

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Mônica
Maria Gonçalves E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 07.10.91.


ORIENTADOR

ARMAZENADORES DE CALOR LATENTE DE MULTITUBOS
DENTRO DE UMA CARCAÇA

22/91

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TÉRMICA E DE FLUIDOS

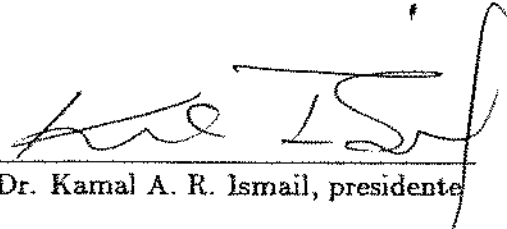
Tese de Mestrado

ARMAZENADORES DE CALOR LATENTE DE
MULTITUBOS DENTRO DE UMA CARCAÇA

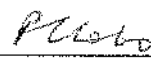
autor: Mônica Maria Gonçalves ⁵⁰⁷

Orientador: Prof. Dr. Kamal A. R. Ismail

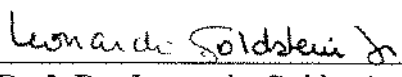
Aprovado por:



Prof. Dr. Kamal A. R. Ismail, presidente



Prof. Dr. Pio Caetano Lobo



Prof. Dr. Leonardo Goldstein Jr.

Campinas, 07 de outubro de 1991.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Não se pode ensinar coisa alguma a alguém;
pode-se apenas auxiliar a descobrir por si mesmo.

Galileo Galilei

À minha família.

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Kamal Abdel Radi Ismail pela dedicação e o incentivo, para a realização deste trabalho.

A equipe técnica do Laboratório de Armazenadores Térmicos e Tubos de Calor.

Aos engenheiros Rubens Stuginski Junior, Vicente Luiz Scalon e Almabrouk Mansor Abogderah pelo incentivo dado ao longo deste trabalho.

Aos colegas da pós graduação, que sempre me apoiaram e incentivaram.

Ao desenhista Wilton Furquim pelos desenhos.

Em especial à meu marido Júlio pela paciência que teve durante a execução deste trabalho.

Conteúdo

Nomenclatura	ix
1 Introdução	1
2 Análise Teórica	8
2.1 Introdução	8
2.2 Modelamento Matemático	8
2.3 Adimensionalização das Equações	13
2.4 Condições de Contorno e Inicial	14
2.5 Adimensionalização das Condições de Contorno, Inicial e Final	15
2.6 Acoplamento do Problema de Mudança de Fase com o Problema do Escoamento no Interior do Tubo	16
3 Análise Numérica	21
3.1 Introdução	21
3.2 Discretização das Equações	21
3.2.1 Volume de Controle Oeste	27
3.2.2 Volume de Controle Leste	28
3.2.3 Volume de Controle Norte	30
3.2.4 Volume de Controle Sul	32
3.2.5 Canto Norte e Oeste	34
3.2.6 Canto Norte e Leste	36
3.2.7 Canto Sul e Oeste	38
3.2.8 Canto Sul e Leste	40
3.2.9 Avaliação da Condutividade Térmica na Fronteira Aleta-Material de Mudança de Fase	42

3.3	Resolução das Equações	44
3.4	Escolha do Número de Pontos da Grade	46
3.5	Fluxograma do Programa Computacional	49
4	Discussão dos Resultados	52
4.1	Análise da Variação do Número de Aletas	53
4.2	Análise da Relação de Compacticidade	67
4.3	Análise da Altura da Aleta	78
4.4	Análise da Espessura da Aleta	86
4.5	Análise da Influência do Número de BIOT	89
5	Conclusões	91
A	Desenvolvimento das equações para a região de mudança de fase	92
	Bibliografia	95

Lista de Figuras

1.1	Unidade armazenadora de calor latente	6
1.2	Arranjo para 5 tubos	7
1.3	Arranjo para 7 tubos	7
2.1	Seção de um armazenador térmico por mudança de fase	9
2.2	Detalhe da região de simetria	9
2.3	Dimensões da região de simetria	10
2.4	Elemento do fluido	17
3.1	Volume de controle para o ponto nodal P	22
3.2	Comportamento em relação a m	23
3.3	Região de simetria	26
3.4	Detalhe do volume de controle para lado oeste	27
3.5	Detalhe do volume de controle para o lado leste	29
3.6	Detalhe do volume de controle para o lado norte	31
3.7	Detalhe do volume de controle para o lado sul	32
3.8	Detalhe do volume de controle para o canto norte e oeste	34
3.9	Detalhe do volume de controle para o canto norte e leste	36
3.10	Detalhe do volume de controle para o canto sul e oeste	38
3.11	Detalhe do volume de controle para o canto sul e leste	40
3.12	Interface aleta - material de mudança de fase.	43
3.13	Gráfico comparativo para o número de pontos na direção radial.	47
3.14	Gráfico comparativo para o número de pontos na direção circunferencial.	48
4.1	Corte transversal no tubo para diversas aletas.	54
4.2	Gráfico comparativo para diversos números de aletas	55

4.3	Descarregamento do fluxo de calor em função do tempo adimensional de solidificação.	57
4.4	Efetividade em função do tempo adimensional de solidificação.	58
4.5	Número de unidades de transferência em função do tempo adimensional de solidificação.	59
4.6	Temperatura adimensional de mistura do fluido na saída do tubo em função do tempo adimensional de solidificação.	60
4.7	Posição da frente de solidificação na direção radial e circunferencial no plano transversal para 4 aletas.	61
4.8	Posição da frente de solidificação na direção radial e circunferencial no plano transversal para 5 aletas.	61
4.9	Posição da frente de solidificação na direção radial e circunferencial no plano transversal para 6 aletas.	62
4.10	Corte longitudinal no tubo para posições circunferenciais fixas	63
4.11	Posição circunferencial fixa de $7,5^\circ$ no caso de 4 aletas	64
4.12	posição circunferencial fixa de $22,5^\circ$ no caso de 4 aletas	64
4.13	posição circunferencial fixa de $6,0^\circ$ no caso de 5 aletas	65
4.14	Posição circunferencial fixa de $18,0^\circ$ no caso de 5 aletas	65
4.15	Posição circunferencial fixa de $5,0^\circ$ no caso de 6 aletas	66
4.16	Posição circunferencial fixa de $15,0^\circ$ no caso de 6 aletas	66
4.17	Relação entre a porcentagem de massa solidificada e o número de aletas.	67
4.18	Configuração geométrica da região de simetria variando-se a relação de compacticidade.	69
4.19	Gráfico comparativo para diversas relação de compacticidade	70
4.20	Descarregamento do fluxo de calor em função do tempo adimensional de solidificação.	71
4.21	Efetividade em função do tempo adimensional de solidificação.	72
4.22	Número de unidades de transferência em função do tempo adimensional de solidificação.	73
4.23	Temperatura adimensional de mistura do fluido na saída do tubo em função do tempo adimensional de solidificação.	74
4.24	Posição da frente de solidificação para relações de compacticidade igual a 2	75
4.25	Posição da frente de solidificação para relações de compacticidade igual a 5	75
4.26	Posição circunferencial for de $7,5^\circ$ e a relações de compacticidade igual a 2	76
4.27	Posição circunferencial for de $22,5^\circ$ e a relações de compacticidade igual a 2	76

4.28	Posição circunferencial for de $7,5^\circ$ e a relações de compacticidade igual a 5 .	77
4.29	Posição circunferencial for de $22,5^\circ$ e a relações de compacticidade igual a 5 .	77
4.30	Relação entre a porcentagem de massa solidificada e a relação de compacticidade.	78
4.31	Gráfico comparativo para diversas alturas de aletas	79
4.32	Descarregamento do fluxo de calor em função do tempo adimensional de solidificação.	80
4.33	Efetividade em função do tempo adimensional de solidificação.	81
4.34	Número de unidades de transferência em função do tempo adimensional de solidificação.	82
4.35	Temperatura adimensional de mistura do fluido na saída do tubo em função do tempo adimensional de solidificação.	83
4.36	Posição da frente de solidificação na direção radial e circunferencial no plano axial para altura da aleta de 0,025m.	84
4.37	Posição da frente de solidificação altura da aleta de 0,029m	85
4.38	Posição da frente de solidificação altura da aleta de 0,037m	85
4.39	Relação da porcentagem de massa solidificada em função da altura da aleta. .	86
4.40	Gráfico comparativo para diversas espessuras de aletas	87
4.41	Temperatura adimensional de mistura do fluido na saída do tubo em função do tempo adimensional de solidificação.	88
4.42	Relação da porcentagem de massa solidificada em função da espessura da aleta.	89
4.43	Gráfico comparativo para vários números de BIOT	90
A.1	93

Lista de Tabelas

1.1	Calor de fusão de materiais de armazenamento de calor latente	2
4.1	Propriedades Termofísicas	53

Nomeclatura

Letras Latinas

a_E	Coeficiente correspondente ao ponto nodal a leste.
a_N	Coeficiente correspondente ao ponto nodal a norte.
a_P	Coeficiente correspondente ao ponto nodal.
a_{P0}	Coeficiente correspondente ao ponto nodal no tempo anterior.
a_S	Coeficiente correspondente ao ponto nodal a sul.
a'_S	Coeficiente correspondente ao ponto nodal na fronteira sul.
a_W	Coeficiente correspondente ao ponto nodal a oeste.
Bi	Número de Biot.
c	Calor específico.
$C(T)$	Capacidade térmica por unidade de volume.
$\bar{C}(T)$	Capacidade térmica por unidade de volume considerando a mudança de fase.
$\tilde{C}(\phi)$	Capacidade térmica adimensional.
f	Parâmetro usado na coordenada radial.
h	Coeficiente de película do fluido e do material de mudança de fase.
g	Parâmetro usado na coordenada circunferencial.
$H(T)$	Entalpia por unidade de volume.
$k(T)$	Condutividade térmica.
$\bar{k}(T)$	Condutividade térmica considerando a mudança de fase.
$\tilde{k}(\phi)$	Condutividade térmica adimensional.
l	Posição ao longo do tubo.
L	Calor latente de fusão.

Letras Latinas

m	Parâmetro que varia entre 0 e 1 e fornece a formulação implícita, explícita e a formulação de Crank-Nicolson.
\dot{m}	Vazão massica
NTU	Número de unidades de transferência.
Pr_t	Número de Prandtl.
\dot{q}	Fluxo de calor.
\dot{q}_{max}	Fluxo máximo possível de se transferir ao fluido.
r	Coordenada adimensional radial do armazenador, raio.
r_a	Raio da aleta.
r_i	Raio externo do tubo interno.
r_m	Raio de simetria.
r_s	Posição radial da fronteira de solidificação.
R	Raio adimensional.
Re	Número de Reynolds.
Ste	Número de Stefan.
t	Tempo.
T	Temperatura.
T_b	Temperatura de mistura do fluido de trabalho que escoia dentro dos tubos.
T_m	Temperatura de mudança de fase.
T_m^+	Temperatura de mudança de fase para o estado líquido ($= T_m + \Delta T$).
T_m^-	Temperatura de mudança de fase para o estado sólido ($= T_m - \Delta T$).
u	Velocidade.
\bar{u}	Velocidade média do fluido.
V	Volume de controle.
x	Coordenada axial dimensional.
x'	Posição ao longo do tubo adimensional.
X'	Coordenada axial adimensional

Letras Gregas

δ	Função delta de Dirac.
$(\delta\theta)_e$	Distância entre o ponto nodal P e o ponto nodal E .
$(\delta r)_n$	Distância entre o ponto nodal P e o ponto nodal N .
$(\delta r)_s$	Distância entre o ponto nodal P e o ponto nodal S .
$(\delta\theta)_w$	Distância entre o ponto nodal P e o ponto nodal W .
Δ	Variação.
ΔT	Metade da faixa de temperatura em que ocorre a mudança de fase.
$\Delta\theta$	Comprimento do volume de controle na direção circunferencial.
ΔR	Comprimento do volume de controle na direção radial.
ΔV	Volume de controle.
ϵ	Faixa de temperatura em que ocorre a mudança de fase adimensional.
ε	Efetividade.
ϕ	Temperatura adimensional.
Γ	Fluxo de calor adimensional.
λ	Calor latente por unidade de volume.
$\eta(u)$	Função de grau unitário.
θ	Direção circunferencial.
ρ	Massa específica.
ρ'	Massa específica relativa.
τ	Tempo adimensional.
τ_1	Tempo adimensional ao longo do tubo.
μ	Viscosidade cinemática.
μ'	Viscosidade cinemática relativa.

Expoentes

0	referente ao tempo anterior.
1	referente ao tempo atual.

Índices

- a* Referente a aleta.
- as* Referente a relação entre a aleta e o sólido.
- b* Referente ao fluido.
- f* Referente ao final do processo.
- l* Referente ao estado líquido.
- ls* Referente a relação entre o líquido e o sólido.
- s* Referente ao estado sólido.
- sb* Referente a relação entre o estado sólido e o fluido escoando no interior do tubo.

Sumário

Esta pesquisa apresenta o modelo analítico e as predições numéricas de uma unidade de armazenamento térmico com tubos aletados axialmente e comparada a uma unidade sem aletas. No sistema estudado, o material de mudança de fase é colocado na carcaça. Os tubos aletados axialmente são igualmente espaçados num arranjo triangular estendendo ao longo do eixo da unidade. Os tubos de alimentação e descarga são conectados a unidade. A formulação matemática é baseada numa análise bidimensional para o problema de mudança de fase em torno de um cilindro aletado externamente, a equação da energia é escrita na forma entálpica e o processo de transferência de calor é regido por condução pura. O calor sensível armazenado no material de mudança de fase é desprezível quando comparado ao seu calor latente. A temperatura de entrada do fluido de trabalho na unidade de armazenamento de calor é assumida constante em função do tempo. O coeficiente de transferência de calor entre o fluido e o tubo aletado é considerado constante ao longo da parede do tubo. A solução numérica da equação da energia é baseada no método de volume finito e o esquema ADI. O acoplamento do problema acima mencionado com o fluxo do fluido de trabalho é obtido pelo balanço de energia no elemento de fluido e assim obtendo a temperatura média de mistura em função do tempo e da posição.

Os resultados numéricos mostram os efeitos do comprimento, espessura e número de aletas, efetividade e NTU. São também incluídas comparações entre o tubo aletado e sem aletas.

Abstract

In this research are presented the analytical model and numerical predictions of axially finned PCM storage unit together with comparisons of a PCM storage unit without fins. In the studied case, the phase change material (PCM) was put in the shell. The axial finned tubes are located in equally spaced triangular arrangement extending along the axis of the tank between its covering ends. Feeding and discharge tubes are connected to the tank. The mathematical formulation is based upon two dimensional analysis for the phase change problem around an externally finned cylinder, where the energy equation is written in its enthalpic form and heat transfer process is controlled by pure conduction. The sensible heat transfer part of the phase change material was considered negligible compared with its latent heat. The working fluid inlet temperature of the storage tank is assumed constant with time and heat transfer coefficient between the fluid and the wall is considered constant along the finned tube. The numerical solutions of the energy equation was based upon the control volume technique and ADI scheme. Coupling the above problem with the flow problem is achieved by performing an energy balance on the fluid element inside the tube and hence determine the fluid bulk temperature as a function of time and location along the finned tube.

The numerical results show the effect of fins length, number of fins, fins thickness, effectiveness and NTU. Comparison between finned und unfinned cases is also included.

Capítulo 1

Introdução

O armazenamento térmico de energia é necessário para muitas aplicações solares de aquecimento de água, resfriamento e aquecimento ambiental, processos de secagem, nas aplicações industriais convencionais e não convencionais onde a demanda e geração de energia não coincidem ou são intermitentes. Esse armazenamento térmico pode ser realizado via elevação da temperatura do material sólido ou de um líquido adequado, nesse caso é chamado armazenamento em calor sensível. Pode-se também armazenar calor em formato de calor latente de mudança de fase em sais, materiais compostos e produtos eutéticos ou puros. Finalmente ao conseguir armazenar calor em formato combinado de calor sensível e calor latente, neste caso o sistema é chamado sistema híbrido.

Qualquer material sólido estável térmica e quimicamente, com um calor específico relativamente alto e alta densidade, pode ser usado para armazenamento de calor sensível. Os elevados valores de calor específico e densidade são necessários para minimizar o volume da instalação de armazenamento. O armazenamento de calor latente requer uma mudança de fase do material de armazenamento. Podem ser usados dois processos de mudança de fase sólido-líquido, os processos familiares de fusão e solidificação e uma reação química de hidratação e desidratação de sais. Às temperaturas inferiores ao ponto de hidratação o não-hidratado torna-se hidratado e cristalino com o desenvolvimento de calor. Quando a temperatura é aumentada, os cristais dissolvem-se na água de hidratação, absorvem calor. A vantagem da armazenagem de calor latente é que o calor de fusão é várias vezes maior que o calor específico, o que reduz o volume de armazenamento. Um sistema de armazenamento usando parafina ou cera requer apenas um quarto do volume de um sistema termicamente equivalente empregando água. A desvantagem é que o desempenho dos materiais de armazenamento latente atualmente disponíveis degrada-se com o tempo, devendo ser repostos em

poucos anos; são também consideravelmente mais caros que os de armazenamento de calor sensível que usam água ou de pedras. A tabela (1.1) relaciona os pontos de fusão, calores de fusão e densidades de dois materiais comuns de armazenamento de calor latente.

Tabela 1.1: Calor de fusão de materiais de armazenamento de calor latente

Material	Ponto de fusão °C	Calor de fusão kJ/kg	Massa específica kg/m ³	Calor de fusão por unidade de volume kJ/m ³
Sal de Glauber	32	240	1100	260.000
Cera de parafina	74	230	650	150.000

Uma exigência adicional para o uso de materiais de armazenamento de calor latente é a necessidade de se encontrar um material com ponto de fusão apropriado. A temperatura na qual ocorre a mudança de fase deve ser ajustar à aplicação desejada

No armazenador de calor latente, o principal mecanismo de transferência de calor é o processo de mudança de fase. No processo de mudança de fase ocorre a existência de uma fronteira móvel que separa duas fases. A forma que está superfície é tratada deve ser determinada, pois o calor é liberado ou absorvido através desta fronteira.

Um primeiro trabalho sobre mudança de fase foi realizado por Stefan, em um estudo sobre a formação de gelo, assim os problemas de congelamento são chamados de "Problemas de Stefan".

Nos trabalhos posteriores estudou-se várias geometrias e outros materiais de mudança de fase chegando as soluções exatas para os casos mais simples, soluções semi-analíticas e soluções numéricas para resolver os problemas mais elaborados.

Um exemplo de solução exata foi estudada por Bart [2] para a solidificação do aço para uma geometria unidimensional com temperatura constante.

Entre as soluções numéricas há várias publicações como Murray e Landis [25] que mostram uma solução numérica para a região de transição de mudança de fase onde o mecanismo de transferência de calor é só por condução unidimensional. Bonacina [7] também apresenta uma solução numérica para o caso unidimensional, mas o enfoque analítico consiste na aproximação do efeito de calor latente como uma grande capacidade de calor em um pequeno intervalo de temperatura. Já Voller [47] prediz uma formulação do problema de Stefan por via entálpica. Enquanto que Hsiao [14] mostra um eficiente algoritmo através da técnica de elementos finitos aplicado ao caso bidimensional para o problema de mudança de fase. Mas Cao [11] retorna a

formulação entálpica para resolver problemas de mudança de fase tridimensionais com fontes de calor móvel. Kim [19] propõe um método numérico para problemas de mudança de fase que utiliza diferenças finitas onde a fronteira e as condições são irregulares, para geometrias uni e bidimensionais.

Para o caso de geometrias arbitrárias London e Seban [22] apresentam um método geral de aproximação para o problema de solidificação em superfícies esféricas, cilíndricas e plana, principalmente utilizando o gelo como material de mudança de fase, neste método o calor específico é desprezado. Enquanto que Lazaridis [20] mostra um método para resolver problemas de solidificação por diferenças finitas que permite determinar a distribuição da temperatura. Shamsundar [38] analisa a condução de calor em geometrias multidimensionais para a região de mudança de fase através de um modelo entálpico. Saltoh [36] que apresenta um método numérico simples para resolver problemas bi ou tridimensionais em geometrias arbitrárias. E Okada [28] analisa o comportamento do calor vindo da fusão de um material de mudança de fase entre duas paredes horizontais adiabáticas, sendo que recebe calor de uma parede vertical.

Alguns trabalhos apresentam na formulação a ação da convecção natural na parte líquida do material de mudança de fase. Sparrow et al. [40] analisa a fusão do material de mudança de fase com a presença de convecção natural para o caso multidimensional, a solução é apresentada por diferenças finitas o sólido está inicialmente na temperatura de fusão. Em outro trabalho Sparrow et al. [42] mostra o congelamento controlado por convecção natural onde o líquido está inicialmente superaquecido ou na temperatura de solidificação onde o material de mudança de fase está ao redor de um cilindro sem aletas. Já em Sparrow et al. [43] observa-se o surgimento da convecção natural na parte líquida durante o processo de congelamento, onde este mecanismo causa o aumento do tempo de descarga do armazenador, mas observa-se que na região de transição a condução domina.

E em Sparrow et al. [44] realiza teste em um tubo aletado com quatro aletas, e observa o aparecimento da convecção natural na parte líquida, e esta poderia atrasar ou interromper a solidificação. O uso de aletas atrasa o domínio da convecção natural sobre a condução neste processo. Cao [9] propõe uma modelagem numérica para o problema de mudança de fase incluindo a ação da convecção natural, através do método de equivalência com relação ao calor específico, e em coordenadas cartesianas. E Thiarth [46] mostra um esquema em diferenças finitas para resolver problemas de convecção natural através do algoritmo simplex.

Em uma geometria tipo uma cunha, Budhia [8] estudou a transferência de calor com fusão ou solidificação e propôs uma solução analítica para prever a distribuição da temperatura e a posição da fronteira de mudança de fase.

Para geometria cilíndricas Pekeris e Slichter [32] propõem uma solução aproximada para o estudo da formação do gelo ao redor de um cilindro quando o líquido está inicialmente na temperatura de congelamento. Lederman [21] demonstra uma solução para a solidificação ou fusão num cilindro circular assimétrico horizontal com uma fonte externa de calor. Sparrow, et al. [41] analisa a fusão de um sólido subresfriado através de uma fonte cilíndrica, onde a resolução numérica é feita por diferenças finitas explícita e implícita. Bathelt [3] mostra um armazenador de calor latente com geometria cilíndrica onde há três aletas que geram calor. Observa-se a influência do arranjo no comportamento da frente de fusão e a presença da convecção natural. Nebra [26] estuda um armazenador de calor latente onde aplica o método descrito por Murray e Landis [25] e através da discretização por diferenças finitas compara o método para diversos números de Biot, de Stefan, considerando a temperatura do material de mudança de fase acima da temperatura de saturação, pela variação dos parâmetros de subresfriamentos do número de Stefan. Shamsundar [39] mostra os gráficos de NTU e efetividade para uma unidade de armazenamento de calor latente tipo trocador de calor casco tubo horizontal. Bathelt [4] estuda a eficiência da superfícies extendidas num cilindro horizontal imerso no material de mudança de fase durante o processo de fusão e de solidificação. Rieger [35] analisa o mecanismo de transporte de calor durante a fusão num cilindro circular horizontal com presença de convecção natural. Menon [23] estuda um armazenamento de energia por calor latente utilizando a parafina VAX sendo este armazenador do tipo cilindro fechado.

Prusa [33] estudou a fusão ao redor de um cilindro horizontal com parede mantida a temperatura constante. Okada [27] Estudou o comportamento de um cilindro vertical embebido no material de mudança de fase, onde o sólido esta na temperatura de fusão ou esta sujeito a uma faixa de temperatura, e apresenta convecção natural. Kalthori [17] estudou a transferência de calor num cilindro vertical com ou sem aletas embebido no material de mudança de fase, observou-se o calor total liberado ou consumido ao longo do tempo mantendo a temperatura do sólido abaixo da temperatura de mudança de fase. Ho e Chen [15] propuseram uma simulação numérica da fusão do gelo ao redor de um cilindro horizontal mantendo a temperatura da superfície constante. Padmanabhan [30] mostra a mudança de fase ao redor de um cilindro com aletas axiais retangulares onde a temperatura do tubo é mantida constante e assume-se que o processo de transferência de calor é regido por condução de calor. Sasaguchi [37] mostra as características da transferência de calor em uma unidade armazenadora de calor latente com tubos aletados, observando os processos de fusão e de solidificação e comparando-os com uma unidade sem aletas. Souza Mendes e Pinho Brasil [45] estudaram a transferência de calor durante fusão ao redor de um cilindro isotérmico vertical. Prusa [33] estudou a fusão ao redor de um cilindro horizontal aquecido com fluxo

de calor constante. Kelka [18] prediz o comportamento de um fluxo laminar através de um tubo circular horizontal com aletas longitudinais internas interrompidas na direção do fluxo e compara com o tubo totalmente aletado. E finalmente Cao [10] mostra as características de um módulo de armazenamento de energia térmica horizontal principalmente a influência da velocidade do fluido que passa pelo tubo horizontal.

O objetivo deste trabalho é estudar o desempenho de uma unidade armazenadora de calor latente mostrada na figura 1.1, onde os tubos que a compõe são aletados e submersos no material de mudança de fase. Dentro dos tubos escoia um fluido de trabalho que será o responsável pela transferência de calor do material de mudança de fase. Nas figuras 1.2 e 1.3, temos os arranjos dos tubos dentro da carcaça que forma a unidade armazenadora.

Avaliaremos o desempenho da unidade armazenadora de calor, principalmente em relação a efetividade, número de unidades de transferência além de obter o perfil e a variação da temperatura do fluido ao longo dos tubos e o calor armazenado a cada instante e o calor total armazenado. Analisaremos ainda a influência das aletas para minimizar os tempos de carga e descarga da unidade em processo.

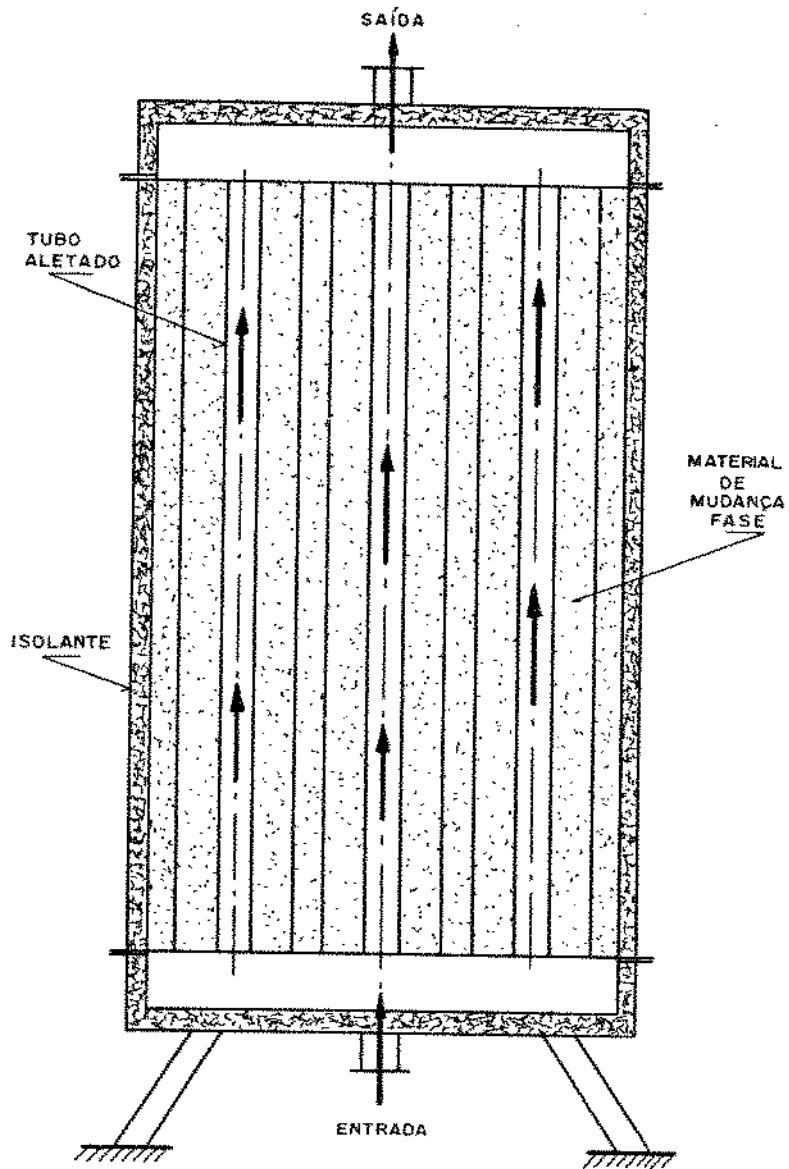


Figura 1.1: Unidade armazenadora de calor latente

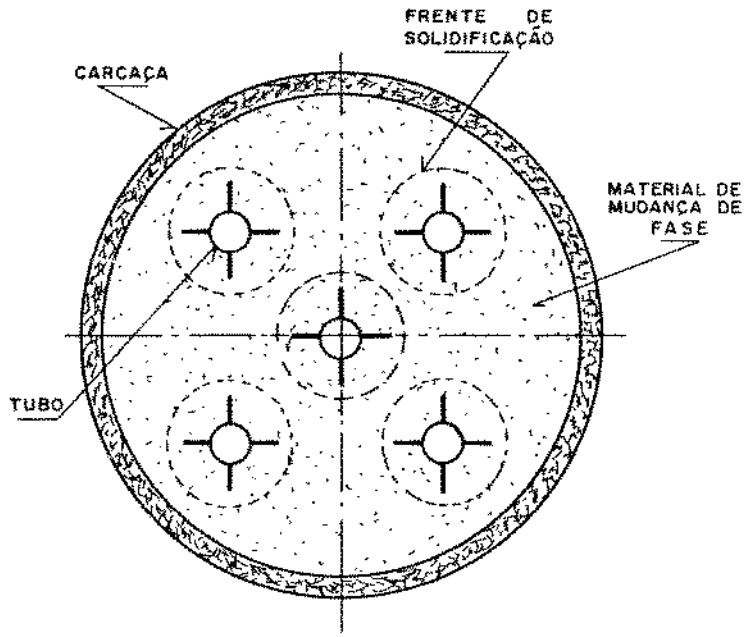


Figura 1.2: Arranjo para 5 tubos

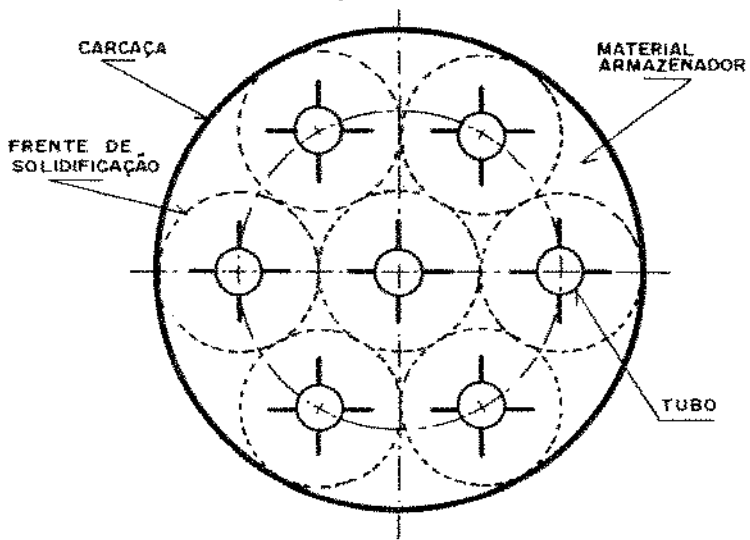


Figura 1.3: Arranjo para 7 tubos

Capítulo 2

Análise Teórica

2.1 Introdução

Muitas aplicações de interesse em engenharia envolve a solução da equação que descreve a condução de calor na região mudança de fase. Contudo, enquanto muitos resultados teóricos importantes estão disponíveis sobre a existência da unicidade, e das propriedades das soluções clássicas, as fontes da literatura [1,6] revelam que a maioria das soluções analíticas reais tratam apenas com a geometria unidimensional e condições de contorno muito especiais e portanto não podem ser estendidas a muitos problemas práticos.

