWARTH, L. - On the calculation of steady flow in the boundary layer near the surface of a cilinder in a stream, ARC RM 1632 (1935)
- [32] HOWARTH, L. - On the solution of the boundary layer equations, Proc. Roy. Soc. London vol.A-164, 547-579 (1938)
- [33] EVANS, H. L. - Laminar boundary layer theory, Addison-Wesley Publishing Co. - London (1968)
- [34] HIEMENZ, K. - Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder, Thesis Göttingen 1911; Dingl. Politechn. J. 326. 321 (1911)
- [35] THOM, A. - The laminar boundary layer of the front of a cilinder, ARC RM 1176 (1928)
ver também: ARC RM 1194 (1929)
- [36] SCHILLER, L. & LINKE, W. - Druck und Reibungswiderstand des Zylinders bei Reynolds - schen Zahlen 500 bis 40000, ZFM 24, 193-195 (1933)
- [37] TANI, I. - On the solution of the laminar boundary layer equations, J. Phys. Soc. Japan vol.4, 149-154 (1949)
ver também: Fifty years of boundary-layer research (W. Tollmien & H. Görtler, ed.)
- [38] HARTREE, D. R. - A solution of the laminar boundary layer equation for retarded flow, ARC RM 2426 (1949)
- [39] LEIGH, D. C. F. - The laminar boundary layer equation: A method of solution by means of an automatic computer, Proc. Cambr. Phil. Soc. vol.51, 320-322 (1955)

- [40] POHLHAUSEN, K. - Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Reibungsschicht, ZAMM 1, 252-268 (1921)
- [41] CRANK, J. & NICHOLSON, P. - A practical method for numerical integration of solutions of partial differential equations of heat-conduction type, Proc. Camb. Phil. Soc. vol.43 - no.50 (1947)
- [42] FALKNER, V. M. & Miss SCAN, S. W. - Solutions of the boundary-layer equations, Phil. Mag. & Journal of Science S.7. vol.12, 865-897 (1931)
- [43] HARTREE, D. R. - Aeronaut. Res. Council Lond. RM-2426/2427 (1939)
- [44] CROCCO, L. - Monografie scientifiche di aeronautica n^o 3, Roma (1946)
- [45] MANGLER, W. - Zusammenhang zwischen ebenen und rotationsymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten, ZAMM 28, 97-103 (1948)
- [46] DORODNITSYN, A. A. - General method of integral relations and its applications to boundary layer theory, Advances in Aeronautical Sciences vol.3, Maemillan, N.Y. (1960)
- [47] JAFFE, N. A. & SMITH, A. M. O. - Calculation of laminar boundary layers by mean of a differential-difference method, Progress in Aerospace Sciences vol.12. (D. Küchemann ed.) Pergamon Press. (1972)
- [48] REYNOLDS, O - Phil. Trans. Roy. Soc. vol.174, 935 (Paper on Mechanical and Physical Subjects, 2, 51) (1883)
- [49] FUSSEL, D. D. & HELLUNS, J. D. - AIChE J. vol.11, 733-739 (1965)
- [50] WIPPERMANN, H. W. - Ph. D. dissertation, Technische Hochschule, Karlsruhe (1966)
- [51] LOITSIANSKII, L. G. - Prikl. Math. Meck. vol.13, 513-554 (1949) (Trad. em NACA tech. Mem. 1293)
- [52] van INGEN, J. L. - Ph. D. dissertation, Delft. Univ., Holland (1965)
- [53] BETHEL, H. - AIAA J. vol.6, p.220 (1968)
- [54] SMITH, A. M. O. - J. Aeronaut. Sci. vol.23, 901-912 (1956)
- [55] TIMMAN, R. - Rep. Trans. Na. Luchtvaarlab. Amst. vol.15, F 29-45 (1949)
- [56] TRUCKENBRODT, E. - J. Aeronaut. Sci. vol.19, 428-429 (1952)

