

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR GUSTAVO  
BIGOLOTTI PANOSSO E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 06/10/11

  
.....  
ORIENTADOR

Prof. Dr. PAULO SOLLER  
DMC - FEM - UNICAMP  
Matrícula 05814-0

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Autor: Gustavo Bigolotti Panosso

## Análise de Critérios de Falha Baseados em Fenômenos Físicos para Materiais Compósitos Laminados

Campinas, 2011

161/2011

Autor: Gustavo Bigolotti Panosso

# **Análise de Critérios de Falha Baseados em Fenômenos Físicos para Materiais Compósitos Laminados**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

Campinas  
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

P194a	<p>Panosso, Gustavo Bigolotti</p> <p>Análise de critérios de falha baseados em fenômenos físicos para materiais compósitos laminados / Gustavo Bigolotti Panosso. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.</p> <p>Orientador: Paulo Sollero. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.</p> <p>1. Materiais compósitos. 2. Localização de falhas (Engenharia). I. Sollero, Paulo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.</p>
-------	--

Título em Inglês: Analysis of failure criteria based on physical phenomenas for laminate composite materials

Palavras-chave em Inglês: Composite materials, Fault location (Engineering)

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: José Maria Campos dos Santos, José Daniel Diniz Melo

Data da defesa: 06-10-2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

## Análise de Critérios de Falha Baseados em Fenômenos Físicos para Materiais Compósitos Laminados

Autor: Gustavo Bigolotti Panosso

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

A Banca Examinadora composta pelo membros abaixo aprovou esta Dissertação:



---

Prof. Dr. Paulo Sollero, Presidente  
FEM/UNICAMP



---

Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos  
FEM/UNICAMP



---

Prof. Dr. José Daniel Diniz Melo  
DEMat/UFRN

Campinas, 06 de Outubro de 2011.

A meus pais  
A minha irmã  
A minha família  
A meus amigos  
A todos que um dia fizeram parte da minha vida.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus pais, João e Rita, por todo amor, apoio e incentivo aos estudos que sempre me deram.

A minha irmã Juliana pelo carinho e companherismo de sempre.

Ao Prof. Dr. Paulo Sollero pelo suporte e orientação no desenvolvimento desse trabalho.

A todos os meus amigos pela parceria em todos os momentos.

Aos meus amigos e companheiros de laboratório pelo suporte e pela convivência.

*”Se dois homens vêm andando por uma estrada, cada um com um pão, e, ao se encontrarem, trocarem os pães, cada um vai embora com um.*

*Se dois homens vêm andando por uma estrada, cada um com uma idéia, e, ao se encontrarem, trocarem as idéias, cada um vai embora com duas.”*

**- *Provérbio Chinês***

# Resumo

O objetivo deste trabalho é realizar uma análise numérica dos critérios de falha para materiais compósitos laminados. Critérios de falha tradicionais, como os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu, são estudados e comparados com critérios de falha mais recentes, baseados em fenômenos físicos, como os critérios de Puck e LaRC03. Dois envelopes de falha, Tensão Longitudinal pela Tensão Transversal e Tensão Transversal pela Tensão de Cisalhamento são implementados para cada um dos critérios estudados seguindo os moldes do World-Wide Failure Exercise (WWFE). Realiza-se também um estudo da variação da resistência longitudinal em função da orientação das fibras em laminados unidirecionais. Através do software comercial de elementos finitos ABAQUS, desenvolve-se uma rotina iterativa para se avaliar a falha em modelos laminados segundo as diferentes teorias de falha estudadas. O comportamento do material e seus respectivos modos de falha são investigados para cada caso. Uma discussão sobre as vantagens e desvantagens de cada critério e um parecer sobre qual teoria de falha se mostrou mais vantajosa é apresentada.

*Palavras Chave:* Materiais compósitos; Critérios de falha; Tsai-Wu; Puck; LaRC03.

# Abstract

This work aims to perform a numerical analysis of failure criteria for composite laminated materials. Traditional failure criteria, such as the Tsai-Hill and Tsai-Wu, are studied and compared to recent failure criteria based on physical phenomenas, such as Puck and LaRC03 criteria. Two failure envelopes, Longitudinal Stress by Transverse Stress and Transverse Stress by Shearing Stress are implemented for each criterion in accordance with the World-Wide Failure Exercise (WWFE). It also presents a study of the longitudinal strength variation depending on the fiber orientation in unidirectional laminates. Through the commercial finite element software ABAQUS, a script is presented to evaluate the failure in laminated models due to the different failure theories studied. The material behavior and its respective failure modes are investigated for each case. A discussion of the advantages and disadvantages of each failure theory is also presented.

*Key words:* Composite Materials; Failure Criteria; Tsai-Wu; Puck; LaRC03.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	2
1.3	Estrutura . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Revisão bibliográfica</b>	<b>4</b>
2.1	Materiais Compósitos . . . . .	4
2.1.1	Definição . . . . .	4
2.1.2	Aplicações . . . . .	4
2.1.3	Características . . . . .	6
2.1.4	Classificação . . . . .	9
2.2	Componentes . . . . .	11
2.2.1	Fibras . . . . .	12
2.2.2	Matriz . . . . .	13
2.3	Critérios de falha . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Formulação de Laminados Compósitos</b>	<b>17</b>
3.1	Análise de uma Lâmina Ortotrópica . . . . .	17
3.1.1	Relação tensão-deformação para uma lâmina ortotrópica . . . . .	18
3.1.2	Matriz de transformação para tensão e deformação . . . . .	21
3.2	Análise de compósitos laminados . . . . .	23
3.2.1	Tensão e deformação em um laminado . . . . .	23
3.2.2	Síntese da matriz de rigidez . . . . .	26
3.2.3	Construção e propriedades especiais de laminados . . . . .	31
3.2.4	Laminados Quase-isotrópicos . . . . .	33
3.2.5	Determinação das tensões e deformações de um laminado . . . . .	34

<b>4</b>	<b>Critérios de Falha</b>	<b>37</b>
4.1	Critério da Máxima Tensão . . . . .	37
4.2	Critério de Tsai-Hill . . . . .	38
4.3	Critério de Tsai-Wu . . . . .	40
4.4	Critério de Puck . . . . .	42
4.4.1	Condições para a falha das fibras (FF) . . . . .	42
4.4.2	Condições para a falha entre-fibras (IFF) . . . . .	45
4.5	Critério falha LaRC03 . . . . .	54
4.5.1	LaRC03 para falha na matriz . . . . .	54
4.5.2	Critério de Falha da Matriz Sob Compressão ( $\sigma_{22} < 0$ ) . . . . .	54
4.5.3	Critério de falha para matriz sob tração ( $\sigma_{22} > 0$ ) . . . . .	59
4.5.4	LaRC03 para falha das fibras . . . . .	67
4.5.5	Critério de falha tração das fibras . . . . .	67
4.5.6	Critério de falha para a compressão das fibras . . . . .	68
4.5.7	Critério de LaRC03 para a falha da matriz sob compressão biaxial . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Resultados numéricos e discussões</b>	<b>72</b>
5.1	Implementação computacional dos critérios de falha . . . . .	72
5.1.1	Critério da Máxima Tensão . . . . .	73
5.1.2	Critério de Tsai-Hill . . . . .	75
5.1.3	Critério de Tsai-Wu . . . . .	76
5.1.4	Critério de Puck . . . . .	78
5.1.5	Critério LaRC03 . . . . .	81
5.2	Comparação dos envelopes de falha . . . . .	83
5.2.1	Envelope de falha ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ ) . . . . .	83
5.2.2	Envelope de falha ( $\sigma_{22}, \tau_{12}$ ) . . . . .	85
5.3	Comparação das curvas do limite de resistência em função da orientação das fibras . . . . .	86
5.3.1	Limite de resistência à tração em função de $\theta$ . . . . .	86
5.3.2	Limite de resistência à compressão em função de $\theta$ . . . . .	87
5.4	Análise de falha utilizando o ABAQUS . . . . .	87
5.4.1	Descrição do problema . . . . .	88
5.4.2	Método computacional utilizado . . . . .	89
5.4.3	Critério de Falha LaRC03 . . . . .	92
5.4.4	Critério de falha de Puck . . . . .	99

5.4.5	Critério de falha de Tsai-Wu . . . . .	105
5.4.6	Comparação das análises para $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ e $90^\circ$ . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>113</b>
6.1	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	114
<b>A</b>	<b>Avaliação das condições de falha e das relações entre os parâmetros de Puck</b>	<b>119</b>
<b>B</b>	<b>Resumo dos índices de falha do critério de LaRC03</b>	<b>122</b>

# Lista de Figuras

2.1	Boeing 787 "Dreamliner", cujos componentes fabricados com materiais compósitos eram estimados na fase de projeto como aproximadamente 50% do peso total da aeronave. [foto: Boeing.com] . . . . .	5
2.2	Turbina eólica cujas pás são fabricadas de materiais compósitos. . . . .	6
2.3	Navio da marinha real sueca cujo peso é de aproximadamente 600 toneladas e possui grande parte da estrutura fabricado em materiais compósitos. . . . .	7
2.4	Outros exemplos de aplicação de compósitos: equipamentos de esqui e próteses ortopédicas [figuras:audi-mediaservices.com/tuvie.com]. . . . .	7
2.5	Tipos de compósitos fibrosos. . . . .	11
2.6	Estrutura Sanduíche. . . . .	12
3.1	Lâmina Ortotrópica . . . . .	17
3.2	Deformação de uma Lâmina Ortotrópica . . . . .	18
3.3	Componentes das tensões nos eixos do carregamento e nas direções principais do material . . . . .	21
3.4	Flexão de uma linha no plano $x-z$ . . . . .	24
3.5	Exemplo de variação da tensão e deformação em um laminado de três camadas	26
3.6	Sentido positivo da resultante de forças e momentos . . . . .	27
3.7	Geometria de um laminado com várias camadas . . . . .	28
4.1	Tensões $\sigma_n$ , $\tau_{nt}$ e $\tau_{n1}$ no plano de falha inclinado paralelo às fibras.[Puck et al. (2002)] . . . . .	46
4.2	Superfície de falha (para $\sigma_{11} = 0$ ) de um laminado unidirecional no espaço $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ . . . . .	49
4.3	Envelope de falha $(\sigma_{22}, \tau_{21})$ para $\sigma_{11} = 0$ , representando três diferentes modos de falha A, B e C. . . . .	50

4.4	Círculo de Mohr para um estado uniaxial de compressão e tensões efetivas de cisalhamento. . . . .	55
4.5	Plano de falha de um laminado unidirecional sujeito à compressão transversal e cisalhamento no plano. . . . .	57
4.6	Envelope de falha $(\sigma_{22}, \tau_{12})$ para um laminado unidirecional de fibra de vidro e Epóxi. . . . .	59
4.7	Resistência à tração transversal em função do número de lâminas assentadas juntas, modelos de Dvorak and Laws (1987) baseado nos dados experimentais de Wang (1984). . . . .	60
4.8	Geometria de uma trinca estreita. . . . .	61
4.9	Geometria de uma trinca estreita em uma lâmina interior espessa sujeita a carregamento em tração e cisalhamento. . . . .	65
4.10	Geometria de uma trinca em uma lâmina fina. . . . .	66
4.11	Modelo unidirecional sob tração e cisalhamento. . . . .	66
4.12	Imperfeição no alinhamento das fibras, idealizado como uma ondulação local. . . . .	68
5.1	Envelope de falha $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ para o critério da máxima tensão. . . . .	73
5.2	Envelope de falha $(\sigma_{22}, \tau_{12})$ para o critério da máxima tensão. . . . .	74
5.3	Limite de resistência longitudinal dado pelo critério da máxima tensão em função da orientação das fibras. . . . .	74
5.4	Envelope de falha $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ para o critério de Tsai-Hill. . . . .	75
5.5	Envelope de falha $(\sigma_{22}, \tau_{12})$ para o critério de Tsai-Hill. . . . .	75
5.6	Limite de resistência longitudinal dado pelo critério de Tsai-Hill em função da orientação das fibras. . . . .	76
5.7	Envelope de falha $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ para o critério de Tsai-Wu. . . . .	76
5.8	Envelope de falha $(\sigma_{22}, \tau_{12})$ para o critério de Tsai-Wu. . . . .	77
5.9	Limite de resistência longitudinal dado pelo critério de Tsai-Wu em função da orientação das fibras. . . . .	77
5.10	Envelope de falha $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ para o critério de Puck. . . . .	78
5.11	Envelope de falha $(\sigma_{22}, \tau_{12})$ para o critério de Puck. . . . .	78
5.12	Avaliação do parâmetro $n$ no envelope de falha $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ para o critério de Puck. . . . .	79
5.13	Avaliação do parâmetro $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ no envelope $(\sigma_{22}, \tau_{12})$ do critério de Puck. . . . .	80
5.14	Limite de resistência longitudinal dado pelo critério de Puck em função da orientação das fibras. . . . .	80
5.15	Envelope de falha $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ para o critério LaRC03. . . . .	81

5.16	Envelope de falha ( $\sigma_{22}, \tau_{12}$ ) para o critério LaRC03. . . . .	82
5.17	Limite de resistência longitudinal dado pelo critério LaRC03 em função da orientação das fibras. . . . .	83
5.18	Envelopes de falha ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ ) para um laminado unidirecional de fibra de vidro e Epóxi MY750. . . . .	84
5.19	Envelopes de falha ( $\sigma_{22}, \tau_{12}$ ) para um laminado unidirecional de fibra de vidro e Epóxi LY556. . . . .	85
5.20	Limite de resistência à tração longitudinal em função do ângulo de orientação das fibras. . . . .	86
5.21	Limite de resistência à compressão longitudinal em função do ângulo de orientação das fibras. . . . .	87
5.22	Laminado unidirecional com furo central submetido a um deslocamento positivo de uma de suas arestas. . . . .	88
5.23	Fluxograma para a análise de falha pelo critério LaRC03 um laminado composto unidirecional submetido a deformações uniaxiais. . . . .	89
5.24	<i>Detalhe A</i> do fluxograma para o critério LaRC03. . . . .	90
5.25	<i>Detalhe A</i> do fluxograma para o critério de Puck. . . . .	91
5.26	<i>Detalhe A</i> do fluxograma para o critério de Tsai-Wu. . . . .	92
5.27	Resultado do critério de falha LaRC03 no ABAQUS para o laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) tracionado longitudinalmente. . . . .	93
5.28	Índice de falha máximo para o critério de falha LaRC03 em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, tracionado longitudinalmente. . . . .	93
5.29	Modos de falha para o critério de falha LaRC03 em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, tracionado longitudinalmente. . . . .	94
5.30	Ampliação da região de falha da Figura 5.29. . . . .	95
5.31	Resultado do critério de falha LaRC03 no ABAQUS para laminado unidirecional ( $45^\circ$ ) tracionado longitudinalmente. . . . .	96
5.32	Índice de falha máximo para o critério de falha LaRC03 em um laminado unidirecional ( $45^\circ$ ) com furo, tracionado longitudinalmente. . . . .	96
5.33	Ampliação da região de falha da Figura 5.32. . . . .	97
5.34	Resultado do critério de falha LaRC03 no ABAQUS para laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) em compressão longitudinal. . . . .	98
5.35	Índice de falha máximo para o critério de falha LaRC03 em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, em compressão longitudinal. . . . .	98
5.36	Ampliação da região de falha da Figura 5.35. . . . .	99

5.37	Resultado do critério de falha de Puck no ABAQUS para o laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) tracionado longitudinalmente. . . . .	100
5.38	Índice de falha máximo para o critério de falha de Puck em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, tracionado longitudinalmente. . . . .	100
5.39	Ampliação da região de falha da Figura 5.38. . . . .	101
5.40	Resultado do critério de falha de Puck no ABAQUS para laminado unidirecional ( $45^\circ$ ) tracionado longitudinalmente. . . . .	102
5.41	Índice de falha máximo para o critério de falha de Puck em um laminado unidirecional ( $45^\circ$ ) com furo, tracionado longitudinalmente. . . . .	102
5.42	Ampliação da região de falha da Figura 5.41. . . . .	103
5.43	Resultado do critério de falha de Puck no ABAQUS para laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) em compressão longitudinal. . . . .	103
5.44	Índice de falha máximo para o critério de falha de Puck em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, em compressão longitudinal. . . . .	104
5.45	Ampliação da região de falha da Figura 5.44. . . . .	104
5.46	Resultado do critério de falha de Tsai-Wu no ABAQUS para laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) tracionado longitudinalmente. . . . .	105
5.47	Índice de falha máximo para o critério de falha de Tsai-Wu em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, tracionado longitudinalmente. . . . .	106
5.48	Resultado do critério de falha de Tsai-Wu no ABAQUS para laminado unidirecional ( $45^\circ$ ) tracionado longitudinalmente. . . . .	107
5.49	Índice de falha máximo para o critério de falha de Tsai-Wu em um laminado unidirecional ( $45^\circ$ ) com furo, tracionado longitudinalmente. . . . .	107
5.50	Resultado do critério de falha de Tsai-Wu no ABAQUS para laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) em compressão longitudinal. . . . .	108
5.51	Índice de falha máximo para o critério de falha de Tsai-Wu em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, em compressão longitudinal. . . . .	109
5.52	Índices de falha máximo para laminados unidirecionais com fibras orientadas a $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ e $90^\circ$ sob tração longitudinal. . . . .	110
5.53	Índices de falha máximo para laminados unidirecionais com fibras orientadas a $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ e $90^\circ$ sob compressão longitudinal. . . . .	112
A.1	Soluções analítica para o estado plano de tensões.[Puck et al. (2002)] . . . . .	121

# Lista de Tabelas

2.1	Vantagens e desvantagens de alguns reforços fibrosos. . . . .	13
5.1	Propriedades mecânica dos laminados unidirecionais analisados. . . . .	73
5.2	Deformações máximas obtidas para o caso de tração longitudinal. . . . .	111
5.3	Deformações máximas obtidas para o caso de compressão longitudinal. . . . .	112
A.1	Valores típicos para os limites de resistência no plano e parâmetros de inclinação [Puck et al. (2002)]. . . . .	121

# Lista de Abreviaturas e Siglas

## *Letras Latinas*

- $g$  - Taxa de Tenacidade
- $u, v, w$  - Deslocamentos nas direções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente
- A** - Matriz de Rigidez de Extensão
- B** - Matriz de Rigidez de Acoplamento
- D** - Matriz de Rigidez de Flexão
- $E$  - Módulo de Elasticidade
- $G$  - Módulo de Cisalhamento
- N** - Vetor das Forças aplicadas no laminado
- M** - Vetor dos Momentos aplicados no laminado
- Q** - Matriz de Rigidez
- $\bar{Q}$  - Matriz de Rigidez Transformada
- $S$  - Limite de Resistência ao Cisalhamento
- S** - Matriz de Flexibilidade
- T** - Matriz de Transformação
- $X$  - Limite de Resistência Longitudinal
- $Y$  - Limite de Resistência Transversal

## *Letras Gregas*

- $\alpha$  - Ângulo do Plano de Falha
- $\varepsilon$  - Deformação Normal
- $\gamma$  - Deformação Cisalhante
- $\eta$  - Coeficiente de Influência
- $\sigma$  - Tensão Normal
- $\tau$  - Tensão de Cisalhamento
- $\theta$  - Ângulo de Orientação da Fibras
- $\varphi$  - Ângulo de Desalinhamento das Fibras
- $\nu$  - Coeficiente de Poisson

### ***Termos com Sobrescritos ou Subscritos***

$a_0$	- Comprimento da Trinca
$f_w$	- Fator de Enfraquecimento
$\sigma_{ult}$	- Limite de Escoamento do Material
$\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$	- Tensões no Plano de Falha
$G_I, G_{II}$	- Taxa de Liberação de Energia
$p_{\perp\perp}^{(-)}, p_{\perp\parallel}^{(-)}$	- Parâmetros de Inclinação de Puck
$R_{\perp}^{(+A)}, R_{\perp\parallel}^A, R_{\perp\perp}^A$	- Parâmetros de Resistências à Fratura do plano de ação de Puck
$\eta_I, \eta_{II}$	- Coeficientes de Redução de Tensão (transversal)
$\xi_I, \xi_{II}$	- Coeficientes de Redução de Tensão (longitudinal)
$\Lambda_{22}^0, \Lambda_{44}^0$	- Parâmetros da Mecânica da Fratura

### ***Subscritos***

$eff$	- Valores Efetivos (Tensões)
$f$	- Relativo a Fibras
$fp$	- Plano de Falha (" <i>failure plane</i> ")
$is$	- Valores Localizados (" <i>in situ</i> ")

### ***Sobrescritos***

$m$	- Sistema de Desalinhamento das Fibras
$T$	- Tração
$C$	- Compressão
$L$	- Longitudinal
$T$	- Transversal

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

A utilização de materiais compósitos na engenharia vem crescendo e evoluindo muito ao longo dos anos, especialmente para o desenvolvimento de produtos de alta performance que variam desde materiais esportivos até veículos espaciais, automóveis, aeronaves, estruturas navais, etc. Leveza, flexibilidade, durabilidade, adaptabilidade, resistência mecânica e a ambientes agressivos são algumas das propriedades que garantem aos materiais compósitos um lugar de destaque no futuro da engenharia.

Assim sendo, em paralelo à evolução dos materiais compósitos, muitos estudos vêm sendo realizados ao longo das últimas décadas para se entender melhor os sistemas que caracterizam as estruturas compósitas a fim de se otimizar suas qualidades. No entanto, os mecanismos que determinam as falhas em materiais compósitos não são ainda completamente entendidos, especialmente para as matrizes ou fibras em compressão. O entendimento inadequado desses mecanismos e a dificuldade no desenvolvimento de modelos de falhas tratáveis explicam a atual carência de critérios capazes de prevêê-las. Estudos recentes indicam que as previsões realizadas pelas muitas teorias existentes, diferem significativamente dos resultados observados experimentalmente.

As incertezas nas previsões em relação ao início e propagação das falhas em materiais compósitos sugerem a necessidade de uma revisão das teorias existentes, entendendo suas deficiências, para o desenvolvimento de novas teorias quando necessário.

## 1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo principal comparar os critérios de falha mais comuns para materiais compósitos, como o Critério de Tsai-Hill e o Critério de Tsai-Wu, com critérios mais recentes e que se baseiam em fenômenos físicos, como o Critério de Puck e o Critério de LaRC03. Para tal, foram realizadas as seguintes etapas:

- Revisão sobre materiais compósitos, suas aplicações, características e composição;
- Revisão bibliográfica das teorias de falha para materiais compósitos, as vantagens e principais diferenças entre cada uma delas;
- Estudo das equações constitutivas dos materiais compósitos laminados unidirecionais e multidirecionais;
- Estudo da formulação dos critérios de falha apresentados neste trabalho: Máxima Tensão, Tsai-Hill, Tsai-Wu, Puck e LaRC03;
- Implementação dos critérios de falha estudados e comparação dos respectivos envelopes de falha;
- Análise da variação dos limites de resistência de um laminado unidirecional em função da orientação das fibras;
- Desenvolvimento de uma rotina em linguagem de programação *PYTHON* para estudar esses critérios de falha no software comercial de elementos finitos *ABAQUS* e utilizar os resultados para realizar um pós-processamento em *MATLAB*.

## 1.3 Estrutura

**Capítulo 1.** Introdução, neste capítulo são apresentadas as motivações para o desenvolvimento do trabalho, os objetivos almejados e a estruturação do conteúdo.

**Capítulo 2.** Revisão bibliográfica, apresenta uma breve discussão sobre materiais compósitos e um resumo da evolução das teorias de falha para materiais compósitos laminados.

**Capítulo 3.** Formulação de laminados compósitos, neste capítulo são descritas as equações constitutivas dos materiais compósitos laminados.

**Capítulo 4.** Critérios de falha, neste capítulo são explicados cada um dos critérios de falha individualmente, o critério da Máxima Tensão, critério de Tsai-Hill, critério de Tsai-Wu, critério de Puck e o critério LaRC03.

**Capítulo 5.** Resultados numéricos e discussões, são apresentados e discutidos os resultados das implementações computacionais realizadas no trabalho.

**Capítulo 6.** Disposições finais, apresenta as conclusões finais do trabalho assim como algumas propostas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Revisão bibliográfica

No presente capítulo é apresentada uma breve revisão sobre as aplicações, características e composição dos materiais compósitos e uma síntese bibliográfica das teorias de falha existentes para os mesmos. Tais teorias, que originam os chamados critérios de falhas, são apresentadas cronologicamente, assim como seus autores, as principais diferenças, semelhanças, pontos fortes e fracos de cada uma. Esta revisão bibliográfica foi baseada nas referências utilizadas ao longo do trabalho e em uma síntese das revisões realizadas por Daniel and Ishai (2006), Agarwal and Broutman (1990), Puck and Schürmann (1998) e Dávila et al. (2005).

### 2.1 Materiais Compósitos

#### 2.1.1 Definição

Compósitos são materiais de moldagem estrutural formados por uma fase contínua (matriz) reforçada por uma fase descontínua (reforço), geralmente mais rígida, que se agregam físico-quimicamente resultando em um material de performance superior aquela de seus componentes tomados separadamente.

#### 2.1.2 Aplicações

Materiais compósitos estão presentes em praticamente todos os segmentos da indústria, especialmente no desenvolvimento de produtos e equipamentos de alta performance e elevada tecnologia. Cada aplicação em específico visa explorar as características superiores que os materiais compósitos apresentam em relação aos materiais convencionais. Algumas dessas aplicações são citadas a seguir.

Estruturas aeroespaciais, como antenas espaciais, espelhos e instrumentos ópticos, fazem uso do baixo peso e da altíssima rigidez de compósitos de grafite. Um elevado grau de estabilidade dimensional em condições ambientais severas pode ser alcançado pelo fato de que as características desse material podem ser trabalhadas até se alcançar um coeficiente de expansão térmica praticamente zero.

Características como elevada dureza, elevada resistência mecânica e baixa densidade fazem dos materiais compósitos uma opção altamente atraente para a fabricação de estruturas aeronáuticas, primárias e secundárias, de aviões civis ou militares. Muitos componentes de aeronaves comerciais como, por exemplo, o Boeing 777, o Boeing 787 "Dreamliner"(Figura 2.1) e o maior avião comercial em atividade, o Airbus A380, são fabricados com esses materiais.



Figura 2.1: Boeing 787 "Dreamliner", cujos componentes fabricados com materiais compósitos eram estimados na fase de projeto como aproximadamente 50% do peso total da aeronave. [foto: Boeing.com]

Na indústria de transportes, materiais compósitos são utilizados de várias formas, incluindo peças de carros, motos, caminhões e trens. No ramo de produção de energia, compósitos de fibra de carbono vem sendo largamente utilizados nas pás de turbinas de geradores eólicos (Figura 2.2), que aumentam significativamente a energia produzida com uma elevada redução de custos, e em tubos de elevação de plataformas de perfuração de petróleo.

Outras aplicações de materiais compósitos que podem ser citadas são: nas estruturas de navios (Figura 2.3), por apresentarem as vantagens de serem materiais isolantes, de baixo custo de fabricação e manutenção, e sofrerem pouco com a corrosão; em biomedicina, na



Figura 2.2: Turbina eólica cujas pás são fabricadas de materiais compósitos.

fabricação de próteses e membros artificiais; na fabricação de produtos esportivos e de lazer, como tacos de golf, raquetes de tênis, equipamento de esqui (Figura 2.4), que ajudam no desempenho de atletas em esportes de alta performance.

### 2.1.3 Características

Materiais compósitos possuem vantagem únicas em relação aos materiais convencionais, como elevada resistência, elevada dureza, longa vida em fadiga, baixa densidade e fácil adaptação às necessidades da estrutura. Além disso permite-se trabalhar com alguns de seus parâmetros a fim de se otimizar algumas de suas propriedades como, resistência à corrosão, isolamento e condutividade térmica, resistência ao desgaste, aparência e isolamento acústico. As características estruturais vantajosas dos materiais compósitos devem-se principalmente às elevadas resistências e rigidez específicas (resistência e rigidez em relação à densidade) e às características anisotrópicas e heterogêneas do material, que concedem ao material muitos graus de liberdade, facilitando assim, uma configuração otimizada do sistema que formam do material.

Se analisado do ponto de vista micromecânico, os materiais compósitos apresentam como vantagens uma elevada rigidez e resistência das fibras. A baixa tenacidade à fratura de



Figura 2.3: Navio da marinha real sueca cujo peso é de aproximadamente 600 toneladas e possui grande parte da estrutura fabricado em materiais compósitos.



Figura 2.4: Outros exemplos de aplicação de compósitos: equipamentos de esqui e próteses ortopédicas [audi-mediaservices.com/tuvie.com].

algumas fibras é reforçada pela ductilidade da matriz e da dissipação de energia na interface fibras/matriz. A capacidade de transferência de tensões da matriz possibilita o desenvolvimento de múltiplos mecanismos de falha. Por outro lado, as fibras apresentam uma alta dispersão de tensões. Assim, concentrações locais de tensões junto á fibras reduzem consideravelmente a resistência à tração transversal a elas. Os materiais convencionais são mais sensíveis à sua microestrutura e irregularidades locais que influenciam o comportamento frágil ou dúctil do material. Sua homogeneidade faz deste tipo de material mais susceptível à propagação de falhas sob carregamentos cíclicos longos.

Do ponto de vista macromecânico, os materiais compósitos são trabalhados como sendo quase homogêneos, onde sua anisotropia pode ser uma vantagem. O comportamento do material pode ser controlado e deduzido através das propriedades dos materiais que o constitui. No entanto, análises de materiais anisotrópicos são mais complexas e normalmente necessitam de esforços computacionais. Enquanto que, as análises de materiais convencionais são muito mais simples devido à sua isotropia e homogeneidade.

A caracterização mecânica dos materiais compósitos também é um ponto relevante. Suas propriedades mecânicas podem ser obtidas através de suas propriedades básicas e da combinação de seus constituintes. No entanto, faz-se necessário um extenso número de análises experimentais para a determinação dos parâmetros básicos do material, enquanto que para os materiais isotrópicos convencionais, a caracterização mecânica é possível através de apenas duas constantes elásticas e dois parâmetros de resistência.

Outra vantagem dos materiais compósitos está na facilidade de se fabricar complexas formas estruturais e no elevado número de graus de liberdade avaliados, que permite a otimização do material obedecendo simultaneamente a várias restrições, como peso, estabilidade dinâmica, custos, entre outras. Entretanto, esse processo requer uma base confiável de propriedades do material, métodos de análise padronizados, técnicas específicas de modelagem e simulação. As numerosas opções de design e otimização tornam esses processos muito mais complexos, ao contrário dos materiais convencionais onde o processo de otimização está limitado a um ou dois parâmetros geométricos, devido aos poucos graus de liberdade disponíveis.

Um dos passos mais importantes da aplicação de materiais compósitos é o seu processo de fabricação. Partes estruturais, independente do formato, podem ser fabricados utilizando ferramentas relativamente simples devido à extensa gama de processos de fabricação disponíveis nos dias de hoje. O ponto negativo é que a fabricação de estruturas de compósitos ainda depende de uma mão de obra especializada, com limitada automação e pouca regulamentação, necessitando assim de um controle de qualidade rigoroso, vasto e muito caro. No caso dos materiais convencionais, material e fabricação são dois processos diferentes. Montagem de estruturas normalmente necessitam de ferramentas complexas e montagens elaboradas, com diversos elementos e artifícios de união.

Os materiais compósitos apresentam também a vantagem de poderem operar por longos períodos de tempo em ambientes agressivos, devido a longa vida em fadiga e aos baixos custos de manutenção. No entanto, uma vez que as falhas tendem a surgir e se propagar internamente no material, sofisticadas técnicas não destrutivas de detecção e monitoramento devem ser utilizadas. Já os materiais convencionais, além de mais susceptíveis à corrosão em ambientes inóspitos, apresentam falhas e trincas que se propagam com mais facilidade

até a falha catastrófica do material. Embora a detecção dessas falhas sejam mais fáceis, a realização de reparos duradouros não é igualmente simples.

Uma importante vantagem, se não a maior vantagem, dos materiais compósitos é o seu excelente custo-benefício, uma vez analisados todos os gastos com preparação e manutenção durante sua vida útil. Longa vida em fadiga, redução de peso, redução do número de componentes e sistemas de união, menor necessidade de manutenção, são apenas algumas das vantagens que se sobressaem ao elevado custo da matéria prima e dos processos de manufatura dos materiais compósitos, que ainda não estão completamente desenvolvidos, automatizados e otimizados. Além dos gastos excessivo com o controle de qualidade e inspeção que, segundo Schneider (1997), devem ser observados. No caso dos materiais convencionais, o baixo custo com a matéria prima passam despercebidos em meio aos elevados custos com ferramentas, maquinário e montagem.

#### **2.1.4 Classificação**

As propriedades dos materiais compósitos são fortemente influenciadas pelas propriedades dos materiais constituintes, sua distribuição e pela interação entre eles. Essas propriedades podem ser obtidas pela combinação propriedades dos constituintes, ou os materiais constituintes podem interagir de forma a atingir propriedades não encontradas no uso isolado. Assim, ao especificar um material compósito como um sistema, além de especificar os materiais constituintes e suas propriedades, é necessário especificar a geometria do material de reforço. Os materiais compósitos podem em geral ser classificados quanto à geometria do reforço da matriz, sendo divididos em compósitos particulados e fibrosos.

##### **Compósitos Particulados**

Nos compósitos particulados, as dimensões das partículas determinam a capacidade do reforço de contribuir para as propriedades mecânicas. Partículas de grandes dimensões não são aconselhadas, pois possibilitam o surgimento de trincas, que podem ocasionar a falha da matriz. Elas têm como função modificar a condutibilidade elétrica, aumentar a resistência térmica, melhorar a usinabilidade, aumentar a resistência ao desgaste superficial e à corrosão, aumentar a dureza superficial, reduzir o encolhimento da matriz e diminuir o custo do material. Os compósitos particulados são geralmente utilizados em peças grandes e de baixo custo que não necessitam de grandes modificações das propriedades mecânicas.

## Compósitos Fibrosos

Nos compósitos reforçados com fibras, sejam elas contínuas ou não, o reforço é mais efetivo do ponto de vista da otimização das propriedades mecânicas porque a maioria dos materiais é mais resistente quando tracionados na forma de fibra, do que em outras formas geométricas. Além disso, a área da interface disponível para transferência de carga por unidade de volume entre as fibras e a matriz aumenta à medida que a razão comprimento/diâmetro das fibras cresce e a matriz funciona como proteção para as fibras contra danos causados pelo meio ambiente. Como uma lâmina possui boa resistência à tração apenas na direção das fibras, a resistência a esforços transversais pode ser aumentada de acordo com a orientação relativa das fibras no interior da matriz, o que permite a fabricação de diferentes tipos de compósitos reforçados com fibras, adequados a cada tipo de aplicação.

- Fibras contínuas

Nos compósitos de matriz reforçada com fibras contínuas, denominadas também de compósitos laminados (Figura 2.5(a)), lâminas constituídas por uma matriz reforçada por longas fibras contínuas são orientadas de acordo com a aplicação requerida, e unidas de modo a formar uma peça única. Embora bastante utilizado, este tipo de compósito apresenta a séria desvantagem associada à possibilidade de delaminação ou separação das lâminas individuais, uma vez que a resistência mecânica interlaminar é basicamente aquela dada pela resistência da matriz, geralmente bem menor que a das fibras.

- Fibras contínuas entrelaçadas

Nos compósitos de matriz reforçada com fibras contínuas entrelaçadas (Figura 2.5(b)), o problema da delaminação desaparece, porém a resistência mecânica é reduzida, uma vez que as fibras não se encontram regularmente orientadas, como nos compósitos laminados.

- Fibras picotadas

Ainda dentro dos materiais compósitos reforçados com fibras, há a possibilidade de reforçar a matriz com fibras picadas (Figura 2.5(c)), com um comprimento mínimo tal que otimize as propriedades mecânicas com o menor gasto possível. Este material é bastante aplicado na confecção de peças grandes devido ao baixo custo de fabricação. No entanto, suas propriedades mecânicas são inferiores às aquelas apresentadas pelos compósitos reforçados com fibras contínuas.

- Compósitos híbridos

Existem ainda os materiais compósitos denominados híbridos (Figura 2.5(d)), nos quais lâmina e matriz reforçada com fibras contínuas e picadas (por exemplo, fibra de vidro/grafite) são unidas, de modo a formar uma peça única.

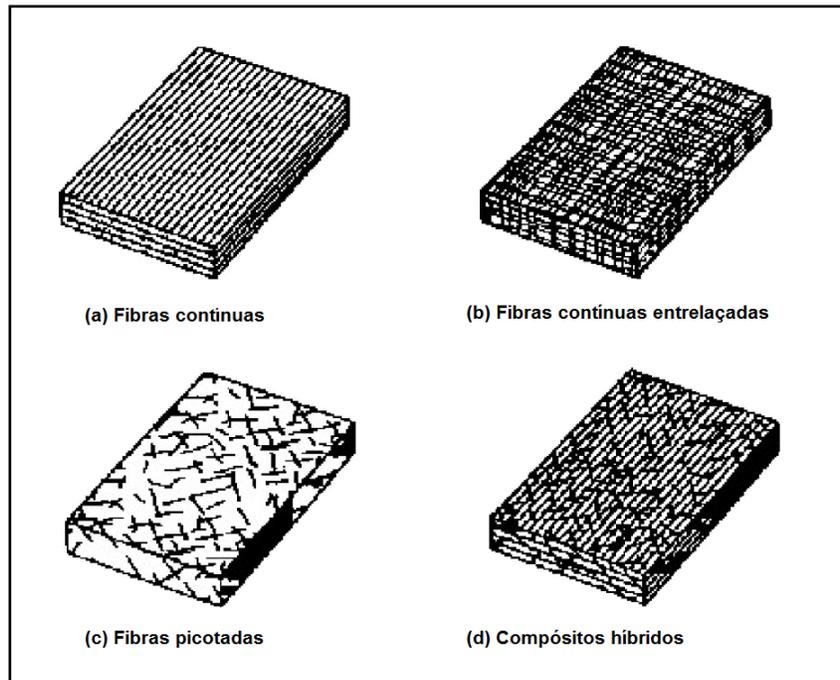


Figura 2.5: Tipos de compósitos fibrosos.

- Estruturas Sanduíche

Além destas quatro configurações, são também bastante utilizados os compósitos do tipo sanduíche, os quais são constituídos por duas ou mais lâminas de um dos quatro tipos citados anteriormente, separadas por uma camada de material na forma de colméia ("*honeycomb*"), conforme ilustrado na Figura 2.6. Estes materiais apresentam razões rigidez/peso extremamente elevadas sendo, por isto, bastante aplicados na indústria aeroespacial.

## 2.2 Componentes

Como dito anteriormente, uma estrutura compósita é um material constituído por duas ou mais fases em escala macroscópica, cujas performance e propriedades mecânicas são su-

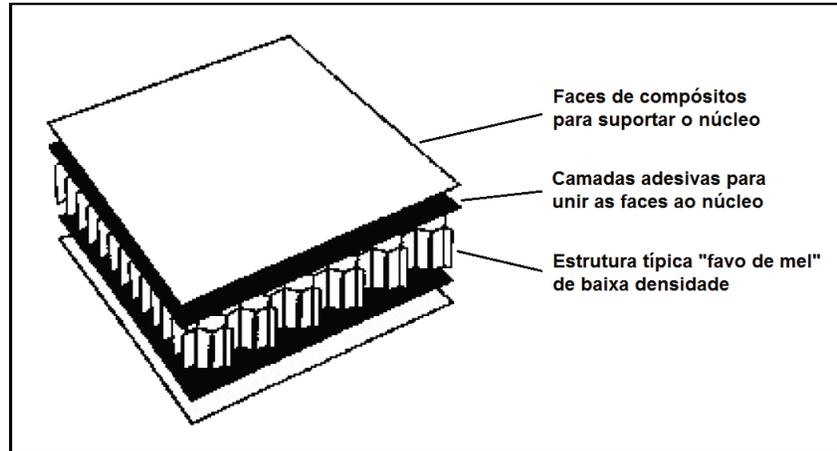


Figura 2.6: Estrutura Sanduíche.

periores aquelas de seus componentes individualmente. Algumas vezes, devido à interação química ou outro efeito de processamento, uma fase adicional, chamada *interfase*, surge entre o reforço e a matriz. As propriedades de um material compósito dependem diretamente das propriedades de seus constituintes, suas geometrias e da distribuição dessas fases.