Nos processos de mudança de fase que envolvem substâncias não são puras e, portanto, o efeito do calor latente não pode ser expresso por uma temperatura finita, que depende da capacidade de calor, pois ela acontece para um intervalo de temperatura [7].

2.2 Modelamento Matemático

O modelo matemático foi separado em dois casos; o primeiro estudou-se o formulamento matemático na região mudança de fase, ou seja, no material de mudança de fase e o segundo caso no acoplamento do material de mudança de fase com o escoamento do fluido.

Uma seção de um armazenador térmico com mudança de fase onde os tubos trocadores de calor são cilindros aletados está esquematizado na figura (2.1). A figura (2.2) mostra um detalhe da figura (2.1), onde observa-se a existência de uma região de simetria em torno de cada tubo aletado.

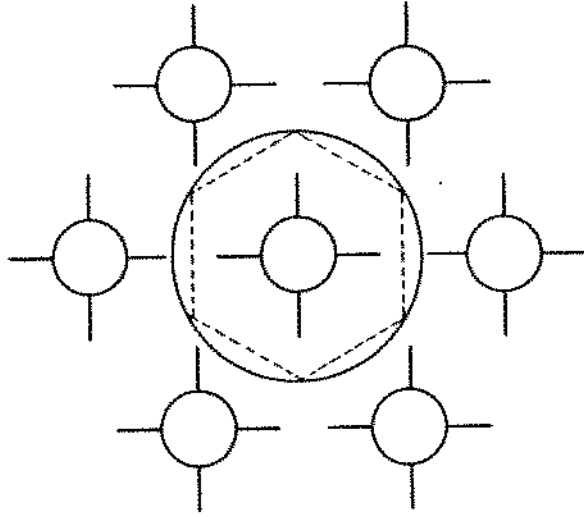


Figura 2.1: Seção de um armazenador térmico por mudança de fase

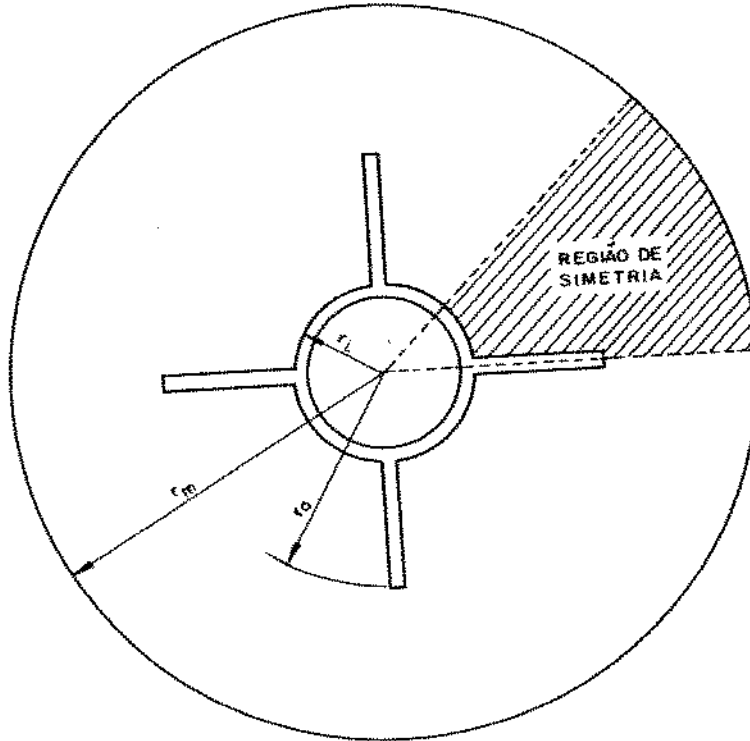


Figura 2.2: Detalhe da região de simetria

A figura (2.3) mostra a geometria da região de simetria e nela estão definidos os parâmetros geométricos que são usados no modelamento matemático. Em especial o símbolo r_m indica a posição máxima que a interface sólido líquido alcança a partir deste ponto o fluxo de calor que sae na interface não consegue atingir o tubo interno, portanto não trocando mais calor, ou seja, a posição r_m poderia ser considerada adiabática.

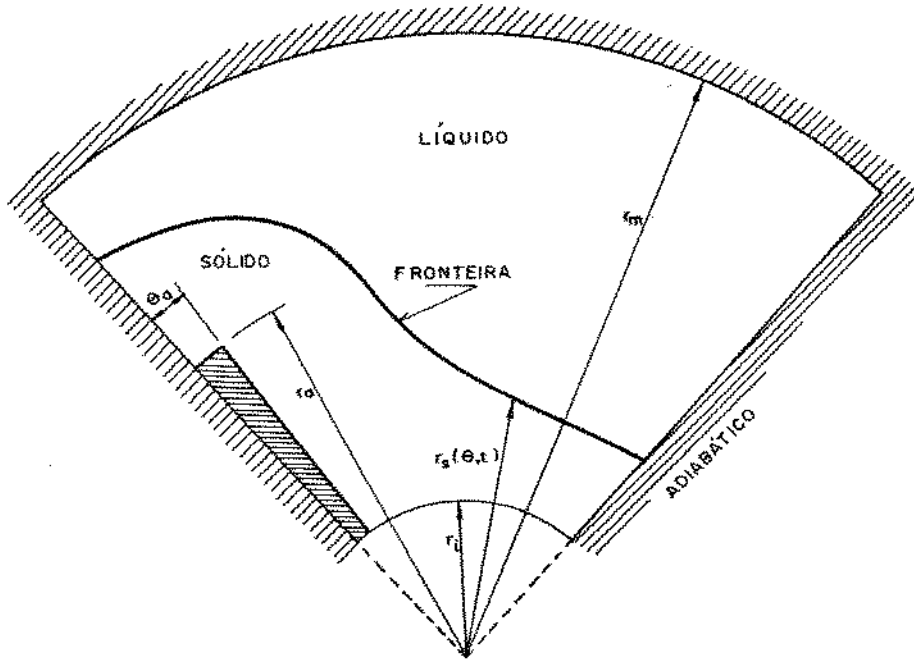


Figura 2.3: Dimensões da região de simetria

Considerando que o processo de transferência de calor seja dominado por condução, para que não haja atraso no processo de solidificação ou de fusão por causa da convecção natural, a equação da energia pode ser descrita para todo o domínio como:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r k \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad (2.1)$$

Escrevendo-a apenas para o material de mudança de fase tem-se:

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{k_s}{r} \frac{\partial T_s}{\partial \theta} \right] \quad (2.2)$$

para a região sólida, ou seja, em $r_i < r < r_s$

$$\rho_l c_l \frac{\partial T_l}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{k_l}{r} \frac{\partial T_l}{\partial \theta} \right] \quad (2.3)$$

para a região líquida, ou em $r_s < r < r_m$.

E na fronteira sólido-líquido, sendo r_m a localização da fronteira, conforme Ozisik [29], temos duas condições que devem ser satisfeitas. A primeira condição impõe que as temperaturas nas fases sólida e líquida devem ser iguais a uma temperatura constante pré-estabelecido T_m . Essa temperatura é geralmente a temperatura de solidificação ou fusão do material de mudança de fase. Assim:

$$T_s = T_l = T_m \quad (2.4)$$

A outra condição na interface é obtida pelo balanço de energia:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Fluxo de calor} \\ \text{na direção radial} \\ \text{na fase sólida} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Fluxo de calor} \\ \text{na direção radial} \\ \text{na fase líquida} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Fluxo de calor} \\ \text{resultante da} \\ \text{solidificação} \end{array} \right)$$

ou podemos escrever:

$$-(\dot{q}_s - \dot{q}_l) = \rho_s L \frac{\partial r_s}{\partial t}$$

Substituindo os fluxos de calor para a geometria em estudo, temos:

$$\left[k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \right] \left[1 + \frac{1}{r_s^2} \left(\frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^2 \right] = \rho_s L \frac{\partial r_s}{\partial t} \quad (2.5)$$

Definindo as capacidades térmicas e calor latente por unidade de volume:

$$\rho_s c_s = C_s(T)$$

$$\rho_l c_l = C_l(T)$$

$$\rho_s L = \lambda$$

Segundo Bonacina [7] a equação para a fronteira de mudança de fase (2.5), origina-se do "pulo" de magnitude λ que a entalpia por unidade de volume experimenta na faixa de transição de fase T_m . Desta maneira, da definição de entalpia.

$$H(T) = \int_T C(T) dT + \lambda \eta(T - T_m) \quad (2.6)$$

onde

$$\eta(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

é a função de grau unitário. A capacidade de calor "equivalente" por unidade de volume $\bar{C}(T)$ pode ser definida como:

$$\bar{C}(T) = \frac{dH(T)}{dT} = C(T) + \lambda\delta(T - T_m) \quad (2.8)$$

onde

$$C(T) = \begin{cases} C_s(T), & T < T_m^- \\ C_l(T), & T > T_m^+ \end{cases} \quad (2.9)$$

o termo $\lambda\delta(T - T_m)$ é uma função de Dirac, que fornece um percentual do calor latente total em função do intervalo de mudança de fase.

Integrando (2.8) temos:

$$\int_{T_m^-}^{T_m^+} \bar{C}(T) dT = \lambda + \int_{T_m^-}^{T_m} C_s(T) dT + \int_{T_m}^{T_m^+} C_l(T) dT \quad (2.10)$$

que contém as variações de entalpia durante todo o processo de mudança de fase. Considerou-se que C_s e C_l não dependam da temperatura no intervalo $T_m^- < T < T_m^+$, resultando:

$$\bar{C}(T) = \begin{cases} C_s(T), & T < T_m^- \\ C_l(T), & T > T_m^+ \\ \frac{\lambda}{2\Delta T} + \frac{C_s(T) + C_l(T)}{2}, & T_m^- \leq T \leq T_m^+ \end{cases} \quad (2.11)$$

De modo análogo para a condutividade térmica temos:

$$\bar{k}(T) = \begin{cases} k_s(T), & T < T_m^- \\ k_l(T), & T > T_m^+ \end{cases} \quad (2.12)$$

e que $k_s(T)$, $k_l(T)$ variam linearmente com a temperatura no intervalo $T_m^- < T < T_m^+$, resultando:

$$\bar{k}(T) = \begin{cases} k_s(T), & T < T_m^- \\ k_l(T), & T > T_m^+ \\ k_s(T) + \frac{k_l(T) - k_s(T)}{2\Delta T} (T - (T_m^-)) & T_m^- \leq T \leq T_m^+ \end{cases} \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) e (2.11) em (2.1) e (2.2), a seguinte expressão resulta:

$$\bar{C}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \bar{k}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{k}(T)}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (2.14)$$

A equação (2.14) converge para (2.5), quando a temperatura tende para a temperatura de mudança de fase, conforme demonstrado por Bonacina [7] e Shamsundar [38]. Desta maneira a equação (2.14) descreve sozinha todo o problema de mudança de fase.

Para a solução do problema de condução bidimensional na aleta, utiliza-se a equação (2.14) com as propriedades da aleta, e definindo:

$$\bar{C}(T) = \rho_a c_a$$

$$\bar{k}(T) = k_a$$

Resultando assim, que o modelo matemático para a região de mudança de fase fosse representado por apenas uma equação, (2.14).

2.3 Adimensionalização das Equações

Para uma análise dos parâmetros envolvidos no modelo, adota-se as seguintes transformações adimensionais:

$$\phi = \frac{T - T_b}{T_m^+ - T_b} \quad \text{temperatura adimensional;} \quad (2.15)$$

$$R = \frac{r}{r_i} \quad \text{coordenada radial adimensional;} \quad (2.16)$$

$$\tau = \frac{k_a(T)t}{C_s r_i^2} \quad \text{tempo adimensional;} \quad (2.17)$$

$$\epsilon = \frac{\Delta T}{T_m^+ - T_b} \quad \text{faixa de temperatura de mudança de fase;} \quad (2.18)$$

$$\text{Bi} = \frac{h r_i}{k_s(T)} \quad \text{número de Biot;} \quad (2.19)$$

$$S_{te} = \frac{C_s(T)\Delta T}{\lambda} \quad \text{número de Stefan;} \quad (2.20)$$

Como condutividade térmica adimensional:

$$\tilde{k}(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi < 1 - 2\epsilon \\ k_{ls}(\phi), & \phi > 1 \\ 1 + \frac{k_l(\phi) - k_s(\phi)}{2 k_s(\phi)} \left(\frac{\phi - 1}{\epsilon} + 2 \right) & 1 - 2\epsilon \leq \phi \leq 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

e

$$\tilde{k}(\phi) = k_{as} \text{ para a aleta} \quad (2.22)$$

Para o calor específico na forma adimensional:

$$\tilde{C}(\phi) = \begin{cases} 1 & \phi < 1 - 2\epsilon \\ c_{ls}(\phi) & \phi > 1 \\ \frac{1}{2S_{te}} + \frac{C_s(\phi) + C_l(\phi)}{2 C_s} & 1 - 2\epsilon \leq \phi \leq 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

e

$$\tilde{C}(\phi) = C_{as} \text{ para a aleta} \quad (2.24)$$

E a equação (2.14) na forma adimensional fica:

$$\tilde{C}(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \tilde{k}(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{k}(\phi)}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (2.25)$$

2.4 Condições de Contorno e Inicial

A equação (2.14), para o modelo em estudo, exigem condições de contorno compatíveis com este tipo de equação, como mostra a figura (2.3).

Condições de Contorno Fora da Interface Sólido Líquido

- Na parede do duto o calor é transferido por convecção:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_i} = \frac{h}{k(T)} [T(r_i, \theta, t) - T_b] \quad (2.26)$$

- Adiabática em $r = r_m$:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_m} = 0 \quad (2.27)$$

- Simetria em $\theta = 0$:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0 \quad (2.28)$$

- Simetria em $\theta = \theta_m$:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_m} = 0 \quad (2.29)$$

Condições Inicial e Final

- No início todo o material deverá estar no estado líquido:

$$T(r, \theta, 0) = T_m^+ \text{ em } t = 0 \quad (2.30)$$

- No final todo o material deverá estar solidificado:

$$T(r, \theta, 0) = T_m^- \text{ em } t = t_f \quad (2.31)$$

2.5 Adimensionalização das Condições de Contorno, Inicial e Final

Utilizando as variáveis adimensionais já definidas anteriormente, as condições de contorno resultam:

- Na parede do tubo:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{R=1} = \text{Bi } \phi \quad (2.32)$$

- Adiabática:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{R=\frac{r_m}{r_i}} = 0 \quad (2.33)$$

- Por simetria:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0 \quad (2.34)$$

- Por simetria:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_m} = 0 \quad (2.35)$$

E as condições inicial e final:

$$\phi = 1 \quad \text{em} \quad \tau = 0 \quad (2.36)$$

$$\phi = 1 - 2\epsilon \quad \text{em} \quad \tau = \tau_f \quad (2.37)$$

O sistema apresentado pela equação (2.25) pelas condições de contorno (2.32),(2.33), (2.34) e (2.35) resultam na solução para o problema de mudança de fase. A solução para o caso de armazenador com fluido de trabalho escoando, cedendo ou recebendo calor só pode ser obtido acoplando ao problema acima o modelo para o escoamento do fluido de trabalho, isto é, acoplando um balanço de energia num volume elementar do fluido por formulação diferencial.

2.6 Acoplamento do Problema de Mudança de Fase com o Problema do Escoamento no Interior do Tubo

Considerou-se a figura (2.4), onde em um elemento do fluido de trabalho, aplicou-se um balanço de energia, sendo assim foi possível o acoplamento do problema de mudança de fase ao problema do escoamento do fluido, conseguindo um modelo completo para descrever a unidade armazenadora em investigação.

Primeiramente, estudou-se o fluxo de calor transferido ao fluido escoando dentro do tubo por unidade de comprimento.

O fluxo de calor vindo do material de mudança de fase:

$$\dot{q} = 2\pi r_i k_s \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_i} \quad (2.38)$$

A quantidade máxima de calor possível de se transferir ao fluido no elemento é dada por:

$$\dot{q}_{\max} = 2\pi r_i h (T_m^+ - T_b) \quad (2.39)$$

Definindo o fluxo de calor adimensional como:

$$\Gamma = \frac{\dot{q}}{\dot{q}_{\max}} \quad (2.40)$$

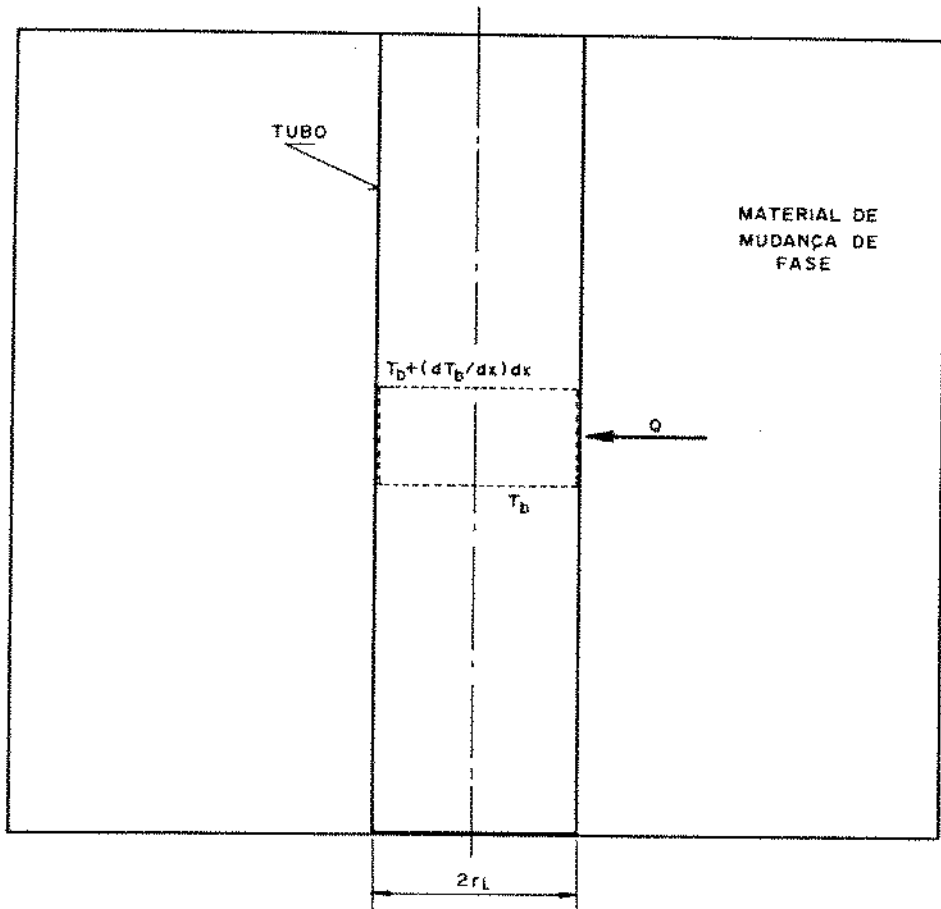


Figura 2.4: Elemento do fluido

ou seja, a razão do calor transferido por comprimento.

Substituindo (2.38) e (2.39) em (2.40) temos:

$$\Gamma = \frac{\dot{q}}{2\pi r_i h (T_m^+ - T_b)} = \frac{2\pi r_i k_s \frac{\partial T}{\partial r}}{2\pi r_i h (T_m^+ - T_b)} \quad (2.41)$$

e simplificando:

$$\Gamma = \frac{k_s \frac{\partial T}{\partial r}}{h (T_m^+ - T_b)} \quad (2.42)$$

Adimensionalizando:

$$\Gamma = \frac{1}{Bi} \frac{\partial \phi}{\partial r} (1, \tau) \quad (2.43)$$

E aplicando a condição de contorno na parede (2.32), resulta que o fluxo de calor adimensional:

$$\Gamma = \phi(1, \tau) \quad (2.44)$$

Fazendo um balanço de energia no elemento do fluido mostrado na figura (2.4) e considerando que a temperatura média do fluido varia ao longo do tubo, tem-se:

$$\dot{m}_b c_b T_b + \dot{q} dx = \dot{m}_b c_b \left(T_b + \frac{dT_b}{dx} dx \right) \quad (2.45)$$

ou mesmo:

$$\dot{q} = \dot{m}_b c_b \frac{dT_b}{dx} \quad (2.46)$$

onde a vazão mássica \dot{m}_b , pode ser colocada em termos da velocidade média do fluxo vem como:

$$\dot{m}_b = \rho_b \pi r_i^2 \bar{u} \quad (2.47)$$

Combinando as equações (2.40) e (2.46) e rearranjando-as:

$$\frac{dT_b}{dx} = 2 \frac{h(T_m^+ - T_b)}{\rho_b r_i \bar{u} c_b} \Gamma \quad (2.48)$$

Adotando-se um sistema de coordenadas temos:

$$\bar{u} = \frac{dx}{dt} \quad (2.49)$$

pode-se então reescrever (2.48) como:

$$\frac{dT_b}{(T_m^+ - T_b)} = 2 \frac{h\Gamma}{\rho_b r_i c_b} dt \quad (2.50)$$

ou multiplicando e dividindo por $k_s, C_s r_i$ temos,

$$\frac{dT_b}{(T_m^+ - T_b)} = 2 \frac{h k_s c_s r_i \Gamma}{\rho_b c_b k_s r_i^2} dt \quad (2.51)$$

Lembrando que $\tau = \frac{k_s(T) t}{C_s r_i^2}$, $\text{Bi} = \frac{h r_i}{k_s}$ e fazendo $C_{sf} = \frac{C_s}{\rho_b c_b}$ teremos:

$$\frac{d(T_m^+ - T_b)}{(T_m^+ - T_b)} = -2\text{Bi} C_{sf} \Gamma(\tau) d\tau \quad (2.52)$$

Integrando (2.52) sabendo que Γ é uma função somente de τ , conforme a equação (2.41), vem:

$$\ln \left[\frac{T_m^+ - T_b(\tau_1)}{T_m^+ - T_b(0)} \right] = -2\text{Bi } C_{sf} \int_0^{\tau_1} \Gamma(\tau) d\tau \quad (2.53)$$

ou mesmo:

$$T_b(\tau_1) = T_m^+ - \exp \left[-2\text{Bi } C_{sf} \int_0^{\tau_1} \Gamma(\tau) d\tau + \ln(T_m^+ - T_b(0)) \right] \quad (2.54)$$

que nos fornece a temperatura média do fluido ao longo do tubo, no decorrer do tempo.

Para determinar o tempo adimensional usamos a definição de τ junto com (2.49), assim obtemos:

$$\tau = \frac{\mu^* X^*}{\text{Re } \text{Pr}_t \rho^*} \quad (2.55)$$

onde:

$$\text{Pr}_t = \frac{c_s \mu_l}{k_s}, \quad (\text{Número de Prandtl da fase sólida}) \quad (2.56)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_b \bar{u} r_i}{\mu_b} \quad (\text{Número de Reynolds}) \quad (2.57)$$

$$\mu^* = \frac{\mu_l}{\mu_b} \quad (\text{Viscosidade relativa}) \quad (2.58)$$

$$\rho^* = \frac{\rho_s}{\rho_b} \quad (\text{Densidade relativa}) \quad (2.59)$$

$$X^* = \frac{x}{r_i} \quad (\text{Distância adimensional}) \quad (2.60)$$

Definindo efetividade como sendo a relação entre o calor real trocado sobre a máxima troca de calor possível, ou seja:

$$\varepsilon = \frac{\dot{q}}{\dot{q}_{\max}} = \Gamma \quad (2.61)$$

mas

$$\dot{q} = \frac{\dot{m}_b c_b}{l} [T_b(l) - T_b(0)] \quad (2.62)$$

onde l é o comprimento do tubo no qual a partícula de fluido está no tempo τ .

$$\dot{q}_{\max} = 2\pi r_i h [T_m^+ - T_b(0)] \quad (2.63)$$

logo:

$$\varepsilon = \frac{\dot{m}_b c_b}{2\pi r_i l h} \left[\frac{T_b(l) - T_b(0)}{T_m^+ - T_b(0)} \right] \quad (2.64)$$

Definindo:

$$NTU = \frac{2\pi r_i l h}{\dot{m}_b c_b} \quad (2.65)$$

vem

$$\varepsilon = \frac{\phi(l)}{NTU} \quad (2.66)$$

onde:

$$\phi(l) = \left[\frac{T_b(l) - T_b(0)}{T_m^+ - T_b(0)} \right] \quad (2.67)$$

Finalmente podemos escrever que a temperatura do fluido escoando é dada por:

$$\phi(\tau) = 1 - \exp[-2Bi C_{sf} \int_0^\tau \Gamma(\tau) d\tau] \quad (2.68)$$

Capítulo 3

Análise Numérica

3.1 Introdução

A análise numérica foi estudada para a região de mudança de fase, ou seja, baseada na resolução da equação (2.25) transformando em um sistema de equações algébricas.

Observamos que esta equação é um caso particular da equação da condução de calor em regime transiente, que pode ser escrita como:

$$\frac{D(\rho c u T)}{D t} = \nabla(k \bar{\nabla} T) + S \quad (3.1)$$

onde S é chamado termo fonte.

Utilizando a técnica de volume finito descrita por Patankar [31] para discretizar a equação (2.25), esta técnica tem como principal vantagem obter resultados que garantem o realismo físico do problema.

3.2 Discretização das Equações

No método de volume de controle, primeiramente sub-divide o domínio em volumes de controle e a cada volume de controle está associado um ponto nodal.

A equação diferencial que exprime o princípio de conservação é discretizada pela integração no volume de controle ao redor dos pontos da grade, assim cada volume de controle satisfaz o princípio de conservação e dessa forma todo o domínio também o satisfará, conforme mostrado na figura (3.1).

Para um determinado ponto P , associada a um volume de controle temos a equação.

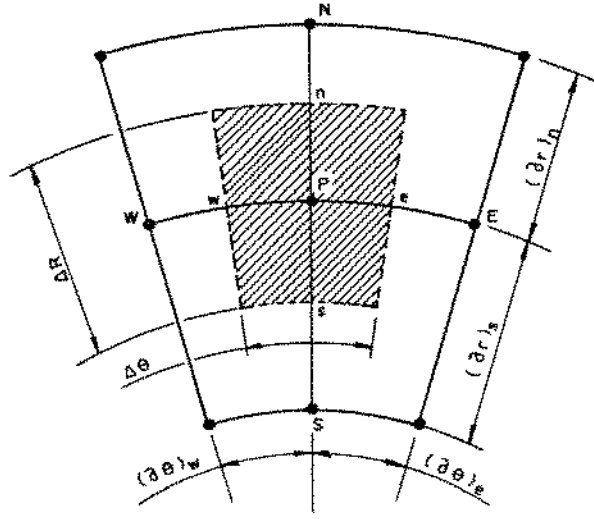


Figura 3.1: Volume de controle para o ponto nodal P

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \int_R \int_{\theta} \tilde{C}(\phi) R \frac{\partial \phi}{\partial \tau} d\tau d\theta dR &= \int_{\tau} \int_R \int_{\theta} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \tilde{k}(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) d\theta dR d\tau \\ &+ \int_{\tau} \int_R \int_{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{k}(\phi)}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) d\theta dR d\tau \end{aligned} \quad (3.2)$$

Resolvendo cada parte da equação separadamente; Temos que a integração no tempo para o lado direito desta equação pode ser colocada como uma função do tempo anterior e do atual que são representados pelos expoentes (0) e (1) respectivamente.

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \tilde{C}(\phi) R \frac{\partial \phi}{\partial \tau} d\tau d\theta dR &= \tilde{C}(\phi) \Delta V \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} d\tau \\ &= \tilde{C}(\phi) \Delta V [\phi^1 - \phi^0] \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde: $\Delta V = R dR d\theta$ é o volume de controle.

Para o lado esquerdo da equação (3.2) assumimos conforme descrito em Patankar [31] que o valor do nodal de P prevalece para todo o volume de controle, e ainda que ocorra uma variação linear de ϕ com R e θ e a integral de ϕ no tempo τ é da forma:

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \phi d\tau = (m\phi^1 + (1-m)\phi^0) \Delta\tau \quad (3.4)$$

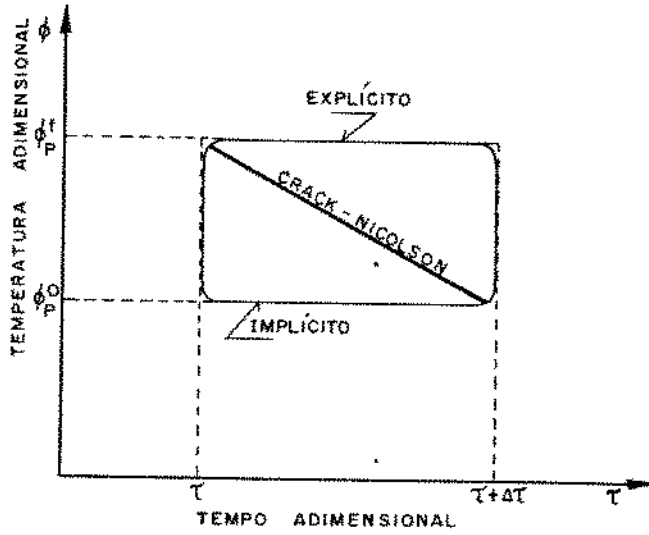


Figura 3.2: Comportamento em relação a m

onde m é uma fração entre 0 e 1; Resultando numa combinação linear de ϕ^1 e ϕ^0 com o tempo. Desta forma conforme Patankar [31], podemos ter uma formulação do tipo explícito quando ($m = 0$) e implícito quando ($m = 1$) e Crank-Nicolson quando ($m = 0,5$) como mostra a figura (3.2).