- [57] TANI, I. - J. Aeronaut. Sci. vol.21, 487-495 e 504 (1954)
- [58] CURLE, N. & SCAN, S. W. - Aeronaut. Q. vol.8, 257-268 (1957)
- [59] HEAD, M. R. - Aeronaut. Res. Council Lond., RM-3123/3124 (1957)
- [60] GEROPP, D. - Dtsch. Vers. Luft-Raumfahrt DVL 288 (1963)
- [61] GÖRTLER, H. - Dtsch. Vers. Luftfahrt., Ber. 34, Mulheim (1957)
- [62] MEKSYN, D. - "New methods in Laminar Boundary Layer Theory", Pergamon Press., London (1961)
- [63] ULRICH, A. - Die laminare Reibungsschicht am Kreiszyylinder, Deutsch Luftfahrtforschung F.B. 1762 (1943)
- [64] ABBOTT, D. E. & BETHEL, H. E. - Ing. Arch. vol.37, 110-124 (1968)
- [65] THWAITES, B. - Aeronaut. Q. vol.1, 245-280 (1949)
- [66] STRATFORD, B. S. - Aeronaut. Res. Council Lond. RM 3002 (1961)
- [67] STRATFORD, B. S. - J. Fluid Mech. vol.5, 17-35 (1966)
- [68] FLACHSBART, O. - Rep. Aerodyn. Versuchsanst. Goett. ser IV, 134-138 (1932)
- [69] TIFFORD, A. N. - Heat transfer and frictional effects in laminar boundary layers - Part 4: Universal series solutions, Wright Air Dev. Center, Ohio, Tech. Rep. 53-288 (1954)
- [70] SMITH, A. M. O. - Ins. Aeronaut. Sci. Fairchild Fund. pap. FF-10 (1954) (ver tb. ref. [54])
- [71] ROSENHEAD, L. - Laminar Boundary Layers, Oxford Univ. Press. (1963)
- [72] SHIH, T. M. - Numerical Heat Transfer, Hemisphere Publ. Corp., London (1984)
- [73] GUPTA, S. C. & GARG, V. K. - Developing flow in a concentric annulus, comp.Meth. Appl. Mech. Eng. vol.6, 27-35 (1981)
- [74] NAVIER, C. L. M. H. - Mémoire sur le lois du mouvement de fluids, Mém. de L'Acad. de Sci. vol.6, 389-416 (1823)
- [75] STOKES, G. G. - On the theories of internal friction of fluids in motion. Trans. Cambr. Phil. Soc. vol.8, 287-305 (1845)

- [76] FOX, R. W. & mac DONALD, A. T. - Introdução à mecânica dos fluidos, Ed. Guanabara Dois 2ª ed., Rio (1981)
- [77] BINDER, L. - Doctoral dissertation of the Technische Hochschule München. Knapp, Halle (1911)
- [78] SCHMIDT, E. - Föppl's Festschrift, p. 179. Springer, Berlin (1924)
- [79] WIESELBERGER, C. - Phys. Z., vol. 22, pp.321-328, vol.33, pp. 219-224 (1921)
- [80] PAGE, A. & FALKNER, V. M. - Further experiments on the flow around a circular cylinder, ARC RM 1369 (1931)
- [81] von MISES, R. - Bemerkungen zur Hydrodynamik, Z. Angew. Math. Mech., vol. 7, pp. 425-431 (1927)
ver também: J. Aeronaut. Sci., vol. 17, pp. 551-554 e 594 (1950)
- [82] CHUNG, T. J. - Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, McGRAW-HILL Book Company, New York (1978)
- [83] RUNGE, C. & KUTTA, W. - Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen, Z. Angew. Math. Phys., vol. 46, pp. 435-453 (1901)
- [84] GERALD, C. F. - Applied Numerical Analysis, Reading Mass., Addison-Wesley (1973)
- [85] Notas de aulas do Prof. Altemanni
- [86] Anotações do Prof. Figueiredo
- [87] Notas de aulas do Prof. Granziera