Um dos parâmetros mais importantes na caracterização dos materiais compósitos é a fração volumétrica do reforço. A distribuição do reforço determina a homogeneidade ou uniformidade do material. Quanto menos uniforme for a distribuição do reforço, mais heterogêneo será o material, aumentando assim a dispersão das propriedades do material e as chances de falha nas regiões frágeis do mesmo. A geometria e orientação dos reforços afetam diretamente a anisotropia do sistema.

### 2.2.1 Fibras

As fibras são as grandes responsáveis em fornecer rigidez e resistência ao material compósito. As fibras independentemente são pouco vantajosas pelo ponto de vista estrutural pois, uma vez que não estão envolvidas e seguras em uma matriz, não são capazes de suportar cargas de compressão longitudinal e apresentam propriedades mecânicas transversais não tão boas quanto as propriedades longitudinais. As fibras podem ser curtas, de alguns centímetros, que são injetadas no momento da moldagem da peça, ou longas e que são cortadas após a fabricação da peça.

Existem atualmente uma grande variedade de fibras a serem utilizadas em materiais compósitos, cada uma com suas vantagens e desvantagens, como listado na Tabela 2.1. As fibras podem ainda ser classificadas como unidirecionais, quando orientadas em uma mesma

direção; bidimensionais, fibras orientadas em duas direções ortogonais (tecidos) ou com as fibras orientadas aleatoriamente; e tridimensionais, quando as fibras são orientadas no espaço tridimensional (tecidos multidimensionais).

Tabela 2.1: Vantagens e desvantagens de alguns reforços fibrosos.

<b>Fibra</b>	<b>Vantagens</b>	<b>Desvantagens</b>
Vidro	Elevada Resistência Baixo custo	Baixa rigidez Vida em fadiga curta Elevada sensibilidade à temperatura
Aramida (Kevlar)	Elevada resistência à tração Baixa densidade	Baixa resistência à compressão Elevada absorção de humidade
Boro	Elevada rigidez Elevada resistência à compressão	Custo elevado
Carbono	Elevada resistência Elevada rigidez	Custo moderadamente elevado
Grafite	Rigidez extremamente alta	Baixa resistência Custo elevado
Cerâmica	Elevada dureza Resistência a elevadas temperaturas	Baixa resistência Custo elevado

### 2.2.2 Matriz

O papel principal da matriz é, especialmente em compósitos de alta performance, proteger e sustentar as fibras e transferir as solicitações mecânicas de uma fibra para a outra. As matrizes podem ser poliméricas (poliéster, epóxi), cerâmicas (carbono) ou metálicas (ligas de alumínio).

A escolha entre o tipo de matriz, assim como o tipo de fibras, que melhor se aplica a cada situação, deve levar em conta as necessidades exigidas para cada aplicação, sem se esquecer dos custos e da compatibilidade entre as fibras e as matrizes.

## 2.3 Critérios de falha

Critérios de falha para materiais isotrópicos dúcteis, como o critério da tensão normal máxima (Rankine), tensão de cisalhamento máxima (Tresca), energia de distorção máxima (von Mises) e assim por diante, estão atualmente muito bem consolidados. Teorias de falha macromecânica para materiais compósitos têm sido propostas através da extensão e adaptação das teorias de falha para materiais isotrópicos, adicionando a elas a anisotropia na rigidez

e nos limites de resistência dos compósitos. Alguns estudos sobre as teorias de falha para materiais anisotrópicos foram publicados por Sandhu (1972), Owen and Rice (1982), Tsai (1984), Chen and Matthews (1993), Sun (2000), Christensen (2001) e Hinton et al. (2004).

Azzi and Tsai (1965) adaptaram a teoria de Hill (1948), que originalmente foi desenvolvida para materiais homogêneos, dúcteis e anisotrópicos, para materiais heterogêneos e frágeis, criando assim a conhecida *teoria de falha de Tsai-Hill*. Esta teoria foi verificada experimentalmente através de testes realizados com laminado unidirecionais em ângulo. Uma adaptação da teoria da tensão máxima para compósitos foi descrita previamente por Kelly (1966) que a utilizou para prever os limites de resistência fora dos eixos principais de laminados compósitos unidirecionais. Isahi (1971) apresentou resultados experimentais para os limites de resistência fora dos eixos principais de compósitos com matrizes dúcteis e frágeis. Os resultados para ambos os casos estavam de acordo com o que previa a teoria de Tsai-Hill. Tsai and Wu (1971) introduziram mais tarde o método iterativo, largamente utilizados atualmente, conhecido como *teoria de Tsai-Wu*.

Hashin and Roterm (1973) fizeram uso de observações experimentais de amostras sob tração para propor dois critérios de falha distintos, um relacionado à falha das fibras e outro à falha da matriz. Desenvolvendo assim uma teoria parcialmente iterativa baseada nos modelos de falha da época, que também se tornou bastante popular. Esse critério assumia uma interação quadrática entre as forças de tração atuantes no plano da falha. Anos mais tarde, Hashin (1980) estabeleceu a necessidade de um critério de falha que fosse baseado em mecanismos de falhas e introduziu um critério de falha, para as fibras e para a matriz, que era capaz de distinguir entre falha por tração e falha por compressão. Dada a dificuldade de se obter o plano de falha para a matriz em compressão, Hashin (1980) utilizou uma interação quadrática entre as tensões atuantes no material.

Numerosos estudos realizados nas décadas seguintes indicaram que as interações das forças propostas por Hashin (1980) nem sempre se adequavam aos resultados experimentais, especialmente no caso de matrizes ou fibras em compressão. É sabido, por exemplo, que uma moderada compressão transversal aumenta o limite de resistência ao cisalhamento de uma lâmina, o que não era previsto pelo critério de Hashin. Além do mais, esse critério para fibras em compressão não leva em consideração os efeitos de cisalhamento no plano da falha, que reduzem significativamente o limite de resistência à compressão de uma lâmina.

Muitos pesquisadores, entre eles Sun et al. (1996) e Puck and Schürmann (1998) propuseram modificações para o critério de Hashin no intuito de melhorá-lo. Primeiramente, Sun et al. (1996) propuseram uma modificação empírica no critério de falha de Hashin and Roterm (1973) para matrizes em compressão a fim de acrescentar o aumento do limite de re-

sistência ao cisalhamento devido a um esforço de compressão transversal. No entanto, assim como na teoria de Hashin, o ângulo de falha não era calculado.

Em seguida, Puck and Schürmann (1998) propuseram o *princípio do plano de falha (ou ação) de Puck* onde foi acrescentada a influência da tensão de compressão transversal na resistência ao cisalhamento da matriz através de um termo proporcional à tensão normal agindo no plano de falha. Importantes características dos critérios de falha e modelos de fragilização apresentados por Puck and Schürmann (1998), já haviam sido descritos pelo próprio Puck 25 anos antes, Puck (1969) e Puck and Schneider (1969). Esses trabalhos mostram que dois critérios de falha independentes devem ser aplicados simultaneamente, um para a falha das fibras (FF - Fibre Failure) e outro para a falha entre as fibras (IFF - Inter-Fibre Failure), pois os efeitos desses dois fenômenos são completamente diferentes, assim como os métodos elaborados para impedir um ou outro. Assim, a equação de falha não deveria ser descrito por uma única equação, que incluísse simultaneamente o limite de resistência à tração e o limite de resistência à compressão, uma vez que as características da resistência do material quando em compressão são independentes do limite de resistência à tração, e as características da resistência à tração são também independentes do limite de resistência à compressão.

Em um trabalho posterior, Puck and Schürmann (2002) mostraram que este critério apresentava boa concordância com dados experimentais do trabalho de Hinton and Soden (1998) que ficou conhecido como World-Wide Failure Exercise (WWFE). No entanto, Dávila et al. (2005) afirmou que a abordagem semi-empírica do critério de Puck usa vários parâmetros não físicos do material que podem ser difíceis de quantificar sem que se tenha um conhecimento aprofundado do material.

Assim sendo, Dávila et al. (2005) propuseram um novo critério de falha baseado em fenômenos físicos chamado *critério de falha LaRC03* (menção à *NASA Langley Research Center* onde foi desenvolvido) baseado nos conceitos sugeridos por Hashin (1980) e no princípio do plano de falha, proposto por Puck and Schürmann (1998), que utiliza apenas parâmetros físicos e que fossem de obtenção mais simples em laboratório. Esse critério pode ser resumido em seis índices de falha, cada um baseado em um tipo de falha micro-estrutural, e, uma vez que esses modos de falha se devem a mecanismos diferentes, estes índices de falha não são relacionados de maneira explícita entre si. Essa teoria considera que, no caso da falha da matriz sob compressão transversal, o ângulo do plano de falha é calculado através das tensões efetivas máximas de Mohr-Coulomb. E, para o caso do dobramento das fibras, um critério de falha é obtido aplicando-se o critério de falha da matriz nas coordenadas da estrutura desalinhada através do cálculo de desalinhamento das fibras devido ao carregamento.

Ao longo das últimas décadas surgiram outras inúmeras teorias que combinavam características de algumas das teorias anteriores para materiais isotrópicos, isto é, aproximações iterativas para o critério de von Mises e da máxima tensão. A maioria das teorias são baseadas na hipótese de homogeneidade e comportamento linear da tensão-deformação na falha. Critérios de falha são normalmente expressos em termos dos limites de resistência básicos referentes aos eixos principais do material. Poucas teorias fenomenológicas, como as de *Puck* e *LaRC03*, levam em conta algumas propriedades constituintes além das propriedades da lâmina e analisam o seu comportamento não linear. A maioria das teorias podem identificar o modo de falha, como sendo na fibra ou entre-fibras, mas apenas algumas delas são capazes de definir modos de falhas como critérios de falha. Algumas teorias não consideram as interações entre as componentes de tensão, enquanto outras as consideram em diferentes níveis. Algumas teorias iterativas necessitam ainda de propriedades adicionais dos limites de resistência da lâmina, que são obtidos por testes multiaxiais.

As teorias de falha para laminados podem ser classificados em três grupos:

- *Teorias não-interativas*, nas quais os modos de falhas específicos são previstos pela comparação das tensões e deformações de uma lamina individualmente com os correspondentes limites de resistência ou deformações críticas, por exemplo, teorias da máxima tensão e máxima deformação. Não considera interação entre diferentes componentes de tensões na falha.
- *Teorias interativas*, por exemplo, teorias de Tsai-Hill e Tsai-Wu, nas quais todas as componentes de tensão estão incluídas em uma única expressão (critério de falha). No entanto, a falha é prevista sem que haja referência à um modo de falha particular.
- *Teoria parcialmente interativa ou baseada no modo de falha*, teorias de Hashin-Rotem, Puck e LaRC03, onde critérios separados são dados para a falha das fibras e entre-fibras (matriz ou interface).

# Capítulo 3

## Formulação de Laminados Compósitos

Sabendo-se que um laminado é formado por várias lâminas com diferentes propriedades direcionais, são apresentadas neste capítulo, segundo a metodologia exposta por Agarwal and Broutman (1990), o desenvolvimento das relações de tensão-deformação em laminados compósitos e discutida a variação da tensão ao longo da sua espessura. Para tal, foram desenvolvidas as relações tensão-deformação de uma lâmina ortotrópica e em seguida as equações que relacionam, para cada ponto de um laminado, as deformações devido aos deslocamentos e curvaturas no seu plano médio.

### 3.1 Análise de uma Lâmina Ortotrópica

Considerando uma lâmina ortotrópica, Figura (3.1) , onde os eixos de referência longitudinal e transversal são definidos, respectivamente, como os eixos na direção das fibras e perpendicular a elas.

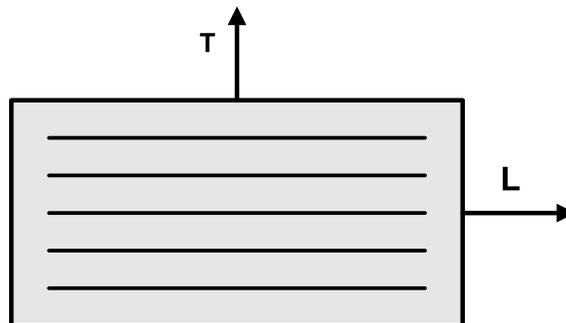


Figura 3.1: Lâmina Ortotrópica

Pode-se definir algumas constantes de engenharia que representam as deformações das lâminas em resposta a um estado de tensão: módulo de elasticidade longitudinal e transversal,  $E_L$  e  $E_T$ , respectivamente, módulo de cisalhamento ou módulo de rigidez associado ao eixo de simetria,  $G_{LT}$ , coeficiente de Poisson principal,  $\nu_{LT}$ , que relaciona a deformação transversal causada por uma tensão longitudinal e o coeficiente de Poisson secundário,  $\nu_{TL}$ , recíproco ao anterior. Essas constantes estão representadas na Figura (3.2).

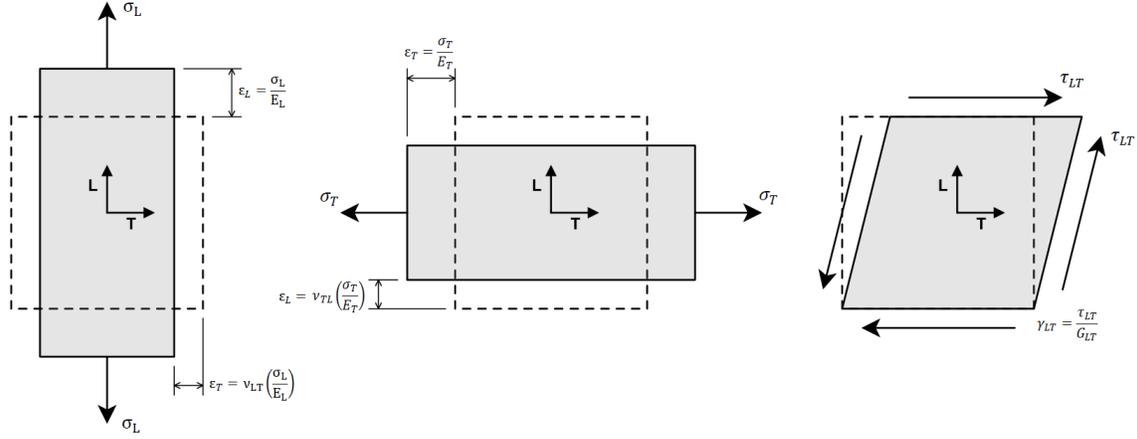


Figura 3.2: Deformação de uma Lâmina Ortotrópica

### 3.1.1 Relação tensão-deformação para uma lâmina ortotrópica

Para a formulação geral de um estado de tensão de um laminado ortotrópico, analisa-se primeiramente três estados de tensões particulares:

- **Tensão normal longitudinal pura:**

$$\begin{aligned}\varepsilon_L &= \frac{\sigma_L}{E_L} \\ \varepsilon_T &= -\nu_{LT} \left( \frac{\sigma_L}{E_L} \right) \\ \gamma_{LT} &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

- **Tensão normal transversal pura:**

$$\begin{aligned}\varepsilon_L &= -\nu_{TL} \left( \frac{\sigma_T}{E_T} \right) \\ \varepsilon_T &= \frac{\sigma_T}{E_T} \\ \gamma_{LT} &= 0\end{aligned}\tag{3.2}$$

• **Cisalhamento puro:**

$$\begin{aligned}\varepsilon_L &= 0 \\ \varepsilon_T &= 0 \\ \gamma_{LT} &= \frac{\tau_{LT}}{G_{LT}}\end{aligned}\tag{3.3}$$

Sobrepondo-se esses três estados de tensões citados, obtém-se as seguintes relações tensão-deformação em termos das constantes de engenharia:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{E_L}\sigma_L - \frac{\nu_{TL}}{E_T}\sigma_T \quad \varepsilon_T = -\frac{\nu_{LT}}{E_L}\sigma_L + \frac{1}{E_T}\sigma_T \quad \gamma_{LT} = \frac{\tau_{LT}}{G_{LT}}\tag{3.4}$$

Escrevendo-se na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix}\tag{3.5}$$

onde

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix}\tag{3.6}$$

é chamada de Matriz de Flexibilidade, e pode ser escrita simplificadamente da seguinte forma:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} \end{bmatrix}\tag{3.7}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_L} \\
 S_{12} &= -\frac{\nu_{TL}}{E_T} \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_T} \\
 S_{21} &= -\frac{\nu_{LT}}{E_L} \\
 S_{66} &= \frac{1}{G_{LT}} \\
 S_{16} &= S_{61} = S_{26} = S_{62} = 0
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sabendo-se que a matriz  $S$  deve ser simétrica, temos:

$$S_{12} = S_{21}$$

$$-\frac{\nu_{TL}}{E_T} = -\frac{\nu_{LT}}{E_L}$$

Assim:

$$\nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L} \tag{3.9}$$

Portanto, conclui-se que são necessárias quatro constantes elásticas para escrever os termos da matriz  $S$  para um material ortotrópico plano, ou seja, para caracterizar uma lâmina de material compósito unidirecional. São estes: módulo de elasticidade longitudinal, módulo de elasticidade transversal, módulo de cisalhamento e coeficiente de Poisson principal.

A relação *tensão-deformação* para uma lâmina de material ortotrópico unidirecional com carga aplicada de forma paralela e/ou perpendicular às fibras também pode ser escrita em termos da matriz de rigidez  $Q$  da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ 1/2\gamma_{LT} \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

onde

$$[Q] = [S]^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}}; Q_{22} = \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}}; Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}}; Q_{66} = G_{LT}$$

### 3.1.2 Matriz de transformação para tensão e deformação

Quando o carregamento é aplicado de forma paralela e/ou perpendicular às fibras conforme já mostrado, a lâmina é caracterizada por quatro constantes elásticas. Neste caso, diz-se que a lâmina é especialmente ortotrópica. Entretanto, caso a carga não seja paralela ou transversal à direção das fibras, é necessário que, além das quatro constantes elásticas, também se conheça o ângulo entre a direção de aplicação da carga e a direção das fibras. Vide figura (3.3):

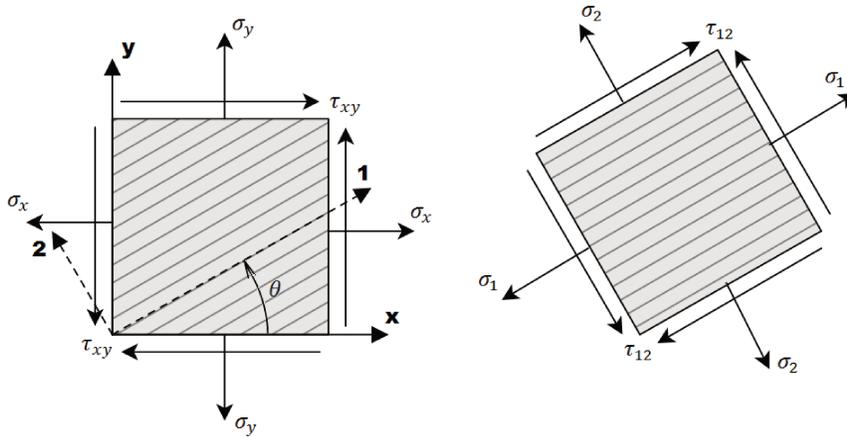


Figura 3.3: Componentes das tensões nos eixos do carregamento e nas direções principais do material

Assim, as tensões nos eixos principais do material (1,2) podem ser expressas em termos

das tensões nos eixos de referência (x,y) através da seguinte transformação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

onde  $T$  é chamada de Matriz de Transformação, e é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

As deformações fora do referencial (x,y), também podem ser escritas da mesma forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 1/2\gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 1/2\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Da Equação 3.11, pode-se escrever:

$$[T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [Q] [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 1/2\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 1/2\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Esta equação expressa a relação entre tensão e deformação para uma lâmina ortotrópica quando a carga aplicada não está paralela e/ou perpendicular às fibras. Por questões de

uniformidade, define-se a matriz  $[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T]$ . Assim:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

## 3.2 Análise de compósitos laminados

Uma das mais importantes vantagens de um material compósito é sua anisotropia que permite que suas propriedades sejam controladas de maneira muito eficiente, ou seja, as propriedades desejadas em uma direção específica podem ser facilmente obtidas alterando-se o material ou o método de manufatura. Em um compósito unidirecional, as propriedades longitudinais são determinadas pelas fibras, enquanto as propriedades transversais são regidas pela matriz polimérica. Geralmente, em engenharia, as propriedades transversais mostram-se insatisfatórias. Por isso, várias lâminas de compósito são usadas para formar um elemento estrutural chamado laminado. As lâminas são dispostas de forma a garantir as propriedades desejadas em todas as direções.

### 3.2.1 Tensão e deformação em um laminado

Os laminados são fabricados de forma a atuarem com se fossem um elemento de apenas um único material. O contato entre duas lâminas em um laminado é considerado perfeito, ou seja, infinitesimalmente fino e não apresenta deformação. Assim, as lâminas não podem deslizar umas sobre as outras e os deslocamentos permanecem contínuos na interface entre lâminas. Considere a deformação de uma seção do laminado no plano  $x$ - $z$  como mostrado na Figura 3.4.

Assumindo que a linha  $ABCD$ , originalmente reta e perpendicular ao plano médio do laminado antes da deformação, permaneça reta e perpendicular ao plano médio do laminado após a deformação. Esta hipótese é equivalente a negligenciar as deformações de cisalhamento  $\gamma_{xy}$  e  $\gamma_{yz}$ , e também é equivalente a assumir que as lâminas que constituem a seção transversal não deslizam umas sobre as outras. Além disso, assume-se que o ponto  $B$ , localizado no plano médio, sofre deslocamentos  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w_0$  ao longo de das direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente. O deslocamento  $u$  na direção  $x$  do ponto  $C$ , que está localizado sobre a reta  $ABCD$ , a uma

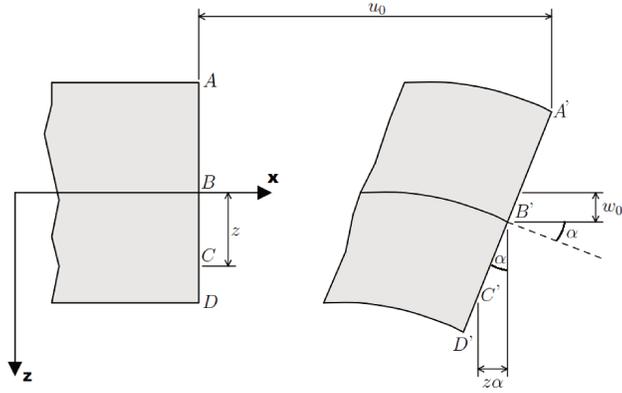


Figura 3.4: Flexão de uma linha no plano  $x$ - $z$

distância  $z$  do plano médio, é dado por:

$$u = u_0 - z\alpha \quad (3.18)$$

onde  $\alpha$  é a inclinação do plano médio do laminado na direção  $x$ . Assim:

$$\alpha = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.19)$$

Combinando as Equações (3.18) e (3.19), obtem-se:

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.20)$$

Por similaridade, o deslocamento  $v$ , na direção  $y$  de um ponto arbitrário à distância  $z$  do plano geométrico é:

$$v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.21)$$

O deslocamento  $w$ , na direção  $z$  de qualquer ponto de  $ABCD$  é o deslocamento  $w_0$  do plano médio não deformado até o plano médio deformado. Logo, o deslocamento normal em qualquer ponto do laminado é assumido como igual ao deslocamento  $w_0$ . Desta forma,

a deformação normal  $\varepsilon_z$  não é considerada. As deformações podem ser obtidas derivando os deslocamentos  $u$  e  $v$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{3.22}$$

As relações de tensão-deformação acima podem ser escritas em termos de deformações no plano médio e curvaturas da placas:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}\tag{3.23}$$

onde as deformação no plano médio são

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{pmatrix}\tag{3.24}$$

e as curvaturas das placas são

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}\tag{3.25}$$

A Equação 3.23 indica que as deformações em um laminado variam linearmente ao longo da espessura. As tensões em uma lâmina podem ser obtidas substituindo a Equação 3.23 na relação de tensão-deformação para uma lâmina dada pela Equação 3.17:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}\tag{3.26}$$

Assim, a variação da tensão através de espessura de um laminado é obtida pelo cálculo da variação de tensão em todas as lâminas. No geral, a variação da tensão através da espessura de um laminado não é linear. As tensões são descontínuas na interface de duas lâminas, e o gradiente de tensão em duas lâminas adjacentes também é diferente. variações típicas da tensão e deformação em um laminado de três laminas está representado na figura abaixo:

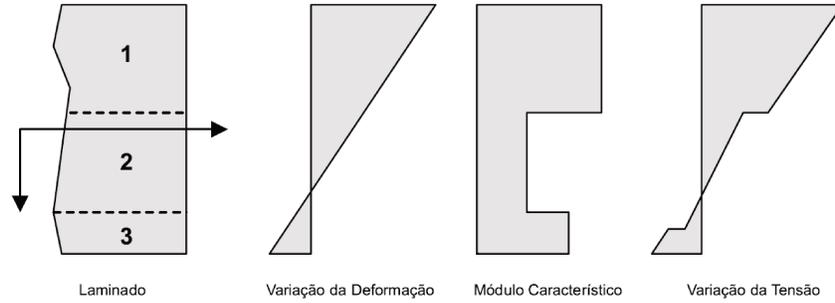


Figura 3.5: Exemplo de variação da tensão e deformação em um laminado de três camadas

### 3.2.2 Síntese da matriz de rigidez

As tensões em um laminado variam de camada para camada. Portanto, é conveniente se trabalhar com um sistema simplificado de forças e momentos equivalentes atuando em uma seção transversal do laminado. Desse modo a resultante de forças e momentos agindo nessa seção são definidos a seguir. A resultante das forças é obtida pela integração das tensões correspondentes na seção transversal do laminado de espessura,  $h$ :

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\
 N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

De maneira similar, a resultante dos momentos é obtida pela integração, ao longo da espessura, do produto entre a tensão correspondente e a distância da mesma em relação ao

plano médio do laminado,  $z$ :

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\
 M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\
 M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Nas equações acima,  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_{xy}$  têm unidades de força por unidade de comprimento e  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  têm unidades de momento por unidade de comprimento. O sentido positivo das resultantes de forças e de momentos é concordante com a convenção de sinais indicada na Figura (3.6). Juntos, esses seis termos de forças e momentos resultantes formam um sistema estaticamente equivalente ao sistema de tensões de laminado, porém aplicado no seu plano intermediário.

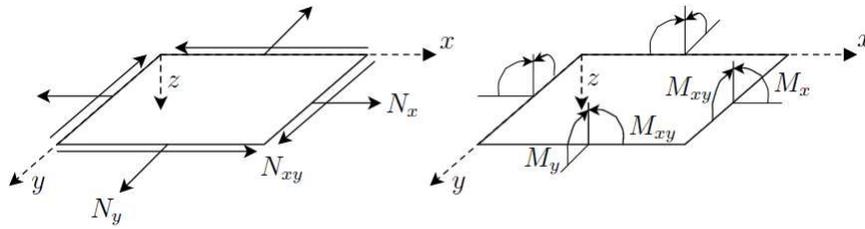


Figura 3.6: Sentido positivo da resultante de forças e momentos

Considere agora um laminado formado por  $n$  lâminas ortotrópicas, como na Figura (3.7). O sistema de forças e momentos atuando no plano intermediário deste laminado pode ser obtido através da substituição das integrais contínuas nas Equações 3.27 e 3.28 pela somatória das integrais que representa a contribuição de cada uma das lâminas separadamente:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k dz \tag{3.29}$$

e

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k z dz \quad (3.30)$$

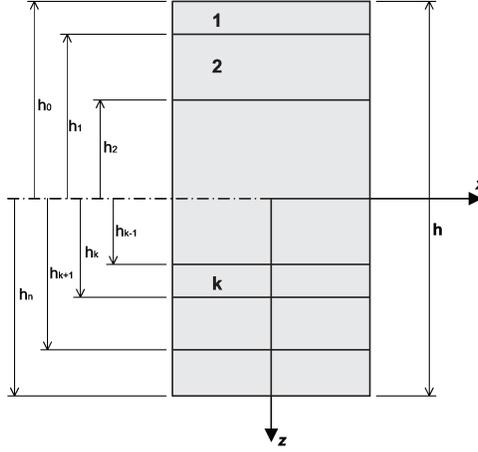


Figura 3.7: Geometria de um laminado com várias camadas

As tensões nas Equações 3.29 e 3.30 podem ser escritas em termos das deformações do plano médio e das curvaturas da placa, Equação 3.26, e as forças e momentos resultantes podem ser diretamente relacionados às deformações do plano médio e da curvatura da placa. Substituindo a Equação 3.26 nas Equações 3.29 e 3.30, tem-se:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} z dz \right\} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \right\} dz + \\
&\int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \left\{ z^2 dz \right\}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Avaliando as equações 3.31 e 3.32, pode-se retirar do somatório as deformações do plano médio e as curvaturas da placa, uma vez que estas permanecem constantes, não apenas em uma lâmina, mas em todo o laminado, simplificando assim as equações. Além disso, a matriz de rigidez  $\bar{Q}$  permanece constante para cada lâmina e portanto pode ser colocada fora da integral. Assim, as Equações 3.31 e 3.32, tornam-se:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} &= \left[ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \\
&\left[ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} &= \left[ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \\
&\left[ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Definindo-se três novas matrizes, as Equações 3.33 e 3.34 podem ser escritas de maneira

simplificada:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Combinando as Equações 3.35 e 3.36, a equação constitutiva do laminado como um todo pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

Nas Equações 3.35-3.38, as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $D$  são chamadas *matriz de rigidez de extensão*, *matriz de rigidez de acoplamento*, e *matriz de rigidez de flexão*, respectivamente. A matriz de rigidez de extensão relaciona a resultante das forças à deformação no plano médio, e a matriz de rigidez de flexão relaciona a resultante dos momentos com a curvatura do laminado.

A presença da matriz de acoplamento  $B$  na equação constitutiva do laminado indica a relação entre flexão e deformação no laminado. Isto é, forças normais e de cisalhamento agindo no plano médio da placa causam, não apenas, deformação no seu plano médio, mas também flexão e torção na placa. Da mesma forma, flexão e momento torçor são acompanhados por deformações no plano médio. Assim, tracionando-se um laminado cujos termos

$B_{ij}$  da matriz de acoplamento são diferentes de zero produzirá flexão e/ou torção do laminado, além da deformação longitudinal e de cisalhamento. Esta observação foi demonstrada experimentalmente por Ashton et al. (1969) através de um modelo fabricado com duas camadas ortotrópicas de fibra de nylon reforçadas com borracha, de forma que alguns termos  $B_{ij}$  fossem diferentes de zero. As extremidades foram deixadas livres para rotação para que, quando o modelo fosse esticado, a única força diferente de zero atuando no laminado fosse  $N_x$ , enquanto que todas as outras forças e momentos resultantes fossem zero. Este tipo de ensaio mostra claramente a torção produzida por uma força normal.

A relação entre a deformação e a flexão no laminado não é atribuída à ortotropia ou à anisotropia das lâminas, mas sim ao empilhamento assimétrico do laminado. De fato, esta relação é válida para um laminado feito de camadas de diferentes materiais isotrópicos.

### 3.2.3 Construção e propriedades especiais de laminados

Na seção anterior, a matriz de rigidez do laminado foi derivada em termos das matrizes de rigidez de cada uma das lâminas individualmente. Quando um laminado é construído empilhando-se de um certo número de lâminas ortotrópicas em uma seqüência arbitrária de orientações, a sua matriz de rigidez será completamente preenchida, isto é, nenhum dos seus termos será zero. No entanto, é possível, e em muitos casos desejado, especificar a seqüência de empilhamento para que um número de termos na matriz de rigidez seja zero, simplificando assim a análise do laminado. Pode-se fazer também com que certos termos sejam iguais a zero para se evitar relações indesejadas entre flexão e deformação, torção ou relações entre forças normais no plano médio e deformações por cisalhamento. Esta relação pode induzir tensões não desejadas na estrutura se as deformações forem restringidas.

#### Laminados simétricos

Uma grande simplificação na análise de laminados ocorre se a matriz de rigidez de acoplamento  $B$  é zero. A contribuição de uma lâmina para um termo em particular da matriz  $B$  é dada pelo produto do termo correspondente na matriz  $\bar{Q}$  e a diferença do quadrado da coordenada  $z$  do topo e da base de cada lâmina. A contribuição da lâmina acima do plano médio pode ser anulada pelo posicionamento de uma lâmina idêntica (em propriedades e orientação) numa mesma distância abaixo do plano médio. Assim, a matriz  $B$  é zero para laminados nos quais cada lâmina acima do plano médio possui uma lâmina idêntica e à mesma distância abaixo do plano médio. Estes laminados que são constituídos por lâminas simétricas em relação ao plano médio são chamados de *Laminados Simétricos* e representam

uma classe importante dos laminados. Geralmente são construídos porque, além de serem de mais fácil análise, a relação de flexão-alongamento é eliminada.

### Laminados Unidirecionais, Cruzados e em Ângulo

Outra possibilidade é a fabricação de um laminado que se comporta como uma lâmina ortotrópica em relação as forças e deformações que atuam no plano, ou seja, um laminado em que não haja relação entre as tensões (ou forças) normais e de cisalhamento. Isto é possível quando  $A_{16}=A_{26}=0$ . A contribuição de uma lâmina para um termo específico da matriz  $A$  é dada pelo termo correspondente da matriz  $\bar{Q}$  multiplicado pela espessura da lâmina. Assim, a contribuição de uma lâmina para o termo  $A_{ij}$  pode ser anulada por outra lâmina de mesma espessura cujo termo correspondente em  $\bar{Q}_{ij}$  possua sinal oposto ao termo  $\bar{Q}_{ij}$  da primeira lâmina. É aparente através dessas equações que  $\bar{Q}_{11}$ ,  $\bar{Q}_{22}$ ,  $\bar{Q}_{12}$  e  $\bar{Q}_{66}$  são sempre positivos e maiores que zero. Conseqüentemente,  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{12}$  e  $A_{66}$  não podem ser iguais a zero. Entretanto,  $\bar{Q}_{16}$  e  $\bar{Q}_{26}$  são zero para  $0^\circ$  e  $90^\circ$  e podem ser positivos ou negativos para valores intermediários de orientações. Uma vez que  $\bar{Q}_{16}$  e  $\bar{Q}_{26}$  são funções ímpares de  $\theta$ , para o mesmo valor de orientação positiva e negativa estes termos serão iguais em magnitude, porém de sinais opostos. Embora, possa-se fazer os termos  $A_{16}$  e  $A_{26}$  serem zero, quando para cada lâmina orientada a um ângulo  $\theta$  positivo em um laminado exista outra lâmina de mesma espessura e mesmas propriedades ortotrópicas, mas orientada em ângulo  $\theta$  de mesmo módulo negativo. Assim, é possível criar um laminado simétrico (matriz de acoplamento  $B$  igual a zero) e, ao mesmo tempo, ortotrópico em relação às forças e deformações no plano ( $A_{16}=A_{26}=0$ ). Três tipos diferentes de laminados ortotrópicos podem ser desenvolvidos:

- Laminado unidirecional, com todas as lâminas orientadas na mesma direção;
- Laminado cruzado, lâminas orientadas em  $0^\circ$  e  $90^\circ$  apenas;
- Laminado em ângulo, com mesmo número de lâminas orientadas em um ângulo de  $\pm\theta$ .

A simplificação da matriz de flexão  $D$  também pode ser considerada. A contribuição de uma lâmina para um termo específico da matriz  $D$  é dada pelo produto do termo correspondente na matriz  $\bar{Q}$  pela diferença ao cubo das coordenadas  $z$  da base até o topo da lâmina. Assim, visto que o valor de  $(h_k^3 - h_{k-1}^3)$  é sempre positivo, os valores de  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{12}$  e  $D_{66}$  serão também sempre positivos. Por outro lado, uma vez que  $\bar{Q}_{16}$  e  $\bar{Q}_{26}$  são funções ímpares de  $\theta$ ,  $D_{16}$  e  $D_{26}$  podem ser igualados a zero se todas as lâminas estiverem orientadas a  $0^\circ$  e  $90^\circ$  ou se para cada lâmina orientada a um ângulo  $\theta$  positivo acima do plano médio existir uma

lâmina idêntica, localizada à mesma distância abaixo do plano médio, mas orientada com um ângulo  $\theta$  negativo. Contudo, laminados deste tipo não serão simétricos em relação ao plano médio, e  $B_{ij} \neq 0$ . Assim, os valores de  $D_{16}$  e  $D_{26}$  serão diferentes de zero, para qualquer laminado simétrico ao plano médio, exceto para um laminado cruzado, onde todas as lâminas são orientadas a  $0^\circ$  ou a  $90^\circ$ . Entretanto, se um laminado é construído empilhando-se alternadamente lâminas em ângulos de mesmo módulo, positivos e negativos, os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  se tornam pequenos caso o número de lâminas seja elevado. Isto é causado pela contribuição da lâmina  $+\theta$ , que tem um sinal oposto à contribuição da lâmina  $-\theta$ , e assim uma parcela cancela a outra, mesmo que estejam localizadas em diferentes distâncias do plano médio.

### 3.2.4 Laminados Quase-isotrópicos

Um laminado de considerável importância prática é chamado de quase-isotrópico. Num laminado quase-isotrópico, a matriz de rigidez de extensão  $A$  é isotrópica, ou seja, possui coeficiente elástico independente da orientação do plano. Por isso requer apenas duas constantes elásticas independentes, como na matriz de rigidez de um material isotrópico. As relações entre diferentes coeficientes da matriz  $A$  podem ser obtidas pela comparação da matriz  $A$  e a matriz de rigidez de um material isotrópico.

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{22} \\ A_{11} - A_{12} &= 2A_{66} \\ A_{16} &= A_{26} = 0 \end{aligned}$$

Um laminado quase-isotrópico pode ser construído se forem obedecidas as seguintes condições:

1. O número total de camadas deve ser maior ou igual a três;
2. As camadas devem ter as mesmas matrizes de rigidez  $Q$  e espessuras;
3. As camadas devem estar orientadas a ângulos iguais. Por exemplo, se o número total de camadas for  $n$ , o ângulo entre duas camadas adjacentes deve ser  $\pi/n$ . Se o laminado for construído por blocos com três ou mais camadas cada, a condição de orientação deve ser satisfeita por cada camada em cada bloco.

Visto que um material construído de acordo com as regras estabelecidas acima é isotrópico em consideração à matriz de rigidez de extensão  $A$  e não, em geral, em consideração às matrizes de acoplamento e de flexão,  $B$  e  $D$ , este tipo de laminado é chamado de *quase-isotrópico*.

O conceito de laminado quase-isotrópico é muito útil na determinação das propriedades de compósitos de fibras curtas com orientação aleatória. Este tipo de compósito pode ser modelado como um laminado de infinitas camadas com variação contínua da orientação destas. Na prática, as propriedades são calculadas para um laminado quase-isotrópico de apenas três ou quatro lâminas.

### 3.2.5 Determinação das tensões e deformações de um laminado

O objetivo da análise de um laminado compósito é determinar as tensões e deformações em cada uma das lâminas que o constitui. Estas tensões e deformações podem ser usadas para prever o carregamento com o qual as falhas se iniciam, isto é, o carregamento em que a primeira lâmina falha. Uma análise passo a passo será necessária para apontar o carregamento em que a lâmina subsequente falhará.

As deformações em uma lâmina causadas por carregamentos externos são funções das deformações no plano médio da lâmina, curvaturas da placa e distância ao plano médio do laminado. A Equação 3.23 fornece a relação entre estes valores. As tensões em uma lâmina podem ser determinadas tanto a partir do cálculo de deformação na lâmina, utilizando as relações tensão-deformação dadas pela Equação 3.17, ou diretamente a partir das deformações e curvaturas do plano médio usando a Equação 3.26. Assim, o primeiro passo na determinação das tensões e deformações lamina é calcular as deformações e curvaturas no plano médio.

Relações entre os carregamentos aplicados, as deformações no plano médio e as curvaturas da placa são fornecidas pelas Equações 3.35 e 3.36. Estas duas equações matriciais representam seis equações algébricas, envolvendo seis incógnitas (três relacionadas às deformações no plano médio e três às curvaturas da placa). Para um laminado qualquer, cuja matriz de acoplamento  $B$  é diferente de zero, a solução dessas equações requer a inversão da matriz  $6 \times 6$  da Equação 3.38. No entanto, esta inversão pode ser realizada em etapas, e a inversão completa pode ser subdividida pela inversão e multiplicação de matrizes menores. A seguir, as deformações e curvaturas são derivadas como funções explícitas dos carregamentos aplicados, isto é, das tensões e momentos resultantes.