Assim o lado esquerdo da equação (3.2) pode ser separado em duas integrais uma em função de θ e outra em função de R . A integral em função de R ficará, sendo $m = g$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w \int_s^n \frac{\partial}{\partial R} \left(R \tilde{k}(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) d\theta dR d\tau \\
 &= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \frac{\partial}{\partial R} \left(R \tilde{k}(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \Delta\theta dR d\tau \\
 &= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(R_n \tilde{k}_n(\phi) \frac{(\phi_n - \phi_p)}{(\delta r)_n} - R_s \tilde{k}_s(\phi) \frac{(\phi_n - \phi_s)}{(\delta r)_s} \right) \Delta\theta d\tau \\
 &= \frac{R_n \tilde{k}_n(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta r)_n} [g\phi_N^1 + (1-g)\phi_N^0] + \frac{R_s \tilde{k}_s(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta r)_s} [g\phi_S^1 + (1-g)\phi_S^0] \\
 &\quad - \left[\frac{R_n \tilde{k}_n(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta r)_n} - \frac{R_s \tilde{k}_s(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta r)_s} \right] [g\phi_P^1 + (1-g)\phi_P^0] \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

E a integral em função de θ será com $m = f$:

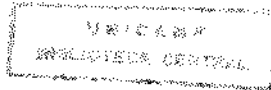
$$\begin{aligned}
& \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\tilde{k}(\phi)}{R} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) d\theta dR d\tau \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\tilde{k}(\phi)}{R} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) \Delta R d\theta d\tau \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left[\frac{\tilde{k}_e(\phi)\Delta R}{R_e} \left(\frac{\phi_e - \phi_p}{(\delta\theta)_e} \right) - \frac{\tilde{k}_w(\phi)\Delta R}{R_w} \left(\frac{\phi_e - \phi_w}{(\delta\theta)_w} \right) \right] d\tau \\
&= \frac{\tilde{k}_e(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_e(\delta\theta)_e} [f\phi_E^1 + (1-f)\phi_E^0] + \frac{\tilde{k}_w(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_w(\delta\theta)_w} [f\phi_W^1 + (1-f)\phi_W^0] \\
&\quad - \left[\frac{\tilde{k}_e(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_e(\delta\theta)_e} + \frac{\tilde{k}_w(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_w(\delta\theta)_w} \right] [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0] \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Agrupando todos os termos da equação (3.2) temos:

$$\begin{aligned}
& \tilde{C}(\phi)\Delta V[\phi_P^1 - \phi_P^0] = \\
& \frac{R_n\tilde{k}_n(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_n} [g\phi_N^1 + (1-g)\phi_N^0] + \frac{R_s\tilde{k}_s(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_s} [g\phi_S^1 + (1-g)\phi_S^0] \\
& - \left[\frac{R_n\tilde{k}_n(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_n} - \frac{R_s\tilde{k}_s(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_s} \right] [g\phi_P^1 + (1-g)\phi_P^0] \\
& + \frac{\tilde{k}_e(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_e(\delta\theta)_e} [f\phi_E^1 + (1-f)\phi_E^0] + \frac{\tilde{k}_w(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_w(\delta\theta)_w} [f\phi_W^1 + (1-f)\phi_W^0] \\
& - \left[\frac{\tilde{k}_e(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_e(\delta\theta)_e} + \frac{\tilde{k}_w(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_w(\delta\theta)_w} \right] [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0] \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Definindo os coeficientes:

$$\begin{aligned}
a_{P0} &= \frac{\tilde{C}(\phi)\Delta V}{\Delta\tau} \\
a_N &= \frac{R_n\tilde{k}_n(\phi)\Delta\theta}{(\delta r)_n}
\end{aligned}$$



$$a_S = \frac{R_s \tilde{k}_s(\phi) \Delta \theta}{(\delta r)_s}$$

$$a_E = \frac{\tilde{k}_e(\phi) \Delta R}{R_e (\delta \theta)_e}$$

$$a_W = \frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R}{R_w (\delta \theta)_w}$$

$$a_P = a_{P0} + a_N + a_S + a_E + a_W$$

Rearranjando e agrupando os termos temos:

$$\begin{aligned} & \phi_P^1 [a_{P0} + g(a_N + a_S) + f(a_E + a_W)] = \\ & \phi_P^0 [a_{P0} - (1-g)(a_N + a_S) - (1-f)(a_E + a_W)] \\ & + \phi_N^1 g a_N + \phi_N^0 (1-g) a_N + \phi_S^1 g a_S + \phi_S^0 (1-g) a_S \\ & + \phi_E^1 f a_E + \phi_E^0 (1-f) a_E + \phi_W^1 f a_W + \phi_W^0 (1-f) a_W \end{aligned} \quad (3.8)$$

Na Figura (3.3) temos a grade para a região de simetria. Como nas extremidades temos as condições de contorno aplicadas teremos equações particulares para cada uma das extremidades.

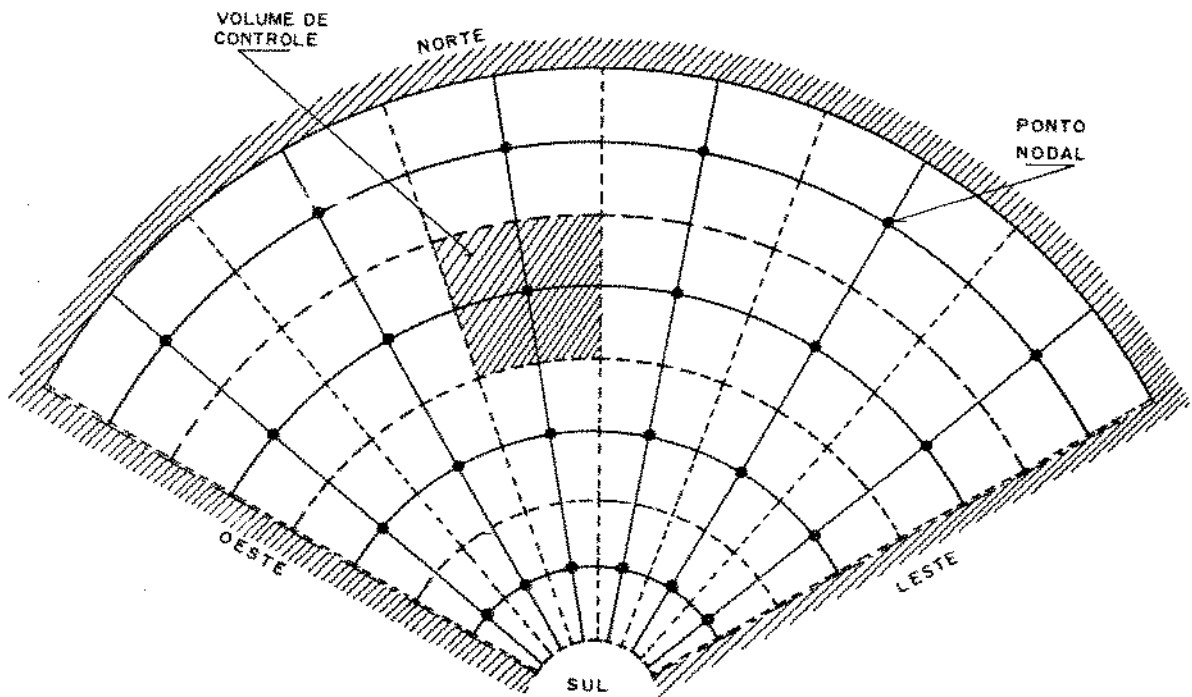


Figura 3.3: Região de simetria

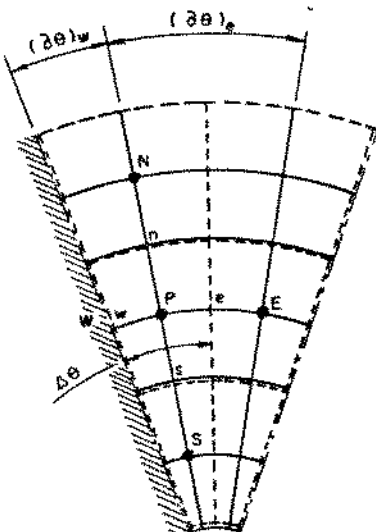


Figura 3.4: Detalhe do volume de controle para lado oeste

3.2.1 Volume de Controle Oeste

Para o volume de controle com face à oeste (w); cuja a condição de contorno é de simetria temos pela equação (2.36):

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0$$

ou

$$\frac{\phi_p - \phi_w}{(\delta\theta)_w} = 0 \quad (3.9)$$

Pela figura (3.4), observamos que a integração neste volume de controle resulta numa modificação da equação (3.7) principalmente referente ao termo em relação a θ :

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_p^e \int_r^n \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{k}(\phi)}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) d\theta dR d\tau = \\ & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_p^e \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{k}(\phi)}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \Delta R d\theta d\tau \\ & = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left[\frac{\bar{k}_e(\phi) \Delta R}{R_e} \left(\frac{(\phi_e - \phi_p)}{(\delta\theta)_e} \right) \right] d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tilde{k}_e(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_e(\delta\theta)_e} [f\phi_E^1 + (1-f)\phi_E^0] \\
&\quad - \left(\frac{\tilde{k}_e(\phi)\Delta R\theta}{R_e(\delta\theta)_e} \right) [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ficando a equação particular:

$$\begin{aligned}
&\bar{C}(\phi)\Delta V[\phi_P^1 - \phi_P^0] = \\
&\quad \frac{R_n\tilde{k}_n(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_n} [g\phi_N^1 + (1-g)\phi_N^0] + \frac{R_s\tilde{k}_s(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_s} [g\phi_S^1 + (1-g)\phi_S^0] \\
&\quad - \left[\frac{R_n\tilde{k}_n(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_n} - \frac{R_s\tilde{k}_s(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_s} \right] [g\phi_P^1 + (1-g)\phi_P^0] \\
&\quad + \frac{\tilde{k}_e(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_e(\delta\theta)_e} [f\phi_E^1 + (1-f)\phi_E^0] \\
&\quad - \left(\frac{\tilde{k}_e(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_e(\delta\theta)_e} \right) [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Rearranjando e substituindo os coeficientes temos:

$$\begin{aligned}
&\phi_P^1 [a_{P0} + g(a_N + a_S) + f(a_E)] = \\
&\quad \phi_P^0 [a_{P0} - (1-g)(a_N + a_S) - (1-f)a_E] \\
&\quad + \phi_N^1 g a_N + \phi_N^0 (1-g)a_N + \phi_S^1 g a_S + \phi_S^0 (1-g)a_S \\
&\quad + \phi_E^1 f a_E + \phi_E^0 (1-f)a_E
\end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2.2 Volume de Controle Leste

Para o volume de controle com face à leste (ϵ); cuja a condição de contorno é de simetria temos pela equação (2.37):

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\epsilon_m} = 0$$

ou

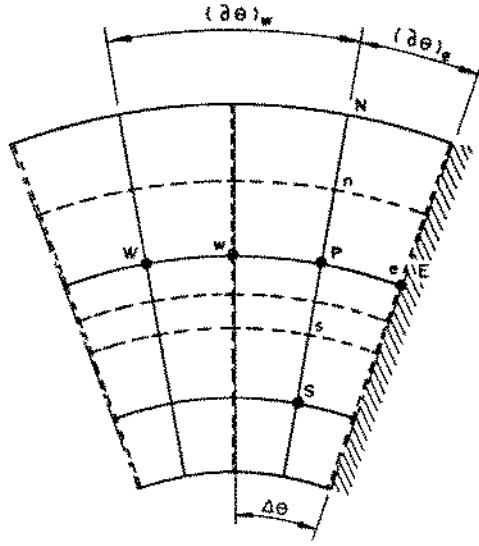


Figura 3.5: Detalhe do volume de controle para o lado leste

$$\frac{\phi_e - \phi_p}{(\delta\theta)_e} = 0 \quad (3.13)$$

Pela figura (3.5), observamos que a integração neste volume de controle resulta numa modificação da equação (3.7) principalmente referente ao termo em relação a θ :

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^R \int_{\theta}^{\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\tilde{k}(\phi)}{R} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) d\theta dR d\tau = \\ & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^R \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\tilde{k}(\phi)}{R} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) \Delta R d\theta d\tau \\ & = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(-\frac{R_w \tilde{k}_w(\phi) \Delta R}{R_w} \left(\frac{\phi_p - \phi_w}{(\delta\theta)_w} \right) \right) d\tau \\ & = \frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R \Delta\tau}{R_w (\delta\theta)_w} [f\phi_w^1 + (1-f)\phi_w^0] \\ & - \left(\frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R \Delta\tau}{R_w (\delta\theta)_w} \right) [f\phi_p^1 + (1-f)\phi_p^0] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ficando a equação particular:

$$\tilde{C}(\phi) \Delta V [\phi_p^1 - \phi_p^0] =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{R_n \tilde{k}_n(\phi) \Delta \theta \Delta \tau}{(\delta r)_n} [g \phi_N^1 + (1-g) \phi_N^0] + \frac{R_s \tilde{k}_s(\phi) \Delta \theta \Delta \tau}{(\delta r)_s} [g \phi_S^1 + (1-g) \phi_S^0] \\
& - \left[\frac{R_n \tilde{k}_n(\phi) \Delta \theta \Delta \tau}{(\delta r)_n} - \frac{R_s \tilde{k}_s(\phi) \Delta \theta \Delta \tau}{(\delta r)_s} \right] [g \phi_P^1 + (1-g) \phi_P^0] \\
& + \frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R \Delta \tau}{R_w (\delta \theta)_w} [f \phi_W^1 + (1-f) \phi_W^0] \\
& - \left(\frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R \Delta \tau}{R_w (\delta \theta)_w} \right) [f \phi_P^1 + (1-f) \phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Rearranjando e substituindo os coeficientes temos:

$$\begin{aligned}
& \phi_P^1 [a_{P0} + g(a_N + a_S) + f a_W] = \\
& \phi_P^0 [a_{P0} - (1-g)(a_N + a_S) - (1-f) a_W] \\
& + \phi_N^1 g a_N + \phi_N^0 (1-g) a_N + \phi_S^1 g a_S + \phi_S^0 (1-g) a_S \\
& + \phi_W^1 f a_W + \phi_W^0 (1-f) a_W
\end{aligned} \tag{3.16}$$

3.2.3 Volume de Controle Norte

Para o volume de controle com face à norte (n); cuja a condição de contorno é adiabática temos pela equação (2.35):

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{R=\frac{r_e}{r_i}} = 0$$

ou

$$\frac{\phi_n - \phi_P}{(\delta r)_n} = 0 \tag{3.17}$$

Pela figura (3.6), observamos que a integração neste volume de controle resulta numa modificação da equação (3.7) principalmente referente ao termo em relação a R :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_r^n \frac{\partial}{\partial R} \left(R \tilde{k}(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) d\theta dR d\tau$$

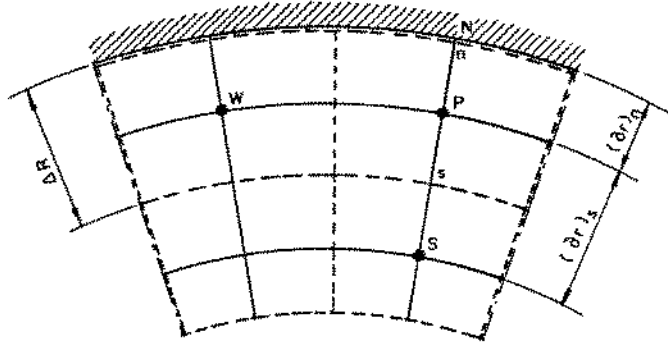


Figura 3.6: Detalhe do volume de controle para o lado norte

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{\nu}^n \frac{\partial}{\partial R} \left(R \tilde{k}(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) \Delta\theta dR d\tau \\
 &= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(-R_s \tilde{k}_s(\phi) \frac{(\phi_p - \phi_s)}{(\delta r)_s} \right) \Delta\theta d\tau \\
 &= \frac{R_s \tilde{k}_s(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta r)_s} [g\phi_S^1 + (1-g)\phi_S^0] \\
 &\quad - \left(\frac{R_s \tilde{k}_s(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta r)_s} \right) [g\phi_P^1 + (1-g)\phi_P^0] \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Ficando a equação particular:

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}(\phi) \Delta V [\phi_P^1 - \phi_P^0] &= \\
 &\frac{R_s \tilde{k}_s(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta r)_s} [g\phi_S^1 + (1-g)\phi_S^0] - \frac{R_s \tilde{k}_s(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta r)_s} [g\phi_P^1 + (1-g)\phi_P^0] \\
 &+ \frac{\tilde{k}_e(\phi) \Delta R \Delta\tau}{R_e(\delta\theta)_e} [f\phi_E^1 + (1-f)\phi_E^0] + \frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R \Delta\tau}{R_w(\delta\theta)_w} [f\phi_W^1 + (1-f)\phi_W^0] \\
 &- \left[\frac{\tilde{k}_e(\phi) \Delta R \Delta\tau}{R_e(\delta\theta)_e} + \frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R \Delta\tau}{R_w(\delta\theta)_w} \right] [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0] \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Rearranjando e substituindo os coeficientes temos:

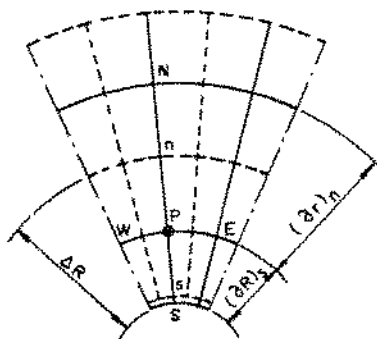


Figura 3.7: Detalhe do volume de controle para o lado sul

$$\begin{aligned}
 & \phi_P^1 [a_P 0 + g a_S + f(a_E + a_W)] = \\
 & \phi_P^0 [a_P 0 - (1 - g)a_S - (1 - f)(a_E + a_W)] \\
 & + \phi_S^1 g a_S + \phi_S^0 (1 - g)a_S \\
 & + \phi_E^1 f a_E + \phi_E^0 (1 - f)a_E + \phi_W^1 f a_W + \phi_W^0 (1 - f)a_W
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.2.4 Volume de Controle Sul

Para o volume de controle com face à sul (s); cuja a condição de contorno é de convecção pela equação (2.34):

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{R=0} = \text{Bi} \phi$$

ou

$$\frac{\phi_P - \phi_n}{(\delta r)_s} = \text{Bi} \phi \tag{3.21}$$

Pela figura (3.7), observamos que a integração neste volume de controle resulta numa modificação da equação (3.7) principalmente referente ao termo em relação a R :

$$\int_{\tau}^{\tau + \Delta \tau} \int_w^e \int_s^r \frac{\partial}{\partial R} \left(R \tilde{k}(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) db dR d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^p \frac{\partial}{\partial R} \left(R\tilde{k}(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right) \Delta\theta dR d\tau \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(R_n \tilde{k}_n(\phi) \frac{(\phi_n - \phi_s)}{(\delta\tau)_n} - R_s \tilde{k}_s(\phi) \text{Bi} \phi \right) \Delta\theta d\tau \\
&= \frac{R_n \tilde{k}_n(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta\tau)_n} [g\phi_N^1 + (1-g)\phi_N^0] \\
&\quad - \left[\frac{R_n \tilde{k}_n(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta\tau)_n} - (R_s \tilde{k}_s(\phi) \text{Bi} \Delta\theta \Delta\tau) \right] [g\phi_P^1 + (1-g)\phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Resultando na equação particular:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}(\phi) \Delta V [\phi_P^1 - \phi_P^0] &= \\
&\frac{R_n \tilde{k}_n(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta\tau)_n} [g\phi_N^1 + (1-g)\phi_N^0] \\
&\quad - \left[\frac{R_n \tilde{k}_n(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta\tau)_n} - R_s \tilde{k}_s(\phi) \text{Bi} \Delta\theta \Delta\tau \right] [g\phi_P^1 + (1-g)\phi_P^0] \\
&\quad + \frac{\tilde{k}_e(\phi) \Delta R \Delta\tau}{R_e (\delta\theta)_e} [f\phi_E^1 + (1-f)\phi_E^0] + \frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R \Delta\tau}{R_w (\delta\theta)_w} [f\phi_W^1 + (1-f)\phi_W^0] \\
&\quad - \left[\frac{\tilde{k}_e(\phi) \Delta R \Delta\tau}{R_e (\delta\theta)_e} + \frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R \Delta\tau}{R_w (\delta\theta)_w} \right] [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Chamando:

$$a_S = R_s \tilde{k}_s(\phi) \text{Bi} \Delta\theta \tag{3.24}$$

e substituindo os coeficientes e rearranjando temos:

$$\begin{aligned}
&\phi_P^1 [a_{P0} + g(a_N + a_S) + f(a_E + a_W)] = \\
&\phi_P^0 [a_{P0} - (1-g)(a_N + a_S) - (1-f)(a_E + a_W)] \\
&\quad + \phi_N^1 g a_N + \phi_N^0 (1-g) a_N + \phi_E^1 f a_E + \phi_E^0 (1-f) a_E \\
&\quad + \phi_W^1 f a_W + \phi_W^0 (1-f) a_W
\end{aligned} \tag{3.25}$$

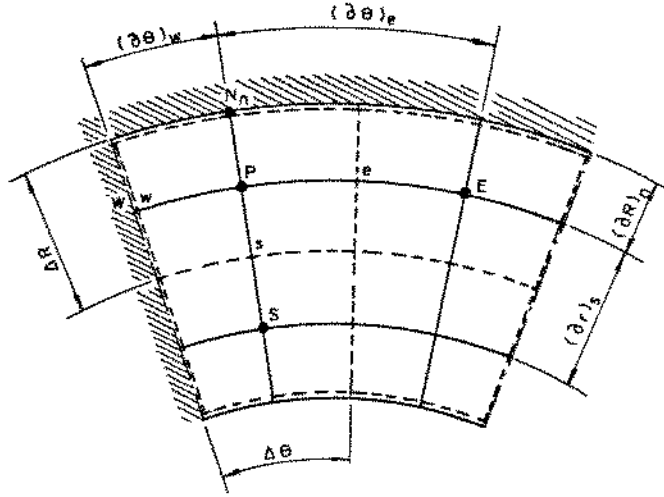


Figura 3.8: Detalhe do volume de controle para o canto norte e oeste

Nos cantos do volume de controle temos duas condições de contorno atuando, assim devem ser tratados separadamente.

3.2.5 Canto Norte e Oeste

Para o canto em questão, temos a ocorrência de duas condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{R=\frac{r_e}{r_i}} = \frac{\phi_n - \phi_p}{(\delta r)_n} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \frac{\phi_p - \phi_w}{(\delta \theta)_w} = 0$$

Como mostra a figura (3.8):

Integrando neste volume temos alteração nos termos referentes a θ e R ficando:

Em θ :

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{r_i}^{r_e} \int_{\theta_w}^{\theta_e} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{k}(\phi)}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) d\theta dR d\tau \\ &= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{r_i}^{r_e} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{k}(\phi)}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \Delta R d\theta d\tau \\ &= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left[\frac{\tilde{k}_e(\phi) \Delta R}{R_e} \left(\frac{\phi_e - \phi_p}{(\delta \theta)_e} \right) \right] d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tilde{k}_e(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_e(\delta\theta)_e} [f\phi_E^1 + (1-f)\phi_E^0] \\
&- \left(\frac{\tilde{k}_e(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_e(\delta\theta)_e} \right) [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Em R :

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_p^n \frac{\partial}{\partial R} \left(R\tilde{k}(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) dbdRdr \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_p^n \frac{\partial}{\partial R} \left(R\tilde{k}(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) \Delta\theta dRdr \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(-R_s \tilde{k}_s(\phi) \frac{(\phi_p - \phi_s)}{(\delta r)_s} \right) \Delta\theta d\tau \\
&= \frac{R_s \tilde{k}_s(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_s} [g\phi_S^1 + (1-g)\phi_S^0] \\
&- \left(\frac{R_s \tilde{k}_s(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_s} \right) [g\phi_P^1 + (1-g)\phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Ficando a equação particular:

$$\begin{aligned}
\hat{C}(\phi)\Delta V[\phi_P^1 - \phi_P^0] &= \frac{R_s \tilde{k}_s(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_s} [g\phi_S^1 + (1-g)\phi_S^0] \\
&- \frac{R_s \tilde{k}_s(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_s} [g\phi_P^1 + (1-g)\phi_P^0] + \frac{\tilde{k}_e(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_e(\delta\theta)_e} [f\phi_E^1 + (1-f)\phi_E^0] \\
&- \frac{\tilde{k}_e(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_e(\delta\theta)_e} + [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Rearranjando e substituindo os coeficientes temos:

$$\begin{aligned}
&\phi_P^1 [a_{P0} + ga_S + fa_E] = \\
&\phi_P^0 [a_{P0} - (1-g)a_S - (1-f)a_E] \\
&+ \phi_S^1 ga_S + \phi_S^0 (1-g)a_S \\
&+ \phi_E^1 fa_E + \phi_E^0 (1-f)a_E
\end{aligned} \tag{3.29}$$

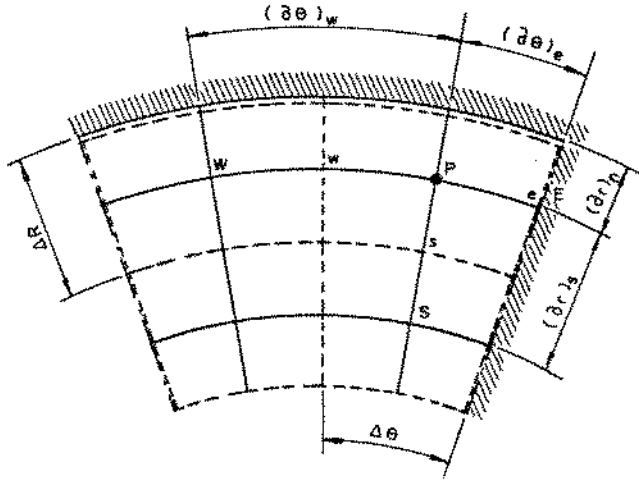


Figura 3.9: Detalhe do volume de controle para o canto norte e leste

3.2.6 Canto Norte e Leste

Para o canto em questão, temos a ocorrência de duas condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{R=\frac{r_e}{r_i}} = \frac{\phi_n - \phi_p}{(\delta r)_n} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_w} = \frac{\phi_e - \phi_p}{(\delta \theta)_e} = 0$$

Como mostra a figura (3.9):

Integrando neste volume temos alteração nos termos referentes a θ e R ficando:

Em θ :

$$\begin{aligned} & \int_{r_i}^{r_e} \int_{\theta_w}^{\theta_e} \int_{s_i}^{s_e} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{k}(\phi)}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) d\theta dR d\tau \\ &= \int_{r_i}^{r_e} \int_{\theta_w}^{\theta_e} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{k}(\phi)}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \Delta R d\theta d\tau \\ &= \int_{r_i}^{r_e} \left(-\frac{R_w \tilde{k}_w(\phi) \Delta R}{R_w} \left(\frac{\phi_p - \phi_w}{(\delta \theta)_w} \right) \right) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tilde{k}_w(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_w(\delta\theta)_w} [f\phi_W^1 + (1-f)\phi_W^0] \\
&- \left(\frac{\tilde{k}_w(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_w(\delta\theta)_w} \right) [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Em R :

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^p \frac{\partial}{\partial R} \left(R\tilde{k}(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) d\theta dR d\tau \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^p \frac{\partial}{\partial R} \left(R\tilde{k}(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) \Delta\theta dR d\tau \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(-R_s \tilde{k}_s(\phi) \frac{(\phi_p - \phi_s)}{(\delta r)_s} \right) \Delta\theta d\tau \\
&= \frac{R_s \tilde{k}_s(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_s} [g\phi_S^1 + (1-g)\phi_S^0] \\
&- \left(\frac{R_s \tilde{k}_s(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_s} \right) [g\phi_P^1 + (1-g)\phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Ficando a equação particular:

$$\begin{aligned}
&\tilde{C}(\phi)\Delta V[\phi_P^1 - \phi_P^0] = \\
&\frac{R_s \tilde{k}_s(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_s} [g\phi_S^1 + (1-g)\phi_S^0] \\
&- \frac{R_s \tilde{k}_s(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_s} [g\phi_P^1 + (1-g)\phi_P^0] + \frac{\tilde{k}_w(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_w(\delta\theta)_w} [f\phi_W^1 + (1-f)\phi_W^0] \\
&- \frac{\tilde{k}_w(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_w(\delta\theta)_w} [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Rearranjando e substituindo os coeficientes temos:

$$\begin{aligned}
&\phi_P^1 [ap_0 + ga_S + fa_W] = \\
&\phi_P^0 [ap_0 - (1-g)a_S - (1-f)a_W]
\end{aligned}$$

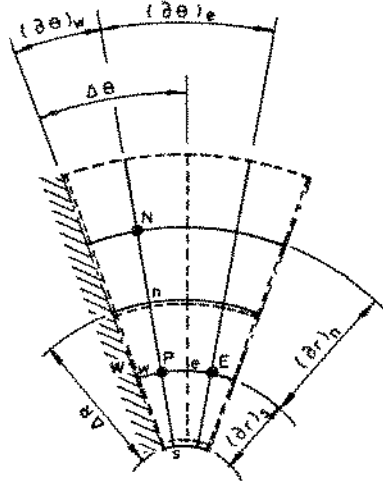


Figura 3.10: Detalhe do volume de controle para o canto sul e oeste

$$\begin{aligned}
 & +\phi_S^1 g a_S + \phi_S^0 (1-g) a_S \\
 & +\phi_W^1 f a_W + \phi_W^0 (1-f) a_W
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

3.2.7 Canto Sul e Oeste

Para o canto em questão, temos a ocorrência de duas condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} &= \frac{\phi_p - \phi_w}{(\delta \theta)_w} = 0 \\
 \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{R=0} &= \frac{\phi_p - \phi_n}{(\delta r)_s} = \text{Bi } \phi
 \end{aligned}$$

Como mostra a figura (3.10):

Integrando neste volume temos alteração nos termos referentes a θ e R ficando:

Em θ :

$$\begin{aligned}
 & \int_r^{r+\Delta r} \int_p^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{k}(\phi)}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) d\theta dR d\tau \\
 &= \int_r^{r+\Delta r} \int_p^e \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{k}(\phi)}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \Delta R d\theta d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left[\frac{\tilde{k}_c(\phi)\Delta R}{R_c} \left(\frac{\phi_e - \phi_p}{(\delta\theta)_e} \right) \right] d\tau \\
&= \frac{\tilde{k}_c(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_c(\delta\theta)_e} [f\phi_E^1 + (1-f)\phi_E^0] \\
&\quad - \left(\frac{\tilde{k}_c(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_c(\delta\theta)_e} \right) [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Em R :

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^p \frac{\partial}{\partial R} \left(R\tilde{k}(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) d\theta dR d\tau \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^p \frac{\partial}{\partial R} \left(R\tilde{k}(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) \Delta\theta dR d\tau \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(R_n \tilde{k}_n(\phi) \frac{(\phi_n - \phi_p)}{(\delta r)_n} - R_s \tilde{k}_s(\phi) \text{Bi} \phi \right) \Delta\theta d\tau \\
&= \frac{R_n \tilde{k}_n(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_n} [g\phi_N^1 + (1-g)\phi_N^0] \\
&\quad - \left[\frac{R_n \tilde{k}_n(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_n} - (R_s \tilde{k}_s(\phi) \text{Bi} \Delta\theta\Delta\tau) \right] [g\phi_P^1 + (1-g)\phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Ficando a equação particular:

$$\begin{aligned}
&\hat{C}(\phi)\Delta V[\phi_P^1 - \phi_P^0] = \\
&\quad \frac{R_n \tilde{k}_n(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_n} [g\phi_N^1 + (1-g)\phi_N^0] \\
&\quad - \left[\frac{R_n \tilde{k}_n(\phi)\Delta\theta\Delta\tau}{(\delta r)_n} - (R_s \tilde{k}_s(\phi) \text{Bi} \Delta\theta\Delta\tau) \right] [g\phi_P^1 + (1-g)\phi_P^0] \\
&\quad \frac{\tilde{k}_c(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_c(\delta\theta)_e} [f\phi_E^1 + (1-f)\phi_E^0] \\
&\quad - \left(\frac{\tilde{k}_c(\phi)\Delta R\Delta\tau}{R_c(\delta\theta)_e} \right) [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0]
\end{aligned} \tag{3.36}$$

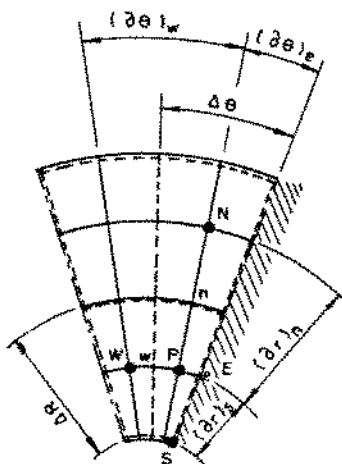


Figura 3.11: Detalhe do volume de controle para o canto sul e leste

Substituindo os coeficientes e rearranjando temos:

$$\begin{aligned}
 & \phi_P^1 [a_{P0} + g(a_N + a_S) + fa_E] = \\
 & \phi_P^0 [a_{P0} - (1-g)(a_N + a_S) - (1-f)a_E] \\
 & + \phi_N^1 g a_N + \phi_N^0 (1-g)a_N + \phi_E^1 f a_E + \phi_E^0 (1-f)a_E
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

3.2.8 Canto Sul e Leste

Para o canto em questão, temos a ocorrência de duas condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_w} &= \frac{\phi_e - \phi_p}{(\delta \theta)_e} = 0 \\
 \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{R=0} &= \frac{\phi_p - \phi_n}{(\delta r)_s} = \text{Bi } \phi
 \end{aligned}$$

Como mostra a figura (3.11):

Integrando neste volume temos alteração nos termos referentes a θ e R ficando:

Em θ :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^p \int_r^n \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{k}(\phi)}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) d\theta dR dr$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^p \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\tilde{k}(\phi)}{R} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) \Delta R d\theta d\tau \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(-\frac{R_w \tilde{k}_w(\phi) \Delta R}{R_w} \left(\frac{(\phi_p - \phi_w)}{(\delta\theta)_w} \right) \right) d\tau \\
&= \frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R \Delta\tau}{R_w (\delta\theta)_w} [f\phi_w^1 + (1-f)\phi_w^0] \\
&\quad - \left(\frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R \Delta\tau}{R_w (\delta\theta)_w} \right) [f\phi_p^1 + (1-f)\phi_p^0] \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Em R:

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^p \frac{\partial}{\partial R} \left(R \tilde{k}(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) d\theta dR d\tau \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^p \frac{\partial}{\partial R} \left(R \tilde{k}(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) \Delta\theta dR d\tau \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(R_n \tilde{k}_n(\phi) \frac{(\phi_n - \phi_p)}{(\delta r)_n} - R_s \tilde{k}_s(\phi) \text{Bi} \phi \right) \Delta\theta d\tau \\
&= \frac{R_n \tilde{k}_n(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta r)_n} [g\phi_N^1 + (1-g)\phi_N^0] \\
&\quad - \left[\frac{R_n \tilde{k}_n(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta r)_n} - (R_s \tilde{k}_s(\phi) \text{Bi} \Delta\theta \Delta\tau) \right] [g\phi_p^1 + (1-g)\phi_p^0] \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Ficando a equação particular:

$$\begin{aligned}
&\tilde{C}(\phi) \Delta V [\phi_p^1 - \phi_p^0] = \\
&\frac{R_n \tilde{k}_n(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta r)_n} [g\phi_N^1 + (1-g)\phi_N^0] \\
&\quad - \left[\frac{R_n \tilde{k}_n(\phi) \Delta\theta \Delta\tau}{(\delta r)_n} - (R_s \tilde{k}_s(\phi) \text{Bi} \Delta\theta \Delta\tau) \right] [g\phi_p^1 + (1-g)\phi_p^0] \\
&\frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R \Delta\tau}{R_w (\delta\theta)_w} [f\phi_w^1 + (1-f)\phi_w^0]
\end{aligned}$$

$$- \left(\frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R \Delta \tau}{R_w(\delta\theta)_w} \right) [f\phi_P^1 + (1-f)\phi_P^0] \quad (3.40)$$

Substituindo os coeficientes e rearranjando temos:

$$\begin{aligned} & \phi_P^1 [a_{P0} + g(a_N + a_S) + fa_w] = \\ & \phi_P^0 [a_{P0} - (1-g)(a_N + a_S) - (1-f)a_w] \\ & + \phi_N^1 g a_N + \phi_N^0 (1-g)a_N + \phi_W^1 f a_w + \phi_W^0 (1-f)a_w \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.2.9 Avaliação da Condutividade Térmica na Fronteira Aleta-Material de Mudança de Fase

Quando se tem uma variação brusca das propriedades físicas nas faces dos volumes de controle, segundo Patankar [31], deve-se avaliar estas propriedades físicas através de uma análise de paredes compostas conforme sugerido na figura (3.12)

Para o lado leste temos que o calor vindo pela interface é dado por:

$$Q_e = \frac{\tilde{k}_e(\phi) \Delta R (\phi_p - \phi_e)}{R_r (\delta\theta)_e} \quad (3.42)$$

ou tratando como paredes compostas temos:

$$Q_e = \frac{(\phi_p - \phi_e)}{\frac{R_r(\delta\theta)_e^-}{\tilde{k}_p(\phi) \Delta R} + \frac{R_r(\delta\theta)_e^+}{\tilde{k}_E(\phi) \Delta R}} \quad (3.43)$$

fornecendo a condutividade térmica:

$$\tilde{k}_E(\phi) = \frac{(\delta\theta)_e}{\frac{(\delta\theta)_e^-}{\tilde{k}_p(\phi)} + \frac{(\delta\theta)_e^+}{\tilde{k}_E(\phi)}} \quad (3.44)$$

Para o lado oeste temos que o calor vindo pela interface é dado por:

$$Q_w = \frac{\tilde{k}_w(\phi) \Delta R (\phi_p - \phi_w)}{R_r (\delta\theta)_w} \quad (3.45)$$

ou tratando como paredes compostas temos:

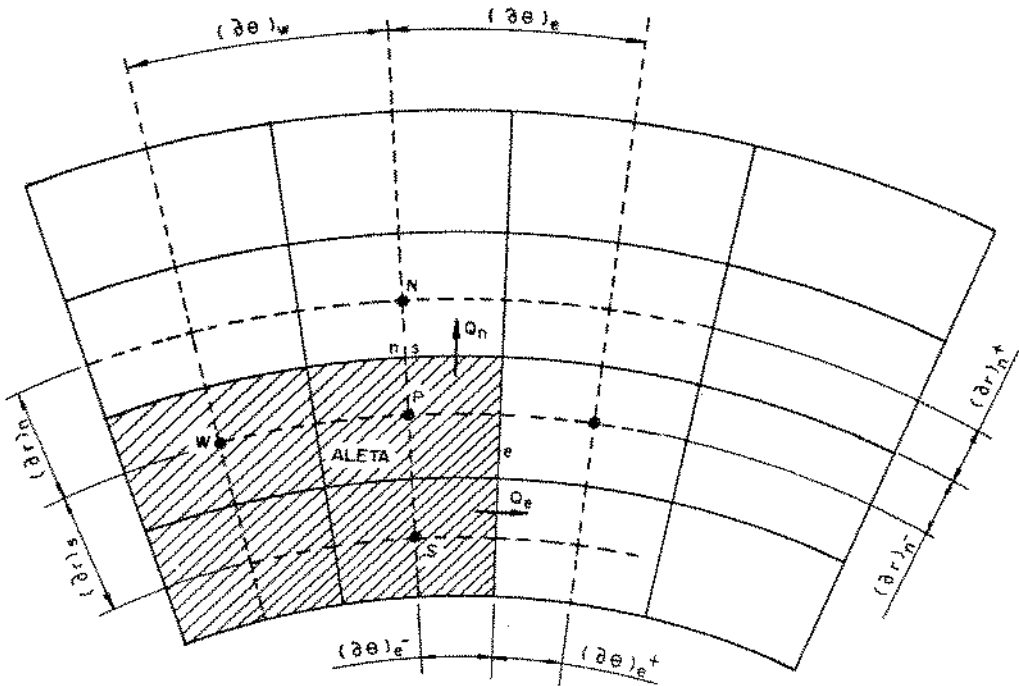


Figura 3.12: Interface aleta - material de mudança de fase.

$$Q_w = \frac{(\phi_w - \phi_p)}{\frac{R_p(\delta\theta)_w^-}{\tilde{k}_W(\phi)\Delta R} + \frac{R_p(\delta\theta)_w^+}{\tilde{k}_P(\phi)\Delta R}} \quad (3.46)$$

fornecendo a condutividade térmica:

$$\tilde{k}_W(\phi) = \frac{(\delta\theta)_w}{\frac{(\delta\theta)_w^-}{\tilde{k}_W(\phi)} + \frac{(\delta\theta)_w^+}{\tilde{k}_P(\phi)}} \quad (3.47)$$

Para o lado norte temos que o calor saindo da aleta pela interface é dado por:

$$Q_n = l\tilde{k}_n(\phi)R_n\Delta\theta\frac{(\phi_p - \phi_n)}{(\delta r)_n} \quad (3.48)$$

ou tratando como paredes compostas temos:

$$Q_n = \frac{(\phi_p - \phi_n)}{\frac{R_n - R_p}{\tilde{k}_p(\phi)\frac{(R_n - R_p)\Delta\theta l}{\ln(R_n/R_p)}} + \frac{R_N - R_n}{\tilde{k}_N(\phi)\frac{(R_N - R_n)\Delta\theta l}{\ln(R_N/R_n)}}} \quad (3.49)$$

fornecendo a condutividade térmica:

$$\tilde{k}_n(\phi) = \frac{\frac{(\delta r)_n}{R_n}}{\frac{\ln(R_n/R_p)}{\tilde{k}_p(\phi)} + \frac{\ln(R_N/R_n)}{\tilde{k}_N(\phi)}} \quad (3.50)$$

Para o lado sul temos que o calor saindo da aleta pela interface é dado por:

$$Q_s = l\tilde{k}_s(\phi)R_s\Delta\theta\frac{(\phi_s - \phi_p)}{(\delta r)_s} \quad (3.51)$$

ou tratando como paredes compostas temos:

$$Q_s = \frac{(\phi_s - \phi_p)}{\frac{R_s - R_S}{\tilde{k}_S(\phi)\frac{(R_s - R_S)\Delta\theta l}{\ln(R_s/R_S)}} + \frac{R_p - R_s}{\tilde{k}_p(\phi)\frac{(R_p - R_n)\Delta\theta l}{\ln(R_p/R_n)}}} \quad (3.52)$$

fornecendo a condutividade térmica:

$$\tilde{k}_s(\phi) = \frac{\frac{(\delta r)_s}{R_s}}{\frac{\ln(R_s/R_S)}{\tilde{k}_S(\phi)} + \frac{\ln(R_p/R_s)}{\tilde{k}_p(\phi)}} \quad (3.53)$$

Para o canto leste e norte temos o calor saindo da aleta como mostra a interface e é dado por:

$$\tilde{k}_n(\phi) = \frac{\frac{(\delta r)_n}{R_n}}{\frac{\ln(R_n/R_p)}{\tilde{k}_p(\phi)} + \frac{\ln(R_N/R_n)}{\tilde{k}_N(\phi)}} \quad (3.54)$$

$$\tilde{k}_E(\phi) = \frac{(\delta\theta)_e}{\frac{(\delta\theta)_e^-}{\tilde{k}_p(\phi)} + \frac{(\delta\theta)_e^+}{\tilde{k}_E(\phi)}} \quad (3.55)$$

3.3 Resolução das Equações

As equações do problema, já adimensionalizadas, foram discretizada através do método do volume de controle descrito por Patankar [31] e sua resolução pode ser obtida aplicando o método implícito de direção alternante (ADI) a estas equações. Obtendo assim um sistemas de $m \times m$ equações que pode ser genericamente escrito como:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & c_3 & a_3 & b_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{m-1} & a_{m-1} & b_{m-1} \\ & & & & c_m & a_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{m-1} \\ \theta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{m-1} \\ d_m \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

O sistema de equações tem características que o torna interessante do ponto de vista de implementação computacional:

- (a) usa relativamente pouca memória para armazenar o sistema de equações formado, mesmo para grandes sistemas, uma vez que são necessárias apenas quatro variáveis indexadas para armazenar todo o sistema;
- (b) o algoritmo para solução desse sistema de equações é bastante simples e requer um número reduzido de operação aritméticas, o que diminui o tempo computacional se comparados com outros métodos de solução de sistemas de equações;
- (c) a diminuição do número de operação aritméticas diminui o erro de arredondamento no resultado final.

Esses fatores são de fundamental importância na escolha de um algoritmo para solução de sistemas de equações, uma vez que o sistema de equações diferenciais a ser resolvido é um sistema não linear o que implica em iterações até chegar ao resultado final com um erro de convergência pré-fixado.

Além dos métodos de discretização produzirem sistemas de equações algébricas semelhantes, outro fator que determinou a escolha desses dois métodos de discretização, implícito e ADI, foi o fato desses métodos serem *incondicionalmente estáveis* [12].

Desta maneira ao realizarmos as discretizações chegamos a um sistema de equações que podem ser expressas sempre da mesma forma:

$$a_m \theta_m = b_m \theta_{m+1} + c_m \theta_{m-1} + d_m \quad (3.57)$$

onde m é o número do nó onde é definida a temperatura. Esse sistema de equações tem outra particularidade. O termo c_m é nulo quando m é igual ao m inicial e o termo b_m também é nulo quando m é igual ao m final.

Em Patankar [31] encontra-se a dedução do algoritmo usado para a solução desse sistema de equações.

3.4 Escolha do Número de Pontos da Grade

Para fazer a escolha do número de pontos da grade foram realizados alguns testes. Primeiramente fixamos em 10 pontos para a direção circunferencial, e variou-se o número de pontos na direção radial e os resultados obtidos foram mostrados na figura (3.13).

Pela análise desta figura, verifica-se que os valores entre 30 a 50 pontos são os mais indicados, pois as curvas correspondentes a estes pontos coincidem. Optando pela escolha de 30 pontos na direção radial.

Foi realizado o mesmo teste para a escolha dos números de pontos na direção circunferencial, fixando a direção radial em 10 pontos, e variou-se o número de pontos na direção circunferencial, e os resultados obtidos foram mostrados na figura (3.14).

Analisando esta figura, observa-se que os valores entre 20 a 40 pontos são os mais indicados, pois as curvas correspondentes a estes pontos coincidem. Optando pela escolha de 30 pontos na direção circunferencial.

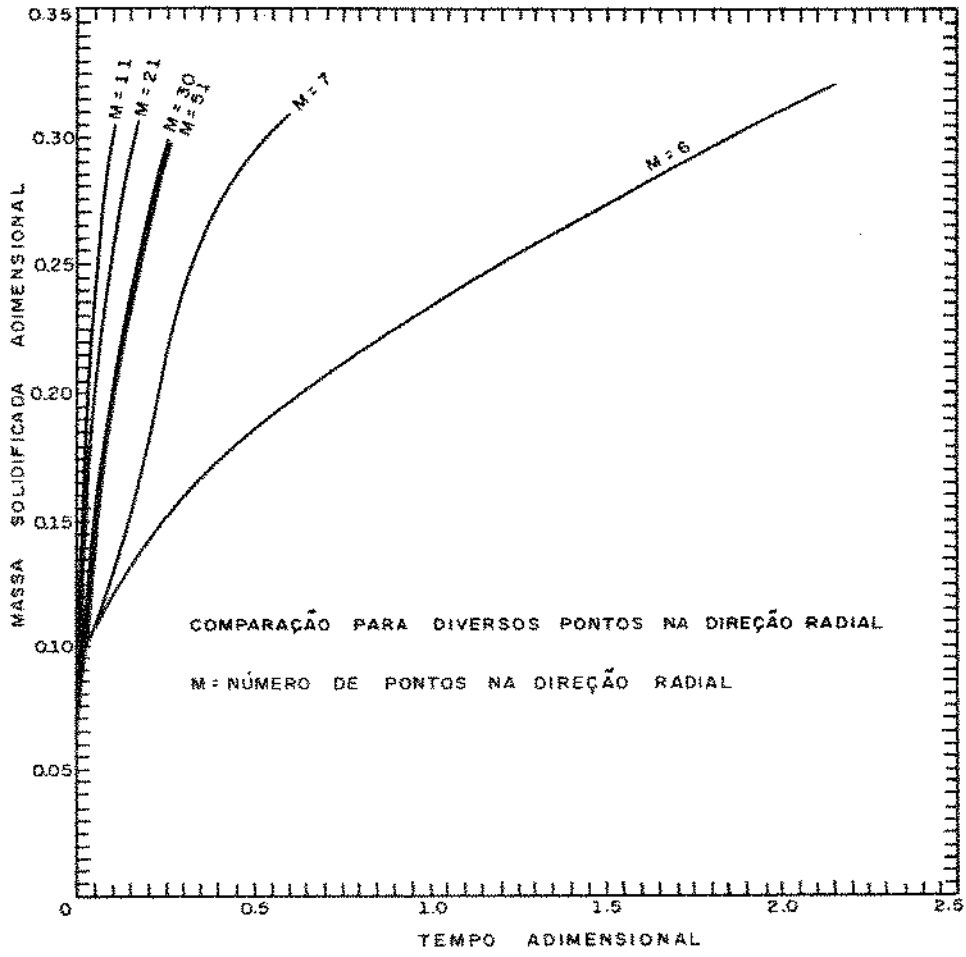


Figura 3.13: Gráfico comparativo para o número de pontos na direção radial.

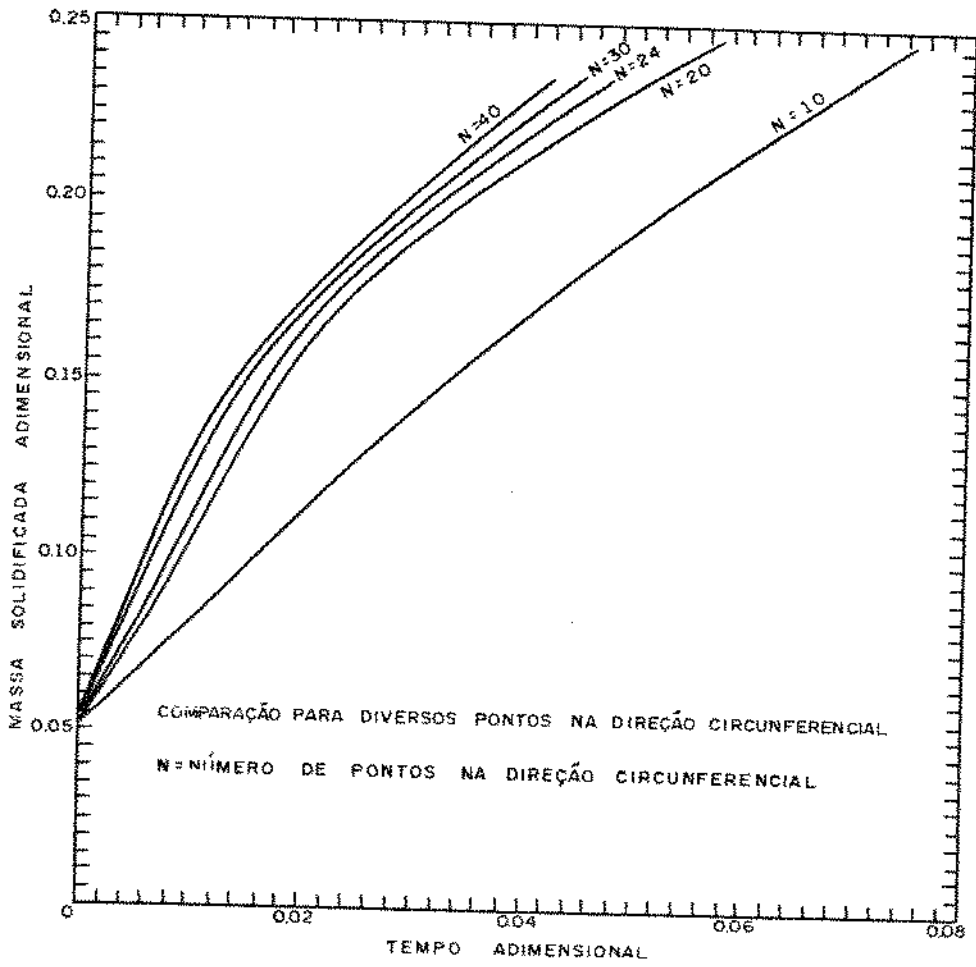
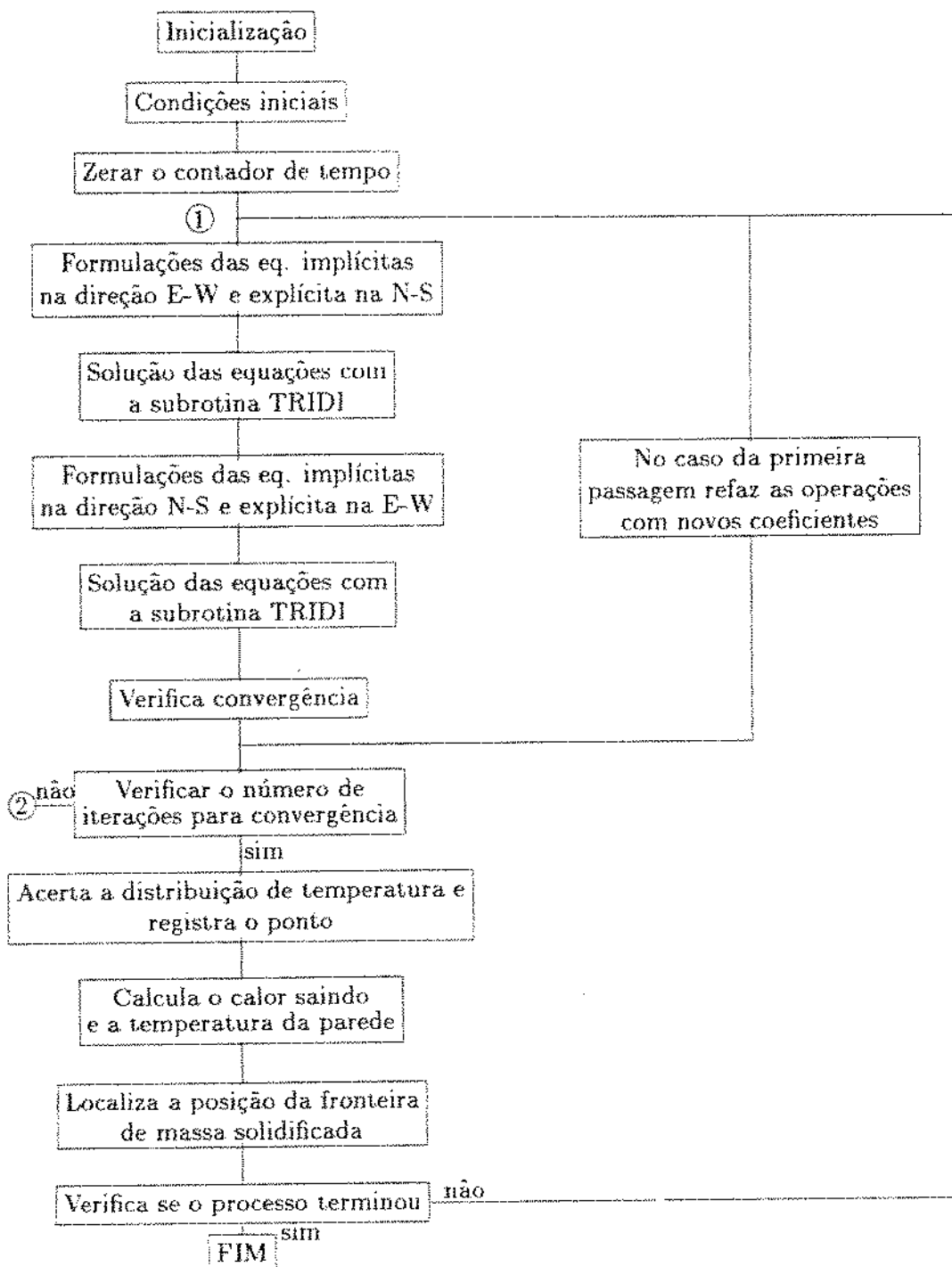
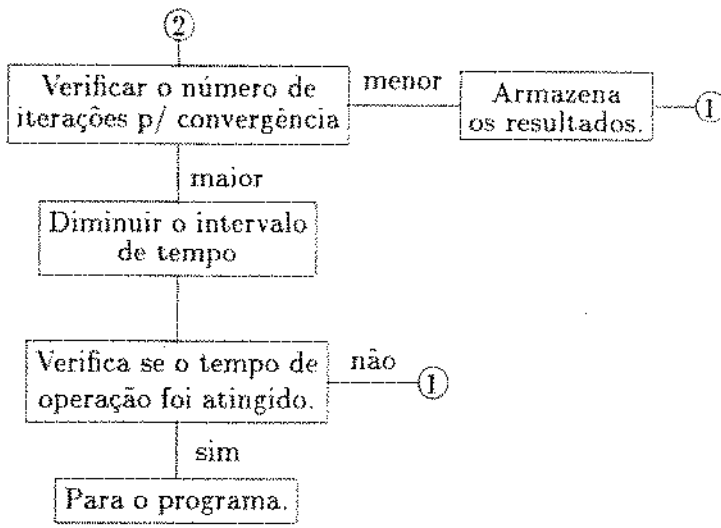


Figura 3.14: Gráfico comparativo para o número de pontos na direção circunferencial.

3.5 Fluxograma do Programa Computacional

A seguir são apresentados os fluxogramas do programa computacional.





Capítulo 4

Discussão dos Resultados

Para a análise dos parâmetros da formulação numérica, utilizou-se a parafina *n-eicosana*, como material de mudança de fase, cujas as propriedades foram estabelecidas em [16] e [13].

O material que constitui a aleta e o tubo onde escoo o fluido de trabalho foi o cobre, cujas as propriedades podem ser encontradas em [24]. O fluido de trabalho utilizado neste trabalho foi a água.

Para obter os resultados, analisá-los e avaliá-los em relação aos efeitos dos vários parâmetros geométricos e operacionais foi adotado uma configuração padrão conforme os dados a seguir:

- Em relação a geometria da unidade armazenadora figura (1.1):
 - Diâmetro da unidade: 0.288 metros
 - Diâmetro de cada tubo interno: 0.020 metros
 - Comprimento da unidade: 1 metro
- Número de tubos na unidade:
 - 5 tubos (1.2)
 - 7 tubos (1.3)
- Em relação as propriedades iniciais:
 - Temperatura de entrada do fluido de trabalho: 10,45 °C
 - Temperatura inicial do material de mudança de fase: 37,71 °C
 - Vazão do fluido de trabalho: 0.01 kg/s

- Coeficiente convectivo do fluido de trabalho: $1000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

Tabela 4.1: Propriedades Termofísicas

Propriedades	Unidades	Água		n-Eicosane		Cobre
		Líquido	Sólido	Líquido	Sólido	
Temperatura de Saturação	°C	0		36,4		-
Faixa de Mudança de Fase	°C	-		1		-
Calor Latente	kJ/kg	333		247,3		-
Massa Específica	kg/m ³	996,34	917	778	856	8978
Condutividade Térmica	W/m K	0,61	2,250	0,150	0,150	387,6
Calor Específico	kJ/kg K	4,19	2,040	2,010	2,210	0,419

4.1 Análise da Variação do Número de Aletas

Um dos parâmetros analisados foi a variação do número de aletas. Na figura (4.1) observamos a redução da região de simetria quando se aumenta o número de aletas, ao se fazer um corte transversal na unidade armazenadora.

A influência do número de aletas no processo de solidificação é apresentado na figura (4.2). Verifica-se que o aumento do número de aletas causa uma grande diminuição do tempo adimensional de solidificação. Este fato pode ser explicado pela penetração da aleta no meio do material de mudança de fase provocando maior troca de calor e portanto menor tempo de solidificação para uma certa massa de material de mudança de fase.