As equações constitutivas gerais para um laminado foram deduzidas, a partir da Equação 3.38, como:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix}$$

Considerando as equações para  $N$  e  $M$  separadamente:

$$\begin{aligned}\{N\} &= [A] \{\varepsilon^0\} + [B] \{k\} \\ \{M\} &= [B] \{\varepsilon^0\} + [D] \{k\}\end{aligned}\tag{3.39}$$

Resolvendo a primeira das Equações 3.39 para as deformações no plano médio, temos:

$$\{\varepsilon^0\} = [A^{-1}] \{N\} - [A^{-1}] [B] \{k\}\tag{3.40}$$

Substituindo-se a Equação 3.40 na segunda relação da Equação 3.39:

$$\{M\} = [B] [A^{-1}] \{N\} + [-[B] [A^{-1}] [B] + [D]] \{k\}\tag{3.41}$$

Equações 3.40 e 3.41 podem ser combinadas para se obter uma forma parcialmente invertida da equação constitutiva de um laminado:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ k \end{Bmatrix}\tag{3.42}$$

onde

$$\begin{aligned}[A^*] &= [A^{-1}] \\ [B^*] &= -[A^{-1}] [B] \\ [C^*] &= [B] [A^{-1}] = -[B^*]^T \\ [D^*] &= [D] - [B] [A^{-1}] [B]\end{aligned}$$

Deve-se notar que, para obter esta forma parcialmente invertida da equação constitutiva do laminado, apenas uma matriz 3x3 precisa ser invertida e duas multiplicações realizadas.

Agora as Equações 3.40 e 3.41 podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon^0\} &= [A^*] \{N\} + [B^*] \{k\} \\ \{M\} &= [C^*] \{N\} + [D^*] \{k\}\end{aligned}\tag{3.43}$$

Resolvendo a segunda equação acima para a curvatura da placa:

$$\{k\} = [D^{*-1}] \{M\} - [D^{*-1}] [C^*] \{N\} \quad (3.44)$$

E, substituindo a Equação 3.44 na primeira das Equações 3.43:

$$\{\varepsilon^0\} = [A^*] - [B^*] [D^{*-1}] [C^*] \{N\} + [B^*] [D^{*-1}] \{M\} \quad (3.45)$$

As Equações 3.44 e 3.45 podem ser combinadas para obter a forma completamente invertida da equação constitutiva:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

onde

$$\begin{aligned} [A'] &= [A^*] - [B^*] [D^{*-1}] [C^*] = [A^*] + [B^*] [D^{*-1}] [B^*]^T \\ [B'] &= [B^*] [D^{*-1}] \\ [C'] &= - [D^{*-1}] [C^*] = [D^{*-1}] [B^*]^T = [B']^T \\ [D'] &= [D^{*-1}] \end{aligned}$$

Logo, a forma totalmente invertida das equações constitutivas de um laminado é obtida pela inversão da matriz 3x3 e pela multiplicação de mais duas matrizes.

# Capítulo 4

## Critérios de Falha

Neste capítulo são apresentados alguns dos critérios de falha para materiais compósitos laminados de maior relevância encontrados na literatura. Esses critérios são:

- Critério da Máxima Tensão;
- Critério de Tsai-Hill;
- Critério de Tsai-Wu;
- Critério de Puck;
- Critério LaRC03.

Critérios de falha normalmente são expressos em função dos limites de resistência principais do laminado, obtidos experimentalmente através de testes em laminados unidirecionais. Algumas teorias no entanto, por serem mais elaboradas e levarem em consideração as influências físicas das tensões umas sobre as outras, como os critérios de Puck e LaRC03, necessitam de alguns parâmetros adicionais que nem sempre são tão simples de se determinar.

### 4.1 Critério da Máxima Tensão

O Critério da Máxima Tensão é o mais simples dos critérios de falha para materiais compósitos laminados. Este considera que a falha ocorre quando qualquer uma das tensões calculada nos eixos principais do material ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  ou  $\tau_{12}$ ), para um estado plano de tensão,

excede os limites obtidos por ensaios experimentais. Ou seja, segundo este critério, para que o material não falhe é necessário que:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &< X^T \quad \text{se } \sigma_{11} > 0 \\
 |\sigma_{11}| &< X^C \quad \text{se } \sigma_{11} < 0 \\
 \sigma_{22} &< Y^T \quad \text{se } \sigma_{22} > 0 \\
 |\sigma_{22}| &< Y^C \quad \text{se } \sigma_{22} < 0 \\
 |\tau_{12}| &< S^L
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

## 4.2 Critério de Tsai-Hill

A grande deficiência do Critério da Máxima Tensão é que não há interação entre os componentes de tensão no mecanismo de falha. Porém, evidências experimentais mostram que estas interações afetam a falha. Desta forma é interessante que se tenha critérios de falha quadráticos, similares ao critério de von Mises, que levem em conta as interações entre as componentes de tensão.

O critério de Tsai-Hill tem como base a teoria de Hill (1948) que propôs um critério de falha similar ao de von Mises para materiais anisotrópicos. Esse critério de Hill para um estado biaxial de tensão é dado por:

$$A\sigma_{11}^2 + B\sigma_{22}^2 + C\sigma_{11}\sigma_{22} + D\tau_{12}^2 = 1 \tag{4.2}$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são parâmetros específicos do material.

Note que se  $A = B = 1/\sigma_{ult}^2$ ,  $C = -1/\sigma_{ult}^2$  e  $D = 0$ , o Critério de Hill se iguala ao critério de von Mises, escrito em função das tensões principais, ou seja:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} = \sigma_{ult}^2 \tag{4.3}$$

onde  $\sigma_{ult}$  é o limite de escoamento do material.

Azzi and Tsai (1965) adaptaram esse critério para materiais compósitos ortotrópicos, como é o caso dos laminados unidirecionais. Para isso relacionaram os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , da Equação 4.2, com os limites básicos de falha  $X$ ,  $Y$  e  $S$ , determinados experimentalmente à partir da falha de corpos de prova unidirecionais, ou seja:

- **Falha por Tração na direção das fibras:**

Neste caso:  $\sigma_{11} = X^T$ ,  $\sigma_{22} = \tau_{12} = 0$

Da Equação 4.2:

$$A = 1/X^{T^2} \quad (4.4)$$

- **Falha por Tração na direção transversal às fibras:**

Neste caso:  $\sigma_{22} = Y^T$ ,  $\sigma_{11} = \tau_{12} = 0$

$$B = 1/Y^{T^2} \quad (4.5)$$

- **Falha por Cisalhamento:**

Neste caso:  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ ,  $\tau_{12} = S_L$

$$D = 1/S^{L^2} \quad (4.6)$$

O parâmetro C, que leva em conta a interação entre as tensões normais na direção das fibras e transversalmente a elas, deve ser determinado através de um ensaio biaxial de tensão. Para o caso biaxial em que  $\sigma_{11} = \sigma_{22} \neq 0$  e  $\tau_{12} = 0$ , o material falha de acordo com a teoria da máxima tensão, isto é, quando a tensão transversal atingir o limite de resistência  $Y^T$  que é muito menor que o limite de resistência longitudinal  $X^T$ . Assim, da Equação 4.2, tem-se:

$$C = -1/X^{T^2} \quad (4.7)$$

Desta forma, o critério de Tsai-Hill para um estado biaxial de tensão é dado por:

$$\frac{\sigma_{11}^2}{X^{T^2}} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y^{T^2}} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X^{T^2}} + \frac{\tau_{12}^2}{S^L} = 1 \quad (4.8)$$

Caso  $\sigma_{11}$  ou  $\sigma_{22}$  seja de compressão, deve-se trocar  $X^T$  ou  $Y^T$  por  $X^C$  ou  $Y^C$ , respectivamente.

A interação quadrática que caracteriza a o critério de Tsai-Hill foi muito criticada por ter com base a teoria de Hill (1948), que foi desenvolvida para materiais homogêneos, dúcteis

e anisotrópicos, ao passo que os materiais compósito são, na sua maioria, heterogêneos e frágeis.

A teoria de falha de Tsai-Hill é expressa em termos de um único critério, ao invés de vários subcritérios, como ocorre no caso do critério da máxima tensão. Permitindo assim, uma considerável interação entre os componentes de tensão. Uma desvantagem porém é que esta não é capaz de distinguir diretamente entre os limites de resistência à tração e à compressão. Os parâmetros de resistência da Equação 4.2 devem ser especificados de acordo com o estado de tensão.

### 4.3 Critério de Tsai-Wu

Na tentativa de desenvolver uma teoria de falha que não apresentasse as limitações das anteriores, Gol'denblat and Kopnov (1966) criaram uma teoria capaz de prever os limites de resistência em um estado de tensão qualquer, mesmo que para isso não fossem disponíveis dados experimentais.

Tsai and Wu (1971) propuseram uma modificação nessa teoria visando uma melhor correlação com os dados experimentais através do incremento do número de termos na equação de aproximação (melhor ajuste da curva aos dados experimentais). Assim, estabeleceram uma nova expressão para o critério de falha:

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_6\tau_{12} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} = 1 \quad (4.9)$$

Da mesma forma que para o critério de Tsai-Hill, os coeficientes da expressão anterior são obtidos pela aplicação de carregamentos elementares no laminado. Por exemplo, para o caso de tensão somente na direção das fibras, com limites de resistência à compressão e à tração dados, respectivamente, por  $X^C$  e  $X^T$  tem-se:

$$\begin{aligned} F_1X^T + F_{11}X^{T^2} &= 1 \\ -F_1X^C + F_{11}X^{C^2} &= 1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Da solução do sistema de equações acima, tem-se:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{X^T} - \frac{1}{X^C} \\ F_{11} &= \frac{1}{X^T X^C} \end{aligned} \quad (4.11)$$

De maneira similar, considerando as tensões na direção transversal às fibras:

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{Y^T} - \frac{1}{Y^C} \\ F_{22} &= +\frac{1}{Y^T Y^C} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para que o critério independa do sinal da tensão de cisalhamento, os termos lineares de  $\tau_{12}$  devem ser nulos, ou seja:

$$F_6 = F_{16} = F_{26} = 0$$

Assim, para um estado de cisalhamento puro,  $\tau_{12} = S^L$  e  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ , encontra-se:

$$F_{66} = \frac{1}{S^L{}^2} \quad (4.13)$$

Para se evitar a necessidade de mais um ensaio experimental, é comum que  $F_{12}$  seja assumido de maneira a fazer o critério de Tsai-Wu concordar com algum critério mais simples. A abordagem mais usada é fazer:

$$F_{12} = -\frac{1}{(2\sqrt{F_{11}F_{22}})} = -\frac{1}{(2\sqrt{X^T X^C Y^T Y^C})} \quad (4.14)$$

pois, neste caso, se o critério de Tsai-Wu for aplicado à um material isotrópico e dúctil, como aço de baixo e médio carbono, onde  $X^T = X^C = Y^T = Y^C = \sigma_{ult}$ , sendo  $\sigma_{ult}$  o limite de escoamento, obtêm-se o critério de von Mises, ou seja:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} = \sigma_{ult}^2 \quad (4.15)$$

Uma vez que todos os coeficientes foram determinados, o critério de Tsai-Wu pode ser escrito como:

$$\frac{\sigma_{11}^2}{X^T X^C} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y^T Y^C} + \frac{\tau_{12}}{S L^2} - \frac{\sigma_{11} \sigma_{22}}{\sqrt{X^T X^C Y^T Y^C}} + \left( \frac{1}{X^T} - \frac{1}{X^C} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{Y^T} - \frac{1}{Y^C} \right) \sigma_{22} = 1 \quad (4.16)$$

Observa-se que o critério de Tsai-Wu é mais geral que o critério de Tsai-Hill, já que relaciona mais propriedades mecânicas. Porém, o critério de Tsai-Wu não é um critério de falha baseado em fenômenos físicos. Por isso, ele pode prever a ocorrência do dano, mas não consegue distinguir entre os diferentes modos de falha.

## 4.4 Critério de Puck

O critério de Puck and Schürmann (1998) foi um dos primeiros critérios de falha para materiais compósitos estabelecido em bases físicas sólidas, sendo capaz de fornecer não apenas os níveis de tensões que podem levar o material a falhar, mas também a direção das trincas. Baseado em dois critérios de falha independentes, que devem ser aplicados simultaneamente, um relativo à falha das fibras (FF) e o outro à falha entre-fibras (IFF), o critério de Puck é surpreendentemente simples de ser aplicado, sendo uma excelente opção em projetos de engenharia. A única ressalva são alguns parâmetros não físicos do material que são difíceis de se determinar sem que haja um aprofundado conhecimento do mesmo. Os conceitos e o desenvolvimento das equação que sintetizam a teoria de falha de Puck estão mostrados a seguir da mesma maneira que foram apresentadas por Puck and Schürmann (1998).

### 4.4.1 Condições para a falha das fibras (FF)

Para todos os critérios estudados até o momento, o estado de tensão é considerado como sendo o limite para a falha da fibra em um compósito unidirecional quando, sob carregamento combinado, a tensão  $\sigma_{11}$ , paralela às fibras, atinge o valor do limite de resistência longitudinal  $X_T$  (sob tração) ou  $X_C$  (sob compressão), determinado experimentalmente através de testes uniaxiais. De maneira equivalente, a condição de falha para a deformação  $\varepsilon_1$ , paralela às fibras, em um laminado unidirecional, deve supostamente ser igual à deformação longitudinal de falha,  $\varepsilon_{1T}$  ou  $\varepsilon_{1C}$ , como proposto por Puck (1992). No entanto, o valor real está entre essas duas aproximações, como mostrado a seguir.

Fundamentalmente, é assumido que a falha das fibras em um compósito unidirecional

sob um estado combinado de tensões ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\tau_{21}$ ) irá ocorrer para a mesma tensão que ocasiona a quebra das fibras sob uma tensão uniaxial  $\sigma_{11}$ . Partindo-se dessa hipótese, deve-se considerar a condição de falha para as fibras apenas, ao invés do compósito unidirecional:

$$\begin{aligned}\sigma_{f11} &= X_f^T & \text{se } \sigma_{f11} &\geq 0 \\ \sigma_{f11} &= -X_f^C & \text{se } \sigma_{f11} &< 0\end{aligned}\tag{4.17}$$

Assim, é assumido que a condição de falha para a máxima tensão normal ocorre na direção das fibras. Deve-se ressaltar que  $X_f^T$  e  $X_f^C$  são os valores limites das tensões de tração e compressão alcançadas pelas fibras sob um carregamento uniaxial  $\sigma_{11}$  de um material compósito unidirecional, e não de uma única fibra ou um feixe de fibras.

Assumindo um comportamento elástico-linear para o material, estes valores são dados por:

$$X_f^T = \frac{X_f^T}{E_1} E_{f1} = \varepsilon_1^T E_{f1} \quad e \quad X_f^C = \frac{X_f^C}{E_1} E_{f1} = \varepsilon_1^C E_{f1}\tag{4.18}$$

Enquanto  $X_f^T$  pode ser considerado como o 'verdadeiro' limite de tração das fibras (incorporada ao compósito),  $X_f^C$  não é de fato o 'verdadeiro' limite de compressão das fibras porque, para  $\sigma_{f11} < 0$ , a falha quase sempre ocorre devido a instabilidade elástica (também chamada de microflambagem ("*microbuckling*") ou torção ("*kinking*") das fibras incorporadas elasticamente à matriz. Entretanto, segundo Rosen (1995), pode-se assumir que a flambagem não é influenciada por uma tensão adicional  $\sigma_{22}$ , e nem mesmo por uma tensão cisalhante  $\tau_{21}$ . Assim,  $X_f^C$  pode ser considerado constante.

Para o estado de tensão onde  $\sigma_{11} = 0$  e  $\sigma_{22} \neq 0$ , tensões de sinais opostos ocorrem nas fibras e na matriz, paralelamente às fibras, devido aos seus diferentes módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson (para  $\sigma_{22} > 0$  tem-se  $\sigma_{f11} < 0$ , e para  $\sigma_{22} < 0$  tem-se  $\sigma_{f11} > 0$ ). Esse fator é levado em conta pela equação:

$$\varepsilon_{f1} = \frac{\sigma_{f11}}{E_{f1}} - \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22}\tag{4.19}$$

O fator  $m_{\sigma f}$  representa o efeito da tensão causado pelos diferentes módulos de elasticidade das fibras e da matriz (na direção de  $\sigma_{22}$ ), o que produz para uma distribuição descontínua da tensão  $\sigma_{22}$  do ponto de vista micro-mecânico: nas fibras o módulo de elasti-

cidade é um pouco maior que na matriz. O fator  $m_{\sigma f}$  é a média da magnitude do fator  $m$  da tensão transversal (sub-índice  $\sigma$ ) para a fibra (sub-índice  $f$ ). Valores típicos para esse fator são:  $m_{\sigma f} \approx 1.3$  para fibra de vidro e  $m_{\sigma f} \approx 1.1$  para fibra de carbono.

Devido à forte ligação entre as fibras e matriz, a deformação paralela às fibras é a mesma para as fibras e para o compósito:

$$\varepsilon_{f1} = \varepsilon_1 \quad (4.20)$$

Assim, a tensão longitudinal na fibra  $\sigma_{f11}$  sob carregamento combinado o  $(\sigma_{f11}, \sigma_{f22})$  é obtido da Equação 4.19 como:

$$\sigma_{f11} = \varepsilon_1 E_{f1} + \nu_{f12} m_{\sigma f} \sigma_{22} \quad (4.21)$$

Quando essa tensão atinge o mesmo valor da tensão  $\sigma_{11}$ , as fibras passam a estar sujeitas à falha da mesma maneira que um laminado unidirecional sob carregamento uniaxial em tração ou compressão, assim:

$$\sigma_{f11} = \varepsilon_1^T E_{f1} \quad \text{ou} \quad \sigma_{f11} = -\varepsilon_1^C E_{f1} \quad (4.22)$$

Por esse motivo, baseado na hipótese de falha mencionada, a condição de falha para as fibras sob o carregamento combinado  $(\sigma_{f11}, \sigma_{f22})$  é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_1^T} \left( \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \right) &= 1 \quad \text{para} \quad \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \geq 1 \\ \frac{1}{\varepsilon_1^C} \left( \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \right) &= -1 \quad \text{para} \quad \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} < 1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

quando a deformação de falha  $\varepsilon_1^C$  for escrita como um valor positivo.

Em um estudo prévio, Edge (1994) mostrou através de resultados experimentais que o limite de compressão  $X^C$ , paralelo às fibras e, conseqüentemente  $\varepsilon_1^C$ , são significativamente reduzidos quando, além de  $\sigma_{11} < 0$ , uma tensão de cisalhamento significativa,  $\tau_{21}$ , é sobreposta ao carregamento. Esse evento pode ser explicado pelo fato de que o carregamento  $\tau_{21}$  promove a flambagem pela compressão paralela às fibras. Edge (1994) notou que  $X_1^C = 0$  quando  $\tau_{21}$  alcança o limite de falha entre-fibras,  $\tau_{21} = S^L$ . Esse fato foi de encontro aos resultados

experimentais obtidos por Puck and Schürmann (1998), onde: se uma lâmina unidirecional em um laminado já se encontra danificada por trincas causadas pelo carregamento  $\tau_{21}$ , esta ainda pode transferir significativa tensão de compressão  $\sigma_{11}$ . Assim sendo, Puck and Schürmann (1998) utilizaram um fator de correção empírico da tensão de cisalhamento substancialmente menor que aquele descrito por Edge (1994):

$$\frac{1}{\varepsilon_1^C} \left| \left( \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_2 \right) \right| + (10\gamma_{12})^2 = 1 \quad (4.24)$$

onde  $(10\gamma_{12})^2$  é simplesmente uma aproximação empírica.

É preferível utilizar uma expressão com  $\gamma_{12}$  ao invés de  $\tau_{21}$ , pois o valor deste último é incerto após o início da trinca, enquanto o valor de  $\gamma_{12}$  não.

#### 4.4.2 Condições para a falha entre-fibras (IFF)

Análises experimentais de laminados de fibra de carbono/epóxi e fibra de vidro/epóxi mostram que laminados unidirecionais comportam-se de maneira muito frágil no momento da falha, especialmente para a falha entre-fibras. Segundo Huybrechts and Michaeli (1995), uma separação abrupta de material acontece quando o espécime atinge o ponto de falha sem que haja nenhuma deformação plástica aparente. Em vista dessa observação, é surpreendente que muitos pesquisadores, quando implementam critérios de falha para materiais compósitos frágeis, optam por seguir critérios de escoamento como von Mises ou Hill, desenvolvidos, única e exclusivamente, para materiais dúcteis. O critério de falha de Mohr (1900) se mostra muito mais apropriado para esse tipo de problema uma vez que foi desenvolvido para matérias de comportamento frágeis. Essa idéia foi originalmente proposta por Hashin (1980), onde afirmou que a adaptação do critério de falha de Mohr para compósitos unidirecionais colocaria o critério de falha para fibras e entre-fibras em bases físicas mais sólidas.

Assim como Mohr, Puck and Schürmann (1998) trabalharam com a hipótese de que a fratura ocorre exclusivamente pelas tensões que atuam no plano de falha. No caso da falha entre-fibras, em um plano inclinado paralelo às fibras, existem: uma tensão normal  $\sigma_n$  e duas tensões de cisalhamento  $\tau_{nt}$  e  $\tau_{n1}$ , vide Figura 4.1.

Quando  $\sigma_n > 0$  a fratura acontece em conjunto com  $\tau_{nt}$  e  $\tau_{n1}$ . Devido à simetria existente, a direção da tensão de cisalhamento não pode influenciar a falha. A aproximação

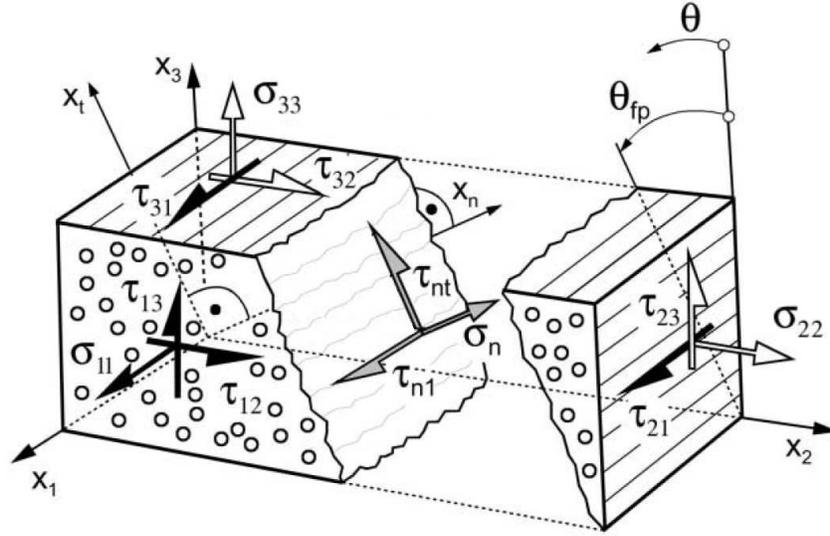


Figura 4.1: Tensões  $\sigma_n$ ,  $\tau_{nt}$  e  $\tau_{n1}$  no plano de falha inclinado paralelo às fibras.[Puck et al. (2002)]

mais simples que poderia ser escrita para  $\sigma_n$  seria:

$$\left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+A)}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2 = 1 \quad \text{para } \sigma_n \geq 0 \quad (4.25)$$

Nesta equação, não é possível utilizar os limites de resistência do laminado unidirecional nos denominadores. Isso pode ser facilmente entendido uma vez lembrada a hipótese fundamental de que a falha em um plano é exclusivamente causada pelas tensões que atuam nesse plano. Conseqüentemente, as tensões  $\sigma_n$ ,  $\tau_{nt}$  e  $\tau_{n1}$ , que devem ter necessariamente o mesmo plano de ação, devem ser comparadas aos valores das resistências à fratura  $R^A$  no respectivo plano de ação (representado pelo índice  $A$ ).

Se uma tensão  $\sigma_n > 0$  atua sozinha e a falha ocorre em seu plano de ação, o limite de resistência a fratura  $R_{\perp}^{(+A)}$  iguala-se ao limite de resistência a tração  $Y^T$ . Esse caso é específico para materiais laminados unidirecional, o que não significa que possa ser generalizado. Entretanto, uma tensão de cisalhamento  $\tau_{n1}$  causa a falha somente no seu próprio plano de ação, assim,  $R_{\perp\parallel}^A$  pode ser substituído por  $S^L$ . No caso de  $R_{\perp\perp}^A$  a situação é totalmente diferente, uma tensão de cisalhamento  $\tau_{nt}$  atuando sozinha não conduz a falha por cisalhamento no seu plano de ação, mas sim, em um plano inclinado a  $45^\circ$  a este.

Até o momento, nenhum tipo de prática experimental fora desenvolvida para se obter

diretamente os valores da resistência à fratura  $R_{\perp\perp}^A$  em função da tensão de cisalhamento  $\tau_{nt}$ . Assim, os valores de  $R_{\perp\perp}^A$  devem ser aproximados matematicamente através do limite de compressão  $Y^C$ .

A parte não usual do critério de falha proposto por Puck está na definição espacial das tensões  $\sigma_n$ ,  $\tau_{nt}$  e  $\tau_{n1}$ . As tensões ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\tau_{23}$ ,  $\tau_{31}$  e  $\tau_{21}$ ) que eram dadas no sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ , e dependiam da direção das fibras e do plano médio da lâmina unidirecional, se alteram para as direções  $(\sigma_n, \tau_{nt}$  e  $\tau_{n1})$  através das já conhecidas regras de transformação:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_{11} \\ \sigma_n &= \sigma_{22} \cos^2 \theta \\ \tau_{nt} &= -\sigma_{22} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{n1} &= \tau_{21} \cos \theta\end{aligned}\tag{4.26}$$

As tensões  $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$  devem ser introduzidas agora em termos de  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\tau_{12}$  e  $\theta$  em uma condição de falha como a da Equação 4.25. O ângulo  $\theta_{fp}$  (onde "fp" representa *failure plane*, plano de falha) pode ser definido como sendo aquele para o qual o risco de falha no respectivo plano de falha ( $\theta$ ) seja um máximo global.

É importante ressaltar que, a tensão de tração  $\sigma_n > 0$  promove a falha, enquanto a tensão de compressão  $\sigma_n < 0$  impede a falha por cisalhamento. Assim para  $\sigma_n < 0$ , as tensões de cisalhamento  $\tau_{nt}$  e  $\tau_{n1}$  (ou somente uma delas) devem superar uma resistência adicional, que aumenta com o aumento de  $|\sigma_n|$  devido à fricção interna do material, para chegar à falha. Uma simples aproximação que descreve esses efeitos é dada pelas equações abaixo, que muito se assemelham às hipóteses de falha dadas por Mohr-Coulomb:

$$\left( \frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A - p_{\perp\perp}^{(-)} \sigma_n} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A - p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_n} \right)^2 = 1 \quad \text{para } \sigma_n < 0\tag{4.27}$$

Ambas as condições de falha, Equações 4.25 e 4.27, foram modificadas para a melhor concordância com os resultados experimentais:

$$c_2 \left( \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+)} A} \right)^2 + c_1 \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+)} A} + \left( \frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 = 1 \quad \text{para } \sigma_n \geq 0\tag{4.28}$$

$$\frac{\tau_{nt}^2}{(R_{\perp\perp}^A)^2 - 2p_{\perp\perp}^{(-)} R_{\perp\perp}^A \sigma_n} + \frac{\tau_{n1}^2}{(R_{\perp\parallel}^A)^2 - p_{\perp\parallel}^{(-)} R_{\perp\parallel}^A \sigma_n} = 1 \quad \text{para } \sigma_n < 0 \quad (4.29)$$

Estas duas equações são a base para a condição de falha entre-fibras trabalhadas por Puck and Schürmann (1998).

Uma simplificação da Equação 4.29, aceitável de acordo com dados experimentais, é feita pela aproximação dos fatores de inclinações  $p_{\perp\perp}^{(-)}$  e  $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ :

$$\frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{R_{\perp\perp}^A} = \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}^A} = \frac{p}{R} = Cte \quad (4.30)$$

Em geral,  $p_{\perp\perp}^{(-)}$  se encaixa às deduções experimentais da inclinação no envelope de falha  $(\sigma_{22}, \tau_{12})$  para  $\sigma_{22} \leq 0$  no ponto  $\sigma_{22} = 0$ , assim  $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)} R_{\perp\perp}^A / R_{\perp\parallel}^A$  também é fixo. Com a aproximação feita na Equação 4.30, a Equação 4.29 se reduz a uma forma muito mais simples:

$$\left( \frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 + 2 \left( \frac{p}{R} \right) \sigma_n = 1 \quad \text{para } \sigma_n < 0 \quad (4.31)$$

O corpo de falha descrito pelas Equações 4.28 e 4.29 no espaço  $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ , Figura 4.2, é um elipsóide no lado da tração para  $\sigma_n \geq 0$  e um parabolóide (com contornos parabólicos e seção transversal elíptica) no lado da compressão  $\sigma_n < 0$ .

Os termos  $R_{\perp}^{(+)A}$ ,  $R_{\perp\parallel}^A$  e  $R_{\perp\perp}^A$  são chamados de parâmetros de resistências à fratura do plano de ação de Puck. O envelope de falha  $(\sigma_{22}, \tau_{21})$  é caracterizado pela linha que segue o contorno do corpo de falha de  $a$  até  $c$  e então a linha do contorno da seção transversal de  $c$  até  $d$ , Figura 4.3.

De acordo com dados experimentais, aplicando-se a Equação 4.30 para o plano de tensão  $(\sigma_{22}, \tau_{21})$ , têm-se um ângulo de falha  $\theta_{fp} = 0^\circ$  para qualquer  $\sigma_2 \geq 0$ .

Através das regras de transformações, Equação 4.26:

$$\sigma_n = \sigma_{22}; \quad \tau_{nt} = 0; \quad \tau_{n1} = \tau_{21}$$

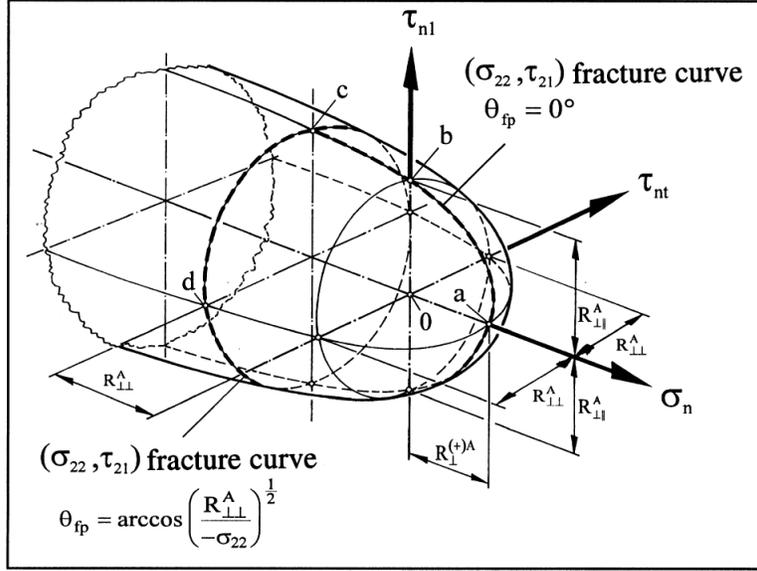


Figura 4.2: Superfície de falha (para  $\sigma_{11} = 0$ ) de um laminado unidirecional no espaço  $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ .

a condição de falha da Equação 4.28 se reduz a:

$$c_2 \left( \frac{\sigma_{22}}{R_{\perp}^{(+A)}} \right)^2 + c_1 \frac{\sigma_{22}}{R_{\perp}^{(+A)}} + \left( \frac{\tau_{21}}{R_{\perp}^A} \right)^2 = 1 \quad \text{para } \sigma_{22} \geq 0 \quad (4.32)$$

Que pode ser escrita detalhadamente como:

$$\sqrt{\left( \frac{\tau_{21}}{R_{\perp}^A} \right)^2 + \left( 1 - \frac{p_{\perp}^{(+)}}{R_{\perp}^A} R_{\perp}^{(+A)} \right)^2 \left( \frac{\sigma_{22}}{R_{\perp}^{(+A)}} \right)^2} + \frac{p_{\perp}^{(+)}}{R_{\perp}^A} \sigma_{22} = 1 \quad \text{para } \sigma_{22} \geq 0 \quad (4.33)$$

O mecanismo de falha descrito pela Equação 4.33, onde  $\sigma_{22}$  e/ou  $\tau_{21}$  causam a falha, é chamado de **Modo A** (ver Figura 4.3).

A curva da Figura 4.3 é generalizada por duas elipses e uma parábola. Se uma fragilização por  $\sigma_{11}$  ocorrer, a curva será "encolhida" por um fator  $f_w$ , mantendo as condições geométricas de similaridade.

Aplicando-se a Equação 4.31 no domínio de  $\sigma_{22} < 0$ , pode-se ver que, mesmo do lado da compressão, existe uma parte do envelope de falha cujo ângulo de falha é zero,  $\theta_{fp} = 0^\circ$ . A falha é originada por  $\tau_{21}$ , enquanto  $\sigma_{22}$  impede a falha. A tensão  $\tau_{21}$  na falha aumenta parabolicamente com o aumento da tensão de compressão. Na Equação 4.31, atribuiu-se os

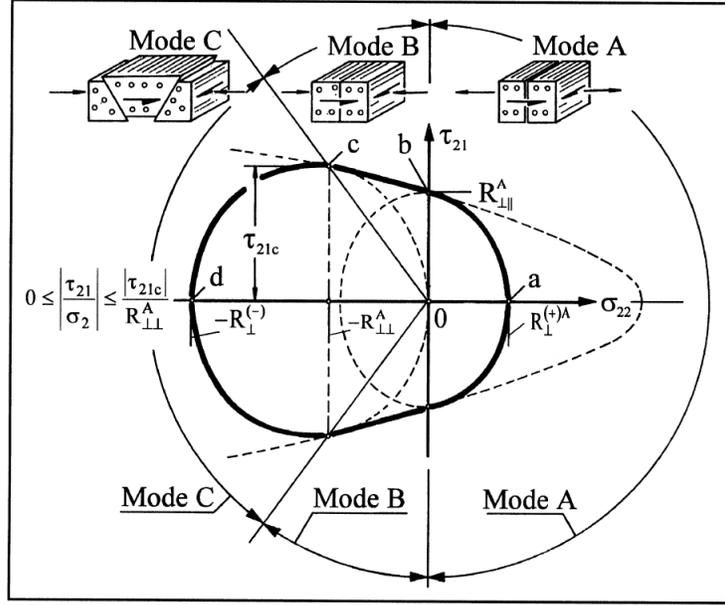


Figura 4.3: Envelope de falha  $(\sigma_{22}, \tau_{21})$  para  $\sigma_{11} = 0$ , representando três diferentes modos de falha A, B e C.

seguintes valores para as tensões  $\sigma_n = \sigma_{22}$ ,  $\tau_{nt} = 0$  e  $\tau_{n1} = \tau_{21}$ . Novamente, como na Equação 4.33, a condição de falha pode ser encontrada como uma equação homogênea em função das tensões:

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2 + \left(\frac{p}{R}\right)^2 \sigma_{22}^2} + \left(\frac{p}{R}\right) \sigma_{22} = 1 \quad \text{para } \sigma_{22} < 0 \quad (4.34)$$

Este mecanismo de falha é chamado de **Modo B**.

Huybrechts and Michaeli (1995) observaram que, em testes de falha sob carregamento de compressão uniaxial, ângulos de falha de aproximadamente  $\pm 45^\circ$  ( $\theta_{fp} \approx \pm 45^\circ$ ) aparecem. Conseqüentemente, pode-se antecipar que o ângulo de falha,  $\theta_{fp}$ , ao longo do envelope de falha  $(\sigma_{22}, \tau_{21})$ , em algum ponto entre a força de cisalhamento  $R_{\perp\parallel}$  e a força de compressão  $R_{\perp}^{(-)}$ , varia de  $\theta_{fp} = 0^\circ$  (Modo B) para valores  $\theta_{fp} \neq 0^\circ$ . Para uma análise mais detalhada, a condição de falha da Equação 4.31 tem que ser implementada para cada possível ângulo de falha entre  $-90^\circ \leq \theta_{fp} \leq 90^\circ$  para identificar o plano de ação que apresente o maior risco de falha.

Embora seja considerado que, para um estado de tensão  $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{21})$ , o seguimento  $\sigma_{22} < 0$  induz a falha entre-fibras (IFF), no momento da falha, duas condições são satisfeitas:

1. Fratura ocorre em um plano seccional, onde o fator de esforço em função do ângulo  $f_E(\theta)$  é máximo:

$$\frac{d}{d\theta} (f_E(\theta)) = 0 \quad (4.35)$$

2. A condição de falha é satisfeita:

$$f_E(\theta_{fp}) = 1 - \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} = f_w \quad (4.36)$$

sendo  $f_w$  chamado de "fator de enfraquecimento", e representa a diminuição da resistência à fratura do plano de ação devido a elevados valores da tensão  $\sigma_{11}$ .

O fator de enfraquecimento dado pela Equação 4.36 deve ser utilizado nos cálculos iterativos. Uma vez que se conheça o material a ser analisado, os cálculos podem ser simplificados fazendo:

$$f_E(\theta_{fp}) = 1 - \left( \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} \right)^n = f_w \quad (4.37)$$

onde  $n$  é um parâmetro experimental que expressa quantitativamente a degradação do limite de resistência à fratura  $R^A$  no plano de falha devido a tensão  $\sigma_{11}$ .

A condição de falha pode ser expressa em função de  $\cos \theta$ . Assim, a expansão da Equação 4.35 torna-se:

$$\frac{d}{d\theta} (f_E(\theta)) = \frac{d}{d \cos \theta} (f_E(\theta)) \frac{d}{d\theta} \cos \theta = \frac{d}{d \cos \theta} (f_E(\theta)) (-\sin \theta) = 0$$

A primeira solução dessa equação é  $\theta_{fp} = 0^\circ$ , que já foi usada quando descrito o mecanismo de falha para o Modo B.

A segunda solução é obtida através de:

$$\frac{d}{d \cos \theta} (f_E(\theta)) = 0$$

Para encontrar a solução, parte-se de uma solução alternativa da condição de falha representada pela Equação 4.31, na qual o valor da função do lado direito aumenta proporcionalmente em função da tensão. Assim, esta forma alternativa pode ser utilizada não somente para a formulação da condição de falha, mas também para o cálculo do esforço:

$$f_E(\theta_{fp}) = \sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2 + \left(\frac{p}{R}\right)^2 \sigma_n^2} + \left(\frac{p}{R}\right) \sigma_n = f_w \quad \text{para } \sigma_n < 0 \quad (4.38)$$

De acordo com as regras de transformação das Equações 4.26, esta pode ser escrita para um ângulo arbitrário  $\theta$  como:

$$f_E(\theta) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 (1 - \cos^2\theta) + \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2 + \left(\frac{p}{R}\right)^2 \sigma_2^2 \cos^2\theta} + \left(\frac{p}{R}\right) \sigma_2 \cos^2\theta + \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} \quad \text{para } \sigma_n < 0$$

Fazendo-se:

$$\begin{aligned} a &= \left[ \left(\frac{p}{R}\right)^2 - \left(\frac{1}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 \right] \sigma_2^2 \\ b &= \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 \\ c &= \left(\frac{p}{R}\right) \sigma_2 \end{aligned}$$

o esforço dependente do ângulo se torna uma função de  $\cos\theta$ :

$$f_E(\theta) = \cos\theta \sqrt{a \cos^2\theta + b} + c \cos^2\theta + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}}$$

Assim, da Equação 4.35, para a sua primeira solução  $\theta_{fp} = 0^\circ$ :

$$\frac{d}{d \cos\theta} (f_E(\theta)) = \sqrt{a \cos^2\theta_{fp} + b} + \frac{a \cos^2\theta_{fp}}{\sqrt{a \cos^2\theta_{fp} + b}} + 2c \cos\theta_{fp} = 0 \quad (4.39)$$

Se considerada no momento da falha, a condição de falha também pode ser escrita

como:

$$f_E(\theta_{fp}) = \cos\theta_{fp}\sqrt{a\cos^2\theta_{fp} + b} + c\cos^2\theta_{fp} = f_w$$

Utilizando esta equação, elimina-se a incômoda raiz quadrada na derivação, obtendo-se finalmente:

$$\begin{aligned} \cos^4\theta &= \frac{f_w^2}{c^2 - a} \\ \theta_{fp} &= \cos^{-1}\sqrt{\frac{f_w R_{\perp\perp}^A}{(-\sigma_{22})}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Na Equação 4.40,  $\sigma_{22}$  é a tensão na falha entre-fibras. Assim, é possível determinar o ângulo de falha,  $\theta_{fp}$ , usado nas Equações 4.29 e 4.30, de uma maneira surpreendentemente simples.

Pode-se perceber que a tensão normal  $\sigma_n$  no plano de falha é constante sempre que os planos de falha estiverem inclinados, pois  $\sigma_n = \sigma_2\cos^2\theta_{fp} = -f_w R_{\perp\perp}^A$ . Sendo assim, independente da razão de tensão  $\tau_{21}/\sigma_{22}$ . No intervalo entre  $\sigma_{22} = 0$  e  $\sigma_2 = -f_w R_{\perp\perp}^A$ , o ângulo de falha é  $\theta_{fp} = 0^\circ$ , e a tensão normal é dada por  $\sigma_{22} = \sigma_n$ . Quando o valor da tensão de compressão excede o valor de  $-f_w R_{\perp\perp}^A$ , o plano de falha torna-se tão exato que  $\sigma_n = \sigma_2\cos^2\theta_{fp}$  permanece constante.

Na superfície de falha da Figura 4.2, o envelope de falha para o carregamento  $(\sigma_{22}, \tau_{21})$  começa no ponto *a* (tração  $\sigma_n$  pura), passa por *b* (cisalhamento  $\tau_{n1}$  puro), segue o contorno linear da seção longitudinal até mudar de direção no ponto *c* e continua de *c* até *d* (compressão  $\sigma_n$  pura) através do contorno da seção transversal do corpo de falha.

Conhecendo-se o ângulo de falha  $\theta_{fp}$ , da Equação 4.31 ou 4.38, a condição de falha em um plano inclinado, devido a um carregamento  $(\sigma_{22}, \tau_{21})$ , pode ser dada por:

$$\frac{1}{2\left[1 + \left(\frac{p}{R}\right)R_{\perp\perp}^A\right]} \left[ \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 \right] \frac{R_{\perp\perp}^A}{(-\sigma_{22})} + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} = 1 \quad \text{para } \sigma_2 < 0 \quad (4.41)$$

Esta equação pode ser escrita de várias maneiras. Uma particularmente simples resulta da relação entre  $R_{\perp\perp}^A$  e o limite de compressão transversal  $Y^C$ . Este mecanismo de falha é chamado de **Modo C**, ver Figura 4.3.

## 4.5 Critério falha LaRC03

O critério de falha LaRC03 se resume a seis índices de falha, cada um baseado em um diferente tipo de falha micro-estrutural, sendo três referentes a falha das fibras e três referentes à falha da matriz, que não estão relacionados entre si. A grande vantagem desse critério em relação ao critério de Puck é poder prever com precisão a falha das fibras e da matriz sem a necessidade dos parâmetros não físicos citados anteriormente.

Para o caso da falha da matriz sob compressão transversal, o ângulo do plano de falha é obtido pela maximização das tensões efetivas de Mohr-Coulomb. No caso do dobramento das fibras um critério de falha é calculado através do desalinhamento das fibras e pela aplicação do critério de falha da matriz no sistema de coordenadas da estrutura desalinhada. Além disso, modelos da mecânica da fratura são usados para desenvolver um critério para a falha da matriz sob tração e calcular os limites de resistência no plano de falha. O desenvolvimento de cada um dos seis índices de falha, assim como os conceitos e suas deduções, estão representas a seguir da maneira que foram apresentados por Dávila et al. (2005).

### 4.5.1 LaRC03 para falha na matriz

O critério de falha de LaRC03 para a falha da matriz é proposto por Dávila et al. (2005) baseado nos conceitos sugeridos por Hashin (1980) e no princípio do plano de falha, proposto por Puck and Schürmann (1998). No caso do tracionamento da matriz, os planos de falha são normais ao plano das lâminas e paralelos à direção das fibras. Para a compressão da matriz, o plano da falha não acontece normal à lâmina e Hashin (1980) não era capaz de calcular esse ângulo de falha. Na teoria proposta por Dávila et al. (2005), as tensões efetivas de Mohr-Coulomb são usadas para calcular o ângulo de falha.

### 4.5.2 Critério de Falha da Matriz Sob Compressão ( $\sigma_{22} < 0$ )

O critério de Mohr-Coulomb é comumente utilizado em situações onde a fratura sob tração é diferente daquela causada sob compressão, como por exemplo, na mecânica dos solos ou no caso do ferro fundido. A aplicação do critério de Mohr-Coulomb para falha multiaxial em resina Epóxi foi previamente estudada por Kawabata (1982). Boehler and Raclin (1985) descobriram, estudando a falha em laminado de fibra de vidro e Epóxi sob pressão confinada, que o critério de Tsai-Wu não se mostrava adequado e formularam um critério de cisalhamento baseado no critério de Mohr-Coulomb. Taliercio and Sagramoso

(1995) utilizaram o critério de Mohr-Coulomb em um modelo micromecânico não linear para prever as propriedades macromecânicas de compósitos fibrosos.

O critério de Mohr-Coulomb está representado geometricamente na Figura 4.4, através do círculo de Mohr para um estado uniaxial de compressão.

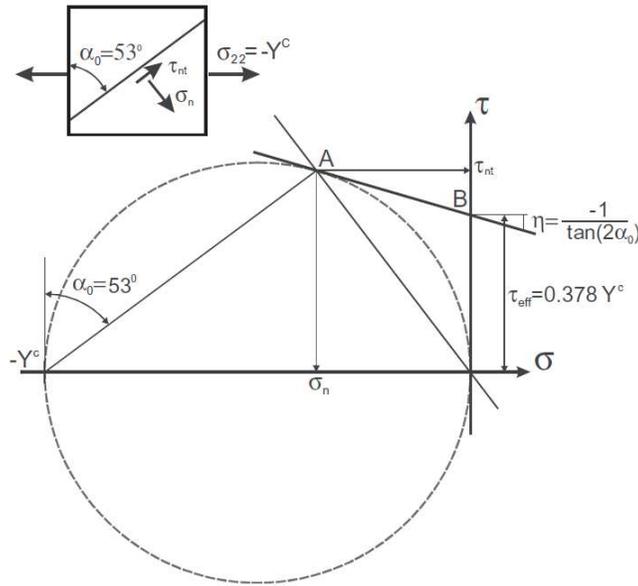


Figura 4.4: Círculo de Mohr para um estado uniaxial de compressão e tensões efetivas de cisalhamento.

O ângulo de falha  $\alpha_0 = 53^\circ$  mostrado, representa, segundo Puck and Schürmann (1998) um valor típico para laminados compósitos submetidos a carregamentos transversais de compressão. A linha  $AB$  é tangente ao círculo em  $A$  e é chamada 'linha de falha de Coulomb'. A teoria de Mohr-Coulomb sugere que, para um estado biaxial de tensão normal, a falha ocorre para qualquer círculo de Mohr que tangencie essa linha de falha de Coulomb.

A tensão efetiva  $\tau_{eff}$  está relacionada com as tensões  $\tau_{nt}$  e  $\sigma_n$  que agem no plano da falha, através da expressão  $\tau_{eff} = \tau_{nt} + \eta\sigma_n$ . Na literatura,  $\tan^{-1}(\eta)$  é chamado de "ângulo de fricção interna do material" e é considerada como uma constante do material. Quando  $\eta = 0$ , o critério de Mohr-Coulomb se torna equivalente ao critério de Tresca.

Em geral, o plano da falha pode estar sujeito tanto a tensões transversais como a tensões normais no próprio plano, em cada caso, a tensão efetiva deve ser definida em ambas

as direções ortogonais:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{eff}}^T &= |\tau_{nt}| + \eta^T \sigma_n \\ \tau_{\text{eff}}^L &= |\tau_{n1}| + \eta^L \sigma_n\end{aligned}\tag{4.42}$$

onde os termos  $\eta^T$  e  $\eta^L$  se referem aos coeficientes de influência transversais e longitudinais, respectivamente, e o operador  $\langle \rangle$  representa  $\langle x \rangle = \frac{1}{2} (x + |x|)$ .

A falha da matriz sob compressão é assumida como sendo o resultado da relação entre as tensões de cisalhamento efetivas no plano da falha. O índice de falha para um determinado modo de falha é escrito como uma igualdade, mostrando que, o estado de tensão que viola tal inequação não é fisicamente admissível.

Assim, o índice de falha da matriz ( $FI_M$ ) é:

**LaRC03#1**

$$FI_M = \left( \frac{\tau_{\text{eff}}^T}{S^T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{\text{eff}}^L}{S_{is}^L} \right)^2 \leq 1\tag{4.43}$$

onde  $S^T$  e  $S_{is}^L$  são os limites resistência ao cisalhamento, transversal e longitudinal, respectivamente. O subscrito  $M$  indica falha na matriz e o subscrito  $is$  indica que o limite de resistência localizada (*"in situ"*) ao cisalhamento longitudinal deve ser usada, ao invés do valor do limite de resistência do laminado unidimensional correspondente. Os efeitos restritivos das lâminas adjacentes aumentam significativamente o limite de resistência efetiva de uma lâmina. Assume-se aqui que o limite da resistência ao cisalhamento transversal ( $S^T$ ) é independente dos efeitos locais.

Os componentes da tensão agindo no plano de falha podem ser expressos em termos das tensões no plano e do ângulo de falha,  $\alpha$  (ver Figura 4.5):

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_{22} \cos^2 \alpha \\ \tau_{nt} &= -\sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau_{n1} &= \tau_{12} \cos \alpha\end{aligned}\tag{4.44}$$

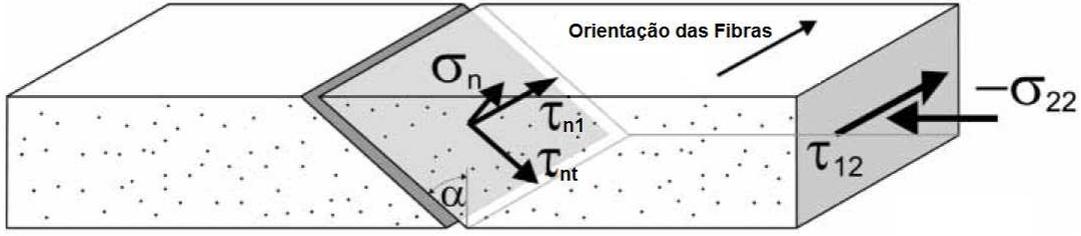


Figura 4.5: Plano de falha de um laminado unidirecional sujeito à compressão transversal e cisalhamento no plano.

Substituindo-se as Equações 4.44 em 4.42, as tensões efetivas, para um ângulo de falha  $\alpha$  entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , são:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{eff}}^T &= -\sigma_{22} \cos \alpha (\sin \alpha + \eta^T \cos \alpha) \\ \tau_{\text{eff}}^L &= \cos \alpha (|\tau_{12}| + \eta^L \sigma_{22} \cos \alpha)\end{aligned}\quad (4.45)$$

#### Cálculo dos coeficientes $\eta^T$ e $\eta^L$ e do limite de resistência $S^T$

Os coeficientes de influência  $\eta^T$  e  $\eta^L$  são obtidos para o caso de compressão transversal uniaxial ( $\sigma_{22} < 0$ ,  $\tau_{12} = 0$ ). Na falha, a tensão de compressão no plano é igual ao limite da resistência à compressão da matriz,  $\sigma_{22} = -Y^C$ . Assim, a tensão de cisalhamento transversal efetiva na falha é:

$$\tau_{\text{eff}}^T = S^T = Y^C \cos \alpha (\sin \alpha + \eta^T \cos \alpha)\quad (4.46)$$

Sob compressão uniaxial transversal, a falha ocorre para ângulo de falha  $\alpha_0$  que maximiza a tensão de cisalhamento transversal efetiva. Derivando-se a tensão de cisalhamento transversal, Equação 4.46, como respeito à  $\alpha$ , tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{\text{eff}}^T}{\partial \alpha} = 0 &\Rightarrow -\sin \alpha_0 (\sin \alpha_0 + \eta^T \cos \alpha_0) + \cos \alpha_0 (\cos \alpha_0 + \eta^T \sin \alpha_0) = \\ &= \cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha_0 + 2\eta^T \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = 0\end{aligned}\quad (4.47)$$

Resolvendo-se Equação 4.47 para  $\eta^T$ , tem-se:

$$\eta^T = \frac{-1}{\tan 2\alpha_0} \quad (4.48)$$

Segundo Puck and Schürmann (1998), quando carregado sob compressão transversal, a maioria dos compósitos unidirecionais de fibra de carbono falham por cisalhamento transversal, com um ângulo de falha  $\alpha_0 = 53 \pm 2^\circ$  e coeficiente de influência transversal entre  $0,21 \leq \eta^T \leq 0,36$ . É interessante notar que, se o ângulo de falha for  $\alpha_0 = 45^\circ$ , o coeficiente de influência transversal será zero.

O limite de resistência ao cisalhamento transversal ( $S^T$ ) é difícil de ser medido experimentalmente. No entanto, substituindo-se a Equação 4.48 na Equação 4.46, obtém-se uma expressão que relaciona o limite de resistência ao cisalhamento transversal e o limite de resistência à compressão transversal:

$$S^T = Y^C \cos \alpha_0 \left( \sin \alpha_0 + \frac{\cos \alpha_0}{\tan 2\alpha_0} \right) \quad (4.49)$$

Para um valor típico do ângulo da falha,  $\alpha_0 = 53^\circ$ , tem-se  $S^T = 0,378Y^C$ , como mostrado na Figura 4.4. O limite de resistência ao cisalhamento transversal é frequentemente aproximado como sendo  $S^T = 0,5Y^C$ , o que implica, pelas Equações 4.46 e 4.48, que o plano da falha ocorre com  $\alpha_0 = 45^\circ$  e que  $\eta^T = 0$ . Usando essa aproximação, o critério bidimensional proposto por Hashin (1980) para falha da matriz em compressão, torna-se idêntico ao seu próprio critério proposto anteriormente, Hashin and Roterm (1973).

O coeficiente de influência longitudinal,  $\eta^L$ , pode ser determinado através de testes de cisalhamento para diferentes graus de compressão transversal. Caso esses testes não sejam viáveis,  $\eta^L$  pode ser estimado à partir dos valores dos limites das resistências ao cisalhamento transversal e longitudinal, como proposto por Puck and Schürmann (2002):

$$\frac{\eta^L}{S^T} = \frac{\eta^T}{S^L} \Rightarrow \eta^L = -\frac{S^T \cos 2\alpha_0}{Y^C \cos^2 \alpha_0} \quad (4.50)$$

### Determinação do ângulo do plano de falha

O ângulo do plano de falha para um laminado unidirecional sob compressão transversal é uma propriedade do material que pode ser facilmente obtida através de um banco de dados

experimentais. Entretanto, quando trabalha-se com carregamentos combinados, esse ângulo deve ser calculado.

O ângulo de falha apropriado é aquele que maximiza o índice de falha (FI) dado pela Equação 4.43. Uma maneira de obtê-lo é procurando o máximo valor de FI, variando-se  $\alpha$  no intervalo  $0 < \alpha < \alpha_0$ . O gráfico da Figura 4.6 relaciona, para um compósito unidirecional de fibra de vidro e Epóxi, a tensão de compressão transversal e a tensão de cisalhamento para diferentes ângulos de falha. Da figura, percebe-se que o ângulo de falha que maximiza FI para uma pequena tensão transversal é  $\alpha = 0^\circ$ . Quando a tensão transversal aplicada  $\sigma_{22}$  for aproximadamente dois terços do valor do limite da resistência à compressão transversal,  $Y^C$ , o ângulo crítico de falha varia bruscamente de  $\alpha = 0^\circ$  para  $\alpha = 40^\circ$ , e então segue aumentando até  $\alpha = \alpha_0$ , ângulo de falha típico para compressão uniaxial transversal.

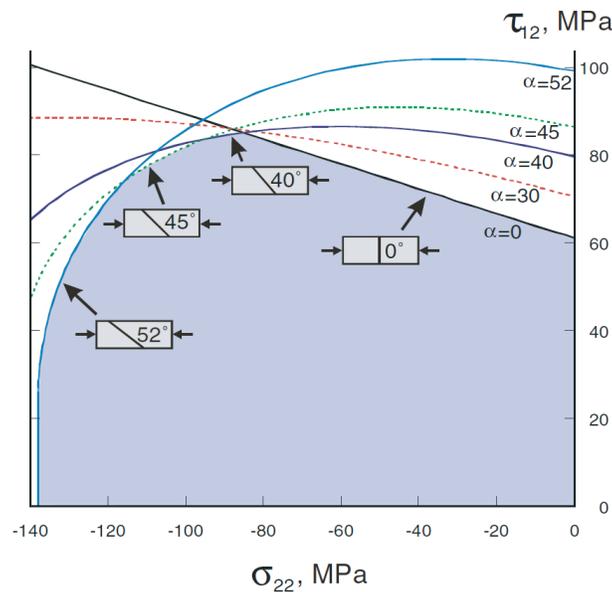


Figura 4.6: Envelope de falha ( $\sigma_{22}, \tau_{12}$ ) para um laminado unidirecional de fibra de vidro e Epóxi.

### 4.5.3 Critério de falha para matriz sob tração ( $\sigma_{22} > 0$ )

O trincamento transversal da matriz é frequentemente considerado como um modo de falha "benigno", pois causa uma pequena redução da rigidez da estrutura, o que é muito difícil de detectar através de testes experimentais. Porém, esse tipo de falha pode ajudar na propagação de uma trinca já existente e também permitir a penetração de gases na estrutura do material quando este estiver, por exemplo, sendo utilizados na fabricação de dutos

pressurizados.

Para prever trincas na matriz em laminados sujeitos a tensões de cisalhamento e de tração, o critério de falha deve ser capaz de calcular os limites das resistências localizadas (*"in situ"*). Esse efeito local, originalmente detectado por Parvizi et al. (1978), é caracterizado por valores de resistência à tração transversal e ao cisalhamento mais elevados para uma lâmina quando esta se encontra assentada entre duas lâminas de orientações diferentes da sua, em comparação com os limites da mesma lâmina em um laminado unidirecional. Os limites de resistência localizados, também dependem do número de lâminas assentadas juntas e da orientação das fibras das lâminas adjacentes. Os resultados obtidos por Wang (1984) em testes com laminados de fibra de carbono e Epóxi, Figura 4.7, revelam que quanto mais finas as lâminas forem, maiores serão os limites de resistência à tração transversal.

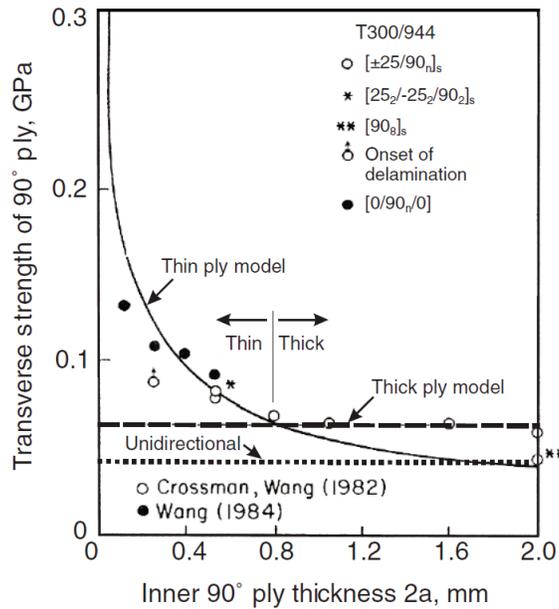


Figura 4.7: Resistência à tração transversal em função do número de lâminas assentadas juntas, modelos de Dvorak and Laws (1987) baseado nos dados experimentais de Wang (1984).

Valores corretos dos limites resistências localizados em lâminas restritas por outra lâminas são necessários quando se deseja trabalhar com critérios de falha baseados em tensão. Vários métodos experimentais, como os de Wang (1984), Chang and Chen (1987) e Flaggs and Kural (1982), e analíticos, como os de Dvorak and Laws (1987), Laws and Dvorak (1988) e Tan and Nuismer (1989), foram propostos para determinar esses limites. Uma maneira de

calculá-los é utilizando ferramentas da mecânica da fratura para propagação de trincas em lâminas restritas.

### Análise de uma lâmina trincada por mecânica da fratura

O critério de falha que prevê o trincamento da matriz, em uma lâmina sujeita a tensão de cisalhamento e tração transversal no plano, se baseia na análise da mecânica da fratura de uma trinca estreita em uma lâmina proposta por Dvorak and Laws (1987). A trinca representa um defeito de fabricação idealizado no plano 1 – 3 do laminado, como representado pela Figura 4.8.

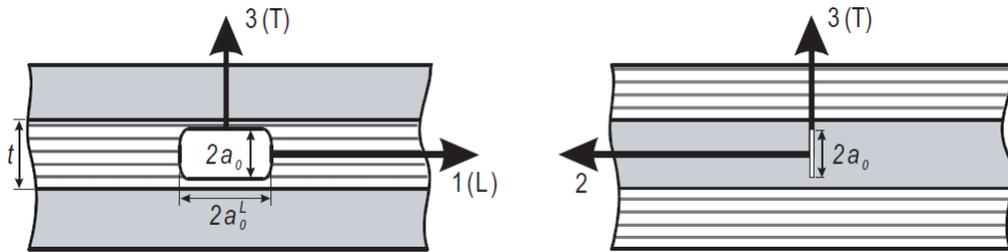


Figura 4.8: Geometria de uma trinca estreita.

Essa trinca tem o comprimento  $2a_0$  ao longo da espessura da lâmina,  $t$ . Fisicamente, essa trinca representa uma má distribuição estrutural dos elementos (matriz-fibras) que pode estar presente na lâmina como consequência de um defeito de fabricação ou como decorrência de uma alteração térmica, devido à diferença entre os coeficientes de dilatação térmica da matriz e das fibras.

Assumindo-se um estado de plano de tensão, a tensão de tração transversal ( $\sigma_{22}$ ) está associada com o Modo I de carregamento, enquanto a tensão de cisalhamento ( $\tau_{12}$ ) está associada com o Modo II de carregamento. A trinca representada na Figura 4.8 pode se propagar na direção longitudinal (1 ou  $L$ ), direção transversal (3 ou  $T$ ) ou em ambas simultaneamente.

Os componentes da taxa de liberação de energia para a geometria dessa trinca, representada na Figura 4.8, foram determinados por Dvorak and Laws (1987). Para um carregamento misto, essas taxas devido ao crescimento da trinca nas direções  $T$  e  $L$ ,  $G(T)$  e  $G(L)$ , são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} G(T) &= \frac{\pi a_0}{2} (\eta_I^2 \Lambda_{22}^0 \sigma_{22}^2 + \eta_{II}^2 \Lambda_{44}^0 \tau_{12}^2) \\ G(L) &= \frac{\pi a_0}{4} (\xi_I^2 \Lambda_{22}^0 \sigma_{22}^2 + \xi_{II}^2 \Lambda_{44}^0 \tau_{12}^2) \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde pode-se observar que taxa de liberação de energia pela propagação longitudinal da trinca,  $G(L)$ , é função do comprimento transversal da trinca ( $a_0$ ) e não do seu comprimento na direção longitudinal ( $a_0^L$ ).

Os parâmetros  $\eta_I$  e  $\eta_{II}$ , nas equações 4.51, são os coeficientes de redução de tensão para a propagação na direção transversal, e os parâmetros  $\xi_I$  e  $\xi_{II}$  são os coeficientes de redução de tensão para a propagação na direção longitudinal. Esses coeficientes somam os efeitos restritivos das camadas adjuntas à lâmina na propagação das trincas: os coeficientes são aproximadamente iguais a 1 quando  $2a_0 \ll t$ , e menor que 1 quando  $a_0 \approx t$ . Resultados experimentais obtidos por Flaggs and Kural (1982) mostram que, um aumento do limite de resistência localizado à tração, em laminados  $[\pm\theta/90]$  ( $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ ), aumenta sua rigidez quando as camadas são sobrepostas com  $\pm\theta$ . Isso implica que os valores dos parâmetros  $\eta_I$  e  $\eta_{II}$  diminuem com o aumento da rigidez dos laminados adjuntos. Considerando que uma trinca transversal pode causar a separação de duas lâminas, Dvorak and Laws (1987) sugeriram que os valores efetivos de  $\eta_{I,II}$  podem ser maiores que aqueles obtidos analiticamente, propondo então o uso de valores de  $\eta_{I,II} = \xi_{I,II} = 1$ .

Os parâmetros  $\Lambda_{22}^0$  e  $\Lambda_{44}^0$  são calculados como:

$$\begin{aligned}\Lambda_{22}^0 &= 2 \left( \frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{12}^2}{E_1} \right) \\ \Lambda_{44}^0 &= \frac{1}{G_{12}}\end{aligned}\tag{4.52}$$

Os componentes dos Modos  $I$  e  $II$  da taxa de liberação de energia podem ser obtidos para a direção transversal através da Equação 4.51, com  $\eta_{I,II} = 1$ :

$$\begin{aligned}G_I(T) &= \frac{\pi a_0}{2} \Lambda_{22}^0 \sigma_{22}^2 \\ G_{II}(T) &= \frac{\pi a_0}{2} \Lambda_{44}^0 \tau_{12}^2\end{aligned}\tag{4.53}$$

Os mesmos componentes da tenacidade à fratura são dados por:

$$\begin{aligned}G_{Ic}(T) &= \frac{\pi a_0}{2} \Lambda_{22}^0 \left( Y_{is}^T \right)^2 \\ G_{IIc}(T) &= \frac{\pi a_0}{2} \Lambda_{44}^0 \left( S_{is}^L \right)^2\end{aligned}\tag{4.54}$$

onde  $Y_{is}^T$  e  $S_{is}^L$  são os limites das resistências localizadas à tração transversal e ao cisalhamento, respectivamente.

Para a propagação na direção longitudinal, os componentes de Modos *I* e *II* da taxa de liberação de energia, são:

$$\begin{aligned} G_I(L) &= \frac{\pi a_0}{4} \Lambda_{22}^0 \sigma_{22}^2 \\ G_{II}(L) &= \frac{\pi a_0}{4} \Lambda_{44}^0 \tau_{12}^2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Os mesmo componentes de tenacidade à fratura são dados por:

$$\begin{aligned} G_{Ic}(L) &= \frac{\pi a_0}{4} \Lambda_{22}^0 \left( Y_{is}^T \right)^2 \\ G_{IIc}(L) &= \frac{\pi a_0}{4} \Lambda_{44}^0 \left( S_{is}^L \right)^2 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Tendo obtido expressões para os componentes da taxa de liberação de energia e da tenacidade à fratura, um critério de falha pode ser aplicado para prever a propagação da trinca representada na Figura 4.8. Quando submetido à tensão de cisalhamento e tensão transversal, a taxa crítica de liberação de energia ( $G_c$ ) depende da combinação de todos os elementos que absorvem energia no mecanismo, como por exemplo, a criação de novas trincas. Baseados em exames microscópicos das superfícies de falha, Hahn and Johannesson (1983) observaram que a topografia dessas superfícies está diretamente ligada ao tipo de carregamento submetido. O critério de Hahn, em termos dos Modos *I* e *II* das taxas de liberação de energia, é dado por:

$$(1 - g) \sqrt{\frac{G_I(i)}{G_{Ic}(i)}} + g \frac{G_I(i)}{G_{Ic}(i)} + \frac{G_{II}(i)}{G_{IIc}(i)} = 1, \quad i = T, L \quad (4.57)$$

onde a constante do material  $g$  pode ser determinada tanto pela Equação 4.53 quanto pela Equação 4.56:

$$g = \frac{G_{Ic}(i)}{G_{IIc}(i)} = \frac{\Lambda_{22}^0 \left( Y_{is}^T \right)^2}{\Lambda_{44}^0 \left( S_{is}^L \right)^2} \quad (4.58)$$

Um índice de falha para matriz em tração pode ser expresso em termos das tensões na lâmina e dos limites das resistências localizadas,  $Y_{is}^T$  e  $S_{is}^L$ , substituindo-se as Equações 4.53, 4.54 ou 4.55, 4.56 no critério da Equação 4.57:

## LaRC03#2

$$FI_M = (1 - g) \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} \right) + g \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{S_{is}^L} \right)^2 \leq 1 \quad (4.59)$$

O critério apresentado na Equação 4.59, com termos lineares e quadráticos para a tensão normal transversal e um termo quadrático para a tensão de cisalhamento no plano, é similar ao critério proposto por Hahn and Johannesson (1983), Liu and Tsai (1998) e Puck and Schürmann (1998). Pode-se acrescentar que, se  $g = 1$ , a Equação 4.57, torna-se igual à versão linear do critério proposto por Wu and Reuter (1965), para a propagação da delaminação em compósitos laminados:

$$\frac{G_I}{G_{Ic}} + \frac{G_{II}}{G_{IIc}} = 1 \quad (4.60)$$

Além do mais, utilizando-se  $g = 1$ , a Equação 4.59 torna-se idêntica ao critério de Hashin and Rotem (1973) para o trincamento transversal da matriz sob tensão de cisalhamento e tração transversal no plano, onde as resistências da lâmina são substituídas pelos limites das resistências localizadas:

$$FI_M = \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{S_{is}^L} \right)^2 \leq 1 \quad (4.61)$$

### Falha em lâminas interiores espessas

Uma lâmina espessa é definida como aquela na qual o comprimento da trinca é muito menor que a sua espessura,  $2a_0 \ll t$ , como ilustrado na Figura 4.9. A espessura mínima de uma lâmina chamada espessa depende do material utilizado. Para um laminado de fibra de vidro (ou carbono) e Epóxi, Dvorak and Laws (1987) calcularam que a espessura limite, entre uma lâmina fina e uma lâmina espessa, é de aproximadamente  $0.7 \text{ mm}$ , ou por volta de 5-6 camadas.

Para a geometria representada na Figura 4.9, a trinca pode se propagar tanto na direção transversal quanto na longitudinal. Comparando-se as Equações 4.53 e 4.55, entretanto, nota-se que a taxa de liberação de energia gerada pela trinca é duas vezes maior na direção transversal que na longitudinal. A Equação 4.53 também indica que essa taxa é proporcional ao comprimento da trinca,  $2a_0$ , e que esta aumentará de maneira instável na direção

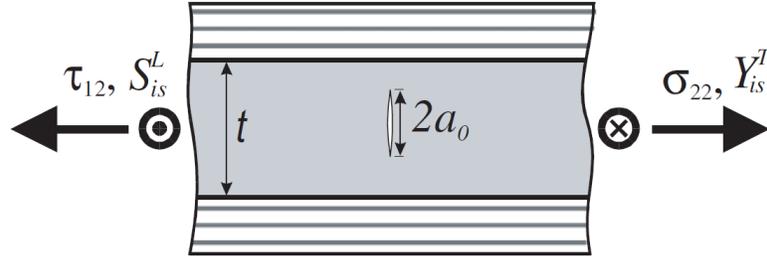


Figura 4.9: Geometria de uma trinca estreita em uma lâmina interior espessa sujeita a carregamento em tração e cisalhamento.

transversal. Uma vez que a trinca encontra as lâminas adjacentes, esta pode começar a se propagar na direção longitudinal, podendo assim, induzir a separação das lâminas.

A propagação da trinca pode ser prevista através da Equação 4.59, e os limites das resistências localizados podem ser calculados através dos componentes da tenacidade à fratura:

Lâminas espessas:

$$\begin{aligned} Y_{is}^T &= \sqrt{\frac{2G_{Ic}(T)}{\pi a_0 \Lambda_{22}^0}} \\ S_{is}^L &= \sqrt{\frac{2G_{IIc}(T)}{\pi a_0 \Lambda_{44}^0}} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Pode-se observar pela Equação 4.62 que os limites das resistências localizadas de lâminas espessas,  $Y_{is}^T$  e  $S_{is}^L$ , são funções das tenacidades  $G_{Ic}(T)$  e  $G_{IIc}(T)$  do material e do comprimento do defeito do material,  $2a_0$ . Entretanto, os limites das resistências localizadas para lâminas espessas são independentes da espessura das mesmas, como observado por Dvorak and Laws (1987) e Leguillon (2002), e mostrado pela Figura 4.7.

### Falha em lâminas interiores finas

Lâminas finas são definidas como tendo uma espessura menor que os defeitos típicos,  $t < 2a_0$ , assim a trinca se estende através de toda a espessura  $t$  da lâmina, como representado pela Figura 4.10.

No caso de lâminas finas, as trincas podem se propagar apenas na direção longitudinal ( $L$ ), ou acarretar a separação das lâminas. Os limites das resistências localizadas também podem ser calculados a partir dos componentes da tenacidade à fratura:

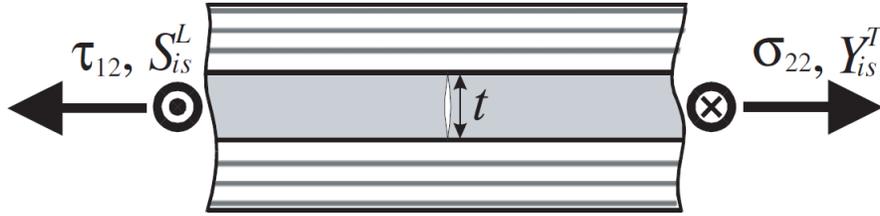


Figura 4.10: Geometria de uma trinca em uma lâmina fina.

Lâminas finas:

$$\begin{aligned}
 Y_{is}^T &= \sqrt{\frac{8G_{Ic}(T)}{\pi t \Lambda_{22}^0}} \\
 S_{is}^L &= \sqrt{\frac{8G_{IIc}(T)}{\pi t \Lambda_{44}^0}}
 \end{aligned}
 \tag{4.63}$$

pode-se observar ainda que esses limites são inversamente proporcionais à  $t$ .

### Falha em laminados unidirecionais

A falha em laminados unidirecionais é tratada como um caso particular de uma lâmina espessa. Sendo o tamanho do defeito o mesmo que no caso de lâminas interiores espessas,  $2a_0$ . Entretanto, na ausência das lâminas adjacentes, a trinca inicial se localiza na superfície do laminado. Para o carregamento em tração, a trinca pode estar localizada na borda do laminado, o que aumenta a taxa de liberação de energia quando comparada a uma falha interna (fora da borda). No caso de cisalhamento, não existem bordas livres, então, a falha será necessariamente interna, como mostrado na Figura 4.11.

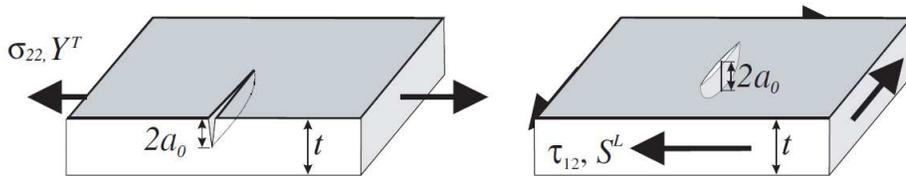


Figura 4.11: Modelo unidirecional sob tração e cisalhamento.

A propagação da trinca, em modelos unidirecionais sujeitos a carregamentos em tração

ou cisalhamento, é obtida pelo modelo clássico de trincas internas.

$$\begin{aligned} G_{Ic}(T) &= 1.12^2 \pi a_0 \Lambda_{22}^0 (Y^T)^2 \\ G_{IIc}(T) &= \pi a_0 \Lambda_{44}^0 (S^L)^2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Note que os limites das resistências localizadas para lâminas espessas podem ser obtidas em função dos limites principais do material, substituindo-se a Equação 4.64 em 4.62:

Lâminas unidirecionais:

$$\begin{aligned} Y_{is}^T &= 1.12 \sqrt{2} Y^T \\ S_{is}^L &= \sqrt{2} S^L \end{aligned} \quad (4.65)$$

O critério de falha para lâminas unidirecionais submetidas à tensões de cisalhamento e tração transversal está representado pela Equação 4.59. A taxa de tenacidade  $g$  para um laminado unidirecional pode ser calculado, também, em termos das propriedades unidirecionais substituindo as Equações 4.64 na Equação 4.66:

$$g = \frac{G_{Ic}}{G_{IIc}} = 1.12^2 \frac{\Lambda_{22}^0}{\Lambda_{44}^0} \left( \frac{Y^T}{S^L} \right)^2 \quad (4.66)$$

#### 4.5.4 LaRC03 para falha das fibras

#### 4.5.5 Critério de falha tração das fibras

Baseado em resultados experimentais, Puck and Schürmann (1998) recomendaram o uso de um critério de falha para as fibras que fosse baseado na "deformação efetiva" agindo ao longo das fibras. No entanto, Puck and Schürmann (2002) notaram também que a diferença entre usar deformação efetiva e tensão longitudinal é insignificante. O critério LaRC03 para a falha das fibras em tração é um método não-iterativo baseado na máxima deformação, que é simples de medir e independente da fração volumétrica das fibras e do módulo de Young. Consequentemente, o índice de falha do LaRC03 para fibras em tração é:

**LaRC03#3**

$$FM_F = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^T} \leq 1 \quad (4.67)$$

### 4.5.6 Critério de falha para a compressão das fibras

A falha por compressão em compósitos de fibras alinhadas ocorre devido ao colapso das fibras, como resultado do cisalhamento na dobra das fibras ou por danos causados pela matriz que as suportam. Dobramento das fibras ocorre como uma deformação cisalhante, influenciada pela formação de uma banda de dobramento (região afetada pela dobra).

Argon (1972) foi o primeiro a analisar esse fenômeno. Suas análises assumiam a existência de um desalinhamento inicial das fibras. Esse desalinhamento influenciava as tensões de cisalhamento entre as fibras, que as rotacionavam, aumentando assim as tensões de cisalhamento e levando o conjunto à instabilidade. Desde o trabalho de Argon (1972), o cálculo do valor crítico da tensão de dobramento vem sendo aprimorado através de um entendimento mais completo sobre a geometria da banda de dobramento, assim como, a inclusão de fenômenos como a fricção e a não-linearidade dos materiais nas análises realizadas.

Muitos autores, como Berg and Salama (1973) e Schapery (1995), consideram que fibras desalinhadas falham devido à formação de uma banda de dobramento quando ocorre a ruptura local da matriz. Potter et al. (2000) assumiu que os mecanismos de falha adicionais que ocorrem sob compressão longitudinal uniaxial estão diretamente ligados a falha da matriz.

Para o critério de LaRC03, o limite de resistência longitudinal à compressão  $X^C$  é considerado uma propriedade do material e pode ser usada na Equação 4.43, para danos na matriz, a fim de se calcular o ângulo de desalinhamento das fibras que poderia causar a falha da matriz sob compressão uniaxial.

#### Cálculo do ângulo de desalinhamento das fibras

As imperfeições no alinhamento das fibras são idealizadas como uma ondulação local, Figura 4.12.

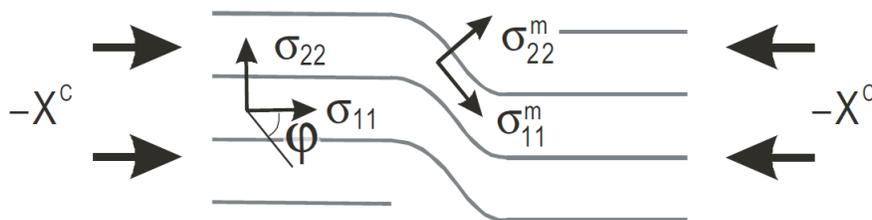


Figura 4.12: Imperfeição no alinhamento das fibras, idealizado como uma ondulação local.

As tensões na lâmina, dadas no sistema de coordenadas do desalinhamento  $m$ , mostrado

na Figura 4.12, são:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^m &= \cos^2 \varphi \sigma_{11} + \sin^2 \varphi \sigma_{22} + 2 \sin \varphi \cos \varphi |\tau_{12}| \\
\sigma_{22}^m &= \sin^2 \varphi \sigma_{11} + \cos^2 \varphi \sigma_{22} - 2 \sin \varphi \cos \varphi |\tau_{12}| \\
\tau_{12}^m &= -2 \sin \varphi \cos \varphi \sigma_{11} + 2 \sin \varphi \cos \varphi \sigma_{22} + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) |\tau_{12}|
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Na falha sob compressão uniaxial,  $\sigma_{11} = -X^C$  e  $\sigma_{22} = \tau_{12} = 0$ . Substituindo-se esses valores na Equação 4.68, tem-se:

$$\begin{aligned}
\sigma_{22}^m &= -\sin^2 \varphi^C X^C \\
\tau_{12}^m &= \sin \varphi^C \cos \varphi^C X^C
\end{aligned} \tag{4.69}$$

onde  $\varphi^C$  é o ângulo total de desalinhamento das fibras para o caso de carregamento puro de compressão axial.