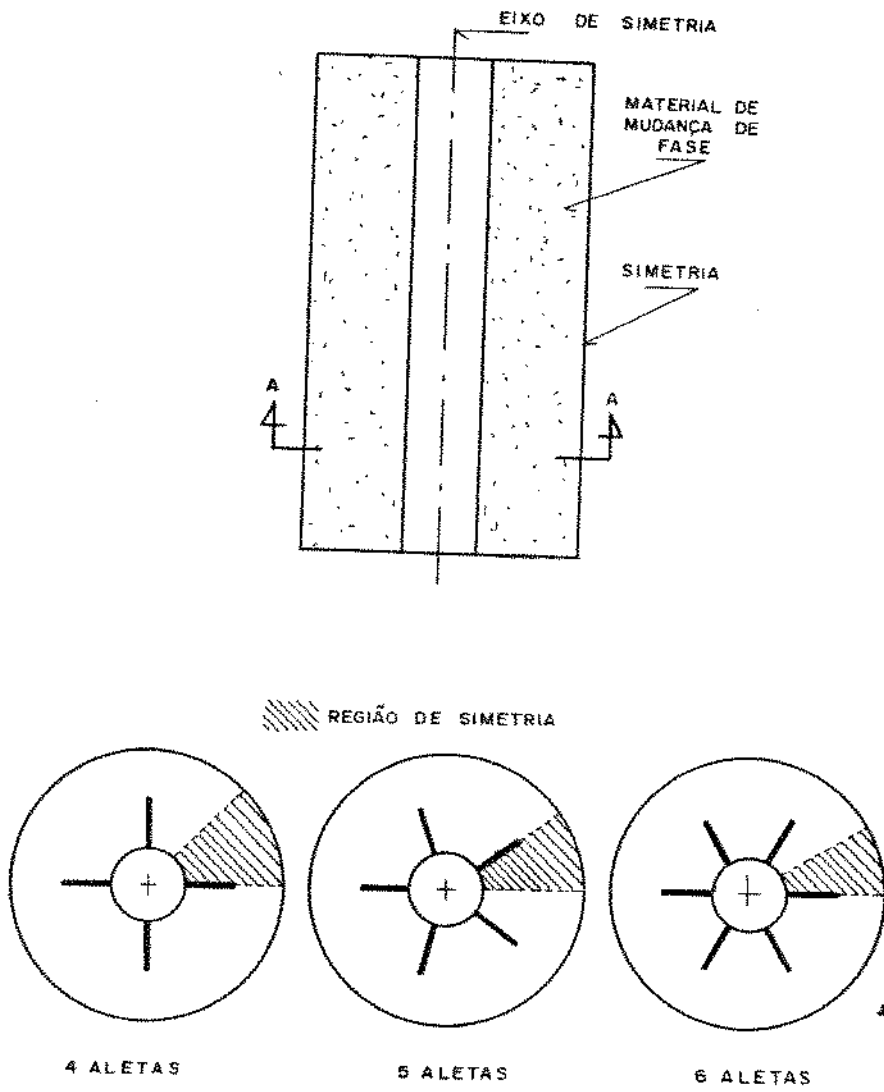


Figura 4.1: Corte transversal no tubo para diversas aletas.

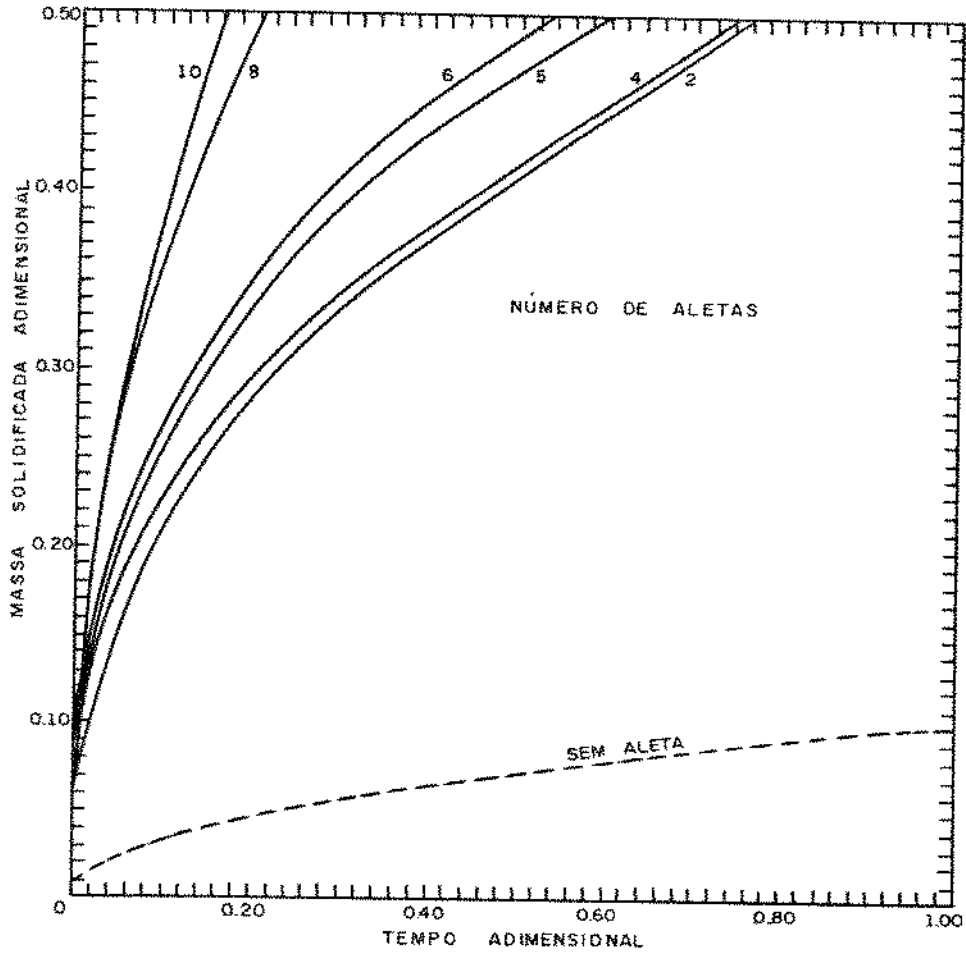


Figura 4.2: Gráfico comparativo para diversos números de aletas, relacionando a massa de material de mudança de fase solidificada e o tempo adimensional de solidificação.

A figura (4.3), mostra a taxa de descarregamento do fluxo de calor adimensional em função do tempo para várias aletas. Como pode-se notar, o aumento do número de aletas provoca diminuição no tempo adimensional de solidificação. O mesmo pode ser observado nas figuras (4.4), (4.5), onde tem-se a efetividade e o número de unidades de transferência em função do tempo adimensional.

O perfil da temperatura adimensional de mistura do fluido na saída do tubo em função do tempo adimensional de solidificação para várias de aletas é mostrado na figura (4.6). Nota-se que inicialmente tem-se valores altos da temperatura devido a alta taxa de calor que sai do material de mudança de fase e tende a diminuir com o tempo. Em relação ao número de aletas, para uma mesma temperatura do fluido, quanto mais aletas há na configuração geométrica menor é o intervalo de tempo para consegui-la.

Nas figuras (4.7), (4.8) e (4.9) estudou-se o comportamento da frente de solidificação para o caso de 4, 5 e 6 aletas respectivamente, em um corte transversal no tubo, conforme o esquema mostrado figura (4.1), para as direções radial e circunferencial. As linhas tracejadas esquematizam a aleta e o tubo, enquanto as linhas cheias mostram a posição da frente de solidificação para a porcentagem de massa solidificada neste corte e o tempo adimensional gasto para atingir esta quantidade de massa solidificada.

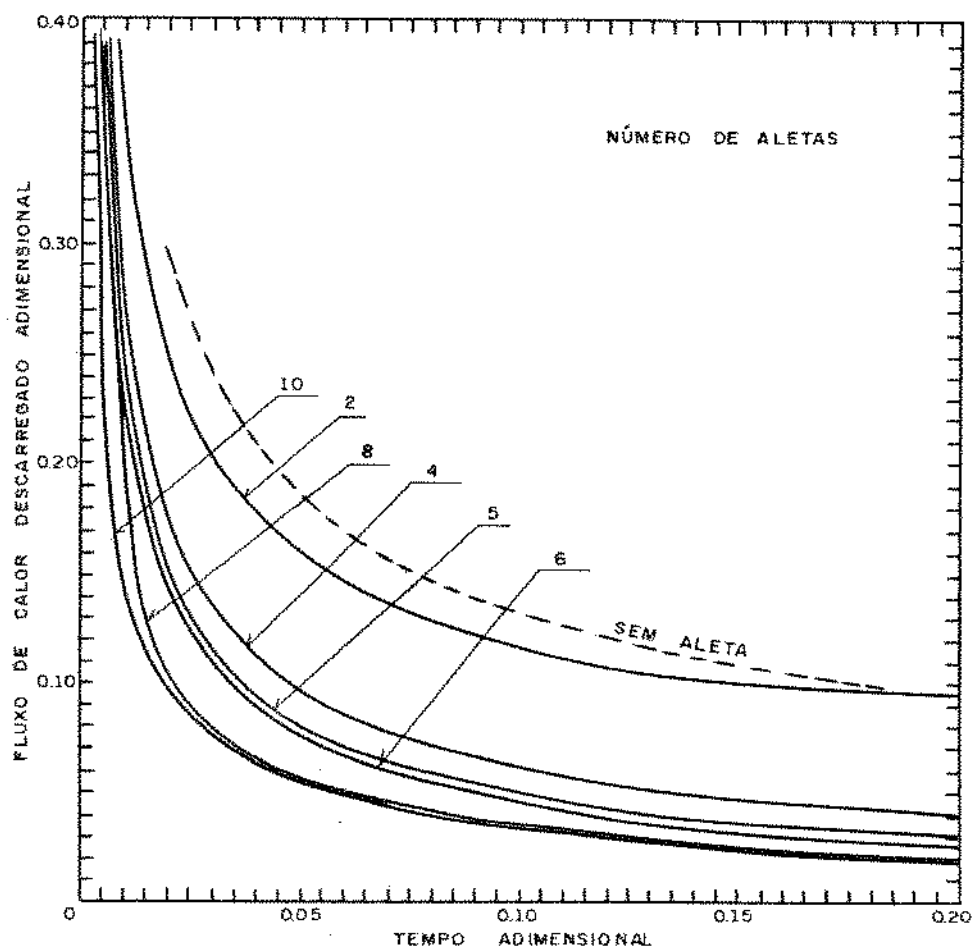


Figura 4.3: Descarregamento do fluxo de calor em função do tempo adimensional de solidificação.

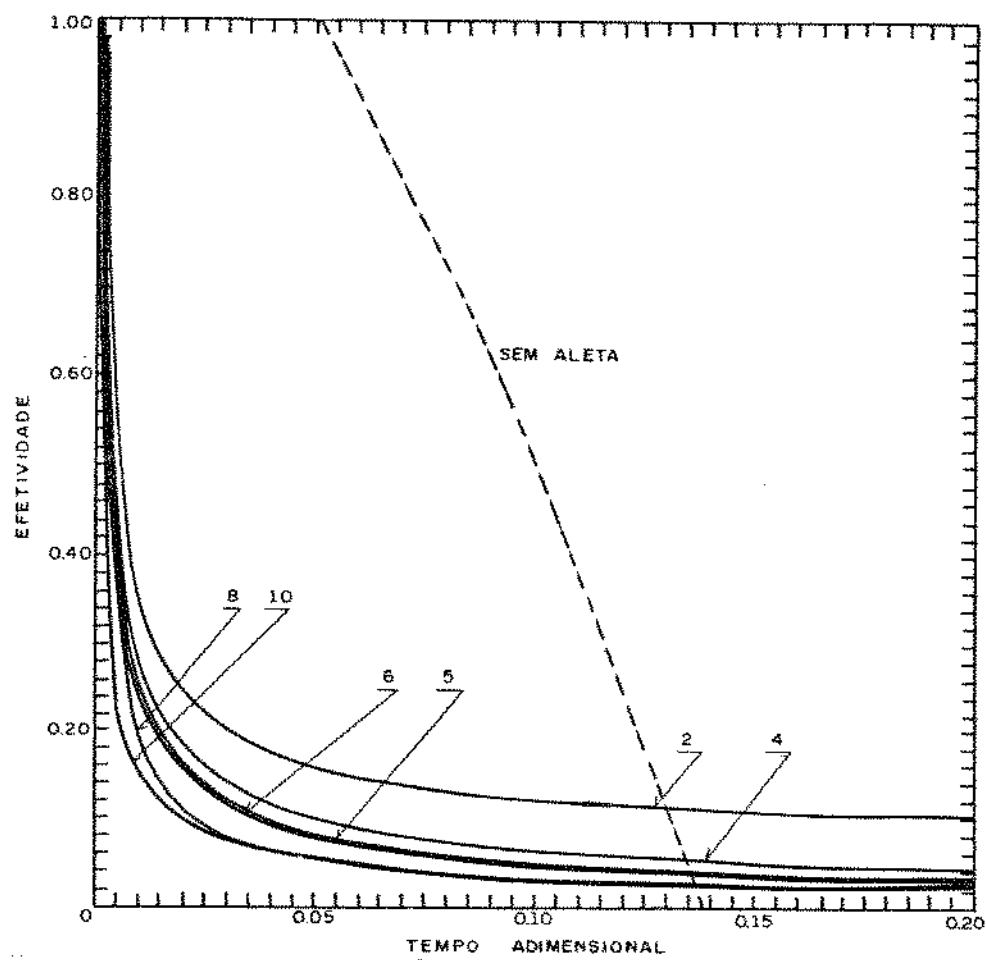


Figura 4.4: Efetividade em função do tempo adimensional de solidificação.

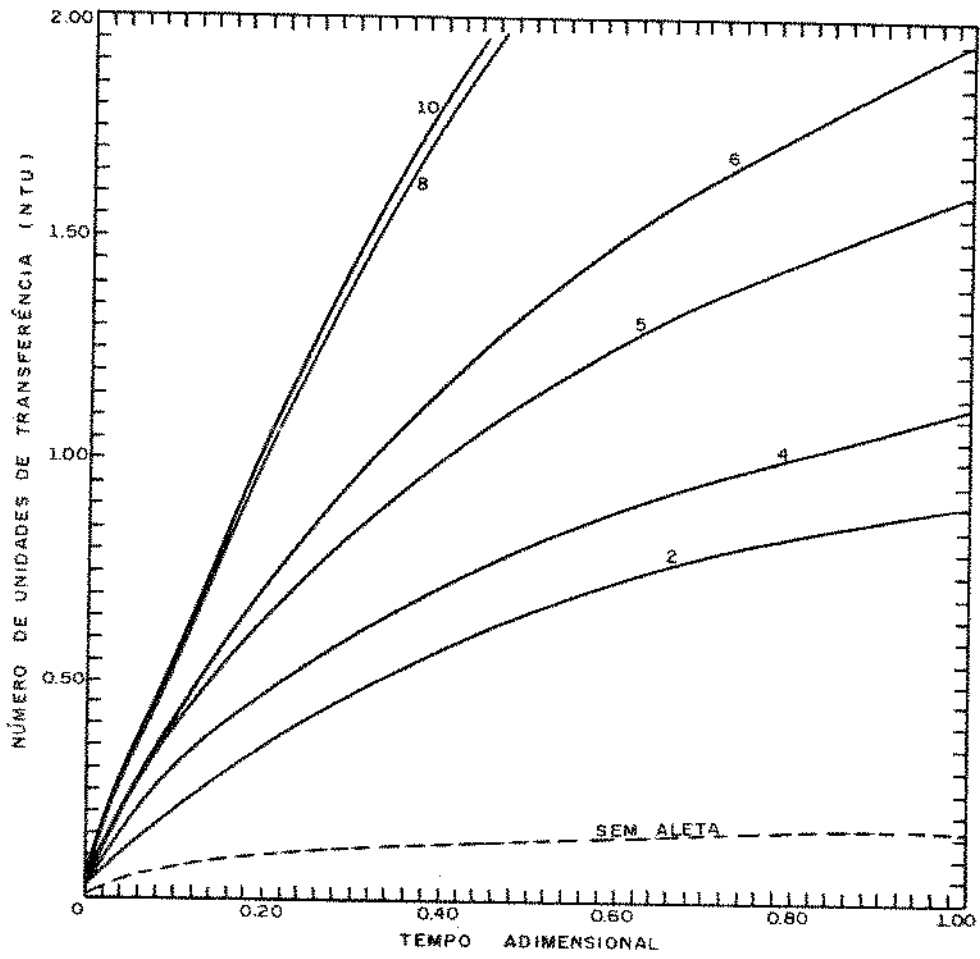


Figura 4.5: Número de unidades de transferência em função do tempo adimensional de solidificação.

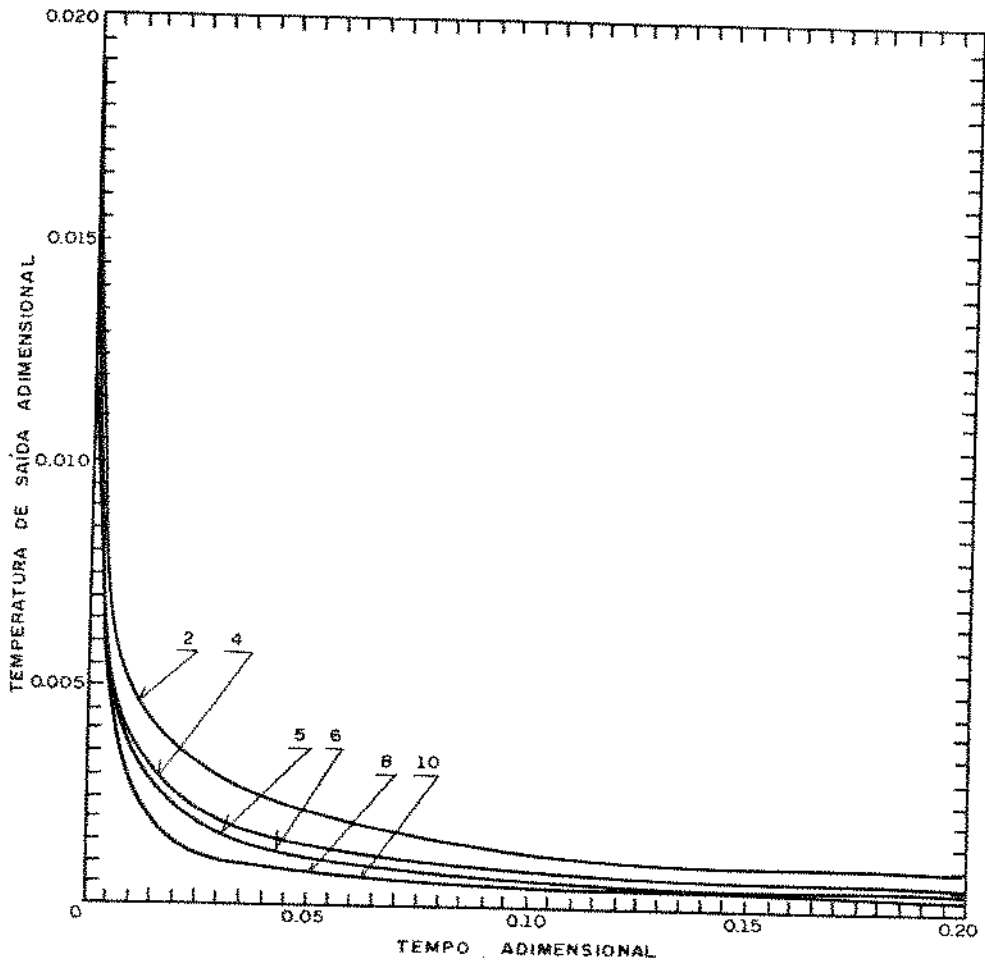


Figura 4.6: Temperatura adimensional de mistura do fluido na saída do tubo em função do tempo adimensional de solidificação.

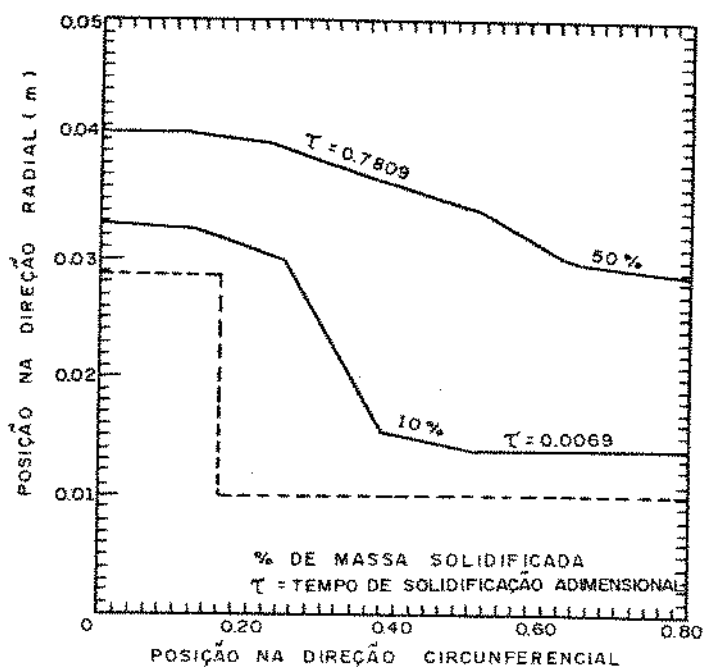


Figura 4.7: Posição da frente de solidificação na direção radial e circunferencial no plano transversal para 4 aletas.

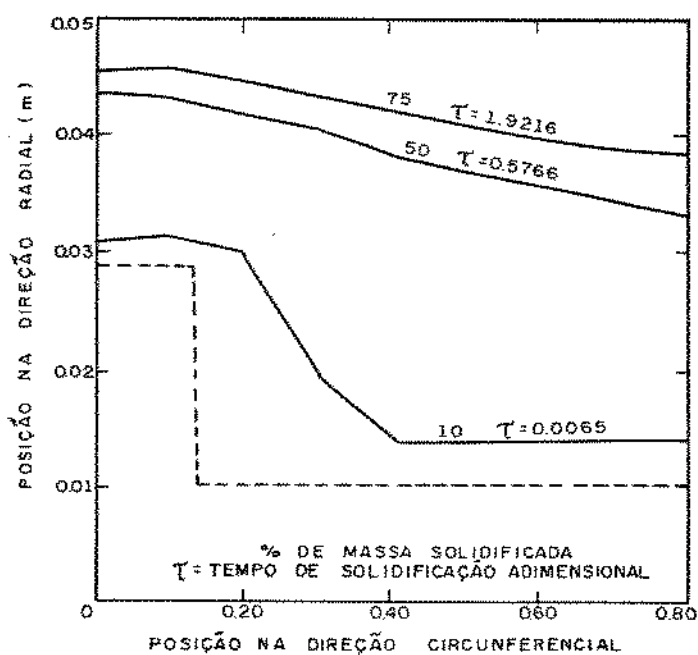


Figura 4.8: Posição da frente de solidificação na direção radial e circunferencial no plano transversal para 5 aletas.

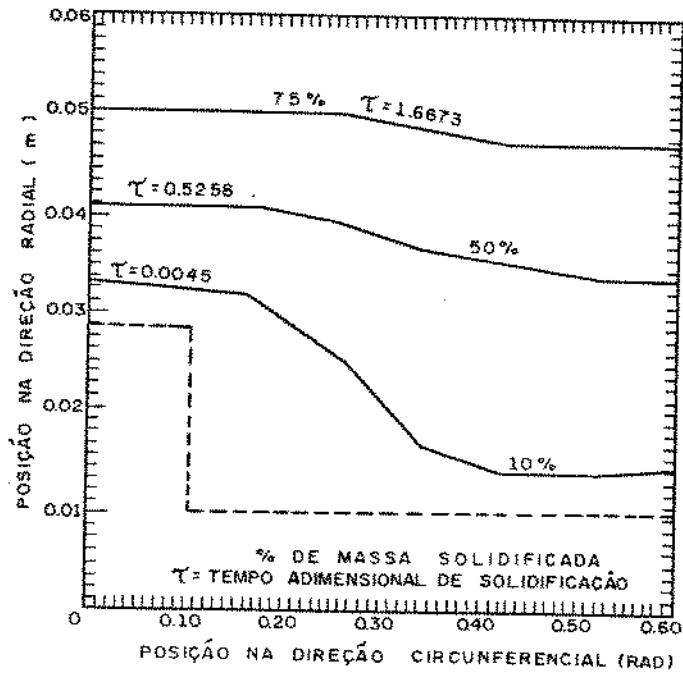


Figura 4.9: Posição da frente de solidificação na direção radial e circunferencial no plano transversal para 6 aletas.

Nas figuras (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) e (4.16), mostram o comportamento da frente de solidificação ao longo do tubo, em relação a porcentagem de massa solidificada para os casos de 4, 5 e 6 aletas, isto é, possível quando se realiza um corte longitudinal em um dos tubos da unidade armazenadora para duas posições na direção circunferencial fixadas, sendo uma dentro da aleta e a outra no meio da região de simetria conforme a figura (4.10).

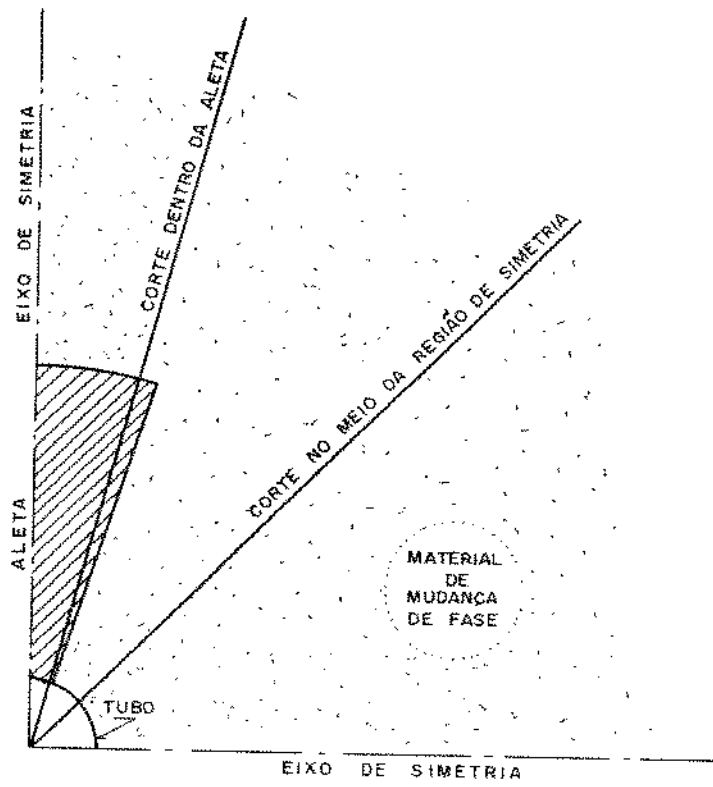


Figura 4.10: Corte longitudinal no tubo para posições circunferenciais fixas

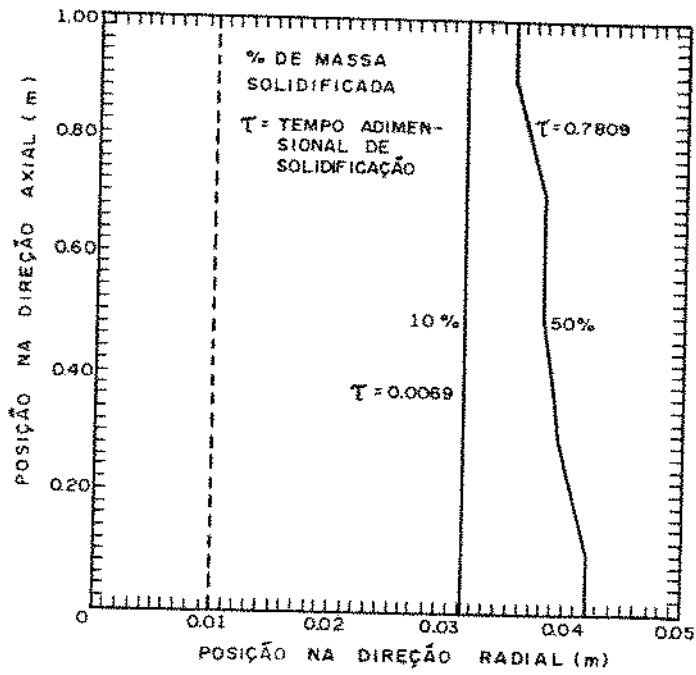


Figura 4.11: Posição da frente de solidificação na direção axial e radial no plano transversal, ou seja, para a posição circunferencial fixa de $7,5^\circ$ no caso de 4 aletas.

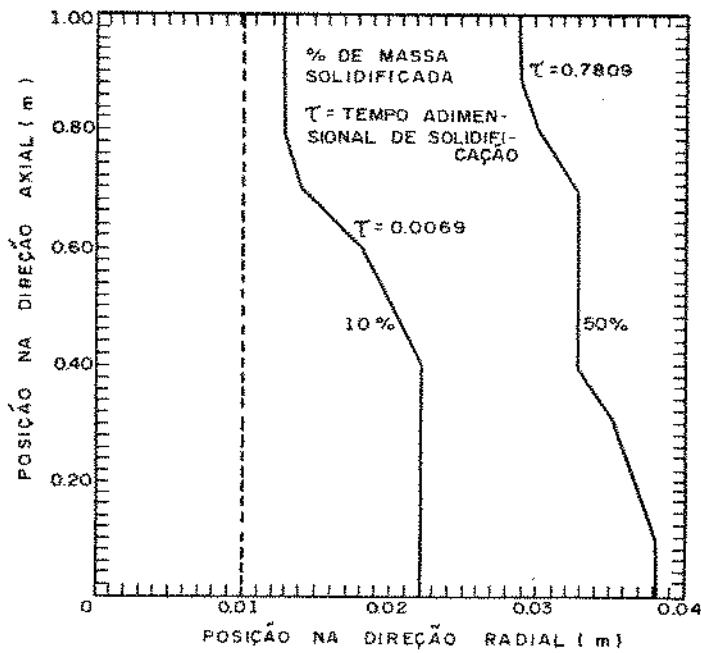


Figura 4.12: Posição da frente de solidificação na direção axial e radial no plano transversal, ou seja, para a posição circunferencial fixa de $22,5^\circ$ no caso de 4 aletas.

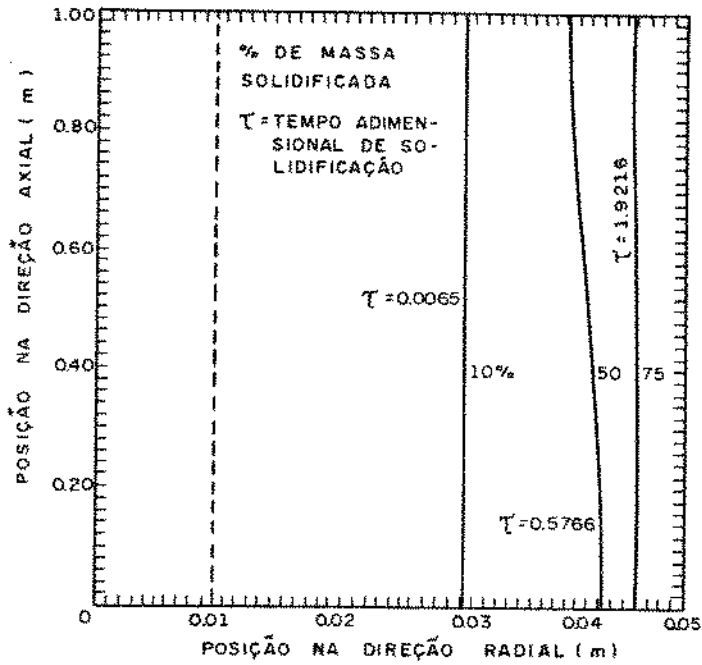


Figura 4.13: Posição da frente de solidificação na direção axial e radial no plano transversal, ou seja, para a posição circunferencial fixa de $6,0^\circ$ no caso de 5 aletas.