Para calcular o índice de falha para o dobramento das fibras, as tensões  $\sigma_{22}^m$  e  $\tau_{12}^m$  são substituídas no critério de falha da Equação 4.43, para matrizes em compressão. Esse modo de falha é causado pela tensão de cisalhamento  $\tau_{12}$ , ao invés da tensão transversal  $\sigma_{22}$ . O ângulo de falha é então igual a  $0^\circ$ , e  $\tau_{eff}^T = 0$ . Assim, o critério de falha para a matriz fica:

$$\tau_{eff}^T = X^C \left( \sin \varphi^C \cos \varphi^C - \eta^L \sin^2 \varphi^C \right) = S_{is}^L \tag{4.70}$$

onde  $S_{is}^L$  é o limite de resistência local ao cisalhamento longitudinal, definido pela Equação 4.62 para lâminas espessas e pela Equação 4.63 para lâminas finas. Resolvendo a Equação 4.70 para  $\varphi^C$ , obtem-se a equação quadrática:

$$\tan^2 \varphi^C \left( \frac{S_{is}^L}{X^C} + \eta^L \right) - \tan \varphi^C + \left( \frac{S_{is}^L}{X^C} \right) = 0 \tag{4.71}$$

A menor das raízes da Equação 4.71 é:

$$\varphi^C = \tan^{-1} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \left( \frac{S_{is}^L}{X^C} + \eta^L \right) \left( \frac{S_{is}^L}{X^C} \right)}}{2 \left( \frac{S_{is}^L}{X^C} + \eta^L \right)} \right) \quad (4.72)$$

Note que, se  $\eta^L$  for desprezado e  $\varphi$  assumido como um ângulo constante próximo a zero, a Equação 4.70, para a estimativa do ângulo de desalinhamento da fibra, se simplificaria à:

$$\varphi^C \approx \frac{S_{is}^L}{X^C} \quad (4.73)$$

O ângulo total de desalinhamento  $\varphi$  pode ser decomposto em um ângulo de desalinhamento inicial,  $\varphi^0$  (constante), que representa imperfeições na fabricação, e uma componente de rotação adicional,  $\varphi^R$ , resultado do cisalhamento. Os ângulos  $\varphi^0$  e  $\varphi^R$  podem ser calculados através de aproximações para ângulos pequenos e das Equações 4.68:

$$\begin{aligned} \varphi^R &= \frac{\tau_{12}^m}{G_{12}} = \frac{-\varphi\sigma_{11} + \varphi\sigma_{22} + |\tau_{12}|}{G_{12}} \\ \varphi^0 &= \varphi^C - \varphi^R \Big|_{X^C} = \varphi^C - \frac{\tau_{12}^m}{G_{12}} \Big|_{X^C} \Rightarrow \varphi^0 = \left( 1 - \frac{X^C}{G_{12}} \right) \varphi^C \end{aligned} \quad (4.74)$$

onde o valor absoluto da tensão de cisalhamento  $|\tau_{12}|$  é usado porque se considera o sinal de  $\varphi$  como sendo positivo, independente do sinal da tensão de cisalhamento.

Lembrando-se que  $\varphi = \varphi^0 + \varphi^R$ , pode-se escrever agora a Equação 4.74 para  $\varphi$ , em termos de  $\varphi^R$ :

$$\varphi^R = \frac{|\tau_{12}| + (G_{12} - X^C) \varphi^C}{G_{12} + \sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad (4.75)$$

A falha das fibras sob compressão através da formação de uma banda de dobramento é prevista usando as tensões da Equação 4.68 e os critérios de falha para matriz em tração ou em compressão. Para a matriz em compressão ( $\sigma_{22}^m \leq 0$ ), o critério utilizado é o critério de Mohr-Coulomb, dado pela Equação 4.43, com  $\alpha = 0^\circ$  e  $\tau_{eff}^T = 0$ . Assim, o critério de falha para o dobramento das fibras tornar-se:

#### LaRC03#4

$$FI_F = \frac{|\tau_{12}^m| + \eta^L \sigma_{22}^m}{S_{is}^L} \leq 1 \quad (4.76)$$

Para compressão das fibras com matriz tracionada, as tensões transformadas da Equação 4.68 são substituídas no critério de falha para matriz em tração, dado pela Equação 4.59, para obter o seguinte critério para o dobramento das fibras:

#### LaRC03#5

$$FI_M = (1 - g) \left( \frac{\sigma_{22}^m}{Y_{is}^T} \right) + g \left( \frac{\sigma_{22}^m}{Y_{is}^T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}^m}{S_{is}^L} \right)^2 \leq 1 \quad (4.77)$$

### 4.5.7 Critério de LaRC03 para a falha da matriz sob compressão biaxial

Na presença de uma elevada compressão transversal combinada com uma compressão moderada nas fibras, danos na matriz podem ocorrer sem que haja a formação de bandas de dobramento ou dano nas fibras. Este modo de falha da matriz é calculado usando as tensões da estrutura desalinha no critério de falha da Equação 4.43:

#### LaRC03#6

$$FI_M = \left( \frac{\tau_{eff}^{mT}}{S^T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{eff}^{mL}}{S_{is}^L} \right)^2 \leq 1 \quad (4.78)$$

onde as tensões de cisalhamento efetivas  $\tau_{eff}^{mT}$  e  $\tau_{eff}^{mL}$  são determinadas pela Equação 4.45, mas nesse caso, estão em termo das tensões no plano da estrutura desalinhada, que são definidas pela Equação 4.68:

$$\begin{aligned} \tau_{eff}^{mT} &= -\sigma_{22}^m \cos \alpha \left( \sin \alpha - \eta^T \cos \alpha \right) \\ \tau_{eff}^{mL} &= \cos \alpha \left( |\tau_{12}^m| + \eta^L \sigma_{22}^m \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

Para todas as falhas da matriz em compressão, as tensões  $\tau_{eff}^{mT}$  e  $\tau_{eff}^{mL}$  são funções do ângulo de falha  $\alpha$ , que deve ser determinado iterativamente.

# Capítulo 5

## Resultados numéricos e discussões

### 5.1 Implementação computacional dos critérios de falha

A fim de se entender melhor como funcionam cada um dos critérios de falha estudados, implementou-se no MATLAB alguns dos envelopes de falha característicos desses critérios. Envelope de falha é o termo designado para a curva que contem os valores limites de tensões para os quais o material irá falhar mediante a um tipo específico de solicitação. Em outras palavras, são os valores de tensões para os quais os índices de falha relativos a cada modo de falha são iguais a 1. Esse conceito pode ser relacionado ao conhecido Círculo de Mohr, onde os pontos correspondentes a um estados de tensão que se encontram fora dos limites estabelecidos por ele caracterizam a falha do material.

A Tabela 5.1 apresenta as propriedades mecânicas obtidas experimentalmente por Soden et al. (1998) para quatro diferentes tipos de laminados unidirecionais. Esses dados experimentais foram utilizados como parâmetros para as teorias de falha participantes do exercício de falha proposto por Hinton and Soden (1998), o *World Wide Failure Exercise* (WWFE).

Para cada um dos critérios, dois envelopes de falha, "*Tensão Longitudinal* ( $\sigma_{11}$ ) X *Tensão Transversal* ( $\sigma_{22}$ )" e "*Tensão Transversal* ( $\sigma_{22}$ ) X *Tensão de Cisalhamento* ( $\tau_{12}$ )", foram plotados para um laminado unidirecional de fibra de carbono T300 e Epóxi, cujas propriedades mecânicas podem ser obtidas na Tabela 5.1. Plotou-se também, para o mesmo material, as curvas dos limites de resistência à tração e à compressão em função da orientação das fibras. Cada uma dessas figuras foi comparada aos resultados obtidos no ESACOMP (software comercial de design e análise de materiais compósitos).

Tabela 5.1: Propriedades mecânica dos laminados unidirecionais analisados.

Tipo de fibra	AS4	T300	E-glass Gevetex	E-glass Silenka
Material da matriz	3501-6 Epóxi	BSL914C Epóxi	LY556 Epóxi	MY750 Epóxi
$E_{11}$ (GPa)	126	138	53.48	45.60
$E_{22}$ (GPa)	11	11	17.7	16.2
$G_{12}$ (GPa)	6.6	5.5	5.83	5.83
$\nu_{12}$	0.280	0.280	0.278	0.278
$\nu_{23}$	0.400	0.400	0.400	0.400
$X^T$ (MPa)	1950	1500	1140	1280
$X^C$ (MPa)	1480	900	570	800
$Y^T$ (MPa)	48	27	35	40
$Y^C$ (MPa)	200	200	114	145
$S^L$ (MPa)	79	80	72	73
$\varepsilon_{1T}$ (%)	1.380	1.087	2.132	2.807
$\varepsilon_{1C}$ (%)	1.175	0.652	1.065	1.754
$G_{IC}$ (J.m <sup>2</sup> )	220	200	165	165
$E_{f1}$ (GPa)	225	230	80	74
$\nu_{f12}$	0.2	0.2	0.2	0.2

### 5.1.1 Critério da Máxima Tensão

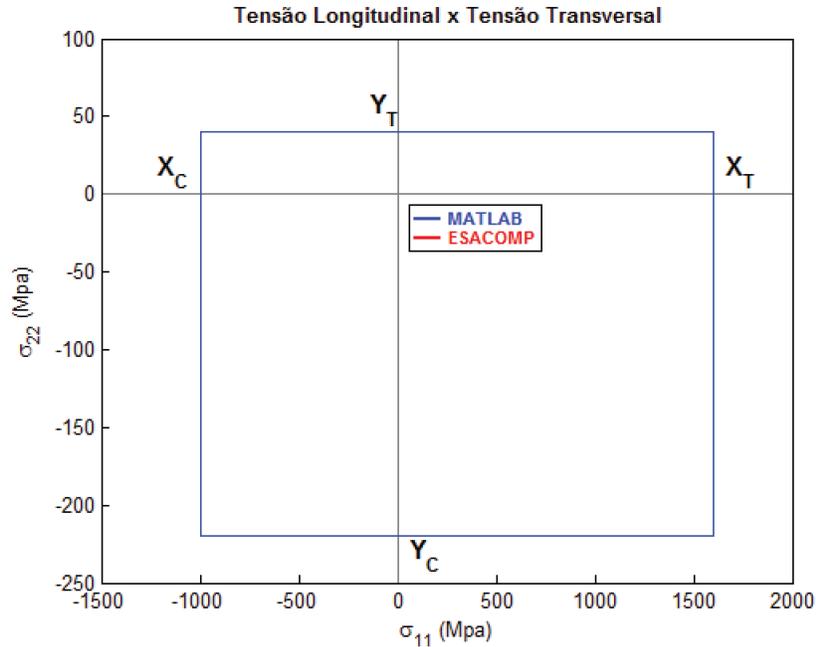


Figura 5.1: Envelope de falha ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ ) para o critério da máxima tensão.

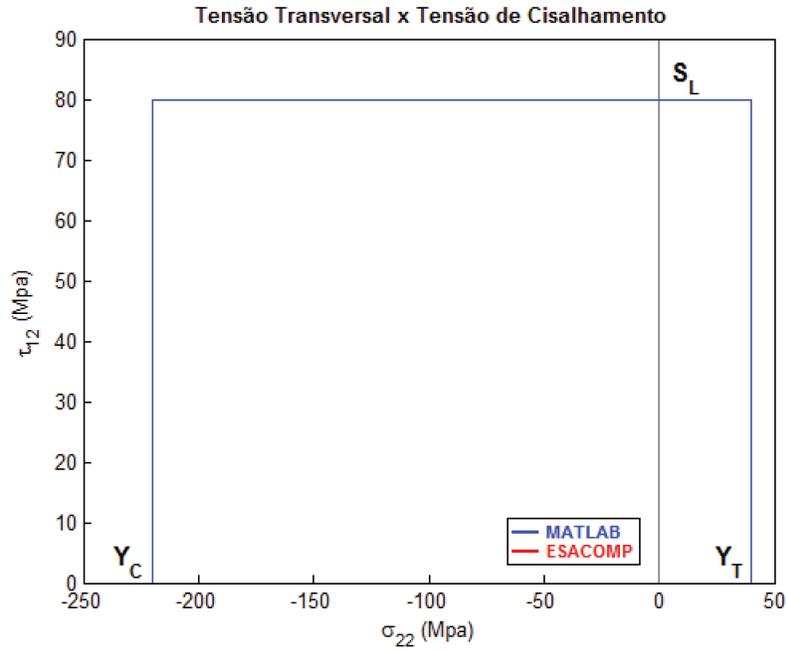


Figura 5.2: Envelope de falha ( $\sigma_{22}, \tau_{12}$ ) para o critério da máxima tensão.

Devido a simplicidade do critério da máxima tensão, tanto os resultados dos envelopes de falha, Figuras 5.1 e 5.2, quanto das curvas de resistência em função do ângulo de orientação das fibras, Figura 5.3, obtidos pelo MATLAB coincidiram exatamente com os resultados do ESACOMP.

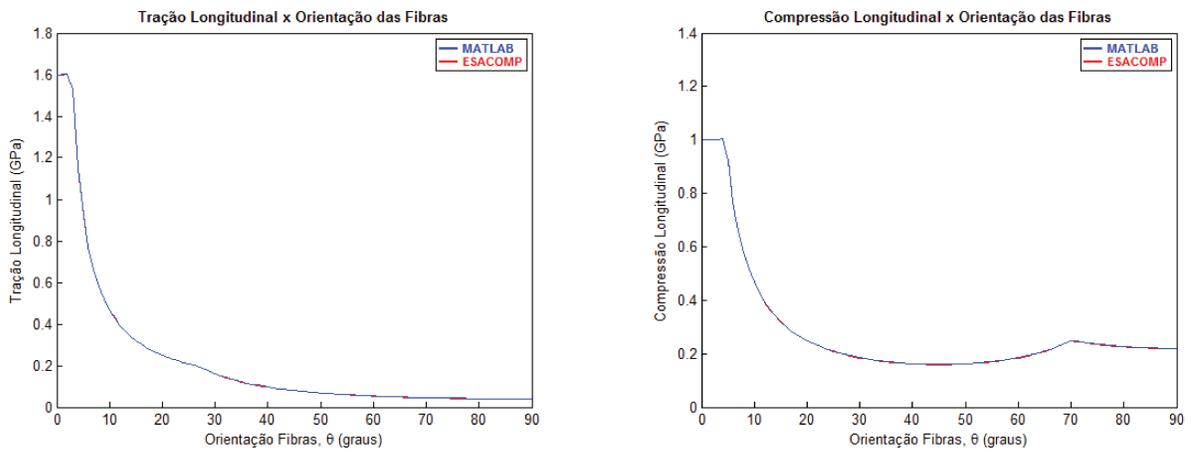


Figura 5.3: Limite de resistência longitudinal dado pelo critério da máxima tensão em função da orientação das fibras.

### 5.1.2 Critério de Tsai-Hill

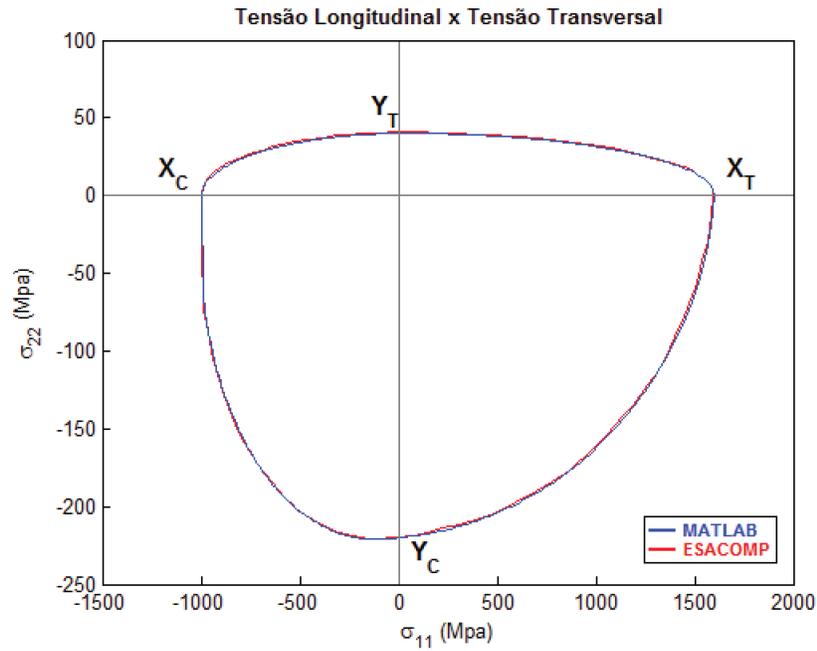


Figura 5.4: Envelope de falha ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ ) para o critério de Tsai-Hill.

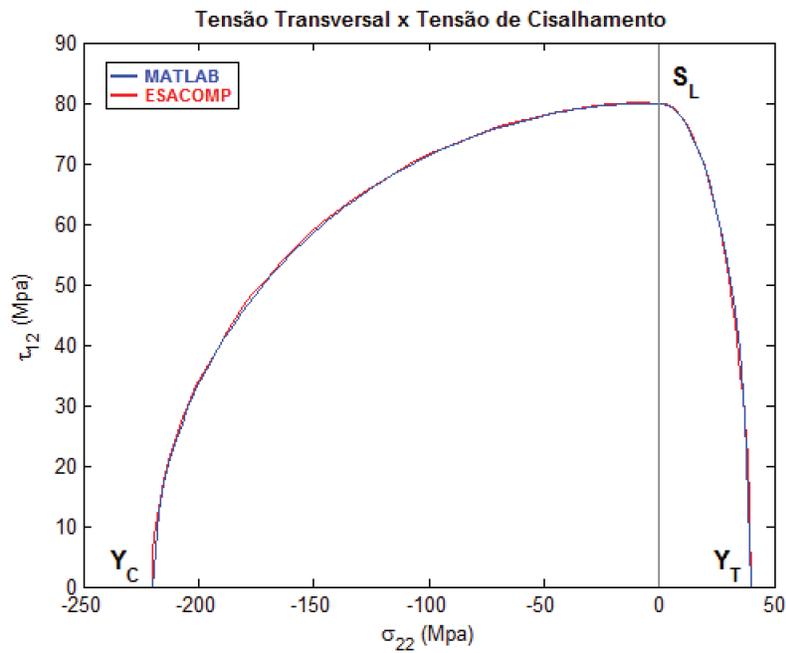


Figura 5.5: Envelope de falha ( $\sigma_{22}, \tau_{12}$ ) para o critério de Tsai-Hill.

Uma vez que os envelopes de falha para o critério de Tsai-Hill, Figuras 5.4 e 5.5, se baseiam em uma única expressão matemática de solução exata, cujos parâmetros são todos pré-definidos e constantes, as respostas obtidas pelo MATLAB e pelo ESACOMP são praticamente coincidentes. O mesmo acontece com o critério de Tsai-Wu, Figuras 5.7 e 5.8.

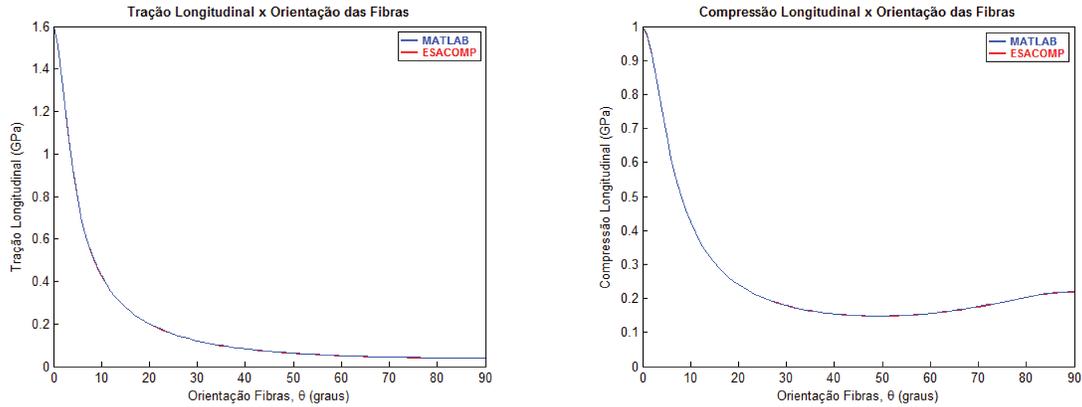


Figura 5.6: Limite de resistência longitudinal dado pelo critério de Tsai-Hill em função da orientação das fibras.

### 5.1.3 Critério de Tsai-Wu

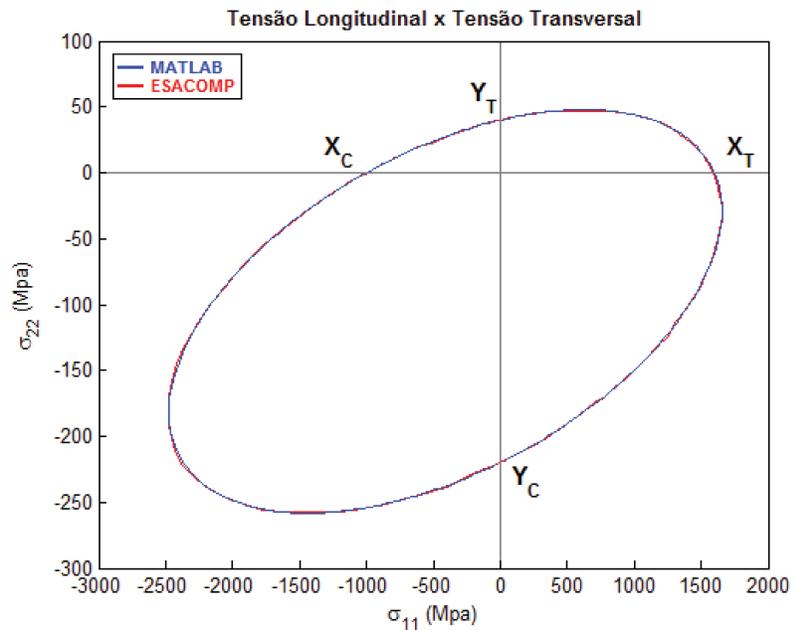


Figura 5.7: Envelope de falha  $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$  para o critério de Tsai-Wu.

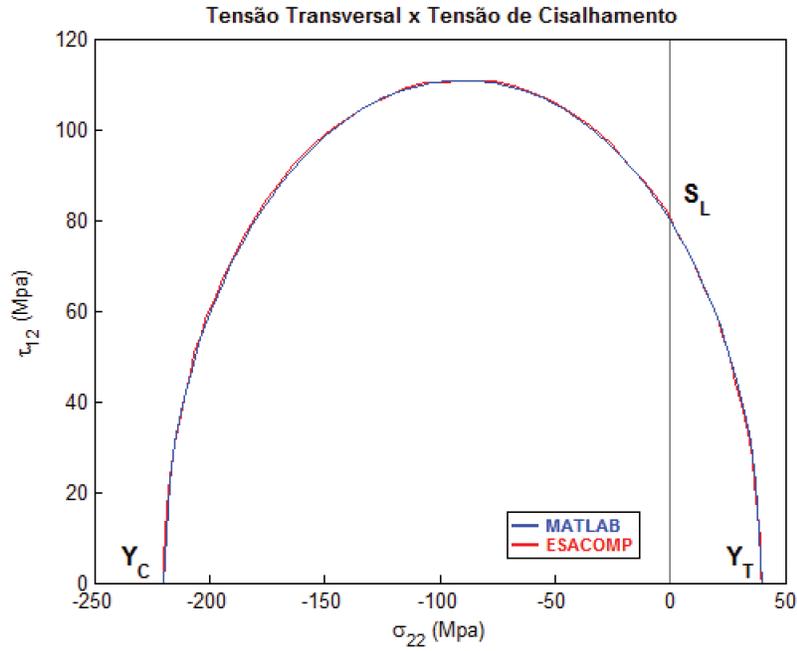


Figura 5.8: Envelope de falha ( $\sigma_{22}, \tau_{12}$ ) para o critério de Tsai-Wu.

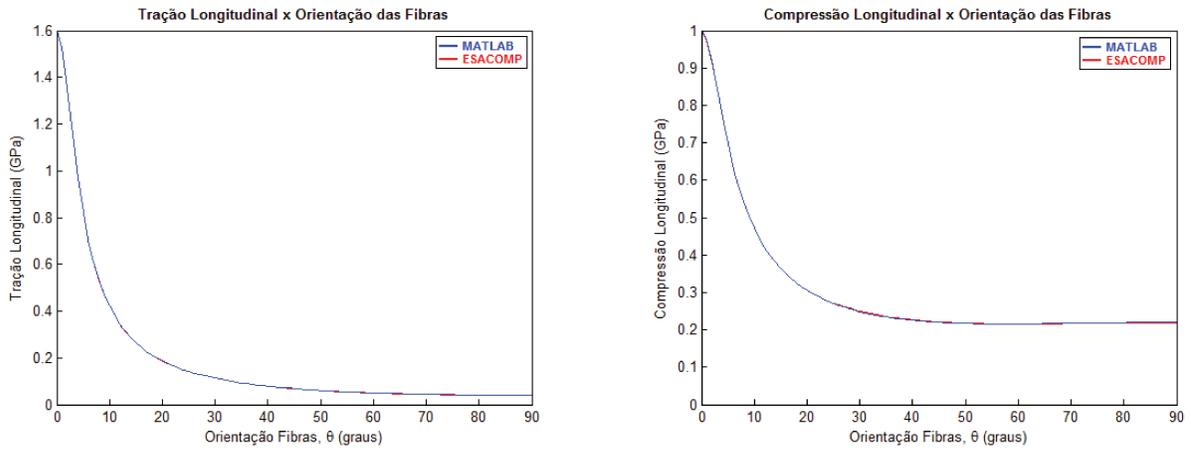


Figura 5.9: Limite de resistência longitudinal dado pelo critério de Tsai-Wu em função da orientação das fibras.

### 5.1.4 Critério de Puck

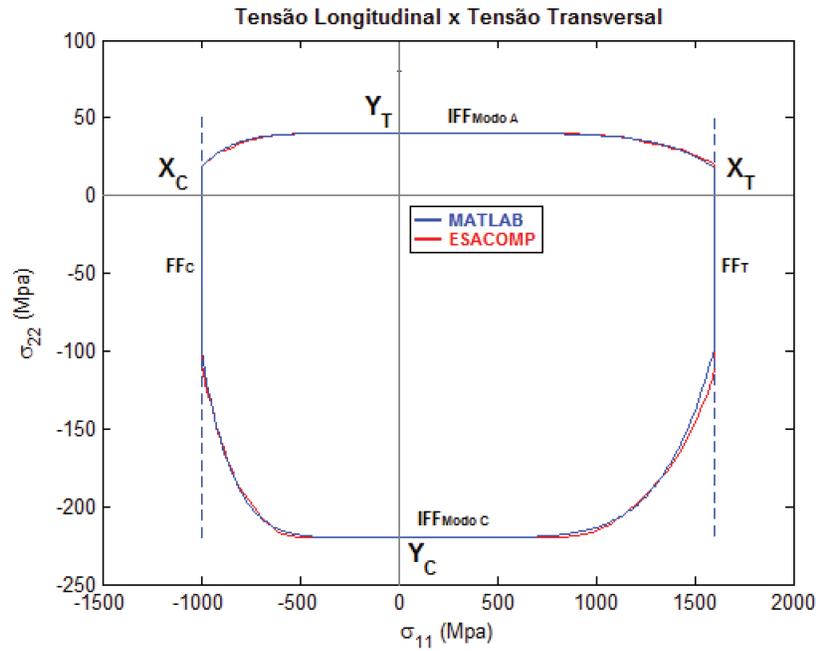


Figura 5.10: Envelope de falha  $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$  para o critério de Puck.

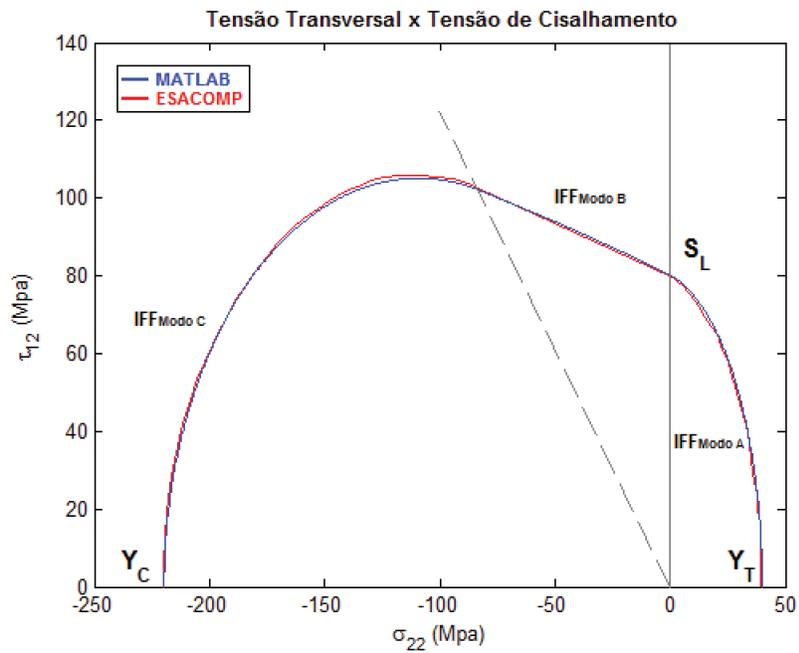


Figura 5.11: Envelope de falha  $(\sigma_{22}, \tau_{12})$  para o critério de Puck.

Devido aos parâmetros não-físicos requeridos pelo critério de Puck, como por exemplo, os parâmetros de inclinação, para os quais se conhece apenas um intervalo de aplicação que varia de acordo com o tipo de material com o qual se está trabalhando, as soluções obtidas pelo MATLAB e pelo ESACOMP apresentam uma leve discrepância.

Outro parâmetro importante da teoria de Puck que pode causar certa divergência entre a implementação realizada nesse trabalho e o ESACOMP está no chamado "fator de enfraquecimento" ( $f_w$ ), dado pela Equação 4.37, onde o valor do expoente  $n$  varia de acordo com o tipo de material da matriz do laminado. Uma avaliação desse parâmetro pode ser observada na Figura 5.12. Através dela pode-se perceber a sua influência na curva  $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ . Quanto maior o valor de  $n$  menos abauladas as curvas que conectam as retas verticais às retas horizontais, correspondentes aos limites de resistência transversais e longitudinais respectivamente. Observa-se também que se o valor de  $n$  for muito grande, o critério de Puck aproxima-se do critério da máxima tensão. Nesse caso, fibra de carbono T300 e Epóxi, utilizou-se  $n = 6$ , como sugerido por Puck and Schürmann (1998), que recomendam, por exemplo, o uso de  $n = 8$  para matrizes com elevada deformação de falha.

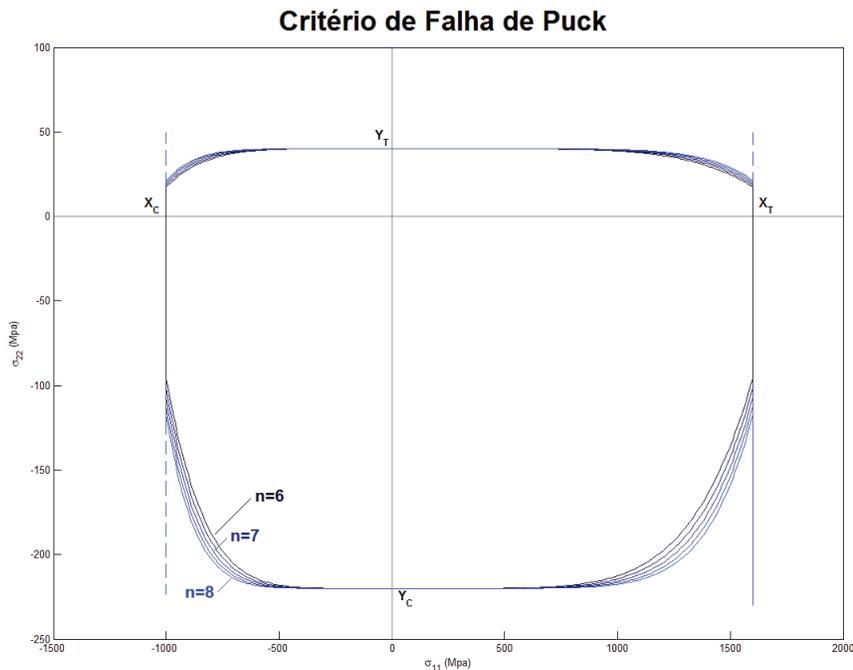


Figura 5.12: Avaliação do parâmetro  $n$  no envelope de falha  $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$  para o critério de Puck.

A influência do parâmetro  $p_{\perp||}^{(-)}$  no envelope de falha  $(\sigma_{22}, \tau_{12})$  pode ser identificada na Figura 5.13. Puck et al. (2002) fornecem alguns valores aproximados para laminados típicos

de fibras de carbono e fibras de vidro. Nesse caso o valor de  $p_{\perp\parallel}^{(-)}$  utilizado é 0.30.

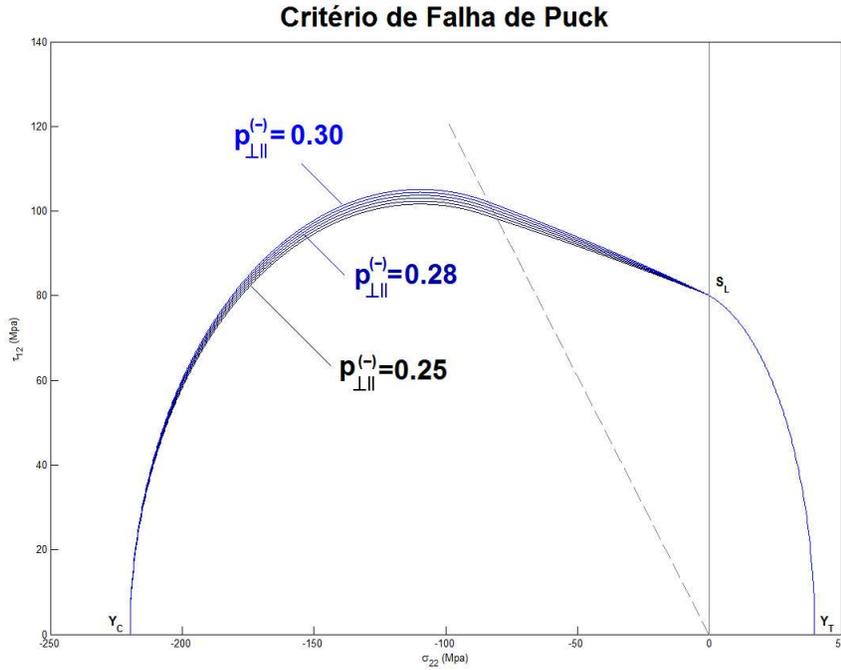


Figura 5.13: Avaliação do parâmetro  $p_{\perp\parallel}^{(-)}$  no envelope  $(\sigma_{22}, \tau_{12})$  do critério de Puck.

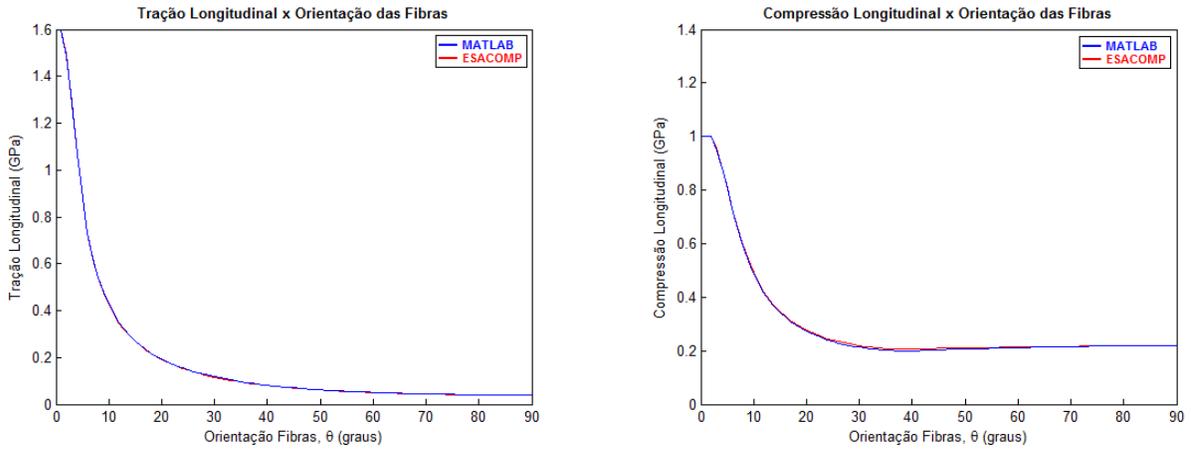


Figura 5.14: Limite de resistência longitudinal dado pelo critério de Puck em função da orientação das fibras.

### 5.1.5 Critério LaRC03

Por ser um critério desenvolvido recentemente, o critério de falha LaRC03, não se encontra disponível para análise no software ESACOMP. Assim sendo, fez-se uso de uma rotina em MATLAB que permite selecionar manualmente os pontos de uma curva através de sua imagem. Dessa maneira, obteve-se os pontos dos envelopes de falha apresentados por Dávila et al. (2005).

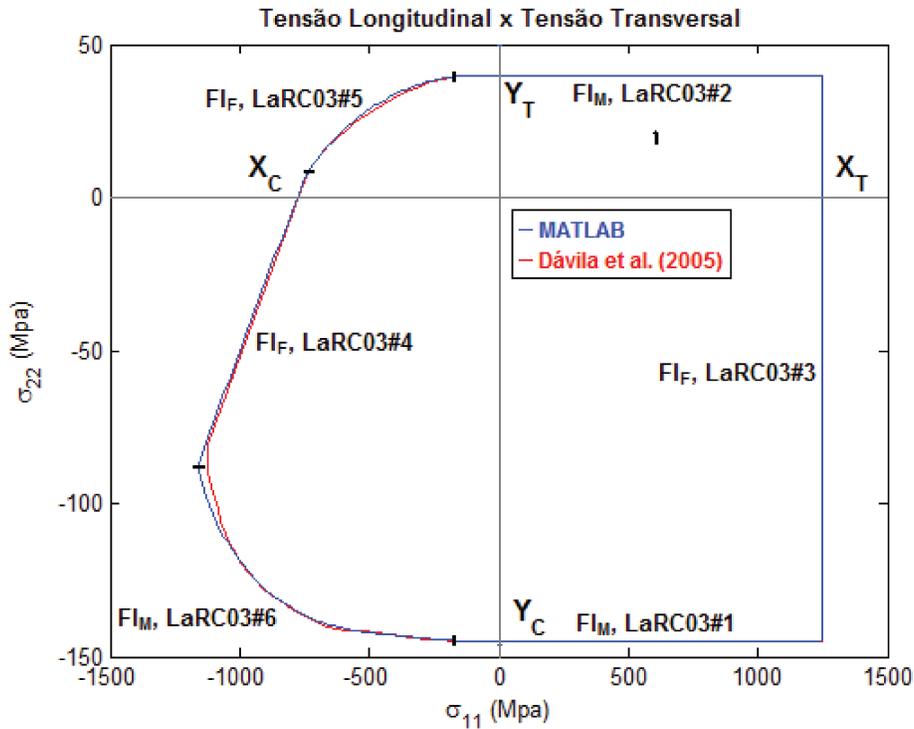


Figura 5.15: Envelope de falha ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ ) para o critério LaRC03.

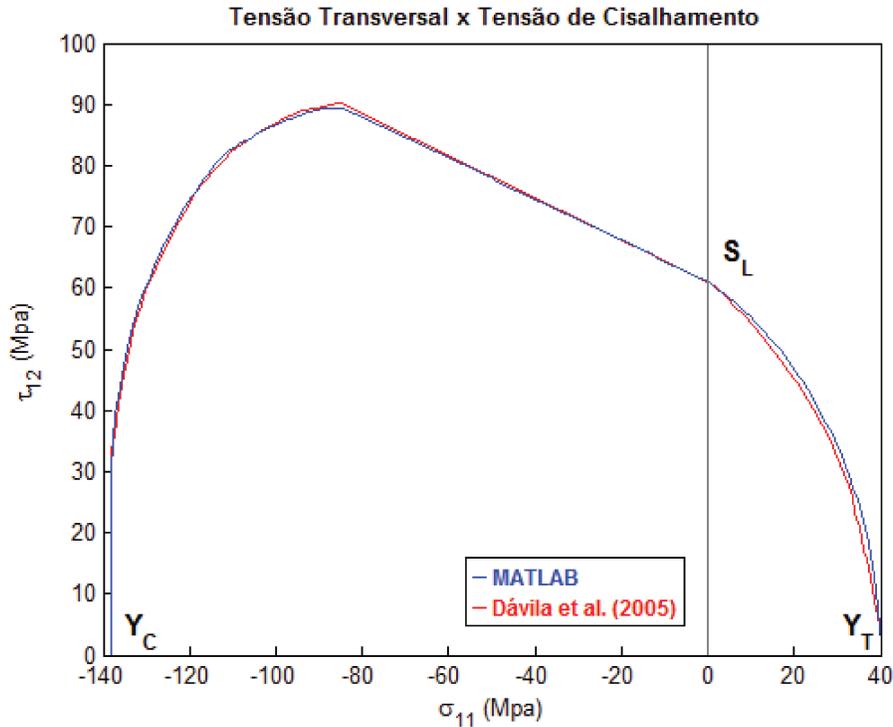


Figura 5.16: Envelope de falha ( $\sigma_{22}, \tau_{12}$ ) para o critério LaRC03.

O envelope de falha ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ ) da Figura 5.15 é dado para um laminado unidirecional de fibra de vidro e Epóxi MY750 e o envelope de falha ( $\sigma_{22}, \tau_{12}$ ) da Figura 5.16 é dado para um laminado unidirecional de fibra de vidro e Epóxi LY556. As propriedades mecânicas desses materiais estão exibidas na Tabela 5.1. Apesar de algumas discrepâncias entre os resultados obtidos por Dávila et al. (2005) e pelo MATLAB, a implementação do critério de LaRC03 pode ser considerada satisfatória. Essas pequenas divergências, notadas para o caso de compressão biaxial, Figura 5.15 ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ ), são provavelmente decorrentes do processo de otimização realizado para se encontrar o ângulo do plano de falha, Seção 4.5.2. No intervalo correspondente à tração transversal das fibras, nota-se uma solução exata, coincidente também com o critério da máxima tensão.

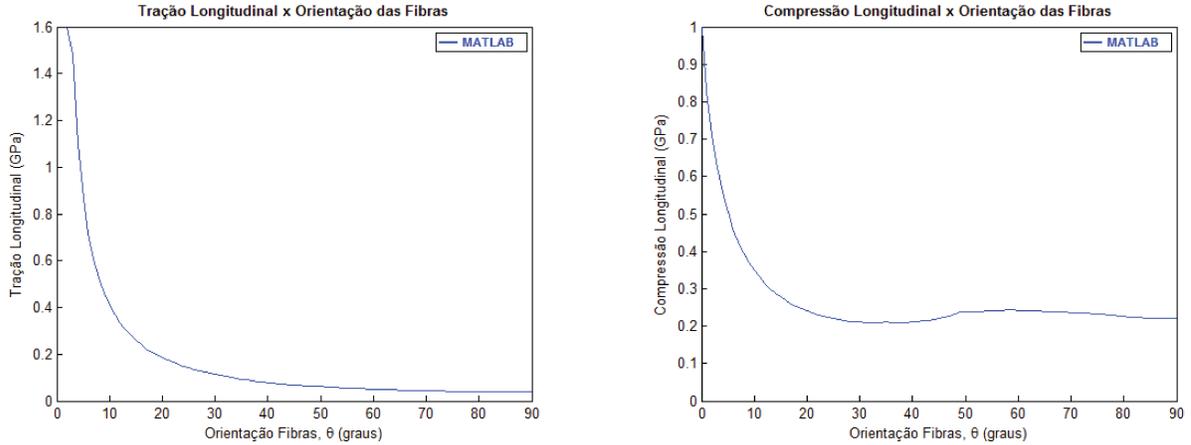


Figura 5.17: Limite de resistência longitudinal dado pelo critério LaRC03 em função da orientação das fibras.

## 5.2 Comparação dos envelopes de falha

Para fazer uma análise e uma comparação mais detalhada entre os critérios de falha estudados, tomou-se como base os resultados experimentais obtidos no WWFE e publicados por Soden et al. (2002). Dois casos estudados no exercício de falha foram reproduzidos. O primeiro para um laminado unidirecional de fibra de vidro e Epóxi MY750 e segundo para um laminado unidirecional de fibra de vidro e Epóxi LY556. Ambos têm suas propriedades mecânicas indicadas na Tabela 5.1.

### 5.2.1 Envelope de falha ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ )

A Figura 5.18 mostra os envelopes de falha da tensão longitudinal pela tensão transversal ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ ) para um laminado unidirecional de fibra de vidro e Epóxi MY750 juntamente com os resultados experimentais obtidos por Soden et al. (2002).

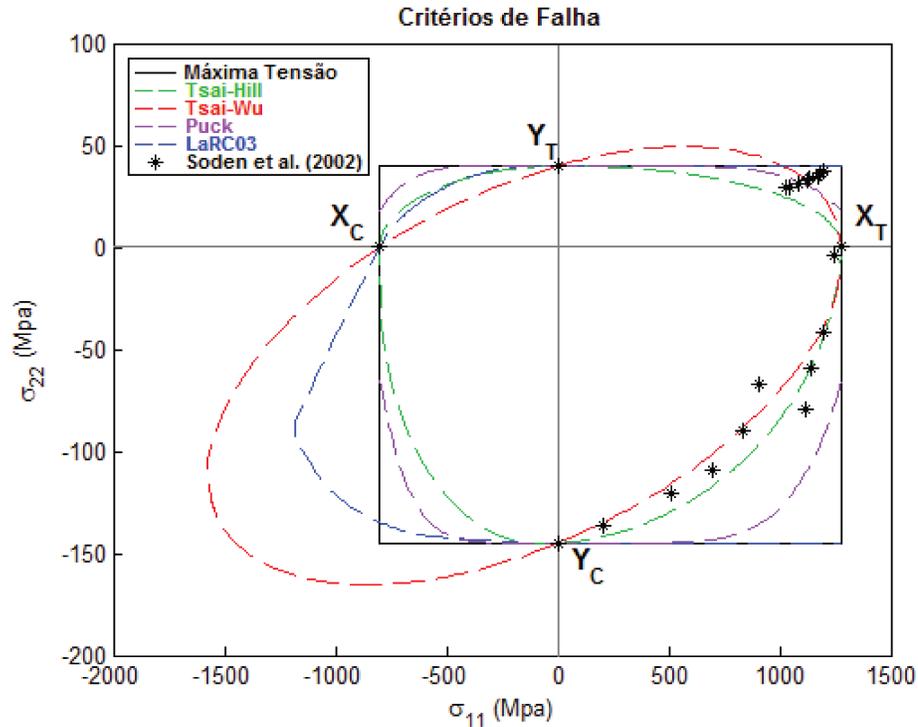


Figura 5.18: Envelopes de falha ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ ) para um laminado unidirecional de fibra de vidro e Epóxi MY750.

Pode-se notar que, apesar dos esforços no desenvolvimento de critérios de falha baseados em fenômenos físicos, como os critérios de Puck e LaRC03, os critérios "matemáticos" de Tsai-Wu e Tsai-Hill ainda se aproximam de maneira mais satisfatória aos resultados experimentais quando analisado o caso de um carregamento combinado de tração longitudinal e compressão transversal (quarto quadrante). Os critérios de Puck, LaRC03 e da máxima tensão superestimam os valores dos limites de resistência do material enquanto que os critérios de Tsai-Wu e Tsai-Hill tendem a acompanhar os pontos experimentais com maior precisão. É válido ressaltar a hipótese de que, talvez, a linha do critério de falha de Puck nesse quadrante se aproximaria mais dos pontos experimentais se o parâmetro  $n$ , discutido anteriormente, fosse ajustado de maneira mais precisa ao material estudado.

Para o caso de tração em ambas as direções, longitudinal e transversal às fibras, todos os critérios se aproximam satisfatoriamente dos pontos experimentais, sendo os critérios da máxima tensão e de LaRC03 os únicos que não apresentam nenhum ponto experimental extrapolando seus limites.

Uma melhor avaliação dos critérios de falha poderia ser realizada se houvessem dados

experimentais para  $\sigma_{11} < 0$ , ou seja, compressão longitudinal.

### 5.2.2 Envelope de falha ( $\sigma_{22}, \tau_{12}$ )

A Figura 5.19 mostra os envelopes de falha da tensão transversal pela tensão de cisalhamento ( $\sigma_{22}, \tau_{12}$ ) para um laminado unidirecional de fibra de vidro e Epóxi LY556 juntamente com os resultados experimentais obtidos por Soden et al. (2002).

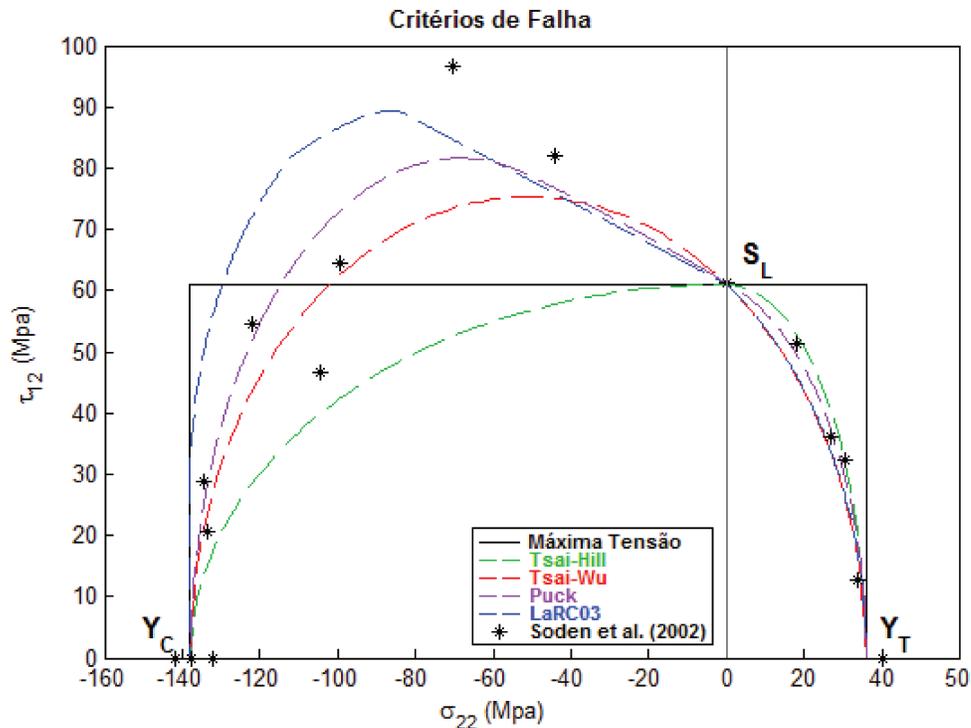


Figura 5.19: Envelopes de falha ( $\sigma_{22}, \tau_{12}$ ) para um laminado unidirecional de fibra de vidro e Epóxi LY556.

É possível perceber que todos os critérios de falha apresentam resultados semelhantes para o caso de tração transversal às fibras e praticamente coincidem com os resultados experimentais.

No entanto, para o caso de compressão transversal o critério Puck e LaRC03 estão bastante à frente dos demais, se aproximando de maneira mais satisfatória da curva traçada pelos pontos experimentais. Especialmente o LaRC03 que, mesmo tendo alguns pontos fora do envelope, mostra uma tendência em alcançá-los. Esse fato pode indicar que, as bases,

nesse caso físicas, da sua teoria têm fundamentos coerentes com a realidade e, se estudadas mais a fundo, podem ser melhoradas.

### 5.3 Comparação das curvas do limite de resistência em função da orientação das fibras

A Figuras 5.20 e 5.21 mostram, respectivamente, os limites de resistência longitudinal à tração e à compressão de um laminado unidirecional de fibra de carbono T300 e Epóxi em função da orientação das fibras, ( $\theta$ ).

#### 5.3.1 Limite de resistência à tração em função de $\theta$

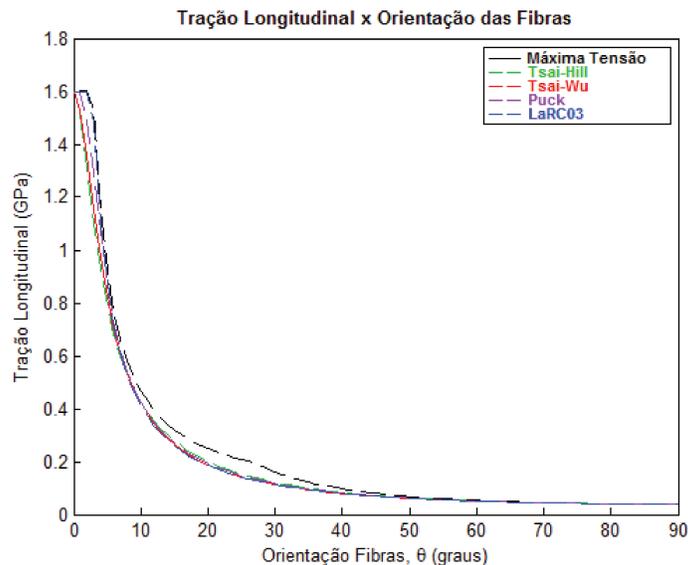


Figura 5.20: Limite de resistência à tração longitudinal em função do ângulo de orientação das fibras.

Da Figura 5.20, pode-se perceber que todos os critério de falha estudados apresentam comportamento semelhantes e que uma queda abrupta do limite de resistência do laminado acontece para uma pequena variação do ângulo  $\theta$ . Esse fato se deve à elevada resistência à tração características das fibras, mas que se solicitadas em qualquer outra direção são extremamente fracas.

### 5.3.2 Limite de resistência à compressão em função de $\theta$

No caso da compressão uniaxial do laminado, Figura 5.21, é possível perceber claramente a distinção entre as curvas características de cada um dos critérios. Com destaque para o critério LaRC03 que, enquanto todos os outros apresentam uma queda contínua do limite de resistência em função do aumento do ângulo, mostra uma ascensão dos limites de resistência para valores de  $\theta$  por volta de  $50^\circ$ .

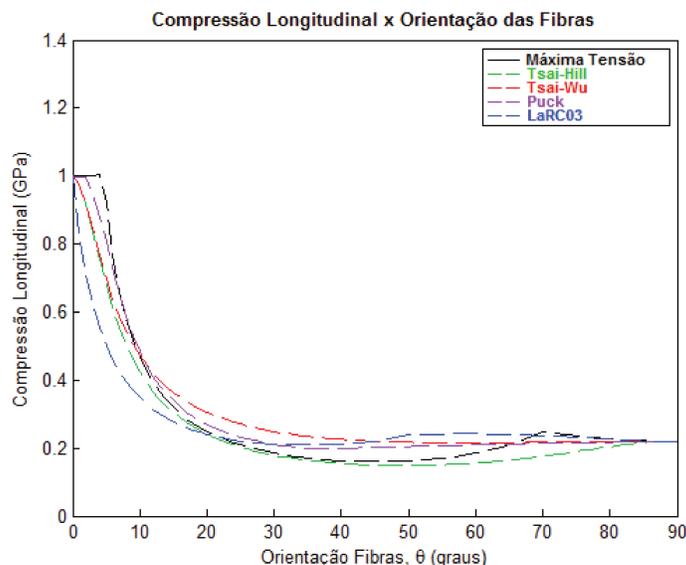


Figura 5.21: Limite de resistência à compressão longitudinal em função do ângulo de orientação das fibras.

## 5.4 Análise de falha utilizando o ABAQUS

ABAQUS/CAE é um software de elementos finitos comercial largamente utilizado na indústria com muitos anos de mercado. Dentre as inúmeras funções que estão inclusas no seu pacote existe a possibilidade de análise de tensões e deformações em laminados compósitos. No entanto, não possui muitas opções de análise de critérios de falha para materiais compósitos. Outra característica importante do software ABAQUS é a possibilidade de se criar rotinas customizadas através da linguagem de programação PYTHON.

Assim sendo, foi desenvolvido um *script* em PYTHON para análise dos critérios de falha para materiais compósitos laminados no software de elementos finitos ABAQUS. Os resultados obtidos através do ABAQUS foram então pós-processados no MATLAB, para

análises mais detalhadas. Escolheu-se implementar nesse caso os critérios de falha de Tsai-Wu, por ainda ser o mais utilizado atualmente, e os critério de Puck e LaRC03, devido a sua complexidade e por serem o foco principal do trabalho.

Antes de uma análise mais detalhada do programa, foi feita uma descrição do problema implementado.

### 5.4.1 Descrição do problema

Um exemplo básico de laminado unidirecional com furo central foi estudado aplicando-se um deslocamento em uma de suas arestas. O laminado em questão tem geometria retangular e apresenta um furo circular no seu interior com o intuito de gerar uma concentração de tensão ao seu redor e aumentar a complexidade da análise. A aresta oposta ao deslocamento encontrasse apoiada na direção do deslocamento, estando livre para de movimentar perpendicularmente a ele.

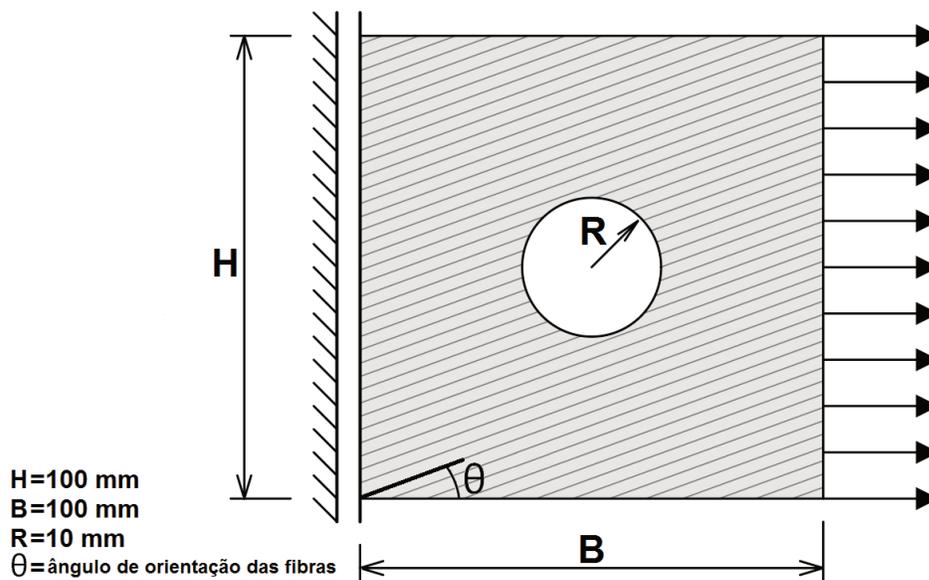


Figura 5.22: Laminado unidirecional com furo central submetido a um deslocamento positivo de uma de suas arestas.

O material utilizado foi um laminado unidirecional de fibra de carbono AS4 e Epóxi 3501-6. As propriedades do laminado encontram-se na Tabela 5.1 e suas características geométricas estão representadas na Figura 5.22.

## 5.4.2 Método computacional utilizado

O fluxograma dessa análise, para o critério de LaRC03, está representado na Figura 5.23.

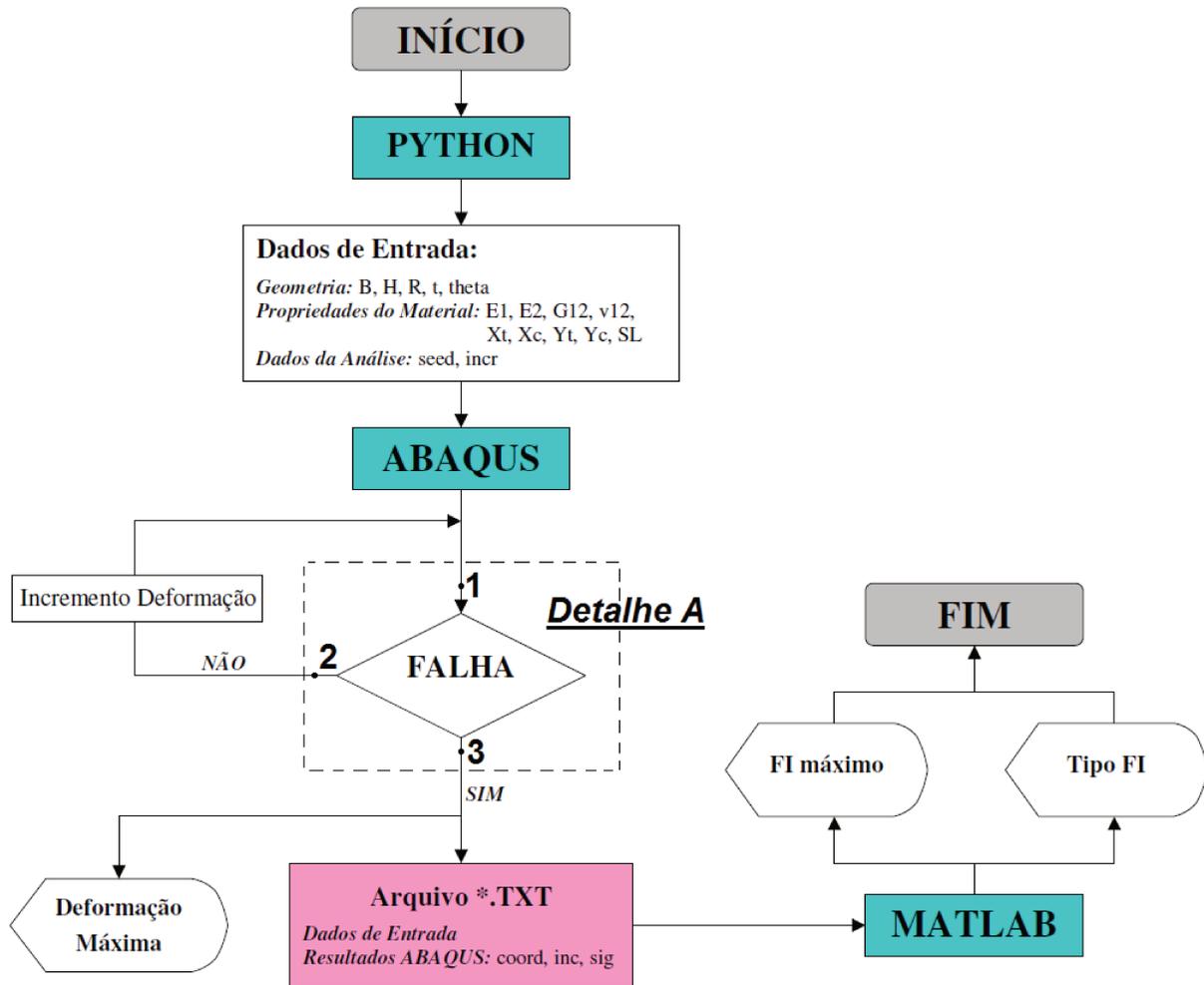


Figura 5.23: Fluxograma para a análise de falha pelo critério LaRC03 um laminado compósito unidirecional submetido a deformações uniaxiais.

As propriedades mecânicas do material, as características geométricas do laminado e os parâmetros da análise (deformação inicial, tamanho médio dos elementos finitos e incrementos da deformação) são inserido no *script* em PYTHON como dados de entrada da análise. Esse *script* é executado no ABAQUS, que realiza uma análise de tensões do modelo. Os valores das tensões de cada elemento são utilizados para se calcular os índices de falha máximo do critério analisado e dizer se ocorre ou não a falha do laminado. Caso não ocorra a falha, a

deformação inicial é incrementada e uma nova análise é realizada. O processo se repete até que o laminado falhe. A Figura 5.24 mostra detalhadamente a análise de falha acontece no bloco "FALHA" da Figura 5.23 para o critério LaRC03. No ponto 1 antes de deste bloco são fornecidos pelo ABAQUS os valores das tensões  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\tau_{12}$  para serem utilizados no cálculo dos índices de falha.

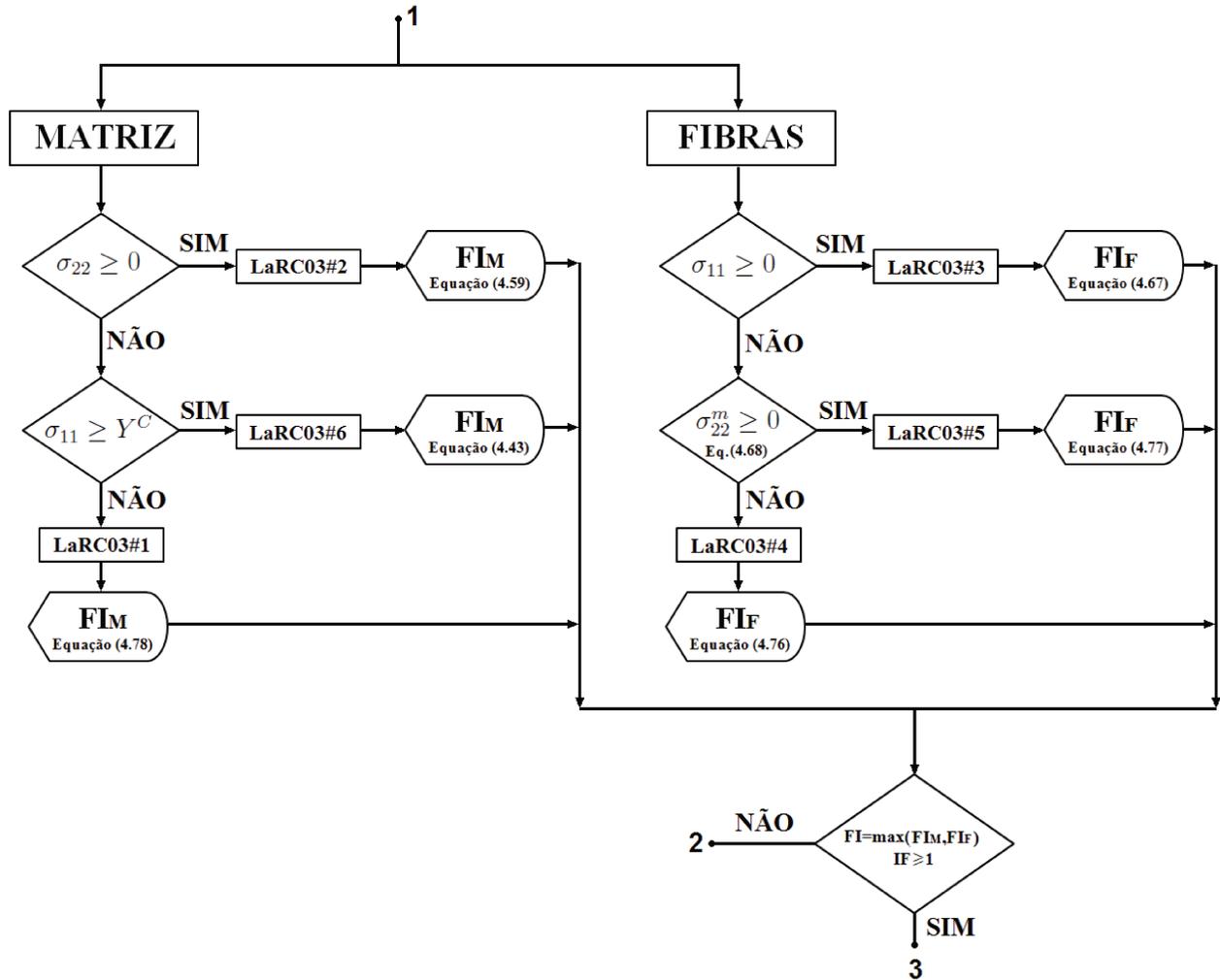


Figura 5.24: *Detalhe A* do fluxograma para o critério LaRC03.

Uma vez que indicada a falha do laminado, o próprio ABAQUS retorna o valor máximo do índice de falha, a deformação final para a qual ocorreu a falha e gera um arquivo \*.txt com os resultados finais da análise. Esse arquivo \*.txt armazena os dados de entrada e os resultados da análise, assim como as coordenadas dos nós e incidências de cada um dos elementos. O MATLAB então utiliza esses dados registrados no arquivo \*.txt para reproduzir

dois tipos de figuras, uma com os valores dos índices de falha e outra com o modo de falha de cada elemento.

Para os critérios de Tsai-Wu e Puck, a rotina de execução é praticamente a mesma. Deve-se apenas adaptar os dados de entrada específicos para cada critério. A diferença está nas figuras finais obtidas pelo MATLAB, ambos apresentam os valor dos índices de falha máximos, porém somente o critério de Puck indica o tipo de falha, uma vez que o critério de Tsai-Wu não é capaz de fazê-lo.

O *Detalhe A* da Figura 5.23 para os critérios de Puck e Tsai-Wu estão representado nas Figuras 5.25 e 5.26, respectivamente.

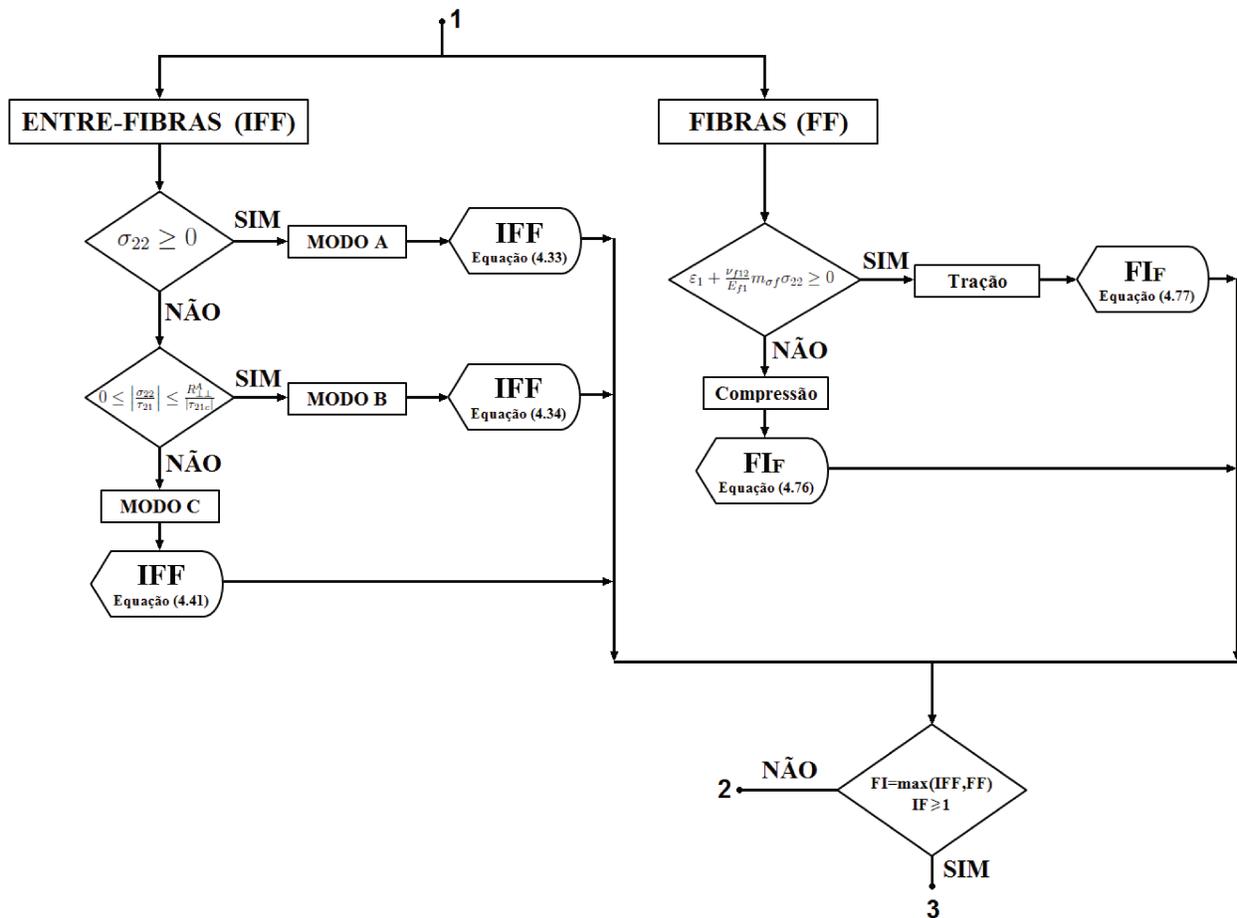


Figura 5.25: *Detalhe A* do fluxograma para o critério de Puck.

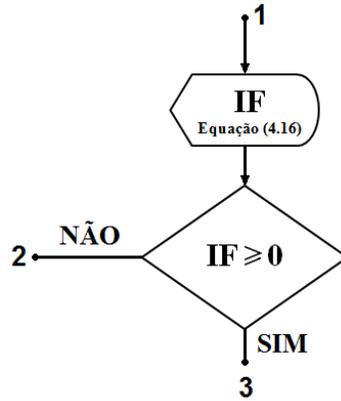


Figura 5.26: *Detalhe A* do fluxograma para o critério de Tsai-Wu.

Comparando-se as Figuras 5.24, 5.25 e 5.26, fica evidente a simplicidade do critério de Tsai-Wu em relação aos critérios de Puck e LaRC03.

Utilizou-se em todas as análises, deformações iniciais iguais a zero e incrementadas com valores de  $0.005 \text{ mm}$ , positivos ou negativos (tração e compressão). O tamanho aproximado dos elementos finitos do ABAQUS é de  $1 \text{ mm}$ .

### 5.4.3 Critério de Falha LaRC03

#### Orientação das fibras $\theta = 0^\circ$ (tração)

A Figura 5.27, mostra o estado de tensão final para o qual o modelo implementado falha, segundo o critério de LaRC03. No canto inferior estão indicados os índices máximos para a falha das fibras e da matriz, assim como a deformação máxima obtida, nesse caso  $0.160 \text{ mm}$ .

Os valores dos índices de falha máximos do critério de falha LaRC03 estão representados pela Figura 5.28, obtida no MATLAB.

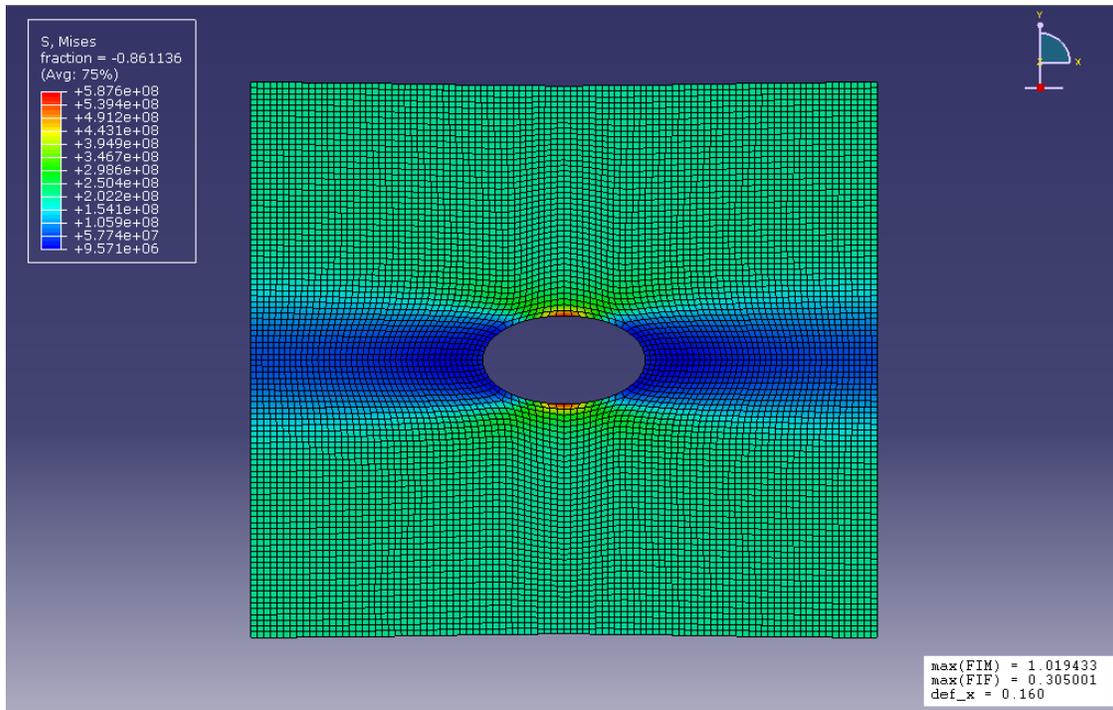


Figura 5.27: Resultado do critério de falha LaRC03 no ABAQUS para o laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) tracionado longitudinalmente.

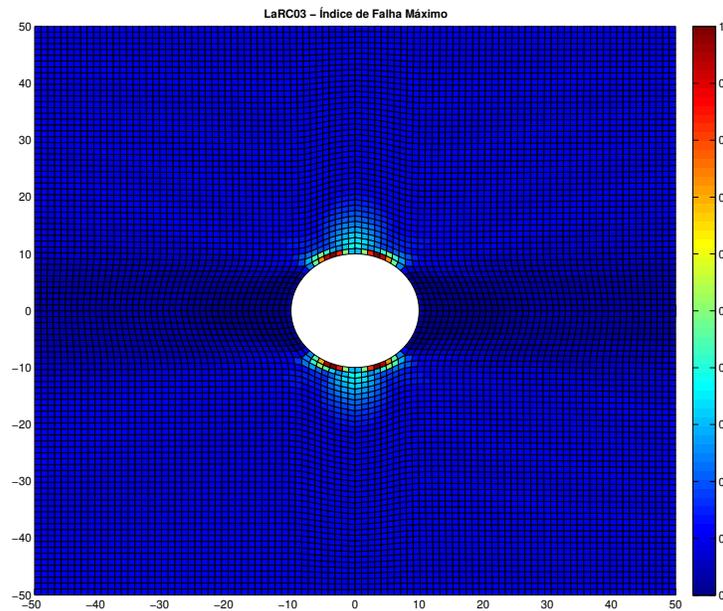


Figura 5.28: Índice de falha máximo para o critério de falha LaRC03 em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, tracionado longitudinalmente.

A Figura 5.28 é interessante pois mostra a região onde, de acordo com o critério de falha LaRC03 irá ocorrer a falha do laminado, no entanto não é possível identificar através dela qual o motivo da falha. A Figura 5.29, também obtida no MATLAB, têm exatamente essa função, identificar qual dos seis índices de falha proposto por Dávila et al. (2005) para esse critério são os responsáveis pela falha daquela região.

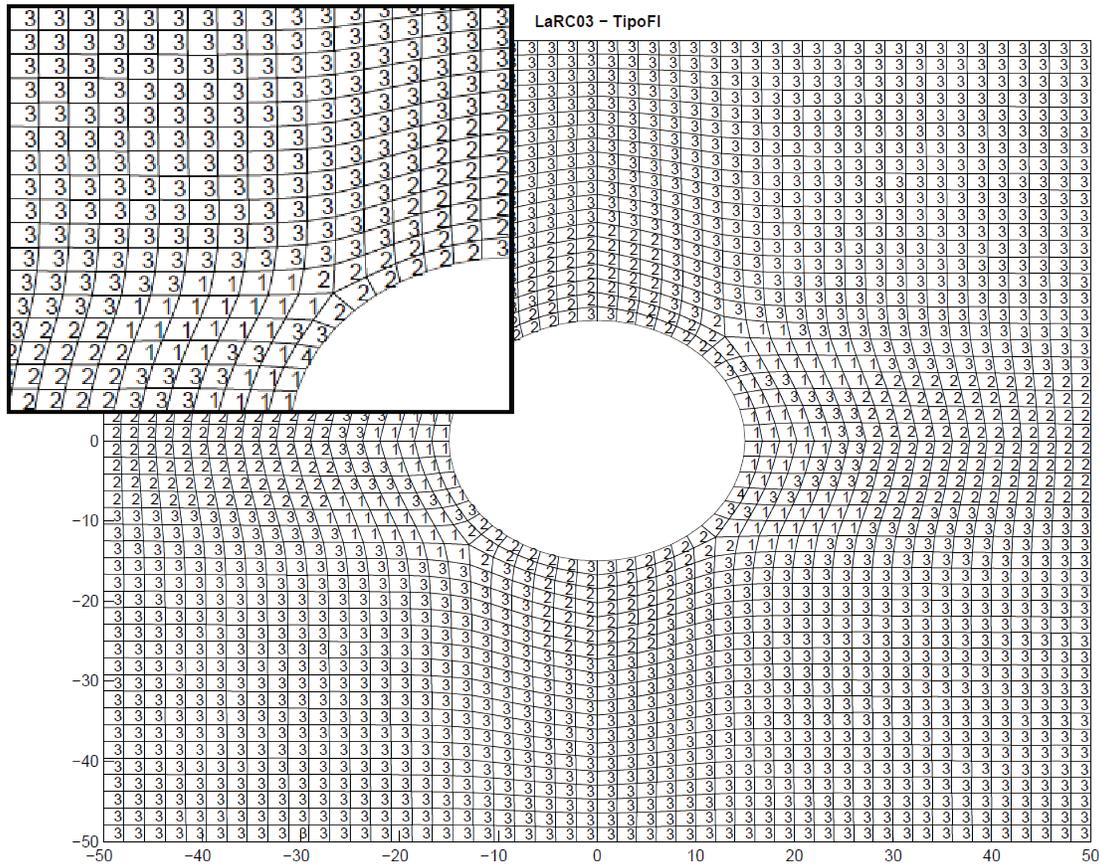


Figura 5.29: Modos de falha para o critério de falha LaRC03 em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, tracionado longitudinalmente.