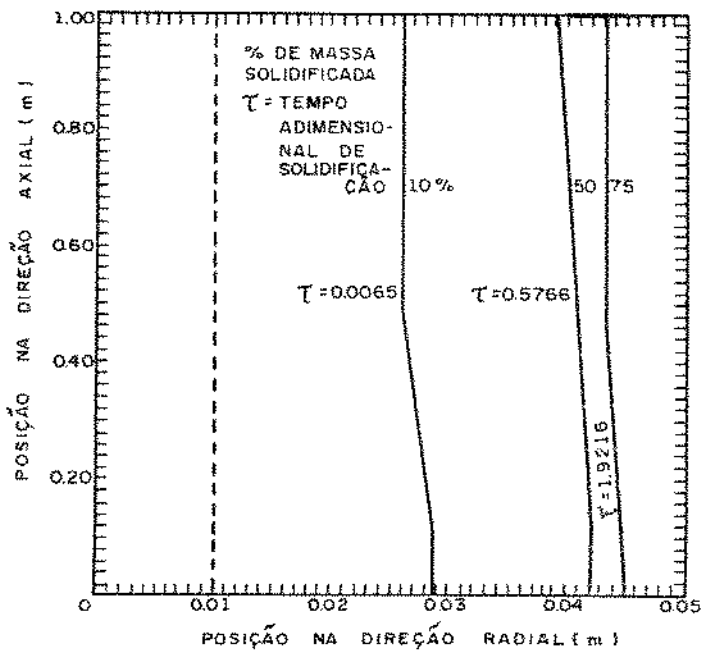


Figura 4.14: Posição da frente de solidificação na direção axial e radial no plano transversal, ou seja, para a posição circunferencial fixa de $18,0^\circ$ no caso de 5 aletas.

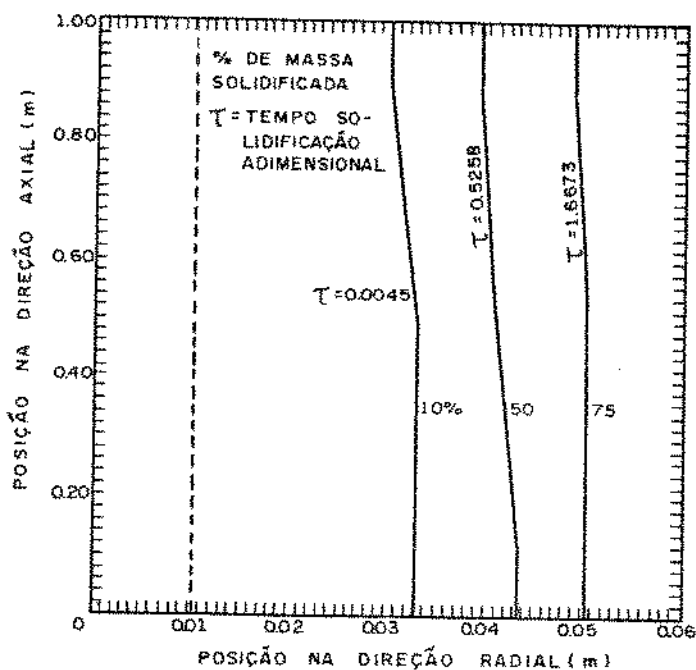


Figura 4.15: Posição da frente de solidificação na direção axial e radial no plano transversal, ou seja, para a posição circunferencial fixa de 5,0° no caso de 6 aletas.

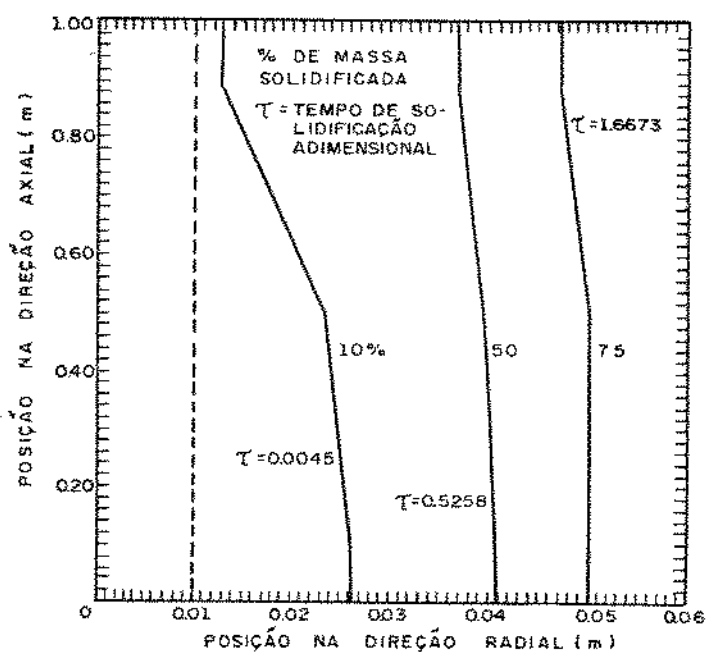


Figura 4.16: Posição da frente de solidificação na direção axial e radial no plano transversal, ou seja, para a posição circunferencial fixa de 15,0° no caso de 6 aletas.

A figura (4.17) apresenta a variação da massa solidificada em função do número de aletas. Como pode ser verificado o efeito do número de aletas é bastante dominante.

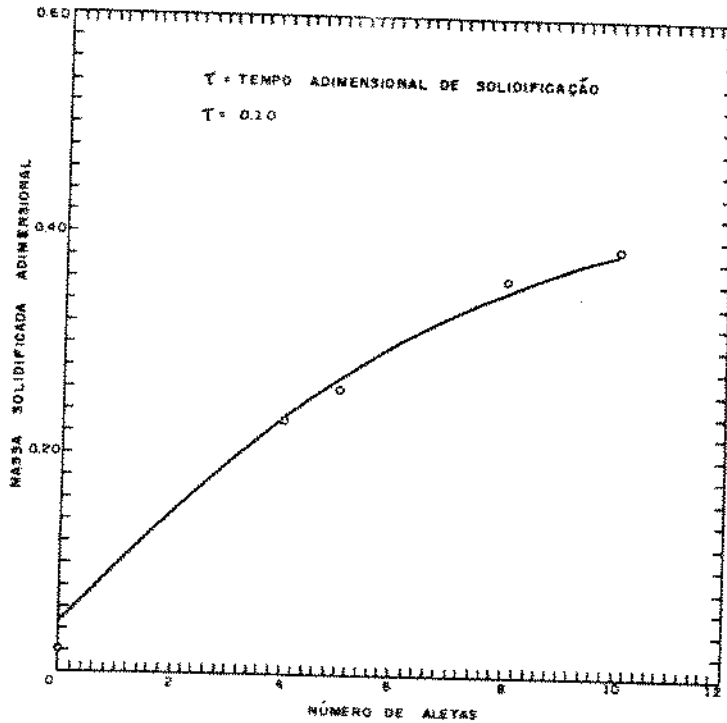


Figura 4.17: Relação entre a porcentagem de massa solidificada e o número de aletas.

4.2 Análise da Relação de Compacticidade

A relação entre o raio externo formada pela condição de contorno adiabática e o raio do tubo chamou-se de relação de compacticidade (ALT), portanto:

$$ALT = \frac{r_m - r_i}{r_i} \quad (4.1)$$

Para a análise da relação de compacticidade, fixou-se configuração geométrica padrão, formada por um tubo com 4 aletas, (4.18), e variou-se o raio da condição de contorno adiabática, ou seja, variou-se a relação de compacticidade para 2, 4 e 5, isto é, o raio da condição de contorno adiabática varia de 0,029; 0,048 e 0,057m, respectivamente.

Na figura (4.19) é apresentada a influência da relação de compacticidade na massa a ser solidificada em função do tempo adimensional. Nota-se que o aumento da relação de compacticidade resulta no aumento do tempo de solidificação provocado pelo aumento da resistência térmica total ao longo do caminho de troca de calor.

Na figura (4.20), mostra a variação do fluxo de calor adimensional em função do tempo adimensional de solidificação, para diversas relações de compacticidades. Como pode ser verificado, para uma taxa constante de calor o tempo de solidificação varia em função da compacticidade conforme visto anteriormente.

A variação da efetividade em função da relação de compacticidade é mostrada na figura (4.21) indicando um comportamento semelhante ao da figura (4.20).

A figura (4.22) mostra a variação do número de unidades de transferência (NTU) em função do tempo adimensional para vários valores de relação de compacticidade. Como pode ser verificado os números de unidades de transferência aumentam com a redução da relação de compacticidade para um tempo adimensional constante. Isto novamente pode ser explicado pelo aumento da resistência térmica quando se aumentou a relação de compacticidade. A variação da temperatura de mistura do fluido de trabalho é mostrada na figura (4.23) para diversas relação de compacticidade. Para uma dada temperatura de saída constante, o aumento da relação de compacticidade provoca aumento no tempo de solidificação.

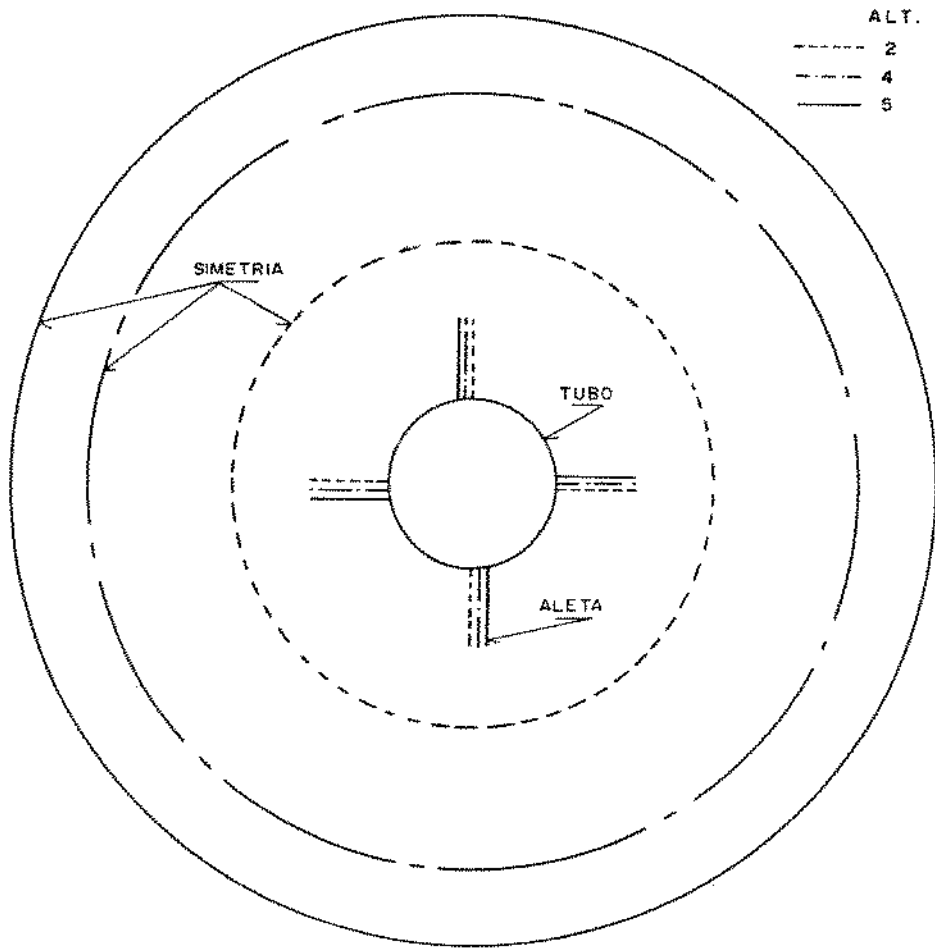


Figura 4.18: Configuração geométrica da região de simetria variando-se a relação de compacticidade.

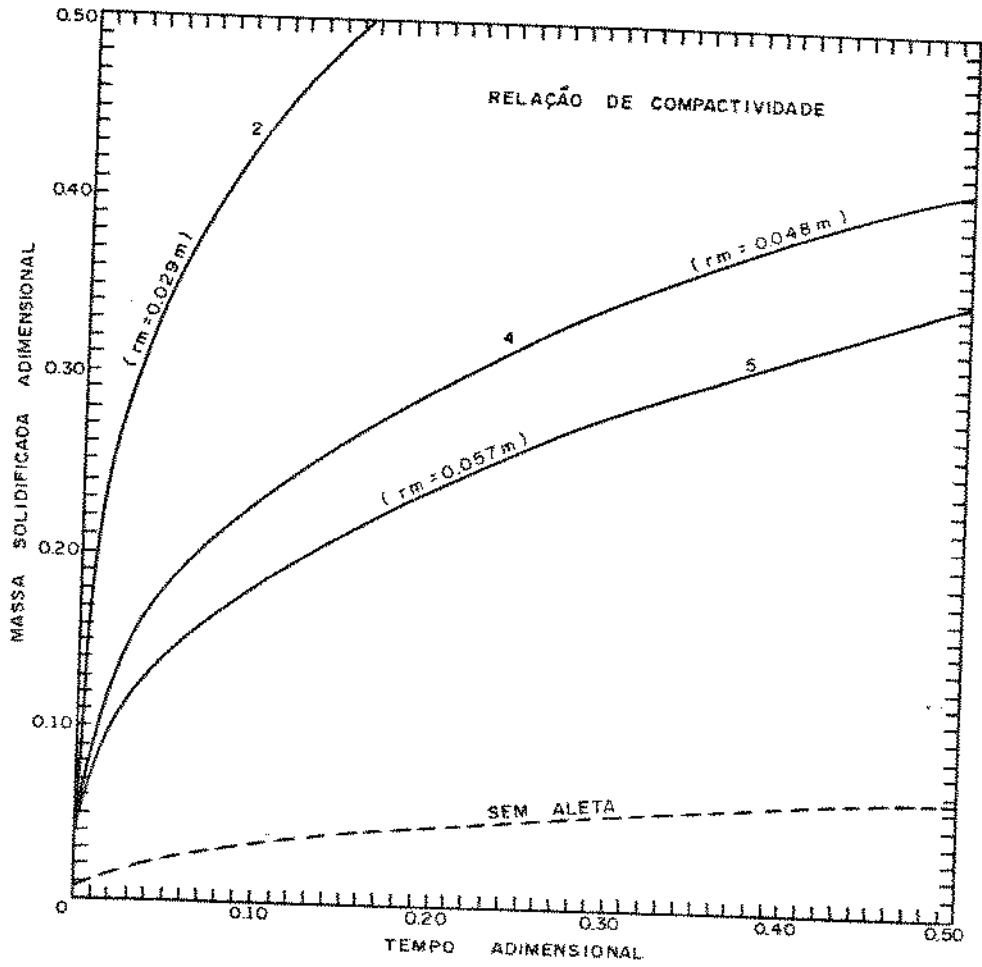


Figura 4.19: Gráfico comparativo para diversas relação de compacticidade, relacionando a massa de material de mudança de fase solidificada e o tempo adimensional de solidificação.

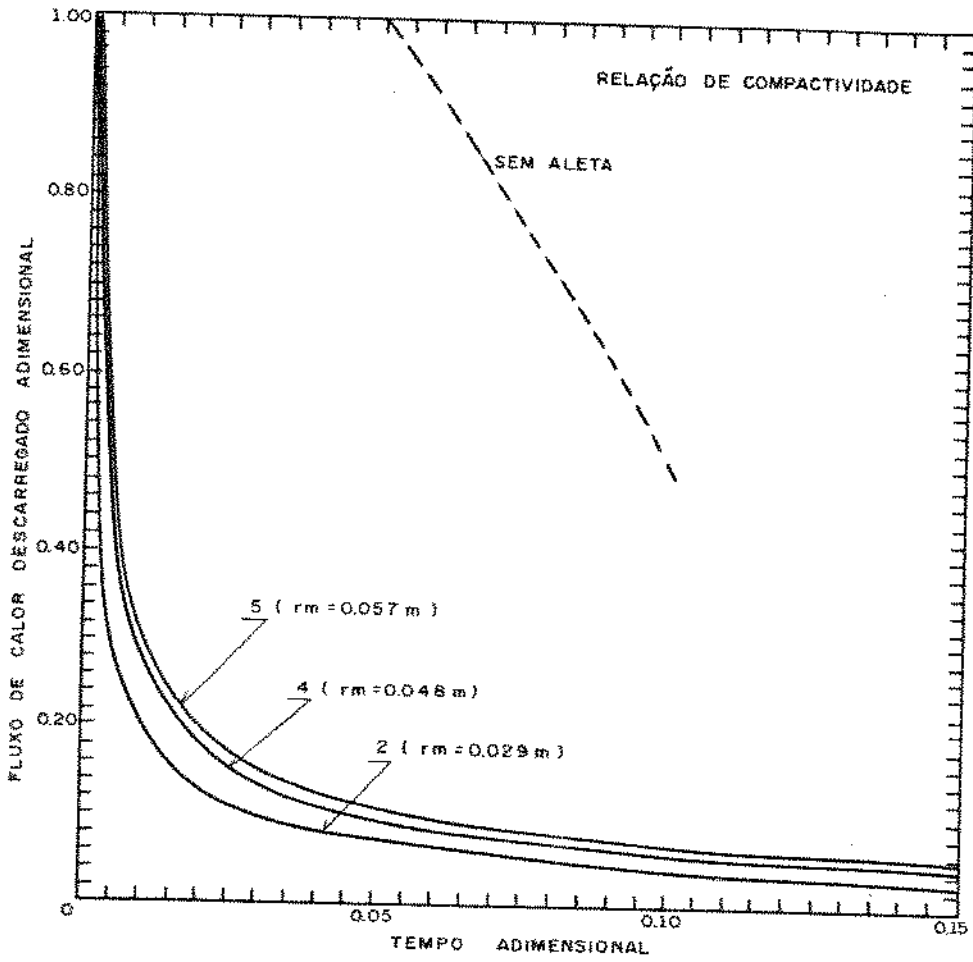


Figura 4.20: Descarregamento do fluxo de calor em função do tempo adimensional de solidificação.

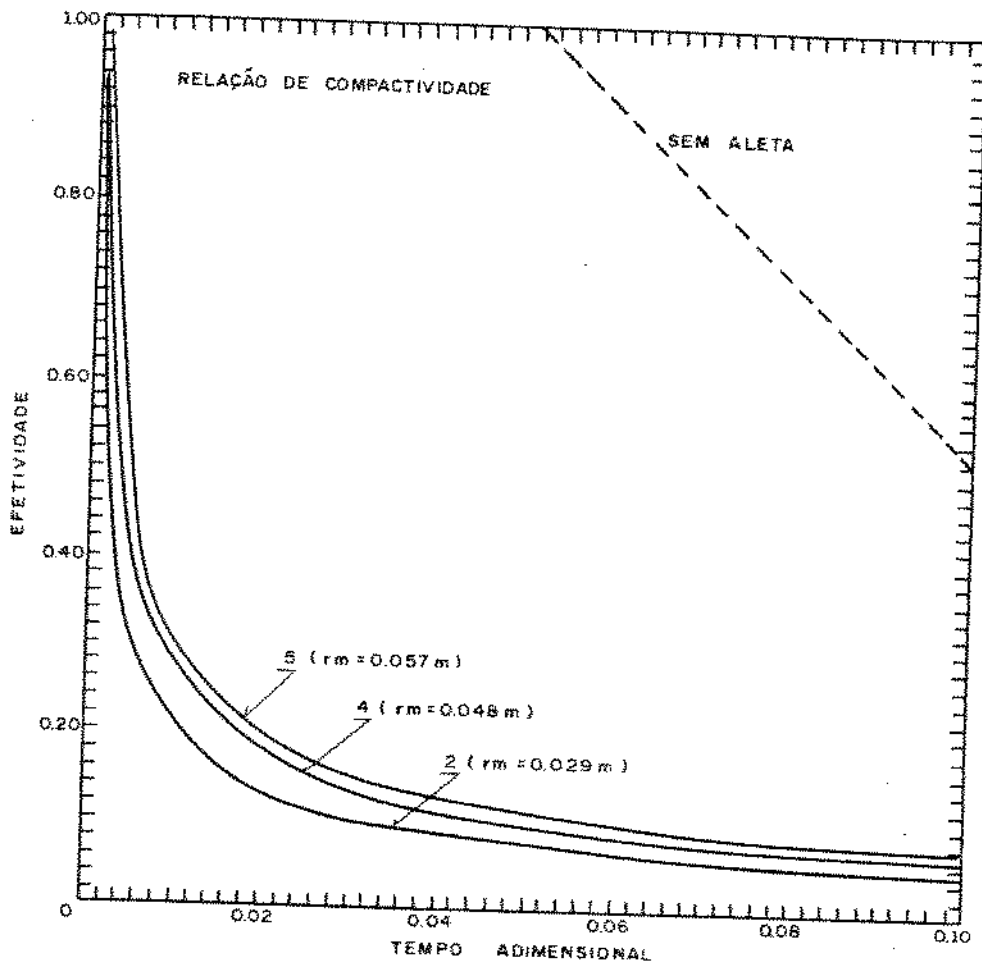


Figura 4.21: Efetividade em função do tempo adimensional de solidificação.

As figuras (4.24) e (4.25) mostram o perfil da frente de solidificação para relações de compacticidade iguais a 2 e 5 respectivamente, para um corte axial no armazenador de calor, para porcentagem de massa solidificada de 10, 25 e 50 %. As variações axiais da frente de solidificação para um corte na direção longitudinal ao longo de um tubo da unidade armazenadora, para o caso de duas posições circunferenciais fixas, uma dentro da aleta e outra no meio da região de simetria, são mostrados nas figuras (4.26), (4.27), (4.28) e (4.29). Para o caso de relações de compacticidade igual a 4 são os mesmos resultados apresentados anteriormente para o caso de 4 aletas .

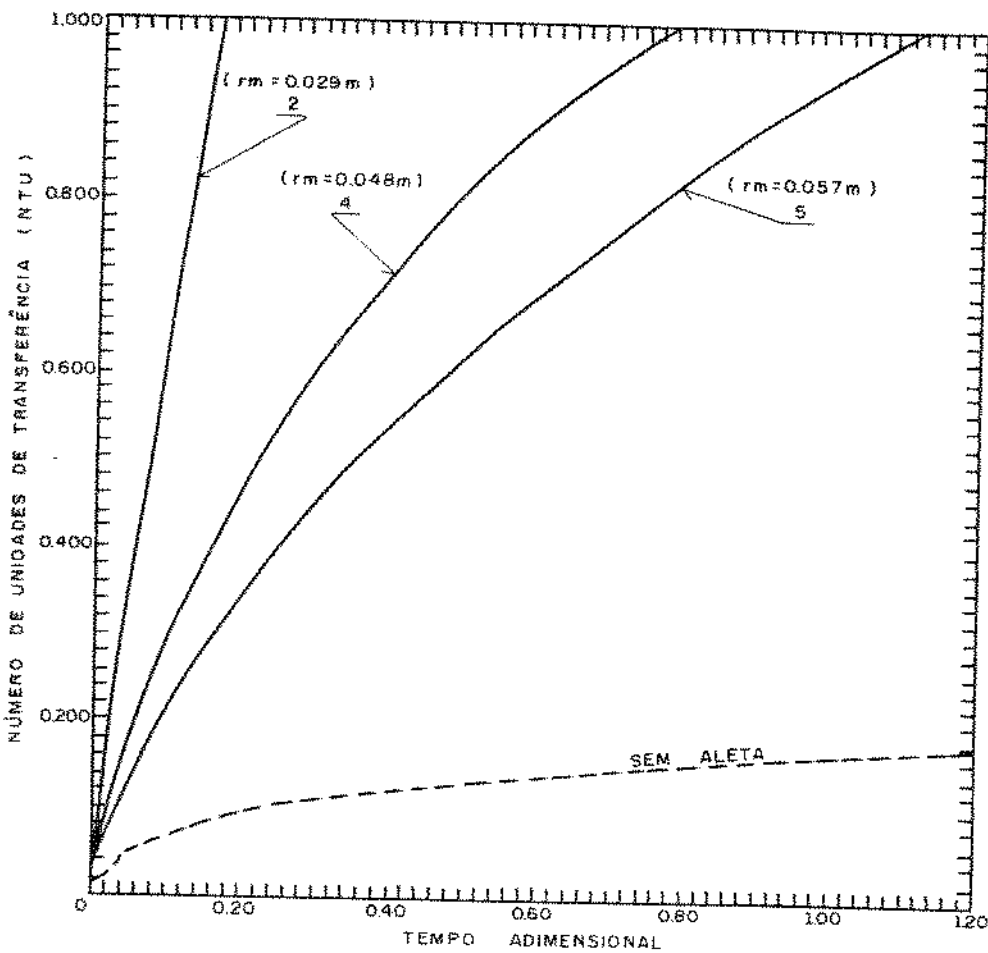


Figura 4.22: Número de unidades de transferência em função do tempo adimensional de solidificação.

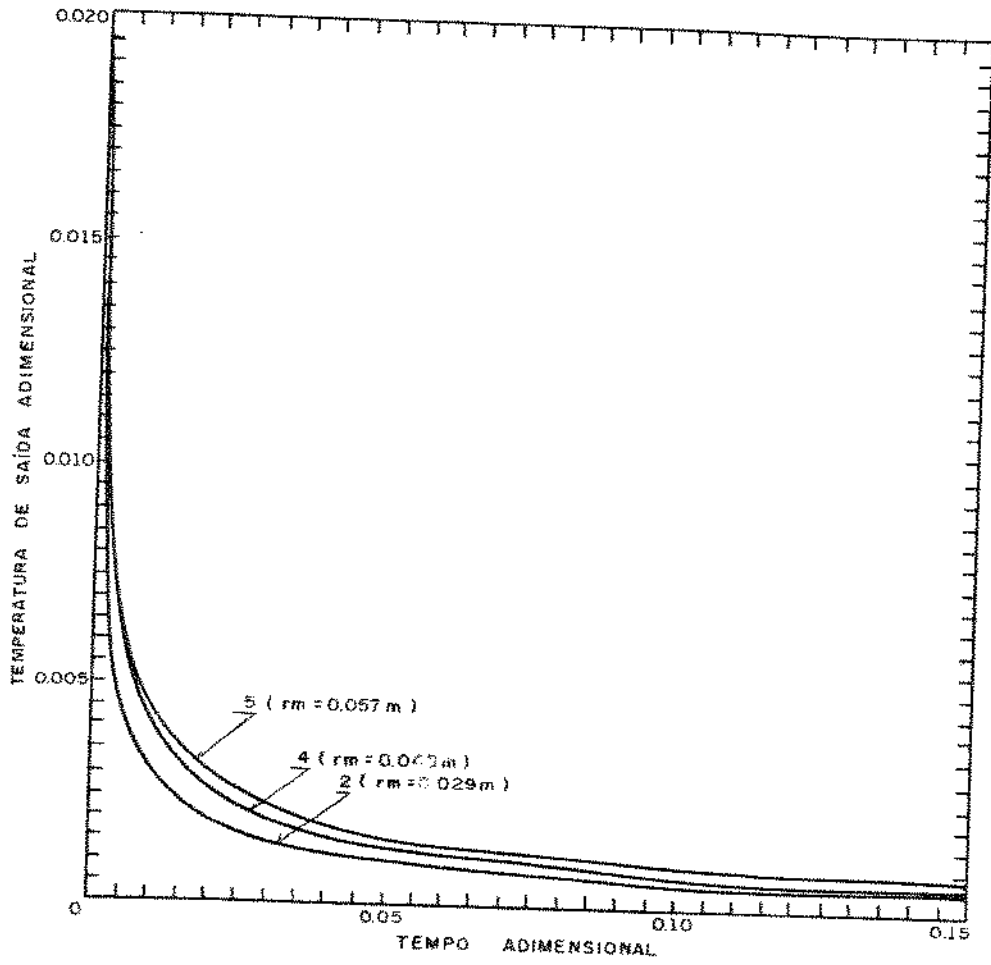


Figura 4.23: Temperatura adimensional de mistura do fluido na saída do tubo em função do tempo adimensional de solidificação.

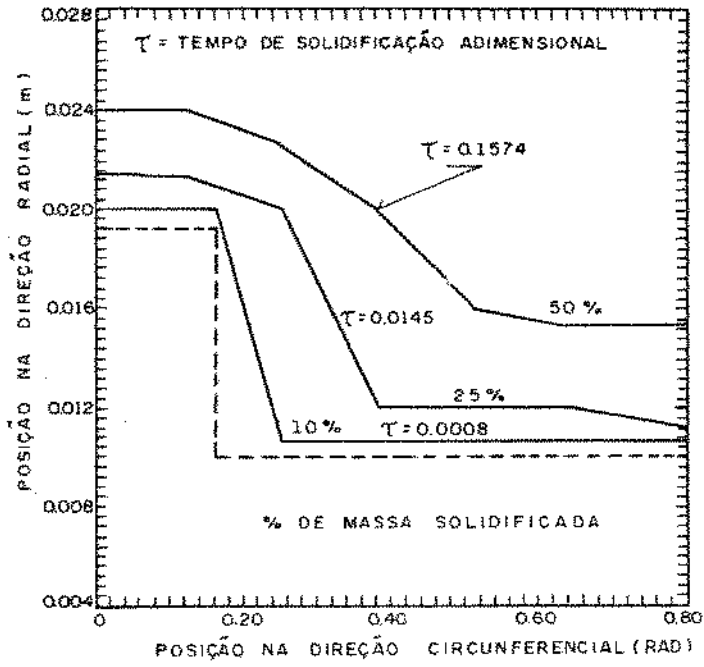


Figura 4.24: Posição da frente de solidificação na direção radial e circunferencial no plano axial para relações de compacticidade igual a 2.