Devido ao elevado número de elementos da análise, a Figura 5.29 acaba ficando muito carregada de informação. Uma melhor visualização da região da falha pode ser vista na Figura 5.30.

Pode-se notar que na região em destaque existe predominância dos índices de falha do tipo 2 e 3. No entanto, os elementos que apresentam índice de falha próximos a um (cor

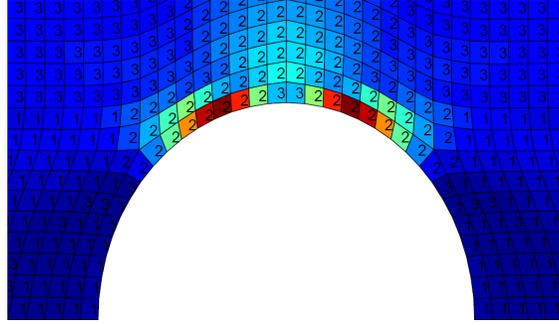


Figura 5.30: Ampliação da região de falha da Figura 5.29.

vermelha) são todos do tipo 2, indicando assim o trincamento da matriz devido à tração transversal. Os modos de que se pode esperar pelo critério de falha LaRC03 são:

- **Modo 1:** Trincamento da matriz devido à compressão transversal.
- **Modo 2:** Trincamento da matriz devido à tração transversal.
- **Modo 3:** Ruptura das fibras devido à tração longitudinal.
- **Modo 4:** Falha das fibras sob compressão devido a formação de uma banda de dobramento e compressão transversal.
- **Modo 5:** Falha das fibras sob compressão devido a formação de uma banda de dobramento e tração transversal.
- **Modo 6:** Trincamento da matriz sob compressão biaxial.

### Orientação das fibras $\theta = 45^\circ$ (tração)

Uma segunda análise foi realizada para um modelo de características exatamente iguais ao modelo anterior, alterando-se apenas a orientação das fibras. Nesse caso,  $\theta = 45^\circ$ .

A Figura 5.31, mostra o estado de tensão final para o qual o laminado acima falha. No canto inferior estão indicados os índices máximos para a falha das fibras e da matriz, assim como a deformação máxima obtida, nesse caso  $0.110 \text{ mm}$ .

Os valores dos índices de falha máximos do critério de falha LaRC03 estão representados pela Figura 5.32, obtida no MATLAB.

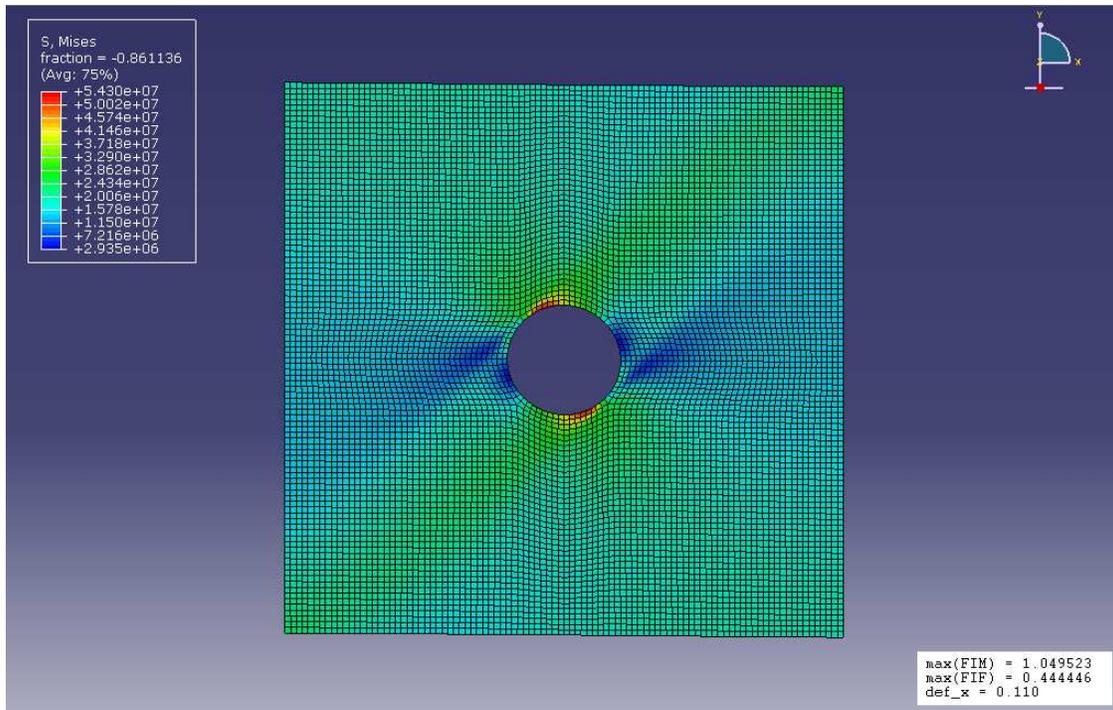


Figura 5.31: Resultado do critério de falha LaRC03 no ABAQUS para laminado unidirecional (45°) tracionado longitudinalmente.

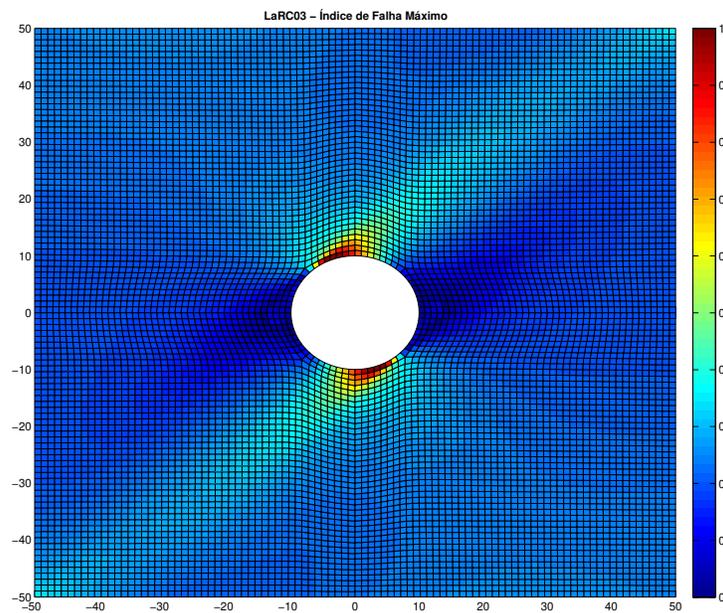


Figura 5.32: Índice de falha máximo para o critério de falha LaRC03 em um laminado unidirecional (45°) com furo, tracionado longitudinalmente.

A Figura 5.33 mostra em detalhe região com maiores índices de falha.

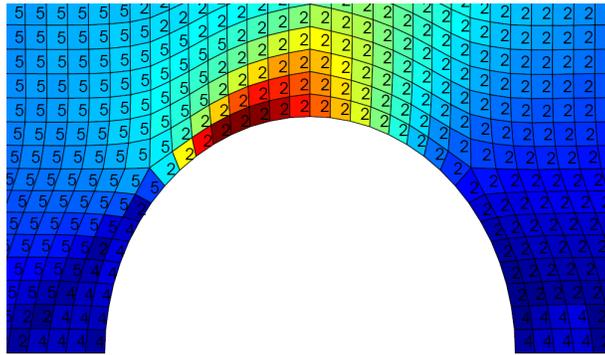


Figura 5.33: Ampliação da região de falha da Figura 5.32.

Como no caso anterior, a predominância do modo de falha ainda é do tipo 2, principalmente nas regiões mais afetadas. A diferença é que agora podem ser notados alguns elementos onde os tipos 4 e 5 estão indicados. Isso significa que, mesmos os valores dos índices de falha tipo 4 e 5 sendo muito inferiores aos do tipo 2, nessas regiões a falha das fibras é mais provável que a falha da matriz.

### Orientação das fibras $\theta = 0^\circ$ (compressão)

Essa terceira análise foi realizada para um modelo exatamente igual ao primeiro, porém com incremento do deslocamento negativo. Simulando assim uma condição de compressão longitudinal do modelo.

A Figura 5.34, mostra o estado de tensão final para o qual o modelo falha devido à compressão longitudinal. No canto inferior estão indicados os índices máximos para a falha das fibras e da matriz, assim como a deformação máxima obtida, nesse caso  $-0.170 \text{ mm}$ .

Os valores dos índices de falha máximos do critério de falha LaRC03 estão representados pela Figura 5.35, obtida no MATLAB.

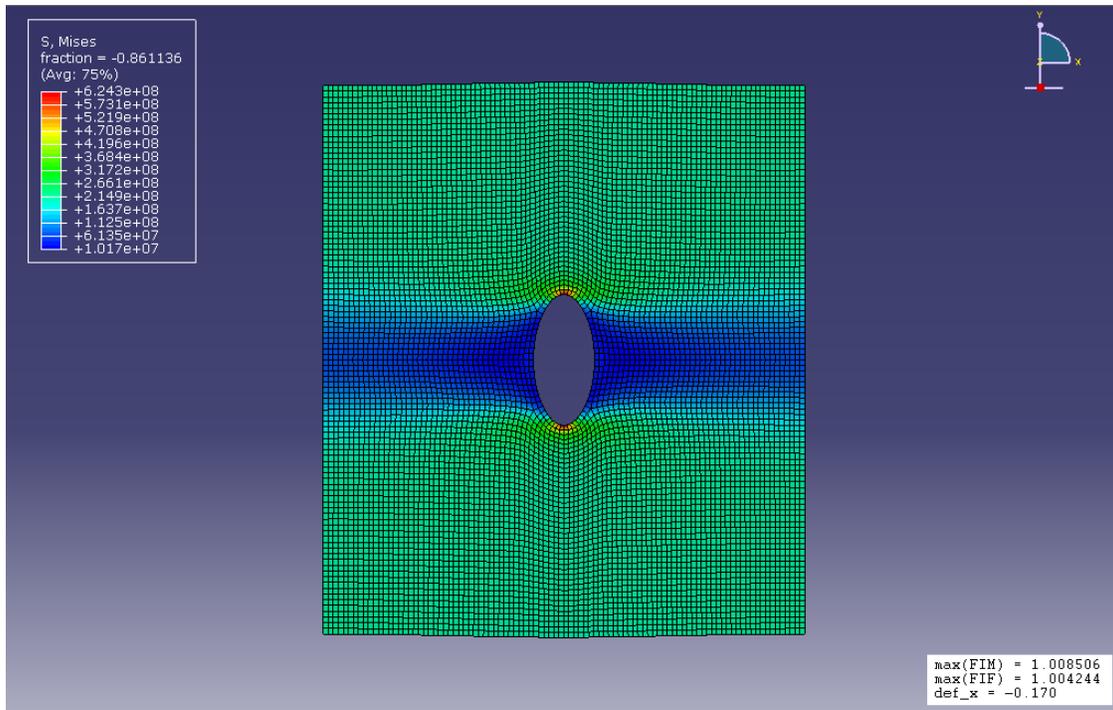


Figura 5.34: Resultado do critério de falha LaRC03 no ABAQUS para laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) em compressão longitudinal.

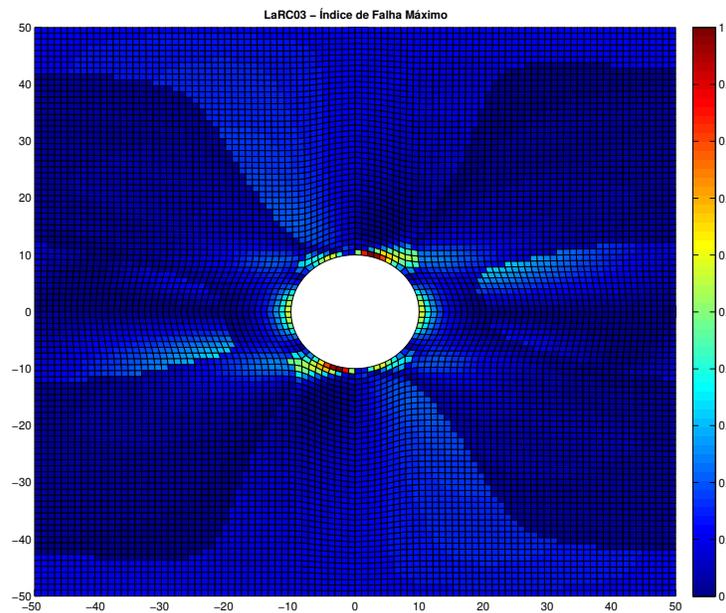


Figura 5.35: Índice de falha máximo para o critério de falha LaRC03 em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, em compressão longitudinal.

A Figura 5.36 mostra região com maiores índices de falha ampliada.

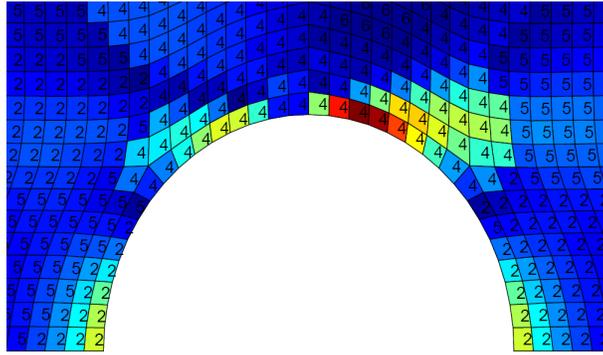


Figura 5.36: Ampliação da região de falha da Figura 5.35.

Para esse caso fica evidente, através da Figura 5.35, a distribuição bem menos uniforme dos valores dos índices de falha. Isso se deve a complexidade envolvida na determinação da falha de materiais compósitos laminados em compressão. A região ampliada na Figura 5.36 possui agora a predominância dos modos de falha tipo 4 e 5, indicando a falha das fibras pela formação de uma banda de dobramento. Porém, no elemento com maior índice de falha o modo de falha indicado é do tipo 6, que indica a falha da matriz sem que haja a formação de uma banda de dobramento, muito provavelmente em consequência à uma elevada compressão transversal combinada com a compressão das fibras, como discutido na Seção 4.5.7.

#### 5.4.4 Critério de falha de Puck

Os três casos anteriores anteriores foram novamente analisados, mas agora para o critério de Puck.

##### Orientação das fibras $\theta = 0^\circ$ (tração)

A Figura 5.37, mostra o estado de tensão final para o qual o laminado acima falha. No canto inferior estão indicados os índices de máximos de falha para a falha das fibras e entre-fibras, assim como a deformação máxima obtida, nesse caso  $0.140 \text{ mm}$ .

Os valores dos índices de falha máximos do critério de falha de Puck estão representados na Figura 5.38, obtida pelo MATLAB.

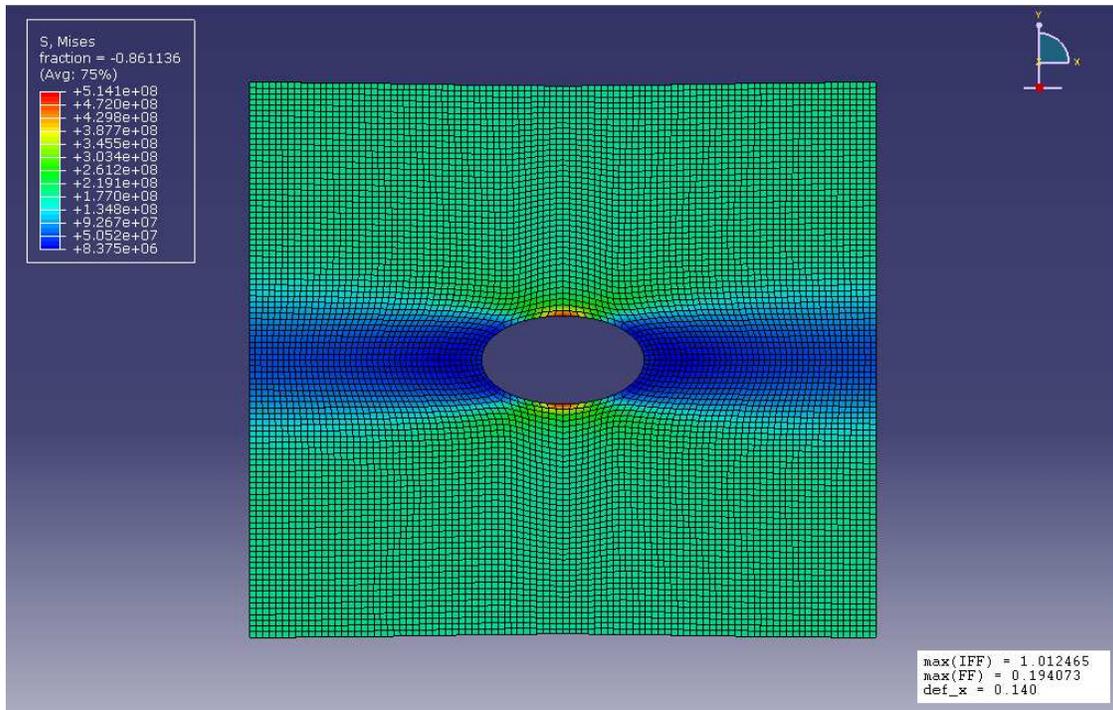


Figura 5.37: Resultado do critério de falha de Puck no ABAQUS para o laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) tracionado longitudinalmente.

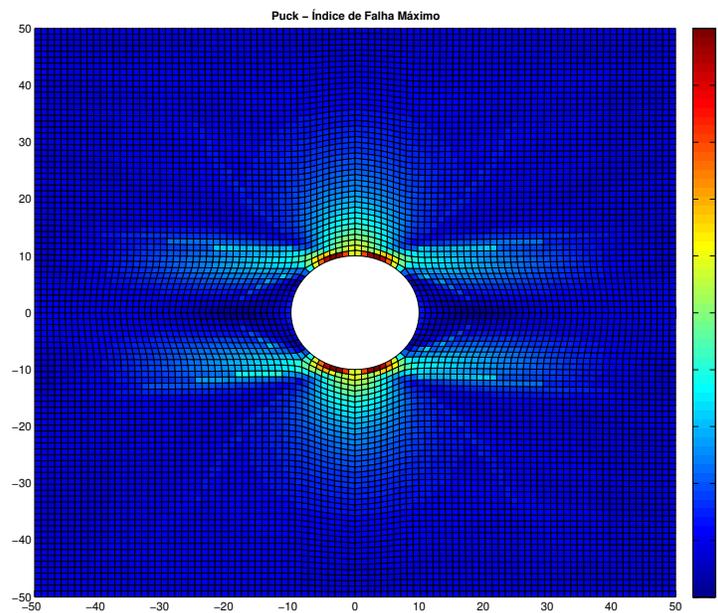


Figura 5.38: Índice de falha máximo para o critério de falha de Puck em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, tracionado longitudinalmente.

Uma melhor visualização da região da falha pode ser vista na Figura 5.39.

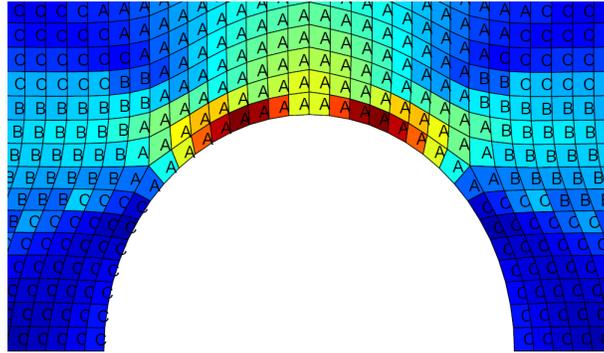


Figura 5.39: Ampliação da região de falha da Figura 5.38.

Da Figura 5.39 pode-se notar a predominância dos modos de falha *A*, *B* e *C*, indicando a provável falha da matriz (IFF). Nota-se também que a região de onde os índices são próximos de um, o modo de falha é correspondente é o Modo *A*, que aponta a falha entre-fibras devido à tração transversal da matriz, assim como havia sido indicado pelo critério de LaRC03. Os modos de falha característicos do critério de Puck são:

- **Modo A:** Falha entre-fibras (IFF) causado pela tração transversal e/ou cisalhamento.
- **Modo B:** Falha entre-fibras (IFF) causado pela compressão transversal e/ou cisalhamento, com plano de falha orientado a  $\theta_{fp} = 0^\circ$ .
- **Modo C:** Falha entre-fibras (IFF) causado pela compressão transversal e/ou cisalhamento, com plano de falha orientado a  $\theta_{fp} \neq 0^\circ$ .
- **Modo t:** Falha das fibras (FF) por tração.
- **Modo c:** Falha das fibras (FF) por compressão (flambagem).

### Orientação das fibras $\theta = 45^\circ$ (tração)

Uma segunda análise foi realizada para o mesmo modelo com fibras orientadas a  $\theta = 45^\circ$ . A Figura 5.40, mostra os índices máximos para a falha das fibras e entre-fibras e indica a deformação máxima obtida de 0.110 *mm*.

Os valores dos índices de falha máximos do critério de falha de Puck estão representados pela Figura 5.41.

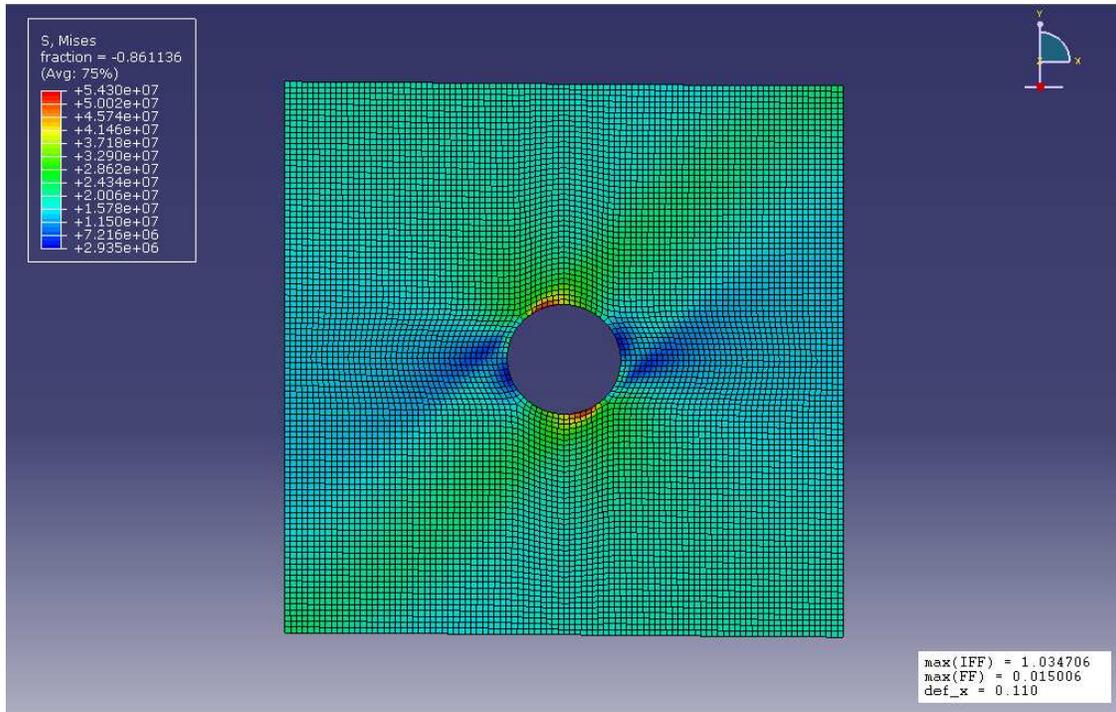


Figura 5.40: Resultado do critério de falha de Puck no ABAQUS para laminado unidirecional (45°) tracionado longitudinalmente.

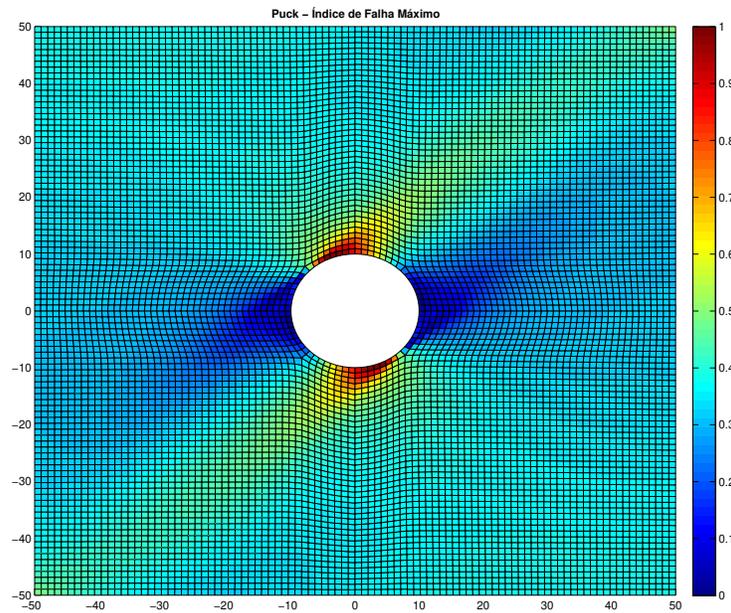


Figura 5.41: Índice de falha máximo para o critério de falha de Puck em um laminado unidirecional (45°) com furo, tracionado longitudinalmente.

A Figura 5.42 mostra região de falha de detalhe.

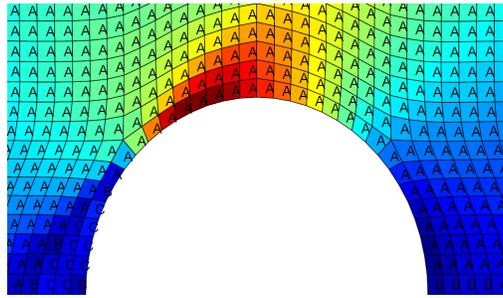


Figura 5.42: Ampliação da região de falha da Figura 5.41.

Para esse caso, a Figura 5.42 indica que a falha do laminado nessas condições provavelmente ocorrerá através do modo *A*. Uma vez que praticamente todos os elementos solicitados apresentam o mesmo modo de falha.

### Orientação das fibras $\theta = 0^\circ$ (compressão)

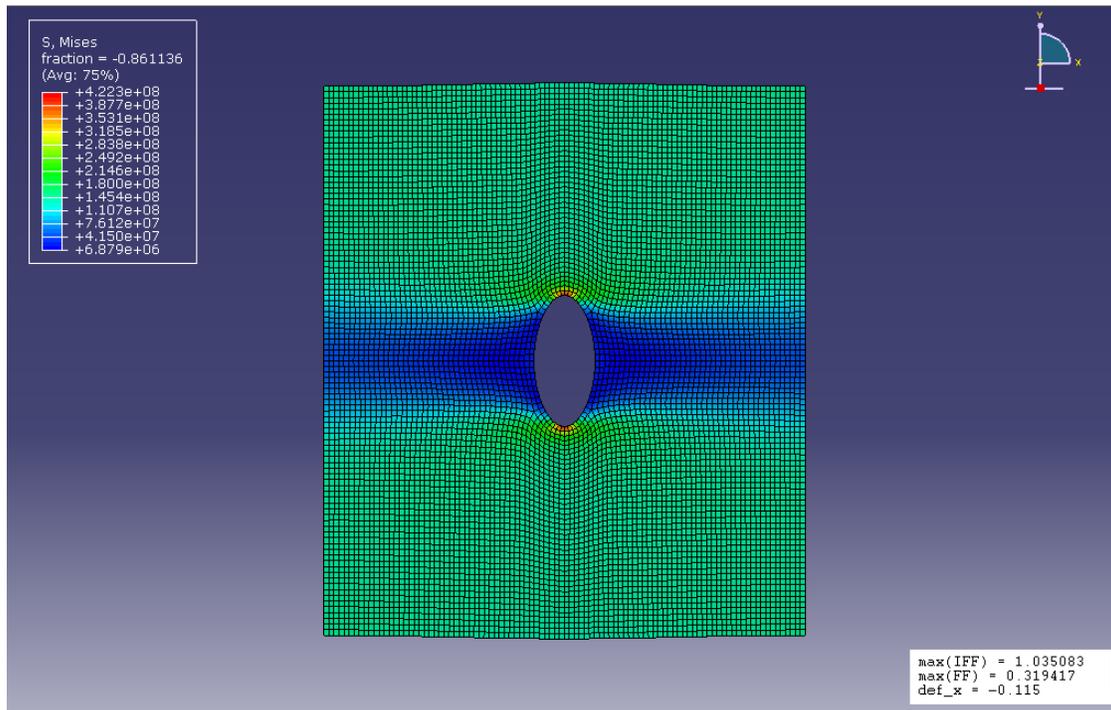


Figura 5.43: Resultado do critério de falha de Puck no ABAQUS para laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) em compressão longitudinal.

Os valores dos índices de falha máximos do critério de falha de Puck estão representados na Figura 5.44.

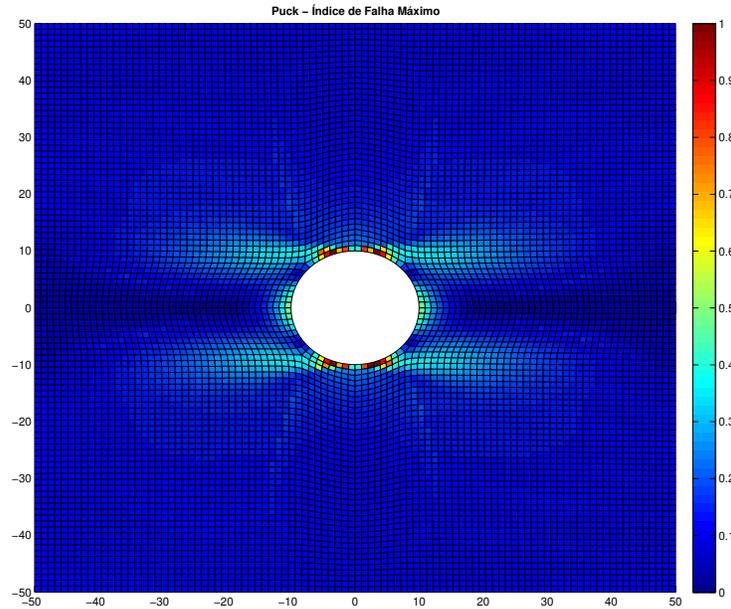


Figura 5.44: Índice de falha máximo para o critério de falha de Puck em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, em compressão longitudinal.

A Figura 5.42 mostra em detalhe a região com maiores índices de falha.

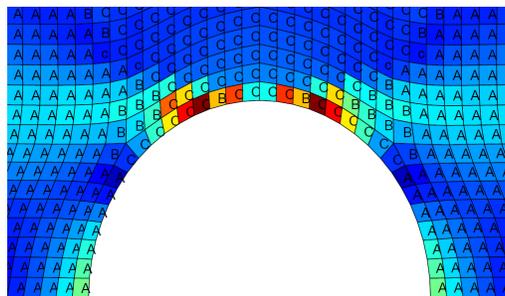


Figura 5.45: Ampliação da região de falha da Figura 5.44.

Novamente esta figura indica a falha entre-fibras, desta vez o modo de falha predominante na região crítica é o modo  $C$ , apontando a falha em um plano inclinado diferente de zero ( $\theta_{fp} \neq 0$ ).

### 5.4.5 Critério de falha de Tsai-Wu

Como último parâmetro, analisou-se os três casos anteriores através do critério de Tsai-Wu. No entanto, como o critério de Tsai-Wu não é capaz de identificar o modo de falha, a terceira figura obtida para os critérios de LaRC03 e Puck não se aplica.

#### Orientação das fibras $\theta = 0^\circ$ (tração)

A Figura 5.46 indica o índice máximo de falha do critério de Tsai-Wu e a deformação máxima obtida, nesse caso  $0.160 \text{ mm}$ .

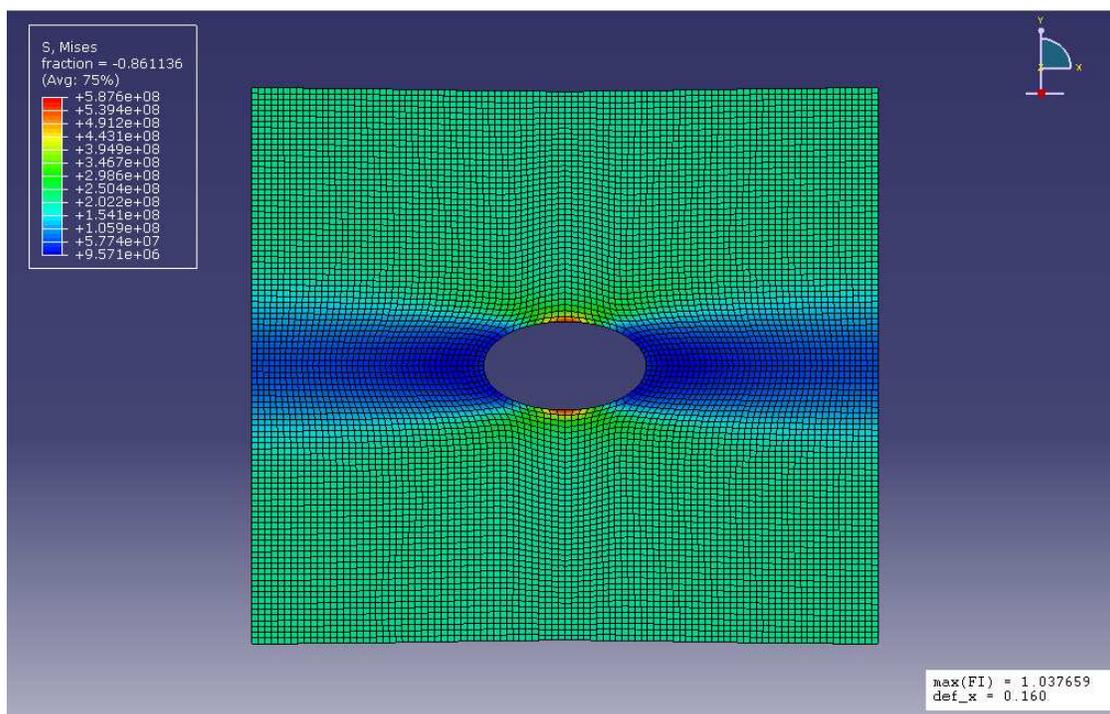


Figura 5.46: Resultado do critério de falha de Tsai-Wu no ABAQUS para laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) tracionado longitudinalmente.

Os valores dos índices de falha máximos do critério de falha de Tsai-Wu estão representados pela Figura 5.47.

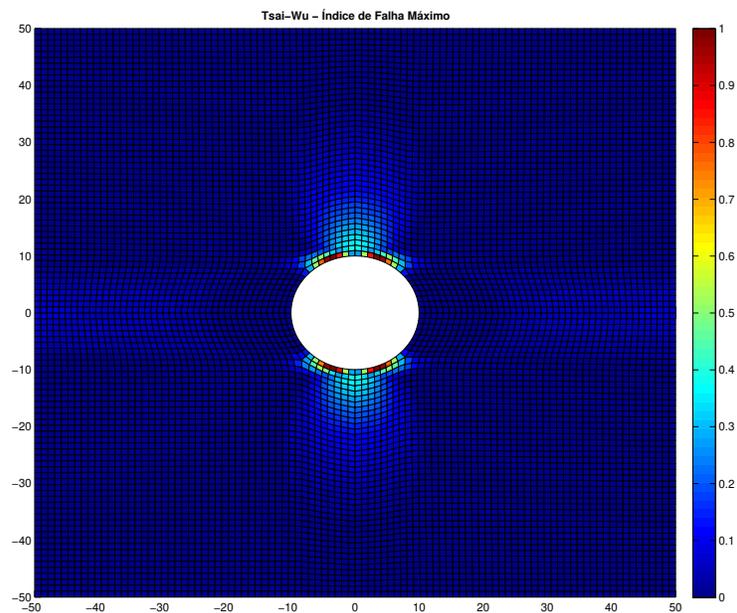


Figura 5.47: Índice de falha máximo para o critério de falha de Tsai-Wu em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, tracionado longitudinalmente.

### Orientação das fibras $\theta = 45^\circ$ (tração)

Para o caso com fibras orientadas a  $\theta = 45^\circ$ , a Figura 5.48 mostra o estado de tensão final para o laminado acima falha. A deformação máxima obtida nesse caso foi de  $0.110 \text{ mm}$ .

Os valores dos índices de falha máximos do critério de falha de Tsai-Wu estão representados pela Figura 5.49.

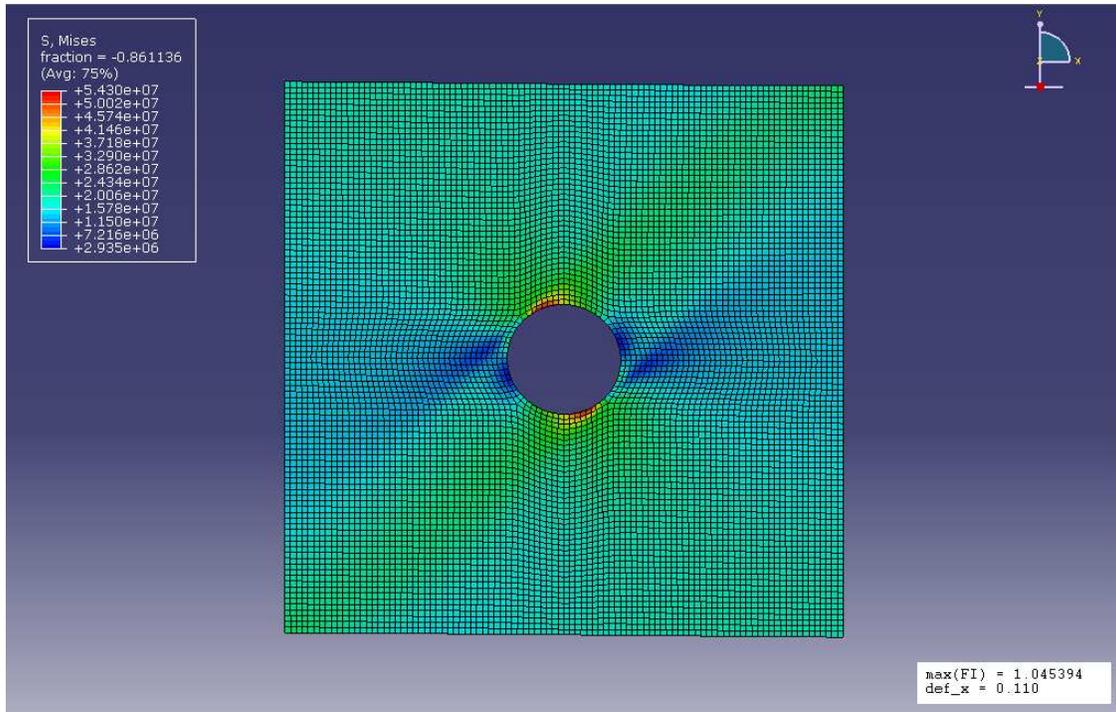


Figura 5.48: Resultado do critério de falha de Tsai-Wu no ABAQUS para laminado unidirecional ( $45^\circ$ ) tracionado longitudinalmente.