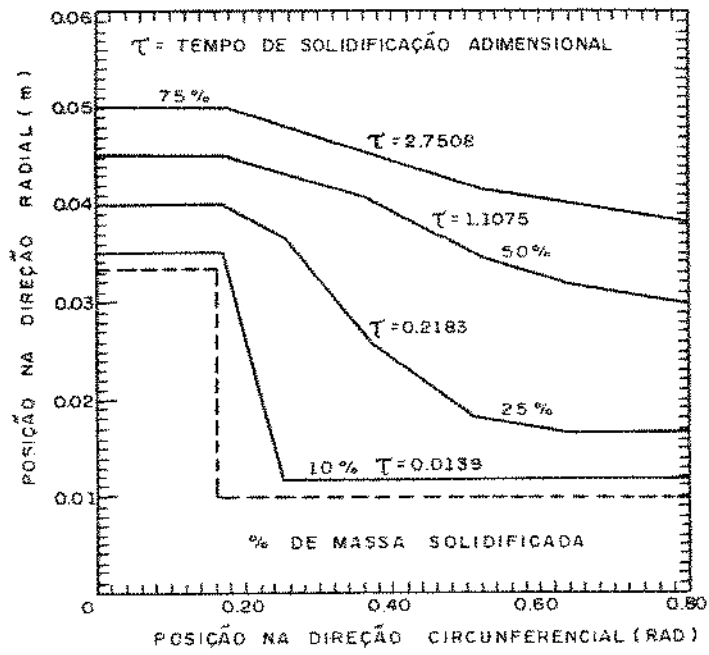


Figura 4.25: Posição da frente de solidificação na direção radial e circunferencial no plano axial para relações de compacticidade igual a 5.

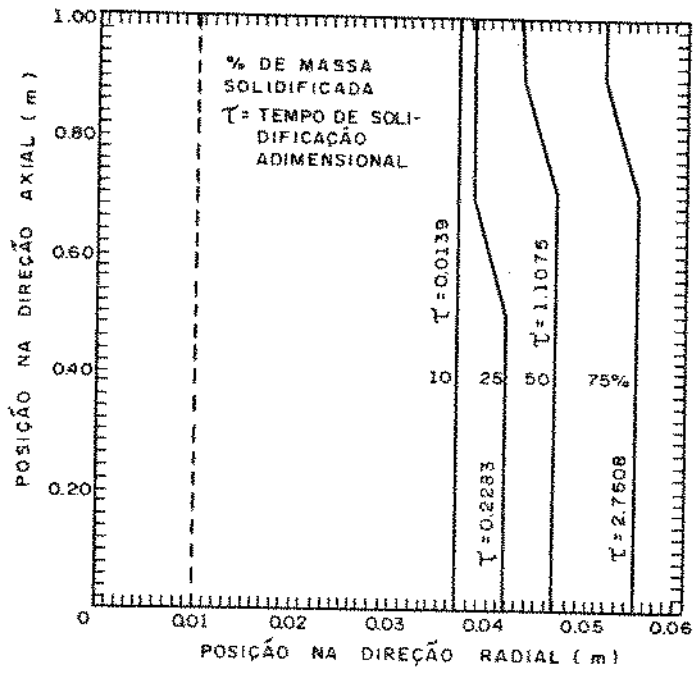


Figura 4.26: Posição da frente de solidificação na direção axial e radial no plano transversal, isto é, quando a posição circunferencial for de $7,5^\circ$ e a relações de compacticidade igual a 2.

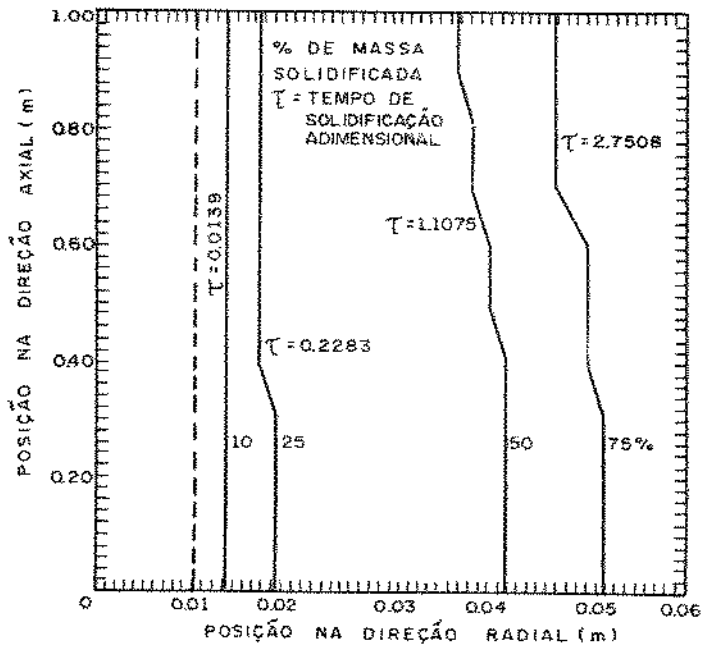


Figura 4.27: Posição da frente de solidificação na direção axial e radial no plano transversal, isto é, quando a posição circunferencial for de $22,5^\circ$ e a relações de compacticidade igual a 2.

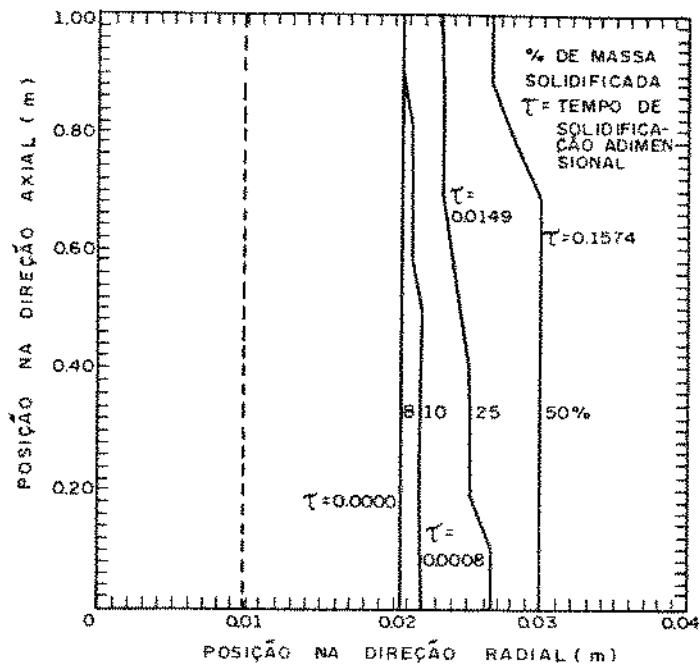


Figura 4.28: Posição da frente de solidificação na direção axial e radial no plano transversal, isto é, quando a posição circunferencial for de $7,5^\circ$ e a relações de compacticidade igual a 5.

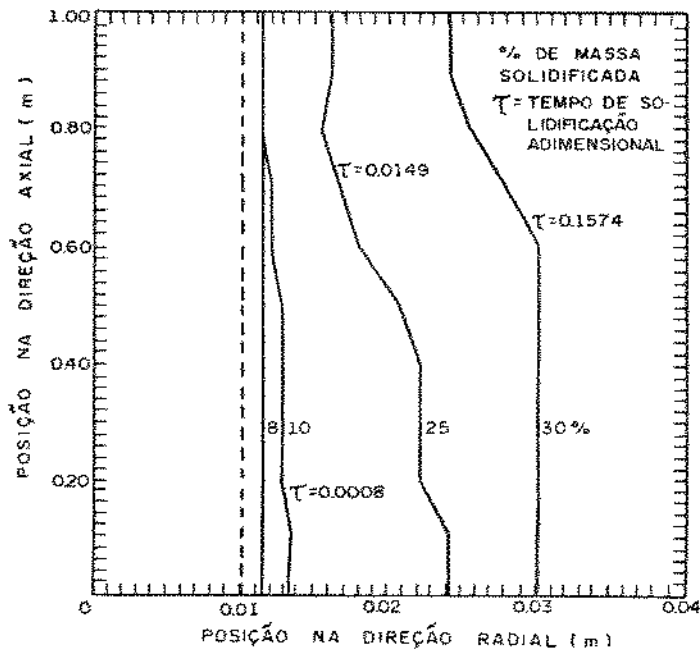


Figura 4.29: Posição da frente de solidificação na direção axial e radial no plano transversal, isto é, quando a posição circunferencial for de $22,5^\circ$ e a relações de compacticidade igual a 5.

A figura (4.30) mostra de forma clara que o aumento da relação de compacticidade resulta na redução da massa solidificada durante um certo tempo.

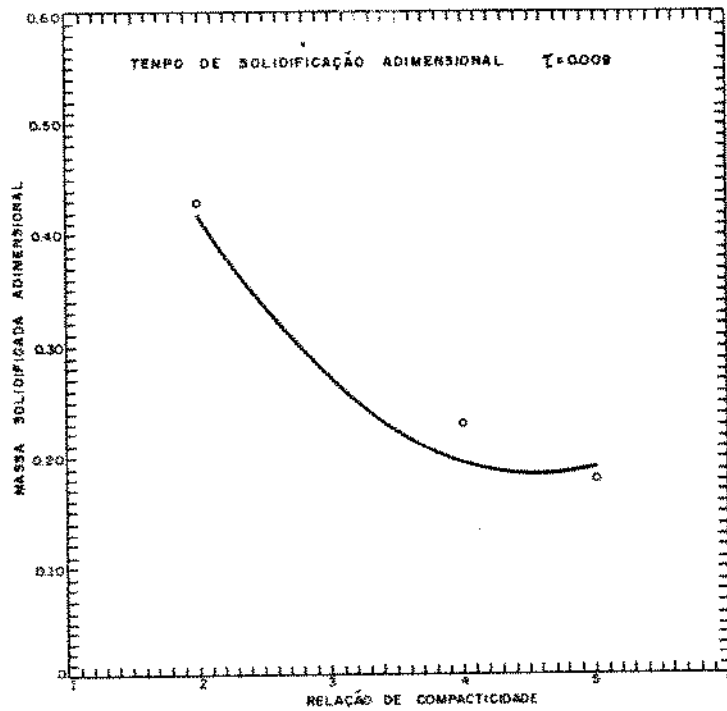


Figura 4.30: Relação entre a porcentagem de massa solidificada e a relação de compacticidade.

4.3 Análise da Altura da Aleta

A altura da aleta é definida como o raio da aleta menos o raio do tubo. Como parâmetro variou-se a altura da aleta em 0,019; 0,027; 0,030 e 0,038 metros, na configuração padrão de 4 aletas e relação de compacticidade igual a 4, isto é, raio de contorno externo de 0,048m e raio interno do tubo de 0,010m.

A influência na altura da aleta pode ser observada na figura (4.31), onde o aumento da altura da aleta provoca um aumento substancial na massa solidificada, como era esperado. O efeito da altura da aleta no fluxo de calor descarregado é observado na figura (4.32), indicando que para uma taxa de calor adimensional e constante o aumento da altura da aleta resulta na redução do tempo de solidificação.

A figura (4.33) mostra a variação da efetividade com a altura da aleta. Podemos verificar que o aumento da altura da aleta resulta na diminuição do tempo de solidificação.

O efeito da altura da aleta sobre o número de unidades de transferência pode ser verificado na figura (4.34). As curvas correspondentes a altura de aleta de 0,029 e 0,038m mostram a pouca variação em relação de um à outro, ou seja, uma altura de 0,029m é o razoável.

A figura (4.35) permite observar o perfil da temperatura adimensional de mistura do fluido na saída do tubo em função do tempo adimensional de solidificação para várias alturas da aleta.

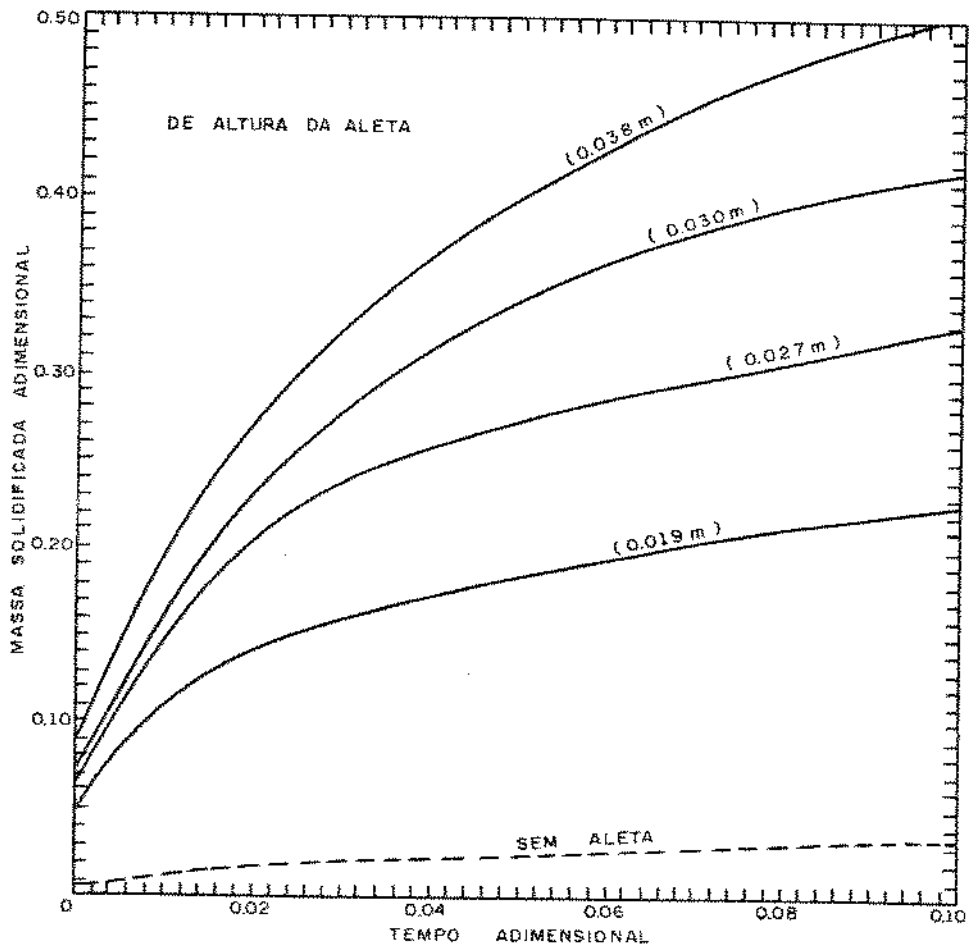


Figura 4.31: Gráfico comparativo para diversas alturas de aletas, relacionando a massa de material de mudança de fase solidificada e o tempo adimensional de solidificação.

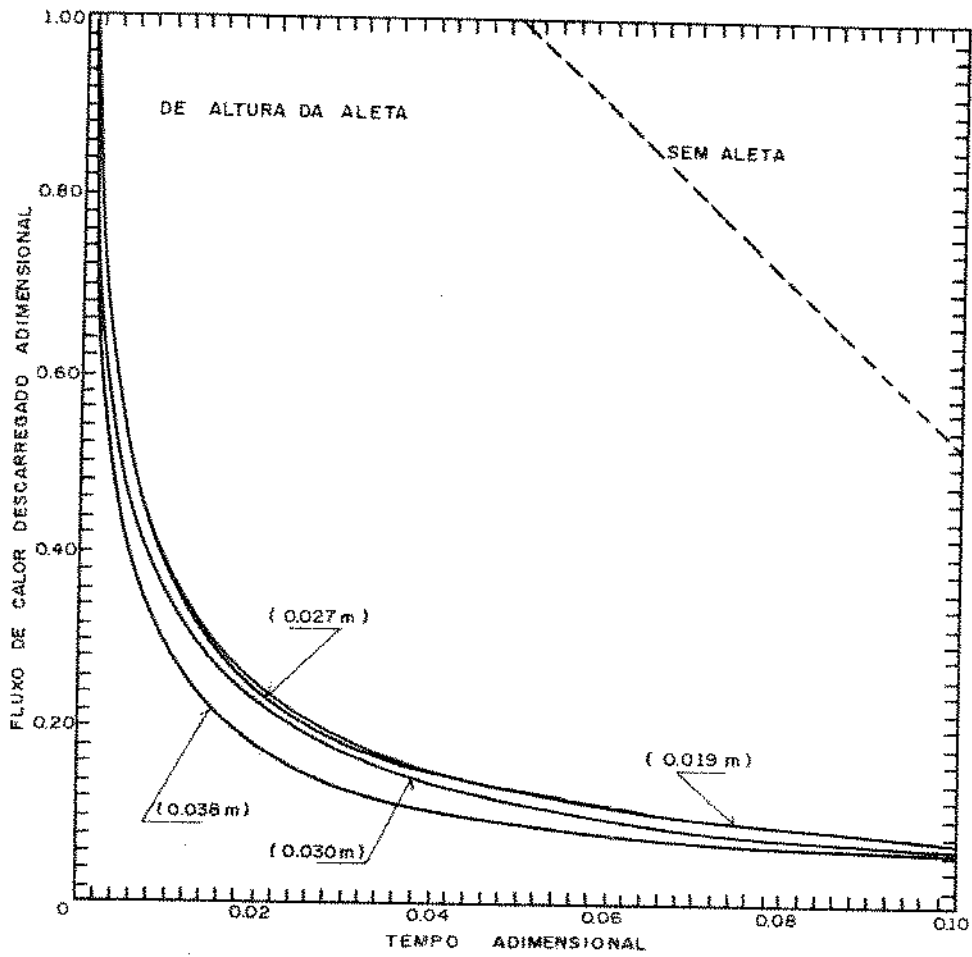


Figura 4.32: Descarregamento do fluxo de calor em função do tempo adimensional de solidificação.

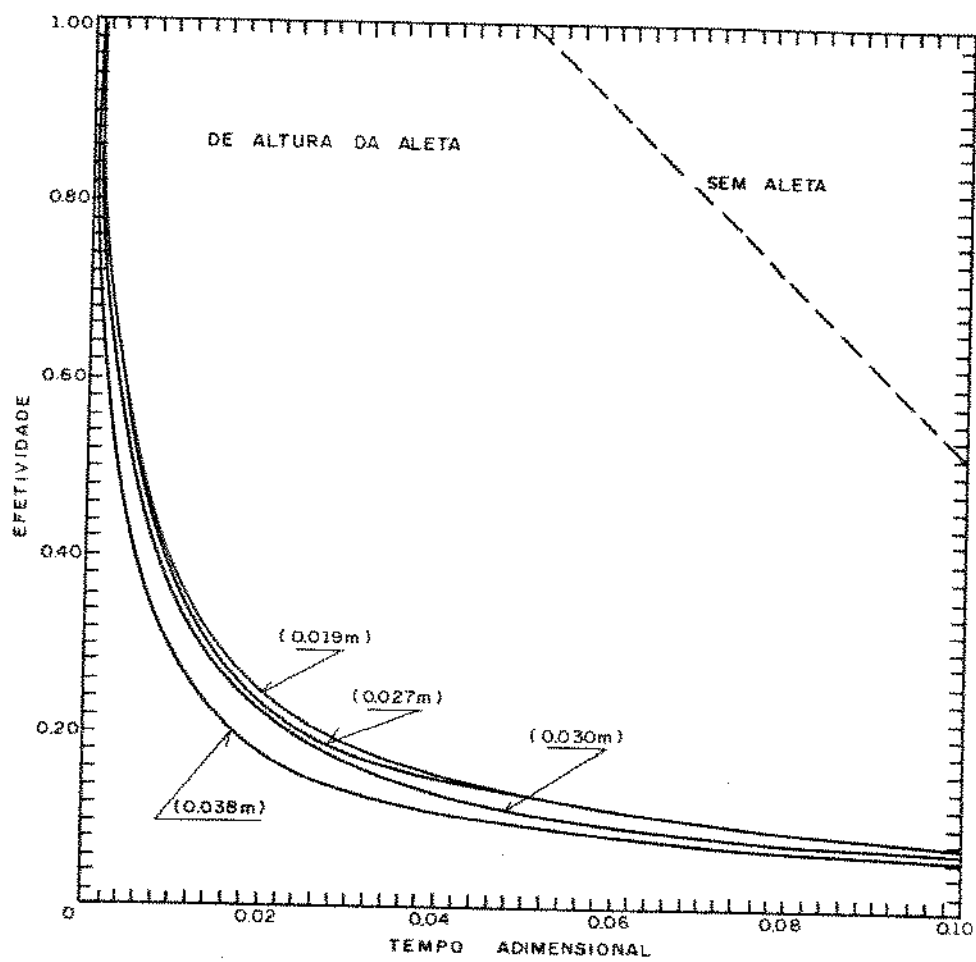


Figura 4.33: Efetividade em função do tempo adimensional de solidificação.

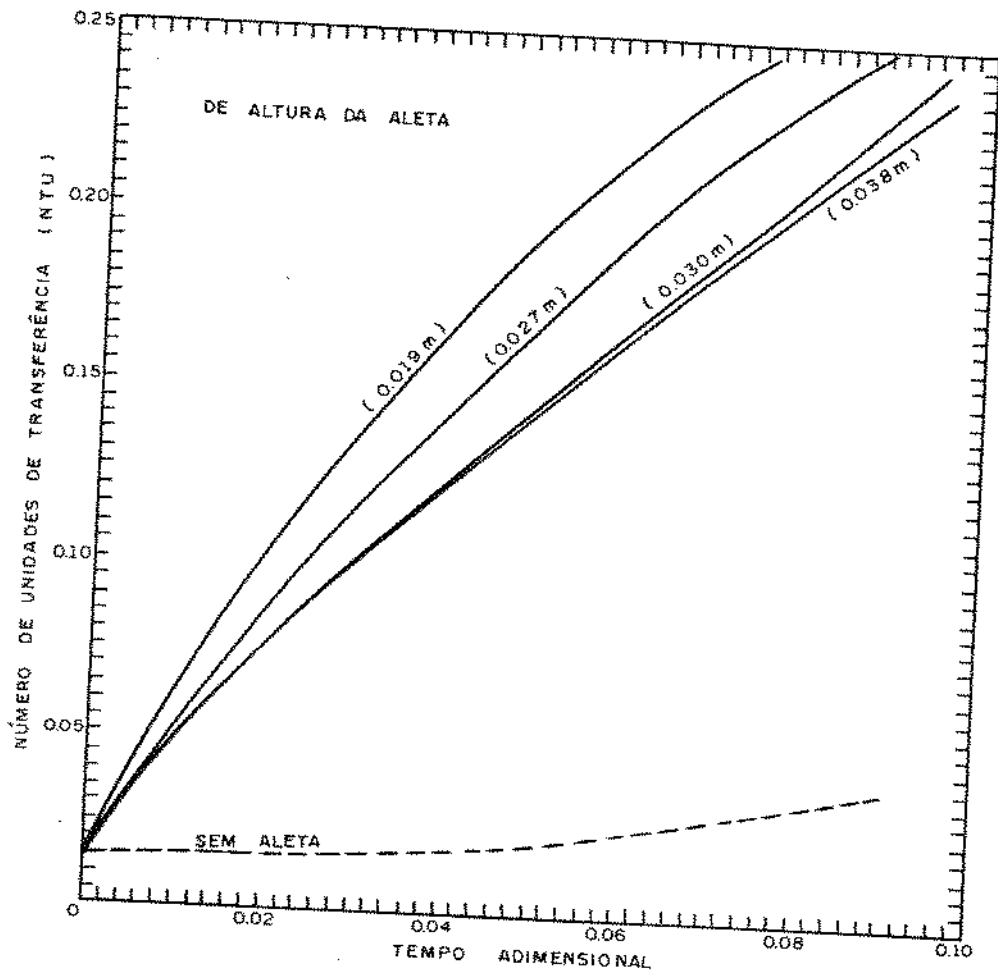


Figura 4.34: Número de unidades de transferência em função do tempo adimensional de solidificação.

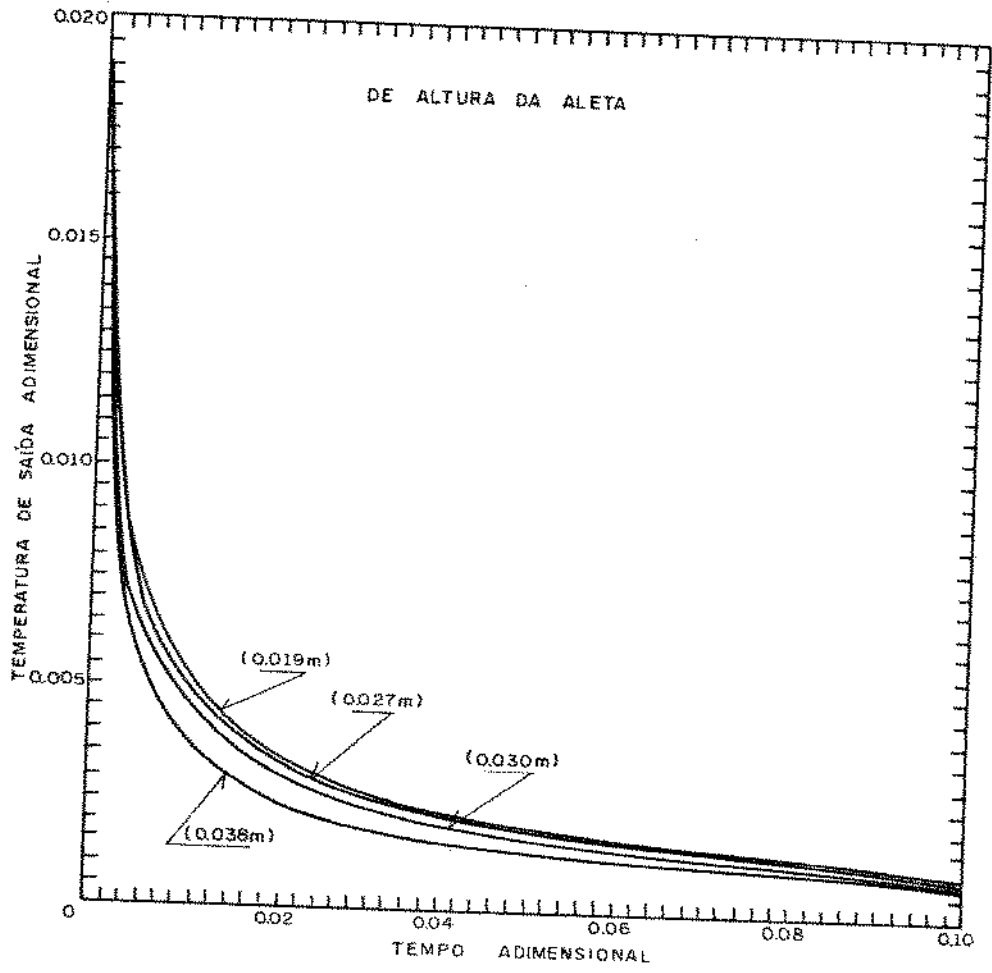


Figura 4.35: Temperatura adimensional de mistura do fluido na saída do tubo em função do tempo adimensional de solidificação.

As posições da frente de solidificação para um corte transversal no armazenador para diversas alturas de aletas são mostrados nas figuras (4.36), (4.37) e (4.38) para o caso de altura da aleta for de 0,025; 0,029 e 0,037m . Como podemos observar o aumento da altura da aleta provoca aumento na taxa de solidificação e portanto na velocidade da frente de solidificação resultando em maior penetração no material líquido. Para o caso de altura de aleta igual a 0,018m , temos os mesmos resultados mostrados anteriormente para 4 aletas.

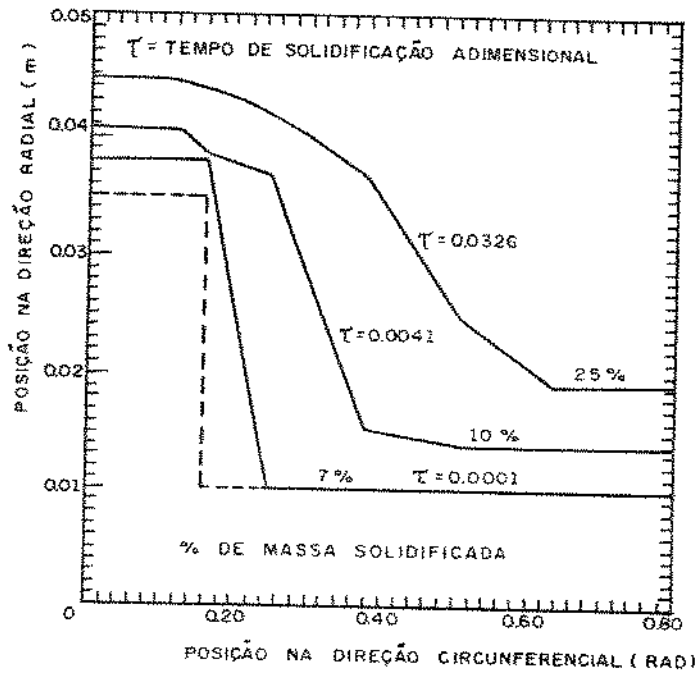


Figura 4.36: Posição da frente de solidificação na direção radial e circunferencial no plano axial para altura da aleta de 0,025m.

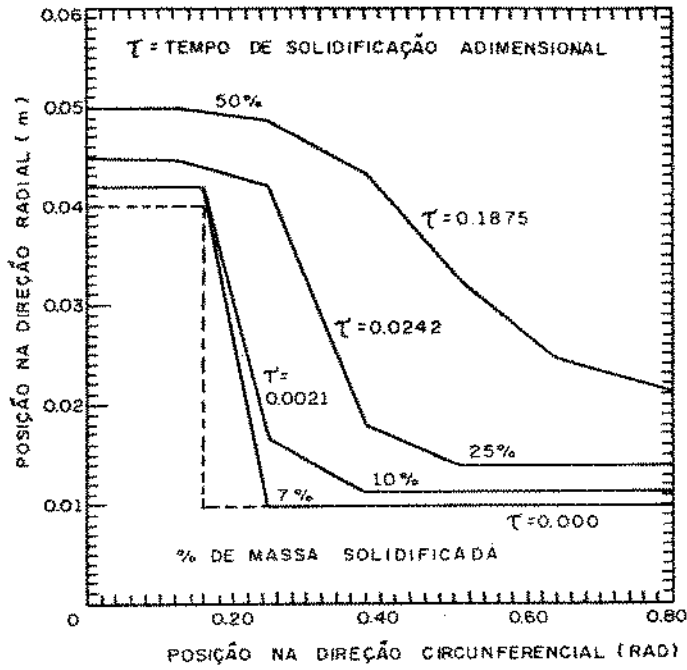


Figura 4.37: Posição da frente de solidificação na direção radial e circunferencial no plano axial para altura da aleta de 0,029m.