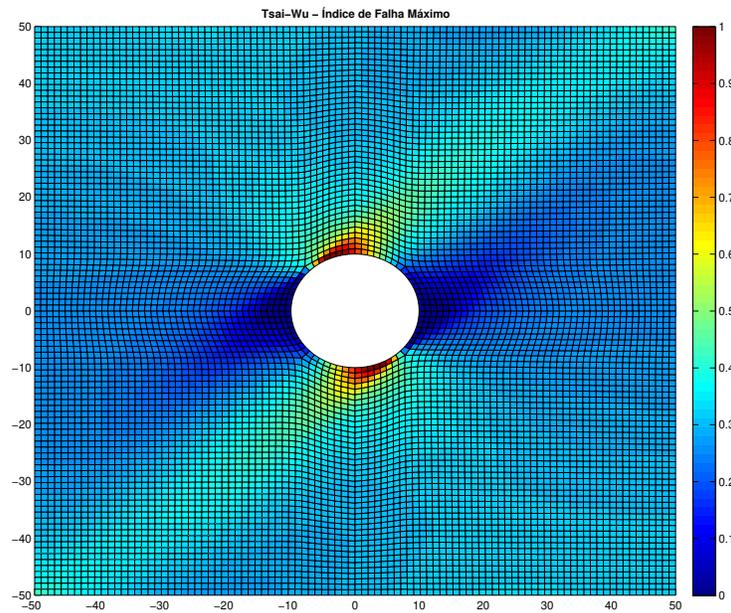


Figura 5.49: Índice de falha máximo para o critério de falha de Tsai-Wu em um laminado unidirecional ( $45^\circ$ ) com furo, tracionado longitudinalmente.

## Orientação das fibras $\theta = 0^\circ$ (compressão)

A Figura 5.50, mostra o estado de tensão final sob compressão longitudinal. A deformação máxima nesse caso foi de  $-0.225 \text{ mm}$ .

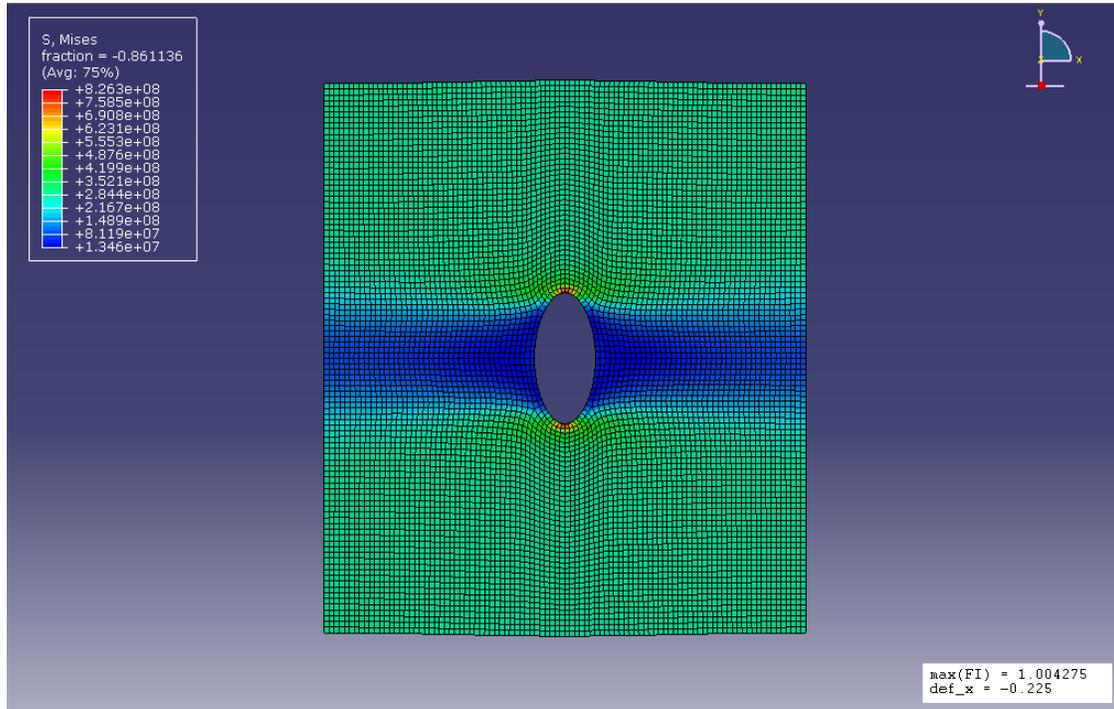


Figura 5.50: Resultado do critério de falha de Tsai-Wu no ABAQUS para laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) em compressão longitudinal.

Os valores dos índices de falha máximos do critério de falha de Tsai-Wu estão representados na Figura 5.51, obtida no MATLAB.

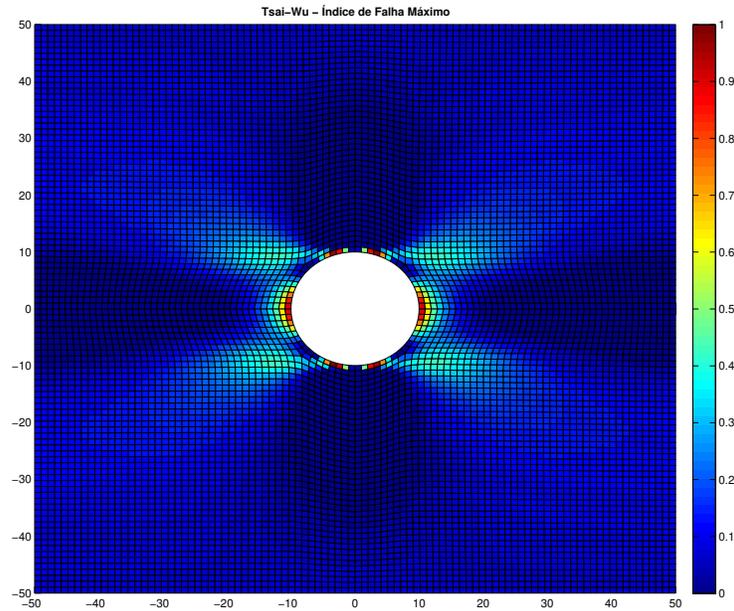


Figura 5.51: Índice de falha máximo para o critério de falha de Tsai-Wu em um laminado unidirecional ( $0^\circ$ ) com furo, em compressão longitudinal.

#### 5.4.6 Comparação das análises para $\theta = 0^\circ$ , $45^\circ$ e $90^\circ$

As análises foram realizadas e colocadas juntas em uma mesma figura para comparação. As Figuras 5.52 e 5.53 mostram os resultados para os casos de tração e compressão longitudinal respectivamente. Cada linha da figura indica uma orientação diferente das fibras do laminado,  $\theta = 0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ , respectivamente. As Tabelas 5.2 e 5.3 indicam os valores máximos das deformações obtidos para os casos de tração e compressão longitudinal.

A Figura 5.52 mostra exatamente o que já fora dito anteriormente no decorrer do trabalho, os critérios para se prever a falha em materiais compósitos laminados solicitados sob tração estão bem fundamentados e muito próximos uns dos outros. Pode-se perceber que a região crítica de falha para cada um dos casos ( $\theta = 0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ ) são praticamente as mesmas para os três critérios de falha estudados. No entanto, as regiões "afetadas" para o critério de Puck, onde os índices de falha são mais elevados, são maiores em comparação aos outros critérios.

Os valores das deformações máximas, dados pela Tabela 5.2, também estão muito próximos uns dos outros, apresentando uma diferença de aproximadamente 14,3% para o critério

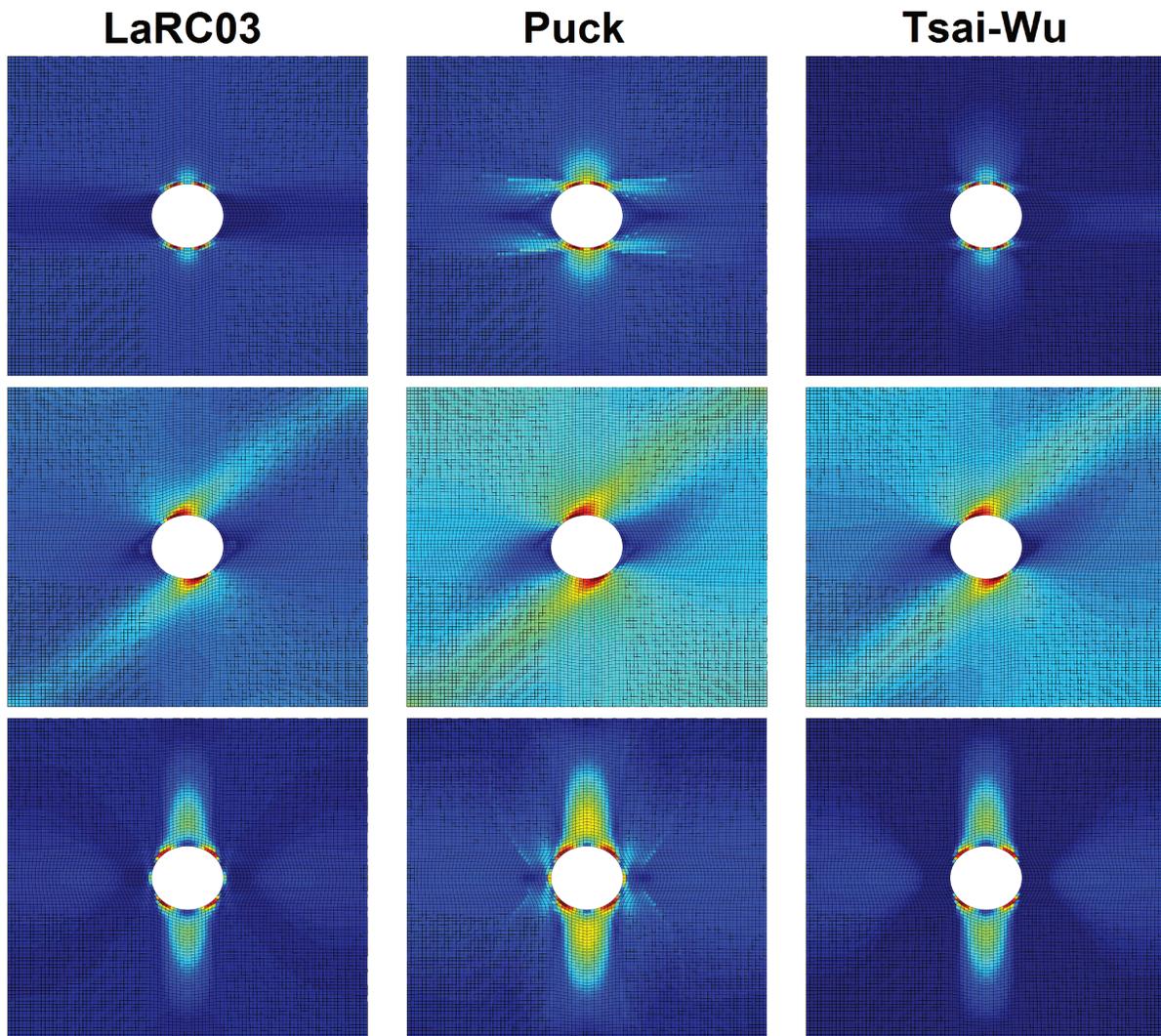


Figura 5.52: Índices de falha máximo para laminados unidirecionais com fibras orientadas a  $\theta = 0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$  sob tração longitudinal.

de Puck, com  $\theta = 0^\circ$ , em relação aos critérios de LaRC03 e Tsai-Wu e uma diferença de aproximadamente 1,8% para o critério LaRC03 em relação aos outros, para  $\theta = 90^\circ$ . Como os resultados não foram comparados com valores experimentais, os valores dados em porcentagem são mais interessante, uma vez que se deseja apenas uma comparação qualitativa entre os critérios.

Tabela 5.2: Deformações máximas obtidas para o caso de tração longitudinal.

Orientação das Fibras	LaRC03	Puck	Tsai-Wu
$\theta = 0^\circ$	0.160	0.140	0.160
$\theta = 45^\circ$	0.110	0.110	0.110
$\theta = 90^\circ$	0.565	0.555	0.555

A Figura 5.53, mostra novamente que as regiões críticas de falha dadas pelos critérios estudados são novamente muito parecidas, especialmente para os valores de  $\theta$  iguais a  $45^\circ$  e  $90^\circ$ . A diferença fica por conta do critério LaRC03 para  $\theta = 0^\circ$ , que apresenta uma descontinuidade nos valores dos índices de falha nas regiões fora da borda do furo. Ainda para esse exemplo do critério LaRC03, pode-se notar que, ao contrário de todos os outros casos apresentados, não existe uma simetria da região crítica de falha em relação ao eixo de orientação das fibras.

No entanto, a grande divergência das análises está nos valores máximos das deformações obtidas por cada um dos critérios de falha, Tabela 5.3. Fato que indica a dificuldade de se desenvolver teorias de falha capazes prever com precisão a falha em laminados compósitos, especialmente para fibras e matrizes em compressão. Pode-se perceber uma diferença de aproximadamente 32,4% entre os resultados dado pelo critério LaRC03 e o critério de Tsai-Wu, para  $\theta = 0^\circ$ , e de quase 50% (aproximadamente 47,8%) entre este e o critério de Puck. Esse evento, talvez possa ser explicado através do envelope de falha ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ ) dado pela Figura 5.18. Nessa figura, a curva característica do critério de falha de Tsai-Wu, representada por uma elipse, foi desenvolvida para acompanhar os valores positivos de tensão longitudinal (primeiro e quarto quadrantes), superestimando por consequência a região de compressão biaxial (terceiro quadrante). Como a curva do critério LaRC03 para o estado biaxial de compressão é mais abrangente que o critério de Puck e não tão conservadora como o critério de Tsai-Wu, era de se esperar que o valor da deformação máxima para esse caso estaria entre os valores obtidos nos outros dois critérios. O mesmo acontece para  $\theta = 45^\circ$ , onde as diferenças entre os resultados obtidos pelo critério LaRC03 e os critérios de Puck e Tsai-Wu são de aproximadamente 25,4% e 14,1%, respectivamente. Um fato interessante acontece para o caso de  $\theta = 90^\circ$ , onde os resultados obtidos para os três critérios são exatamente iguais. A explicação para isso se deve ao fato de que, quando comprimidas transversalmente, as fibras não sofrem efeitos de fenômenos físicos como o dobramento das fibras, sendo a matriz a única responsável por conceder rigidez ao material.

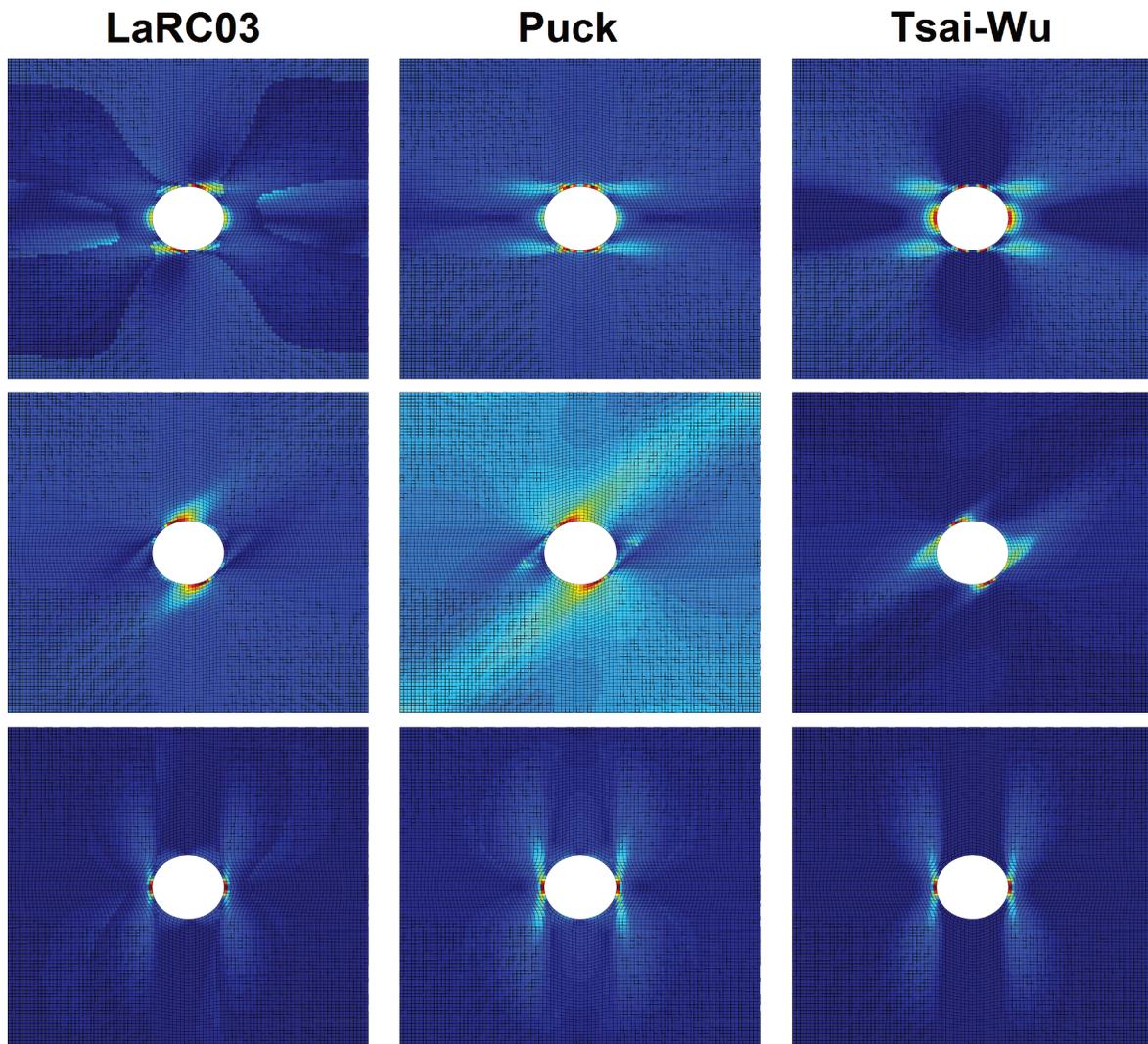


Figura 5.53: Índices de falha máximo para laminados unidirecionais com fibras orientadas a  $\theta = 0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$  sob compressão longitudinal.

Tabela 5.3: Deformações máximas obtidas para o caso de compressão longitudinal.

Orientação das Fibras	LaRC03	Puck	Tsai-Wu
$\theta = 0^\circ$	-0.170	-0.115	-0.225
$\theta = 45^\circ$	-0.445	-0.355	-0.390
$\theta = 90^\circ$	-0.205	-0.205	-0.205

# Capítulo 6

## Conclusões

Realizou-se nesse trabalho uma análise e comparação entre os critérios de falha tradicionais para materiais compósitos laminados, como os critérios da máxima tensão, Tsai-Hill e Tsai-Wu, e critérios de falha mais recentes, baseados em fenômenos físicos, como os critérios de Puck e LaRC03.

Foram implementadas no MATLAB as formulações de cada um dos cinco critérios de falha estudados. Como validação dessas formulações, comparou-se os envelopes da *tensão longitudinal pela tensão transversal* e da *tensão transversal pela tensão de cisalhamento* obtidos através delas com os resultados adquiridos no software de análise de materiais compósitos laminados ESACOMP. Os critérios de falha da Máxima Tensão, Tsai-Hill e Tsai-Wu, devido a simplicidade da sua formulação, apresentaram respostas idênticas em ambos os programas. O critério de Puck, devido a presença de alguns parâmetros não-físicos em sua formulação, mostrou uma pequena divergência entre os resultados obtidos pelo MATLAB e pelo ESACOMP. Após uma análise mais detalhada desses parâmetros, conclui-se que o sucesso da utilização do critério de Puck está diretamente ligado a esses parâmetros que, para serem determinados com precisão, dependem do aprofundado conhecimento do material estudado.

O trabalho destacou também alguns pontos importantes de cada um dos critérios de falha estudados. O critério da máxima tensão apresenta a vantagem de que todos os parâmetros utilizados na sua formulação são obtidos através de ensaios uniaxiais de tração e compressão. No entanto, não considera a interação entre os componentes de tensão atuando no laminado, sendo sua formulação dividida em vários "subcritérios" independentes. O critério de Tsai-Hill, por sua vez, é dado por uma única expressão matemática, mas não é capaz de distinguir entre os limites de tração e compressão, sendo assim necessário especificar os parâmetros de resistência de acordo com o estado de tensão estudado. O critério de Tsai-Wu

necessita das mesmas propriedades do material que o critério de Tsai-Hill porém, é dado por uma única expressão que envolve simultaneamente os limites de resistência à tração e à compressão. É válido ressaltar que tanto o critério de falha de Tsai-Hill quanto o critério de Tsai-Wu são interpolações matemáticas dos valores de resistência obtidos experimentalmente, portanto não se baseiam em fenômenos físicos. Sendo assim, capazes de prever a ocorrência da falha mas não de distinguir entre os diferentes modos de falha.

Os critérios de falha iterativos de Puck e LaRC03 se mostram muito mais completos para a análise de falha em materiais compósitos laminados pois apresentam a vantagem de considerar na sua formulação a ocorrência de fenômenos físicos, como por exemplo, o dobramento das fibras e a existência de um plano de falha inclinado, sendo assim capazes de indicar o modo pelo qual o material irá falhar. No entanto, para que tais análises sejam possíveis, são exigidos alguns ensaios experimentais não tão usuais para obter suas propriedades mecânicas, o que muitas vezes gera custo ao projeto.

Da análise realizada através do software de elementos finitos ABAQUS e dos próprios envelopes de falha obtidos no MATLAB, pode-se concluir que, apesar dos esforços para o desenvolvimento de critérios de falha baseados em fenômenos físicos, o critério "matemático" de Tsai-Wu se mostrou tão eficiente quanto os critérios de Puck e LaRC03 na análise de falha de laminados solicitados em tração. Além disso, necessita apenas dos parâmetros básicos de resistência e, devido a sua simplicidade matemática, exige muito menos esforço computacional para realizar as análises. No entanto, se existe a necessidade de identificar o modo de falha em uma análise, ou se o modelo estiver solicitado em compressão, os critérios de Puck e LaRC03 apresentam resultados mais satisfatórios em relação ao critério de Tsai-Wu.

## 6.1 Sugestões para trabalhos futuros

- Análise de falha em materiais compósitos laminados submetidos a carregamentos triaxiais;
- Expansão do trabalho para um estado triaxial de tensões através da utilização do critério de falha LaRC04;
- Realização de testes experimentais para preencher as lacunas deixadas nos envelopes de falha do WWFE e comparar com os resultados numéricos;

# Referências Bibliográficas

- Agarwal, B. D., Broutman, L. J., 1990. Analysis and Performance of Fiber Composites, 2nd Edition. John Wiley & Sons, Inc.
- Argon, A. S., 1972. Fracture of Composites. Vol. 1. Treatise of Materials Science and Technology Academic Press.
- Ashton, J. E., Halpin, J. C., Petit, P. H., 1969. Primer on Composite Materials Analysis. Westport.
- Azzi, V. D., Tsai, S. W., 1965. Anisotropic strength of composite. Exp. Mech. 5, 283–288.
- Berg, C. A., Salama, M., 1973. Fatigue of graphite fibre-reinforced epoxy in compression. Fibre Science and Technology 6, 79–118.
- Boehler, J. P., Raclin, J., 1985. Failure criteria for glass-fiber reinforced composites under confining pressure. Journal of Structural Mechanics 13, 371–392.
- Chang, F. K., Chen, M. H., 1987. The in situ ply shear strength distributions in graphite/epoxy laminated composites. Journal of Composite Materials 21, 708–733.
- Chen, A. S., Matthews, F. L., 1993. A review of multiaxial/biaxial loading tests for composite materials. Composites 2, 395–406.
- Christensen, R. M., 2001. A survey of and evaluation methodology for fiber composite materials failure theories. In: Mechanics for a New Millenium. Academic Publishers.
- Daniel, I. M., Ishai, O., 2006. Engineering Mechanics of Composite Materials, 2nd Edition. Oxford University Press.
- Dávila, C. G., Camanho, P. P., Rose, C. A., 2005. Failure criteria for frp laminates. Journal of Composite Materials 39, 323–345.
- Dvorak, G. J., Laws, N., 1987. Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates: Ú ii first ply failure. Journal of Com 21, 309–329.
- Edge, E. C., 1994. Does transverse and shear loading affect the compression strength of unidirectional cfc? a reply to dr. hart-smith. Composite 25, 159–164.
- Flaggs, D. L., Kural, M. H., 1982. Experimental determination of the in situ transverse

- lamina strength in graphite/epoxy laminates. *Journal of Composite Materials* 16, 103–116.
- Gol'denblat, I. I., Kopnov, V. A., 1966. Strength of glass-reinforced plastics in complex stress state. *Faraday Press* 1, 54.
- Hahn, H. T., Johannesson, T., 1983. *Mechanics of Composite Materials*. AMD.
- Hashin, Z., 1980. Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of Applied Mechanics* 47, 329–334.
- Hashin, Z., Roterm, A., 1973. A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials. *Journal of Composite Materials* 7, 448–464.
- Hill, R., 1948. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A* 193, 281–297.
- Hinton, M., Soden, P., 1998. Prediction failure in composite laminates: The background to the exercise. *Composite Science and Technology* 58, 1001–1010.
- Hinton, M. J., Kaddour, A. S., Soden, P. D., 2004. *Failure Criteria in Fiber-Reinforced-Polymer Composites*. Elsevier.
- Huybrechts, D., Michaeli, W., 1995. Dimensioning of thick laminates: New iff strength criteria based on the determination of the fracture plane, experiments for verification. In: 16th Conference of the European Chapter of the Society for the Advancement of Material and Process Engineering (SAMPE). pp. 211–222.
- Isahi, O., 1971. Failure of unidirectional composites in tension. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 97, 205–221.
- Kawabata, S., 1982. Strength of epoxy resin under multiaxial stress field. In: ICCM-IV.
- Kelly, A., 1966. *Strong Solids*. Clarendon Press.
- Kopp, J., 2000. Contribution to the stress and strength analysis of unidirectionally fibre reinforced plastics. Ph.D. thesis, Technical University of Aachen.
- Laws, N., Dvorak, G. J., 1988. Progressive transverse cracking in composite laminates. *Journal of Composite Materials* 22, 900–919.
- Leguillon, D., 2002. Strength or toughness? a criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics* 21, 61–72.
- Liu, K. S., Tsai, S. W., 1998. A progressive quadratic failure criterion for a laminate. *Composites Science and Technology* 58, 1023–1032.
- Mohr, O., 1900. Welche umstände bedingen die elastizitätsgrenze und den bruch eines materials? (which circumstances are causing yield limit and fracture of a material?). *Civilingenieur* 44, 1524–1530/1572–1577.
- Owen, M. J., Rice, D. J., 1982. Biaxial strength behavior of glass reinforced polyester resins.
- Parvizi, A., Garrett, K., Bailey, J., 1978. Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy

- cross-ply laminates. *Journal of Materials Science* 13, 195–201.
- Potter, D. S., Gupta, V., Hauert, S., 2000. Effects of specimen size and sample aspect ratio on the compressive strength of graphite/epoxy laminates. *Composites Science and Technology* 60, 2525–2538.
- Puck, A., 1969. Calculating the strength of glass fibre/plastic laminates under combined load. *German Plastics* 55, 18–19.
- Puck, A., 1992. Fracture criteria for highly stressed fibre-plastic composites which meet requirements of design practice. *German Plastics* 82, 34–38.
- Puck, A., Kopp, J., Knops, M., 2002. Guidelines for the determination of the parameters in Puck's action plane strength criterion. *Composite Science and Technology* 62, 371–378.
- Puck, A., Schneider, W., 1969. On failure mechanisms and failure criteria of filament-wound glass-fibre/resin composites. *Plast. Polym.* 37, 33–43.
- Puck, A., Schürmann, H., 1998. Failure theories of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology* 58, 1045–1067.
- Puck, A., Schürmann, H., 2002. Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology* 62, 1633–1662.
- Rosen, B. W., 1995. Mechanics of composite strengthening. In: *Fibre Composite Materials*. American Society for Metals, pp. 37–76.
- Sandhu, R. S., 1972. A survey of failure theories of isotropic and anisotropic materials. Tech. rep., Air Force Flight Dynamics Laboratory.
- Schapery, R. A., 1995. Prediction of compressive strength and kink bands in composites using a work potential. *International Journal of Solids and Structures* 32, 739–765.
- Schneider, C. W., 1997. Composite materials at the crossroads - transition to affordability. In: *ICCM-11*.
- Soden, P. D., Hilton, M. J., Kaddour, A. S., 1998. Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates. *Composites Sc* 58, 1011–1022.
- Soden, P. D., Hinton, M. J., Kaddour, A. S., 2002. Biaxial test results for strength and deformation of a range of e-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: Failure exercise benchmark data. *Composites Science and Technology* 62, 1489–1514.
- Sun, C. T., 2000. Strength analysis of unidirectional composite and laminates. In: *Comprehensive Composite Materials*. Elsevier Science.
- Sun, C. T., Quinn, B. J., Oplinger, D. W., 1996. Comparative evaluation of failure analysis methods for composite laminates. Tech. rep., DOT/FAA/AR-95/109.
- Taliercio, A., Sagramoso, P., 1995. Uniaxial strength of polymeric-matrix fibrous compo-

- sites predicted through a homogenization approach. *International Journal of Solids and Structures* 32, 2095–2123.
- Tan, S. C., Nuismer, R. J., 1989. A theory for progressive matrix cracking in composite laminates. *Journal of Composite Materials* 23, 1029–1047.
- Tsai, S. W., 1984. A survey of macroscopic failure criteria for composite materials. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 3, 40–62.
- Tsai, S. W., Wu, E. M., 1971. A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials* 5, 58–80.
- Wang, A. S. D., 1984. Fracture mechanics of sublaminar cracks in composite materials. *Composites Technology Review* 6, 45–62.
- Wu, E. M., Reuter, R. C. J., 1965. Crack extension in fiberglass reinforced plastics and a critical examination of the general fracture criterion. Tech. Rep. 275, Department of Theoretical and Applied Mechanics - University of Illinois.

# Apêndice A

## Avaliação das condições de falha e das relações entre os parâmetros de Puck

Este apêndice resume todas condições de falha usadas por Puck and Schürmann (1998) de maneira clara e objetiva. As resistências à fratura  $R^A$  do plano de ação da tensão das equações na Seção 4.4 são substituídas pelos limites de resistência  $Y^T$ ,  $Y^C$  e  $S^L$ , sempre que possível.

Um termo  $f_w$ , que representa a influência da tensão  $\sigma_{11}$ , paralela às fibras, na falha entre fibras, pode ser incluído. Assim, a única tarefa que resta é decidir quais as equações são válidas para o estado de tensão a ser analisado. A distinção entre os Modos  $A$ ,  $B$  e  $C$  é facilmente possível através dos critérios apresentados. (Ver também Figura 4.3).

Como resultado, pode-se obter, com apenas um pouco mais de esforço, informações adicionais sobre o modo de falha e o ângulo de falha antecipadamente. O que nos permite uma melhor avaliação das consequências que a falha entre-fibras pode acarretar ao laminado.

### Falha das fibras - FF

- Tração

$$\frac{1}{\varepsilon_1^T} \left( \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \right) = 1 \quad \text{se} \quad \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

- Compressão

$$\frac{1}{\varepsilon_1^C} \left| \left( \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \right) \right| + (10\gamma_{12})^2 = 1 \quad \text{se} \quad \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} < 0 \quad (\text{A.2})$$

## Falha entre-fibras - IFF

- **Modo A** ( $\theta_{fp} = 0^\circ$ )

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{21}}{S^L}\right)^2 + \left(1 - p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{Y^T}{S^L}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{22}}{Y^T}\right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{\sigma_{22}}{S^L} + \left| \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} \right| = 1 \quad \text{se} \quad \sigma_{22} \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

- **Modo B** ( $\theta_{fp} = 0^\circ$ )

$$\frac{1}{S^L} \left( \sqrt{\tau_{21}^2 + \left(p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_{22}\right)^2} \right) + p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_{22} + \left| \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} \right| = 1 \quad \text{se} \quad \sigma_{22} < 0 \text{ e } 0 \leq \left| \frac{\sigma_{22}}{\tau_{21}} \right| \leq \frac{R_{\perp\perp}^A}{|\tau_{21c}|} \quad (\text{A.4})$$

- **Modo C** ( $\cos \theta_{fp} = \sqrt{\frac{f_w R_{\perp\perp}^A}{(-\sigma_{22})}}$ )

$$\left[ \left( \frac{\tau_{21}}{2(1+p_{\perp\perp}^{(-)})S^L} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{22}}{Y^C} \right)^2 \right] \frac{Y^C}{(-\sigma_{22})} + \left| \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11D}} \right| = 1 \quad \text{se} \quad \sigma_{22} < 0 \text{ e } 0 \leq \left| \frac{\tau_{21}}{\sigma_{22}} \right| \leq \frac{|\tau_{21c}|}{R_{\perp\perp}^A} \quad (\text{A.5})$$

onde

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{Y^C}{2(1+p_{\perp\perp}^{(-)})} = \frac{S^L}{2p_{\perp\perp}^{(-)}} \left( \sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^{(-)} \frac{Y^C}{S^L}} - 1 \right) \quad (\text{A.6})$$

$$p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)} \frac{R_{\perp\perp}^A}{S^L} \quad (\text{A.7})$$

$$\tau_{21c} = S^L \sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^{(-)}} \quad (\text{A.8})$$

Segundo Puck et al. (2002), os termos  $p_{\perp\parallel}^{(+)}$  e  $p_{\perp\parallel}^{(-)}$  que aparecem nas equações acima são chamados de *parâmetros de inclinação de Puck* e representam, matematicamente, as derivadas da curva de falha experimental ( $\sigma_{22}$ ,  $\tau_{21}$ ) para  $\sigma_{22} = 0$  (Figura (A.1)).

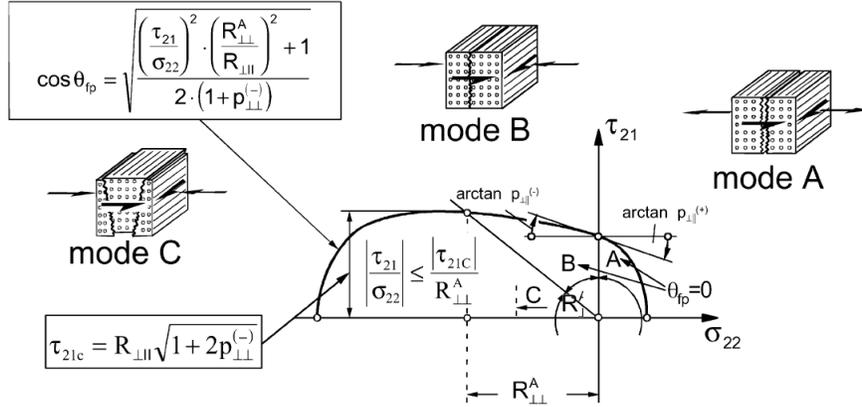


Figura A.1: Soluções analítica para o estado plano de tensões.[Puck et al. (2002)]

A Tabela A.1 apresenta alguns valores típicos desses parâmetros para laminados unidirecionais, baseados no projeto experimental realizado por Kopp (2000).

Tabela A.1: Valores típicos para os limites de resistência no plano e parâmetros de inclinação [Puck et al. (2002)].

Material	$p_{\perp\parallel}^{(+)}$	$p_{\perp\parallel}^{(-)}$
Fibra de vidro/Epóxi	0.30	0.25
Fibra de carbono/Epóxi	0.35	0.30

# Apêndice B

## Resumo dos índices de falha do critério de LaRC03

Este apêndice resume os seis índices de falha que constituem o critério de falha LaRC03, apresentado por Dávila et al. (2005). Cada um desses modos de falha está indicado pelo tipo de falha e solicitação para os quais se aplicam.

### Trincamento da matriz

- **Matriz sob tração** ( $\sigma_{22} \geq 0$ )

**LaRC03#2**

$$FI_M = (1 - g) \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} \right) + g \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{S_{is}^L} \right)^2 \quad (\text{B.1})$$

- **Matriz sob Compressão** ( $\sigma_{22} < 0$ )

**LaRC03#6** ( $\sigma_{11} < Y^C$ )

$$FI_M = \left( \frac{\tau_{eff}^{mT}}{S^T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{eff}^{mL}}{S_{is}^L} \right)^2 \quad (\text{B.2})$$

LaRC03#1 ( $\sigma_{11} \geq Y^C$ )

$$FI_M = \left( \frac{\tau_{\text{eff}}^T}{S^T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{\text{eff}}^L}{S_{is}^L} \right)^2 \quad (\text{B.3})$$

## Falha das fibras

- Fibras sob tração ( $\sigma_{11} \geq 0$ )

LaRC03#3

$$FM_F = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_1^T} \quad (\text{B.4})$$

- Fibras sob Compressão ( $\sigma_{11} < 0$ )

LaRC03#4 ( $\sigma_{22}^m < 0$ )

$$FI_F = \left\langle \frac{|\tau_{12}^m| + \eta^L \sigma_{22}^m}{S_{is}^L} \right\rangle, \quad (\text{B.5})$$

LaRC03#5 ( $\sigma_{22}^m \geq 0$ )

$$FI_M = (1 - g) \left( \frac{\sigma_{22}^m}{Y_{is}^T} \right) + g \left( \frac{\sigma_{22}^m}{Y_{is}^T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}^m}{S_{is}^L} \right)^2 \quad (\text{B.6})$$

## Limites de resistência localizados

- Lâmina fina restrita

$$Y_{is}^T = \sqrt{\frac{8G_{Ic}(T)}{\pi t \Lambda_{22}^0}} \quad e \quad S_{is}^L = \sqrt{\frac{8G_{IIc}(T)}{\pi t \Lambda_{44}^0}} \quad (\text{B.7})$$

- Lâmina espessa restrita

$$Y_{is}^T = \sqrt{\frac{2G_{Ic}(T)}{\pi a_0 \Lambda_{22}^0}} \quad e \quad S_{is}^L = \sqrt{\frac{2G_{IIc}(T)}{\pi a_0 \Lambda_{44}^0}} \quad (\text{B.8})$$

- **Laminado unidirecional**

$$Y_{is}^T = 1.12\sqrt{2}Y^T \quad e \quad S_{is}^L = \sqrt{2}S^L \quad (\text{B.9})$$

onde

$$\Lambda_{22}^0 = 2 \left( \frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{12}^2}{E_1} \right) \quad e \quad \Lambda_{44}^0 = \frac{1}{G_{12}} \quad (\text{B.10})$$

### Taxa de tenacidade

$$g = 1.12^2 \frac{\Lambda_{22}^0}{\Lambda_{44}^0} \left( \frac{Y^T}{S^L} \right)^2 \quad (\text{B.11})$$

### Tensão de cisalhamento efetiva para a compressão da matriz

$$\begin{aligned} \tau_{\text{eff}}^T &= -\sigma_{22} \cos \alpha \left( \sin \alpha + \eta^T \cos \alpha \right) \\ \tau_{\text{eff}}^L &= \cos \alpha \left( |\tau_{12}| + \eta^L \sigma_{22} \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

onde

$$\eta^T = \frac{-1}{\tan 2\alpha_0} \quad e \quad \eta^L = -\frac{S^T \cos 2\alpha_0}{Y^C \cos^2 \alpha_0} \quad (\text{B.13})$$

### Tensões na estrutura desalinhada das fibras

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^m &= \cos^2 \varphi \sigma_{11} + \sin^2 \varphi \sigma_{22} + 2 \sin \varphi \cos \varphi |\tau_{12}| \\ \sigma_{22}^m &= \sin^2 \varphi \sigma_{11} + \cos^2 \varphi \sigma_{22} - 2 \sin \varphi \cos \varphi |\tau_{12}| \\ \tau_{12}^m &= -2 \sin \varphi \cos \varphi \sigma_{11} + 2 \sin \varphi \cos \varphi \sigma_{22} + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) |\tau_{12}| \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

onde

$$\varphi^R = \frac{|\tau_{12}| + (G_{12} - X^C)\varphi^C}{G_{12} + \sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad e \quad \varphi^C = \tan^{-1} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \left( \frac{s^L}{x^C} + \eta^L \right) \left( \frac{s^L}{x^C} \right)}}{2 \left( \frac{s^L}{x^C} + \eta^L \right)} \right) \quad (\text{B.15})$$