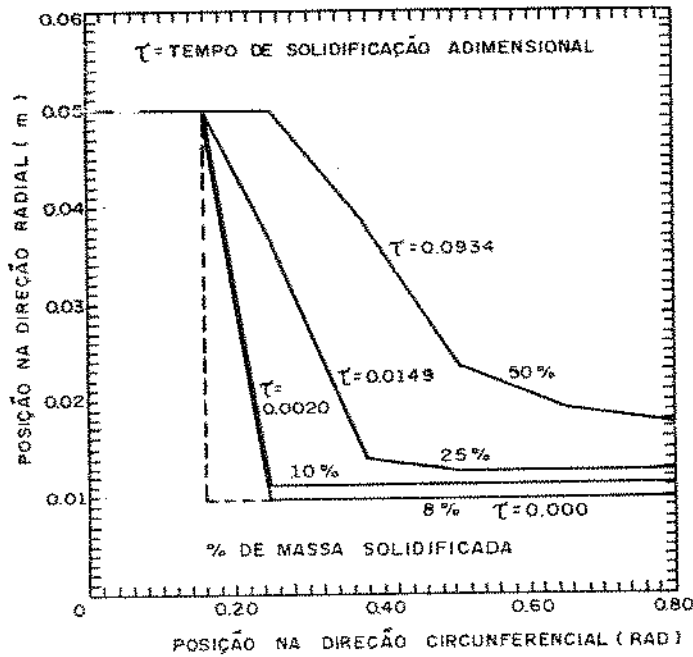


Figura 4.38: Posição da frente de solidificação na direção radial e circunferencial no plano axial para altura da aleta de 0,037m.

A figura (4.39) mostra o efeito da altura da aleta sobre a massa solidificada. Pode ser verificado que o aumento da altura da aleta causa um aumento na massa solidificada com uma taxa decrescente indicando que há um limite superior após o qual um aumento na altura da aleta é insignificante.

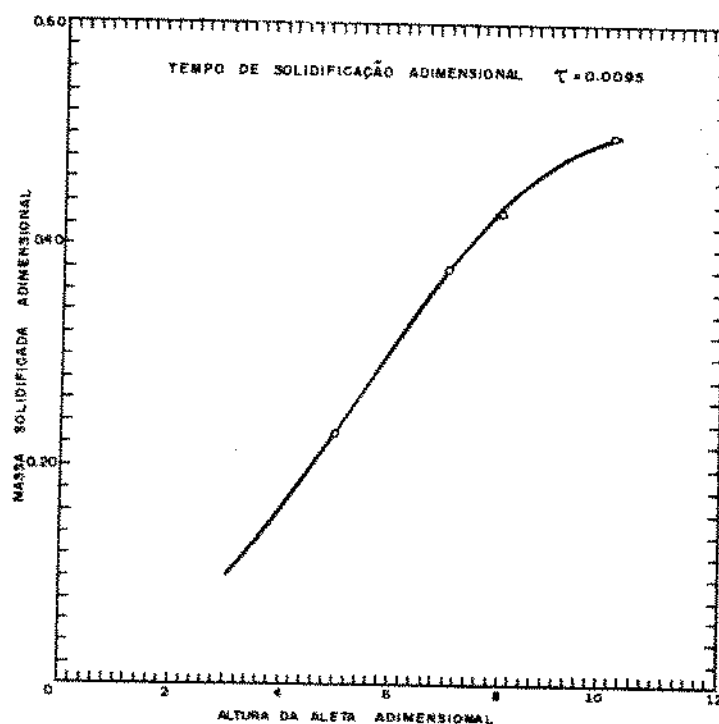


Figura 4.39: Relação da porcentagem de massa solidificada em função da altura da aleta.

4.4 Análise da Espessura da Aleta

Outro parâmetro a ser variado em relação a geometria padrão de 4 aletas, relação de compacticidade igual a 4 e de altura da aleta de 0,018m, é a espessura da aleta. A configuração da aleta na geometria foi determinada para garantir que as aletas fossem axiais e circunferenciais no eixo radial. Assim a espessura da aleta será dada na forma de graus. Para comparação estudou casos de aletas de espessura de 2, 25°, 4, 5°, 6, 75° e 9°.

A influência da espessura da aleta pode ser observada na figura (4.40). Desta figura pode ser verificado que o aumento da espessura da aleta causa pouca redução no tempo adimensional de solidificação. Efeito similar sobre a temperatura de saída do fluido pode ser verificado na figura (4.41). O benefício obtido pelo aumento da espessura da aleta não é justificável tecnicamente pela pouca influência e também a redução correspondente na massa

disponível para o armazenamento de calor. A base de vários resultados obtidos, pode afirmar que quanto menor a espessura (2,25° a 4,5° de espessura), melhor desempenho global do armazenador.

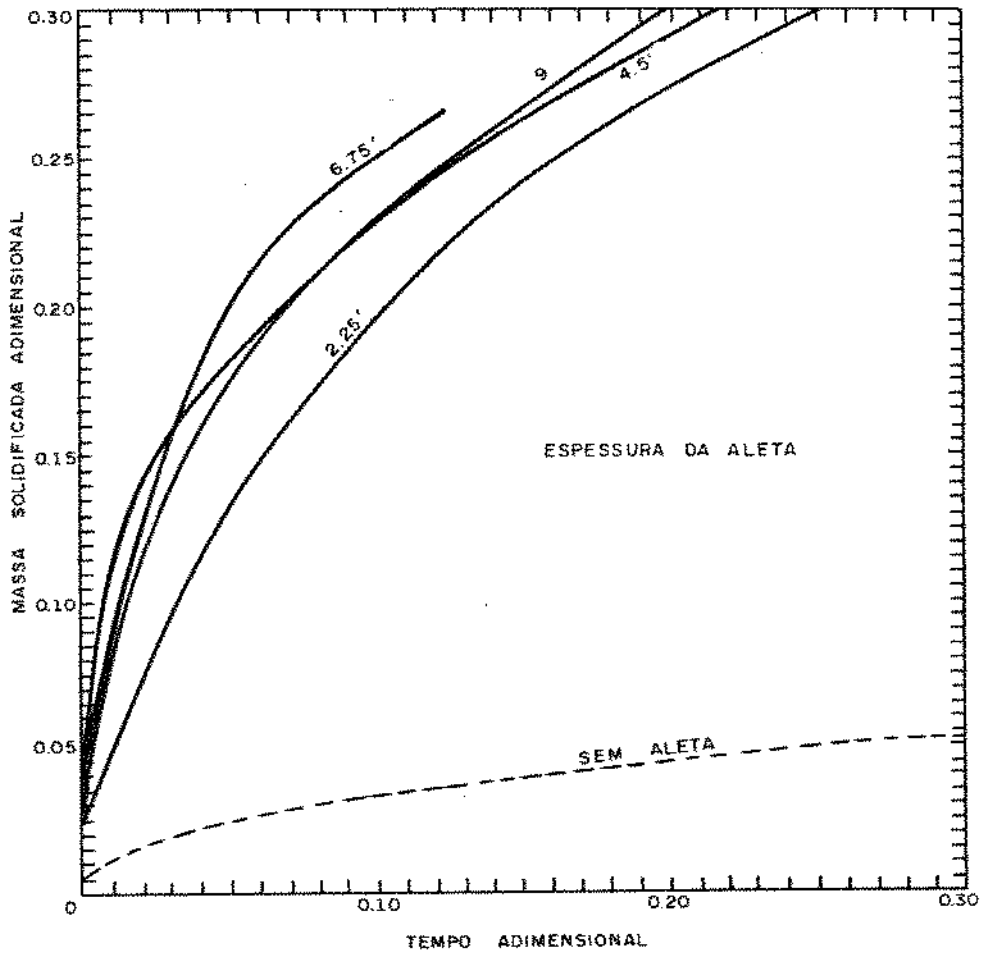


Figura 4.40: Gráfico comparativo para diversas espessuras de aletas, relacionando a massa de material de mudança de fase solidificada e o tempo adimensional de solidificação.

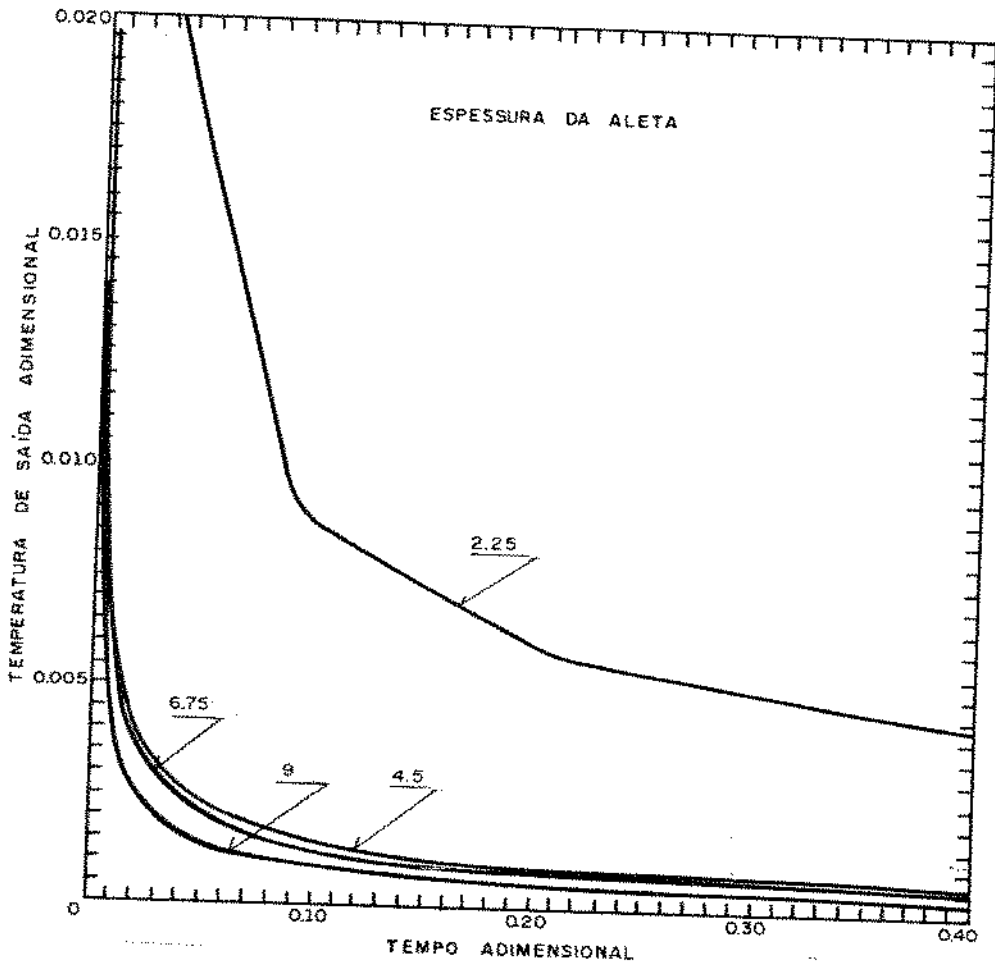


Figura 4.41: Temperatura adimensional de mistura do fluido na saída do tubo em função do tempo adimensional de solidificação.

E a figura (4.42) mostra o efeito da espessura da aleta sobre a massa solidificada. Observa-se que há variação é mínima com o aumento da espessura da aletas.

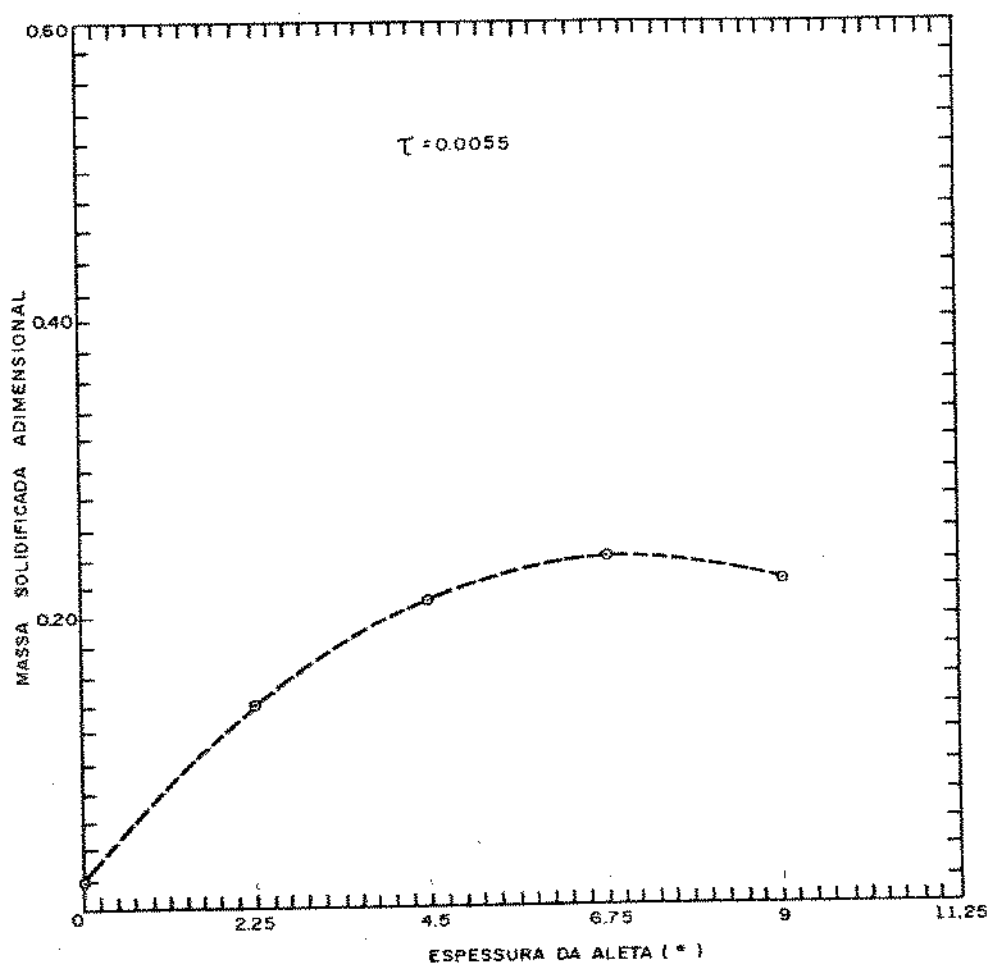


Figura 4.42: Relação da porcentagem de massa solidificada em função da espessura da aleta.

4.5 Análise da Influência do Número de BIOT

Na Figura 4.43 podemos observar a influência do número de BIOT na quantidade de massa solidificada em função do tempo. Podemos concluir que para altos valores de BIOT, não há variação do tempo solidificado em relação a massa solidificada.

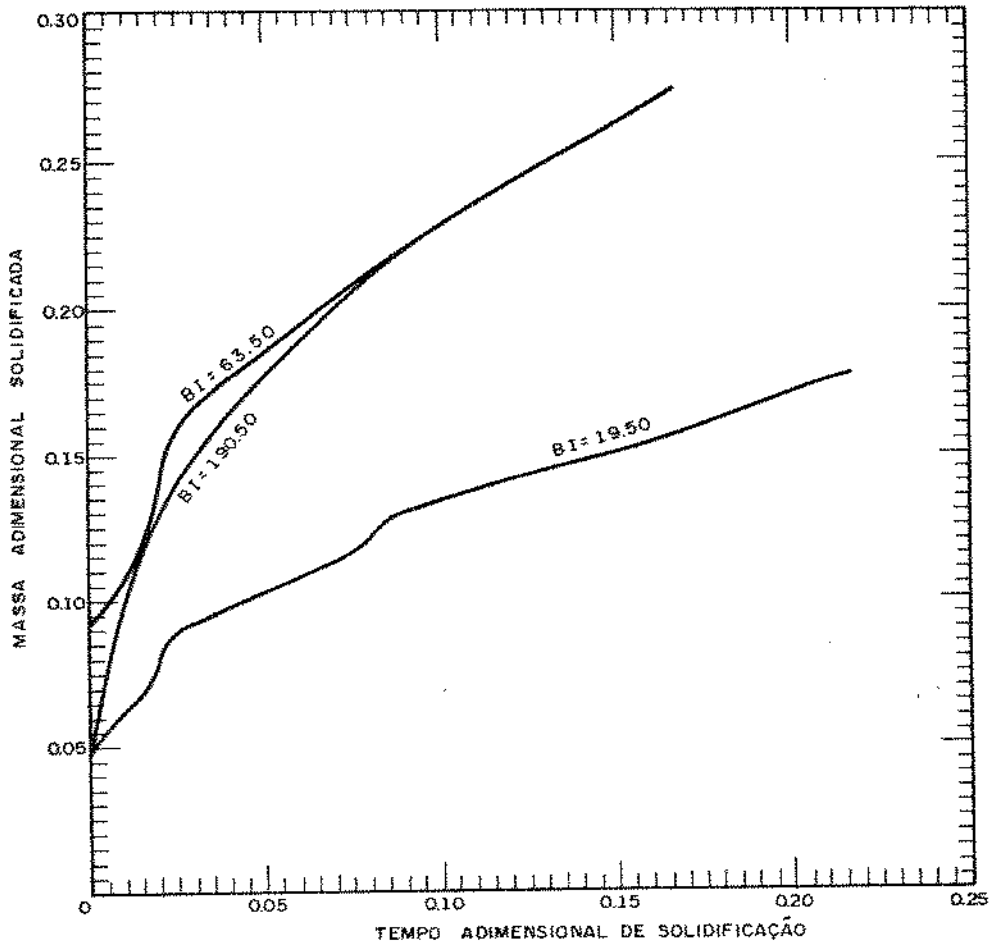


Figura 4.43: Gráfico comparativo para vários números de BIOT, relacionando a massa de material de mudança de fase solidificada e o tempo adimensional de solidificação.

Capítulo 5

Conclusões

As conclusões mais importantes deste estudo são as seguintes

- O modelo proposto para prever o comportamento do armazenador térmico com material de mudança de fase usando a técnica numérica do volume finito e o esquema ADI mostrou-se adequado.
- O número de aletas, altura e relação de compacticidade demonstrou-se importante em relação ao tempo de solidificação, a efetividade e o número de unidades de transferência (NTU). Entretanto o efeito da espessura da aleta é relativamente pequeno.
- Conseguimos ainda observar a influência do número de BIOT.
- O código numérico desenvolvido neste estudo pode ser utilizado para o dimensionamento e projeto de armazenadores térmicos de multitubos com ou sem aletas.

No momento esta sendo montado uma unidade experimental que permita efetuar comparações entre a previsão numérica e as medidas experimentais.

Apêndice A

Desenvolvimento das equações para a região de mudança de fase

Para a generalização das condições de contorno na interface para o caso tridimensional, consideramos a figura (A) onde as fases de sólido e líquido no processo de solidificação são separadas por interface dado por:

$$F(x, y, z, t) = 0$$

Considerando que \vec{n} é o vetor normal a essa interface em qualquer ponto P na interface apontando na direção da região líquido, v_n a velocidade dessa interface na direção $\vec{e}cn$, e assumindo densidade contante, as equações para a interface serão dadas como:

- A temperatura nas fases sólida e líquida são iguais a temperatura na interface, que é a temperatura de mudança de fase.

$$T_s(x, y, z, t) = T_l(x, y, z, t) = T_m \quad (\text{A.1})$$

quando $F_s(x, y, z, t) = 0$.

- E satisfazendo o balanço de energia temos:

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial n} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial n} = \rho L v_n \quad (\text{A.2})$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ é o derivado na interface na direção \vec{n} .

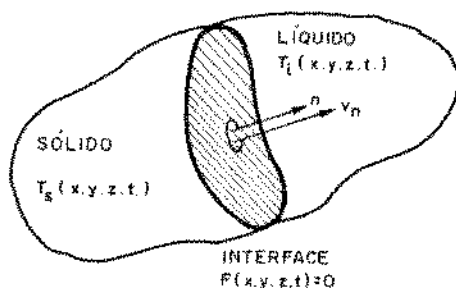


Figura A.1:

Como \vec{n} é dado como :

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k \quad (\text{A.4})$$

assumindo que \vec{n} seja um ponto na fase líquida,

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \frac{\nabla T_i}{|\nabla T_i|} \quad i = s \text{ ou } l \quad (\text{A.5})$$

portanto:

$$\frac{\partial T_i}{\partial n} = \nabla T_i \cdot \vec{n} = \frac{\nabla T_i \cdot \nabla F}{|\nabla F|} \quad (\text{A.6})$$

Como a velocidade v_n é dada por:

$$v_n = \dot{n} = \frac{v \nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} \quad (\text{A.7})$$

A derivada total de $F(x, y, z, t) = 0$ é dada:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \right]_{\text{na interface}} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Ficando o balanço de energia:

$$k_s \nabla T_s \cdot \nabla F - k_l \nabla T_l \cdot \nabla F = -\rho L \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{A.9})$$

onde

$$\nabla T_i \nabla F = \frac{\partial T_i}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial T_i}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial T_i}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} \quad (\text{A.10})$$

com $i = s$ ou l .

Os gradientes de temperaturas $\frac{\partial T_i}{\partial x}$ e $\frac{\partial T_i}{\partial y}$ na interface podem ser relacionados a $\frac{\partial T_i}{\partial z}$ notando que $\nabla T_i = c \nabla F$ e assim temos:

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \frac{\partial T_i}{\partial z} \quad i = s \text{ ou } l \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \frac{\partial T_i}{\partial z} \quad i = s \text{ ou } l \quad (\text{A.12})$$

Introduzindo equações (A.11, A.12) na equação (A.10) temos:

$$\nabla T_i \nabla F = \frac{\partial T_i}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} \left[1 + \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right)^2 + \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right)^2 \right] \quad i = s \text{ ou } l \quad (\text{A.13})$$

Substituindo a equação (A.13) na equação (A.9) temos:

$$\frac{\partial F}{\partial z} \left[1 + \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right)^2 + \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right)^2 \right] \left[k_s \frac{\partial T_s}{\partial z} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial z} \right] = -\rho L \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{A.14})$$

na interface.

Escrevendo esta equação em coordenadas cilíndricas envolvendo as variáveis (r, θ, t) e se a locação da interface sólido-líquido for dada por: $F(r, \theta, t) = r - R_s(\theta, t) = 0$ temos:

$$\left[k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \right] \left[1 + \frac{1}{r_s^2} \left(\frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^2 \right] = \rho_s L \frac{\partial r_s}{\partial t} \quad (\text{A.15})$$

Bibliografia

- [1] Bankoff, S. G. - *Advances in Chemical Engineering* - editado por B. Drew, J. W. Hoops and T. Vermeulen. - Academic Press, New York, 5, pp 75-150, 1964.
- [2] Bart, G.C.J. e Plokker W. - *An analytical solution for the Solidus and Liquids Position in the Solidification of Material with a Phase Change Range Applied to the continuous Casting of Steel* - Applied Scientific Research, 47, pp 115-128, 1990
- [3] Bathelt, A.G., et al. - *Latent Heat of Fusion Energy Storage: Experiments on Heat Transfer from Cylinder During Melting* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, 101, pp. 453-458, 1979.
- [4] Bathelt, A.G. e Viskanta, R. - *Heat transfer and Interface Motion During Melting and Solidification around a Finned Heat Source/sink* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, 103, pp. 453-458, 1981.
- [5] Betzel, T.H. e Beer, H. - *Heat transfer on Fusion around a Horizontal Finned Tube* - Chemie Ing. Tech., 58, pp. 982- 983, 1986.
- [6] Boly, B. A. - *High Temperature Structures and Materials* - Proc. 3rd. Symp. on Naval Structural Mech., editado por A. M. Freudenthal, B. A. Boley and H. Liebowitz. - Pergamon, Oxford, pp 260- 315, 1963
- [7] Bonacina, C. et ali - *Numerical Solution of Phase- Change Problems* -International Journal of Heat and Mass Transfer, 16, pp. 1825-1832, 1973.
- [8] Budhia, H. e Kreith, F. - *Heat Transfer with Melting or Freezing in a Wedge* - International Journal of Heat and Mass Transfer, 16, pp. 195-211, 1973.
- [9] Cao, Y. e Faghri - *Numerical Analysis of Phase Change Problems Including Natural Convection* Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, 112, pp. 812-816, 1990.

- [10] Cao, Y. e Faghri - *Performance Characteristics of a Thermal Energy Storage Module: A Transient PCM/forced Convection Conjugate Analyzis* International Journal of Heat and Mass Transfer, **34**(1), pp. 93-101, 1991.
- [11] Cao, Y. et al. - *A Numerical Analysis of Stefan Problems for Generlized Multi-dimensional Phase-change Structures using the Enthaply Transforming Model* Internati-onal Journal of Heat and Mass Transfer, **32**(7), pp. 1289-1298, 1989.
- [12] Clark, Jr. M. e Hansen, K. F. - *Numerical Methods of Reactor Analysis* - Academic Press - 1964.
- [13] Griggs, E.I. and Humphries, W.R. - *A Design Handbook for Change Thermal Control and Energy Storage Devices* - NASA Technical Paper TP - 1074, NTIS:N78 - 15434, 1977.
- [14] Hsiao, J.S. e Chung, B.T.F. - *An Efficient Algorithm for Finite Element Solution to Two Dimension Heat Transfer with Melting and Freenzing* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, **108**(2), pp 462-464, 1986.
- [15] Ho, C.J. e Chen, S. - *Numerical Simulation of Melting od Ice around a Horinzontal Cylinder* - International Journal of Heat and Mass Transfer, **29**, pp 1359-1369, 1986.
- [16] Humphries, W.R. - *Performance of Finned Thermal Capacitor* -NASA Technical Note TND - 7690, 1974.
- [17] Kalthori, B. and Ramadhyam, S. - *Studies on Heat Transfer from a Vertical Cylinder with or with out Fins, Embedded in a Solid Phase Change Medium* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, **107**, pp. 44-51, 1985.
- [18] Kelka, K.M. e Patankar, S.V. - *Numerical Prediction of Fluid Flow and Heat Trans-fer in a Circular Tube with Longitudinal Fins interrupt in the Streamwise Direction* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, **112**, pp. 342-348, 1990.
- [19] Kim, C.J. e Kaviany M. - *A Numerical Method for Phase Change Problem* International Journal of Heat and Mass Transfer, **33**, pp. 2721-2734, 1990.
- [20] Lazaridis, A. - *Numerical Solution of the Multidimensional Solidification (or Melting) Problem* - International Journal of Heat and Mass Transfer, **13**, pp. 1459-1477, 1970.
- [21] Lederman, J.M. e Boley, B.A. - *Azisymmetric Melting or Solidification of Circular Cy-linder* - International Journal of Heat and Mass Transfer, **13**, pp. 413-427, 1970.

- [22] London, A.L. e Seban, R.A. - *Rate of Ice Formation* - Transactions of ASME , octobre, pp 771-778, 1943.
- [23] Menon, et al.- *Dynamics of Energy Storage for Paraffin Wax in Cylindrical Container* - Can. J. Chem. Eng., 61, pp. 647-653, 1983.
- [24] - *Metal Properties* - ASME Handbook, Mc Graw Hill, 1954.
- [25] Murray, W. D. e Landis, F. - *Numerical and Machine Solution of Transient Heat Conduction Problem involving Melting or Freezing* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, pp. 106-112, 1959.
- [26] Nebra, S. A. e Ismail, K.A.R. - *Analytical and Numerical study of a Latent Heat System* - Lat. Am. J. Heat and Mass Transfer, pp. 133-142,1980.
- [27] Okada, M. - *Heat Transfer during Melting around a Vertical Cylinder* - JSME Int. J. 28, n 243,pp. 2007, 1985.
- [28] Okada, M. - *Analysis of Heat Transfer During Melting from a Vertical Wall* - International Journal of Heat and Mass Transfer 27,pp. 2007-2066, 1984.
- [29] Ozisik, M.M. - *Heat Conduction* - John Wiley and Sons, 1980.
- [30] Padmanabhan, P. V. e Krishma, M.V.- *Outward Phase Change in a Cylindrical annulus with Axial Fins on the Inner Tube* - International Journal of Heat and Mass Transfer. 29(12), pp. 1855-1868, 1986.
- [31] Patankar, S. V. - *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* - Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- [32] Pekeris, C. L. and Slichter, L.B. - *Problem of Ice Formation* - Journal of Applied Physics, 10, pp 135-137, 1939.
- [33] Prusa, J. e Yao, L.S. - *Melting around a Horizontal Heated Cylinder: Part I - Perturbation and Numerical Solutions for Constant Heat Flux Boundary Condition* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, 106, pp 376-384, 1984.
- [34] Prusa, J. e Yao, L.S. - *Melting around a Horizontal Heated Cylinder: Part II - Numerical Solutions for Isothermal Boundary Condition* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, 106, pp 469-472, 1984.

- [35] Rieger, H., et al. - *Analysis of the Heat Transport Mechanism during Melting around a Horizontal Circular Cylinder* - International Journal of Heat and Mass Transfer, **25**, pp. 137-147, 1982.
- [36] Saltoh, T. - *Numerical Method for Multidimensional Freezing Problems in Arbitrary Domains* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, **100**, pp 294-299, 1978.
- [37] Sasaguch, K., et al. - *Heat Transfer Characteristics of a Latent Storage Units With a Finned Tube* - Bull. JSME, **29**(255), pp. 2978 1986.
- [38] Shamsundar, N. e Sparrow, E. M. - *Analysis of Multidimensional Conduction Phase Change via the Enthalpy Model* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, **97**, pp 333-340, 1975.
- [39] Shamsundar, N. e Srimivesan R. - *Effectiveness NTU Charts for Heat Recovery from Latent Heat Storage Units* - Jornal Solar Engineering, **192**, pp 263-271, 1980.
- [40] Sparrow, E. M., et al. - *Analysis of Melting in the Presence of Natural Convection in the Melt Region* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, **99**, pp 520-526, 1977.
- [41] Sparrow, E. M., et al. - *Effect of Subcooling on Cylindrical Melting* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, **100**, pp 395-402, 1978.
- [42] Sparrow, E. M., et al. - *Freezing Controlled by Natural Convection* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, **101**, pp 578-584, 1979.
- [43] Sparrow, E. M. et al. - *The transition from Natural Convection-Controlled Freezing to Conduction-Controlled Freezing* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, **103**, pp 7-12, 1981.
- [44] Sparrow, E. M. et al. - *Freezing on a Finned tube for Eiher Conduction-Controlled on Natural Convection Controlled Heat Transfer* - International Journal of Heat and Mass Transfer, **24**, pp. 273-284, 1981.
- [45] Souza Mendes, P. R. e Pinho Brasil, A. C. - *Heat Transfer During Melting around an Isothermal Vertical Cylinder* - Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, **109**, pp 961-964, 1987.
- [46] Thiart, G.D. - *Improved Finite-Difference Scheme for the Solution of Convection-Diffusion Problem with the Simplex Algorithm* - Numerical Heat Transfer, **18**, pp. 81-85, 1990.

- [47] Voller, V. e Cross, M. - *Accurate Solution of Moving Boundary using the Enthalpy Method*
-International Journal of Heat and Mass Transfer, 24, pp. 545-556, 1981.